



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA– CONTROL

CARACTERIZACIÓN Y CONTROL DE MICROREDES DE  
POTENCIA VÍA PROPIEDADES ESTRUCTURALES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
SOFÍA MAGDALENA AVILA BECERRIL

TUTOR PRINCIPAL  
DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM  
COMITÉ TUTOR  
DR. LUIS A. ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM  
DR. YU TANG XU, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO DE 2016



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Luis A. Alvarez Icaza Longoria

Secretario: Dr. Yu Tang Xu

1er. Vocal: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

2do. Vocal: Dr. Emmanuel Nuño Ortega

3er. Vocal: Dr. César Angeles Camacho

Esta tesis se realizó en la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Gerardo Espinosa Pérez

---



*Mi trabajo de tesis ha sido posible gracias al apoyo, la ayuda y el impulso de mucha gente, quiero dedicarle esta tesis a:*

*Mi familia, mis papás y mi hermana, por su apoyo, su cuidado, su ejemplo de esfuerzo y su amor siempre incondicional.*

*Gerardo, porque te debo mucho, pero sobre todo el deseo diario de ser una mejor persona.*

*Mis padawans: José Luis Rojas, Raúl Canseco y Paul Fernández, por toda la chamba, las discusiones y su confianza.*

*Los nosotros que empezamos esto juntos, por hacernos viejos y renovarnos al mismo tiempo. Ale, Marco, Giles y Liz, por su gran amistad extramuros.*

*A todos los que alguna vez fuimos juntos los “Habitantes del Laboratorio de Control”, por iniciar la lista de dulces, por el básquet, las carreras nocturnas, las pizzas, los cumpleaños, los seminarios y las quinielas, gracias. Especialmente a Michael y Hoover por todas las discusiones.*

*Erika y Xochitl, porque siempre están recordándome que somos más felices juntas.*



# Reconocimientos

---

A la Universidad Nacional Autónoma de México, nuestra máxima casa de estudios, por todas las oportunidades que me ha brindado.

A mi director de tesis, el Dr. Gerardo Espinosa, por mi formación académica, su dedicación, su conocimiento, su confianza y su gran apoyo.

Agradezco a los miembros del jurado, en especial a los miembros de mi comité tutorial, por su tiempo y su interés para revisar mi trabajo de tesis, así como por sus valiosas observaciones.

Le agradezco sinceramente al Dr. Antonio Loria y a la Dra. Elena Panteley su tiempo, sus consejos y sus amables comentarios en la realización de este trabajo.

La realización de este trabajo de tesis fue posible gracias a los apoyos otorgados por:

- Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACYT**), mediante la beca nacional para estudios de posgrado (enero de 2012 a enero de 2016).
- Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) a través del proyecto IN116516.



# Resumen

---

Las Microredes establecen un tipo especial de sistemas eléctricos que ofrecen una alternativa para el suministro de energía sostenible. Sin embargo, impone retos desde el punto de vista de control que por lo general han sido abordados bajo la condición de que la dinámica de los convertidores de potencia, utilizados para dar forma a la energía suministrada, ha sido drásticamente simplificada.

En este trabajo de tesis se consideran redes dinámicas descritas por grafos dirigidos, compuestas por sistemas Hamiltonianos controlados por puerto o bien sistemas Lagrangianos. El problema que se resuelve es el de encontrar y caracterizar estructuras topológicas de interconexión que conlleven propiedades de estabilidad de la red. Así como diseñar esquemas de control basados en pasividad para lograr la estabilización de puntos de operación y el seguimiento de trayectorias, con interés especial en Microredes. Las aportaciones de esta tesis se pueden dividir en tres tópicos: el análisis topológico de la interconexión, el análisis de la dinámica individual de los elementos interconectados y la propuesta de controladores.



# Abstract

---

The microgrids state a special kind of power systems that offer an alternative for sustainable power supply. However, it imposes challenges from a control point of view that usually are approached under the condition that the dynamics of the power converters, used to shape the energy supplied, has been drastically simplified.

In this thesis there are consider dynamic networks described by directed graphs, composed by port controlled Hamiltonian or Lagrangian systems. Here, it is solved the problem of characterization of topological structures that involves interconnection stability properties of the network. And the design of passivity based control schemes to achieve stabilization of operating points with special interest in microgrids. The contributions of this thesis can be divided into three main topics: the topological analysis of the interconnection, the analysis of individual dynamics of interconnected elements and the proposition of controllers.



# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>xii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Estado del Arte . . . . .	2
1.3. Formulación del Problema . . . . .	7
1.4. Contribuciones . . . . .	7
1.5. Publicaciones . . . . .	9
1.6. Organización de la Tesis . . . . .	10
<b>2. Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1. Notación . . . . .	13
2.2. Teoría de Grafos . . . . .	13
2.2.1. Espacios Vectoriales y Matrices Asociadas a Grafos . . . . .	15
2.3. Preliminares en Sistemas Hamiltonianos . . . . .	17
2.3.1. Variables Generalizadas y Elementos de un Sistema . . . . .	17
2.3.2. Restricciones de Interconexión . . . . .	18
2.3.3. Pasividad . . . . .	19
2.3.4. Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto . . . . .	20
2.4. Preliminares en Sistemas Eléctricos de Potencia . . . . .	23
2.4.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	24
2.4.2. Flujos de Potencia . . . . .	26
2.4.3. Estabilidad de Voltaje . . . . .	28
2.4.4. Circuitos Eléctricos No-Lineales . . . . .	29
<b>3. Análisis de Circuitos Eléctricos</b>	<b>31</b>
3.1. Circuitos Eléctricos Sobre Grafos . . . . .	31
3.1.1. Modelo Hamiltoniano Lineal . . . . .	36
3.2. Propiedades Estructurales Para Estabilidad de Circuitos Eléctricos	38
3.2.1. Análisis de Estabilidad: Seguimiento de Trayectorias . . . . .	38

## ÍNDICE GENERAL

---

3.2.2.	Análisis de Estabilidad: Regulación . . . . .	40
3.2.3.	Propiedades Estructurales de la Red . . . . .	42
3.3.	Modelo Hamiltoniano No-Lineal . . . . .	43
3.3.1.	Análisis de Estabilidad . . . . .	44
3.4.	Caracterización del Estado Estable . . . . .	46
3.4.1.	Estructuras Topológicas de Redes Típicas . . . . .	46
3.4.2.	Respuesta en Estado Senoidal Permanente . . . . .	53
3.4.3.	Corriente Directa: Análisis de Consenso . . . . .	57
3.5.	Resumen y Discusión . . . . .	61
<b>4.</b>	<b>Microredes</b> . . . . .	<b>65</b>
4.1.	Elementos de la Microred . . . . .	65
4.1.1.	Convertidores de Potencia y Control . . . . .	66
4.1.2.	Líneas de Transmisión y Cargas . . . . .	69
4.2.	Modelo Hamiltoniano de la Microred . . . . .	72
4.2.1.	Estabilización de la Microred . . . . .	75
4.2.2.	Trayectorias Admisibles . . . . .	78
4.3.	Simulaciones . . . . .	80
4.4.	Control Droop . . . . .	85
4.4.1.	Microred y Control Droop . . . . .	89
4.5.	Resumen y Discusión . . . . .	92
<b>5.</b>	<b>Diseño de Controladores</b> . . . . .	<b>97</b>
5.1.	Formulación del Problema . . . . .	97
5.2.	Diseño del Controlador: Principio de Separación . . . . .	99
5.2.1.	Control de Equivalencia Cierta . . . . .	101
5.2.2.	Ecuaciones en Lazo Cerrado . . . . .	103
5.2.3.	Acotamiento de las Soluciones . . . . .	106
5.3.	Caso de Estudio: Robots con Uniones Flexibles . . . . .	108
5.3.1.	Resultados de Simulación . . . . .	110
5.4.	Resumen y Discusión . . . . .	111
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b> . . . . .	<b>115</b>
<b>A.</b>	<b>Apéndice 1</b> . . . . .	<b>117</b>
A.1.	Método de Newton Raphson . . . . .	117
A.1.1.	Aplicación a los Flujos de Potencia . . . . .	118
A.2.	Sincronización de Microredes . . . . .	119
A.2.1.	Trayectorias Sincronizadas . . . . .	121
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>123</b>

## Índice de figuras

---

2.1. Variables generalizadas . . . . .	17
2.2. Circuito equivalente $\pi$ de una línea de transmisión . . . . .	27
3.1. Ejemplo de Topología Radial . . . . .	50
3.2. Ejemplo de Topología Anillo . . . . .	51
3.3. Ejemplo de Topología Malla . . . . .	52
3.4. Voltaje en los capacitores con $z_1 = 2.5$ y $z_2 = 5$ . . . . .	61
3.5. Corrientes en los inductores y en los capacitores, respectivamente. . . . .	61
3.6. Voltaje en los capacitores con $z_1 = 25$ y $z_2 = 35$ . . . . .	62
3.7. Voltaje en los capacitores con $z_1 = 6$ y $z_2 = 5$ . . . . .	62
4.1. Convertidor de potencia ilustrativo DC/AC . . . . .	66
4.2. Esquema de interconexión por medio de los puertos de cada sistema. . . . .	71
4.3. Ejemplo: Diagrama de red tipo malla . . . . .	81
4.4. Ejemplo: Red tipo malla con inversores . . . . .	81
4.5. (a)Voltajes deseados en los inversores en pu. (b)Error de seguimiento . . . . .	84
4.6. Amplitud de voltaje en pu y ángulo de fase de los cuatro nodos . . . . .	85
4.7. Potencias activa y reactiva en pu para los cuatro nodos . . . . .	86
4.8. Error de seguimiento con incertidumbre paramétrica . . . . .	87
4.9. Amplitud de voltaje y ángulo de fase con incertidumbre paramétrica . . . . .	88
4.10. Amplitud de voltaje y ángulo de fase con perturbación . . . . .	89
4.11. Potencias activa y reactiva con perturbación . . . . .	90
4.12. Amplitud de voltaje y ángulo de fase tomando como base al nodo 2 . . . . .	91
4.13. Potencias activa y reactiva tomando como base al nodo 2 . . . . .	92
4.14. Esquema de control . . . . .	93
4.15. (a)Voltajes deseados en los inversores en pu. (b)Error de seguimiento . . . . .	94
4.16. Amplitud y ángulo de fase del voltaje en los nodos usando el control droop . . . . .	95
4.17. Potencias activa y reactiva los nodos usando control droop . . . . .	96
5.1. Posiciones angulares de los eslabones y referencias . . . . .	111

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

5.2. Velocidades angulares de los eslabones y referencias . . . . .	112
5.3. Variables observadas $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ y referencias . . . . .	112

## 1.1. Motivación

Desde hace más de una década el estudio de sistemas interconectados ha recibido atención por parte de la comunidad de control que ha estudiado problemas de sincronización (Bai *et al.* [10], Jadbabaie *et al.* [37], Nuno *et al.* [57]), redes de potencia (Hill y Chen [35], Schiffer *et al.* [74], Simpson-Porco *et al.* [77]), redes inteligentes (Farhangi [28]), consenso (Avila-Becerril *et al.* [7], Olfati-Saber y Murray [58], Ren *et al.* [70]), etc. En estos artículos se encuentra la preocupación de analizar ciertas estructuras compuestas por elementos con dinámica propia que interactúan de manera local, obedeciendo a cierta topología, de tal modo que la dinámica individual afecta el comportamiento global y colectivo del sistema interconectado.

En el contexto energético y como consecuencia de los acuerdos internacionales para promover un desarrollo sostenible (Kyoto-Protocol [43]) se han incorporado mundialmente fuentes de energía renovable; sin embargo, estas unidades comúnmente son pequeñas en términos de generación de potencia por lo que se requiere un gran número de ellas para reemplazar las plantas actuales (por ejemplo las térmicas). Esto ha provocado que no sólo la configuración de la generación de energía cambie sino también la estructura topológica del sistema de interconexión y el Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) completo (Farhangi [28]), produciéndose una nueva generación de “redes inteligentes” o *smart grids*. Para Fang *et al.* [27] estas nuevas redes están formadas por tres capas: un subsistema de *energía*, un subsistema de *información*, referido a mediciones y administración, y uno de *comunicación* alámbrica e inalámbrica. En esta tesis se hace énfasis en el subsistema de energía, esto es en el análisis de las llamadas *microredes* vistas por sí mismas como un sistema interconectado. Estas microredes están formadas por unidades de generación, almacenamiento, cargas y pueden operar conectadas a la red (macrored) o de manera aislada.

Más aún, en el contexto de redes dinámicas, la generación centralizada tra-

dicional de los SEPs provoca que en pocos puntos de interconexión se pueda controlar directamente la tensión, dejando a la mayoría sujeta a un control a distancia. Si esta distancia es grande, entonces la vulnerabilidad a sufrir pérdidas de estabilidad se incrementa (Kundur *et al.* [42]). Para lidiar con este problema, la solución inmediata es la *compensación* de potencia en las cercanías de los puntos de consumo. Una forma de dar solución a este problema es colocar bancos de capacitores o de inductores equipados con interruptores, Sistemas Flexibles de Transmisión en AC (FACTS) a lo largo de la ruta de transmisión o máquinas síncronas que puedan absorber o generar potencia reactiva y así minimizar las pérdidas de potencia y las caídas de tensión. En otras palabras, en esta red dinámica un *cambio en la estructura de interconexión* permite dar solución a problemas de estabilidad de tensión, compensación y localización de compensadores. Es claro entonces, que resulta esencial el desarrollo de herramientas de análisis que permitan enfrentar los desafíos teóricos de cualquiera de las redes dinámicas actuales y sus características topológicas.

En cualquier caso, las interacciones forman redes o grafos, en donde cada nodo o agente dinámico interactúa sólo con algunos compañeros de acuerdo a una topología establecida, por lo que sus efectos pueden ser observados a distancia. Dicho lo anterior, en esta tesis el estudio de sistemas interconectados se divide de manera natural en tres tópicos: el análisis topológico de la interconexión, el análisis de la dinámica individual de los elementos interconectados y la propuesta de controladores.

### 1.2. Estado del Arte

En los últimos años se ha incrementado el interés en las técnicas de modelado, análisis y diseño de controladores basados en el concepto de energía, en particular en aquellas técnicas que explotan las nociones de *pasividad* (ver los trabajos de Bai *et al.* [10], Ortega *et al.* [61], Van der Schaft [84] y las referencias en ellos). Este concepto es fundamental en la práctica de la ciencia e ingeniería donde es común estudiar a los sistemas dinámicos como entes transformadores de energía. El enfoque basa el modelado en una representación tipo red que permite la conexión de subsistemas; cada subsistema está caracterizado por una función de almacenamiento la cual generaliza el concepto de energía almacenada o entropía (Willems [91]). Esta perspectiva es especialmente útil en el estudio de sistemas no-lineales complejos, pues permite descomponerlos en subsistemas los cuales, interconectados, suman sus energías para determinar el comportamiento total del sistema.

De manera general, los sistemas pasivos son una clase de sistemas dinámicos en los que el régimen de incremento de energía no es mayor a la potencia de

entrada, esto es, que no son capaces de generar energía interna, lo que les da por sí mismos propiedades de estabilidad. Así, este lenguaje unificador resulta natural e intuitivo para representar una gran cantidad de sistemas físicos, en particular sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos descritos o bien por ecuaciones Lagrangianas o por Hamiltonianas. El Control Basado en Pasividad (PBC por sus siglas en inglés) fue introducido por Ortega y Spong [62] con la intención de definir una metodología de control cuyo objetivo es volver pasivo al sistema dinámico en lazo cerrado, lo anterior, por ejemplo, por medio del *moldeo de energía e inyección de amortiguamiento*, técnica inspirada en la propuesta en Takegaki y Arimoto [81], obteniendo, entre otras ventajas, una interpretación física de los controladores. Como consecuencia, a lo largo de estos años se ha extendido la técnica del PBC resolviendo problemas de regulación, retro-alimentación de salida, sistemas sub-actuados y sincronización, entre otros (Ortega *et al.* [61]).

Así pues, de manera particular el problema de regulación por retro-alimentación de salida para sistemas Euler Lagrange ha sido ampliamente discutido en la literatura— Dixon *et al.* [23], Loria [45], Loria *et al.* [48], Romero *et al.* [72], Zavala-Río *et al.* [92]. Un gran número de trabajos han sido publicados en donde se concluyen diferentes tipos de estabilidad: estabilidad semiglobal asintótica—Loria y Ortega [49], estabilidad global asintótica—Loria [45], Nunes y Hsu [55], estabilidad global exponencial—Romero *et al.* [72], etc. Sin embargo, sólo Loria [45] y Romero *et al.* [72] han dado solución al problema, desde hace mucho tiempo abierto, de establecer estabilidad uniforme global y asintótica del sistema en lazo cerrado para sistemas totalmente actuados, sin asumir que el sistema posee fuerzas de disipación internas (fricción). Igualmente, se ha estudiado el problema, más complejo, de control por retroalimentación de salida para una clase particular de sistemas Lagrangianos subactuados: los *robots de uniones flexibles*. Así, Nicosia y Tomei [53] presentan un resultado basado en un observador no-lineal semiglobal para las variables no-medidas y Zhu *et al.* [93] proponen un control que asegura estabilidad semi-global uniforme sin necesidad de medir velocidades, no obstante, los resultados recaen en la suposición restrictiva de que el sistema tiene disipación interna. En este sentido, Loria y Avila-Becerril [47] presentan un controlador que asegura estabilidad uniforme, global y asintótica del sistema en lazo cerrado midiendo la velocidad del eslabón. Este último controlador está basado en uno más general recientemente publicado por Loria [46] en el que la ley de control es implementada por medio de una cadena de integradores en el cual las derivadas de las entradas del control virtual son reemplazadas por filtros de diferenciación aproximada, de manera que el resultado fundamenta la teoría de los llamados *derivadores sucios*. En este contexto, siguiendo de cerca los resultados de Loria [46], en (Avila-Becerril *et al.* [8, 9]) se propone un controlador de equivalencia cierta, que emplea un observador de orden reducido, para relajar la suposición de medición de velocidad. Esto es, para una clase de sistemas Euler Lagrange subac-

## 1. INTRODUCCIÓN

---

tuados (entre ellos los robots de uniones flexibles), bajo la suposición de que sólo las posiciones están disponibles para su medición se establece estabilidad global, uniforme y asintótica del sistema en lazo cerrado.

Otro de los problemas que ha sido estudiado desde la perspectiva energética concierne a la sincronización de redes dinámicas. En este caso, se han reportado numerosos trabajos donde se considera a la dinámica individual de los agentes como sistemas *Lagrangianos* o bien, sistemas entrada/salida pasivos (Arcak [1], Chopra y Spong [17], Nuno *et al.* [56], Ren [69]). En este mismo marco, la clase de sistemas Lagrangianos totalmente actuados ha recibido bastante atención. En 2011, Nuno *et al.* [56] se presenta un resultado unificado para dos escenarios, el problema de sincronización cuando está definida explícitamente una trayectoria deseada y el de consenso, que evita el problema de consenso en cero de Chung y Slotine [18] cuando no existe referencia deseada. En este trabajo se consideran sistemas dinámicos no-lineales, no-idénticos, totalmente actuados con parámetros desconocidos, se supone que todo el estado está disponible para su medición y se analiza el caso donde el canal de comunicación está sujeto a retardos. Inspirados en el trabajo de Nuño *et al.*, y como una extensión de la tesis de maestría de la autora de esta tesis (Avila-Becerril y Espinosa-Perez [3]), se propuso una ley de control basada en pasividad para resolver el problema de consenso en *robots de uniones flexibles*, no idénticos, bajo una interconexión sujeta a retardos desconocidos. Los resultados reportados en (Avila-Becerril y Espinosa-Perez [3], Avila-Becerril *et al.* [6, 7]) están basados en la reformulación del problema de control en términos de un cambio de coordenadas y la estabilización asintótica de las mismas por medio de un control Proporcional Derivativo (PD). Mientras que el intercambio de información se modela con herramientas de *Teoría de Grafos*, usando fundamentalmente las propiedades de la *matriz Laplaciana*.

También en el marco energético, el uso de *sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto* (PCH por sus siglas en inglés) ha probado ser altamente efectivo en aplicaciones para sistemas físicos (ver el trabajo de Van der Schaft [84] y sus referencias). Los sistemas PCH tienen una base sólida y ofrecen herramientas poderosas para el análisis y control. Esta clase de sistemas incluye a los sistemas Lagrangianos y posee las siguientes características: 1. Muestra explícitamente la topología de interconexión y el papel de la disipación en el modelo dinámico. 2. Provee de manera automática las funciones de disipación y de almacenamiento, permitiendo un análisis sistemático del sistema. 3. Posee propiedades inherentes de pasividad y estabilidad. 4. La estructura PCH se conserva bajo cierto tipo de interconexiones. Considerando estas propiedades, en este trabajo de tesis se presenta un análisis de una clase de Sistemas Eléctricos desde un enfoque Hamiltoniano.

Además del concepto energético subyacente, el modelado de sistemas dinámicos basado en Teoría de Grafos permite representar a los Sistemas Eléctricos como

una red dinámica, caracterizada por su topología, donde cada uno de sus componentes o nodos es por sí mismo un sistema eléctrico que puede ser descrito como un sistema PCH. En este sentido, el establecimiento de las Leyes de Kirchhoff en el siglo XIX ha llevado a una teoría poderosa usada en el reconocimiento de propiedades de los circuitos en escenarios como el lineal (Desoer y Kuh [20]) y el no-lineal (Brayton y Moser [15]). Así, en la literatura actual es posible encontrar resultados que van desde la caracterización (Maschke *et al.* [52], Van der Schaft [85], Weiss y Mathis [88]) hasta el control (Ortega *et al.* [60]) y aplicaciones que incluyen sistemas de gran escala (Fiaz *et al.* [30]).

Van der Schaft [85] ha estudiado el problema de moldear el comportamiento de un circuito eléctrico resistivo, puramente capacitivo o puramente inductivo por medio de la interconexión de un circuito resistivo visto como el *controlador*. Sus resultados de *síntesis parcial por interconexión* están basados en propiedades de la matriz Laplaciana. Este problema es similar al llamado *control por interconexión*, CbI por sus siglas en inglés (para referencias ver los resultados de Ortega *et al.* [63], Van der Schaft [84]). Esta técnica explota las propiedades de interconexión de sistemas pasivos y su objetivo, en términos generales, consiste en considerar que al interconectar un sistema dinámico PCH (la planta) con otro sistema Hamiltoniano disipativo (el control) se logran las características deseadas. La metodología resulta atractiva por la correspondencia con el estudio de propiedades intrínsecas de la interconexión que pueden aplicarse por ejemplo en el área de localización de compensadores en Sistemas Eléctricos de Potencia como se muestra en Avila-Becerril *et al.* [2, 5]. De este modo, inspirados en el CbI y motivados por la modificación topológica de las redes de potencia, uno de los objetivos de esta tesis es el estudio de circuitos eléctricos desde la perspectiva de *imponer una estructura topológica al circuito* que garantice el moldeo del comportamiento entrada-salida. El propósito es alcanzar un objetivo de control al diseñar la estructura del sistema (Avila-Becerril *et al.* [4]). El estudio de circuitos eléctricos con énfasis en propiedades topológicas es el presentado por Stykel [79], donde con el fin de facilitar simulaciones numéricas, se aproxima un circuito de gran escala por un modelo más pequeño que captura las propiedades entrada-salida del original preservando propiedades de pasividad y estabilidad.

Ahora bien, la red de SEP consiste de generadores, cargas, líneas de transmisión y convertidores de potencia (Kundur *et al.* [42], Van Cutsem y Vournas [83]). Estos sistemas son modelados como estructuras no-lineales a gran escala, de manera que exhiben una gran variedad de comportamientos descritos matemáticamente en términos de estabilidad en el sentido de Lyapunov, bifurcaciones y caos (Hill y Chen [35]). En virtud de lo anterior, en 1995 Hill [34] apuntaba que dada la creciente complejidad de la red, los beneficios de continuar usando controladores lineales parecían inadecuados para manejar problemas esencialmente no-lineales; y que en este escenario, los métodos basados en funciones de energía

parecían ser una herramienta competitiva. Actualmente existen numerosos trabajos que explotan los beneficios que las técnicas basadas en energía ofrecen para SEPs. Por mencionar algunos Ortega *et al.* [59] y Dib *et al.* [22] proponen modelos Hamiltonianos y controladores basados en pasividad que resuelven el problema de estabilidad transitoria. Dentro de la misma perspectiva, Fiaz *et al.* [30] modela a la red eléctrica como un sistema Hamiltoniano en un grafo, donde cada componente de la red es por sí mismo un sistema Hamiltoniano y estos componentes se conjuntan usando interconexiones que preservan potencia. En principio, esta perspectiva permite añadir otros subsistemas Hamiltonianos como los son los bancos de capacitores, considerar diferentes modelos para el generador y, dada la similitud con el modelado clásico de sistemas dinámicos, ha servido de motivación para abordar el problema de análisis de circuitos eléctricos que se presenta en esta tesis.

Asimismo, la aparición de las nuevas “redes inteligentes” (Fang *et al.* [27], Farhangi [28]) que concertan tecnología de información con ingeniería de sistemas de potencia, ha provocado un cambio en el paradigma de los Sistemas Eléctricos de Potencia. Las *microredes* forman parte de estas redes inteligentes y de acuerdo a Fang *et al.* [27] son grupos localizados que combinan cargas, líneas y fuentes de Generación Distribuida (e.g. paneles solares y pequeñas turbinas de viento) interconectadas con la red por medio de convertidores de potencia, los cuales tienen la función de acondicionar las energías generadas. En estas microredes se abordan problemas de estabilidad de voltaje y de frecuencia al mismo tiempo que se comparte la demanda de potencia entre las diferentes unidades generadoras. Cada unidad de generación está provista de un convertidor de potencia, por lo que una manera usual de abordar el problema es con el llamado *droop control* (ver Barklund *et al.* [11], Lasseter [44], Marwali *et al.* [51], Pedrasa y Spooner [67] y las referencias en ellos). En general, para este tipo de análisis se heredan suposiciones como amplitudes de voltajes constantes y se utilizan herramientas de teoría de grafos. Simpson-Porco *et al.* [77] proponen una solución al problema de sincronización y despacho de potencia recuperando herramientas de la teoría de osciladores acoplados. En particular, muestran que las ecuaciones que modelan a la microred, formada por cargas y convertidores de potencia equipados con controladores de frecuencia droop, pueden ser representadas de manera equivalente como dicho modelo de osciladores acoplados. En este caso, la atención se restringe al flujo de potencia activa y se asume que las magnitudes de voltaje están fijas en cada bus. En un estudio general, Schiffer *et al.* [74] representan a la *microgrid* como un sistema PCH; en este trabajo se asume que la red ha sido reducida por medio de la reducción de Kron (Dorfler y Bullo [24]), de manera que todos los nodos tienen un convertidor de potencia, y que estos convertidores pueden modelarse como una cadena de integradores, cuya frecuencia y voltaje son controlados por medio de controladores droop, lo que les permite proponer

un análisis de estabilidad de la microred en términos de consenso.

### 1.3. Formulación del Problema

Una vez establecidas las consideraciones anteriores, el problema que se aborda en esta tesis se puede plantear como sigue:

*Considere una red dinámica descrita por un grafo dirigido, compuesta por sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (o bien sistemas Lagrangianos): Encuentre y caracterice estructuras topológicas de interconexión que conlleven propiedades de estabilidad. Asimismo, diseñe esquemas de control basados en pasividad para lograr la estabilización de puntos de operación y el seguimiento de trayectorias con aplicaciones en el área de sistemas eléctricos.*

El problema planteado tiene como base las siguientes **hipótesis de trabajo**:

- La imposición de una estructura topológica a un circuito eléctrico moldea su comportamiento entrada-salida.
- La interconexión en un SEP puede representarse por un circuito eléctrico.
- Las topologías comúnmente usadas en SEP garantizan por sí mismas propiedades de estabilidad.
- Cada elemento de un SEP (en particular de una microred) tiene estructura Hamiltoniana o Lagrangiana, por lo que pueden diseñarse controladores basados en pasividad para las dinámicas individuales.
- La microred completa satisface una estructura Hamiltoniana por lo que el análisis dinámico se puede abordar bajo un enfoque modular basado en energía.
- Algunos problemas de control en circuitos eléctricos y en SEPs se pueden plantear como problemas de sincronización y consenso.

### 1.4. Contribuciones

Las contribuciones giran entorno al análisis de sistemas dinámicos interconectados, desde la perspectiva de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto y sistemas Lagrangianos, que van desde las propiedades topológicas de la interconexión, hasta el estudio de los elementos individuales de la red y la propuesta de leyes de control. Las principales contribuciones de esta tesis se indican a continuación:

- Como una forma de adquirir experiencia en la sincronización de sistemas subactuados usando estrategias de control basados en pasividad y herramientas de Teoría de Grafos, se propusieron nuevas soluciones al problema de consenso en robots de uniones flexibles, extendiendo los resultados de maestría de la autora de esta tesis (publicados en Avila-Becerril y Espinosa-Perez [3]), se usó un controlador basado en desacoplamiento y se extendió al espacio de trabajo. Además, con el planteamiento de un nuevo análisis de estabilidad, se consideraron retardos en los canales de comunicación (los resultados están publicados en Avila-Becerril *et al.* [6, 7]).
- Se introdujo una ley de control basada en pasividad que resuelve el problema, hasta ahora abierto, de seguimiento de trayectorias, midiendo sólo posición y asegurando estabilidad global, uniforme y asintótica para los robots de uniones flexibles como dinámica individual de la red. El resultado se extendió para una clase más general de sistemas Lagrangianos subactuados donde el control entra por medio de una cadena de integradores (los resultados están publicados en Avila-Becerril *et al.* [8], Loria y Avila-Becerril [47] y sometidos en Avila-Becerril *et al.* [9]).
- Se presentó un modelo Hamiltoniano Controlado por Puerto para la clase de circuitos eléctricos que pueden representarse por las ecuaciones de Bryton-Moser. Se presentaron condiciones suficientes en el arreglo de interconexión entre los elementos para asegurar estabilidad asintótica de puntos de operación (Avila-Becerril *et al.* [5]).
- Se hizo un análisis estructural de los circuitos eléctricos basados en propiedades genéricas de la *matriz fundamental de loops*. En este estudio se incluyen los arreglos topológicos típicamente usados en SEPs y se dan condiciones suficientes de interconexión para alcanzar estabilidad y consenso en los voltajes de puerto (los resultados están publicados en Avila-Becerril *et al.* [5], Fernández-Carrillo *et al.* [29] y sometidos en Avila-Becerril *et al.* [4]).
- Se propuso un modelo modular PCH para una microred. A diferencia de los modelos usuales donde se desprecia la dinámica de los convertidores de potencia, el modelo que se propone incluye una dinámica Hamiltoniana para los convertidores y para las cargas. El enfoque modular permitirá, posterior a esta tesis, incluir modelos Hamiltonianos para las cargas que consideren el colapso de voltaje (parte de los resultados fueron publicados en Avila-Becerril *et al.* [2]).
- Se presentó un control distribuido, basado en pasividad, que garantiza estabilidad asintótica de la microred con admitancias arbitrariamente grandes y

cualquier arreglo topológico. En este caso, el controlador resuelve un problema de seguimiento, donde las trayectorias deseadas se generan por medio de la solución de flujos de potencia de la red. Una extensión a esta propuesta es la generación de un algoritmo de despacho óptimo de flujo de potencia (una parte de los resultados ha sido publicada en Canseco *et al.* [16]).

## 1.5. Publicaciones

Los siguientes son productos de esta tesis:

- Publicaciones en Revistas Internacionales Indizadas:
  - Loria, A., Espinosa-Pérez, G., and **Avila-Becerril, S.** Global adaptive linear control of the permanent-magnet synchronous motor. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 28, no.10, pp. 971–986, Wiley Online Library, 2014.
  - **Avila-Becerril, S.**, Espinosa-Pérez, G., Panteley, E. and Ortega, R. Consensus control of flexible-joint robots. *International Journal of Control*, vol 88, no 6, pp. 1201–1208, Taylor & Francis, 2015.
  - **Avila-Becerril, S.**, Loria, A., and Panteley, E. *A Separation Principle for Underactuated Lossless Lagrangian Systems*. Conditionally accepted in Transactions on Automatic Control (May 6, 2016).
  - **Avila-Becerril, S.**, Espinosa-Pérez, G., and Fernández, P. *Dynamic Characterization of Typical Electrical Circuits via Structural Properties* submitted to Mathematical Problems in Engineering, (invited paper, march 6, 2016).
  - **Avila-Becerril, S.**, Espinosa-Pérez, G., and Canseco, R. *A Hamiltonian approach for stabilization of Microgrids including Power converters dynamic*, (submitted to Automatica, 2016).
- Publicaciones en Congresos Internacionales:
  - **Avila-Becerril, S.**, Espinosa-Pérez, G., Panteley, E. and Ortega, R. Consensus control of flexible joint robots. *52nd Annual Conference on Decision and Control*, CDC, Florence, Italy 2013 (pp. 2288 - 2293. IEEE.)
  - **Avila-Becerril, S.**, Espinosa-Pérez, y Rojas, J. L. Consenso en Sistemas Eléctricos. *Congreso Latinoamericano de Control Automático*, CLCA, Cancún, México 2014 (pp. 1119-1124).

- Loria, A. and **Avila-Becerril, S.** Output-feedback global tracking control of robot manipulators with flexible joints. *American Control Conference, ACC*, Portland, USA 2014 (pp. 4032-4037. IEEE.)
  - **Avila-Becerril, S.**, Espinosa-Pérez, G. and Fernández-Carrillo, P. *Stability and Consensus of Electrical Circuits via Structural Properties. 5th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control*, Lyon, France 2015 (vol 48, no 13, pp. 111–116. Elsevier).
  - **Avila-Becerril, S.**, Loria, A., and Panteley, E. *Global Position-Feedback Tracking Control of Flexible-joint Robots*. Accepted in American Control Conference ACC, Boston, USA 2016, IEEE.
- Publicaciones en Congresos Nacionales:
- **Avila-Becerril, S.** y G. Espinosa-Pérez. Análisis de Consenso en Redes dinámicas. Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático AMCA, Ensenada, México 2013.
  - Fernández-Carrillo, P., **Avila-Becerril, S.** y Espinosa-Pérez, G.. Consenso en Sistemas Eléctricos de Potencia Mediante Compensación. Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático AMCA, Cuernavaca, México 2015.
  - Canseco, R., **Avila-Becerril, S.** y Espinosa-Pérez, G. Un enfoque Hamiltoniano para la estabilización de microrredes incluyendo dinámicas de los convertidores. Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático AMCA, Cuernavaca, México 2015.

### 1.6. Organización de la Tesis

El contenido de esta tesis está dividido en cinco capítulos. El Capítulo 2 se relaciona con los preliminares y comprende algunas notaciones, definiciones y marco teórico al que se hará constante referencia a lo largo de la tesis. Específicamente, se presenta contenido básico de la Teoría de Grafos, preliminares en sistemas Hamiltonianos controlados por puerto y en Sistemas Eléctricos de Potencia.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de los Circuitos Eléctricos desde la perspectiva de teoría de grafos con el objetivo de analizar las propiedades de sus modelo Hamiltoniano. Este capítulo muestra análisis de estabilidad para diferentes escenarios, haciendo énfasis en las topologías de interconexión comúnmente usadas. El capítulo termina con las propiedades de consenso para el caso de corriente directa y la caracterización del estado estable para el caso de entradas sinusoidales.

Por su parte, en el Capítulo 4 se retoman las propiedades de los circuitos eléctricos y se añade la dinámica de los convertidores de potencia para formar el modelo Hamiltoniano de la microred completa. En este capítulo se propone una ley de control de seguimiento de trayectorias por retroalimentación del estado para los convertidores de potencia individuales y se muestra que las condiciones de estabilidad se preservan en la microred. Así mismo, se proponen trayectorias deseadas dadas por la solución de los flujos de potencia.

Finalmente, el Capítulo 5 está dedicado a la propuesta de una ley de control por retroalimentación de salida para una clase de sistemas pasivos, que son los sistemas Lagrangianos.



Este capítulo está dedicado a la revisión de algunas herramientas necesarias para el análisis de una red dinámica. En particular, se introduce la notación utilizada durante el resto de la tesis y algunos antecedentes de Teoría de Grafos. Se presentan además conceptos fundamentales en el área de los sistemas Hamiltonianos Controlados por puerto y teoría básica de Sistemas Eléctricos de Potencia.

## 2.1. Notación

$\mathbb{R}$	Campo de los números reales
$Re(z)$	Parte real del número complejo $z = a + bi$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espacio de matrices con $n$ renglones y $m$ columnas
$A^*$	Transpuesta conjugada de la matriz $A$
$\mathbf{1}_p$	Vector columna lleno de unos de orden $p$
$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matriz llena de ceros de $m \times n$
$\mathcal{L}$	Matriz Laplaciana
$\mathcal{N}_i$	Conjunto de vecinos del agente $i$
$i \sim V$	Para $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , denota $i = v_1, \dots, v_n$
$ A $	Cardinalidad del conjunto $A$
$rank(A)$	Rango de la matriz $A$
$\nabla f$	Transpuesta del gradiente de una función $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$
$\perp$	Complemento ortogonal
$\langle \cdot   \cdot \rangle$	Producto interno
$\mathbb{S}$	Define al conjunto $[0, 2\pi]$

## 2.2. Teoría de Grafos

La Teoría de Grafos es una herramienta natural para representar las interacciones entre los elementos de un sistema o de una red. Es por ello que resulta pertinente hacer una recopilación de varias definiciones, tomadas de (Bollobás

[13], Ren y Cao [71]) a las que se recurrirá a lo largo de la tesis por formar parte importante en los resultados de la misma.

Un *grafo*  $G$  es un par ordenado de conjuntos disjuntos  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , donde  $\mathcal{V}(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es el conjunto finito de *nodos*, mientras que el conjunto finito de *bordes*  $\mathcal{E}(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_b\}$  es un subconjunto del conjunto  $\mathcal{V}^2$  de parejas de  $\mathcal{V}$ . El *orden* de  $G$  es el número de nodos en  $G$  y se denota como  $|G| \triangleq |\mathcal{V}(G)|$ . El *tamaño* de  $G$  es el número de bordes en  $G$  y se expresa como  $e(G) \triangleq |\mathcal{E}(G)|$ . De manera que  $G(n, b)$  indica a un grafo arbitrario de orden  $n$  y tamaño  $b$ .

El borde  $(i, j)$  en el conjunto  $\mathcal{E}$  de un grafo dirigido denota que el nodo  $j$  puede obtener información del nodo  $i$ , pero no necesariamente viceversa; en este caso, al nodo  $i$  se le conoce como el *nodo padre* y al  $j$ , como el *nodo hijo*. En este trabajo los auto-bordes  $(i, i)$  no son permitidos. Además si un borde  $(i, j) \in \mathcal{E}$ , entonces se dice que el nodo  $i$  es *vecino* del nodo  $j$  o bien que son nodos *adyacentes*. Al conjunto de vecinos de un nodo  $i$ , o adyacentes al nodo  $i$ , se le denota como  $\mathcal{N}_i$ . En contraste con un grafo dirigido, en un *grafo no-dirigido* las parejas de nodos no están ordenados, en este caso, el borde  $(i, j)$  indica que los nodos pueden obtener información uno del otro. Así mismo, un *grafo ponderado* asocia un peso a cada borde en el grafo. Una *trayectoria dirigida* es una secuencia de bordes en un grafo dirigido de la forma  $(e_1, e_2), (e_2, e_3) \dots$ . Un grafo dirigido está *fuertemente conectado* si existe una trayectoria dirigida desde cada nodo a todos los demás nodos.

Un *ciclo* o *lazo*, es una secuencia de nodos y bordes  $v_0 v_1 \dots v_k$  tal que  $k \geq 3$ ,  $v_0 = v_k$  y los nodos  $v_i$ ,  $0 < i < k$ , son distintos entre sí y entre  $v_0$ . Esto es, cada nodo en un lazo tiene grado dos. Un *conjunto de lazo* o *loopset* es el conjunto de nodos y bordes en un lazo. Un *conjunto de corte* o *cutset* es un conjunto de bordes de un grafo conectado tal que al cortar estos bordes se separa al grafo en dos grafos conectados. Si cualquier borde del cutset se omite, el grafo debe permanecer conectado. Si todos los bordes en un cutset son incidentes a un nodo, el nodo es llamado *cutset de nodo*.

Por su parte, un *subgrafo*  $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$  de  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , es un grafo tal que  $\mathcal{V}^s \subseteq \mathcal{V}$  y  $\mathcal{E}^s \subseteq \mathcal{E} \cap (\mathcal{V}^s \times \mathcal{V}^s)$ . Un *árbol* es un subgrafo conectado que contiene todos los nodos del grafo pero no tiene lazos, a sus elementos se les denomina *ramas*. Su complemento, formado por todos los bordes que cierran lazos con las ramas del árbol, es llamado *co-árbol* y a sus elementos se les nombra *cuerdas*. Más aún, de acuerdo al Teorema 7 de Bollobás [13]: *Un grafo de orden  $n$  es un árbol si y sólo si está conectado y tiene tamaño  $(n - 1)$ .* Un *árbol de expansión dirigido*  $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$  de un grafo dirigido  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  es un subgrafo de  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  tal que  $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$  es un árbol dirigido y  $\mathcal{V}^s = \mathcal{V}$ . Note que un grafo dirigido  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  tiene un árbol de expansión dirigido si y solo si  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  tiene al menos un nodo con trayectorias dirigidas a todos los demás nodos. En grafos no dirigidos, la existencia de un árbol de expansión es equivalente a que el grafo esté conectado, sin embargo, en

grafos dirigidos la existencia de un árbol de expansión es una condición más débil que la de estar fuertemente conectado.

Por último, un *cutset básico* se define para un árbol particular como el cutset que consiste de una rama del árbol y cualesquiera cuerdas del co-árbol. Mientras que un *loopset básico* también se define para un árbol específico y es un loopset formado por una cuerda y cualesquiera ramas del árbol.

### 2.2.1. Espacios Vectoriales y Matrices Asociadas a Grafos

Se define al *Espacio Nudo*  $C_0(G)$  de un grafo  $G$  como el espacio vectorial real de dimensión  $n$  de todas las funciones de  $\mathcal{V}(G)$  a  $\mathbb{R}$ . De manera similar, el *Espacio Borde*  $C_1(G)$  es el espacio vectorial real de dimensión  $b$  de todas las funciones que mapean de  $\mathcal{E}(G)$  a  $\mathbb{R}$ . En este sentido, a  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  se les llama bases estándar de estos espacios y están dotadas del producto interno  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$  sobre el cual son ortogonales.

Esta subsección se concentra en la definición de ciertas matrices asociadas a los grafos, cuya estructura caracteriza completamente las interconexiones. En particular se definen dos matrices asociadas a las *restricciones de compatibilidad y continuidad*, respectivamente. Para esto, sea  $L$  un loop básico en  $G$  con una orientación dada, este loop puede ser identificado con un elemento  $z_L$  de  $C_1(G)$  como

$$z_L(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in \mathcal{E}(L) \text{ y } e_i \text{ está orientado en la dirección de } L, \\ -1 & \text{si } e_i \in \mathcal{E}(L) \text{ y } e_i \text{ no está orientado en la dirección de } L, \\ 0 & \text{si } e_i \notin \mathcal{E}(L) \end{cases} \quad (2.1)$$

Denote por  $Z(G)$  al subespacio de  $C_1(G)$  expandido por los vectores  $z_L$  con  $L$  corriendo sobre el conjunto de lazos; entonces,  $Z(G)$  es el *espacio de lazo* de  $G$ .

