



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

ANÁLISIS DE FOURIER VS. ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL-FORTALEZAS Y  
DEBILIDADES EN LA EVALUACIÓN DE LA SALUD ESTRUCTURAL

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ING. GERARDO ZAMORA LÓPEZ

TUTOR PRINCIPAL  
DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN, INSTITUTO DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F., AGOSTO 2016

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. FERNANDO PEÑA MONDRAGÓN

Secretario: M.I. OCTAVIO GARCÍA DOMÍNGUEZ

Vocal: DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN

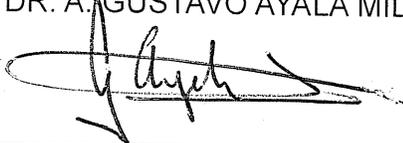
1 er. Suplente: DR. DARÍO RIVERA VARGAS

2 do. Suplente: DR. MAURO POMPEYO NIÑO LÁZARO

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

DR. A. GUSTAVO AYALA MILIÁN



---

**FIRMA**

---

## AGRADECIMIENTOS

---

*Primeramente a Dios por haberme permitido cumplir este ciclo de mi vida.*

*A mi padre Ventura Zamora Tadeo, mi madre Raquel López de la O, mi hermano Eduardo Zamora López y a toda mi familia, por su apoyo incondicional, su cariño y motivación diaria.*

*A la familia Montes Garfías por recibirme en su casa durante mis estudios de maestría y hacerme sentir como un miembro más de su familia.*

*A mi director de tesis, Dr. Gustavo Ayala Milián por aceptarme dentro de su grupo de investigación, así como por su apoyo, dedicación y comentarios que hicieron posible la realización de este trabajo.*

*Al Dr. Rolando Salgado Estrada por su asesoría y comentarios atinados que fueron de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo de investigación.*

*Al Dr. José Manuel Jara Guerrero por facilitar el programa ARTeMIS Modal, que fue esencial para la realización de este trabajo.*

*A mis profesores de la maestría por compartir sus conocimientos y experiencias hacia mi persona, así como a mis compañeros de generación. Es especial quisiera agradecer a Isaías y Rodrigo, por su apoyo durante estos dos últimos años.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) y al Instituto de Ingeniería por la beca otorgada durante mis estudios de maestría.*

---

---

## RESUMEN

---

La identificación experimental de las propiedades dinámicas de estructuras existentes ha tenido un importante desarrollo desde finales del siglo XX, esto debido principalmente al avance en la tecnología de los sensores para la adquisición de los parámetros dinámicos así como también a los métodos de análisis que se han venido desarrollando. Entre estos métodos se encuentran el Análisis de Fourier que es el más conocido y el Análisis Modal Operacional (OMA por sus siglas en inglés), el cual es más reciente. Para su aplicación ambos sólo requieren los registros de vibración de la estructura ante las excitaciones ambientales. En general no requieren conocer la fuerza excitadora; sin embargo, de conocerse las características de la fuerza o fuerzas que producen la vibración, ambos métodos también se pueden aplicar de manera indirecta. En esta tesis se presentan los detalles del Análisis de Fourier y de cuatro técnicas diferentes del OMA: Identificación de Picos (PP), Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD), Descomposición en el Dominio de la Frecuencia Mejorada (EFDD) e Identificación con Subespacios Estocásticos (SSI). Las técnicas del Análisis de Fourier y del OMA se aplican a los registros obtenidos de dos edificios de concreto reforzado localizados en la Ciudad de México y a un balcón superior de un teatro en Toluca. En el primer edificio (de geometría regular) y en el balcón del teatro se utilizan registros de vibración ambiental, en el segundo edificio (de geometría irregular) se utilizan registros sísmicos. Para las tres estructuras se estiman las frecuencias propias, sus correspondientes formas modales y las fracciones de amortiguamiento crítico. Posteriormente se presentan los resultados de un estudio comparativo de los dos métodos de análisis. De los resultados obtenidos se discuten las fortalezas y debilidades del Análisis de Fourier y del OMA, así como con cual método de análisis se obtienen los mejores resultados de utilidad en la determinación experimental de la salud estructural de estructuras existentes.

---

---

**Palabras clave:** Análisis de Fourier, Análisis Modal Operacional, vibraciones ambientales, evaluación de la salud estructural.

---

## ABSTRACT

---

The experimental identification of the dynamic properties of existing structures has experienced an important development since the late twentieth century, this has been mainly due to the progress in sensor technology for the acquisition of the dynamic parameters as well as to the development of methods of analysis. Among these methods they are the Fourier Analysis, which is the best known, and the Operational Modal Analysis (OMA for its acronym in English), which appearance is more recent. For their application both methods require only vibration records of the structure due to environmental demands. In general they do not require records of the driving force; however, if the characteristics of the driving force are known they can also be applied indirectly. This thesis presents the details of Fourier Analysis and four different techniques: Peaks Identification (PP), Frequency Domain Decomposition (FDD), Enhanced Frequency Domain Decomposition (EFDD) and Stochastic Subspace Identification (SSI). The Fourier Analysis and the OMA techniques are applied to the ambient vibration records obtained from two reinforced concrete buildings located in Mexico City and from the upper balcony of a theater in Toluca. In the first building (with regular geometry) and in the balcony of the theater ambient vibration records are used, in the second building (with irregular geometry) seismic records are used. For the three structures the fundamental frequencies, and the corresponding mode shapes and critical damping ratios are estimated. Subsequently the results of a comparative study of the two methods of analysis are presented. From the results the strengths and weaknesses of the Fourier Analysis and the OMA are discussed, as well as all analysis which give the best results for structural health benefits are obtained.

**Keywords:** Fourier Analysis, Operational Modal Analysis, ambient vibrations, structural health evaluation

---

---

# CONTENIDO

---

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	1
1.2. Justificación . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	3
1.4. Organización del Trabajo . . . . .	3
<b>2. ANTECEDENTES</b>	<b>5</b>
2.1. Tipos de Mediciones . . . . .	5
2.2. Monitoreo de la Salud Estructural (SHM) . . . . .	6
2.3. Estudios previos del Análisis Modal Operacional (OMA) . . . . .	9
<b>3. ANÁLISIS DE FOURIER</b>	<b>13</b>
3.1. Series de Fourier . . . . .	13
3.2. Transformada de Fourier . . . . .	15

---

---

3.2.1. Transformada de Fourier Discreta (DFT) . . . . .	16
3.2.2. Transformada Rápida de Fourier (FFT) . . . . .	17
3.3. Ruido . . . . .	18
3.4. Filtros . . . . .	18
3.5. Ventanas . . . . .	19
3.6. Espectro de Fourier . . . . .	20
3.7. Espectro de Potencia . . . . .	20
3.8. Función de Transferencia . . . . .	20
3.9. Función de Coherencia . . . . .	21
3.10. Espectro Cruzado . . . . .	22
3.11. Ángulo de Fase . . . . .	22
3.12. Procedimiento para el cálculo de frecuencias . . . . .	23
3.13. Procedimiento para determinar las formas modales . . . . .	23
3.14. Procedimiento para el cálculo de la fracción de amortiguamiento crítico . . . . .	24
<b>4. ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL (OMA)</b>	<b>26</b>
4.1. Introducción del OMA . . . . .	26
4.2. Técnicas del OMA . . . . .	28
4.2.1. Identificación de Picos (PP) . . . . .	28

---

4.2.1.1. Función de Densidad Espectral de Potencia (PSD) . . . . .	31
4.2.2. Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD) . . . . .	33
4.2.2.1. Descomposición en Valores Singulares (SVD) . . . . .	36
4.2.3. Descomposición en el Dominio de la Frecuencia Mejorada (EFDD) . .	37
4.2.3.1. Criterio de Aseguramiento Modal (MAC) . . . . .	39
4.2.4. Identificación con Subespacios Estocásticos (SSI) . . . . .	40
4.2.4.1. Modelo de Espacio de Estados para Vibraciones de Estructuras . . . . .	41
4.2.4.2. Modelo de Espacio de Estados Estocásticos . . . . .	43
4.2.4.3. Identificación en el Subespacio Estocástico . . . . .	45
4.2.4.4. Análisis Modal . . . . .	49
<b>5. METODOLOGÍA DE ESTUDIO</b>	<b>51</b>
5.1. Casos de Estudio . . . . .	51
5.2. Obtención de los Registros . . . . .	53
5.2.1. Equipos de Medición . . . . .	54
5.2.2. Arreglos de los Equipos de Medición . . . . .	56
5.3. Organización de los Registros . . . . .	61
5.3.1. Preparación de los Registros . . . . .	66
5.4. Procesamiento de los Registros . . . . .	67

---

---

5.4.1. Instrumento Virtual (LabVIEW) . . . . .	67
5.4.2. ARTeMIS Modal . . . . .	69
<b>6. ESTUDIO COMPARATIVO</b>	<b>71</b>
6.1. Resultados Obtenidos . . . . .	71
6.1.1. Resultados con el Análisis de Fourier . . . . .	72
6.1.2. Resultados con el Análisis Modal Operacional (OMA) . . . . .	83
6.2. Comparación y Análisis de Resultados . . . . .	91
<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>99</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>104</b>

---

---

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

---

### 1.1. Planteamiento del Problema

La identificación experimental de las propiedades dinámicas de estructuras existentes ha tenido un importante desarrollo desde finales del siglo XX, esto debido principalmente al avance en la tecnología de los sensores para la adquisición de los parámetros dinámicos de las estructuras; así como también a los métodos de análisis que se han venido desarrollando. Entre estos métodos se encuentran de manera importante el Análisis de Fourier y el Análisis Modal Operacional (OMA por sus siglas en inglés). El Análisis de Fourier o también llamado Análisis en el Dominio de la Frecuencia es más conocido que el OMA; con el Análisis de Fourier es posible analizar los registros de vibraciones de estructuras debido a demandas ambientales y forzadas; sin embargo, su aplicación requiere de mucho cuidado ya que puede conducir a resultados no adecuados si no se consideran los factores ambientales y antropogénicos que pueden llegar a distorsionar los registros obtenidos de las pruebas experimentales de vibración. Sin embargo, es posible corregir esta alteración de los registros mediante la aplicación de filtros que eliminan la presencia de ruido (distorsión de alta frecuencia) en las señales. Por su parte el OMA es un método que ha ganado terreno en las últimas décadas. El OMA, al igual que el Análisis de Fourier, requiere registros de la respuesta de la estructura debido a las excitaciones ambientales, su aplicación no requiere necesariamente de registros de la demanda que produce las vibraciones; aunque también se pueden aplicar de manera indirecta cuando se conocen las características de la fuente de excitación. En las vibraciones ambientales se supone que la fuente excitado-

---

ra es un ruido blanco, es decir, una que tiene un espectro con un valor medio constante para cada frecuencia. En general, el OMA presenta ciertas ventajas con respecto a otros métodos para la determinación de las características dinámicas de una estructura como es el requerir menor tiempo de ejecución, ser más barato y no necesariamente requerir registros de vibraciones que puedan causar daño en la estructura; debido a lo anterior el OMA justifica su creciente popularidad en la comunidad de la ingeniería civil.

Ante lo anteriormente expuesto es necesario estudiar de manera más detallada los alcances de estos dos métodos de análisis, confrontando sus resultados y enfatizando las características de la diferentes técnicas del OMA que son las más recientes y menos conocidas en el área de la ingeniería estructural de México.

## 1.2. Justificación

Conocer con exactitud las características dinámicas de una estructura, como son las frecuencias propias de vibración, las formas modales y las fracciones de amortiguamiento crítico, es muy importante para determinar su condición estructural actual así como su comportamiento estructural a lo largo del tiempo. Las técnicas de análisis y evaluación que permiten determinar las características dinámicas de una estructura como el Análisis de Fourier y el OMA son parte del Monitoreo de la Salud Estructural, mejor conocido como *Structural Health Monitoring* (SHM). El investigar las fortalezas y debilidades del Análisis de Fourier y del OMA permite tener un mejor conocimiento sobre cual de estos dos métodos de análisis modal sería el mejor para la evaluación de la salud estructural; esto de acuerdo a los resultados obtenidos del estudio y aplicación de ambos métodos. Conocer más a fondo los fundamentos de estos métodos para la identificación de propiedades dinámicas de estructuras permitiría también su correcta y más efectiva aplicación en beneficio de la evaluación estructural de la infraestructura existente del país, infraestructura particularmente vulnerable a demandas sísmicas y meteorológicas frecuentes. Desafortunadamente, la aplicación de métodos experimentales para determinar las propiedades dinámicas de esta infraestructura, de utilidad en la determinación de su vulnerabilidad, son muy poco utilizados.

### 1.3. Objetivos

Debido a lo anterior, el objetivo de esta tesis es el estudio de los fundamentos y los resultados obtenidos de dos métodos de análisis de señales de vibración con fines de determinar las características dinámicas de estructuras existentes; para lo cual se establecen los siguientes objetivos particulares:

- Comparar los resultados obtenidos de las técnicas del Análisis de Fourier y del OMA.
- Investigar, de acuerdo a los resultados, las fortalezas y debilidades de ambos métodos de análisis.
- Determinar con cual método de análisis se lograría una mejor evaluación de la salud estructural.

### 1.4. Organización del Trabajo

La presente tesis está organizada en 7 capítulos. En el primer capítulo se plantea el problema que se aborda en la investigación, así como la justificación del tema y los objetivos propuestos.

En el segundo capítulo se presenta una semblanza de los tipos de medición, del Monitoreo de la Salud Estructural y su relación con las vibraciones ambientales, también se describen de manera breve los trabajos más relevantes del OMA.

Por su parte en el tercer capítulo se explican las funciones que se obtienen en el Análisis de Fourier a partir de la Transformada de Fourier, así como el procedimiento para el cálculo de frecuencias propias, las formas modales y las fracciones de amortiguamiento crítico.

En el cuarto capítulo se explican, de manera detallada, las técnicas del OMA empleadas en esta investigación.

Posteriormente en el quinto capítulo se muestra la metodología de estudio mencionan-

do los registros de los casos de estudio que fueron analizados, los equipos que fueron utilizados y los programas empleados para el procesamiento y análisis de las señales.

Con respecto al sexto capítulo se muestra el estudio comparativo del Análisis de Fourier y del OMA, mencionando los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis, así como la comparación y análisis de los mismos.

Finalmente en el séptimo capítulo se mencionan las conclusiones obtenidas, así como las recomendaciones para trabajos futuros relacionados con este tema.

---

## Capítulo 2

# ANTECEDENTES

---

### 2.1. Tipos de Mediciones

La medición de vibraciones en sistemas estructurales con la finalidad de determinar los parámetros dinámicos de los mismos como son las frecuencias propias, formas modales y fracciones de amortiguamiento crítico, dependen del tipo de excitación a la que están sometidas estas estructuras. Las vibraciones obtenidas mediante pruebas experimentales se pueden clasificar en tres tipos: vibraciones sísmicas, vibraciones forzadas y vibraciones ambientales (Henaó Ángel, 2013).

- La medición de vibraciones inducidas por sismo se realiza mediante una instrumentación sísmica permanente de un sistema estructural, en la cual se mide la respuesta real de una estructura sometida a las aceleraciones del terreno provocadas por un evento sísmico. Debido a que la ocurrencia de sismos es impredecible la obtención de estos registros de vibración puede llevar mucho tiempo, lo cual es una gran desventaja.
  - Por otro lado las vibraciones forzadas son debidas a demandas de características conocidas que pueden ser existentes o artificialmente impuestas al sistema estructural para fines de registro de sus vibraciones. Estas vibraciones se pueden dividir en dos grupos: las obtenidas de ensayos en laboratorio y las obtenidas de mediciones en estructuras reales. Los ensayos en laboratorio generalmente se realizan en
-

mesas vibratorias en las que es posible controlar la fuerza de excitación y son particularmente útiles en la certificación y la calibración de equipos. En la medición de vibraciones en estructuras reales se requiere contar con mecanismos de excitación (grúas, martillos de impacto, vibradores de masas excéntricas, etc.), tienen la desventaja que su ejecución generalmente requiere de la interrupción temporal de las operaciones de la estructura; además de que la aplicación de la fuerza excitadora puede llegar a dañarla.

- Finalmente, las vibraciones ambientales son las producidas por demandas ambientales tales como viento, tránsito de vehículos, operación de maquinaria, etc, demandas que normalmente existen en condiciones de servicio de la estructura. La intensidad de estas vibraciones es generalmente baja por lo que no producen daño en la estructura además de que en su obtención no es necesario la interrupción de la operación del sistema estructural. La única desventaja es que su obtención requiere equipos de medición muy sensibles, ya que las señales que se registran son de muy baja intensidad; lo cual explica la dificultad que se tiene al identificar las características dinámicas de una estructura.

## 2.2. Monitoreo de la Salud Estructural (SHM)

El Monitoreo de la Salud Estructural (SHM, por sus siglas en inglés) permite el diagnóstico del estado de la estructura como un todo, en función del estado de sus diferentes elementos y de los materiales que la componen. El proceso del SHM implica la vigilancia de una estructura en el tiempo, dicha vigilancia se realiza por medio de mediciones de su respuesta dinámica a partir de una serie de sensores; estas mediciones se obtienen generalmente de vibraciones ambientales y forzadas. Actualmente las vibraciones ambientales se están aplicando más que las vibraciones forzadas, esto debido a la mayor facilidad y rápida obtención de sus resultados. Si bien es cierto que con las vibraciones forzadas se suelen obtener mejores respuestas, también es cierto que se corre el riesgo de dañar la estructura cuando se recurre a la aplicación de cargas artificiales para excitarla dinámicamente.

En zonas con actividad sísmica lo más adecuado es instrumentar de manera permanente las estructuras a la espera de un evento sísmico importante, con lo cual se obtendrían

registros de una respuesta dinámica real de la estructura; sin embargo, esto, en general, no es económicamente factible ya que el seguimiento de la operación de los sensores y de los registros de vibración obtenidos es costoso debido a su operación durante largos períodos de tiempo. Además, como se mencionó en el apartado anterior, la ocurrencia y características de los sismos son impredecibles; no pudiéndose saber con certeza cuándo ocurrirán. Sin embargo, es importante mencionar que en la mayoría de los casos de instrumentación permanente se han logrado obtener registros sísmicos de eventos importantes. Como se muestra en el capítulo 5, en este trabajo de investigación se presentan dos casos de edificios. En el primer edificio se tienen registros de vibración ambiental y en el segundo edificio se tienen registros de una medición sísmica que fueron obtenidos de una instrumentación permanente (de dos años aproximadamente). En la revisión de la literatura técnica de (Doebling *et al.*, 1996) se menciona que varios investigadores ya habían señalado la necesidad de reducir la dependencia de los mecanismos de excitación artificial e investigar más a fondo las vibraciones inducidas por demandas ambientales o de funcionamiento para la evaluación de la integridad estructural, debido a lo anterior las vibraciones ambientales se han estudiado más a detalle en las últimas décadas como una alternativa para determinar las propiedades dinámicas de estructuras.

A continuación se explica de manera breve los métodos, casos de aplicación, ventajas y partes en que se divide el SHM sin dejar de mencionar que es un área en proceso de investigación y desarrollo, cuyo principal objetivo es mejorar la seguridad y la confiabilidad de una estructura.

Los métodos del SHM se clasifican en dos grupos: métodos globales y métodos locales. Los métodos globales definen la presencia y la localización de un daño a partir de la dinámica de la estructura, los métodos locales por su parte se basan en pruebas experimentales e inspecciones visuales; estos últimos necesitan conocer a priori la probable localización del daño y que la sección que se va a analizar sea accesible para el operador (Sohn *et al.*, 2004).

En general el SHM puede ser aplicado en los siguientes casos (Brownjohn, 2007):

- Modificaciones de una estructura ya existente.
- Monitoreo del estado de una estructura afectada por cargas externas.

- Monitoreo del estado de una estructura en proceso de demolición.
- Valoración estructural de sistemas sujetos durante largo tiempo a movimientos o a degradación de materiales.
- Mejoramiento del diseño estructural basado en la adquisición de datos.
- Valoración de la integridad estructural después de fuertes incidencias dinámicas, tales como terremotos.

El SHM presenta numerosas ventajas para el desempeño de una estructura como son la reducción en la probabilidad de falla debido a fenómenos inesperados, como catástrofes naturales o daño progresivo en materiales durante períodos de inspección; la reducción en los gastos de mantenimiento de estructuras; la reducción en el costo de materiales; la posibilidad de monitorear y reparar estructuras remotas y la valoración de sistemas estructurales luego de desastres naturales (Sohn *et al.*, 2004). Un sistema de SHM se compone de tres partes: instrumentación y sensorización, obtención y almacenamiento de datos y análisis e interpretación de datos (Worden *et al.*, 2003).

En la instrumentación y sensorización se obtienen mediciones acerca del comportamiento dinámico de la estructura empleando diversos tipos de sensores y sistemas de adquisición de datos. Con respecto a la obtención y almacenamiento de datos se considera lo siguiente: tipo de red de sensores (centralizada o distribuida), dispositivos en las redes de sensores, dispositivos para la comunicación remota, método de almacenamiento de datos y frecuencia de almacenamiento de datos. Por último el análisis e interpretación de datos se divide en tres tareas: identificación del sistema monitoreado, detección de cambios en el sistema monitoreado e interpretación de los cambios y los daños detectados, y formulación de las estrategias de corrección y prevención.

En términos generales el SHM es importante en las evaluaciones de estructuras existentes, ya que estas se van degradando con el paso del tiempo debido a factores ambientales y antropogénicos; conocer como se comportan las estructuras debido a estos agentes sirve de ayuda para el mejoramiento y mantenimiento de las mismas.

### 2.3. Estudios previos del Análisis Modal Operacional (OMA)

En las últimas décadas se han realizado, en diversos países, varios trabajos del OMA en relación con la evaluación de la salud estructural, enseguida se hace una revisión de algunos de estos trabajos.

En su investigación (Brincker y Andersen, 1999) elaboraron un resumen de las ideas básicas del análisis de la respuesta ambiental, introduciendo brevemente algunas de las técnicas en el dominio de la frecuencia más conocidas como son la de Identificación de Picos (Peak-Picking ) y el método del Subespacio Estocástico para la estimación de los sistemas de espacio de estado. Las técnicas se ilustraron con un ejemplo de las respuestas de vibración ambiental obtenidas de un puente carretero. Los autores concluyen que la técnica de Identificación de Picos es más fácil de usar y proporciona estimaciones rápidas; sin embargo, el amortiguamiento no se estima y las formas modales son las deflexiones operativas; de la misma manera agregan que debido a que las formas modales se estiman en el dominio de la frecuencia todas son más comparables con las de la Identificación de Picos que con los métodos en el dominio del tiempo. Estos últimos métodos tienen la ventaja de ser operados directamente sobre las señales medidas, sin embargo son un poco más complicados de usar y consumen más tiempo.

Posteriormente (Brincker *et al.*, 2000) realizaron un análisis de la respuesta ambiental en el puente del Gran Belt en Dinamarca. El puente del Gran Belt es uno de los mayores puentes colgantes en el mundo, y el análisis se llevó a cabo con el fin de investigar las posibilidades de estimar valores de amortiguamiento fiables a partir de la respuesta ambiental debido al tráfico y al viento. Los datos se analizaron utilizando tres técnicas del OMA: Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD), Identificación con Subespacios Estocásticos (SSI) y una covarianza derivada de la técnica de SSI. En un rango de frecuencias de 0.17 a 0.30 Hz se identificaron 5 modos, los autores tuvieron dificultades con las técnicas del SSI para identificar los 5 modos; así como la presencia de incertidumbres en las estimaciones del amortiguamiento. En cambio con la técnica FDD se identificaron fácilmente los 5 modos y las estimaciones del amortiguamiento fueron mejores; los autores recomiendan que el tiempo de registros debe ser de dos horas o más para eliminar el sesgo de las señales cuando se utiliza la técnica FDD.

De igual manera (Ventura *et al.*, 2003) estudiaron las propiedades dinámicas de dos edificios de acero instrumentados, de 52 y 54 pisos. Estos edificios se encuentran en Los Ángeles, California. Los edificios han sido sometidos a varios terremotos, entre los que se encuentra el terremoto de Northridge de 1994. Los resultados del estudio mostraron que los datos registrados de terremotos contienen información muy significativa para determinar las características dinámicas de las estructuras y que los ingenieros estructurales pueden utilizar esta información para comprender mejor el comportamiento dinámico de edificios muy altos. Se empleó la técnica FDD para realizar el análisis modal de cada edificio, las características dinámicas de interés fueron las frecuencias fundamentales, el amortiguamiento y las formas modales de cada edificio en sus direcciones principales. Los autores concluyen que el estudio del comportamiento de cada edificio era importante por dos razones: la primera son las diferencias estructurales entre los edificios (mientras que un edificio se basa en un sistema de tubo perimetral el otro edificio se basa en una estructura de marcos) y la segunda es que los edificios comparten condiciones ambientales similares; así como también determinar como se pueden comportar los edificios ante un evento sísmico importante.

En otra estructura estudiada por (Cunha *et al.*, 2004) donde llevaron a cabo un análisis de los datos de vibración ambiental del puente atirantado Vasco da Gama localizado en Lisboa, Portugal. Este análisis fue realizado con el propósito de probar la eficacia y precisión de dos técnicas del OMA: Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD) e Identificación con Subespacios Estocásticos (SSI). Las estimaciones modales obtenidas con estas técnicas se compararon teniendo también en cuenta las estimaciones de la técnica de Identificación de Picos (PP). Los autores concluyen que las técnicas FDD y SSI son herramientas poderosas que permiten un procedimiento de identificación objetivo, proporcionando estimaciones precisas de las frecuencias naturales y formas modales de grandes puentes. Con respecto a la identificación de los coeficientes de amortiguamiento modal la técnica SSI permitió obtener estimaciones más satisfactorias en comparación con las otras técnicas.

Las técnicas del OMA estudiadas con interés en el trabajo de (Herlufsen *et al.*, 2005) se da una visión general de las técnicas de Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD) e Identificación con Subespacios Estocásticos (SSI). Los autores argumentan que la técnica FDD es la más simple y fácil de usar cuando la gráfica de Descomposición

en Valores Singulares (SVD) revela picos aislados causados por resonancias. El método mejorado de FDD (EFDD) añade las estimaciones de amortiguación, así las estimaciones de la frecuencia y formas modales se mejoran mediante el ajuste de un modelo SDOF a los valores singulares en una banda de frecuencia definida por el usuario alrededor del pico. Con respecto a los diferentes algoritmos de la técnica SSI (UPC, CP, CVA) los resultados fueron casi idénticos, la tendencia general es que la dimensión del espacio requerido por el estado es más bajo para el PC, ligeramente superior a la UPC y más alta para el CVA, como también se indica por los valores singulares normalizados de la matriz de observación ponderada y que se presenta conjuntamente con el diagrama de estabilización.

El OMA también se ha aplicado a edificaciones históricas obteniendo buenos resultados como se ve en (Diaferio *et al.*, 2011) en donde se aplicaron dos técnicas del OMA (EFDD y SSI) a los datos obtenidos del monitoreo dinámico de la torre de concreto del edificio de la Administración Provincial de Bari (Italia); la torre data de 1930 y tiene 60 m de altura. Se realizaron 11 pruebas de vibración ambiental consecutivas para la estimación precisa de las características dinámicas, con las cuales se pudo determinar los primeros tres modos propios de vibrar de la torre. Los autores encontraron buena similitud entre las estimaciones modales encontradas con las técnicas del OMA antes mencionadas, adicionalmente mencionan que con las técnicas derivadas del SSI se mejora la calidad de los resultados.

Por su parte en el trabajo de (Fernández *et al.*, 2008) se presenta una metodología que permite mejorar la fiabilidad en el análisis a fatiga utilizando el OMA (FDD, EFDD, SSI) para estimar los esfuerzos presentes en cada punto de las estructuras, utilizando para ello los parámetros modales de las estructuras (estimados mediante identificación modal) y las respuestas de aceleración. La metodología propuesta para la estimación de los esfuerzos se aplica a estructuras de barras de acero, comparando los resultados experimentales obtenidos con un modelo de elementos finitos de la estructura. Esta metodología se validó mediante ensayos realizados en una barra en voladizo de acero S-275, longitud de 1.875 m y sección rectangular de 100x40x4 mm; los ensayos se realizaron aplicando una carga aleatoria mediante impactos sucesivos en la barra con un martillo modal. Los autores concluyen que este método puede ser utilizado para reducir la incertidumbre del daño acumulado a la fatiga o a la vida remanente de estructuras en servicio.

