



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CONTROL Y ROBÓTICA

CONTROLADOR BASADO EN LQ SINGULAR Y MODOS
DESGLIZANTES DE QUINTA GENERACIÓN PARA UN
TRANSPORTADOR INESTABLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
INGENIERO ELÉCTRICO-ELECTRÓNICO

PRESENTA:
DIEGO LÓPEZ RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RAFAEL IRIARTE VIVAR-BALDERRAMA



CIUDAD DE MÉXICO

JUNIO, 2016

Controlador basado en LQ Singular y Modos Deslizantes de quinta generación para un transportador inestable

por

Diego López Rodríguez

Tesis presentada para obtener el grado de

Ingeniero Eléctrico-Electrónico

en la

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México. Junio, 2016

A mis padres y hermano...
Los amo con todo mi $\rho = 1 - \cos(\theta)$.

Agradecimientos

A mis padres, Rocío y Hugo, por su amor y apoyo durante este largo trayecto llamado vida.

A Huguito, mi hermano, por tu cariño y compañía desde el comienzo.

A mi Teté, por cuidarme cuando más lo necesitaba.

A mis tios, Angélica, Guillermo José, Melita y Román, por apoyarme incondicionalmente en mi estancia universitaria (y lo que falta).

A los integrantes del Laboratorio de Modos Deslizantes de la UNAM, de manera especial a Ismael y a Victor, por su compañía y ayuda a través de todo este trabajo.

Al los profesores Leonid Fridman y Rafael Iriarte por desbordar pasión hacia el control y por haberme invitado al laboratorio de Modos Deslizantes.

A la UNAM y a la FI, por abrirme sus puertas y educar a México de una manera no elitista.

A Dios, por bella matemática, interesante ingeniería.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estado del Arte	1
1.2. Motivación	2
1.3. Planteamiento del problema y objetivo	3
1.4. Contribución	3
1.5. Organización de la tesis	3
2. Marco Teórico	5
2.1. Teoría de análisis de sistemas	5
2.1.1. Linealización	5
2.1.2. Controlabilidad y observabilidad para sistemas lineales e invariantes en el Tiempo	6
2.1.3. Puntos de equilibrio	7
2.1.4. Estabilidad	8
2.1.5. Transformaciones de similitud	9
2.2. Control por Modos Deslizantes	11
2.2.1. Primera Generación: Modos Deslizantes Convencionales	14
2.2.2. Segunda Generación: Modos Deslizantes de Segundo Orden	17
2.2.3. Tercera Generación: Controlador Super- <i>Twisting</i>	18
2.2.4. Cuarta Generación: Controladores por Modos Deslizantes de Orden Superior	18
2.2.5. Quinta Generación: Controladores Continuos por Modos Deslizantes de Orden Superior	19
2.2.6. Diferenciador robusto y exacto de orden arbitrario	20
2.3. Control óptimo	21
2.3.1. Regulador Lineal Cuadrático	21
2.3.2. Filtro de Kalman	22
2.4. Diseño de trayectorias polinómicas	23
2.5. Diseño de superficies de deslizamiento de orden superior por método LQ Singular	24
2.6. Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo	27
2.6.1. Planteamiento del problema	27
2.6.2. Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo por realimentación de estados	28
2.6.3. Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo por realimentación de salida	29
2.6.4. Sintonización del Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo	30

3. Análisis del sistema Transportador Inestable	31
3.1. Plataforma Física	31
3.1.1. Descripción del Sistema	32
3.1.2. Hardware	32
3.1.3. Software	33
3.2. Modelo Matemático	34
3.2.1. Modelo no lineal del Robot Péndulo	35
3.2.2. Puntos de equilibrio	37
3.2.3. Linealización	38
3.2.4. Análisis de estabilidad	38
3.2.5. Controlabilidad y Observabilidad	39
3.2.6. Estimación del estado	39
3.2.7. Desacoplamiento del sistema	44
4. Implementación de Controladores	45
4.1. Trayectorias	46
4.2. Diseño de las superficies de deslizamiento	48
4.3. Control equivalente del sistema	50
4.3.1. Control equivalente para el sistema nominal	50
4.3.2. Dinámica del Error	51
4.4. Diseño del Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo	53
4.5. Diseño del Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo con realimentación de salida	53
4.6. Diseño del Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo con distintas ganancias estabilizantes	54
4.7. Resumen	54
5. Reporte de Resultados	57
5.1. Simulaciones	57
5.1.1. Simulación del Filtro de Kalman	57
5.1.2. Simulación Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo	60
5.1.3. Simulación Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo por realimentación de salida	65
5.2. Resultados Experimentales	70
5.2.1. Filtro de Kalman	70
5.2.2. Experimento para el Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo por realimentación de estados	72
5.2.3. Experimento para el Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo por realimentación de salida	77
5.2.4. Sintonización del Algoritmo <i>Twisting</i> Continuo	82
5.2.5. Resumen	95
6. Conclusiones	99
Bibliografía	101

Capítulo 1

Introducción

Toda evolución de la que sabemos procede de lo vago a lo definido.

Giuseppe Peano

La Teoría de Control, particularmente el control por realimentación, tiene sus orígenes desde la Civilización Griega, la cual tenía sistemas de control para nivel de agua el cual no requería de un desempeño muy estricto en su funcionamiento [1].

Hasta el principio del siglo XVIII la Teoría de Control tuvo un desarrollo muy lento y desde principios hasta mediados del mismo siglo se desarrollo de manera más acelerada tanto en teoría como en implementación, esto debido a la Revolución Industrial y a la Primera Guerra Mundial, en esta época se desarrollo lo que ahora se denomina control clásico.

Una vez finalizada la Segunda Guerra Mundial la teoría de control vio un auge enorme debido principalmente a dos factores: primero era el problema de seguimiento de misiles balísticos, lo cual requería de un control más fino del que se tenía; y segundo, el desarrollo de sistemas digitales permitió que fuese más sencillo la implementación de controladores [2].

El control desarrollado desde la posguerra hasta nuestros días se le denomina control moderno, marco en el cual se ubica el Control por Modos Deslizantes (SMC por sus siglas en Inglés), paradigma de control desarrollado en la Unión Soviética [3]. Este paradigma de control será el utilizado en la presente tesis para lograr los objetivos de control deseados en la implementación real.

1.1. Estado del Arte

En el Estado del Arte se tienen dos vertientes: por un lado se tiene el desarrollo de la Teoría de SMC, en la cual se ubica el controlador usado en esta tesis; y por otro lado se encuentra las implementaciones físicas realizadas en transportadores inestables (también llamados robots péndulo).

Control por Modos Deslizantes A partir de la segunda del siglo XX la teoría de control ha sufrido un repunte debido a la exigencia y necesidad de robustez en los sistemas modernos de con-

trol. Algunas técnicas de control robusto desarrolladas son el Control Óptimo, Control Basado en Pasividad y el Control por Modos Deslizantes (SMC por sus siglas en Inglés) entre otras.

El SMC se encentra entre los más robusto entre este grupo, pues garantiza bajo ciertas hipótesis algunas poderosas propiedades tales como insensibilidad a perturbaciones y convergencia en tiempo finito. Sin embargo, entre estas hipótesis se encuentran el tiempo de muestreo infinito (lo cual es imposible de cumplir en un implementación real), y grado relativo no arbitrario. Al no poderse cumplir la condición de tiempo de muestreo infinito se presenta un fenómeno denominado *Chattering* el cual se manifiesta como oscilaciones de alta frecuencia en los estados del sistema, fenómeno nocivo para el *hardware*.

En 2001 se presenta en [4] el primer algoritmo de SMC para grado relativo arbitrario, sin embargo, éste produce una señal de control discontinua. Actualmente se encuentran en desarrollo los algoritmos de control por Modos Deslizantes de Orden Superior (HOSM por sus siglas en Inglés) con señal de control continua, en [5] se presentan el *Continuous Singular Terminal Sliding Mode Algorithm* y el *Continuous Nonsingular Terminal Sliding Mode Algorithm* los cuales son HOSM para sistemas de grado relativo $r \geq 2$ y que producen señal de control continua, i.e. SMC de quinta generación.

El Algoritmo Twisting Continuo (CTA por sus siglas en Inglés) es de igual manera SMC de quinta generación, el CTA está definido para sistemas de grado relativo 2 como se prueba en [6] y produce una señal de control continua. Este algoritmo será el utilizado en la implementación física.

Debido a que la planta no nos permite implementar directamente el CTA es necesario realizar un diseño de superficies de deslizamiento. Existen varios enfoques, por ejemplo, en [7] se presenta el diseño de superficies de deslizamiento de orden arbitrario a través de colocación de polos, en [8] se presenta de igual manera un algoritmo de diseño de superficies de deslizamiento de orden superior usando el enfoque LQ singular. Este último enfoque será el usado para la implementación en esta tesis.

Implementaciones de controladores en robots péndulo Existen bastantes artículos que tratan el control de Robots péndulo como el que se usará en este trabajo, pues este sistema es de interés comercial similar a los productos fabricados por *Segway*. En [9] utilizan colocación de polos para diseñar el controlador y lo implementan en un FPGA (*Field Programmable Gate Array*), en [10] utilizan un control por realimentación lineal parcial de estados.

1.2. Motivación

El desarrollo de la Robótica Móvil (en el cual la Teoría de Control juega un papel primordial) tiene gran impacto en diversos ámbitos, como ejemplos tenemos el desarrollo de robots móviles autónomos para la exploración espacial, los robots de servicio y como vehículos de transporte comercial como los *Segway* o las *Hoverboard*. Estos ejemplos de implementaciones reales requieren de un algoritmo de control robusto, pues los ambientes en los que trabajan son muy variados e impredecibles. Por esto, se implementarán algoritmos de control por Modos Deslizantes de quinta generación para hacer frente a estas incertidumbres, con lo cual se espera obtener resultados mejores a los reportados en la literatura disponible.

Por otro lado también se tiene la motivación del desarrollo de la Teoría de Control por Modos Deslizantes de el cual la vanguardia son los algoritmos de quinta generación de SMC los cuales al

producir señales de control continuas son más viables de implementar en plantas reales por lo que se quiere comprobar su desempeño con pruebas experimentales.

1.3. Planteamiento del problema y objetivo

Se tienen diversos problemas en la implementación física del sistema de control. Se tiene incertidumbre en el terreno en el cual se va a desplazar el Robot Péndulo, se tiene incertidumbre en los parámetros físicos del sistema (por ejemplo en su masa, su centro de inercia, su fricción, etc.), las señales de los sensores son ruidosas, existen dinámicas no modeladas que afectan el desempeño del robot pero no son consideradas por el diseño del algoritmo de control (por ejemplo el *backlash* del *gearbox* o la zona muerta de los motores), las trayectorias deseadas a seguir “inyectan perturbaciones” en el sistema, entre otras.

Con todos estos problemas, se tiene como objetivos los siguientes:

- Lograr estabilidad práctica del origen de la dinámica del error de planta a pesar de perturbaciones, incertidumbres y ruido.
- Respalda experimentalmente la prueba de estabilidad presentada en [6] tanto para el caso por realimentación de estados como el caso por realimentación de salida.
- Implementar diversos conjuntos de ganancias estabilizantes del CTA presentados en [6] y [11] para comparar sus desempeños.

1.4. Contribución

Este trabajo contribuye experimentalmente con el desarrollo de los algoritmos de control por Modos Deslizantes de quinta generación, área en plena evolución en el SMC, algoritmos que resuelven de manera satisfactoria dos problemas importantes de los Algoritmos de Control por Modos Deslizantes: el grado relativo de los sistemas en que se aplican y la continuidad de las señales de control.

Además se contribuye en la comparación del desempeño de distintos conjuntos de ganancias estabilizantes para el Algoritmo *Twisting* Continuo, para discernir cual de ellas (entre las implementadas en esta tesis) es la mejor para esta planta (el Robot Péndulo) en particular.

1.5. Organización de la tesis

La estructura de la tesis está dada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se introducirán las definiciones y teoremas de una manera no rigurosa. Esto con el fin de presentar las herramientas matemáticas que serán de utilidad para el desarrollo de la tesis.
- El Capítulo 3 presenta el análisis del sistema, describiendo la plataforma física, esto es, la instrumentación utilizada y la descripción del modelo matemático que define el comportamiento del sistema.

Esta caracterización es importante pues nos permite tener la información que se utilizará para sintonizar el algoritmo de control en la planta real.

- En el Capítulo 4 se describe la manera en que se implementaron los algoritmos de control, se muestra el diseño de trayectorias deseadas, se realizará el diseño de las variables de deslizamiento utilizando el algoritmo LQ singular para la sintonización de las ganancias de las mismas variables y finalmente se presenta el análisis para la sintonización de las ganancias del algoritmo *Twisting* Continuo y el *Twisting* Continuo por realimentación de salida.
- Posteriormente en el Capítulo 5 se presentan los resultados experimentales aplicados en el Robot Péndulo.
- Finalmente se presentan las conclusiones de los resultados obtenidos de dichos algoritmos de control.

Capítulo 2

Marco Teórico

*Un matemático que no es en algún sentido
un poeta no será nunca un matemático
completo.*

Karl Weierstrass

En este capítulo se enunciarán los resultados teóricos que se usarán en la implementación del controlador del Robot Péndulo, con fines de se presenta una breve discusión informal sobre el desarrollo de los SMC para finalizar esta con el reciente algoritmo de SMC presentado en [6].

2.1. Teoría de análisis de sistemas

En esta sección trataremos conceptos y teoremas importantes que nos permitirán realizar manipulaciones del sistema tales como linealizar o realizar cambios de coordenadas para llevarlo a formas mejor estudiadas

2.1.1. Linealización

El análisis de sistemas no lineales (i.e. de ecuaciones diferenciales no lineales) es una rama de la ingeniería (y de las matemáticas) complicada pues no existe un modelo ni marco de trabajo general que tome en cuenta todas las posibles no linealidades, por lo que se tiene que estudiar los casos de manera particular (i.e. no hay una manera sistemática de análisis). Sin embargo, hay maneras aproximar sistemas no lineales en lineales esto es de gran importancia pues a pesar de que se pierde el comportamiento de la dinámica global se puede hacer un estudio local en un compacto del espacio de estados y además el modelo de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales es una rama muy bien estudiada en matemáticas que nos da un marco de trabajo muy amplio para realizar el análisis.

Proposición 1 [12] Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}\tag{2-1}$$

2.1. TEORÍA DE ANÁLISIS DE SISTEMAS

Donde $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p, f : D_x \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^n, h : D_x \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $D_x \subseteq \mathbb{R}^n, D_u \subseteq \mathbb{R}^m$ y además se cumple que $f \in \mathcal{C}^1, h \in \mathcal{C}^1$ Definimos

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} x(t) - x_e(t) \\ \bar{u}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} u(t) - u_e(t) \\ \bar{y}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} y(t) - h(x_e, u_e)\end{aligned}$$

Con las funciones constantes $x_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, u_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ los puntos de operación del sistema.

El sistema (2-1) se puede aproximar a un sistema lineal $\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x} + B\bar{u}, \bar{y} = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t)$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ donde éstas se obtienen como:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\partial f}{\partial x} \big|_{x=x_e, u=u_e} : \text{Jacobiano de } f \text{ con respecto a } x \\ B &= \frac{\partial f}{\partial u} \big|_{x=x_e, u=u_e} : \text{Jacobiano de } f \text{ con respecto a } u \\ C &= \frac{\partial h}{\partial x} \big|_{x=x_e, u=u_e} : \text{Jacobiano de } h \text{ con respecto a } x \\ D &= \frac{\partial h}{\partial u} \big|_{x=x_e, u=u_e} : \text{Jacobiano de } h \text{ con respecto a } u\end{aligned}$$

Notación 2 A partir de ahora en adelante las variables que representen el estado, el control y la salida (que dependen del tiempo) se usará la siguiente notación $x \stackrel{\text{def}}{=} x(t), u \stackrel{\text{def}}{=} u(t)$ y $y \stackrel{\text{def}}{=} y(t)$

Se puede notar al aplicar la Proposición anterior se aproxima el sistema no lineal a uno lineal e invariante en el tiempo (LTI por sus siglas en Inglés)

2.1.2. Controlabilidad y observabilidad para sistemas lineales e invariantes en el Tiempo

Dos de los conceptos más importantes de la teoría de control son la controlabilidad y la observabilidad, pues estos nos permiten saber si es posible hacer control con los actuadores y sensores que tiene la planta.

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned} \tag{2-2}$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, u \in \mathbb{R}^m, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, y \in \mathbb{R}^p, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ y $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Definición 3 [13] Se dice que el sistema (2-2) es controlable para todo estado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe alguna entrada de control $u(t)$, con $t \in [0, T]$ tal que $x(0) = x_0$ y $x(T) = 0$ para cualquier T dada.

En la Figura 2-1 se muestra gráficamente la definición de controlabilidad, donde se da un estado inicial x_0 y para cualesquiera tiempos T_1 y T_2 existen entradas de control $u_1(t)$ y $u_2(t)$ tales que $u_1(0) = u_2(0) = x_0$ y $u_1(T_1) = 0, u_2(T_2) = 0$.

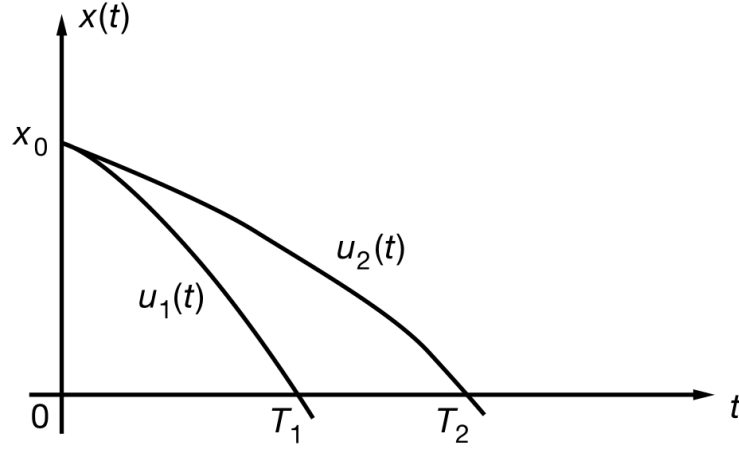


Figura 2-1: Controlabilidad

Definición 4 [12] Se dice que (2-2) es observable si para cualquier estado inicial desconocido $x(0)$, existe un tiempo finito $t_1 > 0$ tal que con el conocimiento de la entrada $u(t)$ y de la salida $y(t)$ con $t \in [0, t_1]$ es suficiente para determinar de manera única el estado inicial $x(0)$.

Ahora se presentarán teoremas que son equivalencias lógicas de la definición de controlabilidad y observabilidad para sistemas LTI los cuales permiten saber de manera sistemática si un sistema es controlable u observable.

Teorema 5 [13] (2-2) es controlable si y solo si

$$\text{rank } \mathcal{C} = n$$

Donde $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} [A, AB, \dots, A^{n-1}B]$ es la matriz de controlabilidad y n es el número de estados del sistema.

De igual manera se tiene el siguiente Teorema para determinar la observabilidad de un sistema LTI de manera sistemática.

Teorema 6 [13] (2-2) es observable si y solo si

$$\text{rank } \mathcal{O} = n$$

Donde $\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ es la matriz de controlabilidad y n es el número de estados del sistema.

2.1.3. Puntos de equilibrio

Definición 7 Sea el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{2-3}$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Se le llama punto de equilibrio a todo estado x_0 que cumpla con [14]

$$f(x_0) = 0 \quad (2-4)$$

2.1.4. Estabilidad

Definición 8 [14] El punto de equilibrio $x_0 = 0$ del sistema (2-3) es:

- estable si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- inestable si no es estable
- asintóticamente estable si es estable y δ puede ser escogida tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Otro concepto importante en teoría de Modos Deslizantes es el de estabilidad en tiempo finito, la definición formal se puede encontrar en [15]. Este concepto se puede ver en sistemas continuos como el que sea estable y además exista alguna $T > 0$ tal que para toda $R > 0$ los estados del sistema (2-3) que cumplan con $\|x_0\| < R$ como condición inicial se cumpla que $x(t) = 0$ para toda $t \geq T$.

Una vez definidos los conceptos de estabilidad, ahora se enunciarán dos teoremas importantes para determinar la estabilidad del origen de un sistema. Considere el sistema no lineal autónomo

$$\dot{x} = f(x), \quad (2-5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathcal{N}_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{N}_\delta(0)$ una vecindad de radio δ con centro en el origen y además $f \in \mathcal{C}^1$. Considere

$$\dot{x} = Ax, \quad (2-6)$$

la linealización del sistema (2-5) donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El siguiente Teorema nos ayuda a determinar la estabilidad para un sistema lineal.

Teorema 9 [13] Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de la matriz A del sistema (2-6), el origen del mismo sistema es:

- asintóticamente estable si todas las raíces de $p(\lambda)$ tienen parte real negativa.
- inestable si existe alguna raíz de $p(\lambda)$ con parte real positiva.

Una matriz que cumple que la parte real de todos sus valores característicos son negativos se denomina una matriz *Hurwitz*. Ahora se presenta el método indirecto de Lyapunov, el cual nos permite determinar la estabilidad de un sistema no lineal a partir de su aproximación lineal.

Teorema 10 [14] Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema (2-5) y sea (2-6) su linealización. Entonces

- Si el origen de (2-6) es asintóticamente estable en el sentido de 9, entonces el origen de (2-5) es asintóticamente estable para alguna vecindad $\mathcal{N}_\delta(0)$.
- Si el origen de (2-6) es inestable en el sentido de 9, entonces el origen de (2-5) es inestable para alguna vecindad $\mathcal{N}_\delta(0)$.

2.1.5. Transformaciones de similitud

Las transformaciones de similitud son una herramienta poderosa en el diseño de sistemas de control pues nos permiten convertir sistemas de una estructura difícil de estudiar a otra estructura más estudiada donde existen herramientas de diseño que simplifican el mismo. Y además si cuidamos que la transformación tenga ciertas propiedades se puede garantizar que el sistema original conserva las mismas propiedades de controlabilidad, observabilidad, estabilidad, etc. que se obtuvieron al hacer el diseño con el sistema transformado.

Cambio de base

Se usarán las siguiente notaciones

Notación 11 [16] Sea α un elemento del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^n$ y β una base ordenada de $\mathbb{R}^n$

- Se denota $[\alpha]_\beta$ a la matriz de coordenadas de tamaño $n \times 1$ relativa a la base β .
- Se denota $[T]_\beta$ a la matriz asociada al operador T relativa a la base β .

El concepto de cambio de base es el que sustenta el de transformaciones de similitud y se puede enunciar en el siguiente teorema.

Teorema 12 [16] Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre el campo $\mathbb{R}$ y sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ dos bases **ordenadas** de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una única e matriz invertible $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (la matriz asociada a un operador lineal invertible) tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad [\alpha]_{\mathfrak{B}} &= P[\alpha]_{\mathfrak{B}'} \\ (ii) \quad [\alpha]_{\mathfrak{B}'} &= P^{-1}[\alpha]_{\mathfrak{B}}, \end{aligned} \tag{2-7}$$

para todo vector $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Las columnas de P son dadas por

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathfrak{B}} \tag{2-8}$$

con α'_j el j -ésimo elemento de la base $\mathfrak{B}'$

2.1. TEORÍA DE ANÁLISIS DE SISTEMAS

Corolario 13 [16] Supongamos que P es una matriz invertible tamaño $n \times n$ con elementos en $\mathbb{R}^n$ (asociado a un operador lineal invertible). Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre el campo $\mathbb{R}$ y sea $\mathfrak{B}$ una base ordenada de V . Entonces existe una única base ordenada $\mathfrak{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad [\alpha]_{\mathfrak{B}} &= P[\alpha]_{\mathfrak{B}'} \\ (ii) \quad [\alpha]_{\mathfrak{B}'} &= P^{-1}[\alpha]_{\mathfrak{B}}, \end{aligned} \quad (2-9)$$

para toda α en $\mathbb{R}^n$

Ahora estamos en posición para definir una transformación de similitud.

Definición 14 [12],[16] Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^n$, sean $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^n$ y sea P ser la matriz de de cambio de coordenadas de la base $\mathfrak{B}'$ a la base $\mathfrak{B}$ (como se define en 12). Entonces la transformación que cambia la base de la matriz asociada al operador T de la base $\mathfrak{B}$ a la base $\mathfrak{B}'$

$$[T]_{\mathfrak{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathfrak{B}}P \quad (2-10)$$

se denomina transformación de similitud.

Forma canónica de controlabilidad para caso SISO

Una transformación muy importante en análisis de sistemas es la llamada forma canónica de controlabilidad o forma canónica de *Brunovsky* pues su estructura simplifica el diseño de superficies de deslizamiento como veremos más adelante. Esta forma tiene una estructura de la siguiente manera.

Lema 15 [17] Sea el sistema (2-2) controlable y SISO (i.e. $m, p = 1$) y sea $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ el polinomio característico de A , entonces existe una matriz T de cambio de coordenadas de los estados $\hat{x}$ a los estados x (i.e. $x = T\hat{x}$) tal que transforma la ecuación de estados a la siguiente forma

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{(T^{-1}AT)}_{\hat{A}}\hat{x} + \underbrace{(T^{-1}B)}_{\hat{B}}u \quad (2-11)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-12)$$

y T se construye como

$$T = \begin{bmatrix} t_n & t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_1 \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

donde

$$\begin{aligned} t_1 &= B \\ t_2 &= At_1 + a_{n-1}t_1 = AB + a_{n-1}B \\ t_3 &= At_2 + a_{n-2}t_1 = A^2B + a_{n-1}AB + a_{n-2}B \\ &\vdots \\ t_n &= At_{n-1} + a_1t_1 = A^{n-1}B + a_{n-1}A^{n-2}B + \cdots + a_2AB + a_1B \end{aligned} \quad (2-14)$$

Se puede observar que $\hat{A} = T^{-1}AT$ es una transformación de similitud.

Cambio de coordenadas del control

El cambio de coordenadas del control nos ayudará a simplificar el proceso del diseño de superficies aprovechando la estructura del sistema.

Proposición 16 Sea el sistema (2-2) SISO (i.e. $m = p = 1$), dado un operador lineal biyectivo $\mathcal{T}$ y una base $\mathfrak{B}$ (de $\mathbb{R}^m$) existe una única base $\mathfrak{B}'$ tal que $\mathcal{T} : [u]_{\mathfrak{B}} \rightarrow v \stackrel{\text{def}}{=} [u]_{\mathfrak{B}'}$ y se cumple $\dot{x} = Ax + Bu \Leftrightarrow \dot{x} = Ax + B'v$.

Demostración. Sea Q la matriz asociada a la transformación $\mathcal{T}$, por el corolario 13 existe la base $\mathfrak{B}'$, además por hipótesis $\mathcal{T}$ es biyectiva por lo que existe Q^{-1} , por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ \Leftrightarrow \dot{x} &= Ax + B(Q^{-1}Q)u \\ \Leftrightarrow \dot{x} &= Ax + \underbrace{(BQ^{-1})}_{B'} \underbrace{(Qu)}_v \end{aligned}$$

Con lo que definiendo $B' \stackrel{\text{def}}{=} BQ^{-1}$, $v \stackrel{\text{def}}{=} Qu$ y por el desarrollo anterior $\dot{x} = Ax + Bu \Leftrightarrow \dot{x} = Ax + B'v$

■

La Proposición anterior es muy importante pues más adelante se aplicará un cambio de base al control lo que facilitará el diseño del algoritmo del mismo y como la conclusión es una equivalencia lógica se puede regresar a las coordenadas del control original para controlar la planta.

2.2. Control por Modos Deslizantes

El el diseño y formulación de problemas de control siempre existirán discrepancias entre el sistema físico y el modelo matemático diseñado. Estas discrepancias pueden ser debidas a dinámicas no modeladas, variación en los parámetros del sistema, simplificación de dinámicas, etc. Sin embargo, el ingeniero en control debe asegurarse que el rendimiento del controlador sea satisfactorio sin importar estas discrepancias [18].

2.2. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

Este problema lleva al desarrollo de los llamados métodos de control robusto. Uno de estos paradigmas es el llamado control de estructura variable.

Los Sistemas de Control de Estructura Variable (VSCS) se caracterizan por una ley de control y una regla de decisión. La regla de decisión llamada función de conmutación, tiene como entrada la medición actual de alguna variable (o combinación de ellas) del sistema y produce como resultado una señal de control particular que deberá ser usada en ese mismo instante, es decir, el control debe permutar entre dos leyes de control distintas dependiendo del estado de alguna variable del sistema.

La metodología conocida como Control por Modos Deslizantes (SMC) es un tipo particular de VSCS, SMC está diseñado para llevar y mantener el estado del sistema a una vecindad (superficie de deslizamiento) de la función de conmutación.

Algunas ventajas del enfoque del SMC son: se puede escoger el comportamiento dinámico del sistema estableciendo una función de conmutación (superficie de deslizamiento) particular; la respuesta en lazo cerrado es totalmente insensible a algunos tipos de perturbaciones e incertidumbres. Esto provee a estos controladores de una gran robustez.

El concepto de VSCS fue originado en la Unión Soviética en la década de 1960 por Emel'yanov y Barbashin, y ahora es un paradigma bien establecido de diseño de controladores y estimadores robustos[3].

Existe una variedad de sistemas mecánicos y eléctricos que exhiben un comportamiento propio de los Sistemas de Estructuras Variables (VSS), un ejemplo muy recurrido de este comportamiento es el sistema masa resorte amortiguador considerando fricción seca.

Este sistema es modelado por la siguiente ecuación diferencial.

$$m\ddot{x} + P \operatorname{sign}(\dot{x}) + kx = 0 \quad (2-15)$$

Donde $P, k, m \in \mathbb{R}$ son constantes. El plano de fase de este sistema esta dado en la Figura (2.2)

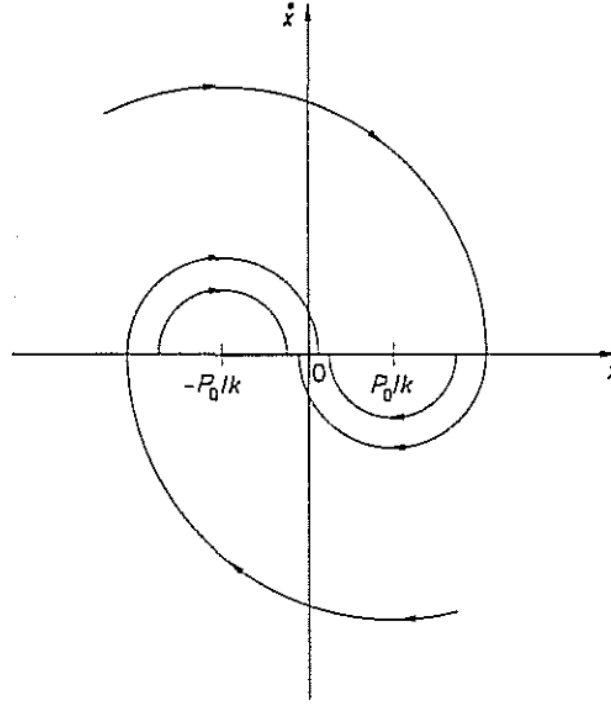


Figura 2-2: Plano de fase de (2-15)

Se puede observar que el conjunto de estados $\{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\frac{P_0}{k}, \frac{P_0}{k}] \wedge \dot{x} = 0\}$ son puntos de equilibrio del sistema. También podemos ver intuitivamente que estos puntos de equilibrio tienen convergencia en tiempo finito, esto debido a la naturaleza de la fricción seca.

Ademas se sabe por experiencia que este sistema es insensible a perturbaciones, esto es, intuitivamente, que cualquier fuerza aplicada al sistema es compensada de manera inmediata con otra fuerza de igual magnitud y dirección contraria por el sistema, siempre y cuando el máximo de esta perturbación no supere a la fuerza de fricción seca.

Se puede observar en el plano de fase que la propiedad que le da la robustez a este sistema es que el campo vectorial hace “Chocar” a la trayectoria del sistema en el conjunto de puntos de equilibrio y esto hace que el sistema se estabilice.

El comportamiento de este tipo de sistemas fue la inspiración para el desarrollo de la teoría del SMC, el cual se discutirá en esta sección.

En teoría de control por Modos Deslizantes se utiliza frecuentemente el lenguaje definido a continuación.

Definición 17 (Modo Deslizante) [3] Sea el sistema $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + f(t, x, u)$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $1 \leq m < n$, sea $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal con regla de correspondencia $s(t) = Sx(t)$ y con $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si existe un tiempo finito t_s tal que la solución del sistema $x(t)$ satisface

$$s(t) = 0 \quad \text{para todo } t \geq t_s, \quad (2-16)$$

entonces ocurre un modo deslizante para todo tiempo $t > t_s$

Definición 18 (Superficie de deslizamiento) Sea S una función de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que la variedad $S(x) = 0$ es una superficie de deslizamiento o variedad de deslizamiento si existe el modo deslizante en cada punto de la variedad. [19]

Intuitivamente un modo deslizante es la trayectoria del sistema cuando la superficie de deslizamiento es igual a cero.

Definición 19 [20] Sea el sistema $\dot{x} = f(x, u, t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^m$, suponga que existe un modo deslizante para la variedad $s(x) = 0$. Se llama control equivalente a la solución para u de

$$\dot{s} = Gf(x, u, t) = 0, \quad (2-17)$$

donde $G = \left[\frac{\partial s_i}{\partial x_j} \right]_{ij}$

El control equivalente es el control que se necesita aplicar después de alcanzar la superficie de deslizamiento $s(x) = 0$ para asegurar que el sistema permanezca en la superficie para todo tiempo futuro [15]. El control equivalente para sistemas de orden superior es definida de manera similar, pero en este caso la dinámica toma lugar cuando $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$, con r el orden del sistema [8].

2.2.1. Primera Generación: Modos Deslizantes Convencionales

El problema planteado para la primera generación es como convertir la dinámica de cualquier sistema para que se comporte de manera similar al sistema (2-15) analizado anteriormente, la elección del control más natural que realiza dicha tarea es un control que se comporte como la fricción seca (pues ésta le da sus propiedades únicas al sistema en cuestión), es decir, que la función de conmutación sea la función signo con argumento la variable a estabilizar (en el sistema anterior era la velocidad). Sin embargo, este control solamente garantiza la estabilidad para sistemas de grado relativo uno (en forma canónica controlable) con respecto a la salida.

La primera generación Modos Deslizantes se introdujo en la década de 1980, reportado por Utkin en [20] publicada por primera vez en 1981. En esta monografía, Utkin estableció dos pasos para el proceso de diseño de controladores por modos deslizantes:

1. Diseño de superficies de deslizamiento.
2. Diseño de un controlador discontinuo que asegura el modo deslizante, i.e. la estabilización de la superficie de deslizamiento.

Al realizar un diseño de superficies de deslizamiento se obtiene un sistema de orden reducido en comparación con el sistema original, por lo que se puede obtener un sistema que cumpla las condiciones de grado relativo pedidas por algoritmo de control. Así, el diseño de superficies soluciona el problema del grado relativo. Sin embargo, controlar un sistema de grado relativo mayor a 1 con respecto al primer estado (en forma canónica controlable) con un controlador por modos deslizantes de primera generación (i.e. haciendo el diseño de una superficie de deslizamiento) se pierde la propiedad de convergencia en tiempo finito de los estados.

En resumen, las principales ventajas del control por Modos Deslizantes de primer orden son:

1. Compensación exacta de perturbaciones acotadas acopladas con el canal del control;
2. Reducción del orden del sistema en al hacer el diseño de las variables de deslizamiento;
3. Convergencia en tiempo finito de la superficie de deslizamiento.

Sin embargo, también se tiene las siguientes desventajas:

1. *Chattering*, esto es, el fenómeno de conmutación de alta frecuencia de los estados del sistema;
2. Únicamente se logra convergencia asintótica de los estados del sistemas si se realiza un diseño de superficies de deslizamiento;
3. El diseño de la superficie de deslizamiento debe ser de grado relativo uno con respecto al control, es decir, se requieren las derivadas de orden superior.

Geométricamente se puede representar a la primera generación de controladores por Modos Deslizantes como en la Figura 2-3, donde se puede observar a la variedad $s = 0$. Se puede decir que la variedad divide al espacio de estados en dos semiplanos en los que actúan leyes de control distintas, y justo en la variedad se tiene el modo deslizante.

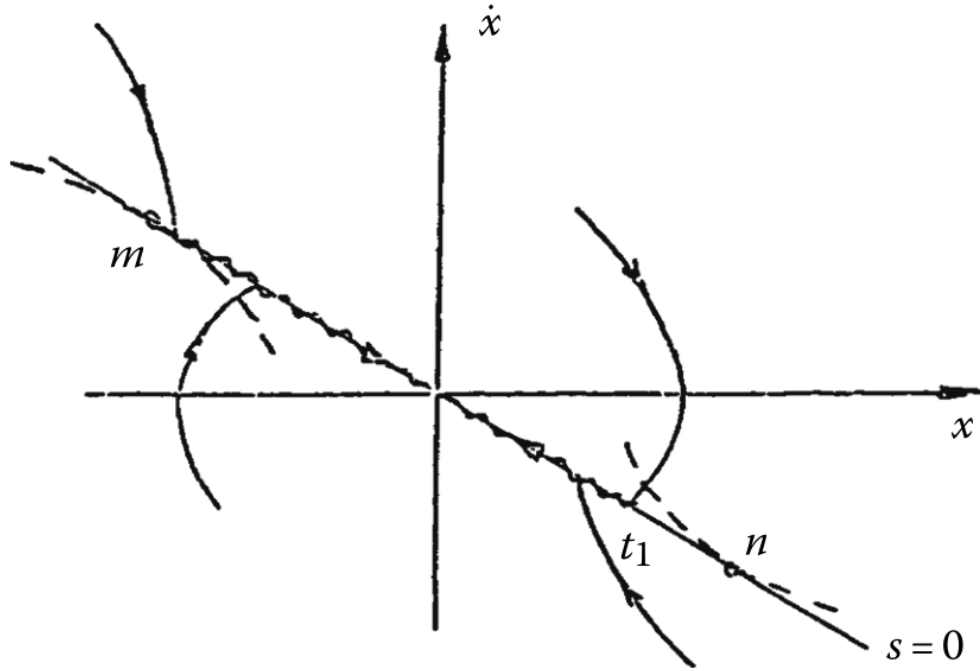


Figura 2-3: Control por Modos Deslizantes de primera generación

El diseño para la variable de deslizamiento se realiza de tal forma que $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (donde s es la variable de deslizamiento y $\text{Dom}(s)$ el espacio de estados del sistema $x \in \mathbb{R}^n$) tenga la regla de correspondencia $s(x) = a_i x_i$ donde $i \in \{1, \dots, n\}$ y $a_n = 1$, de esta forma existe la función implícita

2.2. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

$\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de la variedad $s(x) = 0$ que tiene como regla de correspondencia $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = -a_j x_j$ donde $j \in \{1, \dots, n-1\}$, las ganancias a_i de la superficie de deslizamiento se sintonizan viendo a x_n como un “control virtual” del sistema de orden reducido que tiene como estados x_j con $j \in \{1, \dots, n-1\}$, de esta forma se asegura que todos los estados del sistema convergen asintóticamente al origen. El control que puede lograr las propiedades mencionadas tiene la siguiente forma.

$$u = -a \operatorname{sign}(s), \quad a > |\Delta| \quad (2-18)$$

Donde Δ es la perturbación y/o incertidumbre y s tiene una dinámica estable. Finalmente se realizará un ejemplo concreto para aterrizar la idea.

