



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO
MIEMBROS EN COMPRESIÓN
(LA COLUMNA AISLADA)

ING. OSCAR DE BUEN LÓPEZ DE HEREDIA.

***DISEÑO
DE ESTRUCTURAS DE ACERO
MIEMBROS EN COMPRESIÓN
(LA COLUMNA AISLADA)***

Oscar de Buen López de Heredia



FACULTAD DE INGENIERIA

© Derechos Reservados 1999
Fundación ICA, A. C.

Av. del Parque N° 91
Colonia Nápoles
C.P. 03810 México, D.F.
Tel. 669 39 85, 272 99 91, ext. 4000-4001
Ext. Fax 4083

<http://www.fundacion-ica.org.mx>
e-mail: lunaf@fundacion-ica.org.mx

ISBN 968-7508 56-6

Impreso en México

FACULTAD DE INGENIERIA
ESTE LIBRO NO SALE
DE LA BIBLIOTECA
Bca. Ing. A. Dovali

G- 612312

CAPITULO 2. MIEMBROS EN COMPRESION (LA COLUMNA AISLADA)

2.1	Introducción	5
2.2	Uso de miembros en compresión	7
2.3	Elementos que se emplean para trabajar en compresión	8
2.4	Comportamiento de barras comprimidas	10
2.4.1	Comportamiento de columnas de diferentes longitudes que fallan por pandeo por flexión	10
2.5	Pandeo elástico	14
2.5.1	Caso general	14
2.5.2	Secciones con un eje de simetría	16
2.5.3	Secciones con dos ejes de simetría	20
2.6	Pandeo por flexión	23
2.6.1	Pandeo elástico	23
2.6.1.1	Determinación de la carga crítica	26
2.6.1.2	Esfuerzo crítico	28
2.6.1.3	Longitud efectiva	28
2.6.2	Pandeo inelástico	31
2.6.2.1	Teoría del módulo tangente	33
2.6.2.2	Teoría del módulo reducido	34
2.6.2.3	La contribución de Shanley	36
2.6.3	Esfuerzos residuales	36
2.6.3.1	Influencia de los esfuerzos residuales en la resistencia de las columnas de acero estructural	40
2.6.3.2	Esfuerzo crítico de columnas con esfuerzos residuales	41
2.6.4	Curvas múltiples.	47
2.6.5	Resistencia de diseño	49
2.6.6	Pandeo en el intervalo de endurecimiento por deformación	54
2.6.7	Fórmulas para diseño	57

2.6.7.1	Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas	57
2.6.7.2	Especificaciones AISC para diseño por factores de carga y resistencia	58
2.6.7.3	Especificaciones AISC para diseño por esfuerzos permisibles	59
2.6.7.4	Normas Canadienses	60
2.6.7.5	Tablas de esfuerzos de diseño	61
2.7	Pandeo por flexotorsión.	78
2.7.1	Resistencia de diseño	78
2.7.1.1	Especificaciones AISC para diseño por factores de carga y resistencia.	78
2.8	Diseño de columnas de paredes delgadas	80
2.8.1	Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras metálicas	81
2.8.1.1	Cálculo del coeficiente Q	81
2.8.2	Especificaciones AISC	84
2.8.3	Especificaciones AISI	85
2.8.3.1	Diseño por factores de carga y resistencia	85
2.9	Angulos aislados comprimidos	88
2.10	Referencias	98

CAPÍTULO 2. MIEMBROS EN COMPRESIÓN (LA COLUMNA AISLADA)

2.1 INTRODUCCIÓN

Para los fines de este capítulo, una columna puede definirse como una pieza recta en la que actúa una fuerza axial que produce compresión pura.

Para que una barra de sección transversal constante trabaje en compresión pura, debe ser perfectamente recta, las fuerzas que obran sobre ella tienen que estar aplicadas en los centros de gravedad de las secciones extremas, y sus líneas de acción han de coincidir con el eje de la barra. En esas condiciones, mientras la carga es menor que la crítica, no hay flexión de ningún tipo.

Las secciones transversales de las columnas que se usan en estructuras suelen tener dos ejes de simetría; cuando es así, para que no haya flexión el material ha de ser homogéneo e isótropo y, si no lo es, por la existencia de esfuerzos residuales, éstos tienen que ser, también, simétricos respecto a los dos ejes.

Las columnas reales no están casi nunca aisladas, sino ligadas a otros elementos estructurales, de manera que su comportamiento depende, en gran parte, del de la estructura en conjunto; tampoco están sometidas a compresión pura, pues las condiciones anteriores no se cumplen, nunca, por completo. Sin embargo, un estudio de la columna aislada cargada axialmente constituye un antecedente necesario para resolver el problema, mucho más complejo, de la columna como parte de una estructura, por lo que en todos los códigos modernos la columna aislada es la base del diseño de las piezas comprimidas y flexocomprimidas. Además, si los momentos flexionantes son pequeños, se ignoran, y la pieza se dimensiona en compresión pura, como suele hacerse al diseñar los elementos comprimidos de las armaduras.

Para el ingeniero estructural, una columna es un miembro que transmite una fuerza de compresión de un punto a otro; las excentricidades en la aplicación de las cargas y los inevitables defectos geométricos, que deben estar dentro de límites admisibles, no se incluyen explícitamente en el dimensionamiento, sino se toman en cuenta con las fórmulas de diseño o con los factores de seguridad asociados a ellas.

En muchos problemas de diseño estructural, el equilibrio entre las fuerzas interiores y exteriores es estable para cualquier valor de las cargas, mientras no haya fracturas; pequeños incrementos en las solicitaciones no ocasionan aumentos desproporcionados de las deformaciones, los cálculos se basan en la forma y dimensiones iniciales, y es aplicable el principio de superposición de causas y efectos. El diseño consiste en dimensionar los miembros que componen la estructura de manera que la resistencia de sus secciones transversales no sea menor que las acciones factorizadas; si se utilizan métodos elásticos, los esfuerzos

máximos no sobrepasarán un cierto valor, generalmente un porcentaje del esfuerzo de fluencia.

No es este el caso cuando el elemento estructural es una columna esbelta; el diseño ya no se basa en el cálculo de esfuerzos, sino en la investigación de su estado de equilibrio, que puede llegar a ser inestable, para valores quizá reducidos de las cargas. La resistencia de una barra comprimida no depende de la magnitud de los esfuerzos, sino de las condiciones que originan el equilibrio inestable, caracterizado porque pequeños incrementos de las cargas producen aumentos muy grandes de las deformaciones. (El pandeo puede definirse como la pérdida repentina y total de rigidez de un elemento estructural, o de una estructura completa, que acompaña el paso del equilibrio estable al inestable; se caracteriza por la pérdida de resistencia y la aparición de fuertes deformaciones, de naturaleza diferente de las que existían antes de que se iniciase el fenómeno).

El estudio de las columnas se inició hace varios siglos. Los aspectos principales del cálculo de la resistencia de piezas comprimidas aisladas, que se pandean en el intervalo elástico, fueron resueltos por Euler, en 1744; sin embargo, a pesar de que su solución es correcta cuando las columnas fallan por pandeo, por flexión en un plano principal de inercia, bajo esfuerzos de compresión menores que el límite de proporcionalidad del material, sus resultados no fueron aceptados de inmediato, pues las columnas de aquella época, de madera o piedra, eran muy robustas, por lo que fallaban por aplastamiento, bajo cargas mucho menores que las predichas por la teoría.

La aparente discrepancia entre los resultados teóricos y los experimentales fue aclarada por Lamarle, en 1845, al establecer el límite de proporcionalidad como límite de aplicación de la fórmula de Euler.

Engesser, Considère y von Karman extendieron la teoría al intervalo inelástico, en trabajos realizados a fines del siglo XIX y principios del XX, y los últimos puntos dudosos fueron aclarados por Shanley, en 1947. En la actualidad, después de 250 años de estudio, el problema teórico de la columna aislada perfecta está resuelto en forma definitiva, pero quedan todavía muchos aspectos por resolver, relativos a columnas reales que forman parte de estructuras.

El empleo de aceros de altas resistencias y de otros materiales, como el aluminio, y la utilización de nuevas formas y sistemas constructivos, han hecho que las estructuras modernas sean, en general, esbeltas, por lo que los fenómenos de inestabilidad adquieren una enorme importancia que hace aumentar la trascendencia del problema del pandeo de columnas, que puede considerarse la base del estudio de todos los casos de inestabilidad.

2.2 USO DE MIEMBROS EN COMPRESIÓN

Las barras comprimidas axialmente no existen en las estructuras reales; sin embargo, se tratan como tales algunas piezas flexocomprimidas en las que la flexión es poco significativa.

Entre los elementos que suelen diseñarse como si trabajasen en compresión pura están las cuerdas, diagonales y montantes de armaduras, cuando no hay cargas exteriores aplicadas fuera de los nudos (Fig. 1.5); excepto en armaduras muy robustas, en las que puede ser significativa, se ignora la flexión producida por la continuidad en los nudos y por el peso propio de los elementos.

También se diseñan en compresión axial los puntales de contraventeo de techos y paredes de bodegas y estructuras industriales (Fig. 1.1) y, a veces, las diagonales de los contraventeos verticales de edificios (Fig. 2.1a), cuando se unen con el resto de la estructura de manera que la transmisión de momentos sea mínima.

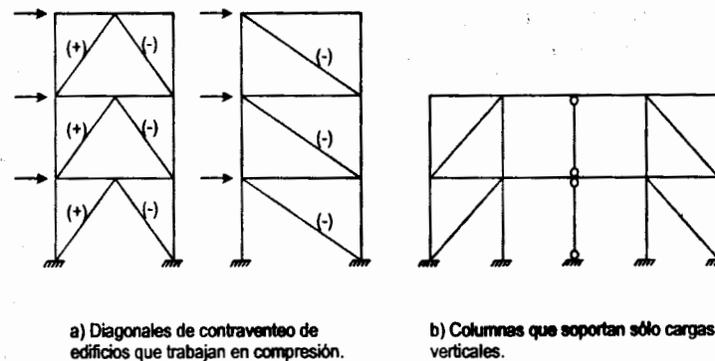


Fig. 2.1 Miembros en compresión.

Otros casos frecuentes son las plumas de gruas y las torres atirantadas para transmisión de energía eléctrica, que suelen hacerse con ángulos o tubos (Fig. 1.6); además de que, en conjunto, trabajan como columnas, muchos de los elementos que las forman son piezas comprimidas. También hay barras comprimidas en las torres de transmisión autosoportadas (Fig. 1.6).

Algunas columnas de edificios se diseñan para resistir sólo cargas verticales; tienen una rigidez mucho menor que la del resto, o están ligadas a la estructura con uniones que no transmiten momento; pueden considerarse en compresión axial (Fig. 2.1b).

Son comunes las columnas que, bajo carga vertical, trabajan en compresión pura, porque los momentos que les transmiten las vigas se equilibran entre sí; sin embargo, la flexión aparece tan pronto como actúan sobre el edificio fuerzas horizontales, de viento o sismo, por lo que esas columnas han de diseñarse, en general, como elementos flexocomprimidos.

2.3 ELEMENTOS QUE SE EMPLEAN PARA TRABAJAR EN COMPRESIÓN

La resistencia de una columna de material y condiciones de apoyo definidos depende del área de las secciones transversales y de la esbeltez, cociente de la longitud libre de pandeo entre el radio de giro correspondiente de la sección transversal. Son una excepción las columnas muy cortas, en las que la capacidad de carga es función, sólo, del área y de las propiedades del acero.

En las columnas largas debe alejarse el material de los ejes de flexión para obtener, con un área dada, un radio de giro grande; además, en general conviene que los momentos de inercia que corresponden a los dos posibles ejes de flexión sean iguales, o tengan valores cercanos, puesto que el pandeo se presenta en el plano de menor rigidez. Teniendo en cuenta estos aspectos, la sección transversal ideal sería la circular hueca (tubular), de paredes delgadas, recordando que si el grueso se reduce demasiado, puede volverse crítico el pandeo local de las paredes.

Las secciones tubulares tienen el inconveniente de que las conexiones son difíciles de realizar, por lo que su uso no era frecuente hasta hace pocos años; hasta la fecha, no suelen emplearse para columnas de edificios. Sin embargo, gracias a desarrollos recientes en los procedimientos de fabricación, cortes y soldaduras, y en los métodos de diseño, en la actualidad se utilizan cada vez más, tanto en estructuras especiales, como las plataformas marítimas para explotación petrolera, como en otras más comunes, torres de transmisión y armaduras para cubiertas, muchas veces tridimensionales, en las que se obtienen ventajas adicionales, estéticas, de poca resistencia al flujo del agua o el aire, y facilidad para pintarlas y mantenerlas limpias.

En la Fig. 2.2 se muestra la gran variedad de secciones que se utilizan como columnas; no todas tienen las características mencionadas arriba, pero tienen alguna otra que las hace adecuadas para usos específicos.

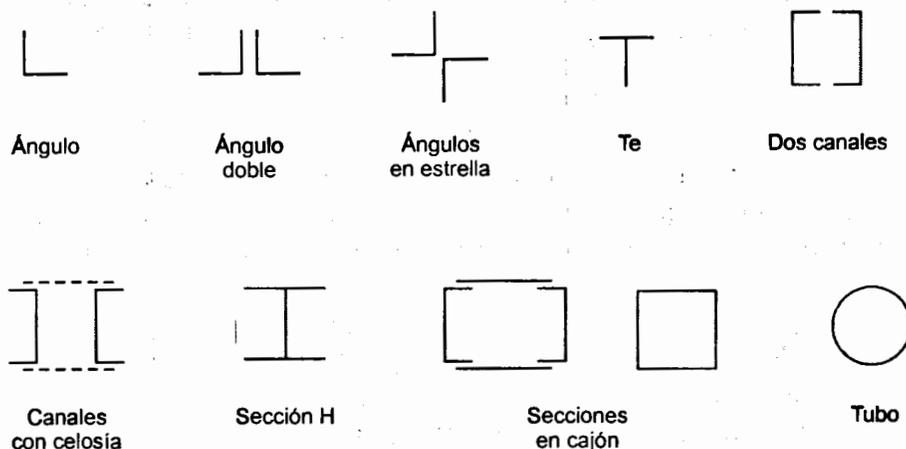


Fig. 2.2 Secciones transversales de miembros comprimidos.

Las secciones huecas, circulares, cuadradas o rectangulares, laminadas o hechas con placas soldadas, son muy eficientes, pero difíciles de conectar (Fig. 2.2a); las H, de patines de ancho semejante al peralte de la sección, para que el radio de giro mínimo no sea demasiado pequeño, son las que más se usan en columnas de edificios (Fig. 2.2b).

Los ángulos se emplean principalmente en armaduras y puntales: sencillos en diagonales o montantes con fuerzas pequeñas, espalda con espalda, o en cajón, para compresiones mayores y para cuerdas, en estrella para puntales de contraventeo en techos y paredes (Fig. 2.2c).

También se utilizan secciones T en cuerdas de armaduras (Fig. 2.2e), pues se facilita la unión de diagonales y montantes, soldándolos al alma, y una gran variedad de secciones compuestas, formadas por dos o más perfiles unidos entre sí con soldadura o tornillos; algunas de estas secciones se muestran en la Fig. 2.2f.

2.4 COMPORTAMIENTO DE BARRAS COMPRIMIDAS

El comportamiento de las columnas depende, en buena medida, de su esbeltez, es decir, de la relación entre su longitud y las dimensiones de las secciones transversales. Desde este punto de vista pueden clasificarse en cortas, intermedias y largas. (Se está suponiendo, por ahora, que el pandeo local no es crítico).

Las columnas cortas resisten la fuerza que ocasiona su plastificación completa, $P_y = A_t F_y$; su capacidad de carga no es afectada por ninguna forma de inestabilidad; la resistencia máxima depende sólo del área total, A_t , de sus secciones transversales, y del esfuerzo de fluencia F_y del acero; la falla es por aplastamiento.

El colapso de columnas más largas se presenta acompañado por un rápido aumento de las deflexiones laterales o torsionales, o por una combinación de ambas; es una falla por inestabilidad.

La inestabilidad de las columnas largas se inicia en el intervalo elástico; los esfuerzos totales, incluyendo los residuales de compresión, no llegan todavía al límite de proporcionalidad, en ningún punto, en el instante en que empieza el pandeo. La resistencia máxima es función de las rigideces en flexión, EI_x y EI_y , y en torsión, EC_a y GJ ; no depende del esfuerzo de fluencia del material.

Las columnas intermedias, las más comunes en las estructuras, tienen un comportamiento más complejo que las anteriores. Fallan también por inestabilidad, pero su rigidez es suficiente para posponer la iniciación del fenómeno hasta que parte del material que las compone está plastificado; la falla es por inestabilidad inelástica. La resistencia depende tanto de la rigidez del miembro como del esfuerzo de fluencia del material, así como de la forma y dimensiones de sus secciones transversales y de la magnitud y distribución de los esfuerzos residuales.

2.4.1 Comportamiento de columnas de diferentes longitudes que fallan por pandeo por flexión

El comportamiento de las columnas se describe con las curvas fuerza axial-deformación longitudinal y fuerza axial-deflexión lateral (Ref. 2.1). El comportamiento y las curvas correspondientes, que se muestran esquemáticamente en la Fig. 2.3, varían cuando cambia la longitud de la columna. (Las curvas son para pandeo por flexión en uno de los planos principales; la discusión que sigue está limitada a ese caso).

La Fig. 2.3a es de una columna muy corta, en la que no hay pandeo, que falla por aplastamiento cuando la carga alcanza el valor de fluencia $P_y = A_t F_y$. (Bajo ciertas

condiciones el material puede endurecerse por deformación; la carga de aplastamiento sobrepasa en esos casos a $A_1 F_y$). Los desplazamientos laterales de los puntos del eje son nulos durante todo el proceso, y la curva $P-w$ es la gráfica carga axial-deformación longitudinal de un perfil completo, en la que se refleja la influencia de los esfuerzos residuales y de la variación del límite de fluencia en los distintos puntos del perfil.

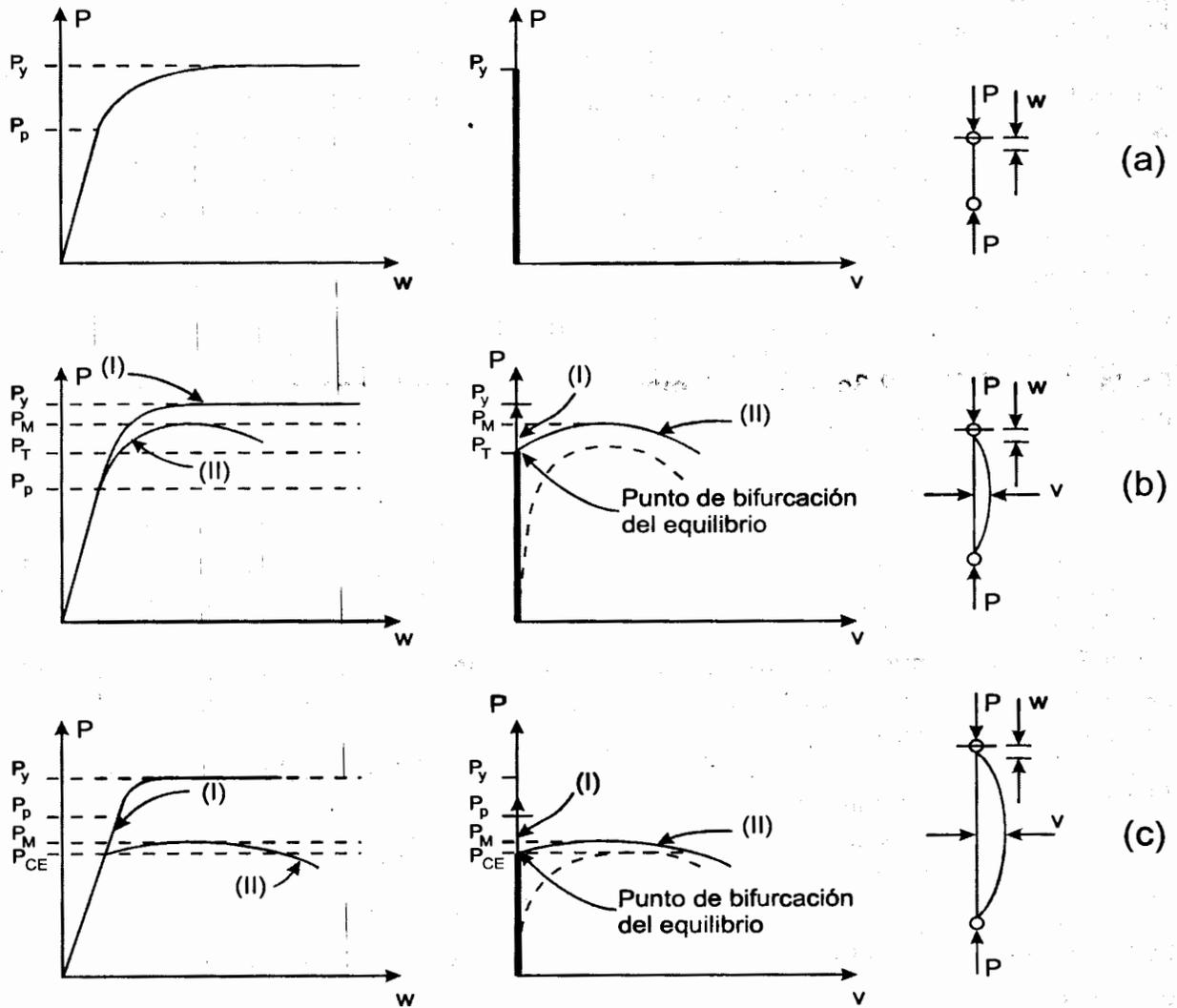


Fig. 2.3 Comportamiento de columnas de diferentes longitudes.

Las curvas de la Fig. 2.3b corresponden a una columna de longitud intermedia: el pandeo se inicia cuando los esfuerzos normales máximos han sobrepasado el límite de proporcionalidad, pero antes de que lleguen al punto de fluencia, es decir, en el intervalo inelástico. Como se verá más adelante, el pandeo comienza cuando la carga alcanza el valor predicho por la teoría del módulo tangente, P_t , y la columna

puede soportar un incremento adicional de carga, generalmente pequeño, sin llegar a P_y .

Por último, las columnas largas se pandean en el intervalo elástico; el fenómeno empieza bajo esfuerzos menores que el límite de proporcionalidad, y la carga crítica P_{CE} es menor que P_y (Fig. 2.3c). Si la columna es muy larga, la carga crítica de pandeo puede ser una fracción reducida de la fuerza que ocasionaría la plastificación total.

Tanto las columnas intermedias como las largas pueden, en teoría, permanecer rectas o deformarse lateralmente cuando la carga llega al valor crítico; en el primer caso los desplazamientos longitudinales w se deben al acortamiento de la barra, y no hay deflexiones laterales (curvas I, Figs. 2.3b y 2.3c); en el segundo (curvas II), la columna se deforma lateralmente, lo que ocasiona un rápido aumento de los desplazamientos w . La carga de colapso, P_M , es muy poco mayor que la de pandeo.

En las Figs. 2.3b y 2.3c, para columnas intermedias y largas, se han dibujado con línea punteada las curvas carga axial-deflexión que se obtendrían si hubiese imperfecciones iniciales (las curvas trazadas con línea llena describen el comportamiento de columnas perfectas); en ese caso no hay pandeo propiamente dicho, sino las deformaciones laterales que existen desde que se inicia el proceso de carga, crecen primero lentamente y después en forma rápida, hasta que se produce la falla de la pieza.

En la Fig. 2.4 se muestran, cualitativamente, las cargas de falla de columnas rectas perfectas, que fallan por aplastamiento o por pandeo por flexión, en función de sus relaciones de esbeltez.

El tramo AB representa la falla por aplastamiento; su amplitud se determina con métodos experimentales (para el acero A36, el punto B corresponde a una relación L/r de alrededor de 20).

Las columnas muy cortas pueden resistir cargas mayores que P_y , pues es posible que se endurezcan por deformación antes de fallar (curva BE, Fig. 2.4), pero esa sobrerresistencia no se considera nunca en el diseño.

El tramo CD describe el comportamiento de columnas esbeltas, que se pandean en el intervalo elástico; su resistencia se determina con la fórmula de Euler.

La ordenada del punto C depende, principalmente, de la amplitud de los esfuerzos residuales existentes en la columna.

Por último, el tramo BC representa el comportamiento de columnas intermedias, que fallan por pandeo inelástico.

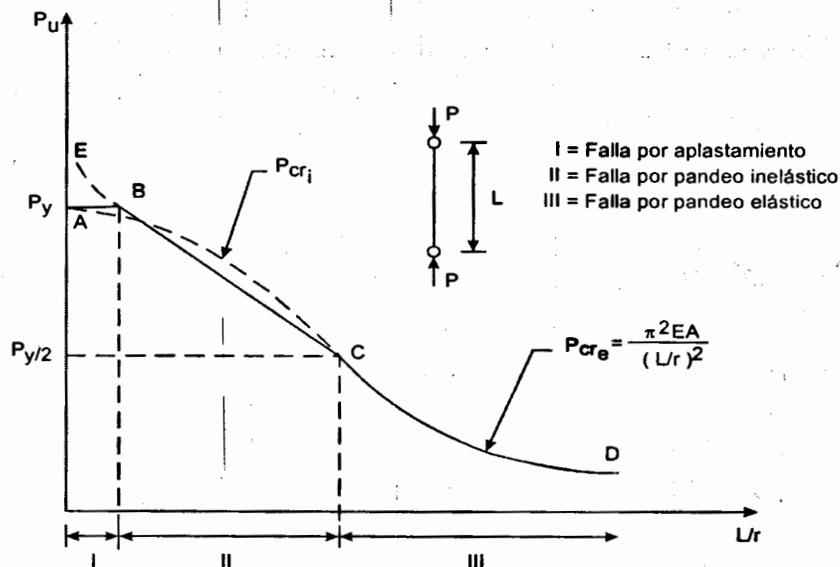


Fig. 2.4 Relación entre la carga de falla y la esbeltez de las columnas. Pandeo por flexión.

La determinación de la carga crítica de pandeo elástico es un problema resuelto, si se conocen las condiciones de apoyo de la columna; se cuenta con fórmulas "exactas" para determinarla; la posición del punto B se conoce también con buena precisión.

Los métodos para determinar la carga crítica de pandeo inelástico son, en cambio, laboriosos y poco precisos; sin embargo, la curva que relaciona esas cargas con la esbeltez de la columna tiene que pasar por los puntos B y C: el diseño de las columnas que fallan por pandeo inelástico se basa en una curva semiempírica que une esos dos puntos; en algunos casos se utiliza la curva más sencilla, que es la recta BC.

Una de las ecuaciones de la ref. 2.2 es la de una parábola tangente a la hipérbola de Euler en el punto C, de ordenada $P_y/2$, que proporciona una carga de falla igual a P_y cuando la esbeltez de la columna es nula; no aparece el tramo horizontal AB, pero la curva coincide prácticamente con él.

En la ref. 2.3 se emplean ecuaciones análogas, escritas en términos de esfuerzos permisibles en vez de resistencias últimas.

2.5 PANDEO ELÁSTICO

2.5.1 Caso general

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio de segundo orden de una columna prismática con secciones transversales asimétricas (Fig. 2.5), que se encuentra en una configuración ligeramente deformada lateralmente y retorcida, correspondiente a un estado de equilibrio indiferente, y en la cual los esfuerzos no sobrepasan, en ningún punto, el límite de proporcionalidad del material, son (refs. 2.1, 2.4 y 2.5):

$$EI_x v^{IV} + Pv'' - Px_0 \phi'' = 0 \quad (2.1)$$

$$EI_y u^{IV} + Pu'' + Py_0 \phi'' = 0 \quad (2.2)$$

$$EC_a \phi^{IV} - (GJ - Pr_0^2) \phi'' + Py_0 u'' - Px_0 v'' = 0 \quad (2.3)$$

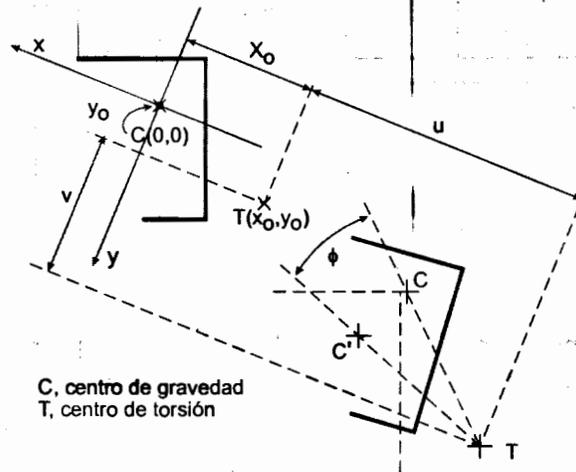


Fig. 2.5 Desplazamiento de secciones transversales de columnas que no tienen ningún eje de simetría.

P es la fuerza de compresión en la columna, y los demás símbolos tienen los significados siguientes:

EI_x, EI_y : rigideces por flexión alrededor de los ejes centroidales y principales de las secciones transversales, constantes, de la columna.

GJ : rigidez por torsión de Saint Venant.

EC_a : rigidez a la torsión por alabeo.

u, v : desplazamientos del centro de torsión de las secciones transversales, paralelos a los ejes centroidales y principales x, y (Fig. 2.5).

ϕ : rotación alrededor del eje longitudinal z (Fig. 2.5).

x_0, y_0 : distancia entre los centros de gravedad y de torsión de la sección medidas paralelamente a los ejes correspondientes (Fig. 2.5).

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + (I_x + I_y)/A = x_0^2 + y_0^2 + r_x^2 + r_y^2$$

I_x, I_y, A : momentos centroidales y principales y área de la sección.

r_x, r_y : radios de giro respecto a los ejes centroidales y principales.

r_0 : radio polar de giro, respecto al centro de torsión.

