



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – HIDRAULICA

AGITACIÓN Y CIRCULACIÓN EN CUERPOS SEMI-CERRADOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
XAVIER CHÁVEZ CÁRDENAS

TUTOR PRINCIPAL
RODOLFO SILVA CASARÍN, INSTITUTO DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., FEBRERO 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. FUENTES MARILES OSCAR FUENTES
Secretario: Dr. ESCALANTE SANDOVAL CARLOS A.
Vocal: Dr. SILVA CASARÍN RODOLFO
1^{er}. Suplente: Dr. MENDOZA BALDWIN EDGAR GERARDO
2^d o. Suplente: Dr. PEDROZO ACUÑA ADRIÁN

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

TUTOR DE TESIS:

NOMBRE

Dr. SILVA CASARÍN RODOLFO

FIRMA

(Segunda hoja)

Agradecimientos

A CONACyT por el apoyo económico brindado durante el Doctorado.

RESUMEN

La simulación de la agitación y circulación en cuerpos semi-cerrados debido al oleaje mediante modelos numéricos es una de las principales prácticas en la ingeniería marítima costera. Como su nombre lo indica, estas áreas de estudio se caracterizan por tener al menos una parte o frontera abierta por donde no únicamente puede incidir el oleaje que entra, sino también el que sale disperso (scattering) a causa de la interacción y transformación del oleaje dentro del dominio. Del oleaje scattering, a diferencia del incidente, se desconoce su dirección y amplitud, parámetros necesarios para determinar la condición de frontera y a su vez incógnitas a calcular. Este hecho deja en claro la importancia del correcto planteamiento de las condiciones de frontera abiertas, ya que si la condición de frontera no concuerda con el cálculo se produce una onda reflejada (falsa) hacia el interior del dominio que contamina la simulación.

Así pues, el presente trabajo se enfoca en mejorar las condiciones de frontera de un modelo basado en la Mild Slope Equation, haciéndolas más transparentes al paso del oleaje scattering. La mejora consiste en incrementar de un 2.^o a un 4.^o orden la aproximación parabólica de la Mild Slope Equation usada como condición de frontera. Para no descuidar la parte numérica, el orden de aproximación en diferencias finitas es igualmente incrementado de un 2.^o a un 4.^o orden.

Adicionalmente para mejorar la transparencia de las fronteras ante el oleaje scattering, se aplica el método minimax con la finalidad incrementar el abanico de ángulos de salida, aceptando ángulos mayores a 45^o.

En afán de mejorar el desempeño computacional, el método iterativo GBi-CGSTAB(s,L) se implementa exitosamente en el modelo numérico de 2.^o orden en sustitución del método directo de eliminación Gaussiana por pivoteo parcial modificado. El método iterativo queda a la espera de un ajuste en el preconditionamiento para eliminar la restricción debido a sistemas de ecuaciones mayores a 250 000 incógnitas.

Los resultados obtenidos muestran un ligero incremento de la precisión a un alto costo de recurso computacional.

Contenido

RESUMEN	VII
<i>Contenido</i>	IX
<i>Índice de Figuras</i>	XI
<i>Índice de Tablas</i>	XIII
<i>Lista de Símbolos</i>	XV
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1. Objetivo	5
I.2. Metodología	5
I.3. Estructura del Trabajo	5
II. WAPO3	7
II.1. Ecuaciones de Gobierno	8
II.1.1. MMSE	8
II.1.1.1. MMSE independiente del tiempo en la forma Helmholtz	13
II.1.2. Relación de la dispersión	14
II.1.3. Disipación de energía	15
II.1.3.1. Por rotura	15
II.1.3.2. Por fricción de fondo	15

II.1.4. Aproximación parabólica de 2. ^o orden como condición de frontera.	16
II.1.4.1. Fronteras parcialmente reflejantes	17
II.1.4.2. Evaluación del ψ_{in} en frontera abierta con fondo variable	18
II.1.4.3. Resumen de las condiciones de frontera	18
II.2. Implementación Numérica	19
II.2.1. Diferencias finitas	19
II.2.2. Eliminación Gaussina con pivoteo parcial según Maa et al. [1997]	21
II.3. Codificación	24
II.3.1. MWAPO3	24
II.3.2. BWAPO3	24
II.3.3. WAPO3	27
II.4. Comentarios y Conclusiones	29
III. PMSE DE 4.^o ORDEN COMO BC	31
III.1. Derivación	35
III.2. Minimax	40
III.2.1. Aproximación parabólica de 4. ^o orden como condición de frontera	44
III.3. Discretización en Diferencias Finitas	45
III.4. Cambios en el Código (Implementación)	48
III.5. Comentarios y Conclusiones	52
IV. MÉTODO ITERATIVO GBi-CGSTAB(s, L)	53
IV.1. Método directo e iterativo	54
IV.2. ¿Por qué usar el GBi-CGSTAB(s, L)?	56
IV.3. Codificación de los algoritmos del CG, Bi-CGSTAB(L) y GBi-CGSTAB(s, L)	56
IV.4. Programación del GBi-CGBSTAB(s,L) para Coeficientes Complejos	58
IV.5. Acoplamiento del Método GBi-CGBSTAB(s, L) al WAPO3 y la Necesidad de un Precondicionamiento	60

IV.6. Precondicionamiento	61
IV.7. Comentarios y Conclusiones	62
V. VALIDACIÓN Y DISCUSIÓN	65
V.1. Fondo Constante Sin Fronteras Reales	67
V.2. Pilas	68
V.2.1. Una pila, oleaje incidiendo del Norte (45°)	68
V.2.2. Cuatro pilas, oleaje incidiendo del Noroeste (30°)	72
V.3. Comentarios y Conclusiones	75
VI. CONCLUSIONES	77
Bibliografía	79

Índice de Figuras

II.1. Región en estudio	19
II.2. Los tres esquemas tipo en los que se indican las celdas vecinas involucradas (blancas) en el cálculo del potencial de velocidades de la celda en cuestión (negra).	21
II.3. Diagrama de flujo de los códigos de LAPACK usados para la solución de una matriz general de ecuaciones (izquierda) y una matriz banda de ecuaciones (derecha).	22
II.4. Diagrama con claves de celda dentro del dominio.	26
III.1. Comparación de las aproximaciones de l con Helmholtz.	40
III.2. Gráfica del error absoluto de la aproximación minimax correspondiente a los ángulos 0° (Padé), 40° , 60° y 80° usando los coeficientes de la tabla III.2 [Kirby , 1986b]	42
III.3. Gráfica del error absoluto de la aproximación minimax correspondiente a los coeficientes de la tabla III.3	43
III.4. Gráfica del error absoluto de la aproximación minimax para el 3. ^{er} orden de aproximación.	43
III.5. Gráfica del error absoluto de la aproximación minimax para el 4. ^o orden de aproximación.	44
III.6. Esquemas tipo, correspondientes a aquellos de la figura II.2 para su comparación. Los esquemas indican las celdas vecinas involucradas (blancas) en el cálculo del potencial de velocidades de la celda en cuestión (negra).	47
III.7. Nuevos esquemas tipo generados debido al incremento del orden tanto de la condición de frontera como de aproximación de las diferencias finitas.	48
III.8. Diagrama con claves para identificar la ubicación de las celdas dentro del dominio.	49

III.9. Comparación de códigos entre el 2. ^o (izquierda) y el 4. ^o orden de aproximación (derecha), en la asignación del esquema en diferencias finitas de acuerdo a la clave de la celda (subrutina <u>KEY</u>), celdas 002 y 032 tienen el mismo esquema (figura III-6b).	50
III.10. Código de la subrutina <u>BC02</u> para el WAPO3.	51
III.11. Código de la subrutina <u>BC02</u> implementando la PMSE de 4. ^o orden como BC.	51
IV.1. Algoritmo del método BICGSTAB(L) [Tanio & Sugihara , 2010].	58
IV.2. Algoritmos del método GBi-CGSTAB(s, L), sin pre-condicionamiento (izquierda) y con pre-condicionamiento (derecha) [Tanio & Sugihara , 2010].	59
V.1. Batimetrías de los tres escenarios de evaluación.	66
V.2. Patrón de amplitudes producto de un oleaje incidiendo por el Noroeste (45 ^o).	67
V.3. Patrón de amplitudes producto de un oleaje incidiendo por el Norte (0 ^o).	69
V.4. Comparación de amplitudes en la sección $y/L = 0$. (Una pila)	70
V.5. Comparación de amplitudes en la sección $x/L = 0$. (Una pila)	70
V.6. Patrones de RE , escenario con una pila.	71
V.7. Patrón de amplitudes producto de un oleaje incidiendo por el Noroeste (30 ^o).	72
V.8. Comparación de amplitudes en la sección $y/L = 0$. (Cuatro pilas)	73
V.9. Comparación de amplitudes en la sección $x/L = 0$. (Cuatro pilas)	73
V.10. Patrones de RE , escenario con cuatro pilas.	74

Índice de Tablas

II.1. Fichero con lista de simulaciones (la primera línea indica el número de casos). . .	24
II.2. Archivo “CLAVE-CASO”WAP.INP (ejemplo de condiciones de simulación). . . .	25
II.3. Clave de las celdas.	27
III.1. Aproximaciones de l y sus respectivas PMSEs.	39
III.2. Coeficientes de la aproximación minimax para distintos ángulos (con una variación de apertura de 10°), correspondientes a el 2.º orden de aproximación, [Kirby , 1986b]	41
III.3. Coeficientes de aproximación minimax, para el 2.º orden de aproximación, obtenidos con un algoritmo propio, emulando lo realizado por Kirby (Tabla III.2)	42
V.1. $\overline{RE}$ (%) para cada simulación (Una pila).	71
V.2. $\overline{RE}$ (%) para cada simulación (Cuatro pilas).	74

Lista de Símbolos

$\mathbf{A}$	Matriz de coeficientes
A	Amplitud de onda
A_i	Amplitud de onda incidente
A_l	Amplitud de onda local
a_0, a_1 y a_2	Constantes del método minimax (numerador)
$\mathbf{b}$	Vector independiente
b_1 y b_2	Constantes del método minimax (denominador)
C_f	Factor de fricción Darcy-Weisbach
D	Factor de disipación
f_B	Disipación por fricción de fondo
f_D	Disipación por rotura
g	Aceleración debida a la fuerza de gravedad
H	Altura de ola, Función Hamiltoniana
$\mathcal{H}$	Principio variacional de Hamilton
H_B	Altura de ola en el punto de rotura
H_l	Altura de ola local
h	Profundidad
I	Función que incluye la batimetría
i	Parte imaginaria
$\mathbf{IA}$	Matriz $N \times 29$ para almacenar la ubicación de la columna dentro de la matriz $\mathbf{A}$
K_c	Numero de onda modificado
K_r	Coefficiente de reflexión
k	Número de onda
L	Longitud de onda
l	Número de onda relativo en la dirección x
M	Ancho de banda
m	Número de onda relativo en la dirección y
MU	Ancho de banda superior
ML	Ancho de banda inferior
N	Número de incógnitas
n	porosidad

NK	Número de columnas de la matriz de trabajo $\mathbf{W}$ que se almacenan en el disco duro
NW	Número de columnas de la matriz de trabajo $\mathbf{W}$
RE	Error Relativo
$\overline{RE}$	Error relativo promedio
T	Energía cinética
t	Tiempo
Ur	Número de Ursell
V	Energía potencial
$\mathbf{W}$	Matriz de trabajo
$\mathbf{x}$	Vector columna de incógnitas
$x \ y \ z$	Coordenadas espaciales
$\mathbf{ZA}$	Matriz $N \times 29$ para almacenar los coeficientes en el WAPO3
$\mathbf{ZB}$	Vector columna del lado derecho en el WAPO3
γ	Parametro de reflexión
δ	Derivada variacional
ζ	Elevación de la superficie libre
θ	Angulo de propagación del oleaje
σ	Frecuencia angular
ϕ	Potencial de velocidades
φ	Potencial de velocidades en la superficie libre
ψ	Potencial de velocidades modificado
ψ_e	Potencial de velocidades modificado en el exterior proximo
ψ_{in}	Potencial de velocidades modificado del oleaje incidente
ψ_s	Potencial de velocidades modificado del oleaje saliendo del dominio (scattering)
Φ	Potencial de velocidades en la superficie libre independiente del tiempo
∇_h	Laplaciano en el plano horizontal $x \ y$
∂	Derivada parcial

Índices

i	Discretización en la dirección x
in	Incidente
j	Discretización en la dirección y
l	Local

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Las actividades humanas al interior de los cuerpos semi-cerrados, llámense éstos: bahías, sistemas lagunares, sistemas deltaicos, marinas y por supuesto puertos, están condicionadas por la agitación y circulación en ellos presente, producto de la interacción entre las condiciones internas y las externas próximas. Algunos de los aspectos que se ven alterados al incrementarse la agitación y circulación (energía) dentro de la zona abrigada de los puertos son: las condiciones de tránsito y de estancia de las embarcaciones, las condiciones de operación para carga y descarga, los esfuerzos sobre embarcaciones y amarras, inundación de las terminales, así como también las cargas a las que se ven sometidos los muelles y estructuras de defensa exterior.

La resonancia es ,quizá, el principal fenómeno causante de un incremento significativo en la agitación dentro de los cuerpos semi-cerrados, caracterizado por la amplificación de la energía de las ondas que quedan atrapadas en dichos cuerpos. A cada puerto, con una configuración geométrica determinada le corresponden diferentes frecuencias naturales de oscilación. Por tanto, para el correcto diseño de un nuevo puerto o introducir modificaciones en puertos existentes es importante tener conocimiento de las frecuencias propias o naturales de las dársenas, así como de los posibles mecanismos exteriores causantes de las resonancias.

Para simular la propagación del oleaje al interior de un cuerpo semi-cerrado, es prioridad la consideración de los fenómenos físicos del oleaje: difracción, refracción, reflexión, someramiento, rotura, entre otros. La modelación se puede llevar a cabo construyendo un modelo físico a menor escala (experimentación en laboratorio) y mediante un enfoque matemático, representado el fenómeno físico por medio de ecuaciones diferenciales parciales (Partial Differential Equations, PDE). Dentro de los inconvenientes de la experimentación en laboratorio se encuentra la imposibilidad de escalar parámetros como lo son la fricción, cohesión, etc. y el elevado costo de tiempo y dinero para su elaboración; este último inconveniente repercute en la inflexibilidad del modelado físico ante la modificación de la geometría del cuerpo semi-cerrado.

Respecto al enfoque matemático, existen la modelación analítica y la numérica. Debido a la complejidad del sistema, originada al estudiar cuerpos semi-cerrados, la modelación analítica (solución exacta) es imposible. Por tanto, el modelado numérico surge como la alternativa más viable, consistiendo en una representación matemática del sistema (modelo matemático de propagación del oleaje) y la aproximación numérica de las ecuaciones matemáticas (método numérico).

Dentro de los modelos matemáticos de propagación de oleaje más citados en la literatura se encuentran: Navier-Stokes Equation (NSE), Shallow Water Equation (SWE), Espectral de onda, Boussinesq Equation y Mild-Slope Equation (MSE). El modelo matemático más preciso es la NSE [Lin , 2008], de gran utilidad en el modelado de la interacción oleaje-estructura pero con el gran inconveniente de requerir un elevado tiempo de cálculo, condición que restringe su aplicación a dominios grandes con discretizaciones espacio-temporales muy pequeñas; lo que lo hace poco factible para la práctica ingenieril en costa, esto debido a que en la ingeniería marítima las variables que intervienen son muchas, aun después de filtrarse bajo planteamientos estrictamente fundamentados, generando un número considerable de simulaciones que repercuten en un alto costo computacional. Así pues, para el estudio de dominios mayores resulta más factible el uso de los modelos matemáticos restantes (SWE, Espectral de Onda, Boussinesq y MSE). De estos, el modelo SWE se descarta por que desprecia los efectos de dispersión de onda y asume uniforme el flujo en la vertical, características importantes dentro de la evaluación de la agitación en cuerpos semi-cerrados; siendo la mayor aplicación del modelo SWE la propagación de ondas largas (e.g. mareas y tsunamis) por considerarse despreciable la escala vertical con respecto a la horizontal, motivo por el cual los dominios analizados con este modelo son de grandes dimensiones [Lin , 2008]. Los conocidos modelos numéricos WAM (WAVE prediction Model) [Hasselmann et al. , 1988] y SWAN (Simulating WAVes Nearshore) [Ris et al. , 1999] corresponden al modelo matemático espectral de onda y se emplean para simular variaciones a gran escala de la altura de ola en aguas profundas, siendo posible el acoplamiento con modelos atmosféricos para predecir el clima marítimo (oleaje); adicionalmente el modelo SWAN considera la interacción oleaje-corriente en regiones cercanas a la costa. El modelo espectral de onda se aplica a regiones de gran escala debido a que no evalúa la fase de la onda, con lo cual el tamaño de celda dentro de la malla computacional puede ser mayor a la longitud de onda, pero es precisamente esta característica la que imposibilita al modelo espectral para estudiar la propagación de oleaje dentro de cuerpos semi-cerrados, pues no es capaz de evaluar la difracción y la reflexión, fenómenos físicos imprescindibles para la obtención del detallado patrón de onda alrededor de estructuras costeras.

Los modelos numéricos basados en las ecuaciones de Boussinesq y la pendiente suave (MSE) son los más adecuados, desde el punto de vista ingenieril, para la simulación de oleaje en zonas costeras. Ambos modelos están promediados en la vertical. El modelo estándar de Boussinesq que incluyó efectos débiles de dispersión y no linealidad fue derivado por Boussinesq [1871] únicamente para fondo horizontal. Debido a la amplia popularidad dentro de la ingeniería costera, la ecuación derivada por Peregrine [1967] para fondo variable y promediada en la vertical, es con frecuencia referida como la ecuación standard de Boussinesq. Rigurosamente hablando, el modelo de Boussinesq es válido únicamente de aguas intermedias a aguas someras antes de la rotura. Sin embargo, en aplicaciones ingenieriles, el modelo es comúnmente extendido más allá de la zona de rotura, hasta el run-up (ascenso máximo) en la zona de lavado; así como también se ha extendido a aguas profundas. A diferencia de los modelos espectral de onda y MSE, el modelo de Boussinesq no tiene la suposición de que el flujo es periódico. Por tal motivo, éste puede ser aplicado a las ondas inducidas por acciones de impulso, i.e., ondas solitarias, ondas inducidas por derrumbes, tsunami y ondas inestables en canales abiertos [Lin , 2008].

Dentro de los parámetros que funcionan como base para la clasificación de teorías de ondas oceánicas, el parámetro de linealidad es el más general; clasificando a éstas, en teorías lineales y no lineales [Mader , 1988]. El modelo basado en la MSE se ubica dentro de las primeras, siendo la principal desventaja frente al modelo Boussinesq, descartándolo para el estudio de las oscilaciones inducidas por ondas transitorias no lineales.

La MSE considera los efectos de refracción, someramiento, reflexión y difracción combinados. Fue derivada de la teoría de flujo potencial asumiendo oleaje lineal y fondo con pendiente suave, de ahí su nombre. Debido a que en un estricto sentido la MSE es un modelo elíptico (EMSE) y armónico, los valores límites (condiciones de frontera) tienen que ser dados a lo largo de todo el conjunto computacional con la intención de obtener la solución única, estableciendo así, un problema de valor en la frontera (Boundary Value Problem, BVP). Uno de los campos de aplicación importantes de la MSE es la predicción de oscilaciones y penetración de ondas en puertos [Dingemans , 1997], fallando, como ya se comentó, al analizar el fenómeno no lineal que resulta del acoplamiento de la onda corta y larga.

Desde su derivación [Berkhoff , 1972], la MSE ha demostrado ser un modelo muy flexible y ampliamente aceptado en la ingeniería costera para la simulación de la propagación del oleaje sobre una batimetría arbitraria en dominios costeros complejos. Puede modelar la propagación de un amplio espectro de ondas (cortas y largas). Ha sido exitosamente empleado bajo distintas circunstancias: propagación de onda en puertos, rodeando rompeolas [Pos & Kilner , 1987] y estructuras flotantes [Houston , 1981], en áreas costeras abiertas [Pearce & Panchang , 1985], en regiones con vegetación marítima [Dalrymple et al. , 1984], alrededor de islas [Berkhoff , 1976; Houston , 1981; Jonsson et al. , 1976; Kirby & Dalrymple , 1986b; Tsay & Liu , 1983], etc. [Panchang et al. , 1991]. De 1991 a la fecha los trabajos se han incrementado significativamente, abordando temas como lo son: interacción de oleaje regular e irregular con rompeolas permeables sumergidos [Losada et al. , 1996a,b], ondas inducidas por movimiento de barcos dentro de los puertos [Ohyama & Tsuchida , 1997], transformación de onda por estructuras disipadoras [Silva et al. , 2006a,b], efecto del oleaje en convertidores de energía undimotriz [Beels et al. , 2010a,b], etc.

La motivación, que ha ocasionado la indiscutible mejora en los modelos basados en la MSE, se ve reflejada en el gran número de modelos numéricos existentes y es posible clasificarla en los siguientes dos grupos:

1. Mejora de la precisión de la simulación; incluyendo, además, aspectos y fenómenos como: corriente [Booij , 1981], no linealidad, rotura, fricción de fondo, oleaje irregular (aleatorio), fondo poroso, condiciones de frontera abierta no reflejantes, dos capas de fluido, etc.
2. Optimización computacional del modelo. Las grandes dimensiones de las regiones generalmente involucradas en ingeniería costera (dominio computacional) exigen demasiado tiempo y memoria computacional para su estudio. La respuesta a esta problemática se trabaja en los siguientes dos frentes:
 - a) Modificaciones (generalmente simplificaciones) a la parte matemática del modelo. La aproximación parabólica [Radder , 1979] y versión hiperbólica [Copeland , 1985] de la MSE (PMSE y HMSE, respectivamente) pueden ser formuladas como un problema de valor inicial cambiando la solución simultánea del sistema de ecuaciones (debido a la EMSE) por un esquema numérico simple. El costo de ganar eficiencia computacional mediante la PMSE no es menor, pues se sacrifica precisión en la simulación (difracción parcialmente considerada y reflexión descartada), por lo que el uso de modelos basados en la PMSE requiere limitarse a las condiciones morfológicas en que aplica, dadas sus limitaciones. Simples planteamientos de las condiciones de frontera lateral reducen el ancho de banda de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales, mejorando la eficiencia computacional del modelo, pero contaminado el dominio con la presencia de reflexiones espurias en la simulación (Pérdida de precisión de la simulación). Lo hasta aquí mencionado en este primer frente corresponde a cambios en la ecuación de gobierno, sin embargo, las condiciones de frontera (Boundary Condition, BC) son igualmente primordiales en la precisión de la simulación, sin importar el modelo matemático empleado. Recurrir a una BC simple, en el caso de las fronteras laterales abiertas, resulta en planteamientos numéricos menos complejos y más sencillos de resolver, pero la precisión se disminuye severamente, afectando el interior del dominio. Una práctica común en la simulación, para evitar que la zona de interés se afecte por los errores de BCs débilmente planteadas, consiste en extender el dominio de cálculo lo suficiente para alejar las fronteras laterales y su influencia de la zona de interés. Esta práctica resulta contraproducente debido a que al aumentar el dominio de cálculo también se incrementa el tiempo de cómputo.
 - b) Modificación de la parte numérica. Los cambios consisten, en su gran mayoría, en la mejora de la técnica para la solución matricial; la cual es generalmente resuelta con el método directo de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial. Maa et al. [1997] adaptó al método de GEP (Gaussian Elimination with partial Pivoting) un procedimiento sistemático, por medio de matrices de trabajo (de menor tamaño en comparación la matriz total) que hacen uso de la memoria física del disco duro en lugar de la RAM (Random Acces Memory), logrando solucionar el problema de la restricción del tamaño del dominio a causa de la memoria computacional, pero quedando aun el inconveniente del tiempo de computo. La sustitución del método

directo por uno iterativo, se presenta como la mejor opción para reducir la demanda de recurso computacional (En el capítulo IV se profundizará más en este tema). Las BCs laterales son medulares dentro de los modelos numéricos, pues como ya se mencionó su injerencia tanto en la parte física como numérica es significativa. La calidad de las condiciones de frontera laterales repercute directamente sobre el tamaño del dominio computacional, una revisión general en torno a la historia de las condiciones de frontera ligadas a la MSE se presenta en la parte introductoria del capítulo III.

I.1. Objetivo

El objetivo de la presente investigación es optimizar la implementación numérica de la ecuación de pendiente suave extendida para modelar dominios más grandes y de manera más eficiente en comparación con el desempeño actual del modelo numérico WAPO (Wave Propagation On the Coast) version 3 [Silva , 2003 y Silva et al. , 2005]. Las mejoras consisten en incrementar tanto la precisión de la simulación, como la eficiencia computacional.

I.2. Metodología

La PMSE de 2.^o orden usada como condición de frontera lateral se incrementa al 4.^o orden, esto, con la intención de hacer más transparente el paso de las ondas incidiendo de forma oblicua en las fronteras laterales abiertas (no reflexión). Adicionalmente, la aproximación parabólica obtenida por medio del método de Padé se modifica aplicando el principio minimax, tal como lo hizo Kirby [1986b], para ampliar el rango valido de ángulos de incidencia oblicua.

El incremento en el dominio computacional, ocasionado por la mejora a las condiciones de frontera arriba mencionada, se intenta contrarrestar al cambiar el método directo de Eliminación Gaussiana propuesto por Maa et al. [1997] por el método iterativo GBi-CGSTAB(s, L) [Tanio & Sugihara , 2010].

I.3. Estructura del Trabajo

El capítulo II, WAPO3, es un manual condensado del modelo numérico, en el cual se presenta de forma resumida la derivación de la MSE, se puntualizan los fenómenos físicos tomados en cuenta y se abordan con mayor detalle los temas de BC (2.^o orden de aproximación parabólica) y la parte numérica, específicamente el método de diferencias finitas y el método GEP modificado por Maa et al. [1997]. El capítulo finaliza con la implementación numérica, sección que funge como referencia rápida para la comprensión del flujo y ejecución del modelo.

La primera mejora al modelo se presenta y desglosa en el capítulo III. PMSE de 4.^o orden

como BC. La introducción a este tercer capítulo corresponde a una breve reseña acerca de las condiciones de frontera laterales y la elección de la aproximación parabólica como condición de frontera. Se presenta la derivación de la aproximación parabólica de 4.^o orden, seguido del método minimax, para finalizar con la correspondiente implementación numérica de la nueva condición de frontera y la comparación contra el 2.^o orden en términos de complejidad de codificación.

El capítulo IV contiene la segunda mejora al modelo numérico. Este capítulo, el cual prioriza el reto de resolver el sistema de ecuaciones lineales algebraicas, presenta las ventajas y desventajas de los métodos iterativos frente a los directos, la elección del método GBi-CGSTAB(s, L) y su complicada implementación dentro del modelo WAPO3.

Los resultados del nuevo modelo (WAPOx) se exponen en el capítulo V, Validación y Discusión. La elección de los casos de estudio se restringe a aquellos que permitan la evaluación clara de las fronteras abiertas, aspecto a mejorar con las nuevas implementaciones. La comparación y discusión se realiza entre los modelos WAPO3 (2.^o orden), WAPOx (4.^o orden) y analítico, si es el caso. Los métodos de aproximación Padé y minimax también son analizados.

La crítica, conclusiones y propuesta de líneas de investigación futuras se incluyen en el sexto y último capítulo, Conclusiones.

Capítulo II

WAPO3

A lo largo de este capítulo se describirá de forma detallada al modelo numérico WAPO, específicamente el WAPO3, versión sobre la que se trabajó. Dicha descripción se organiza y presenta en función de las tres partes principales que integran un modelo numérico, las cuales corresponden a las tres secciones del capítulo: Las ecuaciones de gobierno, la implementación numérica y la codificación. Se detallan todos aquellos aspectos con mayor relevancia respecto a las mejoras realizadas al modelo (capítulos III y IV), con la finalidad de establecer una comparación clara a posteriori. Información extensa y complementaria del modelo WAPO3 se puede consultar en Silva [2003] y Silva et al. [2005].

En forma general, y a manera de introducción, el WAPO3 es un modelo numérico basado en la ecuación modificada de la pendiente suave (Modified Mild-Slope Equation, MMSE) que a su vez contempla una mejorada relación de la dispersión, disipación de energía tanto por rotura como por fricción de fondo y hace uso de la aproximación parabólica de 2.^o orden como BC lateral. Mientras que, en lo numérico, para resolver el BVP originado por la forma elíptica de la MMSE, el modelo emplea el método de diferencias finitas y resuelve el sistema de ecuaciones mediante un modificado método de GEP propuesto por Maa et al. [1997]. La implementación se realiza en lenguaje Fortran, codificando un programa flexible y robusto cuyos únicos requisitos

para la ejecución son un sencillo fichero de entrada y la batimetría en formato ascii (grd).

II.1. Ecuaciones de Gobierno

Específicamente, las mejoras que contempla el WAPO3 son:

1. Resuelve la forma elíptica de la MSE, considerando totalmente los fenómenos físicos combinados difracción-refracción y reflexión.
2. Resuelve la MMSE, lo cual incrementa la pendiente permisible del fondo e incluye modos evanescentes. En general provee de una mayor precisión a la descripción de la refracción y difracción del oleaje alrededor de una geometría de fondo rápidamente variable como lo es la presencia de un bajo. La MMSE incluyendo efectos de fondo de orden superior especialmente útiles en problemas de simulación de la propagación de oleaje sobre discontinuidades y/o con largas curvaturas de la profundidad (*e.g.* ripples y barras) [Lin , 2008].
3. Contempla una modificada relación de la dispersión lineal, logrando reducir el error en aguas muy someras (donde la no linealidad tiene mayor presencia).
4. Disipación de energía por rotura y fricción de fondo.
5. Adopta la aproximación parabólica de segundo orden de la MSE (PMSE) como condición de frontera abierta para las ondas diseminadas, mejorando la transparencia de la frontera abierta al paso de las ondas.

