



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**CONSTRUCCIÓN DE OBSERVADORES PARA DEFORMACIONES**  
**HOMOGÉNEAS DE SISTEMAS LINEALES**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**CARLOS ARTURO MARTÍNEZ FUENTES**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ**

**MÉXICO, D.F., 2016**



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Secretario: Dr. Leonid Fridman

Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

1er. Suplente: Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cózatl

2o. Suplente: Dr. Fernando Castaños Luna

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

---







# Reconocimientos

---

Mis mas grandes agradecimientos a mi familia y amigos por permanecer a mi lado en los momentos mas difíciles y brindarme el apoyo necesario para continuar en este viaje.

Agradezco el apoyo y atención prestada al grupo de control por Modos Deslizantes en especial a mi tutor el Dr. Jaime A. Moreno Pérez y al Dr. Leonid Fridman.

A la Facultad de Ingeniería que ha sido la institución en la que me he formado como ingeniero y maestro. Al CONACyT por la beca que me permitió continuar con mis estudios bajo el CVU 631139.



# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación y estado del arte . . . . .	1
1.2. Objetivo . . . . .	2
1.3. Contribuciones . . . . .	2
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	2
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Observador de Luenberger . . . . .	5
2.2. Observador de Luenberger no lineal . . . . .	6
2.3. Homogeneidad Ponderada . . . . .	7
2.3.1. Campo Vectorial de Euler . . . . .	7
2.3.2. Funciones Homogéneas . . . . .	8
2.3.3. Campos vectoriales Homogéneos . . . . .	9
2.3.4. Estabilidad de Sistemas Homogéneos . . . . .	10
<b>3. Deformaciones Homogéneas Continuas de Sistemas Lineales</b>	<b>13</b>
3.1. Deformaciones Homogéneas Continuas de sistemas Lineales . . . . .	13
3.2. Estabilidad de la familia de las deformaciones . . . . .	14
3.2.1. Ejemplo . . . . .	15
<b>4. Observador Homogéneo para Deformaciones Homogéneas Continuas de Sistemas Lineales</b>	<b>17</b>
4.1. Observador Homogéneo para sistemas deformados . . . . .	18
4.1.1. Observador identidad . . . . .	19
4.2. Sistemas triangulares . . . . .	22
4.2.1. Ejemplo . . . . .	23
4.3. Caso particular: Cadena de integradores . . . . .	24
4.3.1. Análisis de estabilidad y cálculo de valores extremos del parámetro de la deformación. . . . .	26
4.3.2. Búsqueda de los extremos de $e_1$ . . . . .	29

<b>5. Ejemplos Numéricos</b>	<b>31</b>
5.1. Ejemplo. Caso General . . . . .	31
5.2. Ejemplo. Caso triangular . . . . .	35
5.3. Ejemplo. Caso cadena de integradores . . . . .	40
<b>6. Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>49</b>
A.1. Parametrización de Superficies . . . . .	51
A.2. Extremos de funciones condicionadas . . . . .	51
A.2.0.1. Programa para el cálculo de las regiones de estabilidad caso cadena de integradores. . . . .	52
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

# Introducción

---

## 1.1. Motivación y estado del arte

En matemáticas la homogeneidad es una propiedad de objetos como funciones o campos vectoriales, que hace que escalen de una cierta forma consistente. Geométricamente, una función que es homogénea tiene la propiedad que todo conjunto que sea el resultado de un escalamiento de un conjunto de nivel de la función es también un conjunto de nivel, mientras que un campo vectorial homogéneo tiene la propiedad de que toda órbita escalada del campo vectorial es también una órbita.

Los sistemas dinámicos lineales están definidos por campos vectoriales lineales que cumplen con las propiedades homogeneidad y superposición y algunas de sus propiedades las heredan de la homogeneidad solamente y no por completo del hecho de ser lineales. En los primeros trabajos acerca de la homogeneidad en sistema dinámicos se consideraba únicamente la dilatación estándar  $\Delta_\epsilon(x) = \epsilon^\gamma x$ , bajo esta suposición en [6] se estudia la estabilidad de dichos sistemas. Posteriormente, en [17] se muestran resultados sobre la estabilidad entrada-estado de dichos sistemas, así como su estabilización.

En trabajos más recientes se consideran sistemas homogéneos respecto a una dilatación de la forma

$$\Delta_\epsilon(x) = [\epsilon^{r_1} x_1 \ \epsilon^{r_2} x_2 \ \dots \ \epsilon^{r_n} x_n]^T, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0,$$

de la cual la dilatación estándar ( $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ ) es un caso particular. Para este tipo de sistemas existen resultados sobre su estabilidad, como en [16] que se muestra que si un sistema de este tipo tiene en el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable implica que el origen es global y asintóticamente estable, además de la existencia de una función de Lyapunov homogénea respecto a la misma dilatación y  $C^1$ . Este resultado es una extensión de la globalidad en sistemas lineales.

Otro resultado importante para esta clase de sistemas aparece en [7], donde se explica que si el campo vectorial de un sistema puede ser representado como la suma de varios campos homogéneos respecto a la misma dilatación y si el de menor grado de ho-

homogeneidad tiene en el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces el origen es local y asintóticamente estable bajo la suma de los campos vectoriales.

Debido a las propiedades de homogeneidad de los sistemas lineales, no es extraño pensar que existan mas resultados de ellos que puedan ser extendidos a sistemas no lineales homogéneos. En [5] se estudia con mucho mas detalle la homogeneidad desde un punto de vista topológico y se dan condiciones bajo las cuales se pueden estabilizar sistemas en tiempo finito bajo una retroalimentación homogénea del estado. Basado en la misma idea, en [15] se explora la posibilidad de construir un observador para una clase de sistemas no lineales, realizando la retroalimentación del error de estimación de la salida de forma que el campo vectorial que define la dinámica del error sea homogéneo.

Por lo que la motivación de este trabajo es extender el trabajo de Luenberger en [12], [13] a una clase de sistemas no lineales homogéneos que pueden ser vistos como una variación paramétrica de un sistema lineal. Ya que existen resultados de estabilidad de puntos de equilibrio de sistema no lineales por medio de su aproximación lineal, seria natural que una aproximación homogénea que nace de una variación paramétrica del lineal sea una mejor aproximación, ya que la clase de sistemas es mas general.

### 1.2. Objetivo

- 1) Proponer una clase de sistemas no lineales homogéneos que son deformaciones paramétricas de sistemas lineales invariantes en el tiempo, y
- 2) Construir observadores tipo Luenberger para dicha clase de sistemas.

### 1.3. Contribuciones

En este trabajo se propone una clase de sistemas no lineales homogéneos y una forma de construcción de observadores para estos sistemas, además se dan condiciones para la convergencia del error observación a cero.

### 1.4. Estructura de la tesis

Esta tesis cuenta con 6 capítulos. En el capítulo 2 se introduce el observador de Luenberger para sistemas lineales, su generalización a una clase de sistemas no lineales y por último se definen completamente las ideas de homogeneidad y resultados sobre las funciones homogéneas y la estabilidad de campos vectoriales homogéneos que servirán para probar los resultados de este trabajo. En el capítulo 3 se introduce la clase de sistemas a los cuales se pretende estudiar, así como un resultado de estabilidad para ellos. En el capítulo 4 se presentan los resultados principales de esta tesis sobre la construcción de observadores para una clase de sistemas homogéneos y condiciones

suficientes para la convergencia del error de estimación a cero, después en el capítulo 5 se muestran resultados numéricos y simulaciones basados en los resultados del capítulo 4 y finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones finales sobre el trabajo realizado.



# Marco Teórico

---

En este capítulo se introducirán conceptos básicos utilizados en el desarrollo de este trabajo, comenzando con la construcción de observadores bajo las ideas de Luenberger para sistemas lineales, su extensión al caso no lineal y por último se introducirá el concepto de homogeneidad ponderada y resultados de estabilidad.

## 2.1. Observador de Luenberger

En esta sección se resumen las ideas generales tomadas de los trabajos [12], [13]. Sea un sistema lineal invariante en el tiempo

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad (2.1)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  el vector de estados del sistema,  $y \in \mathbb{R}^p$  las salidas,  $u \in \mathbb{R}^q$  las entradas y las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  de dimensiones adecuadas. Suponiendo además que existe un sistema que tiene como entradas la salida y la entrada de (2.1)

$$\dot{z} = Fz + Hy + Gu, \quad (2.2)$$

con  $z \in \mathbb{R}^m$ . Se desea que la diferencia entre  $z$  y una función del estado  $Tx$  converja a cero de manera asintótica, para ello se define el error de estimación como  $e = z - Tx$ , cuya dinámica queda descrita como

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Fz + Hy + Gu - T(Ax + Bu) \\ &= Fe + (G - TB)u + (HC - TA + FT)x. \end{aligned}$$

Si se escogen

$$\begin{aligned} G &= TB \\ HC &= TA - FT, \end{aligned} \tag{2.3}$$

entonces la dinámica del error queda descrita por

$$\dot{e} = Fe,$$

de donde si la matriz  $F$  es Hurwitz, entonces el error de observación tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen y el estado del sistema (2.2) converge a la función  $Tx$ . Además si los autovalores de las matrices  $A$  y  $F$  son distintos, la transformación  $T$  es única.

Se puede observar entonces que un sistema lineal asintóticamente estable es un observador de una función del estado de cualquier otro sistema lineal si se cumple con (2.3).

Nótese que no se requiere que  $A$  y  $F$  tengan el mismo rango, sin embargo, si se desea recuperar por completo el estado  $x$  a partir del sistema  $z$  se requiere que la transformación  $T$  sea inyectiva. Si se desea recuperar el estado  $x$  a partir de un sistema de orden menor ( $n > m \geq n - p$ ) se requiere además de la información de la salida  $y$ ; en ambos casos se requiere que el par  $(A, C)$  sea observable y el par  $(F, H)$  controlable.

## 2.2. Observador de Luenberger no lineal

Las ideas de esta sección fueron tomadas del trabajo [8]. La observabilidad en sistema no lineales, depende en general de la entrada, por lo que de a partir de ahora se tratarán sistemas no lineales autónomos. Sea el sistema no lineal

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} . \tag{2.4}$$

Considerando de nuevo un sistema conducido por la salida del sistema no lineal

$$\dot{z} = Fz + H(y),$$

donde  $F$  es una matriz Hurwitz y  $H$  es una función no lineal de la salida del sistema (2.4). Si existe una función  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que se cumple  $z_0 = T(x_0)$ , luego para todo tiempo  $t > 0$  se satisface  $z_t = T(x_t)$ , dicha condición ocurre si

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x} f(x) = FT(x) + H(h(x)). \tag{2.5}$$

Luego definiendo el error de observación como  $e = T(x) - z$ , para cualquier condición inicial arbitraria, la dinámica del error de observación queda definida como

$$\dot{e} = Fz + H(y) - FT(x) - H(y) = Fe,$$

y por lo tanto con  $F$  Hurwitz el error de estimación tiende asintóticamente a cero y el estado del observador converge a la función  $T(x)$  del estado del sistema (2.4). Cabe señalar que si el sistema es lineal, la ecuación diferencial parcial (2.5) se reduce a (2.3), existen algunos trabajos donde se aborda mas a fondo este tipo de observador como en [2], [1].

## 2.3. Homogeneidad Ponderada

Antes de tratar directamente la homogeneidad, es necesario introducir ciertos conceptos necesarios para la completa comprensión de la homogeneidad ponderada y sus implicaciones en sistemas dinámicos.

### 2.3.1. Campo Vectorial de Euler

Considerando un campo vectorial completo  $\nu \in \mathbb{R}^n$  tal que las soluciones de la ecuación diferencial

$$\dot{y}(t) = \nu(y(t)),$$

definen un flujo global continuo  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para cada  $s \in \mathbb{R}$ , el mapa

$$\varphi_s(\cdot) = \varphi(s, \cdot),$$

es un homeomorfismo y  $\varphi_s^{-1} = \varphi_{-s}$ . En caso de que  $\nu$  sea  $C^1$ , entonces  $\varphi_s$  es un difeomorfismo. Se asumirá a partir de ahora que  $\nu$  es campo un vectorial de Euler, esto es, el origen es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable bajo  $-\nu$ . En caso de que  $\nu$  sea  $C^1$ , se denotará  $\bar{\sigma}$  la abscisa espectral, que es, la más grande de las partes reales de los eigenvalores de la linealización  $d\nu_0$  de  $\nu$  en 0, debido a que el origen es asintóticamente estable bajo  $-\nu$ , entonces  $\bar{\sigma} \geq 0$ .

**Proposición 1** [5] *Suponiendo que  $\nu$  es  $C^1$ . Sea  $M$  un conjunto compacto no vacío y que no contiene al origen y se además  $\sigma > \bar{\sigma}$ . Entonces*

- *Existe una vecindad del origen abierta  $U$  tal que  $e^{\sigma s} \varphi_{-s}(x) \notin U$  para todo  $s \in \mathbb{R}_+$  y  $x \in M$ .*

## 2. MARCO TEÓRICO

---

- Existe una vecindad del origen abierta  $U$  tal que  $e^{\sigma s}(d\varphi_{-s})_x(v) \notin U$  para todo  $s \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in M$  y  $v \in \mathbb{R}^n$  al que  $\|v\| = 1$ .

Como se puede observar de la Proposición 1, el flujo  $\varphi$  induce una acción multiplicativa en las soluciones bajo al campo vectorial de Euler llamada dilatación, dicha característica juega un factor crucial en los resultados obtenidos para sistemas homogéneos y en este trabajo dicha acción sera definida como

**Definición 1** [4] Sea un conjunto de coordenadas  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  en  $\mathbb{R}^n$ . Sea además un conjunto de  $n$  números positivos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ .

- La dilatación sobre  $\epsilon$  asociada a  $r$  se define como

$$\delta_\epsilon^r(x) := [\epsilon^{r_1} x_1 \ \epsilon^{r_2} x_2 \ \dots \ \epsilon^{r_n} x_n]^T = \Delta_\epsilon(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0.$$

El número  $r_i$  es el peso de homogeneidad para la coordenada  $x_i$  y  $\Delta_\epsilon = \text{diag} \{\epsilon^{r_1}, \dots, \epsilon^{r_n}\}$ .

Si todos los pesos de homogeneidad  $r_i = 1$ , se puede escribir  $\delta^1$  y es conocida como la dilatación estándar.

**Definición 2** [4] El campo vectorial de Euler generalizado  $\nu$  asociado a la dilatación  $\delta_\epsilon^r$  se define como

$$\nu = \sum_{i=1}^n r_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

En este caso  $\nu$  es lineal, por lo tanto es también  $C^1$  y su abscisa espectral esta dada por  $\bar{\sigma} = \max \{r_1, \dots, r_n\}$ . El flujo global de  $\nu$  estar definido por

$$\varphi_s(x) = [e^{r_1 s} x_1 \ \dots \ e^{r_n s} x_n]^T = \Delta_{e^s} [x_1 \ \dots \ x_n]^T.$$

### 2.3.2. Funciones Homogéneas

Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice homogénea de grado  $m \in \mathbb{R}$  respecto a  $\nu$  si

$$V \circ \varphi_s(x) = e^{ms} V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

que es equivalente a

$$\varphi_s(V^{-1}(M)) = V^{-1}(e^{ms} M), \quad M \subseteq \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}.$$

En particular, esto implica que la imagen bajo  $\varphi_s$  de un conjunto de nivel de una función homogénea es un conjunto de nivel de dicha función en si mismo.

