



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

APUNTES DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS.

ING. LUIS HERREJÓN DE LA TORRE.

APUNTES DE

**ESTRUCTURAS
ISOSTATICAS**

Luis Herrejón de la Torre



FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTE
80

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



611201

G.- 611201

611201

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

INDICE

TEMA PAGINA

1) EQUILIBRIO	F
2) MOMENTOS ESTATICOS Y CENTROIDES DE AREAS PLANAS	65
3) MOMENTOS DE INERCIA Y EJES PRINCIPALES DE AREAS PLANAS	85
4) ELEMENTOS MECANICOS EN LAS ESTRUCTURAS	111
5) ARMADURAS ISOSTATICAS	149
6) CABLES	169
<hr/>	
APENDICE I METODOS GRAFICOS Y NUMERICOS	185
APENDICE II FORMULARIO	192
BIBLIOGRAFIA	201

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



611201

APUNTE
80

G.- 611201

1) EQUILIBRIO.

G.- 611201

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

PUNTO MATERIAL O PARTICULA.-

Es un cuerpo cuyas dimensiones son tan pequeñas, que las fuerzas que sobre él actúan pueden considerarse concentradas (Fig. 1).

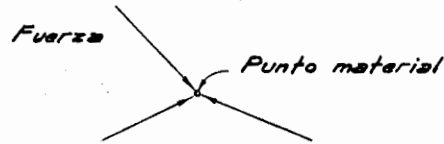
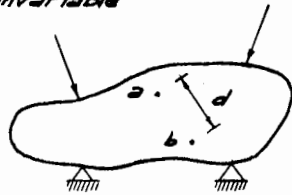


Fig. 1

CUERPO RIGIDO.-

Es aquel cuyas partículas no sufren desplazamientos relativos al actuar fuerzas sobre él. - (Fig. 2)

d = invariable



CUERPO RIGIDO

deformación

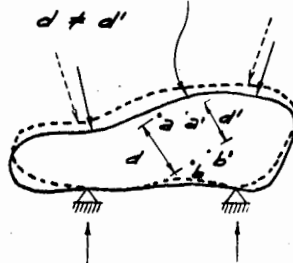


Fig. 2

CUERPO DEFORMABLE

Ambos conceptos son teóricos puesto que la realidad es diferente. No obstante, los errores que se inducen son tan pequeños que pueden despreciarse.

FUERZA.-

Acción de un cuerpo sobre otro que cambia o que tiende a cambiar su estado de reposo o movimiento. Las fuerzas son cantidades vectoriales, es decir, para definir las se requieren tres características o cantidades escalares que pueden ser sus coordenadas o proyecciones o bien, magnitud, dirección y sentido. En Matemáticas se define un vector como una terna ordenada de números reales (Fig. 3).

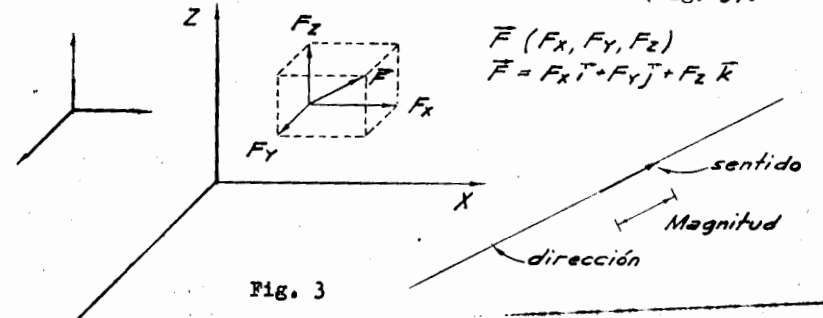


Fig. 3

Las fuerzas se pueden tratar como vectores libres deslizantes y fijos.

VECTOR LIBRE.-

Es aquel del que solo nos interesan sus tres características vectoriales, como sucede cuando se desea obtener una resultante solo en magnitud, dirección y sentido (Fig. 4)

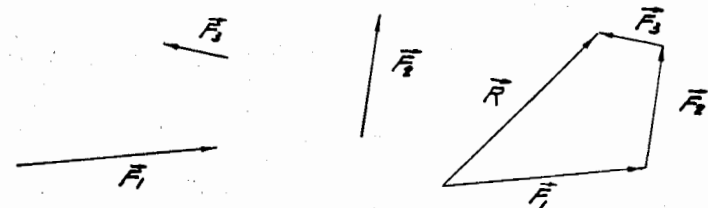


Fig. 4

VECTOR DESLIZANTE, LOCALIZADO O CURSOR.-

Es aquel que está restringido a moverse a lo largo de una línea de acción determinada (Fig. 5). Tal es el caso de las fuerzas que actúan sobre cuerpos considerados rígidos, en donde se puede expresar el principio de la transmisibilidad de la siguiente forma:

Los efectos externos de una fuerza son independientes del punto de aplicación a lo largo de su línea de acción.



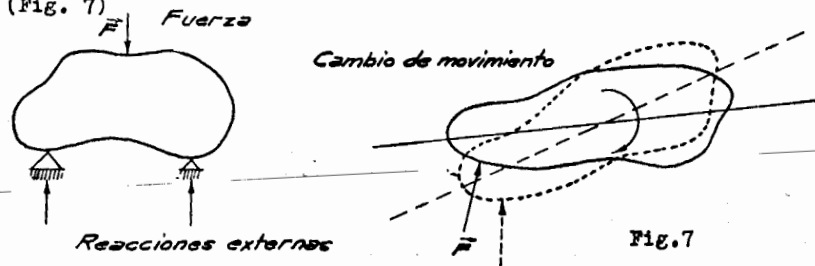
VECTOR FIJO.-

Es aquel que está restringido a ser aplicado en un punto determinado (Fig. 6). Tales son las fuerzas de un campo vectorial.



EFFECTOS EXTERNOS DE UNA FUERZA.-

Consisten en modificar el estado de movimiento del cuerpo sobre el cual actúa u originar reacciones externas sobre dicho cuerpo. (Fig. 7)

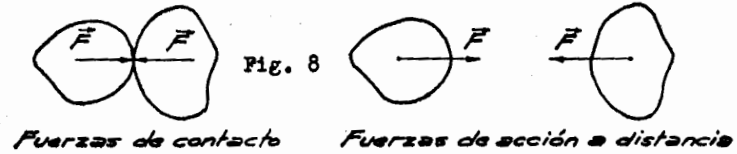


FUERZAS.-

De acuerdo con la segunda Ley de Newton para que las fuerzas se presenten deben existir cuerpos.

De acuerdo con la tercera Ley de Newton las fuerzas siempre se presentan por pares aunque por simplicidad en ocasiones se consideren aisladas.

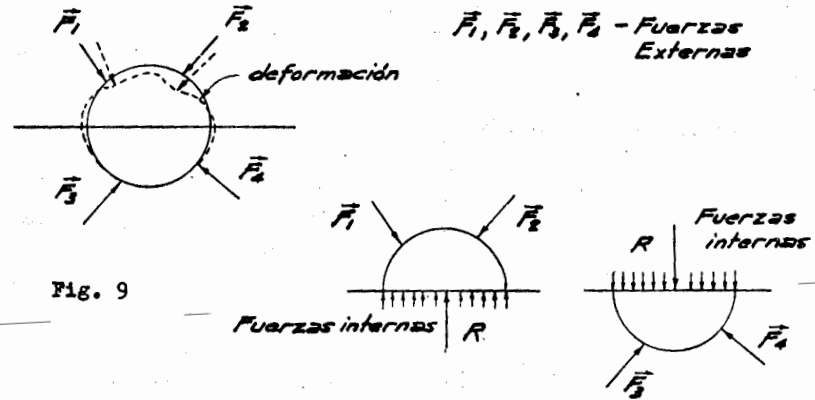
Las fuerzas pueden ser de contacto o de acción a distancia (Fig. 8).



Las de contacto son las que se presentan al actuar un cuerpo directamente sobre otro, entrando en contacto sus superficies externas.

Las fuerzas de acción a distancia son aquellas que se ejercen entre cuerpos alejados, tales como las fuerzas de origen gravitatorio o eléctrico.

Las fuerzas también pueden ser externas o internas (Fig. 9). Las externas son aquellas que se presentan exteriormente al cuerpo y las internas interiormente.



Las deformaciones son también efectos internos - de un cuerpo, aclarando que, estas y las fuerzas internas, - si dependen de la localización de las fuerzas externas a lo largo de su línea de acción.

Las fuerzas pueden también actuar distribuida o concentradamente (Fig. 10).

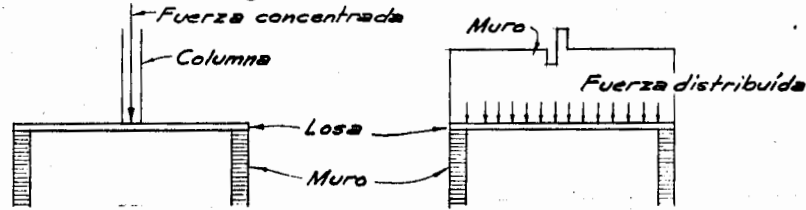


Fig. 10

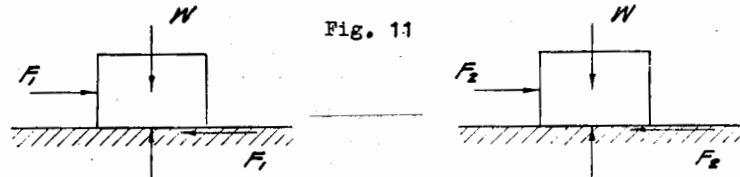
Las fuerzas en la realidad siempre actúan distribuidas en un área de acción determinada. Una fuerza concentrada es un concepto teórico en el cual se considera a la fuerza aplicada en un punto, ya que en realidad el área de aplicación es tan pequeña que los errores cometidos pueden despreciarse.

FUERZAS DE FRICCIÓN O ROZAMIENTO.-

Son aquellas que se oponen al deslizamiento relativo entre dos cuerpos. (Fig. 11).

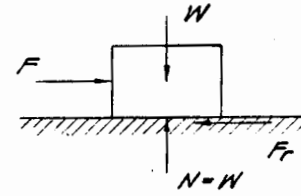
Las superficies son en la realidad más o menos rugosas, presentándose siempre fuerzas de fricción durante el contacto entre dos cuerpos. No obstante, en ocasiones - puede considerarse con error pequeño el concepto teórico - de superficies lisas entre las cuales no existen fricción. Las fuerzas de fricción o rozamiento se presentan en la siguiente forma:

Fig. 11

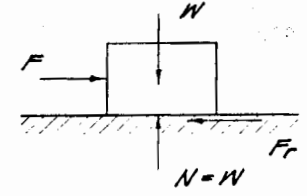


$F_1 < F_r$ En Reposo

$F_1 < F_2 < F_r$ En Reposo



$F = F_r$ Se inicia el deslizamiento



$F > F_r$ Hay movimiento

Para que exista movimiento: $F > F_r$



F_r - Fuerza de Fricción límite

Considerando:

- N - Presión normal
- F_r - Fuerza de fricción límite
- R - Reacción total
- ϕ - Angulo de fricción límite
- μ - Coeficiente de fricción estático

$$\tan \phi = \frac{F_r}{N}$$

$$F_r = \tan \phi N$$

y si: $\mu = \tan \phi$

(1)

$$F_r = \mu N \quad \text{Para superficies secas}$$

μ depende de las características de las superficies en contacto.

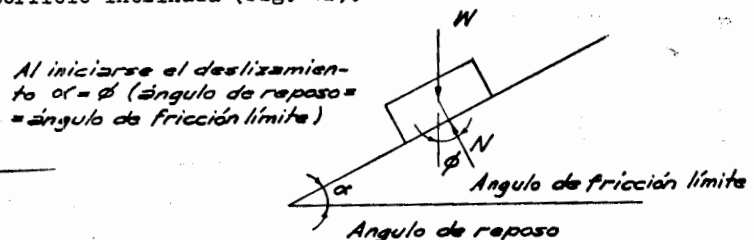
Observese que la fuerza de fricción depende solamente del coeficiente de fricción y de la presión normal, pero, es independiente del área de las superficies en contacto.

En realidad μ como se ha visto es el coeficiente de fricción estático, es decir, los cuerpos están en reposo. El coeficiente de fricción cinético, correspondiente a superficies con movimiento relativo, puede considerarse para el caso de superficies secas igual al estático.

Para el caso de superficies lubricadas los conceptos anteriores cambian.

ANGULO DE REPOSO.-

Es aquel valor máximo del ángulo para el cual un cuerpo permanece en reposo sobre una superficie inclinada (Fig. 12).



El talud que adopta un material corresponde a su ángulo de reposo. (material granular)

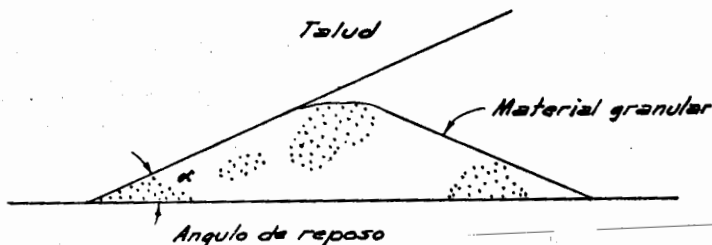


Fig. 12

CONO DE FRICCIÓN.-

Resumiendo, lo de la figura 11 quedará como se muestra en la figura 13

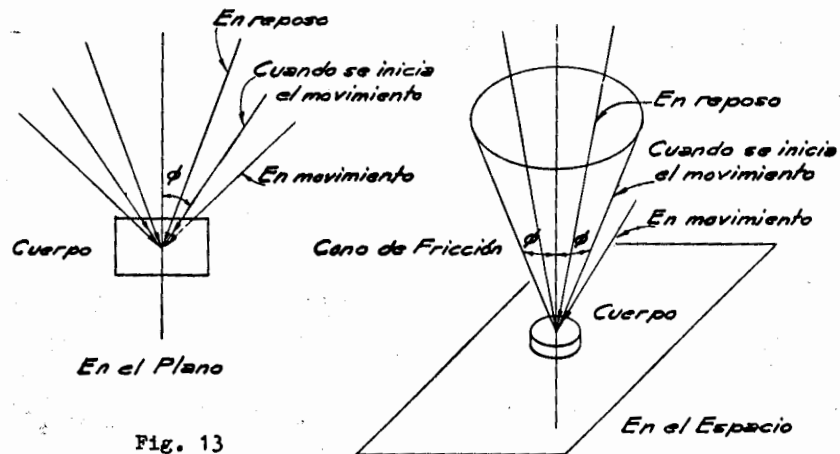


Fig. 13

Es decir, para dos superficies en contacto puede trazarse el cono de fricción, en tal forma que, una fuerza dentro de dicho cono produce reposo independientemente de su magnitud, actuando en una de las generatrices inicia el movimiento y fuera de dicho cono produce una aceleración.

TABLA 1

ALGUNOS COEFICIENTES DE ROZAMIENTO EN REPOSO.

Madera sobre madera.....	0.25 a 0.50
Metal sobre madera.....	0.20 a 0.60
Metal sobre metal.....	0.15 a 0.30
Metal sobre cuero.....	0.30 a 0.60
Madera sobre cuero.....	0.25 a 0.50
Piedra sobre piedra.....	0.40 a 0.65
Metal sobre piedra.....	0.30 a 0.70
Tierra sobre tierra.....	0.25 a 1.00

PROBLEMAS EN EL PLANO.-

Un problema se considera plano cuando existe simetría, tanto geométrica como en cuanto a cargas. En la Fig. 14 se muestran algunos ejemplos.

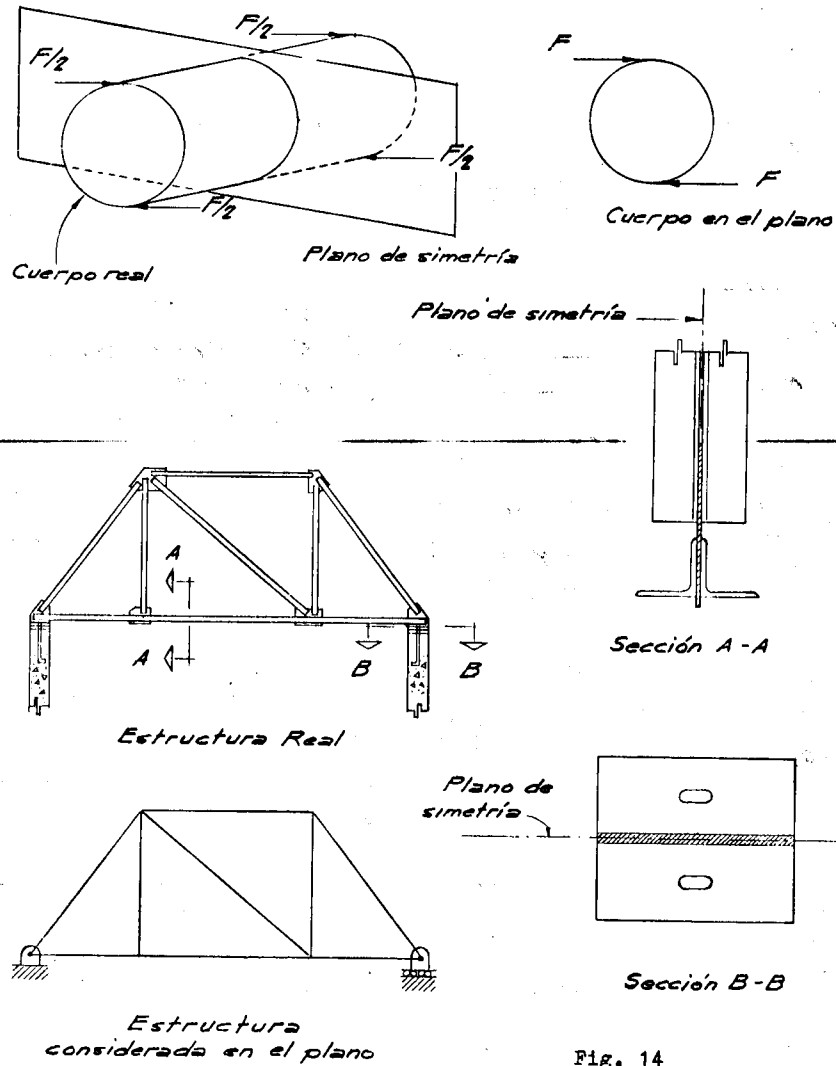


Fig. 14

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.-

Para simplificar el análisis del equilibrio de un cuerpo, normalmente se considera a éste aislado y las fuerzas que sobre él ejercen otros cuerpos, no las que éste ejerce sobre aquellos (Fig. 15).

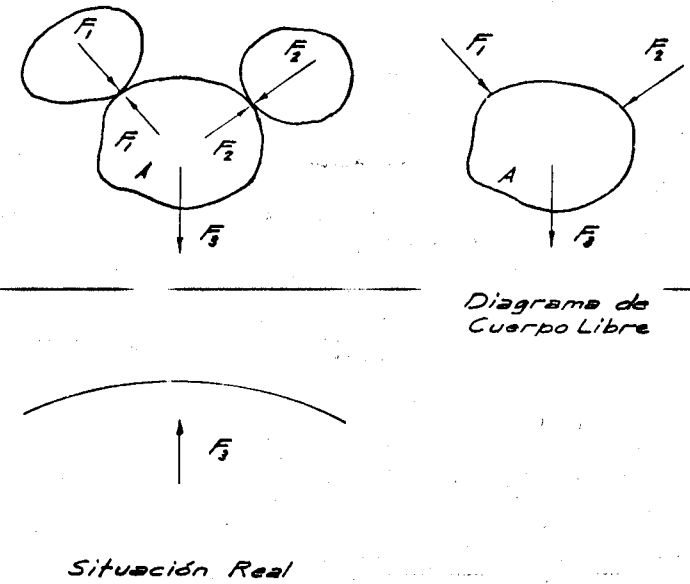


Fig. 15

APOYOS

I) En el plano

1.- Apoyo libre (Fig. 16)

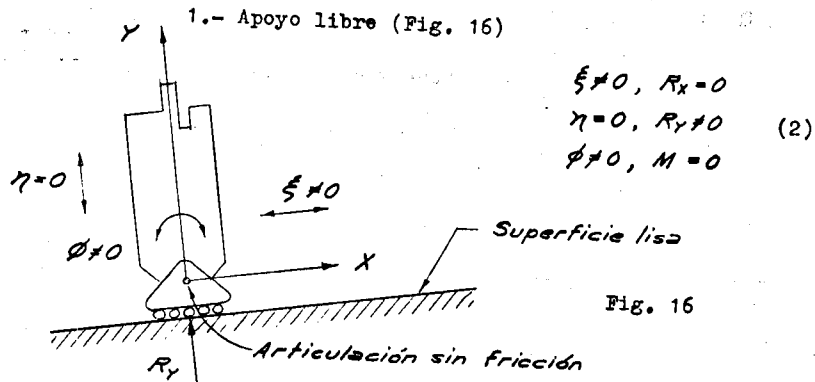


Fig. 16

A continuación se muestran algunas formas de -
 indicar un apoyo de éste tipo. (Fig. 17)

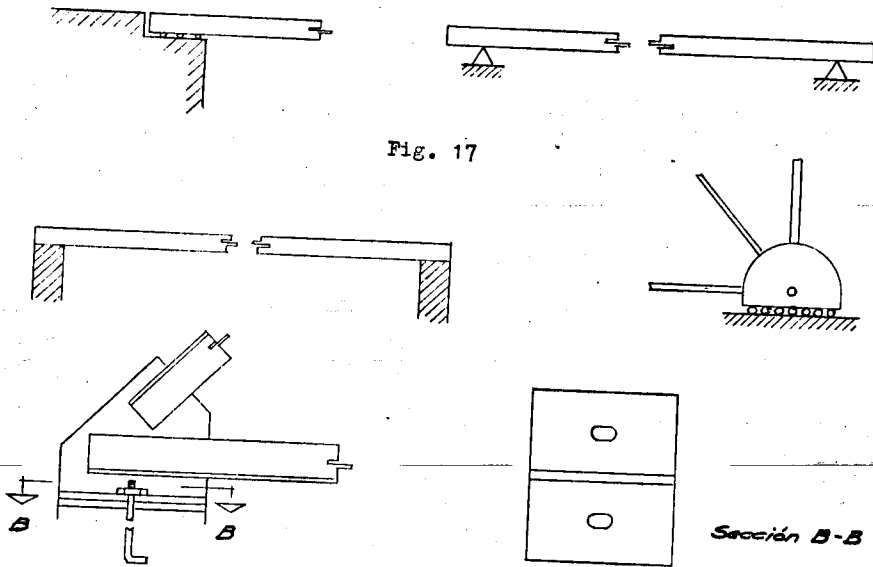


Fig. 17

2.- Apoyo fijo del tipo de articulación o rótula. (fig. 18)

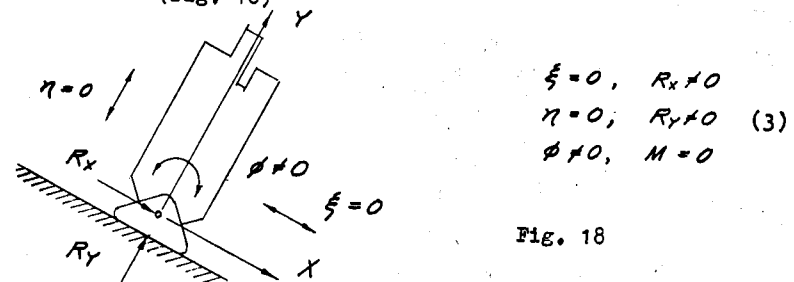


Fig. 18

3.- Empotramiento (Fig. 19)

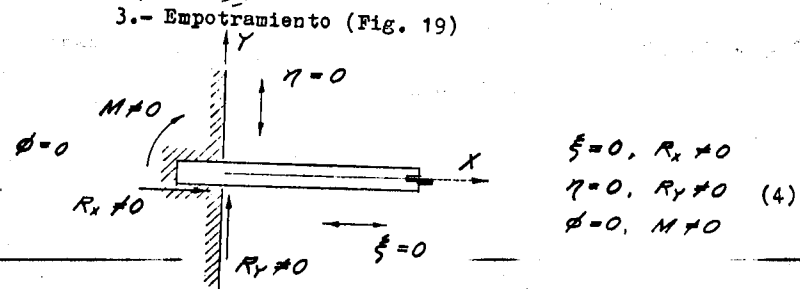


Fig. 19

4.- Apoyo guiado (Fig. 20)

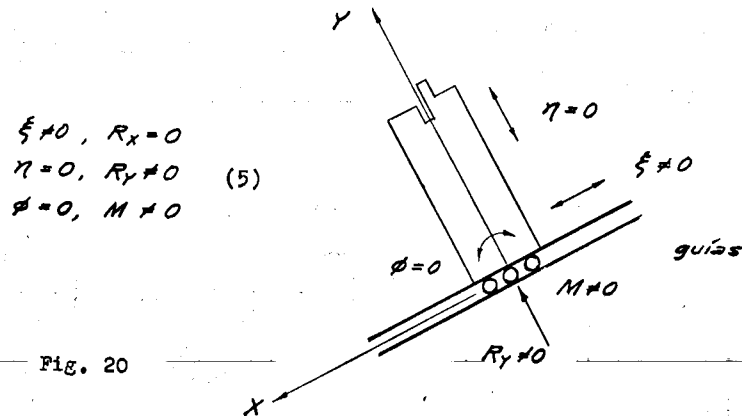
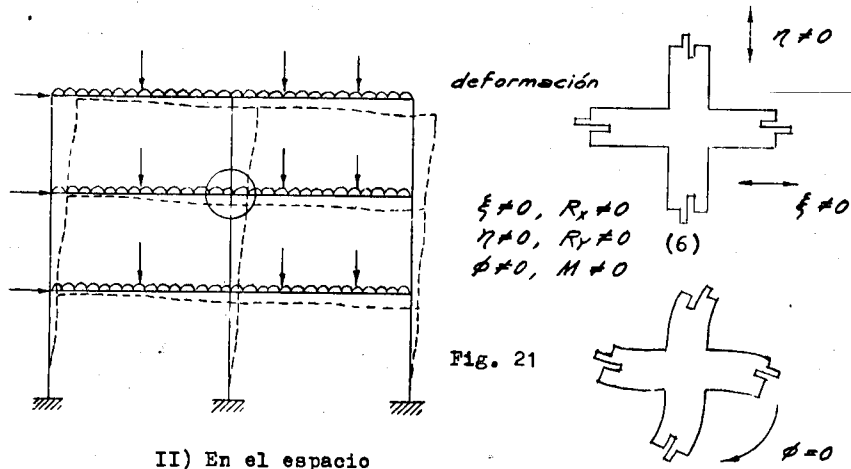


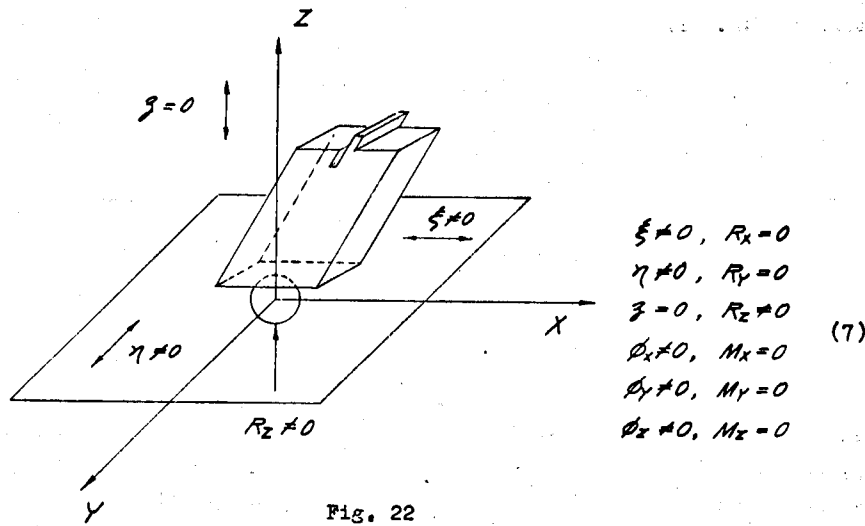
Fig. 20

5.- Apoyo elástico (Fig. 21)

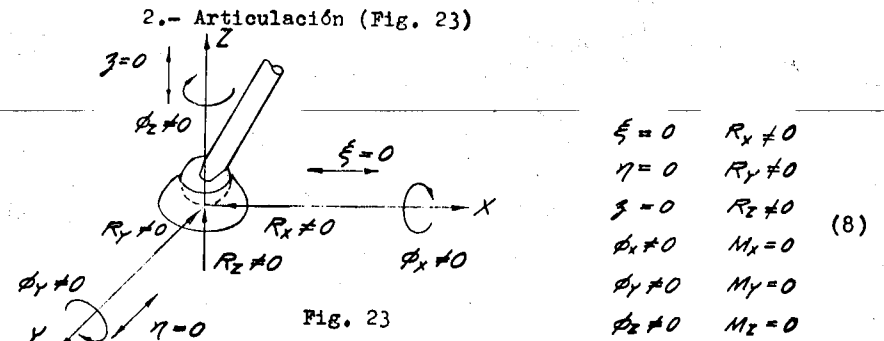


II) En el espacio

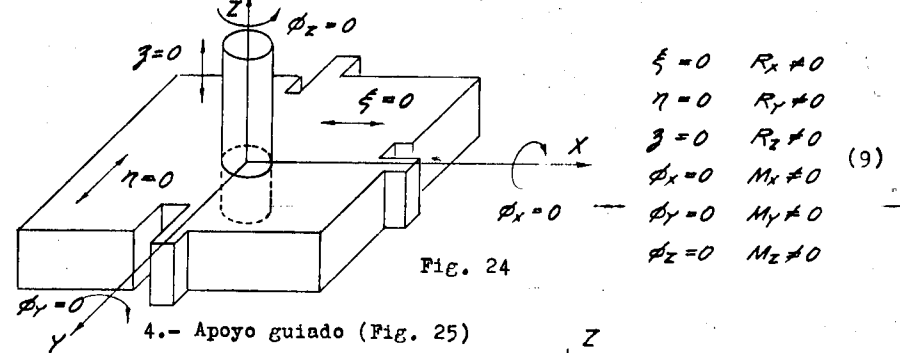
1.- Apoyo libre (Fig. 22)



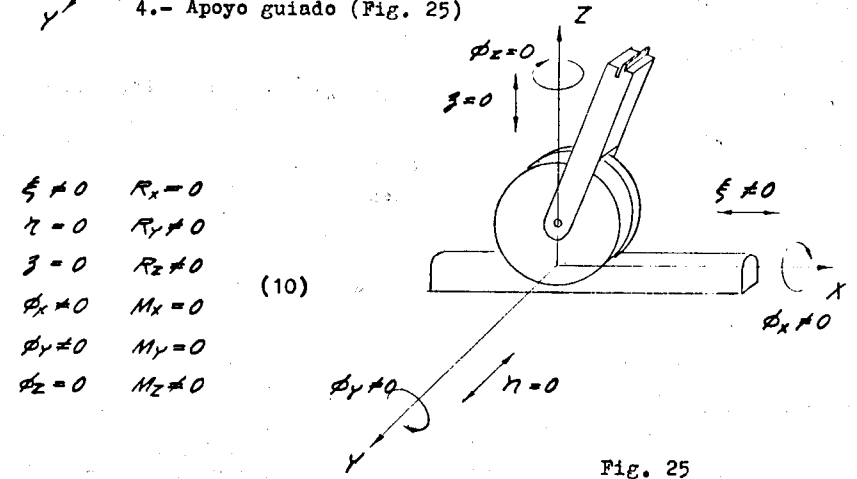
2.- Articulación (Fig. 23)



3.- Empotramiento (Fig. 24)



4.- Apoyo guiado (Fig. 25)



5.- Apoyo elástico (Fig. 26)

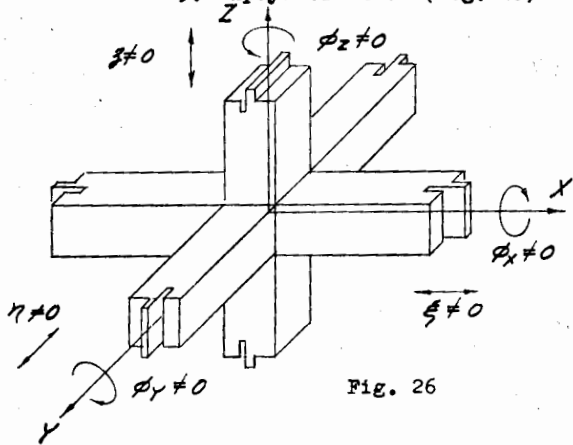


FIG. 26

$$\begin{aligned}
 \xi \neq 0 & R_x \neq 0 \\
 \eta \neq 0 & R_y \neq 0 \\
 \zeta \neq 0 & R_z \neq 0 \\
 \phi_x \neq 0 & M_x \neq 0 \\
 \phi_y \neq 0 & M_y \neq 0 \\
 \phi_z \neq 0 & M_z \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

MOMENTO DE UNA FUERZA

Fisicamente, el momento de una fuerza produce o tiende a producir un giro. En el caso de la Fig. 27, la fuerza "F" de momento F·d hace girar el disco alrededor del eje.

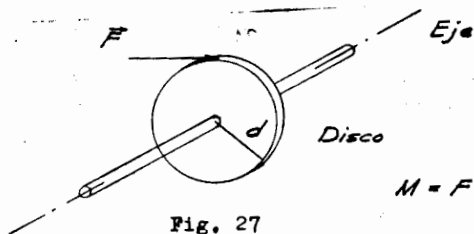


Fig. 27

$$M = F \cdot d \tag{12}$$

Obsérvese que una fuerza paralela al eje no produce giro del disco, puesto que no tiene momento respecto a dicho eje.

En una forma más estricta el momento de una fuerza \vec{F} respecto a un punto "O" se define en la siguiente forma (Fig. 28)

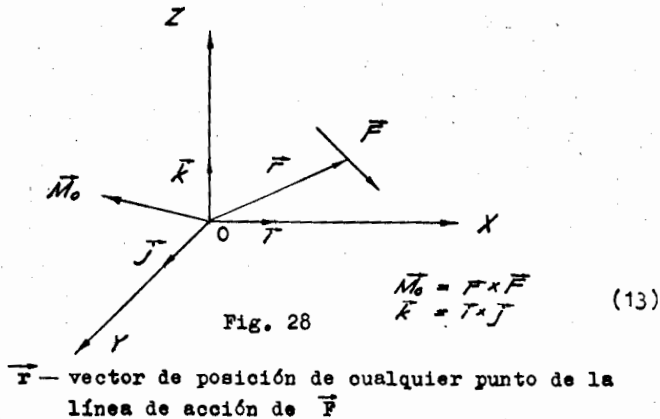


Fig. 28

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_0 &= \vec{F} \times \vec{r} \\
 \vec{K} &= \vec{T} \times \vec{J}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

\vec{r} - vector de posición de cualquier punto de la línea de acción de \vec{F}

La dirección de \vec{M}_0 es perpendicular al plano formado por \vec{O} y \vec{F} , el sentido estará de acuerdo con la convención que se elija, y la magnitud es el área del paralelogramo formado por \vec{F} y \vec{r} . A continuación se ilustra lo anterior (Fig. 29)

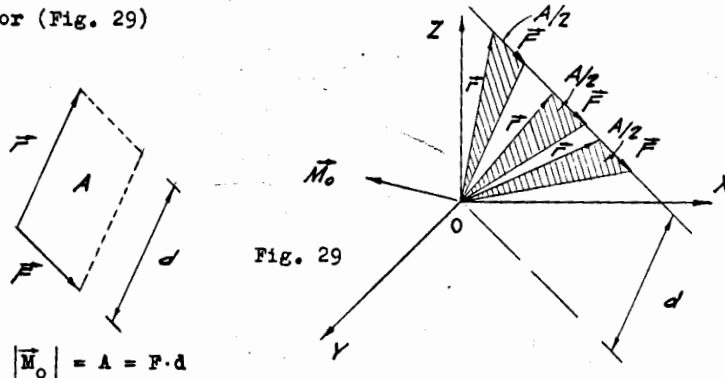


Fig. 29

$$|\vec{M}_0| = A = F \cdot d$$

Nótese que las fuerzas cumplen con la condición de ser vectores deslizantes o cursores, tal y como los habíamos considerado anteriormente, y que \vec{M}_0 es en realidad el momento de \vec{F} respecto a un eje perpendicular al plano de O y \vec{F} .

El momento respecto a cualquier eje es la proyección sobre dicho eje del momento con respecto a uno de sus puntos. A continuación se ilustrará esto para el eje "z" (Fig. 30)

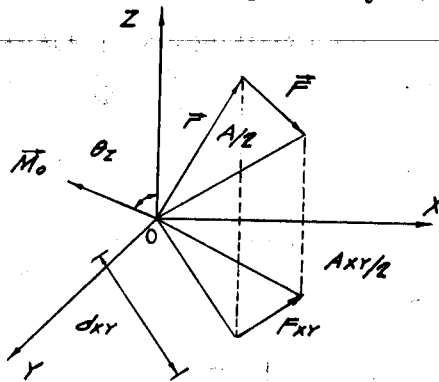


Fig. 30

de lo anterior :

$$M_0 = |\vec{M}_0| = A$$

geométricamente:

$$A_{xy} = A \cos \theta_z$$

y por definición: $M_z = M_0 \cos \theta_z$ (14)

$$M_z = M_0 \cos \theta_z$$

por lo que:

$$M_z = A \cos \theta_z$$

y por consiguiente:

$$M_z = A_{xy}$$

puesto que:

$$A_{xy} = F_{xy} d_{xy}$$

resulta que:

$$M_z = F_{xy} d_{xy}$$

De esto puede observarse que, el momento de \vec{F} respecto al eje "z" es el momento de su proyección en el plano xy normal a dicho eje, y que la componente paralela al eje no produce momento.

