



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**INVERSIÓN DE DATOS GRADIOMÉTRICOS EN TRES
DIMENSIONES PARA ESTIMAR LA GEOMETRÍA DE
CUERPOS SALINOS**

TESIS

Que para obtener el título de
INGENIERO GEOFÍSICO

P R E S E N T A
ANDRÉS ALBERTO AMBROS VARGAS



DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ CARLOS ORTIZ ALEMÁN

Ciudad Universitaria, 2016

A mi madre

Quien trabajo más que nadie para hacer posible este trabajo

Agradecimientos

A mi familia

Porque todos ustedes colaboraron de alguna manera en este logro

A mis amigos

Quienes fueron mi segunda familia durante el curso de mis estudios

A mis compañeros del Instituto Mexicano del Petróleo

Por su compañía y ayuda en la elaboración de este trabajo

Al Instituto Mexicano del Petróleo

Por la facilitación de sus instalaciones y el apoyo económico brindado

Índice

Resumen.....	iv
Abstract	v
Objetivos	vi
General	vi
Específicos.....	vi
Justificación	vi
1. Introducción	1
2. Marco teórico	3
Campos potenciales	3
Ley de la Gravitación Universal	4
Campo gravitacional de un prisma.....	4
Campo gradiométrico	5
Campo gradiométrico de un prisma	6
Deconvolución Tensorial de Euler.....	7
Deconvolución Tensorial de Euler e integración de campos potenciales.....	8
Teoría de inversión	10
Función de costo o desajuste	11
Linealidad, estabilidad y unicidad	12
Métodos de inversión local y global	13
Cristalización Simulada	13
3. Modelos sintéticos.....	18
Modelo S.....	18
Modelado directo.....	19
Generación del modelo inicial	21
Inversión por cristalización simulada	26

Dique	26
Modelo S	36
4. Inversión de datos del Domo Vinton	44
Ubicación	44
Adquisición de datos	44
Correcciones.....	45
Descripción Geológica	45
Procesos aplicados a los datos de gravimetría.....	46
Cálculo del residual de la componente vertical del campo gravitacional.....	47
Calculo de las componentes horizontales gravitacionales	47
Deconvolución Tensorial de Euler.....	51
Generación del Modelo Inicial.....	54
Inversión por Cristalización Simulada	58
5. Conclusiones	65
Bibliografía	68

Resumen

Este trabajo propone un modelo tridimensional del Domo Vinton (ubicado al sureste de los Estados Unidos, en el estado de Luisiana) estimado través de la inversión de datos gravimétricos y gradiométricos mediante Cristalización Simulada. El modelo inicial requerido por dicho algoritmo es obtenido con la Deconvolución Tensorial de Euler, utilizando los elementos de la diagonal del tensor gradiométrico y las tres componentes del campo gravitacional. Las primeras delimitan los bordes de la fuente en tanto que las segundas se utilizan para corregir las profundidades.

Las componentes horizontales del campo gravitacional fueron calculadas y su contenido de números de onda enriquecido. Esto permitió posteriormente plantear una función de costo que incluyera el desajuste de los 9 grupos de datos disponibles. Además, el problema directo fue paralelizado, lo que redujo el tiempo de cómputo y posibilitó obtener un mejor ajuste al realizar dos inversiones. La segunda inversión fue optimizada aplicando un filtro de mediana al modelo inicial y utilizando un intervalo óptimo de temperatura. Finalmente, el modelo obtenido genera un grupo de datos gravimétricos y gradiométricos que se asemejan en gran medida a los datos reales.

Abstract

This work proposes a methodology to estimate Vinton Dome's structure by using gravity and gravity gradiometry data. For this, Tensor Euler Deconvolution was applied so as to provide an initial model by using the diagonal elements of the gradiometry tensor and the three components of the gravity field. The first set of data allows delimiting horizontal boundaries while the second one improves depth estimation. After this, Simulated Annealing algorithm was used in order to yield the initial model to the Vinton Dome's real shape.

The horizontal components of gravity field were calculated and its wave number content was improved, which granted the possibility of formulating a cost function that depended of all available data sets. Furthermore, the direct problem was parallelized to reduce computation time and to perform the inversion algorithm faster. Moreover, the second execution of this one was enhanced by applying a median filter and an optimal temperature interval. Finally, the outcome of both inversions had a response that is remarkably similar to the real data.

Objetivos

General

Obtener un modelo tridimensional que represente un cuerpo salino a través de la inversión de datos gravimétricos utilizando el método de cristalización simulada.

Específicos

- Generar un modelo inicial mediante la Deconvolución Tensorial de Euler utilizando la diagonal del tensor gradiométrico y las tres componentes gravimétricas.
- Proponer una metodología para realizar inversión por Cristalización Simulada utilizando las tres componentes del campo gravitacional y las seis del tensor gradiométrico.

Justificación

La obtención de modelos tridimensionales de cuerpos en el subsuelo a través de métodos potenciales permite mejorar los resultados de la exploración petrolera en áreas donde otras prospecciones presentan dificultades. Tal es el caso de la prospección sísmica aplicada en regiones en donde existen cuerpos salinos, los cuales debido a sus características de velocidad son difíciles de modelar.

La delimitación de la geometría de dichos cuerpos a través de la inversión de datos gravimétricos facilita y complementa la definición de la estructura del subsuelo. Además, el enriquecimiento de dicha inversión con datos gradiométricos promete la obtención de un modelo más apegado a la realidad.

1. Introducción

Los diferentes métodos de exploración geofísica poseen ventajas y desventajas con base en las propiedades físicas de la zona de estudio y del objetivo. Los cuerpos de sal, por ejemplo, ocasionan por un lado dificultades en la prospección sísmica por su contraste de impedancia en tanto que su diferencia de densidad con el terreno genera una anomalía gravimétrica. Debido a ello, la adquisición de datos potenciales gravimétricos se vuelve relevante para modelar estos cuerpos salinos.

La obtención de datos gradiométricos es un recurso adicional a la exploración gravimétrica. Estos resultan útiles a causa de su inherente contenido de altas frecuencias las cuales proporcionan información con mayor resolución de las estructuras someras del terreno, por el contrario los efectos de cuerpos profundos o regionales tienen un impacto mucho menor en las mediciones.

A pesar de esto, los datos de gradiometría no han sido explotados tan ampliamente como los de gravimetría. Esto se debe en parte a la escasez de levantamientos de este tipo así como de técnicas que permitan extraer de los datos información del subsuelo. Por estas razones, este trabajo propone una serie de métodos para aprovechar los datos del tensor gradiométrico.

En la primera parte de este trabajo se propone utilizar la Deconvolución Tensorial de Euler desarrollada por Zhang y colaboradores (2000) en lugar de la Deconvolución de Euler convencional con el propósito de utilizar la información extra del tensor gradiométrico. Asimismo, se extiende el trabajo de Zapotitla Román (2016) sobre la integración de los campos gravitacional y gradiométrico para obtener así un mejor conjunto de ubicaciones para las fuentes.

El punto más importante de este proyecto es la inversión de datos, en la cual se plantea una función de costo que utiliza todos los datos disponibles (gravimetría y gradiometría) y que por lo tanto genera un modelo más verosímil, que satisface nueve juegos de datos reales en lugar de uno solo. La modelación del domo salino se realiza utilizando un ensamble de prismas cuyo volumen aumenta con la profundidad. Esto es así ya que la parte somera es más sensible a los cambios de densidad. En contraparte, para generar respuestas de magnitudes similares causados por la región profunda se requieren volúmenes de roca mayores. Este comportamiento se debe al decaimiento con la distancia de observación de los campos potenciales.

Un inconveniente de este método es que el volumen de información crece con cada componente adicional utilizada, por lo que la implementación de cómputo en paralelo es necesaria para resolver dicha cuestión. De esta forma, la generación de las matrices de sensibilidades utilizadas durante la inversión así como el cálculo iterativo del problema directo presente en ésta fueron optimizadas con OpenMP.

Otra propuesta de este trabajo es el enriquecimiento de números de onda de señales, en particular de información proveniente de gravimetría y gradiometría. En este trabajo se utilizan dos señales calculadas que deben representar lo mismo pero que tienen un contenido diferente de frecuencias para crear una tercera con mayor calidad.

Para poder verificar el adecuado funcionamiento de las diferentes propuestas de este trabajo se utilizan datos reales que ya han sido estudiados rigurosamente. Así, los datos del Domo Vinton posibilitan afrontar los retos de procesar datos reales a la vez que se poseen numerosos estudios previos para comparar los resultados obtenidos.

2. Marco teórico

Campos potenciales

De acuerdo a Blakely (1996) los campos son funciones, que por lo general describen el comportamiento de una propiedad o fuerza a través del espacio y/o el tiempo, clasificables de acuerdo al tipo de propiedad que describen en escalares y vectoriales. Un campo escalar se compone de una sola función, mientras que un campo vectorial posee una función por cada una de sus componentes, esto se ilustra con las ecuaciones 1 y 2 las cuales se muestran a continuación:

$$f = f(x, y, z), \quad (1)$$

$$\vec{F} = f_x(x, y, z)\hat{i} + f_y(x, y, z)\hat{j} + f_z(x, y, z)\hat{k}. \quad (2)$$

En este trabajo se utilizarán campos vectoriales cuyas componentes se refieren a las coordenadas cartesianas.

Los campos escalares pueden clasificarse en solenoidales, conservativos, armónicos o complejos de acuerdo a sus relaciones con los operadores divergencia y rotacional como se ilustra en la tabla 1.

	$\nabla \times \vec{F} = 0$	$\nabla \times \vec{F} \neq 0$
$\nabla \cdot \vec{F} = 0$	Armónico	Solenoidal
$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$	Conservativo	Complejo

Tabla 1. Clasificación de los campos vectoriales de acuerdo a su rotacional y divergencia.

Los campos conservativos cumplen la propiedad de que el trabajo requerido para mover una partícula de un punto a otro a través de sus líneas de fuerza es independiente de la trayectoria, lo cual implica que éstos pueden ser expresados a partir de un campo escalar al que se le denomina función potencial. Esta relación se observa en la ecuación 3:

$$\vec{F} = \nabla\phi(x, y, z). \quad (3)$$

Los campos armónicos también tienen una función potencial la cual además cumple la ecuación de Laplace mostrada en la igualdad 4:

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (4)$$

El significado físico de la expresión 4 es que en la región del espacio en donde ésta se cumpla no existirán máximos ni mínimos locales. Esto implica que los valores máximos y mínimos absolutos de la función potencial pueden ubicarse sólo en los límites de la región de interés. (Blakely, 1996).

Ley de la Gravitación Universal

El campo gravitacional terrestre es un campo vectorial conservativo que ocasiona la atracción entre la tierra y las masas cercanas. En 1678 Isaac Newton postuló que la magnitud de la fuerza de atracción entre dos cuerpos debido a su masa es directamente proporcional a la masa de ambos cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, ésta es conocida como la Ley de Newton. A partir de ella es posible calcular la atracción gravitacional en un punto cualquiera del espacio ocasionada por la masa de una partícula, como se muestra en la ecuación 5:

$$g(x, y, z) = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{r}, \quad (5)$$

en donde (x, y, z) son las coordenadas de un punto cualquiera del espacio, r representa las distancias entre la fuente y los puntos de observación, γ es la Constante de Gravitación Universal ($\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$) y \hat{r} es vector radial de las coordenadas esféricas. A pesar de que la atracción gravitacional es una aceleración y sus unidades de acuerdo al Sistema Internacional (SI) deben ser $\frac{m}{s^2}$ en el ámbito geofísico las unidades de este campo suelen ser los $[mGal]$, los cuales derivan de la unidad del sistema CGS en el cual $1 [Gal] = 1 \frac{cm}{s^2}$. La equivalencia entre mGal y las unidades del SI es $1 [mGal] = 10^{-5} \frac{m}{s^2}$.

Al tratarse de un campo conservativo, éste tiene una función potencial la cual se expresa en la ecuación 6:

$$U(x) = \gamma \frac{m}{r}. \quad (6)$$

Campo gravitacional de un prisma

De acuerdo a Blakely (1996) el potencial gravitacional de una distribución de masa cualquiera se puede obtener a partir de la integral de volumen de las diferenciales de masa, como se muestra en la ecuación 7:

$$U(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{dm}{r}. \quad (7)$$

Ésta es la expresión general para obtener el potencial gravitacional de cualquier cuerpo, incluyendo aquellos de geometría simple como es el caso de un prisma rectangular.

Gracias al Principio de Superposición es posible utilizar un ensamble de prismas para aproximar el campo potencial y gravitacional de un cuerpo con geometría complejo, por lo que es relevante obtener la expresión que nos permita realizar esto. La ecuación 8 publicada por Blakely (1996) sirve

para calcular la atracción gravitacional en la dirección vertical (z) causada por un prisma con densidad constante, ésta se muestra a continuación:

$$g_z(x, y, z) = \gamma \rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} dx' dy' dz', \quad (8)$$

en donde los apóstrofes indican regiones del espacio en las que existe la fuente.

Dado que un cuerpo con geometría compleja se compondrá de muchos prismas y que un levantamiento gravimétrico requerirá numerosas observaciones, resulta conveniente transformar la expresión 8 para su cálculo en una computadora. Dicha ecuación debe permitir calcular la atracción gravitacional vertical de un prisma en cualquier punto del espacio. Para ello es conveniente que la magnitud calculada dependa sólo de la densidad del prisma y las distancias entre el punto de observación y las caras de éste. Entonces, si se hacen variar las distancias a las caras se puede calcular la atracción de un mismo prisma en diferentes puntos de observación. De esta forma, aplicando de nuevo el Principio de Superposición se puede obtener a atracción de un cuerpo complejo en toda una malla de observaciones. Con estas consideraciones se construye a la ecuación 9:

$$g_z = \gamma \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[z_k \arctan\left(\frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}}\right) - x_i \log(R_{ijk} + y_j) - y_j \log(R_{ijk} + x_i) \right], \quad (9)$$

en la que x_i , y_j y z_k representan las distancias entre las caras del prisma y el punto de observación, $R_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}$ y $\mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$.

El campo gravitacional tiene además de la componente vertical dos componentes horizontales g_x y g_y las cuales pueden ser calculadas por expresiones similares a la ecuación 9 y que se muestran en las ecuaciones 10 y 11 (Couder-Castañeda y colaboradores. 2015):

$$g_x = \gamma \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[x_k \arctan\left(\frac{y_j z_k}{x_i R_{ijk}}\right) - y_j \log(R_{ijk} + z_k) - z_k \log(R_{ijk} + y_j) \right], \quad (10)$$

$$g_y = \gamma \rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[y_j \arctan\left(\frac{x_i z_k}{y_j R_{ijk}}\right) - x_i \log(R_{ijk} + z_k) - z_k \log(R_{ijk} + x_i) \right]. \quad (11)$$

Campo gradiométrico

La derivación espacial del campo gravitacional proporciona como resultado el tensor gradiométrico, en dicha expresión los elementos de primer renglón corresponden a las derivadas espaciales de la

componente g_x , el segundo a las derivadas de g_y y el tercero a las de g_z . Tal y como se muestra en la ecuación 12:

$$T = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

La matriz obtenida es simétrica, por lo que $T_{yx} = T_{xy}$, $T_{zx} = T_{xz}$ y $T_{zy} = T_{yz}$. Así, es posible caracterizar el tensor con únicamente 6 componentes. Las unidades del SI que corresponderían a esta magnitud serían $\left[\frac{1}{s^2}\right]$, sin embargo al igual que ocurre con la gravimetría se utilizan otras unidades, en la práctica se usa el Eotvos [E] el cual corresponde a $1 \left[\frac{nGal}{cm}\right]$.

Campo gradiométrico de un prisma

Al igual que con el campo gravitacional, resulta útil calcular la respuesta de un prisma rectangular para después calcular el comportamiento de cuerpos más complejos. Esto se puede lograr calculando las segundas derivadas de la ecuación 7 aplicada a un prisma.

De esta forma es posible obtener las ecuaciones 13, 14, 15, 16, 17 y 18:

$$T_{xx} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \arctan\left(\frac{y_j z_k}{x_i R_{ijk}}\right), \quad (13)$$

$$T_{yy} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \arctan\left(\frac{x_i z_k}{y_j R_{ijk}}\right), \quad (14)$$

$$T_{zz} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \arctan\left(\frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}}\right), \quad (15)$$

$$T_{xy} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \log(z_k + R_{ijk}), \quad (16)$$

$$T_{xz} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \log(y_k + R_{ijk}), \quad (17)$$

$$T_{yz} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \log(x_i + R_{ijk}), \quad (18)$$

las cuales fueron utilizadas por Li y Chouteau (1998) y Couder-Castañeda y colaboradores (2015). Éstas al igual que las ecuaciones 9, 10 y 11 sólo requieren conocer la distancia entre el punto de observación y las 6 caras del prisma.

Deconvolución Tensorial de Euler

En 1982 Thompson propuso un método para estimar profundidades de las fuentes de campos potenciales (gravitacional y magnético) el cual hace uso de la relación de homogeneidad de Euler y que ahora es conocido como Deconvolución de Euler. Él propuso inicialmente su utilización para datos en una dimensión, posteriormente Reid y colaboradores (1990) presentaron un estudio de caso en el que se aplica la Deconvolución de Euler en dos dimensiones. Después, Zhang y colaboradores (2000) extendieron este procedimiento para aplicarlo no sólo a los gradientes de la componente vertical del campo gravitacional, sino al tensor completo del mismo, denominaron a este algoritmo Deconvolución Tensorial de Euler.

La relación de homogeneidad de Euler se aplica a campos escalares, como lo son las funciones potenciales de campos vectoriales, tales como la atracción gravitacional. Se dice que una función es homogénea y de grado N si se cumple la relación mostrada en la ecuación 19:

$$\alpha^N \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \quad (19)$$

en donde $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa a una función de n variables y α es una constante. Derivando la expresión 19 con respecto α se obtiene la ecuación 20:

$$N\alpha^{N-1}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}. \quad (20)$$

Asumiendo $\alpha = 1$ y recordando que trabajaremos en coordenadas cartesianas, esto es $\phi = \phi(x, y, z)$, podemos obtener la ecuación 21:

$$\vec{r} \cdot \nabla\phi = -N\phi, \quad (21)$$

en la que $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ y representa la distancia entre la fuente y los puntos de observación. Esta expresión es conocida como Ecuación de Homogeneidad de Euler. Finalmente si se expande la ecuación 21 se puede llegar a la ecuación 22:

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z} = -Nf. \quad (22)$$

Thompson (1982) indica que la aplicación directa de la ecuación anterior no es útil debido principalmente a que las anomalías están afectadas por fuentes cercanas y a que éstas no suelen ser causadas por fuentes puntuales. Para resolver estos problemas él propone utilizar diferentes índices estructurales y observar la agrupación de los mismos así como considerar el campo observado como la suma de un campo debido a la fuente y una perturbación, constante en la ventana de observación, denominada campo ambiental. Tal y como se muestra en la ecuación 23:

$$\phi(\vec{r}) = \Delta\phi(\vec{r}) + B. \quad (23)$$

Con esta consideración la ecuación 22 se transformaría en la ecuación 24:

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z} = -Nf + NB. \quad (24)$$

Este resultado corresponde al utilizado por Reid y colaboradores (1990) en el cual se tienen 4 incógnitas (la posición de la fuente y el campo ambiental), por lo que se requieren al menos 4 puntos de observación para resolver el sistema que tendría la forma mostrada en la ecuación 25:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & N \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} & \frac{\partial f_m}{\partial y} & \frac{\partial f_m}{\partial z} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + z_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + Nf_1 \\ x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + y_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + z_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + Nf_2 \\ \vdots \\ x_m \frac{\partial f_m}{\partial x} + y_m \frac{\partial f_m}{\partial y} + z_m \frac{\partial f_m}{\partial z} + Nf_m \end{pmatrix}, \quad (25)$$

en donde m es el número de puntos de observación.

Deconvolución Tensorial de Euler e integración de campos potenciales

La Deconvolución Tensorial de Euler propuesta por Zhang y colaboradores (2008) plantea la utilización de las componentes horizontales del campo gravitacional. Para ello proponen, en lugar de utilizar únicamente la expresión 24, las ecuaciones 26, 27 y 28:

$$x_0 T_{xx} + y_0 T_{xy} + z_0 T_{xz} + NB_x = x T_{xx} + y T_{xy} + z T_{xz} + NT_x, \quad (26)$$

$$x_0 T_{yx} + y_0 T_{yy} + z_0 T_{yz} + NB_y = x T_{yx} + y T_{yy} + z T_{yz} + NT_y, \quad (27)$$

$$x_0 T_{zx} + y_0 T_{zy} + z_0 T_{zz} + NB_z = x T_{zx} + y T_{zy} + z T_{zz} + NT_z. \quad (28)$$

En este nuevo procedimiento se tienen 6 ecuaciones por cada punto de observación y 6 incógnitas: las coordenadas de la fuente y las tres componentes del campo ambiental.

El trabajo de Zapotitla Román (2016) considera la combinación de la Deconvolución de Euler aplicada al campo gradiométrico y gravimétrico para obtener una mejor ubicación espacial de las fuentes, en él se calculan las soluciones de la componente T_{zz} y su profundidad es corregida utilizando la componente vertical g_z . De manera similar en este trabajo se utiliza la Deconvolución Tensorial de Euler aplicada a la gradiometría y a la gravimetría, primero se delimitan las fuentes en planta con T_{xx} , T_{yy} y T_{zz} para posteriormente corregir sus profundidades con las tres componentes del campo gravitacional.

A continuación, se desglosarán las ecuaciones utilizadas para calcular la posición de las fuentes así como para la corrección de profundidades, para simplificar se considerará:

$$\bar{g} = \nabla\phi, \quad (29)$$

$$\bar{g} = g_x\hat{i} + g_y\hat{j} + g_z\hat{k}, \quad (30)$$

además de $F = \frac{\partial g_x}{\partial x}$, $G = \frac{\partial g_y}{\partial y}$ y $H = \frac{\partial g_z}{\partial z}$.

Con estas consideraciones, y utilizando las ecuaciones 26, 27 y 28, se pueden formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_0F_x + y_0F_y + z_0F_z + NB_{xx} = xF_x + yF_y + zF_z + NF, \quad (31)$$

$$x_0G_x + y_0G_y + z_0G_z + NB_{yy} = xG_x + yG_y + zG_z + NG, \quad (32)$$

$$x_0H_x + y_0H_y + z_0H_z + NB_{zz} = xH_x + yH_y + zH_z + NH, \quad (33)$$

Estas tres ecuaciones se pueden escribir en forma matricial, como se muestra en la ecuación 34:

$$\begin{pmatrix} F_x^1 & F_y^1 & F_z^1 & N & 0 & 0 \\ G_x^1 & G_y^1 & G_z^1 & 0 & N & 0 \\ H_x^1 & H_y^1 & H_z^1 & 0 & 0 & N \\ F_x^2 & F_y^2 & F_z^2 & N & 0 & 0 \\ G_x^2 & G_y^2 & G_z^2 & 0 & N & 0 \\ H_x^2 & H_y^2 & H_z^2 & 0 & 0 & N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_x^m & F_y^m & F_z^m & N & 0 & 0 \\ H_x^m & H_y^m & H_z^m & 0 & N & 0 \\ H_x^m & H_y^m & H_z^m & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ B_{xx} \\ B_{yy} \\ B_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xF_x^1 + yF_y^1 + zF_z^1 + NF \\ xG_x^1 + yG_y^1 + zG_z^1 + NG \\ xH_x^1 + yH_y^1 + zH_z^1 + NH \\ xF_x^2 + yF_y^2 + zF_z^2 + NF \\ xG_x^2 + yG_y^2 + zG_z^2 + NG \\ xH_x^2 + yH_y^2 + zH_z^2 + NH \\ \vdots \\ xF_x^m + yF_y^m + zF_z^m + NF \\ xG_x^m + yG_y^m + zG_z^m + NG \\ xH_x^m + yH_y^m + zH_z^m + NH \end{pmatrix} \cdot (34)$$

La expresión matricial mostrada en la ecuación 34 corresponde a la Deconvolución Tensorial de Euler aplicada al campo gradiométrico así, empleando T_{xx} , T_{yy} y T_{zz} y sus derivadas se obtienen x_0 , y_0 , z_0 , B_{xx} , B_{yy} y B_{zz} , las cuales son variables que representan la posición de las fuentes y el campo ambiental. De estas soluciones se conservan únicamente las coordenadas x_0 y y_0 , ya que éstas corresponden con la posición en planta de las fuentes.

El siguiente paso es utilizar las coordenadas obtenidas para calcular la profundidad utilizando ahora las tres componentes del campo gravitacional. Para ello es necesario primero calcular las componentes del cambio ambiental gravitacional, para ello se realiza la Deconvolución de Euler de las Tres componentes gravitacionales. Las ecuaciones a resolver son las siguientes:

$$x_{g0}g_{xx} + y_{g0}g_{xy} + z_{g0}g_{xz} + N_g B_{gx} = xg_{xx} + yg_{xy} + zg_{xz} + N_g g_x, \quad (35)$$

$$x_{g0}g_{yx} + y_{g0}g_{yy} + z_{g0}g_{yz} + N_g B_{gy} = xg_{yx} + yg_{yy} + zg_{yz} + N_g g_y, \quad (36)$$

$$x_{g0}g_{zx} + y_{g0}g_{zy} + z_{g0}g_{zz} + N_g B_{gz} = xg_{zx} + yg_{zy} + zg_{zz} + N_g g_z. \quad (37)$$

Con las expresiones 35,36 y 37 se forma la ecuación matricial 38:

$$\begin{pmatrix} g_{xx}^1 & g_{xy}^1 & g_{xz}^1 & N_g & 0 & 0 \\ g_{yx}^1 & g_{yy}^1 & g_{yz}^1 & 0 & N_g & 0 \\ g_{zx}^1 & g_{zy}^1 & g_{zz}^1 & 0 & 0 & N_g \\ g_{xx}^2 & g_{xy}^2 & g_{xz}^2 & N_g & 0 & 0 \\ g_{yx}^2 & g_{yy}^2 & g_{yz}^2 & 0 & N_g & 0 \\ g_{zx}^2 & g_{zy}^2 & g_{zz}^2 & 0 & 0 & N_g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{xx}^m & g_{xy}^m & g_{xz}^m & N_g & 0 & 0 \\ g_{yx}^m & g_{yy}^m & g_{yz}^m & 0 & N_g & 0 \\ g_{zx}^m & g_{zy}^m & g_{zz}^m & 0 & 0 & N_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{g0} \\ y_{g0} \\ z_{g0} \\ B_{gx} \\ B_{gy} \\ B_{gz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xg_{xx}^1 + yg_{xy}^1 + zg_{xz}^1 + Ng_x^1 \\ xg_{yx}^1 + yg_{yy}^1 + zg_{yz}^1 + Ng_y^1 \\ xg_{zx}^1 + yg_{zy}^1 + zg_{zz}^1 + Ng_z^1 \\ xg_{xx}^2 + yg_{xy}^2 + zg_{xz}^2 + Ng_x^2 \\ xg_{yx}^2 + yg_{yy}^2 + zg_{yz}^2 + Ng_y^2 \\ xg_{zx}^2 + yg_{zy}^2 + zg_{zz}^2 + Ng_z^2 \\ \vdots \\ xg_{xx}^m + yg_{xy}^m + zg_{xz}^m + Ng_x^m \\ xg_{yx}^m + yg_{yy}^m + zg_{yz}^m + Ng_y^m \\ xg_{zx}^m + yg_{zy}^m + zg_{zz}^m + Ng_z^m \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Esta ecuación se resolverá para obtener los valores del campo ambiental B_{gx} , B_{gy} y B_{gz} los cuales serán utilizados para obtener la profundidad de las fuentes de acuerdo al procedimiento propuesto por Zapotitla-Román (2016). La profundidad de las fuentes se calculará a partir de las ecuaciones 35, 36 y 37, por lo que es necesario despejar de éstas a z_{g0} como se muestra en las ecuaciones 39, 40 y 41:

$$z_{g0}g_{xz} = xg_{xx} + yg_{xy} + zg_{xz} + N_g g_x - (x_{g0}g_{xx} + y_{g0}g_{xy} + N_g B_{gx}), \quad (39)$$

$$z_{g0}g_{yz} = xg_{yx} + yg_{yy} + zg_{yz} + N_g g_y - (x_{g0}g_{yx} + y_{g0}g_{yy} + N_g B_{gy}), \quad (40)$$

$$z_{g0}g_{zz} = xg_{zx} + yg_{zy} + zg_{zz} + N_g g_z - (x_{g0}g_{zx} + y_{g0}g_{zy} + N_g B_{gz}). \quad (41)$$

Teoría de inversión

Al estudiar un fenómeno natural se puede observar que existen causas y efectos, los últimos pueden ser observados y medidos utilizando instrumentos mientras que los primeros suelen ser más difíciles de acceder (Tarantola, 2015). A estas causas se les caracteriza numéricamente como parámetros y se relacionan mediante reglas de correspondencia con las observaciones, por lo que es posible calcular uno conociendo el otro. En la teoría de inversión se conoce como problema directo al cálculo de las observaciones a partir de los parámetros y como problema inverso a la estimación de los parámetros utilizando las observaciones.