**Teorema 1** [5] *Suponiendo una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y homogénea de grado  $m$  respecto a  $\nu$ , entonces*

- Si  $m < 0$ ,  $V$  es continua en  $\mathbb{R}^n$  si y solo si  $V \equiv 0$ .
- Si  $m = 0$ ,  $V$  es continua en  $\mathbb{R}^n$  si y solo si  $V \equiv V(0)$ .
- Si  $m > 0$ ,  $V$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ .

Si además el campo vectorial  $\nu$  es  $C^1$ , entonces

- Si  $m > 0$ , para todo  $\sigma > \bar{\sigma}$ ,  $V$  es Hölder continua en el origen con exponente  $m/\sigma$ .
- Si  $m > \bar{\sigma}$ , entonces  $V$  es Fréchet diferenciable en el origen y  $dV_0 \equiv 0$ .

**Lema 1** [5] *Suponiendo  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y homogénea respecto a  $\nu$ , luego*

- Si  $V$  tiene signo definido, entonces  $V$  es radialmente no acotada.
- Si  $n > 1$  y  $V$  es propia, entonces  $V$  tiene signo definido.

Estos dos últimos resultados, muestran características importantes de funciones homogéneas y sirven de base para probar resultado mas adelante.

### 2.3.3. Campos vectoriales Homogéneos

Un campo vectorial  $f$  se dice homogéneo de grado  $k \in \mathbb{R}$  respecto a  $\nu$  si

$$\vartheta_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \vartheta_{e^{ks}t}, \quad s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+,$$

donde el mapa  $\vartheta_t(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  representa la solución de  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  para un tiempo fijo  $t$ . La homogeneidad del campo vectorial  $f$  implica que si  $K$  es invariante bajo  $f$ , lo mismo ocurre en  $\varphi_s(K)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Además si  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función homogénea de grado  $m$  respecto al mismo  $\nu$ , entonces  $L_f V$  es homogénea de grado  $m + k$ .

**Proposición 2** [4] *Sea la dilatación  $\delta_\epsilon^r$  y el vector de Euler  $\nu$  definidos como se menciona anteriormente. Sean  $V$  y  $f$  una función y un campo vectorial respectivamente de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  y sean  $m, k \in \mathbb{R}$ . Entonces*

- *$V$  es homogénea respecto a  $\nu$  de grado  $m$  si y solo si,  $\nu \circ V = mV$ ;*
- *$f$  es homogéneo respecto a  $\nu$  de grado  $k$  si y solo si,  $[\nu, f] = kf$ . Con  $[\nu, f]$  el paréntesis de Lie.*

Por definición, toda norma en  $\mathbb{R}^n$  es  $\delta^1$  homogénea de grado 1. Sin embargo cuando se trabaja con homogeneidad ponderada puede aparecer la necesidad de considerar normas  $\delta^r$  homogéneas.

**Definición 3** [4] *Una norma  $\delta^r$  homogénea es un mapa  $x \rightarrow \|x\|_{r,p}$ , donde para algún  $p \geq 1$*

$$\|x\|_{r,p} := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Se puede notar fácilmente que una norma homogénea tiene grado de homogeneidad 1 y es una función positiva definida.

### 2.3.4. Estabilidad de Sistemas Homogéneos

**Proposición 3** [5] *Sea  $f$  un campo vectorial homogéneo respecto a  $\nu$  y suponiendo que el origen es un punto de equilibrio atractivo bajo  $f$ . Entonces el origen es global y asintóticamente estable bajo  $f$ .*

Este resultado nos permite bajo la suposición de homogeneidad, asegurar la globalidad de cualquier resultado local.

**Teorema 2** [5] *Suponiendo  $f$  un campo vectorial homogéneo respecto a  $\nu$ . Si  $B \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto y acotado que contiene al origen y es positivo invariante bajo  $f$ , entonces el origen es estable en sentido de Lyapunov bajo  $f$ . Si  $B \subset \mathbb{R}^n$  es compacto y estrictamente positivo invariante bajo  $f$ , entonces el origen pertenece al conjunto  $B$  es global y asintóticamente estable bajo  $f$ .*

El resultado anterior es de gran importancia para el trabajo desarrollado, ya que permite asegurar la estabilidad del origen de un campo vectorial homogéneo si este pertenece a un conjunto invariante bajo  $f$  lo que en principio puede ser mas sencillo que encontrar una función de Lyapunov para realizar la misma afirmación.

**Teorema 3** [5] *Suponiendo  $f$  un campo vectorial homogéneo de grado  $k$  respecto a  $\nu$  y el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable bajo  $f$ . Luego, para todo  $m > \max\{-k, 0\}$ , existe una función continua positiva definida  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que es homogénea respecto a  $\nu$  de grado  $m$  y  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , y tal que  $L_f V$  es continua y definida negativa. Además, si  $\nu$  es  $C^1$ , entonces, para todo  $m > \bar{\sigma}$ , existe una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que es homogénea respecto a  $\nu$  de grado  $m$  y  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ , y tal que  $L_f V$  es continua y definida negativa.*

Un ejemplo de este resultado es un sistema lineal asintóticamente estable, ya que bajo la dilatación estándar  $\delta^1$ , el campo vectorial  $f$  tendrá grado de homogeneidad 0 y entonces existe una función cuadrática y positiva definida  $V$  con grado de homogeneidad 2 respecto a la dilatación estándar  $\delta^1$  tal que  $L_f V$  es negativa definida y tiene grado de homogeneidad  $k + m = 2$ , lo que significa que también  $L_f V$  es cuadrática, resultado bien conocido para sistemas lineales.

**Corolario 1** [4] *Sea  $f$  un campo vectorial continuo y homogéneo respecto a  $\nu$  de grado  $k$  cuyo origen es asintóticamente estable y  $\|\cdot\|_{r,p}$  una norma  $\delta_\epsilon^r$  homogénea, entonces*

- Si  $k > 0$ , existen  $a_1, a_2 > 0$  tal que

$$a_1 \left(1 + x_{0;r,p}^k t\right)^{-\frac{1}{k}} x_{0;r,p} \leq x_{t;r,p} \leq a_2 \left(1 + x_{0;r,p}^k t\right)^{-\frac{1}{k}} x_{0;r,p}$$

con  $x_{s;r,p} = \|x(s)\|_{r,p}$ .

- Si  $k=0$ , existen  $a_1, a_2, d > 0$  tal que

$$a_1 e^{-dt} x_{0;r,p} \leq x_{t;r,p} \leq a_2 e^{-dt} x_{0;r,p}$$

- Si  $k < 0$ , el origen es estable en tiempo finito.

## 2. MARCO TEÓRICO

---

El ultimo resultado nos permite saber el tipo de convergencia de un sistema homogéneo asintóticamente estable basado unicamente en su grado de homogeneidad, sin embargo para tener un estimado de tiempos de convergencia es común la necesidad de una función de Lyapunov.

# Deformaciones Homogéneas Continuas de Sistemas Lineales

---

En este capítulo se introducirá la clase de sistemas a los que se pretende aplicar la idea de Luenberger para la construcción de observadores, que como se había mencionado anteriormente es una deformación homogénea que contiene al sistema lineal, por lo que es una clase de sistemas más general, además de algunos resultados de estabilidad derivados del capítulo anterior y que serán necesarios en los resultados de este trabajo.

## 3.1. Deformaciones Homogéneas Continuas de sistemas Lineales

En primer lugar se definirá la clase de sistemas para los cuales se busca realizar la construcción del observador. Sea un sistema lineal invariante en el tiempo de la forma

$$\dot{x} = Ax. \quad (3.1)$$

Definiremos una deformación continua homogénea del sistema lineal (3.1) como la familia de sistemas de la forma

$$\dot{\chi} = f_{\gamma}(\chi) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} [\chi_i]^{q_{1i}(\gamma)} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} [\chi_i]^{q_{2i}(\gamma)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} [\chi_i]^{q_{ni}(\gamma)} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

### 3. DEFORMACIONES HOMOGÉNEAS CONTINUAS DE SISTEMAS LINEALES

---

con el operador  $[\cdot]^\beta = |\cdot|^\beta \text{sign}(\cdot)$ , y los elementos  $a_{ij}$  se relacionan con la matriz  $A$  como  $A = [a_{ij}]$ . Además para que todos los sistemas dentro de la familia mantengan la propiedad de homogeneidad se debe cumplir que los exponentes de todos ellos están definidos como

$$q_{ij} = \frac{r_i(\gamma) + \delta(\gamma)}{r_j(\gamma)},$$

donde  $\delta$  es el grado de homogeneidad del campo  $f$  y  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  son los pesos de homogeneidad asociados a sus coordenadas, además se considera que tanto los pesos como el grado de homogeneidad del campo son funciones continuas de un parámetro  $\gamma \in \Gamma$ . Se puede observar que, para que el campo vectorial  $f$  sea continuo una condición necesaria es que los pesos de homogeneidad sean funciones positivas en  $\Gamma$ , además la familia de deformaciones debe ser tal que en  $\Gamma$  existe un valor del parámetro  $\gamma_l$  que define al sistema lineal, esto es,  $\delta(\gamma_l) = 0$  y  $r_i(\gamma_l) = 1$ ,

#### 3.2. Estabilidad de la familia de las deformaciones

**Proposición 4** *Sea un sistema lineal de la forma (3.1) con la matriz  $A$  Hurwitz, existe un conjunto  $\Gamma \subseteq \Gamma$  tal que  $\Gamma$  es una vecindad abierta en torno a  $\gamma_l$  y para todo  $\gamma \in \Gamma$  el sistema (3.2) tiene en el origen un punto de equilibrio global y asintóticamente estable.*

**Prueba.** Si la matriz  $A$  es Hurwitz, entonces por el Teorema 3 existe una función de Lyapunov  $V$  que prueba que el sistema (3.1) tiene en el origen un punto de equilibrio global y asintóticamente estable. Definiendo  $B = V^{-1}([0, c])$  y  $S = \text{bd}B = V^{-1}(c)$  con  $c$  una constante positiva. Entonces tanto  $B$  como  $S$  son compactos debido a que  $V$  es propia y  $0 \notin S$  dado que  $V$  es positiva definida. Definiendo  $\psi : \Gamma \times S \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\psi(\gamma, x) = L_{f_\gamma} V(x),$$

entonces por definición del campo vectorial  $f_\gamma$  la función  $\psi$  es continua y  $\psi(\gamma_l, x) < 0$  para todo  $x \in S$ . Luego por continuidad de  $\psi$  respecto a  $\gamma$  existe  $\Gamma$  tal que  $\psi(\Gamma \times S) \subset (-\infty, 0)$ . Por lo tanto para valores de  $\gamma \in \Gamma$ ,  $L_{f_\gamma} V$  es negativa sobre la superficie de nivel  $S$  y entonces  $B$  es un conjunto invariante positivo bajo  $f_\gamma$  y por el Teorema 2 el origen es un punto de equilibrio global y asintóticamente estable bajo  $f_\gamma$  para todo  $\gamma \in \Gamma$ .

### 3.2.1. Ejemplo

Para mostrar la validez del resultado anterior de una forma mas comprensible, se considerara un sistema lineal de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_2 x_1 \end{cases},$$

en este caso para cualquier valor  $k_1, k_2 > 0$  el sistema tiene un punto de equilibrio en el origen que es global y exponencialmente estable. Si se deforma el sistema con el fin de obtener una familia de sistemas homogéneos se puede elegir la parametrización

$$q_{ij} = \frac{1 - \gamma(1 - i)}{1 - \gamma(2 - j)},$$

de forma que la familia de sistemas queda representada como

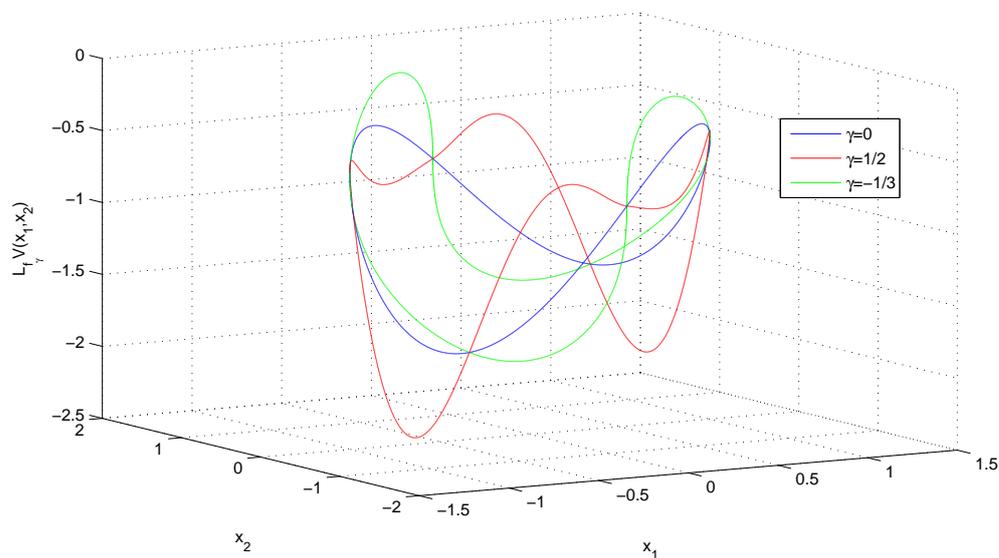
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{1-\gamma}} + x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_2 [x_1]^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \end{cases},$$

donde si se hace el parámetro  $\gamma = 0$  se tiene el sistema lineal. Para verificar que algunos sistemas dentro de la familia deformada son estables se debe realizar el cálculo de la derivada de  $V = x^T P x$  sobre las trayectorias de los sistemas deformados sobre una superficie de nivel de  $V$  y que resulte que dicha derivada es negativa sobre la superficie. Para ejemplificar el resultado, se realiza este procedimiento para el sistema con  $k_1 = k_2 = 3$  y finalmente se realizan simulaciones para observar el comportamiento de los sistemas con las mismas condiciones iniciales.

