

5-83-22-51

INTRODUCCION

No obstante que ésta es ya una tercera edición de apuntes de Mecánica II, por parte del que esto escribe, sigue siendo la principal finalidad de los mismos (como lo es desde abril de 1973) el cubrir en forma general el programa de la materia mencionada, tratando de ser lo más útiles a quien haga uso de ellos o, simplemente, los consulte.

En la 1a. y 2a. edición, básicamente, cubría los mismos temas, relacionados todos con la "Dinámica", pero en esta 3a. ya trato algunos temas de Cinemática que, junto con los que trataba en la 1a. y 2a., cubren el programa de Mecánica II que se encuentra actualmente en vigor, en esta División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Ahora en esta edición, antes de iniciar los temas propios de "Mecánica II", presento un capítulo llamado "Elementos fundamentales" que contiene algunos antecedentes básicos para poder captar los diversos temas de que consta la Materia mencionada. Por lo que toca a los temas de Cinemática, trataré los marcados en el programa de la Materia, es decir "Movimiento relativo del punto" así como la "Cinemática del cuerpo rígido".

El estudio de la Dinámica se hará empleando los métodos de "Ecuaciones de movimiento" , "Trabajo y energía" e "Impulso y Cantidad de movimiento", aplicados al movimiento, ya sea de un punto masa, de un sistema de partículas, o de un cuerpo rígido.

G. [Redacted]

Como podrá apreciarse, el primero de los métodos mencionados es generalmente más lento que los dos últimos, para resolver cierto tipo de problemas, pero es aconsejable verlo ya que mediante su aplicación pueden resolverse muchos ejercicios que no es factible resolver mediante la aplicación de los métodos de "Trabajo y energía" e "Impulso y Cantidad de Movimiento", pues estos sólo son aplicables a problemas que relacionan de algún modo velocidades con distancias recorridas y velocidades con tiempos transcurridos, respectivamente.

Continúo agradeciendo a todos aquellos compañeros que me han ayudado a detectar algunas fallas y errores de ediciones anteriores, a la vez que sigo esperando todo tipo de sugerencias y críticas encaminadas a mejorar este material.

Por último, vuelvo a sugerir a quien haga uso de estos apuntes que, si alguna parte de los mismos resulta no entendible o poco clara, me consulte sobre ella pues me agradecería aclararla personalmente.

Dedico a mi familia la elaboración, dibujo y revisión de este material, realizada en tiempos no comprendidos dentro de los horarios en que laboro en la Universidad Nacional Autónoma de México, y cedo los derechos correspondientes a la Facultad de Ingeniería de dicha Universidad.

Atentamente

Ing. Jorge Solar González

Cd. Universitaria, D.F., 21 de septiembre de 1983.

INDICE

INTRODUCCION.	3
EF) <u>ELEMENTOS FUNDAMENTALES.</u>	9
ECUACIONES DIFERENCIALES QUE SE PRESENTAN CON MAS FRECUENCIA DURANTE EL ESTUDIO DE LA DINAMICA.	10
BREVE REPASO DE CONCEPTOS DE ESTATICA.	15
COMPONENTES VECTORIALES Y ESCALARES.	20
CONCEPTOS LINEALES Y ANGULARES.	21
RAPIDEZ Y ACELERANTE.	24
VELOCIDAD ANGULAR. FORMULAS DE POISSON Y ACELERACION ANGULAR.	25
C.1) <u>MOVIMIENTO RELATIVO.</u>	29
CASO GENERAL.	29
CASOS PARTICULARES.	42
C.2) <u>CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO.</u>	46
C.2.1. TIPOS DE MOVIMIENTO DEL CUERPO RIGIDO.	46
MOVIMIENTOS DE TRASLACION.	46
MOVIMIENTOS DE ROTACION.	47
MOVIMIENTO GENERAL.	48
C.2.2. ECUACIONES PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE MOVIMIENTO DE UN CUERPO RIGIDO.	48
MOVIMIENTO PLANO GENERAL.	50
CENTRO Y EJE INSTANTANEO DE ROTACION.	60
MECANISMOS DE CUATRO ARTICULACIONES.	66
D.1) <u>DINAMICA DEL PUNTO MASA.</u>	71
D.1.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO.	71

	DIFERENTES CASOS DEL MOVIMIENTO RECTILINEO DEL PUNTO MASA.	72
	MOVIMIENTO CURVILINEO DEL PUNTO MASA.	90
	MOVIMIENTO CENTRAL.	99
	MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL SUJETO UNICAMENTE A LA ACCION DE LA FUERZA GRAVITATORIA TERRESTRE.	102
	TIRO PARABOLICO.	108
	VIBRACIONES.	111
	VIBRACION LIBRE CON UN GRADO DE LIBERTAD.	112
	VIBRACION FORZADA CON UN GRADO DE LIBERTAD.	117
	VIBRACION LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO.	119
	VIBRACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO.	128
	PRINCIPIO DE D'ALEMBERT.	132
D.1.2)	TRABAJO Y ENERGIA.	135
	TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA.	135
	CAMPOS DE FUERZA CONSERVATIVOS.	137
	ENERGIA POTENCIAL.	138
	CASOS TIPICOS DE FUERZAS CONSERVATIVAS.	138
	DIFERENTES FORMAS DE LA ECUACION DEL TRABAJO Y LA ENERGIA. ENERGIA CINETICA.	141
D.1.3)	IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.	155
	IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEALES.	155
	CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.	163
	MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.	163
	RELACION ENTRE IMPULSO ANGULAR Y MOMENTO DEL MOMENTUM LINEAL.	165
	CONSERVACION DEL MOMENTO DEL MOMENTUM LINEAL.	167
D.2)	PRIMEROS Y SEGUNDOS MOMENTOS.	170
D.2.1.	MOMENTOS ESTATICOS Y CENTROIDES.	170
	MOMENTOS ESTATICOS DE SISTEMAS DE PUNTOS MASA.	170
	MOMENTOS ESTATICOS DE LA MASA DE UN CUERPO RIGIDO.	172
	CENTROS DE GRAVEDAD Y DE MASA DE UN CUERPO RIGIDO.	172
	CENTROS DE MASA DE ALGUNOS CUERPOS HOMOGENEOS.	176

D.2.2.	MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA.	179
	SEGUNDOS MOMENTOS O MOMENTOS DE INERCIA DE LA MASA DE UN CUERPO. PRODUCTOS DE INERCIA. RADIOS DE GIRO.	179
	TRASLACION DE EJES.	182
	MOMENTOS DE INERCIA DE LA MASA DE ALGUNOS DE LOS CUERPOS RIGIDOS Y HOMOGENEOS MAS ESTUDIADOS EN DINAMICA.	190
	ROTACION DE EJES.	191
	EL TENSOR DE INERCIA.	194
	MOMENTOS Y EJES PRINCIPALES DE INERCIA.	194
D.3)	DINAMICA DE SISTEMAS DE PUNTOS MASA.	213
D.3.1.	ECUACIONES DE MOVIMIENTO.	213
D.3.2.	TRABAJO Y ENERGIA.	218
	ENERGIA CINETICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS.	218
	ECUACIONES DE TRABAJO Y ENERGIA.	222
D.3.3.	IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.	227
	IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEALES	227
	IMPULSO Y MOMENTUM LINEALES DEL CENTRO DE MASA.	229
	CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.	230
	IMPACTO.	233
	TIPOS DE IMPACTO, ATENDIENDO A LA POSICION DE LA LINEA DE IMPACTO.	234
	TIPOS DE IMPACTO, ATENDIENDO A LA DIRECCION DE LAS VELOCIDADES QUE POSEEN LOS CUERPOS, INSTANTES ANTES DEL CHOQUE.	234
	MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.	242
	RELACION ENTRE EL MOMENTO, CON RESPECTO A UN PUNTO, DE LAS FUERZAS EXTERNAS (QUE ACTUAN SOBRE UN SISTEMA DE PUNTOS MASA) Y EL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL (DEL SISTEMA MENCIONADO) MEDIDO CON RESPECTO A DICHO PUNTO.	248
	RELACION ENTRE EL IMPULSO ANGULAR Y EL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.	249
	CONSERVACION DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.	250

INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

D.4)	<u>DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO.</u>	252
D.4.1)	ECUACIONES DE MOVIMIENTO.	252
	MOVIMIENTO PLANO DEL CUERPO RIGIDO. PLANO DE MOVIMIENTO.	252
	ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RIGIDO.	256
	MOVIMIENTOS DE TRASLACION.	256
	MOVIMIENTOS DE ROTACION EN TORNO A UN EJE FIJO.	263
	ROTACION BARICENTRICA.	263
	ROTACION NO BARICENTRICA.	267
	CONDICIONES NECESARIAS PARA QUE UN CUERPO RIGIDO, CIRCULAR Y HOMOGENEO (SIMETRICO CON RESPECTO AL PLANO DE MOVIMIENTO), RUEDE SIN DESLIZAR.	272
	MOVIMIENTO PLANO GENERAL.	273
	EJE INSTANTANEO DE ROTACION EN EL MOVIMIENTO PLANO.	287
D.4.2)	TRABAJO Y ENERGIA.	298
	TRABAJO REALIZADO POR UN SISTEMA DE FUERZAS.	298
	TRABAJO REALIZADO POR UN PAR DE FUERZAS.	301
	ENERGIA CINETICA.	305
	ENERGIA POTENCIAL.	306
	DIVERSAS FORMAS DE LA ECUACION DEL TRABAJO Y LA ENERGIA.	307
	CUERPOS RIGIDOS INTERCONECTADOS.	310
	APLICACION DEL METODO DE TRABAJO Y ENERGIA AL MOVIMIENTO DE CUERPOS RIGIDOS, YA SEA AISLADOS O INTERCONECTADOS.	311
D.4.3)	IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.	323
	IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO, LINEAL Y ANGULAR.	323
	APLICACION DE ECUACIONES DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO A CUERPOS RIGIDOS QUE SE MUEVEN.	324
	EJE INSTANTANEO DE ROTACION EN PROBLEMAS DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO.	333

EF) ELEMENTOS FUNDAMENTALES.

Como mencionaba en la introducción, antes de iniciar el estudio de los temas propios de "Mecánica II", veremos algunos antecedentes necesarios para poder captar los temas de la materia mencionada. Dichos antecedentes tienen como objetivo básico:

- Poder resolver, empleando integración elemental, algunas de las ecuaciones diferenciales que más comúnmente se presentan en problemas de Dinámica,
- Recordar, mediante un breve repaso de conceptos de Estática, en qué consisten los diagramas de cuerpo libre, cómo se hacen las sumas de fuerzas y de momentos, y también hacer ver que el valor máximo que puede alcanzar el módulo de la fuerza de fricción ejercida entre dos cuerpos es μN , aunque no necesariamente se alcance éste,
- Tener un concepto claro de lo que son los componentes vectoriales y escalares, de un vector,
- Establecer la diferencia básica entre los conceptos lineales y angulares de la Cinemática,
- Dar la definición de rapidez y acelerante, tanto lineal como angular, y,
- Definir la velocidad y aceleración angulares, así como obtener las relaciones de Poisson.

ECUACIONES DIFERENCIALES QUE SE PRESENTAN CON MAS FRECUENCIA DURANTE EL ESTUDIO DE LA DINAMICA.

1er. TIPO.- $\dot{x} + ax = 0$, o sea $\frac{dx}{dt} + ax = 0$, donde $a = \text{cte.}$

Solución.- Separando variables: $\frac{dx}{x} = -adt$,

integrando: $LX = C_3 - at$,

luego, por definición de logaritmo:

$$x = e^{(C_3 - at)}$$

o bien:

$$x = e^{C_3} \cdot e^{-at} = Ce^{-at}$$

finalmente se tiene

$$x = Ce^{-at} \text{ (solución de las ecuaciones diferenciales$$

de 1er. tipo)

Comprobación.- Si $x = Ce^{-at}$, se tiene:

$$\dot{x} = -aCe^{-at}$$

$$y: ax = aCe^{-at}$$

luego: $\dot{x} + ax = 0$ (correcto)

Ejemplo.- La solución de $\dot{x} - 4x = 0$ es: $x = Ce^{4t}$.

Ejercicio.- ¿Cuál es la solución de $\dot{x} + 2x = 10$ ----- (1)?

Respuesta.- Ahora la solución de (1) es $x = x_h + x_p$, donde

x_h es la solución de la ecuación homogénea $\dot{x} + 2x = 0$, y

x_p es una solución llamada particular, que cumple la ecuación completa dada.

Cálculo de x_p .- Suponiendo $x_p = k$ ----- (2)

al sustituir (2) en (1): $0 + 2k = 10$, de donde: $k = 5$,

o sea que, efectivamente, x_p es una constante; finalmente, la solución de (1) es:

$$x = Ce^{-2t} + 5 \text{ ----- (3).}$$

Verificación:-

$$\text{De (3): } \dot{x} = -2Ce^{-2t} + 0$$

$$y: \frac{2x}{x} = \frac{2Ce^{-2t} + 10}{Ce^{-2t} + 5}$$

$$\text{luego: } \dot{x} + 2x = 10,$$

o sea que (3) sí cumple (1) y es su solución.

2o. TIPO.- $\ddot{x} + ax = 0$, con $a = \text{cte.}$

Solución.- Haciendo $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$,

se tiene $\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -ax$;

separando variables:

$$\dot{x} d\dot{x} = -ax dx;$$

integrando:

$$\frac{(\dot{x})^2}{2} + c_1 = -a \frac{x^2}{2} + c_2,$$

luego

$$(\dot{x})^2 = (2c_2 - 2c_1) - ax^2,$$

o bien

$$(\dot{x})^2 = c_3^2 - ax^2,$$

de donde

$$\dot{x} = \sqrt{c_3^2 - ax^2};$$

como

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

podemos escribir

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c_3^2 - ax^2};$$

separando variables:

$$\frac{dx}{\sqrt{c_3^2 - (\sqrt{a}x)^2}} = dt,$$

integrando

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{ax}}{c_3} + c_4 = t + c_5,$$

que puede escribirse:

$$\operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{a}x}{c_3} = \sqrt{a}t + c_6,$$

luego:

$$\frac{\sqrt{ax}}{c_3} = \operatorname{sen}(\sqrt{a}t + c_6)$$

o bien:

$$x = \frac{c_3}{\sqrt{a}} \left[(\operatorname{sen} \sqrt{a}t) \cos c_6 + (\cos \sqrt{a}t) \operatorname{sen} c_6 \right],$$

finalmente:

$$x = A \operatorname{sen} \sqrt{a}t + B \cos \sqrt{a}t, \text{ donde } A \text{ y } B \text{ son cons-}$$

tantos (solución de las ecuaciones diferenciales de 2o. Tipo).

Ejemplo.- Determine la solución de $\ddot{x} + 9x = 4t + 3$ --- (4).

Respuesta.- La solución de (4) es de la forma $x = x_h + x_p$,

donde x_h es la solución de la ecuación homogénea $\ddot{x} + 9x = 0$,

y x_p es la llamada solución particular, de (4).

Cálculo de x_p .- Suponiendo $x_p = f(t)$ de tal forma que

$$\ddot{x}_p = 0 \text{ ----- (5)}$$

de (4) se tendría:

$$0 + 9x_p = 4t + 3,$$

de donde

$$x_p = \frac{1}{9}(4t + 3), \text{ que también cumple (5),}$$

por lo que la solución de (4) es:

$$x = A \operatorname{sen} 3t + B \cos 3t + \frac{1}{9}(4t + 3) \text{ ----- (6).}$$

Verificación.-

$$\text{De (6): } \dot{x} = 3A \cos 3t - 3B \operatorname{sen} 3t + \frac{4}{9},$$

y, $\ddot{x} = -9A \operatorname{sen} 3t - 9B \cos 3t + 0$, así como

$$\underline{9x = 9A \operatorname{sen} 3t + 9B \cos 3t + (4t + 3),}$$

luego:

$$\ddot{x} + 9x = 4t + 3 \text{ (correcto).}$$

3er. TIPO.- $\ddot{x} - ax = 0$, con $a = \text{cte.}$

Solución.- Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para obtener la solución de las ecuaciones diferenciales de

2o. TIPO se tiene:

$$\frac{dx}{\sqrt{c_3^2 + (\sqrt{a}x)^2}} = dt,$$

integrando

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{ang} \operatorname{sen} h \frac{\sqrt{ax}}{c_3} + c_4 = t + c_5,$$

de donde

$$\underline{x = D \operatorname{sen} h \sqrt{a}t + E \cos h \sqrt{a}t}, \text{ siendo } D \text{ y } E \text{ cons-}$$

tantes (solución de las ecuaciones diferenciales del 3er. TIPO).

Recordando que

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

la solución últimamente obtenida puede escribirse:

$$x = D \left[\frac{e^{\sqrt{a}t} - e^{-\sqrt{a}t}}{2} \right] + E \left[\frac{e^{\sqrt{a}t} + e^{-\sqrt{a}t}}{2} \right],$$

o bien:

$$x = \left(\frac{D}{2} + \frac{E}{2} \right) e^{\sqrt{a}t} + \left(-\frac{D}{2} + \frac{E}{2} \right) e^{-\sqrt{a}t}$$

que puede expresarse como:

$$x = C_1 e^{\sqrt{a}t} + C_2 e^{-\sqrt{a}t} \quad \text{----- (S)}$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

En efecto, (S) satisface a las ecuaciones diferenciales del 3er. tipo ya que, partiendo de ella, se obtiene:

$$\ddot{x} = aC_1 e^{\sqrt{a}t} + aC_2 e^{-\sqrt{a}t},$$

y:

$$ax = aC_1 e^{\sqrt{a}t} + aC_2 e^{-\sqrt{a}t},$$

que implica, restando miembro a miembro:

$$\ddot{x} - ax = 0.$$

Ejemplo.- ¿Cuál es la solución de $\ddot{x} - 16x = 60 \cos 2t \dots (7)$?

Respuesta.- La solución de (7) también es de la forma

$x = x_h + x_p$, donde x_h es la solución de la ecuación homogénea $\ddot{x} - 16x = 0$ y x_p es una solución particular que cumple (7).

Determinación de x_p .- Ahora supondremos una solución particular de la forma

$$x_p = k \cos 2t \quad \text{----- (8)}$$

sustituyendo (8) en (7):

$$-4k \cos 2t - 16(k \cos 2t) = 60 \cos 2t,$$

que cumple para $k = 3$,

luego, la solución particular buscada es

$$x_p = -3 \cos 2t,$$

por lo que, finalmente, la solución de (7) es

$$x = D \sinh 4t + E \cosh 4t - 3 \cos 2t \quad \text{----- (9)}$$

Comprobación.-

De (9): $\dot{x} = 4D \cosh 4t + 4E \sinh 4t + 6 \sin 2t$, y,

$$\ddot{x} = 16D \sinh 4t + 16E \cosh 4t + 12 \cos 2t,$$

así como: $16x = 16D \sinh 4t + 16E \cosh 4t - 48 \cos 2t$,

luego: $\ddot{x} - 16x = 60 \cos 2t$ (correcto)

BREVE REPASO DE CONCEPTOS DE ESTÁTICA

"Viga doblemente apoyada sujeta a cargas coplanares"

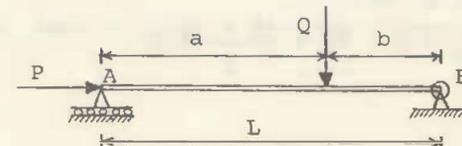
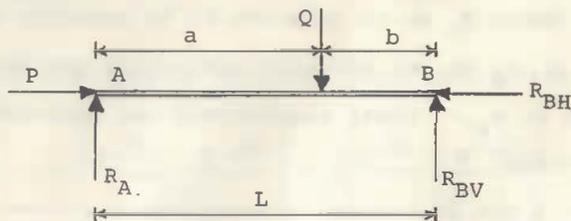


Diagrama de cuerpo libre (despreciando peso propio):



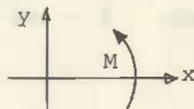
Cálculo de las reacciones.

Recordemos que la condición necesaria y suficiente para que un sistema de fuerzas coplanar se encuentre en equilibrio es:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_D = 0,$$

donde x e y son ejes perpendiculares que se localizan en el plano de acción de las fuerzas y D es un punto cualquiera de éste. Aunque es obvio, al trabajar escalarmente, para resolver cualquier problema hemos de auxiliarnos de un sistema de referencia y una convención que, mediante flechas, nos indique cuando una fuerza es positiva, o un momento negativo, entre otras cosas.

Convención utilizada para este ejercicio:



De $\sum F_x = 0: P + (-R_{BH}) = 0$, luego: $R_{BH} = P$;

de $\sum M_A = 0: -Qa + (R_{BV}L) = 0$, de donde: $R_{BV} = \frac{a}{L} Q$ (1);

de $\sum F_y = 0: R_A + R_{BV} + (-Q) = 0$ ----- (2);

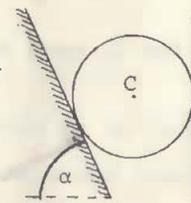
tomando en cuenta (1) y (2):

$$R_A = Q - R_{BV} = Q - \frac{a}{L} Q = \frac{(L - a)}{L} Q ,$$

o sea que finalmente:

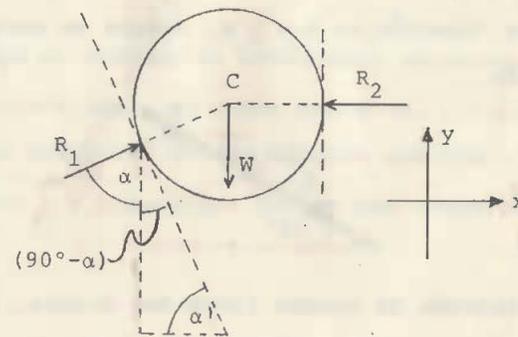
$$R_A = \frac{b}{L} Q.$$

Ejercicio.- Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la esfera homogénea, de peso W, de la figura. Después calcule las reacciones que sobre ella ejercen las paredes, suponiendo éstas lisas.



pared vertical

Solución.- Diagrama de cuerpo libre y convención empleada:



ahora, de $\sum F_y = 0$:

$$R_1 \cos \alpha + (-W) = 0, \text{ luego: } R_1 = \frac{W}{\cos \alpha} \text{ ----- (a);}$$

de $\sum F_x = 0$:

$$R_1 \sin \alpha + (-R_2) = 0 \text{ ----- (b);}$$

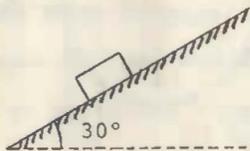
de (a) y (b): $R_2 = R_1 \operatorname{sen} \alpha = \left(\frac{W}{\operatorname{cos} \alpha} \right) \operatorname{sen} \alpha$,

por lo que, finalmente: $\underline{R_2 = W \operatorname{tan} \alpha}$.

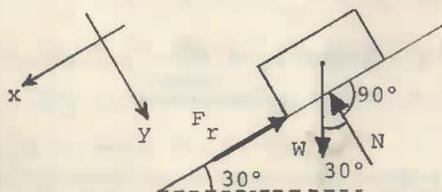
NOTA 1) De aquí en adelante, para hacer más simple la notación, utilizaremos los símbolos \bar{F} , \bar{F}_x , \bar{F}_y , \bar{F}_z , \bar{M}_O , etc., en lugar de $\Sigma \bar{F}$, $\Sigma \bar{F}_x$, $\Sigma \bar{F}_y$, $\Sigma \bar{F}_z$, $\Sigma \bar{M}_O$, etc., respectivamente.

Con el mismo fin, emplearemos d.c.l. para designar los diagramas de cuerpo libre.

Ejercicio.- Calcule el módulo de la fuerza de fricción que actúa sobre el pequeño bloque, de peso W , de la figura. El coeficiente de fricción es 0.8 y el bloque se suelta en la posición mostrada.



Solución.- Diagrama de cuerpo libre del bloque, luego de soltarlo:



de $\Sigma F_y = 0$:

$$-N + W \operatorname{cos} 30^\circ = 0, \text{ luego: } N = W(0.866) = 0.866W$$

con lo que:

$$\mu N = 0.8(0.866W) = 0.693W ;$$

suponiendo que el bloque no se mueve, luego de soltarlo, deberá tenerse $F_x = 0$, ó, lo que es lo mismo:

$$W \operatorname{sen} 30^\circ - F_r = 0$$

que se cumple para:

$$F_r = W(0.5) = 0.5W ;$$

obsérvese que el módulo de la fuerza de fricción necesaria para que el bloque no se mueva luego de soltarlo, $0.5W$, es menor que μN , por lo que la respuesta al ejercicio es:

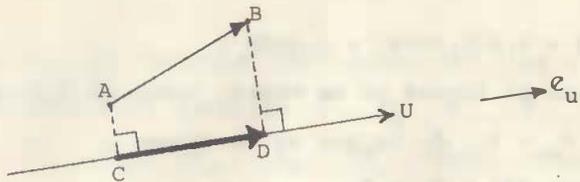
$$\underline{0.5W}$$

NOTA 2) Aunque el sistema de referencia empleado al resolver los diversos ejercicios no forma parte del d.c.l. respectivo, es conveniente dibujarlo lo más cercano posible a éste. Obsérvese esto en los ejercicios que se han resuelto hasta ahora.

SUGERENCIA.- Determine cuál hubiese sido la respuesta al último ejercicio hasta aquí resuelto:

- Si, conservando idéntica la figura correspondiente, μ fuera igual a 0.6, y,
- Si, conservando idéntico el enunciado, el ángulo formado entre el plano inclinado y la horizontal fuera 60° .

COMPONENTES VECTORIALES Y ESCALARES

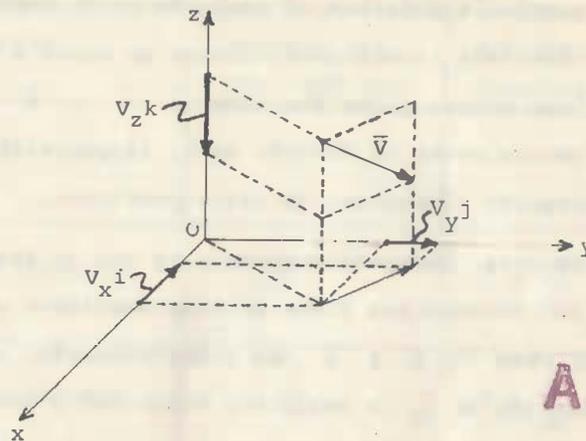


Sea \vec{AB} un vector cualesquiera del espacio, que deseamos proyectar sobre el eje U de la figura, donde e_u es un vector unitario en la dirección y con el sentido del eje mencionado. Siendo C y D las proyecciones ortogonales respectivas de A y B , sobre U , llamaremos componente vectorial de \vec{AB} (sobre U) al vector \vec{CD} , y componente escalar de \vec{AB} (también sobre U) al número real λ cuyo valor absoluto es el módulo de la componente vectorial correspondiente y cuyo signo nos indica el sentido de ésta; λ será positivo si la correspondiente componente vectorial tiene el sentido del eje sobre el cual se está proyectando (como es el caso del vector \vec{CD} de la figura) o negativo en caso contrario.

Acorde con lo mencionado:

$(\vec{AB})_U = \vec{CD} = \lambda e_u =$ componente vectorial de \vec{AB} sobre U , donde λ es la componente escalar de \vec{AB} , sobre U , y es tal que $|\lambda| = |\vec{CD}|$, donde $\lambda > 0$ si \vec{CD} tiene el sentido de U , tanto que $\lambda < 0$ si el sentido de \vec{CD} es contrario al de la U . De aquí en adelante, a las componentes escalares simplemente les llamaremos componentes.

Consideremos ahora un vector \vec{V} , de componentes v_x, v_y, v_z , como el mostrado en la siguiente figura:



De acuerdo con lo anterior, podemos expresar:

$$\vec{V} = v_x i + v_y j + v_z k,$$

donde $v_x i, v_y j, v_z k$ son los componentes vectoriales, de \vec{V} , sobre los ejes x, y, z , respectivamente.

Nótese que, para el vector V en cuestión:

$$v_x < 0, \quad v_y > 0, \quad v_z < 0.$$

CONCEPTOS LINEALES Y ANGULARES

Independientemente de que más adelante veamos en detalle o no la definición de algunos de estos conceptos, es importantísimo hacer énfasis en que las funciones \vec{r}, \vec{v} y \vec{a} , nos sirven para estudiar el movimiento de partículas, en tanto que las funciones $\vec{\theta}, \vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ nos son útiles para analizar

el movimiento de segmentos rectilíneos.

En cuanto una partícula modifica su posición en el espacio decimos que se desplaza linealmente, aunque se mueva a lo largo de una línea curva, y las funciones \bar{r} , \bar{v} y \bar{a} nos determinarán, generalmente en función de t , la posición, velocidad y aceleración (lineales) de dicha partícula.

Cuando una línea gira, independientemente de que se desplace linealmente o no, decimos que tiene un desplazamiento angular, y las funciones $\bar{\theta}$, $\bar{\omega}$ y $\bar{\alpha}$ nos proporcionarán, generalmente una función de t , la posición, velocidad y aceleración (angulares) de dicha línea o segmento rectilíneo.

Así pues, si \bar{r} es el vector que fija la posición de un punto móvil P , en un instante cualquiera, respecto a un sistema de referencia fijo, podemos decir que:

- a) P no tiene velocidad angular, aunque,
- b) \bar{r} , vector que fija su posición, sí tiene velocidad angular durante el movimiento.

A continuación se tienen unos cuadros resumen donde se muestran los símbolos más comúnmente empleados y las relaciones que existen entre las diversas funciones ahí indicadas. Como las relaciones mencionadas son de derivación, es obvio que también existen de integración, en orden inverso, aunque aquí no se indiquen, con el fin de no complicar más dichos cuadros.

PARA ESTUDIAR EL MOVIMIENTO DE PARTICULAS

Función	Símbolo (s) más común(es)	Relación con otra(s) función(es)
de posición (lineal)	\bar{r}	
velocidad (lineal)	\bar{v} , $\dot{\bar{r}}$	$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$
aceleración (lineal)	\bar{a} , $\ddot{\bar{r}}$	$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$, $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$

PARA ESTUDIAR EL MOVIMIENTO DE SEGMENTOS RECTILINEOS

Función	Símbolo(s) más común(es)	Relación con otra(s) función(es)
de posición (angular)	$\bar{\theta}$	
velocidad (angular)	$\bar{\omega}$, $\dot{\bar{\theta}}$	$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\theta}}{dt}$
aceleración (angular)	$\bar{\alpha}$, $\ddot{\bar{\theta}}$	$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$, $\bar{\alpha} = \frac{d^2\bar{\theta}}{dt^2}$

También es importante insistir en que las relaciones mencionadas (en los cuadros resumen anteriores) son entre las funciones indicadas, no entre los valores que éstas tomen para ciertos valores de t .

Así pues, por ejemplo, el hecho de tener $\bar{\omega} = \bar{0}$, para $t = 0$, no implica $\bar{\alpha} = \bar{0}$ para ese valor de t . En efecto,

$$\text{si } \bar{\omega} = (4t^3 + 8t)k, \text{ rad/seg},$$

entonces:

$$\bar{\alpha} = \dot{\bar{\omega}} = (12t^2 + 8)k, \text{ rad/seg}^2,$$

y, para $t = 0$, se tiene

$$\bar{\omega} = [4(0)^3 + 8(0)]k = \bar{0} \text{ rad/seg}, \text{ en tanto que}$$

$$\bar{\alpha} = [12(0)^2 + 8]k = 8k \text{ rad/seg}^2.$$

RAPIDEZ Y ACELERANTE

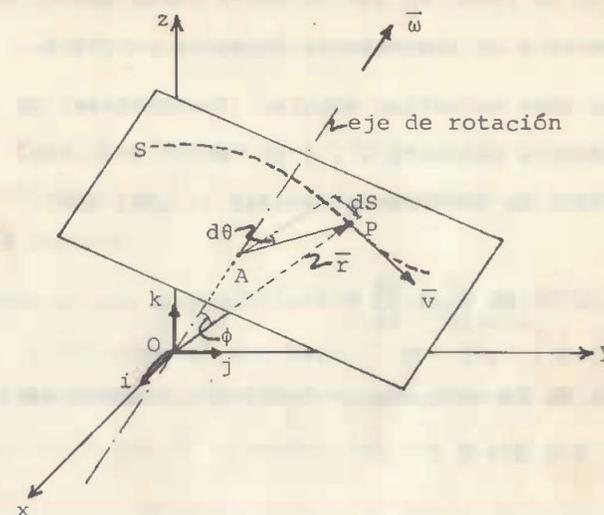
Ya sea hablando desde el punto de vista lineal o angular, definiremos como rapidez al módulo del vector velocidad, y como acelerante a la magnitud del vector aceleración, que obviamente se obtendrán como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes respectivas.

Así pues, para $\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\phi}\bar{e}_\phi$, $\bar{\alpha} = \ddot{\theta}_{yz}i + \ddot{\theta}_{xz}j + \ddot{\theta}_{xy}k$:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\phi})^2} = \text{rapidez lineal, y,}$$

$$\alpha = |\bar{\alpha}| = \sqrt{(\ddot{\theta}_{yz})^2 + (\ddot{\theta}_{xz})^2 + (\ddot{\theta}_{xy})^2} = \text{acelerante angular,}$$

VELOCIDAD ANGULAR, FORMULAS DE POISSON Y ACELERACION ANGULAR



Consideremos un punto P que se mueve en un plano perpendicular a un eje, denominado eje de rotación, como se indica en la figura, describiendo una trayectoria cualquiera, lo que implica que la línea AP mostrada (contenida en el plano mencionado) no tenga, necesariamente, un módulo constante.

Si el sistema de referencia cartesiano Oxyz mostrado es fijo, aunque P no se mueva describiendo una trayectoria plana, su posición vendrá dada por la función vectorial

$$\bar{r} = xi + yj + zk,$$

su velocidad (instantánea) por

$$\bar{v} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k, \text{ y,}$$

su aceleración (instantánea también) por:

$$\bar{a} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k.$$

Obviamente, \bar{v} siempre será tangente a la trayectoria descri-

ta por P; entonces, si la trayectoria de P es plana, \bar{v} estará alojado en el plano en que se mueve dicho punto, además de ser tangente a la trayectoria descrita por éste.

Definimos como velocidad angular (instantánea) de la línea AP simbolizándola mediante $\bar{\omega}$, a un vector (colineal con el eje de rotación) de componente escalar ω , tal que:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} ;$$

entonces, de acuerdo con lo indicado, podemos escribir:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} ,$$

o bien:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times \bar{r} , \text{----- (a).}$$

En efecto, las expresiones inmediatas anteriores son válidas ya que, de acuerdo con la definición de producto vectorial, $\bar{\omega} \times \bar{r}$ debe ser perpendicular tanto a $\bar{\omega}$ como a \bar{r} , cosa que cumple \bar{v} por estar en un plano normal al formado por $\bar{\omega}$ y \bar{r} en tanto que, basados en la definición mencionada y en los conceptos que han intervenido en el estudio de este tema, se tiene:

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = |\bar{\omega}| |\bar{r}| \text{sen} \phi = \omega |\bar{r}| \text{sen} \phi = \omega |\overline{AP}| = \frac{d\theta}{dt} |\overline{AP}| = \frac{|\overline{AP}| d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt} = |\bar{v}| .$$

Si ponemos a girar el sistema de referencia, respecto al eje de rotación, para una partícula situada sobre el eje "x", de manera tal que se encuentre distante una unidad del origen, se tiene:

$$\bar{r} = i, \quad y, \quad \dot{\bar{r}} = \dot{i}$$

valores que substituidos en (a) dan lugar a:

$$\dot{i} = \bar{\omega} \times i \text{-----} (a_x) ;$$

análogamente se obtienen

$$\dot{j} = \bar{\omega} \times j \text{-----} (a_y) ,$$

y

$$\dot{k} = \bar{\omega} \times k \text{-----} (a_z) ;$$

estas expresiones, (a_x) , (a_y) y (a_z) , reciben el nombre de fórmulas de Poisson.

Si el movimiento del segmento \overline{AP} se realiza en un plano paralelo al xy, o coincidente con éste, llamando θ_{xy} a la función escalar que determina la posición angular de \overline{AP} en dicho plano, podemos decir que \overline{AP} se mueve con una velocidad angular $\bar{\omega}_{xy}$ dada por:

$$\bar{\omega}_{xy} = (\dot{\theta}_{xy}) k .$$

Si el movimiento del segmento \overline{AP} se realiza en un plano paralelo al xz, o coincidente con éste, llamando θ_{xz} a la función escalar que determina la posición angular de \overline{AP} en dicho plano, podemos decir que \overline{AP} se mueve con una velocidad angular $\bar{\omega}_{xz}$ dada por:

$$\bar{\omega}_{xz} = (\dot{\theta}_{xz}) j .$$

Si el movimiento del segmento \overline{AP} se realiza en un plano paralelo al yz, o coincidente con éste, llamando θ_{yz} a la función escalar que determina la posición angular de \overline{AP} en dicho plano, podemos decir que \overline{AP} se mueve con una velocidad angular

$$\bar{\omega}_{yz} = (\dot{\theta}_{yz}) i .$$

Tomando en cuenta lo anterior y el principio de superposición, si una línea cualquiera gira en el espacio con relación a un

eje no coincidente con alguno de los ejes coordenados, decimos que gira con una velocidad angular instantánea, $\bar{\omega}$, dada por:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{yz} + \bar{\omega}_{xz} + \bar{\omega}_{xy} ,$$

o bien:

$$\bar{\omega} = (\dot{\theta}_{yz})i + (\dot{\theta}_{xz})j + (\dot{\theta}_{xy})k ,$$

donde $\bar{\omega}$ es un vector colineal con el eje (instantáneo) de rotación, como ya mencionamos anteriormente, en tanto que $\dot{\theta}_{yz}$, $\dot{\theta}_{xz}$ y $\dot{\theta}_{xy}$ son las funciones que se obtienen al derivar (con respecto a t) a las funciones θ_{yz} , θ_{xz} y θ_{xy} que, obviamente, nos determinan la posición angular de la proyección de la línea en estudio, sobre los planos yz, xz y xy, respectivamente.

Definiendo ahora como aceleración angular (instantánea), de la línea mencionada, a la función vectorial que simbolizaremos con $\bar{\alpha}$, obtenida al derivar (con respecto a t) la función que nos determina la velocidad angular, para un instante cualquiera, podemos escribir:

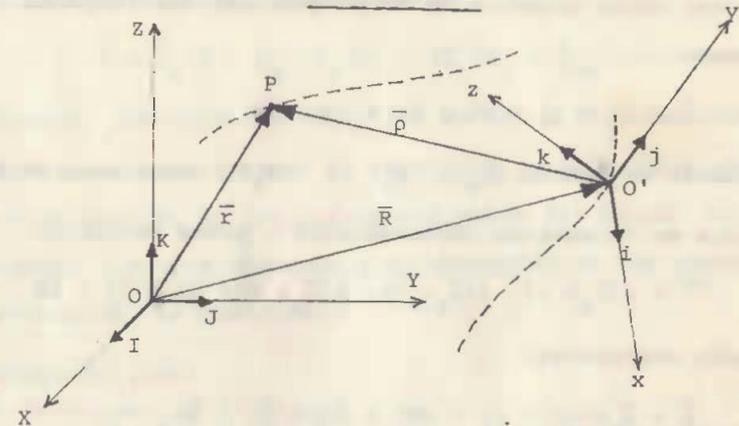
$$\bar{\alpha} = \dot{\bar{\omega}}_{yz} + \dot{\bar{\omega}}_{xz} + \dot{\bar{\omega}}_{xy} ,$$

o bien:

$$\bar{\alpha} = (\ddot{\theta}_{yz})i + (\ddot{\theta}_{xz})j + (\ddot{\theta}_{xy})k$$

C.1) MOVIMIENTO RELATIVO.

CASO GENERAL



Consideremos dos puntos P y O', que se mueven describiendo trayectorias cualesquiera, como se indica en la figura, donde OXYZ es un sistema de referencia fijo, y O'xyz es un sistema de referencia móvil, que gira con una velocidad angular $\bar{\omega}_S$ durante su movimiento.

De acuerdo con la gráfica, \bar{R} y \bar{r} son, respectivamente, los vectores que nos fijan la posición de O' y P con respecto al sistema fijo, en tanto que $\bar{\rho}$ es el vector que define la posición de P respecto al sistema móvil, pudiendo escribir:

$$\bar{r} = \bar{R} + \bar{\rho} \text{ ----- (b)}$$

de donde se obtienen, para P:

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}} + \dot{\bar{\rho}} \text{ ----- (c),}$$

y

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}} + \ddot{\bar{\rho}} \text{ ----- (d),}$$

como, de acuerdo con la notación del sistema móvil, se tiene:

$$\bar{\rho} = xi + yj + zk \text{ ----- (e),}$$

al derivar ambos miembros de esta igualdad, con respecto a t , obtenemos:

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k + \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k,$$

que tomando en cuenta (a_x) , (a_y) y (a_z) , relaciones de Poisson obtenidas en "Elementos fundamentales", puede escribir:

$$\dot{\bar{\rho}} = x(\bar{\omega}_s \times i) + y(\bar{\omega}_s \times j) + z(\bar{\omega}_s \times k) + \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k,$$

que puede expresarse:

$$\dot{\bar{\rho}} = \bar{\omega}_s \times (xi + yj + zk) + \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k \text{ ----- (f);}$$

además, tomando en cuenta (e) y haciendo:

$$\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k = \dot{\rho}_r \text{ ----- (g),}$$

podemos expresar:

$$\dot{\bar{\rho}} = \bar{\omega}_s \times \bar{\rho} + \dot{\rho}_r \text{ ----- (h).}$$

Derivando (f) con respecto a t , se obtiene:

$$\ddot{\bar{\rho}} = \frac{d\bar{\omega}_s}{dt} \times (xi + yj + zk) + \bar{\omega}_s \times \left[\frac{d}{dt} (xi + yj + zk) \right] + \frac{d}{dt} (\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k),$$

o sea:

$$\ddot{\bar{\rho}} = \dot{\bar{\omega}}_s \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_s \times [\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k + \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k] + \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k + \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k,$$

haciendo algunas sustituciones, tomando en cuenta (g), (a_x) , (a_y) y (a_z) , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\rho}} = & \dot{\bar{\omega}}_s \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_s \times \left[\dot{\rho}_r + x(\bar{\omega}_s \times i) + y(\bar{\omega}_s \times j) + z(\bar{\omega}_s \times k) \right] + \\ & + \dot{x}(\bar{\omega}_s \times i) + \dot{y}(\bar{\omega}_s \times j) + \dot{z}(\bar{\omega}_s \times k) + \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k, \end{aligned}$$

de donde, tomando en cuenta (g) y (e) nuevamente y haciendo

$$\ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k = \ddot{\rho}_{rr} \text{ ----- (i),}$$

al reducir términos, obtenemos:

$$\ddot{\bar{\rho}} = \dot{\bar{\omega}}_s \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_s \times (\bar{\omega}_s \times \bar{\rho}) + 2\bar{\omega}_s \times \dot{\rho}_r + \ddot{\rho}_{rr} \text{ ----- (j);}$$

entonces, sustituyendo (h) y (j) en (c) y (d), obtenemos las expresiones para obtener la velocidad y aceleración absolutas de P en función de las correspondientes del origen del sistema móvil y de los términos que, enseguida de las expresiones mencionadas, se describen.

Resumiendo pues:

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega}_s \times \bar{\rho} + \dot{\rho}_r \text{ ----- (A),}$$

y

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}}_s \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_s \times (\bar{\omega}_s \times \bar{\rho}) + 2\bar{\omega}_s \times \dot{\rho}_r + \ddot{\rho}_{rr} \text{ ----- (B),}$$

donde:

$\dot{\bar{R}}$ es la velocidad (absoluta) de O' .

$\bar{\omega}_s$ es la velocidad angular con que gira el sistema móvil ($O'xyz$),

$\bar{\rho}$ es el vector que determina la posición de P con respecto al sistema móvil,

$\dot{\rho}_r$ recibe el nombre de velocidad relativa de P,

$\ddot{\bar{R}}$ es la aceleración (absoluta) de O' ,

$\dot{\bar{\omega}}_s$ es la aceleración angular del sistema móvil,

$\ddot{\rho}_{rr}$ recibe el nombre de aceleración relativa de P,

a la suma $\dot{\vec{R}} + \vec{\omega}_s \times \vec{\rho}$ se le conoce como velocidad de arrastre,

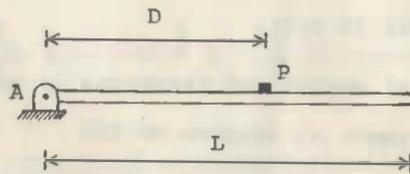
a la suma $\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}}_s \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_s \times (\vec{\omega}_s \times \vec{\rho})$ se le conoce como aceleración de arrastre, y,

al término $2\vec{\omega}_s \times \dot{\vec{\rho}}_r$ se le conoce como aceleración de Coriolis.

Cabe hacer la aclaración de que para obtener las expresiones (A) y (B) empleamos como sistema de referencia móvil, con origen en O' , uno cartesiano; sin embargo, los sistemas de referencia (tanto fijo como móvil) pudieron haberse empleado de otro tipo, como cilíndricos, esféricos, etc.

En cualquier caso, $\vec{\rho}$ quedará expresado en función de los vectores unitarios del sistema móvil, y $\dot{\vec{\rho}}_r$ así como $\ddot{\vec{\rho}}_{rr}$ se obtendrán derivando una y dos veces respectivamente, a $\vec{\rho}$, considerando como constantes a dichos vectores unitarios.

Ejemplo 1.



La barra lisa de la figura se encuentra sujeta en posición horizontal, sosteniendo a la partícula P , como se indica. Si súbitamente se le hace girar en torno de A , en sentido contrario al de las manecillas del reloj, con una rapidez angu-

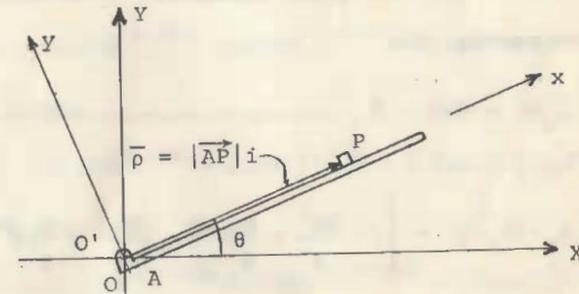
lar constante ω , de modo que la distancia entre A y P viene dada por la expresión:

$$|\vec{AP}| = \left(\frac{D}{2} - \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{\omega t} + \left(\frac{D}{2} + \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\text{sen}\omega t,$$

donde $D = 1\text{m}$, $L = 1.5\text{m}$ y $\omega = \sqrt{9.81}$ rad/seg, determine la velocidad y la aceleración absolutas de P cuando está a punto de abandonar la barra.

Solución:

Tomemos nuestros sistemas de referencia fijo y móvil como se indica en la figura, donde O y O' coinciden con A :



De acuerdo con el croquis y con el enunciado:

$$\dot{\vec{R}} = \vec{0} \text{ (en cualquier instante)} \text{ ----- (1),}$$

$$\vec{\omega}_s = \dot{\theta} \vec{k} = \omega \vec{k} = \text{cte.} \text{ ----- (2), y,}$$

$$\vec{\rho} = \left[\left(\frac{D}{2} - \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{\omega t} + \left(\frac{D}{2} + \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\text{sen}\omega t \right] \vec{i} \text{ -- (3);}$$

de (2) y (3):

$$\vec{\omega}_s \times \vec{\rho} = \left[\left(\frac{D\omega}{2} - \frac{g}{4\omega}\right)e^{\omega t} + \left(\frac{D\omega}{2} + \frac{g}{4\omega}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}\text{sen}\omega t \right] \vec{j} \text{ .(4);}$$

de (3):

$$\dot{\vec{p}}_R = \left[\left(\frac{D\omega}{2} - \frac{g}{4\omega} \right) e^{\omega t} + \left(-\frac{D\omega}{2} - \frac{g}{4\omega} \right) e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega} \cos \omega t \right] i \quad (5)$$

entonces, sustituyendo (1), (4) y (5) en la expresión (A) obtenida antes de desarrollar este ejemplo, la velocidad de P en un instante cualquiera viene dada por:

$$\vec{v} = \left[\begin{array}{l} \left[\left(\frac{D\omega}{2} - \frac{g}{4\omega} \right) e^{\omega t} + \left(\frac{D\omega}{2} + \frac{g}{4\omega} \right) e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega} \sin \omega t \right] j + \\ + \left[\left(\frac{D\omega}{2} - \frac{g}{4\omega} \right) e^{\omega t} - \left(\frac{D\omega}{2} + \frac{g}{4\omega} \right) e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega} \cos \omega t \right] i \end{array} \right] ;$$

de (1):

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{0} \quad (\text{en cualquier instante}) \quad (6),$$

tomando en cuenta (2):

$$\dot{\vec{\omega}}_S \times \vec{p} = \vec{0} \times \vec{p} = \vec{0} \quad (7);$$

de (2) y (4):

$$\vec{\omega}_S \times (\vec{\omega}_S \times \vec{p}) = \left[\left(-\frac{D\omega^2}{2} + \frac{g}{4} \right) e^{\omega t} - \left(\frac{D\omega^2}{2} + \frac{g}{4} \right) e^{-\omega t} - \frac{g}{2} \sin \omega t \right] i \quad (8)$$

de (2) y (5):

$$2\vec{\omega}_S \times \dot{\vec{p}}_R = \left[(D\omega^2 - \frac{g}{2}) e^{\omega t} + (-D\omega^2 - \frac{g}{2}) e^{-\omega t} + g \cos \omega t \right] j \quad (9)$$

de (5):

$$\ddot{\vec{p}}_{RR} = \left[\left(\frac{D\omega^2}{2} - \frac{g}{4} \right) e^{\omega t} + \left(\frac{D\omega^2}{2} + \frac{g}{4} \right) e^{-\omega t} - \frac{g}{2} \sin \omega t \right] i \quad (10),$$

luego, sustituyendo (6), (7), (8), (9) y (10) en la expresión (B) también obtenida antes de iniciar el desarrollo de este ejemplo, la aceleración absoluta de P en un instante cualquiera viene dada por:

$$\vec{a} = (-g \sin \omega t) i + \left[(D\omega^2 - \frac{g}{2}) e^{\omega t} - (D\omega^2 + \frac{g}{2}) e^{-\omega t} + g \cos \omega t \right] j ;$$

ahora, para obtener los valores de \vec{v} y \vec{a} pedidos, encontremos el tiempo para el cual P está a punto de abandonar la barra, que será el que debe transcurrir desde que se inicie el movimiento hasta que el $|\vec{AP}|$ alcance el valor L.

Tomando en cuenta los valores de D y ω , se tiene, para t = 0.6 seg:

$$|\vec{AP}| = 0.25e^{1.8792} + 0.75e^{-1.8792} + 0.5 \sin 1.8792 = 2.228m ,$$

para t = 0.4 seg:

$$|\vec{AP}| = 0.25e^{1.2528} + 0.75e^{-1.2528} + 0.5 \sin 1.2528 = 1.563m ,$$

para t = 0.375 seg:

$$|\vec{AP}| = 0.25e^{1.1745} + 0.75e^{-1.1745} + 0.5 \sin 1.1745 = 1.502m ,$$

para t = 0.374 seg:

$$\begin{aligned} |\vec{AP}| &= 0.25e^{1.171368} + 0.75e^{-1.171368} + 0.5 \sin 1.171368 = \\ &= 0.807 + 0.232 + 0.461 = 1.500m , \end{aligned}$$

y, para este valor de t:

$$\vec{v} = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{9.81}}{2} - \frac{9.81}{4\sqrt{9.81}} \right) (3.22640) + \left(\frac{\sqrt{9.81}}{2} + \frac{9.81}{4\sqrt{9.81}} \right) (0.30994) + \frac{9.81}{2\sqrt{9.81}} (0.92128) j + \\ \left(\frac{\sqrt{9.81}}{2} - \frac{9.81}{4\sqrt{9.81}} \right) (3.22640) - \left(\frac{\sqrt{9.81}}{2} + \frac{9.81}{4\sqrt{9.81}} \right) (0.30994) + \frac{9.81}{2\sqrt{9.81}} (0.38889) i \end{array} \right]$$

en tanto que:

$$\bar{a} = \left[\begin{aligned} &(-9.81)(0.92128)i + \\ &+ \left[\left(9.81 - \frac{9.81}{2} \right) (3.22640) - \left(9.81 + \frac{9.81}{2} \right) (0.30994) + 9.81(0.30994) \right] j \end{aligned} \right]$$

que realizando operaciones dan como resultado:

$$\bar{v} = (2.53 + 0.73 + 1.44)j + (2.53 - 0.73 + 0.61)i = 2.41i + 4.70j \text{ m/seg}, y,$$

$$\bar{a} = -9.04i + (15.83 - 4.56 + 3.81)j = -9.04i + 15.08j \text{ m/seg}^2,$$

valores que expresaremos con relación al sistema fijo OXYZ.

Como de acuerdo con el enunciado, ω es constante, podemos escribir:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{constante};$$

separando variables e integrando obtenemos:

$$\theta = \omega t + \theta_0;$$

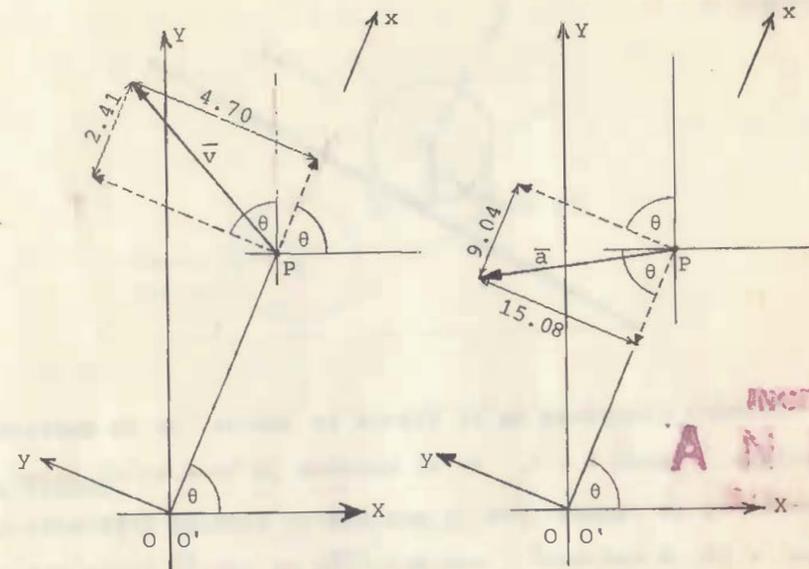
de $\theta = 0$, para $t = 0$, obtenemos $\theta_0 = 0$, y,

$$\theta = \omega t;$$

entonces, cuando P está a punto de abandonar la barra, se tiene:

$$\theta = \sqrt{9.81} (0.374) = 1.171368 \text{ radianes} = 67.11436^\circ$$

posición a la que corresponden las gráficas:



por lo que, la solución al problema dado viene siendo:

$$\bar{v} = \left[\begin{aligned} &2.41(\text{Icos}67.11436^\circ + \text{Jsen}67.11436^\circ) + \\ &+ 4.70(-\text{Isen}67.11436^\circ + \text{Jcos}67.11436^\circ) \end{aligned} \right], y,$$

$$\bar{a} = \left[\begin{aligned} &9.04(-\text{Icos}67.11436^\circ - \text{Jsen}67.11436^\circ) + \\ &+ 15.08(-\text{Isen}67.11436^\circ + \text{Jcos}67.11436^\circ) \end{aligned} \right]$$

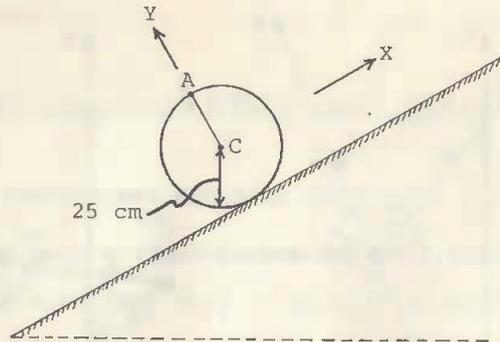
o sea:

$$\bar{v} = 0.94\text{I} + 2.22\text{J} - 4.33\text{I} + 1.83\text{J} = \underline{-3.39\text{I} + 4.05\text{J} \text{ m/seg}},$$

y,

$$\bar{a} = -3.52\text{I} - 8.33\text{J} - 13.89\text{I} + 5.86\text{J} = \underline{-17.41\text{I} - 2.47\text{J} \text{ m/seg}^2}.$$

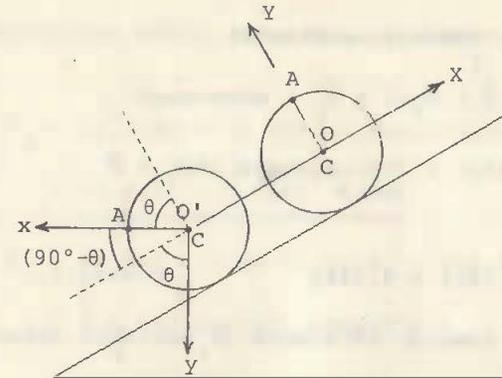
Ejemplo 2.



El cilindro homogéneo de la figura se suelta, en la posición mostrada, cuando $t = 0$. Si al moverse lo hace en el plano fijo XY de la figura, con un acelerante angular constante e igual a 26.16 rad/seg^2 , sabiendo que su centro tiene una rapidez dada por la expresión $v = 6.54t \text{ m/seg}$, para t en segundos:

- 1) Determine una expresión que nos proporcione el ángulo girado por la línea CA, para un tiempo t cualquiera.
- 2) Referidas al sistema fijo, ¿cuáles son la velocidad y la aceleración de A, luego de que CA ha girado:
 - a) 30° y b) 180° .

Solución.- El sistema de referencia móvil que emplearemos para resolver el ejercicio es el $O'xy$ mostrado en la siguiente figura, donde también se muestra el sistema de referencia fijo OXY dado.



Se tiene:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 26.16 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2} = \text{cte.};$$

integrando:

$$\omega = 26.16t + C_1,$$

de $\omega = 0$ para $t = 0$ se obtiene $C_1 = 0$ por lo que, haciendo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ y volviendo a integrar:}$$

$$\theta = 13.08t^2 + C_2;$$

entonces, tomando en cuenta que θ es igual a cero para $t = 0$

(que implica $C_2 = 0$) podemos escribir:

$$\theta = 13.08t^2 \text{ (expresión pedida).}$$

Resolvamos ahora la segunda parte de este ejemplo. Basados en los datos y en el sistema de referencia elegido, tenemos:

$$\vec{R} = -6.54t \text{ I m/seg},$$

$$\vec{\omega}_s = 26.16t \text{ k } \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}, \text{ y,}$$

$$\vec{\rho} = 0.25i \text{ m. (esto último, para A, en todo instante),}$$

INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

de donde obtenemos (para la partícula A):

$$\dot{\bar{\rho}}_R = \bar{0} \quad (\text{vector constante}),$$

entonces, de $\bar{v} = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega}_S \times \bar{\rho} + \dot{\bar{\rho}}_R$, obtenemos:

$$\bar{v}_A = -6.54t\mathbf{i} + (26.16tk) \times (0.25\mathbf{i}) + \bar{0}$$

luego:

$$\bar{v}_A = -6.54t\mathbf{i} + 6.54t\mathbf{j} \quad \text{----- (1).}$$

Ahora bien, como tomando en cuenta lo anterior obtenemos:

$$\ddot{\bar{R}} = -6.54\mathbf{i} \quad \text{m/seg}^2,$$

$$\dot{\bar{\omega}}_S = 26.16k \quad \text{rad/seg}^2, \quad \text{y,}$$

$$\ddot{\bar{\rho}}_{RR} = \bar{0}; \quad \text{entonces,}$$

de $\bar{a} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}}_S \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_S \times (\bar{\omega}_S \times \bar{\rho}) + 2\bar{\omega}_S \times \dot{\bar{\rho}}_R + \ddot{\bar{\rho}}_{RR}$, se ob

tiene:

$$\bar{a}_A = -6.54\mathbf{i} + (26.16k) \times (0.25\mathbf{i}) + (26.16tk) \times [(26.16tk) \times (0.25\mathbf{i})] + \bar{0} + \bar{0}$$

de donde:

$$\bar{a}_A = -6.54\mathbf{i} + 6.54\mathbf{j} - 171.09t^2\mathbf{i} \quad \text{----- (2).}$$

Para $\theta = 30^\circ = \pi/6$ rad, de la expresión obtenida al resolver la primera parte de este ejemplo, planteamos:

$$\frac{\pi}{6} = 13.08t^2, \quad \text{que se cumple para } t = 0.2 \text{ seg};$$

sustituyendo este valor de t en (1) y (2), obtenemos:

$$\bar{v}_A = -1.308\mathbf{i} + 1.308\mathbf{j} \quad \text{m/seg}, \quad \text{y,}$$

$$\bar{a}_A = -6.54\mathbf{i} + 6.54\mathbf{j} - 6.84\mathbf{i} \quad \text{m/seg}^2;$$

Refiriendo al sistema fijo los vectores que de estas dos últimas expresiones están referidos al sistema móvil, obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &= -1.308\mathbf{i} + (1.308)(-\mathbf{i}\cos 30^\circ - \mathbf{j}\sin 30^\circ) = \\ &= \underline{-2.441\mathbf{i} - 0.654\mathbf{j}} \quad \text{m/seg}, \quad \text{y,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_A &= -6.54\mathbf{i} + 6.54(-\mathbf{i}\cos 30^\circ - \mathbf{j}\sin 30^\circ) + \\ &+ 6.84(\mathbf{i}\sin 30^\circ - \mathbf{j}\cos 30^\circ) = \\ &= \underline{-8.78\mathbf{i} - 9.19\mathbf{j}} \quad \text{m/seg}^2, \end{aligned}$$

que son la velocidad y aceleración pedidas en el inciso a.

Para $\theta = 180^\circ = \pi$ rad, planteamos:

$$\pi = 13.08t^2, \quad \text{que se cumple para } t = 0.49 \text{ seg},$$

valor que sustituido en (1) y (2) da como resultados:

$$\bar{v}_A = -3.20\mathbf{i} + 3.20\mathbf{j}, \quad \text{y,} \quad \bar{a}_A = -6.54\mathbf{i} + 6.54\mathbf{j} - 41.08\mathbf{i},$$

que, tomando en cuenta que para esta posición y tiempo $\mathbf{i} = -\mathbf{j}$

y $\mathbf{j} = \mathbf{i}$, pueden expresarse como:

$$\bar{v}_A = \underline{-3.20\mathbf{i} + 3.20\mathbf{i}} = \bar{0} \quad \text{m/seg}, \quad \text{y,}$$

$$\bar{a}_A = \underline{-6.54\mathbf{i} + 6.54\mathbf{i} + 41.08\mathbf{j}} = 41.08\mathbf{j} \quad \text{m/seg}^2,$$

que son la velocidad y aceleración pedidas en el inciso b.

NOTA.- Se recomienda al lector que obtenga la velocidad y aceleración absolutas de A luego de que CA haya girado 120° , 270° , y 360° .

CASOS PARTICULARES

(De movimiento relativo)

Los más comunes son:

Caso 1.- Cuando la partícula en estudio conserva siempre la misma posición con respecto al sistema móvil, que implica:

$\bar{\rho} = \text{vector constante}$, $\dot{\bar{\rho}}_r = \bar{0}$ y $\ddot{\bar{\rho}}_{rr} = \bar{0}$ (en todo instante);

en este caso, si O' coincide con O , se tiene:

$$\bar{v} = \bar{\omega}_s \times \bar{\rho}, \quad y, \quad \bar{a} = \dot{\bar{\omega}}_s \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_s \times (\bar{\omega}_s \times \bar{\rho}).$$

Caso 2.- Cuando el sistema móvil no gira, o sea que simplemente se traslada, que implica:

$\bar{\omega}_s = \bar{0}$ y $\dot{\bar{\omega}}_s = \bar{0}$ (en todo instante);

en este caso, si O' coincide con P , se tiene:

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}}, \quad y, \quad \bar{a} = \ddot{\bar{R}}.$$

Caso 3.- Cuando el origen del sistema móvil siempre coincide con el origen del sistema fijo, que implica:

$\bar{R} = \bar{0}$, $\dot{\bar{R}} = \bar{0}$, $\ddot{\bar{R}} = \bar{0}$ (en todo instante),

con lo que:

$$\bar{v} = \bar{\omega}_s \times \bar{\rho} + \dot{\bar{\rho}}_r, \quad y,$$

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}}_s \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_s \times (\bar{\omega}_s \times \bar{\rho}) + 2\bar{\omega}_s \times \dot{\bar{\rho}}_r + \ddot{\bar{\rho}}_{rr};$$

en este caso, si $|\bar{\rho}| = \text{cte}$, se tiene:

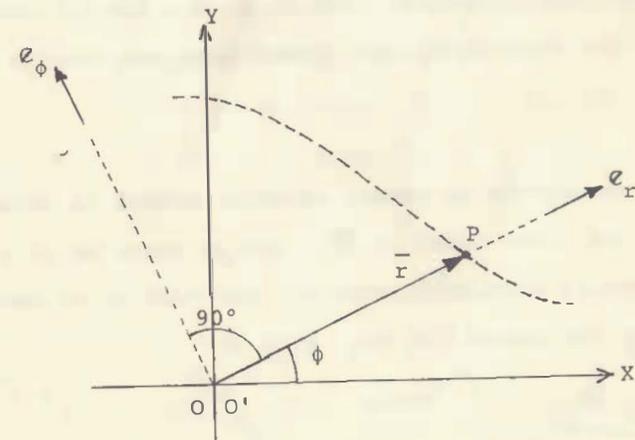
$$\bar{v} = \bar{\omega}_s \times \bar{\rho}, \quad y, \quad \bar{a} = \dot{\bar{\omega}}_s \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_s \times (\bar{\omega}_s \times \bar{\rho}).$$

Como ejemplo obtendremos las expresiones para determinar las características cinemáticas de un punto que describe una trayectoria plana cualquiera, empleando un sistema de referencia polar, con vectores unitarios e_r, e_ϕ y e_z , como sistema móvil, que implica (tomando en cuenta el procedimiento seguido para obtener las relaciones de Poisson):

$$\dot{e}_r = \bar{\omega}_s \times e_r, \quad y, \quad \dot{e}_\phi = \bar{\omega}_s \times e_\phi,$$

independientemente de que, de acuerdo con el siguiente croquis y tomando en cuenta que e_z es un vector que sale del plano del papel:

$$e_r \times e_\phi = e_z, \quad e_\phi \times e_z = e_r, \quad y, \quad e_z \times e_r = e_\phi,$$



Basados en el croquis y considerando que \bar{OP} gira en torno a O , sobre el plano XY mostrado, se tiene:

$$\bar{\rho} = r e_r, \quad y, \quad \bar{\omega}_s = \dot{\phi} e_z,$$

donde $r = |\bar{r}|$ y $\dot{\phi}$ es la componente escalar de la velocidad angular de \overline{OP} sobre el vector e_z mencionado antes; entonces, tomando en cuenta lo anterior, podemos escribir:

$$\underline{\bar{v}} = (\dot{\phi} e_z) \times (r e_r) + \dot{r} e_r = \dot{r} e_r + r \dot{\phi} e_\phi, \quad y,$$

$$\begin{aligned} \underline{\bar{a}} &= (\ddot{\phi} e_z) \times (r e_r) + (\dot{\phi} e_z) \times [(\dot{\phi} e_z) \times (r e_r)] + (2\dot{\phi} e_z) \times (\dot{r} e_r) + \ddot{r} e_r = \\ &= r \ddot{\phi} e_\phi - r \dot{\phi}^2 e_r + 2\dot{r} \dot{\phi} e_\phi + \ddot{r} e_r, \end{aligned}$$

o sea:

$$\underline{\bar{a}} = (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) e_r + (r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi}) e_\phi;$$

estas expresiones obtenidas, para \bar{v} y \bar{a} , son las que nos determinan las características cinemáticas mencionadas anteriormente.