E : módulo de elasticidad.

G : módulo de elasticidad al esfuerzo cortante.

Todas las derivadas son respecto a z , que se mide a lo largo del eje longitudinal.

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera, las ecuaciones 2.1 a 2.3 llevan a la ecuación característica siguiente, cuyas raíces son las cargas críticas de pandeo elástico (ref. 2.1):

$$r_0^2(P_E - P_{crx})(P_E - P_{cry})(P_E - P_{crz}) - y_0^2 P_E^2 (P_E - P_{crx}) - x_0^2 P_E^2 (P_E - P_{cry}) = 0 \quad (2.4)$$

donde:

$$P_{crx} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)^2} : \text{carga crítica de Euler para pandeo por flexión alrededor de x.} \quad (2.5)$$

$$P_{cry} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)^2} : \text{carga crítica de Euler para pandeo por flexión alrededor de y.} \quad (2.6)$$

$$P_{crz} = \left[\frac{\pi^2 EC_a}{(K_t L_t)^2} + GJ \right] \frac{1}{r_0^2} : \text{carga crítica de pandeo elástico por torsión (alrededor del eje } z \text{).} \quad (2.7)$$

KL : Longitud efectiva de la columna.

Cada uno de los tres valores de P_E que se obtienen al resolver la ec. 2.4 es una función de P_{crx} , P_{cry} y P_{crz} , lo que indica que las columnas con secciones transversales asimétricas, no se pandean por flexión o torsión puras; cualquiera de los tres modos posibles es por flexión y torsión combinadas. El pandeo por flexotorsión es una combinación de tres modos de pandeo, que sólo podrían presentarse por separado si las condiciones fuesen adecuadas, es decir, si en cada caso se impidiesen los otros dos modos.

Puede demostrarse que la menor de las tres cargas críticas obtenidas al resolver la ec. 2.4, que corresponde a una interacción de los tres modos de pandeo, y es la que realmente ocasiona la falla de la columna, es siempre menor que la más pequeña de las cargas críticas individuales P_{crx} , P_{cry} y P_{crz} .

Las columnas con secciones transversales asimétricas son poco comunes en las estructuras; sin embargo, de la solución general obtenida para ellas pueden deducirse resultados aplicables a las secciones usuales, que tienen uno o dos ejes de simetría.

2.5.2 Secciones con un eje de simetría

Son frecuentes en las estructuras fabricadas con perfiles laminados, con placas soldadas y en las hechas con perfiles de lámina delgada; entre ellas se cuentan las canales, las térs, los ángulos espalda con espalda, y una gran variedad de secciones de lámina delgada (Fig. 2.6).

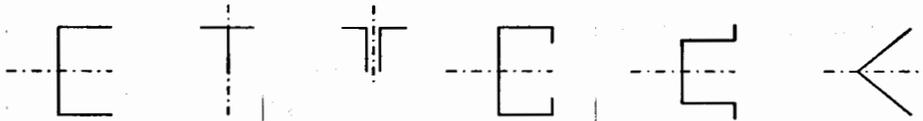


Fig. 2.6 Secciones con un eje de simetría.

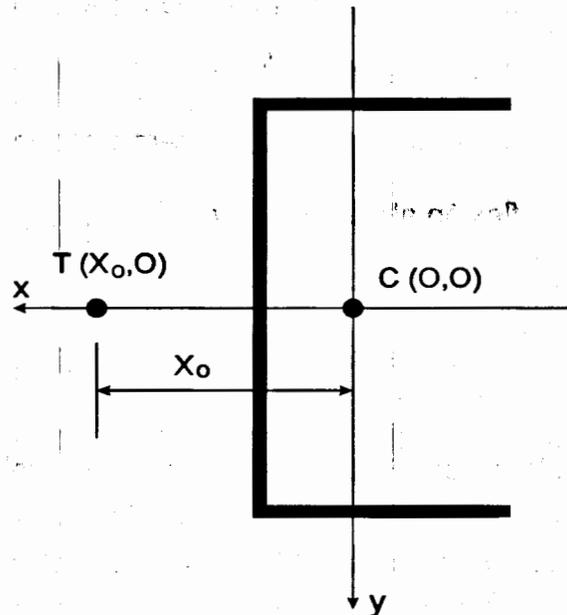


Fig. 2.7 Sección con un eje de simetría.

Si el eje de simetría es el x (Fig. 2.7), $y_0 = 0$, y la ecuación característica se reduce a:

$$r_0^2 (P_E - P_{crx}) (P_E - P_{cry}) (P_E - P_{crz}) - x_0^2 P_E^2 (P_E - P_{cry}) = 0$$

que puede escribirse en la forma:

$$(P_E - P_{cry}) \left[r_0^2 (P_E - P_{crx})(P_E - P_{crz}) - P_E^2 x_0^2 \right] = 0 \quad (2.8)$$

Esta ecuación tiene tres soluciones; la primera, $P_E = P_{cry}$, corresponde a flexión alrededor del eje normal al de simetría, que en este caso es el y , lo que indica que una de las formas de pandeo es por flexión, sin que la columna se salga del plano de simetría, ni se retuerza (este es el problema resuelto por Euler). Si los extremos están articulados, la carga crítica se calcula con la fórmula de Euler para pandeo por flexión alrededor del eje y (Ec. 2.6):

$$P_{cry} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)^2}$$

Las otras dos soluciones son las raíces de la ecuación de segundo grado que se obtiene al igualar a cero la expresión contenida en el paréntesis rectangular; son dos cargas críticas de pandeo por flexotorsión; la menor de ellas, que es siempre más pequeña que P_{crx} y P_{crz} , pero puede ser mayor o menor que P_{cry} , se calcula con la ec. (2.9):

$$P_{FT} = \frac{1}{2H} \left[(P_{crx} + P_{crz}) - \sqrt{(P_{crx} + P_{crz})^2 - 4HP_{crx}P_{crz}} \right] \quad (2.9)$$

donde $H = 1 - (x_0/r_0)^2$ y P_{FT} es la menor de las cargas críticas de pandeo por flexotorsión.

Una columna con secciones transversales con un solo eje de simetría puede pandearse por flexión alrededor del eje normal al de simetría, o por flexotorsión, flexionándose alrededor del otro eje centroidal y principal, y retorciéndose; que sea crítica una u otra forma de pandeo depende de las dimensiones y forma de las secciones transversales y de la longitud y condiciones de apoyo de la columna.

EJEMPLO 2.1 Calcule las cargas críticas de pandeo elástico de tres columnas, de 3.00 m, 6.00 m y 1.50 m de longitud, articuladas en los extremos; las tres tienen la sección transversal que se muestra en la Fig. E2.1-1¹. Suponga, sin demostrarlo, que el pandeo local no es crítico.

Propiedades geométricas

$$A = (a + 2B')t = (28.0 + 2 \times 10)1.0 = 48 \text{ cm}^2$$

¹ Las esquinas de los perfiles hechos con lámina doblada en frío, que constituyen una buena parte de las columnas en las que debe revisarse la posible falla por pandeo por flexotorsión, son siempre redondeadas, lo que ha de tenerse en cuenta en el cálculo de las propiedades geométricas. En este ejemplo se han considerado en ángulo recto para simplificar los cálculos numéricos.

Distancia entre el centro de gravedad y el eje del alma:

$$2 \times 10 \times 4.5 = 48.0\bar{x} \quad \therefore \bar{X} = 1.88 \text{ cm}$$

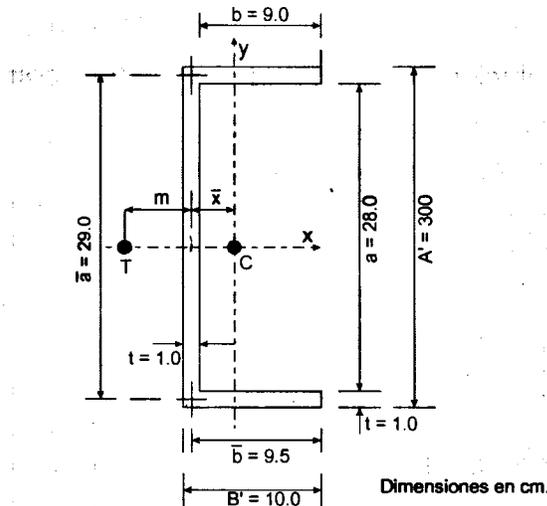


Fig. E2.1-1 Sección transversal de la columna.

Distancia entre el eje del alma y el centro de torsión:

$$m = \frac{3B'^2}{6B' + \bar{a}} = \frac{3 \times 10^2}{6 \times 10 + 29.0} = 3.37 \text{ cm}$$

Distancia entre los centros de gravedad y torsión:

$$X_0 = \bar{X} + m = 5.25 \text{ cm}$$

Momentos de inercia:

$$I_x = \frac{1 \times 28^3}{12} + 2 \times 10.0 \times 14.5^2 = 6034 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 28.0 \times 1.0 \times 1.88^2 + 2 \left[1.0 \times \frac{10.0^3}{12} + 1 \times 10.0 (4.5 - 1.88)^2 \right] = 402.9 \text{ cm}^4$$

No se han incluido los términos $B't^3/12$ y $at^3/12$ porque su contribución es siempre muy pequeña en secciones de paredes delgadas.

Constante de torsión de Saint Venant:

$$J = \frac{t^3}{3} (2B' + a) = \frac{1.0^3}{3} (2 \times 10.0 + 28.0) = 16.0 \text{ cm}^4$$

Constante de torsión por alabeo:

$$C_a = \frac{tB'^3\bar{a}^2}{12} \frac{3B' + 2\bar{a}}{6B' + \bar{a}} = \frac{1.0 \times 10.0^3 \times 29.0^2}{12} \frac{3 \times 10.0 + 2 \times 29.0}{6 \times 10.0 + 29.0} = 69,296 \text{ cm}^4$$

Las expresiones para m , J y C_a se han tomado de la ref. 2.2.

Radios de giro:

$$r_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{6034/48.0} = 11.21 \text{ cm}$$

$$r_y = \sqrt{I_y/A} = \sqrt{402.9/48.0} = 2.90 \text{ cm}$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{I_x + I_y}{A} = 5.25^2 + 0^2 + \frac{6034 + 402.9}{48.0} = 161.7 \text{ cm}^2$$

$$H = 1 - (x_0/r_0)^2 = 1 - 5.25^2/161.7 = 0.83$$

Cargas críticas. Como sus secciones transversales tienen un eje de simetría, la columna puede pandearse por flexión, alrededor del otro eje, o por flexotorsión.

$L=3.0 \text{ m}$

Carga crítica de pandeo por flexión (alrededor del eje y).

$$P_{cry} = \pi^2 EI_y / (K_y L_y)^2 = (402.9 \pi^2 E / (1 \times 300)^2) 10^{-3} = 90.1 \text{ ton}$$

Ec. 2.6

Carga crítica de pandeo por flexotorsión.

$$P_{crx} = \pi^2 EI_x / (K_x L_x)^2 = (6034 \pi^2 E / (1.0 \times 300)^2) 10^{-3} = 1349.2 \text{ ton}$$

Ec. 2.5

$$P_{crz} = \left[\frac{\pi^2 EC_a}{(K_t L_t)^2} + GJ \right] \frac{1}{r_0^2} = \left[\frac{69296 \pi^2 E}{(1 \times 300)^2} + 787500 \times 16.0 \right] \frac{10^{-3}}{161.7} = 173.8 \text{ ton}$$

Ec. 2.7

$$P_{FI} = \frac{1}{2H} \left[(P_{crx} + P_{crz}) - \sqrt{(P_{crx} + P_{crz})^2 - 4HP_{crx}P_{crz}} \right]$$

$$= \frac{1}{2 \times 0.83} \left[(1349.2 + 173.8) - \sqrt{(1349.2 + 173.8)^2 - 4 \times 0.83 \times 1349.2 \times 173.8} \right]$$

$$= 169.7 \text{ ton}$$

Ec. 2.9

Esta fuerza es mayor que P_{cry} , lo que indica que el pandeo por flexotorsión no es crítico; la columna falla por pandeo de Euler alrededor del eje y .

$$L=6.0 \text{ m}$$

$$P_{cry} = 22.5 \text{ ton}$$

$$P_{crx} = 337.3 \text{ ton}; P_{crz} = 101.9 \text{ ton}; P_{FT} = 97.3 \text{ ton}$$

También en este caso es crítico el pandeo por flexión alrededor de y .

$$L=1.5 \text{ m}$$

$$P_{cry} = 360.4 \text{ ton}$$

$$P_{crx} = 5396.8 \text{ ton}; P_{crz} = 461.2 \text{ Ton}; P_{FT} = 454.1 \text{ ton}$$

Sigue siendo crítico el pandeo por flexión alrededor de y . Cuando la longitud disminuye, P_{FT} se acerca a P_{cry} ; las barras muy cortas fallan por pandeo por flexotorsión. Sin embargo, esa condición no tiene importancia práctica en columnas como la de este ejemplo, pues es poco probable que una sección como la de la Fig. E2.1-1 se utilice en miembros de longitud bastante menor que 1.50 m.

La carga crítica calculada para la columna de 6.00 m es, seguramente, la real, pues dada su esbeltez, fallaría en el intervalo elástico. Sin embargo, los resultados obtenidos para las columnas más cortas deben corregirse por inelasticidad, para obtener su resistencia real. (La esbeltez que separa el comportamiento elástico del inelástico depende del tipo de acero, que no se conoce en este ejemplo).

2.5.3 Secciones con dos ejes de simetría

Son las más utilizadas en estructuras: secciones I, H, en cajón, tubulares (Fig. 2.2), y muchas de lámina delgada (Fig. 2.8).

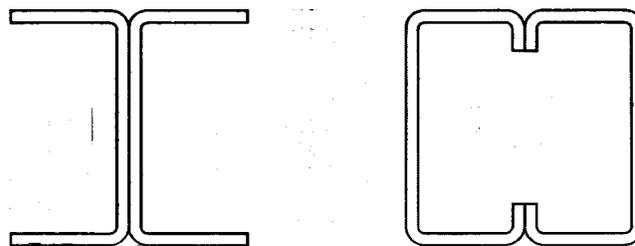


Fig. 2.8 Secciones de lámina delgada con dos ejes de simetría.

Los centros de gravedad y de torsión coinciden, $x_0 = y_0 = 0$, y como r_0 es diferente de cero, la ec. 2.4 se reduce a:

$$(P_E - P_{crx})(P_E - P_{cry})(P_E - P_{crz}) = 0 \quad (2.10)$$

Las tres cargas críticas son $P_{cr1} = P_{crx}$, $P_{cr2} = P_{cry}$ y $P_{cr3} = P_{crz}$; el modo de pandeo queda determinado por la menor de ellas. No hay interacción; la columna falla por pandeo por flexión o torsión puras.

El uso casi exclusivo de la fórmula de Euler (con la que se determinan P_{crx} y P_{cry} , pero no P_{crz}) para columnas de acero laminado en caliente, de sección I o H, o en cajón, laminadas o formadas por placas soldadas, proviene de que en ellas P_{crx} y P_{cry} son casi siempre menores que P_{crz} y, en el peor de los casos, la menor de las dos está muy cerca de ella (ref. 2.6). Sin embargo, el pandeo por torsión puede controlar la resistencia de columnas de baja resistencia a la torsión, como las secciones en cruz, o de paredes muy delgadas; por este motivo, las especificaciones del Instituto Americano del Hierro y el Acero (AISI, por sus iniciales en inglés), que se refieren al diseño de estructuras hechas con lámina delgada han incluido, desde 1968, la revisión de esos dos modos (ref. 2.7), mientras que las del Instituto Americano de la Construcción en Acero (AISC), que cubren, principalmente, el diseño de estructuras de acero laminado en caliente, no han tenido en cuenta el problema hasta 1986 (ref. 2.8).

EJEMPLO 2.2 Calcule las cargas críticas de pandeo elástico de dos columnas, de 4.00 y 7.00 m de longitud, articuladas en los extremos, que tienen la sección transversal que se muestra en la Fig. E2.2-1. Suponga que el pandeo local no es crítico.

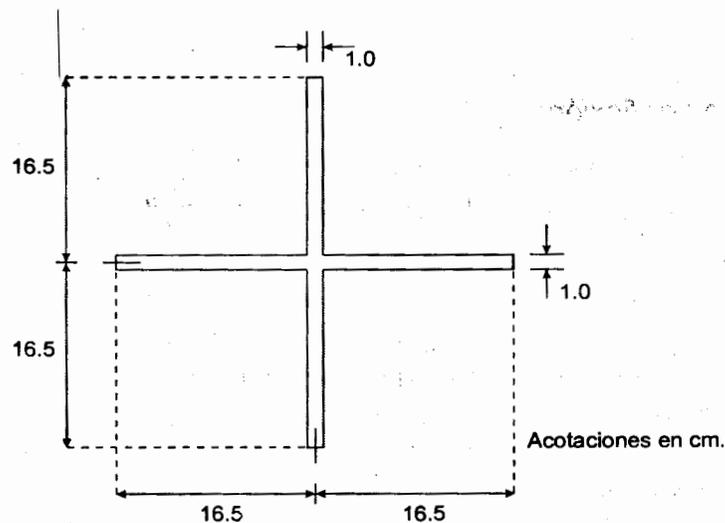


Fig. E2.2-1 Sección transversal de las columnas.

Propiedades geométricas.

$$A = 65.0 \text{ cm}^2; \quad I_x = I_y = 2997.4 \text{ cm}^4; \quad r_x = r_y = 6.79 \text{ cm}$$

$x_0 = y_0 = 0$ (Coinciden los centros de gravedad y de torsión).

$$r_0^2 = (I_x + I_y)/A = 2 \times 2997.4/65 = 92.2 \text{ cm}^2$$

$$J = \frac{1}{3}(33.0 \times 1^3 + 2 \times 16.0 \times 1^3) = 21.7 \text{ cm}^4$$

$C_a = 0$ (La rigidez al alabeo de las secciones cruciformes es despreciable).

Cargas críticas. Como las secciones transversales tienen dos ejes de simetría, la columna falla por pandeo por flexión o torsión puras. Puesto que $(KL)_x = (KL)_y$, e $I_x = I_y$, las dos cargas críticas de pandeo por flexión son iguales.

$$L = 4.00 \text{ m} \quad (L/r = 58.9).$$

Pandeo por flexión:
$$P_{crx} = P_{cry} = \frac{2997.4 \pi^2 E}{400^2} \times 10^{-3} = 377.0 \text{ ton.}$$

Pandeo por torsión:
$$P_{crz} = \frac{GJ}{r_0^2} = \frac{787500 \times 21.7}{92.2} \times 10^{-3} = 185.3 \text{ ton.}$$

En la ecuación para calcular P_{crz} desaparece el término correspondiente al efecto de alabeo. La falla es por pandeo por torsión; la carga crítica de pandeo elástico es $P_{crz} = 185.3 \text{ ton.}$

$$L = 7.00 \text{ m} \quad (L/r = 103.1).$$

Pandeo por flexión:
$$P_{crx} = P_{cry} = 123.1 \text{ ton.}$$

Pandeo por torsión:
$$P_{crz} = 185.3 \text{ ton.}$$

Como $C_a = 0$, P_{crz} es independiente de la longitud de la columna.

Ahora la falla es por pandeo por flexión:
$$P_{cr} = P_{crx} = P_{cry} = 123.1 \text{ ton.}$$

Los resultados de este ejemplo muestran que debe considerarse la posibilidad de falla por pandeo por torsión en columnas de secciones transversales especiales, sobre todo cuando su resistencia a la torsión por alabeo es baja y están formadas por placas de paredes delgadas; en este ejemplo, una columna con esbeltez $L/r = 59$ falla por torsión (en la ref. 2.6 se muestra que para la sección estudiada el pandeo por torsión es crítico para $0 \leq L/r \leq 82$, aproximadamente).

2.6 PANDEO POR FLEXIÓN

El pandeo por flexión, alrededor de uno de los ejes centroidales y principales, de columnas de sección transversal con dos ejes de simetría, es el que reviste mayor interés en el diseño de estructuras.

2.6.1 Pandeo elástico

Se tiene una columna esbelta de sección transversal constante doblemente simétrica, articulada en un extremo y con un apoyo guiado que permite rotaciones y desplazamientos lineales a lo largo de su eje en el otro, sujeta a la acción de fuerzas axiales de compresión P . Se supone que la columna es perfectamente recta, que el material de que está compuesta es homogéneo y elástico, y que en las articulaciones no hay ninguna fricción (Fig. 2.9a).

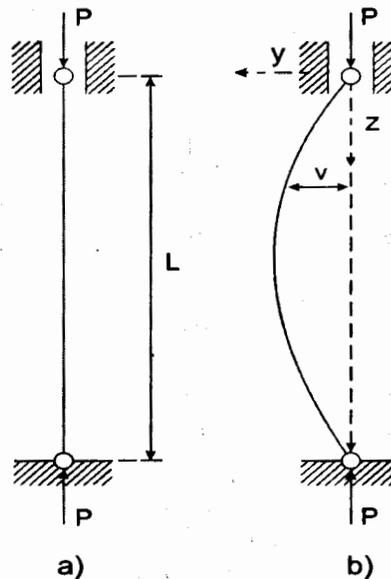


Fig. 2.9 Columna esbelta doblemente articulada.

En esas condiciones la forma recta corresponde a un estado de equilibrio entre las fuerzas exteriores e interiores, puesto que en cualquier sección transversal hay un conjunto de fuerzas interiores, uniformemente distribuidas, cuya resultante tiene la misma intensidad y línea de acción que P .

Para averiguar si el equilibrio es estable, inestable o indiferente, se aplica en la sección central de la columna una fuerza lateral pequeña que la coloca en una posición ligeramente deformada, y se observa si al quitarla recupera la forma recta, aumenta la deflexión lateral del eje, o se conserva la configuración deformada, sin modificarse.

En la discusión que sigue, la columna se flexiona en el plano "yoz".

La Fig. 2.9b muestra la columna con una configuración ligeramente flexionada; la fuerza exterior P , cuya línea de acción no pasa ya por los centros de gravedad de las secciones transversales, ocasiona momentos flexionantes, de magnitud Pv , que tienden a aumentar la curvatura del eje.

En cada sección transversal aparecen fuerzas interiores equivalentes a un par, que se superponen con las uniformes iniciales, y tratan de hacer que la columna vuelva a la forma recta original. El par interior EI/R es función de la curvatura $1/R$ del eje de la pieza en la sección, o sea de la magnitud de la deformación de la columna, pero no depende de la intensidad de la fuerza P .

En cada sección transversal hay dos momentos, uno exterior, Pv , función de la geometría del eje deformado y de la fuerza P , y otro interior, EI/R , que depende sólo de la configuración del eje de la pieza, de manera que al llevarla a una posición flexionada infinitamente cercana a la recta original puede presentarse cualquiera de los tres casos siguientes, según la magnitud de la fuerza exterior:

Si P es pequeña,		$Pv < EI/R$
Si P es grande,		$Pv > EI/R$
Para un cierto valor intermedio de P ,		$Pv = EI/R$

En el primer caso, el momento que trata que la columna regrese a la forma recta es mayor que el que tiende a deformarla, y al suprimir la fuerza lateral la pieza se endereza: el equilibrio es estable; en el segundo se invierte la relación entre los momentos, lo que indica que la curvatura crece aún después de quitar la fuerza lateral, condición característica de un estado de equilibrio inestable; en el tercero los dos momentos son iguales: el equilibrio es indiferente, y son posibles configuraciones equilibradas curvas de flecha indeterminada, pero siempre muy pequeña, además de la forma recta; la fuerza axial que ocasiona la condición de equilibrio indiferente es la carga crítica P_{cr} .

Interesa, precisamente, el equilibrio indiferente, porque marca la terminación de un estado deseable y la iniciación de un fenómeno que debe evitarse siempre: la flexión espontánea, o pandeo de la pieza.

El pandeo de las piezas rectas comprimidas no se debe a imperfecciones en la columna y en la aplicación de la carga (las que, si existen, hacen que la flexión empiece a manifestarse para valores pequeños de P y aumente con ella); se presenta cuando no hay ninguna imperfección, ya que al alcanzar la carga el valor crítico la forma recta de equilibrio se vuelve inestable. (Para que haya pandeo la columna ha de ser inicialmente recta y la fuerza de compresión perfectamente axial, de manera que se mantenga recta en las primeras etapas, hasta que P alcance el

valor crítico; si hay deformaciones iniciales o excentricidades en la aplicación de la carga la columna no se pandea, sino empieza a flexionarse desde un principio y llega eventualmente a un estado de equilibrio inestable, en forma gradual, a diferencia del pandeo, que es un fenómeno instantáneo). Esto no quiere decir que la columna se flexione necesariamente, pero a semejanza de lo que sucede en todos los casos de equilibrio inestable es improbable que permanezca recta; en la práctica, además, las imperfecciones inevitables, aún siendo muy pequeñas, hacen que la flexión se inicie bajo cargas de poca intensidad.

Cuando empieza la flexión bastan incrementos muy pequeños de la fuerza axial para que las deformaciones crezcan rápidamente, con el consiguiente rápido aumento de los esfuerzos, que alcanzan pronto los valores de falla, por la que la iniciación del fenómeno de inestabilidad equivale a la desaparición completa de la resistencia, o sea al colapso de la columna.

Mientras el equilibrio es estable los incrementos de la carga P ocasionan sólo deformaciones longitudinales de la columna, que está sujeta a esfuerzos uniformes de compresión; el pandeo se manifiesta al aparecer una nueva deformación, la flexión, que provoca otra sollicitación, el momento flexionante.

En la Fig. 2.3c se muestran las curvas $P-v$ (fuerza axial-deflexión) de dos columnas, una recta y cargada axialmente (representada con línea llena), la otra con imperfecciones iniciales (línea interrumpida). La primera es una recta vertical, que coincide con el eje de las ordenadas; cuando la fuerza P llega al valor crítico se presentan dos posibilidades: que P siga creciendo sin que la columna se flexione (la gráfica sigue coincidiendo con el eje de las ordenadas), o que se inicien las deformaciones laterales, que aumentan rápidamente con incrementos pequeños de P hasta llegar, poco después, a la carga máxima que puede soportar la columna, P_M . En la segunda curva las deformaciones laterales crecen desde un principio, en forma gradual, hasta que la carga alcanza el valor de colapso. La curva trazada con línea llena representa una falla por pandeo, mientras que la interrumpida corresponde a colapso por inestabilidad ocasionada por exceso de deformación, sin que haya pandeo propiamente dicho: la compresión alcanza su intensidad máxima sin pasar por un valor crítico, que se caracteriza (curva con línea llena) por una "bifurcación del equilibrio". (Cuando la carga alcanza el valor crítico se llega a un punto de bifurcación del equilibrio; a partir de él, la barra perfecta puede mantenerse recta, deformándose sólo por compresión, o adoptar otras configuraciones en equilibrio, cercanas a la recta, que se caracterizan por la aparición de una nueva deformación, la flexión. Un hecho análogo caracteriza todos los fenómenos de pandeo).

2.6.1.1 Determinación de la carga crítica

La carga crítica se calcula igualando el momento exterior en una sección transversal cualquiera de la columna deformada, ocasionado por la fuerza P , con el momento resistente interior en esa misma sección, y resolviendo la ecuación diferencial correspondiente; por ejemplo, si la columna se flexiona en el plano yz (alrededor de los ejes x) se tiene $Pv = EI_x/R$, y si se supone que los desplazamientos del eje son suficientemente pequeños para que la curvatura $1/R$ pueda considerarse igual a $d^2v/dz^2 = v''$, se llega a:

$$EI_x v'' + Pv = 0$$

que es la ecuación de equilibrio de la columna ligeramente deformada; su solución proporciona los valores de las cargas que pueden mantenerla en equilibrio en esas condiciones, es decir, las cargas críticas de pandeo elástico:

$$P_{crx} = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{L^2}$$

n es un número positivo cualquiera.

El eje de la columna deformada es una senoide; el número de ondas queda definido por n . Si $n = 1$, la columna se pandea en una semionda, en dos si $n = 2$, etc.; a cada modo superior de pandeo le corresponde una carga crítica más elevada.

La carga crítica más pequeña es la única que tiene interés práctico (a menos que se obligue a la columna a pandearse en alguno de los modos superiores, evitando el desplazamiento lateral de una o más de sus secciones transversales, por medio de restricciones exteriores), de manera que puede escribirse:

$$P_{crx} = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}$$

P_{crx} es la carga crítica de Euler para pandeo alrededor del eje x .

Como la columna se pandea siempre en el plano de menor resistencia a la flexión, si no hay restricciones exteriores que lo impidan, la ecuación anterior puede escribirse en una forma más general:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{2.11}$$

donde I es el momento de inercia mínimo de la sección transversal constante de la columna.

La carga crítica de Euler marca el punto en que la columna elástica perfecta se vuelve inestable; no se alcanza nunca en columnas reales, que no son absolutamente rectas, ni con cargas aplicadas exactamente a lo largo de su eje centroidal, como se supone en la teoría. Sin embargo, en ensayos cuidadosos con especímenes pequeños, en los que se eliminan al máximo las excentricidades y las

curvaturas, se han observado cargas tan cercanas a las teóricas que el error experimental resulta insignificante.

La ecuación del eje de la columna deformada, en el instante en que se inicia el pandeo, es (ref. 2.6):

$$v = C_1 \text{sen} \lambda_r z = C_1 \text{sen} \frac{n\pi}{L} z$$

donde

$$\lambda_r = \sqrt{P_{cr}/EI} = \sqrt{(n^2 \pi^2 EI/L)/EI} = n\pi/L$$

Haciendo $n=1$ y tomando $z=L/2$ se obtiene la flecha máxima, en el centro de la columna:

$$v_{m\acute{a}x} = C_1 \text{sen} \frac{\pi L}{L 2} = C_1 \text{sen} \frac{\pi}{2} = C_1$$

La deflexión lateral es indeterminada, pues C_1 es una constante arbitraria, lo que indica que la teoría desarrollada hasta ahora permite obtener la carga para la que se inicia el pandeo, pero no predice el comportamiento posterior, ya que con ella no se pueden calcular los desplazamientos laterales del eje, que permanecen indeterminados.