Se puede descomponer una fuerza en sus componentes paralelas a los ejes coordenados de referencia, con lo cual quedará más claro lo antes explicado (Fig. 31)

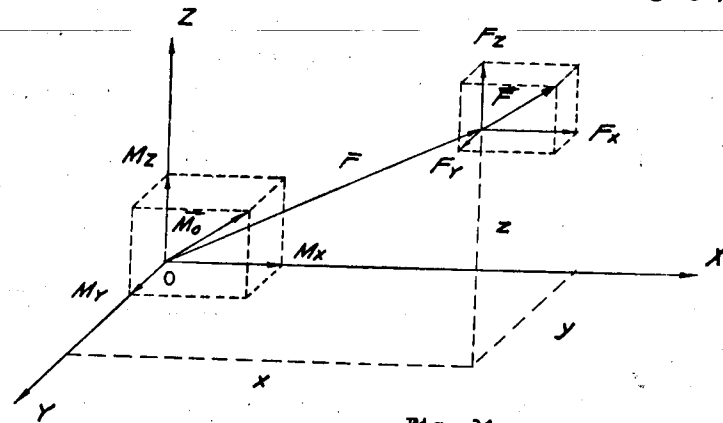


Fig. 31

$$\vec{F} (F_x, F_y, F_z)$$

$$\vec{F} (x, y, z)$$

$$\vec{M}_0 (M_x, M_y, M_z)$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(yF_z - zF_y) - \mathbf{j}(xF_z - zF_x) + \mathbf{k}(xF_y - yF_x)$$

$$\vec{M}_0 = (F_z y - F_y z) \mathbf{i} + (F_x z - F_z x) \mathbf{j} + (F_y x - F_x y) \mathbf{k}$$

$$\vec{M}_0 = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

$$M_x = F_z y - F_y z$$

$$M_y = F_x z - F_z x$$

$$M_z = F_y x - F_x y$$

Se puede obtener el momento con respecto a cualquier eje que pase por "0" asociando dicho eje a un vector unitario \vec{e} y obteniendo la proyección de \vec{M}_0 sobre dicho eje (Fig. 32)

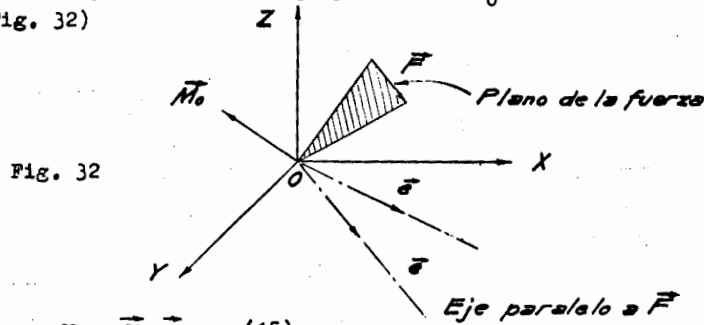


Fig. 32

$$M_e = \vec{M}_0 \cdot \vec{e} \quad (15)$$

$$|\vec{e}| = 1$$

Para el caso del eje z:

$$M_z = \vec{M}_0 \cdot \vec{k}$$

Si el eje es paralelo a \vec{F} , $M_e = 0$ puesto que está en el plano de la fuerza que es perpendicular a \vec{M}_0 .

Analicamente las características de un cursor representativo de una fuerza, pueden expresarse por el vector libre \vec{F} que nos dará la magnitud, dirección y sentido de la fuerza, y el vector \vec{M}_0 nos dará su línea de acción.

La pareja ordenada (\vec{F}, \vec{M}_0) se denomina coordenadas vectoriales o plückerianas de la fuerza. Es decir, para caracterizar una fuerza es necesario conocer su magnitud, dirección y sentido (\vec{F}) y su momento con respecto a un punto "0" (\vec{M}_0) siendo esto último equivalente a conocer la posición de su línea de acción o soporte que es la recta de ecuación:

$$(\vec{r} - \vec{r}_p) \times \vec{F} = 0 \quad (16)$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

vease (Fig. 33)

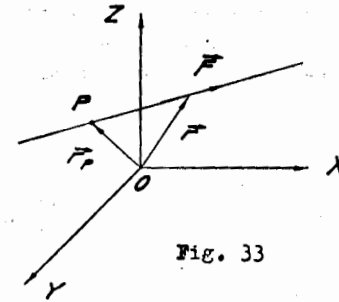


Fig. 33

Para obtener en general el momento de cualquier fuerza \vec{F} , respecto a un eje cualquiera, asociando el vector unitario \vec{e} , procedemos como sigue (Fig. 34):

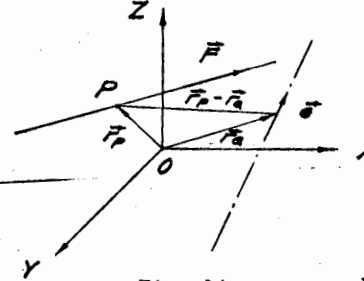


Fig. 34

$$|\vec{e}| = 1$$

$$M_e = [(\vec{r}_p - \vec{r}_q) \times \vec{F}] \cdot \vec{e} \quad (17)$$

Por las características del doble producto mixto, este es igual al volumen del paralelepipedo formado por los vectores (Fig. 35)

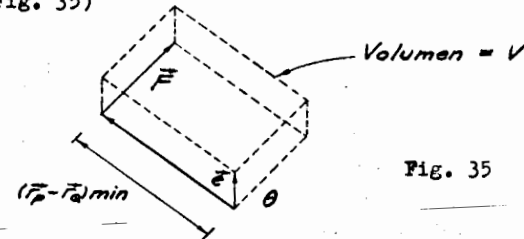


Fig. 35

$$V = M_e = |\vec{F}| |\vec{r}_p - \vec{r}_q| \min |\vec{e}| \sin \theta$$

$$M_e = |\vec{F}| d_{\min} \sin \theta \quad (18)$$

En donde "d min" es la distancia mínima entre -
las líneas de acción de \vec{F} y \vec{e} , y ϕ es el ángulo entre -
ellas. Obsérvese que si \vec{F} y \vec{e} son paralelos o se cortan, -
 $\vec{M}_e = 0$, es decir, el momento de una fuerza con respecto a un
eje es nulo si esta corta a dicho eje o es paralela a él.

PAR DE FUERZAS

Se denomina par de fuerzas a -
dos fuerzas paralelas de igual magnitud y sentido contrario.
(Fig. 36)

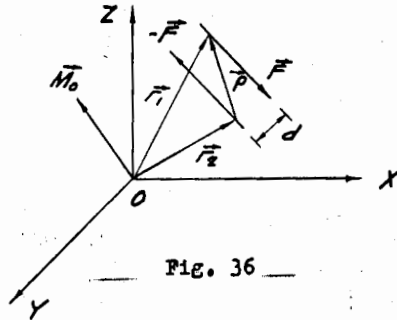
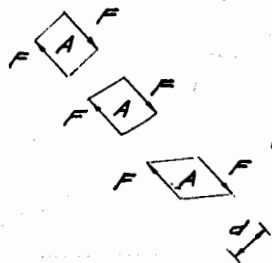


Fig. 36

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \text{Momento del par respecto a } O \\ \vec{M}_O &= \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} \\ \vec{M}_O &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} \text{ puesto que: } (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \\ &\text{entonces:} \\ \vec{M}_O &= \vec{\rho} \times \vec{F} \quad (19) \text{ además observando la siguiente} \\ &\text{figura se tiene que:} \end{aligned}$$



$$M_O = F d \quad (20)$$

en donde d = brazo del par

El momento tiene por magnitud el producto de la
magnitud de las fuerzas por el brazo del par, la dirección
es normal al plano del par y el sentido estará de acuerdo -
con la convención elegida. El momento de un par puede verse
que es un vector libre, tal y como se demuestra a continua-
ción (Fig. 37)

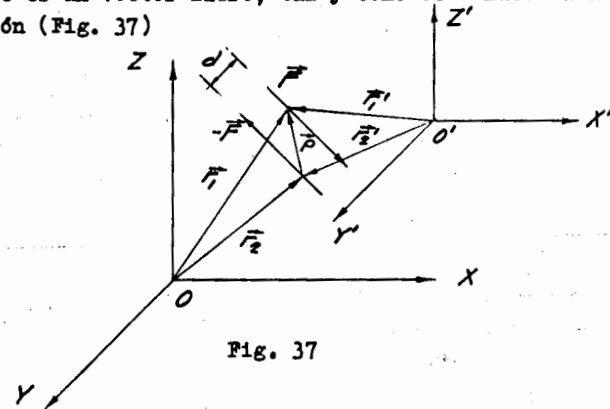


Fig. 37

Momento del par respecto a O' :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \vec{r}_1' \times \vec{F} + \vec{r}_2' \times (-\vec{F}) \\ &= \vec{r}_1' \times \vec{F} - \vec{r}_2' \times \vec{F} \\ &= (\vec{r}_1' - \vec{r}_2') \times \vec{F} \\ \vec{M}_{O'} &= \vec{\rho}' \times \vec{F} \end{aligned}$$

y puesto que:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{\rho}' \times \vec{F}$$

por lo tanto:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O'}, \quad (\text{vector libre}) \quad (21)$$

Maneras de indicar un par de fuerzas (Fig. 38)

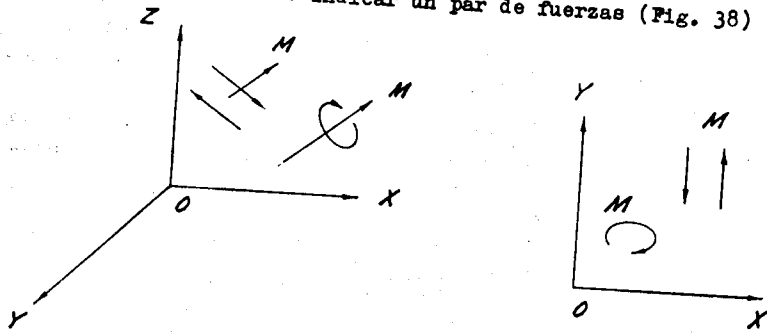
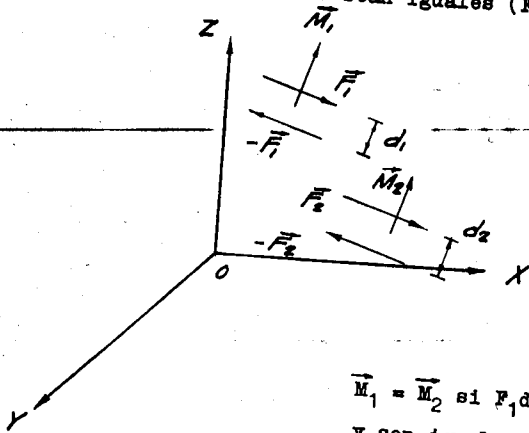


Fig. 38

Dos pares son iguales siempre y cuando su magnitud, dirección y sentido sean iguales (Fig. 39)



$\vec{M}_1 = \vec{M}_2$ si $F_1 d_1 = F_2 d_2$
y son iguales las direcciones y sentidos.

Fig. 39

SISTEMAS DE FUERZAS

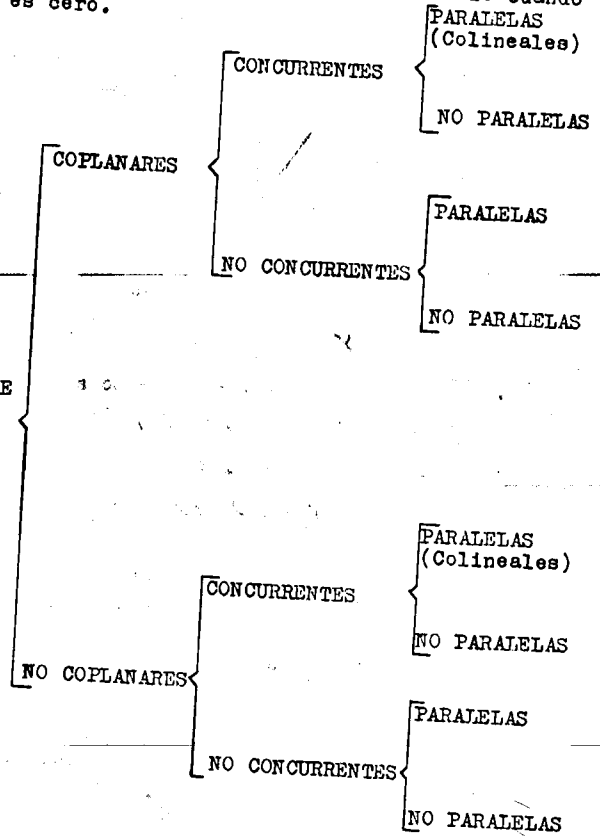
Se denomina "sistema de fuerzas", a un número cualquiera de fuerzas tratadas en conjunto.

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes, cuando producen los mismos efectos externos al actuar sobre un cuerpo.

La resultante de un sistema de fuerzas es el sistema equivalente más simple.

Un sistema de fuerzas está en equilibrio cuando su resultante es cero.

CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS



Las fuerzas coplanares son aquellas cuyas líneas de acción se encuentran sobre el mismo plano.

Fuerzas concurrentes son aquellas cuyas líneas de acción concurren en un mismo punto.

Fuerzas paralelas son aquellas cuyas líneas de acción son paralelas, siendo colineales cuando estas coinciden.

RESULTANTE DE UNA FUERZA Y UN PAR COPLANARES

Sean F y M una fuerza y un par coplanares (Fig.40)

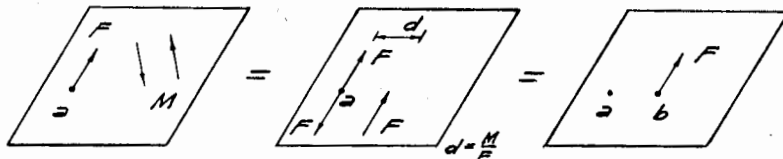


Fig. 40

Es decir, al sumarle a la fuerza F (que pasa por "a") el par M , esta se traslada a una posición paralela (pasando por "b").

PROBLEMA INVERSO.- Una fuerza se puede descomponer en un par y una fuerza igual y paralela. (Fig. 41)

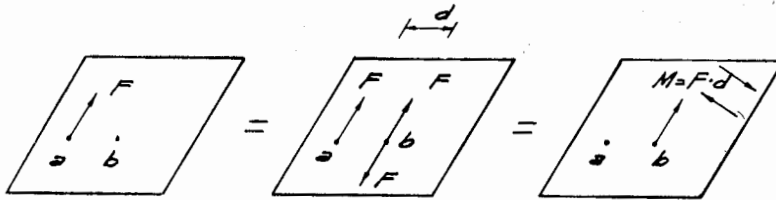
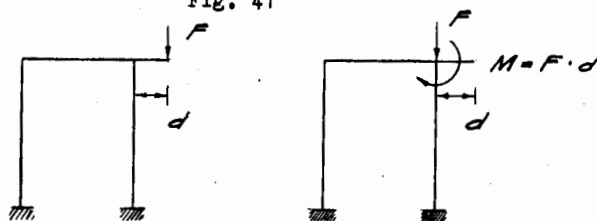


Fig. 41

Ejemplo:



RESULTANTE DE UNA FUERZA Y UN PAR CUALQUIERA

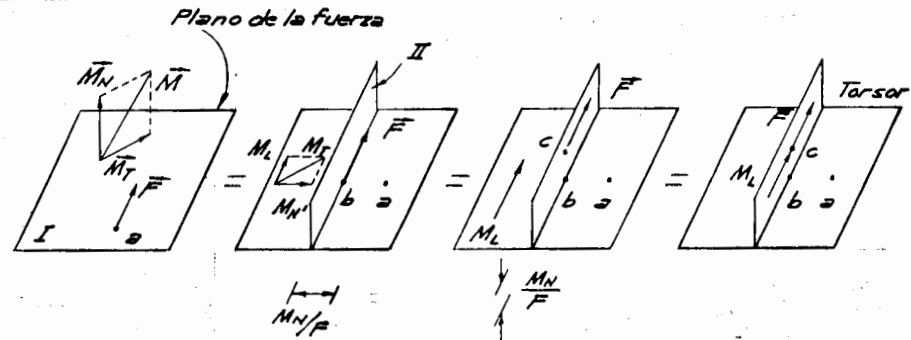


Fig. 42

- \vec{F} — Fuerza en el plano I
- \vec{M} — Componente tangencial en el plano I
- \vec{M}_N — Componente normal al plano I (par de fuerzas en el plano I)
- \vec{M} — Par cualquiera
- \vec{M}_L — Componente paralela al plano II (par de fuerzas en el plano II)
- \vec{M} — Componente normal al plano II (par de fuerzas en el plano II)

Es decir, al sumarle a la fuerza \vec{F} (pasando por "a") el par \vec{M} , esta se traslada (pasando por "c") siendo la resultante el torsor constituido por \vec{F} (pasando por "c" y el par \vec{M}_L)

RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN GENERAL

Sea el sistema de fuerzas \vec{F}_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) y de pares \vec{M}_j ($j = 1, 2, 3, \dots, m$) (Fig. 43), cada una de las fuerzas F_i puede trasladarse al origen "0" introduciendo un par de transporte $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$, y los pares \vec{M}_j como vectores libres también pueden trasladarse a dicho punto, con lo que el sistema exterior puede expresarse como sigue y esto a su vez es igual a una resultante de todas las fuerzas

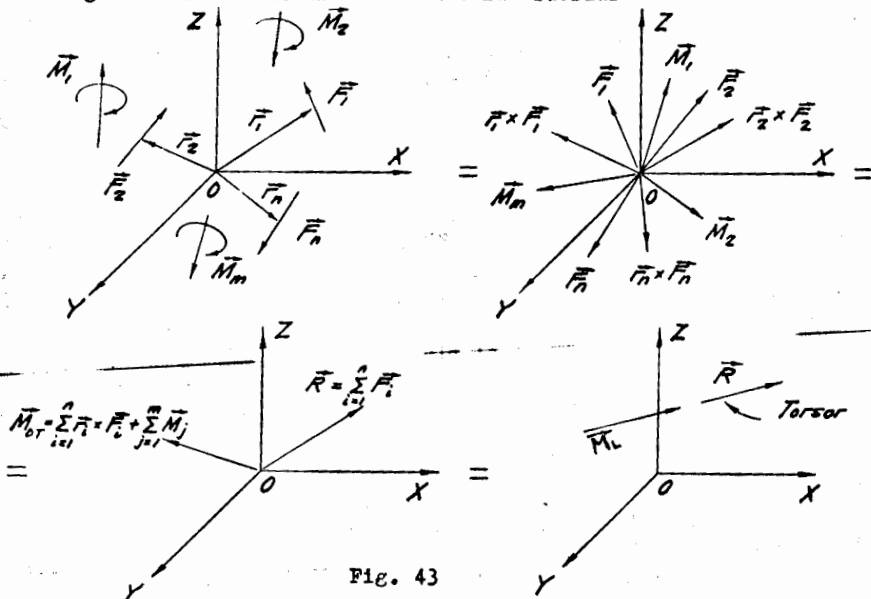


Fig. 43

Es decir, la resultante de un sistema de fuerzas en general es un torsor. En casos particulares dicha resultante es solo una fuerza o un par. Puede también concluirse que para obtener la resultante de un sistema de fuerzas en general, se requiere de dos ecuaciones vectoriales las cuales son equivalentes a 6 ecuaciones escalares como se expresa a continuación:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum \vec{F} \quad \begin{cases} R_x = \sum F_x \\ R_y = \sum F_y \\ R_z = \sum F_z \end{cases} \quad (22)$$

$$\vec{M}_{ot} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = \sum \vec{M}_0 \quad \begin{cases} M_{ox} = \sum M_x \\ M_{oy} = \sum M_y \\ M_{oz} = \sum M_z \end{cases}$$

que expresado graficamente nos queda como se indica en la Fig. 44

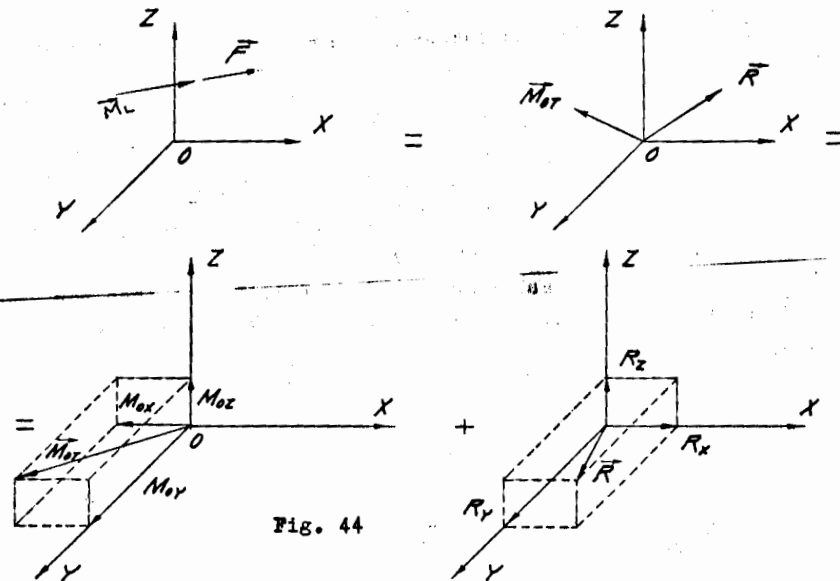


Fig. 44

ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN GENERAL

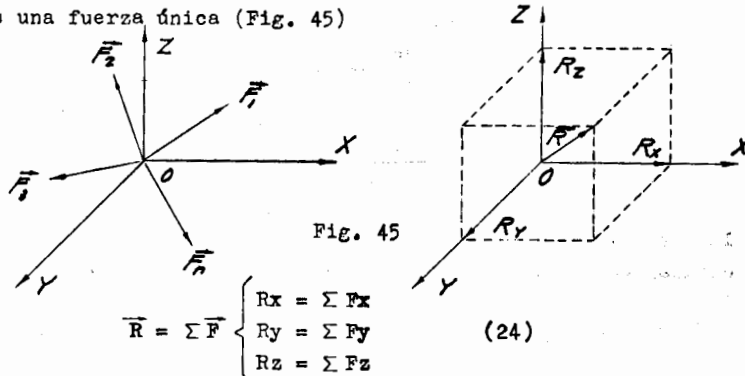
De acuerdo con las expresiones obtenidas para llegar a la resultante de un sistema de fuerzas en general y tomando en cuenta que existe equilibrio cuando la resultante es cero, se llega a las siguientes ecuaciones para analizar el equilibrio de un sistema de fuerzas en general :

$$\sum \vec{F} = 0 \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad \sum \vec{M}_O = 0 \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases} \quad (23)$$

es decir, se cuenta con dos ecuaciones vectoriales o seis -
ecuaciones escalares para un problema general de equilibrio,
por lo que se pueden tener como máximo seis incógnitas en un
problema de este tipo.

EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTES

Puesto que todas las fuerzas pasan por el punto
"o", se eliminan las ecuaciones de momentos y la resultante
es una fuerza única (Fig. 45)



por lo que se cuenta con tres ecuaciones independientes de -
equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \quad (25)$$

EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS PARALELAS

Puesto que todas las fuerzas son paralelas al -
eje "z" (como podrían serlo a cualquier otro eje)(Fig. 46),
se elimina la ecuación de momentos respecto a dicho eje y -
las de proyecciones sobre los ejes "x" e "y", obteniéndose
la resultante con las siguientes ecuaciones:

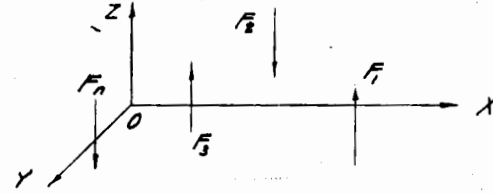
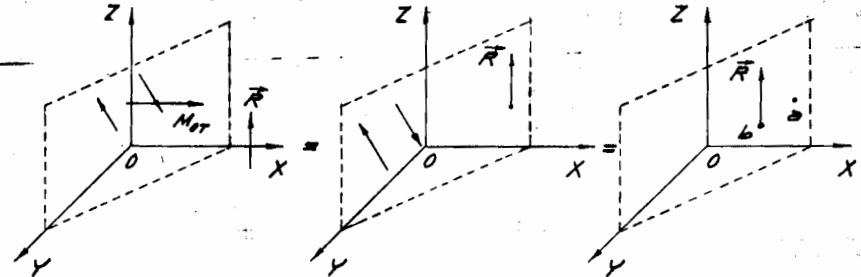


Fig. 46

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F} \\ M_{Ox} = \sum M_x \\ M_{Oy} = \sum M_y \end{cases} \quad (26)$$



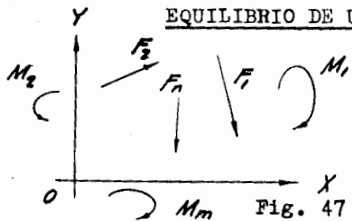
Si $\vec{R} = 0$ la resultante es
un par M_{Ot}

Si $\vec{R} \neq 0$ la resul -
tante es una fuerza

O sea, la resultante es una fuerza o un par.
Se cuenta con tres ecuaciones independientes de -
equilibrio

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \end{cases} \quad (27)$$

EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS COPLANARES



Todas las fuerzas estan conte-
nidas en un plano tal como el --
"XY" (Fig. 47), por lo que sus --
proyecciones sobre el eje "z" y
sus momentos con respecto a "x"
e "y" son nulos, pudiéndose obtener la resultante con las --
siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} R_x = \sum F_x \\ R_y = \sum F_y \\ M_{ot} = \sum M_o \end{cases} \quad (28)$$

Puesto que una fuerza y un par coplanares siempre
se pueden sumar dándonos una fuerza única, concluimos que la
resultante de un sistema de este tipo es una fuerza o un par.

Se cuenta en este caso con tres ecuaciones inde-
pendientes de equilibrio:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_o = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_o = 0 \\ \sum M_o = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_o = 0 \\ \sum M_o = 0 \\ \sum M_o = 0 \end{cases} \quad (29)$$

COPLANARES

EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS CONCURRENTES

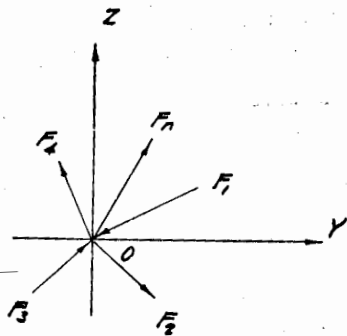


Fig. 48

Resultante $\begin{cases} R_x = \sum F_x \\ R_y = \sum F_y \end{cases} \quad (30)$
Fuerza única

Equilibrio $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad (31)$
Dos ecuaciones inde-
pendientes de equilibrio.

EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS COPLANARES

PARALELAS.-

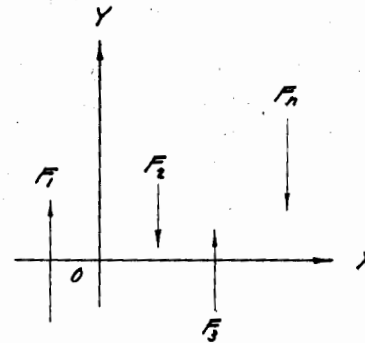


Fig. 49

Resultante $\begin{cases} R = \sum F \\ M_{ot} = \sum M_o \end{cases} \quad (32)$

Es una fuerza o
un par

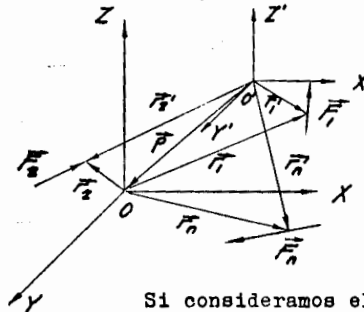
Equilibrio $\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum M_o = 0 \end{cases} \quad (33)$

Dos ecuaciones inde-
pendientes de equilibrio

ECUACIONES INDEPENDIENTES DE EQUILIBRIO

Cual -
quier ecuación de equilibrio adicional que se establezca es
combinación lineal de las antes mencionadas, lo cual queda -
demostrado a continuación (Fig. 50):

Tomando en cuenta el sistema de ejes (x, y, z),
las ecuaciones de equilibrio para el sistema de fuerzas in-
dicadas en la figura son:



$$\sum \bar{F}_1 = 0 \quad (34)$$

$$\sum \bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = 0 \quad (35)$$

Fig. 50

Si consideramos el sistema de ejes x', y', z',
las ecuaciones de equilibrio correspondientes son:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_1 &= 0 \\ \sum \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 &= 0\end{aligned}\quad (36)$$

pero de la figura:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{\rho} + \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 &= \vec{\rho} + \vec{r}_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \vec{r}_1 &= \vec{\rho} + \vec{r}_1 \\ \vec{r}_n &= \vec{\rho} + \vec{r}_n\end{aligned}$$

sustituyendo (18) en (17)

$$\begin{aligned}\sum (\vec{\rho} + \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 &= 0 \\ \sum (\vec{\rho} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1) &= 0\end{aligned}$$

puesto que $\vec{\rho} = \text{cte}$

$$\vec{\rho} \times \sum \vec{F}_1 + \sum \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = 0 \quad (37)$$

La expresión (37) es una combinación lineal de la 34 y la 35 por lo que podemos concluir que, para un sistema de fuerzas en general, se cuenta con dos ecuaciones vectoriales o seis ecuaciones escalares independientes de equilibrio, ya que cualquier otra ecuación adicional es una combinación de ellas.

TEOREMA DE VARIGNON

"El momento de la resultante es igual a la suma de los momentos de las fuerzas del sistema"

Esto queda implicado al obtener la resultante de un sistema en general, pero lo verificaremos para dos fuerzas concurrentes (Fig. 51).

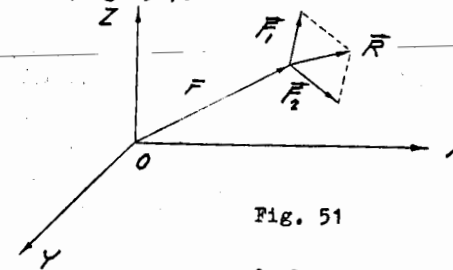


Fig. 51

sumando los momentos de las fuerzas del sistema:

$$\begin{aligned}\sum \vec{M}_O &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 \\ \sum \vec{M}_O &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\end{aligned}$$

pero:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 &= \vec{R} \\ \sum \vec{M}_O &= \vec{r} \times \vec{R}\end{aligned}\quad (38)$$

DOS PRINCIPIOS BASICOS

1.- Dos fuerzas solo pueden estar en equilibrio si son iguales, colineales y de sentido contrario (Fig. 52)

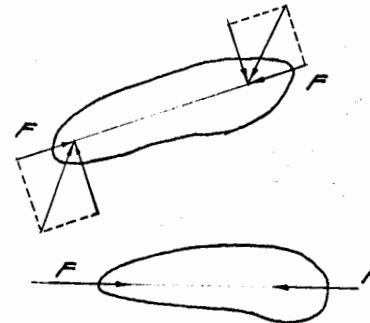
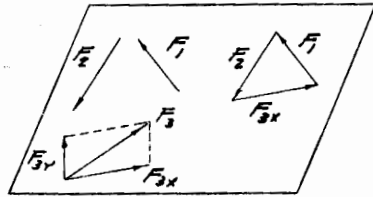


Fig. 52

En este caso no hay equilibrio puesto que si bien dos componentes se anulan, no sucede así con las otras dos.

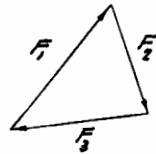
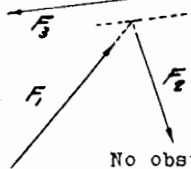
Solamente en esta forma puede existir equilibrio.

2.- Tres fuerzas solo están en equilibrio si -
son coplanares y concurrentes o paralelas (caso particular)-
siempre y cuando se cierre el polígono de fuerzas (Fig. 53)

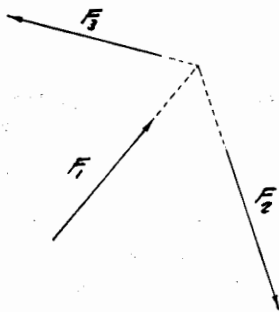


La componente \vec{F}_3 es normal al plano de la figura y no puede ser anulada a menos que \vec{F}_3 se encuentre en dicho plano y las fuerzas sean concurrentes. En caso contrario no

existe equilibrio, no obstante que se cierre el polígono de fuerzas indicado.



No obstante que se cierra el polígono de las -
fuerzas coplanares, no existe equilibrio por no ser estas -
concurrentes, siendo la resultante un par.



Solamente en estas condicio -
nes en que las fuerzas son -
concurrentes, coplanares y se
cierra el polígono respectivo,
existe equilibrio.

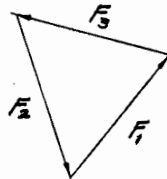
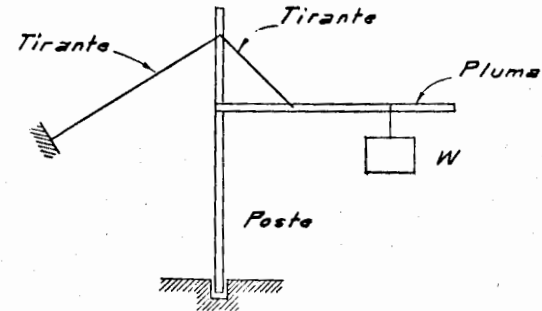


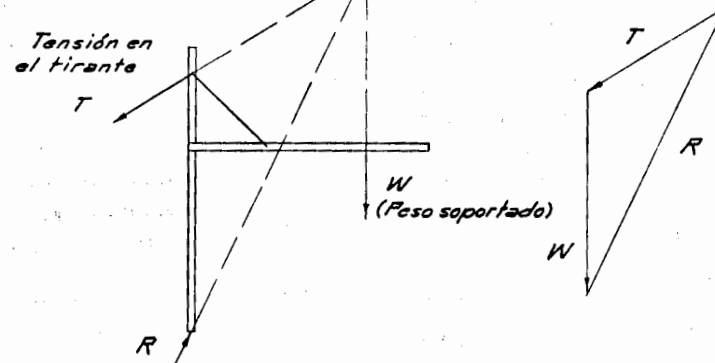
Fig. 53

EJEMPLOS.-

I).- Consideremos una grúa como la mostrada en la siguiente figura:

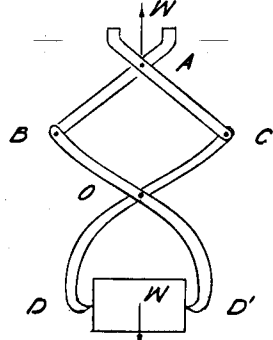


Trademos ahora el diagrama de cuerpo libre de -
conjunto y las fuerzas actuantes W , T y R , que deben ser -
concurrentes, por lo que a partir de las direcciones de T y
 W puede obtenerse la de R .

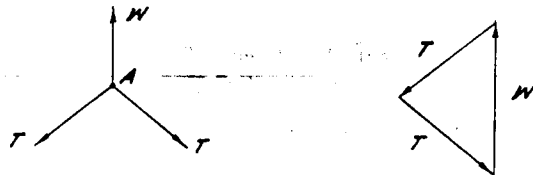


Además debe cerrarse el polígono para que exista equilibrio, por lo que a partir de la magnitud de W pueden -
obtenerse las de T y R .

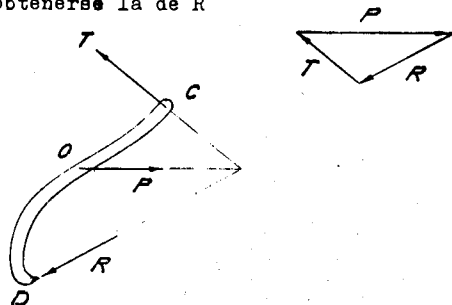
II).- Consideremos una pinza en equilibrio con el peso del cuerpo que soporta y la reacción en el apoyo superior.



Analicemos primero el equilibrio de la unión en A, en donde tenemos tres fuerzas concurrentes en equilibrio, obteniéndose la magnitud de T en función de la de W.

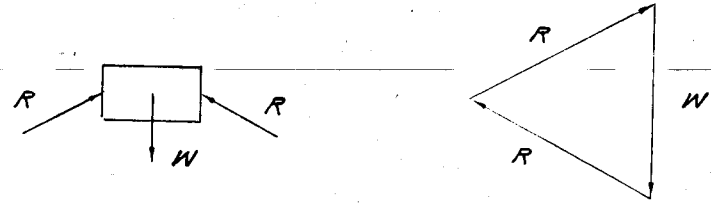


El tramo "DOC" debe estar en equilibrio bajo la acción de las tres fuerzas T, P y R, que deben ser concurrentes, con lo que a partir de las direcciones de T y P puede obtenerse la de R



Al cerrarse el polígono de fuerzas, se pueden obtener las magnitudes de P y R a partir de la de T

tomando el peso W:



EJEMPLO 1.-

Obtenga la tensión en los cables AC y BC suponiéndolos flexibles, inextensibles y sin peso.

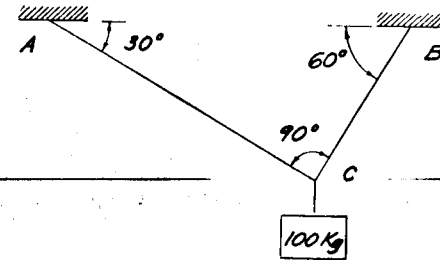
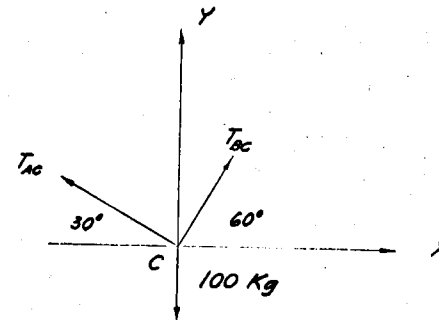


Diagrama de cuerpo libre del nudo "C"



Ecuaciones de equilibrio

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \dots\dots\dots(1) \\ \sum F_y = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

considerando (1)

$$T_{BC}(\cos 60^\circ) - T_{AC}(\cos 30^\circ) = 0$$

$$0.5 T_{BC} - 0.866 T_{AC} = 0$$

$$T_{BC} = 1.732 T_{AC} \dots\dots\dots(3)$$

considerando (2)

$$T_{BC}(\sen 60^\circ) + T_{AC}(\sen 30^\circ) - 100 = 0$$

$$0.866 T_{BC} + 0.5 T_{AC} = 100$$

sustituyendo el valor de (3)

$$(0.866)(1.732 T_{AC}) + 0.5 T_{AC} = 100$$

$$1.5 T_{AC} + 0.5 T_{AC} = 100$$

$$2 T_{AC} = 100$$

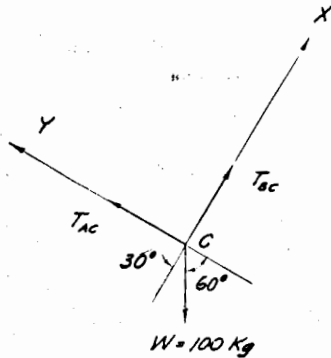
$$T_{AC} = 50 \text{ Kg}$$

sustituyendo en (3)

$$T_{BC} = 1.732 (50)$$

$$T_{BC} = 86.600 \text{ Kg}$$

Utilizando otro sistema de ejes se puede simplificar el problema:



de (1) $\sum F_x = 0$

$$T_{BC} - 100(\cos 30^\circ) = 0$$

$$T_{BC} = 100(0.866)$$

$$T_{BC} = 86.60 \text{ Kg}$$

de (2) $\sum F_y = 0$

$$T_{AC} - 100(\cos 60^\circ) = 0$$

$$T_{AC} = 100(0.5)$$

$$T_{AC} = 50 \text{ Kg}$$

EJEMPLO 2.-

Determine las reacciones en los apoyos A y B de la viga cargada en la forma que se indica en la siguiente figura.