NOTA.- Se recomienda al alumno estudiar porqué la velocidad angular de una línea (como la \overline{OP} , que se mueve en el plano XY, del croquis inmediato anterior) que gira en el sentido contrario de las manecillas del reloj es:

$$\bar{\omega} = \dot{\phi} k, \quad \text{donde} \quad \dot{\phi} > 0,$$

en tanto que, si gira en el sentido de las manecillas su velocidad viene dada por

$$\bar{\omega} = \dot{\phi} k, \quad \text{donde} \quad \dot{\phi} < 0.$$

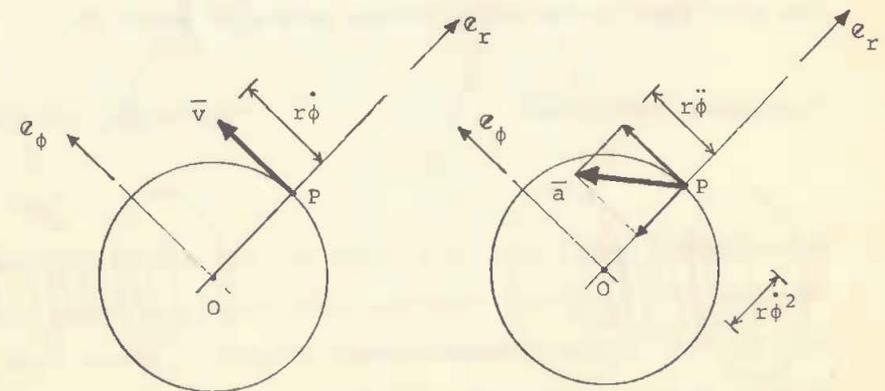
Si el movimiento fuera circular, con centro en O' (coincidiendo con O), las expresiones anteriores tomarían la forma:

$$\bar{v} = r \dot{\phi} e_\phi, \quad y, \quad \bar{a} = (-r \dot{\phi}^2) e_r + (r \ddot{\phi}) e_\phi,$$

ya que, si $|\bar{r}| = \text{cte}$, se tiene $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$ (en todo instante).

De acuerdo con las últimas expresiones, en un movimiento circular:

- 1) El vector velocidad (del punto en estudio) tiene sólo una componente, de magnitud $r \dot{\phi}$, en la dirección de un vector tangente a la trayectoria, en tanto que,
- 2) El vector aceleración (del punto mencionado) tiene dos componentes, una perpendicular a la trayectoria (y dirigida al centro del círculo descrito) de magnitud $r \dot{\phi}^2$, y una tangente a dicha curva, de magnitud $r \ddot{\phi}$.



C.2) CINEMATICA DEL CUERPO RIGIDO

C.2.1. TIPOS DE MOVIMIENTO DEL CUERPO RIGIDO.

Podemos considerar que son tres los principales tipos de movimiento que puede realizar un cuerpo rígido:

"Traslación",

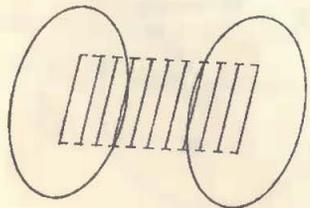
"Rotación", y,

"Movimiento general".

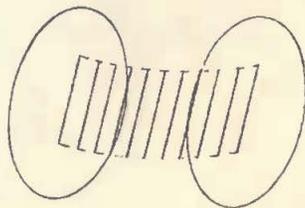
MOVIMIENTOS DE TRASLACION.

En estos movimientos, todo segmento rectilíneo del cuerpo permanece paralelo a su orientación original. Se presentan, dentro de este tipo de movimientos, los casos llamados "Traslación rectilínea" y "Traslación curvilínea"; en el primero de ellos todas las partículas del cuerpo realizan movimientos rectilíneos, en tanto que, en el segundo caso las partículas describen trayectorias curvas paralelas entre sí.

Traslación rectilínea



Traslación curvilínea

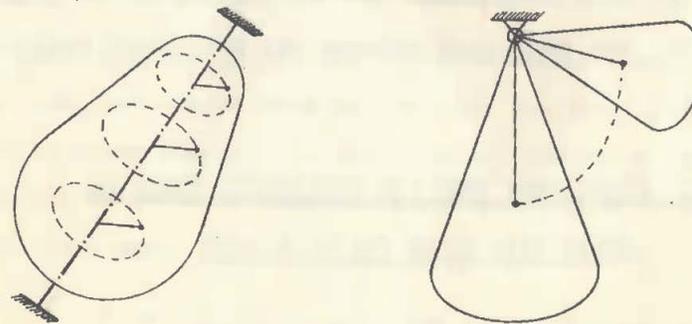


MOVIMIENTOS DE ROTACION.

En estos movimientos, al menos algunos segmentos rectilíneos del cuerpo (o todos, según el caso) van cambiando su orientación con respecto a la que tenían originalmente. Se presentan, dentro de este tipo de movimientos, los casos: "Rotación en torno a un eje fijo" y "Rotación en torno a un punto fijo".

Cuando un cuerpo gira en torno a un eje fijo, llamado "eje de rotación" sus partículas que no pertenecen a dicho eje describen trayectorias circulares alojadas en planos paralelos o coincidentes; obviamente, las partículas del cuerpo que pertenecen al eje de rotación no se mueven. En este caso, los segmentos rectilíneos del cuerpo paralelos al eje (de rotación) no modifican su orientación conforme pasa el tiempo.

Rotación en torno a un eje. Rotación en torno a un punto.



Cuando un cuerpo gira en torno a un punto fijo (articulación fija) todas sus partículas mantienen constante su distancia a dicho punto, lo que no necesariamente implica que las partículas del cuerpo describan trayectorias circulares. En es

te caso, todo segmento rectilíneo del cuerpo va modificando su orientación conforme el tiempo transcurre. Como ejemplo, citaremos el movimiento que realiza una "pera" de boxeo, luego de que se le pega desde diferentes puntos y en diversas direcciones; en este caso sólo un punto del cuerpo no se mueve y es el que coincide con la articulación.

MOVIMIENTO GENERAL.

Decimos que un cuerpo rígido realiza un movimiento general cuando, durante dicho movimiento, todo segmento rectilíneo (del cuerpo) tanto se traslada como gira, además de que sus partículas describen trayectorias tridimensionales, no planas ni rectas.

De acuerdo con esta definición podemos decir que los movimientos de traslación, así como los de rotación, cuyas características ya han sido mencionadas (en las páginas 46, 47 y parte de esta 48), son casos particulares del movimiento general.

C.2.2. ECUACIONES PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE

MOVIMIENTO DE UN CUERPO RIGIDO

Por definición de cuerpo rígido, la distancia entre dos puntos cualesquiera de éste nunca varía; entonces, si para estudiar el movimiento general del mismo le adherimos (pegamos, pintamos o engrapamos) un sistema móvil, para cualquier partícula del cuerpo, $\bar{\rho}$ permanecerá constante y las ecuaciones

que nos determinarán las características cinemáticas de dicha partícula, basadas en las expresiones (A) y (B) obtenidas al estudiar el movimiento relativo, son:

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega}_S \times \bar{\rho} \text{ ----- (A}_G\text{),}$$

Y

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}}_S \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_S \times (\bar{\omega}_S \times \bar{\rho}) \text{ ----- (B}_G\text{).}$$

Partiendo de estas expresiones, es obvio que las ecuaciones aplicables a partículas de cuerpos rígidos que realizan movimientos de traslación, donde $\bar{\omega}_S$ y $\dot{\bar{\omega}}_S$ son nulas en todo instante, son:

$$\bar{v} = \dot{\bar{R}} \text{ ----- (A}_T\text{),}$$

Y

$$\bar{a} = \ddot{\bar{R}} \text{ ----- (B}_T\text{)}$$

en tanto que las aplicables a partículas de cuerpos rígidos que realizan movimientos de rotación (haciendo coincidir O' con el punto respecto al cual gira el cuerpo, o con un punto del eje de rotación en caso de que ésta sea en torno a un eje fijo) son:

$$\bar{v} = \bar{\omega}_S \times \bar{\rho} \text{ ----- (A}_R\text{),}$$

Y

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}}_S \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_S \times (\bar{\omega}_S \times \bar{\rho}) \text{ ----- (B}_R\text{).}$$

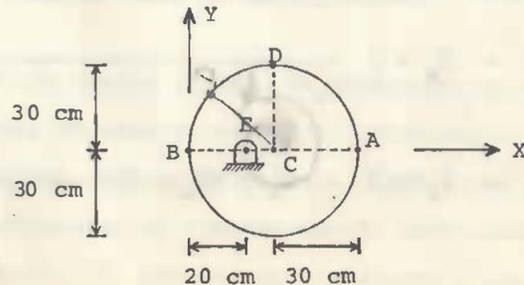
MOVIMIENTO PLANO GENERAL.

Este tipo de movimiento, que también es un caso particular - del movimiento general, se presenta cuando las partículas del cuerpo describen trayectorias planas mientras éste gira y se traslada. De acuerdo con esto diremos que los movimientos de "Traslación" (ya sea rectilínea o curvilínea) y de "Rotación en torno a un eje fijo" son, a su vez, casos particulares del movimiento plano general.

Así pues, deberán aplicarse las ecuaciones (A_G) y/o (B_G) , de la hoja inmediata anterior, para determinar las características cinemáticas de partículas de un cuerpo rígido que realice un movimiento plano general (donde $\bar{\omega}_s$ y $\dot{\bar{\omega}}_s$ tienen una misma dirección durante el mismo, siendo ésta perpendicular en todo instante a los planos donde se mueven las diferentes partículas que constituyen el cuerpo).

Antes de aplicar las ecuaciones (A_G) y/o (B_G) , a no ser que se nos indique el sistema móvil que debemos adoptar, será conveniente analizar cual es el sistema de referencia móvil que más conviene emplear, para que la solución al problema dado sea la más sencilla posible.

Ejemplo 1.-



El disco homogéneo de la figura se pone a girar en torno a un eje, perpendicular al plano de la misma y que pasa por E, con una aceleración angular de módulo constante e igual a 6 rad/seg^2 , en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Cuáles serán la velocidad y aceleración de D luego de que el disco ha girado 300° , si a éste se le imprime una velocidad angular de 60 rad/min en el sentido horario y en la posición de partida, que es la mostrada en la figura?. Resuelva el problema considerando al punto C como origen del sistema de referencia móvil por emplear, verificando sus resultados luego de resolverlo empleando un sistema de referencia móvil con origen en el punto E.

Solución.- De acuerdo con los datos, se tiene:

$$\bar{\alpha} = \dot{\bar{\omega}} = -6k \text{ rad/seg}^2 \text{ ----- (1);}$$

de donde, integrando obtenemos:

$$\bar{\omega} = -6tk + \bar{C}_1 \text{ rad/seg ;}$$

de $\bar{\omega} = -60k \text{ rad/min} = -k \text{ rad/seg}$, para $t = 0$:

$$\bar{C}_1 = -k ,$$

entonces:

$$\bar{\omega} = -6tk - k = -(6t + 1)k \text{ rad/seg ----- (2),}$$

pudiendo escribir:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = -(6t + 1)k ,$$

de donde, separando variables e integrando, se obtiene:

$$\bar{\theta} = -(3t^2 + t)k + \bar{C}_2 \text{ rad;}$$

de $\bar{\theta} = \bar{0}$, para $t = 0$:

$$\bar{C}_2 = \bar{0} ,$$

con lo que:

$$\bar{\theta} = -(3t^2 + t)k \text{ radianes} \text{ ----- (3)},$$

de (3), para $\bar{\theta} = (-300^\circ)k = (-\frac{5}{3}\pi)k = -5.236k \text{ rad}$, podemos plantear

$$-5.236k = -(3t^2 + t)k ,$$

que se cumple para:

$$3t^2 + t - 5.236 = 0 ,$$

o sea para:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 62.832}}{6} = \frac{-1 \pm 7.99}{6} ,$$

de donde obtenemos:

$$t = \frac{6.99}{6} = 1.165 \text{ seg} , \quad y , \quad t = \frac{-8.99}{6} = -1.498 \text{ seg} ;$$

desechando, por razones obvias, el segundo de estos valores, concluimos que para $t = 1.165 \text{ seg}$ el disco ha girado 300° ; para este valor de t se tiene, de (2):

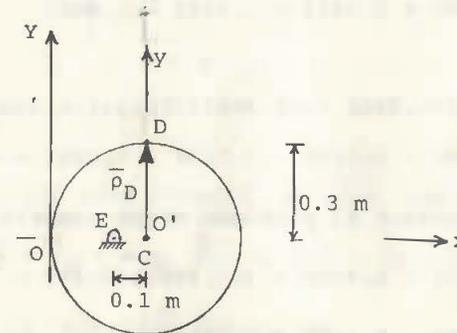
$$\bar{\omega} = -(6.99 + 1)k = -7.99k \text{ rad/seg} \text{ ----- (4)} .$$

Entonces, independientemente del sistema móvil que se "adhiera" al cuerpo, paralelamente al plano del papel, tomando en cuenta las expresiones (1) y (4) podemos decir que, luego del giro de 300° indicado, la velocidad y aceleración de D vienen dadas, respectivamente, por:

$$\bar{v}_D = \dot{\bar{R}} + (-7.99k) \times \bar{\rho}_D , \quad y ,$$

$$\bar{a}_D = \ddot{\bar{R}} + (-6k) \times \bar{\rho}_D + (-7.99k) \times [(-7.99k) \times \bar{\rho}_D] .$$

Tomemos como sistema de referencia móvil al $O'xy$ de la figura, donde O' coincide con C (punto que realiza un movimiento circular, de radio 0.1 m , con centro en E).

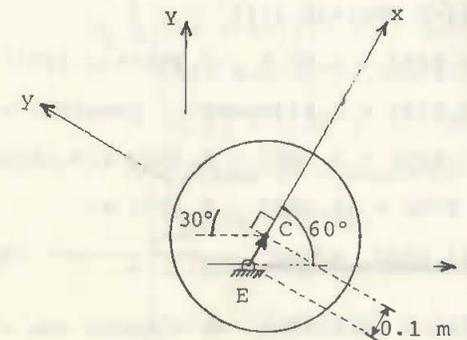


INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

De acuerdo con el croquis, en todo instante:

$$\dot{\bar{R}} = \bar{v}_C , \quad \ddot{\bar{R}} = \bar{a}_C , \quad y , \quad \bar{\rho}_D = 0.3j \text{ m} ;$$

como, luego del giro de 300° mencionados, se tiene:



para esta posición:

$$\dot{\vec{R}} = \vec{v}_C = (-7.99\mathbf{k}) \times [0.1(\mathbf{I}\cos 60^\circ + \mathbf{J}\sin 60^\circ)] \quad , \quad \mathbf{y},$$

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{a}_C = (-6\mathbf{k}) \times [0.1(\mathbf{I}\cos 60^\circ + \mathbf{J}\sin 60^\circ)] + (-7.99\mathbf{k}) \times \{(-7.99\mathbf{k}) \times [0.1(\mathbf{I}\cos 60^\circ + \mathbf{J}\sin 60^\circ)]\}$$

que realizando operaciones resultan:

$$\dot{\vec{R}} = -0.400\mathbf{J} + 0.692\mathbf{I} = 0.692\mathbf{I} - 0.400\mathbf{J}$$

y

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= 0.300\mathbf{J} + 0.520\mathbf{I} + (-7.99\mathbf{k}) \times (0.692\mathbf{I} - 0.400\mathbf{J}) = \\ &= -0.300\mathbf{J} + 0.520\mathbf{I} - 5.529\mathbf{J} - 3.192\mathbf{I} = -2.676\mathbf{I} - 5.829\mathbf{J} \end{aligned}$$

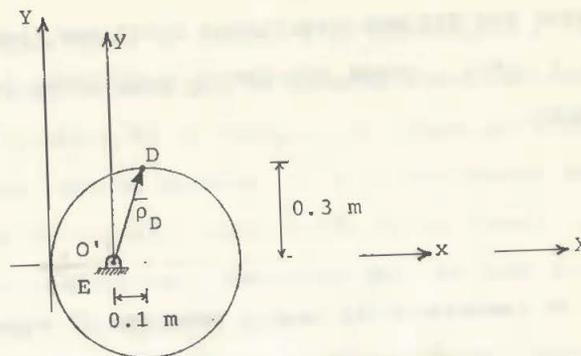
por lo que, la respuesta al problema viene constituida por:

$$\begin{aligned} \vec{v}_D &= 0.692\mathbf{I} - 0.400\mathbf{J} + (-7.99\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{j}) = \\ &= 0.692\mathbf{I} - 0.400\mathbf{J} + 2.397\mathbf{i} = \\ &= 0.692\mathbf{I} - 0.400\mathbf{J} + 2.397(\mathbf{I}\cos 60^\circ + \mathbf{J}\sin 60^\circ) = \\ &= 0.692\mathbf{I} - 0.400\mathbf{J} + 1.199\mathbf{I} + 2.076\mathbf{J} = \\ &= \underline{1.891\mathbf{I} + 1.676\mathbf{J} \text{ m/seg}} \quad \text{-----} \quad (\mathbf{R}_1), \end{aligned}$$

y por:

$$\begin{aligned} \vec{a}_D &= \left[\begin{array}{l} -2.672\mathbf{I} - 5.829\mathbf{J} + (-6\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{j}) + \\ + (-7.99\mathbf{k}) \times [(-7.99\mathbf{k}) \times (0.3\mathbf{j})] \end{array} \right] = \\ &= -2.672\mathbf{I} - 5.829\mathbf{J} + 1.8\mathbf{i} + (-7.99\mathbf{k}) \times (2.397\mathbf{i}) = \\ &= -2.672\mathbf{I} - 5.829\mathbf{J} + 1.8(\mathbf{I}\cos 60^\circ + \mathbf{J}\sin 60^\circ) - 19.152\mathbf{j} = \\ &= -2.672\mathbf{I} - 5.829\mathbf{J} + 0.900\mathbf{I} + 1.559\mathbf{J} + 19.152(\mathbf{I}\cos 30^\circ - \mathbf{J}\sin 30^\circ) \\ &= -1.772\mathbf{I} - 4.270\mathbf{J} + 16.586\mathbf{I} - 9.576\mathbf{J} = \\ &= \underline{14.814\mathbf{I} - 13.846\mathbf{J} \text{ m/seg}^2} \quad \text{-----} \quad (\mathbf{R}_2). \end{aligned}$$

Para verificar los resultados obtenidos, de acuerdo con el enunciado, emplearemos ahora un sistema de referencia móvil, con origen en E, como se muestra en la siguiente figura.



De acuerdo con este croquis, en todo instante:

$$\dot{\vec{R}} = \vec{v}_E = 0 \quad , \quad \ddot{\vec{R}} = \vec{a}_E = \vec{0} \quad , \quad \mathbf{y}, \quad \vec{r}_D = 0.1\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j} \text{ m} ;$$

entonces, la velocidad pedida es:

$$\begin{aligned} \vec{v}_D &= \vec{0} + (-7.99\mathbf{k}) \times (0.1\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j}) = -0.799\mathbf{j} + 2.397\mathbf{i} = \\ &= 0.799(\mathbf{I}\cos 30^\circ - \mathbf{J}\sin 30^\circ) + 2.397(\mathbf{I}\cos 60^\circ + \mathbf{J}\sin 60^\circ) = \\ &= 0.692\mathbf{I} - 0.400\mathbf{J} + 1.199\mathbf{I} + 2.076\mathbf{J} = \\ &= \underline{1.891\mathbf{I} + 1.676\mathbf{J} \text{ m/seg}} \quad , \end{aligned}$$

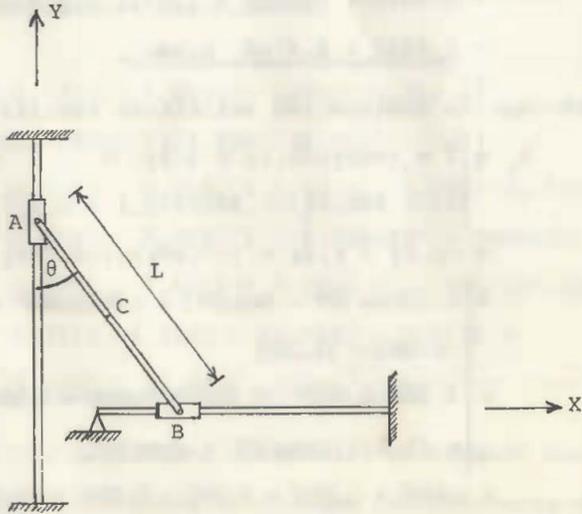
en tanto que la aceleración solicitada resulta ser:

$$\begin{aligned} \vec{a}_D &= \left[\begin{array}{l} \vec{0} + (-6\mathbf{k}) \times (0.1\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j}) + \\ + (-7.99\mathbf{k}) \times [(-7.99\mathbf{k}) \times (0.1\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j})] \end{array} \right] = \\ &= -0.6\mathbf{j} + 1.8\mathbf{i} + (-7.99\mathbf{k}) \times (-0.799\mathbf{j} + 2.397\mathbf{i}) = \\ &= \left[\begin{array}{l} 0.6(\mathbf{I}\cos 30^\circ - \mathbf{J}\sin 30^\circ) + 1.8(\mathbf{I}\cos 60^\circ + \mathbf{J}\sin 60^\circ) - \\ -6.384\mathbf{i} - 19.152\mathbf{j} \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{l} 0.520\mathbf{I} - 0.300\mathbf{J} + 0.900\mathbf{I} + 1.559\mathbf{J} + 6.384(-\mathbf{I}\cos 60^\circ - \mathbf{J}\sin 60^\circ) + \\ + 19.152(\mathbf{I}\cos 30^\circ - \mathbf{J}\sin 30^\circ) \end{array} \right] = \\ &= 1.420\mathbf{I} + 1.259\mathbf{J} - 3.192\mathbf{I} - 5.529\mathbf{J} + 16.586\mathbf{I} - 9.576\mathbf{J} = \\ &= \underline{14.814\mathbf{I} - 13.846\mathbf{J} \text{ m/seg}^2} \quad ; \end{aligned}$$

Como estos dos últimos resultados verifican, respectivamente, a (R_1) y (R_2) , queda totalmente satisfecho lo pedido en este ejemplo.

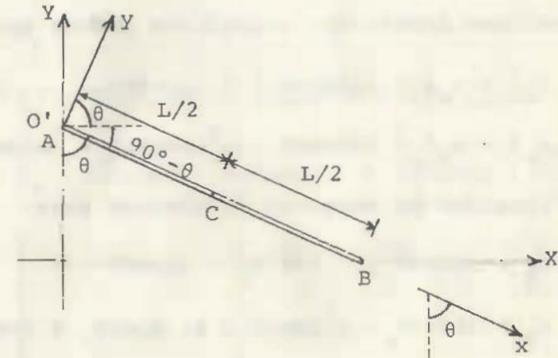
NCTA.- Se recomienda al lector resolver el ejemplo inmediato anterior, determinando la velocidad y aceleración absolutas para el punto B, luego de que OC haya girado 150° , empleando un sistema de referencia móvil con origen en D y verificando sus resultados utilizando un sistema móvil con origen en E.

EJEMPLC 2.



La barra rígida AB de la figura está articulada a las correderas mostradas, mismas que se moverán sobre las varillas lisas e indeformables de la figura. Si, luego de soltarla, se mueve con una rapidez angular ω y un acelerante angular α , determine la velocidad y aceleración de su centro, C, para una posición cualquiera. Demuestre que, en todo instante, la rapidez de C es igual a $L\omega/2$.

Solución.- Tomaremos como sistema de referencia móvil al $O'xy$ mostrado en la siguiente figura, donde O' coincide con A en tanto que el eje x del mismo se localiza siempre sobre la barra AB.



De acuerdo con el croquis y el enunciado del problema, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} &= \vec{v}_A, \quad \dot{\omega}_S = \omega k, \quad \bar{\rho}_B = Li, \quad \bar{\rho}_C = \frac{L}{2} i, \\ \ddot{\vec{R}} &= \vec{a}_A, \quad \ddot{\omega}_S = \alpha k \end{aligned}$$

por lo que, podemos expresar:

$$\begin{aligned}\bar{v}_B &= \bar{v}_A + (\omega k) \times (Li) = \bar{v}_A + \omega Lj = \\ &= \bar{v}_A + \omega L(I \cos \theta + J \sin \theta) \quad , \quad Y, \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_A + (\alpha k) \times (Li) + (\omega k) \times [(\omega k) \times (Li)] = \\ &= \bar{a}_A + \alpha Lj - \omega^2 Li = \\ &= \bar{a}_A + \alpha L(I \cos \theta + J \sin \theta) + \omega^2 L(-I \sin \theta + J \cos \theta) = \\ &= \bar{a}_A + (\alpha L \cos \theta - \omega^2 L \sin \theta)I + (\alpha L \sin \theta + \omega^2 L \cos \theta)J ;\end{aligned}$$

tomando en cuenta que, por el tipo de movimiento de A y B, se tiene:

$$\bar{v}_B = v_B I, \quad \bar{v}_A = v_A J, \quad \bar{a}_B = a_B I, \quad Y, \quad \bar{a}_A = a_A J$$

las expresiones inmediatas anteriores pueden escribirse:

$$\begin{aligned}v_B I &= v_A J + (\omega L \cos \theta)I + (\omega L \sin \theta)J \quad , \quad Y, \\ a_B I &= a_A J + (\alpha L \cos \theta - \omega^2 L \sin \theta)I + (\alpha L \sin \theta + \omega^2 L \cos \theta)J\end{aligned}$$

que, por igualdad de vectores se cumplen para:

$$\begin{aligned}v_B &= \omega L \cos \theta, \quad 0 = v_A + \omega L \sin \theta, \\ a_B &= \alpha L \cos \theta - \omega^2 L \sin \theta, \quad Y, \quad 0 = a_A + \alpha L \sin \theta + \omega^2 L \cos \theta,\end{aligned}$$

o sea para:

$$\begin{aligned}v_B &= \omega L \cos \theta, \\ v_A &= -\omega L \sin \theta, \\ a_B &= \alpha L \cos \theta - \omega^2 L \sin \theta, \quad Y, \\ a_A &= -\omega^2 L \cos \theta - \alpha L \sin \theta,\end{aligned}$$

que implican:

$$\begin{aligned}\bar{v}_B &= (\omega L \cos \theta)I, \\ \bar{v}_A &= (-\omega L \sin \theta)J, \\ \bar{a}_B &= (\alpha L \cos \theta - \omega^2 L \sin \theta)I, \quad Y, \\ \bar{a}_A &= (-\omega^2 L \cos \theta - \alpha L \sin \theta)J,\end{aligned}$$

teniéndose entonces:

$$\begin{aligned}\bar{v}_C &= \bar{v}_A + (\omega k) \times \left(\frac{L}{2}i\right) = \\ &= v_A + \frac{\omega L}{2}j = v_A + \frac{\omega L}{2}(I \cos \theta + J \sin \theta) = \\ &= (-\omega L \sin \theta)J + \frac{\omega L}{2}(\cos \theta)I + \frac{\omega L}{2}(\sin \theta)J,\end{aligned}$$

Y:

$$\begin{aligned}\bar{a}_C &= \bar{a}_A + (\alpha k) \times \left(\frac{L}{2}i\right) + (\omega k) \times \left[(\omega k) \times \left(\frac{L}{2}i\right)\right] = \\ &= \bar{a}_A + \frac{\alpha L}{2}j - \frac{\omega^2 L}{2}i = \\ &= \bar{a}_A + \frac{\alpha L}{2}(I \cos \theta + J \sin \theta) + \frac{\omega^2 L}{2}(-I \sin \theta + J \cos \theta) = \\ &= \bar{a}_A + \left(\frac{\alpha L}{2} \cos \theta - \frac{\omega^2 L}{2} \sin \theta\right)I + \left(\frac{\alpha L}{2} \sin \theta + \frac{\omega^2 L}{2} \cos \theta\right)J = \\ &= \left[(-\omega^2 L \cos \theta - \alpha L \sin \theta)J + \left(\frac{\alpha L}{2} \cos \theta - \frac{\omega^2 L}{2} \sin \theta\right)I + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha L}{2} \sin \theta + \frac{\omega^2 L}{2} \cos \theta\right)J\right]\end{aligned}$$

que, luego de factorizar, pueden escribirse:

$$\begin{aligned}\bar{v}_C &= \frac{(\omega L \cos \theta)I - (\omega L \sin \theta)J}{2}, \quad Y, \\ \bar{a}_C &= \frac{(\alpha L \cos \theta - \omega^2 L \sin \theta)I - (\alpha L \sin \theta + \omega^2 L \cos \theta)J}{2},\end{aligned}$$

siendo este par de expresiones las que nos determinan, respectivamente, la velocidad y aceleración de C para cualquier posición de la barra.

Basados en la penúltima expresión y en la definición de rapidez, en todo instante tenemos:

$$\begin{aligned} v_c &= |\vec{v}_c| = \sqrt{\left(\frac{\omega L}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(-\frac{\omega L}{2} \operatorname{sen} \theta\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} \cos^2 \theta + \frac{\omega^2 L^2}{4} \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4} (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{4}} = \frac{\omega L}{2}, \quad \text{l.q.q.d.} \end{aligned}$$

CENTRO Y EJE INSTANTANEO DE ROTACION.

Cuando un cuerpo rígido describe un movimiento general, en cualquier instante podemos obtener la velocidad de todas y cada una de las partículas del mismo, considerando que (en dicho instante) el cuerpo está girando en torno a un punto denominado "centro instantáneo de rotación", comúnmente conocido como CIR. Si el CIR se localiza en un punto del cuerpo, en el instante analizado, la partícula de éste que coincide con él tiene velocidad nula.

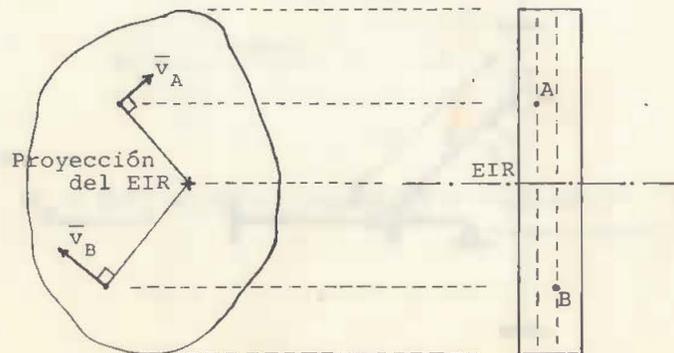
Si un cuerpo rígido realiza un movimiento plano, ya sea general o de rotación, en cualquier instante podemos obtener la velocidad de todas y cada una de las partículas del mismo, considerando que (en el instante de interés) el cuerpo está

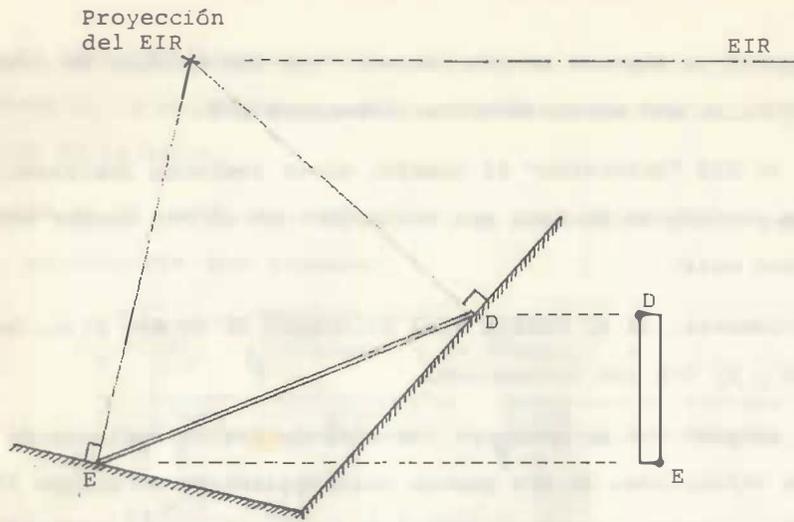
girando en torno a un eje llamado "eje instantáneo de rotación", al que abreviadamente llamaremos EIR.

Si el EIR "atraviesa" al cuerpo, en el instante analizado, las partículas de éste que coinciden con el EIR tienen velocidad nula.

Obviamente, si el cuerpo gira alrededor de un eje fijo, este eje y el EIR son colineales.

De acuerdo con lo anterior, conociendo las direcciones de las velocidades de dos puntos cualesquiera de un cuerpo rígido, el EIR correspondiente a éste pasará por el punto donde se cortan las perpendiculares a las direcciones de las velocidades conocidas, pasando por las proyecciones de dichos puntos sobre un mismo plano (generalmente sobre el que se dibuja el cuerpo, paralelo a los planos donde se mueven las partículas de éste), como puede apreciarse en los siguientes croquis. A la izquierda puede observarse la proyección de los cuerpos sobre un plano paralelo al que se mueve cualquier partícula de los mismos, en tanto que a la derecha se muestra una vista lateral de dichos cuerpos.



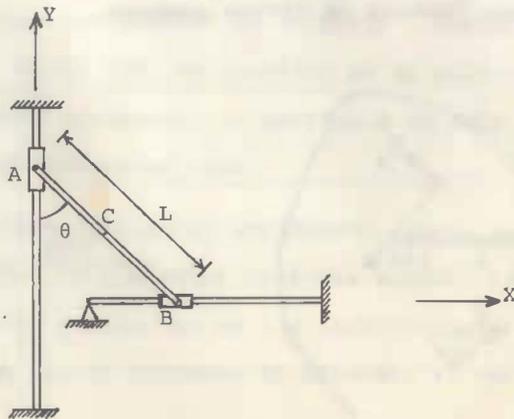


De acuerdo con lo anterior, una vez determinada la posición del EIR, la velocidad de cualquier punto P del cuerpo podremos obtenerla mediante:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

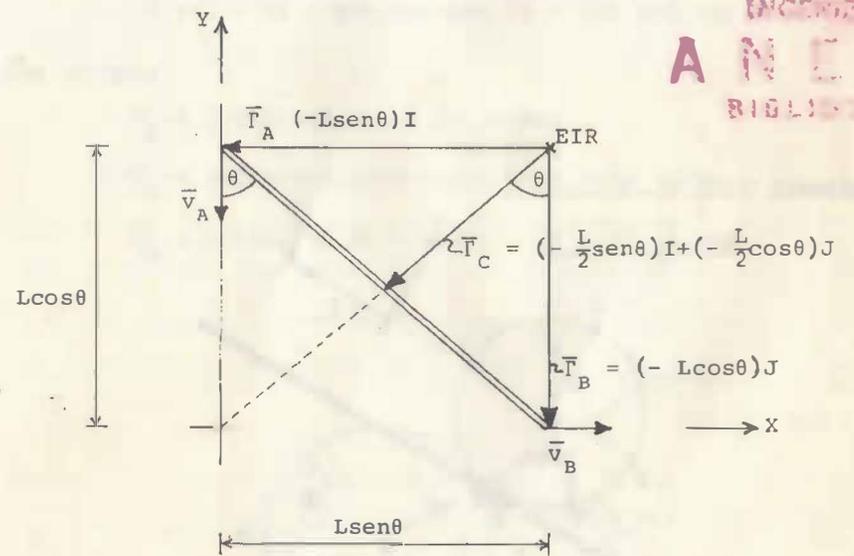
donde \vec{r} es el vector que va del EIR al punto P (perpendicularmente al EIR). Dicho vector se encontrará alojado (obviamente) en el plano en que se mueve dicho punto.

EJEMPLO 1.



La barra rígida AB de la figura está articulada a las correderas mostradas, mismas que se moverán sobre las varillas lisas e indeformables de la figura. Si, luego de soltarla, se mueve con una rapidez angular ω , determine la velocidad de A, B y de su centro C, para una posición cualquiera. Verifique los resultados comparándolos con los obtenidos al resolver el ejemplo 2 de movimiento plano general, resuelto anteriormente, en páginas 57 a 59.

Solución.- De acuerdo con lo visto hasta ahora, se tiene:



INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

entonces:

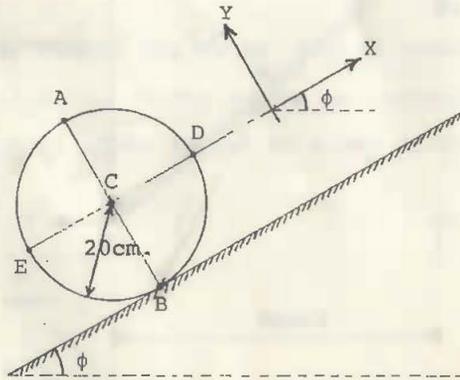
$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = (\omega k) \times [(-L \text{sen} \theta) I] = \underline{(-\omega L \text{sen} \theta) J}$$

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B = (\omega k) \times [(-L \cos \theta) j] = \underline{(\omega L \cos \theta) i} \quad , \quad y,$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_C &= \bar{\omega} \times \bar{r}_C = (\omega k) \times \left[\left(-\frac{L}{2} \operatorname{sen} \theta\right) i + \left(-\frac{L}{2} \cos \theta\right) j \right] \\ &= \underline{\left(-\frac{\omega L}{2} \operatorname{sen} \theta\right) j + \left(\frac{\omega L}{2} \cos \theta\right) i} \quad ; \end{aligned}$$

como puede observarse, estos resultados son idénticos a los obtenidos al resolver el ejemplo 2 de movimiento plano general, resuelto anteriormente, sólo que ahora los hemos obtenido de una manera mucho más rápida.

EJEMPLO 2.



El disco de la figura se mueve de manera tal que, en la posición mostrada, $\bar{v}_A = 6i$ m/seg y $\bar{v}_B = \bar{0}$. Determine, para dicha posición, las velocidades de C, D y E.

Solución.- De acuerdo con el enunciado, en la posición mostrada, el EIR pasa por el punto B, teniéndose entonces:

$$\bar{r}_A = 0.4j \quad \text{m},$$

$$\bar{r}_C = 0.2j \quad \text{m},$$

$$\bar{r}_D = 0.2j + 0.2i \quad \text{m}, \quad y,$$

$$\bar{r}_E = 0.2j - 0.2i \quad \text{m};$$

haciendo

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{r}_A = (\omega k) \times (0.4j) = 6i \quad ,$$

se tiene:

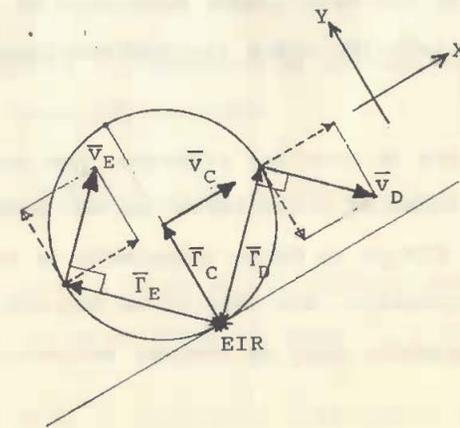
$$-0.4\omega i = 6i \quad , \quad \text{que implica } \omega = -15 \text{ rad/seg} \quad ,$$

con lo que:

$$\bar{v}_C = (-15k) \times (0.2j) = \underline{3i} \quad \text{m/seg} \quad ,$$

$$\bar{v}_D = (-15k) \times (0.2j + 0.2i) = \underline{3i - 3j} \quad \text{m/seg} \quad , \quad y,$$

$$\bar{v}_E = (-15k) \times (0.2j - 0.2i) = \underline{3i + 3j} \quad \text{m/seg} \quad .$$



MECANISMOS DE CUATRO ARTICULACIONES

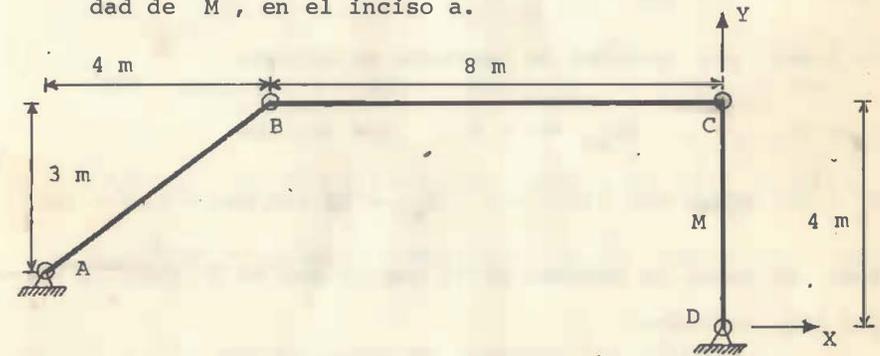
Se conoce así a los mecanismos que están formados por tres barras móviles, unidas mediante articulaciones. La barra intermedia tiene articulaciones móviles en sus extremos, en tanto que cada una de las otras dos barras tienen una articulación fija en un extremo y una móvil en el otro.

Generalmente, para estudiar la cinemática de estos mecanismos, se emplean las ecuaciones correspondientes a la cinemática de los cuerpos rígidos, aplicadas a cada una de las barras, tomando en cuenta que las articulaciones móviles son puntos comunes a barras del mecanismo, de modo que el planteamiento para la obtención de sus características cinemáticas (según los sistemas de referencia móviles empleados para analizar el movimiento de las dos barras que se juntan en la articulación correspondiente) nos permitirá establecer una relación entre las velocidades angulares de dichas barras, así como una relación entre las aceleraciones angulares de las mismas.

Cuando se trate de resolver problemas que involucren rapidez, ya sea lineales o angulares, lo más probable es que al localizar el EIR de la barra intermedia se nos simplifique bastante el problema, sin embargo no hay que olvidar que el EIR no es empleable para determinar aceleraciones lineales.

EJEMPLO.- El mecanismo de la figura está articulado en A, B, C y D, y en la posición mostrada la barra AB gira con velocidad angular de 10 rad/seg y aceleración angular de 4 rad/seg², ambas en el sentido de las manecillas del reloj. Si M es el punto medio de la barra CD:

- Aplicando las ecuaciones de movimiento para los cuerpos rígidos, determine la velocidad y la aceleración de M para la posición del croquis.
- Empleando EIR corrobore el valor obtenido para la velocidad de M, en el inciso a.



Solución al inciso a.- Empleando un sistema móvil con origen en A, para la barra AB, se tiene:

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_B = \vec{0} + (\vec{\omega}_{AB}) \times (\vec{AB}) = (-10\vec{K}) \times (4\vec{I} + 3\vec{J}) = 30\vec{I} - 40\vec{J}.$$

Tomando ahora, para la barra BC, un sistema móvil con origen en B, así como el valor obtenido para \vec{v}_B , tenemos:

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_C = \vec{v}_B + (\vec{\omega}_{BC}) \times (\vec{BC}) = 30\vec{I} - 40\vec{J} + (\omega_{BC}\vec{K}) \times (8\vec{I}),$$

o sea:

$$\vec{v}_C = 30\mathbf{I} - 40\mathbf{J} + 8\omega_{BC}\mathbf{J} = 30\mathbf{I} + (8\omega_{BC} - 40)\mathbf{J} \quad (1);$$

como, por el tipo de movimiento (circular) de C, para la posición mostrada:

$$\vec{v}_C = v_C\mathbf{I} \quad (2),$$

al sustituir (2) en (1), obtenemos:

$$v_C\mathbf{I} = 30\mathbf{I} + (8\omega_{BC} - 40)\mathbf{J}$$

de donde, por igualdad de vectores se obtiene:

$$v_C = 30, \quad y, \quad 8\omega_{BC} - 40 = 0, \quad \text{que implica:}$$

$$\vec{v}_C = 30\mathbf{I} \text{ m/seg} \quad (3), \quad y, \quad \bar{\omega}_{BC} = 5\mathbf{K} \text{ rad/seg} \quad (4);$$

como, al tomar un sistema móvil con origen en D (para la barra DC), se tiene:

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_C = \vec{0} + (\bar{\omega}_{DC}) \times (\vec{DC}) = (-\omega_{DC}\mathbf{K}) \times (4\mathbf{J}) = 4\omega_{DC}\mathbf{I} \quad (5),$$

de (5) y (3) obtenemos:

$$4\omega_{DC} = 30, \quad \text{de donde } \omega_{DC} = 7.5, \quad \text{que implica:}$$

$$\bar{\omega}_{DC} = -7.5\mathbf{K} \text{ rad/seg} \quad (6);$$

entonces, para la posición mostrada:

$$\vec{v}_M = \vec{0} + (\bar{\omega}_{DC}) \times (\vec{DM}) = (-7.5\mathbf{K}) \times (2\mathbf{J}) = \underline{15\mathbf{I} \text{ m/seg}},$$

que es la velocidad pedida.

Respetando los sistemas de referencia empleados en el desarrollo hasta aquí realizado, así como resultados obtenidos y datos proporcionados, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \bar{a}_B &= \ddot{\vec{R}} + \bar{\alpha} \times \bar{\rho}_B + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_B) = \vec{0} + (\bar{\alpha}_{AB}) \times (\vec{AB}) + (\bar{\omega}_{AB}) \times [(\bar{\omega}_{AB}) \times (\vec{AB})] = \\ &= (-4\mathbf{K}) \times (4\mathbf{I} + 3\mathbf{J}) + (-10\mathbf{K}) \times (30\mathbf{I} - 40\mathbf{J}) = 12\mathbf{I} - 16\mathbf{J} - 400\mathbf{I} - 300\mathbf{J} = \\ &= -388\mathbf{I} - 316\mathbf{J} \text{ m/seg}^2 \quad (7), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_C &= \ddot{\vec{R}} + \bar{\alpha} \times \bar{\rho}_C + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C) = \bar{a}_B + (\bar{\alpha}_{BC}) \times (\vec{BC}) + (\bar{\omega}_{BC}) \times [(\bar{\omega}_{BC}) \times (\vec{BC})] = \\ &= -388\mathbf{I} - 316\mathbf{J} + (\bar{\alpha}_{BC}\mathbf{K}) \times (8\mathbf{I}) + (5\mathbf{K}) \times [(5\mathbf{K}) \times (8\mathbf{I})] = \\ &= -388\mathbf{I} - 316\mathbf{J} + 8\alpha_{BC}\mathbf{J} - 200\mathbf{I} = -588\mathbf{I} + (8\alpha_{BC} - 316)\mathbf{J} \quad (8), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_C &= \ddot{\vec{R}} + \bar{\alpha} \times \bar{\rho}_C + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_C) = \vec{0} + (\bar{\alpha}_{DC}) \times (\vec{DC}) + (\bar{\omega}_{DC}) \times [(\bar{\omega}_{DC}) \times (\vec{DC})] = \\ &= (\alpha_{DC}\mathbf{K}) \times (4\mathbf{J}) + (-7.5\mathbf{K}) \times [(-7.5\mathbf{K}) \times (4\mathbf{J})] = -4\alpha_{DC}\mathbf{I} - 225\mathbf{J} \quad (9); \end{aligned}$$

de (8) y (9), por igualdad de vectores, se obtiene:

$$-588 = -4\alpha_{DC}, \quad y, \quad 8\alpha_{BC} - 316 = -225,$$

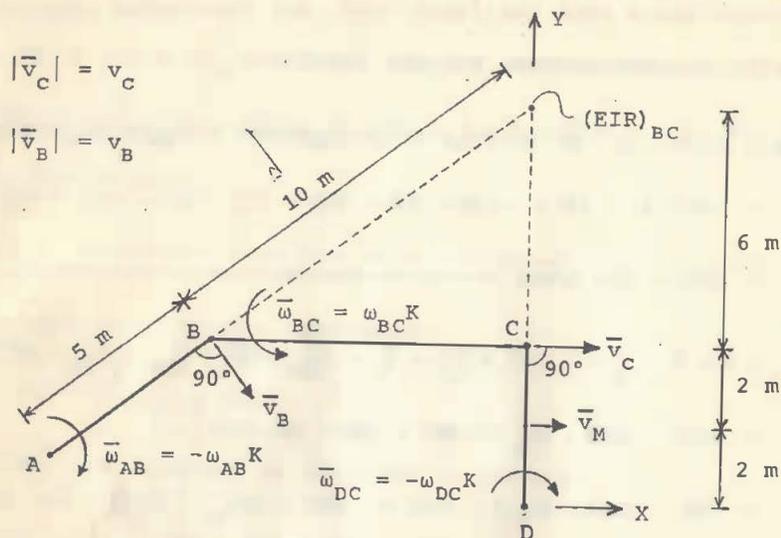
que implica: $\bar{\alpha}_{DC} = 147\mathbf{K} \text{ rad/seg}^2$, y, $\bar{\alpha}_{BC} = 11.375\mathbf{K} \text{ rad/seg}^2$;

entonces:

$$\begin{aligned} \bar{a}_M &= \ddot{\vec{R}} + \bar{\alpha} \times \bar{\rho}_M + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_M) = \vec{0} + (\bar{\alpha}_{DC}) \times (\vec{DM}) + \bar{\omega}_{DC} \times [(\bar{\omega}_{DC}) \times (\vec{DM})] = \\ &= (147\mathbf{K}) \times (2\mathbf{J}) + (-7.5\mathbf{K}) \times [(-7.5\mathbf{K}) \times (2\mathbf{J})] = \underline{-294\mathbf{I} - 112.5\mathbf{J} \text{ m/seg}^2}, \end{aligned}$$

que es la aceleración solicitada.

Solución al inciso b.- En la posición de interés, se tiene:



Como se muestra en el croquis, podemos escribir:

$$v_B = 5\omega_{AB} = 10\omega_{BC} \quad (10), \text{ y } v_C = 6\omega_{BC} = 4\omega_{DC} \quad (11);$$

$$\text{como, por (10), se tiene: } 3\omega_{AB} = 6\omega_{BC} \quad (10'),$$

de (10') y (11), obtenemos:

$$3\omega_{AB} = 4\omega_{DC}, \text{ de donde } \omega_{DC} = \frac{3}{4}\omega_{AB} = \frac{3}{4}(10) = 7.5 \text{ m/seg},$$

que implica:

$$\omega_{DC} = -7.5K \text{ rad/seg},$$

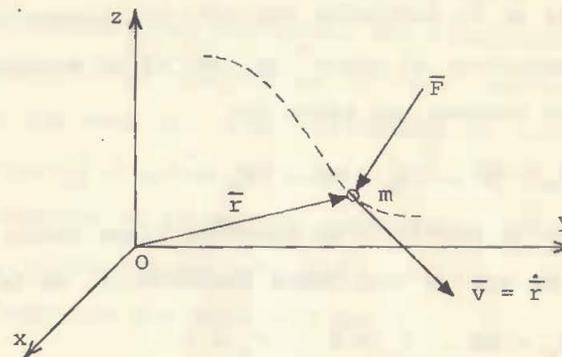
con lo que:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M = (\omega_{DC}) \times (DM) = (-7.5K) \times (2J) = 15I \text{ m/seg},$$

que corrobora lo obtenido al resolver el inciso a.

D1) DINAMICA DEL PUNTO MASA.

D1.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO.



Consideremos una partícula de masa m que se mueve describiendo una trayectoria cualquiera, como se indica en la figura, donde $Oxyz$ es un sistema de referencia fijo, en tanto que \vec{F} es la resultante del sistema de fuerzas que actúan sobre esa partícula, en un instante cualquiera.

Para el estudio del movimiento de dicha partícula, o punto masa, la 2a. Ley de Newton la podemos expresar mediante:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}), \text{ que para } m = \text{cte. toma la forma:}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ o bien, } \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \quad (I),$$

que recibe el nombre de "Ecuación diferencial de movimiento del punto masa".

Expresando tanto a \vec{F} como a $\ddot{\vec{r}}$ en función de sus componentes vectoriales, (I) puede escribirse como:

$$F_x i + F_y j + F_z k = m[\ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k]$$

de donde se obtienen, por igualdad de vectores, las siguientes

tres ecuaciones escalares independientes:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Obviamente, si la partícula describe una trayectoria plana, haciendo coincidir el plano xy con el de movimiento, su estudio puede hacerse por medio de:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = 0.$$

Aún más, si la partícula se mueve en línea recta, haciendo coincidir el eje x con dicha trayectoria, se tendrá:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0.$$

DIFERENTES CASOS DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO DEL PUNTO MASA.

Aunque existen muchos tipos de movimiento rectilíneo, aquí estudiaremos en forma especial aquellos donde la fuerza resultante de las que actúan sobre el punto masa, durante el movimiento de éste, sea:

- Constante,
- Función del tiempo,
- Función de la velocidad, o,
- Función de la posición.

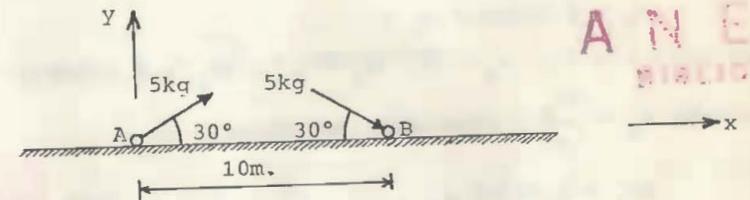
Generalmente, si al plantear la ecuación diferencial del movimiento no conocemos su solución (en forma prácticamente inmediata) y es necesario conocerla, habremos de obtenerla integrando para obtener primeramente v , y de ahí x .

Para integrar, lo más conveniente será sustituir a \ddot{x} por la expresión $\frac{dv}{dt}$, en los casos "a", "b" y "c"; en el caso

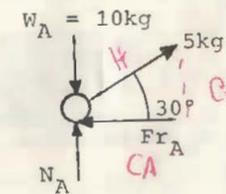
"d" haremos $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$.

Ejemplos ilustrativos del caso a. $F = \text{cte}$

1) Las partículas A y B de la figura son iguales, cada una de ellas pesa 10 kg, y se encuentran sujetas a la acción de fuerzas, cuyo módulo es constante, aplicadas como se indica. Si el movimiento que realizan es colineal, parten del reposo en la posición mostrada, y el coeficiente de fricción entre las partículas y el plano horizontal sobre el cual se mueven es 0.2, encuentre el tiempo que tardará A en alcanzar a B, así como la distancia que recorrió B desde que inició su movimiento hasta que fue alcanzada por A.



Solución.- d.c.l. de A, en movimiento:



de $F_y = 0$:

$$N_A - 10 + 5 \operatorname{sen} 30^\circ = 0, \quad N_A - 10 + 5 \frac{5}{H} 30^\circ = 0$$

luego:

$$N_A = 10 - 5(0.5) = 7.5 \text{ kg},$$

con lo que:

$$Fr_A = \mu N_A = (0.2)(7.5) = 1.5 \text{ kg};$$

INGENIERIA
ANEX
DINAMICA

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{5}{H} = \frac{W_y}{H} = 5 \text{ kg}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = W_y$$

de $F_x = m\ddot{x}$:

$$5 \cos 30^\circ - 1.5 = \frac{10}{g} \ddot{x}_A,$$

de donde:

$$\ddot{x} = \frac{g}{10} [5(0.866) - 1.5] = \frac{g}{10} (2.83),$$

o bien:

$$\ddot{x} = 0.283g = \text{cte} \text{ ----- (caso a);}$$

haciendo $\ddot{x} = \frac{dv_A}{dt}$ y separando variables:

$$dv_A = 0.283g dt,$$

integrando:

$$v_A = 0.283gt + c_1;$$

como para $t = 0, v_A = 0: c_1 = 0$ y $v_A = 0.283gt$;

haciendo $v_A = \frac{dx_A}{dt}$ y separando variables:

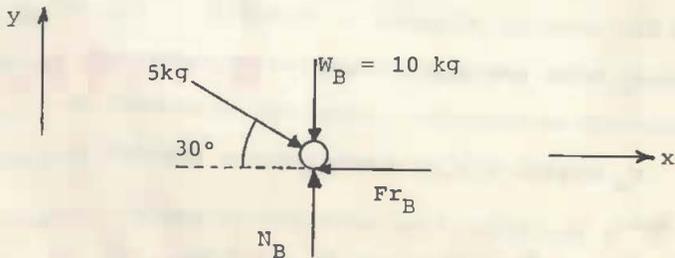
$$dx_A = 0.283gt dt,$$

integrando:

$$x_A = 0.283 \frac{gt^2}{2} + c_2;$$

de $x_A = 0$, para $t = 0: c_2 = 0$ y $x_A = 0.283 \frac{gt^2}{2}$ ----- (1);

hagamos ahora el d.c.l. de B, en movimiento:



de $F_y = 0$:

$$N_B - 10 - 5 \sin 30^\circ = 0,$$

luego:

$$N_B = 10 + 5(0.5) = 12.5 \text{ kg},$$

con lo que:

$$Fr_B = \mu N_B = 0.2(12.5) = 2.5 \text{ kg};$$

de $F_x = m\ddot{x}$:

$$5 \cos 30^\circ - 2.5 = \frac{10}{g} \ddot{x}_B$$

de donde:

$$\ddot{x}_B = 0.183g = \text{cte} \text{ ----- (caso a);}$$

haciendo $\ddot{x}_B = \frac{dv_B}{dt}$ e integrando:

$$v_B = 0.183gt + c_3;$$

como para $t = 0, v_B = 0: c_3 = 0$, y $v_B = 0.183gt$,

por lo que, haciendo $v_B = \frac{dx_B}{dt}$ e integrando:

$$x_B = 0.183 \frac{gt^2}{2} + c_4;$$

de $x_B = 10\text{m}$, para $t = 0$:

$$c_4 = 10, \text{ y, } x_B = 0.183 \frac{gt^2}{2} + 10 \text{ ----- (2);}$$

A alcanzará a B cuando se tenga $x_A = x_B$ o sea, tomando en cuenta (1) y (2), para:

$$0.283 \frac{gt^2}{2} = 0.183 \frac{gt^2}{2} + 10,$$

que se cumple para:

$$0.100 \frac{gt^2}{2} = 10, \text{ o bien para: } \frac{gt^2}{2} = 100 \text{ ----- (3);}$$

despejando:

$$t = \sqrt{\frac{200}{g}} = \sqrt{\frac{200}{9.81}} = 4.51 \text{ seg.} \quad (\text{Tiempo que tarda A en alcanzar a B});$$

sustituyendo (3) en (2):

$$x_B = 0.183(100) + 10 = 18.3 + 10 = 28.3 \text{ m};$$

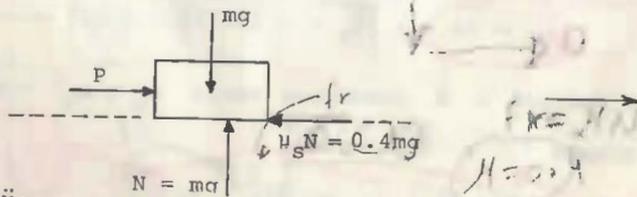
finalmente, se deduce que B ha recorrido:

$$28.3 - 10 = 18.3 \text{ m}$$

en el instante en que ha sido alcanzada por A.

2) Una cuadrilla de estibadores empuja horizontalmente un cajón hasta lograr moverlo sobre el piso. Si el coeficiente de fricción estática entre las superficies en contacto es de 0.4 y el de fricción cinética es $1/3$, determine el módulo de la aceleración del móvil durante los primeros instantes del movimiento, suponiendo que la fuerza necesaria para producirlo no varía, en magnitud, dirección y sentido, durante el lapso mencionado. Suponga que el cajón no voltea.

Solución.- d.c.l. a punto de moverse (último instante en reposo y última condición de equilibrio):

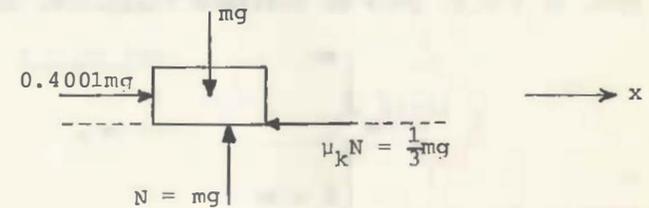


de $F_x = m\ddot{x}$:

$$P - 0.4mg = m(0), \text{ luego } P = 0.4 mg;$$

basados en esto último, podemos afirmar que basta aplicar una fuerza horizontal de magnitud ligeramente mayor a $0.4 mg$ pa-

ra poner en movimiento el cajón. Simbólicamente daremos a dicha fuerza un módulo de $0.4001 mg$ y la mostraremos así en el d.c.l. al iniciarse el movimiento:



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$0.4001mg - \frac{1}{3}mg = m\ddot{x},$$

luego:

$$\ddot{x} = \frac{g}{3}(1.2003 - 1) = \frac{0.2003}{3} g;$$

finalmente, tomando $g = 9.81 \text{ m/seg}^2$:

$$\ddot{x} = 0.654 \text{ m/seg}^2$$

Ejemplo ilustrativo del caso b.

Una partícula se mueve en línea recta y sobre un plano horizontal liso bajo la acción de una fuerza, paralela al plano cuyo módulo viene dado por $F = F_0 - ct$ donde F y F_0 están en libras, t en segundos y c en libras /seg. Si cuando $t = 0$ F iguala 16 libras y para $t = 8$ seg F es nulo, sabiendo que el movimiento se inicia a partir del reposo, determine el tiempo necesario para que el móvil retorne al punto de partida.

Solución.- Se tiene: $F = F_0 - ct$;

como para $t = 0$, $F = 16$:

$$16 = F_0 - c(0), \text{ luego}$$

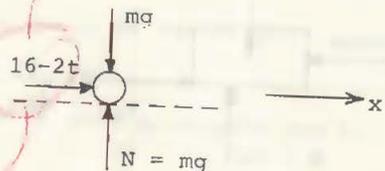


$$F_0 = 16 \text{ lb} \quad \text{y} \quad F = 16 - ct;$$

ahora, como $F = 0$ para $t = 8$:

$$0 = 16 - c(8), \text{ que implica } c = 2 \text{ lb/seg},$$

por lo que, el d.c.l. para un instante cualquiera resulta ser:



$$\text{de } F_x = m\ddot{x}:$$

$$16 - 2t = m\ddot{x} \quad \text{--- } t \geq 0,$$

luego:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(16 - 2t) = f(t) \quad \text{--- caso (b);}$$

haciendo $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$ y separando variables:

$$dv = \frac{1}{m}(16 - 2t) dt;$$

integrando:

$$v = \frac{1}{m}(16t - t^2) + c_1,$$

como para $t = 0$, $v = 0$:

$$c_1 = 0 \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{m}(16t - t^2);$$

integrando:

$$x = \frac{1}{m}\left(8t^2 - \frac{t^3}{3}\right) + c_2,$$

haciendo $x = 0$ para $t = 0$:

$$c_2 = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{t^2}{3m}(24 - t);$$

bajo la última condición impuesta ($x = 0$ para $t = 0$), la partícula retornará al punto de partida cuando tengamos de nuevo

$x = 0$; finalmente, de hacer

$$\frac{t^2}{3m}(24 - t) = 0$$

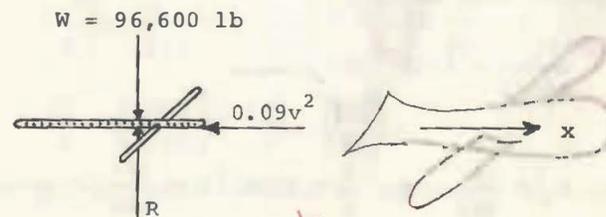
concluimos que la respuesta al ejercicio es

$$t = 24 \text{ seg.}$$

Ejemplo ilustrativo del caso c. $F = f(v)$

Un avión que pesa 96600 lb viaja con una rapidez de 100 millas por hora, horizontalmente y en línea recta, cuando se suspende la acción de las fuerzas motrices que lo impulsan. Suponiendo que su trayectoria no cambia, ¿qué distancia recorrerá antes de disminuir su rapidez a 20 m.p.h.? Considere que la fuerza horizontal de fricción, en lb, ejercida sobre el móvil tiene por módulo $0.09 v^2$, donde v está en ft/seg.

Solución.- d.c.l. una vez suspendidas las fuerzas motrices:



$$\text{de } F_x = m\ddot{x}:$$

$$-0.09v^2 \text{ lb} = \left[\frac{96600 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/seg}^2} \right] \ddot{x},$$

luego:

$$\ddot{x} = -3 \cdot 10^{-5} v^2 \quad [\text{ft/seg}^2, \text{ donde } v \text{ está en ft/seg}],$$

nótese que:

$$\ddot{x} = f(v) \quad \text{----- caso (c);}$$

haciendo $\dot{x} = \frac{dv}{dt}$ y separando variables:

$$\frac{dv}{v^2} = -3 \cdot 10^{-5} dt, \quad \text{--- } -3 \cdot 10^{-5} \text{ --- } -3/10^5 v^2 = \frac{dv}{dt}$$

integrando:

$$\frac{v^{-1}}{-1} = -3 \cdot 10^{-5} t + c_1,$$

o bien

$$\frac{1}{v} = 3 \cdot 10^{-5} t - c_1 \quad \text{----- (1)}$$

iniciando el conteo de tiempo en el instante que se suspende la acción de las fuerzas motrices, se tiene que:

$$v = 100 \text{ m.p.h. para } t = 0,$$

o sea que, para $t = 0$:

$$v = 100 \frac{\text{millas}}{\text{hora}} = (100) \frac{5280 \text{ ft}}{3600 \text{ seg}} = \frac{440}{3} [\text{ft/seg}];$$

sustituyendo esto en (1):

$$\frac{1}{440/3} = 3 \cdot 10^{-5} (0) - c_1,$$

luego:

$$c_1 = \frac{-3}{440} \quad \text{y} \quad \frac{1}{v} = 3 \cdot 10^{-5} t - \frac{3}{440} \quad \text{----- (2)}$$

o bien:

$$v = \frac{1}{3 \cdot 10^{-5} t + \frac{3}{440}},$$

haciendo $v = \frac{dx}{dt}$ y separando variables:

$$dx = \frac{dt}{3 \cdot 10^{-5} + \frac{3}{440}}$$

integrando:

$$x = \frac{1}{3 \cdot 10^{-5}} L \left(3 \cdot 10^{-5} t + \frac{3}{440} \right) + c_2,$$

haciendo $x = 0$ para $t = 0$:

$$0 = \frac{1}{3 \cdot 10^{-5}} L \left(0 + \frac{3}{440} \right) + c_2,$$

luego

$$c_2 = - \frac{1}{3 \cdot 10^{-5}} L \frac{3}{440}, \quad \text{y,}$$

$$x = \left[\frac{1}{3 \cdot 10^{-5}} L \left(3 \cdot 10^{-5} t + \frac{3}{440} \right) - L \frac{3}{440} \right] \quad \text{----- (3);}$$

sustituyendo (2) en (3):

$$x = \frac{10^5}{3} \left[L \frac{1}{v} - L \frac{3}{440} \right] \quad \text{----- (4);}$$

$$\text{como } 20 \text{ m.p.h.} = (20) \frac{5280 \text{ ft}}{3600 \text{ seg}} = \frac{88}{3} \text{ ft/seg,}$$

de (4), la posición del avión para este valor de v es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{10^5}{3} \left[L \frac{1}{88/3} - L \frac{3}{440} \right] = \frac{10^5}{3} \left[L \frac{3}{88} - L \frac{3}{440} \right] = \\ &= \frac{10^5}{3} L \left(\frac{3}{88} - \frac{3}{440} \right) = \frac{10^5}{3} L \left(\frac{440}{88} \right) \end{aligned}$$

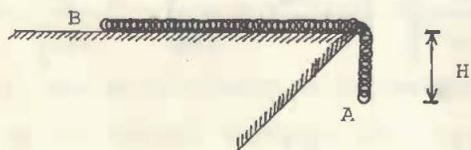
luego, para que el avión reduzca su rapidez a 20 m.p.h., bajo las condiciones mencionadas, deberá recorrer:

$$\frac{10^5}{3} L 5 = \frac{10^5}{3} (1.6) = \underline{53333.33 \text{ ft}} = \underline{10.1 \text{ millas.}}$$

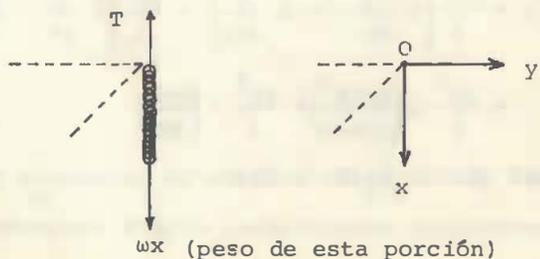
Ejemplos ilustrativos del caso d.