La limitación anterior se origina en el empleo de la fórmula $1/R = d^2 y/dz^2$, que es suficientemente precisa para desplazamientos pequeños, pero deja de serlo cuando aumentan; si se desea ampliar la teoría del pandeo elástico de columnas, para que tenga en cuenta desplazamientos laterales grandes, es preciso emplear la expresión matemática exacta de la curvatura.

Los dos caminos conducen a resultados análogos pues el segundo, basado en la expresión correcta de la curvatura, indica que el equilibrio sigue siendo estable para cargas mayores que la crítica, pero sólo para incrementos muy pequeños, después de los cuales se produce la falla por pandeo inelástico.

La falla se presenta, en todos los casos, cuando se forman en la columna articulaciones plásticas suficientes para que se convierta en un mecanismo; en la barra articulada en los dos extremos basta con una sola, que aparece en la sección de momento máximo (la sección central) cuando se agota su resistencia bajo la acción combinada de la fuerza axial y del momento ocasionado por el desplazamiento lateral que caracteriza al pandeo, o sea cuando $M_{m\acute{a}x} = P v_{m\acute{a}x} = M_{pc}$, donde M_{pc} es el momento plástico resistente de la sección transversal, reducido por efecto de la fuerza axial. La carga de colapso es muy poco mayor que la crítica, pues el rápido crecimiento de los esfuerzos hace que la sección central se plastifique inmediatamente después de iniciarse el pandeo. (El colapso tiene lugar siempre en el intervalo plástico, independientemente de que el pandeo se inicie abajo o arriba del límite de proporcionalidad).

Una vez formada la articulación plástica el momento interno en la sección central es constante, y para que se conserve el equilibrio mientras aumentan los desplazamientos laterales ha de disminuir la carga que obra sobre la columna.

2.6.1.2 Esfuerzo crítico

Dividiendo los dos miembros de la ec. 2.11 entre el área A de la sección transversal, teniendo en cuenta que P_{cr}/A es el esfuerzo correspondiente a la iniciación del pandeo, sustituyendo el momento de inercia I por Ar^2 y efectuando simplificaciones, se obtiene la expresión:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (2.12)$$

en la que σ_{cr} es el esfuerzo crítico de Euler para pandeo elástico; el cociente L/r recibe el nombre de *relación de esbeltez* de la columna. r es el radio de giro de las secciones transversales respecto al eje de flexión.

2.6.1.3 Longitud efectiva

Como la fórmula de Euler se deduce suponiendo que los dos extremos de la columna están articulados, sólo proporciona la carga o el esfuerzo crítico de columnas con esas condiciones de apoyo; si cambian las restricciones en los extremos, se modifica su capacidad para resistir fuerza axial.

La columna doblemente articulada no existe en las estructuras reales y sólo se obtiene en experimentos de laboratorio muy cuidadosos; su importancia estriba en que a partir de los resultados obtenidos para ella pueden deducirse las cargas o esfuerzos críticos correspondientes a cualquier otra condición de apoyo, por lo que se le da el nombre de *caso fundamental*.

Si la columna está aislada y tiene condiciones de apoyo bien definidas, su carga crítica, y la configuración del eje deformado, pueden determinarse utilizando la ecuación de equilibrio de segundo orden, en la que se introducen las condiciones de frontera propias del tipo de apoyo.

Por ejemplo, si los dos extremos están empotrados (las rotaciones y los desplazamientos laterales están impedidos, pero un extremo puede acercarse al otro), aparecen momentos en ellos, cuando se inicia el pandeo. La solución matemática del problema (ver, por ejemplo, la ref. 2.9) demuestra que hay dos cargas críticas, que corresponden a los dos modos de pandeo de la Fig. 2.10: $P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$, para el modo simétrico, y $P_{cr} = 80.766 EI/L^2$, para el antisimétrico. Puesto que la carga crítica del primer modo es menor que la del segundo, la

columna se pandea en la forma simétrica, a menos que se impida el desplazamiento lateral de su punto medio, y puede escribirse:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Los momentos en los extremos y las fuerzas axiales equivalen a las cargas P aplicadas excéntricamente (Fig. 2.10a). Los puntos de inflexión, de momento nulo, localizados en las intersecciones de la línea de acción de P con el eje deformado, dividen la barra en tres secciones; la central, comprendida entre ellos, de longitud $L/2$ (ref. 2.9), se encuentra en las mismas condiciones que el caso fundamental.

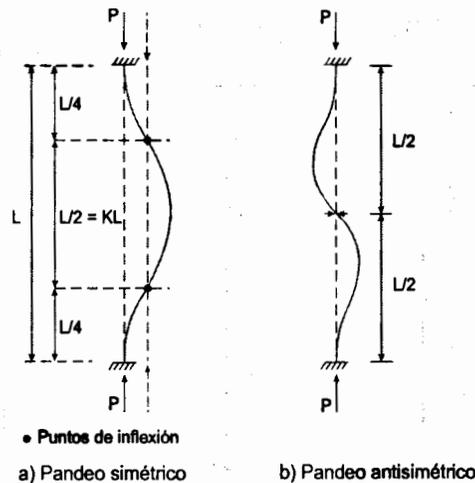


Fig. 2.10 Pandeo de una columna empotrada en los dos extremos.

La carga crítica de pandeo de la columna doblemente empotrada se puede determinar utilizando la fórmula deducida para la articulada en ambos extremos, pero empleando al aplicarla la longitud del tramo que se encuentra en las mismas condiciones que el caso fundamental, en vez de la longitud real:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Utilizando directamente la ecuación de equilibrio de la columna deformada se llega a este mismo resultado.

De manera análoga, la fórmula de Euler puede emplearse para calcular la carga o el esfuerzo crítico de pandeo de columnas con otras condiciones de apoyo, por lo que conviene escribirla en la forma general siguiente:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{2.13}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \tag{2.14}$$

KL es la *longitud efectiva* de la columna, que se define como la longitud de una columna equivalente, articulada en los dos extremos, que tiene la misma carga crítica que la columna restringida real; es igual a la distancia entre los dos puntos de inflexión, reales o imaginarios, del eje deformado. Vale 1.0 para extremos articulados y $\frac{1}{2}$ para extremos empotrados, y tiene valores intermedios para restricciones elásticas comprendidas entre esos límites; si un extremo de la columna puede desplazarse linealmente respecto al otro, en dirección perpendicular al eje original, K puede crecer indefinidamente.

En la Fig. 2.11 se dan los valores de K para varias condiciones de apoyo idealizadas, en las que las restricciones que impiden las rotaciones y traslaciones de los extremos son nulas o cien por ciento efectivas.

La línea punteada indica la forma de la columna pandeada	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Valor teórico de K	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Valores de diseño recomendados cuando se tienen condiciones cercanas a las ideales	0.65	0.80	1.2	1.0	2.1	2.0
Condiciones en los extremos	<ul style="list-style-type: none"> Rotación impedida y traslación impedida Rotación libre y traslación impedida Rotación impedida y traslación libre Rotación libre y traslación libre 					

Fig. 2.11 Valores del coeficiente K para columnas aisladas con diversas condiciones de apoyo.

Puede suponerse que se presenta una condición de empotramiento perfecto en la base (casos a, b, c y e, Fig. 2.11) cuando la columna está ligada a una cimentación rígida, cuyas rotaciones son despreciables, por medio de una conexión diseñada

para resistir el momento de empotramiento, obtenida con una placa de base y anclas, o ahogando la columna en el cimiento una longitud adecuada; si el comportamiento del extremo inferior es incierto, respecto a la existencia de rotaciones, debe suponerse articulado (casos d y f).

Las rotaciones del extremo superior se consideran impedidas cuando la columna se une rígidamente a una trabe de gran peralte, de rigidez muchas veces mayor que la suya propia; si se impiden los desplazamientos lineales de la trabe, por medio de contraventeos o muros de rigidez, la columna se encuentra en el caso a, y cuando pueden presentarse esos desplazamientos está en el c o f.

La suposición de que hay articulaciones en los extremos superiores (casos b y d), puede deberse a que las trabes tengan una rigidez muy reducida o a la forma en que estén conectadas con las columnas.

Los valores de K recomendados para diseño son una modificación de los teóricos, que tiene en cuenta que tanto las articulaciones perfectas como los empotramientos absolutos son irrealizables.

Se requiere un cierto grado de juicio, por parte del ingeniero proyectista, para determinar cuál de los casos de la Fig. 2.11 se acerca más al problema que está resolviendo; si se tienen dudas, usará una aproximación que sobrestime la esbeltez de la columna y, por consiguiente, subestime su resistencia.

Cuando la columna es parte de una estructura más compleja, y el grado de restricción en los apoyos no está claramente definido, su longitud efectiva se determina con métodos más elaborados.

La ec. 2.13 puede escribirse en la forma:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{P_E}{K^2},$$

donde P_E es la carga crítica de Euler de una columna, articulada en los dos extremos, de longitud igual a la de la columna restringida real.

El factor de longitud efectiva K de una columna con condiciones de apoyo diferentes de las del caso fundamental se evalúa directamente con la expresión:

$$K = \sqrt{\frac{P_E}{P_{cr}}}$$

2.6.2 Pandeo inelástico

La fórmula de Euler, con la que se calcula la carga crítica de piezas rectas comprimidas axialmente, se basa en la suposición de que la pieza se comporta

elásticamente hasta la iniciación del pandeo, por lo que en la ecuación de equilibrio aparece el módulo de elasticidad E , que se conserva en las fórmulas finales; como una consecuencia, la teoría de Euler, y las ecuaciones obtenidas con ella (ecs. 2.13 y 2.14), no son aplicables a columnas cortas o de longitud intermedia, en las que se alcanza el límite de proporcionalidad antes que el esfuerzo crítico de pandeo elástico.

La fórmula $\sigma_{cr} = \pi^2 E / (L/r)^2$ es válida para los valores de la relación de esbeltez a los que corresponden esfuerzos críticos no mayores que el límite de proporcionalidad ($\sigma_{cr} \leq \sigma_{LP}$) o sea hasta que:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \sigma_{LP}$$

Despejando L/r se obtiene:

$$\frac{L}{r} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{LP}}} \quad (2.15)$$

σ_{LP} es el esfuerzo en el límite de proporcionalidad.

Con la ecuación 2.15 se calcula la relación de esbeltez mínima para la que es aplicable la fórmula de Euler; no lo es para esbelteces menores, puesto que para ellas $\sigma_{cr} > \sigma_{LP}$, el límite de proporcionalidad se sobrepasa antes de iniciarse el pandeo, y éste se inicia en el intervalo inelástico.

Durante varias décadas se consideró que la teoría de Euler era incorrecta, pues arrojaba resultados que no concordaban con los que se obtenían experimentalmente; esto se debía a que las columnas que se utilizaban entonces eran de esbeltez muy reducida y fallaban en el intervalo inelástico, bajo cargas mucho menores que las predichas por la fórmula de Euler. Por este motivo las columnas se diseñaron, durante largo tiempo, utilizando fórmulas empíricas, deducidas de información proporcionada por pruebas de laboratorio. Transcurrieron cien años hasta que Lamarle, en 1845, advirtió que el error no estaba en la fórmula, sino en su aplicación a casos para los que no es válida.

La teoría del pandeo elástico de columnas estaba bien establecida desde entonces, pero no se contaba con ningún procedimiento para predecir la carga crítica fuera de ese intervalo, por lo que se siguieron empleando fórmulas empíricas.

Engesser y Considère fueron los primeros en advertir la posibilidad de modificar la fórmula de Euler para calcular la carga crítica de pandeo inelástico, introduciendo en ella un módulo variable, función del esfuerzo crítico.

Engesser presentó su teoría del módulo tangente en 1889; de acuerdo con ella, la resistencia máxima de una columna que empieza a pandearse en el intervalo inelástico se obtiene sustituyendo en la fórmula de Euler el módulo de elasticidad E

por el módulo tangente E_t . En el mismo año, Considère hizo notar que al comenzar la flexión de una columna cargada más allá del límite de proporcionalidad los esfuerzos en el lado cóncavo se incrementan, de acuerdo con el diagrama esfuerzo-deformación, pero los del lado convexo disminuyen, siguiendo la ley de Hooke, de manera que su resistencia máxima no es función ni del módulo de elasticidad E ni del tangente E_t , sino de un módulo \bar{E} comprendido entre los dos. Considère observó que \bar{E} es función del esfuerzo medio P/A , pero no propuso ningún procedimiento para calcularlo.

En 1895 Engesser reconoció el error que existía en su teoría original y presentó una nueva solución del problema, conocida con el nombre de teoría del módulo reducido o del módulo doble.

A partir de entonces se aceptó la teoría del módulo reducido como la solución correcta del problema del pandeo inelástico de columnas; desde el punto de vista del concepto clásico de inestabilidad es efectivamente correcta, puesto que proporciona la carga para la que una columna perfecta, recta y cargada axialmente, puede tener, además, otras configuraciones en equilibrio cercanas a la recta. Sin embargo, más adelante aparecieron dudas sobre ella, pues resultados experimentales cuidadosos, obtenidos con especímenes de secciones transversales de diversas formas, indicaron que las cargas de pandeo reales se encuentran entre las predichas por las dos teorías, del módulo tangente y del módulo reducido, más cerca casi siempre de las primeras que de las segundas.

El verdadero significado de las dos teorías fue aclarado finalmente por Shanley, en 1947.

En la discusión que se presenta en seguida se admiten las hipótesis siguientes:

1. Los desplazamientos laterales del eje de la columna son pequeños en comparación con las dimensiones de sus secciones transversales.
2. Las secciones transversales planas permanecen planas y normales al eje deformado, después de la flexión.
3. El diagrama esfuerzo-deformación del material de la columna proporciona la relación entre esfuerzo y deformación en cualquiera de sus fibras longitudinales.
4. El plano de flexión es un plano de simetría de todas las secciones transversales.

2.6.2.1 Teoría del módulo tangente

Se basa en la suposición de que cuando la columna tiene una relación de esbeltez tal que el esfuerzo crítico de pandeo $\sigma_t = P_t/A$ es mayor que el límite de

proporcionalidad, son posibles configuraciones deformadas en equilibrio indiferente para las que la deformación es controlada por el módulo de elasticidad tangente E_t , que es igual a la pendiente de la curva esfuerzo de compresión-deformación del material de la columna en el punto que corresponde al esfuerzo crítico (Refs. 2.4, 2.5, 2.6 y 2.10) (Fig. 2.12).

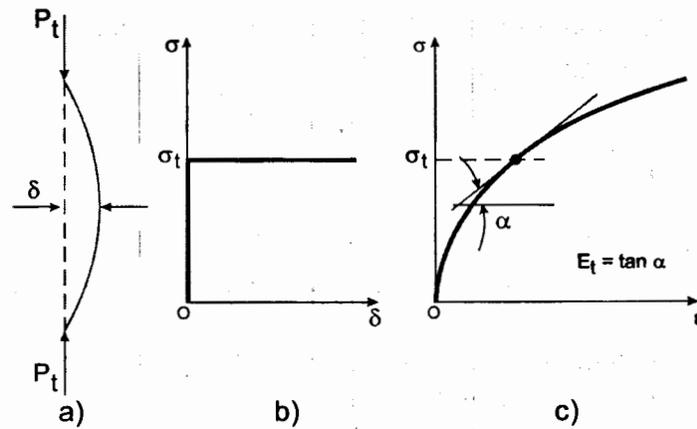


Fig. 2.12 Teoría del módulo tangente.

La ecuación diferencial del eje deformado es:

$$v'' + \frac{P_t}{E_t I} v = 0,$$

y, para una columna con extremos articulados, la carga y el esfuerzo crítico valen:

$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \quad (2.16)$$

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \quad (2.17)$$

2.6.2.2 Teoría del módulo reducido

De acuerdo con esta teoría, la carga crítica de una columna de longitud intermedia, sobre la que obra una fuerza de compresión P_r , tal que $\sigma_r = P_r/A$ excede el límite de proporcionalidad, es:

$$P_r = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2} \quad (2.18)$$

El esfuerzo crítico correspondiente es:

$$\sigma_r = \frac{\pi^2 E_r}{(L/r)^2} \quad (2.19)$$

Cuando la columna se flexiona, al iniciarse el pandeo, aparecen en sus secciones transversales momentos que incrementan los esfuerzos en el lado cóncavo, donde la compresión por flexión se suma con la directa, y los disminuyen en el convexo, en el que la flexión produce tensiones.

Si la curva OBC de la Fig. 2.13 representa el diagrama esfuerzo de compresión-deformación del material de la columna, y el punto C corresponde al esfuerzo crítico, los esfuerzos y deformaciones en el lado cóncavo están relacionados entre sí, durante pequeñas deformaciones, por el módulo tangente E_t (pendiente de la tangente CC'), y en el lado convexo, por el módulo de elasticidad ordinario, E , que es la pendiente de la recta CC'', paralela al tramo inicial, elástico, de la curva. El momento resistente es proporcional al módulo reducido E_r , que es función de E , E_t , y de la geometría de la sección transversal (refs. 2.4 y 2.6):

$$M_{int} = E_r I / R$$

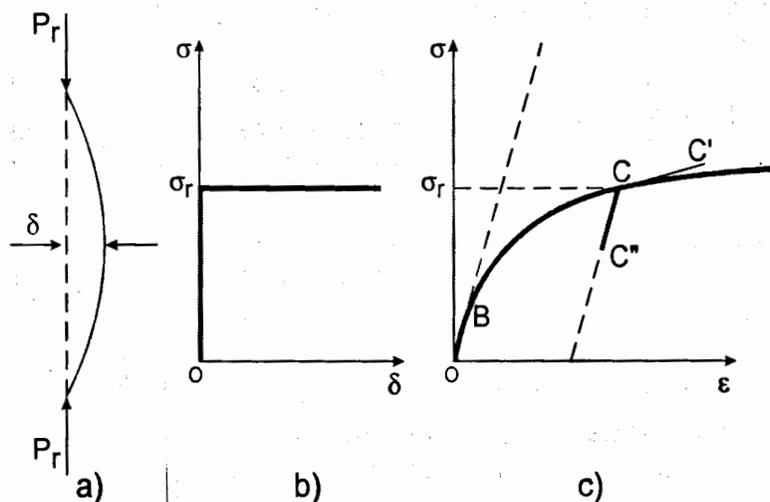


Fig. 2.13 Teoría del módulo reducido.

Las ecs. 2.18 y 2.19 se obtienen planteando la ecuación de equilibrio de la columna ligeramente deformada, y siguiendo el mismo camino que para deducir la fórmula de Euler.

Como E_r es siempre mayor que E_t , la teoría del módulo reducido proporciona cargas críticas algo más altas que la del módulo tangente.

Durante bastantes años se consideró que la teoría del módulo reducido era la más precisa, pues tiene en cuenta la reducción de esfuerzos en el lado convexo, producida por la flexión; sin embargo, las cargas críticas obtenidas experimentalmente se encuentran entre las predichas por las dos teorías, más

cerca, en general, de las que corresponden al módulo tangente que al reducido; por este motivo, se utilizó cada vez más la teoría del módulo tangente, a pesar de ser aparentemente incorrecta; tiene, además, las ventajas de proporcionar resultados del lado de la seguridad y ser más fácil de aplicar, pues E_t no depende de la forma de las secciones transversales.

Esta situación, aparentemente ilógica, existió hasta que Shanley aclaró el comportamiento de las columnas cargadas axialmente que se pandean en el intervalo inelástico.

2.6.2.3 La contribución de Shanley

Según la teoría del módulo tangente, la columna empieza a flexionarse cuando la carga vale $P_t = \pi^2 E_t I / L^2$, y son posibles configuraciones deformadas, en equilibrio indiferente, en las que esfuerzos y deformaciones están relacionados por el módulo E_t , en todos los puntos.

Para que esto sea cierto, el paso de la configuración recta a una deformada adyacente ha de presentarse sin que disminuyan los esfuerzos en ningún punto de la sección, lo que sólo es posible si los desplazamientos laterales se inician cuando la carga axial aumenta todavía, de manera que la tendencia a que disminuyan los esfuerzos en el lado convexo se compensa por el incremento ocasionado por la fuerza axial adicional.

La carga P_t predicha por la teoría del módulo tangente no es la fuerza axial máxima que resiste la columna, puesto que las mismas suposiciones que llevan a su obtención implican un aumento en la capacidad de carga.

En resumen, la carga que corresponde al módulo tangente es un límite inferior de la resistencia de una columna; al alcanzarla, la barra recta se flexiona, mientras crece la fuerza que obra sobre ella. La predicha por la teoría del módulo reducido es el límite superior, pues es la compresión máxima que resistiría la columna si permaneciese recta hasta entonces. La resistencia máxima se encuentra entre los límites correspondientes a las dos teorías (Fig. 2.14).

2.6.3 Esfuerzos residuales

En los miembros de acero estructural laminados en caliente aparecen esfuerzos residuales, debidos a las deformaciones permanentes que se originan por el enfriamiento irregular desde la temperatura de laminación hasta la ambiente.

Los extremos de los patines y la parte central del alma de un perfil H se enfrían con mayor rapidez que las zonas de unión de alma y patines, por estar más expuestas que éstas a la temperatura ambiente (refs. 2.6, 2.11; en cualquiera de ellas hay una extensa lista de referencias adicionales). Cuando se enfrían las fibras longitudinales de las regiones mencionadas primero se contraen y pasan al estado elástico, mientras el material de las porciones centrales de los patines y de las zonas contiguas del alma está aún a una temperatura que le permite seguir esas contracciones sin ninguna restricción; cuando, posteriormente, se enfrían las porciones centrales, tratan de contraerse más, pero están restringidas por el metal que se encuentra ya en estado elástico, que no puede acortarse sustancialmente, e impide que las fibras que se enfrían al final se contraigan todo lo que requiere el descenso de temperatura. (El proceso de enfriamiento es continuo, aunque aquí se ha descrito, por simplicidad, como si se presentase por etapas).

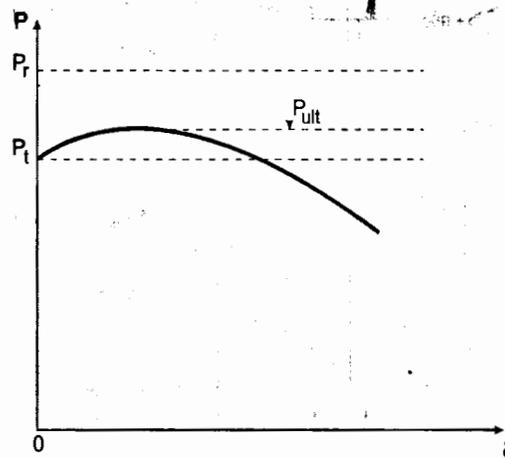


Fig. 2.14 Comparación de los resultados de las teorías del módulo tangente y del módulo reducido con la resistencia máxima de una columna.

Como una consecuencia de los fenómenos mencionados, cuando el perfil laminado llega a la temperatura ambiente, el material que ocupa la zona central de los patines y el alma adyacente queda sometido a fuerzas interiores de tensión, que ejercen sobre él los extremos de los patines y la zona central del alma que, a su vez, soportan compresiones a lo largo de los bordes; hay en el perfil esfuerzos iniciales, antes de que actúen las cargas exteriores, que generan un sistema de fuerzas interiores en equilibrio.

También producen esfuerzos residuales las deformaciones plásticas ocasionadas por operaciones efectuadas durante la fabricación de la estructura, como el enderezado de los perfiles, en frío o en caliente, y la soldadura, que genera esfuerzos residuales muy importantes, por el calentamiento y enfriamiento irregulares de los metales base y de aportación, desde la temperatura ambiente

hasta la de fusión; los cortes con soplete oxiacetilénico producen efectos semejantes a los de la soldadura.

Tanto en perfiles laminados en caliente como en miembros soldados, las partes que tardan más en enfriarse quedan, en general, en tensión, pues su longitud final es mayor que la que tendrían si se enfriasen libremente, y las que se enfrían primero, en compresión (Fig. 2.15a).

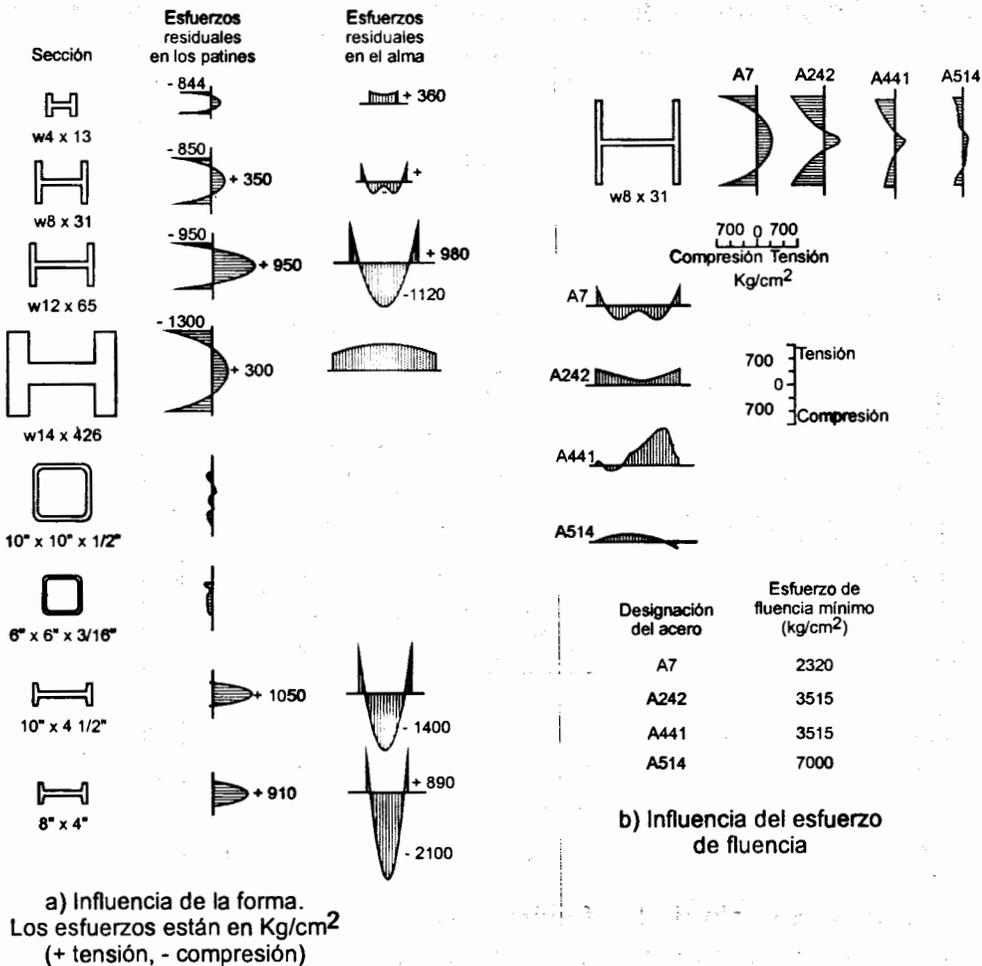


Fig. 2.15 Esfuerzos residuales en perfiles laminados.

En las secciones I y H los esfuerzos residuales máximos aparecen en los extremos de los patines; en perfiles laminados, su valor medio en esos puntos es de unos 900 Kg/cm², prácticamente independiente del esfuerzo de fluencia del acero, por lo que influyen menos en la capacidad de carga de columnas de acero de alta resistencia, pues constituyen un porcentaje menor de su esfuerzo de fluencia (Fig. 2.15b). En secciones I y H hechas con placas soldadas son, en general, más elevados; su magnitud y distribución dependen del tipo de placas que forman el alma y los

patines. Pueden eliminarse, casi por completo, por medio de tratamientos térmicos (Fig. 2.15b).

Los esfuerzos residuales de tensión en las soldaduras y en zonas angostas adyacentes a los bordes de placas cortadas con soplete exceden, con frecuencia, el límite de fluencia de las placas, pues aunque el metal base no resiste, inicialmente, esfuerzos mayores que F_y , los ciclos térmicos producidos por la soldadura y los cortes modifican sus propiedades, y elevan su resistencia (Fig. 2.16).

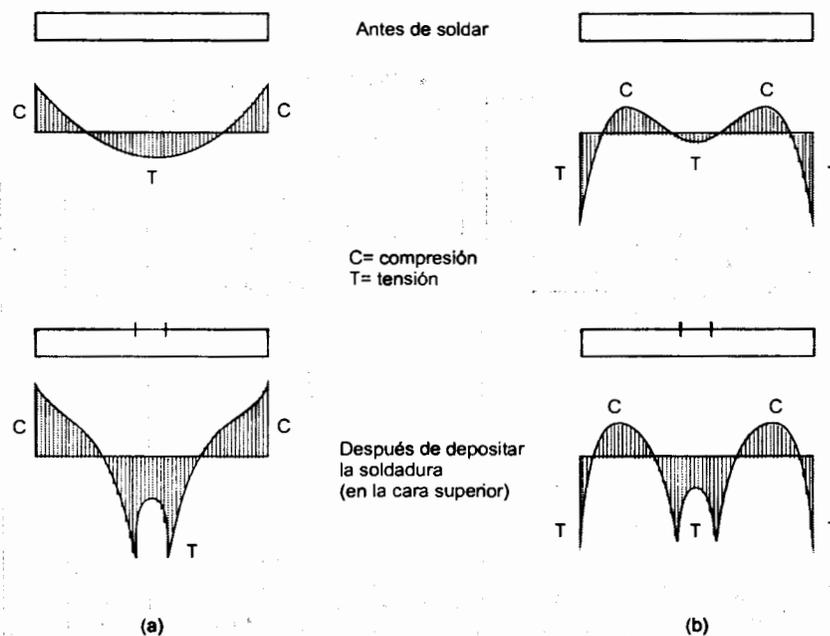


Fig. 2.16 Esfuerzos residuales en placas, antes y después de depositar un cordón de soldadura en su eje longitudinal. (a) Placas laminadas. (b) Placas cortadas con soplete.