Ejemplo 20 *Sea el sistema dinámico*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \sin(t) \end{bmatrix}.$$

Supongamos que se miden todo los estados. Este sistema se muestra en la representación de forma canónica controlable, es de dinámica inestable y no cumple con ser de grado relativo uno con respecto al primer estado con lo que se debe hacer un diseño de superficie de deslizamiento.

Considere la superficie de deslizamiento (las ganancias se justificarán posteriormente)

$$\sigma(x) = x_3 + 8x_2 + 2x_1.$$

Se desea la convergencia en tiempo finito de σ así que se plantea la dinámica de la superficie

$$\dot{\sigma} = 8x_3 + 2x_1 + u + 0.5 \sin(t).$$

Este sistema es de grado relativo uno con respecto a σ con lo que al aplicar

$$u = -3 \operatorname{sign}(\sigma) \quad (2-19)$$

se logra la convergencia de σ en tiempo finito siempre que $|8x_3 + 2x_1 + 0.5 \sin(t)| < 3$ que esto depende de la condición inicial, de la dinámica del sistema y de las perturbaciones.

De esta forma se garantiza que $\sigma(x) = 0$ para todo tiempo mayor que un tiempo finito t_s de esta forma se tiene que $x_3 = -8x_2 - 2x_1$. Si x_3 se toma como control virtual del sistema de orden reducido (con los estados x_1 y x_2)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

los estados x_1, x_2 y el control virtual x_3 convergen asintóticamente (pues las ganancias de x_3 se escogieron precisamente para esto).

La Figura 2-4 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado con el control propuesto.

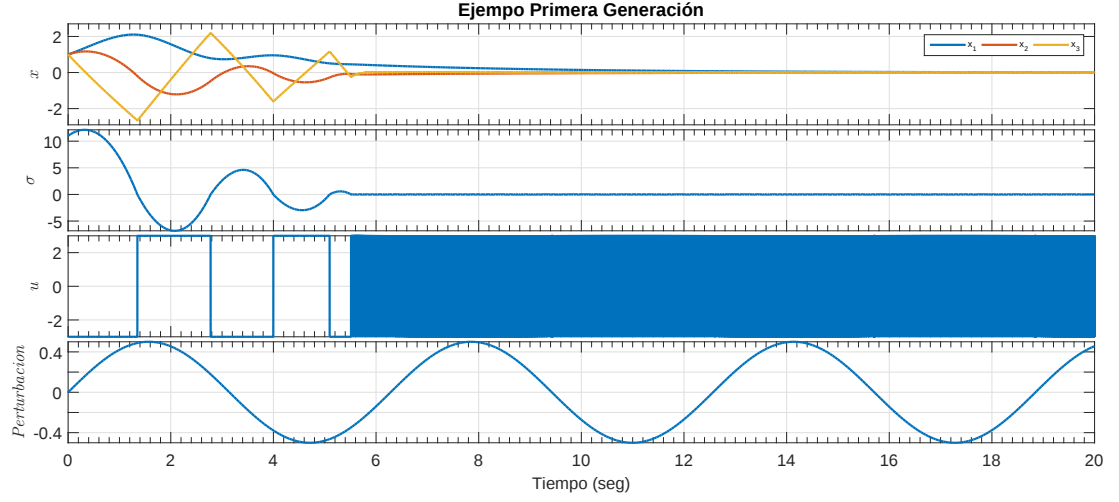


Figura 2-4: Respuesta del sistema de ejemplo

2.2.2. Segunda Generación: Modos Deslizantes de Segundo Orden

La principal desventaja de los controladores por Modos Deslizantes de primera generación es el fenómeno del *chattering*. Por lo que a principios de los 80's el estudio se enfoco en la reducción de este fenómeno.

Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + f(x, t).\end{aligned}\tag{2-20}$$

El objetivo principal de los Modos Deslizantes de Segundo Orden (SOSM) es diseñar el control tal que el origen del sistema (2-20) sea estable en tiempo finito rechazando perturbaciones e incertidumbres $f(x, t)$ con $|f(x, t)| < f^+$. El SOSM más simple es el algoritmo *Twisting* (TA por sus siglas en Inglés) el cual tiene la siguiente forma para un sistema de segundo orden.

$$u = -a \operatorname{sign}(x_2) - b \operatorname{sign}(x_1), \quad b > a + f^+, \quad a > f^+\tag{2-21}$$

Las ventajas del los SOSM son [5]:

1. Garantizan precisión de convergencia cuadrática con respecto a variable de deslizamiento.
2. Para sistemas mecánicos de grado de libertad uno proveen colapso de la dinámica, esto es, no se necesita diseño de la variable de deslizamiento.
3. Para sistemas de grado relativo r , el orden de la variable de deslizamiento se reduce a $(r - 2)$. El diseño de la superficie de deslizamiento de orden $(r - 2)$ es aún necesario.

Sin embargo, aún existen problemas como [5]:

1. Los algoritmos de SOSM con grado relativo dos aún produce una señal de control discontinua, es decir, no reducen el *chattering* substancialmente.
2. El problema de estabilización en tiempo finito y la compensación de las perturbaciones para sistemas SISO de grado relativo arbitrario aún persiste.

2.2.3. Tercera Generación: Controlador Super-*Twisting*

Teorema 21 *Algoritmo Super-*Twisting**[21]

Sea el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) + g(t, x)u \\ u &\stackrel{\text{def}}{=} -k_1 |x|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x) + \eta \\ \dot{\eta} &\stackrel{\text{def}}{=} -k_2 \text{sign}(x)\end{aligned}\tag{2-22}$$

Si f es una función Lipschitz acotada que representa las incertidumbres y/o perturbaciones y g es la ganancia del control conocida, entonces para algún conjunto de ganancias $\{k_1, k_2\}$ los estados del sistema (2-22) convergen al origen en tiempo finito i.e. $x = \dot{x} = 0, \forall t \geq T$.

El STA tiene las siguientes ventajas:

1. Atenuación del *chattering*.
2. Convergencia en tiempo finito sin la información de $\dot{x}$
3. Rechazo de perturbaciones Lipschitz.

Sin embargo existen algunas desventajas

1. Para sistemas con grado relativo $r \geq 2$ el diseño de superficies de deslizamiento es aún necesario.
2. El STA es insensible a perturbaciones cuya derivada es acotada.

Notación 22 Debido a su frecuencia en SMC la siguiente notación es empleada

$$|\cdot|^\gamma = |\cdot|^\gamma \text{sign}(\cdot).$$

2.2.4. Cuarta Generación: Controladores por Modos Deslizantes de Orden Superior

Hasta ahora la gran limitante de los algoritmos presentados es el grado relativo, la cuarta generación de controladores por modos deslizantes ataca este problema.

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x) + g(t, x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \\ \sigma &= \sigma(x, t) \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{2-23}$$

La salida σ tiene un grado relativo fijo y conocido r .

En este caso el problema de control es la estabilización de los estados en tiempo finito bajo incertidumbres acotadas.

Teorema 23 *Nested High Order Sliding Mode (HOSM)* [4] Sea el sistema (2-23) y sea p el mínimo común múltiplo de $1, 2, \dots, r$, si definimos el control u de manera recursiva como

$$u \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha \text{sign} \left(\varphi_{r-1,r} \left(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)} \right) \right) \quad (2-24)$$

Donde la condición inicial es $\varphi_{0,r} = \sigma$, $N_{1,r} = |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}$ y

$$\begin{aligned} \varphi_{i,r} &= \sigma^{(i)} + \beta_i N_{i,r} \text{sign}(\varphi_{i-1,r}) \\ N_{i,r} &= \left(|\sigma|^{\frac{p}{r}} + \dots + |\sigma^{i-1}|^{\frac{p}{r-1+1}} \right) \end{aligned} \quad (2-25)$$

Entonces para algunos valores de β_i y α se tiene que $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ convergen al origen en tiempo finito a pesar de perturbaciones acotadas.

Para obtener las derivadas de orden superior de σ se puede utilizar el algoritmo presentado en 2.2.6

Las ventajas de los HOSM son

1. Garantizan precisión de orden r -ésimo de la salida con respecto al tiempo de muestreo.
2. No se requiere diseño de superficies de deslizamiento.

Sin embargo la señal de control es discontinua con lo que no hay reducción del *chattering*.

2.2.5. Quinta Generación: Controladores Continuos por Modos Deslizantes de Orden Superior

La quinta generación de SMC le corresponde a aquellos que, para sistemas con grado relativo $r \geq 2$ fijo con respecto a la salida proporcionan

- Señal de control continua.
- Convergencia en tiempo finito del modo deslizante de $r + 1$ -ésimo orden.
- Solo se requiere información de las derivadas de la salida hasta el orden $r - 1$

Actualmente existen algunos trabajos de este tipo de controladores; en [5] introducen el *Continuous Singular Terminal Sliding Mode Algorithm* (CSTSMA) y el *Continuous Nonsingular Terminal Sliding Mode Algorithm*; en [22] y [23] se presentan generalizaciones del Algoritmo Super-Twisting.

Sin embargo, esta familia de controladores se encuentra actualmente en pleno desarrollo, en esta tesis se utilizará un algoritmo de quinta generación de SMC el cual se presentará en 2.6.

En la Tabla 2-1 se sintetizan los alcances y las desventajas de las diferentes generaciones de algoritmos de control por Modos Deslizantes.

Generación	Grado Relativo	Información	Perturbación	Control
1	1	σ	Acotada	Discontinuo
2	2	$\sigma, \dot{\sigma}$	Acotada	Discontinuo
3	1	σ	Lipschitz	Continuo
4	r	$\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}$	Acotada	Discontinuo
5	r	$\sigma, \dots, \sigma^{(r-1)}$	Lipschitz	Continuo

Tabla 2-1: Síntesis de las generaciones de SMC

2.2.6. Diferenciador robusto y exacto de orden arbitrario

En implementaciones reales de plantas mecánicas es común que la instrumentación no contenga tacómetros para medir velocidades, pues estos aumentan el costo del sistema además de ser “ruidosos”. Lo que se opta es utilizar algún algoritmo diferenciador de la medición de la posición para así obtener la velocidad.

El algoritmo de diferenciación que se usará en este trabajo es el diferenciador robusto y exacto de orden arbitrario introducido en [24] el cual tiene la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
\dot{z}_0 &= v_0, & v_0 &= -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |z_0 - f(t)|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\
\dot{z}_1 &= v_1, & v_1 &= -\lambda_{k-1} L^{\frac{1}{k}} |z_1 - v_0|^{\frac{k-1}{k}} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\
\vdots &= \vdots, & \vdots &= \vdots \\
\dot{z}_{k-1} &= v_{k-1}, & v_{k-1} &= -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |z_{k-1} - v_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{k-1} - v_{k-2}) + z_k \\
\dot{z}_k &= -\lambda_0 L \text{sign}(z_k - v_{k-1})
\end{aligned}$$

Donde $f(t)$ es la señal a derivar, de cuya k -ésima derivada se conoce su constante de Lipschitz $L > 0$.

Los parámetros λ_k para $k \leq 5$ se pueden escoger como $\lambda_0 = 1.1$, $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = 8$ y $\lambda_5 = 8$ [24].

En nuestro caso en particular, necesitaremos la primera derivada de las señales provistas por los sensores, así que usaremos el derivador de segundo orden (esto pues si usamos el derivador de primer orden se obtiene la primera derivada discontinua) que tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
\dot{z}_0 &= v_0, & v_0 &= -3L^{\frac{1}{3}} |z_0 - f(t)|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\
\dot{z}_1 &= v_1, & v_1 &= -1.5L^{\frac{1}{2}} |z_1 - v_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\
\dot{z}_2 &= -1.1L \text{sign}(z_2 - v_1)
\end{aligned}$$

donde la derivada de la función f es la función z_1 .

2.3. Control óptimo

En el diseño controladores existen algunos parámetros que nos permiten discernir la calidad del controlador tales como el sobrepaso, el tiempo de levantamiento, el tiempo de asentamiento, el ancho de banda entre otros. En el diseño clásico de controladores es bien sabido que algunas de estas especificaciones son contradictorias entre ellas en el sentido que es imposible ser incluyente con todos estos parámetros, por ejemplo, tiempos de levantamiento cortos y anchos de banda altos requieren alta ganancia de control mientras que sobrepaso pequeño y buena estabilidad relativa requieren pequeñas ganancias del control. [17].

En el diseño de controladores de la manera clásica (ubicación de polos, Lugar Geométrico de las Raíces, etc.) es difícil de realizar la sintonización del controlador para cumplir con un desempeño requerido, con lo que se necesita experiencia para realizarlo efectivamente.

El control óptimo es el paradigma de control que intenta sistematizar el proceso para diseñar el “Mejor controlador posible” dado un criterio de desempeño, este criterio esta medido cuantitativamente por una función de costo la cual, normalmente, pondera los estados del sistema y el esfuerzo de control (de una manera deseada) y al realizar un proceso de optimización de esta función de costo, se obtiene el mejor controlador.

El estudio del control óptimo es muy vasto debido la gran variedad de ecuaciones diferenciales, funciones de costo, métodos de optimización, etc., sin embargo, para la justificación de la tesis solamente se analizará el caso lineal invariante en el tiempo. Esto debido a que el algoritmo de control óptimo será utilizado únicamente para diseñar las superficies de deslizamiento como se verá posteriormente.

2.3.1. Regulador Lineal Cuadrático

Uno de los índices de desempeño más usados en control óptimo es el descrito por la función

$$J(u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_{t_0}^t x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right]. \quad (2-26)$$

La cual al minimizarla resuelve el problema del Regulador Lineal Óptimo Cuadrático (LQR por sus siglas en Inglés) [25].

Teorema 24 [17] *Sea el sistema lineal e invariante en el tiempo dado por*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2-27)$$

y el índice de desempeño (2-26), entonces existe un control de la forma

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2-28)$$

donde

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2-29)$$

2.3. CONTROL ÓPTIMO

y P se obtiene al resolver la Ecuación Algebraica de Riccati.

$$0 = A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P \quad (2-30)$$

tal que el sistema (2-27) es asintóticamente estable y el índice de desempeño (2-26) es mínimo

2.3.2. Filtro de Kalman

El Filtro de Kalman es un observador de estados, fue introducido por Rudolf E. Kalman en [26] en el año de 1960. La importancia del Filtro de Kalman radica en que es aplicado a sistemas dinámicos estocásticos los cuales se presentan con mucha frecuencia en aplicaciones reales tales como navegación satelital, balística, radar entre otras.

Sin embargo los antecedentes matemáticos de este algoritmo son abundantes como se puede ver en la Figura (2-5) por lo que se este se presentará únicamente a manera de algoritmo.

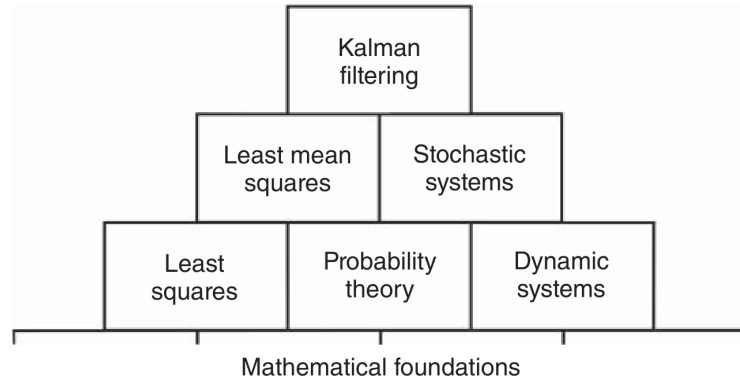


Figura 2-5: Antecedentes para Filtro de Kalman

Algoritmo 25 Filtro de Kalman [27]

1. Se considera el siguiente sistema lineal, discreto y estocástico¹

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \Gamma \underline{\xi}_k \\ y_k = C_k x_k + D_k u_k + \underline{\eta}_k \end{cases} \quad (2-31)$$

2. Donde A_k , B_k , Γ_k , C_k y D_k son matrices conocidas de tamaño $n \times n$, $n \times m$, $n \times p$, $q \times n$ y $q \times m$ respectivamente.

x_k es el estado de la planta en el instante k -ésimo de dimensión $n \times 1$, y_k es la medición de la planta en el instante k -ésimo de dimensión $p \times 1$ y u_k es la entrada de control determinística (conocida) en el instante k -ésimo de dimensión $m \times 1$.

Además $\{\underline{\xi}_k\}$ y $\{\underline{\eta}_k\}$ son sucesiones de ruido blanco Gaussiano con media cero tales que $\text{Var}(\underline{\xi}_k) = Q_k$ y $\text{Var}(\underline{\eta}_k) = R_k$ son matrices positivas definidas conocidas y $E(\underline{\xi}_k \underline{\eta}_l) = 0$ para

¹Las variables subrayadas como $\underline{\cdot}$ denotan variables aleatorias, las cuales le dan el carácter estocástico

toda k y l . El estado inicial x_0 también se supone independiente de $\underline{\xi}_k$ y $\underline{\eta}_k$ en el sentido que $E(x_0 \underline{\xi}_k) = 0$ y $E(x_0 \underline{\eta}_k) = 0$ para toda k .

3. Se definen las condiciones iniciales del sistema $\hat{x}_{0|0} = E(x_0)$ y $P_{0|0} = \text{Var}(x_0)$ donde $\hat{x}$ es el estado estimado y P es la matriz del error de la covarianza de dimensión $n \times n$
4. Se calcula la predicción del estado del sistema $\hat{x}_{k|k-1} = A_{k-1}\hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1}u_{k-1}$.
Y la predicción de la matriz del error de la covarianza $P_{k|k-1} = A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + \Gamma_{k-1}Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^T$.
5. Se calcula la ganancia de Kalman $G_k = P_{k|k-1}C_k^T(C_kP_{k|k-1}C_k^T + R_k)^{-1}$
6. Se realizan las correcciones de medición del estado $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + G_k(y_k - D_k u_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$.
Y la corrección de medición de la matriz de error de covarianza $P_{k|k} = (I - G_k C_k)P_{k|k-1}$ donde I es la matriz identidad.
7. Se repiten los pasos 4 al 6 para $k = 1, 2, \dots, r$.

Este algoritmo se utilizará posteriormente para obtener la mejor estimación de una señal de los sensores del Robot Péndulo con respecto al ruido de medición.

2.4. Diseño de trayectorias polinómicas

En esta sección se discutirá el diseño de trayectorias polinómicas para sistemas mecánicos como se plantea en [28]. Esto con el fin de realizar seguimiento de trayectorias en el Robot Péndulo.

Planteamiento del problema Se desea diseñar un polinomio en el tiempo que representa posición $x(t)$ de tal manera que su velocidad y aceleración (primera y segunda derivada) sean suaves conociendo los valores iniciales y finales de la posición, velocidad, aceleración y tiempo.

Se propone el diseño de un polinomio de quinto grado para la posición con lo que se tiene

$$\begin{aligned} x(t) &\stackrel{\text{def}}{=} a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \\ v(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) = 5a_5 t^4 + 4a_4 t^3 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 \\ a(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \ddot{x}(t) = 20a_5 t^3 + 12a_4 t^2 + 6a_3 t + 2a_2. \end{aligned} \tag{2-32}$$

Definiendo el polinomio de la manera anterior entonces nuestras incógnitas serían $a_0 \dots a_5$. Como información tenemos el tiempo inicial y el tiempo final t_i y t_f (donde $t_i < t_f$) además del valor que deben tomar los polinomios (2-32) en justamente esos instantes i.e. $x(t_i)$, $v(t_i)$, $a(t_i)$, $x(t_f)$, $v(t_f)$ y $a(t_f)$. Esto se puede representar con el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\mathcal{M}y = b, \quad (2-33)$$

$$\begin{bmatrix} t_i^5 & t_i^4 & t_i^3 & t_i^2 & t_i & 1 \\ 5t_i^4 & 4t_i^3 & 3t_i^2 & 2t_i & 1 & 0 \\ 20t_i^3 & 12t_i^2 & 6t_i & 2 & 0 & 0 \\ t_f^5 & t_f^4 & t_f^3 & t_f^2 & t_f & 1 \\ 5t_f^4 & 4t_f^3 & 3t_f^2 & 2t_f & 1 & 0 \\ 20t_f^3 & 12t_f^2 & 6t_f & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_i) \\ v(t_i) \\ a(t_i) \\ x(t_f) \\ v(t_f) \\ a(t_f) \end{bmatrix}.$$

Donde podemos resolver el sistema para el vector de coeficientes y para encontrar nuestro polinomio deseado.

2.5. Diseño de superficies de deslizamiento de orden superior por método LQ Singular

En esta sección se describirá el algoritmo utilizado para el diseño de las superficies de deslizamiento en esta tesis. Primero se enunciarán las ecuaciones y teoremas necesarios para la realización del algoritmo y después se enunciará el mismo a manera de resumen.

Sea el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad |x_0| \leq L, \quad L \in [0, \infty). \quad (2-34)$$

Se escoge un índice de desempeño para el sistema anterior con la forma

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x) dt, \quad (2-35)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y positiva semidefinida. El diseño de superficies de deslizamiento está basado en la resolución del problema de estabilización óptimo singular LQ (SOSP por sus siglas en Inglés).

El sistema (2-34) si cumple las condiciones del Lema 15 entonces se puede transformar a su forma canónica de controlabilidad

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u, \quad (2-36)$$

la matriz de ponderación Q de los estados de (2-35) se transforma de igual manera para mantener la ponderación en el sistema transformado

$$\bar{Q} = (T^{-1})^T Q T^{-1}, \quad (2-37)$$

una vez transformada la matriz de ponderación se tiene la siguiente forma

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2-38)$$

donde $\bar{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ y $\bar{Q}_{22} \in \mathbb{R}$.

En el diseño convencional de superficies de deslizamiento se supone que $\bar{Q}_{22} > 0$, sin embargo, para el diseño de superficies de deslizamiento de orden superior se supone que $\bar{Q}_{22} = 0$ [8].

Proposición 26 [8] Si $\bar{Q}_{22} = 0$ en (2-38) debido a las propiedades de simetría y positividad semi-definida, todos los elementos de $\bar{Q}_{12}$ y $\bar{Q}_{21}$ son cero.

Lo que implica que la forma general de $\bar{Q}$ es

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-39)$$

Donde $\bar{Q}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-k-1) \times (n-k-1)}$ es simétrica positiva definida con k el numero de columnas cero y $\bar{Q}_{22} > 0$

Definición 27 El orden de singularidad es el número $i = k + 1$ donde k es el número de columnas cero de la matriz de ponderación $\bar{Q}$ de la forma (2.5), tales que $\bar{Q}_{22} > 0$.

Una vez hecha la partición de la matriz $\bar{Q}$, se hace la partición del sistema (2-36) de la forma $z = [\bar{z}_1^T, \bar{z}_2^T, \bar{z}_3^T]^T$. Donde

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= [z_1 \quad \cdots \quad z_{n-i}] \\ \bar{z}_2 &= z_{n-i+1} \\ \bar{z}_3 &= [z_{n-i+2} \quad \cdots \quad z_n]. \end{aligned} \quad (2-40)$$

Por lo que el sistema se puede representar de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{\bar{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} u. \quad (2-41)$$

Debido a la forma de matriz compañera del polinomio característico de $\bar{A}$ entonces el subsistema de $\bar{z}_1$ tiene la siguiente forma

$$\dot{\bar{z}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{z}_1 + \bar{A}_{12}\bar{z}_2. \quad (2-42)$$

Donde debido a la partición realizada $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-i) \times (n-i)}$ y $\bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{n-i}$ con la siguiente forma

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2-43)$$

Nótese que $\bar{Q}_{11}$ es de la misma dimensión que $\bar{A}_{11}$.

2.5. DISEÑO DE SUPERFICIES DE DESLIZAMIENTO DE ORDEN SUPERIOR POR MÉTODO LQ SINGULAR

Por lo que la matriz $\bar{Q}_{11}$ es la matriz de ponderación de los estados $\bar{z}_1$ y $\bar{Q}_{12}$ es la matriz de ponderación del control virtual $\bar{z}_2$. El índice de desempeño tiene la forma

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [\bar{z}_1^T \bar{Q}_{11} \bar{z}_1 + 2\bar{z}_1^T \bar{Q}_{12} \bar{z}_2 + \bar{z}_2^T \bar{Q}_{22} \bar{z}_2] dt. \quad (2-44)$$

Este índice de desempeño tiene términos cruzados por lo que se propone el siguiente cambio de variable.

$$\nu = \bar{z}_2 + (\bar{Q}_{22})^{-1}(\bar{Q}_{12})^T \bar{z}_1, \quad (2-45)$$

cambio de variable que transforma el índice de desempeño a la siguiente forma

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \bar{z}_1^T \underbrace{[\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T]}_{\bar{Q}} \bar{z}_1 + \nu^T \underbrace{\bar{Q}_{22}}_{\bar{R}} \nu \right\} dt, \quad (2-46)$$

y el sistema con el nuevo control

$$\dot{\bar{z}}_1 = \underbrace{(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T)}_{\bar{A}} \bar{z}_1 + \underbrace{\bar{A}_{12}}_{\bar{B}} \nu. \quad (2-47)$$

Ya teniendo el sistema (2-36) y el índice de desempeño asociado al sistema anterior (2-46) se calcula el control LQR con el Teorema 24 y se obtiene la ganancia K que estabiliza (2-47). Entonces la superficie de deslizamiento de grado relativo $r \geq 1$ se diseña de la siguiente manera

$$\sigma = \bar{z}_2 + K \bar{z}_1. \quad (2-48)$$

Proposición 28 [8] *El orden de singularidad del índice de desempeño es igual al grado relativo de la superficie de deslizamiento diseñada*

Donde las superficies de orden superior debido a la estructura de cadena de integradores se pueden obtener de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= z_{n-i+2} + K \bar{z}_1^{(1)} \\ \sigma^{(2)} &= z_{n-i+3} + K \bar{z}_1^{(2)} \\ \vdots &= \vdots \\ \sigma^{(k)} &= z_{n-i+1+k} + K \bar{z}_1^{(k)} \end{aligned}, \quad (2-49)$$

donde $\bar{z}_1^{(k)} = [z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{n-i+k}]^T$ y $z_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{z}_n = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n + u$.

En la i -ésima derivada de la superficie de deslizamiento se obtiene el control, la cual tiene la forma.

$$\sigma^{(i)} = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n + u + K \bar{z}_1^{(i)} \quad (2-50)$$

Finalmente tenemos el algoritmo.

Algoritmo 29 *Diseño de superficies de deslizamiento por LQ singular*

1. Se realiza la transformación del sistema (2-34) y el índice desempeño (2-35) a su forma canónica de controlabilidad usando el Lema (15) y obtenemos el sistema (2-36) y la matriz de ponderación (2-37)
2. Para definir el índice de desempeño Q se debe saber el orden de singularidad deseado para $\bar{Q}$ tomando en cuenta 28.
3. Se definen las particiones de la matriz de ponderación $\bar{Q}$ y del sistema transformado.
4. Se hace la transformación (2-45) de tal manera que se pueda calcular la ganancia del control LQR del sistema (2-47) con el índice de desempeño (2-46).
5. Se define la superficie de deslizamiento y sus derivadas de orden superior como en (2-50).

El algoritmo anterior se utilizará para diseñar las superficies de deslizamiento para ser implementadas en el Robot Péndulo.

Control Nominal Equivalente Una vez realizado el diseño de superficies de deslizamiento por LQ Singular como se mostró. Es posible hacer un control nominal equivalente tomando en cuenta (2-50), el cual tiene la siguiente forma

$$u_{eq} = -\alpha_1 z_1 - \cdots - \alpha_n z_n - K \bar{z}_1^{(i)} \quad (2-51)$$

2.6. Algoritmo *Twisting* Continuo

El Algoritmo *Twisting* Continuo (CTA por sus siglas en Inglés) será el utilizado para lograr el objetivo de control del Robot Péndulo.

Este controlador recibe el nombre debido a que la parte integral de este algoritmo (mostrado en la ecuación (2-53) de la siguiente sección) es similar al controlador *Twisting* (2-21).

También es importante resaltar que este mismo controlador cumple la definición de los Modos Deslizantes de Quinta Generación 2.2.5 pues para sistemas de grado relativo $r = 2$ alcanza la convergencia en tiempo finito de x_1, x_2 y x_3 (en (2-54)) como se verá a continuación.

2.6.1. Planteamiento del problema

Sea el siguiente sistema dinámico.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u + \zeta(t), \\ y &= x \end{aligned} \quad (2-52)$$

donde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y \in \mathbb{R}$ es la medición del sistema y $\zeta(t)$ es la perturbación Lipschitz en el tiempo posiblemente desconocida pero con constante de Lipschitz μ conocida.

2.6. ALGORITMO TWISTING CONTINUO

Se desea convergencia en tiempo finito de los estados x_1 y x_2 con una entrada de control u conociendo la información de:

1. los estados x_1 y x_2 para el caso de realimentación de estados.
2. únicamente la medición y para el caso de realimentación de salida.

2.6.2. Algoritmo *Twisting* Continuo por realimentación de estados

La ley de control del CTA tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} u &= -k_1 [x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2 [x_2]^{\frac{1}{2}} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_3 [x_1]^0 - k_4 [x_2]^0 \end{aligned} \quad (2-53)$$

Considerando $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(t) + \eta$, el lazo cerrado del sistema (2-52) con el controlador (2-53) es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 [x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2 [x_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3 [x_1]^0 - k_4 [x_2]^0 + \dot{\zeta}(t) \end{aligned} \quad (2-54)$$

Teorema 30 [6] Sea el sistema (2-54) y sea δ la constante de Lipschitz de la perturbación tal que $|\dot{\zeta}(t)| \leq \delta$. Si las ganancias k_i son tales que

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.98222 L^{\frac{2}{3}} \\ k_2 &= 1.32046 L^{\frac{1}{2}} \\ k_3 &= 0.01375 L \\ k_4 &= 0.00719 L, \end{aligned} \quad (2-55)$$

escogiendo L tal que $L\mu_c = \delta$ con $\mu_c = 0.0024$, entonces los del sistema (2-54) convergen al origen en tiempo finito.

Observación 31 [6] Debido al grado de homogeneidad de este algoritmo de control se espera una precisión en el modo deslizante de x_1, x_2 y x_3 cúbica, cuadrática y lineal con respecto al tiempo de muestreo τ [29], esto es

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq \xi_1 \tau^3 \\ |x_2| &\leq \xi_2 \tau^2 \\ |x_3| &\leq \xi_3 \tau \end{aligned} \quad (2-56)$$

Donde ξ_i son constantes.

2.6.3. Algoritmo *Twisting* Continuo por realimentación de salida

En este caso el objetivo de control es el mismo, sin embargo, ahora se cuenta únicamente con la medición de $y = x_1$. Para esto se propone un observador de estados que tiene la siguiente forma [6]

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -l_1[\hat{x}_1 - y]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -l_2[\hat{x}_1 - y]^{\frac{1}{3}} + u + \xi \\ \dot{\xi} &= -l_3[\hat{x}_1 - y]^0\end{aligned}\tag{2-57}$$

Si se definen los errores de estimación

$$\begin{aligned}e_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{x}_1 - x_1 \\ e_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{x}_2 - x_2, \\ e_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \xi - \zeta(t)\end{aligned}\tag{2-58}$$

entonces la dinámica del error de estimación es

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -l_1[e_1]^{\frac{2}{3}} + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -l_2[e_1]^{\frac{1}{3}} + e_3 \\ \dot{e}_3 &= -l_3[e_1]^0 - \dot{\zeta}(t)\end{aligned}\tag{2-59}$$

Teorema 32 [30] *Sea el sistema (2-59) y la constante de Lipschitz δ de la perturbación tal que $|\dot{\zeta}(t)| \leq \delta$. Si las ganancias l_i son tales que*

$$\begin{aligned}l_1 &= 9.5608 H^{\frac{1}{3}} \\ l_2 &= 6.8681 H^{\frac{2}{3}}, \\ l_3 &= 0.0219 H\end{aligned}\tag{2-60}$$

donde H se escoge tal que $H\mu_0 = \delta$ con $\mu_0 = 0.0021$, entonces los estados de (2-59) convergen al origen en tiempo finito.

Combinando el controlador (2-53) y el observador (2-57) se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}u &= -k_1[y]^{\frac{1}{3}} - k_2[\hat{x}_2]^{\frac{1}{2}} + \eta \\ \dot{\eta} &= -k_3[y]^0 - k_4[\hat{x}_2]^0 \\ \dot{\hat{x}}_1 &= -l_1[\hat{x}_1 - y]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -l_2[\hat{x}_1 - y] - k_1[y]^{\frac{1}{3}} - k_2[\hat{x}_2]^{\frac{1}{2}} + \eta + \xi \\ \dot{\xi} &= -l_3[\hat{x}_1 - y]^0\end{aligned}\tag{2-61}$$

Nuevamente definiendo el estado $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \eta + \zeta(t)$ y los errores como en (2-58) el sistema (2-61) se

puede expresar como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -k_1[x_1]^{\frac{1}{3}} - k_2[x_2 + e_2]^{\frac{1}{2}} + x_3 \\
\dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 - k_4[x_2 + e_2]^0 + \dot{\zeta}(t) \\
\dot{e}_1 &= -l_1[e_1]^{\frac{2}{3}} + e_2 \\
\dot{e}_2 &= -l_2[e_1]^{\frac{1}{3}} + e_3 \\
\dot{e}_3 &= -l_3[e_1]^0 - \dot{\zeta}(t).
\end{aligned} \tag{2-62}$$

Donde esta última ecuación es el esquema del controlador-observador.

Teorema 33 [30] *Si las ganancias k_i y l_i del sistema (2-62) son tales que logren la convergencia al origen en tiempo finito de (2-62) y (2-54) entonces los estados del sistema (2-62) convergen al origen en tiempo finito.*

2.6.4. Sintonización del Algoritmo *Twisting* Continuo

En [11] se proponen distintos conjuntos de ganancias estabilizadoras del CTA, estas se obtienen a través de la representación de suma de cuadrados de la función de Lyapunov presentada en [6].

La Tabla 2-2 muestra los algunos valores de las ganancias del control (2-53) para los cuales el origen del sistema en lazo cerrado (2-54) es estable en tiempo finito si la cota de la perturbación es tal que $|\Delta(t)| \leq 1$.

Optimización	k_1	k_2	k_3	k_4
S_1	25	15	2.3	1.1
S_2	19	10	2.3	1.1
S_3	13	7.5	2.3	1.1
S_4	7	5	2.3	1.1

Tabla 2-2: Optimización de Ganancias para el CTA

Teorema 34 [11] *Sean k_i con $i \in \{1, \dots, 4\}$ tales que el origen del sistema (2-54) es estable en tiempo finito con la cota de la perturbación tal que $|\Delta(t)| \leq 1$, entonces el origen del sistema (2-54) con perturbación $|\Delta(t)| \leq L$ con $L \in \mathbb{R}$ es estable en tiempo finito si las ganancias son escaladas de la forma $k'_1 = L^{\frac{2}{3}}k_1$, $k'_2 = L^{\frac{1}{2}}k_2$, $k'_3 = Lk_3$ y $k'_4 = Lk_4$.*

Capítulo 3

Análisis del sistema Transportador Inestable

Applied mathematics will always need pure mathematics just as anteaters will always need ants.

Paul Halmos

En el presente Capítulo se realizara el análisis del Robot Péndulo en el cual se implementarán los algoritmos de control basándose en los fundamentos matemáticos planteados en el Capítulo 2.

3.1. Plataforma Física

En esta sección se describirá el sistema embebido en el cual se realizarán las pruebas de control, esto es de vital importancia pues una buena implementación del sistema embebido permitirá un mejor control del sistema.

La Figura 3-1 muestra el transportador inestable en el que se realizaran las pruebas.



Figura 3-1: Transportador inestable

3.1.1. Descripción del Sistema

Un transportador inestable, también denominado robot péndulo, es un sistema móvil híbrido entre un robot diferencial y un péndulo invertido. Esto es debido a que posee 2 ruedas actuadas como los robots diferenciales, pero no posee la llanta libre de balance, lo que hace que se deba controlar su posición con respecto a la vertical como un péndulo invertido.

Desde el punto de vista del control es un sistema no lineal y en el punto de equilibrio de interés es inestable.

Para estabilizar el sistema se tienen dos entradas de control que son los motores DC en ambas llantas. Además para el diseño del algoritmo de control se utilizan las variables medidas por *encoders* en ambas llantas y una Unidad de Medición Inercial que consta de acelerómetros y un giroscopio.

El transportador inestable usado es fabricado en Polonia por INTECO.