$F = f(x)$

1) A una cadena inextensible de longitud L y peso ω por unidad de longitud se le sujeta, sobre una superficie horizontal rugosa, en la posición que muestra la figura. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ , obtenga una expresión que nos permita determinar la posición de cadena en un instante cualquiera, desde que inicia su movimiento, hasta que está a punto de separarse de la superficie mencionada. ¿Cuál es el dominio de H para que exista movimiento?



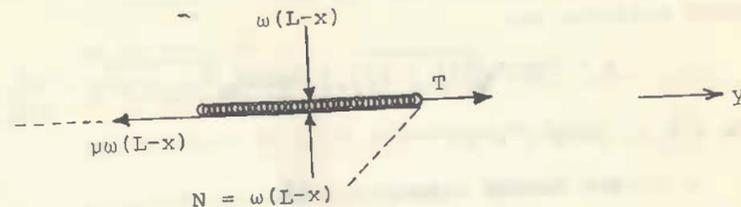
Solución.- d.c.l. de la porción vertical, una vez iniciado el movimiento:



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$\omega x - T = \frac{\omega x}{g} \ddot{x} \quad \text{----- (1)}$$

d.c.l. de la porción horizontal, en el mismo instante del d.c.l. anterior:



de $F_y = m\ddot{y}$:

$$T - \mu\omega(L - x) = \frac{\omega(L - x)}{g} \ddot{y} \quad \text{----- (2)}$$

pero, por ser inextensible la cadena:

$$\ddot{y} = \ddot{x} \quad \text{----- (3)}$$

de (2) y (3):

$$T - \mu\omega(L - x) = \frac{\omega(L - x)}{g} \ddot{x} \quad \text{----- (4)}$$

sumando (1) y (4), miembro a miembro:

$$\omega x - \mu\omega(L - x) = \frac{\omega \ddot{x}}{g} x + (L - x)$$

luego:

$$\omega x - \mu\omega(L - x) = \frac{\omega L}{g} \ddot{x} ,$$

de donde:

$$x - \mu L + \mu x = \frac{L}{g} \ddot{x} ;$$

despejando:

$$\ddot{x} = \frac{g}{L} [x - \mu L + \mu x]$$

o bien

$$\ddot{x} = \frac{g}{L} [(1 + \mu)x - \mu L] ,$$

que puede escribirse:

$$\ddot{x} - \frac{g}{L}(1 + \mu)x = \mu g$$

cuya solución es:

$$x = D \sinh \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)t} + E \cosh \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)t} + \frac{\mu L}{1 + \mu}, \quad (1);$$

de $x = H$, para $t = 0$:

$$H = D \sinh 0 + E \cosh 0 + \frac{\mu L}{1 + \mu},$$

luego:

$$E = H - \frac{\mu L}{1 + \mu} \quad (2),$$

derivando (1) con respecto a t :

$$\dot{x} = D \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)} \cosh \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)t} + E \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)} \sinh \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)t},$$

como para $t = 0$, $\dot{x} = 0$:

$$0 = D \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)} \cosh 0 + E \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)} \sinh 0,$$

luego:

$$D = 0, \quad (3)$$

con lo que, de (1), (2) y (3), se obtiene

$$x = \left[H - \frac{\mu L}{1 + \mu} \right] \cosh \sqrt{\frac{g}{L}(1 + \mu)t} + \frac{\mu L}{1 + \mu}$$

expresión que nos fija la posición de A, la que a su vez nos permite determinar la posición de cualquier otro punto de la cadena, en un instante cualquiera.

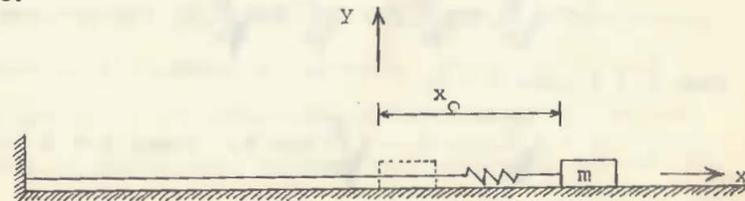
Finalmente, observando la expresión inmediata anterior:

para $H < \frac{\mu L}{1 + \mu}$: no existirá movimiento puesto que x decrecería al crecer t , cosa no factible si a la cadena se le suelta.

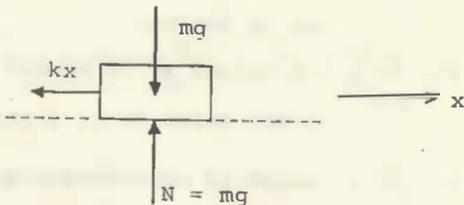
para $H = \frac{\mu L}{1 + \mu}$: la cadena no se moverá puesto que, para cualquier valor de t , x permanecerá igual a $\frac{\mu L}{1 + \mu}$

para $H > \frac{\mu L}{1 + \mu}$: existirá movimiento, puesto que x crecerá al ir creciendo t .

2) Un pequeño bloque de masa m se mueve sobre un plano horizontal liso bajo la acción de una fuerza restauradora lineal, de magnitud $|kx|$, proporcionada por un resorte que se encuentra unido al móvil, como indica la figura. Si el bloque se suelta desde una posición inicial x_0 , medida respecto a la posición natural de equilibrio del sistema formado por el resorte y el móvil, obtenga expresiones que nos permitan determinar la componente escalar de la velocidad y la posición, del bloque, para un instante cualquiera. Entiéndase por "posición natural de equilibrio" (p.n.e.), de un sistema resorte-masa, aquella para la cual (dicho sistema) permanece inmóvil luego de soltarlo.



Solución.- d.c.l. en una posición cualquiera, estirado el resorte:



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$-kx = m\ddot{x},$$

de donde:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

luego:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

cuya solución es:

$$x = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \operatorname{cos} \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (1);$$

de $x = x_0$ para $t = 0$:

$$x_0 = A \operatorname{sen} 0 + B \operatorname{cos} 0, \text{ luego } B = x_0 \quad (2),$$

derivando (1) con respecto a t :

$$\dot{x} = A \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{cos} \sqrt{\frac{k}{m}} t - B \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (3),$$

como $\dot{x} = 0$ para $t = 0$:

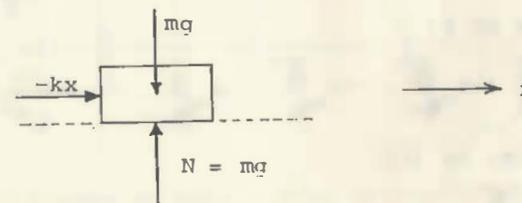
$$0 = A \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{cos} 0 - B \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen} 0, \text{ luego } A = 0 \quad (4),$$

resumiendo, de (1), (2), (3) y (4), para un instante cualquiera:

$$x = x_0 \operatorname{cos} \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (5),$$

$$\dot{x} = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (6).$$

Analicemos ahora un d.c.l. en una posición cualquiera, comprimido el resorte, de manera tal que el punto de unión de éste con el bloque se encuentre en la región negativa, del sistema de referencia dado. Ahora, de acuerdo con las condiciones mencionadas, el módulo de la fuerza restauradora será $-kx$, ya que para $x < 0$ se tiene $-kx > 0$.



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$+(-kx) = m\ddot{x},$$

de donde obtenemos:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

que es la ecuación diferencial que obtuvimos al analizar una posición cualquiera para el resorte estirado. De acuerdo con esto, sólo existe una ecuación diferencial de movimiento correspondiente al fenómeno en estudio, razón por la cual las ecuaciones (5) y (6) obtenidas anteriormente nos sirven para analizar el movimiento independientemente de que el resorte esté estirado o comprimido, o que el móvil se mueva de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda.

INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

Construcción de las gráficas correspondientes a las ecuaciones (5) y (6).

Para que x se anule, de (5):

$$x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t = 0,$$

que se cumple para

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t = \tilde{n} \frac{\pi}{2} \text{ ----- } (\tilde{n} \text{ entero impar } \geq 1),$$

o sea para

$$t = \frac{\pi \sqrt{m}}{2\sqrt{k}}, \frac{3\pi \sqrt{m}}{2\sqrt{k}}, \frac{5\pi \sqrt{m}}{2\sqrt{k}}, \frac{7\pi \sqrt{m}}{2\sqrt{k}}, \text{ ----- etc.},$$

para estos valores de t :

$$\dot{x} = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}, x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}, -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}, x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ ----- etc.};$$

para que \dot{x} se anule, de (6):

$$-x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t = 0,$$

que se cumple para:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t = n\pi \text{ ----- } (n \text{ entero } \geq 0,)$$

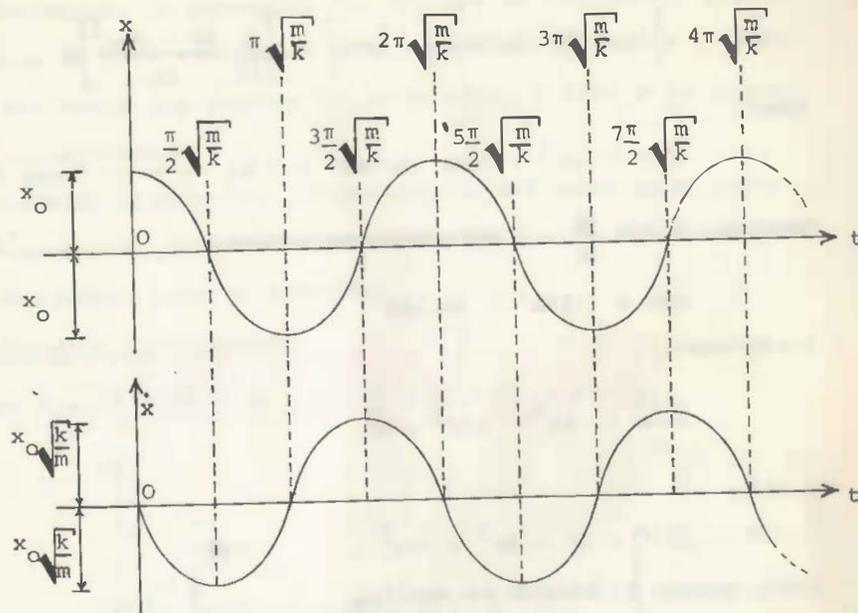
o sea para:

$$t = 0, \pi \sqrt{\frac{m}{k}}, 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, 3\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, 4\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \text{ ----- etc.},$$

para estos valores de t :

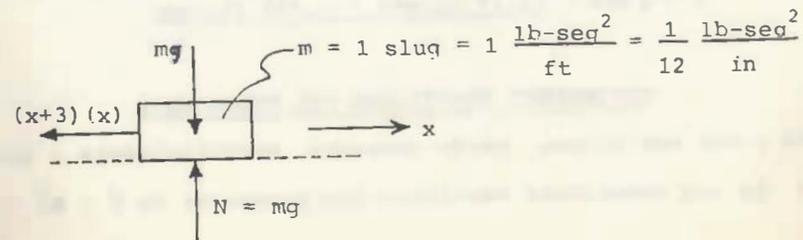
$$x = x_0, -x_0, x_0, -x_0, x_0, \text{ ----- etc.}$$

finalmente, las gráficas "posición-tiempo" y "componente escalar de la velocidad-tiempo", respectivamente, son:



3) Un bloque de masa 1 slug se moverá sobre una superficie horizontal lisa, bajo la acción de una fuerza restauradora paralela al plano de movimiento, cuya magnitud viene dada por rx , debida a un resorte unido a aquel, donde r es función de la elongación del resorte, esto es: $r = (x + 3)$ lb/in, para x en pulgadas. Si el bloque se suelta cuando el resorte se encuentra estirado 3 in, ¿con qué rapidez pasará por la posición natural de equilibrio?

Solución.- d.c.l. para $x \geq 0$



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$-\left[(x + 3) \text{ lb/in} \right] \left[x \text{ (in)} \right] = \left[\frac{1}{12} \frac{\text{lb} \cdot \text{seg}^2}{\text{in}} \right] \ddot{x} ,$$

luego:

$$\ddot{x} = (-12x^2 - 36x) \text{ in/seg}^2 = f(x) \text{ ----- (caso d) ,}$$

haciendo $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$ y separando variables:

$$\dot{x} d\dot{x} = (-12x^2 - 36x) dx ,$$

integrando:

$$\frac{(\dot{x})^2}{2} = -4x^3 - 18x^2 + c ,$$

o bien:

$$(\dot{x})^2 = 2c - 8x^3 - 36x^2 ,$$

como, cuando el bloque se suelta:

$$\dot{x} = 0 \quad \text{y} \quad x = 3 \text{ in} ,$$

se tiene:

$$(0)^2 = 2c - 8(3)^3 - 36(3)^2 ,$$

luego:

$$2c = 216 + 324 = 540 ,$$

con lo que:

$$\dot{x} = \sqrt{540 - 8x^3 - 36x^2} \quad (\text{in/seg, para } x \text{ en pulgadas})$$

o sea que, cuando el bloque llega a la p.n.e. ($x = 0$ para este problema), se tiene:

$$\dot{x} = \sqrt{540} = 23.24 \text{ in/seg} = 1.936 \text{ ft/seg.}$$

MOVIMIENTO CURVILINEO DEL PUNTO MASA

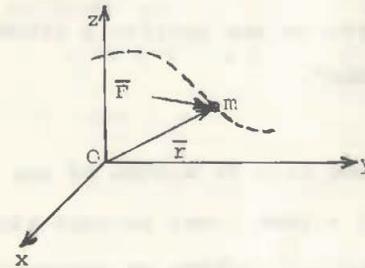
Este puede estudiarse, según convenga, vectorialmente o por medio de las ecuaciones escalares que provengan de $\vec{F} = m\vec{r}'' \dots (I)$.

Generalmente, la selección del sistema de referencia por emplearse se hace atendiendo a las características de la fuerza resultante que produce el movimiento, o bien a la forma de la trayectoria.

La ecuación diferencial de movimiento del punto masa puede descomponerse, para los sistemas de referencia más comúnmente empleados, como se muestra:

Coordenadas cartesianas

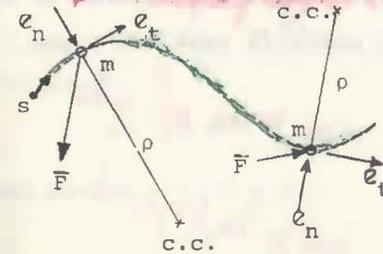
donde $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ y $\vec{r}'' = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$



$$\vec{F} = m\vec{r}'' \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{array} \right.$$

Coordenadas intrínsecas (o normal y tangencial)

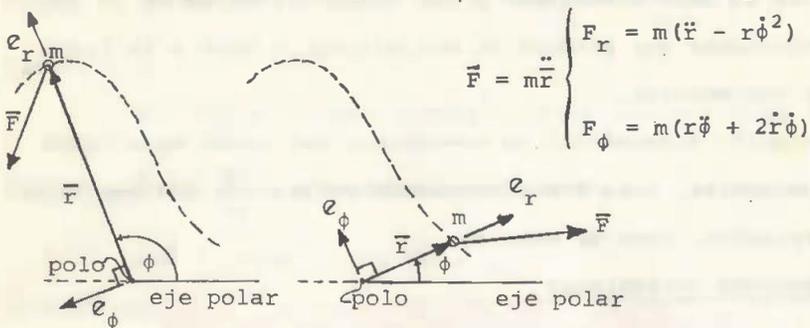
donde $\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t$ y $\vec{r}'' = \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{e}_n$



$$\vec{F} = m\vec{r}'' \quad \left\{ \begin{array}{l} F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ F_t = m\ddot{s} \end{array} \right.$$

Coordenadas polares

donde $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$, $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{e}_\phi$



Ejemplo ilustrativo de "movimiento de una partícula estudiado utilizando coordenadas cartesianas".

Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza, \vec{F}_C , dada por: $\vec{F}_C = m\vec{i} + m\vec{j} + 16m\vec{k}$ -que incluye el peso del móvil- y, durante el movimiento, también se encuentra sometida a una fuerza de fricción la cual, a su vez, viene expresada por $\vec{F}_r = -m\dot{x}\vec{i} - m\dot{y}\vec{j} + 2m\dot{z}\vec{k}$. Si cuando $t = 0$ la partícula se encuentra en reposo, en el origen del sistema de referencia, determine su velocidad y posición para $t = 1$ seg.

Solución.- Se tiene:

$\vec{F}_C = m\vec{i} + m\vec{j} + 16m\vec{k}$, *siempre sobre partícula*

y

$\vec{F}_r = -m\dot{x}\vec{i} - m\dot{y}\vec{j} + 2m\dot{z}\vec{k}$, *siempre la fricción*

luego: $\vec{F} = m(1 - \dot{x})\vec{i} + m(1 - \dot{y})\vec{j} + m(16 + 2\dot{z})\vec{k}$,

por lo que,

de $F_x = m\ddot{x}$:

$m(1 - \dot{x}) = m\ddot{x}$,

de $F_y = m\ddot{y}$:

$m(1 - \dot{y}) = m\ddot{y}$,

de $F_z = m\ddot{z}$:

$m(16 + 2\dot{z}) = m\ddot{z}$,

de donde:

$\ddot{x} = 1 - \dot{x} = f(\dot{x})$,

$\ddot{y} = 1 - \dot{y} = f(\dot{y})$,

$\ddot{z} = 16 + 2\dot{z} = f(\dot{z})$,

haciendo $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \dot{v}_x$,

$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dy} \dot{y} = \dot{v}_y$,

$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz} \dot{z} = \dot{v}_z$,

se tiene:

$\dot{v}_x + v_x = 1$,

$\dot{v}_y + v_y = 1$,

$\dot{v}_z - 2v_z = 16$,

cuya solución es:

$v_x = C_1 e^{-t} + 1$,

$v_y = C_2 e^{-t} + 1$

$v_z = C_3 e^{2t} - 8$;

de $\vec{v} = 0$ para $t = 0$:

$0 = C_1 e^0 + 1$,

$0 = C_2 e^0 + 1$,

$0 = C_3 e^0 - 8$;

luego:

$v_x = 1 - e^{-t}$,

$v_y = 1 - e^{-t}$,

$v_z = 8e^{2t} - 8$;

haciendo $v_x = \frac{dx}{dt}$,

$v_y = \frac{dy}{dt}$,

$v_z = \frac{dz}{dt}$,

y separando variables:

$dx = (1 - e^{-t})dt$, $dy = (1 - e^{-t})dt$, $dz = (8e^{2t} - 8)dt$,

integrando:

$x = t + e^{-t} + C_4$, $y = t + e^{-t} + C_5$, $z = 4e^{2t} - 8t + C_6$;

como para $t = 0$, $\vec{r} = 0$:

$0 = 0 + e^0 + C_4$,

$0 = 0 + e^0 + C_5$,

$0 = 4e^0 - 0 + C_6$;

resumiendo, para cualquier valor de t :

$\dot{\vec{r}} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = (1 - e^{-t})\vec{i} + (1 - e^{-t})\vec{j} + 8(e^{2t} - 1)\vec{k}$,

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (t + e^{-t} - 1)\vec{i} + (t + e^{-t} - 1)\vec{j} + 4(e^{2t} - 2t - 1)\vec{k}$;

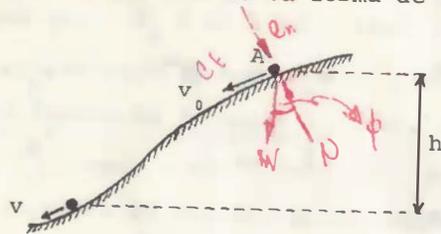
finalmente, para $t = 1$ seg:

$$\vec{v} = (1 - e^{-1})i + (1 - e^{-1})j + 8(e^2 - 1)k = \underline{0.632i + 0.632j + 51.12k}$$

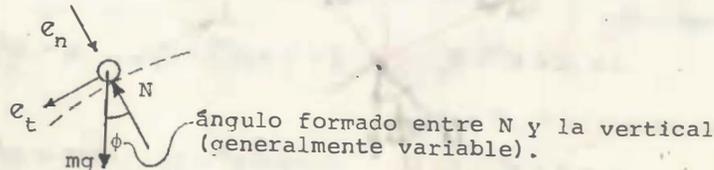
$$\vec{r} = (1 + e^{-1} - 1)i + (1 + e^{-1} - 1)j + 4(e^2 - 2 - 1)k = \underline{0.368i + 0.368j + 17.56k}$$

Ejemplos ilustrativos de "movimiento de una partícula estudiado utilizando coordenadas intrínsecas".

1) Una partícula parte con rapidez v_0 desde el punto A, y desliza hacia abajo por una rampa lisa, como se muestra en la figura. Demuestre que la rapidez v , de la partícula, en un punto cualquiera a una distancia vertical h medida respecto a A, es independiente de la forma de la trayectoria.



Solución.- d.c.l. para un instante cualquiera:



de $F_t = m\ddot{s}$:

$$mg \sin \phi = m\ddot{s}$$

luego:

$$\ddot{s} = g \sin \phi = f(\phi);$$

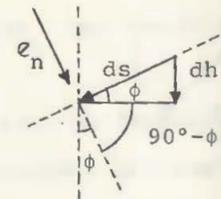
haciendo $\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\dot{s}}{ds}$, se tiene

$$\dot{s} \frac{d\dot{s}}{ds} = g \sin \phi$$

separando variables:

$$\dot{s} ds = g(\sin \phi) (ds) \text{ ----- (1),}$$

pero, para una ds cualquiera:



del último croquis:

$$(ds) (\sin \phi) = dh \text{ ----- (2)}$$

sustituyendo (2) en (1):

$$\dot{s} ds = g(dh)$$

integrando:

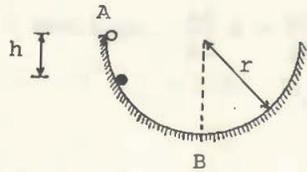
$$\left[\frac{s^2}{2} \right]_{v_0}^v = gh \text{ luego: } \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = gh;$$

finalmente:

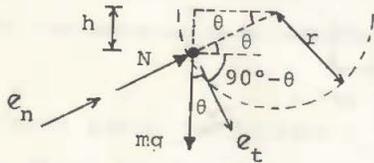
$$v^2 = v_0^2 + 2gh,$$

independientemente de la forma de trayectoria, l.q.q.d.

2) Una partícula de masa m se mueve en un plano vertical, sobre una superficie semicircular lisa, partiendo del reposo en el punto A de la figura. Encuentre una expresión para determinar el módulo de la fuerza normal, ejercida sobre la partícula, en función de m , g , h y r . ¿Cuál es la magnitud de dicha fuerza en el punto más bajo, B de la superficie? Verifique la respuesta a esto último.



Solución.- d.c.l. para una h cualquiera:



de $F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho}$:

$$-mg \sin \theta + N = m \frac{\dot{s}^2}{r}$$

como, para una h cualquiera:

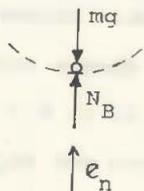
$\dot{s}^2 = 2gh$ (ver problema anterior; en éste $v_0 = 0$), y $\sin \theta = \frac{h}{r}$,
tenemos ahora:

$$-mg \left(\frac{h}{r}\right) + N = m \left(\frac{2gh}{r}\right), \text{ luego: } N = \frac{3mgh}{r};$$

de esto último obtenido, para B, cuando h toma el valor r:

$$N_B = \frac{3mgr}{r} = 3mg;$$

comprobación para N_B .- d.c.l. en B:



de $F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho}$, tomando en cuenta que:

$$\dot{s}_B^2 = 2gr \text{ ---- (ver problema anterior, en éste, } v_0 = 0)$$

podemos escribir:

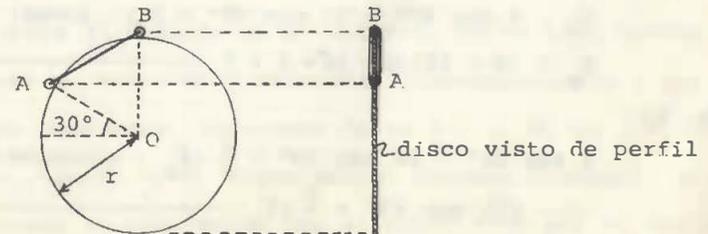
$$N_B - mg = m \left(\frac{2gr}{r}\right)$$

de donde:

$$N_B = 3mg, \text{ que verifica el valor obtenido antes.}$$

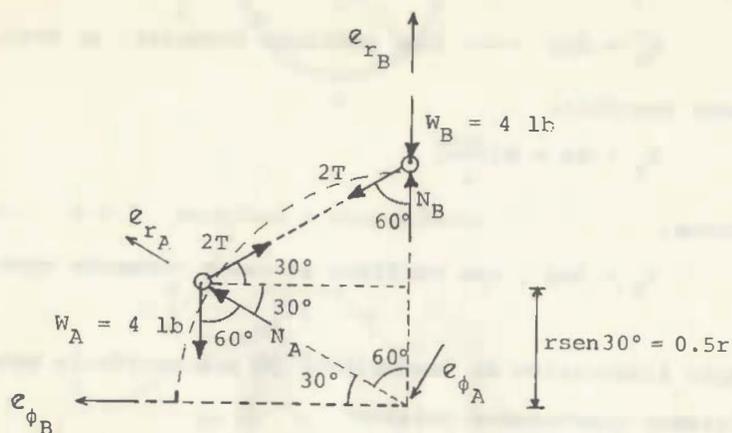
Ejemplo ilustrativo de "movimiento de una partícula estudiado utilizando coordenadas polares".

Dos partículas, A y B, conectadas por dos cuerdas flexibles e inextensibles, se moverán en un plano vertical sobre el disco circular liso mostrado, mismo que se encuentra fijo. Si el sistema parte del reposo en la posición mostrada y cada una de las partículas pesa 4 lb, determine, para el instante indicado: a) el módulo de la tensión en cada una de las cuerdas y, b) la magnitud de las fuerzas normales ejercidas sobre las partículas.



2 disco visto de perfil

Solución.- d.c.l. para el instante de interés:



Cuando la trayectoria de la partícula es circular, las expresiones

$$\bar{v} = \dot{r}e_r + r\dot{\phi}e_\phi, \quad F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2), \quad \text{y}, \quad F_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}),$$

toman la forma:

$$\bar{v} = r\dot{\phi}e_\phi \quad \text{----- (a),}$$

$$F_r = -mr\dot{\phi}^2 \quad \text{----- (b), y,}$$

$$F_\phi = mr\ddot{\phi} \quad \text{----- (c);}$$

como para el instante mostrado tenemos $\dot{\phi}_A = 0$ y $\dot{\phi}_B = 0$,
para la partícula A, de (b):

$$N_A - 4 \cos 60^\circ - 2T \cos 60^\circ = 0, \quad \text{luego:}$$

$$N_A = (4 + 2T) \cos 60^\circ = 2 + T \quad \text{----- (1),}$$

de (c):

$$4 \sin 60^\circ - 2T \sin 60^\circ = \frac{4}{g} r\ddot{\phi}_A, \quad \text{entonces:}$$

$$(4 - 2T) \sin 60^\circ = \frac{4}{g} r\ddot{\phi}_A \quad \text{----- (2)}$$

para la partícula B, de (b):

$$N_B - 4 - 2T \cos 60^\circ = 0,$$

luego:

$$N_B = 4 + T \quad \text{----- (3),}$$

de (c):

$$2T \sin 60^\circ = \frac{4}{g} r\ddot{\phi}_B \quad \text{----- (4);}$$

como, mientras A y B mantengan contacto con el disco,

$$\ddot{\phi}_A = \ddot{\phi}_B \quad \text{----- (5),}$$

de (2), (4) y (5):

$$(4 - 2T) \sin 60^\circ = 2T \sin 60^\circ,$$

$$\text{luego } T = 1 \text{ lb} \quad \text{----- (6)}$$

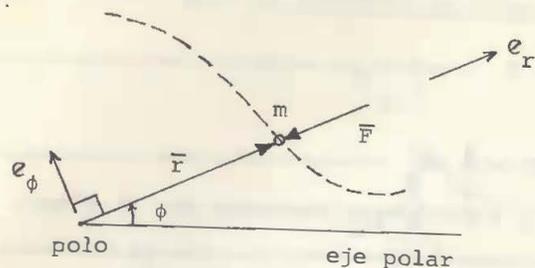
(módulo de la tensión en cada una de las cuerdas),

sustituyendo (6) en (1) y (3), respectivamente,

$$\underline{N_A = 3 \text{ lb}} \quad \text{y} \quad \underline{N_B = 5 \text{ lb.}}$$

MOVIMIENTO CENTRAL

Estudiaremos éste utilizando un sistema de referencia polar, sólo que antes definiremos "fuerza central, o radial, como aquella cuya línea de acción siempre pasa por un punto fijo". Basados en la definición anterior podemos decir que un punto masa describirá un movimiento central si la fuerza resultante, que obra sobre él durante el movimiento, es de tipo central. Para obtener la ecuación diferencial correspondiente a los movimientos centrales partiremos de un d.c.l. en un instante cualquiera, donde -por conveniencia- haremos coincidir el polo del sistema de referencia con el punto fijo por el que pase la fuerza resultante que obra sobre el móvil en estudio.



$$\text{de } F_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}):$$

$$0 = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}), \text{ luego } r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0;$$

multiplicando ambos miembros por r:

$$r^2\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} = 0,$$

que puede escribirse:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi} + C_1) = 0,$$

luego:

$$r^2\dot{\phi} + C_1 = \text{cte} = C_2,$$

de donde:

$$\dot{\phi} = \left[\frac{C_2 - C_1}{r^2} \right], \text{ o bien:}$$

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2}, \text{ donde } h \text{ es constante} \quad \text{----- (a)}$$

propiedad muy importante de los movimientos centrales que nos dice: "la rapidez angular del radio vector, que define la posición de la partícula en estudio, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el móvil y el punto fijo por donde pasa la resultante de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula".

Ahora, de $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)$:

$$-F = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \quad \text{----- (b)}$$

como, por tratarse de un movimiento central, basados en (a),

podemos escribir:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} = \left(\frac{h}{r^2}\right) \frac{dr}{d\phi} = -h \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right),$$

o bien:

$$\dot{r} = -h \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{----- (c);}$$

derivando (c) con respecto a t:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left[-h \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r}\right) \right] = \left\{ \frac{d}{d\phi} \left[-h \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r}\right) \right] \right\} \frac{d\phi}{dt} = -h\dot{\phi} \left[\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r}\right) \right],$$

que también podemos escribir, tomando en cuenta (a):

$$\ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r}\right) \right] \quad \text{----- (d),}$$

sustituyendo (d) y (a) en (b):

$$-F = m \left[-\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r}\right) - r \left(\frac{h}{r^2}\right)^2 \right],$$

que da lugar a:

$$\frac{F}{m} = \frac{h^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \right];$$

haciendo $u = \frac{1}{r}$:

$$\frac{F}{m} = h^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u \right],$$

$$\text{despejando: } \frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{F}{mh^2 u^2} \quad \text{----- (II)}$$

"Ecuación diferencial correspondiente a los movimientos centrales".

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL SUJETO ÚNICAMENTE A LA ACCIÓN DE LA FUERZA GRAVITATORIA TERRESTRE.

Sea un proyectil de masa m , sujeto a la atracción terrestre. Llamando M a la masa de la Tierra, la Ley de la Gravitación Universal puede expresarse en la forma:

$$\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r,$$

donde G es la constante de la gravitación universal y r la distancia entre el proyectil y el centro de La Tierra.

En este caso, la ecuación (II) toma la forma:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm/r^2}{mh^2u^2}$$

recordando que hicimos $u = \frac{1}{r}$, tenemos ahora:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GMmu^2}{mh^2u^2},$$

que se reduce a:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (1);$$

como, para una partícula situada en la periferia de La Tierra:

$$\frac{GMm}{R^2} = mg \quad (2),$$

de (2) y (1):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{gR^2}{h^2} \quad (II_T)$$

"Ecuación diferencial correspondiente al movimiento de un proyectil sujeto únicamente a la acción de la fuerza gravitacional terrestre".

Recordemos que podemos expresar \vec{v} como

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi;$$

si el proyectil sale despedido con una velocidad v_0 , tal

que $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$ podemos escribir:

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_\phi = r_0\dot{\phi}_0\vec{e}_\phi \quad (3),$$

como, en cualquier instante, por tratarse de un movimiento central:

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2},$$

para el instante del lanzamiento se tiene:

$$\dot{\phi}_0 = \frac{h}{r_0^2} \quad (4),$$

sustituyendo (4) en (3):

$$v_0 = r_0 \left(\frac{h}{r_0^2} \right) = \frac{h}{r_0},$$

luego, bajo las condiciones mencionadas:

$$h = r_0 v_0 \quad (5),$$

sustituyendo (5) en (II_T):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2},$$

cuya solución es: $u = A \sin \phi + B \cos \phi + \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2}$,

que puede escribirse: $\frac{1}{r} = D \cos(\phi + \phi_0) + \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2}$;

si hacemos que la dirección del eje polar del sistema de referencia coincida con la de \bar{r}_0 :

$$\phi_0 = 0,$$

lo que hace que la solución de (II_T) tome la forma:

$$\frac{1}{r} = D \cos \phi + \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2},$$

como para $\phi = 0^\circ$, $r = r_0$:

$$\frac{1}{r_0} = D \cos 0 + \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2},$$

finalmente:

$$\frac{1}{r} = \left[\frac{1}{r_0} - \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2} \right] \cos \phi + \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2} \quad \text{--- (II-a)}$$

"Ecuación que define el movimiento de un proyectil sujeto a la acción de la fuerza gravitatoria terrestre".

Puede observarse que (II-a) es la ecuación de una cónica, en coordenadas polares, cuya excentricidad es:

$$\epsilon = \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2}}{\frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2}};$$

casos diversos:

para $\epsilon > 1$ la trayectoria es hiperbólica,

para $\epsilon = 1$ la trayectoria es parabólica,

para $0 < \epsilon < 1$ la trayectoria es elíptica, y,

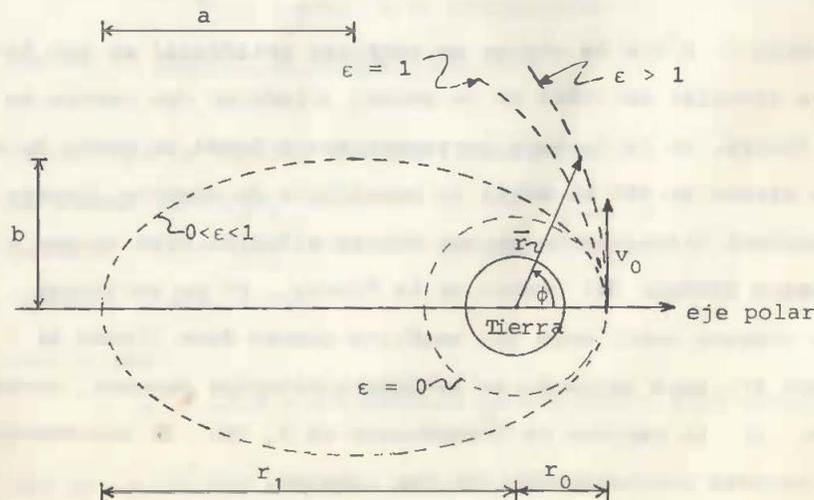
para $\epsilon = 0$ la trayectoria es circular.

Si la trayectoria es una elipse, uno de sus focos es el centro de La Tierra y, puede demostrarse (ver figura) que sus semiejes son de longitudes:

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \quad \text{y} \quad b = \sqrt{r_0 r_1},$$

en tanto que el tiempo que tarda en recorrer una órbita completa viene dado por:

$$\tau = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0}$$



si hacemos

$$\epsilon = 1: \frac{1}{r_0} - \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2} = \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2},$$

de donde:

$$\frac{1}{r_0} = \frac{2gR^2}{r_0^2 v_0^2},$$

despejando:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}},$$

a este valor de v_0 se le denomina, por razones obvias, rapidez de escape.

Para que la trayectoria sea circular necesitamos que $\epsilon = 0$, lo cual se logra si:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}.$$

Ejemplo.- A fin de situar un satélite artificial en una órbita circular de 32000 km de radio, alrededor del centro de La Tierra, se le lanzará horizontalmente desde un punto A, a una altura de 480 km sobre la superficie de nuestro planeta, y entrará inicialmente en una órbita elíptica cuyo apogeo A' distará 32000km del centro de La Tierra. Si se encienden los cohetes auxiliares del satélite cuando éste llegue al punto A', para situarlo en la órbita circular deseada, encuentre: a) La rapidez de lanzamiento en A, b) el incremento de rapidez proporcionado por los cohetes.

Solución.- Si en (II-a) hacemos $\phi = 180^\circ$, r será r_1 , esto es:

$$\frac{1}{r_1} = \left[\frac{1}{r_0} - \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2} \right] \cos 180^\circ + \frac{gR^2}{r_0^2 v_0^2},$$

de donde:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{2gR^2}{r_0^2 v_0^2}, \text{ que se cumple si: } \frac{r_0 + r_1}{r_1 r_0} = \frac{2gR^2}{r_0^2 v_0^2},$$

luego:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR^2 r_1}{r_0 (r_0 + r_1)}},$$

y como:

$$r_1 = 32000 \text{ km} = 32 \times 10^6 \text{ m},$$

al ser:

$$r_0 = (6400 + 480) \text{ km} = 6.88 \times 10^6 \text{ m},$$

se tiene:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 9.81 \text{ m/seg} \times (6.4 \times 10^6 \text{ m}) \times 32 \times 10^6 \text{ m}}{6.88 \times 10^6 \text{ m} \times (38.88 \times 10^6 \text{ m})}} = 9805 \text{ m/seg},$$

que es la rapidez de lanzamiento en A.

Cálculo de la rapidez con que llegará a A' ;

se tiene: $h = r_0 v_0$ ----- ya que $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$,

además: $h = r_1 v_1$ ----- ya que $\vec{v}_1 \perp \vec{r}_1$,

luego: $r_0 v_0 = r_1 v_1$,

con lo que:

$$v_1 = \frac{r_0 v_0}{r_1} = \frac{(6.88 \times 10^6 \text{ m})(9805 \text{ m/seg})}{32 \times 10^6 \text{ m}} = 2108 \text{ m/seg},$$

que es la rapidez con que llegará a A' ;

como para que, a partir de A', el móvil entre en la órbita-circular deseada:

$$v'_A = \sqrt{\frac{gR^2}{r'_A}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ m/seg}^2 \times (6.4 \times 10^6 \text{ m})^2}{32 \times 10^6 \text{ m}}} = 3544 \text{ m/seg},$$

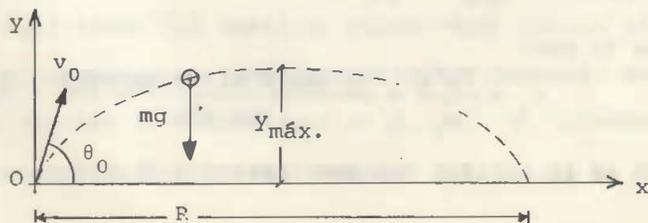
el incremento de rapidez proporcionado por los cohetes deberá ser:

$$3544 - 2108 = \underline{1436 \text{ m/seg.}}$$

TIRO PARABOLICO

Si desde cierto punto lanzamos una partícula, con una velocidad inicial \vec{v}_0 , y durante el movimiento se encuentra sujeta únicamente a la acción de la gravedad (considerada constante para lanzamientos cuya altura máxima, alcanzada sobre La Tierra es despreciable comparada con el radio de ésta), la trayectoria que describirá será una parábola.

Para obtener expresiones generales que nos determinen velocidad y posición del móvil, partiremos del d.c.l. en un punto cualquiera de la trayectoria y, dadas las condiciones mencionadas anteriormente, estudiaremos este tipo de movimiento empleando el sistema cartesiano de referencia mostrado a continuación.



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$0 = m\ddot{x}, \quad \text{luego: } \ddot{x} = 0,$$

integrando:

$$\dot{x} = c_1 = \text{cte}, \quad \text{y como: } \dot{x}_0 = v_0 \cos \theta_0,$$

se tiene:

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0 = \text{cte.} \quad \text{----- (1);}$$

integrando de nuevo:

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t + C_2,$$

de $x = 0$, para $t = 0$:

$$C_2 = 0, \quad \text{y,}$$

$$x = (v_0 \cos \theta_0)t \quad \text{----- (2);}$$

de $F_y = m\ddot{y}$:

$$-mg = m\ddot{y},$$

luego:

$$\dot{y} = -g = \text{cte.},$$

integrando:

$$\dot{y} = -gt + c_3,$$

como para $t = 0$, $\dot{y} = v_0 \sin \theta_0$:

$$c_3 = v_0 \sin \theta_0, \quad \text{y,}$$

$$\dot{y} = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad \text{----- (3),}$$

integrando de nuevo:

$$y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 + c_4,$$

de $y = 0$, para $t = 0$:

$$c_4 = 0, \quad \text{y,}$$

$$y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{----- (4)}$$

resumiendo, tomando en cuenta (2) y (4), para un instante

cualquiera:

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{x}i + \dot{y}j = (v_0 \cos \theta_0)i + (v_0 \sin \theta_0 - gt)j, \quad y,$$

$$\bar{r} = xi + yj = \left[(v_0 \cos \theta_0)t \right]i + \left[(v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \right]j.$$

Determinación de la ecuación de la trayectoria; de (2):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \quad \text{-----} \quad (5),$$

sustituyendo (5) en (4):

$$y = (v_0 \sin \theta_0) \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta_0} \right)^2,$$

de donde obtenemos:

$$y = (\tan \theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right)x^2,$$

ecuación cartesiana correspondiente a una parábola.

La altura máxima que alcanzará el proyectil, sobre el plano horizontal de referencia, se tendrá cuando \dot{y} tome el valor cero, esto es para:

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}, \quad \text{valor obtenido de (3);}$$

sustituyendo este valor en (4):

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}.$$

El alcance máximo R, sobre la horizontal de referencia, se tendrá cuando la y se anule, cosa que sucederá -basados en (4)- para:

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$$

finalmente, sustituyendo este valor en (2):

$$R = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}, \quad \text{o sea: } R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}.$$

VIBRACIONES.

En una forma sencilla podemos definir una "vibración" como un movimiento que, generalmente, se repite en forma periódica. Diremos que, si a un sistema elástico que se encuentra en equilibrio estable se le da un pequeño desplazamiento inicial (o una velocidad) y se le suelta, vibrará alrededor de su posición natural de equilibrio (p.n.e.), aunque ello no implique el que se cruce ésta.

Se presenta una "vibración libre" cuando el sistema elástico en estudio, durante su movimiento, se encuentra sujeto únicamente a fuerzas consideradas como propias de dicho sistema. Las ecuaciones diferenciales correspondientes a estos tipos de movimientos son homogéneas.

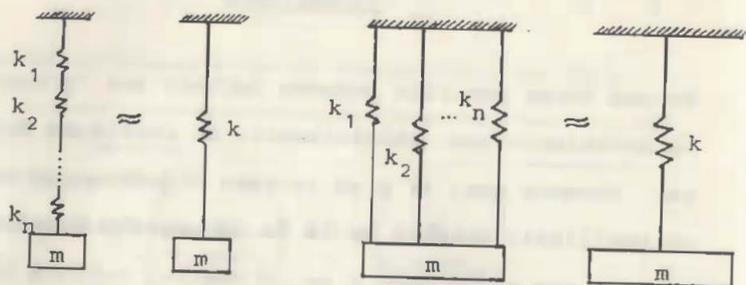
Las "vibraciones forzadas" ocurren cuando el sistema en estudio se ve activado por una o varias fuerzas consideradas como no propias de dicho sistema, llamadas externas o excitadoras, que en muchas situaciones reales varían periódicamente.

Las ecuaciones diferenciales correspondientes a estos tipos de vibraciones son no homogéneas.

Definiremos la "posición natural de equilibrio (p.n.e.) de un sistema elástico" como la posición para la cual, dicho sistema, permanece inmóvil luego de soltarlo.

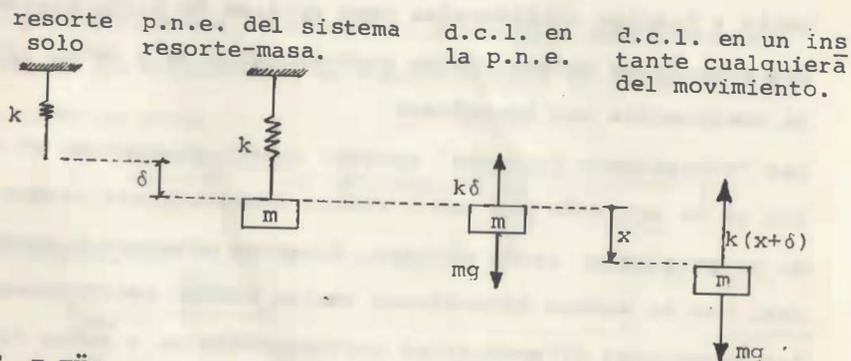
Antes de entrar de lleno al estudio de las vibraciones veremos como se puede obtener la constante de un resorte, llama-

do equivalente, que producirá los mismos resultados (desde el punto de vista "estudio dinámico" del cuerpo en observación) que varios de ellos conectados, ya sea en serie o en paralelo.



En serie: $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$. En paralelo: $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

VIBRACION LIBRE CON UN GRADO DE LIBERTAD



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$mg - k(x + \delta) = m\ddot{x},$$

de donde:

$$mg - kx - k\delta = m\ddot{x},$$

que se reduce, basados en el d.c.l. correspondiente a la p.n.e., a:

$$-kx = m\ddot{x}$$

o bien:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0,$$

que puede escribirse

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{--- (III)}$$

"Ecuación diferencial correspondiente a las vibraciones con un grado de libertad",
cuya solución es:

$$x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

Si para producir la vibración libre se sacó al sistema de su p.n.e. jalándolo y soltándolo posteriormente, la A vale cero puesto que $\dot{x} = 0$ para $t = 0$; ver ejemplo 2 del caso para movimiento rectilíneo.

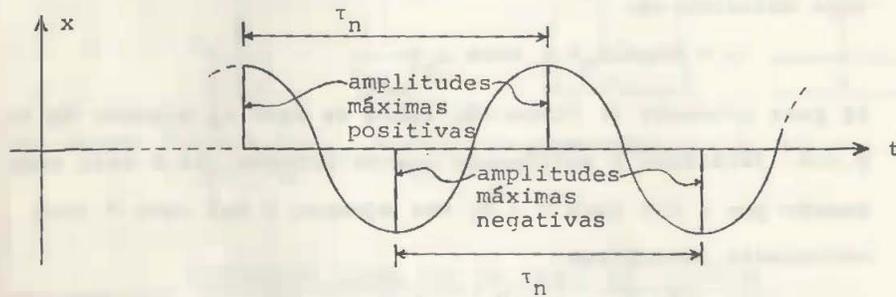
Si la vibración se originó por haberle dado una velocidad inicial al sistema elástico en estudio, cuando éste se encontraba en la p.n.e., la B vale cero (ya que $x = 0$ para $t = 0$). En cualquiera de los dos casos se puede demostrar que, el período natural de vibración viene dado por:

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \text{--- (período natural de vibración),}$$

ya que se define "período de una vibración" como el tiempo que tarda en efectuarse un ciclo completo de ella o, también, como el tiempo necesario para que se presenten dos amplitudes máximas positivas sucesivas -o bien dos amplitudes máximas negativas pero también sucesivas-.

Se dice que se presenta una "amplitud máxima" en el instante en que la masa del sistema elástico en estudio deja de moverse en un sentido, para empezar a moverse en sentido contrario.

Si esto ocurre cuando el móvil se encuentra situado en la parte positiva del eje de referencia, se dice que se ha presentado una "amplitud máxima positiva". Análogamente, si ocurre cuando la partícula en estudio se localiza en la región negativa del eje de referencia, diremos que se ha presentado una "amplitud máxima negativa".



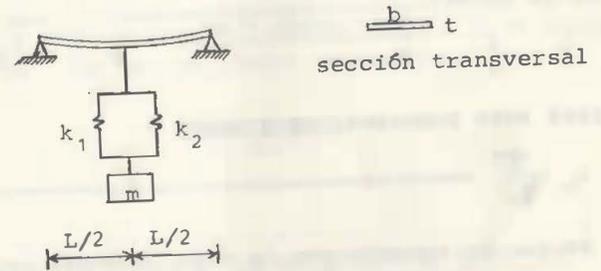
Como, por definición, la "frecuencia" es el recíproco del período, podemos escribir:

$$f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (\text{frecuencia natural de vibración}).$$

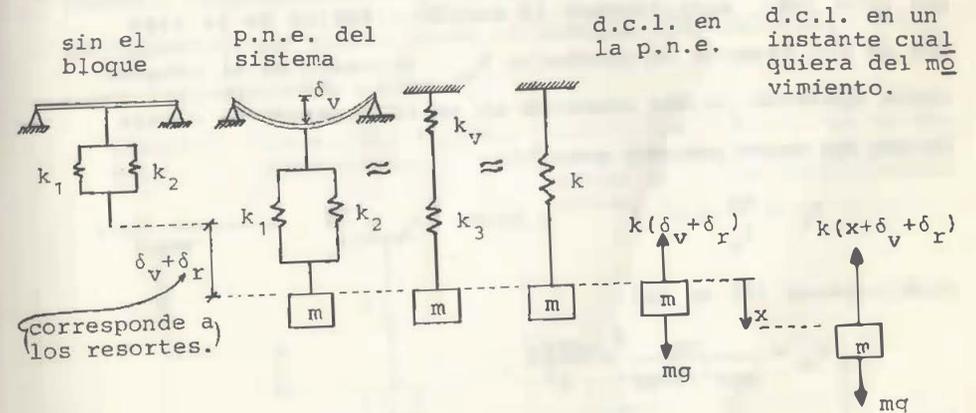
Ejemplo.- Encuentre la frecuencia natural del sistema mostrado en la figura. La viga es simplemente apoyada y tiene una longitud L de 24 in, ancho $b = 1$ in, peralte $t = 0.5$ in, y un módulo de elasticidad $E = 30 \times 10^6$ lb/in². Las constantes de los resortes, colocados en paralelo, son $k_1 = 45$ lb/in y $k_2 = 35$ lb/in; la masa m pesa 40 lb y el peso de la viga, así como el de los resortes, es despreciable. Dé la respuesta en ciclos/minuto. Nota: La deflexión al centro del claro de una viga simplemente apoyada de longitud L , ancho b

y peralte t , debida a la acción de una carga concentrada P que actúa en dicho punto, perpendicularmente al eje de la barra, es:

$$\delta_v = \frac{PL^3}{48EI}, \quad \text{donde } I = \frac{bt^3}{12}.$$



Solución.- Obtención de la ecuación diferencial correspondiente al movimiento del sistema dado:



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$mg - k(x + \delta_v + \delta_r) = m\ddot{x},$$

de donde:

$$mg - kx - k(\delta_v + \delta_r) = m\ddot{x},$$

que, tomando en cuenta lo que sucede en la p.n.e., se reduce

a:

$$-kx = m\ddot{x} ,$$

o bien:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 ,$$

que es de la forma:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 ,$$

luego, para este problema, se tiene:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ----- (a);}$$

cálculo de k.- de acuerdo con la nota indicada en el enunciado:

$$\delta_v = \frac{mgL^3}{48EI} \text{ ----- (b),}$$

por otro lado, sustituyendo la acción elástica de la viga por la del resorte de constante k_v , indicado en el croquis donde aparecen ya dos resortes en serie, tomando en cuenta la Ley de Hooke podemos escribir:

$$\delta_v = \frac{mg}{k_v} , \quad \text{o bien: } k_v = \frac{mg}{\delta_v} \text{ ----- (c);}$$

sustituyendo (b) en (c):

$$k_v = \frac{mg}{mgL^3/48EI} = \frac{48EI}{L^3} ,$$

luego:

$$k_v = \frac{48 \times 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2 (1 \text{ in}) (0.5 \text{ in})^3 / 12}{(24 \text{ in})^3} = 1085 \text{ lb/in} ,$$

y como

$$k_3 = k_1 + k_2 = 45 + 35 = 80 \text{ lb/in} ,$$

se tiene:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_v} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{1085} + \frac{1}{80} = 0.01342 \text{ in/lb}$$

de donde:

$$k = 74.5 \text{ lb/in} ,$$

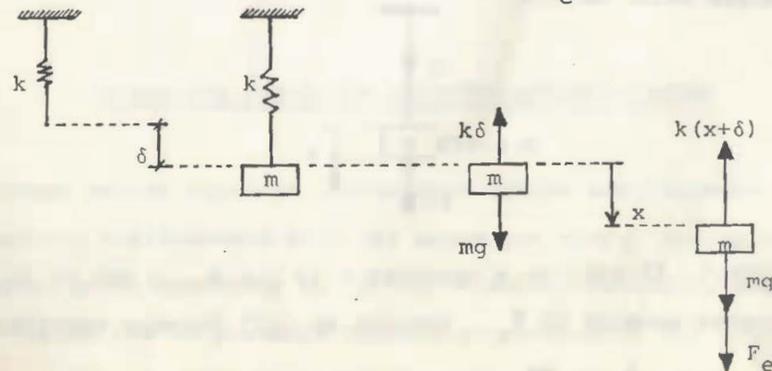
finalmente, tomando en cuenta (a), se tiene:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{74.5 \text{ lb/in}}{40 \text{ lb}/(386.4 \text{ in/seg}^2)}} = 4.27 \text{ ciclos/seg} = \underline{256.2 \text{ c.p.m.}}$$

VIBRACION FORZADA CON UN GRADO DE LIBERTAD

En este tipo de vibración aparece ya una fuerza, o serie de fuerzas, consideradas no propias del sistema y denominadas excitadoras, que actúan sobre el sistema elástico, cuya resultante representaremos como \bar{F}_e .

resorte solo	p.n.e. del sistema resorte-masa	d.c.l. en la p.n.e. antes de actuar F_e	d.c.l. en un instante cualquiera del movimiento.
--------------	---------------------------------	---	--



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$F_e + mg - k(x + \delta) = m\ddot{x} \text{ , de donde:}$$

$$F_e + mg - kx - k\delta = m\ddot{x} \text{ ,}$$

que se reduce, basados en el d.c.l. correspondiente a la p.n.e. antes de actuar F_e , a:

$$F_e - kx = m\ddot{x} \text{ ,}$$

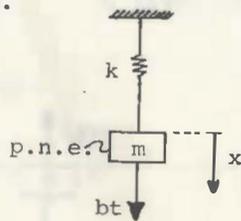
que puede escribirse:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_e}{m} \text{ , o bien:}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_e}{m} \text{ (IV)}$$

"Ecuación diferencial correspondiente a las vibraciones forzadas con un grado de libertad".

Ejemplo.- El sistema elástico que se muestra en la figura está en reposo, en su p.n.e., cuando $t = 0$. Si a partir de ese instante se le aplica una fuerza vertical de módulo bt , determine la posición de la parte superior del bloque para cualquier valor de t .



Solución.- Al medirse x respecto a la p.n.e., y ser bt la componente escalar de \vec{F}_e , basados en (IV) podemos escribir:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{bt}{m} \text{ (a),}$$

cuya solución es:

$$x = A \text{sen} \omega_n t + B \text{cos} \omega_n t + \frac{b}{m\omega_n^2} t \text{ (b),}$$

de $x = 0$, para $t = 0$:

$$0 = A \text{sen} 0 + B \text{cos} 0 + 0 \text{ , luego } B = 0 \text{ (c);}$$

derivando (b) con respecto a t :

$$\dot{x} = A \omega_n \text{cos} \omega_n t - B \omega_n \text{sen} \omega_n t + \frac{b}{m\omega_n} \text{ (d),}$$

de $\dot{x} = 0$, para $t = 0$:

$$0 = A \omega_n \text{cos} 0 - B \omega_n \text{sen} 0 + \frac{b}{m\omega_n} \text{ ,}$$

luego:

$$A = \frac{-b}{m\omega_n^3} \text{ (e),}$$

con lo que:

$$x = \frac{-b}{m\omega_n^3} \text{sen} \omega_n t + \frac{b}{m\omega_n^2} t \text{ ,}$$

o bien, finalmente:

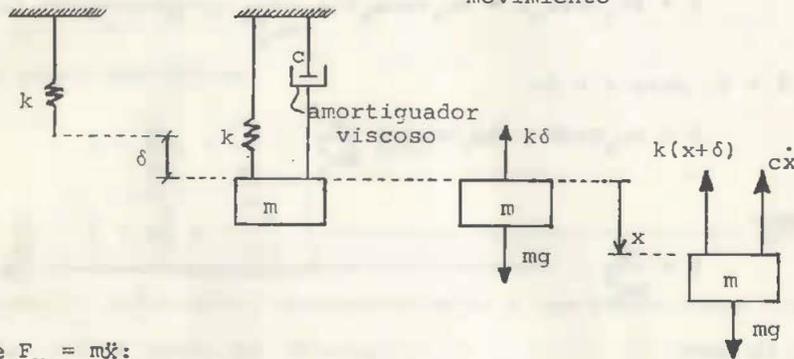
$$x = \frac{b}{m\omega_n^3} (\omega_n t - \text{sen} \omega_n t) \text{ , donde } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ .}$$

VIBRACION LIBRE CON AMORTIGUAMIENTO VISCOZO

Existen varios tipos de vibraciones libres amortiguadas pero nosotros analizaremos sólo (al menos por ahora) los casos en que el amortiguamiento es de tipo viscoso, es decir, cuando la fuerza que se presenta durante el movimiento del sistema en estudio, debida al amortiguamiento, es directamente pro-

porcional a la velocidad con que se mueve el cuerpo en observación. Para estudiar este tipo de vibraciones haremos, como ha venido siendo costumbre hasta ahora, un d.c.l. en un instante cualquiera del movimiento.

resorte solo p.n.e. del sistema resorte-amortiguador-masa. d.c.l. en la p.n.e. antes del movimiento c.c.l. en un instante cualquiera del movimiento.



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$mg - k(x + \delta) - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

luego:

$$mg - kx - k\delta - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

que basados en el d.c.l. en la p.n.e., antes de iniciarse el movimiento, se reduce a:

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

de donde:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

que puede escribirse:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \text{ ----- (V)}$$

"Ecuación diferencial correspondiente a las vibraciones libres con amortiguamiento viscoso, de un grado de libertad".

Supongamos que la solución (V) es de la forma:

$$x = Ae^{ht} + Be^{pt} \text{ ----- (a),}$$

donde A, B, h y p, son constantes.

Derivando (a) con respecto a t:

$$\dot{x} = Ah e^{ht} + Bp e^{pt} \text{ ----- (b),}$$

derivando ahora (b) con respecto a t:

$$\ddot{x} = Ah^2 e^{ht} + Bp^2 e^{pt} \text{ ----- (c),}$$

sustituyendo (a), (b) y (c), en (V):

$$Ah^2 e^{ht} + Bp^2 e^{pt} + 2n(Ah e^{ht} + Bp e^{pt}) + \omega_n^2 (Ae^{ht} + Be^{pt})$$

factorizando:

$$Ae^{ht} (h^2 + 2nh + \omega_n^2) + Be^{pt} (p^2 + 2np + \omega_n^2) = 0,$$

que se cumple si:

$$h^2 + 2nh + \omega_n^2 = 0 \text{ y, además,}$$

$$p^2 + 2np + \omega_n^2 = 0;$$

resolviendo para h:

$$h = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2}$$

que nos lleva a:

$$h_1 = -n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2} \text{ y } h_2 = -n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2}$$

análogamente:

$$p_1 = -n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2} \text{ y } p_2 = -n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2},$$

esto nos llevaría a pensar que existen las siguientes 4 soluciones para (V):

$$x = A_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} + B_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} \quad \text{--- (a}_1\text{)}$$

$$x = A_2 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} + B_2 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} \quad \text{--- (a}_2\text{)},$$

$$x = A_3 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} + B_3 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} \quad \text{--- (a}_3\text{)}, \text{ y}$$

$$x = A_4 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} + B_4 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} \quad \text{--- (a}_4\text{)}.$$

Sin embargo, (a₁) y (a₄) no pueden considerarse como soluciones para (V), que es una ecuación diferencial de 2o. orden, puesto que factorizando pueden reducirse a la forma:

$$x = (A_1 + B_1) e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} = C_1 e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t}, \quad \text{y}$$

$$x = (A_4 + B_4) e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} = C_4 e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t},$$

respectivamente, que son expresiones que contienen sólo una constante, por determinar.

Al observar (a₂) y (a₃) podemos decir que son una misma solución, que puede escribirse:

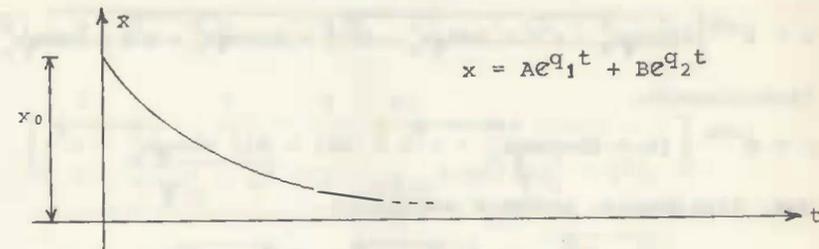
$$x = A e^{(-n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t} + B e^{(-n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2})t}.$$

Resumiendo, podemos decir que, siendo:

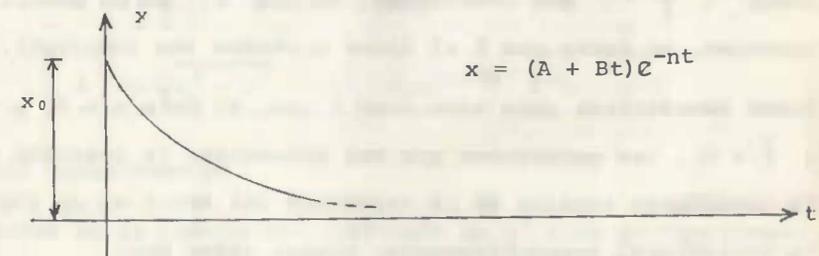
$$q_1 = -n + \sqrt{n^2 - \omega_n^2} \quad \text{y} \quad q_2 = -n - \sqrt{n^2 - \omega_n^2},$$

la solución de (V) viene dada por:

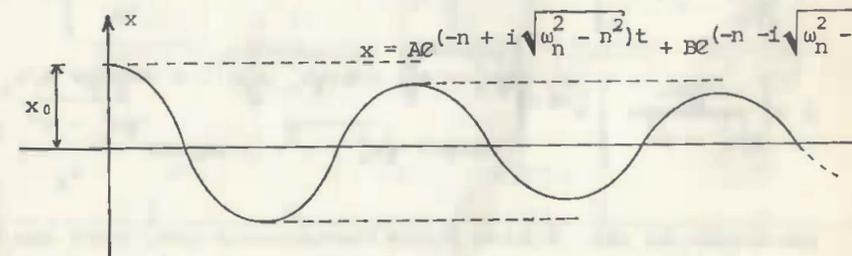
Caso 1) "Vibración con sobreamortiguamiento" ($n > \omega_n$)



Caso 2) "Vibración críticamente amortiguada" ($n = \omega_n$)



Caso 3) "Vibración ligeramente amortiguada" ($n < \omega_n$)



desarrollando esta última expresión:

$$x = A e^{-nt} \cdot e^{i\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t} + B e^{-nt} \cdot e^{-i\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t},$$

y como:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$, podemos escribir:

$$x = e^{-nt} \left[A(\cos\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + i\text{sen}\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t) + B(\cos\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t - i\text{sen}\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t) \right],$$

factorizando:

$$x = e^{-nt} \left[(A + B)\cos\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + (Ai - Bi)\text{sen}\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t \right],$$

que, finalmente, podemos escribir:

$$x = D e^{-nt} \text{sen} \left(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \delta_0 \right)$$

donde D y δ_0 son constantes, aunque δ_0 es un ángulo en radianes, en tanto que D sí tiene unidades (de longitud).

Puede demostrarse para este caso 3 que, si para $t = 0$, $x = x_0$ y $\dot{x} = 0$, las ecuaciones que nos determinan la posición y la componente escalar de la velocidad del móvil en un instante cualquiera, respectivamente, vienen dadas por:

$$x = \left[\frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} x_0 \right] e^{-nt} \left[\text{sen} \left(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \text{angsen} \frac{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{\omega_n} \right) \right], y,$$

$$\dot{x} = \left[\frac{\omega_n x_0}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} \right] e^{-nt} \left[\begin{array}{l} \sqrt{\omega_n^2 - n^2} \cos(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \text{angcos } n/\omega_n) - \\ - \text{nsen} \left(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \text{angsen} \frac{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{\omega_n} \right) \end{array} \right];$$

partiendo de esto último puede demostrarse que, para que \dot{x} sea nula:

$$t = \frac{\tilde{n}\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} \text{----- } \tilde{n} \text{ entero } \geq 0.$$

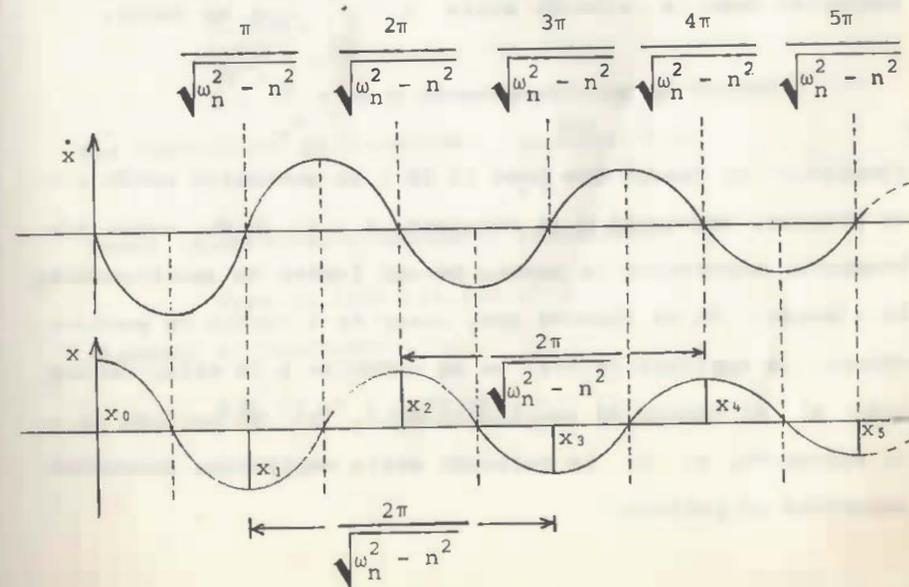
Construyamos pues, para éste caso 3, las gráficas "posición-tiempo" y "(Componente escalar de la velocidad)- tiempo".