La soldadura modifica los esfuerzos previos producidos por el enfriamiento o por los cortes con soplete. Las placas laminadas tienen esfuerzos residuales de compresión en los bordes, mientras que en placas cortadas con soplete esos esfuerzos son tensiones (Fig. 2.16). En secciones H soldadas, hechas con placas laminadas, la soldadura incrementa la compresión en los bordes de los patines y agranda la región comprimida, lo que afecta desfavorablemente la resistencia de la columna; en cambio, si las placas han sido cortadas con soplete, se forman esfuerzos residuales de tensión en los extremos de los patines, y aumenta la resistencia (Fig. 2.17).

Los esfuerzos residuales tienen distribuciones muy parecidas en todas las secciones en cajón, fabricadas con placas laminadas o cortadas con soplete, porque los que producen las soldaduras son mucho mayores que los que había antes (Fig. 2.18).

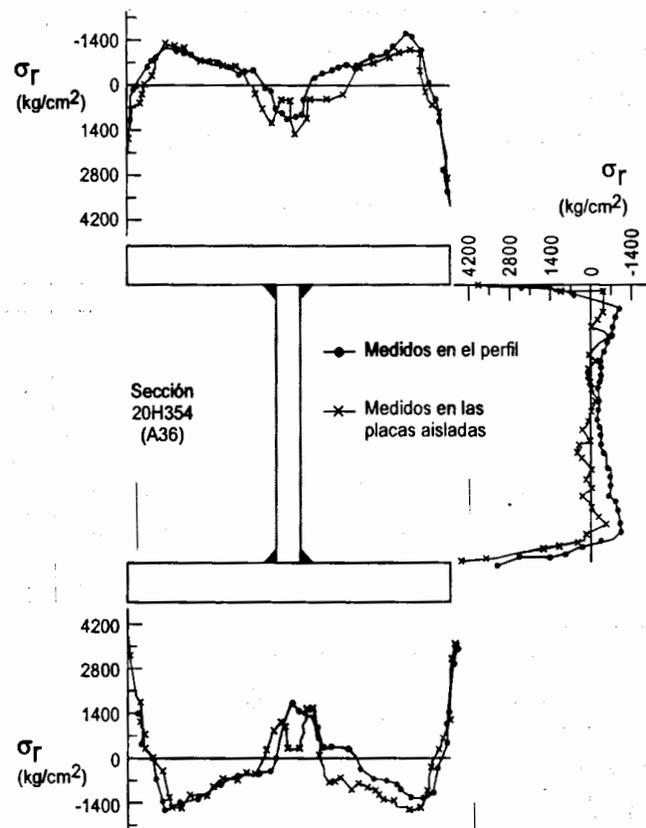


Fig. 2.17 Esfuerzos residuales en una sección H soldada, hecha con placas cortadas con soplete.

2.6.3.1 Influencia de los esfuerzos residuales en la resistencia de las columnas de acero estructural

Su efecto principal es hacer que descienda el límite de proporcionalidad del acero, a partir del cual su diagrama esfuerzo-deformación deja de ser recto; se llega a ese límite tan pronto como la suma de los esfuerzos residuales más los producidos por las cargas iguala a σ_y en algún punto de la sección. Si la barra está en tensión, el esfuerzo de fluencia aparece primero en el punto donde las tensiones residuales eran máximas; si está en compresión, se alcanza, por primera vez, en la zona de esfuerzos residuales de compresión de mayor intensidad.

Como las fuerzas residuales interiores están en equilibrio, los volúmenes de esfuerzos de tensión y compresión en cada sección transversal son iguales entre sí,

y están distribuidos de manera que las fuerzas interiores se equilibran mutuamente, por lo que no influyen en la resistencia última de las barras en tensión (en las zonas en que hay tensiones residuales se llega a σ_y antes que si no las hubiera, pero la plastificación se retrasa donde los esfuerzos residuales son compresiones) ni, por razones análogas, en la de barras comprimidas muy cortas, que fallan por aplastamiento.

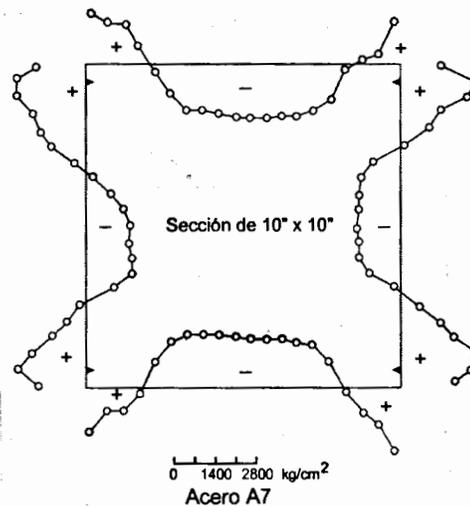


Fig. 2.18 Esfuerzos residuales en secciones cajón soldadas.

En la ref. 2.6 se ilustra el efecto de los esfuerzos residuales en el diagrama esfuerzo de compresión-deformación, estudiando el comportamiento de una columna corta, de sección transversal rectangular, con esfuerzos residuales idealizados (Fig. 2.19); se obtiene la gráfica de la Fig. 2.20. Para llegar a ella se utiliza la ley de Hooke, durante todo el proceso de carga, pero se tiene en cuenta que el área efectiva, en cualquier etapa, es sólo la de la porción de la sección que permanece en el intervalo elástico, pues el resto se deforma plásticamente bajo esfuerzo constante. Así, toda la sección es efectiva hasta que el esfuerzo producido por la carga exterior, P/A , alcanza el valor $\sigma_y - \sigma_{rc}$; a partir de ese instante, las dos porciones laterales de la columna se plastifican, y la resistencia adicional proviene, sólo, de la parte central, que sigue en el intervalo elástico.

2.6.3.2 Esfuerzo crítico de columnas con esfuerzos residuales

Cada fibra deja de contribuir a la rigidez de la columna cuando aparece en ella el esfuerzo σ_y , pues en esas condiciones se deforma libremente, bajo carga constante; por consiguiente, una vez que se han plastificado algunas porciones de la columna, al superponerse los esfuerzos producidos por las cargas exteriores con los residuales, se puede seguir utilizando la fórmula de Euler, pero debe considerarse sólo la porción de las secciones transversales que está aún en el intervalo elástico (refs. 2.12 y 2.13):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_e}{L^2} = \frac{I_e}{I} P_E \tag{2.20}$$

I_e es el momento de inercia de la parte de la sección transversal que está en el intervalo elástico cuando se inicia el pandeo, y P_E es la carga crítica de Euler. Se supone que los esfuerzos residuales son iguales en todas las secciones transversales de la columna, de manera que I_e es constante.

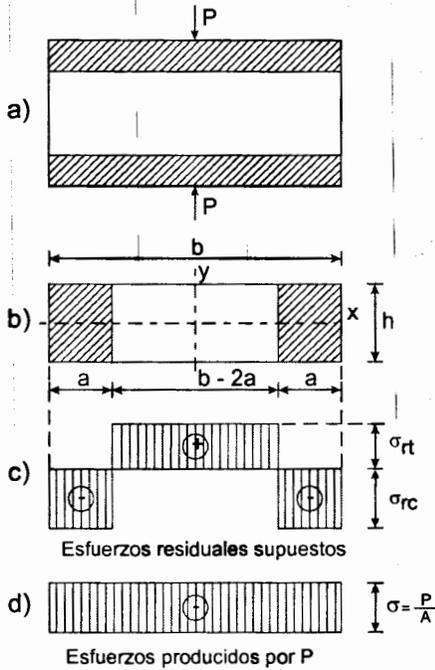


Fig. 2.19 Columna corta con esfuerzos residuales.

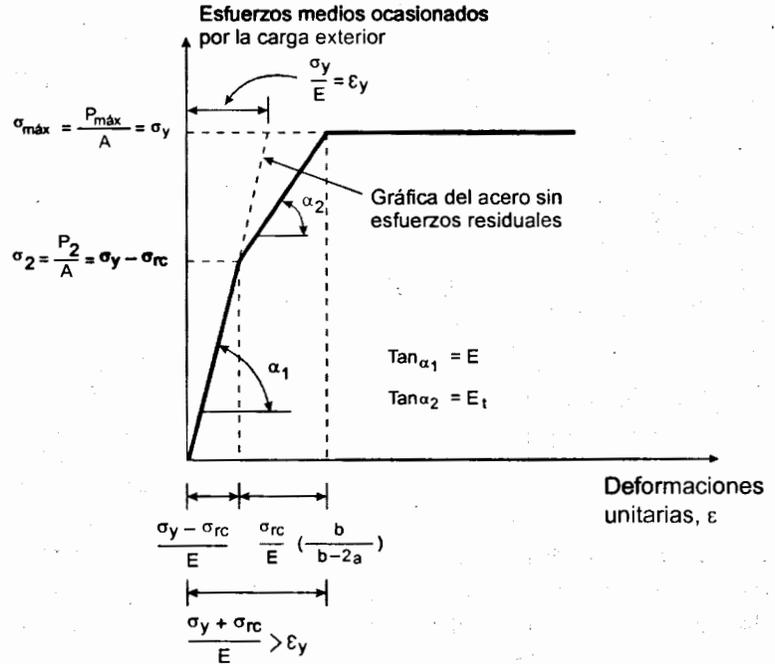


Fig. 2.20 Gráfica esfuerzo-deformación de la columna de la Fig. 2.19.

El esfuerzo crítico se obtiene dividiendo entre el área total A los dos miembros de la ecuación anterior:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_e}{AL^2} = \frac{\pi^2 EI_e}{(I/r^2)L^2} = \frac{\pi^2 E(I_e/I)}{(L/r)^2} \tag{2.21}$$

σ_{cr} se calcula con la fórmula de Euler, sustituyendo E por el producto $E(I_e/I)$.

Sin la contribución de Shanley a la teoría del pandeo inelástico no se habría podido llegar a este resultado, pues se está tomando como carga crítica la que ocasiona la iniciación de la flexión lateral de la columna, y admitiendo que ésta empieza sin que se descargue ninguna fibra; de no ser así, volverían a intervenir en el momento de inercia efectivo las zonas plastificadas del lado convexo, que regresarían al campo elástico. Se acepta que la flexión se inicia acompañada por un incremento de la carga, que produce aumentos de las deformaciones sin que disminuyan los esfuerzos en ningún punto; se utiliza, pues, la teoría del módulo tangente corregida

por Shanley, modificada porque las secciones transversales de las columnas con esfuerzos residuales dejan de ser homogéneas cuando se plastifican parcialmente.

De acuerdo con las ecs. 2.20 y 2.21, la distribución de los esfuerzos residuales con respecto al eje de flexión influye muy significativamente en la magnitud de σ_{cr} , ya que I_e depende de ella, por lo que se obtienen resultados diferentes, para una misma sección, e igual esbeltez, cuando se pandea alrededor de uno u otro de los ejes centroidales y principales.

Si las dos porciones laterales de amplitud a de la Fig. 2.19b, en las que había una compresión residual, están plastificadas cuando se inicia el pandeo de una columna que tiene esa sección transversal, utilizando la gráfica de la Fig. 2.20 para evaluar el módulo tangente de la sección completa se llega a los resultados siguientes (ref. 2.6):

Flexión alrededor del eje x:

$$\frac{I_{ex}}{I_x} = \frac{E_t}{E} \quad \therefore \sigma_{crx} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_x)^2} \frac{E_t}{E} \quad (2.22)$$

Flexión alrededor del eje y:

$$\frac{I_{ey}}{I_y} = \left(\frac{E_t}{E}\right)^3 \quad \therefore \sigma_{cry} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_y)^2} \left(\frac{E_t}{E}\right)^3 \quad (2.23)$$

Si se conoce E_t para fuerzas de compresión crecientes, con las ecuaciones 2.22 y 2.23 pueden obtenerse gráficas para diseño de columnas de sección transversal rectangular, que se pandean alrededor de cualquiera de los ejes centroidales y principales, con las que se determina σ_{cr} , en función de la relación de esbeltez y teniendo en cuenta los esfuerzos residuales.

σ_{crx} se calcula aplicando directamente la teoría del módulo tangente (ec. 2.22), pero no sucede lo mismo con σ_{cry} , que no depende directamente de E_t , sino de una función del cociente E_t/E (ec. 2.23).

El módulo tangente de la sección transversal completa, E_t , puede determinarse analíticamente, partiendo de una distribución conocida de esfuerzos residuales, o experimentalmente, por medio de ensayos de compresión de perfiles completos, de poca longitud (ref. 2.11).

Las ecs. 2.22 y 2.23 son válidas también para columnas de sección H o I idealizadas como dos placas paralelas entre sí, despreciando el efecto del alma sobre la rigidez

(refs. 2.6, 2.14); corresponden, respectivamente, a pandeo por flexión alrededor de los ejes x y y .

En la Fig. 2.21 se han trazado las curvas esfuerzo medio-relación de esbeltez que se obtienen aplicando las dos ecuaciones a una columna de sección H pandeada por flexión alrededor de los ejes de mayor y menor momento de inercia, suponiendo que tiene los esfuerzos residuales idealizados que se muestran, con valores máximos de $0.30\sigma_y$, en los extremos de los patines, y despreciando el efecto del alma ($0.30\sigma_y$ es un valor experimental promedio, determinado para secciones H laminadas, de tamaño pequeño o mediano).

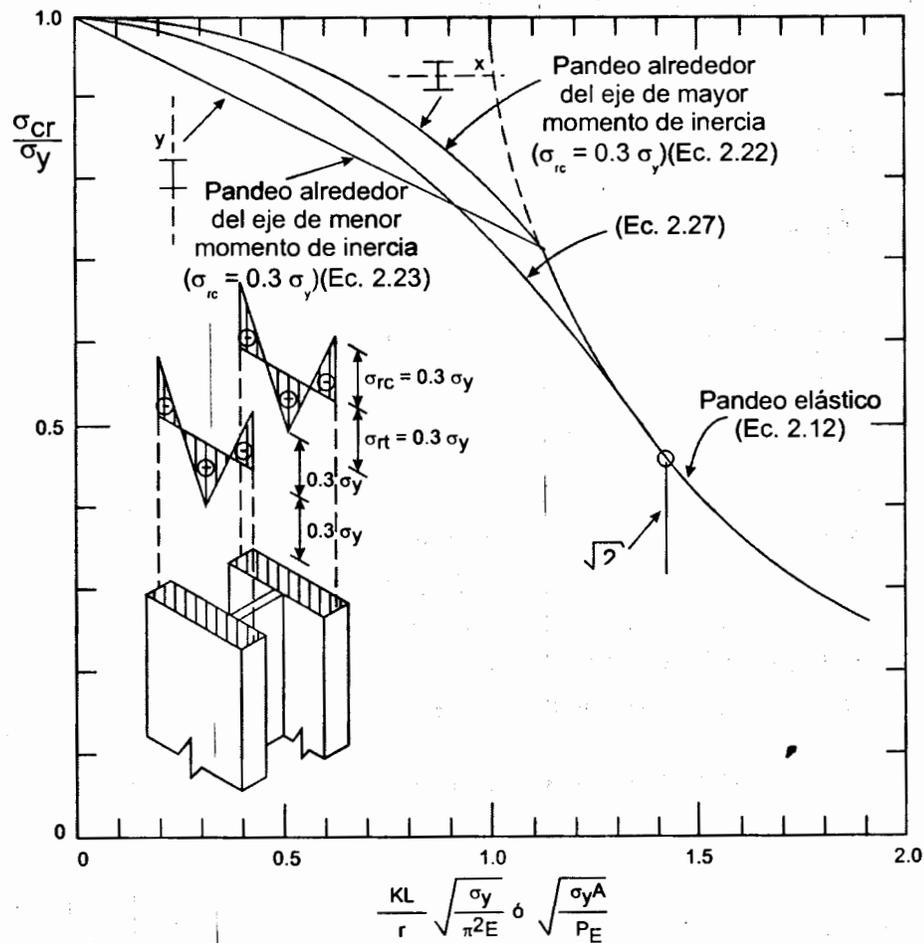


Fig. 2.21 Curvas esfuerzo crítico-relación de esbeltez para una columna I con esfuerzos residuales.

Cuando se obtuvieron las curvas anteriores, se pensó que para simplificar el diseño convenía sustituirlas por una sola, válida para pandeo en x o en y .

La resistencia de columnas que se pandean en el intervalo inelástico, por flexión alrededor del eje de mayor momento de inercia, puede aproximarse con una curva de ecuación (ref. 2.5):

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_{LP}}{\pi^2 E} (\sigma_y - \sigma_{LP}) \left(\frac{L}{r} \right)^2 \quad (2.24)$$

Como la gráfica esfuerzo-deformación deja de ser una línea recta cuando el esfuerzo total (residual de compresión más el debido a la carga exterior) llega a σ_y en algún punto, el límite de proporcionalidad σ_{LP} se substituye por:

$$\sigma_{LP} = \sigma_y - \sigma_{rc} \quad (2.25)$$

La ec. 2.24 se transforma en:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_{rc}}{\pi^2 E} (\sigma_y - \sigma_{rc}) \left(\frac{L}{r} \right)^2 \quad (2.26)$$

Si los esfuerzos residuales máximos de compresión se toman, arbitrariamente, iguales a $\sigma_y/2$, la ec. 2.26 se reduce a la 2.27, que proporciona resultados intermedios entre los de las ecs. 2.22 y 2.23, aceptables para flexión en cualquiera de los planos principales; su representación gráfica es una curva tangente a la de Euler en el punto en que $\sigma_{cr} = \sigma_y/2$.

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{4\pi^2 E} \left(\frac{L}{r} \right)^2 \quad (2.27)$$

$\sigma_y/2$ es un valor cercano al máximo que se ha medido en perfiles H laminados.

La ecuación 2.27 puede escribirse en la forma

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left(1 - \frac{\sigma_y}{4\pi^2 E / (L/r)^2} \right) = \sigma_y \left(1 - \frac{\sigma_y}{4\sigma_{cre}} \right) \quad (2.28)$$

σ_{cre} es la carga crítica de pandeo elástico de la columna; con la ec. 2.28 se corrige ese valor, cuando el pandeo se inicia fuera del intervalo elástico.

Al suponer que $\sigma_{rc} = \sigma_y/2$, de la ec. 2.25 se obtiene, $\sigma_{LP} = \sigma_y/2$, de manera que la ec. 2.27 (o la 2.28) es aplicable a columnas de relación de esbeltez para la que el esfuerzo crítico de pandeo es mayor que la mitad del de fluencia; en caso contrario, el pandeo se inicia en el intervalo elástico, y se utiliza la fórmula de Euler.

La ec. 2.27 (Fig. 2.21) fue recomendada en 1960 (ref. 2.14) como adecuada para obtener la resistencia al pandeo inelástico de columnas de acero estructural, y sirvió de base para las fórmulas contenidas en las especificaciones del AISC de 1961, que siguen en vigor, después de varias revisiones, en las normas para diseño por

esfuerzos permisibles (ref. 2.3); se utiliza también en el Reglamento de Construcciones para el D.F. (ref. 2.2), para algunos tipos de columnas. Es particularmente aplicable a perfiles H o I de acero estructural, laminados en caliente, pero pierde exactitud cuando se emplea para diseñar columnas hechas con placas soldadas, en las que el efecto de los esfuerzos residuales suele ser mayor que en las laminadas, o para columnas de acero de alta resistencia en las que, en cambio, los esfuerzos residuales son de menor importancia. Tampoco es muy precisa cuando se aplica a columnas de otros perfiles, como ángulos, canales, tubos o secciones en cajón.

En la Fig. 2.22 se muestran resultados experimentales obtenidos ensayando columnas de distintas formas, con esfuerzos de fluencia diferentes y fabricadas por procedimientos diversos, sometidas a compresión axial. Las abscisas son las relaciones de esbeltez escritas en forma adimensional, $\lambda = KL/(KL)_{\sigma_E = \sigma_y} = (KL/r)\sqrt{\sigma_y/\pi^2 E}$, y las ordenadas los esfuerzos críticos, divididos entre σ_y , para reducirlos también a una forma adimensional, que permita comparar los resultados. $(KL)_{\sigma_E = \sigma_y}$ es la relación de esbeltez para la que el esfuerzo crítico elástico es igual a σ_y .

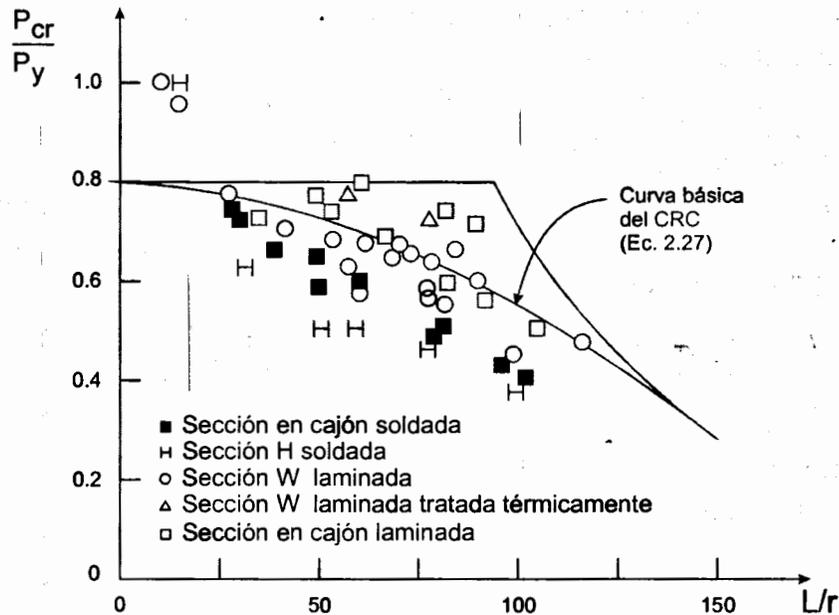


Fig. 2.22 Comparación de resultados experimentales con la ecuación 2.27.

Todos los especímenes se ensayaron en la condición en que se encontraban al terminar la fabricación, sin someterlos a ninguna operación de enderezado.

Con fines comparativos, aparece también en la figura la curva básica para diseño de columnas cargadas axialmente propuesta por el "Column Research Council" (CRC) en 1960 (ref. 2.14), ec. 2.27.

La mayoría de los puntos que representan perfiles H laminados, ensayados en su estado normal, se encuentra cerca de la curva, mientras que los de esos mismos perfiles tratados térmicamente, y de secciones en cajón laminadas, están en la curva o por encima de ella. En cambio, todas las columnas compuestas por placas soldadas están debajo, lo que indica que tienen resistencias menores que las predichas.

Estos resultados comprueban la importancia de los esfuerzos residuales en la resistencia de las columnas, tanto desde el punto de vista de su magnitud como de la manera en que están distribuidos en la sección. La resistencia aumenta cuando crece el esfuerzo de fluencia del acero y cuando se eliminan los esfuerzos residuales por medio de tratamientos térmicos, y las secciones en cajón laminadas, en las que los esfuerzos son reducidos, tienen también una capacidad de carga elevada. En cambio, las columnas formadas por placas soldadas resisten menos que los perfiles laminados de igual geometría, y la resistencia de las secciones en cajón es mayor que la de las H, porque tienen una distribución de esfuerzos residuales más favorable.

La considerable dispersión de los resultados experimentales refleja la influencia de la forma de las secciones transversales, de las distribuciones de esfuerzos residuales, y de la variación de los esfuerzos de fluencia; también influyen las imperfecciones geométricas iniciales de las columnas.

Es discutible si deben especificarse curvas de diseño diferentes para situaciones diferentes (columnas laminadas, soldadas, de alta resistencia, etc.), o utilizar una curva única; en este caso, el grado de seguridad varía de unas columnas a otras, pues la curva es conservadora en algunas ocasiones y arroja resultados inseguros en otras.

2.6.4 Curvas múltiples

La gran dispersión de las resistencias máximas de las columnas, para valores dados de la esbeltez, se muestra en la Fig. 2.23, en la que se han trazado las curvas que limitan el espacio que contiene las gráficas resistencia-esbeltez determinadas analíticamente para 112 columnas, de perfiles y tipos muy variados (ref. 2.15, 2.20).

Cada curva se basa en una distribución real de esfuerzos residuales, medida experimentalmente, y en una deformación inicial supuesta del eje de la columna, $\delta_0 = 0.001L$, en la sección media. Las resistencias no se han determinado resolviendo un problema de valores característicos, método que sólo es aplicable a

columnas perfectamente rectas, sino trazando la gráfica acción-deflexión de todo el proceso de carga, hasta el colapso. La resistencia máxima es la ordenada del punto más alto de la gráfica.

En la fig. 2.23 se muestran las envolventes superior e inferior y la curva media aritmética; el ancho de la banda, es decir, la dispersión de resistencias, es máximo para relaciones de esbeltez intermedias, y disminuye hacia los extremos.

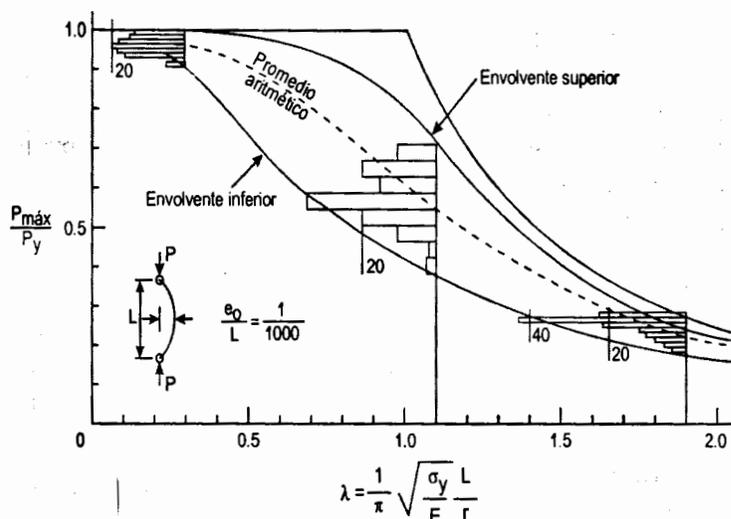


Fig. 2.23 Límites de las curvas de resistencia máxima de columnas (112 curvas).

Es evidente que una sola curva no representa adecuadamente la resistencia de todos los tipos de columnas.

Las incertidumbres pueden reducirse definiendo subgrupos, y representando cada uno con una curva media única, con lo que se obtiene un grupo de curvas múltiples para diseño.

Curvas europeas. Debido a la dispersión en las propiedades del material y en las imperfecciones de las columnas reales, las cargas de colapso obtenidas experimentalmente para una relación de esbeltez dada están repartidas en una faja de un cierto ancho. Conociendo un número suficiente de resultados experimentales, puede determinarse el valor probable de la carga de falla cuyo límite estadístico de tolerancia sea igual a una cifra dada. Adoptando este criterio, y utilizando los resultados de alrededor de 1100 ensayos llevados a cabo en siete países de Europa occidental, la Convención Europea de la Construcción Metálica (ref. 2.16) obtuvo una curva experimental, sin ecuación determinada, definida por parejas de valores $\sigma_{cr} - L/r$. Las piezas ensayadas, de diferentes relaciones de esbeltez, estaban hechas con perfiles de varios tipos, laminados en distintos países, y se probaron en seis laboratorios diferentes.

Pronto se hizo evidente que el empleo de una sola curva de pandeo es en detrimento de algunos perfiles usuales, por lo que se decidió establecer varias curvas de diseño, y referir a cada una de ellas las secciones correspondientes. Para obtenerlas se hicieron estudios de simulación, basados en valores supuestos de las imperfecciones de las columnas, y en los estudios experimentales previos. Se obtuvieron así las curvas a, b y c de la Fig. 2.27, en la que se indican los tipos de columnas a los que son aplicables. Se muestran también dos curvas tentativas, a^o y d.

Para facilitar el dimensionamiento de las columnas, la Convención Europea elaboró tablas $L/r - \sigma_u$ para los perfiles más utilizados y los aceros comunes en Europa (ref. 2.17), teniendo en cuenta los valores característicos del límite de elasticidad, en función del grueso del material. (Desde el punto de vista del pandeo de piezas comprimidas, la característica más importante es el límite de elasticidad de la parte más gruesa del perfil, que disminuye al aumentar el espesor). Posteriormente se han utilizado expresiones analíticas que aproximan los resultados proporcionados por las curvas (ref. 2.18).

2.6.5 Resistencia de diseño

Como las columnas reales tienen imperfecciones iniciales, aparecen, desde un principio, deflexiones laterales y momentos flexionantes, que crecen con más rapidez que la carga y ocasionan, eventualmente, la falla del miembro por la acción combinada de compresión y flexión. Sin embargo, durante muchos años el problema se trató como si las columnas fuesen perfectas y fallasen por pandeo, conservándose rectas hasta que se agota su rigidez lateral (ref. 2.12). Las especificaciones del AISC para el diseño por esfuerzos permisibles de columnas en compresión axial siguen basadas, hasta la fecha, en este criterio (ref. 2.3).

En la actualidad se cuenta con dos métodos para determinar la resistencia máxima de las columnas que fallan por pandeo por flexión (ref. 2.15 y 2.19); de acuerdo con uno, es la menor de las cargas críticas de pandeo, elástico o inelástico, de la columna perfecta; según el otro, es igual a la resistencia última de columnas con imperfecciones iniciales, que se introducen en el problema suponiendo que su eje no es recto inicialmente. Cuando se utiliza el primer criterio se calcula la carga crítica, que corresponde a un estado de bifurcación del equilibrio; debe resolverse un problema de valores característicos; si se emplea el segundo, se tiene un problema de inestabilidad, que se resuelve trazando una curva acción-desplazamiento y determinando la carga correspondiente a su punto más alto.