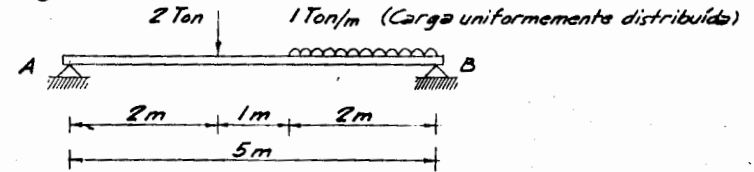
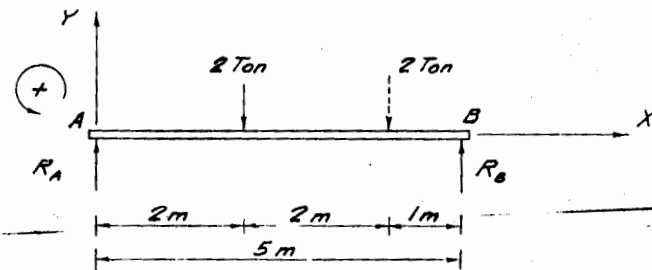


Diagrama de cuerpo libre de la viga:



Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_y = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum M_A = 0 \dots\dots\dots(2)$$

de la ecuación (2)

$$- 2 (2) - 2 (4) + 5R_B = 0$$

$$5R_B = 12$$

$$R_B = 2.4 \text{ Ton}$$

de la ecuación (1)

$$R_A - 2 - 2 + 2.4 = 0$$

$$R_A = 1.6 \text{ Ton}$$

Revisión:

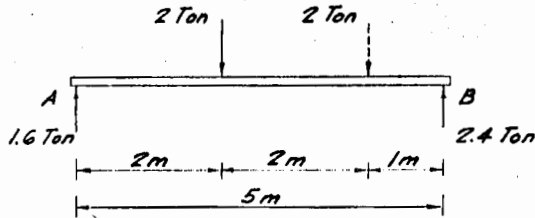
$$\sum M_B = 0 \quad +$$

$$5R_A - 2(3) - 2(1) = 0$$

$$5R_A = 8$$

$$R_A = 1.6 \text{ Ton}$$

Resumen:



EJEMPLO 3.-

Obtener la reacción en A y la tensión en el cable BC de la grúa indicada en la siguiente figura. - Desprecie el peso de los elementos estructurales.

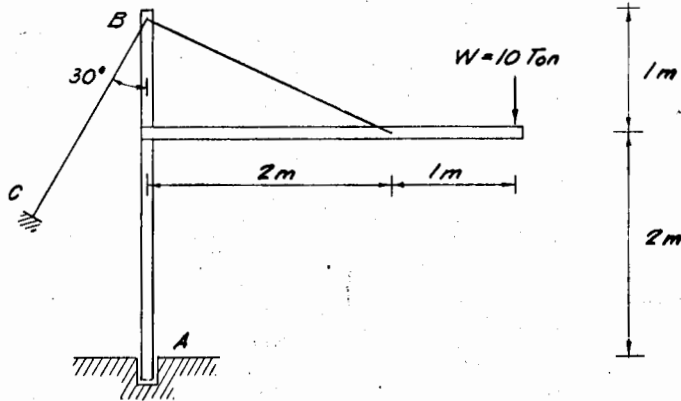
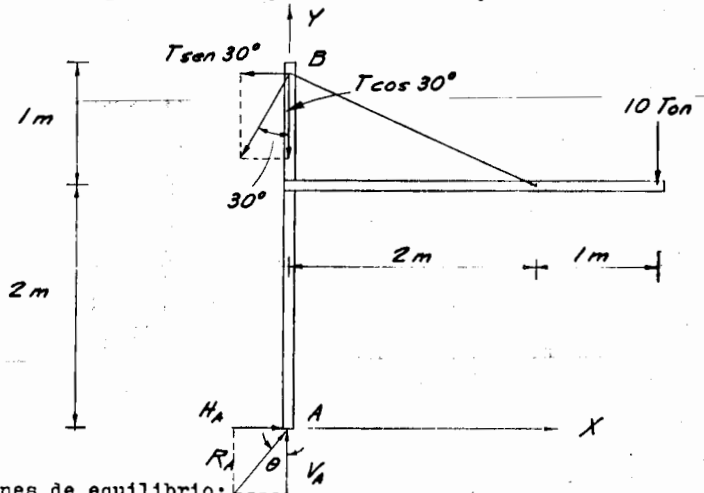


Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum M_A = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_x = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum F_y = 0 \dots\dots\dots(3)$$

de la ecuación (1)

$$10(3) - T \text{ sen } 30^\circ(3) = 0$$

$$T \text{ sen } 30^\circ = 10$$

$$T = 20 \text{ Ton}$$

de la ecuación (2)

$$H_A - T \text{ sen } 30^\circ = 0$$

$$H_A = 20(0.5)$$

$$H_A = 10 \text{ Ton}$$

de la ecuación (3)

$$V_A - T \cos 30^\circ - 10 = 0$$

$$V_A = 20(0.866) + 10$$

$$V_A = 17.32 + 10$$

$$V_A = 27.32 \text{ Ton}$$

$$R_A = \sqrt{H_A^2 + V_A^2}$$

$$R_A = \sqrt{(10)^2 + (27.32)^2}$$

$$R_A = \sqrt{100 + 746.382}$$

$$R_A = \sqrt{846.382}$$

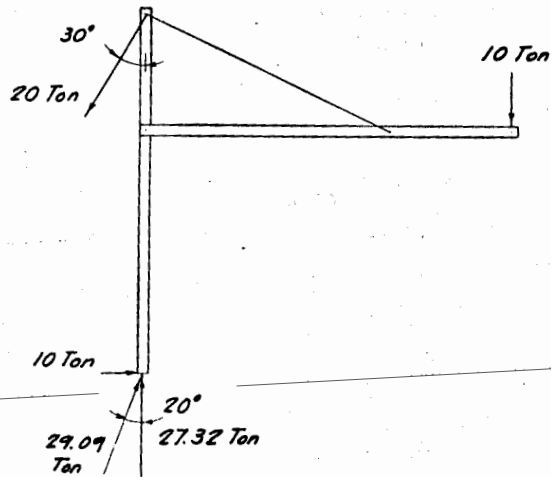
$$R_A = 29.092 \text{ Ton}$$

$$\tan \phi = \frac{H_A}{V_A} = \frac{10.00}{27.32} = 0.366$$

$$\phi = \text{ang tan } 0.377$$

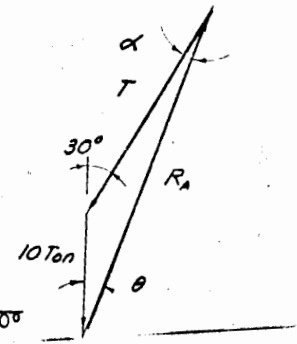
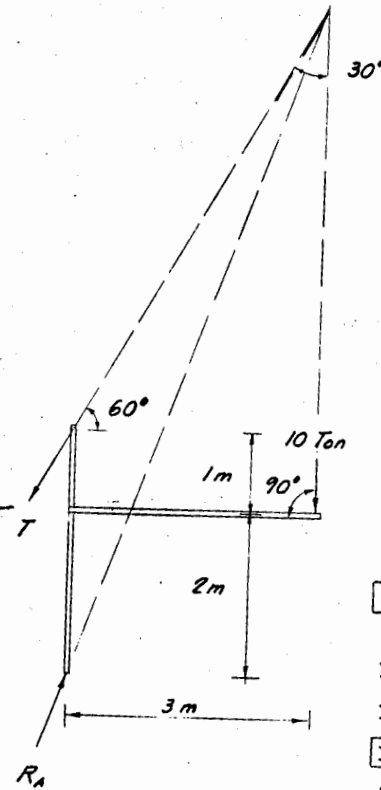
$$\phi = 20^\circ$$

Resumen:



Comprobando con otro procedimiento:

Tres fuerzas están en equilibrio si y solo si son concurrentes, y por lo tanto así - deben ser T, W y R_A.



$$\frac{3}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin 90^\circ}$$

$$x = \frac{3 \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$x = \frac{3(1)}{0.5}$$

$$x = 6 \text{ m}$$

$$L = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2(3)(6)\cos 30^\circ}$$

$$L = \sqrt{76.6}$$

$$L = 8.72$$

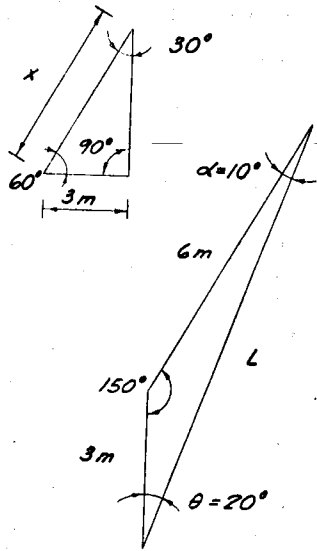
$$\frac{8.72}{\sin 150^\circ} = \frac{6}{\sin \phi}$$

$$\sin \phi = \frac{6(0.5)}{8.72} = 0.342$$

$$\phi = 20^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (150^\circ - 20^\circ)$$

$$\alpha = 10^\circ$$



$$\frac{T}{\sin 20^\circ} = \frac{10}{\sin 10^\circ}$$

$$T = \frac{10 \sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$T = \frac{10(0.342)}{0.172}$$

$$T = 20 \text{ Ton}$$

$$\frac{T}{\sin 20^\circ} = \frac{R_A}{\sin 150^\circ}$$

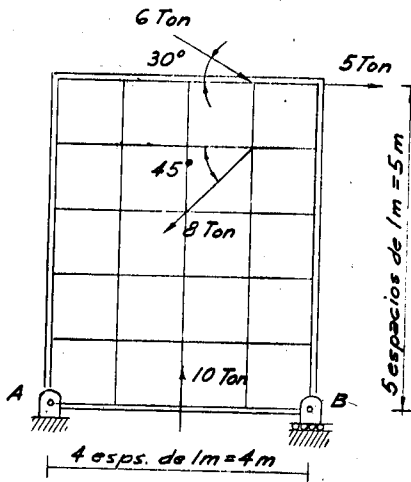
$$R_A = \frac{T \sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$R_A = \frac{20(0.5)}{0.342}$$

$$R_A = 29.1 \text{ Ton}$$

EJEMPLO 4.-

Obtenga usted las reacciones en los apoyos A y B del cuerpo en equilibrio que se muestra a continuación.



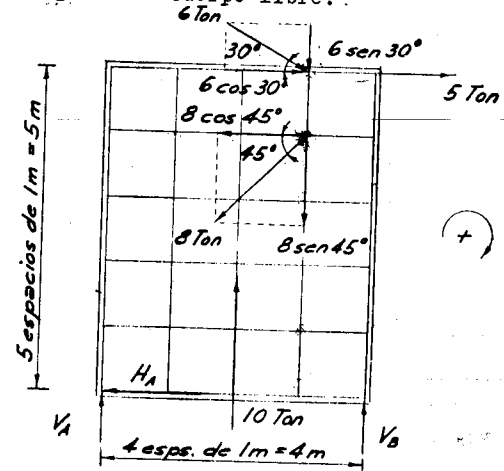
Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0 \dots\dots(1)$$

$$\sum F_y = 0 \dots\dots(2)$$

$$\sum M_A = 0 \dots\dots(3)$$

Diagrama de cuerpo libre:



de (3)

$$5(5) - 10(2) + 6(\sin 30^\circ)(3) + 6(\cos 30^\circ)(5) + 8(\cos 45^\circ)(3) - 8(\cos 45^\circ)(4) - V_B(4) = 0$$

$$4V_B = 125 - 20 + 9 + 26 + 17 - 12.6$$

$$V_B = \frac{34.4}{4}$$

$$V_B = 8.6 \text{ Ton}$$

de (1)

$$-H_A - 8(0.7071) + 6(0.866) + 5 = 0$$

$$H_A = 5.196 + 5 - 5.6568$$

$$H_A = 4.54 \text{ Ton}$$

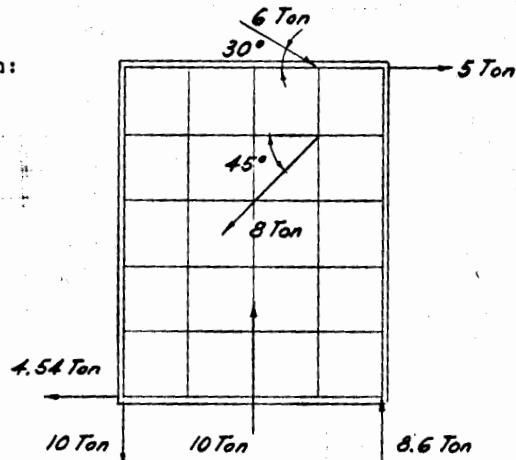
de (2)

$$-6(\sin 30^\circ) - 8(\cos 45^\circ) + 10 + 8.6 + V_A = 0$$

$$V_A = 3 + 5.6 - 10 - 8.6$$

$$V_A = -10 \text{ Ton}$$

Resumen:



EJEMPLO 5.-

Obtenga vectorialmente el valor de la fuerza F y las reacciones en A y B , en el dispositivo de manivela utilizado para levantar un cuerpo de 100 Kg . tal y como se muestra a continuación:

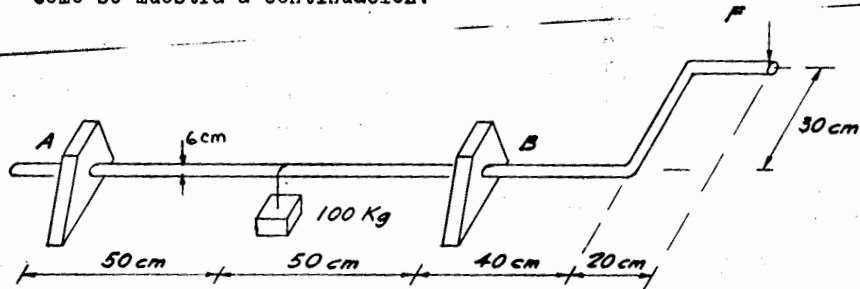
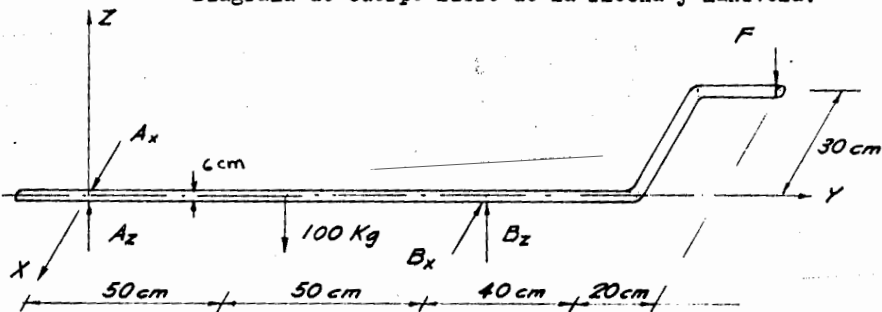


Diagrama de cuerpo libre de la flecha y manivela:



Ecuaciones de equilibrio (vectoriales)

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \dots\dots\dots(1) \\ \sum \vec{M}_A = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

de (1)

$$\begin{aligned} (-F)\mathbf{k} + B_z\mathbf{k} + A_z\mathbf{k} + A_x\mathbf{i} - B_x\mathbf{i} - 100\mathbf{k} &= 0 \\ (-F + B_z + A_z - 100)\mathbf{k} + (A_x - B_x)\mathbf{i} &= 0 \end{aligned}$$

un vector es cero solamente si así lo son sus coordenadas - por lo que:

$$\begin{aligned} A_x - B_x &= 0 \\ A_x = B_x \dots\dots\dots(3) \\ -F + B_z + A_z - 100 &= 0 \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

de (2)

$$\begin{aligned} (160\mathbf{j} - 30\mathbf{i}) \times (-F\mathbf{k}) + (100\mathbf{j}) \times (-B_x\mathbf{i} + B_z\mathbf{k}) + \\ (50\mathbf{j} + 3\mathbf{i}) \times (-100\mathbf{k}) &= 0 \\ -160F\mathbf{i} - 30F\mathbf{j} + 100B_x\mathbf{k} + 100B_z\mathbf{i} - 5000\mathbf{i} + 300\mathbf{j} &= 0 \\ (-160F + 100B_z - 5000)\mathbf{i} + (-30F + 300)\mathbf{j} + (100B_x)\mathbf{k} &= 0 \end{aligned}$$

las coordenadas del vector nulo también tienen que serlo así por lo que:

$$100B_x = 0$$

$$B_x = 0$$

y de (3)

$$A_x = 0$$

$$-30F + 300 = 0$$

$$F = \frac{300}{30}$$

$$F = 10 \text{ Kg}$$

$$-160F + 100B_z - 5000 = 0$$

$$-160(10) + 100B_z - 5000 = 0$$

$$-1600 + 100B_z - 5000 = 0$$

$$B_z = \frac{6600}{100}$$

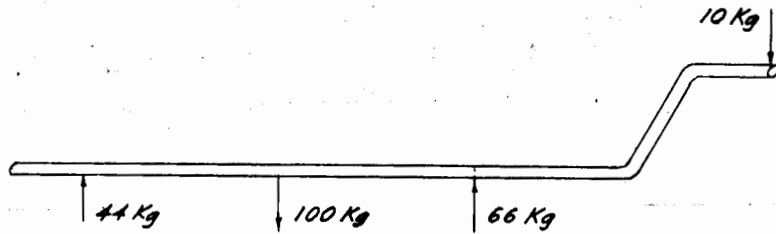
$$B_z = 66 \text{ Kg}$$

de (4)

$$- 10 + 66 + A_z - 100 = 0$$

$$A_z = 44 \text{ Kg}$$

Resumen:



EJEMPLO 6.-

Obtenga las reacciones en A, B y C - del arco circular de 3 articulaciones que se indica.

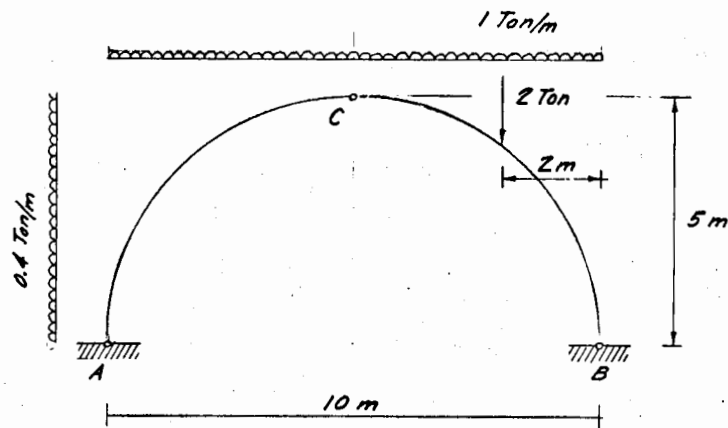
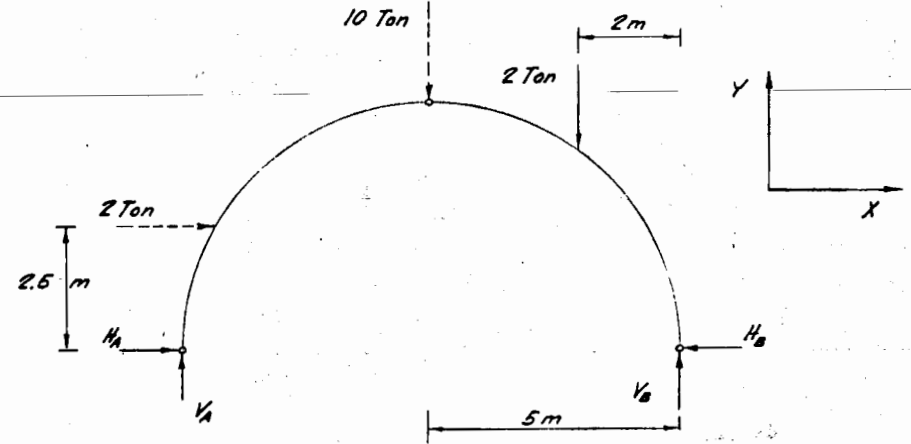


Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



$$\sum F_y = 0$$

$$- 10 - 2 + V_A + V_B = 0$$

$$V_A + V_B = 12 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$2 + H_A - H_B = 0$$

$$H_B - H_A = 2 \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum M_A = 0$$

$$- V_B(10) + 2(8) + 10(5) + 2(2.5) = 0$$

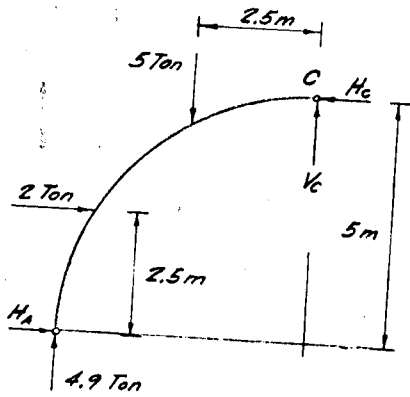
$$V_B = 7.1 \text{ Ton}$$

de (1)

$$V_A + 7.1 = 12$$

$$V_A = 4.9 \text{ Ton}$$

Aislando la parte AC y trazando su D.C.L.



$$\sum F_y = 0$$

$$V_A - P + V_C = 0$$

$$4.9 - 5 + V_C = 0$$

$$V_C = 0.1 \text{ Ton}$$

$$\sum M_C = 0$$

$$-H_A(5) + 4.9(5) - 2(2.5) -$$

$$5(2.5) = 0$$

$$H_A(5) = 24.5 - 5 - 12.5$$

$$H_A = 1.4 \text{ Ton}$$

de (2)

$$H_B - 1.4 = 2$$

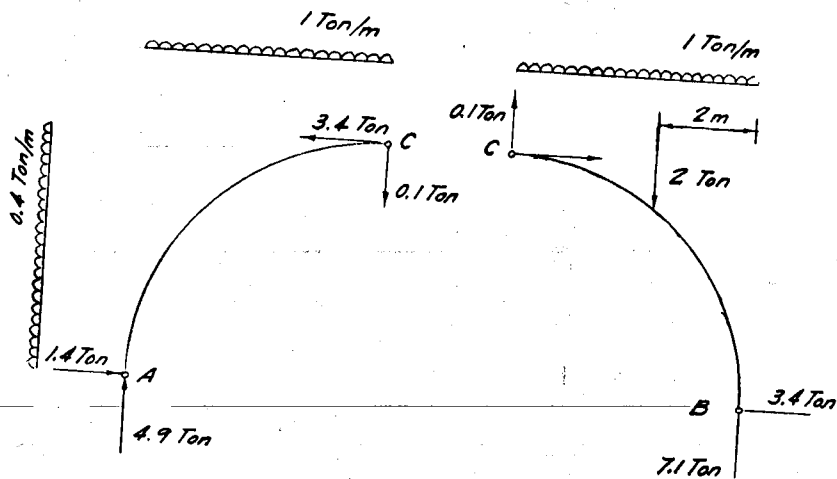
$$H_B = 3.4 \text{ Ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$1.4 + 2 - H_C = 0$$

$$H_C = 3.4 \text{ Ton}$$

Resumen:



EJEMPLO 7.-

Obtenga las reacciones en A, B y C de la viga cargada en la forma que se indica a continuación:

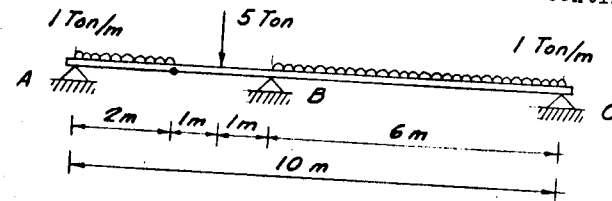
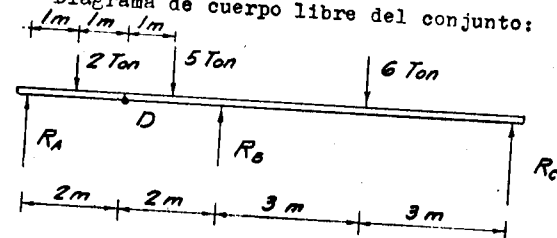


Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



Tramo AD.

$$\sum M_A = 0$$

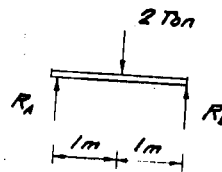
$$-R_D(2) + 2(1) = 0$$

$$R_D = 1 \text{ Ton}$$

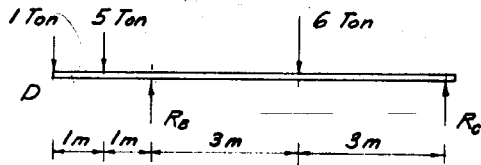
$$\sum F_y = 0$$

$$R_A - 2 + 1 = 0$$

$$R_A = 1 \text{ Ton}$$



Tramo DC.



$$\sum M_B = 0$$

$$- 1(2) - 5(1) + 6(3) - R_C(6) = 0$$

$$R_C = \frac{11}{6}$$

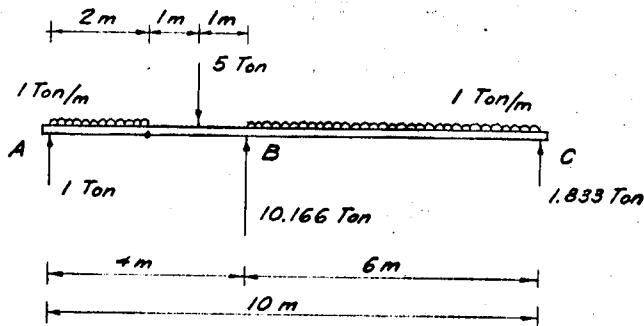
$$R_C = 1.833 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$- 1 - 5 + R_B - 6 + 1.833 = 0$$

$$R_B = 10.166 \text{ Ton}$$

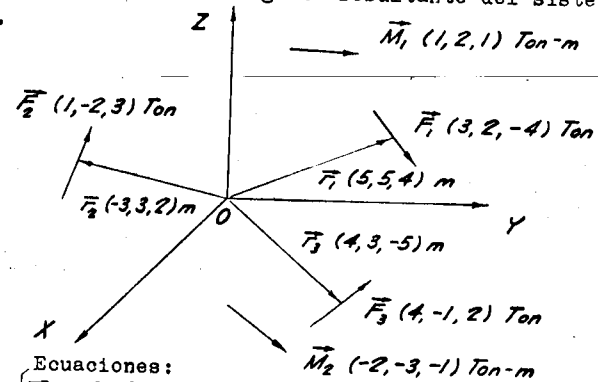
Resumen:



EJEMPLO 8.-

indicado.

Obtenga la resultante del sistema -



Ecuaciones:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \dots\dots\dots(1)$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j \dots\dots\dots(2)$$

Puesto que:

$$\vec{F}_1 = 3i + 2j - 4k \quad [\text{Ton}]$$

$$\vec{F}_2 = 1i - 2j + 3k \quad [\text{Ton}]$$

$$\vec{F}_3 = 4i - j + 2k \quad [\text{Ton}]$$

De (1)

$$\vec{R} = 8i - j + k \quad [\text{Ton}]$$

Además:

$$\vec{M}_I = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}_I = (5i + 5j + 4k) \times (3i + 2j - 4k)$$

$$\vec{M}_I = -28i + 32j - 5k \quad [\text{Ton-m}]$$

$$\vec{M}_{II} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_{II} = (-3i + 3j + 2k) \times (1i - 2j + 3k)$$

$$\vec{M}_{II} = 13i + 11j + 3k \quad [\text{Ton-m}]$$

$$\vec{M}_{JIII} = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_{III} = (4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}) \times (4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

$$\vec{M}_{III} = 1 - 28\vec{j} - 16\vec{k} \quad [\text{Ton-m}]$$

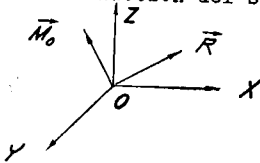
De (2)

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum_{j=1}^n M_j$$

$$\vec{M}_O = (\vec{M}_I + \vec{M}_{II} + \vec{M}_{III}) + (\vec{M}_1 + \vec{M}_2)$$

$$\vec{M}_O = -15\vec{i} + 14\vec{j} - 18\vec{k} \quad [\text{Ton-m}]$$

Procedemos a la reducción del sistema:



1ª).- Haciendo el producto escalar $\vec{R} \cdot \vec{M}_O$:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = (8\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \cdot (-15\vec{i} + 14\vec{j} - 18\vec{k})$$

$$\vec{R} \cdot \vec{M}_O = - \quad [\text{Ton-m}]$$

como $\vec{R} \cdot \vec{M}_O \neq 0$, el sistema se reduce a un torsor

2ª).- Vector unitario de la fuerza resultante:

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{66}$$

$$\text{Si } \vec{R} = R \times \vec{e}_R$$

$$\vec{e}_R = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\vec{e}_R = \frac{8}{\sqrt{66}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{66}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{66}}\vec{k}$$

3ª).- Cálculo del momento del torsor:

$$\vec{M}_T = (\vec{e}_R \cdot \vec{M}_O) \vec{e}_R$$

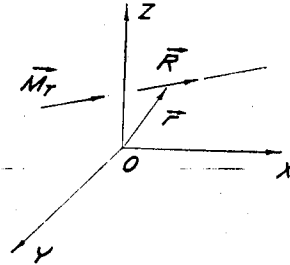
$$\vec{e}_R \cdot \vec{M}_O = \left(\frac{8}{\sqrt{66}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{66}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{66}}\vec{k} \right) \cdot (-15\vec{i} + 14\vec{j} - 18\vec{k})$$

$$= -\frac{120}{\sqrt{66}}\vec{i} - \frac{14}{\sqrt{66}}\vec{j} - \frac{18}{\sqrt{66}}\vec{k} = -\frac{152}{\sqrt{66}}$$

$$\vec{M}_T = -\frac{1216}{66}\vec{i} + \frac{152}{66}\vec{j} - \frac{152}{66}\vec{k}$$

$$\vec{M}_T = -\frac{152}{66}(8\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

4ª).- Cálculo del momento de la resultante con respecto al origen:



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{M}_R = \vec{r} \times \vec{R}$$

$$\vec{M}_R = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (8\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{M}_R = (y + z)\vec{i} - (x - 8z)\vec{j} + (-x - 8y)\vec{k}$$

5ª).- Suma e igualación de momentos

$$\vec{M}_R + \vec{M}_T = \vec{M}_O$$

$$(y + z)\vec{i} - (x - 8z)\vec{j} + (-x - 8y)\vec{k} +$$

$$\left(-\frac{1216}{66}\vec{i} + \frac{152}{66}\vec{j} - \frac{152}{66}\vec{k} \right) = -15\vec{i} + 14\vec{j} - 18\vec{k}$$

agrupando e igualando terminos:

$$\left. \begin{aligned} y + z - \frac{1216}{66} &= -15 \\ 8z - x + \frac{152}{66} &= 14 \\ x + 8y + \frac{152}{66} &= 18 \end{aligned} \right\}$$

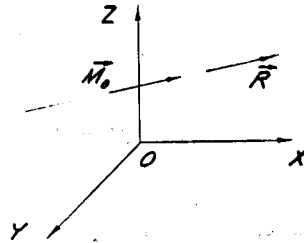
Ecuaciones de la línea de acción de R que pueden transformarse en:

$$\left\{ \begin{aligned} y + z &= 3.5 \\ 8z - x &= 11.7 \\ x + 8y &= 15.7 \end{aligned} \right.$$

quedando finalmente la ecuación:

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 1.97}{-0.125} = \frac{z - 1.46}{0.125}$$

que es la ecuación de una recta de números directores $(1, -0.125, 0.125)$ que pasa por el punto $(0, 1.97, 1.46)$



EJEMPLO 9.-

La grúa esquematizada en la figura pesa 25 Ton. y su centro de gravedad G está a 2m. del eje posterior. Dadas las demás dimensiones, halle el valor de la carga máxima W_C que puede levantar, asumiendo que la carga permisible en cada eje sea de 30 Ton.

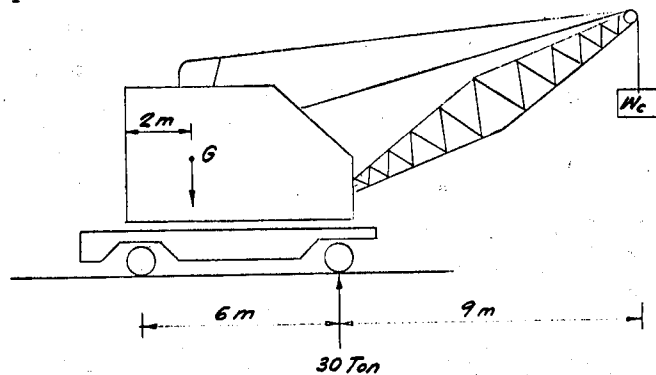
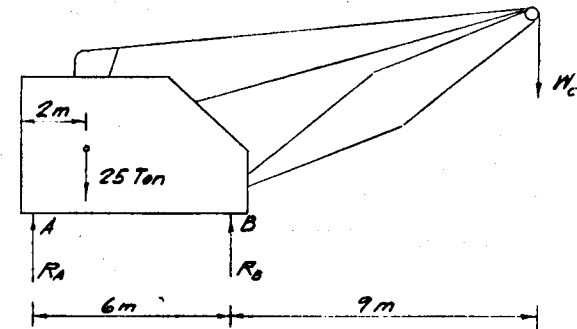


Diagrama de cuerpo libre:



$$\sum M_A = 0$$

$$25(2) - 30(6) + W_C(15) = 0$$

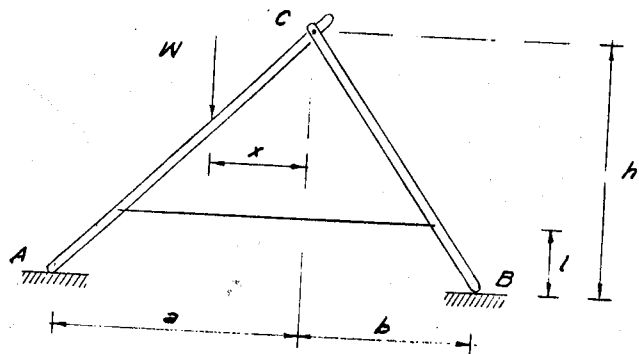
$$15W_C = 180 - 50$$

$$W_C = \frac{130}{15}$$

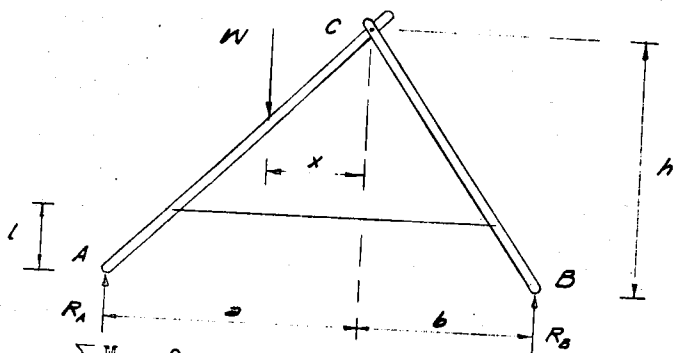
$$W_C = 8.666 \text{ [Ton]}$$

EJEMPLO 10.-

Obtenga las reacciones R_A y R_B así como la tensión en el cable en función de "x" de la esca- lera indicada.



Analisis del conjunto: -



$$\sum M_A = 0$$

$$- R_B(a + b) + W(a - x) = 0$$

$$R_B = \frac{(a - x)}{(a + b)} W \quad \dots\dots\dots(1)$$

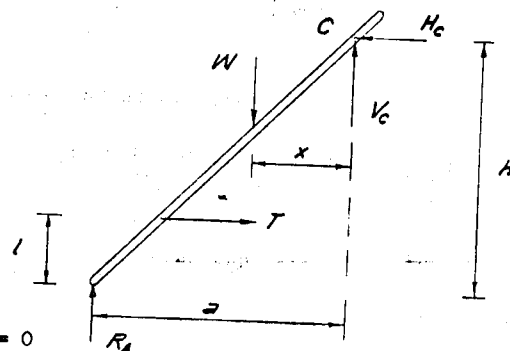
$$\sum M_B = 0$$

$$R_A(a + b) - W(b + x) = 0$$

$$R_A = \frac{(b + x)}{(a + b)} W \quad \dots\dots\dots(2)$$

Observese que al aumentar "x" disminuye R_B y R_A aumenta.

Analisis del tramo AC.



$$\sum M_C = 0$$

$$R_A(a) - W(x) - T(h - L) = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

sustituyendo (2) en (3)

$$W \frac{(b + x)}{(a + b)} a - Wx - T(h - L) = 0$$

$$T(h - L) = W \left[\frac{(b + x)}{(a + b)} a - x \right]$$

$$T(h - L) = W \left[\frac{ab + ax - ax - bx}{(a + b)} \right]$$

$$T(h - L) = W \left[\frac{b(a - x)}{(a + b)} \right]$$

$$T = W \frac{(a - x)b}{(a + b)(h - L)}$$

Observese que al aumentar "x" - disminuye T.

EJEMPLO 11.-

Determine las reacciones en G, C y B. Desprecie las fuerzas de fricción y considere el cable flexible, inextensible y sin peso.

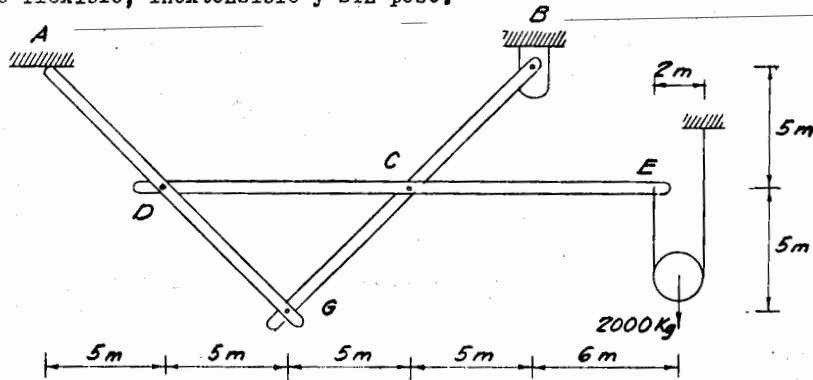
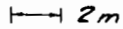
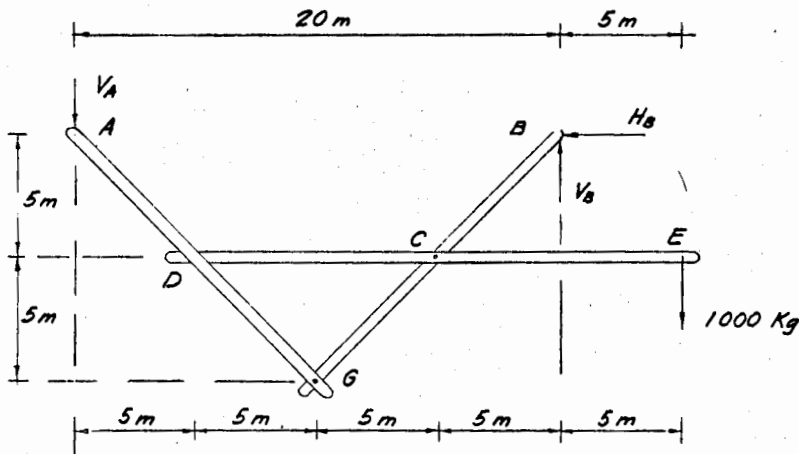


Diagrama de cuerpo libre de la polea:



$$\begin{aligned} \sum M_G = 0 \\ 2000(1) - T(2) \\ T = 1000 \text{ Kg.} \end{aligned}$$

Diagrama de cuerpo libre del conjunto ABCDEG.