**Definición 1.** Se define a la matriz de loopsets básicos  $B_b$  de  $(b - n + 1) \times b$  como la matriz cuyo  $i$ -ésimo renglón es el vector fundamental de lazos  $z_L(e_i)$ .

□

Similar a lo anterior, sea  $P$  un cutset básico, entonces hay un vector  $u_P$  en  $C_1(G)$  llamado *vector de cutsets básicos* asociado a esta partición:

$$u_P(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in \mathcal{E}(P) \text{ y } e_i \text{ entra al cutset } P, \\ -1 & \text{si } e_i \in \mathcal{E}(P) \text{ y } e_i \text{ sale del cutset } P, \\ 0 & \text{si } e_i \notin \mathcal{E}(P) \end{cases} \quad (2.2)$$

Con lo que el *espacio de corte*  $U(G)$  es el subespacio de  $C_1(G)$  expandido por todos los vectores  $u_P$  y la matriz correspondiente es la siguiente:

## 2. PRELIMINARES

---

**Definición 2.** Se define a la matriz de cutsets básicos  $C_b$  de orden  $(n - 1) \times b$  como la matriz cuyo  $i$ -ésimo renglón es el vector de cuts básicos  $u_P(e_i)$ .

**Teorema 1** (Bollobás [13], Teorema 9). El espacio borde  $C_1(G)$  es la suma directa del espacio  $Z(G)$  y  $U(G)$ , por lo que uno es el complemento ortogonal del otro. Además, si  $G$  tiene  $n$  nodos y  $b$  bordes, entonces

$$\dim Z(G) = b - n + 1 \quad \text{y} \quad \dim U(G) = n - 1 \quad (2.3)$$

□

De lo anterior se puede concluir que

$$\text{rank}(B_b) = b - n + 1 \quad \text{y} \quad \text{rank}(C_b) = n - 1. \quad (2.4)$$

Más aún, existen diferentes matrices asociadas a los espacios vectoriales mencionados anteriormente. Así, la matriz de adyacencia  $A = A(G) = (a_{ij})$  del grafo  $G$  es la matriz de  $n \times m$  definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in \mathcal{E}(G) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Mientras que, para definir la *matriz de incidencia* de un grafo se considera la orientación de los bordes. Esta matriz  $B = B(G) = (b_{ij})$  de  $G$  induce un mapeo  $B : \mathbb{R}^b \mapsto \mathbb{R}^n$  por lo que es de  $n \times b$  y está determinada por

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es el nodo inicial del borde } e_j, \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es el nodo terminal del borde } e_j, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.6)$$

donde se puede demostrar que el espacio de lazo es exactamente el kernel de  $B$ , por lo que el  $\text{rank}(B) = b - (b - n + 1) = n - 1$ . Por último, si  $D = (D_{ii})$  es una matriz diagonal de orden  $n$  con elementos el grado del nodo  $i$ . Entonces la matriz Laplaciana  $\mathcal{L}$  es tal que

$$\mathcal{L} = BB^T = D - A. \quad (2.7)$$

La matriz Laplaciana, de acuerdo al teorema del disco de Gershgorin (Serre [75]), tiene un valor propio simple en cero y todos los demás valores propios tienen parte real positiva si y solo si  $G$  tiene un árbol de expansión dirigido (que el grafo no dirigido esté conectado). Adicionalmente,  $\mathcal{L}\mathbf{1}_p = \mathbf{0}_p$ .

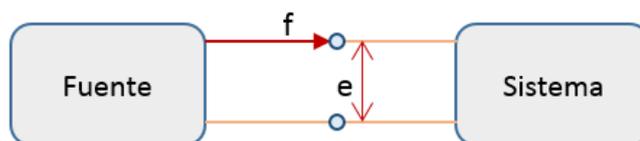


Figura 2.1: Variables generalizadas

## 2.3. Preliminares en Sistemas Hamiltonianos

Un sistema Hamiltoniano es un sistema no-lineal que se identifica por una inclusión explícita de la contribución del gradiente de la función de energía del sistema en las ecuaciones diferenciales que describen la evolución del sistema. Los principios físicos de modelado de redes conducen a una descripción Hamiltoniana generalizada de un sistema físico con información útil para el análisis y control de sistemas lineales y no-lineales. Este sistema es considerado como un manipulador de energía que interactúa via puertos energéticos de entrada y salida. El modelo matemático obtenido se puede adecuar fácilmente para la aplicación de métodos de control basados en pasividad como explica Ortega *et al.* [61].

En resumen, un sistema físico de parámetros concentrados está descrito por un conjunto de elementos almacenadores de energía, un conjunto de elementos disipadores de energía y un conjunto de puertos, interconectados entre sí por medio de estructuras que preservan potencia.

### 2.3.1. Variables Generalizadas y Elementos de un Sistema

Para Wellstead [89], el acoplamiento energético de los sistemas puede representarse por un par de variables cuyo producto interno es la potencia transmitida en un puerto. Así, el acto de entregar energía está asociada a una variable intensiva o *de flujo* (e.g. corriente eléctrica) y a una variable extensiva o *de esfuerzo* (e.g. voltaje). De ahí que un puerto energético pueda representarse por un par de terminales con un par de variables generalizadas, flujo  $f$  y esfuerzo  $e$ , tal como se muestra en la Figura 2.1. En consecuencia, existen dos formas de almacenar energía, en términos del esfuerzo o en términos del flujo y, dado que el almacenamiento de energía puede concebirse en términos de la integral, estos almacenamientos pueden definirse como

$$e_a = \int_0^t e dt \quad \text{ó} \quad e = \frac{de_a}{dt}; \quad f_a = \int_0^t f dt \quad \text{ó} \quad f = \frac{df_a}{dt},$$

de manera que el comportamiento de un sistema dinámico de parámetros concentrados puede expresarse como un conjunto de ecuaciones diferenciales donde

las variables de estado son los esfuerzos y flujos acumulados. Para hablar de modelado hay que distinguir tres elementos básicos en un sistema: fuentes de flujo y esfuerzo, elementos almacenadores de energía (almacenadores de flujo y de esfuerzo) y disipadores, cuyas propiedades están especificadas por sus *relaciones constitutivas*. Por ejemplo, para un elemento almacenador de flujo, la relación constitutiva expresa la acumulación de flujo como una función de la salida (esfuerzo)  $f_a = \psi(e)$ . Si se tiene un almacenador de esfuerzo, la relación constitutiva expresa la acumulación de esfuerzo como función del flujo  $e_a = \psi(f)$ . Por consiguiente, si la energía almacenada  $H_a(f_a, e_a)$  es una función conocida, entonces las variables de puerto pueden recuperarse a partir de

$$\dot{f}_a = f, \quad e = \frac{\partial H_a(f_a, e_a)}{\partial f_a} = \nabla_{f_a} H_a \quad (2.8a)$$

$$\dot{e}_a = e, \quad f = \frac{\partial H_a(f_a, e_a)}{\partial e_a} = \nabla_{e_a} H_a \quad (2.8b)$$

Algo semejante ocurre con los elementos disipadores, donde la relación constitutiva toma la forma

$$e = \psi(f) \quad (2.9)$$

y la potencia  $e^T f \leq 0$ . En el caso lineal, la relación (2.9) se vuelve  $e = Rf$ , con  $R$  una matriz diagonal con los valores de los disipadores.

### 2.3.2. Restricciones de Interconexión

De manera general, todas las interconexiones que preservan potencia están agrupadas dentro de un objeto geométrico conocido como *estructura de Dirac* cuya definición, tomada de [84, 86], se presenta a continuación.

**Definición 3.** *Considere un espacio vectorial  $\mathcal{F}$  y su espacio dual  $\mathcal{F}^*$ , i.e. el espacio de funciones lineales en  $\mathcal{F}$ . El espacio  $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^*$  es llamado Espacio de Potencia de Variables, con la potencia definida como*

$$P = \langle f^* | f \rangle, \quad (f, f^*) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}^* \quad (2.10)$$

*tal que la variable de flujo  $f \in \mathcal{F}$  y la de esfuerzo  $e \in \mathcal{F}^*$ . Un subespacio  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}^*$  es llamada estructura de Dirac si y sólo si se cumple lo siguiente:*

$$\langle e | f \rangle = 0, \quad \text{para todo } (f, e) \in \mathcal{D} \quad (2.11a)$$

$$\dim \mathcal{D} = \dim \mathcal{F} \quad (2.11b)$$

□

Es importante notar que cualquier mapeo *antisimétrico*  $J : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{F}$  tiene asociado un *grafo* tal que

$$\{(f, e) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E} \mid f = Je\}$$

es una estructura de Dirac.

Por un lado, la ecuación (2.11a) define una relación de preservación de potencia entre las variables de puerto  $f$  y  $e$ . Mientras que (2.11b) está relacionada con que una interconexión física no puede determinar el flujo y el esfuerzo al mismo tiempo. Una propiedad fundamental de este tipo de estructuras es que la interconexión, preservando potencia, de estructuras de Dirac nuevamente define una estructura Dirac. Las estructuras Dirac constantes admiten representaciones matriciales, como la estructura *Kirchhoff-Dirac* definida por Van der Schaft y Maschke [86] en términos de la matriz de incidencia del grafo.

De manera particular, hay dos formas en las que pueden ser conectados los elementos de un puerto, en serie o en paralelo. Cada caso induce un conjunto de restricciones relacionadas con las variables de flujo y esfuerzo. Estas restricciones son llamadas restricciones de *compatibilidad* y *continuidad*. La de compatibilidad demanda que si un conjunto de puertos son conectados de manera que formen una trayectoria cerrada o lazo, entonces la suma de los esfuerzos alrededor del lazo es cero. La restricción complementaria requiere que la suma de todos los flujos en una terminal común sea cero. Estas restricciones pueden ser expresadas en un marco generalizado por medio de la teoría de grafos. Esto es,

$$C_b f = 0 \quad ; \quad B_b e = 0 \tag{2.12}$$

donde  $f \in \mathbb{R}^b$  y  $e \in \mathbb{R}^b$  son vectores de flujo y esfuerzo de borde, y  $C_b \in \mathbb{R}^{n-1 \times b}$ ,  $B_b \in \mathbb{R}^{b-n+1 \times b}$  son las matrices cutsets y loopsets básicos, respectivamente. Las restricciones (2.12) equivalen a las impuestas por las estructuras Dirac (2.11). Así, mientras las ecuaciones (2.12) definen la topología de la interconexión, (2.8) y (2.9) establecen la dinámica.

### 2.3.3. Pasividad

Las nociones de pasividad están asociadas a sistemas con la propiedad de que su energía puede ser incrementada sólo a través del suministro desde una fuente externa. En principio, esta propiedad es independiente de cualquier norma, sin embargo, requiere de una dualidad entre el espacio de entradas y el de salidas.

Considere el espacio vectorial lineal de entradas  $U$  con dimensión  $m$  y permita que el espacio de salidas sea su espacio dual  $Y = U^*$  formado por las funciones

## 2. PRELIMINARES

---

lineales en  $U$ . Denote el producto interno por

$$\langle y|u \rangle$$

con estas consideraciones es posible presentar la definición de pasividad.

**Definición 4** (Van der Schaft [84], Definición 2.2.1). *Sea  $G : L(U) \rightarrow L(U^*)$ , el mapeo  $G$  es pasivo si existe alguna constante positiva  $\beta$  tal que*

$$\int_0^T \langle y(t)|u(t) \rangle dt \geq -\beta, \quad \forall u \in L(U), \forall T \geq 0 \quad (2.13)$$

donde se ha asumido que el lado derecho de la integral está bien definido.

El último preliminar de esta subsección presenta una definición adicional de pasividad incremental que será usada en la tesis,

**Definición 5** (Pavlov y Marconi [66], Definición 1). *Considere el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t) \\ y &= H(x, t) \end{aligned}$$

con el estado  $x \in \mathbb{R}^n$ , entrada  $u \in \mathbb{R}^l$ , salida  $y \in \mathbb{R}^l$  y la función continua  $F(x, u, t)$  localmente Lipschitz respecto a  $x$ . Se dice que el sistema es incrementalmente pasivo si existe una función de almacenamiento  $V(t, x_1, x_2) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que para cualesquiera dos entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  y cualesquiera dos soluciones del sistema  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  correspondientes a esas entradas, las salidas respectivas  $y_1(t) = H(x_1(t), t)$  y  $y_2(t) = H(x_2(t), t)$  satisfacen la desigualdad

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} F(x_1, u_1, t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} F(x_2, u_2, t) \leq (y_1 - y_2)^T (u_1 - u_2)$$

### 2.3.4. Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto

Siguiendo la definición dada por Van der Schaft [84], la clase de sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto puede describirse por

$$\dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u, \quad x \in \mathcal{X}, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (2.14a)$$

$$y = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x), \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (2.14b)$$

donde  $J(x)$  es una matriz de  $n \times n$ , asumida antisimétrica i.e.  $J(x) = -J(x)^T$ , cuyas entradas dependen suavemente de  $x$  y  $x = (x_1, \dots, x_n)$  son coordenadas

locales para un subespacio de estados  $\mathcal{X}$  de dimensión  $n$ . El sistema (2.14) se define por el subespacio  $\mathcal{X}$  dotado de una terna  $(J, g, H)$ . El par  $(J(x), g(x))$ ,  $x \in \mathcal{X}$  captura la estructura de interconexión del sistema, en particular  $g(x)$  modela los *puertos* del sistema; mientras que el Hamiltoniano  $H : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  define la energía almacenada. Calculando la derivada temporal del Hamiltoniano  $H$  a lo largo de las trayectorias del sistema (2.14), se encuentra una propiedad básica de estos sistemas que se refiere al balance energético

$$\frac{dH}{dt}(x(t)) = u^T(t)y(t) \quad (2.15)$$

que, debido a la antisimetría de  $J(x)$ , corresponde a una estructura interna de conservación de potencia, mientras que  $u$  y  $y$  son las variables de potencia de los puertos definidos por  $g(x)$ , por lo que  $u^T y$  es la potencia externa suministrada. Por lo tanto, si  $H$  es no-negativa (o acotada por abajo) entonces el sistema Hamiltoniano (2.14) es conservativo.

La disipación de energía puede incluirse por medio de algunos puertos terminales considerando, en vez de  $g(x)u$ , el término

$$\begin{bmatrix} g(x) & g_R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_R \end{bmatrix} = g(x)u + g_R(x)u_R \quad (2.16)$$

y su correspondiente salida extendida

$$\begin{bmatrix} y \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \\ g_R^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

donde  $u_R, y_R \in \mathbb{R}^{m_r}$  determinan las variables de potencia en los puertos con relaciones constitutivas disipativas

$$u_R = -F(y_R) \quad (2.18)$$

donde el mapeo  $F : \mathbb{R}^{m_r} \mapsto \mathbb{R}^{m_r}$  satisface

$$y_R^T F(y_R) \geq 0, \quad y_R \in \mathbb{R}^{m_r} \quad (2.19)$$

Es importante hacer notar que en algunos casos  $F$  se puede encontrar a partir de la llamada *función de disipación de Rayleigh* [61],  $R : \mathbb{R}^{m_r} \mapsto \mathbb{R}$  tal que

$$F(y_R) = \frac{\partial R}{\partial y_R}(y_R)$$

Como se dijo anteriormente, un sistema pasivo no puede almacenar más

## 2. PRELIMINARES

---

energía que la que se le suministra desde el exterior, donde la diferencia es la energía disipada. El siguiente balance energético muestra que el sistema (2.14) con (2.16) define un mapeo pasivo. En este caso, la ecuación (2.15) toma la forma

$$\frac{dH}{dt}(x(t)) = u^T(t)y(t) - y_R^T(t)F(y_R(t)) \quad (2.20)$$

e integrando (2.20) de  $t_0$  a  $t_1$  se puede establecer la ecuación de balance energético

$$H(x(t_1)) - H(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} y_R^T(t)F(y_R(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)y(t)dt, \quad (2.21)$$

con el término  $\int_{t_0}^{t_1} y_R^T(t)F(y_R(t))dt$  no negativo representando la energía disipada en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . Ahora observe que si  $H(x)$  está acotada por una constante  $c$  entonces el sistema es pasivo. Más aún, si  $u = 0$  de la ecuación (2.21) puede concluirse que la energía no se incrementa, por lo que el punto de equilibrio trivial del sistema no-forzado es *estable* en el sentido de Lyapunov; esta estabilidad se preserva si la salida  $y = 0$ , reflejando el hecho de que el sistema es de *fase mínima*.

Finalmente, si se considera que los elementos disipativos son lineales, esto es, que

$$u_R = -Sy_R \quad (2.22)$$

para alguna matriz  $S = S^T \geq 0$ , entonces el sistema Hamiltoniano es llamado sistema Hamiltoniano Controlado por Puerto con Disipación (PCHD por sus siglas en inglés) y puede escribirse como

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x) + g(x)u \quad (2.23a)$$

$$y = g^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) \quad (2.23b)$$

con  $R(x) := g_R(x)Sg_R^T(x)$  simétrica positiva semidefinida. En este caso,

$$\frac{dH}{dt}(x(t)) = u^T(t)y(t) - \frac{\partial^T H}{\partial x}(x)R \frac{\partial H}{\partial x}(x) \leq u^T(t)y(t) \quad (2.24)$$

**Lema 1** (Van der Schaft [84], Lema 3.2.4). *Sea  $H : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  una función Hamiltoniana continuamente diferenciable para (2.23). Suponga que  $x^*$  es un punto interior de  $\mathcal{X}$  y un mínimo local estricto de  $H(x)$ . Entonces,  $x^*$  es un punto de equilibrio estable del sistema no-forzado*

$$\dot{x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H}{\partial x}(x)$$

con función de Lyapunov  $V(x) = H(x) - H(x^*) > 0$  para todo  $x \in \mathcal{D} \setminus \{x^*\}$  y  $V(x^*) = 0$ , donde  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$  es una vecindad de  $x^*$ . Más aún, suponga que no existe otra solución que  $x(t) = x^*$  que permanezca en  $\{x \in \mathcal{D} | \dot{H}(x) = 0\}$  para todo  $t \geq 0$ . Entonces,  $x^*$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Una forma alternativa de formular el Lema 1 es usando la propiedad de *detectabilidad de estado cero* con la salida  $\bar{y} = R(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x)$  y el principio de invarianza de LaSalle.

**Definición 6** (Van der Schaft [84], Definición 3.2.7). *El sistema (2.23) es cero estado detectable si  $u(t) = 0$ ,  $y(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .*

## 2.4. Preliminares en Sistemas Eléctricos de Potencia

De acuerdo a Kundur *et al.* [42] aunque los Sistemas Eléctricos de Potencia varíen en tamaño tienen las mismas características, esto es, están formados por tres subsistemas: generación, transmisión y distribución. La función de un SEP es convertir energía de una de las formas naturalmente disponibles a la forma eléctrica y transportarla hasta los puntos de consumo. El SEP debe ser capaz de mantener la demanda de carga, en términos de potencia activa y reactiva; además de mantener estándares en la calidad de la energía respecto a una frecuencia y voltaje constantes. Para lograr lo anterior, son necesarios varios niveles de control, desde el control en los sistemas de generación (por ejemplo los controladores propuestos por Ortega *et al.* [61]) hasta el control en la transmisión, que incluye compensadores (García-Canseco *et al.* [31]) y transmisiones en corriente continua de alta tensión (HVDC) (Zonetti *et al.* [94]).

De manera clásica, los SEP son unidireccionales y tienen una generación centralizada. Sin embargo, los avances tecnológicos en generadores pequeños, electrónica de potencia y almacenadores han acelerado la penetración de unidades de *Generación Distribuida* (DG), por ejemplo paneles solares y pequeñas turbinas de viento, que son generadores de pequeña escala, típicamente entre 3kW y 10,000kW, lo que ha originado una nueva generación de SEP llamadas *microrredes*. Una microrred (Fang *et al.* [27]) es un grupo concentrado de generadores, almacenadores y cargas, que en operación normal está conectada a la red tradicional (*macrored*) y en este caso se comporta como una carga o una fuente. Durante este modo de operación su función es la de satisfacer los requerimientos de la carga.

No obstante, el único punto de acoplamiento con la macrored puede ser desconectado tal que los generadores distribuidos siguen alimentando potencia a los

usuarios dentro de la microred sin obtener potencia de afuera, esta operación resulta en una *microred aislada*. Cabe mencionar que aún en este caso es posible que siga existiendo intercambio de información con la macrored. La microred se debe desconectar cuando ocurra una condición anormal y, al cambiar a su modo aislado, de acuerdo a Pedrasa y Spooner [67], se enfrenta a los siguientes problemas: gestión y regulación de frecuencia y voltaje, calidad de potencia, es decir, rectificar desviaciones de frecuencia y voltaje, así como absorber potencia activa o reactiva.

En general, el voltaje de estas microfuentes es acondicionado utilizando un convertidor de potencia y una de las técnicas de control más usadas para estos convertidores es el *controlador droop* (Lasseter [44]). Básicamente, el control droop es un control proporcional cuya ganancia determina la distribución de potencia en estado estable. El funcionamiento de este controlador se basa en que, para una red predominantemente inductiva, la potencia reactiva está mayormente influenciada por cambios en el voltaje, mientras que la potencia activa depende de manera más directa de las desviaciones angulares. Consecuentemente, las frecuencias  $\omega_i$  y las amplitudes de voltaje  $V_i$  de los inversores se modifican dependiendo de las desviaciones (respecto a un valor deseado) de potencia activa y reactiva, respectivamente (implementaciones del control droop en microredes predominantemente inductivas puede encontrarse en los trabajos de Schiffer *et al.* [74] y Simpson-Porco *et al.* [77]).

### 2.4.1. Conceptos Fundamentales

Para circuitos lineales, si el interés está en la respuesta en estado senoidal, se pueden dar caracterizaciones en términos de la representación fasorial de corrientes y voltajes.

**Definición 7** (Desoer y Kuh [20]). *Considere un circuito eléctrico de un puerto formado por una interconexión arbitraria de elementos lineales invariantes en el tiempo. Considere además que  $i_s$  es una señal senoidal con frecuencia angular  $\omega$ , tal que*

$$i_s(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

*con  $I_m$ ,  $\omega$  y  $\phi$  la amplitud, frecuencia angular y fase de la senoidal, respectivamente. La senoidal puede ser representada por el número complejo*

$$\mathbf{I} \triangleq I_m e^{j\phi},$$

*donde  $I_m = |\mathbf{I}|$  es la magnitud del número complejo  $\mathbf{I}$  y  $\phi = \angle \mathbf{I}$  es la fase. Al número complejo  $\mathbf{I}$  se le conoce como fasor de la señal senoidal.*

Considere ahora que la señal  $i_s(t)$  es la corriente de entrada al circuito; de manera que,

$$i_s(t) = \text{Re}\{\mathbf{I}_s e^{j\omega t}\} = |I_s| \cos(\omega t + \angle I_s)$$

y permita que la respuesta de voltaje en estado senoidal sea

$$v(t) = \text{Re}\{\mathbf{V} e^{j\omega t}\} = |V| \cos(\omega t + \angle V)$$

Entonces, se pueden formular las siguientes definiciones:

**Definición 8** (Desoer y Kuh [20]). *Se define la impedancia del circuito de un puerto en la frecuencia angular  $\omega$  como la división del fasor de voltaje de salida  $\mathbf{V}$  entre el fasor de corriente de entrada  $\mathbf{I}_s$ , esto es*

$$Z(j\omega) \triangleq \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_s}$$

*Mientras que la admitancia del circuito de un puerto en la frecuencia angular  $\omega$  es la división del fasor de corriente de salida  $\mathbf{I}$  entre el fasor de voltaje de entrada  $\mathbf{V}_s$*

$$Y(j\omega) \triangleq \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}_s}$$

Bajo las definiciones anteriores es posible definir la impedancia y admitancia en términos de su parte real y su parte imaginaria como se presenta en las siguientes definiciones,

**Definición 9** (Desoer y Kuh [20]). *Sean  $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  constantes que denotan una capacitancia, una inductancia y una frecuencia, respectivamente. La reactancia de una capacitancia está definida como*

$$X_C \triangleq \frac{1}{\omega C}$$

*y la reactancia inductiva está definida como*

$$X_L \triangleq \omega L$$

**Definición 10** (Desoer y Kuh [20]). *Sea  $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $X \in \mathbb{R}$  constantes denotando la resistencia y la reactancia, respectivamente. Permita que la impedancia  $Z$  sea expresada como  $Z = R + jX \in \mathbb{C}$ . Para  $Z \neq 0$ , la admitancia compleja  $Y$  se define como*

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R}{R^2 + X^2} + j \frac{X}{R^2 + X^2} := G + jB$$

*Más aún, al escalar  $G$  se le llama conductancia, mientras que  $B$  es llamado susceptancia.*

### 2.4.2. Flujos de Potencia

El análisis de flujo de potencias involucra el cálculo de flujos de potencia y voltajes en una red para condiciones específicas en estado estacionario; este análisis describe las interacciones entre las fuentes y las cargas. Para esto, son necesarias dos suposiciones usuales en los SEP (ver Kundur *et al.* [42] y sus referencias) que serán usadas a lo largo de la tesis.

**Suposición 1.** *Sobre la red de potencia:*

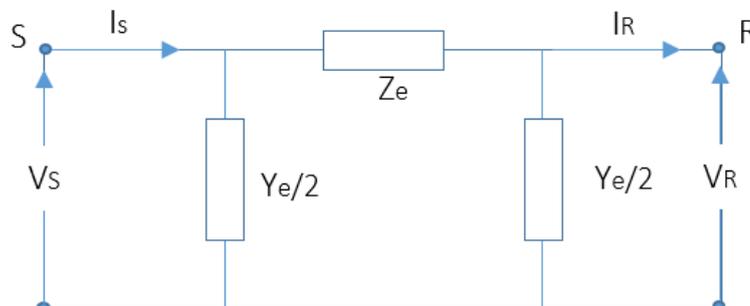
- *Las redes de potencia consideradas están balanceadas.*
- *Las líneas de transmisión pueden representarse por circuitos  $\pi$  equivalentes con parámetros lineales concentrados (ver Figura 2.2).*

Por un lado, la primera parte de la suposición permite la representación de una fase del sistema. Por otro lado, la segunda parte posibilita el modelado de las líneas de transmisión como circuitos *RLC* tal como el que se muestra en la Figura 2.2, donde los capacitores en terminal se representan como admitancias conectadas a tierra.

De este modo, el modelo de los flujo de potencia es estático y está basado en la Suposición 1. En general, existen diferentes unidades de generación o cargas conectadas a diferentes nodos en la red, las cuales son modeladas por sistemas dinámicos como se verá más adelante en el Capítulo 4. En este contexto, se considera que hay cuatro cantidades asociadas a cada bus o nodo: la potencia activa  $P$ , la potencia reactiva  $Q$ , la magnitud de voltaje  $V$  y el ángulo de voltaje  $\theta$ . Cada bus tiene determinadas dos de las cuatro cantidades (Kundur *et al.* [42]); esto es, los buses pueden clasificarse en:

1. Bus controlado por voltaje (PV): La potencia activa y el voltaje están dados. Ejemplos de ellos son buses con generadores y compensadores.
2. Bus carga (PQ): Están especificadas la potencia activa y reactiva. Normalmente las cargas se asumen tener potencia constante.
3. Slack o bus de referencia: Están dadas la magnitud de voltaje y el ángulo de fase. Las pérdidas no son conocidas *a priori*, por lo que al menos un bus debe tener no-fijas  $P$  y  $Q$ .

Así, considere una red de  $n$  nodos, las relaciones entre las corrientes y los voltajes de nodo pueden representarse en términos de la matriz de *admitancias*



**Figura 2.2:** Circuito equivalente  $\pi$  de una línea de transmisión

de nodo<sup>1</sup> como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

donde  $Y_{ii}$  es la admitancia propia i.e. la suma de todas las admitancias conectadas al nodo  $i$ ,  $Y_{ij}$  es la admitancia mutua entre el nodo  $i$  y el  $j$  y es de signo contrario a  $Y_{ii}$ ,  $V_i$  es el fasor de voltaje a tierra del nodo  $i$ , mientras que  $I_i$  es el fasor de corriente que circula dentro de la red en el nodo  $i$ . En este caso, los efectos de cargas no-lineales (como compensadores y convertidores HVDC) conectados a nodos de la red, se ven reflejados en las corrientes de nodo. Hay que notar que si se conocen las corrientes inyectadas  $I$ , entonces las ecuaciones (2.25) son lineales. Dado que la potencia aparente en el nodo  $k$  está dada por la relación

$$S_k = P_k + jQ_k = V_k I_k^*, \quad (2.26)$$

entonces la corriente en cualquier nodo  $k$  está relacionado con las variables  $P$ ,  $Q$  y  $V$  como

$$I_k = \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} \quad (2.27)$$

Para los nodos  $PQ$  y  $PV$  sus variables correspondientes están dadas; sin embargo, para otros tipos de nodos las relaciones entre estas variables están definidas por los elementos conectados a los nodos, lo anterior ocasiona relaciones no-lineales en los flujos de potencia lo que motiva el uso de métodos numéricos para resolverlas.

<sup>1</sup>Para fines de análisis, esta matriz es equivalente a la matriz Laplaciana ponderada por las admitancias.

## 2. PRELIMINARES

---

Esto es, la corriente en el nodo  $k$  puede reescribirse en términos de (2.25) como

$$I_k = \sum_{m=1}^n Y_{km} V_m$$

sustituyendo esta última ecuación en (2.26) se tiene

$$P_k + jQ_k = V_k \sum_{m=1}^n (G_{km} - jB_{km}) V_m^*$$

con  $Y_{km} = G_{km} + jB_{km}$ , en donde  $G_{km}$  es llamada conductancia y  $B_{km}$  susceptancia. Por otro lado, usando la identidad de Euler, el producto de fasores

$$V_k V_m^* = V_k V_m e^{j(\theta_k - \theta_m)} = V_k V_m (\cos\theta_{km} + j\sin\theta_{km})$$

donde  $\theta_{km} \triangleq \theta_k - \theta_m$ . Finalmente, separando la parte real de la imaginaria, las expresiones para  $P_k$  y  $Q_k$  pueden escribirse como

$$P_k = V_k \sum_{m=1}^n (G_{km} V_m \cos\theta_{km} + B_{km} V_m \sin\theta_{km}) \quad (2.28a)$$

$$Q_k = V_k \sum_{m=1}^n (G_{km} V_m \sin\theta_{km} - B_{km} V_m \cos\theta_{km}) \quad (2.28b)$$

de manera que las potencias activa y reactiva en cada nodo son función de la magnitud de voltaje  $V$  y del ángulo  $\theta$  de todos los nodos. Puede notarse que, como se dijo en la subsección anterior, para pequeñas desviaciones de  $\theta_{km}$  se tiene que  $\sin(\theta_{km}) \approx \theta_{km}$  y que  $\cos(\theta_{km}) \approx 1$ , por lo que, con  $G_{km} \approx 0$  i.e. una red predominantemente inductiva, la potencia reactiva está más influenciada por los cambios en voltaje, mientras que la potencia activa por las desviaciones angulares.

### 2.4.3. Estabilidad de Voltaje

La estabilidad de un sistema de potencia es la propiedad de un SEP que le permite permanecer en un punto de operación de equilibrio bajo condiciones de operación normales y de permanecer en un estado de equilibrio aceptable después de ser sujeto a una perturbación [42]. Como consecuencia de una perturbación, la inestabilidad en un SEP puede manifestarse de diferentes maneras, para identificar propiedades fundamentales resulta conveniente separar estos comportamientos. Los diferentes tipos de estabilidad no necesariamente son independientes uno

de otro y un análisis detallado de esta clasificación puede encontrarse en [42, 83].

**Definición 11** ([42]). *La estabilidad de voltaje es la habilidad del SEP para mantener un voltaje en estado estacionario aceptable en todos los buses del sistema bajo condiciones de operación normales y después de ser sujeto a un perturbación.*

Numerosos autores han propuesto índices de inestabilidad de voltaje basados en algún tipo de análisis de flujos de potencia. Esta inestabilidad está asociada con un desbalance de potencia reactiva; una forma de lidiar con este problema es a través de la compensación, por ejemplo por medio de Sistemas Flexibles de Transmisión en Corriente Alterna (FACTS). Así, usualmente colocar un compensador de potencia reactiva en un *bus débil* [40] mejora las propiedades de estabilidad de voltaje estático. Otras técnicas incluyen compensación en derivación, compensación en serie, modificando la matriz de susceptancias [82] o bien máquinas síncronas para absorber o generar potencia reactiva. En cualquiera de estos casos, el problema radica en modificar la topología de la red eléctrica o añadir sistemas dinámicos los cuales, pueden ser representados por un modelo Hamiltoniano controlado por puerto (ver por ejemplo [36, 80]).

#### 2.4.4. Circuitos Eléctricos No-Lineales

Mientras que un circuito físico siempre tiene una única solución, una red no-lineal, usada para modelar un circuito físico, no necesariamente la tiene. Desde hace algún tiempo, se han reportado artículos que dan condiciones sobre la unicidad de soluciones en redes no-lineales (ver por ejemplo [21, 73]). En otras palabras, considerando a  $x$  como el conjunto de variables a determinar (conjunto completo) y a las entradas  $u$  y  $y$ , tales que

$$h(x, y) = u, \tag{2.29}$$

la cuestión es si la ecuación tiene una solución única para un conjunto dado de –o todas las posibles– entradas  $x$  y  $y$ .

**Teorema 2** (Teorema 1, Kuh y Hajj [41]). *Una red resistiva no-lineal tiene una única solución para todas las posibles entradas si existe un árbol tal que las ramas no están acopladas con las cuerdas y se cumpla que la matriz de conductancias de árbol  $G_t$  sea uniformemente positiva definida (UPD) y la de co-árbol  $G_l$  uniformemente positiva semi-definida (UPSD).*

Por ejemplo los diodos cumplen con ser UPSD pero no UPD. Por otro lado, para las redes con elementos de dos terminales, el teorema obtenido por Desoer y Katzenelson [21] provee condiciones de unicidad de soluciones para elementos de dos terminales.

**Teorema 3** (Teorema 4, Desoer y Katzenelson [21]). *Si todos los elementos de las ramas se controlan por voltaje, todos los elementos de las cuerdas se controlan por corriente y si además todos los elementos son monótonamente crecientes (no necesariamente estrictamente), entonces la red tiene una única solución para todas las posibles entradas.*

Bajo estas condiciones, puede llevarse a cabo un análisis de *potencial mixto* como el propuesto por Brayton y Moser [15]. En esta tesis, los circuitos eléctricos estudiados son aquellos que pueden expresarse por las ecuaciones de Brayton-Moser.

# Análisis de Circuitos Eléctricos

---

Este capítulo está dedicado al análisis de circuitos eléctricos con un interés particular en las propiedades estructurales de la red. El estudio tiene como base la Teoría de Grafos aplicada a circuitos eléctricos y tiene el objetivo de clarificar el impacto que tiene la topología en el comportamiento dinámico y en la estabilidad del sistema. Asimismo, se incluyen para este análisis topologías típicas como lo son la Radial, la Anillo y la Malla; los resultados de este capítulo servirán como referencia para el problema de microrredes.

## 3.1. Circuitos Eléctricos Sobre Grafos

Tomando como base algunos conceptos en los Preliminares de esta tesis, un circuito eléctrico puede ser definido como un grafo  $G(n, b)$  orientado, tal que los puntos de interconexión entre los elementos del circuito definen al conjunto de nodos  $\mathcal{V}$ , mientras que el conjunto de bordes  $\mathcal{E}$  tiene asociados uno a uno a los elementos de parámetros concentrados de un puerto (dos terminales) del circuito (e.g. fuentes, almacenadores o disipadores). Adicionalmente, se considera que el grafo está conectado en el sentido de que existe una trayectoria dirigida desde cada nodo a todos los demás nodos.

A cada uno de los elementos de un puerto están asociadas dos variables generalizadas: el voltaje  $v$  en las terminales del elemento y la corriente  $i$  que fluye en él. Hay que notar que estas variables son un caso particular de las variables de esfuerzo y flujo, presentadas en el capítulo anterior y en este caso, definidas para sistemas eléctricos. Así, el espacio vectorial  $C_1(G)$  contiene todas las corrientes  $i$  sobre los bordes y su espacio dual  $C^1(G)$  está formado por los voltajes  $v$ . De esta forma, la orientación del borde coincide con la dirección de una corriente positiva y un voltaje decreciente.

La interconexión de los elementos debe satisfacer las leyes de Kirchhoff y como ya se mencionó, estas interconexiones que preservan potencia pueden expresarse en términos de la matriz de cutsets básicos  $C_b \in \mathbb{R}^{n-1 \times b}$  y la matriz de loopsets

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

básicos  $B_b \in \mathbb{R}^{b-n+1 \times b}$ . Así pues, las Leyes de Corrientes y de Voltajes de Kirchhoff (KCL y KVL, respectivamente) quedan dadas por

$$C_b i = 0 \quad ; \quad B_b v = 0. \quad (3.1)$$

Considere que el grafo asociado al circuito eléctrico puede partirse en un árbol máximo  $\tau$  y su correspondiente co-árbol  $\Lambda$ , de tal forma que las corrientes  $i \in C_1$  y voltajes  $v \in C^1$  pueden dividirse como

$$i = \begin{bmatrix} i_t \\ i_c \end{bmatrix} \in C_1; \quad v = \begin{bmatrix} v_t \\ v_c \end{bmatrix} \in C^1$$

con  $i_t \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ ,  $v_t \in \mathbb{R}^{(n-1)}$  las corrientes y los voltajes del árbol  $\tau$ , mientras que  $i_c \in \mathbb{R}^{b-(n-1)}$ ,  $v_c \in \mathbb{R}^{b-(n-1)}$  representan las corrientes y los voltajes del co-árbol  $\Lambda$ . Con esta división y siguiendo lo señalado por Bollobás [13], se puede probar que las matrices de cutsets y loopsets básicos son tales que las restricciones de corrientes pueden ser escritas como

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_t \\ i_c \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

y que las restricciones de voltaje toman la forma

$$\begin{bmatrix} -H^T & I_{b-n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t \\ v_c \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

donde a la matriz  $H \in \mathbb{R}^{(n-1) \times b-(n-1)}$  se le conoce como *matriz fundamental de loops*. De las ecuaciones anteriores (3.2) y (3.3), es claro que las corrientes de árbol son una combinación lineal de las corrientes de co-árbol y que los voltajes de co-árbol son combinación lineal de los voltajes de árbol,

$$i_t = -H i_c, \quad v_c = H^T v_t. \quad (3.4)$$

En este sentido, debe notarse que el  $i$ -ésimo renglón de  $H$  apunta a los elementos del co-árbol incidentes al  $i$ -ésimo cutset básico. En correspondencia, la  $j$ -ésima columna de  $H$  muestra cuáles de los elementos del árbol pertenecen al  $j$ -ésimo loopset básico. Dicho lo anterior, uno de los objetivos de esta tesis es analizar las propiedades de estabilidad y el comportamiento en estado estacionario del circuito en términos de la matriz fundamental de loops  $H$ . Para esto, el primer paso es la obtención de un modelo matemático para el circuito que, como ya se había adelantado, tiene como marco a los sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto. La siguiente es una suposición básica de modelado que se considera

a lo largo de la tesis.

**Suposición 2.** *Los elementos que componen al modelo de un circuito eléctrico son ideales y de parámetros concentrados.*

Así, el modelo puede encontrarse sustituyendo las relaciones constitutivas de cada elemento en las restricciones de interconexión (3.4). Los elementos del circuito se agrupan tal que las fuentes de voltaje, todos los capacitores y algunas resistencias, aquellas que están controladas por voltaje, aparecen en el árbol máximo  $\tau$ , mientras que todos los inductores y el resto de las resistencias, las controladas por corriente, están en el co-árbol  $\Lambda$  correspondiente<sup>1</sup>, por lo que

$$i_t = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_C \\ i_{Rt} \end{bmatrix}; \quad v_t = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_C \\ v_{Rt} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

con las corrientes y voltajes de co-árbol

$$i_c = \begin{bmatrix} i_{Rc} \\ i_L \end{bmatrix}; \quad v_c = \begin{bmatrix} v_{Rc} \\ v_L \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

donde  $v_1, i_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $v_C, i_C \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $v_{Rt}, i_{Rt} \in \mathbb{R}^{n_3}$ , tal que  $n_1 + n_2 + n_3 = n - 1$  y  $v_{Rc}, i_{Rc} \in \mathbb{R}^{n_4}$ ,  $v_L, i_L \in \mathbb{R}^{n_5}$ , con  $n_4 + n_5 = b - (n - 1)$ , que evidentemente coinciden con las dimensiones de los espacios de corte  $U(G)$  y de lazo  $Z(G)$ , definidos en el capítulo anterior.

Es importante remarcar que en este trabajo de tesis se considera la clase de circuitos eléctricos que pueden ser representados por las ecuaciones de Brayton-Moser [15]; es decir, se supone un circuito *completo* en el sentido topológico de que existe un árbol  $\tau' \subset \tau$  que contiene a *todos los capacitores*, donde  $\Lambda' \subset \Lambda$  es su correspondiente co-árbol; la suposición anterior excluye a los loops o lazos formados sólo por capacitores. Así, el análisis está restringido a redes *sin exceso de elementos*, donde no se admiten ni loopsets con sólo capacitores, ni cutsets con sólo inductores. En el caso de circuitos que no cumplan con estas restricciones, la limitación puede relajarse usando las herramientas propuestas por Jeltsema y Scherpen [39]. En este contexto, los voltajes de capacitor  $v_C$  y las corrientes de inductor  $i_L$  forman el llamado *conjunto completo de variables*; con lo que otra manera de obtener el modelo del circuito es haciendo uso del *potencial mixto*. Cabe mencionar que la estructura Hamiltoniana y las ecuaciones de Brayton-Moser [15], obtenidas por medio del potencial mixto, son equivalentes<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Por simplicidad de presentación, se omitirán del análisis las fuentes de corriente. Sin embargo, de hacerlo se deben contemplar como elementos del co-árbol.

<sup>2</sup>De hecho, Jeltsema y Scherpen [39] muestran que como ambos, el formalismo de Brayton-

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

Siguiendo con el procedimiento para encontrar el modelo Hamiltoniano, se define la energía almacenada total del circuito  $H_a(q, \phi) : \mathbb{R}^{n_2 \times n_5} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , que es la debida a la carga  $q$  de los capacitores y al flujo magnético  $\phi$  en los inductores, como

$$H_a(q, \phi) = V(q) + V(\phi) \quad (3.7)$$

Esta función de energía, se supone no negativa (o acotada por abajo) y conocida, por lo que, haciendo uso de (3.7), es posible recuperar las variables de puerto a partir de

$$\dot{q} = i_C, \quad v_C = \frac{\partial H_a(q, \phi)}{\partial q} = \nabla_q H_a \quad (3.8a)$$

$$\dot{\phi} = v_L, \quad i_L = \frac{\partial H_a(i, \phi)}{\partial \phi} = \nabla_\phi H_a \quad (3.8b)$$

y la relación constitutiva

$$i_{Rt} = -\varphi_t(v_{Rt}), \quad v_{Rc} = -\varphi_c(i_{Rc}) \quad (3.9)$$

donde  $\varphi_t$  y  $\varphi_c$  se asumen ser funciones biyectivas. Respecto a la estructura de la matriz fundamental de loops, el agrupamiento anterior lleva al arreglo

$$H = \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} \\ H_{CR} & H_{CL} \\ H_{RR} & H_{RL} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde cada submatriz es de dimensiones apropiadas y los primeros subíndices indican los elementos del árbol, mientras que los segundos los del co-árbol.