Los dos métodos son aplicables, en teoría, a cualquier forma de falla, pero sólo se cuenta con la información necesaria para utilizar el segundo, más preciso, en el caso más común, la falla por flexión alrededor de alguno de los ejes centroidales y principales de columnas con secciones transversales de simetría doble.

Ante la imposibilidad de considerar, de manera explícita, todos los factores que influyen en la resistencia de las columnas, sólo se incluyen en cada método los más importantes, y los restantes se tienen en cuenta introduciendo en el diseño un factor de seguridad adecuado, en forma de factores de carga y resistencia apropiados, cuando el diseño se hace por estados límite.

En los dos métodos se incluyen los efectos de los esfuerzos residuales que se originan durante la laminación y la fabricación de la estructura.

La resistencia de las columnas y la forma de la curva que la relaciona con la esbeltez son función de factores geométricos (forma y tamaño de las secciones transversales, desviaciones del eje respecto a la línea recta que une los centroides de las secciones extremas, excentricidades en la aplicación de la carga, eje de las secciones transversales alrededor del que se presenta la flexión durante el pandeo), de factores que dependen del material (tipo de acero, caracterizado por el esfuerzo de fluencia y la gráfica esfuerzo-deformación, magnitud y distribución de los esfuerzos residuales) y del proceso de fabricación (columnas laminadas en caliente, fabricadas con placas soldadas, o formadas en frío, métodos empleados para enderezarlas). Todos estos factores se tienen en cuenta cuando la curva de diseño se determina experimentalmente, puesto que se ensayan columnas reales, pero es difícil incluirlos en modelos analíticos por lo que, como se mencionó arriba, sólo los más importantes se consideran de manera explícita.

El número y la variedad de los factores que intervienen en el problema hacen que no sea conveniente utilizar una sola curva resistencia-esbeltez para todas las columnas, pues al hacerlo se penalizan las secciones más eficientes, o se diseñan las menos eficientes con una seguridad inadecuada. Para obtener un nivel de seguridad uniforme han de utilizarse varias curvas de diseño, que correspondan a grupos de columnas de características similares; se llega así al concepto de las *curvas múltiples* (refs. 2.11, 2.15, 2.19, 2.20).

Se han determinado analíticamente las curvas para columnas de diversos tipos; en su obtención se han tenido en cuenta la forma de la sección transversal, las propiedades mecánicas del acero, el procedimiento de fabricación, el tamaño de los perfiles, y el eje de flexión; además, se han considerado esfuerzos residuales con valores y distribuciones medidos experimentalmente, y curvaturas iniciales definidas por la forma del eje de la columna y la deflexión máxima, en el centro.

El eje de las columnas reales se representa convenientemente con una senoide, pero hay diferentes opiniones acerca del valor más adecuado de la deflexión e en el centro de la barra.

La magnitud de e está limitada por los requisitos que deben satisfacer, por especificación, los elementos de acero que se utilizan en las estructuras; de acuerdo con la práctica estadounidense, el eje de los miembros de sección H no puede separarse de la recta teórica que une sus extremos más de $1/8$ " por cada 10 pies de

longitud, o sea un novecientos sesentavo de la longitud L del miembro, lo que se considera, en general, como $L/1000$.

Sin embargo, como las bases de la teoría de confiabilidad utilizada para el desarrollo de los métodos de diseño basados en factores de carga y resistencia son los valores medios y las desviaciones estándar de los parámetros que intervienen en el problema, parece razonable usar el valor medio de e , y su variabilidad, para evaluar la resistencia de las columnas, lo que lleva a tomar e igual a $L/1470$, que es el valor medio, obtenido estadísticamente, para perfiles H (refs. 2.11, 2.20).

Para reducir a límites aceptables las incertidumbres propias del uso de una sola curva de diseño, pero sin complicar demasiado la solución del problema, como sucedería si se utilizase un número excesivo de curvas, el Consejo de Investigación sobre Estabilidad Estructural ("Structural Stability Research Council", SSRC) ha propuesto el uso de tres curvas (refs. 2.11, 2.15), que corresponden a grupos que incluyen columnas de sección H laminadas en caliente y enderezadas en frío, barras de sección transversal circular, maciza o hueca, y miembros hechos con placas soldadas, de sección H y en cajón. Para las curvas originales (Fig. 2.24 a 2.26) se consideró $e = L/1000$, mientras que en la deducción de las designadas con la letra P (de "probabilístico") se tomó el valor medio, $L/1470$; cada una de las curvas P está, siempre, ligeramente arriba de la curva "determinística" correspondiente (Fig. 2.28).

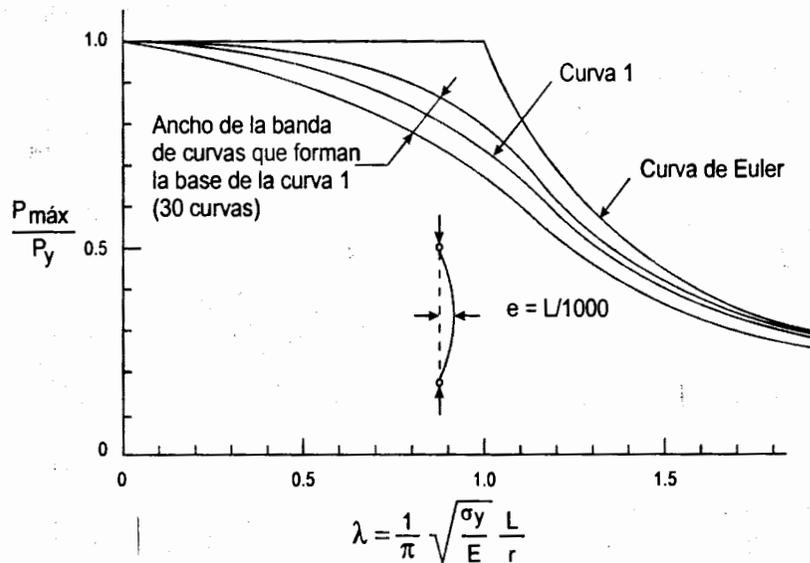


Fig. 2.24 Curva No. 1 para columnas de acero estructural.

Las ecuaciones que reproducen analíticamente los resultados de las curvas múltiples son bastante complejas (refs. 2.11, 2.15, 2.19); por ello, se ha propuesto el uso de expresiones simplificadas, con las que se obtienen, de manera mucho más sencilla, resultados suficientemente cercanos a los proporcionados por las curvas (refs. 2.9, 2.21, 2.22); de este tipo son las ecuaciones de las Normas Técnicas

Complementarias del Reglamento de Construcciones para el D.F. (ref. 2.2), y de las especificaciones Canadienses (ref. 2.23), para el diseño de columnas de sección transversal H o en cajón. Aunque de poca utilidad para tabular la resistencia de las columnas en función de su esbeltez, las ecuaciones simplificadas son convenientes cuando se emplean directamente en los cálculos y cuando se incluyen en programas de computadora.

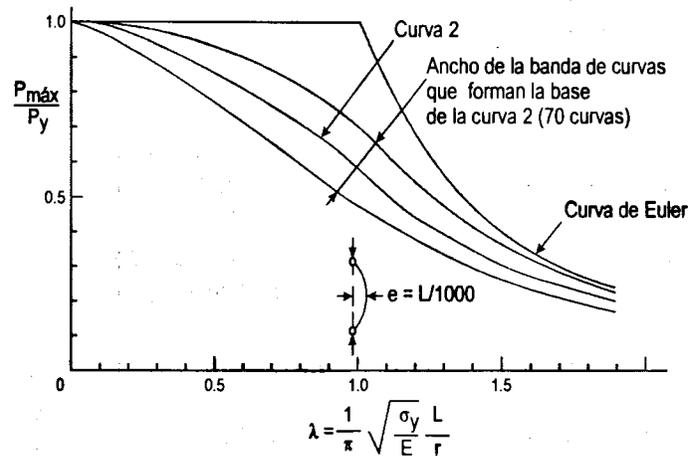


Fig. 2.25 Curva No. 2 para columnas de acero estructural.

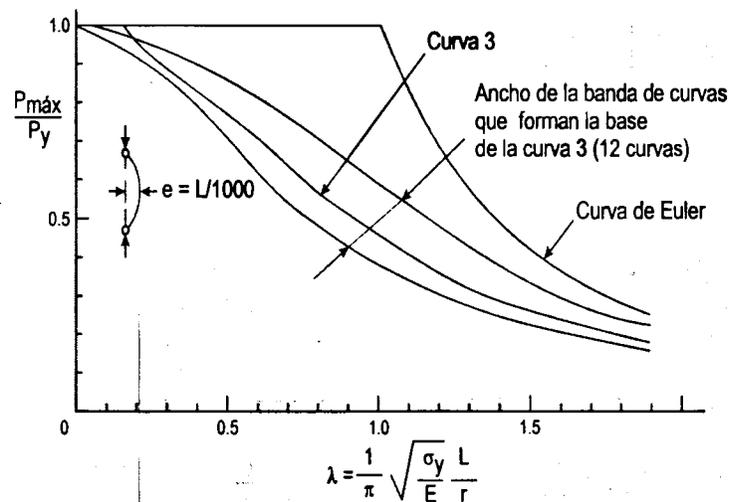
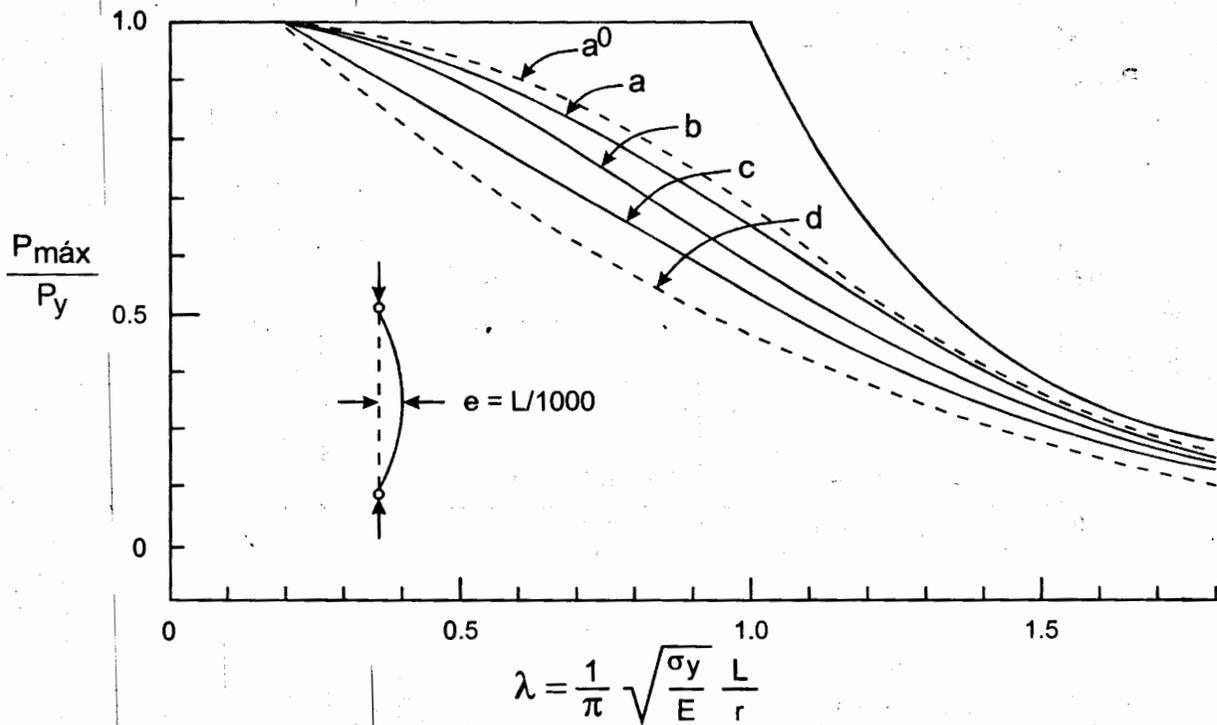


Fig. 2.26 Curva No. 3 para columnas de acero estructural.

Las ecuaciones recomendadas en la ref. 2.24 corresponden a la curva 2P (refs. 2.11, 2.20). A pesar de que esta curva es, en teoría, aplicable solamente a las secciones para las que fue deducida, de acuerdo con la ref. 2.24 se utiliza para columnas con secciones transversales de cualquier forma, incluyendo ángulos sencillos o dobles.



Curva a

- □ Tubos formados en caliente
- ⋮ Laminada, $h/b > 1.2$
- ⋮ Laminada, con cubreplacas soldadas
- ⋮ Soldada, relevada de esfuerzos
- ⋮ Relevada de esfuerzos

Curva c

- ⋮ Laminada, $h/b \leq 1.2$
- ⋮ Soldada, placas laminadas
- ⋮ Te
- ⋮ Canal
- □ Tubos acabados en caliente, con paredes de grueso no mayor de 6 mm

Curva a⁰ (tentativa)

Aceros de alta resistencia

Curva b

- ⋮ Cajón soldado
- ⋮ Laminada, $h/b > 1.2$
- ⋮ Laminada, $h/b \leq 1.2$
- ⋮ Soldada, placas cortadas con soplete
- ⋮ Soldada, placas laminadas
- ⋮ Laminada, con cubreplacas soldadas
- ⋮ Laminada, relevada de esfuerzos

Curva d (tentativa)

Perfiles pesados

Fig. 2.27 Curvas múltiples europeas.

Cuando se emplean varias curvas de diseño, con la tabla 2.1 se determina la que debe usarse en cada caso (refs. 2.4 y 2.20).

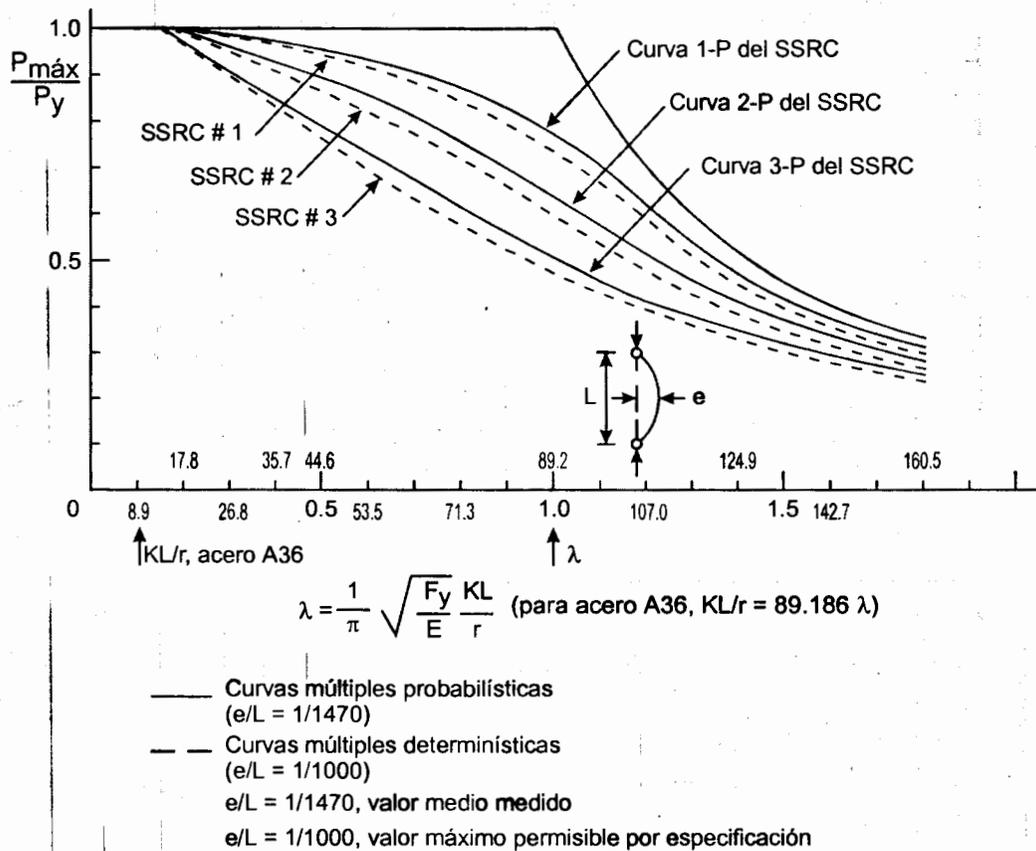


Fig. 2.28 Conjuntos de curvas múltiples para el diseño de columnas (SSRC y SSRC-P).

2.6.6 Pandeo en el intervalo de endurecimiento por deformación

En la mayor parte de la literatura sobre pandeo inelástico de columnas en compresión axial, se acepta que se pandean cuando el esfuerzo llega al límite de fluencia, y el módulo de elasticidad tangente se reduce a cero. Esto se refleja en las curvas y fórmulas para diseño, con las que se obtiene un esfuerzo crítico máximo (o un esfuerzo último, si se tienen en cuenta las imperfecciones iniciales), correspondiente a longitudes nulas, igual a σ_y (Figs. 2.21 y 2.24 a 2.26, ec. 2.27).

Aparentemente sería imposible llevar los elementos comprimidos de acero estructural al intervalo de comportamiento plástico, en el que las deformaciones unitarias son mayores que ϵ_y , sin que se pandeasen, lo que invalidaría la hipótesis principal del análisis y diseño plástico, pues los patines de las barras en flexión se pandearían localmente cuando la compresión fuese en ellos $A_p \sigma_y$, y no podría plastificarse la sección completa, ni formarse articulaciones plásticas.

Tabla 2.1 Selección de curvas para el diseño de columnas*

Proceso de fabricación		Eje de flexión	Esfuerzo de fluencia mínimo (Kg/cm ²)				
			<2530	2600 a 3450	3500 a 4150	4200 a 6250	P6300 **
Perfiles H laminados en caliente	Perfiles H ligeros y medios	Mayor momento de inercia	2	2	1	1	1
		Menor momento de inercia	2	2	2	1	1
	Perfiles H pesados (Patines de más de 5 cm de grueso)	Mayor	3	2	2	2	2
		Menor	3	3	2	2	2
Secciones H hechas con placas soldadas	Placas cortadas con soplete	Mayor	2	2	2	1	1
		Menor	2	2	2	2	1
	Placas laminadas	Mayor	3	3	2	2	2
		Menor	3	3	3	2	2
Secciones en cajón soldadas	Placas cortadas con soplete o laminadas	Mayor	2	2	2	1	1
		Menor	2	2	2	1	1
	Formadas en frío	Mayor	N/A	2	2	2	2
		Menor	N/A	2	2	2	2
Tubos cuadrados o rectangulares	Formados en caliente o formados en frío y tratados térmicamente	Mayor	1	1	1	1	1
		Menor	1	1	1	1	1
Tubos circulares	Formados en frío		2	2	2	2	2
	Formados en caliente		1	1	1	1	1
Todos los perfiles que hayan sido relevados de esfuerzos		Mayor o Menor	1	1	1	1	1

Notas:

- * Para uso con las curvas 1, 2 y 3 del SSRC (Cap. 3, ref. 2.11).
- ** Aceros tratados térmicamente.

La conclusión anterior no concuerda ni con los resultados de gran número de pruebas de laboratorio ni con el comportamiento de las estructuras reales, pues piezas pequeñas y robustas de acero, comprimidas axialmente, admiten deformaciones mayores que ϵ_y , sin pandearse e incluso, si su relación de esbeltez es menor que un cierto límite, el pandeo se pospone hasta que todo el material está endurecido por deformación, y se inicia bajo esfuerzos mayores que el de fluencia (refs. 2.26 a 2.28). Las teorías clásicas describen correctamente el fenómeno en el intervalo elástico y en el inelástico entre el límite de proporcionalidad y el esfuerzo de fluencia, hasta que la deformación unitaria vale ϵ_y , pero son inaplicables más allá de este punto.

En la Fig. 2.29 se muestra, en forma ligeramente simplificada, la primera parte de la curva esfuerzo-deformación unitaria de una probeta de acero A36, en tensión o compresión.

Al llegar el esfuerzo a σ_y , se inicia el flujo plástico, de manera brusca, sin la curva de transición de los perfiles completos, pues ésta se debe a los esfuerzos residuales que desaparecen en las probetas; las deformaciones crecen bajo esfuerzo constante, y el módulo tangente E_t parece reducirse a cero. Sin embargo, ε es una deformación media, obtenida midiendo el alargamiento o el acortamiento total de la probeta y, en realidad, no hay ningún material cuya deformación unitaria esté comprendida entre la iniciación del flujo plástico ε_y y el comienzo del endurecimiento por deformación ε_{ed} , pues el acero fluye de manera discontinua en pequeñas fajas inclinadas, orientadas según los planos de esfuerzo cortante máximo, en las que la deformación local pasa instantáneamente de ε_y a ε_{ed} (refs. 2.26, 2.27, 2.29). E_t no se anula nunca porque cuando parte del material está aún en el intervalo elástico, el resto ha entrado ya en el endurecimiento por deformación.

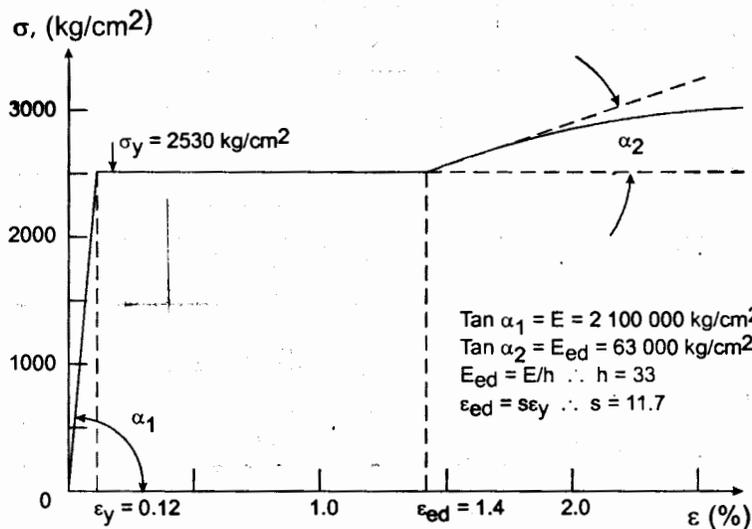


Fig. 2.29 Curva esfuerzo-deformación unitaria de una probeta de acero A 36.

ε_{ed} es unas 12 veces mayor que ε_y (Fig. 2.29).

Se ha demostrado experimentalmente que los esfuerzos de pandeo de piezas comprimidas de acero A7 o A36, en relación con esbeltez menor de 20, exceden el límite de fluencia y entran en el endurecimiento por deformación; los valores experimentales están entre los predichos por las teorías del módulo tangente y del módulo reducido (refs. 2.6, 2.30).

2.6.7 Fórmulas para diseño

A continuación se presentan las ecuaciones para diseño de columnas en compresión axial recomendadas en el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, en las dos especificaciones del Instituto Americano de la Construcción en Acero, y en las normas canadienses.

2.6.7.1 Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas (ref. 2.2)

La resistencia de diseño R_c de un elemento estructural de eje recto y de sección transversal constante sometido a compresión axial, que falla por pandeo por flexión, y en el que el pandeo local no es crítico, se determina con alguna de las ecs. 2.29 a 2.31. Tomando A_t en cm^2 y F_y en kg/cm^2 , R_c se obtiene en kg.

a) Miembros de sección transversal H, I, o rectangular hueca.

$$F_R = 0.9$$

$$R_c = \frac{F_y}{(1 + \lambda^{2n} - 0.15^{2n})^{1/n}} A_t F_R \leq F_y A_t F_R \quad (2.29)$$

A_t es el área total de la sección transversal de la columna.

$\lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}}$, donde KL/r es la relación de esbeltez efectiva máxima de la columna.

n es un coeficiente adimensional, que tiene alguno de los valores siguientes:

- Columnas de sección transversal H o I, laminadas o hechas con tres placas soldadas, obtenidas cortándolas con oxígeno de placas más anchas, y columnas de sección transversal rectangular hueca, laminadas o hechas con cuatro placas soldadas: $n = 1.4$.
- Columnas de sección transversal H o I, hechas con tres placas laminadas soldadas entre sí: $n = 1.0$.

La ec. 2.29 es una representación analítica simplificada de las curvas múltiples del SSRC; los valores de n , 2.0, 1.4 y 1.0, corresponden, respectivamente, a las curvas 1, 2 y 3 (ref. 2.22).

En las Normas Técnicas se utilizan sólo las curvas 2 y 3, es decir, n igual a 1.4 y 1.0, para aceros con límite de fluencia no mayor de 2530 Kg/cm^2 , pero se permiten otros valores de n si se demuestra que su empleo está justificado.

La tendencia actual es hacia el uso de aceros de resistencias más elevadas que los tradicionales; así, en Estados Unidos se emplean cada vez más, aceros con esfuerzo de fluencia de 50 Kips/pulg² (3515 kg/cm²), sustituyendo al acero A36 ($F_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$); en Canadá y en Europa la situación es semejante.

En México es ya muy común el uso de materiales con $F_y = 3515 \text{ kg/cm}^2$; cuando es así, puede emplearse la ec. 2.29, con $n = 2.0$, en los casos en que la Tabla 2.1 señala que debe utilizarse la curva 1.

b) Miembros cuya sección transversal tiene una forma cualquiera, no incluida en a)

$$F_R = 0.85$$

$$\text{Si } KL/r \geq (KL/r)_c, \quad R_c = \frac{20,120,000}{(KL/r)^2} A_t F_R \quad (2.30)$$

$$\text{Si } KL/r \leq (KL/r)_c, \quad R_c = A_t F_y \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2} \right] F_R \quad (2.31)$$

$$(KL/r)_c = 6340/\sqrt{F_y}$$

KL/r es la relación de esbeltez efectiva máxima de la columna, y $(KL/r)_c = \sqrt{2\pi^2 E/F_y} \approx 6340/\sqrt{F_y}$ es la esbeltez que separa el pandeo elástico del inelástico. Se obtiene igualando a $F_y/2$ el esfuerzo crítico elástico, dado por la fórmula de Euler y despejando KL/r .

Las ecs. 2.30 y 2.31 proporcionan la carga crítica de la columna, de pandeo elástico (la fórmula de Euler, ec. 2.30) o inelástico (la ec. 2.31 es la 2.28, en la que se ha introducido $(KL/r)_c$, multiplicada por $A_t F_R$). Estas ecuaciones, que se conservan de normas anteriores, se aplican a ángulos, canales y tes en compresión y, en general, a todos los tipos de columnas que no han sido objeto de investigaciones especiales, como las que llevaron a la obtención de las curvas múltiples. Por este motivo, para su diseño se recomienda un factor de resistencia menor.

2.6.7.2 Especificaciones AISC para diseño por factores de carga y resistencia (ref. 2.24)

De acuerdo con las especificaciones del AISC para edificios de acero estructural basadas en diseño por factores de carga y resistencia (ref. 2.24), la resistencia de diseño en compresión de columnas cargadas axialmente que no fallan por pandeo local ni por pandeo por torsión a flexotorsión, es igual a $F_R P_n$, donde:

$$F_R = 0.85$$

$$P_n = \text{resistencia nominal en compresión axial} = A_t F_{cr} \quad (2.32)$$

$$\text{Para } \lambda_c \leq 1.5, F_{cr} = (0.658^{\lambda_c^2}) F_y \quad (2.33)$$

$$\text{Para } \lambda_c > 1.5, F_{cr} = \left(\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) F_y \quad (2.34)$$

F_{cr} es el esfuerzo crítico de pandeo en compresión; λ_c es el parámetro λ definido en el artículo 2.6.7.1, donde también se ha definido A_t .

Las fórmulas 2.33 y 2.34 pueden expresarse en términos de la relación de esbeltez KL/r (Comentario de la ref. 2.8); para ello, se escribe la fórmula 2.33 en forma exponencial:

$$F_{cr} = \left(\exp(-0.419\lambda_c^2) \right) F_y$$

y se sustituye λ_c por su valor, con lo que se obtiene:

$$\text{Para } \frac{KL}{r} \leq 4.71 \sqrt{\frac{E}{F_y}}, F_{cr} = \left[\exp \left[-0.424 \frac{F_y}{E} \left(\frac{KL}{r} \right)^2 \right] \right] F_y \quad (2.35)$$

$$\text{Para } \frac{KL}{r} > 4.71 \sqrt{\frac{E}{F_y}}, F_{cr} = \frac{0.877\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (2.36)$$

$\exp(x)$ tiene el mismo significado que e^x , donde e es la base de los logaritmos naturales.

Las ecs. 2.33 y 2.34 (o 2.35 y 2.36) son una representación analítica de la curva 2P. Es decir, el AISC utiliza una sola curva, la intermedia, para el diseño de todos los miembros en compresión axial, cualquiera que sea la forma de su sección transversal o el procedimiento de fabricación.

La ec. 2.34 (o la 2.36) es la fórmula de Euler multiplicada por 0.877, lo que indica que para esbelteces grandes (mayores que 133.7, si el acero es A36) la resistencia de las columnas con imperfecciones iniciales ($e = L/1470$) es aproximadamente igual al 88 por ciento de la predicha por la fórmula de Euler (F_{cr} , calculado con cualquiera de las ecuaciones anteriores, no es realmente un esfuerzo crítico de pandeo, puesto que las curvas múltiples, de una de las cuales provienen esas ecuaciones, no proporcionan esfuerzos críticos, sino resistencias máximas de columnas con imperfecciones iniciales).

2.6.7.3 Especificaciones AISC para diseño por esfuerzos permisibles (ref. 2.3)

En las normas de 1989 para diseño basado en esfuerzos permisibles (ref. 2.3), el AISC conserva las fórmulas para miembros comprimidos axialmente que han

formado parte de sus especificaciones desde 1961. Las recomendaciones de diseño son las siguientes:

El esfuerzo permisible en la sección transversal total de miembros comprimidos axialmente que no fallan prematuramente por pandeo local, en los que la relación de esbeltez máxima del tramo en estudio, KL/r , no excede de C_c , es:

$$F_a = \frac{\left(1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2}\right) F_y}{\frac{5}{3} + \frac{3KL/r}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}} \quad (2.37)$$

donde:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

Cuando KL/r excede de C_c , el esfuerzo permisible es:

$$F_a = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} \quad (2.38)$$

C_c es la relación de esbeltez que separa las dos formas de pandeo, elástico e inelástico; corresponde a la relación de esbeltez KL/r de la ref. 2.2 (art. 2.6.7.1).