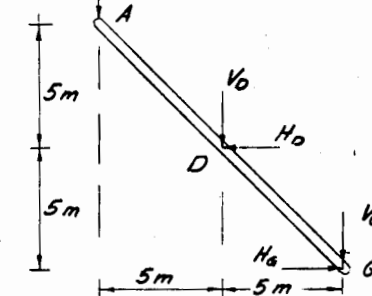
$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 & \quad \sum F_x = 0 & \quad \sum F_y = 0 \\ -V_A(20) + 1000(5) = 0 & \quad -H_B = 0 & \quad -250 + V_B - 1000 = 0 \end{aligned}$$

$V_A = 250 \text{ Kg.}$

$H_B = 0$

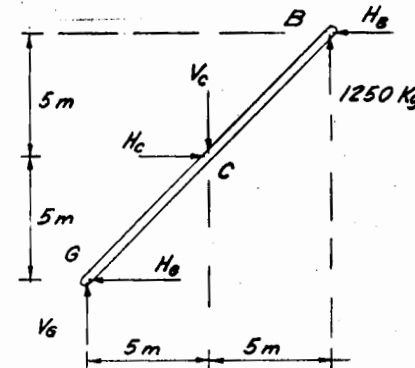
$V_B = 1250 \text{ Kg.}$

Diagrama de cuerpo libre de la barra ADG.



$$\begin{aligned} \sum M_D = 0 \\ -250(5) - H_G(5) + V_G(5) = 0 \\ V_G - H_G = 250 \dots\dots(1) \end{aligned}$$

Diagrama de cuerpo libre de la barra BCG.



$$\begin{aligned} \sum M_G = 0 \\ H_G(5) + V_G(5) - 1250(5) = 0 \\ H_G + V_G = 1250 \dots\dots(2) \\ \sum F_x = 0 \\ H_C - H_G = 0 \\ H_C = H_G \dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 \\ V_G - V_C + 1250 = 0 \dots(4) \end{aligned}$$

sumando (1) y (2)

$$2V_G = 1500$$

$V_G = 750 \text{ Kg.}$

sustituyendo en (2)

$$H_G + 750 = 1250$$

$$H_G = 500 \text{ Kg}$$

de la ecuación (3)

$$H_C = 500 \text{ Kg}$$

sustituyendo en (4)

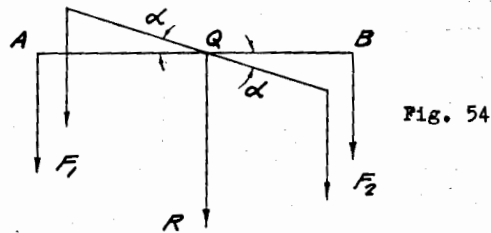
$$750 - V_C + 1250 = 0$$

$$V_C = 2000 \text{ Kg}$$

2) MOMENTO ESTATICOS Y CENTROIDES
DE AREAS PLANAS.

CENTRO DE UN SISTEMA DE FUERZAS PARALELAS

Consideremos las fuerzas F_1 y F_2 asociadas a los puntos A y B (Fig. 54)



Tomando en cuenta que, el momento de la resultante R respecto a cualquier punto es igual a la suma de los momentos de las componentes del sistema F_1 y F_2 respecto al mismo punto, se llega a la relación:

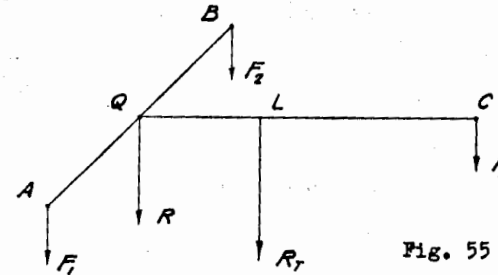
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{QB}{QA}$$

Consideremos ahora un giro de la línea AB y con la misma consideración de momentos anterior se llega a la misma relación en la siguiente forma:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{QB \cos \alpha}{QA \cos \alpha} = \frac{QB}{QA}$$

por lo que puede concluirse que la resultante R de las fuerzas F_1 y F_2 paralelas y asociadas a los puntos A y B, pasa siempre por el punto Q independientemente de su orientación respecto a la línea AB.

De la misma manera, la resultante R_T de la fuerza R y otra fuerza paralela F_3 pasa siempre por el punto L de la línea QC independientemente de su inclinación, y por lo tanto, la resultante de las fuerzas paralelas F_1 , F_2 y F_3 asociadas a los puntos A, B y C, pasa siempre por el mismo punto L del plano ABC independientemente de su orientación (Fig. 55)



Podemos concluir generalizando que, la resultante de un sistema de fuerzas paralelas con puntos de aplicación definidos, pasa siempre por el mismo punto denominado "CENTRO" del sistema de fuerzas paralelas.

Para el caso de las fuerzas peso de un conjunto de puntos materiales existe un punto fijo denominado "CENTRO DE GRAVEDAD". (Fig. 56)

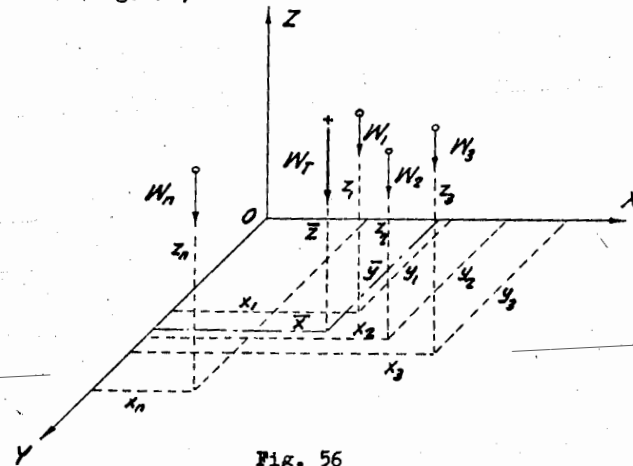


Fig. 56

La posición del "CENTRO DE GRAVEDAD" (C.G) o punto por donde pasa el peso total W_T o resultante de las fuerzas peso W_1, W_2, \dots, W_n puede determinarse obteniendo sus coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Para ello podemos tomar momentos de las fuerzas respecto a los ejes "x" e "y" para determinar los valores de \bar{x} e \bar{y} .

$$\left(\sum_{i=1}^n W_i\right)\bar{x} = W_T\bar{x} = W_1x_1 + W_2x_2 + \dots + W_nx_n = \sum_{i=1}^n W_ix_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n W_ix_i}{W_T}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n W_i\right)\bar{y} = W_T\bar{y} = W_1y_1 + W_2y_2 + \dots + W_ny_n = \sum_{i=1}^n W_iy_i$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n W_iy_i}{W_T}$$

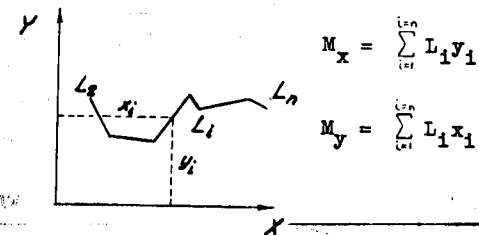
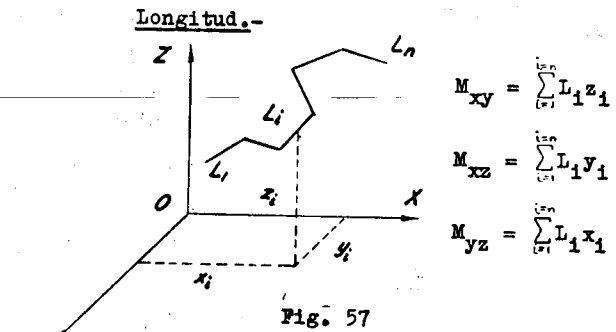
Y suponiendo un giro relativo entre fuerzas y ejes en tal forma que, estas queden normales al plano "xz" o "yz" y tomando momentos respecto al eje "x" o "y":

$$\left(\sum_{i=1}^n W_i\right)\bar{z} = W_T\bar{z} = W_1z_1 + W_2z_2 + \dots + W_nz_n = \sum_{i=1}^n W_iz_i$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n W_iz_i}{W_T}$$

En la misma forma que se define el momento de una fuerza, puede también definirse el momento estático o de primer orden de longitudes, áreas, volúmenes y masas.

Para el caso de distribuciones discretas se tiene lo siguiente (Figs. 57 y 58):



Area.-

$$M_x = \sum_{i=1}^n A_iy_i \quad M_y = \sum_{i=1}^n A_ix_i$$

Volumen.-

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^n V_iz_i \quad M_{xz} = \sum_{i=1}^n V_iy_i$$

$$M_{yz} = \sum_{i=1}^n V_ix_i$$

Masa.-

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^n m_iz_i \quad M_{xz} = \sum_{i=1}^n m_iy_i$$

$$M_{yz} = \sum_{i=1}^n m_ix_i$$

De acuerdo con el concepto de integral, para el caso de distribuciones continuas, se definen los momentos - estáticos o de primer orden de la siguiente manera:

Longitud.-

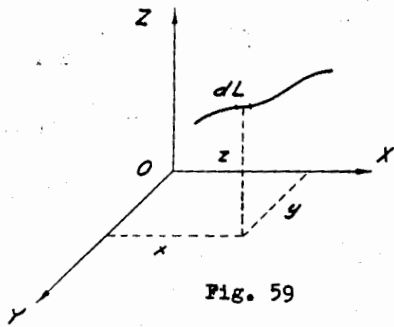


Fig. 59

$$M_{xy} = \int z dL$$

$$M_{xz} = \int y dL$$

$$M_{yz} = \int x dL$$

Los límites de integración dependen de la figura considerada.

Area.-

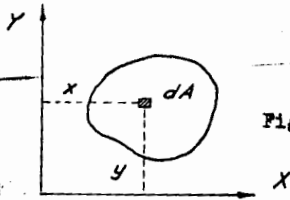


Fig. 60

$$M_x = \int y dA$$

$$M_y = \int x dA$$

Volumen.-

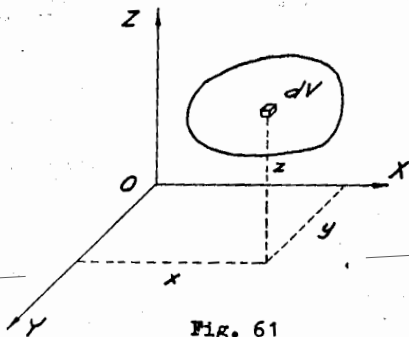


Fig. 61

$$M_{xy} = \int z dV$$

$$M_{xz} = \int y dV$$

$$M_{yz} = \int x dV$$

Masa.-

$$M_{xy} = \int z dm$$

$$M_{xz} = \int y dm$$

$$M_{yz} = \int x dm$$

Se define como CENTROIDE de un área, al punto - cuya distancia al eje de momentos multiplicada por el área - da como resultado el momento estático respecto a dicho eje (Fig. 62)

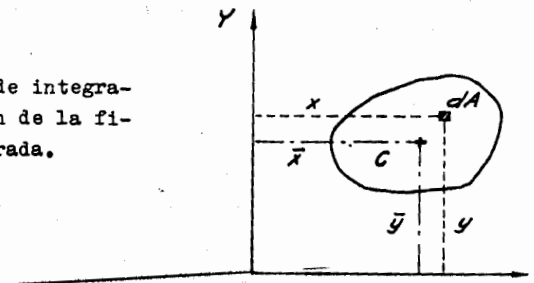


Fig. 62

(\bar{x} , \bar{y}) coordenadas del centroide

$$\int y dA = A \bar{y} \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$$

$$\int x dA = A \bar{x} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$A = \int dA \text{ (área total)}$$

En la misma forma se definen el centroide de una línea (Fig. 63), el centroide de un volumen (Fig. 64) y el - centro de masa (Fig. 65), por las siguientes expresiones:

Línea.-

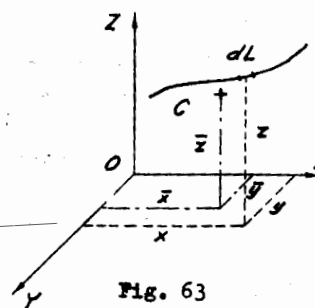


Fig. 63

(\bar{x} , \bar{y} , \bar{z}) Coord. del centroide

$$\int x dL = L \bar{x} \quad \bar{x} = \frac{\int x dL}{L}$$

$$\int y dL = L \bar{y} \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L}$$

$$\int z dL = L \bar{z} \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{L}$$

$$L = \int dL \quad (\text{longitud total})$$

Volúmen.-

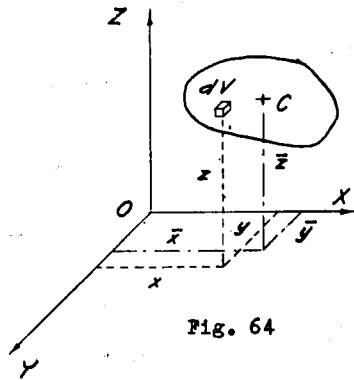


Fig. 64

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ Coord. del centroide.

$$\int x dV = V\bar{x} \quad \bar{x} = \frac{\int x dV}{V}$$

$$\int y dV = V\bar{y} \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V}$$

$$\int z dV = V\bar{z} \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V}$$

$$V = \int dV \quad (\text{volúmen total})$$

Masa.-

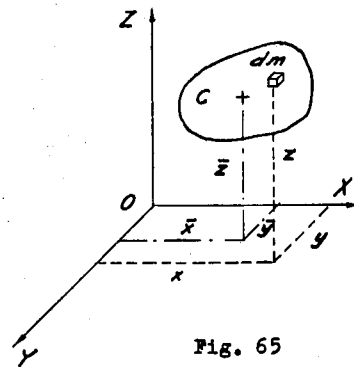


Fig. 65

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ Coordenadas del cen -
tro de masa (C. M)

$$\int x dm = m\bar{x} \quad \bar{x} = \frac{\int x dm}{m}$$

$$\int y dm = m\bar{y} \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{m}$$

$$\int z dm = m\bar{z} \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{m}$$

$$m = \int dm \quad (\text{masa total})$$

Puesto que la masa es el volúmen multiplicado por un factor de densidad, para el caso de un cuerpo homogéneo, es decir, de densidad constante, el centroide del volúmen coincide con el centro de masa.

$$\text{densidad} = \rho = \frac{dm}{dV} \quad dm = \rho dV$$

$$\int x dm = m\bar{x} \quad \bar{x} \text{ --- coordenada del centro de masa.}$$

$$\int x \rho dV = \rho V\bar{x}$$

$$\int x dV = V\bar{x} \quad \bar{x} \text{ --- coordenada del centroide del volúmen.}$$

Prácticamente el centro de masa y el centro de gravedad coinciden.

$$\int x dW = W\bar{x} \quad \bar{x} \text{ --- coordenada del centro de gravedad.}$$

$$W = mg \quad g \text{ --- aceleración de la gravedad } \hat{=} \text{ constante.}$$

$$\int x g dm = g m\bar{x}$$

$$\int x dm = m\bar{x} \quad \bar{x} \text{ --- coordenada del centro de masa.}$$

Si una figura es simétrica respecto a un plano, su centroide se encuentra en dicho plano. Si la figura es simétrica respecto a dos planos también lo será respecto a la línea de intersección de ellos y su centroide se encuentra en esa línea de intersección. Si es simétrica respecto a tres planos y por lo tanto a las dos líneas de intersección, su centroide será el punto común de estos.

Ilustraremos lo anterior para el caso de una superficie simétrica respecto a un eje (Fig. 66)

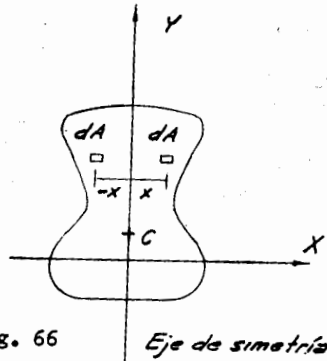


Fig. 66

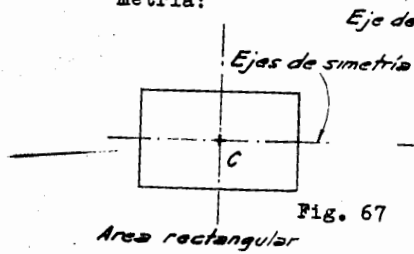
Eje de simetría

A todo punto de coordenada "x" corresponde otro de coordenada "-x"

$$\int x dA = \int x dA - x dA = 0 = A \bar{x}$$

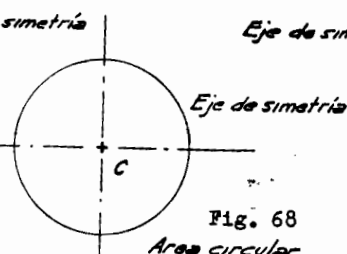
$A \neq 0 \therefore \bar{x} = 0 =$ coordenada del centroide que se encuentra en el eje de simetría

A continuación se presentan otros ejemplos de simetría:



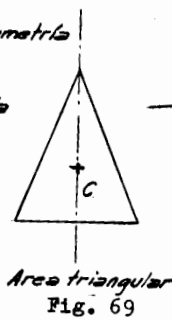
Area rectangular

Fig. 67



Area circular

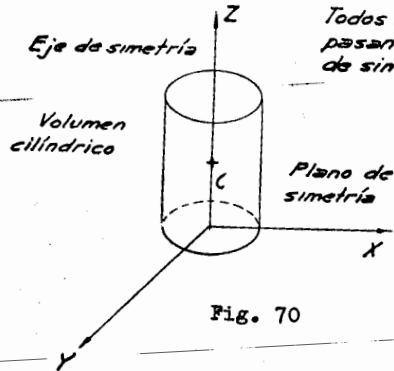
Fig. 68



Area triangular

Fig. 69

Todos los ejes que pasan por C son de simetría



Volumen cilíndrico

Fig. 70

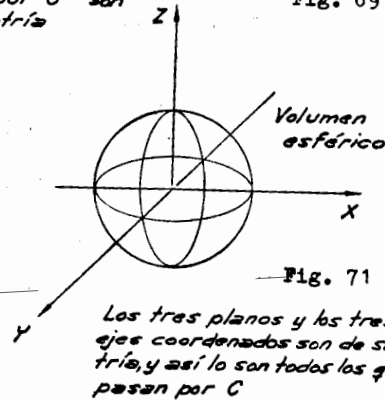
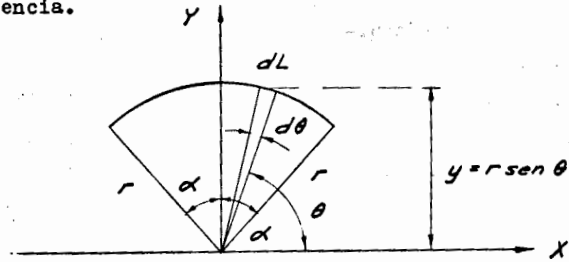


Fig. 71

Los tres planos y los tres ejes coordenados son de simetría, y así lo son todos los que pasan por C

EJEMPLO 1.-

Obtención del centroide de un arco de circunferencia.



Momento estático respecto al eje "x"

$$dL = r d\theta$$

$$\int y dL = \int r \text{sen } \theta r d\theta = r^2 \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \text{sen } \theta d\theta = \left[r^2 \text{cos } \theta \right]_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha}$$

(simetría respecto al eje "y")

Longitud total del arco: $L = 2r\alpha$

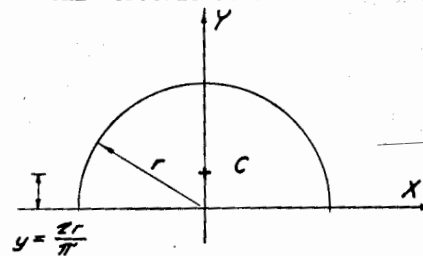
Posición del centroide sobre el eje de simetría "y"

$$\bar{y} = \frac{\int y dL}{L} = \frac{2r^2 \text{sen } \alpha}{2r\alpha}$$

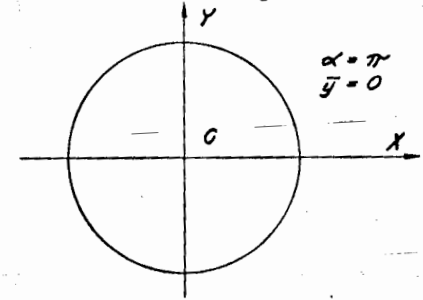
$$\bar{y} = \frac{r \text{sen } \alpha}{\alpha}$$

Casos particulares.-

Semi-circunferencia

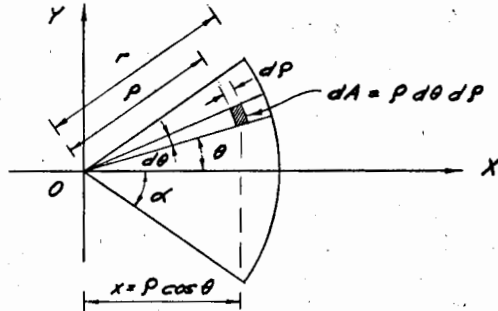


Circunferencia completa



EJEMPLO 2.-

Centroide de un sector circular.



La figura es simétrica respecto al eje "x", por lo que su centroide se encuentra sobre dicho eje.

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$A = \int dA = \text{área total}$$

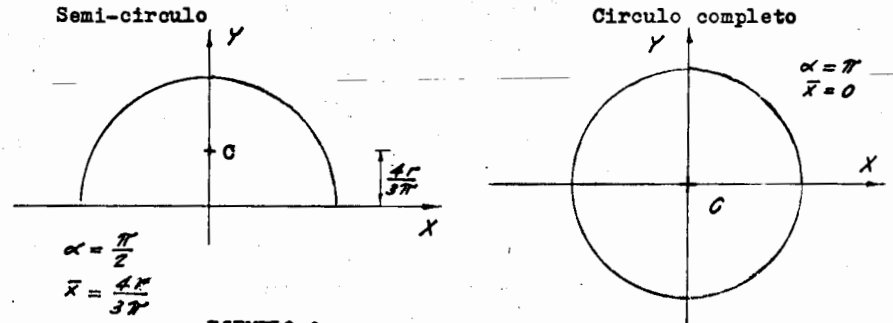
$$\begin{aligned} \int x dA &= \iint \rho \cos \theta \rho d \rho d \theta = \int_0^r \rho^2 d \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d \theta \\ &= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^r [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r^3}{3} 2 \sin \alpha = \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int dA = \iint \rho d \theta d \rho = \int_0^r \rho d \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} d \theta \\ &= \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^r [\theta]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r^2}{2} 2\alpha = r^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin \alpha}{r^2 \alpha}$$

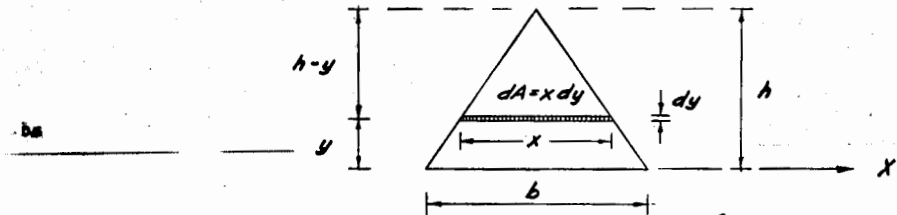
$$\bar{x} = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Casos particulares.-



EJEMPLO 3.-

Centroide de un triángulo.



$$\text{Momento estático respecto al eje "x"} = M_x = \int y dA$$

$$\text{Área total} = A = \int dA$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

$$\int y dA = \int y x dy$$

por triángulos semejantes

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$x = \frac{b}{h} (h-y)$$

con lo que

$$\int y dA = \int y \frac{b}{h} (h - y) dy = \int_0^h (by - \frac{b}{h} y^2) dy$$

$$= \left[b \frac{y^2}{2} - \frac{b}{h} \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^2}{2} - \frac{bh^2}{3} = \frac{bh^2}{6}$$

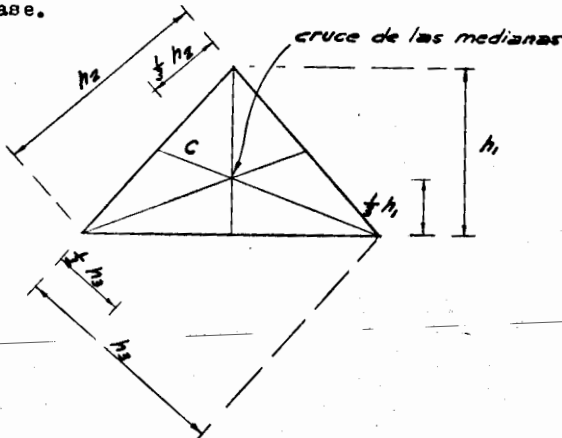
$$\int dA = A = \int_0^h x dy = \int_0^h \frac{b}{h} (h - y) dy = \int_0^h (b - \frac{b}{h} y) dy$$

$$A = \left[by - \frac{b}{h} \frac{y^2}{2} \right]_0^h = bh - \frac{bh}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$

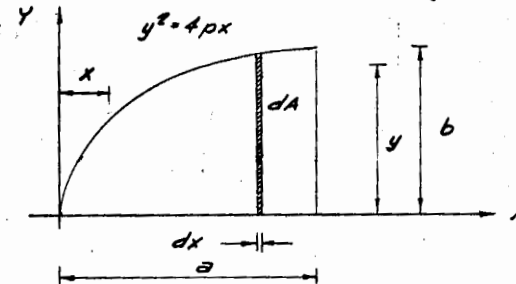
$$\bar{y} = \frac{1}{3} h$$

Observese que las medianas cortan a todos los elementos de área a la mitad, por lo que concluimos que el centroide de un área circular se encuentra en el cruce de las medianas a la tercera parte de la altura medida desde cualquier base.



EJEMPLO 4.-

Centroide del área bajo una parábola



para el punto P(a, b)

$$b^2 = 4pa \quad p = \frac{b^2}{4a}$$

por lo que la ecuación de la parábola queda:

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x$$

además:

$$M_y = \int x dA = \int xy dx$$

pero:

$$y = b \sqrt{\frac{x}{a}}$$

$$M_y = \int x b \sqrt{\frac{x}{a}} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int x^{3/2} dx$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a}} \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^a = \frac{2}{5} a^2 b$$

$$M_x = \int \frac{y}{2} dA = \int \frac{y}{2} y dx = \frac{1}{2} \int y^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{b^2}{a} x dx = \frac{b^2}{2a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{4} ab^2$$

G-

$$A = \int dA = \int y dx = \int_0^a \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{x} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^a = \frac{2}{3} ab$$

puesto que:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A}$$

tenemos:

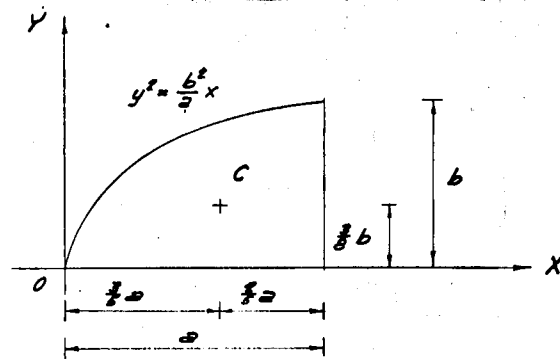
$$\bar{x} = \frac{\frac{2}{5} a^2 b}{\frac{2}{3} ab}$$

$$\bar{x} = \frac{3}{5} a$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{4} ab^2}{\frac{2}{3} ab}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{8} b$$

RESUMEN:



CENTROIDE DE SUPERFICIES COMPUESTAS

Si una superficie puede dividirse en partes cuyos centroides se conocen, entonces el momento de toda la superficie respecto a cualquier plano o eje se puede obtener sin tener que recurrir a los métodos de integración. El momento de la superficie compuesta es la suma algebraica de los momentos de las diferentes partes.

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, son las áreas de las partes y $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n$, sus distancias centroidales respectivas, entonces tenemos:

$$a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + a_3 \bar{x}_3 + \dots + a_n \bar{x}_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n a_i} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \bar{x}_i}{A}$$

CENTROIDE DE CUERPOS COMPUESTOS

Si un cuerpo se puede dividir en partes cuyos centroides se conocen, entonces se puede obtener el centroide del volumen del cuerpo aplicando el mismo principio que para la superficie compuesta.

$$v_1 \bar{x}_1 + v_2 \bar{x}_2 + v_3 \bar{x}_3 + \dots + v_n \bar{x}_n = (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i \bar{x}_i}{V}$$



ACULTAD DE INGENIERIA

611201

Si además se conoce la densidad de cada parte o si el cuerpo es homogéneo, se puede calcular su centro de masa en igual forma:

$$v_1 \rho_1 \bar{x}_1 + v_2 \rho_2 \bar{x}_2 + v_3 \rho_3 \bar{x}_3 + \dots + v_n \rho_n \bar{x}_n =$$

$$= (v_1 \rho_1 + v_2 \rho_2 + v_3 \rho_3 + \dots + v_n \rho_n) \bar{x}$$

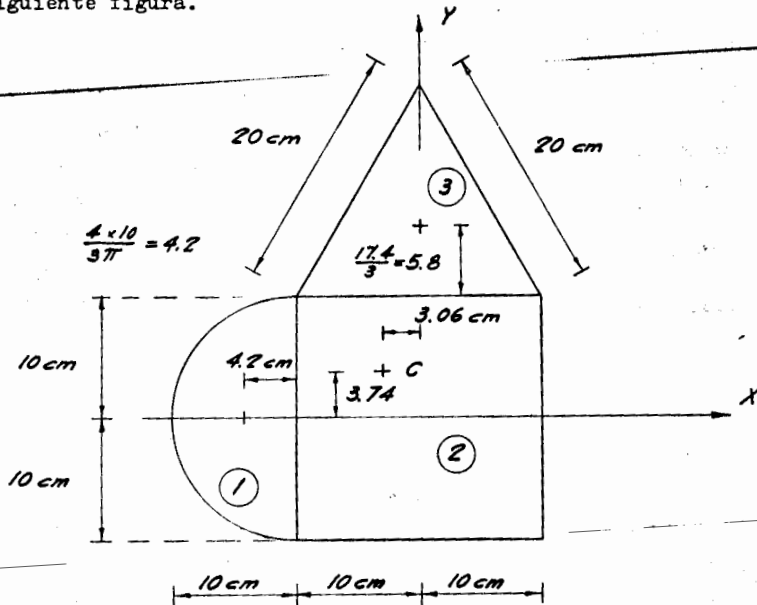
$$\sum_{i=1}^{i=n} v_i \rho_i \bar{x}_i = M \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i \rho_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{i=n} v_i \rho_i} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} v_i \rho_i \bar{x}_i}{M}$$

EJEMPLO 5.-

Obtener el centroide de área de la

siguiente figura.



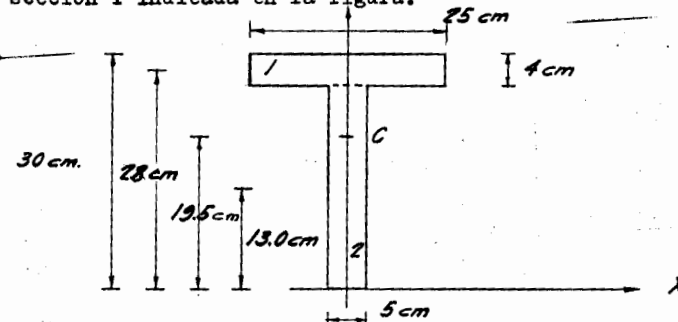
NUMERO	(A) AREA (cm ²)	x (cm)	y (cm)	Ax (cm ³)	Ay (cm ³)
1	157	-14.2	0	-2220	0
2	400	0	0	0	0
3	173	0	15.8	0	2730
SUMAS	730			-2220	2730

$$\bar{x} = \frac{\sum Ax}{\sum A} = \frac{-2220}{730} = -3.06 \text{ cm} \quad \boxed{\bar{x} = -3.06 \text{ cm}}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{2730}{730} = 3.74 \text{ cm} \quad \boxed{\bar{y} = 3.74 \text{ cm}}$$

EJEMPLO 6.-

Determinar el centroide del área de la sección T indicada en la figura.



Puesto que existe simetría respecto al eje "y" el centroide se encuentra sobre dicho eje.

Momento estático respecto al eje "x" = $M_x = \sum Ay$

$$M_x = 4(25)(28) + 5(26)(13) = 2800 + 1690$$

$$M_x = 4490 \text{ cm}^3$$

$$\text{Area total} = A = \sum A$$

$$A = 25(4) + 26(5) = 100 + 130$$

$$A = 230 \text{ cm}^2$$

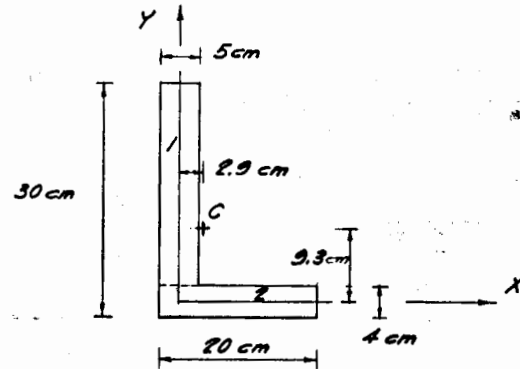
$$\bar{y} = \frac{\sum M_x}{A} = \frac{4490}{230}$$

$$\bar{y} = 19.5 \text{ cm}$$

EJEMPLO 7.-

Determinar el centroide de la siguiente

sección L.



3) MOMENTOS DE INERCIA Y EJES PRINCIPALES
DE AREAS PLANAS.

NUMERO	(A) AREA (cm ²)	x (cm)	y (cm)	Ax (cm ³)	Ay (cm ³)
1	130	0	15	0	1950
2	80	7.5	0	600	0
SUMAS	210			600	1950

$$\bar{x} = \frac{600}{210} = 2.9 \text{ cm}$$

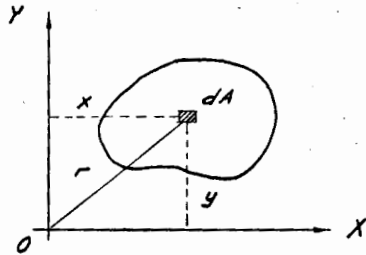
$$\bar{x} = 2.9 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{1950}{210} = 9.3 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = 9.3 \text{ cm}$$

MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS PLANAS

Consideremos el área de una superficie plana y los ejes coordenados ortogonales "xy"



En muchos problemas de ingeniería aparecen expresiones tales como las que se presentan a continuación, por lo que es necesario estudiar sus características y relaciones. Estas expresiones se denominan "Momentos de Inercia o de Segundo Orden".

Momento de inercia respecto al eje "x"

$$I_x = \int y^2 dA$$

Momento de inercia respecto al eje "y"

$$I_y = \int x^2 dA$$

Momento polar de inercia respecto a un eje normal al plano del área que la corta en el origen "O" de las coordenadas "x" e "y".

$$I_p = \int r^2 dA$$

Producto de inercia respecto a los ejes "xy"

$$I_{xy} = \int xy dA$$

A continuación analizaremos la relación que existe entre los momentos de inercia respecto a los ejes "x" e "y" y el momento polar de inercia:

$$I_p = \int r^2 dA$$

$$\text{pero: } r^2 = x^2 + y^2$$

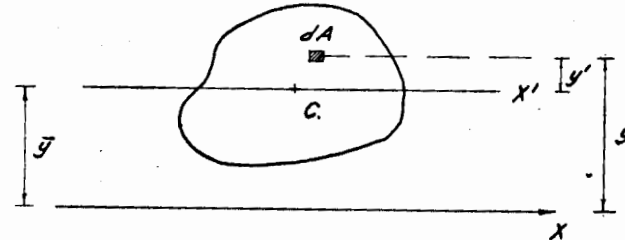
$$I_p = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$

Es decir, el momento polar de inercia es igual a la suma de los momentos respecto a los ejes "x" e "y"

TRASLACION DE EJES

Consideremos un área y dos ejes paralelos uno de los cuales pasa por su centroide.



$$I_x = \int y^2 dA = \int (\bar{y} + y')^2 dA$$

$$= \int (\bar{y}^2 + 2\bar{y}y' + y'^2) dA$$

$$= \int \bar{y}^2 dA + 2\int \bar{y}y' dA + \int y'^2 dA$$

pero como: $\bar{y} = \text{cte}$ y $\int y' dA = 0$

$$I_x = \int y'^2 dA + \bar{y}^2 \int dA$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2$$

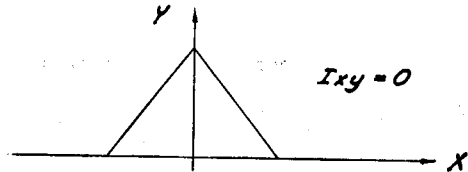
O sea, el momento de inercia respecto a un eje - cualquiera es igual al momento de inercia respecto a otro - eje centroidal paralelo al anterior más el producto del area por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes (Teorema de Steiner, de los ejes paralelos)

UNIDADES

$$(L^2)(L^2) = L^4, \text{ cm}^4, \text{ in}^4, \text{ etc.}$$

SIMETRIA

Puede observarse que el producto de inercia respecto a ejes, uno de los cuales es de simetría vale cero



forma:

El radio de giro (k) se define en la siguiente -

$$I_x = k_x^2 A$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (L, \text{ cm, in, etc})$$

$$I_y = k_y^2 A$$

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$I_p = k_p^2 A$$

$$k_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}}$$

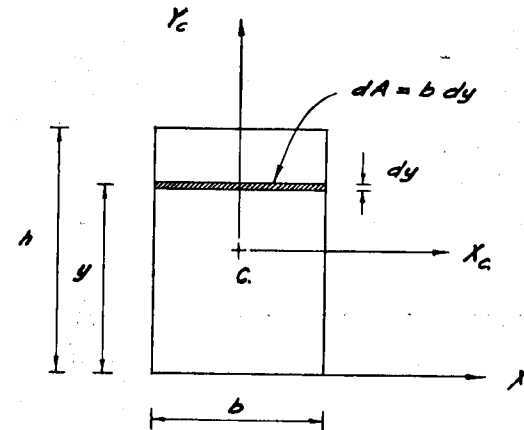
puesto que: $I_p = I_x + I_y$

$$k_p^2 A = k_x^2 A + k_y^2 A$$

$$k_p^2 = k_x^2 + k_y^2$$

EJEMPLO 1.-

Obtención del momento de inercia respecto a la base y a un eje centroidal paralelo a la base de un rectángulo.