II.1.1. MMSE

La propagación de oleaje lineal a través de un fondo accidentado (topografía irregular) está gobernada por la ecuación de Laplace junto con condiciones apropiadas de frontera. Las soluciones analíticas son raras cuando existe cualquier desviación en el caso de fondo constate y usualmente existen únicamente para geometrías involucrando fronteras horizontales y/o verticales. Consecuentemente un número de aproximaciones a los problemas de valor a en la frontera han sido propuestos [Chamberlain & Porter , 1995]. Así, el progreso en la comprensión de la modificación topográfica (del fondo) ha dependido del uso e invención de dichas aproximaciones simplificadoras [Smith & Sprinks , 1975].

Dos de las aproximaciones más ampliamente usadas son la teoría lineal para aguas someras (shallow-water linear theory) y la aproximación basada en el hecho de que la pendiente del fondo marino es pequeña (Mild-Slope theory).

Históricamente, Eckart [1952] fue el primero en proponer una forma de la Mild-Slope Equation (MSE), adecuada para aguas someras. La ecuación fue re-derivada independientemente por Berkhoff [1972, 1976] consistiendo en una ecuación diferencial bidimensional la cual describe

el efecto combinado de refracción y difracción. Esta teoría es restringida a oleaje irrotacional lineal de un armónico simple, sin tomar en cuenta la pérdida de energía debida a la fricción o rotura. Una ecuación 2D, la cual es aplicable a ondas en el rango de aguas someras a aguas profundas, es derivada por medio del desarrollo de parámetros pequeños y removiendo la coordenada vertical (z) mediante la integración sobre la profundidad con lo que se logra pasar de 3D a 2D. La desventaja de las ecuaciones desarrolladas en el pasado por investigadores del campo, tales como Pierson [1951], Eckart [1952], Battjes [1968], Biesel [1972] e Ito et al. [1972] en comparación con la ecuación derivada por Berkhoff [1972] es que esas ecuaciones no se reducen a las apropiadas ecuaciones de refracción, así como tampoco a la conocida SWE en el caso de profundidades pequeñas.

De forma independiente a Berkhoff, Schönfel [1972] derivó la misma ecuación de diferente manera y la escribió en otra, no muy compacta, forma [Berkhoff, 1972].

La mayor de las veces, la MSE es empleada para estudiar oleaje monocromático, aunque también puede ser aplicada a oleaje irregular por medio de simular diferentes armónicos de onda y aplicando una función de transferencia *Ad hoc*. La extensión de la MSE a una variación topográfica abrupta y olas de amplitud mayor fue intentada en las últimas dos décadas. Hasta ahora la gran parte de las aplicaciones de los modelos basados en la MSE se limitan a regiones cuya ubicación se extiende desde aguas profundas hasta someras a una distancia de la línea de costa antes de que el oleaje se transforme fuertemente no-lineal. Una excepción es su aplicación en simulación de resonancia portuaria, porque la profundidad en un puerto es usualmente profunda, incluso a lo largo de las fronteras. La MSE tiene tres diferentes formulaciones: HMSE para un campo de oleaje dependiente del tiempo, la EMSE para un campo de oleaje en estado estacionario y la PMSE para un campo de oleaje simplificado en estado estacionario que tiene una dirección de propagación de onda primaria [Lin, 2008].

Booij [1983] concluyó que la MSE es aceptable para una pendiente de fondo 1:3 o menor. Esfuerzos se han realizado en afán de considerar apropiadamente el efecto de una batimetría abrupta y sin la restricción de pendiente suave, originando la MSE conocida como extendida o modificada. Kirby [1986a] desarrolló una extensión dependiente del tiempo de la reducida MSE para el caso de propagación de oleaje sobre un fondo compuesto de ripples superpuestos sobre un fondo con profundidad media lentamente variable, lo cual satisface la asunción de la pendiente suave. O'Hare & Davies [1992] y Guazzelli et al. [1992] incluyeron ondulaciones en un fondo rápidamente cambiante a través de aproximar el fondo como una serie de plataformas horizontales con la finalidad de estudiar el fenómeno de reflexión de Bragg. Massel [1993] encontró que el efecto del fondo puede ser más rigurosamente considerado al incluir los términos de efecto de fondo de orden superior que son proporcionales a la curvatura del fondo y al cuadrado de la pendiente del fondo. Términos que fueron despreciados por Berkhoff [1972]. Chamberlain & Porter [1995] derivaron la MMSE de dos formas, usando el método de Galerkin al igual que Massel [1993] y por medio del principio variacional en un enfoque similar al usado por Miles [1991] en la derivación de la MSE.

Berkhoff [1972] llevó a cabo la derivación de la MSE con ayuda del desarrollo de pequeños parámetros y una integración sobre aguas profundas para el caso de movimiento armónico. Smith & Sprinks [1975] dieron una derivación formal de la MSE aplicando la segunda identidad de

Green. También recurriendo a la segunda identidad de Green, Silva et al. [2003] derivan la MMSE extendida a un fondo poroso.

A continuación, se presenta de manera concisa la MMSE y su planteamiento teórico a partir de las condiciones iniciales: Ecuación de gobierno y condiciones de frontera.

La ecuación de gobierno es el Laplaciano del potencial de velocidades (ecuación de continuidad), esto, al aceptar flujo incompresible e irrotacional propagándose sobre un fondo impermeable cuya profundidad, h , es espacialmente variable en el plano horizontal (x, y) . Para el problema en tres dimensiones (3D):

$$\nabla_h^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h(x, y) \leq z \leq 0 \quad (\text{II.1})$$

donde, ϕ corresponde al potencial de velocidades, $\nabla_h = (\partial/\partial_x, \partial/\partial_y)$ es operador nabla en 2D y z es la coordenada vertical con la superficie libre no perturbada ubicada en $z = 0$.

Condición de fondo (impermeable):

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \nabla_h \phi \cdot \nabla_h h = 0 \quad \text{en } z = -h(x, y) \quad (\text{II.2})$$

Condiciones dinámica y cinemática linealizadas de superficie libre:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (\text{II.4})$$

donde, t es el tiempo, ζ es la elevación de la superficie libre y g representa la aceleración debida a la gravedad.

Tomando en consideración la ventaja que representa el tratarse de un planteamiento lineal y que es posible con esto la superposición de soluciones, se puede utilizar el método de separación de variables:

$$\phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, t) I(z) \quad (\text{II.5})$$

donde, la dependencia de la profundidad, correspondiente a un fondo horizontal $\nabla_h h = 0$ es considerada por medio de:

$$I(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (\text{II.6})$$

El número de onda k es determinado de la relación de dispersión lineal

$$gk \tanh kh = \sigma^2 \quad (\text{II.7})$$

donde, σ es la frecuencia angular.

Siguiendo el enfoque de Miles [1991] y Chamberlain & Porter [1995] se recurre al principio variacional de Hamilton. Este principio establece que la energía total en un sistema es igual a la integral en el dominio de la suma de la energía cinética y potencial

$$\mathcal{H} = \iint H dx dy = \iint (T + V) dx dy \quad (\text{II.8})$$

donde,

H Función Hamiltoniana.

V Energía potencial

$$V = \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 \quad (\text{II.9})$$

T Energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^0 \left[(\nabla_h \phi)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (\text{II.10})$$

Las variables dependientes del problema son:

El desplazamiento de la superficie libre $\zeta(x, y, t)$ y

El potencial de velocidades $\zeta(x, y, z, t)$

El principio variacional basado en la energía total del sistema puede ser expresado como

$$\delta \mathcal{H} = \delta \iint H dx dy = \iint (T + V) dx dy \quad (\text{II.11})$$

donde, δ es la derivada variacional.

Entonces la densidad Hamiltoniana, puede ser expresada como

$$H = T + V = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^0 \left[(\nabla_h \phi)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz + \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 \quad (\text{II.12})$$

Desarrollando la expresión (II.13) al emplear la ec. (II.5), se tiene que

$$H = T + V = \frac{1}{2}\rho \int_{-h}^0 \left[I^2 (\nabla_h \varphi)^2 + 2I\varphi (\nabla_h \varphi) (\nabla_h I) + \varphi^2 (\nabla_h I)^2 \left(\frac{\partial I}{\partial z} \right)^2 \varphi^2 \right] dz + \frac{1}{2}\rho g \zeta^2 \quad (\text{II.13})$$

Si

$$I_1 = \int_{-h}^0 I^2 dz, \quad I_2 = \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial I}{\partial z} \right)^2 dz, \quad I_3 = \int_{-h}^0 I \nabla_h I dz, \quad I_4 = \int_{-h}^0 (\nabla_h I)^2 dz \quad (\text{II.14})$$

Reescribiendo la ecuación (II.13) como:

$$H = T + V = \frac{1}{2}\rho \left[I_1 (\nabla_h \varphi)^2 + 2I_3 \varphi (\nabla_h \varphi) + (I_2 + I_4) \varphi^2 + g \zeta^2 \right] \quad (\text{II.15})$$

La forma específica de $I(z, h)$, expresión (II.6), no es usada aún. Porque $I(\zeta, h)$ es también una función del espacio horizontal (x, y) a través de $h(x, y)$ y $k(x, y)$.

Ecuaciones canónicas. Las ecuaciones de evolución para la elevación de la superficie libre, $\zeta(x, y, t)$ y el potencial de velocidades en la superficie libre $\vartheta(x, y, t) = \phi(x, y, \zeta(x, y, t), t)$, son dadas por las ecuaciones canónicas de Hamilton.

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} = \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{II.17})$$

Con la representación de la separación de variables para ϕ (II.5), el valor de ϑ en la superficie libre es igual a $I(\zeta, h) \varphi$ y debido a que $I(\zeta, h) = 1 + O(k\zeta)$, la distinción entre ϑ y φ no es necesaria.

Al aplicar la derivada variacional a la expresión (II.15) e igualar con la ecuación canónica (II.17) se tiene

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} = \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Rightarrow \frac{1\delta \mathcal{H}}{\rho \delta \varphi} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \varphi) + (I_2 + I_4 - \nabla_h \cdot I_3) \varphi \quad (\text{II.18})$$

De la ecuación canónica (II.16) y la condición dinámica de superficie libre (II.3)

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \zeta} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1\delta \mathcal{H}}{\rho \delta \zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -g \zeta \quad (\text{II.19})$$

Combinando (II.18) y (II.19) se obtiene la MMSE dependiente del tiempo (transitoria)

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \varphi) + (I_2 + I_4 - \nabla_h \cdot I_3) \varphi = 0 \quad (\text{II.20})$$

Caso del movimiento armónico en el tiempo, MMSE.

$$\varphi(x, y, t) = \Phi(x, y) e^{-i} \quad (\text{II.21})$$

$$\nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \Phi) + \left[k^2 I_1 + I_{31} \nabla_h^2(h) + (\nabla_h h)^2 \left(\frac{\partial(I_{31})}{\partial h} - I_{41} \right) \right] \Phi = 0 \quad (\text{II.22})$$

Definiendo

$$r(h) = I_{31} \nabla_h^2(h) + (\nabla_h h)^2 \left(\frac{\partial(I_{31})}{\partial h} - I_{41} \right) \quad (\text{II.23})$$

donde

$$I_{31} = \int_{-h}^0 I \frac{\partial I}{\partial h} dz \quad (\text{II.24})$$

y

$$I_{41} = \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right)^2 dz \quad (\text{II.25})$$

La ecuación (II.22) puede ser expresada como

$$\nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \Phi) + [k^2 I_1 + r(h)] \Phi = 0 \quad (\text{II.26})$$

La ecuación (II.26) es la MMSE independiente del tiempo.

II.1.1.1. MMSE independiente del tiempo en la forma Helmholtz

Para la implementación numérica, resulta más conveniente trabajar con la ec. (II.26) en la forma de la ecuación de Helmholtz [Radder , 1979]:

$$\nabla_h^2 \psi + K_c^2 \psi = 0 \quad (\text{II.27})$$

La cual se obtiene a través de

$$\psi = \sqrt{I_1} \Phi \quad (\text{II.28})$$

y

$$K_c^2 = k^2 + \frac{r(h)}{I_1} - \frac{\nabla^2 \sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1}} \quad (\text{II.29})$$

En esta formulación, ψ es una función del potencial de velocidades modificado, y K_c es un numero de onda modificado.

II.1.2. Relación de la dispersión

El desarrollo de la ecuación modificada de la pendiente suave está basado en la teoría lineal o de Stokes [Dean & Dalrymple , 1991], por lo que el modelo está restringido a condiciones en las que dicha teoría es válida. La relación de dispersión general que ofrece la teoría lineal es la antes mencionada, expresión (II.7).

Una forma de medir la no linealidad del fenómeno es mediante el número de Ursell [Ursell , 1953] definido como

$$Ur = \frac{H_L L^2}{h^3} \quad (\text{II.30})$$

donde: Ur es el número de Ursell, H_L es la altura de ola local, L es la longitud de onda y h es la profundidad.

Cuando Ur es mayor de 40 la solución de Stokes deja de ser válida, lo cual ocurre en aguas poco profundas. Con la finalidad de extender la aplicación del modelo a zonas con muy poca profundidad, Hedges [1976] propuso una modificación a la relación de dispersión lineal, la cual incluye la dispersión debida a la amplitud.

$$\sigma^2 = gk \tanh \left[kh \left(1 + \frac{A}{h} \right) \right] \quad (\text{II.31})$$

Donde A es la amplitud máxima local, calculada a partir de

$$A = |\phi| \quad (\text{II.32})$$

donde $|\phi|$ representa la norma del potencial de velocidades. Esta relación, en aguas poco profundas, tiende a la dispersión para una onda solitaria

$$\sigma^2 = gk^2 (h + A) \quad (\text{II.33})$$

mientras que, en aguas profundas, dado que tiende a cero, la ecuación (II.31) se aproxima asintóticamente a la relación de dispersión lineal, ecuación (II.7). Por lo que la aplicación de la ecuación (II.31) supone una transición de teoría de Stokes (válida en aguas profundas) a la expresión no lineal de Hedges (válida en aguas someras) conforme se propagan las ondas [Silva , 2003].

II.1.3. Disipación de energía

En una forma similar a Dingemans [1997], la ec. (II.26) es modificada para incorporar un término de disipación de energía, el cual toma en cuenta la disipación debido a la rotura y debido a la fricción por fondo.

$$\nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \Phi) + [(k^2 + i) I_1 + r(h)] \Phi = 0 \quad (\text{II.34})$$

Donde D es el factor de disipación

$$D = f_D + f_B \quad (\text{II.35})$$

II.1.3.1. Por rotura

El factor de disipación por rotura f_D puede ser expresado de acuerdo a Dally et al. [1985] como:

$$f_D = \frac{kC_k}{\sigma h} \left[1 - \left(\frac{C_G h}{H_B} \right)^2 \right] \quad (\text{II.36})$$

Donde H_B es la altura de la ola en el punto de rotura, (fácilmente evaluada a través de $H_B =$, con $\gamma = 0.78$), $C_k = 0.16$, y $C_G = 0.4$ se fijaron con base a valores experimentales durante la calibración del modelo con las mediciones de laboratorio de Horikawa & Kuo [1967].

El modelo de propagación empleado en este trabajo considera que cuando $H < 0.78h$ la rotura no se presenta, por tanto $f_D = 0$. Cuando $H \geq 0.78h$ inicia la rotura y f_D se calcula a partir de (II.36). La rotura continua hasta que $H < 0.78h$, donde f_D vuelve a ser nulo, de modo que la ola reconstituida sigue propagándose hasta eventualmente volver a romper, es decir, el cálculo de la disipación de energía por rotura es iterativo [Silva , 2003].

II.1.3.2. Por fricción de fondo

En la práctica, la capa límite de fondo inducida por el oleaje es usualmente turbulenta. El término de disipación es dado por Kirby & Dalrymple [1994].

$$f_B = \frac{4}{3\pi} \frac{C_f A \sigma^2}{ng \sinh^3 kh} \quad (\text{II.37})$$

Donde C_f es el factor de fricción Dary-Weisbach, A es la amplitud de onda local ($H/2$), σ es la frecuencia angular y

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (\text{II.38})$$

II.1.4. Aproximación parabólica de 2.º orden como condición de frontera.

Para resolver el problema de valor en la frontera, en el cual el dominio está gobernado por la ec. (II.27), es necesario establecer apropiadas condiciones de frontera. Dentro del modelo tanto las fronteras reales (limites u obstáculos físicos) como las artificiales (fronteras abiertas) están definidas mediante la aproximación parabólica de 2.º orden, ec. (II.39) en la dirección x . El fondo teórico, ventajas y desventajas de la aproximación parabólica empleada como condición de frontera no reflejante se abordan en el capítulo III.

$$\psi_x = a_0 i K_c \psi + a_1 \frac{i}{K_c} \psi_{yy} - b_1 \frac{1}{K_c^2} \psi_{xyy} \quad (\text{II.39})$$

Donde a_0 , a_1 y b_1 son constates cuyo valor depende de la dirección de propagación de acuerdo al método de aproximación minimax (ver sección III.2). La implementación de la ec. (II.39) como condición de frontera abierta de entrada (ver figura II.1) se detalla a continuación.

En la frontera se debe cumplir

$$\psi = \psi_e \quad (\text{II.40})$$

Donde, ψ es el potencial de velocidades modificado dentro del dominio y ψ_e es el potencial de velocidades modificado en el exterior próximo. El ψ está determinado por la MMSE (II.27), mientras que ψ_e se define como

$$\psi_e = \psi_{in} + \psi_s \quad (\text{II.41})$$

$$\therefore \quad \psi_e = \psi = \psi_{in} + \psi_s \quad (\text{II.42})$$

Donde, ψ_{in} es el potencial de velocidades modificado del oleaje incidente. Asumiendo que el fondo es constante a lo largo y fuera de la frontera, ψ_{in} es definido como

$$\psi_{in} = A \cos \theta \sqrt{I_1} \exp[ik(x \cos \theta + y \sin \theta)] \quad (\text{II.43})$$

donde A es la amplitud de onda y θ es el ángulo de propagación del oleaje. Mientras ψ_s corresponde al potencial de velocidades modificado del oleaje propagado hacia afuera del dominio a causa de elementos dentro de este (scattering).

Analizando la frontera en la dirección x , se tiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{in}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \quad (\text{II.44})$$

Expresando ψ_s mediante (II.39)

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial x} = a_0 i K_c \psi_s + a_1 \frac{i}{K_c} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} - b_1 \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi_s}{\partial x \partial y^2} \quad (\text{II.45})$$

Usando la expresión (II.44) para reescribir (II.45)

$$\frac{\partial (\psi - \psi_{in})}{\partial x} = a_0 i K_c (\psi - \psi_{in}) + a_1 \frac{i}{K_c} \frac{\partial^2 (\psi - \psi_{in})}{\partial y^2} - b_1 \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^3 (\psi - \psi_{in})}{\partial x \partial y^2} \quad (\text{II.46})$$

Desarrollando (II.46)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = a_0 i K_c \psi + a_1 \frac{i}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - b_1 \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + (d) \quad (\text{II.47})$$

Donde d corresponde a los términos con información dada o inicial

$$d = i \left(k \cos \theta - a_0 K_c + \frac{a_1}{K_c} k^2 \sin^2 \theta - \frac{b_1}{K_c^2} k^2 \cos \theta \sin^2 \theta \right) \psi_{in} \approx i (k + K_c) \psi_{in} \cos \theta \quad (\text{II.48})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \pm \left(i K_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{b_1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) + i (k + K_c) \psi_{in} \cos \theta \quad \text{en } \pm \text{ frontera } x \quad (\text{II.49})$$

II.1.4.1. Fronteras parcialmente reflejantes

Para extender la utilidad de la aproximación parabólica a las fronteras reales, la condición de parcialmente reflejante se maneja mediante el parámetro γ (II.50) y obviamente no considera el potencial incidente dado o inicial ($\psi_{in} = 0$). Los valores extremos 0 y 1 del parámetro γ hacen a la frontera totalmente reflejante o completamente absorbente (abierta), respectivamente (ver figura II.1).

$$\gamma = \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \quad (\text{II.50})$$

Donde K_r es el coeficiente de reflexión.

II.1.4.2. Evaluación del ψ_{in} en frontera abierta con fondo variable

Cuando el oleaje incide (entra al dominio) por un solo lado de la región en estudio ($\theta = 0$), este se considera de fondo constante (frontera abierta con fondo constante) y ψ_{in} se determina mediante la ec. (II.43). La otra posibilidad implica oleaje incidiendo por dos de los cuatro lados ($\theta \neq 0$) de la región en estudio, en este caso, únicamente uno de los lados se considera de fondo constante y el restante de fondo variable (frontera abierta con fondo constante y variable, respectivamente) (Figura II.1). Es posible asignar, por medio de las condiciones de simulación, el lado a considerarse con fondo constante (Tabla II.2).

La consideración de una frontera abierta con fondo variable es porque se prevé la aplicación del modelo en zonas costeras, donde usualmente la profundidad decrece significativamente en dirección hacia la costa, hecho que hace inapropiado el uso de la ec. (II.43) para el cálculo de ψ_{in} pues descarta los efectos de la rotura, los cuales si son considerados dentro del dominio. Este forzamiento incorrecto provoca una discontinuidad a lo largo de la frontera abierta. Para superar esta limitación, ψ_{in} para una frontera abierta con fondo variable se determina de acuerdo al planteamiento de Zhao et al. [2001].

II.1.4.3. Resumen de las condiciones de frontera

Con base al sistema de coordenadas adoptado en el modelo y ejemplificado en la figura II.1 las condiciones de frontera establecidas se rigen en función de las dos ecuaciones siguientes. Fronteras en la dirección x o Norte-Sur (II.51) y fronteras en la dirección y u Oeste-Este (II.52).

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \pm \gamma \left(i K_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{b_1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) + i (k + K_c) \psi_{in} \cos \theta \quad \text{en } \pm \text{ frontera } x \quad (\text{II.51})$$

Un procedimiento análogo al mostrado al evaluar la dirección x puede ser seguido para obtener la ecuación correspondiente a la dirección y .

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \pm \gamma \left(i K_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{b_1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) + i (k + K_c) \psi_{in} \cos \theta \quad \text{en } \pm \text{ frontera } y \quad (\text{II.52})$$

Para el caso de una frontera abierta con fondo variable, y debido a que el ψ_{in} se calcula en función de la MMSE, el número de onda k , se remplaza por el número de onda modificado K_c ; por lo que el ultimo término queda $i 2 K_c \psi_{in} \cos \theta$ en las ecuaciones (II.51 y II.52).

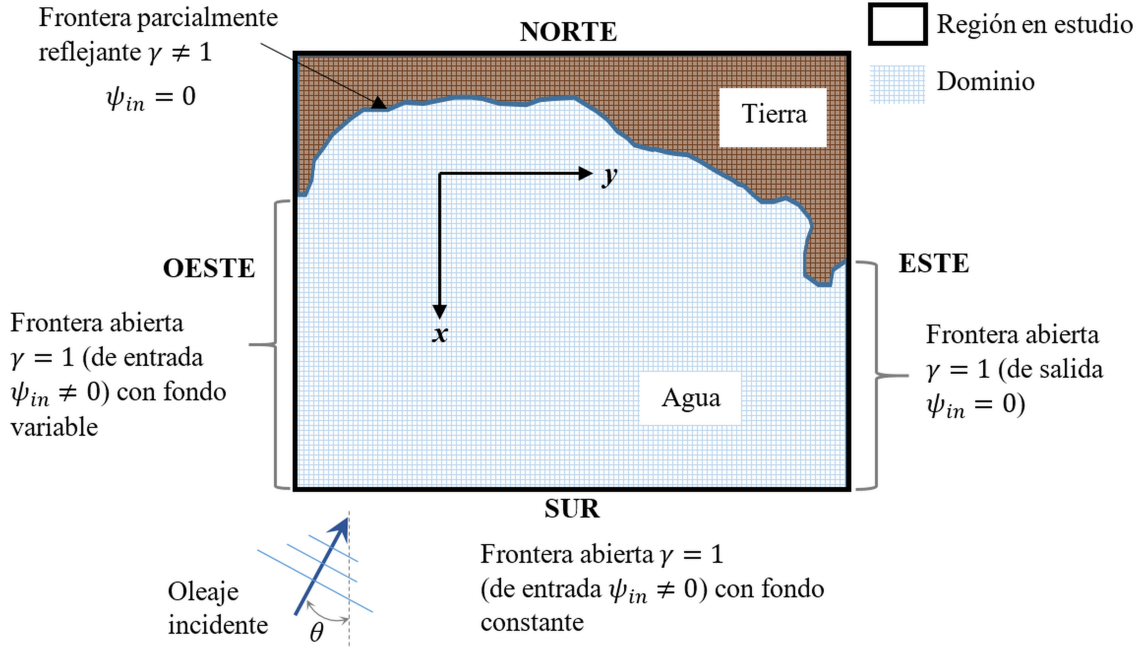


Figura II.1: Región en estudio

II.2. Implementación Numérica

A pesar del éxito de modelos de elemento finito tratando fronteras abiertas, estos pueden ser un tanto incomodos para construir y aplicar a diferencia de los modelos de diferencia finita, algunas veces preferidos debido a su simplicidad y fácil construcción e implementación [Xu & Panchang, 1993].

La restricción en términos de aplicación en dominios pequeños, de los modelos basados en la EMSE, se supera mediante una modificación al método de GEP permitiendo el uso de la memoria física (disco duro) en lugar de la virtual (RAM).

II.2.1. Diferencias finitas

El método de diferencias finitas (Finite Difference Method, FDM) consiste en cambiar una PDE a un sistema de ecuaciones algebraicas mediante remplazar las derivadas parciales en

la ecuación diferencial por sus aproximaciones en diferencias finitas. El sistema de ecuaciones algebraicas puede ser resuelto numéricamente con un proceso directo o iterativo con la intención de obtener una solución aproximada a la PDE [Farlow , 1993].

La idea detrás del FDM es discretizar el espacio continuo dentro de un numero finito de puntos discretos (diferenciados) de malla y entonces aproximar las derivadas locales en dichos puntos con esquemas de diferencias finitas [Lin , 2008].

La precisión de las aproximaciones con base en esquemas de diferencias finitas usualmente se indica con el símbolo $[O(\Delta)m]$, el cual representa el orden del error de la aproximación y depende del truncamiento. Entre mayor es m más precisa es la aproximación.

El modelo WAPO3 emplea esquemas de diferencias centradas, adelantadas y atrasadas con base en las series de Taylor, con una aproximación de segundo orden $[O(\Delta)^2]$. La ecuación de gobierno (II.27) se discretiza únicamente con base en diferencias centradas, mientras que las condiciones de frontera (II.51 y II.52) requieren de los tres esquemas (diferencias centradas, adelantadas y atrasadas, según su ubicación).

Ecuación de gobierno (II.27) en su forma discretizada, ver figura II.2a:

$$\frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + K_c^2 \psi_{i,j} = 0 \quad (\text{II.53})$$

Ejemplificando una celda en la frontera Norte, se discretiza la ec. (II.51):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) &= i(k + K_c) \psi_{in} \cos \theta - iK_c a_0 \psi_{i,j} - i \frac{a_1}{K_c \Delta y^2} (\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}) \\ &+ \frac{a_2}{K_c^2 2\Delta x \Delta y^2} (3\psi_{i,j+1} - 6\psi_{i,j} + 3\psi_{i,j-1} - 4\psi_{i+1,j+1} + 8\psi_{i+1,j} - 4\psi_{i+1,j-1} \\ &+ \psi_{i+2,j+1} - 2\psi_{i+2,j} + \psi_{i+2,j-1}) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Simplificando

$$\begin{aligned} &- (K_c 2\Delta y^2) \psi_{i-1,j} + (iK_c 2\Delta x a_1 - 3a_2) \psi_{i,j-1} + (iK_c^3 2\Delta x \Delta y^2 a_0 - 4iK_c \Delta x a_1 + 6a_2) \psi_{i,j} \\ &+ (iK_c 2\Delta x a_1 - 3a_2) \psi_{i,j+1} + (4a_2) \psi_{i+1,j-1} + (K_c^2 \Delta y^2 - 8a_2) \psi_{i+1,j} + (4a_2) \psi_{i+1,j+1} \\ &- (a_2) \psi_{i+2,j-1} + (2a_2) \psi_{i+2,j} - (a_2) \psi_{i+2,j+1} = [ik 2\Delta x \Delta y^2 (k + K_c) \psi_{in} \cos \theta] \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

Ahora, para determinar la ecuación del ψ correspondiente a una celda en la frontera Norte (en esquema de diferencias finitas) solo resta igualar la ecuación (II.55) con (II.53) y así eliminar la celda fuera del dominio ($\psi_{i-1,j}$), ver figura II.2b.

Para las celdas en las esquinas se tiene que hacer la consideración de ambas ecuaciones, (II.51 y II.52), para que conjuntamente con la ecuación (II.53) se eliminen las celdas fuera del dominio

(en el caso de una esquina Noroeste, $\psi_{i-1,j}$ y $\psi_{i,j-1}$). Consiguiendo así, el esquema en diferencias finitas del ψ en esquinas, ver figura II.2c.

Resumiendo, para representar mediante diferencias finitas el potencial de velocidades modificado de cada una de las celdas en el dominio (ver figura II-5), tres diferentes esquemas tipo resultaron (figura II.2). Como ya se mencionó, dichos esquemas tipo son consecuencia directa del orden de precisión adoptado en las diferencias finitas $[O(\Delta)^2]$.