Por último en la investigación de (Magalhães *et al.*, 2006) se aplicaron técnicas de identificación modal *output-only* (Descomposición en el Dominio de la Frecuencia e Identificación con Subespacios Estocásticos) a los datos recogidos de una prueba de vibración ambiental realizada en el Estadio Deportivo Braga en Portugal que tiene su techo suspendido. Las frecuencias y las formas modales obtenidas se compararon con las obtenidas de un modelo de elementos finitos que tuvo en cuenta el comportamiento no lineal geométrico y el proceso de construcción; las estimaciones medidas con las técnicas antes mencionadas fueron coherentes y bien correlacionadas con los resultados proporcionados por el modelo numérico. Los investigadores concluyeron que el Análisis Modal Operacional es una buena alternativa a los procedimientos basados en la excitación artificial y que es necesario realizar más investigaciones para mejorar la estimación de los coeficientes de amortiguamiento modal en el OMA.

En (Magalhães y Cunha, 2011) los autores evaluaron ahora el comportamiento de un puente en Porto, Portugal, haciendo incapié en la importancia del OMA como una técnica experimental en la evaluación de infraestructura civil. Se empleó el método de Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD) y el mejorado del mismo nombre (EFDD). Llegando a la conclusión que el OMA a pesar de que ha alcanzado una madurez significativa, presenta algunas limitaciones lo cual justifica la necesidad de seguir investigando para hacer del OMA una herramienta experimental más potente y útil.

Como se puede observar en los trabajos anteriores, las técnicas del OMA se han utilizado en diversos tipos de estructuras como edificios, puentes y estadios; obteniéndose en general buenos resultados. Actualmente se siguen investigando las técnicas del OMA principalmente en Europa, donde se han realizado la mayoría de las investigaciones. Un propósito de este trabajo de investigación es dar a conocer estas técnicas, relativamente nuevas en México, para ampliar el panorama de que existen otras técnicas de análisis modal.

---

## Capítulo 3

# ANÁLISIS DE FOURIER

---

### 3.1. Series de Fourier

El principio del Análisis de Fourier es que toda función periódica puede representarse como una serie de funciones seno y coseno. Las series de Fourier fueron desarrolladas por Joseph Fourier a principios del siglo XIX para representar una señal en función del tiempo, a través de una superposición de señales más simples sinusoidales de varias frecuencias. Una función periódica se define como aquella cuyos valores se repiten a intervalos regulares, el tiempo entre las sucesivas repeticiones se denomina período; cuya unidad es el segundo (s). La frecuencia es la inversa del período y su unidad es el Hertz (Hz). En la figura 3.1 se ilustra una función periódica, donde  $T$  es el período.

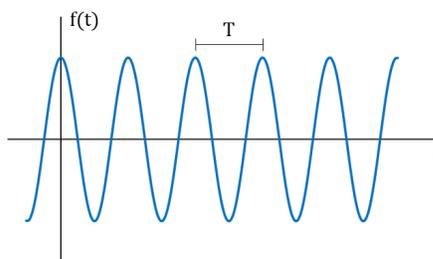


Figura 3.1. Representación de una función periódica

---

Matemáticamente una función  $f(t)$  es periódica si se cumple la siguiente relación:

$$f(t) = f(t + T) \quad (3.1)$$

Una señal periódica y continua en el tiempo, con período  $T$ , se puede representar mediante series de Fourier en la forma:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_T t) + b_n \sen(n\omega_T t)] = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_T t - \theta_n) \quad (3.2)$$

donde:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \quad (3.3)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) dt \quad (3.4)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega_T t) dt \quad (3.5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sen(n\omega_T t) dt \quad (3.6)$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad (3.7)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.8)$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \quad (3.9)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

De las expresiones anteriores  $\omega_T$  es la frecuencia de la señal periódica que recibe el nombre de frecuencia fundamental. Por su parte  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $C_n$  y  $\theta_n$  son los coeficientes de la serie de Fourier que definen las senoides cuya frecuencia es múltiplo de la fundamental. La componente de la serie de Fourier cuya frecuencia coincide con la fundamental ( $n = 1$ ) recibe el nombre de componente fundamental y el resto de las componentes se les llama componentes armónicas (González, 2003).  $C_n$  y  $\theta_n$  se suelen llamar amplitud armónica y ángulo de fase respectivamente. El espectro de frecuencia es una medida de la distribución de amplitudes de cada frecuencia.

Para funciones no periódicas estas se expresan por medio de la Transformada de Fourier, aunque también esta última se puede aplicar a funciones periódicas.

### 3.2. Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es una operación matemática que transforma una señal en el dominio del tiempo a otra en el dominio de la frecuencia y viceversa (Rodríguez, 2005). La Transformada de Fourier de una función  $x(t)$  está dada por la siguiente expresión:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.10)$$

Las mediciones de vibraciones, ambientales o forzadas, se obtienen en el dominio del tiempo; pero por practicidad es mejor trabajarlas en el dominio de la frecuencia. Para obtener las componentes individuales de cada frecuencia es necesario realizar un análisis espectral por medio de la Transformada de Fourier.

A partir de las series de Fourier es posible representar una señal periódica de aceleración  $x(t)$ , con período  $T$ . De la función anterior se puede obtener una función no periódica cuando  $T \rightarrow \infty$ , entonces la Transformada de Fourier de la señal no periódica  $x(t)$  queda de la siguiente manera:

$$X(f) = \int_{-\infty}^T x(t) e^{i2\pi ft} dt \quad (3.11)$$

La Transformada de Fourier es compleja, por lo cual se divide en una parte real y en una parte imaginaria pudiéndose escribir como:

$$X(f) = \int_0^T x(t) \cos(2\pi ft) dt + i \int_0^T x(t) \sen(2\pi ft) dt \quad (3.12)$$

Por lo tanto la Transformada de Fourier de un registro, por ejemplo, una señal de aceleración obtenida en un punto de medición de una estructura, se representaría por la siguiente ecuación:

$$X(f) = \int_0^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.13)$$

### 3.2.1. Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Para procesar las señales medidas de un sistema estructural se emplea un analizador digital. Este analizador digital muestrea las señales usando un convertidor analógico/digital, en un período de tiempo, con una relación de muestreo constante; es decir se tienen señales digitales discretas (con un número finito de valores). Como consecuencia la Transformada de Fourier no se puede aplicar directamente, ya que las señales asociadas a esta son continuas (con un número infinito de valores). Debido a lo anterior surge la Transformada de Fourier Discreta (DFT por sus siglas en inglés), la cual hace posible el Análisis de Fourier en sistemas digitales (González, 2003).

Las señales discretas son consecuencia del muestreo de señales continuas, a partir de una señal continua  $x_c(t)$  se obtiene una secuencia de muestras  $x_k$  mediante la siguiente relación:  $x_k = x_c(k\Delta t)$ . Donde  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$  es el período de muestreo y la frecuencia de muestreo, que es el número de muestras por segundo, se define en la expresión 3.14. En la figura 3.2 se muestra la obtención de una señal discreta a partir de una señal continua.

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \quad (3.14)$$

La DFT se puede expresar mediante la ecuación 3.15, donde  $N$  son los valores discretos  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$ .

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi nk/N} \quad (3.15)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$$

El proceso de muestreo se define en términos de una ventana que controla la longitud de la muestra. La ventana que se elige determina las características del filtro del analizador digital, que se puede cambiar si se quiere dar más importancia a unos puntos que a otros puntos de la señal muestreada (Rodríguez, 2005). En términos generales el proceso de muestreo genera una señal que es producto de la señal original, de la ventana empleada y de la frecuencia de muestreo.

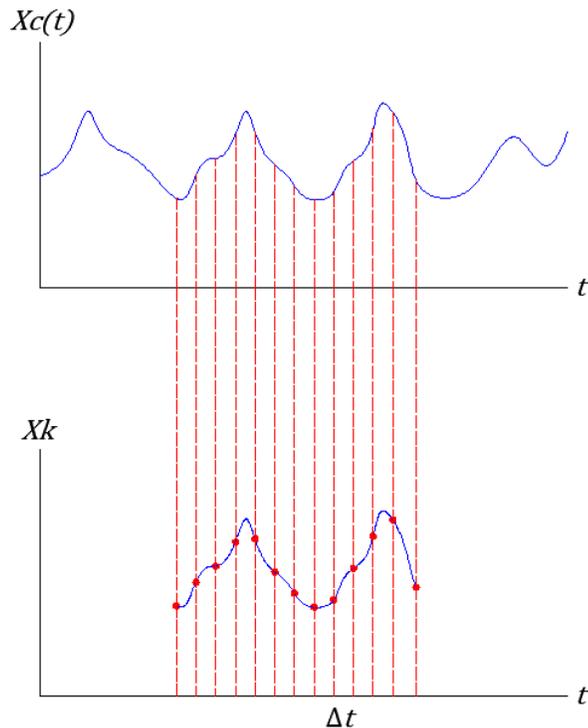


Figura 3.2. Obtención de una señal discreta a partir de una señal continua

### 3.2.2. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La Transformada Rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) permite calcular la DFT y su inversa, es una versión más rápida de la DFT que puede ser aplicada cuando el número de muestras de la señal es una potencia de 2. El cálculo de FFT toma aproximadamente  $N \cdot \log_2(N)$  operaciones, en cambio la DFT toma aproximadamente  $N^2$ , por lo tanto la FFT es más rápida. En ocasiones es útil emplear el relleno de ceros, es decir, agregar ceros al principio y/o al final de la secuencia de dominio en el tiempo. Esta adición no afecta al espectro de frecuencia de la señal. El relleno de ceros es una buena idea cuando la longitud de la señal no es una potencia de 2 (Rodríguez, 2005).

Es importante resaltar que la FFT no sólo optimiza el tiempo de cálculo, si no que también reduce considerablemente los errores de redondeo asociados con la representación en una computadora de los datos numéricos. Por otro lado las funciones de la FFT son simétricas, es decir, su salida incluye frecuencias negativas que existen por las propie-

dades matemáticas de la Transformada de Fourier. La primera mitad de la FFT contiene frecuencias desde 0 Hz hasta la frecuencia de Nyquist (se define como la mitad de la frecuencia de muestreo) y la segunda mitad es un reflejo con frecuencias negativas.

### 3.3. Ruido

Generalmente los registros de vibraciones ambientales son afectados por señales ajenas al sistema en estudio, a estas señales ajenas se les conoce como ruido. El ruido es una señal aleatoria que se superpone a la señal que se está midiendo, este distorsiona la señal y si la relación ruido-síñal es muy alta puede falsear los datos obtenidos (Rodríguez, 2005). El ruido es debido principalmente a los movimientos e interferencias electromagnéticas de los cables y de las conexiones en los equipos de medición; se puede evitar utilizando filtros.

### 3.4. Filtros

Los filtros se emplean para atenuar partes no deseadas de las señales en el dominio de la frecuencia. Un filtro tiene la propiedad de eliminar ciertas frecuencias de una señal y dejar pasar las demás sin alterarlas. Existen varios tipos de filtros según las frecuencias que deja pasar, algunos de ellos son (Rodríguez, 2005):

- Filtro paso-bajo, elimina las frecuencias por encima de la frecuencia de corte.
- Filtro paso-alto, elimina las frecuencias por debajo de la frecuencia de corte.
- Filtro paso-banda, deja pasar sólo una banda definida por dos frecuencias.
- Filtro rechazo de banda, elimina las frecuencias que se encuentran entre dos valores.

Los filtros mencionados anteriormente se ilustran en la figura 3.3. En el dominio de la frecuencia los filtros se caracterizan por cuatro parámetros: frecuencia central, ancho de banda, rizado y selectividad (Rodríguez, 2005). La frecuencia central se define como el valor medio geométrico de los valores inferior y superior de los límites de frecuencia del

filtro, el ancho de banda da información sobre su habilidad para separar componentes de amplitudes similares y la selectividad indica la capacidad que tiene para separar componentes de frecuencias próximas pero de niveles diferentes. Cabe hacer mención que si un filtro no se elige adecuadamente su aplicación puede llevar a resultados incorrectos.

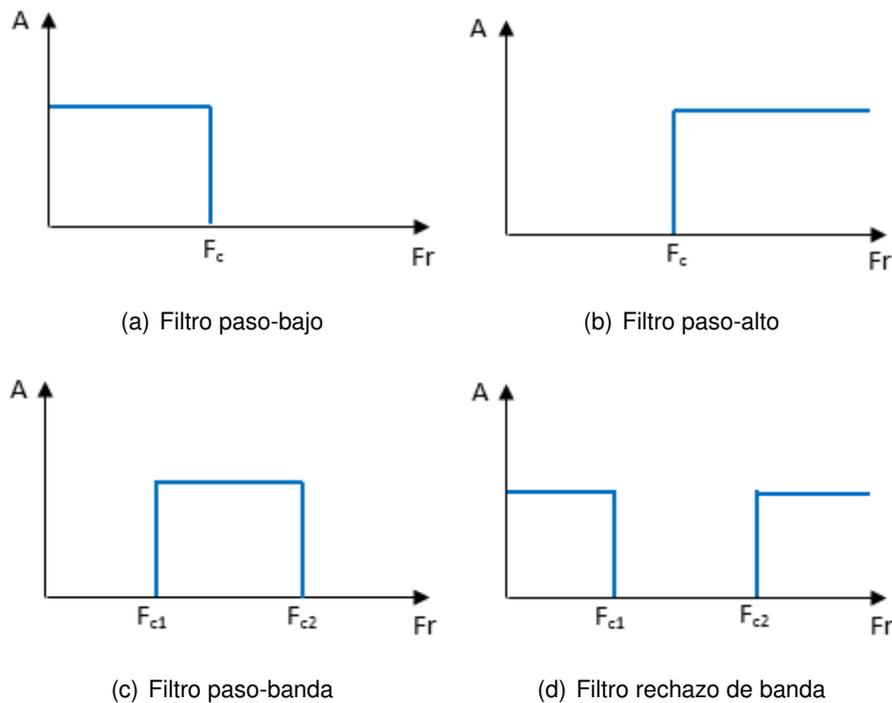


Figura 3.3. Tipos de filtros

### 3.5. Ventanas

Las ventanas se emplean para que las señales muestreadas cumplan mejor la periodicidad de la Transformada de Fourier. Hay distintos tipos de ventanas según la aplicación que se vaya a desarrollar. Así, se puede encontrar la ventana Rectangular, la Hanning, la Transitoria, la Exponencial, etc. Cada una de las ventanas se aplica sobre partes de la señal, obteniéndose diferentes espectros como resultado. En general las ventanas producen una reducción de la precisión de la amplitud del pico medido de la función, y aparecerá como si hubiera un amortiguamiento mayor del que realmente hay en la estructura (Rodríguez,

2005).

A pesar de la existencia de varias ventanas, la más sencilla y aplicada es la ventana de Hanning o del coseno cuadrado, la cual se caracteriza por realizar una ponderación que da menor importancia a los datos tomados al principio y al final del muestreo. Se emplea cuando se quiere analizar señales continuas y para realizar análisis de sistemas en los que la excitación sea una señal aleatoria. La función de ponderación de esta ventana se define por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} W_h(t) &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T}\right) = 1 - \cos^2 \left(\frac{\pi t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T \\ W_h(t) &= 0, & \text{Otros casos} \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.6. Espectro de Fourier

El espectro de Fourier es una función de densidad espectral, donde se grafican las amplitudes de la Transformada de Fourier contra las frecuencias de una señal dada.

$$S_x(f) = |S_x(f)| e^{-i\theta(f)} \quad (3.17)$$

Donde  $|S_x(f)|$  es el espectro de amplitudes y  $\theta(f)$  es el espectro de fase.

### 3.7. Espectro de Potencia

El espectro de potencia o autoespectro se puede obtener mediante el producto del espectro de Fourier de una señal con su conjugada (Murià Vila, 2007).

$$S_{xx}(f) = S_x(f) S_x^*(f) \quad (3.18)$$

### 3.8. Función de Transferencia

La función de transferencia se define como la descripción matemática en el dominio de las frecuencias entre los espectros de Fourier de la entrada y la salida de un sistema. Permite

encontrar la relación de amplitudes que hay entre dos señales. En términos prácticos es el cociente espectral entre los espectros de Fourier de salida y de entrada:

$$H(f) = \frac{S_y(f)}{S_x(f)} \quad (3.19)$$

Esta función también se puede obtener utilizando las densidades espectrales de potencia, ya que con la expresión anterior se corre el riesgo que existan términos donde  $S_x(f)$  sea cero para una frecuencia en particular. De esta manera, a partir de transformar en el dominio de la frecuencia las relaciones entre las autocorrelaciones y las correlaciones cruzadas de las señales de entrada y de salida, es posible establecer un par de ecuaciones para la determinación de las propiedades de la función de respuesta en frecuencia de un sistema a partir de la medición y análisis de una prueba de vibraciones aleatorias.

$$H_1(f) = \frac{G_{xy}(f)}{G_{xx}(f)} \quad (3.20)$$

$$H_2(f) = \frac{G_{yy}(f)}{G_{yx}(f)} \quad (3.21)$$

### 3.9. Función de Coherencia

La función de coherencia es una medida de la relación que existe entre las señales de entrada y salida, es decir, que tanto la señal de salida es producto únicamente de la señal de entrada o si existen otro tipo de señales (ruido) que afecten la señal de salida. El valor de la función de coherencia varía entre 0 y 1, siendo cero cuando no existe coherencia entre las señales y 1 cuando la coherencia es perfecta. Esta función está definida por la relación entre las funciones de transferencia y está dada por:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{H_1(f)}{H_2(f)} = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} \quad (3.22)$$

Cuando la función de coherencia es mayor que cero pero menor que la unidad, es debido a una o más de las siguientes razones (Bendat y Piersol, 1993):

- Ruido extraño presente en las mediciones.

- Errores de resolución presente en las estimaciones espectrales.
- El sistema que relaciona  $y(t)$  con  $x(t)$  no es lineal.
- La salida  $y(t)$  es debida a otras entradas, además de  $x(t)$ .

### 3.10. Espectro Cruzado

Los espectros cruzados al igual que los autoespectros se pueden obtener mediante el producto del espectro de Fourier de una señal con la conjugada del espectro de Fourier de otra señal (Murià Vila, 2007).

$$S_{xy}(f) = S_x^*(f) S_y(f) \quad (3.23)$$

### 3.11. Ángulo de Fase

La fase o ángulo de fase de las señales  $\theta_{xy}(f)$  se obtiene con el cociente de la parte real y la parte imaginaria de la función del espectro cruzado de potencia (Murià Vila, 2007).

$$G_{xy}(f) = A_{xy}(f) + iB_{xy}(f) \quad (3.24)$$

$$|G_{xy}(f)| = \sqrt{A_{xy}^2(f) + B_{xy}^2(f)} \quad (3.25)$$

$$\theta_{xy}(f) = \tan^{-1} \frac{B_{xy}(f)}{A_{xy}(f)} \quad (3.26)$$

El ángulo de fase varía entre  $\pm 180^\circ$  y muestra la dirección relativa del movimiento entre dos puntos de medición, representados por dos señales registradas de manera simultánea. Un ángulo de fase igual a cero entre dos puntos diferentes para una frecuencia dada indica correspondencia en el sentido del movimiento y se dice que ambos puntos están en fase. Caso contrario cuando el ángulo de fase es igual a  $\pm 180^\circ$ , en este caso los puntos están en desfase.

El ángulo de fase es una herramienta útil para determinar las formas modales de una estructura, ya que permite indicar la dirección del movimiento de cada nivel de la estructura (Henaó Ángel, 2013).

### 3.12. Procedimiento para el cálculo de frecuencias

Los conceptos descritos anteriormente se emplean en el Análisis de Fourier para determinar las propiedades dinámicas de las estructuras, como son las frecuencias, las formas modales y las correspondientes fracciones de amortiguamiento crítico. A continuación se describe el procedimiento para la obtención de las frecuencias.

Por medio del espectro de Fourier y el espectro de potencia, obtenidos de las señales de vibración ambiental o forzada, se identifican las frecuencias correspondientes a los picos más sobresalientes de estos espectros mismas que corresponden a las frecuencias propias del sistema estructural. Es importante mencionar, que no todos los picos máximos corresponden a las frecuencias propias de la estructura, ya que algunos son consecuencia de las fuerzas de excitación y del ruido. En la mayoría de los casos no es suficiente analizar sólo las amplitudes de los espectros de Fourier y potencia, por lo que se recurre a la función de coherencia. La coherencia entre dos señales confirma si las frecuencias identificadas en los espectros de cada una de las señales son frecuencias propias del sistema estructural; una coherencia con un valor cercano a cero indica que la frecuencia identificada tiene una cantidad de ruido importante y no se considera como una frecuencia propia de la estructura.

### 3.13. Procedimiento para determinar las formas modales

Las formas modales se pueden determinar con el ángulo de fase de las señales empleadas; el ángulo de fase al igual que la coherencia se grafica en función de la frecuencia. Lo anterior permite obtener el ángulo de fase para las frecuencias propias identificadas de la estructura y posteriormente definir el modo de vibración correspondiente a esas frecuencias pico. Un ángulo de fase igual o cercano a  $0^\circ$  indica que los dos puntos correlacionados se mueven en el mismo sentido (lateral o vertical), en cambio un ángulo de fase igual o cercano a  $180^\circ$  indica que ambos puntos se están moviendo en sentido contrario; que en el caso de edificios representa el modo de torsión. Es importante recordar que para obtener una coherencia y un ángulo de fase representativo del sistema estructural analizado las

señales que se utilicen deben ser sincronas.

### 3.14. Procedimiento para el cálculo de la fracción de amortiguamiento crítico

Determinar la fracción de amortiguamiento crítico de un sistema estructural es complicado, pero existen teorías que permiten calcular el amortiguamiento de manera aproximada a partir de mediciones experimentales. Una de estas teorías es el método de Kawasumi y Shima (Kawasumi y Shima, 1965), el cual se emplea en este trabajo de investigación. Este método está basado en las amplitudes de un espectro de potencia con buena resolución y suponiendo condiciones de ruido blanco, las expresiones para su aplicación se muestran a continuación:

$$A = \left( \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \right) / \sqrt{\lambda - 1} \quad (3.27)$$

$$\xi = \frac{A}{2} \left( 1 - \frac{3}{8} A^2 \right) \quad (3.28)$$

Lo primero que se hace para aplicar el método es seleccionar arbitrariamente un valor de  $\lambda$  (comúnmente se elige  $\lambda = 2$ ), posteriormente se divide el máximo valor del espectro de potencia entre  $\lambda$ . Del resultado obtenido se traza una línea horizontal a esa amplitud, cortando el espectro de potencia en dos puntos, se procede a identificar las frecuencias asociadas a los valores de esos dos puntos; por lo que se obtiene  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Finalmente se calcula el parámetro  $A$  (amplitud de la respuesta) mediante la expresión 3.27 y el resultado se sustituye en la expresión 3.28 para obtener la fracción de amortiguamiento crítico. En la siguiente figura se ilustra el método descrito anteriormente.

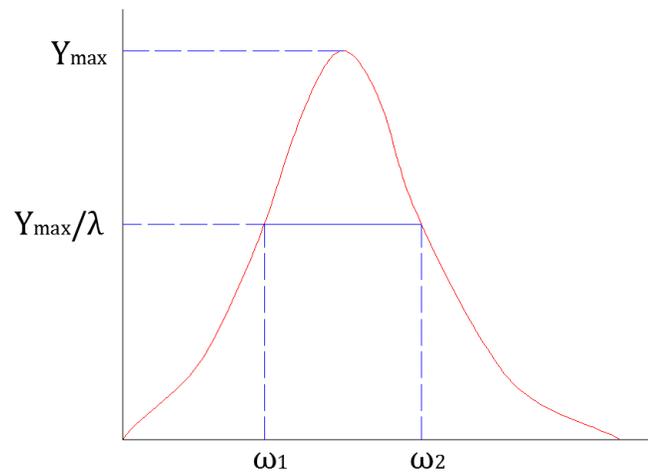


Figura 3.4. Método de Kawasumi y Shima para obtener el amortiguamiento crítico

---

## Capítulo 4

---

# ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL (OMA)

---

### 4.1. Introducción del OMA

El Análisis Modal Operacional (OMA) mide la respuesta de la estructura debido a vibraciones ambientales (viento, tráfico, olas, etc) y a las fuerzas de servicio que actúan sobre ella. Se usa para obtener una descripción modal de la estructura bajo sus condiciones de operación. En la vibración ambiental se considera que la estructura es excitada por ruido blanco, es decir, el espectro de entrada es constante, todos los modos se excitan igual y el espectro de salida contiene la información completa de la estructura. A diferencia del Análisis Modal Experimental (EMA por sus siglas en inglés), que emplea cargas artificiales para producir vibraciones forzadas y que considera las excitaciones ambientales como una fuente de ruido no deseado, en el OMA la excitación natural se usa como fuente de excitación. Sin embargo, la mayoría de las técnicas del OMA se han derivado de los procedimientos del EMA por lo que comparten una base teórica común con los procesos de entrada-salida. La principal diferencia es que en el EMA se conoce y se mide la entrada, mientras que en el OMA la entrada es incierta y no se mide; aunque también se puede conocer la entrada de manera indirecta cuando se llevan a cabo mediciones sísmicas en estructuras instrumentadas de manera permanente.

El OMA se basa en los siguientes supuestos (Rainieri y Fabbrocino, 2014):

- Linealidad: la respuesta del sistema para una combinación dada de entradas es igual
-

a la misma combinación de las salidas correspondientes.

- Estacionariedad: las características dinámicas de la estructura no cambian con el tiempo, de manera que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que rigen la respuesta dinámica de la estructura son independientes del tiempo.
- Observabilidad: el arreglo de los sensores se diseña adecuadamente para observar los modos de interés, evitando los puntos nodales.

La idea detrás del OMA es tomar ventaja de las excitaciones naturales que están libremente disponibles para remplazar a las excitaciones artificiales, y así poder determinar más fácilmente los parámetros dinámicos de grandes estructuras civiles (Rainieri y Fabbrocino, 2014). Lo anterior ha permitido en los últimos años un desarrollo importante del OMA en el campo de la ingeniería civil, ya que representa una alternativa atractiva a los análisis modales de entrada-salida. Como se mostró en el capítulo 2 varias aplicaciones del OMA en diversos países están documentadas, debido a este gran número de investigaciones se creó en 2005 una conferencia internacional enfocada completamente en el OMA: la Conferencia Internacional del Análisis Modal Operacional (IOMAC por sus siglas en inglés).

El tipo de medición que se emplea para aplicar las técnicas del OMA es el de vibración ambiental, como se ha mencionado. Esta presenta ciertas ventajas las cuales se mencionan a continuación (Rodríguez, 2005):

- Es necesario menor tiempo para realizar el ensayo, ya que sólo hay que colocar los equipos de medición.
- Es más barato, puesto que no necesitan la adquisición de excitadores y puede realizarse in situ.
- El ensayo no interfiere ni interrumpe el funcionamiento normal de la estructura, por lo que puede seguir estando en servicio mientras se realiza.
- La respuesta medida es representativa de las condiciones reales de funcionamiento de la estructura.

- Se evita la aplicación de cargas artificiales que conlleven un riesgo de dañar la estructura.

Sin embargo, debido a que la intensidad de las señales que se obtienen con vibración ambiental es baja y generalmente estas señales están contaminadas con ruido su análisis es más difícil, por lo tanto las principales desventajas son (Rodríguez, 2005):

- Se necesitan equipos muy sensibles.
- Es necesario un análisis de datos cuidadoso.

## 4.2. Técnicas del OMA

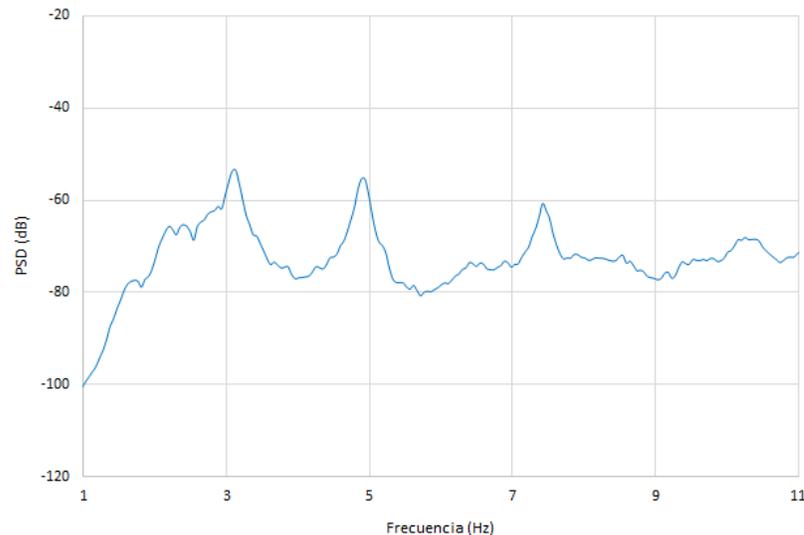
Existen varias técnicas para realizar el OMA, las cuales se desarrollan en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo. En el primer dominio se requiere una etapa de procesamiento para estimar las funciones de correlación a partir de los registros obtenidos en las mediciones de respuesta; en cambio, en el segundo dominio el procesamiento se realiza directamente con los registros de las mediciones. En el dominio de la frecuencia sobresalen la Identificación de Picos (PP), la Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD) y la Descomposición en el Dominio de la Frecuencia Mejorada (EFDD); por su parte en el dominio del tiempo sobresalen la Técnica de Excitación Natural (NExT) y la Identificación con Subespacios Estocásticos (SSI).