3.1.2. Hardware

El *hardware*¹ con que cuenta el Robot Péndulo es el siguiente:

1. Una PandaBoard que es una *Single Board Computer* (SBC) equipada de un procesador ARM Cortex-A9. Esta es la responsable de la comunicación inalámbrica con el ordenador externo y de la ejecución del algoritmo de control en tiempo real.

¹El hardware con el que se cuenta permite un tiempo de muestreo mínimo de **3.5 ms**.

2. Un CPLD, el cual funciona como interfaz entre el procesador y los sensores y actuadores. Lo que hace es acondicionar la medición directa de los sensores en información útil para que se procesen en la SBC; acondicionar la señal de control de la SBC a una señal en PWM para los motores de DC; y alimentar la SBC.
3. Unidad de medición inercial (IMU) que contiene un giroscopio que mide la aceleración angular del *pitch* y acelerómetros que miden la aceleración un plano transversal del robot (el cual se especificará más adelante).
4. Dos motores DC de 12 V Büler.
5. Dos *encoders* incrementales en cuadratura con 4000 pulsos por revolución.
6. Dos baterías de 12 V y 2.3 Ah.

El la Figura 3-2 es el diagrama de bloques del *hardware* del Robot Péndulo en el cual se puede observar como el CPLD funciona como interfaz entre la CPU y los periféricos de entrada-salida como los sensores y los motores.

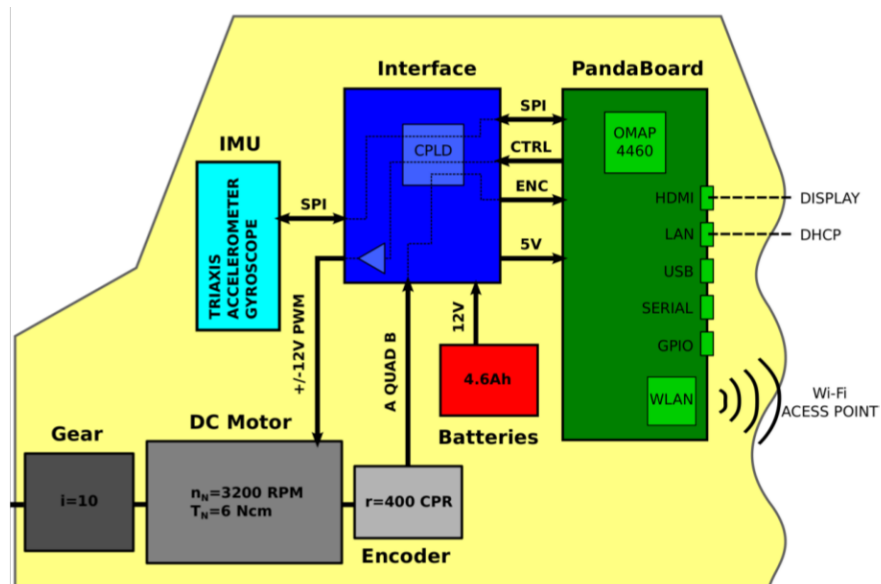


Figura 3-2: Diagrama de Bloques del *hardware*

3.1.3. Software

El software utilizado es el siguiente:

1. Matlab/Simulink con Real-Time Workshop que se encarga de generar el código en lenguaje C y C++, a partir del diagrama de bloques programado en Simulink.
2. Compilador Linaro, el cual genera los archivos binarios del código fuente en C/C++ para poder ser procesado por el microprocesador ARM con que cuenta la SBC.

3.2. MODELO MATEMÁTICO

3. Sistema Operativo en base Linux para ejecutar el algoritmo de la SBC en tiempo real.
4. Software de INTECO encargado de hacer transparente el proceso de compilación del código y comunicación con la planta.

La Figura 3-3 muestra el diagrama de bloques del software. En este podemos observar el flujo de la información para generar el programa ejecutable en el sistema operativo huésped del Robot Péndulo.

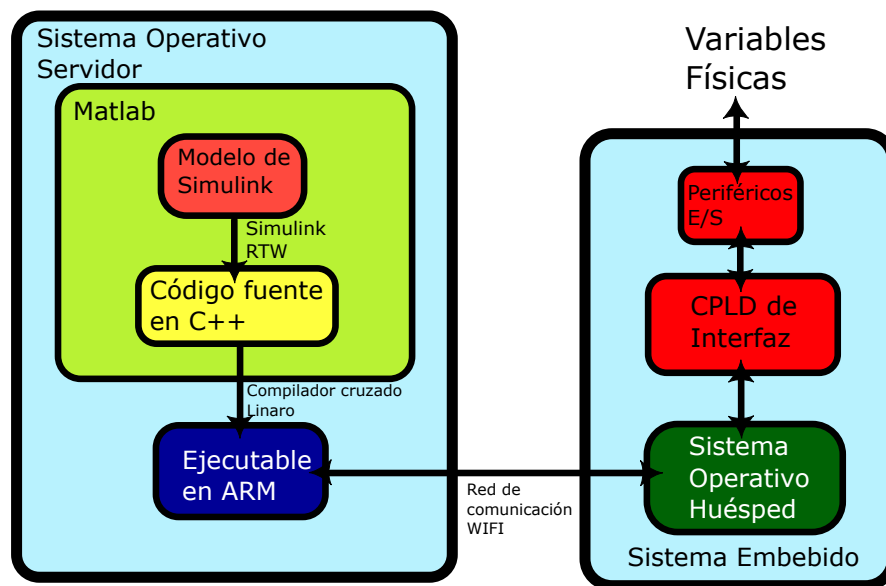


Figura 3-3: Diagrama de Bloques del *Software*

3.2. Modelo Matemático

En ingeniería entendemos por un modelo matemático de un sistema como el conjunto de reglas que describen el comportamiento físico de un sistema con base en un lenguaje formal como las matemáticas, este modelo es de suma importancia pues es una abstracción del sistema real con lo que entre mejor sea esta abstracción el análisis matemático realizado será más cercano al comportamiento real del sistema.

Al realizar el modelo matemático todos los componentes del sistema físico aportan sus propiedades cinemáticas y dinámicas para definir un conjunto de variables (denominadas variables de estado) que describen la totalidad del comportamiento del sistema, si podemos encontrar la manera de cómo estas variables cambian en el tiempo se puede describir la dinámica del sistema para todo tiempo futuro.

Lo anterior se resume en que se puede encontrar un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden las cuales describen totalmente el comportamiento del sistema, este conjunto de ecuaciones es nuestro modelo matemático con el cual se puede realizar un análisis con base en herramientas matemáticas y así se pretende predecir el comportamiento real del sistema.

3.2.1. Modelo no lineal del Robot Péndulo

Empezaremos describiendo el modelo no lineal el cual se construye a partir del siguiente diagrama.

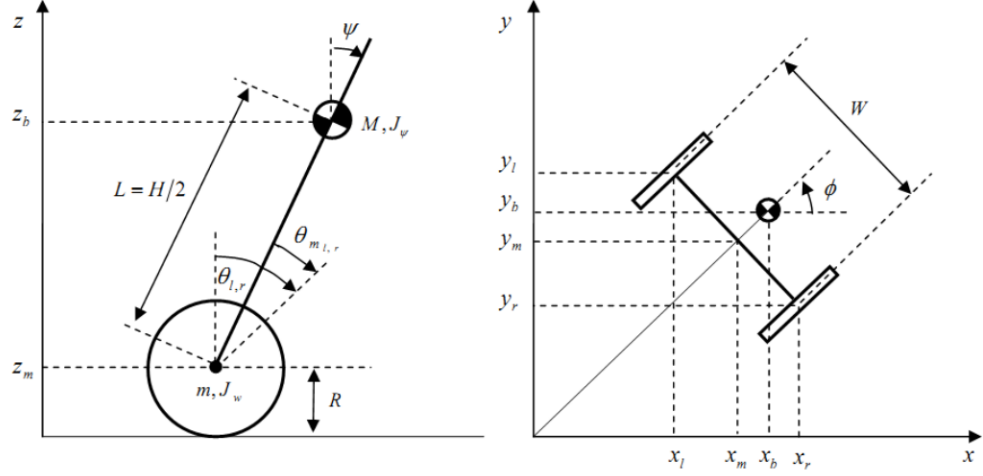


Figura 3-4: Diagrama del sistema físico

Del diagrama, las variables que se escogerán como variables de estado son

1. $x_1 = \vartheta$ que es el valor promedio de la posición angular de las ruedas $\vartheta = \frac{\vartheta_r + \vartheta_l}{2}$.
2. $x_2 = \dot{\vartheta}$.
3. $x_3 = \psi$ que es la posición angular con respecto a la vertical o el eje z .
4. $x_4 = \dot{\psi}$.
5. $x_5 = \varphi$ que es el ángulo con respecto al piso o el plano xy descrito como $\varphi = \frac{R(\vartheta_r - \vartheta_l)}{W}$ con R el radio de las llantas y W en ancho del robot.
6. $x_6 = \dot{\varphi}$.

El desarrollo del modelado está dado en [31], donde usan el método de modelado Euler-Lagrange. El modelo no lineal se representa con las siguientes ecuaciones (3-1).

$$\begin{aligned}
 & [(2m + M)R^2 + 2J_w + 2J_m] \ddot{\vartheta} + (MRL \cos \psi - 2J_m) \ddot{\psi} - MRL \dot{\psi}^2 \sin \psi = F_{\vartheta} \\
 & (ML^2 + J_{\psi} + 2J_m) \ddot{\psi} + (MRL \cos \psi - 2J_m) \ddot{\vartheta} - ML^2 \dot{\varphi} \sin \psi \cos \psi - Mgl \sin \psi = F_{\psi} \\
 & \left[\frac{1}{2}mW^2 + ML^2 \sin^2 \psi + \frac{W^2}{2R^2}(J_m + J_w) + J_{\varphi} \right] \ddot{\varphi} + 2ML^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi = F_{\varphi}.
 \end{aligned} \tag{3-1}$$

3.2. MODELO MATEMÁTICO

Donde las fuerzas generalizadas se pueden expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F_{\vartheta} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{K_t}{R_{DC}}(u_r + u_l) + 2 \left[\frac{K_t K_e}{R_{DC}} + f_m \right] (\dot{\psi} - \dot{\vartheta}) \\ F_{\psi} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{K_t}{R_{DC}}(u_r + u_l) - 2 \left[\frac{K_t K_e}{R_{DC}} + f_m \right] (\dot{\psi} - \dot{\vartheta}) \\ F_{\varphi} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{K_t}{R_{DC}} \frac{W}{2R}(u_r - u_l) - \frac{W^2}{2R^2} \left[\frac{K_t K_e}{R_{DC}} + f_m \right] \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

en donde las entradas de control u_l y u_r están dadas en *Volts* [V], y este voltaje es el aplicado en los motores. Los parámetros del sistema estan definidos en la siguiente Tabla [32].

Parámetro	Unidades	Descripción
$m = 0.32$	kg	Masa de la llanta
$2R = 0.15$	m	Radio de la llanta
$J_w = mR^2$	$kg \ m^2$	Momento de inercia de la llanta
$J_w = 0.0013$	$kg \ m^2$	Momento de inercia de la llanta identificado
$M = 5.41$	kg	Masa del robot
$W = 0.4$	m	Ancho del robot
$L = 0.102$	m	Altura del centro de masa
$J_{\psi} = ML^2/3$	$kg \ m^2$	Momento de inercia en relación al ángulo de inclinación estimado
$J_{\psi} = 0.104$	$kg \ m^2$	Momento de inercia en relación al ángulo de inclinación identificado
$J_{\varphi} = 0.0484$	$kg \ m^2$	Momento de inercia en relación al eje de rotación
$J_m = 0.0119$	$kg \ m^2$	Momento de inercia del motor
$R_{DC} = 1$	Ω	Resistencia eléctrica del motor
$K_t = 0.025$	Nm/A	Constante de torque del motor
$K_e = 0.025$	Vs/rad	Constante de voltaje del motor
$f_m = 0.00024$		Coefficiente de fricción entre el vehículo y el motor
$n = 1$		Relación del engranaje

Tabla 3-1: Parámetros del sistema

Resolviendo (3-1) para $\ddot{\vartheta}$, $\ddot{\psi}$ y $\ddot{\varphi}$, el sistema en espacio de estados se puede escribir de la siguiente

forma

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{c_2(F_{x_1}+f_2)-f_1(F_{x_3}+f_3)}{c_1c_2-f_1^2} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{c_1(F_{x_3}+f_3)-f_1(F_{x_1}+f_2)}{c_1c_2-f_1^2} \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = \frac{F_{x_5}-2ML^2x_6x_4\sin x_3\cos x_3}{\frac{1}{2}mW^2+ML^2\sin^2 x_3+\frac{W^2}{2R^2}(J_w+J_m)+J_\varphi} \end{cases}, \quad (3-2)$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= (2m + M)R^2 + 2J_w + 2J_m \\ c_2 &= ML^2 + J_\psi + 2J_m \\ f_1 &= MRL \cos x_3 - 2J_m \\ f_2 &= MRLx_4^2 \sin x_3 \\ f_3 &= ML^2x_6^2 \sin x_3 \cos x_3 + MgL \sin x_3 \\ F_{x_1} &= \frac{K_t}{R_{DC}}(u_r + u_l) + 2 \left[\frac{K_t K_e}{R_{DC}} + f_m \right] (x_4 - x_2) \\ F_{x_3} &= -\frac{K_t}{R_{DC}}(u_r + u_l) - 2 \left[\frac{K_t K_e}{R_{DC}} + f_m \right] (x_4 - x_2) \\ F_{x_5} &= -\frac{K_t}{R_{DC}} \frac{W}{2R}(u_r - u_l) - \frac{W^2}{2R^2} \left[\frac{K_t K_e}{R_{DC}} + f_m \right] x_6 \end{aligned}$$

3.2.2. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio de un sistema son los estados en los cuales la variación de estos con respecto al tiempo es nula. Para obtener los puntos de equilibrio del sistema (3-2) debemos igualar las dinámicas de cada estado a cero [17] y encontrar los estados que cumplen estas ecuaciones.

$$\Sigma|_{\dot{x}=0, u=0} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = \frac{c_2(F_{x_1}+f_2)-f_1(F_{x_3}+f_3)}{c_1c_2-f_1^2} = 0 \\ \dot{x}_3 = x_4 = 0 \\ \dot{x}_4 = \frac{c_1(F_{x_3}+f_3)-f_1(F_{x_1}+f_2)}{c_1c_2-f_1^2} = 0 \\ \dot{x}_5 = x_6 = 0 \\ \dot{x}_6 = \frac{F_{x_5}-2ML^2x_6x_4\sin x_3\cos x_3}{\frac{1}{2}mW^2+ML^2\sin^2 x_3+\frac{W^2}{2R^2}(J_w+J_m)+J_\varphi} = 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

Es evidente que $x_2 = x_4 = x_6 = f_2 = F_{x_1} = F_{x_3} = F_{x_5} = 0 \forall t$ entonces tenemos que se cumple la siguiente ecuación.

$$\frac{c_1MgL \sin x_3}{c_1c_2 - f_1^2} = 0 \implies c_1MgL \sin x_3 = 0 \implies x_3 = n\pi; \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.2. MODELO MATEMÁTICO

Por lo tanto es fácil observar que el vector $x = (x_{1_0}, 0, n\pi, 0, x_{5_0}, 0)^T$ es solución de (3-3); donde se restringe $x_3 \in [0, 2\pi)$ por lo que $n \in \{0, 1\}$ con $x_{1_0}, x_{5_0} \in \mathbb{R}$.

En conclusión existe una infinidad de puntos de equilibrio en el sistema, cualquier estado para x_{1_0} y x_{2_0} son puntos de equilibrio y $x_3 \in \{0, \pi\}$ son puntos de equilibrio. Así se cumple lo que intuitivamente se pensaba, son puntos de equilibrio los estados para los que el péndulo está “arriba” y también para los que el péndulo está “abajo”

3.2.3. Linealización

Con la finalidad de simplificar el análisis del sistema se linearizará el mismo en un punto de operación. Para linealizar el sistema (3-2) se utiliza aproximación tangente [17] en el punto de equilibrio $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ y obtenemos el sistema lineal e invariante en el tiempo (por simplicidad se han sustituido los parámetros de la Tabla 3-1 por sus valores numéricos) mostrado en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3-4)$$

donde

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4733 & -29.1464 & 0.4733 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1401 & 29.1651 & -0.1401 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.6349 \end{bmatrix}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 109.3664 & 109.3664 \\ 0 & 0 \\ -32.3752 & -32.3752 \\ 0 & 0 \\ -0.5055 & 0.5055 \end{bmatrix}$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$ y $u = (u_l, u_r)$. La salida $y_2 = x_3$ no es medida directamente por algún sensor, sin embargo, es posible reconstruirla a partir de las mediciones obtenidas por el IMU (véase sección 3.2.6), con lo que la suposición de medirla directamente no afecta al análisis del sistema.

3.2.4. Análisis de estabilidad

Los valores característicos de la matriz de estados son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -0.3322, \quad \lambda_4 = -2.6349, \quad \lambda_5 = 5.2704, \quad \lambda_6 = -5.5515$$

Por lo que por los Teoremas 9 y 10 el origen del sistema no lineal (3-1) es inestable para alguna vecindad del origen.

3.2.5. Controlabilidad y Observabilidad

La matriz de controlabilidad esta dada como

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 109.36 & 109.36 & -67.08 & -67.08 & 984.77 & 984.77 & -1497.5 & -1497.5 & 28987 & 28987 \\ 109.36 & 109.36 & -67.08 & -67.08 & 984.77 & 984.77 & -1497.5 & -1497.5 & 28987 & 28987 & -51884 & -51884 \\ 0 & 0 & -32.37 & -32.37 & 19.85 & 19.85 & -956.40 & -956.4 & 851.11 & 851.11 & -28222 & -28222 \\ -32.37 & -32.37 & 19.85 & 19.85 & -956.40 & -956.40 & 851.11 & 851.11 & -28222 & -28222 & 32838 & 32838 \\ 0 & 0 & -0.50 & 0.50 & 1.33 & -1.33 & -3.50 & 3.50 & 9.24 & -9.247 & -24.365 & 24.365 \\ -0.50 & 0.50 & 1.33 & -1.33 & -3.50 & 3.50 & 9.24 & -9.24 & -24.3656 & 24.3656 & 64.201 & -64.201 \end{bmatrix}. \quad (3-5)$$

Como $\text{rank}(\mathcal{C}) = 6$ entonces el sistema linealizado es controlable por el Teorema 5.

La matriz de observabilidad es

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -0.6135 & -58.3115 & 0.6134 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1401 & 29.1651 & -0.1401 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.6349 \\ 0 & 0.3762 & 35.7682 & -58.6877 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0859 & -8.1694 & 29.2510 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.9426 \\ 0 & -8.4002 & -1722.6009 & 44.1685 & 0 & 0 \\ 0 & 4.1387 & 855.6141 & -12.3081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18.2933 \\ 0 & 10.1638 & 1533.0158 & -1732.7648 & 0 & 0 \\ 0 & -3.6832 & -479.5989 & 859.2974 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48.2010 \end{bmatrix}. \quad (3-6)$$

Como $\text{rank}(\mathcal{O}) = 6$ entonces el sistema linealizado es observable por el Teorema 6.

Observación 35 *Los cálculos numéricos se realizaron en MATLAB con una precisión de 500 dígitos decimales.*

3.2.6. Estimación del estado

En esta sección se presenta la manera en cómo se estiman o se obtienen los estados del sistema a partir de las mediciones de los sensores. Dependiendo del sensor utilizado, los estados del sistema se obtienen a partir de diferenciadores (como en el caso de los estados x_2 , x_4 y x_6), por reconstrucción y usando observadores de estado (como lo es en el caso del estado x_3).

En el caso de los estados x_2 , x_4 y x_6 muy sencilla, pues estos son las derivadas de los estados medidos, con lo que para estimarlos se hace $x_4 = \frac{dy_2}{dt}$, $x_6 = \frac{dy_3}{dt}$ y $x_2 = \frac{d(y_1+y_2)}{dt}$ donde se aplica el algoritmo visto en 2.2.6 para derivar en tiempo real.

Sin embargo, la salida y_2 no mide directamente la inclinación del robot (el estado x_3) lo hace de manera indirecta a partir de la medición entregada por el IMU por lo que el estado x_3 se debe reconstruir a partir de y_2 y después hacerle un tratamiento debido al ruido de medición como se presenta en las siguientes secciones.

Reconstrucción del ángulo de inclinación

Lo que se quiere lograr es obtener el ángulo de inclinación ψ con respecto a la vertical conociendo las mediciones de aceleración del IMU montado en el Robot Péndulo.

En la Figura 3-5 se muestra el perfil del Robot Péndulo, también se muestran tres marcos de referencia ortonormales distintos: el primero en negro, es el marco de referencia fijo; el segundo en rojo, es un marco de referencia relativo a la inclinación del robot; y el tercero en azul, el cual muestra el marco de referencia igualmente relativo a la inclinación del robot pero este está desfasado 135 grados con respecto del marco de referencia rojo de manera tal que tenga la misma dirección que la medición de las aceleraciones del IMU.

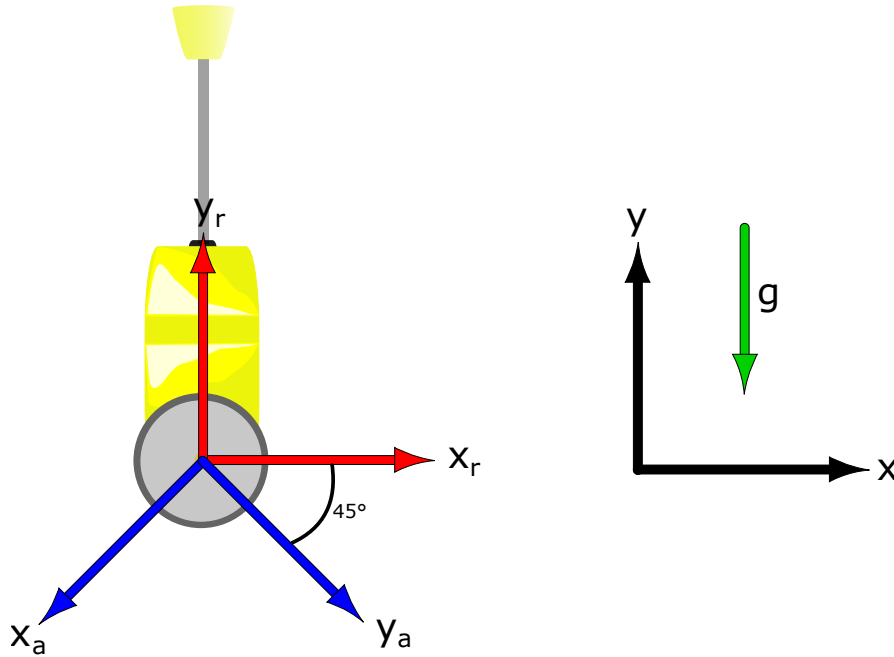


Figura 3-5: Marcos de referencia del Robot Péndulo

Replantando el problema se desea obtener el ángulo ψ entre los marcos de referencia en negro y en rojo a partir de la medición de la aceleración del Robot Péndulo cuyo marco de referencia está en azul.

La Figura 3-6 muestra el perfil del robot con un ángulo de inclinación ψ , también se muestran los vectores de aceleración debido a la gravedad g y a al mismo movimiento del robot a , la aceleración del robot se puede obtener del estado $x_1 = \vartheta$ (la posición angular), si definimos a x como su posición se tiene que $x = R\vartheta$ con lo que $\ddot{x} = R\ddot{\vartheta}$ donde la aceleración angular se puede obtener con el derivador presentado en 2.2.6.

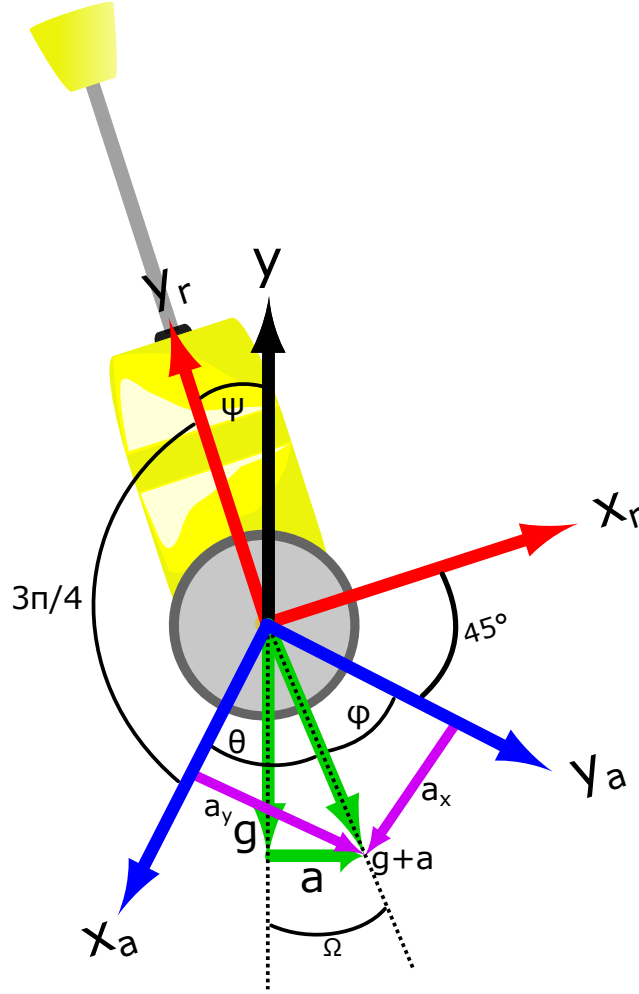


Figura 3-6: Cálculo de ψ a partir de la aceleración

Es fácil observar de la Figura 3-6 que

$$\psi + \frac{3\pi}{4} + \vartheta - \Omega = \pi \quad (3-7)$$

pues el eje en negro y la gravedad son fijas.

En la misma Figura se muestran los vectores a_x y a_y que son las proyecciones de la aceleración total $g + a$ sobre el marco de referencia del IMU, i.e. la medición de la aceleración dada por el IMU.

$$a_x = \text{proj } g_{x_a} = g \cdot x_a = g \cos \vartheta \quad (3-8)$$

$$a_y = \text{proj } g_{y_a} = g \cdot y_a = g \cos \varphi. \quad (3-9)$$

3.2. MODELO MATEMÁTICO

Como $\vartheta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ entonces (3-9) se puede escribir como

$$a_y = g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = g \sin \vartheta. \quad (3-10)$$

Igualando (3-10) con (3-8) se obtiene

$$\tan \vartheta = \frac{a_y}{a_x}. \quad (3-11)$$

Por otro lado para calcular el ángulo Ω , sabemos que éste se forma entre los vectores g y $g + a$, entonces por definición

$$\begin{aligned} (0, -g) \cdot (a, -g) &= |g| |g + a| \cos \Omega \\ \cos \Omega &= \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}. \end{aligned} \quad (3-12)$$

Finalmente se puede obtener el ángulo de inclinación ψ usando (3-12), (3-11) y (3-7)

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + \arccos\left(\frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}\right). \quad (3-13)$$

Filtrado de la señal

En la Sección anterior se construyó el estado de inclinación del robot a partir de las señales de aceleración de la IMU, sin embargo, estas señales son muy ruidosas por lo que no se puede usar directamente el resultado anterior, se debe aplicar un filtro reductor de ruido para poder utilizar esta información en el algoritmo de control.

Se implementará el Filtro de Kalman visto en 2.3.2 para el tratamiento de la señal. Como datos del problema tenemos la medición ruidosa del ángulo de inclinación del robot ψ de la cual podemos obtener algunas de sus propiedades estadísticas tales como su varianza (esto se hace recopilando datos experimentales y usando un paquete de cálculo numérico), también tenemos la medición ruidosa entregada por el giroscopio la cual es $\dot{\psi}$ en donde también podemos obtener su varianza.

Para diseñar un Filtro de Kalman es necesario tener un modelo preciso del sistema físico (pues el Filtro de Kalman es un observador basado en modelo), sin embargo, el modelo del sistema que tenemos no es muy preciso, por lo que al implementarlo no cumple con el desempeño deseado. Por lo que no consideramos la dinámica de todo el sistema y en lugar de ello tomamos la dinámica del IMU como modelo de orden reducido. Esta dinámica la describe la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= x + \underline{\eta} \end{aligned} \quad (3-14)$$

donde $x = \psi$, $u = \dot{\psi} + \underline{\xi}$, $\underline{\eta}$ es la variable aleatoria que representa el ruido de medición (asociada al ruido de los acelerómetros) y $\underline{\xi}$ la variable aleatoria que representa el ruido de la entrada (asociada al ruido del giroscopio).

En [33] se muestra como realizar la discretización exacta usando un retenedor de orden cero

(necesaria para aplicar el Filtro de Kalman). Para discretizar el sistema LIT en tiempo continuo (2-2) a la forma discreta (2-31), se transforman las matrices de la siguiente forma $A_k = e^{A\Delta t}$, $B_k = \left(\int_0^{\Delta t} e^{A\lambda} d\lambda\right) B$, $C_k = C$ y $D_k = B$. Así la discretización del sistema (3-14) es

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t \, u_k \\ y_k &= x_k + \underline{\eta} \end{aligned} \quad (3-15)$$

donde Δt es el tiempo de muestreo. Como consideramos al ruido aditivo podemos escribir (3-15) como

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t \, \dot{\varphi} + \Delta t \, \underline{\xi} \\ y_k &= x_k + \underline{\eta} \end{aligned} \quad (3-16)$$

Con lo que podemos aplicar el Filtro de Kalman (algoritmo 25) con los siguientes datos

- $A_k = 1$.
- $B_k = \Delta t = 0.0035$.
- $\Gamma_k = \Delta t = 0.0035$.
- $C_k = 1$.
- $D_k = 0$.
- $R = E \{ \underline{\eta} \underline{\eta}^T \} = 0.01$.
- $Q = E \{ \underline{\xi} \underline{\xi}^T \} = 0.02$.
- $\hat{x}_{0|0} = y_k$.
- $P_{0|0} = 0$.

Adecuación de la salida

En algunas ocasiones los transductores no miden la variable física en el formato que deseamos, por lo que se debe adecuar esta para que cumpla con los requerimientos. Esto se puede hacer por *hardware* e.g. amplificando la señal producida por un transductor de temperatura para adecuarla a algún estándar o por *software* como se hará en este caso.

Para adecuar la señal de los *encoders*, como estos producen 16,000 pulsos por cada revolución del motor entonces el ángulo en radianes se obtiene como $\theta = \frac{2\pi}{16000} p$ con p los pulsos de la señal del *encoder*. Mientras que el giroscopio tiene un factor de conversión $\dot{\psi} = \frac{pi}{180} g$ donde $\dot{\psi}$ es la velocidad angular y g es la señal medida por el giroscopio.

3.2.7. Desacoplamiento del sistema

Debido a que el algoritmo de diseño de superficies de deslizamiento por LQ Singular [34] y el controlador CTA [30] requieren que el sistema sea SISO (*Single Input Single Output*) necesitamos desacoplar el sistema MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) que tenemos para dividirlo en varios casos SISO para proceder con la implementación.

En [35] se describe con detalle como realizar este proceso, sin embargo, la estructura del sistema con las variables de estado elegidas nos permite realizar el desacople de una manera más sencilla.

Podemos observar en la ecuación de estados (3-4) que los estados x_1, x_2, x_3 y x_4 están desacoplados de los estados x_5 y x_6 esto es, que las variables del primer grupo no intervienen en las ecuaciones donde sí lo hacen las del segundo grupo y viceversa.

Sin embargo, el control no está desacoplado pero se puede realizar un cambio de coordenadas en el control para desacoplar el sistema.

Se propone el siguiente cambio de coordenadas

Proposición 36 Sea la ecuación de estados (3-4) entonces la transformación de coordenadas del control cuya matriz asociada es $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ desacopla el sistema en dos subsistemas $\Sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4, v_1)$ y $\Sigma_2(x_5, x_6, v_2)$ que son equivalentes al sistema original

Demostración. Usando el Teorema 12, $Qu = v$ donde v es el control en otra base. Como la Q definida tiene inversa definimos $B' \stackrel{\text{def}}{=} BQ^{-1}$, entonces el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4733 & -29.1464 & 0.4733 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1401 & -29.1651 & -0.1401 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.6349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 218.7328 & 0 \\ 0 & 0 \\ -64.7504 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1.0110 \end{bmatrix}}_{BQ^{-1}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

es equivalente al sistema original (3-4) por la Proposición 16.

Se puede observar que v_1 solo interviene en el control de los estados x_1 - x_4 y el control v_2 en los estados x_5 y x_6 .

Entonces se tienen los siguientes subsistemas desacoplados

$$\Sigma_1 : \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4733 & -29.1464 & 0.4733 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1401 & -29.1651 & -0.1401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 218.7328 \\ 0 \\ -64.7504 \end{bmatrix} v_1 \quad (3-18)$$

$$\Sigma_2 : \begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2.6349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0110 \end{bmatrix} v_2 \quad (3-19)$$

■

Capítulo 4

Implementación de Controladores

The only way to learn mathematics is to do mathematics.

Paul Halmos.

En este capítulo se utilizarán las herramientas vistas en los capítulos anteriores para lograr el objetivo de control. Primero, debido a que se desea realizar seguimiento de trayectorias, se planteará el diseño de las trayectorias deseadas para la planta. Después, debido a que el sistema (3-18) no cumple las hipótesis necesarias para aplicarle el CTA (como se verá en este capítulo), es necesario realizar un diseño de superficies de deslizamiento para “colapsar” la dinámica y así poder aplicar el CTA. Finalmente, se desarrolla el diseño de los algoritmos de control que serán aplicados a la planta.

Para sintetizar en la Figura 4-1 se muestra el esquema de control implementado para el CTA.

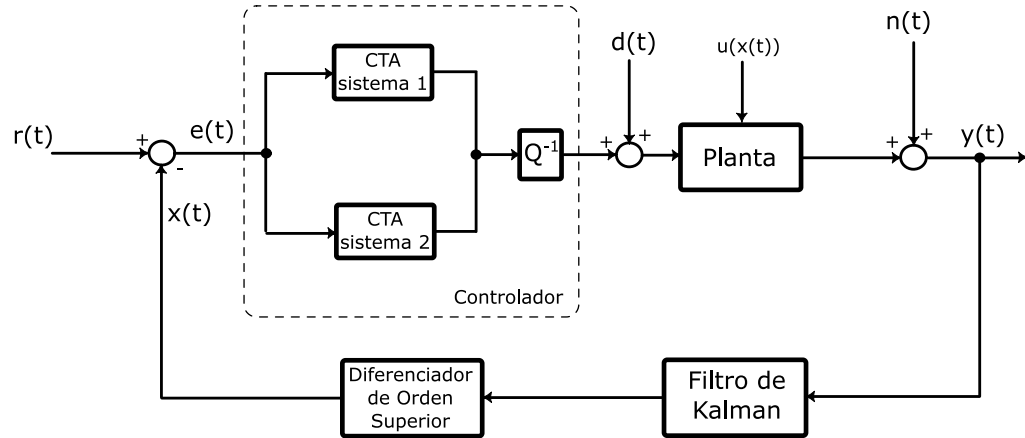


Figura 4-1: Esquema de control

En donde $n(t)$ es el ruido de medición únicamente para la salida y_2 las demás salidas las consideramos sin ruido, $u(x(t))$ son las incertidumbres del sistema debido a dinámicas no modeladas

4.1. TRAYECTORIAS

e incertidumbre en los parámetros, $d(t)$ son las perturbaciones exógenas del sistema. El Filtro de Kalman únicamente actúa en la salida y_2 , a la entrada del diferenciador entran los estados x_1, x_3 y x_5 (obtenidos a partir de las salidas pues $x_1 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_2$ y $x_5 = y_3$) y a la salida obtenemos los estados x_2, x_4 y x_6 por lo que se tiene todo el estado $x(t)$. La señal de referencia $r(t)$ son las trayectorias planteadas en la próxima sección. El controlador tiene como entrada la señal de error la cual se divide en dos, el bloque “CTA sistema 1” recibe $[e_1, e_2, e_3, e_4]^T$ y el bloque “CTA sistema 2” recibe $[e_5, e_6]^T$ cuyas salidas se multiplican por la matriz Q^{-1} mostrada en 36 para obtener la señal de control del sistema.

Para la implementación del CTA por realimentación de salida se utilizará el siguiente esquema de control

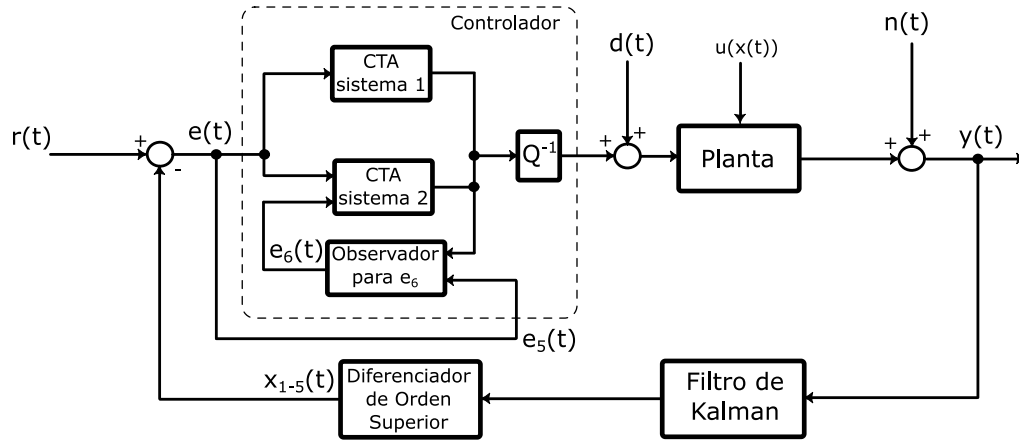


Figura 4-2: Esquema de control

En este, el estado e_6 se obtiene a partir del esquema controlador-observador presentado en [6]. Este observador es alimentado por el error e_5 y la señal de control para el sistema 2 (sistema 3-19) y en su salida se obtiene el estimado del error e_6 la cual realimenta al CTA para producir la señal de control.