Tabulando:

\tilde{n}	t	\dot{x}	x
0	0	0	x_0
1	$\pi/\sqrt{\omega_n^2 - n^2}$	0	$-x_0 e^{(-n\pi/\sqrt{\omega_n^2 - n^2})}$
2	$2\pi/\sqrt{\omega_n^2 - n^2}$	0	$x_0 e^{(-2n\pi/\sqrt{\omega_n^2 - n^2})}$
3	$3\pi/\sqrt{\omega_n^2 - n^2}$	0	$-x_0 e^{(-3n\pi/\sqrt{\omega_n^2 - n^2})}$
4	$4\pi/\sqrt{\omega_n^2 - n^2}$	0	$x_0 e^{(-4n\pi/\sqrt{\omega_n^2 - n^2})}$

y así sucesivamente.

Basados en la tabulación, así como en el tipo de funciones correspondientes a x y \dot{x} , se obtienen las siguientes gráficas:



De las gráficas concluimos que, el "período de una vibración libre con amortiguamiento ligero" viene dado por:

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} ;$$

se define como "decremento logarítmico" al logaritmo natural del cociente (mayor que 1) de dos amplitudes máximas positivas, o máximas negativas, sucesivas. Esto es:

$$\text{Decremento} = L \frac{x_0}{x_2} = L \frac{x_1}{x_3} = L \frac{x_2}{x_4} = \dots = L \frac{x_{n-2}}{x_n} = L e^{\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}\right)}$$

$$\text{logarítmico} = \frac{2n\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} .$$

Si recordamos que el amortiguamiento crítico (caso 2) se presenta cuando $n = \omega_n$, el factor de amortiguamiento (que se define como la relación entre n y n crítica) se puede encontrar como la relación entre n y ω_n , es decir:

$$\text{Factor de amortiguamiento} = \rho = \frac{n}{\omega_n} .$$

Ejemplo.- Un cuerpo que pesa 10 lb y se encuentra unido a un resorte, empotrado y de constante $k = 15$ lb/ft, vibra libremente, soportando la acción de una fuerza de amortiguamiento viscoso. Si se observa que, luego de 4 ciclos de movimiento, la amplitud inicial se ha reducido a la mitad encuentre: a) el factor de amortiguamiento, b) el período de la vibración, y, c) la relación entre amplitudes sucesivas separadas un período.

Solución.- Se tiene:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{15 \text{ lb/ft}}{10 \text{ lb}/(32.2 \text{ ft/seg}^2)} = 48.3 \text{ [1/seg}^2\text{]};$$

si x_0 fue la amplitud inicial se tiene que,

$$\text{para } t = 4\tau_d = \frac{8\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} : x = \frac{x_0}{2} ,$$

luego, basados en la solución de (v) cuando la vibración es ligeramente amortiguada y tomando en cuenta que, en este ejercicio, $x = x_0$ y $\dot{x} = 0$ para $t = 0$, se tiene:

$$\frac{x_0}{2} = \left[\frac{\omega_n x_0}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} \right] e^{\left(\frac{-8n\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}\right)} \text{sen} \left(8\pi + \text{angsen} \frac{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}{\omega_n} \right) ,$$

de donde:

$$\frac{1}{2} = e^{\left(\frac{-8n\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}\right)} ,$$

entonces:

$$e^{\left(\frac{-8n\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}\right)} = 2 \text{ ----- (a);}$$

por definición de logaritmo: $\frac{8n\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} = L2$,

luego, sustituyendo valores y despejando:

$$8n\pi = (0.693) \sqrt{48.3 - n^2} ,$$

elevando al cuadrado:

$$631.65 n^2 = 0.48(48.3 - n^2) ,$$

que nos lleva a:

$$n^2 = \frac{0.48(48.3)}{632.13} = 0.03667 \text{ (1/seg)}^2,$$

y:

$$n = 0.1915 \text{ (1/seg)},$$

con lo que:

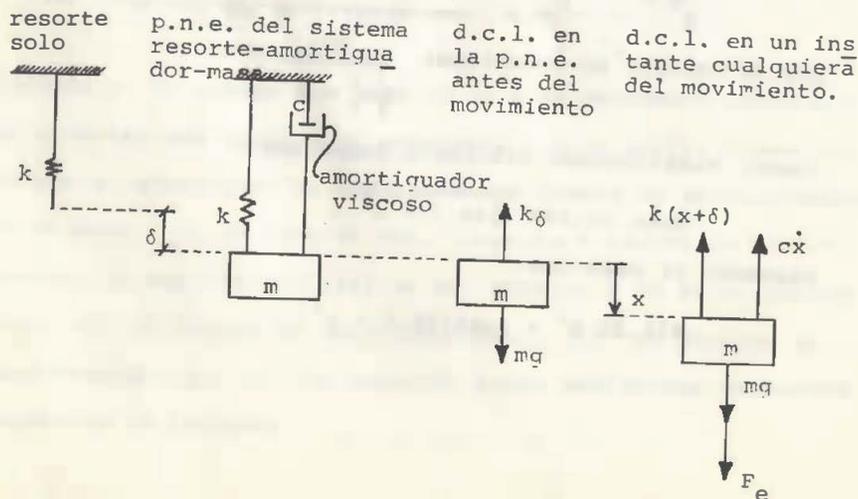
$$\rho = \frac{n}{\omega_n} = \frac{0.1915}{\sqrt{48.3}} = 0.02755,$$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{48.3 - 0.03667}} = 0.904 \text{ seg};$$

finalmente, de (a):

$$e^{\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}}\right)} = \sqrt[4]{2} = 1.189.$$

VIBRACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO VISCOZO



de $F_x = m\ddot{x}$:

$$F_e + mg - k(x + \delta) - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

luego:

$$F_e + mg - kx - k\delta - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

que se reduce a:

$$F_e - kx - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

de donde:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_e}{m},$$

que puede escribirse:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_e}{m} \text{ ----- (VI)}$$

"Ecuación diferencial correspondiente a las vibraciones forzadas, con amortiguamiento viscoso, de un grado de libertad".

Existen muchos casos de vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso, dependiendo del tipo de fuerza excitadora.

Nosotros estudiaremos aquel en que dicha fuerza es función senoidal del tiempo, es decir:

$$F_e = F_0 \text{ sen}\omega t \text{ -- (a), donde } F_0 \text{ y } \omega \text{ son constantes;}$$

sustituyendo (a) en (VI):

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \text{ sen}\omega t \text{ ----- (VIa);}$$

suponiendo que la solución particular de (VI-a) es de la forma:

$$x = \chi \text{ sen}(\omega t - \phi) \text{ ----- (b), donde } \chi \text{ y } \phi \text{ son cons-}$$

tantes, de sustituir (b) en (VI-a):

$$-\omega^2 \underbrace{\chi \text{sen}(\omega t - \phi)}_{\ddot{x}} + 2n\omega \underbrace{\chi \text{cos}(\omega t - \phi)}_{\dot{x}} + \omega_n^2 \underbrace{\chi \text{sen}(\omega t - \phi)}_x = \frac{F_0}{m} \text{sen} \omega t ;$$

puede demostrarse que, para esto último se cumpla:

$$\chi = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad \text{y: } \phi = \text{angsen} \frac{2n\omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

De acuerdo con lo anterior, la solución completa de (VI-a) viene dada por:

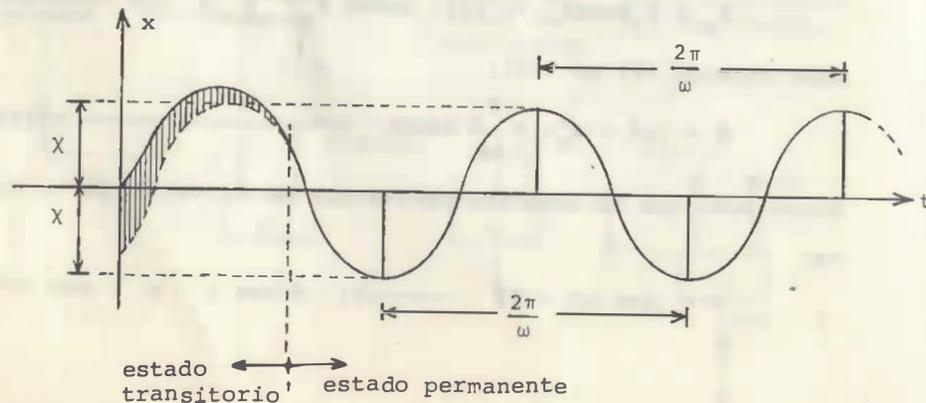
caso 1) $x = Ae^{q_1 t} + Be^{q_2 t} + \chi \text{sen}(\omega t - \phi)$ ----- $n > \omega_n$,

caso 2) $x = (A + Bt)e^{-nt} + \chi \text{sen}(\omega t - \phi)$ ----- $n = \omega_n$,

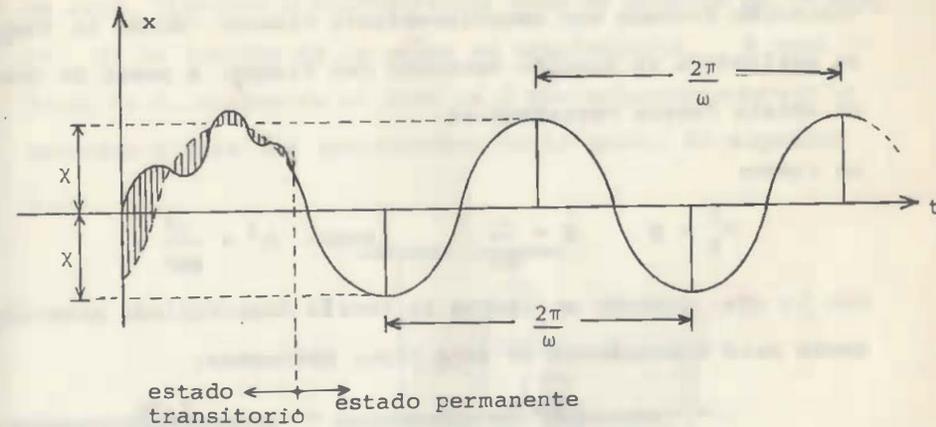
caso 3) $x = De^{-nt} \text{sen}(\sqrt{\omega_n^2 - n^2}t + \delta_0) + \chi \text{sen}(\omega t - \phi)$ ----- $n < \omega_n$

Gráficas correspondientes a las soluciones de (VI-a):

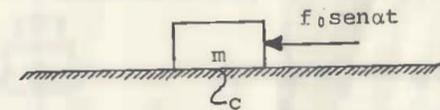
Para casos como el 1 y el 2.



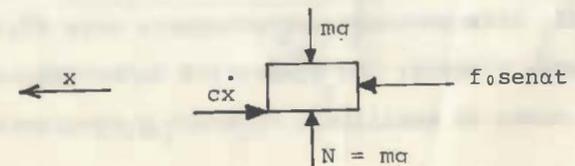
Para el caso 3.



Ejemplo.- Un cuerpo de masa m descansa sobre una superficie horizontal lubricada que, puede considerarse, genera una fricción viscosa con una constante de amortiguamiento c . Si una fuerza horizontal senoidal, $f_0 \text{sen} \omega t$, se aplica al bloque como muestra la figura, encuentre la amplitud correspondiente al estado permanente, del movimiento resultante.



Solución.- d.c.l. en un instante cualquiera del movimiento:



Observando el diagrama nos damos cuenta que se presenta una vibración forzada con amortiguamiento viscoso (donde la fuerza excitadora es función senoidal del tiempo) a pesar de que no exista fuerza restauradora.

Se tiene:

$$\omega_n^2 = 0, \quad n = \frac{c}{2m}, \quad \text{luego: } n^2 = \frac{c^2}{4m^2},$$

con lo que, tomando en cuenta la teoría desarrollada anteriormente para vibraciones de este tipo, obtenemos:

$$X = \frac{f_0/m}{\sqrt{(0^2 - \alpha^2)^2 + 4(c^2/4m^2)\alpha^2}} = \frac{f_0/m}{\sqrt{\alpha^2(m^2\alpha^2 + c^2)/m^2}}$$

o bien, finalmente:

$$X = \frac{f_0/\alpha}{\sqrt{m^2\alpha^2 + c^2}}$$

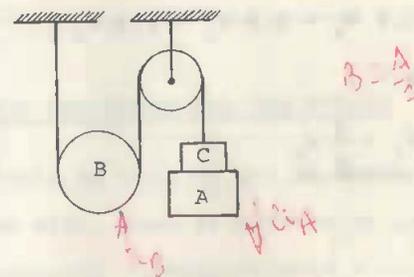
PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

El matemático francés D'Alembert transformó la ecuación diferencial de movimiento, del punto masa, como se indica a continuación:

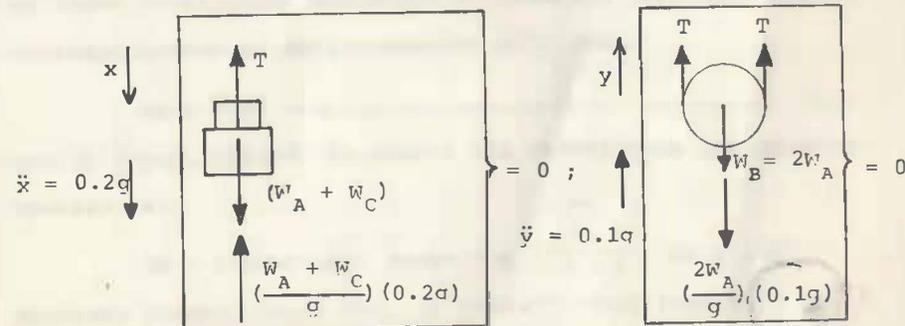
$$\vec{F} + (-m\ddot{r}) = \vec{0} \quad \text{----- (principio de D'Alembert)}$$

pues según él, interpretando correctamente esta última expresión, se pueden plantear los ejercicios de movimiento desde el punto de vista de equilibrio dinámico y resolverlos más fácilmente.

Ejemplo.- Dos cuerpos, A y B, están sostenidos por una cuerda lisa, flexible e inextensible, como se muestra en la figura. Si la inercia de la polea es despreciable, y B pesa lo doble de A, encuentre el peso de C que colocado sobre A le produzca a éste una aceleración; hacia abajo, de magnitud 0.2g.



Solución.- Por la forma del dispositivo, si queremos que A tenga una aceleración hacia abajo y de magnitud 0.2g, B adquirirá una aceleración hacia arriba de magnitud 0.1g, luego, según D'Alembert, para un instante cualquiera:



de $F_x = 0$:

$$(W_A + W_C) - T - \left(\frac{W_A + W_C}{g}\right) (0.2g) = 0, \quad \text{luego:}$$

$$T = 0.8(W_A + W_C) \quad \text{----- (a);}$$

de $F_Y = 0$:

$$2T - 2W_A - \frac{2W_A}{g}(0.1g) = 0,$$

luego:

$$T = 1.1 W_A \quad \text{--- (b);}$$

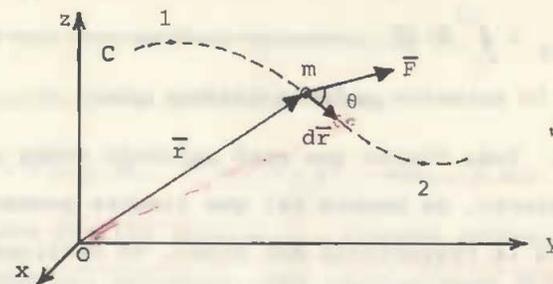
de (a) y (b):

$$0.8 W_A + 0.8 W_C = 1.1 W_A,$$

finalmente:

$$W_C = \frac{3}{8} W_A$$

D.1.2) TRABAJO Y ENERGIA



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA

Consideremos una partícula de masa m , que se mueve, y una fuerza \vec{F} actuando sobre ella, como se muestra en la figura. Si \vec{r} es el vector de posición correspondiente a un punto cualquiera de la trayectoria, y la partícula se mueve de éste a otro punto infinitamente cercano, llamaremos desplazamiento, $d\vec{r}$, al vector que une los dos puntos mencionados. En tales condiciones definimos el "trabajo realizado por \vec{F} , correspondiente al desplazamiento $d\vec{r}$ ", como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{--- (VII),}$$

que da lugar, tomando en cuenta las propiedades del producto escalar, a:

$$dW = F \cos\theta(ds), \text{ donde } F = |\vec{F}| \text{ y } ds = |d\vec{r}|.$$

Entonces podemos decir que, el trabajo total realizado por \vec{F} sobre la partícula, durante el movimiento de ésta, viene dado por:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{--- (VIII)}$$

Obviamente, el trabajo efectuado por \vec{F} mientras la partícula se mueve de una posición 1 a otra 2, está dado por:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{----- (IX)}$$

Basados en lo anterior podemos afirmar que:

a) Toda fuerza que esté aplicada sobre un punto masa en movimiento, de manera tal que siempre permanezca perpendicular a la trayectoria del mismo, no realizará trabajo ya que, si $\vec{F} \perp d\vec{r}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

b) Si la trayectoria de la partícula es plana, descomponiendo \vec{F} en sus componentes normal y tangencial, podemos escribir:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (F_n \vec{e}_n + F_t \vec{e}_t) \cdot (ds) \vec{e}_t = \int_1^2 F_t ds$$

c) Si el movimiento de la partícula es rectilíneo, haciendo coincidir el eje x con la dirección de la trayectoria de la misma, podemos escribir:

$$W_{12} = \int_1^2 F_x dx, \quad y,$$

d) En el caso del inciso inmediato anterior, si F_x es constante, podemos escribir:

$$W_{12} = F_x (x_2 - x_1),$$

que es el caso más simple en cuanto a valuación de "trabajo" se refiere.

CAMPOS DE FUERZA CONSERVATIVOS

Se dice que una fuerza \vec{F} es conservativa si:

a) \vec{F} es función de la posición, o sea:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z), \quad \vec{F} = \vec{F}(r, \phi), \quad \text{etc., y si:}$$

b) existe una función escalar ϕ , llamada potencial, de modo que \vec{F} pueda ser expresada como el gradiente de ϕ , esto es, por ejemplo:

$$\vec{F} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}.$$

Desde el punto de vista dinámico podemos decir que una fuerza es conservativa si no produce, durante su aplicación, sobre la partícula o sistema elástico en estudio, cambio en la energía mecánica de ésta o éste.

La energía mecánica se compone, como puede observarse más adelante, de la energía potencial más la energía cinética.

Si la fuerza que obra sobre una partícula en movimiento es conservativa, entre dos puntos 1 y 2 de la trayectoria descrita por ésta, llamando \vec{F}_c a dicha fuerza, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} &= \int_1^2 \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \right] \cdot [(dx) \vec{i} + (dy) \vec{j} + (dz) \vec{k}] = \\ &= \int_1^2 \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right] = \int_1^2 d\phi \end{aligned}$$

que implica:

$$\int_1^2 \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = \phi_2 - \phi_1$$

ENERGIA POTENCIAL

Llamando EP a la función escalar "energía potencial", definimos cambio de energía potencial, ΔEP , como el negativo del trabajo efectuado por la fuerza conservativa \vec{F}_C que actúe sobre la partícula en estudio, cuando ésta se mueva de 1 a 2, esto es:

$$\Delta EP = - \int_1^2 \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = - \Delta \phi, \text{ luego:}$$

$$\int_1^2 \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = (EP)_1 - (EP)_2 \text{ ----- (X)}$$

CASOS TIPICOS DE FUERZAS CONSERVATIVAS

1) Fuerza gravitatoria central:

$$\vec{F} = - \frac{GMm}{r^2} \hat{r}, \quad \phi = \frac{GMm}{r}, \quad EP = - \frac{GMm}{r}$$

2) Fuerza gravitatoria constante:

$$\vec{F} = - mg \hat{k}, \quad \phi = - mgz, \quad EP = mgz$$

3) Fuerza restauradora lineal:

$$\vec{F} = -kx \hat{i}, \quad \phi = - \frac{1}{2} kx^2, \quad EP = \frac{1}{2} kx^2$$

Este último tipo de fuerza, aunque hace variar la energía mecánica de la partícula en movimiento, no cambia la energía mecánica del sistema elástico formado por la partícula y el elemento que produce la fuerza restauradora.

Ejercicio.- Demuestre que el campo de fuerzas

$$\vec{F} = (y + 2z)\hat{i} + (x + 3z)\hat{j} + (2x + 3y + 8z)\hat{k},$$

es conservativo. Encuentre su función potencial, ϕ , y su función de energía potencial, EP.

Solución.- Haciendo $(y + 2z)\hat{i} + (x + 3z)\hat{j} + (2x + 3y + 8z)\hat{k} =$

$M\hat{i} + N\hat{j} + Q\hat{k}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (y + 2z)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial (x + 3z)}{\partial x} = 1, \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial (y + 2z)}{\partial z} = 2, \quad \frac{\partial (2x + 3y + 8z)}{\partial x} = 2, \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial (x + 3z)}{\partial z} = 3, \quad \frac{\partial (2x + 3y + 8z)}{\partial y} = 3, \quad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y} \end{aligned}$$

de donde se deduce que ϕ existe, con lo cual demostramos que el campo dado es conservativo; entonces ϕ podemos obtenerlo a partir de:

$$\phi = \int M dx + p(y, z),$$

$$\phi = \int N dy + p(x, z),$$

$$\text{o bien: } \phi = \int Q dz + p(x, y);$$

empleando la primera expresión:

$$\phi = \int (y + 2z) dx + p(y, z),$$

de donde, integrando parcialmente con respecto a x, se tiene:

$$\phi = (y + 2z)x + p(y, z) \text{ ----- (1),}$$

derivando parcialmente con respecto a y:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + p'(y, z) \text{ ----- (a) ,}$$

y como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N = (x + 3z) \text{ ----- (b) ,}$$

de (a) y (b):

$$x + p'(y, z) = x + 3z \text{ , de donde } p'(y, z) = 3z \text{ ,}$$

luego, integrado parcialmente con respecto a y:

$$p(y, z) = 3yz + f(z) \text{ ----- (c) ,}$$

sustituyendo (c) en (1):

$$\phi = xy + 2xz + 3yz + f(z) \text{ ----- (2)}$$

derivando (2), parcialmente con respecto a z:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 2x + 3y + f'(z) \text{ ----- (d) ,}$$

y como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = Q = (2x + 3y + 8z) \text{ ----- (e) ,}$$

de (d) y (e):

$$2x + 3y + f'(z) = 2x + 3y + 8z \text{ , de donde } f'(z) = 8z \text{ ,}$$

luego:

$$f(z) = 4z^2 - C \text{ , donde } C = \text{cte} \text{ ----- (f) ;}$$

sustituyendo (f) en (2):

$$\phi = xy + 2xz + 3yz + 4z^2 - C \text{ ,}$$

y finalmente:

$$EP = C - xy - 2xz - 3yz - 4z^2 .$$

DIFERENTES FORMAS DE LA ECUACION DEL TRABAJO Y LA ENERGIA. ENERGIA CINETICA.

Recordemos que:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \text{ ----- (I);}$$

multiplicando escalarmente, ambos miembros, por $d\vec{r}$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (m\ddot{\vec{r}}) \cdot d\vec{r} \text{ ,}$$

que puede escribirse:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[m \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \right] \cdot \left[\frac{d\vec{r}}{dt} dt \right] = m \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right] dt \text{ ;}$$

pero, basados en que:

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 2 \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right] \text{ ,}$$

podemos escribir:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) \right] dt = \frac{1}{2} m \left[\frac{dv^2}{dt} \right] dt \text{ ;}$$

integrando:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{1}{2} m \left[\frac{dv^2}{dt} \right] dt = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_1^2$$

o sea:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_2 - \frac{1}{2} m v^2 \Big|_1 \text{ ----- (XI)}$$

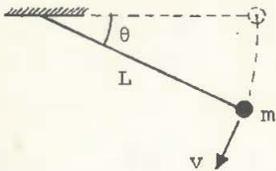
("la. forma de la ecuación del trabajo y la energía").

A la expresión $\frac{1}{2} m v^2$ se le define como "energía cinética de una partícula de masa m , en el instante que posee una rapidez v ". A menudo dicha energía acostumbra simbolizarse como EC por lo que, la ecuación (XI) suele también escribirse:

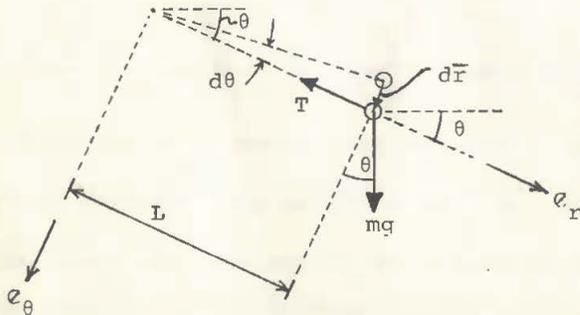
$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = (EC)_2 - (EC)_1 = \Delta EC \text{ ,}$$

que nos dice: "El trabajo efectuado por la fuerza resultante que obra sobre la partícula en estudio, durante el movimiento de ésta entre dos puntos cualesquiera, resulta igual al incremento de energía cinética correspondiente".

Ejemplo 1) Demuestre que la rapidez de la masa del péndulo simple de la figura es $v = \sqrt{2gL\text{sen}\theta}$, si se le suelta (del reposo) desde su posición horizontal. Considere la cuerda como inextensible y de masa despreciable.



Solución.- D.C.I. en un instante cualquiera:



Del croquis:

$$\vec{F} = (mg\text{sen}\theta - T)\vec{e}_r + (mg\text{cos}\theta)\vec{e}_\theta, \quad Y,$$

$$d\vec{r} = (Ld\theta)\vec{e}_\theta,$$

con lo que:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\theta (mg\text{cos}\theta) (Ld\theta) = mgL\text{sen}\theta = mgL\text{sen}\theta$$

y como:

$$\Delta EC = (EC)_2 - (EC)_1 = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2,$$

$$\text{de } \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = (EC)_2 - (EC)_1 \quad \text{----- (XI),}$$

se tiene:

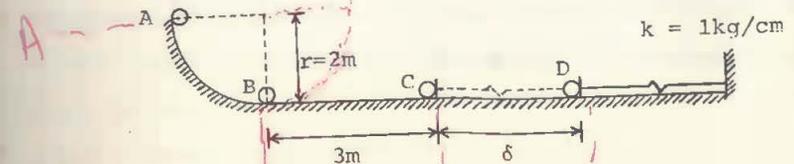
$$mgL\text{sen}\theta = \frac{1}{2}mv^2, \text{ de donde,}$$

finalmente:

$$v = \sqrt{2gL\text{sen}\theta} \text{ l.q.q.d.}$$

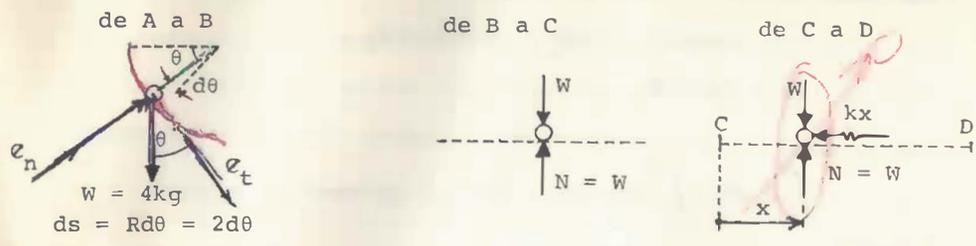
INGENIERIA
AMEXO

Ejemplo 2) Una partícula que pesa 4 kg se moverá sobre una superficie circular lisa y, posteriormente, sobre un plano horizontal (también liso) en cuyo extremo se localiza un resorte de constante $k = 1\text{kg/cm}$, como se indica en la figura. Si parte del reposo en el punto A calcule la deformación máxima, δ , que le producirá al resorte, luego de chocar con éste. Desprecie la energía perdida en el choque.



$W_p = 4 \text{ kg}$
 $k = 1 \text{ kg/cm}$
 $v_0 = 0$

Solución.- Diagramas de cuerpo libre, durante el movimiento:



basados en los croquis:

$$\int_A^D \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C^D \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (4\cos\theta)(2d\theta) + 0 + \int_0^{\delta} (-kx)dx = 8\text{sen}\theta \Big|_0^{\pi/2} + 0 - \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^{\delta}$$

luego:

$$\int_A^D \vec{F} \cdot d\vec{r} = 8 - 0.5k\delta^2, \text{ y como } (EC)_D - (EC)_A = 0 - 0 = 0,$$

al aplicar (XI) desde A hasta D:

$$8 - 0.5k\delta^2 = 0,$$

luego:

$$\delta^2 = \frac{16 \text{ kg-m}}{k} = \frac{16 \text{ kg-m}}{100 \text{ kg/m}} = 0.16 \text{ m}^2$$

finalmente:

$$\delta = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm.}$$

Si durante el movimiento del punto masa en estudio, a la fuerza resultante que actúa sobre éste la descomponemos en dos fuerzas, \vec{F}_C y \vec{F}_{nc} , siendo la primera de ellas la resultante de las fuerzas conservativas, y la segunda la resultante de las no conservativas, podemos escribir:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_C + \vec{F}_{nc}) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_C \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r},$$

y como se había obtenido anteriormente:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = (EC)_2 - (EC)_1 \text{ ----- (XI),}$$

Y

$$\int_1^2 \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = (EP)_1 - (EP)_2 \text{ ----- (X),}$$

podemos expresar:

$$(EC)_2 - (EC)_1 = (EP)_1 - (EP)_2 + \int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r},$$

de donde:

$$\int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = (EP)_2 - (EP)_1 + (EC)_2 - (EC)_1$$

o bien:

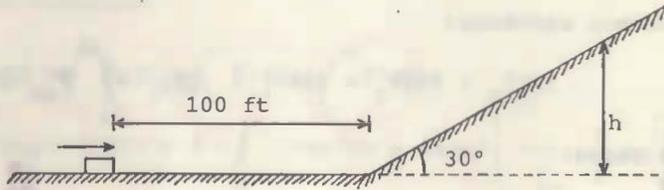
$$\int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = \Delta EP + \Delta EC \text{ ----- (XII)}$$

expresión conocida como "2a. forma de la ecuación del Trabajo y la Energía", que nos dice:

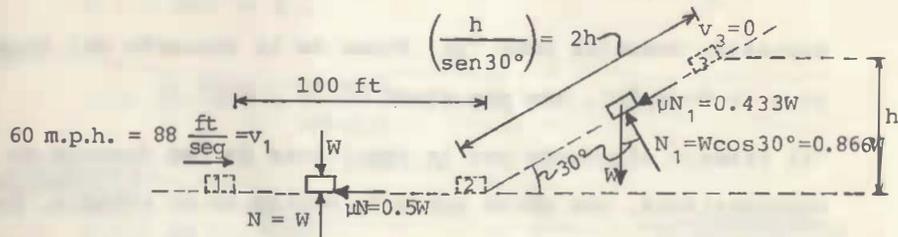
"El trabajo efectuado por la resultante de las fuerzas no conservativas, que obran sobre la partícula en estudio, resulta igual a la suma de incrementos de energía potencial y cinética, respectivos". Esta suma recibe el nombre de "incremento de energía mecánica".

Nota.- Como es de comprenderse, para cuantificar la energía potencial debida al peso de un móvil cualquiera es necesario elegir un plano horizontal de referencia; a la posición de éste le llamaremos "nivel de energía potencial gravitatoria nula" o bien, abreviadamente, n.e.p.g.n. (obsérvese en los croquis de los ejemplos siguientes).

Ejemplo 1) El pequeño bloque de la figura lleva una rapidez de 60 m.p.h. en el instante mostrado. Si la rapidez con que llega al pie del plano inclinado es la misma con la que inicia su ascenso sobre éste, y el coeficiente de fricción en todo instante iguala 0.5, determine qué tan alto llegará antes de detenerse.



Solución.- D.c.l. en movimiento:



basados en el croquis:

$$\int_1^3 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} + \int_2^3 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} =$$

$$= (-0.5w)(100) + (-0.433w)(2h) = -50w - 0.866wh,$$

$$(EP)_3 - (EP)_1 = wh - 0 = wh,$$

$$(EC)_3 - (EC)_1 = 0 - \frac{1}{2} \frac{W}{32.2} (88)^2 = -120.2w;$$

aplicando (XII) desde 1 hasta 3 :

$$-50w - 0.866wh = (wh) + (-120.2w),$$

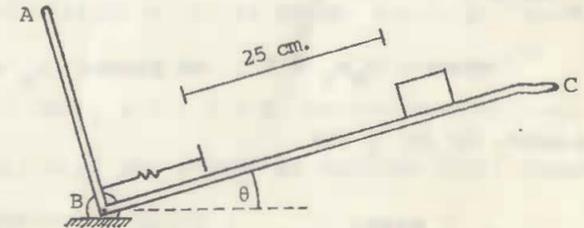
luego:

$$1.866 wh = 70.2w,$$

finalmente:

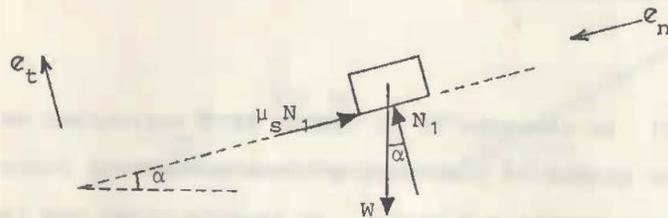
$$h = 37.6 \text{ ft.}$$

Ejemplo 3) La escuadra de la figura está articulada en B, soporta un bloque de peso 6kg, y tiene soldado un resorte cuya constante iguala 1.5 kg/cm. Al hacerla girar con rapidez angular constante, muy lentamente y partiendo de $\theta = 0^\circ$, se nota que el cuerpo comienza a resbalar cuando $\theta = 15^\circ$. Si mantenida esta posición angular se observa que la deformación máxima que produce el cuerpo al resorte, luego de chocar con éste, es 5 cm., calcule: a) el coeficiente de fricción estática y, b) el coeficiente de fricción cinética.



Solución al inciso a).- d.c.l. para la última condición de fricción estática:

$\alpha \dot{=} 15^\circ$ (aunque ligeramente menor).



tomando en cuenta que:

$$\ddot{s} = L\ddot{\theta} = 0, \text{ ya que } \dot{\theta} = \text{cte, se tiene,}$$

$$\text{de } F_t = m\ddot{s}:$$

$$N_1 - w \cos \alpha = m(0), \text{ luego: } N_1 = w \cos \alpha \text{ ----- (a),}$$

por otro lado, tomando en cuenta que $\dot{s} \dot{=} 0$,

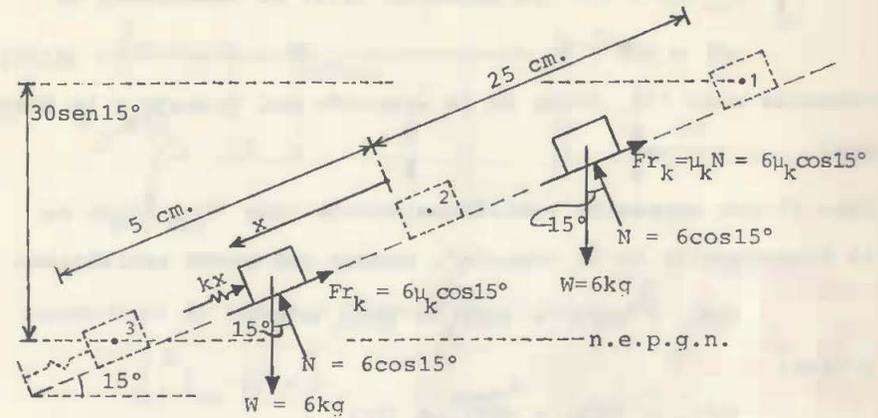
$$\text{de } F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho}:$$

$$w \sin \alpha - \mu_s N_1 = 0, \text{ de donde: } \mu_s = \frac{w \sin \alpha}{N_1} \dots \text{ (b),}$$

entonces, de (a) y (b):

$$\mu_s = \frac{w \sin \alpha}{w \cos \alpha} = \tan \alpha \dot{=} 0.267;$$

solución al inciso b).- d.c.l. cuando el bloque se mueve, manteniendo la escuadra fija en la posición $\theta = 15^\circ$:



basados en el croquis:

$$\int_1^3 \bar{F}_{nc} \cdot d\bar{r} = \int_1^2 \bar{F}_{nc} \cdot d\bar{r} + \int_2^3 \bar{F}_{nc} \cdot d\bar{r} =$$

$$= (-6\mu_k \cos 15^\circ)(25) + (-6\mu_k \cos 15^\circ)(5),$$

luego:

$$\int_1^3 \bar{F}_{nc} \cdot d\bar{r} = -180\mu_k \cos 15^\circ = -173.9\mu_k \text{ ----- (c),}$$

y como:

$$(EP)_3 - (EP)_1 = \frac{1}{2}k\delta^2 - 6(30 \sin 15^\circ) = \frac{1}{2}(1.5)(5)^2 - 180 \sin 15^\circ =$$

$$= 18.75 - 46.59 = -27.84 \text{ kg-cm ----- (d),}$$

además de que:

$$(EC)_3 - (EC)_1 = 0 - 0 = 0 \text{ ----- (e),}$$

tomando en cuenta (c), (d) y (e), al aplicar (XII) desde 1 hasta 3, podemos escribir:

$$-173.9\mu_k = (-27.84) + 0, \text{ de donde obtenemos:}$$

$$\mu_k = 0.160.$$

Si durante el movimiento podemos afirmar que

$$\int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = 0, \text{ la ecuación (XII) se transforma en:}$$

$$\Delta EP + \Delta EC = 0 \text{ ----- (XIII),}$$

conocida como "3a. forma de la ecuación del Trabajo y la Energía".

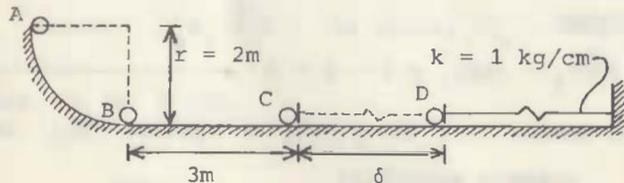
Esta última expresión también se conoce como "Principio de la Conservación de la Energía", puesto que puede escribirse:

$$(EP)_2 - (EP)_1 + (EC)_2 - (EC)_1 = 0,$$

o bien:

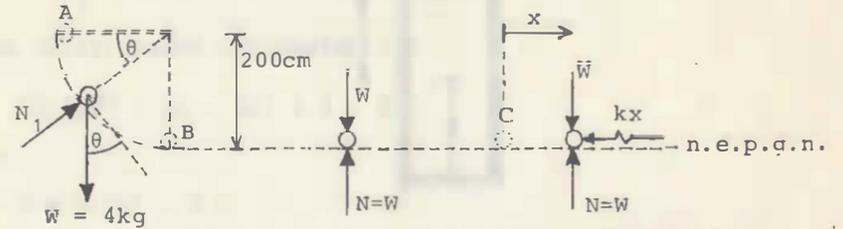
$$(EP)_2 + (EC)_2 = (EP)_1 + (EC)_1.$$

Ejemplo 1) Una partícula que pesa 4 kg se moverá sobre una superficie circular lisa y, posteriormente, sobre un plano horizontal (también liso) en cuyo extremo se localiza un resorte de constante $k = 1 \text{ kg/cm}$, como se indica en la figura. Si parte del reposo en el punto A calcule la deformación máxima, δ , que le producirá el resorte, luego de chocar con éste. Desprecie la energía perdida en el choque.



Solución.- Diagramas de cuerpo libre, durante el movimiento:

de A a B de B a C de C a D



basados en el croquis podemos decir que:

$$\int_A^D \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = 0,$$

y como:

$$(EP)_D - (EP)_A = \frac{1}{2}k\delta^2 - (4\text{kg})(200\text{cm}) = 0.5k\delta^2 - 800,$$

al ser:

$$(EC)_D - (EC)_A = 0 - 0 = 0, \quad \frac{1}{2} m_D v_D^2 - \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

aplicando (XIII) desde A hasta D:

$$(0.5k\delta^2 - 800) + 0 = 0,$$

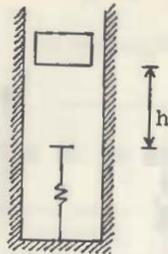
de donde:

$$\delta^2 = \frac{1600 \text{ kg-cm}}{k} = \frac{1600 \text{ kg-cm}}{1 \text{ kg/cm}} = 1600 \text{ cm}^2, \text{ y,}$$

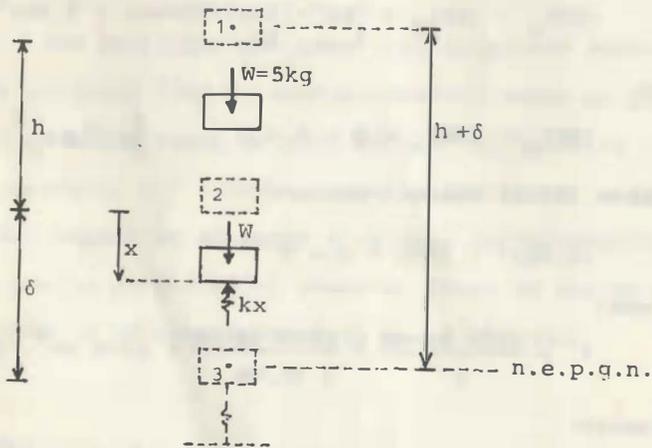
finalmente:

$$\delta = 40 \text{ cm.}$$

Ejemplo 2) Un bloque de peso 5 kg se suelta desde una altura h , medida respecto a la parte superior de un resorte cuya constante iguala 1 kg/cm , como se indica en la figura. ¿Cuánto debe valer h para que la fuerza máxima ejercida por el resorte sea: a) 20 kg, b) 10 kg, c) 7 kg?



Solución.- d.c.l. en movimiento, donde 1 es la posición donde se suelta el bloque, 2 aquella en que éste establece contacto con el resorte, y 3 aquella en la cual el resorte adquiere su deformación máxima.



Al observar los d.c.l. podemos decir que:

$$\int_1^3 \mathbf{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = 0,$$

razón por la cual podremos aplicar el "Principio de la conservación de la energía" desde que soltamos el bloque hasta que el resorte adquiere su deformación máxima,

$$(EP)_3 - (EP)_1 = \frac{1}{2}k\delta^2 - 5(h + \delta) = 0.5k\delta^2 - 5h - 5\delta,$$

y

$$(EC)_3 - (EC)_1 = 0 - 0 = 0;$$

aplicando (XIII) desde (1) hasta (3):

$$(0.5k\delta^2 - 5h - 5\delta) + 0 = 0,$$

de donde:

$$h = 0.1\delta^2 - \delta;$$

luego, para que la fuerza máxima ejercida por el resorte sea de:

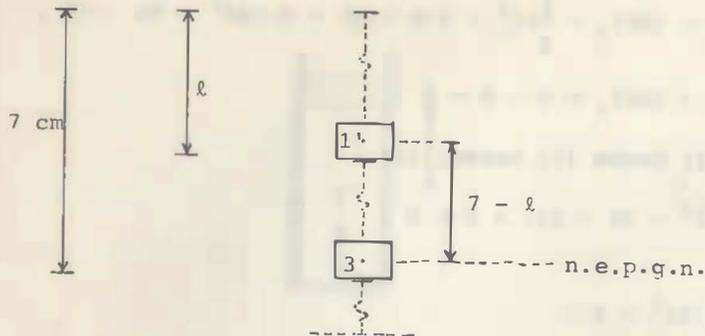
$$a) \quad 20 \text{ kg.} - \delta = \frac{F}{k} = \frac{20 \text{ kg}}{1 \text{ kg/cm}} = 20 \text{ cm}, \quad y, \quad h = 0.1(20)^2 - 20 = \underline{20 \text{ cm}},$$

$$b) \quad 10 \text{ kg.} - \delta = \frac{10 \text{ kg}}{1 \text{ kg/cm}} = 10 \text{ cm}, \quad y, \quad h = 0.1(10)^2 - 10 = \underline{0 \text{ cm}},$$

$$c) \quad 7 \text{ kg.} - \delta = \frac{7 \text{ kg}}{1 \text{ kg/cm}} = 7 \text{ cm}, \quad y, \quad h = 0.1(7)^2 - 7 = -2.1 \text{ cm},$$

resultado no admisible por indicarnos que, para lograr la fuerza de 7 kg correspondiente a este inciso, el bloque debe soltarse de manera que el resorte cuente ya con una deformación inicial, consideración no congruente con la hecha al obtener la energía potencial en la posición en que se suelta el bloque.

Solución al inciso c).- Soltaremos el bloque cuando el resorte se encuentra comprimido una longitud l ; así, llamando l' a la posición donde ahora se suelta el bloque, se tiene:



ahora, basados en este croquis:

$$(EP)_3 - (EP)_{1'} = \frac{1}{2}(1)(7)^2 - \left[\frac{1}{2}(1)l^2 + 5(7 - l) \right],$$

luego:

$$(EP)_3 - (EP)_{1'} = -0.5l^2 + 5l - 10.5,$$

y como:

$$(EC)_3 - (EC)_{1'} = 0 - 0 = 0,$$

al aplicar (XIII) desde 1' hasta 3:

$$(-0.5l^2 + 5l - 10.5) + 0 = 0,$$

de donde:

$$l^2 - 10l + 21 = 0,$$

resolviendo:

$$l = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} = 5 \pm 2,$$

que nos lleva a:

$$l = 7 \text{ cm}, \quad y, \quad l = 3 \text{ cm},$$

entonces, los valores de h solución para este inciso son:

$$h = -7 \text{ cm}, \quad \text{y} \quad h = -3 \text{ cm}.$$

D.1.3) IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEALES

Partamos de la expresión vectorial de la 2a. Ley de Newton, a saber:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} m\vec{v},$$

si multiplicamos ambos miembros por dt:

$$\vec{F}dt = \left[\frac{d}{dt} m\vec{v} \right] dt,$$

y si integramos, entre dos instantes cualesquiera 1 y 2, obtenemos:

$$\int_1^2 \vec{F}dt = (m\vec{v})_2 - (m\vec{v})_1 \quad \text{----- (XIV)}$$

expresión conocida como "Ecuación del Impulso y la Cantidad de movimiento lineales".

A la integral del 1er. miembro se le llama "Impulso lineal", en tanto que a la expresión $m\vec{v}$ se le conoce como "Cantidad de movimiento lineal" o "Momentum lineal" de una partícula de masa m , en el instante que lleva una velocidad \vec{v} .

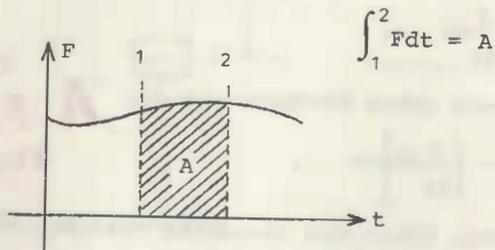
La ecuación (XIV) se puede escribir como tres ecuaciones escalares independientes, que son:

$$\int_1^2 F_x dt = (mv_x)_2 - (mv_x)_1, \quad \text{----- (XIV-x)},$$

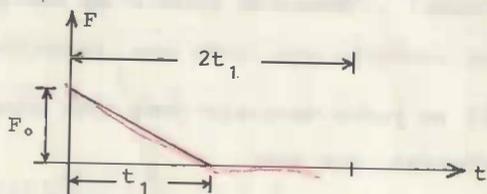
$$\int_1^2 F_y dt = (mv_y)_2 - (mv_y)_1, \quad \text{----- (XIV-y), y,}$$

$$\int_1^2 F_z dt = (mv_z)_2 - (mv_z)_1, \quad \text{----- (XIV-z)}.$$

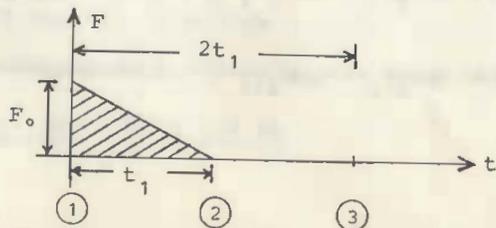
En general, una $\int_1^2 F dt$, misma que puede ser positiva o negativa, puede interpretarse como el "área" bajo la curva definida por la ley que determina la variación de F , en función del tiempo, y el eje de éste, esto es:



Ejemplo 1) Una partícula de masa m , inicialmente en reposo, se mueve bajo la acción de varias fuerzas cuya resultante, \bar{F} , tiene un módulo variable, decreciente en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$ y nulo para $t > t_1$, como se indica en la gráfica. Si la partícula se mueve en la dirección del eje x , encuentre su velocidad cuando $t = 2t_1$.



Solución.- Sean 1, 2 y 3 los instantes mostrados en la siguiente gráfica:



basados en el croquis:

$$\int_1^3 F dt = \int_1^2 F dt + \int_2^3 F dt = \frac{1}{2}(F_0 \cdot t_1) + 0 = \frac{1}{2} F_0 \cdot t_1 ;$$

aplicando (XIV) desde (1) hasta (3):

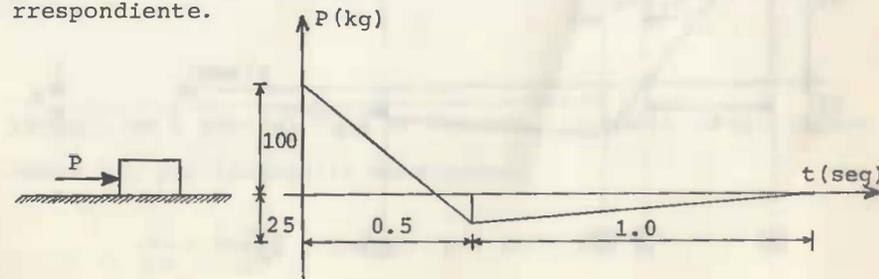
$$\left(\frac{1}{2} F_0 \cdot t_1\right) i = m \bar{v}_3 - m(\bar{0}) ,$$

finalmente:

$$\bar{v}_3 = \left(\frac{1}{2} \frac{F_0 \cdot t_1}{m}\right) i$$

ANEXO
BIBLIOTECA

Ejemplo 2) A un bloque que pesa 20 kg y se encuentra inicialmente en reposo se le aplica una fuerza \bar{P} , paralela al plano horizontal mostrado, cuya componente escalar varía con el tiempo, como se indica. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es 0.25, calcule la rapidez máxima adquirida por el móvil; si éste no se ha detenido cuando $t = 1.5$ seg, determine su rapidez para dicho instante. Si se detiene antes de $t = 1.5$ seg calcule el valor de t correspondiente.

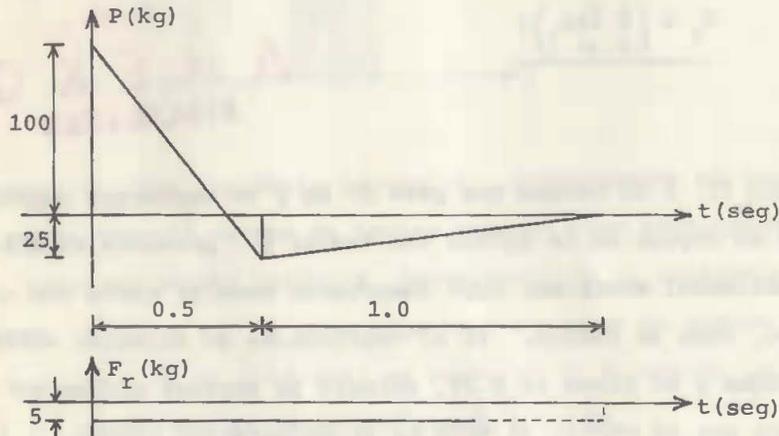


Solución.- De acuerdo con la gráfica de P , la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque, en tanto éste se mueve de izquierda a derecha, es negativa. Así pues, tomando en

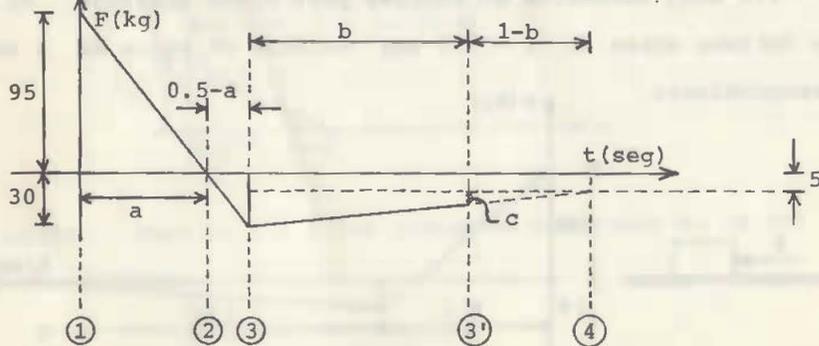
cuenta que la magnitud de la fuerza normal ejercida sobre el bloque, por el tipo de movimiento de éste, iguala al peso del mismo, se tiene:

$$\mu N = (0.25)(20) = 5 \text{ kg}$$

en tanto el bloque se mueva hacia la derecha; entonces, las gráficas correspondientes a P y a F_r (donde F_r es la componente escalar de la fuerza de fricción mencionada) son:



entonces, sumando los efectos, se tiene:



por triángulos semejantes: $\frac{95}{a} = \frac{30}{0.5-a}$,

de donde:

$$47.5 - 95a = 30a, \text{ que implica: } a = 0.38 \text{ seg},$$

con lo que:

$$\int_1^2 F dt = \frac{1}{2}(0.38 \text{ seg})(95 \text{ kg}) = 18.05 \text{ kg-seg};$$

como $mv_1 = 0$, ya que $v_1 = 0$, aplicando (XIV) de 1 a 2:

$$18.05 = \frac{20}{9.81} v_2 - 0,$$

de donde:

$$v_2 = 8.84 \text{ m/seg} = v_{\text{máx.}} \text{ (hacia la derecha);}$$

basados en lo anterior se tiene:

$$\int_2^3 F dt = -\frac{1}{2}(0.5-0.38) \text{ seg}(30 \text{ kg}) = -1.80 \text{ kg-seg};$$

suponiendo que el móvil no se detiene antes de 1.5 seg:

$$\begin{aligned} \int_1^4 F dt &= \int_1^2 F dt + \int_2^3 F dt + \int_3^4 F dt = \\ &= 18.05 + (-1.80) + \left[-\frac{1}{2}(1 \text{ seg})(30 + 5) \text{ kg} \right] = \end{aligned}$$

$$= 18.05 - 1.80 - 17.50 = (-1.25 \text{ kg-seg}) < 0;$$

esto nos dice que el bloque se detiene antes de $t = 1.5 \text{ seg}$.

Cálculo de t para el cual se detiene, instante al que llamaremos 3'; por triángulos semejantes:

$$\frac{c}{25} = \frac{1-b}{1}, \text{ luego: } c = 25 - 25b,$$

con lo que:

$$\int_3^{3'} F dt = -\frac{1}{2}b[30 + (5 + c)] =$$

$$-\frac{b}{2}[30 + (5 + 25 - 25b)] = -30b + 12.5b^2,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_1^{3'} F dt &= \int_1^2 F dt + \int_2^3 F dt + \int_3^{3'} F dt = \\ &= 18.05 + (-1.80) + (-30b + 12.5b^2) = \\ &= 12.5b^2 - 30b + 16.25, \end{aligned}$$

por lo que, al aplicar (XIV) desde 1 hasta 3' :

$$12.5b^2 - 30b + 16.25 = mv_3 - mv_1,$$

que se cumple para:

$$12.5b^2 - 30b + 16.25 = 0,$$

ya que v_3 y v_1 son nulas ;

la expresión inmediata anterior puede reducirse a:

$$b^2 - 2.4b + 1.3 = 0,$$

resolviendo para b:

$$b = \frac{2.4 \pm \sqrt{5.76 - 5.20}}{2} = \frac{2.4 \pm \sqrt{0.14}}{2} = 1.2 \pm \sqrt{0.14},$$

que da lugar a:

$$b_1 = 1.2 + 0.374 = 1.574 \text{ seg}$$

(este valor no tiene sentido ya que no cumple $0 < b < 1$ seg; obsérvese el croquis), y,

$$b_2 = 1.2 - 0.374 = 0.826 \text{ seg};$$

concluimos entonces que, el tiempo necesario para que se detenga el bloque es:

$$t = 0.5 + 0.826 = \underline{1.326 \text{ seg}}$$

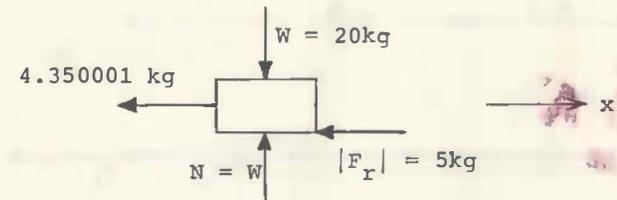
(contado a partir de la aplicación de P);

para este instante:

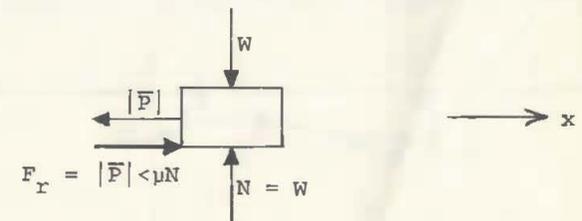
$$c = 25 - 25b = 25 - 25(0.826) = 25 - 20.65 = 4.35 \text{ kg}, \text{ y}$$

$$F = -(c + 5) = -(4.35 + 5) = -9.35 \text{ kg},$$

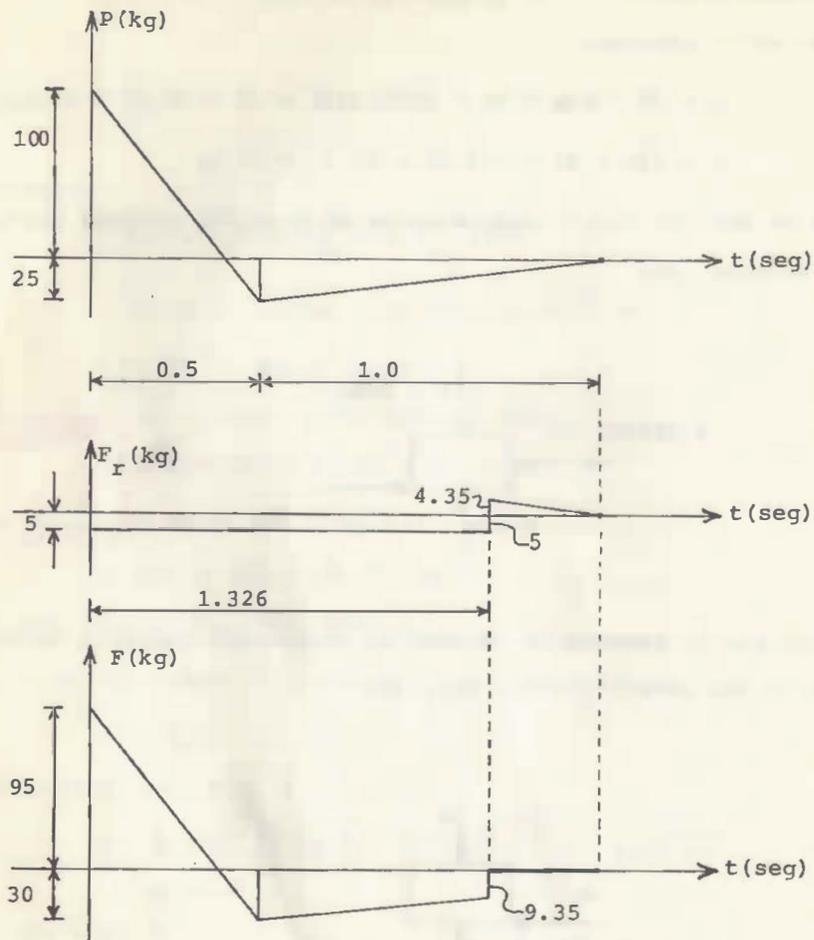
por lo que, el d.c.l. apenas antes de dejar de moverse hacia la derecha, es:



y, el d.c.l. después de detener su movimiento hacia la derecha, o sea para $t \geq 1.326$ seg, es:



esto implica que, después de detenerse, el bloque ya no vuelve a moverse puesto que la fuerza P ya no es capaz de vencer la fricción; entonces, las gráficas definitivas del problema son las siguientes:



Obviamente, la rapidez de 8.84 m/seg obtenida anteriormente es la máxima que adquiere el bloque.

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.

Si la fuerza resultante que obra sobre la partícula en estudio es nula, o el Impulso lineal es nulo, entre dos instantes (1 y 2) del movimiento, se tiene:

$$\int_1^2 \vec{F} dt = \vec{0} ,$$

por lo que, en estos casos, la ecuación (XIV) se transforma en:

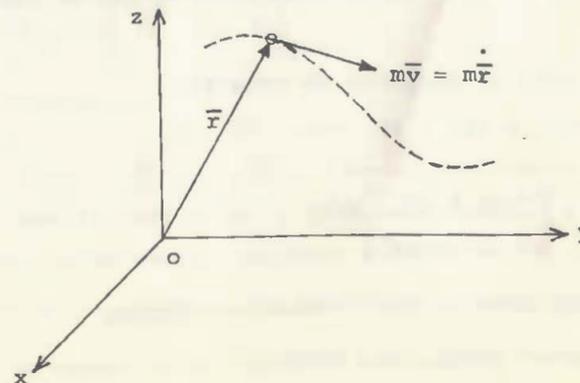
$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{0} ,$$

o bien:

$$m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 \quad \text{--- (XV)}$$

que se conoce como "Principio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal".

MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL



Sea \vec{r} el vector que define en todo instante la posición de una partícula móvil, de masa m , con respecto al origen "o", de un sistema de referencia fijo, como se muestra en la figura. Así, la función que nos determina la velocidad de la partícula (en un instante cualquiera), vendrá dada por $\dot{\vec{r}}$.

Una vez mencionado lo anterior definimos:

$$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$$

o bien:

$$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v} \quad \text{----- (XVI)}$$

como el "Momento de la cantidad de movimiento lineal", de la partícula en estudio, con respecto a "o".

\vec{H}_O también recibe el nombre de "Momento del Momentum lineal".

Ejemplo.- En cierto instante, una partícula que pesa 64.4 lb pasa por el punto de coordenadas (3,12,4), con una velocidad $\vec{v} = 15i + 20j + 10k$, en ft/seg. Obtenga, para dicho instante, el momento de su cantidad de movimiento lineal, con respecto al origen. Las coordenadas proporcionadas están en ft.

Solución.- Para el instante de interés:

$$\vec{r} = 3i + 12j + 4k \quad \text{----- ft, y,}$$

$$m\vec{v} = \left[\frac{W=64.4 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/seg}^2} \right] (15i + 20j + 10k) \text{ ft/seg} =$$

$$= 30i + 40j + 20k \quad \text{----- lb-seg,}$$

luego, aplicando (XVI), se tiene:

$$\vec{H}_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 12 & 4 \\ 30 & 40 & 20 \end{vmatrix} = 80i + 60j - 240k \quad \text{---lb-ft-seg.}$$

RELACION ENTRE IMPULSO ANGULAR Y MOMENTO DEL MOMENTUM LINEAL.

Derivando (XVI) con respecto a t :

$$\dot{\vec{H}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{0} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} ;$$

tomando en cuenta la Segunda Ley de Newton, para $m = \text{cte.}$, podemos escribir:

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{r} \times \vec{F} ,$$

y como $\vec{r} \times \vec{F}$ es el momento, con respecto al origen "o", de la fuerza resultante que obra sobre la partícula en estudio, durante el movimiento de ésta, podemos establecer:

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O \quad \text{----- (XVII);}$$

multiplicando ambos miembros de (XVII) por dt e integrando:

$$\int_1^2 \vec{M}_O dt = \int_1^2 \dot{\vec{H}}_O dt = \left[\vec{H}_O \right]_1^2$$

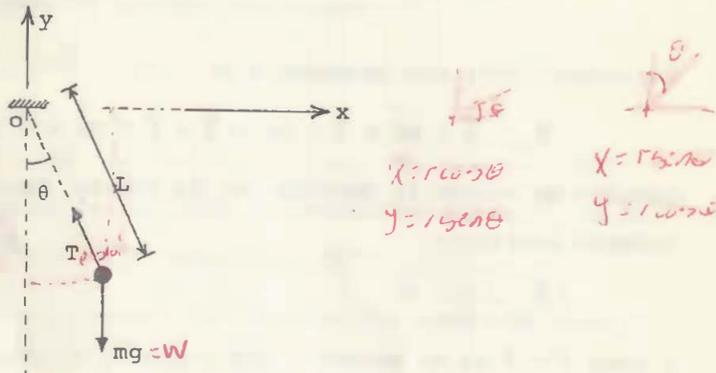
de donde obtenemos:

$$\int_1^2 \vec{M}_O dt = (\vec{H}_O)_2 - (\vec{H}_O)_1 \quad \text{----- (XVIII),}$$

ecuación que relaciona al impulso angular con el incremento del momento de la cantidad de movimiento lineal, ya que a la $\int_1^2 \vec{M}_O dt$ se le conoce como "Impulso angular".

Ejemplo.- Un péndulo simple de masa m y longitud L es desplazado un cierto ángulo con respecto a su posición de equilibrio. Si se le suelta, dejándolo oscilar en un plano vertical, encuentre la ecuación de movimiento correspondiente.

Solución.- D.c.l. en un instante cualquiera de movimiento:



de la figura:

$$\vec{r} = (L \cos \theta) \mathbf{i} + (-L \sin \theta) \mathbf{j} ; \text{posición}$$

derivando ambos miembros con respecto a t :

$$\dot{\vec{r}} = (L \dot{\cos \theta}) \mathbf{i} + (-L \dot{\sin \theta}) \mathbf{j} , \text{velocidad}$$

luego:

$$m \dot{\vec{r}} = mL \dot{\theta} [(\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}] ,$$

con lo que:

$$\vec{H}_O = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ L \cos \theta & -L \sin \theta & 0 \\ mL \dot{\theta} \cos \theta & mL \dot{\theta} \sin \theta & 0 \end{vmatrix} (L) (mL \dot{\theta}) ,$$

o sea:

$$\vec{H}_O = mL^2 \dot{\theta} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \mathbf{k} = mL^2 \dot{\theta} \mathbf{k} \text{ ----- (a);}$$

por otro lado, tomando en cuenta el "Teorema de Varignon":

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \vec{0} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ L \cos \theta & -L \sin \theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} (L)$$

de donde:

$$\vec{M}_O = -(mgL \sin \theta) \mathbf{k} \text{ ----- (b);}$$

derivando (a) con respecto a t :

$$\dot{\vec{H}}_O = mL^2 \ddot{\theta} \mathbf{k} \text{ ----- (c),}$$

sustituyendo (c) y (b) en (XVII):

$$mL^2 \ddot{\theta} \mathbf{k} = -(mgL \sin \theta) \mathbf{k} ,$$

de donde, finalmente se obtiene:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \text{ (ecuación pedida).}$$

ANEX
EXERCICIOS

CONSERVACION DEL MOMENTO DEL MOMENTUM LINEAL

Si la fuerza resultante que obra sobre la partícula en estudio es nula, o el Impulso angular es nulo, entre dos instantes (1 y 2) del movimiento, se tiene:

$$\int_1^2 \vec{M}_O dt = \vec{0}$$

por lo que, en estos casos, la ecuación (XVIII) se transforma en:

$$(\vec{H}_O)_2 - (\vec{H}_O)_1 = \vec{0} ,$$

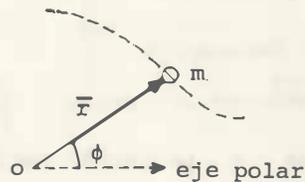
o bien:

$$(\vec{H}_O)_2 - (\vec{H}_O)_1 \text{ ----- (XIX),}$$

igualdad conocida como "Principio de la conservación del Mo-

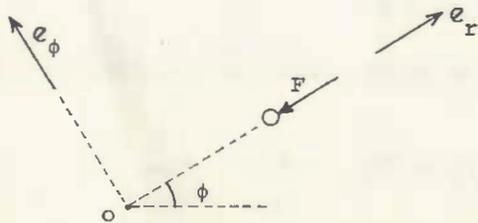
mento de la cantidad de movimiento lineal".