En el presente trabajo de investigación únicamente se muestran las técnicas PP, FDD, EFDD y SSI; debido a que son las más utilizadas en la comunidad científica. A continuación se explican cada una de ellas.

### 4.2.1. Identificación de Picos (PP)

La Identificación de Picos (PP por sus siglas en inglés) es la técnica del OMA más simple que se conoce para la identificación de los parámetros modales de estructuras sujetas a cargas de vibración ambiental. Esta técnica se desarrolla en el dominio de la frecuencia

y se basa en que la función de respuesta en frecuencia alcanza valores extremos alrededor de las frecuencias naturales de la estructura. Las frecuencias naturales se determinan simplemente a partir de la observación de los picos en la gráfica de la función de la densidad espectral de potencia (PSD por sus siglas en inglés) promediada y normalizada (Ren y Zong, 2004). La PSD representa como se distribuye la energía para cada frecuencia y se obtiene convirtiendo las aceleraciones medidas al dominio de la frecuencia mediante la DFT; en el próximo apartado se explica con más detalle la PSD. Cabe mencionar que la inspección de la función de coherencia puede ayudar a seleccionar las frecuencias naturales cuando sus valores son cercanos a la unidad, como se vio en el capítulo anterior. En la figura 4.1 se representan los picos de la gráfica de la PSD, los cuales son las frecuencias naturales.



*Figura 4.1. Representación de los picos de la PSD que indican las frecuencias naturales*

Aunque las fuerzas de entrada no se miden en las pruebas de vibración ambiental, esto se ha resuelto adoptando una técnica de identificación de parámetros modales derivada de la tradicional, en la cual se utiliza la señal del sensor de referencia como entrada y las funciones de respuesta en frecuencia y de coherencia se calculan para cada punto de medición con respecto a este sensor de referencia (Ren y Zong, 2004). En el contexto del OMA la función de transferencia no significa la relación entre la respuesta y la fuerza de entrada, sino más bien representa la relación entre la respuesta medida por un sensor

cualquiera y la respuesta medida por un sensor de referencia.

Se asume que la respuesta dinámica en los picos de resonancia está determinada sólo por un modo. La validez de esta hipótesis aumenta cuando los modos están mejor separados y cuando el amortiguamiento de la estructura es menor.

Los modos que proporciona este método se obtienen empleando la siguiente expresión (Brownjohn, 2003):

$$\frac{S_{qp}(\omega_{r0})}{S_{qq}(\omega_{r0})} \approx \frac{\phi_p^{r0}}{\phi_q^{r0}} \quad (4.1)$$

donde  $\omega_{r0}$  representa la frecuencia para la que se ha identificado el pico en el espectro.

La estimación del modo consiste en variar el subíndice  $p$  mientras se mantiene constante la referencia  $q$ , al mismo tiempo se van leyendo cada uno de los valores de la columna de la matriz de densidades espectrales cruzadas para cada frecuencia natural identificada en el pico del espectro. Estos valores contienen información de fase y de amplitud los cuales se normalizan a un valor unidad con un ángulo cero dividiéndolos entre la densidad autoespectral de la señal de referencia. Por lo tanto, se evalúa la relación de la densidad espectral cruzada entre las posiciones  $p$  y  $q$ , y la densidad autoespectral en la posición de referencia  $q$ .

De esta manera se obtiene la representación de la deformada en funcionamiento, la cual es una aproximación del modo de vibración. El autoespectro  $S_{qq}(w)$  alrededor de la resonancia puede ser utilizado para estimar la relación de amortiguamiento mediante el ajuste de una curva (Brownjohn, 2003). Es importante mencionar que el procedimiento para estimar la frecuencia natural, la deformada y la relación de amortiguamiento están sujetos a errores y aproximaciones. Debido a lo anterior la técnica PP tiene algunas desventajas teóricas tales como (De Roeck *et al.*, 2000):

- Seleccionar los picos de las frecuencias naturales es una tarea subjetiva.
- Se obtienen las formas de deformación en lugar de las formas modales.
- Sólo se pueden determinar los modos reales o sea se considera que el amortiguamiento de las estructuras es proporcional.

- Las estimaciones de fracciones de amortiguamiento crítico son poco confiables.

A pesar de estos inconvenientes la técnica PP se utiliza con éxito en el campo de la ingeniería civil para la medición de vibraciones ambientales, ya que es rápida y fácil de aplicar.

#### 4.2.1.1. Función de Densidad Espectral de Potencia (PSD)

Sea  $X(t)$  un proceso estocástico estacionario su PSD, que se escribe como  $S_x(\omega)$ , se define como la Transformada de Fourier de la función de autocorrelación  $R_x(\tau)$  (Cara Javier, 2012):

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.2)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.3)$$

En un proceso estocástico estacionario en el que las características de sus señales permanecen constantes en el tiempo, la función de autocorrelación caracteriza el proceso estocástico en el dominio del tiempo y la PSD lo caracteriza en el dominio de la frecuencia. A pesar de la definición anterior, es deseable que la PSD sea definida a partir de la Transformada de Fourier de  $X(t)$ , pero al ser el proceso estacionario  $X(t)$  que se extiende desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ , por lo tanto no es finita y en consecuencia no se le puede aplicar la Transformada de Fourier. Este problema se resuelve considerando  $X(t)$  en el intervalo  $(0, T)$  y haciendo cero el resto, debido a lo anterior la Transformada de Fourier de  $X(t)$  queda definida como:

$$X(\omega, T) = \int_0^T X(t) e^{-i2\pi\omega t} dt \quad (4.4)$$

Calculando la media  $E(|X(\omega, T)|^2)$  para cada frecuencia  $\omega$  y dividiendo entre  $T$  para evitar que la media vaya a infinito cuando  $T \rightarrow \infty$ , la PSD de  $X(t)$  se expresa ahora de la siguiente manera:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E(|X(f, T)|^2) \quad (4.5)$$

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} E(|X(\omega, T)|^2) \quad (4.6)$$

La ecuación 4.5 es para  $Hz$  y la 4.6 es para  $rad/s$ , ambas ecuaciones manifiesta que la PSD de un proceso estocástico estacionario es la media de los espectros de amplitudes de las diferentes muestras.

Las expresiones descritas anteriormente se emplean en procesos estacionarios. Sin embargo, en la mayoría de los casos se dispone sólo de una muestra; por lo que el proceso estocástico se considera ahora como ergódico. En el proceso estocástico ergódico la medición promedio de un registro es igual a todas las mediciones de un tiempo dado.

Para este caso la estimación de la PSD sería:

$$S_x(f_n) = \frac{\Delta t}{N} E(|X_n|^2) \quad (4.7)$$

$$S_x(\omega_n) = \frac{\Delta t}{2\pi N} E(|X_n|^2) \quad (4.8)$$

donde:

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i2\pi nk/N} \quad (4.9)$$

$$x_k = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i2\pi nk/N} \quad (4.10)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Las ecuaciones 4.7 y 4.8 se pueden interpretar de la misma manera como se interpretan las ecuaciones 4.5 y 4.6, pero considerando ahora una muestra discreta. Estas ecuaciones se obtienen aplicando un ventaneo a la señal, lo cual consiste en tomar segmentos de la señal, luego se calcula el espectro de cada segmento y finalmente se determina la media. Lo anterior se realiza mediante la teoría de la DFT. En la técnica PP se emplea la expresión 4.7 para determinar la PSD y obtener las frecuencias naturales en  $Hz$ .

Las propiedades más importantes de la PSD son:

- La PSD muestra el contenido de frecuencias del proceso estocástico, su gráfica permite observar las frecuencias más importantes.

- Es simétrica:

$$S_x(-\omega) = S_x(\omega)$$

- Es positiva para toda frecuencia  $\omega$ .
- El área definida por la PSD es igual al valor cuadrático medio del proceso estocástico, el cual es constante por definición de estacionariedad:

$$R_x(0) = E(X^2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^0 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

- La media del proceso estocástico es cero, es decir, el área bajo la PSD es igual a la varianza del proceso:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

- Las unidades de  $S_x(\omega)$  y  $S_x(f)$ , trabajando con señales de aceleración, son  $(m/s^2)^2 / (rad/s)$  y  $(m/s^2)^2 / Hz$  respectivamente.

#### 4.2.2. Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD)

La técnica de Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD por sus siglas en inglés) elimina las desventajas asociadas a la técnica PP, pero manteniendo la facilidad de uso. Primero se presentará la teoría de esta técnica para posteriormente describir su algoritmo, como se muestra en (Brincker *et al.*, 2001).

La relación entre las entradas desconocidas  $x(t)$  y las respuestas medidas  $y(t)$  se puede mostrar de la siguiente manera (Bendat y Piersol, 1986):

$$G_{yy}(j\omega) = \bar{H}(j\omega) G_{xx}(j\omega) H(j\omega)^T \quad (4.11)$$

donde  $G_{xx}(j\omega)$  es la matriz  $(r \times r)$  de densidad espectral de potencia de la entrada,  $r$  es el número de entradas,  $G_{yy}(j\omega)$  es la matriz  $(m \times m)$  de densidades espectrales de potencia

de las respuestas,  $m$  es el número de respuestas,  $H(j\omega)$  es la matriz  $(m \times r)$  de la función de respuesta en frecuencia y los superíndices "—" y "T" indican el complejo conjugado y la transpuesta respectivamente.

Para el caso de una estructura ligeramente amortiguada, la matriz de densidad espectral de respuesta se puede obtener con la expresión 4.12, la cual es una descomposición modal de la matriz de densidad espectral cuyos resultados son similares de los que se obtendrían de la ecuación 4.11, bajo el supuesto de que la entrada es un ruido blanco, es decir, que la matriz de densidad espectral de la entrada sea una matriz constante ( $G_{xx}(j\omega) = C$ ).

$$G_{yy}(j\omega) = \sum_{k \in Sub(\omega)} \frac{d_k \phi_k \phi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \frac{\bar{d}_k \bar{\phi}_k \bar{\phi}_k^T}{j\omega - \bar{\lambda}_k} \quad (4.12)$$

$$d_k = \gamma_k^T C \gamma_k \quad (4.13)$$

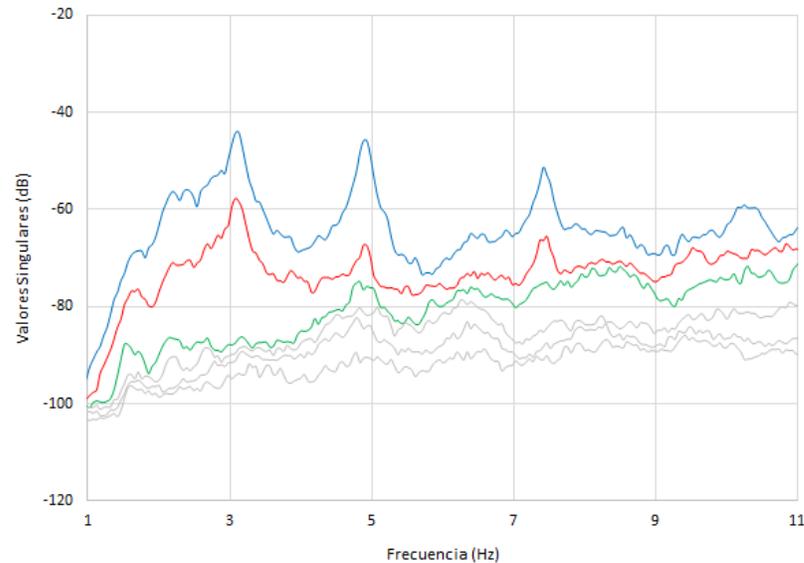
donde  $d_k$  es un escalar,  $\phi_k$  es el modo de vibración,  $\lambda_k$  es el polo de la función de respuesta en frecuencia,  $Sub(\omega)$  es el conjunto de modos de vibración (generalmente uno o dos modos) que contribuyen significativamente a la respuesta para una frecuencia  $\omega$ , y  $\gamma_k$  es el vector de participación modal.

El primer paso del algoritmo de identificación es estimar la matriz de densidades espectrales de potencia. Después de obtener los valores de la matriz  $\hat{G}_{yy}(j\omega)$  para frecuencias discretas  $\omega = \omega_i$  esta se descompone por medio de la Descomposición en Valores Singulares (SVD por sus siglas en inglés) como se muestra en la siguiente expresión.

$$\hat{G}_{yy}(j\omega_i) = U_i S_i \bar{U}_i^H \quad (4.14)$$

donde  $U_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im}]$  es una matriz unitaria que contiene los vectores singulares  $u_{ij}$ ,  $S_i$  es una matriz diagonal que contiene los valores singulares  $s_{ij}$  y el superíndice  $H$  indica la transpuesta conjugada compleja. En la siguiente sección se muestra detalladamente en que consiste la SVD. Cerca del pico  $k$  sólo existe un modo en el conjunto  $Sub(\omega)$ , el primer vector singular  $u_{i1}$  es una estimación del modo de vibración  $\hat{\phi} = u_{i1}$  y el correspondiente valor singular es la función de densidad espectral del sistema de un grado de libertad correspondiente a la expresión 4.12. Los modos de vibración se obtienen a partir de los picos en la representación de los valores singulares, el mayor valor singular representa la

fuerza del modo de vibración dominante para cada frecuencia  $i$  (Brownjohn, 2003). Los otros valores singulares contienen ruido u otros modos escondidos detrás del dominante, por su parte los vectores singulares contienen las distintas maneras en las que se deforma la estructura. En la figura 4.2 se muestra un ejemplo de la representación de los valores singulares de la matriz de densidad espectral.



*Figura 4.2. Representación de los valores singulares de la matriz de densidad espectral*

La principal ventaja de la técnica FDD es que permite la identificación de modos muy cercanos entre sí, examinando no sólo el mayor valor singular, sino también los siguientes. Sin embargo, en el caso de modos muy cercanos la estimación puede estar sesgada, el sesgo depende de la diferencia entre el primero y el segundo valor singular; mientras más grande sea esta diferencia menor será el error (Rainieri y Fabbrocino, 2014). Generalmente cuando dos modos están dominando, el primer vector singular será siempre una buena estimación de la forma modal del modo más fuerte.

Una vez que se ha identificado el modo de vibración se ajusta la curva alrededor del pico seleccionado para obtener la frecuencia natural. Con respecto a la estimación del amortiguamiento, como sucede en la técnica PP, la técnica FDD no arroja resultados muy confiables; este problema se soluciona en la técnica EFDD que se explica más adelante.

#### 4.2.2.1. Descomposición en Valores Singulares (SVD)

La SVD de una matriz compleja  $A (m \times n)$  se representa mediante la siguiente factorización:

$$A = USV^H \quad (4.15)$$

donde  $U$  y  $V$  son matrices unitarias, y  $S$  es una matriz diagonal que contiene los valores singulares reales:

$$S = \text{diag}(s_1, \dots, s_r) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & s_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & s_r & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$r = \min(m, n)$$

El superíndice  $H$  de la matriz  $V$  indica una transformación Hermitiana (transpuesta y complejo conjugado), si la matriz  $V$  contiene valores reales solamente se transpone. Los elementos  $s_i$  de la matriz  $S$  son los valores singulares y sus correspondientes vectores singulares están en las matrices  $U$  y  $V$ .

La SVD se realiza para un conjunto de datos en cada frecuencia (Gade *et al.*, 2005). La matriz de densidad espectral después de la SVD se aproxima a la siguiente expresión:

$$[G_{yy}(\omega)] = [\Phi][S][\Phi]^H \quad (4.17)$$

$$[\Phi]^H[\Phi] = [I] \quad (4.18)$$

donde  $\Phi$  son las matrices unitarias con los vectores singulares:

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}\{\phi_2\}\{\phi_3\} \cdots \{\phi_r\}] \quad (4.19)$$

donde  $\phi_i$  son los vectores singulares que corresponden a la estimación de las formas modales, y los valores singulares son las densidades espectrales del sistema de un grado

de libertad que se obtienen de la ecuación 4.12; como se mencionó anteriormente. El número de elementos distintos de cero en la diagonal de la matriz singular corresponde al rango de cada matriz de densidad espectral (Gade *et al.*, 2005).

### 4.2.3. Descomposición en el Dominio de la Frecuencia Mejorada (EFDD)

La técnica de Descomposición en el Dominio de la Frecuencia Mejorada (EFDD por sus siglas en inglés) es una extensión de la técnica FDD, pero es más confiable que esta última, ya que aparte de obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración, también permite determinar el amortiguamiento. En la técnica EFDD la matriz de densidad espectral de potencia de un grado de libertad es llevada de vuelta al dominio del tiempo mediante la Transformada de Fourier Discreta Inversa (IDFT por sus siglas en inglés) (Jacobsen *et al.*, 2007). El procedimiento consiste en calcular el modo de vibración del pico de la curva en la frecuencia  $k$ , identificado en la técnica FDD, mediante la obtención de los modos de frecuencias ligeramente superiores e inferiores, hasta que la correlación del Criterio de Aseguramiento Modal (MAC por sus siglas en inglés) entre ambos modos alcanza cierto valor límite (se suele elegir  $MAC=0.8$ ). En el siguiente apartado se explica con más detalle este parámetro. En la figura 4.3 se representa la identificación de la función de un grado de libertad en valores singulares aplicando el parámetro MAC.

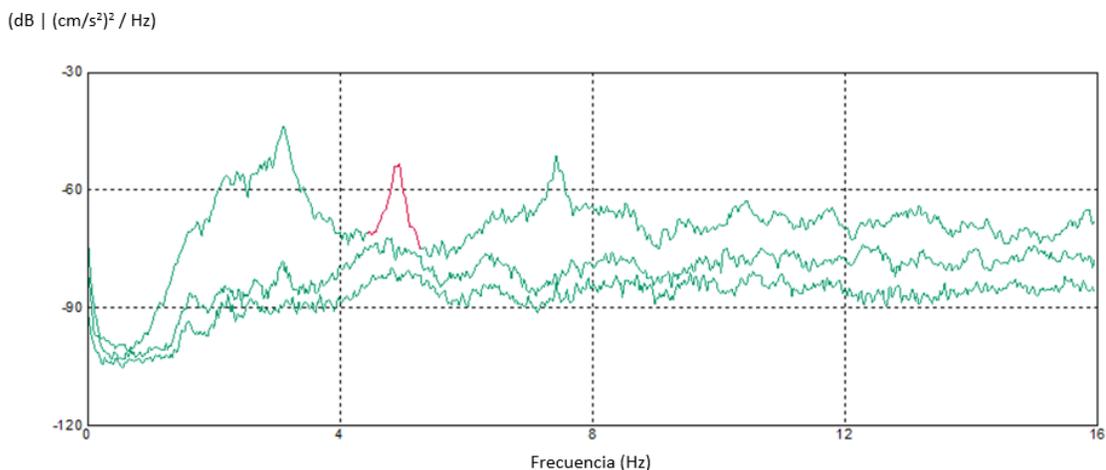


Figura 4.3. Aplicación del parámetro MAC (línea roja) en los valores singulares

Una vez que se obtienen las frecuencias de los dos modos, se toma una ventana con ese ancho y se aplica la IDFT; con lo cual se obtiene una función de correlación normalizada como se muestra en la figura 4.4. La frecuencia natural se obtiene contando el número de veces que la función de correlación normalizada cruza el eje cero por segundo, la forma modal se calcula como un promedio ponderado de los vectores singulares en el intervalo del nivel de rechazo del MAC especificado por el usuario.

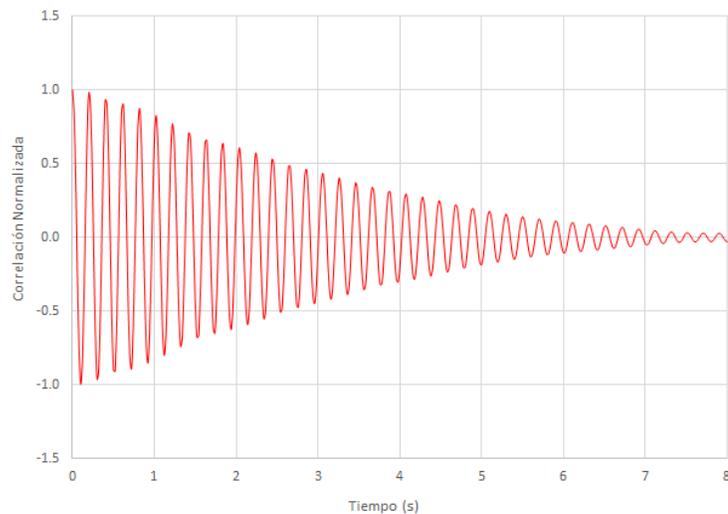
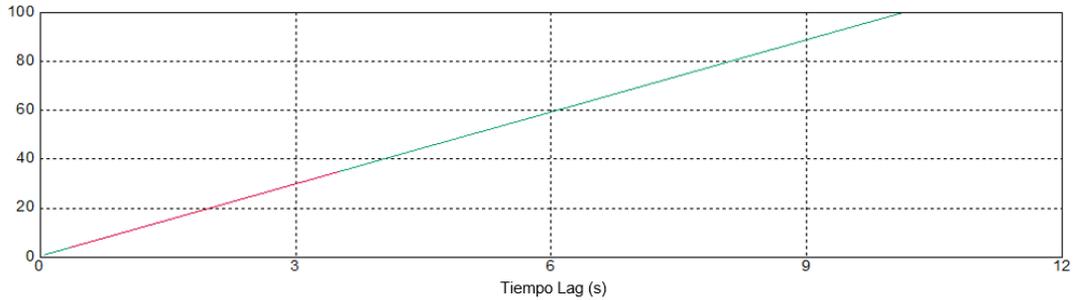


Figura 4.4. Función de correlación normalizada

El amortiguamiento se estima con la técnica del decremento logarítmico de la envoltura logarítmica de la función de correlación normalizada, esta se realiza utilizando una técnica de regresión lineal (Gade *et al.*, 2005). En la práctica el decremento logarítmico  $\delta$  se estima mediante el método de mínimos cuadrados, para ello es necesario ajustar los puntos comprendidos en un rango delimitado por un porcentaje máximo de amplitud y un porcentaje mínimo de amplitud, de esta forma, se logra escoger la zona central de la curva exponencial. Debido a que las curvas del sistema equivalente de un grado de libertad se obtienen como una estimación de la función de respuesta en frecuencias del sistema equivalente de un grado de libertad, dichas curvas no son perfectas. Del mismo modo la función de correlación normalizada obtenida a través de la IDFT difiere de la respuesta temporal del sistema en vibración libre principalmente en los primeros ciclos y en los de menor amplitud. Por lo tanto el ajuste debe realizarse excluyendo dichos extremos relativos y utilizar los extremos con amplitud intermedia. Esta amplitud se medirá en términos relativos al

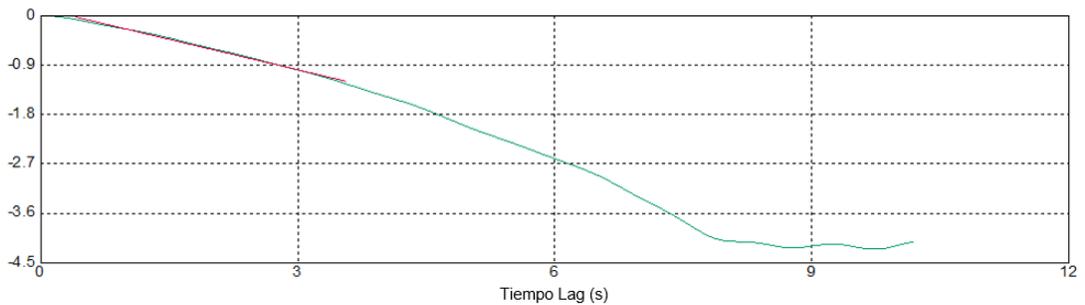
pico máximo en porcentaje y las amplitudes máximas y mínimas que definirán los picos de la función de correlación normalizada utilizada en el ajuste, serán parámetros a definir por el usuario. En la figura 4.5 se representa la determinación de la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento descrita anteriormente.

Número de Cruces en el Eje Cero



(a) Determinación de la frecuencia natural

Log de los Absolutos de Valores Extremos



(b) Determinación del coeficiente de amortiguamiento

Figura 4.5. Determinación de la frecuencia y el amortiguamiento en la técnica EFDD

#### 4.2.3.1. Criterio de Aseguramiento Modal (MAC)

El MAC es un parámetro que mide la correlación entre dos modos. Un valor cercano o igual a cero indica que no hay correlación, mientras que un valor cercano o igual a uno indica que los modos están perfectamente correlacionados; se define con la siguiente ecuación:

$$MAC = \frac{|\{\phi_0\}^H \{\phi_i\}|^2}{\{\phi_0\}^H \{\phi_i\} \{\phi_i\}^H \{\phi_0\}} \quad (4.20)$$

donde  $\phi_0$  es el vector modal de referencia,  $\phi_i$  es el vector modal  $i$ -ésimo y el superíndice  $H$  indica la transpuesta conjugada compleja. Un valor del MAC se obtiene entre el vector modal de referencia, determinado por el pico de la técnica FDD, y un vector singular para cada línea de frecuencia en particular. Si el valor del MAC de este vector singular está por encima del valor límite especificado por el usuario, el valor singular correspondiente está incluido en la descripción de la curva de la función de un grado de libertad (Gade *et al.*, 2005).

El MAC puede tener un valor cercano a cero por las siguientes razones (Pastor *et al.*, 2012):

- El sistema es no estacionario debido a variaciones en la masa, rigidez y propiedades de amortiguación durante la prueba.
- El sistema es no lineal.
- Hay ruido en la forma modal de referencia.
- La técnica de extracción de parámetros no es válida para el conjunto de datos medidos.
- Las formas modales son linealmente independientes.

#### **4.2.4. Identificación con Subespacios Estocásticos (SSI)**

La técnica de Identificación con Subespacios Estocásticos (SSI por sus siglas en inglés) es considerada la más avanzada para la identificación de los parámetros dinámicos de sistemas por medio de las vibraciones ambientales. Esta técnica se desarrolla en el dominio del tiempo, es decir, trabaja directamente con los datos medidos, sin la necesidad de convertirlos en espectros o correlaciones. Lo anterior representa una ventaja importante con respecto a las técnicas mostradas anteriormente, sin embargo, la técnica SSI implica varios pasos matemáticos que son difíciles de seguir y entender para las personas con una formación clásica en la dinámica estructural. En las siguientes líneas se explica el procedimiento de esta técnica de forma resumida y con un enfoque en las vibraciones ambientales

de estructuras, como se muestra en (Peeters y De Roeck, 1999) y (Brincker y Andersen, 2006).

#### 4.2.4.1. Modelo de Espacio de Estados para Vibraciones de Estructuras

El comportamiento dinámico de un sistema mecánico que consiste en  $n_2$  masas conectadas a través de amortiguadores se puede describir mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$M\ddot{U}(t) + C_2\dot{U}(t) + KU(t) = F(t) \quad (4.21)$$

donde  $M$ ,  $C_2$  y  $K$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de dimensiones  $n_2 \times n_2$ , mientras que  $F(t)$  es la fuerza de excitación y  $\ddot{U}(t)$ ,  $\dot{U}(t)$ ,  $U(t)$  son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento en el tiempo continuo  $t$  de orden  $n_2 \times 1$ . A pesar de que la ecuación 4.21 representa el comportamiento dinámico de una estructura, esta no se usa directamente en los métodos para la identificación de parámetros dinámicos de sistemas estructurales debido principalmente a dos razones. La primera es que la ecuación anterior es continua en el tiempo, mientras que las mediciones se toman en instantes de tiempo discreto y la segunda razón es que no es posible medir en todos los grados de libertad como lo establece dicha ecuación; además en las vibraciones ambientales se hace la suposición de que el sistema es excitado por un ruido blanco. Por estas razones, la ecuación dinámica de equilibrio se convierte en un modelo de espacio de estado estocástico en tiempo discreto; con las siguientes expresiones:

$$x(t) = \begin{pmatrix} U(t) \\ \dot{U}(t) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_2} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_2 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

por lo tanto la ecuación dinámica 4.21 se puede transformar en la siguiente ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c(t) F(t) \quad (4.25)$$

donde  $A_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $n = 2n_2$ ) es la matriz de estado que describe la dinámica del sistema,  $B_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de entrada y  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el vector de estado. El número de elementos del vector de estado es el número de variables independientes necesario para describir el estado de un sistema.