Observe que la potencia de cada elemento está ahora en términos de las submatrices de la matriz fundamental de loops. Específicamente, la potencia almacenada por los capacitores y los inductores es

$$P_C = -v_C^T H_{CR} i_{Rc} - v_C^T H_{CL} i_L \quad \text{y} \quad P_L = i_L^T H_{1L}^T v_1 + i_L^T H_{CL}^T v_C + i_L^T H_{RL}^T v_{Rt}.$$

A su vez, la potencia en los elementos disipativos y la suministrada por las fuentes se escribe como

$$P_{Rt} = -v_{Rt}^T H_{RR} i_{Rc} - v_{Rt}^T H_{RL} i_L, \quad P_{Rc} = i_{Rc}^T H_{1R}^T v_1 + i_{Rc}^T H_{CR}^T v_C + i_{Rc}^T H_{RR} v_{Rt}$$

$$\text{y} \quad P_1 = -v_1^T H_{1R} i_{Rc} - v_1^T H_{1L} i_L,$$

respectivamente. Note que el agrupar las ecuaciones anteriores conduce al cele-

---

Moser y el Hamiltoniano, describen las Leyes de Kirchhoff, tienen una relación matemática fundamental dada por una especie de transformación de Legendre.

brado *Teorema de Tellegen*, válido para cualquier circuito de parámetros concentrados, el cual enuncia que la potencia total en un circuito

$$P_L + P_C + P_1 + P_{Rc} + P_{Rt} = 0 \quad (3.11)$$

se conserva. Asimismo, si el circuito es un  $LC$  autónomo, entonces de (3.8a), (3.8b) y (3.4) se observa que la relación entre las variables de energía  $q$  y las variables de potencia  $\phi$  están dadas por

$$\dot{q} = H_{CL}^T i_L \quad \dot{\phi} = -H_{CL} v_C \quad (3.12)$$

y como es estudiado por Jeltsema y Scherpen [39], la expresión

$$\text{diag}\{-I_{n_2}, I_{n_5}\} \frac{\partial^2 P_T(v_C, i_L)}{\partial(v_C, i_L)^2} = \begin{bmatrix} 0_{n_2 \times n_2} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0_{n_5 \times n_5} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

en este caso con  $P_T(v_C, i_L) = P_L(v_C, i_L) = -P_C(v_C, i_L)$ ,  $P_C = -v_C^T H_{CL} i_L$  y  $P_L = i_L^T H_{CL}^T v_C$ , define una relación que conserva potencia entre  $q$  y  $\phi$ , es decir, una estructura de Dirac. No es sorprendente entonces, que (3.13) forme a la matriz antisimétrica  $J$  del modelo Hamiltoniano que se presentará más adelante.

Bajo las consideraciones anteriores, el comportamiento dinámico del circuito eléctrico está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_a \\ \nabla_\phi H_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -H_{CR} \\ H_{RL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{Rt} \\ i_{Rc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H_{1L}^T e_1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

con

$$\begin{bmatrix} v_{Rt} \\ i_{Rc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_t^{-1}(i_{Rt}) \\ -\varphi_c^{-1}(v_{Rc}) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

y complementados por la restricción algebraica

$$i_1 = -H_{1R} i_{Rc} - H_{1L} i_L. \quad (3.16)$$

La restricción (3.16) representa la corriente demandada por las fuentes de voltaje para un punto de operación dado, pero dado que se consideran *fuentes ideales*, la restricción no impone problemas. En cambio se vuelve importante si en el análisis se incluyen requisitos de potencia y límites en la capacidad de las fuentes.

El modelo (3.14)-(3.15) puede escribirse en su forma matricial como

$$\dot{x} = \mathbb{J} \nabla_x H_a(x) + \mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt}) + \mathbb{G} E_1 \quad (3.17)$$

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

donde se han definido

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \phi \end{bmatrix}; \quad \nabla_x H_a(x) = \begin{bmatrix} \nabla_q H_a \\ \nabla_\phi H_a \end{bmatrix}; \quad E_1 = \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

y las matrices

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{1L}^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt}) = \begin{bmatrix} 0 & -H_{CR} \\ H_{RL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\varphi_t^{-1}(-H_{RR}i_{Rc} - H_{RL}\nabla_\phi H_a(q, \phi)) \\ -\varphi_c^{-1}(H_{1R}^T e_1 + H_{RR}^T v_{Rt} + H_{CR}^T \nabla_q H_a(q, \phi)) \end{bmatrix}$$

sujeto a la restricción (3.16).

Ahora bien, derivando respecto al tiempo a la energía almacenada total del circuito  $H_a(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema (3.17) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{H}_a &= (\nabla_x H_a(x))^T \dot{x} \\ &= (\nabla_x H_a(x))^T \mathbb{J} \nabla_x H_a(x) (\nabla_x H_a(x))^T \mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt}) + (\nabla_x H_a(x))^T \mathbb{G} E_1 \\ &= (\nabla_x H_a(x))^T \mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt}) + (\nabla_x H_a(x))^T \mathbb{G} E_1 \end{aligned}$$

de donde si la entrada  $e_1$  es cero, entonces

$$\dot{H}_a = (\nabla_x H_a(x))^T \mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt}) \quad (3.19)$$

cuyo signo no está definido. Aunque en este contexto general no es posible establecer ninguna conclusión acerca de las propiedades de estabilidad para las trayectorias admisibles de (3.17), esta expresión pone en evidencia el hecho de que la estabilidad depende de las matrices  $H_{CR}$ ,  $H_{RL}$ ,  $H_{RR}$  y  $H_{1R}$ . A continuación se desarrollan algunos casos de interés que permiten incorporar propiedades al vector  $\mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt})$ .

#### 3.1.1. Modelo Hamiltoniano Lineal

Para iniciar con el caso más simple, esta subsección se concentra en la situación donde las resistencias tienen relaciones constitutivas *lineales*, tales que

$$i_{Rt} = -R_t^{-1} v_{Rt}, \quad v_{Rc} = -R_c i_{Rc} \quad (3.20)$$

donde  $R_t^{-1} = \text{diag}\{R_{it}^{-1}\} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n_3$ , con entradas las resistencias de árbol y  $R_c = \text{diag}\{R_{ic}\} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n_4$  las resistencias de co-árbol; hemos asumido, tal como lo hace Van der Schaft [85], que las resistencias son positivas. De este modo, a partir de (3.4) los voltajes  $v_{Rt}$  y las corrientes  $i_{Rc}$  pueden ponerse en

términos de las variables de puerto como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{Rt} \\ i_{Rc} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{n_3} & R_t H_{RR} \\ -R_c^{-1} H_{RR}^T & I_{n_4} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -R_t H_{RL} \\ R_c^{-1} H_{CR}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_a \\ \nabla_\phi H_a \end{bmatrix} \right. \\ &\left. + \begin{bmatrix} 0 \\ R_c^{-1} H_{1R}^T e_1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

con las matrices identidad  $I_{n_3} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$ ,  $I_{n_4} \in \mathbb{R}^{n_4 \times n_4}$ . Consecuentemente, el modelo (3.14), (3.21) permite ser expresado equivalentemente como un sistema Hamiltoniano controlado por puerto con disipación (PCHD), como el de la ecuación (2.23) del capítulo anterior,

$$\dot{x} = [J - R] \nabla_x H_a(x) + GE_1 \quad (3.22)$$

donde se han incorporado las definiciones (3.18) y se han definido las matrices

$$J = \begin{bmatrix} 0 & J_{12} \\ -J_{12}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.23a)$$

$$G = \begin{bmatrix} -H_{CR} [R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR}]^{-1} H_{1R}^T & 0 \\ H_{1L}^T - H_{RL}^T R_t H_{RR} [R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR}]^{-1} H_{1R}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23b)$$

con  $J = -J^T$ ,  $R = R^T$  y

$$\begin{aligned} J_{12} &= H_{CR} [R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR}]^{-1} H_{RR}^T R_t H_{RL} - H_{CL} \\ R_1 &= H_{CR} [R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR}]^{-1} H_{CR}^T \\ R_2 &= H_{RL}^T [R_t^{-1} + H_{RR} R_c^{-1} H_{RR}^T]^{-1} H_{RL}. \end{aligned}$$

Cabe aclarar que aún cuando se han supuesto resistencias lineales, las relaciones constitutivas de los elementos almacenadores pueden ser no-lineales. Más aún, dada la linealidad de las resistencias, la condición (3.19) se vuelve

$$\dot{H}_a = (\nabla_x H_a(x))^T R \nabla_x H_a(x) \leq 0. \quad (3.24)$$

Luego, como  $R = R^T > 0$  y de acuerdo al Lema 1 una solución  $x^*$  de  $y = \nabla_{x^*} H_a(x^*) = 0$  será asintóticamente estable si el sistema es estado cero detectable, considerando como salida a la variable  $y$ , mientras que  $x^* = \operatorname{argmin}\{H_a(x)\}$ .

## 3.2. Propiedades Estructurales Para Estabilidad de Circuitos Eléctricos

El propósito de esta sección es identificar condiciones de estabilidad cuando la entrada  $E_1$  es diferente de cero. Antes de hablar de estas posibles propiedades, es necesario presentar el conjunto de trayectorias del estado  $x^*$  que satisfacen las restricciones del modelo, esto es definir las *trayectorias admisibles*.

**Definición 12.** *Considere al sistema*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (3.25)$$

una trayectoria  $x^*$  de (3.25) es admisible o realizable si y sólo si existe una entrada  $u^*$  que haga que el estado del sistema satisfaga  $x = x^*$ . En caso de no existir una  $u^*$  que satisfaga lo anterior, entonces la trayectoria  $x^*$  no es realizable.

De manera general, para la clase de circuitos eléctricos en estudio, estas trayectorias son solución de

$$\dot{x}^* = \mathbb{J}\nabla_{x^*} H_a(x^*) + \mathbb{F}(x^*, e_1^*, i_{Rc}^*, v_{Rt}^*) + \mathbb{G}E_1^*, \quad (3.26)$$

donde se ha asumido implícitamente la existencia de una entrada  $e_1^*$  que genera el comportamiento  $x^*$ . Estas trayectorias admisibles, dependen de la matriz fundamental de loops, por lo que los resultados que se presentan a continuación prestan atención en la estructura de esta matriz que garantice propiedades de estabilidad.

### 3.2.1. Análisis de Estabilidad: Seguimiento de Trayectorias

En esta subsección se examina el caso más general que es el de seguimiento de trayectorias  $x^*(t)$ , esta generalidad viene con el precio de que el modelo considerado es el más simple en el sentido de que todos sus elementos son lineales. En otras palabras, se identifican condiciones sobre la matriz fundamental de loops  $H$  que garanticen el seguimiento de una solución variante con el tiempo de (3.26), pero este resultado aplica sólo cuando el modelo (3.22) tiene asociada a la función de energía  $H_a(q, \phi) \mathbb{R}^{n_2+n_5} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$H_a(q, \phi) = \frac{1}{2}\phi^T L^{-1}\phi + \frac{1}{2}q^T C^{-1}q,$$

con matrices positivas y diagonales  $C \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_5}$  y  $L \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_5}$ , lo que evidentemente implica relaciones de puerto lineales  $v_C = C^{-1}q$ ,  $i_L = L^{-1}\phi$  para los

elementos almacenadores. Equivalentemente, la función  $H_a(x)$  se puede escribir como

$$H_a(x) = \frac{1}{2}x^T P x, \quad (3.27)$$

donde  $P = \text{diag}\{C^{-1}, L^{-1}\} = P^T > 0$  y bajo esta estructura es claro que

$$\nabla_x H_a(x) = P x.$$

Así pues, considere la red eléctrica lineal descrita por (3.22) y (3.27) donde la entrada  $e_1^*(t)$  es una función del tiempo, tal que sus trayectorias admisibles están dadas por

$$\dot{x}^* = [J - R]P x^* + G E_1^* \quad (3.28)$$

y considere la definición clásica del error de seguimiento  $\tilde{x} := x - x^*$ ; con lo que se puede escribir la dinámica del circuito en términos de esta nueva variable como

$$\dot{\tilde{x}} = [J - R] \nabla_{\tilde{x}} H_a(\tilde{x}) + G \tilde{E}_1, \quad (3.29)$$

donde se han usado  $\tilde{x} = [\tilde{q} \ \tilde{\phi}]^T$ ,  $\tilde{E} = E - E^*$ , las identidades  $\tilde{v}_C = \nabla_{\tilde{x}_1} \tilde{H}_a(\tilde{x}) = C^{-1} \tilde{q}$ ,  $\tilde{i}_L = \nabla_{\tilde{x}_2} H_a(\tilde{x}) = L^{-1} \tilde{\phi}$  y la función  $\tilde{H}_a(\tilde{x}) : \mathbb{R}^{n_2+n_5} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  dada por

$$\tilde{H}_a(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P \tilde{x}. \quad (3.30)$$

Es importante notar que la definición del error anterior permite transformar el problema de seguimiento en uno de regulación del punto de equilibrio  $\tilde{x} = 0$ . En la siguiente proposición se muestra que para una cierta topología, las trayectorias admisibles tienen propiedades de estabilidad asintótica.

**Proposición 1.** *Considere el circuito eléctrico con elementos lineales sobre un grafo (3.22) y (3.27), con  $e_1(t)$  variante con el tiempo, tal que su comportamiento en estado estacionario (3.28) está bien definido. Bajo estas condiciones,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0$$

si

$$\ker\{H_{CR}^T\} = \ker\{H_{RL}\} = 0. \quad (3.31)$$

*Prueba.* Dado que el propósito es analizar las propiedades de estabilidad del origen  $(\tilde{x}, \tilde{e}_1) = (0, 0)$  de (3.29), se puede considerar a  $\tilde{H}_a(\tilde{x})$  definida en (3.30) como candidata a función de Lyapunov. Note que los puntos de equilibrio  $(\tilde{x}, \tilde{e}_1) = (0, 0)$  de (3.29) son un mínimo global de (3.30) y que la derivada temporal de  $\tilde{H}_a(\tilde{q}, \tilde{\phi})$  a lo largo de las trayectorias del sistema (3.29), bajo  $e_1 = e_1^*$ , está dada

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

por

$$\dot{\tilde{H}}_a = -(\nabla \tilde{H}_a(\tilde{x}))^T R (\nabla \tilde{H}_a(\tilde{x})) \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} &= -\tilde{v}_C^T H_{CR} [R_{11}]^{-1} H_{CR}^T \tilde{v}_C - \tilde{i}_L^T H_{RL}^T [R_{22}]^{-1} H_{RL} \tilde{i}_L \leq 0 \\ &= -z^T R_T^{-1} z \end{aligned} \quad (3.33)$$

con  $R_T = \text{diag}\{R_{11}, R_{22}\}$  y a su vez

$$R_{11} = R_c + H_{RR}^T R_t H_{RR} \quad (3.34a)$$

$$R_{22} = R_t^{-1} + H_{RR} R_c^{-1} H_{RR}^T \quad (3.34b)$$

son positivas definidas, mientras que

$$z = \begin{bmatrix} H_{CR}^T \tilde{v}_C \\ H_{RL} \tilde{i}_L \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

La prueba termina al notar que el máximo conjunto invariante donde  $\dot{\tilde{H}}_a = 0$  está dado por  $z = 0$  o también

$$\varepsilon_1 = \left\{ x \mid H_{CR}^T \nabla_{\tilde{q}} \tilde{H}_a = 0, H_{RL} \nabla_{\tilde{\phi}} \tilde{H}_a \right\} \quad (3.36)$$

entonces, para garantizar que  $\tilde{v}_C = 0$  y  $\tilde{i}_L = 0$  son las únicas soluciones de la última condición, se tiene que  $\ker\{H_{CR}^T\} = \ker\{H_{RL}\} = 0$  que dependen directamente de la topología del circuito y aseguran estabilidad asintótica de  $(\tilde{x}, \tilde{e}_1) = (0, 0)$ . □

Una propiedad interesante que queda de manifiesto en la prueba de la Proposición 1 es que la propiedad de detectabilidad de estado cero, que pudo ser invocada en (3.33) para concluir estabilidad asintótica, ha sido recuperada, vía (3.2.2), en términos estructurales del sistema.

#### 3.2.2. Análisis de Estabilidad: Regulación

Se estudia en segunda instancia, el caso cuando la entrada  $e_1^*$  es constante, pero el modelo tiene elementos almacenadores *no-lineales*. En este escenario las trayectorias admisibles son los puntos de equilibrio de (3.22), que pueden ser escritos como

$$-R_1 v_C^* + J_{12} i_L^* + G_1 e_1^* = 0 \quad (3.37a)$$

$$-J_{12}^T v_C^* - R_2 i_L^* + G_2 e_1^* = 0 \quad (3.37b)$$

donde  $G_1$  y  $G_2$  son las entradas del vector  $G$  introducidos en (3.23b) y se han usado las expresiones de las variables de puerto (3.8a) y (3.8b). A continuación, se estudian las propiedades de estabilidad para el sistema (3.37).

**Proposición 2.** *Considere el circuito eléctrico definido sobre un grafo (3.22) con  $e_1^*$  una entrada constante. Adicionalmente, asuma que:*

- (A.1) *Las resistencias del circuito están caracterizadas por relaciones constitutivas lineales tales que (3.20) se satisface.*
- (A.2) *El punto de equilibrio  $x^*$  correspondiente a  $e_1^*$  satisface localmente que  $x^* = \operatorname{argmin}\{H_a(x)\}$ .*

*Bajo estas condiciones, el punto de equilibrio  $(x^*, u^*)$ , solución de (3.37a) y (3.37b), es localmente asintóticamente estable si*

$$\ker\{H_{CR}^T\} = \ker\{H_{RL}\} = 0 \quad (3.38)$$

*Prueba.* En este caso, la función de energía almacenada total  $H_a$  es una función no-lineal. Si se satisface la suposición A.2, entonces siguiendo las ideas reportadas por Jayawardhana *et al.* [38], es posible considerar a  $H_0 : \mathbb{R}^{n_2+n_5} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , definida como

$$H_0(x) = H_a(x) - x^T \nabla_{x^*} H_a(x^*) - (H_a(x^*) - x^{*T} \nabla_{x^*} H_a(x^*)) \quad (3.39)$$

donde  $H_a(x)$  es la función de almacenamiento de energía del circuito. Usando la ecuación (3.3.1) y la convexidad de  $H_a(x)$  se tiene que

$$\nabla_x H_0(x) = \nabla_x H_a(x) - \nabla_{x^*} H_a(x^*) \quad (3.40a)$$

$$\nabla_x^2 H_0(x) = \nabla_x^2 H_a(x) \geq 0 \quad (3.40b)$$

lo anterior muestra que también  $H_0(x)$  es convexa, lo que implica que es no-negativa. Además, de la primera parte de (3.40) se tiene que evaluada en el equilibrio  $\nabla H_0(x^*) = 0$ , por lo que  $x^*$  es un punto mínimo local<sup>1</sup> de  $H_0(x)$ . Tome entonces a (3.3.1) como candidata a función de Lyapunov, su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema (3.22) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 = & -(\nabla H_a(x) - \nabla H_a(x^*))^T R (\nabla H_a(x) - \nabla H_a(x^*)) + \\ & + (\nabla_x H(x) - \nabla_{x^*} H_a(x^*))^T G (E_1 - E_1^*) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Si se asume además que  $H_a(x)$  es estrictamente convexa es suficiente para asegurar que  $H_0(x)$  es propia y tiene un mínimo único y global en  $x^*$ .

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

de manera que si la entrada  $e_1 = e_1^*$ , entonces

$$\dot{H}_0 = -(\nabla_x H_a(x) - \nabla_{x^*} H_a(x^*))^T R (\nabla_x H_a(x) - \nabla_{x^*} H_a(x^*)) \leq 0$$

que en términos de las variables de puerto (3.8a), (3.8b) y la estructura de la matriz  $R$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} \dot{H}_0(x) = & - (v_C - v_C^*)^T H_{CR} [R_{11}]^{-1} H_{CR}^T (v_C - v_C^*) \\ & - (i_L - i_L^*)^T H_{RL}^T [R_{22}]^{-1} H_{RL} (i_L - i_L^*) \leq 0 \end{aligned}$$

donde las matrices  $R_{11}$  y  $R_{22}$  han sido definidas en (3.34a) y son positivas definidas. Finalmente, siguiendo un procedimiento similar al de la Proposición 1, tomando la estructura de  $R_{11}$  y  $R_{22}$ , es posible escribir

$$\dot{H}_0(x) = -z^T R_T^{-1} z$$

con

$$z = \begin{bmatrix} H_{CR}^T \tilde{v}_C \\ H_{RL} \tilde{i}_L \end{bmatrix}.$$

La prueba termina al notar que el máximo conjunto invariante donde  $\dot{H}_a = 0$  está dado por  $z = 0$ .

□

Es importante reconocer que  $H_0$  sólo califica como función de Lyapunov al considerar puntos de equilibrio, por lo que el resultado anterior está hecho sólo para regulación. Así pues, hasta este momento se han presentado dos casos de interés en el análisis de estabilidad, entradas variantes en el tiempo y entradas constantes. En ambos casos, la condición de estabilidad es la misma y está en términos de las propiedades de las matrices de interconexión, en particular es suficiente que se cumpla (3.38). Motivados por los resultados topológicos anteriores enseguida se presentan un par de proposiciones sobre la estructura de la red que serán aprovechadas a lo largo de esta tesis.

#### 3.2.3. Propiedades Estructurales de la Red

Aún cuando existen numerosas posibilidades para que (3.38) se cumpla, una que llama la atención tiene que ver con el modelado *usual* de las pérdidas en los capacitores y en los inductores. Así, es objetivo de esta subsección analizar estructuras de la matriz fundamental de loops  $H$  que cumplan con las condiciones anteriores.

**Proposición 3.** *Permita que las pérdidas en los inductores se modelen como resistores que se les conectan en serie, considere que estos resistores son las re-*

sistencias de árbol  $R_t$ , entonces

$$H_{RL} = I_{n_3} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}; \quad H_{RR} = 0_{n_3 \times n_4} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_4} \quad (3.41)$$

con  $I_{n_3}$  la matriz identidad y  $0_{n_3 \times n_4}$  una matriz de ceros.

*Prueba.* Bajo las condiciones en la proposición, existe una correspondencia uno a uno entre los inductores y las resistencias de árbol, por lo tanto  $n_3 = n_5$ . Note además, de la ecuación de flujos (3.4), que la corriente

$$i_{Rt} = H_{RR}i_{Rc} + H_{RL}i_L.$$

Además, para cada inductor su corriente será igual a la de la resistencia de árbol que tenga conectada en serie, por lo que  $i_L = i_{Rt}$  y entonces  $H_{RR}$  debe ser una matriz de ceros, mientras que  $H_{RL}$  la identidad. □

**Proposición 4.** *Permita que las pérdidas en los capacitores sean modeladas como resistencias que se les conectan en paralelo y que estas resistencias  $R_c$  sean las del co-árbol, entonces*

$$H_{CR} = I_{n_2} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}; \quad H_{1R} = 0_{n_1 \times n_2} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \quad (3.42)$$

con  $I_{n_2}$  una matriz identidad y  $0_{n_1 \times n_2}$  una matriz llena de ceros.

*Prueba.* Bajo las condiciones en la proposición, existe una correspondencia uno a uno entre los capacitores y las resistencias de co-árbol, por lo tanto  $n_2 = n_4$ . Note además, de la ecuación de esfuerzos (3.4), que el voltaje

$$v_{Rc} = H_{1R}^T v_1 + H_{CR}^T v_c + H_{RR} v_{Rt}.$$

También debido a la conexión asumida, para cada capacitor su voltaje será igual al de la resistencia de co-árbol conectado en paralelo, es decir, se debe cumplir que  $v_C = v_{Rc}$  con lo que  $H_{RR}$  debe ser una matriz de ceros, mientras que  $H_{CR}$  una matriz identidad. □

### 3.3. Modelo Hamiltoniano No-Lineal

Las restricciones topológicas enunciadas en la Subsección 3.2.3 toman una primer importancia al sustituirlas en el modelo (3.17) y en particular en el argumento de las funciones de disipación  $\mathbb{F}(x, e_1, i_{Rc}, v_{Rt})$ . Esta función bajo las

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

Proposiciones 3 y 4 toma la forma conveniente

$$\mathbb{F}(x) = \begin{bmatrix} 0 & -H_{CR} \\ H_{RL}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\varphi_t^{-1}(\nabla_\phi H_a(q, \phi)) \\ -\varphi_c^{-1}(\nabla_q H_a(q, \phi)) \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

lo que permite que el modelo no-lineal (3.17) sea drásticamente simplificado y se pueda escribir de forma Hamiltoniana como

$$\dot{x} = J\nabla_x H_a(x) + \begin{bmatrix} g & g_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ u_R \end{bmatrix} \quad (3.44a)$$

$$\begin{bmatrix} y \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^T \nabla_x H_a(x) \\ g_R^T \nabla_x H_a(x) \end{bmatrix} \quad (3.44b)$$

con  $u_R = -F(\nabla_x H_a(x))$ , las definiciones (3.18) y las matrices

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{1L}^T & 0 \end{bmatrix}; \\ g_R = \begin{bmatrix} 0 & H_{CR} \\ H_{RL}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad F(\nabla_x H_a(x)) = \begin{bmatrix} \varphi_t^{-1}(i_L) \\ \varphi_c^{-1}(v_C) \end{bmatrix}$$

Una de las principales implicaciones de las Propiedades 3 y 4 se refleja en el hecho de que la disipación sólo depende del estado del sistema. Lo anterior, junto con la estructura antisimétrica de  $J$  permitirá relajar las suposiciones sobre la estructura de  $\varphi_t(\cdot)$  y  $\varphi_c(\cdot)$ .

Por su parte, ahora las trayectorias admisibles de (3.44a) están dadas por las  $x^* \in \mathbb{R}^{n_2+n_5}$  solución de

$$\dot{x}^* = J\nabla_{x^*} H_a(x^*) + \begin{bmatrix} g & g_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^* \\ u_R^* \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

con  $e_1^* \in \mathbb{R}^{n_1}$  el voltaje de la fuente que genera a  $x^*$ . En este caso no-lineal, el análisis de estabilidad que se presenta a continuación considera que la entrada  $e_1$  es constante.

#### 3.3.1. Análisis de Estabilidad

Cuando la entrada  $e_1$  es constante, las trayectorias admisibles (3.45) son los puntos de equilibrio de

$$J\nabla_{x^*} H_a(x^*) + \begin{bmatrix} g & g_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^* \\ u_R^* \end{bmatrix} = 0. \quad (3.46)$$

Aún cuando los puntos de equilibrio del sistema son dependientes de la entrada y por lo tanto son múltiples, también en este caso es posible caracterizar la topología del circuito que garantice propiedades de estabilidad asintótica, como se muestra en la siguiente proposición,

**Proposición 5.** *Considere un circuito eléctrico sobre un grafo con modelo Hamiltoniano (3.44a) donde se cumplen las Proposiciones 3 y 4. Asuma que A.2 es cierta y adicionalmente que*

*A.3 Los mapeos  $\varphi_t(\cdot)$  y  $\varphi_c(\cdot)$  definen mapeos incrementalmente pasivos a la salida tal que*

$$(x_1 - x_2)^T (\varphi_c^{-1}(x_1) - \varphi_c^{-1}(x_2)) > 0 \quad (3.47a)$$

$$(x_1 - x_2)^T (\varphi_t^{-1}(x_1) - \varphi_t^{-1}(x_2)) > 0 \quad (3.47b)$$

*se satisfacen para todo  $x_1 \neq x_2$ . Bajo estas condiciones, el punto de equilibrio  $(x^*, e_1^*)$  es localmente asintóticamente estable.*

*Prueba.* Una vez más considere como candidata a función de Lyapunov la función incremental  $H_0 : \mathbb{R}^{n_2+n_5} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definida como

$$H_0(x) = H_a(x) - x^T \nabla_{x^*} H_a(x^*) - (H_a(x^*) - x^{*T} \nabla_{x^*} H_a(x^*))$$

un cálculo directo muestra que su derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (3.44a), bajo la condición  $e_1 = e_1^*$ , implica

$$\dot{H}_0(x) = -(\nabla_x H_a(x) - \nabla_{x^*} H_a(x^*))^T g_R(F(x) - F(x^*))$$

y usando las identidades (3.8a), (3.8b) puede ser escrito de manera equivalente como

$$\begin{aligned} \dot{H}_0(x) = & -(\varphi_c^{-1}(v_C) - \varphi_c^{-1}(v_C^*))^T (v_C - v_C^*) \\ & -(\varphi_t^{-1}(i_L) - \varphi_t^{-1}(i_L^*))^T (i_L - i_L^*) \end{aligned}$$

la cual es negativa definida dado que A.3 se cumple. Más aún, el conjunto invariante más grande para el cual  $\dot{H}_0(x) = 0$  está definido por

$$\varepsilon_3 = \{x \mid (\nabla_q H_a - \nabla_{q^*} H_a(x^*)) = 0, (\nabla_\phi H_a - \nabla_{\phi^*} H_a(x^*)) = 0\} \quad (3.48)$$

lo que concluye la prueba. □

Evidentemente las condiciones en (3.48) coinciden con las obtenidas para el caso lineal en (3.36) y (3.38) bajo las condiciones de las Proposiciones 3 y 4.

### 3.4. Caracterización del Estado Estable

En las secciones anteriores se han establecido criterios generales sobre la topología que permiten determinar condiciones de estabilidad de trayectorias admisibles del sistema. En esta sección, el interés está en la precisión de dichas trayectorias. Con este fin, es importante notar que aún cuando se tienen señaladas las características de las matrices para estabilidad, con el objetivo de encontrar explícitamente las soluciones de (3.45) es necesario tener también expresamente la regla de correspondencia de las relaciones constitutivas de los resistores; una forma de lidiar con lo anterior es suponer que las resistencias son lineales, por lo que los resultados que se presentan son para este caso. Así pues, bajo las Proposiciones 3 y 4, las ecuaciones (3.37a) y (3.37b) toman la forma

$$\begin{bmatrix} -R_c^{-1} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & -R_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C^* \\ i_L^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -H_{1L}^T \end{bmatrix} e_1^*, \quad (3.49)$$

y como  $R_c$  y  $R_t$  son matrices diagonales, entonces se cumple que

$$\begin{bmatrix} v_C^* \\ i_L^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_c^{-1} & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & -R_t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -H_{1L}^T \end{bmatrix} e_1^*.$$

Luego, después de algunas manipulaciones, puede obtenerse que los voltajes de capacitor son

$$v_C^* = [R_c^{-1} + H_{CL}R_t^{-1}H_{CL}^T]^{-1} H_{CL}R_t^{-1}H_{1L}^T e_1^* \quad (3.50)$$

Como primer punto hay que observar que, además de los parámetros involucrados, los puntos de equilibrio quedan especificados por la estructura de las matrices  $H_{CL}$  y  $H_{1L}^T$ ; dicho lo anterior, la siguiente subsección detalla propiedades de estas matrices.

#### 3.4.1. Estructuras Topológicas de Redes Típicas

El propósito de esta sección es explotar el hecho de que cada submatriz de la matriz fundamental de loops define el comportamiento dinámico del circuito. Esta caracterización se realiza para una clase práctica de circuitos eléctricos que incluyen redes típicas de SEPs. Así, una vez precisada la estructura de la matriz fundamental de loops, es posible determinar de manera sistemática las propiedades de estabilidad y el comportamiento en estado estacionario de la red.

Para poder formular los resultados, se considera primero una red genérica que captura de manera unificada las características de las redes típicas, para después presentar los casos particulares. Suponga entonces que se preservan las condiciones dadas en las Proposiciones 3 y 4. Entonces, el modelo dinámico de

la red se representa por el modelo (3.44a) donde quedan por caracterizar las matrices  $H_{CL} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_5}$  que contempla las conexiones entre los capacitores y los inductores y  $H_{1L} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_5}$  con las conexiones entre las fuentes y los inductores.

Considere que los  $n_5$  inductores están divididos en tres tipos:  $n_r$   $r$ -inductores que están en una trayectoria que conecta una fuente con un capacitor,  $n_s$   $s$ -inductores que están en una trayectoria que conecta una fuente con otra fuente y  $n_p$   $p$ -inductores en una trayectoria que conecta un capacitor con otro capacitor, de manera que  $n_r + n_s + n_p = n_5$ . Más aún, considere que los capacitores pertenecen a alguno de los siguientes casos

**C.1** El  $i$ -ésimo capacitor, con  $i = 1, \dots, n_2$ , comparte cutset con  $r_i$   $r$ -inductores.

**C.2** El  $i$ -ésimo capacitor, con  $i = 1, \dots, n_2$ , comparte cutset con  $s_i$   $s$ -inductores.

Mientras que los voltajes de las fuentes satisfacen

**C.3** La  $i$ -ésima fuente de voltaje, con  $i = 1, \dots, n_2$ , comparte cutset con  $m_i$   $m_i \in \{1, \dots, n_1\}$  inductores.

Entonces, la matriz de inductancias  $L$  puede dividirse como

$$L = \text{diag} \{ \Lambda_r, \Lambda_s, \Lambda_p \} \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_5}, \quad (3.51)$$

donde  $\Lambda_r$  es una matriz diagonal con  $z$  bloques, i.e.  $\Lambda_r = \text{diag} \{ L_1, L_2, \dots, L_z \} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$  donde cada bloque es a su vez una matriz diagonal  $L_i \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$  con  $r_i$  el número de  $r$ -inductancias en el cutset básico del  $i$ -ésimo capacitor e  $i = 1, 2, \dots, z$ . Debido a las Propiedades 3 y 4, la dimensión de la matriz de resistencias en serie con los inductores  $R_t$  es  $n_5 \times n_5$ , dado que  $n_3 = n_5$ , por lo que esta matriz de resistencias puede dividirse de la misma manera.

Esto es, las variables asociadas con los capacitores y los inductores pueden organizarse tal que, por un lado, los renglones de  $H_{CL}$  están divididos en dos bloques, el primero que corresponde a los capacitores que cumplen simultáneamente con las condiciones **C.1** y **C.2** y el segundo con aquellos capacitores que sólo cumplen con la condición **C.2**. Por otro lado, las columnas de  $H_{CL}$  están divididas en tres bloques, cada uno correspondiente a los inductores tipo  $r$ ,  $s$  ó  $p$ . Además, se agruparán los  $r$ -inductores para cada capacitor involucrado en **C.1**.

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

Si siguiendo esta organización, la matriz  $H_{CL}$  puede escribirse como

$$-H_{CL} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r_1}^T & 0 & \cdots & 0 & 0_s & N_1 \\ 0 & \mathbf{1}_{r_2}^T & \cdots & 0 & 0_s & N_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1}_{r_z}^T & 0_s & N_z \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0_s & N_{z+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0_s & N_{n_2} \end{bmatrix}; \quad (3.52)$$

con  $\mathbf{1}_{r_i}^T \in \mathbb{R}^{1 \times r_i}$  un vector lleno de unos denotando la condición propuesta en **C.1**, donde se cumple que  $r_1 + r_2 + \dots + r_z = n_r$ . Las columnas con entradas  $0_s$  son vectores llenos de ceros de dimensión  $1 \times n_s$  y reflejan el hecho de que ningún capacitor puede ser conectado a un inductor tipo  $s$ . En este sentido, los vectores renglón  $N_i \in \mathbb{R}^{1 \times n_p}$  incluyen la posibilidad de que un capacitor dado puede conectarse de manera simultánea a inductores tipo  $r$  y tipo  $p$ . Específicamente, si el  $i$ -ésimo capacitor está conectado a uno de los inductores  $p$  aparecerá un 1 en la entrada correspondiente, de otra forma aparecerá un 0. Si el capacitor sólo cumple con **C.1**, entonces el vector  $N_i$  es cero. Mientras que en los renglones que van de  $z + 1$  a  $n_2$  sólo aparecen vectores  $N_i$  porque corresponden a capacitores de la clase **C.2**. Consecuentemente, aparecen dos propiedades:

- Cada columna de la matriz  $N = \text{col} \{N_1, \dots, N_{n_2}\} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_p}$  tiene sólo un 1 y un -1.
- El vector  $\mathbf{1}_{n_2}$  es un vector propio izquierdo de  $N$  asociado al valor propio derecho 0, tal que  $\mathbf{1}_{n_2}^T N = 0$ .

Referente a la matriz  $H_{1L}^T \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_1}$ , se tiene que

$$i_1 = -H_{1L} i_L$$

tomando en cuenta que  $H_{1R} = 0$ , por lo que los renglones de la matriz  $H_{1L}^T$  se pueden dividir en tres bloques que corresponden a los inductores tipo  $r$ ,  $s$  y  $p$ , donde el tercero es cero debido a que las fuentes no están en el cutset donde los inductores tipo  $p$  están involucrados. Por lo anterior, la matriz se puede escribir como

$$H_{1L}^T = \begin{bmatrix} M_r \\ M_s \\ 0_p \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

donde, con un abuso de notación,  $0_p$  es una matriz llena de ceros de dimensión  $n_p \times n_1$ . Las entradas diferentes de cero para cada columna de  $M_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_1}$

muestran las conexiones de fuentes con inductores tipo  $r$ . Además, de manera consecuente con la partición de la matriz  $H_{CL}$ , que a su vez viene de **C.1**,  $M_r$  puede dividirse en  $z$  secciones, cada una de dimensión  $r_i \times n_1$ , estas secciones  $M_{r_i}$ , con  $i = 1, \dots, z$ , están formadas por vectores columna  $\beta_{ij} = \text{col}(\beta_{ij}^k) \in \mathbb{R}^{r_i}$ , con  $j = 1, \dots, n_1$ , lo que conduce a

$$M_r = \begin{bmatrix} M_{r_1} \\ M_{r_2} \\ \vdots \\ M_{r_z} \end{bmatrix}; \quad M_{r_i} = [\beta_{i1} \quad \cdots \quad \beta_{in_1}] \in \mathbb{R}^{r_i \times n_1}; \quad (3.54)$$

y a su vez  $\beta_{ij}^k \in \mathbb{R}$  para  $k = 1, \dots, r_i$ ,  $i = 1, \dots, z$ . Las propiedades de esta matriz son las siguientes:

- Dado que una fuente puede ser conectada sólo a un inductor tipo  $r$ , el  $k$ -ésimo renglón de  $M_{r_i}$  tiene sólo una entrada diferente de cero y ésta aparece en una columna diferente respecto a los demás renglones.
- Las entradas diferentes de cero de cada columna de  $M_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_1}$  muestran que hay conexiones entre la fuente con otra fuente.
- La matriz  $0_p$  está llena de ceros y exhibe el hecho de que las fuentes no pueden ser conectadas con inductores tipo  $p$ .

Como consecuencia de esta estructura, se cumple la siguiente propiedad

**Proposición 6.** *El vector  $\mathbf{1}_{n_1} \in \mathbb{R}^{n_1}$  es un vector propio derecho de  $M_s$  asociado al valor propio  $\lambda = 0$  tal que  $M_s \mathbf{1}_{n_1} = 0$  es cierto.*

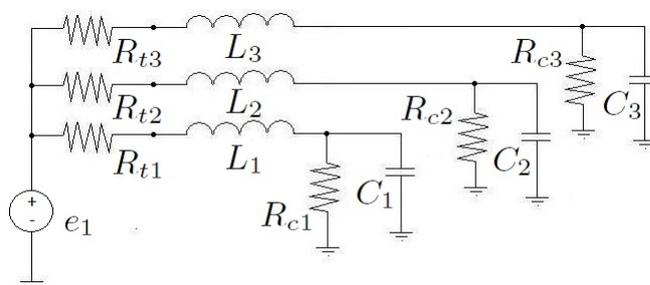
*Prueba.* Los renglones de la matriz  $M_s$  denotan cómo una fuente está conectada con otra fuente. Como para cada par de fuentes esta conexión es llevada a cabo con un inductor tipo  $s$ , la corriente deja un cutset y entra en otro, lo que se representa con un 1 y un -1 en la columna respectiva. La prueba termina con un cálculo directo. □

Observe que como consecuencia de las propiedades anteriores lo siguiente es cierto:

$$H_{CL}^T \mathbf{1}_{n_2} = -H_{1L}^T \mathbf{1}_{n_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r_1} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{r_z} \\ 0_s \\ 0_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_5} \quad (3.55)$$

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---



**Figura 3.1:** Ejemplo de Topología Radial

Como se dijo, las estructuras de interconexión típicas (incluidas la de los Sistemas Eléctricos de Potencia) presentan todas un arreglo como los anteriores. Por tal motivo, antes de presentar un análisis en estado estacionario, se introducen individualmente las topologías: Radial, anillo y malla.

#### *Topología Radial*

La red radial es la topología más simple de todas. Esta red tiene la propiedad de que sólo hay una trayectoria desde la fuente hasta las cargas. Pueden encontrarse varios subcircuitos, como se presenta en (Westinghouse [90]), pero con propósitos de análisis se considerará una sola fuente, en el contexto de este trabajo,  $n_1 = 1$ . En la literatura (ver por ejemplo el trabajo de Kundur *et al.* [42]), existen varias caracterizaciones de esta topología, sin embargo, en esta tesis se hace referencia a la más frecuente, retomada por Eminoglu y Hocaoglu [26], Gubina y Strmcnik [33]. Un ejemplo de esta red es la que se muestra en la Figura 3.1. Las siguientes son propiedades de este tipo de interconexión:

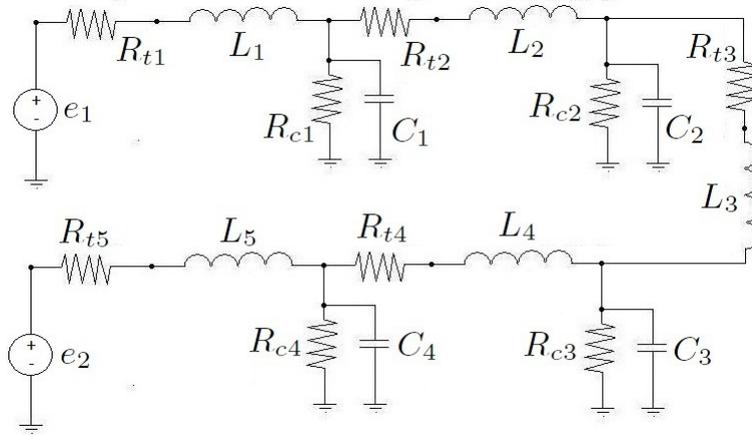
- Sólo hay inductores tipo  $r$  y hay un  $r$ -inductor en el cutset de cada capacitor, por lo que  $r_i = 1$ ,  $n_2 = n_5$  y las matrices de interconexión toman la forma:

$$H_{CL} = -I_{n_2} \quad H_{1L} = \mathbf{1}_{n_2}^T \quad (3.56)$$

#### *Topología Anillo*

Esta configuración es más confiable que la radial, puesto que tiene dos fuentes de alimentación, si una falla, la otra provee energía. Un ejemplo de esta red puede encontrarse en la Figura 3.2 y sus propiedades topológicas son:

- No hay inductores tipo  $s$  y sólo hay un  $r$ -inductor en el cutset de cada capacitor, por lo que  $r_i = 1$ .



**Figura 3.2:** Ejemplo de Topología Anillo

- Como sólo hay dos fuentes  $n_1 = 2$ , con lo que  $n_r = 2$  y el número de capacitores que satisfacen de manera simultánea **C.1** y **C.2** es también 2.
- Debido a los puntos anteriores,  $n_p = n_2 - 2$  por lo tanto, los primeros dos renglones de la matriz  $N$  son cero.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, las matrices  $H_{CL}$ ,  $H_{1L}$  están dadas por

$$-H_{CL} = \begin{bmatrix} I_2 & \bar{N}_1 \\ 0_4 & \bar{N}_2 \end{bmatrix}; \quad H_{1L}^T = \begin{bmatrix} \beta_{11}^1 & \beta_{12}^1 \\ \beta_{21}^1 & \beta_{22}^1 \\ 0_p & 0_p \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

en este caso  $0_4 \in \mathbb{R}^{n_2-2 \times 2}$ ,  $\bar{N}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times n_p}$  y  $\bar{N}_2 \in \mathbb{R}^{n_2-2 \times n_p}$ .