4.1. Trayectorias

Debido a la naturaleza de la aplicación del Robot Péndulo uno no espera que este se quede estático estabilizando el origen, uno espera que se mueva e interactue con el medio, por lo que es necesario plantear alguna rutina de seguimiento de trayectorias.

El planteamiento trayectoria en este caso serán trayectorias polinómicas pre-programadas, pues es necesario que sean suaves para que el controlador pueda soportar las perturbaciones producidas como se verá en el Capítulo 4.

En robótica móvil, los movimientos más comunes para alcanzar algún punto en el plano son giros sobre el eje del robot y desplazamientos rectos (ambos de manera independiente i.e. cuando se desplaza de manera recta no gira y viceversa), por lo que se implementarán ambos movimientos.

Para ejemplificar estas trayectorias, en los experimentos se realizarán los siguientes movimientos.

- **Trayectoria 1.** Del intervalo de tiempo (en segundos) $(0, 5)$ el Robot Péndulo estabiliza el origen.
- **Trayectoria 2.** Del intervalo $(5, 12)$ el Robot Péndulo se mueve de 0 a 3 metros, traducidos de 0 a 40 radianes para el estado x_1 , con una velocidad y aceleración final e inicial de 0.
- **Trayectoria 3.** Del intervalo $(12, 15)$ el Robot Péndulo gira π radianes para el estado x_5 , con velocidad angular y aceleración angular final e inicial de 0.
- **Trayectoria 4.** Del intervalo $(15, 22)$ el Robot Péndulo se mueve de 3 a 5 metros, traducidos de 40 a 80 radianes para el estado x_1 , con una velocidad y aceleración final e inicial de 0.
- **Trayectoria 5.** Del intervalo $(22, 25)$ el Robot Péndulo gira $-\pi$ radianes para el estado x_5 , con velocidad angular y aceleración angular final e inicial de 0.
- **Trayectoria 6.** Del intervalo $(25, 30)$ el Robot Péndulo estabiliza en el estado $x_0 = [80, 0, 0, 0, 0, 0]^T$

Nótese que todas las trayectorias mencionadas anteriormente pueden ser diseñadas siguiendo el procedimiento en la Sección 2.4. La Figura 4-3 muestra gráficamente la manera en que se planearon las trayectorias vistas sobre el plano de movimiento del Robot Péndulo.



Figura 4-3: Diagrama de trayectorias deseadas

En la Figura 4-4 se muestra la gráfica de la trayectoria descrita anteriormente para la posición, velocidad y aceleración del estado x_1 mientras que la Figura 4-5 lo hace de manera análoga para el estado x_5 .

4.2. DISEÑO DE LAS SUPERFICIES DE DESLIZAMIENTO

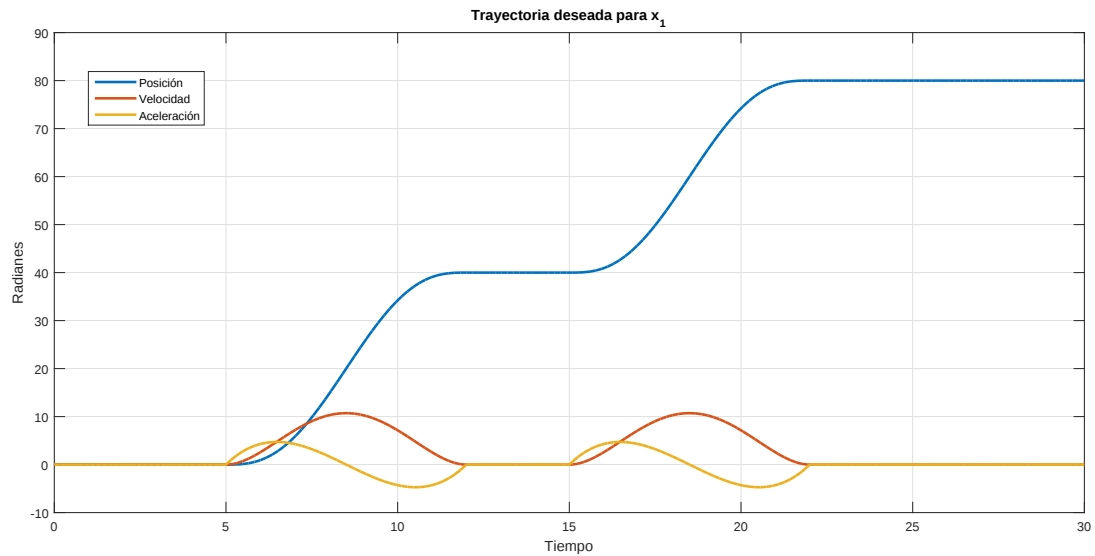


Figura 4-4: Trayectoria de posición, velocidad y aceleración de x_1

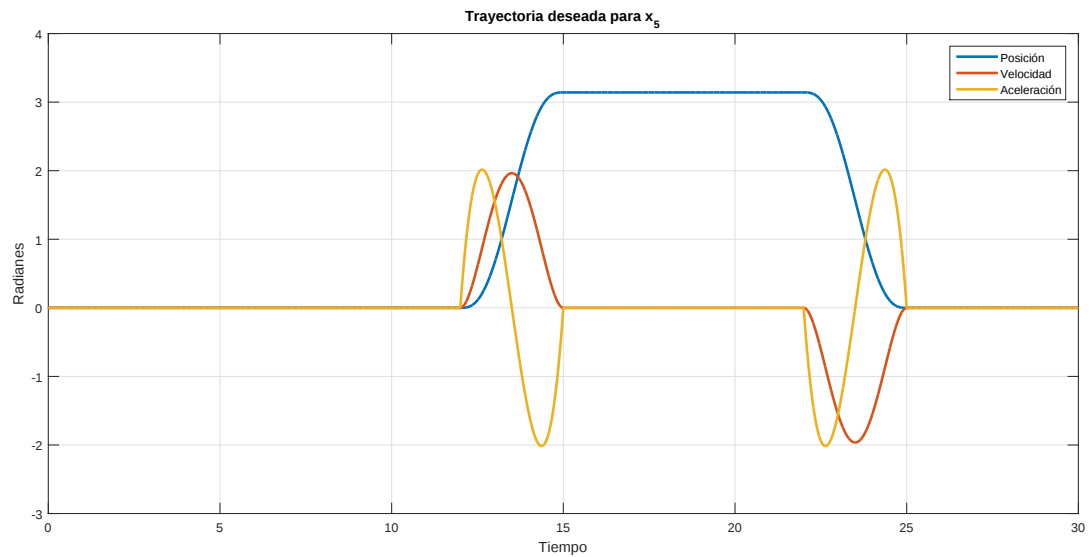


Figura 4-5: Trayectoria de posición, velocidad y aceleración de x_5

4.2. Diseño de las superficies de deslizamiento

Debido a que los controladores a implementar son para sistemas de grado relativo dos, entonces se pueden implementar directamente en el sistema (3-19) por ser de grado relativo 2, sin embargo, el

sistema (3-18) en su forma canónica de *Brunovsky* es de grado relativo cuatro con respecto al estado, por lo que es necesario diseñar una superficie de deslizamiento para implementar los algoritmos de control.

El diseño de superficies se realizará utilizando el algoritmo presentado en la Sección 2.5. Primero se transforma el sistema (3-18) a su forma canónica controlable utilizando el Lema 15. Con lo que el sistema queda de la siguiente manera

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9.72 & 29.16 & -0.6134 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1, \quad (4-1)$$

donde la matriz T de cambio de coordenadas $z = Tx$ tiene la forma

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -4492.1229 & -0.0018 & 218.73 & 0 \\ 0 & -4492.1229 & -0.0018 & 218.7327 \\ 0 & -0.0018 & -64.7504 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0018 & -64.7504 \end{pmatrix}. \quad (4-2)$$

Si definimos a la matriz de ponderación de estados x como

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0.0049 & 0 & 0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0167 & 0 & 2.4416 & 0 \\ 0 & 0.00001 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces la matriz de ponderación de estados z usando la ecuación (2-37) es

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 100000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4-3)$$

La cual tiene orden de singularidad dos y por lo tanto la superficie será de grado relativo dos. Realizando a partición de los estados tomando en cuenta que $i = k + 1 = 2$ entonces $\bar{z}_1 = [z_1, z_2]^T$, $\bar{z}_2 = z_3$ y $\bar{z}_3 = z_4$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{\bar{z}}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} v_1 \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \\ \dot{\bar{z}}_3 \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9.72 & 29.16 & -0.6134 \end{array} \right] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1. \end{aligned} \quad (4-4)$$

4.3. CONTROL EQUIVALENTE DEL SISTEMA

La partición de la matriz de ponderación es

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{Q} = \left[\begin{array}{cc|cc} 100000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10000 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (4-5)$$

Una vez definidas las particiones se resuelve el problema de LQR de el sistema (2-47) con el índice de desempeño (2-46) donde se definen

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T = \begin{bmatrix} 100000 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \\ \tilde{R} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{Q}_{22} = 10000 \\ \tilde{A} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}(\bar{Q}_{22})^{-1}\bar{Q}_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{B} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-6)$$

Utilizando el Teorema 24 se obtiene la ganancia

$$K = [3.16 \quad 2.51]. \quad (4-7)$$

Finalmente la dinámica de la superficie de deslizamiento tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{z}_2 + K\bar{z}_1 = z_3 + 2.51z_2 + 3.16z_1 \\ \dot{\sigma} &= \dot{\bar{z}}_2 + K\dot{\bar{z}}_1 = z_4 + 2.51z_3 + 3.16z_2 \\ \ddot{\sigma} &= \ddot{\bar{z}}_2 + K\ddot{\bar{z}}_1 = 9.72z_2 + 29.16z_3 - 0.6134z_4 + v_1 + 3.16z_3 + 2.51z_4 \\ &= 9.72z_2 + 32.32z_3 + 1.90z_4 + v_1 \end{aligned} \quad (4-8)$$

4.3. Control equivalente del sistema

4.3.1. Control equivalente para el sistema nominal

En esta sección se muestra el control nominal equivalente de los sistemas (3-18) y (3-19). La ecuación (2-51) muestra la forma en que se obtiene el control equivalente, para este experimento en particular se diseño una superficie de deslizamiento de grado relativo dos, por lo que en (4-8) se muestra la segunda derivada de la superficie de deslizamiento con la cual podemos obtener el control equivalente como

$$u_{eq1} = -9.72z_2 - 32.32z_3 - 1.90z_4. \quad (4-9)$$

De manera análoga se puede obtener el control nominal equivalente para el sistema (3-19). Este

sistema ya se encuentra en forma *brunovsky* entonces el control equivalente se obtiene como

$$u_{eq_2} = 2.6062x_6. \quad (4-10)$$

A pesar de que los sistemas de nuestro interés son (4-14) y (4-19) estos “tienen” la dinámica del sistema nominal con unos términos extras agregados por el seguimiento de trayectorias, la dinámica del error tiene la forma

$$\dot{e} = \underbrace{(Ae + Bu)}_{\Omega} + \underbrace{(Ax_d - \dot{x}_d)}_{\Sigma} \quad (4-11)$$

en donde Ω depende de la dinámica del sistema y Σ de la trayectoria. Así, en esta subsección se trató el control nominal para Ω y en la siguiente para Σ .

4.3.2. Dinámica del Error

Para realizar seguimiento de trayectorias es necesario estabilizar el error de seguimiento definido como

$$e \stackrel{\text{def}}{=} x - x_d(t) \quad (4-12)$$

Donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $x_d : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el estado que se desea seguir. Para LTI la dinámica del error se puede expresar como

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_d \\ &= (Ax + Bu) - \dot{x}_d \\ &= (A(e + x_d) + Bu) - \dot{x}_d \\ &= (Ae + Bu) + (Ax_d - \dot{x}_d) \end{aligned} \quad (4-13)$$

Donde el término $Ax_d - \dot{x}_d$ depende de la trayectoria elegida, los cuales podrían ser posibles de eliminar si son acoplados al canal de control. Para el sistema (3-18) si definimos tenemos la siguiente dinámica del error

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4733 & -29.1464 & 0.4733 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1401 & -29.1651 & -0.1401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 218.7328 \\ 0 \\ -64.7504 \end{bmatrix} v_1 \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4733 & -29.1464 & 0.4733 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1401 & -29.1651 & -0.1401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4-14)$$

donde f es la función para la posición mostrada en la Figura 4-4.

4.3. CONTROL EQUIVALENTE DEL SISTEMA

Expandiendo el producto matricial de la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 + \cancel{f'(t)} \xrightarrow{0} f'(t) \\
 \dot{e}_2 &= -0.4733e_2 - 29.1464e_3 + 0.4733e_4 + 218.7328v_1 - 0.4733f'(t) - f''(t). \\
 \dot{e}_3 &= e_4 \\
 \dot{e}_4 &= 0.1401e_2 - 29.1651e_3 - 0.1401e_4 - 64.7504v_1 + 0.1401f'(t)
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

Se puede observar que la perturbación provocada por la trayectoria afecta a la dinámica de e_2 y de e_4 por lo que se busca una entrada de control v_1 tal que

$$\begin{cases} 218.7328v_1 - 0.4733f'(t) - f''(t) = 218.7328w_1 \\ -64.7504v_1 + 0.1401f'(t) = -64.7504w_1 \end{cases} \implies \begin{cases} v_1 = 0.0022f'(t) + \frac{1}{218.7328}f''(t) + w_1 \\ v_1 = 0.0022f'(t) + w_1 \end{cases}, \tag{4-16}$$

donde w_1 es una nueva entrada de control. Se puede observar que la ecuación anterior es contradictoria, sin embargo, no se desea que se cumplan ambas ecuaciones solo se desea reducir las perturbaciones del sistema para reducir la ganancia del CTA mostrada posterior mente, así se define

$$v_1 \stackrel{\text{def}}{=} 0.0022f'(t) + w_1, \tag{4-17}$$

donde w_1 es una nueva entrada de control.

Con esta entrada de control la dinámica del error es

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 \\
 \dot{e}_2 &= -0.4733e_2 - 29.1464e_3 + 0.4733e_4 + 218.7328w_1 - f''(t) \\
 \dot{e}_3 &= e_4 \\
 \dot{e}_4 &= 0.1401e_2 - 29.1651e_3 - 0.1401e_4 - 64.7504w_1
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

De manera análoga para el sistema (3-19) la dinámica del error con la trayectoria deseada mostrada en la Figura 4-5 es

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{e}_5 \\ \dot{e}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2.6349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0110 \end{bmatrix} v_2 \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2.6349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g'(t) \\ g''(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

Expandiendo el producto matricial

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_5 &= e_6 + \cancel{g'(t)} \xrightarrow{0} g'(t) \\
 \dot{e}_6 &= -2.6349e_6 + 1.0110v_2 - 2.6349g'(t) - g''(t)
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

Si elegimos v_2 tal que

$$\begin{aligned} 1.0110v_2 - 2.6349g'(t) - g''(t) &= 1.0110w_2 \\ \implies v_2 &\stackrel{\text{def}}{=} 2.6062g'(t) + 0.9891g''(t) + w_2 \end{aligned} \quad (4-21)$$

Donde w_2 es la nueva entrada de control.

Combinando los resultados (4-9), (4-10), (4-17) y (4-21) obtenidos estas dos últimas subsecciones se tienen los siguientes controles equivalentes

$$\begin{aligned} v_1 &\stackrel{\text{def}}{=} 0.0022f'(t) + u_{eq_1} + w_1 \\ v_2 &\stackrel{\text{def}}{=} 2.6062g'(t) + 0.9891g''(t) + u_{eq_2} + w_2, \end{aligned} \quad (4-22)$$

en donde w_1 y w_2 serán las entradas del control estabilizante diseñado en la siguiente sección.

4.4. Diseño del Algoritmo *Twisting* Continuo

La sintonización del CTA presentada en 2.6 se da con respecto al tamaño de la perturbación e incertidumbre del sistema, sin embargo, en la implementación física no se conoce el tamaño de esta perturbación por lo que la sintonización se realiza estimando una perturbación pequeña y aumentando esta gradualmente hasta obtener un rendimiento satisfactorio.

En este caso se logra obtener un buen resultado experimental con las siguientes ganancias. Para el sistema (3-18)

$$\begin{aligned} L &= 94.5 \\ w_1 &= -0.98222 L^{\frac{2}{3}} [\sigma]^{\frac{1}{3}} - 1.32046 L^{\frac{1}{2}} [\dot{\sigma}]^{\frac{1}{2}} + \eta, \\ \dot{\eta} &= -0.01375 L [\sigma]^0 - 0.00719 L [\dot{\sigma}]^0 \end{aligned} \quad (4-23)$$

donde σ es la superficie de deslizamiento diseñada en 4.2. El tamaño de la perturbación según 24 debe cumplir $|\dot{\zeta}| \leq 0.2268$

Para el sistema (3-19)

$$\begin{aligned} L &= 4.12 \\ w_2 &= -0.98222 L^{\frac{2}{3}} [e_5]^{\frac{1}{3}} - 1.32046 L^{\frac{1}{2}} [e_6]^{\frac{1}{2}} + \eta, \\ \dot{\eta} &= -0.01375 L [e_5]^0 - 0.00719 L [e_6]^0 \end{aligned} \quad (4-24)$$

donde el tamaño de la perturbación según 24 debe cumplir $|\dot{\zeta}| \leq 0.0098$.

4.5. Diseño del Algoritmo *Twisting* Continuo con realimentación de salida

Para el CTA con realimentación de salida se aplicará únicamente este algoritmo al sistema (3-19), realizando un procedimiento análogo al anterior se tiene el siguiente control.

$$\begin{aligned}
L &\stackrel{\text{def}}{=} 4.12 \\
H &\stackrel{\text{def}}{=} 50 \\
w_2 &= -0.98222 L^{\frac{2}{3}} [e_5]^{\frac{1}{3}} - 1.32046 L^{\frac{1}{2}} [\hat{e}_6]^{\frac{1}{2}} + \eta \\
\dot{\eta} &= -0.01375 L [e_5]^0 - 0.00719 L [\hat{e}_6]^0, \\
\dot{\hat{e}}_5 &= -9.5608 H^{\frac{1}{3}} [\hat{e}_5 - e_5]^{\frac{2}{3}} + \hat{e}_6 \\
\dot{\hat{e}}_6 &= -6.8681 H^{\frac{2}{3}} [\hat{e}_5 - e_5] + v_2 + \xi \\
\dot{\xi} &= -0.0219 H [\hat{e}_5 - e_5]^0
\end{aligned} \tag{4-25}$$

donde $\hat{e}_5$ y $\hat{e}_6$ son los estimados de e_5 y e_6 respectivamente y se debe cumplir que $|\dot{\zeta}| \leq 0.105$.

4.6. Diseño del Algoritmo *Twisting* Continuo con distintas ganancias estabilizantes

En este caso el algoritmo es el mismo CTA mostrado en (4-26), en donde las ganancias k'_i son las ganancias mostradas en el Teorema 2.6.4.

$$\begin{aligned}
w_{1,2} &= -k'_1 [\sigma]^{\frac{1}{3}} - k'_2 [\dot{\sigma}]^{\frac{1}{2}} + \eta \\
\dot{\eta} &= -k'_3 [\sigma]^0 - k'_4 [\dot{\sigma}]^0
\end{aligned} \tag{4-26}$$

Como se implementará este controlador con para distintos conjuntos de ganancias, en el respectivo reporte de los experimentos se menciona el valor de las ganancias implementadas.

4.7. Resumen

El control final en los motores izquierdo y derecho se da por 36 como

$$\begin{bmatrix} u_l \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \tag{4-27}$$

Donde por lo visto en (4-22), (4-23) y (4-24) ó (4-25) ó (4-26) se tienen los siguientes diseños.

Para el control CTA con realimentación de estado se tiene: El control v_1 es

$$\begin{aligned}
L &= 94.5 \\
v_1 &= \underbrace{-0.98222 L^{\frac{2}{3}} [\sigma]^{\frac{1}{3}} - 1.32046 L^{\frac{1}{2}} [\dot{\sigma}]^{\frac{1}{2}} + \eta}_{\text{Control estabilizante}(w_1)} + \underbrace{0.0022 f'(t)}_{\text{Debido a la trayectoria}} + \underbrace{u_{eq1}}_{\text{Debido al sistema}} \\
&\hspace{15em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Control equivalente}}
\end{aligned} \tag{4-28}$$

$$\dot{\eta} = -0.01375 L [\sigma]^0 - 0.00719 L [\dot{\sigma}]^0$$

y el control v_2 es

$$L = 4.12$$

$$v_2 = \underbrace{-0.98222 L^{\frac{2}{3}} [e_5]^{\frac{1}{3}} - 1.32046 L^{\frac{1}{2}} [e_6]^{\frac{1}{2}} + \eta}_{\text{Control estabilizante}(w_2)} + \underbrace{2.6062g'(t) + 0.9891g''(t)}_{\text{Debido a la trayectoria}} + \underbrace{u_{eq2}}_{\text{Debido al sistema}} \quad (4-29)$$

$$\dot{\eta} = -0.01375 L [e_5]^0 - 0.00719 L [e_6]^0$$

Para el control CTA con realimentación de salida se tiene: El control v_1 es el mostrado en 4-28. Y el control v_2 es

$$L = 4.12$$

$$H = 50$$

$$v_2 = \underbrace{-0.98222 L^{\frac{2}{3}} [e_5]^{\frac{1}{3}} - 1.32046 L^{\frac{1}{2}} [e_6]^{\frac{1}{2}} + \eta}_{\text{Control estabilizante}(w_2)} + \underbrace{2.6062g'(t) + 0.9891g''(t)}_{\text{Debido a la trayectoria}} + \underbrace{u_{eq2}}_{\text{Debido al sistema}} \quad (4-30)$$

$$\dot{\eta} = -0.01375 L [e_5]^0 - 0.00719 L [\hat{e}_6]^0$$

$$\dot{\hat{e}}_5 = -9.5608 H^{\frac{1}{3}} [\hat{e}_5 - e_5]^{\frac{2}{3}} + \hat{e}_6$$

$$\dot{\hat{e}}_6 = -6.8681 H^{\frac{2}{3}} [\hat{e}_5 - e_5] + v_2 + \xi$$

$$\dot{\xi} = -0.0219 H [\hat{e}_5 - e_5]^0$$

Mientras que para la optimización de las ganancias mencionado en 2.6.4 se tienen los siguientes controladores. Para v_1 :

$$v_1 = \underbrace{-k'_1 [\sigma]^{\frac{1}{3}} - k'_2 [\dot{\sigma}]^{\frac{1}{2}} + \eta}_{\text{Control estabilizante}(w_{1,2})} + \underbrace{0.0022f'(t)}_{\text{Debido a la trayectoria}} + \underbrace{u_{eq1}}_{\text{Debido al sistema}} \quad (4-31)$$

$$\dot{\eta} = -k'_3 [\sigma]^0 - k'_4 [\dot{\sigma}]^0$$

y el control v_2 es

$$v_2 = \underbrace{-k'_1 [e_5]^{\frac{1}{3}} - k'_2 [e_6]^{\frac{1}{2}} + \eta}_{\text{Control estabilizante}(w_{1,2})} + \underbrace{2.6062g'(t) + 0.9891g''(t)}_{\text{Debido a la trayectoria}} + \underbrace{u_{eq2}}_{\text{Debido al sistema}} \quad (4-32)$$

$$\dot{\eta} = -k'_3 [e_5]^0 - k'_4 [e_6]^0$$

Los controladores de las ecuaciones anteriores (4-28), (4-29) y (4-30) son los que se usarán en la implementación física. Para las implementaciones de los controladores (4-32) y (4-32) las k'_i dependerán del conjunto de ganancias utilizadas.

Capítulo 5

Reporte de Resultados

The purpose of life is to conjecture and prove.

Paul Erdos

5.1. Simulaciones

Antes de proceder con la implementación física de los algoritmos de control se deben realizar simulaciones computacionales para darse una idea del comportamiento real del sistema, en nuestro caso se utilizó el interfaz gráfico Simulink de MATLAB, el cual cuenta con métodos numéricos para realizar las simulaciones de manera sencilla.

5.1.1. Simulación del Filtro de Kalman

En esta simulación se presenta únicamente la acción del Filtro de Kalman con la dinámica reducida del sistema, el diseño de este algoritmo se presentó en [3.2.6](#)

En la Figura [5-1](#) se muestra las señales que simulan las mediciones del giroscopio y el ángulo ψ obtenido a partir de los acelerómetros como se muestra en [\(3-13\)](#), en este caso se supone que las señales $x_k \equiv \psi$ y $\dot{\psi}$ del sistema [\(3-16\)](#) son $\sin t$ y $\cos t$ respectivamente. Como se mencionó anteriormente estas señales son ruidosas con lo que a la entrada y la salida del sistema [\(3-15\)](#) son $u_k = \cos t + \underline{\xi}$ y $y_k = \sin t + \underline{\eta}$ respectivamente, donde $\underline{\xi}$ y $\underline{\eta}$ se simularan como variables aleatorias con media cero y varianza 0.1.

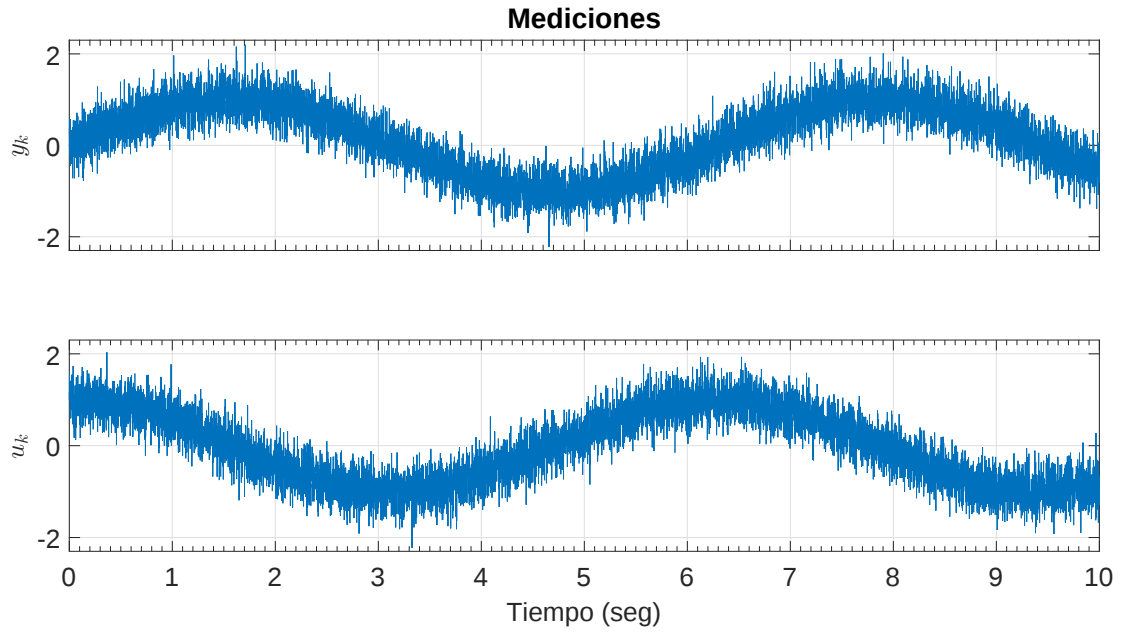


Figura 5-1: Estados del sistema (3-19)

En la Figura 5-2 se muestra la acción del filtro, en la gráfica superior se muestra la diferencia entre el ángulo ψ real y el ángulo $\hat{\psi}$ estimado por el Filtro de Kalman. En la gráfica inferior se muestra el error de estimación del filtro dado como $e \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\psi} - \psi$.

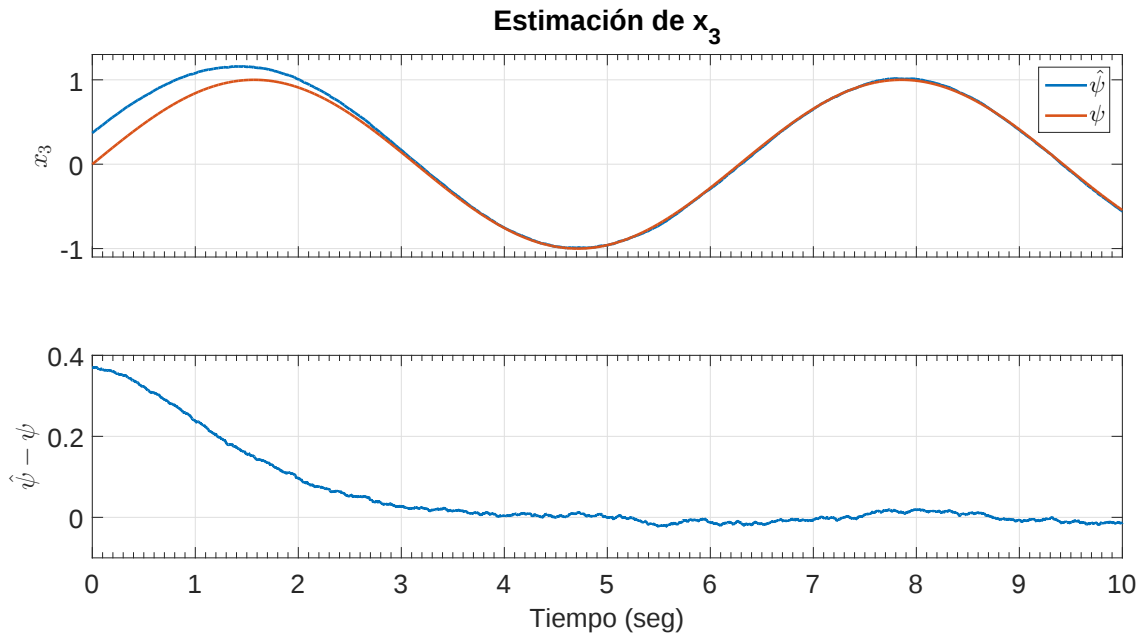


Figura 5-2: Estados del sistema (3-19)

En la Figura 5-3 se muestra la señal obtenida para la estimación de $\dot{\psi}$. Para realizar ésta, como ya se mencionó se utilizó el diferenciador presentado en 2.2.6, derivando la señal obtenida en la gráfica anterior para ψ . La gráfica superior de esta Figura muestra la señal $\dot{\psi}$ y la estimada $\hat{\dot{\psi}}$, y en la gráfica inferior se muestra el error de estimación $e \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\dot{\psi}} - \dot{\psi}$

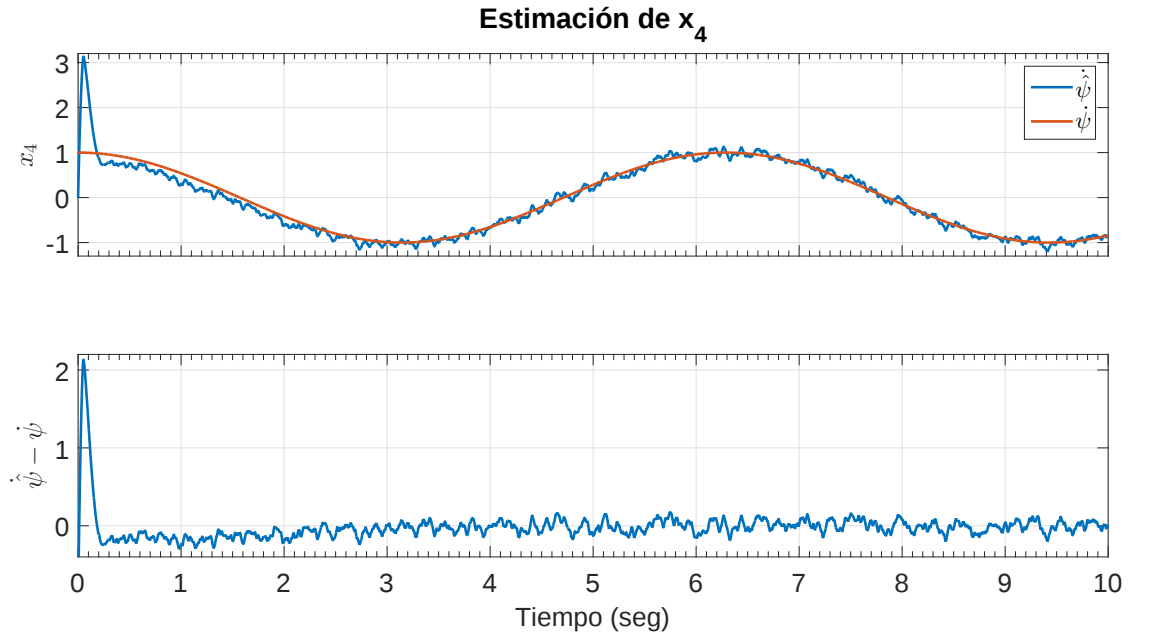


Figura 5-3: Estados del sistema (3-19)

Finalmente la Figura 5-4 muestra el valor de la ganancia de Kalman y el valor del error de covariancia, los cuales convergen como se esperaba.

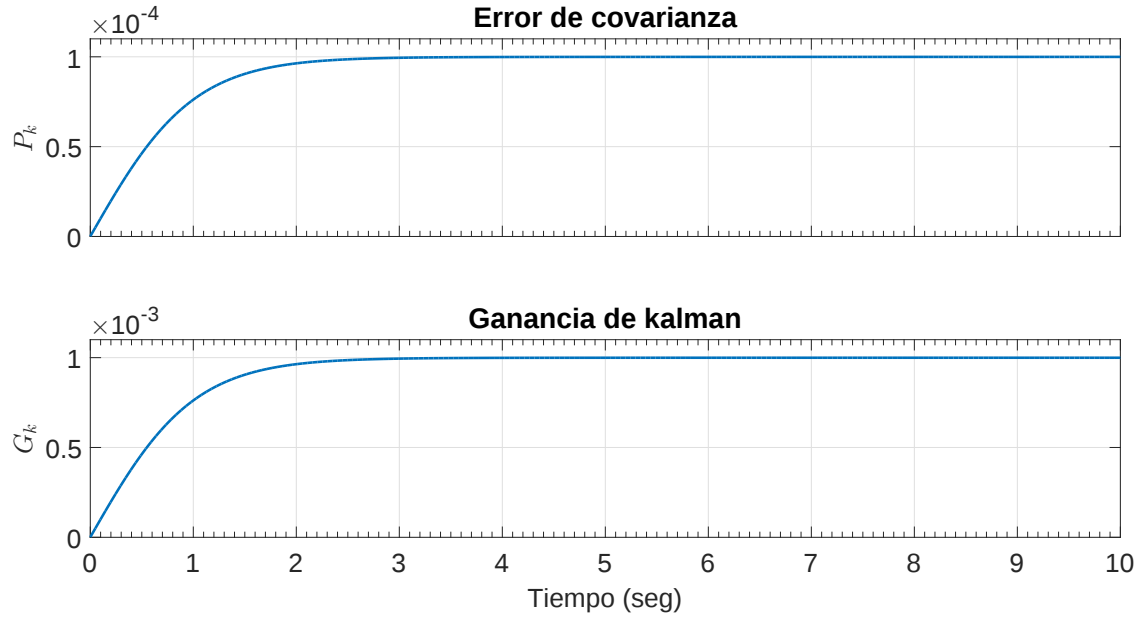
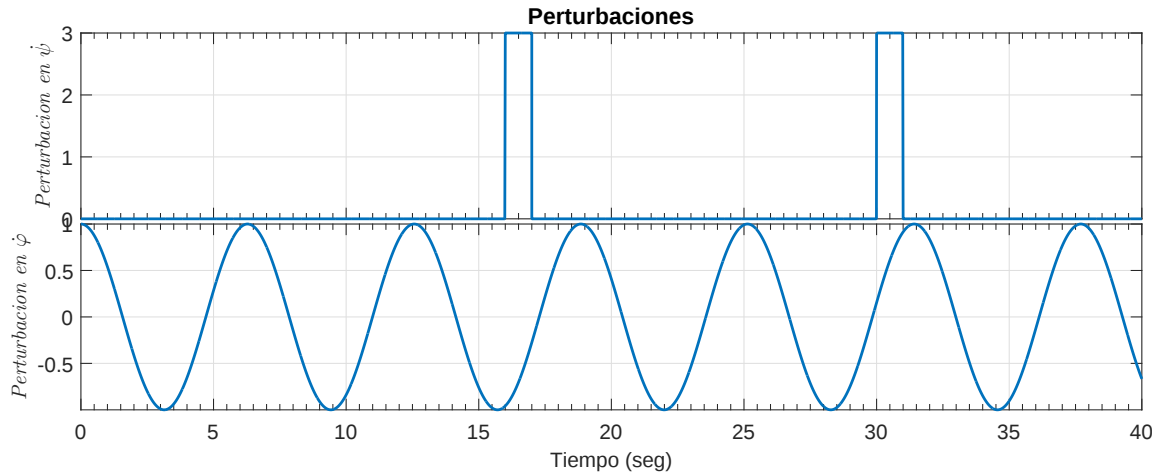


Figura 5-4: Simulación de mediciones

5.1.2. Simulación Algoritmo Twisting Continuo

Con la finalidad de verificar la robustez de los algoritmos de control se simularon perturbaciones en el estado $x_3 = \dot{\psi}$ el cual es desacoplado del canal de control y en el estado $e_6 = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_d$ donde $\dot{\varphi}_d$ es la velocidad angular deseada, el cual está desacoplado del canal de control, ambas perturbaciones mostradas en la Figura 5-5.


Figura 5-5: perturbaciones en $\dot{\psi}$ y $\dot{\varphi}$

La perturbación desacoplada se puede observar que causa pérdida del modo deslizante como se

ve en la gráfica 5-7 lo cual tiene consecuencias todas las subsecuentes gráficas. Por otro lado la perturbación acoplada al canal de control no causa inestabilidad en los estados del sistema.

El control para los motores izquierdo y derecho de la ecuación (4-27) se muestra en la Figura 5-6, se observa que las cotas de la señal de control están en el rango de operación de los motores lo cual es buena señal para la implementación real.