En la práctica no se miden todos los grados de libertad. Si se supone que las mediciones son evaluadas con  $l$  acelerómetros, se obtiene la siguiente ecuación de observación:

$$y(t) = C_a \ddot{U}(t) \quad (4.26)$$

donde  $y(t) \in \mathbb{R}^{l \times 1}$  son las mediciones y  $C_a \in \mathbb{R}^{l \times n_2}$  es la matriz de salida para las aceleraciones. Con las siguientes definiciones:

$$C = [-C_a M^{-1} K - C_a M^{-1} C_2] \quad (4.27)$$

$$D = C_a M^{-1} \quad (4.28)$$

La ecuación 4.26 se puede transformar en la siguiente expresión:

$$y(t) = Cx(t) + DF(t) \quad (4.29)$$

donde  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  es la matriz de salida y  $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$  es la matriz de transmisión directa. La expresión anterior representa un modelo del espacio de estados deterministas ( $y(t)$  y  $F(t)$  pueden ser medidos exactamente) y continuo en el tiempo. Sin embargo, las mediciones son evaluadas en instantes de tiempo discretos; debido a lo anterior el modelo del espacio de estados se transforma en:

$$x_{k+1} = Ax_k + BF_k \quad (4.30)$$

$$y_k = Cx_k + DF_k \quad (4.31)$$

donde  $x_k = x(k\Delta t)$  es el vector de estado para instantes discretos,  $\Delta t$  es el intervalo de muestreo,  $A = \exp(A_c \Delta t)$  es la matriz de estado discreta y  $B = [A - I]A_c^{-1}$  es la matriz de entrada discreta. Incluyendo las componentes estocásticas (ruido) se obtiene el siguiente modelo determinista y discreto de espacios de estados estocásticos:

$$x_{k+1} = Ax_k + BF_k + w_k \quad (4.32)$$

$$y_k = Cx_k + DF_k + v_k \quad (4.33)$$

donde  $w_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es el ruido del proceso debido a las perturbaciones e imprecisiones del modelado y  $v_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$  es el ruido de la medición debido a la inexactitud del sensor. Ambas señales no se pueden medir, pero se suponen con media cero, blancas y que tienen las siguientes matrices de covarianza:

$$E \left[ \begin{pmatrix} w_p \\ v_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q^T & v_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \delta_{pq} \geq 0 \quad (4.34)$$

donde  $E[\cdot]$  es el valor esperado,  $p$  y  $q$  son dos instantes de tiempo arbitrarios,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times l}$  y  $R \in \mathbb{R}^{l \times l}$  son las matrices de covarianza de las secuencias de ruido ( $w_k$  y  $v_k$ ); y  $\delta_{pq}$  es la delta de Kronecker.

Como en las pruebas de vibración ambiental la excitación (entrada) no se mide, el término  $F_k$  se elimina de las ecuaciones 4.32 y 4.33, quedando la excitación modelada implícitamente en los términos de ruido  $w_k$  y  $v_k$ . La suposición de ruido blanco de estos términos es muy importante y no debe ser violada.

#### 4.2.4.2. Modelo de Espacio de Estados Estocásticos

El modelo de espacio de estados estocásticos se define con las ecuaciones 4.32 y 4.33, sin el término  $F_k$ :

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k \quad (4.35)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (4.36)$$

considerando que  $w_k$  y  $v_k$  tienen media cero y matriz de covarianza dada por la expresión 4.34. Además, el proceso estocástico  $x_k$  es estacionario con media cero  $E[x_k] = 0$  y su matriz de covarianza  $\Sigma$  igual a  $\Sigma = E[x_k x_k^T]$ , siendo esta matriz independiente del tiempo  $k$ .  $w_k$  y  $v_k$  son independientes del estado actual  $x_k$ , por lo tanto  $E[x_k w_k^T] = 0$  y  $E[x_k v_k^T] = 0$ . La matriz de covarianza de salida  $\Lambda_i$  y la matriz de covarianza del siguiente estado de salida  $G$  se definen como:

$$\Lambda_i \equiv E[y_{k+1} \quad y_k^T] \in \mathbb{R}^{l \times l} \quad (4.37)$$

$$G \equiv E[x_{k+1} \quad y_k^T] \in \mathbb{R}^{n \times l} \quad (4.38)$$

De las definiciones anteriores se deducen las siguientes propiedades:

$$\Sigma = A\Sigma A^T + Q \quad (4.39)$$

$$\Lambda_0 = C\Sigma C^T + R \quad (4.40)$$

$$G = A\Sigma C^T + S \quad (4.41)$$

$$\Lambda_i = CA^{i-1}G \quad (4.42)$$

La ecuación 4.42 es muy importante y significa que las varianzas de salida se pueden considerar como respuestas de impulso del sistema invariante en el tiempo lineal determinista  $A, G, C, \Lambda_0$ . Las medidas de salida se guardan por bloques en una matriz de Hankel con  $2i$  bloques de filas y  $j$  columnas. Por razones estadísticas, se supone que  $j \rightarrow \infty$ . Una matriz de Hankel es una matriz donde cada antidiagonal consiste en la repetición del mismo elemento:

$$H = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-1} & y_i & \cdots & y_{i+j-2} \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \cdots & y_{2i+j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2i \times j} \quad (4.43)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, las medidas son escaladas por un factor  $1/\sqrt{j}$ . Los subíndices de  $Y_{i|2i-1}$  son los subíndices del primero y del último elemento de la primera columna en la matriz de Hankel. Los subíndices  $p$  y  $f$  representan pasado y futuro; y las matrices  $Y_p$  y  $Y_f$  se determinan agrupando la matriz  $H$  en dos partes de  $i$  bloques. Es posible obtener otra división mediante la adición de una fila de bloques de las últimas salidas pasadas y omitiendo la primera fila de bloques de las salidas futuras:

$$H = \begin{pmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|i} \\ Y_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Y_p^+ \\ Y_f^- \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Otras matrices necesitan ser definidas, como la matriz de observación extendida:

$$O_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{il \times n} \quad (4.45)$$

Las matrices  $A$  y  $C$  se supone que son observables, lo que implica que todos los modos dinámicos del sistema se pueden observar en la salida para poder identificarlos. Por su parte la matriz inversa de control estocástica se define como:

$$C_i \equiv (A^{i-1}G \quad A^{i-2}G \quad \dots \quad AG \quad G) \in \mathbb{R}^{n \times li} \quad (4.46)$$

El par de matrices  $A$  y  $G$  se asume que son controlables, es decir, todos los modos dinámicos del sistema pueden ser excitados por la entrada estocástica.

#### 4.2.4.3. Identificación en el Subespacio Estocástico

La identificación en el subespacio estocástico se puede realizar a través de dos métodos diferentes: SSI-COV (*Covariance-Driven SSI*) y SSI-DATA (*Data-Driven SSI*). En el primer método se determinan las covarianzas entre las salidas y en el segundo método se hacen proyecciones del espacio fila de las salidas futuras sobre el espacio fila de las últimas salidas pasadas, lo cual es un paso clave en la técnica SSI. En el presente trabajo se eligió el método SSI-DATA, donde el filtro de Kalman tiene un rol muy importante.

El objetivo del filtro de Kalman es realizar una predicción óptima para el vector de estado  $x_{k+1}$  utilizando las medidas observadas hasta el instante  $k$  y el sistema disponible de matrices junto con las covarianzas de ruido conocidas. Esta predicción óptima se representa como  $\hat{x}_{k+1}$ , la estimación de estado del filtro de Kalman se define con las siguientes

expresiones:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K_k (y_k - C\hat{x}_k) \quad (4.47)$$

$$K_k = (G - AP_k C^T) (\Lambda_0 - CP_k C^T)^{-1} \quad (4.48)$$

$$P_{k+1} = AP_k A^T + (G - AP_k C^T) (\Lambda_0 - CP_k C^T)^{-1} (G - AP_k C^T)^T \quad (4.49)$$

donde  $\hat{x}_{k+1}$  es el estado estimado,  $K_k$  es la matriz de ganancia del filtro de Kalman y  $P_{k+1}$  es la matriz de covarianza del estado. Las estimaciones de los estados obtenidos con el filtro de Kalman se guardan formando una secuencia de estados estimados como se muestra en la ecuación 4.50, estas se usan posteriormente en el algoritmo de identificación.

$$\hat{X}_i = (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \cdots \quad \hat{x}_{i+j-1}) \in \mathbb{R}^{n \times j} \quad (4.50)$$

La clave del algoritmo de identificación estocástico es la proyección del espacio de filas futuro en el espacio de filas pasado de la matriz de Hankel. La proyección tiene como intención retener toda la información de las salidas pasadas que resulte útil para predecir las salidas futuras, para llevar a cabo la proyección primero se realiza la factorización  $QR$  de la matriz de Hankel definida en la ecuación 4.43:

$$H = \begin{pmatrix} Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} = RQ^T \quad (4.51)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{j \times j}$  es una matriz ortonormal (en el algoritmo se cancela debido a esta propiedad) y  $R \in \mathbb{R}^{2il \times j}$  es una matriz triangular inferior:

$$H = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

La proyección del bloque fila futuro en el bloque fila pasado de la matriz de Hankel se expresa como:

$$Y_f/Y_p = Y_f Y_p^T (Y_p Y_p^T)^\dagger Y_p \quad (4.53)$$

donde el superíndice † indica la pseudoinversa. Sustituyendo la ecuación 4.52 en la ecuación 4.53 se obtiene una expresión simple de la proyección:

$$Y_f/Y_p = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{31} \end{pmatrix} Q_1^T \in \mathbb{R}^{il \times j} \quad (4.54)$$

El teorema fundamental de la identificación en el subespacio estocástico establece que la proyección  $Y_f/Y_p$  se puede factorizar como el producto de la matriz de observación (4.45) y la secuencia de estados estimados a partir del filtro de Kalman (4.50):

$$Y_f/Y_p = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+j-1}) \equiv O_i \hat{X}_i \quad (4.55)$$

Para obtener los factores  $O_i$  y  $\hat{X}_i$  de la ecuación anterior se realiza una SVD de la matriz de proyección:

$$Y_f/Y_p = U_1 S_1 V_1^T \quad (4.56)$$

Igualando las ecuaciones 4.55 y 4.56 se definen los factores antes mencionados:

$$O_i = U_1 S_1^{1/2} \quad (4.57)$$

$$\hat{X}_i = O_i^\dagger (Y_f/Y_p) \quad (4.58)$$

Hasta ahora se ha encontrado el orden del sistema  $n$  como el número de valores singulares no nulos de la ecuación 4.56. Sin embargo para identificar el sistema también hay que determinar las matrices  $A$ ,  $C$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$ . Existen tres algoritmos para el cálculo de estas matrices: PC (*Principal Component*), UPC (*Unweighted Principal Component*) y CVA (*Canonical Variate Algorithm*), en la presente investigación se utilizó este último.

El algoritmo CVA calcula los principales ángulos y direcciones entre los espacios de la fila de las últimas salidas  $Y_p$  y las salidas futuras  $Y_f$ , empleando como matriz de ponderación una matriz identidad (Van Overschee y De Moor, 1996).

Para determinar las matrices del sistema, mencionadas anteriormente, se usa la matriz de Hankel que se definió en la ecuación 4.44; obteniendo otra proyección:

$$Y_f^- / Y_p^+ = \begin{pmatrix} R_{31} & R_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times j} \quad (4.59)$$

Aplicando el mismo procedimiento de la ecuación 4.55 se tiene que:

$$Y_f^- / Y_p^+ \equiv O_{i-1} \hat{X}_{i+1} \quad (4.60)$$

Se obtiene  $O_{i-1}$  después de eliminar las  $l$  últimas filas de  $O_i$  (4.57). Por su parte la secuencia de estados ahora se obtiene como:

$$\hat{X}_{i+1} = O_{i-1}^\dagger (Y_f^- / Y_p^+) \quad (4.61)$$

La secuencia de estados a partir del filtro de Kalman ( $\hat{X}_i$  y  $\hat{X}_{i+1}$ ) se han calculado usando sólo los datos de salida. Las matrices del sistema se pueden obtener del siguiente conjunto sobredeterminado de ecuaciones lineales, definido mediante la extensión de las ecuaciones 4.32 y 4.33:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_w \\ \rho_v \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

donde  $Y_{i|i}$  es una matriz de Hankel con un sólo bloque de renglones, expresándose como:

$$Y_{i|i} = \begin{pmatrix} R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times j} \quad (4.63)$$

Debido a que la secuencia de estados de Kalman y las salidas son conocidas, y los residuos  $\rho_w$  y  $\rho_v$  no están correlacionados con  $\hat{X}_i$ ; el sistema de ecuaciones se puede resolver para  $A$  y  $C$  mediante mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} \hat{X}_i^\dagger \quad (4.64)$$

Al sustituir las ecuaciones obtenidas para  $\hat{X}_{i+1}$  y  $\hat{X}_i$  en la ecuación anterior, los factores  $Q$  se cancelan. Las matrices de covarianza de ruido  $Q$ ,  $R$  y  $S$  se obtienen a partir de la covarianza de los residuos de la ecuación 4.62.

Las matrices  $A$ ,  $C$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  se pueden transformar en las matrices  $A$ ,  $G$ ,  $C$  y  $\Lambda_0$  mediante la resolución de las ecuaciones 4.39, 4.40 y 4.41. En este punto el problema de identificación se resuelve teóricamente: basado en las salidas, el orden del sistema  $n$  y el sistema de matrices  $A$ ,  $G$ ,  $C$  y  $\Lambda_0$  son encontrados.

#### 4.2.4.4. Análisis Modal

En las secciones anteriores, un modelo de espacio de estado estocástico se identificó utilizando los datos de salida. El método de identificación empleado puede ser usado para el análisis modal de estructuras. El análisis modal se puede considerar como un caso particular de la identificación del sistema: en lugar de describir el sistema por medio de parámetros matemáticos abstractos, el comportamiento del sistema se expresa ahora en términos de sus modos de vibración.

Como resultado de la identificación anterior se obtiene la matriz de estado discreto  $A$ , cuyos valores propios caracterizan el comportamiento dinámico de la estructura:

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \quad (4.65)$$

donde  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_q) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  (con  $q = 1, 2, \dots, n$ ) es una matriz diagonal que contiene los valores propios complejos en el tiempo discreto y  $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es una matriz que contiene los vectores propios en columnas. Los valores y vectores propios pueden ser obtenidos a través de una descomposición de valores propios de la matriz de estado en el tiempo continuo:

$$A_c = \Psi_c \Lambda_c \Psi_c^{-1} \quad (4.66)$$

Debido a la ecuación 4.30 se tiene que:

$$A = \exp(A_c \Delta t) \quad (4.67)$$

de la cual se obtiene:

$$\Psi_c = \Psi \quad (4.68)$$

$$\lambda_{c_q} = \frac{\ln(\lambda_q)}{\Delta t} \quad (4.69)$$

Los valores propios de  $A_c$  ocurren en pares complejos conjugados y se pueden escribir como:

$$\lambda_{c_q}, \lambda_{c_q}^* = -\xi_q w_q \pm j w_q \sqrt{1 - \xi_q^2} \quad (4.70)$$

donde  $\xi_q$  es el coeficiente de amortiguamiento del modo  $q$  y  $w_q$  ( $rad/s$ ) es la frecuencia propia del modo  $q$ .

Los estados estimados del sistema  $x_k$  no tienen necesariamente un significado físico. Por lo tanto, los vectores propios de la matriz de estado  $\Psi$  necesitan ser transferidos al mundo exterior. Las formas modales en la localización de los sensores, definidas como las columnas  $\Phi_q$  de  $\Phi \in \mathbb{C}^{l \times n}$ , son las partes observadas del sistema de valores propios  $\Psi$  y se obtienen usando la ecuación de observación (4.29):

$$\Phi = C\Psi \quad (4.71)$$

---

## Capítulo 5

# METODOLOGÍA DE ESTUDIO

---

### 5.1. Casos de Estudio

Para llevar a cabo el estudio comparativo del Análisis de Fourier y del OMA, se utilizaron los registros obtenidos de tres sistemas estructurales: un edificio regular, un edificio irregular y un balcón de un teatro. La elección de estos tres casos fue debido a sus características estructurales, buscando obtener resultados más representativos para las estructuras existentes. A continuación se describen cada uno de estos casos.

El primer caso de estudio es un edificio de planta rectangular de concreto reforzado con 5 niveles y un sótano para estacionamiento (figura 5.1). Su uso es de oficinas, debido a que es ocupado por el Servicio de Administración y Enajenación de Bienes (SAE). Se ubica en la Av. México-Coyoacán, en la Delegación Benito Juárez de la Ciudad de México. El edificio se desplanta sobre terreno de transición (Zona II) con un periodo dominante del suelo por debajo de 1 segundo, de acuerdo con la clasificación que establecen las Normas Técnicas Complementarias del RCDF-2004. El sistema estructural del edificio está formado por muros de colindancia (de mampostería) y columnas de concreto reforzado que soportan un sistema de piso de losa plana aligerada, la cimentación consiste en un cajón de cimentación (estacionamiento) apoyado sobre pilotes.

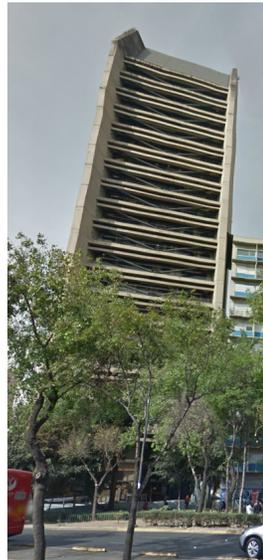
El segundo caso es el edificio de la ex Comisión Nacional de Subsistencia Populares (CONASUPO). El edificio es irregular de concreto reforzado con 23 niveles y un sótano (figura

---



*Figura 5.1. Primer caso de estudio (Edificio del SAE)*

5.2). El edificio es usado para oficinas, su sistema estructural está formado por muros colindantes de concreto y marcos a base de columnas y losas aligeradas, además de contraventeos y amortiguadores en la dirección transversal; la cimentación se compone de un cajón de concreto reforzado apoyado en pilotes. La estructura se ubica en Av. de los Insurgentes Sur, en la Delegación Cuauhtémoc de la Ciudad de México; localizada en la zona de transición con un periodo del suelo de 1.1 segundos aproximadamente.



*Figura 5.2. Segundo caso de estudio (Edificio de la ex CONASUPO)*

El tercer caso se trata de un balcón del segundo nivel de un teatro, ubicado en el centro de Toluca, Estado de México. La grada está en voladizo, formada por una losa de concreto reforzado de 15 cm de espesor, la losa es suspendida por traves principales y traves secundarias de acero (figura 5.3). Las traves principales se ubican en la dirección transversal, las cuales se apoyan a su vez en columnas cilíndricas de acero rellenas de concreto. Por su parte la traves secundarias se ubican en la dirección longitudinal, apoyándose en las traves principales.

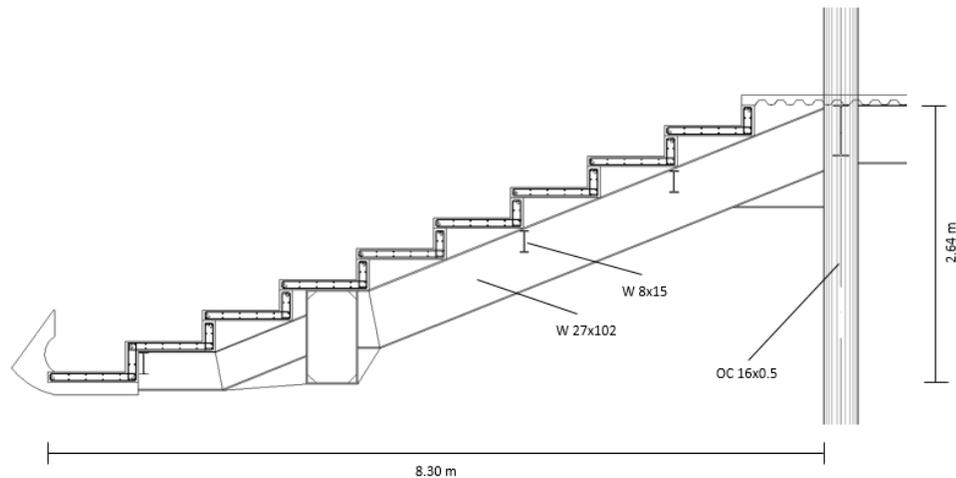


Figura 5.3. Tercer caso de estudio (Balcón de un teatro)

## 5.2. Obtención de los Registros

En el primer y tercer caso (edificio SAE y balcón de un teatro) los registros fueron obtenidos de pruebas de vibración ambiental, en cambio para el segundo caso (edificio ex CONASUPO) los registros se obtuvieron de un sistema de monitoreo sísmico (instrumentación permanente), durante la cual se registraron algunos eventos sísmicos. Los equipos utilizados y los arreglos realizados se muestran a continuación.

### 5.2.1. Equipos de Medición

Los equipos que se emplearon para el registro de las señales de vibración en los tres casos de estudio, fueron 6 acelerómetros digitales GSR (Terra Technology). Estos acelerómetros no sólo permiten la medición de vibraciones de pequeñas amplitudes (excitaciones ambientales), sino también pueden medir vibraciones de alta intensidad como es el caso de sismos. De los 6 equipos, 4 de ellos registran las señales de vibración en tres direcciones ortogonales, dos horizontales y una vertical, y los 2 equipos restantes sólo miden en las dos direcciones horizontales (transversal y longitudinal). El umbral de disparo se realiza por medio de un software que controla a los equipos, las señales registradas se almacenan en la memoria de estado sólido de cada acelerómetro para después descargarlas a un equipo de computo. En la tabla 5.1 se describen las características técnicas de los 6 acelerómetros utilizados.

*Tabla 5.1. Características técnicas de los acelerómetros empleados*

Nombre del equipo	Modelo	Canales de registro	Sensibilidad (Bits)	Memoria RAM (MB)	Nivel máximo aceleración (g)	Pre-evento (s)	Post-evento (s)	Muestras por segundo
E1	GSR-12F/B S/N 318	3 (triaxial)	12	4	2	25	20	100
E2	GSR-16 F/B S/N 319	3 (triaxial)	16	4	2	25	20	100
E3	GSR-12F/B S/N 316	2 (biaxial)	12	4	1	25	20	100
E4	GSR-12F/B S/N 320	3 (triaxial)	12	4	0.25	25	20	100
E5	GSR-12F/B S/N 317	2 (biaxial)	12	4	1	25	20	100
E6	GSR-16F/B S/N 322	3 (triaxial)	16	4	0.25	30	20	100

En la figura 5.4 se muestra cada uno de estos equipos, ubicados en algunos puntos de medición de los tres casos de estudio.



(a) Equipo E1



(b) Equipo E2



(c) Equipo E3



(d) Equipo E4



(e) Equipo E5



(f) Equipo E6

*Figura 5.4. Acelerómetros utilizados para el registro de las señales de vibración*

### 5.2.2. Arreglos de los Equipos de Medición

Los equipos de medición se colocaron de manera estratégica en los tres casos de estudio, buscando obtener los registros más representativos de la respuesta dinámica de los sistemas estructurales en estudio. En cada caso de estudio se realizó solamente un arreglo. En el edificio del SAE y la grada de un teatro se utilizaron los seis equipos descritos anteriormente, sólo en el edificio de la ex CONASUPO se emplearon cinco acelerómetros. De la tabla 5.2 a la tabla 5.4 se indican las localizaciones de los equipos de cada arreglo en los tres casos de estudio.

*Tabla 5.2. Ubicación de equipos en el edificio del SAE*

Equipo	Nivel	Localización
E1	Azotea	Esquina N-W
E2	Azotea	Centro
E3	Piso 3	Centro
E4	Planta Baja	Centro
E5	Piso 3	Esquina N-W
E6	Planta Baja	Banqueta

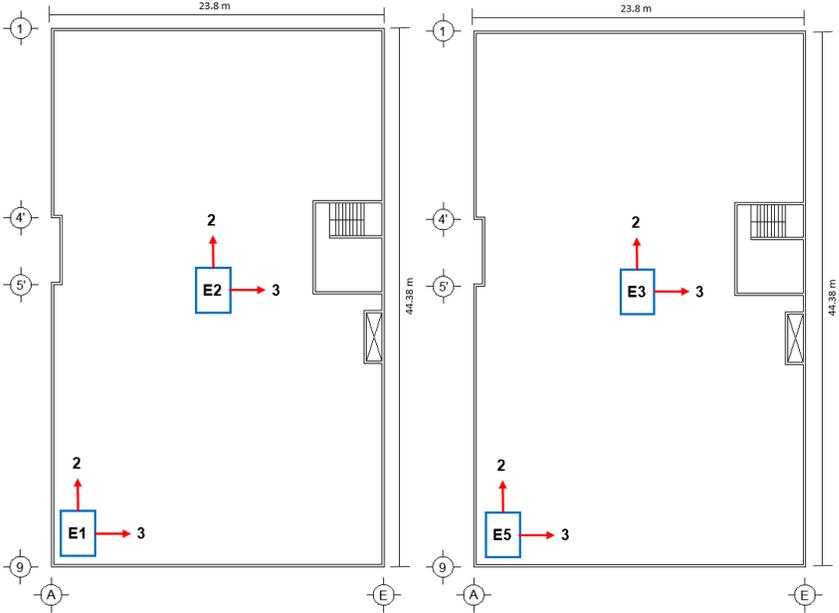
*Tabla 5.3. Ubicación de los equipos en el edificio de la ex CONASUPO*

Equipo	Nivel	Localización
E1	Sótano	Columna junto a la escalera
E2	Piso 6	Columna junto a la escalera
E3	Piso 13	Columna junto a la escalera
E4	Azotea	Columna junto a la escalera
E5	Azotea	Columna sur cerca de la esquina

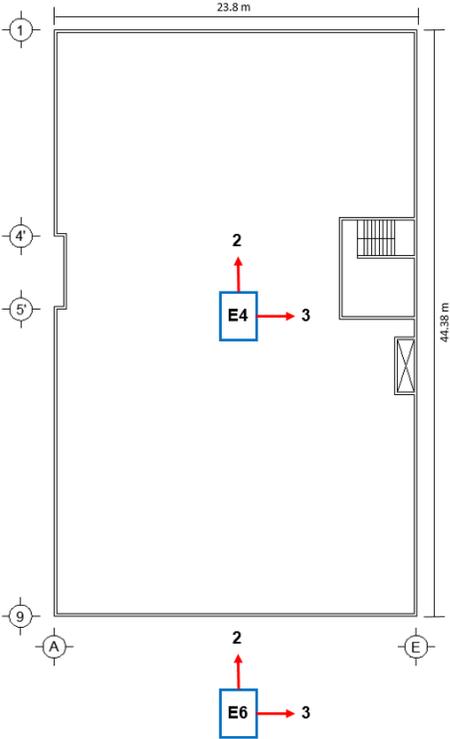
*Tabla 5.4. Ubicación de los equipos en el balcón de un teatro*

Equipo	Nivel	Localización
E1	Pasillo del extremo empotrado	Entre las columnas centrales
E2	Pasillo del extremo libre	Centro
E3	Pasillo del extremo empotrado	Penúltima columna de la izquierda
E4	Cuarta fila	Junto al pasillo derecho
E5	Pasillo del extremo empotrado	Penúltima columna de la derecha
E6	Pasillo del extremo libre	Junto al pasillo derecho

En las siguientes figuras, 5.5 a 5.7, se muestra la distribución de los equipos (vista en planta) en cada uno de los arreglos de cada caso de estudio. También se ilustra la orientación de los ejes de los equipos en el plano horizontal, para todos los casos el eje 2 se orientó en la dirección longitudinal de las estructuras y el eje 3 en la dirección transversal.