La ec. 2.38 es la fórmula de Euler con un coeficiente de seguridad de $23/12 = 1.92$; proporciona el esfuerzo crítico de las columnas esbeltas, que fallan por pandeo elástico. El numerador de la ec. 2.37 es el esfuerzo crítico de pandeo inelástico de columnas cortas e intermedias (es la ec. 2.27, en la que se ha introducido el coeficiente C_c), y el denominador el factor de seguridad, que varía de 1.67 para columnas de esbeltez nula a 1.92 cuando $KL/r = (KL/r)_c$.

2.6.7.4 Normas Canadienses (ref. 2.23)

La resistencia factorizada (o resistencia de diseño), C_r , de un miembro de sección transversal clase 1, 2 o 3 (que no falla por pandeo local), en compresión axial, se calcula con la expresión:

$$C_r = \phi A F_y (1 + \lambda^{2n})^{-1/n} \quad (2.39)$$

que puede escribirse en la forma:

$$C_r = \frac{F_y}{(1 + \lambda^{2n})^{1/n}} \phi A$$

n vale 2.24, 1.34 o 0.98, dependiendo de las características de la columna; cada valor corresponde a una de las tres curvas propuestas.

$$\lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}}$$

ϕ = factor de resistencia = 0.9.

Las secciones que tengan sólo un eje de simetría, o ninguno, y las cruciformes, deben satisfacer requisitos adicionales.

En el cuerpo de la norma aparecen únicamente los dos primeros valores de n ; el tercero (0.98) se recomienda, en el Comentario, para secciones laminadas pesadas y secciones soldadas fabricadas con placas laminadas.

La ec. 2.39 es muy parecida a la 2.29; también son muy semejantes los valores del exponente n . Esto no es de extrañar puesto que ambas provienen de las mismas curvas.

2.6.7.5 Tablas de esfuerzos de diseño

En las hojas siguientes se presentan varias tablas que proporcionan los esfuerzos de diseño en función de las relaciones de esbeltez de las columnas; corresponden a las refs. 2.2 y 2.24. En la Fig. 2.30 se comparan algunas curvas esfuerzo de diseño-relación de esbeltez para aceros Grado 50 ($F_y = 3515 \text{ Kg/cm}^2$); la del Reglamento del D.F., con $n=1.4$, coincide casi con la del AISC, pues ambas provienen de la segunda curva del SSRC; la diferencia para relaciones L/r pequeñas, se debe a que los factores de resistencia no son iguales.

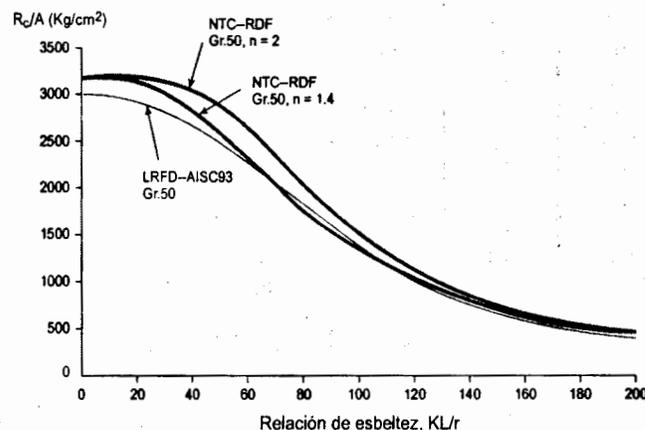


Fig. 2.30 Curvas esfuerzo de diseño – relación de esbeltez (R_c/A – KL/r).

TABLA 2.2 Miembros en Compresión Axial, NTC del RDFEsfuerzo de Diseño R_c/A_t $F_R=0.9$, $n=1.0$, $F_y=2530 \text{ kg/cm}^2$

KL/R	R_c/A_t kg/cm ²						
1	2277	51	1746	101	1008	151	592
2	2277	52	1728	102	996	152	587
3	2277	53	1711	103	985	153	581
4	2277	54	1694	104	974	154	575
5	2277	55	1677	105	963	155	570
6	2277	56	1660	106	953	156	564
7	2277	57	1643	107	942	157	559
8	2277	58	1626	108	932	158	553
9	2277	59	1609	109	921	159	548
10	2277	60	1592	110	911	160	543
11	2277	61	1575	111	901	161	537
12	2277	62	1559	112	891	162	532
13	2277	63	1542	113	882	163	527
14	2272	64	1526	114	872	164	522
15	2264	65	1509	115	862	165	517
16	2255	66	1493	116	853	166	513
17	2246	67	1477	117	844	167	508
18	2236	68	1461	118	835	168	503
19	2226	69	1445	119	826	169	498
20	2215	70	1429	120	817	170	494
21	2204	71	1413	121	808	171	489
22	2193	72	1398	122	799	172	485
23	2181	73	1382	123	791	173	480
24	2169	74	1367	124	782	174	476
25	2156	75	1352	125	774	175	472
26	2143	76	1337	126	766	176	467
27	2130	77	1322	127	758	177	463
28	2116	78	1307	128	750	178	459
29	2102	79	1292	129	742	179	455
30	2088	80	1278	130	734	180	451
31	2073	81	1263	131	726	181	447
32	2058	82	1249	132	719	182	443
33	2043	83	1235	133	711	183	439
34	2028	84	1221	134	704	184	435
35	2012	85	1207	135	697	185	431
36	1997	86	1194	136	689	186	427
37	1981	87	1180	137	682	187	424
38	1965	88	1167	138	675	188	420
39	1948	89	1154	139	668	189	416
40	1932	90	1141	140	662	190	413
41	1915	91	1128	141	655	191	409
42	1899	92	1115	142	648	192	406
43	1882	93	1103	143	642	193	402
44	1865	94	1090	144	635	194	399
45	1848	95	1078	145	629	195	395
46	1831	96	1066	146	623	196	392
47	1814	97	1054	147	616	197	389
48	1797	98	1042	148	610	198	386
49	1780	99	1030	149	604	199	382
50	1763	100	1019	150	598	200	379

TABLA 2.3 Miembros en Compresion Axial, NTC del RDF

Esfuerzo de Diseño R_c/A_t

$F_R=0.9, n=1.4, F_y=2530 \text{ kg/cm}^2$

KL/R	R_c/A_t kg/cm ²						
1	2277	51	1994	101	1214	151	686
2	2277	52	1980	102	1200	152	679
3	2277	53	1966	103	1186	153	671
4	2277	54	1952	104	1172	154	664
5	2277	55	1938	105	1159	155	657
6	2277	56	1923	106	1145	156	650
7	2277	57	1908	107	1132	157	643
8	2277	58	1893	108	1119	158	637
9	2277	59	1878	109	1106	159	630
10	2277	60	1863	110	1093	160	623
11	2277	61	1847	111	1080	161	617
12	2277	62	1832	112	1068	162	611
13	2277	63	1816	113	1055	163	604
14	2276	64	1800	114	1043	164	598
15	2274	65	1784	115	1031	165	592
16	2272	66	1768	116	1019	166	586
17	2269	67	1751	117	1007	167	580
18	2267	68	1735	118	995	168	574
19	2264	69	1719	119	984	169	568
20	2260	70	1702	120	972	170	562
21	2257	71	1686	121	961	171	557
22	2253	72	1669	122	950	172	551
23	2249	73	1653	123	939	173	546
24	2244	74	1636	124	928	174	540
25	2240	75	1620	125	918	175	535
26	2234	76	1603	126	907	176	530
27	2229	77	1587	127	897	177	524
28	2223	78	1570	128	887	178	519
29	2217	79	1554	129	877	179	514
30	2210	80	1538	130	867	180	509
31	2204	81	1521	131	857	181	504
32	2196	82	1505	132	847	182	499
33	2189	83	1489	133	837	183	495
34	2181	84	1473	134	828	184	490
35	2173	85	1457	135	819	185	485
36	2164	86	1441	136	810	186	481
37	2155	87	1425	137	800	187	476
38	2146	88	1409	138	792	188	472
39	2136	89	1393	139	783	189	467
40	2126	90	1378	140	774	190	463
41	2115	91	1362	141	765	191	458
42	2105	92	1347	142	757	192	454
43	2094	93	1332	143	749	193	450
44	2082	94	1316	144	740	194	446
45	2071	95	1301	145	732	195	442
46	2058	96	1287	146	724	196	438
47	2046	97	1272	147	716	197	434
48	2034	98	1257	148	709	198	430
49	2021	99	1243	149	701	199	426
50	2007	100	1228	150	693	200	422

TABLA 2.4 Miembros en Compresión Axial, NTC del RDF,

Esfuerzo de Diseño R_c/A_t $F_R=0.9$, $n=1.4$, $F_y=3515 \text{ kg/cm}^2$

KL/R	R_c/A_t kg/cm ²						
1	3164	51	2585	101	1366	151	722
2	3164	52	2560	102	1348	152	713
3	3164	53	2534	103	1329	153	705
4	3164	54	2508	104	1311	154	697
5	3164	55	2482	105	1293	155	689
6	3164	56	2456	106	1276	156	681
7	3164	57	2429	107	1259	157	674
8	3164	58	2402	108	1242	158	666
9	3164	59	2376	109	1225	159	659
10	3164	60	2349	110	1209	160	652
11	3164	61	2322	111	1192	161	644
12	3162	62	2295	112	1177	162	637
13	3158	63	2268	113	1161	163	630
14	3155	64	2241	114	1146	164	623
15	3150	65	2214	115	1130	165	617
16	3146	66	2187	116	1115	166	610
17	3140	67	2160	117	1101	167	603
18	3134	68	2133	118	1086	168	597
19	3128	69	2106	119	1072	169	591
20	3121	70	2079	120	1058	170	584
21	3113	71	2053	121	1045	171	578
22	3105	72	2027	122	1031	172	572
23	3096	73	2000	123	1018	173	566
24	3086	74	1974	124	1005	174	560
25	3076	75	1949	125	992	175	554
26	3065	76	1923	126	979	176	548
27	3053	77	1898	127	967	177	543
28	3041	78	1872	128	954	178	537
29	3028	79	1847	129	942	179	532
30	3014	80	1823	130	931	180	526
31	3000	81	1798	131	919	181	521
32	2985	82	1774	132	907	182	516
33	2969	83	1750	133	896	183	511
34	2952	84	1726	134	885	184	505
35	2935	85	1703	135	874	185	500
36	2917	86	1680	136	863	186	495
37	2899	87	1657	137	853	187	491
38	2880	88	1634	138	842	188	486
39	2860	89	1612	139	832	189	481
40	2840	90	1590	140	822	190	476
41	2819	91	1568	141	812	191	472
42	2798	92	1546	142	803	192	467
43	2776	93	1525	143	793	193	463
44	2754	94	1504	144	784	194	458
45	2731	95	1484	145	774	195	454
46	2708	96	1463	146	765	196	449
47	2684	97	1443	147	756	197	445
48	2660	98	1424	148	747	198	441
49	2635	99	1404	149	739	199	437
50	2611	100	1385	150	730	200	433

TABLA 2.5 Miembros en Compresion Axial, NTC del RDF_c

Esfuerzo de Diseño R_c/A_t

$F_R=0.9$, $n=2.0$, $F_y=3515 \text{ kg/cm}^2$

KL/R	R_c/A_t kg/cm ²						
1	3164	51	2881	101	1548	151	770
2	3164	52	2861	102	1525	152	761
3	3164	53	2841	103	1502	153	752
4	3164	54	2819	104	1480	154	742
5	3164	55	2798	105	1458	155	733
6	3164	56	2775	106	1436	156	724
7	3164	57	2752	107	1415	157	716
8	3164	58	2728	108	1394	158	707
9	3164	59	2704	109	1373	159	699
10	3164	60	2679	110	1353	160	690
11	3164	61	2653	111	1333	161	682
12	3163	62	2627	112	1314	162	674
13	3163	63	2600	113	1294	163	666
14	3162	64	2573	114	1275	164	659
15	3162	65	2546	115	1257	165	651
16	3161	66	2518	116	1239	166	644
17	3160	67	2490	117	1221	167	636
18	3159	68	2461	118	1203	168	629
19	3158	69	2433	119	1186	169	622
20	3157	70	2404	120	1169	170	615
21	3155	71	2375	121	1152	171	608
22	3153	72	2345	122	1136	172	601
23	3151	73	2316	123	1120	173	594
24	3148	74	2286	124	1104	174	588
25	3146	75	2257	125	1088	175	581
26	3142	76	2227	126	1073	176	575
27	3139	77	2198	127	1058	177	569
28	3135	78	2168	128	1044	178	563
29	3131	79	2139	129	1029	179	556
30	3126	80	2109	130	1015	180	550
31	3121	81	2080	131	1001	181	545
32	3115	82	2051	132	988	182	539
33	3109	83	2022	133	974	183	533
34	3102	84	1993	134	961	184	527
35	3094	85	1965	135	948	185	522
36	3086	86	1937	136	935	186	516
37	3077	87	1909	137	923	187	511
38	3068	88	1881	138	911	188	506
39	3058	89	1853	139	899	189	501
40	3047	90	1826	140	887	190	496
41	3036	91	1799	141	875	191	490
42	3024	92	1773	142	864	192	485
43	3011	93	1746	143	853	193	481
44	2997	94	1720	144	842	194	476
45	2983	95	1695	145	831	195	471
46	2968	96	1669	146	821	196	466
47	2952	97	1645	147	810	197	462
48	2935	98	1620	148	800	198	457
49	2918	99	1596	149	790	199	453
50	2900	100	1572	150	780	200	448

TABLA 2.6 Miembros en Compresión Axial, LRFD-AISC93

Esfuerzo de Diseño R_c/A_t $F_R=0.85$, $F_y=2530 \text{ kg/cm}^2$

KL/R	R_c/A_t kg/cm ²						
1	2150	51	1875	101	1257	151	658
2	2150	52	1865	102	1244	152	649
3	2149	53	1855	103	1231	153	641
4	2149	54	1845	104	1217	154	633
5	2148	55	1834	105	1204	155	624
6	2146	56	1823	106	1191	156	616
7	2145	57	1813	107	1177	157	609
8	2143	58	1802	108	1164	158	601
9	2141	59	1791	109	1151	159	593
10	2139	60	1779	110	1138	160	586
11	2137	61	1768	111	1125	161	579
12	2134	62	1757	112	1111	162	572
13	2131	63	1745	113	1098	163	565
14	2128	64	1734	114	1085	164	558
15	2125	65	1722	115	1072	165	551
16	2122	66	1710	116	1059	166	544
17	2118	67	1698	117	1046	167	538
18	2114	68	1686	118	1034	168	532
19	2110	69	1674	119	1021	169	525
20	2106	70	1662	120	1008	170	519
21	2101	71	1649	121	995	171	513
22	2096	72	1637	122	983	172	507
23	2091	73	1625	123	970	173	501
24	2086	74	1612	124	958	174	495
25	2081	75	1600	125	945	175	490
26	2075	76	1587	126	933	176	484
27	2070	77	1574	127	920	177	479
28	2064	78	1561	128	908	178	473
29	2057	79	1549	129	896	179	468
30	2051	80	1536	130	884	180	463
31	2044	81	1523	131	872	181	458
32	2038	82	1510	132	860	182	453
33	2031	83	1497	133	848	183	448
34	2024	84	1484	134	835	184	443
35	2016	85	1470	135	823	185	438
36	2009	86	1457	136	811	186	434
37	2001	87	1444	137	799	187	429
38	1993	88	1431	138	788	188	424
39	1985	89	1418	139	776	189	420
40	1977	90	1404	140	765	190	416
41	1968	91	1391	141	755	191	411
42	1960	92	1378	142	744	192	407
43	1951	93	1364	143	734	193	403
44	1942	94	1351	144	723	194	399
45	1933	95	1338	145	714	195	395
46	1924	96	1324	146	704	196	391
47	1915	97	1311	147	694	197	387
48	1905	98	1297	148	685	198	383
49	1895	99	1284	149	676	199	379
50	1885	100	1271	150	667	200	375

TABLA 2.7 Miembros en Compresion Axial, LRFD-AISC93

Esfuerzo de Diseño R_c/A_t

$F_R=0.85$, $F_y=3515 \text{ kg/cm}^2$

KL/R	R_c/A_t kg/cm ²						
1	2988	51	2470	101	1417	151	658
2	2987	52	2452	102	1396	152	649
3	2986	53	2433	103	1376	153	641
4	2984	54	2414	104	1355	154	633
5	2982	55	2395	105	1334	155	624
6	2980	56	2376	106	1314	156	616
7	2977	57	2356	107	1294	157	609
8	2974	58	2336	108	1274	158	601
9	2970	59	2316	109	1254	159	593
10	2966	60	2296	110	1234	160	586
11	2961	61	2276	111	1214	161	579
12	2956	62	2256	112	1194	162	572
13	2951	63	2235	113	1175	163	565
14	2945	64	2215	114	1154	164	558
15	2939	65	2194	115	1134	165	551
16	2932	66	2173	116	1115	166	544
17	2925	67	2152	117	1096	167	538
18	2918	68	2131	118	1077	168	532
19	2910	69	2110	119	1059	169	525
20	2902	70	2088	120	1042	170	519
21	2893	71	2067	121	1025	171	513
22	2884	72	2045	122	1008	172	507
23	2874	73	2024	123	992	173	501
24	2865	74	2002	124	976	174	495
25	2854	75	1980	125	960	175	490
26	2844	76	1959	126	945	176	484
27	2833	77	1937	127	930	177	479
28	2821	78	1915	128	916	178	473
29	2810	79	1893	129	901	179	468
30	2797	80	1871	130	888	180	463
31	2785	81	1849	131	874	181	458
32	2772	82	1828	132	861	182	453
33	2759	83	1806	133	848	183	448
34	2746	84	1784	134	835	184	443
35	2732	85	1762	135	823	185	438
36	2718	86	1740	136	811	186	434
37	2703	87	1718	137	799	187	429
38	2688	88	1696	138	788	188	424
39	2673	89	1674	139	776	189	420
40	2658	90	1653	140	765	190	416
41	2642	91	1631	141	755	191	411
42	2626	92	1609	142	744	192	407
43	2610	93	1588	143	734	193	403
44	2593	94	1566	144	723	194	399
45	2577	95	1545	145	714	195	395
46	2560	96	1523	146	704	196	391
47	2542	97	1502	147	694	197	387
48	2525	98	1481	148	685	198	383
49	2507	99	1459	149	676	199	379
50	2489	100	1438	150	667	200	375

EJEMPLO 2.3² Una columna de 5 m de longitud, con extremos articulados ($K = 1.0$), debe resistir una compresión, producida por cargas muertas y vivas de trabajo, de 130 ton. La columna forma parte de una construcción del grupo B (ref. 2.37). Escoja una sección H formada por tres placas soldadas. El acero tiene un límite de fluencia $F_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$.

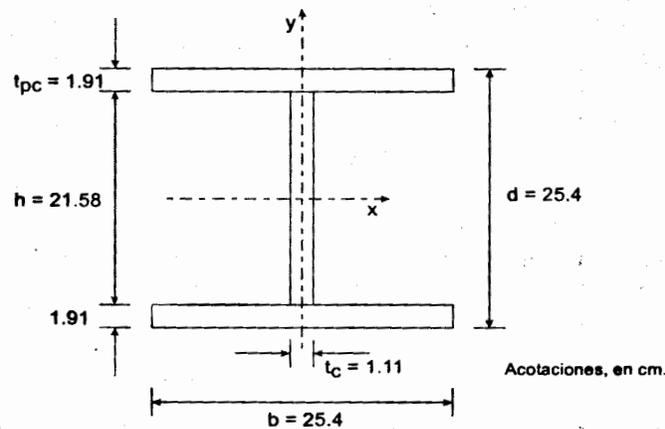


Fig. E2.3-1 Columna del ejemplo 2.3.

Se ensayará una sección H de 25.4 cm x 25.4 cm x 95 Kg/m, que tiene las dimensiones que se muestran en la fig. E.2.3-1, y las propiedades geométricas siguientes: $A_r = 120.77 \text{ cm}^2$, $r_{\min} = r_y = 6.57 \text{ cm}$.

Acción de diseño: $P_u = 130 \times 1.4 = 182.0 \text{ ton}$.

1.4 es el factor de carga que se especifica en la ref. 2.37 para construcciones del grupo B, bajo cargas muertas y vivas combinadas.

Normas técnicas complementarias del Reglamento de Construcciones para el D.F. (ref. 2.2).

Clasificación de la sección (tabla 2.3.1, ref. 2.2).

$$\text{Patines: } b/2t_{pc} = 25.4/(2 \times 1.91) = 6.65 < 830/\sqrt{2530} = 16.5$$

$$\text{Alma: } h/t_c = 21.58/1.11 = 19.44 < 2100/\sqrt{2530} = 41.8$$

La sección es tipo 1, 2 o 3. El pandeo local no es crítico.

² En este ejemplo, y en los que siguen, al estudiar columnas de paredes delgadas se hace referencia a tablas y ecuaciones de la ref. 2.2. Su origen se estudia en el capítulo 3.

Resistencia de diseño

El estado límite es de inestabilidad por flexión, y como la sección transversal de la columna es H, la resistencia de diseño se evalúa con la ec. 2.29:

$$\lambda = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{\pi^2 E}} = \frac{1.0 \times 500}{6.57} \sqrt{\frac{2530}{2039000\pi^2}} = 0.853$$

a) Las placas que componen la columna se obtienen cortándolas con oxígeno de placas más anchas: el coeficiente n de la ec. 2.29 vale 1.4.

$$R_c = \frac{F_y A_t F_R}{(1 + \lambda^{2n} - 0.15^{2n})^{1/n}} = \frac{2530 \times 120.77 \times 0.90 \times 10^{-3}}{(1 + 0.853^{2.8} - 0.15^{2.8})^{1.4}} = 193.5 \text{ ton}$$

$$F_y A_t F_R = 2530 \times 120.77 \times 0.9 \times 10^{-3} = 275.0 \text{ ton} > 193.5$$

Por consiguiente:

$$R_c = 193.5 \text{ ton} > P_u = 182.0 \text{ ton}$$

La resistencia de diseño, R_c , es 6.3 por ciento mayor que la acción de diseño P_u ; la sección ensayada es correcta ($R_c/P_u = 193.5/182.0 = 1.063$).

R_c puede obtenerse también con la tabla 2.3, que proporciona las resistencias de diseño por unidad de área, R_c/A_t , para relaciones de esbeltez comprendidas entre 1 y 200, con $F_R = 0.9$, para acero con $F_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$ y $n = 1.4$.

$$KL/r = 1.0 \times 500 / 6.57 = 76$$

$$\frac{R_c}{A_t} = 1.603 \text{ ton/cm}^2, \quad R_c = 1.603 \times 120.77 = 193.6 \text{ ton}$$

La pequeña diferencia en los dos valores de la resistencia de diseño se debe a que se entró en la tabla con $KL/r = 76$, y la esbeltez real es 76.1.

b) La columna está formada por tres placas laminadas: $n = 1.0$.

$$R_c = \frac{2530}{1 + 0.853 - 0.15} \times 120.77 \times 0.90 \times 10^{-3} = 161.5 \text{ ton}$$

(De la tabla 2.2, para $KL/r = 76$, $R_c/A_t = 1337 \text{ kg/cm}^2$, $R_c = 1337 \times 120.77 \times 10^{-3} = 161.5 \text{ ton}$).

En este caso, $R_c = 161.5 \text{ ton} < P_u = 182.0 \text{ ton}$.

La sección no es adecuada ($161.5/182.0 = 0.887$).

La resistencia de la columna hecha con placas laminadas es 16.5 por ciento menor que la de la compuesta por placas cortadas con soplete ($161.5/193.5 = 0.835$).

Normas AISC-LRFD 93 (ref. 2.24).

Clasificación de la sección.

Patines: $b/2t_{pc} = 6.65 < \lambda_r = 797/\sqrt{2530} = 15.8$

Alma: $h/t_c = 19.44 < \lambda_r = 2121/\sqrt{2530} = 42.2$

La sección es "no compacta"; no hay pandeo local prematuro.

Resistencia de diseño.

$$\lambda_c = 0.853 < 1.5 \quad \therefore R_c = \phi_c A_t (0.658^{\lambda_c^2}) F_y = 0.85 \times 120.77 \times 0.658^{0.853^2} \times 2.53 \\ = 191.5 \text{ ton} > P_u = 182.0 \text{ ton}$$

La sección ensayada es correcta.

$\phi_c = 0.85$ es el factor de resistencia.

La resistencia de diseño es casi igual a la que se obtiene con las normas de la ref. 2.2 en el caso a, que corresponde a placas cortadas con oxígeno. Esto es así porque la ecuación de la ref. 2.2 con $n = 1.4$ proviene de la curva 2 del SSRC, y las ecuaciones de la ref. 2.24 de la 2P, que es muy parecida.

El problema puede resolverse también utilizando la tabla 2.6.

En la ref. 2.24 se tratan igual las columnas hechas con placas cortadas con oxígeno que las formadas por placas laminadas.

Normas AISC-ASD 89 (ref. 2.3).

Con estas normas se obtiene la capacidad de carga de la columna en condiciones de trabajo, no su resistencia de diseño. También se tratan igual los dos tipos de columnas de este ejemplo.

$$(KL/r)_{\text{máx}} = 76 \text{ (se obtuvo arriba).}$$

Relación de esbeltez que separa el pandeo elástico del inelástico:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{2530}} = 126.1$$

Como $KL/r = 76 < 126.1$, el pandeo se inicia en el intervalo inelástico, y el esfuerzo permisible se determina con la ec. 2.37:

$$F_{cr} = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] F_y = \left[1 - \frac{76^2}{2 \times 126.1^2} \right] 2530 = 2070 \text{ kg/cm}^2$$

$$CS = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3} = \frac{5}{3} + \frac{3 \times 76}{8 \times 126.1} - \frac{76^3}{8 \times 126.1^3} = 1.87$$

$F_a = 2070/1.87 = 1107 \text{ kg/cm}^2$. Este valor puede obtenerse directamente de una tabla $F_a - L/r$ (ref. 2.3).

Resistencia de la columna, en condiciones de trabajo = $AF_a = 120.77 \times 1.11 = 134.1 \text{ ton}$.

Para comparar las normas AISC-ASD (ref. 2.3) con las dos que se emplearon antes, se determina la carga crítica, con el esfuerzo crítico calculado arriba (sin coeficiente de seguridad):

$$P_{cr} = AF_{cr} = 120.77 \times 2.07 = 250.0 \text{ ton}$$

Esta carga crítica es bastante mayor que las resistencias de diseño determinadas con los otros dos métodos, porque la curva correspondiente a la ec. 2.37, sin coeficiente de seguridad, se acerca a la curva 1 del SSRC.

Aplicando la ec. 2.29 (ref. 2.2) con $n = 2$, con lo que se obtiene la curva 1 del SSRC, se llega a $R_c = 222.4 \text{ ton}$, que se aproxima a las 250 ton determinadas arriba, pero sigue siendo menor ($222.4/250.0 = 0.890$).

Este es un ejemplo de cómo la curva única de las normas AISC para diseño por esfuerzos permisibles puede llevar a resultados que están claramente del lado de la inseguridad.

EJEMPLO 2.4 Determine la resistencia en compresión de las columnas de la Fig. E2.4-1, utilizando las especificaciones de las refs. 2.2 y 2.24. Todas las columnas tienen la misma sección transversal y carecen de soportes laterales intermedios. Considere dos aceros, A 36 ($F_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$) y grado 50 (F_y

= 3515 kg/cm²), y dos tipos de perfiles, laminados y soldados, hechos con placas laminadas. Suponga, sin demostrarlo, que el pandeo local no es crítico en ningún caso.

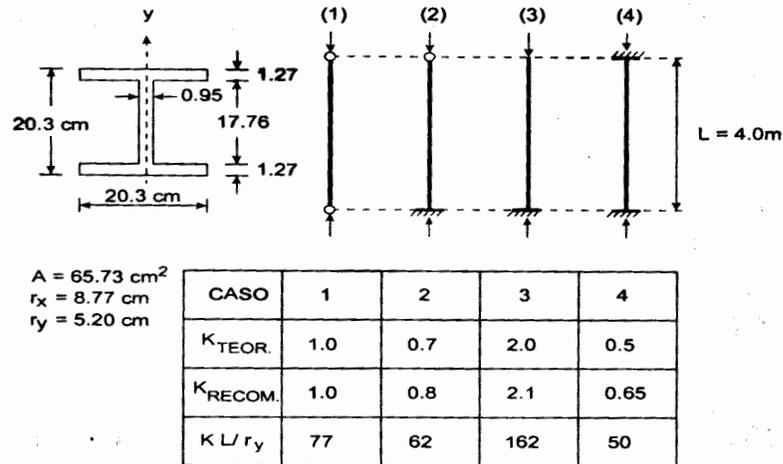


Fig. E2.4-1 Sección transversal y condiciones de apoyo de las columnas del ejemplo 2.4.

Como $r_y < r_x$ y la longitud libre es la misma en las dos direcciones, el pandeo se presenta, siempre, por flexión alrededor del eje y .

En la Fig. E2.4-1 se han anotado los coeficientes de longitud efectiva K teóricos y recomendados para diseño (Fig. 2.11), y las relaciones de esbeltez críticas, calculadas con los valores recomendados.

La tabla siguiente contiene las resistencias de diseño calculadas, en ton.