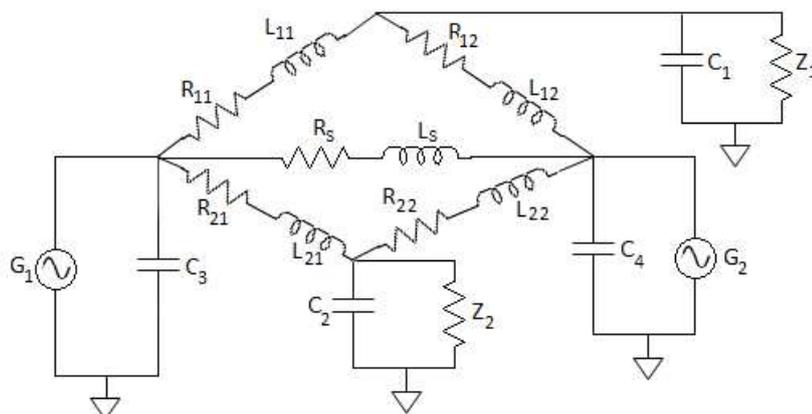
#### *Topología Malla*

La red malla es la más elaborada pero también la más confiable (Fiaz *et al.* [30]) puesto que cada carga (resistencia de co-árbol) se conecta a todas las fuentes y las fuentes también están conectadas entre ellas. Un ejemplo típico de esta red es la que se muestra en la Figura 3.3. Sus propiedades son:

- C.4** No hay inductores tipo  $p$  ni capacitores clase **C.2**.
- C.5** El número de fuentes es igual al número de capacitores, como consecuencia  $n_1 = n_2$ .
- C.6** Debido a que todas las fuentes están conectadas a todas las resistencias de co-árbol, entonces  $r_i = n_1$  para todo  $i = 1, \dots, n_r$ .

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---



**Figura 3.3:** Ejemplo de Topología Malla

Por consiguiente, bajo **C.4-6** se tiene que

$$H_{CL}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\mathbf{1}_{n_1} \\ 0_s & 0_s & \cdots & 0_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_1}, \quad (3.58)$$

con  $n_1$  el número de fuentes y  $n_s < n_1$  son las fuentes conectadas a otras fuentes. Por su parte, la matriz  $H_{IL}^T$  es como (3.53) sin el término  $0_{p \times n_1}$ .

Como puede verse, estas topologías típicas son un caso particular de las ecuaciones (3.52) y (3.53). Una vez especificadas las características de las matrices, el siguiente paso es caracterizar el estado estable o en otras palabras, las trayectorias admisibles, que como ya se mencionó se deben o bien a entradas constantes o a entradas variantes con el tiempo.

En la siguiente subsección se analizarán dos casos de interés, el primero tiene que ver con el análisis en estado senoidal permanente. Este análisis contempla la topología general dada por (3.52) y (3.53), donde el valor en estado estacionario depende de los parámetros del circuito eléctrico. Se presenta un segundo caso que relacionado con corriente directa, esto para la red típica más elaborada con la intención de mostrar que, como consecuencia de la topología, pueden obtenerse *condiciones de sincronización* en el circuito eléctrico. En ambos casos se presentan ejemplos numéricos para ilustrar el estudio.

### 3.4.2. Respuesta en Estado Senoidal Permanente

En esta subsección se estudia el estado estacionario cuando la entrada varía con el tiempo. En este sentido, un régimen de particular interés en circuitos eléctricos es el análisis en estado senoidal permanente, por lo que serán usadas algunas herramientas presentadas en el Capítulo 2 referentes al análisis fasorial. Para esto, se considera el sistema Hamiltoniano lineal RLC con entrada de voltaje senoidal  $e_1^*(t)$  y Hamiltoniano (3.27) cuyo análisis de estabilidad fue presentado en la Proposición 1. La respuesta en estado senoidal permanente puede ser fácilmente obtenida por medio del método de fasores (Desoer y Kuh [20]). Así pues, en lo subsecuente se asumirá que las corrientes y los voltajes son de la forma

$$f(t) = F \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(\mathbb{F} e^{j\omega t})$$

donde se ha definido el fasor  $\mathbb{F} = F e^{j\phi}$ . Debido a (3.27), el modelo lineal (3.45) permite ser reescrito como

$$P\dot{\mathbf{x}}^* = [J - R]\mathbf{x}^* + G\mathbf{e}_1^* \quad (3.59)$$

con la matriz de parámetros  $P = \text{diag}\{C, L\}$ , el vector de estados  $\mathbf{x}^* = [v_C^* \quad i_L^*]^T$  y las identidades  $i_L^* = L_a^{-1}\phi^*$ ,  $v_C^* = C^{-1}q^*$ . Escribiendo la ecuación (3.59) en términos de sus fasores se tiene que

$$\text{Re}[j\omega P\mathbb{X}^* e^{j\omega t} - (J - R)\mathbb{X}^* e^{j\omega t}] = \text{Re}(G\mathbb{E}_1^* e^{j\omega t})$$

por lo que

$$\mathbb{X}^* = [j\omega P - (J - R)]^{-1} G\mathbb{E}_1^* \quad (3.60)$$

En la última ecuación, es claro que el término  $[j\omega P - (J - R)]^{-1}$  depende explícitamente de la topología del circuito y bajo los términos propuestos en la Proposición 3 y 4 se expresa como

$$[sP - (J - R)]^{-1} = \begin{bmatrix} j\omega C + R_c^{-1} & H_{CL} \\ -H_{CL}^T & j\omega L + R_t \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

con  $s = j\omega \in \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  la matriz de capacitancias y  $L \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_5}$  la de inductancias. De tal modo que reemplazando la expresión anterior en (3.60) se llega al vector de funciones de transferencia

$$\mathbb{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbb{V}_C^* \\ \mathbb{I}_L^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 H_{1L}^T \mathbb{E}_1^* \\ A_4 H_{1L}^T \mathbb{E}_1^* \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

donde se ha usado el complemento de Schur para obtener las matrices

$$\begin{aligned} A_2 &= - [Y_{CR} + H_{CL}Y_{LR}H_{CL}^T]^{-1} H_{CL}Y_{LR} \\ A_4 &= Y_{LR} - Y_{LR}H_{CL}^T [Y_{CR} + H_{CL}Y_{LR}H_{CL}^T]^{-1} H_{CL}Y_{LR}; \end{aligned} \quad (3.62)$$

asimismo, se han involucrado a las matrices diagonales

$$\begin{aligned} Y_{CR} &= sC + R_c^{-1} > 0 \\ Y_{LR} &= (sL + R_t)^{-1} \\ &= s^{-1}(L + s^{-1}R_t)^{-1} \\ &= s^{-1}D \end{aligned}$$

donde derivado de la partición hecha para la matriz de inductancias (3.51), la matriz  $D \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_5}$  puede dividirse como  $D = \text{diag}\{D_r, D_s, D_p\}$ , con  $D_r = \text{diag}\{D_1, D_2, \dots, D_z\} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ . De manera general se puede escribir como

$$D = \begin{bmatrix} D_r & 0_1 & 0_2 \\ 0_1^T & D_s & 0_3 \\ 0_2^T & 0_3^T & D_p \end{bmatrix}$$

con las matrices de ceros  $0_1 \in \mathbb{R}^{n_r \times n_s}$ ,  $0_2 \in \mathbb{R}^{n_r \times n_p}$  y  $0_3 \in \mathbb{R}^{n_s \times n_p}$ .

El mapeo de interés está descrito por las ecuaciones (3.61) y (3.62); la siguiente proposición identifica las trayectorias admisibles para los voltajes de capacitor  $\mathbb{V}_C^*$ .

**Proposición 7.** *Considere el circuito eléctrico sobre un grafo (3.59) junto con la estructura de las matrices dadas por (3.52) y (3.53) y asuma que las condiciones C.1-C.3 se satisfacen. Entonces, la relación entrada/salida entre los fasores de voltaje de capacitor  $\mathbb{V}_C^*$  y voltaje de la fuente  $\mathbb{E}_1^*$  está dada por*

$$\mathbb{V}_C^* = -M^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_1} \left( \sum_{k=1}^{r_1} D_{1k} \beta_{1j}^k e_{1j}^* \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_1} \left( \sum_{k=1}^{r_z} D_{zk} \beta_{rj}^k e_{1j}^* \right) \\ 0_{(n_2-z)} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

con  $M = [s^2C + sR_c^{-1} + \text{diag}\{\mathbf{1}_{r_i}^T D_i \mathbf{1}_{r_i}, 0\} + \mathcal{L}]$ ,  $i = 1, \dots, z$ , el operador  $s = j\omega$ , la matriz diagonal  $D = (L + s^{-1}R_t)^{-1}$ , se han utilizado la definición de la matriz de inductancias  $L$ ,  $R_t$  en (3.51), la de la matriz Laplaciana simétrica  $\mathcal{L} \triangleq ND_p N^T \geq 0$  y se ha definido al vector de entradas  $\mathbb{E}_1^* = \text{col}\{e_{11}^*, \dots, e_{1n_1}^*\} \in \mathbb{R}^{n_1}$

*Prueba.* Por un lado, factorizando el escalar  $s = j\omega$ , la primera parte de (3.61) puede ser reescrita como

$$\mathbb{V}_C^* = - [s^2 C + s R_c^{-1} + H_{CL} D H_{CL}^T]^{-1} H_{CL} D H_{1L}^T \mathbb{E}_1^*, \quad (3.64)$$

haciendo uso de (3.52), la matriz  $H_{CL}$  se puede renombrar como

$$H_{CL} = \begin{bmatrix} \mathcal{J} & 0_6 & \bar{N}_1 \\ 0_4 & 0_5 & \bar{N}_2 \end{bmatrix}$$

con  $\mathcal{J} = \text{diag} \{ \mathbf{1}_{r_i}^T \} \in \mathbb{R}^{z \times n_r}$ , las matrices de ceros  $0_4 \in \mathbb{R}^{n_2 - z \times n_r}$ ,  $0_5 \in \mathbb{R}^{n_2 - z \times n_s}$  y  $0_6 \in \mathbb{R}^{z \times n_s}$ , así como  $\bar{N}_1 \in \mathbb{R}^{z \times n_p}$  y  $\bar{N}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 - z \times n_p}$ , por lo que el cálculo del producto  $H_{CL} D H_{CL}^T$  lleva a

$$\begin{aligned} H_{CL} D H_{CL}^T &= \begin{bmatrix} \mathcal{J} & 0_6 & \bar{N}_1 \\ 0_4 & 0_5 & \bar{N}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & 0_1 & 0_2 \\ 0_1^T & D_s & 0_3 \\ 0_2^T & 0_3^T & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{J}^T & 0_4^T \\ 0_6^T & 0_5^T \\ \bar{N}_1^T & \bar{N}_2^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{J} D_r \mathcal{J}^T + \bar{N}_1 D_p \bar{N}_1^T & \bar{N}_1 D_p \bar{N}_2^T \\ \bar{N}_2 D_p \bar{N}_1^T & \bar{N}_2 D_p \bar{N}_2^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que a su vez puede expresarse como

$$H_{CL} D H_{CL}^T = \text{diag} \{ \mathcal{J} D_r \mathcal{J}^T, 0 \} + N D_p N^T \quad (3.65)$$

$$= \text{diag} \{ \mathbf{1}_{r_1}^T D_1 \mathbf{1}_{r_1}, \dots, \mathbf{1}_{r_z}^T D_z \mathbf{1}_{r_z}, 0 \} + \mathcal{L} \quad (3.66)$$

con  $\mathcal{L} \triangleq N D_p N^T \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  la matriz Laplaciana ponderada (Bondy y Murty [14]) que cumple con que el vector  $\mathbf{1}_{n_2}$  es su vector propio derecho asociado a  $\lambda = 0$ , i.e.  $\mathcal{L} \mathbf{1}_{n_2} = 0$ . Finalmente, reemplazando la estructura para  $H_{1L}$ , el término  $H_{CL} D H_{1L}^T$  en (3.64) puede escribirse como

$$\begin{aligned} H_{CL} D H_{1L}^T &= \begin{bmatrix} \mathcal{J} & 0_6 & \bar{N}_1 \\ 0_4 & 0_5 & \bar{N}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & 0_1 & 0_2 \\ 0_1^T & D_s & 0_3 \\ 0_2^T & 0_3^T & D_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_r \\ M_s \\ 0_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{J} D_r M_r \\ 0_{(n_2 - z) \times n_1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

donde la submatriz  $\mathcal{J}D_r M_r \in \mathbb{R}^{z \times n_1}$  queda dada por

$$\mathcal{J}D_r M_r = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{r_1}^T D_1 M_{r_1} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{r_z}^T D_z M_{r_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r_1} D_{1k} \beta_{11}^k & \cdots & \sum_{k=1}^{r_1} D_{1k} \beta_{1n_1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{r_z} D_{zk} \beta_{r_1}^k & \cdots & \sum_{k=1}^{r_z} D_{zk} \beta_{rn_1}^k \end{bmatrix}$$

con lo que

$$H_{CL} D H_{1L}^T = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r_1} D_{1k} \beta_{11}^k & \cdots & \sum_{k=1}^{r_1} D_{1k} \beta_{1n_1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{r_z} D_{zk} \beta_{r_1}^k & \cdots & \sum_{k=1}^{r_z} D_{zk} \beta_{rn_1}^k \\ 0_{(n_2-z)} & \cdots & 0_{(n_2-z)} \end{bmatrix}$$

La prueba termina con la sustitución de las estructuras de arriba en la ecuación (3.64). □

Es importante remarcar que en este caso la condición de consenso no puede ser alcanzada directamente, no obstante es opinión de la autora de esta tesis que la estructura de (3.65) manifiesta las bases para desarrollar procedimientos sistemáticos de compensación que permitan alcanzar un resultado deseado. Por ejemplo, si resistores con un valor adecuado de impedancia son añadidos en conexión serie/paralelo con los resistores de árbol tal que la matriz (3.65) sea transformada en una forma como la exhibida por la ecuación (3.71) presentada en la siguiente subsección, entonces el problema de consenso podría ser resuelto. Actualmente esta dirección es parte del trabajo futuro.

#### ▪ Ejemplo

El siguiente es un ejemplo representativo donde se cumplen las suposiciones hechas para el análisis anterior, en donde se pueden tener propiedades de consenso. El circuito malla en la Figura 3.3 emula a una red eléctrica (Fiaz *et al.* [30]), con dos generadores simbolizados por fuentes, cinco líneas de transmisión representadas por el llamado modelo  $\Pi$  y dos cargas que se simbolizan como resistencias lineales<sup>1</sup>.

En este caso, se consideran en el árbol los capacitores<sup>2</sup>  $C_1$  y  $C_2$ , las dos fuentes  $G_1$  y  $G_2$ , así como las resistencias  $R_1, \dots, R_5$ ; mientras que en el co-árbol se tienen

---

<sup>1</sup>Aquí toman sentido las suposiciones sobre el tipo de circuitos a considerar.

<sup>2</sup>Los capacitores  $C_3$  y  $C_4$  no se consideran por estar en paralelo con las fuentes.

las dos resistencias  $Z_1$  y  $Z_2$ , que hacen de cargas, así como los inductores  $L_1, \dots, L_5$ . Así, siguiendo los lineamientos, los vectores  $v_t, i_t \in \mathbb{R}^9$  y  $v_c, i_c \in \mathbb{R}^7$  y la matriz fundamental de loops  $H$

$$H = \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} \\ H_{CR} & H_{CL} \\ H_{RR} & H_{RL} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]. \quad (3.67)$$

De esta matriz se observa que los bloques  $H_{1R} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} = 0$  y  $H_{RR} \in \mathbb{R}^{5 \times 2} = 0$ , puesto que el circuito satisface las Proposiciones 3 y 4, con lo que además se cumple  $H_{CR} = I_2$  y  $H_{RL} = -I_5$ . Para este ejemplo se cumple además lo propuesto en C.4-C.6, esto es que  $p = 0$ , el número de fuentes es igual al de capacitores por lo que  $n_1 = n_2 = 2$ , además debido a C.6  $n_r = r_i = 2$ .

Por su parte, la matriz  $D = \text{diag}\{D_r, D_s\} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ ,  $D_r = \text{diag}^{-1}\{L_r + (j\omega)^{-1}R_r\} = \text{diag}^{-1}\{D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}\} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Tal que, al reemplazar estas condiciones en la ecuación (3.63), se tiene que

$$\mathbb{E}_{C1}^* = -\frac{D_{11}\mathbb{V}_{S1}^* - D_{12}\mathbb{V}_{S2}^*}{C_1s^2 + z_1^{-1}s + D_{11} + D_{12}}$$

$$\mathbb{E}_{C2}^* = -\frac{D_{21}\mathbb{V}_{S1}^* + D_{22}\mathbb{V}_{S2}^*}{C_2s^2 + z_2^{-1}s + D_{21} + D_{22}}$$

con los escalares  $D_{11} = (L_{11} + s^{-1}R_{t_{11}})$ ,  $D_{12} = (L_{12} + s^{-1}R_{t_{12}})$ ,  $D_{21} = (L_{21} + s^{-1}R_{t_{21}})$  y  $D_{22} = (L_{22} + s^{-1}R_{t_{22}})$ . Así, puede verse que una condición suficiente para alcanzar el mismo valor en ambos numeradores es igualar las impedancias en el mismo cutset que su respectiva fuente.

### 3.4.3. Corriente Directa: Análisis de Consenso

El problema de consenso consiste en analizar si algunas variables de interés convergen al mismo valor. Como se verá en el siguiente capítulo, la variable  $v_C$  puede representar a los voltajes de las cargas en un Sistema Eléctrico de Potencia, en donde se requiere que mantengan un mismo valor constante, consecuentemente se toma al voltaje en los capacitores  $v_C$  como variable de interés.

Así pues, por claridad en la presentación y para ilustrar la lógica del enfoque

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

propuesto, se considera el caso en el que las pérdidas en los inductores se desprecian<sup>1</sup>, i.e. cuando  $R_t = 0$ , lo cual es válido para líneas predominantemente inductivas (para referencias ver Kundur *et al.* [42]). Bajo estas condiciones, la ecuación (3.49) puede ser dividida en

$$-R_c^{-1}v_C^* - H_{CL}i_L^* = 0 \quad (3.68a)$$

$$H_{CL}^T v_C^* + H_{1L}^T e_1^* = 0 \quad (3.68b)$$

lo que indica que el comportamiento en estado estacionario, en particular de consenso, depende de la estructura de  $H_{CL}$  y  $H_{1L}$ . Hay que notar que de las ecuaciones (3.55) y (3.68b) es claro que una condición suficiente para alcanzar consenso en los voltajes de los capacitores  $v_C^*$  es hacer que las fuentes  $e_1^* = \mathbf{1}_{n_1}$ .

En la siguiente proposición se dan condiciones suficientes que ilustran el comportamiento mencionado para la *red malla*. No obstante, es fácil ver que la sustitución directa de las matrices (3.56) y (3.57) para las topologías radial y anillo, respectivamente, en (3.68b) resulta en propiedades de consenso para los voltajes  $v_C^*$ .

**Proposición 8.** *Topología Malla Considere el circuito eléctrico (3.22) con resistencias lineales para el cual se ha hecho  $R_t = 0$ . Asuma que las Proposiciones 3 y 4 se satisfacen, así mismo, que son ciertas C.5 y C.6. Sea el vector de entradas constante  $e_1 = \text{col}(e_{11}, \dots, e_{1n_1})$ . Entonces, el vector de voltajes de capacitor alcanza consenso en el sentido de*

$$v_C^* = \frac{1}{n_1} \sum_{m=1}^{n_1} e_{1m}^* \mathbf{1}_{n_1}. \quad (3.69)$$

*Prueba.* Bajo las condiciones C.5 y C.6, se cumple la estructura (3.58) para  $H_{CL}^T$ . Observe que la matriz  $H_{CL}$  es de rango completo por renglones, por lo que admite pseudoinversa, entonces de (3.50) se tiene que

$$v_C^* = - [H_{CL}H_{CL}^T]^{-1} H_{CL}H_{1L}^T e_1^* \quad (3.70)$$

En consecuencia, la sustitución de la estructura asignada para las matrices

---

<sup>1</sup>En caso de que las resistencias  $R_t \neq 0$ , las condiciones de consenso están en términos de los valores de  $R_t$  y, dada la estructura obtenida, el análisis es el mismo que para el caso senoidal.

lleva a que los productos

$$H_{CL}H_{CL}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1}^T \mathbf{1}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{n_1}^T \mathbf{1}_{n_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1}_{n_1}^T \mathbf{1}_{n_1} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$-H_{CL}H_{1L}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1}^T M_{\rho_1} \\ \mathbf{1}_{n_1}^T M_{\rho_2} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{n_1}^T M_{\rho_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n_1} \beta_{11}^k & \cdots & \sum_{k=1}^{n_1} \beta_{1n_1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n_1} \beta_{n_1 1}^k & \cdots & \sum_{k=1}^{n_1} \beta_{n_1 n_1}^k \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

donde como para  $M_{\rho_i}$  cada  $k$ -ésimo renglón tiene sólo una entrada diferente de cero y esta entrada aparece en una columna diferente respecto a los demás renglones, los términos  $\sum_{k=1}^{n_1} \beta_{ij}^k = 1$  para todo  $i, j = 1, \dots, n_1$  y a su vez  $-H_{CL}H_{1L}^T = \mathbf{1}_{n_1} \mathbf{1}_{n_1}^T$ . Agrupando las ecuaciones anteriores en (3.70), se cumple que

$$v_C^* = \frac{1}{n_1} \mathbf{1}_{n_1} \mathbf{1}_{n_1}^T e_1^*$$

que equivale a la expresión en (3.69), lo que termina la prueba.  $\square$

#### ■ Ejemplo

Para ejemplificar esta subsección, tome nuevamente el circuito malla de la Figura 3.3, bajo las mismas características especificadas en el ejemplo anterior. Esto es, se tienen dos fuentes, cinco líneas de transmisión representadas por el llamado modelo II y dos cargas que se simbolizan como resistencias lineales.

Se consideran en el árbol los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  y las dos fuentes  $G_1$  y  $G_2$  (las resistencias  $R_t$  no son consideradas para este análisis) y en el co-árbol se tienen las dos resistencias  $Z_1$  y  $Z_2$ , así como los inductores  $L_1, \dots, L_5$ . Con la matriz fundamental de loops  $H$  dada por (3.67), de tal forma que el equilibrio es como (3.68).

En este caso, el producto  $H_{CL}H_{CL}^T = 2I_2$  y  $H_{CL}H_{1L}^T = -[ \mathbf{1}_2 \quad \mathbf{1}_2 ]$  con lo que sustituyéndolo en la ecuación (3.69)

$$\begin{bmatrix} e_{c1}^* \\ e_{c2}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_{11}^* + e_{12}^* \\ e_{11}^* + e_{12}^* \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---

Es importante notar que para que la segunda parte de (3.68) se satisfaga debe cumplirse que

$$e_{11}^* = e_{12}^* \quad (3.74)$$

por lo que (3.73) y (3.74) representan el comportamiento en estado estacionario, en el cual el voltaje de los capacitores llega a un consenso y este valor es el de las fuentes.

En esta subsección se presentan algunos resultados de simulación, realizadas con MATLAB, para esto se consideraron valores de capacitancias e inductancias  $C1 = 0.005$ ,  $C2 = 0.008$ , y  $L1 = 0.01$ ,  $L2 = 0.02$ ,  $L3 = 0.03$ ,  $L4 = 0.04$  y  $L5 = 0.05$ , respectivamente. Las condiciones iniciales para las cargas eléctricas y los flujos magnéticos son todas diferentes. En las Figuras 3.4, 3.5 y 3.6 se muestran los resultados cuando la red es inductiva, en este caso los valores de las fuentes  $e_{11}$  y  $e_{12}$  se fijaron en 7 [V]. En la Figura 3.4 se muestra que el voltaje en los capacitores  $v_C$ , llega a un consenso tal que independientemente de las condiciones iniciales, el voltaje converge a un mismo valor que es el de las fuentes. En la Figura 3.5 se presentan las corrientes en los inductores que tienden a valores constantes, por lo que la derivada del flujo magnético o voltaje es cero. Por último la Figura 3.6 presenta los voltajes de los capacitores para el mismo circuito pero con resistencias diferentes mostrando que el valor de consenso depende sólo de la interconexión.

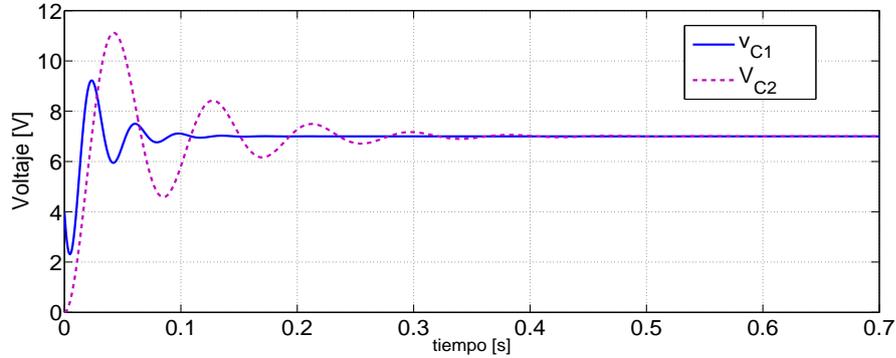
Se incorpora un experimento para el caso donde las resistencias  $R_t \neq 0$ , en particular se eligieron las resistencias del árbol como<sup>1</sup>  $R_{11} = R_{12} = 6$  y  $R_{21} = R_5 = 5$  y  $R_{22} = 15$ . La Figura 3.7 muestra que para valores de fuentes  $e_{11} = 10$  y  $e_{12} = 15$ , el voltaje en los capacitores llega al siguiente valor  $v_C^* = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}$ , lo que pone en evidencia que la elección correcta de los parámetros induce propiedades de consenso.

Con referencia al resultado enunciado se presentan algunas observaciones:

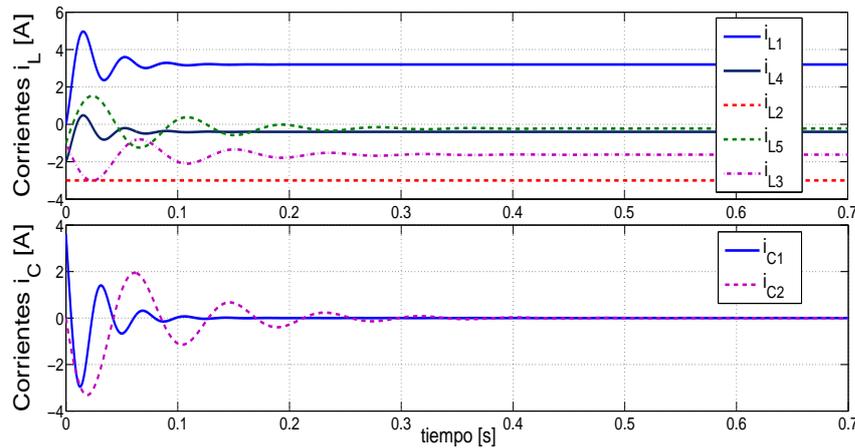
- La estructura impuesta por C.5 y C.6 puede ser modificada para incluir algunas conexiones usualmente encontradas en la práctica, i.e. permitiendo que los capacitores compartan cutset con otros capacitores.
- Bajo la condición  $R_t \neq 0$ , si la estructura encontrada para  $H_{CL}$ ,  $H_{1L}$  es directamente sustituida en (3.50), la propiedad de consenso ya no se preserva. En su lugar, la matriz  $R_c^{-1} + H_{CL}R_t^{-1}H_{CL}^T$  es una matriz llena con entradas dados por los valores de las resistencias. Sin embargo, parece que esta estructura permite la incorporación de técnicas de compensación, esto es, añadir nuevos elementos de parámetros concentrados al circuito, tal que

---

<sup>1</sup>Estos valores tuvieron como inspiración los resultados encontrados para el caso senoidal donde se pide que las resistencias de árbol en el mismo cutset que un la carga sean iguales.



**Figura 3.4:** Voltaje en los capacitores con  $z_1 = 2.5$  y  $z_2 = 5$



**Figura 3.5:** Corrientes en los inductores y en los capacitores, respectivamente.

se logra el comportamiento deseado. Lo anterior es parte del trabajo futuro de esta tesis.

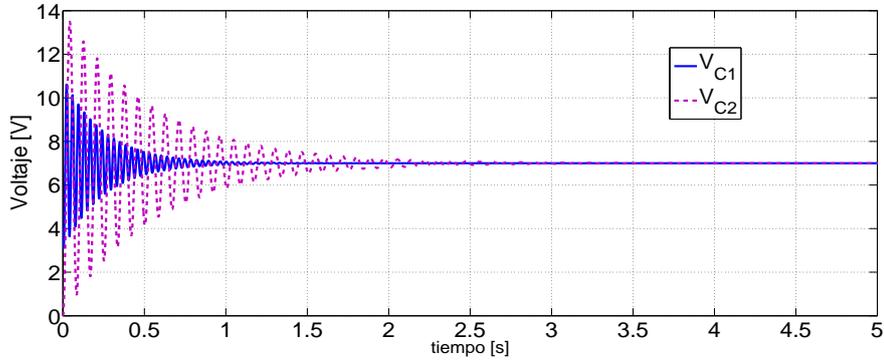
### 3.5. Resumen y Discusión

En este capítulo se presentó un análisis de los circuitos eléctricos vistos desde la perspectiva de sistemas dinámicos interconectados y descritos por un grafo. En este sentido hay un interés implícito en propiedades de estado estacionario que puedan ser extrapolados a redes de Sistemas Eléctricos de Potencia. Los siguientes son algunos comentarios:

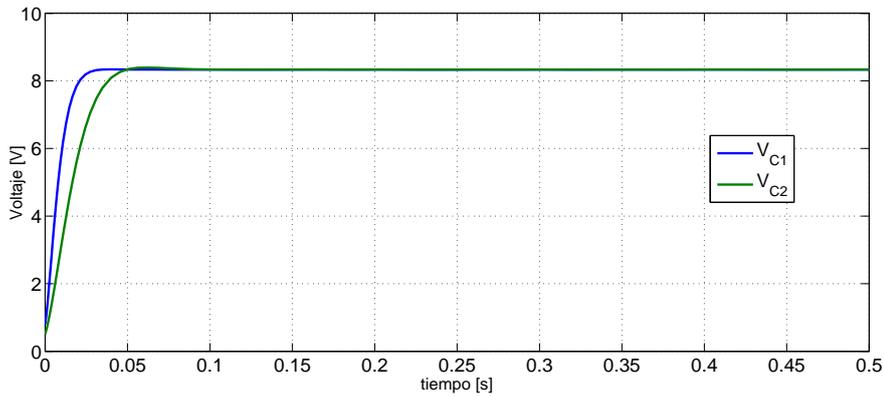
- Se estudian circuitos eléctricos que pueden ser representados por las ecua-

### 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

---



**Figura 3.6:** Voltaje en los capacitores con  $z_1 = 25$  y  $z_2 = 35$



**Figura 3.7:** Voltaje en los capacitores con  $z_1 = 6$  y  $z_2 = 5$

ciones de Bryton-Moser (B-M), desde un marco de sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto. La diferencia radica en que las ecuaciones de B-M tienen como base la función de potencial mixto, mientras que los sistemas Hamiltonianos utilizan la energía total almacenada. De hecho, Jeltsema y Scherpen [39] muestran que ambos formalismos tienen una relación matemática fundamental dada por una especie de transformación de Legendre.

- Se hace un análisis de estabilidad para las trayectorias admisibles del modelo Hamiltoniano, las cuales dependen directamente de la relación constitutiva de las resistencias. Una vez que ésta ha sido definida, la estabilidad depende de las submatrices  $H_{CR}$  y  $H_{RL}$ . En este sentido, los mínimos (locales) de la función de energía definen equilibrios (localmente) asintóticamente estables.
- Aún cuando en la Proposición 1 y 2 se consideran elementos lineales, este

caso no debe ser subestimado. Actualmente, los sistemas lineales son usados frecuentemente para representar el comportamiento de circuitos eléctricos.

- Inspirados en los resultados topológicos para estabilidad se presentan dos proposiciones sobre la estructura de la red que coinciden con la forma usual de modelar las pérdidas en los elementos almacenadores. Estas suposiciones permiten analizar el circuito no-lineal para el caso de entradas constantes.
- Actualmente se hacen investigaciones para encontrar un análisis alternativo al de la Proposición 2 y tratar con el problema de seguimiento, sin embargo, hasta el conocimiento de la autora, la estructura no lineal de  $H_a(x)$  impone un problema abierto en un ámbito general.
- Se presenta una caracterización de las trayectorias admisibles para las que previamente se ha probado estabilidad asintótica. En este sentido, es necesario un conocimiento explícito de las relaciones constitutivas de los resistores las cuales, por simplicidad se han asumido lineales. Con esto, se ha procurado una estructura topológica, que generaliza el de las redes típicamente usadas, en términos de las submatrices  $H_{CL}$  y  $H_{1L}$ .
- Tanto en el caso de regulación con la matriz  $R_t \neq 0$ , así como en la caracterización del estado senoidal permanente, las trayectorias admisibles dependen, no sólo de la topología sino de los parámetros de la red. Lo anterior invita a incorporar técnicas de compensación, es decir, a añadir nuevos elementos de parámetros concentrados en la red tal que se alcance un comportamiento deseado, por ejemplo de consenso en los voltajes de los capacitores.



De manera general, una microred es una red eléctrica conectada a un sistema de distribución, de baja y media tensión, que integra una combinación de unidades generadoras de energía (típicamente renovables), cargas y elementos almacenadores dentro de un sistema localmente controlable. Los objetivos más importantes son la estabilidad de frecuencia y tensión, la operación de los convertidores de potencia que sirven de interface, el compartir la demanda de potencia y el despacho óptimo de la misma.

En este capítulo se presenta un modelo Hamiltoniano de la microred y se propone una ley de control que resuelve el problema de estabilidad en el sentido de Lyapunov en estado estacionario. En este sentido, considerar modelos simplificados para los convertidores de potencia (como usualmente se hace en la literatura, por ejemplo en los trabajos de Schiffer *et al.* [74], Simpson-Porco *et al.* [77]), limita la posibilidad de incluir fenómenos exhibidos por las microredes relacionados con la calidad de potencia y las perturbaciones durante la operación de los equipos basados en electrónica de potencia. Así pues, en este capítulo se aborda el problema de control de microredes incluyendo la dinámica de los convertidores.

## 4.1. Elementos de la Microred

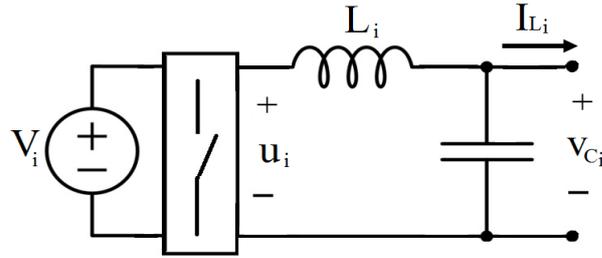
En una microred se pueden identificar los siguientes elementos principales: las unidades de Generación Distribuida (DG), los convertidores de potencia, las líneas de transmisión y las cargas. Así pues, en esta sección se presenta el modelo matemático de las componentes individuales de la microred desde el enfoque de sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (PCH), para posteriormente presentar un modelo general y modular de la microred que aprovecha las propiedades de interconexión de la clase de sistemas Hamiltonianos. Finalmente, la ley de control para los inversores se extiende a una ley de control distribuida que estabiliza a la microred completa.

### 4.1.1. Convertidores de Potencia y Control

Las DG están interconectadas con la red por medio de convertidores de potencia; estos convertidores tienen la función de acondicionar las energías generadas, por lo que es natural asumir que cada DG está provista de un convertidor. Esto es, además de la Suposición 1 de redes balanceadas, se hace la siguiente consideración:

- Cada unidad de generación está provista de un convertidor de potencia.

La Figura 4.1 muestra la topología considerada para el  $i$ -ésimo convertidor de potencia. Este convertidor está compuesto por una fuente de voltaje estrictamente positiva  $V_i > 0$ , un arreglo de conmutación cuyo efecto es la modulación del voltaje  $V_i \in \mathbb{R}$  y un filtro  $LC$  de segundo orden. Para el convertidor considerado



**Figura 4.1:** Convertidor de potencia ilustrativo DC/AC

$V_i$  emula al voltaje de la fuente energía alterna, el voltaje en el capacitor  $v_{Ci}$  es el voltaje con el que se conecta a la red e  $I_{Li}$  la corriente demandada. Asimismo, en cada convertidor  $x_{1i} \in \mathbb{R}$  denota el flujo magnético en el  $i$ -ésimo inductor,  $x_{2i} \in \mathbb{R}$  la carga del  $i$ -ésimo capacitor, mientras que la señal moduladora del arreglo de conmutación está representado por  $u_i \in \mathbb{R}$ . Con una aplicación directa de las leyes de Kirchhoff se tiene el modelo dinámico

$$\dot{x}_{1i} = -v_{Ci} + V_i u_i \quad (4.1a)$$

$$\dot{x}_{2i} = i_{Li} - I_{Li} \quad (4.1b)$$

donde  $v_{Ci}$  e  $i_{Li}$  denotan el voltaje en el capacitor y en el inductor del  $i$ -ésimo convertidor.

No obstante, es claro que este circuito eléctrico puede modelarse siguiendo los lineamientos propuestos en el capítulo anterior, para llegar a un sistema PCH donde se considera la función de almacenamiento de energía no negativa y conocida  $H_{ci} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$H_{ci}(x_{1i}, x_{2i}) = H_{1i}(x_{1i}) + H_{2i}(x_{2i}), \quad (4.2)$$

y como variables de puerto la corriente en el inductor  $i_{Li} = \nabla_{x_{1i}} H_{ci} \in \mathbb{R}$ , el voltaje de capacitor  $v_{Ci} = \nabla_{x_{2i}} H_{ci} \in \mathbb{R}$  y la salida de corriente  $I_{Li} \in \mathbb{R}$ , así como las Leyes de Kirchhoff, de tal forma que el modelo del  $i$ -ésimo convertidor puede escribirse como

$$\dot{x}_{12i} = \mathbb{J}_{12i} \nabla_{x_{12i}} H_{ci} + G_{12i} u_i - \begin{bmatrix} 0 \\ I_{Li} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde  $x_{12i} = \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ , mientras que las matrices

$$\mathbb{J}_{12i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{J}_{12i}^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; \quad G_{12i} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

y el vector

$$\nabla_{x_{12i}} H_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{ci}(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{1i}} \\ \frac{\partial H_{ci}(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{2i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{Li} \\ v_{Ci} \end{bmatrix}.$$

El modelo presentado es conocido como *modelo promedio* e involucra un procedimiento de modelado formal basado en la suposición de que los interruptores conmutan a frecuencias muy altas, por ejemplo bajo una política de modulación por ancho de pulso. Es importante remarcar que esta estructura de convertidor se incluye sólo con fines ilustrativos; sin embargo, se eligió esta representación porque las topologías de convertidores de potencia comúnmente usadas en la práctica admiten una representación Hamiltoniana (Noriega-Pineda *et al.* [54], Pérez *et al.* [68]) sin importar la estructura del arreglo de conmutación ni si los elementos pasivos son lineales o no-lineales.

Así pues, para los convertidores de potencia el objetivo consiste en diseñar una ley de control capaz de seguir una referencia  $x_{12i}^*$ . En este contexto, el conjunto de trayectorias que el sistema puede reproducir (esto es las *trayectorias admisibles* de la Definición 12) está dado por las soluciones deseadas de (4.3),

$$\dot{x}_{12i}^* = \mathbb{J}_{12i} \nabla_{x_{12i}^*} H_{ci}^* + G_{12i} u_i^* - \begin{bmatrix} 0 \\ I_{Li} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

con los vectores y matrices definidos de manera similar a (4.3) y cuya estructura asume implícitamente que para cada trayectoria deseada  $x_{12i}^*$  existe una entrada de control  $u_i^*$  capaz de generarla. Ahora bien, una vez establecido el sistema deseado, es posible definir la variable de error  $\tilde{x}_{12i} = x_{12i} - x_{12i}^*$  y su dinámica correspondiente

$$\dot{\tilde{x}}_{12i} = \mathbb{J}_{12i} \nabla_{\tilde{x}_{12i}} \tilde{H}_{ci} + G_{12i} \tilde{u}_i$$

donde se ha incluido a la función lineal cuadrática en  $\tilde{x}$   $\tilde{H}_{ci} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\tilde{H}_{ci}(\tilde{x}_{1i}, \tilde{x}_{2i}) = \frac{1}{2} \tilde{x}_{1i}^T L_i^{-1} \tilde{x}_{1i} + \frac{1}{2} \tilde{x}_{2i}^T C_i^{-1} \tilde{x}_{2i}, \quad (4.5)$$

la cual tiene un mínimo en  $\tilde{x}_{1i} = \tilde{x}_{2i} = 0$  y se ha definido a la variable de error de control  $\tilde{u}_i = u_i - u_i^*$ . Observe que aún cuando para obtener un modelo Hamiltoniano del convertidor no son necesarias suposiciones de linealidad sobre los elementos almacenadores, para fines de control de seguimiento de trayectorias, como se verá en la siguiente proposición, sí supone que la función de energía (4.2) es de la forma

$$H_{ci}(x_{1i}, \tilde{x}_{2i}) = \frac{1}{2} x_{1i}^T L_i^{-1} x_{1i} + \frac{1}{2} \tilde{x}_{2i}^T C_i^{-1} \tilde{x}_{2i}, \quad (4.6)$$

lo anterior queda implícito en (4.5).

En este momento es posible formular la primer proposición del capítulo concerniente al planteamiento de una ley de control local basada en pasividad por Interconexión y Asignación de Amortiguamiento (IDA por sus siglas en inglés (Ortega *et al.* [64])) que resuelve el problema de regulación para cada uno de los convertidores de potencia.

**Proposición 9.** *Considere el convertidor de potencia DC/AC de la forma (4.3) y asuma que:*

- A1. *El estado  $x_{12i}$  está disponible para su medición.*
- A2. *Los inductores y capacitores son lineales con funciones de energía dadas por (4.6), con parámetros  $L_i$  y  $C_i$  conocidos.*
- A3. *La corriente de salida  $I_{Li}$  es conocida.*

Entonces, la ley de control

$$u_i = V_i^{-1} [\dot{x}_{1i}^* + C_i^{-1} x_{2i}^* - K_{1i} L_i^{-1} \tilde{x}_{1i}] \quad (4.7a)$$

$$\dot{x}_{2i}^* - L_i^{-1} x_{1i}^* + I_{Li} - K_{2i} C_i^{-1} \tilde{x}_{2i} = 0 \quad (4.7b)$$

con las matrices de ganancias positivas definidas  $K_{1i} > 0$  y  $K_{2i} > 0$ , garantiza que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_{12i} = 0$

*Prueba.* Escribiendo las ecuaciones (4.7) en su forma vectorial, se tiene que

$$G_{12i} u_i = G_{12i} u_i^* - K_{12i} \nabla_{\tilde{x}_{12i}} \tilde{H}_{ci}$$

con la matriz positiva definida  $K_{12i} = \text{diag} \{K_{1i}, K_{2i}\}$ , por lo que la dinámica del error en lazo cerrado puede escribirse como

$$\dot{\tilde{x}}_{12i} = [\mathbb{J}_{12i} - K_{12i}] \nabla_{\tilde{x}_{12i}} \tilde{H}_{ci}. \quad (4.8)$$

Considere ahora a la función  $\tilde{H}_{ci}(\tilde{x}_{1i}, \tilde{x}_{2i})$  definida en (4.5), con mínimo en  $\tilde{x} = 0$ , como candidata a función de Lyapunov; su derivada temporal a lo largo de las trayectorias de la dinámica de lazo cerrado (4.8) está dada por

$$\dot{\tilde{H}}_{ci}(\tilde{x}_{1i}, \tilde{x}_{2i}) = - \left( \nabla_{\tilde{x}_{12i}} \tilde{H}_{ci} \right)^T K_{12i} \nabla_{\tilde{x}_{12i}} \tilde{H}_{ci} < 0, \quad (4.9)$$

donde se ha utilizado la propiedad de antisimetría de la matriz  $\mathbb{J}_{12i}$ . La expresión (4.9) debido a las propiedades de  $\tilde{H}_{ci}$  es cero sólo en  $\tilde{x}_{12i} = 0$ , lo que implica la estabilidad asintótica de  $\tilde{x}_{12i}$ . □

El resultado en la proposición anterior garantiza propiedades de estabilidad para los convertidores de potencia sin interconectarse con la red. En la siguiente sección se mostrará que estas propiedades se preservan si estos equipos son interconectados via la propia red, la cual también exhibe una estructura Hamiltoniana.