(a) Ubicación de equipos en la azotea (b) Ubicación de equipos en el piso 3



(c) Ubicación de equipos en la planta baja

Figura 5.5. Distribución de los equipos en el arreglo del edificio del SAE

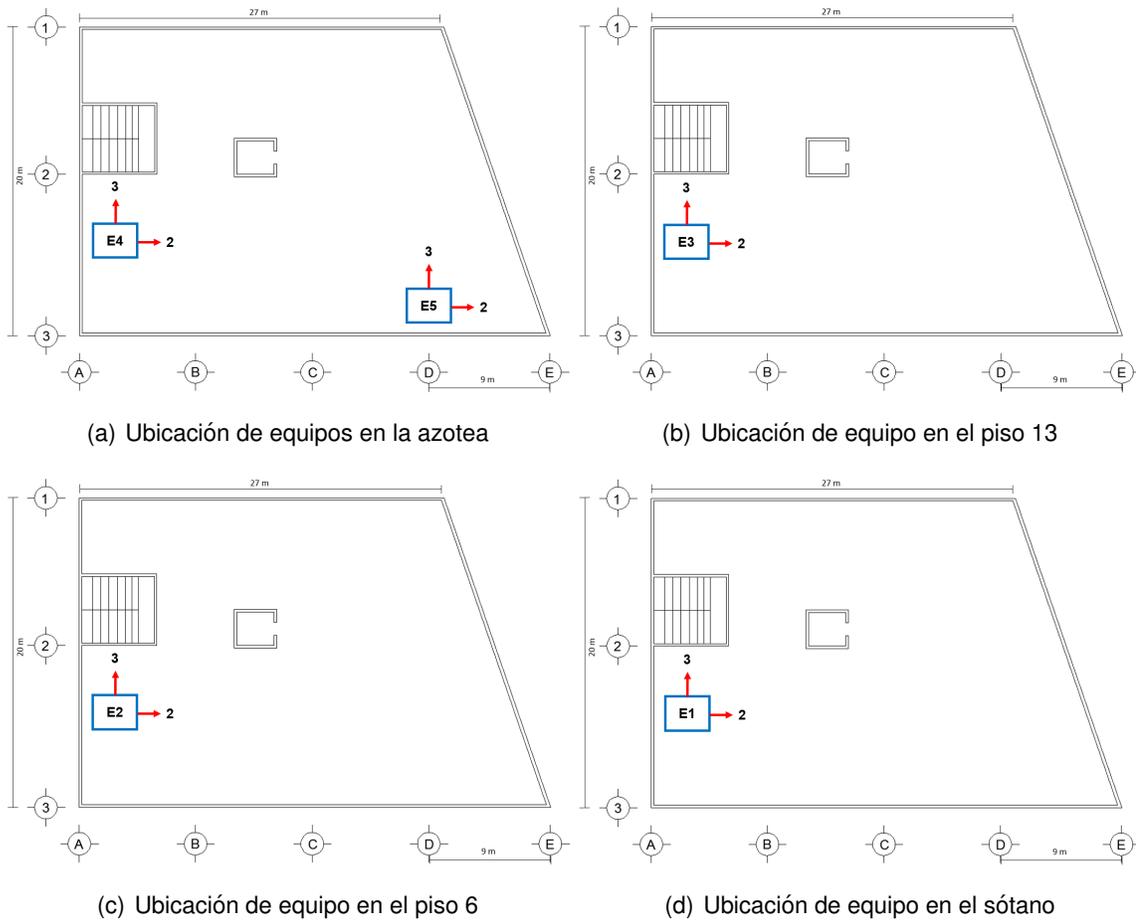


Figura 5.6. Distribución de los equipos en el arreglo del edificio de la ex CONASUPO

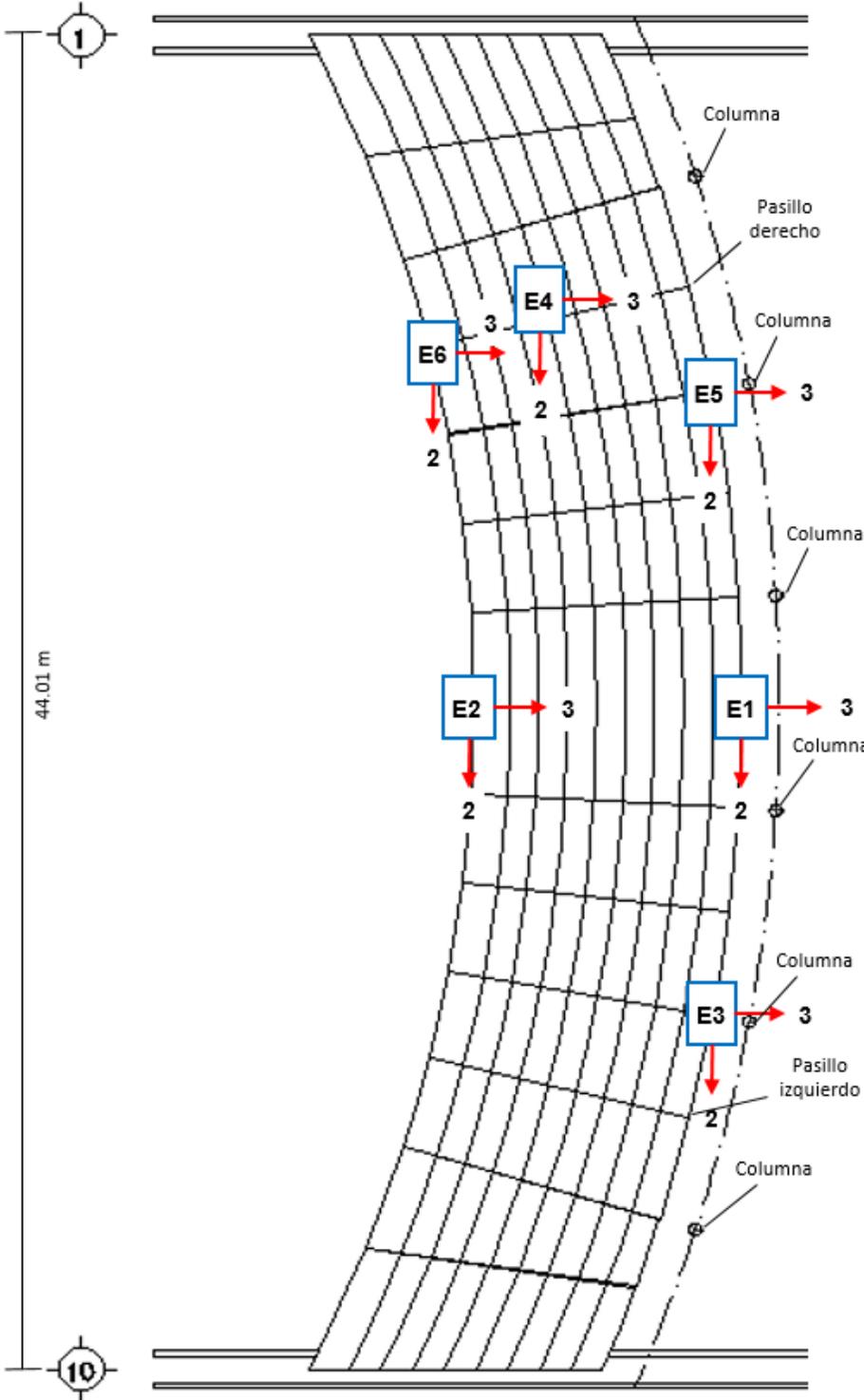


Figura 5.7. Distribución de los equipos en el arreglo del balcón de un teatro

### 5.3. Organización de los Registros

Como se mencionó en la sección anterior, sólo se hizo un arreglo para cada caso de estudio. En cada arreglo se realizaron de 5 a 6 disparos, es decir, en cada punto de medición se grabaron de 5 a 6 registros de manera simultánea; la sincronía en el registro de las señales es fundamental para identificar correctamente las frecuencias propias de los sistemas estructurales. Cada disparo tuvo una duración aproximada de 10 minutos con un intervalo de muestreo de 0.01 s (100 muestras por segundo).

Cabe hacer mención que sólo en el segundo caso (edificio ex CONASUPO) se obtuvieron registros sísmicos, debido a 6 sismos con duraciones de 1 a 4 minutos; en la tabla 5.5 se detallan los sismos registrados en este edificio. También es importante mencionar, que en el tercer caso (balcón de un teatro) se pudo medir la grada durante un concierto, por lo cual se obtuvieron registros de la grada sin gente y con gente. Lo anterior fue de gran utilidad para los fines de estudio de este trabajo, como se ve en el siguiente capítulo.

*Tabla 5.5. Características de los sismos registrados en el edificio de la ex CONASUPO*

Fecha	Origen	Latitud norte (°)	Latitud oeste (°)	Profundidad (km)	Magnitud (Mw)
15/06/99	Puebla y Oaxaca	18.39	-97.44	70	6.7
21/06/99	Costas de Oaxaca	18.32	-101.54	68	6.2
30/09/99	Costas de Oaxaca	16.06	-96.93	60	7.4
28/12/99	Costas de Oaxaca	18.24	-101.43	20	5.9
21/07/00	Puebla y Morelos	18.09	-98.97	47	5.9
09/08/00	Costas de Guerrero	17.94	-102.71	9	6.4

En las siguientes tablas, 5.6 a 5.9, se presenta la relación detallada de los registros obtenidos en cada caso de estudio.

Tabla 5.6. Relación de los registros obtenidos en el edificio del SAE

No. de medición	Nombre del equipo	Nombre del registro	Fecha	Hora de inicio	Duración (s)
1	E1	E1_32901	25/11/2014	13:08:23	842.81
	E2	E2_32901	25/11/2014	13:08:24	842.71
	E3	E3_32901	25/11/2014	13:08:25	842.15
	E4	E4_32901	25/11/2014	13:08:26	842.03
	E5	E5_32901	25/11/2014	13:08:27	842.34
	E6	E6_32901	25/11/2014	-	-
2	E1	E1_32902	25/11/2014	13:25:42	591.47
	E2	E2_32902	25/11/2014	13:25:43	591.28
	E3	E3_32902	25/11/2014	13:25:44	591.55
	E4	E4_32902	25/11/2014	13:25:46	591.37
	E5	E5_32902	25/11/2014	13:25:48	590.72
	E6	E6_32902	25/11/2014	13:25:48	590.77
3	E1	E1_32903	25/11/2014	13:39:44	554.42
	E2	E2_32903	25/11/2014	13:39:45	554.59
	E3	E3_32903	25/11/2014	13:39:46	554.92
	E4	E4_32903	25/11/2014	13:39:47	554.54
	E5	E5_32903	25/11/2014	13:39:49	554.52
	E6	E6_32903	25/11/2014	13:39:51	554.13
4	E1	E1_32904	25/11/2014	13:59:06	605.79
	E2	E2_32904	25/11/2014	13:59:08	605.21
	E3	E3_32904	25/11/2014	13:59:08	605.15
	E4	E4_32904	25/11/2014	13:59:09	605.98
	E5	E5_32904	25/11/2014	13:59:10	606.11
	E6	E6_32904	25/11/2014	13:59:11	606.11
5	E1	E1_32905	25/11/2014	14:11:24	627.57
	E2	E2_32905	25/11/2014	14:11:25	627.39
	E3	E3_32905	25/11/2014	14:11:26	627.95
	E4	E4_32905	25/11/2014	14:11:27	627.28
	E5	E5_32905	25/11/2014	14:11:29	626.88
	E6	E6_32905	25/11/2014	14:11:30	626.88
6	E1	E1_32906	25/11/2014	14:27:59	649.83
	E2	E2_32906	25/11/2014	14:27:56	647.45
	E3	E3_32906	25/11/2014	14:27:56	648.88
	E4	E4_32906	25/11/2014	14:27:57	649.02
	E5	E5_32906	25/11/2014	14:27:58	649.59
	E6	E6_32906	25/11/2014	14:27:58	649.90

Tabla 5.7. Relación de los registros obtenidos en el edificio de la ex CONASUPO

No. de medición	Nombre del equipo	Nombre del registro	Fecha	Hora de inicio	Duración (s)
1	E1	SOT16602	15/06/1999	20:42:45	225.81
	E2	P6.16601	15/06/1999	20:42:45	225.16
	E3	P1316602	15/06/1999	20:42:45	225.14
	E4	AES16601	15/06/1999	20:42:45	225.14
	E5	AEX16601	15/06/1999	20:42:45	224.52
2	E1	SOT17200	21/06/1999	17:44:18	118.04
	E2	P6.17200	21/06/1999	17:44:18	118.04
	E3	P1317200	21/06/1999	17:44:18	118.04
	E4	AES17200	21/06/1999	17:44:18	118.04
	E5	AEX17200	21/06/1999	17:44:18	117.85
3	E1	SOT27300	30/09/1999	16:32:39	243.57
	E2	P6.27300	30/09/1999	16:32:39	243.18
	E3	P1327300	30/09/1999	16:32:39	243.16
	E4	AES27300	30/09/1999	16:32:39	243.16
	E5	AEX27300	30/09/1999	16:32:39	242.76
4	E1	SOT06000	29/12/1999	05:21:16	75.02
	E2	P6.06000	29/12/1999	05:21:16	75.02
	E3	P1306000	29/12/1999	05:21:16	75.02
	E4	AES06000	29/12/1999	05:21:16	75.02
	E5	AEX06000	29/12/1999	05:21:16	75.61
5	E1	SOT20200	21/07/2000	16:14:02	134.90
	E2	P6.20200	21/07/2000	16:14:03	134.10
	E3	P1320200	21/07/2000	16:14:03	134.08
	E4	AES20200	21/07/2000	16:14:02	134.05
	E5	AEX20200	21/07/2000	16:14:03	134.97
6	E1	SOT22100	09/08/2000	11:43:29	172.12
	E2	P6.22100	09/08/2000	11:43:29	172.12
	E3	P1322100	09/08/2000	11:43:29	172.08
	E4	AES22100	09/08/2000	11:43:29	172.10
	E5	AEX22100	09/08/2000	11:43:29	172.51

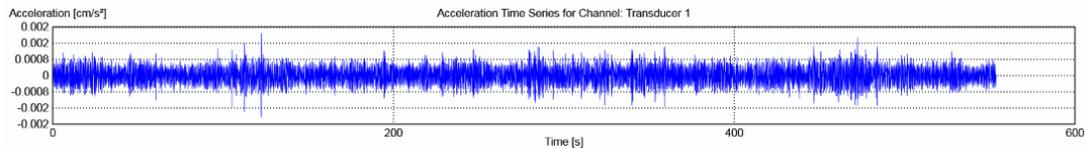
Tabla 5.8. Relación de los registros obtenidos en el balcón de un teatro (sin gente)

No. de medición	Nombre del equipo	Nombre del registro	Fecha	Hora de inicio	Duración (s)
1	E1	E1_12001	29/04/2016	14:38:03	558.63
	E2	E2_12001	29/04/2016	14:38:04	559.05
	E3	E3_12001	29/04/2016	14:38:05	558.89
	E4	E4_12001	29/04/2016	14:38:05	559.78
	E5	E5_12001	29/04/2016	14:38:07	559.55
	E6	E6_12001	29/04/2016	14:38:08	560.08
2	E1	E1_12002	29/04/2016	14:49:44	494.20
	E2	E2_12002	29/04/2016	14:49:44	494.96
	E3	E3_12002	29/04/2016	14:49:46	493.60
	E4	E4_12002	29/04/2016	14:49:47	494.03
	E5	E5_12002	29/04/2016	14:49:48	494.33
	E6	E6_12002	29/04/2016	14:49:49	494.09
3	E1	E1_12003	29/04/2016	15:02:02	334.12
	E2	E2_12003	29/04/2016	15:02:04	333.83
	E3	E3_12003	29/04/2016	15:02:05	333.48
	E4	E4_12003	29/04/2016	15:02:06	333.28
	E5	E5_12003	29/04/2016	15:02:07	333.88
	E6	E6_12003	29/04/2016	15:02:08	333.60
4	E1	E1_12004	29/04/2016	17:40:02	406.08
	E2	E2_12004	29/04/2016	17:40:03	406.46
	E3	E3_12004	29/04/2016	17:40:04	406.52
	E4	E4_12004	29/04/2016	17:40:06	405.94
	E5	E5_12004	29/04/2016	17:40:06	406.64
	E6	E6_12004	29/04/2016	17:40:02	406.14
5	E1	E1_12005	29/04/2016	17:49:28	419.02
	E2	E2_12005	29/04/2016	17:49:29	419.37
	E3	E3_12005	29/04/2016	17:49:30	419.68
	E4	E4_12005	29/04/2016	17:49:31	419.47
	E5	E5_12005	29/04/2016	17:49:32	419.52
	E6	E6_12005	29/04/2016	17:49:33	420.09

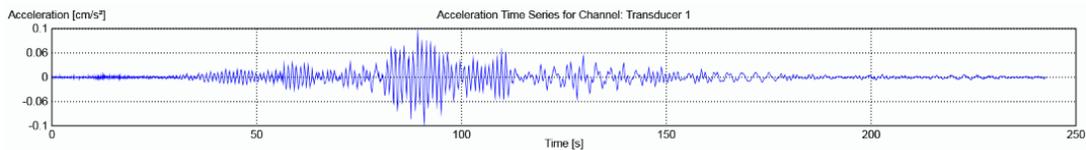
Tabla 5.9. Relación de los registros obtenidos en el balcón de un teatro (con gente)

No. de medición	Nombre del equipo	Nombre del registro	Fecha	Hora de inicio	Duración (s)
1	E1	E1_12006	29/04/2016	18:38:56	504.11
	E2	E2_12006	29/04/2016	18:38:58	503.93
	E3	E3_12006	29/04/2016	18:38:59	503.89
	E4	E4_12006	29/04/2016	18:39:01	503.31
	E5	E5_12006	29/04/2016	18:39:02	503.34
	E6	E6_12006	29/04/2016	18:39:03	502.96
2	E1	E1_12007	29/04/2016	18:52:08	518.44
	E2	E2_12007	29/04/2016	18:52:10	518.87
	E3	E3_12007	29/04/2016	18:52:10	519.45
	E4	E4_12007	29/04/2016	18:52:11	519.16
	E5	E5_12007	29/04/2016	18:52:13	518.80
	E6	E6_12007	29/04/2016	18:52:10	522.41
3	E1	E1_12008	29/04/2016	19:03:32	519.74
	E2	E2_12008	29/04/2016	19:03:34	519.58
	E3	E3_12008	29/04/2016	19:03:35	519.56
	E4	E4_12008	29/04/2016	19:03:37	518.81
	E5	E5_12008	29/04/2016	19:03:37	520.41
	E6	E6_12008	29/04/2016	19:03:38	520.43
4	E1	E1_12009	29/04/2016	19:12:37	502.07
	E2	E2_12009	29/04/2016	19:12:39	502.23
	E3	E3_12009	29/04/2016	19:12:41	500.57
	E4	E4_12009	29/04/2016	19:12:42	500.69
	E5	E5_12009	29/04/2016	19:12:43	500.58
	E6	E6_12009	29/04/2016	19:12:44	500.62
5	E1	E1_1200A	29/04/2016	19:30:37	773.70
	E2	E2_1200A	29/04/2016	19:39:41	774.22
	E3	E3_1200A	29/04/2016	19:30:39	774.52
	E4	E4_1200A	29/04/2016	19:30:41	774.24
	E5	E5_1200A	29/04/2016	19:30:42	774.33
	E6	E6_1200A	29/04/2016	19:30:43	774.37
6	E1	E1_1200B	29/04/2016	19:46:20	534.39
	E2	E2_1200B	29/04/2016	19:55:24	534.81
	E3	E3_1200B	29/04/2016	19:46:22	534.68
	E4	E4_1200B	29/04/2016	19:46:24	534.61
	E5	E5_1200B	29/04/2016	19:46:26	534.21
	E6	E6_1200B	29/04/2016	19:46:27	533.32

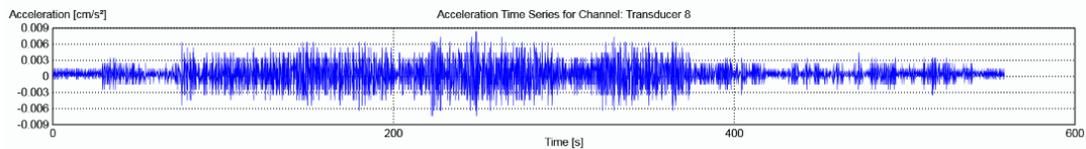
En la figura 5.8 se ilustra como ejemplo los registros de cada caso de estudio, como son muchos los registros sólo se muestran los más representativos de una dirección.



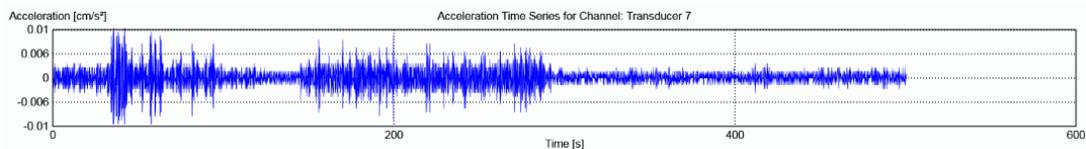
(a) Registro E2 del edificio del SAE (dirección transversal)



(b) Registro E4 del edificio de la ex CONASUPO (dirección transversal)



(c) Registro E2 del balcón de un teatro sin gente (dirección vertical)



(d) Registro E2 del balcón de un teatro con gente (dirección vertical)

*Figura 5.8. Registros representativos de los tres casos de estudio*

### 5.3.1. Preparación de los Registros

Los registros de aceleración (acelerogramas) obtenidos en cada caso de estudio se grabaron en la memoria de estado sólido de cada uno de los equipos de medición, como ya se mencionó. En gabinete, los acelerogramas se descargaron a una computadora personal en formato .GSR, mediante el software que controla a los equipos. Para aplicar el correspondiente análisis espectral a los acelerogramas es necesario convertirlos a formato ASCII, después dividirlos en sus 2 o 3 canales de medición y acomodarlos en forma de

vector columna, para finalmente realizar el procesamiento numérico y el análisis espectral.

El procesamiento numérico y el análisis espectral actualmente se realizan con la ayuda de innovadoras herramientas computacionales. Las herramientas computacionales utilizadas en este trabajo se describen en la siguiente sección.

## **5.4. Procesamiento de los Registros**

Para el procesamiento de los registros y su posterior análisis espectral, se utilizaron dos herramientas computacionales: un instrumento virtual desarrollado en el programa LabVIEW y el programa ARTEMIS Modal. Con el instrumento virtual se procesaron los registros mediante la teoría del Análisis de Fourier y con el programa ARTEMIS Modal se procesaron mediante las técnicas del OMA. A continuación se describen estas dos herramientas.

### **5.4.1. Instrumento Virtual (LabVIEW)**

El programa LabVIEW (*Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench*), elaborado por National Instruments en 1998, trabaja con un lenguaje de programación visual gráfico, es decir, a base de iconos. Estos iconos pueden conectarse y manipularse para obtener procesos o funciones matemáticas complejas, como es el caso del análisis espectral de señales. Los programas desarrollados con LabVIEW se llaman instrumentos virtuales, los cuales se pueden definir como programas gráficos que simulan las propiedades de un instrumento físico.

El instrumento virtual que se emplea en este trabajo de investigación, fue desarrollado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, en el trabajo de (Castelán, 2001). Este instrumento virtual ha sido utilizado y validado por sus autores en diversos proyectos para determinar las propiedades dinámicas de estructuras. En general se identifican tres etapas en el procesamiento numérico de este instrumento virtual: adquisición de datos, procesamiento de señales y la graficación de espectros.

En la etapa de adquisición de datos se ingresan las componentes, que se desean analizar,

de dos registros de aceleración en formato ASCII y acomodadas en forma de columna. Adicionalmente se debe introducir el intervalo de muestreo con el que fueron tomados los registros, el factor de escala con el cual se definen las unidades de la aceleración de los registros, el número de segmentos en el que se dividirá la señal para obtener los valores promedio, así como el número de muestras inútiles al inicio y al final del registro que no se quieren analizar; lo anterior es útil cuando los acelelogramas no son perfectamente síncronos.

En la etapa del procesamiento de señales se aplica el factor de escala correspondiente a los registros de aceleraciones, luego se dividen los registros en el número de segmentos indicado en la etapa anterior para posteriormente atenuar cada segmento con una ventana tipo Hanning e inmediatamente después se calculan los espectros de Fourier mediante la DFT, así como los espectros de potencia, la función de coherencia, el ángulo de fase, el espectro cruzado y la función de transferencia. Los espectros y funciones anteriores son fundamentales para identificar las frecuencias propias de vibrar de las estructuras en el Análisis de Fourier, como se explica en el capítulo 3.

Después de que se han introducido los datos de la primera etapa y se realiza el posterior procesamiento, la graficación de los espectros es automática. En la figura 5.9 se muestra la interfaz de usuario del instrumento virtual descrito anteriormente con las gráficas de los espectros resultantes.

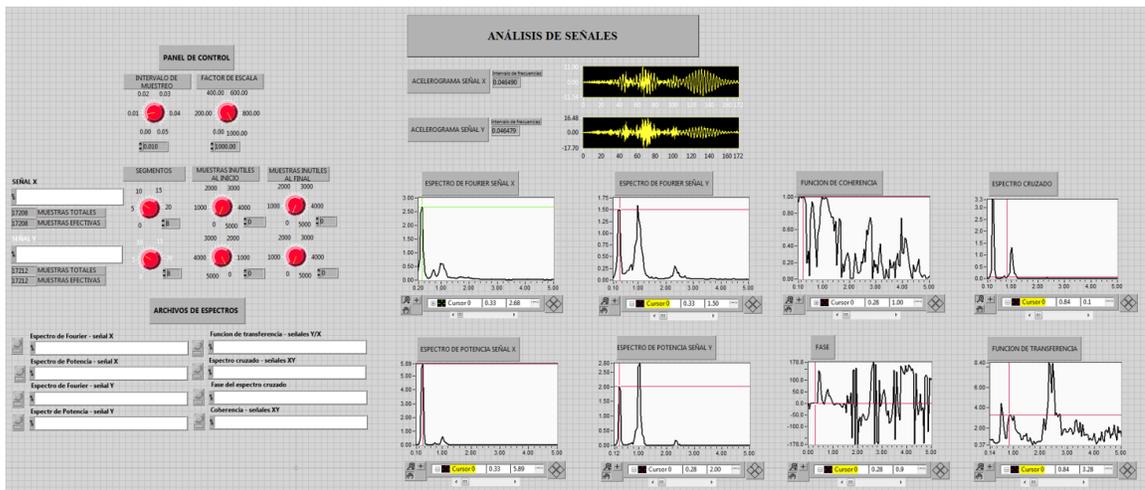


Figura 5.9. Interfaz de usuario del instrumento virtual empleado

### 5.4.2. ARTeMIS Modal

El programa ARTeMIS Modal, desarrollado por Soluciones de Vibración Estructural A/S (SVS A/S por sus siglas en inglés), es la herramienta más potente para desarrollar las técnicas del OMA que se presentan en este trabajo. El programa ARTeMIS Modal permite realizar la identificación modal de una estructura en condiciones operacionales y en situaciones donde sea difícil aplicar excitaciones forzadas.

Esta herramienta se usa principalmente para la identificación modal de sólo las respuestas en virtud de la operación real o condiciones ambientales de la estructura. Entre sus características más importantes están la rápida identificación en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo de las frecuencias naturales, los modos de vibración y las relaciones de amortiguamiento; el manejo de múltiples conjunto de datos (acelerogramas) y puntos de referencia; la animación y comparación de las formas modales de las diferentes estimaciones (técnicas).

Para realizar el análisis modal de los acelerogramas con el programa ARTeMIS Modal, primero hay que elaborar un archivo ASCII (proyecto) que debe contener los siguientes datos: el intervalo de muestreo de los acelerogramas; las coordenadas de los nodos de la estructura que se quiere analizar, así como de las líneas y superficies de la misma; las coordenadas de los nodos donde se ubicaron los equipos de medición en cada arreglo; las componentes de los acelerogramas que se desean procesar; los archivos donde se guardaron todos los acelerogramas de cada arreglo y las coordenadas de nodos esclavos, aquí se esclavizan los nodos libres a los nodos donde se colocaron equipos para representar las formas modales de las estructuras analizadas, lo anterior se debe a que no es posible medir en todos los puntos de las estructuras por el limitado número de equipos. Las coordenadas de los nodos se pueden obtener al dibujar la geometría de la estructura analizada en un programa de análisis estructural, para posteriormente exportar las coordenadas al proyecto mencionado anteriormente; en este trabajo se dibujó la geometría de los tres casos de estudio en el programa SAP2000. Es importante recalcar que todos los acelerogramas de cada arreglo deben estar en formato ASCII, acomodados en forma de columna y tener el mismo número de muestras para que el programa no marque errores.