Un ejemplo sencillo es considerar el fenómeno del gradiente geotérmico en un pozo, en el cual al incrementar la profundidad se eleva la temperatura linealmente, como se muestra en la ecuación 42.

$$T = \Delta T * z + T_0 \rightarrow T = m_1 z + m_2. \quad (42)$$

En este caso las observaciones son la profundidad y la temperatura correspondientes mientras que los parámetros son la temperatura en la superficie y el gradiente térmico.

En este ejemplo la relación entre parámetros y observaciones se caracteriza con la ecuación de una recta, donde el problema directo es calcular los pares de puntos y el inverso obtener la pendiente y la ordenada al origen. A raíz de esto es evidente la importancia de definir claramente cuáles son los parámetros y cuál es su relación con los datos que pueden medirse. De acuerdo a Tarantola (2015) y Menke (2012) los parámetros son valores numéricos que caracterizan al sistema y que son significativos. Por ejemplo al estudiar el fenómeno de la densidad en una roca se tendrían dos datos: masa y volumen; y un parámetro: densidad. Ellos indican que la densidad es parámetro porque ésta es más significativa al ser una propiedad intrínseca, mientras que las otras variables son observaciones ya que éstas dependen una de la otra y son además fáciles de medir.

Dado que los parámetros y las observaciones se relacionan a través de funciones de la forma $d_i = f(m_j)$ tal que $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, M$, en donde N es el número de observaciones y M el número de parámetros. Si el problema es lineal (o linealizable) cada observación será una combinación lineal de los parámetros, por lo que se podrá escribir la relación entre éstos y las observaciones a través de una ecuación matricial como la mostrada en la ecuación 43 (Menke, 2012):

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm}. \quad (43)$$

En esta representación \mathbf{d} se conoce como vector de datos, \mathbf{G} es el kernel de sensibilidades y \mathbf{m} es el vector de parámetros. En este trabajo los vectores de datos corresponden con las lecturas de gravimetría y gradiometría obtenidas en campo mientras que el vector de parámetros representa la densidad de los prismas.

Función de costo o desajuste

La ecuación 43 permite calcular los datos conociendo los parámetros y viceversa, sin embargo los datos reales y teóricos frecuentemente difieren debido a errores de medición entre otras cosas, por lo que se puede hablar de un vector de datos calculados \mathbf{d}^o y un vector de datos calculados teóricamente \mathbf{d}^c . La inversión de datos consiste entonces en la obtención de un vector de parámetros que al multiplicarse por el kernel proporcione un vector de datos calculados que sea lo más parecido posible al vector de datos observados, para cuantificar la similitud entre éstos se utiliza una función llamada de costo o de desajuste. Una de las funciones de costo que se emplean con mayor frecuencia

es la norma L_2 , la cual se define como la longitud euclidiana del vector de diferencias entre los datos observados y los calculados (Menke, 2012). Este vector de diferencias se muestra en la ecuación 44:

$$e = d^o - d^c. \quad (44)$$

A partir de este vector es posible cuantificar el error de otras maneras, de hecho existe una familia de normas llamada L_m que sirven a este propósito, donde el subíndice m denota el orden de la norma. De manera general se puede decir que las normas de mayor orden brindan mayor importancia a los valores atípicos (valores que salen de la tendencia general), mientras que las normas de bajo orden proporcionan un peso similar a todos los datos (Menke, 2012). En este trabajo se utiliza la norma L_2 cuyo cálculo se realiza mediante la ecuación 45:

$$|e| = [\sum |e|^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (45)$$

Linealidad, estabilidad y unicidad

La linealidad, estabilidad y unicidad son propiedades que describen a un problema inverso y que proporcionan una medida de la dificultad del mismo. La linealidad indica si la relación entre las observaciones y los parámetros es una combinación lineal de estos últimos y en consecuencia, si el problema puede ser descrito con la ecuación 43. Un problema lineal es más fácil de resolver, de tal modo que cuando un problema no es lineal usualmente se busca la forma de hacerlo lineal.

La estabilidad hace referencia al comportamiento de la función de costo ante la variación de sus parámetros, cuando pequeñas perturbaciones en los parámetros producen grandes variaciones en la función de costo se dice que el problema es inestable (Tarantola, 2015). Las funciones de costo relacionadas con problemas con datos potenciales son estables, pues el comportamiento de estos campos es el de una función suave y en consecuencia la función de costo no debería tener variaciones abruptas.

Finalmente la unicidad de un problema se refiere a si existen una o más combinaciones de parámetros que hacen que la función de desajuste se minimice. Esto significa, en sentido estricto, que un problema tendría más de una solución si y sólo si existe más de un vector de parámetros que haga que la función de costo sea igual a cero. En la práctica este criterio es menos riguroso y se considera que existe no unicidad cuando hay más de un vector de parámetros que haga que la función de costo tienda a cero o a un valor mínimo. Los datos potenciales no tienen una solución única dado que diferentes densidades y profundidades pueden producir resultados muy similares.

Métodos de inversión local y global

Es posible considerar que la resolución del problema de inversión consiste en la búsqueda del mínimo de la función de costo, con lo cual se obtendría un vector de parámetros que proporcione una respuesta teórica muy similar a la realidad. Esto se puede realizar utilizando métodos de inversión locales o globales dependiendo de las características de la función de costo.

Cuando una función de costo presenta un solo mínimo y es estable la resolución del problema inverso puede realizarse a través métodos de inversión locales como el de mínimos cuadrados, los cuales utilizan las derivadas de la función de costo. Un problema de este tipo es el descrito en la ecuación 42, en el cual la función de costo tiene dos variables y un comportamiento suave y estable.

Los métodos de inversión locales no funcionan cuando la función de costo tiene mínimos locales o cuando no es derivable. Lo primero puede ocurrir en problemas como los de métodos potenciales, en los cuales la condición de no unicidad provoca que más de una combinación de parámetros ocasione una diferencia mínima entre la teoría y la realidad. Además, existen problemas en los que la función de costo no es estable o presenta regiones no derivables, para enfrentar esta situación existen los métodos de inversión globales.

Cristalización Simulada

La Cristalización Simulada es un método heurístico para buscar óptimos globales propuesto por Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi (1983) el cual compara la búsqueda del mínimo de una función con el proceso de templado de los materiales sólidos. La naturaleza heurística de este método implica la resolución del problema de una forma no rigurosa la cual no garantiza el hallazgo del mínimo absoluto, pero sí de un valor muy cercano a éste.

El proceso de templado de un material requiere el calentamiento del mismo, lo cual ocasiona que las moléculas de éste se desordenen. Si el material es posteriormente enfriado lentamente ocurrirá un proceso similar a la cristalización mineral, en el cual las partículas que lo conforman se ordenan eficazmente mientras desciende la temperatura hasta llegar a un estado de mínima energía. Trabajos como los de Nava Flores y colaboradores (2016), Nagihara y Hall (2001) y Roy y colaboradores (2005) realizan inversión de datos gravimétricos a través de Cristalización Simulada.

Este método de inversión requiere un modelo inicial de parámetros a partir de los cuales se pueda calcular una respuesta (problema directo) para comparar con los datos observados. Estos parámetros son posteriormente perturbados aleatoriamente para generar un nuevo modelo y calcular una segunda respuesta, la cual es luego comparada con la respuesta del modelo inicial. Si el desajuste

del modelo perturbado es menor, éste se convierte en el modelo inicial, en caso contrario se aplica el Criterio de Metrópolis para determinar la aceptación del nuevo modelo.

El Criterio de Metrópolis propuesto por Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi (1983) permite evitar los mínimos locales de la función de costo ya que admite configuraciones de parámetros con un mayor desajuste que aquel del modelo inicial, la probabilidad de que esto ocurra se calcula con la ecuación 46:

$$P(\mathbf{m}) = e^{\left(-\frac{\Delta E}{T}\right)}, \quad (46)$$

la cual se aproxima asintóticamente a la función de densidad de probabilidad de Boltzmann (Sen y Stoffa, 2013). En dicha expresión ΔE se denomina incremento de energía y es la diferencia entre el desajuste del modelo inicial y el perturbado. La variable \mathbf{m} representa el vector de parámetros y T la temperatura del sistema. Se puede observar que la probabilidad disminuye si la diferencia de energía es positiva o si la temperatura se reduce. Para determinar si un modelo es aceptado o rechazado por el Criterio de Metrópolis se genera un número aleatorio entre 0 y 1, si éste es menor a la probabilidad calculada el modelo perturbado se acepta y se convierte en el modelo inicial de lo contrario se rechaza.

Para calcular el nivel de energía de cada modelo se utilizará la norma L_2 normalizada, tal y como lo hacen Ortiz-Aleman y colaboradores (2004), la expresión para calcular dicha norma se muestra en la ecuación 47:

$$L_2 = \frac{\sum_{k=1}^N (d_k^{obs} - d_k^{calc})^2}{\sum_{k=1}^N (d_k^{obs})^2}. \quad (47)$$

En este trabajo se añadirá un paso propuesto por Corana y colaboradores (1987) y aplicado en trabajos como el de Nava Flores (2010) y Ortiz Aleman y colaboradores (2004) que permite ajustar la amplitud de las perturbaciones a cada parámetro de acuerdo al número de modelos aceptados y rechazados. Primero es necesario calcular el cociente de los modelos aceptados entre los rechazados $r = \frac{\text{modelos aceptados}}{\text{modelos rechazados}}$. Luego, dependiendo del valor de este cociente se calcula un factor V que escalará las perturbaciones del modelo inicial, la forma en que se calcula dicho factor se muestra en la expresión 48:

$$V_{k+1}(r) = \begin{cases} V_k \left(1 + c \frac{r + 0.6}{0.4}\right) & r > 0.6 \\ \frac{V_k}{\left(1 + c \frac{0.4 - r}{0.4}\right)} & r < 0.4 \end{cases} \quad \dots (48)$$

Este paso tiene como objetivo ajustar el espacio de búsqueda de soluciones para cada parámetro. La idea es que si se aceptan muchos modelos es porque se están buscando soluciones en una región reducida del dominio por lo que se debe ampliar la búsqueda. En caso contrario, es posible que el programa esté alcanzando el mínimo por lo que las perturbaciones al parámetro deben ser menores para así encontrar una solución más exacta.

La última parte del algoritmo consiste en reducir la temperatura del sistema de acuerdo al esquema de enfriamiento propuesto por Nagihara y Hall (2001) el cual garantiza la convergencia al mínimo global y aparece en la expresión 49:

$$T_k = T_i(RT)^k. \quad (49)$$

Donde el subíndice k indica el número de iteración y el subíndice i el valor inicial de temperatura. El valor RT es un parámetro de reducción de temperatura que oscila entre 0 y 1. La secuencia del algoritmo de inversión se muestra con mayor claridad en el diagrama de flujo que aparece en la figura 1.

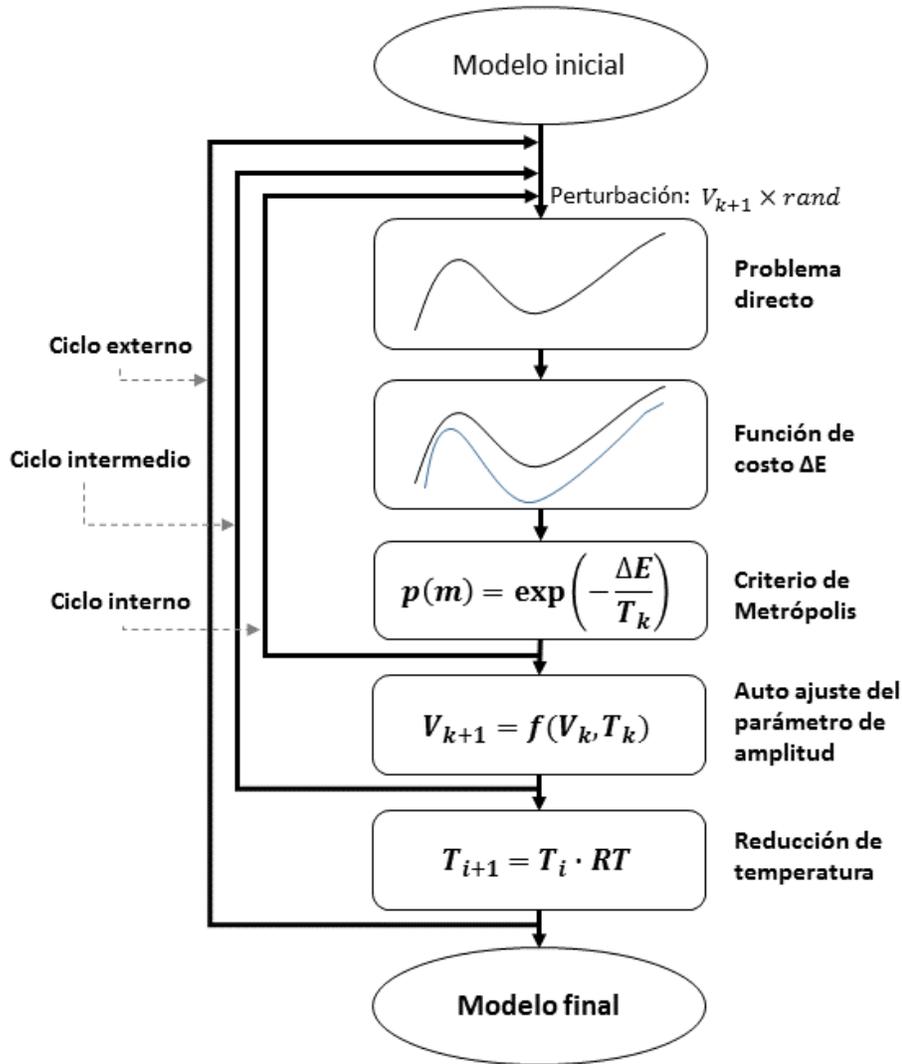


Figura 1. Diagrama de flujo del algoritmo de Cristalización Simulada. Modificado de Ortiz-Alemán y colaboradores (2012)

Optimización del algoritmo problema directo

Un inconveniente del algoritmo de Cristalización Simulada es la necesidad de resolver el problema directo numerosas veces, para acelerar ese proceso Ortiz Alemán y Gamio (2012) proponen una optimización en la cual sólo es necesario resolver el problema directo completo una vez antes del inicio de las iteraciones. La resolución completa del problema directo consiste en obtener un vector de observaciones donde cada uno de sus elementos es el producto punto de un renglón del kernel y el vector de parámetros. A continuación se demostrará que es posible perturbar todos los elementos del vector de parámetros (uno por uno) y obtener el vector de observaciones correspondientes utilizando un vector de observaciones inicial y una columna del kernel.

Si se perturba el primer elemento del vector de parámetros con un valor Δm se obtendría

$$\mathbf{m}_{per} = \begin{pmatrix} m_1 + \Delta m \\ m_2 \\ \vdots \\ m_M \end{pmatrix}.$$

Por lo que el vector de observaciones perturbado sería

$$\mathbf{d}_{per} = \begin{pmatrix} (m_1 + \Delta m)G_{11} + m_2G_{12} + m_MG_{1M} \\ (m_1 + \Delta m)G_{21} + m_2G_{22} + m_MG_{2M} \\ \vdots \\ (m_1 + \Delta m)G_{N1} + m_2G_{N2} + m_MG_{NM} \end{pmatrix},$$

lo que puede expresarse también como

$$\mathbf{d}_{per} = \begin{pmatrix} m_1G_{11} + m_2G_{12} + m_MG_{1M} \\ m_1G_{21} + m_2G_{22} + m_MG_{2M} \\ \vdots \\ m_1G_{N1} + m_2G_{N2} + m_MG_{NM} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{11} \\ G_{21} \\ \vdots \\ G_{N1} \end{pmatrix} \Delta m.$$

Es posible generar esto para cualquier parámetro con lo que se obtiene la ecuación 50:

$$\mathbf{d}_{per} = \mathbf{d}_{ini} + G_{ij}\Delta m_j, \quad (50)$$

donde j representa el parámetro que se está perturbando.

3. Modelos sintéticos

La inversión de datos gravimétricos y gradiométricos consiste en muestrear estos campos vectoriales en un dominio de observación y posteriormente utilizar esa información para estimar la ubicación y geometría de la fuente que los produce, es decir el cuerpo geológico que produce la anomalía.

Antes de utilizar el algoritmo de inversión por Cristalización Simulada en datos reales se realizaron pruebas con modelos sintéticos con el propósito de probar el funcionamiento del mismo. En estas pruebas se propone una fuente y se calcula su campo gravitacional y sus derivadas, después de utilizar los algoritmos descritos en el capítulo anterior para recuperar la forma y ubicación de la fuente.

Modelo S

El primer modelo utilizado se llamó Modelo S, éste consistió en un ensamble de tres prismas: uno vertical somero, otro horizontal a mayor profundidad y el último también vertical aún a mayor profundidad; todos ellos con un contraste de $300 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$. La primera parte del trabajo con este modelo fue calcular las mallas de observaciones para las componentes gravitacionales y gradiométricas. Luego, éstas se utilizaron para estimar un modelo inicial con la Deconvolución Tensorial de Euler. Por último, el resultado del paso anterior fue empleado como modelo inicial para realizar la inversión por Cristalización Simulada y comprobar la recuperación del modelo real.

El concepto del modelo inicial fue adaptado del trabajo de Vera Sánchez (2015) y las características de los tres prismas que lo componen se muestran en la tabla 2, asimismo la figura 2 muestra algunas perspectivas del Modelo S.

	$x_i \text{ [Km]}$	$x_f \text{ [Km]}$	$y_i \text{ [Km]}$	$y_f \text{ [Km]}$	$z_i \text{ [Km]}$	$z_f \text{ [Km]}$
Prisma 1	2.5	4.5	3.5	6	1	4
Prisma 2	4.5	5.5	3.5	6	2.5	4
Prisma 3	5.5	7.5	3.5	6	2.5	5.5

Tabla 2. Dimensiones de los prismas que componen al modelo S. Todos ellos tienen un contraste de densidad de $300 \text{ [Kg/m}^3\text{]}$.

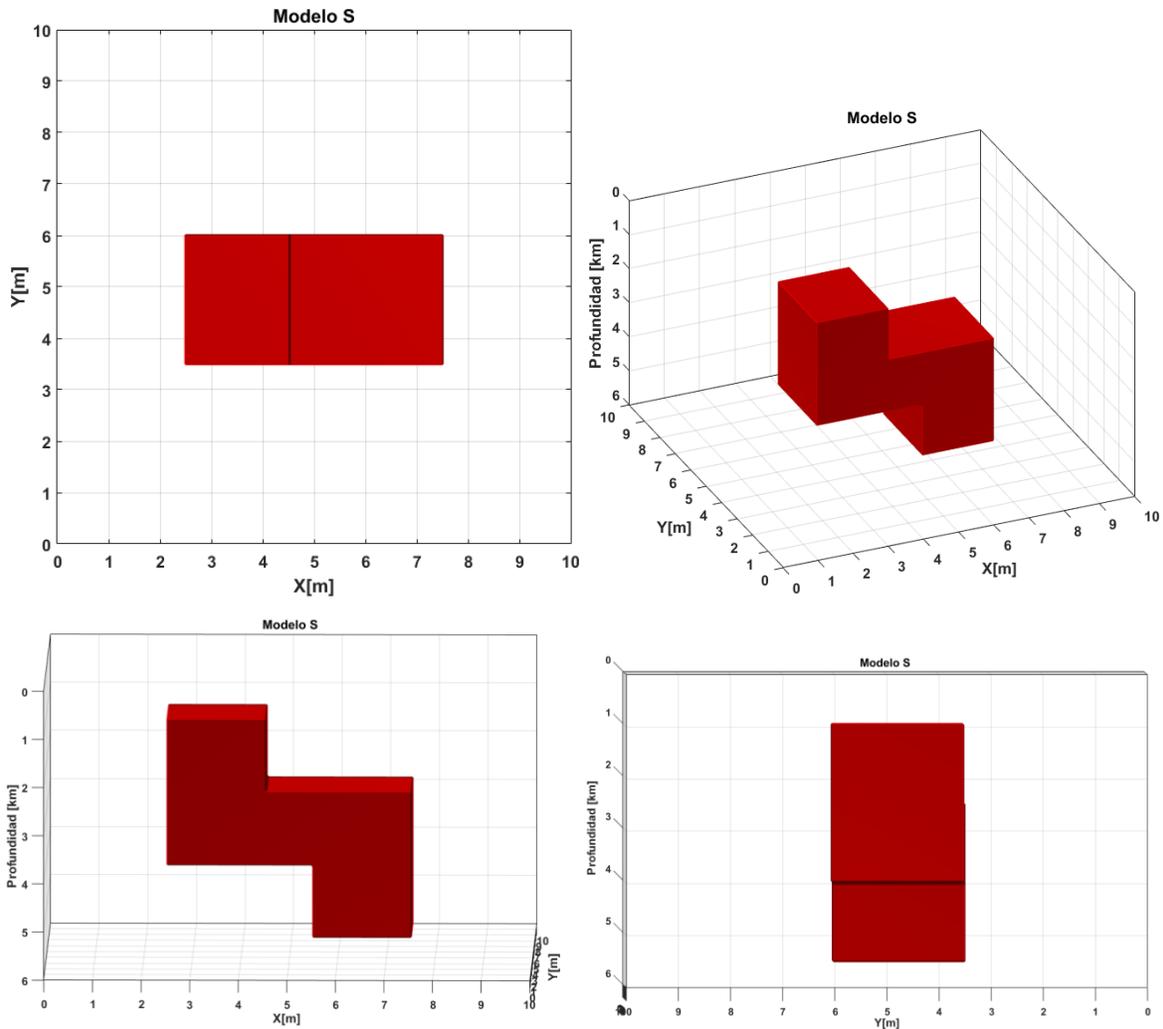


Figura 2. Diferentes perspectivas del Modelo S.

Modelado directo

Las componentes gravimétricas y gradiométricas del Modelo S fueron calculadas aprovechando el Principio de Superposición. Primero, se transformó el modelo en un ensamble de cubos con aristas de 0.5 [Km], después se obtuvo la respuesta de cada cubo en cada punto de observación y por último, se sumó la respuesta de todos los cubos para cada punto observación. Así, fue posible calcular la respuesta de todo el modelo a partir de la suma de la respuesta de sus partes.

La obtención de los campos potenciales ocasionados por el modelo se realizó utilizando nueve matrices de sensibilidades, tres para el campo gravitacional y seis para el gradiométrico. Para construirlas fue necesario considerar que cada una de ellas tiene un renglón asociado a un punto de observación y una columna por cada prisma del ensamble, por lo que cada elemento de cada matriz

representa el valor del campo potencial de interés en el punto i provocado por el prisma j con densidad unitaria. Dado que las ecuaciones 9 a 11 y 13 a 18 permiten calcular el valor del campo potencial de interés causado por un prisma en un punto, es posible modificarlas para generar los elementos de las matrices de sensibilidades. Para ello, únicamente hay que considerar $\rho = 1$ ya que la densidad estará determinada por el vector de parámetros, las ecuaciones no requieren ninguna otra modificación pues como se mencionó previamente éstas dependen de la distancia entre el punto de observación y el prisma y no del sistema coordenado. Con estas consideraciones se obtienen las ecuaciones 51 a 59, las cuales proporcionan los elementos de las matrices de sensibilidades:

$$G_{ij}^z = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[z_k \arctan\left(\frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}}\right) - x_i \log(R_{ijk} + y_j) - y_j \log(R_{ijk} + x_i) \right], \quad (51)$$

$$G_{ij}^x = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[x_k \arctan\left(\frac{y_j z_k}{x_i R_{ijk}}\right) - y_j \log(R_{ijk} + z_k) - z_k \log(R_{ijk} + y_j) \right], \quad (52)$$

$$G_{ij}^y = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[y_j \arctan\left(\frac{x_i z_k}{y_j R_{ijk}}\right) - x_i \log(R_{ijk} + z_k) - z_k \log(R_{ijk} + x_i) \right], \quad (53)$$

$$G_{ij}^{xx} = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \arctan\left(\frac{y_j z_k}{x_i R_{ijk}}\right), \quad (54)$$

$$G_{ij}^{yy} = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \arctan\left(\frac{x_i z_k}{y_j R_{ijk}}\right), \quad (55)$$

$$G_{ij}^{zz} = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \arctan\left(\frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}}\right), \quad (56)$$

$$G_{ij}^{xy} = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \log(z_k + R_{ijk}), \quad (57)$$

$$G_{ij}^{xz} = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \log(y_k + R_{ijk}), \quad (58)$$

$$G_{ij}^{yz} = \gamma \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \log(x_i + R_{ijk}). \quad (59)$$

Una vez generadas las matrices de sensibilidades se calcularon los campos potenciales de cada componente gravitacional y gradiométrica mediante el producto matricial con el vector de parámetros, el cual es un vector columna donde cada elemento representa la densidad de un prisma

del ensamble. El dominio de observación fue un área cuadrada de 100 [km²] en el plano XY, los resultados aparecen en la figura 3.