Ejemplo.- Utilizando los conceptos relacionados con el momento de la cantidad de movimiento lineal demuestre que, para una partícula que se mueve dentro de un campo central de fuerzas de centro "o", $r^2\dot{\phi} = \text{cte}$. Utilice la notación indicada.



Solución.- Por tratarse de un movimiento central, la resultante de las fuerzas que obran sobre la partícula en estudio siempre pasa por "o". Así pues, en todo instante, $\bar{M}_O = \bar{0}$ (por lo que \bar{H}_O permanecerá constante).

Basados en lo anterior, un d.c.l. para cualquier instante es del tipo:



cálculo de \bar{H}_O , empleando el croquis:

$$\begin{aligned}\bar{H}_O &= \bar{r} \times m\dot{\bar{r}} = (r\mathbf{e}_r) \times [m(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi)] = \\ &= \bar{0} + mr^2\dot{\phi}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi) = mr^2\dot{\phi}\mathbf{k},\end{aligned}$$

haciendo:

$$\bar{H}_O = \bar{C} = ck \text{ ----- (vector constante),}$$

se tiene:

$$mr^2\dot{\phi}\mathbf{k} = ck, \quad \text{de donde: } r^2\dot{\phi} = \frac{c}{m},$$

por lo que, finalmente, para una masa que se considere no variable:

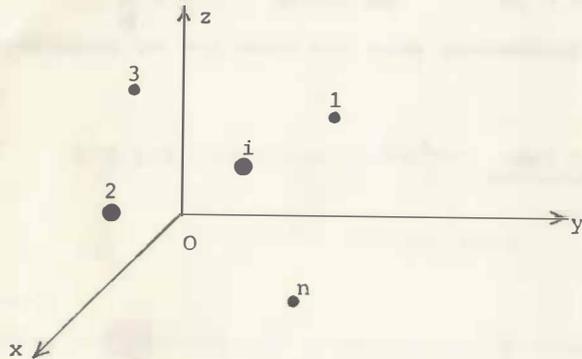
$$\underline{r^2\dot{\phi} = \text{cte.} \text{ ----- l.q.q.d.}}$$

ANEXO
BIBLIOTECA

D.2) PRIMEROS Y SEGUNDOS MOMENTOS

D.2.1. MOMENTOS ESTATICOS Y CENTROIDES.

MOMENTOS ESTATICOS DE SISTEMAS DE PUNTOS MASA.

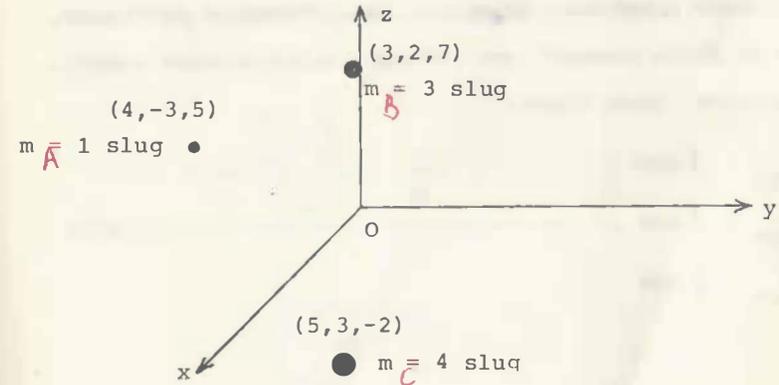


Sea el sistema de puntos masa mostrado en la figura. Siendo $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots, m_n$, las masas de las partículas 1, 2, 3, ..., i, ..., n, respectivamente, definimos como "Momentos estáticos" o "Primeros momentos" de la masa del sistema, respecto a los planos xy , xz y yz , respectivamente, a las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= \sum_{i=1}^n (m_i z_i) \\ M_{xz} &= \sum_{i=1}^n (m_i y_i) \\ M_{yz} &= \sum_{i=1}^n (m_i x_i) \end{aligned} \right\} \text{--- (XX);}$$

de acuerdo con la definición, estos momentos pueden ser positivos, negativos o nulos. Diremos entonces que, el momento estático de la masa de un sistema de partículas, con respecto a un plano, resulta ser la suma de los momentos estáticos de las masas de cada una de las partículas del sistema, respecto a dicho plano.

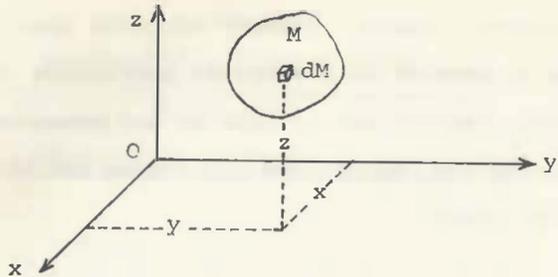
Ejemplo.- Determine los primeros momentos de la masa del sistema de la figura, con respecto a los planos coordenados mostrados. Las coordenadas están en ft.



Solución.- Basados en la definición y tomando en cuenta que un slug iguala una $(\text{lb}\cdot\text{seg}^2)/\text{ft}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= (1)(5) + (3)(7) + (4)(-2) = 5 + 21 + (-8) = \underline{18 \text{ lb}\cdot\text{seg}^2} \\ M_{xz} &= (1)(-3) + (3)(2) + (4)(3) = -3 + 6 + 12 = \underline{15 \text{ lb}\cdot\text{seg}^2} \\ M_{yz} &= (1)(4) + (3)(3) + (4)(5) = 4 + 9 + 20 = \underline{33 \text{ lb}\cdot\text{seg}^2} \end{aligned}$$

MOMENTOS ESTATICOS DE LA MASA DE UN CUERPO RIGIDO.



Considerando que un cuerpo rígido de masa M, como el mostrado en la figura, no es más que un conjunto de partículas diferenciales unidas entre sí, podemos definir (basados en lo visto en el tema inmediato anterior) los "Momentos estáticos de la masa de dicho cuerpo" con respecto a los planos cartesianos mostrados, como sigue:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int z dM, \\ M_{xz} &= \int y dM, \\ M_{yz} &= \int x dM \end{aligned} \quad \text{----- (XXI)}$$

CENTROS DE GRAVEDAD Y DE MASA DE UN CUERPO RIGIDO.

Si llamamos \bar{r}_c al "vector de posición del centro de masa", de un sistema de partículas, por definición deberá cumplirse:

$$M\bar{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \quad \text{----- (XXII)},$$

donde:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{----- (XXIII)}.$$

Con base en lo anterior, calcularemos las coordenadas del centro de masa de un sistema de partículas valiéndonos de la expresión:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{----- (XXIV)}.$$

La expresión (XXIV), haciendo $\bar{r}_c = (x_c)i + (y_c)j + (z_c)k$, y tomando en cuenta las condiciones para igualdad de vectores, podemos descomponerla en:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_{yz}}{M},$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad y,$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_{xy}}{M},$$

donde, (obviamente) x_c , y_c y z_c son las coordenadas de C.

Si se trata de un cuerpo rígido, las expresiones inmediatas anteriores, toman la forma:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\int x dM}{\int dM} = \frac{\int x \rho dv}{\int \rho dv}$$

$$y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\int y dM}{\int dM} = \frac{\int y \rho dv}{\int \rho dv}, \quad y,$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\int z dM}{\int dM} = \frac{\int z \rho dv}{\int \rho dv}$$

Por último, si el cuerpo en estudio es homogéneo ($\rho = \text{cte.}$), las últimas expresiones pueden reducirse a:

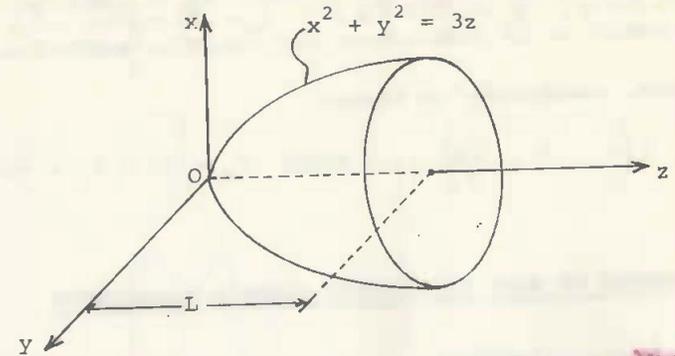
$$x_c = \frac{\int x dv}{\int dv} \quad y_c = \frac{\int y dv}{\int dv} \quad y \quad z_c = \frac{\int z dv}{\int dv}$$

lo que quiere decir que (en estos casos) los centros de masa y de volumen coinciden, puesto que las coordenadas de este último se obtienen siempre mediante los tres últimos cocientes indicados.

Al estudiar la dinámica de los cuerpos rígidos consideraremos que la atracción gravitatoria que ejerce La Tierra (sobre cada una de las partículas que los forman) es constante. También supondremos que los vectores representativos del peso de cada una de las partículas del cuerpo en estudio son paralelos. Bajo las condiciones mencionadas, el centro de masa y el de gravedad (de los cuerpos) coinciden.

Ejemplo.- Obtenga los momentos estáticos de la masa del cuerpo homogéneo de la figura, respecto a los planos coordenados

ahí mostrados, y calcule las coordenadas de su centro de masa.



Solución.- Sea $dM = \rho dx dy dz$, que implica:

$$R_{xyz} \equiv \left[x = 0, \quad x = \sqrt{3z - y^2}; \quad y = 0, \quad y = \sqrt{3z}; \quad z = 0, \quad z = L \right]$$

con lo que:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int z dM = (2)(2) \int_0^L \int_0^{\sqrt{3z}} \int_0^{\sqrt{3z-y^2}} z \rho dx dy dz = 4\rho \int_0^L \int_0^{\sqrt{3z}} \sqrt{3z-y^2} dy dz = \\ &= 4\rho \int_0^L \left[\frac{y}{2} \sqrt{3z-y^2} + \frac{3z}{2} \text{arcsen} \frac{y}{\sqrt{3z}} \right]_0^{\sqrt{3z}} dz = 4\rho \int_0^L \left[\frac{3z}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] dz = 3\pi\rho \int_0^L z^2 dz, \end{aligned}$$

que da lugar a:

$$\underline{M_{xy} = \pi\rho L^3};$$

al ser $\rho = \text{cte}$, por simetría:

$$\underline{M_{xz} = 0}, \quad y \quad \underline{M_{yz} = 0}.$$

Por otro lado, procediendo de forma similar al cálculo de M_{xy} :

$$M = \int dM = 4\rho \int_0^L \left[\frac{3z}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] dz = 3\pi\rho \int_0^L z dz = \frac{3}{2} \pi\rho L^2,$$

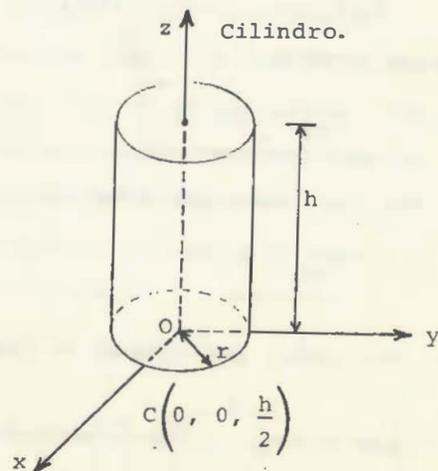
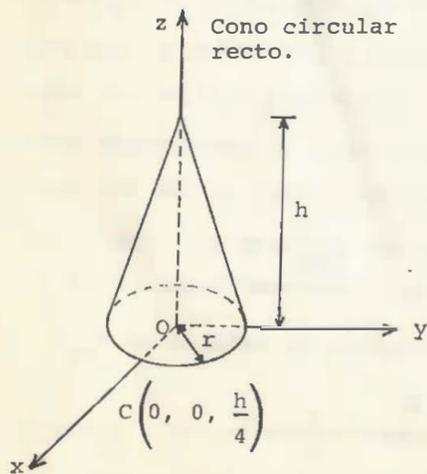
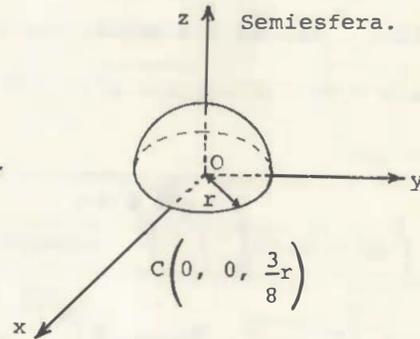
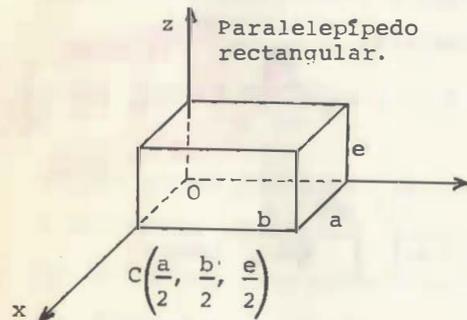
por lo que:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{0}{M} = 0, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{0}{M} = 0, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{\pi \rho L^3}{3}}{\frac{\pi \rho L^2}{2}} = \frac{2}{3} L ;$$

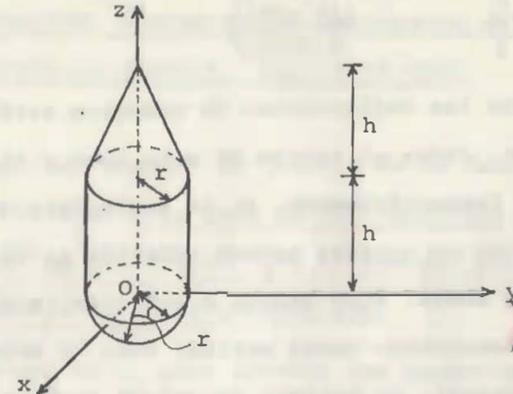
finalmente, resumiendo se tiene:

$$c\left(0, 0, \frac{2}{3}L\right), \text{ o bien: } \vec{r}_c = 0i + 0j + \frac{2}{3}Lk .$$

CENTROS DE MASA DE ALGUNOS CUERPOS HOMOGENEOS



APLICACION.- Obtenga los momentos estáticos de la masa del cuerpo homogéneo de la figura, respecto a los planos coordenados mostrados, así como las coordenadas de su centro de masa.



Solución.- Por simetría: $M_{xz} = 0, \quad M_{yz} = 0;$

cálculo de M_{xy} :

Subcuerpo	M_i	z_{ci}	$M_i z_{ci}$
cono	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$h + \frac{h}{4}$	$\frac{5}{12}\pi r^2 h^2$
cilindro	$\pi r^2 h$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{2}\pi r^2 h^2$
semiesfera	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$-\frac{3}{8}r$	$-\frac{1}{4}\pi r^4$

sumas 2a. y 4a. columnas: $\frac{1}{3}\pi r^2 (h + 3h + 2r), \quad \frac{1}{12}\pi r^2 (5h^2 + 6h^2 - 3r^2)$

entonces: $M = \sum_{i=1}^n M_i = \frac{2}{3}\pi r^2 (2h + r), \quad y,$

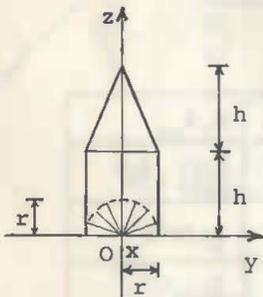
$$M_{xy} = \sum_{i=1}^n M_i z_{ci} = \frac{1}{12}\pi r^2 (11h^2 - 3r^2),$$

basados en lo anterior:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{0}{M} = 0, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{0}{M} = 0, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{1}{12} \pi r^2 (11h^2 - 3r^2)}{\frac{2}{3} \pi r^2 (2h+r)}$$

resumiendo: $c \left(0, 0, \frac{11h^2 - 3r^2}{8(2h+r)} \right)$

NOTA: Basados en las definiciones de momentos estáticos y masa de un sistema, dadas al inicio de este tema y al definir centro de masa, respectivamente, si la semiesfera del ejemplo inmediato anterior no hubiera estado adherida al cilindro del plano xy hacia abajo, sino sacada o extraída de dicho cilindro, del plano mencionado hacia arriba, como lo muestra la siguiente vista lateral, se hubiera procedido según el cuadro adjunto a la vista mencionada.



Subcuerpo	M_i	z_{ci}	$M_i z_{ci}$
cono	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$	$h + \frac{h}{4}$	$\frac{5}{12} \pi r^2 h^2$
cilindro	$\pi r^2 h$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{2} \pi r^2 h^2$
semiesfera	$-\frac{2}{3} \pi r^3$	$\frac{3}{8} r$	$-\frac{1}{4} \pi r^4$

Sumas 2a. y 4a. columnas: $\frac{1}{3} \pi r^2 (h+3h-2r)$, $\frac{1}{12} \pi r^2 (5h^2 + 6h^2 - 3r^2)$;

entonces: $M = \sum_{i=1}^n M_i = \frac{2}{3} \pi r^2 (2h-r)$, y , $M_{xy} = \sum_{i=1}^n M_i z_{ci} = \frac{1}{12} \pi r^2 (11h^2 - 3r^2)$

tomando en cuenta esto, ahora se tiene:

$$z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{1}{12} \pi r^2 (11h^2 - 3r^2)}{\frac{2}{3} \pi r^2 (2h-r)}, \quad y, \quad c \left(0, 0, \frac{11h^2 - 3r^2}{8(2h-r)} \right)$$

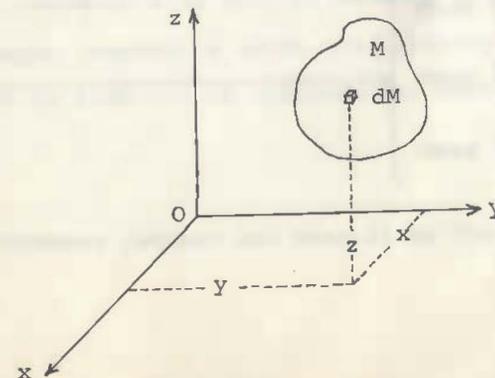
D,2.2. MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

SEGUNDOS MOMENTOS O MOMENTOS DE INERCIA DE LA MASA DE UN CUERPO. PRODUCTOS DE INERCIA. RADIOS DE GIRO.

Definiremos como momento de inercia de la masa de un cuerpo, respecto a un eje, a la suma de los productos de la masa de cada una de las partículas, que lo forman, por el cuadrado de la distancia de ellas a dicho eje.

De acuerdo con ello, para obtener los momentos de inercia (también conocidos como segundos momentos) de la masa de un cuerpo cualquiera, como el de la siguiente figura, respecto a los ejes cartesianos ahí mostrados, nos valdremos de las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dM \\ I_{yy} &= \int (x^2 + z^2) dM \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2) dM \end{aligned} \right\} \text{--- (XXV)}$$



Al poder escribir las expresiones inmediatas anteriores en la forma

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \int y^2 dM + \int z^2 dM \\ I_{yy} &= \int x^2 dM + \int z^2 dM \\ I_{zz} &= \int x^2 dM + \int y^2 dM \end{aligned} \right\} \text{--- (XXV)};$$

definiendo a $\int x^2 dM$, $\int y^2 dM$, e $\int z^2 dM$ como segundos momentos (o momentos de inercia) de la masa del cuerpo, con respecto a los planos yz , xz y xy , respectivamente, podemos decir que, el momento de inercia de la masa del mismo, respecto a un eje coordenado cualquiera, se puede obtener como la suma de los segundos momentos (de la masa de dicho cuerpo) con respecto a los planos coordenados que pasan por el eje de interés.

Los "Productos de inercia" de la masa del cuerpo se definen como:

$$\left. \begin{aligned} P_{xy} &= \int xy dM \\ P_{xz} &= \int xz dM \\ P_{yz} &= \int yz dM \end{aligned} \right\} \text{--- (XXVI)}.$$

Los "Radios de giro" de la masa del cuerpo, respecto a los

ejes x , y , z , respectivamente, vienen dados por:

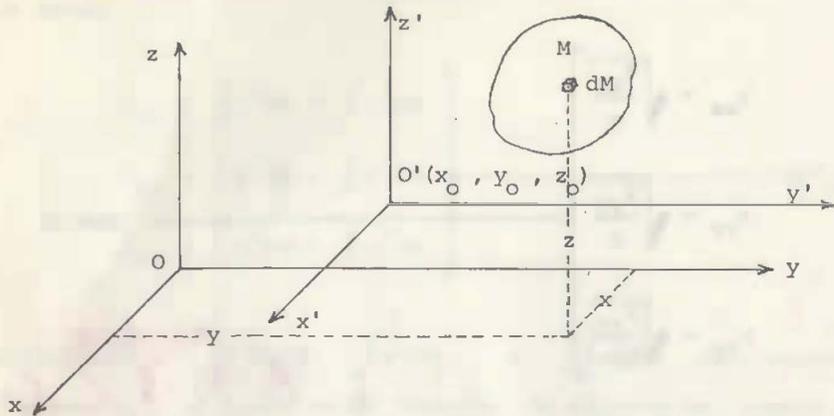
$$\left. \begin{aligned} r_{xx} &= \sqrt{\frac{I_{xx}}{M}} \\ r_{yy} &= \sqrt{\frac{I_{yy}}{M}} \\ r_{zz} &= \sqrt{\frac{I_{zz}}{M}} \end{aligned} \right\} \text{--- (XXVII)}$$

Las expresiones (XXVII) pueden escribirse:

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= M (r_{yy})^2 \\ I_{yy} &= M (r_{xx})^2 \\ I_{yy} &= M (r_{yy})^2 \end{aligned} \right\} \text{--- (XXVIII)};$$

o sea que, si conocemos el radio de giro de la masa de un cuerpo, respecto a un eje, el momento de inercia de la masa del cuerpo, respecto a dicho eje, podremos obtenerlo multiplicando su masa por el cuadrado del radio de giro correspondiente.

TRASLACION DE EJES



Considerando un sistema de referencia $O'x'y'z'$ con ejes paralelos a los del sistema $Oxyz$ mostrado, y de origen $O'(x_0, y_0, z_0)$, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dM = \int [(y_0 + y')^2 + (z_0 + z')^2] dM = \\
 &= \int [y_0^2 + 2y_0y' + (y')^2 + z_0^2 + 2z_0z' + (z')^2] dM = \\
 &= \int [(y')^2 + (z')^2] dM + \int (y_0^2 + z_0^2) dM + \int 2y_0y' dM + \int 2z_0z' dM = \\
 &= \int [(y')^2 + (z')^2] dM + M(y_0^2 + z_0^2) + 2y_0 \int y' dM + 2z_0 \int z' dM;
 \end{aligned}$$

basados en lo anterior, y siguiendo un proceso similar para I_{yy} e I_{zz} , obtenemos:

$$\left. \begin{aligned}
 I_{xx} &= I_{x'x'} + M(y_0^2 + z_0^2) + 2y_0 \int y' dM + 2z_0 \int z' dM \\
 I_{yy} &= I_{y'y'} + M(x_0^2 + z_0^2) + 2x_0 \int x' dM + 2z_0 \int z' dM \\
 I_{zz} &= I_{z'z'} + M(x_0^2 + y_0^2) + 2x_0 \int x' dM + 2y_0 \int y' dM
 \end{aligned} \right\} \text{--- (XXIX),}$$

expresiones conocidas como "Teoremas de ejes paralelos para momentos de inercia".

También podemos escribir:

$$I_{xy} = \int xy dM = \int (x_0 + x')(y_0 + y') dM = \int x'y' dM + \int x_0 y_0 dM + \int x_0 y' dM + \int y_0 x' dM;$$

basados en esto último y procediendo en forma similar para

I_{xz} e I_{yz} , obtenemos:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + M(x_0 y_0) + x_0 \int y' dM + y_0 \int x' dM$$

$$I_{xz} = I_{x'z'} + M(x_0 z_0) + x_0 \int z' dM + z_0 \int x' dM \text{--- (XXX)}$$

$$I_{yz} = I_{y'z'} + M(y_0 z_0) + y_0 \int z' dM + z_0 \int y' dM$$

expresiones conocidas como "Teoremas de ejes paralelos para productos de inercia".

Si hacemos coincidir O' con el centro de masa del cuerpo:

$$x_0 = x_c, \quad y_0 = y_c, \quad z_0 = z_c,$$

$$\int x' dM = 0, \quad \int y' dM = 0, \quad \int z' dM = 0,$$

por lo que, en estos casos, (XXIX) y (XXX) toman la forma:

$$\left. \begin{aligned}
 I_{xx} &= I_{x_c x_c} + M(y_c^2 + z_c^2) \\
 I_{yy} &= I_{y_c y_c} + M(x_c^2 + z_c^2) \\
 I_{zz} &= I_{z_c z_c} + M(x_c^2 + y_c^2)
 \end{aligned} \right\} \text{--- (XXIX}_c \text{),}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= I_{x_c y_c} + M(x_c y_c) \\
 I_{xz} &= I_{x_c z_c} + M(x_c z_c) \\
 I_{yz} &= I_{y_c z_c} + M(y_c z_c)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} I_{xy} \\ I_{xz} \\ I_{yz} \end{aligned}} \right\} \text{--- (XXIX}_c\text{)}$$

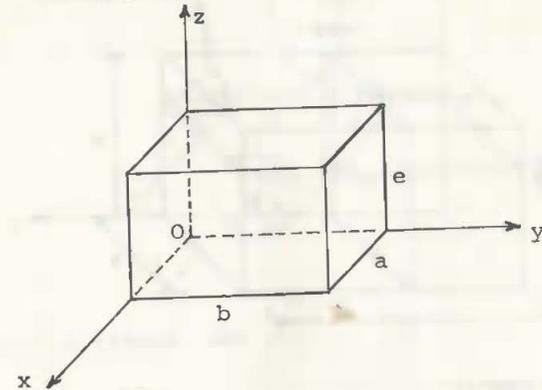
expresiones conocidas como "Teoremas de ejes paralelos, para momentos de inercia, cuando uno de ellos pasa por el centro de masa del cuerpo en estudio", y como "Teoremas de ejes paralelos, para productos de inercia, cuando el sistema rectangular paralelo al dado tiene por origen el centro de masa del sólido en cuestión", respectivamente.

La interpretación de las expresiones (XXIX_c) es la siguiente: el momento de inercia respecto a un eje cualquiera resulta igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo al dado, que pase por el centro de masa del cuerpo en estudio, mas la masa de éste multiplicada por el cuadrado de la distancia entre esos ejes.

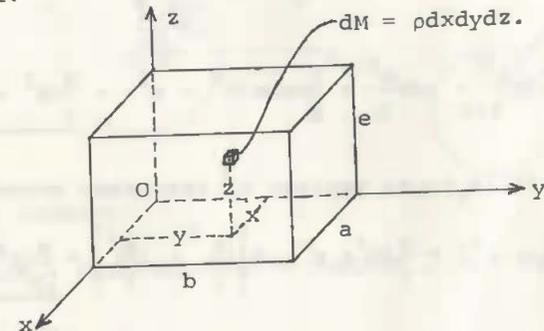
Ejemplo 1.- Para el paralelepípedo rectangular y homogéneo de la figura:

- Obtenga el momento de inercia de su masa respecto al eje x , empleando sólo una diferencial de masa,
- Verifique el resultado del inciso anterior utilizando varias diferenciales de masa,
- Encuentre el momento de inercia de su masa con respecto a un eje, paralelo al x , que pase por su centro de masa,

- Calcule I_{xy} , Y ,
- Obtenga $I_{x_c y_c}$.



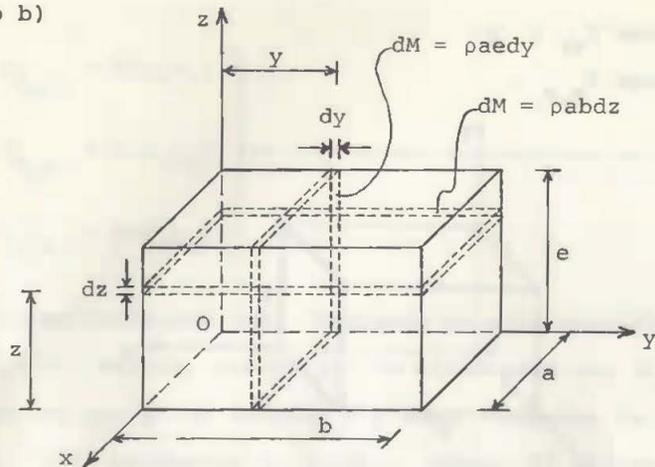
Solución.- Inciso a). Tomemos la diferencial de masa elemental:



basados en el croquis:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dM = \int_0^e \int_0^b \int_0^a y^2 \rho dx dy dz + \int_0^e \int_0^b \int_0^a z^2 \rho dx dy dz = \\
 &= \rho a \int_0^e \int_0^b y^2 dy dz + \rho a \int_0^e \int_0^b dy z^2 dz = \rho a \frac{b^3}{3} \int_0^e dz + \rho ab \int_0^e z^2 dz = \\
 &= \rho a \frac{b^3}{3} e + \rho ab \frac{e^3}{3} = \frac{1}{3} \rho abe (b^2 + e^2) = \frac{M}{3} (b^2 + e^2).
 \end{aligned}$$

inciso b)



basados en el croquis:

$$I_{xx} = \int y^2 dM + \int z^2 dM = \int_0^b y^2 \rho a e dy + \int_0^e z^2 \rho a b dz,$$

con lo que:

$$I_{xx} = \rho a e \frac{b^3}{3} + \rho a b \frac{e^3}{3} = \frac{1}{3} \rho a b e (b^2 + e^2) = \frac{M}{3} (b^2 + e^2);$$

inciso c).- De (XXIX_C), al emplear el resultado anterior:

$$I_{x_c x_c} = I_{xx} - M(y_c^2 + z_c^2) = \frac{M}{3} (b^2 + e^2) - M \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 \right] = \frac{M}{12} (b^2 + e^2);$$

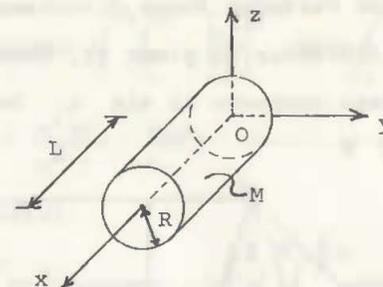
inciso d).- Empleando la dM del inciso a:

$$I_{xy} = \int xy dm = \int_0^e \int_0^b \int_0^a xy \rho dx dy dz = \rho \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} e = \frac{1}{4} \rho a b e (ab) = \frac{M}{4} ab;$$

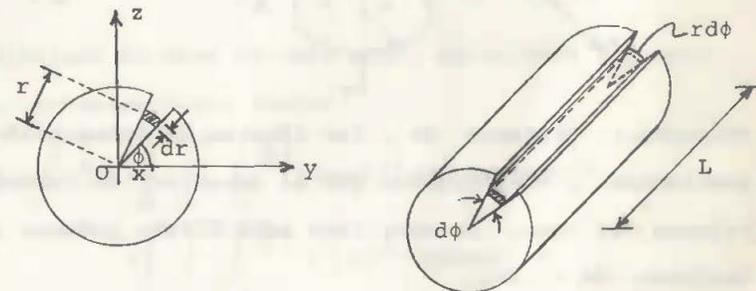
inciso e).- Utilizando (XXX_C) y el resultado del inciso inmediato anterior:

$$I_{x_c y_c} = I_{xy} - M(x_c y_c) = \frac{M}{4} ab - M \left[\left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{b}{2}\right) \right] = 0.$$

Ejemplo 2) Calcule el momento de inercia de la masa del cilindro homogéneo de la figura, respecto al eje x.



Solución.- Elijamos dM:



de los croquis:

$$dM = \rho dv = \rho (dr) (r d\phi) (L) = \rho L d\phi r dr, \quad y = r \cos \phi, \quad z = r \sin \phi;$$

con lo que:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dM = \int [(r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2] \rho L d\phi r dr = \int [r^2] \rho L d\phi r dr,$$

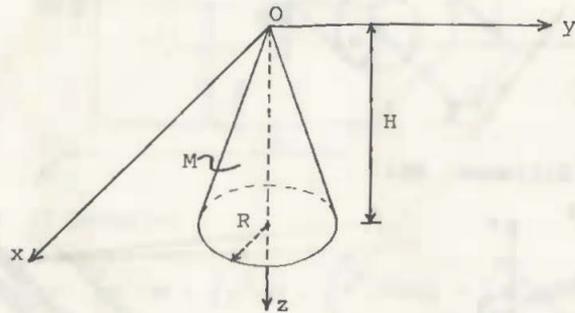
o sea:

$$I_{xx} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho L d\phi r^3 dr = 2\pi \rho L \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho L \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} (\rho \pi R^2 L) R^2,$$

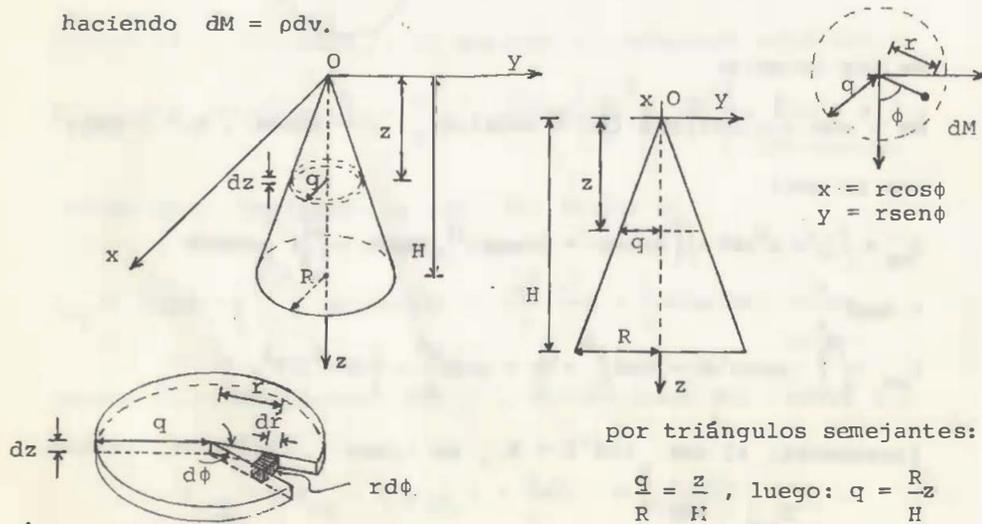
finalmente, al ser $\rho \pi R^2 L = M$, se tiene:

$$I_{xx} = \frac{1}{2} MR^2$$

Ejemplo 3) El cono sólido, circular y recto, de la figura, tiene masa M , altura H , y radio R en su base, como se aprecia. Si su densidad varía en forma directamente proporcional al cuadrado de la distancia al plano xy , determine el momento de inercia de su masa respecto al eje x . De el resultado en función de M , R y H .



Solución.- Elijamos dv , los límites de integración correspondientes, y verifiquemos que al integrar dv obtengamos el volumen del cono. De cumplirse esto último podemos proseguir haciendo $dM = \rho dv$.



por triángulos semejantes:

$$\frac{q}{R} = \frac{z}{H}, \text{ luego: } q = \frac{R}{H}z$$

$$dv = (dr)(r d\phi)(dz) = r dr d\phi dz$$

apoyados en lo que se muestra y se ha obtenido de las diversas figuras:

$$V = \int dV = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^q r dr d\phi dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^q d\phi dz = \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{H^2}{H^2} z^2 \right) d\phi dz = \frac{1}{2} \frac{R^2}{H^2} (2\pi) \int_0^H z^2 dz = \pi \frac{R^2}{H^2} \left(\frac{H^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 H \text{ ----- (correcto);}$$

basados en lo anterior:

$$M = \int dM = \int \rho dv = \int (Kz^2)(r dr d\phi dz) = K \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{H}z} r dr d\phi z^2 dz = K \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{R^2}{H^2} z^2 \right) d\phi z^2 dz = \frac{K}{2} \frac{R^2}{H^2} (2\pi) \int_0^H z^4 dz = \frac{K\pi R^2}{H} \left(\frac{H^5}{5} \right) = \frac{K}{5} \pi R^2 H^3 \text{ --- (a);}$$

una vez calculada la masa de este cono, calculemos I_{xx} aprovechando lo obtenido hasta ahora:

$$I_{xx} = \int y^2 dM + \int z^2 dM = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{H}z} (r \text{sen} \phi)^2 \left[(Kz^2)(r dr d\phi dz) \right] + \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{H}z} z^2 \left[(Kz^2)(r dr d\phi dz) \right] = K \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^4}{4H^4} z^4 \right) \text{sen}^2 \phi d\phi z^2 dz + K \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2}{2H^2} z^2 \right) d\phi z^4 dz = \frac{KR^4}{4H^4} \int_0^H \left[\frac{\phi}{2} - \frac{1}{4} \text{sen} 2\phi \right]_0^{2\pi} z^6 dz + \frac{KR^2}{2H^2} \int_0^H (2\pi) z^6 dz = \frac{KR^4}{4H^4} \left(\frac{H^7}{7} \right) + \frac{K\pi R^2}{4H^4} \left(\frac{H^7}{7} \right);$$

factorizando:

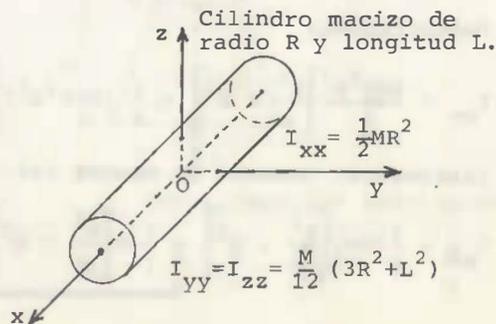
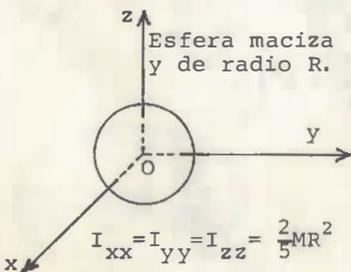
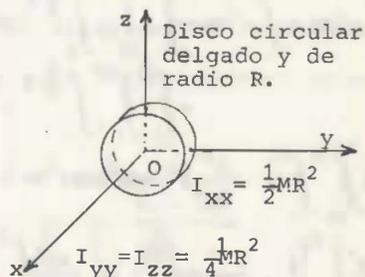
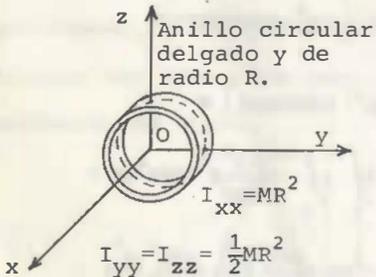
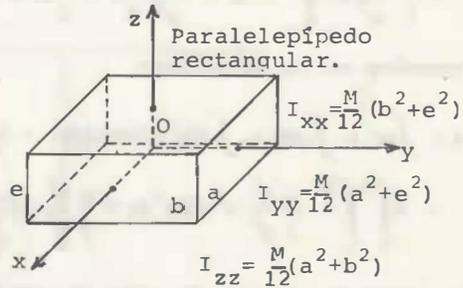
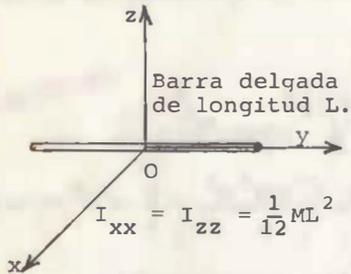
$$I_{xx} = \frac{K\pi R^2 H^3}{7} \left[\frac{R^2}{4} + H^2 \right] = \frac{1}{7} (K\pi R^2 H^3) \left[\frac{R^2}{4} + H^2 \right],$$

finalmente, tomando en cuenta (a):

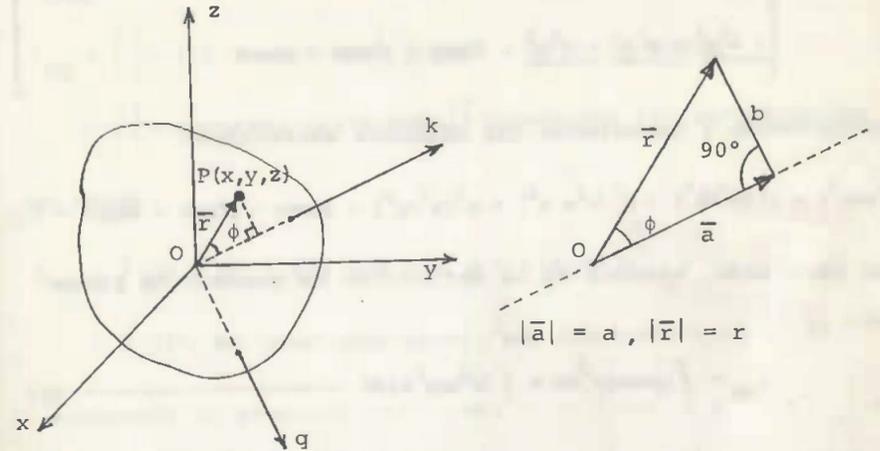
$$I_{xx} = \frac{1}{7} (5M) \left[\frac{R^2}{4} + H^2 \right] = \frac{5}{7} M \left[\frac{R^2}{4} + H^2 \right]$$

MOMENTOS DE INERCIA DE LA MASA DE ALGUNOS DE LOS CUERPOS RIGIDOS Y HOMOGENEOS MAS ESTUDIADOS EN DINAMICA.

Nota.- En todos los casos mostrados en esta página, "O" coincide con el centro de masa del cuerpo en cuestión.



ROTACION DE EJES



Sea el sistema de referencia Oxyz de la figura. Si conocemos los momentos y productos de inercia, de la masa del cuerpo - del croquis, respecto a los ejes cartesianos mostrados y que remos conocer el momento de inercia (de la masa de dicho cuerpo) respecto al eje k, de cosenos directores l, m y n , nos basaremos en lo siguiente:

Siendo \bar{a} un vector en la dirección del eje k, tal que:

$$|\bar{a}| = a = \bar{r} \cdot \bar{e}_k = (xi + yj + zk) \cdot (li + mj + nk) = lx + my + nz,$$

se tiene, basados en el triángulo del croquis:

$$b^2 = r^2 - a^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2 + 2lmxy + 2lnxz + 2mnyz),$$

luego, tomando en cuenta que $(l^2 + m^2 + n^2) = 1$, podemos escri

bir:

$$r^2 \sin^2 \phi = r^2 \left(\frac{b}{r}\right)^2 = b^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (l^2 + m^2 + n^2) - (l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2 + 2lmxy + 2lnxz + 2mnyz);$$

desarrollando:

$$r^2 \text{sen}^2 \phi = \left[\begin{array}{l} \underline{\ell^2 x^2} + \underline{\ell^2 y^2} + \underline{\ell^2 z^2} + \underline{m^2 x^2} + \underline{m^2 y^2} + \underline{m^2 z^2} + \underline{n^2 x^2} + \underline{n^2 y^2} + \underline{n^2 z^2} - \\ - \underline{\ell^2 x^2} - \underline{m^2 y^2} - \underline{n^2 z^2} - 2\ell m xy - 2\ell n xz - 2mn yz \end{array} \right],$$

factorizando y cancelando los términos subrayados:

$$r^2 \text{sen}^2 \phi = \ell^2 (y^2 + z^2) + m^2 (x^2 + z^2) + n^2 (x^2 + y^2) - 2\ell m xy - 2\ell n xz - 2mn yz - (f);$$

por otro lado, basados en la definición de momento de inercia:

$$I_{kk} = \int (r \text{sen} \phi)^2 dM = \int (r^2 \text{sen}^2 \phi) dM \text{ ----- (g)}$$

sustituyendo (f) en (g)

$$I_{kk} = \int \left[\ell^2 (y^2 + z^2) + m^2 (x^2 + z^2) + n^2 (x^2 + y^2) - 2\ell m xy - 2\ell n xz - 2mn yz \right] dM,$$

luego:

$$I_{kk} = \left[\begin{array}{l} \ell^2 \int (y^2 + z^2) dM + m^2 \int (x^2 + z^2) dM + n^2 \int (x^2 + y^2) dM - \\ - 2\ell m \int xy dM - 2\ell n \int xz dM - 2mn \int yz dM \end{array} \right]$$

finalmente:

$$I_{kk} = \ell^2 I_{xx} + m^2 I_{yy} + n^2 I_{zz} - 2\ell m I_{xy} - 2\ell n I_{xz} - 2mn I_{yz} \text{ ----- (XXXI)}.$$

Para conocer el producto de inercia I_{kq} , donde "k" y "q" son ejes perpendiculares entre sí, nos apoyaremos en que, si los cosenos directores del eje q son ℓ' , m' y n' , al ser ℓ , m y n los del eje k, debe cumplirse:

$$\ell \ell' + m m' + n n' = 0 \text{ ----- (h);}$$

partiendo de la definición de producto de inercia de la masa de un cuerpo, tomando en cuenta las figuras:

$$\begin{aligned} I_{kq} &= \int [\bar{r} \cdot (\ell i + m j + n k)] [\bar{r} \cdot (\ell' i + m' j + n' k)] dM = \\ &= \int [(x i + y j + z k) \cdot (\ell i + m j + n k)] [(x i + y j + z k) \cdot (\ell' i + m' j + n' k)] dM, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} I_{kq} &= \int (\ell x + m y + n z) (\ell' x + m' y + n' z) dM = \\ &= \int (\ell \ell' x^2 + m \ell' xy + n \ell' xz + \ell m' xy + m m' y^2 + n m' yz + \ell n' xz + m n' yz + n n' z^2 - \ell \ell' x^2 - \\ &\quad - m m' y^2 - n n' z^2 - \ell \ell' y^2 - \ell \ell' z^2 - m m' x^2 - m m' z^2 - n n' x^2 - n n' y^2) dM; \end{aligned}$$

agregando el producto $(\ell \ell' + m m' + n n')(-x^2 - y^2 - z^2)$, que es nulo, basado en (h), se tiene:

$$\begin{aligned} I_{kq} &= \int (\ell \ell' x^2 + m \ell' xy + n \ell' xz + \ell m' xy + m m' y^2 + n m' yz + \ell n' xz + m n' yz + n n' z^2 - \ell \ell' x^2 - \\ &\quad - m m' y^2 - n n' z^2 - \ell \ell' y^2 - \ell \ell' z^2 - m m' x^2 - m m' z^2 - n n' x^2 - n n' y^2) dM \end{aligned}$$

cancelando los términos subrayados en la expresión inmediata anterior y factorizando:

$$I_{kq} = \left[\begin{array}{l} -\ell \ell' \int (y^2 + z^2) dM - m m' \int (x^2 + z^2) dM - n n' \int (x^2 + y^2) dM + \\ + (m \ell' + \ell m') \int xy dM + (n \ell' + \ell n') \int xz dM + (m n' + n m') \int yz dM \end{array} \right],$$

finalmente:

$$I_{kq} = -\ell \ell' I_{xx} - m m' I_{yy} - n n' I_{zz} + (m \ell' + \ell m') I_{xy} + (n \ell' + \ell n') I_{xz} + (m n' + n m') I_{yz} \text{ ----- (XXXII)}$$

EL TENSOR DE INERCIA

Consideremos un cuerpo rígido, un sistema de referencia Oxyz, y un sistema O'x'y'z' de ejes paralelos a x, y, z.

Llamamos tensor de inercia de la masa del cuerpo en estudio, en el punto O, al tensor:

$$\bar{I}_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \text{----- (XXXIII)}$$

Si empleamos los teoremas de ejes paralelos, tanto para momentos como para productos de inercia, podemos obtener rápidamente el tensor de inercia de la masa del cuerpo en el punto O', esto es:

$$\bar{I}_{O'} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z'} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z'} \\ -I_{z'x'} & -I_{z'y'} & I_{z'z'} \end{pmatrix} \text{----- (XXXIII')}$$

MOMENTOS Y EJES PRINCIPALES DE INERCIA

En los dos casos mencionados anteriormente, si rotamos el sistema de referencia, podemos obtener tensores de inercia de la forma:

$$\bar{I}_{Op} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \text{----- (XXXIV)},$$

Y,

$$\bar{I}_{O'p} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix} \text{----- (XXXIV')}$$

ANEXO BIBLIOTECA

cuando logramos esto decimos que estamos en presencia de un "tensor de inercia en el origen O, de un sistema formado por ejes principales" o de un "tensor en el origen O', de un sistema de referencia formado por ejes principales de inercia", según el caso. A los momentos de inercia correspondientes se les conoce como "momentos de inercia principales".

Para obtener los momentos de inercia principales, diferenciaremos la ecuación (XXXI) e igualaremos a cero el resultado obtenido, es decir:

$$dI_{kk} = \left[\begin{aligned} & 2lI_{xx} dl + 2mI_{yy} dm + 2nI_{zz} dn - 2lI_{xy} dm - 2mI_{xy} dl - 2lI_{xz} dn \\ & - 2nI_{xz} dl - 2mI_{yz} dn - 2nI_{yz} dm \end{aligned} \right] = 0,$$

lo cual puede reducirse a:

$$(lI_{xx} - mI_{xy} - nI_{xz})dl + (-lI_{xy} + mI_{yy} - nI_{yz})dm + (-lI_{xz} - mI_{yz} + nI_{zz})dn = 0,$$

que, por no ser dl, dm y dn independientes, en virtud

de que $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, se cumple para:

$$\begin{vmatrix} (I_{xx} - \lambda) & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & (I_{yy} - \lambda) & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{zz} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{----- (XXXV)}$$

donde λ es el denominado "multiplicador de Lagrange".

La ecuación (XXXV), desarrollada, toma la forma:

$$\lambda^3 + C_1\lambda^2 + C_2\lambda + C_3 = 0 \quad \text{----- (XXXV}_d)$$

cuya solución arroja 3 valores para λ que, pueda demostrarse, corresponden a los "momentos de inercia principales" generalmente llamados máximo, intermedio y mínimo, mismos que son los momentos de inercia respecto a los tres ejes rectangulares denominados "ejes principales de inercia" cuya dirección, a su vez, viene determinada por los vectores unitarios llamados comunmente $e_{m\acute{a}x}$, $e_{int.}$ y $e_{m\acute{i}n.}$

Para encontrar $e_{m\acute{a}x}$, $e_{int.}$ y $e_{m\acute{i}n.}$, basta resolver el sistema de ecuaciones que a continuación se indica:

$$\left. \begin{array}{l} (I_{xx} - \lambda)l \quad (-I_{xy})m \quad (-I_{xz})n = 0 \\ (-I_{xy})l \quad + (I_{yy} - \lambda)m \quad (-I_{yz})n = 0 \\ \underline{l^2 \quad + m^2 \quad + n^2 = 1} \end{array} \right\} \text{----- (XXXVI)}$$

para cada uno de los valores de λ obtenidos al resolver (XXXV), lo cual nos da 3 juegos de valores para l , m y n .

Cada uno de estos juegos nos da la dirección de un eje principal de inercia, lo que a su vez nos permite determinar $e_{m\acute{a}x}$, $e_{int.}$ y $e_{m\acute{i}n.}$ Para captar mejor esto se recomienda ver el ejemplo resuelto inmediatamente después de hablar de la invariancia de la suma de los momentos de inercia valuados con respecto a los tres ejes de sistemas de referencia ortogonales, con origen en un mismo punto (página número 198).

Generalmente, es útil valuar los momentos de inercia principales puesto que según concluirese, de la ecuación

$$\bar{M} = I\bar{\alpha}$$

que obtendremos más adelante, un cuerpo girará con una aceleración angular de módulo inversamente proporcional al momento de inercia, de su masa, respecto al eje de rotación. Es decir, a menor momento de inercia de la masa de un cuerpo respecto a un eje, mayor capacidad de rotación alrededor del mismo, y viceversa.

Pues bien, basados en lo anterior y en los teoremas de ejes paralelos (que nos hacen ver que los momentos de inercia de la masa de un cuerpo son más pequeños respecto a un eje centroidal, que respecto a cualquier otro paralelo a éste), podemos decir que el "momento de inercia mínimo minimorum" será el momento menor de los principales correspondientes al sistema de "ejes principales de inercia con origen en el centro de masa del cuerpo".

Por último, es importante hacer ver que, basados en las definiciones respectivas, considerando un sistema de referencia $Oxyz$, se tiene:

$$\begin{aligned} I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} &= \int (y^2 + z^2) dM + \int (x^2 + z^2) dM + \int (x^2 + y^2) dM = \\ &= 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dM = 2 \int r^2 dM ; \end{aligned}$$

si consideramos ahora un sistema de referencia también con origen en O , pero de ejes x' , y' , z' no coincidentes con x , y , z , se tiene:

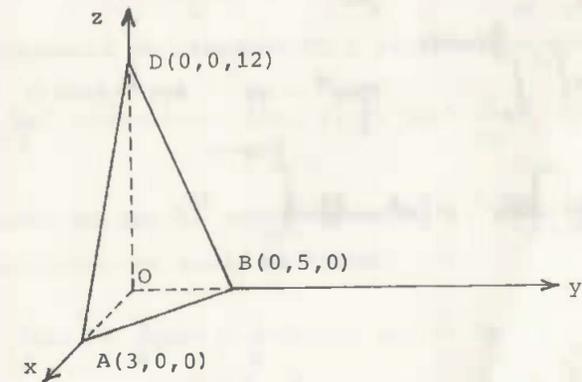
$$\begin{aligned} I_{x'x'} + I_{y'y'} + I_{z'z'} &= \int [(y')^2 + (x')^2] dM + \int [(x')^2 + (z')^2] dM + \int [(x')^2 + (y')^2] dM = \\ &= 2 \int [(x')^2 + (y')^2 + (z')^2] dM = 2 \int r^2 dM ; \end{aligned}$$

esto implica que la suma de los momentos de inercia (de la masa de un cuerpo) respecto a los tres ejes de cualquier sistema cartesiano es un "invariante", si los sistemas en cuestión tienen el mismo origen.

Ejemplo.- Relativo al cuerpo homogéneo mostrado a continuación, de vértices O , A , B y D :

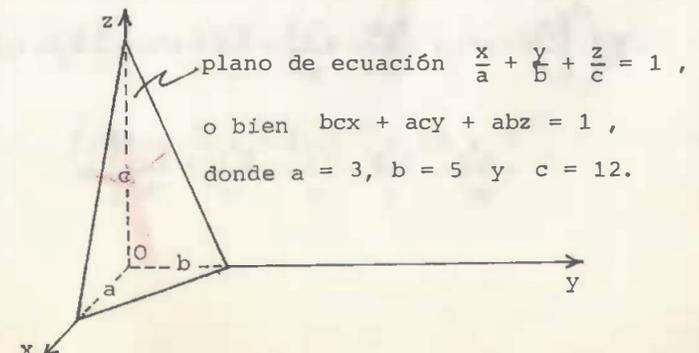
- i) Obtenga el tensor de inercia en el origen del sistema de referencia dado.
- ii) Value los momentos de inercia, de su masa, respecto a los ejes principales de inercia que pasan por O . Obtenga los vectores unitarios que determinan la dirección y el sentido de dichos ejes; verifique su ortogonalidad.
- iii) Calcule el tensor de inercia en el origen C de un sistema de referencia, centroidal, paralelo al dado.

- iiii) Determine los momentos de inercia, de su masa, respecto a los ejes principales de inercia que pasan por C . Verifique que la suma de los momentos, mencionados en este inciso, coincidan con la suma de los momentos de inercia que forman parte del tensor del inciso inmediato anterior. Corrobore la ortogonalidad de los ejes que forman el sistema de ejes principales, de inercia, centroidales.



Solución.-

inciso i) Consideremos el cuerpo homogéneo siguiente:



tomando $dM = \rho dx dy dz$,

del croquis:

$$R_{xyz} \equiv \left[x = 0, x = \frac{a}{bc}(bc - cy - bz); y = 0, y = \frac{b}{c}(c - z); z = 0, z = c \right];$$

basados en lo anterior:

$$\begin{aligned} \int Y^2 dM &= \rho \int_0^c \int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} \int_0^{\frac{a}{bc}(bc - cy - bz)} dx y^2 dy dz = \\ &= \rho \int_0^c \int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} \left[\frac{a}{bc}(bc - cy - bz) \right] y^2 dy dz = \\ &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} (bcy^2 - cy^3 - bzy^2) dy dz = \\ &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \left[\frac{bc}{3} y^3 - \frac{c}{4} y^4 - \frac{bz}{3} y^3 \right]_0^{\frac{b}{c}(c-z)} dz, \end{aligned}$$

o sea:

$$\begin{aligned} \int Y^2 dM &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \left\{ \frac{bc}{3} \left[\frac{b^3}{c^3} (c^3 - 3c^2 z + 3cz^2 - z^3) \right] - \frac{c}{4} \left[\frac{b^4}{c^4} (c^4 - 4c^3 z + 6c^2 z^2 - 4cz^3 + z^4) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{bz}{3} \left[\frac{b^3}{c^3} (c^3 - 3c^2 z + 3cz^2 - z^3) \right] \right\} dz = \\ &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \left[\frac{b^4 c}{3} - b^4 z + \frac{b^4 z^2}{c} - \frac{b^4 z^3}{3c^2} - \frac{b^4 c}{4} + b^4 z - \frac{3}{2} \frac{b^4 z^2}{c} + \frac{b^4 z^3}{c^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^4 z^4}{4c^3} - \frac{b^4 z}{3} + \frac{b^4 z^2}{c} - \frac{b^4 z^3}{c^2} + \frac{b^4 z^4}{3c^3} \right] dz, \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} \int Y^2 dM &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \left[\frac{b^4 c}{12} - \frac{b^4 z}{3} + \frac{b^4 z^2}{2c} - \frac{b^4 z^3}{3c^2} + \frac{b^4 z^4}{12c^3} \right] dz = \\ &= \frac{\rho ab^3}{c} \left[\frac{c}{12}(c) - \frac{1}{3} \frac{(c^2)}{2} + \frac{1}{2c} \frac{(c^3)}{3} - \frac{1}{3c^2} \frac{(c^4)}{4} + \frac{1}{12c^3} \frac{(c^5)}{5} \right], \end{aligned}$$

de donde:

$$\int Y^2 dM = \rho ab^3 c \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{60} \right] = \frac{1}{6} \rho ab^3 c \left(\frac{b^2}{10} \right) = \frac{M}{10} b^2 \quad (1);$$

siguiendo procesos de integración y algebraicos similares:

$$\int z^2 dM = \frac{M}{10} c^2 \quad (2), \quad \int x^2 dM = \frac{M}{10} a^2 \quad (3)$$

por otro lado, al ser el cuerpo homogéneo y tomando en cuenta las dimensiones de éste, se tiene:

$$M = \rho v = \rho \left[\frac{1}{6} abc \right] = \frac{1}{6} \rho abc = \frac{1}{6} \rho (3)(5)(12) = 30\rho,$$

luego, tomando en cuenta (1), (2) y (3):

$$I_{xx} = \int Y^2 dM + \int z^2 dM = \frac{M}{10} (b^2 + c^2) = \frac{30\rho}{10} [(5)^2 + (12)^2] = 507\rho \quad (4)$$

$$I_{yy} = \int x^2 dM + \int z^2 dM = \frac{M}{10} (a^2 + c^2) = \frac{30\rho}{10} [(3)^2 + (12)^2] = 459\rho \quad (5), \quad y,$$

$$I_{zz} = \int x^2 dM + \int Y^2 dM = \frac{M}{10} (a^2 + b^2) = \frac{30\rho}{10} [(3)^2 + (5)^2] = 102\rho \quad (6);$$

ahora, también basados en el croquis

$$\begin{aligned}
 P_{xy} &= \rho \int_0^c \int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} \int_0^{\frac{a}{bc}(bc-cy-bz)} x dx y dy dz = \\
 &= \rho \int_0^c \int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} \frac{1}{2} \left[\frac{a}{bc} (bc-cy-bz) \right]^2 y dy dz = \\
 &= \rho \int_0^c \int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} \frac{a^2}{2b^2c^2} \left[b^2c^2 - 2bc^2y + c^2y^2 - 2b^2cz + 2bcyz + b^2z^2 \right] y dy dz =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho a^2}{2b^2c^2} \int_0^c \left[\begin{array}{l} b^2c^2 \left(\frac{y^2}{2} \right) - 2bc^2 \left(\frac{y^3}{3} \right) + c^2 \left(\frac{y^4}{4} \right) - 2b^2cz \left(\frac{y^2}{2} \right) + \\ + 2bcyz \left(\frac{y^3}{3} \right) + b^2z^2 \left(\frac{y^2}{2} \right) \end{array} \right]_{0}^{\frac{b}{c}(c-z)} dz =$$

$$= \frac{\rho a^2}{2b^2c^2} \int_0^c \left[\begin{array}{l} \frac{b^2c^2}{2} \frac{b^2}{c^2} (c^2 - 2cz + z^2) - \frac{2bc^2}{3} \frac{b^3}{c^3} (c^3 - 3c^2z + 3cz^2 - z^3) + \\ + \frac{c^2}{4} \frac{b^4}{c^4} (c^4 - 4c^3z + 6c^2z^2 - 4cz^3 + z^4) - b^2cz \frac{b^2}{c^2} (c^2 - 2cz + z^2) + \\ + \frac{2bcz}{3} \frac{b^3}{c^3} (c^3 - 3c^2z + 3cz^2 - z^3) + \frac{b^2z^2}{2} \frac{b^2}{c^2} (c^2 - 2cz + z^2) \end{array} \right] dz,$$

desarrollando los productos indicados tenemos:

$$P_{xy} = \frac{\rho a^2}{2b^2c^2} \int_0^c \left[\begin{array}{l} \frac{b^4c^2}{2} - b^4cz + \frac{b^4z^2}{2} - \frac{2b^4c^2}{3} + 2b^4cz - 2b^4z^2 + \frac{2b^4z^3}{3c} \\ + \frac{b^4c^2}{4} - b^4cz + \frac{3b^4z^2}{2} - \frac{b^4z^3}{c} + \frac{b^4z^4}{4c^2} - b^4cz + 2b^4z^2 - \frac{b^4z^3}{c} \\ + \frac{2b^4cz}{3} - 2b^4z^2 + \frac{2b^4z^3}{c} - \frac{2b^4z^4}{3c^2} + \frac{b^4z^2}{2} - \frac{b^4z^3}{c} + \frac{b^4z^4}{2c} \end{array} \right] dz$$

luego:

$$P_{xy} = \frac{\rho a^2}{2b^2c^2} \int_0^c \left[\begin{array}{l} b^4c^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) + b^4cz \left(-1 + \frac{2}{3} \right) + b^4z^2 \left(\frac{1}{2} \right) + \\ + \frac{b^4z^3}{c^2} \left(\frac{2}{3} - 1 \right) + \frac{b^4z^4}{c^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right] dz =$$

$$= \frac{\rho a^2 b^2}{2c^2} \int_0^c \left[\frac{c^2}{12} - \frac{1}{3} cz + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} \frac{z^3}{c} + \frac{1}{12} \frac{z^4}{c^2} \right] dz =$$

$$= \frac{\rho a^2 b^2}{2c^2} \left[\frac{c^2}{12} (c) - \frac{c}{3} \left(\frac{c^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c^3}{3} \right) - \frac{1}{3c} \left(\frac{c^4}{4} \right) + \frac{1}{12c^2} \left(\frac{c^5}{5} \right) \right],$$

de donde:

$$P_{xy} = \frac{\rho a^2 b^2 c}{2} \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{60} \right] = \frac{1}{6} \rho abc \left(\frac{ab}{20} \right) = M \left(\frac{ab}{20} \right) = \frac{M_{ab}}{20};$$

sustituyendo valores:

$$P_{xy} = \frac{M_{ab}}{20} = \frac{30\rho}{20} (3)(5) = 22.5\rho \text{ ----- (7)}$$

también se obtienen, procediendo en forma similar a la empleada para obtener (7):

$$P_{xz} = xz dM = \frac{M}{20} ac = \frac{30\rho}{20}(3)(2) = 54\rho \text{ ----- (8), y}$$

$$P_{yz} = yz dM = \frac{M}{20} bc = \frac{30\rho}{20}(5)(12) = 90\rho \text{ ----- (9);}$$

resumiendo, al tomar en cuenta (4), (5), (6), (7), (8) y (9), el tensor de inercia en O (solicitado) viene dado por:

$$I_O = \begin{pmatrix} 507\rho & -22.5\rho & -54\rho \\ -22.5\rho & 459\rho & -90\rho \\ -54\rho & -90\rho & 102\rho \end{pmatrix}$$

inciso ii). Tomando en cuenta lo obtenido anteriormente, obtendremos los momentos de inercia principales (que en este inciso nos interesan) resolviendo la ecuación:

$$\begin{vmatrix} (507\rho - \lambda) & -22.5\rho & -54\rho \\ -22.5\rho & (459\rho - \lambda) & -90\rho \\ -54\rho & -90\rho & (102\rho - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \text{ ----- (10);}$$

desarrollando el determinante (aumentando los dos primeros renglones, bajo el tercero) e igualando a cero, podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} (232,713\rho^2 - 966\rho\lambda + \lambda^2)(102\rho - \lambda) - 109,350\rho^3 - 109,350\rho^3 - \\ -2,916\rho^2(459\rho - \lambda) - 8,100\rho^2(507\rho - \lambda) - 506.25\rho^2(102\rho - \lambda) \end{bmatrix} = 0 \text{ ;}$$

teniéndose entonces:

$$\begin{bmatrix} 23,736,726\rho^3 - 98,532\rho^2\lambda + 102\rho\lambda^2 - 232,713\rho^2\lambda + 966\rho\lambda^2 - \lambda^3 - 218,700\rho^3 - \\ -1,338,444\rho^3 + 2,916\rho^2\lambda - 4,106,700\rho^3 + 8,100\rho^2\lambda - 51,637.5\rho^3 + 506.25\rho^2\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 1,068\rho\lambda^2 - 319,722.75\rho^2\lambda + 18,021,244.5\rho^3 = 0 \text{ ,}$$

que puede escribirse:

$$\lambda^3 - 1,068\rho\lambda^2 + 319,722.75\rho^2\lambda - 18,021,244.5\rho^3 = 0 \text{ --- (11);}$$

puede obtenerse, resolviendo (11), que los tres valores de λ que cumplen (10) son:

$$\lambda = 517.04749\rho \text{ , } \lambda = 72.91015\rho \text{ y } \lambda = 478.04236\rho \text{ ,}$$

luego, los momentos de inercia aquí buscados son:

$$I_{\text{máx}} = 517.04749\rho \text{ , } I_{\text{mín}} = 72.91015\rho \text{ , } I_{\text{mín}} = 478.04236\rho \text{ .}$$

Obtención de los vectores unitarios $e_{\text{máx}}$, $e_{\text{mín}}$ y e_{int} :

tomando en cuenta los valores de λ obtenidos, debemos resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} (507\rho - 517.04749\rho)\ell - 22.5\rho m - 54\rho n = 0 \\ -22.5\rho\ell + (459\rho - 517.04749\rho)m - 90\rho n = 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases} \text{ ----- (12),}$$

$$\begin{cases} (507\rho - 72.91015\rho)\ell - 22.5\rho m - 54\rho n = 0 \\ -22.5\rho\ell + (459\rho - 72.91015\rho)m - 90\rho n = 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases} \text{ ----- (13), y,}$$

$$\begin{cases} (507\rho - 478.04236\rho)\ell - 22.5\rho m - 54\rho n = 0 \\ -22.5\rho\ell + (459\rho - 478.04236\rho)m - 90\rho n = 0 \\ \ell^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases} \text{ ----- (14),}$$

en virtud de que las ternas de valores:

$$\begin{aligned} \ell &= -0.9608112, & m &= 0.2690686, & n &= 0.0666610, \\ \ell &= 0.1319182, & m &= 0.2323210, & n &= 0.9636512, \text{ y,} \\ \ell &= 0.2438008, & m &= 0.9346814, & n &= -0.2587116, \end{aligned}$$

son la solución de los sistemas de ecuaciones (12), (13) y (14), respectivamente, los vectores unitarios que nos determinan dirección y sentido de los ejes principales de inercia, que pasan por O, resultan ser:

$$e_{\text{máx}} = -0.9608112i + 0.2690686j + 0.0666610k$$

$$e_{\text{mín}} = 0.1319182i + 0.2323210j + 0.9636512k$$

$$e_{\text{int}} = 0.2438008i + 0.9346814j - 0.2587116k.$$

Verificación de la ortogonalidad.- Basados en lo obtenido anteriormente, así como en la definición de producto escalar:

$$(e_{\text{máx}}) \cdot (e_{\text{mín}}) = -0.126748 + 0.062510 + 0.064238 = 0,$$

$$(e_{\text{máx}}) \cdot (e_{\text{int}}) = -0.234247 + 0.251493 - 0.017246 = 0, \text{ y,}$$

$$(e_{\text{mín}}) \cdot (e_{\text{int}}) = 0.032162 + 0.217146 - 0.249308 = 0,$$

luego, existe la ortogonalidad entre los ejes determinados por los vectores $e_{\text{máx}}$, $e_{\text{mín}}$ y e_{int} correspondientes a este inciso.

inciso iii) Primeramente, determinemos el centroide del cuerpo dado.

$$M_{xy} = z dM = \rho \int_0^c \int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} \int_0^{\frac{a}{bc}(bc-cy-bz)} dx dy dz ;$$

integrando y reduciendo a la mínima expresión posible:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \rho \int_0^c \int_0^{\frac{b}{c}(c-z)} \left[\frac{a}{bc}(bc-cy-bz) \right] dy dz = \\ &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \left[bcy - \frac{c}{2} y^2 - bzy \right]_{y=0}^{\frac{b}{c}(c-z)} dz = \\ &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \left\{ bc \left[\frac{b}{c}(c-z) \right] - \frac{c}{2} \left[\frac{b^2}{c^2}(c^2 - 2cz + z^2) \right] - bz \left[\frac{b}{c}(c-z) \right] \right\} dz = \\ &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \left[b^2 c - b^2 z - \frac{b^2 c}{2} + b^2 z - \frac{b^2 z^2}{2c} - b^2 z \frac{b^2 z^2}{c^2} \right] dz = \\ &= \frac{\rho a}{bc} \int_0^c \left[\frac{b^2 c}{2} - b^2 z + \frac{b^2 z^2}{2c} \right] dz = \frac{\rho ab}{c} \left[\frac{c}{2} \left(\frac{c^2}{2} \right) - \frac{c^3}{3} + \frac{21}{2c} \left(\frac{c^4}{4} \right) \right] = \\ &= \rho abc^2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right] = \frac{\rho abc^2}{24} (6 - 8 + 3) = \frac{\rho abc^2}{24}; \end{aligned}$$

con esto:

$$z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{1}{24} \rho abc}{\frac{1}{6} \rho abc} = \frac{c}{4}$$

mediante un proceso similar se obtienen:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\frac{1}{24} \rho a^2 bc}{\frac{1}{6} \rho abc} = \frac{a}{4}, \quad \text{y} \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\frac{1}{24} \rho ab^2 c}{\frac{1}{6} \rho abc} = \frac{b}{4};$$

resumiendo:

$$x_c = \frac{a}{4}, \quad y_c = \frac{b}{4}, \quad z_c = \frac{c}{4},$$

o bien:

$$C \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4} \right)$$

empleando esto último, además de (4), (5) y (6), de las ecuaciones (XXIX_C) se obtiene:

$$I_{x_C x_C} = I_{xx} - M(y_C^2 + z_C^2) = \frac{M}{10} (b^2 + c^2) - M \left[\left(\frac{b}{4} \right)^2 + \left(\frac{c}{4} \right)^2 \right]$$

$$= \left[\frac{8-5}{80} \right] M(b^2 + c^2) = \frac{3M}{80} (b^2 + c^2),$$

sustituyendo valores:

$$I_{x_C x_C} = \frac{3(30\rho)}{80} [(5)^2 + (12)^2] = 190.125\rho \quad (15),$$

análogamente:

$$I_{y_C y_C} = \frac{3M}{80} (a^2 + c^2) = \frac{3(30\rho)}{80} [(3)^2 + (12)^2] = 172.125\rho \quad (16), \text{ y,}$$

$$I_{z_C z_C} = \frac{3M}{80} (a^2 + b^2) = \frac{3(30\rho)}{80} [(3)^2 + (5)^2] = 38.25\rho \quad (17);$$

de las ecuaciones (XXX_C), utilizando (7), (8), (9) y las coordenadas de C encontradas arriba:

$$I_{x_C y_C} = I_{xy} - M x_C y_C = \frac{M}{20} ab - M \left(\frac{a}{4} \right) \left(\frac{b}{4} \right) = \frac{M}{20} ab - \frac{M}{16} ab = -\frac{M}{80} ab,$$

sustituyendo valores:

$$I_{x_C y_C} = -\frac{M}{80} (ab) = -\frac{30\rho}{80} (3)(5) = -5.625\rho \quad (18)$$

análogamente:

$$I_{x_C z_C} = -\frac{M}{80} (ac) = -\frac{30\rho}{80} (3)(12) = -13.5\rho \quad (19), \text{ y,}$$

$$I_{y_C z_C} = -\frac{M}{80} (bc) = \frac{30\rho}{80} (5)(12) = -22.5\rho \quad (20),$$

luego, basados en (15), (16), (17), (18), (19) y (20), el tensor de inercia en C (pedido) resulta:

$$\bar{I}_C = \begin{pmatrix} 190.125\rho & 5.625\rho & 13.5\rho \\ 5.625\rho & 172.125\rho & 22.5\rho \\ 13.5\rho & 22.5\rho & 38.25\rho \end{pmatrix}$$

inciso iiii) Tomando en cuenta lo obtenido hasta ahora, obtendremos los momentos de inercia, respecto a los ejes principales que pasan por C, resolviendo la ecuación:

$$\begin{vmatrix} (190.125\rho - \lambda) & 5.625\rho & 13.5\rho \\ 5.625\rho & (172.125\rho - \lambda) & 22.5\rho \\ 13.5\rho & 22.5\rho & (38.25\rho - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (21),$$

que puede transformarse en:

$$\begin{vmatrix} (1521\rho - 8\lambda) & 45\rho & 108\rho \\ 45\rho & (1377\rho - 8\lambda) & 180\rho \\ 108\rho & 180\rho & (306\rho - 8\lambda) \end{vmatrix} = 0;$$

desarrollando el determinante (aumentando los dos primeros renglones, bajo el tercero) e igualando a cero, podemos escribir:

$$\left[\begin{array}{l} (2,094,417\rho^2 - 23,184\rho\lambda + 64\lambda^2)(306\rho - 8\lambda) + 874,800\rho^3 + 874,800\rho^3 - \\ -11,664\rho^2(1377\rho - 8\lambda) - 32,400\rho^2(1521\rho - 8\lambda) - 2,025\rho^2(306\rho - 8\lambda) \end{array} \right] = 0 ,$$

teniéndose entonces:

$$\left[\begin{array}{l} 640,891,602\rho^3 - 7,094,304\rho^2\lambda + 19,584\rho\lambda^2 - 16,755,336\rho^2\lambda + \\ +185,472\rho\lambda^2 - 512\lambda^3 + 1,749,600\rho^3 - 16,061,328\rho^3 + 93,312\rho^2\lambda - \\ -49,280,400\rho^3 + 259,200\rho^2\lambda - 619,650\rho^3 + 16,200\rho^2\lambda \end{array} \right] =$$

$$=-512\lambda^3 + 205,056\lambda^2\rho - 23,480,928\lambda\rho^2 + 576,679,824\rho^3 = 0 ,$$

qué da lugar a:

$$\lambda^3 - 400.5\lambda^2\rho + 45,861.1875\lambda\rho^2 - 1,126.327.781\rho^3 = 0 \text{ --- (22);}$$

se obtiene, de resolver (22), que los valores que cumplen (21) son:

$$\lambda = 194.31771\rho , \quad \lambda = 33.58239\rho , \quad \text{y} \quad \lambda = 172.59990\rho ,$$

luego, los momentos de inercia de la masa del cuerpo, respecto a los ejes principales que pasan por el centroide del mismo, son:

$$I_{m\acute{a}x} = 194.31771\rho \text{ ----- (23),}$$

$$I_{m\acute{i}n} = 33.58239\rho \text{ ----- (24),}$$

$$I_{int} = 172.59990\rho \text{ ----- (25);}$$

Verificación de la invariancia de la suma de momentos de inercia (de la masa de un cuerpo) respecto a los tres ejes de sistemas de referencia ortogonales, con origen en un mismo punto.