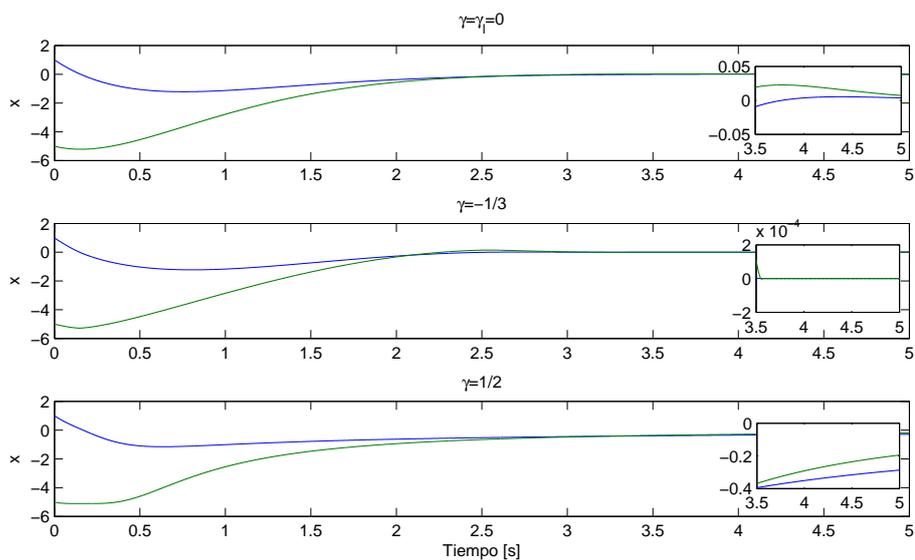
De la Figura 3.1 se puede observar que la derivada de la función  $V = x^T P x$  restringida a la superficie de nivel  $x^T P x = c^2$  sobre las trayectorias de los sistemas deformados es menor que cero, entonces de la Proposición 4 se puede concluir que los sistemas son asintoticamente estables.

En la Figura 3.2 se muestran las simulaciones de las dos deformaciones y el sistema lineal y se puede observar que tienen un comportamiento asintoticamente estable, tal como se habia predicho, la mayor diferencia en su comportamiento es su tiempo de convergencia, en el caso lineal es exponencial, en el caso en que  $\gamma$  es negativo el sistema es estable en tiempo finito, mientras que en el caso en que  $\gamma$  es positivo el sistema solo es asintoticamente estable.

### 3. DEFORMACIONES HOMOGÉNEAS CONTINUAS DE SISTEMAS LINEALES



**Figura 3.1:** Derivada de  $V$  valuada sobre la superficie  $V = c^2$  respecto a las trayectorias de dos sistemas deformados y el sistema lineal ( $\gamma = \gamma_l = 0$ ).



**Figura 3.2:** Simulación de los dos sistemas deformados y el sistema lineal ( $k_1 = k_2 = 3$ ).

# Observador Homogéneo para Deformaciones Homogéneas Continuas de Sistemas Lineales

---

En este capítulo se explorará la idea de Luenberger para la construcción de observadores para deformaciones homogéneas continuas de sistemas lineales, los inconvenientes que surgen para su construcción y la soluciones que se proponen para casos específicos. Sea un sistema lineal con salida de la forma

$$\Sigma_x : \begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} , \quad (4.1)$$

con deformación de la forma

$$\Sigma_\chi : \begin{cases} \dot{\chi} = f_\gamma(\chi) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} [\chi_i]^{q_{1i}(\gamma)} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} [\chi_i]^{q_{2i}(\gamma)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} [\chi_i]^{q_{ni}(\gamma)} \end{bmatrix} , \\ y = h_\gamma(\chi) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n c_{1i} [\chi_i]^{m_{1i}(\gamma)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_{pi} [\chi_i]^{m_{pi}(\gamma)} \end{bmatrix} \end{cases} , \quad (4.2)$$

#### 4. OBSERVADOR HOMOGÉNEO PARA DEFORMACIONES HOMOGÉNEAS CONTINUAS DE SISTEMAS LINEALES

---

considerando además que la salida es también una deformación homogénea de la salida lineal, entonces los exponentes en la salida homogénea deben cumplir con

$$m_{ij} = \frac{\delta_{hi}}{r_j},$$

donde  $\delta_{hi}$  es el grado de homogeneidad de la  $i$ -ésima salida y  $r_j$  el peso de homogeneidad de la  $j$ -ésima coordenada.

**Nota 1** Para que la deformación (4.2) contenga al sistema lineal debe ocurrir que en el dominio sobre el cual esta definido  $\gamma$  exista un elemento  $\gamma_l$  tal que todos los exponentes  $q_{ij}$  y  $m_{ij}$  valuados en él sean iguales a 1.

#### 4.1. Observador Homogéneo para sistemas deformados

Para que en general un observador basado en la idea de Luenberger fuese un observador de una función del estado del sistema (4.2) se debería cumplir que el estado del sistema

$$\dot{\zeta} = G_\gamma(\zeta, y) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \bar{f}_{1i}[\zeta_i]^{s_{1i}} + \sum_{i=1}^p \bar{h}_{1i}[y_i]^{l_{1i}} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \bar{f}_{mi}[\zeta_i]^{s_{mi}} + \sum_{i=1}^p \bar{h}_{mi}[y_i]^{l_{mi}} \end{bmatrix},$$

que es una deformación homogénea del observador lineal, donde  $\bar{f}_{ij} \in F$ ,  $\bar{h}_{ij} \in H$ , matrices que provienen del observador lineal

$$\dot{z} = Fz + Hy, \quad (4.3)$$

converja a una función del estado  $T_\gamma(\chi)$ , esta condición en el caso lineal es algebraica como ya se ha mencionado anteriormente (ecuación (2.3)). Además el campo vectorial que define al observador  $G_\gamma$  debe ser homogéneo respecto a sus coordenadas y las salidas del sistema a observar, los exponentes deformados deben cumplir con

$$s_{ij} = \frac{r_i^* + \delta_2}{r_j^*}, \quad l_{ij} = \frac{r_i^* + \delta_2}{\delta_{hj}},$$

donde  $\delta_2$  es el grado de homogeneidad del campo  $G$  y  $r_i^*$  es el peso de homogeneidad asociado a la  $i$ -ésima coordenada del observador. Para que el sistema del observador pueda reproducir la función  $T_\gamma(\chi)$  con la misma condición inicial  $T_\gamma(\chi(0)) = \zeta(0)$  se debe cumplir que

$$\frac{\partial T_\gamma(\chi)}{\partial \chi} f_\gamma(\chi) = G_\gamma(T_\gamma(\chi), h_\gamma(\chi)), \quad (4.4)$$

que desarrollando nos lleva a la necesidad de resolver

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_1(\chi)}{\partial \chi_i} f_i(\chi) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_m(\chi)}{\partial \chi_i} f_i(\chi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \bar{f}_{1i} [T_i(\chi)]^{s_{1i}} + \sum_{i=1}^p \bar{h}_{1i} [\sum_{j=1}^n c_{ij} [\chi_j]^{m_{ij}}]^{l_{1i}} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \bar{f}_{mi} [T_i(\chi)]^{s_{mi}} + \sum_{i=1}^p \bar{h}_{mi} [\sum_{j=1}^n c_{ij} [\chi_j]^{m_{ij}}]^{l_{mi}} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

para  $T_\gamma(\chi)$ , sin embargo de (4.5) se puede notar que el hecho de que del lado derecho de la ecuación existan términos anidados dentro de funciones homogéneas complica bastante el cálculo de la transformación.

#### 4.1.1. Observador identidad

Enfocándonos por simplicidad en la transformación de la forma  $T_\gamma(\chi) = \chi$ , entonces para un sistema de la forma (4.2) se puede construir un observador con la forma

$$\dot{\zeta} = G_\gamma(\zeta, h(\chi)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} [\zeta_i]^{q_{1i}} + \sum_{i=1}^p \bar{h}_{1i} [e_{yi}]^{l_{1i}} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} [\zeta_i]^{q_{ni}} + \sum_{i=1}^p \bar{h}_{ni} [e_{yi}]^{l_{ni}} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

donde  $\hat{y}_i$  y  $e_{yi} = y_i - \hat{y}_i$  son la estimación y el error de estimación de la  $i$ -ésima salida respectivamente, donde los exponentes  $l_{ij} = (\delta + r_i)/\delta_{h_j}$  permiten que se conserve la homogeneidad de la cascada. Todo esto necesario para que se cumpla

$$f_\gamma(\chi) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} [\chi_i]^{q_{1i}} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} [\chi_i]^{q_{2i}} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} [\chi_i]^{q_{ni}} \end{bmatrix} = G_\gamma(\chi, h(\chi)).$$

Que es la condición (4.4) en el caso del observador identidad. Esto debido a que el sistema es representado como la misma deformación homogénea del sistema mas un término de inyección del error de estimación de la salida.

Ahora con intención de probar la convergencia del observador al estado del sistema deformado, se escribe la dinámica del error de observación  $\dot{e} = \gamma \phi(e, \chi)$  que tiene la forma

#### 4. OBSERVADOR HOMOGÉNEO PARA DEFORMACIONES HOMOGÉNEAS CONTINUAS DE SISTEMAS LINEALES

---

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_k &= \gamma \phi_k(e, \chi) = \dot{\chi}_k - \dot{\zeta}_k \\
 &= \sum_{i=1}^n a_{ki} (|\chi_i|^{q_{ki}} + |e_i - \chi_i|^{q_{ki}}) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^p h_{ki} [\sum_{j=1}^n c_{ij} (|\chi_j|^{m_{ij}} + |e_j - \chi_j|^{m_{ij}})]^{l_{ki}},
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde  $\dot{e}_k$  es el  $k$ -ésimo termino de la dinámica del error.

Se puede observar fácilmente que una condición necesaria para la convergencia del error a cero es que el campo vectorial

$$\gamma \phi_k(e, \chi = 0) = \sum_{i=1}^n a_{ki} [e_i]^{q_{ki}} - \sum_{i=1}^p h_{ki} [\sum_{j=1}^n c_{ij} [e_j]^{m_{ij}}]^{l_{ki}}, \tag{4.8}$$

tenga en el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable.

**Teorema 4** *Sea un sistema lineal de la forma (4.1) que pertenece a la familia de sistemas deformados (4.2) con  $\gamma \in \Gamma$  y  $f_{\gamma_l} = Ax$ , sea el sistema (4.3) un observador identidad del sistema lineal (4.1) con la matriz  $F$  Hurwitz, entonces existe una vecindad abierta en torno a  $\gamma_l$  en la que todos los sistemas deformados (4.6) son observadores identidad de los sistemas (4.2).*

**Prueba.** La prueba es similar a la de la Proposición 4, considerando ahora el campo vectorial  $\gamma \phi(e, \chi)$ , el cual de nuevo varia de forma continua respecto al parámetro  $\gamma$ . Cabe destacar que campo el extendido  $[f_{\gamma}(\chi)^T \gamma \phi(e, \chi)^T]^T$  es un campo vectorial homogéneo con grado de homogeneidad  $\delta$  y pesos de homogeneidad  $r_i$  tanto para el error como para el estado del sistema a observar. Por lo que para probar la estabilidad asintótica del origen del error de observación para cualquier sistema dentro de la familia de sistemas deformados se debe cumplir que el origen este contenido en un conjunto invariante positivo, lo que se puede verificar si

$$\dot{V}(e, \chi)|_S = e^T P_{\gamma} \phi(e, \chi)|_S < 0, \tag{4.9}$$

donde  $S : \{e^T P e = c^2\}$  es una superficie de nivel en  $e$ , esto se debe a que el campo vectorial  $\gamma \phi(e, \chi)$  es homogéneo respecto a ambos, y si existe un conjunto invariante positivo en las coordenadas de  $e$  que contenga al origen, entonces el origen en las coordenadas de  $e$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable bajo el campo vectorial  $\gamma \phi(e, \chi)$ , esta condición se cumple de manera clara para el error de estimación en el sistema lineal.

Luego el lado izquierdo de la condición (4.9) varia de forma continua respecto al parámetro  $\gamma$ , por lo que existe un conjunto de parámetros en torno a  $\gamma_l$  para los cuales la condición (4.9) se sigue cumpliendo.

Finalmente, para este conjunto de parámetros podemos asegurar que por ser homogéneos tiene un único punto de equilibrio en el origen y que existe un conjunto invariante positivo que lo contiene, además debido a que los sistemas en la familia son homogéneos entonces dicho punto de equilibrio es global y asintóticamente estable, por lo que el error de estimación converge a cero y el sistema (4.6) es un observador identidad para (4.2). ■

Entonces si se tiene un sistema homogéneo dentro de la familia (4.2) y se desea diseñar un observador para él, se puede empezar por diseñar un observador para el sistema lineal (4.1) y después verificar si para el sistema objetivo la condición (4.9) se sigue cumpliendo, sin embargo, dicha condición debe de cumplirse para el estado del sistema a observar por lo que debe cumplirse para un conjunto de dimensión  $2n - 1$  que no es acotado, lo cual es en general difícil de verificar.

**Proposición 5** *Si se tiene un sistema homogéneo que este contenido dentro una familia de sistemas de la forma (4.2) con exponentes  $q_{ki} \leq 1$ , si además se tiene la salida y definida de forma que cada salida  $y_i$  del sistema depende de un solo estado y es lineal respecto a él. Y el sistema lineal (4.1) contenido en la deformación tiene un observador (4.3) con función de Lyapunov del error de observación  $V = e^T P e$ , entonces si se cumple*

$$e^T P_\gamma \phi(e, \chi)|_S \leq e^T P_\gamma \phi(e, 0) + \sum_{j=1}^n |e_j| \sum_{k=1}^n p_{jk} \sum_{i=1}^n a_{ki} (\eta(q_{ki}) - 1) |e_i|^{q_{ki}}|_S < 0, \quad (4.10)$$

el observador definido por el sistema homogéneo (4.6) converge al estado del sistema a observar en tiempo finito.

**Prueba.** Considerando que cada salida del sistema es una función lineal de un solo estado y tomando el resultado mostrado en el apéndice, entonces la dinámica del error de observación se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{e}_k &= \sum_{i=1}^n a_{ki} [|\chi_i|^{q_{ki}} + |e_i - \chi_i|^{q_{ki}} \text{sign}(e_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p h_{ki} c_{ii}^{l_{ki}} [e_j]^{q_{ki}} \end{aligned}, \quad (4.11)$$

de la ecuación (4.11) se puede observar que la retroalimentación del error de observación pierde la dependencia del estado del sistema a observar. Si además se considera que todos los exponentes  $q_{ki}$  del sistema deformado son menores a 1, entonces se cumple la condición de Hölder para todos ellos, esto es

$$|[\chi_i]^{q_{ki}} + |e_i - \chi_i|^{q_{ki}}| \leq \eta(q_{ki}) |e_i|^{q_{ki}}, \quad (4.12)$$

#### 4. OBSERVADOR HOMOGÉNEO PARA DEFORMACIONES HOMOGÉNEAS CONTINUAS DE SISTEMAS LINEALES

---

además del teorema anterior se tiene que

$$e^T P_\gamma \phi(e, 0)|_S < 0 \quad (4.13)$$

y entonces el error de observación sera asintoticamente estable si se cumple

$$e^T P_\gamma \phi(e, \chi)|_S \leq e^T P_\gamma \phi(e, 0) + \sum_{j=1}^n |e_j| \sum_{k=1}^n p_{jk} \sum_{i=1}^n a_{ki} (\eta(q_{ki}) - 1) |e_i|^{q_{ki}}|_S < 0, \quad (4.14)$$

donde  $\eta(q_{ki}) = 2^{1-q_{ki}}$ . En el caso lineal la condición (4.10) se reduce a (4.13) y por definición, todos los términos de (4.10) varían de forma continua respecto a el parámetro  $\gamma$  por lo que del mismo modo que en la prueba anterior se puede asegurar que existe un conjunto de valores  $\Gamma$  para el cual se puede seguir asegurando la estabilidad del error y entonces el observador deformado converge al estado de (4.2), además si los exponentes son todos menores a 1 entonces el grado de homogeneidad del campo vectorial  $\gamma\phi$  es negativo y el error de estimación converge a cero en tiempo finito. Por otro lado, para este caso se puede notar que la condición (4.10) no depende mas del estado del sistema a observar por lo que verificarla numéricamente es mas sencillo.