$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = \left[b \frac{y^3}{3} \right]_0^h = b \frac{h^3}{3}$$

$$\boxed{I_x = \frac{1}{3} bh^3}$$

Por el teorema de los ejes paralelos

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$

$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{1}{3} bh^3 - bh \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

$$\boxed{\bar{I}_x = \frac{1}{12} bh^3}$$

Observese que:

$$\bar{I}_{xy} = 0$$

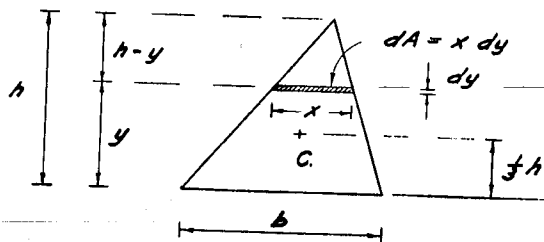
En la misma forma puede obtenerse:

$$I_y = \frac{1}{3} hb^3$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} hb^3$$

EJEMPLO 2.-

Momento de inercia de un triángulo -
respecto a la base y a un eje centroidal paralelo a ella.



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 x dy$$

por triángulos semejantes

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}, \quad x = \frac{b}{h} (h-y)$$

$$I_x = \int y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy$$

$$= b \int_0^h y^2 dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy$$

$$= \left[b \frac{y^3}{3} \right]_0^h - \left[\frac{b}{h} \frac{y^4}{4} \right]_0^h$$

$$= \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4}$$

$$\boxed{I_x = \frac{1}{12} bh^3}$$

y por el teorema de los ejes paralelos

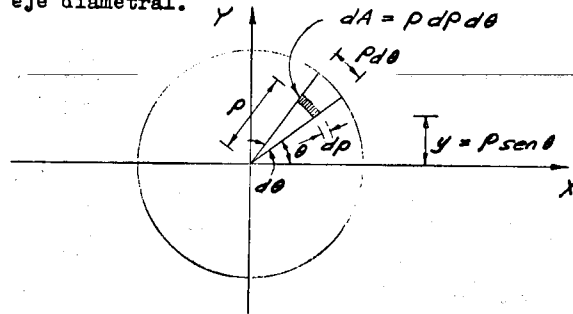
$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{bh}{2} \left(\frac{1}{3} h \right)^2$$

$$\boxed{\bar{I}_x = \frac{1}{36} bh^3}$$

EJEMPLO 3.-

Momento de inercia de un círculo respecto a un eje diametral.



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \int (\rho \operatorname{sen} \theta)^2 \rho d\rho d\theta$$

$$= \int \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta d\rho d\theta$$

$$= \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{r^4}{4} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \cdot 2 d\theta \right]$$

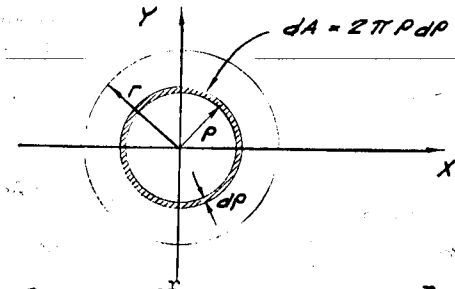
$$= \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta - \frac{r^4}{8} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta \cdot 2 d\theta$$

$$= \frac{r^4}{8} \left[\theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{4} = I_y$$

EJEMPLO 4.-

Momento polar de inercia de un círculo respecto a su centro.



$$I_p = \int \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r = 2\pi \frac{r^4}{4}$$

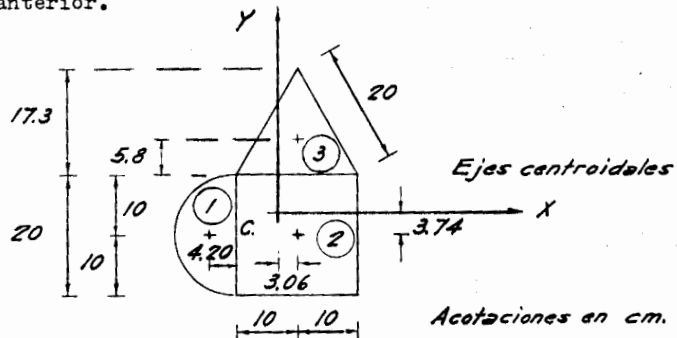
$$I_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

pero también de acuerdo con el ejemplo 3 y lo visto al principio:

$$I_p = I_x + I_y = \frac{\pi r^4}{4} + \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

EJEMPLO 5.-

Obtener los momentos de inercia respecto a los ejes centroidales de la figura del ejemplo 5 del capítulo anterior.



Nº	A	\bar{I}_x	\bar{I}_y	\bar{y}	\bar{x}	$A\bar{y}^2$	$A\bar{x}^2$	I_x	I_y
	cm ²	cm ⁴	cm ⁴	cm	cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
1	157	3927	1158	-3.74	-11.14	2196	19483	6123	20641
2	400	13333	13333	-3.74	3.06	5596	3745	18928	17078
3	173	2876	2883	12.06	3.06	25161	1620	28037	4503
Σ	730							53088	42222

$$\bar{I}_{x_1} = \frac{1}{8} \pi (10)^4 = 3927 \quad \bar{I}_{y_1} = \frac{1}{8} \pi (10)^4 - 157(4.2)^2 = 1158$$

$$\bar{I}_{x_2} = \frac{1}{12} 20(20)^3 = 13333 \quad \bar{I}_{y_2} = \frac{1}{12} 20(20)^3 = 13333$$

$$\bar{I}_{x_3} = \frac{1}{36} 20(17.3)^3 = 2876 \quad \bar{I}_{y_3} = 2\left(\frac{1}{12}\right)17.3(10)^3 = 2883$$

RESUMEN:

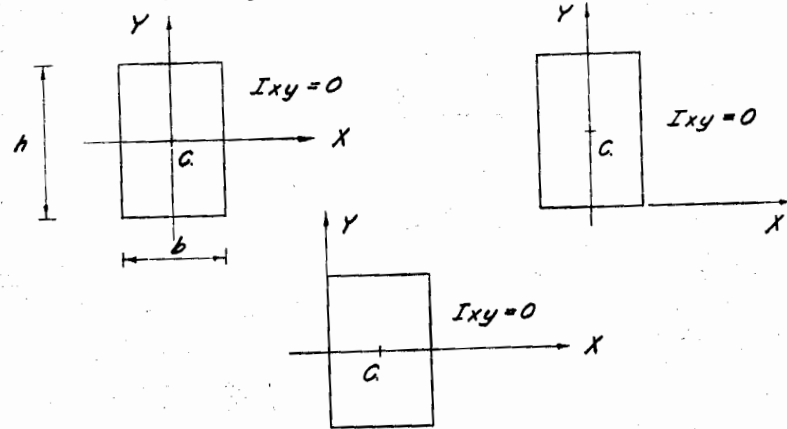
$$I_x = 53088 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 42222 \text{ cm}^4$$

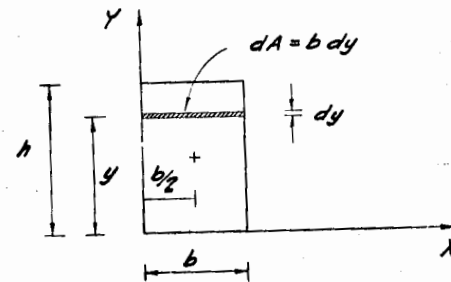
EJEMPLO 6.-

Producto de inercia de un rectángulo.

Si los ejes son de simetría resulta:



Si los ejes coinciden con los lados:



$$I_{xy} = \int xy \, dA = \int xyb \, dy$$

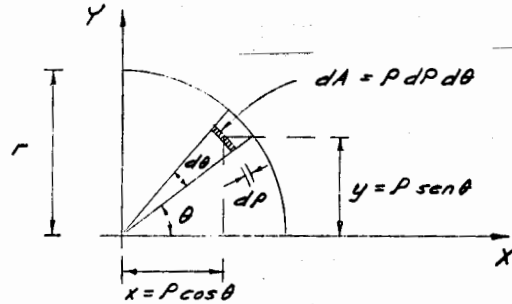
$$\text{como: } x = \frac{b}{2} \quad I_{xy} = \int_0^h \frac{b^2}{2} y \, dy = \frac{b^2}{4} [y^2]_0^h = \frac{b^2}{4} h^2$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

EJEMPLO 7.-

Producto de inercia de un cuadrante

de circulo.



$$I_{xy} = \int xy \, dA = \int \rho \cos \theta \rho \operatorname{sen} \theta \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int \rho^3 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \, d\rho \, d\theta$$

como: $\cos \theta \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta$

$$I_{xy} = \int_0^r \rho^3 \, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \, 2 \, d\theta$$

$$= \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{r^4}{4} \left[\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

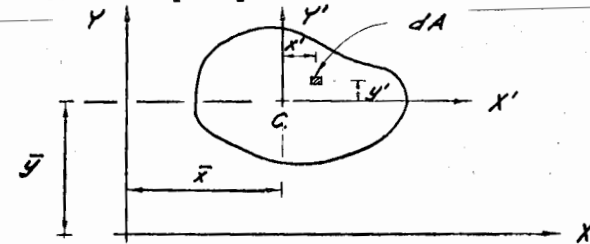
como: $\frac{1}{4} [\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{4}$

entonces:

$$I_{xy} = \frac{1}{8} r^4$$

TRASLACION DE EJES PARA EL PRODUCTO DE INERCIA

Consideremos un area y dos sistemas de ejes para los uno de los cuales pasa por su centroide.



$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

pero: $x = \bar{x} + x'$

$$y = \bar{y} + y'$$

$$I_{xy} = \int (\bar{x} + x')(\bar{y} + y') \, dA$$

$$= \int \bar{x}\bar{y} \, dA + \int \bar{x}y' \, dA + \int \bar{y}x' \, dA + \int x'y' \, dA$$

$$= \bar{x}\bar{y} \int dA + \bar{x} \int y' \, dA + \bar{y} \int x' \, dA + \int x'y' \, dA$$

puesto que:

$$\int dA = A$$

$$\int y' \, dA = 0$$

$$\int x' \, dA = 0$$

$$\int x'y' \, dA = I_{x'y'} = \bar{I}_{xy}$$

nos queda:

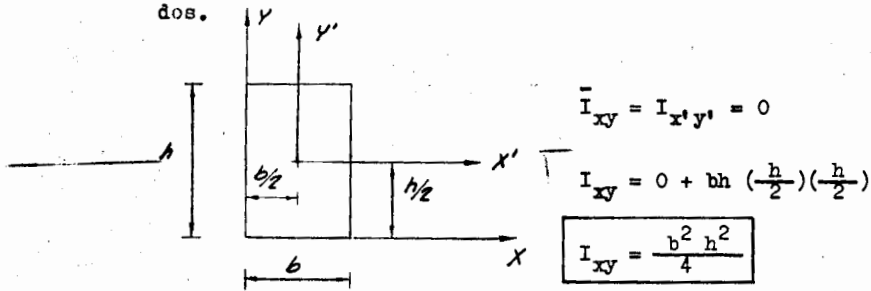
$$I_{xy} = A\bar{x}\bar{y} + 0 + 0 + \bar{I}_{xy}$$

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\bar{x}\bar{y}$$

Es decir, el producto de inercia respecto a un sistema cualquiera de ejes es igual al correspondiente a otro sistema paralelo que pasa por el centroide, más el producto del área total por las coordenadas centroidales.

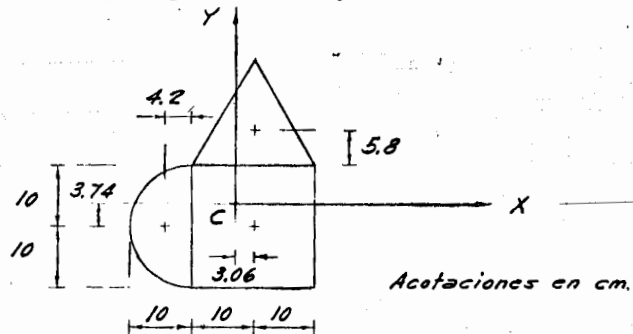
EJEMPLO 8.-

Utilizando la expresión anterior obtener el producto de inercia de un rectángulo respecto a sus lados.



EJEMPLO 9.-

Obtención del producto de inercia del área del ejemplo 5, respecto a sus ejes centroidales.



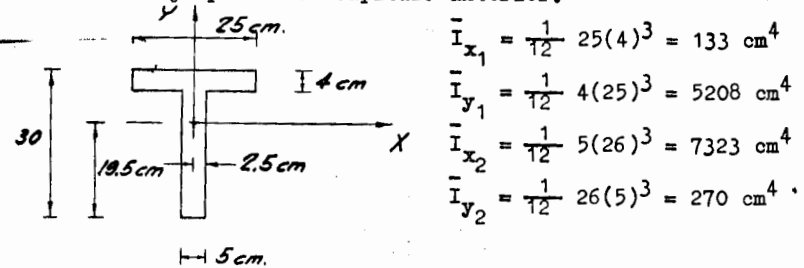
Nº	A cm ²	\bar{x} cm	\bar{y} cm	$A\bar{x}\bar{y}$ cm ⁴	\bar{I}_{xy} cm ⁴	I_{xy} cm ⁴
1	157	-11.14	-3.74	6541	0	6541
2	400	3.06	-3.74	-4577	0	-4577
3	173	3.06	12.06	6384	0	6384
Σ	730			8348	0	8348

RESUMEN:

$I_{xy} = 8348 \text{ cm}^4$

EJEMPLO 10.-

Obtención de los momentos de inercia y producto de inercia respecto a sus ejes centroidales del área del ejemplo 6 del capítulo anterior.



$$\bar{I}_{x_1} = \frac{1}{12} 25(4)^3 = 133 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{y_1} = \frac{1}{12} 4(25)^3 = 5208 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{x_2} = \frac{1}{12} 5(26)^3 = 7323 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{y_2} = \frac{1}{12} 26(5)^3 = 270 \text{ cm}^4$$

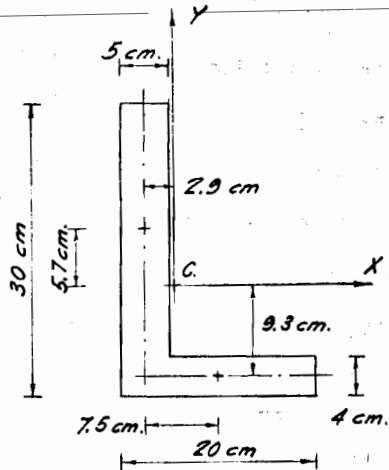
Nº	A cm ²	\bar{x} cm	\bar{y} cm	\bar{I}_{x_1} cm ⁴	\bar{I}_{y_1} cm ⁴	\bar{I}_{x_2} cm ⁴	\bar{I}_{y_2} cm ⁴	$A\bar{y}^2$ cm ⁴	$A\bar{x}^2$ cm ⁴	I_{x_1} cm ⁴	I_{y_1} cm ⁴	$A\bar{x}\bar{y}$ cm ⁴	I_{xy} cm ⁴
1	100	0	8.5	133	5208	0	7225	0	7358	5208	0	0	0
2	130	0	-6.5	7323	270	0	5492	0	12815	270	0	0	0
Σ	230			7456	5478	0	12717	0	20173	5478	0	0	0

RESUMEN:

$I_x = 20173 \text{ cm}^4$
 $I_y = 5478 \text{ cm}^4$
 $I_{xy} = 0$

EJEMPLO 11.-

Obtenga los momentos de inercia y el producto de inercia de la siguiente figura respecto a sus ejes centroidales "x" e "y"



$$\bar{I}_{x_1} = \frac{1}{12} 5(26)^3 = 7323 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{y_1} = \frac{1}{12} 26(5)^3 = 270 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy_1} = 0$$

$$\bar{I}_{x_2} = \frac{1}{12} 20(4)^3 = 107 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{y_2} = \frac{1}{12} 4(20)^3 = 2666 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy_2} = 0$$

Nº	A	\bar{x}	\bar{y}	\bar{I}_x	\bar{I}_y	I_{xy}	$A\bar{y}^2$	$A\bar{x}^2$	I_x	I_y	$A\bar{x}\bar{y}$	I_{xy}
	cm ²	cm	cm	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴	cm ⁴
1	130	-2.9	5.7	7323	270	0	4223	1093	11546	1363	-2148	-2148
2	80	4.6	-9.3	107	2666	0	6919	1693	7026	4359	-3422	-3422
Σ	210			7430	2936		11142	2786	18572	5722	-5570	-5570

RESUMEN:

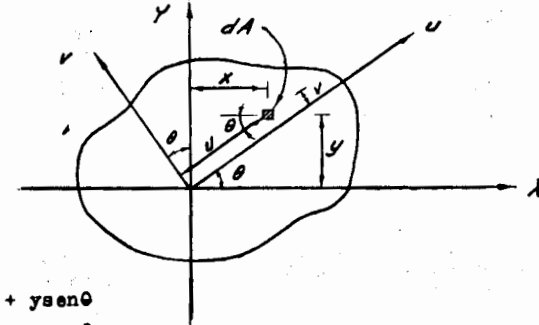
$$I_x = 18572 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 5722 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = -5570 \text{ cm}^4$$

ROTACION DE EJES

Consideremos los ejes "x" e "y" que se cortan en el punto "o" de un arco plano y los ejes "u" y "v" que se cortan en el mismo punto y forman un ángulo θ con los anteriores. A partir de los momentos de inercia respecto a los primeros es posible obtener los correspondientes a los segundos.



$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Momento de inercia respecto al eje u

$$I_u = \int v^2 dA$$

$$= \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA = \int (y^2 \cos^2 \theta - 2y \cos \theta x \sin \theta + x^2 \sin^2 \theta) dA$$

$$= \cos^2 \theta \int y^2 dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA$$

$$I_u = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2 I_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (1)$$

pero:

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

por lo tanto:

$$I_u = I_x \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + I_y \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) - I_{xy} (\sin 2\theta)$$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

Con las expresiones 1 o 2 se puede obtener el valor de I_u en función de I_x , I_y , I_{xy} y θ

En la misma forma el momento de inercia respecto al eje v es:

$$\begin{aligned} I_v &= \int u^2 dA \\ &= \int (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 dA \\ &= \int (x^2 \cos^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \sin^2 \theta) dA \\ &= \cos^2 \theta \int x^2 dA + \sin^2 \theta \int y^2 dA + 2 \cos \theta \sin \theta \int xy dA \\ I_v &= I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (3) \end{aligned}$$

pero:

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \cos \theta &= \sin 2\theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} ; \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} I_v &= I_x \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + I_y \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + I_{xy} (\sin 2\theta) \\ I_v &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (4) \end{aligned}$$

Con las expresiones 3 o 4 podemos obtener I_v en función de I_x , I_y , I_{xy} , y θ

Sumando las expresiones 2 y 4 se obtiene:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = I_p$$

Es decir, para un punto dado de un área, la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes rectangulares es constante e igual al momento polar de inercia.

Además:

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \int uv dA = \text{producto de inercia respecto a los ejes "uv"} \\ &= \int ((x \cos \theta + y \sin \theta)(y \cos \theta - x \sin \theta)) dA \\ &= \int (xy \cos^2 \theta + y^2 \sin \theta \cos \theta - x^2 \cos \theta \sin \theta - xy \sin^2 \theta) dA \\ &= \cos^2 \theta \int xy dA + \sin \theta \cos \theta \int y^2 dA - \cos \theta \sin \theta \int x^2 dA - \sin^2 \theta \int xy dA \\ &= I_{xy} \cos^2 \theta - I_{xy} \sin^2 \theta + I_x \sin \theta \cos \theta - I_y \sin \theta \cos \theta \\ I_{uv} &= I_{xy} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) - I_{xy} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + I_x \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right) - I_y \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right) \\ I_{uv} &= I_{xy} \cos 2\theta + \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) \sin 2\theta \quad (5) \end{aligned}$$

Expresión con la cual se puede obtener I_{uv} en función de I_x , I_y , I_{xy} , θ .

Obsérvese que al girar los ejes un ángulo 90° se aumenta 2θ en 180° y el producto de inercia conservando su valor absoluto cambia de signo.

EJES PRINCIPALES

Para un punto dado de un área, es posible obtener un par de ejes para los cuales el momento de inercia es máximo y mínimo, dichos ejes se denominan ejes principales.

puesto que:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

derivando respecto a θ

$$\frac{dI_u}{d\theta} = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right) (-2 \sin 2\theta) - I_{xy} (2 \cos 2\theta)$$

Igualando a cero para obtener los valores máximo o mínimo.

$$- (I_x - I_y) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (6)$$

Con esta expresión se pueden obtener dos valores del ángulo θ , los cuales difieren 90° , que nos dan los valores máximo o mínimo del momento de inercia, siendo éstos los siguientes:

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{I_x - I_y}{2} \left(\frac{I_y - I_x}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \right)$$

$$\pm I_{xy} \left(\frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \right)$$

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{(I_x - I_y)^2}{2\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \pm \frac{2I_{xy}^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}{2\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}{2\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (7)$$

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (8)$$

Con estas expresiones podemos obtener los valores máximo y mínimo del momento de inercia del área respecto a ejes que pasan por un punto dado de ella.

Es conveniente observar que para los ejes principales el producto de inercia es nulo; o sea, substituyendo (6) en (5)

$$I_{uv} = I_{xy} \frac{I_y - I_x}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} + \frac{I_x - I_y}{2} \frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} = 0$$

Por lo que los ejes de simetría son principales, pero no todos los ejes principales son de simetría.

CIRCULO DE MOHR

De la expresión (2) antes presentada

$$I_u - \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

y la expresión (5)

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (5)$$

Elevando al cuadrado (2) y (5)

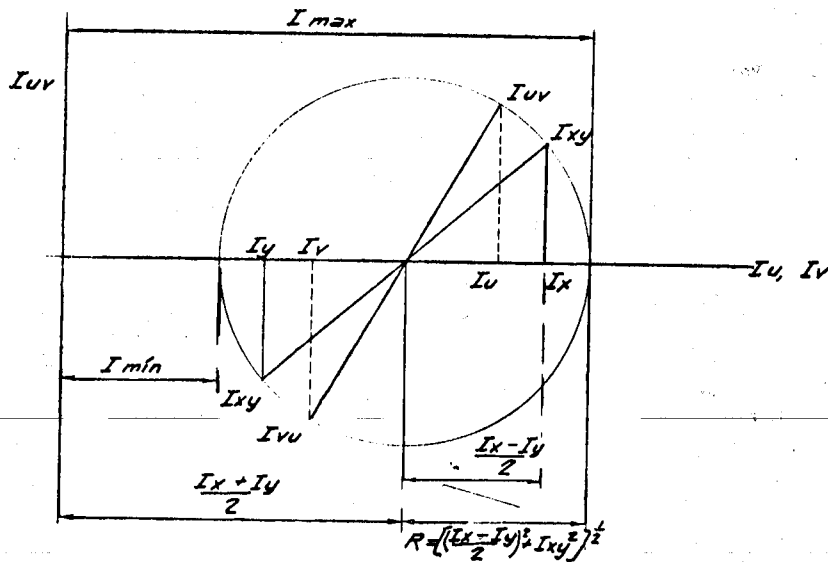
$$(I_u - \frac{I_x + I_y}{2})^2 = (\frac{I_x - I_y}{2})^2 \cos^2 2\theta - (I_x - I_y) I_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta + I_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

$$I_{uv}^2 = (\frac{I_x - I_y}{2})^2 + I_{uv}^2 = (\frac{I_x - I_y}{2})^2 (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) + I_{xy}^2 (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

$$(I_u - \frac{I_x + I_y}{2})^2 + I_{uv}^2 = (\frac{I_x - I_y}{2})^2 + I_{xy}^2$$

Observando esta expresión podemos ver que se trata de la ecuación de una circunferencia, relacionando las variables I_u y I_{uv} , de centro $C (\frac{I_x + I_y}{2}, 0)$ y radio

$$R = \sqrt{(\frac{I_x - I_y}{2})^2 + I_{xy}^2} = R = \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$



Para los ejes principales se obtiene de la figura:

$$\tan 2\theta = \frac{-I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

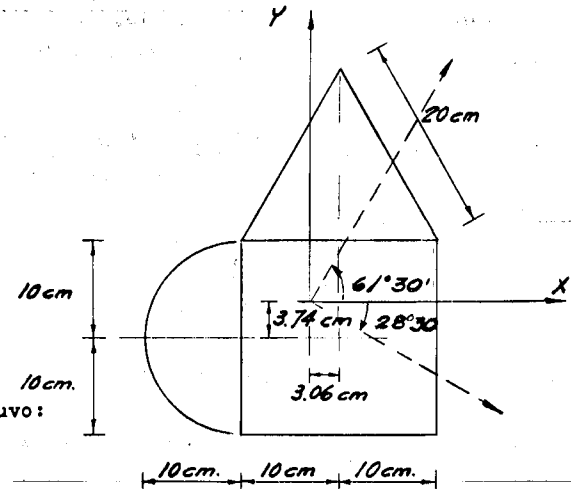
$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

El círculo correspondiente nos representa el estado de inercia del área en estudio.

EJEMPLO 12:

Obtención de los ejes principales centroidales y los momentos de inercia máximo y mínimo de la figura de los ejemplos 5 y 9



anteriormente se obtuvo:

$$I_x = 53088 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 42222 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 8348 \text{ cm}^4$$

De acuerdo con estos valores, podemos obtener la inclinación de los ejes principales en la siguiente forma:

$$\tan 2\theta = \frac{2(8348)}{42222 - 53088} = \frac{16696}{-10866} = -1.54$$

$$2\theta = \text{ang tan}(-1.54)$$

$$2\theta = -57^\circ 00' \quad 123^\circ 00'$$

$$\theta = -28^\circ 30' \quad 61^\circ 30'$$

Los valores máximos de los momentos de inercia se obtienen de la siguiente forma:

$$I_{\max/\min} = \frac{53088 + 42222}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(10866)^2 + 4(8348)^2}$$

$$= 47655 \pm \frac{1}{2} \sqrt{118069956 + 278756416}$$

$$= 47655 \pm \frac{1}{2} 19920 = 47655 \pm 9960$$

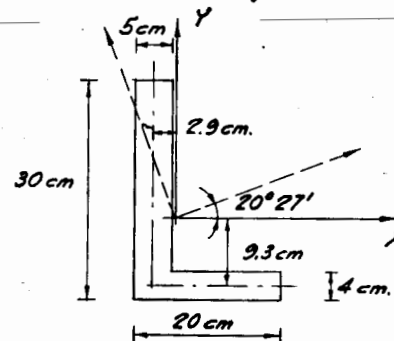
RESUMEN

$$I_{\max} = 57615 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 37695 \text{ cm}^4$$

EJEMPLO 13:

Obtención de los ejes principales centroidales y los momentos de inercia máxima y mínima de la figura del ejemplo 11.



$$I_x = 18572 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 5722 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = -5570 \text{ cm}^4$$

de 6

$$\tan 2\theta = \frac{2(-5570)}{5722 - 18572} = \frac{-11140}{-12850} = 0.8669$$

$$2\theta = \text{ang tan}(0.8669); \quad 2\theta = 40^\circ 55'; \quad 220^\circ 55'$$

$$\theta = 20^\circ 27'; \quad 110^\circ 27'$$

$$I_{20^\circ 27'} = \frac{18572 + 5722}{2} + \frac{18572 - 5722}{2} (\cos 40^\circ 55')$$

$$-(-5570 (\sin 40^\circ 55')) = 12147 + 6425 (0.7557) - 5570(0.6548)$$

$$= 12147 + 4855 + 3648$$

$$I_{20^\circ 27'} = 20650 \text{ cm}^4 = I_{\max}$$

$$I_{110^\circ 27'} = 12147 + 6425 (\cos 220^\circ 55') + (-5570 (\sin 220^\circ 55'))$$

$$= 12147 - 6425 (0.7557) - 5570 (0.6548)$$

$$= 12147 - 4855 - 3648$$

$$I_{110^\circ 27'} = 3645 \text{ cm}^4 = I_{\min}$$

Comprobación
de ⑦ y ⑧

$$\begin{aligned}
 I_{\max} &= 12147 + \frac{1}{2} \sqrt{(12850)^2 + 4(-5570)^2} \\
 &= 12147 + \frac{1}{2} \sqrt{165\,122\,000 + 124\,099\,600} \\
 &= 12147 + \frac{1}{2} \sqrt{289\,221\,600} \\
 &= 12147 + 8503
 \end{aligned}$$

$$I_{\max} = 20650 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 12147 - 8503 = 3644 \text{ cm}^4$$

4) ELEMENTOS MECANICOS EN LAS ESTRUCTURAS

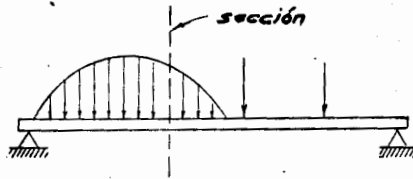
RESUMEN

$$I_{\max} = 20650 \text{ cm}^4 \text{ para } \theta = 20^\circ 27'$$

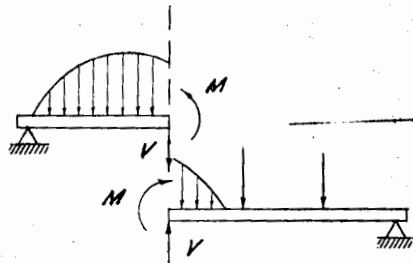
$$I_{\min} = 3645 \text{ cm}^4 \text{ para } \theta = 110^\circ 27'$$

MOMENTO FLEXIONANTE Y FUERZA CORTANTE

Consideremos una viga sujeta a un sistema de cargas cualquiera e imaginemos una sección hipotética a través de ella



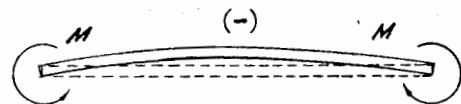
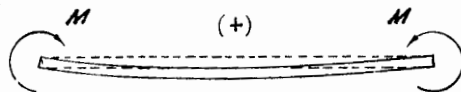
Aislemos los tramos de viga a uno y otro lado de la sección imaginada. Si todo el conjunto está en equilibrio, así deben estar sus partes, para lo cual se requieren los elementos M y V que son efectos internos del sistema de cargas considerado



M - Momento flexionante
V - Fuerza cortante

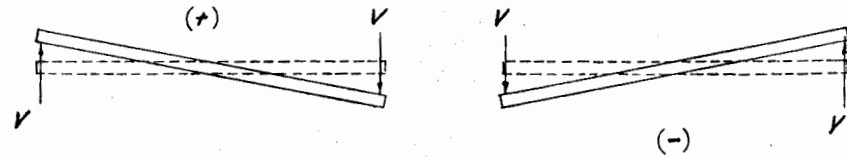
Las representaciones gráficas de la variación de estos elementos a lo largo del eje de la viga se denominan diagramas de ellos.

CONVENCION DE MOMENTOS



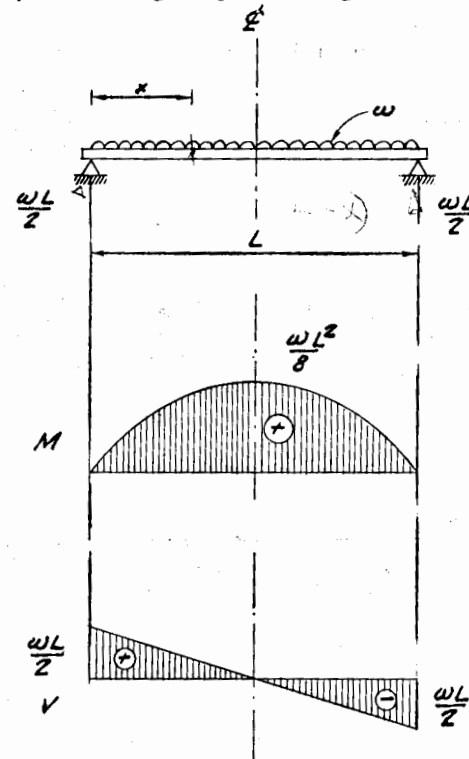
$V - P = 0$
 $V = P$

CONVENCION DE FUERZA CORTANTE



Ejemplo 1.-

Obtención de los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante para una viga sujeta a carga uniformemente distribuida.



Reacciones

Por simetría, las dos reacciones en los apoyos valen $\frac{wL}{2}$. Consideremos una sección a la distancia x de la referencia que en este caso es el apoyo izquierdo

Momento flexionante.

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2$$

si $x = 0$, $M = 0$

si $x = L$, $M = \frac{wL}{2}L - \frac{wL}{2}L^2 = 0$

$$\frac{dM}{dx} = 0$$

$$\frac{wL}{2} - wx = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

Es decir, el momento máximo se presenta en el centro del claro y

$$M_{\text{máx}} = \frac{\omega L}{2} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\omega}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{\omega L^2}{4} - \frac{\omega L^2}{8}$$

$$M_{\text{máx}} = \frac{\omega L^2}{8}$$

Fuerza cortante.-

$$V = \frac{\omega L}{2} - \omega x$$

si $x = 0$, $V = \frac{\omega L}{2}$

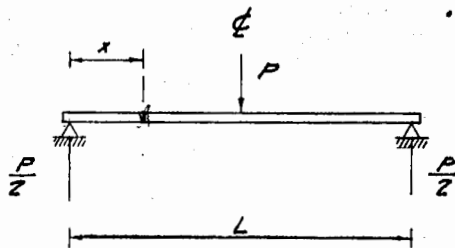
si $x = \frac{L}{2}$, $V = 0$

si $x = L$, $V = -\frac{\omega L}{2}$

En las figuras se presentan gráficamente las variaciones del momento flexionante y la fuerza cortante a lo largo del eje de la viga, denominadas - diagramas de momento flexionante M y de fuerza cortante V , respectivamente, que en ambos casos son curvas continuas correspondientes a una distribución continua de carga, siendo en el primero una parábola con vértice en el centro del claro y en el segundo una recta de pendiente negativa.

Ejemplo 2.-

Viga con una carga concentrada en el centro del claro



Reacciones

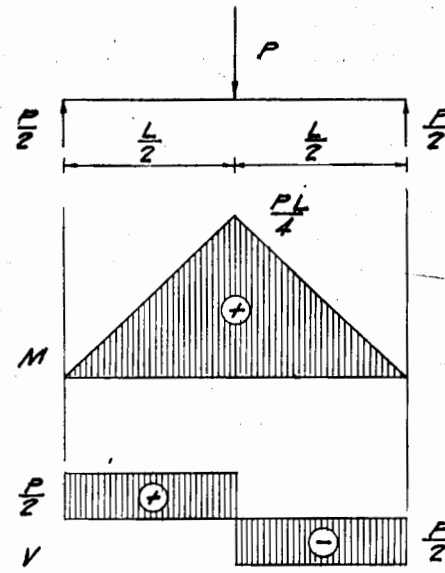
Por simetría, ambas reacciones valen $\frac{P}{2}$

Momento flexionante

$$M = \frac{P}{2} x \text{ (a la izq. de P)}$$

si $x = 0$, $M = 0$

si $x = \frac{L}{2}$, $M = \frac{PL}{4}$



$$M = \frac{P}{2} x - P \left(x - \frac{L}{2}\right) \text{ (a la der. de P)}$$

si $x = \frac{L}{2}$, $M = \frac{PL}{4}$

si $x = L$, $M = 0$

Fuerza cortante

$V = \frac{P}{2}$ (a la izq. de P)

$V = -\frac{P}{2}$ (a la der. de P)

Es conveniente observar que, la carga concentrada origina un cambio brusco o discontinuidad en los diagramas y que, entre cargas concentradas, el diagrama consiste de tramos de línea recta.

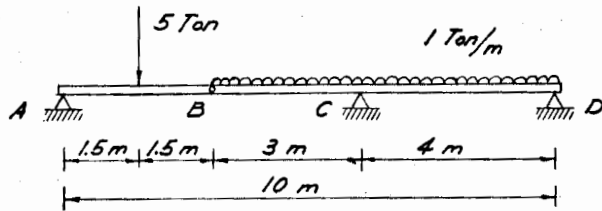
Con el objeto de comparar la diferencia de los efectos de una carga distribuida (Ejem. 1) y una concentrada (Ejem. 2) hagamos $P = \omega L$, en cuyo caso:

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{4} \omega L L = \frac{\omega L^2}{4} = 2 \cdot \frac{\omega L^2}{8}$$

es decir, para una misma magnitud de la carga, el momento flexionante obtenido cuando ésta se aplica concentrada en una viga de claro L libremente apoyada, es el doble que cuando ésta se aplica uniformemente distribuida.