En el caso de este inciso, el origen coincide con el centro de masa C del cuerpo en estudio. Basados en (15), (16) y (17),

se tiene:

$$I_{x_c x_c} + I_{y_c y_c} + I_{z_c z_c} = 190.125\rho + 172.125\rho + 38.25\rho = 400.5\rho \text{ ----- (26),}$$

en tanto que, empleando (23), (24) y (25) obtenemos:

$$I_{m\acute{a}x} + I_{m\acute{i}n} + I_{int} = 194.31771\rho + 33.58239\rho + 172.59990\rho = 400.5\rho \text{ (27);}$$

como puede apreciarse, las sumas (26) y (27) son iguales.

Corroboración de la ortogonalidad de los ejes que forman el sistema de ejes principales de inercia centroidales:

Tomando en cuenta los valores de λ obtenidos en este inciso, procederemos a resolver los sistemas de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} (190.125\rho - 194.31771\rho)l + 5.625\rho m + 13.5\rho n = 0 \\ 5.625\rho l + (172.125\rho - 194.31771\rho)m + 22.5\rho n = 0 \\ \underline{\underline{l^2 + m^2 + n^2 = 1}} \end{array} \right\} \text{----- (28)}$$

$$\left. \begin{array}{l} (190.125\rho - 33.58239\rho)l + 5.625\rho m + 13.5\rho n = 0 \\ 5.625\rho l + (172.125\rho - 33.58239\rho)m + 22.5\rho n = 0 \\ \underline{\underline{l^2 + m^2 + n^2 = 1}} \end{array} \right\} \text{-- (29), y,}$$

$$\left. \begin{array}{l} (190.125\rho - 172.59990\rho)l + 5.625\rho m + 13.5\rho n = 0 \\ 5.625\rho l + (172.125\rho - 172.59990\rho)m + 22.5\rho n = 0 \\ \underline{\underline{l^2 + m^2 + n^2 = 1}} \end{array} \right\} \text{----- (30);}$$

como consecuencia de que las ternas de valores:

$$\begin{array}{lll} l = 0.9204177, & m = 0.3677521, & n = 0.1326251, \\ l = 0.0792693, & m = 0.1566633, & n = -0.9844636, \text{ y,} \\ l = -0.3828373, & m = 0.9166230, & n = 0.1150561, \end{array}$$

son la solución de los sistemas de ecuaciones (28), (29) y (30), respectivamente, los vectores unitarios que nos deter-

minan dirección y sentido de los ejes principales de inercia centroidales son:

$$e_{\text{máx}} = 0.9204177i + 0.3677521j + 0.1326251k$$

$$e_{\text{mín}} = 0.0792693i + 0.1566633j - 0.9844636k, \quad y,$$

$$e_{\text{int}} = -0.3828373i + 0.9166230j + 0.1150561k ;$$

basados en esto último:

$$(e_{\text{máx}}) \cdot (e_{\text{mín}}) = 0.0730 + 0.0576 - 0.1306 = 0 ,$$

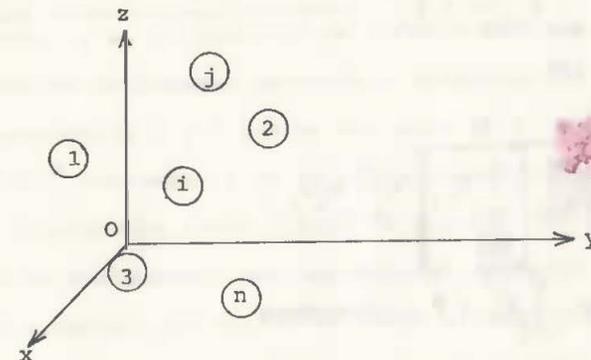
$$(e_{\text{máx}}) \cdot (e_{\text{int}}) = -0.3524 + 0.3371 + 0.0153 = 0 , \quad y,$$

$$(e_{\text{mín}}) \cdot (e_{\text{int}}) = -0.0303 + 0.1436 - 0.1133 = 0 ,$$

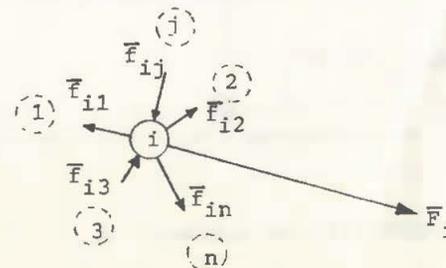
lo que prueba la ortogonalidad de los ejes principales de inercia centroidales.

D.3) DINAMICA DE SISTEMAS DE PUNTOS MASA

D.3.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO



Sea el sistema de partículas en movimiento que muestra la figura. Llamando $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_i, \bar{F}_j, \dots, \bar{F}_n$, a las fuerzas externas que obran sobre las partículas 1, 2, 3, ..., i, j, ..., n, respectivamente, si $\bar{F}_{i1}, \bar{F}_{i2}, \bar{F}_{i3}, \dots, \bar{F}_{ij}, \bar{F}_{in}$, son las fuerzas internas ejercidas por las partículas 1, 2, 3, ..., j, ..., n, sobre la partícula i, podemos dibujar el diagrama de cuerpo libre de ésta, durante su movimiento, como sigue:



aplicando la 2a. Ley de Newton a la partícula i , considerando constantes las masas de las partículas que constituyen el sistema en estudio, se tiene:

$$\vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad \text{----- (XXXVII),}$$

de donde:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{a}}_i,$$

luego, haciendo $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}$, obtenemos

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{a}}_i \quad \text{----- (XXXVIII),}$$

llamada "Ecuación diferencial del movimiento para un sistema de puntos masa".

Recordemos que:

$$M\vec{r}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad \text{----- (XXII);}$$

si derivamos con respecto a t , se obtiene:

$$M\vec{v}_C = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad \text{----- (XXXIX),}$$

y, derivando nuevamente:

$$M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{a}}_i \quad \text{----- (XL);}$$

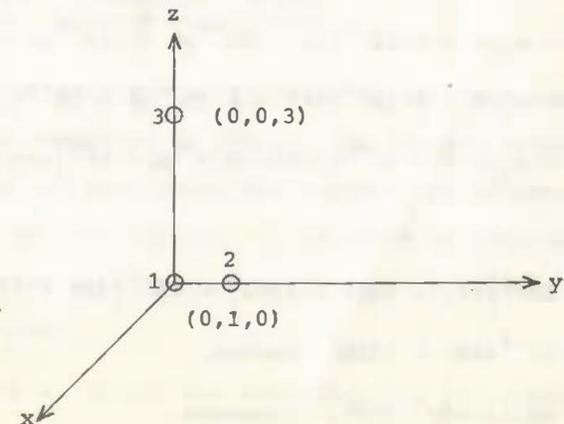
sustituyendo (XL) en (XXXVIII), se obtiene:

$$\vec{F} = M\vec{a}_C \quad \text{----- (XLI)}$$

conocida como "Ecuación diferencial de movimiento del centro de masa de un sistema de partículas".

Ejemplo.- Se tienen tres partículas: 1, 2 y 3. La primera de ellas tiene una masa de 10^{-5} kg y una carga de $4 \cdot 10^{-5}$ coulombs, y en el instante de interés está en el origen del sistema de referencia mostrado a continuación; cada una de las partículas 2 y 3 tienen una masa de $2 \cdot 10^{-5}$ kg y una carga de $5 \cdot 10^{-5}$ coulombs, y en el instante mencionado se encuentran localizadas donde indica la figura. Si el plano xy mostrado es horizontal, las coordenadas están en metros, y desde el exterior, se aplica un campo eléctrico expresado por $\vec{E} = 2xi + 3zj + 3(y + z^2)k$, en new/coul para x , y , z en metros, determine:

- Las coordenadas del centro de masa C , del sistema formado por las tres partículas mencionadas,
- La aceleración de C , y ,
- La aceleración de la partícula 1.



Solución.-

inciso a). Tomando en cuenta los datos, se tiene:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i = 10^{-5}(0i+0j+0k) + 2 \cdot 10^{-5}(0i+j+0k) + 2 \cdot 10^{-5}(0i+0j+3k) =$$

$$= 10^{-5}(2j+6k) \dots \text{kg-m},$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i = 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 10^{-5} \text{kg},$$

luego, aplicando (XXII), obtenemos:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{M} = \frac{10^{-5}(2j+6k)}{5 \cdot 10^{-5}} = 0.4j + 1.2k, \text{m},$$

o sea: $C(0, 0.4, 1.2) \text{m}$.

inciso b). Basados en la expresión para \bar{E} , y en las coordenadas de 1, 2 y 3, se tiene:

$$\bar{E}_1 = \bar{0}, \quad \bar{E}_2 = 3k, \quad \text{y}, \quad \bar{E}_3 = 9j + 27k, \quad \text{todos ellos en new/coul; con lo anterior:}$$

$$\bar{F}_1 = q_1 \bar{E}_1 - m_1 gk = 4 \cdot 10^{-5}(0) - 10^{-5}gk = -10^{-5}gk \text{ ----- newton,}$$

$$\bar{F}_2 = q_2 \bar{E}_2 - m_2 gk = 5 \cdot 10^{-5}(3k) - 2 \cdot 10^{-5}gk = 10^{-5}(15-2g)k \text{ " ,}$$

$$F_3 = q_3 \bar{E}_3 - m_3 gk = 5 \cdot 10^{-5}(9j+27k) - 2 \cdot 10^{-5}gk = 10^{-5}[45j+(135-2g)k] \text{ " ,}$$

luego:

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_i = 10^{-5}[45j + (150 - 5g)k] = 10^{-5}[45j + (150-49)k] =$$

$$= 10^{-5}(45j + 101k) \text{ newton,}$$

entonces, aplicando (XLI), obtenemos:

$$\bar{a}_c = \frac{\bar{F}}{M} = \frac{10^{-5}(45j + 101k)}{5 \cdot 10^{-5}} = \underline{9j + 20.2k \text{ m/seg}^2}.$$

inciso c). Del inciso inmediato anterior:

$$\bar{F}_1 = -10^{-5}gk,$$

por otro lado, tomando en cuenta la Ley de Coulomb, se tiene:

$$\bar{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} \right] e_{12} = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{(4 \cdot 10^{-5})(5 \cdot 10^{-5})}{(1)^2} \right] (-j) = -18j \text{ newton, y,}$$

$$\bar{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_3}{d_{13}^2} \right] e_{13} = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{(4 \cdot 10^{-5})(5 \cdot 10^{-5})}{(3)^2} \right] (-k) = -2k \text{ newton;}$$

finalmente, de (XXXVII):

$$\ddot{\bar{r}}_1 = \frac{\bar{F}_1 + \sum_{j=2}^n \bar{F}_{1j}}{m_1} = \frac{-10^{-5}gk + \{(-18j) + (-2k)\}}{10^{-5}} = \underline{\underline{-[18j + (2+0.000098)k]}},$$

o sea:

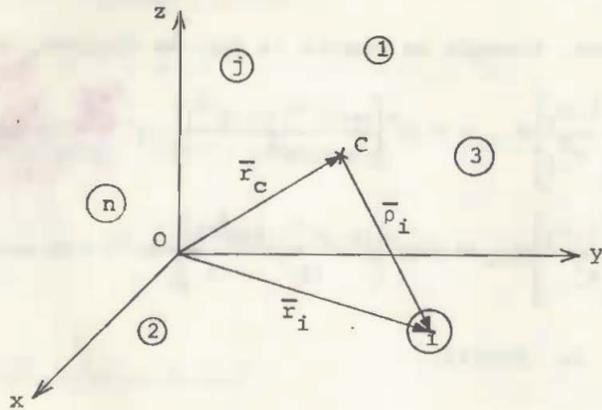
$$\ddot{\bar{r}}_1 = -10^5(18j + 2.000098k) \text{ m/seg}^2$$

Nótese que, a pesar de que al calcular la aceleración de C sólo tuvimos necesidad de conocer las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema, al determinar la aceleración de la partícula 1, la parte de ésta que proviene de la fuerza externa (que actúa sobre ella) es prácticamente despreciable.

Se recomienda al lector que determine las aceleraciones de las partículas 2 y 3, además de que mediante el empleo de la expresión XL verifique el valor de \bar{a}_c obtenido en el inciso b).

D.3.2 TRABAJO Y ENERGIA

ENERGIA CINETICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS



Sea un sistema de n partículas en movimiento, como el mostrado en la figura. La energía cinética, total de dicho sistema corresponde a la suma de las energías cinéticas de las partículas que lo forman, en el instante considerado, o sea:

$$EC = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] \text{----- (XLII)}$$

Si tomamos en cuenta la figura, donde C es el centro de masa del sistema se tiene, para una partícula i cualquiera:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_C + \bar{\rho}_i \text{----- (XLIII),}$$

derivando esto con respecto a t:

$$\bar{v}_i = \bar{v}_C + \dot{\bar{\rho}}_i \text{----- (XLIV),}$$

sustituyendo (XLIV) en (XLII), podemos escribir:

$$EC = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i) \right] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\bar{v}_C + \dot{\bar{\rho}}_i) \cdot (\bar{v}_C + \dot{\bar{\rho}}_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (v_C^2 + 2\bar{v}_C \cdot \dot{\bar{\rho}}_i + \dot{\bar{\rho}}_i^2) \right],$$

donde $v_C = |\bar{v}_C|$, y, $\dot{\bar{\rho}}_i = |\dot{\bar{\rho}}_i|$;

entonces, podemos escribir ahora:

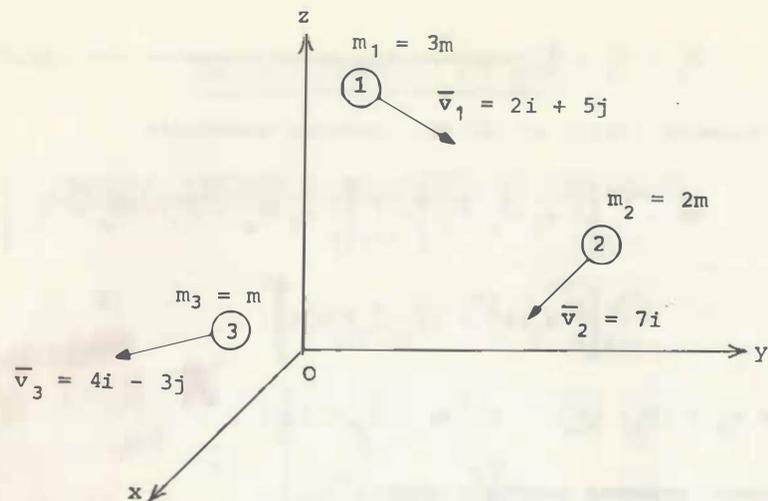
$$EC = \frac{1}{2} v_C^2 \left[\sum_{i=1}^n m_i \right] + \bar{v}_C \cdot \left[\sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{\rho}}_i \right] + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} v_C^2 (M) + v_C \cdot \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{\rho}_i \right) \right]}_{\bar{0}} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{\bar{\rho}}_i)^2 \right];$$

o bien:

$$EC = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{\bar{\rho}}_i)^2 \right] \text{----- (XLV).}$$

Ejemplo.- Para el sistema de partículas mostradas en la siguiente figura, determine: a) La velocidad del centro de masa; b) su energía cinética total, c) la energía cinética que tendría si su masa estuviera concentrada en su centro de masa, d) su energía cinética respecto al centro de masa, y, e) verifique el resultado obtenido al resolver inciso b.



Solución.-

inciso a). Tomando en cuenta los datos, se tiene:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = 3m(2i+5j) + 2m(7i) + m(4i-3j) = m(24i+12j);$$

aplicando (XXXIX):

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{m(24i+12j)}{3m+2m+m} = \underline{4i + 2j},$$

inciso b). Empleando (XLII)

$$\begin{aligned} EC &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] = \frac{1}{2}(3m) [2^2 + 5^2] + \frac{1}{2}(2m) [7^2] + \frac{1}{2}(m) [4^2 + (-3)^2] = \\ &= \frac{m}{2} [87 + 98 + 25] = \underline{105 m}; \end{aligned}$$

inciso c). Basados en lo obtenido en el inciso a):

$$\frac{1}{2} M v_c^2 = \frac{1}{2} (6m) [4^2 + 2^2] = \underline{60 m};$$

inciso d). Empleando XLIV obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_c = 2i + 5j - (4i + 2j) = -2i + 3j, \\ \dot{\rho}_2 &= \vec{v}_2 - \vec{v}_c = 7i - (4i + 2j) = 3i - 2j, \quad y, \\ \dot{\rho}_3 &= \vec{v}_3 - \vec{v}_c = 4i - 3j - (4i + 2j) = -5j, \end{aligned}$$

que implica:

$$\begin{aligned} (\dot{\rho}_1)^2 &= [(-2)^2 + (3)^2] = 13, \\ (\dot{\rho}_2)^2 &= [(3)^2 + (-2)^2] = 13, \quad y, \\ (\dot{\rho}_3)^2 &= (5)^2 = 25, \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{\rho}_i)^2 \right] &= \frac{1}{2}(3m)(13) + \frac{1}{2}(2m)(13) + \frac{1}{2}(m)(25) = \\ &= \frac{m}{2}(39 + 26 + 25) = \underline{45 m}; \end{aligned}$$

inciso e). Utilizando (XLV) y los resultados obtenidos en los incisos c y d:

$$EC = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{\rho}_i)^2 \right] = 60m + 45m = \underline{105 m},$$

resultado que verifica la validez del obtenido al resolver el inciso b).

ECUACIONES DE TRABAJO Y ENERGIA

Con base en lo visto en el tema "Trabajo y Energía", relativo a una partícula, podemos encontrar el trabajo total efectuado por las fuerzas que actúan sobre las diferentes partículas que constituyen un sistema, mientras éste pasa de una posición 1 a otra 2, como sigue:

$$W_{12} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 (\bar{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{F}_{ij}) \cdot d\bar{r}_i,$$

diferenciando (XLIII) y tomando en cuenta la expresión inmediata anterior:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_{i=1}^n \int_1^2 (\bar{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{F}_{ij}) \cdot (d\bar{r}_i + d\bar{\rho}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_1^2 \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_1^2 (\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{F}_{ij}) \cdot d\bar{r}_i}_0 + \sum_{i=1}^n \int_1^2 (F_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{F}_{ij}) \cdot d\bar{\rho}_i; \end{aligned}$$

puesto que, para una partícula, el trabajo efectuado iguala al incremento de la energía cinética, el trabajo total encontrado en la expresión inmediata anterior corresponde al incremento de energía cinética del sistema, pudiendo escribir:

$$W_{12} = \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_C + \sum_{i=1}^n \int_1^2 (\bar{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{F}_{ij}) \cdot d\bar{\rho}_i = \underbrace{\frac{1}{2} M v_C^2}_E_C + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{2} m_i (\dot{\rho}_i)^2}_{E_C \text{ respecto a centro de masa}} \dots \text{(XLVI)},$$

expresión llamada "Ecuación general del trabajo y la energía para sistemas de puntos masa".

Recordemos que:

$$\bar{F} = M \bar{a}_C \text{ ----- (XLI),}$$

multiplicando escalarmente ambos miembros de esta igualdad por $d\bar{r}_C$, podemos escribir:

$$\bar{F} \cdot d\bar{r}_C = (M \bar{a}_C) \cdot d\bar{r}_C = M \left[\frac{d\bar{v}_C}{dt} \right] \cdot d\bar{r}_C = M \left[\frac{d\bar{v}_C}{dt} \right] \cdot \left[\frac{d\bar{r}_C}{dt} dt \right] = M \left[\frac{d\bar{v}_C}{dt} \right] \cdot (\bar{v}_C) dt,$$

y como:

$$\left[\frac{d\bar{v}_C}{dt} \right] \cdot (\bar{v}_C) = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} (\bar{v}_C \cdot \bar{v}_C) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{dv_C^2}{dt} \right],$$

se tiene:

$$\bar{F} \cdot d\bar{r}_C = M \frac{1}{2} \left[\frac{dv_C^2}{dt} \right] dt,$$

luego, integrando de 1 a 2:

$$\int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_C = \frac{1}{2} M v_C^2 \Big|_1^2 \text{ ----- (XLVII)}$$

expresión conocida como "Ecuación del trabajo y la energía para el centro de masa de un sistema de partículas".

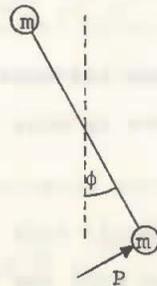
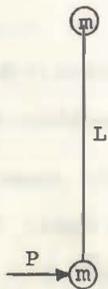
Con esto último observamos que, la ecuación general del trabajo y la energía para sistemas de puntos masa, (XLVI), puede escribirse como dos ecuaciones independientes, siendo una de ellas la (XLVII), y la otra:

$$\sum_{i=1}^n \left[(\bar{F}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \bar{F}_{ij}) \cdot d\bar{\rho}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{\rho}_i)^2 \right]_1^2 \text{ ---- (XLVIII)}$$

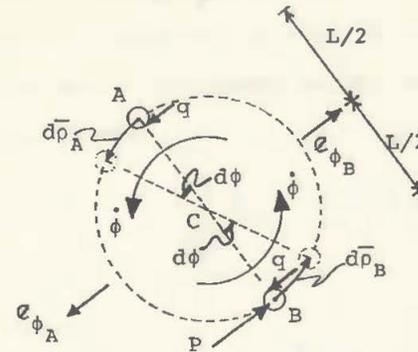
que se conoce como "Ecuación del trabajo y la energía de un sistema de partículas, relativa a su centro de masa".

Ejemplo.- Dos partículas iguales de masa m , que están unidas por una barra rígida de longitud L y masa despreciable, descansan sobre una superficie horizontal lisa. Si a partir de $t = 0$ una fuerza \bar{P} (de magnitud constante) paralela a la superficie mencionada, actúa perpendicularmente a la barra como se indica, escriba la ecuación del trabajo y la energía para el sistema, relativa a su centro de masa, y demuestre que:

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{2P\phi}{mL}}, \quad \text{y,} \quad \phi = \frac{Pt^2}{2mL}.$$



Solución.- Consideremos el movimiento, de cada una de las partículas, relativo al centro de masa del sistema:



$$d\bar{\rho}_A = \frac{L}{2} d\phi e_{\phi_A}$$

$$d\bar{\rho}_B = \frac{L}{2} d\phi e_{\phi_B}$$

basados en el croquis:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_1^2 (\bar{F}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \bar{F}_{ij}) \cdot d\bar{\rho}_i &= \int_0^\phi [(P-Q) e_{\phi_B}] \cdot \left[\frac{L}{2} d\phi e_{\phi_B} \right] + \int_0^\phi [Q e_{\phi_A}] \cdot \left[\frac{L}{2} d\phi e_{\phi_A} \right] \\ &= \int_0^\phi \frac{PL}{2} d\phi - \int_0^\phi \frac{QL}{2} d\phi + \int_0^\phi \frac{QL}{2} d\phi = \frac{PL}{2} \phi \text{ ---- (a),} \end{aligned}$$

así como:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i (\dot{\rho}_i)^2 \right]_1^2 = 2 \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2} \dot{\phi} \right)^2 \right) \Big|_0^\phi = \frac{mL^2}{4} (\dot{\phi})^2 \text{ ---- (b);}$$

sustituyendo (a) y (b) en (XLVIII), obtenemos:

$$\frac{PL}{2} \phi = \frac{mL^2}{4} (\dot{\phi})^2 \text{ ---- (c)}$$

que es la ecuación pedida.

Ahora, de (c) se obtiene:

$$(\dot{\phi})^2 = \frac{4PL\phi}{2mL^2}, \text{ que da lugar a: } \dot{\phi} = \sqrt{\frac{2P\phi}{mL}} \quad \text{--- (d) ,}$$

que puede escribirse:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{2P}{mL}} \phi^{1/2}$$

o bien, separando variables:

$$\frac{d\phi}{\phi^{1/2}} = \sqrt{\frac{2P}{mL}} dt ;$$

integrando obtenemos:

$$\frac{\phi^{1/2}}{1/2} = \sqrt{\frac{2P}{mL}} t \quad \text{o sea que: } 2\phi^{1/2} = \sqrt{\frac{2P}{mL}} t ,$$

de donde elevando al cuadrado y despejando, respectivamente, se obtiene:

$$4\phi = \frac{2P}{mL} t^2, \text{ y, } \phi = \frac{Pt^2}{2mL} \quad \text{--- (e);}$$

al obtener (d) y (e) hemos cumplido con demostrar lo que se nos pidió.

D.3.3) IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEALES

Sea un sistema de partículas en movimiento, como el mencionado al iniciar el estudio de la Dinámica de sistemas de puntos masa. Aplicando la 2a. Ley de Newton a una partícula i cualquiera:

$$\bar{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{F}_{ij} = \frac{d}{dt} (m_i \bar{v}_i) ,$$

luego:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \overbrace{\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{F}_{ij} \right]}^0 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} (m_i \bar{v}_i) \right] ,$$

que da lugar a:

$$\bar{F} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right] ;$$

separando variables e integrando, obtenemos:

$$\int_1^2 \bar{F} dt = \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_1 \quad \text{--- (XLIX)}$$

la "Ecuación del Impulso y Momentum lineales para un sistema de partículas".

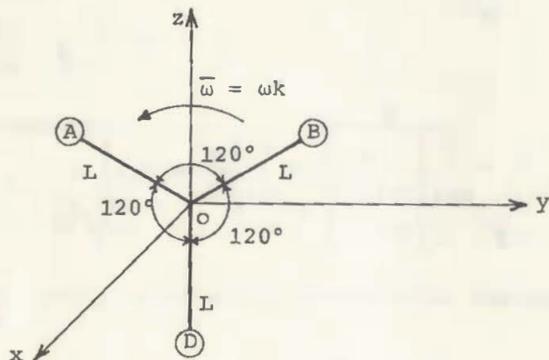
En esta última ecuación obtenida, a la integral del primer miembro se le llama "Impulso lineal", en tanto que a la

$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i$ se le conoce como "Momentum lineal", o "Momento de

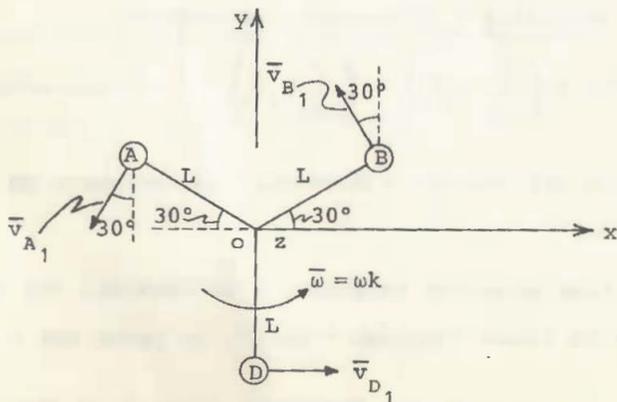
INSTITUTO
A N E
BIBLIOTECA

cantidad de movimiento lineal", del sistema.

Ejemplo.- Se tienen tres partículas iguales de masa m , conectadas por barras rígidas y de masas despreciables, moviéndose sobre el plano horizontal liso XY de la figura. Si el sistema gira inicialmente, con una velocidad angular constante dada por $\bar{\omega} = \omega k$, determine el momento lineal del sistema luego de que un impulso B_j actúe sobre una de las partículas.



Solución.- Instantes antes de actuar B_j :



basados en el croquis:

$$\bar{v}_{A_1} = (\omega k) \times [(-L \cos 30^\circ) i + (L \sen 30^\circ) j] = \omega L (-j \cos 30^\circ - i \sen 30^\circ)$$

$$\bar{v}_{B_1} = (\omega k) \times [(L \cos 30^\circ) i + (L \sen 30^\circ) j] = \omega L (j \cos 30^\circ - i \sen 30^\circ)$$

$$\bar{v}_{D_1} = (\omega k) \times (-L j) = \omega L i$$

luego:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_1 &= m_A \bar{v}_{A_1} + m_B \bar{v}_{B_1} + m_D \bar{v}_{D_1} = \\ &= m \omega L (-0.5 i - 0.866 j) + m \omega L (-0.5 i + 0.866 j) + m \omega L i = \bar{0} \end{aligned}$$

finalmente, aplicando (XLIX):

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_2 = \int_1^2 \bar{F} dt + \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_1 = B_j + \bar{0} = \underline{B_j}$$

IMPULSO Y MOMENTUM LINEALES DEL CENTRO DE MASA

Al iniciar el estudio de las ecuaciones de movimiento para sistemas de puntos masa, obtuvimos:

$$M \bar{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \quad \text{----- (XXXIX);}$$

de esta ecuación y la (XLIX), obtenemos:

$$\int_1^2 \bar{F} dt = (M \bar{v}_c)_2 - (M \bar{v}_c)_1 \quad \text{----- (L),}$$

conocida como "Ecuación del impulso y momento lineales para el centro de masa de un sistema de partículas".

Ejemplo.- Determine la velocidad del centro de masa del sistema formado por las tres partículas mencionadas en el ejemplo inmediato anterior, una vez que ha actuado el impulso B_j .

Solución.- El centro de masa del sistema en estudio se localiza en el punto donde se unen las barras, y antes de actuar B_j no se está moviendo, luego:

$$(M\bar{v}_c)_1 = \bar{0} ;$$

aplicando (L):

$$(M\bar{v}_c)_2 = \int_1^2 \bar{F}dt + (M\bar{v}_c)_1 = B_j + \bar{0} = B_j ,$$

finalmente:

$$(\bar{v}_c)_2 = \frac{B_j}{M} = \frac{B_j}{3m} = \frac{B}{3m} j .$$

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

Si entre dos instantes cualquiera 1 y 2 del movimiento del sistema en estudio, la resultante de todas las fuerzas (que actúan sobre las partículas que lo forman) es nula, o el impulso lineal es nulo, podemos escribir:

$$\int_1^2 \bar{F}dt = \bar{0} ,$$

por lo que, en estos casos, las ecuaciones (XLIX) y (L) se transforman respectivamente en:

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_1 = \bar{0} \text{ ----- (XLIX')}$$

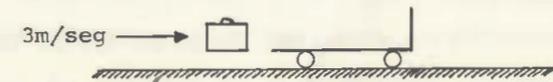
"Principio de la conservación del momento lineal de un sistema de partículas", y,

$$(M\bar{v}_c)_2 - (M\bar{v}_c)_1 = \bar{0} \text{ ----- (L')}$$

"Principio de la conservación del momento lineal del centro de masa de un sistema de partículas".

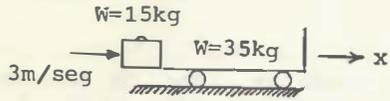
Ejemplo.- Un empleado de una compañía aérea lanza una maleta que pesa 15 kg, con una velocidad horizontal de 3m/seg, sobre una carretilla de transporte de equipaje que pesa 35kg y se encuentra en reposo, como se indica. Si la carretilla puede moverse libremente sobre el plano horizontal liso que la soporta, calcule la velocidad final que adquiere:

- a) Si la maleta se detiene (respecto a la carretilla) antes de chocar con el extremo, y,
- b) Si la maleta se detiene (también respecto a la carretilla) después de chocar con dicho extremo.

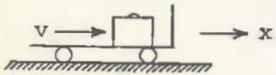


Solución.- Analicemos lo que sucede en diversos instantes del movimiento.

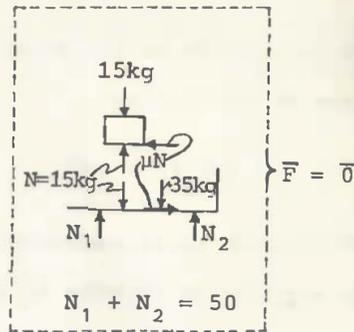
Instante 1:



Instante 2:
ambos se mueven (juntos)
con rapidez v.



D.c.l. en tanto no se
mueven juntos:



basados en los croquis:

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_1 = \frac{15}{g}(3i) + \frac{35}{g}(0) = \frac{45}{g}i, \quad \int_1^2 \bar{F} dt = 0, \quad y,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_2 = \frac{15}{g} \bar{v} + \frac{35}{g} \bar{v} = \frac{50}{g} \bar{v},$$

luego, aplicando (XLIX):

$$\frac{50}{g} \bar{v} - \frac{45}{g} i = 0, \text{ de donde: } \bar{v} = 0.9i \text{ [m/seg].}$$

inciso b) El resultado para este inciso es el mismo que para el inciso a, en virtud de que un choque entre dos cuerpos o partículas no produce pérdida en la cantidad de movimiento del sistema formado por ellos ya que, en un choque, la fuerza resultante es cero puesto que proviene de la suma de fuerzas internas (considerando el sistema) de igual magnitud, colineales y de sentido contrario.

IMPACTO

Quando dos cuerpos chocan, el proceso dinámico se caracteriza por la presencia de grandes fuerzas, durante un intervalo de tiempo muy corto, y por los cambios repentinos de velocidad en ambos cuerpos; este fenómeno instantáneo recibe el nombre de "Impacto".

Como la medición de las fuerzas debidas al impacto resulta complicada, lo que se hace (en general) es medir experimentalmente los cambios de velocidad que se producen al chocar diversos cuerpos, con el objeto de determinar el llamado "Coeficiente de restitución" entre ellos.

Al ser prácticamente desconocidas las fuerzas que se presentan en estos casos, es imposible resolver los problemas de impacto mediante la integración de ecuaciones de movimiento; sin embargo, los Principios de "Energía" y "Cantidad de movimiento lineal" son suficientes para proporcionarnos los resultados solicitados, conociendo (generalmente) el coeficiente de restitución entre los cuerpos o partículas de interés.

En el estudio de este fenómeno, consideraremos mecánicamente a los cuerpos (entre los que se produce el impacto) como partículas, ya que de no ser así tendríamos que incluir los efectos correspondientes al Impulso y Cantidad de movimiento angulares de los cuerpos rígidos.

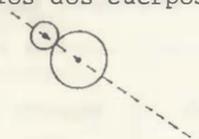
Llamemos "línea de impacto" a una línea perpendicular a las superficies de dos cuerpos que chocan, pasando por el punto

de contacto. Es obvio entonces que la l.i. (línea de impacto) es de características geométricas.

TIPOS DE IMPACTO, ATENDIENDO A LA POSICION DE LA LINEA DE IMPACTO.

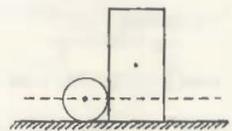
"CENTRAL"

La l.i. pasa por los centros de los dos cuerpos.



"EXCENTRICO"

La l.i. no pasa por los centros de los dos cuerpos.



TIPOS DE IMPACTO, ATENDIENDO A LA DIRECCION DE LAS VELOCIDADES, QUE POSEEN LOS CUERPOS, INSTANTES ANTES DEL CHOQUE.

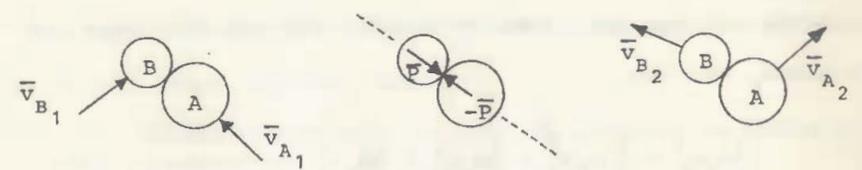
	<p>"OBLICUO" (las velocidades con que chocan no son colineales)</p>	
	<p>"DIRECTO" (las velocidades con que chocan son colineales)</p>	

Consideremos dos partículas, A y B, que se aproximan y van a chocar. Si el subíndice 1 lo empleamos para denominar las características instantes antes del choque, y el subíndice 2 lo utilizamos para señalar las propiedades después del suceso, se tiene:

Velocidades al establecerse el contacto.

Acciones durante el choque.

Velocidades a punto de despegarse.



aplicando (XIV) a A y B, respectivamente, obtenemos:

$$\int_1^2 \bar{P} dt = m_A \bar{v}_{A_2} - m_A \bar{v}_{A_1} \text{----- (a')}$$

y

$$\int_1^2 -\bar{P} dt = m_B \bar{v}_{B_2} - m_B \bar{v}_{B_1} \text{----- (b')}$$

de (a') + (b'):

$$\bar{0} = m_A \bar{v}_{A_2} - m_A \bar{v}_{A_1} + m_B \bar{v}_{B_2} - m_B \bar{v}_{B_1},$$

que da lugar a:

$$m_A \bar{v}_{A_2} + m_B \bar{v}_{B_2} = m_A \bar{v}_{A_1} + m_B \bar{v}_{B_1} \text{----- (LI)}$$

esta ecuación, que pudimos haberla obtenido a partir de la (XLIX'), puede descomponerse en:

$$m_A \dot{x}_{A_2} + m_B \dot{x}_{B_2} = m_A \dot{x}_{A_1} + m_B \dot{x}_{B_1} \text{ ----- (LI}_x\text{)},$$

$$m_A \dot{y}_{A_2} + m_B \dot{y}_{B_2} = m_A \dot{y}_{A_1} + m_B \dot{y}_{B_1} \text{ ----- (LI}_y\text{)}, y$$

$$m_A \dot{z}_{A_2} + m_B \dot{z}_{B_2} = m_A \dot{z}_{A_1} + m_B \dot{z}_{B_1} \text{ ----- (LI}_z\text{)};$$

suponiendo que no existen pérdidas de energía durante el choque, como la energía potencial es prácticamente la misma instantes antes e instantes después del suceso, la energía cinética del sistema (antes y después del impacto) debe ser la misma, esto es:

$$\frac{1}{2} m_A v_{A_2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B_2}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A_1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B_1}^2 \text{ ----- (LII)},$$

que puede descomponerse en:

$$\frac{1}{2} m_A (\dot{x}_{A_2})^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_{B_2})^2 = \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_{A_1})^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_{B_1})^2 \text{ ----- (LII}_x\text{)},$$

$$\frac{1}{2} m_A (\dot{y}_{A_2})^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{y}_{B_2})^2 = \frac{1}{2} m_A (\dot{y}_{A_1})^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{y}_{B_1})^2 \text{ ----- (LII}_y\text{)},$$

$$\frac{1}{2} m_A (\dot{z}_{A_2})^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{z}_{B_2})^2 = \frac{1}{2} m_A (\dot{z}_{A_1})^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{z}_{B_1})^2 \text{ (LII}_z\text{)};$$

de (LI_x) obtenemos:

$$m_A (\dot{x}_{A_2} - \dot{x}_{A_1}) = - m_B (\dot{x}_{B_2} - \dot{x}_{B_1}) \text{ ----- (c')},$$

en tanto que, de (LII_x):

$$m_A [(\dot{x}_{A_2})^2 - (\dot{x}_{A_1})^2] = - m_B [(\dot{x}_{B_2})^2 - (\dot{x}_{B_1})^2] \text{ -- (d')};$$

al dividir (d'), miembro a miembro, por (c'):

$$\dot{x}_{A_2} + \dot{x}_{A_1} = \dot{x}_{B_2} + \dot{x}_{B_1},$$

que puede escribirse:

$$\dot{x}_{A_2} - \dot{x}_{B_2} = - (\dot{x}_{A_1} - \dot{x}_{B_1}) \text{ ----- (LIII)};$$

experimentalmente se ha obtenido que, cuando existen pérdidas de energía durante el choque, la ecuación (LIII) toma la forma:

$$\dot{x}_{A_2} - \dot{x}_{B_2} = - \epsilon (\dot{x}_{A_1} - \dot{x}_{B_1}) \text{ ----- (LIIIp.e.)}$$

donde ϵ recibe el nombre de "coeficiente de restitución".

Existen dos casos límites, cuando:

a) $\epsilon = 1$ "choque elástico" (no existen pérdidas de energía),

b) $\epsilon = 0$ "choque plástico" ($\bar{v}_{A_2} = \bar{v}_{B_2}$).

Si hacemos coincidir el eje x con la línea de impacto:

$$\bar{P}_y = 0, \quad \bar{P}_z = 0,$$

con lo que, de (a') y (b'), se obtienen:

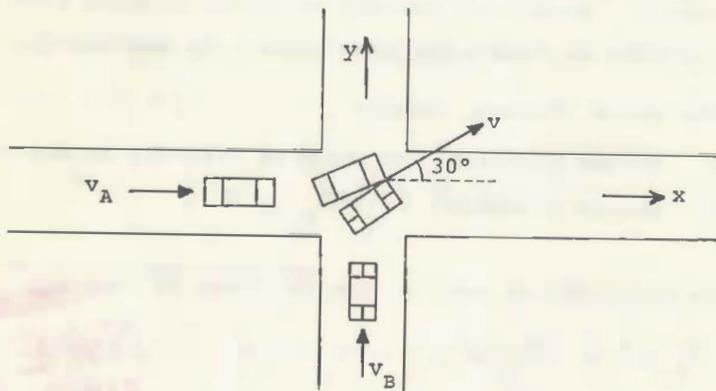
$$0 = m_A \dot{y}_{A_2} - m_A \dot{y}_{A_1}, \quad 0 = m_A \dot{z}_{A_2} - m_A \dot{z}_{A_1},$$

$$0 = m_B \dot{y}_{B_2} - m_B \dot{y}_{B_1}, \quad 0 = m_B \dot{z}_{B_2} - m_B \dot{z}_{B_1},$$

o sea que, bajo esta última condición impuesta, considerando que las masas no varían:

$$\dot{y}_{A_2} = \dot{y}_{A_1}, \quad \dot{y}_{B_2} = \dot{y}_{B_1}, \quad \dot{z}_{A_2} = \dot{z}_{A_1}, \quad \dot{z}_{B_2} = \dot{z}_{B_1} \dots \text{(LIV)}.$$

Ejemplo 1) Dos autos chocan en el cruce de dos calles, como se indica en la figura, y después de la colisión se mueven juntos, con una velocidad \bar{v} , en la dirección mostrada. Si la relación entre sus pesos es $(W_A/W_B) = 1.3$, y se desprecia la fricción generada durante el choque, determine la relación entre sus rapidezces antes del accidente.



Solución) Tomando en cuenta la notación de la figura, de (LI):

$$(m_A + m_B) [(v \cos 30^\circ) i + (v \sin 30^\circ) j] = m_A (v_A i) + m_B (v_B j);$$

por igualdad de vectores:

$$(m_A + m_B) (v \cos 30^\circ) = m_A v_A \text{ ----- (a), y,}$$

$$(m_A + m_B) (v \sin 30^\circ) = m_B v_B \text{ ----- (b);}$$

dividendo (b) por (a):

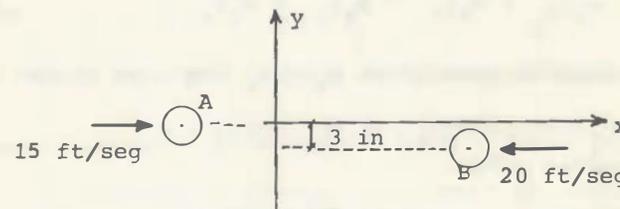
$$\frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 30^\circ,$$

de donde:

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{m_B/m_A}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{(W_A/W_B) \tan 30^\circ} = \frac{1}{(1.3)(0.5771)} = 1.333$$

Ejemplo 2) Los centros de dos esferas homogéneas, metálicas e iguales, de radio 2.5 pulgadas, se mueven en un plano horizontal y a lo largo de dos líneas rectas paralelas, separadas 3 pulgadas, como se muestra. Si el coeficiente de restitución es 0.6, y se desprecia toda fricción, determine:

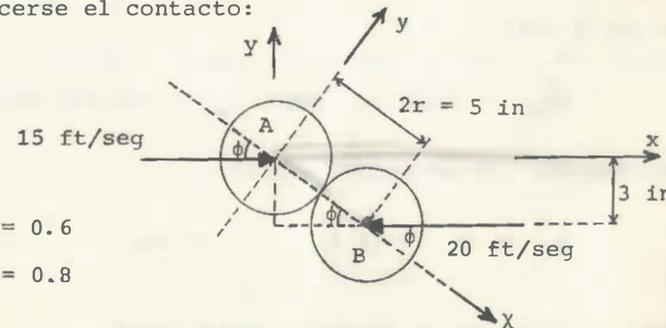
- a) Las velocidades de las esferas después del impacto y,
- b) el porcentaje de energía perdida durante el suceso.



Solución.-

Inciso a) Ya que el eje x dado no pasa por la línea de impacto, haremos pasar por ésta un eje x , como a continuación se muestra.

Al establecerse el contacto:

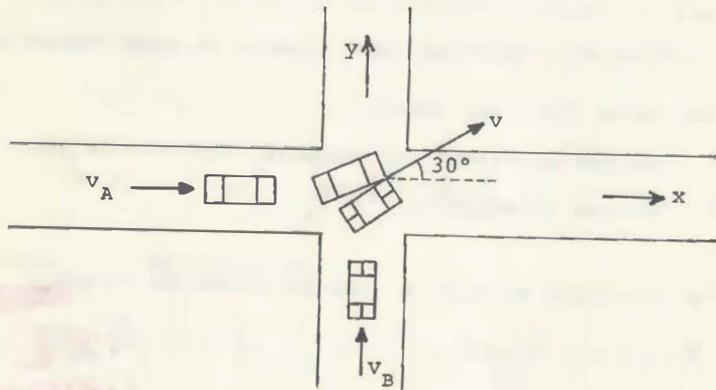


$$\sin \phi = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\cos \phi = \frac{4}{5} = 0.8$$

basados en el croquis y apoyados en (LIV), por lo que toca a la dirección y , se tiene:

Ejemplo 1) Dos autos chocan en el cruce de dos calles, como se indica en la figura, y después de la colisión se mueven juntos, con una velocidad \bar{v} , en la dirección mostrada. Si la relación entre sus pesos es $(W_A/W_B) = 1.3$, y se desprecia la fricción generada durante el choque, determine la relación entre sus rapidezces antes del accidente.



Solución) Tomando en cuenta la notación de la figura, de (LI):

$$(m_A + m_B) [(v \cos 30^\circ) i + (v \sin 30^\circ) j] = m_A (v_A i) + m_B (v_B j);$$

por igualdad de vectores:

$$(m_A + m_B) (v \cos 30^\circ) = m_A v_A \quad \text{--- (a), y,}$$

$$(m_A + m_B) (v \sin 30^\circ) = m_B v_B \quad \text{--- (b);}$$

dividendo (b) por (a):

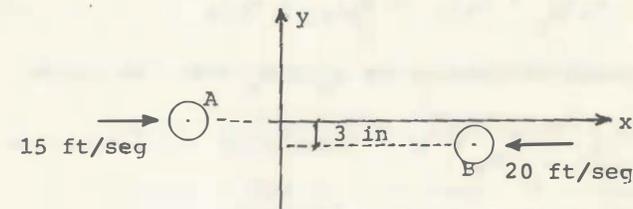
$$\frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 30^\circ,$$

de donde:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B/m_A}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{(W_A/W_B) \tan 30^\circ} = \frac{1}{(1.3)(0.5771)} = \underline{1.333}$$

Ejemplo 2) Los centros de dos esferas homogéneas, metálicas e iguales, de radio 2.5 pulgadas, se mueven en un plano horizontal y a lo largo de dos líneas rectas paralelas, separadas 3 pulgadas, como se muestra. Si el coeficiente de restitución es 0.6, y se desprecia toda fricción, determine:

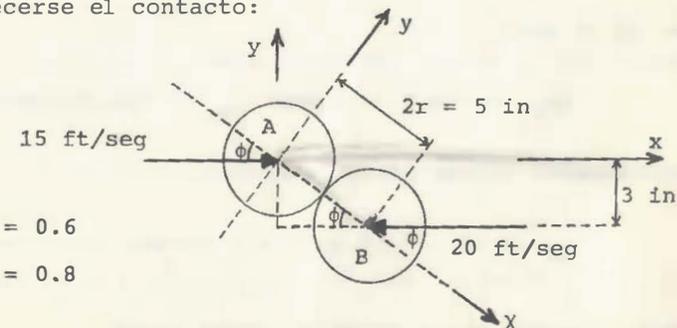
- Las velocidades de las esferas después del impacto y,
- el porcentaje de energía perdida durante el suceso.



Solución.-

Inciso a) Ya que el eje x dado no pasa por la línea de impacto, haremos pasar por ésta un eje x , como a continuación se muestra.

Al establecerse el contacto:



$$\sin \phi = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\cos \phi = \frac{4}{5} = 0.8$$

basados en el croquis y apoyados en (LIV), por lo que toca a la dirección y , se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{A_1} &= 15 \cos\phi = 12 \text{ft/seg} , \\ \dot{y}_{A_1} &= 15 \text{sen}\phi = 9 \text{ft/seg} = \dot{y}_{A_2} , \\ \dot{x}_{B_1} &= -20 \cos\phi = -16 \text{ft/seg} , \\ \dot{y}_{B_1} &= -20 \text{sen}\phi = -12 \text{ft/seg} = \dot{y}_{B_2} ;\end{aligned}$$

de (LI_x):

$$m_A \dot{x}_{A_2} + m_B \dot{x}_{B_2} = m_A \dot{x}_{A_1} + m_B \dot{x}_{B_1} ,$$

sustituyendo valores, como $m_A = m_B = m$, se tiene:

$$\dot{x}_{A_2} + \dot{x}_{B_2} = 12 + (-16) = -4 \text{ ----- (d)} ;$$

aplicando (LIII p.e.) en la dirección χ :

$$\dot{x}_{A_2} - \dot{x}_{B_2} = -\epsilon(\dot{x}_{A_1} - \dot{x}_{B_1}) ;$$

sustituyendo valores:

$$\dot{x}_{A_2} - \dot{x}_{B_2} = -0.6[(12) - (-16)] = -0.6(28) = -16.8 \text{ --(e)}$$

de: (d) + (e):

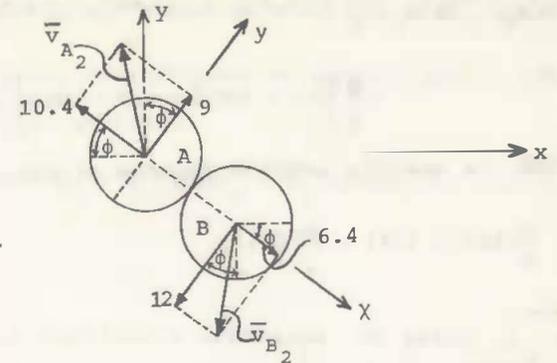
$$2\dot{x}_{A_2} = -20.8 , \text{ luego: } \dot{x}_{A_2} = -10.4 \text{ft/seg ----- (f)} ;$$

sustituyendo (f) en (d):

$$\dot{x}_{B_2} = -4 - (-10.4) = 6.4 \text{ ft/seg ----- (g)} ;$$

luego, basados en lo obtenido hasta ahora,

a punto de despegarse:



de donde:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{A_2} &= (-10.4 \cos\phi + 9 \text{sen}\phi) i + (10.4 \text{sen}\phi + 9 \cos\phi) j = \\ &= (-8.32 + 5.40) i + (6.24 + 7.20) j = \underline{-2.92i + 13.44j} , \quad Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_{B_2} &= (6.4 \cos\phi - 12 \text{sen}\phi) i + (-6.4 \text{sen}\phi - 12 \cos\phi) j = \\ &= (5.12 - 7.20) i + (-3.84 - 9.60) j = \underline{-2.08i - 13.44j} ;\end{aligned}$$

verificación de la conservación de la cantidad de movimiento lineal del sistema:

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_1 = m(15i) + m(-20i) = -5mi ,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right)_2 = m(-2.92i + 13.44j) + m(-2.08i - 13.44j) = -5mi \text{ (correcto).}$$

Inciso b) La energía cinética, del sistema, instantes antes del choque es:

$$EC_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A_1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B_1}^2 = \frac{m}{2} [(15)^2 + (-20)^2] = \frac{m}{2} (625) ,$$

y, la energía cinética después del suceso:

$$EC_2 = \frac{1}{2} m_A v_{A_2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B_2}^2 = \frac{m}{2} \left[(-2.92)^2 + (13.44)^2 + (-2.08)^2 + (-13.44)^2 \right] =$$

$$= \frac{m}{2} [8.5 + 180.6 + 4.3 + 180.6] = \frac{m}{2} (374) ,$$

por lo que, la energía perdida durante el impacto es:

$$\frac{m}{2} (625 - 374) = \frac{m}{2} (251) ;$$

finalmente:

$$\frac{\frac{m}{2} (251)}{\frac{m}{2} (625)} \times 100 = \underline{40.2} , \text{ es el porcentaje de energía}$$

perdida durante el suceso.

MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

Basados en la definición de "Momento de la cantidad de movimiento lineal de una partícula, con respecto al origen O de un sistema de referencia fijo", podemos definir:

$$\bar{H}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) \text{ ----- (LV)}$$

como el "Momento de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas, medido respecto al origen O de un sistema de referencia fijo".

Ahora definimos:

$$\bar{H}_C = \sum_{i=1}^n (\bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i) \text{ ----- (LVI)}$$

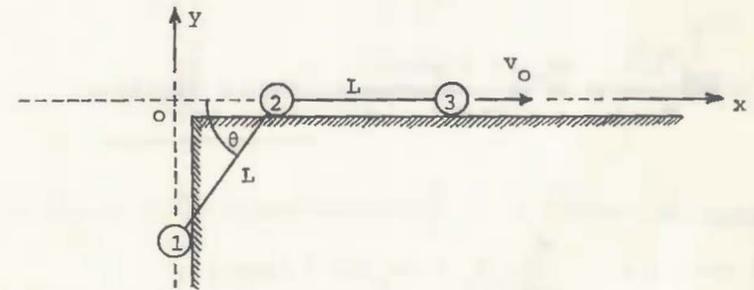
como el "Momento de la cantidad de movimiento lineal de un

sistema de partículas, relativo a su centro de masa".

Se puede demostrar que, tomando en cuenta (LVI), (XLIII), (XLIV) y (LV), se obtiene:

$$\bar{H}_O = \bar{r}_C \times M \bar{v}_C + \bar{H}_C \text{ ----- (LVIII)}$$

Ejemplo.- Tres partículas idénticas, de masas m , están unidas por cables inextensibles, de pesos despreciables y longitudes L , como se indica en la figura. Si dicho sistema se mueve en un plano vertical, de modo que la partícula marcada con el número 3 tiene rapidez constante e igual a v_0 , encuentre, refiriéndose al sistema descrito: a) La velocidad del centro de masa, b) La cantidad de movimiento lineal, c) El momento angular medido con respecto al centro de masa, y, d) Verifique el resultado obtenido al resolver el inciso inmediato anterior.



Solución.- Antes que otra cosa, necesitamos valuar la velocidad con que se mueve la partícula 1, tomando en cuenta que (por las condiciones del problema) las velocidades de las partículas 2 y 3 igualan v_0 . Basados en el croquis:

$$x_2^2 + y_1^2 = L^2 = \text{cte};$$

derivando con respecto a t :

$$2x_2\dot{x}_2 + 2y_1\dot{y}_1 = 0,$$

de donde:

$$\dot{y}_1 = -\frac{x_2}{y_1}(\dot{x}_2) = \frac{x_2}{-y_1}(\dot{x}_2) = (\cot\theta)(\dot{x}_2) = (\cot\theta)v_o,$$

luego:

$$\bar{v}_1 = (v_o \cot\theta)j, \text{ y como } \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = v_o i,$$

resolveremos ahora el inciso a:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 + m_3 \bar{v}_3 =$$

$$= m[(v_o \cot\theta)j] + m[v_o i] + m[v_o i] = mv_o(2i + j \cot\theta),$$

entonces, de (XXXIX), se tiene:

$$\bar{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i}{M} = \frac{mv_o(2i + j \cot\theta)}{3m} = \frac{v_o}{3}(2i + j \cot\theta);$$

inciso b)

del inciso a:
$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = mv_o(2i + j \cot\theta);$$

inciso c) aplicando (XLIV) obtenemos:

$$\dot{\rho}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_C = (v_o \cot\theta)j - \frac{v_o}{3}(2i + j \cot\theta) = -\frac{v_o}{3}(2i - 2j \cot\theta),$$

$$\dot{\rho}_2 = \bar{v}_2 - \bar{v}_C = v_o i - \frac{v_o}{3}(2i + j \cot\theta) = -\frac{v_o}{3}(-i + j \cot\theta), \text{ y}$$

$$\dot{\rho}_3 = \bar{v}_3 - \bar{v}_C = v_o i - \frac{v_o}{3}(2i + j \cot\theta) = -\frac{v_o}{3}(-i + j \cot\theta);$$

aplicando (XXII):

$$\begin{aligned} \bar{r}_C &= \frac{1}{M} \left[\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \right] = \frac{1}{3m} \left\{ m[(-L \sin\theta)j] + m[L \cos\theta i] + m[(L + L \cos\theta)i] \right\} = \\ &= \frac{L}{3} [(1 + 2 \cos\theta)i + (-\sin\theta)j]; \end{aligned}$$

entonces, al aplicar (XLIII), se obtiene:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{r}_1 - \bar{r}_C = (-L \sin\theta)j - \frac{L}{3} [(1 + 2 \cos\theta)i + (-\sin\theta)j] = -\frac{L}{3} [(1 + 2 \cos\theta)i + (2 \sin\theta)j],$$

$$\bar{\rho}_2 = \bar{r}_2 - \bar{r}_C = (L \cos\theta)i - \frac{L}{3} [(1 + 2 \cos\theta)i + (-\sin\theta)j] = -\frac{L}{3} [(1 - \cos\theta)i + (-\sin\theta)j];$$

$$\bar{\rho}_3 = \bar{r}_3 - \bar{r}_C = (L + L \cos\theta)i - \frac{L}{3} [(1 + 2 \cos\theta)i + (-\sin\theta)j] = -\frac{L}{3} [(-2 - \cos\theta)i + (-\sin\theta)j];$$

de la definición, (LVI), empleando lo obtenido hasta aquí:

$$\begin{aligned} \vec{H}_C = \sum_{i=1}^n \left(\vec{p}_i \times m_i \vec{v}_i \right) &= \left(-\frac{L}{3} \right) \left(-\frac{mv_0}{3} \right) \begin{vmatrix} i & j & k \\ (1+2\cos\theta) & (2\sin\theta) & 0 \\ 2 & (-2\cot\theta) & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ \left(-\frac{L}{3} \right) \left(-\frac{mv_0}{3} \right) \begin{vmatrix} i & j & k \\ (1-\cos\theta) & (-\sin\theta) & 0 \\ -1 & \cot\theta & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ \left(-\frac{L}{3} \right) \left(-\frac{mv_0}{3} \right) \begin{vmatrix} i & j & k \\ (-2-\cos\theta) & (-\sin\theta) & 0 \\ -1 & \cot\theta & 0 \end{vmatrix} ; \end{aligned}$$

desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{H}_C &= \frac{mLv_0}{9} \left[\left(-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{4\cos^2\theta}{\sin\theta} - 4\sin\theta \right) + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \sin\theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \sin\theta \right) \right] k = \\ &= \frac{mLv_0}{9} \left(-\frac{6\cos^2\theta}{\sin\theta} - \frac{3\cos\theta}{\sin\theta} - 6\sin\theta \right) k = -\frac{mLv_0}{9\sin\theta} (6\cos^2\theta + 3\cos\theta + 6\sin^2\theta) k \end{aligned}$$

que puede expresarse como:

$$\vec{H}_C = -\frac{mLv_0}{9\sin\theta} (6 + 3\cos\theta) k = -\frac{mLv_0}{3\sin\theta} (2 + \cos\theta) k.$$

inciso d) como, en este ejercicio \vec{r}_1 y \vec{v}_1 , \vec{r}_2 y \vec{v}_2 , \vec{r}_3 y \vec{v}_3 , son colineales, partiendo de la definición respectiva, obtenemos:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 + \vec{r}_3 \times m_3 \vec{v}_3 = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = 0 \quad \text{--- (A)}$$

por otro lado, tomando en cuenta resultados obtenidos en los incisos a y c:

$$\begin{aligned} \vec{r}_C \times M\vec{V}_C &= \left[\frac{L}{3} \right] \left[3m \left(-\frac{v_0}{3} \right) \right] \begin{vmatrix} i & j & k \\ (1+2\cos\theta) & (-\sin\theta) & 0 \\ 2 & \cot\theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{mLv_0}{3} \left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{2\cos^2\theta}{\sin\theta} + 2\sin\theta \right] k, \end{aligned}$$

de donde:

$$\vec{r}_C \times M\vec{V}_C = \frac{mLv_0}{3\sin\theta} (\cos\theta + 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta) k = \frac{mLv_0}{3\sin\theta} (2 + \cos\theta) k \quad \text{--- (B)},$$

sustituyendo (A) y (B) en (LVII):

$$\vec{0} = \frac{mLv_0}{3\sin\theta} (2 + \cos\theta) k + \vec{H}_C ;$$

despejando:

$$\vec{H}_C = -\frac{mLv_0}{3\sin\theta} (2 + \cos\theta) k,$$

con lo cual queda verificado el resultado que obtuvimos para el inciso inmediato anterior.