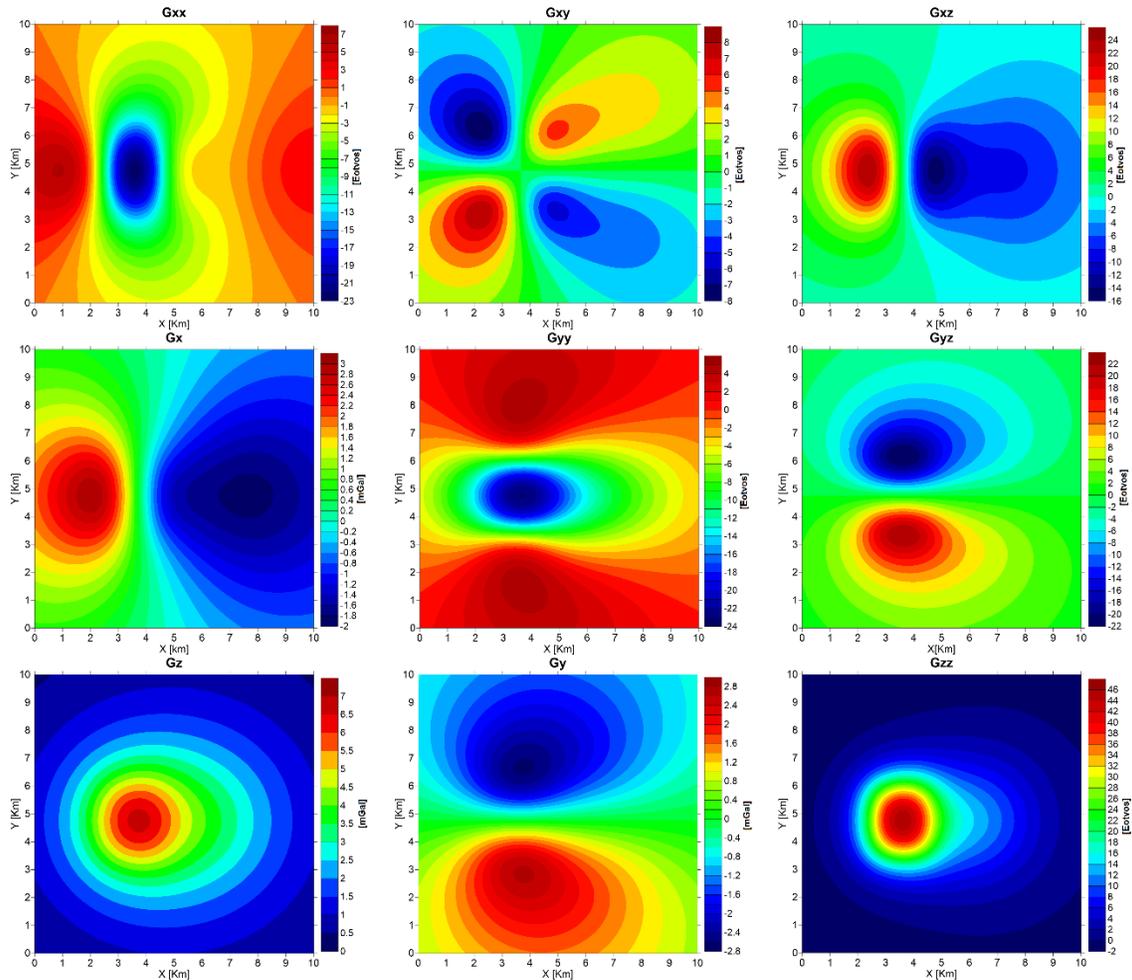


Figura 3. Componentes gradiométricas y gravimétricas del Modelo S.

Generación del modelo inicial

Las observaciones de los campos gravimétrico y gradiométrico fueron utilizadas para generar un modelo inicial con la Deconvolución Tensorial de Euler. Para ello primero se usaron tres componentes tensoriales: G_{xx} , G_{yy} y G_{zz} , ya que como se describió anteriormente éstas brindan una mejor delimitación de los bordes en planta. Posteriormente las profundidades de las fuentes estimadas fueron corregidas utilizando las componentes del campo gravimétrico. Los resultados del algoritmo y la posición real del Modelo S se muestran en la figura 4.

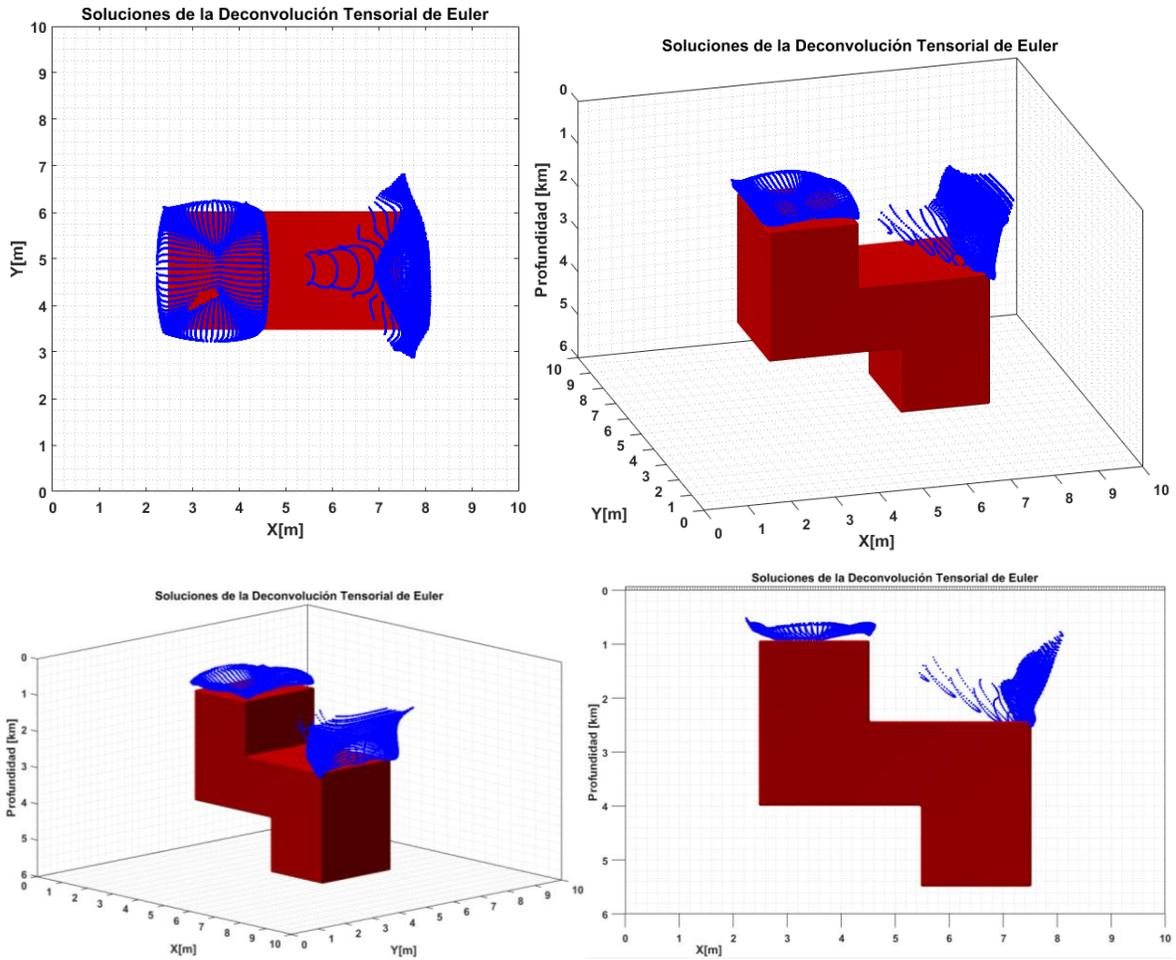


Figura 4. Soluciones de la Deconvolución Tensorial de Euler mostradas en una vista tridimensional.

Las soluciones obtenidas permitieron hacer un modelo inicial para el algoritmo de Cristalización Simulada, por ello se trazaron 12 perfiles que cruzaran las regiones en donde se aglomeran las soluciones y los cuales fueron utilizados para crear secciones del modelo inicial. La localización de los perfiles se muestra en la figura 5 y las coordenadas de inicio y final de los mismos aparecen en la tabla 3.

Perfil	Inicia		Termina		Perfil	Inicia		Termina	
	X	Y	X	Y		X	Y	X	Y
1	1.0	2.8	9.0	6.5	7	2.0	7.5	8.5	2.3
2	1.0	6.8	9.0	3.0	8	2.0	2.0	8.5	7.5
3	1.0	4.6	9.0	4.6	9	3.5	2.0	7.0	8.0
4	3.5	2.0	3.5	8.0	10	3.0	8.0	7.0	2.0
5	7.5	2.0	7.5	8.0	11	1.0	5.6	9.0	4.0
6	5.5	2.0	5.5	8.0	12	1.0	3.7	9.0	5.5

Tabla 3. Coordenadas de inicio y fin de los perfiles utilizados.

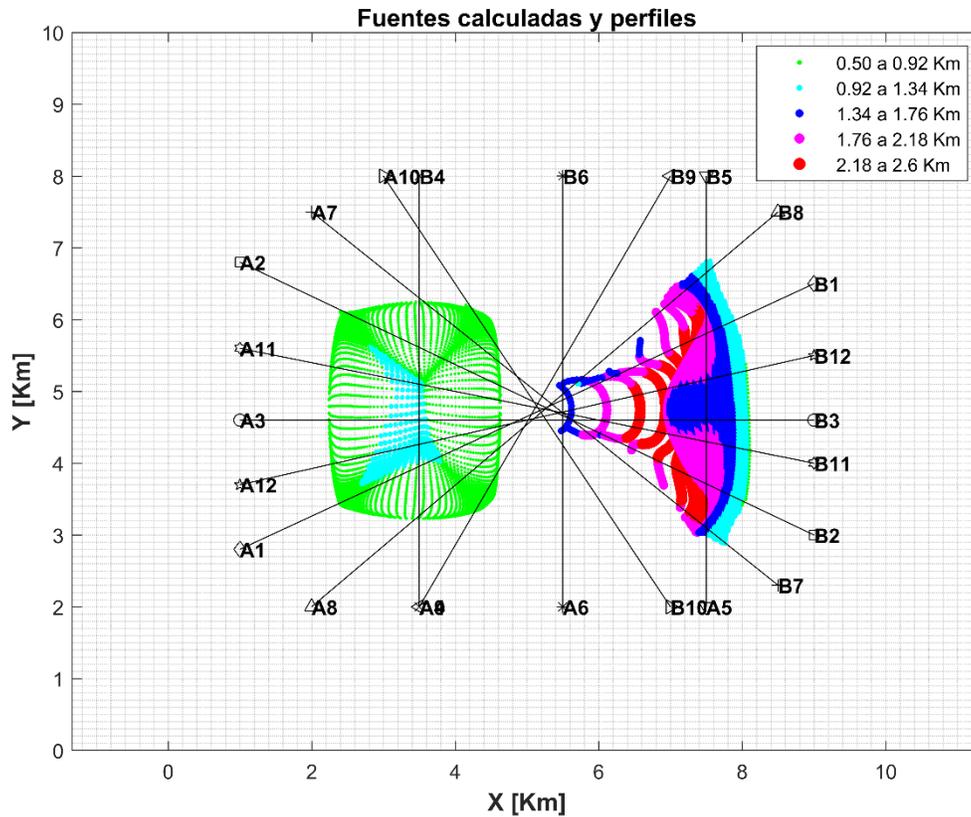


Figura 5. Ubicación de los perfiles superpuesta a las soluciones en planta. El punto inicial de éstos se marca con la letra A y el punto final con la letra B.

En cada sección se proyectaron las soluciones obtenidas con la Deconvolución Tensorial de Euler mediante circunferencias cuyo radio decrece con la distancia de la solución a la sección, esto se ejemplifica en la figura 6. De este modo se obtuvo por cada perfil una matriz de 100 regiones y 200 columnas cuyos valores eran 300 o 0 dependiendo de si en esa región se interpretó que existía o no el cuerpo fuente. Las matrices obtenidas para los perfiles mostrados en la figura 5 se ilustran como imágenes en la figura 7

Se consideró que las posiciones calculadas mediante la Deconvolución Tensorial de Euler se agrupaban en la cima de la fuente, por lo que las regiones del espacio ubicadas debajo de éstas se tomaron como ocupadas por el cuerpo fuente. Una vez creadas las matrices, éstas se utilizaron para interpolar entre ellas un cuerpo tridimensional que sería utilizado como modelo inicial para el algoritmo de inversión por Cristalización Simulada.

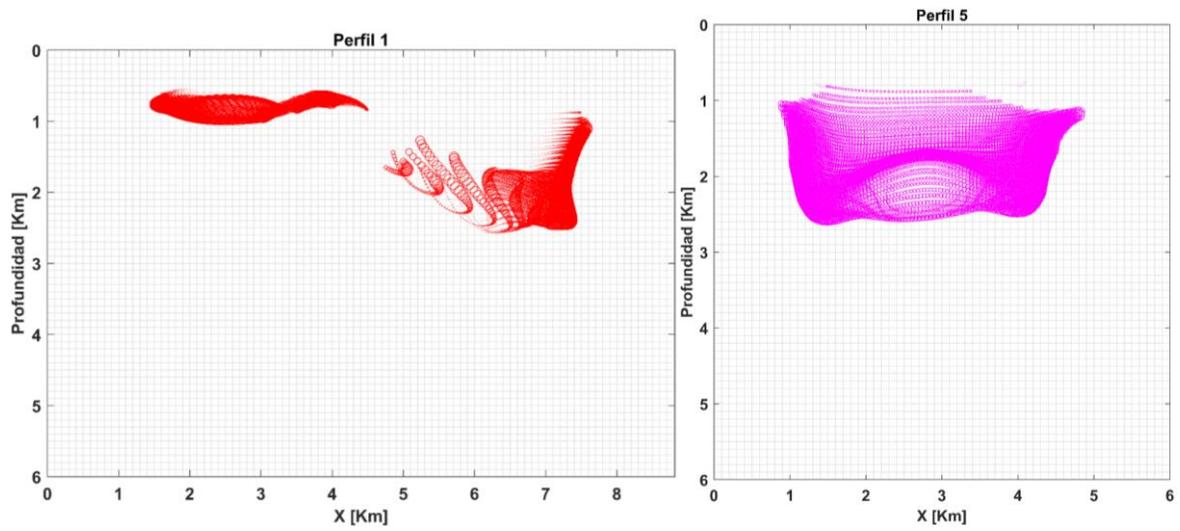


Figura 6. Proyección de las fuentes obtenidas mediante la Deconvolución Tensorial de Euler.

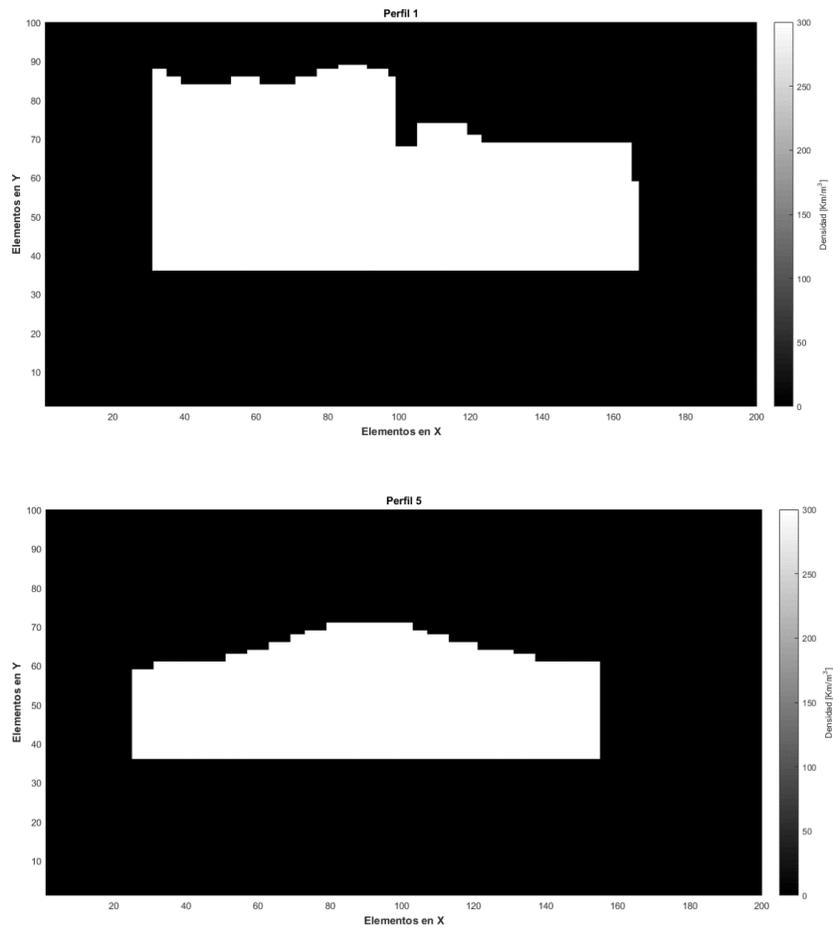


Figura 7. Matrices obtenidas para la interpolación del cuerpo tridimensional.

Es necesario mencionar que el volumen en el que se interpoló el modelo inicial tiene un área menor en planta que la que abarca el dominio de observación. Esto debido a que las soluciones de la deconvolución no se encuentran en toda la región en la que se tienen observaciones. Gracias a esto es posible reducir el volumen del espacio en el que el algoritmo de inversión buscará soluciones y por lo tanto que éste finalice más rápido. Las características del modelo inicial se muestran en la tabla 4 mientras que la figura 8 muestra diferentes perspectivas del mismo.

	Rango	Dimensión	Número de prismas	Densidad
X	2.5 [Km] – 8.0 [Km]	6.5 [Km]	11	0 [Kg/m ³] y 300 [Kg/m ³]
Y	3.0 [Km] – 6.5 [Km]	3.5 [Km]	7	
Z	1.0 [Km] – 6.0 [Km]	5.0 [Km]	10	

Tabla 4. Características del modelo inicial.

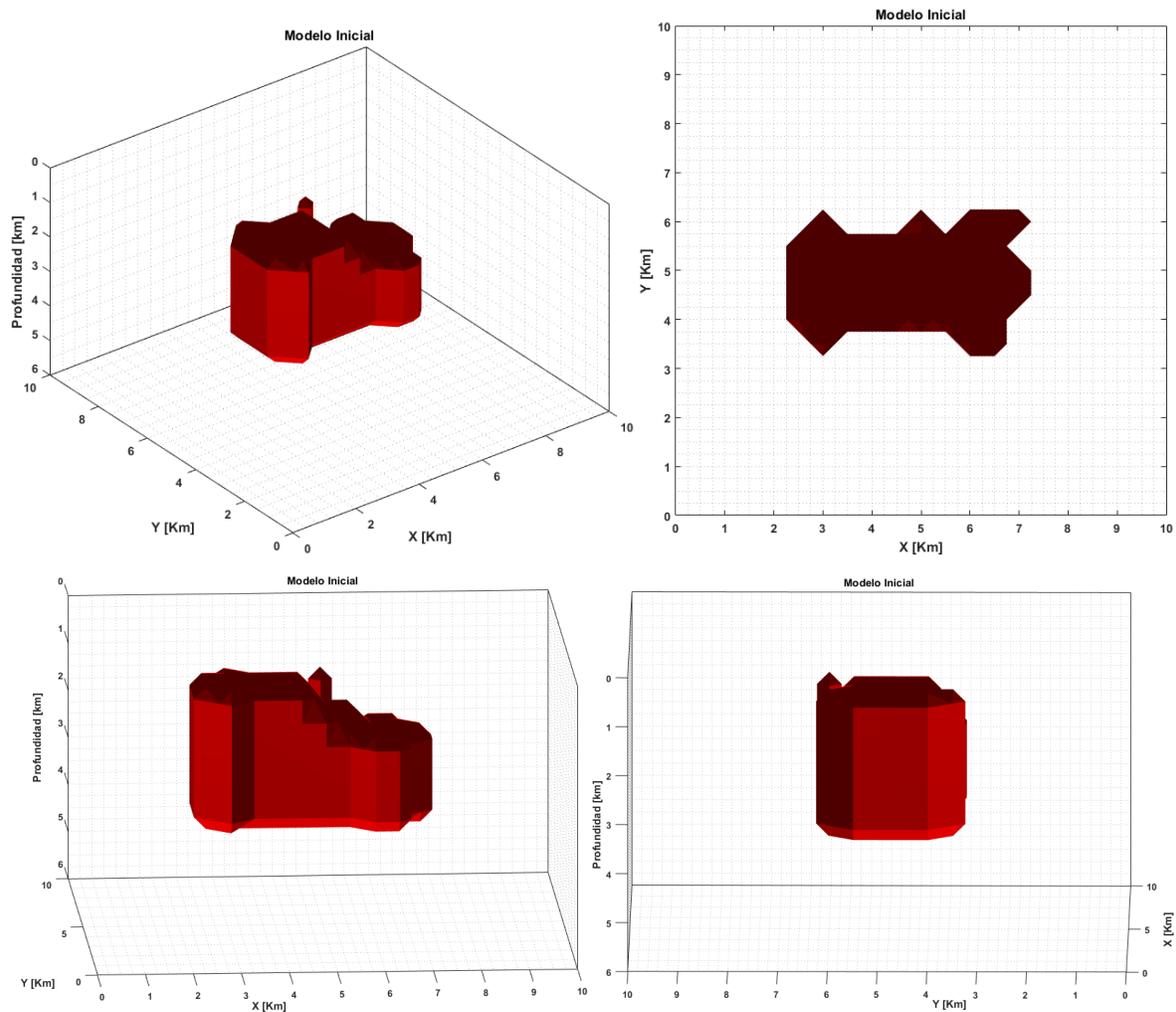


Figura 8. Modelo inicial calculado a partir de la Deconvolución Tensorial de Euler.

Inversión por cristalización simulada

La aproximación al modelo real a partir del inicial se realizó a través del algoritmo de Cristalización Simulada, lo cual consistió en perturbar cada uno de los parámetros del modelo inicial hasta alcanzar el ajuste óptimo. Sin embargo, la ejecución de este proceso no es automática y requiere del ajuste ciertos parámetros del algoritmo. Por esta razón, antes de realizar la inversión del Modelo S se decidió probar este método con un modelo más sencillo.

Dique

El modelo propuesto para probar el algoritmo de Cristalización Simulada fue el de un dique, similar al utilizado por Nava Flores (2010). El ensamble se compuso de 125 cubos con aristas de 1 Km que conforman un volumen con una extensión de 5 Km en cada eje coordenado (X, Y y Z). La malla de observaciones cubre toda la superficie del volumen y tiene un espaciamiento de 100 m en las direcciones X y Y. En la figura 9 se puede apreciar una representación tridimensional del modelo, mientras que la figura 10 muestra las componentes gravimétricas y gradiométricas del mismo.

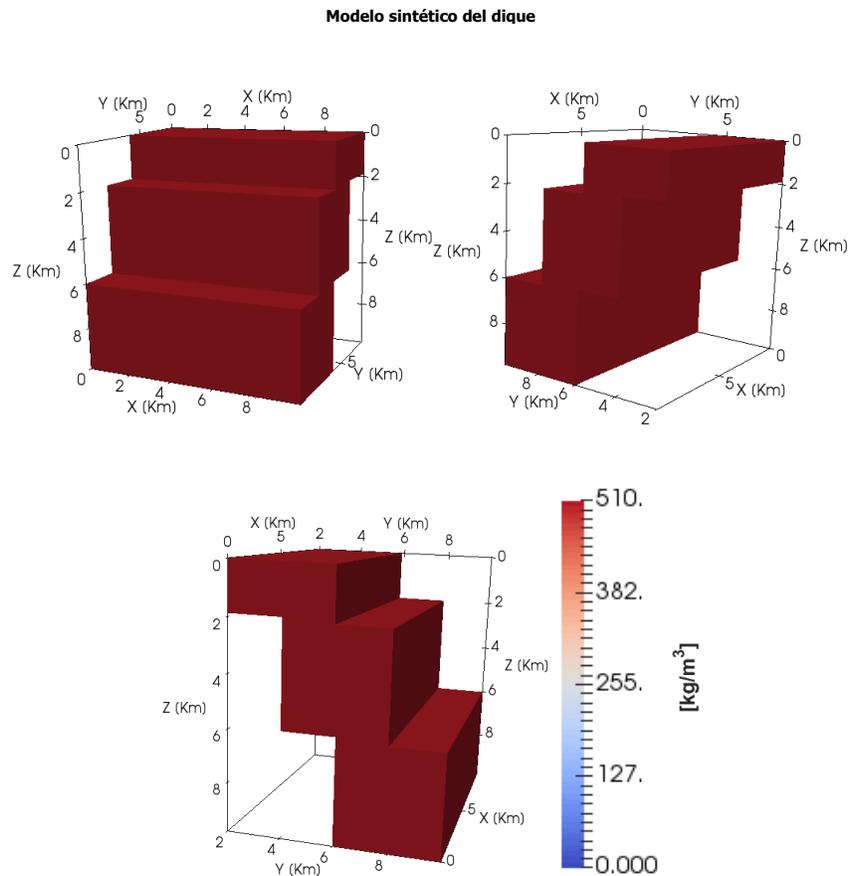


Figura 9. Modelo sintético del dique con el cual se realizaron las pruebas de Cristalización Simulada.

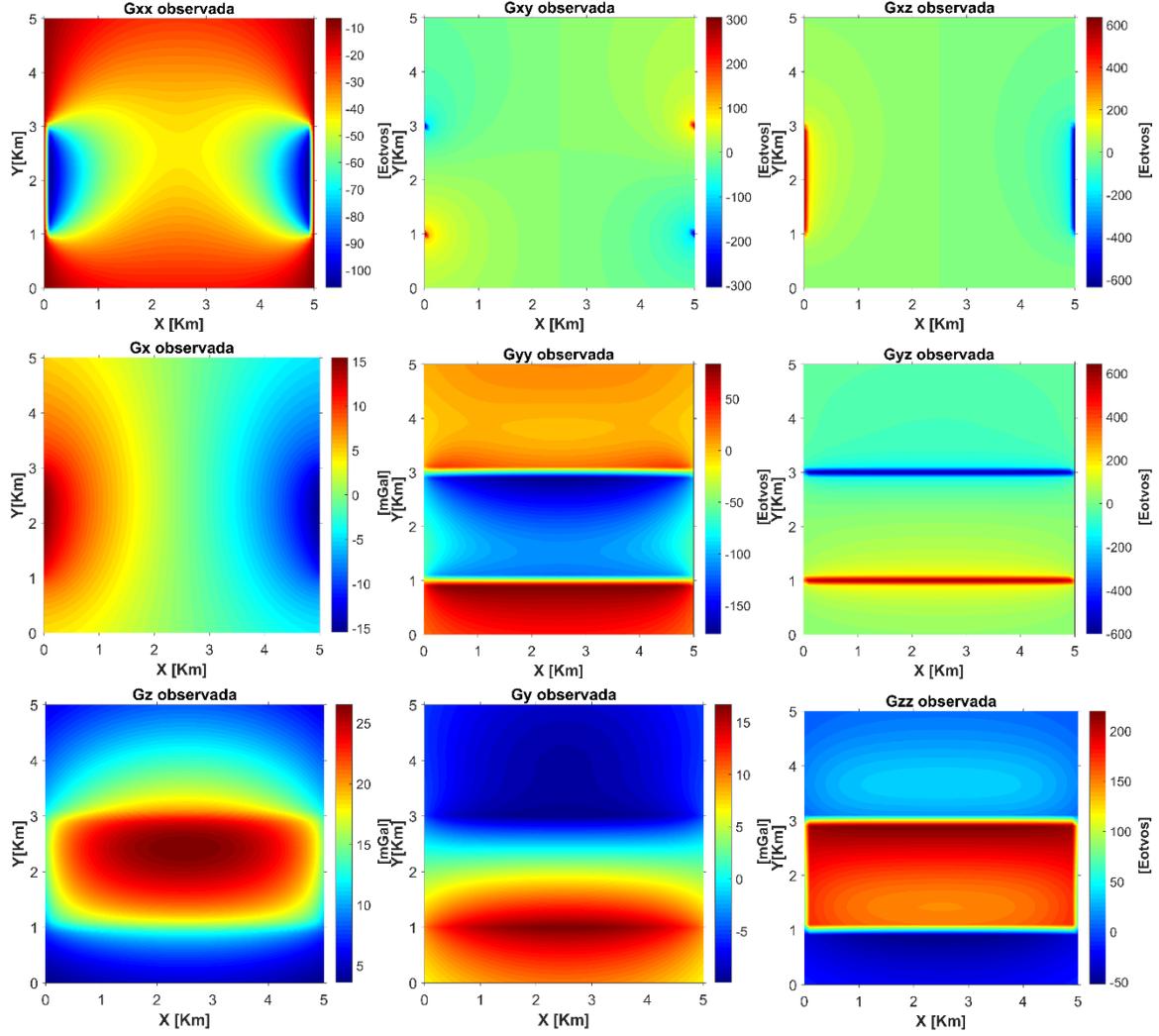


Figura 10. Campo gravitacional y gradiométrico observado para el modelo sintético del dique.