#### 4.2. Sistemas triangulares

Si el sistema es triangular inferior, esto es

$$\dot{\chi} = f_i(\chi_1, \dots, \chi_i) + \chi_{i+1}$$

entonces todos los pesos de homogeneidad deben cumplir con  $r_i + \delta = r_{i+1}$  y entonces todos ellos quedan univocamente determinados dados los valores de  $r_n$  y  $\delta$  el peso de homogeneidad de la n-ésima coordenada y el grado de homogeneidad del campo vectorial respectivamente, entonces los valores de los exponentes del campo vectorial se puede calcular como

$$q_{ij} = \frac{r_i + \delta}{r_j} = \frac{r_n - \delta(n - i - 1)}{r_n - \delta(n - j)}.$$

Si ahora definimos una nueva variable  $\gamma = \delta/r_n$ , entonces los exponentes del campo vectorial se pueden expresar como

$$q_{ij} = \frac{1 - \gamma(n - i - 1)}{1 - \gamma(n - j)}, \quad (4.15)$$

por lo que quedan univocamente determinados para algún valor de  $\gamma$  y los pesos de homogeneidad pueden calcularse como  $r_i = 1 - (n - i)\gamma$ , por lo que podemos observar que el conjunto de sistemas homogéneos con la forma (4.2) y además triangulares son una deformación uniparamétrica de (4.1) bajo el parámetro  $\gamma$  que es su grado de homogeneidad.

Si además se considera que el grado de homogeneidad  $\gamma$  es negativo, todos los exponentes  $q_{ij}$  de los campos vectoriales  $f$  y  $\phi$  serán menores a uno y se verifica la condición (4.12) para todos ellos y como se había mostrado anteriormente, cuando los exponentes de los campos vectoriales cumplen dicha condición es más sencillo verificar si el error de estimación es asintóticamente estable.

#### 4.2.1. Ejemplo

Para mostrar como se facilita el análisis numérico de la estabilidad del observador para un sistema deformado cuando se consideran los casos anteriores, tomaremos como ejemplo un par de sistemas lineales

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + x_2 + bx_3 \\ \dot{x}_2 = a_{12}x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{13}x_1 \\ y = x_1 \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{21}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{22}x_1 + x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{23}x_1 \\ y = x_1 \end{cases},$$

entonces se puede diseñar observadores para ambos sistemas de forma que la dinámica del error para ambos sistemas este definida por los campos vectoriales

$$\Sigma_{e1} : \begin{cases} \dot{e}_1 = f_{11}e_1 + e_2 + be_3 \\ \dot{e}_2 = f_{12}e_1 + e_3 \\ \dot{e}_3 = f_{13}e_1 \end{cases}, \quad \Sigma_{e2} : \begin{cases} \dot{e}_1 = f_{21}e_1 + e_2 \\ \dot{e}_1 = f_{22}e_1 + e_3 \\ \dot{e}_1 = f_{23}e_1 \end{cases},$$

y para ambas dinámicas del error se puede encontrar funciones de Lyapunov  $V_1, V_2$ . Si se parametriza ambos sistemas bajo la misma deformación, donde los exponentes los definimos como en (4.15), entonces las familias de sistemas deformados quedan

$$\Sigma_{1\gamma} : \begin{cases} \dot{\chi}_1 = a_{11}[\chi_1]^{\frac{1-\gamma}{1-2\gamma}} + \chi_2 + b[\chi_3]^{1-\gamma} \\ \dot{\chi}_2 = a_{12}[\chi_1]^{\frac{1}{1-2\gamma}} + \chi_3 \\ \dot{\chi}_3 = a_{13}[\chi_1]^{\frac{1+\gamma}{1-2\gamma}} \\ y = [\chi_1]^{\frac{\delta_h}{1-2\gamma}} \end{cases}, \quad \Sigma_{2\gamma} : \begin{cases} \dot{\chi}_1 = a_{21}[\chi_1]^{\frac{1-\gamma}{1-2\gamma}} + \chi_2 \\ \dot{\chi}_2 = a_{22}[\chi_1]^{\frac{1}{1-2\gamma}} + \chi_3 \\ \dot{\chi}_3 = a_{23}[\chi_1]^{\frac{1+\gamma}{1-2\gamma}} \\ y = \chi_1 \end{cases},$$

#### 4. OBSERVADOR HOMOGÉNEO PARA DEFORMACIONES HOMOGÉNEAS CONTINUAS DE SISTEMAS LINEALES

---

la mayor diferencia en estas familias de sistemas radica que la primera tiene siempre un exponente mayor a 1 en todo el dominio de la deformación ( $\gamma \in [-1, 1]$ ), mientras que para la segunda familia de sistemas existe un conjunto de su dominio en el que todos los exponentes son menores o iguales a 1 (si  $\gamma \in [-1, 0]$ ), además si se considera que la segunda familia de sistemas tiene solo una salida que es lineal respecto al primer estado, entonces la dinámica del error de observación para ambas familias de sistemas queda

$$\Sigma_{e1\gamma} : \begin{cases} \dot{e}_1 = a_{11} \left( |\chi_1|^{\frac{1-\gamma}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{1-\gamma}{1-2\gamma}} \right) + e_2 + b \left( |\chi_3|^{1-\gamma} + [e_3 - \chi_3]^{1-\gamma} \right) \\ \quad + h_{11} \left[ |\chi_1|^{\frac{\delta_h}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{\delta_h}{1-2\gamma}} \right]^{\frac{1-\gamma}{\delta_h}} \\ \dot{e}_2 = a_{12} \left( |\chi_1|^{\frac{1}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{1}{1-2\gamma}} \right) + e_3 + h_{12} \left[ |\chi_1|^{\frac{\delta_h}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{\delta_h}{1-2\gamma}} \right]^{\frac{1}{\delta_h}} \\ \dot{e}_3 = a_{13} \left( |\chi_1|^{\frac{1+\gamma}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{1+\gamma}{1-2\gamma}} \right) + h_{13} \left[ |\chi_1|^{\frac{\delta_h}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{\delta_h}{1-2\gamma}} \right]^{\frac{1+\gamma}{\delta_h}} \end{cases},$$

$$\Sigma_{e2\gamma} : \begin{cases} \dot{e}_1 = a_{21} \left( |\chi_1|^{\frac{1-\gamma}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{1-\gamma}{1-2\gamma}} \right) + e_2 + h_{21} [e_1]^{\frac{1-\gamma}{1-2\gamma}} \\ \dot{e}_2 = a_{22} \left( |\chi_1|^{\frac{1}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{1}{1-2\gamma}} \right) + e_3 + h_{22} [e_1]^{\frac{1}{1-2\gamma}} \\ \dot{e}_3 = a_{23} \left( |\chi_1|^{\frac{1+\gamma}{1-2\gamma}} + [e_1 - \chi_1]^{\frac{1+\gamma}{1-2\gamma}} \right) + h_{22} [e_1]^{\frac{1+\gamma}{1-2\gamma}} \end{cases},$$

entonces, debido a que el sistema  $\Sigma_{e1\gamma}$  tiene exponentes mayores a uno siempre cuando se si se calcula la derivada de las funciones  $V_1, V_2$  funciones de Lyapunov del error de estimación de los observadores lineales sobre las trayectorias de los sistemas del error deformados sobre un par de superficies de nivel de ellas la derivada en el sistema  $\Sigma_{e1\gamma}$  no puede acotarse por funciones que dependan unicamente del error, cosa que si sucede en el sistema  $\Sigma_{e2\gamma}$  (con  $\gamma \in [-1, 0]$ ).

### 4.3. Caso particular: Cadena de integradores

Como se menciono anteriormente los sistemas triangulares pueden parametrizarse de forma univoca respecto al grado de homogeneidad, además un caso especial de este tipo de sistemas es la cadena de integradores, este tipo de sistema ha sido ampliamente estudiado y resulta de mucho interés, ya que para muchos sistemas no lineales la estimación de derivadas de la salida nos permite conocer información del estado del

sistema. Considerando un sistema homogéneo de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0x + bu \\ y &= C_0x\end{aligned},$$

donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Para dicho sistema un observador homogéneo puede construirse como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -k_1[\hat{y} - y]^{q_{11}} + \hat{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_i &= -k_i[\hat{y} - y]^{q_{i1}} + \hat{x}_{i+1} \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n &= -k_n[\hat{y} - y]^{q_{n1}} + u \\ \hat{y} &= \hat{x}_1 m,\end{aligned}$$

donde  $\hat{x} = [\hat{x}_1 \hat{x}_2 \dots \hat{x}_n]$  es el estimado del estado del sistema, los exponentes  $q_{i1}$  se definen como en (4.15) y de nuevo se considera el operador  $[\cdot]^\beta = |\cdot|^\beta \text{sign}(\cdot)$ . Considerando el cambio de variable

$$\gamma = \frac{\alpha}{n + \alpha(n - 1)},$$

#### 4. OBSERVADOR HOMOGÉNEO PARA DEFORMACIONES HOMOGÉNEAS CONTINUAS DE SISTEMAS LINEALES

---

la dinámica del error de observación  $e = \hat{x} - x$  esta dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1|e_1|^{1+\frac{\alpha}{n}} + e_2 = -k_1|e_1|^{\frac{\alpha}{n}}e_1 + e_2 \\ &\vdots \\ \dot{e}_i &= -k_i|e_1|^{1+\frac{\alpha}{n}i} + e_{i+1} = -k_i|e_1|^{\frac{\alpha}{n}i}e_i + e_{i+1}, \\ &\vdots \\ \dot{e}_n &= -k_n|e_1|^\alpha e_n\end{aligned}$$

que puede reescribirse en una forma mas compacta como

$$\dot{e} = (A_0 - \Lambda(|e_1|^{\alpha/n})KC_0)e = \phi_\alpha(e),$$

donde  $\Lambda(a) = \text{diag}\{a, a^2, \dots, a^n\}$  y  $K^T = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$ , se puede notar que para todo  $\alpha \in (-1, \infty)$  el observador es homogéneo y continuo, sin embargo en caso de que el parámetro  $\alpha = -1$  el campo vectorial tendría una discontinuidad en  $e_1 = 0$ , dicho caso ha sido estudiado en [10], [11] y para ciertos valores de las ganancias  $k_i$  se puede asegurar su estabilidad y tiene propiedades de robustez. Se puede notar además que el campo vectorial  $\phi_\alpha(e)$  es homogéneo con grado de homogeneidad  $\alpha$  y pesos de homogeneidad  $r_i = n + (i - 1)\alpha$ .

##### 4.3.1. Análisis de estabilidad y cálculo de valores extremos del parámetro de la deformación.

Considerando que existe un grupo de ganancias  $K$  tales que para el caso lineal la matriz  $A = A_0 - KC_0$  es Hurwitz. Entonces existen  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétricas y positivas definidas, tales que se cumple la ecuación de Lyapunov

$$-Q = A^T P + P A,$$

utilizando la función de Lyapunov para el caso lineal  $V(e) = e^T P e$  podemos determinar una superficie de nivel

$$S = \{e \in \mathbb{R}^n | e^T P e = c^2\}.$$

Para el caso lineal ( $\alpha = 0$ ) es claro que bajo la superficie de nivel el campo vectorial  $\phi_\alpha(e)$  cumple

$$\dot{V}(e)|_S = e^T P \phi_0(e) < 0,$$

por lo que se puede concluir que el conjunto contenido en la superficie de nivel  $S$  es un conjunto invariante positivo bajo el campo vectorial  $\phi_0(e)$ , considerando ahora que se puede mostrar para campos vectoriales  $\phi_\alpha(e)$  distintos del caso lineal ( $\alpha \neq 0$ ) que el conjunto se mantiene invariante positivo, entonces por propiedades de homogeneidad, podemos afirmar que el origen es asintóticamente estable bajo el campo vectorial  $\phi_\alpha(e)$

si  $\alpha > 0$  y estable en tiempo finito si  $\alpha < 0$ , ambos casos con la propiedad de globalidad.

Sabiendo además que la forma en que varia  $\phi_\alpha(e)$  es continua respecto al parámetro  $\alpha$  entonces si encontramos la solución a las ecuaciones

$$\begin{aligned} e^T P e &= c^2 \\ e^T P (A_0 - \Lambda(|e_1|^{\alpha/n}) K C_0) e &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

encontraremos valores del parámetro  $\alpha$  para los cuales la derivada de la función  $V$  sobre las trayectorias de la familia de sistemas deformados y restringida a la superficie de nivel se hace igual con cero, de dicho conjunto de valores del parámetro  $\alpha$  los mas cercanos al caso lineal ( $\alpha = 0$ ) delimitaran un intervalo para el cual cualquier observador deformado y contenido entre dichos valores extremos convergerá al estado del sistema observado. Ahora, dado que la segunda ecuación es una forma cuadrática entonces se debe analizar el comportamiento de la matriz

$$M(e_1, \alpha) = P(A_0 - \Lambda(|e_1|^{\alpha/n}) K C_0) + (A_0 - \Lambda(|e_1|^{\alpha/n}) K C_0)^T P,$$

haciendo un cambio de variable  $z = |e_1|^{\alpha/n}$ , se puede analizar el comportamiento de la matriz sin relacionarla directamente con el valor de  $e_1$ , reescribiendo se tiene

$$\begin{aligned} M(z) &= P(A_0 - \Lambda(z) K C_0) + (A_0 - \Lambda(z) K C_0)^T P \\ &= -Q + P(\mathbb{I} - \Lambda(z)) K C_0 + C_0^T K^T (\mathbb{I} - \Lambda(z)) P, \end{aligned}$$

la matriz  $M$  se vuelve semidefinida negativa cuando alguno de sus valores propios se vuelve cero o bien, el producto de los valores propios que cambian por la variación de  $z$  se hace cero, esto es  $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ , esto ocurre cuando el polinomio

$$p(z) = 1 - 2w^T Q^{-1} C_0^T + (w^T Q^{-1} C_0^T)^2 - (C_0^T Q^{-1} C_0^T)(w^T Q^{-1} w) = 0,$$

este polinomio tiene soluciones  $z_{min} < 1 < z_{max}$ , donde  $w = P(\mathbb{I} - \Lambda(z))K$ . Y entonces para todo valor de  $z \in (z_{min}, z_{max})$  la matriz  $M(z)$  es definida negativa.