RELACION ENTRE EL MOMENTO, CON RESPECTO A UN PUNTO, DE LAS FUERZAS EXTERNAS (QUE ACTUAN SOBRE UN SISTEMA DE PUNTOS MASA) Y EL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL (DEL SISTEMA MENCIONADO) MEDIDO CON RESPECTO A DICHO PUNTO.

Consideremos primeramente el momento con respecto al origen de un sistema de referencia fijo. Tomando en cuenta las fuerzas internas y externas, que obran sobre cada una de las partículas del sistema en estudio, se tiene:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij}) \right] = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) + \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right),$$

luego, basados en el "Teorema de Varignon", podemos escribir:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \text{ ----- (LVIII);}$$

por otro lado, recordemos que:

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) \text{ ----- (LV);}$$

derivando ambos miembros de esta expresión, con respecto a t, obtenemos:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_{i=1}^n \left(\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i \right) + \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \right)$$

que puede expresarse, tomando en cuenta (XXXVII), como sigue:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_{i=1}^n \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{ij} \right) \right];$$

basados en esta última expresión y en la que sirvió de base para obtener (LVIII), podemos escribir:

$$\dot{\vec{M}}_O = \dot{\vec{H}}_O \text{ ----- (LIX).}$$

Procediendo de manera análoga puede obtenerse que, aunque (generalmente) el centro de masa de un sistema de partículas C, sea un punto móvil, se cumple:

$$\dot{\vec{M}}_C = \dot{\vec{H}}_C \text{ ----- (LX),}$$

donde, obviamente, \vec{M}_C , representa la suma de los momentos de las fuerzas (que actúan sobre las diversas partículas del sistema) con respecto al centro de masa.

RELACION ENTRE EL IMPULSO ANGULAR Y EL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

Multiplicando ambos miembros de (LIX) por dt e integrando:

$$\int_1^2 \vec{M}_O dt = \int_1^2 \left[\dot{\vec{H}}_O \right] dt = \int_1^2 \left[\frac{d\vec{H}_O}{dt} \right] dt = \vec{H}_O \Big|_1^2 = (\vec{H}_O)_2 - (\vec{H}_O)_1,$$

que también puede escribirse:

$$\int_1^2 \vec{M}_O dt = \left[\sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) \right]_2 - \left[\sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) \right]_1 \text{ ----- (LXI);}$$

análogamente, de (LX), puede obtenerse:

$$\int_1^2 \vec{M}_C dt = (\vec{H}_C)_2 - (\vec{H}_C)_1 \text{ ----- (LXII).}$$

A las integrales de tipo $\int_1^2 \bar{M} dt$ se les conoce como "Impulso angular", razón por la cual decimos que (LXI) y (LXII) nos muestran la relación entre el impulso angular y el momento de la cantidad de movimiento lineal, obtenidos con respecto al origen y con respecto al centro de masa, respectivamente.

CONSERVACION DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL.

Si durante el movimiento del sistema de partículas en estudio, la suma de los momentos, con respecto al origen (de un sistema de referencia fijo), de las fuerzas que obran sobre las partículas que forman dicho sistema es nula, o el impulso angular respectivo es nulo, todo esto entre dos instantes cualesquiera 1 y 2, la ecuación (LXI) se transforma en:

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \right) \right]_2 - \left[\sum_{i=1}^n \left(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \right) \right]_1 = \bar{0}, \quad \text{--- (LXI')}$$

conocida como "Principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento lineal, de un sistema de partículas, medido con respecto al origen de un sistema de referencia fijo".

Análogamente, si la suma de momentos, respecto al centro de masa del sistema en estudio, de las fuerzas que obran sobre las partículas que lo forman es nula, o el impulso angular respectivo es nulo, todo esto entre dos instantes cualesquiera 1 y 2, la ecuación (LXII) se transforma en:

$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i \right) \right]_2 - \left[\sum_{i=1}^n \left(\bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i \right) \right]_1 = \bar{0} \quad \text{--- (LXII')}$$

que se conoce como "Principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento lineal, de un sistema de partículas, medido con respecto al centro de masa".

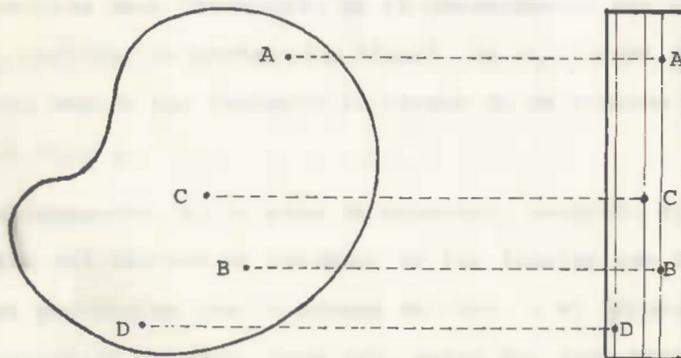


D.4) DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO

D.4.1) ECUACIONES DE MOVIMIENTO

MOVIMIENTO PLANO DEL CUERPO RIGIDO. PLANO DE MOVIMIENTO.

Consideremos un cuerpo rígido, cualquiera, que realiza un movimiento plano. De acuerdo con la definición de movimiento plano, durante el mismo, todos los puntos del cuerpo describen trayectorias planas, en planos paralelos o coincidentes. Para tratar de aclarar un poco más esto, nos auxiliaremos del siguiente par de croquis, donde el primero de ellos nos presenta al cuerpo mencionado visto de frente, en tanto que el segundo nos lo muestra de lado; C es el centro de masa de dicho cuerpo.



Siempre y cuando no esté restringido el movimiento de A, B, C o D, estos puntos describirán trayectorias planas que en el caso de A, C y D (o B, C y D), estarán contenidas en planos paralelos, en tanto que A se moverá en un plano coincidente con el plano en que se moverá B, es decir que A y B se moverán en un mismo plano.

Moviéndose, o no, el centro de masa del cuerpo, definimos como plano de movimiento a aquel que contiene a C y es paralelo, o coincidente, con el plano en que se mueve cualquier otro punto del cuerpo mencionado.

Durante el estudio de la "Dinámica de sistemas de puntos masa" se vio que:

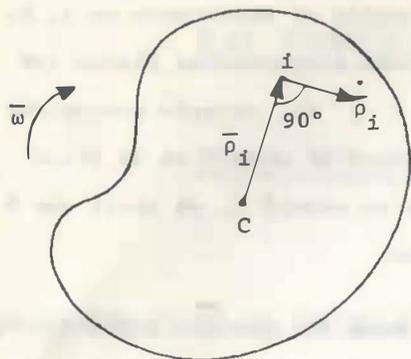
$$\bar{F} = \bar{M}a_C \quad \text{----- (XLI)}$$

Y

$$\bar{H}_C = \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i \quad \text{----- (LVI)}$$

la ecuación (XLI) es una de las dos ecuaciones básicas para estudiar el movimiento plano del cuerpo rígido, obtengamos la otra.

Si el cuerpo rígido en estudio describe un movimiento plano, durante el cual todo segmento rectilíneo suyo, alojado en el plano de movimiento (o en un paralelo a éste), se mueve con una velocidad angular $\bar{\omega}$, se tiene:



$$\dot{\rho}_i = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i$$

donde todo vector $\bar{\rho}_i$ es paralelo al plano de movimiento (o se encuentra en éste) y va de la partícula i (de interés) al eje que pasa por C y es perpendicular a dicho plano; en estas condiciones, de (LVI):

$$\bar{H}_C = \sum_{i=1}^n \left[\bar{\rho}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \right] = \sum_{i=1}^n m_i \left[\bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \right];$$

como $\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i$ es un vector perpendicular al plano formado por $\bar{\omega}$ y $\bar{\rho}_i$, los cuales a su vez son perpendiculares, se tiene que \bar{H}_C , vector perpendicular al plano formado por $\bar{\rho}_i$ y $\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i$, lleva la dirección de $\bar{\omega}$ (perpendicular al plano de movimiento) y su magnitud viene dada por $\sum_{i=1}^n m_i \omega \rho_i^2$. Basados en esto último, podemos escribir:

$$\bar{H}_C = \sum_{i=1}^n (m_i \bar{\omega} \rho_i^2) = \bar{\omega} \left[\sum_{i=1}^n (m_i \rho_i^2) \right], \text{ donde } \rho_i = |\bar{\rho}_i|,$$

o sea que:

$$\bar{H}_C = I_C \bar{\omega} \text{ ----- (LXIII);}$$

al producto $I_C \bar{\omega}$ se le denomina "Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido", donde I_C es el momento de inercia

(de la masa del cuerpo en estudio) con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por el centro de masa del sólido.

Derivando (LXIII) con respecto a t :

$$\dot{\bar{H}}_C = I_C \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \right), \text{ o bien, } \dot{\bar{H}}_C = I_C \bar{\alpha} \text{ (LXIV),}$$

y como:

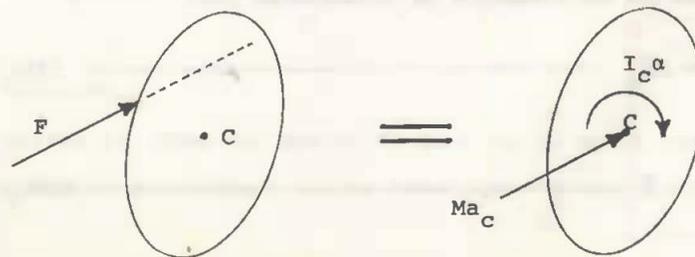
$$\dot{\bar{H}}_C = \bar{M}_C \text{ ----- (LX),}$$

donde \bar{M}_C es el momento de las fuerzas (y/o pares) que actúan sobre el cuerpo en estudio, respecto al eje mencionado que pasa por C , podemos escribir:

$$\bar{M}_C = I_C \bar{\alpha} \text{ ----- (LXV);}$$

esta ecuación es la otra que buscábamos, para poder estudiar el movimiento plano del cuerpo rígido.

Puede decirse que la ecuación (XLI) describe el movimiento del centro de masa del cuerpo en estudio, en tanto que la (LXV) nos describe el movimiento angular de dicho sólido. Estas dos ecuaciones, fundamentales para estudiar el movimiento plano, pueden agruparse gráficamente como sigue:



ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RIGIDO

A partir de aquí veremos las correspondientes a:

- a) Traslación (ya sea "rectilínea" o "curvilínea"),
- b) Rotación en torno a un eje fijo (ya sea "baricéntrica" o "no baricéntrica"), y,
- c) Movimiento plano general.

MOVIMIENTOS DE TRASLACION

Si un cuerpo rígido está animado de un movimiento de traslación, definido éste al estudiar la cinemática del cuerpo rígido (página 46), su aceleración angular, $\bar{\alpha}$, es nula y el sistema de fuerzas aplicadas se reduce a un vector, que pasa constantemente por el centro de masa e iguala (en magnitud, dirección y sentido) al $M\bar{a}_C$.

Por consiguiente, las ecuaciones que emplearemos para resolver problemas de movimientos de traslación son:

$$\bar{F} = M\bar{a}_C \text{ ----- (XLI)}$$

y/o

$$\bar{M}_C = \bar{0} \text{ ----- (LXV}_T\text{)}$$

La ecuación (XLI) puede descomponerse, según nos convenga, atendiendo al tipo de movimiento que describa el centro de masa del cuerpo en estudio, o al tipo de fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo, por ejemplo en:

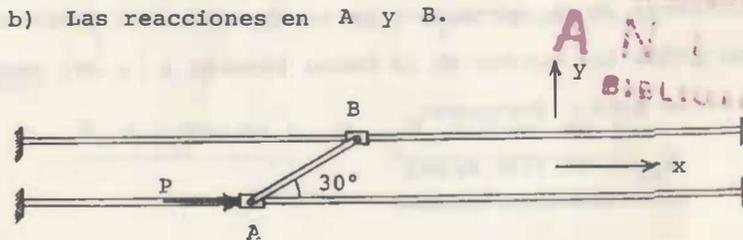
$$F_x = M\ddot{x}_C, \quad y, \quad F_y = M\ddot{y}_C$$

o bien en:

$$F_n = M \left[\frac{(\dot{s}_C)^2}{\rho_C} \right], \quad y, \quad F_t = M\ddot{s}_C.$$

Ejemplo 1.- Una barra uniforme AB, de 2 kg de peso, está articulada en sus extremos a correderas, de pesos despreciables, que pueden desplazarse libremente sobre sendas varillas lisas horizontales, como se indica en la figura.

Si el conjunto está situado en un plano vertical y en A se aplica una fuerza \bar{P} , de módulo constante e igual a 5 kg, como se muestra, calcule: a) La aceleración de la varilla, y, b) Las reacciones en A y B.

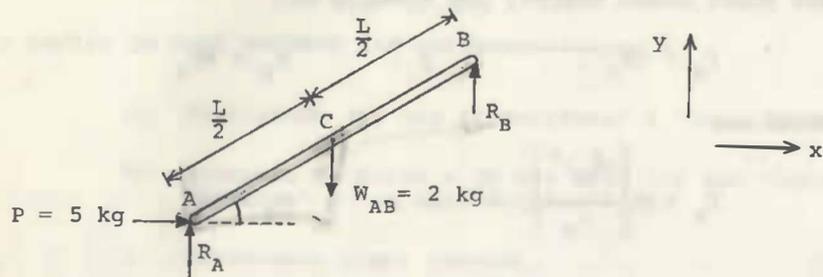


Solución.-

inciso a) Como el centro de masa de la barra realiza un movimiento rectilíneo, en la dirección x mostrada, se mueve

con una aceleración $\bar{a}_C = a_C i$.

D.c.l. de la barra, durante el movimiento:



de $F_x = M\ddot{x}_C$:

$$5 = \left[\frac{2}{9.81} \right] a_C, \text{ de donde: } a_C = 24.525 \text{ m/seg}^2,$$

luego:

$$\bar{a}_C = 24.525 i \text{ m/seg}^2;$$

por tratarse de un movimiento de traslación, las aceleraciones de todos los puntos de la barra igualan a la del centro de masa de ésta. Entonces:

$$\bar{a}_{AB} = 24.525 i \text{ m/seg}^2$$

inciso b)

de $\bar{M}_C = \bar{0}$:

$$\left[\left(-\frac{L}{2} \cos 30^\circ \right) i \right] \times \left[R_A j \right] + \left[\left(-\frac{L}{2} \sin 30^\circ \right) j \right] \times \left[5 i \right] + \left[\left(\frac{L}{2} \cos 30^\circ \right) i \right] \times \left[R_B j \right] = \bar{0};$$

desarrollando los productos:

$$\frac{L}{2} \left[-R_A \cos 30^\circ + 5 \sin 30^\circ + R_B \cos 30^\circ \right] k = \bar{0},$$

que se cumple para

$$R_A - R_B = \frac{5 \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 5 \tan 30^\circ = 2.886 \text{ ----- (a);}$$

de $F_y = M\ddot{y}_C$:

$$R_A + R_B - 2 = M(0), \text{ de donde } R_A + R_B = 2 \text{ ---- (b);}$$

sumando miembro a miembro (a) y (b):

$$2R_A = 4.886, \text{ de donde } R_A = 2.443 \text{ kg ----- (c),}$$

sustituyendo (c) en (b) y despejando:

$$R_B = 2 - 2.443 = -0.443 \text{ kg ----- (d),}$$

finalmente, tomando en cuenta (c), (d) y la notación empleada:

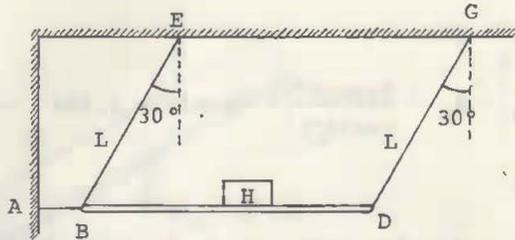
$$\bar{R}_A = 2.443 j \text{ kg}, \text{ y, } \bar{R}_B = -0.443 j \text{ kg},$$

o bien:

$$\bar{R}_A = 2.443 \text{ kg } \uparrow \text{ y, } \bar{R}_B = 0.443 \text{ kg } \downarrow$$

Ejemplo.- Un bloque de peso 10 kg se coloca sobre una plataforma que pesa 2 kg y está sujeta mediante tres hilos, como se muestra. Calcule las aceleraciones (del bloque y la plataforma) inmediatamente después de cortar el hilo AB, supo-

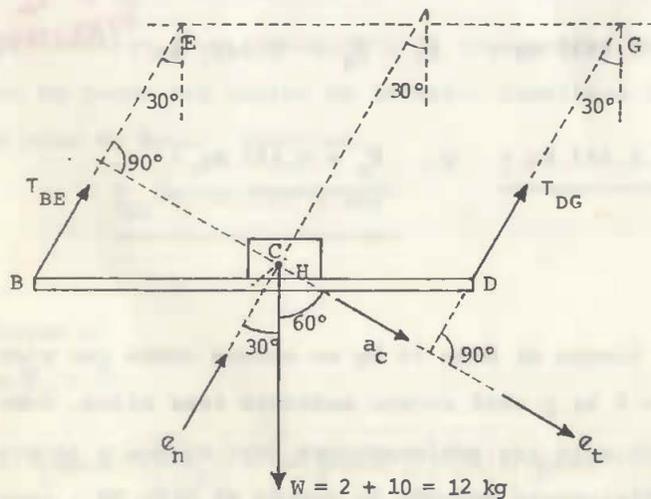
niendo: a) que el bloque está rígidamente unido a la plataforma, y, b) que el coeficiente de fricción entre el bloque y la plataforma es nulo.



Solución al inciso a)

El bloque y la plataforma constituyen un sólo cuerpo rígido (de centro de masa C) que, luego de cortarse el hilo AB, - realizará un movimiento de traslación curvilínea.

D.c.l. en el instante que se rompe el hilo AB; en este instante $\dot{s}_C = 0$:



de $F_t = M\ddot{s}_C$:

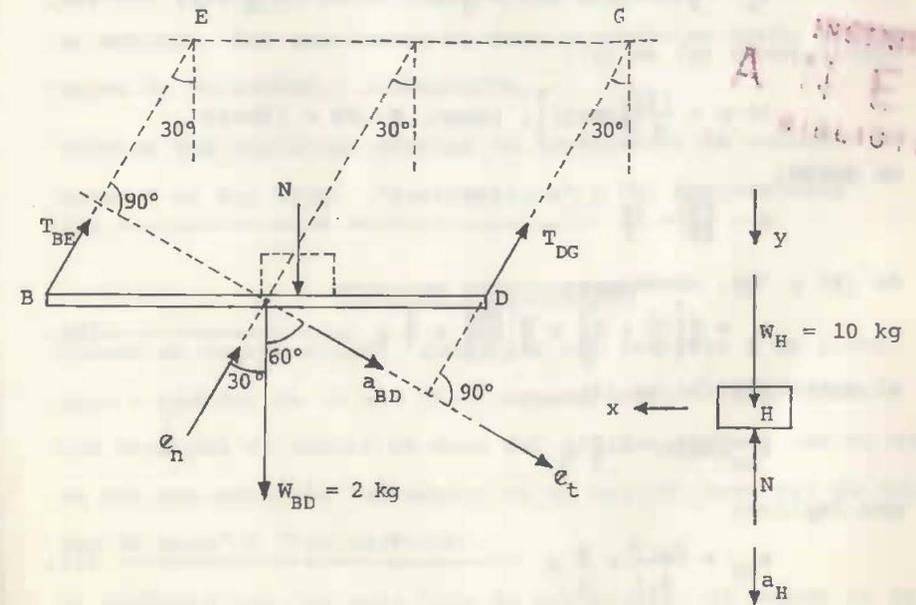
$$12 \cos 60^\circ = \frac{12}{g} a_c, \text{ de donde: } a_c = 0.5g,$$

luego, la respuesta a este inciso es:

$$\bar{a}_{BD} = \bar{a}_H = 0.5g e_t = 0.5g \begin{matrix} \nearrow 60^\circ \\ \text{---} \end{matrix}$$

inciso b) los cuerpos no están unidos y el coeficiente de fricción (entre ambos) es nulo por lo que, luego de cortarse el hilo AB, la plataforma iniciará un movimiento de traslación curvilínea, en tanto que el bloque realizará una traslación rectilínea (ésta en dirección vertical).

D.c.l. en el instante en que se rompe el hilo AB:



partiendo del d.c.l. de la plataforma, aplicando $F_t = M\ddot{s}_C$:

$$(N+2)\cos 60^\circ = \frac{2}{g}a_{BD} \text{ ----- (a),}$$

en tanto que del d.c.l. del bloque, aplicando $F_y = M\ddot{y}_C$:

$$10 - N = \frac{10}{g}a_H \text{ ----- (b);}$$

como en cualquier instante:

$$(a_{BD})_y = a_H \text{ ----- (c),}$$

para este instante de interés:

$$a_{BD}\cos 60^\circ = a_H \text{ ----- (d);}$$

de (a) y (d):

$$(N+2)\cos 60^\circ = \frac{2}{g} \left(\frac{a_H}{\cos 60^\circ} \right), \text{ de donde:}$$

$$a_H = \frac{g}{2}(N+2)\cos^2 60^\circ = \frac{g}{2}(N+2)(0.5)^2 = \frac{g}{8}(N+2) \text{ --- (e),}$$

sustituyendo (e) en (b):

$$10 - N = \frac{10}{g} \left[\frac{g}{8}(N+2) \right], \text{ luego, } 80 - 8N = 10N + 20,$$

de donde:

$$N = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \text{ ----- (f);}$$

de (f) y (e), obtenemos:

$$a_H = \frac{g}{8} \left[\frac{10}{3} + 2 \right] = \frac{g}{8} \left[\frac{16}{3} \right] = \frac{2}{3}g \text{ ----- (h),}$$

al sustituir (h) en (d):

$$a_{BD}\cos 60^\circ = \frac{2}{3}g,$$

que implica:

$$a_{BD} = \frac{2g/3}{0.5} = \frac{4}{3}g \text{ ----- (i),}$$

finalmente, tomando en cuenta (h) e (i), el resultado para este inciso es:

$$\underline{\underline{\bar{a}_H = \frac{2}{3}g \downarrow}}$$

y

$$\underline{\underline{\bar{a}_{BD} = \frac{4}{3}g \nearrow 60^\circ}}$$

MOVIMIENTOS DE ROTACION EN TORNO A UN EJE FIJO

En estos tipos de movimiento, las partículas de los cuerpos rígidos se mueven en planos paralelos entre sí, perpendiculares al eje fijo con respecto al cual giran, describiendo circunferencias cuyo centro se encuentra situado en dicho eje.

Si este eje, denominado "eje de rotación", corta al cuerpo en estudio, las partículas de éste situadas en dicho eje carecen de velocidad y aceleración.

Existen dos tipos importantes de movimientos de rotación en torno a un eje fijo: "Baricéntrica" y "No baricéntrica".

ROTACION BARICENTRICA

Cuando un cuerpo rígido, simétrico con respecto a un plano, gira alrededor de un eje fijo perpendicular a dicho plano y que pasa por el centro de masa del sólido, decimos que se mueve con una rotación "alrededor de un eje que pasa por su centro de masa" o "baricéntrica".

Es evidente que, en este tipo de movimiento, el centro de masa carece de aceleración, por lo que el sistema de elementos

aplicados al cuerpo se reduce a un par que iguala a $I_C \bar{\alpha}$.

Así pues, las ecuaciones que utilizaremos para resolver ejercicios de cuerpos rígidos que realizan rotación baricéntrica son:

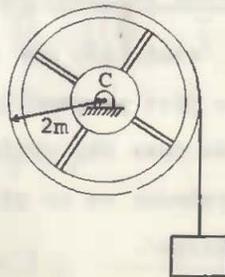
$$\bar{F} = 0 \text{ ----- (XLI}_{R.B.})$$

Y

$$\bar{M}_C = I_C \bar{\alpha} \text{ ----- (LXV),}$$

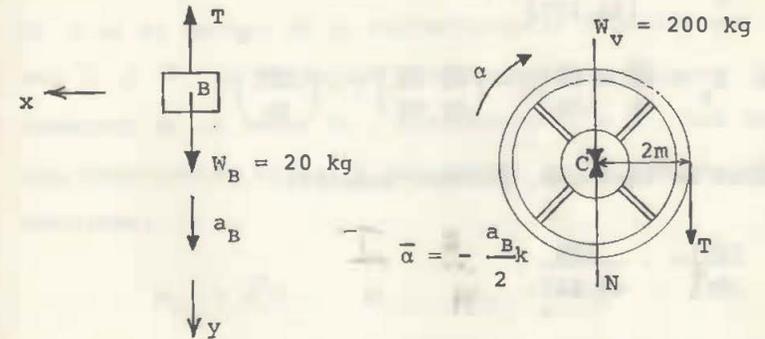
aunque en algunos casos bastará con emplear la (LXV).

Ejemplo.- De la cuerda enrollada al volante de la figura pende un bloque, cuyo peso es 20 kg, como se muestra. El volante pesa 200 kg y su masa tiene un radio de giro de 0.75m con respecto al eje de rotación que, a su vez, pasa por el centro de masa del volante. Si el sistema parte del reposo, calcule la rapidez del bloque luego de que éste se ha desplazado 2.5m, despreciando el rozamiento así como la masa de la cuerda.



Solución.- Desde que el sistema inicia su movimiento, el bloque describe una traslación rectilínea y el volante realiza una rotación baricéntrica.

D.c.1. en un instante cualquiera del movimiento:



para el bloque, de $F_y = M\ddot{y}_C$:

$$-20 + T = \frac{20}{g}(-a_B) \text{ ----- (1),}$$

para el volante, de $\bar{M}_C = I_C \bar{\alpha}$:

$$(-21) \times (Tj) = \frac{200}{g}(0.75)^2 \left(-\frac{a_B}{2}k\right),$$

de donde:

$$-2Tk = -\frac{56.25}{g}a_B k,$$

que se cumple para:

$$T = \frac{28.125}{g}a_B \text{ ----- (2);}$$

restando, miembro a miembro, (1) de (2):

$$20 = \frac{48.125}{g} a_B, \quad \text{o sea:} \quad a_B = \frac{20g}{48.125},$$

que implica:

$$\bar{a}_B = - \left[\frac{20g}{48.125} \right] j ;$$

$$\text{haciendo } \bar{a}_B = \frac{d\bar{v}}{dt} = \left(\frac{dv}{dy} \right) j = \left(\frac{v dv}{dy} \right) j ,$$

por igualdad de vectores, podemos escribir:

$$\frac{v dv}{dy} = - \frac{20g}{48.125},$$

de donde, separando variables e integrando, obtenemos:

$$\frac{v^2}{2} = - \frac{20gy}{48.125} + C_1 ;$$

de $v = 0$, para $y = 0$:

$$C_1 = 0, \quad \text{teniéndose ahora:}$$

$$v^2 = - \frac{40gy}{48.125},$$

entonces, para $y = -2.5$ m, obtenemos:

$$v^2 = - \frac{40(9.81)(-2.5)}{48.125} = \frac{981}{48.125} = 20.3844 ,$$

por lo que la respuesta a este problema viene siendo:

$$v = \sqrt{20.3844} = 4.515 \text{ m/seg.}$$

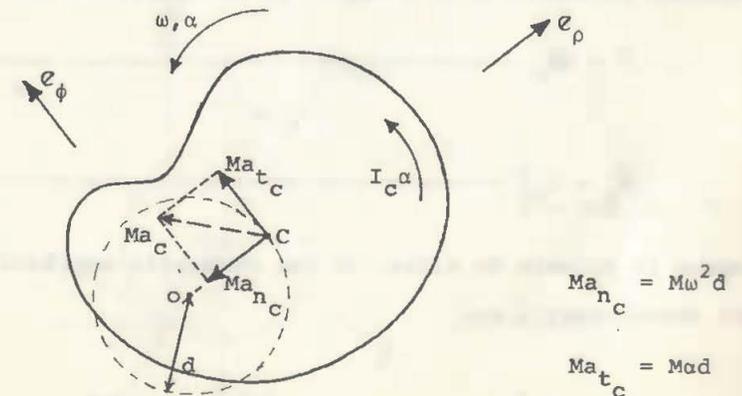
ROTACION NO BARICENTRICA

Se define como el movimiento de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que no pasa por su centro de masa, C , lo que motiva que éste describa una circunferencia alojada en un plano perpendicular al eje de rotación.

Si O es el centro de la circunferencia descrita por C , al ser $\bar{\omega}$ y \bar{a} la velocidad y aceleración angulares (respectivamente) de la recta OC , haciendo $|\vec{OC}| = d$, los módulos de las componentes normal y tangencial de la aceleración de C resultan:

$$a_{n_c} = \omega^2 d \quad \text{y} \quad a_{t_c} = \alpha d .$$

Representemos gráficamente a la aceleración angular del cuerpo y a las aceleraciones normal y tangencial de su centro de masa, todas ellas consecuencia del sistema de los elementos (fuerzas y/o pares) aplicados sobre el sólido en movimiento.



$$Ma_{nc} = M\omega^2 d$$

$$Ma_{tc} = M\alpha d$$

Tomando momentos con respecto al eje (perpendicular al plano de movimiento) que pasa por O, de los elementos masa-aceleración:

$$\bar{M}_O = (I_C \alpha)k + [(d)e_\rho] \times [(Mad)e_\phi] = (I_C \alpha)k + (Mad^2)k,$$

o sea:

$$\bar{M}_O = (I_C + Md^2)\alpha k = (I_C + Md^2)\bar{\alpha},$$

que basados en los teoremas de ejes paralelos para momentos de inercia, puede escribirse:

$$\bar{M}_O = I_O \bar{\alpha} \text{ ----- (LXVI),}$$

donde I_O es el momento de inercia (de la masa del cuerpo) con respecto al eje de rotación.

Basados en lo anterior podemos decir que, las expresiones que regirán para resolver problemas de cuerpos rígidos que realizan movimientos de rotación no baricéntrica son:

$$\bar{F} = M\bar{a}_C \text{ ----- (XLI)}$$

y

$$\bar{M}_O = I_O \bar{\alpha} \text{ ----- (LXVI)}$$

aunque la primera de ellas, de ser necesario emplearla, podemos descomponerla en:

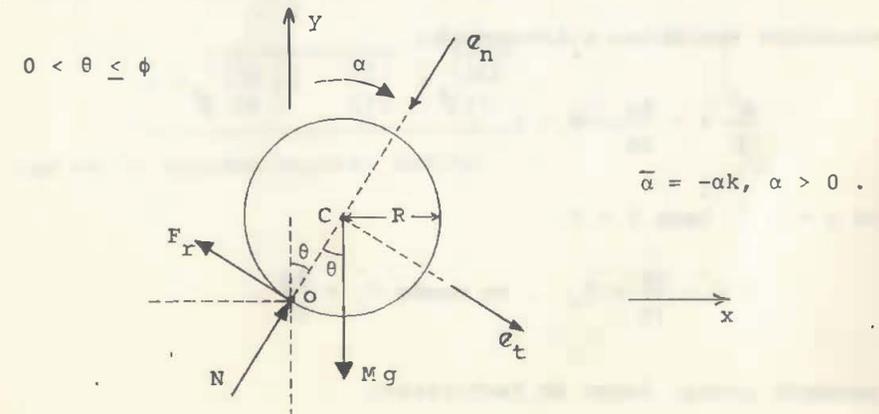
$$F_n = M\omega^2 d \quad \text{y} \quad F_t = Mad.$$

Ejemplo.- Una esfera homogénea, de masa M y radio R, descansa sobre el borde de la superficie que se muestra. Si comienza a rodar, sobre el borde mencionado, con una velocidad angular pequeña que puede despreciarse, y el rozamiento entre la saliente y la esfera es suficiente para evitar que ésta deslice, determine el ángulo ϕ con que abandonará el borde. ¿Cuál es su rapidez angular cuando lo abandona?



Solución.- La esfera realizará un movimiento de rotación no baricéntrica, en torno a un eje (perpendicular al plano de movimiento) que pasa por el punto de contacto con el borde, en tanto no salga despedida.

D.c.l., de la esfera, mientras realiza la rotación no baricéntrica descrita:



basados en el croquis y tomando en cuenta el teorema de ejes paralelos para momentos de inercia, se tiene:

$$I_O = I_C + M(R)^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2, \text{ con lo que,}$$

de $\vec{M}_O = I_O \vec{\alpha}$:

$$\left[(R \text{sen} \theta) i \right] \times (-Mg j) = \frac{7}{5}MR^2 (-\alpha k),$$

que desarrollando productos puede escribirse:

$$(-MgR \text{sen} \theta) k = -\frac{7}{5}MR^2 \alpha k,$$

que se cumple para:

$$\alpha = \frac{5g \text{sen} \theta}{7R} \text{ ----- (a);}$$

haciendo $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$, podemos escribir:

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{5g}{7R} \text{sen} \theta,$$

separando variables e integrando:

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{5g}{7R} \text{cos} \theta + C_1,$$

de $\omega = 0$, para $\theta = 0$:

$$0 = -\frac{5g}{7R} + C_1, \text{ de donde } C_1 = \frac{5g}{7R},$$

teniendo ahora, luego de factorizar:

$$\omega^2 = \frac{10g}{7R} (1 - \text{cos} \theta) \text{ ----- (b);}$$

entonces, de $F_n = M\omega^2 d$:

$$Mg \text{cos} \theta - N = M \left[\frac{10g}{7R} (1 - \text{cos} \theta) \right] R, \text{ ----- (c),}$$

como, en el instante en que la esfera está a punto de despegarse, N toma el valor cero al tomar θ el valor ϕ , basados en (c) podemos escribir:

$$Mg \text{cos} \phi - 0 = \frac{10Mg}{7} (1 - \text{cos} \phi),$$

de donde:

$$\frac{17}{7} Mg \text{cos} \phi = \frac{10}{7} Mg, \text{ que implica: } \text{cos} \phi = \frac{10}{17},$$

o sea que:

$$\phi = \text{ang} \cos \frac{10}{17};$$

finalmente, para esta posición, tomando en cuenta (b):

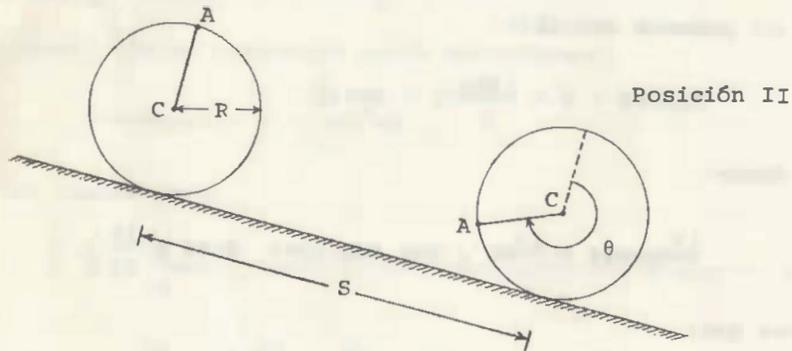
$$\omega = \sqrt{\frac{10g}{7R} \left(1 - \frac{10}{17} \right)} = \sqrt{\frac{10g}{17R}},$$

que es la rapidez angular pedida.

CONDICIONES NECESARIAS PARA QUE UN CUERPO RIGIDO, CIRCULAR Y HOMOGENEO (SIMETRICO CON RESPECTO AL PLANO DE MOVIMIENTO), RUEDE SIN DESLIZAR.

Obtendremos estas condiciones puesto que son de gran importancia, en muchos problemas de movimiento plano. Sea el cuerpo rígido, circular y homogéneo mostrado en la figura.

Posición I



Si pasa de la posición I a la II, rodando sin deslizar, deberá cumplirse:

$$S = R\theta \text{ ----- (LXVII),}$$

derivando con respecto a t , obtenemos:

$$\dot{S} = R\dot{\theta}$$

que implica:

$$v_C = R\omega \text{ ----- (LXVIII),}$$

derivando de nuevo, se obtiene:

$$a_C = R\alpha \text{ ----- (LXIX);}$$

las ecuaciones (LXVII), (LXVIII) y (LXIX) son las condiciones buscadas.

MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Todo movimiento plano que no es de Traslación, ni de Rotación baricéntrica, recibe el nombre de "Movimiento plano general".

Sin embargo, el movimiento plano general de un cuerpo rígido puede descomponerse siempre en una rotación, alrededor de un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por su centro de masa, y una traslación.

Entonces podemos decir que, desde el punto de vista de la Dinámica, el movimiento plano general de un cuerpo rígido (que posee un plano de simetría, coincidente con el de movimiento) se compone de una Traslación y una Rotación baricéntrica.

Por lo anterior y recordando lo visto al iniciar el estudio de la Dinámica del cuerpo rígido, las ecuaciones básicas para estudiar el movimiento plano general son:

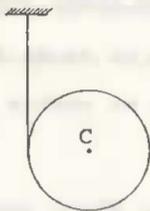
$$\bar{F} = M\bar{a}_C \text{ ----- (XLI)}$$

Y

$$\bar{M}_C = I_C\bar{\alpha} \text{ ----- (LXV)}$$

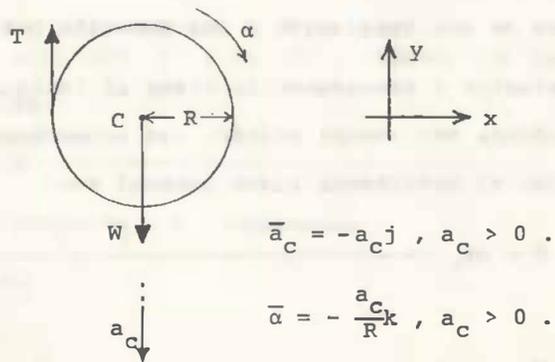
Ejemplo 1.- Una esfera homogénea de peso W y radio R tiene un cable enrollado, en una circunferencia, como se indica en la figura. Si dicho cable es muy delgado, flexible, inexten

sible y de masa despreciable, además de encontrarse empotrado en uno de sus extremos, y la esfera se suelta: a) ¿Cuál es la rapidez del centro de masa luego de haber caído una distancia h ?; b) ¿Cuál es la tensión en el cable?



Solución.- Aunque en este caso no se tiene un movimiento de rodadura sin deslizamiento, es aplicable (LXIX) ya que por ser inextensible la cuerda, después de soltarse, si la esfera gira un ángulo 2π el centro de masa baja $2\pi R$.

D.c.l. en un instante cualquiera del movimiento:



de $F_y = M\ddot{y}_C$:

$$T - W = \frac{W}{g}(-a_c) \quad (1);$$

de $\bar{M}_C = I_C \bar{\alpha}$:

$$(-Ri) \times (Tj) = \left[\frac{2}{5} \frac{WR^2}{g} \right] \left(-\frac{a_c}{R} k \right),$$

de donde:

$$-RTk = -\frac{2}{5} \frac{WRa_c}{g} k,$$

que se cumple para

$$T = \frac{2}{5} \frac{W}{g} a_c \quad (2);$$

restando, miembro a miembro, (1) de (2):

$$W = \frac{7}{5} \frac{W}{g} a_c, \text{ de donde } a_c = \frac{5}{7}g = \text{cte.} \quad (3),$$

que implica $\bar{a}_c = \frac{5}{7}g \uparrow$;

haciendo $a_c = v_c \frac{dv_c}{dy}$, separando variables e integrando:

$$\frac{v_c^2}{2} = \frac{5}{7}gy + C_1,$$

de $v_c = 0$, para $y = 0$: $C_1 = 0$, y:

$$v_c^2 = \frac{10}{7}gy,$$

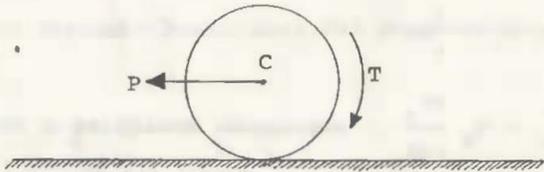
entonces, para $y = h$, se tiene:

$$v_c = \sqrt{\frac{10}{7}gh};$$

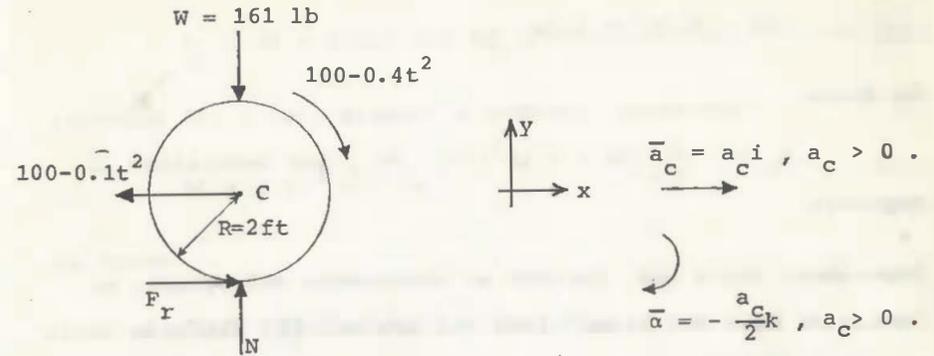
finalmente, sustituyendo (3) en (2), se obtiene:

$$\underline{T = \frac{2W}{7}}$$

Ejemplo 2.- Un cilindro circular homogéneo, de radio 2 ft y peso 161 lb, rueda sin deslizar, sobre la superficie horizontal de la figura, sujeto a la acción conjunta de un par de magnitud $T = 100 - 0.4t^2$ y una fuerza horizontal de módulo $P = 100 - 0.1t^2$, donde t está en seg, P en lb, y T en lb-ft. Si en el instante $t = 0$ el centro, C , presenta una velocidad de 5 ft/seg hacia la derecha, determine la velocidad de C cuando $t = 3$ seg, respetando los sentidos mostrados para los elementos mecánicos.



Solución.- Supongamos \bar{F}_R y \bar{a}_C con sentido hacia la derecha; tomando en cuenta que el disco rueda sin deslizar, así como el sentido supuesto para \bar{a}_C , el cuerpo adquirirá una aceleración de magnitud $|\bar{a}_C|/R = a_C/2$, en el sentido de las manecillas del reloj, teniéndose las siguientes condiciones durante el movimiento:



como $M = \frac{161 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/seg}^2} = 5 \text{ lb seg}^2/\text{ft}$, en tanto que

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(5)(2)^2 = 10 \text{ lb.ft. seg}^2,$$

tomando en cuenta el sistema de referencia indicado junto al cuerpo, de $F_x = M\ddot{x}_C$:

$$F_R - (100 - 0.1t^2) = 5a_C \text{ ----- (1),}$$

y de $\bar{M}_C = I_C \bar{\alpha}$:

$$(+2j) \times (F_R i) - (100 - 0.4t^2)k = 10(-\frac{a_C k}{2})$$

que se cumple para:

$$2F_R k - 100k + 0.4t^2 k = -5a_C k,$$

o sea para:

$$-F_R + 50 - 0.2t^2 = 2.5a_C \text{ ----- (2);}$$

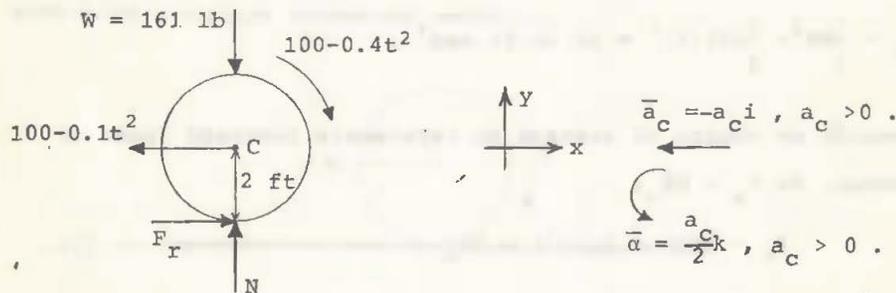
sumando miembro a miembro (1) y (2), obtenemos:

$$-50 - 0.1t^2 = 7.5a_c ,$$

de donde:

$a_c = -\frac{1}{7.5}(50 + 0.1t^2) < 0$, $\forall t$, que contradice lo supuesto.

Supongamos ahora que, durante el movimiento del cuerpo, el centro de masa del mismo tiene una aceleración dirigida hacia la izquierda, en tanto que continuaremos considerando que la fuerza de fricción tiene sentido hacia la derecha, teniéndose en estas condiciones:



Tomando en cuenta los valores de M e I_C obtenidos antes, - de $\bar{F}_x = M\bar{a}_x$:

$$F_r - (100 - 0.1t^2) = 5(-a_c) \text{ ----- (a),}$$

y de $\bar{M}_C = I_C\bar{\alpha}$:

$$(-2j) \times (F_r i) - (100 - 0.4t^2)k = 10\left(\frac{a_c}{2}k\right) ,$$

que, efectuando operaciones, puede escribirse:

$$2F_r k - 100k + 0.4t^2 k = 5a_c k ,$$

que se cumple sí:

$$F_r - 50 + 0.2t^2 = 2.5a_c \text{ ----- (b),}$$

restando (b) y (a), miembro a miembro, obtenemos:

$$50 + 0.1t^2 = 7.5a_c ,$$

de donde:

$$a_c = \frac{1}{7.5}(50 + 0.1t^2) > 0 , \forall t ,$$

que es congruente con la última suposición hecha, y que implica:

$$\bar{a}_c = \frac{-1}{7.5}(50 + 0.1t^2)i ;$$

haciendo $\bar{a}_c = \frac{d\bar{v}_c}{dt}$, separando variables e integrando:

$$\bar{v}_c = \frac{-1}{7.5}(50t + \frac{0.1}{3}t^3)i + \bar{C}_1 ,$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales del problema, así como el sistema de referencia empleando al resolverlo, podemos decir que:

$$\bar{v}_c = 5i , \text{ para } t = 0 , \text{ que implica } \bar{C}_1 = 5i ,$$

luego:

$$\bar{v}_c = \left[-\frac{1}{7.5}(50t + \frac{0.1}{3}t^3) + 5 \right] i ,$$

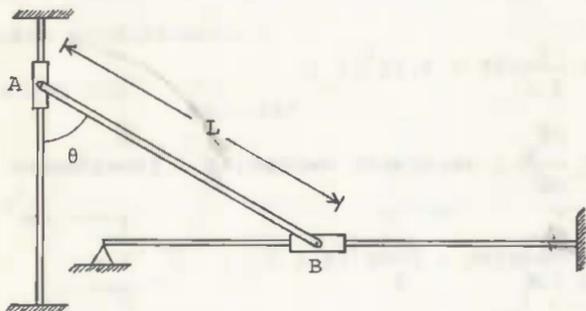
entonces, para $t = 3$ seg:

$$\bar{v}_c = \left[-\frac{1}{7.5}(150 + 0.9) + 5 \right] i = -15.12i ,$$

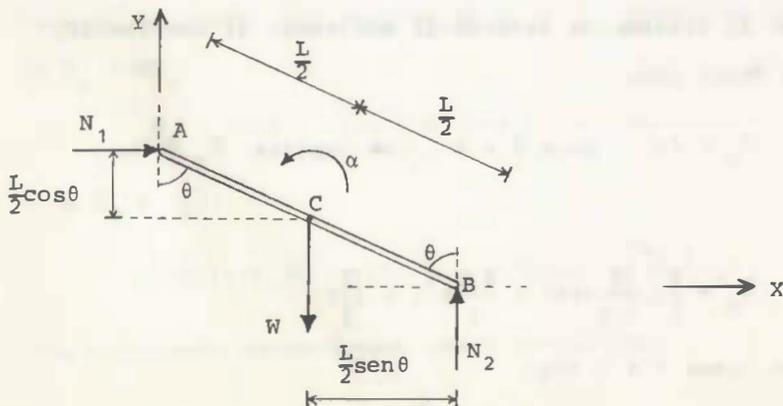
por lo que, la respuesta al problema planteado es:

$$\underline{\bar{v}_c = 15.12 \text{ ft/seg} \leftarrow}$$

Ejemplo 3.- La barra delgada de la figura es homogénea, pesa W , y se suelta cuando $\theta = 60^\circ$. Si en sus extremos está articulada a correderas (de pesos despreciables) y éstas se mueven sobre varillas lisas (rígidas y fijas) calcule la velocidad del centro de masa de la barra, cuando ésta adopta la posición horizontal.



Solución.- D.c.l. de la barra, luego de soltarla:



de $F_x = M\ddot{x}_c$:

$$N_1 = \frac{W}{g}\ddot{x}_c \text{ ----- (a),}$$

de $F_y = M\ddot{y}_c$:

$$N_2 - W = \frac{W}{g}\ddot{y}_c \text{ ----- (b),}$$

de $\bar{M}_c = I_c\ddot{\alpha}$:

$$\left[\left(\frac{L}{2}\text{sen}\theta\right)i\right] \times (N_2j) + \left[\left(\frac{L}{2}\text{cos}\theta\right)j\right] \times (N_1i) = \left[\frac{1}{12} \frac{WL^2}{g}\right]\alpha k,$$

que desarrollando productos puede escribirse:

$$\left[N_2\text{sen}\theta - N_1\text{cos}\theta\right]\frac{L}{2}k = \frac{WL^2}{12g}\alpha k,$$

de donde obtenemos:

$$N_2\text{sen}\theta - N_1\text{cos}\theta = \frac{WL}{6g}\alpha \text{ ----- (c);}$$

procediendo como lo hicimos al estudiar la cinemática de una barra como la de este ejercicio (ver página 59) se obtiene:

$$\bar{a}_c = \left(\frac{\alpha L}{2}\text{cos}\theta - \frac{\omega^2 L}{2}\text{sen}\theta\right)I - \left(\frac{\alpha L}{2}\text{sen}\theta + \frac{\omega^2 L}{2}\text{cos}\theta\right)J,$$

que implica:

$$\ddot{x}_c = \frac{\alpha L}{2}\text{cos}\theta - \frac{\omega^2 L}{2}\text{sen}\theta \text{ ----- (d)}$$

y

$$\ddot{y}_c = -\left(\frac{\alpha L}{2}\text{sen}\theta + \frac{\omega^2 L}{2}\text{cos}\theta\right) \text{ ----- (e);}$$

sustituyendo (d) en (a), y (e) en (b), se obtiene:

$$N_1 = \frac{WL}{2g}(\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \text{ ----- (f),}$$

y

$$N_2 = W - \frac{WL}{2g}(\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \text{ ----- (g);}$$

sustituyendo ahora (g) y (f) en (c), obtenemos:

$$W \sin \theta - \frac{WL}{2g}(\alpha \sin^2 \theta - \omega^2 \sin \theta \cos \theta) - \frac{WL}{2g}(\alpha \cos^2 \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta) = \frac{WL}{6g} \alpha ,$$

reduciendo términos semejantes:

$$W \sin \theta - \left[\frac{WL}{2g} \alpha \right] (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{WL}{6g} \alpha ,$$

de donde:

$$W \sin \theta = \frac{2WL}{3g} \alpha ,$$

que implica:

$$\alpha = \frac{3g}{2L} \sin \theta \text{ ----- (h);}$$

haciendo $\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$, separando variables e integrando:

$$\frac{\omega^2}{2} = - \frac{3g}{2L} \cos \theta + C_1 ,$$

de $\omega = 0$, para $\theta = 60^\circ$:

$$0 = - \frac{3g}{2L} \left(\frac{1}{2} \right) + C_1 , \text{ de donde } C_1 = \frac{3g}{4L} ,$$

teniéndose ahora:

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} \left(\frac{1}{2} - \cos \theta \right) \text{ ----- (i),}$$

de donde, para $\theta = 90^\circ$ (cuando la barra toma la horizontal):

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L} \left(\frac{1}{2} - 0 \right)} = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \text{ ----- (j);}$$

entonces, como al resolver el ejercicio de cinemática del cuerpo rígido (mencionado en éste, antes de dar la expresión de \bar{a}_c) se obtuvo:

$$\bar{v}_c = \left(\frac{\omega L}{2} \cos \theta \right) \mathbf{I} - \left(\frac{\omega L}{2} \sin \theta \right) \mathbf{J} ,$$

para $\theta = 90^\circ$, tomando en cuenta (j), obtenemos:

$$\bar{v}_c = \left(\left[\sqrt{\frac{3g}{2L}} \right] \frac{L}{2} (0) \right) \mathbf{I} - \left(\left[\sqrt{\frac{3g}{2L}} \right] \frac{L}{2} (1) \right) \mathbf{J} = - \sqrt{\frac{3gL}{8}} \mathbf{J} ,$$

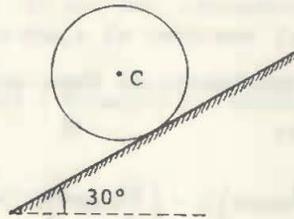
que es la respuesta a este ejercicio, misma que puede darse también como:

$$\bar{v}_c = \sqrt{\frac{3gL}{8}} \downarrow$$

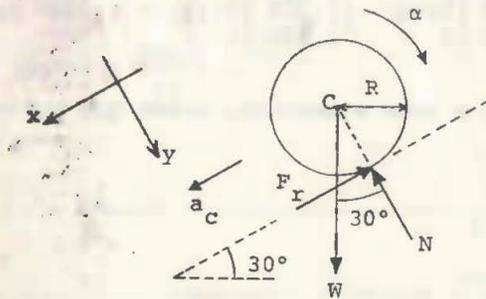
Nota.- Si se hubiera pedido encontrar el módulo de las fuerzas ejercidas sobre las correderas, para un ángulo θ cualquiera, hubiera bastado con sustituir (h) e (i) en (f) y (g).

Ejemplo 4.- A un cilindro homogéneo de peso W y radio R se le sujeta, sobre el plano inclinado mostrado, en la posición que indica la figura. Si se le suelta, y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.1, calcule:

- a) La aceleración del centro de masa, b) La aceleración angular del cilindro.



Solución.- D.c.l. en un instante cualquiera, luego de soltar el cilindro:



de $F_y = M\ddot{y}_C$:

$$-N + W\cos 30^\circ = M(0), \text{ luego } N = 0.866W,$$

con lo que

$$\mu N = 0.1(0.866W) = 0.0866W \text{ ----- (a)}$$

(donde μN es el valor máximo que puede adquirir el módulo de

la fuerza de fricción, ejercida entre el cuerpo y el plano inclinado sobre el cual se mueve);

de $F_x = M\ddot{x}_C$:

$$W\sin 30^\circ - F_f = \frac{W}{g} a_c \text{ ----- (b);}$$

de $\bar{M}_C = I_C \bar{\alpha}$:

$$(R\hat{j}) \times (-F_f \hat{i}) = \left[\frac{1}{2} \frac{WR^2}{g} \right] \alpha \hat{k},$$

que, desarrollando los productos, nos permite escribir:

$$(F_f R) \hat{k} = \left[\frac{WR^2}{2g} \right] \alpha \hat{k},$$

que se cumple para:

$$F_f = \frac{WR}{2g} \alpha \text{ ----- (c);}$$

(b) y (c) son válidas, ruede o no sin deslizar el cilindro, durante el movimiento.

Continuaremos ahora, suponiendo que se cumple la igualdad:

$$a_c = R\alpha \text{ ----- (d)}$$

o sea que supondremos que el cuerpo rueda sin deslizar durante su movimiento, obtendremos el módulo de la fuerza de fricción necesaria para que esto sea posible y compararemos éste con el valor dado por (a), para luego de esto poder dar la respuesta al problema.

Sustituyendo (d) en (c), se tiene:

$$F_r = \frac{W}{2g} a_c, \quad \text{de donde} \quad 2F_r = \frac{W}{g} a_c \quad \text{----- (e);}$$

restando (b) y (e), miembro a miembro, obtenemos:

$$W \sin 30^\circ - 3F_r = 0,$$

de donde despejando se obtiene:

$$F_r = \frac{0.5W}{3} = \frac{W}{6} = 0.1667W \quad \text{----- (f)}$$

(valor del módulo de la fuerza de fricción necesaria para que el cuerpo ruede sin deslizar).

Como, tomando en cuenta (f) y (a), se tiene:

$$0.1667W > 0.0866W = \mu N,$$

concluimos que el cuerpo rueda deslizando, durante su movimiento, sujeto (además del peso y la fuerza que sobre él ejerce el plano inclinado) a la acción de una fuerza de fricción cuyo módulo viene dado por:

$$F_r = 0.0866W \quad \text{----- (g);}$$

sustituyendo (g) en (b) y (c) obtenemos, respectivamente, luego de despejar:

$$a_c = \frac{g}{W}(0.5W - 0.0866W) = 0.4134g,$$

y

$$\alpha = \frac{2g}{WR}(0.0866W) = 0.1732 \frac{g}{R};$$

entonces, la respuesta al problema viene dada por:

$$\underline{\bar{a}_c = 0.4134g} \quad \text{y} \quad \underline{\bar{\alpha} = 0.1732 \frac{g}{R}}$$

EJE INSTANTANEO DE ROTACION EN EL MOVIMIENTO PLANO.

Consideremos el movimiento plano general de un cuerpo rígido; recordemos que en un instante dado, según lo visto en las páginas 60 a 62, las velocidades de sus diversas partículas pueden obtenerse considerando que el sólido está animado de una rotación alrededor de un cierto eje, perpendicular al plano de movimiento, que se denomina "Eje instantáneo de rotación" al que abreviadamente llamamos EIR.

Si el EIR atraviesa el cuerpo, todas las partículas que coinciden con él, en el instante considerado, tienen velocidad nula. Sin embargo, no olvidemos que el EIR no tiene posición fija si el cuerpo realiza un movimiento plano general.

Entonces, si en un movimiento plano podemos determinar el EIR dicho movimiento podrá estudiarse, tomando en cuenta la ecuación (LXVI), por medio de las expresiones:

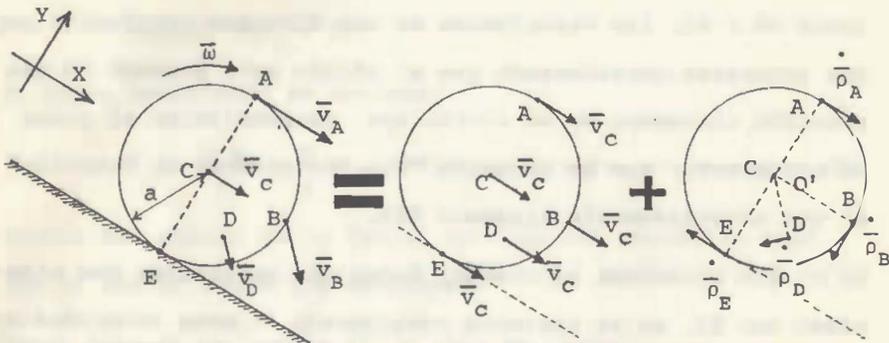
$$\bar{F} = \bar{M} a_c \quad \text{----- (XLI),}$$

y

$$\bar{M}_{EIR} = I_{EIR} \bar{\alpha} \quad \text{----- (LXVI}_{EIR}\text{)}.$$

Antes de entrar directamente a la solución de problemas donde es posible localizar el EIR mencionaremos que, para cuerpos rígidos circulares que ruedan sin deslizar, dicho eje pasa por el punto (o puntos) de contacto entre el cuerpo y la superficie sobre la que se mueve éste.

En efecto, obteniendo las características cinemáticas del movimiento plano como la suma vectorial de las que provienen de una traslación y las provenientes de una rotación baricéntrica, podemos plantear la siguiente igualdad:



donde $\dot{\rho}_A = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_A$, $\dot{\rho}_B = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_B$, $\dot{\rho}_D = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_D$, y, $\dot{\rho}_E = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_E$;

entonces:

$$\bar{v}_E = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_E = \bar{v}_C + (-\omega k) \times (aJ) = v_C I - a\omega J \quad (1)$$

y como, por tratarse de un movimiento de rodadura sin deslizamiento, se tiene:

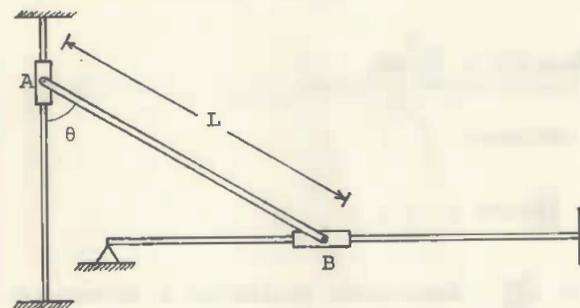
$$a\omega = v_C \quad (2)$$

al sustituir (2) en (1), obtenemos:

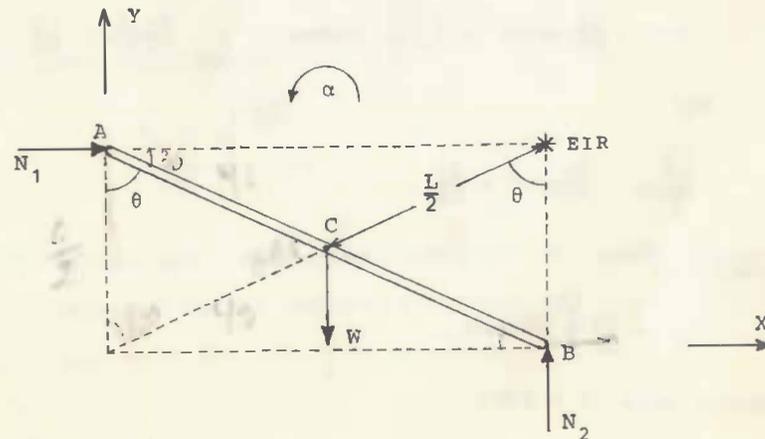
$$\bar{v}_E = v_C I - v_C I = \bar{0}$$

La determinación de la posición del EIR en otros cuerpos puede apreciarse en las páginas 61 y 62.

Ejemplo 1.- La barra delgada de la figura es homogénea, pesa W , y se suelta cuando $\theta = 60^\circ$. Si en sus extremos está articulada a correderas (de pesos despreciables) y éstas se mueven sobre varillas lisas (rígidas y fijas), calcule la velocidad del centro de masa de la barra cuando ésta adopta la posición horizontal.



Solución.- En un instante cualquiera, luego de soltar la barra:



$$I_{EIR} = I_C + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \frac{W L^2}{g} + \frac{W}{g} \left(\frac{L^2}{4}\right) = \frac{1}{3} \frac{W L^2}{g} ;$$

de $\bar{M}_{EIR} = I_{EIR} \bar{\alpha}$:

$$\left[\frac{L}{2} (-I \sin \theta - J \cos \theta) \right] \times (-WJ) = \frac{W}{3g} L^2 (\alpha k) ,$$

desarrollando el producto obtenemos:

$$\left(\frac{WL}{2} \sin \theta \right) k = \frac{WL^2}{3g} \alpha k ,$$

de donde se obtiene:

$$\alpha = \frac{3g}{2L} \sin \theta ;$$

haciendo $\alpha \approx \omega \frac{d\omega}{d\theta}$, separando variables e integrando:

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{3g}{2L} \cos \theta + C_1 ,$$

de $\omega = 0$, para $\theta = 60^\circ$, se tiene:

$$0 = -\frac{3g}{2L} \cos 60^\circ + C_1 , \text{ luego } C_1 = \frac{3g}{2L} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3g}{4L} ,$$

con lo que:

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{3g}{2L} \cos \theta + \frac{3g}{4L} ,$$

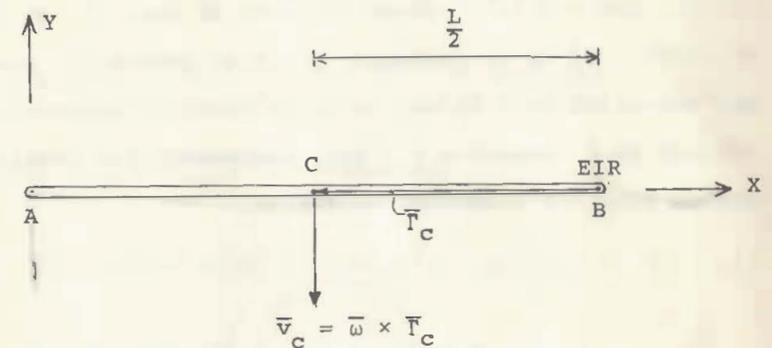
que implica:

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} \left(\frac{1}{2} - \cos \theta \right) ,$$

entonces, para $\theta = 90^\circ$:

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{3g}{2L} ,$$

y como, para esta posición tenemos:



podemos escribir:

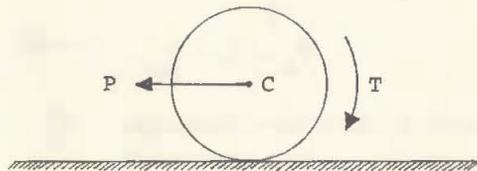
$$\bar{v}_C = \left(\sqrt{\frac{3g}{2L}} k \right) \times \left(-\frac{L}{2} i \right) = -\frac{L}{2} \sqrt{\frac{3g}{2L}} j = -\sqrt{\frac{3gL}{8}} j ;$$

o bien, finalmente:

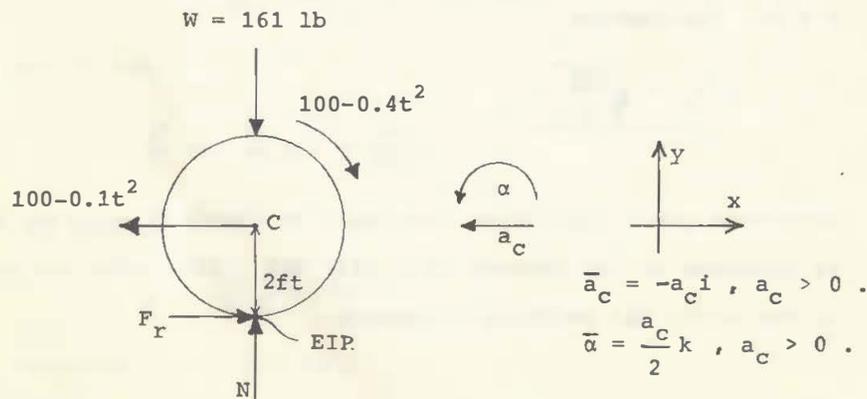
$$\bar{v}_C = \sqrt{\frac{3gL}{8}} \downarrow$$

Obsérvese que a este mismo resultado se llegó al resolver este problema en las páginas 280, 281, 282 y 283, sólo que ahora fue mucho más sencillo obtenerlo.