El proceso de inversión mediante Cristalización Simulada consiste en la minimización de la función de costo, por lo que ésta debe ser tal que represente adecuadamente el desajuste entre la realidad y el modelo sintético. Por esta razón, se buscó usar las tres componentes gravimétricas y las seis gradiométricas que se tienen a disposición, ya que esto haría a la función de costo más sensible a las perturbaciones de los parámetros. Para esto, se propuso calcular primero el desajuste entre los datos observados y los calculados de cada componente mediante la norma L_2 normalizada y luego asignar un peso a cada uno de los desajustes individuales. De esta forma, el nivel de energía total es una combinación lineal de los desajustes de cada componente y se calcula como lo indica la ecuación 60:

$$E_T = c_1 e_{gz} + c_2 (e_{gx} + e_{gy}) + c_a e_{gzz} + c_b (e_{gxz} + e_{gyz}) + c_c (e_{gxx} + e_{gyy}) + c_d e_{gxy}, \quad (60)$$

en donde e representa el desajuste de cada componente gravimétrica y gradiométrica.

Para poder utilizar la ecuación 60 como función de costo es necesario asignar valores a los coeficientes, para lo cual se exploraron dos posibilidades: maximizar la función o minimizarla. Esta optimización se realizó también mediante Cristalización Simulada y para llevarla a cabo se establecieron aleatoriamente valores iniciales para los coeficientes. Después, se procedió a perturbar éstos hasta encontrar aquellos que produjeran el máximo y mínimo desajuste entre los datos observados y la respuesta inicial del modelo. Los resultados de este experimento para el modelo del dique se muestran en la tabla 5.

	c_1	c_2	c_a	c_b	c_c	c_d	$E_{inicial}$
Mínimo	0.793817	0.0123330	0.038510	0.038500	0.0299680	0.006968	0.760330
Máximo	0.008442	0.0159304	0.026529	0.427988	0.0074158	0.062359	0.939756

Tabla 5. Valores de los coeficientes que maximizan y minimizan la función de costo, éstos fueron encontrados mediante Cristalización Simulada.

El modelo del dique fue invertido con los dos grupos de coeficientes utilizando en ambos casos la misma configuración de parámetros para la Cristalización Simulada que aparece en la tabla 6. Los resultados mostraron que la reducción del desajuste es significativamente mayor cuando se maximiza la función de costo, ya que al observar los modelos óptimos encontrados en cada caso (figuras 13 y 14) es notorio que el ensamble de prismas proporcionado por la configuración que utiliza el máximo de la función de desajuste se asemeja más al modelo sintético. Además, los campos calculados con éste último modelo se asemejan mucho más a los campos del modelo sintético del dique. Esto se aprecia en las figuras 15 y 16 las cuales muestran las diferencias absolutas entre las componentes gravitacionales y gradiométricas de los modelos óptimos y los datos observados.

	Máximo	Mínimo
Número de parámetros	125	
Número de puntos de observación	2601	
Temperatura inicial	1	
Temperatura final	3.6637×10^{-14}	
Reducciones de temperatura	500	
Valor de parámetro Nt	4	
Valor de parámetro Ns	2	
Factor RT	0.94	
Modelos aceptados	314630	
Modelos rechazados	185370	
Energía inicial	0.939756	0.760330
Energía final	3.7736×10^{-9}	2.7682×10^{-7}

Tabla 6. Reducción del error utilizando los coeficientes que proporcionan el máximo y mínimo de la función de costo.

Modelo inicial del dique

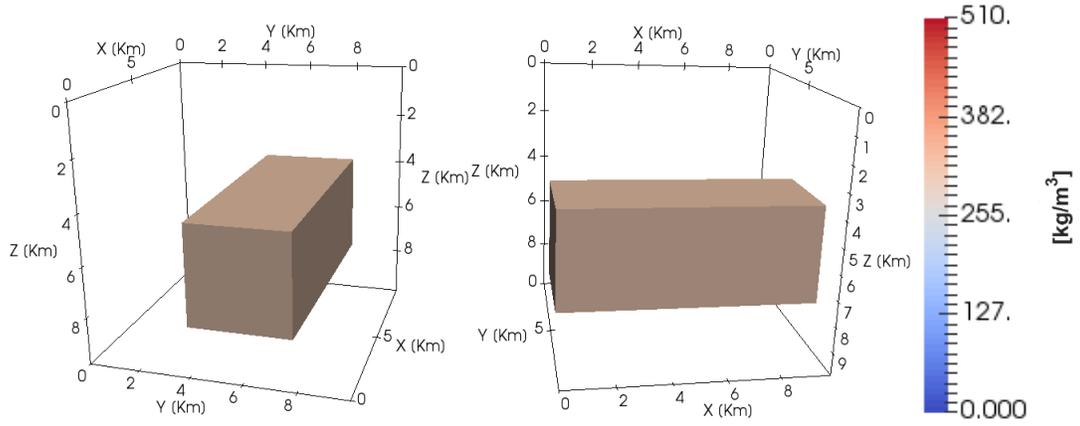


Figura 11. Modelo inicial utilizado para probar los resultados de la inversión con el máximo y mínimo de la función de costo.

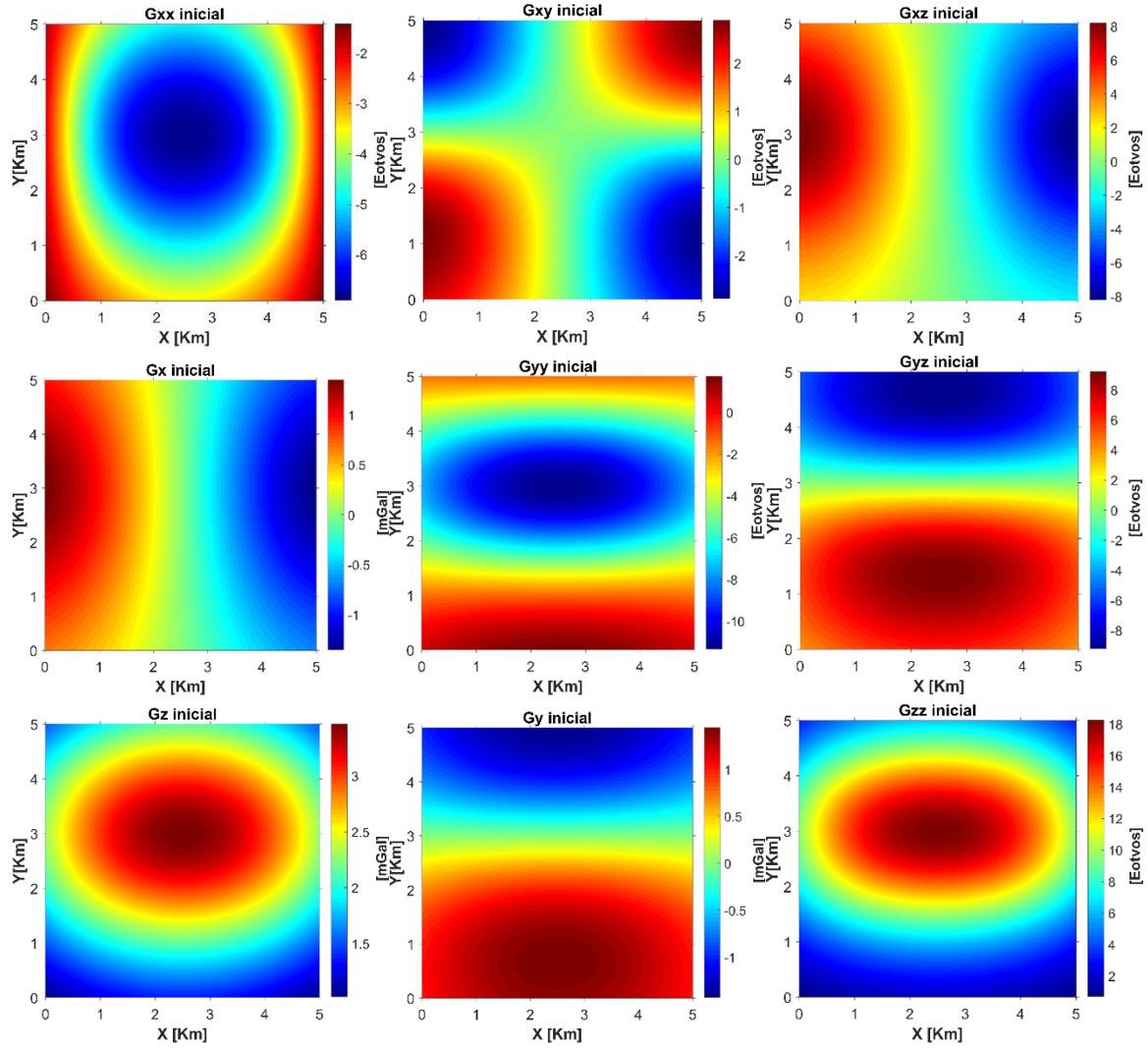


Figura 12. Campo gravitacional y gradiométrico observado para el modelo inicial.

Modelo óptimo del dique (mínimo)

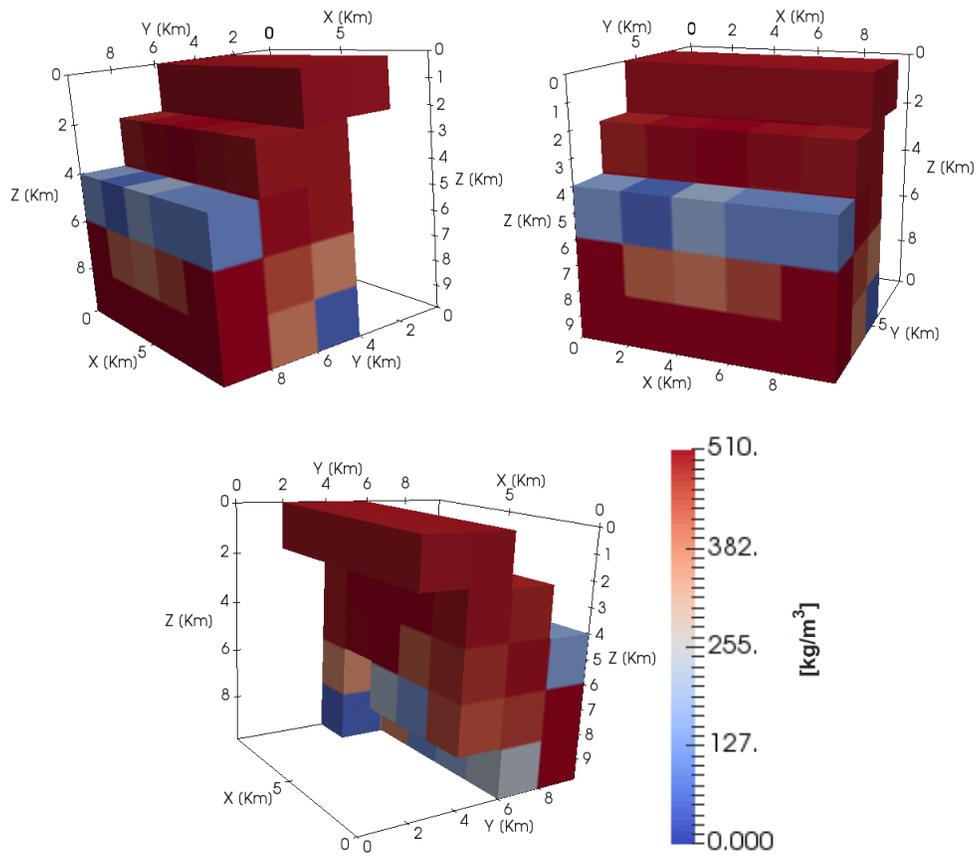


Figura 13. Modelo óptimo obtenido al realizar la inversión utilizando el mínimo de la función de costo.

Modelo óptimo del dique (máximo)

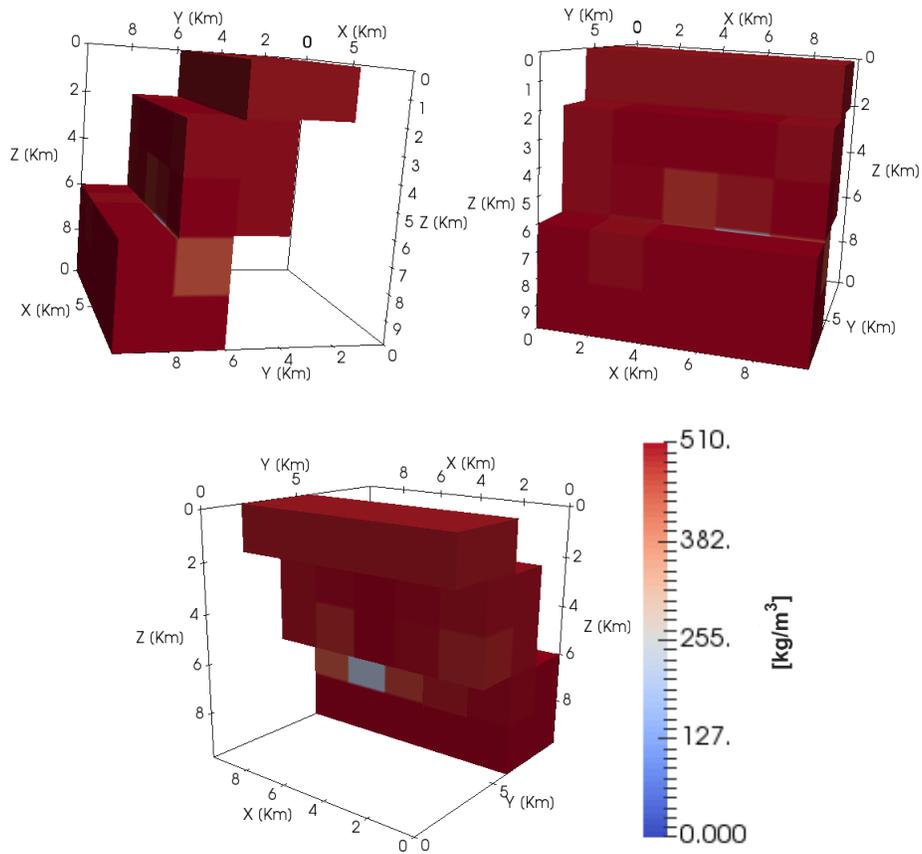


Figura 14. Modelo óptimo obtenido luego de la implementación del algoritmo de Cristalización Simulada utilizando el valor máximo de la función de costo.

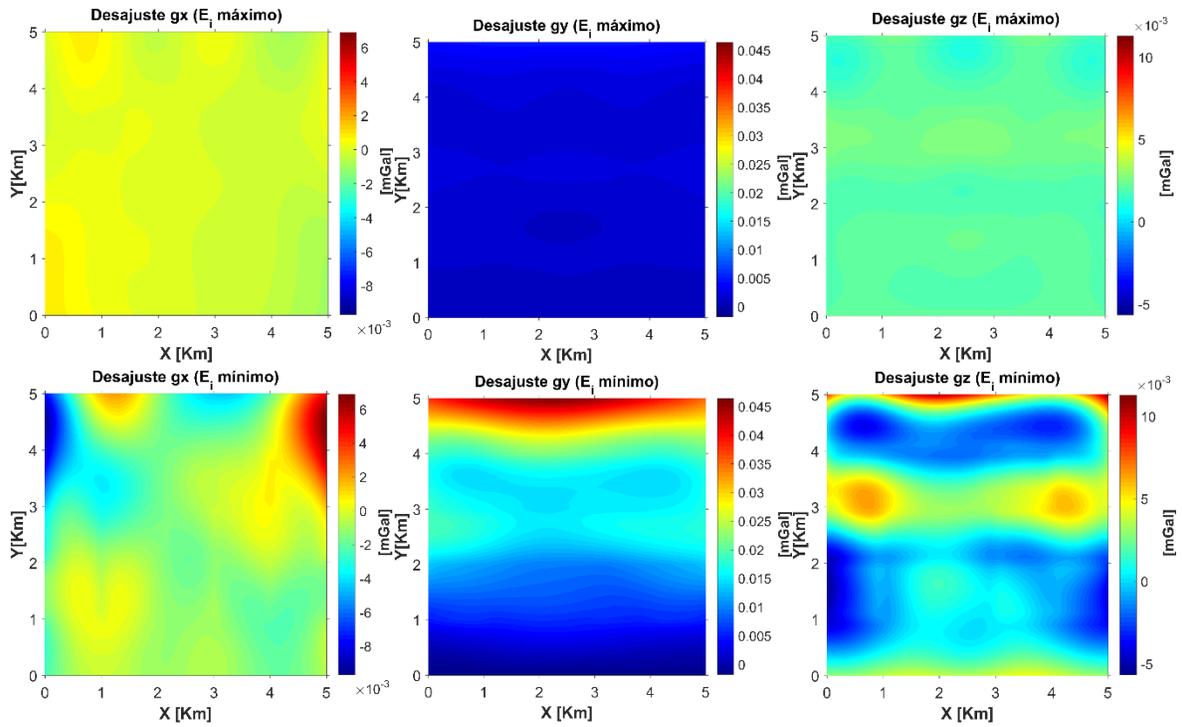
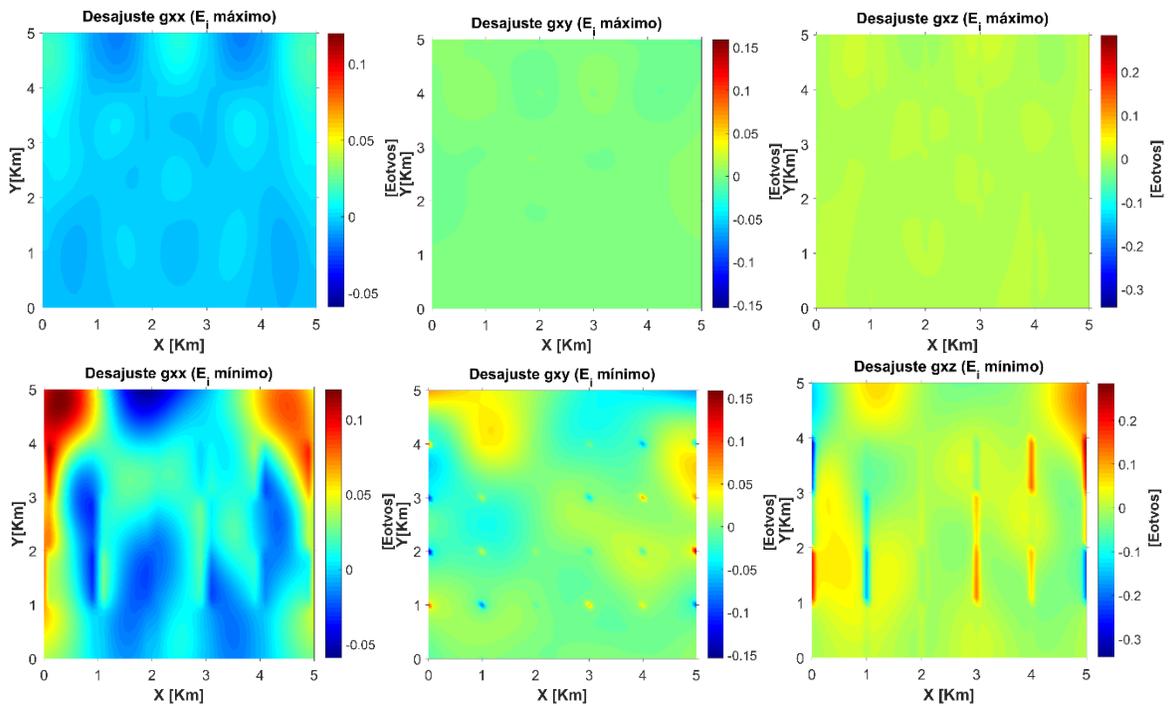


Figura 15. Desajuste de las componentes gravitacionales de los modelos óptimos encontrados utilizando el mínimo y el máximo del valor inicial de la función de costo.



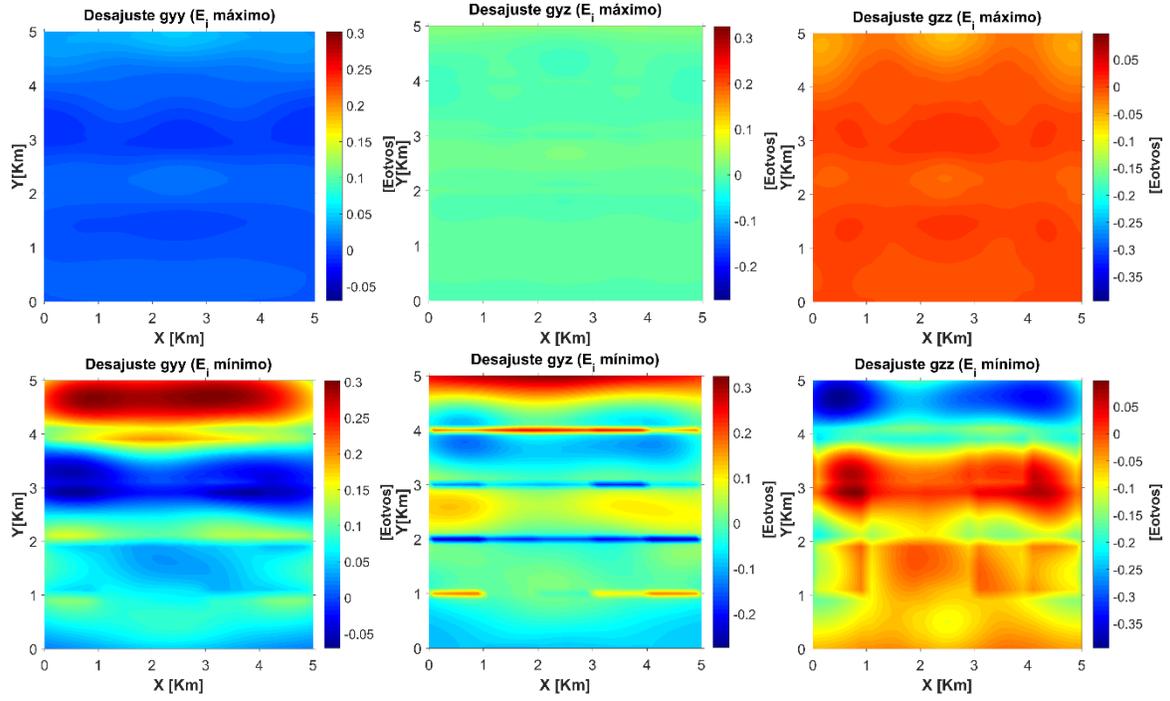


Figura 16. Desajuste de las componentes gradiométricas de los modelos óptimos encontrados utilizando el mínimo y el máximo del valor inicial de la función de costo.

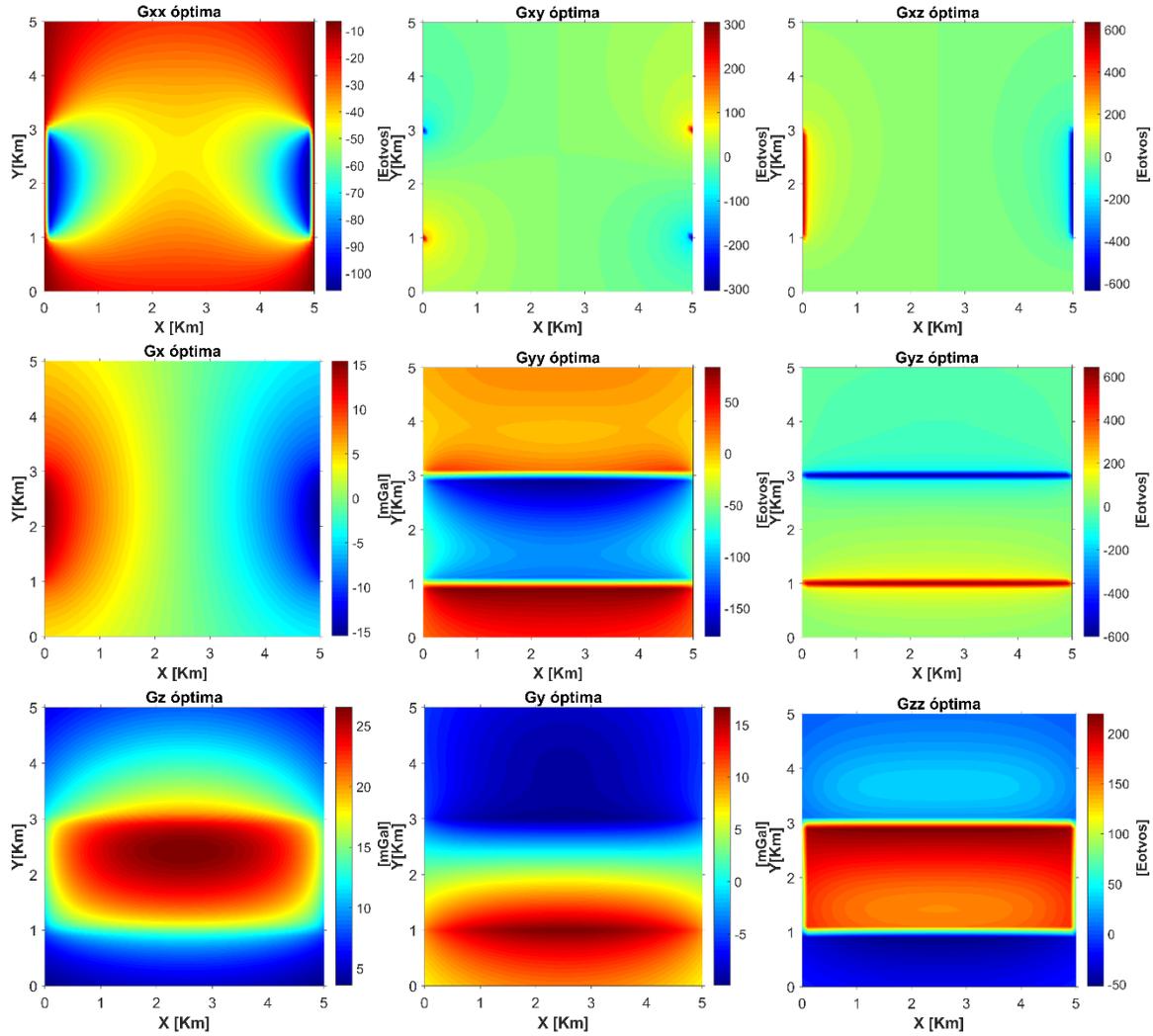


Figura 17. Campo gravitacional y gradiométrico observado para el modelo óptimo obtenido mediante la inversión con la función de costo maximizada.

La conclusión de los experimentos realizados con el modelo del dique es que es posible realizar la inversión de todas las componentes de manera simultánea y que para ello resulta más conveniente utilizar la función de costo que maximice el valor del error inicial. Como una última evidencia se muestre en la figura 18 el descenso del nivel de energía en los experimentos en dónde se maximiza y minimiza dicha función, es claramente observable que el caso de la función maximizada proporciona un mayor decremento en el desajuste. Asimismo, cuando la función está minimizada el desajuste tiende a converger a un valor mayor de manera más rápida.