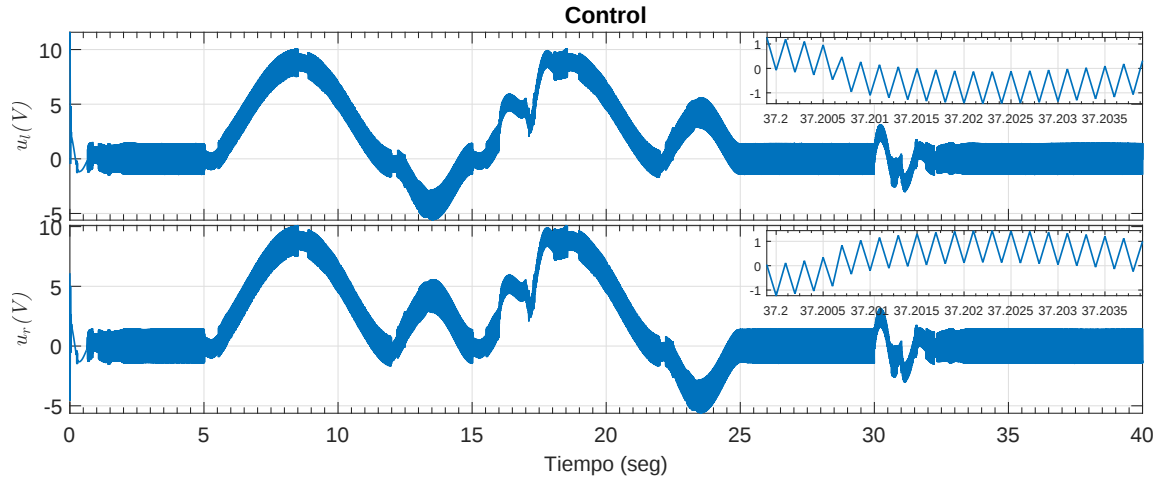


Figura 5-6: Voltaje aplicado a los motores.

Las superficies de deslizamiento diseñadas en la Sección 2.5 se muestran en la Figura 5-7

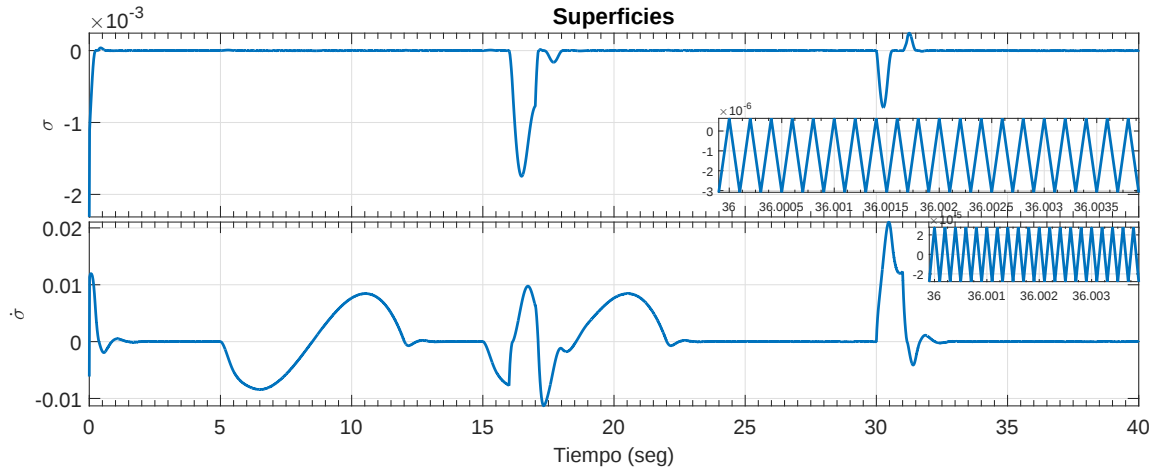


Figura 5-7: Superficies de deslizamiento para el sistema (3-18)

Los estados del sistema (3-18) se muestran en 5-8 y los del sistema (3-19) en (5-9). Cabe resaltar que el error para los estados x_3 y x_4 no se muestra pues no hay trayectoria a seguir, simplemente se realizó regulación en estos estados.

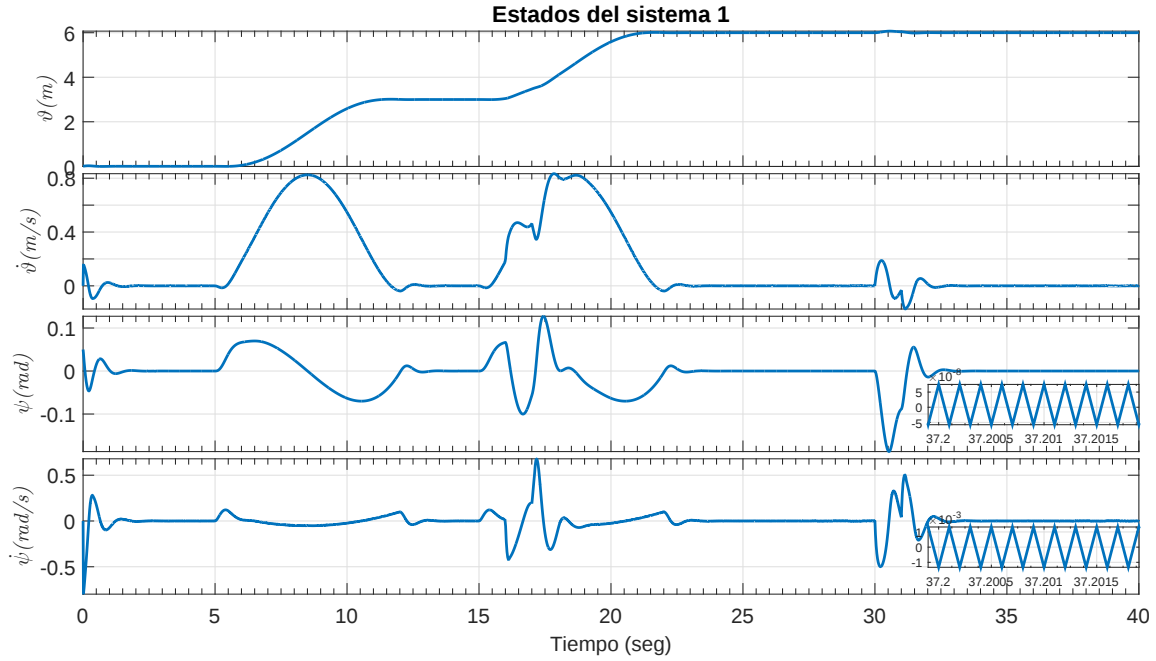


Figura 5-8: Estados del sistema (3-18)

Se puede observar que la convergencia de estos estados es asintótica como se esperaba.

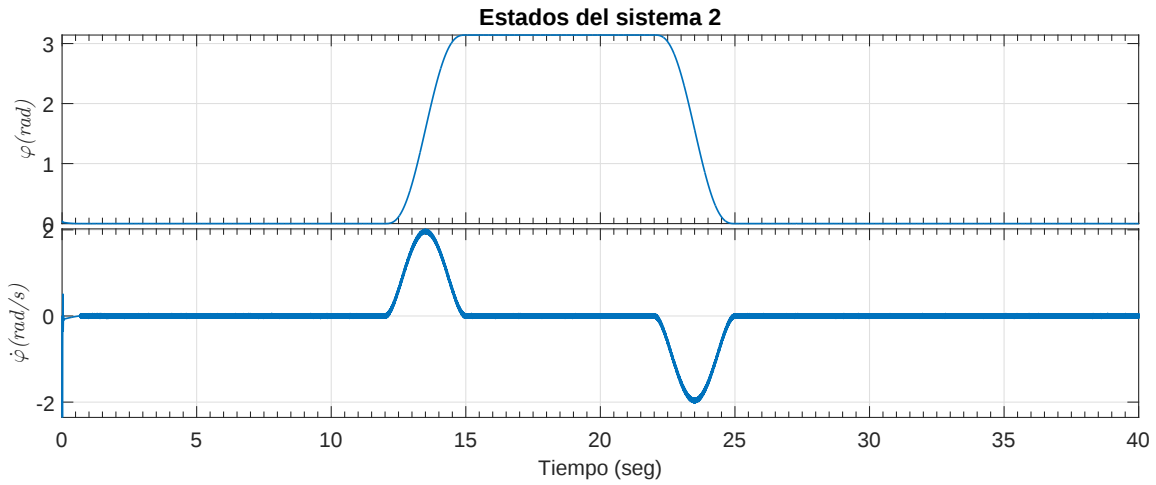


Figura 5-9: Estados del sistema (3-19)

El error de seguimiento ¹ para el sistema (3-18) se muestra en la Figura 5-10, y para el sistema (3-19) se muestra en la Figura 5-11. De igual manera se tiene una convergencia asintótica de estos

¹En todo el Capítulo presente el error e_i es el i -ésimo error de seguimiento en la i -ésima variable, i.e. $e_i = x_i - x_{i_d}$ donde x_{i_d} es la trayectoria deseada en la i -ésima variable mostrada en las Figuras 4-4 y 4-5

errores como se esperaba.

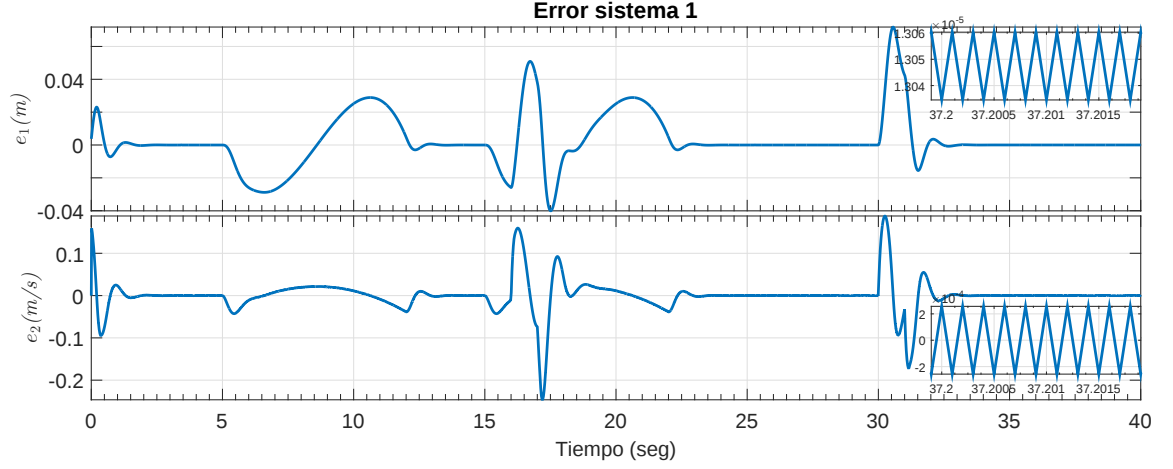


Figura 5-10: Error de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$

La figura 5-11 muestra el error de seguimiento para los estados φ y $\dot{\varphi}$, los cuales convergen en tiempo finito y además son insensibles a perturbaciones como se esperaba.

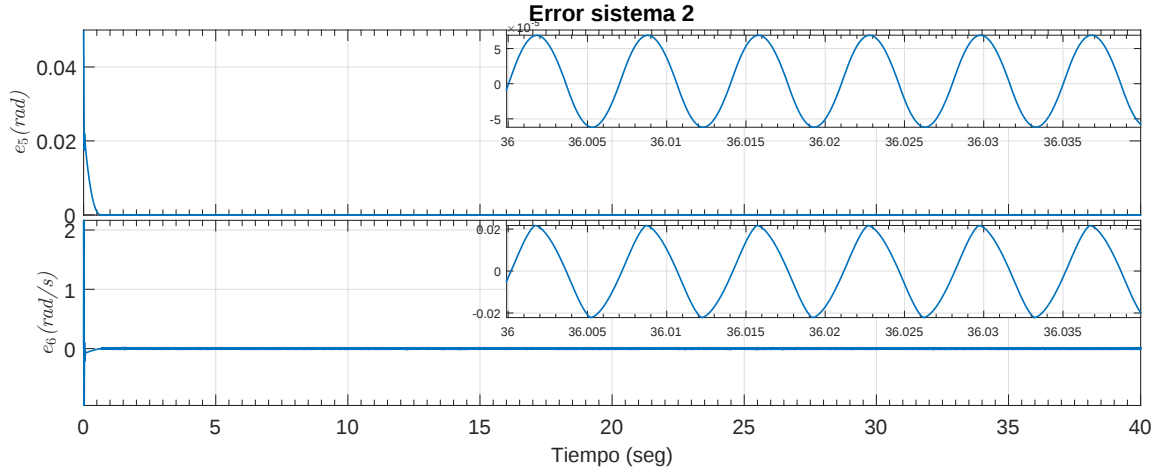


Figura 5-11: Error de los estados φ y $\dot{\varphi}$

Los controladores v_1 y v_2 presentados en 4.7 se muestran en 5-12

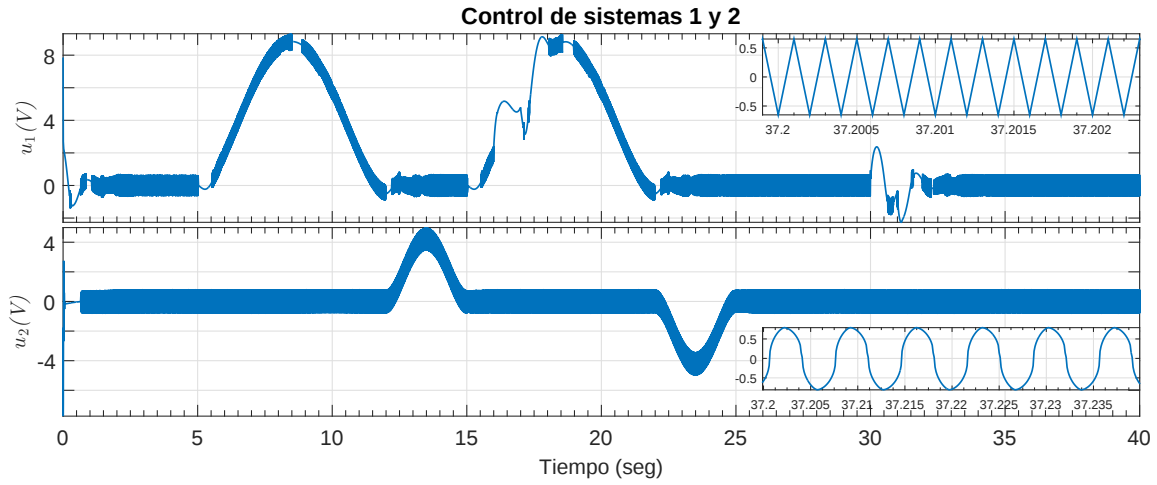


Figura 5-12: Control estabilizador de los sistemas (3-18) y (3-19)

La Figura 5-13 muestra la comparación entre el estado real x_6 y $\hat{x}_6$ donde esta última es el estimado por el Diferenciador robusto y exacto de orden arbitrario¹, de manera análoga, la gráfica 5-23 muestra las mismas variables pero el diferenciador es el obtenido en 4.5

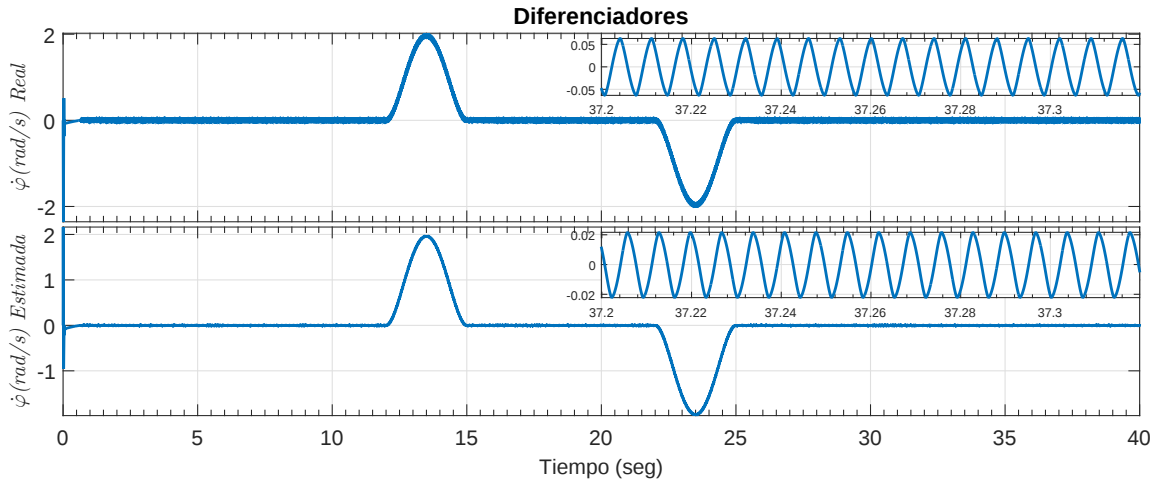


Figura 5-13: Diferenciador

Finalmente el control integral para los sistemas (3-18) y (3-19) se presentan en la Figura 5-14

¹El estado usado en las simulaciones fue el obtenido a partir del diferenciador

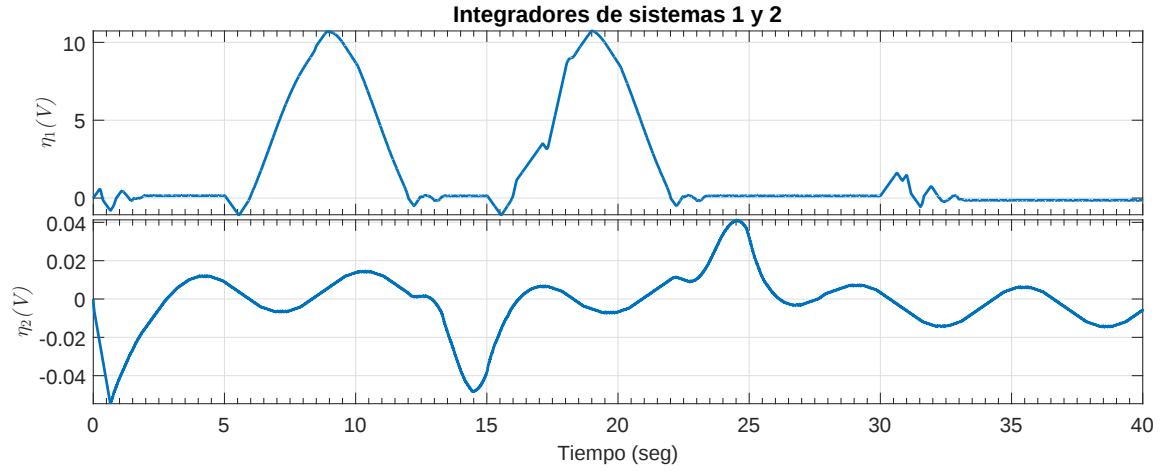


Figura 5-14: Control Integral

5.1.3. Simulación Algoritmo Twisting Continuo por realimentación de salida

Las siguientes gráficas muestran las simulaciones para el CTA con realimentación de salida, cabe recalcar que el algoritmo de control para el sistema (3-18) no cambió, lo único que se cambió fue el algoritmo para el sistema (3-19) con lo que hay que tener mayor atención al cambio en éste sistema i.e. en las gráficas 5-20, 5-21, 5-22 y en especial 5-23.

La Figura 5-15 muestra la señal de control del sistema, se puede observar que la señal control no sobrepasa el voltaje aceptado por los motores reales, esto es un buen indicador para la implementación real.

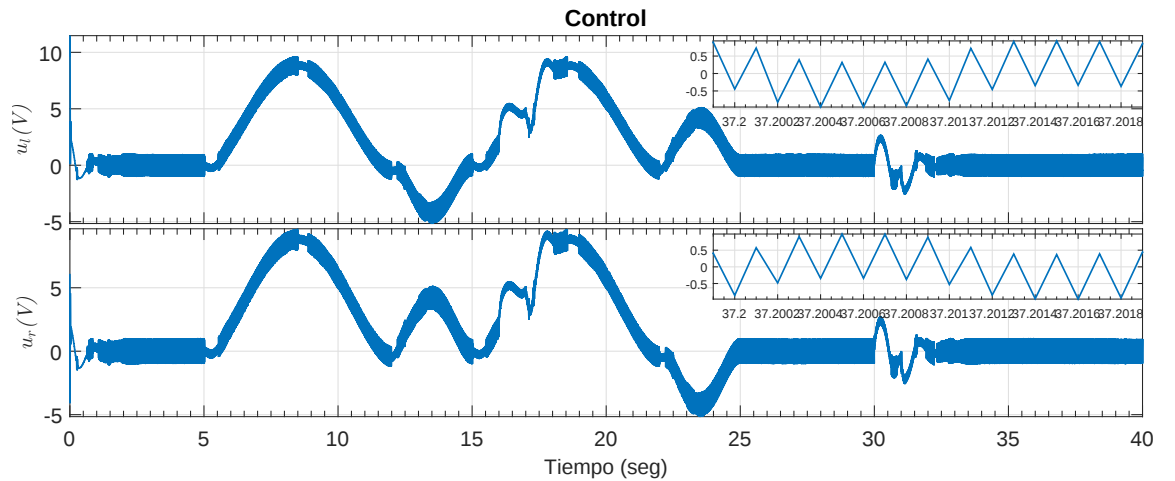


Figura 5-15: Voltaje aplicado a los motores.

En la Figura 5-16 se muestran las superficies de deslizamiento diseñadas para el sistema de grado relativo cuatro.

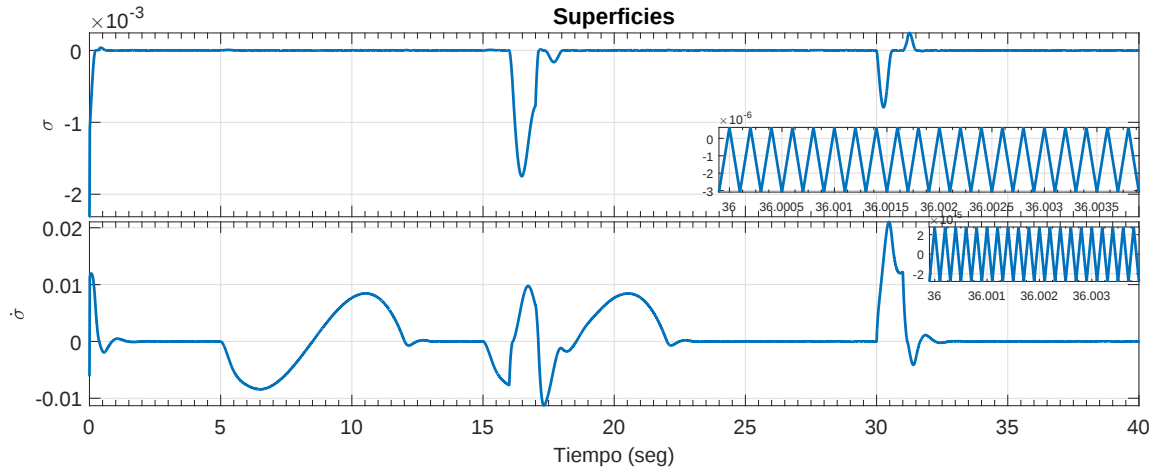


Figura 5-16: Superficies de deslizamiento para el sistema (3-18)

La Figura 5-17 muestra los estados del sistema x_1 a x_4 , los cuales tienen una convergencia asintótica.

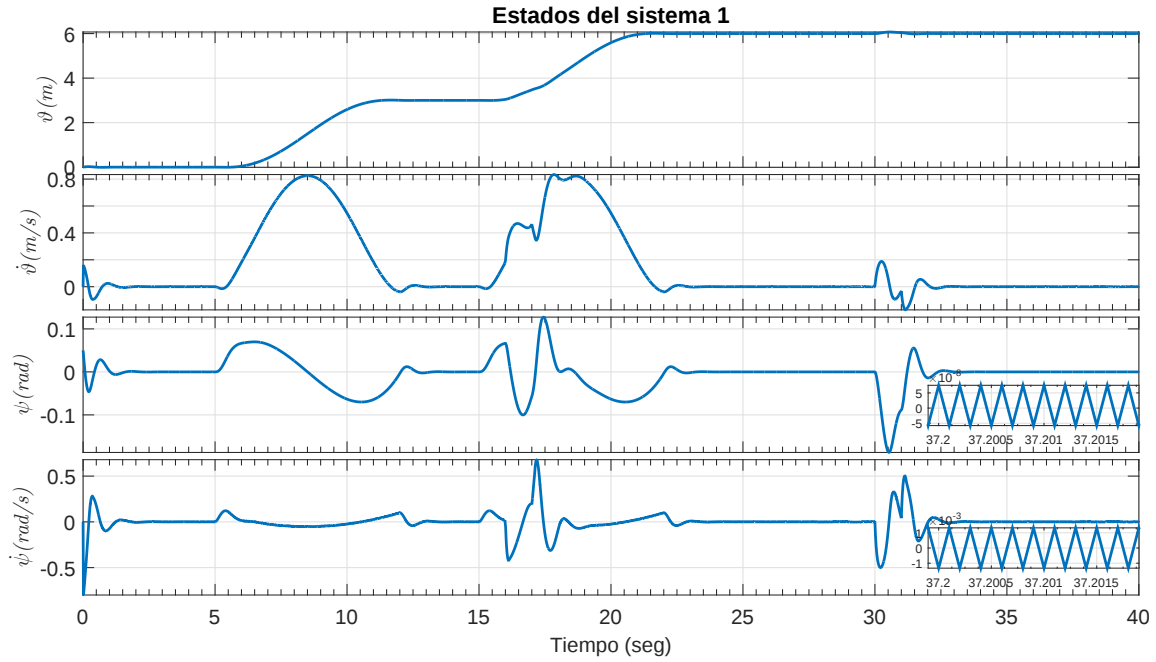


Figura 5-17: Estados del sistema (3-18)

Los estados x_5 y x_6 son mostrados en (5-18), estos estados tienen convergencia en tiempo finito como se diseñó.

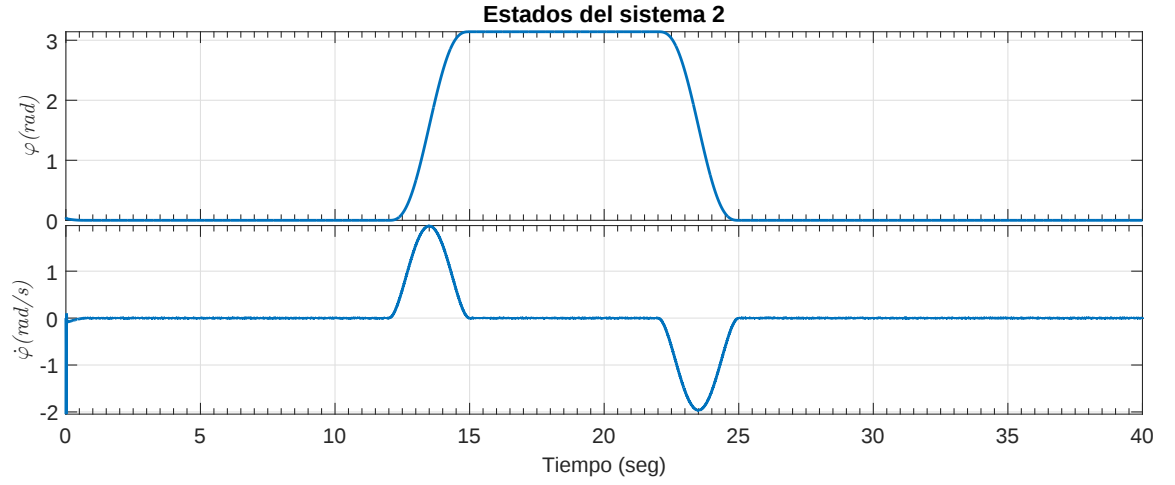
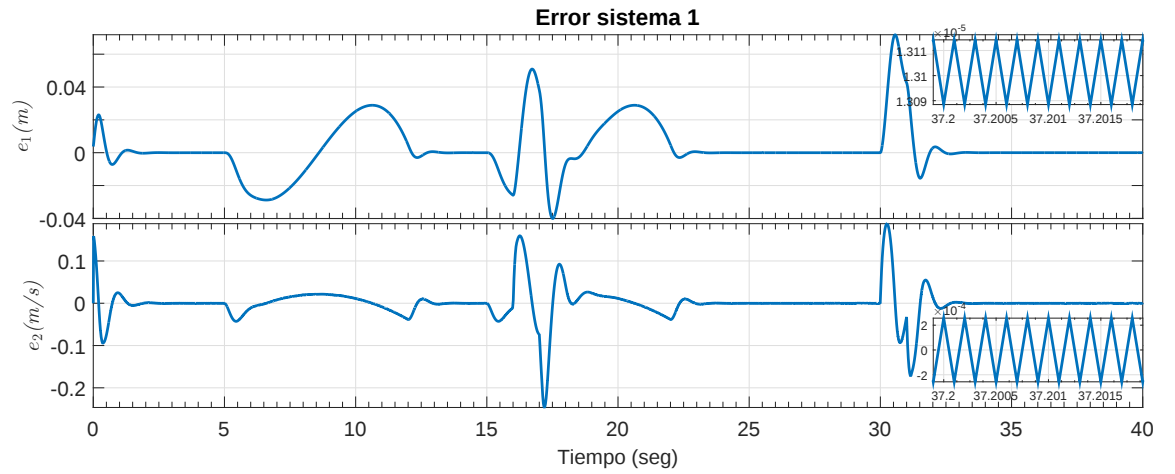


Figura 5-18: Estados del sistema (3-19)

El error de los estados x_1 y x_2 se muestra en 5-19. Cabe resaltar que el error para los estados x_3 y x_4 no se muestra pues no hay trayectoria a seguir, simplemente se realizó regulación en estos estados.


 Figura 5-19: Error de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$

En 5-20 se muestra el error de seguimiento para los estados x_5 y x_6 el cual se puede ver que converge en tiempo finito y es insensible a perturbaciones que cumplen la condición de acoplamiento.

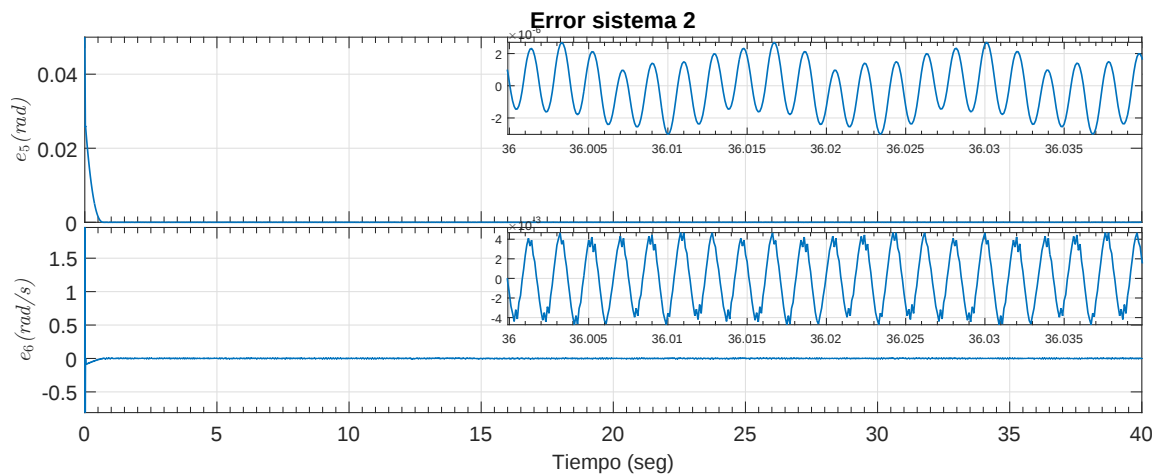


Figura 5-20: Error de los estados φ y $\dot{\varphi}$

Para simular la acción de las perturbaciones se simularon las mostradas en 5-21 de las cuales la perturbación que entra en $\dot{\psi}$ no cumple la condición de acoplamiento, mientras la que entra en $\dot{\varphi}$, sí entra acoplada al canal de control. Por lo que la primera hará que se pierda el modo deslizante mostrado en 5-16 mientras que la segunda no causará efecto alguno, como se muestra en 5-20.

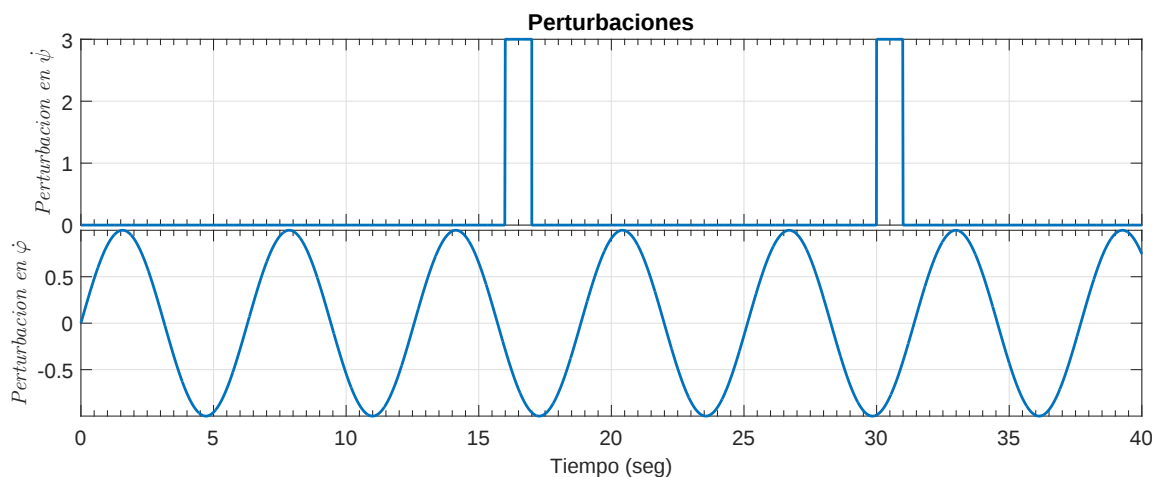
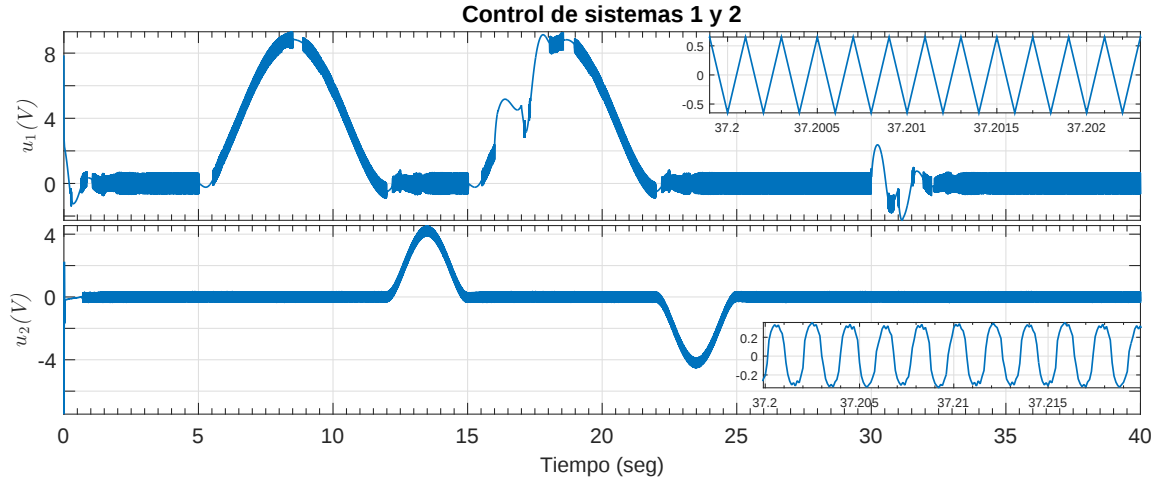
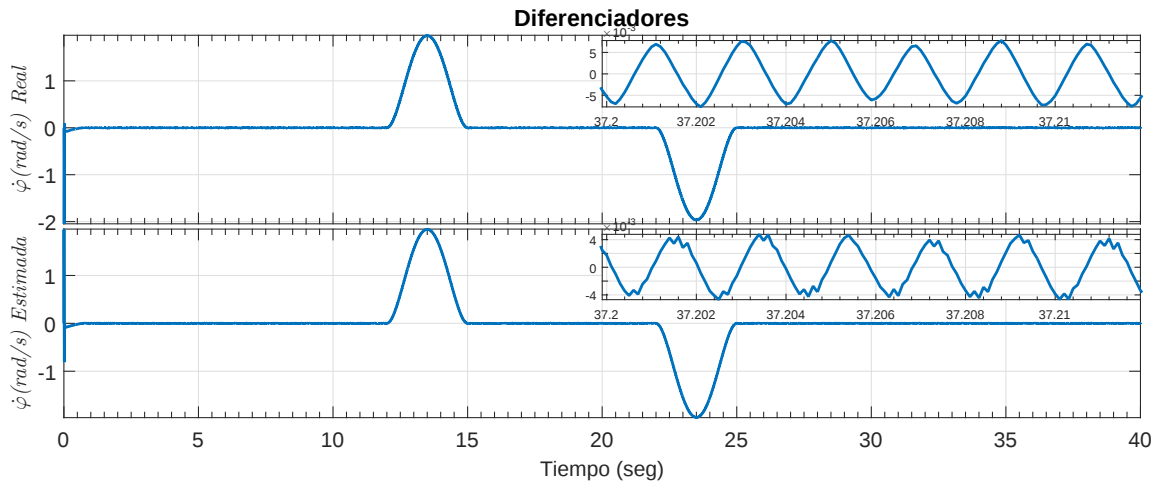


Figura 5-21: perturbaciones en $\dot{\psi}$ y $\dot{\varphi}$

La Figura 5-22 muestra las señales de control para los sistemas desacoplados.