Ejemplo 2.- Un cilindro circular homogéneo, de radio 2 ft y peso 161 lb, rueda sin deslizar, sobre la superficie horizontal de la figura, sujeto a la acción conjunta de un par de magnitud $T = 100 - 0.4t^2$ y una fuerza horizontal de módulo $P = 100 - 0.1t^2$, donde t está en seg, P en lb y T en lb-ft. Si en el instante $t = 0$ el centro, C , presenta una velocidad de 5 ft/seg hacia la derecha, determine la velocidad de C cuando $t = 3$ seg, respetando los sentidos mostrados para los elementos mecánicos.



Solución.- En tanto no cambian los sentidos de los elementos mecánicos, tenemos:



y como:

$$M = \frac{161}{32.2} = 5 \frac{\text{lb-sec}^2}{\text{ft}} = 5 \text{ slug},$$

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(5)(2)^2 = 10 \text{ lb-ft-sec}^2, \text{ y,}$$

$$I_{EIR} = I_C + M(2)^2 = 10 + 5(2)^2 = 30 \text{ lb-ft-sec}^2,$$

al aplicar $\bar{M}_{EIR} = I_{EIR} \bar{\alpha}$, obtenemos:

$$(2j) \times [-(100 - 0.1t^2)i] - (100 - 0.4t^2)k = 30 \left(\frac{a_c}{2}\right)k \text{ ----- (1),}$$

(Obsérvese que, por lo menos entre cero y el valor $t = 3$ seg dado en el enunciado del problema, \bar{M}_{EIR} tiene sentido contrario al de las manecillas del reloj, razón por la que a $\bar{\alpha}$ se le asignó dicho sentido en el croquis; recuerde que para que una igualdad vectorial se cumpla, la dirección y sentido de los vectores que en ella intervienen deben ser iguales).

De (1) se obtiene:

$$(200 - 0.2t^2)k + (-100 + 0.4t^2)k = 15a_c k,$$

que se cumple para:

$$100 + 0.2t^2 = 15a_c,$$

o sea para:

$$a_c = \frac{1}{7.5}(50 + 0.1t^2) > 0, \forall t,$$

entonces, podemos escribir:

$$\dot{v}_c = -\frac{1}{7.5}(50 + 0.1t^2)i$$

integrando obtenemos:

$$\bar{v}_c = -\frac{1}{7.5}(50t + 0.1\frac{t^3}{3})i + \bar{C};$$

de $\bar{v}_c = 5i$, para $t = 0$:

$$\bar{C} = 5i, \text{ con lo que } \bar{v}_c = \left[-\frac{1}{7.5}(50t + 0.1\frac{t^3}{3}) + 5 \right] i,$$

luego, para $t = 3$ seg:

$$\bar{v}_c = \left[-\frac{1}{7.5}(150 + 0.9) + 5 \right] i = [-20.12 + 5]i = -15.12i, \text{ ft/seg}$$

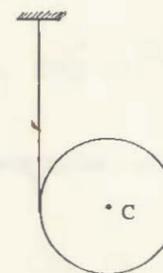
respuesta al problema, que también podemos expresar como:

$$\bar{v}_c = 15.12 \text{ ft/seg } \leftarrow$$

Obsérvese que a este mismo resultado se llegó luego de resolver este problema en las páginas 276, 277, 278, y 279, sólo que ahora lo obtuvimos más rápidamente.

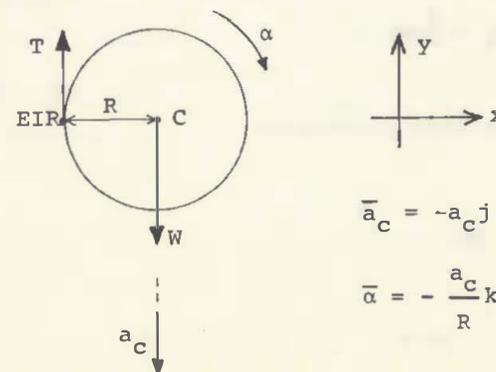
Ejemplo 3.- Una esfera homogénea de peso W y radio R tiene un cable enrollado, en una circunferencia, como se indica en la figura. Si dicho cable es muy delgado, flexible, inextensible y de masa despreciable, además de encontrarse empotrado en uno de sus extremos, y la esfera se suelta:

a) ¿Cuál es la rapidez del centro de masa luego de haber caído una distancia h ? ; b) ¿Cuál es la tensión en el cable?.



Solución.- Aunque en este caso no se tiene un movimiento de rodadura sin deslizamiento es aplicable la expresión (LXIX), $a_c = R\alpha$ ya que, después de soltarse, si la esfera gira un ángulo 2π el centro de masa baja $2\pi R$.

D.C.L. en un instante cualquiera del movimiento:



$$\bar{a}_c = -a_c j, \quad a_c > 0.$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{a_c}{R} k, \quad a_c > 0.$$

(se sugiere al alumno justifique la ubicación del EIR mostrada en el croquis).

Como $I_C = \frac{2}{5}MR^2$, se tiene:

$$I_{EIR} = I_C + M(R)^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2 = \frac{7}{5}WR^2$$

entonces, al aplicar $\bar{M}_{EIR} = I_{EIR}\bar{\alpha}$, obtenemos:

$$(Ri) \times (-Wj) = \left[\frac{7}{5} \frac{WR^2}{g} \right] \left(-\frac{a_c}{R}k \right),$$

y desarrollando los productos indicados:

$$-(RW)k = -\left[\frac{7W}{5g} Ra_c \right] k,$$

que se cumple para:

$$a_c = \frac{5g}{7} = \text{cte.} \quad \text{----- (1);}$$

haciendo $a_c = v_c \left[\frac{dv_c}{dy} \right]$ y separando variables, se tiene:

$$v_c dv_c = \frac{5}{7}g dy,$$

de donde integrando obtenemos:

$$\frac{v_c^2}{2} = \frac{5}{7}gy + C_1;$$

de $v_c = 0$, para $y = 0$: $C_1 = 0$,

entonces:

$$v_c = \sqrt{\frac{10}{7}gy};$$

luego, para $y = h$, se tiene:

$$v_c = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

que es la rapidez pedida.

Ahora, de $F_y = My_c$:

$$T - W = \frac{W}{g}(-a_c) \quad \text{----- (2);}$$

sustituyendo (1) en (2):

$$T - W = \frac{W}{g} \left(-\frac{5g}{7} \right),$$

de donde:

$$T = W - \frac{5}{7}W$$

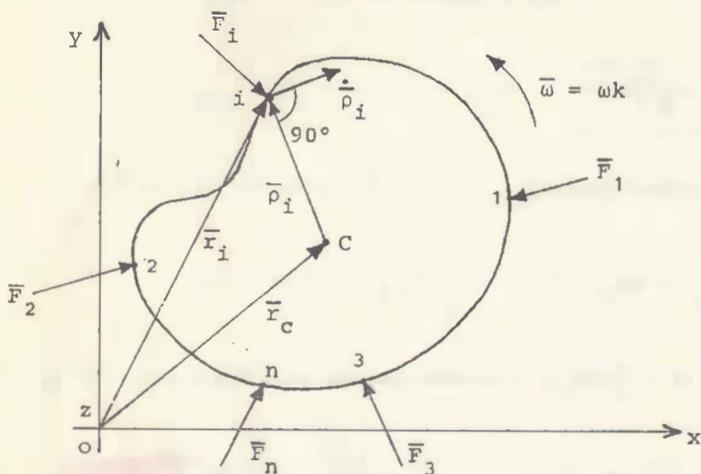
y, finalmente:

$$T = \frac{2}{7}W.$$

ANEXO
BIBLIOTECA

D.4.2) TRABAJO Y ENERGIA

TRABAJO REALIZADO POR UN SISTEMA DE FUERZAS



Sea un cuerpo rígido, como el mostrado en la figura, que realiza un movimiento plano general durante el cual, toda línea cuya paralela al plano de movimiento (o alojada en éste), posea una rapidez angular ω , no necesariamente constante.

Si $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$, son las fuerzas (paralelas al plano de movimiento, o alojadas en éste) que actúan sobre las partículas 1, 2, 3, ..., i, ..., n, respectivamente, del sólido en estudio, basados en el croquis (donde $\vec{r}_i, \vec{r}_C, \vec{\rho}_i$ y $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ son vectores coplanares y C representa un eje, perpendicular al plano de movimiento, que pasa por el centro de masa del cuerpo) y en la definición de "Trabajo" vista durante el estudio de la Dinámica de la partícula, podemos encontrar el trabajo que realizan las fuerzas mencionadas, en tan-

to el cuerpo pasa de una posición 1 a otra 2, mediante la expresión:

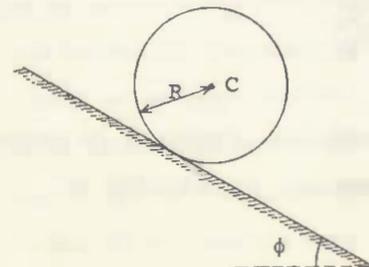
$$W_{12} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i \cdot (d\vec{r}_C + d\vec{\rho}_i) = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_C + \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{\rho}_i$$

que puede escribirse, tomando en cuenta que $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}$,

$$W_{12} = \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r}_C + \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{\rho}_i = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}_C + \sum_{i=1}^n \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{\rho}_i \quad \text{----- (LXX),}$$

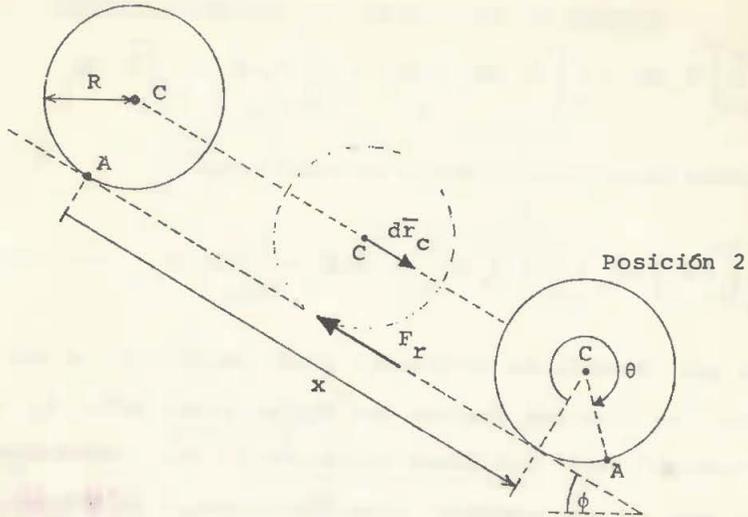
o sea que, durante el movimiento plano general de un cuerpo rígido, las diversas fuerzas que actúan sobre éste realizan un "Trabajo total" que puede separarse en dos y obtenerse como la suma de los trabajos correspondientes a la "Traslación" y a la "Rotación baricéntrica" en que es factible descomponer dicho movimiento.

Ejemplo.- Un cuerpo rígido, circular y homogéneo, se suelta sobre el plano inclinado de la figura y rueda sin deslizar sobre éste. Demuestre que el trabajo total efectuado por la fuerza de fricción, entre dos posiciones cualesquiera, es nulo.

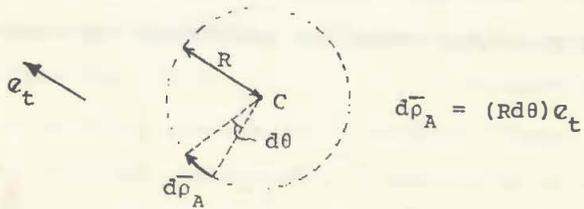


Solución.- Efecto de la fricción en un instante cualquiera:

Posición 1



y como, descomponiendo el movimiento en una traslación y una rotación baricéntrica, $d\vec{\rho}_A$ es un vector que une dos puntos infinitamente cercanos de la trayectoria de A, relativa a C, se tiene:



entonces, tomando en cuenta los croquis y la expresión (LXX), el trabajo total realizado por la fricción es:

$$(W_{12})_{F_r} = \int_1^2 \vec{F}_r \cdot d\vec{r}_C + \int_1^2 \vec{F}_r \cdot d\vec{\rho}_A = \int_1^2 (-F_r i) \cdot [(dx) i] + \int_1^2 (F_r e_t) \cdot [(Rd\theta) e_t],$$

o sea que:

$$(W_{12})_{F_r} = \int_1^2 F_r dx + \int_1^2 F_r R d\theta \quad \text{----- (1),}$$

y como, por tratarse de un movimiento de rodadura sin deslizamiento, $x = R\theta$, se tiene:

$$dx = R d\theta \quad \text{----- (2);}$$

luego de sustituir (2) en (1), obtenemos

$$(W_{12})_{F_r} = -\int_1^2 F_r R d\theta + \int_1^2 F_r R d\theta = 0, \text{ l.g.a.d.}$$

TRABAJO REALIZADO POR UN PAR DE FUERZAS

Consideremos un cuerpo rígido que realiza un movimiento plano general y un par de fuerzas \bar{Q} que actúa sobre él durante el movimiento mencionado.

Los diversos casos que pueden presentarse son los siguientes:

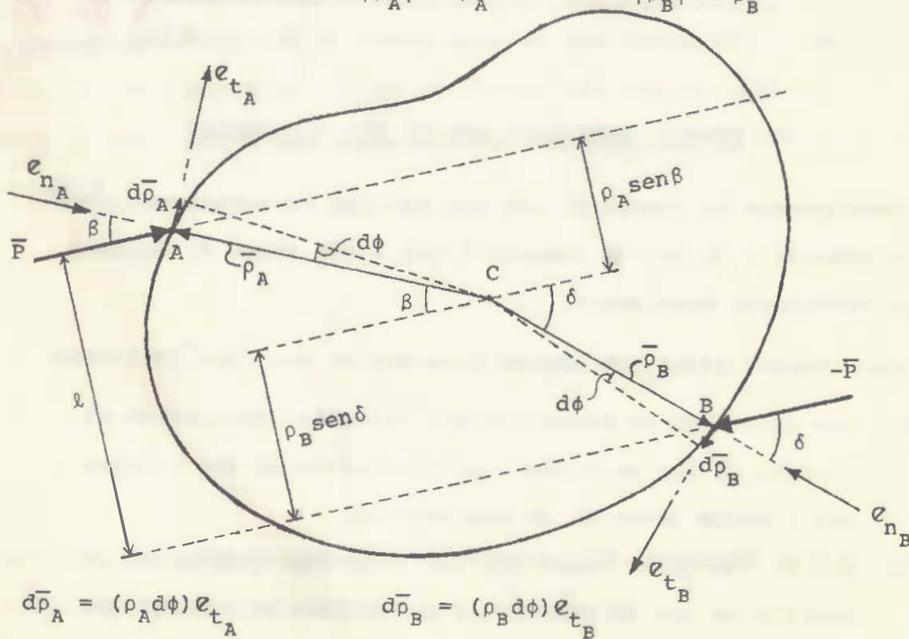
- A) Que el cuerpo se mueve con una velocidad angular en el sentido en que se mueven las manecillas de los relojes y que \bar{Q} actúe sobre él en ese sentido.
- B) Que el cuerpo se mueva con una velocidad angular en el sentido en que se mueven las manecillas de los relojes y que \bar{Q} actúe sobre él en sentido contrario al mencionado.

INGENIERIA
ANEXO
BIBLIOTECA

- C) Que el cuerpo se mueva con una velocidad angular en sentido contrario al que se mueven las manecillas de los relojes y que \bar{Q} actúe sobre él en aquel sentido.
- D) Que el cuerpo se mueva con una velocidad angular en sentido contrario al que se mueven las manecillas de los relojes y que \bar{Q} actúe en el sentido que se mueven las manecillas mencionadas.

Análisis del caso A.- Sustituyendo la acción de \bar{Q} por dos fuerzas paralelas de magnitud P y sentidos contrarios, separadas una distancia l , actuando sobre el cuerpo, que implica $|\bar{Q}| = Pl$, se tiene:

$$|\bar{P}| = |-\bar{P}| = P \quad |\bar{\rho}_A| = \rho_A \quad |\bar{\rho}_B| = \rho_B$$



De acuerdo con el croquis y valuando el trabajo realizado por el par, como el realizado por las dos fuerzas en que lo descompusimos, obtenemos:

$$(W_{12})_{\text{par}} = \int_1^2 \bar{P} \cdot d\bar{r}_C + \int_1^2 \left[(P \sin \beta) e_{t_A} + (P \cos \beta) e_{n_A} \right] \cdot \left[(\rho_A d\theta) e_{t_A} \right] + \int_1^2 -\bar{P} \cdot d\bar{r}_C + \int_1^2 \left[(P \sin \delta) e_{t_B} + (P \cos \delta) e_{n_B} \right] \cdot \left[(\rho_B d\theta) e_{t_B} \right]$$

de donde obtenemos:

$$(W_{12})_{\text{par}} = \int_1^2 (P \sin \beta) (\rho_A d\theta) + \int_1^2 (P \sin \delta) (\rho_B d\theta) = \int_1^2 P (\rho_A \sin \beta + \rho_B \sin \delta) d\theta = \int_1^2 Pl d\theta \quad \text{--- (a).}$$

Análisis del caso B.- Para este caso, lo único que sufriría cambio en el croquis inmediato anterior serían los sentidos de las fuerzas ahí indicadas, por lo que ahora tenemos:

$$(W_{12})_{\text{par}} = \int_1^2 \bar{P} \cdot d\bar{r}_C + \int_1^2 \left[(-P \sin \beta) e_{t_A} + (-P \cos \beta) e_{n_A} \right] \cdot \left[(\rho_A d\theta) e_{t_A} \right] + \int_1^2 -\bar{P} \cdot d\bar{r}_C + \int_1^2 \left[(-P \sin \delta) e_{t_B} + (-P \cos \delta) e_{n_B} \right] \cdot \left[(\rho_B d\theta) e_{t_B} \right]$$

de donde se obtiene:

$$(W_{12})_{\text{par}} = \int_1^2 -(P \sin \beta) (\rho_A d\theta) + \int_1^2 -(P \sin \delta) (\rho_B d\theta) = \int_1^2 -P (\rho_A \sin \beta + \rho_B \sin \delta) d\theta = \int_1^2 -Pl d\theta \quad \text{--- (b).}$$

Casos C y D.- Se sugiere al lector que demuestre que el trabajo correspondiente a estos casos viene dado, respectivamente, por:

$$(W_{12})_{\text{par}} = \int_1^2 P l d\theta \text{ ----- (c),}$$

$$(W_{12})_{\text{par}} = \int_1^2 -P l d\theta \text{ ----- (d).}$$

Resumiendo, al simbolizar mediante Q a la componente (escalar) de \bar{Q} sobre el eje perpendicular al plano de movimiento, podemos afirmar que mediante la expresión

$$(W_{12})_{\text{par}} = \int_1^2 Q d\theta$$

podemos valorar el trabajo de un par de fuerzas, \bar{Q} , que actúa sobre un cuerpo que se mueve con velocidad angular $\bar{\omega}$, sea cual sea el sentido de $\bar{\omega}$ y \bar{Q} .

Entonces, si Q es constante, el trabajo realizado por \bar{Q} igualará al producto $Q(\theta_2 - \theta_1)$. Analizando este producto se deduce que, independientemente del sistema de referencia empleado, el trabajo realizado por un par de fuerzas es positivo si dicho par actúa en el sentido con que gira el cuerpo durante el movimiento, y negativo en caso de que el sentido del par sea contrario al del giro del cuerpo en movimiento; en cualquiera de estas dos posibilidades, el valor absoluto del trabajo realizado por el par igualará al producto del módulo de éste por el ángulo girado entre las posiciones de interés.

ENERGIA CINÉTICA

Seguiremos haciendo referencia al cuerpo rígido mencionado al iniciar el estudio de este tema "Trabajo y Energía". Basados en que el eje C , que pasa por el centro de masa del sólido, es perpendicular (entre otros) a los vectores $\bar{\rho}_i$, la expresión:

$$EC = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{\rho}_i)^2 \text{ ----- (XLV),}$$

obtenida cuando estudiamos la Dinámica de sistemas de puntos masa, ahora, para el cuerpo rígido, toma la forma:

$$EC = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\omega \rho_i)^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 \right] \omega^2 ;$$

entonces, mediante la expresión:

$$EC = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \text{ ----- (LXXII)}$$

podremos valorar la "Energía cinética de un cuerpo rígido animado de un movimiento plano general".

Obsérvese que, el primero (de izquierda a derecha) de los términos, del segundo miembro, corresponde a la energía cinética del cuerpo como si éste realizará únicamente una traslación, donde $\omega = \text{constante} = 0$, en tanto que el segundo de ellos corresponde a la energía cinética de dicho cuerpo como si éste estuviera animado sólo de una rotación baricéntrica, donde $v_C = 0$ en todo instante.

ENERGIA POTENCIAL

Antes de definir esta función, valoremos el trabajo total efectuado por las h fuerzas conservativas, \bar{F}_{C_i} , que actúan sobre un cuerpo rígido, en tanto éste pasa de una posición 1 a otra 2.

$$\sum_{i=1}^h \int_1^2 \bar{F}_{C_i} \cdot d\bar{r}_i = \sum_{i=1}^h \int_1^2 \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dz \right] \cdot [(dx)_i + (dy)_j + (dz)_k] =$$

$$= \sum_{i=1}^h \int_1^2 d\phi_i = \sum_{i=1}^h [(\phi_i)_2 - (\phi_i)_1] = \Delta\phi.$$

Llamando EP a la función "Energía Potencial", definimos "Cambio de energía potencial", ΔEP , como el negativo del trabajo que acabamos de obtener, esto es:

$$\Delta EP = - \sum_{i=1}^h \int_1^2 \bar{F}_{C_i} \cdot d\bar{r}_i = -\Delta\phi$$

o sea que, podemos expresar:

$$\sum_{i=1}^h \int_1^2 \bar{F}_{C_i} \cdot d\bar{r}_i = (EP)_1 - (EP)_2 \text{ ----- (LXXIII).}$$

Basados en que la energía potencial gravitatoria de una partícula viene dada por mgz , para un campo gravitatorio considerado constante, la (energía potencial) correspondiente al cuerpo rígido la podemos valorar mediante:

$$EP = \sum_{i=1}^n m_i g z_i = g \left[\sum_{i=1}^n m_i z_i \right] = g [Mz_C]$$

o sea que mediante el empleo de la expresión:

$$EP = Mgz_C \text{ ----- (XXIV)}$$

valuaremos la "Energía potencial gravitatoria de un cuerpo rígido, de masa M y centro de masa C , considerando a g como constante".

DIVERSAS FORMAS DE LA ECUACION DE TRABAJO Y LA ENERGIA

Como el trabajo iguala al incremento de energía cinética, basados en (LXX), (LXXI) y (LXXII), obtenemos la expresión:

$$\int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_C + \sum_{i=1}^n \int_1^2 \bar{F}_i \cdot d\bar{p}_i + \sum_{j=1}^n \int_1^2 Q_j d\theta_j = \left[\frac{1}{2} M v_C^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} I_C \omega^2 \right]_1^2 \text{ ----- (LXXV),}$$

conocida como "la. forma de la ecuación del Trabajo y la Energía para un cuerpo rígido animado de un movimiento plano general". Esta expresión la escribiremos, en forma abreviada, como sigue:

$$(W_{12})_{Total} = \Delta(EC),$$

interpretándola de la siguiente manera: "El trabajo realizado por todos los elementos que actúan sobre el cuerpo en estudio, en tanto éste pasa de una posición 1 a otra 2, iguala al incremento respectivo de la energía cinética de dicho cuerpo".

Partiendo de (XLI), $F = M\bar{a}_C$, y procediendo en forma similar a la empleada para obtener la la. forma de la ecuación del

Trabajo y la Energía para la partícula, se obtiene la expresión:

$$\int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r}_c = \frac{1}{2} M v_c^2 \quad \text{---(LXXVI)}$$

conocida como "Ecuación del Trabajo y la Energía para un cuerpo rígido que realiza un movimiento de traslación".

Observando (LXXVI) y (LXXV), llegamos a la conclusión de que ésta se puede descomponer en dos ecuaciones independientes, una la (LXXVI) y la otra:

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 \bar{F}_i \cdot d\bar{\rho}_i + \sum_{j=1}^n \int_1^2 Q_j d\theta_j = \frac{1}{2} I_c \omega^2 \quad \text{---(LXXVII)},$$

llamada "Ecuación del Trabajo y la Energía para cuerpos rígidos que realizan rotación baricéntrica".

Si durante el movimiento del cuerpo rígido en estudio actúan sobre éste n fuerzas \bar{F}_i , separables en h fuerzas conservativas \bar{F}_{c_i} y en (n-h) fuerzas no conservativas \bar{F}_{nc_i} , se tiene, tomando en cuenta que $d\bar{r}_i = d\bar{r}_c + d\bar{\rho}_i$, lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_1^2 \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i &= \sum_{i=1}^h \int_1^2 \bar{F}_{c_i} \cdot d\bar{r}_i + \sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot (d\bar{r}_c + d\bar{\rho}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^h \int_1^2 \bar{F}_{c_i} \cdot d\bar{r}_i + \sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot d\bar{r}_c + \sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot d\bar{\rho}_i \end{aligned}$$

y como:

$$\sum_{i=1}^n \int_1^2 \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i + \sum_{j=1}^n \int_1^2 Q_j d\theta_j = (EC)_2 - (EC)_1, \text{ tomando}$$

en cuenta (LXXIII), podemos expresar:

$$(EP)_1 - (EP)_2 + \sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot d\bar{r}_c + \sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot d\bar{\rho}_i + \sum_{j=1}^n \int_1^2 Q_j d\theta_j = (EC)_2 - (EC)_1,$$

que puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot d\bar{r}_c + \sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot d\bar{\rho}_i + \sum_{j=1}^n \int_1^2 Q_j d\theta_j = \Delta EC + \Delta EP \quad \text{---(LXXVIII)},$$

expresión a la que llamaremos "2a. forma de la Ecuación del Trabajo y la Energía para cuerpos rígidos", misma que podemos interpretar de la siguiente manera: "El Trabajo realizado por los elementos no conservativos que actúan sobre el cuerpo en estudio, en tanto éste pasa de una posición 1 a otra 2, resulta igual a la suma de incrementos de energía, potencial y cinética, respectivos". Esta expresión la escribiremos, en forma abreviada, como sigue:

$$(W_{12})_{nc} = \Delta(EC) + \Delta(EP)$$

Si durante el movimiento del cuerpo en estudio, sobre éste actúan elementos conservativos, o bien:

$$\sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot d\bar{r}_c + \sum_{i=1}^{(n-h)} \int_1^2 \bar{F}_{nc_i} \cdot d\bar{\rho}_i + \sum_{j=1}^n \int_1^2 Q_j d\theta_j = 0,$$

la expresión (LXXVII) toma la forma:

$$\Delta(EC) + \Delta(EP) = 0 \quad \text{---(LXXIX)}$$

que se conoce como "3a. forma de la Ecuación del Trabajo y la Energía para cuerpos rígidos", conocida también como "Principio de la conservación de la energía".

CUERPOS RIGIDOS INTERCONECTADOS.

Consideremos ahora un sistema de N cuerpos rígidos interconectados. Si aplicamos la ecuación (LXXV) a cada uno de los cuerpos mencionados, luego de sumar miembro a miembro las igualdades obtenidas, podemos escribir:

$$\sum_1^N (W_{12})_{\text{Total}} = \sum_1^N \Delta(\text{EC}) \text{ ----- (LXXV)}_{\text{SCR}} ;$$

aplicando a dichos cuerpos la ecuación (LXXVIII), después de sumar miembro a miembro las igualdades que se obtienen, podemos expresar:

$$\sum_1^N (W_{12})_{\text{nc}} = \sum_1^N \Delta(\text{EC}) + \sum_1^N \Delta(\text{EP}) \text{ --- (LXXVIII)}_{\text{SCR}} ;$$

y, finalmente, de poderseles aplicar la ecuación (LXXIX), luego de hacerlo, al sumar miembro a miembro las igualdades obtenidas, podemos escribir:

$$\sum_1^N \Delta(\text{EC}) + \sum_1^N \Delta(\text{EP}) = 0 \text{ ----- (LXXIX)}_{\text{SCR}} .$$

A las ecuaciones (LXXV)_{SCR}, (LXXVIII)_{SCR} y (LXXIX)_{SCR} les llamaremos, respectivamente, 1a., 2a. y 3a. forma de la Ecuación del Trabajo y la Energía para sistemas de cuerpos rígidos interconectados.

Por ser nulo el trabajo total realizado por las fuerzas que (actuando sobre los cuerpos mencionados) provienen de los elementos que motivan el movimiento conjunto de dichos cuer-

pos, ya que dichas fuerzas vienen siendo de tipo interno al considerar a los cuerpos interconectados como un conjunto en movimiento, al aplicar ya sea (LXXV)_{SCR} ó (LXXVIII)_{SCR}, para valuar el 1er. miembro de la ecuación elegida, bastará encontrar los trabajos correspondientes a los elementos que se ejercen desde el exterior del sistema.

La expresión (LXXIX)_{SCR} será aplicable a sistemas de cuerpos rígidos interconectados sobre los cuales actúen sólo elementos conservativos y fuerzas de interacción.

REVISADO

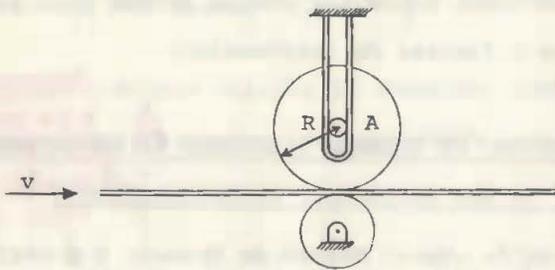
A. A. F. V.

APLICACION DEL METODO DE TRABAJO Y ENERGIA AL MOVIMIENTO DE CUERPOS RIGIDOS, YA SEA AISLADOS O INTERCONECTADOS.

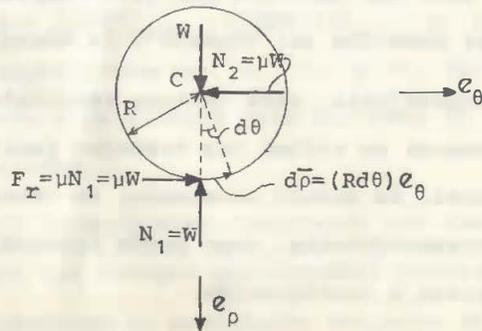
Independientemente de que el método de Trabajo y Energía es de aplicación restringida, ya que nos sirve exclusivamente para resolver problemas que de algún modo relacionen desplazamientos, y/o giros, con velocidades (ya sea lineales o angulares) o con las magnitudes de éstas, será conveniente que antes de iniciar la solución de un problema, empleando el método mencionado, se analice si es aplicable el "Principio de la conservación de la energía" pues, de serlo, seguramente la solución será más sencilla que si se emplean la 1a. o 2a. formas (de la Ecuación del Trabajo y la Energía).

También es aconsejable, para obtener resultados con mayor rapidez, que cuando se valúen los trabajos realizados por fuerzas y/o pares, de módulo constante, se interpreten las integrales correspondientes, como puede apreciarse en los ejercicios resueltos a continuación.

Ejemplo 1.- El disco A de la figura es homogéneo, tiene radio R , y se encuentra en reposo cuando se pone en contacto con la correa que se muestra. Si ésta se mueve con rapidez constante v , y el coeficiente de rozamiento entre A y la correa es μ , calcule el número de revoluciones que da el disco antes de alcanzar una rapidez angular constante. Considere que el pasador mostrado es liso.



Solución.- Desde el instante en que la correa hace contacto con el disco, éste realiza una rotación baricéntrica y, en cualquier posición antes de alcanzarse la rapidez angular indicada, constante y obviamente igual a v/R , el diagrama de cuerpo libre del disco es:



Llamando θ_{12} al ángulo que necesita girar el disco para alcanzar la rapidez constante, v/R , se tiene:

$$(W_{12})_{Total} = \int_1^2 (\mu W e_\theta) \cdot [(R d\theta) e_\theta] = \mu W R \int_1^2 d\theta = \mu W R \theta_{12} \quad , \quad y \quad ,$$

$$\Delta(EC) = (EC)_2 - (EC)_1 = \left[\frac{1}{2} I_C \omega^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{W}{g} R^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 \right] - 0 = \frac{Wv^2}{4g} \quad ;$$

entonces, aplicando la 1a. forma de la ecuación del Trabajo y la Energía, podemos escribir:

$$\mu W R \theta_{12} = \frac{Wv^2}{4g} \quad \text{----- (P)}$$

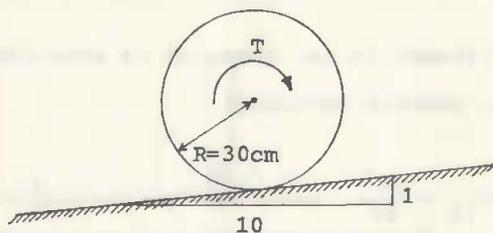
de donde: $\theta_{12} = \frac{v^2}{4\mu g R} \quad ;$

finalmente, el número de revoluciones pedido es:

$$\frac{\theta_{12}}{2\pi} = \frac{v^2}{8\pi\mu g R} \quad .$$

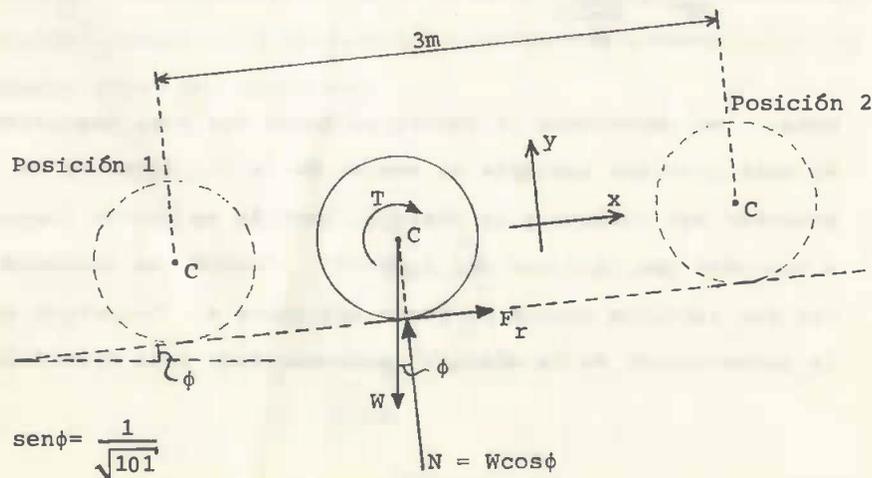
Nota.- Se recomienda al lector el hacer ver que, resolviendo este problema mediante el empleo de la 2a. forma de la ecuación del Trabajo y la Energía, también se habría llegado a plantear una igualdad del tipo (P). También es recomendable que explique porqué no puede aplicarse el "Principio de la conservación de la energía" para resolver este ejercicio.

Ejemplo 2.- Encuentre el módulo T del par de fuerzas que, aplicado permanentemente al disco homogéneo de la figura, dé al centro de éste una rapidez de 1 m/seg, luego de recorrer 3 metros hacia arriba del plano inclinado mostrado, partiendo del reposo. El disco pesa 20 kg y no desliza durante el movimiento.



Solución.- Como el disco rueda sin deslizar, el trabajo total debido a la fuerza de fricción, entre dos posiciones cualquiera, es nulo.

Elementos actuando sobre el disco durante el movimiento:



$$\text{sen } \phi = \frac{1}{\sqrt{101}}$$

$$N = W \cos \phi$$

Basados en las condiciones del problema, así como en las definiciones de trabajo realizado por un sistema de fuerzas y el que realiza un par, vistas anteriormente, se tiene entre las posiciones 1 y 2:

$$\begin{aligned} \text{Trabajo del peso} &= \int_0^3 [(-w \text{sen } \phi) i + (-w \cos \phi) j] \cdot [(dx) i] = (-w \text{sen } \phi) (3) = \\ &= -3w \text{sen } \phi = -3(20) \left[\frac{1}{\sqrt{101}} \right] = -5.97 \text{ kg} \cdot \text{m}, \text{ y,} \end{aligned}$$

tomando en cuenta que T es constante:

$$\text{Trabajo del par} = \int_0^{\theta_{12}} (-T) d\theta = (-T) \theta_{12} = (-T) \left(-\frac{3\text{m}}{0.3\text{m}} \right) = 10T,$$

con lo que:

$$(W_{12})_{\text{Total}} = -5.97 + 10T \text{ ----- (a),}$$

y como:

$$\begin{aligned} \Delta(EC) &= (EC)_2 - (EC)_1 = \frac{1}{2} M v_C^2 \Big|_1^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{W}{g} (0.3)^2 \right] \left(\frac{v_C}{0.3} \right)^2 = \\ &= \frac{3}{4} \frac{W}{g} v_C^2 = \frac{3}{4} \left[\frac{20}{9.81} \right] (1)^2 = 1.53 \text{ kg} \cdot \text{m} \text{ ----- (b),} \end{aligned}$$

aplicando la 1a. forma de la ecuación del Trabajo y la Energía, podemos escribir:

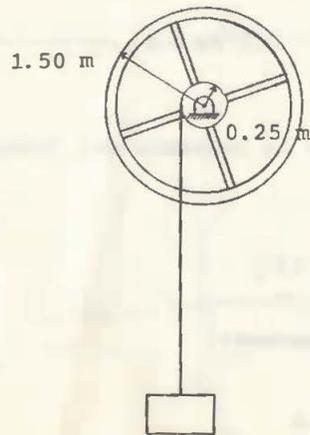
$$-5.97 + 10T = 1.53,$$

de donde, finalmente, obtenemos:

$$\underline{T = 0.75 \text{ kg} \cdot \text{m} .}$$

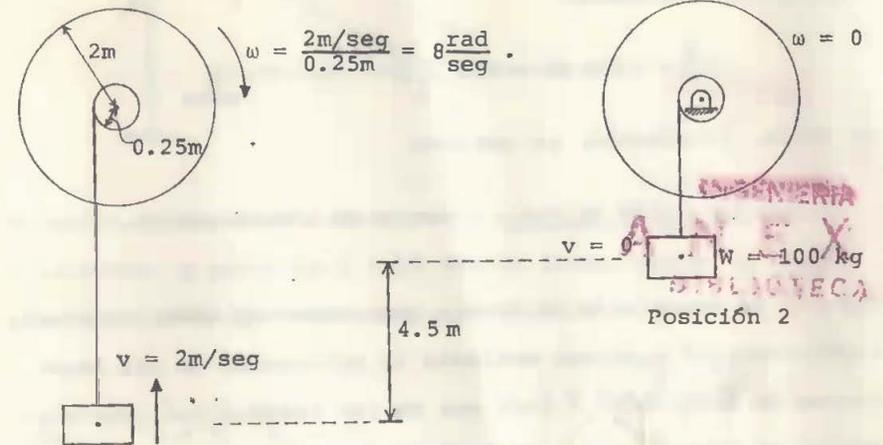
NOTA.- Se recomienda al lector que corrobore este resultado aplicando la 2a. forma de la ecuación del Trabajo y la Energía, y que explique porqué no es posible aplicar el "Principio de la conservación de la energía" para resolver este problema.

Ejemplo 3.- El volante de la pequeña máquina elevadora de la figura pesa 400 kg y tiene un radio de giro de 0.6 metros con respecto al eje de rotación que a su vez pasa por el centro de masa del volante. Si cuando eleva al bloque mostrado que pesa 100 kg, con una rapidez de 2m/seg, se suprime la potencia motriz, sabiendo que el bloque asciende 4.5 metros antes de empezar a bajar, calcule el módulo del par de fuerzas (considerado constante) que se ejerce sobre el eje, debido al rozamiento en el cojinete.



Solución.- De acuerdo con los datos y con la definición de radio de giro, se tiene:

$$I_c = \frac{400}{g}(0.6)^2 = \frac{144}{g},$$



Posición 1

Como, en tanto el sistema en movimiento pasa de la posición 1 a la 2, el único elemento externo no conservativo que actúa sobre dicho sistema es el par debido al rozamiento, simbolizando mediante T al módulo de este par, podemos escribir:

$$\Sigma [(W_{12})_{nc}] = (T)\theta_{12} = (T)\left(-\frac{4.50m}{0.25m}\right) = -18T,$$

en tanto que, tomando en cuenta las condiciones del problema:

$$\begin{aligned} \Sigma [\Delta(EC)] &= \left[0 - \frac{1}{2}\left(\frac{144}{g}\right)(8)^2\right] + \left[0 - \frac{1}{2}\left(\frac{100}{g}\right)(2)^2\right] = \\ &= -\frac{4608}{g} - \frac{200}{g} = -\frac{4808}{9.81} = -490.11 \text{ kg} \cdot \text{m}, \text{ y,} \end{aligned}$$

$$\Sigma [\Delta(EP)] = [0] + [100(4.5)] = 450 \text{ kg} - \text{m} ;$$

al sustituir estos valores en la 2a. forma de la ecuación del Trabajo y la Energía, para sistemas de cuerpos rígidos interconectados, obtenemos:

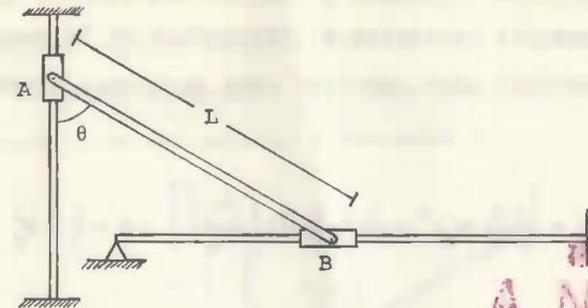
$$-18T = -490.11 + 450 ,$$

de donde, finalmente, se obtiene:

$$T = 2.228 \text{ kg} - \text{m} , \text{ que es el módulo pedido.}$$

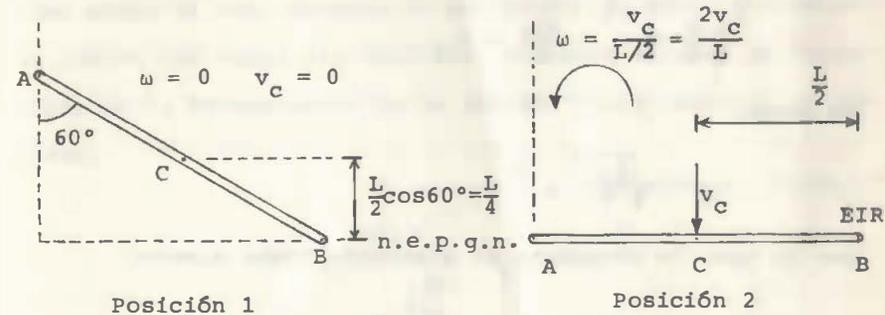
Nota.- Se recomienda al lector que corrobore este resultado, resolviendo el problema mediante la aplicación de las ecuaciones de movimiento a cada uno de los cuerpos que intervienen en el mismo, empleando también (para la solución) a la relación que existe entre el módulo de la aceleración angular del volante y el de la aceleración lineal de cualquier partícula del bloque.

Ejemplo 4.- La barra delgada de la figura es homogénea, pesa W , y se suelta cuando $\theta = 60^\circ$. Si en sus extremos está articulada a correderas (de pesos despreciables) y éstas se mueven sobre varillas lisas (rígidas y fijas) calcule la velocidad del centro de masa de la barra, cuando ésta adopta la posición horizontal.

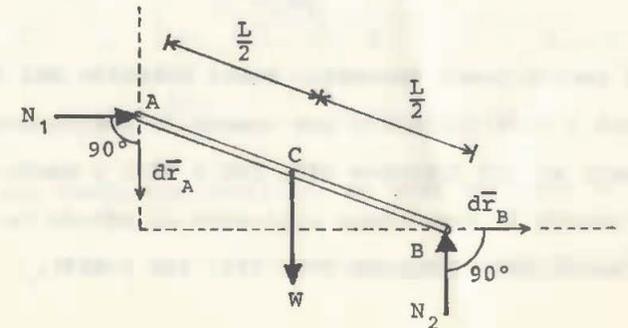


ANEXO
BIBLIOTECA

Solución.- Llamando posición 1 a aquella en que se suelta a la barra, y posición 2 a la que se llega cuando la barra adopta la posición horizontal, se tiene:



d.c.l. de la barra en una posición cualquiera entre 1 y 2:



Tomando en cuenta los croquis podemos afirmar que $(W_{12})_{nc} = 0$ (por lo que resulta aplicable el "Principio de la conservación de la energía" para resolver este problema) además de que:

$$\Delta(EC) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{W}{g} \right) (v_c)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} \frac{W}{g} L^2 \right) \left(\frac{2v_c}{L} \right)^2 \right] - 0 = \frac{2}{3} \frac{W}{g} v_c^2 ,$$

y ,

$$\Delta(EP) = 0 - W \left(\frac{L}{4} \right) = - \frac{WL}{4} ;$$

entonces, aplicando el Principio mencionado, podemos escribir:

$$\frac{2}{3} \frac{W}{g} v_c^2 + \left(- \frac{WL}{4} \right) = 0 ,$$

de donde:

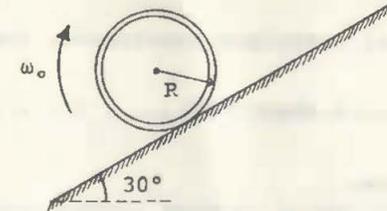
$$v_c = \sqrt{\frac{3gL}{8}} ,$$

por lo que, la respuesta al ejercicio viene siendo:

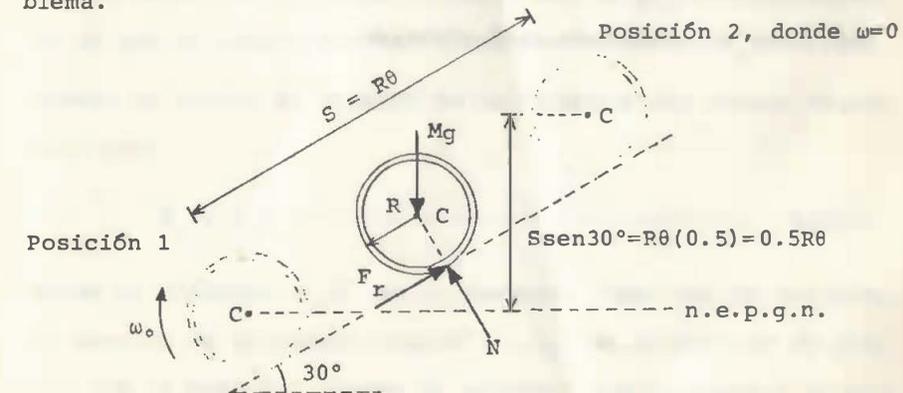
$$\underline{v_c = \sqrt{\frac{3gL}{8}}} .$$

Como el lector puede apreciar, hemos obtenido más rápido la respuesta a este ejercicio que cuando lo resolvimos haciendo intervenir el EIR (páginas 289, 290 y 291) y mucho más rápido que cuando lo resolvimos aplicando el método de Ecuaciones de movimiento (páginas 280, 281, 282 y 283).

Ejemplo 5.- El aro delgado y homogéneo de la figura se lanza, con una rapidez angular inicial ω_0 , hacia arriba del plano inclinado mostrado. Si rueda sin deslizar, ¿qué ángulo girará antes de empezar a descender?



Solución.- Como consecuencia de analizar las fuerzas que actúan sobre el aro, durante el movimiento de éste, y tomando en cuenta que rueda sin deslizar, podremos aplicar el "Principio de la conservación de la energía" para resolver el problema.



Como el aro rueda sin deslizar, en todo instante se cumple:

$$v_c = R\omega \text{ ----- (LXVIII);}$$

entonces, basados en lo anterior, donde se ha simbolizado mediante θ al ángulo girado durante el ascenso:

$$\Delta(EC) = 0 - \left[\frac{1}{2}M(R\omega_0)^2 + \frac{1}{2}(MR^2)(\omega_0)^2 \right] = -MR^2\omega_0^2, \quad y,$$

$$\Delta(EP) = Mg(0.5R\theta) - 0 = 0.5MgR\theta;$$

luego, aplicando el Principio mencionado, obtenemos:

$$(-MR^2\omega_0^2) + 0.5MgR\theta = 0,$$

de donde se obtiene:

$$\theta = \frac{2R\omega_0^2}{g} \text{ radianes, que es el ángulo pedido.}$$

Nota.- Se sugiere al lector que resuelva este ejercicio empleando el método de Ecuaciones de movimiento, con el fin de verificar el resultado aquí obtenido.

4.3) IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO, LINEAL Y ANGULAR

Durante el estudio del movimiento de un sistema de puntos masa, se obtuvo:

$$\int_1^2 \bar{F} dt = (M\bar{v}_c)_2 - (M\bar{v}_c)_1 \quad \text{----- (L),}$$

ecuación que, obviamente, también es aplicable al cuerpo rígido y que ahora recibe el nombre de "Ecuación del Impulso y Momentum lineales para el cuerpo rígido". La integral del primer miembro es conocida como "Impulso lineal", en tanto que el producto $M\bar{v}_c$ recibe el nombre de "Cantidad de movimiento lineal de un cuerpo rígido, de masa, M , en el instante en que su centro de masa lleva una velocidad \bar{v}_c ".

Cuando iniciamos el estudio de la Dinámica del cuerpo rígido obtuvimos:

$$\bar{H}_c = I_c \bar{\omega} \quad \text{----- (LXIII),}$$

donde al producto $I_c \bar{\omega}$ se le denomina "Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido". I_c es el momento de inercia (de la masa del cuerpo en estudio) con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por el centro de masa del sólido.

Sustituyendo (LXIII) en (LXII) obtenemos la expresión:

$$\int_1^2 \bar{M}_C dt = (I_C \bar{\omega})_2 - (I_C \bar{\omega})_1 \text{ ----- (LXXX)}$$

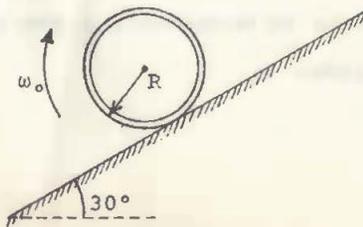
conocida como "Ecuación del impulso y momento angulares para el cuerpo rígido", donde la integral del 1er. miembro recibe el nombre de Impulso angular.

APLICACION DE LAS ECUACIONES DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO A CUERPOS RIGIDOS QUE SE MUEVEN.

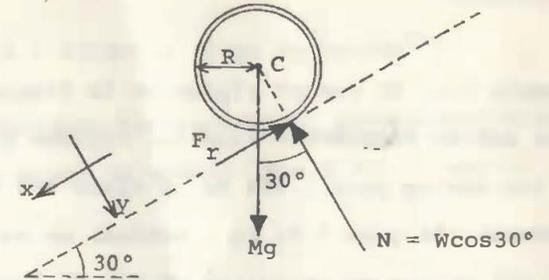
Será útil aplicar las ecuaciones de Impulso y Cantidad de Movimiento a problemas de movimiento de cuerpos rígidos, siempre y cuando en dichos problemas se relacionen velocidades (ya sea lineales o angulares) con tiempos.

Generalmente, en este tipo de problemas, obtendremos más rápidamente las soluciones al emplear las ecuaciones de Impulso y Cantidad de movimiento que empleando el método de Ecuaciones de movimiento.

Ejemplo 1.- El aro delgado y homogéneo de la figura se lanza, con una rapidez angular inicial ω_0 , hacia arriba del plano inclinado mostrado. Si rueda sin deslizar, ¿qué tiempo dura el ascenso, contado a partir del lanzamiento?



Solución.- D.c.l. en un instante cualquiera del movimiento:



tomando en cuenta que el cuerpo rueda sin deslizar, aplicando

do $\int_1^2 \bar{F} dt = (M\bar{v}_C)_2 - (M\bar{v}_C)_1$ se obtiene:

$$\int_0^t [(Mg \sin 30^\circ - F_R) i] dt = M [0 - (-R\omega_0 i)] ,$$

de donde:

$$0.5Mgt - \int_0^t F_R dt = MR\omega_0 \text{ ----- (a);}$$

al aplicar $\int_1^2 \bar{M}_C dt = (I_C \bar{\omega})_2 - (I_C \bar{\omega})_1$ obtenemos:

$$\int_0^t [(F_R R) k] dt = MR^2 [0 - (-\omega_0 k)] ,$$

que se cumple para:

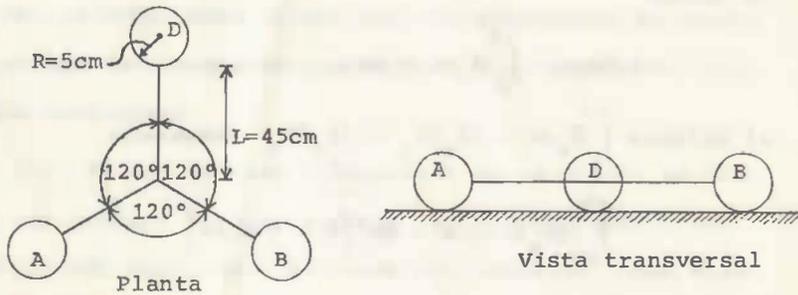
$$\int_0^t F_R dt = MR\omega_0 \text{ ----- (b);}$$

sumando (a) y (b), miembro a miembro: $0.5Mgt = 2MR\omega_0$,

de donde se obtiene: $t = \frac{4R\omega_0}{g}$, que es el tiempo pedido.

Nota.- Se recomienda al lector que verifique este resultado, resolviendo el problema mediante el método de Ecuaciones de movimiento.

Ejemplo 2.- El cuerpo rígido de la figura está formado por tres barras homogéneas iguales, rígidas y delgadas, cada una de las cuales pesa 1.962 kg y tiene una esfera (también homogénea), de peso 9.81 kg, soldada en su extremo. Si a partir del reposo se le aplica un par de fuerzas cuya magnitud viene dada por $T = 9.81t$, donde T está en kg-cm para t en segundos, y el coeficiente de fricción entre las esferas y el plano horizontal (sobre el que se mueve el cuerpo) es 0.1, ¿Cuál es la rapidez angular del cuerpo para $t=25$ seg?. Si en este instante deja de aplicarse el par de fuerzas mencionado, ¿Cuánto tiempo tarda en detenerse el cuerpo?



Solución.- Se tiene:

$$M_{\text{barra}} = \frac{1.962\text{kg}}{981\text{cm}/\text{seg}^2} = 0.002 \frac{\text{kg}\cdot\text{seg}^2}{\text{cm.}}, \text{ y ,}$$

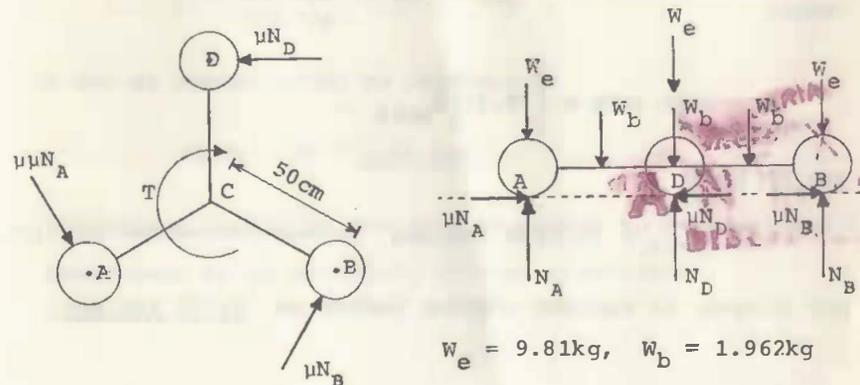
$$M_{\text{esfera}} = \frac{9.81\text{kg}}{981\text{cm}/\text{seg}^2} = 0.010 \frac{\text{kg}\cdot\text{seg}^2}{\text{cm.}},$$

con lo que:

$$I_C = 3 \left[\frac{1}{3} (0.002) (45)^2 + \frac{2}{5} (0.010) (5)^2 + 0.010 (45+5)^2 \right] =$$

$$= 3(1.35 + 0.10 + 25.00) = 79.35 \text{ kg}\cdot\text{cm}\cdot\text{seg}^2 .$$

El d.c.l. en un instante cualquiera del movimiento, mientras actúa el par de fuerzas de módulo $T = 9.81t$, es:



$$W_e = 9.81\text{kg}, \quad W_b = 1.962\text{kg}$$

tomando en cuenta los croquis:

$$N_A = N_B = N_D = 9.81 + 1.962 = 11.772 \text{ kg} ,$$

y como $\mu = 0.1$, se tiene:

$$\mu N_A = \mu N_B = \mu N_D = (0.1) (11.772) = 1.1772 \text{ kg} ,$$

pudiendo escribir entonces:

$$\bar{M}_C = [-T + 3(1.1772 \times 50)]k = [-9.81t + 176.58]k = -9.81(t - 18)k \quad \text{---(1),}$$

expresión válida, obviamente, para $t \geq 18$ seg ;

$$\text{de } \int_1^2 \bar{M}_C dt = I_C \bar{\omega}_2 - I_C \bar{\omega}_1 :$$

$$\int_{18}^{25} [-9.81(t-18)k] dt = 79.35 [\bar{\omega}_{t=25} - 0] ,$$

de donde obtenemos:

$$-9.81 \frac{(t-18)^2}{2} k \Big|_{18}^{25} = [79.35] \bar{\omega}_{t=25} ,$$

luego:

$$-240.345k = [79.35] \bar{\omega}_{t=25} ,$$

que implica:

$$\bar{\omega}_{t=25} = -3.029k \text{ rad/seg} \text{ ----- (2),}$$

por lo que, la rapidez angular pedida es 3.029 rad/seg.

Como a partir de $t = 25$ seg se suprime la acción del par de fuerzas de módulo T , basados en (1), se tiene:

$$\bar{M}_C = 176.58k , \text{ para } t \geq 25 \text{ seg, hasta } \bar{\omega} = 0, \dots (3);$$

entonces, tomando en cuenta (2) y (3),

$$\text{de } \int_2^3 \bar{M}_C dt = I_C \bar{\omega}_3 - I_C \bar{\omega}_2 :$$

$$\int_{25}^t (176.58k) dt = 79.35 [0 - (-3.029k)] ,$$

de donde se obtiene:

$$(176.58t)k \Big|_{25}^t = 240.35k ,$$

que sustituyendo valores nos permite escribir:

$$(176.58t - 4,414.5)k = 240.35k ,$$

igualdad que se cumple para:

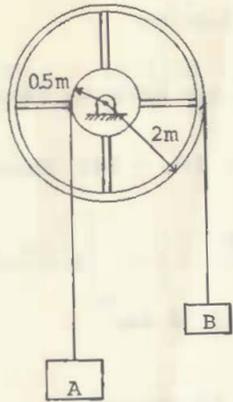
$$t = \frac{4,654.85}{176.58} = 26.36 \text{ seg} ,$$

o sea el cuerpo tarda en detenerse:

$$26.36 - 25 = \underline{1.36 \text{ seg}} ,$$

contados a partir de que deja de actuar el par de fuerzas mencionado en el enunciado de este ejercicio.

Ejemplo 3.- El volante de la figura pesa 392.4kg y tiene un radio de giro de 0.75 m con respecto al eje de rotación que, a su vez, pasa por su centro de masa. Si tiene enrolladas dos cuerdas delgadas, flexibles, inextensibles, y de masas despreciables, como se indica, y el sistema se suelta en la posición mostrada, ¿Qué tiempo debe transcurrir para que A alcance una rapidez de 4 m/seg?. Considere que los pesos de A y B son 196.2 y 98.1 kg, respectivamente, y que el efecto de la fricción (entre el eje del volante y el cojinete) se manifiesta como un par de fuerzas, de módulo 44.1 kg-m.



Solución.- Se tiene:

$$M_A = \frac{196.2}{9.81} = 20 \frac{\text{kg}\cdot\text{seg}^2}{\text{m}},$$

$$M_B = \frac{98.1}{9.81} = 10 \frac{\text{kg}\cdot\text{seg}^2}{\text{m}},$$

$$M_V = \frac{392.4}{9.81} = 40 \frac{\text{kg}\cdot\text{seg}^2}{\text{m}}, \quad y,$$

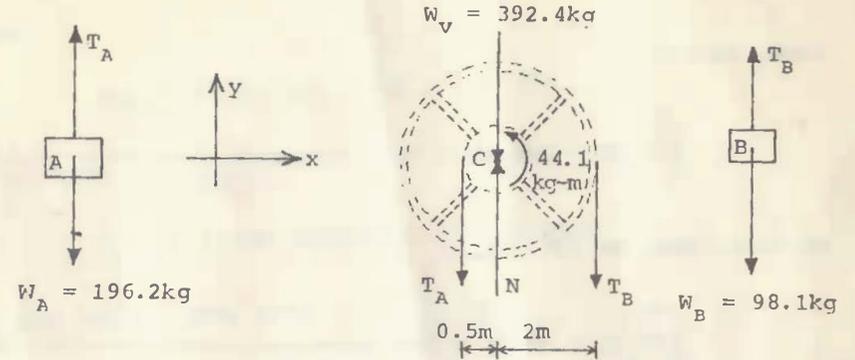
$$I_C = 40(0.75)^2 = 22.5 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{seg}^2,$$

cuando $|\bar{v}_A| = 4\text{m/seg}$:

$$|\bar{\omega}_V| = \frac{4\text{m/seg}}{0.5\text{m}} = 8 \text{ rad/seg}, \quad y,$$

$$|\bar{v}_B| = (2\text{m})(8 \text{ rad/seg}) = 16\text{m/seg}.$$

D.c.l. en un instante cualquiera del movimiento:



para A , de $\int_1^2 \bar{F} dt = (M\bar{v}_C)_2 - (M\bar{v}_C)_1$:

$$\int_0^t [(T_A - 196.2)j] dt = 20(4j - 0) \quad \text{----- (1);}$$

parte del reposo $v_i = 0$

para B , empleando la misma ecuación:

$$\int_0^t [(T_B - 98.1)j] dt = 10(-16j - 0) \quad \text{----- (2);}$$

para el volante, de $\int_1^2 \bar{M}_C dt = I_C \bar{\omega}_2 - I_C \bar{\omega}_1 = \mu(\bar{\theta})$

$$\int_0^t [(0.5T_A + 44.1 - 2T_B)k] dt = 22.5(-8k - \bar{0}) ;$$

de donde, al multiplicar por dos en ambos miembros y realizar $\frac{0}{15} = 0$ inicial

operaciones, obtenemos:

$$\int_1^2 T_A dt + 88.2t - 4 \int_1^2 T_B dt = -360 \quad (3);$$

como, de (1):

$$\int_0^t T_A dt = 196.2t + 80 \quad (1'),$$

en tanto que, de (2):

$$\int_0^t T_B dt = 98.1t - 160 \quad (2'),$$

al sustituir (1') y (2') en (3), se obtiene:

$$196.2t + 80 + 88.2t - 392.4t + 640 = -360,$$

que se cumple para:

$$-108t = -1080,$$

o sea para:

$$t = 10 \text{ seg}, \text{ que es la respuesta al problema.}$$

Nota.- Se recomienda al lector que verifique este resultado, resolviendo el problema mediante la aplicación de las ecuaciones de movimiento a cada uno de los cuerpos que intervienen, así como de las relaciones que existen entre las magnitudes de las aceleraciones de los bloques y del volante.

de donde se obtiene:

$$(100t + 0.2 \frac{t^3}{3})k \Big|_0^3 = 30\bar{\omega}_{t=3} + 75k,$$

luego:

$$30\bar{\omega}_{t=3} = 301.80k - 75k = 226.80k,$$

o sea que:

$$\bar{\omega}_{t=3} = 7.56k \text{ rad/seg} = 7.56 \text{ rad/seg} \quad \left. \vphantom{\bar{\omega}_{t=3}} \right\}$$

lo que implica que, para $t = 3 \text{ seg}$:

$$\bar{v}_c = R\omega \leftarrow = 15.12 \text{ ft/seg} \leftarrow,$$

que concuerda con lo obtenido al resolver este ejercicio empleando el método de Ecuaciones de movimiento (ver páginas 276, 277, 278 y 279) sólo que ahora de manera más rápida.

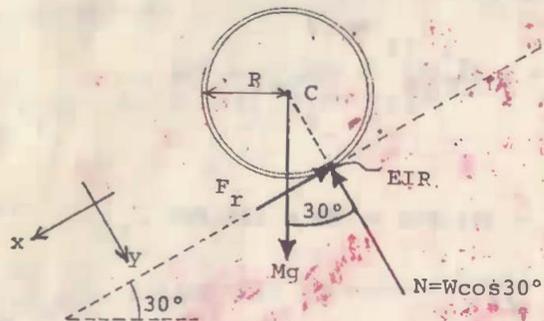
Ejemplo 2.- El aro delgado y homogéneo de la figura se lanza, con una rapidez angular inicial ω_0 , hacia arriba del plano inclinado mostrado. Si rueda sin deslizar, ¿qué tiempo dura el ascenso, contado a partir del lanzamiento?

30C



701025

Solución D.c.1. en un instante cualquiera:



como: $I_{EIR} = I_C + M(d_{C-EIR})^2 = MR^2 + M(R)^2 = 2MR^2$,

al aplicar (LXXXI) obtenemos:

$$\int_0^t [(Mg \sin 30^\circ) R] k dt = 2MR^2 [0 - (-\omega_0 k)] ,$$

de donde:

$$(Mg \sin 30^\circ) R t k = 2MR^2 \omega_0 k ,$$

que se cumple para:

$$t = \frac{2MR^2 \omega_0}{0.5MgR} = \frac{4R\omega_0}{g} ,$$

valor que, obviamente, iguala al obtenido cuando resolvimos este ejercicio aplicando las ecuaciones de Impulso y Cantidad de movimiento, en la página 325, sólo que ahora lo obtuvimos más rápidamente.