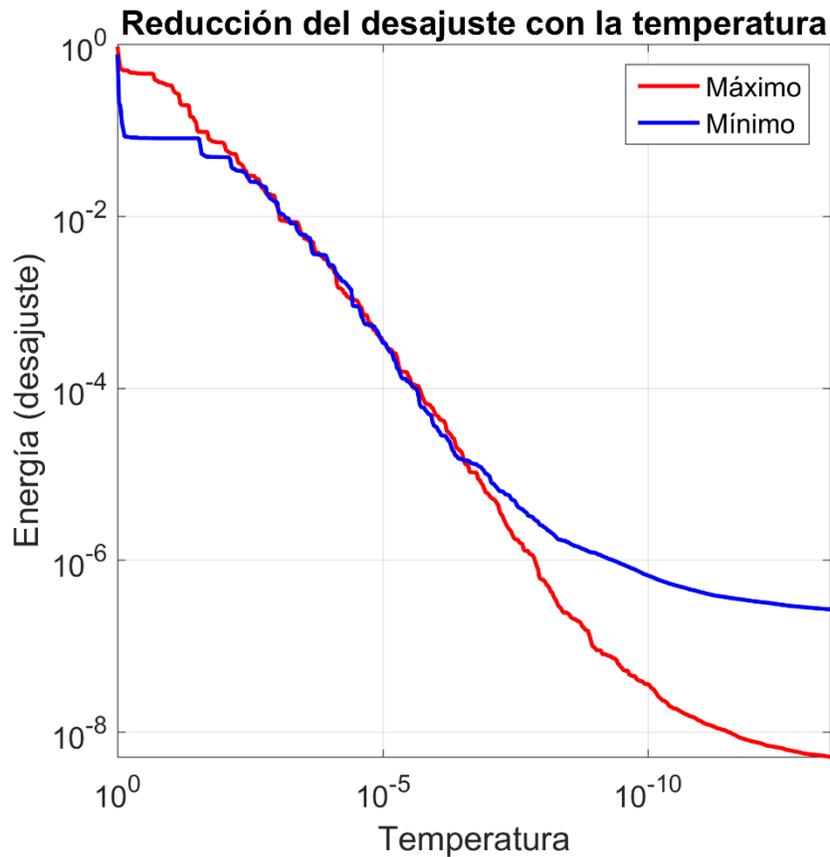


Figura 18. Curva de energía contra temperatura.

Modelo S

Las pruebas del algoritmo de Cristalización Simulada en el dique fueron exitosas y a partir de los resultados de éstas se procedió a realizar la inversión del Modelo S. El primer paso de acuerdo al trabajo realizado previamente consiste en calcular los coeficientes que maximicen el valor inicial de la función de costo, los valores que logran esto se muestran en la tabla 7.

c_1	c_2	c_a	c_b	c_c	c_d	$E_{inicial}$
0.015211	0.061561	0.056793	0.041362	0.240489	0.241167	7.77331×10^{-2}

Tabla 7. Valores de los coeficientes que maximizan y minimizan la función de costo.

Una vez obtenidos los coeficientes se procedió a realizar la inversión, para ello se modificó la configuración utilizada para el modelo del dique. Básicamente se incrementó el número de iteraciones de modo que el algoritmo hiciera una búsqueda más extensa en el espacio de soluciones. Los valores asignados a los parámetros del algoritmo de inversión se muestran en la tabla 8.

Número de parámetros	770
Número de puntos de observación	1681
Temperatura inicial	1
Temperatura final	5.2866×10^{-16}
Reducciones de temperatura	3500
Valor de parámetro Nt	2
Valor de parámetro Ns	4
Factor RT	0.99
Modelos aceptados	13629088
Modelos rechazados	7930912
Energía inicial	7.7729×10^{-2}
Energía final	5.6435×10^{-9}

Tabla 8. Reducción del error utilizando los coeficientes que proporcionan el máximo y mínimo de la función de costo.

El modelo óptimo obtenido redujo satisfactoriamente el desajuste entre los datos observados y calculados, como se ve en las figuras 19 y 20, las cuales muestran las gráficas de los campos gravitacional y gradiométrico de cada caso, y en la figura 21 en la cual aparecen las diferencias absolutas entre éstos. Además, la figura 22 muestra la distribución de dichas diferencias absolutas, así como la media y desviación estándar de estos grupos de datos. Por último, la figura 24 muestra el decaimiento del desajuste en función de la temperatura, puede apreciarse que éste es similar al obtenido con el modelo del dique.

En el modelo óptimo, mostrado en la figura 23, se puede observar que las densidades obtenidas para los prismas hasta 3 Km de profundidad son casi idénticas a las del modelo real, sin embargo a partir de ese punto y a medida que se aumenta la profundidad las densidades invertidas se alejan más de las del modelo sintético. A pesar de esto, la similitud entre los datos observados y calculados es aceptable y ello se debe al decaimiento del campo gravitacional y gradiométrico el cual provoca que la aportación de los prismas profundos es mínima.

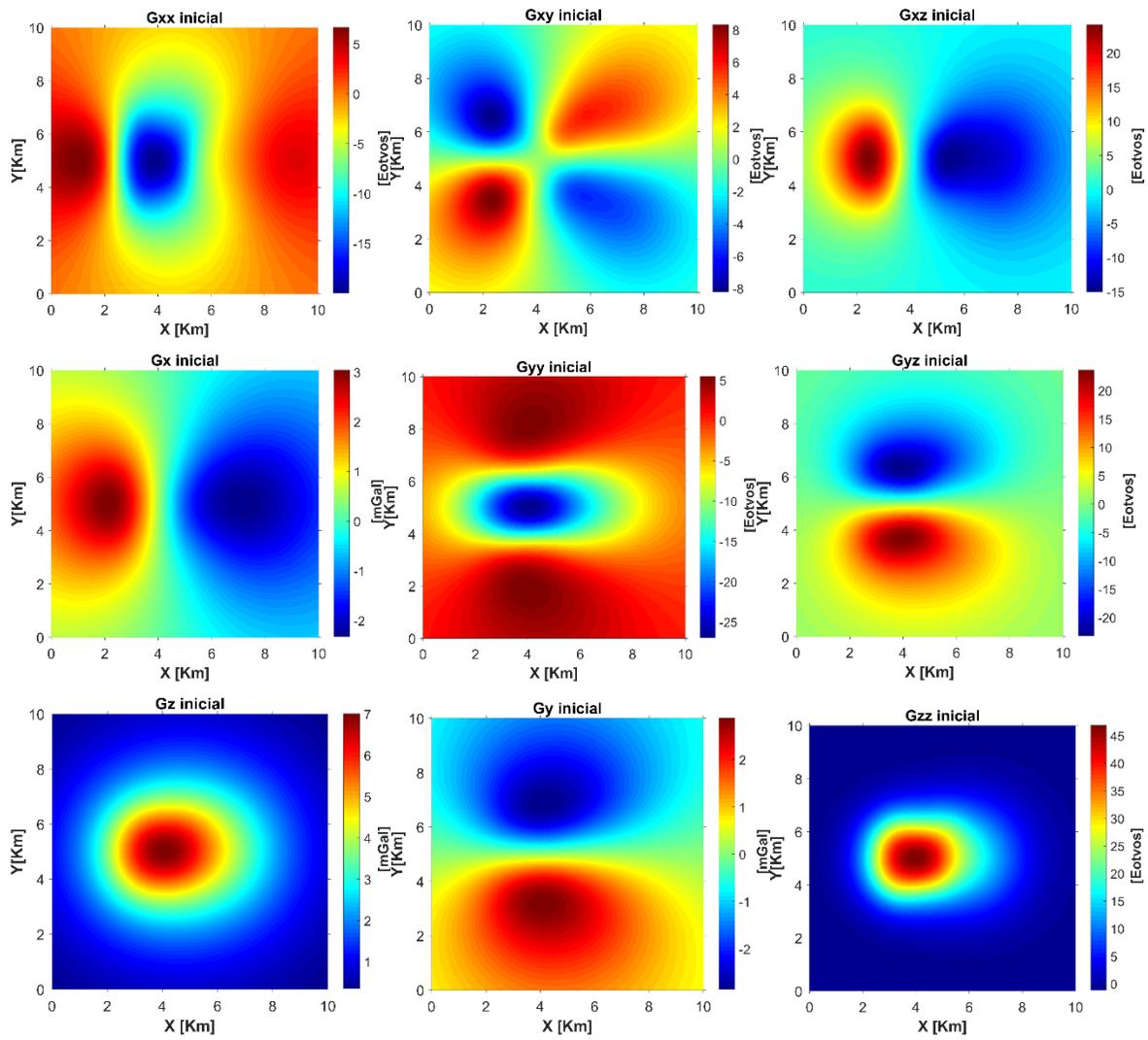


Figura 19. Campo gravitacional y gradiométrico observado para el modelo inicial del modelo S.

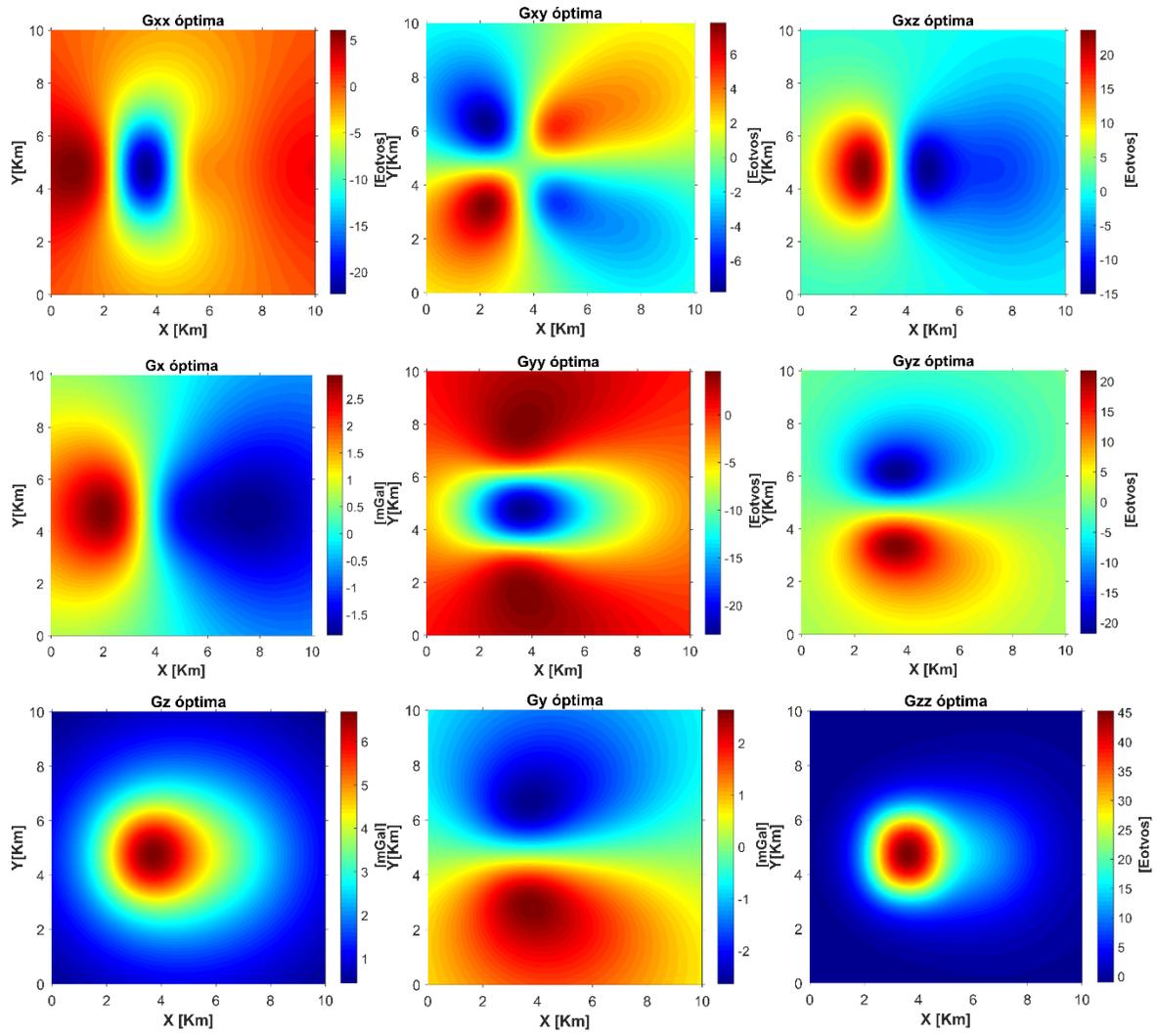


Figura 20. Campo gravitacional y gradiométrico observado para el modelo óptimo.

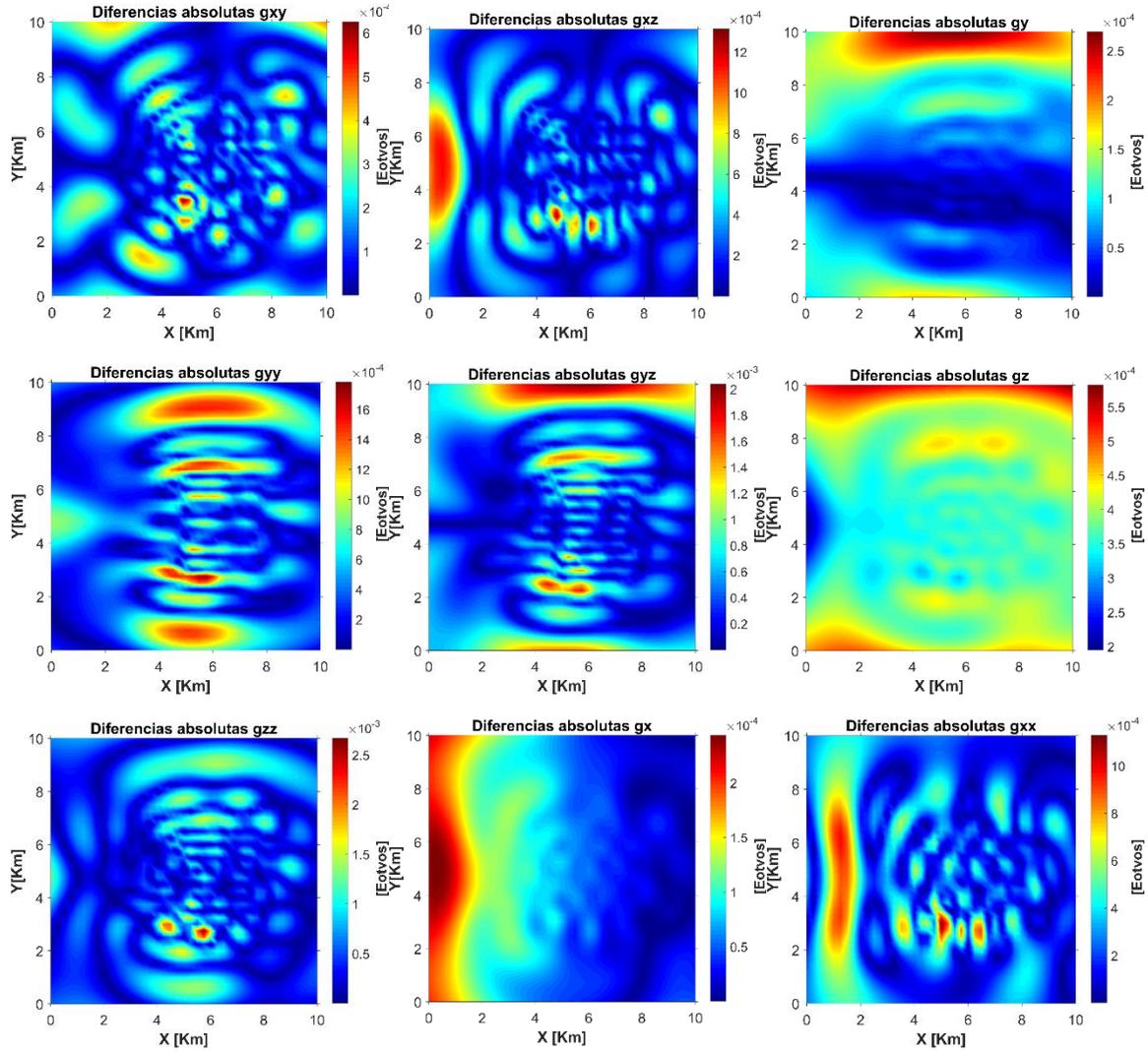


Figura 21. Mapas de diferencias absolutas entre los datos ajustados y los generados por el Modelo S.

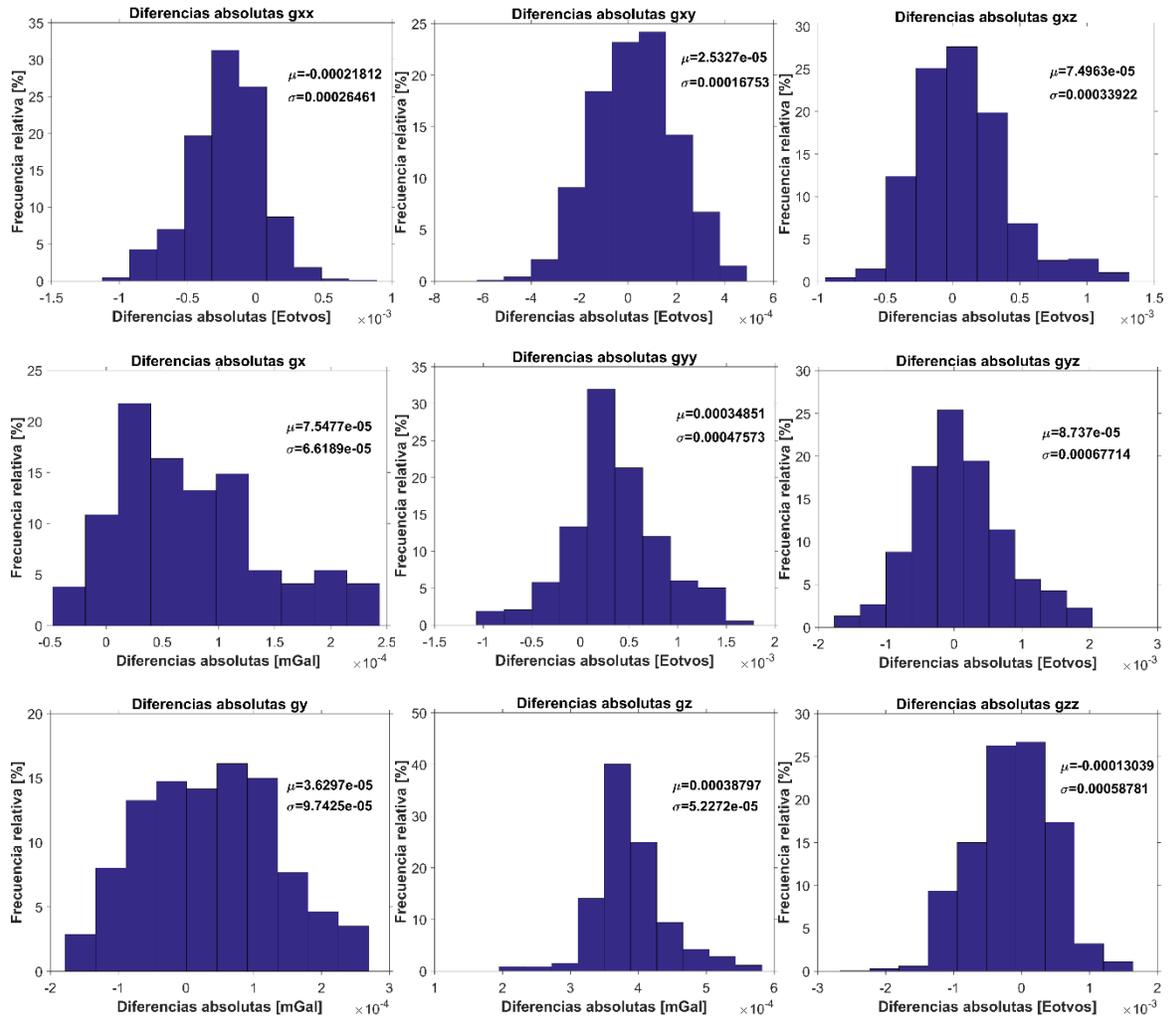


Figura 22. Distribución de las frecuencias relativas de las diferencias absolutas entre las componentes ajustadas y las de referencia.

Modelo óptimo de la inversión del Modelo S

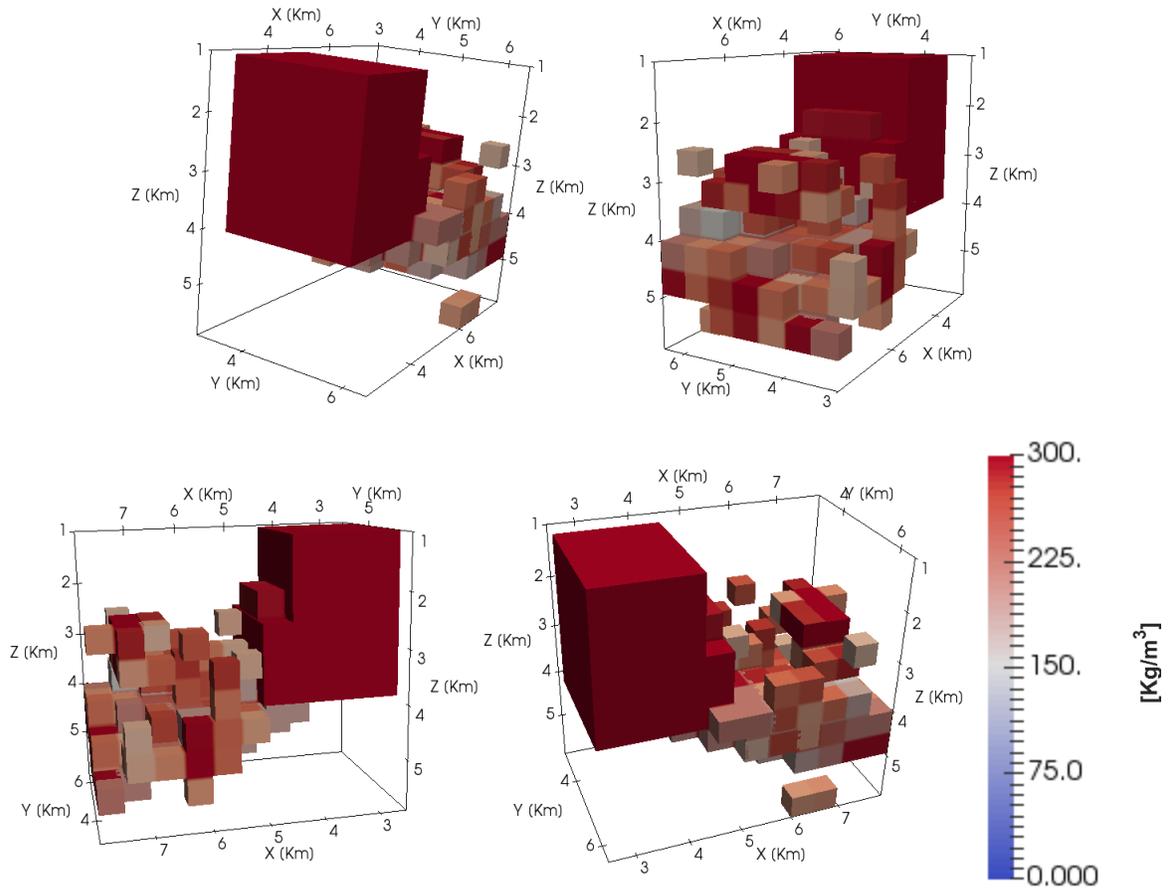


Figura 23. Modelo óptimo obtenido para el Modelo S mediante Cristalización Simulada.

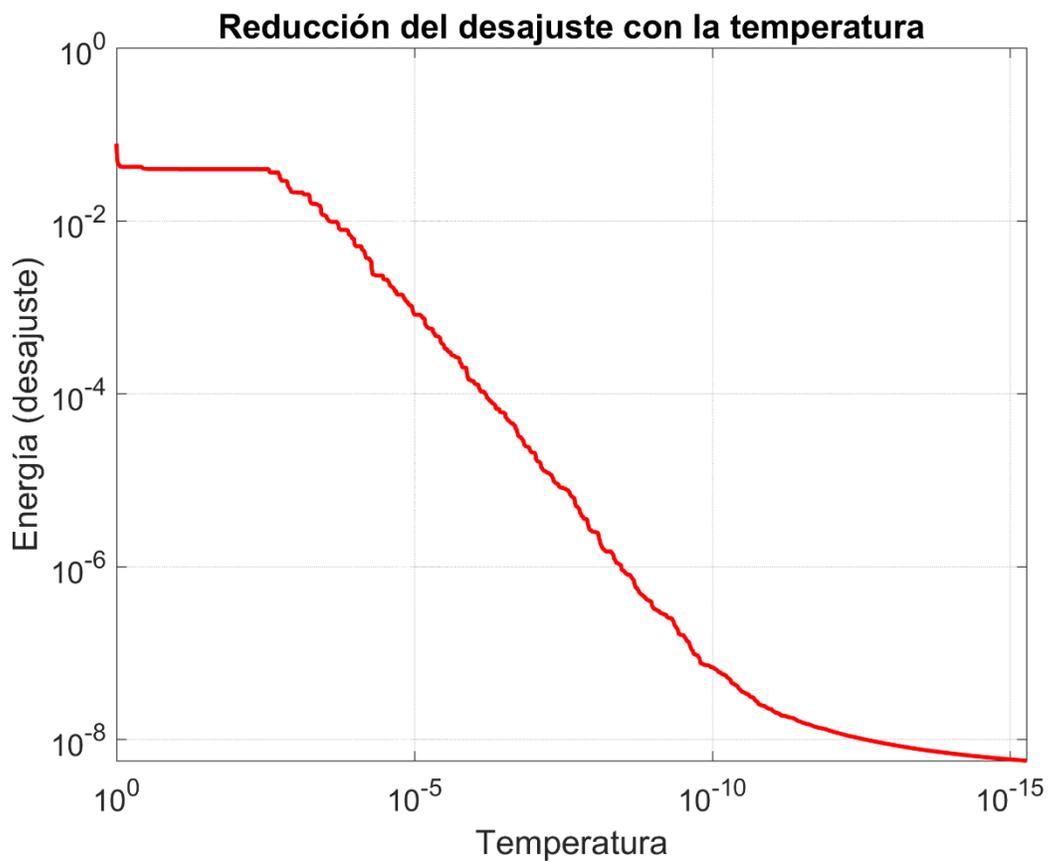


Figura 24. Decaimiento del nivel energético del sistema conforme se reduce iterativamente la temperatura.

4. Inversión de datos del Domo Vinton

Los resultados de los experimentos con los algoritmos de Cristalización Simulada y la Deconvolución Tensorial de Euler en los modelos sintéticos permiten ahora utilizar esta metodología para realizar la inversión de los datos reales. A continuación se presenta el proceso de inversión de los datos del Domo Vinton con el propósito de obtener un modelo tridimensional del domo de sal.

Ubicación

El domo Vinton es un cuerpo salino ubicado al sureste de los Estados Unidos, aproximadamente 120 Km al Oeste de la ciudad de Houston. Este domo de sal ha sido ampliamente estudiado y por lo tanto permite comprobar la eficacia de métodos de exploración. El nombre de la estructura se debe a que se encuentra cerca de la población de Vinton en el estado de Luisiana, tal y como se muestra en la figura 25. El área estudiada se ubica entre las latitudes $30^{\circ}13'44.54''$ N y $30^{\circ}04'43.95''$ N y entre las longitudes $93^{\circ}39'28.09''$ O y $93^{\circ}32'21.16''$ O, midiendo alrededor de 196 Km².