Considerando la superficie de análisis  $S : \{e^T P e = c^2\}$  entonces los valores que puede tomar la coordenada  $e_1$  de algún vector dentro de la superficie se puede acotar como

$$|e_1| \leq c/\sqrt{p_{11}},$$

donde  $p_{11}$  es el valor de la primera componente de la matriz  $P$ , sabemos que existen limites para el valor de  $z$  para los cuales la matriz  $M$  permanece negativa definida, sin embargo el intervalo delimitado por esos limites es a lo mas un subconjunto de los valores que puede tomar  $z$  valuada sobre la superficie, esto se puede notar si por ejemplo se hace tender  $e_1$  a cero, ya que entonces el valor de  $z$  tiende a cero en el caso de que el grado de homogeneidad  $\alpha$  sea positivo o cero, o tendera a infinito si el grado de homogeneidad es negativo.

#### 4. OBSERVADOR HOMOGÉNEO PARA DEFORMACIONES HOMOGÉNEAS CONTINUAS DE SISTEMAS LINEALES

---

Para estudiar que ocurre en los intervalos en los que la matriz  $M$  deja de ser negativa definida, se realiza el producto

$$\begin{aligned} e^T M e &= -e^T Q e + e^T (C_0^T w^T + w C_0) e \\ &= -e^T Q e + 2e_1 e^T w. \end{aligned} \quad (4.17)$$

De la ecuación (4.17) se puede notar que si  $e_1 = 0$ , entonces  $e^T M(z)e < 0$ , por lo que se puede concluir que para todo  $z \notin [z_{min}, z_{max}]$  existe  $|\underline{e}_1|$  tal que para todo vector sobre la superficie con primera componente que cumpla  $|e_{1s}| < |\underline{e}_1|$  el producto es negativo.

Si sobre la superficie  $S$  tomamos el máximo valor que puede tomar  $e_1$ , este es cuando todas las demás componentes del vector valen cero, entonces

$$e_{1max} = \frac{c}{\sqrt{p_{11}}}, \quad (4.18)$$

y el producto (4.17) sobre tal vector tiene la forma

$$e^T M e = -(q_{11} - 2w_1) \frac{c^2}{p_{11}}, \quad (4.19)$$

donde  $w_1 = \sum_{i=1}^n p_{1i} k_i (1 - z^i)$ , es claro que el signo de (4.19) depende de el valor de  $(q_{11} - 2w_1)$ , dado que  $q_{11}$  es una constante positiva y  $w_1$  es un polinomio en  $z$  de grado  $n$  estudiando el valor de este último podemos verificar hasta que punto se puede realizar la deformación antes de que el producto (4.19) se vuelva positivo. Para  $z = 0$  entonces

$$w_1 = \sum_{i=1}^n p_{1i} k_i = \frac{q_{11}}{2},$$

y por lo tanto  $e^T M(0)e = 0$ , sabemos que existe  $z_{ex} > 1$  tal que se vuelve a cumplir que  $(q_{11} - 2w_1) = 0$ , entonces para todos los valores de  $z$  menores que  $z_{ex}$  el producto (4.17) con vectores con solo primer componente es negativo, por lo tanto en ese intervalo de  $z$  siempre existe  $|\bar{e}_1| < |e_{1max}|$  tal que cualquier vector sobre la superficie con  $|e_1| > |\bar{e}_1|$  cumple que el producto (4.17) sea negativo. Sin embargo, para  $z > z_{ex}$  el producto con vectores con solo primer componente es siempre positivo, por lo que para una superficie  $S$  definida, el valor del parámetro  $\alpha$  máximo para el cual se puede seguir asegurando estabilidad es a lo mas

$$\alpha_{max} \leq n \frac{\ln(z_{ex})}{\ln |e_{1max}|} = n \frac{\ln(z_{ex})}{\ln(c/\sqrt{p_{11}})}.$$

Con esto, se sabe que para todo  $z$  existen valores de la componente  $e_1$  de vectores sobre la superficie para los cuales, el producto (4.17) es cero o negativo, entonces estos valores de  $e_1$  acotan conjuntos para los cuales el producto pueden ser positivo y no

se puede asegurar la estabilidad. Encontrar dichos valores nos puede permitir acotar regiones en un plano  $z/|e_1|$  y con la función  $z = |e_1|^{\alpha/n}$  encontrar de manera gráfica soluciones para (4.16) de tal forma que dados  $Q$ ,  $K$  y  $c$  se pueda encontrar el intervalo de deformación máximo. Los valores de  $|e_1|$  que delimitan los conjuntos que separan la positividad y negatividad del producto  $e^T M(z)e$  se puede calcular optimizando una función creciente en  $|e_1|$  para lo cual se puede utilizar el método de multiplicadores de Lagrange mostrado en el apéndice.

### 4.3.2. Búsqueda de los extremos de $e_1$

En este caso se debe de optimizar una función que dependa únicamente de la variable  $e_1$ , que sea cóncava y que sea creciente respecto a  $|e_1|$ , en este caso una buena opción es la función  $e_1^2$  que se desea optimizar bajo las restricciones

$$e^T P e - c^2 = 0, \quad e^T M(z)e = 0, \quad (4.20)$$

para poder utilizar el método de multiplicadores de Lagrange se derivan las ecuaciones de las restricciones obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial e_j}(e^T P e) = 2 \sum_{i=1}^n p_{ji} e_i, \quad \frac{\partial}{\partial e_j}(e^T M(z)e) = 2 \sum_{i=1}^n m_{ji} e_i, \quad (4.21)$$

si ahora se igualan los gradientes de la función a optimizar y las restricciones con los multiplicadores de Lagrange se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\hat{I} + \lambda_1 P + \lambda_2 M(z))e &= 0 \\ e^T P e &= c^2 \\ e^T M(z)e &= 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

y resolviendo (4.22) es que se pueden encontrar los valores de  $|e_1|$  mínimo y máximo que hacen el producto  $e^T M(z)e$  igual con cero sobre la superficie  $e^T P e = c^2$ .



## Ejemplos Numéricos

---

Para comprobar los resultados anteriores se realizaron simulaciones y comprobaciones numéricas para todos los casos estudiados anteriormente.

### 5.1. Ejemplo. Caso General

El caso más general es cuando la familia de deformaciones esta construida de forma que los exponentes pueden tener cualquier valor tanto en el campo vectorial que define al sistema dinámico como en las salidas, para este caso se eligió un sistema lineal a deformar de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0.001 & -1.5 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

se puede observar que el sistema tiene dos salidas y una de ellas es una combinación de dos estados del sistema, además se puede comprobar que la matriz  $A$  define un sistema inestable con

$$\text{eig}(A) = [-2.1228 \quad 0.6114 + 1.6177i \quad 0.6114 - 1.6177i]. \quad (5.2)$$

Y si se realiza la realimentación de las salidas de forma  $F = A + HC$  resulta

$$F = \begin{bmatrix} -5.9 & -15 & 5 \\ -1 & -5 & 1 \\ -7.999 & -18.5 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

con valores propios

$$\text{eig}(F) = [-5.1191 + 6.3778i \quad -5.1191 - 6.3778i \quad -1.6617] \quad (5.4)$$

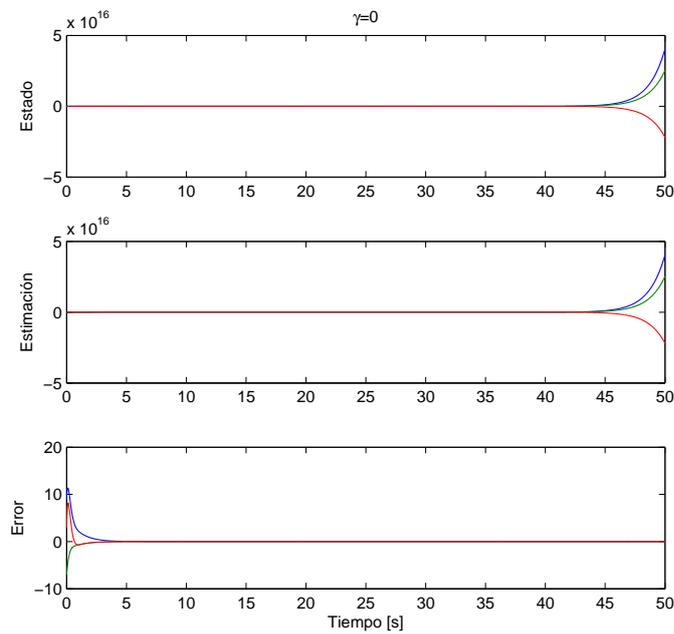
## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

Y los pesos de homogeneidad y grados de homogeneidad del campo vectorial y las salidas se eligieron como

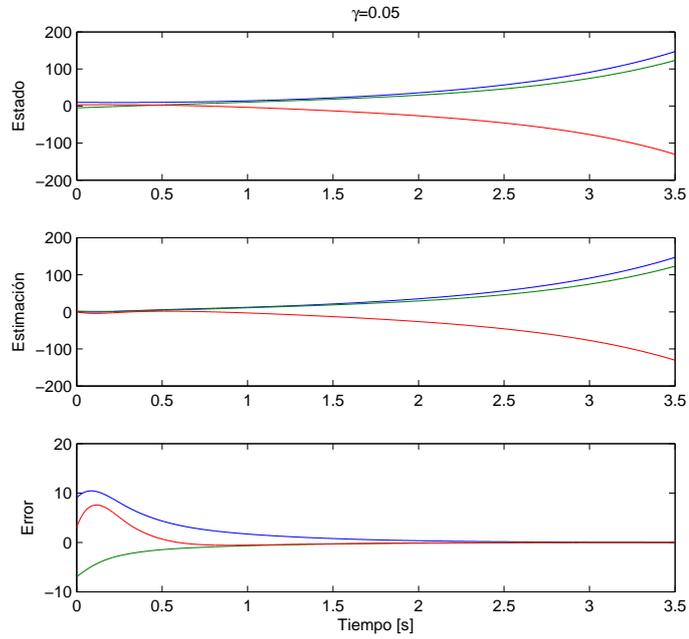
$$\delta_{h1} = \delta_{h2} = 1, \quad r_i = n + \gamma(i - 1), \quad \delta = \gamma,$$

con  $n = 3$  y de tal forma que para cualquier valor de  $\gamma \in [-1, \infty]$  siempre existe al menos un término con exponente mayor a 1 y que por lo tanto no cumple (4.12).

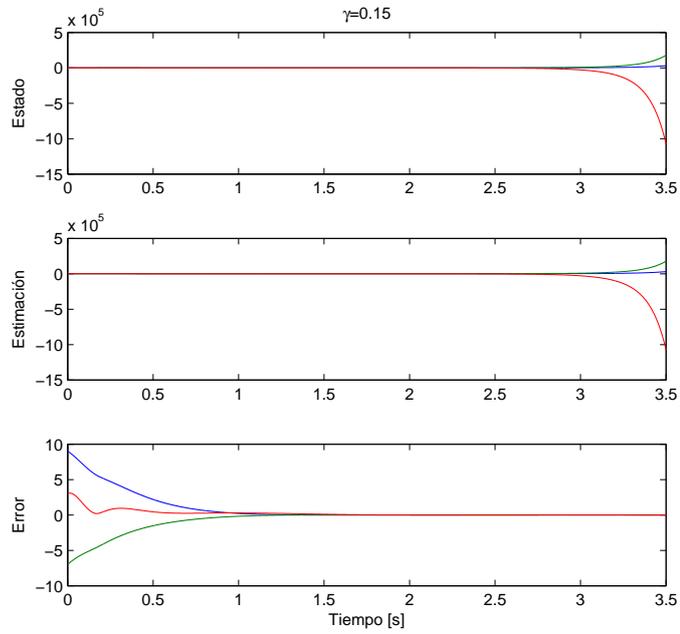


**Figura 5.1:** Caso general  $\gamma = 0$  (lineal).

De la Figura 5.1 se puede ver que el observador converge al estado del sistema, resultado obvio ya que el campo vectorial del error es lineal y Hurwitz.



**Figura 5.2:** Caso general  $\gamma = 0.05$ .

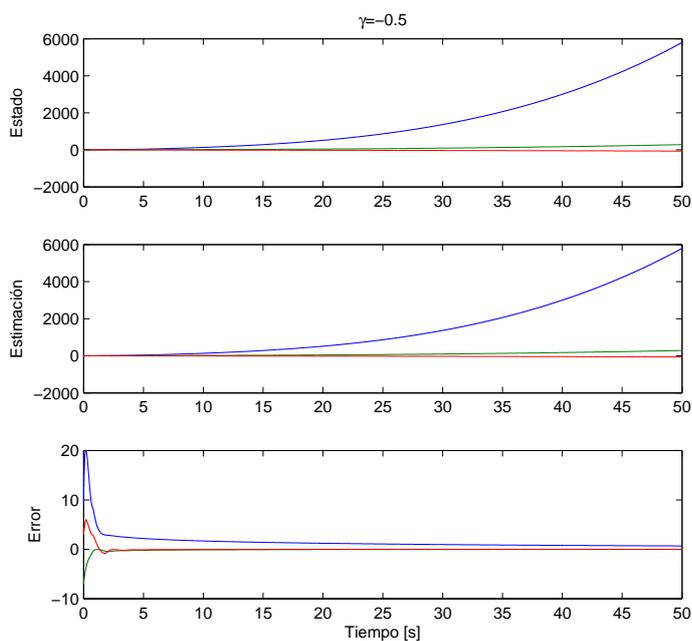


**Figura 5.3:** Caso general  $\gamma = 0.15$

## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

En las Figuras 5.2 y 5.3 se puede observar que deformando un poco el parámetro de tal forma que los exponentes que definen el campo vectorial sean cercanos a la linealidad, el observador deformado con las mismas ganancias que en el caso lineal mantiene la convergencia al estado del sistema, sin embargo su convergencia se vuelve solamente asintótica debido a que el sistema es homogéneo con grado de homogeneidad positivo.



**Figura 5.4:** Caso general  $\gamma = -0.5$

De las Figuras 5.4, 5.5 se puede observar que la convergencia se mantiene también para variaciones del parámetro que hacen el grado de homogeneidad del campo negativo, sin embargo, a pesar de que se sabe que la convergencia es en tiempo finito, se puede observar que esta toma mucho tiempo en llevarse a cabo, problema que puede ser resuelto con una mejor elección de las ganancias del observador.