Figura 5-22: perturbaciones en ψ y $\dot{\varphi}$

En estas simulaciones se reconstruyó x_6 a partir del esquema de control-observador que nos ofrece el CTA con realimentación de salida (CTA-OF). En la Figura 5-23 se muestran las diferencias entre este con el valor de x_6 obtenido con el diferenciador de alto orden 2.2.6. Se puede observar que aunque la señal de x_6 obtenida a partir del CTA-OF es menos suave se tiene una cota menor, lo que se traduce en una mejor precisión en el modo deslizante que el obtenido en la Sección anterior donde se obtuvo x_6 con el diferenciador de Levant.

Figura 5-23: Reconstucción de x_6

La Figura 5-24 muestra la señal de control integral.

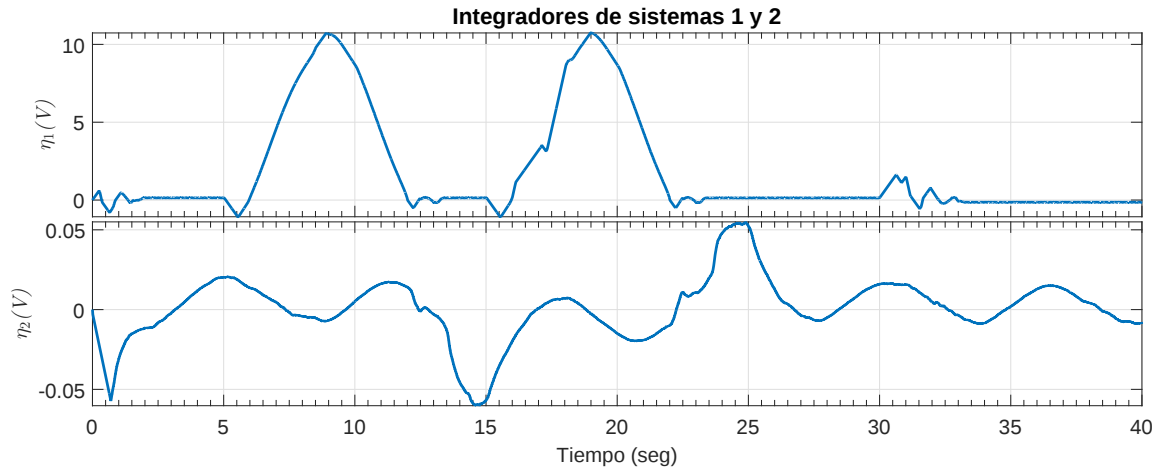


Figura 5-24: Control Integral

Conclusiones de las simulaciones Se puede observar que el control calculado en las simulaciones 5-6 y 5-15 es viable, pues el valor calculado está por debajo del máximo físico del sistema además de que las oscilaciones de alta frecuencia de la señal de control son menores al 10 % de la capacidad del actuador lo cual es aceptable. También podemos observar que el *performace* entre el CTA y el CTA con realimentación de salida es muy similar pues ambos observadores tienen características similares. Por lo tanto podemos proceder a la implementación física de los controladores.

5.2. Resultados Experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales. En la primera subsección se presentan los resultados de la implementación para el Filtro de Kalman, en la segunda los resultados para el CTA por realimentación de estado, en la tercera los resultados para el CTA por realimentación de salida y en la última los resultados para los distintos conjuntos de ganancias estabilizantes del CTA.

Para todos los experimentos se realizó el seguimiento de las trayectorias mostrada en las Figuras 4-4 y 4-5

5.2.1. Filtro de Kalman

Los resultados obtenidos en esta sección se obtuvieron a partir de la implementación del CTA.

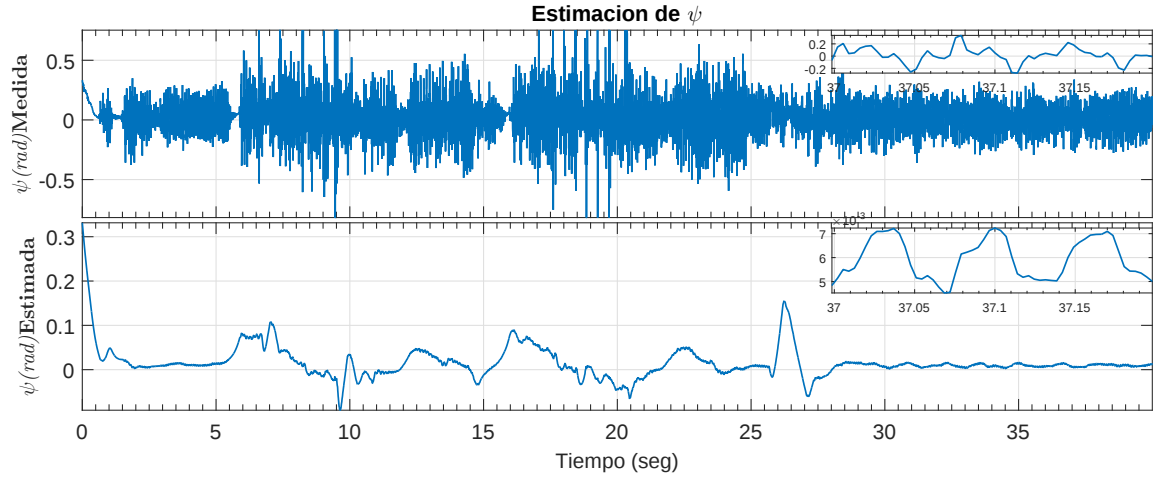


Figura 5-25: Estados del sistema (3-19)

En la gráfica 5-25 se muestra la comparación entre la señal medida con el IMU y la señal obtenida a partir del filtro diseñado en 3.2.6 para ψ . Podemos observar como el filtro realiza su trabajo de manera satisfactoria, pues la señal origina varía entre -0.2 y 0.2 radianes en estado estable y el filtro varía entre 0.005 y 0.007 en estado estable .

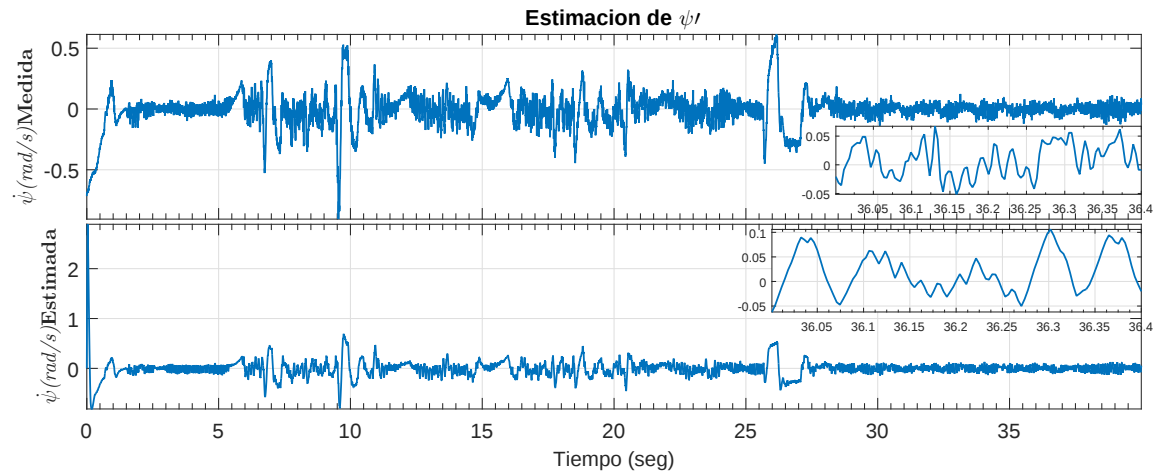


Figura 5-26: Estados del sistema (3-19)

La Figura 5-26 muestra la señal de $\dot{\psi}$ obtenida por el giroscopio y la señal $\dot{\psi}$ obtenida a partir de diferenciar ψ filtrada con el Filtro de Kalman de la Figura 5-25, pese a que las señales son muy parecidas se optó por utilizar la señal diferenciada pues es más suave que la señal medida.

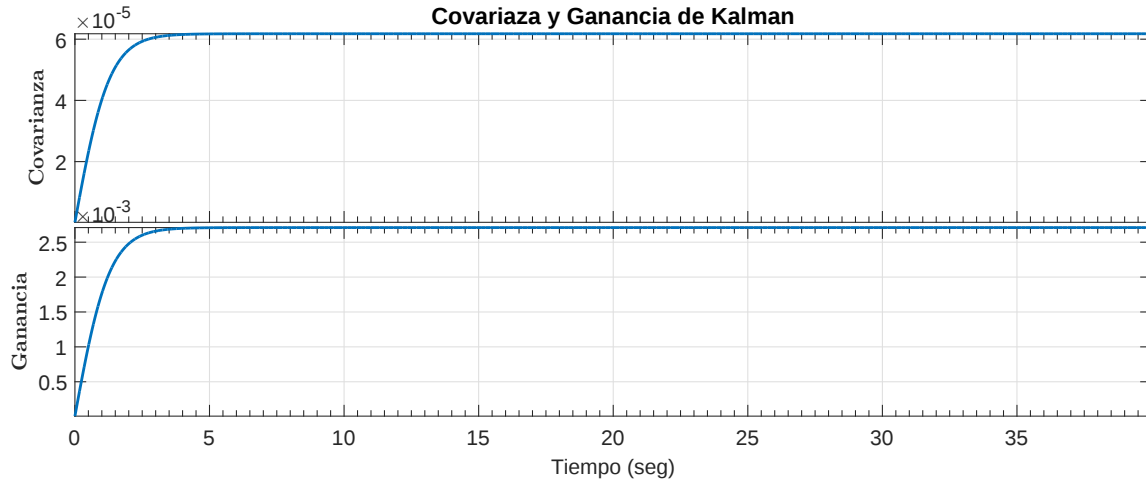


Figura 5-27: Covarianza y Ganancia de Kalman

La gráfica 5-27 muestra el valor de la covarianza y de la ganancia de Kalman para el Filtro de Kalman diseñado en la Sección 3.2.6

5.2.2. Experimento para el Algoritmo Twisting Continuo por realimentación de estados

En esta sección se muestran los resultados de la implementación del CTA por realimentación de estado, sin embargo, teóricamente se debe tener la medición de todas las variables de estado, pero al no tenerlas por carencia de sensores, se aplicó el diferenciador presentado en 2.2.6 para obtenerlas.

El diseño de este algoritmo empleado para la simulación se muestra en (4-28) y en (4-29). La siguiente Tabla 5-1 muestra el valor de las ganancias k_i para el CTA.

Tabla 5-1: Ganancias implementadas para el CTA con realimentación de estado

Tabla 5-2: Ganancias para el sistema (3-18) con $L = 94.5$

k_i	Valor
k_1	20.3781
k_2	12.8363
k_3	1.2994
k_4	0.6795

Tabla 5-3: Ganancias para el sistema (3-19) con $L = 4.12$

k_i	Valor
k_1	2.5243
k_2	2.6802
k_3	0.0566
k_4	0.0296

En esta y las siguientes subsecciones, aproximadamente en el segundo 23 se aplica una perturbación no acoplada al canal de control para observar la reacción del controlador.

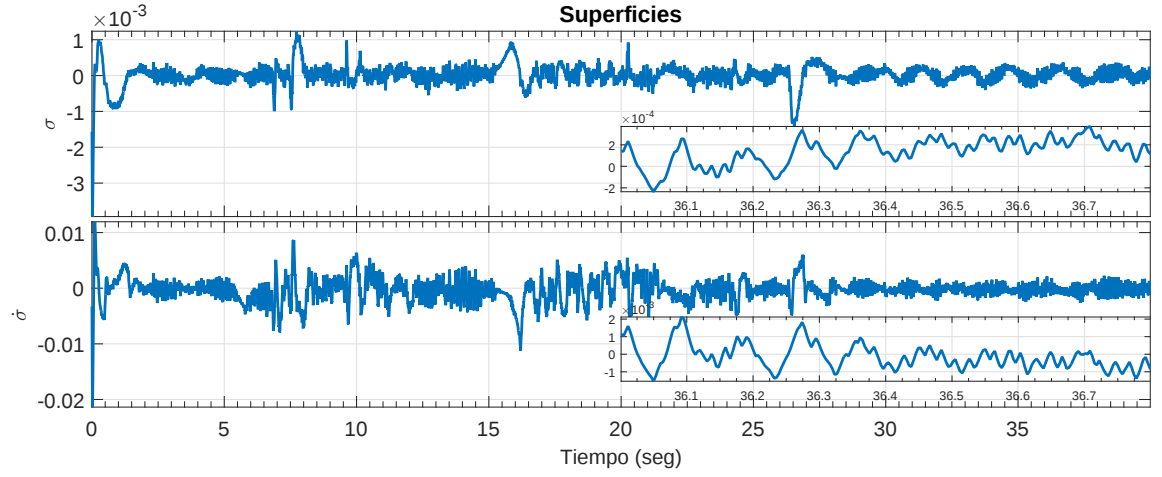


Figura 5-28: Superficies de deslizamiento para el sistema (3-18)

En la gráfica 5-28 se muestra la superficie de deslizamiento diseñada en la Sección 4.2.

En estado estacionario, la superficie de deslizamiento tiene una precisión es de 3.7×10^{-4} para s y de 2.1×10^{-3} para $\dot{s}$.

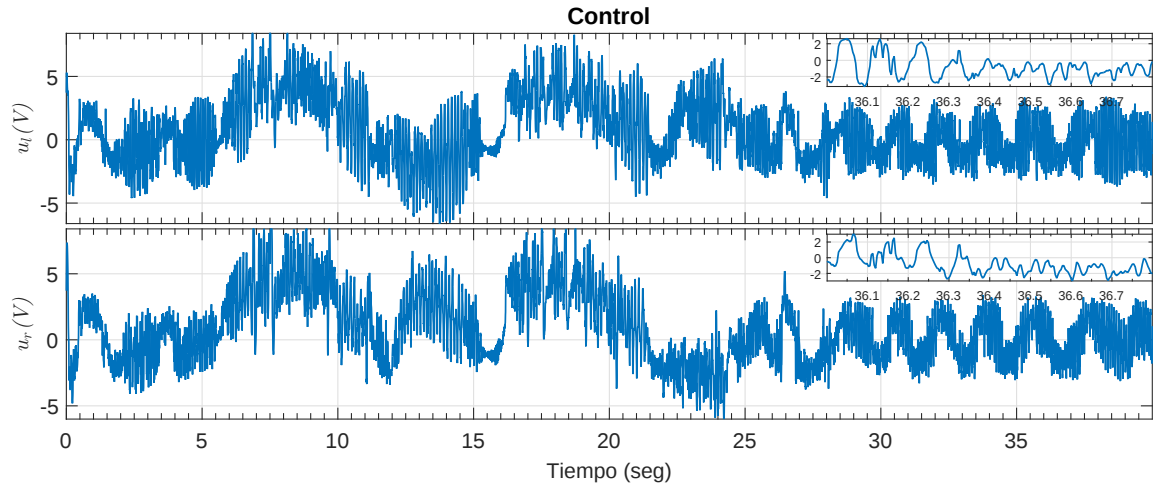


Figura 5-29: Voltaje aplicado a los motores.

La Figura 5-29 se muestra la señal de control continua que se aplica en los motores del Robot Péndulo, la señal está dada por el voltaje aplicado en los motores.

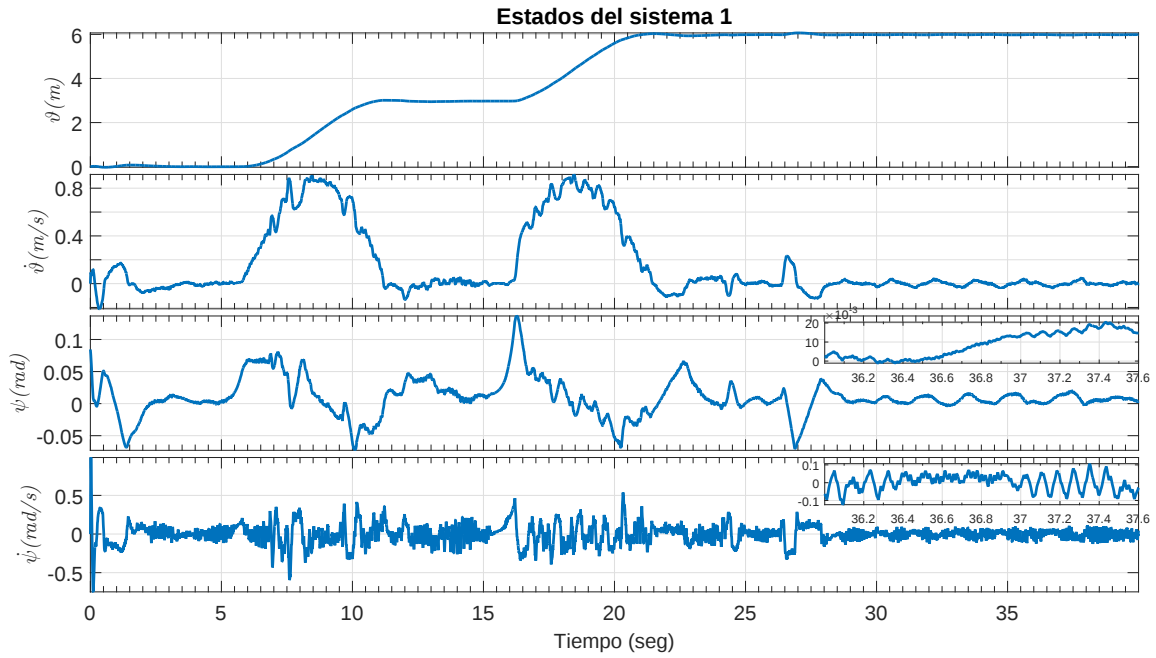


Figura 5-30: Estados del sistema (3-18)

En la Figura 5-30 se muestran los estados para el sistema (3-18) en los cuales se puede observar que la cota de ψ es de 0.02 radianes y de $\dot{\psi}$ de 0.1 radianes por segundo.

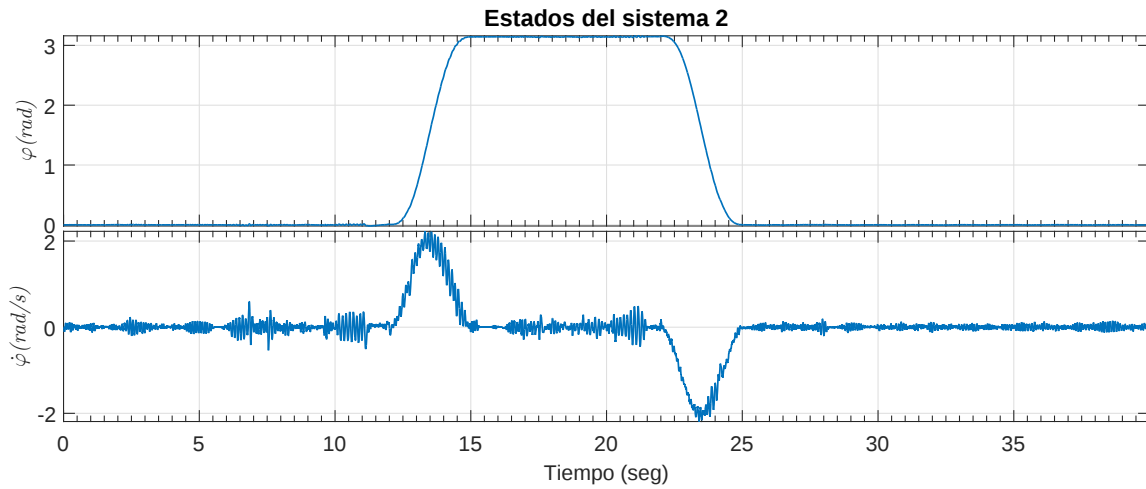
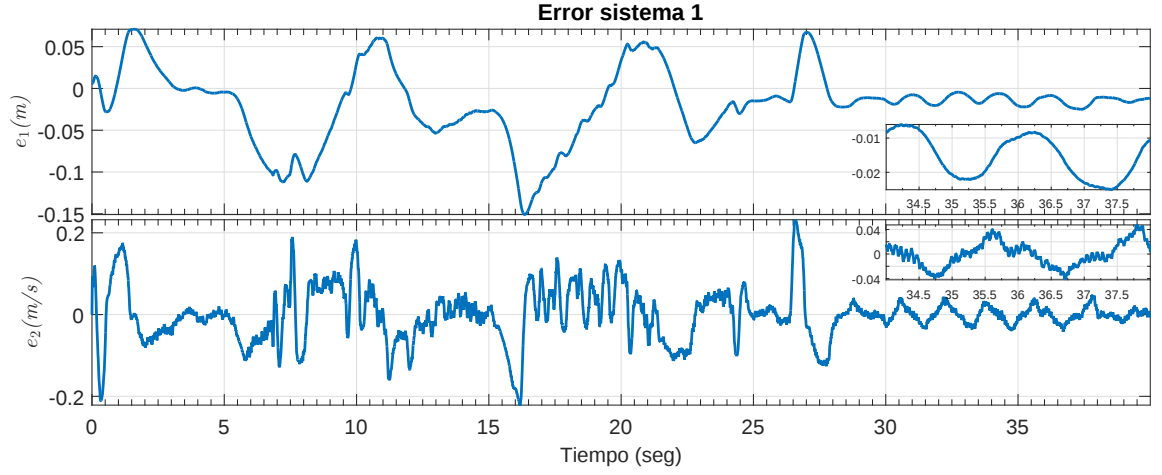


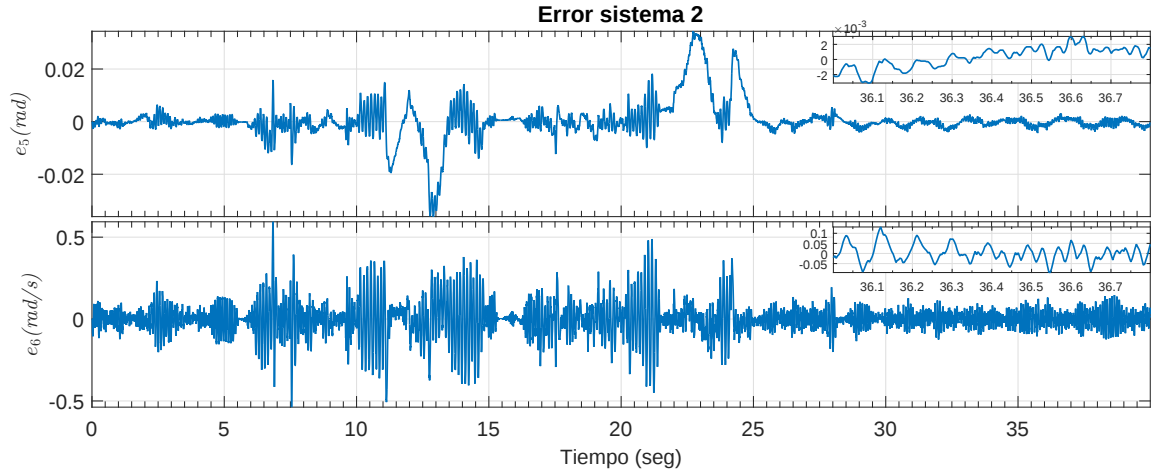
Figura 5-31: Estados del sistema (3-19)

En la Figura 5-31 se muestra el estado del sistema (3-19).

Figura 5-32: Error de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$

En la Figura 5-32 se muestra el error de seguimiento de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$ los cuales tienen un error en estado estacionario de 0.3 para ϑ y de 0.6 para $\dot{\vartheta}$.

Este error debería ser teóricamente cero, pero debido a que en la práctica no se puede llegar a un modo deslizante ideal, entonces se tiene este error en estado estacionario.

Figura 5-33: Error de los estados φ y $\dot{\varphi}$

En la Figura 5-33 se muestra el error de los estados φ y $\dot{\varphi}$ los cuales muestran además la precisión del CTA, la cual es de 3.1×10^{-3} para φ y de 0.13 para $\dot{\varphi}$.

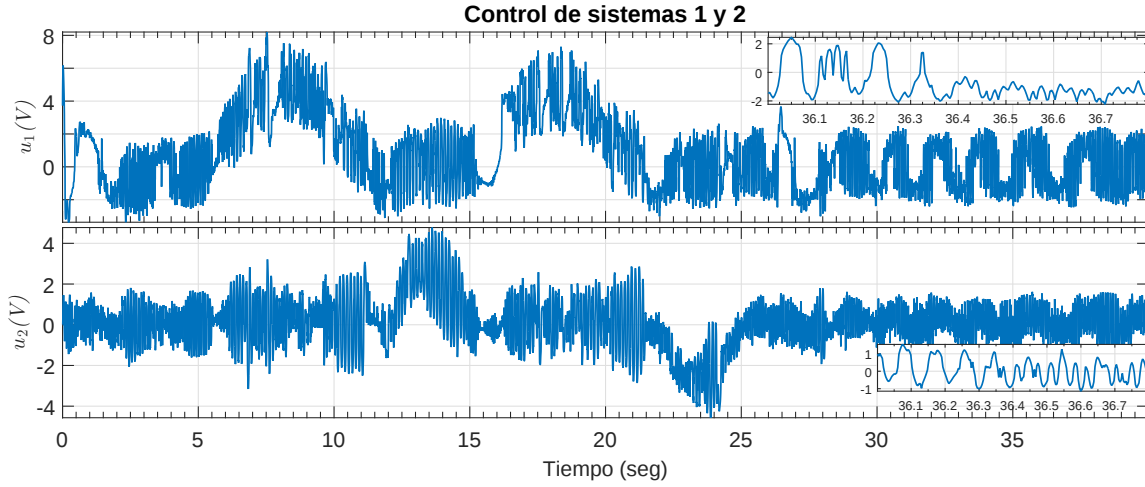


Figura 5-34: Control estabilizador de los sistemas (3-18) y (3-19)

La Figura 5-34 se muestran los controladores usados en cada uno de los sistemas desacoplados, controles los cuales se multiplican por una matriz de cambio de coordenadas, transformación que cambia estos controles a las coordenadas originales del sistema.

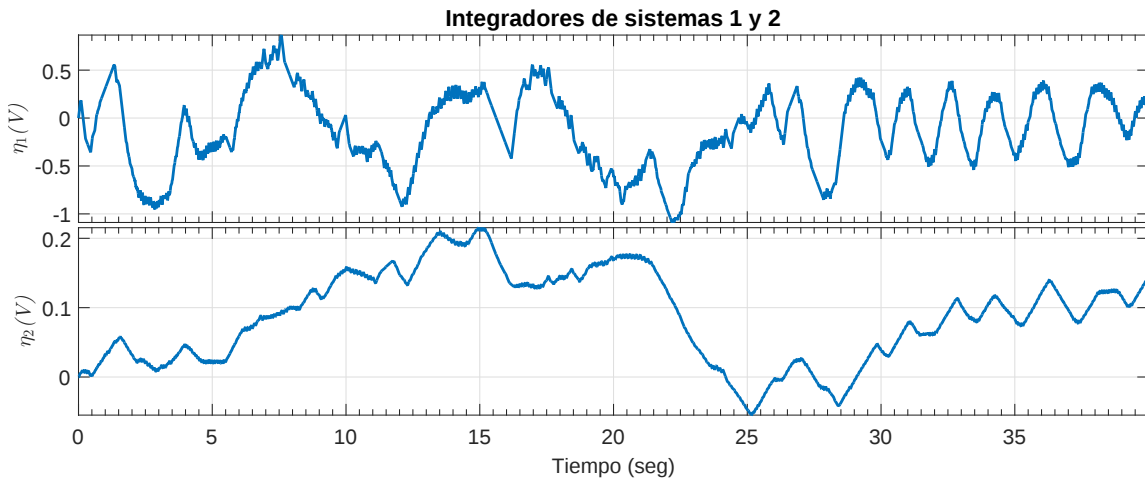


Figura 5-35: Control Integral

La Figura 5-35 muestra la señal del control integral de (2-53). Este converge al negativo de la perturbación, pues por definición $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(t) + \eta$ y por el Teorema x_3 alcanza el origen en tiempo finito por lo tanto $\eta = -\zeta(t)$.

5.2.3. Experimento para el Algoritmo Twisting Continuo por realimentación de salida

En esta sección se verificará el algoritmo presentado en 4.5, este algoritmo es discrepa con el presentado en 4.4 únicamente en el observador utilizado.

Debido a que el diseño de superficies por LQ singular tiene la ventaja de obtener la superficie σ y de su derivada $\dot{\sigma}$ entonces no es necesario usar el observador propuesto en 2.6.3 para el sistema (3-18), por lo tanto se utilizará este observador únicamente para el sistema (3-19). La finalidad de este experimento es probar la estabilidad del esquema de controlador y observador presentado en 4.5 y comparar este observador al propuesto por [36].

Las ganancias del controlador son las mismas a las mostradas en la Tabla 5-1, las ganancias usadas para el observador se muestran en la siguiente Tabla.

l_i	Valor
l_1	35.2223
l_2	93.2145
l_3	1.0950

Tabla 5-4: Ganancias para el observador en (4-30) con $H = 50$

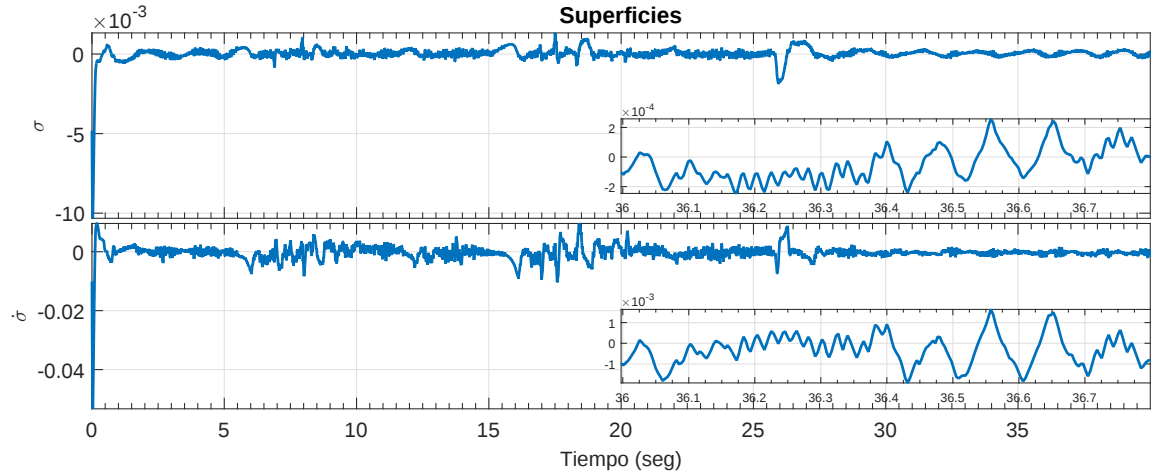


Figura 5-36: Superficies de deslizamiento para el sistema (3-18)

En estado estacionario, la superficie de deslizamiento de la Figura 5-36 tiene una precisión es de 2.5×10^{-4} para s y de 1.9×10^{-3} para $\dot{s}$.

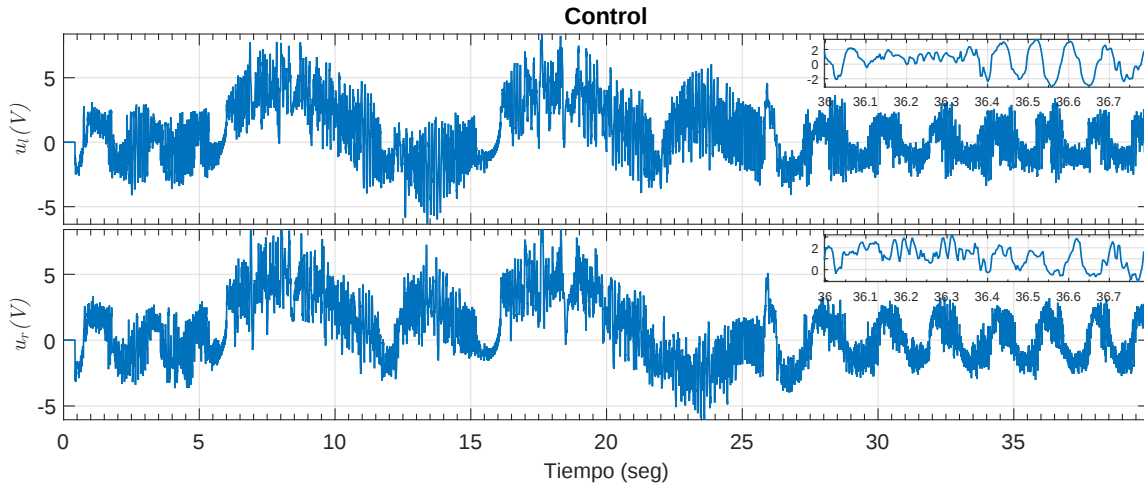


Figura 5-37: Voltaje aplicado a los motores.

La Figura 5-37 se muestra la señal de control continua que se aplica en los motores del Robot Péndulo, la señal está dada por el voltaje aplicado en los motores.

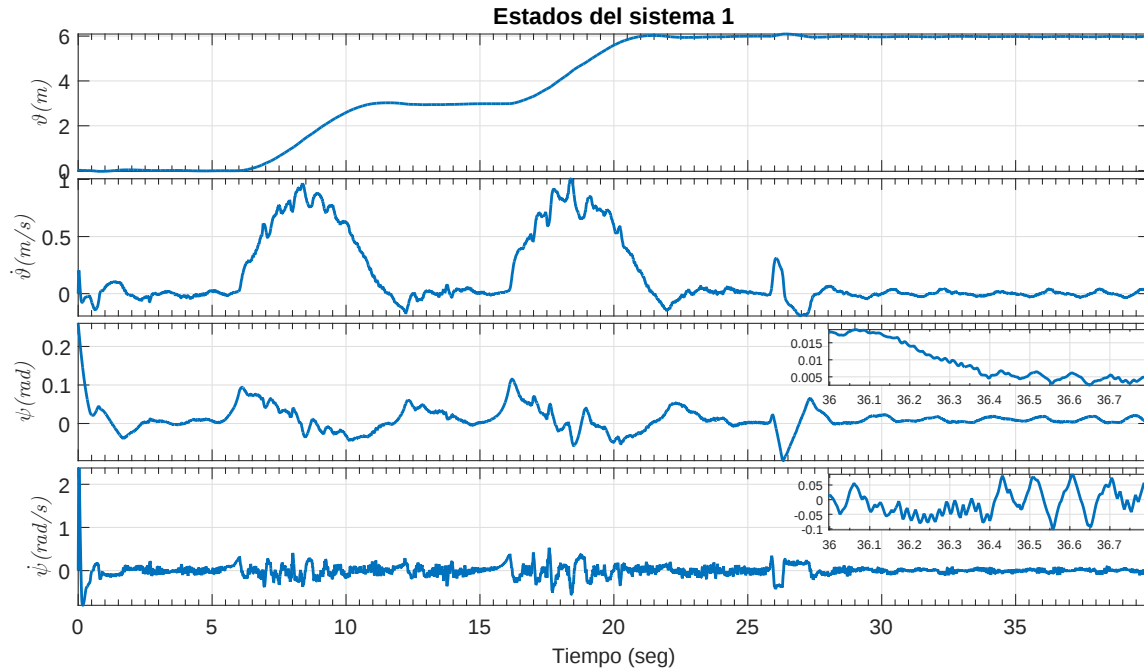


Figura 5-38: Estados del sistema (3-18)

En la Figura 5-38 se muestran los estados para el sistema (3-18) en los cuales se puede observar que la cota de ψ es de 0.018 radianes y de $\dot{\psi}$ de 0.1 radianes por segundo.

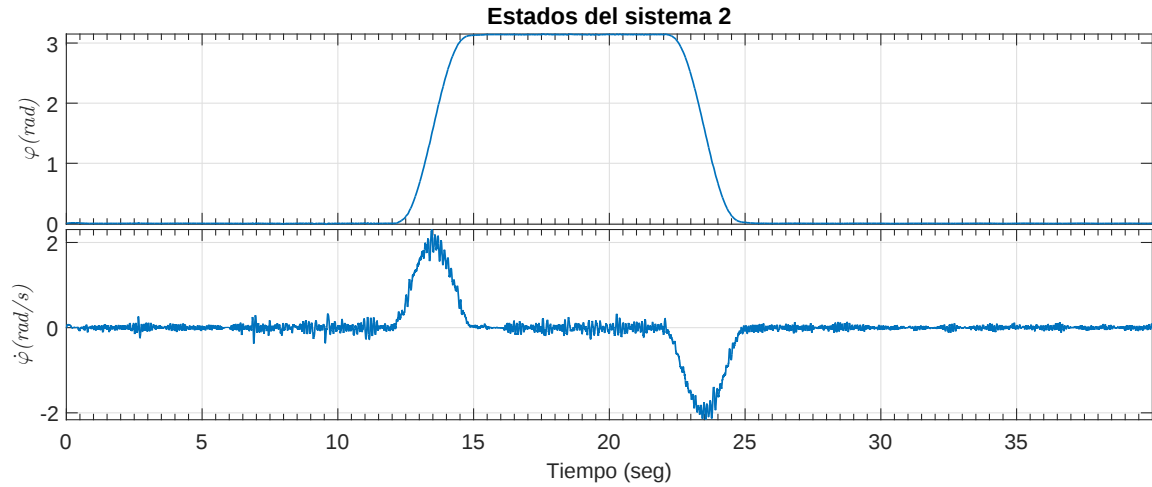


Figura 5-39: Estados del sistema (3-19)

En la Figura 5-39 se muestra el estado del sistema (3-19).