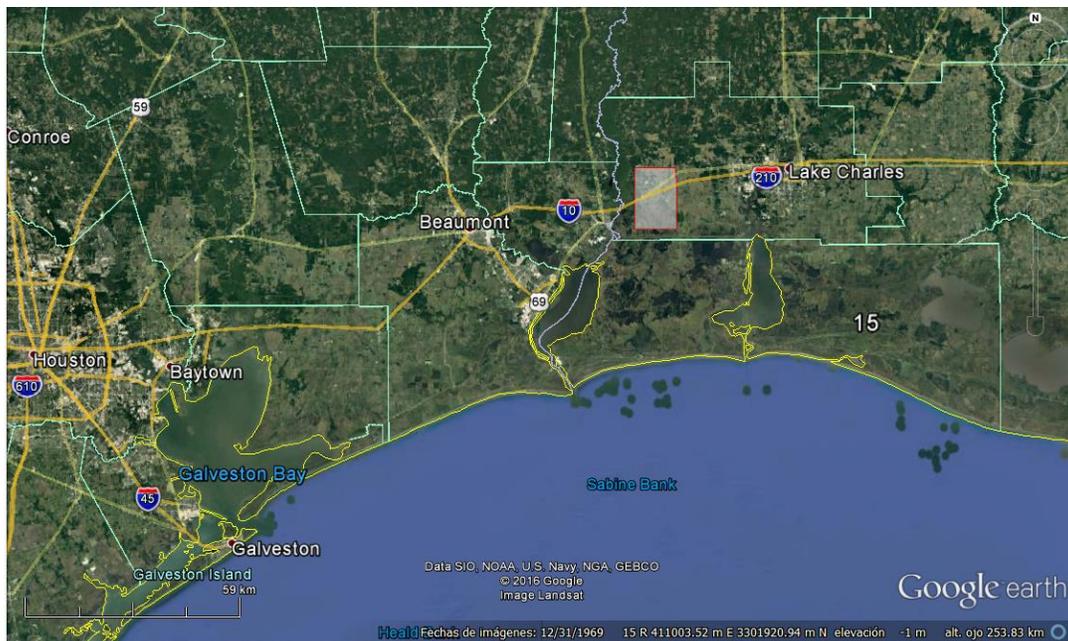


Figura 25. Ubicación de la región estudiada.

Adquisición de datos

Las mediciones del campo gradiométrico se realizaron utilizando un gradiómetro de tensor completo (*Full Tensor Gradiometer*) el cual es un equipo de alta resolución y precisión que utiliza tres pares de acelerómetros en discos y que puede ser montado en una aeronave (Bell Geospace, 2008).

La adquisición de los datos de gradiometría se realizó con un avión en el cual se obtuvieron 53 líneas de vuelo y 17 líneas de amarre. Las primeras tuvieron una longitud de 16.7 Km y una separación de 125 m al centro del levantamiento y de 250 m en el resto del área, mientras que las segundas midieron 11.7 Km y se encontraron espaciadas cada 1000 m.

Los valores de la componente vertical del campo gravitacional en la zona de estudio se obtuvieron integrando las componentes del tensor y mejorando este resultado con lecturas del campo gravitacional tomadas en tierra. Para obtener mejores resultados al realizar esta combinación, las señales del tensor fueron tratadas con un filtro pasa altas, en tanto que las de gravimetría lo fueron con un filtro pasa bajas. Esto se debió a que la naturaleza de estas señales es rica en altas y bajas frecuencias respectivamente, y al complementar una con la otra se obtiene una señal con un contenido más amplio de frecuencias (Bell Geospace, 2008).

Correcciones

Los datos que se tuvieron a disposición ya se encontraban corregidos: en cuanto a gravimetría se contaba con la anomalía de Bouguer y en cuanto a la gradiometría los datos ya estaban corregidos por *Full Tensor Noise Reduction*, aire libre y topografía. Las correcciones topográficas realizadas a ambos grupos de datos se realizaron con lecturas de altimetría tomadas durante el vuelo y utilizando una densidad de 1.8 g/cm³. Asimismo las correcciones de aire libre se realizaron utilizando como referencia la elevación de las líneas de vuelo.

El proceso conocido como *Full Tensor Noise Reduction* tiene como objetivo reducir el ruido de los datos del tensor gradiométrico, ya que éste tiende a enfatizarse dada la naturaleza del campo que se está midiendo. Este proceso consiste básicamente en corroborar que las variaciones percibidas en una componente del tensor ocurran en todas las demás, de ser así se conservan y en caso contrario se eliminan. De esta forma se tiene una mayor certeza de que las lecturas obtenidas corresponden a estructuras geológicas y no a ruido.

Descripción Geológica

En la región estudiada se encuentran rocas que datan desde el Oligoceno inferior al Mioceno superior, y que corresponden principalmente con areniscas y lutitas (Coker y colaboradores, 2007). El Domo Vinton intrusión en estas rocas y tiene en su cima materiales más densos como yeso y anhidrita, los cuales han sido llamados por las personas que han investigado la zona como *cap rock* y cuya formación ha sido atribuida a disolución de la sal o precipitación *in situ*. En la figura 26 se muestra un esquema del domo y la roca que lo encajona mientras que en la figura 27 se muestran las densidades de los materiales que se encuentran en esta zona.

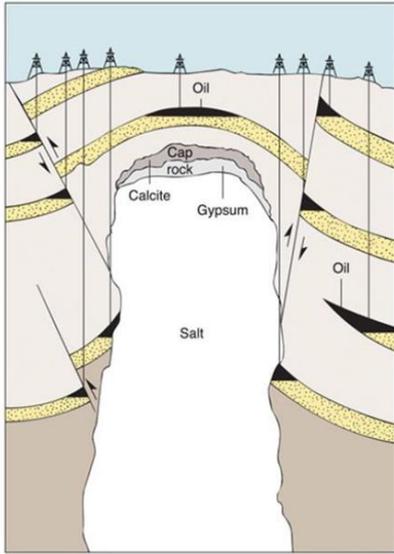


Figura 26. Estructura del Domo Vinton. Tomada de Ennen (2012)

Estudios como los de Owen (1975) y Eti (2004) describen la estructura del cuerpo salino con bordes circulares en la superficie que se vuelven elipsoidales a profundidad. Asimismo, sostienen que la profundidad mínima del *cap rock* es de alrededor de 130 m y que éste tiene un espesor que oscila entre 60 m y 210 m. En estos estudios los investigadores estiman que las dimensiones del intrusivo salino son de aproximadamente 1.2 Km en su sección N-S y de 1.5 Km en la E-O así como alrededor de 4 Km de profundidad.

En la zona existen dos sistemas de fallas locales diferentes al sistema de fallas de la región. Uno en dirección NE-SW, opuesto al sistema regional, y uno radial centrado en la cima del domo. La existencia de ambos sistemas es atribuida al emplazamiento del domo de sal (Coker, 2016).

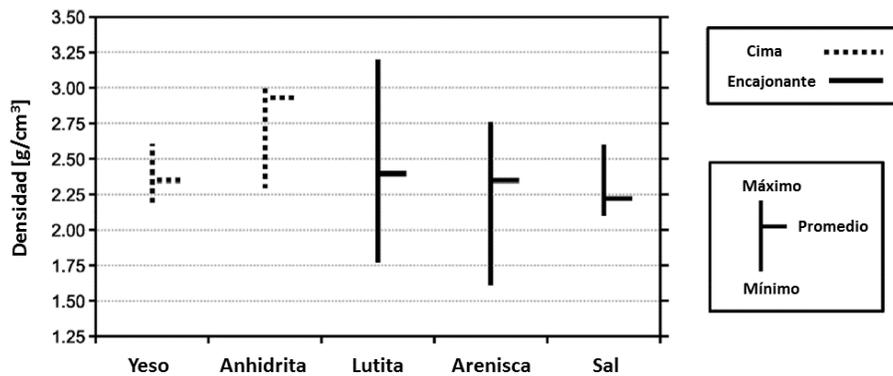


Figura 27. Densidades de los materiales que se encuentran presentes en la zona de estudio (Oliveira y Barbosa, 2013).

Procesos aplicados a los datos de gravimetría

Para realizar el proceso de inversión seguido en el caso del modelo sintético S primero fue necesario acondicionar los datos gravimétricos del domo. Esto se debió a que existían dos problemas con ellos: el primero fue que se carecía de las componentes horizontales del campo gravitacional y el segundo que las amplitudes de la componente vertical sugerían la presencia de un efecto regional.

Cálculo del residual de la componente vertical del campo gravitacional

El primer proceso aplicado fue la separación de la componente vertical en sus componentes regional y residual. Esto se realizó modelando el regional con un plano, así se determinó mediante el método de mínimos cuadrados la ecuación del plano con el menor desajuste respecto a los datos observados. El espacio geométrico obtenido se muestra en la expresión 61.

$$z = -0.215108x + 0.045668y - 22.821229 \dots (61)$$

El residual fue calculado simplemente sustrayendo el regional de los datos observados. El contraste entre estos tres grupos de datos se puede observar en la figura 28, en la cual se puede notar que el residual obtenido muestra una mejor delimitación del domo. Además, las amplitudes del residual son mucho más cercanas a las que produce el contraste de densidades de un cuerpo de sal de las dimensiones ya mencionadas.

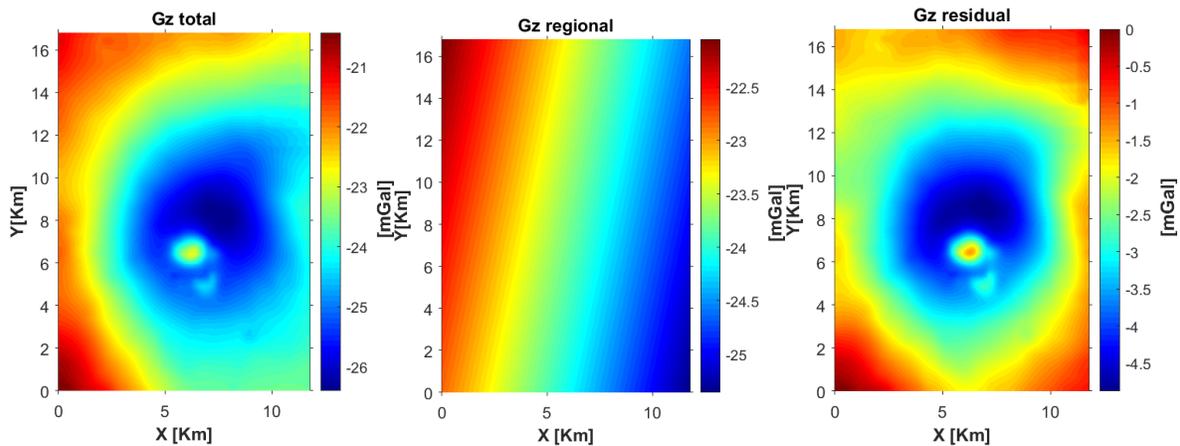


Figura 28. Mapas de los datos corregidos, regional y residual.

Calculo de las componentes horizontales gravitacionales

La aplicación de la Deconvolución Tensorial de Euler y la posterior corrección de la profundidad de sus soluciones utilizada en este trabajo requiere de las tres componentes del campo gravitacional. Sin embargo, sólo se tenía en posesión la vertical por lo que fue necesario calcular las horizontales. De acuerdo al trabajo de Mickus e Hinojosa (2001) es posible calcular éstas, así como todas las componentes del tensor gradiométrico a partir de la componente vertical gravitacional utilizando la Transformada de Fourier. Además, también resulta factible estimar las componentes horizontales gravitacionales mediante la integración de elementos del tensor gradiométrico. Las ecuaciones utilizadas en este trabajo para dicho propósito se muestran en la tabla 9.

	Para calcular g_x	Para calcular g_y
A partir de derivadas consecutivas	$g_x = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{ip} G_{xx} \right)$	$g_y = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{iq} G_{yy} \right)$
A partir de derivadas cruzadas	$g_x = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{iq} G_{xy} \right)$	$g_y = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{ip} G_{yx} \right)$
A partir de derivadas con respecto de z	$g_x = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{k} G_{xz} \right)$	$g_y = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{k} G_{yz} \right)$
A partir de g_z	$g_x = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{ip}{k} G_z \right)$	$g_y = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{iq}{k} G_z \right)$

Tabla 9. Ecuaciones para calcular las componentes horizontales gravitacionales a partir de la componente vertical y del tensor gradiométrico.

Los resultados de la aplicación de los dos métodos para el cálculo de las componentes horizontales mencionados se muestran en las figuras 29 y 30. En ellas resulta evidente que las estimaciones a partir del campo gravitacional tienen un contenido mayor de bajos números de onda que las estimadas a partir del tensor gradiométrico. De forma similar, los mapas obtenidos a partir de la integración en el dominio del número de onda tienen un contenido mayor de altos números de onda.

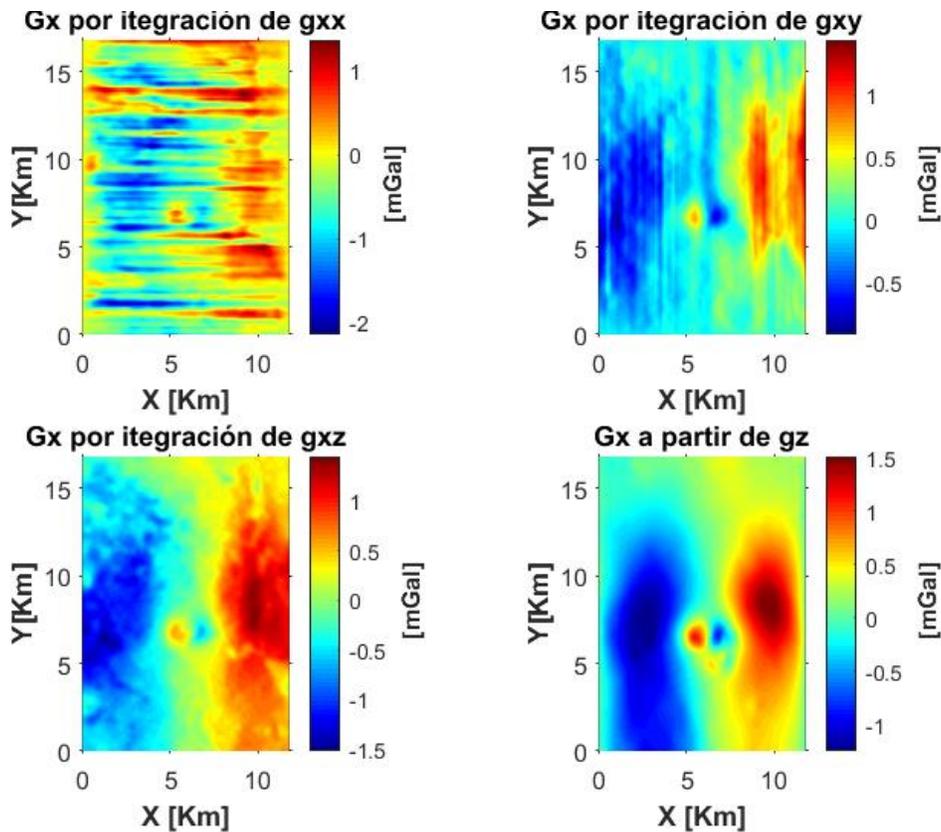


Figura 29. Diferentes estimaciones de la componente horizontal g_x .

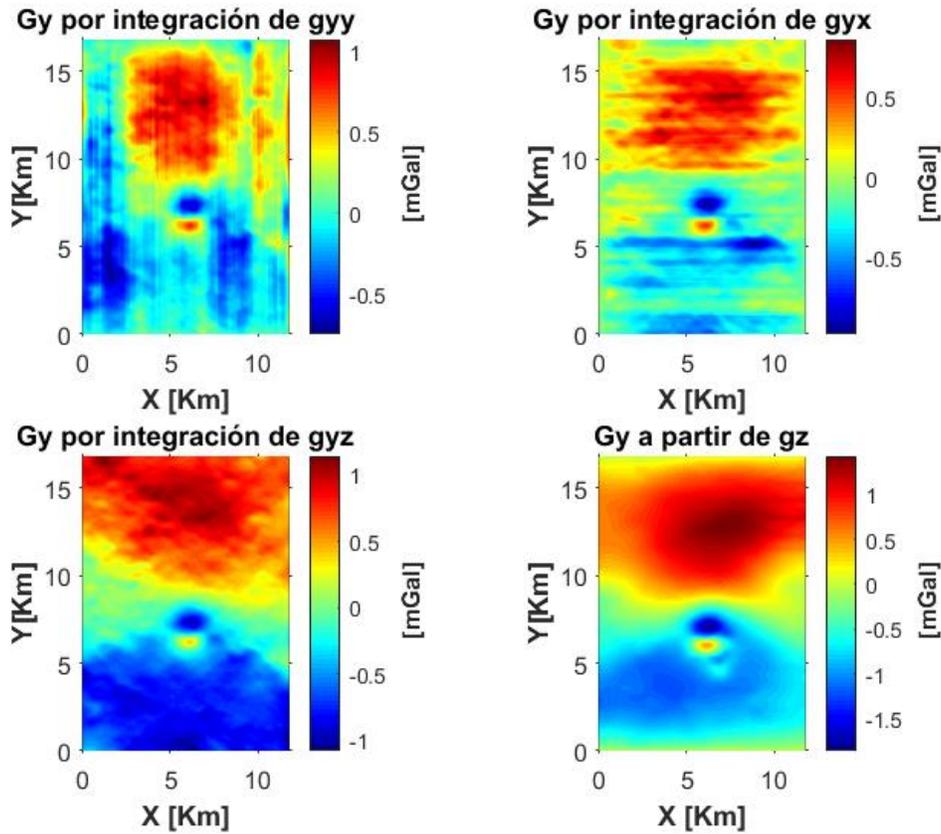


Figura 30. Diferentes estimaciones de la componente horizontal g_y .

Los resultados obtenidos a partir de la integración de las derivadas cruzadas y las derivadas consecutivas fueron deficientes. A causa de esto, únicamente se conservaron las componentes obtenidas a partir de g_z y las integradas a partir de g_{xz} y g_{yz} . Dado que se tenían dos resultados por componente, donde uno de ellos era rico en altos números de onda mientras que el otro lo era en bajos, se decidió emular la metodología aplicada por Bell (2008) y mezclar los resultados obtenidos. Para ello se calculó el espectro de amplitudes de los dos pares de resultados y posteriormente se determinó de forma visual un número de onda de corte que sirvió de parámetro para la unión de los resultados. Los números de onda menores a éste fueron tomados de los resultados a partir de g_z en tanto que las mayores lo fueron de la integración de las derivadas en la dirección vertical.

Los espectros de amplitudes de las componentes que se mezclaron se muestran en las figuras 31 y 32. Para generar las nuevas componentes se utilizaron los números de onda $1.4050e-04$ [1/Km] en el caso de la componente X y $1.7856e-04$ [1/Km] en el caso de la Y. Los espectros de amplitudes de las componentes combinadas aparecen en la figura 33. Los resultados fueron unas componentes horizontales cuyo contenido de números de onda fue más amplio que el de sus predecesores. Los mapas obtenidos se muestran en la figura 34.

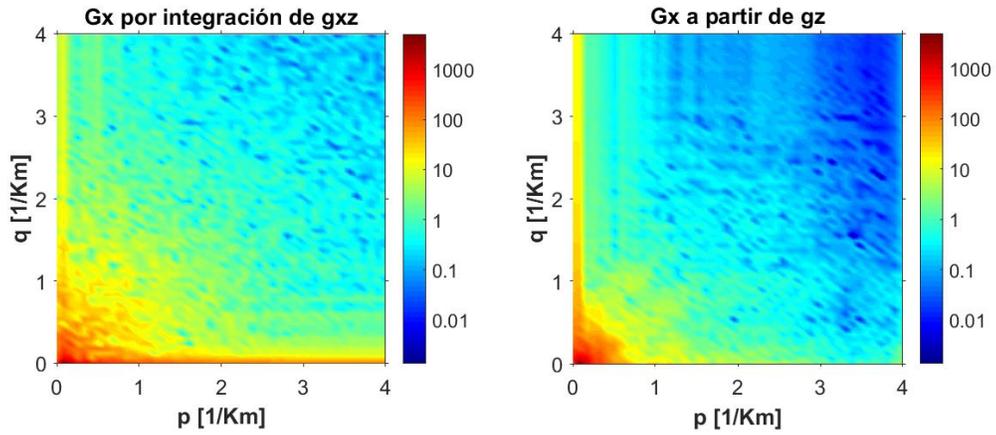


Figura 31. Espectros de amplitudes de las señales que se combinaron para generar la componente g_x .

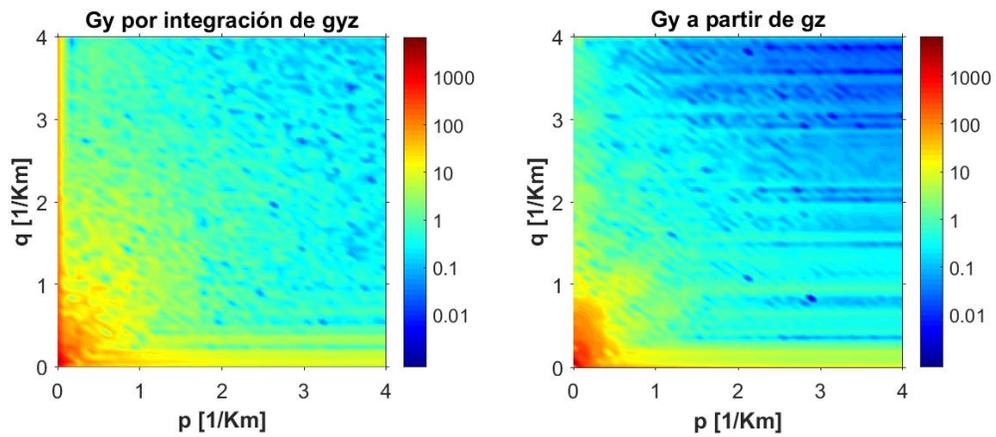


Figura 32. Espectros de amplitudes de las señales que se combinaron para generar la componente g_y .

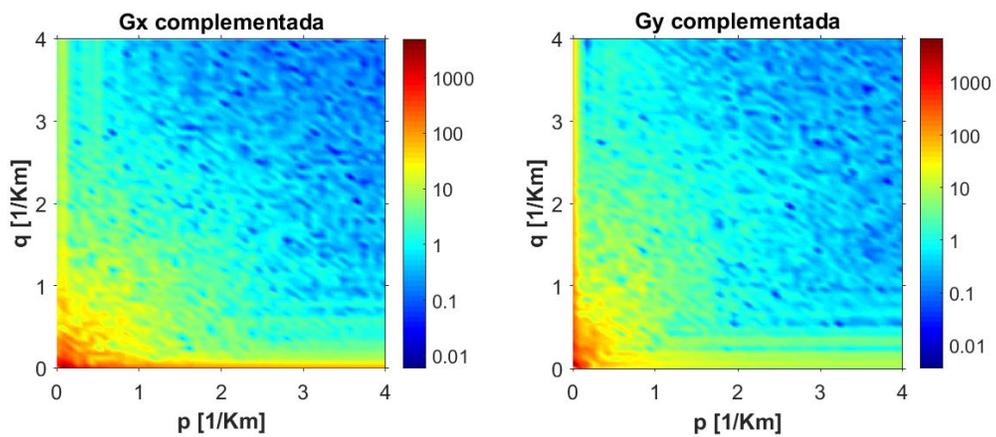


Figura 33. Espectros de amplitudes de las componentes obtenidas a partir del enriquecimiento de números de onda.

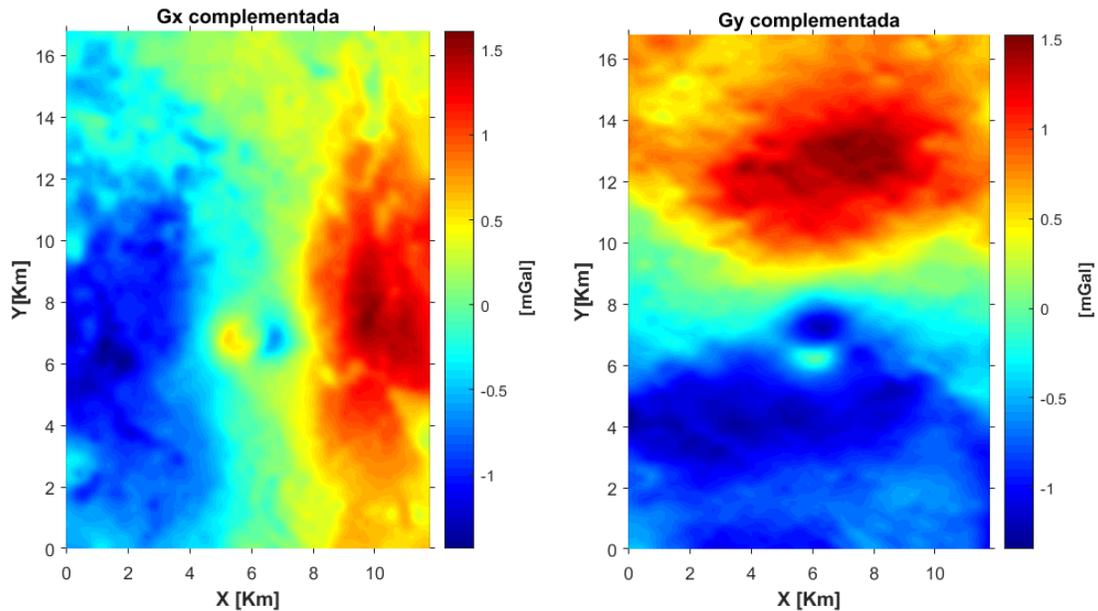


Figura 34. Mapas de las componentes horizontales calculadas cuyo contenido de números de onda ha sido enriquecido.

Deconvolución Tensorial de Euler

Las componentes horizontales gravimétricas fueron utilizadas junto con los elementos de la diagonal del tensor gradiométrico para ejecutar el algoritmo de la Deconvolución Tensorial de Euler, tal y como se realizó con el Modelo S. A diferencia del caso sintético se probaron diferentes tamaños de ventana, los cuales ocasionaron variaciones en la profundidad de las soluciones halladas. Finalmente se generaron cuatro mapas los cuales se muestran en la figura 35, todos ellos tienen los mismos índices estructurales y muy poca variación en el criterio de tolerancia por lo que la única diferencia significativa es el tamaño de ventana.

El motivo de la variación de la profundidad de las soluciones con el tamaño de la ventana es que al ampliarse el área de observación se perciben aportaciones de un mayor volumen de roca, lo que permite profundizar la exploración pero a la vez reduce la resolución en las regiones someras. En los mapas de las figuras 35 se puede observar este fenómeno.

Como referencia es necesario decir que el tamaño de una ventana de 1 elemento es de 59 m en la dirección E-O y de 84 m en la N-S. Asimismo, los índices estructurales utilizados fueron 2 para la gravimetría y 3 para la gradiometría, los cuales corresponden al decaimiento de fuentes puntuales de acuerdo a Stavrev y Reid (2007).

A partir de las soluciones encontradas con las diferentes ventanas se generaron perfiles sobre los que se proyectaron las soluciones, de la misma forma en que se hizo con los datos sintéticos. Posteriormente estos perfiles fueron convertidos en matrices que se interpolaron para generar un modelo inicial.