Caso	Ref. 2.2				Ref. 2.24	
	A36		Gr. 50		A36	Gr. 50
	Lam. ¹	Sold. ²	Lam. ¹	Sold. ²		
1	104.3	86.9	124.7	111.3	103.5	127.3
2	120.4	102.5	150.9	124.6	115.5	148.3
3	40.2	35.0	41.9	69.5	37.6	37.6
4	132.0	115.9	171.6	137.6	124.0	163.6

Notas:

- 1 Perfil laminado.
- 2 Perfil hecho con tres placas soldadas.

En las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento del D. F. (ref. 2.2) se proporcionan ecuaciones diferentes para los dos tipos de columnas; en la ref. 2.24 se emplea una sola fórmula para todas las columnas, cualquiera que

sea la forma de sus secciones transversales y el método que se haya seguido para fabricarlas.

Las dos referencias arrojan resultados muy parecidos cuando se aplican a perfiles laminados, para los dos aceros; esto es natural porque las ecuaciones de ambas provienen de la curva 2 del SSRC. En cambio, la ref. 2.32 sobrestima de manera importante la resistencia de las columnas hechas con placas soldadas.

EJEMPLO 2.5 Determinar la resistencia de diseño en compresión axial de una columna de 6.00 m de longitud, cuya sección transversal se muestra en la fig. E2.5-1. Los extremos de la columna pueden considerarse articulados para flexión alrededor del eje "y" y empotrados respecto al eje "x". El esfuerzo de fluencia del acero es $F_y = 3500 \text{ kg/cm}^2$.

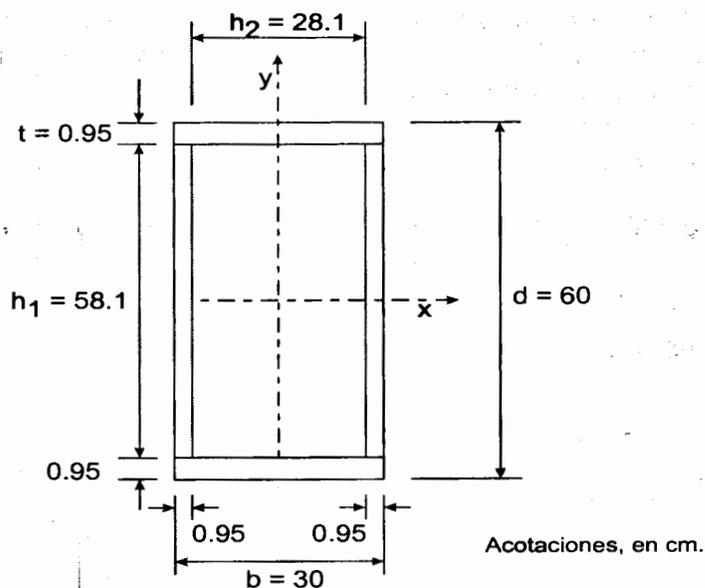


Fig. E2.5-1 Sección transversal de la columna del ejemplo 2.5.

a) **Diseño con las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento del D.F. (ref. 2.2)**

Clasificación de la sección (Tabla 2.3.1, ref. 2.2)

Placas horizontales: $h_2/t = 28.1/0.95 = 29.6 < 2100/\sqrt{F_y} = 35.5$

Placas verticales: $h_1/t = 58.1/0.95 = 61.2 > 35.5$

Como no se sabe cómo es la soldadura utilizada para formar la sección, los anchos de las placas se han tomado, de manera conservadora, iguales a las dimensiones libres teóricas.

Puesto que las relaciones ancho/grueso de las placas verticales exceden el límite correspondiente a las secciones tipo 3, la columna es tipo 4. Como todos los elementos planos están apoyados en sus dos bordes (son atiesados) el diseño debe hacerse teniendo en cuenta las recomendaciones del art. 2.3.6.2 de la ref. 2.2.

Las características geométricas de la sección transversal total son:

$$A_t = 167.39 \text{ cm}^2, \quad I_x = 80,745 \text{ cm}^4, \quad I_y = 27,573 \text{ cm}^4, \quad r_x = 22.0 \text{ cm}, \quad r_y = 12.8 \text{ cm}$$

Modo de pandeo. El pandeo es por flexión o torsión puras; no hay interacción (art. 2.5.3).

Como la sección transversal de la columna es en cajón, de paredes no muy delgadas, es casi seguro que su forma crítica de pandeo es por flexión, alrededor del eje centroidal y principal al que corresponde la mayor relación de esbeltez; sin embargo, con fines ilustrativos se estudia la posibilidad de que el pandeo sea por torsión (este caso no está incluido en la ref. 2.2).

$$J = \frac{4A_i^2 t}{S} = \frac{4(29.05 \times 59.05)^2 (0.95)}{2(29.05 + 59.05)} = 63,460 \text{ cm}^4$$

La contribución de la resistencia al alabeo es despreciable en secciones en cajón.

$$\text{Ec. 2.5:} \quad P_{crx} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)^2} = \frac{80745 \pi^2 E}{(0.5 \times 600)^2} \times 10^{-3} = 18,055 \text{ ton}$$

$$\text{Ec. 2.6:} \quad P_{cry} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)^2} = \frac{27573 \pi^2 E}{(1 \times 600)^2} \times 10^{-3} = 1541 \text{ ton} > \frac{P_y}{2} = \frac{167.39 \times 3500}{2}$$

$$\times 10^{-3} = 292.9 \text{ ton}$$

$$\text{Ec. 2.7:} \quad P_{crz} = \left[\frac{\pi^2 EC_a}{(K_t L_t)^2} + GJ \right] \frac{1}{r_a^2} \approx \frac{GJ}{(I_x + I_y)/A} = \frac{63460 \times G \times 167.39 \times 10^{-3}}{80745 + 27573}$$

$$= 76908 \text{ ton}$$

Es crítico el pandeo por flexión alrededor del eje y. Como se esperaba, P_{crz} es mucho mayor que P_{crx} y P_{cry} .

Las cargas críticas calculadas son de pandeo elástico.

Relación de esbeltez crítica

$K_x=0.5$ (extremos empotrados), $K_y=1.0$ (extremos articulados). Se han tomado los valores teóricos de los factores de longitud efectiva.

$$(KL/r)_x = 0.5 \times 600 / 22.0 = 14$$

$$(KL/r)_y = 1.0 \times 600 / 12.8 = 47$$

Es crítica la esbeltez alrededor del eje y . Esto se sabía desde que se determinó que la columna se pandea por flexión alrededor de ese eje.

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DE DISEÑO

La sección transversal de la columna es tipo 4; en la determinación de su resistencia deben tenerse en cuenta los estados límite de inestabilidad por flexión y por flexión y pandeo local.

Obtención del factor de pandeo local Q . La sección está compuesta exclusivamente por elementos planos atiesados; por consiguiente, $Q_s=1.0$ y $Q=Q_a$, que se calcula de acuerdo con el art. 2.8.1.1.

Anchos efectivos

Placas horizontales. Su relación ancho/grueso no excede de la correspondiente a las secciones tipo 3, de manera que $b_e = b = 28.1 \text{ cm}$.

Placas verticales.
$$b_e = \frac{2734t}{\sqrt{f}} \left(1 - \frac{544}{(b/t)\sqrt{f}} \right) \leq b$$

En la ref. 2.2 aparece esta misma ecuación, con los coeficientes ligeramente redondeados; en ella se indica que es aplicable a patines de secciones cuadradas o rectangulares huecas, pero, en realidad, lo es a cualquier placa atiesada uniformemente comprimida.

Al calcular el ancho efectivo de placas que forman parte de columnas en compresión axial, para revisar el estado límite de pandeo local y pandeo por flexión combinados, el esfuerzo f de la ecuación anterior se sustituye por el esfuerzo de fluencia F_y del material.

$$b_e = \frac{2734 \times 0.95}{\sqrt{3500}} \left(1 - \frac{544}{61.2 \sqrt{3500}} \right) = 37.3 \text{ cm} < 58.1$$

$$A_{ef} = A_t - \sum (b - b_e)t = 167.3 - 2(58.1 - 37.3) \times 0.95 = 127.87 \text{ cm}^2$$

$$Q_a = A_{ef}/A_t = 127.87/167.39 = 0.764, \quad Q = Q_a = 0.764$$

$$(KL/r)_c^* = 6340/\sqrt{QF_y} = 6340/\sqrt{0.764 \times 3500} = 122.6$$

$(KL/r)_{\text{máx}} = 47 < (KL/r)_c^* = 122.6 \quad \therefore$ La resistencia de diseño se determina con la ec. 2.47, art. 2.8.1:

$$\begin{aligned} R_c &= Q A_t F_y \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^{*2}} \right] F_R \\ &= 0.764 \times 167.39 \times 3500 \left[1 - \frac{47^2}{2 \times 122.6^2} \right] \times 0.75 \times 10^{-3} \\ &= 311.0 \text{ ton} \end{aligned}$$

La resistencia de diseño en compresión axial de la columna es $R_c = 311.0 \text{ ton}$.

b) Diseño con las especificaciones AISI 91 (ref. 2.31 y art. 2.8.3).

La sección no está sujeta a pandeo por torsión o flexotorsión:

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)_y^2} = \frac{\pi^2 E}{47^2} = 9110 \text{ Kg/cm}^2 > \frac{F_y}{2}$$

Este valor es igual al que se obtiene dividiendo P_{cry} , calculada arriba, entre el área de la sección transversal de la columna.

$$F_{ey} = \frac{P_{cry}}{A} = \frac{1541 \times 10^3}{167.39} = 9206 \text{ kg/cm}^2$$

La diferencia proviene del redondeo de los resultados³.

$$F_n = F_y \left(1 - F_y/4F_e \right) = 3500 \left(1 - 3500/4 \times 9110 \right) = 3164 \text{ Kg/cm}^2$$

El área efectiva es la correspondiente a una compresión $f = 3164 \text{ kg/cm}^2$.

³ En las normas AISI de 1996 (ref. 2.39) la ecuación siguiente ha sido sustituida por la ec. 2.33, art. 2.6.7.2.

$$\text{Placas horizontales: } \lambda = \frac{1.052}{\sqrt{k}} \left(\frac{b}{t} \right) \sqrt{\frac{f}{E}} = \frac{1.052}{\sqrt{4.0}} \times 29.6 \sqrt{\frac{3164}{E}} = 0.613 < 0.673.$$

Las placas horizontales son completamente efectivas.

$$\text{Placas verticales: } \lambda = \frac{1.052}{\sqrt{4.0}} \times 61.2 \sqrt{\frac{3164}{E}} = 1.268 > 0.673.$$

$$\rho = \frac{1 - 0.22/\lambda}{\lambda} = \frac{1 - 0.22/1.268}{1.268} = 0.652$$

$$b_e = \rho b = 0.652 \times 58.1 = 37.87 \text{ cm}$$

$$A_e = 167.39 - 2(58.1 - 37.87)0.95 = 128.95 \text{ cm}^2$$

Este valor es muy parecido al que se obtuvo arriba.

Las expresiones para calcular el ancho efectivo b_e se estudian en el Capítulo 3.

$$P_n = A_e F_n = 128.95 \times 3164 \times 10^{-3} = 408.0 \text{ Ton}$$

$$R_c = F_r P_n = 0.75 \times 408.0 = 306.0 \text{ ton}$$

Se ha tomado $F_r = 0.75$ para comparar los resultados con el obtenido con la ref. 2.2 (en la ref. 2.27 se especifica un factor de resistencia $\phi = 0.85$).

Los dos procedimientos llevan a valores de la resistencia de diseño muy parecidos ($306/311 = 0.984$).

2.7 PANDEO POR FLEXOTORSIÓN

2.7.1 Resistencia de Diseño

Las columnas de sección transversal asimétrica o con un eje de simetría, como los ángulos y las secciones T, y las columnas con dos ejes de simetría, pero baja resistencia a torsión, como las secciones en cruz, pueden fallar por pandeo por torsión o flexotorsión (art. 2.5).

Estos estados límite no se tratan en la ref. 2.2; en las refs. 2.23 y 2.24 se cubren en sendos apéndices.

2.7.1.1 Especificaciones AISC para diseño por factores de carga y resistencia (ref. 2.24)

La resistencia de miembros comprimidos determinada por los estados límite de pandeo por torsión o flexotorsión es $\phi_c P_n$, donde:

ϕ_c = factor de reducción de la resistencia = 0.85.

P_n = resistencia nominal en compresión = $A_t F_{cr}$ (2.40)

A_t = área total de la sección transversal.

El esfuerzo crítico nominal F_{cr} se determina como sigue:

a) Para $\lambda_e \sqrt{Q} \leq 1.5$, $F_{cr} = Q(0.658^{Q\lambda_e^2}) F_y$ (2.41)

b) Para $\lambda_e \sqrt{Q} > 1.5$, $F_{cr} = \left(\frac{0.877}{\lambda_e^2} \right) F_y$ (2.42)

En las expresiones anteriores,

$$\lambda_e = \sqrt{F_y / F_e} \quad (2.43)$$

Q es igual a 1.0 en secciones cuyos elementos planos son tipo 1 a 3 (ref. 2.24), y se calcula como se indica en el inciso 2.8.1.1 cuando alguno, o algunos, de ellos, son tipo 4.

El esfuerzo crítico de pandeo elástico por torsión o flexotorsión, F_e , se determina con las ecuaciones:

- Secciones con dos ejes de simetría: Ec. 2.63.
- Secciones con un eje de simetría (se ha supuesto que es el x): Ec. 2.60.
- Secciones asimétricas: el esfuerzo crítico de pandeo elástico por flexotorsión, F_e , es igual a la menor de las raíces de la ecuación cúbica:

$$(F_e - F_{ex})(F_e - F_{ey})(F_e - F_{ez}) - F_e^2(F_e - F_{ey})\left(\frac{x_0}{r_0}\right)^2 - F_e^2(F_e - F_{ex})\left(\frac{y_0}{r_0}\right)^2 = 0 \quad (2.44)$$

Esta es la ec. 2.4 escrita en términos de esfuerzos.

En el art. 2.8.3.1 se dan los significados de todas las literales que aparecen en estas ecuaciones. F y σ se han utilizado indistintamente para representar los esfuerzos.



FACULTAD DE INGENIERIA

G- 612312

2.8 DISEÑO DE COLUMNAS DE PAREDES DELGADAS⁴

Cuando uno o varios de los elementos planos que forman una columna tienen una relación ancho/grueso elevada (es del tipo 4, Cap. 3), no es razonable basar el diseño en la iniciación del pandeo local que se presenta, en general, bajo cargas menores que la crítica de la columna y la de colapso de las placas, por lo que para obtener diseños económicos ha de tenerse en cuenta la resistencia posterior al pandeo de los elementos planos esbeltos. La interacción del pandeo local de las placas y el de conjunto de la columna ocasiona una reducción de la resistencia de la barra comprimida.

Uno de los procedimientos para resolver el problema se basa en las ecs. 2.12 y 2.27, para pandeo elástico e inelástico, respectivamente.

De acuerdo con la ec. 2.27, el esfuerzo crítico de conjunto tiende hacia σ_y cuando disminuye la relación de esbeltez, y para $L/r = 0$, σ_{cr} es igual a σ_y . Sin embargo, el pandeo local hace que las columnas muy cortas, compuestas por placas delgadas, fallen bajo esfuerzos medios menores que σ_y ; su esfuerzo medio crítico, para una relación de esbeltez muy pequeña, puede expresarse como $Q\sigma_y$, donde Q es un coeficiente menor que 1.0, que representa la influencia desfavorable del pandeo local; depende del esfuerzo de fluencia del material, de las relaciones b/t de las placas que componen el perfil, y de sus condiciones de apoyo.

Siguiendo el mismo camino que con los perfiles laminados, el pandeo inelástico se representa con una curva de transición parabólica que se inicia en $\sigma_{cr} = Q\sigma_y$, para $L/r = 0$, y es tangente a la hipérbola de Euler en el punto cuya ordenada es la mitad de ese esfuerzo; la ec. 2.27 se transforma en:

$$\sigma_{cr} = Q\sigma_y - \frac{(Q\sigma_y)^2}{4\pi^2 E} \left(\frac{L}{r}\right)^2 \quad (2.45)$$

El esfuerzo de fluencia σ_y se ha sustituido por $Q\sigma_y$.

Haciendo σ_{cr} igual a $Q\sigma_y/2$ y despejando la relación de esbeltez, se obtiene la abscisa del punto de tangencia con la curva de pandeo elástico:

$$\frac{L}{r} = \left(\frac{L}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{Q\sigma_y}} \approx \frac{6340}{\sqrt{Q\sigma_y}} \quad (2.46)$$

⁴ Algunos aspectos de este artículo requieren información contenida en el Capítulo 3, en el que se trata el diseño de placas esbeltas comprimidas basado en la resistencia posterior a la iniciación del pandeo.

La ec. 2.12 no se modifica, pues es aplicable a columnas de esbeltez elevada, que se pandean en el intervalo elástico bajo esfuerzos suficientemente pequeños para que no haya inestabilidad local prematura, aunque estén hechas con lámina delgada.

2.8.1 Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas (ref. 2.2)

Cuando el pandeo de conjunto se inicia en el intervalo elástico, el esfuerzo crítico se calcula con la ec. 2.30; en el intervalo inelástico, la ec. 2.47 sustituye a la 2.31. Por consiguiente, la resistencia de diseño que corresponde al estado límite de flexión y pandeo local combinados (ref. 2.2) se determina con las ecuaciones:

$$\text{Si } KL/r \geq (KL/r)_c^*, \quad R_c = \frac{20,120,000}{(KL/r)^2} A_t F_R \quad (2.30)$$

$$\text{Si } KL/r < (KL/r)_c^*, \quad R_c = Q A_t F_y \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^{*2}} \right] F_R \quad (2.47)$$

$$(KL/r)_c^* = 6340 / \sqrt{Q F_y}; \quad F_R = 0.75.$$

El área A_t , y el radio de giro, r , de las ecuaciones anteriores, son los de la sección transversal completa de la columna; $(KL/r)_c^*$ es la relación de esbeltez que separa el pandeo elástico del inelástico (ec. 2.46).

2.8.1.1 Cálculo del coeficiente Q

La determinación de Q depende de la manera en que las placas que constituyen la columna estén apoyadas en sus bordes longitudinales; se utilizan tres procedimientos diferentes, según que todas estén atiesadas, es decir, soportadas en los dos bordes, que no lo esté ninguna, o que la sección esté formada por placas de los dos tipos, unas atiesadas y otras no.

(a) Todas las placas son atiesadas

En la Fig. 2.31a se muestra la sección transversal de una columna en cajón, formada exclusivamente por elementos planos apoyados en los dos bordes.

Una pieza muy corta formada por placas compactas, comprimida axialmente, falla cuando el esfuerzo uniforme en sus secciones transversales llega al punto de fluencia, σ_y ; su capacidad máxima de carga es:

$$P_{m\acute{a}x} = A \sigma_y$$

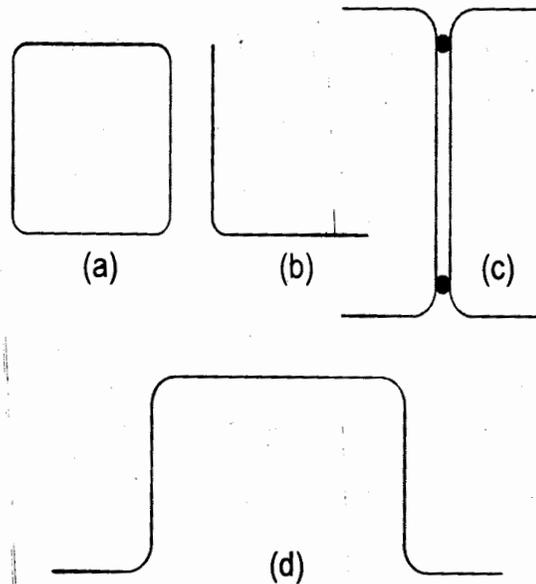


Fig. 2.31 Ejemplos de secciones transversales de paredes delgadas

En cambio, una columna corta de paredes delgadas puede fallar por pandeo local bajo esfuerzos menores que el de fluencia; introduciendo el factor Q , su resistencia máxima se expresa como⁵:

$$P_{m\acute{a}x} = QA\sigma_y \quad (2.48)$$

Por otro lado, la carga de colapso de una placa atiesada corta es igual al producto del esfuerzo de fluencia por el área efectiva correspondiente a ese esfuerzo, de manera que la carga total que puede soportar una columna corta formada exclusivamente por elementos planos atiesados es:

$$P_{m\acute{a}x} = A_{ef}\sigma_y \quad (2.49)$$

donde A_{ef} es la suma de las áreas efectivas de todas las placas que componen la sección.

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones 2.48 y 2.49 se obtiene:

$$QA\sigma_y = A_{ef}\sigma_y \quad \therefore Q = Q_a = \frac{A_{ef}}{A} \quad (2.50)$$

Q_a depende de las características geométricas de la sección de paredes delgadas, por lo que recibe el nombre de *factor de forma*.

⁵ La ecuación 2.48 es válida para cualquier columna corta de paredes delgadas, independientemente de que los elementos planos que la forman estén atiesados o no; lo que varía de un caso a otro es la manera como se calcula el factor Q .

(b) Ninguna placa es atiesada

La falla por pandeo local de columnas cortas formadas únicamente por elementos planos no atiesados (secciones transversales en ángulo o en T, Fig. 2.31b) se presenta bajo una carga axial de intensidad:

$$P_{m\acute{a}x} = \sigma_{cr} A$$

donde σ_{cr} es el esfuerzo de pandeo del elemento de relación ancho/groeso más elevada.

Igualando el segundo miembro de la ecuación anterior con el de la 2.48 se llega a:

$$A\sigma_{cr} = Q A \sigma_y \quad \therefore Q = Q_s = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \quad (2.51)$$

σ_{cr} se calcula con las ecuaciones correspondientes del Capítulo 3.

(c) Unas placas están atiesadas y otras no

La capacidad máxima de carga de un miembro de este tipo, comprimido axialmente (ver ejemplos en la Fig. 2.31c y d) se alcanza cuando se pandea la placa no atiesada más débil, bajo un esfuerzo σ_{cr} . En ese instante, el área efectiva A_{ef} es la suma de las áreas totales de todos los elementos no atiesados, más las áreas efectivas (reducidas) de los atiesados, calculadas con el esfuerzo de pandeo de la placa no atiesada más débil, es decir, con σ_{cr} .

La carga máxima que pueden soportar las columnas de este tipo es:

$$P_{m\acute{a}x} = \sigma_{cr} A_{ef}$$

Dividiendo sus dos miembros entre el área total A , y multiplicando y dividiendo el segundo por σ_y , la ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{P_{m\acute{a}x}}{A} = \frac{A_{ef}}{A} \sigma_{cr} \frac{\sigma_y}{\sigma_y} = \frac{A_{ef}}{A} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \sigma_y$$

Introduciendo Q_a y Q_s (ecs. 2.50 y 2.51) se obtiene, finalmente,

$$P_{m\acute{a}x} = Q_a Q_s A \sigma_y = Q A \sigma_y$$

donde

$$Q = Q_a Q_s \quad (2.52)$$

En resumen, el coeficiente Q se determina de alguna de las maneras siguientes:

1. En miembros compuestos exclusivamente por elementos planos atiesados, Q se obtiene dividiendo el área efectiva de diseño, determinada con los anchos

efectivos de diseño de esos elementos, entre el área de la sección transversal. El área efectiva es la que corresponde al esfuerzo de fluencia σ_y . Los anchos efectivos se calculan como se indica en el Capítulo 3. Q se designa, en este caso, Q_a .

2. En miembros compuestos exclusivamente por elementos planos no atiesados, Q se calcula dividiendo el esfuerzo crítico en compresión, σ_{cr} , del elemento más débil de la sección transversal (el que tiene la relación ancho/grueso mayor), entre el esfuerzo de fluencia σ_y . Los cálculos se hacen de acuerdo con el Capítulo 3. Al coeficiente Q se le llama Q_s . (En el art. 2.9 se presentan expresiones de Q_s para el diseño de ángulos aislados comprimidos).
3. En miembros que contienen algunos elementos planos atiesados y otros no atiesados, el coeficiente Q es el producto de un factor de esfuerzo, Q_s , calculado como se indica en 2, multiplicado por un factor de área, Q_a , obtenido como en 1, pero utilizando, en lugar de σ_y , el esfuerzo con el que se determinó Q_s e incluyendo en el área efectiva el área total de todos los elementos no atiesados.

2.8.2 Especificaciones AISC (refs. 2.3 y 2.24)

Tanto si se emplean esfuerzos permisibles (ref. 2.3) como factores de carga y resistencia (ref. 2.24), las columnas de paredes delgadas se dimensionan con los criterios del artículo anterior. En la ref. 2.24 cambian las expresiones para pandeo de las columnas.

Las ecuaciones que se recomiendan en la ref. 2.24 para calcular los esfuerzos críticos son:

$$(a) \text{ Para } \lambda_c \sqrt{Q} \leq 1.5: F_{cr} = Q(0.658^{Q\lambda_c^2}) F_y \quad (2.53)$$

$$(b) \text{ Para } \lambda_c \sqrt{Q} > 1.5: F_{cr} = \left(\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) F_y \quad (2.54)$$

La ec. 2.53, para pandeo inelástico, proviene de la ec. 2.33, en la que se ha introducido el factor Q ; la segunda, que proporciona el esfuerzo crítico de pandeo elástico, es la ec. 2.34 sin cambio. Se modifica, también, el valor del parámetro λ , que separa las dos formas de pandeo.

Para determinar la resistencia de diseño se utilizan el área total de la sección transversal de la columna y las propiedades geométricas correspondientes a ella.

Las recomendaciones de las refs. 2.2, 2.3 y 2.24 son adecuadas para diseñar columnas de paredes delgadas que fallan por pandeo por flexión; sin embargo, cuando el estado límite es el de pandeo por torsión o por flexotorsión (columnas con dos ejes de simetría de paredes muy delgadas, o columnas con un solo o ningún eje de simetría) es preferible emplear las especificaciones del AISI que se reproducen, en sus aspectos principales, en el artículo siguiente. También es aplicable el método del art. 2.7.

2.8.3 Especificaciones AISI (ref. 2.39)

Aunque el método basado en el factor Q se ha utilizado con éxito para diseñar miembros comprimidos de paredes delgadas, investigaciones recientes han mostrado que puede sustituirse por un procedimiento más preciso (ref. 2.34). Partiendo de resultados analíticos y experimentales, se ha demostrado que el empleo de Q puede proporcionar resultados inseguros para miembros formados por elementos planos atiesados, sobre todo cuando la relación de esbeltez de la columna está cerca de 100, mientras que es muy conservador para secciones I con patines no atiesados, en columnas de relación de esbeltez pequeña. Esto ha hecho que, a partir de 1986, el método haya desaparecido de las normas del AISI.

Para tener en cuenta la interacción pandeo de conjunto-pandeo local en el diseño de miembros en compresión axial, en la ref. 2.39 se procede como sigue:

1. Se determina el esfuerzo crítico de conjunto de la columna, con las dimensiones de su sección transversal completa.
2. Se calcula el área neta efectiva de la sección, utilizando el esfuerzo obtenido en 1.
3. Se determina la resistencia de diseño multiplicando el esfuerzo del paso 1 por el área neta calculada en 2.

Cuando el diseño se hace por esfuerzos permisibles se sigue un camino análogo.

2.8.3.1 Diseño por factores de carga y resistencia (ref. 2.39)

A continuación se reproducen, con algunos comentarios, los aspectos principales del diseño de columnas de lámina delgada comprimidas axialmente, hecho de acuerdo con la ref. 2.39; son aplicables a miembros en los que la resultante de todas las acciones es una fuerza de compresión axial que pasa por el centroide de la sección efectiva, determinada con el esfuerzo F_n que se define más adelante.

La resistencia de diseño en compresión axial, $\phi_c P_n$, se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\phi_c &= 0.85 \\ P_n &= A_e F_n\end{aligned}\tag{2.55}$$

donde:

ϕ_c = factor de disminución de la resistencia.

A_e = área efectiva correspondiente al esfuerzo F_n .

F_n es igual a⁶:

$$\text{Si } \lambda_c \leq 1.5, \quad F_n = (0.658^{\lambda_c^2}) F_y \quad (2.56)$$

$$\text{Si } \lambda_c > 1.5, \quad F_n = \left[\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right] F_y \quad (2.57)$$

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} \quad (2.58)$$

F_e es el menor de los esfuerzos críticos de pandeo elástico por flexión, torsión o flexotorsión, determinados como se indica más adelante.

Columnas que no pueden fallar por pandeo por torsión o flexotorsión

En columnas de sección transversal cerrada, o con dos ejes de simetría, o con otra forma cualquiera para la que pueda demostrarse que no están sujetas a pandeo por torsión o flexotorsión, el esfuerzo crítico de pandeo elástico, F_e , se calcula con la expresión:

$$F_e = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad (2.59)$$

Esta es la fórmula de Euler escrita en términos de esfuerzos (ec. 2.12).

Columnas de sección transversal con dos o un eje de simetría, sujetas a pandeo por torsión o flexotorsión

En este caso, F_e es igual al menor de los valores dados por las ecs. 2.59 y 2.60.

$$F_e = \frac{1}{2H} \left[(\sigma_{ex} + \sigma_t) - \sqrt{(\sigma_{ex} + \sigma_t)^2 - 4H\sigma_{ex}\sigma_t} \right] \quad (2.60)$$

Alternativamente, puede obtenerse una estimación conservadora de F_e con la ecuación:

$$F_e = \frac{\sigma_{ex}\sigma_t}{\sigma_{ex} + \sigma_t} \quad (2.61)$$

⁶ En sus especificaciones de 1996 (ref. 2.39) el AISI adoptó las fórmulas del AISC (ref. 2.24) para calcular los esfuerzos críticos de pandeo de columnas.