Después de que al proyecto se le introducen todos los datos anteriores, este se carga

al programa ARTeMIS Modal e inmediatamente se puede comenzar con la selección de las técnicas del OMA que se deseen aplicar a la estructura en estudio, en la interfaz de usuario del programa también se muestra la geometría de la estructura analizada. Cabe mencionar que en este programa las técnicas FDD y EFDD utilizan como herramienta a la técnica PP para la identificación de los picos máximos. Por lo tanto, como se observa en el capítulo 6, no se muestran resultados para la técnica PP como tal. Los algoritmos que emplea cada técnica para identificar los parámetros dinámicos se comentaron en el capítulo 4. En la figura 5.10 se ilustra la interfaz del programa ARTeMIS Modal que se utilizó en este trabajo.

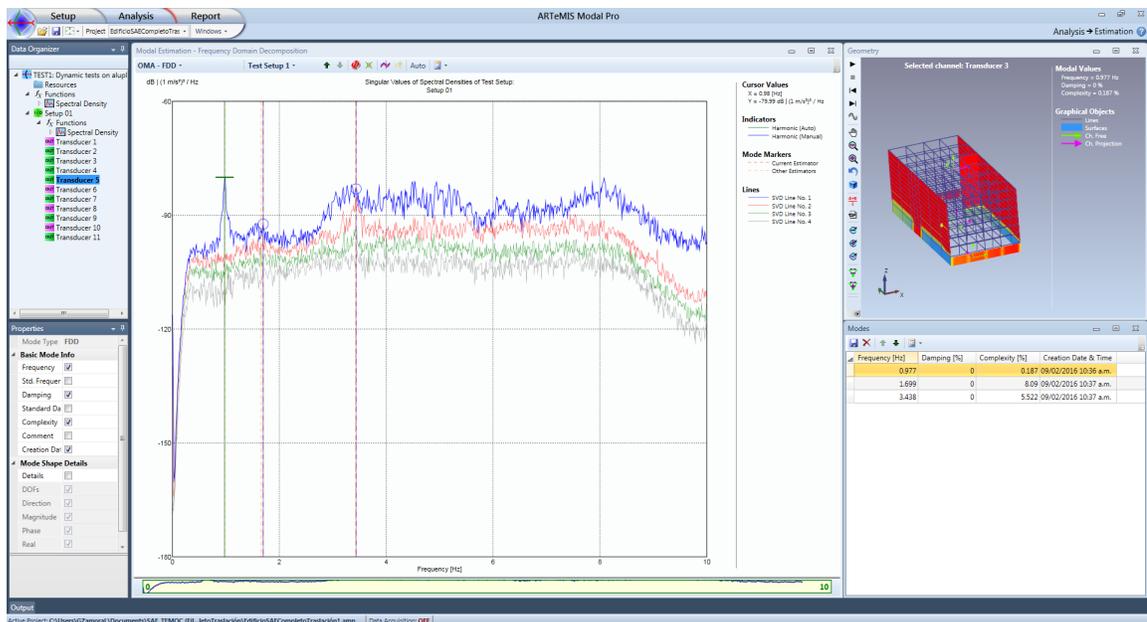


Figura 5.10. Interfaz de usuario del programa ARTeMIS Modal

---

## Capítulo 6

# ESTUDIO COMPARATIVO

---

### 6.1. Resultados Obtenidos

En este capítulo se presentan los resultados que se obtuvieron al procesar los acelerogramas, de cada caso de estudio, con las herramientas computacionales descritas en el capítulo anterior; para posteriormente realizar una comparación de los resultados arrojados por ambas herramientas. Hay que recordar que con el instrumento virtual se procesaron los acelerogramas con la teoría del Análisis de Fourier y con el programa ARTeMIS Modal se procesaron los acelerogramas con la teoría de las técnicas del OMA descritas en este trabajo.

Debido a la gran cantidad de acelerogramas que se obtuvieron en cada caso de estudio, sólo se presentan los resultados de los disparos más representativos de cada arreglo de las estructuras analizadas; esto se llevó a cabo para los dos métodos de análisis. Además, se debe mencionar que a los acelerogramas de todos los casos de estudio se les corrigió la línea base y sólo a los del primer caso (edificio del SAE) se les aplicó un filtro *pasa-alta* con un corte mínimo en 0.3 Hz, esto fue debido a que al inicio de los espectros aparecía un pico de gran amplitud generado por ruido que deamplificaba los picos de las frecuencias propias de la estructura. Lo anterior se realizó como parte de la revisión visual que se hizo a los acelerogramas, ya separados en sus componentes y convertidos en formato ASCII; la revisión de los registros de aceleración en este trabajo se realizó con ayuda del programa Degtra desarrollado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

---

### 6.1.1. Resultados con el Análisis de Fourier

Para el primer caso (edificio del SAE), se presenta el disparo 2 para la identificación de sus propiedades dinámicas estructurales, ya que los acelerogramas de este disparo fueron los de mayor calidad. En la figura 6.1 se muestran, de manera superpuesta, los espectros de Fourier de los 6 puntos de medición de este disparo, en la dirección transversal y longitudinal respectivamente. Las gráficas de los espectros y funciones que se muestran en este y en los demás casos, se exportaron del instrumento virtual al programa Excel para poder visualizarlos mejor.

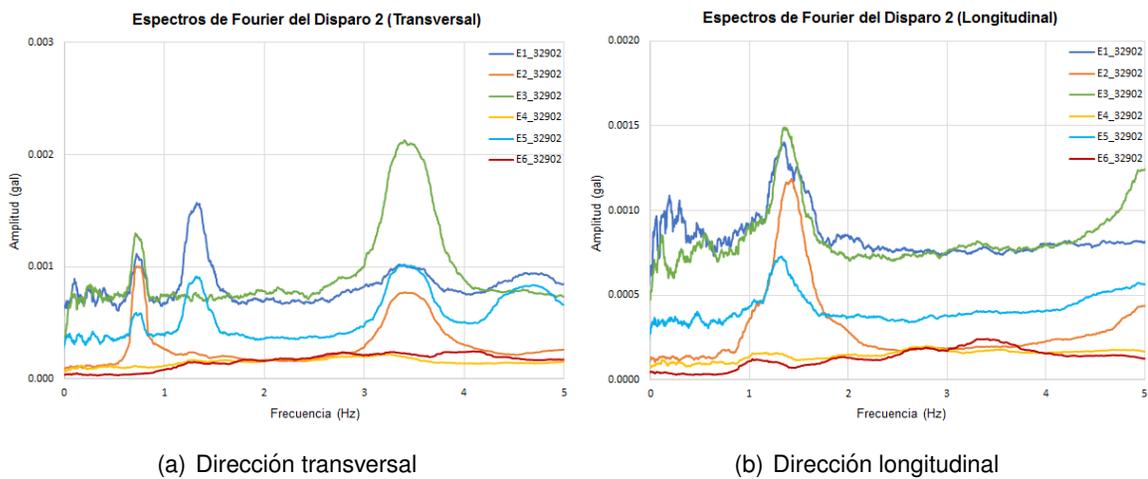
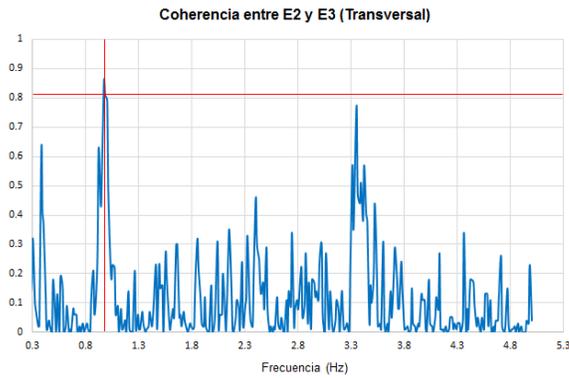
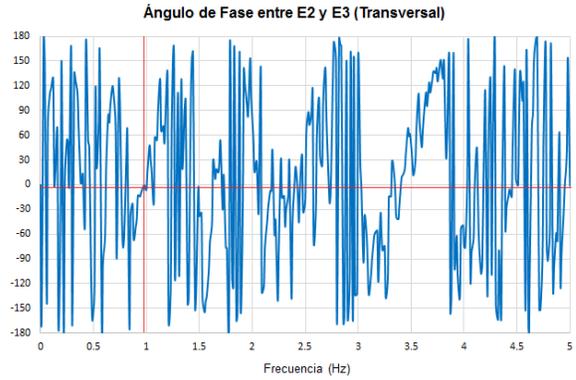


Figura 6.1. Espectros de Fourier de los 6 puntos de medición del disparo 2

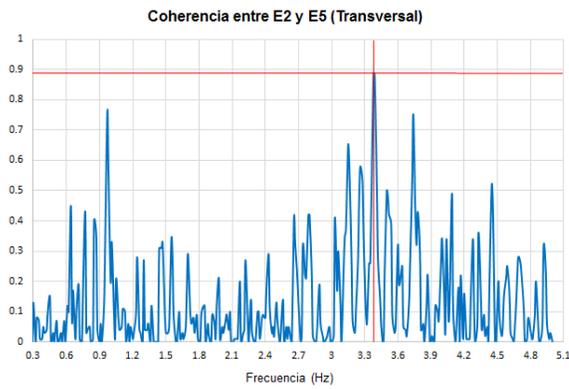
Como se observa en los espectros de Fourier anteriores, se identifican tres frecuencias dominantes (en un rango de 0 a 5 Hz) con valores de 0.98 Hz y 3.39 Hz en la dirección transversal; y 1.57 Hz en la dirección longitudinal. Para verificar si estas frecuencias son frecuencias propias del sistema estructural, se procedió a realizar la correlación entre pares de registros, de la misma dirección, de dos puntos diferentes. Con los acelerogramas de los equipos E1, E2, E3 y E5 (cuyas ubicaciones se indican en la figura 5.5) se obtuvieron las funciones de coherencia y ángulo de fase para cada una de las frecuencias identificadas en los espectros de Fourier de la figura 6.1; en las figuras 6.2 y 6.3 se muestra lo anterior.



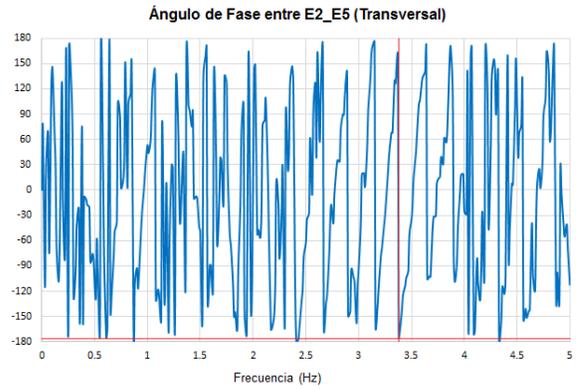
(a) Coherencia para la frecuencia 0.98 Hz



(b) Ángulo de fase para la frecuencia 0.98 Hz

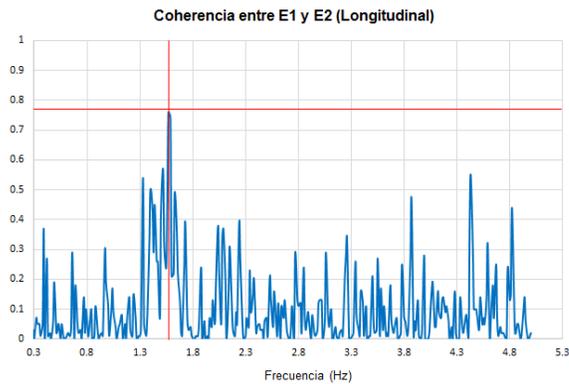


(c) Coherencia para la frecuencia 3.39 Hz

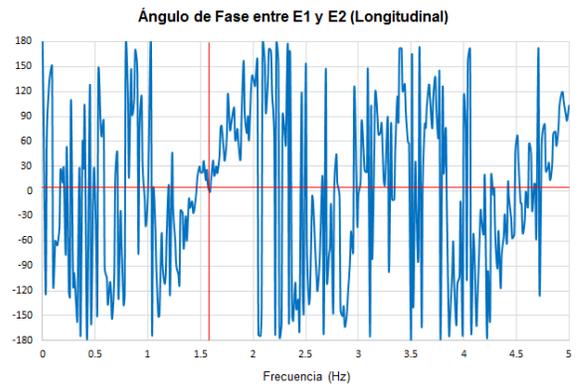


(d) Ángulo de fase para la frecuencia 3.39 Hz

*Figura 6.2. Función de coherencia y ángulo de fase en la dirección transversal*



(a) Coherencia para la frecuencia 1.57 Hz

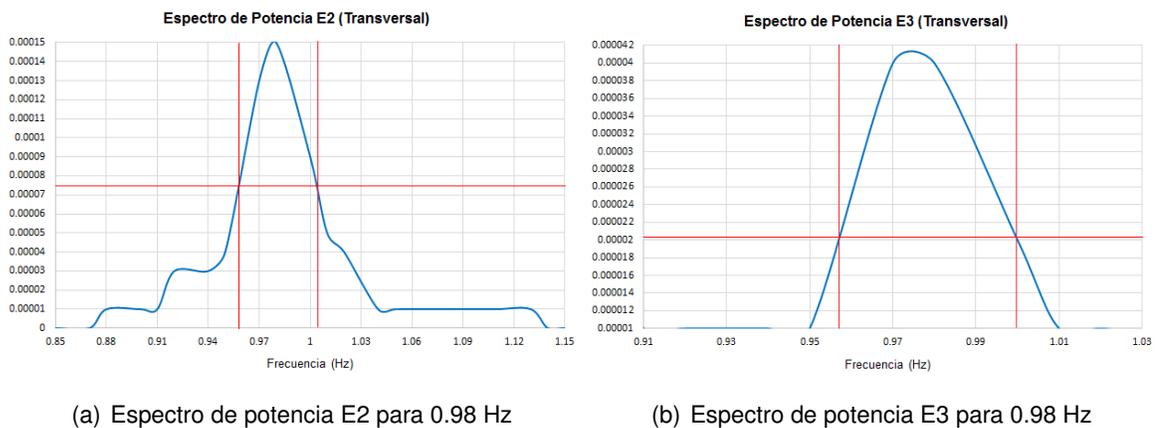


(b) Ángulo de fase para la frecuencia 1.57 Hz

*Figura 6.3. Función de coherencia y ángulo de fase en la dirección longitudinal*

En las figuras anteriores se observa que las frecuencias de 0.98 Hz y 1.57 Hz tienen coherencias cercanas a 1 (de 0.81 y 0.76) y ángulos de fase cercanos a cero grados (de  $-0.50^\circ$  y  $6.80^\circ$ ), por lo que se determinó que estas dos frecuencias corresponden al primer y segundo modo de vibrar con dominancia traslacional, en la dirección transversal y longitudinal respectivamente. Para la frecuencia de 3.39 Hz también se identificó una coherencia cercana a 1 (de 0.88) pero un ángulo de fase cercano a los  $\pm 180^\circ$  (de  $-174.60^\circ$ ), por lo tanto se concluyó que esta frecuencia corresponde al tercer modo con dominancia torsional.

El cálculo del porcentaje de amortiguamiento crítico se realizó con el método de Kawasumi y Shima (Kawasumi y Shima, 1965), empleando los espectros de potencia correspondientes a los registros correlacionados anteriormente. Se calculó el amortiguamiento para cada una de las frecuencias identificadas, por lo que se utilizaron los espectros de potencia de los pares de señales correlacionadas de cada dirección para luego promediar los resultados obtenidos; siguiendo el procedimiento descrito en el capítulo 3. Para la frecuencia de 0.98 Hz se obtuvo un porcentaje de amortiguamiento crítico de 3.33 %, en la frecuencia de 1.57 Hz se obtuvo 1.48 % y para la frecuencia de 3.39 Hz se encontró un amortiguamiento de 0.63 %. En la figura 6.4 se muestra, como ejemplo, los espectros de potencia utilizados para obtener el porcentaje de amortiguamiento correspondiente a la frecuencia de 0.98 Hz.



*Figura 6.4. Espectros de potencia para el cálculo del amortiguamiento*

En la tabla 6.1 se presentan los parámetros dinámicos que se obtuvieron para el caso del

edificio del SAE, de acuerdo con los resultados mostrados anteriormente.

Tabla 6.1. *Parámetros dinámicos obtenidos en el edificio del SAE*

Edificio del SAE			
Frecuencia identificada (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico promedio (%)	Dirección
0.98	1.02	3.33	Transversal
1.57	0.64	1.48	Longitudinal
3.39	0.29	0.63	Torsional

En el segundo caso, edificio ex CONASUPO, se presenta el tercer evento sísmico registrado que corresponde al sismo ocurrido del 30 de Septiembre de 1999, el cual fue el de mayor magnitud (7.4 Mw); además de proporcionar la máxima respuesta de la estructura de todos los sismos registrados. En la figura 6.5 se muestran, de manera superpuesta, los espectros de Fourier de los 5 puntos de medición durante este sismo, en la dirección transversal y longitudinal respectivamente.

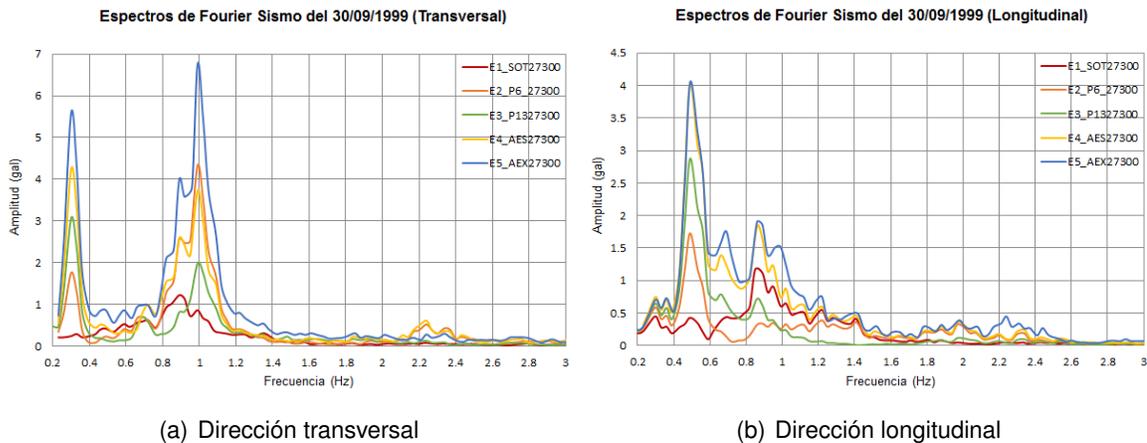
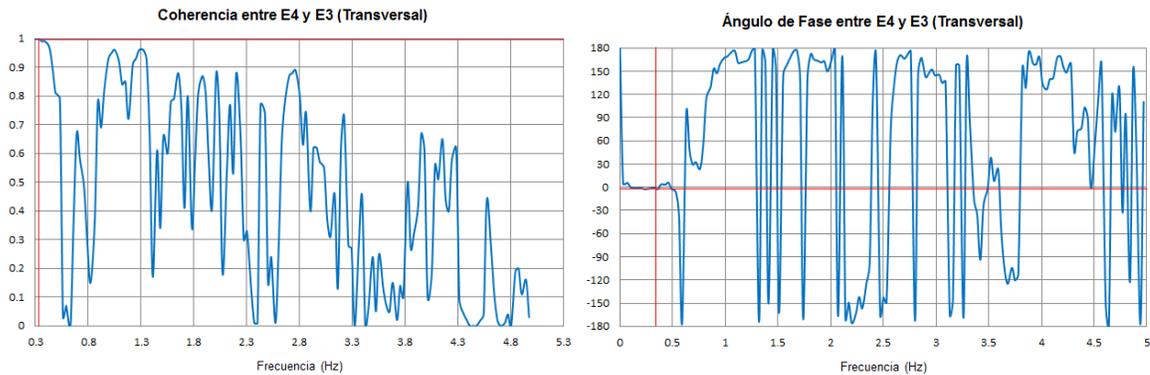


Figura 6.5. *Espectros de Fourier de los 5 puntos de medición del tercer sismo*

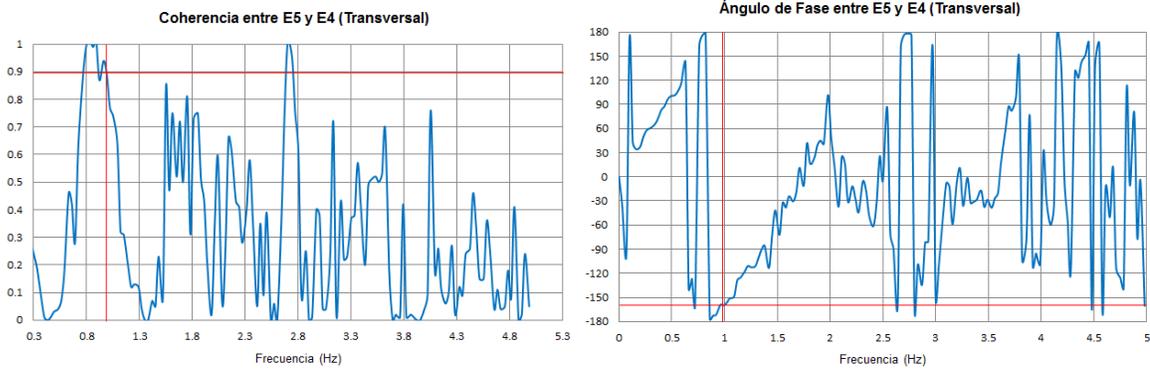
De acuerdo con los anteriores espectros de Fourier, se identifican tres frecuencias dominantes (en un rango de 0 a 3 Hz) con valores de 0.30 Hz y 0.99 Hz en la dirección

transversal; y 0.49 Hz en la dirección longitudinal. Posteriormente se realizó la correlación entre pares de registros, de la misma dirección, de dos puntos diferentes para verificar si estas frecuencias son frecuencias propias del sistema estructural. Con los acelerogramas de los equipos E3, E4 y E5 (cuyas ubicaciones se indican en la figura 5.6) se obtuvieron las funciones de coherencia y ángulo de fase para cada una de las frecuencias identificadas en los espectros de Fourier de la figura 6.5; en las figuras 6.6 y 6.7 se muestra lo anterior.



(a) Coherencia para la frecuencia 0.30 Hz

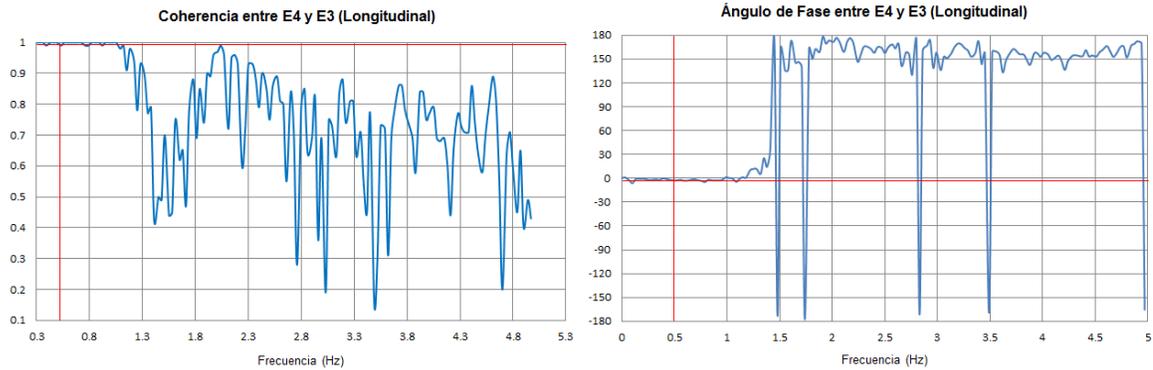
(b) Ángulo de fase para la frecuencia 0.30 Hz



(c) Coherencia para la frecuencia 0.99 Hz

(d) Ángulo de fase para la frecuencia 0.99 Hz

*Figura 6.6. Función de coherencia y ángulo de fase en la dirección transversal*



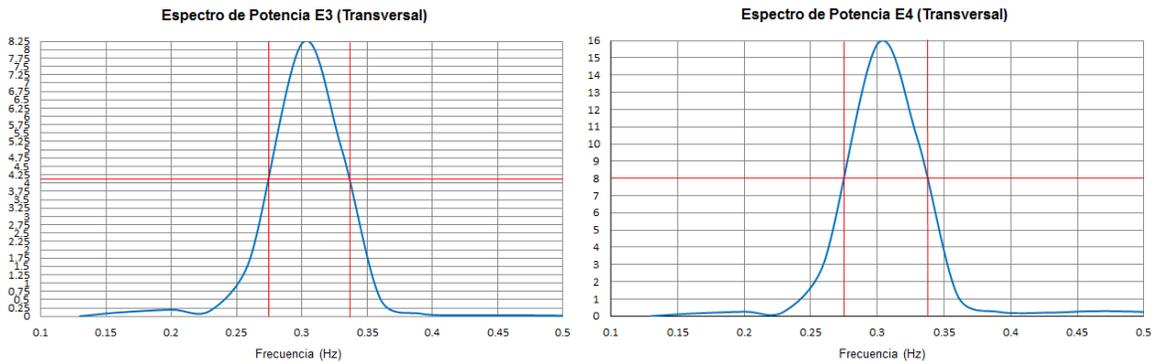
(a) Coherencia para la frecuencia 0.49 Hz

(b) Ángulo de fase para la frecuencia 0.49 Hz

Figura 6.7. Función de coherencia y ángulo de fase en la dirección longitudinal

Se observa que las frecuencias de 0.30 Hz y 0.49 Hz tienen coherencias iguales a 1 y ángulos de fase muy cercanos a cero grados (de  $-1.20^\circ$  y  $-2.60^\circ$ ), por lo que se determinó que estas dos frecuencias corresponden al primer y segundo modo de vibrar con dominancia traslacional, en la dirección transversal y longitudinal respectivamente. Para la frecuencia de 0.99 Hz se identificó una coherencia cercana a 1 (de 0.89) pero un ángulo de fase cercano a los  $\pm 180^\circ$  (de  $-159.90^\circ$ ), por lo tanto se concluyó que esta frecuencia corresponde al tercer modo con dominancia torsional.

El cálculo del porcentaje de amortiguamiento crítico se realizó con el método de Kawasumi y Shima (Kawasumi y Shima, 1965), siguiendo el mismo proceso del caso anterior. Para la frecuencia de 0.30 Hz se obtuvo un porcentaje de amortiguamiento crítico de 10.35 %, en la frecuencia de 0.49 Hz se obtuvo 7.33 % y para la frecuencia de 0.99 Hz se encontró un amortiguamiento de 2.76 %. En la figura 6.8 se muestra, como ejemplo, los espectros de potencia utilizados para obtener el porcentaje de amortiguamiento correspondiente a la frecuencia de 0.30 Hz.



(a) Espectro de potencia E3 para 0.30 Hz

(b) Espectro de potencia E4 para 0.30 Hz

Figura 6.8. Espectros de potencia para el cálculo del amortiguamiento

En la tabla 6.2 se presentan los parámetros dinámicos que se obtuvieron para el caso del edificio de la ex CONASUPO, de acuerdo con los resultados mostrados anteriormente.

Tabla 6.2. Parámetros dinámicos obtenidos en el edificio de la ex CONASUPO

Edificio de la ex CONASUPO			
Frecuencia identificada (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico promedio (%)	Dirección
0.30	3.33	10.35	Transversal
0.49	2.04	7.33	Longitudinal
0.99	1.01	2.76	Torsional

Para el caso de la grada de un teatro, se presenta el disparo 1 para la situación del balcón sin gente y el disparo 4 para la situación del balcón con gente. En la figura 6.9 se muestran, de manera superpuesta, los espectros de Fourier de 4 de los 6 puntos de medición de cada disparo en la dirección vertical (debido a que los equipos E3 y E5 son biaxiales y sólo miden en las componentes horizontales); la componente vertical de los registros de aceleración es la que domina en este tipo de estructuras (tipo losa).