### 4.1.2. Líneas de Transmisión y Cargas

Esta sección está dedicada al modelo de la red que interconecta las unidades de generación, esto es los convertidores de potencia, con las cargas. La suposición 1 admite que las líneas de transmisión puedan representarse por circuitos  $\pi$  equivalentes de parámetros concentrados, como los de la Figura 2.2, esto permite que el modelo de la red pueda realizarse plenamente dentro del marco teórico abordado en el Capítulo 3.

Así, en el contexto del capítulo anterior, se considera que la red puede modelarse como un circuito eléctrico sobre un grafo conectado, el cual está compuesto por  $n$  nodos o puntos de interconexión y  $b$  bordes, asociados a las variables de los elementos. En este grafo a su vez, pueden identificarse un árbol y su correspondiente co-árbol de tal forma que las Leyes de Corrientes y de Voltajes de Kirchhoff pueden expresarse como (3.4), esto es

$$i_t = -H i_c, \quad v_c = H^T v_t. \quad (4.10)$$

con  $i_t \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ ,  $v_t \in \mathbb{R}^{(n-1)}$  las corrientes y los voltajes del árbol,  $i_c \in \mathbb{R}^{b-(n-1)}$ ,  $v_c \in \mathbb{R}^{b-(n-1)}$  representan las corrientes y los voltajes del co-árbol, respectivamente, mientras que la matriz  $H \in \mathbb{R}^{(n-1) \times b-(n-1)}$  es la *matriz fundamental de loops*.

En este sentido, de manera general considere que la red tiene  $n_1$  puertos de entrada,  $n_2$  capacitores,  $n_3$  resistencias controladas por voltaje,  $n_4$  resistencias controladas por corriente, que emularán a las cargas, y  $n_5$  inductores, tal que  $x_3 = \text{col}\{x_{3i}\} \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $i = 1, \dots, n_2$  es el vector de cargas de capacitor y  $x_4 = \text{col}\{x_{4i}\} \in \mathbb{R}^{n_5}$ ,  $i = 1, \dots, n_5$ , es el vector de flujos magnéticos de inductor en

la red<sup>1</sup>. Para encontrar el modelo Hamiltoniano, se define la energía almacenada total del circuito, que es la debida a los capacitores y a los inductores de la red, la cual se supone conocida y no-negativa,  $H_a : \mathbb{R}^{n_2 \times n_5} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  como

$$H_a(x_3, x_4) = V_3(x_3) + V_4(x_4) \quad (4.11)$$

Es claro que en el caso particular de que los elementos almacenadores tengan relaciones constitutivas lineales, entonces esta función de energía queda dada por

$$H_a(x_3, x_4) = \frac{1}{2}x_3^T C_a^{-1}x_3 + \frac{1}{2}x_4^T L_a^{-1}x_4 \quad (4.12)$$

donde  $C_a = \text{diag}\{C_{ai}\} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  es una matriz de capacitancias constantes y  $L_a = \text{diag}\{L_{ai}\} \in \mathbb{R}^{n_5 \times n_5}$  es la matriz de inductancias constantes.

Bajo lo establecido anteriormente, las variables de puerto de los capacitores e inductores en la red son

$$\dot{x}_3 = i_C, \quad v_C = \frac{\partial H_a(x_3, x_4)}{\partial x_3} \quad (4.13a)$$

$$\dot{x}_4 = v_L, \quad i_L = \frac{\partial H_a(x_3, x_4)}{\partial x_4} \quad (4.13b)$$

donde  $v_C, i_C \in \mathbb{R}^{n_2}$  son la corriente y el voltaje de capacitores y  $v_L, i_L \in \mathbb{R}^{n_5}$  son las variables correspondientes para los inductores en la red. En lo que respecta a las resistencias, las leyes de los elementos que relacionan las corrientes en las resistencias del árbol  $i_{Rt} \in \mathbb{R}^{n_3}$  y los voltajes en las resistencias de co-árbol  $v_{Rc} \in \mathbb{R}^{n_4}$  con  $v_{Rt}$  e  $i_{Rc}$ , respectivamente, está dada por

$$i_{Rt} = -\varphi_t(v_{Rt}), \quad v_{Rc} = -\varphi_c(i_{Rc}) \quad (4.14)$$

donde  $\varphi_t$  y  $\varphi_c$  se asumen ser funciones biyectivas y capturan el fenómeno de disipación del sistema. Más aún, si estas funciones son lineales, entonces las relaciones quedan dadas por  $i_{Rt} = -R_t^{-1}v_{Rt}$ ,  $v_{Rc} = -R_c i_{Rc}$ , con las matrices positivas definidas  $R_t^{-1} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$  y  $R_c \in \mathbb{R}^{n_4 \times n_4}$  que tienen como entradas las resistencias de árbol y las de co-árbol, respectivamente.

Antes de proceder con la formulación del modelo de la red, es útil representar las variables de los elementos de parámetros concentrados de los convertidores de potencia en su forma vectorial. Bajo la suposición de que cada unidad de generación está equipada de un convertidor de potencia se puede asumir que los  $n_1$  puertos de entrada de la red están provistos de un convertidor. Así pues, todas las variables de la misma naturaleza se apilan en un solo vector para tener que la

---

<sup>1</sup>Note que se ha respetado la notación del capítulo anterior referente al número de elementos.

corriente de salida del convertidor  $I_L = \text{col}\{I_{Li}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$  y los voltajes de salida de los convertidores son  $\nabla_{x_2} H_c = \text{col}\{\nabla_{x_{2i}} H_{ci}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$  bajo la definición del vector de cargas del convertidor  $x_2 = \text{col}\{x_{2i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$  y  $\nabla_{x_{2i}} H_{ci} = \frac{\partial H_{ci}(x_{1i}, x_{2i})}{\partial x_{2i}}$  definidos en la subsección anterior.

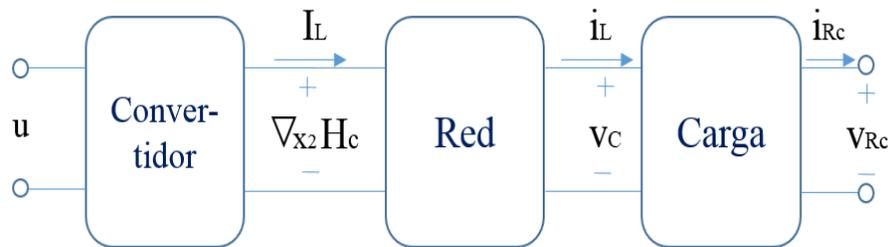
Con esta notación y bajo las suposiciones sobre la clase de circuitos hechas en el capítulo anterior, los elementos de parámetros concentrados que componen a la red son agrupados tal que los puertos de entrada, todos los capacitores y algunas resistencias aparecen en el árbol, mientras que todos los inductores y el resto de las resistencias, están en el co-árbol; con lo que las restricciones (4.10) toman la forma

$$\begin{bmatrix} -I_L \\ i_C \\ i_{Rt} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{1R} & H_{1L} \\ H_{CR} & H_{CL} \\ H_{RR} & H_{RL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Rc} \\ i_L \end{bmatrix} \quad (4.15a)$$

$$\begin{bmatrix} v_{Rc} \\ v_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1R}^T & H_{CR}^T & H_{RR}^T \\ H_{1L}^T & H_{CL}^T & H_{RL}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{x_2} H_c \\ v_C \\ v_{Rt} \end{bmatrix} \quad (4.15b)$$

En este punto es importante incorporar los resultados de las Proposiciones 3 y 4 del Capítulo 3, i.e. modelando las pérdidas en los inductores como resistores que se les conectan en serie  $H_{RL} = I_2 \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$  y  $H_{RR} = 0_1 \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_4}$  con  $n_3 = n_5$ . Mientras que modelando las pérdidas en los capacitores como resistencias  $R_c$  que se les conectan en paralelo, entonces  $H_{CR} = I_3 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ;  $H_{1R} = 0_2 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  y  $n_2 = n_4$ . Observe que las Proposiciones 3 y 4 son congruentes con el modelo  $\pi$  de la línea de transmisión, por lo que pueden ser usadas para el modelado de la red.

De esta forma se tienen ahora dos sistemas, por un lado el del convertidor con puertos de salida  $I_L, \nabla_{x_2} H_c \in \mathbb{R}^{n_1}$  y entrada  $u \in \mathbb{R}^{n_1}$ . Por otro lado, se tiene a la red de interconexión, cuyos puertos de entrada serán los puertos de salida del convertidor y con puertos de salida sus voltajes de capacitor  $v_C \in \mathbb{R}^{n_2}$  que tienen conectados en paralelo a las cargas  $R_c$  con relación constitutiva (4.14), tal como se muestra de manera esquemática en la Figura 4.2. Siguiendo con el



**Figura 4.2:** Esquema de interconexión por medio de los puertos de cada sistema.

modelado del segundo bloque de esta figura y retomando el procedimiento del capítulo anterior, el comportamiento dinámico puede representarse por (3.44a), considerando las Proposiciones 3 y 4, que se reescribe aquí por facilidad de lectura como

$$\dot{x}_{34} = \mathbb{J}_{34} \nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4) + \begin{bmatrix} g_{34} & g_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ u_R \end{bmatrix} \quad (4.16a)$$

$$\begin{bmatrix} y_{34} \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{34}^T \nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4) \\ g_R^T \nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4) \end{bmatrix} \quad (4.16b)$$

con  $u_R = -F(\nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4))$ , las definiciones

$$x_{34} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad \nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4) = \begin{bmatrix} \nabla_{x_3} H_a \\ \nabla_{x_4} H_a \end{bmatrix}; \quad E_1 = \begin{bmatrix} \nabla_{x_2} H_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

y las matrices

$$\mathbb{J}_{34} = \begin{bmatrix} 0 & -H_{CL} \\ H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad g_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H_{1L}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.18a)$$

$$g_R = \begin{bmatrix} 0 & H_{CR} \\ H_{RL}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad F(\nabla_x H_a(x)) = \begin{bmatrix} \varphi_t^{-1}(i_L) \\ \varphi_c^{-1}(v_C) \end{bmatrix}, \quad (4.18b)$$

sujeto a la restricción algebraica

$$I_L = H_{1L} \nabla_{x_4} H_a(x_3, x_4) \quad (4.19)$$

Puede verse que la entrada del modelo (4.16a) está en términos de la salida de voltaje  $\nabla_{x_2} H_c$  de los convertidores de potencia y que la restricción (4.19) pone la corriente de salida de los convertidores  $I_L$  en términos de las corrientes de los inductores de la red  $\nabla_{x_4} H_a(x_3, x_4)$ . Como se verá en la siguiente sección, estas interconexiones permiten representar el comportamiento dinámico de la microrred completa por medio de un sistema Hamiltoniano controlado por puerto.

## 4.2. Modelo Hamiltoniano de la Microrred

Una vez que se ha desarrollado tanto el modelo de cada uno de los convertidores de potencia como el de la red de interconexión, en esta sección se expone el modelo completo de la microrred. Más adelante, se muestra que la ley de control desarrollada en la Sección 4.1.1 para los convertidores individuales preserva sus propiedades de estabilidad a pesar de la interconexión.

Así pues, con el objetivo de iniciar con la formulación del modelo del sistema

completo, hay que notar que los  $n_1$  convertidores de potencia, asociados a los  $n_1$  puertos de entrada de la red, están descritos por el modelo (4.1a) o equivalentemente por (4.3) y pueden ser apilados tal que

$$\dot{x}_1 = -\nabla_{x_2} H_c + Vu \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_2 = \nabla_{x_1} H_c - I_L \quad (4.21)$$

con los flujos magnéticos  $x_1 = \text{col}\{x_{1i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ , las cargas  $x_2 = \text{col}\{x_{2i}\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ , los voltajes  $V = \text{diag}\{V_i\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ , las señales de control  $u = \text{col}\{u_i\} \in \mathbb{R}^{n_1}$ , el voltaje en los capacitores  $v_C = \nabla_{x_2} H_c = \frac{\partial H_c(x_1, x_2)}{\partial x_2}$  y la corriente en los inductores  $i_L = \nabla_{x_1} H_c = \frac{\partial H_c(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ . En esta representación, la energía almacenada en los convertidores  $H_c(x_1, x_2) : \mathbb{R}^{2n_1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  se puede escribir como

$$H_c(x_1, x_2) = H_1(x_1) + H_2(x_2). \quad (4.22)$$

De manera que, es posible describir el comportamiento dinámico de la microred completa con la conjunción del modelo de los convertidores (4.20) en su forma Hamiltoniana y el de la red de interconexión (4.16a), respetando el hecho de que los puertos de entrada de la red están en términos de la salida de los convertidores, en particular, se considera la restricción de corriente (4.19), con lo que

$$\dot{x}_{12} = \mathbb{J}_{12} \nabla_{x_{12}} H_c + G_{12} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ H_{1L} \nabla_{x_4} H_a(x_3, x_4) \end{bmatrix} \quad (4.23a)$$

$$\dot{x}_{34} = \mathbb{J}_{34} \nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4) + g_{34} \begin{bmatrix} \nabla_{x_2} H_c \\ 0 \end{bmatrix} + g_R u_R \quad (4.23b)$$

donde  $x_{12} = [x_1^T \ x_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2n_1}$ , las matrices  $\mathbb{J}_{12} = -\mathbb{J}_{12}^T \in \mathbb{R}^{2n_1 \times 2n_1}$

$$\mathbb{J}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_1} \\ I_{n_1} & 0 \end{bmatrix}; \quad G_{12} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_1 \times 2n_1};$$

la matriz  $V = \text{diag}\{V_i\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $I_{n_1}$  denota la matriz identidad de orden  $n_1$  y se han recuperado las definiciones en (4.18). Evidentemente, las ecuaciones (4.23) pueden ser reescritas en forma matricial para poder presentar el modelo de la microred con estructura Hamiltoniana como

$$\dot{x} = \mathbb{J}_T \nabla_x H_T(x) - g_{RT} F(\nabla_{x_{34}} H_a(x_3, x_4)) + g_T u \quad (4.24)$$

con el estado de la microred  $x = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T \ x_4^T]^T \in \mathbb{R}^{(3n_1+n_2)}$ , mientras que de la suma de las funciones de energía (4.22) y (4.12), la función de energía total

$H_T(x) : \mathbb{R}^{(3n_1+n_2)} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es

$$H_T(x) = H_c(x_1, x_2) + H_a(x_3, x_4)$$

y las matrices en el modelo definidas como

$$\mathbb{J}_T = \begin{bmatrix} 0 & -I_{n_1} & 0 & 0 \\ I_{n_1} & 0 & 0 & -H_{1L} \\ 0 & 0 & 0 & -H_{CL} \\ 0 & H_{1L}^T & H_{CL}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad g_T u = \begin{bmatrix} Vu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_{RT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{n_1} \\ I_{n_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

donde los 0 son matrices llenas de ceros de dimensiones apropiadas, cumpliéndose además que  $\mathbb{J}_T = -\mathbb{J}_T^T$ , esta matriz antisimétrica describe la interconexión que preserva potencia por medio de la cual los componentes del sistema intercambian energía. Note que si las relaciones constitutivas de las resistencias se asumen lineales, entonces se llega a un sistema Hamiltoniano Controlado por Puerto con Disipación como el presentado en la ecuación (2.23), en este caso como

$$\dot{x} = [\mathbb{J}_T - \mathbb{R}_T] \nabla_x H_T(x) + g_T u \quad (4.26)$$

con la matriz de resistencias  $\mathbb{R}_T$  simétrica positiva semi-definida

$$\mathbb{R}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_c^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_t \end{bmatrix} = \mathbb{R}_T^T \geq 0$$

y las definiciones en (4.25); de esta forma, se tendrían las propiedades expuestas en los preliminares de esta tesis, entre otras la de pasividad.

Antes de iniciar con la estabilidad del sistema, es preciso identificar las trayectorias admisibles para el sistema no-lineal (4.24), las cuales son solución del sistema deseado

$$\dot{x}^* = \mathbb{J}_T \nabla_{x^*} H_T^*(x^*) - g_{RT} F^*(\nabla_{x_{34}^*} H_a^*(x_3^*, x_4^*)) + g_T u^* \quad (4.27)$$

con  $u^* \in \mathbb{R}^{n_1}$  la entrada de control que es capaz de generar  $x^* \in \mathbb{R}^{3n_1+n_2}$ . Ahora bien, en la siguiente subsección, inspirados en la ley de control propuesta para los convertidores individuales, se plantea una ley de control que da solución al problema de estabilidad asintótica de la microred. Consecuentemente con la subsección anterior y con fines de análisis de estabilidad, es necesario suponer que las funciones de almacenamiento son lineales, por lo que el modelo (4.27) considera

que

$$H_T^*(x^*) = H_c^*(x_1^*, x_2^*) + H_a^*(x_3^*, x_4^*) \quad (4.28)$$

con las funciones

$$H_c^*(x_1^*, x_2^*) = \frac{1}{2}x_1^{*T}L^{-1}x_1^* + \frac{1}{2}x_2^{*T}C^{-1}x_2^*$$

y

$$H_a^*(x_3^*, x_4^*) = \frac{1}{2}x_3^{*T}C_a^{-1}x_3^* + \frac{1}{2}x_4^{*T}L_a^{-1}x_4^*.$$

con las definiciones de  $C_a$  y  $L_a$  en (4.12) y las matrices diagonales positivas definidas de inductancias y capacitancias de los convertidores  $L^{-1} = \text{diag}\{L_i^{-1}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  y  $C^{-1} = \text{diag}\{C_i^{-1}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ , respectivamente.

#### 4.2.1. Estabilización de la Microred

Como ya se había adelantado, en esta tesis la estabilidad de la microred se aborda como un problema de control de seguimiento de trayectorias, donde las trayectorias deseadas satisfacen el modelo (4.27) y están dadas en términos de los flujos de potencia de la red como se detallará más adelante.

Con la intención de determinar una ley de control y una vez establecidas las trayectorias admisibles, es razonable definir la variable de error como  $\tilde{x} = x - x^*$ , cuya dinámica está dada por

$$\dot{\tilde{x}} = \mathbb{J}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T(\tilde{x}) - g_{RT} \tilde{F}(\nabla_{\tilde{x}_{34}} \tilde{H}_a(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4)) + g_T \tilde{u} \quad (4.29)$$

donde se ha establecido que  $\tilde{u} = u - u^*$ . En este caso, la función tipo energía almacenada, asociada a (4.29), toma la forma

$$\tilde{H}_T(\tilde{x}) = \tilde{H}_c(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + \tilde{H}_a(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4), \quad (4.30)$$

con

$$\tilde{H}_a(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4) = \frac{1}{2}\tilde{x}_3^T C_a^{-1} \tilde{x}_3 + \frac{1}{2}\tilde{x}_4^T L_a^{-1} \tilde{x}_4$$

y

$$\tilde{H}_c(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{1}{2}\tilde{x}_1^T L^{-1} \tilde{x}_1 + \frac{1}{2}\tilde{x}_2^T C^{-1} \tilde{x}_2.$$

Bajo estas condiciones, es posible formular el resultado principal de este capítulo, esto es, la prueba de que los controladores locales desarrollados para cada convertidor son capaces de estabilizar la microred completa. El resultado está incluido en la siguiente proposición,

**Proposición 10.** *Considere el convertidor de potencia DC/AC es de la forma (4.3) y asuma que:*

B.1 *Los estados  $x_1$  y  $x_2$  están disponibles para su medición.*

B.2 *Los parámetros en la función de almacenamiento  $H_T$  son conocidos.*

B.3 *Se cumple la suposición A.3. Esto es, los mapeos  $\varphi_c^{-1}(\cdot)$  y  $\varphi_t^{-1}(\cdot)$  son incrementalmente pasivos a la salida, tal que (3.47) se cumple.*

B.4 *La corriente de salida  $I_{Li}$  es conocida.*

Entonces, la ley de control

$$\begin{aligned} u &= V^{-1}[\dot{x}_1^* + C^{-1}x_2^* - K_1L^{-1}\tilde{x}_1] \\ \dot{x}_2^* - L^{-1}x_1^* + H_{1L}L_a^{-1}x_4^* - K_2C^{-1}\tilde{x}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_3^* + H_{CL}\nabla_{x_4^*}H_T^* - K_3\nabla_{\tilde{x}_3}\tilde{H}_T + \varphi_c^{-1}(v_C^*) &= 0 \\ \dot{x}_4^* - H_{1L}^T\nabla_{x_2^*} - H_{CL}^T\nabla_{x_3^*} - K_4\nabla_{\tilde{x}_4}\tilde{H} + \varphi_t^{-1}(i_L^*) &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

con las matrices de ganancias positivas definidas  $K_1, K_2, K_3, K_4 > 0$  garantiza que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x} = 0$

*Prueba.* La ley de control (4.31) puede ser escrita equivalentemente como

$$u = V^{-1}[\dot{x}_1^* + \nabla_{x_2^*}H_T^* - K_1\nabla_{\tilde{x}_1}\tilde{H}_T], \quad (4.33a)$$

$$\dot{x}_2^* - \nabla_{x_1^*}H_T^* + H_{1L}\nabla_{x_4^*}H^* - K_2\nabla_{\tilde{x}_2}\tilde{H}_T = 0 \quad (4.33b)$$

Así, reescribiendo en forma vectorial las ecuaciones (4.33-4.32) y aludiendo a la representación (4.13) para las corrientes de inductor y voltajes de capacitor de la red, se tiene que

$$\begin{bmatrix} Vu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_1\nabla_{\tilde{x}_1}\tilde{H}_T \\ K_2\nabla_{\tilde{x}_2}\tilde{H}_T \\ K_3\nabla_{\tilde{x}_3}\tilde{H}_T \\ K_4\nabla_{\tilde{x}_4}\tilde{H}_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \\ \dot{x}_3^* \\ \dot{x}_4^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_{x_2^*}H_T^* \\ -\nabla_{x_1^*}H_T^* + H_{1L}\nabla_{x_4^*}H_T^* \\ H_{CL}\nabla_{x_4^*}H_T^* \\ -H_{1L}^T\nabla_{x_2^*}H_T^* - H_{CL}^T\nabla_{x_3^*}H_T^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_t^{-1}(i_L^*) \\ \varphi_c^{-1}(v_C^*) \end{bmatrix},$$

que también puede representarse de manera compacta como

$$\begin{aligned} g_T u &= -\mathbb{K}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T + g_T u^* \\ g_T \tilde{u} &= -\mathbb{K}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T \end{aligned}$$

con la matriz de ganancias simétrica positiva definida  $\mathbb{K}_T = \text{diag}\{K_1, K_2, K_3, K_4\} \in \mathbb{R}^{(3n_1+n_2) \times (3n_1+n_2)}$ . Utilizando esta expresión, el sistema en lazo cerrado toma la forma

$$\dot{\tilde{x}} = [\mathbb{J}_T - \mathbb{K}_T] \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T(\tilde{x}) - g_{RT} \begin{bmatrix} \varphi_t^{-1}(i_L) - \varphi_t^{-1}(i_L^*) \\ \varphi_c^{-1}(v_C) - \varphi_c^{-1}(v_C^*) \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Ahora bien, para analizar la estabilidad del punto de equilibrio  $\tilde{x} = 0$  de (4.34), la función  $\tilde{H}_T$  definida en (4.30), la cual es cuadrática en  $\tilde{x}$  y tiene un mínimo en  $\tilde{x} = 0$ , puede tomarse como candidata a función de Lyapunov. Así pues, la derivada temporal de  $\tilde{H}_T$  a lo largo de las trayectorias del sistema (4.34) satisface

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{H}}_T(\tilde{x}) &= \nabla_{\tilde{x}}^T \tilde{H}_T(\tilde{x}) [\mathbb{J}_T - \mathbb{K}_T] \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T(\tilde{x}) - \nabla_{\tilde{x}}^T \tilde{H}_T(\tilde{x}) g_{RT} \begin{bmatrix} \varphi_t^{-1}(i_L) - \varphi_t^{-1}(i_L^*) \\ \varphi_c^{-1}(v_C) - \varphi_c^{-1}(v_C^*) \end{bmatrix} \\ &= -\nabla_{\tilde{x}}^T \tilde{H}_T(\tilde{x}) \mathbb{K}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T(\tilde{x}) - \nabla_{\tilde{x}_3}^T \tilde{H}_T(\tilde{x}) \left[ \varphi_c^{-1}(\nabla_{x_3}^T H_T) - \varphi_c^{-1}(\nabla_{x_3}^T H_T^*) \right] \\ &\quad - \nabla_{\tilde{x}_4}^T \tilde{H}_T(\tilde{x}) \left[ \varphi_t^{-1}(\nabla_{x_4}^T H_T) - \varphi_t^{-1}(\nabla_{x_4}^T H_T^*) \right] \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\dot{\tilde{H}}_T(\tilde{x}) = -\nabla_{\tilde{x}}^T \tilde{H}_T(\tilde{x}) \mathbb{K}_T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}_T(\tilde{x}) - \tilde{v}_C^T [\varphi_c^{-1}(v_C) - \varphi_c^{-1}(v_C^*)] - \tilde{i}_L^T [\varphi_t^{-1}(i_L) - \varphi_t^{-1}(i_L^*)].$$

Asimismo, dado que las funciones características  $\varphi_c^{-1}(\cdot)$  y  $\varphi_t^{-1}(\cdot)$  satisfacen **A.3** y consecuentemente (3.47), resulta claro que  $\dot{\tilde{H}}_T \leq 0$  y por consiguiente, la función  $\tilde{H}_T$  es no-creciente y su argumento  $\tilde{x}$  está acotado. Más aún,  $\dot{\tilde{H}}_T$  es cero sólo en  $\tilde{x} = 0$  lo que asegura estabilidad asintótica del punto de equilibrio.  $\square$

Evidentemente la aseveración anterior depende de las propiedades de la función de energía  $H_T$ , como consecuencia, el resultado es local si la función es convexa, en cambio si es estrictamente convexa la función  $\tilde{H}_T$  tendrá un mínimo único y global en  $\tilde{x} = 0$ , como para el caso lineal. En este sentido, actualmente el problema de seguimiento de trayectorias para sistemas Hamiltonianos no-lineales es un problema abierto (ver por ejemplo el trabajo de Romero *et al.* [72] y las referencias en él).

No obstante, aún cuando los elementos almacenadores se hayan supuesto lineales, no es el caso de la relación constitutiva de las resistencias, por lo que en esta red, cualquier carga pasiva, que cumpla con B.3, puede ser conectada en paralelo a los capacitores. Por su parte, las restricciones (4.32) denotan lo que la red es capaz de hacer y una vez establecidas  $x_2^*$  y  $u$  en (4.31) se cumplen de manera natural.

El resultado en la Proposición 10, pone de manifiesto el hecho de que el controlador (4.31) garantiza que para cualquier trayectoria admisible el valor actual

de los capacitores de salida del convertidor tenderá a un valor deseado  $x_2^*$ , por ejemplo una función senoidal con amplitud  $A_i^*$ , frecuencia  $\omega_s$  y fase  $\delta_i^*$  prescritas,

$$x_{2i}^* = A_i^* \sin(\omega_s t + \delta_i^*),$$

con lo que también el voltaje en los capacitores en paralelo con las cargas tenderá a  $x_3^*$ . En la siguiente subsección se estudian estas trayectorias deseadas.

### 4.2.2. Trayectorias Admisibles

Es de gran importancia determinar los valores deseados  $x^* \in \mathbb{R}^{3n_1+n_2}$  de la microred puesto que son éstos los que garantizan un despacho de potencia adecuado. Así pues, dado que el objetivo final es que los nodos de la red tengan un valor de voltaje deseado y sus frecuencias se mantengan en el mismo valor, una manera de dar solución al problema es utilizando los resultados del Capítulo 3 referentes a la caracterización del estado estable cuando se tiene una respuesta senoidal permanente, con herramientas del análisis fasorial. Lo anterior implica asumir que el circuito eléctrico es lineal y que las resistencias  $R_c$  cumplen con que  $v_{Rc}^* = C_a^{-1}x_3^* = R_c i_L$ . Tomando como referencia a la Proposición 7, la relación entrada/salida entre los fasores de voltaje de capacitor  $C_a^{-1}\mathbb{X}_3^*$  y el voltaje de entrada  $C^{-1}\mathbb{X}_2^*$  está dada por

$$C_a^{-1}\mathbb{X}_3^* = -M^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_1} \left( \sum_{k=1}^{r_1} D_{1k} \beta_{1j}^k e_{1j}^* \right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n_1} \left( \sum_{k=1}^{r_z} D_{zk} \beta_{rj}^k e_{1j}^* \right) \\ 0_{(n_2-z)} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

con  $M = [s^2 C + s R_c^{-1} + \text{diag} \{ \mathbf{1}_{r_i}^T D_i \mathbf{1}_{r_i}, 0 \} + \mathcal{L}]$ ,  $i = 1, \dots, z$ , el operador  $s = j\omega$ , la matriz diagonal  $D = (L + s^{-1} R_t)^{-1}$ , se han utilizado la definición de la matriz de inductancias  $L$  y  $R_t$  en (3.51), la de la matriz Laplaciana simétrica  $\mathcal{L} \triangleq N D_p N^T \geq 0$  y se ha definido al vector de entradas  $C^{-1}\mathbb{X}_2^* = \text{col} \{ e_{11}^*, \dots, e_{1n_1}^* \} \in \mathbb{R}^{n_1}$ . La ecuación anterior (4.35) permite fijar un valor deseado para los voltajes en las cargas  $C_a^{-1}\mathbb{X}_3^*$  y con esto encontrar el valor de voltaje correspondiente para  $C^{-1}\mathbb{X}_2^*$ , necesario en la ley de control. Sin embargo, presenta el inconveniente de tener que invertir el sistema y no necesariamente proporciona información de las potencias en los nodos. Por lo que un método alternativo para especificar los valores deseados tiene como base en siguiente razonamiento: El comportamiento en estado estacionario de  $x_2^* \in \mathbb{R}^{n_1}$  determina el de  $x_3^* \in \mathbb{R}^{n_2}$ , por lo que una

elección natural es asociar a cada convertidor de potencia un voltaje

$$C_i^{-1}x_{2i}^* = A_i^* \sin(\omega_s t + \delta_i^*),$$

donde  $\omega_s \in \mathbb{R}$  toma el mismo valor para todos los convertidores, mientras que la amplitud  $A_i : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  y la fase  $\delta_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{S}$  deben determinarse para obtener un flujo de potencia adecuado. Denote entonces a la admitancia compleja  $Y_{ik} := G_{ik} + jB_{ik} \in \mathbb{C}$  con conductancia  $G_{ik} \in \mathbb{R}$  y susceptancia  $B_{ik} \in \mathbb{R}$ , así como  $\mathcal{N}_i$  al conjunto de vecinos de un nodo para los cuales  $Y_{ik} \neq 0$ , entonces la potencia activa y reactiva deseadas en el  $i$ -ésimo nodo  $P_i^* : \mathbb{S}^{n_1+n_2} \times \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $Q_i^* : \mathbb{S}^{n_1+n_2} \times \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ , se obtienen como

$$P_i^* = G_{ii}A_i^{*2} - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} A_i^* A_k^* (G_{ik} \cos(\delta_i^* - \delta_k^*) + B_{ik} \sin(\delta_i^* - \delta_k^*)) \quad (4.36a)$$

$$Q_i^* = -B_{ii}A_i^{*2} - \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} A_i^* A_k^* (G_{ik} \sin(\delta_i^* - \delta_k^*) - B_{ik} \cos(\delta_i^* - \delta_k^*)) \quad (4.36b)$$

con

$$G_{ii} := \hat{G}_{ii} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} G_{ik}, \quad B_{ii} := \hat{B}_{ii} + \sum_{k \sim \mathcal{N}_i} B_{ik}$$

con  $\hat{G}_{ii} \in \mathbb{R}$  y  $\hat{B}_{ii} \in \mathbb{R}$  la conductancia y susceptancia propia (*shunt conductance* y *shunt susceptance*).

Puede verse que las ecuaciones de flujos de potencia (4.36) son estáticas y como tales, las ecuaciones modelan a la red cuando está balanceada, esto es, la suma neta de consumo de potencia, inyecciones y potencia disipada es cero. Estos flujos determinan la condición de operación deseada en estado estable de la red. Este estado estable puede determinarse al encontrar, para un conjunto de condiciones de carga dado, el flujo de potencias activa y reactiva de la red, así como las magnitudes y ángulos de fase de todos los nodos. Dicho lo anterior, otra forma de generar las trayectorias deseadas es dando solución a las ecuaciones de flujos de potencia (4.36), en donde las potencias activas y reactivas son funciones de los voltajes de nodo y las impedancias de la red. Esto es, se propone fijar la potencia activa y reactiva de los  $n_2$  nodos con cargas por medio del valor de las resistencias  $R_c$  y resolver las ecuaciones (4.36a) y (4.36b) para calcular las amplitudes deseadas  $A_i^*$  y las fases  $\delta_i^*$  de los  $n_1$  nodos con voltaje  $C^{-1}x_2^*$ . Una vez encontrado el voltaje  $C^{-1}x_2^* = A_i^* \sin(\omega_s t + \delta_i^*)$  que satisface la demanda de potencia de las cargas, se incorpora a la restricción (4.31) para  $x_1^* \in \mathbb{R}^{n_1}$  y con esto es posible implementar la ley de control  $u \in \mathbb{R}^{n_1}$  en (4.31). Observe que estas ecuaciones algebraicas (4.36) son no lineales, tanto en el voltaje como en el ángulo, por lo que resolverlas implica el uso de un método numérico, por ejemplo

Newton-Raphson<sup>1</sup>.

Cuando las ecuaciones de flujo de potencia se toman en su forma más general, su solución admite un gran número de fenómenos y se sabe [76] que el número de soluciones escala exponencialmente con el tamaño de la red. Más aún, pueden existir distintas soluciones estables tan cercanas unas a otras que distinguirlas en tiempo real puede ser muy difícil, lo anterior queda de manifiesto en la última simulación de la Sección 4.3.

Actualmente, la comunidad de control se ha dedicado a investigar desde condiciones de solubilidad de las ecuaciones de flujo de potencia (ver por ejemplo [25, 76] y las referencias en ellos) hasta su estudio como un problema de optimización ([50, 87] entre otros).

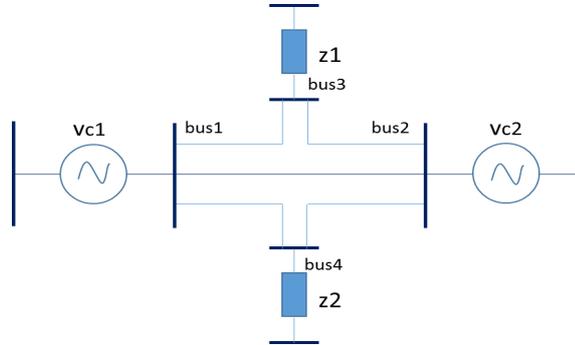
Por ejemplo, Simpson-Porco *et al.* [76] presentan una condición que garantiza la existencia de una solución robusta frente a perturbaciones para los flujos de potencia. Para esto, se enfoca en la potencia reactiva y supone, entre otras cosas, que la red es predominantemente inductiva y que la diferencia angular  $|\delta_i - \delta_k| = 0$ , con lo que es posible obtener una ecuación cuadrática en el voltaje para la cual, determinan condiciones de existencia de solución. En otro estudio, Dvijotham *et al.* [25] investigan sobre los algoritmos que dan solución a las ecuaciones de flujo de potencias. El problema radica en diferenciar entre una operación en condiciones inseguras de la red y una falla del método de Newton-Raphson debida a dificultades numéricas o a una mala linealización. Su propuesta se basa en teoría de operadores monótonos y se aborda como un problema de optimización convexa. Sin embargo, hay que recalcar que aunque importantes, estos tipos de análisis están fuera del alcance de esta tesis.

### 4.3. Simulaciones

Con el objetivo de evaluar el análisis presentado en este capítulo, se presenta una simulación numérica. Para este fin, y por ser la más general de las redes típicas, se considera una red tipo malla como el de la Figura 4.3. La red consta de cinco nodos o buses de los cuales, dos son de inversores, dos son de cargas y el último es el nodo de referencia. Esto es  $n_1 = 2$  y cada inversor está representado por la ecuación (4.3); las cargas resistivas, representadas por la matriz  $R_c \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , poseen relación constitutiva (4.14); estas relaciones constitutivas cumplen las suposiciones hechas en la Proposición 10, con lo que  $n_2 = 2$ . Asimismo, a falta de un modelo explícito para las cargas y por simplicidad, se ha optado por suponer que (4.14) es lineal con lo que su potencia puede ser asignada por medio del valor de las resistencias  $R_c \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

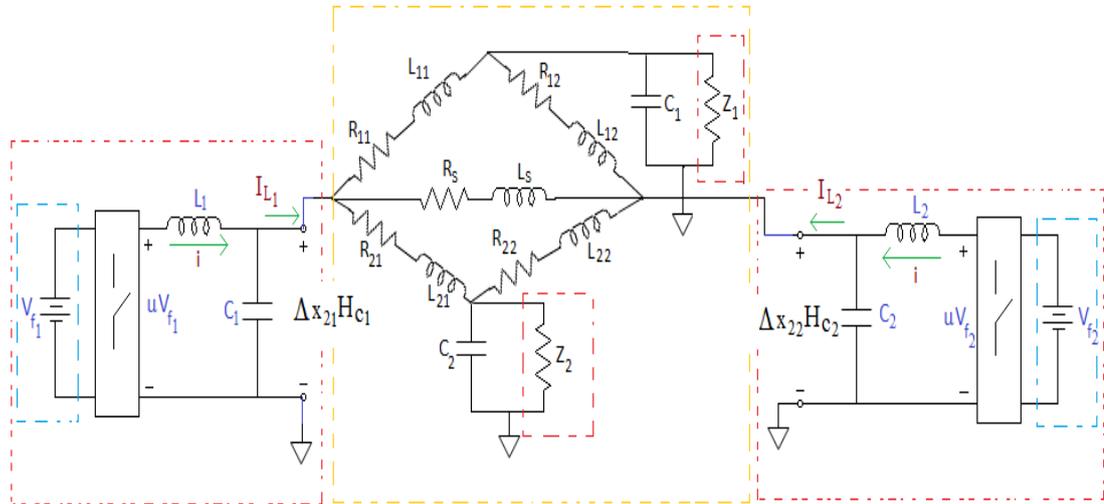
---

<sup>1</sup>La implementación de este método puede encontrarse en el Apéndice A de esta tesis.



**Figura 4.3:** Ejemplo: Diagrama de red tipo malla

Los cinco nodos son interconectados por medio de líneas de transmisión representadas por el modelo  $\Pi$ , es decir, por un inductor en serie con una resistencia y un capacitor conectado al nodo de referencia tal como se muestra en la Figura 4.4, la cual fue estudiada en el capítulo anterior en condiciones de corriente directa y consenso. En la Figura 4.4 se presentan explícitamente los circuitos correspon-



**Figura 4.4:** Ejemplo: Red tipo malla con inversores

dientes a los inversores con el objetivo de aclarar la interconexión de los puertos de entrada y salida, tanto de la red tipo malla como de los inversores, puertos que quedaban implícitos en la Figura 4.2. Más aún, se asume que los inversores son controlados por medio de (4.31).

Para esta simulación, se han establecido sus parámetros de diseño como  $L_a = \text{diag}\{1, 2, 3, 4, 5\} \times e^{-2}$ ,  $C_a = \text{diag}\{1e^{-4}, 6e^{-4}\}$  y  $R_c = \text{diag}\{5, 16\}$ , por lo que la matriz de admitancias compleja  $Y := \{Y_{ik}\} = Y^T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Por su parte,

#### 4. MICROREDES

---

los parámetros de los inversores se han fijado en  $C = \text{diag}\{0.009, 0.007\}$ ,  $L = \text{diag}\{5e^{-4}, 9e^{-5}\}$  y  $V_i = 10$ .

Como se mencionó en la subsección anterior, para proponer el voltaje deseado  $C^{-1}x_2^*$  de la ley de control, se ha fijado la potencia activa y reactiva en las cargas  $R_c$ , correspondientes a los buses 3 y 4 de la Figura 4.3, lo anterior por medio del valor de sus resistencias, y se ha empleado el método de Newton-Raphson, detallado en el Apéndice A de esta tesis, para calcular las amplitudes y fases deseadas  $A_i^*$ ,  $\delta_i^*$ , para  $i = 1, 2$ , del voltaje  $C^{-1}x_2^* = A_i^* \sin(\omega_s t + \delta_i^*) \in \mathbb{R}^2$ , tal como se muestra en la Tabla 4.1, donde el primer nodo se ha tomado como referencia.

$nodo_i$	$V_i$ [pu]	$\delta_i$ [rad]	$P_i$ [pu]	$Q_i$ [pu]
1	1.00	0.00	--	--
2	--	--	1.5	1.0
3	--	--	-1.30	0.20
4	--	--	-0.60	0.25

**Tabla 4.1:** Parámetros del sistema

De acuerdo a la tabla, el sistema tiene 6 incógnitas, por lo que son requeridas 6 ecuaciones de flujo de potencia  $\Delta P_2, \Delta P_3, \Delta P_4, \Delta Q_2, \Delta Q_3$  y  $\Delta Q_4$  dadas por las ecuaciones (A.5); así que la iteración en el método de Newton-Raphson está dado por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_4} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_2} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_3} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_4} \\ \frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial \delta_4} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial V_2} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial V_3} & \frac{\partial \Delta P_3}{\partial V_4} \\ \frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial \delta_4} & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial V_2} & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial V_3} & \frac{\partial \Delta P_4}{\partial V_4} \\ \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_4} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_2} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_3} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_4} \\ \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \delta_4} & \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial V_2} & \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial V_3} & \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial V_4} \\ \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial \delta_3} & \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial \delta_4} & \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial V_2} & \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial V_3} & \frac{\partial \Delta Q_4}{\partial V_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \\ \Delta \delta_4 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta Q_4 \end{bmatrix}.$$

Una vez que las iteraciones hayan convergido, es decir, cuando el desajuste  $\Delta \delta$  y  $\Delta V$  es suficientemente pequeño, los valores de  $\delta$  y  $V$  ya no cambian significativamente, por lo que se pueden calcular los valores restantes de la red, en particular las potencias activa y reactiva generadas en el nodo referencia. El proceso iterativo de Newton-Raphson fue programado en MATLAB y los resultados son los que se presentan en la Tabla 4.2.