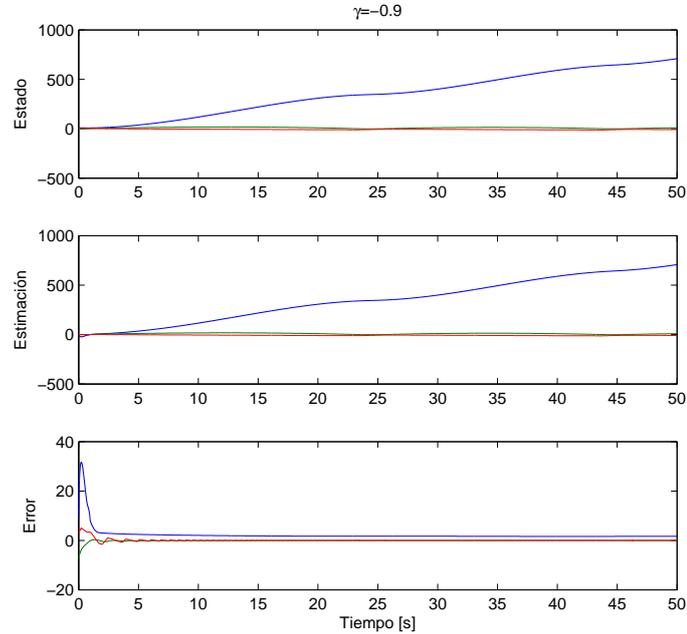


Figura 5.5: Caso general  $\gamma = -0.9$

## 5.2. Ejemplo.Caso triangular

Para el caso triangular se eligió el sistema lineal de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \\ 0.001 & -1.5 & -1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad H = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

en este caso solo se considera una salida y dicha salida es función de un solo estado, y de nuevo la matriz  $A$  define un sistema inestable con autovalores

$$\text{eig}(A) = [0.2385 \quad -0.5693 + 1.0712i \quad -0.5693 - 1.0712i]. \quad (5.6)$$

Y de nuevo con una realimentación de la salida el campo vectorial lineal del error de observación definido por  $F = A + HC$  es estable

$$F = \begin{bmatrix} -2.9 & 1 & 0 \\ -0.8 & 0 & 1 \\ -4.999 & -1.5 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

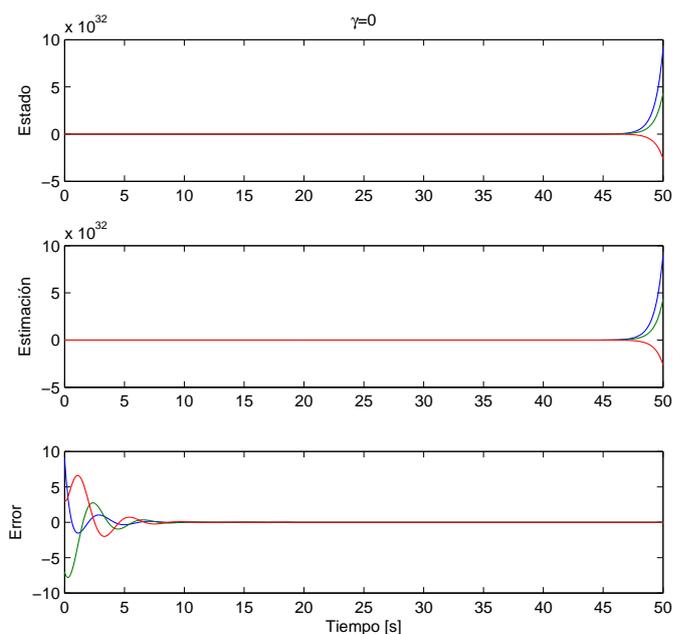
con autovalores

$$\text{eig}(F) = [-0.3201 + 1.7352i \quad -0.3201 - 1.7352i \quad -3.2599]. \quad (5.8)$$

El grado de homogeneidad de la salida se escoge como  $\delta_{h1} = r_1$  de forma que la salida sea lineal respecto a  $x_1$ , y los pesos de homogeneidad y grado de homogeneidad del campo vectorial se eligen como

$$r_i = n + (i - 1)\gamma, \quad \delta = \gamma, \quad (5.9)$$

con la intención de que para todo  $\gamma \in [-1, 0]$  el campo vectorial solo contenga términos con exponentes menores o iguales a 1 y que por lo tanto cumplan con la condición (4.12).



**Figura 5.6:** Caso triangular  $\gamma = 0$  (lineal).

En la Figura 5.6 se observa de nuevo que bajo un campo vectorial lineal generado por una matriz Hurwitz, el observador converge al estado del sistema.

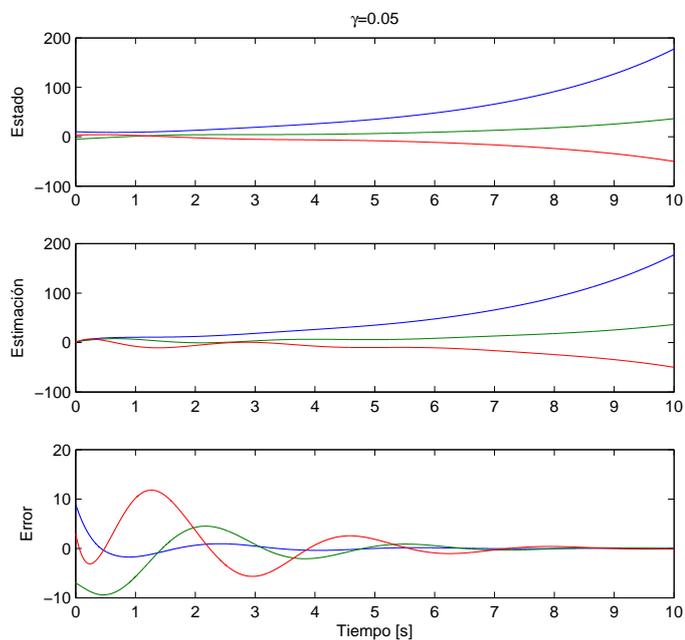


Figura 5.7: Caso triangular  $\gamma = 0.05$

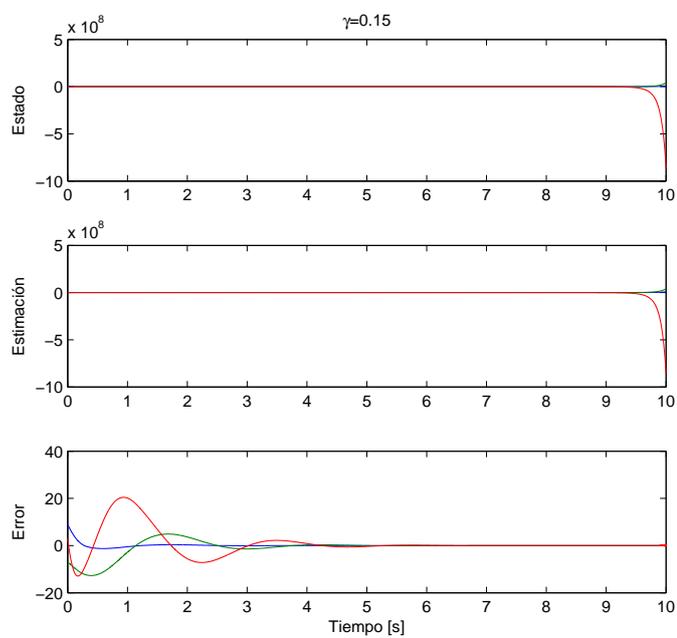
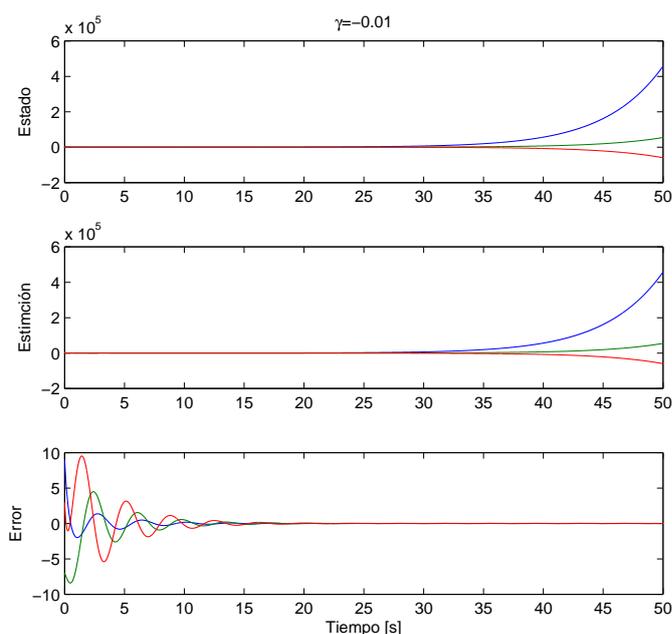


Figura 5.8: Caso triangular  $\gamma = 0.15$

## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

En las figuras 5.7 5.8 se puede observar que la estabilidad del origen de la dinámica del error se mantiene, sin embargo se observa de nuevo que la convergencia es solamente asintótica y las trayectorias del error convergen mas despacio a cero, sin embargo, como también ocurría en el caso anterior parece que bajo la misma condición inicial el grado de homogeneidad mayor converge mas rápido.



**Figura 5.9:** Caso triangular  $\gamma = -0.01$

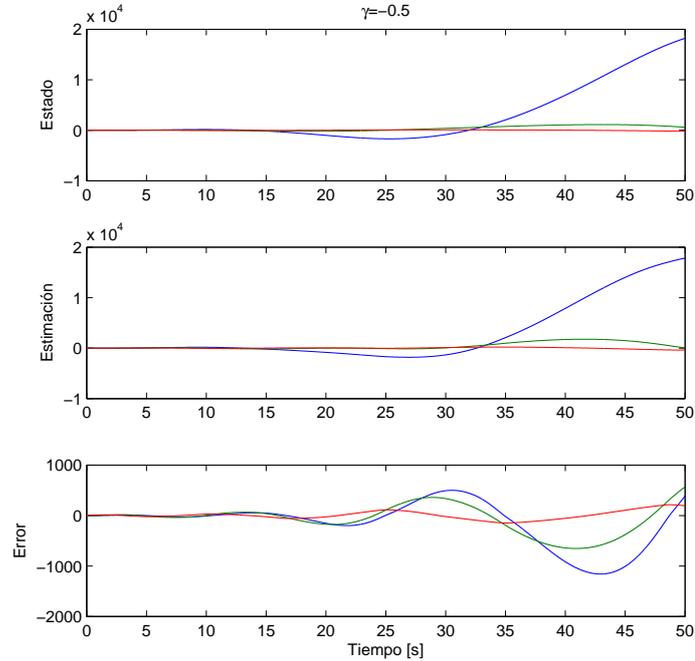
Se puede observar que para el sistema mostrado en 5.9 la estabilidad se conserva y por propiedades de homogeneidad se sabe que su convergencia es en tiempo finito, a pesar de parecer ser mas lenta que en el caso lineal (Figura 5.6).

De la Figura 5.10 se puede observar que para un conjunto de ganancias el observador no puede ser deformado indefinidamente, sin embargo bajos las condiciones presentadas en el capítulo anterior se pueden diseñar un observador tal que el error de observación converja a cero, para mostrarlo escogemos las ganancias como

$$H = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Y por lo tanto la realimentación queda

$$F = \begin{bmatrix} -2.9 & 1 & 0 \\ -4.8 & 0 & 1 \\ -4.999 & -1.5 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$



**Figura 5.10:** Caso triangular  $\gamma = -0.5$

con los autovalores en

$$\text{eig}(F) = \begin{bmatrix} -0.1625 + 1.6917i & -0.1625 - 1.6917i & -1.5750 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

sin embargo si se comparan los autovalores de esta nueva elección de ganancias, tienen parte real de menor magnitud que los autovalores anteriores, por lo que parece que los polos del sistema lineal no implican directamente resultados de estabilidad en los casos deformados, más aun si la deformación se aleja del caso lineal, ya que en la Figura 5.11 se observa que el error de observación es estable y el observador converge en tiempo finito al estado del sistema antes de los 10 segundos.

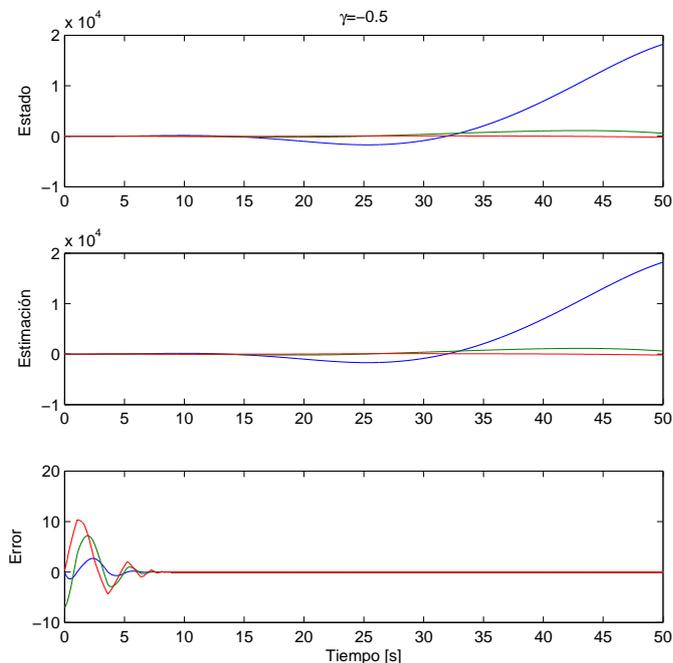


Figura 5.11: Caso triangular con nuevas ganancias  $\gamma = -0.5$

### 5.3. Ejemplo. Caso cadena de integradores

Este caso es el mas sencillo de estudiar de manera numérica ya que para una superficie  $S$  dada y suponiendo que las ganancias  $K$  y la matriz  $Q$  están ya definidas, entonces utilizando técnicas de optimización se pueden encontrar estimados de los conjuntos de valores de  $e_1$  para los cuales para un cierto valor de  $z$  sobre la superficie el producto  $e^T M(z)e$  deja de ser negativo.