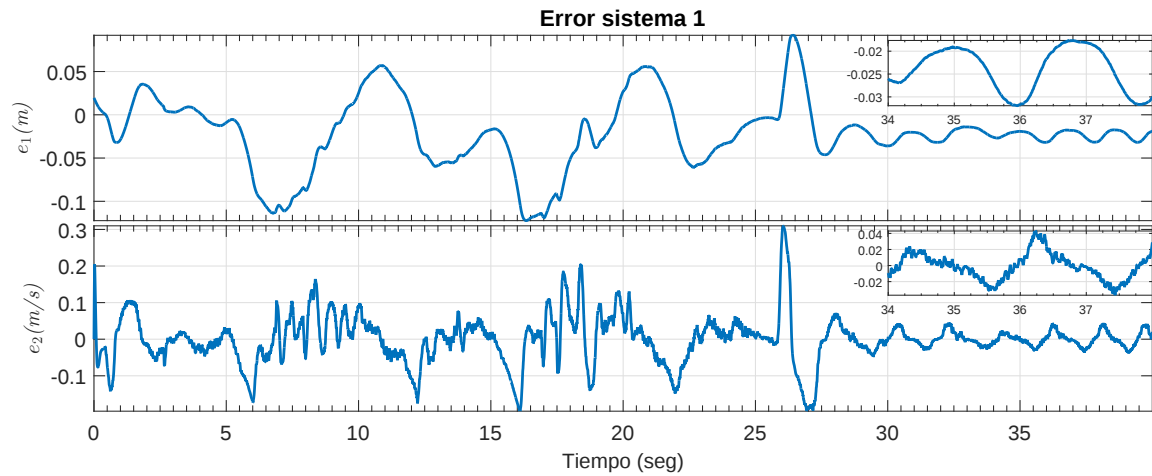


Figura 5-40: Error de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$

En la Figura 5-40 se muestra el error de seguimiento de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$ los cuales tienen un error en estado estacionario de 0.4 para ϑ y de 0.57 para $\dot{\vartheta}$.

Este error debería ser teóricamente cero, pero debido a que en la práctica no se puede llegar a un modo deslizante ideal, entonces se tiene este error en estado estacionario.

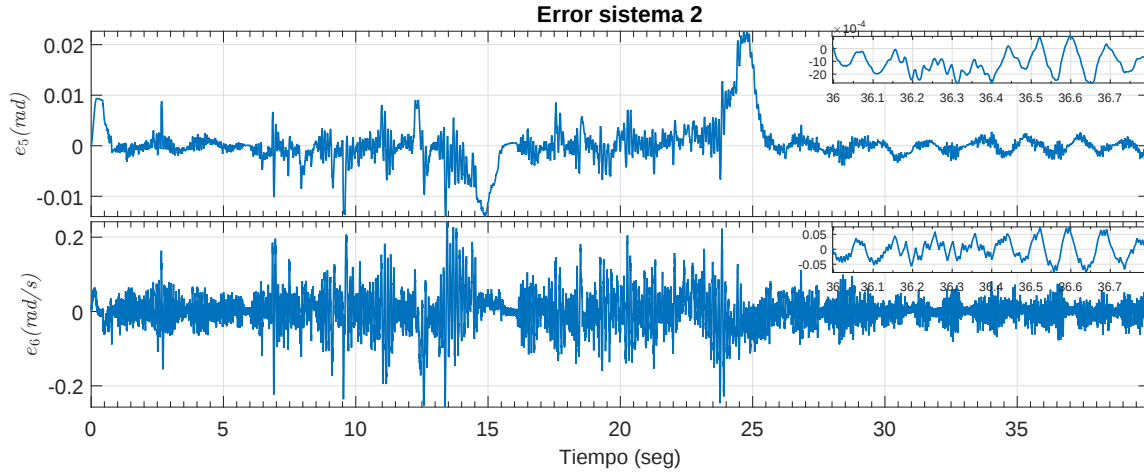


Figura 5-41: Error de los estados φ y $\dot{\varphi}$

En la Figura 5-41 se muestra el error de los estados φ y $\dot{\varphi}$ los cuales muestran además la precisión del CTA, la cual es de 2.7×10^{-3} para φ y de 0.07 para $\dot{\varphi}$.

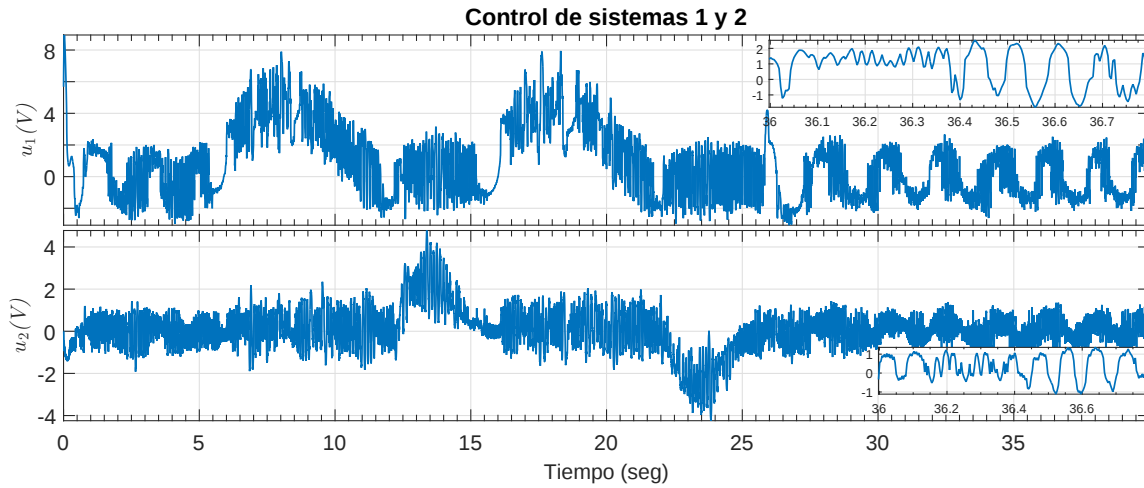


Figura 5-42: Control estabilizador de los sistemas (3-18) y (3-19)

La Figura 5-42 se muestran los controladores usados en cada uno de los sistemas desacoplados, controles los cuales se multiplican por una matriz de cambio de coordenadas, transformación que cambia estos controles a las coordenadas originales del sistema.

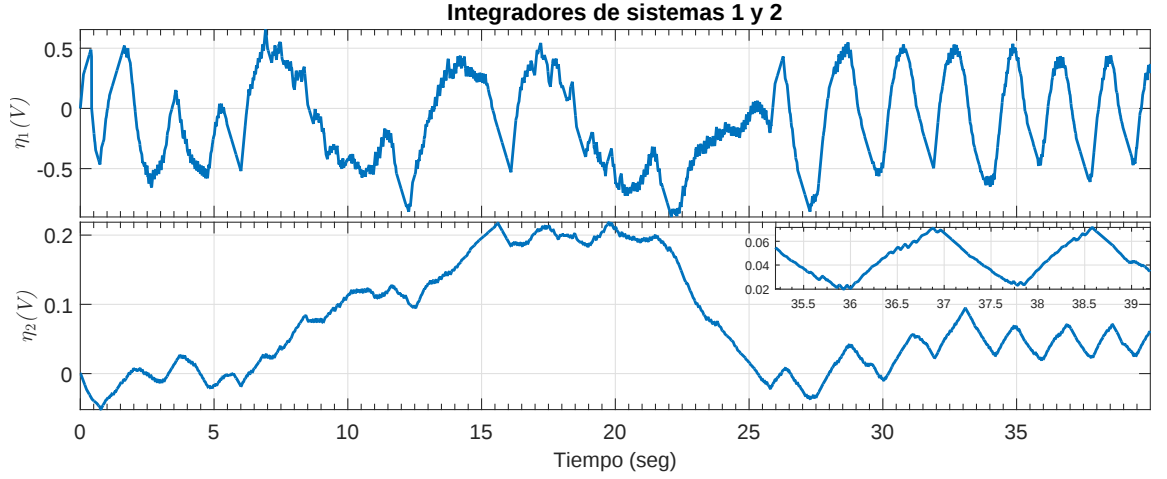


Figura 5-43: Control Integral

La Figura 5-43 muestra la señal del control integral de (2-53). Este converge al negativo de la perturbación, pues por definición $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(t) + \eta$ y por el Teorema x_3 alcanza el origen en tiempo finito por lo tanto $\eta = -\zeta(t)$.

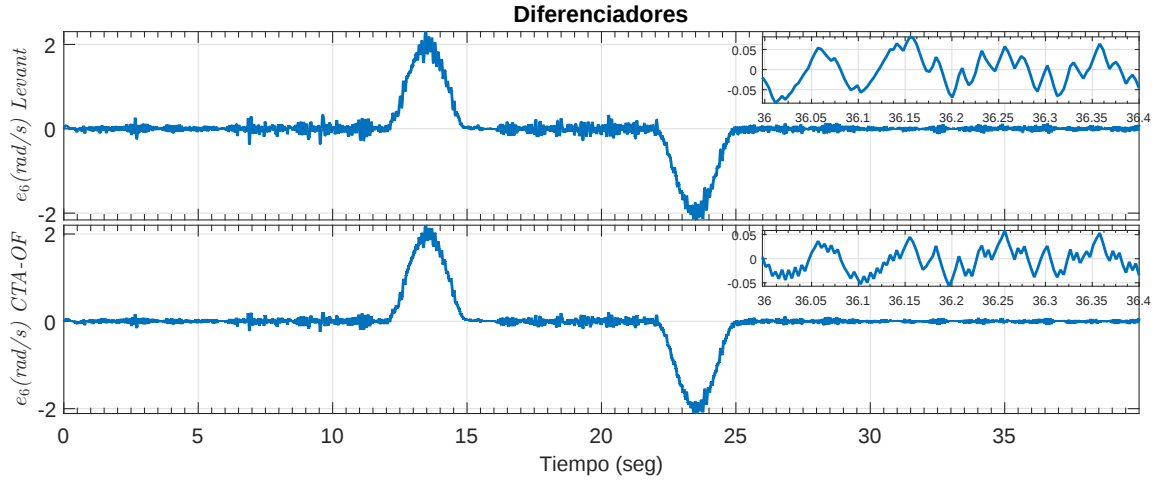


Figura 5-44: Comparación entre Diferenciadores

La gráfica 5-44 compara la observación de la velocidad dada por el algoritmo CTA por realimentación de salida (CTA-OF) contra el algoritmo presentado por Levant en [36]. Para obtener estos datos, se utilizó el CTA-OF en lazo cerrado y se obtuvo además la estimación de x_6 en línea con el diferenciador de Levant. Al parecer no existe gran diferencia tanto cualitativa ni cuantitativa entre ambos algoritmos, sin embargo, la precisión del algoritmo CTA-OF parece ser ligeramente mejor que la obtenida por el CTA con el diferenciador de Levant.

5.2.4. Sintonización del Algoritmo *Twisting* Continuo

En la Sección 2.6.4 se muestran una forma de obtener conjuntos de ganancias estabilizantes para el CTA. Ahora se mostrarán los resultados experimentales que se obtuvieron al implementar los conjuntos de ganancias estabilizantes mostradas en la Tabla 2-2 en el Robot Péndulo.

Conjunto de Ganancias S_1

Las ganancias usadas k'_i mostradas en (4-31) y (4-32) se muestran en la siguiente Tabla

Tabla 5-5: Ganancias implementadas para el CTA con ganancias optimizadas del conjunto S_1

Tabla 5-6: Ganancias para el sistema (3-18) con $L = 0.925$

k_i	Valor
k_1	23.7338
k_2	14.4265
k_3	2.1275
k_4	1.0175

Tabla 5-7: Ganancias para el sistema (3-19) con $L = 0.0225$

k_i	Valor
k_1	1.9925
k_2	2.25
k_3	0.0517
k_4	0.0248

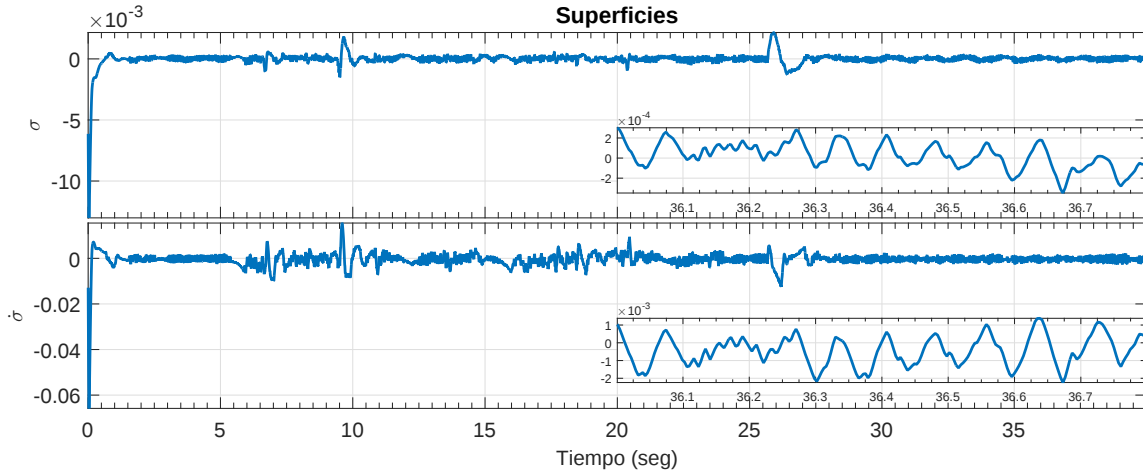


Figura 5-45: Superficies de deslizamiento para el sistema (3-18)

En estado estacionario, la superficie de deslizamiento de la Figura 5-45 tiene una precisión es de 3.4×10^{-4} para s y de 2.2×10^{-3} para $\dot{s}$.

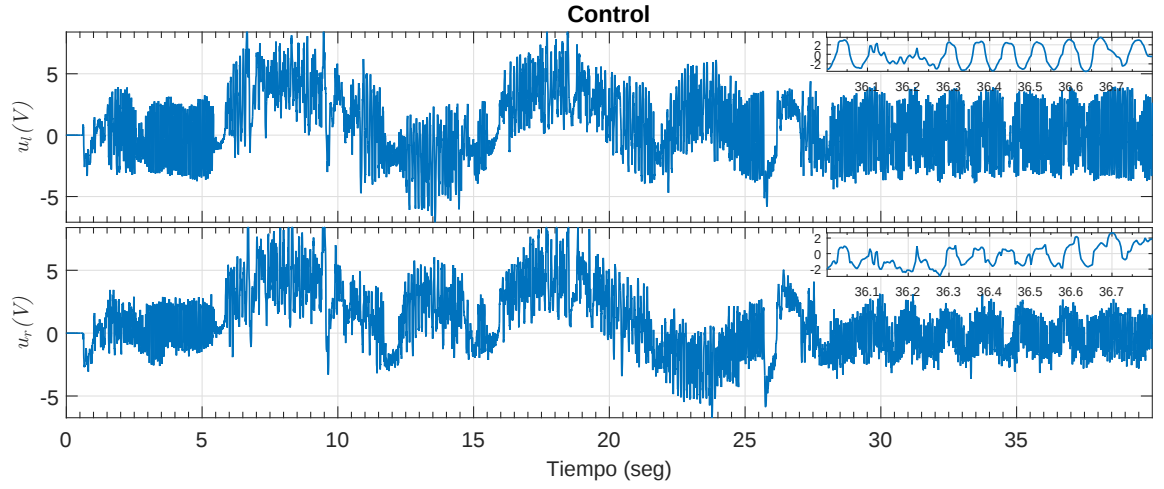


Figura 5-46: Voltaje aplicado a los motores.

La Figura 5-46 se muestra la señal de control continua que se aplica en los motores del Robot Péndulo, la señal está dada por el voltaje aplicado en los motores.

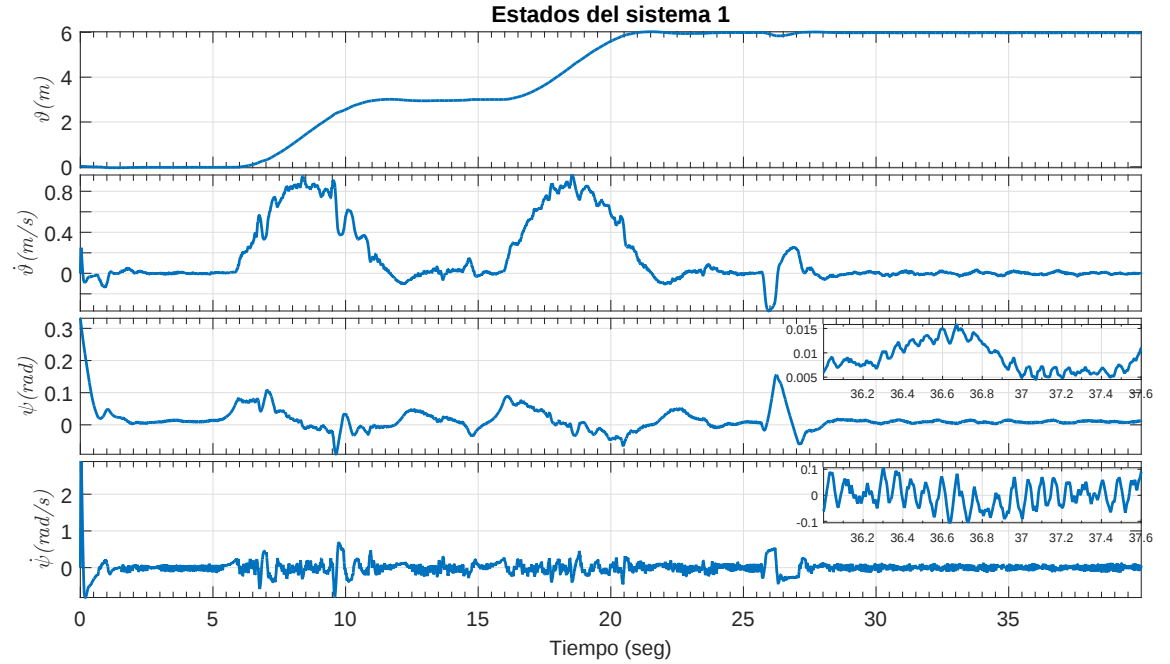


Figura 5-47: Estados del sistema (3-18)

En la Figura 5-47 se muestran los estados para el sistema (3-18) en los cuales se puede observar que la cota de ψ es de 0.01 radianes y de $\dot{\psi}$ de 0.1 radianes por segundo.

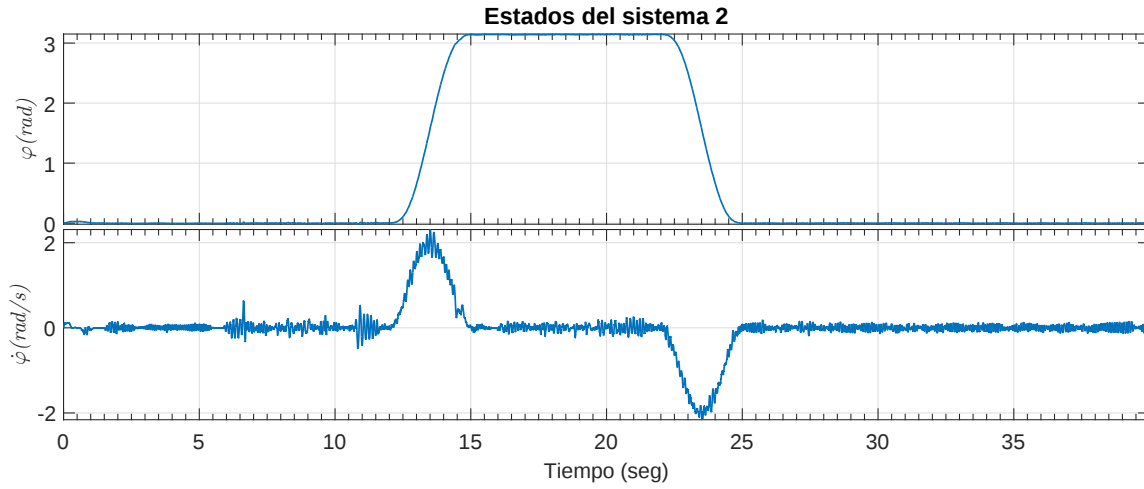


Figura 5-48: Estados del sistema (3-19)

En la Figura 5-48 se muestra el estado del sistema (3-19).

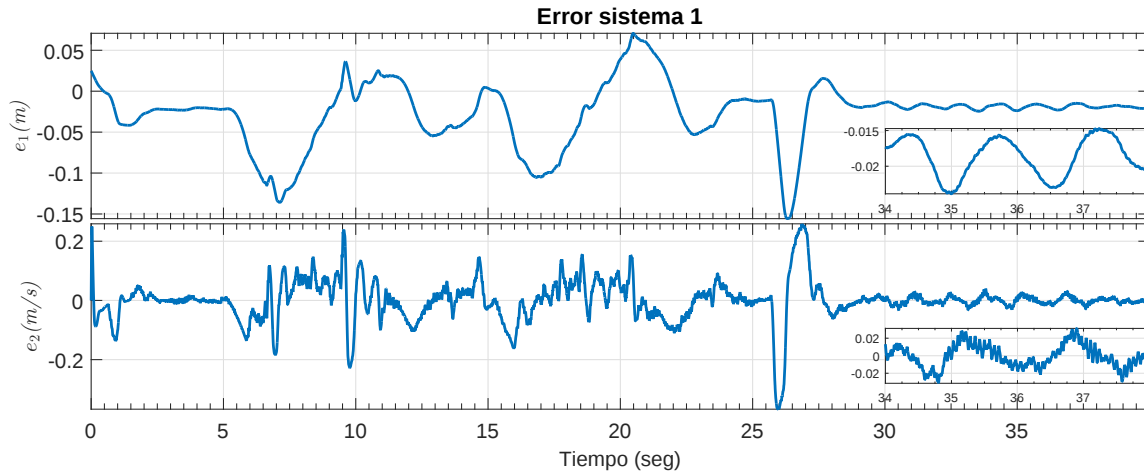
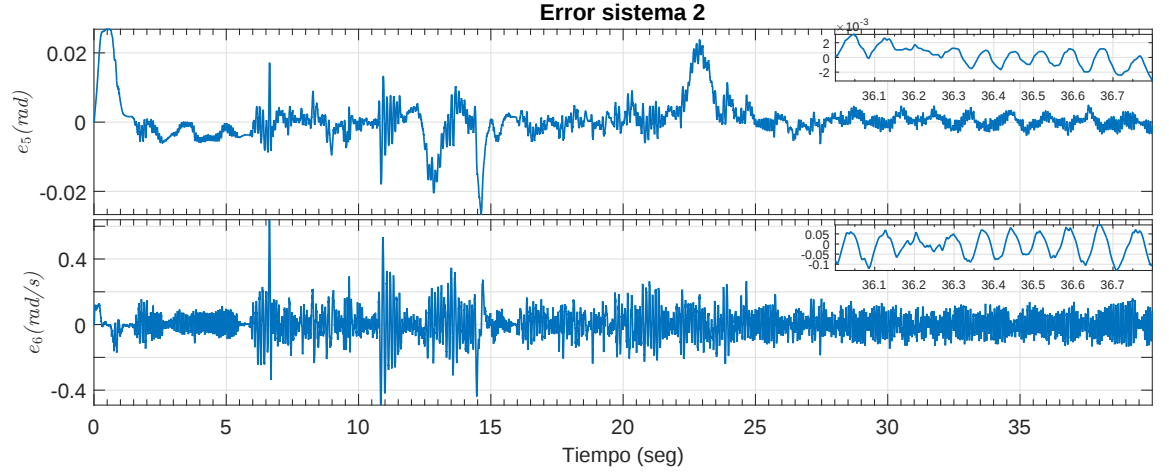


Figura 5-49: Error de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$

En la Figura 5-49 se muestra el error de seguimiento de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$ los cuales tiene un error en estado estacionario de 0.31 para ϑ y de 0.41 para $\dot{\vartheta}$.

Este error debería ser teóricamente cero, pero debido a que en la práctica no se puede llegar a un modo deslizante ideal, entonces se tiene este error en estado estacionario.

Figura 5-50: Error de los estados φ y $\dot{\varphi}$

En la Figura 5-50 se muestra el error de los estados φ y $\dot{\varphi}$ los cuales muestran además la precisión del CTA, la cual es de 3.2×10^{-3} para φ y de 0.13 para $\dot{\varphi}$.

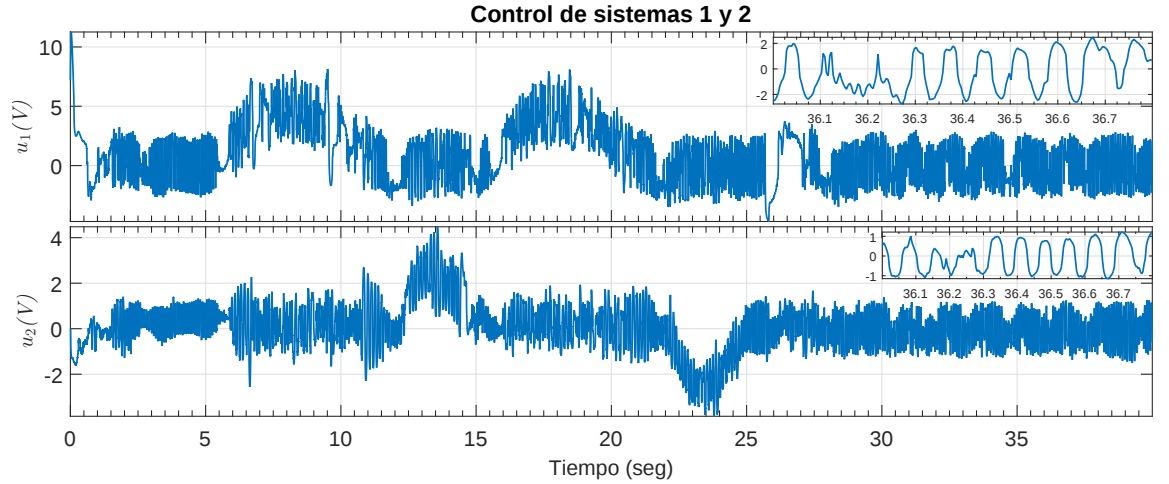


Figura 5-51: Control estabilizador de los sistemas (3-18) y (3-19)

La Figura 5-51 se muestran los controladores usados en cada uno de los sistemas desacoplados, controles los cuales se multiplican por una matriz de cambio de coordenadas, transformación que cambia estos controles a las coordenadas originales del sistema.

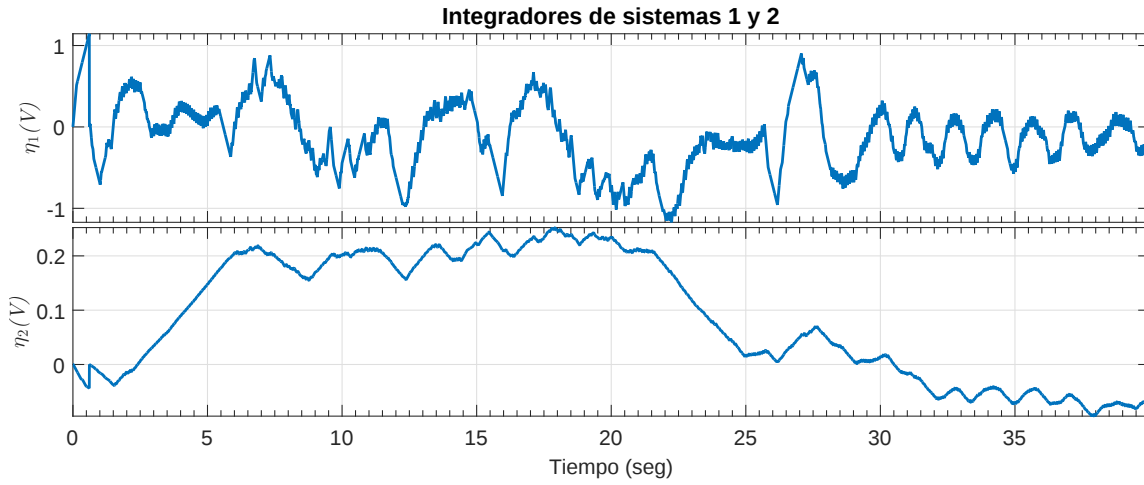


Figura 5-52: Control Integral

La Figura 5-52 muestra la señal del control integral de (2-53). Este converge al negativo de la perturbación, pues por definición $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(t) + \eta$ y por el Teorema x_3 alcanza el origen en tiempo finito por lo tanto $\eta = -\zeta(t)$.

Conjunto de Ganancias S_2

Las ganancias usadas k'_i mostradas en (4-31) y (4-32) se muestran en la siguiente Tabla

Tabla 5-8: Ganancias implementadas para el CTA con ganancias optimizadas del conjunto S_2

Tabla 5-9: Ganancias para el sistema (3-18) con $L = 1.4$

k_i	Valor
k_1	23.7778
k_2	11.8322
k_3	3.2200
k_4	1.54

Tabla 5-10: Ganancias para el sistema (3-19) con $L = 0.05$;

k_i	Valor
k_1	2.5787
k_2	2.2361
k_3	0.1150
k_4	0.055

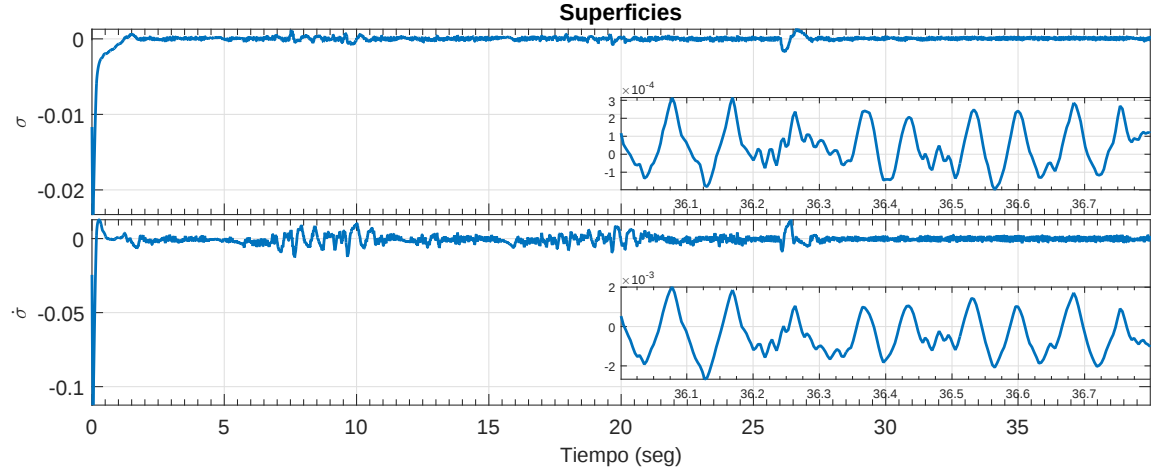


Figura 5-53: Superficies de deslizamiento para el sistema (3-18)

En estado estacionario, la superficie de deslizamiento de la Figura 5-53 tiene una precisión es de 3.15×10^{-4} para s y de 2.7×10^{-3} para $\dot{s}$.

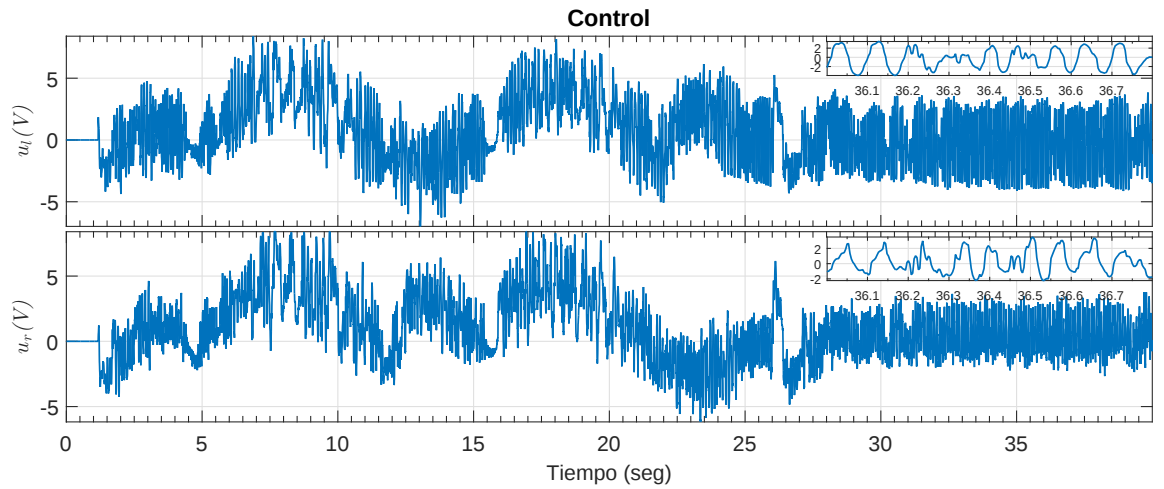


Figura 5-54: Voltaje aplicado a los motores.

La Figura 5-54 se muestra la señal de control continua que se aplica en los motores del Robot Péndulo, la señal está dada por el voltaje aplicado en los motores.

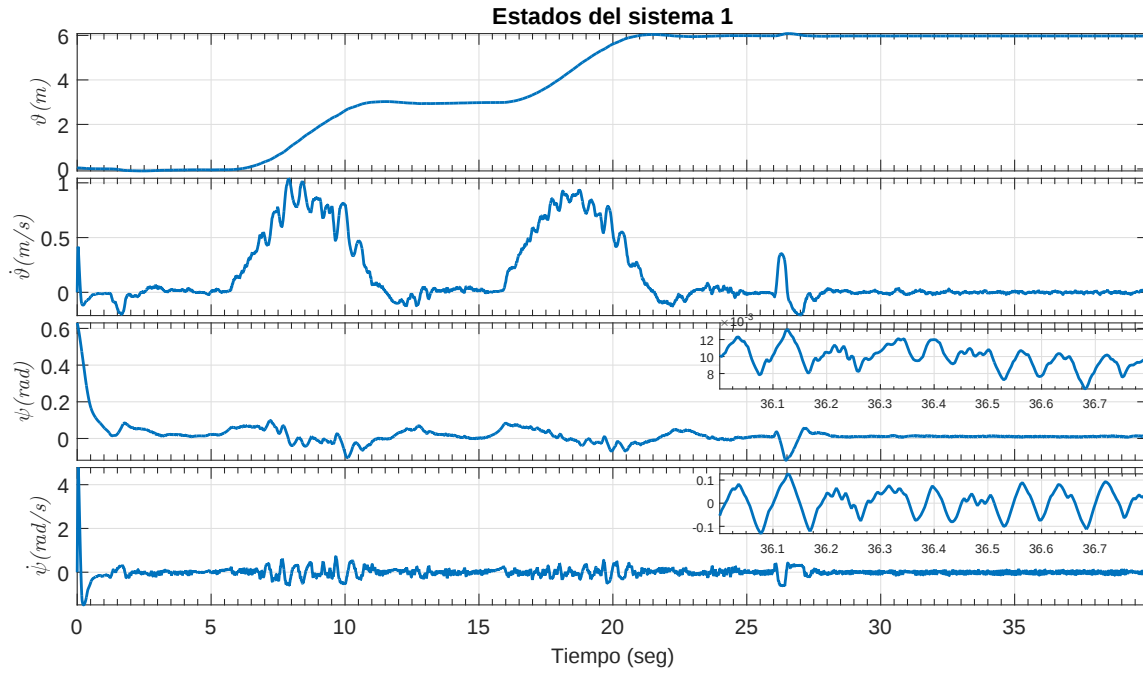


Figura 5-55: Estados del sistema (3-18)

En la Figura 5-55 se muestran los estados para el sistema (3-18) en los cuales se puede observar que la cota de ψ es de 0.013 radianes y de $\dot{\psi}$ de 0.13 radianes por segundo.