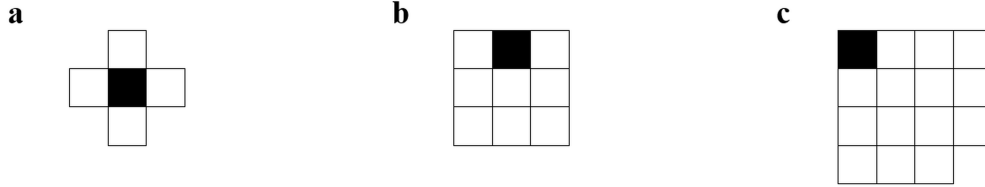


Figura II.2: Los tres esquemas tipo en los que se indican las celdas vecinas involucradas (blancas) en el cálculo del potencial de velocidades de la celda en cuestión (negra).

Es importante hacer notar que, los tres esquemas anteriores, junto con la forma del dominio, determinan la configuración de la matriz de coeficientes dentro del sistema lineal de ecuaciones algebraicas generado (ver sección II.2.2). El esquema tipo de mayor dimensión (figura II.2c) en combinación con la configuración del dominio, determinan el ancho de banda de la matriz de coeficientes. Siendo más significativo el número de filas debido a la forma en que se enumeran las incógnitas (Oeste a Este y de Norte a Sur), razón por la cual, cuando el eje x se selecciona de forma paralela a la dimensión más larga del dominio de estudio, el ancho de banda es mínimo.

II.2.2. Eliminación Gaussiana con pivoteo parcial según Maa et al. [1997]

El sistema de ecuaciones algebraicas lineales generado con el FDM, toma la siguiente forma general:

$$Ax = b \quad (\text{II.56})$$

La matriz de coeficientes ($\mathbf{A}$) tiene una dimensión de $N \times N$, donde N es el número total de incógnitas (celdas agua); $\mathbf{x}$ es el vector columna de incógnitas ($\psi|_1^N$) y $\mathbf{b}$ el vector columna de términos independientes que incluye las condiciones de frontera (valores distintos a cero).

La solución del sistema (II.56) es

$$x = A^{-1}b \quad (\text{II.57})$$

La solución numérica a A^{-1} (la inversa de $\mathbf{A}$), directa o aproximadamente (iteraciones) es el principal reto para una matriz grande como es el caso de la mayoría de las aplicaciones del

WAPO. En aplicaciones prácticas, N se utiliza en el orden de $10^4 - 10^6$, el ancho de banda (M) es del orden de $10^2 - 10^3$. De esta manera, utilizando el algoritmo tradicional de GEP, 16 bytes son requeridos para representar un número complejo y se requieren de 24 MB a 24 GB de memoria simplemente para almacenar la matriz. El método tradicional de GEP tiene que almacenar en la memoria la matriz banda completa. Por esta razón, es también imposible proveer de memoria suficiente para muchas de las aplicaciones, por lo que se generan un número enorme de intercambios aleatorios entre la memoria y el disco duro. Como consecuencia, la eficiencia computacional es muy baja.

La matriz compleja $\mathbf{A}$ no es una matriz llena y densa, por el contrario, es una matriz banda porosa (dispersa y escasa en cuanto a valores distintos a cero), lo que permite reducir significativamente el costo computacional al emplear métodos de almacenamiento adecuados para matrices dispersas.

El método directo empleado en el WAPO3 es una modificación al método GEP para matriz de ecuaciones de banda larga [Maa et al. , 1997] cuya implementación se basa en las subrutinas de la librería LAPACK (véase Figura II.3), antes denominadas LINPACK.

Es posible resumir el método GEP en dos pasos principales: factorización y solución; tal es su importancia que se pueden apreciar dos códigos (fundamentales en la solución de los sistemas) en los diagramas de flujo de la Figura II.3. La factorización (eliminación con pivoteo parcial) cuyo nombre del código termina en “f” (factorization) y la solución de la factorización (sustitución) con nombre terminado en “s” (solver).

Los cambios realizados por Maa et al. [1997] tienen el objetivo de efectuar el procedimiento abordando la matriz banda por secciones, esto es, tomando matrices pequeñas capaces de ser soportadas únicamente por la RAM del equipo. El orden de cálculo descendente se mantiene a través de la banda matricial. Para esto, no se usa el tamaño completo de la matriz banda de coeficientes $\mathbf{A}$, en su lugar se usan dos matrices pequeñas, $\mathbf{ZA}$ para almacenar los coeficientes (números complejos) e $\mathbf{IA}$ para almacenar la ubicación de la columna dentro de la matriz $\mathbf{A}$, ambas de dimensión $N \times 29$. El número 29 contempla el máximo de posibles celdas vecinas (14 en celdas en esquina, Figura II.2c) conservando a la celda evaluada en la posición central (15). Cuando es esquina Noroeste (Figura II.2c) las celdas vecinas van del lugar 16 al 29 mientras que en esquinas Surestes (Figura II.2c girada 180°) van de la posición 1 a la 14.

Dos consideraciones importantes se tienen que tomar en cuenta a la hora de establecer el número de columnas (variable NW dentro del código del WAPO) de estas matrices pequeñas, llamadas de trabajo ($\mathbf{W}$) dentro del código:

Al término de la eliminación con pivoteo parcial en cada una de las matrices $\mathbf{W}$, a excepción de la última, una parte de estas, correspondiente a las primeras columnas se almacena en la memoria secundaria (disco duro), debido a que no afecta cálculos posteriores. El número de columnas de la matriz que se almacena en el disco duro está identificado con la variable NK dentro del código del WAPO.

La segunda parte de la matriz $\mathbf{W}$, la conforman las columnas que por su interacción de cálculo afectan al resto de la matriz total que no se ha considerado hasta el momento (de forma

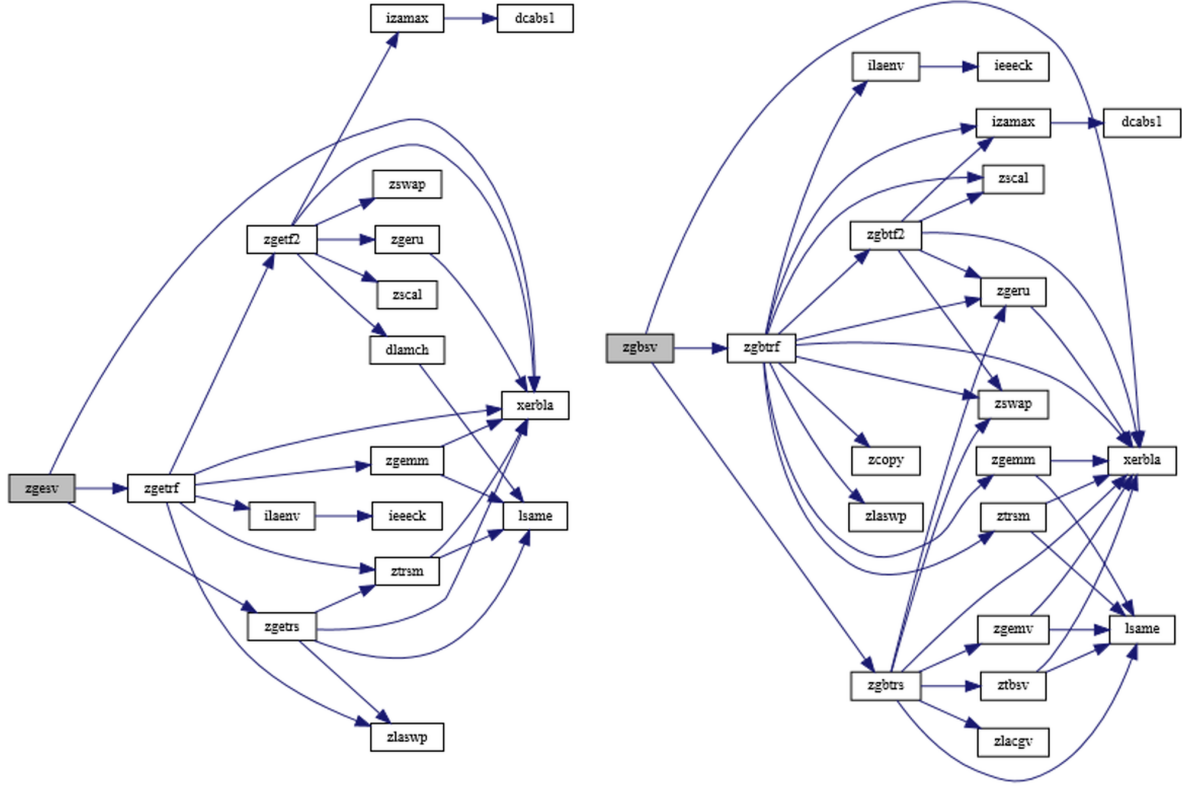


Figura II.3: Diagrama de flujo de los códigos de LAPACK usados para la solución de una matriz general de ecuaciones (izquierda) y una matriz banda de ecuaciones (derecha).

directa a la matriz $\mathbf{W}$ que sigue en el orden de cálculo), por tal motivo esta parte no se guarda en memoria secundaria sino se queda en memoria principal para integrar la primera parte de la siguiente matriz $\mathbf{W}$ que se trabajará; el número de columnas que integran esta parte es igual al ancho de banda superior más el inferior ($MU + ML$) igual al ancho de banda total menos uno ($M - 1$) que es como se maneja en el código.

De lo anterior se define $NW = NK + M - 1$. Por lo tanto, NK puede ser variable pero su tamaño está en función de la RAM de la PC, y entre más grande sea el ancho de banda menor memoria quedará disponible, con lo cual se tendrá que trabajar con mayor número de matrices $\mathbf{W}$ elevando el número de operaciones y el tiempo de computo.

Ahora bien, al tratarse de una matriz banda el número de filas de la matriz $\mathbf{W}$, queda fijo en $2ML + MU + 1$, establecido en la librería LAPACK; al estudiar el código se comprobó que está optimizado al máximo haciéndolo la mejor opción. Dicho lo anterior, las dimensiones de la matriz $\mathbf{W}$ son de $2ML + MU + 1 \times NK + M - 1$.

Al terminar la eliminación con pivoteo parcial comienza la sustitución, en la cual el programa lee la última matriz $\mathbf{W}$ realizada y la resuelve, encontrando los valores del ψ . El procedimiento de la sustitución retroactiva consta de leer y resolver todas las matrices realizadas en el proceso anterior, las almacenadas en el disco duro.

Por medio del uso del disco duro, la implementación descrita permite el estudio de dominios

extensos o dominios pequeños con alta resolución. El único inconveniente debido al uso del disco duro es el incremento del tiempo de cálculo debido a la escritura y lectura, resultando más perjudicial la escritura.

II.3. Codificación

El modelo numérico consiste en 3 programas codificados en FORTRAN 77, un programa master llamado MWAPO3; un programa de pre procesamiento (BWAPO3) y el programa de cálculo WAPO3. Tres tipos de archivos son requeridos: un fichero con la lista de las simulaciones, el archivo con las condiciones de simulación y el archivo con la topo-batimetría.

II.3.1. MWAPO3

MWAPO3 es el programa maestro, debido a que controla la ejecución de los programas BWAPO3 y WAPO3, haciendo posible la ejecución automática y secuencial de un número de simulaciones deseadas, las cuales se listan dentro un fichero (ver tabla II.1) leído por el MWAPO3 como primer paso.

El nombre de las simulaciones está compuesto de cuatro caracteres “CLAVE-CASO”, los dos primeros indican la región en estudio (clave, letras sugeridas) y los restantes identifican la condición de simulación (caso, números sugeridos), ver tabla II.1.

Tabla II.1: Fichero con lista de simulaciones (la primera línea indica el número de casos).

5
CA01
CA02
PE01
PE02
GY03

II.3.2. BWAPO3

Este programa está diseñado para que, a partir de las condiciones de simulación e información batimétrica de la región en estudio, se construya una base de datos con todas las condiciones iniciales requeridas por el programa WAPO3 para su correcta ejecución.

El programa se integra por una rutina principal y 7 subrutinas (LEODATA, LEO GRID, QUALBAT, GRD, ASIGN, KEY y CELL) a continuación descritas en orden de ejecución.

LEODATA. En esta subrutina se lee de un archivo (“CLAVE-CASO”WAP.INP) la información referente a las condiciones de simulación, tal como: frontera y dirección por donde entra el oleaje incidente, periodo, amplitud, elegir si hay o no rotura, tipo y aproximación del cálculo de número de onda, nivel mínimo considerado como tierra, nivel de marea que se desee añadir o restar, fricción (con posibilidad de establecer hasta 20 áreas con diferentes valores de fricción), tipo de contorno (valor del coeficiente de reflexión para diferentes zonas).

Tabla II.2: Archivo “CLAVE-CASO”WAP.INP (ejemplo de condiciones de simulación).

C	Línea para comentario
C	Línea para comentario
3	IORI Zona por donde entra el oleaje con profundidad constante = 1 Norte = 2 Oeste = 3 Este = 4 Sur = 5 Lee los resultados de salida del Ref-Dif
10.0	T = Periodo en segundos
1.0	A Para $IORI \leq 4$ (amplitud de onda ($H/2$) en metros)
-45.0	TETA Para $IORI \leq 4$ (ángulo)
1	IBREAK = 1 (para cuando se implementa disipación por rotura); = 0 (para cuando se inhibe la disipación por rotura)
1	IWN Aproximación del número de onda (Lineal=1, Hedges = 2)
0.1	DMIN Profundidad mínima que es considerada como agua (m)
0.0	TLEVEL Nivel de marea (m);
1	Número de regiones con diferente factor de fricción
0.0 1 1 251 251	Valor y posición i,j de inicio y final de cada región
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera Norte
0.0 1 251	Valor y coordenadas de inicio y final
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera Oeste
0.0 1 251	Valor y coordenadas de inicio y final
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera Este
0.0 1 251	Valor y coordenadas de inicio y final
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera Sur
0.0 1 251	Valor y coordenadas de inicio y final
1	Número de regiones con diferente factor de reflexión, interior (dominio)
0.0 1 1 251 251	Valor y posición i,j de inicio y final de cada región

El modelo también es capaz de generar los archivos de entrada para el programa OLUCA-UNAM (versión modificada del Ref-Dif, Kirby & Dalrymple [1994]) y ejecutarlo de forma automática. El programa OLUCA-UNAM resuelve a través de una aproximación parabólica la ecuación modificada de la pendiente suave (MMES) y por ende y a diferencia del WAPO3 no considera los efectos de reflexión y tiene limitaciones en cuanto a la reproducción de los efectos de difracción.

Esta parte del programa OLUCA-UNAM se ignora, enfocándonos totalmente en la parte del WAPO.

LEO GRID. Lee el archivo con los datos topo-batimétricos de la malla de cálculo, el cual debe estar en formato grd.

QUALBAT. Define el dominio final, al revisar que todas las celdas con profundidad negativa (agua) estén interconectadas y en caso que existan lagunas (celdas no conectadas a la frontera o lado de la región desde donde se propaga el oleaje) les asigna un valor equivalente a tierra. Además, durante la revisión, a cada celda del dominio se le garantiza el número y configuración de celdas vecinas (agua) necesarias para su cálculo, de acuerdo a los esquemas en diferencias finitas correspondientes y ejemplificados en la figura II.2.

GRD. Escribe en un nuevo archivo grd la nueva batimetría (sin lagunas).

ASIGN. En función de las condiciones de simulación, la subrutina genera mallas (correspondientes al dominio) con información relativa a los coeficientes de reflexión producto de cada una de las fronteras (Norte, Oeste, Este y Sur) y una malla con los coeficientes de fricción.

KEY. En esta subrutina, se asignará a cada celda una clave o número de identificación de acuerdo a su ubicación con respecto a su entorno (cuyo criterio se desglosa en la tabla II.2 y se ilustra en la figura II.4), así como también se identifican las celdas vecinas a la celda evaluada, cuyas ubicaciones (incluida la de la celda evaluada) se guardan, haciendo uso de 29 mallas las que corresponden a las columnas de la matrices **ZA** y **IA**, para posteriormente ser utilizadas en la generación de sistema de ecuaciones.

CELL. Ordena las celdas agua (incógnitas) y las numera consecutivamente, de Oeste a Este y de Norte a Sur, eliminando de la numeración las celdas que no son agua (fuera del dominio). En un archivo se escriben de acuerdo al orden dado: La posición de la incógnita respecto a la región en estudio (columna 1 para I y columna 2 para J), el número de celda o incógnita (respecto al dominio), la clave de la celda (de la subrutina **KEY**), los coeficientes de reflexión para cada frontera (1 Norte, 2 Oeste, 3 Este y 4 Sur), la posición de las celdas vecinas (respecto al dominio) que intervienen en las ecuaciones discretizadas almacenadas en 29 mallas y la profundidad (positiva). Dicho archivo constituye las condiciones iniciales para el programa WAPO3.

II.3.3. WAPO3

El programa WAPO3 tiene la función de generar y resolver el sistema de ecuaciones para estimar los potenciales de velocidades locales a lo largo y ancho del dominio. Para su ejecución el WAPO3 requiere de la malla computacional generada por el BWAPO3, los parámetros de la malla leídos del archivo grd y las condiciones de simulación.

Al concluir el programa BWAPO3, MWAPO3 ejecuta el programa WAPO3. Este programa se conforma por ocho subrutinas principales: **LEODATA**, **WVNUM**, **ZKC**, **LATERAP**, **COEFF**, **SOLVER**, **ANGU** y **GRD**; varias de estas llaman a otras subrutinas (secundarias): **WNUM**,

Tabla II.3: Clave de las celdas.

99	Celda denominadas tierra (fuera del dominio)
01	Celda de agua interna (rodeada por celdas de agua)
02	Se ubica en la condición de frontera Norte (fila 1)
03	Se ubica en la frontera Oeste (columna 1)
04	Se ubica en la frontera Este (columna NY)
05	Se ubica en la frontera Sur (fila NX)
06	Es la esquina Noroeste
07	Es la esquina Noreste
08	Es la esquina Suroeste
09	Es la esquina Sureste
16	Se ubica en la frontera Norte y a su izquierda existe una celda de tierra
17	Se ubica en la frontera Norte y a su derecha existe una celda de tierra
18	Se ubica en la frontera Sur y a su izquierda existe una celda de tierra
19	Se ubica en la frontera Sur y a su derecha existe una celda de tierra
26	Se ubica en la frontera Oeste y arriba existe una celda de tierra
27	Se ubica en la frontera Este y arriba existe una celda de tierra
28	Se ubica en la frontera Oeste y abajo existe una celda de tierra
29	Se ubica en la frontera Este y abajo existe una celda de tierra
32	Celda interna que únicamente arriba tiene una celda de tierra
33	Celda interna que únicamente a la izquierda tiene una celda de tierra
34	Celda interna que únicamente a la derecha tiene una celda de tierra
35	Celda interna que únicamente abajo tiene una celda de tierra
36	Celda interna que arriba y a la izquierda tienen celda de tierra
37	Celda interna que arriba y a la derecha tienen celda de tierra
38	Celda interna que abajo y a la izquierda tienen celda de tierra
39	Celda interna que abajo y a la derecha tienen celda de tierra

OPEN, BBAJA, INTEGRA, OPEN y B01...B09.

El flujo de cálculo del programa WAPO3 se presenta mediante la descripción de las subrutinas principales.

LEODATA. Lee la información requerida: parámetros de la malla (tamaño, numero de celdas, coordenadas, Δx , Δy), condiciones de simulación (Tabla II.2) y la malla computacional generada en la subrutina CELL del programa BWAPO3.

WVNUM. Evalúa los números de onda locales para todo el dominio con la opción de aplicar la ecuación de la dispersión establecida por Hedges [1976], dicha subrutina llama otra subrutina (**WNUM**) la cual resuelve la ecuación de la dispersión por iteración.

ZKC. Subrutina encargada de calcular K_c , por lo tanto, también calcula $r(h)$ lo que a su vez implica determinar las integrales I_1 , I_{31} y I_{41} (por medio de la subrutina INTEGRA), así como también, evalúa el factor de disipación (D) para todo el dominio: disipación por rotura (f_D) usando la subrutina BBAJA y por fricción de fondo (f_B).

NORTE											
OESTE	06	02	02	02	17	99	16	02	02	02	07
	03	01	01	01	01	32	01	01	01	01	04
	03	01	01	01	01	01	01	01	01	01	04
	03	01	01	01	01	35	01	01	01	01	04
	28	01	01	01	39	99	38	33	01	01	29
	99	33	01	34	99	99	99	01	01	34	99
	26	01	01	01	37	99	36	01	01	01	27
	03	01	01	01	01	32	01	01	01	01	04
	03	01	01	01	01	01	01	01	01	01	04
	03	01	01	01	01	35	01	01	01	01	04
08	05	05	05	19	99	18	05	05	05	09	
SUR											
ESTE											

Figura II.4: Diagrama con claves de celda dentro del dominio.

LATERAP. Aquí se evalúa el potencial de velocidades incidente (ψ_{in}), tanto para fondo constante como para fondo variable. Si se presenta este último caso, se requiere de la subrutina **OPEN** para generar el sistema de ecuaciones, únicamente para las celdas en la frontera, con base a lo propuesto por Zhao et al. [2001], después se resuelve el sistema de ecuaciones con la subrutina principal **SOLVER** y se obtiene el ψ_{in} correspondiente a cada celda de la frontera lateral con fondo variable.

COEFF. Aquí es donde se calculan los coeficientes del sistema de ecuaciones, creando la matriz **ZA** y el vector columna del lado derecho (términos independientes), **ZB**. Lo anterior se logra con la ayuda de las subrutinas **B01** ... **B09**. Las cuales corresponden a los esquemas en diferencias finitas correspondientes a cada celda. **B01** para la ecuación de gobierno (Figura II.2a), **B02** condición de frontera Norte (Figura II.2b), **B03** condición de frontera Oeste (Figura II.2b girada 90° al Oeste), **B04** condición de frontera Este (Figura II.2b girada 90° al Este), **B05** condición de frontera Sur (Figura II.2b girada 180°), **B06** condición de frontera esquina Noroeste (Figura II.2c), **B07** condición de frontera esquina Noreste (Figura II.2c girada 90° al Este), **B08** condición de frontera esquina Suroeste (Figura II.2c girada 90° al Oeste) y **B09** condición de frontera esquina Sureste (Figura II.2c girada 180°).

SOLVER. Es la parte del programa donde se resuelve el sistema de ecuaciones utilizando el código de Maa et al. [1997] con base a el método directo GEP.

ANGU. En esta rutina se evalúa el ángulo del oleaje para cada celda del dominio.

GRD. Es la rutina diseñada para la escritura de resultados. Dos archivos en formato grd, uno

con la superficie libre instantánea y el segundo con la amplitud. Un tercer archivo, en formato dat, conteniendo las coordenadas x y , el potencial de velocidades, la amplitud, el ángulo de propagación, la profundidad e indicador de la presencia de rotura (1) o no (0).

II.4. Comentarios y Conclusiones

La elección de rotura y/o considerar relación de dispersión con no linealidad conllevan a la doble ejecución del WAPO3 a partir de la subrutina WVNUM.

La demanda de RAM está condicionada principalmente por el almacenamiento del sistema lineal de ecuaciones algebraicas resultado del FDM y el ancho de banda de la matriz de coeficientes **A**.

El ancho de banda depende del tamaño y configuración del dominio, así como del esquema en diferencias finitas para celda en esquina (mayor número de celdas en dirección x). Dichos esquemas dependen de la BC empleada y del orden de aproximación de las diferencias finitas.

Capítulo III

PMSE DE 4.^o ORDEN COMO BC

Dos de las aplicaciones típicas de los modelos numéricos basados en la EMSE son: obtener la propagación del oleaje al interior de los puertos, considerando el área costera vecina dentro de la región de estudio debido a su influencia sobre el oleaje que entra en el puerto, y la segunda, el cálculo de la transformación del oleaje en zonas costeras. La delimitación del dominio computacional para las aplicaciones mencionadas recae en las fronteras reales y artificiales. Siendo las primeras, fronteras del mismo puerto u obras circunvecinas (muelles, rompeolas, etc.) así como también la costa (playa, acantilados, etc.); mientras que las artificiales son esenciales para delimitar el dominio en las regiones abiertas (intersección del dominio establecido con las aguas circundantes).

De tal modo que las condiciones de frontera laterales requeridas se pueden clasificar en:

- Fronteras reales (parcial y totalmente reflejantes)
- Fronteras artificiales (abiertas)

Dependiendo del campo de investigación o del planteamiento en sí de las fronteras

artificiales, estas también son nombradas de radiación (al infinito), absorbentes, de silencio, de transmisión, transparentes, abiertas, de espacio libre, unidireccionales (one-way), no reflejante (Non-Reflecting Boundary Conditions, NRFC), etc. [Givoli , 1991].

Condiciones de frontera deben ser especificadas para las fronteras abiertas, las cuales presentan configuraciones arbitrarias, dependiendo de lo complejo de la región en estudio. Por su ubicación, las fronteras artificiales pueden ser de fondo constante (o aguas profundas) o variable, presentando estas últimas un planteamiento más complejo con relación a las de fondo constante. Por lo general y como se observa en la figura II.1, aquellas fronteras abiertas que presentan fondo constante se ubican en la frontera opuesta a la costa y las de fondo variable en las fronteras perpendiculares a ésta.

La dificultad para especificar las condiciones de frontera artificiales se centra en encontrar la forma para hacer a estas transparentes al paso del oleaje saliendo de la región computacional y de este modo intentar evitar la presencia de reflexiones artificiales que contaminen la simulación.

Las fronteras abiertas contienen (además de una posible onda incidente) ondas reflejadas (“scattered”) que surgen de efectos de batimetría y/o la presencia de otras fronteras reales. Las ondas scattered no son conocidas a priori, y de hecho el objetivo de la simulación es precisamente la cuantificación de estas ondas. Por lo tanto, usualmente las fronteras abiertas son colocadas suficientemente lejos del área de interés en el modelo, en espera que condiciones de frontera imprecisas no afecten el resultado de dicha área [Xu & Panchang , 1993]. Esto por supuesto agrava el problema de ineficiencia computacional pues el área del dominio se incrementa en gran medida.

Debido a que inicialmente los modelos basados en la EMSE se resolvían usando el método de elemento finito, las fronteras abiertas se abordaban mediante métodos de elemento finito híbridos. Un método de elemento finito híbrido es la combinación del método de elemento finito convencional, usado en la región de interés (interna), y algún otro método para representar la solución en la región externa.

Berkhoff [1972, 1976] resolvió la EMSE usando un método de elemento finito híbrido, el cual representa la solución en la región exterior (potencial de velocidades de la onda scattered ψ_s) como una distribución continua de fuentes a lo largo de la frontera abierta $\partial\Gamma$.

$$\psi_s = \int_{\partial\Gamma} \mu(M) \frac{1}{2i} H_0^1(kr) ds$$

Donde H_0^1 denota la función Hankel de primer tipo y orden cero. La fuente desconocida $\mu(M)$ en el punto M debe resolverse junto con la región interna igualando las condiciones.

Un método de elemento finito híbrido ligeramente diferente fue introducido por Chen & Mei [1974] al usar una solución semi-analítica a la MSE en la región externa. El método incorpora la comparación igualando las condiciones de las regiones externa-interna como una condición de frontera natural en un principio variacional y representando el ψ_s como una serie de expansión de la función de Hankel,

$$\psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} H_0^1(kr) (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin \theta)$$

Donde r y θ son las coordenadas polares. Los coeficientes α_n y β_n se determinan igualando la solución con la región interna. Este segundo método requiere profundidad constante en la región exterior y contrario a la formulación de Berkhoff, conduce a una matriz simétrica, característica invaluable en la resolución de sistemas de ecuaciones enormes (mejora la eficiencia computacional). Sin embargo, como las regiones a modelar suelen ser grandes, algunas veces el método de fuentes puede ser preferible, especialmente en dominios con amplias fronteras abiertas. Houston [1981] y Tsay & Liu [1983] usan el segundo método en su versión para profundidad intermedia [Behrendt & Johnson, 1984 y Kostense et al., 1986].

Aproximaciones de las condiciones de frontera para oleaje saliendo del dominio fueron utilizadas en modelos elípticos por Berkhoff et al. [1982] y Panchang et al. [1988, 1991], los cuales emplean el método de diferencias finitas, sobre la simple suposición de que todas las ondas que salen del dominio lo hacen en una dirección perpendicular a la frontera (III.9). Esta asunción es claramente no cierta para todas las componentes de la onda y como lo indican Kirby [1989] y Rojanakamthorn et al. [1989] entre otros, puede conducir a oscilaciones espurias en la solución. Para mitigar la limitación de incidencia normal a lo largo de la frontera abierta, Kirby [1989] ha propuesto el uso de varias aproximaciones parabólicas de la MSE como condición de frontera para ondas “scattered”; estas ecuaciones parabólicas pueden manejar ondas saliendo a través de una mayor apertura (ancho de banda centrada en la dirección de incidencia). Sin embargo, la apertura es aun limitada. En adición, la misma naturaleza de la ecuación parabólica requiere, a priori, la selección de la dirección “dominante” para el oleaje existente (la cual puede no ser conocida) y la colocación de la frontera abierta en una dirección perpendicular a este. Esto puede ser problemático en dominios de forma compleja, particularmente si varias direcciones de oleaje incidente son tratadas [Xu & Panchang, 1993].