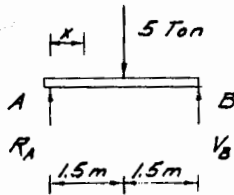
Ejemplo 3.-

Obtener los diagramas de momento flexionante y fuerza cortante para la siguiente viga



Obtención de las reacciones

Tramo A B



$$\sum M_B = 0$$

$$R_A (3) - 5 (1.5) = 0$$

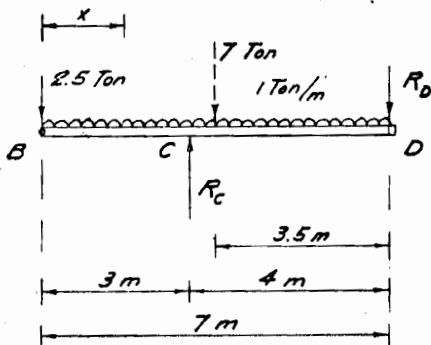
$$R_A = 2.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 :$$

$$2.5 - 5 + V_B = 0$$

$$V_B = 2.5 \text{ ton}$$

Tramo B C D



$$\sum M_C = 0$$

$$- 2.5 (3) + 7 (0.5) + R_D (4) = 0$$

$$R_D (4) = 7.5 - 3.5$$

$$R_D = \frac{4}{4}$$

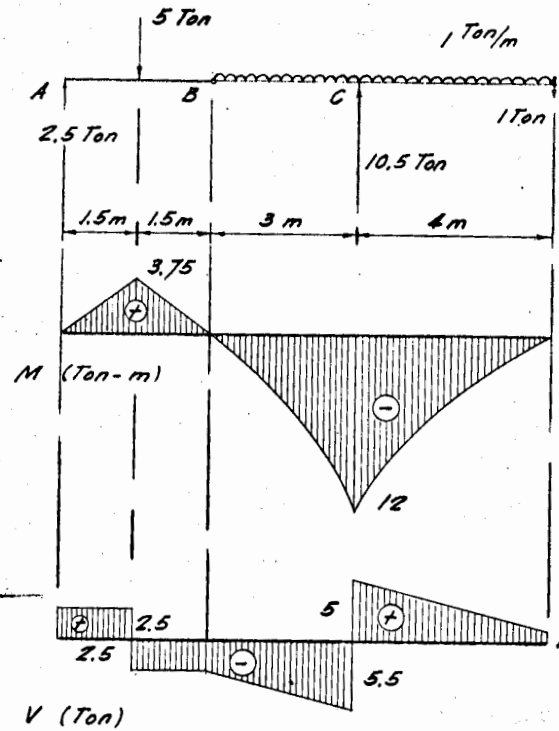
$$R_D = 1 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 :$$

$$- 2.5 + R_C - 7 - 1 = 0$$

$$R_C = 2.5 + 8$$

$$R_C = 10.5 \text{ ton}$$



V (Ton)

Fuerza cortante.

tramo AE:
 $V = 2.5 \text{ ton}$

tramo EB:
 $V = 2.5 \text{ ton}$

tramo BC:
 $V = -x - 2.5$
 si $x = 0, V = 2.5 \text{ ton}$
 si $x = 3, V = -5.5 \text{ ton}$

Momento flexionante

tramo AE:
 $M = 2.5 x$
 si $x = 0, M = 0$
 si $x = 1.5, M = 3.75 \text{ ton-m}$

tramo EB:
 $M = 2.5 x = 5 (x - 1.5)$
 $M = 2.5 x + 7.5$
 si $x = 1.5, M = 3.75 \text{ ton-m}$
 si $x = 3, M = 0$

tramo BC:
 $M = 2.5 x - \frac{x^2}{2}$
 si $x = 0, M = 0$
 si $x = 3, M = -12 \text{ ton-m}$

tramo CD
 $M = -2.5 (x) - \frac{x^2}{2} + 10.5(x-3)$
 $M = 8x - \frac{x^2}{2} - 31.5$
 si $x = 3, M = -12 \text{ ton-m}$
 si $x = 7, M = 0$
 o bien $M = -x - \frac{x^2}{2}$
 si $x = 0, M = 0$
 si $x = 4, M = -12 \text{ ton-m}$
 Obsérvese que las características de los diagramas en este caso son una combinación de las correspondientes a los ejemplos 1 y 2

tramo CD

$$V = 2.5 - x + 10.5$$

$$V = 8 - x$$

o bien

$$V = 1 + x$$

si $x = 3, V = 5 \text{ ton}$

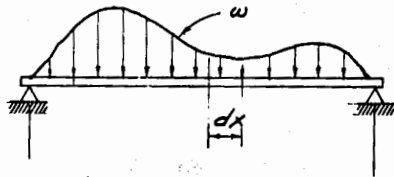
si $x = 7, V = 1 \text{ ton}$

si $x = 0, V = 1 \text{ ton}$

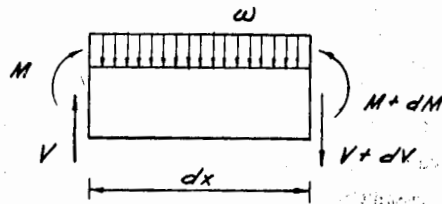
si $x = 0, V = 5 \text{ ton}$

RELACIONES BASICAS

Consideremos una viga en equilibrio bajo la acción de una carga distribuida en cualquier forma



el elemento de longitud dx también está en equilibrio



$$\sum F_y = 0$$

$$V - (V + dV) + w dx = 0$$

(w positiva hacia arriba)

$$- dV + w dx = 0$$

$$w = \frac{dV}{dx} \text{ relación entre la fuerza cortante y la carga distribuida}$$

$$\sum M_0 = 0$$

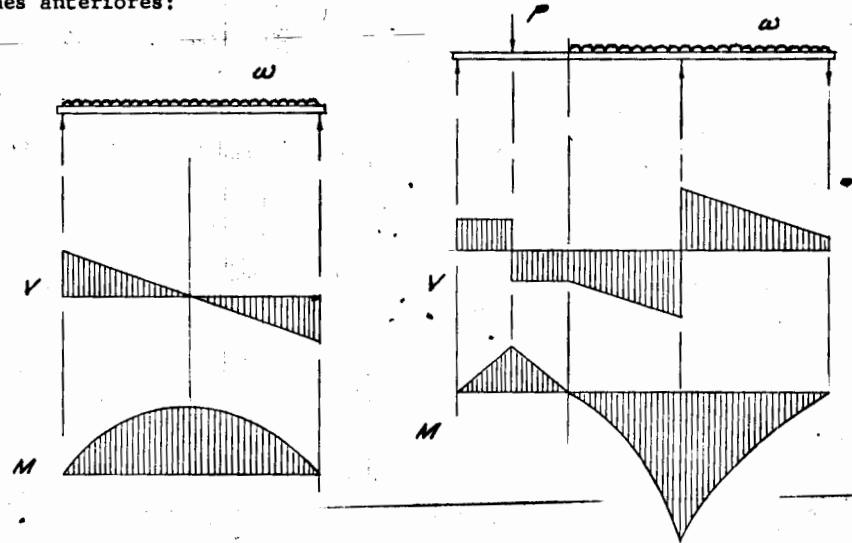
$$M - (M + dM) + V dx + w dx \frac{dx}{2} = 0$$

$$- dM + V dx = 0$$

$$V = \frac{dM}{dx} \text{ relación entre el momento flexionante y la fuerza cortante}$$

Ejemplo.-

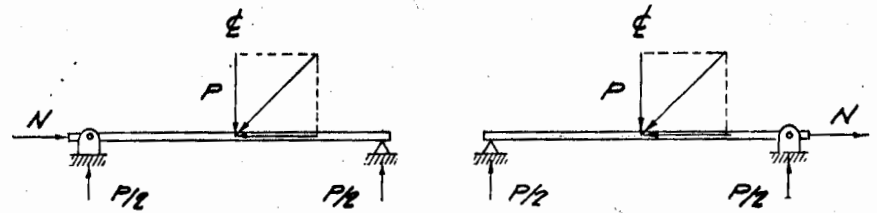
Esbozemos los diagramas de los ejemplos 1 y 3 a partir de las relaciones anteriores:

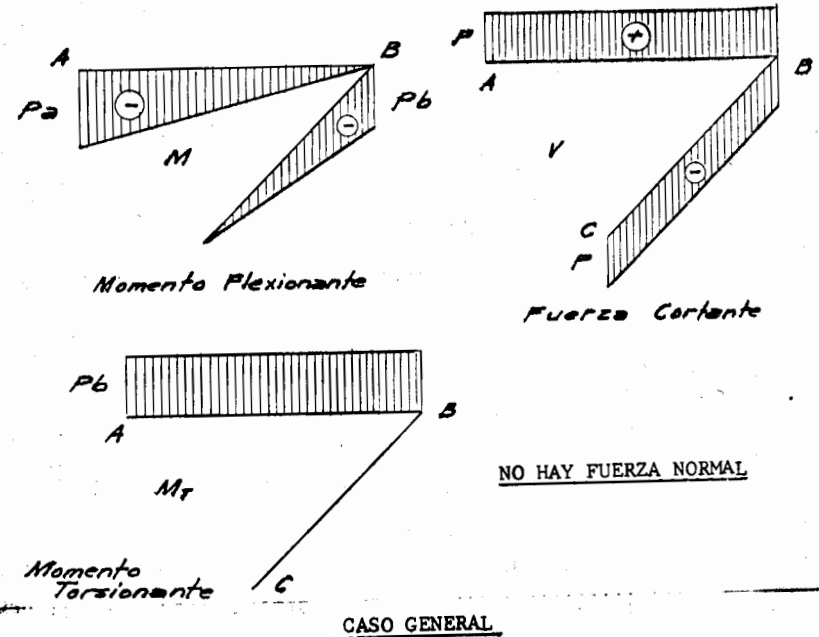
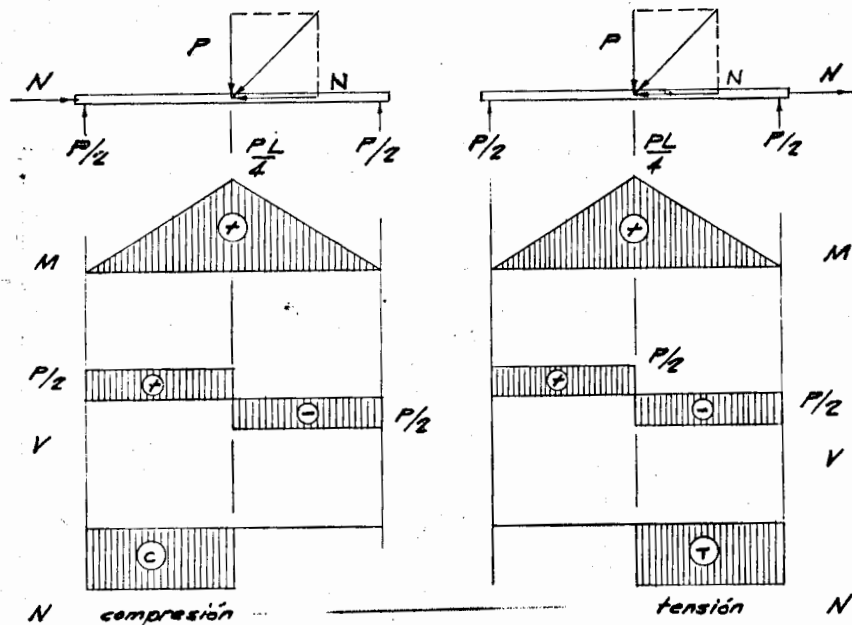


Obsérvese que en los puntos en que se anula la fuerza cortante se presenta un valor máximo o mínimo al momento flexionante.

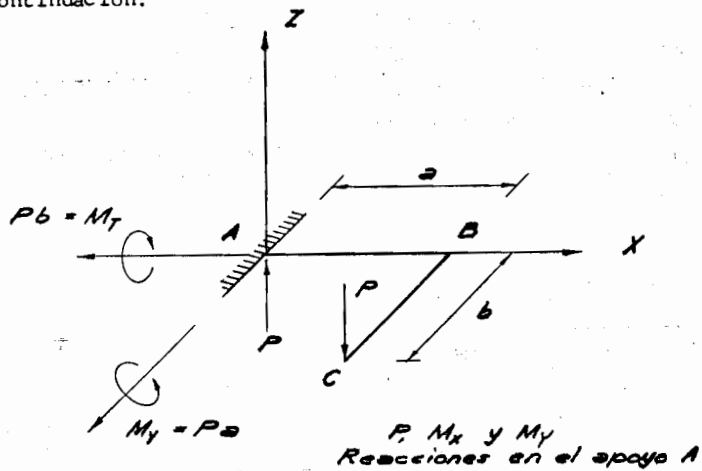
FUERZA NORMAL Y MOMENTO TORSIONANTE

Cuando en una pieza de eje recto actúan cargas que tienen componentes, no solo transversales al eje centroidal (que pasa por el centroide de todas las secciones transversales) sino también componentes longitudinales con este, aparecen fuerzas normales o axiales tal y como se ilustra con el siguiente ejemplo:

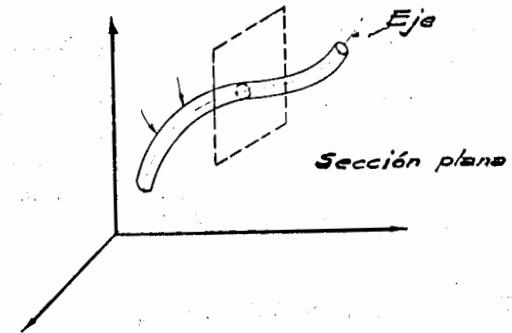


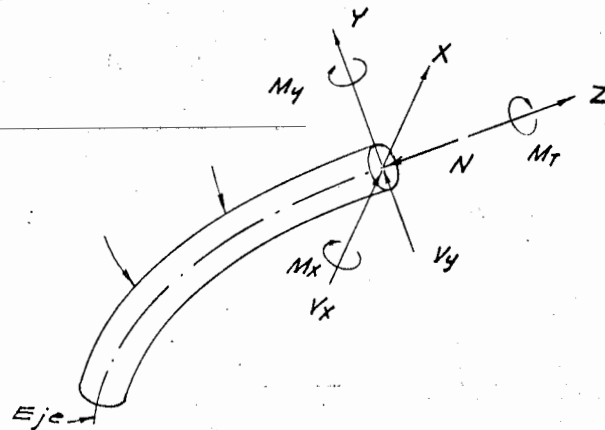


Si se presentan cargas excéntricas respecto al eje del miembro estructural, aparecen momentos torsionantes internos en la forma que se ilustra a continuación:



En general para una barra estructural en el espacio, en una sección cualquiera de esta, al actuar cargas externas sobre ella, se pueden presentar los siguientes elementos mecánicos:





M_x, M_y componentes de momentos flexionantes alrededor de los ejes "X" e "Y"

V_x y V_y componentes de fuerza cortante en las direcciones de "x" e "y"

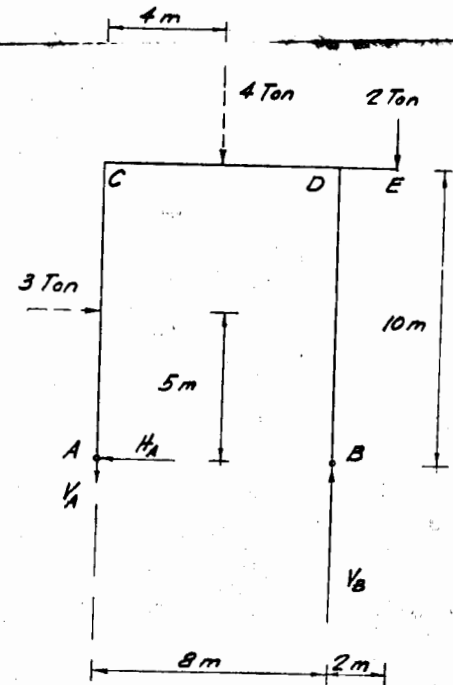
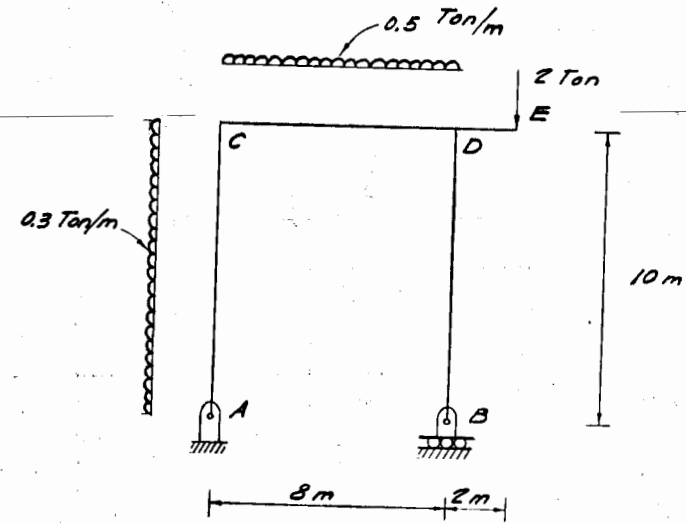
M_T - momento torsionante alrededor del eje (Z) de la pieza estructural

N - fuerza normal o axial

Para cada uno de los elementos mecánicos se pueden trazar los diagramas correspondientes a la ley de variación de ellos, u obtener las expresiones respectivas.

Ejemplo 4.-

Obtener los diagramas de elementos mecánicos (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal) en el marco indicado.



Obtención de las reacciones

$$\sum M_A = 0 :$$

$$3(5) + 4(4) + 2(10) - V_B(8) = 0$$

$$8 V_B = 15 + 16 + 20$$

$$V_B = \frac{51}{8}$$

$$V_B = 6.375 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 :$$

$$- V_A - 4 - 2 + 6.375 = 0$$

$$V_A = 6.375 - 6$$

$$V_A = 0.375 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$- H_A + 3 = 0$$

$$H_A = 3 \text{ ton}$$

5r
aden

Momento flexionante

tramo AC

$$M = 3y - 0.3y \left(\frac{y}{2} \right)$$

$$M = 3y - 0.15 y^2$$

si $y = 0$, $M = 0$

si $y = 10$, $M = 15 \text{ Ton-m}$

$$\frac{dM}{dy} = 0 \quad 3 - 0.3y = 0$$

$$y = 10$$

Mmáx para $y = 10$

Tramo CD

$$M = 3(10) - 0.375(x) - 3(5) - 0.5x \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$M = 15 - 0.375x - 0.25x^2$$

si $x = 0$, $M = 15 \text{ ton-m}$

si $x = 8$, $M = -4 \text{ ton-m}$

tramo ED

$$M = -2x$$

si $x = 0$, $M = 0$

si $x = 2$, $M = -4 \text{ ton-m}$

Tramo BD

$$M = 0$$

Fuerza cortante

tramo AC

$$V = 3 - 0.3y$$

$y = 0$, $V = 3 \text{ ton}$

$y = 10$, $V = 0$

tramo CD

$$V = -0.375 - 0.5x$$

si $x = 0$, $V = -0.375 \text{ Ton}$

si $x = 8$, $V = -4.375 \text{ Ton}$

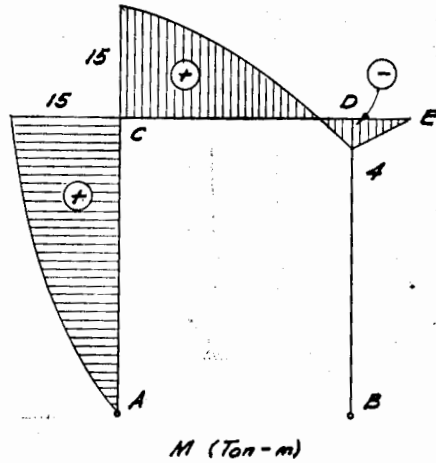


Diagrama de Momento Flexionante

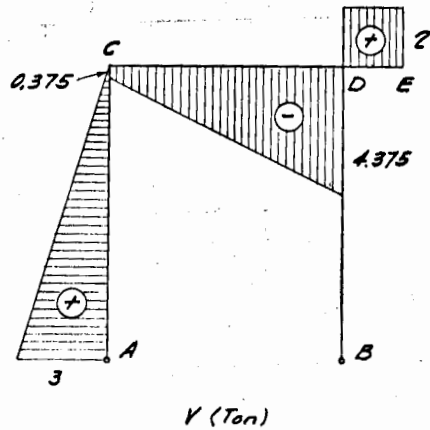


Diagrama de Fuerza Cortante

tramo ED

$$V = +2 \text{ ton}$$

tramo BD

$$V = 0$$

Fuerza Normal

tramo AC

$$N = 0.375 \text{ Ton (tensión)}$$

tramo CD

$$N = 3 - 3$$

$$N = 0$$

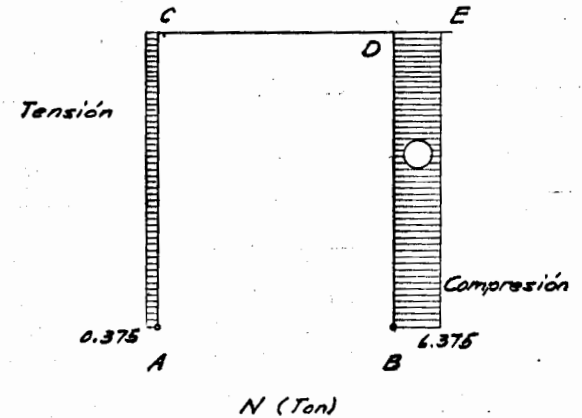
tramo ED

$$N = 0$$

tramo DB

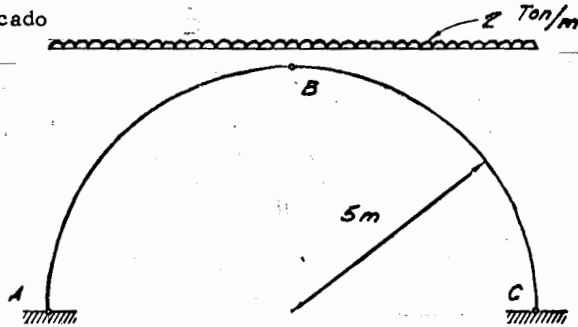
$$N = 6.375 \text{ Ton (compresión)}$$

Diagrama de fuerza normal



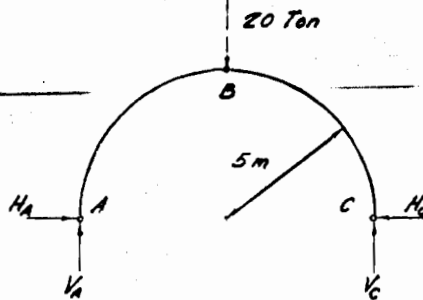
Ejemplo 5.-

Obtener los elementos mecánicos del arco circular de tres articulaciones indicado



Obtención de las reacciones

D. C. L.



$$\sum M_A = 0$$

$$V_C (10) + 20 (5) = 0$$

$$V_C = 10 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A - 20 + 10 = 0$$

$$V_A = 10 \text{ Ton}$$

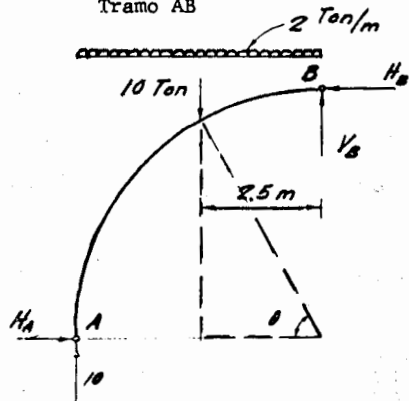
$$\sum M_C = 0 = V_A(10) - 20(5)$$

$$V_A = 10!$$

$$\sum F_x = 0$$

$$H_A = H_C \quad (1)$$

Tramo AB



$$\sum M_B = 0$$

$$- H_A (5) + 10 (5) - 10 (2.5) = 0$$

$$H_A = \frac{25}{5} = 5 \text{ Ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$5 - H_B = 0$$

$$H_B = 5 \text{ Ton}$$

de (1) $H_C = 5 \text{ Ton}$

Momento flexionante

$$M = 10 (5 - 5 \cos \theta) - 3 (5 \sin \theta) - 2 (5 - 5 \cos \theta) \left(\frac{5 - 5 \cos \theta}{2} \right) = 0$$

$$M = 50 - 50 \cos \theta - 25 \sin \theta - (5 - 5 \cos \theta)^2 = 0$$

$$M = 50 - 50 \cos \theta - 25 \sin \theta - 25 + 50 \cos \theta - 25 \cos^2 \theta$$

$$M = 25 (1 - \sin \theta - \cos^2 \theta)$$

si $\theta = 0$, $M = 0$

si $\theta = 90^\circ$, $M = 0$

si $\theta = 180^\circ$, $M = 0$

Momento máximo y mínimo

$$\frac{dM}{d\theta} = 25 (-\cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta) = 0$$

$$25 \cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \text{ang sen } 0.5$$

$$\theta = 30^\circ, 150^\circ$$

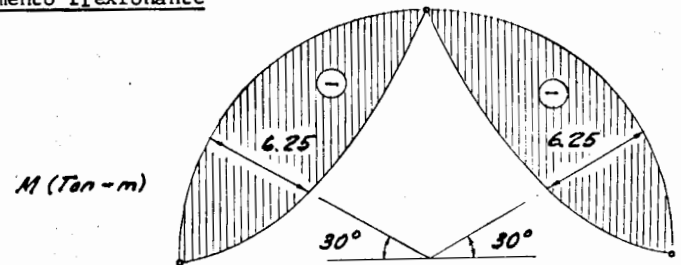
$$M_{30^\circ} = 25 [1 - 0.5 (0.866)^2]$$

$$M_{30^\circ} = -6.25 \text{ ton-m}$$

$$M_{150^\circ} = 25 [1 - 0.5 (0.866)^2]$$

$$M_{150^\circ} = -6.25 \text{ ton-m}$$

Diagrama de momento flexionante



Fuerza cortante

$$V = 10 \operatorname{sen} \theta - 5 \cos \theta - 10 (1 - \cos \theta) \quad (\operatorname{sen} \theta)$$

$$V = 5 \cos \theta (2 - \operatorname{sen} \theta - 1)$$

$$V = 10 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - 5 \cos \theta$$

si $\theta = 0$, $V = -5 \text{ ton}$

si $\theta = 90^\circ$, $V = 0$

si $\theta = 180^\circ$, $V = 5 \text{ ton}$

$$\frac{dV}{d\theta} = 10 \cos^2 \theta - 10 \operatorname{sen}^2 \theta + 5 \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$- (20 \operatorname{sen}^2 \theta - 5 \operatorname{sen} \theta - 10) = 0$$

$$4 \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen} \theta - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1 + 5.7}{8}$$

$\operatorname{sen} \theta = 0.84$

$\theta = \operatorname{ang} \operatorname{sen} 0.84$

$\theta = 57^\circ, 123^\circ$

$$V_{57^\circ} = 5 (0.545) [2 (0.84) - 1]$$

$V_{57^\circ} = 1.85 \text{ ton}$

$V_{125^\circ} = -1.85 \text{ ton}$

si $V = 0$

$$10 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - 5 \cos \theta = 0$$

$$5 \cos \theta (2 \operatorname{sen} \theta - 1) = 0$$

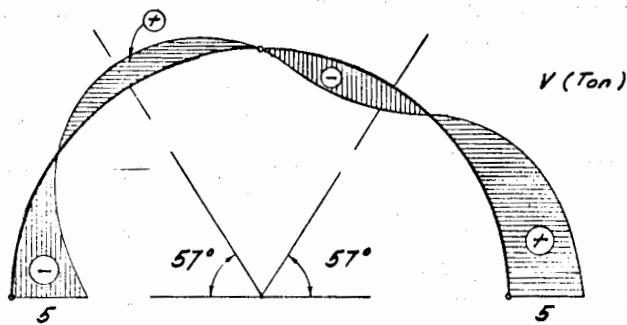
$$5 \cos \theta = 0, \cos \theta = 0$$

$\theta = 90^\circ$ (articulación)

$$2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0, \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$$

$\theta = 30^\circ, 150^\circ$ puntos de M_{\max}

Diagrama de fuerza cortante



Fuerza normal

$$N = 10 \cos \theta - 5 \operatorname{sen} \theta - 10 (1 - \cos \theta) (\cos \theta)$$

$$N = 5 \operatorname{sen} \theta + 10 \cos^2 \theta$$

si $\theta = 0$, $N = 10$

si $\theta = 90^\circ$, $N = 5$

si $\theta = 180^\circ$, $N = 10$

$$\frac{dM}{d\theta} = 5 \cos \theta - 20 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$5 \cos \theta (1 - 4 \operatorname{sen} \theta) = 0$$

para $\cos \theta = 0$

$\theta = 90^\circ$

$N_{90^\circ} = 5 \text{ ton}$

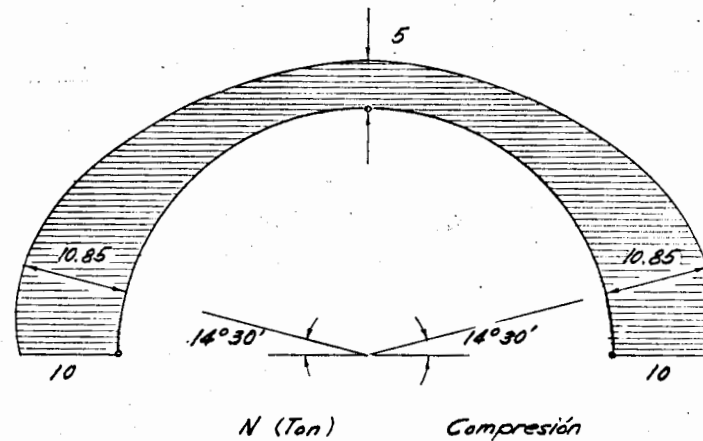
para $1 - 4 \operatorname{sen} \theta = 0$

$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{4}$

$\theta = 14^\circ 30', 165^\circ 30'$

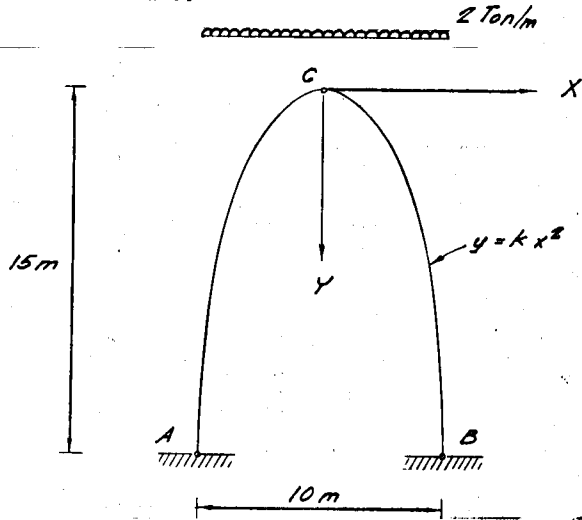
$N_{14^\circ 30'} = 10.85 \text{ Ton}$

$N_{160^\circ 20'} = 10.85 \text{ Ton}$



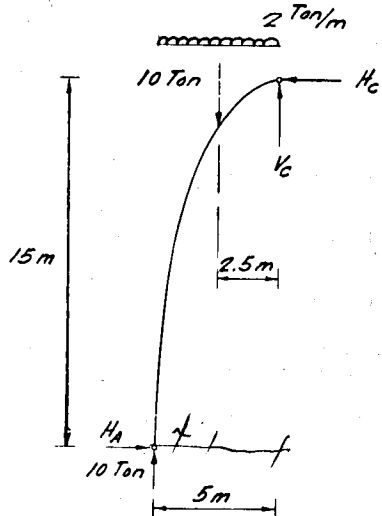
Ejemplo 6.-

Obtener los diagramas de elementos mecánicos del arco parabólico indicado.



Obtención de las reacciones

Por simetría $V_A = V_B = 10 \text{ ton}$



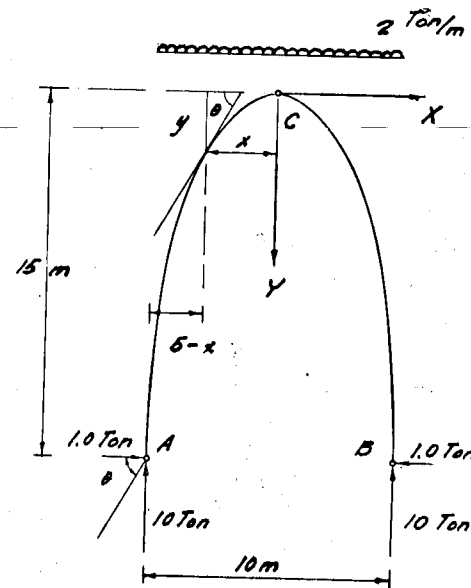
$$\sum M_C = 0$$

$$10(5) + 10(2.5) - 1.5(H_A) = 0$$

$$15H_A = 50 - 25$$

$$H_A = \frac{25}{15} = 1.66 \text{ ton}$$

$$H_B = 1.66 \text{ ton}$$



Ecuación de la curva

$$Y = K x^2$$

sust. las coordenadas de B

$$15 = K (5)^2$$

$$K = 15/25$$

$$K = 0.6$$

Por lo que

$$y = 0.6 x^2$$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1.2 x$$

$$\tan \theta = 1.2 x$$

$$x = \frac{\tan \theta}{1.2} \quad (1)$$

Momento flexionante

$$M = 10(5-x) - 1.66(15-y) - 2(5-x)\left(\frac{5-x}{2}\right)$$

como $y = 0.6 x^2$

$$M = 10(5-x) - 1.66(15 - 0.6 x^2) - (5-x)^2$$

$$M = 50 - 10x - 25 + x^2 - 25 + 10x - x^2$$

$$M = 0$$

Es decir no hay momento flexionante

Fuerza cortante

$$V = 10 \cos \theta - 1.66 \sin \theta - 2(5-x) \cos \theta$$

$$V = 10 \cos \theta - 1.66 \sin \theta - 10 \cos \theta + 2x \cos \theta$$

$$V = 2x \cos \theta - 1.66 \sin \theta$$

como $x = \frac{\tan \theta}{1.2}$

$$V = 2 \frac{\tan \theta}{1.2} \cos \theta - 1.66 \sin \theta$$

$$V = 1.66 \sin \theta - 1.66 \sin \theta$$

$V = 0$ Tampoco se presenta fuerza cortante

Fuerza normal

$$N = 10 \sin \theta + 1.66 \cos \theta - 2(5 - x) \sin \theta$$

$$N = 10 \sin \theta + 1.66 \cos \theta - 10 \sin \theta + 2x \sin \theta$$

$$N = 1.66 \cos \theta + 2 \frac{\tan \theta}{1.2} \sin \theta$$

$$N = 1.66 \cos \theta + 1.66 \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$N = 1.66 \left(\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$N = \frac{1.66}{\cos \theta}$$

si $\theta = 0^\circ$, $N = 1.66 \text{ ton}$

$$\tan \theta = 1.2x$$

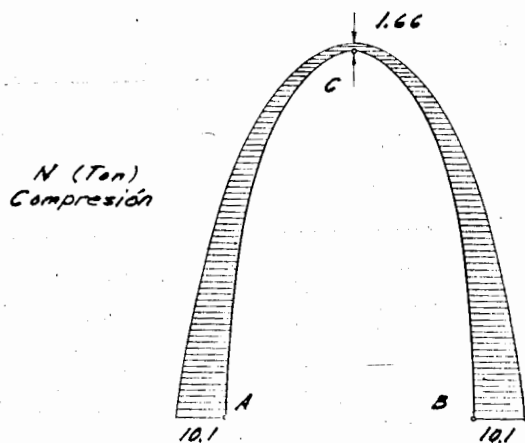
si $x = 5$, $\tan \theta = 0$, $\theta = 80^\circ 30'$

$$N = \frac{1.66}{\cos 80^\circ 30'} = \frac{1.66}{0.169} ; N = 10.1 \text{ Ton}$$

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{1.66 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = 0$$

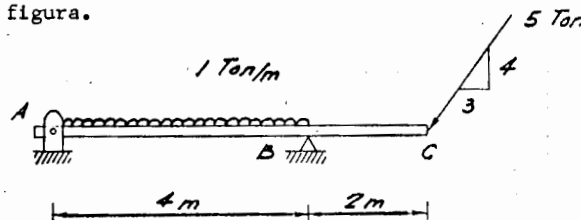
sen $\theta = 0$, $\theta = 0^\circ$

$N_{\min} = 1.66 \text{ ton}$



Ejemplo 7.-

Obtenga los diagramas de elementos mecánicos para la viga que se indica en la figura.



Reacciones

$$\sum M_A = 0$$

$$4V_B - 4 \times 2 - 4 \times 6 = 0$$

$$V_B = 8 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_A - 4 + 8 - 4 = 0$$

$$V_A = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$H_A - 3 = 0$$

$$H_A = 3 \text{ ton}$$

Momento flexionante

tramo AB

$$M = -x \left(\frac{x}{2} \right) = -\frac{x^2}{2}$$

$$M = \frac{x^2}{2} \quad 0 = x = 4$$

si $x = 0$ $M = 0$

si $x = 4$ $M = -8 \text{ ton-m}$

tramo BC

$$M = 4x \quad 0 = x = 2$$

si $x = 0$ $M = 0$

si $x = 2$ $M = -8 \text{ Ton-m}$

Fuerza cortante

tramo AB

$$V = -x \quad 0 = x = 4$$

si $x = 0$ $V = 0$

si $x = 4$ $V = -4$

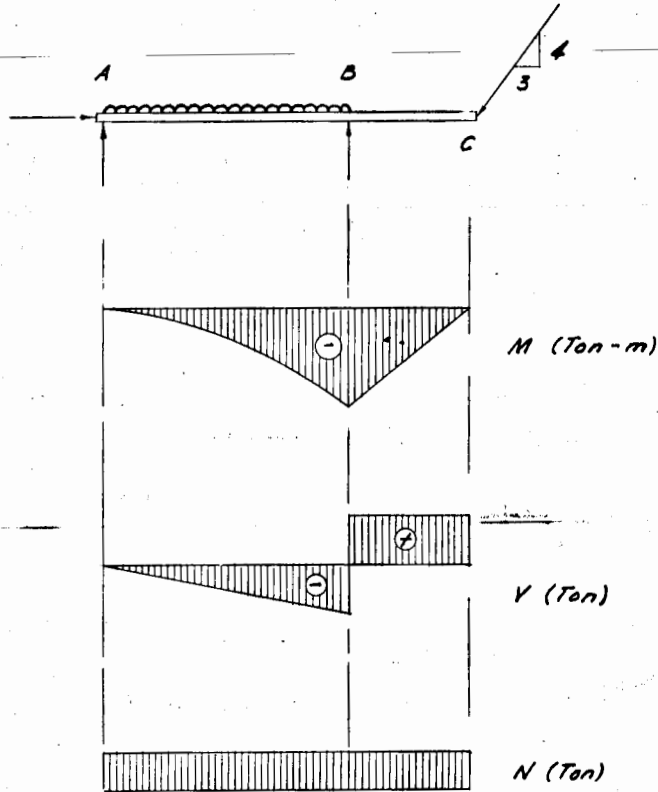
tramo BC

$$V = 4 \text{ Ton}$$

Fuerza normal

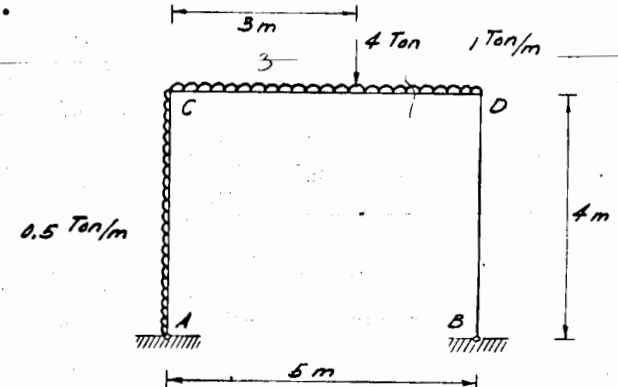
$$N = 3 \text{ Ton}$$

DIAGRAMAS



Ejemplo 8.-

Determine usted los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente estructura.