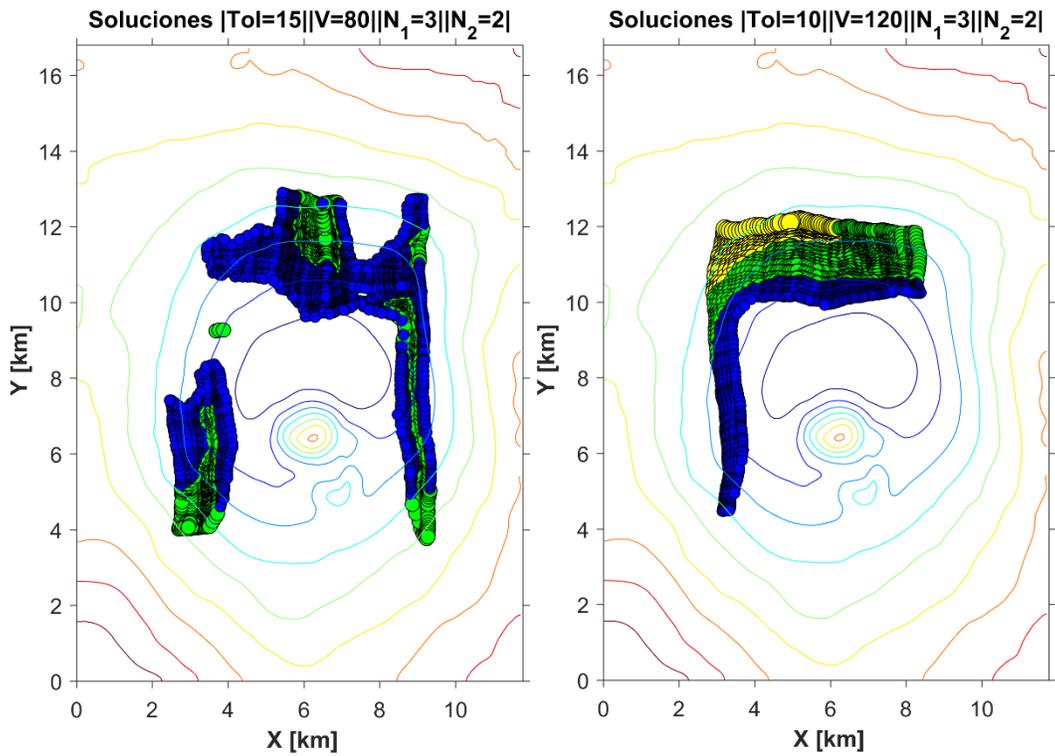
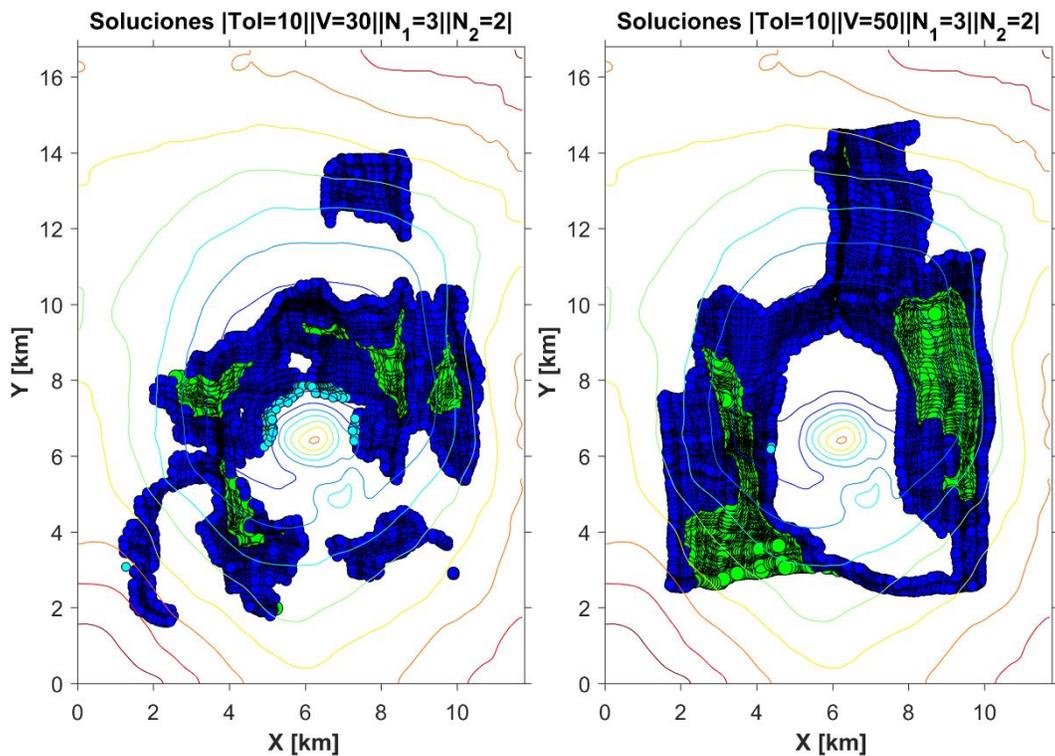


Figura 35. Soluciones encontradas mediante la Deconvolución Tensorial de Euler y la corrección de profundidades. Los diferentes mapas corresponden a la aplicación de diferentes tamaños de ventanas de observación.

Generación del Modelo Inicial

En este trabajo se decidió modelar el Domo Vinton con un ensamble de prismas compuesto de cuatro bloques con prismas de tamaños diferentes. El tamaño de los prismas y de los bloques aumenta conforme a la profundidad de tal modo que el ensamble se asemeja a una pirámide, la razón de esta consideración es compensar el decaimiento de la intensidad de los campos potenciales estudiados. Además, otro beneficio importante de esta configuración es que se reduce significativamente el número de prismas lo cual reduce el tiempo de cómputo. Una descripción más cuantitativa del ensamble se muestra en la tabla 10.

		Rango	Dimensión	Número de prismas	Rango de densidades
Bloque 1	X	4.2 [Km] – 9.0 [Km]	4.8 [Km]	48	100 [Kg/m ³] a 400 [Kg/m ³]
	Y	4.0 [Km] – 9.5 [Km]	4.5 [Km]	55	
	Z	0.1 [Km] – 0.5 [Km]	0.4 [Km]	4	
Bloque 2	X	3.2 [Km] – 9.6 [Km]	6.4 [Km]	32	0 [Kg/m ³] y 100 [Kg/m ³]
	Y	3.8 [Km] – 11.0 [Km]	7.2 [Km]	36	
	Z	0.5 [Km] – 1.5 [Km]	1.0 [Km]	5	
Bloque 3	X	2.9 [Km] – 9.8 [Km]	6.9 [Km]	23	-100 [Kg/m ³] y 100 [Kg/m ³]
	Y	3.7 [Km] – 11.8 [Km]	9.1 [Km]	27	
	Z	1.5 [Km] – 3.0 [Km]	1.5 [Km]	5	
Bloque 4	X	2.0 [Km] – 10.0 [Km]	8.0 [Km]	8	-400 [Kg/m ³] y -100 [Kg/m ³]
	Y	3.5 [Km] – 12.5 [Km]	9.0 [Km]	9	
	Z	3.0 [Km] – 6.0 [Km]	3.0 [Km]	3	

Tabla 10. Características del ensamble de prismas utilizado para modelar el Domo Vinton.

El siguiente paso para completar el modelo inicial es la atribución de densidades a los prismas. Para ello, se decidió que la modelación se haría a través de contrastes de densidades, es decir la densidad atribuida a cada prisma no correspondería a la del material que lo conforma, sino al contraste que tenga éste con el material que lo rodea. Por ello se utilizó la curva de densidad contra profundidad de Nelson y Fairchild (1989) para cuantificar el contraste de la densidad de la sal y del *cap rock* con la de la roca encajonante y asignar ese valor a cada prisma. En la figura 36 se puede observar una representación tridimensional del modelo inicial.

Modelo inicial para el Vinton Dome

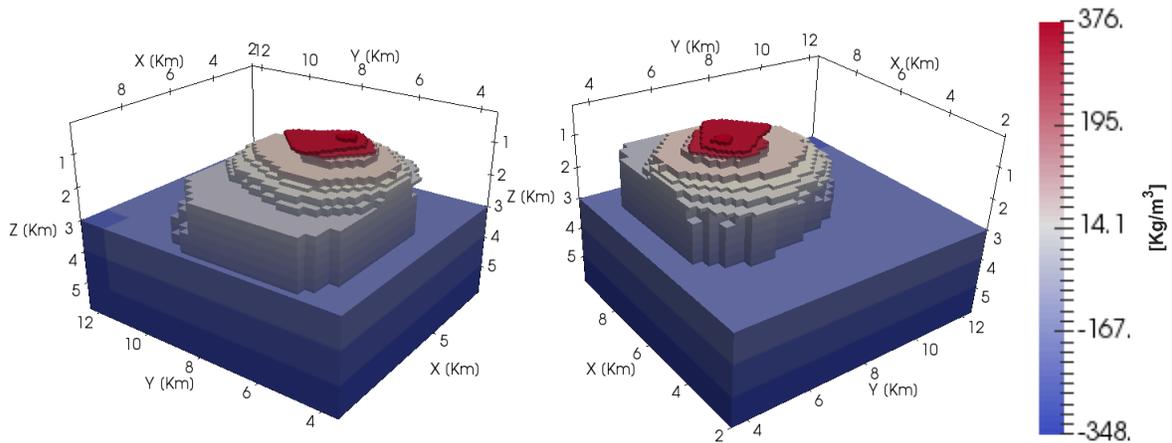


Figura 36. Configuración del modelo inicial para el Domo Vinton.

El paso final del problema directo consistió en el cálculo de las matrices de sensibilidades y la respuesta del modelo inicial. Se resolvió el problema directo y se calcularon las nueve componentes con las que se ha trabajado hasta ahora, los mapas correspondientes se muestran en la figura 37, adicionalmente en la figura 38 aparecen los mapas que corresponden con los valores de campo gravitacional y gradiométrico reales.

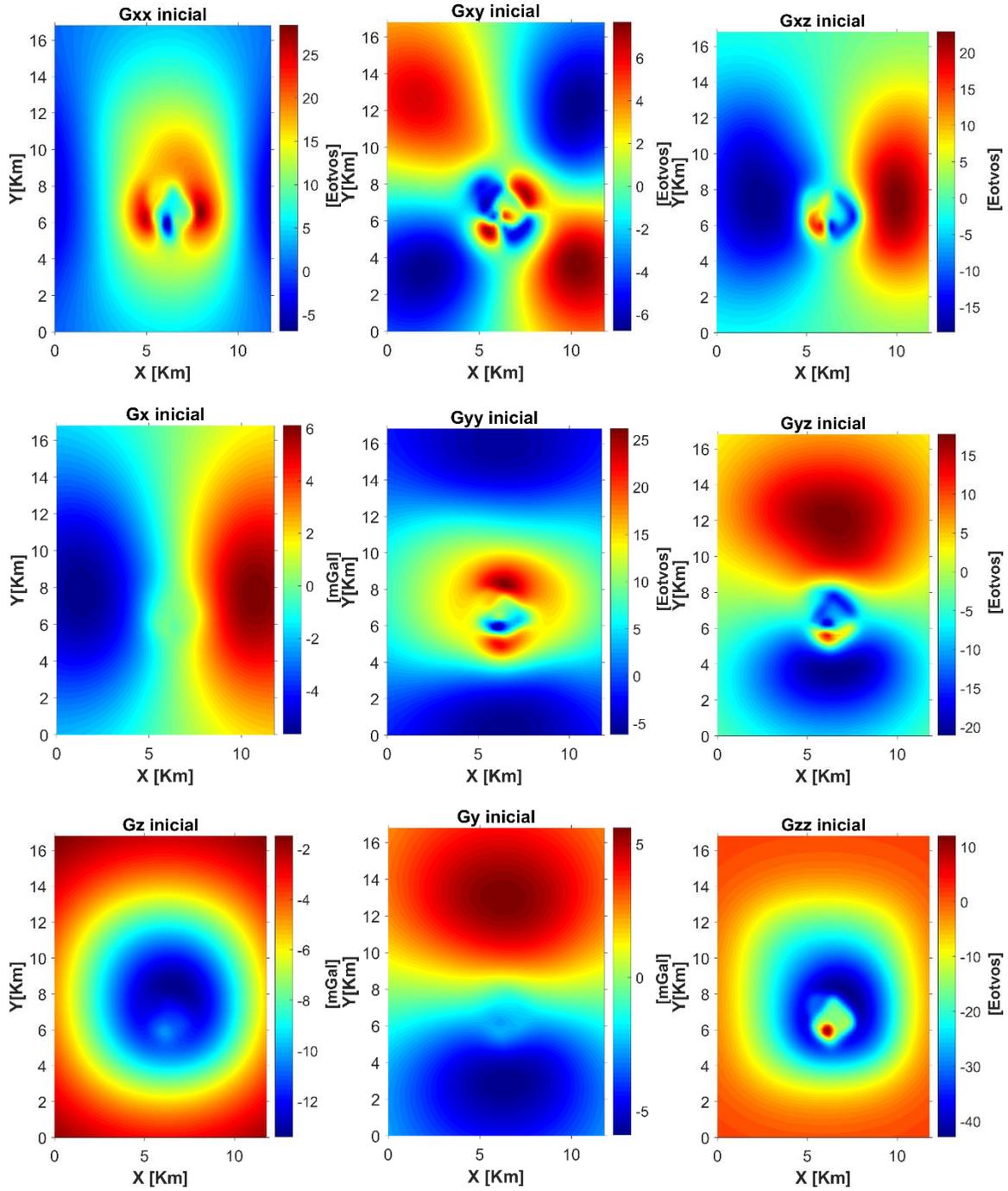


Figura 37. Componentes gravitacionales y gradiométricas del modelo inicial del Vinton Dome.

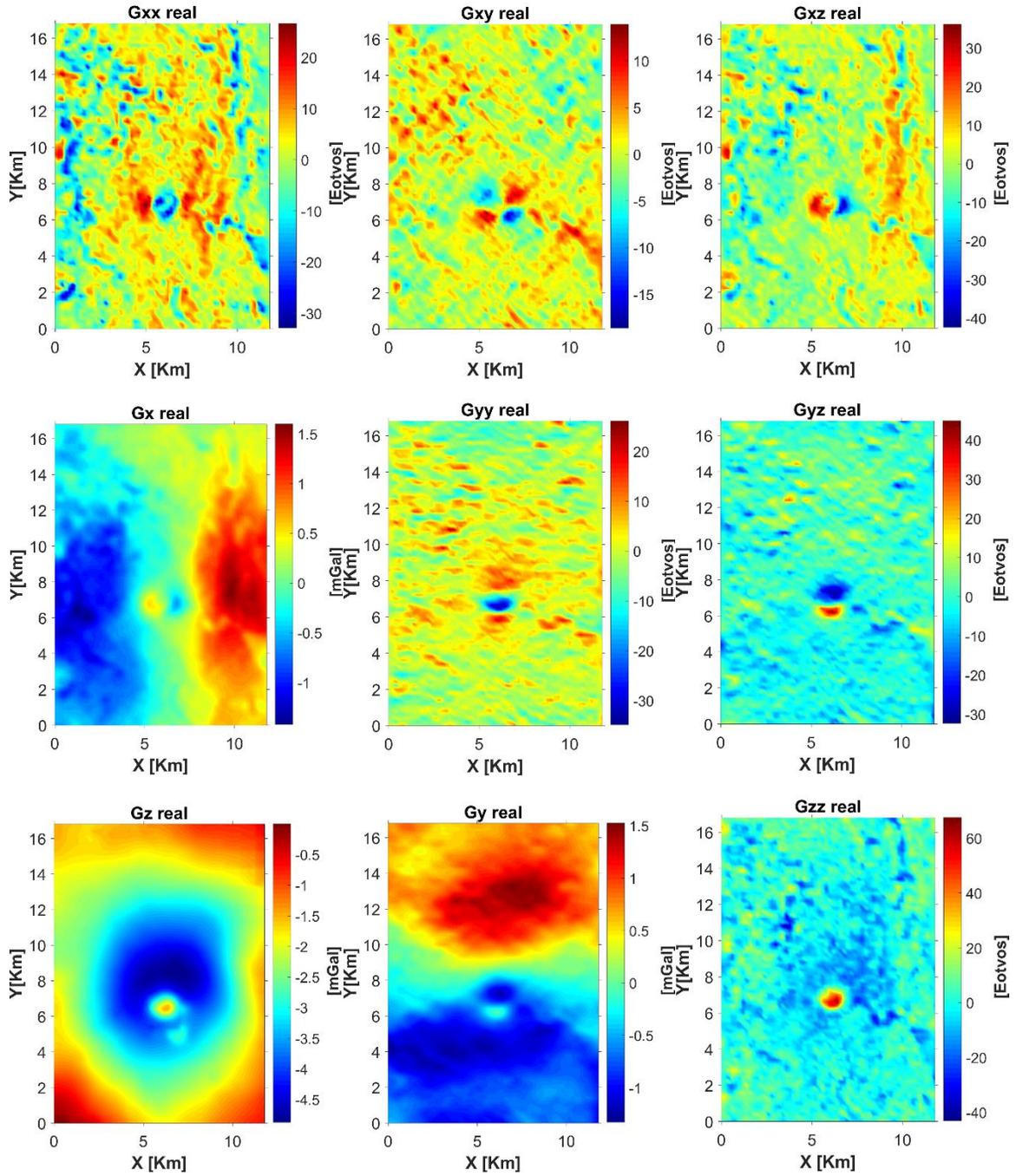


Figura 38. Componentes gravitacional y gradiométrica reales del Domo Vinton.

Inversión por Cristalización Simulada

Antes de realizar la inversión de datos fue necesario hacer algunos cálculos y experimentos tales como la determinación de los coeficientes de la función de costo, el establecimiento de los límites de variación de los parámetros. Además, se aplicó una técnica que utilizó en los casos sintéticos y que consistió en la determinación de un intervalo óptimo de temperatura para el algoritmo. Para asignar los límites de variación de parámetros se consideraron los límites de densidad de los materiales presentes en el área de estudio de acuerdo al trabajo realizado por Oliveira y Barbosa (2013). Esta información en conjunto con la curva de densidad contra profundidad utilizada previamente permitió establecer límites para la densidad de cada prisma en función de la profundidad.

El siguiente paso consistió en calcular los coeficientes para maximizar el valor inicial de la función de costo, para lo cual se aplicó el mismo algoritmo de Cristalización Simulada utilizada en el caso del Modelo S. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 11.

c_1	c_2	c_a	c_b	c_c	c_d	$E_{inicial}$
0.05954	0.26634	0.12292	0.13982	0.00057	0.00404	8.7036

Tabla 11. Coeficientes utilizados para la primera inversión de los datos del Domo Vinton.

Posteriormente para aumentar la velocidad de la inversión, se siguió la propuesta de Cohn y Fielding (1999) y se realizó una inversión rápida con 100 iteraciones, $N_t=2$ y $N_s=1$ para determinar el intervalo de temperatura óptimo. Con la información obtenida se calculó la curva que se muestra en la figura 39 a partir de la cual se determinó que el intervalo óptimo era de $10^{-0.7}$ a 10^{-3} .

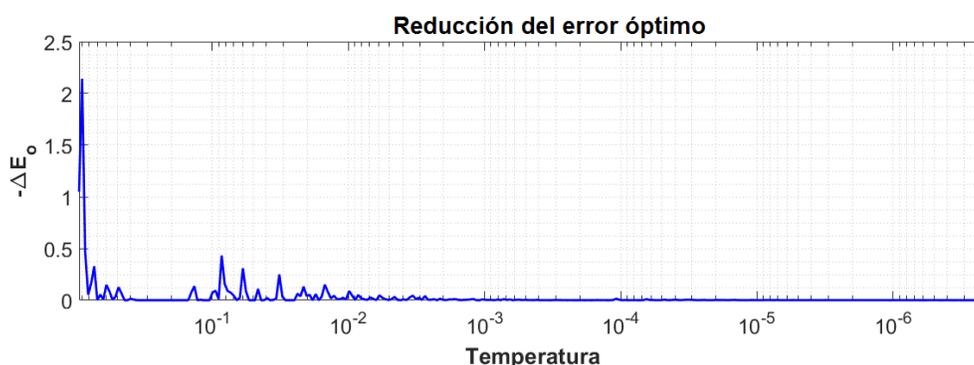


Figura 39. Curva de reducción de la energía del sistema conforme se reduce la temperatura en el caso del Domo Vinton.

Por último, se llevó a cabo la inversión de los datos del Domo Vinton utilizando los coeficientes calculados y el intervalo de temperatura óptima encontrado. La tabla 12 muestra más detalladamente la configuración de la inversión.

Número de parámetros	19641
Número de puntos de observación	5100
Temperatura inicial	1
Temperatura final	1.0293×10^{-10}
Reducciones de temperatura	3000
Valor de parámetro Nt	2
Valor de parámetro Ns	4
Factor RT	0.95
Modelos aceptados	233584285
Modelos rechazados	237799715
Energía inicial	8.7035
Energía final	0.3078

Tabla 12. Configuración de la primera inversión realizada en el Domo Vinton.

Modelo óptimo

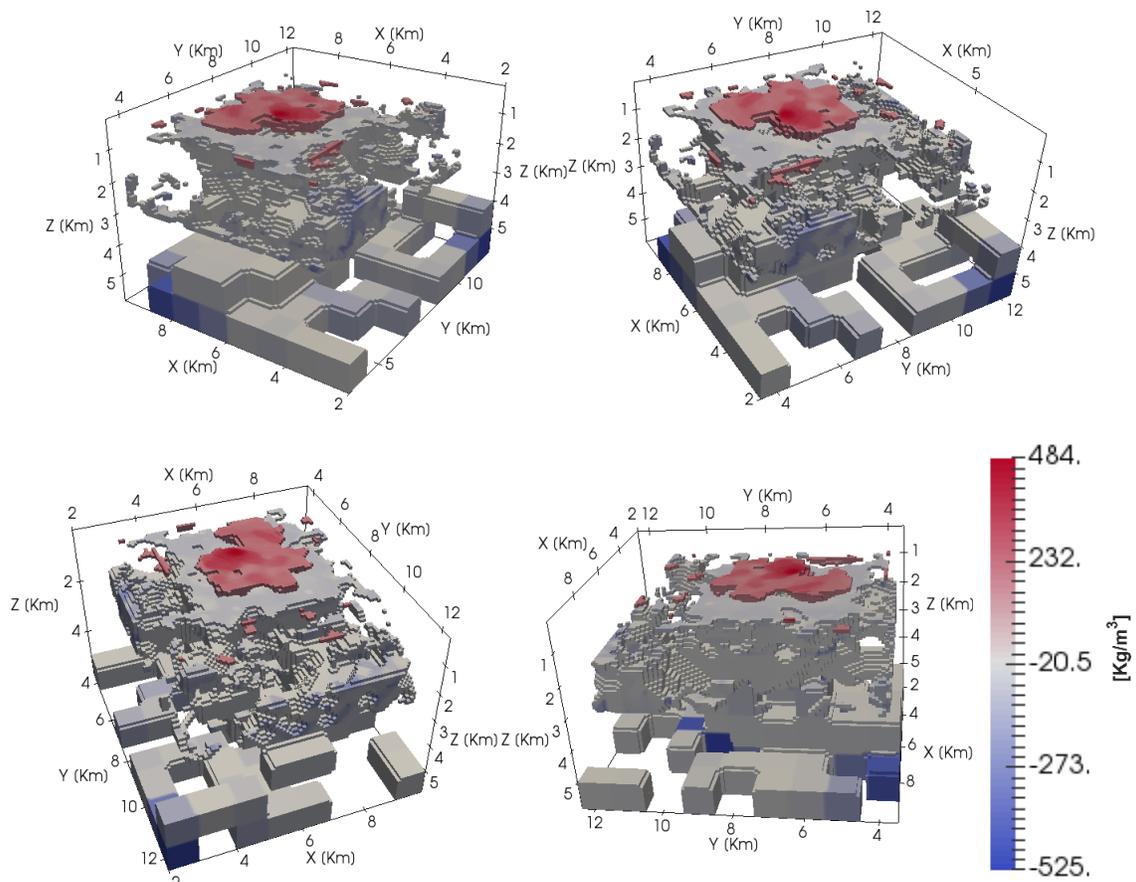


Figura 40. Modelo óptimo obtenido tras la primera inversión del Domo Vinton.

El modelo óptimo calculado genera unas componentes gravitacionales y gradiométricas similares a las reales. A pesar de ello el modelo podía ser mejorado, por lo que se decidió aplicar un filtro de

mediana al modelo obtenido, calcular los nuevos coeficientes de la función de costo y ejecutar una vez más el algoritmo de inversión. La figura 41 muestra el modelo filtrado.

Modelo filtrado

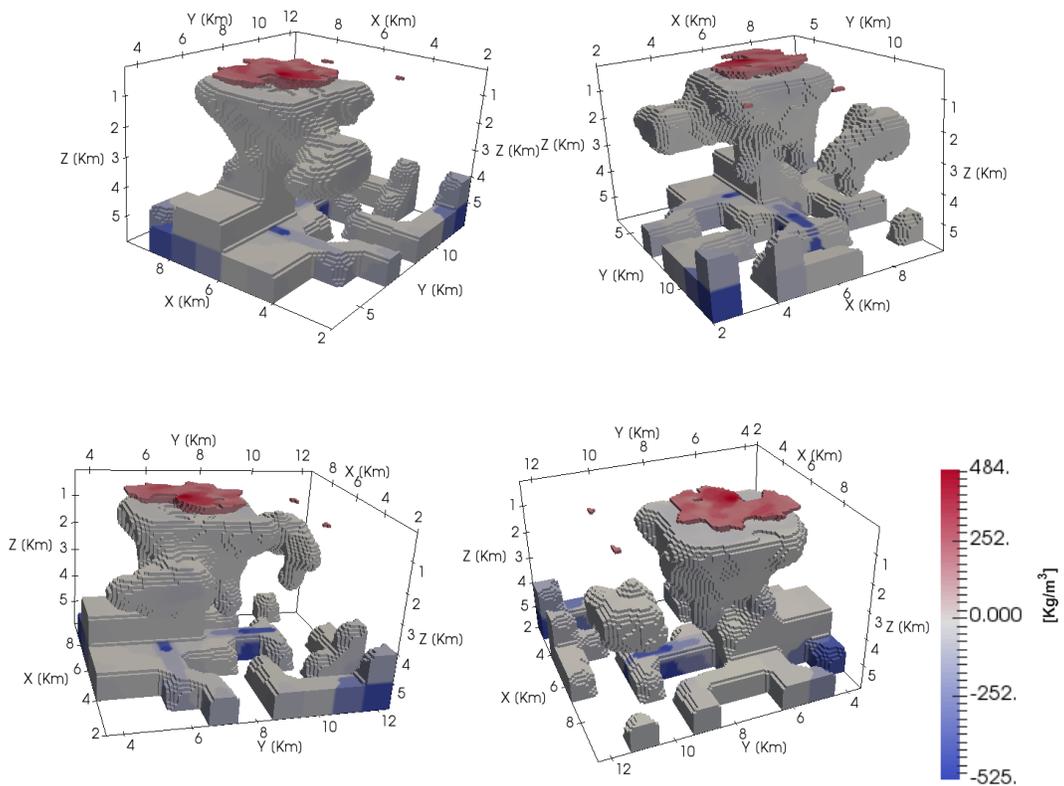


Figura 41. Modelo óptimo de la primera iteración luego del filtro de mediana.

Una vez calculado el modelo filtrado fue necesario calcular los coeficientes de la función de costo, de la misma forma en que han sido calculados los casos anteriores. Los resultados para este ensamble de prismas se muestran en la tabla 13.

c_1	c_2	c_a	c_b	c_c	c_d	$E_{inicial}$
0.08116	0.09104	0.11403	0.12336	0.12545	0.12506	0.594001

Tabla 13. Coeficientes utilizados para la segunda inversión.

Para realizar la segunda inversión se decidió volver a realizar una ejecución rápida y trazar la curva del decremento del nivel energético contra la temperatura, en ella se pudo observar que el intervalo de temperatura óptimo era diferente. El intervalo óptimo de temperatura en esta ejecución fue de 10^{-2} a 10^{-5} . La ejecución del algoritmo se llevó a cabo obteniéndose resultados satisfactorios, la configuración de la ejecución del algoritmo para la segunda ejecución se muestra en la tabla 14.