Xu & Panchang [1993] en lugar de aproximar la condición de frontera prefieren aproximar la batimetría y representar la región marina fuera del dominio computacional mediante una profundidad constante, en forma similar a lo realizado por Chen & Mei [1974] pero bajo el método de diferencias finitas y no elemento finito. Con esta asunción, es posible describir exactamente las propiedades de las ondas “scattered” fuera del dominio computacional (aunque una condición de frontera exacta por sí misma no es obtenida explícitamente). Xu & Panchang [1993] describen el oleaje “scattered”, el cual debe satisfacer la condición de radiación al infinito, mediante series de Bessel-Fourier. Dentro del esquema del elemento finito, esta forma de abordar las fronteras abiertas se puede llevar a cabo por medio del uso de un “super-elemento” (región externa en el método híbrido). A pesar del éxito de los modelos usando elemento-finito al tratar condiciones de frontera abiertas, ellos pueden ser algo incómodos de construir y aplicar. Por ejemplo, la generación y modificación de la malla en el elemento finito puede ser una tarea mayor. Modelos elípticos con diferencias finitas son por tanto algunas veces preferidos, debido a su simplicidad y de fácil construcción e implementación [Xu & Panchang, 1993].

Xu et al. [1996] señala que la forma de especificar las condiciones de frontera abierta por Xu & Panchang [1993] (Series de Bessel-Fourier) resultó extremadamente incómodo de codificar y construir para una implementación general. Del mismo modo que se esperan dificultades si mecanismos tales como disipación, iteración de corriente, etc. se introducen dentro de la ecuación de gobierno. Xu et al. [1996] trabajaron la aproximación parabólica como condición de frontera artificial junto con el método de elemento finito, razón por lo cual tuvo que adecuar

la geometría de la frontera abierta, dándole la forma parabólica. El complicado acoplamiento entre la aproximación parabólica (como condición de frontera) y el método de elemento finito los obligó a considerar las fronteras de costa (reales) con la formulación estándar (más simple), propuesta por Berkhoff [1976] (III.9), debido a la arbitrariedad y compleja configuración de dichas fronteras.

Con la finalidad de mejorar la formulación estándar, en cuanto al ángulo de incidencia de aproximación, Steward & Panchang [2001] presentaron una completa revisión de los parámetros involucrados en la condición de frontera: coeficiente de reflexión, cambio de fase y los tres métodos para estimar la dirección de aproximación del oleaje en las fronteras. En adición, ellos proponen un 4to método y lo comparan con los tres existentes.

A causa del adecuado acoplamiento entre el FDM y la PMSE como condición de frontera, las fronteras reales al igual que las artificiales se pueden especificar con la PMSE con tan solo incorporar el coeficiente de reflexión.

Por lo tanto, la aplicación de la PMSE como condición de frontera de radiación, propuesta por Kirby [1989], resulta la mejor opción y su ventaja se incrementa cuando se combina con el método de diferencias finitas. Sin embargo, el uso de la aproximación parabólica como condición de frontera tiene sus inicios antes de Kirby [1989] e incluso antes de la PMSE presentada por Radder [1979]. Son precisamente, la no consideración de la reflexión y la dirección preestablecida las características que dan los dos nombres más comunes a dicha condición de frontera, siendo estos: unidireccional (one-way wave equation) y Non-Reflecting Boundary Condition (NRBC). Quizá el trabajo más citado sobre NRBC es el de Engquist & Majda [1977, 1979]. Ellos han desarrollado una técnica especial, basada en la teoría del pseudo operador diferencial para obtener una secuencia de condiciones de frontera locales aproximadas de orden creciente. La técnica de Engquist y Majda se basa en aproximar un operador pseudodiferencial no local por uno local mediante aproximar la función irracional $\sqrt{1 - s^2}$ por una función racional [Givoli, 1991].

De acuerdo a Claerbout [1985], las aproximaciones racionales fueron usadas para desarrollar one-way wave equations (ecuación diferencial que permite propagación de onda en una única y específica dirección), antes que Engquist y Majda se dieran cuenta que ideas similares pueden ser usadas para diseñar NRBCs [Givoli, 1991].

En el afán de conservar el FEM, se ha tratado de mejorar la formulación estándar, Hsu et al. [2003] desarrolló el segundo orden de la condición de radiación al infinito usando una función de forma cuadrática. La preferencia del FEM sobre el DFM está justificada en que la malla ortogonal de este último, difícilmente representa fronteras irregulares, además de que el uso de una malla gruesa (celdas grandes) reduce la precisión del campo de oleaje local en la proximidad de las fronteras.

Una de las versiones del WAPO contrarresta las limitaciones mencionadas en el párrafo anterior mediante el uso de la malla Quadtree. Usando una mayor resolución de la malla en la cercanía de las fronteras.

Lo dicho hasta este punto, respalda al WAPO por recurrir al DFM en combinación con la aproximación parabólica de la MSE para representar tanto fronteras artificiales, como reales

(como se indicó en el capítulo anterior). Con la firme intención de mejorar el WAPO, en cuestión de precisión, el presente trabajo implementa por vez primera un incremento del 2.^o (orden que emplea el WAPO) al 4.^o orden de aproximación parabólica como BC e incluye la respectiva derivación del método de aproximación minimax, método utilizado para aumentar el ángulo de incidencia oblicua de aproximación a las fronteras con una reflexión espuria insignificante (mayor precisión).

III.1. Derivación

A continuación, se muestra como obtener diversos ordenes de aproximación parabólica de la MSE en su forma Helmholtz, El desarrollo se hace con base en Kirby [1989] y siguiendo la forma en que Dingemans [1997] parabolizó la ecuación Helmholtz.

Considérese la ecuación de Helmholtz, (II.27),

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + K_c^2 \psi = 0 \quad (\text{III.1})$$

De acuerdo con Dingemans [1997]Dingemans [1997], una forma equivalente se puede escribir como:

$$\psi_{xx} = -K_c^2 \left(1 + \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \psi \quad (\text{III.2})$$

La propagación del oleaje en la dirección positiva x puede ser descrita a través de un operador pseudo-diferencial como:

$$\psi_x = iK_c \left(1 + \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial}{\partial y^2} \right)^{1/2} \psi \quad (\text{III.3})$$

La ecuación (III.3) es simplemente otra forma de escribir la ecuación (III.1). Esta ecuación se puede resolver para ondas incidiendo con cualquier ángulo,

$$\psi(x, y) = \zeta e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (\text{III.4})$$

Sustituyendo la ecuación (III.4) en la (III.3) se tiene que

$$\frac{k_x}{K_c} = \left(1 - \left(\frac{k_y}{K_c} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{III.5})$$

la cual también puede expresarse como

$$l = (1 - m^2)^{1/2} \quad (\text{III.6})$$

donde $l = k_x / K_c$ y $m = k_y / K_c$ son los números de onda relativos en las direcciones x y y , respectivamente. Para lo cual se ha utilizado el operador correspondencia, tal que:

$$il \approx \frac{1}{K_c} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad im \approx \frac{1}{K_c} \frac{\partial}{\partial y} \quad (\text{III.7})$$

Como se mencionó en la introducción del presente capítulo, la aproximación parabólica consiste en aproximar la función irracional en III.3, la cual es equivalente a la raíz cuadrada en III.6 cuando se usa el operador correspondencia, por una función racional. Debido a que la dirección principal es en la dirección x (aquí elegida), el correspondiente número de onda normalizado (m) es pequeño y esta propiedad es utilizada para obtener aproximaciones del tipo parabólica.

Asumiendo incidencia normal ($m = 0$)

$$l = (1 - m^2)^{1/2} \approx 1 + O(\varepsilon)^2 \quad (\text{III.8})$$

lo que corresponde a la condición de frontera más simple:

$$\psi_x = 1K_c\psi \quad (\text{III.9})$$

que es la utilizada por Berkhoff et al. [1982] y Panchang et al. [1988, 1991].

Aplicando la expansión en series de Taylor a (III.6) en términos de m alrededor de $m = 0$ resulta en:

$$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}m^4 - \frac{1}{16}m^6 - \frac{5}{128}m^8 - \frac{7}{256}m^{10} \dots \quad (\text{III.10})$$

Que a su vez arroja la ecuación diferencial

$$\frac{1}{K_c}\psi_x = i\psi + \frac{i}{2K_c^2}\psi_{yy} - \frac{i}{8K_c^4}\psi_{yyy} + \frac{i}{16K_c^6}\psi_{(6y)} - \frac{5i}{128K_c^8}\psi_{(8y)} + \frac{7i}{256K_c^{10}}\psi_{(10y)} - \dots \quad (\text{III.11})$$

Si se detiene la expansión de Taylor en

$$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2 \quad (\text{III.12})$$

Se obtiene

$$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{2K_c}\psi_{yy} \quad (\text{III.13})$$

La cual corresponde a la aproximación parabólica de menor orden [Radder , 1979].

Considerar un término más de la serie de Taylor

$$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}m^4 \quad (\text{III.14})$$

Conduce a una aproximación parabólica de segundo orden (Taylor)

$$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{2K_c}\psi_{yy} - \frac{i}{8K_c^3}\psi_{yyyy} \quad (\text{III.15})$$

Una aproximación más precisa (ver figura III.1) en derivadas de orden menor resulta de utilizar la expansión de Padé [1/1] para la estimación de l , lo que lleva a

$$l \cong \frac{1 - \frac{3}{4}m^2}{1 - \frac{1}{4}m^2} + O(\varepsilon)^4 \quad (\text{III.16})$$

que corresponde a otra aproximación parabólica de segundo orden (Padé)

$$\psi_x = iK_c\psi + \frac{3i}{4K_c}\psi_{yy} - \frac{1}{4K_c^2}\psi_{xyy} \quad (\text{III.17})$$

Evaluando el tercer orden de la aproximación por el método de Taylor se establece

$$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}m^4 - \frac{1}{16}m^6 \quad (\text{III.18})$$

Resultando en la aproximación

$$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{2K_c}\psi_{yy} - \frac{i}{8K_c^3}\psi_{yyyy} + \frac{i}{16K_c^5}\psi_{(6y)} \quad (\text{III.19})$$

Dentro del método de Padé, se consideran dos aproximaciones de tercer orden, Padé [1/2]

$$l = \sqrt{1 - m^2} \cong \frac{1 - \frac{5}{6}m^2}{1 - \frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{24}m^4} \quad (\text{III.20})$$

$$\psi_x = iK_c\psi + \frac{5i}{6K_c}\psi_{yy} - \frac{1}{3K_c^2}\psi_{xyy} + \frac{1}{24K_c^4}\psi_{yyyy} \quad (\text{III.21})$$

Y Padé [2/1]

$$l = \sqrt{1 - m^2} \cong \frac{1 - m^2 + \frac{1}{8}m^4}{1 - \frac{1}{2}m^2} \quad (\text{III.22})$$

$$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{K_c}\psi_{yy} - \frac{1}{2K_c^2}\psi_{xyy} + \frac{i}{8K_c^3}\psi_{yyyy} \quad (\text{III.23})$$

Taylor cuarto orden

$$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}m^4 - \frac{1}{16}m^6 - \frac{5}{128}m^8 \quad (\text{III.24})$$

$$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{2K_c}\psi_{yy} - \frac{i}{8K_c^3}\psi_{yyyy} + \frac{i}{16K_c^5}\psi_{(6y)} - \frac{5i}{128K_c^7}\psi_{(8y)} \quad (\text{III.25})$$

Finalmente, l con cuarto orden de aproximación por el método de Padé [2/2] se define como

$$l = \sqrt{1 - m^2} \cong \frac{1 - \frac{5}{4}m^2 + \frac{5}{16}m^4}{1 - \frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{16}m^4} \quad (\text{III.26})$$

y

$$\psi_x = iK_c\psi + \frac{5i}{4K_c}\psi_{yy} - \frac{3}{4K_c^2}\psi_{xyy} + \frac{5i}{16K_c^3}\psi_{yyyy} - \frac{1}{16K_c^4}\psi_{yyyyy} \quad (\text{III.27})$$

La siguiente tabla concentra las aproximaciones antes mencionadas: aproximación parabólica (1.er orden método de Taylor), 2.º, 3.er y 4.º orden de aproximación con los métodos de Taylor y Padé.

Tabla III.1: Aproximaciones de l y sus respectivas PMSEs.

Aproximaciones	$l = \sqrt{1 - m^2}$	PMSE
Taylor 1.er orden = Padé 1.er orden [1/0]	$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2$	$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{2K_c}\psi_{yy}$
Taylor 2.º orden = Padé 2.º orden [2/0]	$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}m^4$	$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{2K_c}\psi_{yy} - \frac{i}{8K_c^3}\psi_{yyyy}$
Padé 2.º orden [1/1]	$l \cong \frac{1-\frac{3}{4}m^2}{1-\frac{1}{4}m^2} + O(\varepsilon)^4$	$\psi_x = iK_c\psi + \frac{3i}{4K_c}\psi_{yy} - \frac{1}{4K_c^2}\psi_{xyy}$
Taylor 3.er orden = Padé 3.er orden [3/0]	$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}m^4 - \frac{1}{16}m^6$	$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{2K_c}\psi_{yy} - \frac{i}{8K_c^3}\psi_{yyyy} + \frac{i}{16K_c^5}\psi(6y)$
Padé 3.er orden [1/2]	$l \cong \frac{1-\frac{5}{6}m^2}{1-\frac{1}{3}m^2-\frac{1}{24}m^4}$	$\psi_x = iK_c\psi + \frac{5i}{6K_c}\psi_{yy} - \frac{1}{3K_c^2}\psi_{xyy} + \frac{1}{24K_c^4}\psi_{xyyyy}$
Padé 3.er orden [2/1]	$l \cong \frac{1-m^2+\frac{1}{8}m^4}{1-\frac{1}{2}m^2}$	$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{K_c}\psi_{yy} - \frac{1}{2K_c^2}\psi_{xyy} + \frac{i}{8K_c^3}\psi_{yyyy}$
Taylor 4.º orden	$l \cong 1 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{8}m^4 - \frac{1}{16}m^6 - \frac{5}{128}m^8$	$\psi_x = iK_c\psi + \frac{i}{2K_c}\psi_{yy} - \frac{i}{8K_c^3}\psi_{yyyy} + \frac{i}{16K_c^5}\psi(6y) - \frac{5i}{128K_c^7}\psi(8y)$
Padé 4.º orden [2/2]	$l \cong \frac{1-\frac{5}{4}m^2+\frac{5}{16}m^4}{1-\frac{3}{4}m^2+\frac{1}{16}m^4}$	$\psi_x = iK_c\psi + \frac{5i}{4K_c}\psi_{yy} - \frac{3}{4K_c^2}\psi_{xyy} + \frac{5i}{16K_c^3}\psi_{yyyy} - \frac{1}{16K_c^4}\psi_{xyyyy}$

Al comparar, en la figura III.1, las curvas de las funciones racionales de aproximación de l contra la función irracional (III.6) se observa que el método de Padé es mejor al de Taylor en todos los órdenes de aproximación analizados; 2.º, 3.er y 4.º orden correspondientes a las gráficas a, b y c respectivamente. La gráfica d justifica el aumento del 2.º al 4.º orden de aproximación en favor de mejorar la frontera, al incrementar la precisión de cálculo para ángulos de incidencia mayores.

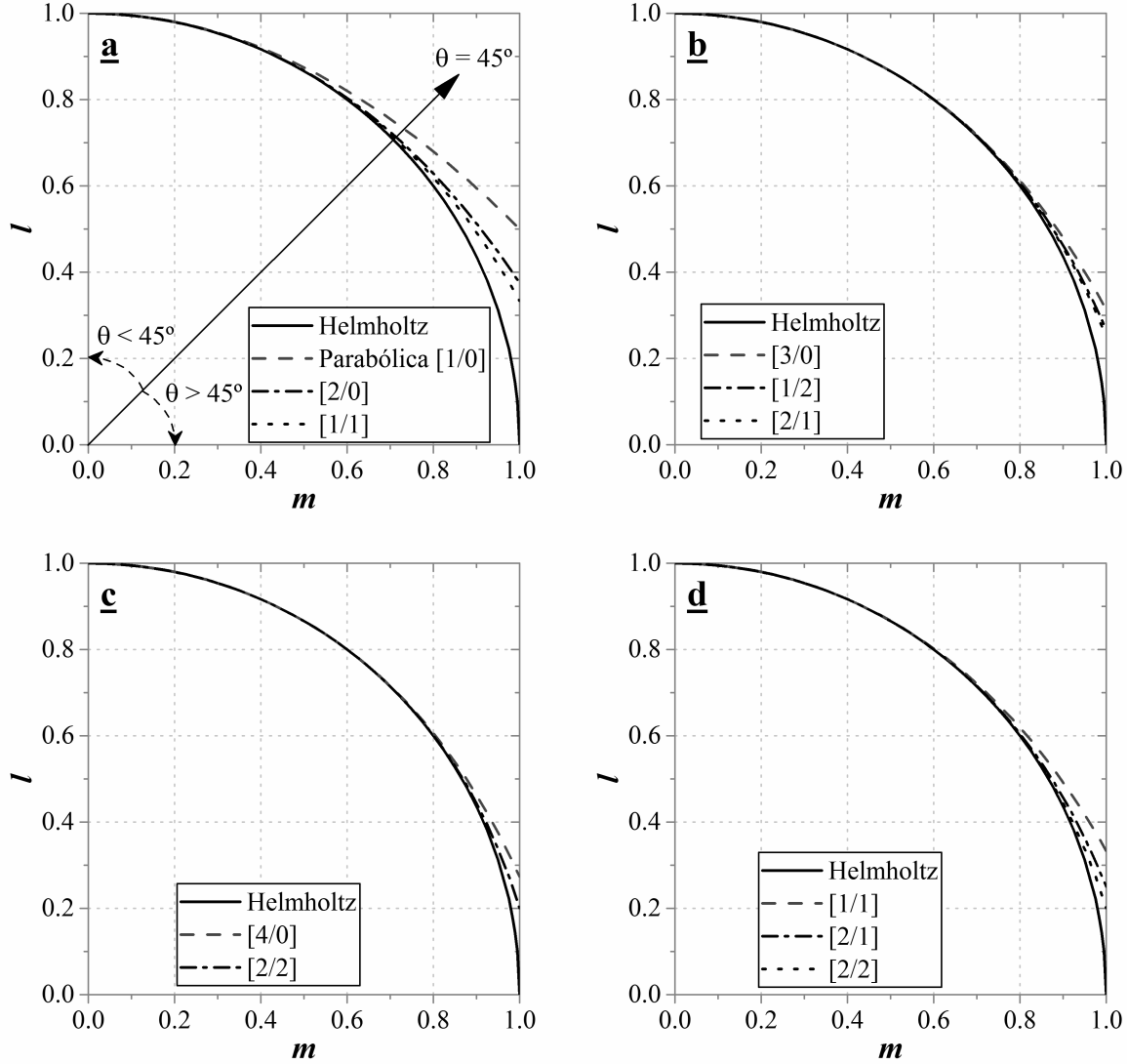


Figura III.1: Comparación de las aproximaciones de l con Helmholtz.

III.2. Minimax

Debido a que la aproximación de Padé está planteada para oleaje incidiendo en forma perpendicular (0°), tiende a tener errores considerables cuando el oleaje incide con ángulos grandes, superiores a 45° (ver figura III.1); por tal motivo la aplicación de la aproximación minimax ha sido tema de investigación con resultados favorables, pues se ajusta mejor a grandes ángulos de incidencia a un costo no muy significativo para ángulos de incidencia pequeños [Kirby, 1986b].

De acuerdo a Greene [1984, 1985], al mantener los esquemas de la aproximación de Padé, es posible mejorar la precisión mediante relajar la conexión entre dicha aproximación y la ec. (III.6) cuando $m \rightarrow 0$ en favor de crear una aproximación que minimiza el error máximo en una

pre especificada abertura permitida θ_a . De tal modo que, la aproximación minimax se puede escribir como:

$$l \cong \frac{a_0 - a_1 m^2}{1 - b_1 m^2} \quad (\text{III.28})$$

Para el 2.º orden, mientras que para el 3.º y 4.º orden respectivamente se tienen

$$l \cong \frac{a_0 - a_1 m^2 + a_2 m^4}{1 - b_1 m^2} \quad (\text{III.29})$$

$$l \cong \frac{a_0 - 1m^2 + a_2 m^4}{1 - b_1 m^2 + b_2 m^4} \quad (\text{III.30})$$

A pesar que el concepto de la aproximación minimax es sencillo, el procedimiento para obtener dicha aproximación es demasiado extenso y aumenta considerablemente al incrementar el orden de aproximación. Por tal motivo, se realizaron tres códigos de programación en fortran correspondientes a las aproximaciones de 2.º, 3.º y 4.º orden. La validación de los tres programas se efectuó con los resultados obtenidos y publicados por [Kirby , 1986b], correspondientes al 2.º orden.

A continuación, se inicia con los resultados obtenido y publicados por [Kirby , 1986b], para el 2.º orden de aproximación.

Como se puede apreciar al comparar las tablas III.2 y III.3, los valores son iguales hasta el tercer incluso cuarto decimal y tomando en consideración la sensibilidad del método, en relación a los valores de referencia, se puede determinar que los algoritmos quedan validados.

Tabla III.2: Coeficientes de la aproximación minimax para distintos ángulos (con una variación de apertura de 10°), correspondientes a el 2.º orden de aproximación, [Kirby , 1986b]

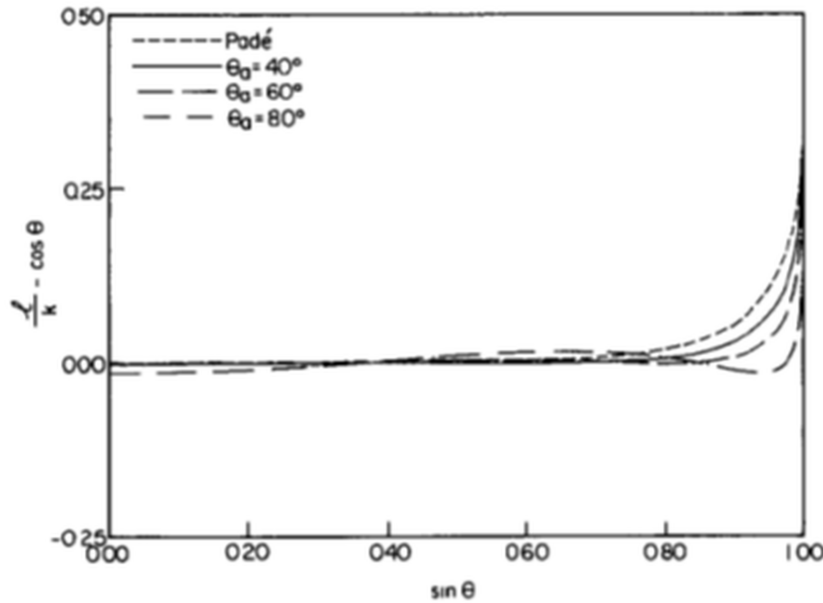
Apertura	a_0	a_1	b_1
Padé	1	-0.75	-0.25
10	0.999999972	-0.752858477	-0.252874920
20	0.999998178	-0.761464683	-0.261734267
30	0.999978391	-0.775898646	-0.277321130
40	0.999871128	-0.796244743	-0.301017258
50	0.999465861	-0.822482968	-0.335107575
60	0.998213736	-0.854229482	-0.383283081
70	0.994733030	-0.890064831	-0.451640568
80	0.985273164	-0.925464479	-0.550974375
90	0.956311082	-0.943396628	-0.704401903

Tabla III.3: Coeficientes de aproximación minimax, para el 2.º orden de aproximación, obtenidos con un algoritmo propio, emulando lo realizado por Kirby (Tabla III.2)

Apertura	a_0	a_1	b_1
Padé	1	-0.75	-0.25
10	0.9999999761792	-0.75284446000367	-0.252860420306462
20	0.99999823786304	-0.761404101844016	-0.26166872204785
30	0.999978577450924	-0.775936786595468	-0.277363504633151
40	0.99987190212058	-0.796206450532283	-0.300962691017443
50	0.999469781881641	-0.822476977635227	-0.335079535185132
60	0.998214066233415	-0.854232864187487	-0.383288320680624
70	0.994751116348796	-0.890053559945175	-0.451513672690535
80	0.985281000592406	-0.925471549041407	-0.550949039621575
90	0.956498991444827	-0.943623586214151	-0.704020535194115

Al comparar de igual forma la figura III.2 y la figura III.3, lo anterior se ratifica. Más aún, al ver el comportamiento de todas las gráficas (Figuras III.3, III.4 y III.5) se corrobora de forma definitiva la correcta codificación del desarrollo del método minimax.

El error absoluto está calculado como $l - \cos \theta$ y se grafica contra el valor de $m = \sin \theta$ para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Las curvas de error absoluto para la aproximación minimax 2.º orden, correspondientes a los ángulos de 80° y 90° , muestran un comportamiento claramente distinto debido a errores del orden de 0.015 y 0.05 respectivamente, incluso la curva de los 70° manifiesta un error minúsculo pero perceptible para oleaje con incidencia normal y ángulos pequeños (ver figura III.3).

**Figura III.2:** Gráfica del error absoluto de la aproximación minimax correspondiente a los ángulos 0° (Padé), 40° , 60° y 80° usando los coeficientes de la tabla III.2 [Kirby , 1986b]

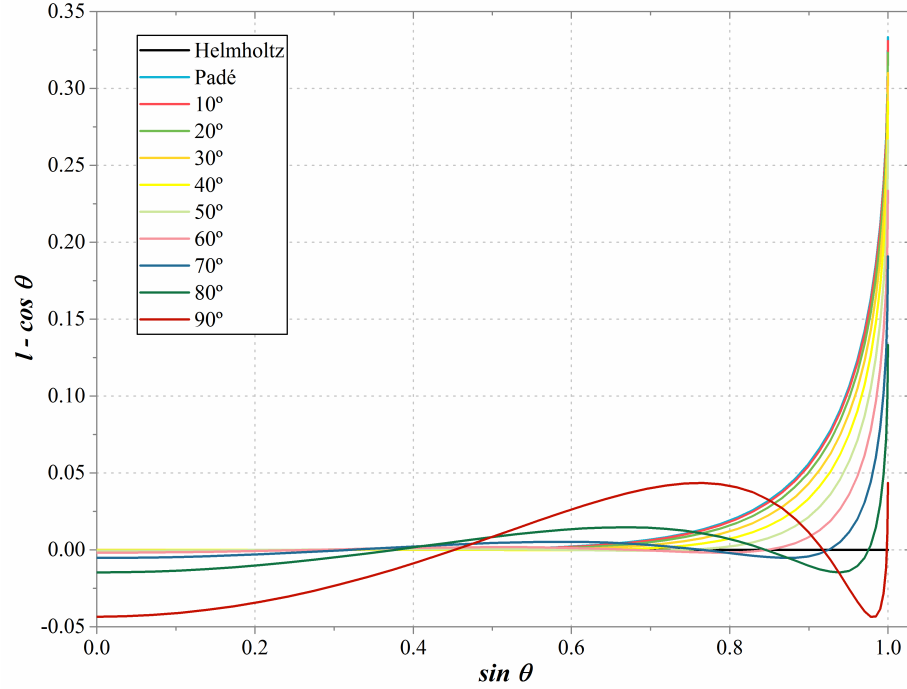


Figura III.3: Gráfica del error absoluto de la aproximación minimax correspondiente a los coeficientes de la tabla III.3

Para el caso de la aproximación minimax 3.^{er} orden (figura III.4), los errores se reducen en comparación con el 2.^o orden, de 0.015 y 0.05 a 0.003 y 0.02 para las curvas de 80° y 90° respectivamente.

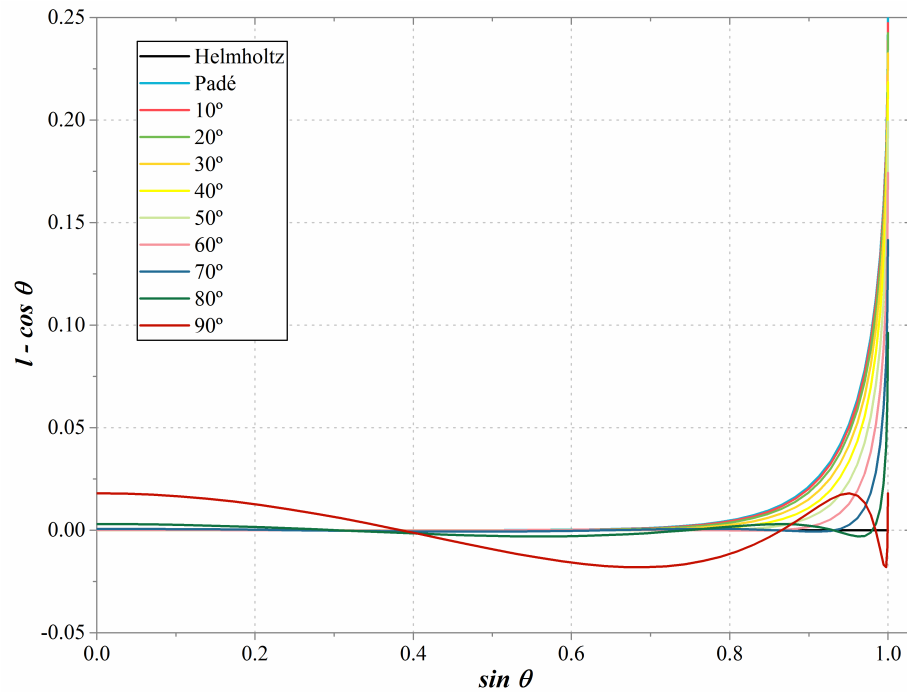


Figura III.4: Gráfica del error absoluto de la aproximación minimax para el 3.^{er} orden de aproximación.

Finalmente, los errores de la aproximación minimax 4.º orden se reducen a 0.008 y únicamente para la curva correspondiente al ángulo de 90º, ya que incluso la curva de 80º presenta una muy buena precisión (figura III.5).