Reacciones

$$\sum M_A = 0$$

$$2 \times 2 + 5 \times 2.5 + 4(3) - 5 V_B = 0$$

$$V_B = \frac{4 + 12.5 + 12}{5} = 5.7 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-V_A + 5.7 - 5 - 4 = 0$$

$$V_A = 3.3 \text{ Ton}$$

$$V_B = 5.7 \text{ Ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$2 - H_A - H_B = 0$$

$$H_A = 2 - H_B$$

$$\text{como } H_B = 0$$

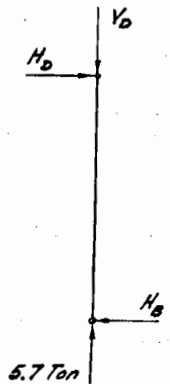
$$H_A = 2 \text{ Ton}$$

Tramo DB

$$M_D = 0$$

$$4 H_B = 0$$

$$H_B = 0$$



Momento flexionante

tramo AC

$$M = 2y - 0.25y^2 \quad 0 \leq y \leq 4$$

si $y = 0 \quad M = 0$

si $y = 4 \quad M = 4 \text{ ton}$

tramo CE

$$M = -2x^2 + 2x + 3.3x - 0.5x^2$$

$$M = 4 + 3.3x - 0.5x^2 \quad 0 \leq x \leq 3$$

si $x = 0 \quad M = 4 \text{ ton-m}$

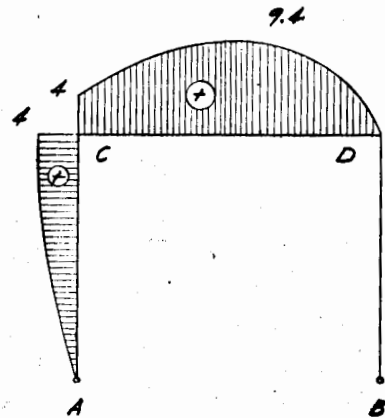
si $x = 3 \quad M = 9.4 \text{ ton-m}$

tramo ED

$$M = -5.7x - 0.5x^2 \quad 0 \leq x \leq 2$$

si $x = 0 \quad M = 0$

si $x = 2 \quad M = 9.4 \text{ ton-m}$



Fuerza cortante

tramo AC

$$V = \frac{dM}{dy} = 2 - 0.5y = 0 \quad 0 \leq y \leq 4$$

si $y = 0 \quad V = 2 \text{ ton}$

si $y = 4 \quad V = 0$

Tramo CE

$$V = \frac{dM}{dx} = 3.3 - x \quad 0 \leq x \leq 3$$

si $x = 0 \quad V = 3.3 \text{ ton}$

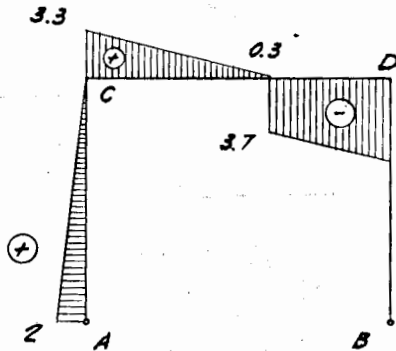
si $x = 3 \quad V = 0.3 \text{ ton}$

tramo ED

$$V = \frac{dM}{dx} = -5.7x$$

si $x = 0 \quad V = 5.7$

si $x = 2 \quad V = -3.7$



Fuerza Normal

tramo AC:

$$N = 3.3 \text{ ton (compresión)}$$

tramo CE:

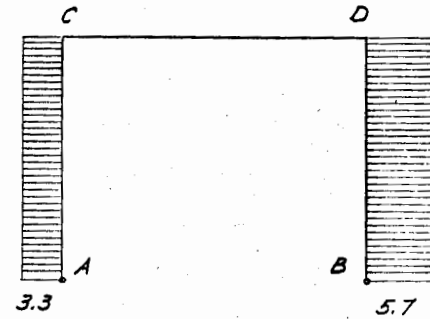
$$N = 0$$

tramo ED:

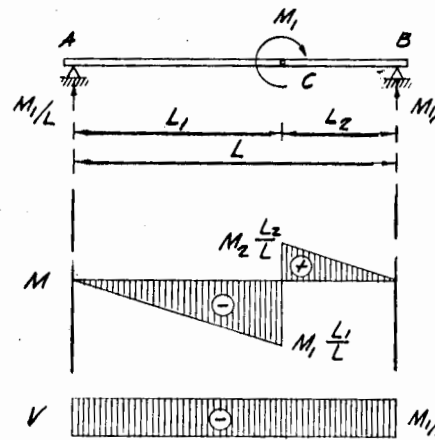
$$N = 0$$

tramo DB:

$$N = 5.7 \text{ ton}$$



Ejemplo 9.- Trazar los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente estructura.



Tramo AC

$$M = \frac{M_1}{L} x \quad \text{si } x = 0, M = 0 \quad \text{si } x = L_1, M = M_1 \frac{L_1}{L}$$

$$V = \frac{M_1}{L}$$

Tramo CB

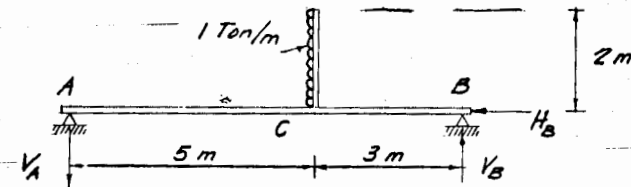
$$M = \frac{M_1}{L} x$$

si $x = 0, M = 0$

$$x = L_2, M = M_1 \frac{L_2}{L}$$

$$V = \frac{-M_1}{L}$$

Ejemplo 10.- Trazar los diagramas de elementos mecánicos de la siguiente estructura.



Obtención de reacciones

$$\begin{aligned}
 M_B &= 0 & F_x &= 0 & F_y &= 0 \\
 2x_1 - 8R_A &= 0 & 2 - H_B &= 0 & V_B - 0.25 &= 0 \\
 R_A &= 0.25 \text{ ton} & H_B &= 2 \text{ ton} & V_B &= 0.25 \text{ ton}
 \end{aligned}$$

Momento flexionante

Tramo AC

$$\begin{aligned}
 M &= -0.25x \\
 \text{si } x &= 0, M = 0 \\
 x &= 5, M = -1.25 \text{ ton-m}
 \end{aligned}$$

Tramo CD

$$\begin{aligned}
 M &= -\frac{Y^2}{2} \\
 \text{si } Y &= 0, M = 0 \\
 Y &= 2, M = -2 \text{ ton-m}
 \end{aligned}$$

Tramo CB

$$\begin{aligned}
 M &= 0.25x \\
 \text{si } x &= 0, M = 0 \\
 x &= 3, M = 0.75 \text{ ton-m}
 \end{aligned}$$

Fuerza cortante

tramo AC

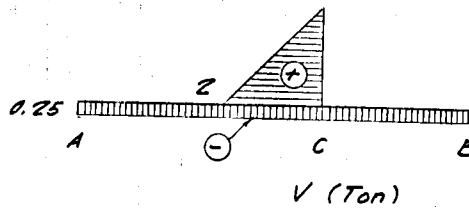
$$V = -0.25$$

Tramo CD

$$V = y$$

$$\text{si } Y = 0, V = 0$$

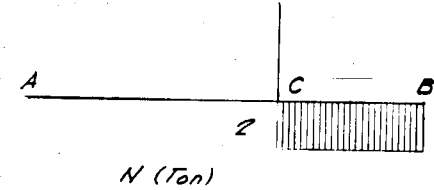
$$Y = 2, V = 2$$



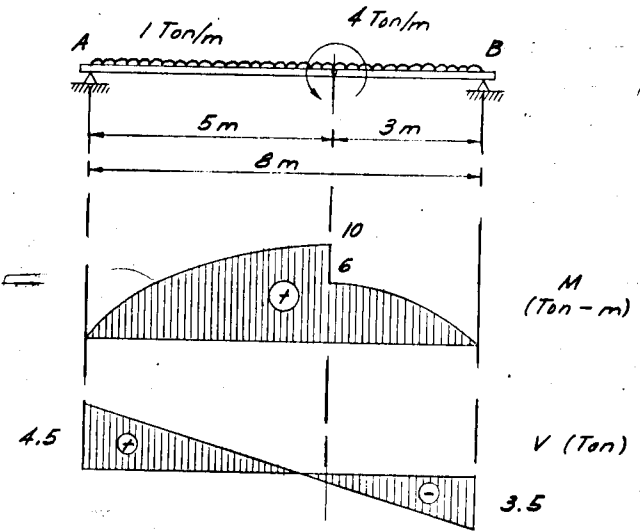
Tramo CB
 $V = -0.25$

Fuerza normal

Tramo AC	Tramo CB
$N = 0$	$N = 2$
Tramo CD	
$N = 0$	



Ejemplo 11.- Obtener los diagramas de los elementos mecánicos de la siguiente estructura.



Obtención de reacciones

$$\begin{aligned}
 \sum M_B &= 0 & \sum F_y &= 0 \\
 8R_A - 4 - 8 \times 4 &= 0 & 4.5 - 8 + R_B &= 0 \\
 R_A &= 4.5 \text{ ton} & R_B &= 3.5 \text{ ton}
 \end{aligned}$$

Momento flexionante

Tramo AC

$$M = 4.5x - \frac{x^2}{2}$$

Tramo CB

$$M = +3.5x - \frac{x^2}{2}$$

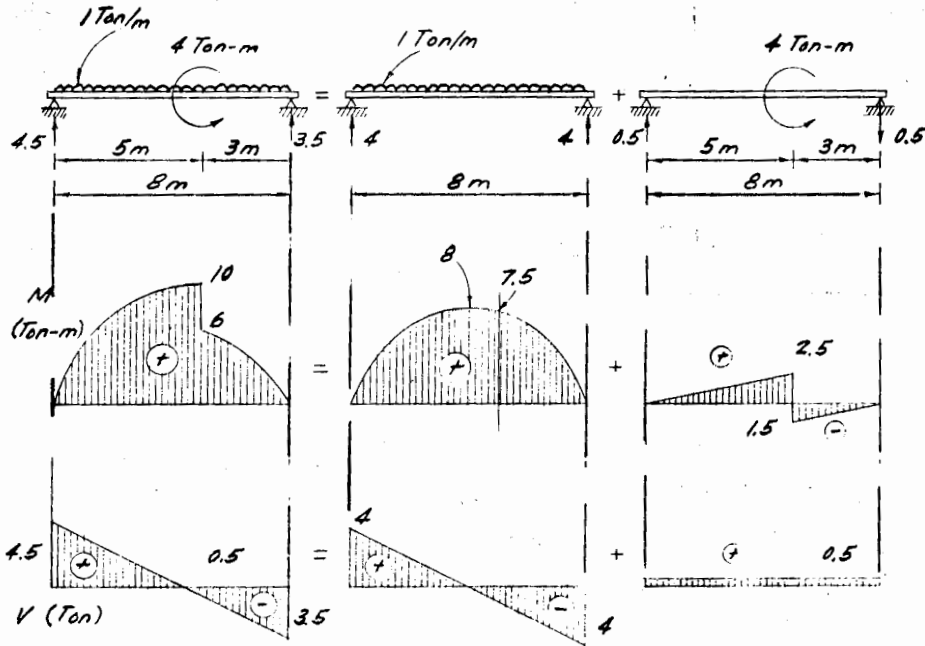
si $x = 0, M = 0$
 $x = 5, M = 10 \text{ ton-m}$

si $x = 0, M = 0$
 $x = 3, M = 6 \text{ ton-m}$

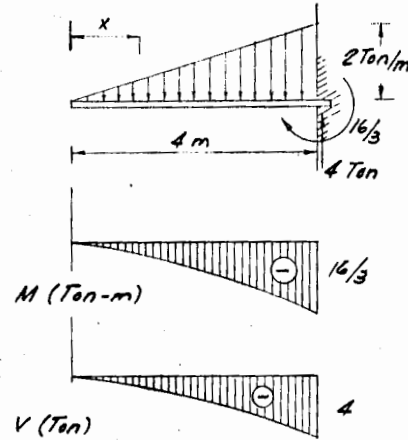
Fuerza cortante.

tramo AB
 $V = 4.5 - x$
 si $x = 0, V = 4.5$
 $x = 5, V = 0.5$
 $x = 8, V = -3.5$

Es conveniente comprobar que en este tipo de problemas se cumple el principio de superposición de causas y efectos; por ejemplo en el ejercicio anterior tenemos lo siguiente:



Ejemplo 12. Obtener los diagramas de los elementos mecánicos de la figura:



$$\frac{x}{4} = \frac{w}{2} \quad w = \frac{x}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$$

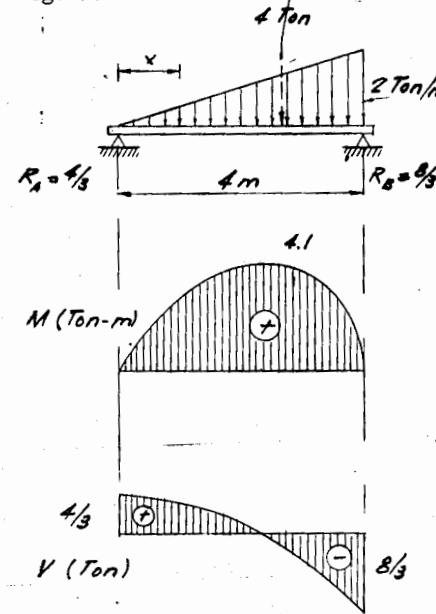
Actuando en el centroide del área de presiones a la dist. x

$$M = \frac{x^2}{4} \cdot \frac{x}{3} = \frac{-x^3}{12}$$

si $x = 0, M = 0$
 $x = 4, M = -\frac{16}{3} \text{ ton-m}$

$V = -P = -\frac{x^2}{4}$
 si $x = 0, V = 0$
 $x = 4, V = 4 \text{ ton}$

Ejemplo 13. Obtener los diagramas de los elementos mecánicos de la figura:



reacciones

$$\sum M_B = 0$$

$$4 R_A - 4 \cdot 4/3 = 0$$

$$R_A = \frac{4}{3} \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_B = 8/3 \text{ ton}$$

$$M = \frac{4}{3} x - \frac{x^2}{4} \cdot \frac{x}{3} = \frac{4}{3} x - \frac{x^3}{12}$$

si $x = 0, M = 0$
 $x = 4, M = 0$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{4}{3} - \frac{x^2}{4} = 0, x^2 = \frac{16}{3}$$

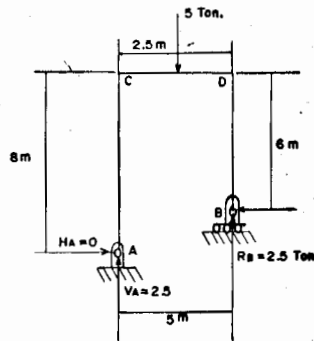
si $x = 2.31; M = 1.41 \text{ ton}$

$$V = \frac{4}{3} - \frac{x^2}{4}$$

si $x = 0, V = 4/3$
 $x = 4, V = -8/3$

Ejemplo.-14 Super posición de causas y efectos en un marco

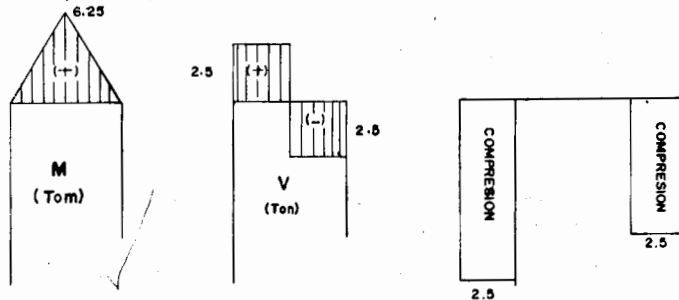
a) Carga en el cabezal



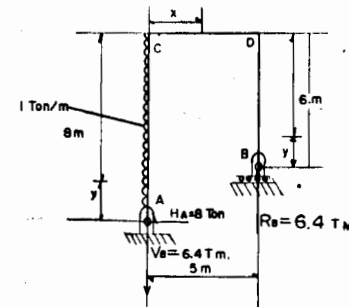
REACCIONES.-

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ 5 \times 2.5 - 5R_B &= 0 & \therefore R_B &= 2.5 \text{ Ton} \\ \sum F_x &= 0 & \therefore H_A &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ 2.5 - 5 + V_A &= 0 & \therefore V_A &= 2.5 \end{aligned}$$

Puede observarse que los elementos mecánicos en el cabezal son los mismos que en una viga libremente apoyada sujeta a una carga concentrada en el centro del claro y las columnas trabajan a compresión.



b) Carga en la columna izquierda



REACCIONES

$$\begin{aligned} M_A &= 0 \\ 8 \times 1 \times 4 = 5R_B & \therefore R_B = 6.4 \text{ Ton} \\ \sum F_x &= 0 \\ 8 - H_A = 0 & \therefore H_A = 8 \text{ Ton} \\ \sum F_y &= 0 \\ -V_A + R_B = 0 & \therefore V = 6.4 \text{ Tm} \end{aligned}$$

Momento flexionante

$$\begin{aligned} \text{Tramo AC} \\ M &= 8Y - \frac{Y^2}{2} \\ \frac{dM}{dY} &= 8Y - \frac{Y^2}{2} & \therefore Y=8 \text{ para } M \text{ max.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\max} &= 8 \times 8 - \frac{8^2}{2} = 64 - 32 = 32 \text{ Ton-m} \\ \text{Si } y=0 & \quad M=0 \end{aligned}$$

Tramo CD

$$\begin{aligned} M &= 32 - 6.4X \\ \text{Si } X=5 & \quad M = 32 \text{ Ton-m} \\ X=5 & \quad M=0 \end{aligned}$$

Tramo DB

$$M=0$$

Fuerza Cortante

Tramo AC

$$V = 8 - Y$$

$$\text{Si } x=0 \quad V = 8 \text{ Ton.}$$

$$x=8 \quad V = 0$$

Tramo CD

$$V = -6.4 \text{ Ton.}$$

Tramo AB

$$V = 0$$

Fuerza Normal

Tramo AC

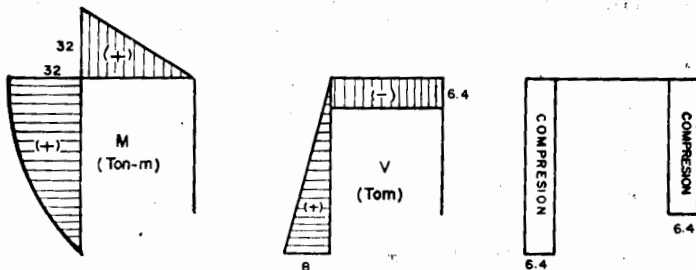
$$N = 6.4 \text{ Tm (Tension)}$$

Tramo CD

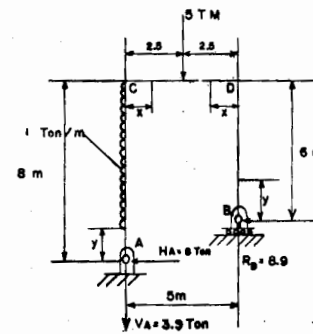
$$N = 0$$

Tramo DB

$$N = 6.4 \text{ Tm (Compresión)}$$



C) Suma de las Cargas anteriores.



REACCIONES

$$\sum M_A = 0$$

$$5 \times 2.5 + 8 \times 4 - 5 R_B = 0$$

$$12.5 + 32 = 5 R_B$$

$$R_B = \frac{44.5}{5} = 8.9 \text{ Ton}$$

$$R_B = 8.9 \text{ Ton.}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$8 - H_A = 0$$

$$H_A = 8 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-V_A - 5 + 8.9 = 0$$

$$V_A = -3.9 \text{ Ton}$$

$$V_A = 3.9 \text{ Ton}$$

Momento Flexionante

Tramo AC
 $M = 8y - \frac{y^2}{2}$
 Si $y = 0$ $M = 0$
 $y = 8$ $M = 32 \text{ TM}$

Tramo CE
 $M = 32 - 3.9x$
 Si $x = 0$ $M = 32 \text{ Ton-M}$
 $x = 8$ $M = 32 - 9.7 = 22.5 \text{ Ton-M}$

Tramo ED
 $M = 8.9$
 Si $x = 0$ $M = 0$
 Si $x = 2.5$ $M = 22.5 \text{ Ton-M}$

Fuerza Cortante

Tramo AC
 $V = 8 - y$
 si $y = 0$ $V = 8$
 $y = 8$ $V = 0$

Tramo CE
 $V = -3.9 \text{ Ton}$

Tramo ED
 $V = -8.9 \text{ Ton}$

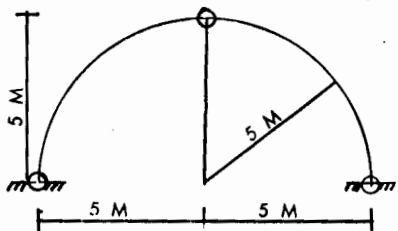
Fuerza Normal

Tramo AC $N = 3.9 \text{ Ton (Tension)}$
 Tramo CD $N = 0$
 Tramo DB $N = 8.9 \text{ Ton (Compresion)}$

Nótese en el siguiente resumen, que sumando las causas y los efectos de los casos a) y b), se obtienen los correspondientes al caso c).

EJEMPLO:14	SUPERPOSICION DE CAUSAS Y EFECTOS EN UN MARCO.	CARGAS	MOMENTO FLEXIONANTE (Ton-m)	FUERZA CORTANTE (Ton)	FUERZA NORMAL (Ton)

DIMENSIONES



EJEMPLO No. 15

SUPERPOSICION DE CAUSAS Y EFECTOS EN UN ARCO
CIRCULAR DE TRES ARTICULACIONES

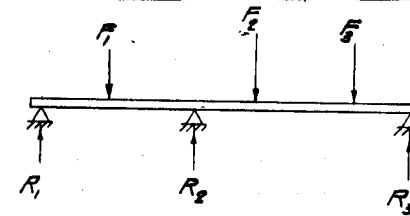
HOJA No 148

	MOMENTO FLEXIONANTE (Ton-m)	FUERZA CORTANTE (Ton-m)	FUERZA NORMAL (Ton-m)

FIJACION DE LAS ESTRUCTURAS

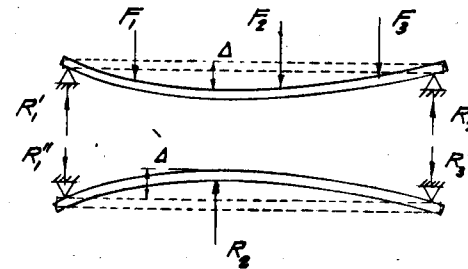
Cuando en un problema de equilibrio de fuerzas, el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones, - se dice que es ISOSTATICO o ESTATICAMENTE DETERMINADO, es - decir, con las ecuaciones de la Estática es suficiente para resolver dicho problema. Cabe mencionar que en este caso se consideran cuerpos rígidos.

Si el número de incógnitas es menor que el de - ecuaciones independientes de equilibrio, se dice que el pro - blema es HIPOSTATICO. Si el número de incógnitas es mayor - que el de ecuaciones independientes de equilibrio, se dice que el problema es HIPERESTATICO. En este caso es necesario recurrir a las deformaciones que sufre el cuerpo de acuerdo con las características del material de que está constitu - do.

EJEMPLO.-

2 ecuaciones, 3 incógnitas

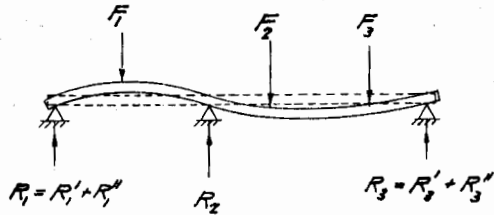
Problema hiperestático



condiciones al elimi - nar el apoyo central.

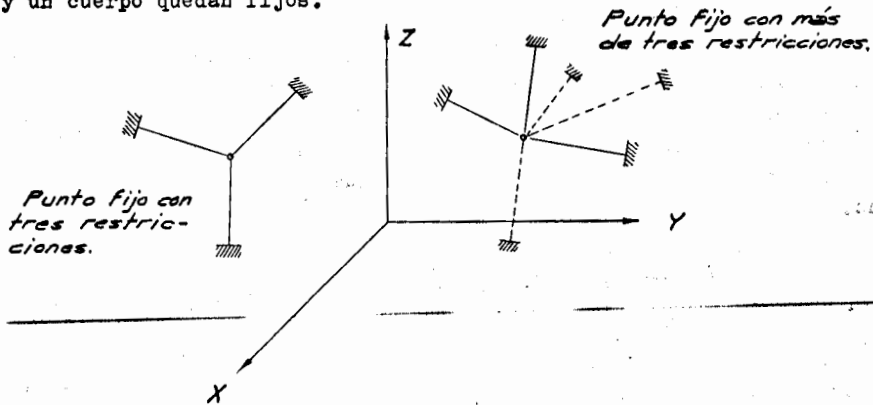
se aplica una fuerza R_2 tal que produzca - una flecha " Δ " hacia - arriba.

5) ARMADURAS ISOSTATICAS.



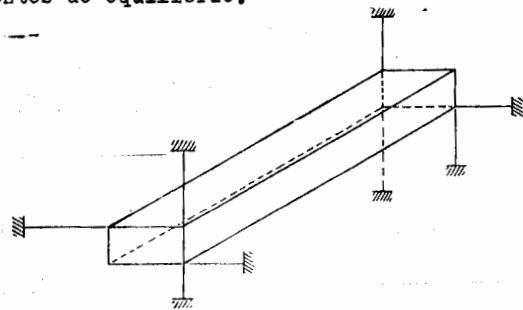
condiciones reales, suma de las dos anteriores.

Es conveniente observar la forma en que un punto y un cuerpo quedan fijos.



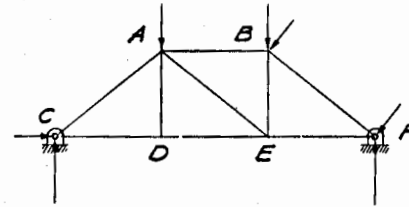
Es decir, para fijar un punto en el espacio se requieren como mínimo 3 restricciones no coplanares. Obsérvese que el número mínimo de restricciones es igual al de ecuaciones independientes de equilibrio para dicho punto.

Para fijar un cuerpo en el espacio se requieren como mínimo 6 restricciones, número igual al de ecuaciones independientes de equilibrio.

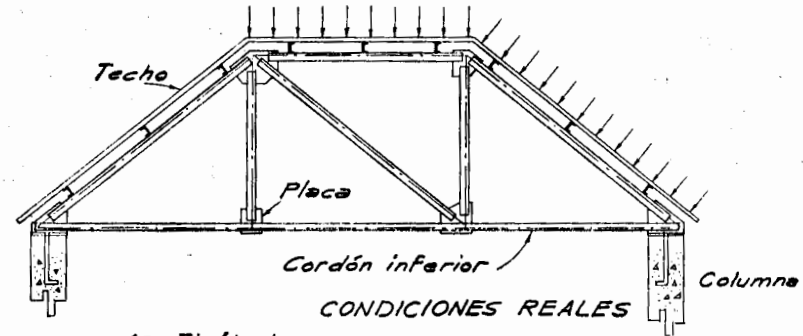
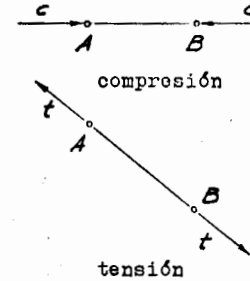


Obsérvese que las condiciones anteriores son necesarias pero no suficientes, puesto que se pueden tener por ejemplo seis o más restricciones y no fijar al cuerpo y para fijarlo se puede tener cualquier número de restricciones mayor que seis.

ARMADURAS EN EL PLANO



Condiciones hipotéticas



1a. Hipótesis.-

Las fuerzas están aplicadas en los nudos y en el mismo plano que los ejes de las barras.

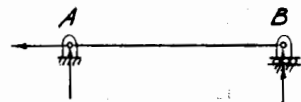
2a. Hipótesis.-

En los nudos o uniones se tienen articulaciones y por lo tanto los miembros se encuentran sujetos a dos fuerzas iguales, colineales y de sentido contrario y los nudos a fuerzas concurrentes.

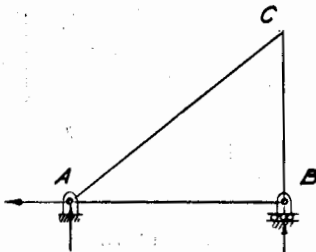
Si el número de barras es "n" y el número de nudos "j" se tendrán $n + 3$ incógnitas y $2j$ ecuaciones de equilibrio, por lo que el problema es isostático interiormente y exteriormente si:

$$n + 3 = 2j \quad n = 2j - 3$$

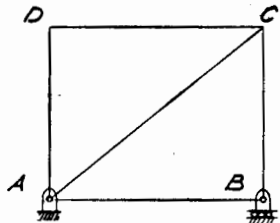
o sea, antes de resolver una armadura plana es necesario revisar que se cumpla la condición anterior, en cuyo caso dicha armadura es isostática y justamente rígida, esto último se puede comprobar en la siguiente forma:



$$\begin{aligned} n &= 1 & j &= 2 \\ n &= 2j - 3 \\ 1 &= 2(2) - 3 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$



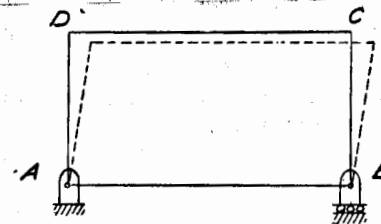
$$\begin{aligned} n &= 3 & j &= 3 \\ n &= 2j - 3 \\ 3 &= 2(3) - 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} n &= 5 & j &= 4 \\ n &= 2j - 3 \\ 5 &= 2(4) - 3 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

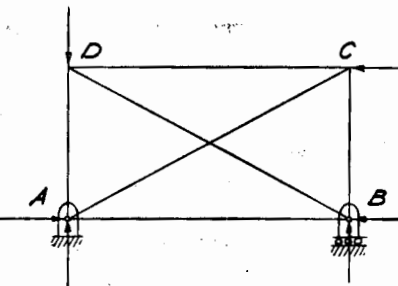
Obsérvese que una armadura isostática y justamente rígida resulta triangulada.

Analicemos otras condiciones:



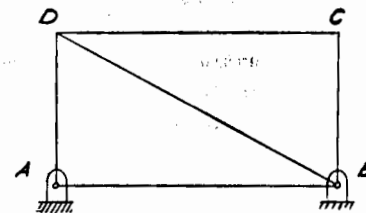
7 incógnitas
8 ecuaciones

problema hipostático que no se puede resolver como armadura por ser un mecanismo



8 ecuaciones
9 incógnitas

Armadura isostática exteriormente, hiperestática interiormente.



8 ecuaciones
9 incógnitas

hiperestática exteriormente, isostática interiormente.

ARMADURAS TRIDIMENSIONALES

Si la armadura es isostática exteriormente se tendrán 6 ecuaciones de incógnitas externas. Además, se tendrá una incógnita para cada una de las "n" barras, teniendo-se en total $n + 6$ incógnitas. Se cuenta con 3 ecuaciones de equilibrio para cada uno de los nudos en el espacio con un total de $3j$ ecuaciones de equilibrio.

Si la armadura es isostática y por lo tanto justamente rígida deberá cumplirse:

$$n + 6 = 3j \quad n = 3j - 6$$

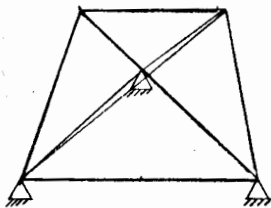
expresión cuyo cumplimiento debe revisarse antes de analizar una armadura en el espacio.

1a. Hipótesis.-

Los ejes de las barras concurren a un mismo punto en los nudos o uniones, que por lo tanto estarán sujetas a un sistema de fuerzas concurrentes, puesto que las fuerzas externas se consideran aplicadas en ellas.

2a. Hipótesis.-

Las barras están articuladas en los nudos, y por lo tanto son elementos sujetos a la acción de fuerzas iguales, colineales y de sentido contrario. También puede comprobarse que una armadura isostática y justamente rígida en el espacio resulta triangulada.

APLICACIONES

Existen dos métodos analíticos para resolver las armaduras:

I) METODO DE LOS NUDOS.-

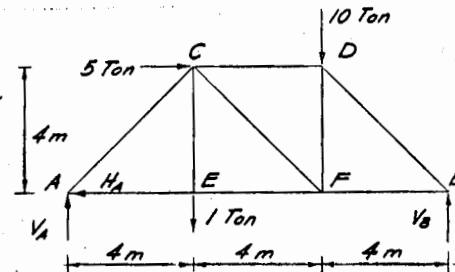
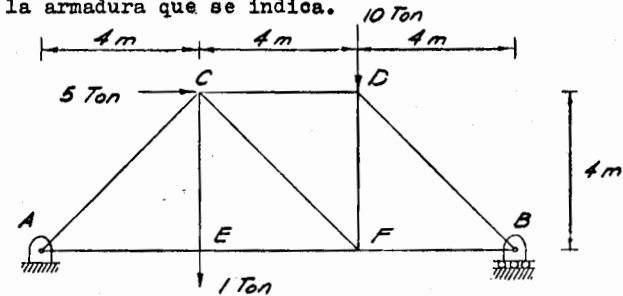
Consiste en encontrar el diagrama de cuerpo libre de los nudos por separado para analizar su equilibrio.

II) METODO DE LAS SECCIONES.-

Se trazan secciones hipotéticas de las armaduras aislando el diagrama de cuerpo libre de la parte que se encuentra en cualquiera de los lados de dicha sección y analizando su equilibrio se pueden encontrar las fuerzas en algunas de las barras.

EJEMPLO 1.-

Obtenga las fuerzas internas en las barras de la armadura que se indica.



Obtención de las reacciones externas:

$$\sum M_A = 0$$

$$1(4) - V_B(12) + 10(8) + 5(4) = 0$$

$$12V_B = 104$$

$$V_B = 8.66 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$8.66 - 1 - 10 + V_A = 0$$

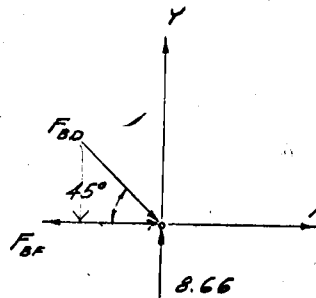
$$V_A = 2.34 \text{ Ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-H_A + 5 = 0$$

$$H_A = 5 \text{ Ton}$$

NUDO B:



$$\sum F_y = 0$$

$$8.66 - F_{BD} \sin 45^\circ = 0$$

$$0.7071 F_{BD} = 8.66$$

$$F_{BD} = \frac{8.66}{0.7071}$$

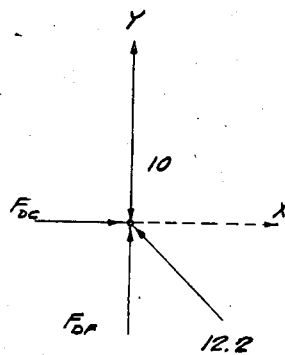
$$F_{BD} = 12.2 \text{ Ton} \quad (C)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{BF} + 12.2 \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{BF} = 8.66 \text{ Ton} \quad (T)$$

NUDO D:



$$\sum F_x = 0$$

$$F_{DC} - 12.2 \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{DC} = 12.2(0.7071)$$

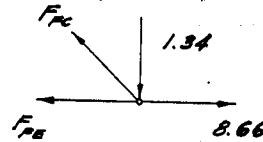
$$F_{DC} = 8.66 \text{ Ton} \quad (C)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-10 + F_{DF} + 12.2 \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{DF} = 1.34 \text{ Ton} \quad (C)$$

NUDO F:



$$\sum F_y = 0$$

$$F_{FC} \cos 45^\circ - 1.34 = 0$$

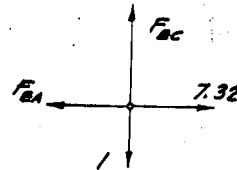
$$F_{FC} = 1.88 \text{ Ton} \quad (T)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$8.66 - F_{FE} - 1.88 \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{FE} = 7.32 \text{ Ton} \quad (T)$$

NUDO E:



$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{EA} + 7.32 = 0$$

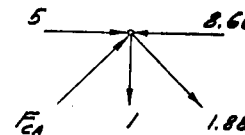
$$F_{EA} = 7.32 \text{ Ton} \quad (T)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{EC} - 1 = 0$$

$$F_{EC} = 1 \text{ Ton} \quad (T)$$

NUDO C:



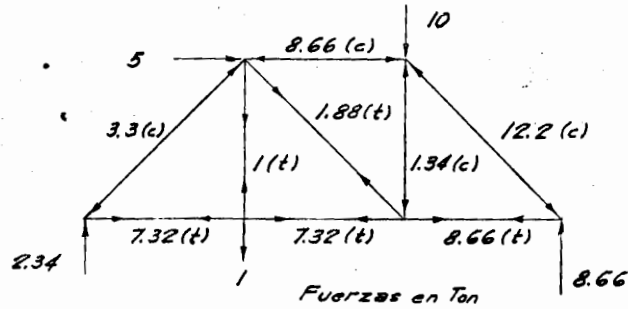
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{CA} \cos 45^\circ - 1 - 1.88 \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{CA} = \frac{1}{\cos 45^\circ} + 1.88$$

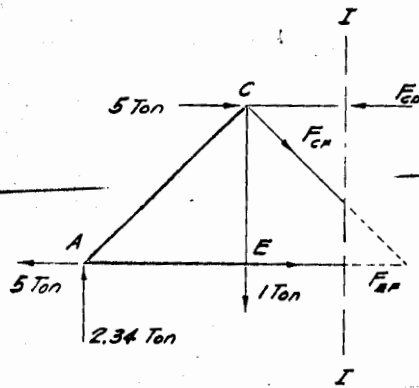
$$F_{CA} = 3.3 \text{ Ton} \quad (C)$$

RESUMEN:



Fuerzas en Ton
Comprobando aplicando el método de las secciones:

Sección I - I



$$\sum M_C = 0$$

$$2.34(4) + 5(4) - F_{EF}(4) = 0$$

$$F_{EF} = 7.34 \text{ Ton. (T)}$$

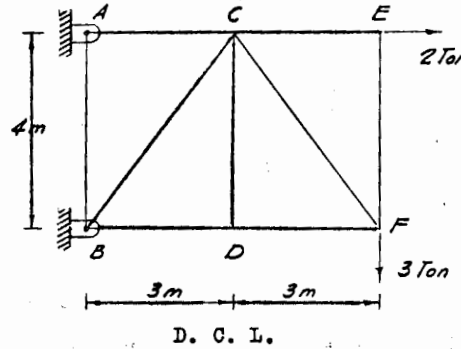
$$\sum M_E = 0$$

$$5(4) - F_{CD}(4) - 4 - 2.34(8) = 0$$

$$F_{CD} = 8.68 \text{ Ton. (C)}$$

EJEMPLO 2.-

Obtener las reacciones y fuerzas internas de la armadura.



$$n = 9 \quad j = 6$$

$$n = 2j - 3$$

$$9 = 2(6) - 3$$

$$9 = 9$$

armadura isostática

Obtención de las reacciones

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A(4) + 2(4) + 3(6) = 0$$

$$R_A = \frac{26}{4}$$

$$R_A = 6.5 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

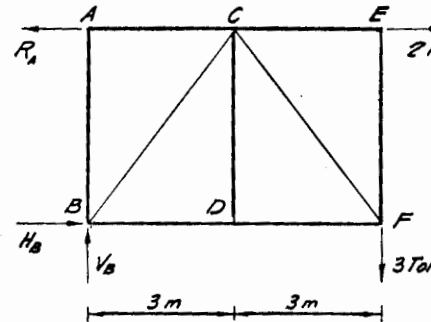
$$V_B - 3 = 0$$

$$V_B = 3 \text{ Ton.}$$

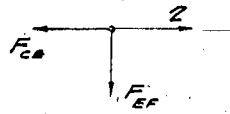
$$\sum F_x = 0$$

$$H_B - 6.5 + 2 = 0$$

$$H_B = 4.5 \text{ Ton}$$



NUDO E:



$$\sum F_x = 0$$

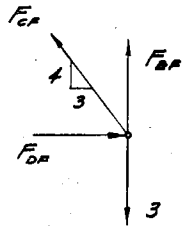
$$-F_{CE} + 2 = 0$$

$$F_{CE} = 2 \text{ Ton (T)}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{EF} = 0$$