Considerando el sistema y las ganancias del observador de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0] \quad H = \begin{bmatrix} -1.6 \\ -1.92 \\ -0.512 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

entonces en el caso lineal la dinámica del error de observación queda definida por la matriz

$$F = \begin{bmatrix} -1.6 & 1 & 0 \\ -1.92 & 0 & 1 \\ -0.512 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

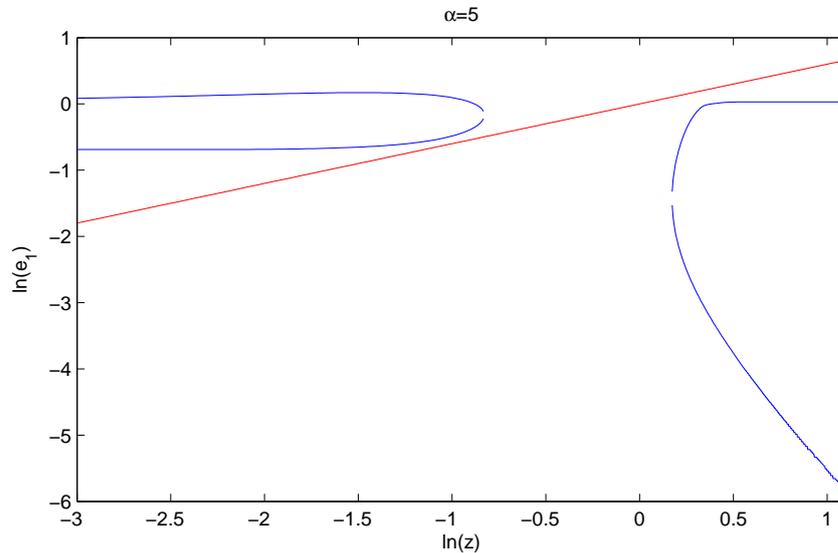
con autovalores

$$\text{eig}(F) = [-0.6279 + 1.0457i \quad -0.6279 - 1.0457i \quad -0.3441]. \quad (5.15)$$

De nuevo se considera que el grado de homogeneidad de la salida cumple  $\delta_{h1} = r_1$  de forma que la salida sea lineal respecto a  $x_1$ , y los pesos de homogeneidad y grado de homogeneidad como se mencionó en el capítulo anterior

$$r_i = 1 - (n - i)\alpha, \quad \delta = \alpha. \quad (5.16)$$

Entonces utilizando el método de multiplicadores de Lagrange mostrado en el apéndice se pueden calcular los valores máximos y mínimos de la variable  $e_1$  para los cuales el producto  $e^T M(z)e$  deja de ser negativo sobre la superficie  $S$  para todo valor de  $z$ , estos valores se pueden graficar como en las Figuras 5.13, 5.12 y delimitaran regiones en las cuales no se puede asegurar la convergencia del error al origen y de lo estudiado en el capítulo anterior se sabe que dichas regiones están contenidas dentro de las líneas azules y sobre ese mismo plano se pueden trazar rectas  $\ln |e_1| = \frac{n}{\alpha} \ln z$ , si estas rectas no entran nunca en las regiones contenidas por las líneas azules, entonces se puede asegurar que para ese valor del parámetro  $\alpha$  el observador converge al estado del sistema a observar.

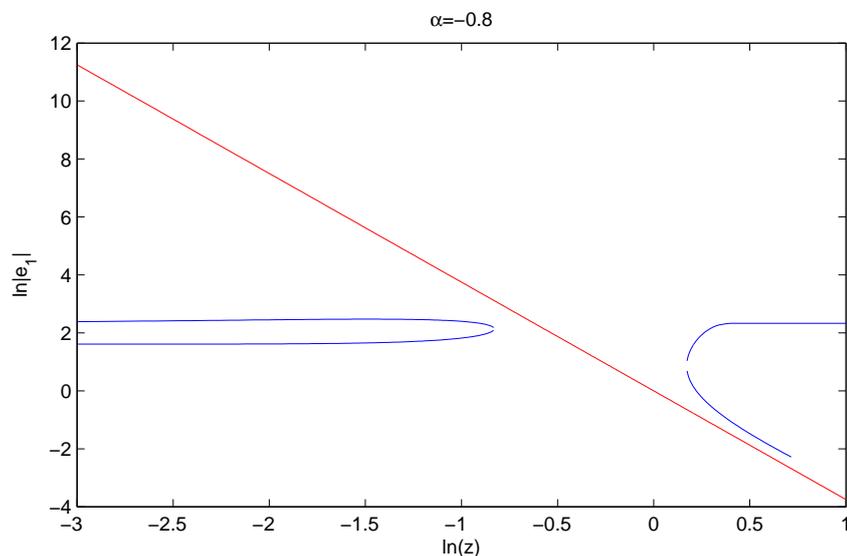


**Figura 5.12:** Conjunto de valores donde no se puede asegurar estabilidad(dentro de las curvas azules) para  $c = 1$  y recta  $\ln(e_1) = \frac{n}{\alpha} \ln z$  con  $\alpha = 5$  (en rojo).

De las Figuras 5.12, 5.13 se puede observar que distintas superficies generan también conjuntos distintos de valores de  $e_1$  para los cuales no se puede asegurar la estabilidad dada una matriz  $M(z)$  y se muestran dos casos distintos de grado de homogeneidad y

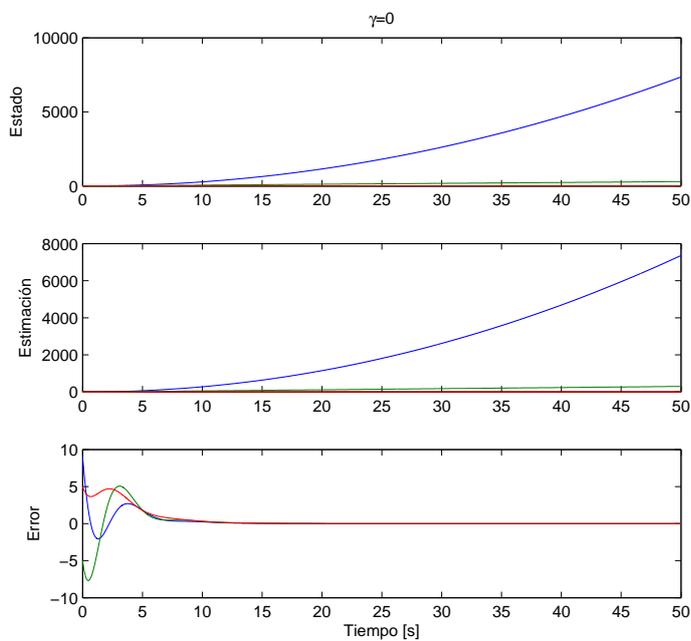
## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

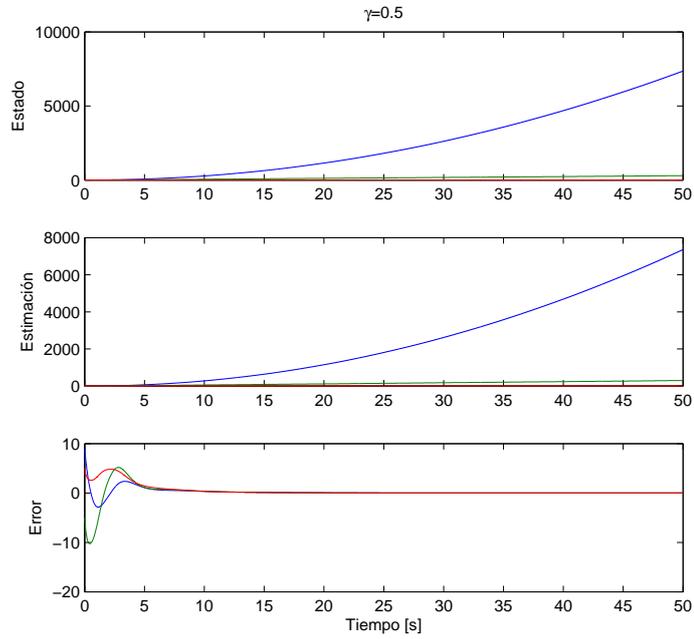


**Figura 5.13:** Conjunto de valores donde no se puede asegurar estabilidad (dentro de las curvas azules) para  $c = 10$  y recta  $\ln(e_1) = \frac{z}{\alpha} \ln z$  con  $\alpha = -0.8$  (en rojo).

superficies que permiten asegurar la estabilidad del origen en las coordenadas del error de observación bajo el campo vectorial deformado.



**Figura 5.14:** Cadena de Integradores  $\gamma = 0$  (lineal).

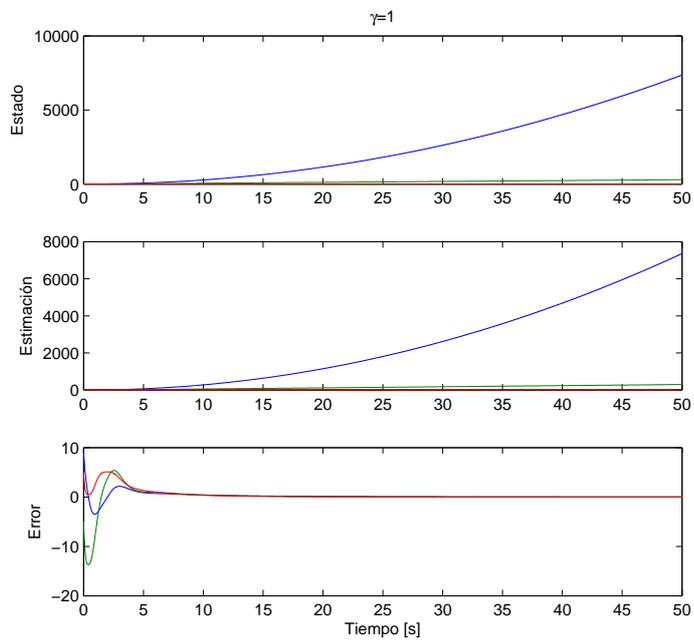


**Figura 5.15:** Cadena de Integradores  $\gamma = 0.5$ .

De las Figuras 5.15, 5.16 se puede observar que se mantiene la estabilidad del origen del error de observación para el sistema, sin embargo, se puede notar además que al aumentar el grado de homogeneidad en este caso, aumenta el fenómeno de pico.

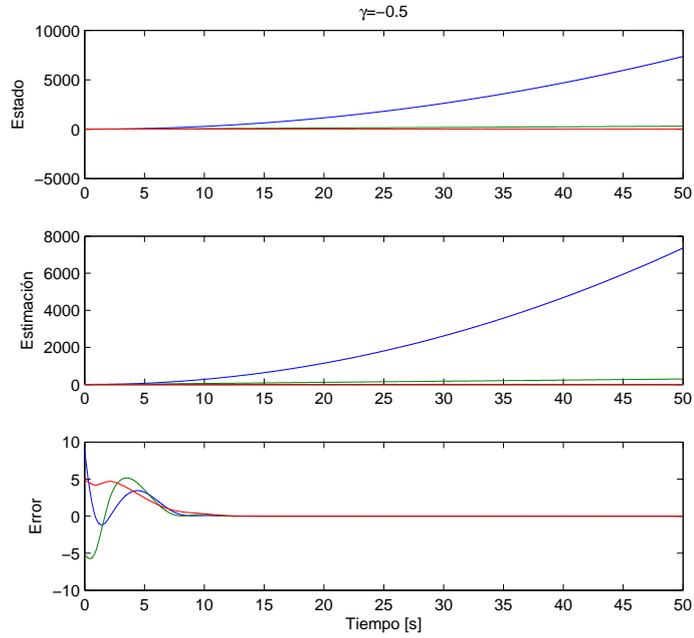
## 5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

---

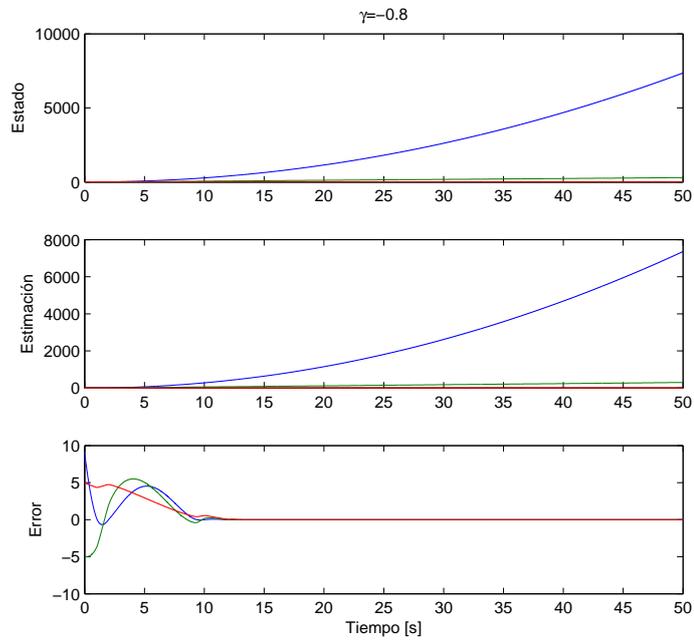


**Figura 5.16:** Cadena de Integradores  $\gamma = 1$ .

De las Figuras 5.17, 5.18 se observa que la convergencia se logra en tiempo finito y el fenómeno de pico disminuye bastante respecto a los casos con grado de homogeneidad positivo.



**Figura 5.17:** Cadena de Integradores  $\gamma = -0.5$ .



**Figura 5.18:** Cadena de Integradores  $\gamma = -0.8$ .



## Conclusiones

---

En este trabajo se extendió el resultado de estabilidad para sistemas lineales con retroalimentación homogénea del estado de [5] a deformaciones homogéneas continuas de sistemas lineales mas generales.

Se exploró la idea de Luenberger para la construcción de observadores de funciones del estado homogéneas, sin embargo la dificultad para encontrar solución a la ecuación diferencial parcial que surge detuvo que se estudiara mas allá, sin embargo no existe evidencia de que dicha ecuación no se pueda resolver o puede que existan distintas formas de abordar el problema.

Se presento una forma para construir observadores del estado completo para una clase de sistemas homogéneos y condiciones de suficiencia para que sistemas definidos dentro de una familia de deformaciones continuas de un sistema lineal pueda ser observado bajo una deformación del observador diseñado para el sistema lineal. Ambos resultados pueden ser útiles para la construcción de observadores para sistemas que puedan ser aproximados por sistemas homogéneos con términos no Lipschitz.

Se mostró además en simulaciones, que si bien resultados de estabilidad para el sistema lineal pueden ser extendidos a sistemas dentro de la deformación cercanos a la linealidad, el resultado puede fallar “lejos” de la linealidad y no existe relación directa entre los eigenvalores en el caso lineal y la estabilidad de los sistemas deformados

Sin embargo los resultados son topológicos y es posible asegurar muy poco respecto a la velocidad de convergencia de los observadores para sistemas deformados a partir del análisis del sistema lineal del cual surgen.



# Apéndice

---

Con el fin de encontrar formas de analizar el comportamiento de la dinámica del error en presencia del estado del sistema contenido en ella. Se puede asegurar que la función  $g = [\chi_i]^{q_{ki}} + [e_i - \chi_i]^{q_{ki}}$  tiene el mismo signo que el valor de la variable  $e_i$ , esto se puede mostrar analizando los valores de los componentes de la función, además en las Figuras A.1 y A.2 se puede observar este comportamiento de  $g$  para valores fijos de  $x$ .