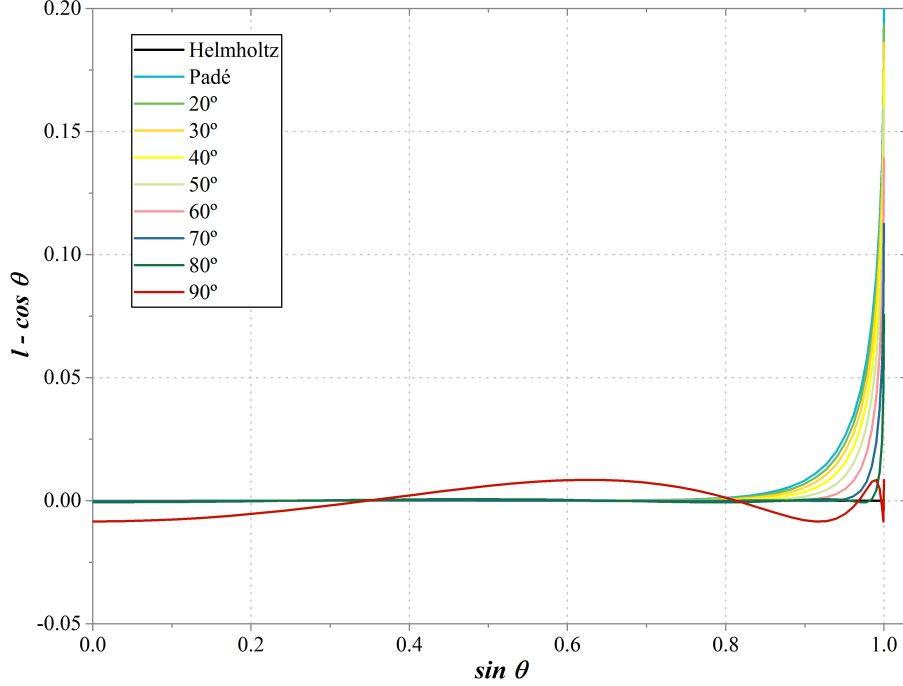


Figura III.5: Gráfica del error absoluto de la aproximación minimax para el 4.º orden de aproximación.

Así pues, los coeficientes minimax a_0 , a_1 , a_2 , b_1 y b_2 dependen de la dirección considerada y con base a los resultados mostrados por la figura III.3, en el WAPO3 se eligieron como mejor opción y valores por default los coeficientes para un ángulo de 70º ($a_0 = 0.99473303$, $a_1 = -0.890064831$ y $b_1 = -0.451640568$). Si se desea, estos valores pueden ser fácilmente sustituidos en el código.

Para el caso del 4.º orden de aproximación parabólica se tomaron los valores correspondientes al ángulo de 80º ($a_0 = 0.999389541307036$, $a_1 = -1.67805815885746$, $b_1 = -1.19002278650289$, $a_2 = 0.683555437738979$ y $b_2 = 0.254683334558567$).

III.2.1. Aproximación parabólica de 4.º orden como condición de frontera

Siguiendo el mismo planteamiento y desarrollo mostrados en la sección II.1.4, la aproximación parabólica de 4.º orden como condición de frontera, en la dirección x , queda definida como

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = a_0 i K_c \psi + a_1 \frac{i}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - b_1 \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + a_2 \frac{i}{K_c^3} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - b_2 \frac{1}{K_c^4} \frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} + (d) \quad (\text{III.31})$$

Donde $\mathbf{d}$ corresponde a los términos con información dada o inicial

$$\begin{aligned} d = & i \left(k \cos \theta - a_0 K_c + \frac{a_1}{K_c} k^2 \sin^2 \theta - \frac{b_1}{K_c^2} k^3 \cos \theta \sin^2 \theta \right. \\ & \left. - \frac{a_2}{K_c^3} k^4 \sin^4 \theta + \frac{b_2}{K_c^4} k^5 \cos \theta \sin^4 \theta \right) \psi_{in} \approx i (k + K_c) \psi_{in} \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Sustituyendo la expresion (III.32) en (III.31)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} = & \pm \left(a_0 i K_c \psi + a_1 \frac{i}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - b_1 \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + a_2 \frac{i}{K_c^3} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - b_2 \frac{1}{K_c^4} \frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} \right) \\ & + i (k + K_c) \psi_{in} \cos \theta \quad \text{en } \pm \text{ frontera } x \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

Con un procedimiento análogo, la condición de frontera (4.º orden) en la dirección y se establece como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} = & \pm \left(a_0 i K_c \psi + a_1 \frac{i}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - b_1 \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} + a_2 \frac{i}{K_c^3} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - b_2 \frac{1}{K_c^4} \frac{\partial^5 \psi}{\partial y \partial x^4} \right) \\ & + i (k + K_c) \psi_{in} \cos \theta \quad \text{en } \pm \text{ frontera } y \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

III.3. Discretización en Diferencias Finitas

La aproximación de las diferencias finitas, empleadas en la implementación numérica del 4.º orden de la PMSE como condición de frontera en el nuevo modelo, se incrementó del segundo $[O(\Delta)^2]$ al 4.º orden $[O(\Delta)^4]$ en comparación con la implementación del 2.º orden de la PMSE como condición de frontera en el WAPO3. Resumiendo, la presente investigación incrementa tanto el orden de la PMSE empleada como condición de frontera, como el orden de aproximación de los esquemas de diferencias finitas, este incremento va de un 2.º a un 4.º orden en ambos casos.

Siguiendo la misma secuencia empleada en el capítulo anterior al describir la implementación en diferencias finitas, se comienza por la discretización de la ecuación de gobierno (II.27) y BCs en las direcciones x (III.33) y y (III.34). El nuevo modelo, además de emplear esquemas de diferencias centradas, adelantadas y atrasadas (basados en el truncamiento de la serie de Taylor), también requiere combinaciones, como lo son, diferencias adelantadas con una o dos celdas atrasadas y viceversa.

Ecuación de gobierno (II.27) en su forma discretizada, ver figura III.6a:

$$\begin{aligned} & \frac{-\psi_{i,j-2} + 16\psi_{i,j-1} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}}{12\Delta y^2} \\ & + \frac{-\psi_{i-2,j} + 16\psi_{i-1,j} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i+1,j} - \psi_{i+2,j}}{12\Delta x^2} + K_c^2 \psi_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Debido al esquema de la ecuación (III.35) (figura III.6a) es evidente que se requiere otra discretización de la ecuación de gobierno para las celdas junto a la frontera. Las ecuaciones (III.36) y (III.37) representan la ecuación de gobierno en su forma discretizada para una celda junto a la frontera Norte alejada de la esquina (Figura III.7a) y para una celda en esquina Noroeste (Figura III.7b), respectivamente.

$$\begin{aligned} & \frac{-\psi_{i,j-2} + 16\psi_{i,j-1} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}}{12\Delta y^2} \\ & + \frac{10\psi_{i-1,j} - 15\psi_{i,j} - 4\psi_{i+1,j} + 14\psi_{i+2,j} - 6\psi_{i+3,j} + \psi_{i+4,j}}{12\Delta x^2} + K_c^2 \psi_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

$$\begin{aligned} & \frac{10\psi_{i,j-1} - 15\psi_{i,j} - 4\psi_{i,j+1} + 14\psi_{i,j+2} - 6\psi_{i,j+3} + \psi_{i,j+4}}{12\Delta y^2} \\ & + \frac{10\psi_{i-1,j} - 15\psi_{i,j} - 4\psi_{i+1,j} + 14\psi_{i+2,j} - 6\psi_{i+3,j} + \psi_{i+4,j}}{12\Delta x^2} + K_c^2 \psi_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Ejemplificando una celda en la frontera Norte, se discretiza la ec. (III.33):

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_{i+3,j} - 6\psi_{i+2,j} + 18\psi_{i+1,j} - 10\psi_{i,j} - 3\psi_{i-1,j}}{12\Delta x} \\ & = i(k + K_c) \psi_{in} \cos \theta - iK_c a_0 \psi_{i,j} \\ & - i \frac{a_1}{12K_c \Delta y^2} (-\psi_{i,j-2} + 16\psi_{i,j-1} - 30\psi_{i,j} + 16\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j+2}) \\ & + \frac{b_1}{144K_c^2 \Delta x \Delta y^2} (25\psi_{i,j-2} - 400\psi_{i,j-1} + 750\psi_{i,j} - 400\psi_{i,j+1} + 25\psi_{i,j+2} \\ & - 48\psi_{i+1,j-2} + 768\psi_{i+1,j-1} - 1440\psi_{i+1,j} + 768\psi_{i+1,j+1} - 48\psi_{i+1,j+2} \\ & + 36\psi_{i+2,j-2} - 576\psi_{i+2,j-1} + 1080\psi_{i+2,j} - 576\psi_{i+2,j+1} + 36\psi_{i+2,j+2} \\ & - 16\psi_{i+3,j-2} + 256\psi_{i+3,j-1} - 480\psi_{i+3,j} + 256\psi_{i+3,j+1} - 16\psi_{i+3,j+2} \\ & + 3\psi_{i+4,j-2} - 48\psi_{i+4,j-1} + 90\psi_{i+4,j} - 48\psi_{i+4,j+1} + 3\psi_{i+4,j+2}) \\ & - i \frac{a_2}{6K_c^3 \Delta y^4} (-\psi_{i,j-3} + 12\psi_{i,j-2} - 39\psi_{i,j-1} + 56\psi_{i,j} - 39\psi_{i,j+1} + 12\psi_{i,j+2} - \psi_{i,j+3}) \\ & + \frac{b_2}{72K_c^4 \Delta x \Delta y^4} (25\psi_{i,j-3} - 300\psi_{i,j-2} + 975\psi_{i,j-1} - 1400\psi_{i,j} + 975\psi_{i,j+1} - 300\psi_{i,j+2} + 25\psi_{i,j+3} \\ & - 48\psi_{i+1,j-3} + 576\psi_{i+1,j-2} - 1872\psi_{i+1,j-1} + 2688\psi_{i+1,j} - 1872\psi_{i+1,j+1} + 576\psi_{i+1,j+2} - 48\psi_{i+1,j+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+36\psi_{i+2,j-3} - 432\psi_{i+2,j-2} + 1404\psi_{i+2,j-1} - 2016\psi_{i+2,j} + 1404\psi_{i+2,j+1} - 432\psi_{i+2,j+2} + 36\psi_{i+2,j+3} \\
 &-16\psi_{i+3,j-3} + 192\psi_{i+3,j-2} - 624\psi_{i+3,j-1} + 892\psi_{i+3,j} - 624\psi_{i+3,j+1} + 192\psi_{i+3,j+2} - 16\psi_{i+3,j+3} \\
 &+3\psi_{i+4,j-3} - 36\psi_{i+4,j-2} + 117\psi_{i+4,j-1} - 168\psi_{i+4,j} + 117\psi_{i+4,j+1} - 36\psi_{i+4,j+2} + 3\psi_{i+4,j+3})
 \end{aligned}
 \tag{III.38}$$

Finalmente, para obtener el ψ correspondiente a una celda Norte (en esquema de diferencias finitas) se debe igualar la ecuación (III.38) con la ecuación de gobierno (III.36), eliminando la celda fuera del dominio ($\psi_{i-1,j}$), ver figura III.6b.

Para las celdas en esquinas, se tienen que considerar las ecuaciones de las BCs en ambas direcciones (ecuaciones III.33 y III.34), en el caso de una esquina Noroeste ambas ecuaciones se igualan con la ecuación de gobierno (III.37) para obtener la ecuación (en diferencias finitas) de ψ y eliminar las celdas fuera del dominio ($\psi_{i-1,j}$ y $\psi_{i,j-1}$). El esquema en diferencia finitas de las esquinas Noroeste se muestra en la figura III.6c.

Al igual que en el caso de la ecuación de gobierno, donde el esquema de la figura III.6a no es suficiente para representar mediante diferencias finitas el potencial de velocidades modificado y se requirió generar los esquemas correspondientes a las figuras III.7a y b, para el caso de las BCs también se requieren de cuatro esquemas adicionales (figura III.7c, d, e y f) a los presentados en las figuras III.6b y c, pues el esquema b no se acopla a las dos celdas más próximas a una celda en esquina.

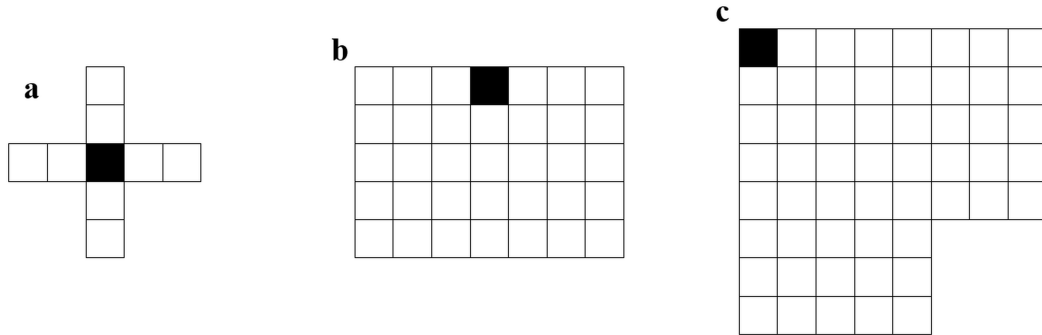


Figura III.6: Esquemas tipo, correspondientes a aquellos de la figura II.2 para su comparación. Los esquemas indican las celdas vecinas involucradas (blancas) en el cálculo del potencial de velocidades de la celda en cuestión (negra).

A diferencia del 2.^o orden, que solo requiere de 3 esquemas tipo (9 totales con las rotaciones de los esquemas tipo), el 4.^o orden demanda 9 esquemas tipo (33 totales al rotar estos 9 esquemas tipo). Con esta comparación se logra una clara idea de la complejidad que conlleva el incremento de orden.

Con estos 9 esquemas tipo y sus rotaciones es posible representar mediante diferencias finitas el potencial de velocidades modificado de cada una de las celdas dentro de un dominio arbitrario, como el mostrado en la figura III.8.

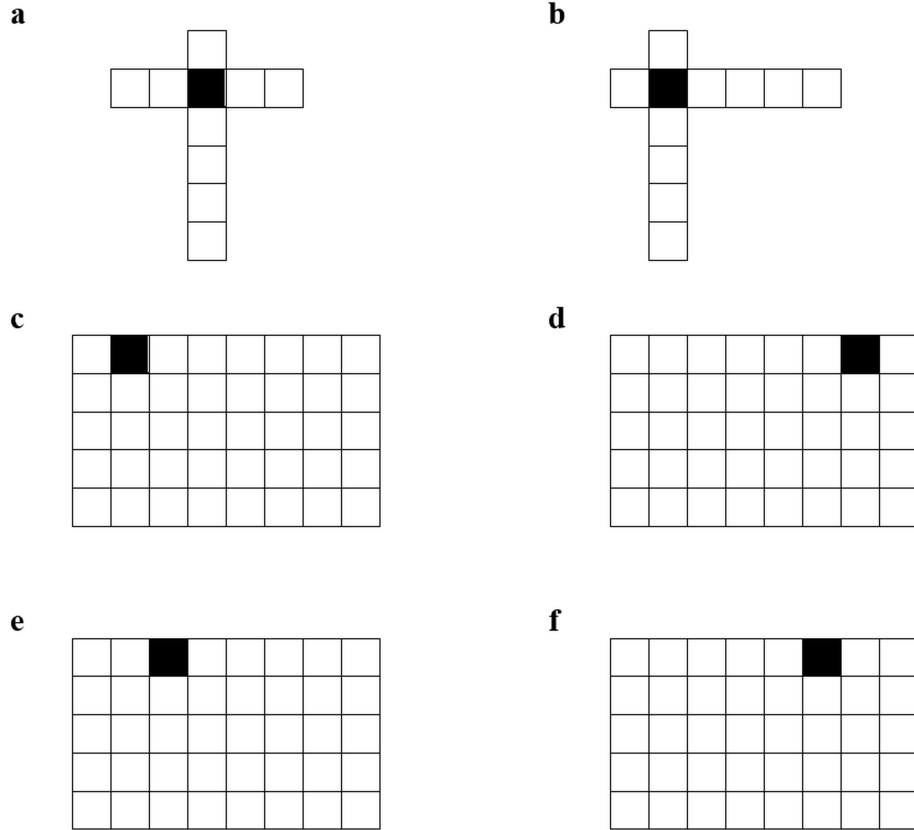


Figura III.7: Nuevos esquemas tipo generados debido al incremento del orden tanto de la condición de frontera como de aproximación de las diferencias finitas.

III.4. Cambios en el Código (Implementación)

Ahora que se conoce la cantidad de celdas vecinas necesarias para la implementación del 4.º orden de aproximación, se procede a modificar el código (bwapo3.f) para cumplir con dos objetivos principales: Garantizar que toda celda incógnita (de agua) tenga en su vecindad la cantidad de celdas de agua necesarias para su representación numérica e identificar las celdas incógnita de acuerdo a su esquema de ubicación (ver figura III.8).

Para lograr lo anterior la modificación al código del BWAPO3 se centra en las subrutinas QUALBAT (primer objetivo) y KEY (segundo objetivo).

006	062	622	002	002	002	002	002	1722	172	017	99	016	162	1622	002	002	002	002	002	722	072	007
063	116	112	112	112	112	112	112	112	117	3234	99	3233	116	112	112	112	112	112	112	112	117	074
632	113	001	001	001	001	001	001	001	114	3238	99	3237	113	001	001	001	001	001	001	001	114	742
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	032	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	112	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	115	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	035	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
2832	113	001	001	001	001	001	001	001	114	3942	99	3832	113	001	001	001	001	001	001	001	114	2942
283	118	115	001	001	001	001	001	115	119	394	99	383	118	115	001	001	001	001	001	115	119	294
028	3335	3339	001	001	001	001	001	3952	395	39	99	38	385	3852	001	001	001	001	001	3439	3435	029
99	99	99	033	113	001	114	034	99	99	99	99	99	99	99	033	113	001	114	034	99	99	99
026	3332	3336	001	001	001	001	001	3722	372	37	99	36	362	3622	001	001	001	001	001	3436	3432	027
263	116	112	001	001	001	001	001	112	117	374	99	363	116	112	001	001	001	001	001	112	117	274
2632	113	001	001	001	001	001	001	001	114	3742	99	3632	113	001	001	001	001	001	001	001	114	2742
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	032	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	112	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	115	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
003	113	001	001	001	001	001	001	001	001	001	035	001	001	001	001	001	001	001	001	001	114	004
832	113	001	001	001	001	001	001	001	114	3538	99	3537	113	001	001	001	001	001	001	001	114	942
083	118	115	115	115	115	115	115	115	119	3534	99	3533	118	115	115	115	115	115	115	115	119	094
008	085	852	005	005	005	005	005	1952	195	019	99	018	185	1852	005	005	005	005	005	952	095	009

Figura III.8: Diagrama con claves para identificar la ubicación de las celdas dentro del dominio.

La Figura III.9 muestra el cambio realizado en la subrutina KEY para una celda en la frontera Norte rodeada de agua (clave 002) entre el 2.^o y 4.^o orden de aproximación con un orden de error de $[O(\Delta)2]$ y $[O(\Delta)4]$ respectivamente.

<pre> ID1=ID(I,J) IF (ID1.EQ.2.OR.ID1.EQ.32) THEN NEI(I,J,14)=(I-1)*NY+J-1 NEI(I,J,15)=(I-1)*NY+J NEI(I,J,16)=(I-1)*NY+J+1 NEI(I,J,17)=I*NY+J-1 NEI(I,J,18)=I*NY+J NEI(I,J,19)=I*NY+J+1 NEI(I,J,20)=(I+1)*NY+J-1 NEI(I,J,21)=(I+1)*NY+J NEI(I,J,22)=(I+1)*NY+J+1 ENDIF </pre>	<pre> ID1=ID(I,J) IF (ID1.EQ.2.OR.ID1.EQ.32) THEN NEI(I,J,52)=(I-1)*NY+J-3 NEI(I,J,53)=(I-1)*NY+J-2 NEI(I,J,54)=(I-1)*NY+J-1 NEI(I,J,55)=I*NY+J NEI(I,J,56)=(I-1)*NY+J+1 NEI(I,J,57)=(I-1)*NY+J+2 NEI(I,J,58)=(I-1)*NY+J+3 NEI(I,J,59)=I*NY+J-3 NEI(I,J,60)=I*NY+J-2 NEI(I,J,61)=I*NY+J-1 NEI(I,J,62)=I*NY+J NEI(I,J,63)=I*NY+J+1 NEI(I,J,64)=I*NY+J+2 NEI(I,J,65)=I*NY+J+3 NEI(I,J,66)=(I+1)*NY+J-3 NEI(I,J,67)=(I+1)*NY+J-2 NEI(I,J,68)=(I+1)*NY+J-1 NEI(I,J,69)=(I+1)*NY+J NEI(I,J,70)=(I+1)*NY+J+1 NEI(I,J,71)=(I+1)*NY+J+2 NEI(I,J,72)=(I+1)*NY+J+3 NEI(I,J,73)=(I+2)*NY+J-3 NEI(I,J,74)=(I+2)*NY+J-2 NEI(I,J,75)=(I+2)*NY+J-1 NEI(I,J,76)=(I+2)*NY+J NEI(I,J,77)=(I+2)*NY+J+1 NEI(I,J,78)=(I+2)*NY+J+2 NEI(I,J,79)=(I+2)*NY+J+3 NEI(I,J,80)=(I+3)*NY+J-3 NEI(I,J,81)=(I+3)*NY+J-2 NEI(I,J,82)=(I+3)*NY+J-1 NEI(I,J,83)=(I+3)*NY+J NEI(I,J,84)=(I+3)*NY+J+1 NEI(I,J,85)=(I+3)*NY+J+2 NEI(I,J,86)=(I+3)*NY+J+3 ENDIF </pre>
---	---

Figura III.9: Comparación de códigos entre el 2.º (izquierda) y el 4.º orden de aproximación (derecha), en la asignación del esquema en diferencias finitas de acuerdo a la clave de la celda (subrutina KEY), celdas 002 y 032 tienen el mismo esquema (figura III.6b).

En lo que respecta al código wapo3.f, la modificación corresponde a la parte final de la implementación numérica. Las subrutinas principalmente afectadas son ZKC, COEFF, ANGU, y por supuesto cada una de las subrutinas correspondientes a los diferentes arreglos de condiciones de frontera, los 33 esquemas resultantes (BC01, BC112, BC113, BC114, BC115, BC116, BC117, BC118, BC119, BC02, BC03, BC04, BC05, BC06, BC07, BC08, BC09, BC62, BC72, BC63, BC83, BC74, BC94, BC85, BC95, BC622, BC722, BC632, BC832, BC742, BC942, BC852 y BC952). Las figuras III.10 y III.11 ejemplifican la codificación de la subrutina B02 para el 2.º y 4.º orden de aproximación.

III.4. CAMBIOS EN EL CÓDIGO (IMPLEMENTACIÓN)

```

1589 C
1590 SUBROUTINE BC02(DX,DY,K,KC,ALF1,PHIG,DI,RES,MDI)
1591 C
1592 COMPLEX*16 CI,C1,C2,C3,C4,C5,PHIG
1593 COMPLEX*16 D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8,D9,D10,D11
1594 COMPLEX*16 DI(MDI),RES
1595 COMPLEX*16 KC
1596 REAL*8 DX,DY,K,ALF1
1597 REAL*8 A10,A11,A12
1598 COMMON /FARA1/ A10, A11, A12
1599 C
1600 DIAG=PHI(I-1,J),PHI(I,J-1),PHI(I,J),PHI(I,J+1),PHI(I+1,J)
1601 C
1602 DO I=1,MDI
1603 DI(I)=CMPLX(0.,0)
1604 ENDDO
1605 C
1606 CI=CMPLX(0.,1.)
1607 C
1608 C1=DY**2
1609 C2=DX**2
1610 C3=DX**2*DY**2*KC**2-2.*DX**2-2.*DY**2
1611 C4=DX**2
1612 C5=DY**2
1613 D1=-KC**2*DY**2
1614 D2=ALF1*(2.*CI*A11*DX*KC-3.*A12)
1615 D3=2.*ALF1*(CI*KC**3*A10*DX*DY**2-2.*CI*A11*DX*KC*3.*A12)
1616 D4=ALF1*(2.*CI*A11*DX*KC-3.*A12)
1617 D5=4.*ALF1*A12
1618 D6=DY**2*KC**2-8.*ALF1*A12
1619 D7=4.*ALF1*A12
1620 D8=-ALF1*A12
1621 D9=2.*ALF1*A12
1622 D10=-ALF1*A12
1623 D11=-2.*(KC*KC)*CI*KC**2*DX*DY**2
1624
1625 DI(24)=(C1*D2 - D1*C2)*1.E06
1626 DI(25)=(C1*D3 - D1*C3)*1.E06
1627 DI(26)=(C1*D4 - D1*C4)*1.E06
1628 DI(31)=C1*D5*1.E06
1629 DI(32)=(C1*D6 - D1*C5)*1.E06
1630 DI(33)=C1*D7*1.E06
1631 DI(38)=C1*D8*1.E06
1632 DI(39)=C1*D9*1.E06
1633 DI(40)=C1*D10*1.E06
1634 RES=C1*D11*PHIG*1.E06
1635
1636 RETURN
1637 END

```

Figura III.10: Código de la subrutina BC02 para el WAPO3.

```

3232 C
3233 SUBROUTINE BC02(DX,DY,K,KC,ALF1,PHIG,DI,RES,MDI)
3234 C
3235 COMPLEX*16 CI,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9,C10,PHIG
3236 COMPLEX*16 D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8,D9,D10,D11,D12,D13,D14,D15,D16
3237 COMPLEX*16 D17,D18,D19,D20,D21,D22,D23,D24,D25,D26,D27,D28,D29,D30
3238 COMPLEX*16 DI(MDI),RES
3239 COMPLEX*16 KC
3240 REAL*8 DX,DY,K,ALF1
3241 REAL*8 A10,A11,A12,A13,A14
3242 COMMON /FARA1/ A10, A11, A12, A13, A14
3243 C
3244 DIAG=PHI(I-1,J),PHI(I,J-1),PHI(I,J),PHI(I,J+1),PHI(I+1,J)
3245 C
3246 DO I=1,MDI
3247 DI(I)=CMPLX(0.,0)
3248 ENDDO
3249 C
3250 CI=CMPLX(0.,1.)
3251 C
3252 C1=10.*DY**2
3253 C2=-1.*DX**2
3254 C3=16.*DX**2
3255 C4=12.*DX**2*DY**2*KC**2-30.*DX**2-15.*DY**2
3256 C5=-16.*DX**2
3257 C6=-1.*DX**2
3258 C7=-4.*DY**2
3259 C8=14.*DY**2
3260 C9=-6.*DY**2
3261 C10=DY**2
3262 D1=-36.*KC**4*DY**4
3263 D2=ALF1*(-24.*A13*CI*KC*DX*50.*A14)
3264 D3=ALF1*(-12.*A11*CI*KC**3*DX*DY**2+25.*A12*KC**2*DY**2+
3265 4288.*A13*CI*KC*DX*600.*A14)
3266 D4=ALF1*(192.*A11*CI*KC**3*DX*DY**2-400.*A12*KC**2*DY**2-
3267 4336.*A13*CI*KC*DX*1950.*A14)
3268 D5=-120.*KC**4*DY**4+ALF1*(144.*A10*CI*KC**5*DX*DY**4-
3269 4360.*A11*CI*KC**3*DX*DY**2+750.*A12*KC**2*DY**2+
3270 41344.*A13*CI*KC*DX*2800.*A14)
3271 D6=ALF1*(192.*A11*CI*KC**3*DX*DY**2-400.*A12*KC**2*DY**2-
3272 4336.*A13*CI*KC*DX*1950.*A14)
3273 D7=ALF1*(-12.*A11*CI*KC**3*DX*DY**2+25.*A12*KC**2*DY**2+
3274 4288.*A13*CI*KC*DX*600.*A14)
3275 D8=ALF1*(-24.*A13*CI*KC*DX*50.*A14)
3276 D9=ALF1*(-96.*A14)
3277 D10=ALF1*(-48.*A12*KC**2*DY**2+1152.*A14)
3278 D11=ALF1*(768.*A12*KC**2*DY**2-3744.*A14)
3279 D12=216.*KC**4*DY**4+ALF1*(-1440.*A12*KC**2*DY**2+5376.*A14)
3280 D13=ALF1*(768.*A12*KC**2*DY**2-3744.*A14)
3281 D14=ALF1*(-48.*A12*KC**2*DY**2+1152.*A14)
3282 D15=ALF1*(-96.*A14)
3283 D16=ALF1*(72.*A14)
3284 D17=ALF1*(36.*A12*KC**2*DY**2-864.*A14)
3285 D18=ALF1*(-576.*A12*KC**2*DY**2+2808.*A14)
3286 D19=-72.*KC**4*DY**4+ALF1*(1080.*A12*KC**2*DY**2-4032.*A14)
3287
3288 D20=ALF1*(-576.*A12*KC**2*DY**2+2808.*A14)
3289 D21=ALF1*(36.*A12*KC**2*DY**2-864.*A14)
3290 D22=ALF1*(72.*A14)
3291 D23=ALF1*(-32.*A14)
3292 D24=ALF1*(-16.*A12*KC**2*DY**2+384.*A14)
3293 D25=ALF1*(256.*A12*KC**2*DY**2-1248.*A14)
3294 D26=12.*KC**4*DY**4+ALF1*(-480.*A12*KC**2*DY**2+1792.*A14)
3295 D27=ALF1*(256.*A12*KC**2*DY**2-1248.*A14)
3296 D28=ALF1*(-16.*A12*KC**2*DY**2+384.*A14)
3297 D29=ALF1*(-32.*A14)
3298 D30=ALF1*(6.*A14)
3299 D31=ALF1*(3.*A12*KC**2*DY**2-72.*A14)
3300 D32=ALF1*(-48.*A12*KC**2*DY**2+234.*A14)
3301 D33=ALF1*(90.*A12*KC**2*DY**2-336.*A14)
3302 D34=ALF1*(-48.*A12*KC**2*DY**2+234.*A14)
3303 D35=ALF1*(3.*A12*KC**2*DY**2-72.*A14)
3304 D36=ALF1*(6.*A14)
3305 D37=-144.*(KC*KC)*CI*DX*KC**4*DY**4
3306
3307 DI(110)=C1*D2*1.E06
3308 DI(111)=(C1*D3 - D1*C2)*1.E06
3309 DI(112)=(C1*D4 - D1*C3)*1.E06
3310 DI(113)=(C1*D5 - D1*C4)*1.E06
3311 DI(114)=(C1*D6 - D1*C5)*1.E06
3312 DI(115)=(C1*D7 - D1*C6)*1.E06
3313 DI(116)=C1*D8*1.E06
3314 DI(125)=C1*D9*1.E06
3315 DI(126)=C1*D10*1.E06
3316 DI(127)=C1*D11*1.E06
3317 DI(128)=(C1*D12 - D1*C7)*1.E06
3318 DI(129)=C1*D13*1.E06
3319 DI(130)=C1*D14*1.E06
3320 DI(131)=C1*D15*1.E06
3321 DI(140)=C1*D16*1.E06
3322 DI(141)=C1*D17*1.E06
3323 DI(142)=C1*D18*1.E06
3324 DI(143)=(C1*D19 - D1*C8)*1.E06
3325 DI(144)=C1*D20*1.E06
3326 DI(145)=C1*D21*1.E06
3327 DI(146)=C1*D22*1.E06
3328 DI(155)=C1*D23*1.E06
3329 DI(156)=C1*D24*1.E06
3330 DI(157)=C1*D25*1.E06
3331 DI(158)=(C1*D26 - D1*C9)*1.E06
3332 DI(159)=C1*D27*1.E06
3333 DI(160)=C1*D28*1.E06
3334 DI(161)=C1*D29*1.E06
3335 DI(170)=C1*D30*1.E06
3336 DI(171)=C1*D31*1.E06
3337 DI(172)=C1*D32*1.E06
3338 DI(173)=(C1*D33 - D1*C10)*1.E06
3339 DI(174)=C1*D34*1.E06
3340 DI(175)=C1*D35*1.E06
3341 DI(176)=C1*D36*1.E06
3342 RES=C1*D37*PHIG*1.E06
3343 RETURN

```

Figura III.11: Código de la subrutina BC02 implementando la PMSE de 4.^o orden como BC.