Número de parámetros	19641
Número de puntos de observación	5100
Temperatura inicial	1
Temperatura final	1.0293×10^{-4}
Reducciones de temperatura	100
Valor de parámetro Nt	2
Valor de parámetro Ns	4
Factor RT	0.95
Modelos aceptados	14261234
Modelos rechazados	1451566
Energía inicial	0.594001
Energía final	0.551141

Tabla 14. Configuración de la segunda inversión en la que se utiliza el modelo filtrado como modelo inicial.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para la modelación del Domo Vinton, la figura 42 muestra el modelo óptimo final, la figura 43 las componentes gravitacionales y tensoriales de ese modelo, la figura 44 las diferencias absolutas con respecto a los datos reales y la figura 45 la distribución de esas diferencias absolutas. Además la figura 46 muestra el decaimiento del desajuste con respecto a las iteraciones.

Modelo final para el Vinton Dome

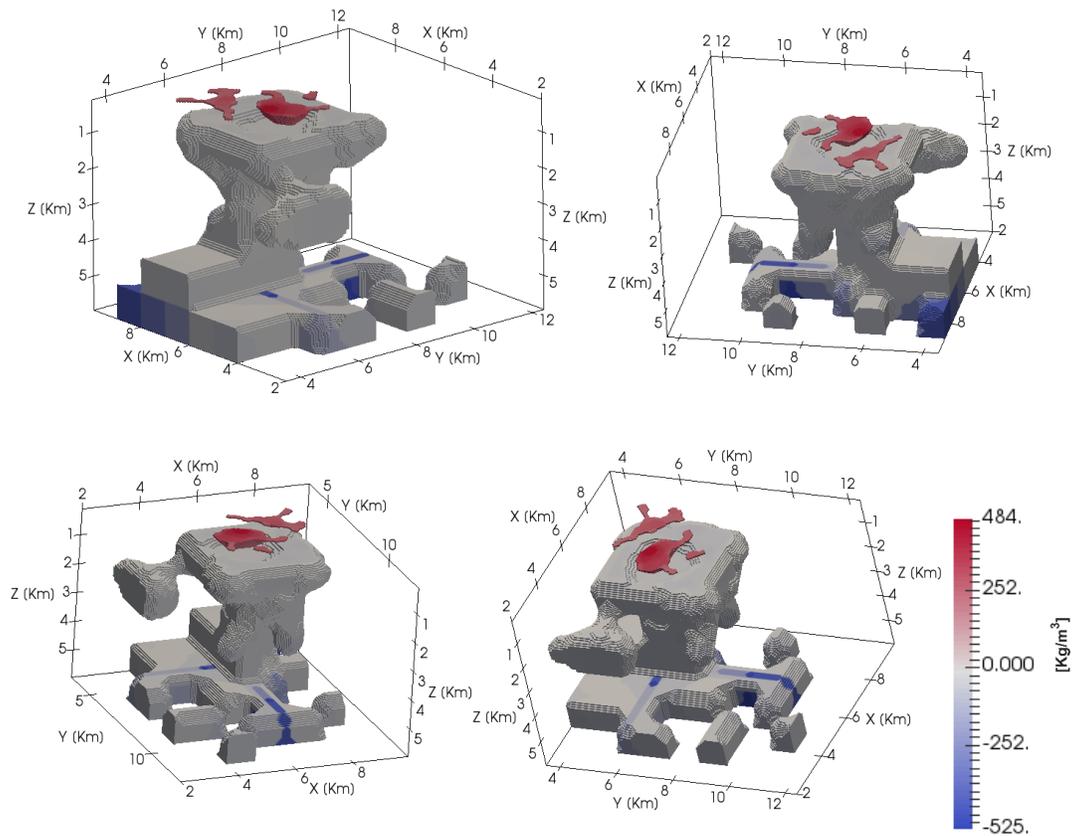


Figura 42. Modelo óptimo final que representa la estructura del Domo Vinton.

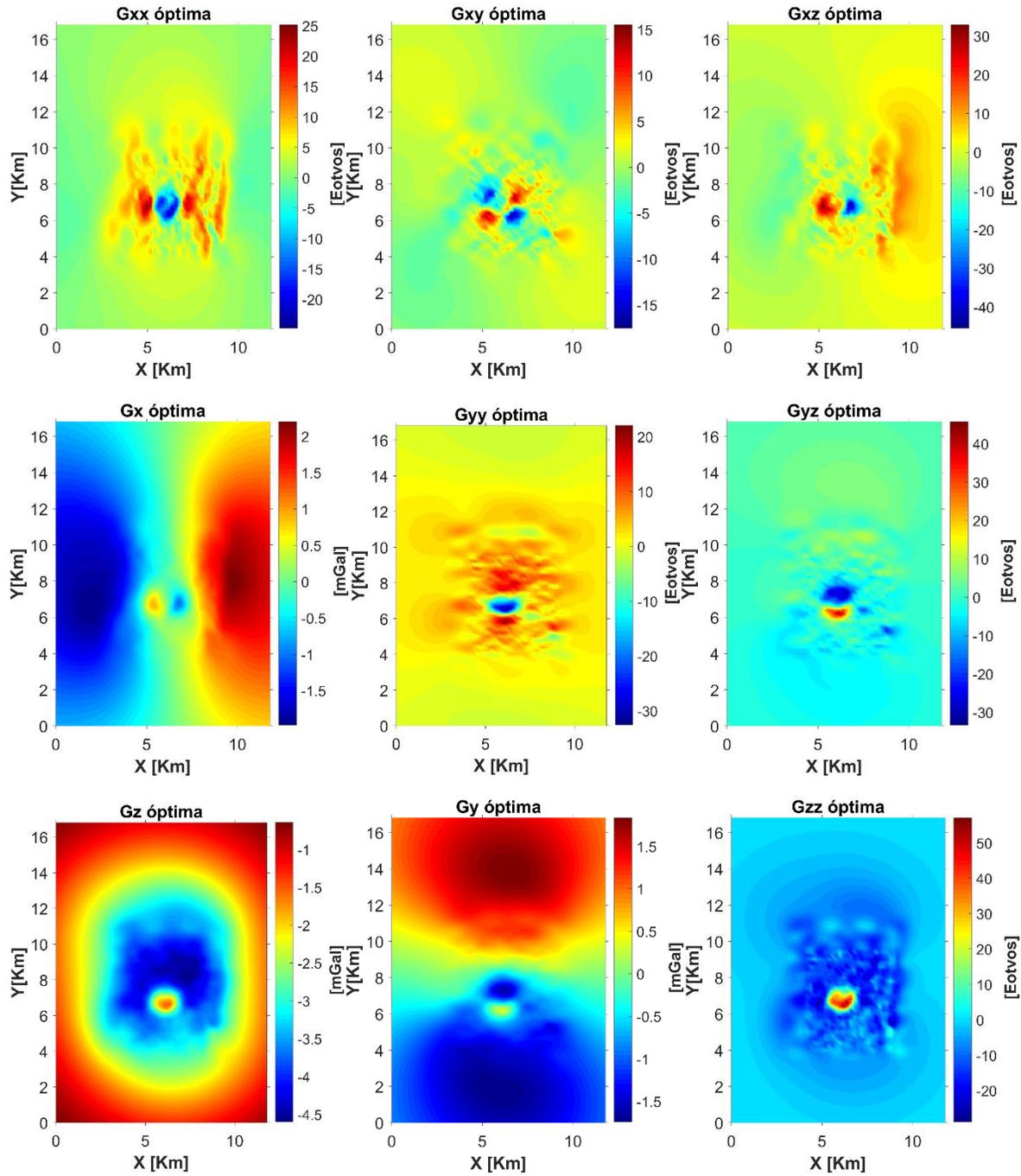


Figura 43. Componentes gravitacionales y gradiométricas calculadas para el modelo óptimo.

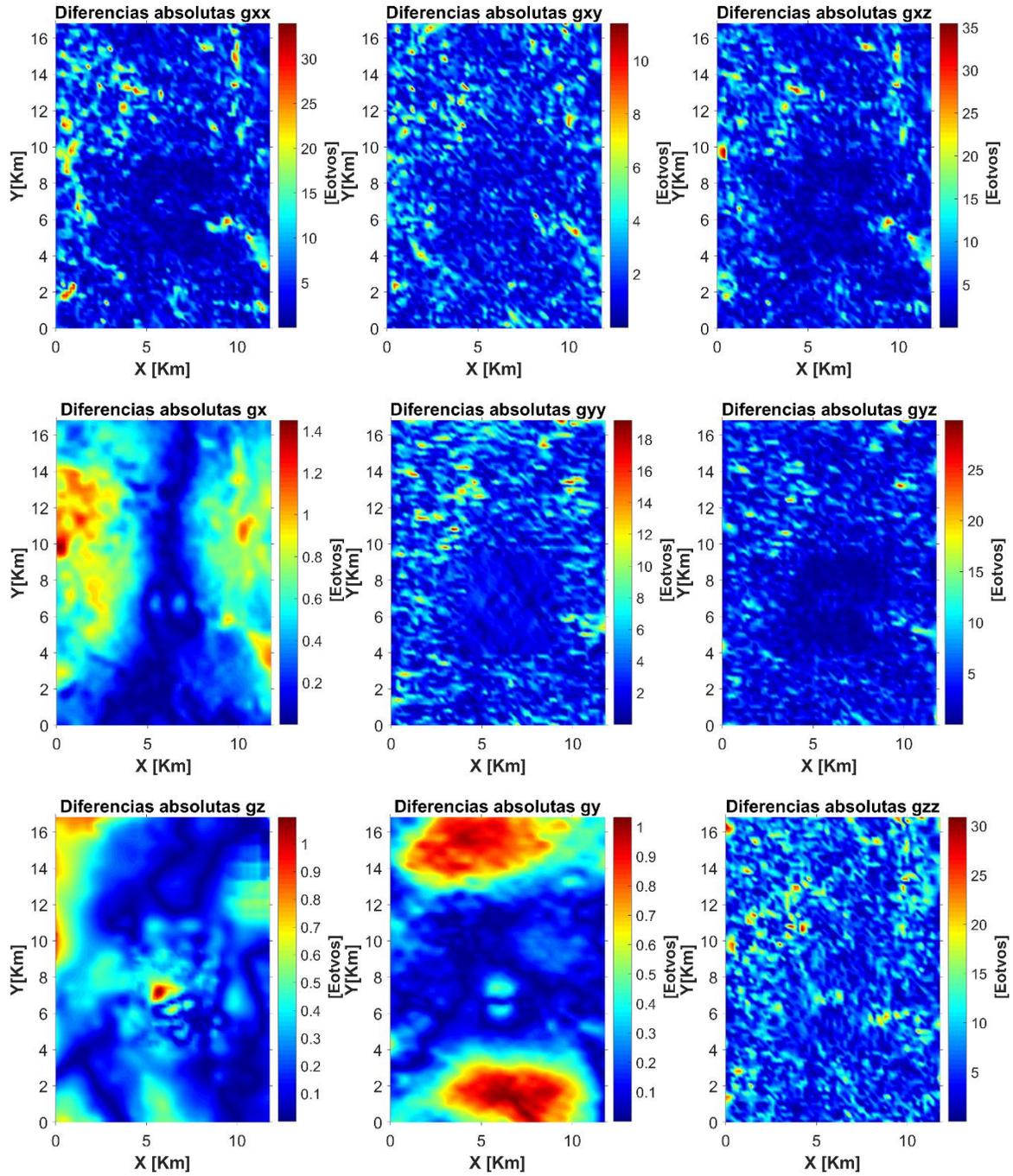


Figura 44. Mapas de diferencias absolutas entre las componentes calculadas para el modelo óptimo y las reales.

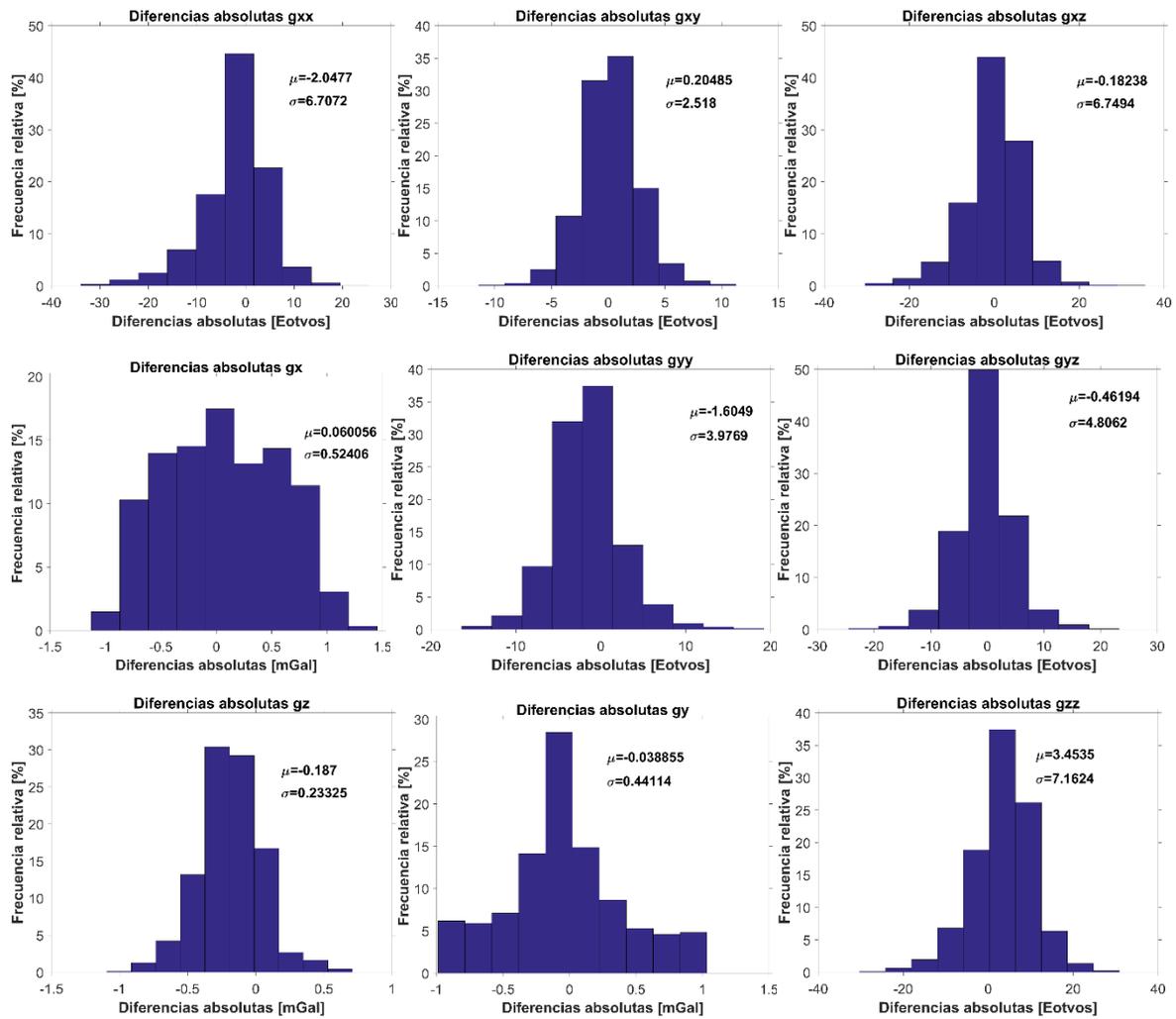


Figura 45. Histogramas de distribución de las diferencias absolutas.

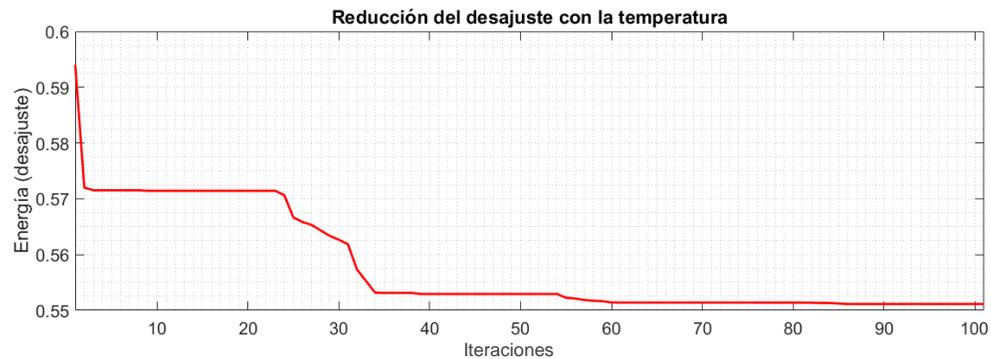


Figura 46. Curva de reducción del nivel energético.

5. Conclusiones

En esta tesis se obtuvo un modelo tridimensional de un cuerpo salino a partir de observaciones del campo gravimétrico y sus derivadas. Para ello se aplicó el algoritmo de Cristalización Simulada, el cual fue puesto a prueba mediante la recuperación de dos modelos sintéticos, a un modelo inicial generado a partir de la Deconvolución Tensorial de Euler.

Una de las dudas previas a la realización de este trabajo era si resultaba justificable una campaña de adquisición de datos gradiométricos, es decir si el costo de ello representaba beneficios sobre una campaña de adquisición gravimétrica convencional. Los resultados de este trabajo muestran que no sólo resulta justificable sino conveniente, ya que los levantamientos gravimétrico y gradiométrico pueden realizarse simultáneamente y existen varios beneficios e información que se puede extraer a partir del tensor gradiométrico.

Los datos del tensor, incluso sin ser procesados, proporcionan información sobre las fuentes presentes en la zona estudiada. Las segundas derivadas horizontales delimitan los bordes paralelos a estos ejes mientras que la derivada cruzada muestra las esquinas de la fuente. Adicionalmente la segunda derivada vertical proporciona una delimitación muy clara de los bordes de la fuente. Por último, las componentes horizontales derivadas con respecto de la vertical (gxz y gyz) brindan información sobre la posición del centro de masa de la fuente.

La Deconvolución Tensorial de Euler demostró ser una herramienta extremadamente útil para la creación de un modelo inicial. La utilización de la diagonal del tensor gradiométrico para localizar los límites del cuerpo ocasiona que las soluciones encontradas por el algoritmo sean menos erráticas. Esto debido a que las fuentes encontradas deben satisfacer un número mayor de ecuaciones que en la Deconvolución de Euler, por lo que se puede trabajar con una tolerancia baja y saber que las ubicaciones encontradas tienen mayor verosimilitud. Además, la posterior corrección en profundidad realizada con el vector campo gravitacional provocó una mejor ubicación espacial de las soluciones encontradas. De esta forma el proceso completo utilizado en este trabajo genera como resultado un "casarón" de la fuente que ocasiona la anomalía.

En el proceso de inversión de datos la paralelización del problema directo y del programa que genera las matrices de sensibilidades así como la aplicación de un intervalo óptimo de temperatura y la utilización un modelo inicial de buena calidad demostraron ser técnicas que causan una optimización significativa del programa de Cristalización Simulada. El criterio principal para esta afirmación fue el tiempo de cálculo, ya que éste se redujo de tal forma que se podían realizar inversiones con 5000 iteraciones en dos días.

Durante el desarrollo de la inversión de los datos se encontró además que el algoritmo no requería un número tan elevado de iteraciones para llegar a un ajuste aceptable de los datos. En realidad se pudo observar que resultaba mucho más eficiente realizar inversiones rápidas en las cuales se tenía un factor RT bajo, 1 ciclo de equilibrio térmico y cuando mucho 4 perturbaciones antes de ajustar el paso. Esta configuración combinada con un intervalo óptimo de temperatura ocasionaba que en 100 iteraciones se obtuviera un buen modelo óptimo robusto en un tiempo relativamente corto. Por otro lado la aplicación del filtro de mediana tuvo dos aspectos benéficos muy importantes: 1) eliminar prismas que no pertenecían al domo salino y 2) proporcionar una versión más homogénea del modelo. Todo esto sin elevar demasiado el ajuste con los datos reales

Otra observación importante realizada en este trabajo fue la relevancia de ajustar todas las componentes de forma simultánea. Ya que aunque resulta posible realizar la inversión utilizando una sola componente, con lo cual se reduce mucho el tiempo de cómputo, los resultados obtenidos para las demás componentes tienen un ajuste menor que los obtenidos con el método utilizado en este trabajo. Incluso el ajuste individual y consecutivo de cada una de las componentes resulta más lento y con peores resultados que la inversión simultánea, ya que ésta última no permite el incremento del ajuste en una componente a costa del ajuste de otra.

El algoritmo de Cristalización Simulada no es exclusivo de la inversión de datos geofísicos, por lo que resulta indispensable prestar atención a la configuración de sus parámetros así como a la forma en que éste se utiliza. En este trabajo se observó la importancia de acotar el rango de variación de los parámetros ya que debido a la naturaleza de los métodos potenciales es posible obtener un valor mínimo para la función de costo pero resultados sin sentido físico ni geológico. Asimismo se tuvo especial atención a la congruencia entre los datos gravimétricos y gradiométricos medidos pues, al haber sido obtenidos con diferentes equipos y procesados por separado, existía el riesgo de que ambos grupos de datos no representaran a las mismas fuentes.

Durante el cálculo de las componentes horizontales se encontró que los resultados obtenidos a partir de la componente vertical fueron mejores que los obtenidos mediante la integración. Además, el posterior enriquecimiento de frecuencias con los datos gradiométricos permitió la obtención de resultados de incluso mejor calidad. Esta técnica tiene el potencial de ser de utilidad en todo campo en donde se tengan dos grupos de datos que representen a la misma fuente pero con diferente contenido de frecuencias.

Por último aunque no menos importante, es necesario mencionar que esta metodología tiene sus desventajas. La más significativa es el volumen de información que debe manejar el programa. La Cristalización Simulada es sinónimo de un elevado costo computacional debido a la anidación de tres

ciclos y al método de prueba y error dentro de ellos. Aunado a esto, la utilización de un número alto de parámetros puede reducir mucho la velocidad del proceso. Si a esto se le añade la utilización de nueve juegos de datos en lugar de uno es notorio que se requiere un equipo más avanzado o simplificar el problema. En este caso el número de prismas utilizados para modelar el domo tuvo que ser reducido y consecuentemente también la resolución espacial.

Como proyecto a futuro resultaría interesante añadir a esta inversión la propagación de ondas en los modelos obtenidos y su comparación con secciones sísmicas reales. Esto proporcionaría mayor verosimilitud al modelo a la vez que una mayor resolución dada la naturaleza de la prospección sísmica. De esta forma se obtendría un modelo óptimo cuya semejanza a la realidad fuera aún mayor.

Bibliografía

- Barbosa, V. C. F., Silva, J. B. C. & Medeiros, W. E. (1999). Stability analysis and improvement of structural index estimation in Euler deconvolution. *Geophysics*. 64(1). 48-60.
- Bell Geospace (2008). Processing and acquisition of air-FTG data. Houston. Estados Unidos.
- Blakely, Richard J. (1996). Potential theory in gravity and magnetic applications. Estados Unidos: Cambridge University Press.
- Cohn, H. & Fielding M. (1999). Simulated annealing: searching for an optimal temperatura schedule. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal* 9(3). 779-802.
- Coker, M. O. (2006). Aquitanian (Lower Miocene) depositional system: Vinton Dome, onshore Gulf of Mexico Southwest Louisiana. Tesis de maestría. Universidad de Houston.
- Corana, A., Marchesi, M., Martini, C. & Ridella, S. (1987). Minimizing multimodal functions of contiuous variables with the 'simulated annealing' algorithm. *ACM Transactions on mathematical software*. 13(3). 262-280.
- Couder Castañeda, C., Ortiz Alemán, J. C., Orozco Del Castillo, M. G., Nava Flores, M. (2015). Forward modeling of gravitational fields on hybrid multi-threaded cluster. *Geofísica Internacional*. 54(1). 31-48.
- Ennen, C. (2012). Mapping gas-charged fault blocks around the Vinton Salt Dome, Louisiana, using gravity gradiometry data. Tesis de doctorado. Universidad de Houston.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D & Vecchi. M. P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*. 220(4598). 671-680
- Levin, H. L. (2006). The Earth through time. Wiley.
- Li, X. & Chouteau, M. (1998). Three dimensional gravity modeling in all space. *Surveys in geophysics*. 19(4). 339-368
- Mickus K. L & Hinojosa, J. H. (2001). The complete gravity gradient tensor derived from the vertical component of gravity: a Fourier transform technique. *Journal of Applied Geophysics*. 47(2001). 159-174.
- Mikhailov, V., Pajot, G., Diament, M., Price, A. (2007). Tensor deconvolution: A method to locate equivalent sources from full tensor gravity data. *Geophysics*. 72(5). 161-169.

- Nava Flores, Mauricio. (2010). Modelado por métodos potenciales de estructuras salinas inferidas por sismología de reflexión. Tesis de maestría. Posgrado Universidad Nacional Autónoma de México.
- Nava Flores, M., Ortiz Alemán, C., Orozco del Castillo, M., Urrutia Fucugauchi, J., Rodríguez Castellanos, A., Couder Castañeda, C., Trujillo Alcántara, A. (2016). 3D Gravity Modeling of complex salt features in the southern Gulf of Mexico. *International Journal of Geophysics*.
- Nagihara, S. & Hall, S. A. (2001). Three-dimensional gravity inversión using simulated annealing: Constraints in the diapiric roots of allochthonous salt structures. *Geophysics*. 66(5). 1438-1449.
- Nelson, T. H & Fairchild, L. (1989). Emplacement and evolution of salt sills in the northern Gulf of Mexico. *Houston Geological Society Bulletin*. 32(1). 6-7.
- Menke, William. (2012). *Geophysical data analysis: discrete inverse theory*. Academic Press.
- Oliveira, V.C & Barbosa, V. C. F. (2013). 3-D radial gravity gradient inversion. *Geophysical Journal International*. 195. 883-902.
- Ortiz Alemán, C., Martin, R. & Gamio J. C. (2004). Reconstruction of permittivity images from capacitance tomography data by using very fast simulated annealing. *Measurement Science and Technology*. 15(7). 1382-1390.
- Owen, E. W. (1975). Trek of the oil finders: A history of exploration for petroleum. *American Association of Petroleum Geologist. Memorias* (6). 191-215.
- Pedersen, L. B. & Rasmussen, T. M. (1990). The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps. *Geophysics*. 55(12). 1558-1566.
- Reid, A. B., Allsop, J. M., Granser, H., Millett, A. J., Somerton, I. W. (1990). Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution. *Geophysics*. 55(1). 80-91.
- Roy, L., Sen, M.K., Blankenship, D. D., Stoffa, P. L. & Richter, T. G. (2005). Inversion and uncertainty estimation of gravity data using simulated annealing: An application over Lake Vostok, East Antartica. *Geophysics*. 70(1). J1-J12.
- Sen, M. & Stoffa, P. (2013). *Global optimization methods in geophysical inversión*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Stavrev, P. & Reid, A. (2007). Degrees of homogeneity of potential fields and structural indexes of Euler deconvolution. *Geophysics*. 72(1). L1-L12.

- Tarantola, Albert. (2005). Inverse problema theory and methods for model parameter estimation. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, Estados Unidos.
- Thompson, D. T. (1982). EULDPH: A new technique for making depth estimates from magnetic data. *Geophysics*. 47(1). 31-37.
- Vera Sánchez, Naín. (2015). Inversión tridimensional de métodos potenciales en estructuras salinas del Golfo de México. Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Zapotitla Roman, Julián (2016). Deconvolución de Euler yacimientos subsalinos. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Zhang, C., Mushayandebvu, M. F., Reid, A. B., Fairhead, J. D., Odegard, M. E. (2000). Euler deconvolution of gravity tensor gradient data. *Geophysics*. 65(2).512-520.