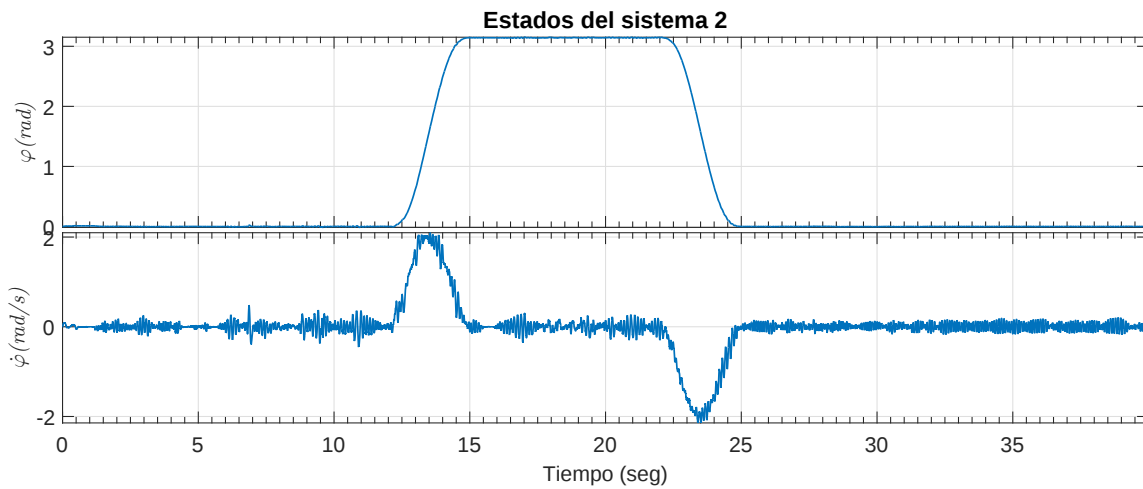
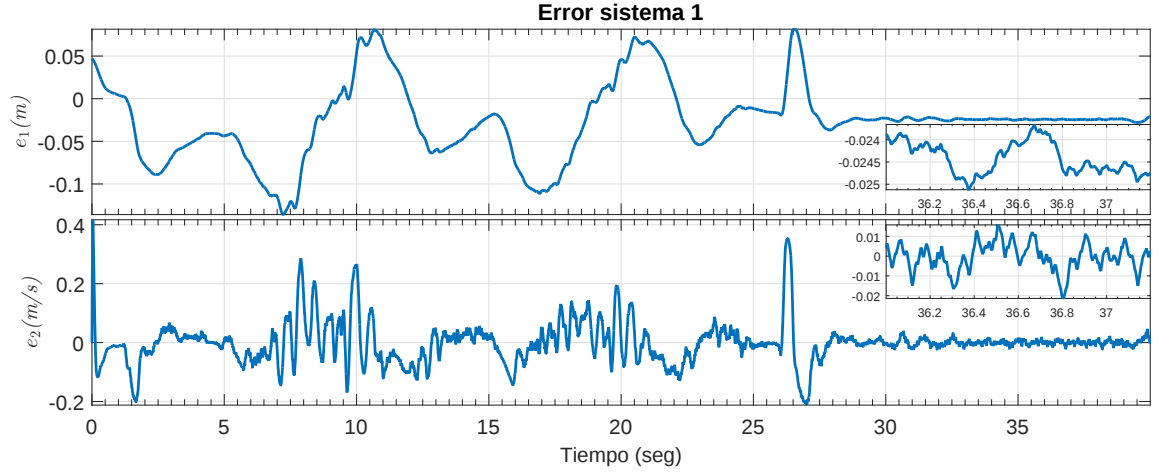


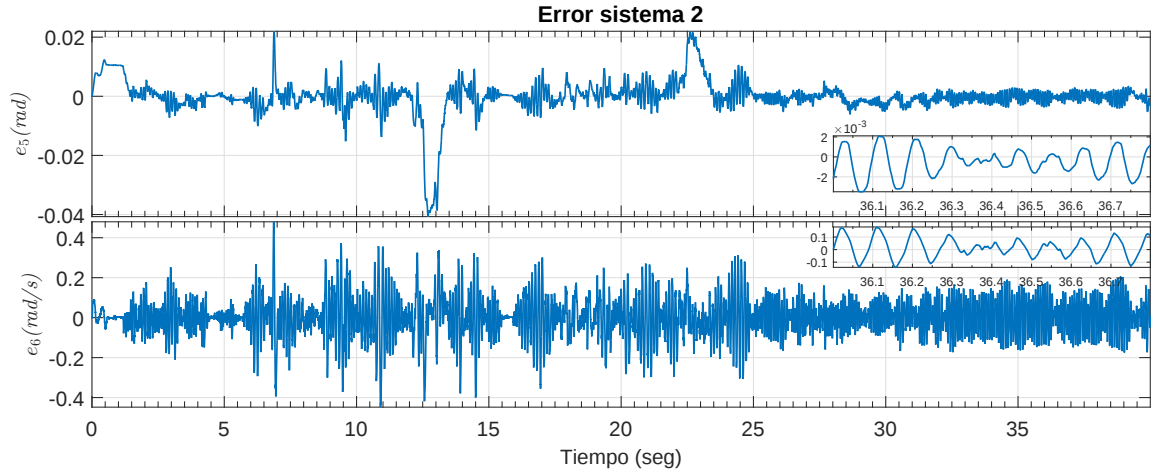
Figura 5-56: Estados del sistema (3-19)

En la Figura 5-56 se muestra el estado del sistema (3-19).


 Figura 5-57: Error de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$

En la Figura 5-57 se muestra el error de seguimiento de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$ los cuales tienen un error en estado estacionario de 0.33 para ϑ y de 0.28 para $\dot{\vartheta}$.

Este error debería ser teóricamente cero, pero debido a que en la práctica no se puede llegar a un modo deslizante ideal, entonces se tiene este error en estado estacionario.


 Figura 5-58: Error de los estados φ y $\dot{\varphi}$

En la Figura 5-58 se muestra el error de los estados φ y $\dot{\varphi}$ los cuales muestran además la precisión del CTA, la cual es de 3.5×10^{-3} para φ y de 0.14 para $\dot{\varphi}$.

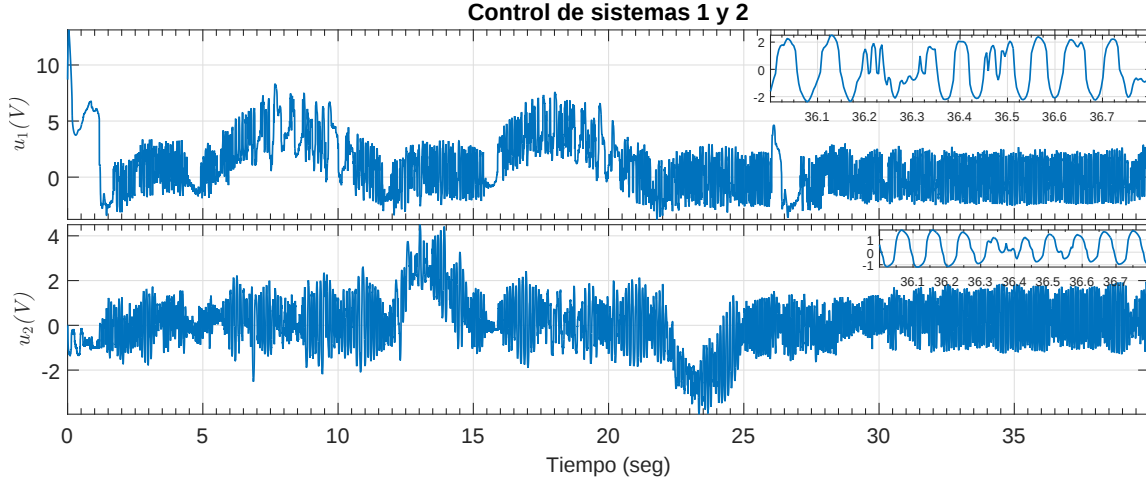


Figura 5-59: Control estabilizador de los sistemas (3-18) y (3-19)

La Figura 5-59 se muestran los controladores usados en cada uno de los sistemas desacoplados, controles los cuales se multiplican por una matriz de cambio de coordenadas, transformación que cambia estos controles a las coordenadas originales del sistema.

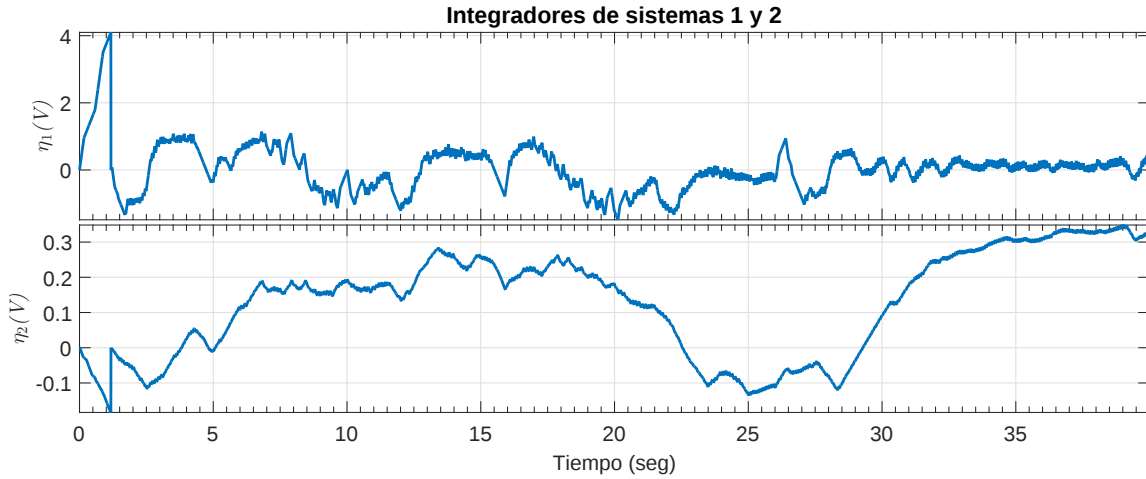


Figura 5-60: Control Integral

La Figura 5-60 muestra la señal del control integral de (2-53). Este converge al negativo de la perturbación, pues por definición $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(t) + \eta$ y por el Teorema x_3 alcanza el origen en tiempo finito por lo tanto $\eta = -\zeta(t)$.

Conjunto de Ganancias $S3$

Las ganancias usadas k'_i mostradas en (4-31) y (4-32) se muestran en la siguiente Tabla

Tabla 5-11: Ganancias implementadas para el CTA con ganancias optimizadas del conjunto S_3

Tabla 5-12: Ganancias para el sistema (3-18)
con $L = 2.45$

k_i	Valor
k_1	23.6258
k_2	11.7394
k_3	5.6350
k_4	2.6950

Tabla 5-13: Ganancias para el sistema (3-19)
con $L = 0.07$;

k_i	Valor
k_1	2.2080
k_2	1.9843
k_3	0.1610
k_4	0.077

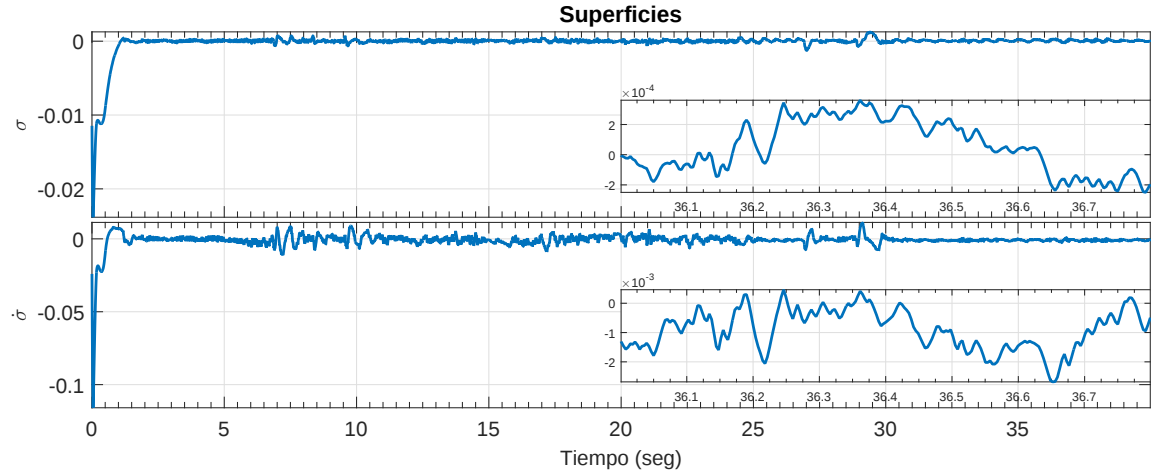


Figura 5-61: Superficies de deslizamiento para el sistema (3-18)

En estado estacionario, la superficie de deslizamiento de la Figura 5-61 tiene una precisión es de 3.6×10^{-4} para s y de 2.7×10^{-3} para $\dot{s}$.

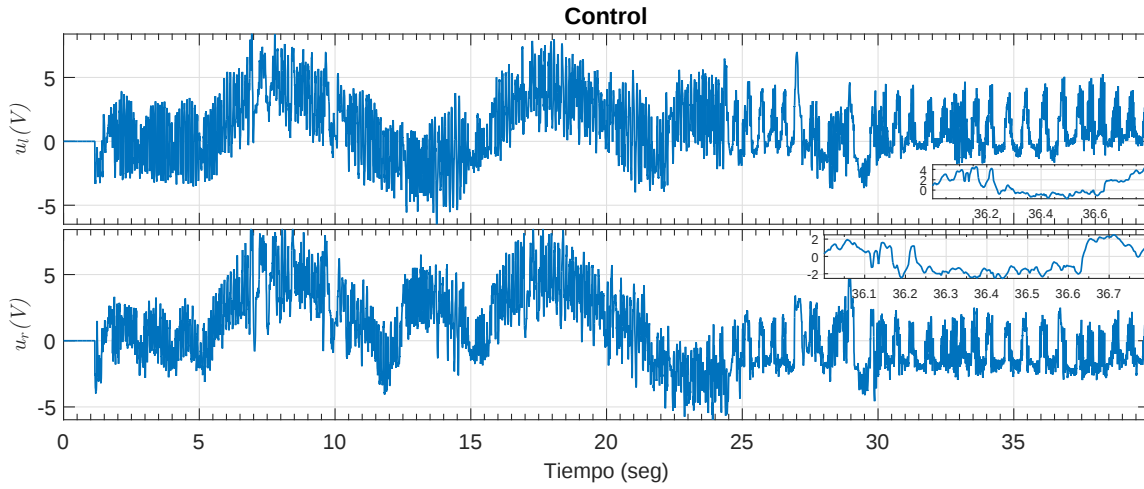


Figura 5-62: Voltaje aplicado a los motores.

La Figura 5-62 se muestra la señal de control continua que se aplica en los motores del Robot Péndulo, la señal está dada por el voltaje aplicado en los motores.

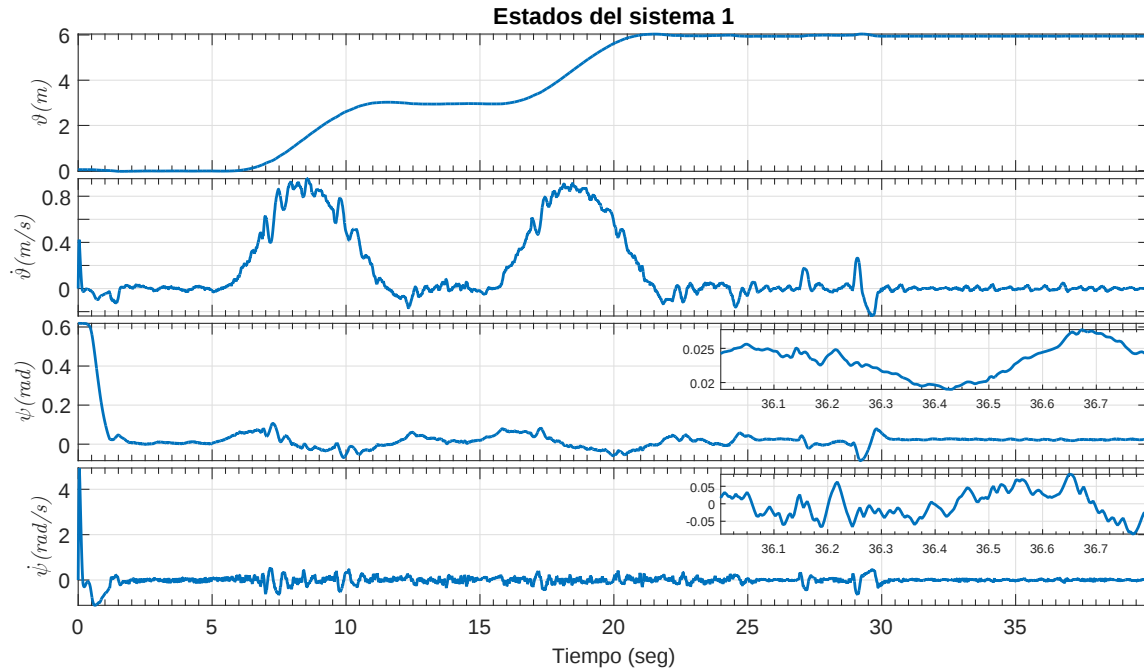


Figura 5-63: Estados del sistema (3-18)

En la Figura 5-63 se muestran los estados para el sistema (3-18) en los cuales se puede observar que la cota de ψ es de 0.027 radianes y de $\dot{\psi}$ de 0.086 radianes por segundo.

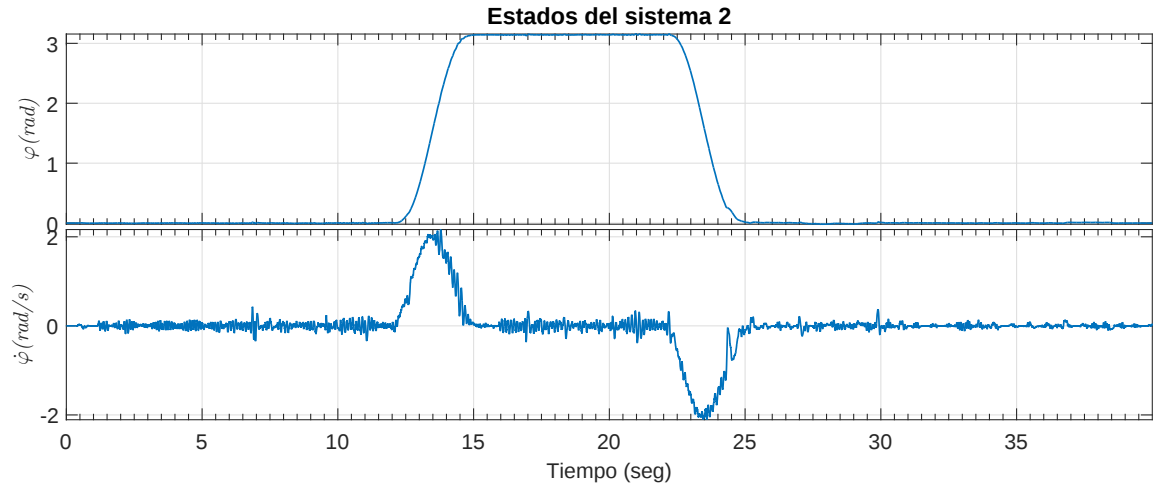


Figura 5-64: Estados del sistema (3-19)

En la Figura 5-64 se muestra el estado del sistema (3-19).

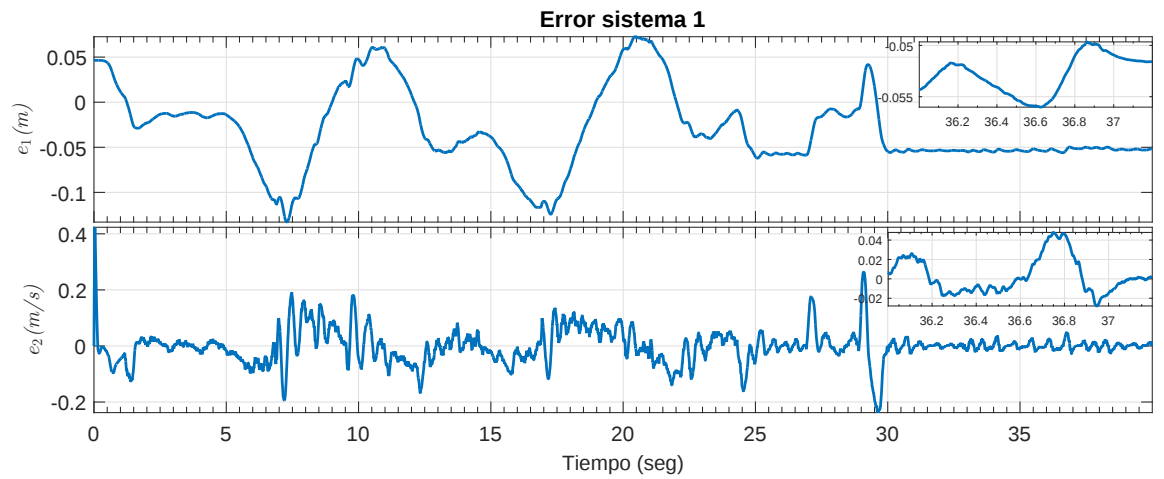


Figura 5-65: Error de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$

En la Figura 5-65 se muestra el error de seguimiento de los estados ϑ y $\dot{\vartheta}$ los cuales tiene un error en estado estacionario de 0.74 para ϑ y de 0.63 para $\dot{\vartheta}$.

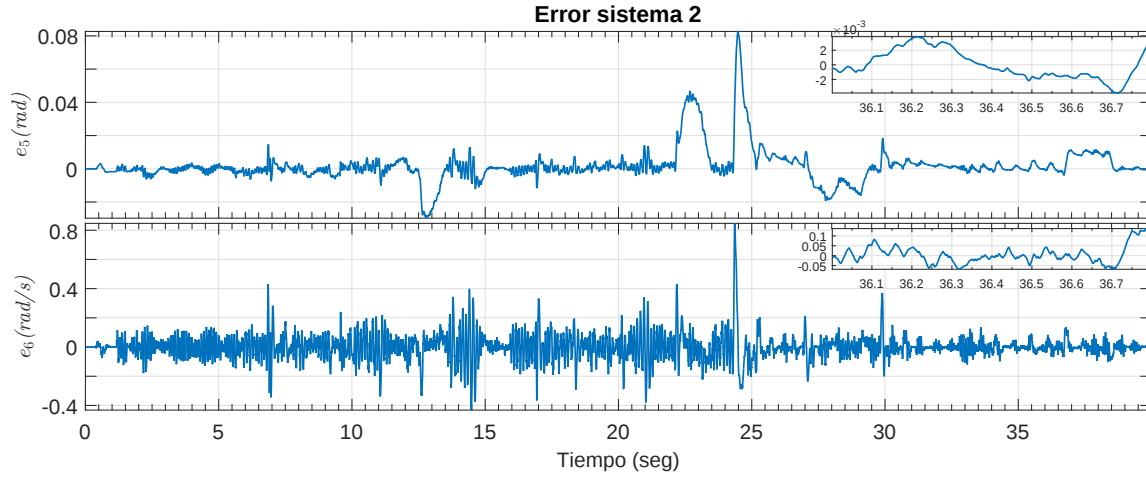


Figura 5-66: Error de los estados φ y $\dot{\varphi}$

En la Figura 5-66 se muestra el error de los estados φ y $\dot{\varphi}$ los cuales muestran además la precisión del CTA, la cual es de 3.9×10^{-3} para φ y de 0.13 para $\dot{\varphi}$.

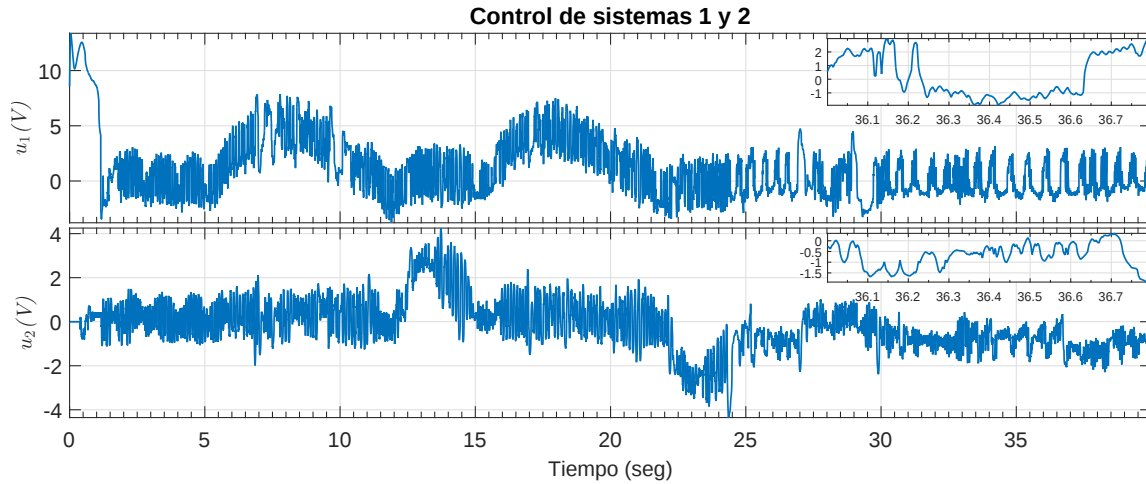


Figura 5-67: Control estabilizador de los sistemas (3-18) y (3-19)

La Figura 5-67 se muestran los controladores usados en cada uno de los sistemas desacoplados, controles los cuales se multiplican por una matriz de cambio de coordenadas, transformación que cambia estos controles a las coordenadas originales del sistema.

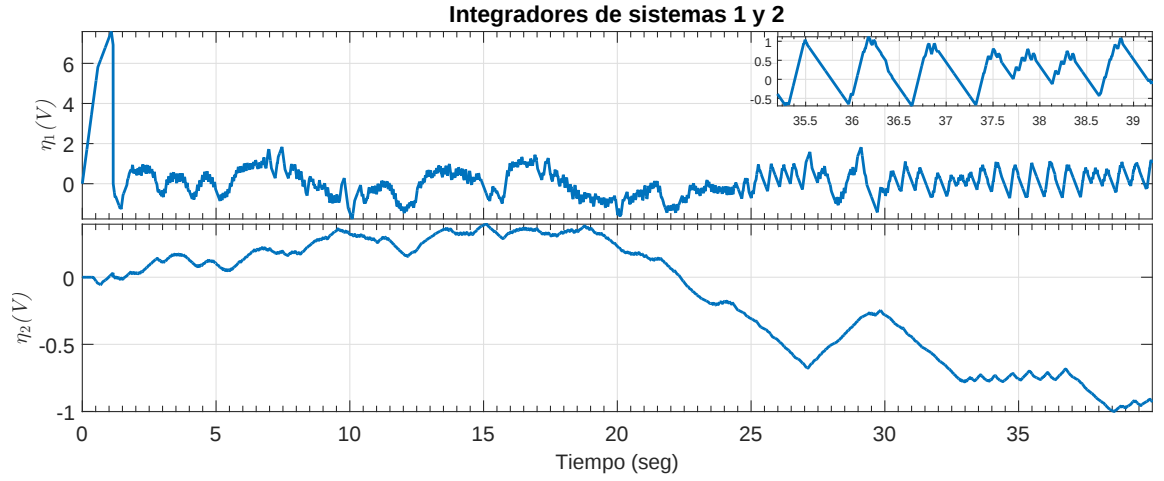


Figura 5-68: Control Integral

La Figura 5-68 muestra la señal del control integral de (2-53). Este converge al negativo de la perturbación, pues por definición $x_3 \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(t) + \eta$ y por el Teorema x_3 alcanza el origen en tiempo finito por lo tanto $\eta = \zeta(t)$.

5.2.5. Resumen

En la Tabla 5-14 se muestran las cotas de las variables de deslizamiento en el modo deslizante

Algoritmo	$ \sigma $	$ \dot{\sigma} $	$ e_5 $	$ e_6 $
CTA-IF	3.7048×10^{-4}	2.1×10^{-3}	3.1×10^{-3}	0.1315
CTA-OF	2.5797×10^{-4}	1.9×10^{-3}	2.7×10^{-3}	0.0775
CTA Optimizado Ganancias S_1	3.4774×10^{-4}	2.2×10^{-3}	3.2×10^{-3}	0.1309
CTA Optimizado Ganancias S_2	3.1543×10^{-4}	2.7×10^{-3}	3.5×10^{-3}	0.1414
CTA Optimizado Ganancias S_3	3.6096×10^{-4}	2.7×10^{-3}	3.9×10^{-3}	0.1368

Tabla 5-14: Precisión en el modo deslizante

En la Tabla 5-15 se muestra la cota de los errores e_1, e_2, e_3 y e_4 en estado estable

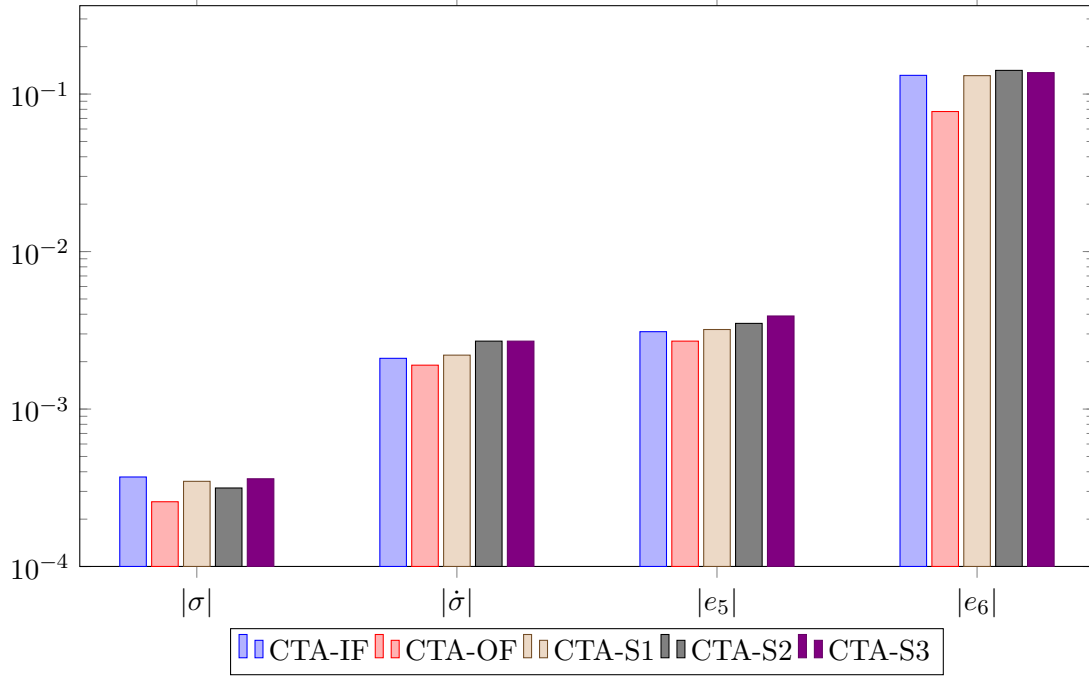
5.2. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Algoritmo	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_3 $	$ e_4 $
CTA-IF	0.3342	0.6327	2.05×10^{-2}	0.1236
CTA-OF	0.4257	0.5734	1.89×10^{-2}	0.1031
CTA Optimizado Ganancias S_1	0.3181	0.4194	1.58×10^{-2}	0.1059
CTA Optimizado Ganancias S_2	0.3350	0.2853	1.32×10^{-2}	0.1314
CTA Optimizado Ganancias S_3	0.7469	0.6385	2.77×10^{-2}	0.0866

Tabla 5-15: Precisión de los estados del sistema (3-18)

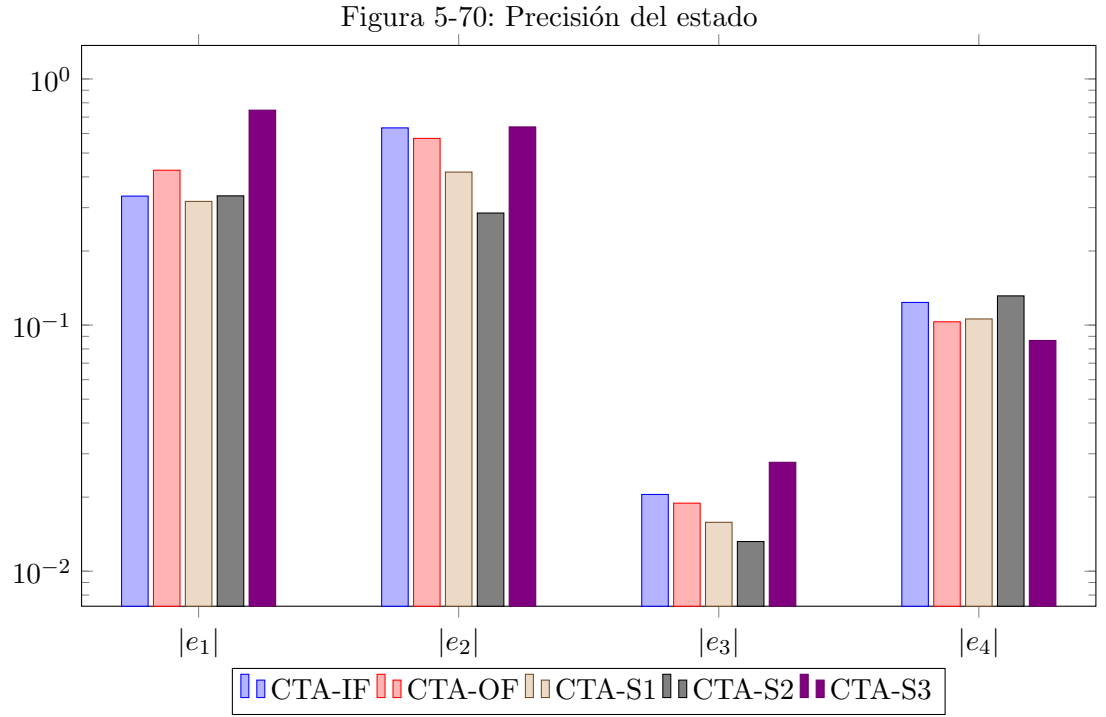
Las siguientes Figuras 5-69 y 5-70 muestran una comparación gráfica de las variables mostradas en las dos Tablas anteriores

Figura 5-69: Precisión en el modo deslizante



En la Figura anterior² se muestra la precisión en el modo deslizante, las variables σ y $\dot{\sigma}$ son las variables de deslizamiento para el sistema (3-18), mientras que las variables e_5 y e_6 son las variables de deslizamiento para el sistema (3-19).

²CTA-Sn se refiere al CTA utilizando el conjunto de ganancias optimizadas S_n con $n \in \{1, 2, 3\}$



En las Figuras anteriores se puede observar que el algoritmo me tuvo mejor precisión en el modo deslizante es el CTA con realimentación de salida, lo que muestra mejor rendimiento del observador ante el diferenciador de Levant. Sin embargo, el conjunto de ganancias que obtuvieron el menor error de los estados en el sistema (3-18) fue el CTA con el conjunto de ganancias optimizadas S_1 mostradas en 2-2.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se presentó un análisis sistemático para la implementación de un sistema de control, en particular, para un robot péndulo. Cada paso, tanto teórico como práctico tiene un resultado previo que lo justifica, por lo que todo el procedimiento realizado es correcto.

El objetivo de control fue realizar un seguimiento de trayectorias en el Robot Péndulo, más específicamente, de rotaciones y traslaciones, transformaciones rígidas básicas para cualquier robot móvil. Este objetivo se alcanzó a través de un algoritmo de control recién introducido: el Algoritmo *Twisting* Continuo, utilizando el diseño de superficies de deslizamiento de grado relativo arbitrario por LQ Singular (esto pues el CTA solo puede controlar sistemas de grado relativo dos, con lo que se necesita de ello).

El objetivo principal de la tesis fue probar el rendimiento del CTA, algunas variables importantes para caracterizar el desempeño de control del CTA se muestran en las Figuras 5-70 y 5-69. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, pues se cumplieron los objetivos de control con un desempeño satisfactorio.

Sin embargo, se puede observar de los resultados obtenidos en el Capítulo anterior que todos los esquemas y conjuntos de ganancias implementados tienen un desempeño muy similar, pues a pesar de tener resultados distintos, estos no son tan significativos (porque podrían depender de factores externos) como para concluir que uno sea mejor que otro.

Como trabajo futuro, para intentar mejorar el rendimiento del sistema existen dos vertientes: la primera es del lado de la instrumentación, intentando mejorar la plataforma física para obtener un mejor tiempo de muestreo, menor ruido en la medición, y mejor precisión de los sensores, sin embargo lo que concierna el control, esta primera vertiente no es de importancia; la segunda vertiente es implementando controladores de ganancia variable para evitar oscilaciones en el origen, por ejemplo, en [37] se presenta una versión del CTA adaptable lo que podría mejorar el desempeño del sistema de control o implementando algoritmos por Modos Deslizantes para sistemas de grado relativo cuatro los cuales podrían lograr la convergencia en tiempo finito de todos los estados del sistema a pesar de perturbaciones y/o incertidumbres.

Bibliografía

- [1] C. Bissell, *A History of Automatic Control*. Springer, 2009.
- [2] S. Bennett, “A brief history of automatic control,” *IEEE Control Systems*, vol. 16, pp. 17–25, Jun 1996.
- [3] C. Edwards, *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor & Francis, 1998.
- [4] A. Levant, “Universal single-input-single-output (siso) sliding-mode controllers with finite-time convergence,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, pp. 1447–1451, Sep 2001.
- [5] L. Fridman, *Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics*, vol. 24 of *Studies in Systems, Decision and Control*. Springer, 2015.
- [6] V. Torres, “Algoritmo twisting continuo,” Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2015.
- [7] D. Hernández, “Pole-placement in higher-order sliding-mode control,” *The International Federation of Automatic Control*, 2014.
- [8] I. Castillo, “Diseño de superficies por modos deslizantes de alto orden: Enfoque lq singular,” Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.
- [9] F. Grasser, “Joe: a mobile, inverted pendulum,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 49, pp. 107–114, Feb 2002.
- [10] K. Pathak, “Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 21, pp. 505–513, June 2005.
- [11] V. Torres, “Continuous twisting algorithm, analysis and design.” Sometido a *Automatica*.
- [12] C. Chen, *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1999.
- [13] P. Antsaklis, *A Linear Systems Primer*. Birkhauser, 2007.
- [14] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 3 ed., 2002.
- [15] Y. Shtessel, *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhauser, 2014.
- [16] K. Hoffman, *Linear Algebra*. Prentice-Hall, 1971.

- [17] E. Hendricks, *Linear Systems Control*. Springer, 2008.
- [18] A. Sabanovic, *Variable Structure Systems from principles to implementation*. IET Control Engineering Series 66, 2004.
- [19] V. I. Utkin, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. CRC Press, 2 ed., 2009.
- [20] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer, 1992.
- [21] A. Levant, “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control,” *International journal of control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [22] S. Kamal, “Higher order super-twisting algorithm,” in *2014 13th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 1–5, June 2014.
- [23] M. V. Basin and P. C. R. Ramirez, “A supertwisting algorithm for systems of dimension more than one,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, pp. 6472–6480, Nov 2014.
- [24] A. Levant, “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control,” *International journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 924–941, 2003.
- [25] F. L. Lewis, *Optimal Control*. John Wiley & Sons, 2012.
- [26] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [27] C. K. Chui, *Kalman Filtering with Real-Time Applications*. Springer, 1999.
- [28] M. Spong, *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, 2005.
- [29] A. Levant, “Homogeneity approach to high-order sliding mode design,” *Automatica*, vol. 41, no. 5, pp. 823–830, 2005.
- [30] V. Torres, “Algoritmo twisting continuo mediante retroalimentación de salida,” in *Congreso Nacional de Control Automático*, 2015.
- [31] Y. Yamamoto, “Nxtway-gs model-based design - control of self-balancing two-wheeled robot built with lego mindstorms nxt,” 2009.
- [32] Inteco, “Two-wheeled unstable transporter,” 2015.
- [33] K. Ogata, *Discrete-time control systems*, vol. 2. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [34] I. Castillo, “Matlab toolbox for singular lq based sliding mode control design,” in *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4242–4247, Dec 2013.
- [35] D. Luenberger, “Canonical forms for linear multivariable systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 12, pp. 290–293, June 1967.
- [36] A. Levant, “Robust exact differentiation via sliding mode technique,” *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998.
- [37] J. A. Moreno, “Adaptive continuous twisting algorithm.”