III.5. Comentarios y Conclusiones

La importancia de las BCs dentro de los modelos numéricos queda evidenciada al implementar el incremento del 2.º al 4.º orden tanto de la PMSE como de la aproximación de las diferencias finitas.

La modificación realizada a la parte matemática específicamente las BCs, repercutió en modificaciones sustanciales en la parte numérica (FDM) y por consiguiente también en la implementación numérica reflejándose en una gran cantidad de líneas de código adicionales.

Dos parámetros donde el cambio se hace notorio se puntualizan a continuación: El ancho de banda de la matriz $\mathbf{A}$ en el nuevo modelo es 2.6 veces mayor a la del WAPO3. Como se mencionó en este capítulo el ancho de banda depende de los esquemas de diferencias finitas, así como del tamaño y forma del dominio computacional. Para el caso de un área de estudio totalmente agua (dominio = región en estudio, ver figura II.1), el ancho de banda en el WAPO3 es igual a $5(NY) + 6$, mientras que para el nuevo modelo es de $13(NY) + 10$. NY corresponde al máximo número de celdas del dominio en la dirección y . Para casos con celdas secas en las fronteras (e.g. estudios costeros) el valor que sustituye a NY es muy similar a este, por lo que generalizar con NY arroja valores del ancho de banda con buena aproximación.

El incremento de esquemas en diferencias finitas, debido al incremento del orden de la PMSE (como BC) al igual que del orden de aproximación de las diferencias finitas, fue de 9 a 33.

Capítulo IV

MÉTODO ITERATIVO GBi-CGSTAB(s, L)

La segunda mejora al modelo consistió en cambiar el método de solución del sistema de ecuaciones, sustituyendo el método directo que se tiene (Eliminación Gaussiana para matrices de banda ancha) por un método iterativo, GBi-CGSTAB(s, L).

La parte numérica del modelo está constituida por el método numérico y el método de solución para el sistema de ecuaciones, el segundo totalmente dependiente del primero. Características primordiales de un modelo numérico, como son: precisión y tiempo de cálculo, son reflejo del método de solución del sistema de ecuaciones lineales. De aquí, la importancia del método de solución a elegir, teniendo en consideración que cualquier modificación a la parte matemática y numérica tiene repercusión en el método de solución, reflejándose principalmente en el tiempo de cálculo y la implementación del método.

Elegir entre un método directo y uno iterativo es un cuestionamiento inevitable en la modelación. Esta investigación contempla el cambio del método directo a uno iterativo. Las razones por las que se justifica la decisión se especifican en la siguiente sección, pero sin

lugar a dudas, el notable aumento del ancho de banda de la matriz de coeficientes, a causa de la implementación de la PMSE de 4.º orden bajo un esquema de diferencias finitas con aproximación $[O(\Delta)4]$, resultó decisivo para optar por el método iterativo.

Como se explicó en los dos capítulos anteriores, el ancho de banda repercute directamente en la cantidad de RAM demandada, hecho que limita el estudio de regiones grandes al uso de equipos de cómputo especializados (clústers, estaciones de trabajo, servidores, etc.), a pesar del constante crecimiento en el campo técnico computacional. Sin embargo, también se busca que el modelo sea una práctica herramienta ingenieril capaz de ejecutarse en una computadora personal (Personal Computer, PC).

El desarrollo del capítulo inicia con la justificación del cambio a un método iterativo, continua con la elección del método GBi-CGSTAB(s,L), la codificación del algoritmo y posterior implementación del código dentro del modelo WAPO3. El capítulo finaliza con las conclusiones obtenidas con base en los resultados logrados.

IV.1. Método directo e iterativo

Una de las características del WAPO es la de ser una herramienta ingenieril versátil y práctica, esto es, capaz de funcionar en una PC. Claro está que, el tiempo de cómputo está directamente relacionado con las características de la PC y del tamaño del dominio, más el principal factor son el modelo matemático y el método numérico. Al realizar el incremento de orden de aproximación en la parte matemática con las BCs y en el método numérico con las diferencias finitas, el requerimiento de memoria principal y el tiempo de cómputo se incrementan sustancialmente. De tal modo que, dicho incremento sustancial en tiempo de cómputo y memoria requerida resultan la principal razón para sustituir el método directo por uno iterativo.

El WAPO3, con el actual método de resolución (Método de Eliminación Gaussiana para resolver matrices de banda ancha de Maa et al. [1997]), es capaz de resolver un sistema aproximado de 1 millón de incógnitas (4GB RAM); con la intención de modelar una zona de mayor dimensión como lo es la playa de Cancún, se propone una meta alta, aumentar a 3 millones de incógnitas con lo que la cantidad de memoria requerida para almacenar el sistema de ecuaciones (matriz de coeficientes, vector de incógnitas y vector independiente o del lado derecho) ya es un factor prohibitivo, aun con los avances en la operación de matrices dispersas. Por tal motivo resulta obvio el cambiar a un método de resolución iterativo, pues la memoria para almacenar requerida por un procedimiento iterativo es extremadamente modesta.

Otra de las ventajas del método iterativo resulta al considerar una forma de incluir cierto efecto no lineal por medio de la relación de la dispersión no lineal de Kirby & Dalrymple [1986a]:

$$\sigma^2 = gk \{1 + (kA)^2 F_1 \tanh^5(kh) \tanh[kh + (kA) F_2]\} \quad (\text{IV.1})$$

Como la ecuación está en función de la amplitud A, es necesario, para el cálculo del número de onda k realizar una primera ronda de solución (del mismo modo que cuando se considera

rotura). La solución de este problema es por lo tanto equivalente a simplemente la solución del problema lineal varias veces, utilizando un conjunto diferente de números de onda cada vez. El método iterativo es particularmente eficaz para el manejo de este procedimiento, ya que sucesivamente menos iteraciones se requieren en cada ronda para obtener un nivel especificado de convergencia, lo que contrasta con el método directo convencional, donde cada ronda requeriría el mismo esfuerzo para la construcción y la inversión de la ecuación de la matriz [Panchang et al. , 1991].

Los métodos de cómputo para la solución de sistemas de ecuaciones son una herramienta importante en los modelos numéricos, dentro de las propiedades, señaladas por Hestenes & Stiefel [1952], que deben de tener están las siguientes:

1. El método debe ser simple, compuesto de una repetición de rutinas elementales requiriendo un mínimo de espacio de almacenamiento.
2. El método debe asegurar una rápida convergencia si el número de pasos requeridos para la solución es infinito. Se prefiere un método en el cual, si no existen errores de redondeo, de la solución en un número finito de pasos.
3. El procedimiento debe ser estable con respecto a los errores de redondeo. Si es necesario, una subrutina debe ser disponible para asegurar esta estabilidad.
4. Cada paso debe dar información sobre la solución y debe dar un nuevo y mejor estimado con respecto al anterior.
5. La mayor cantidad de datos originales, en la medida de lo posible, deben ser utilizados durante cada paso de la rutina, preservando de esta manera las propiedades especiales del sistema lineal dado.

A continuación, se enlistan las ventajas del método del Gradiente Conjugado (Conjugate Gradient, CG) sobre el método de GEP [Hestenes & Stiefel , 1952]. Es posible generalizar estas ventajas para una comparación entre el método de eliminación de Gauss y los métodos iterativos actuales, con excepción de la primera parte de la segunda ventaja, pues como se comprobará en este capítulo y se indica en la literatura, la codificación de los métodos iterativos es compleja.

1. Al igual que el método de eliminación de Gauss, el método CG da la solución en n pasos si no ocurren errores de redondeo.
2. El CG es más sencillo de codificar y requiere menos espacio de almacenamiento.
3. La matriz dada es inalterada durante el proceso, por lo tanto, el máximo de datos originales es usado.
4. En cada paso un estimado de la solución es dado, el cual es mejor que el calculado con anterioridad.
5. En cualquier paso uno puede comenzar nuevamente, por medio de un mecanismo simple, manteniendo el último estimado como el estimado inicial.

IV.2. ¿Por qué usar el GBi-CGSTAB(s, L)?

Para responder es necesario establecer una ligera introducción de los métodos más conocidos. Las técnicas basadas en el método de sub-espacio de Krylov son consideradas, actualmente, como las técnicas iterativas disponibles más importantes para resolver sistemas lineales grandes. Dichas técnicas están basadas en los procesos de proyección, tanto ortogonal como oblicua sobre sub-espacios de Krylov, los cuales son sub-espacios generados mediante vectores de la forma $p(\mathbf{A})b$ donde p es un polinomio. En resumen, estas técnicas aproximan $\mathbf{A}^{-1}b$ por $p(\mathbf{A})b$ donde p es un “*buen*” polinomio.

Los métodos más conocidos del subespacio Krylov son los Arnoldi, Lanczos, el CG, GMRES (residuo mínimo generalizado), el Bi-CGSTAB (método del gradiente biconjugado estabilizado), QMR(cuasi residuo mínimo), TFQMR (QMR adaptación libre de transpuesta), y MINRES (mínimo residuo).

IDR(s) (Induced Dimension Reduction) está reconocido como uno de los métodos más eficaces, a menudo superior a otros métodos de sub-espacios de Krylov, para los grandes sistemas de ecuaciones lineales no simétricos. El algoritmo llamado GBi-CGSTAB(s, L), es una mejora al IDR(s) mediante la incorporación de un polinomio de estabilización de orden superior dentro de IDR(s), que comparte rasgos deseables tanto con IDR(s) y Bi-CGSTAB(L) [Tanio & Sugihara, 2010].

IDR(s) tiene la característica de requerir un máximo de $N + N/s$ multiplicaciones matriz-vector para calcular una solución aritmética exacta, mientras que los métodos basados en Bi-CG tales como CGS (Conjugate Gradient Squared), Bi-CGSTAB, Bi-CGSTAB(L), GP-Bi-CG requieren a lo mucho $2N$ multiplicaciones matriz-vector. Experimentos numéricos también reportan que IDR(s) es competitivo o superior a la mayoría de los métodos Bi-CG. Se sabe, sin embargo, que IDR(s) es inferior a Bi-CGSTAB(L) ($L > 1$) cuando se aplica a ecuaciones con matrices de coeficientes casi asimétricas. La debilidad contra la asimetría viene del hecho de que el orden de estabilización es mayor. Para cubrir dicha debilidad se incorpora un orden de estabilización polinomial mayor dentro de IDR(s) en el algoritmo GBi-CGSTAB(s,L).

Debido a que el sistema de ecuaciones involucra una enorme matriz asimétrica de coeficientes, es que se tomó como primera opción integrar el método GBi-CGSTAB(s,L) al WAPO.

IV.3. Codificación de los algoritmos del CG, Bi-CGSTAB(L) y GBi-CGSTAB(s, L)

Se han logrado progresos abordando la ecuación elíptica de la MSE mediante métodos iterativos. Panchang et al. [1991] recurrieron al método CG, librando el problema de tener una matriz de coeficientes $[\mathbf{A}]$ indefinida al multiplicar por su transpuesta conjugada, mientras que Li [1994] también recurre al método del gradiente conjugado, pero él lo generaliza (GCG) al implementar el método de residuos mínimos para sortear el inconveniente de la matriz $\mathbf{A}$

indefinida. Zhao & Anastasiou [1996] resuelven el sistema de ecuaciones generado a partir del uso del método de las diferencias finitas con el método iterativo GMRES y tres preconditionadores, siendo ILU uno de ellos. Además de implementar el método GMRES, Oliveira & Anastasiou [1998] también implementaron el método iterativo Bi-CGSTAB, concluyendo que este último converge más rápido, aunque no tan suave como el GMRES. Tang et al. [2004] uso GPBiCG (m, n), un método híbrido de Bi-CGSTAB y GPBiCG con buenos resultados.

Cabe mencionar, que todos los trabajos mencionados consideran la condición de frontera más simple (ec. III.9), lo que facilita en gran medida el uso y convergencia de métodos iterativos sencillos, pues la uniformidad espectral de la matriz $\mathbf{A}$ mejora al disminuir el ancho de banda. La intención no es la sacrificar precisión al simplificar la parte matemática en favor de ganar en la parte numérica, la presente investigación pretende buscar mayor precisión matemática al igual que mayor eficiencia numérica.

Un dato de interés, señalado por Xu et al. [1996], indica que los métodos iterativos tienen un mejor desempeño en la presencia del método de elemento finito que cuando se recurre al de diferencias finitas.

Con el fin de introducirse en forma gradual en los métodos iterativos, se codificaron dos algoritmos previos al elegido. Estos algoritmos corresponden a los métodos CG y Gradiente BiConjugado con polinomio de Estabilización, BICGSTAB(L). El método del CG se codificó con fines puramente demostrativos y educativos, pues a priori se sabía que es incapaz de resolver el sistema generado por el WAPO3, debido a que es poco probable obtener una matriz $\mathbf{A}$ simétrica. El método BICGSTAB(L), cuyo algoritmo se muestra en la figura IV.1, es una herramienta reconocida por su gran utilidad en la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales no simétricos, encontrando un indiscutible campo de aplicación en los modelos numéricos.

Después de la correcta codificación tanto del método CG, como del BICGSTAB(L), validando con pequeños sistemas de ecuaciones generados con este fin específico y con ejemplos de la literatura, finalmente se procedió a la codificación del algoritmo correspondiente al método elegido, GBi-CGSTAB(s,L), ver figura IV.2 izquierda. La primera codificación se desarrolló únicamente para números reales, evidentemente sin utilidad directa para el modelo pues el sistema de ecuaciones es de números complejos, aun con esta simplificación la codificación fue notablemente más compleja en comparación a los métodos BICGSTAB(L) y CG.

```

1.  $k = -L$ 
2. choose  $\mathbf{x}_0$  and  $\mathbf{r}_0^*$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ 
3.  $\mathbf{u}_{-1} = 0$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\omega = 1$ 
4. repeat until  $\|\mathbf{r}_{k+L}\| < \varepsilon$  (tolerance)
5.  $k = k + L$ 
6.  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_{k-1}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_k$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_k$ ,  $\rho_0 = -\omega\rho_0$ 
7. for  $j = 0, 1, \dots, L-1$ 
8.    $\rho_1 = (\hat{\mathbf{r}}_j, \mathbf{r}_0^*)$ ,  $\beta = \alpha \frac{\rho_1}{\rho_0}$ ,  $\rho_0 = \rho_1$ 
9.    $\hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{r}}_1 - \beta \hat{\mathbf{u}}_1$  ( $i = 0, 1, \dots, j$ )
10.   $\hat{\mathbf{u}}_{j+1} = A\hat{\mathbf{u}}_j$ ,  $\gamma = (\hat{\mathbf{u}}_{j+1}, \mathbf{r}_0^*)$ ,  $\alpha = \frac{\rho_0}{\gamma}$ 
11.   $\hat{\mathbf{r}}_1 = \hat{\mathbf{r}}_1 - \alpha \hat{\mathbf{u}}_{j+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, j$ )
12.   $\hat{\mathbf{r}}_{j+1} = A\hat{\mathbf{r}}_j$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 + \alpha \hat{\mathbf{u}}_0$ 
13. end for
14. for  $j = 1, 2, \dots, L$ 
15.    $\tau_{ij} = \frac{1}{\sigma_j}(\hat{\mathbf{r}}_i, \hat{\mathbf{r}}_j)$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_j = \hat{\mathbf{r}}_j - \tau_{ij}\hat{\mathbf{r}}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, j-1$ )
16.    $\sigma_j = (\hat{\mathbf{r}}_j, \hat{\mathbf{r}}_j)$ ,  $\gamma'_j = \frac{1}{\sigma_j}(\hat{\mathbf{r}}_j, \hat{\mathbf{r}}_0)$ 
17. end for
18.  $\gamma_L = \gamma'_L$ ,  $\omega = \gamma_L$ 
19.  $\gamma_j = \gamma'_j - \sum_{i=j+1}^L \tau_{ji}\gamma_i$  ( $j = L-1, \dots, 1$ )
20.  $\gamma''_j = \gamma_{j+1} + \sum_{i=j+1}^{L-1} \tau_{ji}\gamma_{i+1}$  ( $j = 1, \dots, L-1$ )
21.  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 + \gamma_1 \hat{\mathbf{r}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_0 = \hat{\mathbf{r}}_0 - \gamma'_1 \hat{\mathbf{r}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 - \gamma_L \hat{\mathbf{u}}_L$ 
22.  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 - \gamma_1 \hat{\mathbf{u}}_1$  ( $j = 1, \dots, L-1$ )
23.  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 + \gamma''_j \hat{\mathbf{r}}_j$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_0 = \hat{\mathbf{r}}_0 - \gamma'_j \hat{\mathbf{r}}_j$  ( $j = 1, \dots, L-1$ )
24.  $\mathbf{u}_{k+L-1} = \hat{\mathbf{u}}_0$ ,  $\mathbf{r}_{k+L} = \hat{\mathbf{r}}_0$ ,  $\mathbf{x}_{k+L} = \hat{\mathbf{x}}_0$ 
25. end repeat

```

Figura IV.1: Algoritmo del método BICGSTAB(L) [Tanio & Sugihara , 2010].

IV.4. Programación del GBi-CGBSTAB(s,L) para Coeficientes Complejos

La adaptación del código para números complejos implicó modificar varias líneas de código, como por ejemplo todo el código para determinar la inversa de una matriz, y no solamente declarar las variables como complejas. El código también se optimizó y una parte importante de la optimización radicó en evitar la propuesta de $\tilde{R}_0$, pues ahora $\tilde{R}_0$ se elige automáticamente como una matriz aleatoria dependiente del residuo, que posteriormente se ortogonaliza. Lo anterior debido a que la propuesta de $\tilde{R}_0$ repercute directamente en el correcto funcionamiento del método iterativo. El consejo hecho por el Prof. Sugihara y su alumno, en ese entonces, Maestro Kouki Fokahori para realizar dicha ortogonalización fue usar las subrutinas `dgeqrf` y `dorgqr` de la librería LAPACK, aclarando que dichas subrutinas funcionan únicamente para reales, para evitar depender de códigos externos y modificar códigos ajenos, se realizó un código propio de ortogonalización basado en el algoritmo Modificado Gram-Schmidt, dicho código se comprobó a través de la multiplicación de columnas así como también se ejecutó para reales obteniéndose exactamente la misma matriz que al usar la subrutina aconsejada, para esta última comprobación lógicamente fue necesario instalar la librería LAPACK para Linux.

Dentro de sus ventajas está la rapidez de convergencia y que carecen de errores de redondeo, error que si se presenta en los métodos directos. Su gran complejidad de codificación es una de sus máximas desventajas, otra de sus desventajas propias de su naturaleza iterativa es la divergencia.

La codificación de GBi-CGBSTAN(s, L) se realizó en 600 líneas de código aproximadamente. Para optimizar el acoplamiento entre el WAPO y el GBi-CGBSTAN(s, L), se implementó un

IV.4. PROGRAMACIÓN DEL GBI-CGBSTAB(S,L) PARA COEFICIENTES COMPLEJOS

<pre> 1. choose $\mathbf{x}_0$ and $N \times s$ matrix $\tilde{R}_0$ 2. set $U_0 = [\mathbf{r}_0, A\mathbf{r}_0, \dots, A^{s-1}\mathbf{r}_0]$, $U_1 = AU_0$ 3. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ 4. $M = \tilde{R}_0^* U_1$, $\mathbf{m} = \tilde{R}_0^* \mathbf{r}_0$ 5. solve $M\beta = \mathbf{m}$ for β 6. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 - U_1\beta$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + U_0\beta$ 7. $\mathbf{r}_1 = A\mathbf{r}_0$, iter = 0, $\omega = -1$ 8. repeat until $\ \mathbf{r}_0\ < \varepsilon$ (tolerance) 9. $M = -\omega M$ 10. for $i = 0, 1, \dots, L-1$ 11. if (iter = 0) $\wedge$ ($i = 0$) $i = 1$ 12. $\mathbf{m} = \tilde{R}_0^* \mathbf{r}_1$ 13. for $j = 1, \dots, s$ 14. if ($j = 1$) 15. solve $M\beta = \mathbf{m}$ for β 16. $U_i \mathbf{e}_j = \mathbf{r}_k - \sum_{q=1}^s U_k \mathbf{e}_q \beta(q)$ ($k = 0, \dots, i$) 17. else 18. solve $[\mathbf{m}, M\mathbf{e}_1, \dots, M\mathbf{e}_{j-2}, M\mathbf{e}_j, \dots, M\mathbf{e}_s]\beta = M\mathbf{e}_{j-1}$ for β 19. $U_i \mathbf{e}_j = U_{k+1} \mathbf{e}_{j-1} - \mathbf{r}_k \beta(1) - \sum_{q=1}^{j-2} U_{k+1} \mathbf{e}_q \beta(q+1) - \sum_{q=j}^s U_k \mathbf{e}_q \beta(q)$ ($k = 0, \dots, i$) 20. end if 21. $U_{i+1} \mathbf{e}_j = AU_i \mathbf{e}_j$ 22. $M\mathbf{e}_j = \tilde{R}_0^* U_{i+1} \mathbf{e}_j$ 23. end for 24. solve $M\beta = \mathbf{m}$ for β 25. $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - U_{k+1}\beta$ ($k = 0, \dots, i$) 26. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + U_0\beta$ 27. $\mathbf{r}_{i+1} = A\mathbf{r}_i$ 28. end for 29. for $j = 1, 2, \dots, L$ 30. $\tau_{ij} = \frac{1}{\sigma_j}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$, $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \tau_{ij}\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, j-1$) 31. $\sigma_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j)$, $\gamma'_j = \frac{1}{\sigma_j}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_0)$ 32. end for 33. $\gamma_L = \gamma'_L$, $\omega = \gamma_L$ 34. $\gamma_j = \gamma'_j - \sum_{i=j+1}^L \tau_{ij}\gamma_i$ ($j = L-1, \dots, 1$) 35. $\gamma'_j = \gamma_{j+1} + \sum_{i=j+1}^{L-1} \tau_{ij}\gamma_{i+1}$ ($j = 1, \dots, L-1$) 36. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \gamma_1 \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 - \gamma'_1 \mathbf{r}_L$, $U_0 = U_0 - \gamma_L U_L$ 37. $U_0 = U_0 - \gamma'_j U_j$ ($j = 1, \dots, L-1$) 38. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \gamma'_j \mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 - \gamma'_j \mathbf{r}_j$ ($j = 1, \dots, L-1$) 39. iter = iter + ($s+1$)L 40. end repeat </pre>	<pre> 1. choose $\mathbf{x}_0$ and $N \times s$ matrices $\tilde{R}_0$ and U_0 2. set $U_0 = [\mathbf{r}_0, A\mathbf{r}_0, \dots, A^{s-1}\mathbf{r}_0]$, $\tilde{U}_0 = \tilde{A}^{-1}U_0$ 3. $U_1 = A\tilde{U}_0$ 4. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ 5. $M = \tilde{R}_0^* U_1$, $\mathbf{m} = \tilde{R}_0^* \mathbf{r}_0$ 6. solve $M\beta = \mathbf{m}$ for β 7. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 - U_1\beta$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \tilde{U}_0\beta$ 8. $\tilde{\mathbf{r}}_0 = \tilde{A}^{-1}\mathbf{r}_0$ 9. $\mathbf{r}_1 = A\tilde{\mathbf{r}}_0$, iter = 0, $\omega = -1$ 10. repeat until $\ \mathbf{r}_0\ < \varepsilon$ (tolerance) 11. $M = -\omega M$ 12. for $i = 0, 1, \dots, L-1$ 13. if (iter = 0) $\wedge$ ($i = 0$) $i = 1$ 14. $\mathbf{m} = \tilde{R}_0^* \mathbf{r}_1$ 15. for $j = 1, \dots, s$ 16. if ($j = 1$) 17. solve $M\beta = \mathbf{m}$ for β 18. $U_i \mathbf{e}_j = \mathbf{r}_k - \sum_{q=1}^s U_k \mathbf{e}_q \beta(q)$ ($k = 0, \dots, i$) 19. $\tilde{U}_i \mathbf{e}_j = \tilde{\mathbf{r}}_k - \sum_{q=1}^s \tilde{U}_k \mathbf{e}_q \beta(q)$ ($k = 0, \dots, i-1$) 20. else 21. solve $[\mathbf{m}, M\mathbf{e}_1, \dots, M\mathbf{e}_{j-2}, M\mathbf{e}_j, \dots, M\mathbf{e}_s]\beta = M\mathbf{e}_{j-1}$ for β 22. $U_i \mathbf{e}_j = U_{k+1} \mathbf{e}_{j-1} - \mathbf{r}_k \beta(1) - \sum_{q=1}^{j-2} U_{k+1} \mathbf{e}_q \beta(q+1) - \sum_{q=j}^s U_k \mathbf{e}_q \beta(q)$ ($k = 0, \dots, i$) 23. $\tilde{U}_i \mathbf{e}_j = \tilde{U}_{k+1} \mathbf{e}_{j-1} - \tilde{\mathbf{r}}_k \beta(1) - \sum_{q=1}^{j-2} \tilde{U}_{k+1} \mathbf{e}_q \beta(q+1) - \sum_{q=j}^s \tilde{U}_k \mathbf{e}_q \beta(q)$ ($k = 0, \dots, i-1$) 24. end if 25. $\tilde{U}_{i+1} \mathbf{e}_j = \tilde{A}^{-1}U_i \mathbf{e}_j$ 26. $U_{i+1} \mathbf{e}_j = A\tilde{U}_{i+1} \mathbf{e}_j$ 27. $M\mathbf{e}_j = \tilde{R}_0^* U_{i+1} \mathbf{e}_j$ 28. end for 29. solve $M\beta = \mathbf{m}$ for β 30. $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - U_{k+1}\beta$ ($k = 0, \dots, i$) 31. $\tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{r}}_k - \tilde{U}_{k+1}\beta$ ($k = 0, \dots, i-1$) 32. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \tilde{U}_0\beta$ 33. $\tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{A}^{-1}\mathbf{r}_1$ 34. $\mathbf{r}_{i+1} = A\tilde{\mathbf{r}}_i$ 35. end for 36. for $j = 1, 2, \dots, L$ 37. $\tau_{ij} = \frac{1}{\sigma_j}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$, $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j - \tau_{ij}\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, j-1$) 38. $\sigma_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j)$, $\gamma'_j = \frac{1}{\sigma_j}(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_0)$ 39. end for 40. $\gamma_L = \gamma'_L$, $\omega = \gamma_L$ 41. $\gamma_j = \gamma'_j - \sum_{i=j+1}^L \tau_{ij}\gamma_i$ ($j = L-1, \dots, 1$) 42. $U_0 = U_0 - \gamma'_j U_j$ ($j = 1, \dots, L$) 43. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \gamma'_{j+1} \tilde{\mathbf{r}}_j$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0 - \gamma'_{j+1} \mathbf{r}_{j+1}$ ($j = 0, \dots, L-1$) 44. iter = iter + ($s+1$)L 45. end repeat </pre>
--	--

Figura IV.2: Algoritmos del método GBI-CGSTAB(s, L), sin pre-condicionamiento (izquierda) y con pre-condicionamiento (derecha) [Tanio & Sugihara, 2010].

sistema especial para la multiplicación matriz-vector en matrices dispersas, consistente en 4 vectores:

- Vector con los valores de los coeficientes diferentes de cero.
- Vector con los valores de las constantes.
- Vector con la posición de los coeficientes.
- Número de coeficientes con valor distinto a cero por renglón.