Los elementos en la tabla indican que los valores de voltaje deseados para los inversores son  $A_1^* = 1$ ,  $\delta_1^* = 0$  y  $A_2^* = 1.251$ ,  $\delta_2^* = 0.502$ , lo cual permi-

$nodo_i$	$V_i$ [pu]	$\delta_i$ [rad]	$P_i$ [pu]	$Q_i$ [pu]
1	1.00	0.00	0.294	-0.107
2	1.2514	0.502	1.553	1.235
3	1.02	-0.288	-1.28	0.171
4	1.20	-0.348	-0.568	0.252

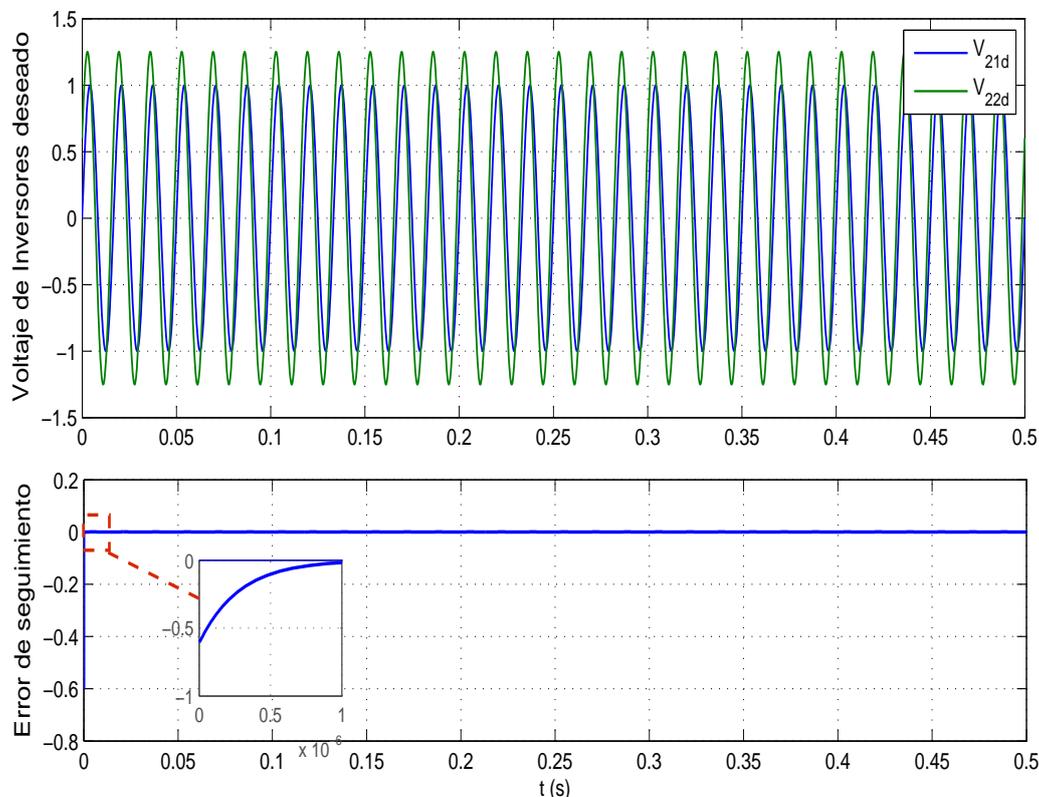
**Tabla 4.2:** Análisis de Flujo de Potencia vía Newton-Raphson

te caracterizar completamente las trayectorias deseadas. Una vez definidas estas trayectorias, la evaluación numérica del controlador se realizó en el ambiente SIMULINK de MATLAB, con un paso de integración variable y el método numérico Runge-Kutta. Las ganancias del controlador (4.31) se definieron como las matrices diagonales positivas  $K_1 = \text{diag}\{1000, 2500\}$ ,  $K_2 = \text{diag}\{1000, 2500\}$  y todas las condiciones iniciales en cero.

Así pues, la primera parte de la Figura 4.5 exhibe el valor de referencia de voltaje  $C^{-1}x_2^* \in \mathbb{R}^2$  para los inversores (en por unidad) obtenido a partir de la Tabla 4.2. En la segunda parte, se muestra el error de seguimiento entre el voltaje real  $C^{-1}x_2$  y el deseado  $C^{-1}x_2^*$ , convergencia que se da casi instantáneamente, dando con esto, solución al problema de seguimiento para  $\tilde{x}_2$ .

Como consecuencia de lo anterior, para el valor fijo de resistencias, el voltaje en los nodos 3 y 4 (nodos asociados a cargas) está especificado por la solución de las ecuaciones de flujos de potencia. Para ilustrar esto, la Figura 4.6 muestra la evolución en el tiempo de las amplitudes y de los ángulos de fase de los voltajes  $C^{-1}x_2$  y  $C_a^{-1}x_3$ ; mientras que la Figura 4.7 presenta el valor de potencia activa y reactiva en los cuatro nodos de la red, cantidades que son congruentes con los presentados en la Tabla 4.2, donde las potencias activas de las cargas se han definido negativas. Es importante remarcar que la solución de flujos de potencia se calcula fuera de línea, por lo que se considera que hay un monitoreo constante de la misma.

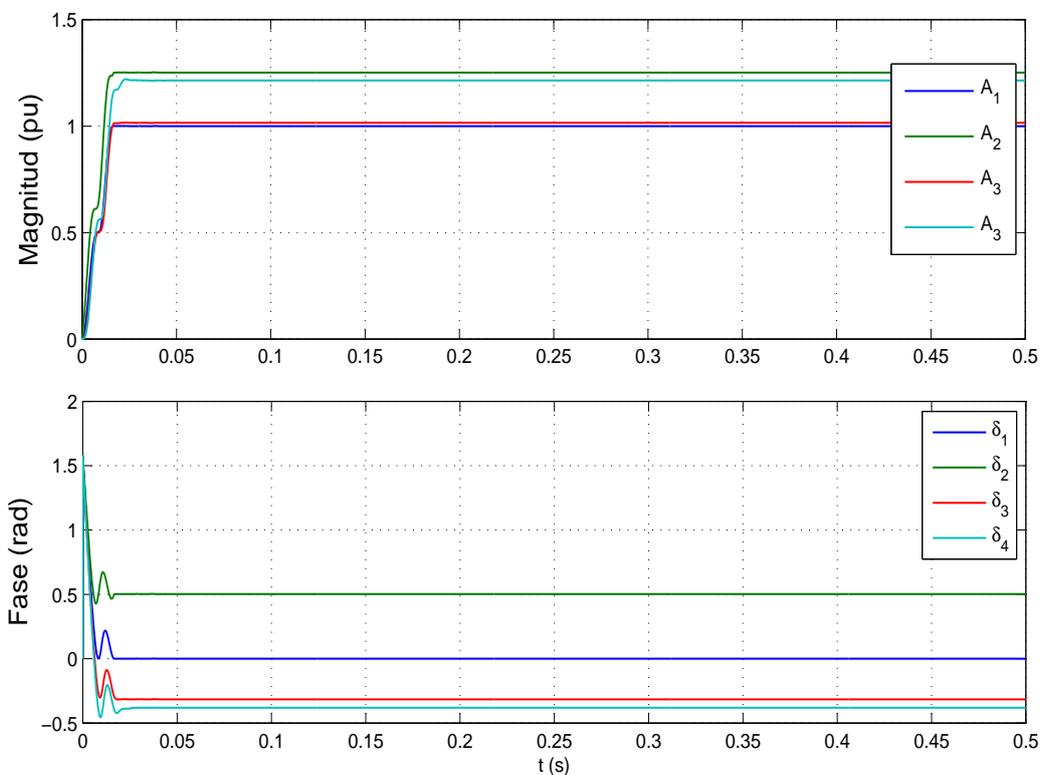
Por otra parte, las Figuras 4.8-4.11 se exponen para evidenciar la robustez del controlador. Esta robustez se ha evaluado numéricamente en dos casos de interés. El primer caso corresponde a la incertidumbre paramétrica, para esto, únicamente se presentan las gráficas correspondientes a una variación paramétrica que dejaba de garantizar la convergencia a cero del error de seguimiento. Las Figuras 4.8 y 4.9 incumben a valores de parámetros en el controlador de  $C = \text{diag}\{0.909, 0.707\}$ ,  $L = \text{diag}\{0.005, 0.001\}$  para los inversores y  $L_a = \text{diag}\{1.01, 2.02, 3.03, 4.04, 5.05\}$  para la red. La variación paramétrica es irrealmente grande, sin embargo aún para estos valores, el error de seguimiento permanece en  $0.03V$  para todo tiempo. El segundo caso atañe a la robustez frente a perturbaciones. En este sentido, se



**Figura 4.5:** (a) Voltajes deseados en los inversores en pu. (b) Error de seguimiento

ha evaluado el desempeño del controlador cuando el voltaje en los capacitores en paralelo con las cargas es sometido a una perturbación constante de  $0.2V$  en  $t = 0.2s$  con una duración de  $0.1s$ , la cual puede ser observada en las amplitudes  $A_3$  y  $A_4$  de la Figura 4.10. Sin embargo, el esquema de control es capaz de reponerse a dicha perturbación y recuperar los valores nominales como se muestra en la Figura 4.11; lo anterior muestra que el controlador propuesto es efectivo.

La última simulación de esta sección tiene como objetivo poner de manifiesto el problema de no unicidad en las soluciones del método de Newton-Raphson. Para esto, se ha optado por cambiar las condiciones del algoritmo y conservar los valores de potencia propuestos pero tomar el segundo como nodo de referencia. Los valores obtenidos son los que se muestran en la Tabla 4.3. En la solución desplegada en esta tabla queda en evidencia que aunque las soluciones están relativamente cercanas a las obtenidas en la Tabla 4.2 son diferentes para las mismas condiciones y los mismos parámetros de la red. Lo anterior se debe a que las potencias del resto de los nodos se *ajustan* a lo demandado por el nodo de referencia.



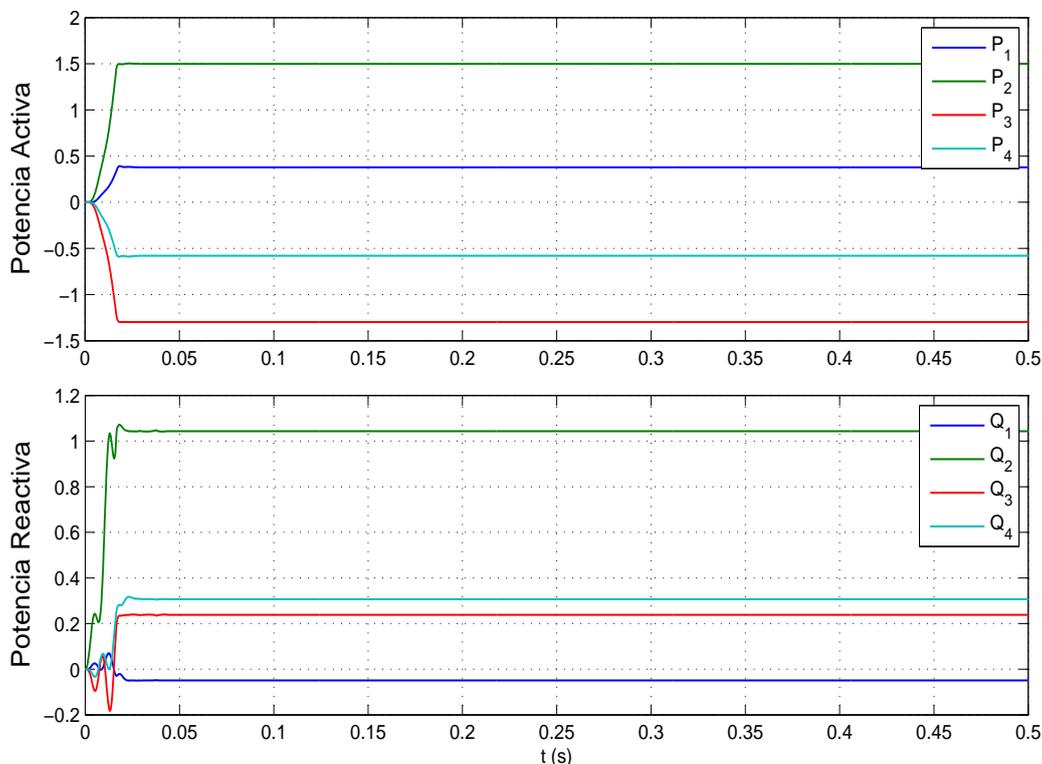
**Figura 4.6:** Amplitud de voltaje en pu y ángulo de fase de los cuatro nodos

De acuerdo a la Tabla 4.3, los nuevos voltajes deseados para los inversores tienen como magnitud y fase  $A_1^* = 0.8151$ ,  $\delta_1^* = 0.2651$ ,  $A_2^* = 1.2514$  y  $\delta_2^* = 0.502$ , con lo que quedan establecidas las nuevas trayectorias deseadas. La Figura 4.13 muestra las potencias activa y reactiva correspondientes a estas condiciones, mientras que la Figura 4.12 exhibe el valor de la magnitud de tensión y fase de los cuatro nodos, valores que son congruentes con los obtenidos con la solución de flujos de potencia.

## 4.4. Control Droop

A diferencia de lo planteado hasta ahora en este capítulo, en la literatura relacionada la forma usual como se aborda el problema de microrredes toma en cuenta las siguientes suposiciones:

- Las cargas pueden modelarse por impedancias constantes por lo que haciendo una *reducción de Kron* (Dorfler y Bullo [24]) se puede asumir que



**Figura 4.7:** Potencias activa y reactiva en pu para los cuatro nodos

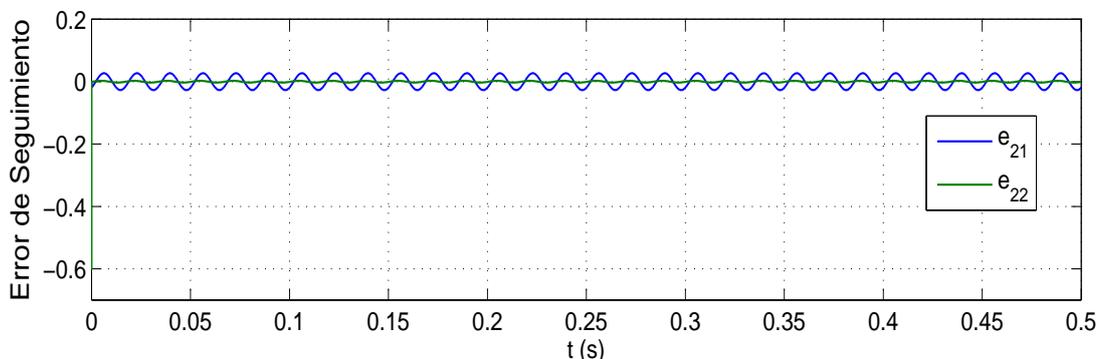
el modelo, para la red reducida, está dado por un conjunto de ecuaciones diferenciales donde cada nodo tiene un inversor.

- La amplitud y el voltaje de los convertidores de potencia pueden ser definidos por el diseñador y esta regulación se hace de manera instantánea, consecuentemente, los inversores pueden ser modelados por una cadena de integradores como

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= u_{i1} \\ \dot{V}_i &= u_{i2}\end{aligned}\tag{4.37}$$

- La red es predominantemente inductiva, por lo tanto los flujos de potencia toman la forma simplificada (A.12).

En primera instancia, aún cuando el uso de escalas de tiempo en cierta medida justifique el despreciar la dinámica de los convertidores, asumir que la dinámica del voltaje y la de la fase están desacopladas no parece natural. Asimismo, este modelo de los inversores no permite acotar la corriente generada por las fuentes



**Figura 4.8:** Error de seguimiento con incertidumbre paramétrica

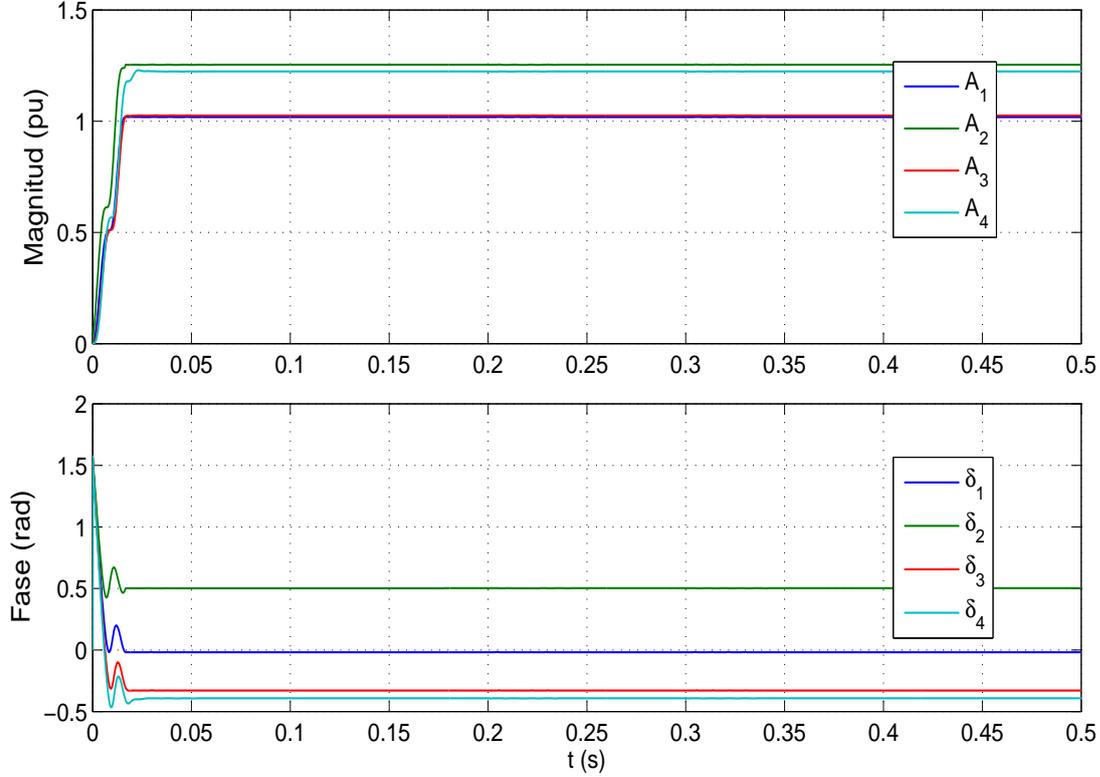
$nodo_i$	$V_i$ [pu]	$\delta_i$ [rad]	$P_i$ [pu]	$Q_i$ [pu]
1	0.8151	0.2651	0.195	-0.367
2	1.2514	0.502	1.577	1.239
3	1.02	-0.229	-1.264	0.087
4	1.20	-0.1449	-0.508	0.273

**Tabla 4.3:** Análisis de Flujo de Potencia vía Newton-Raphson tomando como base al nodo 2

de generación, lo que imposibilita la exhibición del llamado *colapso de voltaje*. Lo anterior sirve de motivación para representar (aunque de manera simplificada) la física de los convertidores. En este sentido, el modelo, el análisis y la ley de control propuesta en la sección 4.2 toman en cuenta un modelo promedio más detallado del convertidor y deja abierta la posibilidad de incorporar un sistema Hamiltoniano que modele a las fuentes de generación.

Sin embargo, una de las ventajas del modelo desacoplado en los convertidores de potencia usado por Schiffer *et al.* [74], Simpson-Porco *et al.* [77] es que puede aplicarse directamente el *control droop* y con esto, un análisis desde la perspectiva de sincronización y consenso. Así, en estos trabajos, una vez establecida la dinámica en lazo cerrado, el objetivo de control es el de sincronizar las frecuencias de todas las unidades de generación, sin que la diferencia angular exceda los  $\pi/2$  y lograr que los voltajes generados sean constantes, garantizando estabilidad interna<sup>1</sup>. La prueba se basa en una traducción del problema de sincronización en uno de estabilización de un punto de equilibrio vía un cambio de coordenadas, dependiente del tiempo, que aprovecha el hecho de que la frecuencia de sincróni-

<sup>1</sup>Un esbozo de la prueba de estabilidad de Schiffer *et al.* [74] puede encontrarse en el Apéndice de esta tesis.

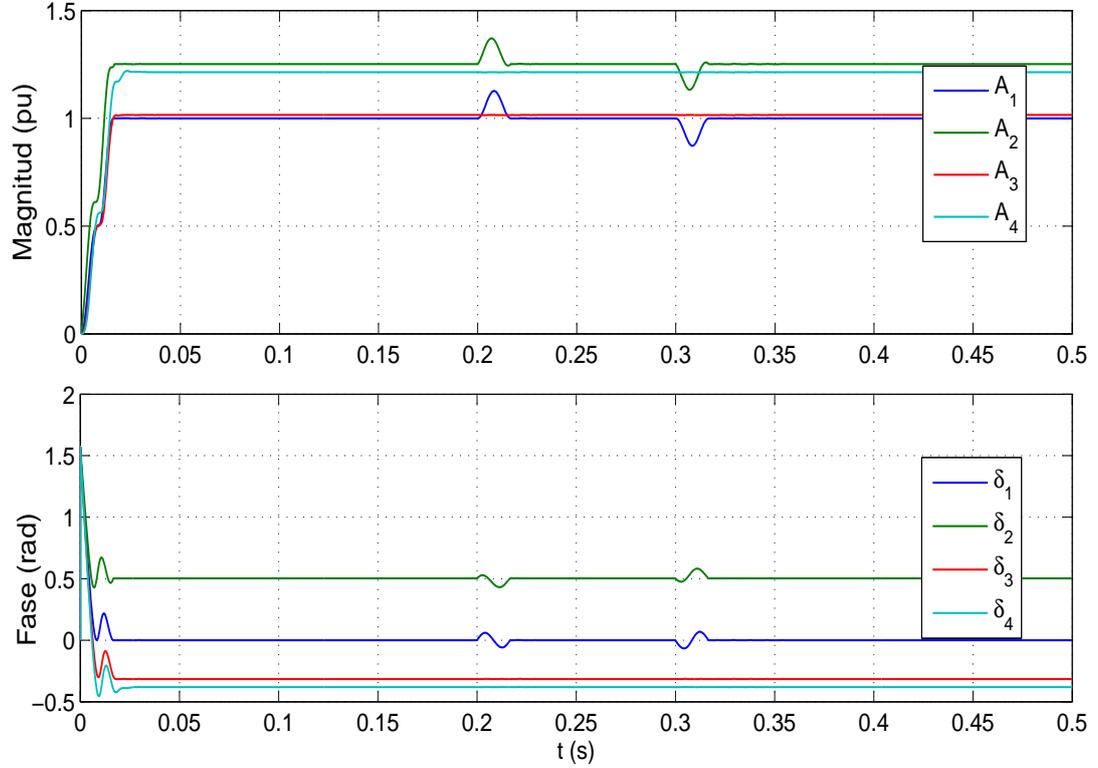


**Figura 4.9:** Amplitud de voltaje y ángulo de fase con incertidumbre paramétrica

zación es la misma para todos los nodos y que la dinámica del sistema depende sólo de la *diferencia* angular.

Por su parte, el control droop es ampliamente usado para generadores síncronos (Kundur *et al.* [42]), donde un cambio en la demanda de potencia activa se ve reflejado como un cambio en la frecuencia del sistema, lo que a su vez modifica el par eléctrico de salida, generando así variaciones de velocidad. La ganancia del controlador droop representa la relación entre la desviación de velocidad  $\Delta\omega$  o desviación de frecuencia  $\Delta f$  y la posición del actuador que permite cambiar la potencia de salida  $\Delta P$ . Si existen dos o más generadores equipados con esta clase de controladores de potencia-velocidad, habrá una frecuencia en la que ambos compartirán un cambio de carga y proporcionarán potencia activa de acuerdo a su capacidad nominal. Así que básicamente, el control droop es un control proporcional que permite especificar la potencia en estado estacionario y está dado por

$$\begin{aligned} u_{i1} &= \omega_d - k_{pi} (P_{im} - P_{id}), \\ u_{i2} &= V_{id} - k_{qi} (Q_{im} - Q_{id}), \end{aligned} \quad (4.38)$$



**Figura 4.10:** Amplitud de voltaje y ángulo de fase con perturbación

con  $\omega_d$ ,  $V_{id}$ ,  $P_{id}$  y  $Q_{id}$  puntos de referencia entregados por un controlador externo,  $k_{pi}$  y  $k_{qi}$  las ganancias del controlador droop y  $P_{im}$ ,  $Q_{im}$  las potencias activa y reactiva medidas.

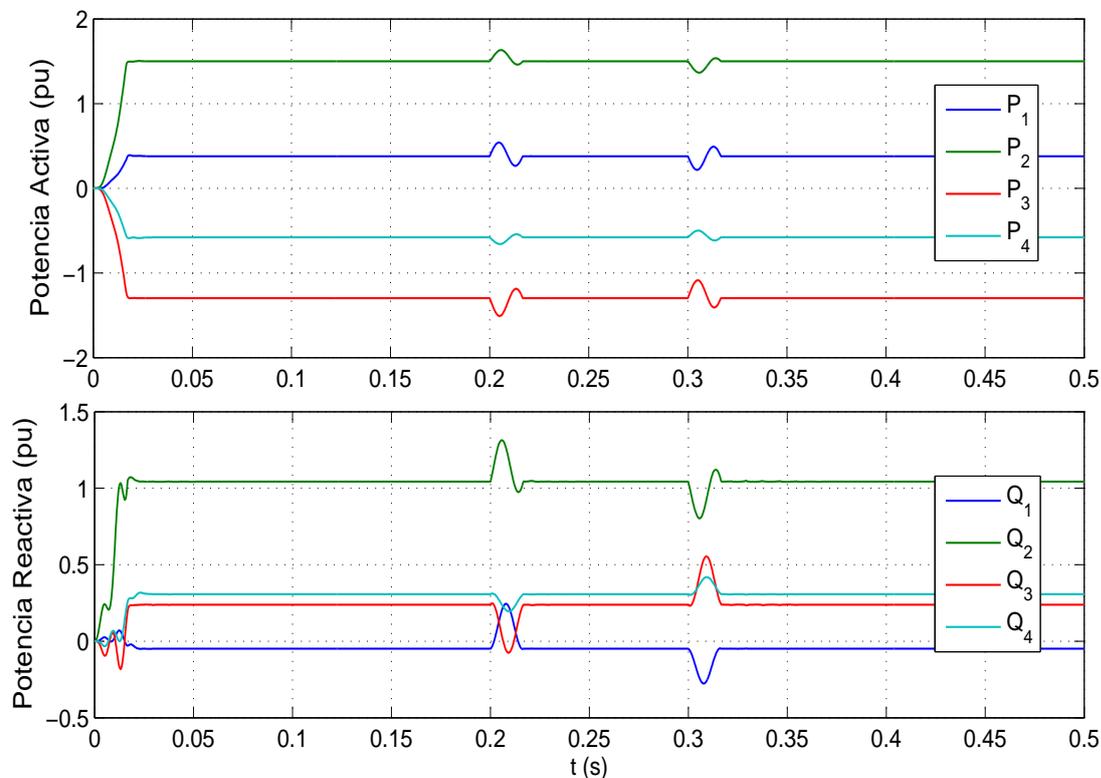
#### 4.4.1. Microred y Control Droop

Con la intención de aprovechar los beneficios del control droop y siguiendo los lineamientos propuestos en la Sección 4.2, se propone ahora especificar los voltajes deseados en los inversores  $C^{-1}x_2^*$  como

$$C_i^{-1}x_{2i}^* = V_{id} \sin(\omega_{id}t + \delta_i^*), \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} |V_{id}| &= V_{ird} - k_{qi} (Q_i - Q_{id}), \\ \omega_{id} &= \omega_{rd} - k_{pi} (P_i - P_{id}), \end{aligned} \quad (4.40)$$

con  $V_{ird}$  y  $\omega_{rd}$  los voltajes y frecuencias deseados de la red. Puede verse que el lado derecho de la ecuación (4.40) corresponde a las ecuaciones (4.38), por lo que

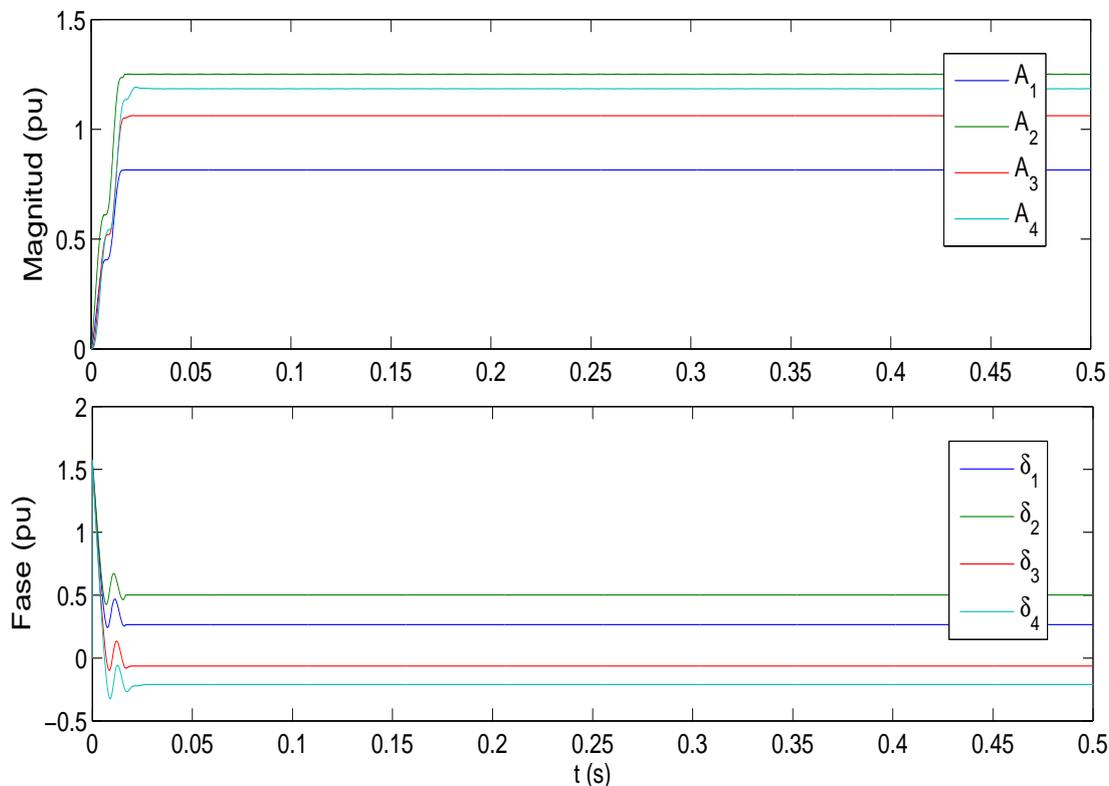


**Figura 4.11:** Potencias activa y reactiva con perturbación

se ha valido del control droop para proponer la magnitud y la frecuencia de las trayectorias deseadas para el controlador (4.31) en los inversores de la microred.

Un esquema de la implementación de la ley de control propuesta puede verse en la Figura 4.14 donde el Lazo de Seguimiento de Fase (PLL por sus siglas en inglés) permite desacoplar la magnitud y la fase de la señal de voltaje  $v_c$  de los convertidores. En este esquema, ya se ha visto que tanto los convertidores en lazo cerrado con su controlador (apilados), como la propia red de interconexión, forman un sistema Hamiltoniano. Así mismo, del análisis de Schiffer *et al.* [74], con un cambio de variable los flujos de potencia con el controlador droop también pueden escribirse como un Sistema Hamiltoniano, por lo que se tiene la conjetura de que, si los PLL son Sistemas Hamiltonianos, usando propiedades de los Sistemas Hamiltonianos puede hacerse una prueba de estabilidad similar a la de Schiffer *et al.* [74] ó Simpson-Porco *et al.* [77]. Sin embargo, en este momento la prueba de estabilidad es parte del trabajo futuro de esta tesis.

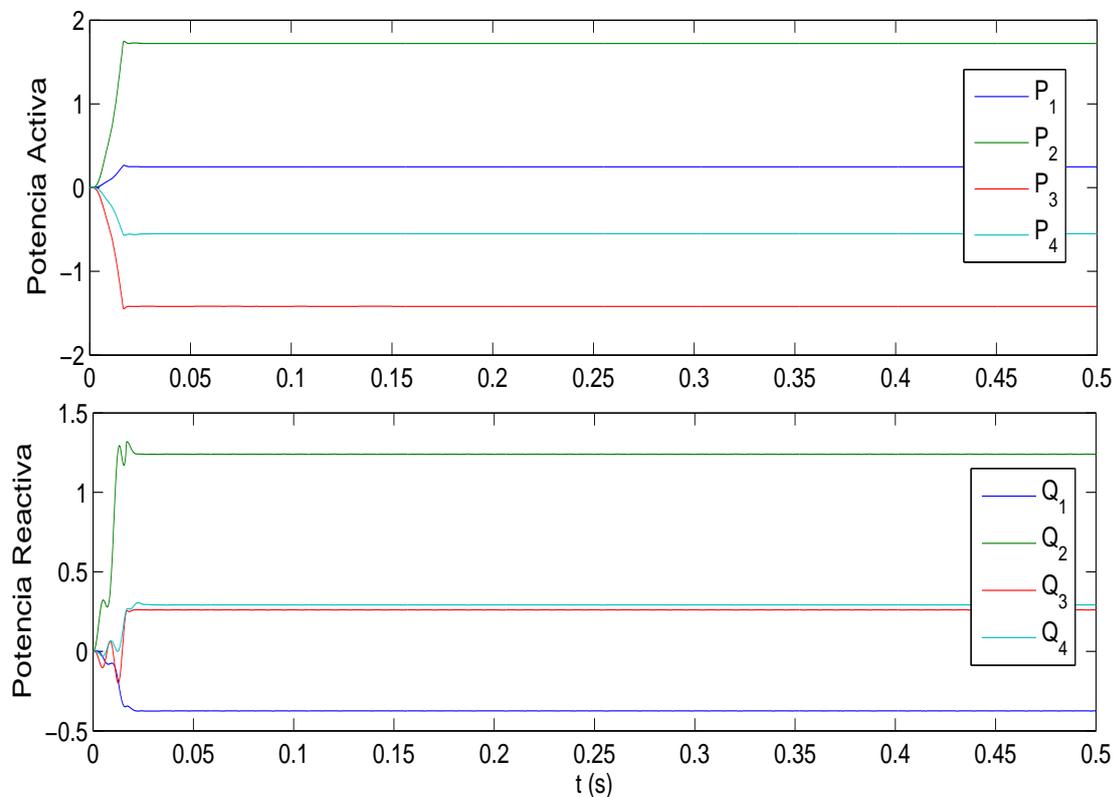
Hasta el momento se han realizado simulaciones numéricas con el Simulink de MATLAB para la misma red malla de la sección anterior que se muestra



**Figura 4.12:** Amplitud de voltaje y ángulo de fase tomando como base al nodo 2

en las Figuras 4.4 y 4.3. Los parámetros de la red, los de los inversores y las matrices de ganancias  $K_1$  y  $K_2$  son las mismas que las propuestas en la Sección 4.3. Adicionalmente, las ganancias del controlador droop se han fijado en  $k_{p1} = 6$ ,  $k_{p2} = 1.5$ ,  $k_{q1} = 0.15$  y  $k_{q2} = 0.1$ , para los dos inversores; mientras que los valores deseados de potencias activas  $P_{id}$ , reactivas  $Q_{id}$  y los voltajes  $V_{ird}$  han sido tomados de la solución de los flujos de potencia en la Tabla 4.2. Por último, la frecuencia  $\omega_{rd}$  se ha puesto en 60Hz para los dos nodos asociados a inversores.

La Figura 4.15 muestra los voltajes deseados en los inversores que han sido generados por las ecuaciones (4.39)-(4.40). En la segunda parte de la figura, se presenta el error de seguimiento, con lo que se observa la capacidad del control en los inversores para seguir la señal deseada. La Figura 4.16 muestra la amplitud de voltaje y la fase de los cuatro nodos, mientras que la Figura 4.17 muestra las potencias activa y reactiva en los cuatro nodos; en estas figuras puede verse que no sólo el objetivo de control se cumple, sino que modificando los valores deseados el control droop permite establecer el valor de estas potencias en estado estacionario. Comparando estas gráficas con las correspondientes de la sección

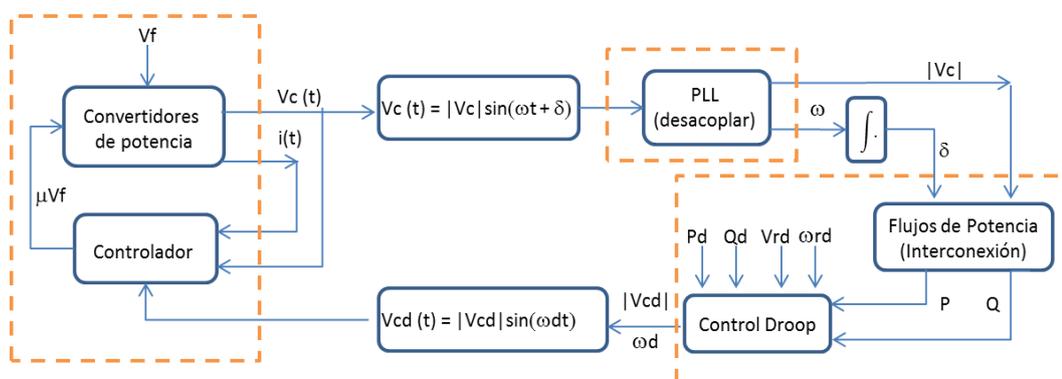


**Figura 4.13:** Potencias activa y reactiva tomando como base al nodo 2

anterior, puede verse que el desempeño del controlador de la sección anterior es mejor en el sentido de que para la red con controlador droop, tanto la constante de tiempo como el máximo sobre impulso son más grandes.

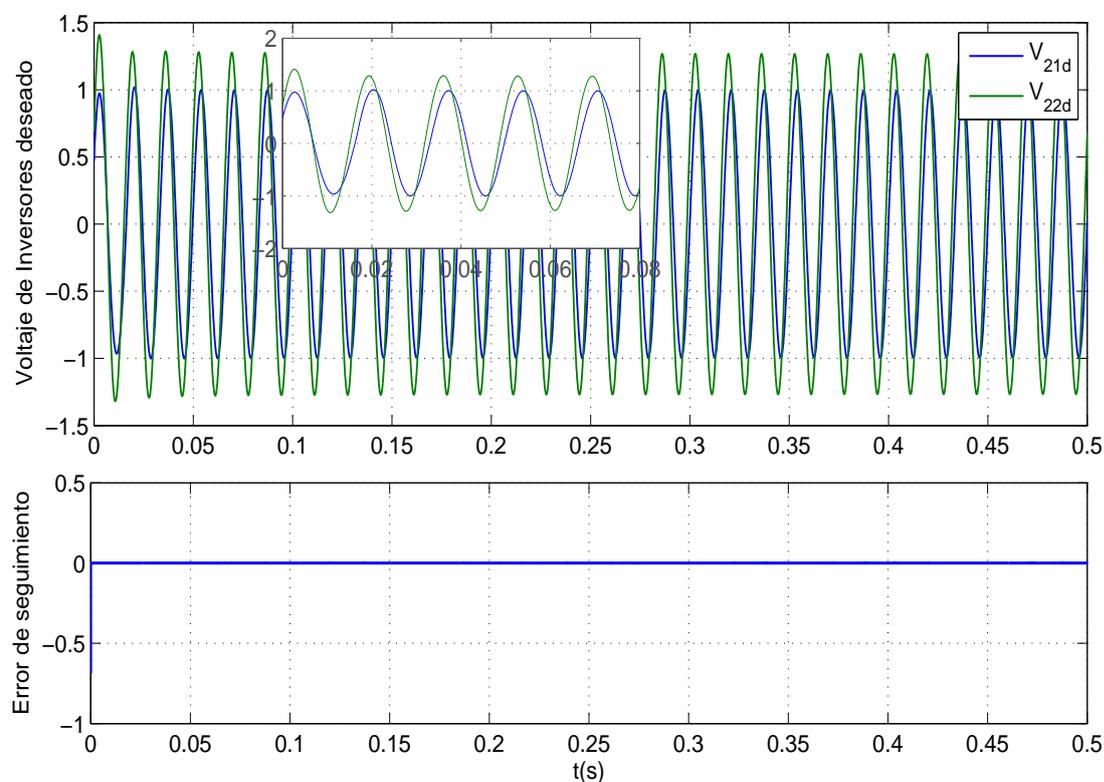
## 4.5. Resumen y Discusión

- En este capítulo, los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto se han presentado como un concepto unificador que permite extender el análisis de circuitos eléctricos al caso de microredes. Estas microredes se pueden representar por tres elementos: los convertidores de potencia, la red de interconexión y las cargas. Cada uno puede representarse por un sistema Hamiltoniano, por lo que el modelo completo exhibe la misma estructura.
- La operación de los IGBTs de los inversores ocurre típicamente a muy altas frecuencias (2-20kHz) comparadas con la frecuencia de la red (45-65Hz), lo anterior justifica el modelo promedio continuo propuesto para el inversor.



**Figura 4.14:** Esquema de control

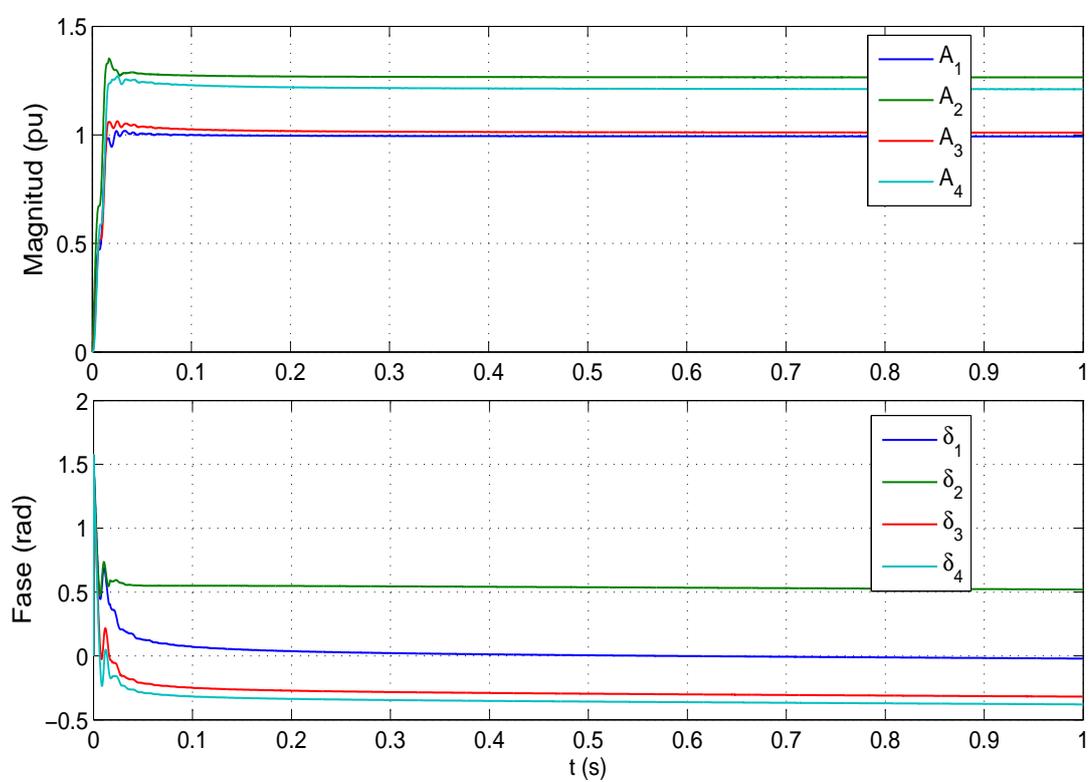
- Uno de los retos que es necesario considerar como trabajo futuro está relacionado con las fuentes de voltaje constantes  $V_i$  del modelo de los inversores. En un escenario más realista, estos voltajes deben ser los entregados por una unidad de generación distribuida, por lo que deben tener asociados otro sistema dinámico, en principio otro sistema Hamiltoniano.
- A diferencia de trabajos reportados en la literatura (Schiffer *et al.* [74], Simpson-Porco *et al.* [77]), el problema de estabilización de la microred se ha abordado como un problema de seguimiento de trayectorias y análisis del estado estacionario en sistemas Hamiltonianos.
- Los inversores proveen una cantidad específica de potencia activa y reactiva; usualmente, sus referencias de voltaje son dadas por un control externo (también llamado control primario por Bidram *et al.* [12]). En el caso de este trabajo, se ha propuesto generar las trayectorias deseadas por medio de la solución de los flujos de potencia de la red. En este sentido, parte del trabajo futuro concierne a la incorporación de un algoritmo de despacho óptimo de potencia.
- Es importante reconocer que para esta tesis, aún cuando en el análisis las relaciones constitutivas (4.14) son generales en el sentido de que aunque pasivas pueden ser no-lineales, éstas, junto con la suposición de fuentes ideales, no permiten representar fenómenos como el colapso de voltaje. Sin embargo, es opinión de la autora de esta tesis que este problema puede enfocarse con un modelo Hamiltoniano, por lo que las herramientas desarrolladas aquí pueden ser aplicadas.
- Aunque en el contenido del capítulo se ha hablado de modificaciones en la topología que permiten, entre otras cosas, modificar la matriz de susceptan-



**Figura 4.15:** (a) Voltajes deseados en los inversores en pu. (b) Error de seguimiento

cias con el objetivo de compensar potencia reactiva en algún nodo, parte del trabajo futuro es extender este tipo de compensadores retomando el modelo Hamiltoniano de los FACTS (ver [36, 80] y las referencias en ellos).