Sea  $g = [x]^\beta + [e - x]^\beta$ , si  $e > x > 0$  entonces

$$g = |x|^\beta + |e - x|^\beta > 0, \quad \text{sign}(e) = \text{sign}(g), \quad (\text{A.1})$$

si  $x > e > 0$  entonces  $|x|^\beta > |e - x|^\beta$  y por lo tanto

$$g = |x|^\beta - |e - x|^\beta > 0, \quad \text{sign}(e) = \text{sign}(g), \quad (\text{A.2})$$

si  $e > 0, x < 0$  entonces  $|x|^\beta < |e - x|^\beta$  y por lo tanto

$$g = -|x|^\beta + |e - x|^\beta > 0, \quad \text{sign}(e) = \text{sign}(g), \quad (\text{A.3})$$

si  $e < x < 0$  entonces

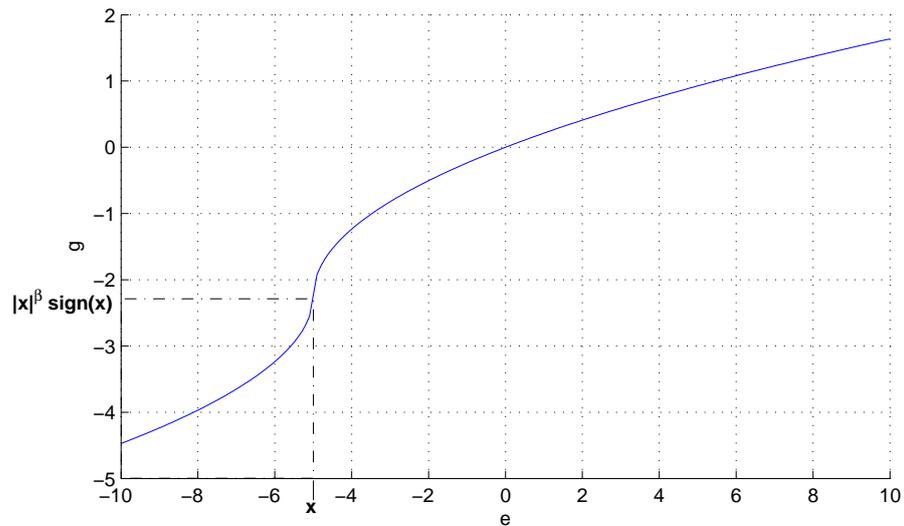
$$g = -|x|^\beta - |e - x|^\beta < 0, \quad \text{sign}(e) = \text{sign}(g), \quad (\text{A.4})$$

si  $x < e < 0$  entonces  $|x|^\beta > |e - x|^\beta$  y por lo tanto

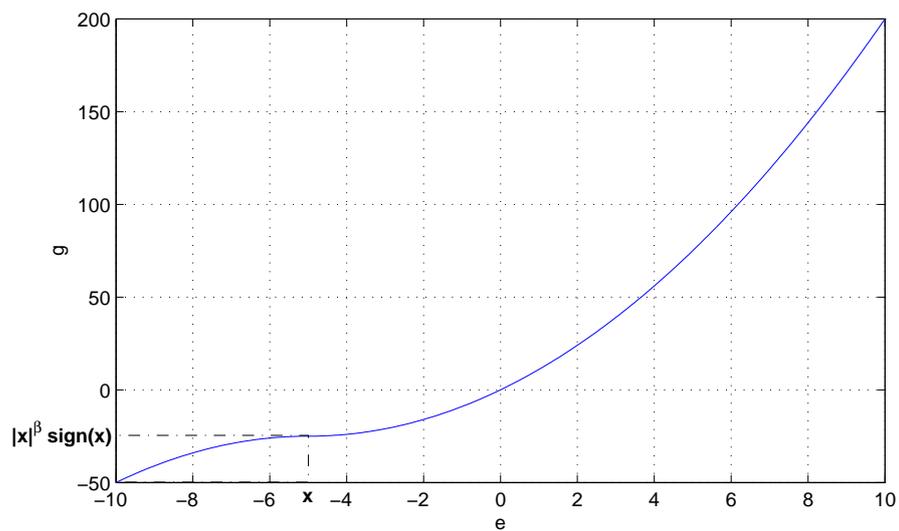
$$g = -|x|^\beta + |e - x|^\beta < 0, \quad \text{sign}(e) = \text{sign}(g), \quad (\text{A.5})$$

si  $e < 0$ ,  $x > 0$  entonces  $|x|^\beta < |e - x|^\beta$  y por lo tanto

$$g = |x|^\beta - |e - x|^\beta < 0, \quad \text{sign}(e) = \text{sign}(g), \quad (\text{A.6})$$



**Figura A.1:** Valor de  $g$  respecto a un valor fijo de  $x$  ( $\beta < 1$ )



**Figura A.2:** Valor de  $g$  respecto a un valor fijo de  $x$  ( $\beta > 1$ ).

## A.1. Parametrización de Superficies

El teorema espectral, que se puede encontrar en [9], garantiza que cualquier matriz cuadrada simétrica  $P$  con coeficientes reales es ortogonalmente diagonalizable, esto es

$$R^T P R = D, \quad (\text{A.7})$$

donde la matriz  $D$  es una matriz diagonal semejante a  $P$  y la matriz  $R$  es una matriz ortogonal llamada diagonalizadora. En este caso la matriz diagonalizadora está formada por una base ortonormal de vectores propios de la matriz  $P$ .

Entonces una superficie de un sistema de coordenadas  $e$  con la forma  $e^T P e = c^2$  se puede reescribir en otras coordenadas como

$$\varepsilon^T D \varepsilon = \sum_{i=1}^n d_i \varepsilon_i^2 = c^2 \quad (\text{A.8})$$

donde ambos sistemas de coordenadas están relacionados por la matriz  $R$  como

$$e = R^T \varepsilon. \quad (\text{A.9})$$

Y de la ecuación (A.8) se puede parametrizar fácilmente la superficie en las coordenadas  $\varepsilon$  de la forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{c}{\sqrt{d_1}} \prod_{j=1}^{n-1} \cos(\theta_j) \\ \varepsilon_i &= \frac{c}{\sqrt{d_i}} \sin(\theta_{i-1}) \prod_{j=i}^{n-1} \cos(\theta_j) \quad 1 < i < n, \\ \varepsilon_n &= \frac{c}{\sqrt{d_n}} \sin(\theta_{n-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

para valores de  $\theta_i \in [0, 2\pi]$ , cabe señalar que de este modo pueden existir conjuntos de valores de coordenadas de los ángulos  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$  que devuelven el mismo valor del vector  $e$  sobre la superficie, sin embargo es útil ya que reduce en uno la dimensión del espacio a estudiar.

## A.2. Extremos de funciones condicionadas

**Teorema 5** [14] Sea  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  definida en el conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , sean además  $g_1, g_2, \dots, g_m : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^1$  en  $U$ .

Sea

$$S = \{x \in U | g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (\text{A.11})$$

Si un punto  $x_0$  es un punto extremo condicionado de  $f$  en el conjunto  $S$  entonces existen  $m$  números reales  $\lambda_i$  tales que se cumple que

$$\nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Comúnmente a los números  $\lambda_i$  se les llama multiplicadores de Lagrange y al método que para encontrar extremos de funciones condicionadas se le llama método de multiplicadores de Lagrange.

De la ecuación (A.12) se pueden obtener  $n$  ecuaciones que junto a las  $m$  restricciones dan un sistema con  $m + n$  incógnitas y de la resolución de este sistema encontramos los puntos candidatos a ser extremos de la función condicionada.

#### A.2.0.1. Programa para el cálculo de las regiones de estabilidad caso cadena de integradores.

```
1 clc
2 clear all
3 % Programa de observador deformado cadena de integradores
4 % entradas (Q,K,c)
5 % K vector de ganancias del observador
6 % c tal que e'*P*e=c^2
7 % Q tal que A'*P+P*A=-Q
8 l=0.4;
9 K=[4*1 12*1*1 0.8*1*1*1];
10 n=length(K);
11 eps=1;
12 Q=eps*eye(n);
13 c=10;
14 % Definicion de todas las matrices
15 % matriz A0
16 A0=zeros(n,n);
17 for i=1:n
18 for j=1:n
```

```

19 if i==j+1
20 A0(j, i)=1;
21 end
22 end
23 end
24 % matriz C0
25 C0=[1 zeros(1, n-1)];
26 % Calculo de las matrices P y T
27 F=A0-K'*C0;
28 P=lyap(F', Q);
29 T=sqrtm(Q);
30 %% calculo de valores extremos para los cuales M(z)<0
31 syms z positive
32 for i=1:n
33 zeta(i)=z^i;
34 end
35 Lambda=diag(zeta);
36 v=C0';
37 w=P*(eye(n)-Lambda)*K';
38 eq=eps^2-2*eps*w'*v+(w'*v)^2-(w'*w);
39 raices=eval(solve(eq));
40 % elegir las raices
41 zmax=1000;
42 zmin=-1000;
43 for i=1:length(raices)
44 if raices(i)<1 && raices(i)>zmin
45 zmin=raices(i);
46 elseif raices(i)<zmax && raices(i)>1;
47 zmax=raices(i);
48 end
49 end
50 % Calculo de los eigenvectores asociados a los eigenvalores "movidos"
51 for i=1:n
52 zetamin(i)=zmin^i;
53 end
54 Lambdamin=diag(zetamin);

```

## A. APÉNDICE

---

```
55 wemin=P*(eye(n)-Lambdamin)*K';
56 Mmin=-Q+v*wemin'+wemin*v';
57 for i=1:n
58 zetamax(i)=zmax^i;
59 end
60 Lambdamax=diag(zetamax);
61 wemax=P*(eye(n)-Lambdamax)*K';
62 Mmax=-Q+v*wemax'+wemax*v';
63
64 % vectores mu
65 mumin=sqrt((wemin'*wemin)*(v)+(wemin));
66 mumax=sqrt((wemax'*wemax)*(v)+(wemax));
67
68 %% zonas de positividad sobre la superficie
69 % sobre la superficie sobre la cual se evalua
70 emaxup=(c/sqrt(mumax'*P*mumax))*mumax;
71 emaxdown=emaxup;
72 eminup=(c/sqrt(mumin'*P*mumin))*mumin;
73 emindown=eminup;
74 % vector que va a recorrer para graficas sobre z
75 dzeta=0.05:0.005:3;
76 % variables simbolicas para el calculo de los bordes de las
77 % regiones
78 syms els e2s e3s ni1 ni2 real
79 es=[els e2s e3s]';
80
81 la1down=0;
82 la2down=0;
83 la1up=1;
84 la2up=1;
85 %% parte de abajo de las curvas
86 for j=1:length(dzeta);
87 for i=1:n
88 dzetas(i)=dzeta(j)^i;
89 end
90 Lambdas=diag(dzetas);
```

```

91 ws=P*(eye(n)-Lambdas)*K';
92 Ms=-Q+v*ws'+ws*v';
93 eq1=es'*Ms*es;
94 eq2=es'*P*es-c^2;
95 eq3=(ni1*P(1,:)+ni2*Ms(1,:))*es+e1s;
96 eq4=(ni1*P(2,:)+ni2*Ms(2,:))*es;
97 eq5=(ni1*P(3,:)+ni2*Ms(3,:))*es;
98 if dzeta(j)<zmin
99 % calculo de los bordes
100 [a1, a2, a3, a4, a5]=vpasolve([eq1, eq2, eq3, eq4, eq5],[e1s, e2s, e3s,
    ni1, ni2],[emindown(1), emindown(2), emindown(3) la1down, la2down]);
101 emindown=[a1 a2 a3]';
102 la1down=a4;
103 la2down=a5;
104 [a1, a2, a3, a4, a5]=vpasolve([eq1, eq2, eq3, eq4, eq5],[e1s, e2s, e3s,
    ni1, ni2],[eminup(1), eminup(2), eminup(3) la1up, la2up]);
105 eminup=[a1 a2 a3]';
106 la1up=a4;
107 la2up=a5;
108 e1down(j)=emindown(1);
109 e1up(j)=eminup(1);
110
111 % parte donde M(z)<0
112 elseif dzeta(j)<zmax
113 e1up(j)=NaN;
114 e1down(j)=NaN;
115 else
116 % segunda optimizacion
117 [a1, a2, a3, a4, a5]=vpasolve([eq1, eq2, eq3, eq4, eq5],[e1s, e2s, e3s,
    ni1, ni2],[emaxdown(1), emaxdown(2), emaxdown(3) la1down, la2down]);
118 emaxdown=[a1 a2 a3]';
119 la1down=a4;
120 la2down=a5;
121 [a1, a2, a3, a4, a5]=vpasolve([eq1, eq2, eq3, eq4, eq5],[e1s, e2s, e3s,
    ni1, ni2],[emaxup(1), emaxup(2), emaxup(3) la1up, la2up]);
122 emaxup=[a1 a2 a3]';

```

## A. APÉNDICE

---

```
123 la1up=a4;
124 la2up=a5;
125 eldown(j)=emaxdown(1);
126 elup(j)=emaxup(1);
127
128 end
129 end
130
131 %% graficas
132 alfamin=-0.8;
133 alfamax=5;
134
135 for j=1:length(dzeta)
136 lndzeta(j)=log(dzeta(j));
137 lnelup(j)=log(elup(j));
138 lneldown(j)=log(eldown(j));
139 lnabemax(j)=(n/alfamax)*lndzeta(j);
140 lnabemin(j)=(n/alfamin)*lndzeta(j);
141 end
142 figure
143 plot(lndzeta,lnelup);
144 hold on
145 plot(lndzeta,lneldown);
146 plot(lndzeta,lnabemax,'r');
147 plot(lndzeta,lnabemin,'r');
```

## Bibliografía

---

- [1] V. Andrieu. Convergence speed of nonlinear luenberger observers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(5):2831–2856, 2014. [7](#)
- [2] V. Andrieu and L. Praly. On the existence of a kazantzis–kravaris/luenberger observer. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(2):432–456, 2006. [7](#)
- [3] M. T. Angulo, J. A. Moreno, and L. Fridman. An exact and uniformly convergent arbitrary order differentiator. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 7629–7634. IEEE, 2011.
- [4] A. Bacciotti and L. Rosier. *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media, 2006. [8](#), [10](#), [11](#)
- [5] S. P. Bhat and D. S. Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17(2):101–127, 2005. [2](#), [7](#), [9](#), [10](#), [11](#), [47](#)
- [6] W. Hahn. *Stability of motion*, volume 138. Springer, 1967. [1](#)
- [7] H. Hermes. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. *Differential equations stability and control*, 109:249–260, 1991. [1](#)
- [8] N. Kazantzis and C. Kravaris. Nonlinear observer design using lyapunov’s auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34(5):241–247, 1998. [6](#)
- [9] S. Lang. *Linear Algebra*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer, 1987. [51](#)
- [10] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384, 1998. [26](#)
- [11] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10):924–941, 2003. [26](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *Military Electronics, IEEE Transactions on*, 8(2):74–80, 1964. [2](#), [5](#)
- [13] D. G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 11(2):190–197, 1966. [2](#), [5](#)
- [14] J. E. Marsden and A. Tromba. *Vector calculus*. Macmillan, 2003. [51](#)
- [15] W. Perruquetti and T. Floquet. Homogeneous finite time observer for nonlinear systems with linearizable error dynamics. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 2007. [2](#)
- [16] L. Rosier. Homogeneous lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems & Control Letters*, 19(6):467–473, 1992. [1](#)
- [17] E. Ryan. Universal stabilization of a class of nonlinear systems with homogeneous vector fields. *Systems & Control Letters*, 26(3):177–184, 1995. [1](#)