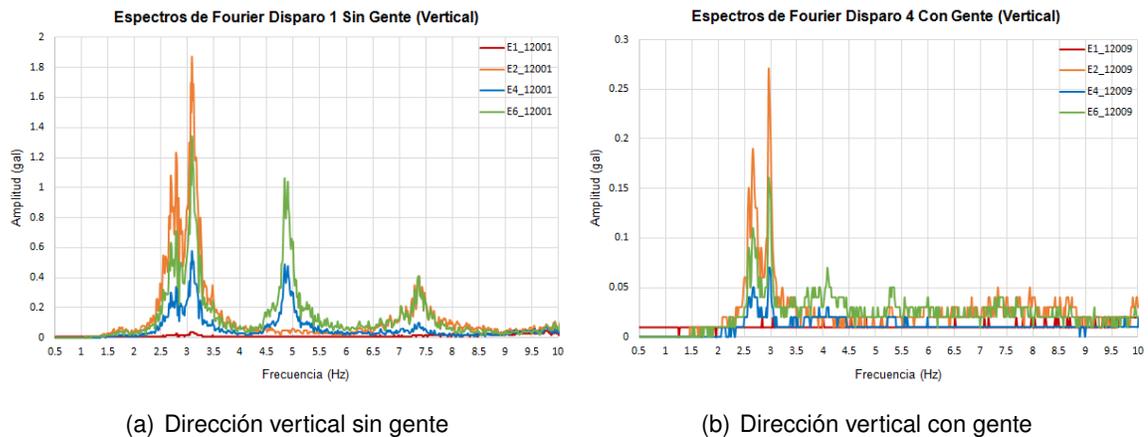
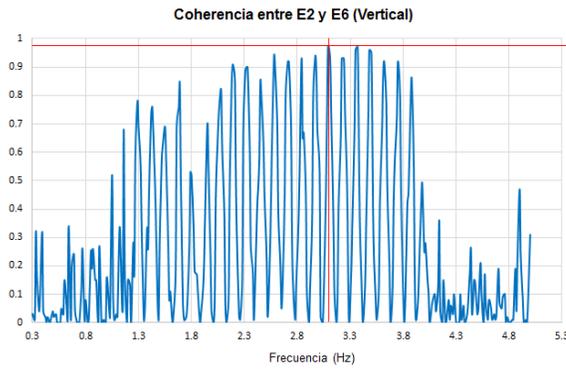


Figura 6.9. Espectros de Fourier de 4 puntos de medición del balcón de un teatro

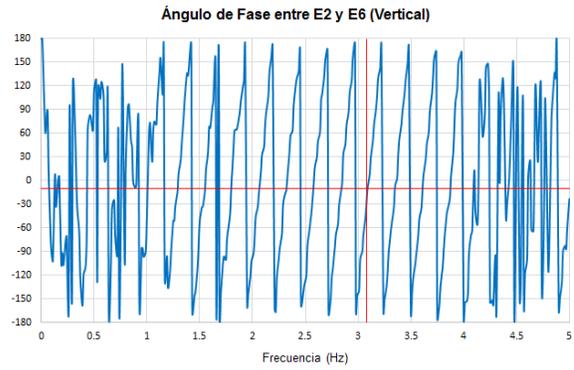
De los espectros de Fourier sin gente se identifican tres frecuencias dominantes (en un rango de 0 a 10 Hz) con valores de 3.09 Hz, 4.84 Hz y 7.36 Hz, por su parte en los espectros de Fourier con gente se identifican frecuencias dominantes en el mismo rango con valores de 2.97 Hz, 4.09 Hz y 5.34 Hz. La correlación entre pares de registros para verificar si las frecuencias anteriores son frecuencias propias del sistema estructural se realizaron con los acelerogramas de los equipos E2, E4 y E6 (cuyas ubicaciones se indican en la figura 5.7). Se obtuvieron las funciones de coherencia y ángulo de fase para cada una de las frecuencias identificadas en los espectros de Fourier de la figura 6.9; en las figuras 6.10 y 6.11 se muestra lo anterior.

En las figuras mencionadas anteriormente, las cuales se muestran a continuación, se observa que las frecuencias de 3.09 Hz, 4.84 Hz y 7.36 Hz tienen coherencias cercanas a 1 (de 0.97, 0.90 y 0.97) y ángulos de fase de  $-8.7^\circ$ ,  $162.10^\circ$  y  $174.60^\circ$  respectivamente. De acuerdo a lo anterior se determinó que estas frecuencias corresponden al primer, segundo y tercer modo de vibrar de la grada sin gente con dominancia vertical.

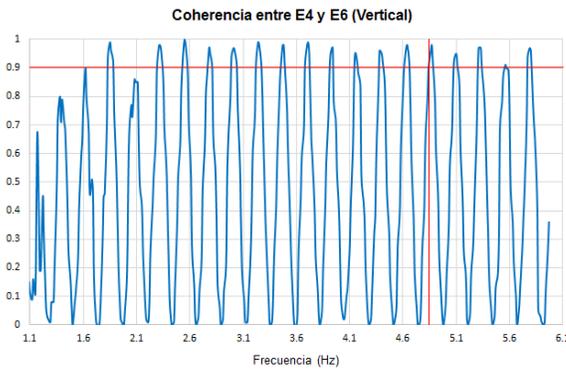
Para las frecuencias de 2.97 Hz, 4.09 Hz y 5.34 Hz también se observaron coherencias cercanas a 1 (de 0.95, 0.96 y 0.91) y ángulos de fase de  $7.5^\circ$ ,  $10.10^\circ$  y  $-15.50^\circ$  respectivamente. Identificándose las frecuencias anteriores como las correspondientes al primer, segundo y tercer modo de vibrar de la grada con gente en dominancia vertical.



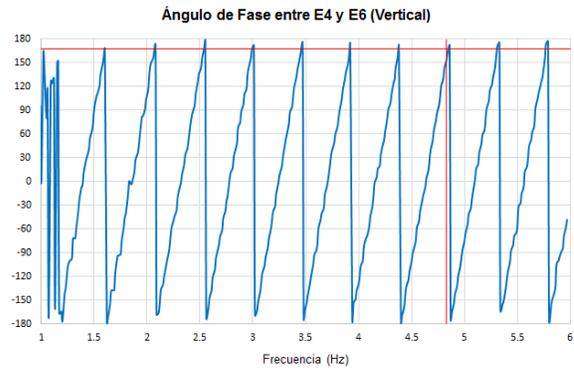
(a) Coherencia para la frecuencia 3.09 Hz



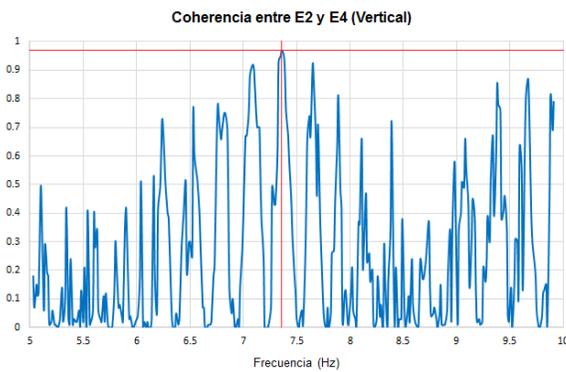
(b) Ángulo de fase para la frecuencia 3.09 Hz



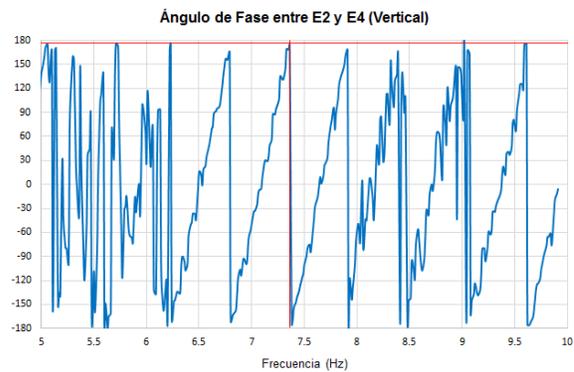
(c) Coherencia para la frecuencia 4.84 Hz



(d) Ángulo de fase para la frecuencia 4.84 Hz

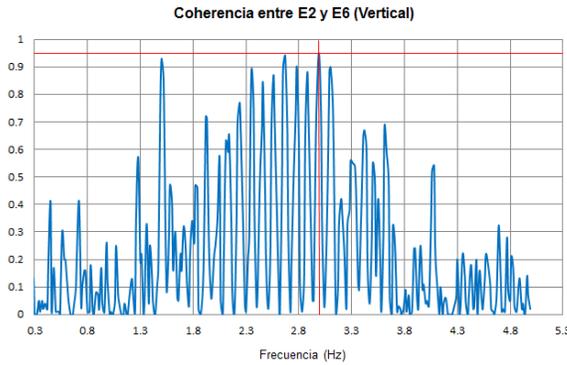


(e) Coherencia para la frecuencia 7.36 Hz

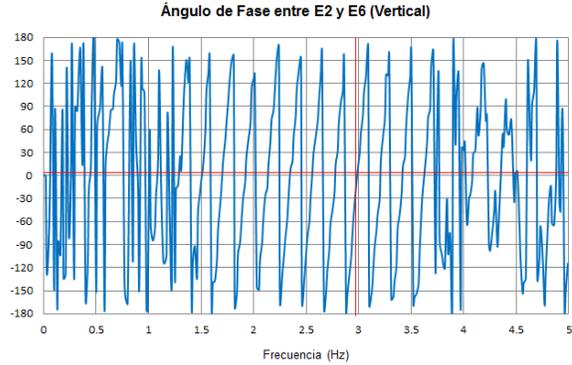


(f) Ángulo de fase para la frecuencia 7.36 Hz

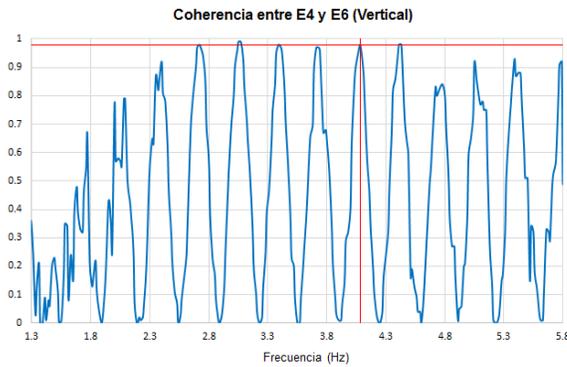
Figura 6.10. Funciones de coherencia y ángulos de fase sin gente



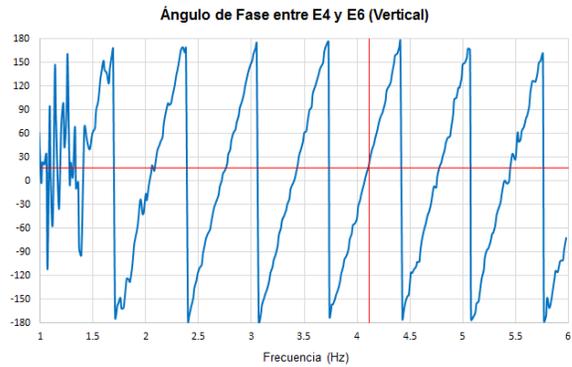
(a) Coherencia para la frecuencia 2.97 Hz



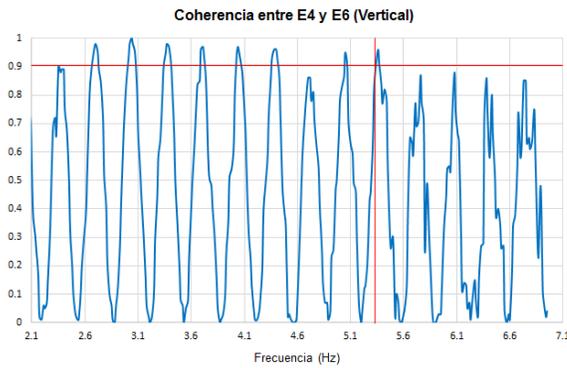
(b) Ángulo de fase para la frecuencia 2.97 Hz



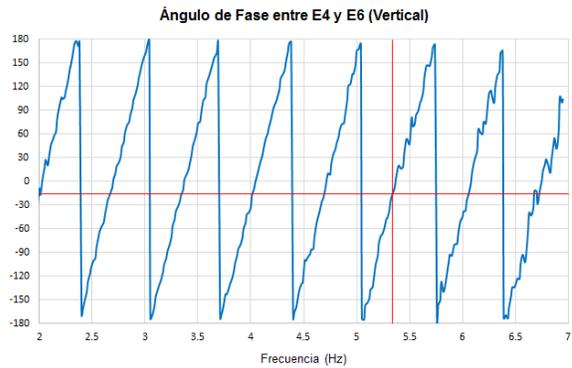
(c) Coherencia para la frecuencia 4.09 Hz



(d) Ángulo de fase para la frecuencia 4.09 Hz



(e) Coherencia para la frecuencia 5.34 Hz

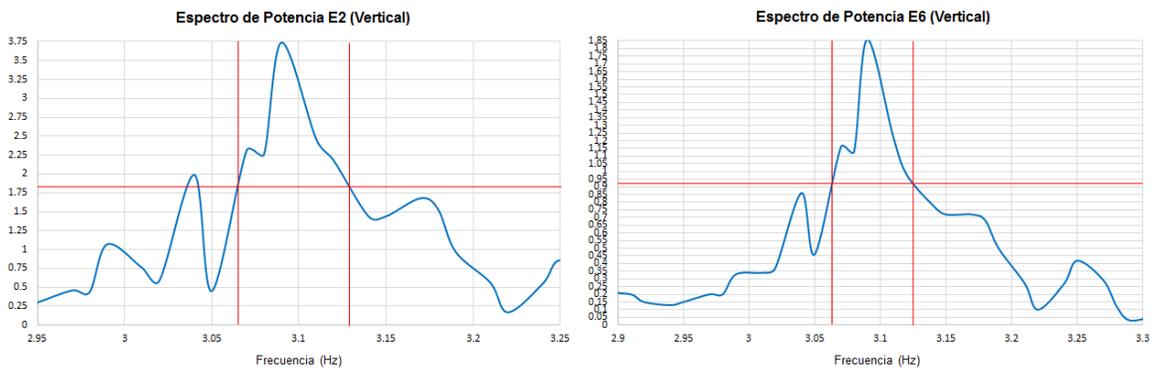


(f) Ángulo de fase para la frecuencia 5.34 Hz

Figura 6.11. Funciones de coherencia y ángulos de fase con gente

Al igual que en los dos casos anteriores, el cálculo del porcentaje de amortiguamiento crítico se realizó con el método de Kawasumi y Shima (Kawasumi y Shima, 1965). Para

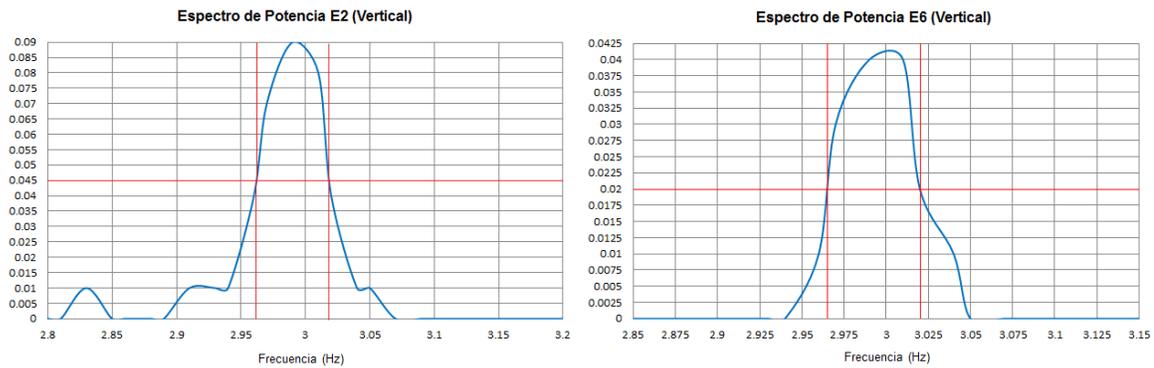
las tres frecuencias identificadas del balcón sin gente se obtuvieron porcentajes de amortiguamiento crítico de 1.01 %, 0.49 % y 0.32 % respectivamente; en cambio para las tres frecuencias identificadas del balcón con gente se obtuvieron valores de amortiguamiento de 1.34 %, 0.86 % y 0.63 %. En la figuras 6.12 y 6.13 se muestra, como ejemplo, los espectros de potencia utilizados para obtener el porcentaje de amortiguamiento correspondientes a la frecuencias de 3.09 Hz (grada sin gente) y 2.97 Hz (grada con gente).



(a) Espectro de potencia E2 para 3.09 Hz

(b) Espectro de potencia E6 para 3.09 Hz

Figura 6.12. Espectros de potencia para el cálculo del amortiguamiento sin gente



(a) Espectro de potencia E2 para 2.97 Hz

(b) Espectro de potencia E6 para 2.97 Hz

Figura 6.13. Espectros de potencia para el cálculo del amortiguamiento con gente

En la tablas 6.3 y 6.4 se presentan los parámetros dinámicos que se obtuvieron para el caso del balcón de un teatro sin gente y con gente respectivamente, de acuerdo con los resultados mostrados anteriormente.

*Tabla 6.3. Parámetros dinámicos obtenidos en el balcón de un teatro sin gente*

Grada de un teatro			
Frecuencia identificada (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico promedio (%)	Dirección
3.09	0.32	1.01	Vertical
4.84	0.21	0.49	Vertical
7.36	0.14	0.32	Vertical

*Tabla 6.4. Parámetros dinámicos obtenidos en el balcón de un teatro con gente*

Grada de un teatro			
Frecuencia identificada (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico promedio (%)	Dirección
2.97	0.34	1.34	Vertical
4.09	0.24	0.86	Vertical
5.34	0.19	0.63	Vertical

### 6.1.2. Resultados con el Análisis Modal Operacional (OMA)

Para obtener los resultados del OMA, se emplearon los mismos disparos representativos de cada caso de estudio, ya que como se mencionó en la sección anterior, estos presentaron los mejores acelerogramas. En la figura 6.14 se muestra el resultado promediado de los valores singulares de la PSD de todos los registros de aceleración, obtenidos en cada punto de medición, del edificio del SAE. Los valores singulares, como se explicó en el capítulo 4, son la base para la identificación de los parámetros dinámicos en las técnicas FDD y EFDD. Estos valores singulares se ordenan en orden descendente, es decir, el primer valor singular (línea azul) es el más grande y representativo, como se puede observar en la siguiente gráfica.

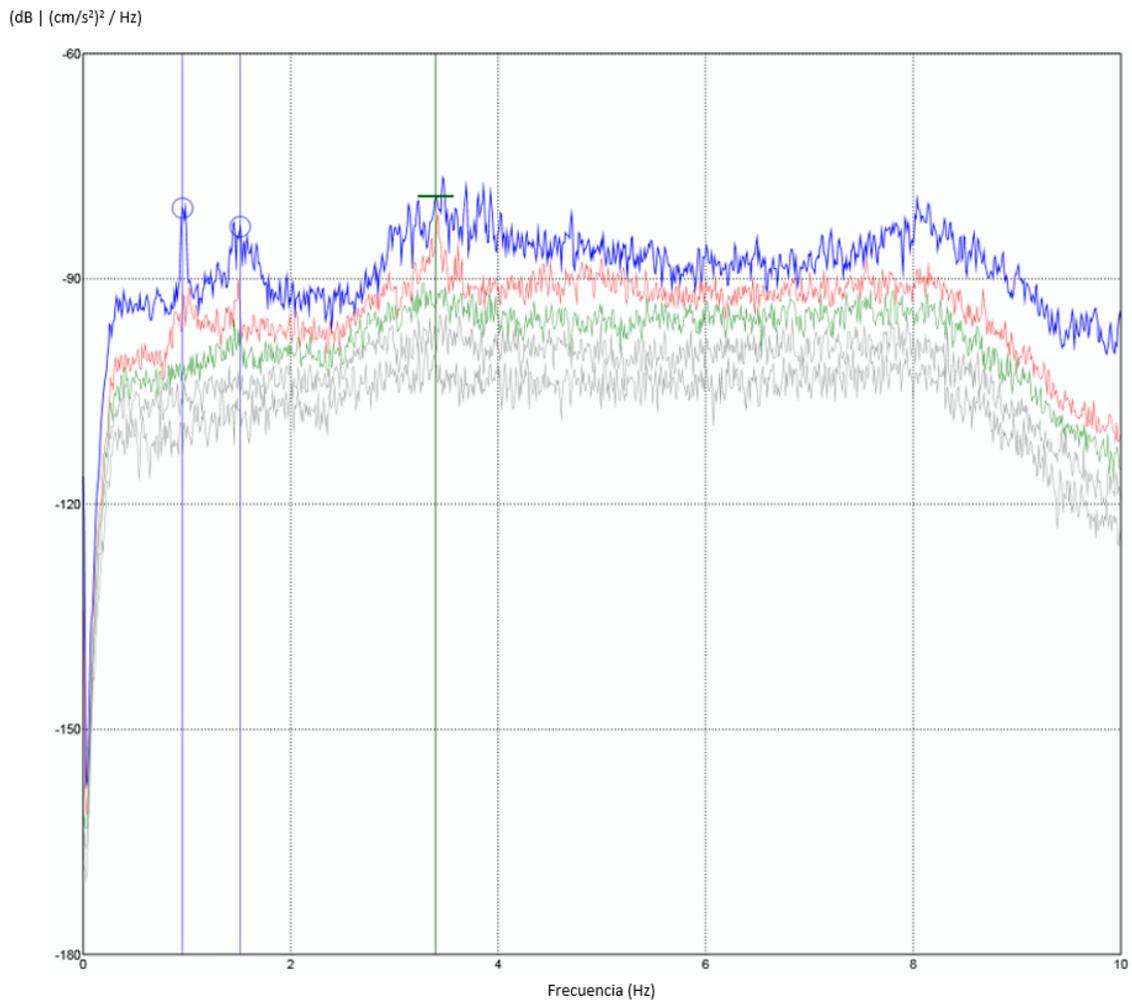
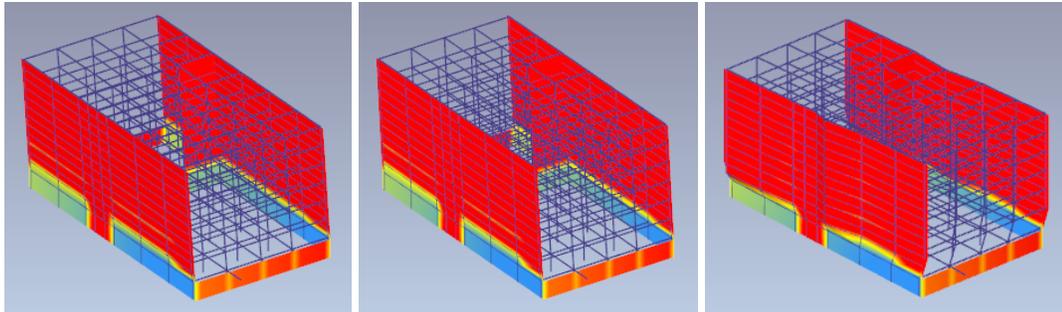


Figura 6.14. Valores singulares de la PSD (edificio del SAE)

Basándose en la teoría de la técnica PP, se seleccionan los picos más sobresalientes de la figura anterior para determinar las frecuencias naturales del sistema estructural. Las formas modales de la estructura se pueden visualizar inmediatamente al seleccionar estos picos, lo cual es una de las ventajas que ofrece la interfaz del programa ARTeMIS Modal. En la tabla 6.5 se indican los parámetros dinámicos obtenidos con cada técnica del OMA, en esta tabla se muestran las primeras tres frecuencias identificadas y el porcentaje de amortiguamiento crítico que se calcula en cada técnica, excepto en la técnica FDD. Como ejemplo, en la figura 6.15 se muestran las formas modales (modos de vibrar) para las tres frecuencias identificadas en el edificio del SAE con la técnica EFDD.

Tabla 6.5. Parámetros dinámicos obtenidos en el edificio del SAE

Edificio del SAE			
Técnica	Frecuencias identificadas (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico (%)
FDD	0.96	1.04	-
	1.51	0.66	-
	3.43	0.29	-
EFDD	0.98	1.02	1.11
	1.58	0.63	1.27
	3.43	0.29	0.36
SSI	0.97	1.03	2.91
	1.50	0.67	4.98
	3.43	0.29	0.98



(a) Modo 1 para 0.98 Hz (transversal) (b) Modo 2 para 1.58 Hz (longitudinal) (c) Modo 3 para 3.43 Hz (torsional)

Figura 6.15. Formas modales en el edificio del SAE con la técnica EFDD

Para el caso del edificio de la ex CONASUPO, el resultado promediado de los valores singulares de la PSD de todos los acelerogramas del tercer evento sísmico se muestra en la figura 6.16.

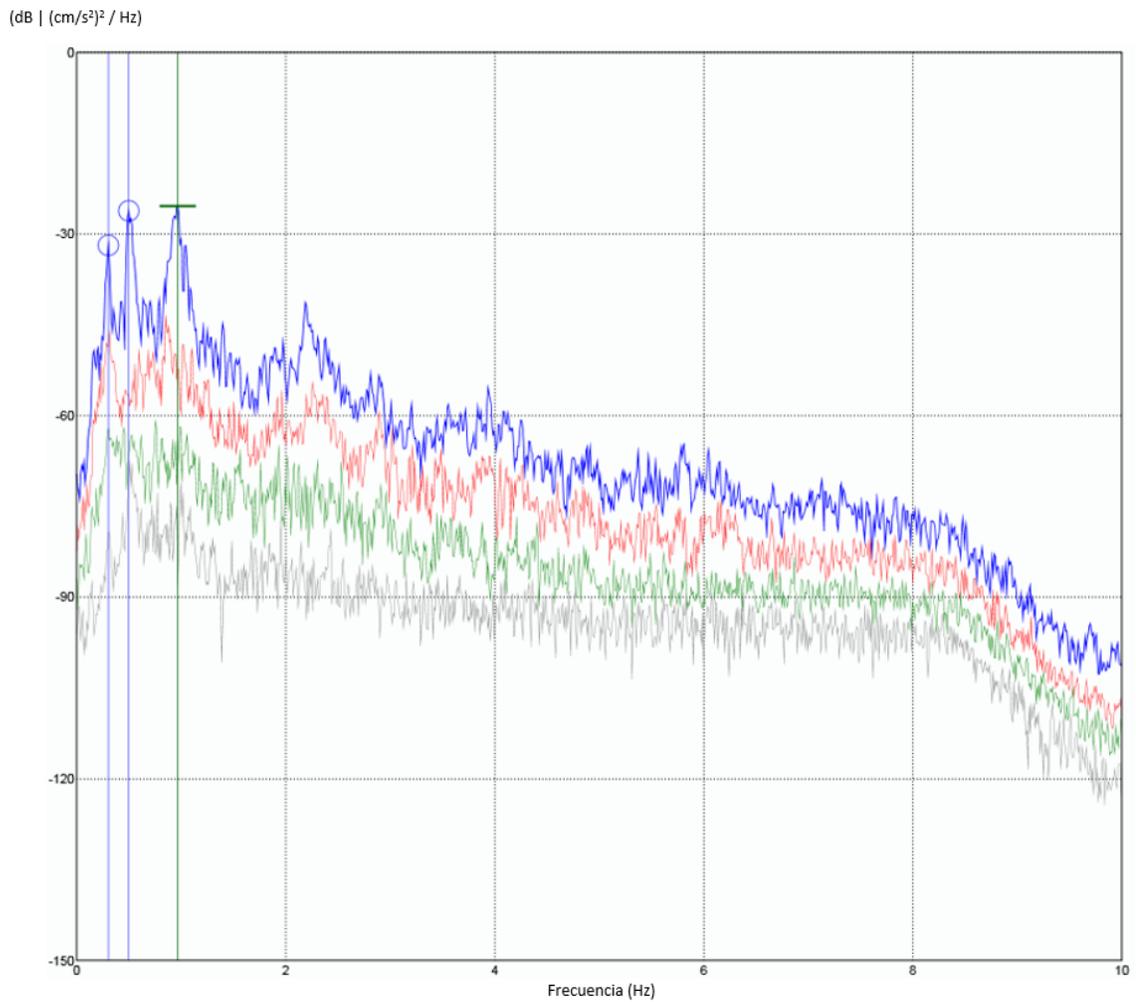
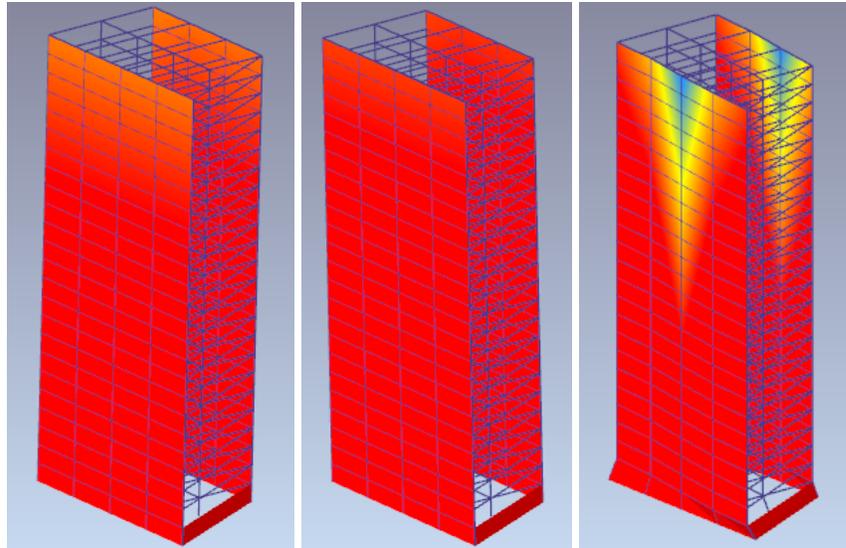


Figura 6.16. Valores singulares de la PSD (edificio de la ex CONASUPO)

En la tabla 6.6 se indican los parámetros dinámicos obtenidos con cada técnica del OMA para este caso de estudio, y en la figura 6.17 se muestran las formas modales para las tres frecuencias identificadas en el edificio con la técnica EFDD.