En las ecuaciones anteriores:

r_0^2 = radio polar de giro de la sección transversal alrededor del centro de

torsión, elevado al cuadrado = $r_x^2 + r_y^2 + x_0^2 = \frac{I_x + I_y}{A} + x_0^2$

x_0 = distancia entre los centros de gravedad y de torsión, medida a lo largo del eje principal x.

$$H = 1 - (x_0/r_0)^2$$

$$\sigma_{ex} = \frac{\pi^2 E}{(K_x L_x / r_x)^2} \quad (2.62)$$

$$\sigma_t = \frac{1}{Ar_0^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EC_a}{(K_t L_t)^2} \right) \quad (2.63)$$

En secciones con un solo eje de simetría, en las ecuaciones anteriores se ha supuesto que es el x.

Todas las propiedades anteriores corresponden a la sección transversal completa de la columna.

Si la sección tiene dos ejes de simetría el pandeo es por flexión alrededor de alguno de los ejes centroidales y principales, o por torsión. En ese caso, $x_0=0$, $H=1$, y la ec. 2.60 se reduce a la 2.63, que proporciona el esfuerzo crítico de pandeo por torsión.

Las ecuaciones anteriores (excepto la 2.61) son las del artículo 2.5, escritas en términos de esfuerzos críticos, en lugar de cargas críticas.

En el inciso 3.10.1.2.3 del Capítulo 3, se indica cómo calcular las áreas netas efectivas.

2.9 ÁNGULOS AISLADOS COMPRIMIDOS

En las refs. 2.35 y 2.36⁷ se dan recomendaciones para el diseño de ángulos aislados en compresión. Aquí se reproducen las de la segunda referencia.

La resistencia de diseño es $\phi_c P_n$, donde:

$$\phi_c = 0.90$$

$$P_n = A_t F_{cr}$$

a) Para $\lambda_c \sqrt{Q} \leq 1.5$:

$$F_{cr} = Q(0.658^{2\lambda_c^2}) F_y \quad (2.64)$$

b) Para $\lambda_c \sqrt{Q} > 1.5$:

$$F_{cr} = \left[\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right] F_y \quad (2.65)$$

$$\lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}}$$

F_y es el esfuerzo de fluencia mínimo especificado del acero, y Q el factor de reducción por pandeo local, que tiene alguno de los valores siguientes:

$$\text{Si } \frac{b}{t} \leq 0.446 \sqrt{\frac{E}{F_y}} : \quad Q = 1.0 \quad (2.66)$$

$$\text{Si } 0.446 \sqrt{\frac{E}{F_y}} < \frac{b}{t} \leq 0.910 \sqrt{\frac{E}{F_y}} : \quad Q = 1.340 - 0.761 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{F_y}{E}} \quad (2.67)$$

$$\text{Si } \frac{b}{t} > 0.910 \sqrt{\frac{E}{F_y}} : \quad Q = \frac{0.534E}{F_y (b/t)^2} \quad (2.68)$$

b es el ancho total del ala más grande del ángulo y t su grueso.

Con las expresiones anteriores para el cálculo del esfuerzo crítico de compresión se revisan los tres estados límite que pueden regir el diseño de ángulos comprimidos: pandeo por flexión general de la columna, pandeo local de alas delgadas o pandeo general por flexotorsión.

El factor Q tiene en cuenta el posible pandeo local; el origen de las expresiones para calcularlo (ecs. 2.66 a 2.68) se explica en el Capítulo 3. Aquí se han escrito en forma adimensional.

⁷ En el art. 1.12, Capítulo 1, se hace referencia a las normas para diseño de ángulos aislados.

$$a) \quad L_x = L_y = L_z = 4.00 \text{ m}$$

Como la sección tiene un solo eje de simetría (el x), el esfuerzo crítico de pandeo elástico, F_e , es el menor de los esfuerzos críticos de pandeo por flexión alrededor del eje y, y de pandeo por flexotorsión.

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{3.42^2 + 3.95^2 + 2.01^2} = 5.60 \text{ cm}$$

$$H = 1 - \left(\frac{x_0}{r_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{3.42}{5.60}\right)^2 = 0.627$$

$$KL/r_x = 400/3.95 = 101; \quad KL/r_y = 400/2.01 = 199$$

$$\text{Ec. 2.62:} \quad \sigma_{ex} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r_x)^2} = \frac{\pi^2 E}{101^2} = 1973 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{ey} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r_y)^2} = 508 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Ec. 2.63:} \quad \sigma_t = \frac{1}{Ar_0^2} \left[GJ + \frac{\pi^2 EC_a}{(K_t L_t)^2} \right] = \frac{1}{18.45 \times 5.60^2} \left[784200 \times 5.87 + \frac{43.5 \pi^2 E}{(1 \times 400)^2} \right]$$

$$= 7965 \text{ kg/cm}^2$$

La contribución de la resistencia a la torsión por alabeo es muy pequeña; si no se tuviese en cuenta, se obtendría $\sigma_t = 7956 \text{ kg/cm}^2$.

Ec. 2.60:

$$\sigma_e = \frac{1}{2H} \left[(\sigma_{ex} + \sigma_t) - \sqrt{(\sigma_{ex} + \sigma_t)^2 - 4H\sigma_{ex}\sigma_t} \right]$$

$$= \frac{1}{2 \times 0.627} \left[(1973 + 7965) - \sqrt{(1973 + 7965)^2 - 4 \times 0.627 \times 1973 \times 7965} \right]$$

$$= 1782 \text{ kg/cm}^2$$

Es crítico el pandeo por flexión alrededor del eje y.

Ref. 2.24:

$$\lambda_c = \frac{KL}{\pi r_y} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{1.0 \times 400}{2.01\pi} \sqrt{\frac{2530}{E}} = 2.231 > 1.5$$

$$F_{cr} = \left(\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) F_y = \left(\frac{0.877}{2.231^2} \right) 2530 = 446 \text{ kg/cm}^2$$

Ec. 2.34

$$\text{Resistencia de diseño} = \phi_c A F_{cr} = 0.85 \times 18.45 \times 446 \times 10^{-3} = 6.99 \text{ ton}$$

Ref. 2.2:

$$(KL/r)_c = 6340/\sqrt{F_y} = 126 < KL/r_y = 199$$

Resistencia de diseño (ec. 2.30):

$$R_c = \frac{20,120,000}{(KL/r_y)^2} AF_R = \frac{20,120,000}{199^2} \times 18.45 \times 0.85 \times 10^{-3} = 7.97 \text{ Ton}$$

b) $L_x = L_y = L_z = 2.00 \text{ m}$

$$KL/r_x = 200/3.95 = 51; \quad KL/r_y = 200/2.01 = 100$$

$$\sigma_{ex} = \frac{\pi^2 E}{51^2} = 7737 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{ey} = \frac{\pi^2 E}{100^2} = 2012 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_t = \frac{1}{18.45 \times 5.60^2} \left(784200 \times 5.87 + \frac{\pi^2 E \times 43.5}{200^2} \right) = 7994 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_e = \frac{1}{2 \times 0.627} \left[(7737 + 7994) - \sqrt{(7737 + 7994)^2 - 4 \times 0.627 \times 7737 \times 7994} \right]$$

$$= 4881 \text{ kg/cm}^2$$

Sigue siendo crítico el pandeo por flexión alrededor de y.

Al disminuir la longitud de la columna de 4 m a 2 m, el esfuerzo σ_{ey} se multiplica por cuatro, y σ_e por 2.7; el incremento en resistencia al pandeo por flexotorsión es menor que al pandeo por flexión.

Ref. 2.24:

$$\lambda_c = \frac{100}{\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = 1.121 < 1.5$$

$$F_{cr} = (0.658^{\lambda_c^2}) F_y = (0.658^{1.121^2}) 2530 = 1495 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Ec. 2.33}$$

$$\phi_c AF_{cr} = 0.85 \times 18.45 \times 1495 \times 10^{-3} = 23.45 \text{ ton}$$

Ref. 2.2:

$$KL/r_y = 100 < (KL/r)_c = 126$$

$$\therefore R_c = AF_y \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2} \right] F_R$$

$$= 18.45 \times 2530 \left[1 - \frac{100^2}{2 \times 126^2} \right] 0.85 \times 10^{-3} = 27.18 \text{ ton} \quad \text{Ec. 2.31}$$

El pandeo por flexotorsión puede ser crítico en columnas de ángulo muy cortas, pero aún en esos casos no es significativo el error que se comete al ignorarlo. Por esta razón, en las especificaciones de diseño de ángulos en compresión, que no sean de paredes delgadas, no se considera explícitamente ese efecto (ref. 2.36).

EJEMPLO 2.7 Calcule la resistencia de diseño de una columna biarticulada ($K_x = K_y = 1.0$) de 2 m de longitud, cuya sección transversal se muestra en la Fig. E2.7.1. El límite de fluencia del acero es de 3515 kg/cm^2 . Utilice las especificaciones AISI para diseño por factores de carga y resistencia (ref. 2.39) y las del AISC para diseño de ángulos aislados (ref 2.36).

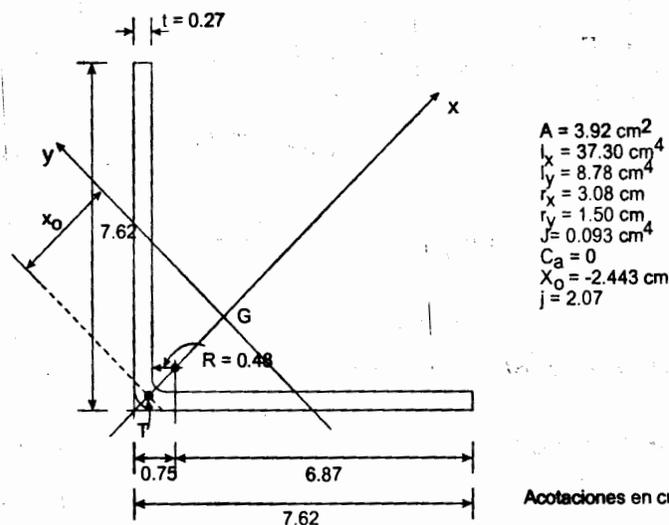


Fig. E2.7-1 Sección transversal y propiedades geométricas de la columna del ejemplo 2.7.

Ref. 2.39:

Determinación de F_e

Como la sección tiene un solo eje de simetría (el x), F_e es el menor de los esfuerzos críticos de pandeo por flexión alrededor de y o de pandeo por flexotorsión, que se calculan, respectivamente, con la fórmula de Euler y con la ec. 2.60.

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{2.443^2 + 3.08^2 + 1.50^2} = 4.21 \text{ cm}$$

$$H = 1 - (x_0/r_0)^2 = 1 - (2.443/4.21)^2 = 0.663$$

$$KL/r_x = 200/3.08 = 65; \quad KL/r_y = 100/1.5 = 133$$

$$\sigma_{ex} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r_x)^2} = \frac{\pi^2 E}{65^2} = 4763 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Ec. 2.62}$$

$$\sigma_{ey} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r_y)^2} = \frac{\pi^2 E}{133^2} = 1138 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_t = \frac{GJ}{Ar_0^2} = \frac{0.093E}{2.6 \times 3.92 \times 4.21^2} = 1050 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{Ec. 2.63}$$

La ec. 2.63 se simplifica porque $C_a = 0$.

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{1}{2H} \left[(\sigma_{ex} + \sigma_t) - \sqrt{(\sigma_{ex} + \sigma_t)^2 - 4H\sigma_{ex}\sigma_t} \right] \\ &= \frac{1}{2 \times 0.663} \left[(4763 + 1050) - \sqrt{(4763 + 1050)^2 - 4 \times 0.663 \times 4763 \times 1050} \right] \\ &= 967 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Ec. 2.60} \end{aligned}$$

Puesto que σ_e (ec. 2.60) es menor que σ_{ey} , la forma crítica de pandeo es por flexotorsión, y $F_e = 967 \text{ kg/cm}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} = \sqrt{\frac{3515}{967}} = 1.907 > 1.5 \\ \therefore F_n &= \left(\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right) F_y = \left(\frac{0.877}{1.907^2} \right) 3515 = 848 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Ec. 2.57} \end{aligned}$$

Área efectiva. Es la que corresponde a $F_n = 848 \text{ kg/cm}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1.052}{\sqrt{k}} \left(\frac{b}{t} \right) \sqrt{\frac{f}{E}} = \frac{1.052}{\sqrt{0.43}} \left(\frac{6.87}{0.27} \right) \sqrt{\frac{848}{E}} = 0.832 > 0.673; \therefore b_e = \rho b \\ \rho &= (1 - 0.22/\lambda) / \lambda = (1 - 0.22/0.832) / 0.832 = 0.884 \end{aligned}$$

Ancho efectivo de cada ala: $b_e = 0.884 \times 6.87 = 6.07 \text{ cm}$.

Área efectiva:

$$A_e = A_t - \sum (b - b_e) t = 3.92 - 2(6.87 - 6.07)0.27 = 3.49 \text{ cm}^2$$

Resistencia nominal.

$$P_{n1} = A_e F_n = 3.49 \times 848 \times 10^{-3} = 2.96 \text{ ton} \quad \text{Ec. 2.56}$$

Resistencia de diseño: $\phi_c P_n = 0.85 \times 2.96 = 2.52 \text{ ton}$.

Ref. 2.36:

$$\frac{b}{t} = \frac{6.87}{0.27} = 25.4 > 0.910 \sqrt{\frac{E}{F_y}} = 21.9$$

Q se determina con la ec. 2.68:

$$Q = \frac{0.534E}{F_y (b/t)^2} = \frac{0.534E}{3515 \times 25.4^2} = 0.480$$

$$\lambda_c = \frac{KL}{r\pi} \sqrt{\frac{F_y}{E}} = \frac{200}{1.50\pi} \sqrt{\frac{3515}{E}} = 1.762$$

r es el radio de giro mínimo del ángulo (Fig. E2.6.1).

$$\lambda_c \sqrt{Q} = 1.221 < 1.5$$

$$\begin{aligned} \therefore F_{cr} &= Q(0.658^{2\lambda_c^2}) F_y = 0.480(0.658^{(0.480 \times 1.762^2)}) 3515 \\ &= 904 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

Ec. 2.64

Resistencia de diseño: $\phi_c A_t F_{cr} = 0.90 \times 3.92 \times 904 \times 10^{-3} = 3.19 \text{ ton.}$

La resistencia es 27% mayor que la obtenida con la ref. 2.39 ($3.19/2.52=1.27$).

EJEMPLO 2.8 Calcular la resistencia de diseño de la columna de la Fig. E2.8.1⁸. El acero tiene un límite de fluencia $F_y = 3515 \text{ kg/cm}^2$. La columna puede considerarse articulada en los dos extremos, para flexión alrededor de los ejes x , y , y para torsión.

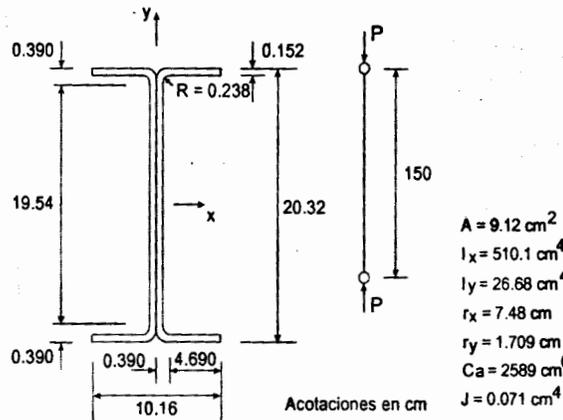


Fig. E2.8-1 Sección transversal y propiedades geométricas de la columna del ejemplo 2.8.

⁸ En estructuras reales no se utilizan secciones como la de la figura para trabajar en compresión; se emplea aquí para ilustrar algunos aspectos del diseño de columnas de paredes delgadas.

Clasificación de la sección (tabla 2.3.1, ref. 2.2)

$$\text{Patines: } b/t = 4.69/0.152 = 30.86 > 830/\sqrt{F_y} = 14.0$$

$$\text{Alma: } h_c/t = 19.54/0.152 = 128.55 > 2100/\sqrt{F_y} = 35.42$$

La sección es tipo 4; tanto en los patines como en el alma se excede la relación ancho/grueso correspondiente a las tipo 3.

a) Especificaciones AISI para diseño por factores de carga y resistencia (ref. 2.39)

Determinación de F_n . La relación de esbeltez crítica para pandeo por flexión es:

$$\frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{1 \times 150}{1.709} = 87.8$$

Como las secciones transversales de la columna tienen dos ejes de simetría, el esfuerzo crítico de pandeo elástico es el menor de los valores dados por las ecs. 2.59, con $KL/r = K_y L_y / r_y$, y 2.63.

Pandeo por flexión:

$$F_{ey} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r_y)^2} = \frac{\pi^2 E}{87.8^2} = 2611 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Ec. 2.59}$$

Pandeo por torsión:

$$\begin{aligned} F_{ez} &= \left[GJ + \frac{\pi^2 EC_a}{(K_z L_z)^2} \right] \frac{1}{I_x + I_y} \\ &= \left[748000 \times 0.071 + \frac{2589\pi^2 E}{(1 \times 150)^2} \right] \frac{1}{510.1 + 26.68} \\ &= 4418 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Ec. 2.63} \end{aligned}$$

El pandeo por torsión no es crítico.

$$F_e = F_{ey} = 2611 \text{ kg/cm}^2$$

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} = \sqrt{\frac{3515}{2611}} = 1.160 < 1.5$$

$$\therefore F_n = (0.658^{\lambda_c^2}) F_y = (0.658^{1.16^2}) 3515 = 2001 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{Ec. 2.56}$$

Anchos efectivos

Los anchos efectivos de almas y patines se determinan como se indica en el Capítulo 3.

Almas

Se tratan como dos placas independientes, pues sólo están unidas entre sí en los bordes superior e inferior.

$$\lambda = \frac{1.052}{\sqrt{k}} \left(\frac{b}{t} \right) \sqrt{\frac{f}{E}} = \frac{1.052}{\sqrt{4.0}} \left(\frac{19.54}{0.152} \right) \sqrt{\frac{2001}{E}} = 2.118$$

Se toma $k = 4.0$, para placas apoyadas en los dos bordes, y se sustituye f por $F_n = 2001 \text{ kg/cm}^2$.

Como $\lambda = 2.118 > 0.673$, $b_e = \rho b$.

$$\rho = (1 - 0.22/\lambda)/\lambda = (1 - 0.22/2.218)/2.218 = 0.423$$

$$b_e = 0.423 \times 19.54 = 8.27 \text{ cm}$$

Patines

$$\lambda = \frac{1.052}{\sqrt{0.43}} \left(\frac{4.69}{0.152} \right) \sqrt{\frac{2001}{E}} = 1.551 > 0.673$$

Ahora k es igual a 0.43, para placas apoyadas en un borde.

$$\rho = (1 - 0.22/1.551)/1.551 = 0.553$$

$$b_e = 0.553 \times 4.69 = 2.60 \text{ cm}$$

Área efectiva

$$\begin{aligned} A_e &= A_t - \sum (b - b_e) t \\ &= 9.12 - [2(19.54 - 8.27) + 4(4.69 - 2.60)] 0.152 \\ &= 9.12 - 4.42 = 4.70 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Resistencia nominal:

$$P_{n1} = A_e F_n = 4.70 \times 2001 \times 10^{-3} = 9.40 \text{ ton} \quad \text{Ec. 2.55}$$

Esta resistencia corresponde a pandeo por flexión de la columna.

Resistencia de diseño:

$$\phi_c P_n = 0.85 \times 9.40 = 7.99 \text{ ton}$$

b) Normas Técnicas Complementarias del Reglamento del D.F. (ref. 2.2)

Como la falla es por pandeo por flexión y pandeo local combinados (no hay pandeo por torsión) la resistencia de diseño puede determinarse también siguiendo las indicaciones de la ref. 2.2 (art. 2.8.1), como se hace a continuación.

Factor de pandeo local Q

Se utilizan las ecuaciones del art. 2.3.6 de la ref. 2.2.

Q_s . Se determina para los patines, que son elementos planos no atiesados.

$$b/t = 4.69/0.152 = 30.86 > 1470/\sqrt{F_y} = 24.79$$

$$\therefore Q_s = \frac{1,400,000}{F_y (b/t)^2} = \frac{1,400,000}{3515 \times 30.86^2} = 0.418$$

Q_a . El esfuerzo f que se utiliza para calcular el ancho efectivo del alma es el esfuerzo crítico de pandeo local de los patines, $F_{cr} = Q_s F_y = 0.418 \times 3515 = 1470 \text{ kg/cm}^2$.

$$b_e = \frac{2730 \times 0.152}{\sqrt{1470}} \left(1 - \frac{480}{128.55 \sqrt{1470}} \right) = 9.77 \text{ cm}$$

$$A_e = 9.12 - 2(19.54 - 9.77)0.152 = 6.15 \text{ cm}^2$$

$$Q_a = 6.15/9.12 = 0.674$$

$$Q = Q_s Q_a = 0.418 \times 0.674 = 0.282$$

$$(KL/r)_c^* = 6340/\sqrt{QF_y} = 6340/\sqrt{0.282 \times 3515} = 201.4$$

$$(KL/r)_y = 87.8 < 201.4$$

$$\begin{aligned} \therefore R_c &= Q A_e F_y \left(1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^{*2}} \right) F_R \\ &= 0.282 \times 9.12 \times 3515 \left(1 - \frac{87.8^2}{2 \times 201.4^2} \right) 0.75 \\ &= 6136 \text{ kg} \approx 6.14 \text{ ton} \end{aligned}$$

Ec. 2.47

Este resultado es menor que el obtenido con las especificaciones AISC (6.14/7.99=0.769); si se utilizase el mismo factor de resistencia, 0.85, el método de la ref. 2.2 arrojaría un valor sólo 13 por ciento menor que el de la ref. 2.39 (6.14x0.85/(0.75x7.99)=5.22/5.99=0.87).

2.10 REFERENCIAS

- 2.1 Galambos, T.V., "Structural Members and Frames", Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.
- 2.2 "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras Metálicas", Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Gaceta Oficial del Departamento del D.F., México D.F., diciembre de 1987.
- 2.3 "Specification for Structural Steel Buildings. Allowable Stress Design and Plastic Design" (incluye comentario), American Institute of Steel Construction, Chicago, Ill., junio de 1989.
- 2.4 Timoshenko, S.P., y J.M. Gere, "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1961.
- 2.5 Bleich, F., "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1952.
- 2.6 De Buen, O., "Estructuras de Acero, Comportamiento y Diseño", Limusa, México, D.F., enero de 1980.
- 2.7 "Specification for the Design of Light Gage Cold-Formed Structural Members", Light Gage Cold-Formed Steel Design Manual, American Iron and Steel Institute, Washington, D.C., 1968.
- 2.8 "Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings" (incluye comentario), American Institute of Steel Construction, Chicago, Ill., septiembre de 1986.
- 2.9 Chen, W.F., y E.M. Lui, "Structural Stability. Theory and Implementation", Elsevier Science Publishing Co., Inc., Nueva York, 1987.
- 2.10 Shanley, F.R., "Strength of Materials", McGraw-Hill Book Co. Inc., Nueva York, 1957.
- 2.11 Galambos, T.V., Editor, "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", 4a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1988.
- 2.12 Johnston, B.G., Editor, "Guide to Design Criteria for Metal Compression Members", 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1966.
- 2.13 Beedle, L.S., y L. Tall, "Basic Column Strength", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 86, ST7, julio de 1960.

- 2.14 "Guide to Design Criteria for Metal Compression Members", 1a. ed., Column Research Council, Engineering Foundation, 1960.
- 2.15 Johnston, B.G., Editor, "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", 3a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1976.
- 2.16 "European Recommendations for Steel Construction", European Convention for Constructional Steelwork (ECCS), 1978.
- 2.17 Beedle, L.S., Editor, "Stability of Metal Structures. A World View", 2a. Ed., Structural Stability Research Council, 1991.
- 2.18 "Recommandations pour l'étude et l'exécution des constructions métalliques", Convention Européenne de la Construction Métallique, enero de 1977.
- 2.19 Chen, W.F., y T. Atsuta, "Theory of Beam-Columns, Vol. 1: In-plane Behavior and Design", McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1976.
- 2.20 Bjorhovde, R., "Columns: From Theory to Practice", Engineering Journal, Vol. 25, No. 1, AISC, Chicago, Ill., 1988.
- 2.21 Rondal, J., y R. Maquoi, "Single Equation for SSRC Column-Strength Curves", J. Str. Div., ASCE, Vol. 105, No. ST1, enero de 1979.
- 2.22 Allen, D., "Merchant-Rankine Approach to Member Stability", J. Str. Div., ASCE, Vol. 104, No. ST12, diciembre de 1978 (ver también la discusión de este artículo por R. Maquoi y J. Rondal, J. Str. Div., ASCE, noviembre de 1979).
- 2.23 "Limit States Design of Steel Structures" (incluye comentario), Canadian Standards Association, CAN/CSA-S16.1-M94, Rexdale, Ontario, Canadá, diciembre de 1994.
- 2.24 "Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings" (incluye comentario), AISC, Chicago, Ill., diciembre de 1993.
- 2.25 Chen, W.F., "End Restraint and Column Stability", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 106, ST11, noviembre de 1980.
- 2.26 Thürlimann, B., "New Aspects Concerning Inelastic Instability of Steel Structures", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 86, ST1, enero de 1960.
- 2.27 Haaijer, G., "Plate Buckling in Strain-Hardening Range", Trans. ASCE, Vol. 124, 1959.
- 2.28 De Buen, O., "Pandeo de Placas Comprimidas", Ingeniería, Vol. XXXIV, No. 8, México D.F., 1964.

- 2.29 Lay, M.G., "Yielding of Uniformly Loaded Steel Members", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 91, ST6, diciembre de 1965.
- 2.30 Haaijer, G., y B. Thürlimann, "Inelastic Buckling in Steel", Trans. ASCE, Vol. 125, Parte I, 1960.
- 2.31 "Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members", Edición de agosto de 1986, con suplemento de diciembre de 1989, American Iron and Steel Institute, Washington, D.C., enero de 1991.
- 2.32 "Load and Resistance Factor Design Specification for Cold-Formed Steel Structural Members", American Iron and Steel Institute, Washington, D.C., marzo de 1991.
- 2.33 "ASD/LRFD Design Specification for Cold-Formed Steel Structural Members", versión preliminar, American Iron and Steel Institute, Washington, D.C., julio de 1995.
- 2.34 Yu, W.W., "Cold-Formed Steel Design", 2a. ed., John Wiley, Nueva York, 1991.
- 2.35 "Specification for Allowable Stress Design of Single-Angle Members" (incluye comentario), Manual of Steel Construction "Allowable Stress Design", 9a. ed., Chicago, Ill, 1989.
- 2.36 "Specification for Load and Resistance Factor Design of Single-Angle Members" (incluye comentario), AISC, Chicago, Ill., diciembre de 1993.
- 2.37 "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Gaceta Oficial del Distrito Federal, México, D.F., agosto de 1993.
- 2.38 "Manual para Constructores", Compañía Fundidora de Fierro y Acero de Monterrey, S.A., México, D.F., 1965.
- 2.39 "Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members", Edición de 1996, American Iron and Steel Institute, Washington, D.C., junio de 1997.

Fundación ICA es una Asociación Civil constituida conforme a las leyes mexicanas, el 26 de octubre de 1986, como se hace constar en la escritura pública número 21,127 pasada ante la fe del Lic. Eduardo Flores Castro Altamirano, Notario Público número 33 del Distrito Federal, inscrita en el Registro Público de la Propiedad en la sección de Personas Morales Civiles bajo folio 12,847. A fin de adecuar a las disposiciones legales vigentes los estatutos sociales, estos fueron modificados el 17 de octubre de 1994, como se hace constar en la escritura pública número 52,025 pasada ante la fe del Lic. Jorge A. Domínguez Martínez, Notario Público número 140 del Distrito Federal.

Fundación ICA es una institución científica y tecnológica inscrita en el Registro Nacional de Instituciones Científicas y Tecnológicas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, con el número 97/213 del 20 de junio de 1997.

Consejo Directivo de Fundación ICA

Presidente

Ing. Bernardo Quintana

Vicepresidentes

Dr. José Sarukhán Kérmez

Dr. Guillermo Soberón Acevedo

Ing. Guillermo Guerrero Villalobos

Ing. Raúl López Roldán

Director Ejecutivo

Ing. Fernando O. Luna Rojas

Cuerpos Colegiados de los Programas Operativos

Comité de Becas

Ing. Miguel Ángel Parra Mena

Dr. Juan Casillas García de León

Dr. Sergio Gallegos Cazarés

Comité de Premios

Dr. Luis Esteva Maraboto

M.I. Mario Ignacio Gómez Mejía

Ing. Gregorio Farias Longoria

Comité de Publicaciones

Dr. Oscar González Cuevas

Dr. Horacio Ramírez de Alba

M.I. Gabriel Moreno Pecero

Ing. Santiago Martínez Hernández

Ing. Gilberto García Santamaría González

Comité de Investigación

Dr. José Luis Fernández Zayas

Dr. Bonifacio Peña Pardo

Dr. Ramón Padilla Mora

Dr. Roberto Meli P.

Universidad Autónoma del Estado de México

Rector

M. en A. Uriel Galicia Hernández

Secretario Académico

M. en S. P. Ezequiel Jaimes Figueroa

Secretario Administrativo

M. en A. E. Pedro E. Lizola Margolis

Secretario de Rectoría

Ing. Roberto Mercado Dorantes

Contralora

C.P. Blanca M. Álamo Neidhart

Coordinador General de Investigación y Estudios Avanzados

Dr. en Q. Rafael López Castañares

Coordinador General de Difusión Cultural

M. en Pl. Gustavo A. Segura Lazcano

Director General de Extensión y Vinculación Universitaria

Ing. Jesús Hernández Ávila

Director General de Planeación y Desarrollo Institucional

M. en E. Gerardo del Rivero Maldonado

Abogado General

M. en D. Alfonso Chávez López