Es importante resaltar que esta nueva forma de almacenar la matriz de coeficientes derivó en modificaciones en los algoritmos para las operaciones matriz-vector y/o matriz-matriz.

Los resultados del método GBI-CGBSTAN(s, L) se comprobaron satisfactoriamente comparándolos contra los resultados obtenidos de la MSE 1D programada durante la maestría,

la cual resuelve en forma directa el sistema tridiagonal perfecto y ambos también se han comprobado por el método tradicional de sustitución de las incógnitas ($\mathbf{x}$) en la matriz de coeficientes ($\mathbf{A}$) resultando igual al vector de las constantes ($\mathbf{b}$), esto es, $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

También se evaluó el código libre COCR (Conjugado ortogonal conjugado residual), el cual es únicamente para resolver matrices simétricas. Un sistema simétrico de 250000 incógnitas y el método COCR permitieron evaluar el código GBi-CGSTAB(s, L) obteniendo un resultado totalmente satisfactorio. Como trabajo adicional, se elaboró un código para determinar si la matriz en estudio es o no simétrica. La validación indica el correcto entendimiento y dominio del algoritmo GBi-CGBSTAN(s, L).

IV.5. Acoplamiento del Método GBi-CGBSTAB(s, L) al WAPO3 y la Necesidad de un Precondicionamiento

Se realizó el acoplamiento del método GBi-CGBSTAB(s, L) con el WAPO3, con resultados desfavorables, pues el código diverge al intentar resolver un sistema de 960 incógnitas. Lo cual no es nada extraño según la literatura, debido a que los problemas de mecánica de fluidos difícilmente se resuelven con métodos iterativos sin la necesidad de precondicionamiento. Los sistemas lineales originados de las ecuaciones de Maxwell y Helmholtz están entre los más difíciles de resolver mediante técnicas iterativas. Estos sistemas son típicamente de valores complejos. Lo que los hace difíciles de resolver es que estos pueden ser altamente indefinidos lo cual conduce a dificultades cuando se intenta extraer preconditionadores efectivos [Osei-Kuffuor & Saad , 2010].

La complejidad del reto de implementar un método iterativo a un modelo numérico basado en la EMSE se esclarece citando las características de la ecuación de Helmholtz [Zhao & Anastasiou , 1996]:

1. Los coeficientes son complejos, por lo tanto, la matriz derivada de la discretización es también compleja.
2. Las partes reales de algunos eigenvalores son negativas y, además, algunos eigenvalores son pequeños. Esta característica generalmente conduce a una convergencia lenta del método CG.
3. La matriz es no-Hermitian debido al hecho de que las condiciones de frontera son usualmente del tipo Neumann.
4. La discretización en diferencias finitas provee una resolución pobre de la velocidad de grupo. De aquí que, una mejor resolución es requerida en orden de alcanzar resultados confiables.

Aunque los métodos iterativos basados en el subespacio de Krylov están bien fundamentados teóricamente, todos ellos probablemente sufren de convergencia lenta para problemas originados

de aplicaciones típicas como la dinámica de fluidos y simulación de dispositivos electrónicos. De ahí, que el preconditionamiento es un ingrediente clave para el éxito en la resolución de los problemas mencionados cuyos métodos iterativos de solución están basados en el subespacio de Krylov.

La convergencia de los métodos iterativos depende de las propiedades espectrales de la matriz del sistema lineal y con la intención de mejorar dichas propiedades por lo regular el sistema lineal se transforma mediante una adecuada transformación lineal. Este proceso es conocido como preconditionamiento.

IV.6. Precondicionamiento

La idea del preconditionador es la reducción del número de iteraciones requerido para la convergencia, transformando el sistema original $Ax = b$ por un sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$, de tal forma que se satisfagan las siguientes propiedades:

Resolver $\tilde{A}x = \tilde{b}$ no debe incrementar considerablemente el número de operaciones que se requieren para resolver $Ax = b$.

$Ax = b$ y $\tilde{A}x = \tilde{b}$ tienen la misma solución, es decir, $\tilde{A}^{-1}\tilde{b} = A^{-1}b$.

Ciertos preconditionadores necesitan una pequeña fase de construcción, pero otros pueden necesitar un trabajo sustancial. Lo que constituye un coste aceptable en la construcción del preconditionador, o tiempo de configuración, por lo general dependerá de si el preconditionador puede ser reutilizado o no. En la situación común en la que una secuencia de sistemas lineales con la misma matriz de coeficientes (o una variación lenta) y diferente vector independiente, b (lado derecho) tiene que ser resuelto, se puede gastar cierto de tiempo empleado en el cálculo de un poderoso preconditionador, ya que su costo puede ser amortizado en el uso repetido del mismo preconditionador.

La figura IV.2 derecha muestra el algoritmo del GBi-CGBSTAN(s, L) con preconditionamiento, ahora bien, como ya se explicó, la importancia radica en encontrar el preconditionador adecuado para dicho algoritmo. Se hizo un intento calculando un preconditionador por el método ILU pero no es opción para matrices grandes pues el preconditionador es una inversa de la matriz obtenida mediante ILU y al ser inversa deja de ser una matriz banda y se convierte en una matriz prácticamente llena, imposible de almacenar mucho menos de manipularla dentro del algoritmo de preconditionamiento.

Se trabajaron 3 diferentes preconditionadores (ILU0, CONDICIONAMIENTO DIAGONAL, COMPLEX SHIFTED LAPLACIAN), acoplando estos directamente al método GBi-CGSTAB(s, L) de forma exitosa y obteniendo resultados de total conformidad con la literatura.

El primer preconditionador empleado fue ILU(0), factorización incompleta sin relleno, la técnica más simple de la factorización incompleta y cuya ventaja es que el preconditionador resultante es una matriz que conserva la misma estructura que la matriz de coeficientes original.

Se empleó de manera exitosa; pero tal y como marca la literatura, este preconditionador no es adecuado para sistemas tipo Helmholtz, provocando en la mayoría de los casos convergencia lenta o divergencia. Siendo la segunda opción el resultado obtenido, más por el contrario, aplicado al sistema de la matriz simétrica de 250000 incógnitas, tomada del paquete COCR, lo resuelve de manera conveniente, mostrando mejoría con respecto al código sin preconditionamiento.

Como segunda opción se estableció un preconditionador de tipo condicionamiento diagonal (con la intención de obtener un sistema diagonalmente dominante), el cual arrojó excelentes resultados al aplicarse al sistema de ecuaciones obtenido del WAPO (de 960 incógnitas).

El tercer preconditionador, Complex Shifted Laplacian, basado en un operador y no basado en la estructura matricial como los dos anteriores, tuvo, al igual que el segundo, buenos resultados en nuestro sistema objetivo de 960 incógnitas.

Cuando se intentó resolver, con la segunda y tercera opción de preconditionadores, un sistema de magnitud aproximada a la de la matriz simétrica del método COCR (230000) incógnitas, el método tiende a la lenta divergencia.

IV.7. Comentarios y Conclusiones

La información destacada en el capítulo se presenta en los siguientes puntos acompañados de conclusiones.

1. El uso de un método iterativo ahorra memoria y su procedimiento de cálculo facilita la inclusión de la rotura y no linealidad con número de onda variable.
2. Codificación compleja de los métodos iterativos.
3. Mejor desempeño del método de elemento finito que el de diferencias finitas en combinación con los métodos iterativos.
4. Los sistemas de ecuaciones producto del estudio de fluidos y aquellos con base en la ecuación Helmholtz son complicados para métodos iterativos, obligando a recurrir al preconditionamiento.
5. El preconditionamiento ayuda a la convergencia, pero demanda más memoria (muy poco significativo comparado con el método directo) y una modificación sustancial del código.
6. La necesidad de comprobar nuestros códigos obligó a comparar el método de almacenamiento matricial propuesto contra el popular CRS (Compressed Row Storage), concluyendo el necesario cambio al método CRS por su mayor eficiencia.
7. Aun así, no se tiene el código adecuado para la dimensión del sistema de ecuaciones que se desea resolver (1 a 3 millones de incógnitas) pero ya es posible dar solución a sistemas de ecuaciones tipo Helmholtz como el generado por el WAPO. Ahora bien, con la inclusión de la mejora del modelo WAPO en lo concerniente a las condiciones de frontera, ocasionando

esto, el aumento del ancho de banda del sistema de una forma considerable, el método directo que se tiene seguirá siendo adecuado, pero se sacrificará el tamaño del dominio pues la memoria será insuficiente, perjudicando la meta que se tiene de alcanzar el estudio de dominios mayores.

8. Como alternativa al presente problema, lo que se pretende como primera opción, es resolver el preconditionador de una forma más aproximada, por lo cual, además de utilizar la factorización incompleta que ahora se maneja, se pretende incluir un método multi-malla. Esto nos obligará a realizar un previo análisis de Fourier para encontrar los parámetros ideales correspondientes al método multi-malla.
9. Como alternativa secundaria se tiene en programado cambiar el método iterativo principal GBi-CGSTAB(s, L) y probar con GMRES, BICORS y CORS.

VALIDACIÓN Y DISCUSIÓN

La validación del nuevo modelo WAPOx se centra en el análisis de las simulaciones en la zona de las fronteras, esto debido a que el modelo base WAPO3 ya ha sido ampliamente validado bajo distintos casos de estudio [Silva , 2003].

En cuanto a los resultados del WAPOx, estos se comparan para su validación con los resultados arrojados por el WAPO3 (ya validado) y con el método analítico de interacción oleaje-pilas [Linton & Evans , 1990].

Tres escenarios (figura V.1) son empleados en las simulaciones, uno sin fronteras reales (sin obstáculos) y dos con pilas (una y cuatro pilas). Los tres escenarios comparten las siguientes características:

- Fronteras Norte, Sur, Este y Oeste abiertas.
- Profundidad constante, $h = -100m$.
- Amplitud de onda incidente, $A_i = 1m$.

- Longitud de onda, $L = 56m$ ($T = 6s$).
- Resolución de malla de 60 celdas por L ($\Delta x = \Delta y = 0.933m$).
- Dimensiones externas del dominio de $6L \times 6L$.

Para los casos con pilas, estas se encuentran emergidas 3 m y su diámetro es igual a la longitud de onda ($D = L$), para el escenario con cuatro pilas (figura V.1) la separación entre pilas contiguas es de una longitud de onda ($s = L$).

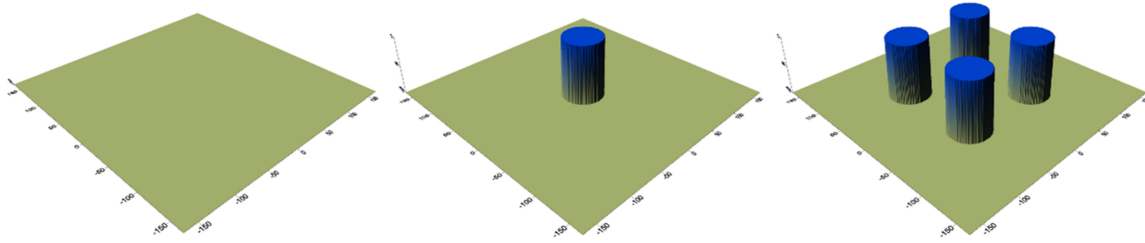


Figura V.1: Batimetrías de los tres escenarios de evaluación.

V.1. Fondo Constante Sin Fronteras Reales

Para el primer escenario, únicamente se lleva a cabo una comparación visual de los patrones de amplitud de onda entre los dos modelos y los métodos Padé y minimax (Figura V.2).

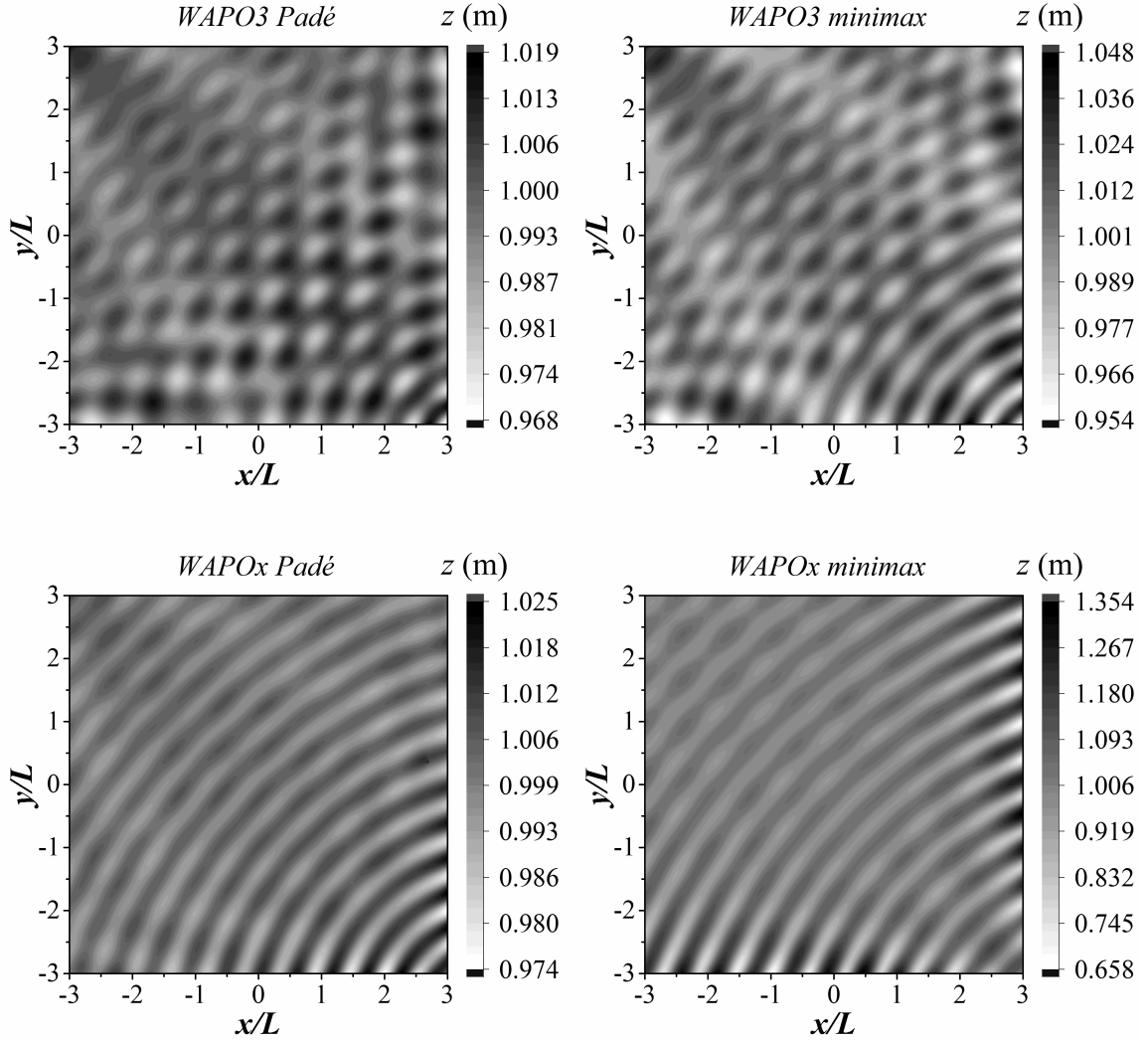


Figura V.2: Patrón de amplitudes producto de un oleaje incidiendo por el Noroeste (45°).

Comparando el WAPO3 contra el WAPOx, es evidente una mejoría en el patrón de amplitudes, la parte central del dominio se aprecia con una menor alteración en las simulaciones con el WAPOx. Al analizar los métodos Padé y minimax, también se percibe una mejoría en el patrón de amplitudes, aunque claramente menor a la obtenida al emplear el WAPOx. La desventaja de obtener una mejora en el patrón de amplitudes, al recurrir al modelo WAPOx y el método minimax, es un aumento en la amplitud, el cual debería mantenerse constante ($A = 1m$). Este incremento en la amplitud se ubica claramente en las fronteras de salida del oleaje (fronteras Sur y Este). El incremento de amplitud con el método Padé es de 1.9 y 2.5 cm en los modelos WAPO3 y WAPOx respectivamente, mientras que con el método minimax, este

incremento es de 4.8 (WAPO3) y unos elevados 35.4 cm en el WAPOx.

V.2. Pilas

V.2.1. Una pila, oleaje incidiendo del Norte (45°)

En un escenario con presencia de difracción debido a obstáculos internos (fronteras reales), el patrón de amplitudes es mejor para la simulación con WAPO3 Padé. El WAPOx Padé y WAPO3 minimax, igualmente presentan un buen patrón de amplitudes, más se distingue la contaminación del dominio a causa de las ondas reflejadas por las fronteras de salida, las cuales no son muy significantes, ya que la amplitud máxima de estos dos modelos, 2.02 y 2.05 m respectivamente, es más próxima a la del modelo analítico (1.91 m), que la del WAPO3 Padé (2.08 m).

La incompatibilidad entre el modelo WAPOx y el método minimax es totalmente evidente en la figura V.3. Para el caso con oleaje incidiendo a 45° (figura V.2) el patrón de amplitudes fue el mejor a pesar de tener el máximo error en la amplitud máxima, pero para oleaje con incidencia normal a la frontera, tanto el patrón de amplitudes, como la amplitud máxima muestran un error inadmisibile. Caso contrario, la combinación WAPO3 con el método minimax muestran una gran compatibilidad.

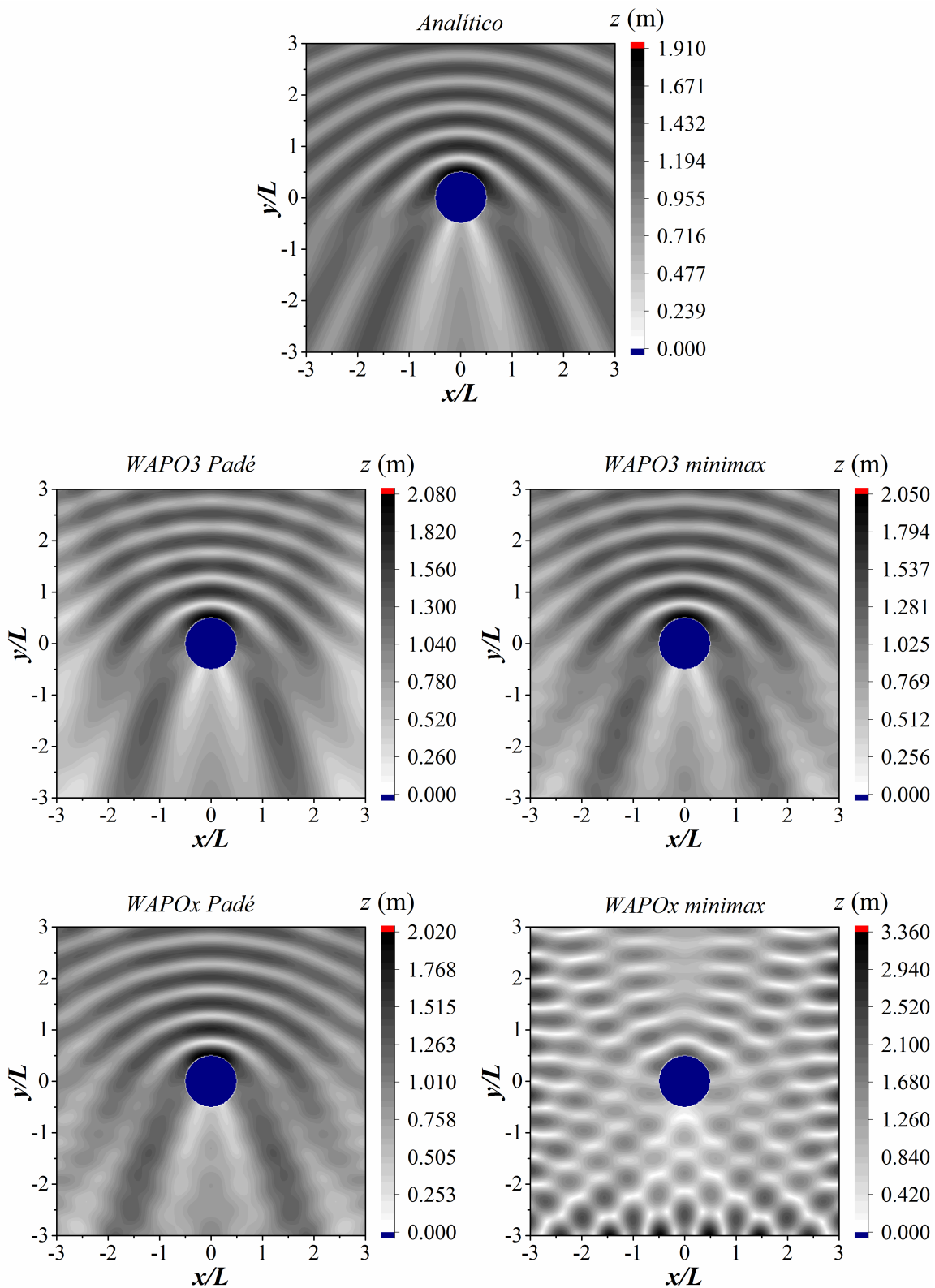


Figura V.3: Patrón de amplitudes producto de un oleaje incidiendo por el Norte (0°).

Otra perspectiva, en la comparación de las simulaciones, se muestra en las gráficas de las

amplitudes adimensionales (amplitud local entre incidente, A_l/A_i), correspondientes a las secciones centrales en cada dirección (figuras V.4 y V.5). La figura V.4 demuestra, como era de esperarse, una mayor imprecisión en las fronteras: abiertas ($x/L = \pm 3$) y reales ($x/L = \pm 0.5$). Cabe señalar, que la combinación WAPOx Padé fue la que tuvo menor error en las fronteras. En las zonas alejadas de las fronteras (aproximadamente $x/L = \pm 1.75$) todas las simulaciones muestran buena aproximación con excepción del WAPOx minimax.

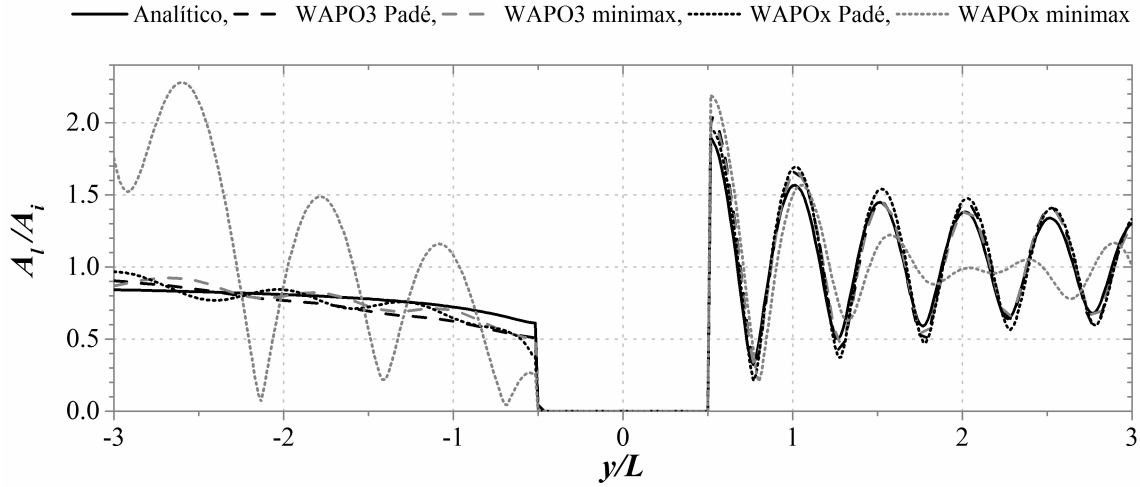


Figura V.4: Comparación de amplitudes en la sección $y/L = 0$. (Una pila)

La figura V.5 confirma lo apreciado en los patrones de amplitud (figura V.3), donde se observa una mayor precisión de los modelos en la simulación de la entrada del oleaje y dificultades en la salida de este. Sin embargo, la precisión de los modelos, sin considerar el WAPOx minimax, es muy buena en esta dirección (dirección del oleaje).

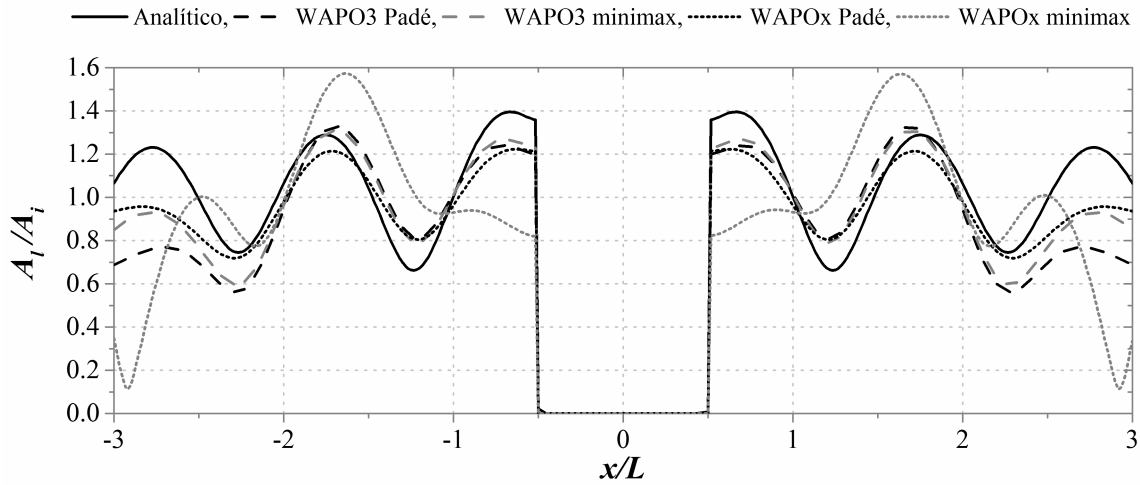


Figura V.5: Comparación de amplitudes en la sección $x/L = 0$. (Una pila)

En orden de cuantificar el error en todo el dominio, se calculó el error relativo (Relative Error, RE) para cada celda del dominio y se graficaron los mapas o patrones del mismo modo que se hizo para la amplitud, ver figura V.6.

La figura V.6 muestra claramente que los errores se ubicaron en las fronteras abiertas y que la combinación WAPOx Padé fue la que tuvo un menor RE máximo ($RE = 0.476$). Para concluir cual fue la simulación más precisa se obtuvo el promedio del RE ($\overline{RE}$) en porciento y se presenta en la tabla V.1. Los resultados concuerdan con lo hasta aquí discutido, señalando a la combinación WAPOx con el método Padé como la más precisa y la WAPOx minimax como la peor.

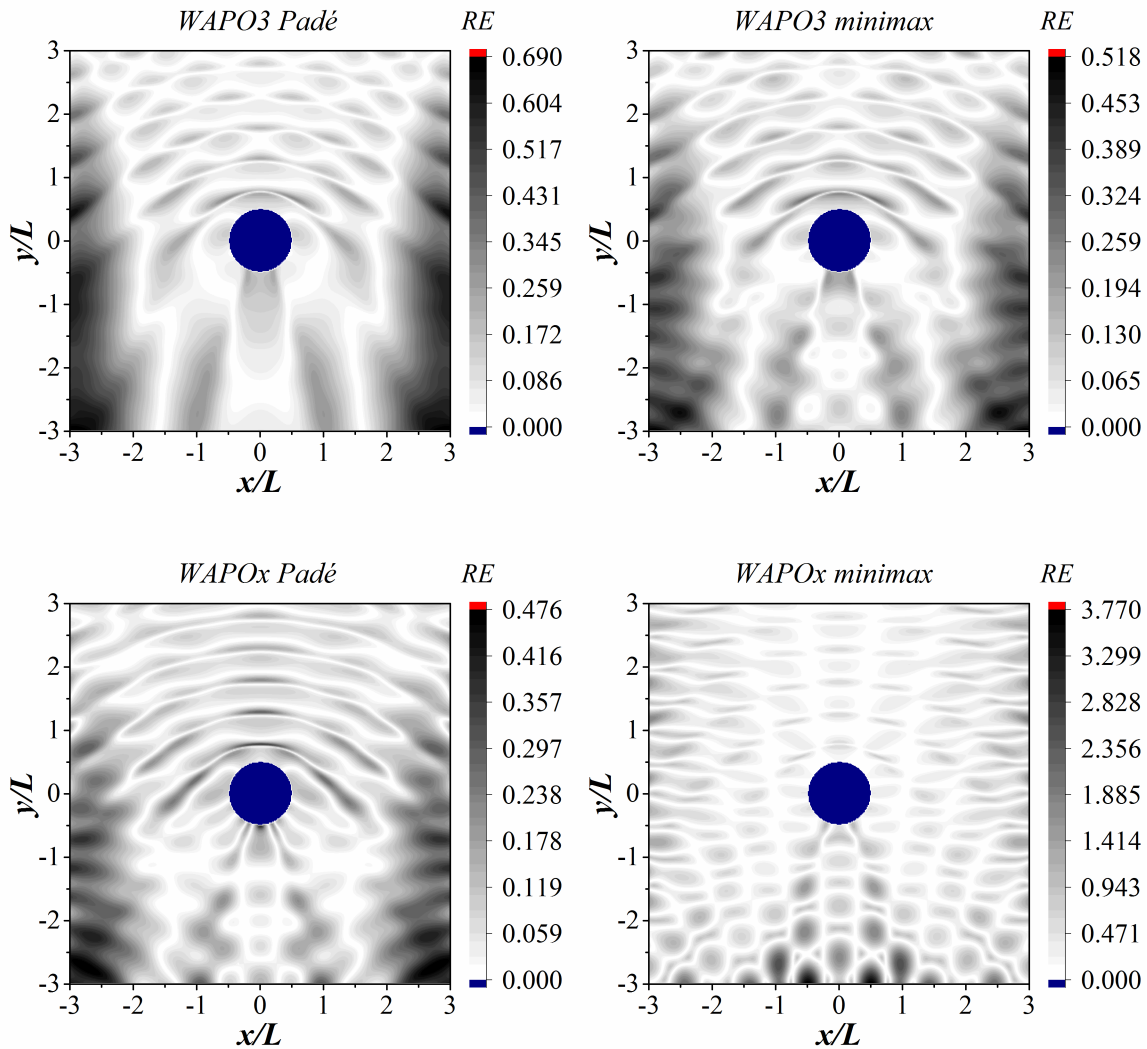


Figura V.6: Patrones de RE , escenario con una pila.