Tabla 6.6. *Parámetros dinámicos obtenidos en el edificio de la ex CONASUPO*

Edificio de la ex CONASUPO			
Técnica	Frecuencias identificadas (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico (%)
FDD	0.29	3.45	-
	0.52	1.92	-
	0.99	1.01	-
EFDD	0.30	3.33	4.87
	0.53	1.89	2.38
	1.02	0.98	3.31
SSI	0.30	3.33	1.86
	0.52	1.92	4.28
	1.04	0.96	2.51



(a) Modo 1 para 0.30 Hz (transversal) (b) Modo 2 para 0.53 Hz (longitudinal) (c) Modo 3 para 1.02 Hz (torsional)

Figura 6.17. *Formas modales en el edificio de la ex CONASUPO con la técnica EFDD*

En el caso de la grada de un teatro, los resultados promediados de los valores singulares de las PSD para las dos situaciones de la grada (sin gente y con gente) se muestran en las figuras 6.18 y 6.19 respectivamente.

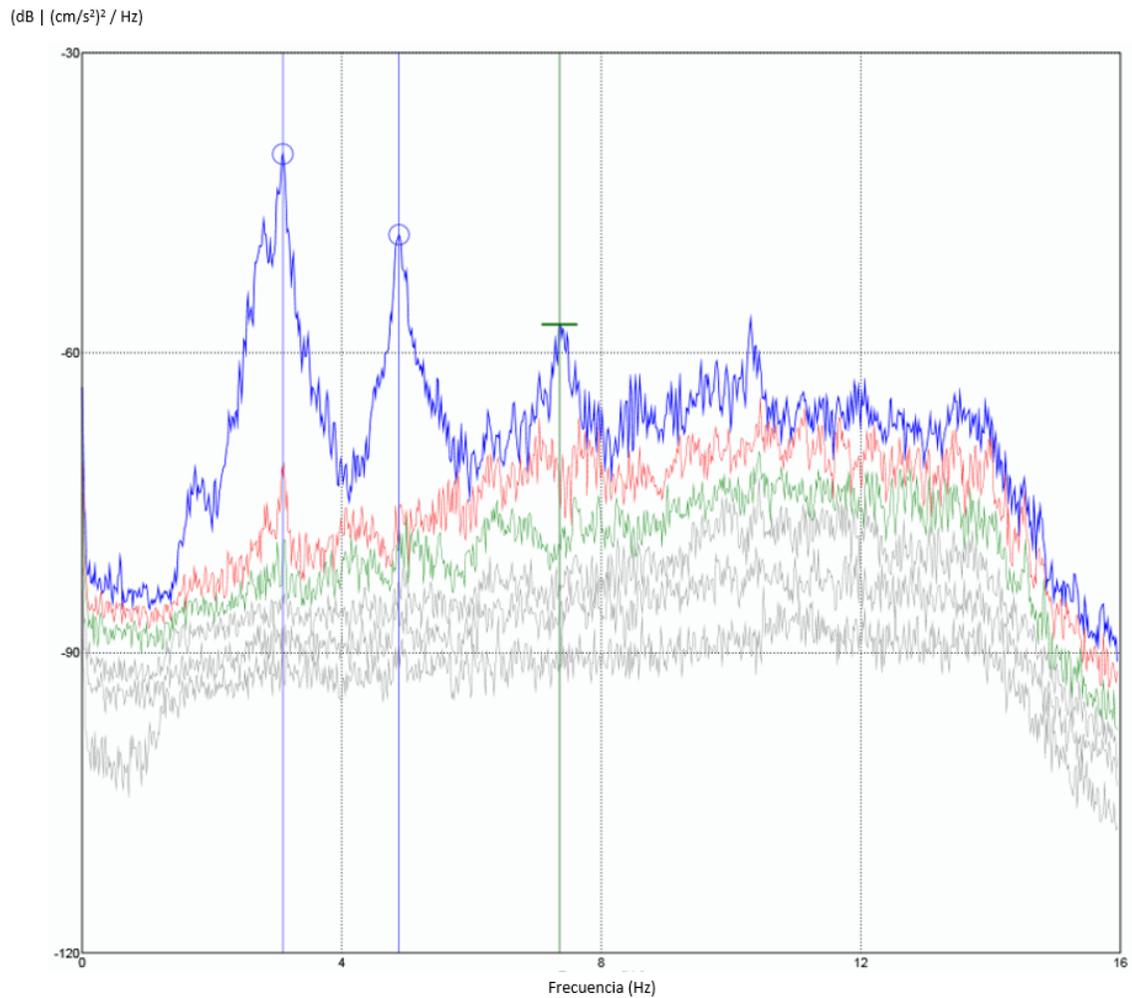


Figura 6.18. Valores singulares de la PSD (balcón de un teatro sin gente)



Tabla 6.7. *Parámetros dinámicos obtenidos en el balcón de un teatro sin gente*

Grada de un teatro			
Técnica	Frecuencias identificadas (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico (%)
FDD	3.09	0.32	-
	4.88	0.20	-
	7.37	0.14	-
EFDD	3.09	0.32	0.70
	4.89	0.20	0.60
	7.41	0.13	0.16
SSI	3.11	0.32	1.33
	4.89	0.20	0.70
	7.42	0.13	0.53

Tabla 6.8. *Parámetros dinámicos obtenidos en el balcón de un teatro con gente*

Grada de un teatro			
Técnica	Frecuencias identificadas (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico (%)
FDD	2.98	0.34	-
	4.08	0.25	-
	5.27	0.19	-
EFDD	2.72	0.37	0.85
	4.08	0.25	0.47
	5.69	0.18	0.39
SSI	2.91	0.34	3.78
	4.03	0.25	4.47
	5.72	0.17	0.60

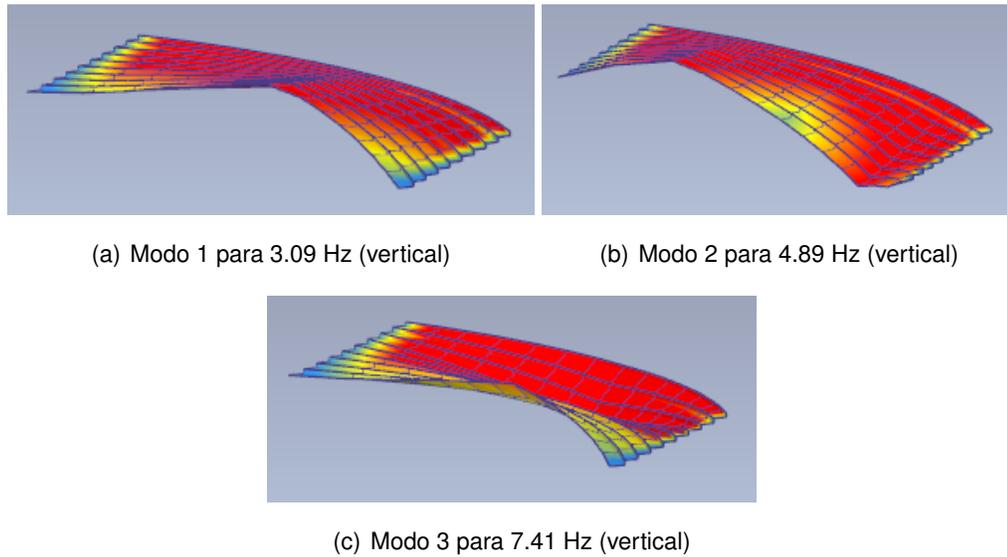


Figura 6.20. Formas modales del balcón de un teatro (sin gente) con la técnica EFDD

## 6.2. Comparación y Análisis de Resultados

En esta sección se comparan y analizan los resultados obtenidos del Análisis de Fourier y del OMA, los cuales fueron presentados en la sección anterior. La comparación de estos resultados se realizó para cada caso de estudio, con la finalidad de hacer un análisis de las fortalezas y debilidades que presentan el Análisis de Fourier y el OMA en la identificación de las propiedades dinámicas de las estructuras para beneficio de la evaluación de la salud estructural.

En la tabla 6.9 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis, en el primer caso de estudio (Edificio del SAE).

Tabla 6.9. Comparación de los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis en el edificio del SAE

Análisis de Fourier			
Modo	Frecuencia identificada (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico promedio (%)
1	0.98	1.02	3.33
2	1.57	0.64	1.48
3	3.39	0.29	0.63
Análisis Modal Operacional			
Técnica	Frecuencias identificadas (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico (%)
FDD	0.96	1.04	-
	1.51	0.66	-
	3.43	0.29	-
EFDD	0.98	1.02	1.11
	1.58	0.63	1.27
	3.43	0.29	0.36
SSI	0.97	1.03	2.91
	1.50	0.67	4.98
	3.43	0.29	0.98

Como se observa en la tabla anterior, las frecuencias identificadas en los dos métodos de análisis son similares; con diferencias que van del 1 % al 4 %. Sin embargo, en los resultados obtenidos del amortiguamiento crítico las diferencias entre ambos métodos es más marcada, mayores al 50 %. En la segunda frecuencia identificada se obtuvieron con las técnicas del OMA (EFDD y SSI) mayores valores de amortiguamiento crítico que los obtenidos en la primera frecuencia, esto se puede atribuir al muro de mampostería localizado en la misma dirección de la segunda frecuencia (longitudinal); por lo tanto el edificio del SAE presenta mayor rigidez en la dirección longitudinal. En cambio, con los resultados del Análisis de Fourier no se observó la situación anterior, debido a que el amortiguamiento

encontrado en la segunda frecuencia resultó ser menor que el encontrado en la primera frecuencia; lo cual puede provocar cierta incertidumbre. Lo anterior puede deberse a la calidad de las señales medidas de la estructura, ya que el método que se empleó para determinar el amortiguamiento en el Análisis de Fourier requiere de espectros de potencia de buena calidad y en el caso del edificio del SAE los acelerogramas no presentaron muy buena calidad; estos tuvieron que ser tratados con un filtrado para eliminar la contaminación de ruido que presentaban. En consecuencia la identificación de las frecuencias propias del sistema estructural fue más meticuloso para este caso.

A pesar de la calidad de las señales, las frecuencias identificadas con ambos métodos fueron casi las mismas lo que permite determinar que estas frecuencias son propias de la estructura. Con respecto al amortiguamiento hay que mencionar que su cálculo es complicado y que los métodos que existen para determinarlo están sujetos a aproximaciones e incertidumbres. Sin embargo, los valores de amortiguamiento obtenidos con las técnicas del OMA se asemejan más a los valores esperados; basándose en las características estructurales del edificio del SAE.

Para el caso del edificio de la ex CONASUPO, el estudio comparativo de los resultados obtenidos con los dos métodos de análisis se indican en la tabla 6.10 que se muestra a continuación.

Tabla 6.10. Comparación de los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis en el edificio de la ex CONASUPO

Análisis de Fourier			
Modo	Frecuencia identificada (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico promedio (%)
1	0.30	3.33	10.35
2	0.49	2.04	7.33
3	0.99	1.01	2.76
Análisis Modal Operacional			
Técnica	Frecuencias identificadas (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico (%)
FDD	0.29	3.45	-
	0.52	1.92	-
	0.99	1.01	-
EFDD	0.30	3.33	4.87
	0.53	1.89	2.38
	1.02	0.98	3.31
SSI	0.30	3.33	1.86
	0.52	1.92	4.28
	1.04	0.96	2.51

En este caso las frecuencias identificadas en los dos métodos de análisis son también casi iguales, con diferencias menores al 8%. Con respecto a los valores obtenidos de amortiguamiento crítico, además de presentar diferencias marcadas entre un método y otro, los valores son relativamente altos. Lo anterior se puede atribuir a la rigidez del sistema estructural, ya que los eventos sísmicos fueron registrados después de llevar a cabo un reforzamiento en la estructura del edificio. Este reforzamiento consistió en la inyección de resina epóxica en las grietas de los muros longitudinales y losas, y en la dirección transversal se colocaron contraventeos (diagonales metálicas), así como disipadores de energía. Con el Análisis de Fourier y la técnica EFDD del OMA se obtiene un mayor amortiguamiento

to en la dirección transversal (primera frecuencia) que en la dirección longitudinal (segunda frecuencia), de acuerdo a lo anterior se puede determinar que el edificio es más rígido en la dirección transversal; debido al reforzamiento antes descrito. Sin embargo en la técnica SSI del OMA, se observó un valor mayor de amortiguamiento en la dirección longitudinal, lo cual indica que los muros de colindancia también rigidizan la estructura en esta dirección.

Cabe mencionar que la identificación de las frecuencias propias del sistema estructural fue más fácil en este caso que en el caso anterior. Esto se debe a que se emplearon registros sísmicos, con los cuales se obtienen respuestas mayores y más reales de las estructuras, es decir, los picos máximos que representan a las frecuencias naturales, tanto en los espectros de Fourier como en los valores singulares, se pueden observar más claramente; caso contrario a lo que ocurre en las pruebas de vibración ambiental donde la identificación de las frecuencias naturales no suele ser tan clara por la interferencia de ruido.

A pesar de lo dicho anteriormente, hay casos en donde los registros de vibración ambiental son representativos de la respuesta del sistema estructural para la identificación de sus parámetros dinámicos, cómo ocurrió en el tercer caso de estudio que corresponde al balcón de un teatro. En la cual, como ya se mencionó anteriormente, se tuvo la oportunidad de hacerle pruebas de vibración ambiental en servicio, es decir, durante un concierto. En la tabla 6.11 y 6.12 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis, en el balcón de un teatro sin gente y con gente respectivamente.

Tabla 6.11. Comparación de los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis en el balcón de un teatro sin gente

Análisis de Fourier			
Modo	Frecuencia identificada (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico promedio (%)
1	3.09	0.32	1.01
2	4.84	0.21	0.49
3	7.36	0.14	0.32
Análisis Modal Operacional			
Técnica	Frecuencias identificadas (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico (%)
FDD	3.09	0.32	-
	4.88	0.20	-
	7.37	0.14	-
EFDD	3.09	0.32	0.70
	4.89	0.20	0.60
	7.41	0.13	0.16
SSI	3.11	0.32	1.33
	4.89	0.20	0.70
	7.42	0.13	0.53

En la situación de la grada sin gente se observa que las frecuencias identificadas en ambos métodos de análisis son prácticamente iguales con diferencias menores al 1%. Los valores de amortiguamiento crítico obtenidos en cada método se asemejaron más en este caso que en los dos casos anteriores, como se puede ver en la tabla anterior. Estos valores de amortiguamiento crítico van disminuyendo conforme aumentan las frecuencias identificadas, lo anterior se puede atribuir a las características estructurales del balcón, la cual es una losa escalonada en voladizo con desplazamientos dominantes en la dirección vertical, a diferencia de los edificios analizados anteriormente donde sus desplazamientos dominantes son en las direcciones horizontales.

Tabla 6.12. Comparación de los resultados obtenidos con ambos métodos de análisis en el balcón de un teatro con gente

Análisis de Fourier			
Modo	Frecuencia identificada (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico promedio (%)
1	2.97	0.34	1.34
2	4.09	0.24	0.86
3	5.34	0.19	0.63
Análisis Modal Operacional			
Técnica	Frecuencias identificadas (Hz)	Periodo de vibrar (s)	Amortiguamiento crítico (%)
FDD	2.98	0.34	-
	4.08	0.25	-
	5.27	0.19	-
EFDD	2.72	0.37	0.85
	4.08	0.25	0.47
	5.69	0.18	0.39
SSI	2.91	0.34	3.78
	4.03	0.25	4.47
	5.72	0.17	0.60

Para la situación de la grada con gente las frecuencias identificadas en ambos métodos de análisis son casi similares con diferencias menores al 7%. Por su parte, los valores de amortiguamiento crítico del Análisis de Fourier y de la técnica EFDD del OMA se asemejan, sin embargo en la técnica SSI el amortiguamiento obtenido es un poco alto para las dos primeras frecuencias. Esto puede ser atribuido a que el balcón estaba lleno.

Haciendo una comparativa de las frecuencias y el amortiguamiento crítico que se obtuvieron de las dos situaciones de la grada, se observó que las frecuencias identificadas en la situación del balcón con gente resultaron ser menores que en la situación del balcón

sin gente, en cambio los valores del amortiguamiento crítico aumentaron en la situación del balcón con gente. Esto resulta interesante, ya que se esperaba que las frecuencias se redujeran con el balcón lleno (al aumentar la masa) y en consecuencia disminuyera el amortiguamiento; pero ocurrió lo contrario. Se determinó que lo anterior es debido a que la fuerza de excitación (gente) actúa como un sistema dinámico que interactúa con el soporte del balcón, es decir, la presencia de la gente en el balcón tiende a aumentar el amortiguamiento, lo cual parece ser beneficioso. Pero esto no sucedería en los momentos más críticos cuando, por ejemplo, la gente empezara a saltar o moverse en sintonía con la música de un concierto más eufórico; en otras palabras el amortiguamiento aumenta cuando la gente se mantiene pasiva sobre el balcón. Cabe mencionar que las mediciones con balcón lleno de este caso de estudio se realizaron durante un concierto donde la gente se mantuvo tranquila.

Por último vale la pena recalcar que durante el análisis modal del balcón, sin gente y con gente, la identificación de las frecuencias naturales fue más rápida y clara en comparación con el primer caso de estudio, debido a la buena calidad de las señales obtenidas. Esto demuestra que las pruebas de vibración ambiental realizadas de manera correcta arrojan resultados representativos de la respuesta dinámica de estructuras.

---

## Capítulo 7

# CONCLUSIONES

---

En este trabajo de investigación se presentó un estudio comparativo del Análisis de Fourier y del Análisis Modal Operacional (OMA) para determinar sus fortalezas y debilidades en la evaluación de la salud estructural. De acuerdo a los resultados obtenidos de ambos métodos de análisis se llegaron a las conclusiones que a continuación se presentan.

En ambos métodos de análisis se identificaron aproximadamente las mismas frecuencias naturales en los tres casos de estudio, lo anterior permite concluir que con el Análisis de Fourier y las técnicas del OMA presentadas en este trabajo de investigación se obtienen resultados confiables en cuanto a la identificación de las frecuencias de los sistemas estructurales; además de lo anterior, ambos métodos ayudaron validar que las frecuencias identificadas en los tres casos de estudio son las frecuencias propias de estas estructuras.

Las diferencias más marcadas entre los métodos se encontraron en los resultados del amortiguamiento crítico, sin embargo se observó que con las técnicas del OMA se obtuvieron los valores más representativos de acuerdo a las características estructurales de los casos de estudio como ocurrió en el edificio del SAE, en donde a pesar de que las señales no eran de buena calidad los amortiguamientos obtenidos con las técnicas del OMA se comportaron dentro de los parámetros establecidos para el tipo de estructura como la del edificio del SAE. Para los otros dos casos el amortiguamiento calculado con el Análisis de Fourier se asemejó más al amortiguamiento calculado con las técnicas del OMA, sin llegar a ser iguales. Se puede concluir que con respecto al porcentaje de amortiguamiento crítico las técnicas del OMA arrojaron resultados más acordes a las características estructurales

---

de estos tres casos de estudio, a pesar de que la técnica FDD no calcule el amortiguamiento. No hay que dejar de mencionar que la técnica que se empleó en el Análisis de Fourier y las que emplea el OMA son aproximadas con presencia de incertidumbres.

Con respecto al procesamiento y análisis de las señales, se concluye que el OMA es más directo y rápido en comparación con el Análisis de Fourier. Mientras que con el Análisis de Fourier se deben procesar pares de registros de aceleraciones en la misma dirección de interés para realizar el análisis, en el OMA se procesan todas las componentes de los acelerogramas de cada punto de medición en un sólo paso. Para la identificación de las frecuencias naturales en las técnicas del OMA sólo se identifican los picos máximos de los valores singulares de la matriz de densidad espectral, en cambio en el Análisis de Fourier se tienen que revisar los espectros de potencia, coherencias y ángulos de fase para verificar que las frecuencias identificadas en los espectros de Fourier son propias del sistema estructural analizado. Además de lo anterior, el uso del programa ARTeMIS Modal permite que el procesamiento de las señales con las técnicas del OMA sea más gráfico, ya que al ir seleccionando los picos máximos de los valores singulares, que indican las frecuencias naturales, se puede observar como se desplaza la estructura para esa frecuencia, es decir, se pueden visualizar aproximadamente las formas modales.

En términos generales las técnicas del OMA presentaron ciertas ventajas con respecto al Análisis de Fourier, sobre todo en la rapidez del procesamiento y análisis de las señales, así como también en el cálculo del amortiguamiento crítico. En cuanto a la identificación de las frecuencias naturales, con el Análisis de Fourier se pueden validar las frecuencias obtenidas con las técnicas del OMA o viceversa; ya que en este rubro se obtuvieron resultados similares con ambos métodos.

El OMA sigue desarrollándose sacando nuevas técnicas más novedosas, por lo que en un futuro puede llegar a ser el método más factible para la identificación de las propiedades dinámicas de estructuras en miras del mejoramiento de la evaluación de la salud estructural. Finalmente, con este trabajo se busca que la implementación de métodos experimentales, como los aquí mostrados, se desarrollen más en México debido a que casi no se aplican para evaluar las propiedades dinámicas de estructuras existentes. Se recomienda que en trabajos futuros se analicen más técnicas del OMA en sistemas estructurales existentes para validar las ventajas aquí presentadas.

---

## REFERENCIAS

---

- Bendat, J. S. y Piersol, A. G. (1986). Random data, analysis and measurements procedures. *Second Edition*.
- Bendat, J. S. y Piersol, A. G. (1993). Engineering applications of correlation and spectral analysis. *New York: John Wiley and Sons*.
- Brincker, R. y Andersen, P. (1999). Ambient response analysis modal analysis for large structures. En *The International Congress on Sound and Vibration*, pp. 2549–2558.
- Brincker, R. y Andersen, P. (2006). Understanding stochastic subspace identification. *Proceedings of the 24th IMAC, St. Louis, Missouri*, pp. 279–311.
- Brincker, R., Frandsen, J. B., y Andersen, P. (2000). Ambient response analysis of the great belt bridge. En *PROC SPIE INT SOC OPT ENG*, volumen 4062, pp. 26–32.
- Brincker, R., Zhang, L., y Andersen, P. (2001). Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition. *Smart materials and structures*, 10(3):441.
- Brownjohn, J. (2003). Ambient vibration studies for system identification of tall buildings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32(1):71–96.
- Brownjohn, J. M. (2007). Structural health monitoring of civil infrastructure. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851):589–622.
- Cara Javier, F. (2012). Análisis de procesos estocásticos en el dominio de la frecuencia [recurso electrónico].
-

- Castelán, I. (2001). Determinación experimental de las propiedades dinámicas de un edificio reforzado con disipadores de energía.
- Cunha, A., Caetano, E., Brincker, R., y Andersen, P. (2004). Identification from the natural response of Vasco da Gama bridge. En *Proceedings of XXII International Modal Analysis Conference, USA*. Citeseer.
- De Roeck, G., Peeters, B., y Ren, W.-X. (2000). Benchmark study on system identification through ambient vibration measurements. En *Proceedings of IMAC-XVIII, the 18th International Modal Analysis Conference, San Antonio, Texas*, pp. 1106–1112.
- Diaferio, M., Foti, D., Mongelli, M., Giannoccaro, N. I., y Andersen, P. (2011). Operational modal analysis of a historic tower in Bari. En *Civil Engineering Topics, Volume 4*, pp. 335–342. Springer.
- Doebling, S., Farrar, C. R., Prime, M., y Shevitz, D. W. (1996). *Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in their Vibration Characteristics: A Literature Review*. Los Alamos National Laboratory report LA-13070-MS.
- Fernández, P., Aenlle, M. L., Brincker, R., Canteli, A. F., y Alvarez, A. S. (2008). Cálculo de tensiones en estructuras mediante análisis modal operacional.
- Gade, S., Møller, N., Herlufsen, H., y Konstantin-Hansen, H. (2005). Frequency domain techniques for operational modal analysis. En *1st IOMAC Conference*.
- González, C. J. C. (2003). *Fundamentos del Análisis de Fourier*. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Escola Técnica Superior de Enxeñeiros Industriais, Universidade de Vigo.
- Henao Ángel, D. (2013). Identificación de las propiedades dinámicas de una estructura sometida a vibración ambiental empleando análisis espectral [recurso electrónico].
- Herlufsen, H., Andersen, P., Gade, S., y Møller, N. (2005). Identification techniques for operational modal analysis—an overview and practical experiences. *Proceedings of the 23rd IMAC, St. Louis (MO), USA*.

- Jacobsen, N.-J., Andersen, P., y Brincker, R. (2007). Using efd as a robust technique for deterministic excitation in operational modal analysis. En *International Operational Modal Analysis Conference*, pp. 193–200.
- Kawasumi, H. y Shima, E. (1965). Some applications of a correlator to engineering problems. En *Proceedings on the third world conference on earthquake engineering*, pp. 11298-11320.
- Magalhães, F., Caetano, E., y Cunha, A. (2006). Operational modal analysis of the braga sports stadium suspended roof. *IMAC XXIV, St. Louis, MO*.
- Magalhães, F. y Cunha, Á. (2011). Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge. *Mechanical systems and signal processing*, 25(5):1431–1450.
- Murià Vila, D. (2007). Experiencia mexicana sobre la respuesta sísmica de edificios instrumentados. *Mexico DF: Academia de Ingeniería, Mexico*.
- Ordaz, M. (2001). Programa degtra, manual en línea. *Instituto de Ingeniería, UNAM (in Spanish)*.
- Pastor, M., Binda, M., y Harčarik, T. (2012). Modal assurance criterion. *Procedia Engineering*, 48:543–548.
- Peeters, B. y De Roeck, G. (1999). Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical systems and signal processing*, 13(6):855–878.
- Rainieri, C. y Fabbrocino, G. (2014). *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures: An Introduction and Guide for Applications*. Springer.
- Ren, W.-X. y Zong, Z.-H. (2004). Output-only modal parameter identification of civil engineering structures. *Structural Engineering and Mechanics*, 17(3-4):429–444.
- Rodríguez, M. (2005). Análisis modal operacional: Teoría y práctica. *Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla, España*, pp. 63–87.
- Sohn, H., Farrar, C. R., Hemez, F. M., Shunk, D. D., Stinemates, D. W., Nadler, B. R., y Czarnecki, J. J. (2004). *A Review of Structural Health Monitoring Literature: 1996-2001*. Los Alamos National Laboratory Los Alamos, NM.

- Solutions, S. V. (2001). Artemis extractor: Ambient response testing and modal identification software, user's manual.
- Van Overschee, P. y De Moor, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory—Implementation—Applications*. Kluwer Academic.
- Ventura, C., Laverick, B., Brincker, R., y Andersen, P. (2003). Comparison of dynamic characteristics of two instrumented tall buildings. En *Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference (IMAC)*.
- Wilson, E. L. (1997). *SAP2000: integrated finite element analysis and desing of structures. Analysis reference*. Computers and Structures.
- Worden, Keith and Haywood, Jonathan and others (2003). *Smart technologies*. World Scientific.