- Los métodos numéricos para la solución de las ecuaciones de flujo de potencia tipo Newton-Raphson recaen en una buena linealización, por lo que pueden fallar en converger. Asimismo, el problema de si estos algoritmos garantizan encontrar una solución única o si se puede establecer el tiempo que tardan en converger, es un problema abierto dentro de la comunidad de control (ver [25]) y está fuera del contenido de esta tesis.



**Figura 4.16:** Amplitud y ángulo de fase del voltaje en los nodos usando el control droop

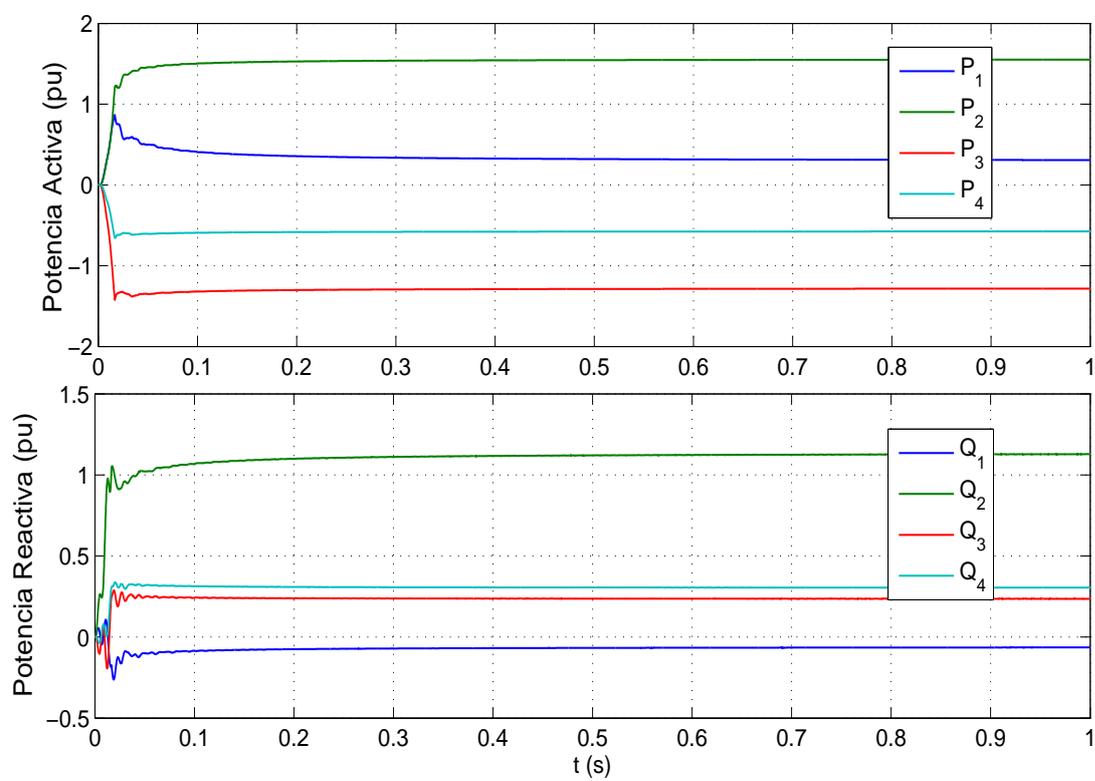


Figura 4.17: Potencias activa y reactiva los nodos usando control droop

# Diseño de Controladores

---

El último punto que se aborda en esta tesis es la formulación de leyes de control para sistemas Lagrangianos y Hamiltonianos, con vista a ser implementados en la microred. Así, este capítulo está enfocado en el diseño de una ley de control por retroalimentación de salida para el seguimiento de trayectorias en una clase de sistemas Lagrangianos subactuados.

En este capítulo se extienden los resultados para sistemas Lagrangianos, presentados por Loria [46], Loria y Avila-Becerril [47], al asumir que sólo las posiciones físicas son medidas. Para el caso particular de robots de uniones flexibles (Avila-Becerril *et al.* [8]) lo anterior corresponde a medir solamente la posición del motor y del eslabón. Para esto, se desarrolla un controlador de equivalencia cierta y un observador de orden reducido con lo que pueden establecerse resultados de estabilidad uniforme y global del sistema en lazo cerrado. Hasta donde la autora de esta tesis sabe, este problema permanecía abierto y ha sido sometido en (Avila-Becerril *et al.* [9]).

## 5.1. Formulación del Problema

Considere un sistema Euler Lagrange en el cual la entrada de control se introduce por medio de una cadena de  $m$  integradores de la forma

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \xi_1 \quad (5.1a)$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2 \quad (5.1b)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_{m-1} = \xi_m \quad (5.1c)$$

$$\dot{\xi}_m = u \quad (5.1d)$$

donde  $u, \xi_i \in \mathbb{R}^n$  para todo  $i \leq m, m \geq 1$ . La matriz  $D(q) = D^\top(q) > 0$  corresponde a la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  contiene los términos debidos a las

fuerzas centrífugas y de Coriolis y  $g$  representa el vector de fuerzas gravitacionales. Se considera además que el modelo (5.1), cumple con las siguientes hipótesis.

**Suposición 3.**

1. La matriz de inercia  $D(q)$  es positiva definida y uniformemente acotada, de manera más precisa, existen números reales positivos  $d_m$  y  $d_M$  tal que

$$d_m \leq |D(q)| \leq d_M \quad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

2. La matriz  $C(x, y)$  está acotada en  $x$  y es lineal en  $y$ . Esto es, existe una función de saturación  $\text{sat} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|C(x, y) - C(z, y)| \leq k_c \text{sat}(|x - z|)|y|, \quad (5.2)$$

donde  $\text{sat}(s) := \text{sgn}(s) \min\{1, |s|\}$  y

$$C(x, y)z = C(x, z)y.$$

3. La matriz  $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es antisimétrica para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ .

A excepción de la ecuación (5.2), las demás condiciones son suposiciones comunes en la literatura relacionada. Así, la suposición de acotamiento de la matriz de inercia es poco conservadora y en principio, es cierta en (aunque no está limitada) robots manipuladores compuestos sólo por articulaciones de revolución o sólo por prismáticas (ver Ghorbel *et al.* [32] para una caracterización completa). Sin embargo, cabe mencionar que el resultado principal de Romero *et al.* [72], aunque sólo es válido para sistemas totalmente actuados donde  $m = 0$ ,  $\xi_1 := u$ , no recae en el acotamiento uniforme de la matriz  $D$ . La condición (5.2) se ha supuesto por razones técnicas y no es conservadora pues, frecuentemente  $C(\cdot, \dot{q})$  es uniformemente acotada.

Bajo estas condiciones, el problema a resolver es el mismo que en el Capítulo 4, es decir, un problema de control de seguimiento, el cual se enuncia como sigue: Para cualquier trayectoria de referencia dada  $t \mapsto q_d$ , dos veces diferenciable y acotada, *i.e.*, tal que

$$\max \left\{ \sup_{t \geq 0} |q_d(t)|, \sup_{t \geq 0} |\dot{q}_d(t)|, \sup_{t \geq 0} |\ddot{q}_d(t)| \right\} \leq k_\delta \quad (5.3)$$

para alguna  $k_\delta > 0$ , se requiere construir un *controlador dinámico por retroalimentación de salida*

$$\dot{x}_c = f(t, q_1, q_2, x_c) \quad (5.4)$$

$$u = u(t, q_1, q_2, x_c) \quad (5.5)$$

(esto es,  $x_c \in \mathbb{R}^m$  corresponde al estado del controlador) tal que el origen del sistema en lazo cerrado sea *uniformemente globalmente asintóticamente estable*.

Para este fin, se sigue el método propuesto por Loria [46], el cual tiene como base el uso de diferenciadores aproximados para reemplazar las velocidades no medibles con los llamados “derivadores sucios”; para después, en lugar de usar las mediciones no disponibles de  $\xi_i$  para todo  $i \geq 2$ , se diseña un observador de Luenberger de la “dinámica- $\xi$ ”. Los detalles del controlador se explican en la siguiente sección.

## 5.2. Diseño del Controlador: Principio de Separación

En un trabajo previo de Loria [46], se presenta un controlador dinámico por retroalimentación de salida que depende de la salida medida  $y^\top := [q^\top \xi^\top]$ . A diferencia de Loria [46], en este capítulo se asume que la salida medida es  $y^\top := [q^\top \xi_1^\top]$ ; para lograr este fin y poder aludir al principio de separación para (5.1), primero se siguen los lineamientos del diseño del controlador por retroalimentación de salida de la referencia anterior, para después diseñar un observador de orden reducido y mostrar que las ganancias son independientes de las del controlador.

El método de diseño del control sigue el razonamiento del control backstepping clásico, esto es, en cada paso de integración, se diseña una ley de control virtual  $\xi_i^*$ , iniciando con

$$\xi_1^* = -k_{p_0}\tilde{q} - k_{d_0}\vartheta_0 + D(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q). \quad (5.6)$$

donde  $\tilde{q} = q - q_d$  y la variable  $\vartheta_0$  corresponde a la diferenciación aproximada de  $\tilde{q}$  esto es,

$$\dot{q}_{c0} = -a_0\vartheta_0 \quad (5.7a)$$

$$\vartheta_0 = q_{c0} + b_0\tilde{q}. \quad (5.7b)$$

El uso de derivadas aproximadas en lugar de observadores (no-lineales) es una característica clave del control puesto que simplifica las ecuaciones del controlador y por lo tanto, la tarea de sintonización. Más aún, como se muestra por Loria [45, 46], el origen del sistema en lazo cerrado (5.1a), (5.6)-(5.7) es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Ahora, para las ecuaciones (5.1b) hasta (5.1c), la variable  $\xi_{i+1}$  es considerada como una entrada de control virtual para la  $i$ -ésima ecuación y como una referencia de regulación en la  $(i + 1)$ -ésima ecuación. Con esto en mente, se define

$$\xi_{i+1}^* = -k_{p_i} \tilde{\xi}_i + k_{d_i} \vartheta_i + \dot{\xi}_{i_0}^*, \quad \forall i \in [1, m-1] \quad (5.8a)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_i &= q_{ci} + b_i \xi_i^* + \zeta_i \\ \dot{q}_{ci} &= -a_i \vartheta_i \\ \dot{\zeta}_i &= -(k_{d_i} - \sigma_i) \tilde{\xi}_i - b_i \dot{\xi}_{i_0}^* \end{aligned} \right\} \forall i \in [1, m] \quad (5.8b)$$

$$u = -k_{p_m} \tilde{\xi}_m + k_{d_m} \vartheta_m + \dot{\xi}_{m_0}^* \quad (5.8c)$$

donde  $k_{p_i}, k_{d_i} \in \mathbb{R}$  son ganancias de control positivas,  $\sigma_1 := 0$  y  $\sigma_i := b_i k_{p_{i-1}}$  para todo  $i \in [2, m]$ .

El término  $\tilde{\xi}_i := \xi_i - \xi_i^*$  corresponde a los “errores de regulación” para la dinámica- $\xi$  en (5.1). Note que  $\xi_i^*$ , y sus  $(i+2)$  derivadas, son en general, una función del tiempo; esto es por su dependencia con la trayectoria de referencia  $q_d(t)$ . Es además una función de los estados, incluyendo las variables no-medibles, al igual que  $\dot{q}$  y sus  $(i-1)$  derivadas; lo anterior como consecuencia de la definición recursiva de  $\xi_i^*$ . El término  $\dot{\xi}_{i_0}^*$  representa el valor de  $\dot{\xi}_i^*$  evaluado en el origen, es decir, en  $(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}}, \vartheta, \xi) = (0, 0, 0)$ . En otras palabras,  $\dot{\xi}_{i_0}^*$  depende sólo de  $t$ , a través de  $q_d(t)$  y las  $(i+2)$  derivadas de este último. Más aún, se verifica que  $\dot{\xi}_{i_0}^* := \xi_{i+1_0}^*$ —ver lo presentado por Loria [46] para detalles.

Ahora, note que cada grupo de ecuaciones (5.8b) corresponde a la implementación de un derivador sucio (modificado)  $\xi_i^*$ , que puede ser calculado usando sólo variables conocidas o medidas. De hecho, en el dominio de la frecuencia, la ecuación (5.8b) corresponde a

$$\vartheta_i = \frac{b_i s}{s + a_i} \psi_i \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_i = \frac{b_i}{s + a_i} \dot{\psi}_i \quad (5.9)$$

donde  $\psi_i = \xi_i^* + \zeta_i/b_i$  y  $\psi_0 = \tilde{q}$ . La segunda representación, en términos de un filtro paso-bajas con entrada  $\dot{\psi}_i$ , resulta útil para propósitos de análisis pues define un mapeo estrictamente pasivo a la salida  $\vartheta_i \mapsto \dot{\psi}_i$ . En el dominio del tiempo, corresponde a

$$\dot{\vartheta}_i = -a_i \vartheta_i + b_i \dot{\xi}_i^* - (k_{d_i} - \sigma_i) \tilde{\xi}_i - b_i \dot{\xi}_{i_0}^* \quad (5.10)$$

el cual tiene un equilibrio en el origen  $\{z = 0\}$ .

Debe destacarse que la ecuación (5.8b) no es un observador pues  $\vartheta_i \not\rightarrow \dot{q}_i$ ; sin embargo, la relación  $\vartheta_i/\dot{q}_i$  permanece acotada y separada de cero de ahí que, uno puede decir que asintóticamente  $\vartheta_i \approx \dot{q}_i$ , esto implica que, para el propósito de estabilización *global*, debe ser inyectado un amortiguamiento por medio de un filtro paso-bajas de ganancia finita. En otras palabras, en lugar de explotar las propiedades de *convergencia* de las soluciones estimadas, como se hace usualmente en diseños basados en observadores, usamos las propiedades *entrada-salida* del

filtro propio y estable en (5.9). La prueba formal, basada en esta interpretación verbal, puede consultarse en Loria [46].

En este capítulo, se establece que para el sistema en lazo cerrado (5.1), (5.6)–(5.8), el origen  $\{z = 0\}$ , con

$$z = [ \tilde{q}^\top \quad \dot{\tilde{q}}^\top \quad \vartheta_0^\top \quad \tilde{\xi}_1^\top \quad \cdots \quad \tilde{\xi}_m^\top \quad \vartheta_1^\top \quad \cdots \quad \vartheta_m^\top ]^\top,$$

es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

### 5.2.1. Control de Equivalencia Cierta

La desventaja obvia del controlador (5.8) es que está basado en la medición de  $\xi_i$  para todo  $i \leq m$ . En particular, para el caso de los robots con uniones flexibles, esto incluye las velocidades del motor. Con el objetivo de relajar la suposición, se introduce un observador Luenberger de orden reducido para la dinámica- $\xi$  lineal y se usa un controlador de equivalencia cierta que incluye las derivadas sucias de  $q$  y  $\xi^*$ . Aún cuando este diseño puede ser considerado como ingenuo, se destaca que, hasta donde la autora sabe, en la literatura no existe un reporte de estabilización asintótica uniforme y global para el sistema (5.1).

El observador lineal de Luenberger, basado en la medición de  $\xi_1$ , está definido por

$$\dot{\hat{\xi}}_i = \hat{\xi}_{i+1} + \lambda_i(\xi_1 - \hat{\xi}_1), \quad \forall i \in [1, m-1] \quad (5.11a)$$

$$\dot{\hat{\xi}}_m = u + \lambda_m(\xi_1 - \hat{\xi}_1) \quad (5.11b)$$

con ganancias constantes  $\lambda_i > 0$  para todo  $i \leq m$ , elegidas para que la siguiente matriz sea Hurwitz:

$$L := \begin{bmatrix} \lambda_1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m-1} & 0 & \cdots & -1 \\ \lambda_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes I_n. \quad (5.12)$$

## 5. DISEÑO DE CONTROLADORES

---

Entonces, definiendo  $\bar{\xi}_i = \hat{\xi}_i - \xi^*$ , se introduce el control de equivalencia cierta

$$\dot{\xi}_{i+1}^* = -k_{p_i}\bar{\xi}_i + k_{d_i}\vartheta_i + \dot{\xi}_{i_0}^*, \quad \forall i \in [1, m-1] \quad (5.13a)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_i &= q_{c_i} + b_i\xi_i^* + \zeta_i \\ \dot{q}_{c_i} &= -a_i\vartheta_i \\ \dot{\zeta}_i &= -(k_{d_i} - \sigma_i)\bar{\xi}_i - b_i\dot{\xi}_{i_0}^* \end{aligned} \right\} \forall i \in [1, m] \quad (5.13b)$$

$$u = -k_{p_m}\bar{\xi}_m + k_{d_m}\vartheta_m + \dot{\xi}_{m_0}^* \quad (5.13c)$$

el cual corresponde a (5.8) donde  $\xi_i$  ha sido reemplazado por su estimado  $\hat{\xi}_i$ . Tomando como base lo establecido anteriormente, se puede presentar el resultado principal de este capítulo.

**Proposición 11.** *Suponga que la referencia  $q_d$  satisface (5.3). Considere el sistema (5.1), bajo la Suposición 3 en lazo cerrado con el controlador definido por las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.13). Entonces, el origen del sistema en lazo cerrado es globalmente uniformemente asintóticamente estable para ganancias de control suficientemente grandes. Más aún, lo anterior se cumple para cualesquiera ganancias de observador  $\lambda_i$  que hagan  $L$  en (5.12) Hurwitz, independientemente de las ganancias de control.*

La prueba de la Proposición 11 es constructiva; se derivan condiciones explícitas para las ganancias de control que impliquen estabilidad global, uniforme y asintótica. Esta prueba está organizada en los siguientes pasos lógicos: primero, se encuentran las ecuaciones en lazo cerrado, para después reconocer que tienen una forma en cascada que surge de la aplicación de un control de equivalencia cierta; lo anterior permite invocar argumentos de cascadas. Esto es, para un sistema no-lineal variante con el tiempo

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1) + g(t, x)x_2 \quad (5.14a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2) \quad (5.14b)$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}^p$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^q$ ,  $x := \text{col}[x_1, x_2]$  con  $f_1$ ,  $f_2$  y  $g$  continuas y localmente Lipschitz en  $x$ , uniformemente en  $t$ , y  $f_1$  continuamente diferenciable, se cumple que, si los respectivos orígenes de los subsistemas (5.14b) y  $\dot{x}_1 = f_1(t, x_1)$  son uniformemente globalmente asintóticamente estables, una condición necesaria y suficiente para que el origen del sistema completo posea la misma propiedad, es que las soluciones de (5.14a) estén globalmente uniformemente acotadas. Esto último se establece en la siguiente subsección a lo largo de la prueba del Teorema 4 en (Loria [46]).

### 5.2.2. Ecuaciones en Lazo Cerrado

Por un lado, la primera ecuación de error se obtiene usando la identidad  $\xi_1 = \tilde{\xi}_1 + \xi_1^*$ , al reemplazar  $\xi_1^*$  de (5.6) en (5.1a) y añadir el término  $-C(q, \dot{q})\dot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q}_d = 0$  al lado derecho de la última ecuación. Para luego diferenciar ambos lados de (5.7b) y hacer uso de (5.7a), con lo que se tiene

$$D(q)\ddot{q} + [C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q}_d)]\dot{q} + k_{p_0}\tilde{q} + k_{d_0}\vartheta_0 = \ddot{\tilde{\xi}}_1 \quad (5.15a)$$

$$\dot{\vartheta}_0 = -a_0\vartheta_0 + b_0\dot{\tilde{q}}. \quad (5.15b)$$

Por otro lado, las ecuaciones (5.1b)–(5.1d) son equivalentes a

$$\ddot{\xi}_i = \xi_{i+1}^* - \dot{\xi}_i^* + \ddot{\tilde{\xi}}_{i+1}, \quad i \in [1, m-1] \quad (5.16a)$$

$$\ddot{\xi}_m = u - \dot{\xi}_m^* \quad (5.16b)$$

de manera que, definiendo el error  $e_i := \xi_i - \hat{\xi}_i$  y usando la identidad  $\bar{\xi}_i = \tilde{\xi}_i - e_i$  con  $i \leq m$ , así como (5.13), se obtiene que

$$\ddot{\tilde{\xi}}_i = -k_{p_i}\tilde{\xi}_i + k_{d_i}\vartheta_i + \ddot{\tilde{\xi}}_{i+1} + k_{p_i}e_i - (\dot{\xi}_i^* - \dot{\xi}_{i_0}^*) \quad (5.17a)$$

$$\dot{\vartheta}_i = -a_i\vartheta_i - (k_{d_i} - \sigma_i)(\tilde{\xi}_i + e_i) + b_i(\dot{\xi}_i^* - \dot{\xi}_{i_0}^*). \quad (5.17b)$$

Para hacer más compacta la notación, se definen las matrices  $A := \text{diag}\{a_i\} \otimes I_n$ ,  $B := \text{diag}\{b_i\} \otimes I_n$ ,  $K_d := \text{diag}\{k_{d_i}\} \otimes I_n$ ,  $K_p := \text{diag}\{k_{p_i}\} \otimes I_n$ ,  $K'_d := K_d - \text{diag}\{\sigma_i\} \otimes I_n$ ,

$$K'_p = \begin{bmatrix} k_{p_1} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & k_{p_m} \end{bmatrix} \otimes I_n,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^\top &= [\tilde{\xi}_1^\top \cdots \tilde{\xi}_m^\top] & \dot{\xi}_o^{\star\top} &= [\dot{\xi}_{1_o}^{\star\top} \cdots \dot{\xi}_{m_o}^{\star\top}] \\ \vartheta^\top &= [\vartheta_1^\top \cdots \vartheta_m^\top] & e^\top &= [e_1 \cdots e_m], \end{aligned}$$

con lo que la dinámica del error de regulación (5.17) toma la forma

$$\ddot{\tilde{\xi}} = -K'_p\tilde{\xi} + K_d\vartheta + K_p e - [\dot{\xi}^* - \dot{\xi}_o^*] \quad (5.18a)$$

$$\dot{\vartheta} = -A\vartheta - K'_d\tilde{\xi} + K'_d e + B[\dot{\xi}^* - \dot{\xi}_o^*] \quad (5.18b)$$

mientras que la dinámica del error de estimación puede escribirse como

$$\dot{e} = -Le. \quad (5.19)$$

Note que las ecuaciones (5.18) pueden ser vistas como las de un sistema lineal invariante en el tiempo que es perturbado, por un lado por una entrada exponencialmente convergente  $e(t)$  (puesto que la matriz  $L$  es Hurwitz por diseño) y, por otro lado, por la “entrada”  $[\dot{\xi}^* - \dot{\xi}_o^*]$ , la cual se desvanece en el origen, esto siempre que  $(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \vartheta) \rightarrow (0, 0, 0)$ . Para ver esto, después de largos pero sencillos cálculos se puede expresar la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i^* &= -k_{p_{i-1}}\tilde{\xi}_i + \sum_{k=1}^{i-1} \eta_{ik}\tilde{\xi}_k - \mu_{ik}\vartheta_k + k_{p_{i-1}}e_i - \sum_{k=2}^{i-1} \eta_{ik}e_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_{i1}e_1 + \prod_{j=1}^{i-1} \beta_j [\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] + \dot{\xi}_{io}^* \end{aligned}$$

donde  $\beta_j = k_{p_j} + b_j k_{d_j}$ ,  $j \in [1, m-1]$  y para cada  $i \in [2, m]$  y  $k \in [1, i-1]$ ,

$$\begin{aligned} \eta_{ik} &= \prod_{j=k+1}^i \beta_j^{\text{sgn}(i-j)} [k_{p_k}^2 - k_{d_k}^2 - k_{p_k} k_{p_{k-1}} \text{sgn}(k-1)] \\ \mu_{ik} &= \prod_{j=k+1}^i \beta_j^{\text{sgn}(i-j)} k_{d_k} [k_{p_k} + a_k] \\ \gamma_{i1} &= \prod_{j=1}^{i-1} \beta_{j+1}^{\text{sgn}(i-j-1)} k_{p_j} \lambda_j. \end{aligned}$$

con  $\text{sgn}(z)$  la función signo de  $z$ . Por lo tanto,

$$\dot{\xi}^* - \dot{\xi}_o^* = \Gamma_1 \tilde{\xi} + \Gamma_2 \vartheta - \Gamma_4 e + \Gamma_3 [\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] \quad (5.20)$$

donde

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_{21} & -k_{p_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \eta_{m_1} & \eta_{m_2} & \cdots & -k_{p_{m-1}} \end{bmatrix} \otimes I_n, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mu_{21} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -\mu_{m_1} & -\mu_{m_2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \otimes I_n, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_1\beta_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \otimes I_n, \\
 \Gamma_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_{21} + \gamma_{21} & -k_{p_1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \eta_{m_1} + \gamma_{m_1} & \eta_{m_2} & \cdots & -k_{p_{m-1}} \end{bmatrix} \otimes I_n. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando (5.20) en la expresión (5.18) se tiene que

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\xi}} &= -(K'_p + \Gamma_1)\tilde{\xi} + (K'_d - \Gamma_2)\vartheta - \Gamma_3[\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] + (K'_p + \Gamma_1)e \\
 \dot{\vartheta} &= -(A - B\Gamma_2)\vartheta - (K'_d - B\Gamma_1)\tilde{\xi} + B\Gamma_3[\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] + (K'_d - B\Gamma_1)e
 \end{aligned}$$

que corresponde a un sistema lineal estable perturbado por  $[\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*]$ . Así pues, la Suposición 3 junto con la ecuación (5.3), garantizan que existen reales no-negativos  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  y  $\eta_3$ , así como una función de saturación continua e impar  $\text{sat} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $|\text{sat}(y)| \leq 1$  y

$$\left| [\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] \right| \leq \eta_1 \text{sat}(|\tilde{q}|) + \eta_2 |\dot{\tilde{q}}| + \eta_3 |\vartheta_0|. \quad (5.24)$$

Más aún, si se define la variable  $x := [\tilde{\xi}^\top \quad \vartheta^\top]^\top$ , el sistema (5.23) se vuelve

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}[\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] + K'e \quad (5.25)$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} -(K'_p + \Gamma_1) & K'_d - \Gamma_2 \\ -(K'_d - B\Gamma_1) & -(A - B\Gamma_2) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -\Gamma_3 \\ B\Gamma_3 \end{bmatrix}, \\
 K' &= \begin{bmatrix} K'_p + \Gamma_1 \\ K'_d - B\Gamma_1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Con lo que la dinámica en lazo cerrado está ahora, convenientemente, en una forma de cascada con estados  $x_1^T := [\tilde{q}^T \quad \dot{\tilde{q}}^T \quad \vartheta_0^T \quad x^T]$  y  $x_2 := e$ , mientras que la función  $f_1(t, x_1)$  corresponde al lado derecho de

$$\begin{cases} \text{Eq. (5.15)} \\ \dot{x} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}[\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] \end{cases} \quad (5.26)$$

y  $f_2(t, x_2) = Le$ . Más aún, como  $L$  es Hurwitz por diseño, el origen de (5.19) es globalmente uniformemente exponencialmente estable. Además, después de lo mostrado por Loria [46], el origen de (5.26) globalmente uniformemente asintóticamente estable para valores apropiados de las ganancias de control. Por lo tanto, para poder recurrir a argumentos de la cascada, o de manera más precisa al Lema 2 en [65] hace falta probar que las soluciones de (5.26) son globalmente uniformemente acotadas.

### 5.2.3. Acotamiento de las Soluciones

**Proposición 12.** Sean las matrices  $L$  y  $\mathcal{A}$  Hurwitz y sea

$$k_{d_0} \left[ \frac{a_0}{4b_0} - m \right] > \frac{m+2}{2} + \frac{[2k_c k_\delta + (m+2)/2]a_0^2}{b_0^2}.$$

Asuma además que existen matrices positivas definidas  $P$  y  $Q$  tal que  $Q = -(\mathcal{A}^\top P + P\mathcal{A})$  y

$$Q > \frac{1}{2} \text{diag}\{Q\} > (\eta_2^2 + \eta_3^2) \text{diag}\{ |[PB]_i|^2 \} \quad (5.27)$$

donde  $[PB]_i$  es el  $i$ -ésimo bloque de  $n \times n$  de  $P\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{mn \times n}$  y  $\eta_2, \eta_3$  están definidas en (5.24). Entonces, las soluciones del sistema en lazo cerrado (5.15), (5.19), (5.25) son globalmente uniformemente acotadas.

*Prueba.* Las soluciones de (5.19) son globalmente uniformemente acotadas porque  $L$  es Hurwitz. Permita que la propiedad de que  $L$  es Hurwitz genere matrices positivas definidas  $P_L, Q_L$ , que satisfacen  $-Q_L := (L^\top P_L + P_L L)$  y sea  $\kappa > 0$  una constante real. Considere entonces la función  $W : \mathbb{R}^{2mn} \times \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , definida como

$$W(x, e) = \kappa x^\top P x + e^\top P_L e; \quad (5.28)$$

un cálculo directo muestra que su derivada total a lo largo de las trayectorias del sistema (5.19), (5.25) produce

$$\dot{W}(x) = \kappa \left[ -x^\top Q x + 2x^\top P\mathcal{B} [\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] + 2x^\top P K' e \right] - e^\top Q_L e. \quad (5.29)$$

Defina ahora a  $c := |PK'|$ ,  $\lambda := \lambda_{\min}(Q)$ ; usando las desigualdades de Cauchy-Schwartz y la del triángulo, se obtiene que

$$\dot{W} \leq -\kappa x^\top Q x + 2\kappa x^\top P\mathcal{B} [\dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^*] + \frac{\kappa c}{\epsilon} |x|^2 - (\lambda - \kappa c \epsilon) |e|^2$$

para cualquier  $\epsilon > 0$ . Más aún,

$$\begin{aligned} x^\top P\mathcal{B} \left[ \dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^* \right] &= \left( \sum_{i=1}^m \tilde{\xi}_i^\top [P\mathcal{B}]_i + \vartheta_i^\top [P\mathcal{B}]_{m+i} \right) \left[ \dot{\xi}_1^* - \dot{\xi}_{1o}^* \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m |\tilde{\xi}_i|^2 |[P\mathcal{B}]_i|^2 + |\vartheta_i|^2 |[P\mathcal{B}]_{m+i}|^2 \right) (\eta_2^2 + \eta_3^2) \\ &+ \eta_1 \left( \sum_{i=1}^m |\tilde{\xi}_i| |[P\mathcal{B}]_i| + |\vartheta_i| |[P\mathcal{B}]_{m+i}| \right) + m \left[ |\dot{q}|^2 + |\vartheta_0|^2 \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en vista de la segunda desigualdad en (5.27) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{W} &\leq -\kappa x^\top \left( Q - \frac{1}{2} \text{diag} \{Q\} - \frac{c}{\epsilon} I \right) x - (\lambda - \kappa c \epsilon) |e|^2 \\ &+ 2\kappa \eta_1 \left( \sum_{i=1}^m |\tilde{\xi}_i| |[P\mathcal{B}]_i| + |\vartheta_i| |[P\mathcal{B}]_{m+i}| \right) + 2\kappa m \left[ |\dot{q}|^2 + |\vartheta_0|^2 \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, sea  $\mathcal{V} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{3n(m+1)} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definida como  $V(t, \tilde{q}, \dot{q}, \vartheta_0) + W(x, e)$ , donde

$$V = \frac{\kappa}{2} \left( \dot{q}^\top D(\tilde{q} + q_d(t)) \dot{q} + k_{p_0} |\tilde{q}|^2 + \frac{k_{d_0}}{b_0} |\vartheta_0|^2 \right) \quad (5.30)$$

La derivada total de  $\mathcal{V} := V + W$  a lo largo de las trayectorias de (5.26) conduce a

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &\leq -\kappa x^\top \left[ Q - \frac{1}{2} \text{diag} \{Q\} - \frac{c}{\epsilon} I \right] x - (\lambda - \kappa c \epsilon) |e|^2 \\ &+ \frac{\kappa}{2} |\tilde{\xi}_1|^2 + \kappa (2m + 1 + k_c k_\delta) |\dot{q}|^2 - \kappa \left[ \frac{a_0 k_{d_0}}{b_0} - 2m \right] |\vartheta_0|^2 \\ &+ 2\kappa \eta_1 \left( \sum_{i=1}^m |\tilde{\xi}_i| |[P\mathcal{B}]_i| + |\vartheta_i| |[P\mathcal{B}]_{m+i}| \right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Note que, por un lado, dada  $Q$  –por consiguiente las ganancias del controlador de equivalencia cierta– tal que la primera desigualdad en (5.27) es cierta, la matriz  $Q - (1/2)\text{diag} \{Q\} - (c/\epsilon)I$  es positiva definida para una  $\epsilon$  lo suficientemente grande. Por otro lado, dada  $\lambda$  –por lo tanto las ganancias del observador– el factor  $(\lambda - \kappa c \epsilon)$  es positivo para  $\kappa$  lo suficientemente pequeña como por ejemplo  $\kappa \approx 1/\epsilon^2$ . Consecuentemente, las ganancias del controlador y del observador son independientes unas de otras. El resto de la prueba de acotamiento sigue al del

Teorema 6 en (Loria [46]). El resultado se obtiene del Lema 2 en (Panteley y Loria [65]).

### 5.3. Caso de Estudio: Robots con Uniones Flexibles

Es común encontrar robots manipuladores que presentan uniones flexibles. Esta flexibilidad es causada por ciertos elementos de transmisión, bandas elásticas o bien motores con flechas muy largas. El fenómeno producido debido a la flexibilidad afecta de manera considerable el desempeño de los robots manipuladores produciendo comportamientos oscilatorios no deseados. Una forma usual de mejorar este desempeño es tomando en cuenta la flexibilidad, tanto en el modelo como en la ley de control, modelándola como el efecto de resortes rotacionales lineales (ver lo expuesto por Spong [78]), aún cuando, bajo estas consideraciones, el orden del modelo de un robot de uniones flexibles se vuelve el doble que el orden del modelo de un robot de uniones rígidas y el sistema se convierte en uno subactuado, volviendo el análisis dinámico más complejo.

Así pues, los robots de uniones flexibles son sistemas Euler Lagrange subactuados, en donde si se denota por  $K$  el coeficiente de elasticidad (donde  $K = \infty$  implica que no hay elasticidad), entonces el modelo Lagrangiano está dado por las ecuaciones:

$$D(q_\ell)\ddot{q}_\ell + C(q_\ell, \dot{q}_\ell)\dot{q}_\ell + \mathbf{g}(q_\ell) = K(q_m - q_\ell) \quad (5.32a)$$

$$J\ddot{q}_m + K(q_m - q_\ell) = \tau \quad (5.32b)$$

donde  $q_\ell, \dot{q}_\ell \in \mathbb{R}^n$  denota las coordenadas no-actuadas *i.e.* las relacionadas con el eslabón, mientras que  $q_m, \dot{q}_m \in \mathbb{R}^n$  representa los vectores de posiciones y velocidades del motor y  $\tau \in \mathbb{R}^n$  es el vector de par de entradas. El modelo (5.32) puede ser transformado en (5.1) definiendo  $q := q_\ell$ ,  $g(q) = \mathbf{g}(q_\ell) + Kq_\ell$ ,  $\xi_1 = Kq_m$ ,  $\xi_2 = K\dot{q}_m$  y aplicando la retroalimentación preliminar

$$\tau = \xi_1 - Kq_\ell + JK^{-1}u. \quad (5.33)$$

Bajo estas condiciones, el problema de regulación por retroalimentación de posición para (5.32) se reduce a estabilizar  $(q_d, \dot{q}_d, K^{-1}\xi_{1o}^*, K^{-1}\dot{\xi}_{1o}^*)$  via la medición de solamente  $q$  y  $\xi_1$ , lo que es equivalente a estabilizar 5.1 en  $(q_d, \dot{q}_d, \xi_{1o}^*, \xi_{2o}^*)$ . Para

este fin, considere el observador *lineal*

$$\dot{\hat{\xi}}_1 = \hat{\xi}_2 + \lambda_1(\xi_1 - \hat{\xi}_1), \quad (5.34a)$$

$$\dot{\hat{\xi}}_2 = u + \lambda_2(\xi_1 - \hat{\xi}_1) \quad (5.34b)$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son constantes positivas. Además, definiendo  $\bar{\xi} = \hat{\xi} - \xi^*$ , considere el controlador de equivalencia cierta

$$\xi_2^* = -k_{p1}\bar{\xi}_1 + k_{d1}\vartheta_1 + \dot{\xi}_{1o}^*, \quad (5.35a)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_i &= q_{ci} + b_i\xi_i^* + \zeta_i \\ \dot{q}_{ci} &= -a_i\vartheta_i \\ \dot{\zeta}_i &= -(k_{di} - \sigma_i)\bar{\xi}_i - b_i\dot{\xi}_{io}^* \end{aligned} \right\} \forall i \in [1, 2] \quad (5.35b)$$

$$u = -k_{p2}\bar{\xi}_2 + k_{d2}\vartheta_2 + \dot{\xi}_{2o}^* \quad (5.35c)$$

donde  $k_{pi}$  y  $k_{di}$ , son constantes positivas que denotan las ganancias de control “proporcionales” y “derivativas”.

Basándose en la Proposición 11, se puede establecer el siguiente resultado de principio de separación que resuelve un problema desde hace mucho tiempo abierto en el área de control por retroalimentación de salida de sistemas no-lineales.

**Proposición 13.** *Sea  $q_d$  dada tal que (5.3) es cierta. Considere el sistema (5.32) bajo la Suposición 3 en lazo cerrado con el controlador definido en las ecuaciones (5.33)–(5.35). Por simplicidad, permita que las ganancias sean tales que  $k_{p1} = k_{d1}$ ;*

$$k_{d0} \left[ \frac{a_0}{4b_0} - 2 \right] > \frac{(k_c k_\delta + 1)a_0^2}{b_0^2} + 1 \quad (5.36)$$

$$\min \left\{ k_{p1}, \frac{[k_{p2} - k_{p1}]}{\beta^2}, \frac{a_1}{b_1^2}, \frac{a_2}{b_2^2 \beta^2} \right\} > [\eta_2^2 + \eta_3^2] \quad (5.37)$$

$$[k_{p2} - k_{p1}] > \max \left\{ \frac{2}{k_{p1}}, \frac{4\mu^2}{a_1} \right\}, \quad a_1 a_2 > 2b_2^2 \mu^2 \quad (5.38)$$

donde  $\mu = k_{p1}(k_{p1} + a_1)$  y  $\beta = k_{p1}(1 + b_1)$ . Entonces, el origen del sistema en lazo cerrado es uniformemente globalmente asintóticamente estable para ganancias de control lo suficientemente grandes y cualesquiera ganancias positivas  $\lambda_1, \lambda_2$ .

*Esbozo de la prueba.* La observación clave es que como  $k_{p1} = k_{d1}$ , entonces  $\eta_{21} := 0$  en (5.21), (5.22); por lo tanto, la matriz  $P$  en la Proposición 12 puede ser elegida como la matriz identidad. Más aún, en vista de la ecuación (5.37), (5.38) la matriz

resultante

$$Q = \begin{bmatrix} 2k_{p_1} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2[k_{p_2} - k_{p_1}] & -\mu & 0 \\ 0 & -\mu & 2a_1 & -b_2\mu \\ 0 & 0 & -b_2\mu & 2a_2 \end{bmatrix} \otimes I_n$$

(definida en la Proposición 12) es positiva definida. De hecho, la ecuación (5.37) implica (5.27), mientras que (5.38) implica que  $Q - (1/2)\text{diag}\{Q\}$  es positiva definida. Por consiguiente, la desigualdad (5.31) se vuelve

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\kappa x^\top \left( Q - \frac{1}{2}\text{diag}\{Q\} - \frac{c}{\epsilon}I \right) x - (\lambda - \kappa c\epsilon) |e|^2 \\ & + \frac{\kappa}{2} |\tilde{\xi}_1|^2 + 2\kappa\eta_1 \left( |\tilde{\xi}_1| + \beta|\tilde{\xi}_2| + b_1|\vartheta_1| + b_2\beta|\vartheta_2| \right) \\ & + \kappa(k_c k_\delta + 5) |\dot{q}|^2 - \kappa \left[ \frac{a_0 k_{d_0}}{b_0} - 4 \right] |\vartheta_0|^2. \end{aligned}$$

Para el propósito de establecer acotamiento global uniforme, note que los términos cuadráticos negativos en  $|x|^2$  dominan sobre los términos que involucran (grandes)  $|\tilde{\xi}_i|$  y  $|\vartheta_i|$ , mientras que la suma de estos dos términos en el lado derecho generan una secuencia de números negativos para cualquier sucesión creciente de  $\{t_i\}$  tal que  $\{|\tilde{q}(t_i)|\}$  también es monótonamente creciente—ver (Loria [46]) para detalles.

### 5.3.1. Resultados de Simulación

En esta subsección, se presentan algunos resultados numéricos que evalúan la característica global del controlador propuesto en los robots de uniones flexibles. Para esto, se considera un robot de uniones flexibles planar de dos grados de libertad cuyo modelo está dado por

$$\begin{aligned} D(q_1) &= \begin{bmatrix} 8.77 + 1.02c_{12} & 0.76 + 0.51c_{12} \\ 0.76 + 0.51c_{12} & 0.62 \end{bmatrix} \\ C(q_1, \dot{q}_1) &= \begin{bmatrix} -0.51s_{12}\dot{q}_{12} & -0.51s_{12}(\dot{q}_{11} + \dot{q}_{12}) \\ 0.51s_{12}\dot{q}_{11} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $c_{12}$  y  $s_{12}$  denota el  $\cos(q_{12})$  y el  $\sin(q_{12})$  respectivamente. Asimismo, la matriz de elasticidad de las articulaciones es  $K = \text{diag}\{10000, 10000\}$ , mientras que la matriz de inercias del rotor es  $J = \text{diag}\{0.1, 0.1\}$ . El vector de fuerzas gravitacionales  $g(q_1)^\top = [9.81(7.6s_{11} + 0.63s_{11,12}) \quad 9.81(0.63s_{11,12})]$  con  $s_{11,12} = \sin(q_{11} + q_{12})$ . Y se ha impuesto un valor de referencia para las coordenadas no actuadas como  $q_{1d}(t) := \sin(\omega t)$  rad, con  $\omega_1 = 2$  rad/s.