Tabla V.1: $\overline{RE}$ (%) para cada simulación (Una pila).

Simulacion	$\overline{RE}$ (%)
WAPO3 Padé	15.076
WAPO3 minimax	11.163
WAPOx Padé	9.985
WAPOx minimax	36.376

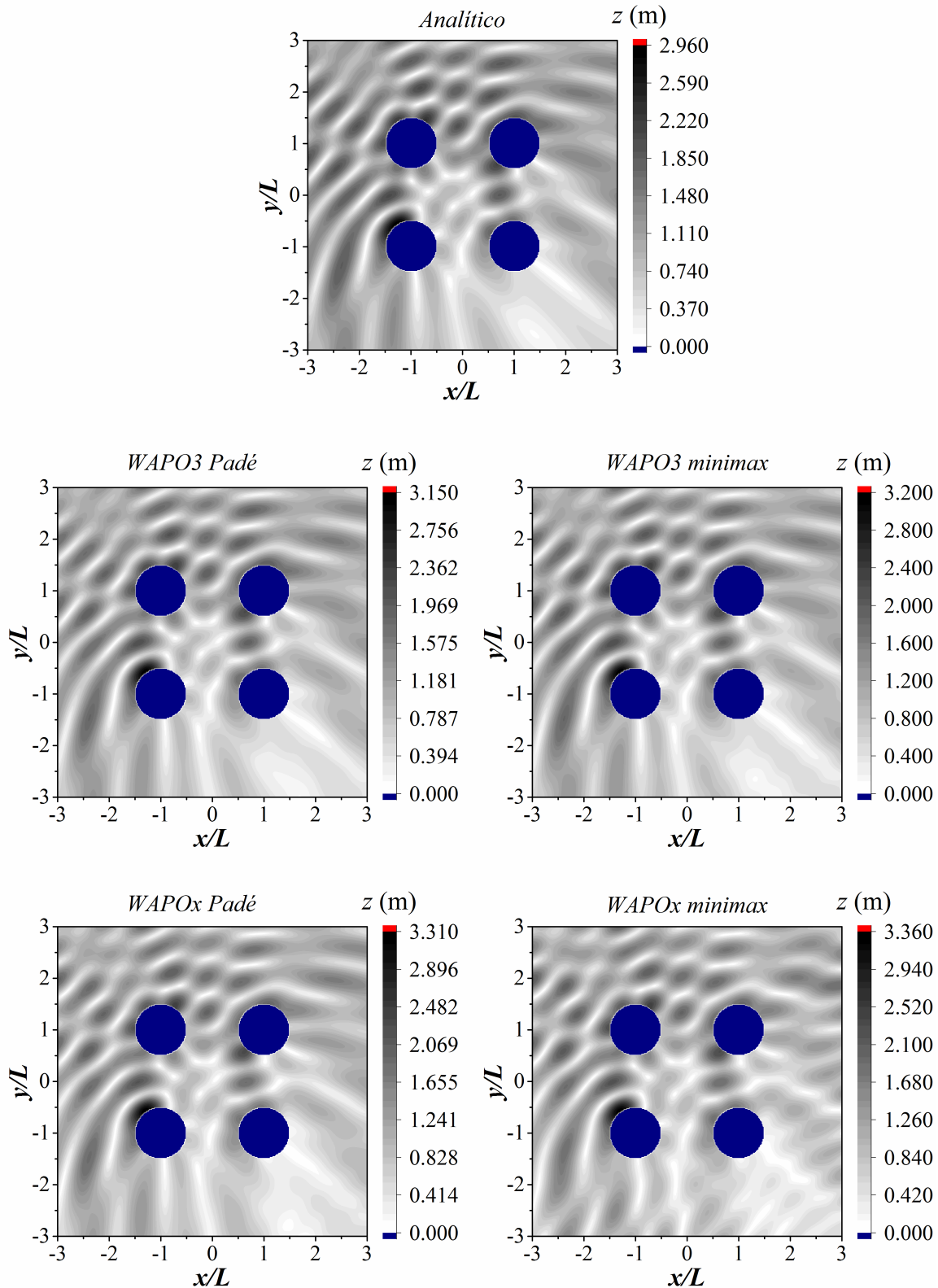
V.2.2. Cuatro pilas, oleaje incidiendo del Noroeste (30°)

Figura V.7: Patrón de amplitudes producto de un oleaje incidiendo por el Noroeste (30°).

El patrón de amplitudes de todas las simulaciones, mostrado en la figura V.7, es muy semejante al analítico, al igual que la amplitud máxima calculada. La comparación de estos parámetros resulta en una ligera desventaja del WAPOx frente al WAPO3 y del método minimax frente al Padé.

Importante destacar que para un ángulo de incidencia mayor a 0° , la compatibilidad WAPOx con minimax mejora sustancialmente.

La precisión mostrada en ambas secciones (figuras V.8 y V.9) indica que el modelo WAPO3 tiene una, aunque pequeña, mejor aproximación que el WAPOx. Para este último escenario, las simulaciones demuestran buena similitud al calcular la entrada y salida del oleaje, salvo para la combinación WAPOx minimax, la cual tuvo más error simulando la salida del oleaje.

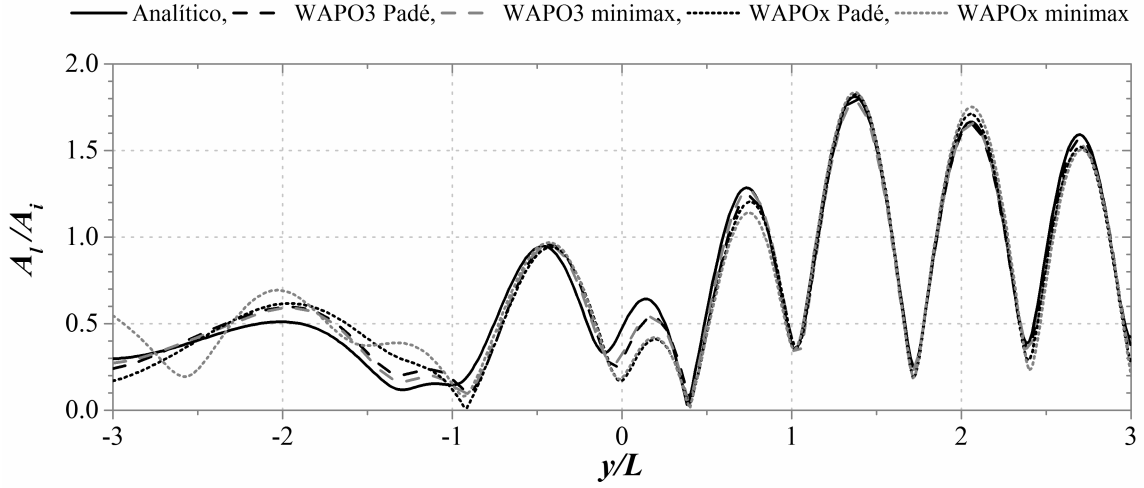


Figura V.8: Comparación de amplitudes en la sección $y/L = 0$. (Cuatro pilas)

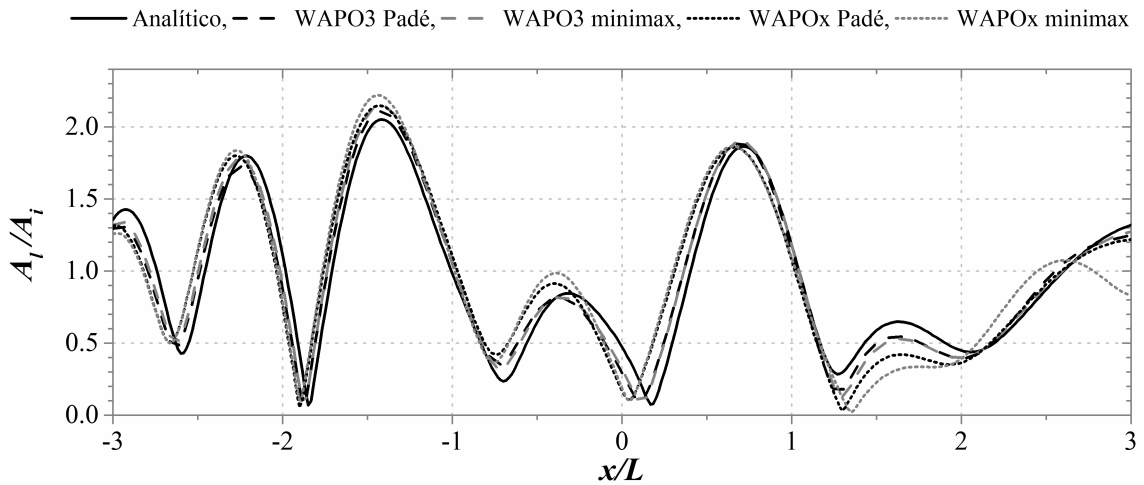


Figura V.9: Comparación de amplitudes en la sección $x/L = 0$. (Cuatro pilas)

La comparación cuantitativa por medio del RE y $\overline{RE}$ (figura V.10 y tabla V.2) resultó compleja debido a valores del RE elevados a causa de amplitudes cercanas a cero. A pesar

de esto, las zonas en rojo mostradas en los patrones de RE indican valores superiores a un $RE = 100\%$, de lo cual se deduce que las simulaciones con errores mayores pertenecen a las combinaciones WAPOx minimax y WAPOx Padé. Mientras que la simulación con menor error únicamente se puede definir al determinar el $\overline{RE}$, resultando el WAPO3 Padé como la mejor combinación (ver tabla V.2).

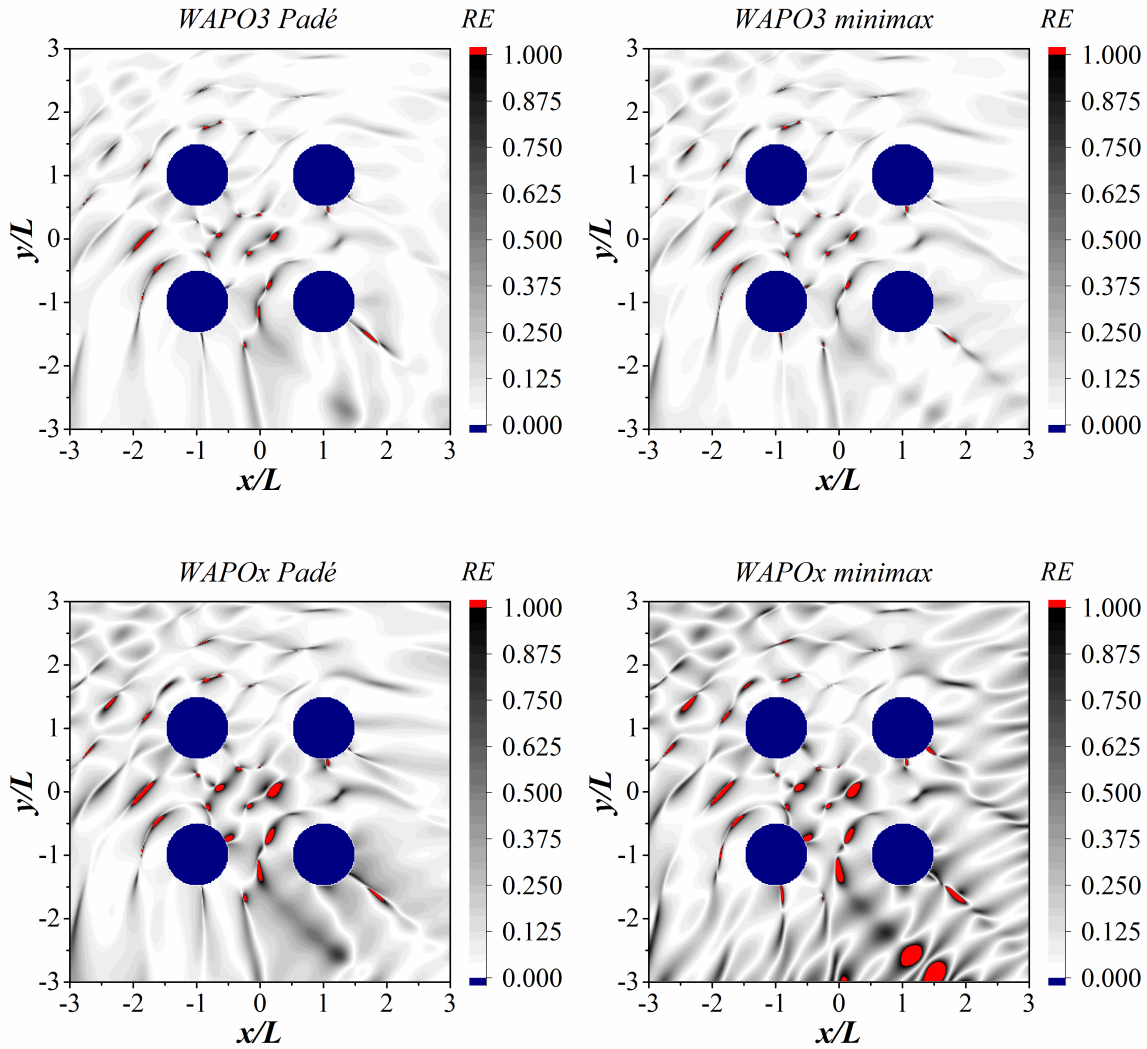


Figura V.10: Patrones de RE , escenario con cuatro pilas.

Tabla V.2: $\overline{RE}$ (%) para cada simulación (Cuatro pilas).

Simulacion	$\overline{RE}$ (%)
WAPO3 Padé	8.005
WAPO3 minimax	8.133
WAPOx Padé	14.397
WAPOx minimax	19.681

V.3. Comentarios y Conclusiones

Después del análisis de resultados es imposible determinar a una de las cuatro combinaciones claramente superior. Lo único claro es que la combinación WAPox minimax fue la peor.

Una probable causa del bajo desempeño del modelo WAPox es la “baja” resolución (60/L), por lo que se espera que una mayor resolución aumente la precisión del modelo WAPox y por consiguiente la combinación WAPox minimax también mejore.

Capítulo VI

CONCLUSIONES

Se cumplió con la implementación del 4.º orden de la PMSE como BC y lo que implicó desde su planteamiento.

Se codificó y acopló el método iterativo propuesto, más la complejidad exigió de un preconditionador, para disminuir las restricciones en cuanto a tamaño del sistema de ecuaciones.

Las ventajas esperadas con la PMSE de 4.º orden como BC no resultaron como las teóricas (solución exacta) como se aprecia después de implementarse en el modelo numérico (solución aproximada). Para aumentar la precisión en la parte numérica, se requiere una mayor resolución de malla, más sin embargo, el sistema de ecuaciones tendría un mayor número de incógnitas que lo haría marcadamente prohibitivo de resolver.

Por lo tanto, se concluye que el costo de implementación y demanda de recurso computacional debido a la BC de 4.º orden tiene un costo demasiado alto para la precisión ganada.

Como futura línea de investigación, es primordial culminar con la implementación del método iterativo en el WAPO3, desarrollando un preconditionador adecuado. Esto permitirá la simulación de la transformación del oleaje con fondo variable para dominios más grandes y

con mayor resolución espacial, sin la pérdida de la precisión numérica requerida.

Bibliografía

- Battjes, J. A.**, (1968). "Refraction on water waves," *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 94, WW4, 437-451.
- Beels, C., Troch, P., De Backer, G., Vantorre, M. & De Rouck, J.**, (2010a). "Numerical implementation and sensitivity analysis of a wave energy converter in time-dependent mild-slope equation model," *Coast. Eng.* **57**(5), 471-492.
- Beels, C., Troch, P., De Visch, K., Kofoed, J. P. & De Backer, G.**, (2010b). "Application of the time-dependent mild-slope equations for the simulation of wake effects in the lee of farm of Wave Dragon wave energy converters," *Renewable Energy* **35**(8), 1644-1661.
- Behrendt, L. & Johnson, I. G.**, (1984). "The Physical Basis for the Mild-Slope Equation and an Engineering Application," in *Proc. 19th Int. Conf. Coastal Engineering* (ASCE, Houston, Texas, United States), Chapter 15, 941-954.
- Berkhoff, J. C. W.**, (1972). "Computation of combined refraction?diffraction," in *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Engineering* (ASCE, Vancouver, Canada), Chapter 24, 471-490.
- Berkhoff, J. C. W.**, (1976). "Mathematical models for simple harmonic linear water waves, wave diffraction and refraction," *Report on Mathematical investigation*, Delft Hydraulics Laboratory, Rep. W 154-IV.
- Berkhoff, J. C. W., Booy, N. & Radder, A. C.**, (1982). "Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves," *Coast. Eng.* **6**(3), 255-279.
- Biesel, F.**, (1972). "Refraction de la houle avec diffraction modérée," in *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Engineering* (ASCE, Vancouver, Canada), Chapter 25, 491-501.
- Booij, N.**, (1981). "Gravity waves on water with non-uniform depth and current," *Ph. D. Thesis Techn. Univ. of Delft*, 130 pp.
- Booij, N.**, (1983). "A note on the accuracy of the mild-slope equation," *Coast. Eng.* **7**(3), 191-203.
- Boussinesq, M. J.**, (1871). "Theorie des Ondes et de Remais qui se Propagent le Long d'un Canal Rectangulaire Horizontal, en Communiquant au Liquide Contenu dans ce Canal des Vitesses Sensiblement Paralleles de la Surface au Fond," *J Math. Lionvilles*, 17:55.
- Chamberlain, P. G. & Porter, D.**, (1995). "The modified mild-slope equation." *J. Fluid Mech.* **291**, 393-407.
- Chen, H. S. & Mei, C. C.**, (1974). "Oscillations and wave forces in an offshore harbor," *Parsons Lab., Massachusetts Inst. of Techn.*, Rep. no. 190.
- Claerbout, J. F.**, (1985). "Imaging the Earth's Interior," Blackwell, London, 1985.

- Copeland, G. J. M., (1985). "A practical alternative to the mild-slope wave equation," *Coast. Eng.* **9**(2), 125-149.
- Dalrymple, R. A., Kirby, J. T. & Hwang, P. A.,** (1984). "Wave diffraction due to areas of high energy dissipation," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **110**(1), 67-79.
- Dean, R. G. & Dalrymple, R. A.,** (1991). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. World Scientific Publishing, Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 2. ISBN 9810204205.
- Dally, W. R., Dean, R. G. & Dalrymple, R. A.,** (1985). "Wave height variation across beaches of arbitrary profiles," *Journal of Geophysics Research* **90**(C6), 11917-11927.
- Dingemans, M. W.,** (1997). *Water Wave Propagation Over Uneven Bottom, Part1 - Linear Wave Propagation*, World Scientific Publishing, Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 13. ISBN 984-02-3993-9.
- Eckart, C.,** (1952). "The propagation of gravity waves from deep to shallow water," *National Bureau of Standards U.S., Circ.* **521**, Gravity waves.
- Engquist, B. & Majda, A.,** (1977) "Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves," *Mathematics of Computation* **31**(139), 629-651.
- Engquist, B. & Majda, A.,** (1979) "Radiation boundary conditions for acoustic and elastic calculations," *Comm. Pure Appl. Math.* **32**(3), 313-357.
- Givoli D.,** (1991). "Non-reflecting Boundary Conditions," *Journal of Computational Physics* **94**(1), 1-29.
- Greene, R.R.,** (1984). "The rational approximation to the acoustic wave equation with bottom interaction," *J. Acoust. Soc. Am.* **76**(6), 1764-1733.
- Greene, R.R.,** (1985). "A high-angle one-way wave equation for seismic wave propagation along rough and sloping interfaces," *J. Acoust. Soc. Am.* **77**(6), 1991-1998.
- Guazzelli, E., Rey, V. & Belzons, M.,** (1992). "Higher order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds," *J. Fluid Mech.* **245**, 301-317.
- Farlow, S. J.,** (1993). *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover Publications, Inc., New York, ISBN 978-0-486-67620-3.
- Hasselmann, S., Hasselmann, K., Bauer, E., Janssen, P. A. E. M. & Komen, G. J.,** (1988). "The WAM model-a third generation ocean wave prediction model," *J. Phys. Oceanogr.* **18**, 1775-810.
- Hedges, T.,** (1976). "An empirical modification to linear wave theory," *Proc. Institute of Civil Engineering, Part 2*, **61**, 575-579.
- Hestenes, M. R. & Stiefel, E.,** (1952). "Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems," *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **49**(6), 409-436.

- Horikawa, K. & Kuo, C.**, (1967). "A study of wave transformation inside surf zone," in *Proc. 10th Int. Conf. Coastal Engineering* (ASCE, Tokyo, Japan), Chapter 15, 217-233.
- Houston, J. R.**, (1981). "Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method," *Applied Ocean Research* **3**(4), 163-170.
- Hsu, T.-W., Lan, Y.-J., Tsay, T.-K. & Lin, K.-P.**, (2003) "Second-Order Boundary Condition for Water Waves Simulation with Large Angle Incidence," *Journal of Engineering Mechanics* **129**(12), 1429-1438.
- Ito, Y., Tanimoto, K. & Yamamoto, S.**, (1972). "Wave height distribution in the region of ray crossings, Application of the numerical analysis method of wave propagation," *Report of the Port and Harbour Research Institute*, **11**(3), 88-109. (English summary)
- Jonsson, I. G., Skovgaard, O. & Brink-Kjaer, O.** (1976). "Diffraction and refraction calculations for waves incident on an island," *J. Marine Research* **34**(3), 469-496.
- Kirby, J. T.**, (1986a). "A general wave equation for waves over rippled beds," *J. Fluid Mech.* **162**, 171-186.
- Kirby, J. T.**, (1986b). "Rational approximations in the parabolic equation method for water waves," *Coast. Eng.* **10**(4), 355-378.
- Kirby, J.T.**, (1989). "A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations," *Coast. Eng.* **13**(3), 211-218.
- Kirby, J. T. & Dalrymple, R. A.**, (1986a). "An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation models," *Coast. Eng.* **9**(6), 545-561.
- Kirby, J. T. & Dalrymple, R. A.**, (1986b). "Modeling waves in surfzones and around islands," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **112**(1), 78-93.
- Kirby, J. T. & Dalrymple, R. A.**, (1994). *Combined Refraction/Difraccion Model REF/DIF 1*, Version 2.5. Documentation and User's Manual. Research Report No. CACR-94-22, Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, Universidad de Delaware, Newark, USA.
- Kostense, J.K., Meijer, K.L., Dingemans, M.W., Mynett.A. E. & Van den Bosch, P.**, (1986) "Wave energy dissipation in arbitrarily shaped harbours of variable depth," in *Proc. 20th Int. Conf. Coastal Engineering* (ASCE, Taipei, Taiwan), Chapter 147, 2002-2016.
- Li, B.**, (1994). "A generalized conjugate gradient model for the mild slope equation," *Coast. Eng.* **23**(3-4), 215-225.
- Lin, P.**, (2008). *Numerical Modeling of Water Waves*, Taylor Francis Routledge, ISBN 9780415415781.
- Linton, C. M. & Evans, D. V.**, (1990). "The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders," *J. of Fluid Mechanics* **215**, 549-569.

- Losada, I. J., Silva, R. & Losada, M. A.,** (1996a). "3-D non-breaking regular wave interaction with submerged breakwaters," *Coast. Eng.* **28**(1-4),229-248.
- Losada, I. J., Silva, R. & Losada, M. A.,** (1996b). "Interaction of non-breaking directional random waves with submerged breakwaters," *Coast. Eng.* **28**(1-4),249-268.
- Maa, J. P.-Y., Maa, M.-H., Li, C. & He, Q.,** (1997) "Using the Gaussian Elimination Method for Large Banded Matrix Equations," Special Scientific Report No. 135
- Mader, C. L.,** (1988). *Numerical Modeling of Water Wave*. University of California Press, United States of America.
- Massel, S. R.,** (1993). "Extended refraction-diffraction equation for surface waves," *Coast. Eng.* **19**(1-2), 97-126.
- Miles, J.,** (1991). "Variational approximations for gravity waves in water of variable depth," *J. Fluid Mech.* **232**, 681-688.
- O'Hare, T. J. & Davies, A. G.,** (1992). "A new model for surface wave propagation over undulating topography," *Coast. Eng.* **18**(3-4), 251-266
- Ohyama, T. & Tsuchida, M.,** (1997). "Expanded mild-slope equations for the analysis of wave-induced ship motion in a harbour," *Coast. Eng.* **30**(1-2), 77-103.
- Oliveira F. S. B. F. & Anastasiou, K.,** (1998). "An efficient computational model for water wave propagation in coastal regions," *Applied Ocean Research*, **20**(5), 263-271.
- Osei-Kuffuor, D. & Saad, Y.,** (2010). "Preconditioning Helmholtz linear systems," *Applied Numerical Mathematics*, **60**(4), 420-431.
- Panchang, V. G. A., Cushman-Roisin. & Pearce, B. R.,** (1988). "Combined refraction-diffraction of short-waves in large coastal regions," *Coast. Eng.* **12**(2), 133-156.
- Panchang, V. G. A., Pearce, B. R., Wei, G. & Cushman-Roisin, B.,** (1991). "Solution of the Mild-Slope wave problem by iteration," *Applied Ocean Research* **13**(4), 187-199.
- Peregrine, D. H.,** (1967). "Long waves on a beach," *J. Fluid Mech.* **27**, 815-827.
- Pearce, B. R. & Panchang, V. G. A.,** (1985). "A method for the investigation of steady state wave spectra in bays," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **111**(4), 629-644.
- Pierson, W. J. jr.,** (1951). "The interpretation of crossed orthogonals in wave refraction phenomena," U.S. Army, B. E.B., Techn. Memorandum, 21.
- Pos, J. D. & Kilner, F. A.,** (1987). "Breakwater gap wave diffraction: An experimental and numerical study," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **113**(1), 1-21.
- Radder, A. C.,** (1979). "On the parabolic equation method for water wave propagation," *J. Fluid Mech.* **95**(1), 159-176.

- Ris, R. C., Booij, N. & Holthuijsen, L. H.**, (1999). "A third-generation wave model for coastal regions, Part II, Verification," *J. Geophys. Res.* **104**(C4), 7667-7681.
- Rojanakamthorn, S., Isobe, M. & Watanabe, A.**, (1989). "A mathematical model of wave transformation over a submerged breakwater," *Coastal Engineering in Japan, JSCE.* **32**(), 209-234.
- Schönfel, J. Ch.**, (1972). "Propagation of two-dimensional short waves," Manuscript (in Dutch), Delft University of Technology.
- Silva, R.**, (2003). Manual del WAPO3.
- Silva, R., Borthwick, A. G. L. & Taylor, R. E.**, (2005). "Numerical implementation of the harmonic modified mild-slope equation," *Coast. Eng.* **52**(5), 391-407.
- Silva, R., Salles, P. & Govaere, G.**, (2003). "Extended solution for waves travelling over a rapidly changing porous bottom," *Ocean Engineering* **30**(4), 437-452.
- Silva, R., Mendoza, E. & Losada, M. A.**, (2006a). "Modelling linear wave transformation induced by dissipative structures - Regular waves," *Ocean Engineering* **33**(16), 2150-2173.
- Silva, R., Losada, M. A. & Salles, P.**, (2006b). "Modelling linear wave transformation induced by dissipative structures - Random waves," *Ocean Engineering* **33**(16), 2174-2194.
- Smith, R. & Sprinks, T.**, (1975). "Scattering of surface waves by a conical island," *J. Fluid Mech.* **72**(02), 373-384.
- Steward, D. R. & Panchang, V. G. A.**, (2001). "Improved coastal boundary condition for surface water waves," *Ocean Engineering* **28**(1), 139-157.
- Tang, J., Shen, Y., Zheng, Y. & Qiu, D.**, (2004). "An efficient and flexible computational model for solving the mild slope equation," *Coast. Eng.* **51**(2), 143-154.
- Tanio, M. & Sugihara, M.**, (2010). "GBi-CGSTAB(s, L): IDR(s) with higher-order stabilization polynomials," *Journal of Computational and Applied Mathematics* **235**(3), 765-784.
- Tsay, T.-K. & Liu, P. L.-F.**, (1983). "A finite element model for wave refraction and diffraction," *Applied Ocean Research* **5**(1), 30-37.
- Ursell, F.**, (1953). "The long-wave paradox in the theory of gravity waves," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **49**(4), 685-694.
- Xu, B. & Panchang, V. G. A.**, (1993). "Outgoing boundary conditions for finite-difference elliptic water-wave models," *Proc. R. Soc. Lond.* **441**, 575-588.
- Xu, B., Panchang, V. G. A. & Demirebilek, Z.**, (1996) "Exterior Reflections in Elliptic Harbor Wave Models," *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* **122**(3), 118-126.

- Zhao, L., Panchang, V. G. A., Chen, W., Demirbilek, Z. & Chhabbra, N.,** (2001). "Simulation of wave breaking effects in two-dimensional elliptic harbor wave models," *Coast. Eng.* **42**(4), 359-373.
- Zhao, Y. & Anastasiou, K.,** (1996). "Modeling of wave propagation in the nearshore region using the mild slope equation with GMRES-based iterative solvers," *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **23**(4), 397-411.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO