



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE
ESFUERZOS MEDIANTE EXTENSOMETRÍA ELÉCTRICA.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE LA PAZ

1992

Rafael Camacho Morales

INTRODUCCION
AL
ANALISIS EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS
MEDIANTE
EXTENSOMETRIA ELECTRICA

22841 AF18867

INSTITUTO TECNOLOGICO DE LA PAZ

1992

Albert Einstein

"La genialidad aparece siempre que alguien cae en la cuenta por primera vez, de algo evidente"

Kermann Bahr
(1863-1934)



FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTE
72

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



611364

611364

"Investigar es ver lo que todos han visto, y pensar lo que nadie ha pensado"

Albert Szente-Györgi
(1937)

JUSTIFICACION

Cuando en 1974 llegué al Tecnológico de Puebla, me encontré con un laboratorio de Ingeniería Mecánica excelentemente equipado; por desgracia, y como ocurre frecuentemente, subutilizado. En ese entonces el instituto estaba casi recién fundado y coincidimos en él un pequeño grupo de profesores que nos propusimos impartir nuestras clases con el mejor nivel, y con tantas prácticas de laboratorio como fuera posible; desde luego que la tarea fue ardua, pues el estudiantado, como hoy, ingresaba al sistema no tanto por su calificación aprobatoria del examen de admisión, como por el número de plazas vacantes, ó lo que es lo mismo, se elegía a los "n" menos malos...pero aún así, logramos en buena medida el propósito buscado, aunque desde luego hubo que sacrificar en el camino a aquellos que, ó no tenían bien definida su vocación, ó su dedicación al estudio no fue suficiente.

Fue necesario hechar a volar la imaginación para que el laboratorio trabajara eficientemente con pocos recursos, y en lo que respecta al laboratorio de Resistencia de Materiales, los resultados fueron sorprendentes debido sobre todo al entusiasmo y dedicación de los alumnos y a que contabamos con un equipo de extensometría eléctrica que nos ayudó muchísimo.

El equipo estaba nuevecito y en ese entonces nadie sabía con certeza como operaba; ni siquiera para que servía, afortunadamente hubo en el Tecnológico de Tijuana en 1975 un curso de Análisis Experimental de Esfuerzos que impartió entre otros el Ing. Alfredo Olivares Ponce, y al que asistí junto con Ramon Zeleny V., en aquellos años alumno que colaboraba como mi adjunto de laboratorio (actualmente Maestro en Ingeniería), siendo ese nuestro primer contacto formal con estas útiles y prácticas tecnologías.

A nuestro regreso aplicamos inmediatamente lo aprendido en las prácticas de Resistencia de Materiales I y II y los resultados fueron excelentes, pues fue posible medir con una muy adecuada precisión el módulo de elasticidad, el coeficiente de Poisson, la variación del esfuerzo por temperatura, esfuerzos en piezas curvas y esfuerzos combinados entre otros muchos ensayos mas; cabe reconocer que el éxito de tal trabajo correspondió casi totalmente a Ramón, dadas sus múltiples habilidades, tanto en trabajo de máquinas herramientas, soldadura, instalaciones eléctricas, diseño y sobre todo su gran paciencia y dedicación; que hicieron posible contar con las probetas y modelos.

Sin embargo, por alguna inexplicable razón el interés, y por ende el trabajo con estas técnicas, se perdió casi completamente

desde principios de los 80's, pues hasta donde sé, a excepción del Tecnológico de Queretaro que en 1984 organizó las Reuniones Nacionales de Análisis de Esfuerzos (que se han venido repitiendo) y que además incursionó en el medio industrial local; sólo algunas instituciones más, si acaso trabajamos con estas técnicas, lo hicimos a nivel laboratorio principalmente. Para entonces y hasta la fecha, trabajo para el tecnológico de La Paz, en el cual solo hasta 88 ú 89 realizamos algunos trabajos experimentales con extensometría eléctrica en edificios públicos y hasta 90 realizamos prácticas de instrumentación en una mina de roca fosfórica de la localidad, en la que instalamos extensómetros en los marcos de refuerzo del techo; los resultados fueron lo suficientemente buenos como para que la compañía adoptara esta técnica como sistemática debido a sus bondades para mejorar la seguridad de la planta.

Pero en general sólo han sido chispazos incapaces de propiciar su uso consuetudinario; ni siquiera de la extensometría eléctrica, que como se muestra aquí, es una técnica sencilla, accesible y económica, que ha demostrado, con su uso extensivo por más de tres décadas en un gran número de países y en casi todos los campos de la ingeniería, que es una herramienta excelente para lograr la optimación de los diseños ingenieriles.

Es preocupante que nuestro país se encuentre tan atrasado en estas tecnologías; más aún cuando disponemos de equipos y entrenamiento desde hace casi 20 años...desde luego que yo también soy parte de esa; llamemosla así, "apatía tecnológica" y es por ello que, ante los retos técnicos que habremos de afrontar en los años que vienen, resulta evidente que no podemos seguir inmersos en ese conformismo y apatía que tanto atraso técnico, científico y cultural, nos ha ocasionado.

Estas son algunas de las razones que justifican este trabajo; espero sinceramente que de alguna forma se cumpla su cometido.

Rafael Camacho Morales.

La Paz, B.C.S. 1992.

Agradecimientos:

Agradezco sinceramente al Ing Alfredo Olivares Ponce sus múltiples atenciones, sus valiosas sugerencias y el compartir desinteresadamente su experiencia de cuatro décadas. A mi esposa Rosa Elba Rodríguez Tomp y al Ing Guillermo Andrade López por su minuciosa revisión del original; a Ramón Zeleny Vázquez con quien en 1975 iniciamos nuestra incursión en este campo, al alumno Cesar Omar Coa Chávez el mejoramiento de la hoja de título para el círculo de Mohr, y a todos mis alumnos quienes con su entusiasmo me motivaron para a escribir este texto.

Igualmente manifiesto mi agradecimiento a las autoridades del Instituto Tecnológico de La Paz y de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México, por las facilidades que me otorgaron para la realización de este trabajo.

el quienes amo:
porque su amor
me impulsa a superarme.

INDICE

	Pagina
CAPITULO 1	
INTRODUCCION	
1.-Antecedentes Históricos.....	1
1.1 La Epoca Empírica.....	1
1.2 La Epoca Formal.....	2
1.3 El Análisis Experimental.....	4
CAPITULO 2	
CONCEPTOS TEORICOS FUNDAMENTALES	
2.1 Deformación de un elemento solicitado biaxialmente a esfuerzo.....	7
2.2 Relación entre el módulo de elasticidad y el de cortante.....	9
2.3 Estado Biaxial de Esfuerzo.....	11
2.4 Círculo de Mohr.....	16
2.5 Ley de Hooke para Esfuerzos en el plano.....	19
2.6 Estado Biaxial de Deformación.....	20
2.7 Transformación de Lecturas de Deformación en Rosetas a Deformaciones Normales.....	24
Problemas Propuestos.....	41
CAPITULO 3	
EXTENSOMETRIA ELECTRICA	
PRINCIPIOS DE OPERACION, MEDICION E INSTALACION	
3.1 Introducción.....	45
3.2 Qué es y cómo Opera un Extensómetro Eléctrico.....	46
3.3 Como se Mide la ΔR ó la ϵ Equivalente.....	48
3.4 Preparación de Superficies para el Pegado de Extensómetros.....	52
3.4.1 Preparación de Superficies.....	53
3.4.2 Pegado de Extensómetros.....	57

CAPITULO 4

SELECCION DE MATERIALES Y EQUIPO

4.1	Introducción.....	71
4.2	Selección de Extensómetros.....	73
4.2.1	Aleación de Constantán.....	74
4.2.2	Aleación Isoelástica.....	75
4.2.3	Aleación de Níquel-Cromo.....	76
4.3	Material de Respaldo.....	76
4.4	Clasificación de las Series de Extensómetros.....	80
4.5	Longitud del Extensómetro.....	80
4.6	Configuración de los Extensómetros.....	83
4.7	Características de las Opciones Disponibles.....	85
4.8	Sistema de Identificación de Extensómetros.....	87
4.9	Procedimiento para la Selección de Extensómetros.....	87
4.10	Equipos.....	89

	CONCLUSIONES.....	93
--	-------------------	----

	ANEXO 1.....	97
	ANEXO 2.....	109
	ANEXO 3.....	119

	REFERENCIAS.....	129
--	------------------	-----

	SOLUCIONES A PROBLEMAS.....	131
--	-----------------------------	-----

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.- ANTECEDENTES HISTORICOS:

1.1 LA ÉPOCA EMPÍRICA: Pácticamente desde que el *Homo Sapiens* apareció en la tierra, ha requerido de los materiales que utiliza cumplan con determinadas características de resistencia mecánica; para ello, recurre al método de ensayo y error que se ha dado como un proceso intuitivo en todas las generaciones y que aún hoy sigue siendo válido; este conocimiento de las propiedades mecánicas de los materiales le permitió ya al *Australopithecus* construir sus armas y herramientas, las herramientas de cultivo le permiten pasar de errante a sedentario, lo que propicia la necesidad de construcción de casas, fortalezas, graneros, canales de irrigación y protección; para pasar luego a obras más sofisticadas como las construcciones de Teotihuacan, Uxmal, Chichen Itza, Sakara, Gizeh, Karnak, Mesopotamia, India, etc; obras en las que ya muestra un conocimiento más amplio de los materiales, algunas de ellas fueron inclusive labradas en la propia roca como en el caso de Malinalco en México, Petra en Jordania. Ellora en la India ó Abu-Simbel en Egipto; obras que si bien han soportado el paso de los milenios no reflejan una tendencia a lo que hoy en día se considera como diseño ingenieril; esto es, no se contempló la optimación de los elementos estructurales, ó lo que es lo mismo, la obtención de la máxima resistencia con el mínimo de material.

La construcción de esas obras va acompañada por un profundo interés por todo lo que le rodea, y es así como se inicia en la Astronomía y la Matemática y construye observatorios astronómicos como los de la India, Inglaterra, México, Guatemala, Egipto y otros mas. En los albores de la era cristiana, los romanos realizan obras grandiosas de ingeniería: sus acueductos, caminos, cisternas y edificios, reflejan ya un gran conocimiento de la resistencia mecánica de los materiales; no obstante, este conocimiento continúa siendo empírico aun en las grandes catedrales góticas de la edad media, que como otras construcciones monumentales, han demostrado con el paso de los siglos su resistencia estructural.

Es hasta el siglo XV, que con el renacimiento se inicia el verdadero cultivo de las ciencias, estableciéndose entonces los conocimientos que habrían de facilitar el estudio formal del comportamiento mecánico de los materiales.

No existen evidencias de estudios formales y sistemáticos del comportamiento mecánico de los materiales, anteriores al siglo XVI; esto significa que el sentido común y el conocimiento empírico de los materiales; que como resultado de la experiencia al través del ensayo y error, fueron las bases sobre las que se sustentaron los diseños y construcciones del pasado.

1.2 LA ÉPOCA FORMAL: A continuación transcribo algunos párrafos del primer capítulo del libro "Análisis de Estructuras Indeterminadas" de J. Sterling Kinney; titulado Breve Historia de la Teoría Estructural, publicado en 1982 por la editorial CECSA; así como de la sección Referencias y Notas Históricas del libro Mechanics of Materials, de Gere y Timoshenko publicado por la editorial Brooks/Cole Engineering en 1984; ya que considero contiene información interesante para el estudiante de ingeniería.

Sir Issac Newton, autor del libro científico más grande de todos los tiempos; su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, decía que: **Si he podido ver un poco más lejos que algunos otros, ha sido porque estuve parado sobre los hombros de gigantes...y lo mismo podemos decir de aquellos que iniciaron lo que hoy conocemos como Resistencia de Materiales, Mecánica de Materiales, Teoría de la Elasticidad, Mecánica de Construcción, etc.**

Puede decirse que el astrónomo italiano Galileo Galilei (1564-1642), inició lo que suele llamarse la edad de la razón en el análisis estructural. Aparentemente fue el primero en estudiar la resistencia de los sólidos a la ruptura y puede decirse que originó la mecánica de los materiales. En su última publicación...*Dos Nuevas Ciencias* (1638), discutía el problema de la viga en voladizo cargada con su peso propio y con peso adicional (*aunque su tratamiento resultó incorrecto y no fue correctamente resuelto sino hasta 1855*); a este problema se le conoce como El Problema de Galileo.

Uno de los hombres de ciencia más notables de Oxford, cuya asociación con otros resultó en la formación de la Royal Society en 1660, fue Robert Hooke (1635-1703). Estudió la elasticidad de los materiales y llegó en 1660 a la ley que hoy lleva su nombre (*aunque ésta fue publicada hasta 1676*). Como resultado de sus estudios, inventó el resorte espiral que sustituyera al péndulo de los mecanismos de relojería; no obstante, Hooke no aplicó su ley a problemas de ingeniería. En 1680, Edme Mariotte (1654-1684) desarrolló independientemente esa misma ley, y la aplicó a las fibras de una viga; observando que unas fibras se alargan y otras se acortan y que lo hacen respecto a un eje a la mitad de la altura de la sección...el eje neutro.

El problema de Galileo vuelve a ser estudiado por el suizo James Bernoulli (1654-1705), quien supone que una sección plana de una viga, permanece plana durante la flexión..., aunque no llegó a una solución satisfactoria debido a que no dio importancia a lo que hoy conocemos como eje neutro. En 1717 Johann Bernoulli (1667-1748), hermano de James, enunció el principio de los desplazamientos virtuales, que es el método que aun hoy empleamos en la determinación de las deflexiones elásticas en las estructuras; posteriormente, su hijo Daniel Bernoulli (1700-1782), estudia el problema de la determinación de la curva elástica de barras flexionadas, é interesa a su amigo Leonhard Euler (1707-1783), en la determinación de las elásticas en vigas y columnas, y hace aportaciones valiosísimas sobre el pandeo de columnas y que aún hoy también seguimos utilizando.

En 1784 el francés Charles Coulomb (1736-1806), hace interesantes contribuciones al estudio de la flexión en vigas y determina la relación entre el par torsional y el ángulo de torcimiento para el caso de barras de sección circular. En 1826 otro francés, Louis Marie Henri Navier (1785-1836), publicó el primer gran texto de mecánica de ingeniería y es considerado como el fundador de la teoría matemática de la elasticidad, al presentar su teoría sobre *Resistencia y Deformación en Vigas de Cualquiera Sección Transversal*; contribuye además a la teoría de placas, arcos, columnas, puentes, cascarones y otros problemas; desarrolla así mismo el primer tratamiento sistemático de la teoría de las estructuras.

En la teoría de la elasticidad también lograron adelantos sobresalientes... Lamé (1795-1870) y B.P.E. Clapeyron (1799-1864), quienes publicaron en 1833 un artículo notable sobre elasticidad, que presentaba importantes avances sobre los esfuerzos en cilindros y esferas huecas y que introducía la idea del elipsoide de esfuerzos, así como el principio de la igualdad de trabajo interno y externo en una estructura solicitada a esfuerzo. En 1852 Lamé publicó el primer libro sobre elasticidad y en 1857 Clapeyron presenta su *Teorema de los Tres Momentos*, para el análisis de vigas continuas.

El ingeniero Barré de Saint-Venant (1797-1886) fue probablemente el más grande ingeniero de elasticidad; eran de admirarse su alto grado de habilidad matemática y su visión esencialmente práctica que imprimía una dirección precisa a su trabajo. En 1855 presentó sus famosas memorias que trataban el problema de la torsión y en 1856 las relativas a la flexión; en las que por primera vez se consideran correctamente los esfuerzos de corte en las secciones transversales de vigas. allí también se discutían problemas de impacto y vibración.

El concepto de esfuerzo que hoy conocemos, así como el desarrollo de las ecuaciones de la teoría de la elasticidad y las nociones de esfuerzos y deformaciones principales, fueron introducidas por Augustin Louis Cauchy (1789-1857); posteriormente William John

Macquorn Rankine (1820-1872) obtuvo las ecuaciones para la transformación de esfuerzos, é hizo muchas otras contribuciones a la teoría de la elasticidad y mecánica aplicada. El círculo de Mohr para esfuerzos, es desarrollado en 1882 por Otto Christian Mohr (1835-1918), quien hace además numerosas aportaciones a la teoría de las estructuras.

Así pues, fueron necesarios cinco mil años; casi todos ellos de ensayo y error, para descubrir y organizar ordenadamente los principios conceptuales de la mecánica estructural, conceptos que en poco menos de 400 años han sido desarrollados matemáticamente con un alto grado de confiabilidad y que son los que un estudiante de las escuelas superiores de nuestro tiempo aprende en unas cuantas semanas. Pero los tiempos en los que el ensayo y error eran el método para comprender el comportamiento mecánico de los materiales, han quedado solo en los anales de la historia; porque el esfuerzo y dedicación que los grandes cerebros han venido dedicando en estos casi cuatrocientos años, aunados a las modernas técnicas del análisis experimental de esfuerzos y a los métodos matemáticos modernos como el del elemento finito, nos permiten contar con una mecánica de materiales y una teoría estructural capaz de los prodigios ingenieriles de nuestro tiempo.

1.3 EL ANALISIS EXPERIMENTAL: Hemos dicho varias veces que el hombre utilizó el método de ensayo y error para descubrir las propiedades mecánicas de los materiales, y que este procedimiento lo utilizó inalterable hasta el siglo XVII en el que, seguramente, los estudios de Hooke despertaron el interés por el análisis experimental.

Se inicia así un período de ensayos en los que se pretende determinar con precisión las propiedades mecánicas de los materiales; esos ensayos son efectuados generalmente con probetas que, pretenden ser un modelo ó muestra del material con el que habrá de contruirse un elemento estructural, lo cual aunque es aproximadamente cierto, no siempre responde adecuadamente a la realidad pero nos permiten obtener datos representativos útiles. Esta información es la que encontramos en los manuales y tablas de las propiedades mecánicas de los materiales, incluidas las diferentes secciones estructurales.

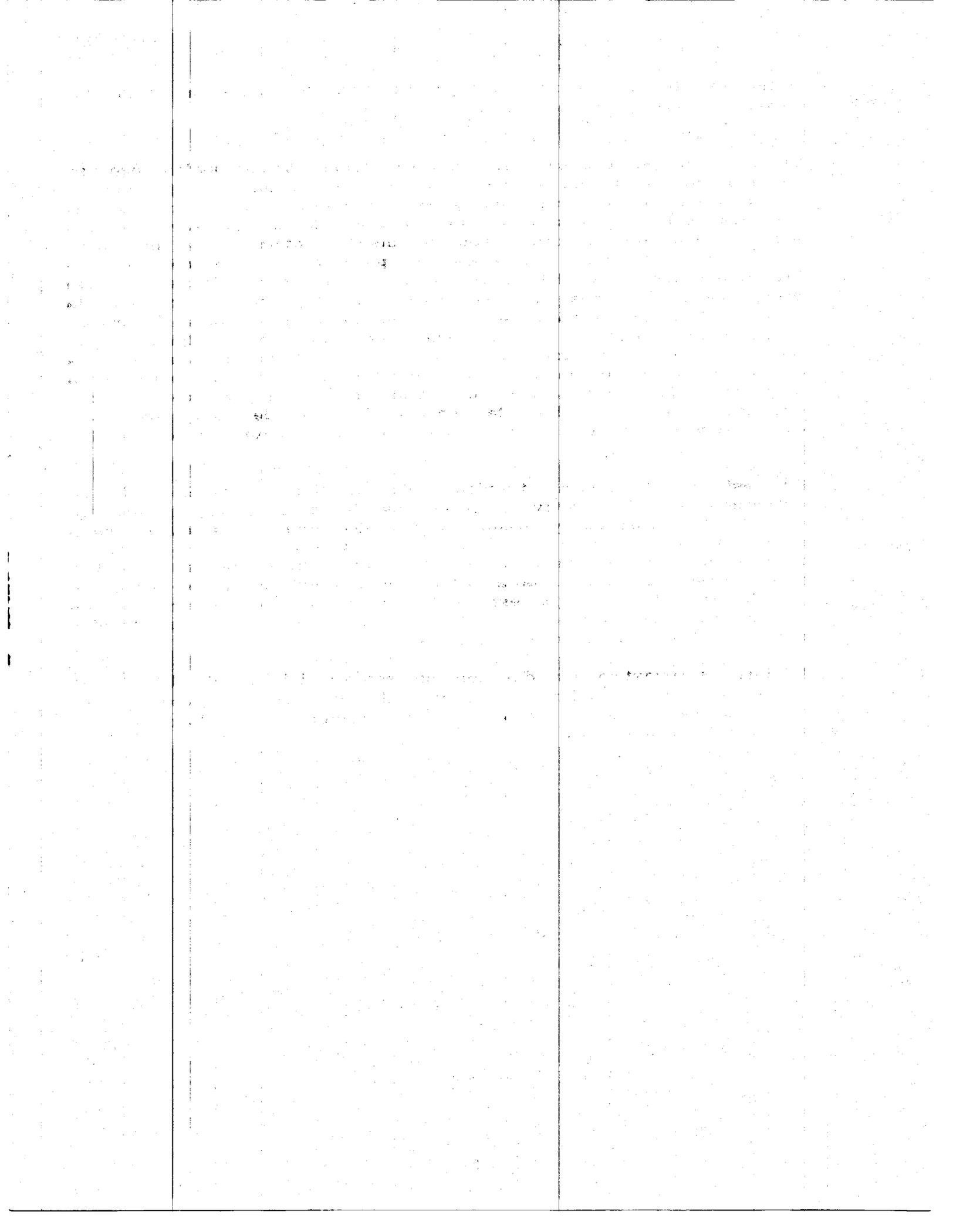
Pero hasta hace poco, casi todos estos ensayos han sido destructivos y, insisto, han servido de base para nuestros cálculos estructurales efectuados hasta la fecha; sin embargo, las cada vez más complejas exigencias del diseño estructural moderno hacen que esta información resulte insuficiente para su optimización, ya que han quedado lejos los días en los que el desperdicio de materiales ó el peso excesivo de los elementos estructurales por efecto del sobredimensionamiento, no representaban problemas, pues al contrario, se llegó a considerar que un elemento muy robusto resultaba necesariamente mas

resistente...basta recordar los automoviles de hace tan solo una década.

Si tomamos en cuenta que las ecuaciones tradicionales que se emplean en el diseño estructural se han obtenido bajo ciertas suposiciones de aproximación, y le agregamos las características con las que se ensayaron los materiales a utilizar, resulta evidente que en ciertos casos de diseño óptimo será necesario contar con técnicas más modernas para el ensayo no sólo de los materiales, sino del prototipo mismo. De esta forma, se han desarrollado técnicas no destructivas, que nos permiten la determinación del estado de esfuerzos de casi cualquier elemento estructural; sometido a las condiciones reales de trabajo y por periodos tan prolongados como sea necesario, todo ello aunado a la enorme ventaja de un monitoreo electrónico que nos permite la obtención de información de una precisión y confiabilidad excelentes y con ello, la caracterización de los elementos estructurales se puede dar con absoluta seguridad desde las pruebas en prototipo.

Es así como nacen técnicas de análisis experimental de esfuerzos no destructivas, como las láminas frágiles, líneas de Moire, fotoelasticidad y extensometría eléctrica entre otras; ésta última de una aplicación extensiva en todos los campos de la ingeniería, aunque inexplicablemente poco difundida en nuestro país, razón por la cual la abordaremos tan extensamente como sea posible en este trabajo, esperando que pueda convertirse en una herramienta importante para la optimación de nuestros diseños estructurales y el monitoreo de obras.

Iniciaremos nuestro estudio con un repaso del estado biaxial de esfuerzo por considerar fundamental su absoluta comprensión debido a que en él se basa la interpretación de resultados de la extensometría eléctrica.



CAPITULO 2

CONCEPTOS TEORICOS FUNDAMENTALES

(REPASO)

Veremos a continuación algunos temas relacionados con el estado biaxial de esfuerzos que, aunque son estudiados en un curso normal de resistencia ó mecánica de materiales, dada su importancia en el análisis experimental de esfuerzos, es conveniente repasarlos a fin de garantizar su completa comprensión en la aplicación de estos a los problemas que habremos de resolver; por otro lado, nos servira para definir las literales empleadas en el texto.

Aquellos estudiantes que consideren que ya dominan el tema, podrán omitir el presente capítulo, no obstante, cabe aclarar que se ha pretendido incluir el procedimiento completo para la reducción de fórmulas, ya que en la mayor parte de los textos consultados solo se indica que " simplificando " se llega a tal ó cual ecuación; procedimiento que, aunque válido, puede dejar dudas en el estudiante. También aquí dejamos algunos puntos en los que indicamos que si se sigue el procedimiento anterior, se llega a las ecuaciones que se indican, pero hemos intentado que dicho procedimiento cubra todas las simplificaciones.

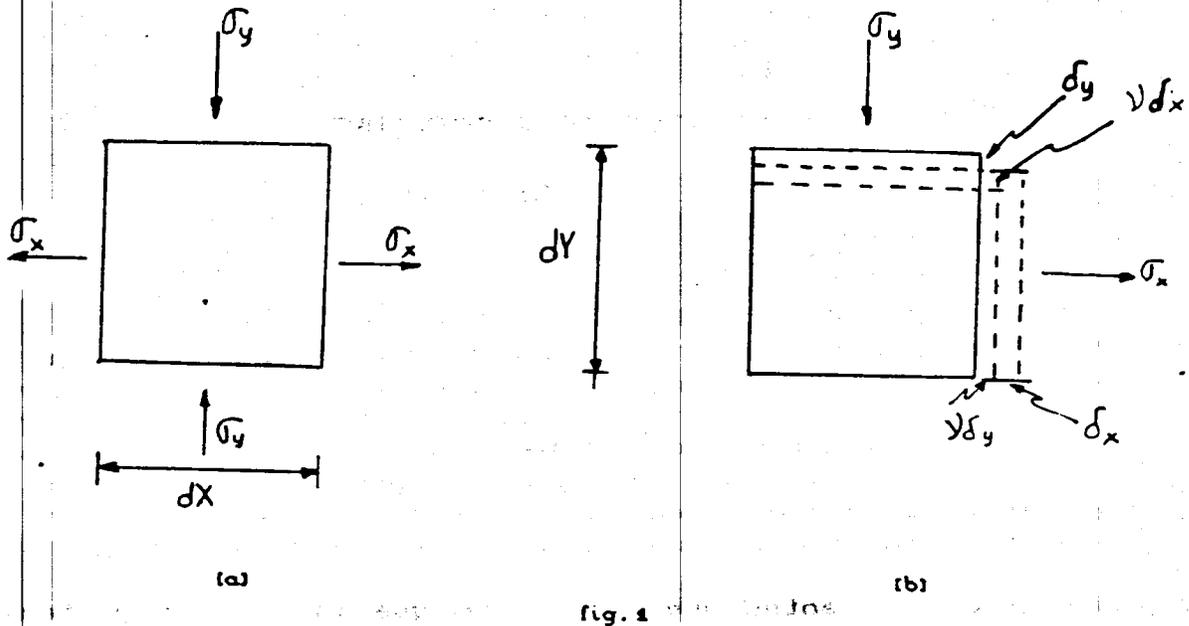
2.1.- Deformación de un elemento solicitado biaxialmente a esfuerzo.

Sabemos que todo elemento solicitado a carga axial experimenta una deformación no solo en el sentido de sollicitación sino también en el eje perpendicular; la relación de la deformación perpendicular a la axial viene dada, como sabemos, por la relación de Poisson

$$\nu = \epsilon_p / \epsilon_a$$

Pero la sollicitación uniaxial es prácticamente una excepción, ya que en la realidad lo más comun es encontrar sollicitaciones biaxiales y triaxiales; sin embargo, las simplificaciones analíticas nos permiten la reducción de la mayoría de los problemas al caso biaxial, sin que los errores sean significativos.

La figura 1A representa un elemento diferencial extraído de un punto cualquiera de un elemento estructural solicitado a esfuerzos en dos direcciones ortogonales; en la figura 1B se representan las deformaciones producidas por esos esfuerzos:



Así, las deformaciones totales serán:

$$\delta_x = \delta_x + \nu \delta_y$$

$$\delta_y = \delta_y + \nu \delta_x \quad \text{[ecs.1]}$$

De la ley de Hooke tenemos que $E = \sigma / \epsilon$ por lo que $\epsilon = \sigma / E = \delta / L$; en nuestro elemento L es dx ó dy ; de tal forma que si dividimos las [ecs. 1] entre dx ó dy tendremos:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} + \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{ec.[1a]}$$

Desde luego que estamos considerando que el material es homogéneo e isotrópico.

Del curso de Resistencia de Materiales, recordemos que una sollicitud de esfuerzos como la de nuestro ejemplo, provoca a 45° un estado de cortante puro cuando los esfuerzos en los dos ejes son iguales; esto es fácil de ver en la construcción del círculo de Mohr (que abordaremos con más detalle adelante); con lo que $\sigma_x = \sigma_y = \tau$ y entonces:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} (1 + \nu) \quad \epsilon_y = - \frac{\sigma_y}{E} (1 + \nu) \text{ [ecs. 2]}$$

2.2 RELACION ENTRE EL MODULO DE ELASTICIDAD Y EL DE CORTANTE

Como vimos anteriormente, existe una estrecha relación entre los esfuerzos axiales y el cortante, por lo que es de esperarse una relación entre el módulo de elasticidad y el módulo de cortante, relación que, dada su importancia en análisis experimental de esfuerzos recordaremos.

Consideremos un elemento solicitado a esfuerzo cortante puro como el que se ilustra en la figura 2a, que se deformará como se indica en la fig. 2b.

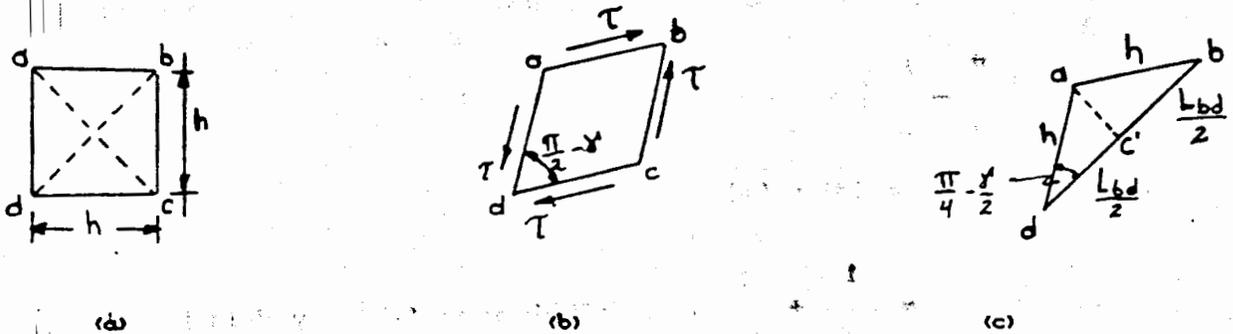


Fig. 2

De la fig. 2a se ve que la diagonal $bd = \sqrt{2} h$ (teorema de Pitágoras $bd^2 = h^2 + h^2$) la cual sufre una deformación (fig. 2b)

$$\delta_{bd} = \sqrt{2} h \epsilon \quad (\delta = \epsilon * l) \text{ [ec. a].}$$

Como acabamos de ver,, $\sigma_x = \sigma_y = \tau$ por lo que si sustituimos en la ecuación de la deformación unitaria tendremos:

$$\delta_{bd} = \frac{\sqrt{2} h \tau}{E} (1 + \nu) \text{ [ec. b].}$$

Note que hemos sustituido σ por τ en las [ecs 2].

Pero la longitud final del tramo bd será:

$$l_{bd} = \sqrt{2} h + \delta_{bd} \text{ [ec. c]}$$

con lo que, de la figura 2c tendremos:

$\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1_{bd}}{2 \cdot h}$, y de la ecuación [c] :

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} h + \delta_{bd}}{2 h} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\delta_{bd}}{2 h} \quad \dots [d]$$

usando la identidad trigonométrica:

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

tendremos:

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right)$$

Recuerde que $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ y $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Si consideramos que γ es muy pequeño:

$$\frac{\gamma}{2} \rightarrow 0 \quad \therefore \cos \frac{\gamma}{2} \approx 1 \quad \text{y} \quad \sin \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2} \quad \dots \text{con lo que:}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2\sqrt{2}} \quad \dots [e] \dots$$

y de las ecs. [d] y [e] :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\delta_{bd}}{2 h} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{2 \sqrt{2}} \quad \dots \text{eliminando } 1/\sqrt{2} \text{ y despejando:}$$

$$\delta_{bd} = \frac{2 \gamma h}{2 \sqrt{2}} = \frac{\gamma h}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \gamma h}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \gamma h}{2} \quad \dots [f] \dots$$

$$\text{sabemos que } \gamma = \frac{\tau}{G}; \text{ por lo que } \delta_{bd} = \frac{\sqrt{2} h \tau}{2 G} \quad \dots [g]$$

e igualando las ecs. [a] y [f] :

$$\delta_{bd} = \sqrt{2} h \epsilon = \frac{\sqrt{2} \gamma h}{2}$$

así que : $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ en el caso de cortante puro.

Finalmente, igualando las ecs. [b] y [g] tendremos :

$$\frac{\sqrt{2} h \tau}{E} (1 + \nu) = \frac{\sqrt{2} h \tau}{2 G} \quad \text{de modo que despejando :}$$

$$G = \frac{E}{2 (1 + \nu)} \quad \text{.....ec.[h]}$$

que es la relación esperada.

2.3 ESTADO BIAxIAL DE ESFUERZO

Cuando un elemento es solicitado a esfuerzo en dos direcciones ortogonales entre sí, esto es, biaxialmente; existirá un eje a θ grados de los ejes originales en el que los esfuerzos resultantes tengan su valor máximo; esto resulta obvio dado que el esfuerzo tiene carácter vectorial, y como sabemos, la resultante de la suma de dos vectores perpendiculares entre sí es mayor que cualesquiera de ellos.

Este tipo de esfuerzos es en el diseño mucho más frecuente de lo que nos imaginamos, y si consideramos su representación gráfica en el círculo de Mohr, es fácil ver que su valor máximo podría aumentar sensiblemente, con lo que nos veríamos expuestos a rebasar los valores permisibles de diseño; especialmente cuando se trata de optimar un elemento en el que dimensionamos para valores de esfuerzo cercanos al límite; no olvidemos que τ puede ser igual al radio del círculo y que por lo tanto σ podría crecer en ese valor. Algunos ejemplos al final ilustrarán lo anterior.

Desarrollaremos las ecuaciones que nos permitirán calcular el valor de los esfuerzos máximos para este tipo de sollicitación, así como las correspondientes a las deformaciones que originan, y de esta forma contaremos con las herramientas necesarias que nos permitan conocer el estado de sollicitación de esfuerzos de un elemento, a partir de las deformaciones que éstos provocan; deformaciones que pueden ser obtenidas con extensómetros eléctricos; pero además, estas ecuaciones también serán las que nos permitan determinar los esfuerzos en los modelos fotoelásticos, por lo que resulta muy importante su completo entendimiento.

Se incluirá, tanto para el esfuerzo como para la deformación, su representación gráfica en el círculo de Mohr, el que nos facilitará no sólo su visualización sino también el cálculo de su valor en cualquier ángulo (método gráfico).

$$\sum F_{y1} = \tau_1 A + \sigma_x \text{sen}\theta A \cos\theta - \sigma_y \cos\theta A \text{sen}\theta - \tau \cos\theta A \cos\theta + \tau \text{sen}\theta A \text{sen}\theta = 0$$

$$\therefore \tau_1 = -(\sigma_x - \sigma_y) \text{sen}\theta \cos\theta + \tau (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \dots\dots\dots \text{ec.}[2]$$

note que el área A fué eliminada por aparecer en todos los términos.

Podemos ahora sustituir las funciones trigonométricas por aquellas identidades que nos faciliten trabajar las ecuaciones; recordemos que:

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad ; \quad \text{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen}\theta \cos\theta = \frac{\text{sen} 2\theta}{2}$$

De la ec.[1] tendremos:

$$\sigma_{x1} = \sigma_x \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + \sigma_y \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + 2\tau \frac{\text{sen} 2\theta}{2}$$

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x \cos 2\theta}{2} + \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y \cos 2\theta}{2} + \tau \text{sen} 2\theta$$

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\theta + \tau \text{sen} 2\theta \dots\dots\dots \text{ec.}[3]$$

De la ec.[2] :

$$\tau_1 = -(\sigma_x - \sigma_y) \frac{\text{sen} 2\theta}{2} + \tau \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right)$$

$$\tau_1 = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \text{sen} 2\theta + \tau \cos 2\theta \dots\dots\dots \text{ec.}[4]$$

Tenemos así que las ecuaciones [3] y [4] nos permiten calcular los esfuerzos para un ángulo θ cualquiera, a partir de los valores normales (iniciales).

Para el eje Y los resultados son similares, tómesese en cuenta que se trata de un giro de 90° , por lo que si sustituimos θ por $\theta + 90$ tendremos:

$$\sigma_{y1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau \text{sen} 2\theta \dots\dots\dots \text{ec.}[5]$$

El valor de τ_1 para este eje, es el mismo de la ec.[4] pero con signo contrario.

Nótese que si sumamos las ecuaciones [3] y [5], obtenemos una relación que nos resultará muy útil:

$$\sigma_{x1} + \sigma_{y1} = \sigma_x + \sigma_y \dots\dots ec.[6]$$

Es evidente que los valores de σ_{x1} y σ_{y1} de las ecs.[3],[4] y [5] tienen un valor máximo para un ángulo θ específico, y desde luego que estos valores máximos resultan sumamente importantes en el diseño, por lo que resulta conveniente contar con las ecuaciones que nos permitan calcularlos; para ello bastará con obtener la derivada de esas ecuaciones e igualarla a cero (máximos y mínimos).

De ec.[3].
$$\frac{d\sigma_{x1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y)\text{sen}2\theta + 2\tau\text{cos}2\theta = 0$$

$$\frac{\text{sen}2\theta}{\text{cos}2\theta} = \tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \dots\dots ec.[7]$$

Para el caso del ángulo correspondiente a τ , recuerde que los valores máximos de éste se encuentran defasados 45° respecto al eje de σ ; por esta razón, utilizaremos θ' para diferenciar éste ángulo del de σ .

De ec.[4]
$$\frac{d\tau_1}{d\theta'} = -(\sigma_x - \sigma_y)\text{cos}2\theta' - 2\tau\text{sen}2\theta' = 0$$

$$\frac{\text{sen}2\theta'}{\text{cos}2\theta'} = \tan 2\theta' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} \dots\dots ec.[8]$$

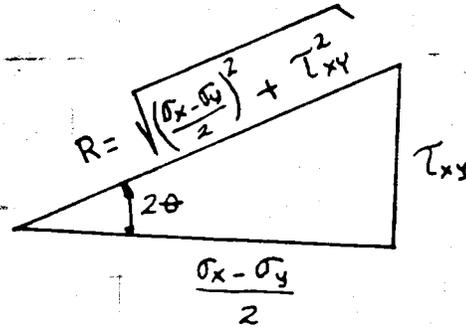
NOTA: Vemos que: $\text{tg}2\theta' = \frac{1}{\text{tg}2\theta} = \text{cotg}2\theta$...de las identidades trigonométricas sabemos que $\text{tg}(\alpha \pm 90^\circ) = -\text{cotg} \alpha$...de aquí: $2\theta' = 2\theta \pm 90^\circ$ ó bien: $\theta' = \theta \pm 45^\circ$; lo cual coincide con lo antes dicho.

Con las ecuaciones [7] y [8] podemos calcular los ángulos a los que los esfuerzos son máximos, por lo que si los sustituimos en las ecs.[3],[4] y [5], tendremos sus valores correspondientes.

Podemos obtener ahora las ecuaciones que nos permitan obtener directamente los valores máximos de σ y τ ; para ello bastará con susutituir los valores de θ dados por las ecs.[7] y [8] en las ecs.[3], [4] y [5]. Para simplificar esta labor, obtengamos una interpretación gráfica de las ecuaciones para θ .

De la ec.[7] :

$$\tan 2\theta = \frac{\tau}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$



De la figura:

$$\text{sen} 2\theta = \frac{\tau}{R}$$

$$\text{cos} 2\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

sustituyendo en [3] :

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \frac{1}{R} + \tau \frac{\tau}{R}$$

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2}{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^{1/2}}$$

Recuerda que $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} a}{\sqrt{a} \sqrt{a}} = \sqrt{a}$

$$\therefore \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2} \quad \dots\dots\text{ec.[9]}$$

Para el caso de los cortantes, ec.[4]; recuerda que θ' se encuentra girada 45° respecto a θ .

$$\text{sen} 2\theta' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\text{cos} 2\theta' = \frac{\tau}{R}$$

sustituyendo en ec.[4]:

$$\tau_{\text{máx}} = - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \frac{1}{R} + \tau \frac{\tau}{R}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2\right]^{1/2}}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots\dots\dots\text{ec.}[10]$$

El signo \pm obedece a que τ tiene el mismo valor absoluto pero con signos contrarios para σ_x y σ_y (recuerda que son puntos diametralmente opuestos en el círculo de Mohr)

Tenemos así las ecuaciones esperadas para obtener directamente los valores de los esfuerzos máximos.

2.4 CIRCULO DE MOHR

Una forma más rápida y completa de determinar el estado de esfuerzos a un ángulo cualquiera, es la representación gráfica mediante el círculo de Mohr. desarrollaremos a continuación un método sencillo que demuestra la analogía de las ecs.[3] y [4] con aquella para el círculo.

Reordenemos las ecuaciones [3] y [4] de la siguiente forma:

$$\sigma_{x1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau \cos 2\theta$$

elevando al cuadrado ambos miembros de estas ecuaciones y sumandolas, tendremos:

$$\left(\sigma_{x1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y)\tau \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta + \tau^2 \operatorname{sen}^2 2\theta$$

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y)\tau \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta + \tau^2 \cos^2 2\theta$$

$$\Sigma = \left(\sigma_{x1} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2$$

Que es similar a la ecuación del círculo: $(X+a)^2 + Y^2 = R^2$ en donde el radio del círculo es:

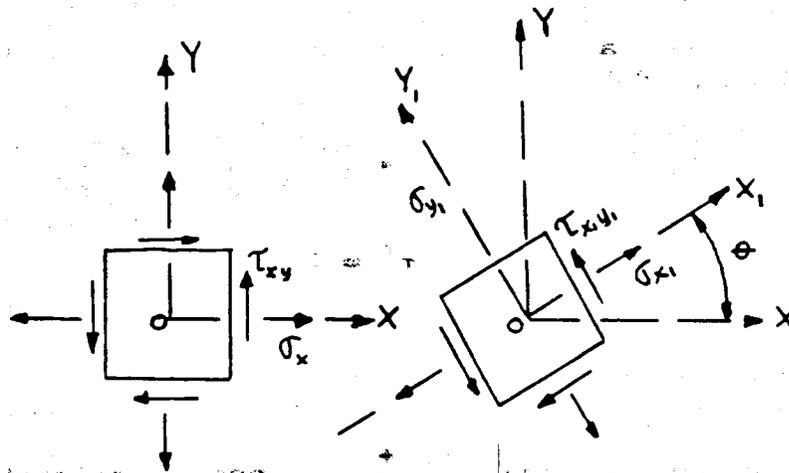
$$R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2$$

Quedando: $\left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = R^2$ ec.[11]

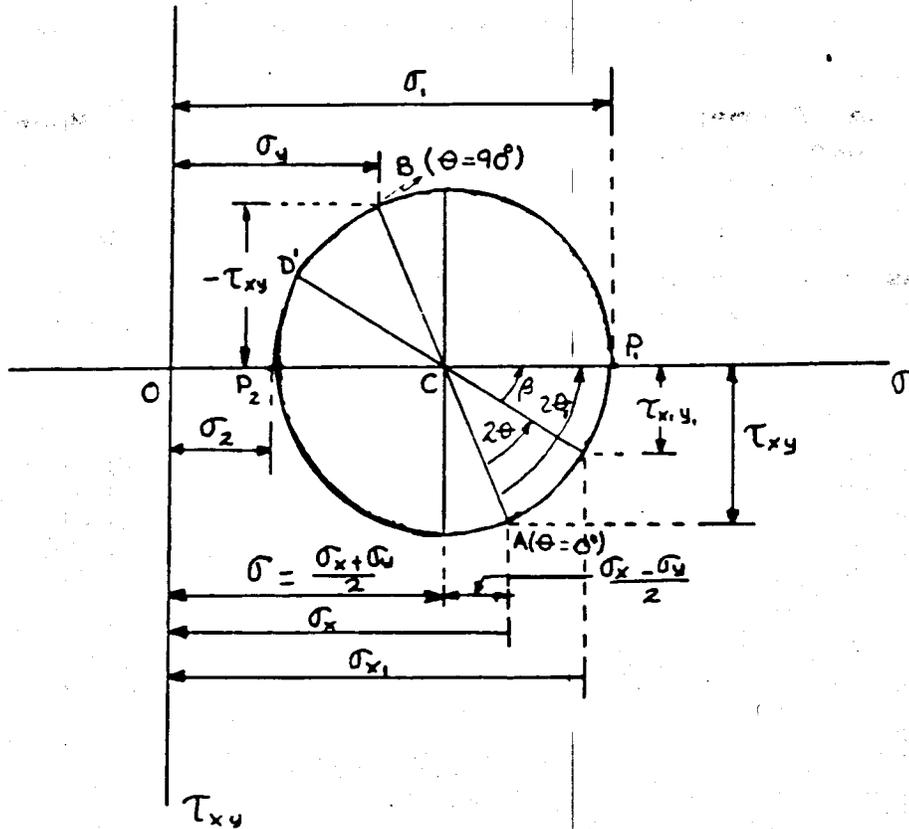
Note que hemos desarrollado el binomio en el segundo miembro de ambas ecuaciones y recuerde que $\text{sen}^2 a + \text{cos}^2 a = 1$

Es fácil comprobar que $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ nos da el centro del círculo; que tiene el radio R y que para un ángulo 2θ cualquiera, forma un triángulo rectángulo de lados $\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$ y τ ; como puede observarse en la figura 4, los puntos (σ_x, τ) se encuentran a 2θ grados de los ejes principales (X_1, Y_2) , figura 4b y corresponden a los llamados esfuerzos normales (ejes X-Y) figura 4a.

De esta forma; para trazar el círculo de Mohr, bastará con seleccionar una escala adecuada al papel milimétrico que empleemos y localizar los valores de σ y τ (punto A); calcular el valor de $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ que es el centro del círculo (punto O) y dibujar con un compás una circunferencia de radio \overline{OA} ; los valores máximos se localizan en las intersecciones de ésta con los ejes horizontal y vertical respecto del punto O.



(4a)



(4b)

Fig. 4

2.5

LEY DE HOOKE PARA ESFUERZOS EN EL PLANO

Vimos anteriormente (ver pag. 6 ec.[1a]), que las deformaciones de un elemento cargado biaxialmente, vienen dadas por las ecuaciones:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x + \nu \sigma_y) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y + \nu \sigma_x) \quad \text{ec.[1a]}$$

Observe que en ambas aparece la suma porque éstas se obtuvieron para el caso de tracción para el eje X y compresión para el Y; por lo que si cambia el sentido de un vector, habrá que cambiar el signo; como en el siguiente caso en el que se tratará de tracción en los dos ejes.

Debido a que en nuestras deducciones hemos analizado una doble sollicitación a tracción; debemos cambiar el signo a negativo, teniendo de este modo las ecuaciones que nos permitan calcular las deformaciones unitarias, a partir de los esfuerzos:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad \text{ec.[1b]}$$

Con éstas ecuaciones podemos encontrar las relaciones para obtener el esfuerzo a partir de las deformaciones; así, reacomodando:

$$E\epsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y$$

$$E\epsilon_y = \sigma_y - \nu \sigma_x$$

$$\sigma_x = E\epsilon_x + \nu \sigma_y \quad [a]$$

$$\sigma_y = E\epsilon_y + \nu \sigma_x \quad [b]$$

sustituyendo [b] en [a]:

$$\sigma_x = E\epsilon_x + \nu(E\epsilon_y + \nu \sigma_x) = E\epsilon_x + E\nu\epsilon_y + \nu^2 \sigma_x$$

y factorizando: $\sigma_x(1 - \nu^2) = E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \dots \therefore$

$$\sigma_x = \frac{E(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)}{(1 - \nu^2)} \dots \text{ec.[12]}$$

Con el mismo procedimiento sustituya [a] en [b] y obtenemos:

$$\sigma_y = \frac{E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)}{(1 - \nu^2)} \dots \text{ec.[13]}$$

Finalmente la conocida relación:

$$\tau = G\gamma \dots \text{ec.[14]}$$

Tenemos así las ecuaciones esperadas que además nos permitirán obtener los valores de los esfuerzos a partir de las deformaciones unitarias; veremos más adelante que estas deformaciones pueden obtenerse a partir de las lecturas de rosetas.

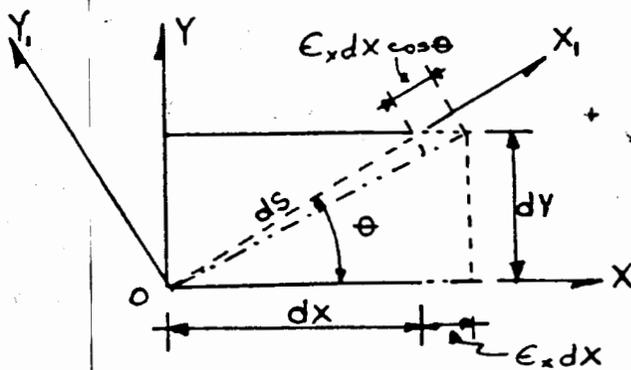
2.6

ESTADO BIAIXIAL DE DEFORMACION

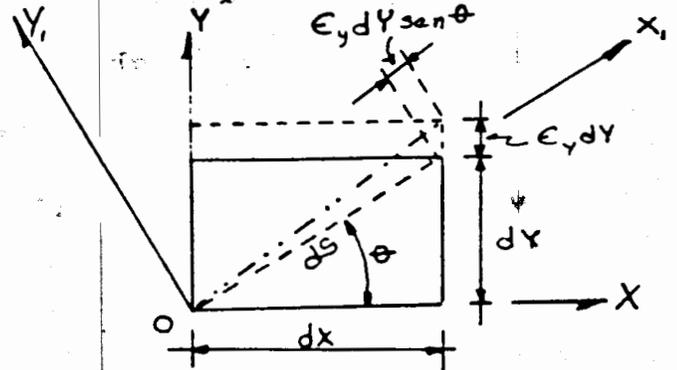
De la ley de Hooke sabemos que existe una relación directa entre los esfuerzos y las deformaciones ($E = \sigma/\epsilon$), por lo que podemos esperar que las ecuaciones para el cálculo de las deformaciones normales y máximas en la sollicitación biaxial, sean similares a las de los esfuerzos.

Veremos que esta suposición es cierta y como lo hicimos antes, se deducirán las ecuaciones mediante un procedimiento ligeramente diferente; al plantear las ecuaciones iniciales.

Consideremos un elemento esforzado como se muestra en la figura 5a; las deformaciones que causa cada esfuerzo individualmente se muestran en las figuras 5b, 5c y 5d.



(5a)



(5b)

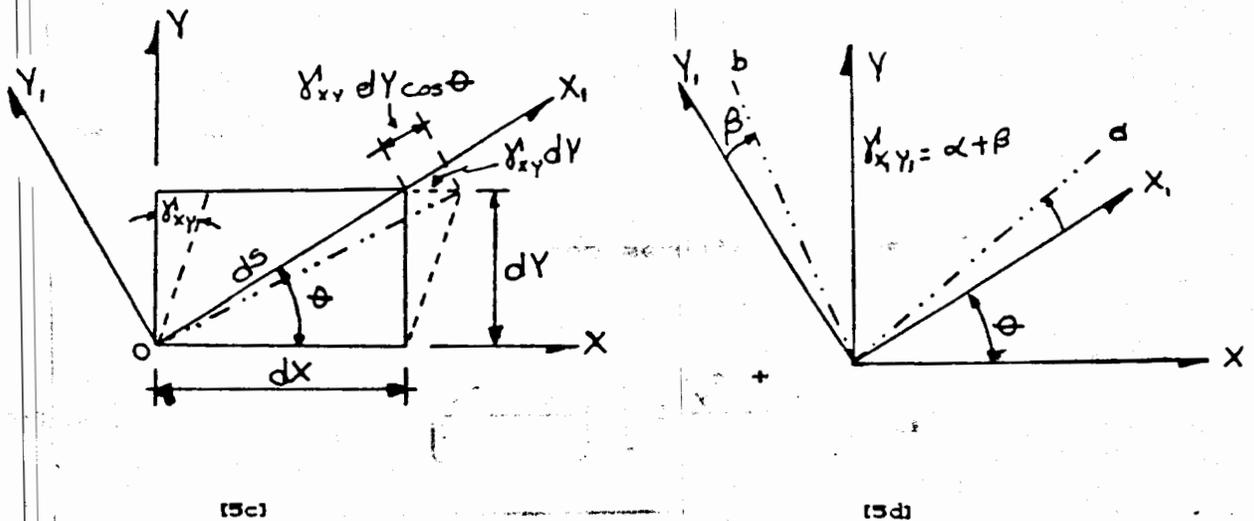


Fig. 5

El incremento total en la longitud del elemento ds se obtiene sumando la deformación que produce cada uno de los esfuerzos en esa dirección, de tal forma que:

$$\Delta\delta = \epsilon_x dx \cos\theta + \epsilon_y dy \sin\theta + \gamma_{xy} dy \cos\theta$$

La deformación unitaria en la dirección X_1 será $\epsilon_{x_1} = \frac{\Delta\delta}{ds}$; así:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\Delta\delta}{ds} = \epsilon_x \frac{dx}{ds} \cos\theta + \epsilon_y \frac{dy}{ds} \sin\theta + \gamma_{xy} \frac{dy}{ds} \cos\theta$$

pero: $\sin\theta = \frac{dy}{ds}$ y $\cos\theta = \frac{dx}{ds}$, entonces:

$$\epsilon_{x_1} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

Esta ecuación ya tiene la misma forma de la ec.[1]; por lo que el desarrollo algebraico de las ecuaciones será el mismo y por ello nos limitaremos a plantear directamente las ecuaciones para la obtención de las deformaciones normales, máximas y las del círculo de Mohr:

$$\epsilon_{x_1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots \dots \dots \text{ec. [15]}$$

$$\epsilon_{y1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots \text{ec.}[16]$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots \text{ec.}[17]$$

Las deformaciones máximas serán:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad \dots\dots\dots \text{ec.}[18]$$

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad \dots\dots\dots \text{ec.}[19]$$

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \quad \dots\dots\dots \text{ec.}[20]$$

note que se utiliza $\frac{\gamma}{2}$; recuerde que cuando vimos la relación entre el modulo de elasticidad y de cortante, demostramos que en cortante puro $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ (haga la sustitución de identidades y comprobará que queda este valor de γ).

El círculo de Mohr tiene como única diferencia, que el eje de las ordenadas representa $\frac{\gamma}{2}$ y no γ , pero el tratamiento es idéntico al del caso de esfuerzos. De esta forma:

$\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$ corresponde al centro del círculo.

$\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$ y $\frac{\gamma}{2}$ serán los lados del triángulo rectángulo que forma con R a un ángulo θ cualquiera.

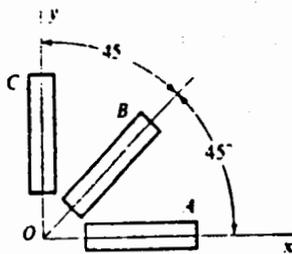
Finalmente. $R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$

2.7.....TRANSFORMACION DE LECTURAS DE DEFORMACION EN ROSETAS A DEFORMACIONES NORMALES

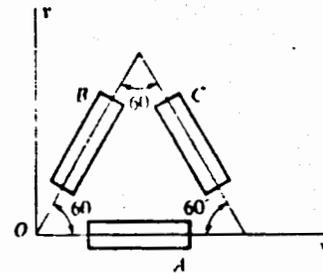
Hemos visto las ecuaciones que nos permiten calcular el esfuerzo normal y máximo en un elemento bajo sollicitación biaxial, así como las relaciones de transformación para obtener esfuerzos a partir de deformaciones o viceversa.

La extensometría eléctrica, tiene como fin primordial la medición de las deformaciones unitarias que se producen en un elemento estructural cargado; deformaciones que mediante las ecuaciones antes vistas podremos transformar a esfuerzos.

Existen actualmente tal variedad de formas, tamaños, usos, etc. de medidores de deformación, que estos se cuentan por miles. Lo más común es medir la deformación en un punto para una, dos o tres direcciones; éste último caso; el de tres direcciones, es particularmente interesante debido a que los valores de esas deformaciones correspondería al de las deformaciones normales a un punto, y de esa forma resulta evidente que si arreglamos las ecuaciones antes vistas, podremos obtener la información de ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} . Veremos a continuación las ecuaciones de relación para el caso de rosetas (medidores de deformación para tres direcciones) con arreglos a 45° y 60° .



(7a)



(7b)

Fig. (7)

De la figura 7a, que sería la de una roseta de 45° , obtenemos las deformación ϵ_a , ϵ_b y ϵ_c ; de la ec.[15] vemos que podemos formar el tensor de deformaciones como sigue:

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots ec.[a]$$

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots ec.[b]$$

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots ec.[c]$$

De la ec.[a], vemos que para $\theta = 0^\circ$; $\sin \theta = 0$ y $\cos \theta = 1$ así:

$$\epsilon_a = \epsilon_x \quad \dots\dots\dots ec.[21]$$

Un razonamiento similar para $\theta = 90^\circ$, que es el caso de ϵ_c , y sustituyendo en la ec. [c]; en donde $\sin 180^\circ = 0$ y $\cos 180^\circ = -1$ (recuerde que se trata de 2θ) nos muestra que:

$$\epsilon_c = \epsilon_y \quad \dots\dots\dots ec.[22]$$

Finalmente, vemos que ϵ_b se encuentra a 45° ($2\theta = 90^\circ$) y sustituyendo ecs.[21] y [22] en ec.[b], tendremos:

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c \quad \dots\dots\dots ec.[23]$$

Un análisis parecido para el caso de rosetas a 60° (fig. 7 [b]), nos permite también obtener el tensor de deformaciones:

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots ec.[d]$$

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots ec.[e]$$

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta \quad \dots\dots\dots ec.[f]$$

Como vemos para el elemento A, $\theta = 0^\circ$ con lo que de la ec.[d]:

$$\epsilon_a = \epsilon_x \dots\dots\dots ec.[24]$$

El elemento B está a $\theta = 60^\circ$ por lo que para 2θ tenemos que $\text{sen } 120^\circ = 0.866 = \sqrt{3} / 2$ y $\text{cos } 120^\circ = -0.5 = -1 / 2$.

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \left[-\frac{1}{2} \right] + \frac{\gamma_{xy}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon_b = \frac{\epsilon_x}{4} + \frac{3\epsilon_y}{4} + \frac{\sqrt{3} \gamma_{xy}}{4}$$

despejando ϵ_y y sust. $\epsilon_a = \epsilon_x$, nos queda:

$$\epsilon_y = \frac{1}{3} \left[-\epsilon_a + 4\epsilon_b - \sqrt{3} \gamma_{xy} \right] \dots\dots\dots ec.[g]$$

Para el elemento C, $\theta = 120^\circ$ con lo que $2\theta = 240^\circ$ y :

$\text{sen } 240^\circ = -\sqrt{3} / 2$ y $\text{cos } 240^\circ = -1 / 2$; así:

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \left[-\frac{1}{2} \right] + \frac{\gamma_{xy}}{2} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_x}{4} + \frac{3\epsilon_y}{4} - \frac{\sqrt{3} \gamma_{xy}}{4}$$

despejando $\sqrt{3} \gamma_{xy}$ y sust. $\epsilon_a = \epsilon_x$, nos queda:

$$\sqrt{3} \gamma_{xy} = \epsilon_a + 3\epsilon_y - 4\epsilon_c \dots\dots\dots ec.[h]$$

sustituyendo esta última ecuación en la ec.[g]:

$$\epsilon_y = \frac{1}{3} \left[-\epsilon_a + 4\epsilon_b - (\epsilon_a + 3\epsilon_y - 4\epsilon_c) \right]$$

simplificando:

$$2\epsilon_y = -\frac{2\epsilon_a}{3} + \frac{4\epsilon_b}{3} + \frac{4\epsilon_c}{3} \text{ de modo que :}$$

$$\epsilon_y = \frac{2(\epsilon_b + \epsilon_c) - \epsilon_a}{3} \text{ec.[25]}$$

Sustituiremos ahora el valor de ϵ_y de la ec.[g] , en la ec.[h]:

$$\sqrt{3} \gamma_{xy} = \epsilon_a + 3 \left[\frac{1}{3} \left[-\epsilon_a + 4\epsilon_b - \sqrt{3} \gamma_{xy} \right] \right] - 4\epsilon_c$$

$$2 * \sqrt{3} \gamma_{xy} = 4\epsilon_b - 4\epsilon_c \text{quedando finalmente:}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(\epsilon_c - \epsilon_b)}{\sqrt{3}} \text{ec.[26]}$$

Se ve entonces que a partir de las deformaciones de la roseta es posible llegar a las deformaciones que solicitan al elemento en estudio, pudiendo obtenerse tambien el estado de esfuerzos con las ecuaciones [12], [13] y [14].

Veremos a continuación un problema que ilustre la aplicación de las ecuaciones que hemos visto en este capítulo:

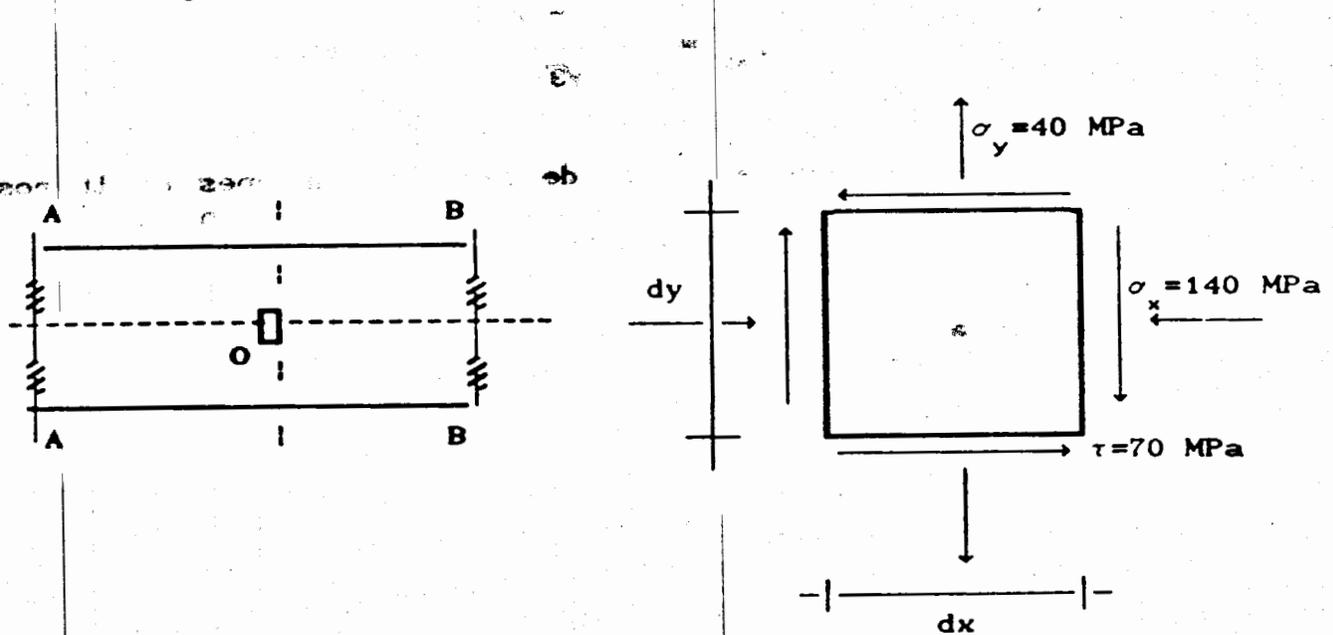
EJEMPLO DE APLICACION

Supongamos que la sección AA-BB mostrada en la figura, fué tomada de un elemento estructural cualquiera solicitado a multiples cargas; sabemos que por el principio de superposición, podemos analizar esas cargas una por una, para obtener así la suma de las contribuciones de cada una de ellas a los esfuerzos axiales y cortantes que resulten en los ejes X-Y que hemos elegido. Consideremos que el resultado de esa suma es el que se muestra en el elemento diferencial (dx-dy) y que fué tomado del punto "O"; los esfuerzos permisibles para el diseño se establecen en:

$\sigma = 150$ MPa y $\tau = 80$ MPa material homogéneo con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.29$.

Obtengase para el elemento indicado; empleando, tanto las ecuaciones de valores normales y máximos como el círculo de Mohr, los siguientes datos:

- a) Esfuerzos principales ó máximos y su dirección.
- b) Esfuerzos normales a -35° de los ejes mostrados.
- c) Deformaciones unitarias normales, máximas y a -35°
- d) Valores esperados en una roseta colocada en ese punto respecto a los ejes X-Y.



Como vemos en la figura, no se han rebasado los esfuerzos permisibles en el elemento en estudio.

SOLUCIONES:

a) Cálculo de esfuerzos principales ó máximos:

Podemos emplear directamente la ec.[9].

$$\therefore \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots\dots\dots ec.[9]$$

Sustituiremos los valores tomando en cuenta que σ_x y τ tienen sentidos contrarios a los utilizados en la figura 3; por lo que serán negativos.

$$\sigma_x = \frac{(-120)+40}{2} + \left[\left[\frac{(-120)-40}{2} \right]^2 + (-70)^2 \right]^{1/2} = 66.3 \text{ MPa}$$

(recuerde que "MPa" es 10^6 Pa , pero que hemos omitido esta notación por lo que los resultados quedan en MPa.)

Obtendremos ahora el valor de σ_y cambiando únicamente el signo del radical:

$$\sigma_y = \frac{(-120)+40}{2} - \left[\left[\frac{(-120)-40}{2} \right]^2 + (-70)^2 \right]^{1/2} = -146.3 \text{ MPa}$$

Para el cálculo de τ , utilizaremos la ec.[10]:

$$\tau_{\text{máx}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots\dots\dots ec.[10]$$

Sustituyendo:

$$\tau_{\text{máx}} = \pm \left[\left[\frac{(-120)-40}{2} \right]^2 + (-70)^2 \right]^{1/2} = \pm 106.3 \text{ MPa}$$

La dirección de los ejes principales viene dada por la ec.[7]:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \dots\dots\dots ec.[7]$$

$$\tan 2\theta = \frac{2*(-70)}{(-120)-40} = 0.875$$

$$\underline{2\theta = 41.2^\circ}$$

(No olvide que consideramos los ángulos positivos girados en sentido contrario a las manecillas del reloj)

Vemos que si bien los esfuerzos axiales están dentro de los valores permisibles, el cortante rebasa el límite de 80 MPa impuesto en las condiciones del problema; esto obligaría a una reconsideración del diseño, modificando la geometría de la sección, la rigidez ó algún otro parametro que nos permitiera respetar los esfuerzos límite.

A pesar de lo anterior y debido a que aquí se pretende ilustrar la aplicación de las ecuaciones; continuaremos nuestro ejercicio dejando para los cursos de diseño la correcta solución de casos reales ó hipotéticos.

Es posible calcular también estos valores mediante las ecs.[3,4 y 5], sustituyendo en ellas el valor de $2\theta = 41.2^\circ$ que calculamos antes y que corresponde al de los esfuerzos máximos.

$$\sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right] \cos 2\theta + \tau \sin 2\theta \dots\dots\dots ec.[3]$$

$$\sigma_{x \text{ máx}} = \frac{(-120)+40}{2} + \left[\frac{(-120)-40}{2} \right] \cos 41.2^\circ + (-70) \sin 41.2^\circ$$

$$\sigma_{x \text{ máx}} = -146.3 \text{ MPa}$$

La ec.[5] es casi idéntica a la ec.[3] ya que en ésta solo cambia el signo del segundo y tercer sumando; así:

$$\sigma_{y \text{ máx}} = \frac{(-120)+40}{2} - \left[\frac{(-120)-40}{2} \right] \cos 41.2^\circ - (-70) \sin 41.2^\circ$$

$$\sigma_{y \text{ máx}} = 66.3 \text{ MPa}$$

Notese que si bien son los mismos valores, cambia el eje; esto ocurre porque en el radical de la ec.[9] se pierde el mismo, esta situación es importante cuando se trabaja con materiales no homogéneos. Veremos adelante que estos valores coinciden con los del círculo de Mohr.

El cálculo de τ podemos hacerlo con la ec.[4], pero si sustituimos el ángulo $2\theta = 41.2^\circ$ obtendremos el valor cero (recuerde que cuando σ es máxima, τ es cero; como puede comprobarse en el círculo de Mohr); de esta forma, dado que $\tau_{\text{máx}}$ se encuentra a 45° del eje de σ , nuestro ángulo será $2\theta' = (41.2 + 90^\circ)$; así de la ec.[4]:

$$\tau_1 = - \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right] \text{sen}2\theta + \tau \text{cos}2\theta \quad \dots\dots\dots\text{ec.[4]}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \pm \left[- \left[\frac{(-120) - 40}{2} \right] \text{sen}(41.2^\circ + 90^\circ) + (-70) \text{cos}(41.2^\circ + 90^\circ) \right]$$

$$\tau_{\text{máx}} = 106.3 \text{ MPa}$$

Para la una pronta y exacta solución, el método gráfico es la mejor alternativa; más aún cuando éste se encuentra estructurado en una hoja de cálculo del tipo Lotus123, Quattro, Aseasy, y otras comunes en el mercado.

En las hojas que siguen se dan las soluciones gráficas obtenidas con una hoja Lotus123; en ella se han programado las ecuaciones que hemos visto, por ejemplo, para el módulo de rigidez se empleó la ec.[1] de la pagina 8, para la deformación normal se utilizaron las ec.[21,22 y 23] así como la ecuación $G = \tau/\gamma$, los esfuerzos principales se calculan con las ecs.[9 y 10] y las ecs.[18 y 19] para las deformaciones principales; los esfuerzos y deformaciones normales (las que integran la tabla de valores), pueden ser calculadas con las ecs.[3,4,5,15,16 y 17] a cada 5° y hasta 180° ya que el gráfico considera ángulos dobles (se estableció una tabla de conversión a radianes para facilitar la estructuración de las ecuaciones).

Como indica la nota de la tabla de valores, es conveniente hacer una hoja para cuando se desee entrar con los valores de esfuerzo, como la que aquí se muestra y otra para entrar con las deformaciones de la roseta extensométrica (en éste caso para una roseta extensométrica de 45°); es también necesario que en esas hojas o en otro juego se establezcan las ecuaciones para rosetas de 60° .

Se recomienda que el estudiante tome un curso de este tipo de hojas de trabajo ya que le facilitará grandemente el trabajo durante y después de sus estudios.

Continuaremos ahora con el cálculo de esfuerzos a $\theta = -35^\circ$ ($2\theta = -70^\circ$) del inciso b de nuestro ejercicio.

De la ec.[3]:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right] \cos 2\theta + \tau \sin 2\theta \quad \dots\dots ec.[3]$$

sustituyendo:

$$\sigma_x = \frac{(-120)+40}{2} + \left[\frac{(-120)-40}{2} \right] \cos (-70^\circ) + (-70) \sin (-70^\circ)$$

$$\sigma_x = -1.583 \text{ MPa}$$

Recuerda que en la ec.[5] solo cambia de signo el 2º y 3º sumando:

$$\sigma_y = \frac{(-120)+40}{2} - \left[\frac{(-120)-40}{2} \right] \cos (-70^\circ) - (-70) \sin (-70^\circ)$$

$$\sigma_y = -78.42 \text{ MPa}$$

finalmente, de la ec.[4]:

$$\tau_{xy} = - \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right] \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta \quad \dots\dots ec.[4]$$

$$\tau_{xy} = \pm \left[- \left[\frac{(-120)-40}{2} \right] \sin(-70^\circ) + (-70) \cos(-70^\circ) \right]$$

$$\tau_{xy} = \pm 99.11 \text{ MPa}$$

Puedes comprobar que estos valores corresponden a los indicados en la tabla para un ángulo de 145° ($180^\circ - 35^\circ$).

Debo hacer notar que los gráficos mostrados del círculo de Mohr no son tales, debido a las escalas automáticas de graficación.

Veremos ahora la solución del inciso c; para ello emplearemos las ecs.[1b] para las deformaciones normales de la pagina 16:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \text{ec.[1b]}$$

Sustituyendo:

$$\epsilon_x = \frac{1}{200 \cdot 10^9} (-120 \cdot 10^6 - 0.29 \cdot 40 \cdot 10^6) = -658 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{200 \cdot 10^9} (40 \cdot 10^6 - 0.29 \cdot (-120 \cdot 10^6)) = 374 \cdot 10^{-6}$$

de la ec.[h] de la pagina 8:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \dots \text{ec.[h]}$$

sustituyendo:

$$G = \frac{200 \cdot 10^9}{2(1 + 0.29)} = 77.52 \text{ GPa}$$

entonces γ de ec.[14] será:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{-70 \cdot 10^6}{77.52 \cdot 10^9} = \pm 903 \cdot 10^{-6} \text{ m/m}$$

Observe que estos valores coinciden con los establecidos en la tabla de valores de la hoja de cálculo.

Calcularemos ahora las deformaciones principales ó máximas; para ello utilizaremos primero las ecs.[18,19 y 20]

De la ec.[18]:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \dots \text{ec.[18]}$$

sustituimos omitiendo el término 10^{-6} por ser comun a todos los elementos de la ecuación; el resultado estara obviamente afectado por este factor:

$$\epsilon_1 = \frac{(-658) + 374}{2} + \left[\left[\frac{(-658) - 374}{2} \right]^2 + \left[\frac{-903}{2} \right]^2 \right]^{1/2} = 543.6 \cdot 10^{-6}$$

Para ϵ_2 cambia el signo del radical:

$$\epsilon_2 = \frac{(-658) + 374}{2} - \left[\left[\frac{(-658) - 374}{2} \right]^2 + \left[\frac{-903}{2} \right]^2 \right]^{1/2} = -827.6 \cdot 10^{-6}$$

de la ec.[19] tenemos:

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = \pm \sqrt{\left[\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right]^2 + \left[\frac{\gamma_{xy}}{2} \right]^2} \dots\dots\dots\text{ec.[19]}$$

sustituyendo valores:

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = \pm \left[\left[\frac{(-658) - 374}{2} \right]^2 + \left[\frac{-903}{2} \right]^2 \right]^{1/2} = 685.6 \cdot 10^{-6}$$

finalmente de ec.[20] tenemos el ángulo al que se encuentra el plano de los esfuerzos principales:

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \dots\dots\dots\text{ec.[20]}$$

así: $\tan 2\theta = \frac{-903}{(-658) - 374} = 0.875$

entonces $2\theta = 41.2^\circ$

Todos estos valores coinciden con los dados en la hoja de cálculo.

Es posible obtener estos valores mediante las ec.[15,16 y 17] para un ángulo $2\theta = 41.2^\circ$; veamos, de ec.[15]:

$$\epsilon_{x1} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \text{sen} 2\theta \dots\dots\dots\text{ec.[15]}$$

sustituimos:

$$\epsilon_1 = \frac{(-658)+374}{2} + \left[\frac{(-658)-374}{2} \right] \cos 41.2^\circ + \left[\frac{-903}{2} \right] \text{sen} 41.2^\circ = -827.6 \cdot 10^{-6}$$

no olvides que para ϵ_2 solo cambian los signos de la ec.[16]:

$$\epsilon_2 = \frac{(-658)+374}{2} - \left[\frac{(-658)-374}{2} \right] \cos 41.2^\circ - \left[\frac{-903}{2} \right] \text{sen} 41.2^\circ = 543.6 \cdot 10^{-6}$$

y $\gamma/2$ será:

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \text{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \dots\dots\dots \text{ec.[17]}$$

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = \pm \left[\frac{(-658) - 374}{2} \right] \text{sen} 41.2^\circ + \left[\frac{-903}{2} \right] \cos 41.2^\circ = 685.6 \cdot 10^{-6}$$

que son los mismos resultados obtenidos anteriormente.

Para las deformaciones normales en un plano a -35° , nos bastará con cambiar el ángulo en las ecuaciones anteriores; sustituiremos directamente:

$$\epsilon_x = \frac{(-658)+374}{2} + \left[\frac{(-658)-374}{2} \right] \cos -70^\circ + \left[\frac{-903}{2} \right] \text{sen} -70^\circ = 105.7 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{(-658)+374}{2} - \left[\frac{(-658)-374}{2} \right] \cos -70^\circ - \left[\frac{-903}{2} \right] \text{sen} -70^\circ = -389.8 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{\text{máx}}}{2} = \pm \left[\frac{(-658) - 374}{2} \right] \text{sen} -70^\circ + \left[\frac{-903}{2} \right] \cos -70^\circ = -639.3 \cdot 10^{-6}$$

Note que estos valores coinciden con los indicados en la hoja de cálculo para el renglón de 145° ($180^\circ - 35^\circ$ ó $360^\circ - 70^\circ$); así mismo, en el gráfico del círculo de Mohr pueden comprobarse éstos.

Calcularemos finalmente los valores que podríamos esperar en una roseta extensométrica instrumentada en el punto para el cual, hemos calculado lo anterior.

En este punto existen dos alternativas; la primera si se trata de una roseta de 45° y la segunda de 60° (veremos con detalle en los siguientes capítulos que es una roseta extensométrica).

De las ecs.[21,22 y 23] tendremos:

$$\epsilon_a = \epsilon_x \quad \text{ec.[21] } \therefore :$$

$$\epsilon_a = -658 \cdot 10^{-6} \text{ m/m}$$

$$\epsilon_c = \epsilon_y \quad \text{ec.[22] } \therefore :$$

$$\epsilon_c = 374 \cdot 10^{-6} \text{ m/m}$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c \quad \dots \text{ec.[23] } \therefore :$$

$$\epsilon_b = \frac{1}{2} (\gamma_{xy} + \epsilon_a + \epsilon_c)$$

$$\epsilon_b = 0.5 \cdot ((-903 \cdot 10^{-6}) + (-659 \cdot 10^{-6}) + 374 \cdot 10^{-6})$$

$$\epsilon_b = -593.5 \cdot 10^{-6} \text{ m/m}$$

Para rosetas de 60° bastará con sustituir en las ecs.[24, 25 y 26] los valores de las deformaciones normales:

Hemos terminado y debo aclarar que la solución que hemos presentado resulta tal vez demasiado extensa; ello obedece a que se ha pretendido explicar a detalle cada paso y recordar cada ecuación, hecho que al omitirse reduce considerablemente la extensión de la solución; a continuación presentamos algunos problemas propuestos cuyas soluciones encontraran al final del libro, éstos se han dividido en tres grupos; uno para el caso de que los datos iniciales sean los esfuerzos, el segundo para deformaciones unitarias y el tercero para cuando se tengan los datos de la roseta. Es importante que el estudiante cuente ya con sus hojas de cálculo para la solución de estos problemas.

USE ESTA HOJA CON VALORES DE DEFORMACION UNITARIA O DATOS DE LECTURAS DE ROSETA PARA OBTENER LOS VALORES DE ESFUERZOS NORMALES, MAXIMOS Y CIRCULO DE MOHR. LAS CELDAS

HOJA DE CALCULO PARA ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

MODULO ELASTICO E	MODULO RIGIDEZ G	MODULO DE POISSON V	DEFORMACION NORMAL $\epsilon_x = \epsilon_x$	DEFORMACION NORMAL ϵ_y	DEFORMACION NORMAL $\epsilon_z = \epsilon_z$	DEFORMACION ANG. NORMAL γ_{xy}	ESFUERZO NORMAL X	ESFUERZO NORMAL Y	ESFUERZO CORT. NORMAL τ_{xy}
2.00E+11	7.75E+10	0.29	-6.58E-04	-4.50E-05	3.74E-04	9.03E-04	-1.20E+08	4.00E+07	7.00E+07
$\epsilon_x - \epsilon_y / 2$	CENTRO ESFUERZO	CENTRO DEFORMACION	DEFORMACION PRINCIPAL 1	DEFORMACION PRINCIPAL 2	DEFORMACION ANG. MAXIMA	ESFUERZO PRINCIPAL 1	ESFUERZO PRINCIPAL 2	ESFUERZO CORT. MAXIMO	GAMMA $\gamma_{xy} / 2$
-0.000516	-40000000	-1.42E-04	5.44E-04	-8.28E-04	1.37E-03	6.63E+07	-1.46E+08	1.06E+08	4.52E-04
PUNTO	ANGULO GRADOS	ANGULO RADIANTES	DEFORMACION ϵ_1	DEFORMACION ϵ_2	DEF. ANGULAR γ_{12}	ESFUERZO σ_1	ESFUERZO σ_2	ESF. CORTANTE τ_{12}	ESFUERZOS $\sigma - \tau / 2$
1	0	0	-6.58E-04	3.74E-04	4.52E-04	-1.20E+08	4.00E+07	7.00E+07	-80000000
2	5	0.08726	-5.72E-04	2.88E-04	5.34E-04	-1.07E+08	2.66E+07	8.28E+07	-1.20E+08
3	10	0.17452	-4.72E-04	1.88E-04	6.01E-04	-9.12E+07	1.12E+07	9.31E+07	
4	15	0.26178	-3.63E-04	7.91E-05	6.49E-04	-7.43E+07	-5.71E+06	1.01E+08	
5	20	0.34904	-2.47E-04	-3.69E-05	6.78E-04	-5.63E+07	-2.37E+07	1.05E+08	
6	25	0.43630	-1.28E-04	-1.56E-04	6.85E-04	-3.78E+07	-4.22E+07	1.06E+08	
7	30	0.52356	-9.04E-06	-2.75E-04	6.73E-04	-1.94E+07	-6.06E+07	1.04E+08	
8	35	0.61082	1.06E-04	-3.90E-04	6.39E-04	-1.59E+06	-7.84E+07	9.91E+07	
9	40	0.69808	2.13E-04	-4.97E-04	5.97E-04	1.50E+07	-9.50E+07	9.09E+07	
10	45	0.78534	3.09E-04	-5.93E-04	5.16E-04	3.00E+07	-1.10E+08	8.00E+07	
11	50	0.87260	3.92E-04	-6.76E-04	4.30E-04	4.28E+07	-1.23E+08	6.66E+07	
12	55	0.95986	4.59E-04	-7.43E-04	3.31E-04	5.31E+07	-1.33E+08	5.12E+07	
13	60	1.04712	5.07E-04	-7.91E-04	2.21E-04	6.06E+07	-1.41E+08	3.43E+07	
14	65	1.13438	5.36E-04	-8.20E-04	1.05E-04	6.50E+07	-1.45E+08	1.63E+07	
15	70	1.22164	5.44E-04	-8.28E-04	-1.41E-05	6.63E+07	-1.46E+08	-2.18E+06	
16	75	1.30890	5.31E-04	-8.15E-04	-1.33E-04	6.43E+07	-1.44E+08	-2.06E+07	
17	80	1.39616	4.97E-04	-7.81E-04	-2.48E-04	5.91E+07	-1.39E+08	-3.84E+07	
18	85	1.48342	4.45E-04	-7.29E-04	-3.55E-04	5.10E+07	-1.31E+08	-5.50E+07	
19	90	1.57068	3.74E-04	-6.58E-04	-4.51E-04	4.00E+07	-1.20E+08	-7.00E+07	4.00E+07
20	95	1.65794	2.88E-04	-5.72E-04	-5.34E-04	2.66E+07	-1.07E+08	-8.28E+07	
21	100	1.74520	1.88E-04	-4.72E-04	-6.01E-04	1.12E+07	-9.12E+07	-9.31E+07	
22	105	1.83246	7.91E-05	-3.63E-04	-6.49E-04	-5.63E+06	-7.43E+07	-1.01E+08	
23	110	1.91972	-3.69E-05	-2.47E-04	-6.78E-04	-2.37E+07	-5.63E+07	-1.05E+08	
24	115	2.00698	-1.56E-04	-1.28E-04	-6.86E-04	-4.22E+07	-3.78E+07	-1.06E+08	
25	120	2.09424	-2.75E-04	-9.20E-06	-6.73E-04	-6.06E+07	-1.94E+07	-6.06E+07	
26	125	2.18150	-3.90E-04	1.06E-04	-6.39E-04	-7.84E+07	-1.61E+06	-9.91E+07	
27	130	2.26876	-4.97E-04	2.13E-04	-5.87E-04	-9.50E+07	1.50E+07	-9.10E+07	
28	135	2.35602	-5.93E-04	3.09E-04	-5.16E-04	-1.10E+08	3.00E+07	-8.00E+07	
29	140	2.44328	-6.76E-04	3.92E-04	-4.30E-04	-1.23E+08	4.28E+07	-6.67E+07	
30	145	2.53054	-7.43E-04	4.59E-04	-3.31E-04	-1.33E+08	5.31E+07	-5.13E+07	
31	150	2.61780	-7.91E-04	5.07E-04	-2.21E-04	-1.41E+08	6.06E+07	-3.43E+07	
32	155	2.70506	-8.20E-04	5.36E-04	-1.05E-04	-1.45E+08	6.50E+07	-1.63E+07	
33	160	2.79232	-8.28E-04	5.44E-04	1.39E-05	-1.46E+08	6.63E+07	2.16E+06	
34	165	2.87958	-8.15E-04	5.31E-04	1.33E-04	-1.44E+08	6.43E+07	2.06E+07	
35	170	2.96684	-7.81E-04	4.97E-04	2.48E-04	-1.39E+08	5.91E+07	3.84E+07	
36	175	3.05410	-7.29E-04	4.45E-04	3.55E-04	-1.31E+08	5.10E+07	5.50E+07	
37	180	3.14136	-6.58E-04	3.74E-04	4.51E-04	-1.20E+08	4.00E+07	7.00E+07	
			3.74E-04		-4.51E-04	4.00E+07		-7.00E+07	

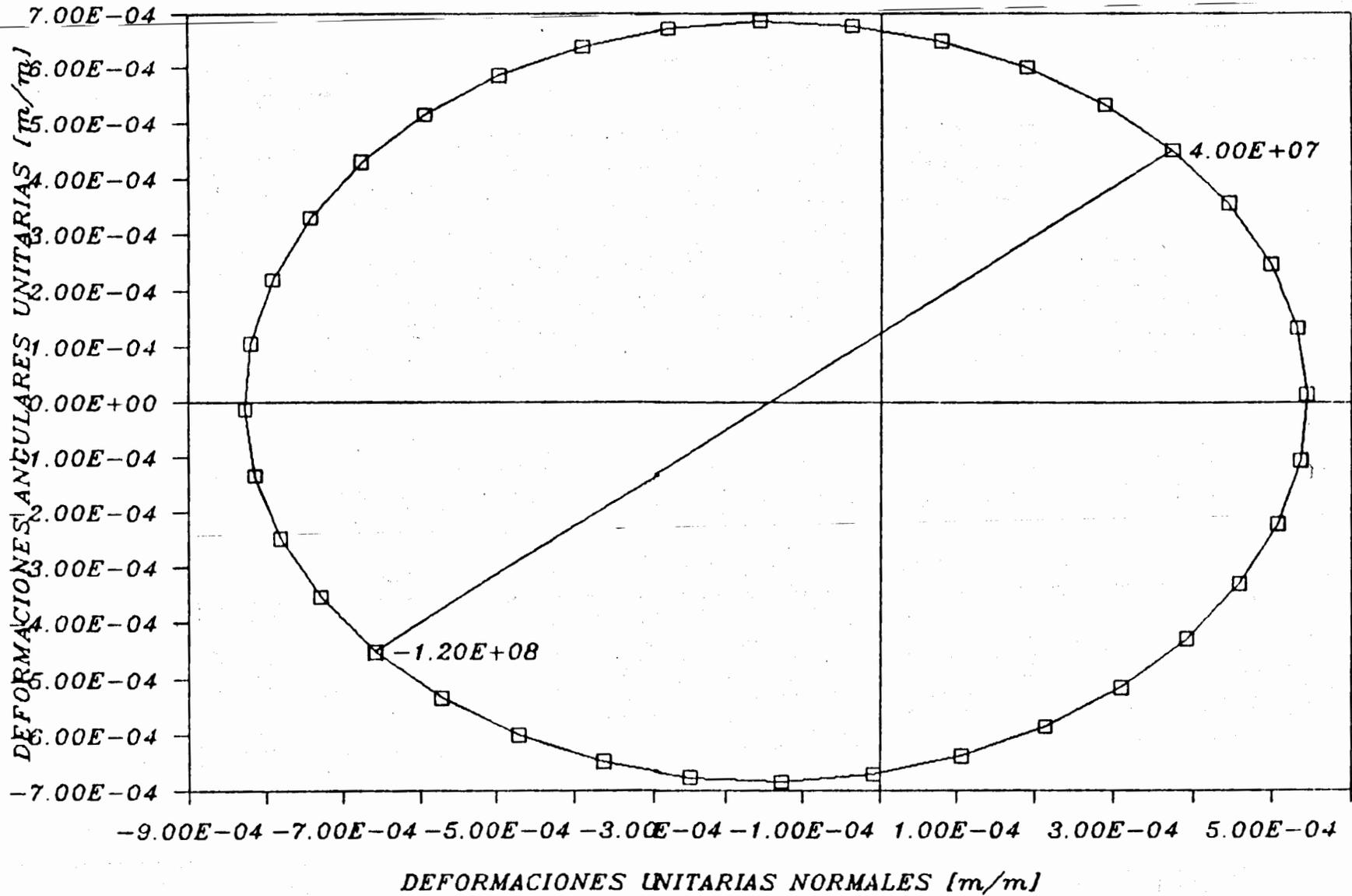
13 USE ESTA HOJA CUANDO DESEE ENTRAR CON VALORES DE ESFUERZOS Y OBTENDRA
 LOS VALORES DE LAS DEFORMACIONES EN ROSETA MEDIAN DE LAS GRAFICAS
 PARA LOS ESFUERZOS Y DEFORMACIONES; LAS CELAS J22 Y J40 LLEVAN LOS DATOS
 INICIALES DE ESFUERZOS O DEFORMACIONES NORMALES DEL ELEMENTO QUE SE ESTUDIA

HOJA DE CALCULO PARA ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

MODULO ELASTICIDAD E	MODULO RIGIDEZ G	MODULO DE POISSON V	ESFUERZO NORMAL X	ESFUERZO NORMAL Y	ESFUERZO CORT. NORMAL XY	DEFORMACION NORMAL Ea=Ex	DEFORMACION NORMAL Eb	DEFORMACION NORMAL Ec=Ey	DEFORMACION ANG. NORMAL XY
Ex-Ey/2	CENTRO ESFUERZO	CENTRO DEFORMACION	DEFORMACION PRINCIPAL 1	DEFORMACION PRINCIPAL 2	DEFORMACION ANG. MAXIMA	ESFUERZO PRINCIPAL 1	ESFUERZO PRINCIPAL 2	ESFUERZO CORT. MAXIMO	GAMMA XY/2
PUNTO	ANGULO GRADOS	ANGULO RADIANS	DEFORMACION X1	DEFORMACION Y1	DEF. ANGULAR X1Y1/2	ESFUERZO X1	ESFUERZO Y1	ESF. CORTANTE X1Y1	ESFUERZOS X-Y/2
									-0000000
1	0	0	-6.58E-04	3.74E-04	-4.51E-04	-1.20E+08	4.00E+07	-7.00E+07	(-6.58E-4, -4.51
2	5	0.08726	-7.29E-04	4.45E-04	-3.55E-04	-1.31E+08	5.09E+07	-5.50E+07	
3	10	0.17452	-7.81E-04	4.97E-04	-2.48E-04	-1.39E+08	5.91E+07	-3.84E+07	
4	15	0.26178	-8.15E-04	5.31E-04	-1.33E-04	-1.44E+08	6.43E+07	-2.06E+07	
5	20	0.34904	-8.27E-04	5.43E-04	-1.42E-05	-1.46E+08	6.63E+07	-2.21E+06	
6	25	0.43630	-8.20E-04	5.36E-04	1.05E-04	-1.45E+08	6.50E+07	-1.63E+07	
7	30	0.52356	-7.91E-04	5.07E-04	2.21E-04	-1.41E+08	6.06E+07	3.43E+07	
8	35	0.61082	-7.43E-04	4.59E-04	3.30E-04	-1.33E+08	5.31E+07	5.12E+07	
9	40	0.69808	-6.76E-04	3.92E-04	4.30E-04	-1.23E+08	4.28E+07	6.66E+07	
10	45	0.78534	-5.94E-04	3.10E-04	5.16E-04	-1.10E+08	3.00E+07	8.00E+07	
11	50	0.87260	-4.97E-04	2.13E-04	5.87E-04	-9.51E+07	1.51E+07	9.09E+07	
12	55	0.95986	-3.90E-04	1.06E-04	6.39E-04	-7.84E+07	-1.57E+06	9.91E+07	
13	60	1.04712	-2.75E-04	-8.89E-06	6.73E-04	-6.06E+07	-1.94E+07	1.04E+08	
14	65	1.13438	-1.56E-04	-1.28E-04	6.85E-04	-4.22E+07	-3.78E+07	1.06E+08	
15	70	1.22164	-3.71E-05	-2.47E-04	6.78E-04	-2.37E+07	-5.63E+07	1.05E+08	
16	75	1.30890	7.90E-05	-3.63E-04	6.49E-04	-5.74E+06	-7.43E+07	1.01E+08	
17	80	1.39616	1.88E-04	-4.72E-04	6.01E-04	1.12E+07	-9.12E+07	9.32E+07	
18	85	1.48342	2.88E-04	-5.72E-04	5.34E-04	2.66E+07	-1.07E+08	8.28E+07	
19	90	1.57068	3.74E-04	-6.58E-04	4.52E-04	4.00E+07	-1.20E+08	7.00E+07	(3.74E-5, 4.51E-
20	95	1.65794	4.44E-04	-7.28E-04	3.55E-04	5.09E+07	-1.31E+08	5.51E+07	
21	100	1.74520	4.97E-04	-7.81E-04	2.48E-04	5.91E+07	-1.39E+08	3.84E+07	
22	105	1.83246	5.31E-04	-8.15E-04	1.33E-04	6.43E+07	-1.44E+08	2.06E+07	
23	110	1.91972	5.43E-04	-8.27E-04	1.44E-05	6.63E+07	-1.46E+08	2.23E+06	
24	115	2.00698	5.36E-04	-8.20E-04	-1.05E-04	6.50E+07	-1.45E+08	-1.63E+07	
25	120	2.09424	5.07E-04	-7.91E-04	-2.21E-04	6.06E+07	-1.41E+08	-3.43E+07	
26	125	2.18150	4.59E-04	-7.43E-04	-3.30E-04	5.32E+07	-1.33E+08	-5.12E+07	
27	130	2.26876	3.92E-04	-6.76E-04	-4.30E-04	4.28E+07	-1.23E+08	-6.66E+07	
28	135	2.35602	3.10E-04	-5.94E-04	-5.16E-04	3.00E+07	-1.10E+08	-8.00E+07	
29	140	2.44328	2.13E-04	-4.97E-04	-5.86E-04	1.51E+07	-9.51E+07	-9.09E+07	
30	145	2.53054	1.06E-04	-3.90E-04	-6.39E-04	-1.55E+06	-7.85E+07	-9.91E+07	
31	150	2.61780	-8.73E-06	-2.75E-04	-6.73E-04	-1.93E+07	-6.07E+07	-1.04E+08	
32	155	2.70506	-1.28E-04	-1.56E-04	-6.85E-04	-3.78E+07	-4.22E+07	-1.06E+08	
33	160	2.79232	-2.47E-04	-3.72E-05	-6.78E-04	-5.62E+07	-2.38E+07	-1.05E+08	
34	165	2.87958	-3.63E-04	7.88E-05	-6.49E-04	-7.42E+07	-5.76E+06	-1.01E+08	
35	170	2.96684	-4.72E-04	1.88E-04	-6.01E-04	-9.12E+07	-1.12E+07	-9.32E+07	
36	175	3.05410	-5.72E-04	2.88E-04	-5.34E-04	-1.07E+08	2.66E+07	-8.29E+07	
37	180	3.14136	-6.58E-04	3.74E-04	-4.52E-04	-1.20E+08	4.00E+07	-7.00E+07	
			3.74E-04		4.52E-04	4.00E+07		7.00E+07	

CIRCULO DE MOHR PARA DEFORMACIONES

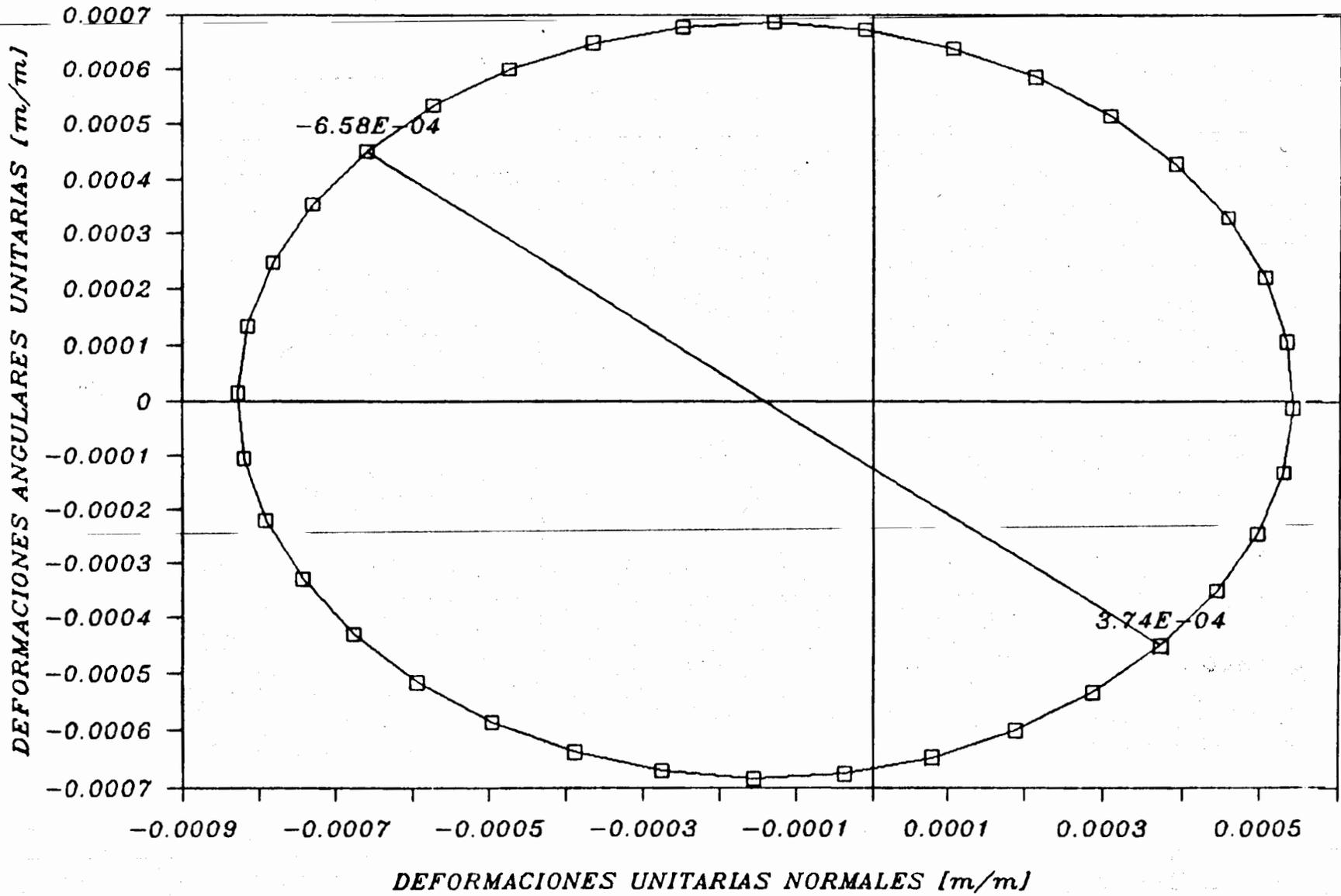
EJEMPLO DE APLICACION



CIRCULO DE MOHR PARA DEFORMACIONES

EJEMPLO DE APLICACION

40



PROBLEMAS PROPUESTOS.

Para los problemas que siguen encuentra los siguientes datos:

- 1.- Valor de los esfuerzos principales ó máximos y su dirección.
- 2.- Esfuerzos normales en la dirección del ángulo indicados.
- 3.- Deformaciones unitarias normales, principales (incluida su dirección) y al plano indicado.
- 4.- Valores esperados en roseta, según la configuración que se indique.

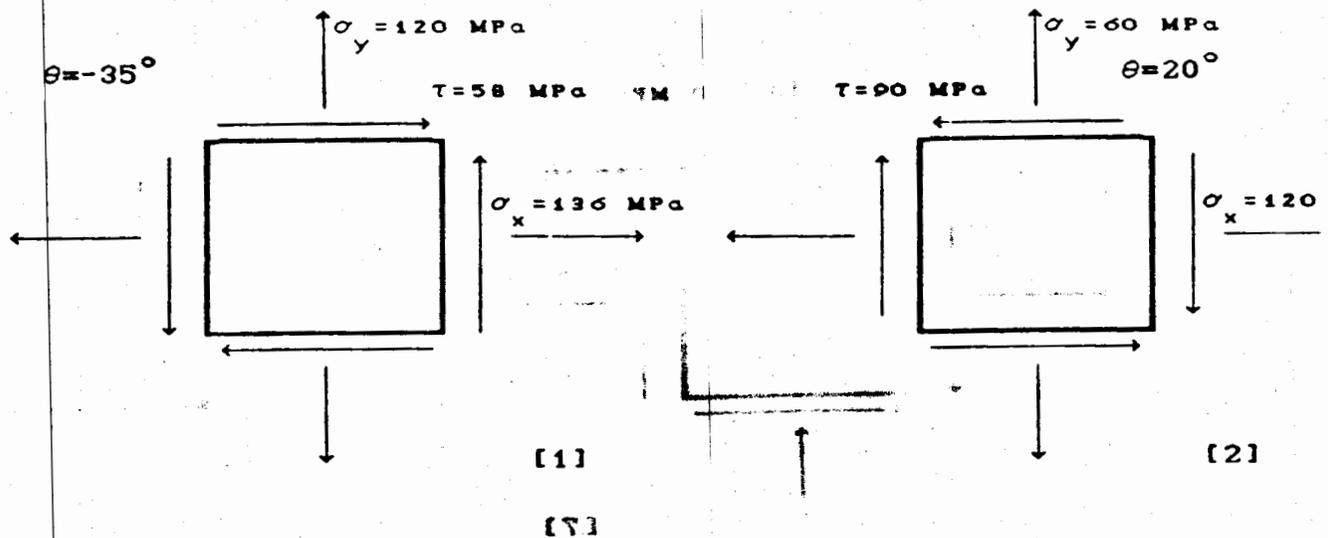
En todos los casos emplea las ecuaciones algebraicas para valores normales y máximos (si se aplica) y los métodos gráficos.

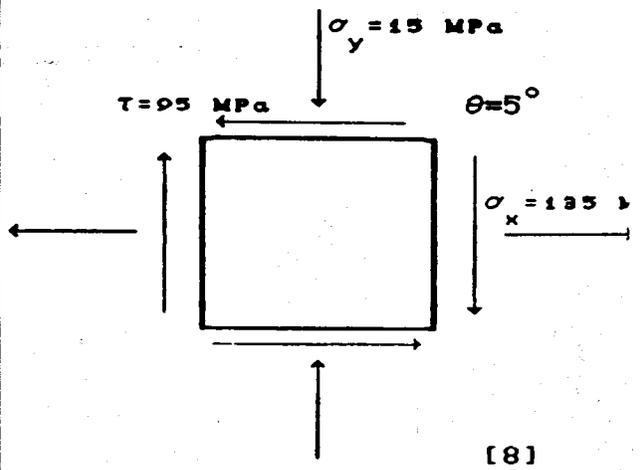
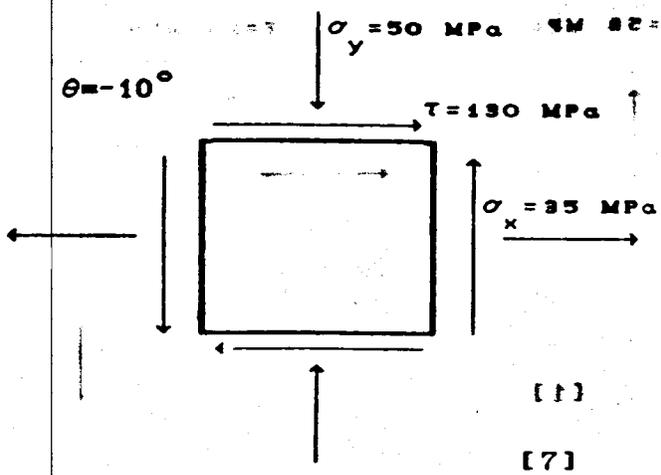
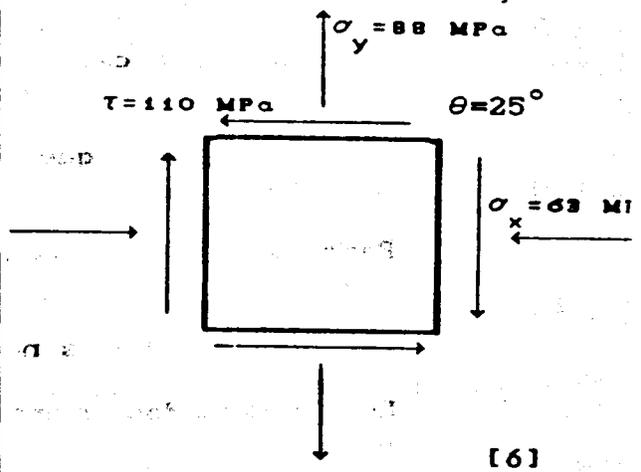
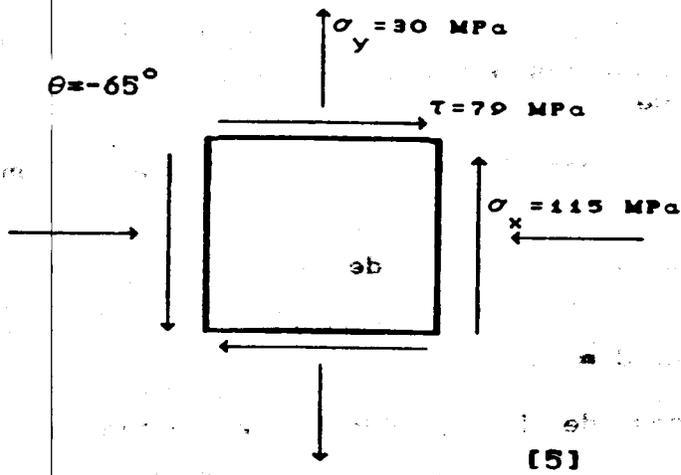
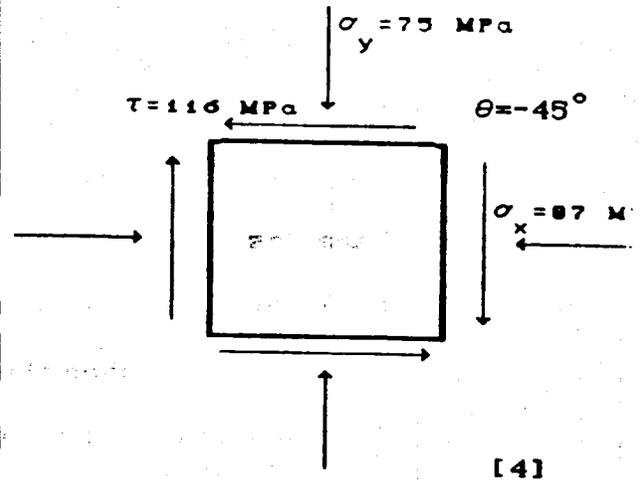
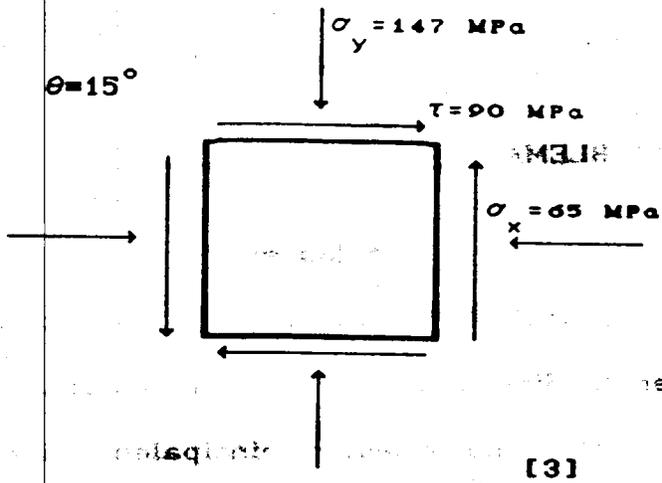
Consideraremos que en todos los casos se trata de materiales isotrópicos y homogéneos.

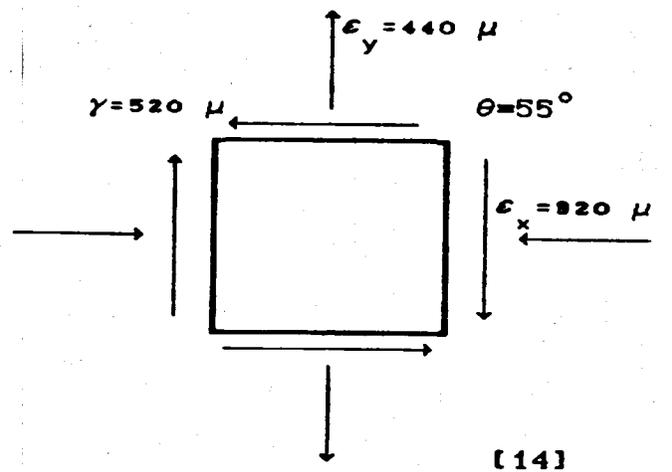
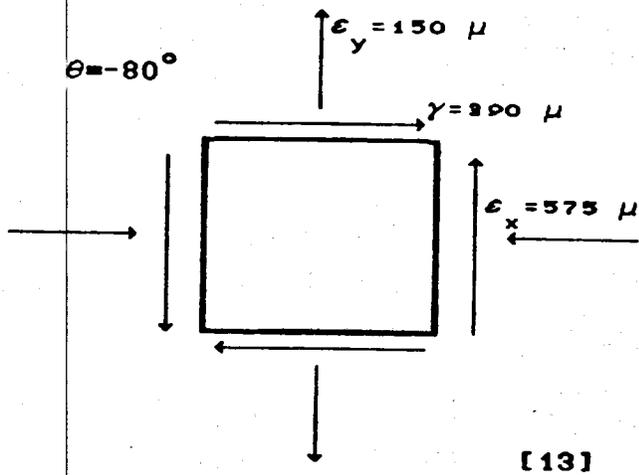
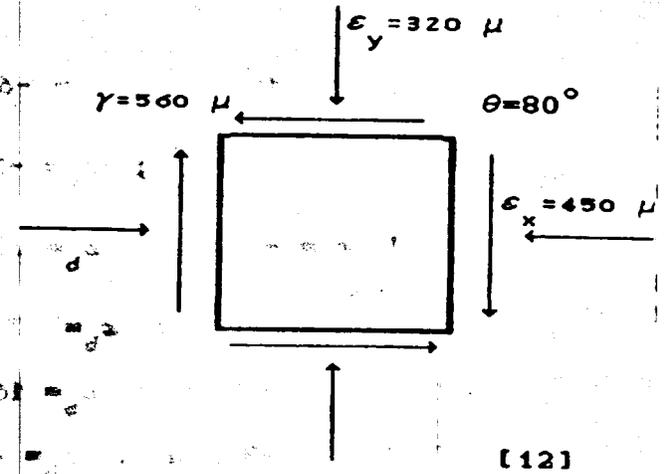
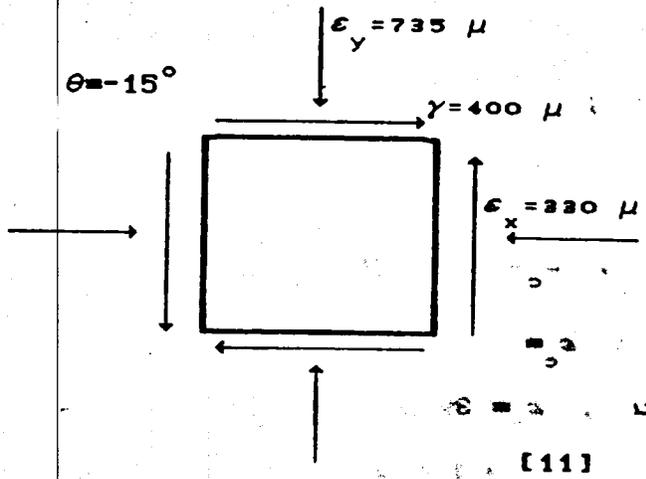
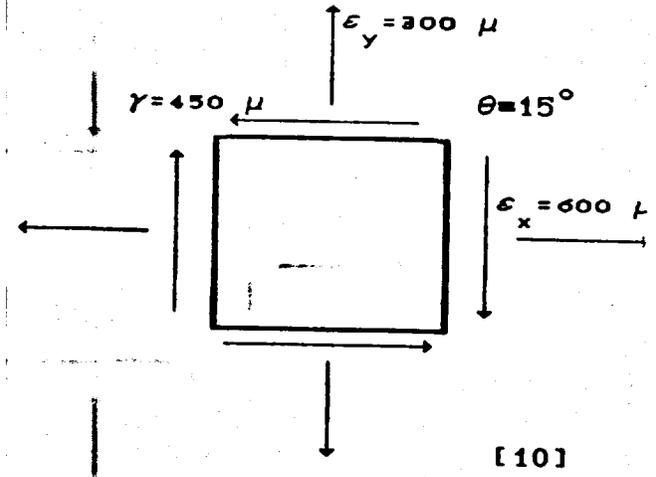
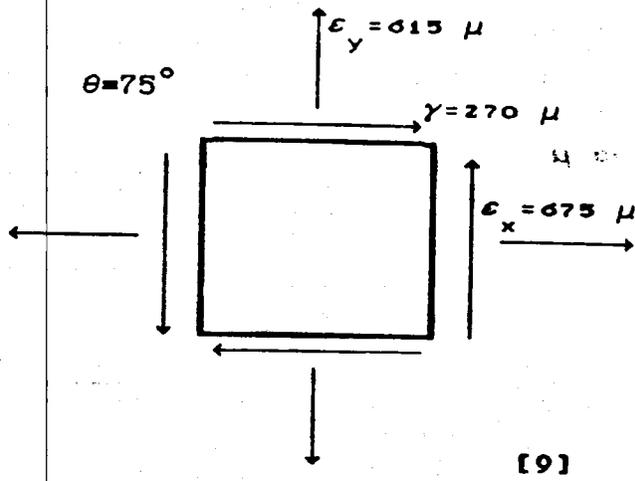
Para los problemas pares se trata de acero con $E = 200 \text{ GPa}$ y $\nu = 0.29$.

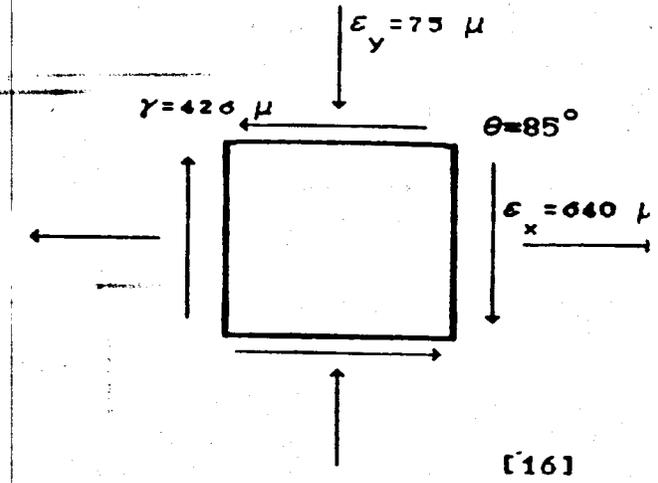
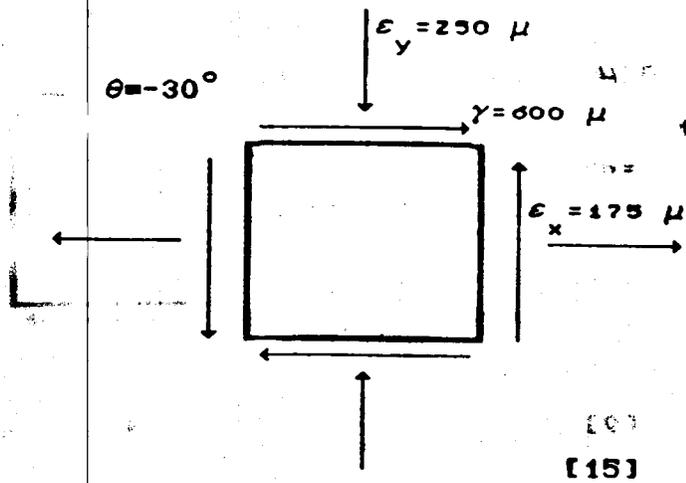
Para los problemas nones $E = 73 \text{ GPa}$ y $\nu = 0.31$

Los resultados numéricos de los problemas aparecen al final del libro.









[17] $\epsilon_a = 115 \mu$; $\epsilon_b = -63 \mu$; $\epsilon_c = 92 \mu$

[18] $\epsilon_a = 420 \mu$; $\epsilon_b = -325 \mu$; $\epsilon_c = 172 \mu$

[19] $\epsilon_a = -97 \mu$; $\epsilon_b = 75 \mu$; $\epsilon_c = -149 \mu$

[20] $\epsilon_a = 10 \mu$; $\epsilon_b = 47 \mu$; $\epsilon_c = -420 \mu$

[21] $\epsilon_a = -5 \mu$; $\epsilon_b = 166 \mu$; $\epsilon_c = 39 \mu$

[22] $\epsilon_a = -382 \mu$; $\epsilon_b = 49 \mu$; $\epsilon_c = 164 \mu$

[13]

CAPITULO 3

EXTENSOMETRIA ELECTRICA

PRINCIPIOS DE OPERACION, MEDICION E INSTALACION

En este capítulo, veremos qué son los extensómetros eléctricos, sus principios de funcionamiento y medición, así como las características más importantes de su instalación. Veremos también que éstos son transductores que nos permiten obtener datos de deformación a partir de cambios de resistencia eléctrica y que con ello es posible obtener, mediante transformaciones adecuadas, no sólo esfuerzos, si no también fuerzas, presiones, temperaturas y pares torsionantes entre otros (mediante dispositivos especialmente diseñados para cada fin; como los que veremos en otro capítulo).

3.1 INTRODUCCION.

Como sabemos, contamos con una serie de ecuaciones que nos permiten obtener el estado de esfuerzos de un elemento estructural cualquiera solicitado en uno ó dos de sus ejes (*aunque también las hay para tres de ellos, pero no las emplearemos en el presente texto*); así mismo, contamos con ecuaciones que nos permiten obtener el estado de esfuerzos a partir de los valores de deformación en esos ejes (*estado de deformación*). Resulta evidente entonces que si contamos con una lectura confiable del estado de deformación, podemos saber a qué valores de esfuerzo trabaja ese elemento, lo que ya en sí es un dato valiosísimo, pues nos permitiría comprobar si los valores de nuestro cálculo estructural corresponden a los obtenidos experimentalmente, con lo que evitaríamos el riesgo de subdimensionamiento ó sobredimensionamiento de esos elementos estructurales; por otro lado nos ayudaría a verificar el grado de aproximación de nuestros cálculos y a corregir, en su caso, nuestros errores.

La extensometría eléctrica es precisamente una técnica que nos permite obtener el estado de deformación con un alto grado de exactitud, lo que, aunado a su facilidad de instalación y bajo costo, la convierte en una herramienta indispensable en la ingeniería moderna.

Pero no solo podemos obtener esfuerzos con los extensómetros eléctricos, ya que al ser estos unos transductores que transforman los cambios de resistencia eléctrica a deformación unitaria, es posible, mediante las ecuaciones y conversiones adecuadas, tener parámetros tales como fuerza, presión, desplazamiento, temperatura, aceleración, par torsor, dilatación térmica, y otros muchos que ésta técnica nos permite obtener con relativa facilidad y economía; razón por la cual es aplicada en todos los desarrollos de la ingeniería moderna.

3.2 QUE ES Y COMO OPERA UN EXTENSOMETRO ELÉCTRICO.

En general todos los métodos de análisis experimental de esfuerzos se basan en la deformación del elemento para la determinación del esfuerzo al que trabaja; eche una ojeada a los instrumentos mecánicos, eléctricos, ópticos ó acústicos tradicionales y comprobará que ésta aseveración es cierta; exceptuando a los métodos fotoelásticos, ya que en estos el material se calibra para la determinación directa de los esfuerzos, como veremos en otro capítulo.

Los extensómetros eléctricos no son la excepción, pues su principio de operación se basa en los cambios de resistencia eléctrica que sufre un conductor, cuando es sometido a cambios en su longitud; principio que si bien fué enunciado en 1856 por Lord William Thomson Kelvin¹, no fué sino hasta 1938 en que Simmons y Ruge en USA, emplearon lo que podemos considerar hoy como un extensómetro eléctrico.

Veamos ahora las ecuaciones que rigen la operación de los extensómetros; en primer lugar, es importante recordar que la resistencia eléctrica de cualquier conductor, depende del material de que se trate y de sus dimensiones, y viene dada por la siguiente ecuación:

$$R = \rho * L / A \quad \text{ec. (1)}$$

¹ En realidad Kelvin trabajaba con otros problemas en conductores eléctricos; en los que observó cambios en su resistencia al someterlos a diferentes tensiones; fué así, como a fin de minimizar este indeseable efecto para él, estudió detenidamente la forma de contrarrestarlo determinando con precisión su magnitud; de este estudio surgió el principio en que hoy se basan los extensómetros. Cabe señalar que para sus mediciones, Kelvin empleó el puente de Wheatstone, pero nunca aplicó estos conocimientos a la resistencia de materiales.

en donde R es la resistencia eléctrica [ohms], L la longitud [m], A el área seccional del conductor [m²] y ρ la resistividad [ohms·m²/m].

Por otro lado, Kelvin encontró que la resistencia eléctrica de un conductor solicitado a esfuerzo, cambia proporcionalmente a la deformación que éste sufre; lo cual podemos expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta R}{R} = FE \frac{\Delta L}{L} \quad \text{ec.[2]}$$

en donde R y L son la resistencia eléctrica y la longitud como antes se dijo y FE es el factor de proporcionalidad ó factor del extensómetro (Gage Factor). [imagina un sistema de ejes cartesianos en los que el eje de las X representa $\Delta L/L = \epsilon$ y el de las Y $\Delta R/R$; entonces FE es la pendiente de la gráfica que da esa relación]

Vemos así que sería posible obtener la deformación unitaria de un elemento estructural ($\Delta L/L = \epsilon$); si de alguna forma logramos instalar un elemento conductor íntimamente adherido al ély medimos su cambio de resistencia eléctrica... esto es precisamente lo que es un extensómetro eléctrico; un finísimo conductor, con una resistencia y un Factor de Extensómetro exactamente conocidos, y montado sobre una delgada capa de material de soporte que les permiten ser pegados fácil e íntimamente a cualquier elemento estructural (Fig. a); además, es factible obtenerlo en una variedad casi infinita de tamaños y formas lo que indudablemente hace posible su instalación en prácticamente cualquier punto y medir con muy alta precisión su ΔR y con ello la deformación unitaria ϵ bajo las más variadas condiciones de cargas y ambientes.

Estas sobresalientes cualidades de un extensómetro eléctrico, obedecen al hecho de que en su fabricación, se emplean las técnicas más modernas de los circuitos electrónicos impresos, respaldados por una extensiva y profunda investigación de materiales y técnicas; en el siguiente capítulo veremos detalles de construcción, materiales, selección e instrumentación, indicadas por el fabricante. En la figura 1 puede verse la configuración de un extensómetro.

* Note la analogía de esta resistencia con las pérdidas en una tubería hidráulica, en la que las éstas dependen de sus dimensiones y de la rugosidad ó tipo de material que se esté empleando.

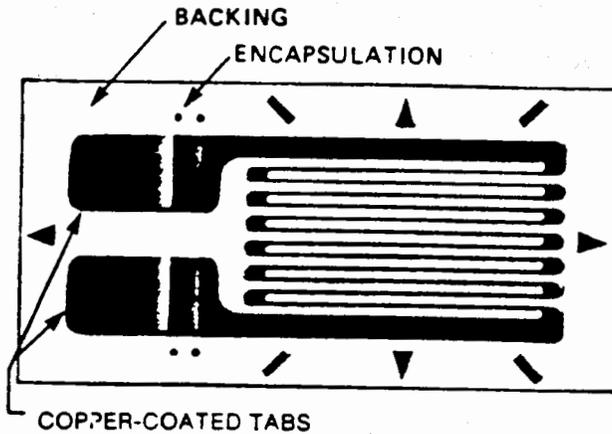


Fig. 1 Características de un Extensómetro Típico (tomado del Student Manual for Strain Gages Technology; Measurements Group)

3.3 COMO SE MIDE LA ΔR O LA ϵ EQUIVALENTE

Acabamos de ver la factibilidad de obtener la ϵ (deformación unitaria) a partir de la ΔR ; entonces nuestro problema es ahora el medir la ΔR , para ello utilizaremos el puente de Wheatstone, el cual seguramente lo habrán visto en alguno de sus cursos de física, no obstante, recordaremos brevemente sus principios de operación.

En la figura 2, tenemos un arreglo de cuatro resistencias eléctricas R_1 , R_2 , R_3 y R_4 las cuales son alimentadas por la batería F en los puntos A y B ; entre los puntos C y D se coloca un galvanómetro que nos permitirá medir la intensidad y dirección de la corriente eléctrica que circule entre los puntos C y D cuando exista una diferencia de potencial entre ellos; este dispositivo recibe el nombre de puente de Wheatstone.

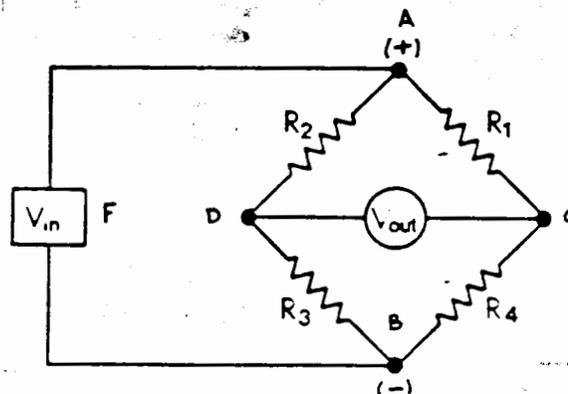


Fig. 2 Puente de Wheatstone..

Pero antes de continuar, hagamos una analogía hidráulica de este circuito: imagina que en lugar de las resistencias R , los tramos **ACB** y **ADB** son tuberías horizontales con idénticas dimensiones y rugosidad y que entre **C** y **D** conectamos un manómetro de presión; en lugar de la batería **F** tenemos una bomba que hace circular agua por el dispositivo; estarás de acuerdo que empleando la ecuación de Bernoulli, podemos esperar que en ambas ramas tengamos la misma velocidad y con ello el mismo gasto. Bien, ahora coloquemos entre **C** y **B** una válvula de paso abierta exactamente a la mitad de su carrera...ésta provocará una pérdida "h" en esa rama y con ello una diferencia entre las velocidades de las ramas **ACB** y **ADB**; ocasionando una diferencia de presión entre los puntos **C** y **D**, con lo que el manómetro **M** registrará un movimiento de su aguja; este movimiento de la aguja será mayor en la medida en que la válvula se abra ó se cierre más (*desde luego que dicho desplazamiento puede ser en uno ú otro sentido, ya que la variación de presión puede ser positiva ó negativa*). Pero el desequilibrio que provocó la válvula entre **C** y **D** puede ser compensado si entre **D** y **B** colocáramos otra válvula también idéntica a la anterior; con lo que es posible equilibrar la indicación del manómetro, logrando de esta forma que la variación de presión que se registre si se abre o cierra la válvula **CB** sea proporcional a la variación del gasto entre las dos ramas.

Bueno, si regresamos a nuestro puente de Wheatstone tal vez resulte ahora más fácil comprender que si de alguna forma cambiáramos el valor de la resistencia R_1 (lo cual podría ser el caso de un extensómetro colocado sobre un elemento estructural solicitado a esfuerzo), el galvanómetro registraría un movimiento de su aguja en uno u otro sentido según se aumente ó disminuya ésta, lo cual es precisamente lo que necesitamos.

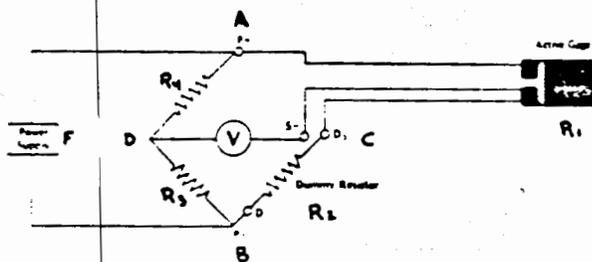


Fig. 3 Circuito de cuarto de puente (3 cables).

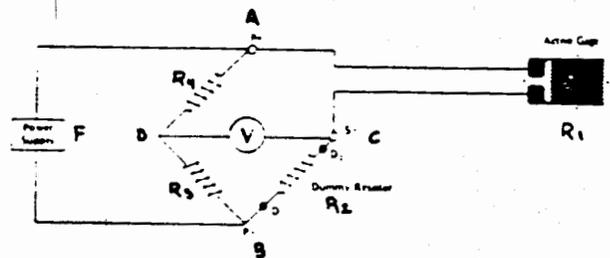


Fig. 4 Circuito de cuarto de puente (2 cables)

En la figura 3 tenemos un circuito de cuarto de puente (porque utiliza como elemento activo, una de las cuatro resistencias), que corresponde al ejemplo que acabamos de dar; en él, R_1 representa al extensómetro. Nota que hay 3 cables, 2 de ellos comunes a una terminal y conectados al punto C de conexión con la rama AC y al galvanómetro; el otro se conecta en A; es recomendable hacerlo así a fin de que la resistencia eléctrica del cable conductor no se registre como variación de R_1 . En la figura 4 se muestra un circuito similar, pero utilizando 2 cables en lugar de 3, con lo que la longitud del tramo AC es diferente a la del CB, lo que podría provocar un movimiento de la aguja del galvanómetro (cuando la longitud de los cables sea suficientemente grande para que su resistencia sea notoria), y éste podría ser interpretado como si lo causara una deformación, cuando en realidad solo obedecería a la resistencia del conductor dada por la ec. [1]. Algo similar ocurriría si la instalación estuviera sujeta a cambios notorios de temperatura, ya que la dilatación térmica del elemento en el que se encuentre el extensómetro, podría ser interpretada como esfuerzo y no simplemente como dilatación; esto puede corregirse utilizando un circuito de medio puente.

La figura 5 corresponde a un circuito de medio puente; este caso es equivalente al de poner una válvula de compensación como vimos anteriormente en la analogía hidráulica, observa que las resistencias R_1 y R_4 son utilizadas como elementos activos; éste podría ser el caso por ejemplo, de un elemento estructural instrumentado con un extensómetro activo, y otro idéntico, montado sobre un pedazo aparte del mismo material y que responderá a las dilataciones térmicas únicamente; esto es, actúa como un compensador que equilibra las deformaciones que por temperatura sufra el elemento activo, evitando así que éstas sean interpretadas como esfuerzo. Ya habrás notado que existe una diferencia de signo ó sentido de desplazamiento de la aguja si utilizas la rama AC o CB del puente; esto es la causa de que a pesar de que la dilatación térmica es de la misma magnitud y sentido en ambas ramas, ésta se contrarresta balanceando ó equilibrando al puente.

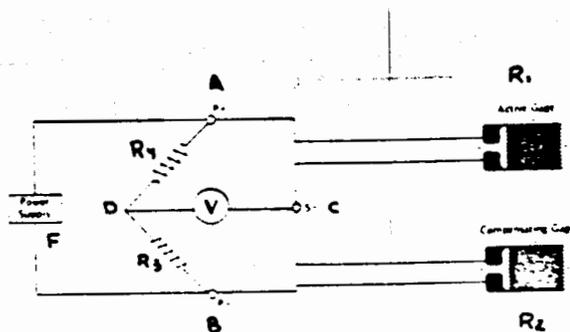
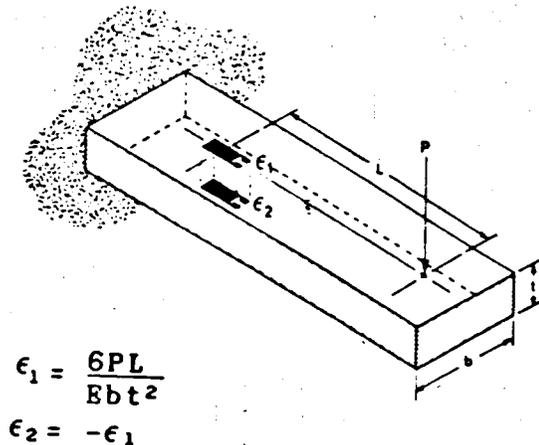


fig5 Circuito de medio puente.



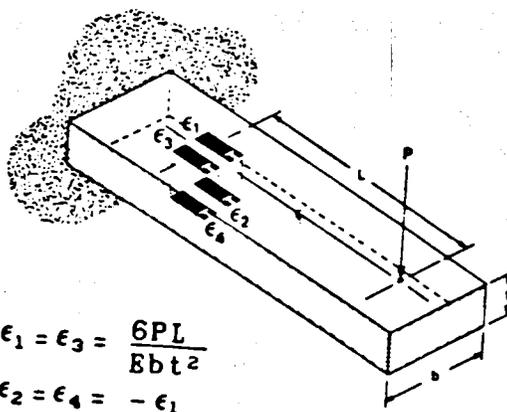
$$\epsilon_1 = \frac{6PL}{Ebt^2}$$

$$\epsilon_2 = -\epsilon_1$$

fig. 6 Viga en voladizo instrumentada a medio puente

La figura 6 muestra una viga en voladizo en la que se han instrumentado 2 extensómetros, uno actuará a tracción y el otro a compresión, por lo que, al estar en ramas distintas del puente y, al tener signos contrarios sus deformaciones, éstas se sumarán duplicando la señal enviada al puente y con ello la precisión de la lectura.

En la figura 7 se muestra un circuito de puente completo, en él, las cuatro resistencias son activas lo que, como en el caso de la viga, puede ayudarnos a obtener mayor precisión en nuestras lecturas (esta configuración es la que se emplea en transductores de precisión).



$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \frac{6PL}{Ebt^2}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_4 = -\epsilon_1$$

Fig. 7 Viga en voladizo instrumentada a puente completo.

En la figura 8 tenemos la instrumentación de un dispositivo para medir torsión; se trata de un elemento en el que las cuatro resistencias son activas, nota que la deformación que podría

producir una carga axial, de flexión ó térmica son anuladas debido a que ϵ_1 y ϵ_2 (así como ϵ_3 y ϵ_4) se encuentran en ramas del puente con sentidos contrarios; lo que produce la anulación de sus efectos.

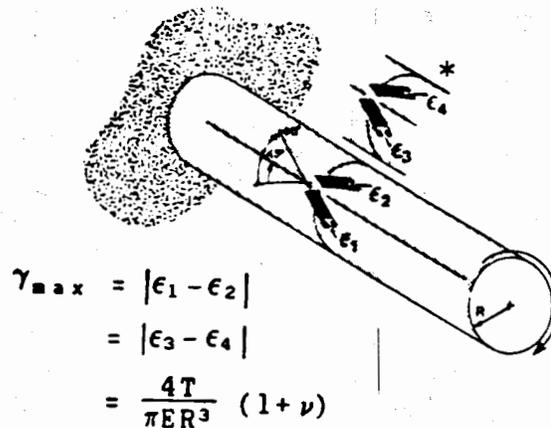


Fig. 8 Barra torsionante instrumentada a puente completo.

Hemos visto los principios fundamentales en que se basan los extensómetros y el puente de Wheatstone que se utiliza para su medición; sin embargo, dada la importancia que reviste la completa comprensión de éste último, incluimos en el anexo 1 al final de este capítulo, la traducción que al respecto se encuentra en los NOTEBOOK 7, 8 Y 9, que edita la compañía MEASUREMENTS GROUP³.

3.4 PREPARACION DE SUPERFICIES PARA EL PEGADO DE EXTENSOMETROS

En el punto 3.2, dijimos que los extensómetros son finisimos dispositivos que deberían ser íntimamente pegados al elemento estructural que se pretende analizar; esta acción es particularmente importante, debido a que el extensómetro habrá de transmitir íntegramente las pequeñísimas deformaciones que sufra la superficie del material en que se encuentre instalado, por lo que, cualquier falla, burbuja ó impureza, podría dar origen a

la compañía Measurements Group es tal vez la compañía mas grande e importante a nivel mundial, que se dedica exclusivamente a la fabricación de materiales y equipos para el analisis experimental de esfuerzos ; además cuenta con servicio técnico de asesoría, cursos y literatura técnica especializada que mantienen al suscriptor actualizado mediante ^o boletines como el NOTEBOOK, TECHTIPS, TECH NOTE y otras.

Parte de estas publicaciones son traducidas aquí con autorización de dicha compañía.

lecturas erróneas; con las obvias peligrosas consecuencias que podrían darse al interpretar valores de esfuerzos falsos. Veremos a continuación las técnicas de preparación de las superficies y de pegado, que recomienda la compañía *Measurements Group* en su *Student Manual for Strain Gages Technology* (del cual traduciremos buena parte de las secciones 3.0, 4.0 y 5.0), y que deberán llevarse a cabo en los puntos en que se pretenda instalar un extensómetro:

3.4.1 PREPARACION DE SUPERFICIES.

Los extensómetros pueden ser satisfactoriamente pegados en casi cualquier superficie sólida, si ésta es adecuadamente preparada. Aunque existen varias técnicas disponibles para la preparación de superficies, las técnicas y procedimientos que describiremos a continuación, han sido cuidadosamente desarrolladas y extensamente probadas; (según indica el manual, son ideales tanto para pegamentos *M-Bond 200* como *M-Bond AE-10* fabricados por la misma compañía).

El propósito de la preparación es desarrollar una superficie químicamente limpia, con una rugosidad superficial adecuada y una alcalinidad de un pH neutro, y un trazado visible de líneas de referencia para la orientación del extensómetro. El sistema *Micro Measurements* de preparación de superficie de aluminio y acero, se reduce a cinco operaciones básicas:

- **Desengrasado**
- **Lijado de superficie**
- **Trazado de ejes de referencia**
- **Acondicionador**
- **Neutalizador**

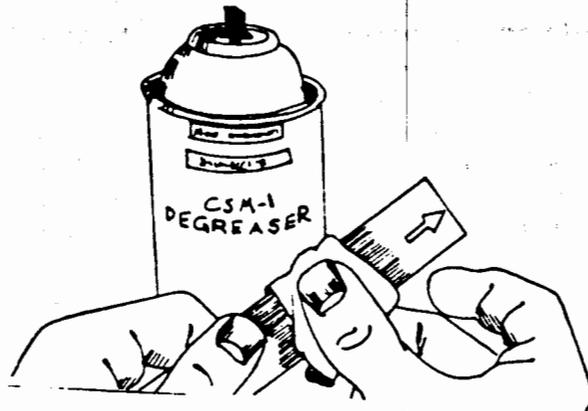
A fin de asegurar la máxima limpieza y óptimos resultados, deberá evitarse siempre:

- **Tocar la superficie con los dedos**
- **Pasar de ida y vuelta ó reusar las esponjas o pañuelos de limpieza**
- **Arrastrar contaminantes desde la zona externa a la de preparación.**

- Dejar secar por evaporación las soluciones de preparación
- Dejar parcialmente preparada la superficie ó demorar el pegado del extensómetro para luego continuar.

Consulte el boletín B-129 para otros materiales de prueba y para precauciones especiales en la preparación de superficies.

1. DESENGRASADO



Esta operación pretende remover aceite, grasa, contaminantes orgánicos y residuos químicos solubles. El desengrasado es siempre la primera operación.

El desengrasado se puede efectuar utilizando el Desengrasante CSM-1⁴; es preferible el aplicador por aspersión para evitar recontaminación por el solvente que escurre. Utilice una gasa ó pañuelo desechable para limpiar una area de 100 a 150 mm, alrededor del punto en donde se pretende instrumentar.

No olvidar que las gasas ó pañuelos, se usan solo una vez y en una sola dirección.

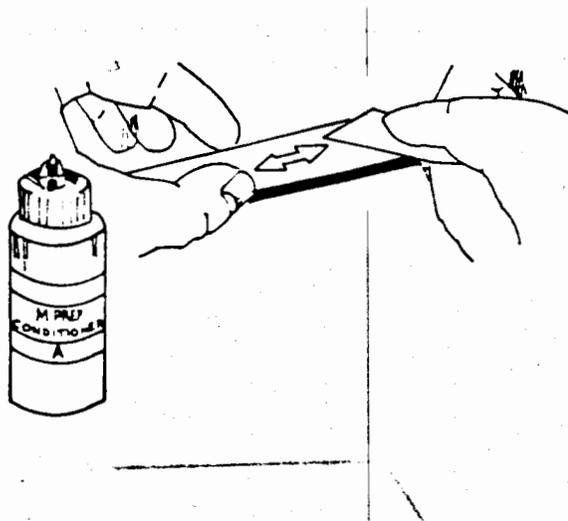
2. Lijado de Superficie

La superficie debe ser lijada para eliminar oxido, pintura, rebabas ó cualquier otro tipo de imperfecciones ó materia extraña

4

También es posible utilizar 1-1-1 tricloroetano (clorocetileno), alcohol isopropílico acetona ú otros productos que sean desengrasantes enérgicos; es importante tener cuidado de que el desengrasante no afecte al material en el que se trabaja.

que se encuentre adherida; de tal forma que se obtenga una superficie lisa y sin poros; adecuada para el pegado. En el caso de superficies muy burdas, podría ser necesario devastar con lija muy gruesa, lima ó lijadora de disco (aunque se debe evitar al máximo esta práctica afin de no reducir la sección del material), sin embargo en la mayoría de los casos podrá ser suficiente el uso de lija del 220 para acero ó del 320 para aluminio; para la primera operación. Moja la superficie con "M-Prep Conditioner"⁵ y lija como se ilustra; aplica todo el acondicionador que sea necesario para evitar que la sección que se prepara se seque.



Cuando la superficie esté brillante, límpiela con una gasa ó pañuelo desechable nunca vuelvas a pasar un limpiador usado por la misma superficie; de preferencia usa uno nuevo en cada pasada. La zona que se lije debe ser suficientemente grande para evitar que al limpiar se arrastre contaminantes de los alrededores.

Para finalizar, repite el mismo procedimiento utilizando ahora lija 320 para acero ó 400 para aluminio; esta operación elimina las rayaduras de la superficie de trabajo.

3. TRAZADO DE EJES

Para orientar adecuadamente nuestro extensómetro ó roseta en la dirección deseada, es necesario trazar unos ejes ortogonales de referencia; dichos ejes serán más bien grabados químicamente, que trazados a lápiz ó rayando el material, ya que lo primero dejaría trazas de carbón y lo segundo dañaría la superficie (no olvides que el extensómetro es extremadamente sensible y que registra las deformaciones de la superficie únicamente). Para ello utilizaremos

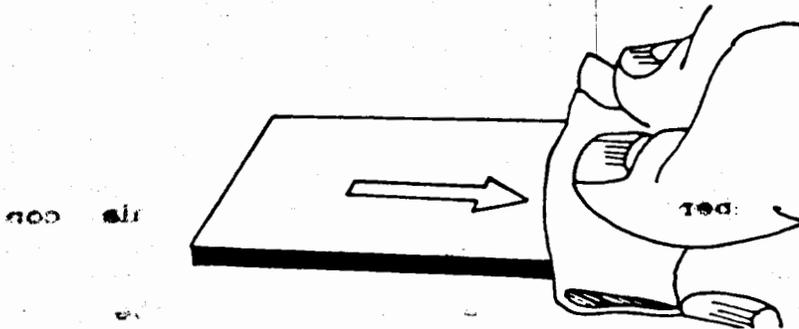
5

En lo sucesivo los nombres en inglés entrecomillados corresponden a los productos de la compañía Measurements Group. También puede emplearse ácido fosfórico al 5 % (H_3PO_4) como acondicionador.

un lápiz medio duro (2H ó 3H) para aluminio ó un bolígrafo ó punta de bronce para acero; trazando nuestros ejes de referencia con una reglilla metálica (*previamente desengrasada*), Los pasos que siguen eliminan cualquier contaminante que quede.

4. ACONDICIONADO DE SUPERFICIE

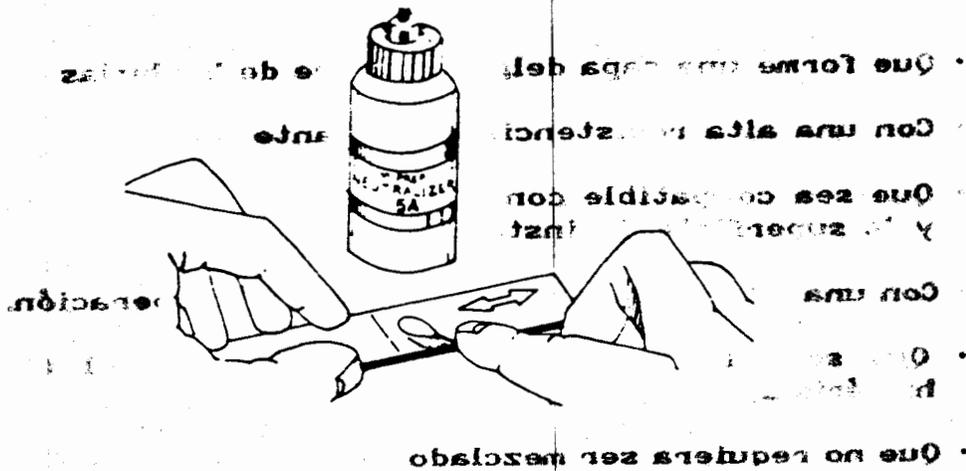
Después de trazar los ejes, se aplica abundante acondicionador a la superficie y se le deja unos segundos (*esto permite que las líneas marcadas se graben químicamente*), luego se limpiará como se ha indicado (*con gasa ó pañuelo desechable, nuevo y de una sola pasada*), aplicando acondicionador nuevamente, tantas veces como sea necesario (*no debe permitirse que la superficie se seque por evaporación, así que esta operación deberá hacerse rápidamente*) hasta que el limpiador quede completamente sin rastros; entonces, después de la última pasada (*todas deben ser en una sola dirección como se ilustra*), se dá una más en sentido contrario. Siempre con un limpiador nuevo.



5. NEUTRALIZADO

A fin de que la alcalinidad de la superficie sea adecuada (*neutra ph 7*) para para la aplicación de los pegamentos (*como el M-Bond 200 y el AE-10 de MM^o*), la superficie deberá ser neutralizada aplicando abundante líquido neutralizador (*como el "M-Prep Neutralizer 5A" ó agua amoniacada al 6.5 % [NH₄OH]*), secando con esponjas ó pañuelos como se ha dicho; repita la operación dos ó tres veces, nunca deje secar por evaporación, cuando termine, pase lentamente un limpiador en sentido contrario cuidando no invadir la zona exterior a la de trabajo para no arrastrar contaminantes.

MM Micro Measurements; es posible emplear también el pegamento
LOCTITE 495



Si has seguido estas instrucciones; la superficie estará lista para pegar nuestro extensómetro. La instalación deberá en no más de 30 minutos para aluminio ó 45 minutos para acero.

3.4.2 PEGADO DE EXTENSOMETROS

Como hemos visto, un extensómetro es capaz de hacer mediciones altamente precisas y confiables de las deformaciones que sufra la superficie en que se encuentre instalado; es por ello que resulta absolutamente indispensable garantizar una excelente adherencia entre ellos y para lograrlo; es indispensable utilizar pegamentos que puedan garantizar su estabilidad por el tiempo que exija la prueba ó medición, adecuados a los cambios de temperatura de la instalación, lo suficientemente elástico para que sufra deformaciones lineales acordes a las de la superficie de prueba, con buenas características de transmisión de calor, que no presente ciclos histéresis, que no modifique sus propiedades mecánicas ni químicas con los cambios de temperatura y sobre todo que el fabricante garantice que sus propiedades no cambien de un lote a otro.

Existen en el mercado multiples pegamentos disponibles, tanto para uso industrial como doméstico, sin embargo, muy pocos de ellos cumplen con las características que se requieren en un ensayo extensométrico; es por esta razón que es recomendable el uso de

7

Esto es, que no almacene energía después de cada ciclo de carga y descarga que pudieran modificar sus propiedades mecánicas; por ejemplo, el acero solicitado a tracción dentro de su zona elástica, al ser descargado restituye la totalidad de la energía recibida.

los pegamentos fabricados ó recomendados por la misma compañía que hace los extensómetros. Las propiedades más importantes que debe satisfacer un pegamento ideal, podemos enumerarlas como sigue:

- Que forme una capa delgada y libre de burbujas
- Con una alta resistencia al cortante
- Que sea compatible con el material de respaldo del extensómetro y la superficie de instalación.
- Con una amplia gama de temperaturas de operación.
- Que se deforme linealmente, estable con el tiempo y mínima histéresis
- Que no requiera ser mezclado
- Con mínimo tiempo de pegado
- Que no requiera ser presionado por mucho tiempo
- Que no endurezca muy rápidamente al momento de ser aplicado
- Muy elástico
- Máximo tiempo de caducidad

Aunque hasta la fecha no se ha fabricado un pegamento ideal, existen algunos pegamentos que satisfacen adecuadamente los requisitos de la instrumentación dentro de ciertos rangos limitados de prueba; de tal forma que entre todos ellos se cubren la mayor parte de las exigencias modernas de instrumentación extensométrica, reduciéndose el problema a la adecuada elección del pegamento y al seguimiento de la técnica de pegado adecuada a él.

Describiremos a continuación las técnicas recomendadas por [MM] para sus pegamentos M-Bond 200 y AE-10[®], las cuales han sido cuidadosamente desarrolladas y probadas para garantizar una instrumentación exitosa

8

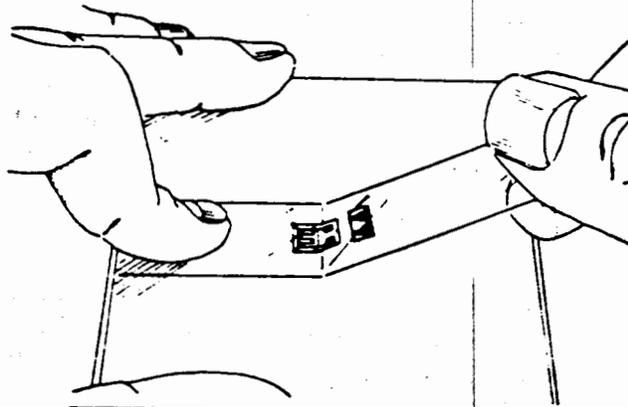
El M-Bond 200 es un pegamento a base de cianoacrilato, el AE-10 es una resina epóxica; no obstante no todos los pegamentos con este producto cubren las estrictas necesidades que se requieren para una buena instrumentación. El pegamento LOCTITE 495 puede sustituir adecuadamente al M-Bond 200 en pruebas de relativa corta duración.

Por lo anteriormente dicho, es muy importante seguir todos los pasos que aquí se indican.

1. MANEJO Y PREPARACION

Toda vez que la superficie se encuentra preparada y químicamente limpia (en caso de que accidentalmente se haya contaminado la superficie, tanto de trabajo como del extensómetro, ó se sospeche de ello, limpie con una gasa ó pañuelo humedeciendo la zona con neutralizador ó alcohol isopropílico y espere unos minutos para garantizar el completo secado), procedemos a lo siguiente:

Mediante unas pinzas de punta fina (previamente desengrasadas), remueva el extensómetro de su cubierta de acetato y coloquelo sobre un vidrio ó caja de extensómetros (también químicamente limpio) con su cara de pegado hacia abajo (puntos para soldar hacia arriba); coloque las terminales (si se requieren) en la posición elegida, manejandolas con la misma precaución con que se hizo para el extensómetro, dejando por lo menos 1.5 mm entre el extensómetro y la terminal.



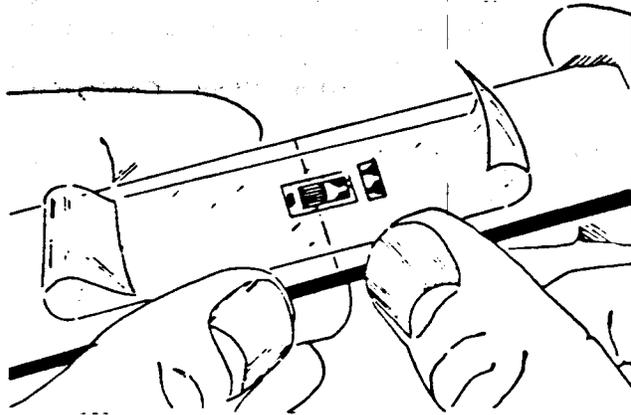
Utilizando de 10 a 15 cm de cinta de celofan (cinta diurex de preferencia la llamada "mágica" de 3M), fije un extremo de la cinta en el vidrio ó caja alineandola con el extensómetro y las terminales; con un dedo deslice la cinta sobre ellos, para luego despegar la cinta (ya con el extensómetro y terminales adheridas) levantando lentamente y con un ángulo no mayor de 45° hasta que la cinta quede libre. No exceder el ángulo es muy importante a fin de evitar doblar mucho al extensómetro y dañarlo permanentemente.

9

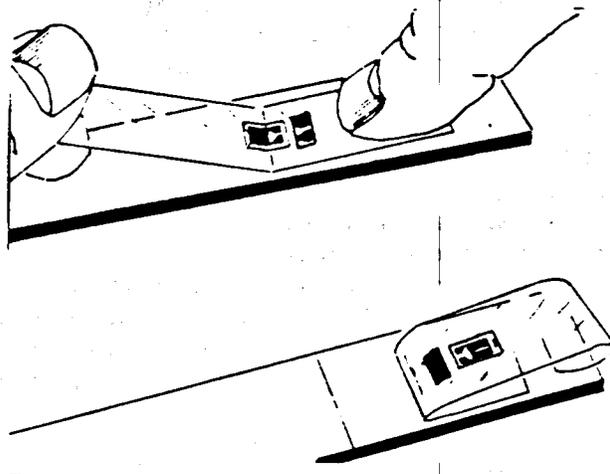
No siempre se ponen alineadas como se ilustra ya que su posición depende de las necesidades particulares de cada caso.

PRECAUCION: Algunas cintas pueden contaminar la zona de pegado ó reaccionar con el pegamento.

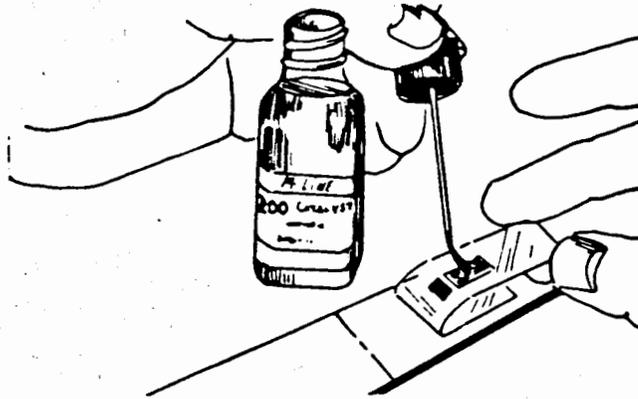
Bien, ahora ya está listo el extensómetro para ser colocado en la zona previamente preparada, y en la que hemos trazado nuestros ejes de referencia, despega la cinta del vidrio y colocandola entre tus pulgares alinea las marcas del extensómetro (los pequeños triángulos en el eje central longitudinal y transversal) con dichos ejes; en caso de no quedar alineados, despega nuevamente la cinta (como se indico anteriormente) y repite el procedimiento



Una vez colocado el extensómetro sobre el elemento, debemos aplicar el pegamento; para ello, levantamos un extremo de la cinta, como se muestra en la figura, empezando por el lado opuesto a las terminales hasta que queden a la vista, luego pega la punta hacia atras de modo que tengas las manos libres para la siguiente operación.

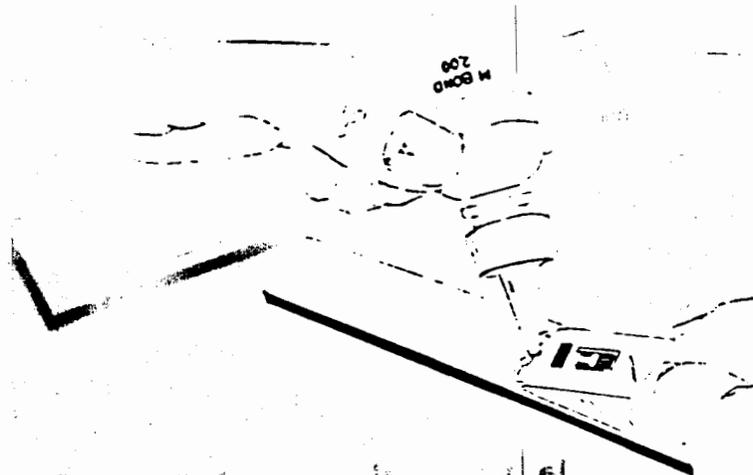


2. PEGADO CON M-BOND 200



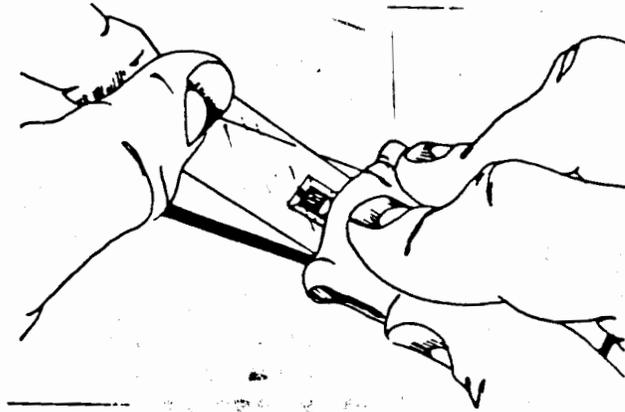
La aplicación del M-Bond 200 requiere primero de una delgada capa de catalizador sobre la cara del extensómetro y la terminal; para ello sumerje la brochita y escurrela en la boca de la botella unas 10 veces, de tal modo que la brochita quede apenas mojada; colocala hacia abajo sobre el extensómetro como se ilustra y deslízala sobre éste y la terminal de modo que se humedezca toda su area; pero sin efectuar el movimiento típico de pintar, y deja secar el catalizador por un minuto más ó menos.

Los siguientes tres pasos deberán efectuarse secuencial y rápidamente en no más de cinco segundos; memorízalos antes de empezar.

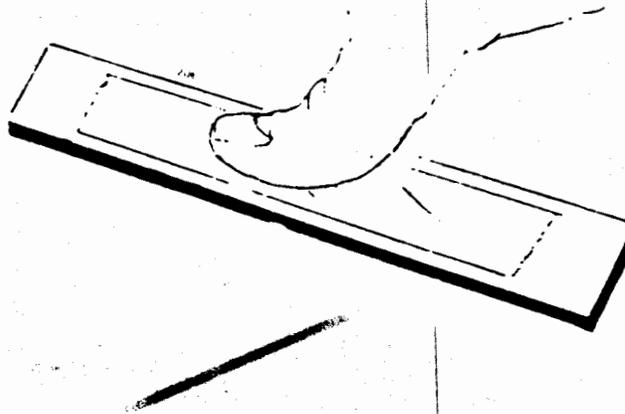


Estando la cinta levantada; asegúrate de que la distancia de la terminal a la unión de la cinta con la superficie del material, sea de unos 13 mm y aplica en ese punto una ó dos gotas de

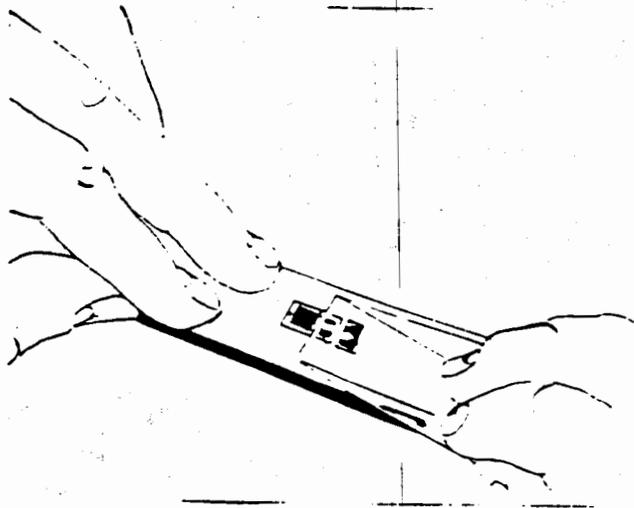
pegamento M-Bond 200. inmediatamente despegas la punta que anclaste y colocas axialmente a unos 30° de la superficie, como se ilustra; manténla tensa con una mano en tanto que con la otra, y con la ayuda de una gasa ó pañuelo, aplicas presión hacia abajo empujando el pegamento hacia adelante y asegurando el pegado del extensómetro con una delgada capa de él (es muy importante que la capa de pegamento sea tan delgada como sea posible, pues todo exceso reduce el éxito de la instalación), hasta que la cinta quede totalmente pegada al material. La tensión es importante para asegurar que el alineamiento se mantenga.



Inmediatamente desecha la gasa y con el dedo aplica una presión firme sobre el extensómetro y la terminal, por lo menos durante un minuto. Espera unos dos minutos más antes del siguiente paso.

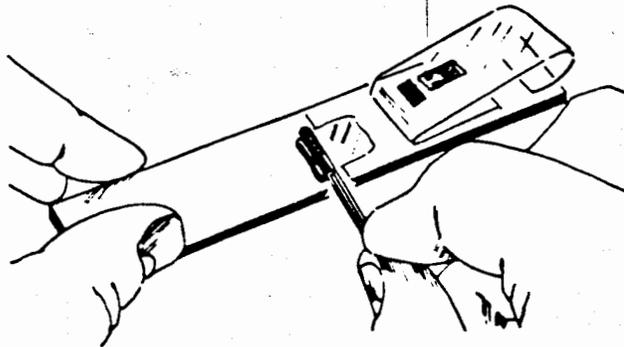


El extensómetro y la terminal deberán estar pegados en este paso, restandonos únicamente despegar la cinta por el extremo cercano al extensómetro y jalandola sobre sí misma lenta y firmemente, como se ve en la figura.

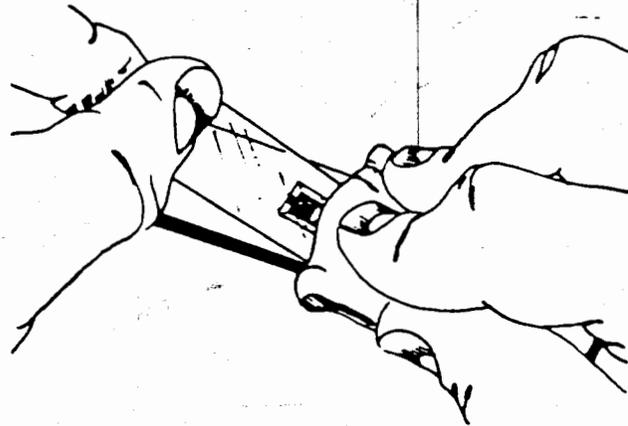


3. PEGADO CON AE-10

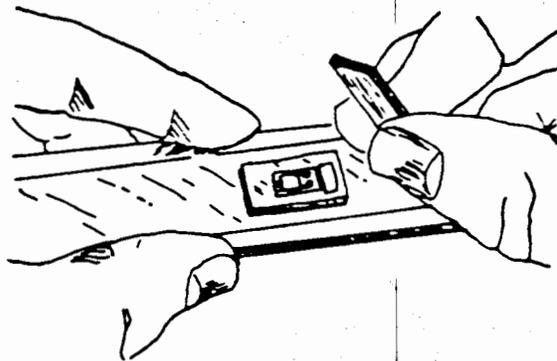
El pegamento AE-10 es una resina epoxica que requiere ser mezclada con un catalizador; su tiempo de secado depende de la temperatura ambiente y puede ser necesario someter a calentamiento los elementos instrumentados para reducirlo. Es muy importante seguir estrictamente las instrucciones que marque el fabricante, es comun tender a economizar resina y ello puede propiciar errores en las proporciones exactas que requiere la mezcla.



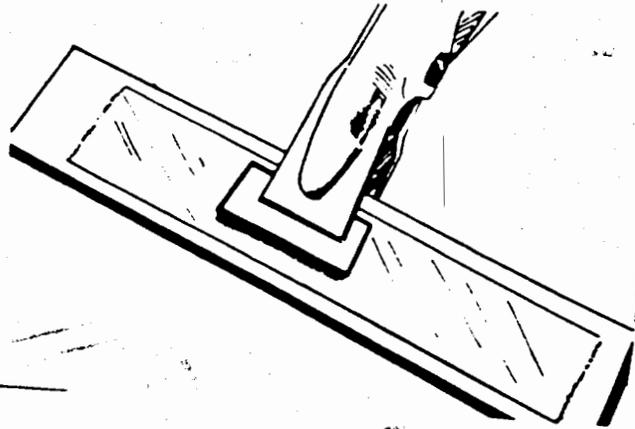
Mezcla la resina y el catalizador como recomienda el fabricante y aplica una delgada capa del pegamento (procurando tomar la pequeña porción de la parte central de la mezcla; lo que reduce la posibilidad de que esté mal proporcionado) sobre el extensómetro, la terminal y el material; utilizando la varilla con la que las mezclaste (como se ve en la figura). Ten cuidado de no utilizar resina sin mezclar, para asegurar ésto, limpia bien la varilla antes de aplicar el pegamento. Después de aplicar el pegamento, procede inmediatamente con el siguiente paso.



Como en el caso anterior, despega la punta que anclaste y colocala axialmente a unos 30° de la superficie, como se ilustra; mantenla tensa con una mano en tanto que con la otra, y con la ayuda de una gasa ó pañuelo, aplicas presión hacia abajo empujando el pegamento hacia adelante y asegurando el pegado del extensómetro con una delgada capa de él (es muy importante que la capa de pegamento sea tan delgada como sea posible, pues todo exceso reduce el éxito de la instalación), hasta que la cinta quede totalmente pegada al material. La tensión es importante para asegurar que el alineamiento se mantenga.

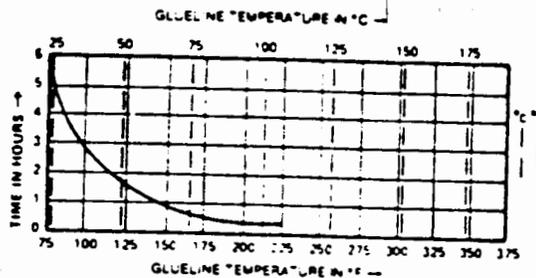


Coloca sobre el extensómetro y la terminal (si la hay) una pequeña tira de silicon y encima de ésta otra de aluminio ú otro material rígido, que nos permita aplicar presión sobre ellos mediante una pinza ó peso muerto. La presión debe ser de entre 35 a 135 KN/m^2 . Asegurate de que la presión sea aplicada uniformemente sobre la instalación.



El pegamento M-Bond AE-10 seca en unas seis horas a 24 °C de temperatura; este tiempo puede reducirse incrementando la temperatura de secado mediante un horno ó pistola de aire caliente y seco. Precaución: para temperaturas arriba de 66 °C se debe utilizar cinta especial de mylar para la instalación y colocar una cinta de teflón entre el extensómetro y el silicón.

Tiempos de secado contra temperatura

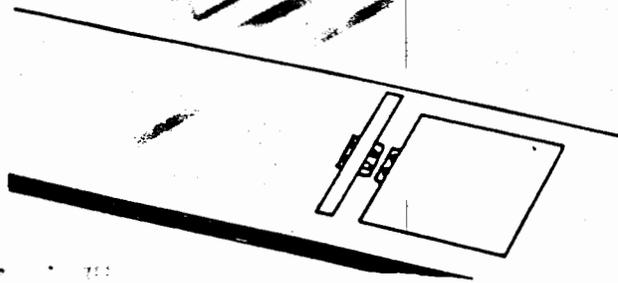


Cuando el adhesivo haya secado, remueve las tiras de protección y despega la cinta de instalación como se dijo antes.

3.5 TECNICAS DE SOLDADURA

Toda vez que el extensómetro ha sido pegado, debemos conectarlo a la terminal (si la hay) y soldarle los cables conductores que nos permitirán conectarlo al instrumento en el que habremos de realizar nuestras lecturas.

Si el extensómetro no es del tipo encapsulado¹⁰, entonces deberá cubrirse con cinta como se ilustra, dejando expuestos únicamente los puntos en que habrán de soldarse los conductores; esta protección evitará que se dañe el extensómetro con la pasta de soldar ó con salpicaduras de soldadura.

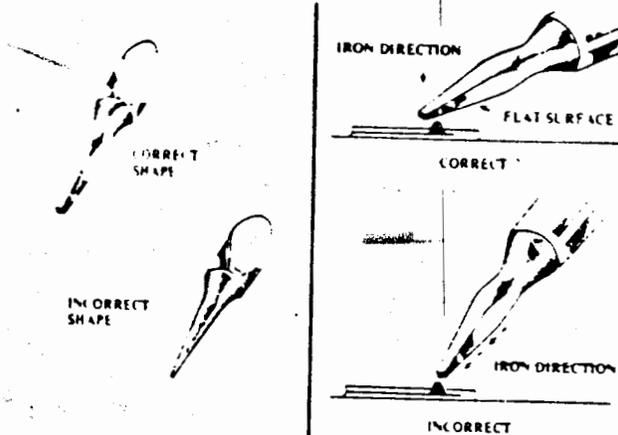


La soldadura que se utiliza normalmente tiene una temperatura de fundición de 220 °C; aunque se puede utilizar también de 183 °C, 300 °C ó 480 °C; dependiendo de las temperaturas de trabajo. De cualquier forma, es muy importante que la temperatura del caudín sea la adecuada al tipo de soldadura ya que si la temperatura no está cercana a la de fundición, se tendrá dificultad en soldar y podríamos tener problemas con la formación de puntos de soldadura con picos (en lugar de un punto semiesférico de superficie suave), vaporización del fundente y aún pérdida de la misma soldadura; es recomendable que se utilice soldadura con fundente (corazón con pasta) de aproximadamente 1 mm de diámetro y un caudín con regulador de temperatura; en su defecto, use un caudín de 25 Watts, en el cual es más fácil no tener temperaturas excesivas.

Es también sumamente importante que el caudín no termine en punta afilada, ya que de esta forma se tiene una gran disipación de calor y resulta difícil controlar su temperatura, por lo que la punta deberá ser en forma de cincel ó desarmador de pala, como se vé en la figura, con 1.5 mm de ancho de punta aproximadamente. La aplicación de punta también puede verse en la misma figura.

10

En el próximo capítulo veremos los diferentes tipos de extensómetros y las características de cada uno, que nos permiten elegir aquel más adecuado a nuestras necesidades. Una de estas características consiste en una capa de resina de protección que cubre al extensómetro.



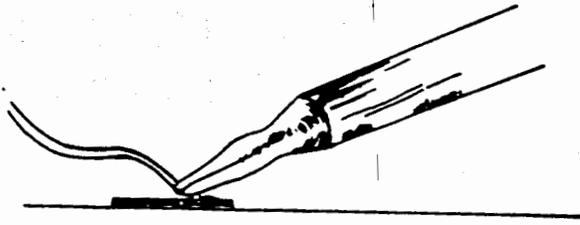
Después que el cautín ha alcanzado su temperatura, limpia la punta (puedes usar una esponja húmeda ó un pedazo de lija) y estañala¹¹ con un poco de soldadura; estaña también las puntas de los cables y del alambre que habrá de puentear el extensómetro con la terminal¹²; ahora depositaremos los puntos de soldadura sobre la terminal y el extensómetro, para ello, coloca el alambre de soldadura transversalmente, (como se ilustra), aplica firmemente el cautín por 1 ó 2 segundos (puedes contar rápidamente hasta 5) y retira simultáneamente la soldadura y el cautín; deberá formarse un punto de soldadura semiesférico de superficie suave; de no ser así, repite el proceso. Desde luego que es necesario practicar mucho antes de lograr soldaduras adecuadas; pero en general no es una labor particularmente difícil; no olvides que si se forman picos, se evapora el fundente ó no se retiene la soldadura, es casi seguro que la temperatura del cautín no es adecuada.

11

El estanoado consiste en una capa de soldadura nueva que se derrite y cubre completamente la punta del cautín ó de los conductores; esta operación es necesaria para facilitar la soldadura. Debido a que al estanoar la punta del cautín se deposita soldadura, es recomendable que se utilice una punta diferente para cada tipo de soldadura, ya que la mezcla de éstas altera sus propiedades

12

Este puenteo se hace normalmente con alambre magneto calibre 27 ó similar; puede también utilizar un alambre del cable conductor; aunque éste no tiene por lo regular ningún aislamiento, por lo que se deberá cuidar que no haga tierra; así mismo se debe cuidar que la protección (si la tiene), soporte las temperaturas de trabajo. La finalidad de este puente es evitar que el cable dane al extensómetro o le trasmita esfuerzos..



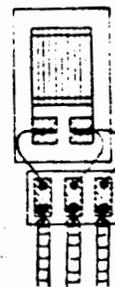
Si se usa cable ó alambre duplex ó triplex¹³ (2 ó 3 conductores unidos), separa los conductores unos 20 mm y "pela" unos 3 ó 4 mm del aislante de cada uno; aunque si vas a puentear con el mismo cable, es necesario pelar unos 15 mm de modo que puedas dejar un alambrito para el puente y cortar el resto para dejar los 3 ó 4 mm para soldarlos a la terminal. PRECAUCION: No utilices navajas para pelar los conductores; puedes derretir el aislante con el cautín, utilizar pinzas especiales para tal fin ó hacerlo simplemente con las uñas. Como se ve en la figura, existen diferentes tipos de terminales y por tanto formas de soldar los conductores, la elección de uno de ellos depende básicamente de las limitaciones de la instrumentación que se realice (figuras a,b,c y d), en la figura e se vé el arco que debe hacerse al puente para evitar que haga tierra con el elemento que se instrumenta; la figura f corresponde a extensómetros del tipo CEA [MM] que no requieren terminales.



(a)

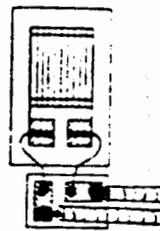


(b)



(c)

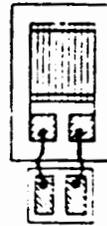
Por lo general es más conveniente usar cable que alambre debido a la gran flexibilidad del primero, con lo que se reduce el riesgo de transmitir esfuerzos, sin embargo el alambre tiene menor diámetro exterior lo que puede resultar ventajoso en algunos casos.



(d)

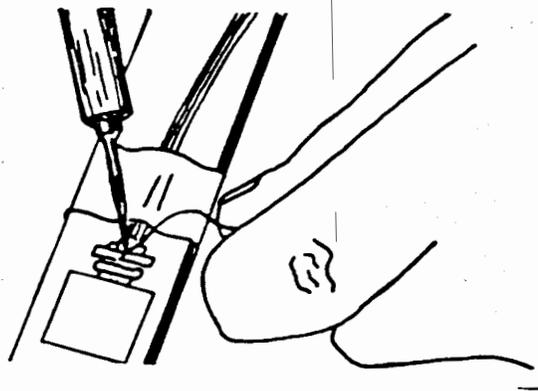


(f)

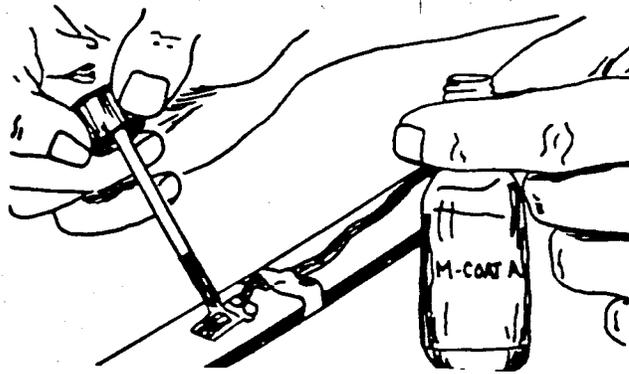


Side view
(g)

Utiliza cinta adhesiva para fijar los conductores al espécimen, de modo que puedas colocar las puntas de ellos sobre los puntos de soldadura, aplica entonces la soldadura y el cautín como se ve en la figura; por 1 ó 2 segundos como se dijo anteriormente, retirando al mismo tiempo a ambos. Una vez terminado este paso, limpia perfectamente todo exceso de pasta de soldar ó fundente, mediante la aplicación de tolueno (que se consigue en las farmacias) y secando con una gasa, pañuelo desechable ó punta de algodón. Fija los conductores perfectamente para evitar que un jalón pueda desprender la terminal y aún al extensómetro.



Con un multímetro verifica la continuidad y resistencia de la instalación, ésta última deberá estar dentro del rango que marque la información que acompaña a los extensómetros; así mismo, verifica que la resistencia entre el extensómetro y el material de soporte, sea de 10 000 a 20 000 megohms 10 a 20 Gigaohms. Finalmente debemos proteger la instalación para evitar que ésta se afecte por la humedad, el polvo ú otros; veremos en el siguiente capítulo algunas características de estas protecciones, sin embargo, para instalaciones que no estén sometidas a condiciones particularmente difíciles, puede utilizarse cera de abeja previamente deshidratada (déjala por al menos una hora a 60 °C en un horno), ó alguno de los productos recomendados por los fabricantes.



Tenemos ya lista nuestra instalación para conectarla al puente de medición; veremos en el siguiente capítulo algunos detalles de cómo seleccionar el equipo y materiales más adecuados a nuestras necesidades.

CAPITULO 4

SELECCION DE MATERIALES Y EQUIPO

Hemos visto ya los fundamentos teóricos, tanto de la operación como de la medición de los extensómetros eléctricos; vimos además las técnicas más recomendadas para su instalación. En éste capítulo estableceremos algunas consideraciones para la selección de materiales y equipos, incluidos desde luego los propios extensómetros, los pegamentos y las protecciones¹.

4.1 INTRODUCCION

Podría parecer que la selección de un extensómetro es una acción trivial, toda vez que desde el punto de vista de su principio de operación todos ellos son iguales; no obstante, si nos detenemos a pensar en las muy diversas condiciones en las que éstos habrán de trabajar, resulta comprensible que una compañía como "Measurements Group" disponga de unas cien mil distintas configuraciones de ellos.

Veamos algunas de éstas condiciones; empecemos por el tamaño del extensómetro, éste exigirá un número considerable de ellos, ya que si por ejemplo pretendemos instrumentar la raíz de un pequeño diente de un engrane que habrá de probarse operando con otro, el espacio disponible podría ser tan pequeño que justifique la existencia de extensómetros de 0.2 mm de longitud. Ahora bien, si lo que instrumentaremos es un elemento estructural de concreto, en el que para su preparación se utilizan agregados de diferentes tamaños y resistencias, entonces requeriremos de un extensómetro lo suficientemente largo para obtener un promedio de las deformaciones que sufra el punto elegido, debido a que si emplea uno de longitud inferior al de los agregados, la lectura obtenida no sería representativa de la deformación promedio; es por ello que se construyen extensómetros de hasta 100 mm de longitud.

1

La información de este capítulo ha sido obtenida principalmente del "Student Manual for Strain Gage Technology" boletín no. 309c que la compañía MM edita en su División de Educación.

Consideremos además que las pruebas pueden ser estáticas ó dinámicas, bajo condiciones de temperaturas tan bajas como - 250 °C ó tan altas como 400 °C, inmersas en agua salada ó bajo las críticas condiciones del desierto, sujetas a grandes fuerzas centrífugas ó presiones extraordinarias y la duración de las pruebas puede esperarse sea de unos segundos a varias décadas y además exigir una muy alta y estable precisión; agrega a todas estas variables que el elemento debe ser ultradelgado y ser montado sobre un material que facilite su manejo y que junto con el pegamento, soldaduras y cables no produzcan reacciones indeseables ó no soporte alguno de ellos las condiciones a las que será sometido.

Conciliar todas estas variables justifica el elevado número de configuraciones y hace que la elección del extensómetro (incluido el material de éste y el de su respaldo), el pegamento, soldadura y cables, no resulte una tarea trivial.

Podemos sintetizar los parámetros más importantes que han de considerarse para la selección de un extensómetro en los siguientes puntos:

- Sensibilidad a la deformación de la aleación utilizada.
- Material de respaldo
- Longitud de medición.
- Modelo ó tipo.
- Número de referencia para autocompensación por temperatura.
- Resistencia eléctrica del medidor.
- Opciones.

Básicamente el proceso de selección consiste en una particular combinación de características disponibles que sean compatibles con las condiciones en que habrá de trabajar el elemento y que satisfagan sus limitaciones, tales como:

- Precisión
- Estabilidad.
- Temperatura.
- Deformación esperada.
- Duración de la prueba.
- Número de ciclos esperados.

- Facilidades disponibles de instalación.
- Condiciones ambientales de operación.

El costo del extensómetro no es un factor a considerar en el proceso de selección, ya que generalmente éste representa sólo una pequeña parte del costo total del elemento a instrumentar y la información que nos proporciona lo justifica perfectamente; la selección de alguna de las opciones, que también implican un incremento en el costo, no son tampoco un criterio principal de selección toda vez que éstas se deciden por razones prácticas como la facilidad de instalación ó premura en tiempo.

Es obvio que no siempre encontraremos el extensómetro y materiales de instalación que satisfagan exactamente las condiciones requeridas por nuestro elemento a instrumentar, lo que implica que será necesario en esos casos sacrificar algunas de ellas. Pongamos por ejemplo el caso del engrane mencionado anteriormente; el espacio disponible exige un extensómetro muy pequeño y el gradiente de deformación en ese punto es frecuentemente alto; sin embargo, los extensómetros de menos de 3 mm se caracterizan por su limitada máxima elongación y resistencia a la fatiga, son poco estables y difíciles de instalar. Algunas veces la disponibilidad de extensómetros es lo que dicta los compromisos que habrán de hacerse, pero independientemente de las razones, es muy importante conocer con exactitud las limitaciones y el comportamiento de la instrumentación, a fin de evitar errores en la interpretación de los resultados.

Veremos en seguida algunos detalles de los parámetros más sobresalientes involucrados en la selección de materiales y equipos.

4.2 SELECCION DE EXTENSOMETROS.

Si bien el factor más importante que determina las características de operación de un extensómetro es la aleación metálica de su circuito impreso, ésta no es independiente del material de respaldo que se utiliza para su manejo y pegado; por lo que es muy importante considerar a ambos como una unidad. Otros factores tales como el encapsulado, alambrado ó puntos de soldadura, no intervienen notablemente en el comportamiento del extensómetro.

Entre las distintas aleaciones; la más común es la de "constantán", aunque también es posible encontrar las siguientes².

- A: Constantán en su versión de autocompensación por temperatura.

Veremos más adelante el sistema de clasificación que utiliza la compañía MM.

- P: Constantán recocido.
- D: Aleación Iso-Elastica.
- K: Aleación de Níquel-Cromo ó aleación "Karma" modificada en su versión de autocompensación por temperatura.

4.2.1 Aleación de constantán " A ":

A pesar de las modernas aleaciones desarrolladas, ésta sigue siendo la más utilizada de todas debido a que reúne la mejor combinación de las propiedades que se requieren para la medición extensométrica; tiene por ejemplo una alta sensibilidad a la deformación ó FE (*factor de extensómetro*) que le permite ser relativamente insensible al nivel de deformaciones y a la temperatura, tiene además un alto valor de resistividad, lo que permite buenas respuestas aún en elementos sumamente pequeños y un adecuado coeficiente de resistencia por temperatura; aunado a una alta capacidad de deformación³ y buenas características de resistencia a la fatiga, no obstante, a temperaturas arriba de 65 °C presenta una tendencia a mantener una deformación residual que le impide regresar al valor cero cuando desaparece la carga, y ésta es una situación indeseable, sobre todo para pruebas prolongadas en donde la estabilidad de las mediciones es importante.

Una propiedad muy importante es la llamada *autocompensación por temperatura* [$A-C-T$]⁴, la cual consiste en que los extensómetros exhiben un mínimo cambio en el valor de la resistencia eléctrica del extensómetro, por efecto de las variaciones de temperatura a que se somete, y que se manifiestan en los aparatos como deformaciones aparentemente debidas a la sollicitación mecánica; lo cual indudablemente nos puede conducir a sobrevalorar el esfuerzo real al que trabaja el elemento instrumentado. En la gráfica de la figura 1 puede verse una curva típica de cómo varía la señal de salida por efecto térmico en tres de las aleaciones, nótese que las aleaciones A y K presentan comportamientos más estables que los de la D que no muestra esta propiedad de autocompensación; este comportamiento es particularmente notorio entre los - 45 °C y los 200 °C. Gráficos de este tipo se incluyen en los paquetes de extensómetros debido a que las curvas difieren ligeramente en la preparación de las aleaciones entre una y otra partida y el valor del coeficiente de compensación por temperatura elegido.

3

Hasta 3% de la longitud del extensómetro para elementos no mayores de ± 3.2 mm, y puede llegar hasta ± 5 % en elementos más largos.

4

En inglés S-T-C o Self Temperature Compensation

La A-C-T es básicamente una aleación modificada de tal modo, que su coeficiente de dilatación térmica se aproxime tanto como sea posible, a aquellos de los diversos materiales que se emplean en las pruebas más comunes; de tal forma que se fabrican extensómetros de constantán con valores de A-C-T de 00, 03, 05, 06, 09, 13, 15, 18, 30, 40 y 50, y son equivalentes como ya dijimos, a los coeficientes de dilatación térmica (expresados en $\text{ppm}/^{\circ}\text{F}$).

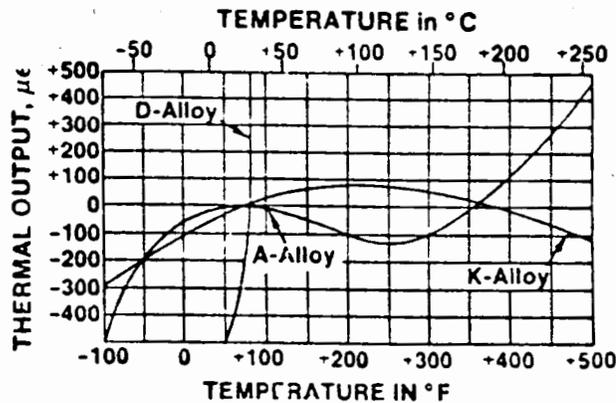


Fig. 1 Variación de la señal de salida por efecto de temperatura de las distintas aleaciones de uso común.

De esta forma, la aleación de constantán no solo nos permite la medición en elementos solicitados a grandes deformaciones, sino también la posibilidad de reducir al máximo la deformación por temperatura.

En los casos en los que se requieren muy grandes deformaciones (del orden del $\pm 5\%$ para elementos de hasta 3.2 mm y $\pm 20\%$ para mayores longitudes), se recomienda el uso de constantán recocido "P"; sin embargo no se debe perder de vista que esta aleación no es recomendable para solicitaciones cíclicas, ya que tiende a exhibir cambios permanentes de resistencia con cada ciclo y esto evita que las lecturas del elemento descargado retornen a cero; es posible encontrar este tipo de aleación con A-C-T de 08 y 40 para uso en metales y plásticos.

4.2.2 Aleación isoelástica "D":

Esta aleación es recomendada para los casos en los que se requiera realizar pruebas dinámicas y cuando no se necesite mantener una referencia cero muy estable; presenta además la gran ventaja de tener una gran resistencia a la fatiga, superior con mucho a la de la aleación A de constantán, la que aunada a un valor alto de su

F.E. (aproximadamente 3.2) mejora sensiblemente la relación señal-ruido en estos ensayos. La no disponibilidad de la versión de autocompensación por temperatura junto con sus altos valores de salida por efecto térmico (como puede verse en la figura 1), limitan considerablemente la posibilidad de utilizar esta aleación en pruebas estáticas, no obstante, en algunos casos en los que se requieran transductores con una señal alta de salida suelen emplearse en conexiones a puente completo que permitan un buen grado de compensación de la señal térmica de salida.

Otras características de esta aleación que deben ser tomadas en cuenta al momento de su elección, son sus propiedades magnetoresistivas y su respuesta ligeramente no lineal, especialmente para deformaciones superiores a los $\pm 5000 \mu\epsilon$.

4.2.3 Aleación de Níquel-Cromo o Karma " K ":

La aleación Karma modificada es otra de las aleaciones más ampliamente utilizadas en el análisis de deformaciones; se caracteriza por una buena resistencia a la fatiga y excelente estabilidad, por lo que se convierte en la mejor elección para los casos en los que se requieran pruebas precisas y por largos períodos de tiempo (meses ó años) a temperatura ambiente ó por períodos menos largos a temperaturas elevadas (hasta 400°C); no obstante, los rangos de temperaturas recomendados para esta aleación van de los -269°C a los $+260^{\circ}\text{C}$. El uso de atmosfera inerte en la zona instrumentada mejora notablemente la estabilidad y la duración del extensómetro en altas temperaturas.

Entre otras ventajas, la aleación Karma presenta una curva más "plana" que las otras (fig.1), lo que permite correcciones más precisas de los errores en la señal de salida en los casos de altas temperaturas; al igual que las aleaciones de constantán, ésta se halla disponible, aunque en forma limitada, en su versión de A-C-T para valores de 00, 03, 05, 06, 09, 13, y 15. Debido a sus características, esta aleación es preferida sobre la de constantán en aquellos casos en los que la fatiga, la temperatura y las condiciones ambientales sean más críticas; sin embargo, debido a que es más difícil de soldar, es normal utilizar una opción de extensómetros no protegidos, en los que las terminales tienen un cubierta de cobre para facilitar la soldadura de los cables, por ello, será necesario consultar los catálogos para verificar que esta opción se encuentre disponible cuando se pretenda utilizar esta aleación.

4.3 MATERIAL DE RESPALDO:

En la fabricación convencional de los extensómetros se emplea la técnica del fotograbado sobre un material portador que debe satisfacer funciones tan importantes como las siguientes:

- Proporcionar un medio para el manejo de la rejilla metálica durante su instalación.
- Presentar una superficie adecuada para el pegado del extensómetro sobre el material de prueba.
- Proveer un aislamiento eléctrico entre el extensómetro y el material base.
- Transmitir íntegramente a la rejilla, las deformaciones que sufra el material base.

La compañía Measurements Group utiliza básicamente dos tipos de materiales de respaldo: poliimididas y resina epoxi-fenólica reforzada con fibra de vidrio; como en el caso de las aleaciones, el material de respaldo no es un parámetro que pueda ser especificado independientemente, ya que ciertas combinaciones de aleación, material de respaldo y forma de la rejilla son diseñados como sistemas y se identifican por series, como veremos más adelante en el proceso de selección de la mejor configuración para un ensayo en particular. Describiremos a continuación las propiedades más sobresalientes de estos materiales.

El respaldo de poliimida que la compañía MM clasifica con la letra " E ", es un soporte extremadamente flexible que puede ser contorneado aún en puntos con radios de curvatura muy pequeños; lo que aunado a una gran adherencia entre la rejilla y el material de soporte, lo hacen más resistente a los daños mecánicos durante su instalación. De esta forma, su facilidad de manejo y la posibilidad de utilizarlo en un amplio rango de temperaturas (-195°C a $+175^{\circ}\text{C}$), y su gran capacidad de alargamiento que le permite deformaciones de hasta un 20 % de su longitud (como las requeridas en pruebas de plásticos), lo convierten en un material ideal, tanto para pruebas estáticas como dinámicas. Este material se utiliza en las series EA, CEA, EP, EK, S2K, N2A, J2A y ED de la clasificación de MM.

Para los casos en los que se requieran pruebas en rangos más amplios de temperatura (-269°C a 290°C), bajo condiciones estáticas ó dinámicas, el respaldo de resinas epoxi-fenólicas con refuerzo de fibra de vidrio resultan la mejor elección, aunque su capacidad de deformación se limita a 1 ó 2 % de su longitud. Este material se emplea en las series WA, WK, SA, SK, WD y SD de MM.

En la siguiente página se resumen las características más sobresalientes de cada una de las series que acabamos de ver.

5

Es posible utilizarlo por cortos periodos de tiempo a temperaturas de hasta 400°C .

SERIE EXTENSOM.	DESCRIPCION Y APLICACIONES PRINCIPALES	RANGO DE TEMPERATURA	RANGO DE DEFORMACION	VIDA POR FATIGA	
				DEFORMAC. μ	NUMERO CICLOS
EA	Rejilla de constantán con respaldo de poliimida con amplio rango de opciones disponibles, para pruebas de esfuerzos bajo condiciones estáticas y dinámicas. No recomendado para transductores o ensayos de alta precisión.	Normal: -75°C a +175°C Casos espec.; corta duración: -195°C a +205°C	±3% de longitud menor de 3.2 mm ±5% de longitud mayor de 3.2 mm	±1800 ±1500 ±1200	10E5 10E6 10E8
CEA	Como el anterior, rejilla de constantán para uso universal completamente encapsulada en poliimida con grandes terminales de cobre para soldar cables directamente, salvo esta diferencia, sus usos son los mismos que el anterior.	Normal: -75°C a 175°C Rosetas (sobrepuestas): +65°C	±3% de longitud menor de 3.2 mm ±5% de longitud mayor de 3.2 mm	±1800 ±1500	10E5 10E6 Aumenta la vida por fatiga utilizando soldadura suave.
N2A	Rejilla de constantán sin encapsular con respaldo delgado de poliimida. Especialmente recomendado para transductores de precisión, por su casi nula desviación en ensayos repetitivos y para pruebas en que se requieran grandes formatos por lo delgado de su matriz.	En transductores con cargas estáticas normales -75°C a +95°C	± 3 %	± 1700 ± 1500	10E6 10E7
J2A	Rejilla de constantán con respaldo y encapsulado delgado de poliimida laminado y terminales expuestas para soldadura de cables; aunque más grueso que el N2A permite mayor refuerzo en transductores que trabajan en flexión.	En transductores con cargas estáticas normales -75°C a +95°C	± 2 %	± 1700 ± 1500	10E6 10E7
ED	Rejilla isoelástica combinada con una capa flexible y resistente de poliimida, su alto factor de extensómetro y resistencia a la fatiga lo hacen adecuado en pruebas dinámicas. No se recomienda en pruebas estáticas por su alta señal de salida térmica	Ensayos dinámicos: -195°C a +205°C	± 2 % No lineal para def. mayores ± 5 %	± 2500 ± 2200	10E6 10E7
WA	Rejilla de constantán totalmente encapsulada con cables de gran resistencia, aplicable a altos rangos de temperatura y bajo severas condiciones ambientales, disponible con opción W aunque restringe su vida por fatiga.	Pruebas normales: -75°C a +205°C Periodos cortos: -195°C a +260°C	± 2 %	± 2000 ± 1800 ± 1500	10E5 10E6 10E7
EK	Rejilla Karma con respaldo resistente y flexible de poliimida, se recomienda cuando se requiera combinar resistencia, estabilidad a altas temperaturas y una gran flexibilidad del extensómetro.	Pruebas normales: -195°C a +175°C Periodos cortos: -269°C a +205°C	± 1.5 %	± 1800	10E7
WK	Rejilla Karma totalmente encapsulada con cables de gran resistencia; permite el más amplio rango de temperaturas y las condiciones ambientales más severas así como autocompensación por temperatura. Opción disponible prorestringe vida por fatiga y rango temp.	Pruebas normales: -269°C a +290°C Periodos cortos: -269°C a +400°C	± 1.5 %	± 2400 ± 2200 ± 2000	10E6 10E7 10E8
EP	Rejilla especial de constantán recocido con respaldo flexible y resistente de poliimida, usado principalmente en ensayos fuera del límite elástico o materiales de bajo módulo (polímeros). Disponibles las opciones E, L y LE pero pueden restringir su deformación.	-75°C a 205°C	±10% de longitud menor de 3.2 mm ±20% de longitud mayor de 3.2 mm	± 1000	10E4 EP no muestra desv. en pruebas ciclicas
SA	Rejilla de constantán totalmente encapsulado con puntos de soldadura, matriz igual a los WA y también mismos usos; aunque reduce algo sus rangos de temp. y cond. ambientales debido a los puntos de soldadura.	Pruebas normales: -75°C a +205°C Periodos cortos: -195°C a +230°C	± 2 %	± 1800 ± 1500	10E5 10E7
S2K	Rejilla Karma laminada a 0.025 mm de espesor con respaldo de poliimida mejorado y totalmente encapsulado incluyendo las terminales. Disponible con grandes terminales para facilitar cableado.	Pruebas normales: -75°C a +120°C Periodos cortos: -185°C a +150°C	± 1.5 %	± 1800 ± 1500	10E6 10E7
SK	Rejilla Karma totalmente encapsulada y con puntos de soldadura, iguales usos que los WK pero reduce rangos temp. y cond. ambientales por puntos soldadura.	Pruebas normales: -75°C a +120°C Periodos cortos: -185°C a +150°C	± 1.5 %	± 2200 ± 2000	10E6 10E7
WD	Rejilla isoelástica totalmente encapsulada con cables de alta resistencia, utilizado para pruebas dinámicas en condiciones ambientales severas.	Pruebas dinámicas: -195°C a +260°C	± 1.5% no lineal para def. arriba ± 5%	± 3000 ± 2500 ± 2200	10E5 10E7 10E8
SD	Equivalente al WD pero con puntos de soldadura en lugar de cableado.	Pruebas dinámicas: -195°C a +205°C	± 1.5 % v. nota anterior	± 2500 ± 2200	10E6 10E7

TIPO DE PRUEBA O APLICACION	RANGO DE TEMPERATURAS DE OPERACION	DURACION DE LA PRUEBA [HRS]	PRECISION REQUERIDA **	CAPACIDAD EN ENSAYOS CICLICOS		SELECCION TIPICA	
				DEFORMAC MAX. μ	NUMERO CICLOS	SERIE EXTENSOMETRO	PEGAMENTO
ENSAYOS COMUNES DE ANALISIS DE CONDICIONES ESTATICAS O DINAMICAS †	- 45°C a + 65°C	<10E4	MODERADA	± 1300	<10E6	CEA, EA	200 ó AE-10
		>10E4	MODERADA	± 1300	<10E6	CEA, EA	AE-10 ó AE-15
		>10E4	ALTA	± 1600	>10E6	WA, SA	AE-15 ó 610
		>10E4	MUY ALTA	± 2000	>10E6	WK, SK	AE-15 ó 610
	- 45°C a + 205°C	<10E3	MODERADA	± 1600	<10E6	WA, SA	600 ó 610
		>10E3	ALTA	± 2000	<10E6	WK, SK	600 ó 610
	-269°C a +230°C	>10E3	MODERADA	± 2000	>10E6	WK, SK	610
	< 315°C	<10E2	MODERADA	± 1800	<10E6	WX	610
< 370°C	<10	MODERADA	± 1500	<10E6	WX	610	
ENSAYOS CON GRAN DEFORMACION (ZONA PLASTICA)	- 45°C a + 65°C	<10	MODERADA	± 50 000	1	CEA, EA	AE-10
		>10E3	MODERADA	±100 000	1	EP	AE-15
		>10E3	MODERADA	±200 000	1	EP	A-12
	-20°C a +260°C	<10E2	MODERADA	± 15 000	1	SA, SK, WA, WK	610
-269°C a +260°C	<10E3	MODERADA	± 10 000	1	SK, WK	600 ó 610	
ENSAYOS DINAMICOS DE ESFUERZOS (CICLICOS)	-75°C a +65°C	<10E4	MODERADA	± 2000	10E7	ED	200 ó AE-10
		<10E4	MODERADA	± 2400	10E7	WD	AE-10 ó AE-15
	-195°C a +260°C	<10E4	MODERADA	± 2000	10E7	WD	600 ó 610
		<10E4	MODERADA	± 2300	<10E5	WD	600 ó 610
INSTRUMENTACION DE TRANSDUCTORES	-45°C a +65°C	<10E4	1 a 5%	± 1300	<10E6	CEA, EA	AE-10 ó AE-15
		<10E6	1 a 5%	± 1300	<10E6	CEA	AE-15
	-45°C a +95°C	<10E4	± 0.2%	± 1500	10E6	H2A	600, 610 ó 43-B
	-45°C a +150°C	<10E4	0.2 a 0.5%	± 1600	10E6	WA, SA	610
	-195°C a +175°C	<10E4	± 0.5%	± 1800	10E6	WK, SK	610

* Esta categoría incluye la mayor parte de los casos de ensayos en donde se requiere cierto grado de estabilidad bajo condiciones de prueba estática. Para estabilidad absoluta con rejilla de constantán y largos periodos de prueba y temperaturas arriba de 65°C, es necesario emplear conexiones de cuarto ó de medio puente; las cubiertas protectoras pueden influir también en la estabilidad en los casos en los que se requiere un sellado hermético.

** Resulta inapropiado hablar de "precisión" sin considerar varios aspectos de la prueba a efectuar y de la instrumentación utilizada. Por lo general "moderada" en análisis de esfuerzos, significa un rango del 2 al 5%, "alta" de 1 a 3% y "muy alta" el 1% ó mejor.



FACULTAD DE INGENIERIA

G. 611384

4.4 CLASIFICACION DE LAS SERIES DE EXTENSOMETROS:

Como lo mencionamos anteriormente, no es posible hacer una elección de material de respaldo y una aleación en forma independiente, ya que estos aparecen como sistemas y son clasificados en series que incluyen además algunas diferencias en su geometría y construcción. En las tablas anteriores, se muestran las principales características de cada una de las series que fabrica MM⁶, y otra que ayuda a seleccionar el extensómetro y el pegamento más adecuado a las características generales en que se ha de efectuar la prueba.⁷

Entre la extensa variedad de extensómetros disponibles, la serie CEA es la más utilizada debido a que a sus excelentes características, se agrega el que cuenta con grandes terminales para el soldado de cables que evitan la necesidad de utilizar terminales adicionales y el puenteo. Es importante no perder de vista que las indicaciones de las tablas sirven únicamente de guía para las condiciones generales de ensayos, y que se requiere consultar los catalogos para una selección más precisa, sobre todo en aquellos casos en los que las condiciones se salgan de los límites aquí establecidos.⁸

4.5 LONGITUD DEL EXTENSOMETRO:

La longitud de un extensómetro es la que corresponde a la parte activa de la rejilla, sin considerar las curvas de las puntas ni las terminales para soldadura ya que éstas son prácticamente insensibles debido a su relativa gran area seccional y baja resistencia eléctrica. La compañía MM ofrece longitudes que van de los 0.2 mm a los 100 mm, de tal modo que es posible satisfacer prácticamente todas las necesidades que se presentan en el análisis de esfuerzos (figura 2).

No debemos olvidar que en la elección de la longitud de un extensómetro se deben tomar en cuenta las propiedades mecánicas y

⁶ -----
En esta tabla, los datos se dan para extensómetros de por lo menos 3 mm de longitud por lo que para elementos más pequeños será necesario consultar un catalogo especializado.
⁷

La compañía Measurements Group proporciona a solicitud, catalogos muy completos tanto para extensómetros y pegamentos, como para la totalidad de sus productos. (CATALOG 500 PART A AND B Y CATALOGO A-110)
⁸ -----

La compañía MM ofrece el servicio de consulta para aquellos casos especiales que lo requieran (Applications Engineering Deptalment).

físicas del material que se vaya a probar, ya que si por ejemplo se pretende trabajar con materiales aglomerados, en los que los elementos constitutivos tienen diferentes tamaños, como en el caso

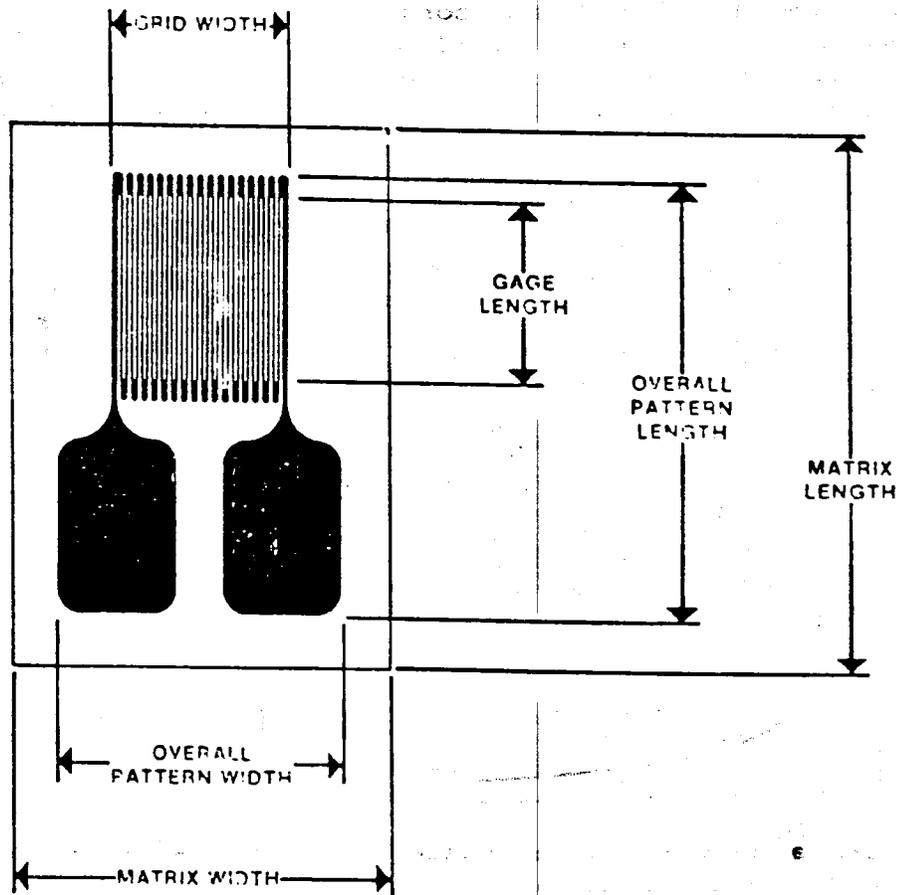


Figura 2 Dimensiones básicas de un extensómetro.

del concreto, en el que un extensómetro pequeño podría quedar colocado sobre uno de los agregados grandes; las lecturas no corresponderían al comportamiento del material; lo mismo ocurrirá si el elemento queda sobre los agregados más pequeños. Vemos así que lo que se requiere en estos casos es un elemento lo suficientemente grande para que las lecturas obtenidas representen el promedio de los materiales que forman el agregado; algunas investigaciones recomiendan que la longitud del extensómetro deberá ser por lo menos de 5 veces el tamaño máximo de los agregados, lo que produciría un error del orden del 5 % como se

aprecia en la figura 3^o; en otros casos será la geometría de la pieza y sus restricciones las que dicten el tamaño más adecuado, aunque ello implique sacrificar precisión. Otro factor muy importante lo es la concentración de esfuerzos, ya que por lo general se busca instrumentar los puntos más esforzados del elemento en estudio, de tal forma que si se emplea un extensómetro relativamente largo en comparación a la zona de concentración, será muy difícil obtener el valor máximo de esfuerzo debido a que el extensómetro registra la deformación neta que lo solicita y ésta produce un cambio en su resistencia eléctrica que resulta el "promedio" de esas deformaciones, imposibilitando así la obtención del valor máximo de deformación. La figura 4 ilustra este efecto.

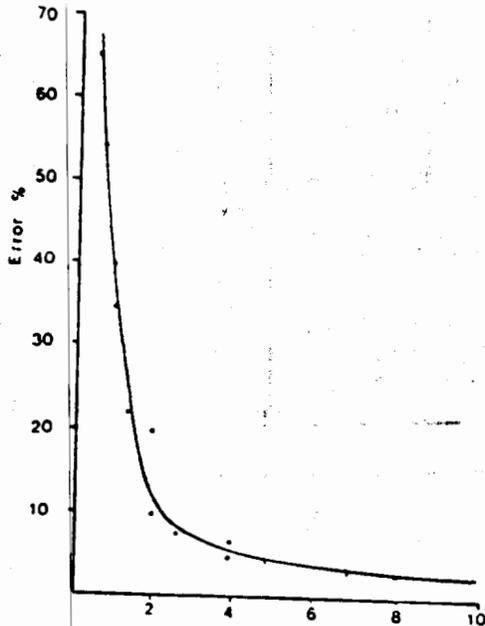


Figura 3 Errores en la lectura en función de la relación L ext./L agragados.

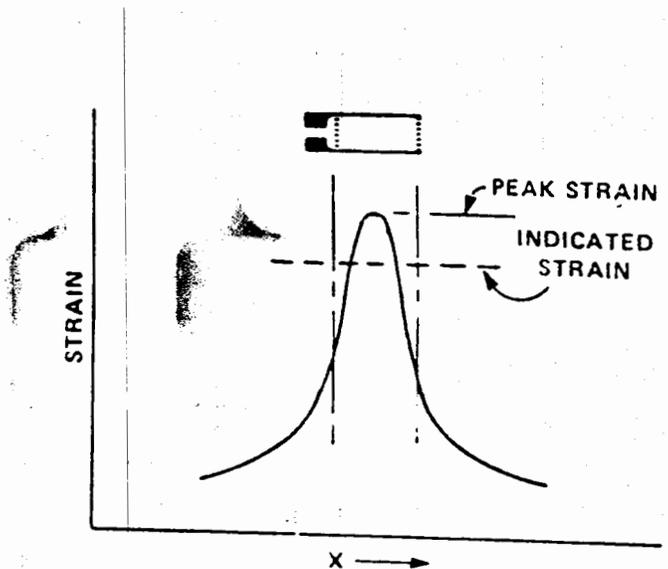


Figura 4 Esquema de la curva de deformación-L extensómetro.

Una regla común en la elección del tamaño del extensómetro para barrenos, filetes, ranuras ú otros elementos con grandes concentraciones de esfuerzos, es el considerar la longitud como 0.1 del diámetro ó longitud de la sección a instrumentar; sin embargo, esta regla nos puede conducir a elementos sumamente pequeños y estos por lo general introducen una serie de problemas inherentes, tales como degradación de sus cualidades, inestabilidad bajo cargas estáticas y desviaciones en cargas

Esta recomendación y la tabla, fueron reportados en 1949 por Binns, R. D. y Mygind, H. S. tras una extensa investigación en el artículo "The use of electrical resistance strain gauges and the effect of aggregate size on gauge length in connection with the testing of concrete" en el Magazine of Concrete Research (tomado del Strain Gauge Technology; Window, A. L., Holister, G. S. et al; Applied Science Publishers)

ciclicas; de tal forma que se debe establecer un compromiso que sopesese esos inconvenientes y que tal vez sacrifique esta regla en aras de mayor seguridad en las lecturas.

Siempre que sea posible, es más conveniente utilizar extensómetros de longitud mayor que unos 13 mm, ya que su instalación, alambrado y disipación de calor, ofrecen más ventajas que los pequeños; sobre todo cuando se trabaja con plásticos ó materiales con bajos coeficientes de disipación térmica que propician el calentamiento de la instalación; con lo que se reducen las cualidades y precisión de la misma.

4.6 CONFIGURACION DE LOS EXTENSOMETROS:

La configuración de un extensómetro incluye la forma, número y orientación de las rejillas, terminales para soldadura de cables y algunas otras características de construcción que son comunes a algunos extensómetros; veremos aquí aspectos generales de esos parámetros, y será necesario consultar un catálogo especializado como el "Catalog 500" de MM, para obtener las características específicas de un extensómetro en particular. La amplia variedad de configuraciones, aseguran encontrar el más edecuado a nuestras necesidades; no obstante es posible obtener asesoría técnica y aún la fabricación de un extensómetro de características especiales cuando así fuera necesario.

Para extensómetros de una sola rejilla, su configuración depende principalmente de:

- *Terminales para soldadura* - Esta deberá ser compatible en tamaño y orientación con el espacio disponible para la instalación del extensómetro; el arreglo de las terminales no deberá afectar sensiblemente la calidad y facilidad para el instalador.

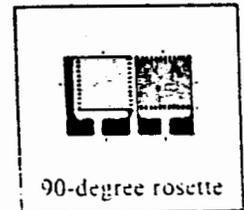
- *Ancho de la rejilla* - En los casos en los que existan severos gradientes de deformación perpendiculares al eje del extensómetro, un elemento tan angosto como sea posible, minimizará el error por esta causa; no obstante, una rejilla ancha mejora la disipación del calor y la estabilidad de las lecturas, sobre todo cuando el extensómetro ha de ser instalado en materiales con baja transmisibilidad térmica.

- *Resistencia del extensómetro* - En ciertos casos, la única diferencia entre dos extensómetros es su resistencia eléctrica que comunmente puede ser de 120 Ω ó 350 Ω . En la elección, se debe tomar en cuenta que un extensómetro de 350 Ω genera un tercio del calor que uno de 120 Ω (bajo las mismas condiciones eléctricas), además, reduce los efectos nocivos del cableado como la pérdida de sensibilidad ó cambios de resistencia por temperatura, lo que es

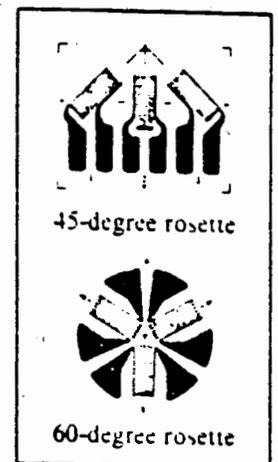
importante cuando la longitud del cable es grande; así mismo, cuando se emplean interruptores, anillos rozantes ú otra fuente de cambios de resistencia, se mejora la calidad de la señal.

En análisis experimental de esfuerzos el uso de extensómetros de un solo elemento se recomienda cuando se conoce la dirección de los esfuerzos principales dentro de un rango de $\pm 5^\circ$; esta limitación reduce considerablemente su uso, sobre todo cuando se sospeche de un estado biaxial de esfuerzos, debido a que en ese caso se inducirían serios errores de lectura.

Para los casos de estado biaxial de esfuerzo y cuando se conoce la dirección de los esfuerzos principales, el uso de una roseta de 2 elementos, es lo más recomendable. Este tipo de elemento se conoce también como roseta T por tener dos elementos ortogonales entre sí; es muy importante que la dirección de los esfuerzos principales se conozca con una precisión como la antes indicada, ya que de no ser así, resulta más seguro utilizar una roseta de 3 elementos.



Para el caso general de estado biaxial de esfuerzos, en el que no se conoce la dirección de los esfuerzos principales, el uso de una roseta de 3 elementos es lo más indicado. Estos elementos pueden ser instalados en cualquier dirección, no obstante, por lo general uno de ellos se orienta en la dirección de uno de los eje de simetría de la pieza a instrumentar, ya que esto facilita la identificación de la dirección de los ejes principales. Como vimos en el capítulo II, existen rosetas de 45° y 60° y para cada una se dió un procedimiento de solución para la obtención de la información que se requiera; sin embargo, la de 45° es la más utilizada debido a que la reducción de datos es más fácil.



Existe la posibilidad de utilizar rosetas en las que sus elementos se encuentran en un mismo plano, como las de la figura anterior; ó apiladas como la de la figura adjunta, resulta obvio que la primera característica sobresaliente de esta configuración es el espacio que ocupa una y otra, aunque la reducción de espacio provoca una mala disipación de calor, y resulta menos estable que la de un solo plano para ensayos estáticos; las rosetas apiladas tienen la ventaja de que para gradientes severos de deformación biaxial, sus lecturas son más precisas que las de un solo plano, aunque resultan menos conformables en zonas de radios reducidos; no obstante estas desventajas tendrán que ser aceptadas cuando lo reducido del



espacio así lo exija. Para los casos de flexión, por ejemplo, en los que el gradiente perpendicular de deformación es muy grande, es aconsejable utilizar rosetas planas.

4.7 CARACTERISTICAS DE LAS OPCIONES DISPONIBLES.

Para algunas de las distintas configuraciones y series existen variantes constructivas ú opciones disponibles, que facilitan el trabajo del instalador de los extensómetros; sin embargo, éstas representan un costo adicional al del extensómetro regular y su elección deberá hacerse después de analizar si el costo ó la dificultad de la instalación lo justifican.

Algunas de las ventajas que representa su uso podrían ser:

- Reducción significativa del tiempo y costo de instalación.
- Exigen menor habilidad para su instalación.
- Incrementan la confiabilidad del soldado de cables.
- Facilitan la instalación en condiciones difíciles.

La siguiente tabla da una idea de las principales características de cada una de las opciones disponibles:

OPCION	DISPONIBLE EN SERIES	CARACTERISTICAS PRINCIPALES
W	EA, EP, WA, ED, EK, WK	TERMINALES INTEGRADAS Y ENCAPSULADO
E	EA, ED, EK, EP	ENCAPSULADO; TERMINALES EXPUESTAS
SE	EA, ED, EK, EP	PUNTOS DE SOLDADURA Y ENCAPSULADO
L	EA, ED, EK, EP	CON CABLES DE COBRE SUAVE SOLDADOS
LE	EA, ED, EK, EP	IGUAL ANTERIOR PERO ENCAPSULADO

En todos los casos el encapsulado es a base de poliimida y el cableado se hace con cables suaves de cobre que facilitan la instalación. En el catalogo 500 parte A se listan las opciones disponibles en las distintas series que se presentan y en la parte B se describen más detalladamente las características tanto de las

opciones como de las series.

Para el caso de las opciones L y LE, se dispone de distintas orientaciones para los cables de acuerdo a la geometría del extensómetro; la figura 5 ilustra esas orientaciones que también se aplican a las series WA, WK, y WD cuando estas configuraciones se hallan disponibles.

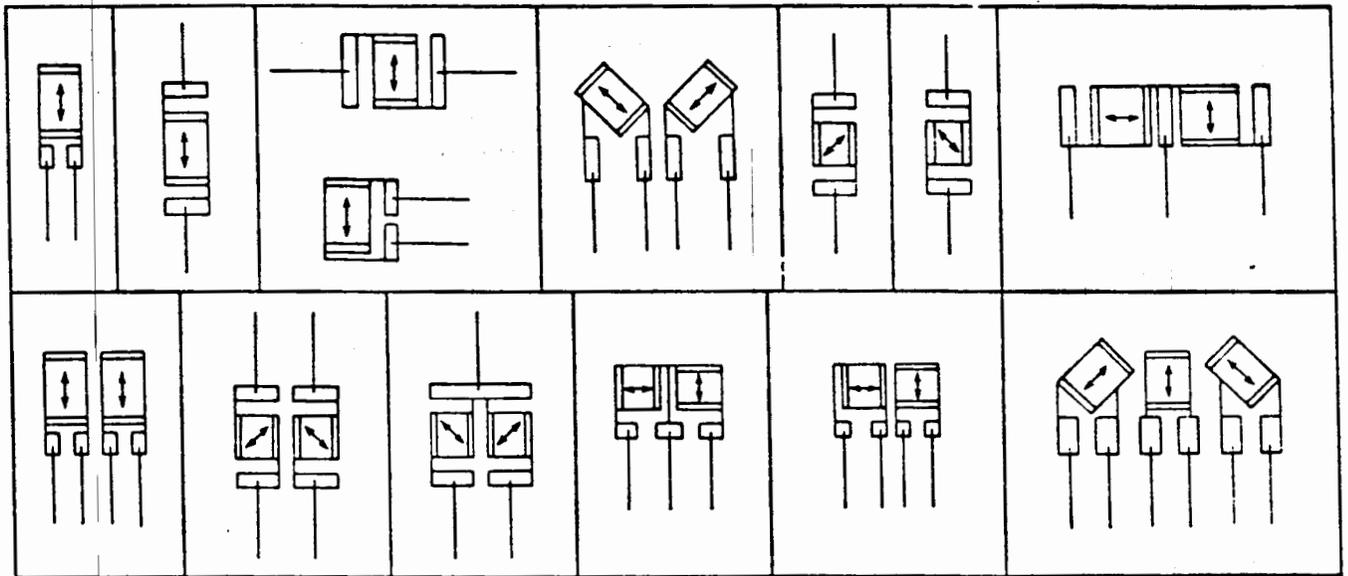
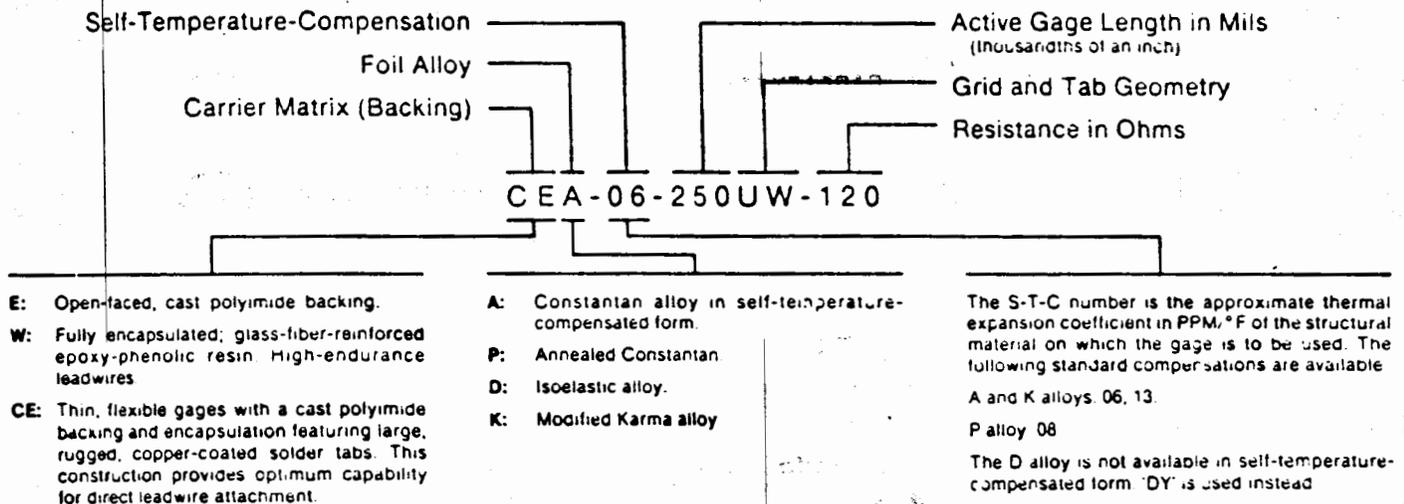


Figura 5 Orientación de las terminales para soldadura.

4.8 SISTEMA DE IDENTIFICACION DE EXTENSOMETROS:

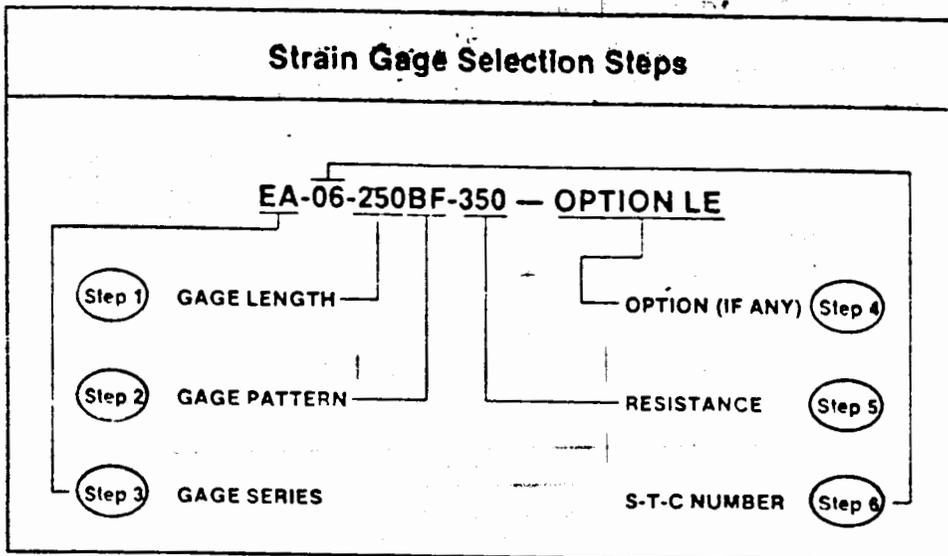
El sistema de identificación de extensómetros que se muestra, se aplica a aquellos de uso general; para información de otras series disponibles, consulta el catálogo 500 que ya hemos mencionado.



4.9 PROCEDIMIENTO PARA LA SELECCION DE EXTENSOMETROS:

El comportamiento de un extensómetro en un elemento estructural cualquiera, dependerá de sus características de diseño, de tal modo que es necesario contar con un número de configuraciones, que nos permita tener al menos una que satisfaga las necesidades de un análisis en particular; es por ello que MM dispone de unos 100 000 tipos diferentes de extensómetros, aunque los más usuales se reducen a unos cuantos cientos de ellos y son los que aparecen en el catálogo 500. Como acabamos de ver, se cuenta con una clasificación alfanumérica que nos permite identificar con precisión a cualquiera de los extensómetros, y es precisamente ese identificador el que nos permitirá, como veremos en este capítulo, tener una guía práctica para seleccionar el más adecuado al trabajo que se pretenda realizar.

A pesar del gran número de variables que se involucran en el proceso de selección de un extensómetro, podemos reducir este proceso a sólo unos cuantos pasos básicos y que son los seis pasos que se muestran en el diagrama siguiente:



El primero y segundo paso son la longitud y la forma del extensómetro, ya que ellos dependen de las condiciones geométricas y de sollicitación del elemento a estudiar; es aconsejable iniciar con un elemento de unos 3 mm ya que de éste se encuentra una gran variedad de formas, presenta buenas condiciones para su instalación y nos permite lecturas más confiables bajo cualquier gradiente de deformaciones; de tal modo que las siguientes opciones se hagan a partir de esta configuración. Un extensómetro de mayor longitud normalmente se elige por alguna de estas razones: a) *Requerir una mayor área para facilitar la disipación de calor*, b) *Mejorar la lectura promedio en el caso de materiales aglomerados ó no homogéneos*, c) *facilitar su instalación*; por otro lado, un extensómetro pequeño es recomendable cuando se esperan concentraciones de esfuerzos, se requiera tomar lecturas pico ó máximas ó el espacio lo exija.

En cuanto a la forma ó configuración, vimos ya que esta decisión depende de si se sospecha de un estado biaxial de esfuerzos ó se sabe que el esfuerzo es uniaxial; además, es importante el que se conozca ó no la dirección de los esfuerzos principales ya que de esta información depende si se elige un extensómetro de un solo elemento, dos ó tres; para este último caso será necesario además decidir si se emplea una roseta apilada ó de un solo plano, criterio que también ya discutimos.

El tercer paso consiste en determinar la serie ó material de la rejilla y el respaldo; para ello será necesario volver a ver la tabla de series y selección que vimos en las páginas 101 y 102, las cuales nos permiten tener una idea bastante clara del tipo de extensómetro que habremos de emplear.

El cuarto paso consiste en determinar, en su caso, que opción convendría elegir; los criterios para éstas fueron ya expuestos en párrafos anteriores.

Como quinto paso tendremos que decidir la resistencia eléctrica del extensómetro, que como ya vimos depende de las características de la prueba a efectuar y de los materiales que se utilicen; aunque en general se recomienda el uso de valores altos, no se debe perder de vista que su uso implica una mayor precisión, aunque a mayor costo y con un sacrificio de su vida útil por fatiga.

Finalmente se debe seleccionar el A-C-T que más se acerque al coeficiente de dilatación térmica del material que se instrumenta (no olvidar que este número corresponde al valor del coeficiente en el sistema inglés).

Con esta información en mano se recurre al catálogo para buscar el elemento más adecuado a nuestras necesidades; el orden de búsqueda será el mismo que el de los casos expuestos en este procedimiento.

4.10 EQUIPOS:

La elección de los equipos dependerá principalmente de las condiciones, características y disponibilidad de recursos; en el caso general de pruebas tanto en laboratorio como de campo, y en las que el número de extensómetros instalados es del orden de unos 20 en un sólo elemento estructural y bajo condiciones estáticas, se podría utilizar un equipo como el P-3500 de Measurements Group, el cual es un equipo versátil, de tamaño y peso reducido y totalmente portátil, ya que utiliza baterías recargables para su operación. En la figura 6 se muestra este aparato que consiste básicamente en el circuito electrónico de medición (puente de Wheatstone) y permite la lectura de un sólo extensómetro a la vez; su precisión es de 1μ .

Este aparato requiere ser complementado con un conmutador como el SB-10 de la misma compañía; que se conecta con el P-3500 para permitir la lectura de hasta 10 canales sin tener que hacer conexiones y desconexiones con cada uno de ellos. Es posible conectar uno ó más conmutadores a un mismo puente, sin embargo si se requieren más de 2 de ellos, lo más aconsejable sería adquirir una tarjeta controladora y un decodificador que pueden ser instalados en una computadora para recibir y procesar decenas ó cientos de extensómetros automáticamente. El CICESE de Ensenada, B.C. desarrolló un equipo de esta naturaleza que clasifica como SAD-GE y que es capaz de controlar 64 canales por unidad, tanto en condiciones estáticas como dinámicas; existen desde luego equipos similares en MM y en otras compañías que satisfacen estas necesidades. La figura 7 muestra el SB-10.



Figura 6 Puente de Wheatstone modelo P-3500.

Un complemento adecuado y necesario para el P-3500 y el SB-10 sería una lectora de picos como la 3650 de MM, este aparato nos permite registrar bajo condiciones dinámicas, el valor más alto y más bajo obtenidos durante una corrida de pruebas; finalmente, un probador de instalaciones como el 1300 de MM nos permitiría saber si la instrumentación no presenta fallas ó desviaciones en los parámetros esperados, como la resistencia eléctrica del extensómetro y del cableado. La figura 8 muestra estos equipos.

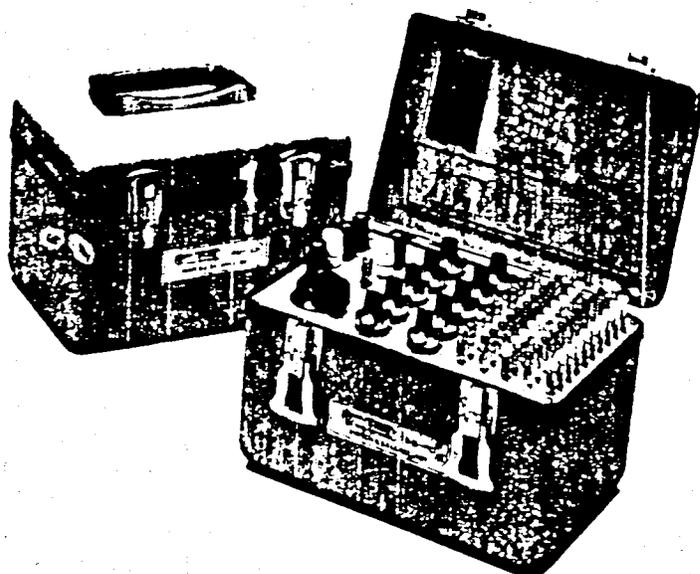


Figura 7 Conmutador de 10 canales SB-10.



Figura 8 Lectora de picos 3650 y probador 1300.

CONCLUSIONES

Hemos visto hasta aquí los aspectos más relevantes de la extensometría eléctrica; nos adentramos en su conocimiento tanto como es posible en un curso introductorio; se ha procurado hacer acopio de la información más reciente, pero indudablemente han quedado pendientes muchos aspectos relativos a las técnicas, equipos modernos, materiales y un sinfín de detalles que si bien podrían ser útiles, agrandarían muchísimo éste trabajo; no obstante, estamos seguros que bastará con efectuar los primeros ensayos, para convencerse de las bondades de esta técnica, y con ello, buscar hacerse de mayor información.

Como el lector habrá constatado, se trata de una tecnología sencilla, sin grandes complicaciones teóricas ni prácticas, relativamente económica, de gran confiabilidad y de fácil dominio; pero sobre todo, se trata de una tecnología indispensable para la verificación del comportamiento de elementos estructurales, tanto de nuevo diseño como tradicionales; que nos permite monitorear a esos elementos, y de esta forma corregir errores antes de que la falla se presente. Desde luego que no es la única ni la mejor tecnología; pero seguramente está entre las más versátiles, accesibles y confiables.

Tal vez uno de sus principales inconvenientes sea el que nos proporciona información puntual; por lo que sería necesario una instrumentación con un gran número de extensómetros para obtener una imagen completa del comportamiento mecánico de un elemento estructural; el cableado también podría ser otro inconveniente para control a grandes distancias, aunque a la fecha se han fabricado microemisores de radio que se conectan a las terminales del extensómetro y envían la señal a un receptor de radio distante algunos cientos de metros; sin embargo, cuando se requiera obtener un panorama completo del estado de esfuerzos a que trabaja un elemento estructural, ó cuando se requiera conocer la distribución interna de sus esfuerzos, podríamos recurrir al análisis experimental mediante la fotoelasticidad. Se trata de una técnica a base de plásticos birrefringentes que tienen la propiedad de modificar sus cualidades ópticas proporcionalmente a las deformaciones que le producen las sollicitaciones mecánicas, de tal forma que al ser deformados pueden observarse; mediante algunos arreglos de polarización de la luz, franjas de colores que se

sucedan siempre a incrementos constantes de deformación y por ende de esfuerzos, de modo que basta contar el número de franjas que aparecen en un cierto punto para que, multiplicándolo por el factor de proporcionalidad, obtengamos el esfuerzo a que trabaja ese punto.

La fotoelasticidad es igualmente una técnica muy precisa y con la enorme ventaja de presentar el estado de esfuerzos de toda la pieza instrumentada; permite además trabajar con modelos a escala elaborados a base de plásticos transparentes ó colocar estos plásticos sobre el prototipo, y aún es posible fabricar, con plásticos, modelos tridimensionales a escala, de elementos estructurales a los que se somete a carga y mediante una técnica sencilla de horneado que deja permanentemente la huella de la sollicitación de esfuerzo, lo que nos permite observarlo en su interior mediante el corte en "rebanadas"; no obstante, es una técnica más costosa y requiere una preparación más especializada así como equipos más caros, aunque el manejo de la información y la interpretación de resultados no resultan de mayor grado de dificultad que el de los extensómetros.

Pero esta técnica y otras como las lacas frágiles y las líneas de Moire tendrán que ser motivo de un tratado aparte que nos permita profundizar en ellos, al menos como lo hemos hecho con los extensómetros, y así, contar con más herramientas que nos permitan utilizar la más adecuada a las necesidades que nos plantea la moderna ingeniería.

Antes de dar por terminado este trabajo, vale la pena mencionar algunas aplicaciones; casi todas ellas realizadas en México, que para mi gusto ayudan a comprender en toda su magnitud las bondades de esta tecnología. El Palacio de los Deportes resulta un buen ejemplo de su aplicación en estructuras originales y de vanguardia; una estructura nada fácil y que además sería observada por todo el mundo, fué instrumentada; tanto en un modelo a escala como la estructura final, a fin de tener la seguridad de que no fallarían ninguno de sus elementos estructurales; del mismo campo, los puentes modernos de todo el país, algunos tan atrevidos como el de la carretera a Colima, se vienen también instrumentando para tener no sólo la seguridad del estado de esfuerzos al que trabajará, sino además para poder monitorearlo durante muchos años.

La aeronáutica y la astronáutica son tal vez los campos en los que su extensiva aplicación ha permitido cambios más espectaculares en los diseños y optimación de elementos estructurales; pongamos como ejemplo el ensayo de uno de los dos prototipos de transporte supersónico que fueron efectuados en los Estados Unidos en la década de los 70, y en el que durante el vuelo de prueba se vino abajo uno de ellos; el vuelo no fué un fracaso total gracias, entre otras cosas, a la intensiva instrumentación extensométrica

de todo el avión, que permitió a los ingenieros saber con precisión el comportamiento estructural de la aeronave hasta un instante antes de su destrucción...

En el campo de la medicina, la instrumentación de prótesis asegura que esos elementos no fallarán, ya que en algunos casos las fallas ya no podrán corregirse nuevamente y aún podrían ocasionar la muerte de su portador; es así como se elaboran modelos que se solicitan a las cargas más críticas y bajo las mismas características que tendrán ya instaladas y en los que se obtienen con gran precisión los esfuerzos a que será sometida.

En las carreras de autos como la Baja 1000, algunas firmas han instrumentado sus autos, y la información la envían, vía satélite, al centro de control, de tal suerte que los ingenieros pueden saber con precisión como se comportan cada uno de los elementos estructurales de su auto, y no únicamente para saber con anticipación qué pieza va a fallar y ordenar su reemplazo a tiempo; lo principal es que tendrán una información valiosísima para rediseñar las piezas y converger rápidamente a su optimación.

En la minería encontramos también aplicaciones muy interesantes; actualmente se ha iniciado la instrumentación de los marcos de refuerzo del techo de algunas minas, para obtener el historial del comportamiento de los esfuerzos de esos elementos al graficar el esfuerzo contra el tiempo, lo que permite saber si el techo está cediendo y poder instalar con anticipación más refuerzos ó en última instancia ordenar la evacuación ó alto de actividades en esas zonas; como se comprenderá, estos dispositivos ayudan a salvar la vida a los mineros que en ellas trabajan.

Aunque existen cientos de ejemplos igualmente interesantes, mencionaremos finalmente su aplicación en la docencia, en la que es posible elaborar modelos de elementos solicitados a esfuerzos axiales, torsión, corte y flexión; tanto solicitaciones de un sólo tipo como combinadas para obtener cualquier parámetro de los que tradicionalmente se obtienen con los costosos equipos clásicos de laboratorio de materiales, ó, complementar el uso de estos equipos para aumentar su precisión. Es posible hacer un modelo de armadura, instrumentarlo y obtener con un alto grado de aproximación las cargas que el alumno previamente ha calculado, igualmente se puede obtener muy fácilmente el módulo de elasticidad ó el coeficiente de Poisson mediante modelos extremadamente sencillos.

Resulta inconcebible que esta técnica tan extensamente aplicada en todo el mundo por todas las ramas de la ingeniería y desde hace más de 30 años, no se utilice como debiera en nuestro país. Ojalá y este trabajo despierte el interés, tanto de los ingenieros como de los estudiantes de estas disciplinas; por aplicar el análisis experimental de esfuerzos en sus diseños ingenieriles.

ANEXO 1

PRINCIPIOS BASICOS DE LA INSTRUMENTACION EXTENSOMETRICA (NOTEBOOK No. 7)

Los medidores pegables de resistencia eléctrica son dispositivos por demás sencillos, de hecho extremadamente simples. El medidor funciona por el principio de que cuando un conductor eléctrico se alarga, su resistencia eléctrica también cambia. Y si la relación entre los cambios relativos de resistencia ($\Delta R/R$) divididos entre los de deformación ($\Delta L/L$), (que se define como factor del extensómetro ó "gage factor"), son conocidos, entonces la deformación puede ser determinada; pues lo único que se necesita es medir $\Delta R/R$. Pero ésto es más fácil decir que hacer porque los valores de ΔR son muy pequeños (y $\Delta R/R$, lo es aún más)

El Factor de Extensómetro (FE) es aproximadamente 2.0 para medidores hechos con las aleaciones más comunmente usadas y la resistencia eléctrica más frecuente es de 120 Ω . A fin de poder detectar deformaciones unitarias del orden de $1\mu\epsilon$ (que corresponde a la producida por un $\sigma = 0.2$ MPa en acero estructural de $\sigma_y = 200$ MPa, solicitado a carga uniaxial simple), debemos medir cambios de resistencia ΔR del orden de 0.00024 Ω .

Sería necesario un multímetro digital de ocho cifras significativas para medir los valores absolutos de resistencia, con la resolución necesaria para determinar los valores de ΔR ; pero esta no es la forma práctica de hacer medición de deformaciones unitarias.

En los instrumentos modernos de medición extensométrica, generalmente se emplea el puente de Wheatstone como circuito sensor primario, que utiliza un muy estable amplificador de CD con alta ganancia, para amplificar la pequeña señal de salida del puente a un nivel adecuado para una lectura ó dispositivo de salida. Los medidores típicos agregan a esos dos componentes básicos, un suministro de energía y un juego de resistencia internas complementarias, junto con controles de balance y ganancia, derivador para calibración sin energía, y otros dispositivos convenientes. En lo que sigue, se discuten brevemente las principales consideraciones relacionadas con la combinación de esos elementos para una medición extensométrica precisa.

El Circuito del Puente de Wheatstone

En la mayoría de las actuales instrumentaciones, el medidor extensométrico en sí, forma uno ó más brazos del puente de Wheatstone (fig. 1), produciendo una salida de voltaje¹ que es proporcional al cambio de resistencia. De hecho, la salida es proporcional a $\Delta R/R$, de tal forma que, para una deformación $\Delta L/L$ y un factor de extensómetro dados, la salida es independiente del valor inicial de la resistencia absoluta (R) en cada brazo del puente.

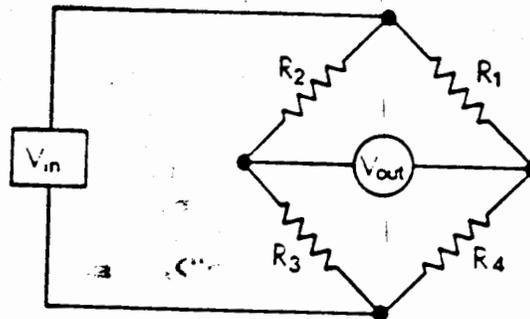


Fig. 1 Circuito de Puente de Wheatstone.

Una característica muy importante del puente de Wheatstone es que los cambios de $\Delta R/R$ en brazos adyacentes del circuito, se restan numericamente cuando ambos tienen el mismo signo² y por ello tienden a cancelarse uno con otro; en tanto que; cuando tienen signos contrarios, éstos son sumados numericamente. Por el contrario, los cambios en brazos opuestos son sumados cuando tienen el mismo signo, y tienden a cancelarse cuando son de signos opuestos. Estos efectos son importantes para lograr compensaciones por temperatura ó cuando son usados en transductores extensométricos (en donde por lo general son activos los cuatro brazos del puente), para producir un incremento en la señal de salida.

Voltaje del Puente.

Los extensómetros y el puente de Wheatstone son en sí, elementos pasivos; por ejemplo, no es posible una salida del circuito si no

¹ Salida de voltaje ó tensión de salida

² Es obvio que las deformaciones de tracción ó compresión (de sentidos contrarios), producirán indicaciones de ΔR también de sentidos ó signos contrarios.

hay voltaje de entrada. La salida de un puente desbalanceado (V_s) puede ser expresada, tanto en términos de $\Delta R/R$ como de voltaje de entrada (V_e), y es comunmente tomada como proporcional a ambos, no obstante, las relaciones son ligeramente no lineales para ciertas configuraciones (1).

En una forma simplificada (la cual ignora la no linealidad), la salida de un solo extensómetro activo (un brazo del puente es un extensómetro sujeto a esfuerzo, y los otros brazos son extensómetros inactivos ó resistencias), puede ser expresado como:

$$V_s = \frac{V_e}{4} * \frac{\Delta R}{R}$$

ó, sustituyendo el FE de la ecuación:

$$\Delta R/R = FE * \Delta L/L$$

entonces:

$$V_s = \frac{V_e}{4} * FE * \frac{\Delta L}{L} = \frac{V_e}{4} * FE * \epsilon$$

en donde ϵ es la deformación unitaria.

Con un FE = 2.0, $\epsilon = 1 * 10^{-6}$ (una microdeformación ó $\mu\epsilon$), y $V_e = 1.0$ V :

$$V_s = \frac{1.0}{4} * 2 * 1 * 10^{-6} = 0.5 * 10^{-6} \text{ Volts}$$

Esto significa una salida de solo 0.5 μ V por Volt de entrada por $\mu\epsilon$.

La salida puede desde luego, ser incrementada, aumentando el voltaje del puente V_e (por ejemplo, una salida de 5 μ V/ $\mu\epsilon$ para $V_e = 10$ V). Aunque por lo general es deseable obtener una salida tan grande como sea posible, se deben establecer limitaciones por los efectos de calentamiento debidos a la corriente en el extensómetro (que es función de la resistencia del medidor y el voltaje del puente), su tamaño, y las propiedades de disipación de calor del material en que se encuentra pegado (2). Para la mayoría de los casos prácticos, el voltaje es normalmente de 1 a 15 V; pero independientemente de su valor, éste deberá ser exactamente conocido y controlado debido a que la salida del puente es directamente proporcional a él. Si el instrumento ofrece unicamente un voltaje para el puente, entonces es deseable un valor bajo; a fin de minimizar el efecto de calentamiento en el medidor que podría causar un voltaje alto. Una mayor flexibilidad es posible, particularmente en pruebas dinámicas, cuando el instrumento incorpora un suministro variable de voltaje al puente.

Un interruptor independiente para el voltaje del puente, cuando el resto del circuito de medición continua operando, es una importante y útil característica, especialmente para mediciones dinámicas de deformación, ya que cualquier salida que se observe en el puente cuando se interrumpa el voltaje, será debido a

"ruido" eléctrico, pues no es posible que la salida sea resultado de cambios en la resistencia del circuito de medida, cuando éste no tiene voltaje. La posibilidad de interrumpir la energía del puente, es así una útil herramienta de diagnóstico para establecer cuando existen problemas de ruido eléctrico.

Complementación del Puente.

Debido a lo muy pequeño de los cambios de resistencia y del voltaje de salida, cada brazo del puente deberá consistir de un extensómetro ó resistor de alta estabilidad, muy reducida tolerancia en su resistencia y un coeficiente de resistencia por temperatura efectivamente muy bajo. Los modernos extensómetros tienen esas cualidades; por ello cuando solo un brazo de ese puente tenga un extensómetro activo, lo que es común en análisis experimental de esfuerzos, entonces los otros brazos requeridos para completar el puente deberán ser otros extensómetros inactivos idénticos al primero, ó algún otro tipo de resistores de alta precisión; éstos resistores deberán tener una tolerancia en su resistencia de $\pm 0.01 \%$, un coeficiente de resistividad por temperatura de $1 \text{ ppm} / ^\circ\text{C}$ y una estabilidad menor de $25 \text{ ppm} / \text{año}$ de variación. Los resistores de película con deposito de carbón ó de alambre no pueden ser utilizados, ya que sus características están claramente fuera de esas especificaciones; los típicos resistores de película por ejemplo, pueden llegar a tener tolerancias de $\pm 1 \%$ y coeficientes de resistencia por temperatura de $\pm 100 \text{ ppm} / ^\circ\text{C}$. Esto significa que si uno de estos resistores fuera utilizado en uno de los brazos del puente, y la temperatura cambiara en tan solo $1 ^\circ\text{C}$; exhibiría una salida de $50 \mu\text{c}$ (equivalente a un esfuerzo por carga axial del orden de los 10 MPa en acero).

Las consideraciones respecto al autocalentamiento por efecto de la corriente en el resto del puente, son igualmente aplicables. Si esos resistores no tienen las características requeridas de disipación de calor, entonces el circuito se hará inestable.

Después de que éstos factores han sido tomados en cuenta, se deberá prestar una cuidadosa atención a los cables que conectan las resistencias, y muy particularmente al, ó los extensómetros con el puente; ya que el cableado podría funcionar como resistencias en serie con los elementos activos y aunque una buena instalación no registraría deformación aparente, los cables son sensibles a los cambios de temperatura y su dilatación sí sería

registrada. Por lo anterior, resulta particularmente importante que para mediciones estáticas, se emplee el método de conexión de tres cables para el arreglo de cuarto de puente, ya que ésta compensa automáticamente los efectos por cambios de temperatura en los cables y reduce el efecto de desensibilización de la resistencia del cable que sale del puente (3).

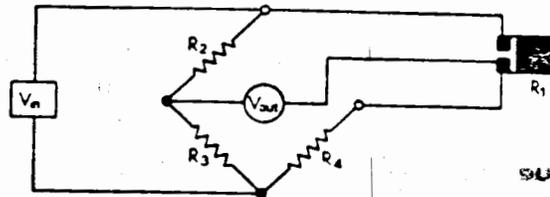


Fig. 2 Conexión de cuarto de puente con tres cables.

De ésta forma, un típico circuito de medición (fig. 2) podrá tener el extensómetro R_1 conectado como un brazo del puente con el sistema de tres cables; el brazo adyacente R_4 , podrá ser un extensómetro compensador ó una resistencia del mismo valor. Las resistencias R_2 y R_3 , que no tienen que ser necesariamente del mismo valor que R_1 y R_4 , ya que forman la otra mitad del puente.

Con el voltaje de entrada al puente (V_n) y un adecuado dispositivo para medir la salida (V_s), el sistema es capaz de producir una señal proporcional a la deformación del extensómetro; pero, el sistema no funcionará efectiva y eficientemente, en tanto no se incorporen al sistema de medición otras características encontradas por la instrumentación extensométrica moderna.

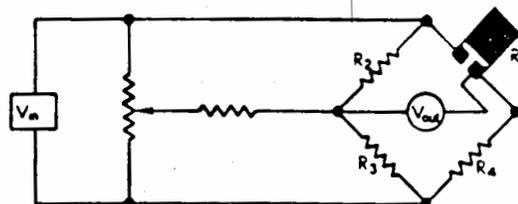


Fig. 3 Control de Balance Resistivo

Balance del Puente.

El circuito del puente estará balanceado, únicamente (esto es, no registrará salida cuando se aplique el V_e) cuando se logre que $R_1/R_4 = R_2/R_3$ (fig. 2). Si se toman en cuenta las diferentes tolerancias en resistencia de los extensómetros, resistores y cables; un desbalance inicial apareciera invariablemente. El ajuste del balance inicial; de tal forma que con cero deformación tengamos cero señal de salida, se consigue fácilmente instalando unas resistencias de control de balance en el circuito (fig.3); el cual consiste de una resistencia fija (conectado en la unión de R_2 y R_3) y una resistencia variable (conectada a través del suministro de voltaje), éste arreglo permite hacer ajustes para balancear el puente. El rango de balance del puente depende del valor del resistor empleado (límite de balance).

A pesar de que los circuitos de balance son ampliamente utilizados en la instrumentación extensométrica, un método electrónico alternativo para el balance, permite medir la salida del amplificador e inyectar un voltaje de la misma intensidad y signo contrario. Este método facilita un rápido balance automático en sistemas de múltiples canales y elimina los errores al cargar el puente; que son posibles en el sistema de resistencias cuando se hacen mediciones con transductores extensométricos de precisión.

Calibración por Derivación³

La calibración por derivador es un método muy efectivo para determinar las características de la mayoría de los circuitos (incluyendo al instrumento en sí), en los que el extensómetro está conectado, se efectúa introduciendo un cambio conocido de resistencia ΔR (que puede ser equivalente a un valor de deformación) dentro del puente de Wheatstone, así, una salida eléctrica puede ser producida para verificar ó determinar la sensibilidad del sistema; el cambio de resistencia es obtenido conectando resistencias en paralelo en uno ó mas brazos del puente; esto es, derivando el flujo que circula por ellos, lo que reduce la resistencia en la rama que se modificó. La ecuación para la calibración por derivación resulta tan simple como:

$$\text{Deformación Simulada } (\mu\epsilon) = \frac{R_g * 10^6}{FE(R_d + R_g)}$$

en donde:

R_g = Resistencia de la rama del puente en donde se hace la

³ Hemos traducido "SHUNT" como "DERIVACION", por ser ese el efecto que se produce en el flujo del circuito.

derivación (Si se deriva en una rama inactiva del puente deberá ser igual a la del extensómetro).

R_d = Resistencia usada en la derivación

FE = Factor del extensómetro.

Por ejemplo, una resistencia para calibración de $59\ 880\ \Omega$ si se deriva con una rama de $120\ \Omega$ podrá simular $1000\ \mu\epsilon$ para FE = 2.0.

El que se escoja una u otra rama del puente presenta diferentes ventajas y desventajas; una de las prácticas más comunes es derivar el compensador ó complemento del puente (fig.4) en la conexión de cuarto de puente con tres cables. En éste caso el efecto de desensibilización de la resistencia de los cables en serie con el extensómetro activo, es compensada en la calibración.

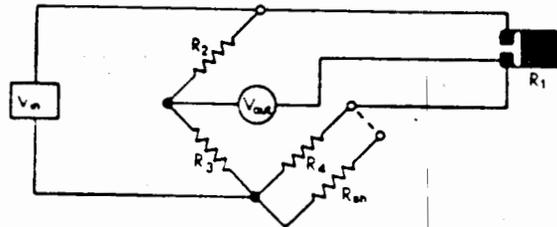


Fig. 4 Calibración por derivación de la rama del compensador.

Sin embargo, debe hacerse notar que a pesar de lo sobresaliente y útil de la calibración por derivación, ésta no calibra ni el instrumento ni al extensómetro; más bien es una determinación de la sensibilidad del sistema.

Amplificación

Hasta ahora se ha establecido la salida del puente como función de la señal disponible del circuito del puente; no obstante, para fines de medición práctica la señal debe ser amplificada a niveles (típicamente del orden de + 10 V) que sean compatibles con los requerimientos de entrada de voltaje del dispositivo de lectura; así, la ecuación de la salida de voltaje incluye un término más; *amplificación de ganancia*. Para un solo extensómetro activo:

$$V_o = \frac{V_0}{4} * FE * \epsilon * \text{Ganancia}$$

Debe hacerse notar la particularidad de que, para el mismo V_s , resultarán diferentes combinaciones de V_o y Ganancia; la posibilidad de manejarlas entre ellas puede ser una importante ayuda para obtener las mejores mediciones posibles y mantener la misma resolución para diferentes valores de V_o .

Amplificador de Ganancia

Las características de amplificación deberán ser tales, que sean capaces de amplificar completamente las pequeñas señales a la salida del puente de una forma estable y libre de ruido.

Los valores de ganancia para mediciones estáticas son normalmente menores que aquellos para mediciones dinámicas, en las que la estabilidad es un tanto menos importante, aunque la amplificación del ruido eléctrico puede resultar significativo. Debido a que podrían requerirse técnicas especiales para reducir el ruido en el circuito de medición (4), la posibilidad de manejar valores reducidos de ganancia para voltajes altos en el puente, puede resultar desventajosa.

La amplificación de ganancia en instrumentos para mediciones estáticas puede estar incluida; de tal forma que no exista un control separado para el ajuste de ganancia ó éste pudiera ser cambiado automáticamente cuando el voltaje del puente es alterado ó se ajuste el factor del extensómetro. Sin embargo, en instrumentos para pruebas dinámicas, es común encontrar un control variable de ganancia con valores de 100 ó menos, hasta valores de algunos miles.

Amplificador de Balance

El amplificador de balance ó control cero, es requerido para establecer el cero eléctrico; por ejemplo, cero salida para cero entrada (ésto no deberá confundirse con el "balance del puente" indicado anteriormente). Varios métodos pueden ser utilizados para obtener una entrada cero al amplificador; uno de ellos es interrumpir el voltaje del puente (con lo cual no habrá salida del puente) y/ó cortar la entrada al amplificador cuando la función de cero amplificación sea seleccionada.

Frecuencia de Respuesta

Una importante característica que debe ser observada cuando se realicen mediciones dinámicas, es la frecuencia de respuesta ó ancho de banda de la salida analógica del amplificador; ésta es definida como la frecuencia más alta, después de la cual la salida del amplificador podría decrecer con incrementos de frecuencia para una entrada constante (Fig.5), y es función del diseño del amplificador. Las especificaciones del ancho de banda son normalmente referidas a los puntos - 0.5 dB (5 % de pérdida de salida), ó al - 3 dB (30 % de pérdida de salida).

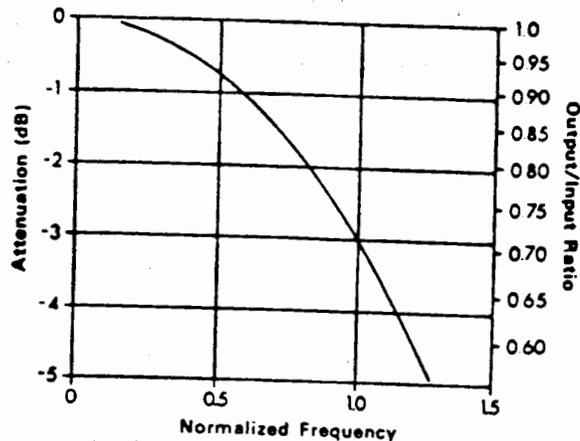


Fig. 5 Características típicas de las frecuencias de respuesta normalizadas a -3 dB de frecuencia de atenuación.

Debido a que la frecuencia en el punto -3 dB es normalmente entre 2 y 2.5 veces mayor que en el punto -0.5 dB, deberá de tomarse en cuenta que cualquier medición a frecuencias arriba de la anterior, podrá involucrar aumento en los errores debidos a la pérdida de la señal de salida; esos errores no pueden fácilmente ser establecidos ó captados, sin una calibración dinámica con un generador de frecuencias.

Filtrado

Cuando las mediciones no requieren la totalidad del ancho de banda, los instrumentos dinámicos más elaborados que tengan una muy buena respuesta a alta frecuencia, pueden tener interconstruidos selectores de filtraje de paso bajo, para suprimir las componentes de alta frecuencia de la señal de entrada. Los cortes de frecuencia típicos son 10, 100, 1000 y 10 000 Hz; otra cualidad que puede ser incluida en los instrumentos dinámicos más sofisticados, es un acoplamiento de CA; éste elimina las componentes estáticas de la señal, de tal forma que solo las componentes dinámicas están disponibles a la salida; de esta forma las componentes dinámicas pueden ser observadas ó almacenadas sin ninguna desviación del valor medio ó cero.

Salida y Presentación

Como se dijo antes, la salida del amplificador es normalmente en forma de un voltaje analógico (arriba de 10 V), el cual puede ser enviado a cualquier indicador apropiado o dispositivo de almacenaje; éste puede exhibir un amplio rango de valores de deformación, como función del voltaje del puente (V_e) y el amplificador de ganancia (fig.6). Para mediciones estáticas, la salida analógica puede por lo general enviarse a un convertidor

La conmutación a baja velocidad; automática ó manual, es normalmente hecha con el mismo circuito y requiere el uso de contactos en el conmutador de baja resistencia y alta calidad. Sin embargo, los "multiplexores" de estado sólido y alta velocidad presentan significativas resistencias en la conmutación, que impide su uso dentro del puente; en éste caso, circuitos de entrada con selectores asociados, son diseñados de tal forma, que cada canal extensométrico es un puente completo y la conmutación se efectúa en los cables de salida de la señal, en donde los cambios de resistencia tienen efectos despreciables.

Conclusiones

La intención de éste artículo ha sido describir de manera sencilla y práctica, algunas de las principales características de la instrumentación extensométrica; características que son producto de un cuidadoso diseño electrónico y de un completo entendimiento técnico del cómo la resistencia eléctrica del extensómetro, permite hacer mediciones seguras y confiables. La moderna instrumentación extensométrica ha sido diseñada, desarrollada y fabricada bajo las normas y especificaciones que incorporan todas las características necesarias para obtener mediciones precisas y confiables; lo cual no podría ser de otra forma debido a lo muy pequeño de los niveles iniciales de señal.

REFERENCIAS

1. "Errors due to Wheatstone Bridge Nonlinearity," *Measurements Group Tech Note TN-507*
2. "Optimizing Strain Gage Excitation Levels," *Measurements Group Tech Note TN-502.*
3. "The 3-Wire Quarter-Bridge Circuit," *Epsilonics, Vol.III, Issue 2 (August 1983), pp. 10-11.*
4. "Noise Control in Strain Gage Measurements," *Measurements Group Tech Note TN-501.*
5. *Strain Gage Meets Computer in the Teaching Laboratory.* Measurements Group Educational Division Special Publication.

ANEXO 2

INTRODUCCION AL PUENTE DE WHEATSTONE Parte 1

(Note Book No. 8)

Hay dos formas de explicar las relaciones entre las resistencias del puente de Wheatstone y la señal de salida que produce; la primera involucra un análisis de las corrientes en él y la segunda de su voltaje, esta última resulta un poco más fácil y será la primero que veremos.

Cuando dos resistencias R_1 y R_4 son colocadas en serie a través de un suministro de voltaje V_0 (figura 1a), actúan como divisores del mismo tomando cada una una parte de él, de tal forma que:

$$V_0 = V_{R1} + V_{R2} \quad \text{ec.[1.1]}$$

en donde:

$$V_{R1} = V_0 * R_1 / (R_1 + R_4) \quad \text{ec.[1.1]}$$

$$V_{R4} = V_0 * R_4 / (R_1 + R_4) \quad \text{ec.[1.2]}$$

Cuando se colocan otras dos resistencias R_2 y R_3 , a través del mismo suministro de voltaje (figura 1b), también actuarán como divisores; así:

$$V_0 = V_{R2} + V_{R3} \quad \text{ec.[2.0]}$$

en donde:

$$V_{R2} = V_0 * R_2 / (R_2 + R_3) \quad \text{ec.[2.1]}$$

$$V_{R3} = V_0 * R_3 / (R_2 + R_3) \quad \text{ec.[2.2]}$$

Dependiendo de los valores de las cuatro resistencias (que forman un doble divisor), es posible tener diferentes valores del voltaje de salida V_s entre los puntos A y B (figura 1c); este voltaje V_s puede ser medido con precisión mediante un voltmetro de alta impedancia (y buena calidad). También es posible determinarlo midiendo la diferencia de la caída de voltaje entre los puntos A y B (ec. [1.0] menos ec. [2.0]), quedando :

$$V_s = (V_{R1} - V_{R2}) = (V_{R3} - V_{R4}) \quad \text{ec.[3.0]}$$

Si sustituimos las ecuaciones [1.1] y [2.1] en la ec. 3, tendremos el voltaje de salida V_s , en términos de las cuatro resistencias y del voltaje de entrada V_e , por lo que:

$$V_s = V_e \left[\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right] \quad \text{ec. [3.1]}$$

Resulta obvio que el circuito de la figura 1c es el mismo que el de la figura 1d, que es la forma tradicional de representar el circuito de puente de Wheatstone. De esta forma tenemos el circuito que se emplea para la medición extensométrica.

La ec. [3.1] nos da la relación clave del comportamiento de puente de Wheatstone, de modo que podemos obtener el voltaje de salida V_s para cualquier combinación del voltaje de entrada y resistencias.

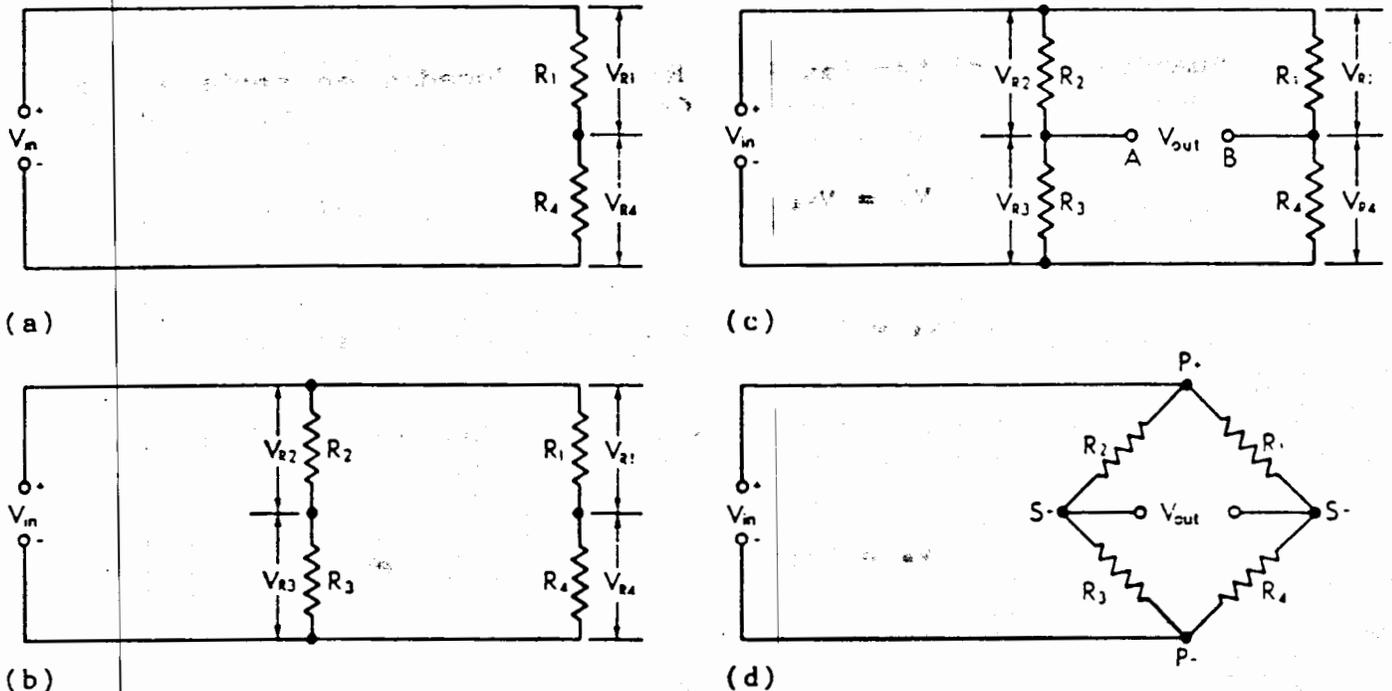


Fig. 1 Principios del puente de Wheatstone a) Divisor simple de voltaje, b) Divisor doble de voltaje, c) Salida diferencial de voltaje y d) Circuito típico de puente de Wheatstone.

Cuando se realizan mediciones resulta conveniente que $V_s = 0$, por lo que estudiaremos los casos especiales en que esto puede ser obtenido.

Condiciones para que $V_s = 0$. cup 616

Si tomamos en cuenta que el puente de Wheatstone es un circuito pasivo, entonces no es posible que se genere una señal de salida cuando no exista una señal de entrada (independientemente del valor de las resistencias del puente), y ésta sería la primera condición para que $V_s = 0$; pero es posible que a pesar de cortar el V_e se tuviera una señal de salida, la cual podría ser causada por efectos ajenos a la medición que se efectúe, por ejemplo generación de voltajes termoeléctricos ó alguna otra forma de ruidos externos, los cuales deberán ser eliminados ó cuantificados para así nulificar su efecto, restando su valor inicial de las lecturas que se realicen.

Una segunda condición ocurre cuando tenemos un balance de las resistencias del puente; esto es, cuando:

$$R_1/R_4 = R_2/R_3 \quad \text{ec.[4]}$$

relación que se obtiene igualando a cero la ec.[3.1] y que implica que no habría señal de salida V_s independientemente del valor de V_e .

La condición de balance resistivo podría resultar particularmente útil para la medición de deformaciones, si ésta permitiera que el puente no registrara señal de salida cuando los extensómetros no estén solicitados a esfuerzo; en la práctica sin embargo, un balance resistivo verdadero es poco frecuente, aún si se obtiene en el puente de Wheatstone usado en la instrumentación. De esta forma, un circuito para balance cero como el de la figura 2, es con frecuencia aplicado externamente al puente, a fin de que los pequeños desbalances iniciales puedan ser eliminados cambiando la relación de las resistencias en los dos brazos adyacentes a los nodos de alimentación de la energía.

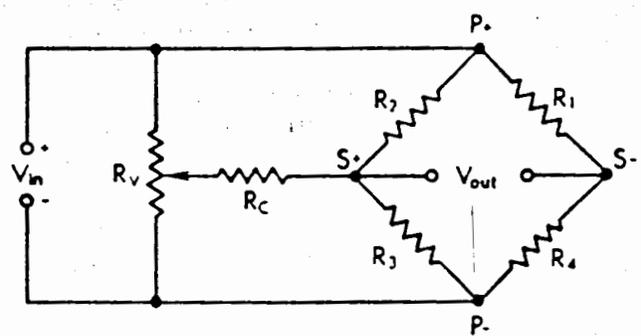


Figura 2 Puente de Wheatstone con circuito externo de balance

Si recordamos la analogía hidráulica, sería equivalente a tener un circuito cerrado sometido a presión, pero sin circulación alguna por lo que no habría diferencias de presión en él.

Entonces, para que la condición de balance ocurra, se debe cumplir que:

$$R_{R2}/R_{R3} = R_1/R_4 \quad \text{ec.[5]}$$

en donde:

$$R_{R2} = (R_A * R_2) / (R_A + R_2) \quad \text{ec.[5.1]}$$

$$R_{R3} = (R_B * R_3) / (R_B + R_3) \quad \text{ec.[5.2]}$$

y:

$$R_A = R_v * f_{R2} + \frac{R_c}{1 - f_{R2}} \quad \text{ec.[5.1.1]}$$

$$R_B = R_v * (1 - f_{R2}) + \frac{R_c}{f_{R2}} \quad \text{ec.[5.2.1]}$$

Como puede verse R_c es una resistencia fija (*límite de balance*), R_v es una resistencia variable (a través del suministro de energía), y f_{R2} es la fracción de la resistencia variable en paralelo con R_2 para salida cero.

La presencia del circuito de balance que acabamos de mencionar, puede tener un pequeño efecto sobre las resistencias del puente cuando éste es desbalanceado posteriormente; el efecto es mínimo cuando R_c es grande en comparación con R_2 y R_3 , desafortunadamente, entre más grande sea el valor de R_c , más pequeño es el desbalance inicial que puede ser corregido con el circuito.

Para eliminar el efecto de "carga en el puente" causado por el circuito externo de balance, la mayoría de los instrumentos modernos usan un método electrónico alternativo, conocido como *inyección de voltaje*, para obtener el balance inicial en cero, en el instrumento de salida. Con ésta técnica, no se requiere agregar circuitos externos al puente, ya que la señal de salida recibida por el amplificador desde el puente, es anulada por la inyección a la entrada del amplificador, de un voltaje de igual magnitud y de polaridad opuesta. De esta forma, a pesar de que el puente se encuentre desbalanceado y dé una señal de salida, la señal del amplificador proveniente del puente, puede ser cero para cualquier conjunto arbitrario de resistencias en el puente que sean seleccionadas, como de referencia cero.

Quando la señal de salida no es cero.

La condición de puente balanceado es un caso especial, lo más común es que en una medición cualquiera, tengamos el puente desbalanceado y con una señal de salida inicial; como sabemos, en una instrumentación extensométrica por lo menos uno de los brazos

del puente lo forma el extensómetro, y que el puente en sí, no es otra cosa que un medio para medir el cambio de su resistencia eléctrica cuando se solicita a deformación por esfuerzo. Así, si como vimos antes no tenemos un circuito externo para balancear el puente, podremos ajustar el instrumento de lectura en cero, pero tendremos como referencia un puente desbalanceado.

De esta forma, los cambios posteriores de resistencia son en realidad mediciones diferenciales de ésta, y las podemos calcular antes y después de la prueba, utilizando la ec.[3.1], ó bien, si se conocen las condiciones iniciales y los cambios de resistencia, podríamos reestablecer la ec.[3.1] como sigue:

$$\Delta V_o = V_o \left[\frac{R_1 + \Delta R_1}{R_1 + \Delta R_1 + R_4 + \Delta R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2 + \Delta R_2}{R_2 + \Delta R_2 + R_3 + \Delta R_3} + \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right] \quad [6]$$

en donde R_1 , R_2 , R_3 y R_4 son los valores iniciales de las resistencias y ΔR_1 , ΔR_2 , ΔR_3 y ΔR_4 los cambios experimentados después de la sollicitación.

Es importante hacer notar que cuando se tienen incrementos en R_1 y R_3 se tendrán incrementos en la salida del puente, pero que, por el contrario, los incrementos en R_2 y R_4 producirán reducciones en la salida; esto nos conduce a una sobresaliente característica del puente de Wheatstone que es "cambios de resistencia de igual signo en brazos adyacentes (R_1 y R_4 ó R_2 y R_3), tienden a cancelarse (se restan ya que tienen efectos ó signos contrarios); en tanto que si son de signos contrarios se suman."

El hecho de que los cambios en brazos adyacentes se resten numéricamente cuando son del mismo signo, puede ser usado para eliminar el efecto de la dilatación térmica, colocando en el brazo adyacente al utilizado para una medición, un extensómetro del mismo tipo, en el mismo material, iguales longitudes y tipos de cable y bajo los mismos cambios de temperatura, ya que al sufrir las mismas dilataciones térmicas, éstas se anularán.

2

En el caso de cambios de resistencia del mismo signo en brazos opuestos (R_1 y R_3 o R_2 y R_4), éstos se suman, en tanto que se restan los de signo contrario; es decir, sus efectos son del mismo signo ó contrarios a lo que acabamos de decir.

La resistencia total de un brazo del puente, es la suma de la resistencia del extensómetro y los cables, sin embargo, a pesar de que la resistencia del cable es generalmente pequeña en comparación con el extensómetro, no dejan de ser resistencias con un valor alto de su coeficiente de resistividad térmica, por lo que su efecto puede ser mayor que el del propio extensómetro.

Antes del advenimiento de los extensómetros con autocompensación de la dilatación térmica, el uso de un elemento compensador de éste efecto era una práctica común, sin embargo, actualmente existen extensómetros que la autocompensan, minimizando la señal de salida con bastante éxito dentro de rangos limitados, pero prácticos, de temperatura, permitiendo su instalación en un circuito de cuarto de puente y tres cables, como se ve en la fig. 3b (R_l es la resistencia equivalente del cable), ya que si los dos cables que se conectan a los puntos P de alimentación de energía se someten a los mismos cambios de temperatura, sus efectos se anularan por estar en brazos adyacentes del puente; lo cual obviamente no ocurriría en la conexión de dos cables que se muestra en la figura 3c.

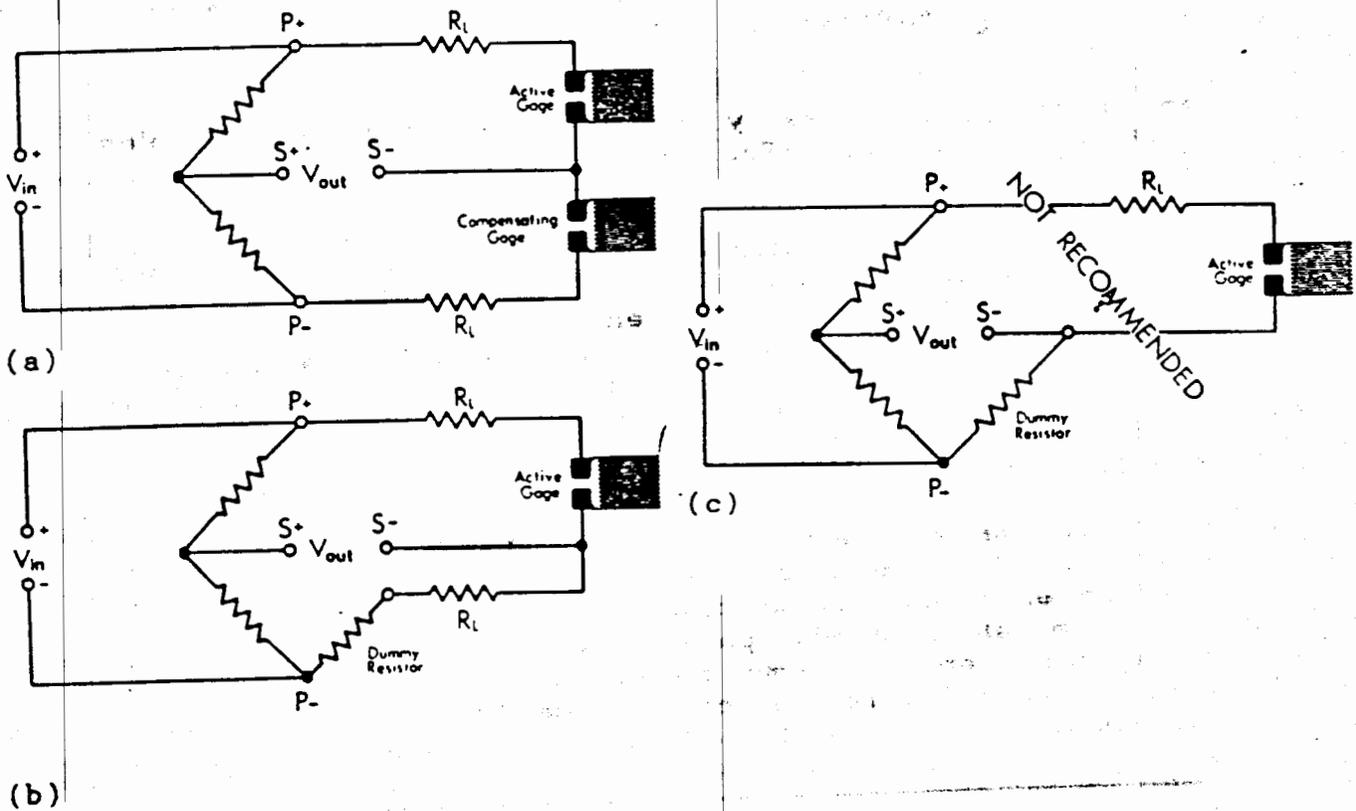


Fig. 3 Configuraciones de cuarto de puente: a) Con extensómetro de compensación, b) Método de 3 cables y c) Método de 2 cables.

La resistencia del cable conectado al punto S donde se encuentra el indicador, puede ser despreciada por ser sumamente pequeña y por tanto tener poca ó nula influencia en la lectura; siempre y cuando el medidor sea de alta impedancia, ya que si no es así ó se usa un galvanómetro, los efectos de dilatación térmica sí serán notorios.

El signo de la señal de salida del puente dependerá por un lado de la polaridad de la fuente de alimentación; con lo que, en un mismo brazo del puente es posible obtener diferentes signos para el mismo efecto; por ejemplo si un elemento se solicita a tracción, el signo podrá ser positivo ó negativo, según la polaridad de la fuente de energía; por otro lado también dependerá del brazo elegido ya que como hemos visto, en brazos adyacentes uno tiene signo contrario al otro. Ahora bien, la magnitud de la señal de salida depende de dos parámetros diferentes; uno es el voltaje de entrada y el otro las relaciones de las resistencias del puente; el valor individual de las resistencias es importante únicamente en la medida que ella nos sirve para determinar ésta relación, ya que es posible obtener la misma salida para dos diferentes puentes con resistencias completamente diferentes, en tanto tengan las mismas relaciones.

En un puente desbalanceado formado por un conjunto específico de resistencias, la magnitud de la señal de salida es proporcional al voltaje de entrada; esto se debe a que, de acuerdo con la ley de Ohm, la corriente através de un divisor de voltaje (y consecuentemente la caída de voltaje en los brazos del puente), es directamente proporcional al voltaje de entrada; por otro lado, cuando el voltaje de entrada se mantiene constante y la resistencia en un brazo del puente cambia, la magnitud de la señal de salida será una función lineal únicamente en caso de que el puente se haya balanceado inicialmente ($R_1/R_4 = R_2/R_3$), con lo que los cambios subsecuentes de resistencia en brazos adyacentes, son de igual magnitud pero de sentidos contrarios ($\Delta R_1 = -\Delta R_4$ ó $\Delta R_2 = -\Delta R_3$). Para cualquier otra combinación de cambio de resistencia en un puente desbalanceado, es de esperarse que la salida no sea lineal (2).

Afortunadamente los errores de la no linealidad normalmente son pequeños y generalmente ignorados; sin embargo, bajo ciertas circunstancias (*mediciones con grandes deformaciones por ejemplo*), estos errores pueden resultar significativos en las lecturas de deformación unitaria y deberán ser cuidadosamente considerados por el analista; al final veremos un método para su cálculo.

Los mayores errores en las mediciones debidos a la no linealidad del puente de Wheatstone, ocurren en la instrumentación de cuarto de puente y cuando la resistencia es sensiblemente diferente a la del compensador⁵; esto es, el error en la deformación unitaria indicada, basada en el diferencial de salida del puente (ec. 6.1), podrá ser mayor cuando las resistencias que completan al puente, R_2 y R_3 , tengan igual valor, y la resistencia activa R_1 sea diferente a la del compensador R_4 ; esta combinación de resistencias es desafortunadamente común cuando se utiliza un

⁵ Esta discusión es estrictamente aplicable a puentes en donde $R_2=R_3$; el efecto podrá ser diferente si, por ejemplo, $R_2 \neq R_3 = R_4$ como es el caso de los llamados puentes asimétricos.

medidor de deformaciones con resistencias internas para completar el cuarto de puente.

En la figura 4 se muestra una tabla de los valores característicos de error, como función del desbalance inicial y la deformación aplicada; como puede verse, en la mayoría de los casos los errores de la no linealidad pueden ser minimizados; pero no totalmente eliminados, minimizando el desbalance inicial; esto significa que el valor de la resistencia del extensómetro activo, sea tan cercano como sea posible al del compensador. Para minimizar el desbalance inicial, los extensómetros son construidos como resistencias de precisión (La tolerancia de los extensómetros de MM es típicamente $\pm 0.5\%$ ó menos). Cualquier desbalance inicial

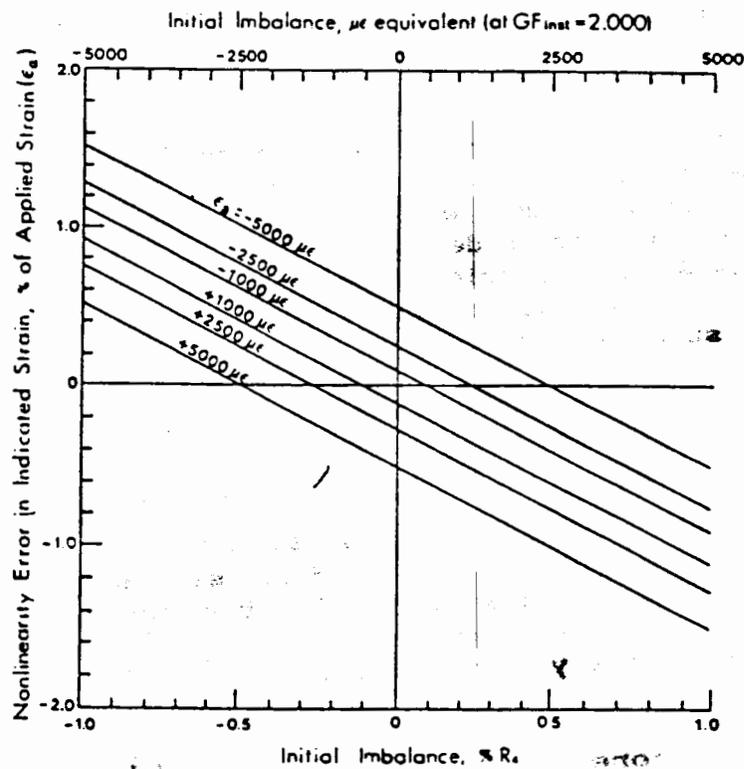


Fig. 4 Errores de no linealidad como fracción del desbalance inicial y la deformación aplicada.

Notas:

1. El desbalance inicial y la deformación deben ocurrir en el brazo activo, R_1 .
2. Los resistores complementarios del puente, R_2 y R_3 en la rama inactiva, deben ser iguales.
3. Los gráficos son para diferentes valores de deformación aplicada y para un FE de 2.0

mayor que la tolerancia indicada en los datos técnicos del paquete de extensómetros, deberá ser investigada para determinar su causa; que podría ser: 1) instalación en superficies afiladas, cóncavas ó convexas; 2) excesiva presión de la pinza en la instalación ó 3) alargamiento ó acortamiento del extensómetro debido a mal manejo, doblez excesivo de la cinta de instalación ú otros.

Cuando se utilizan instrumentos de balance manual, el desbalance inicial suele ser muy grande, en tanto que con equipos automáticos que "inyectan" voltaje a la entrada del amplificador, los desbalances iniciales no pueden ser detectados por muy grandes que éstos sean, y permanecerán en el puente a pesar de que el indicador se encuentre en cero. Cuando se sospeche esta situación, es recomendable verificar la salida del puente antes de someterlo al autobalance.

Cualquier error de desbalance podrá ser corregido numéricamente, aunque también puede ser minimizado mediante un derivador de calibración, como discutiremos en otro artículo.

Cálculo de Error por Nolinealidad

Los errores de nolinealidad en las lecturas del diferencial de salida del puente para instalaciones de cuarto de puente con desbalance inicial, pueden ser calculados para cualquier rango de deformación. Presentamos aquí el cálculo cuando $R_2 = R_3$:

1.- Determina con precisión la resistencia del extensómetro activo R_1 y del compensador ó complemento R_4 .

2.- Para el rango de deformación deseado, calcula el cambio de resistencia ΔR_1 inducido por la deformación del extensómetro activo:

$$\Delta R_1 = \epsilon_a * FE_a * R_{1n} \quad \text{ec.[7]}$$

en donde ϵ_a es la deformación aplicada que produjo el cambio de resistencia, FE_a es el factor del extensómetro activo y R_{1n} es la resistencia nominal a la cual se determinó el FE (que corresponde al indicado en el paquete). Para estos cálculos R_{1n} deberá ser igual al del compensador R_4 ; la diferencia entre R_1 y R_{1n} es el desbalance inicial del extensómetro activo.

3.- Sustituye los valores de la resistencia medida R_1 , R_4 y ΔR_1 en la ec.[6] y calcula el diferencial de voltaje de salida ΔV_o .

4.- Calcula la señal de salida ideal:

$$\Delta V_{ideal} = V_o * \left[\frac{R_{1n} + 0.5\Delta R_1}{R_{1n} + R_4} - 0.5 \right] \equiv V_o * \left[\frac{R_4 + 0.5\Delta R_1}{2R_4} - 0.5 \right]$$

ec.[8]

Nota que la expresión para la señal ideal está basada en la analogía que involucra la eliminación del desbalance inicial (simplemente para asegurar que R_{1n} es igual a R_4) y la partición del cambio de resistencia inducida por deformación entre R_{1n} y R_4 ; si el cambio de resistencia es igualado en la partición y el signo de la mitad asignada a R_4 es invertido, entonces los dos términos ΔR son totalmente eliminados del denominador. Este medio puente análogo, no es equivalente únicamente en términos de cambio de resistencia inducida por deformación, ya que resistivamente también está inicialmente balanceado y presenta iguales cambios de resistencia con signo contrario en brazos adyacentes (de forma que no hay cambios netos de resistencia ó corriente); de tal forma que, como establecimos antes, esta configuración produce salidas lineales.

5.- Calcula el error de no linealidad, N_{act} , en la salida del puente actual, como un porcentaje del ideal:

$$N_{act}(\%) = [(\Delta V_s - \Delta V_{ideal}) / \Delta V_{ideal}] * 100 \quad \text{ec. [9.1]}$$

El analista de esfuerzos podría normalmente trabajar con deformaciones aplicadas e indicadas más que con ideales y las salidas actuales del puente; para esos casos, la ec. [9.1] puede reescribirse para incluir el error de no linealidad en la deformación indicada, en términos del desbalance inicial expresado en microdeformaciones, ϵ_0 , y la deformación aplicada, ϵ_a :

$$N_{act}(\%) = [Q / (4 + Q)] * 100 \quad \text{ec. [9.2]}$$

en donde:

$$Q = (4 * FE_a * \epsilon_0) + (2 * FE_a * \epsilon_a) + (FE_a^2 * \epsilon_0^2) + (FE_a^2 * \epsilon_0 * \epsilon_a) \quad \text{ec. [9.2.1]}$$

ANEXO 3

INTRODUCCIÓN AL PUEBTE DE WHEATSTONE Parte 2

Note Book No. 01

Fundamentos:

Como vimos en la parte 1, una de las principales características del puente de Wheatstone (fig. 1), es la de dividir el voltaje de entrada V_e , de la fuente de energía y suministrar una señal de salida V_s , que es función de V_e y la resistencia instantánea de sus brazos (R_1 , R_2 , R_3 y R_4):

$$V_s = V_e * \left[\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right] \quad \text{ec.1.01}$$

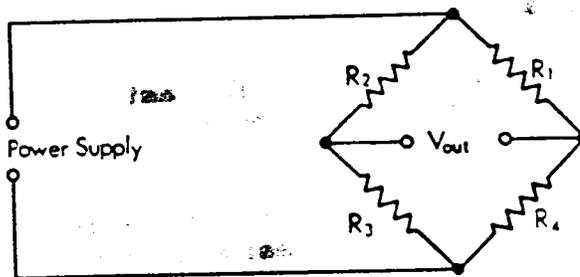


Fig. 1 Esquema del puente de Wheatstone

Utilizando la ley de Ohm, V_e puede ser expresada en términos de la corriente I_e , que circula por el puente:

$$V_e = I_e * R_b \quad \text{ec.21}$$

en donde R_b es la resistencia del puente entre los nodos de alimentación de energía, de tal forma que ésta puede ser expresada como la resistencia instantánea de los cuatro brazos del mismo:

$$R_b = \frac{(R_1 + R_4) * (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \dots\dots\dots ec.13]$$

sustituyendo ec.13] en ec.12] y ec.2] en ec.11], y simplificando, la salida del puente puede tambien ser expresada en términos de la corriente constante que se suministra al puente:

$$V_o = I_o * \left[\frac{(R_1 * R_3) - (R_2 * R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \right] \dots\dots\dots ec.11.1]$$

La ec.11.1] es la relación clave para entender el puente de Wheatstone através del suministro constante de corriente; con ello, la salida puede ser encontrada para cualquier combinación entre la corriente de entrada y las resistencias del puente.

Quando la salida del puente es cero:

Sabemos que el puente de Wheatstone es un circuito pasivo que debe tener una fuente externa de entrada, para tener una señal de salida; de tal modo que si no existe una alimentación de voltaje, entonces no deberá tener ninguna señal de salida; independientemente del valor de sus resistencias, por lo que si desconectáramos la alimentación y existiera alguna señal de salida, entonces ésta sería debida a una fuente extraña ajena a la medición y será una excelente referencia para tratar de eliminarla removiendo la fuente de "ruido" ó restando su magnitud de las mediciones que se efectúen. Es así como este caso especial se convierte en una útil herramienta para la calibración inicial de una medición.

Otra posibilidad de balance inicial cero; aunque muy rara, es el caso de balance de resistencias; esto es:

$$R_1/R_4 = R_2/R_3 \quad ec.14]$$

condición que es independiente de si analizamos el puente por voltaje ó corriente ya que en ambos la salida será cero.

Circuitos de balance resistivo pueden ser usados en instrumentos que tengan alimentación de corriente constante, para obtener la condición de salida cero cuando exista un desbalance inicial; sin embargo, los instrumentos más modernos usan un método electrónico alternativo de inyección de voltaje para éste fin.

Cuando la salida del puente NO es cero: 56

La condición de balance resistivo resulta muy útil como punto de referencia al hacer mediciones; desafortunadamente, este caso es rara vez obtenido en la práctica; es por ello que en las mediciones sea común tener un puente con cierto desbalance inicial y una salida diferente de cero que se tomará como lectura inicial ó punto de referencia, de tal modo que los cambios subsecuentes nos permitirán obtener una lectura diferencial. Para puentes que tengan alimentación constante de corriente ($I_e = \text{constante}$), esta cantidad puede ser calculada para las resistencias iniciales (R_1, R_2, R_3 y R_4) y para los cambios de resistencia inducidos ($\Delta R_1, \Delta R_2, \Delta R_3$ y ΔR_4):

$$\Delta V_s = I_e * \left[\frac{(R_1 + \Delta R_1) * (R_3 + \Delta R_3)}{R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2 + R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4} - \dots \right. \\ \left. \dots \frac{(R_2 + \Delta R_2) * (R_4 + \Delta R_4)}{R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2 + R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4} - \frac{(R_1 * R_3) - (R_2 * R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \right] \quad \text{ec.[5]}$$

Sustituyendo varios valores de resistencia en ésta expresión, podrá verse que por lo general, los efectos de los pequeños cambios relativos de resistencia en la salida diferencial del puente es bastante similar, tanto para el suministro constante de voltaje como de corriente; una detallada descripción de esos efectos los vimos en el anexo anterior, por ello veremos aquí solo las más importantes diferencias.

Diferencias en el caso de suministro constante de corriente:

El suministro de energía incorporado a la mayoría de los instrumentos de medición son del tipo de voltaje constante; dentro de ciertos límites esto es así independientemente de la resistencia del puente R_b . En otras palabras, el mismo voltaje V_e es dividido por el puente para todos los valores de R_b , con lo que, el flujo de corriente en él, varía cuando cambia R_b ; lo cual no es el caso para los aparatos de corriente constante en los que el flujo no varía a pesar de los cambios de voltaje consecuencia de los cambios de R_b . Es interesante observar que para cada valor de corriente constante, la resistencia de algún brazo no sólo determina cómo se dividirá el voltaje en el puente, sino también cual voltaje va a ser dividido; como resultado, las salidas diferenciales diferentes de cero producidas cuando cambia la resistencia inducida del extensómetro son ligeramente diferentes en éste caso.

Errores de NO linealidad:

Uno de los resultados significativos de esa diferencia, es que los errores de no linealidad producidos en ciertas configuraciones de puente desbalanceado, son menores para el caso de corriente constante; cuánto exactamente son menores esas diferencias, depende principalmente de la relación de las resistencias entre ambos brazos del puente, $(R_2+R_3)/(R_1+R_4)$; para el caso de cuarto de puente en los que el elemento activo es R_1 ó R_4 .

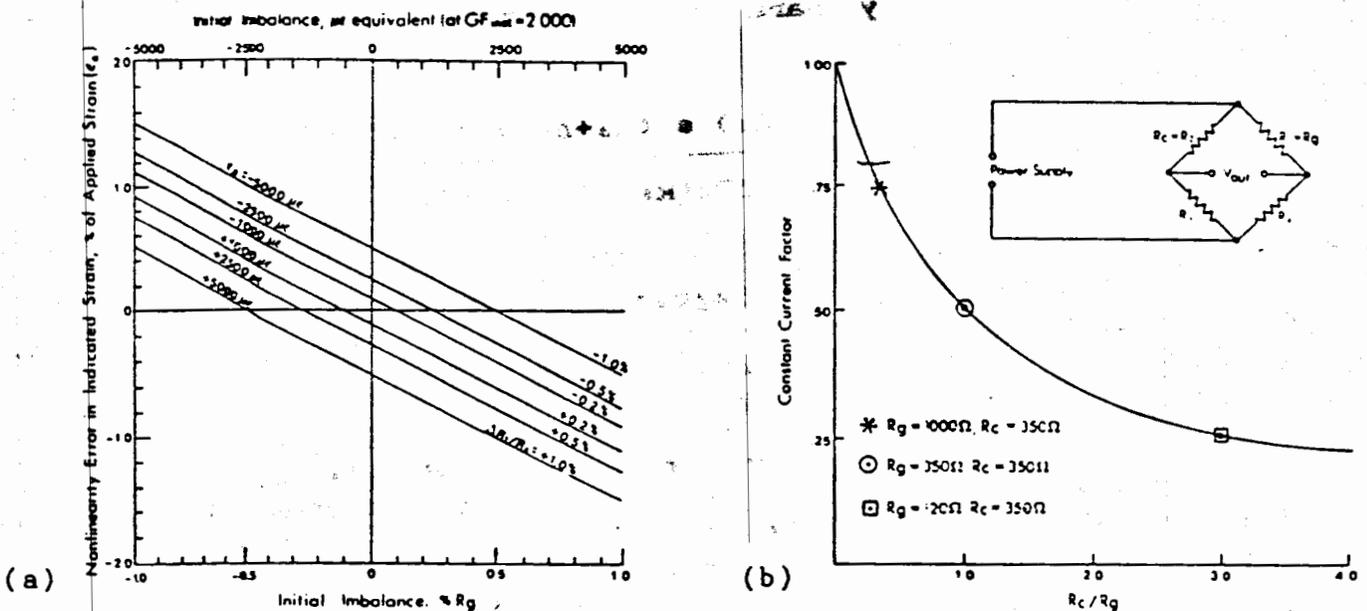


Fig. 2 a) Errores de no linealidad como función del desbalance inicial y la aplicación de deformación para el caso de suministro constante de voltaje.
 b) Factor para determinar aproximadamente los errores de no linealidad para el caso de suministro constante de corriente. (Multiplica el error de (a) por el factor apropiado de (b).)

Notas:

1. El desbalance inicial y la deformación deberán ocurrir en el mismo brazo activo, 1 o 4 en donde normalmente $R_1=R_4=R_0$
2. Los resistores para completar el puente en la rama inactiva deberán ser iguales ($R_2=R_3=R_c$).
3. Las gráficas de a) son para diferentes valores de ϵ_a aplicada y para un F.E. de 2.0.
4. Los factores de b) pueden ser aplicados a los errores de a) para cualquier combinación de desbalance inicial y ϵ_a aplicada.

Para este caso común de cuarto de puente, estos errores de no linealidad pueden ser minimizados maximizando la relación de resistencias, lo cual puede ir acompañado del uso del menor número de elementos activos, extensómetros de compensación y/o para completar el puente. Desgraciadamente ésta medida también reduce la señal de salida V_o ; una alternativa a este problema es el utilizar valores altos en los resistores de la rama opuesta a la que tiene los elementos activos; con lo que no sólo se reducen los errores de no linealidad, sino además se incrementa la señal de salida. En la figura 2 se dan los gráficos para el cálculo de estos errores.

Afortunadamente, como se dijo en la parte 1, este tipo de errores son por lo general pequeños en comparación con otros y pueden ser ignorados; sin embargo, con el uso de instrumentos de corriente constante se tienen ventajas en aquellos casos en los que los errores son significativos, como en el caso de mediciones muy grandes.

Pero independientemente del tipo de aparato que se utilice, cualquier error de no linealidad que se considere inaceptable, deberá ser corregido numéricamente; aunque también puede ser corregido con una calibración por derivación y que se verá en otra ocasión.

Atenuación de señal debida al alambrado interno del puente:

Tal vez el impacto más importante para el caso de suministro constante de corriente, sea sobre los errores de pérdida de sensibilidad (desensibilización) del cableado del suministro de corriente y los externos al mismo puente que podrían ser eliminados, además de minimizar aquellos internos al mismo puente.

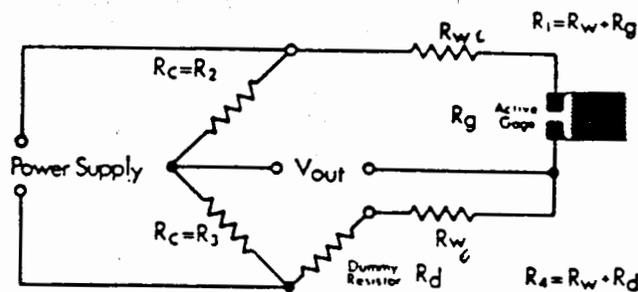


Fig. 2 Puente de Wheatstone con un extensómetro activo (circuito con 3 cables en donde $R_2 = R_3$).

Como se mostró en las ecs. (1.0 y 1.1), la salida del puente depende de las resistencias del mismo (R_1 , R_2 , R_3 y R_4); si no hay

cables entre el extensómetro en un brazo y los nodos del puente (fig.1), entonces la resistencia del extensómetro es la misma que la del elemento activo $R_e = R_a$ y en este caso, la salida del puente por efecto de cualquier cambio de resistencia inducido es maximizada. Si por otro lado, un brazo del puente tiene algún cableado interno (fig.3), lo cual es muy común; entonces la resistencia de ese brazo es la suma de la del extensómetro y del cableado $R_4 = R_e + R_{cab}$; pero debido a que los cables no experimentan cambios en su resistencia cuando el extensómetro está sujeto a esfuerzo, ellos no contribuyen al cambio en la salida del puente, y la sensibilidad de ese brazo a la deformación es reducida (desensibilizada) por una fracción f :

$$f = -R_{cab}/R_e = -R_{cab}/(R_{cab}+R_e) \quad \text{ec.[9]}$$

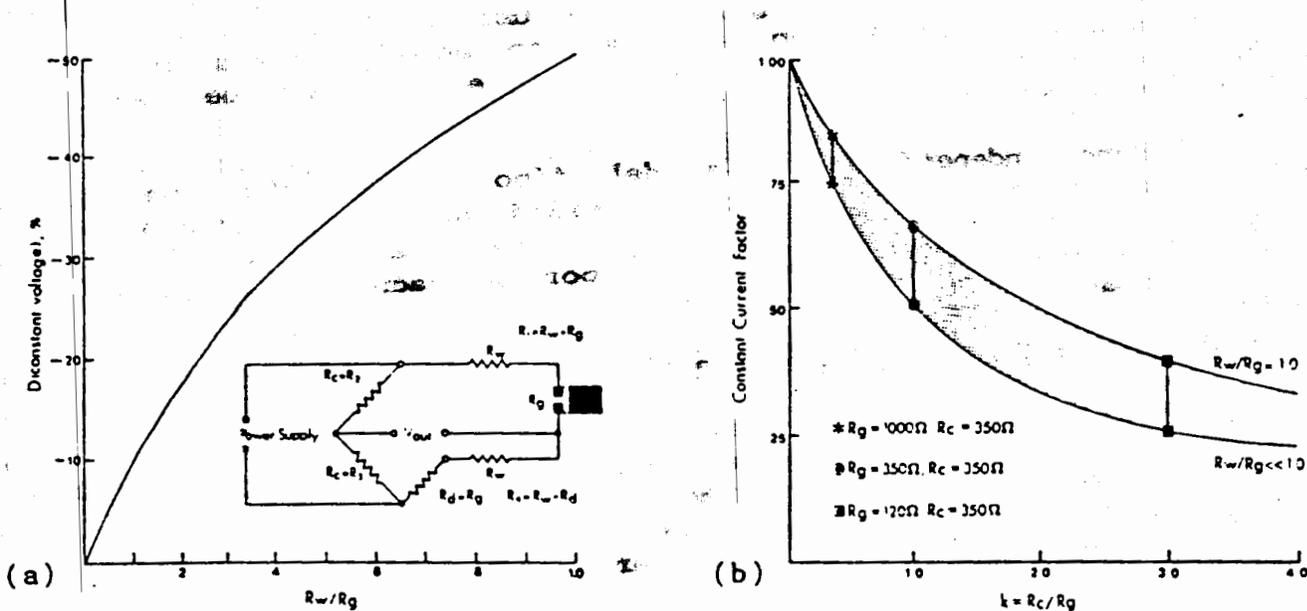


Fig. 4 a) Errores de atenuación debidos al cableado interno del puente para suministro de voltaje constante.
 b) Factor para determinar el error aproximado de atenuación cuando se suministra corriente constante.
 [Multiplique el error de (a) por el factor apropiado de (b)]

Notas:

- 1.- La deformación deberá ocurrir en un solo extensómetro activo (cuarto de puente desbalanceado) en donde normalmente $R_1=R_4=(R_e+R_{cab})$
- 2.- Los resistores que complementan al puente en la rama inactiva, deberán ser iguales $R_2=R_3=R_c$.
- 3.- Los factores de error de (b), pueden ser aplicados para varias relaciones de cableado y resistencia de extensómetros de (a).

Como resultado de la desensibilización del brazo del puente a los cambios inducidos de resistencia, la salida del puente podrá ser menor que la esperada para una cierta deformación. Para un cuarto de puente con suministro constante de voltaje, el resultado de la fracción de error debido a la atenuación de la señal de salida (fig.4a) es idéntica a f:

$$Dv=k = f = -R_{cab}/R_a = -R_{cab}/(R_{cab}+R_a) \quad \text{ec.[10.0]}$$

Este error de atenuación debido a la desensibilización del cableado interno, puede ser reducido (pero no eliminado) usando equipo con suministro constante de corriente; el grado de reducción de error para un caso particular, depende de la relación de las resistencias del puente; para un circuito de cuarto de puente en donde los resistores internos complementarios de la otra rama son del mismo valor (R_c), y el de la rama activa es igual al del extensómetro activo (R_a), esta relación es:

$$k = R_c/R_a \quad \text{ec.[11]}$$

y la fracción de atenuación es:

$$Dv=k = \frac{-R_{cab}}{R_{cab}+R_a(1+k)} \quad \text{ec.[10.1]}$$

Note que si el extensómetro activo R_a y los resistores complementarios R_c son del mismo valor $k = 1$, los errores de atenuación son aproximadamente la mitad de aquellos que se tendrían con voltaje constante (fig.4b); por otro lado, si el extensómetro activo tiene una resistencia de 120Ω y los resistores complementarios son de 350Ω ($k=2.917$), entonces los errores de atenuación con corriente constante son como un cuarto de aquellos con voltaje constante.

Los errores debidos a la desensibilización de los cables, pueden resultar más grandes cuando el cableado interior del puente es muy largo y/o el calibre es más pequeño. Cuando los errores se hacen significativos, las deformaciones obtenidas pueden ser corregidas numéricamente usando las ecs.[10.0] y [10.1] simultáneamente ellas podrán ser minimizadas usando una calibración por derivación.

Atenuación de señal debida al cableado externo:

Tal vez la mejor razón para usar alimentación de corriente constante sea el eliminar los errores asociados con el cableado externo al puente cuando se utiliza puente completo alejado de la instrumentación, ya que si se utiliza voltaje constante, éste llegara atenuado al puente debido a la resistencia de los cables

de alimentación R_c/a por una fracción del orden de $-2R_c/a / (R_p + 2R_c/a)$; ocurriendo además una atenuación adicional debida al cambio de resistencia de los cables por efecto de la temperatura. Esos dos efectos pueden ser virtualmente eliminados midiendo y controlando el voltaje en los bornes del puente lejano, pero este arreglo requiere de seis cables; dos para el suministro de energía, dos para la señal de salida y dos para el sensor remoto.

Todos los cables extras del circuito exterior pueden ser eliminados si se emplea una alimentación con corriente constante, ya que debido a que la corriente en el puente y el cableado es constante (dentro de ciertos límites)¹, el cableado de alimentación no sufre atenuación ni en la entrada ni en la salida de la señal. De esta forma, la corriente constante proporciona al analista de esfuerzos mayor flexibilidad cuando utilice arreglos con cableado extra (incluido el uso de anillos rozantes).

No obstante, tenga presente que si usa corriente constante con transductores a base extensómetros, los beneficios de cualquier modulo de compensación ó resistores de balance que puedan ser instalados en serie con los cables de suministro de energía, serán eliminados².

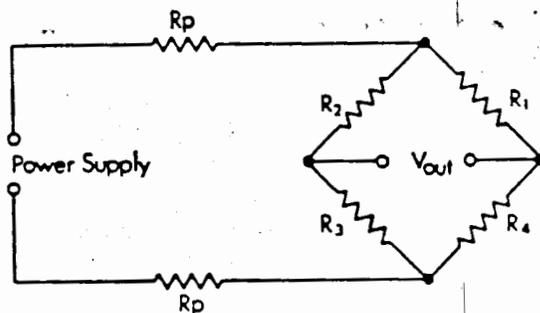


Fig. 5 Puente de Wheatstone con resistores en el cableado externo.

1
La resistencia total máxima ($2R_c/a + R_b$) para la cual la corriente permanezca constante, puede ser obtenida dividiendo el máximo voltaje usado por el instrumento, entre la corriente de entrada. El voltaje aceptable es normalmente dado como una parte integral de las especificaciones del instrumento.

2

Algunos inductores son diseñados especialmente para trabajar con corriente constante. Los resistores de compensación en ellos no son afectados.

CALCULO DE LOS ERRORES DE NO LINEALIDAD (CORRIENTE CONSTANTE)

Los errores de no linealidad en la salida de las instalaciones de cuarto de puente con desbalance inicial, pueden ser calculados para cualquier nivel de esfuerzos; se presenta aquí la forma de hacerlo para el caso de que $R_2 = R_3$ (fig.1) y se utilice una fuente de alimentación constante.

1. Determine con precisión la resistencia del extensómetro activo R_1 y del resistor complementario R_4 .

2. Para el nivel deseado de deformación, calcule la resistencia inducida por deformación en el elemento activo ΔR_1 :

$$\Delta R_1 = \epsilon_a * FE * R_{1n} \quad \text{ec.[6]}$$

en donde ϵ_a es la deformación aplicada que produce el cambio de resistencia, FE el factor del extensómetro activo y R_{1n} es la resistencia del extensómetro que aparece en los datos del fabricante. Para estos cálculos, R_{1n} deberá ser igual a la del extensómetro de complemento R_4 ...La diferencia entre R_1 y R_{1n} es el desbalance inicial del extensómetro activo.

3. Sustituyendo los valores medidos inicialmente de las resistencias R_1 y R_4 , y del cambio de resistencia calculado, ΔR_1 , en la ec.[5], Calcula el voltaje diferencial de salida V_o para el caso de corriente constante.

4. Calcula la salida ideal:

$$\Delta V_{ideal} = I_o * R_b * \left[\frac{R_{1n} + 0.5\Delta R_1}{R_{1n} + R_4} - 0.5 \right] \equiv I_o * R_b * \left[\frac{R_{1n} + 0.5\Delta R_1}{2R_4} - 0.5 \right]$$

ec.[7]

Nota que esta expresión para la salida ideal está basada en la analogía que considera la eliminación del desbalance inicial (simplemente estimando que $R_{1n} = R_4$), y el ajuste del cambio de resistencia inducido por deformación entre R_{1n} y R_4 . Si el cambio de resistencia es igualado en el ajuste y la señal de la rama asignada a R_4 es invertida, entonces el término ΔR es eliminado del denominador en la ec.[5]; esta analogía del medio puente no es sólo equivalente en términos del cambio de resistencia inducida por deformación, ya que también presenta balance resistivo inicial y tiene el efecto de aceptar la resistencia promedio del puente R_b y la resistencia de la rama inactiva; como resultado, el puente no experimenta cambios netos ni en el voltaje aplicado ni en la corriente de las ramas y, como se hizo notar en la parte 1, esta

configuración produce señales de salida lineales.

5. Calcule el error actual de no linealidad N_{act} , en la salida del puente como un porcentaje del ideal:

$$N_{act} (\%) = \frac{\Delta V_e - \Delta V_{ideal}}{\Delta V_{ideal}} * 100 \quad \text{.....ec.18.1}$$

El análisis de esfuerzos deberá hacerse normalmente con deformaciones indicadas y aplicadas más que con los voltajes ideales ó indicados por el puente; para el caso común en donde el extensómetro activo R_1 y R_4 son del mismo valor de resistencia nominal, y además $R_2 = R_3$; la ec.18.1 puede ser escrita para dar los errores de no linealidad en la deformación indicada, en términos del desbalance inicial expresado en microdeformaciones $\mu\epsilon_0$ y la deformación aplicada ϵ_a . Así, para el caso de suministro de corriente constante y bajo estas condiciones, la expresión queda:

$$N_{act} (\%) = \frac{-Q}{4(1+k)^2 + Q'} * 100 \quad \text{.....ec.18.2}$$

en donde:

$$Q' = (4(1+k)*FE*\epsilon_0) + (2(1+k)*FE*\epsilon_0) + (FE^2*\epsilon_0^2) + (FE^2*\epsilon_0*\epsilon_a) \quad \text{ec.18.2.1}$$

$$y: k = R_2/R_4 = R_3/R_1 \quad \text{.....ec.18.2.2}$$

Nota que la ec.18.1 es válida tanto para suministro a corriente ó voltaje constante, y que la ec.18.2 es aplicable solamente para corriente. Una expresión similar (sin el signo menos en el original) es dada para el voltaje constante en la parte 1; nota así mismo, que los dos últimos términos de la ec.18.2.1 son muy pequeños y pueden ser omitidos sin un serio efecto en el cálculo del error. La figura 2 presenta estos errores de no linealidad en forma gráfica.

REFERENCIAS

- A. Olivares Ponce.
Consultor Asesor. (Entrevistas personales)
METRONIC, S. A., México, D.F.
- J.W. Dally y W.F. Riley.
Experimental Stress Analysis. 1978.
Mc Graw Hill
- Gere y Timoshenko
Mecánica de Materiales. 1986
Grupo Editorial Iberoamérica.
- G. Miramontes, C.A. Martínez, R. Núñez.
64-Channel Strain Gage Data Aquisition System (SADGE)
Centro de Investigación Científica
y de Educación Superior de Ensenada. (CICESE)
- J. Sterling Kinney.
Análisis de Estructuras Indeterminadas. 1982.
Cia. Editorial Continental, S.A. (CECSA).
- A.L. Window y G.S. Holister (Editores).
Strain Gauge Technology. 1982.
Applied Science Publishers.
- J.R. Zeleny y G.M. Lezama.
*Manual de Prácticas de Laboratorio
de Resistencia de Materiales.* 1981.
Instituto Tecnológico de Puebla.
- Measurements Group, Inc.
Student Manual for Strain Gage Technology, Boletín 309C. 1991.
Education Division, Raleigh, N.C.
- Measurements Group, Inc.
Student Manual on the Photoelastic Coating Technic.
Boletín 315B. 1989.
Education Division, Raleigh, N.C.

L.D. Lineback. (Editor)
Experimental Stress Analysis.
NOTE BOOK
(Publicación aperiódica)
Measurements Group, Inc.

Micro-Measurements Division.
TECH NOTE
(Publicación aperiódica).
Measurements Group, Inc.

Micro-Measurements Division.
TECH TIP.
(Publicación aperiódica).
Measurements Group, Inc.

Measurements Group, Inc.
Diversos folletos de sus productos.

RESPUESTAS A PROBLEMAS PROPUESTOS

NOTA: El ángulo θ corresponde al valor solicitado en el problema y al de los esfuerzos normales, los principales se encuentran a 0° y 90° .

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
1	PRINCIPALES	NORMALES		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		-3.50E+01	$\theta =$	4.31E+01		-3.50E+01	
$\sigma_1 =$	1.07E+08	1.48E+08	$E_x =$	1.35E-03	2.26E-03	1.57E-03	1.35E-03
$\sigma_2 =$	6.95E+07	6.89E+07	$E_y =$	1.07E-03	1.59E-04	1.05E-03	1.07E-03
$\tau =$	5.15E+07	-5.52E+07	$\tau_{xy} =$	2.08E-03	1.05E-03	3.59E-04	2.25E-03
PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
2	PRINCIPALES	NORMALES		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		2.00E+01	$\theta =$	-4.03E+01		2.00E+01	
$\sigma_1 =$	1.05E+08	1.63E+08	$E_x =$	5.13E-04	9.31E-04	7.88E-04	5.13E-04
$\sigma_2 =$	-4.07E+06	3.50E+07	$E_y =$	1.26E-04	-2.92E-04	6.12E-04	1.26E-04
$\tau =$	2.48E+07	6.10E+07	$\tau_{xy} =$	-1.16E-03	6.12E-04	4.69E-04	-2.61E-04
PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
3	PRINCIPALES	NORMALES		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		1.50E+01	$\theta =$	3.66E+01		1.50E+01	
$\sigma_1 =$	-7.10E+06	-2.04E+07	$E_x =$	-2.66E-04	7.73E-04	5.35E-04	-2.66E-04
$\sigma_2 =$	-2.65E+08	3.62E+07	$E_y =$	-1.74E-03	-2.78E-03	1.77E-03	-1.74E-03
$\tau =$	9.88E+07	4.94E+07	$\tau_{xy} =$	3.23E-03	1.77E-03	1.54E-03	6.13E-04
PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
4	PRINCIPALES	NORMALES		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		-4.50E+01	$\theta =$	4.43E+01		-4.50E+01	
$\sigma_1 =$	3.52E+07	-8.10E+07	$E_x =$	-3.26E-04	4.62E-04	-2.88E-04	-3.26E-04
$\sigma_2 =$	-1.92E+08	1.16E+08	$E_y =$	-2.49E-04	-1.04E-03	7.49E-04	-2.49E-04
$\tau =$	1.16E+08	-1.16E+08	$\tau_{xy} =$	-1.50E-03	7.49E-04	4.59E-04	-1.04E-03

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
5	PRINCIPALES	NORMALES		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta=$		-6.50E+01	$\theta=$	-9.27E+01		-6.50E+01	
$\sigma_1=$	6.47E+07	-1.11E+08	$E_x=$	-1.70E-03	1.52E-03	-1.64E-03	-1.70E-03
$\sigma_2=$	-1.50E+08	9.86E+07	$E_y=$	8.99E-04	-2.33E-03	1.07E+08	8.99E-04
$\gamma=$	1.07E+08	-8.21E+07	$\tau_{xy}=$	2.84E-03	1.07E+08	-1.24E-03	1.02E-03

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
6	PRINCIPALES	NORMALES		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta=$		2.50E+01	$\theta=$	9.55E+01		2.50E+01	
$\sigma_1=$	1.46E+08	9.83E+07	$E_x=$	-4.43E-04	9.05E-04	5.98E-04	-4.43E-04
$\sigma_2=$	-1.21E+08	2.85E+08	$E_y=$	5.31E-04	-8.16E-04	8.61E-04	5.31E-04
$\gamma=$	1.33E+08	1.02E+08	$\tau_{xy}=$	-1.42E-03	8.61E-04	5.53E-04	-6.65E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
7	PRINCIPALES	NORMALES		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta=$		-1.00E+01	$\theta=$	4.04E+01		-1.00E+01	
$\sigma_1=$	1.29E+08	1.21E+08	$E_x=$	6.92E-04	2.38E-03	2.24E-03	6.92E-04
$\sigma_2=$	-1.44E+08	-5.43E+06	$E_y=$	-8.34E-04	-2.53E-03	2.45E-03	-8.34E-04
$\gamma=$	1.37E+08	-4.68E+07	$\tau_{xy}=$	4.67E-03	2.45E-03	2.31E-03	2.26E-03

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
8	PRINCIPALES	NORMALES		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta=$		5.00E+00	$\theta=$	-3.42E+01		5.00E+00	
$\sigma_1=$	1.81E+08	1.79E+08	$E_x=$	6.97E-04	9.94E-04	9.82E-04	6.97E-04
$\sigma_2=$	-8.10E+07	-5.28E+07	$E_y=$	-2.71E-04	-5.68E-04	7.81E-04	-2.71E-04
$\gamma=$	1.21E+08	2.10E+07	$\tau_{xy}=$	-1.23E-03	7.81E-04	7.69E-04	-4.00E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
9	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta=$		3.87E+01	$\theta=$	7.50E+01		7.50E+01	
$\sigma_1=$	7.50E+07	6.99E+07	X	8.16E+07	7.83E-04	5.25E-04	6.75E-04
$\sigma_2=$	8.65E+07	6.66E+07	Y	2.87E+07	5.07E-04	2.77E-04	6.15E-04
$\gamma=$	7.71E+06	7.52E+06	XY	3.85E+06	2.77E-04	-1.20E-04	2.70E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
15	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		2.73E+01	$\theta =$	-3.00E+01		-3.00E+01	
$\sigma_1 =$	1.55E+07	7.87E+06	X	6.28E+06	3.30E-04	1.45E-04	1.75E-04
$\sigma_2 =$	-2.45E+07	-1.58E+07	Y	1.98E+07	-4.05E-04	7.35E-04	-2.50E-04
$\gamma =$	2.65E+07	1.87E+07	XY	-1.77E+07	7.35E-04	1.84E-04	6.00E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
16	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		-1.54E+01	$\theta =$	8.50E+01		8.50E+01	
$\sigma_1 =$	1.44E+08	1.35E+08	X	1.60E+07	6.99E-04	-1.27E-04	6.40E-04
$\sigma_2 =$	1.51E+07	2.42E+07	Y	4.27E+07	-1.34E-04	8.32E-04	-7.50E-05
$\gamma =$	6.45E+07	-8.30E+07	XY	1.12E+07	8.32E-04	-4.10E-04	-4.26E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
17	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	NORMAL
$\theta =$		4.32E+01	$\theta =$	5.00E+00		5.00E+00	
$\sigma_1 =$	2.08E+07	1.16E+07	X	2.01E+07	2.70E-04	2.68E-04	1.15E-04
$\sigma_2 =$	1.85E+06	1.03E+07	Y	9.26E+06	-6.34E-05	3.34E-04	9.20E-05
$\gamma =$	8.38E+06	1.03E+07	XY	1.61E+06	3.34E-04	1.64E-04	-3.33E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
18	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	NORMAL
$\theta =$		-3.94E+01	$\theta =$	-4.00E+00		-4.00E+00	
$\sigma_1 =$	1.88E+08	1.03E+08	X	1.81E+08	9.29E-04	9.23E-04	4.20E-04
$\sigma_2 =$	-1.48E+07	6.42E+07	Y	1.63E+07	-3.37E-04	1.27E-03	1.72E-04
$\gamma =$	8.88E+07	-9.83E+07	XY	-1.37E+07	1.27E-03	6.27E-04	-1.24E-03

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
19	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	NORMAL
$\theta =$		4.13E+01	$\theta =$	-1.20E+01		-1.20E+01	
$\sigma_1 =$	-1.88E+08	-1.16E+07	X	-2.85E+08	7.67E-05	5.94E-05	-9.70E-05
$\sigma_2 =$	-2.41E+07	-1.45E+07	Y	-1.07E+07	-3.23E-04	3.99E-04	-1.49E-04
$\gamma =$	1.18E+07	1.10E+07	XY	-4.53E+06	3.99E-04	1.82E-04	3.96E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
10	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		-2.82E+01	$\theta =$	1.50E+01		1.50E+01	
$\sigma_1 =$	1.50E+08	1.50E+08	X	1.63E+08	7.20E-04	6.84E-04	6.00E-04
$\sigma_2 =$	1.43E+07	1.04E+08	Y	5.95E+07	1.80E-04	5.41E-04	3.00E-04
$\tau =$	4.19E+07	-3.49E+07	XY	2.10E+07	5.41E-04	2.34E-04	-4.50E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
11	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		2.23E+01	$\theta =$	-1.50E+01		-1.50E+01	
$\sigma_1 =$	-4.05E+07	-4.51E+07	X	-4.28E+07	-2.48E-04	-2.86E-04	-3.90E-04
$\sigma_2 =$	-7.22E+07	-6.78E+07	Y	-3.86E+07	-8.17E-04	5.69E-04	-7.35E-04
$\tau =$	1.92E+07	1.11E+07	XY	-7.93E+06	5.69E-04	2.46E-04	4.00E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
12	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		3.85E+01	$\theta =$	8.00E+01		8.00E+01	
$\sigma_1 =$	-4.30E+07	-1.19E+08	X	-1.50E+08	-9.78E-05	-6.55E-04	-4.50E-04
$\sigma_2 =$	-1.52E+08	-9.84E+07	Y	-6.93E+07	-6.72E-04	5.75E-04	-3.20E-04
$\tau =$	4.45E+07	-4.34E+07	XY	1.52E+07	5.75E-04	-2.70E-04	-6.60E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
13	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		-1.41E+01	$\theta =$	-8.00E+01		-8.00E+01	
$\sigma_1 =$	4.50E+05	-4.27E+07	X	-4.40E+07	1.99E-04	-5.99E-04	-6.75E-04
$\sigma_2 =$	-4.50E+07	-2.28E+08	Y	-4.50E+07	-8.24E-04	8.23E-04	1.50E-04
$\tau =$	2.20E+07	1.09E+07	XY	-7.85E+06	8.23E-04	-3.87E-04	3.90E-04

PROB	ESFUERZOS	ESFUERZOS		ESFUERZOS	DEFORMACION	DEFORMACION	DEFORMACION
14	PRINCIPALES	NORMALES		NORMALES	MAXIMA	NORMAL	ROSETA
$\theta =$		1.72E+01	$\theta =$	5.50E+01		5.50E+01	
$\sigma_1 =$	1.1E+07	-4.20E+07	X	-7.51E+06	5.20E-04	-9.75E-05	-3.20E-04
$\sigma_2 =$	-4.4E+07	7.58E+07	Y	4.02E+07	-4.00E-04	9.21E-04	4.40E-04
$\tau =$	7.1E+07	-4.03E+07	XY	6.71E+07	9.21E-04	-1.57E-04	-5.20E-04

PRO	ESFUERZ	ESFUERZ		ESFUERZ	DEFORM	DEFORM	DEFORM
20	PRINCIPA	NORMAL		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	NORMAL
?		2.48E+01	?	8.00E+00		8.00E+00	
71=	-6.39E+06	-2.44E+07	X	-8.38E+06	1.26E-04	1.13E-04	1.00E-05
72=	-1.08E+08	-9.11E+07	Y	4.51E+07	-5.36E-04	6.63E-04	-4.20E-04
?	5.14E+07	3.91E+07	XY	1.42E+07	6.63E-04	3.18E-04	5.04E-04
PRO	ESFUERZ	ESFUERZ		ESFUERZ	DEFORM	DEFORM	DEFORM
21	PRINCIPA	NORMAL		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	NORMAL
?		-4.08E+01	?	-6.00E+00		-6.00E+00	
71=	1.02E+07	5.73E+05	X	1.00E+07	1.68E-04	1.64E-04	-5.00E-06
72=	-6.59E+06	3.02E+06	Y	3.68E+06	-1.34E-04	3.01E-04	3.90E-05
?	8.39E+06	8.30E+06	XY	-1.75E+06	3.01E-04	1.47E-04	2.98E-04
PRO	ESFUERZ	ESFUERZ		ESFUERZ	DEFORM	DEFORM	DEFORM
22	PRINCIPA	NORMAL		NORMAL	MAXIMA	NORMAL	NORMAL
?		-1.50E+01	?	1.50E+01		1.50E+01	
71=	1.82E+07	-7.30E+07	X	1.16E+07	2.06E-04	1.64E-04	-3.82E-04
72=	-7.98E+07	1.16E+07	Y	2.34E+06	-4.24E-04	6.31E-04	1.64E-04
?	4.08E+07	2.45E+07	XY	2.45E+07	6.31E-04	2.73E-04	3.16E-04