Con el objetivo de ilustrar el carácter *global* del controlador, se realizó una

simulación con un error inicial no realista, deliberado, del 5000 %. Los parámetros del controlador para los filtros fueron fijados en  $a_0 = 500$ ,  $b_0 = 500$ ,  $a_1 = 2500$ ,  $b_1 = 5$ ,  $a_2 = 5000$ ,  $b_2 = 5$ ; las ganancias del control se establecieron en  $k_{p0} = 400$ ,  $k_{p1} = 1$ ,  $k_{p2} = 8000$  y  $k_{d0} = 35$ ,  $k_{d1} = 500$ ,  $k_{d2} = 10$ , mientras que los parámetros del observador son  $\lambda_1 = 10$  and  $\lambda_2 = 20$ .

En las Figuras 5.1 y 5.2, se muestra la posición en radianes y la velocidad de las coordenadas no-actuadas  $q_1$  y  $\dot{q}_1$ , respectivamente. Estas gráficas muestran un adecuado funcionamiento del controlador puesto que en estado estacionario alcanzan el valor de la trayectoria deseada, esta misma gráfica muestra la propiedad global del controlador dado que su convergencia es independiente de las condiciones iniciales. La Figura 5.3 se presenta para evidenciar el desempeño del observador para los estados no-disponibles  $\xi_2 = K\dot{q}_m$ .

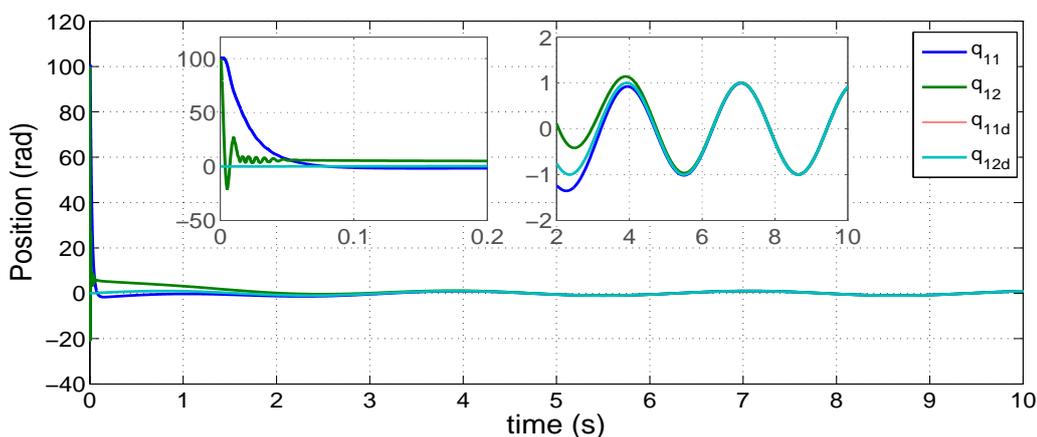
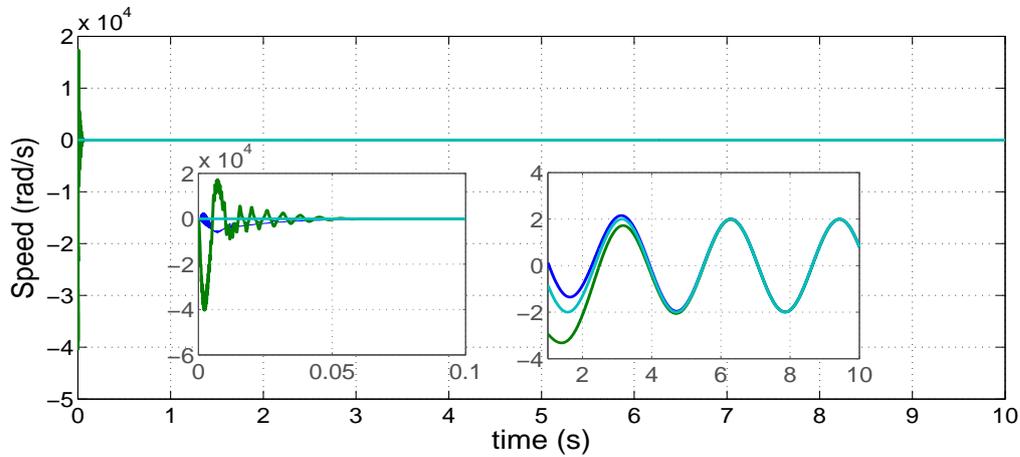


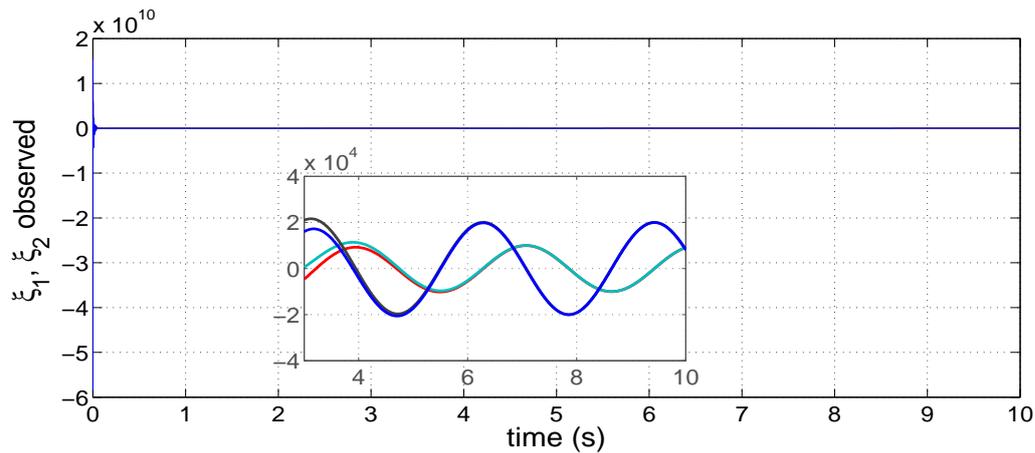
Figura 5.1: Posiciones angulares de los eslabones y referencias

## 5.4. Resumen y Discusión

- Una gran cantidad de sistemas físicos pueden ser modelados dentro del marco de los sistemas Lagrangianos, en particular, sistemas eléctricos como diferentes tipos de convertidores de potencia y máquinas de corriente alterna (motores y generadores). Esto hace necesario un diseño de controladores para esta clase de sistemas, complementando así el estudio de las redes eléctricas.
- En este capítulo, tomando como base los resultados presentados por Loria [46], se ha presentado el primer controlador por retroalimentación de posición para manipuladores con uniones flexibles, como una caso particular



**Figura 5.2:** Velocidades angulares de los eslabones y referencias



**Figura 5.3:** Variables observadas  $\hat{\xi}_1$ ,  $\hat{\xi}_2$  y referencias

de sistemas Lagrangianos subactuados, que garantiza estabilidad asintótica global y uniforme del origen del sistema en lazo cerrado.

- Lo anterior se logró estableciendo un principio de separación para un controlador basado en pasividad que hace uso de un diferenciador aproximado para las posiciones de los eslabones y un observador de Luenberger para las velocidades de los motores.
- El esquema propuesto se ha extendido a una clase más general de sistemas Lagrangianos con grado relativo arbitrario, respecto a la salida medida, lo que incluye a sistemas subactuados.
- De manera simplificada, la formulación Hamiltoniana puede ser vista como

una consecuencia de las ecuaciones Euler Lagrange y un cambio de variables (transformación de Legendre) que lleva a la descripción del sistema en términos de ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo que en principio, los resultados presentados pueden interpretarse desde el marco de los sistemas Hamiltonianos para ser incorporados con el estudio de redes eléctricas presentadas en los capítulos anteriores. Actualmente, se trabaja en la extensión del resultado obtenido para sistemas Lagrangianos a sistemas Hamiltonianos.



## Conclusiones y Trabajo Futuro

---

Es evidente la importancia de estudiar y resolver problemas referentes a los Sistemas Eléctricos. En este sentido, aunque los problemas han sido reconocidos desde los análisis iniciales desarrollados para los SEPs, actualmente su estudio ha sido retomado considerando nuevos escenarios. Así, el análisis y control de los Sistemas Eléctricos de Potencia merece un re-estudio en el sentido de que es fundamental volver a las herramientas básicas para poder generar nuevas estrategias y formas de análisis. Una forma de adentrarse al problema es ver al SEP como una red, caracterizada por los elementos dinámicos que la componen y por la topología de la interconexión. En este trabajo de tesis se hace énfasis en que las técnicas basadas en energía recuperan la estructura original del sistema y permiten un análisis dinámico modular Hamiltoniano o Lagrangiano.

Así pues, este enfoque modular permite analizar por separado cada componente de la red, diseñar leyes de control basadas en pasividad para los elementos individuales e interconectarlos de manera que el sistema completo siga teniendo estructura Hamiltoniana o Lagrangiana.

En este sentido, se ha mostrado que, bajo las suposiciones usuales en los SEPs, las líneas de transmisión que conectan a los buses pueden modelarse como circuitos eléctricos, dentro de la clase que pueden ser representados por las ecuaciones de Bryton-Moser. Más aún, se ha hecho un análisis topológico profundo basado en la teoría de grafos donde, tomando algunas consideraciones sobre el modelado de las pérdidas en los elementos almacenadores, se ha caracterizado la estabilidad de puntos de operación y el análisis en estado estacionario en términos del arreglo de interconexión entre los elementos. En este estudio se incluyen los arreglos topológicos típicamente usados en SEPs y se dan condiciones suficientes de interconexión para alcanzar estabilidad y consenso en los voltajes de puerto. Esto permite concluir que las topologías anillo, radial y malla, adoptadas en la comunidad de sistemas eléctricos, por sí mismas garantizan propiedades de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Los resultados obtenidos son generales en el sentido de que la estabilidad está en términos de las matrices de interconexión, permitiendo relaciones constitutivas de los elementos del circuito, por ejemplo

## 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

para los disipadores, no-lineales. Más aún, queda de manifiesto que la caracterización del estado estacionario para una entrada senoidal, depende de los valores de los parámetros del circuito de una manera específica (dada por los valores en la función de transferencia), lo cual en conjunto con la topología invita a plantear como trabajo futuro la incorporación de técnicas de compensación de voltaje, en el sentido más simple añadir bancos de capacitores o de inductores a la red y en un carácter más general, integrar nuevos elementos dinámicos a la red.

En cuanto a los elementos individuales se han representado a los convertidores de potencia, a las cargas y a las líneas de transmisión como sistemas Hamiltonianos controlados por puerto para así componer una microred cuyo modelo completo, con admitancias arbitrariamente grandes y cualquier arreglo topológico, tiene la misma estructura; es importante remarcar que, a diferencia de lo encontrado en la literatura relacionada donde se desprecia la dinámica de los convertidores de potencia, el modelo que se propone incluye una dinámica Hamiltoniana para los convertidores y para las cargas. Lo anterior permitió aprovechar una ley de control para los convertidores que permite regular el voltaje de la microred completa a uno deseado. Estas trayectorias deseadas para la microred tienen como base la solución, fuera de línea, de los flujos de potencia. En este contexto, parte del trabajo futuro es la incorporación de nuevos modelos para las cargas que permitan contemplar por ejemplo el fenómeno de colapso de voltaje, así como el diseño de algoritmos de despacho de potencia óptimos en un sentido energético.

Sin embargo, con el fin de proponer leyes de control, el trabajo también se desarrolló considerando dinámicas Lagrangianas subactuadas; en particular (aunque no está restringido a) robots de uniones flexibles. Al igual que los sistemas Hamiltonianos, existe una gran cantidad de sistemas físicos que pueden representarse por un modelo Lagrangiano, diferentes tipos de convertidores de potencia, motores y generadores de corriente alterna, entre otros. Este enfoque de la tesis, permitió por un lado contribuir en un problema hasta ahora abierto para la comunidad de control, que es el de la estabilidad global, uniforme y asintótica del lazo cerrado midiendo sólo posiciones para una clase de sistemas Lagrangianos subactuados y por otro lado, permite plantear parte del trabajo futuro de esta tesis como la incorporación de una clase de sistemas más amplia y nuevas dinámicas en la red de potencia (Lagrangianas o Hamiltonianas), esto es, considerar que las fuentes de voltaje en el modelo de los inversores tienen asociado un sistema dinámico, que las cargas puedan representarse por un modelo que retrate el fenómeno de colapso de voltaje, etc.

## A.1. Método de Newton Raphson

Considere el mapeo no-lineal  $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde al menos una de las funciones es no-lineal; la solución  $x^*$  del sistema no-lineal no puede, en general, obtenerse de manera explícita por lo que usualmente es resuelta por medio de un método numérico. En muchos casos es posible encontrar una solución aproximada  $\hat{x}$  arbitrariamente cercana a la real  $x^*$  reemplazando cada aproximación con aproximaciones sucesivamente mejores hasta que  $F(\hat{x}) \sim 0$ . Tales métodos son llamados *iterativos*. Así, a partir de una suposición inicial  $x^0$  es posible crear una secuencia  $x^0, x^1, x^2, \dots$  que convergirá cercanamente a una solución deseada  $x^*$ .

Existen diferentes tipos de métodos iterativos, uno de ellos es el de *Newton-Raphson* (para detalles ver lo expuesto por Crow [19]) y está descrito por el proceso

$$I : x^{k+1} = g(x^k), \quad k = 1, \dots, \infty.$$

Considere nuevamente la función escalar no-lineal

$$f(x^*) = 0, \quad (\text{A.2})$$

expandiendo esta función en series de Taylor alrededor del punto  $x^k$ , asumiendo que la iteración convergirá a  $x^*$  cuando  $k \rightarrow \infty$  y suponiendo que la condición inicial es lo suficientemente cercana a  $x^*$ , los términos de alto orden pueden

despreciarse, teniendo entonces que

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^k} (x^{k+1} - x^k) \approx 0.$$

Resolviendo directamente para  $x^{k+1}$  como función de  $x^k$ , se tiene la siguiente función iterativa

$$I : x^{k+1} = x^k - \left[ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^k} \right]^{-1} f(x^k) \quad (\text{A.3})$$

la cual es conocida como el método iterativo de Newton-Raphson. Este método puede ser extendido para el sistema (A.1), suponiendo nuevamente que las condiciones iniciales están lo suficientemente cerca de la solución real, con lo que el método toma la forma

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} F(x^k) \quad (\text{A.4})$$

donde  $x = \text{col} \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$  y  $J(x^k)$  denota la matriz Jacobiana. Típicamente, la inversa del Jacobiano no se encuentra directamente, sino por medio de la factorización LU, poniendo el método de Newton-Raphson como

$$[J(x^k)] (x^{k+1} - x^k) = -F(x^k)$$

la cual está en la forma  $Ax = b$ , con la incógnita  $x$  y la diferencia de vectores  $(x^{k+1} - x^k)$ .

### A.1.1. Aplicación a los Flujos de Potencia

El principio que subyace al problema de resolver los flujos de potencia es el siguiente (Crow [19]): Dado un sistema de cargas, generadores y una configuración de red, los voltajes de bus y los flujos de las líneas pueden ser encontrados dando solución a las ecuaciones no-lineales de flujos de potencia (4.36). Típicamente esto se logra aplicando las Leyes de Kirchhoff, interpretadas como que *la suma de potencias en un bus debe ser cero*; donde si la admitancia compleja  $Y_{ik}$  es la suma polar  $Y_{ik} := G_{ik} + jB_{ik} \in \mathbb{C}$ , entonces las ecuaciones (4.36) pueden ser escritas como

$$0 = \Delta P_i = P_i^{inj} - V_i \sum_{k=1}^{N_{bus}} V_k [G_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k) + B_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k)] \quad (\text{A.5a})$$

$$0 = \Delta Q_i = Q_i^{inj} - V_i \sum_{k=1}^{N_{bus}} V_k [G_{ik} \sin(\delta_i - \delta_k) + B_{ik} \cos(\delta_i - \delta_k)] \quad (\text{A.5b})$$

donde  $P^{inj}$  y  $Q^{inj}$  son las potencias activa y reactiva inyectadas en el bus  $i$ , respectivamente, las cargas son modeladas por inyecciones de potencia negativas y  $N_{bus}$  es el número de buses en el sistema. Las actualizaciones  $\Delta P_i$  y  $\Delta Q_i$  de las ecuaciones (A.5) se llaman ecuaciones de desajuste (o *mismatch*) porque dan una medida de la diferencia de potencia, o desajuste, entre los valores de potencia calculados, como funciones de voltaje y ángulo de fase, y la potencia real inyectada. Conforme avance la iteración de Newton-Raphson, este desajuste será cero cuando la potencia que deja un bus es igual a la inyectada. En este punto, se tienen los valores convergentes de voltaje y de fase.

Existen máximo  $2N_{bus}$  ecuaciones a resolver, este número es reducido al quitar una ecuación de potencia por cada voltaje conocido (buses controlados por voltaje) y el bus de referencia; con lo que se tendrá un sistema compatible determinado donde el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. La forma más común de aplicar el método de Newton-Raphson es con el siguiente arreglo

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta\delta_i &= \delta_i^{k+1} - \delta_i^k \\ \Delta V_i &= V_i^{k+1} - V_i^k, \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, N_{bus}$ , los vectores columna  $\Delta\delta$ ,  $\Delta V$ ,  $\Delta P$ ,  $\Delta Q \in \mathbb{R}^{N_{bus}}$  y el Jacobiano

$$\begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix}.$$

Cada submatriz representa la derivada parcial de cada ecuación de desajuste respecto a cada una de las incógnitas.

## A.2. Sincronización de Microredes

En esta subsección se presenta un resumen de la forma clásica en como es abordado el problema de sincronización de microredes (Bidram *et al.* [12], Schiffer *et al.* [74], Simpson-Porco *et al.* [77] y las referencias en ellos). Usualmente, se consideran redes con topología radial o malla con unidades generadoras de diferente naturaleza, las cuales son conectadas a la red por medio de un convertidor de potencia. En esta red, las cargas son modeladas por impedancias constantes, lo que conlleva a un conjunto de ecuaciones álgebra-diferenciales, por lo que la red es reducida via la *reducción de Kron* eliminando así las ecuaciones algebraicas correspondientes a las cargas y pudiendo obtener un modelo equivalente de ecuaciones diferenciales.

Así pues, se asume que la microred está formada por  $n$  nodos, donde cada nodo representa a una unidad de generación distribuida interconectada vía un convertidor. De esta forma, cada nodo  $i$  en la microred tiene asociado una amplitud de voltaje  $V_i$  y un ángulo de fase  $\delta_i$ . A su vez, dos nodos  $i$  y  $k$  de la microred están conectados via una admitancia compleja  $Y_{ik} := G_{ik} + jB_{ik}$ . El convertidor en el nodo- $i$  se representa por el siguiente modelo

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= u_{i1} \\ \dot{V}_i &= u_{i2}\end{aligned}\tag{A.7}$$

con  $u_{i1}$  y  $u_{i2}$  entradas de control. Comúnmente, cada nodo es controlado por medio de un controlador droop, implementado como

$$\begin{aligned}u_{i1} &= \omega_d - k_{pi}(P_{im} - P_{id}), \\ u_{i2} &= V_{id} - k_{qi}(Q_{im} - Q_{id}),\end{aligned}\tag{A.8}$$

donde  $\omega_d \in \mathbb{R}$  y  $V_{id} \in \mathbb{R}_{>0}$  son la frecuencia y la amplitud de voltaje nominal deseados,  $k_{pi}$  y  $k_{qi} \in \mathbb{R}_{>0}$  son las ganancias del controlador y  $P_{id}$ ,  $Q_{id}$  las referencias de potencia; asimismo, se asume que estos valores deseados están dadas por un control externo. Mientras que  $P_{im}$  y  $Q_{im}$  son las potencias medidas descritas por la dinámica

$$\begin{aligned}\tau_{P_i}\dot{P}_{im} &= -P_{im} + P_i, \\ \tau_{P_i}\dot{Q}_{im} &= -Q_{im} + Q_i\end{aligned}\tag{A.9}$$

con  $\tau_{P_i}$  la constante de tiempo del filtro paso-bajas y  $P_i$ ,  $Q_i$  los flujos de potencia activa y reactiva, respectivamente. De manera que, combinando las ecuaciones (A.7-A.9) la dinámica en lazo cerrado para el  $i$ -ésimo nodo está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_i &= \omega_i \\ \tau_{P_i}\dot{\omega}_i &= -\omega_i + \omega_d - k_{pi}(P_i - P_{id}) \\ \tau_{P_i}\dot{V}_i &= -V_i + V_{id} - k_{qi}(Q_i - Q_{id})\end{aligned}\tag{A.10}$$

que también puede escribirse en su forma concatenada como

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ T\dot{\omega} &= -\omega + \mathbf{1}_n\omega_d - K_p[P - P_d] \\ T\dot{V} &= -V + V_d - K_q[Q - Q_d]\end{aligned}\tag{A.11}$$

donde se han definido a los vectores columna  $\delta \in \mathbb{S}^n$ ,  $V, V_d, P_d, Q_d, P, q, \omega \in \mathbb{R}^n$  y las matrices  $T, K_p, K_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Las propiedades de sincronización de la dinámica (A.10) han sido estudiadas por Simpson-Porco *et al.* [77] sin embargo, por ser el más general, aquí se hará mención al análisis realizado por Schiffer *et al.* [74].

### A.2.1. Trayectorias Sincronizadas

Siguiendo los lineamientos en (Schiffer *et al.* [74]), el primer paso es mostrar que las trayectorias de (A.10) están acotadas. Para esto, se propone la función positiva  $W(V) = \|\Gamma V\|_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\tau P_i}{k_{qi} V_i}$ , cuya derivada temporal a lo largo de (A.10) está dada por

$$\dot{W} \leq -k_1 W + k_2 - k_3 W^2$$

con  $k_1, k_2$  y  $k_3 \geq 0$ . Apelando al Lema de comparación puede concluirse que el voltaje está acotado, esto es que  $V \in L_\infty$ , lo cual implica que  $P$  y  $\omega$  también lo están.

Antes de hablar de la sincronización de la red es necesario suponer que la red es predominantemente inductiva, lo anterior implica que  $G_{ik} = 0$  y  $B_{ik} \leq 0$  y entonces las ecuaciones de flujo de potencia, para esta red sin pérdidas, pueden escribirse como

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{k \sim N_i} |B_{ik}| V_i V_k \sin(\delta_{ik}), \\ Q_i &= |B_{ii}| V_i^2 \sum_{k \sim N_i} |B_{ik}| V_i V_k \cos(\delta_{ik}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Ahora bien, las trayectorias sobre las cuales se analiza la estabilidad son las llamadas trayectorias sincronizadas. Esto es, se supone que existen constantes  $\delta^s \in \Theta, \omega^s \in \mathbb{R}$  y  $V^s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ , donde  $\Theta := \{\delta \in S^n \text{ s.t. } |\delta_{ik}| < \pi/2\}$  tales que son puntos de equilibrio del modelo en lazo cerrado (A.10) concatenado (A.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_n \omega^s - \mathbf{1}_n \omega_d + K_p [P(\delta^s, V^s) - P_d] &= 0_n \\ V^s - V_d + K_q [Q(\delta^s, V^s) - Q_d] &= 0_n \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Bajo estas condiciones, las trayectorias de sincronización del sistema (A.10), (A.12) iniciando en  $(\delta^s, \mathbf{1}_n \omega^s, V^s)$  están dadas por

$$\begin{aligned} \delta^*(t) &= \text{mod}_{2\pi} \{\delta^s + \mathbf{1}_n \omega^s t\} \\ \omega^*(t) &= \mathbf{1}_n \omega^s \\ V^*(t) &= V^s. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Las trayectorias deseadas son llamadas *trayectorias sincronizadas* y  $\omega_s$  es la frecuencia de sincronización.

Una vez establecidas las trayectorias de sincronización es necesario notar que la frecuencia de sincronización es la misma para todos los nodos y que la dinámica (A.10), (A.12) no depende de  $\delta_i$  sino de la diferencia angular  $\delta_{ik}$ . Lo anterior permite estudiar la estabilidad de (A.14) en las nuevas coordenadas

$col(\tilde{\delta}(t), \tilde{\omega}(t), V(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}^n$ , definidas como

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(t) &:= \omega(t) - \mathbf{1}_n \omega^s, \\ \tilde{\delta}(t) &:= \delta(0) + \int_0^t \tilde{\omega}(\tau) d\tau\end{aligned}\tag{A.15}$$

En estas coordenadas, la dinámica (A.10), (A.12) tiene un punto de equilibrio en  $x^s := col(\tilde{\delta}^s, 0_n, V^s)$ , cuya estabilidad asintótica implica convergencia asintótica de las trayectorias del sistema (A.10), (A.12) a la trayectoria sincronizada (A.14).

Para mostrar entonces que el punto de equilibrio  $x^s$  es localmente asintóticamente estable, se reescribe la dinámica en las coordenadas (A.15) como un Sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = (J - R(x)) \nabla H\tag{A.16}$$

con  $x := col(\tilde{\delta}, \tilde{\omega}, V)$  y las matrices  $R \geq 0$  y  $J = J^T$  definidas de manera adecuada y se muestra que  $\dot{H} \leq 0$ .

Para concluir que  $x^s$  es un equilibrio estable del sistema (A.16), se muestra que  $\nabla H(x^s) = 0$  y  $\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} |_{x^s} > 0$  se cumplen, con lo que  $H(x)$  tiene un mínimo local estricto en  $x^s$ . Finalmente, se obtiene que el conjunto invariante donde  $\dot{H} = 0$  es el equilibrio  $x^s$ .

## Bibliografía

---

- [1] Arcak, M. (2007). Passivity as a design tool for group coordination. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(8):1380–1390. 4
- [2] Avila-Becerril, S., Espinosa-Pérez, y Rojas, J. L. Consenso en sistemas eléctricos. *Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA, 2014*. 5, 8
- [3] Avila-Becerril, S. y Espinosa-Perez, G. (2013). Consensus control of flexible joint robots with uncertain communication delays. *52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC), IEEE*, pp. 2288 – 2293. 4, 8
- [4] Avila-Becerril, S., Espinosa-Pérez, G., y Fernández, P. Dynamic characterization of typical electrical circuits via structural properties. *Submitted to Mathematical Problems in Engineering*. 5, 8
- [5] Avila-Becerril, S., Espinosa-Pérez, G., y Fernández-Carrillo, P. (2015a). Stability and consensus of electrical circuits via structural properties. *IFAC-PapersOnLine*, 48(13):111–116. 5, 8
- [6] Avila-Becerril, S., Espinosa-Pérez, G., Panteley, E., y Ortega, R. (2012). Consensus control of flexible joint robots. *American Control Conference (ACC), IEEE*, pp. 8–13. 4, 8
- [7] Avila-Becerril, S., Espinosa-Pérez, G., Panteley, E., y Ortega, R. (2015b). Consensus control of flexible-joint robots. *International Journal of Control*, 88(6):1201–1208. 1, 4, 8
- [8] Avila-Becerril, S., Loria, A., y Panteley, E. Global position-feedback tracking control of flexible-joint robots. *Accepted in American Control Conference (ACC), IEEE, 2016*. 3, 8, 97
- [9] Avila-Becerril, S., Loria, A., y Panteley, E. A separation principle for underactuated lossless lagrangian systems. *Submitted to Transactions on Automatic Control (November 8, 2015)*. 3, 8, 97

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [10] Bai, H., Arcak, M., y Wen, J. (2011). *Cooperative control design: a systematic, passivity-based approach*. Springer Science & Business Media. [1](#), [2](#)
- [11] Barklund, E., Pogaku, N., Prodanović, M., Hernandez-Aramburo, C., y Green, T. C. (2008). Energy management in autonomous microgrid using stability-constrained droop control of inverters. *Transactions on Power Electronics, IEEE*, 23(5):2346–2352. [6](#)
- [12] Bidram, A., Lewis, F. L., y Davoudi, A. (2014). Distributed control systems for small-scale power networks: Using multiagent cooperative control theory. *Control Systems, IEEE*, 34(6):56–77. [93](#), [119](#)
- [13] Bollobás, B. (1998). *Modern graph theory*, volumen 184. Springer Science & Business Media. [14](#), [16](#), [32](#)
- [14] Bondy, J. y Murty, S. (1976). *Graph Theory with Applications*. North-Holland. [55](#)
- [15] Brayton, R. y Moser, J. (1964). A theory of nonlinear networks i. *Quart. Appl. Math*, 22(1):1–33. [5](#), [30](#), [33](#)
- [16] Canseco, R., Avila-Becerril, S., y Espinosa-Pérez, G. (2015). Un enfoque hamiltoniano para la estabilización de microredes incluyendo dinámicas de los convertidores. *Congreso Nacional de Control Automático (AMCA) 2015*, pp. 195 – 200. [9](#)
- [17] Chopra, N. y Spong, M. W. (2006). Output synchronization of nonlinear systems with time delay in communication. En *45th Conference on Decision and Control, IEEE*, pp. 4986–4992. IEEE. [4](#)
- [18] Chung, S.-J. y Slotine, J.-J. E. (2009). Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems. *Robotics, IEEE Transactions on*, 25(3):686–700. [4](#)
- [19] Crow, M. L. (2015). *Computational methods for electric power systems*. CRC press. [117](#), [118](#)
- [20] Desoer, C. y Kuh, E. (1969). *Basic Circuit Theory*. McGraw-Hill. [5](#), [24](#), [25](#), [53](#)
- [21] Desoer, C. A. y Katzenelson, J. (1965). Nonlinear rlc networks. *Bell System Technical Journal*, 44(1):161–198. [29](#), [30](#)

- [22] Dib, W., Ortega, R., Barabanov, A., y Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2009). A “globally” convergent controller for multi-machine power systems using structure-preserving models. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(9):2179–2185. [6](#)
- [23] Dixon, W. E., Zergeroglu, E., y Dawson, D. M. (2004). Global robust output feedback tracking control of robot manipulators. *Robotica*, 22(04):351–357. [3](#)
- [24] Dorfler, F. y Bullo, F. (2013). Kron reduction of graphs with applications to electrical networks. *Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on*, 60(1):150–163. [6](#), [85](#)
- [25] Dvijotham, K., Chertkov, M., y Low, S. (2015). A differential analysis of the power flow equations. *arXiv preprint arXiv:1506.08814*. [80](#), [94](#)
- [26] Eminoglu, U. y Hocaoglu, M. (2009). A network topology-based voltage stability index for radial distribution networks. *International Journal of Power and Energy Systems*, 29(2). [50](#)
- [27] Fang, X., Misra, S., Xue, G., y Yang, D. (2012). Smart grid—the new and improved power grid: A survey. *Communications Surveys & Tutorials, IEEE*, 14(4):944–980. [1](#), [6](#), [23](#)
- [28] Farhangi, H. (2010). The path of the smart grid. *Power and Energy Magazine, IEEE*, 8(1):18–28. [1](#), [6](#)
- [29] Fernández-Carrillo, P., Avila-Becerril, S., y Espinosa-Pérez, G. (2015). Consenso en sistemas eléctricos de potencia mediante compensación. *Congreso Nacional de Control Automático (AMCA) 2015*, pp. 527 – 532. [8](#)
- [30] Fiaz, S., Zonetti, D., Ortega, R., Scherpen, J., y van der Schaft, A. (2013). A port-hamiltonian approach to power network modeling and analysis. *European Journal of Control*, 19(6):477 – 485. [5](#), [6](#), [51](#), [56](#)
- [31] Garcia-Canseco, E., Grino, R., Ortega, R., Salichs, M., y Stankovic, A. M. (2007). Power-factor compensation of electrical circuits. *Control Systems, IEEE*, 27(2):46–59. [23](#)
- [32] Ghorbel, F., Srinivasan, B., y Spong, M. W. (1998). On the uniform boundedness of the inertia matrix of serial robot manipulators. *Journal of Robotic Systems*, 15(1):17–28. [98](#)
- [33] Gubina, F. y Strmcnik, B. (1997). A simple approach to voltage stability assessment in radial networks. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 12(3):1121–1128. [50](#)

- [34] Hill, D. J. (1995). Scanning the issue-special issue on nonlinear phenomena in power systems: Theory and practical implications. *Proceedings of the IEEE*, 83(11):1439. [5](#)
- [35] Hill, D. J. y Chen, G. (2006). Power systems as dynamic networks. En *Circuits and Systems, 2006. ISCAS 2006. Proceedings. 2006 IEEE International Symposium on*, pp. 4–pp. IEEE. [1](#), [5](#)
- [36] Huang, Q., Luo, Q., Lin, L., y Nie, J. (2014). Nonlinear control for statcom based on generalized hamiltonian system theory. En *Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics (IHMSC), 2014 Sixth International Conference on*, volumen 2, pp. 313–316. IEEE. [29](#), [94](#)
- [37] Jadbabaie, Ali and Lin, Jie and others (2003). Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(6):988–1001. [1](#)
- [38] Jayawardhana, B., Ortega, R., García-Canseco, E., y Castanos, F. (2007). Passivity of nonlinear incremental systems: Application to pi stabilization of nonlinear rlc circuits. *Systems & control letters*, 56(9):618–622. [41](#)
- [39] Jeltsema, D. y Scherpen, J. (2003). A dual relation between port-hamiltonian systems and the brayton–moser equations for nonlinear switched rlc circuits. *Automatica*, 39(6):969–979. [33](#), [35](#), [62](#)
- [40] Kamarposhti, M. A. y Alinezhad, M. (2010). Comparison of svc and statcom in static voltage stability margin enhancement. *system*, 9:1. [29](#)
- [41] Kuh, E. S. y Hajj, I. H. (1971). Nonlinear circuit theory: resistive networks. *Proceedings of the IEEE*, 59(3):340–355. [29](#)
- [42] Kundur, P., Balu, N., y Lauby, M. (1994). *Power system stability and control*, volumen 7. McGraw-hill New York. [2](#), [5](#), [23](#), [26](#), [28](#), [29](#), [50](#), [58](#), [88](#)
- [43] Kyoto-Protocol (1997). United nations framework convention on climate change. *Kyoto Protocol, Kyoto*. [1](#)
- [44] Lasseter, R. H. (2002). Microgrids. En *Power Engineering Society Winter Meeting, 2002. IEEE*, volumen 1, pp. 305–308. IEEE. [6](#), [24](#)
- [45] Loria, A. (2013). Uniform global position feedback tracking control of mechanical systems without friction. En *American Control Conference (ACC), 2013*, pp. 5722–5727. IEEE. [3](#), [99](#)

- [46] Loria, A. (2015). Observers are unnecessary for output-feedback control of lagrangian systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. [3](#), [97](#), [99](#), [100](#), [101](#), [102](#), [106](#), [108](#), [110](#), [111](#)
- [47] Loria, A. y Avila-Becerril, S. (2014). Output-feedback global tracking control of robot manipulators with flexible joints. En *American Control Conference (ACC), 2014*, pp. 4032–4037. IEEE. [3](#), [8](#), [97](#)
- [48] Loria, A., Espinosa-Pérez, G., y Avila-Becerril, S. (2014). Global adaptive linear control of the permanent-magnet synchronous motor. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 28(10):971–986. [3](#)
- [49] Loria, A. y Ortega, R. (1995). On tracking control of rigid and flexible joints robots. *Appl. Math. Comput. Sci*, 5(2):101–113. [3](#)
- [50] Madani, R., Lavaei, J., y Baldick, R. (2015). Convexification of power flow problem over arbitrary networks. En *IEEE 54th Ann. Conf. Decis. Contr. (CDC)*. [80](#)
- [51] Marwali, Mohammad N and Jung, J and Keyhani, Ali and others (2007). Stability analysis of load sharing control for distributed generation systems. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 22(3):737. [6](#)
- [52] Maschke, B. M., Van der Schaft, A. J., y Breedveld, P. C. (1995). An intrinsic hamiltonian formulation of the dynamics of lc-circuits. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 42(2):73–82. [5](#)
- [53] Nicosia, S. y Tomei, P. (1995). A tracking controller for flexible joint robots using only link position feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):885–890. [3](#)
- [54] Noriega-Pineda, D., Espinosa-Pérez, G., Cardenas, V., y Alvarez-Ramírez, J. (2010). Passivity-based control of multilevel cascade inverters: High-performance with reduced switching frequency. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 20(9):961–974. [67](#)
- [55] Nunes, E. V. y Hsu, L. (2010). Global tracking for robot manipulators using a simple causal pd controller plus feedforward. *Robotica*, 28(01):23–34. [3](#)
- [56] Nuno, E., Ortega, R., Basanez, L., y Hill, D. (2011). Synchronization of networks of nonidentical euler-lagrange systems with uncertain parameters and communication delays. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(4):935–941. [4](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [57] Nuno, E., Sarras, I., y Basanez, L. (2013). Consensus in networks of non-identical euler–lagrange systems using p+d controllers. *Robotics, IEEE Transactions on*, 29(6):1503–1508. [1](#)
- [58] Olfati-Saber, R. y Murray, R. M. (2004). Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 49(9):1520–1533. [1](#)
- [59] Ortega, R., Galaz, M., Astolfi, A., Sun, Y., y Shen, T. (2005). Transient stabilization of multimachine power systems with nontrivial transfer conductances. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(1):60–75. [6](#)
- [60] Ortega, R., Jeltsema, D., y Scherpen, J. (2003). Power shaping: A new paradigm for stabilization of nonlinear rlc circuits. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(10):1762–1767. [5](#)
- [61] Ortega, R., Perez, J. A. L., Nicklasson, P. J., y Sira-Ramirez, H. (2013). *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer Science & Business Media. [2](#), [3](#), [17](#), [21](#), [23](#)
- [62] Ortega, R. y Spong, M. W. (1989). Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, 25(6):877–888. [3](#)
- [63] Ortega, R., van der Schaft, A., Castanos, F., y Astolfi, A. (2008). Control by interconnection and standard passivity-based control of port-hamiltonian systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(11):2527–2542. [5](#)
- [64] Ortega, R., Van Der Schaft, A., Maschke, B., y Escobar, G. (2002). Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4):585–596. [68](#)
- [65] Panteley, E. y Loria, A. (2001). Growth rate conditions for uniform asymptotic stability of cascaded time-varying systems. *Automatica*, 37(3):453–460. [106](#), [108](#)
- [66] Pavlov, A. y Marconi, L. (2008). Incremental passivity and output regulation. *Systems & Control Letters*, 57(5):400–409. [20](#)
- [67] Pedrasa, M. A. y Spooner, T. (2006). A survey of techniques used to control microgrid generation and storage during island operation. En *Proceedings of the 2006 Australasian Universities Power Engineering Conference (AUPEC'06)*, pp. 1–6. [6](#), [24](#)

- [68] Pérez, I. M., Pérez, G. E., Rodríguez, G. S., y Cerezo, A. D. (2008). Ida passivity-based control of single phase back-to-back converters. En *Industrial Electronics, 2008. ISIE 2008. IEEE International Symposium on*, pp. 74–79. IEEE. [67](#)
- [69] Ren, W. (2009). Distributed leaderless consensus algorithms for networked euler-lagrange systems. *International Journal of Control*, 82(11):2137–2149. [4](#)
- [70] Ren, W., Beard, R. W., y Atkins, E. M. (2005). A survey of consensus problems in multi-agent coordination. En *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, pp. 1859–1864. IEEE. [1](#)
- [71] Ren, W. y Cao, Y. (2010). *Distributed coordination of multi-agent networks: emergent problems, models, and issues*. Springer Science & Business Media. [14](#)
- [72] Romero, J. G., Ortega, R., y Sarras, I. (2015). A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 60(3):818–823. [3](#), [77](#), [98](#)
- [73] Roska, T. (1978). On the uniqueness of solutions of nonlinear dynamic networks and systems. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 25(3):161–169. [29](#)
- [74] Schiffer, J., Ortega, R., Astolfi, A., Raisch, J., y Sezi, T. (2014). Conditions for stability of droop-controlled inverter-based microgrids. *Automatica*, 50(10):2457–2469. [1](#), [6](#), [24](#), [65](#), [87](#), [90](#), [93](#), [119](#), [120](#), [121](#)
- [75] Serre, D. (2002). *Matrices: Theory and Applications*. Springer, New York. [16](#)
- [76] Simpson-Porco, John W and Bullo, Francesco and others (2015). A solvability condition for reactive power flow. En *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 2013–2017. IEEE. [80](#)
- [77] Simpson-Porco, J. W., Dörfler, F., y Bullo, F. (2013). Synchronization and power sharing for droop-controlled inverters in islanded microgrids. *Automatica*, 49(9):2603–2611. [1](#), [6](#), [24](#), [65](#), [87](#), [90](#), [93](#), [119](#), [120](#)
- [78] Spong, M. W. (1987). Modeling and control of elastic joint robots. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 109(4):310–318. [108](#)
- [79] Stykel, T. (2011). Balancing-related model reduction of circuit equations using topological structure. En *Model Reduction for Circuit Simulation*, pp. 53–83. Springer. [5](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [80] Sun, Y.-Z., Liu, Q., Song, Y., y Shen, T. (2002). Hamiltonian modelling and nonlinear disturbance attenuation control of tscs for improving power system stability. En *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, volumen 149, pp. 278–284. IET. [29](#), [94](#)
- [81] Takegaki, M. y Arimoto, S. (1981). A new feedback method for dynamic control of manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 103(2):119–125. [3](#)
- [82] Todescato, M., Simpson-Porco, J. W., Dörfler, F., Carli, R., y Bullo, F. (2015). Optimal voltage support and stress minimization in power networks. En *IEEE Conf. on Decision and Control, Osaka, Japan*. [29](#)
- [83] Van Cutsem, T. y Vournas, C. (1998). Voltage stability of electric power systems. 441. [5](#), [29](#)
- [84] Van der Schaft, A. (1999). *L2-gain and passivity in nonlinear control*. Springer-Verlag New York, Inc. [2](#), [4](#), [5](#), [18](#), [20](#), [22](#), [23](#)
- [85] Van der Schaft, A. (2010). Characterization and partial synthesis of the behavior of resistive circuits at their terminals. *Systems & Control Letters*, 59(7):423–428. [5](#), [36](#)
- [86] Van der Schaft, A. y Maschke, B. (2013). Port-hamiltonian systems on graphs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(2):906–937. [18](#), [19](#)
- [87] Wei, E. y Bandi, C. (2015). Fairness considerations in network flow problems. En *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 6909–6914. IEEE. [80](#)
- [88] Weiss, L. y Mathis, W. (1997). A hamiltonian formulation for complete nonlinear rlc-networks. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 44(9):843–846. [5](#)
- [89] Wellstead, P. (1979). *Introduction to physical system modelling*. Academic Press London. [17](#)
- [90] Westinghouse, E. (1965). Electrical transmission and distribution reference book. *East Pittsburg*. [50](#)
- [91] Willems, J. C. (1972). Dissipative dynamical systems part i: General theory. *Archive for rational mechanics and analysis*, 45(5):321–351. [2](#)

- [92] Zavala-Río, A., Aguiñaga-Ruiz, E., y Santibanez, V. (2011). Global trajectory tracking through output feedback for robot manipulators with bounded inputs. *Asian Journal of Control*, 13(3):430–438. [3](#)
- [93] Zhu, Y., Dawson, D., Burg, T., y Hu, J. (1996). A cheap output feedback tracking controller with robustness: the rlj problem. En *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, volumen 1, pp. 939–944. IEEE. [3](#)
- [94] Zonetti, D., Ortega, R., y Benchaib, A. (2015). Modeling and control of hvdc transmission systems from theory to practice and back. *Control Engineering Practice*, 45:133–146. [23](#)