NUDO F:



$$\sum F_y = 0$$

$$F_{EF} - 3 + \frac{4}{5} F_{CF} = 0$$

$$F_{CF} = \frac{15}{4}$$

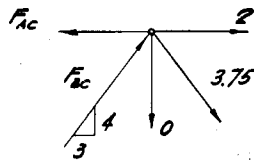
$$F_{CF} = 3.75 \text{ Ton (T)}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{DF} - 3.75 \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$F_{DF} = 2.25 \text{ Ton (C)}$$

NUDO C:



$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{4}{5} F_{BC} - 3.75 \left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

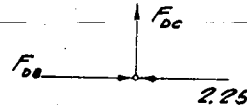
$$F_{BC} = 3.75 \text{ Ton (C)}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_{AC} + 3.75 \left(\frac{3}{5}\right) + 3.75 \left(\frac{3}{5}\right) + 2 = 0$$

$$F_{AC} = 6.5 \text{ Ton (T)}$$

NUDO D:



$$\sum F_x = 0$$

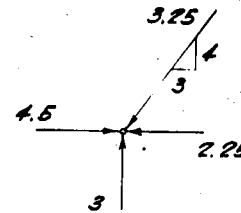
$$F_{DB} - 2.25 = 0$$

$$F_{DB} = 2.25 \text{ Ton (C)}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{DC} = 0$$

Comprobación en el nudo B:



$$\sum F_x = 0$$

$$4.5 - 2.5 - 3.25 \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$2 - 1.96 = 0$$

$$0 \approx 0$$

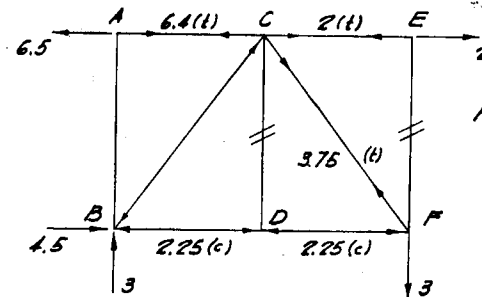
$$\sum F_y = 0$$

$$3 - 3.25 \left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$3 - 2.6 = 0$$

$$0 \approx 0$$

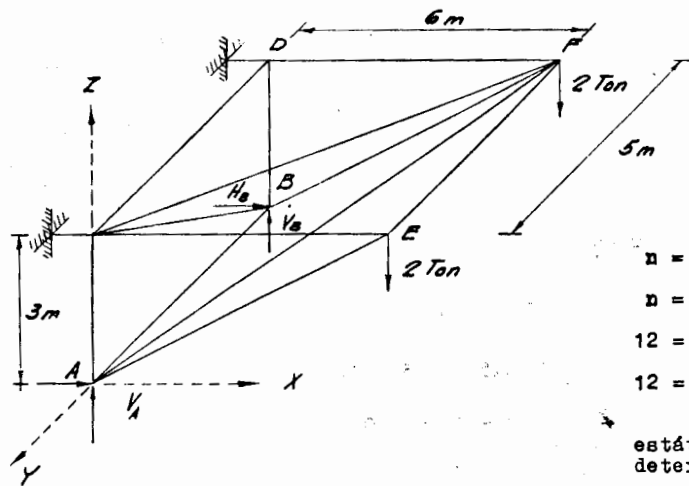
RESUMEN



Fuerzas en Ton
 // Fuerzas nulas

EJEMPLO 3.-

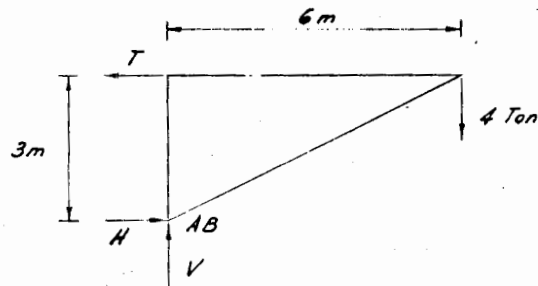
Obtener las reacciones y las fuerzas internas de la armadura siguiente en el espacio.



$$\begin{aligned} n &= 12 & j &= 6 \\ n &= 3j - 6 \\ 12 &= 3(6) - 6 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

estáticamente determinada

Obtención de las reacciones



$$\sum M_{AB} = 0$$

$$4(6) - T(3) = 0$$

$$T = 8 \text{ Ton}$$

$$T_C = T_D = 4 \text{ Ton}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$H = T = 8 \text{ Ton}$$

$$H_A = H_B = 4 \text{ Ton}$$

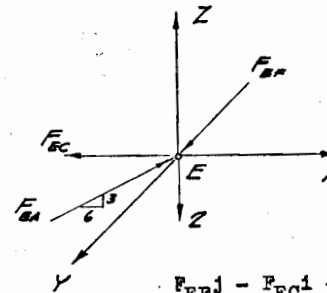
$$\sum F_y = 0$$

$$V - 4 = 0$$

$$V = 4 \text{ Ton}$$

$$V_A = V_B = 2 \text{ Ton}$$

NUDO E:



$$\sum F = 0$$

$$\bar{e}_{EF} = j$$

$$\bar{e}_{EC} = -i$$

$$\bar{e}_{EA} = \cos\alpha i + \cos\alpha j + \cos\alpha k$$

$$\bar{e}_{EA} = \frac{6}{\sqrt{45}} i + \frac{3}{\sqrt{45}} k$$

$$F_{EF}j - F_{EC}i + F_{EA}\left(\frac{6}{\sqrt{45}} i + \frac{3}{\sqrt{45}} k\right) - 2k = 0$$

$$(0.9 F_{EA} - F_{EC})i + (F_{EF})j + (0.45 F_{EA} - 2)k = 0$$

por igualación entre vectores:

$$F_{EF} = 0$$

$$0.45 F_{EA} - 2 = 0$$

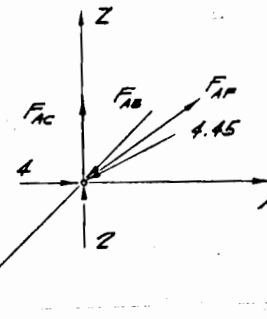
$$F_{EA} = 4.45 \text{ Ton} \quad (C)$$

$$0.9 F_{EA} - F_{EC} = 0$$

$$F_{EC} = 0.9(4.45)$$

$$F_{EC} = 4 \text{ Ton} \quad (T)$$

NUDO A:



$$\sum F = 0$$

$$\bar{e}_{AF} = (6i - 5j + 3k) \frac{1}{\sqrt{70}}$$

$$\bar{e}_{AB} = j$$

$$\bar{e}_{AC} = k$$

$$\bar{e}_{AB} = (6i + 3k) \frac{1}{\sqrt{45}}$$

$$\sum F = 0$$

$$4i + 2k + 4.45(0.91i + 0.45k) + F_{AC}k + F_{AB}j + F_{AF}(0.721i - 0.6j + 0.36k) = 0$$

$$(4 + 4 + 0.72 F_{AF})i + (F_{AB} - 0.60 F_{AF})j + (2 - 2 + F_{AC} + 0.36 F_{AF})k = 0$$

por igualación entre vectores:

$$4 - 4 + 0.72 F_{AF} = 0$$

$$0.72 F_{AF} = 0$$

$$F_{AF} = 0$$

$$F_{AB} - 0.60 F_{AF} = 0$$

$$F_{AB} - 0.60(0) = 0$$

$$F_{AB} = 0$$

$$2 - 2 + F_{AC} + 0.36 F_{AF} = 0$$

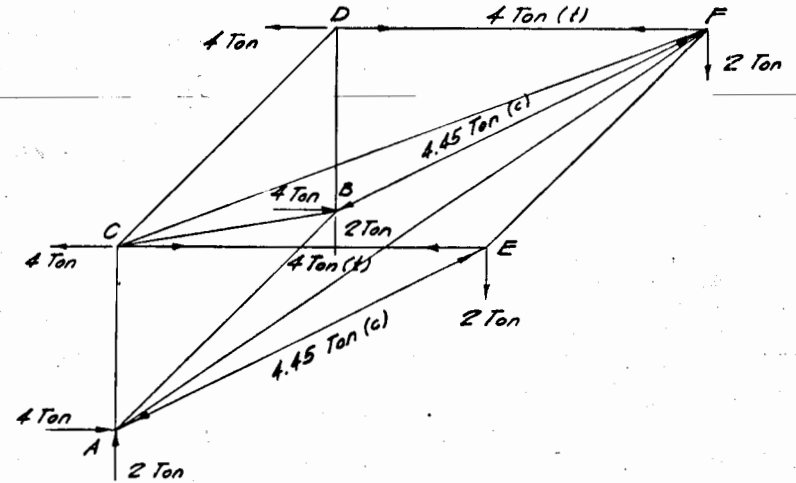
$$F_{AC} + 0.36 F_{AF} = 0$$

$$F_{AC} + 0.36(0) = 0$$

$$F_{AC} = 0$$

En la misma forma pueden analizarse todos los nudos.

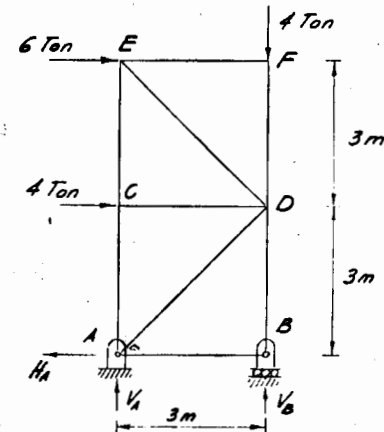
RESUMEN:



Con este ejemplo se ilustra el porqué en los casos prácticos se consideran armaduras en el plano, puesto que como puede observarse, al no actuar cargas horizontales externas, solo trabajan los elementos en planos verticales, sirviendo los otros tan solo de contraventeos.

EJEMPLO 4.-

Obtener las fuerzas internas en la siguiente armadura.



Reacciones:

$$\sum F_x = 0$$

$$H_A = 4 + 6 = 10 \text{ Ton}$$

$$H_A = 10 \text{ Ton}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$4(3) + 6(6) + 4(3) - 3 R_B = 0$$

$$4 + 12 + 4 - R_B = 0$$

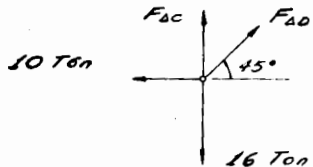
$$R_B = 20 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

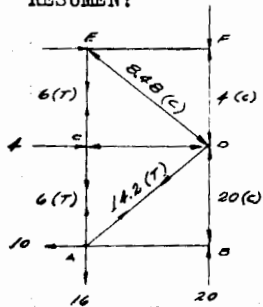
$$20 + V_A - 4 = 0$$

$$V_A = -16 \text{ Ton}$$

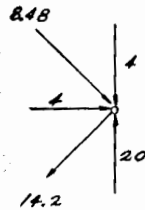
NUDO A:



RESUMEN:



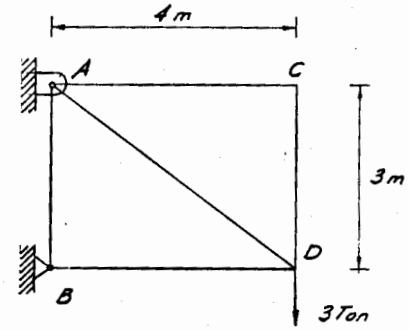
NUDO D:



EJEMPLO 5.-

Obtener las fuerzas internas en la

siguiente armadura.



Reacciones.

$$\sum M_A = 0$$

$$3(4) - 3 R_B = 0$$

$$R_B = 4 \text{ Ton}$$

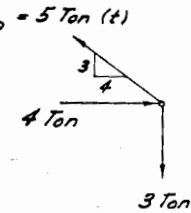
$$\sum F_x = 0$$

$$H_A = R_B = 4 \text{ Ton}$$

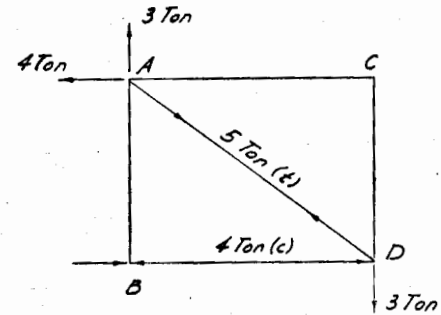
$$\sum F_y = 0$$

$$V_A = 3 \text{ Ton}$$

NUDO D:

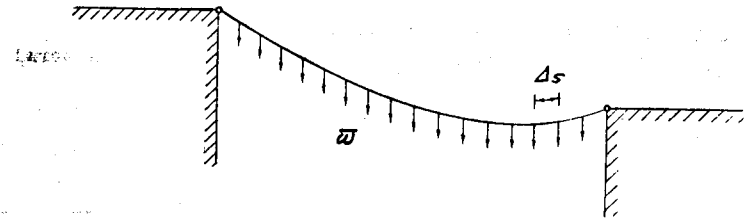


RESUMEN:



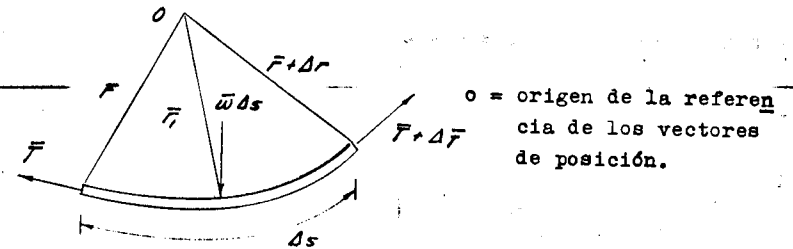
CABLES

Consideremos los cables flexibles e inextensibles en las condiciones ilustradas en la siguiente figura:



Si el cable se encuentra en equilibrio, así lo estará cada una de sus partes.

Analizando un elemento de cable de longitud Δs



6) CABLES.

Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum \vec{M}_o = 0 \dots\dots\dots(2)$$

de (1)

$$\vec{T} - (\vec{T} + \Delta\vec{T}) + \vec{w}\Delta s = 0$$

$$-\Delta\vec{T} + \vec{w}\Delta s = 0$$

$$\vec{w} = \frac{\Delta\vec{T}}{\Delta s} \quad \text{tomando límites cuando } \Delta s \rightarrow 0$$

$$\boxed{\vec{w} = \frac{d\vec{T}}{ds}} \dots\dots\dots(3)$$

de (2)

$$\vec{r} \times \vec{T} - (\vec{r} + \Delta \vec{r}) \times (\vec{T} + \Delta \vec{T}) + \vec{r}' \times (\vec{w} \Delta s) = 0$$

$$\vec{r} \times \vec{T} - \vec{r} \times \vec{T} - \vec{r} \times \Delta \vec{T} - \Delta \vec{r} \times \vec{T} - \Delta \vec{r} \times \Delta \vec{T} + (\vec{r}' \times \vec{w}) \Delta s = 0$$

Si: $\Delta s \rightarrow 0, \quad \Delta r \rightarrow 0, \quad \Delta T \rightarrow 0, \quad r' \rightarrow r$

$\Delta \vec{r} \times \Delta \vec{T}$ es una diferencial de 2º orden, que resulta - despreciable en comparación a los demás términos

$$-\vec{r} \times \Delta \vec{T} - \Delta \vec{r} \times \vec{T} + (\vec{r}' \times \vec{w}) \Delta s = 0$$

$$-\frac{\vec{r} \times \Delta \vec{T}}{\Delta s} - \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \times \vec{T} + \vec{r}' \times \vec{w} = 0$$

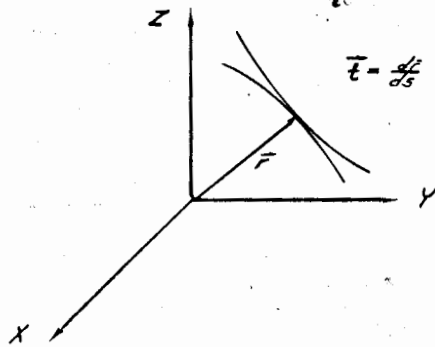
$$-\vec{r} \times \frac{d\vec{T}}{ds} - \frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{T} + \vec{r}' \times \vec{w} = 0$$

tomando en cuenta (3)

$$-\vec{r} \times \vec{w} - \frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{T} + \vec{r}' \times \vec{w} = 0$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{T} = 0$$

pero:

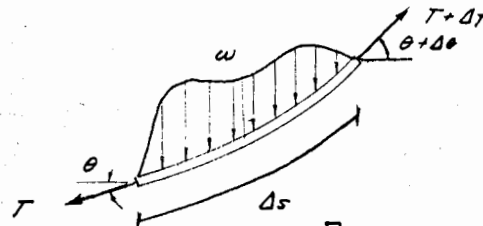


\vec{t} = vector unitario tangente a la - curva del cable

por lo tanto: $\vec{t} \times \vec{T} = 0$

Es decir la tensión en el cable T tiene la dirección de la tangente a la curva en cualquier punto.

CABLE SUJETO A CARGA VERTICAL.



puesto que existe equilibrio: $\sum F_x = 0$

$$(T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cos\theta = 0$$

Si: $\Delta T \rightarrow 0, \quad \Delta s \rightarrow 0, \quad \text{y} \quad \Delta\theta \rightarrow 0$

$$T \cos(\theta + \Delta\theta) + \Delta T \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cos\theta = 0$$

$$T \cos\theta + \Delta T \cos\theta - T \cos\theta = 0$$

$$\Delta T \cos\theta = 0$$

$$\frac{\Delta}{\Delta s} (T \cos\theta) = 0$$

$$\frac{d}{ds} (T \cos\theta) = 0$$

es decir:

$$T \cos\theta = \text{cte} = H \dots\dots\dots(4)$$

Para un cable sujeto a carga vertical se conserva constante la componente horizontal de la tensión.

$$\sum F_y = 0$$

$$(T + \Delta T) \text{sen}(\theta + \Delta\theta) - T \text{sen}\theta - w \Delta s = 0$$

$$T \text{sen}(\theta + \Delta\theta) + \Delta T \text{sen}(\theta + \Delta\theta) - T \text{sen}\theta - w \Delta s = 0$$

Si: $\Delta s \rightarrow 0, \quad \Delta T \rightarrow 0, \quad \text{y} \quad \Delta\theta \rightarrow 0$

$$T \text{sen}\theta + \Delta T \text{sen}\theta - T \text{sen}\theta - w \Delta s = 0$$

$$\frac{dT}{ds} \text{sen}\theta - w = 0$$

$$\frac{dT}{ds} (\text{sen}\theta) = w$$

y de (4)

$$\frac{d}{ds} (H \tan \theta) = w$$

$$d(H \tan \theta) = w ds$$

$$\tan \theta = \frac{1}{H} \int w ds$$

por lo tanto: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \int_0^s w ds \dots\dots\dots(5)$

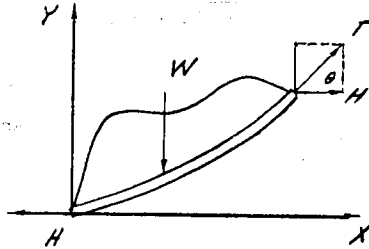
Esta expresión puede presentarse en otra forma:

$$w = \int_0^s w ds$$

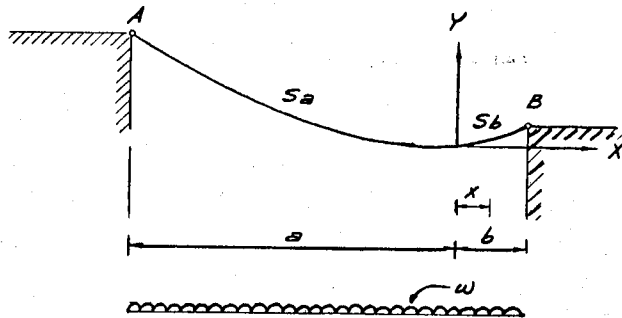
por lo tanto: $\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}$

$$\tan \theta = \frac{w}{H}$$

$$T = \sqrt{H^2 + w^2}$$



CABLE SUJETO A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN SU PROYECCION HORIZONTAL.



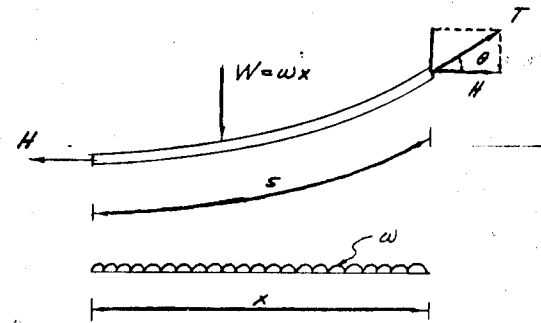
$$\int_0^s w ds = wx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{H}$$

$$y = \frac{wx^2}{2H} + C$$

si: $x = 0$, para $y = 0$, $C = 0$

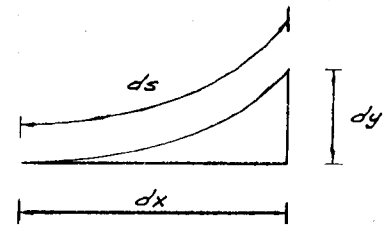
$$y = \frac{wx^2}{2H}$$



$$T = \sqrt{w^2 x^2 + H^2}$$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}$$

longitud del cable:



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{H}\right)^2} dx$$

$$S = \int_0^S \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{H}\right)^2} dx$$

$$S_a = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{wa}{H}\right)^2} + \frac{H}{2w} L \left[\frac{wa}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{wa}{H}\right)^2} \right]$$

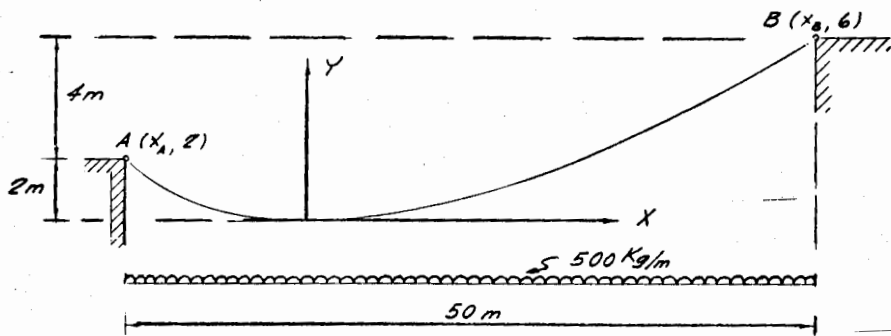
$$S_b = \frac{b}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{wb}{H}\right)^2} + \frac{H}{2w} L \left[\frac{wb}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{wb}{H}\right)^2} \right]$$

$$S_{Total} = S_a + S_b$$

$$S_{Total} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{wa}{H}\right)^2} + \frac{H}{2w} L \left[\frac{wa}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{wa}{H}\right)^2} \right] + \frac{b}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{wb}{H}\right)^2} + \frac{H}{2w} L \left[\frac{wb}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{wb}{H}\right)^2} \right]$$

EJEMPLO 1.-

Obtener el valor de las tensiones - máxima y mínima.



Ecuación del cable:

$$y = \frac{wx^2}{2H} \dots\dots\dots(1)$$

$$x_b - x_a = 50 \dots\dots\dots(2)$$

sustituyendo en (1) las coordenadas de A:

$$2 = \frac{500 x_a^2}{2H}$$

$$H = 125 x_a^2$$

sustituyendo el valor de (2)

$$H = 125 (x_b - 50)^2 \dots\dots(3)$$

sustituyendo en (1) las coordenadas de B:

$$6 = \frac{500 x_b^2}{2H}$$

$$H = \frac{500 x_b^2}{12} \dots\dots\dots(4)$$

de (3) y (4)

$$125(x_b - 50)^2 = \frac{500}{12} x_b^2$$

$$8x_b^2 - 1200x_b + 30000 = 0$$

resolviendo:

$$x_b = 31.7 \text{ m}$$

de (2): $x_a = 31.7 - 50$

$$x_a = - 18.3 \text{ m}$$

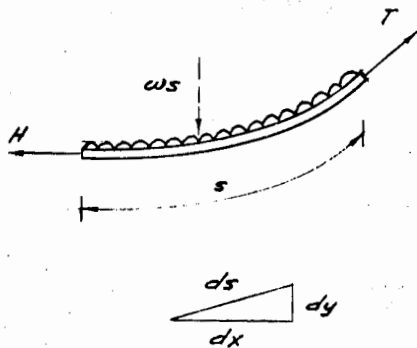
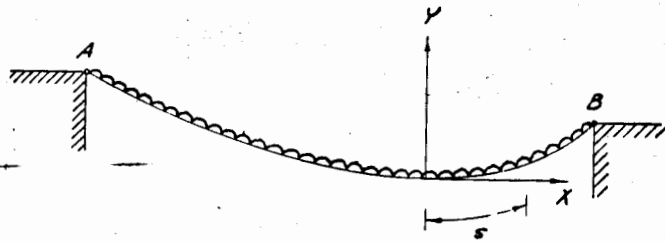
de (3): $H = 125(31.7 - 50)^2$

$H = 42000 \text{ Kg.}$ Tensión mínima

$T = \sqrt{(42000)^2 + (500 \times 317)^2}$

$T_{\text{max}} = 45000 \text{ Kg.}$

CABLE SUJETO A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA A LO LARGO DE SU LONGITUD.



$\frac{dy}{dx} = \frac{ws}{H} \dots\dots(1)$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{ws}{H}\right)^2} dx$

$dx = \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{ws}{H}\right)^2}}$

$x = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{ws}{H}\right)^2}} + C$

$x = \frac{H}{w} \text{sen } h^{-1} \frac{ws}{H} + C_1$

condiciones de frontera:
si: $s = 0, x = 0, C_1 = 0$
sustituyendo nos queda:

$x = \frac{H}{w} \text{sen } h^{-1} \frac{ws}{H} \dots\dots\dots(2)$

$\frac{wx}{H} = \text{sen } h^{-1} \frac{ws}{H}$

$\frac{ws}{H} = \text{sen } h \frac{wx}{H}$

$s = \frac{H}{w} \text{sen } h \frac{wx}{H} \dots\dots\dots(3)$

sustituyendo (3) en (1)

$\frac{dy}{dx} = \text{sen } h \frac{wx}{H} \dots\dots\dots(4)$

integrando (4)

$y = \frac{H}{w} \cos \frac{wx}{H} + C_2$

condiciones de frontera: si $x = 0, y = 0$

por lo tanto: $0 = \frac{H}{w} + C_2$

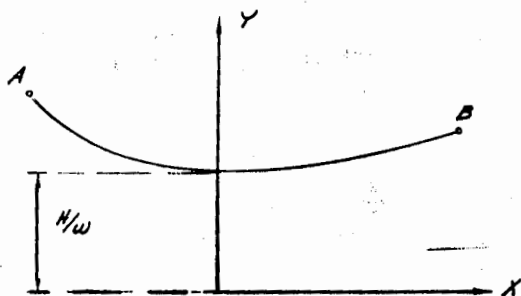
$C_2 = - \frac{H}{w}$

es decir:

$$y = \frac{H}{w} \left(\cosh \frac{wx}{H} - 1 \right) \dots\dots\dots(5)$$

La ecuación (5) se denomina "ecuación de la catenaria". Esta expresión se puede simplificar llevando a cabo una traslación de ejes, quedando la expresión de la siguiente forma:

$$y = \frac{H}{w} \cosh \frac{wx}{H} \dots\dots\dots(6)$$



puesto que:

$$T = \sqrt{H^2 + w^2}$$

$$T = \sqrt{H^2 + (ws)^2}$$

sustituyendo el valor de (5) nos queda:

$$T = \sqrt{H^2 + \left(H \sinh \frac{wx}{H} \right)^2}$$

de acuerdo con las propiedades de las funciones hiperbólicas:

$$T = H \sqrt{\left(\cosh \frac{wx}{H} \right)^2}$$

$$T = H \cosh \frac{wx}{H}$$

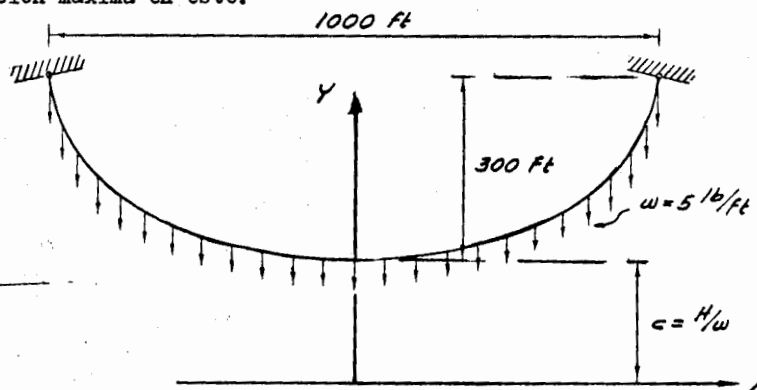
considerando la expresión (6)

$$H \cosh \frac{wx}{H} = yw$$

$$T = wy$$

EJEMPLO 2.-

Obtener la longitud del cable y la tensión máxima en este.



$$s = c \sinh \frac{x}{c} \dots\dots\dots(1)$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \dots\dots\dots(2)$$

$$T = wy \dots\dots\dots(3)$$

si: $x = 500$ ft, $y = c + 300$ sustituyendo en (2) se tiene:

$$c + 300 = c \cosh \frac{500}{c}$$

$$c = \frac{c + 300}{\cosh \frac{500}{c}}$$

Obtendremos el valor de "c" por tanteos, es decir por aproximaciones sucesivas de acuerdo con la siguiente tabla:

c	c + 300	$\frac{500}{c}$	$\cos h \frac{500}{c}$	$c = \frac{c + 300}{\cos h \frac{500}{c}}$
500	800	1.0	1.543	515
550	850	0.91	1.444	585
400	700	1.25	1.898	370
450	750	1.11	1.680	448

$c = 450 \text{ ft}$

$L = 2 S_{\text{máx}}$

de (1)

$L = 2(450) \text{ sen } h \frac{500}{450}$

$L = 900 \text{ sen } h(1.11)$

$L = 900(1.352)$

$L = 1210 \text{ ft}$

y de (3)

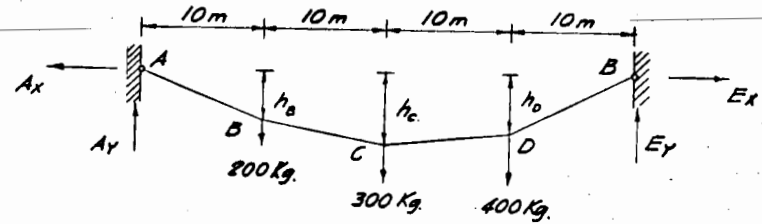
$T_{\text{máx}} = wy_{\text{máx}}$

$T_{\text{máx}} = 5(750)$

$T_{\text{máx}} = 3750 \text{ ft}$

EJEMPLO 3.-

Cable sujeto a cargas concentradas.



Si $h_o = 6m$ obtener: h_B , h_D , A_x , A_y , E_x , E_y (Reacciones en los apoyos, obtención y configuración)

Por equilibrio del conjunto:

$\sum F_x = 0$

$A_x = E_x \dots\dots\dots(1)$

$\sum M_E = 0$

$A_y(40) - 200(30) - 300(20) - 400(10) = 0$

$A_y = \frac{6000 + 6000 + 4000}{40}$

$A_y = \frac{16000}{40}$

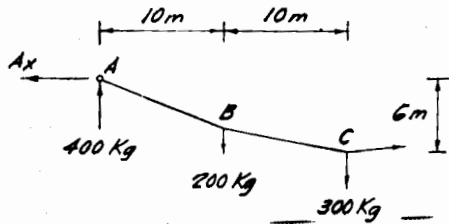
$A_y = 400 \text{ Kg.}$

$$\sum F_y = 0$$

$$E_y - 200 - 300 - 400 + 400 = 0$$

$$E_y = 500 \text{ Kg.}$$

Tramo ABC



$$\sum M_C = 0$$

$$400(20) - A_x(6) - 200(10) = 0$$

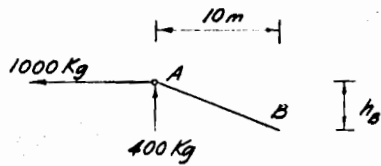
$$6A_x = 8000 - 2000$$

$$A_x = 1000 \text{ Kg.}$$

de (1)

$$E_x = 1000 \text{ Kg.}$$

Tramo AB



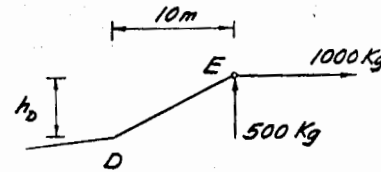
$$\sum M_B = 0$$

$$400(10) - 1000(h_B) = 0$$

$$h_B = \frac{4000}{1000}$$

$$h_B = 4 \text{ m.}$$

Tramo DE



$$\sum M_D = 0$$

$$1000(h_D) - 5000(10) = 0$$

$$h_D = \frac{5000}{1000}$$

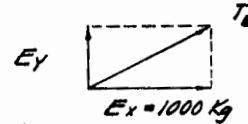
$$h_D = 5 \text{ m.}$$

$$T_E = \sqrt{(E_x)^2 + (E_y)^2}$$

$$T_E = \sqrt{250000 + 1000000}$$

$$T_E = 100 \sqrt{125}$$

$$T_E = 1118 \text{ Kg.}$$

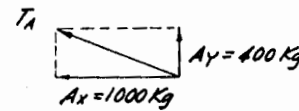


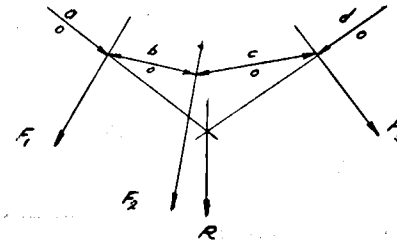
$$T_A = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2}$$

$$T_A = \sqrt{1000000 + 160000}$$

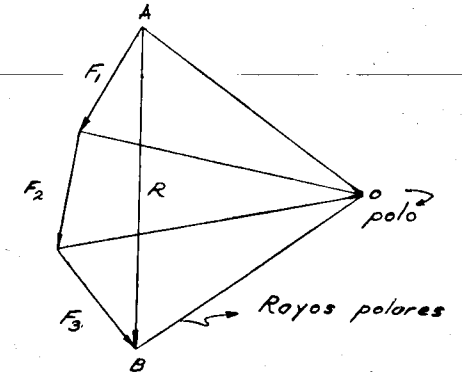
$$T_A = 100 \sqrt{116}$$

$$T_A = 1077 \text{ Kg.}$$



POLIGONO FUNICULAR

Polígono funicular

Polígono de fuerzas
o dinámico

APENDICE I
METODOS GRAFICOS Y NUMERICOS.

Escala de longitudes (E_L)

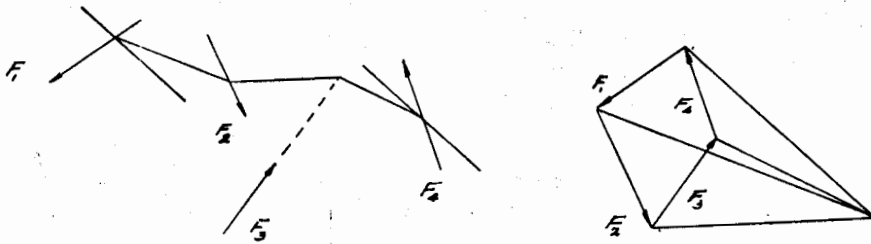
$$E_L = \frac{L}{L} \left[\frac{m}{cm}, \frac{cm}{cm}, \frac{ft}{in} \right]$$

Escala de fuerzas (E_F)

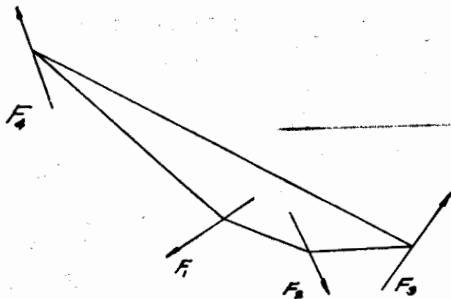
$$E_F = \frac{F}{L} \left[\frac{ton}{cm}, \frac{lb}{in}, \dots, etc \right]$$

En el polígono dinámico podemos intercambiar el orden de las fuerzas.

Si se cierra el polígono dinámico la resultante es un par o bien se presenta equilibrio.



Se cierra el polígono dinámico y la resultante es un par ya que el funicular no es cerrado.

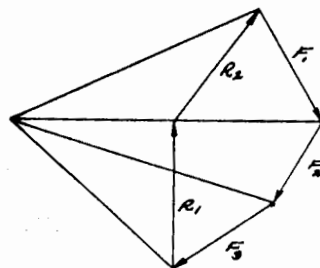
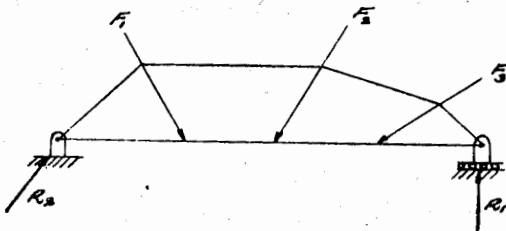


Polígono funicular cerrado, el sistema está en equilibrio.

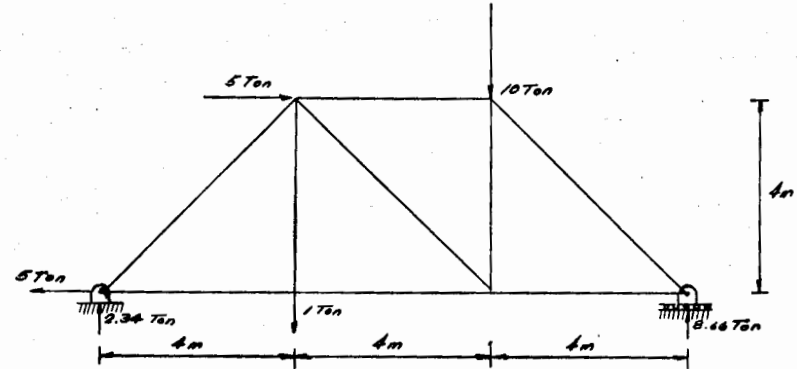
Obtención de reacciones utilizando el polígono funicular.

Polígono funicular cerrado

Polígono dinámico cerrado



SOLUCION GRAFICA DE UNA ARMADURA

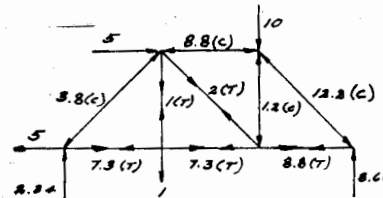
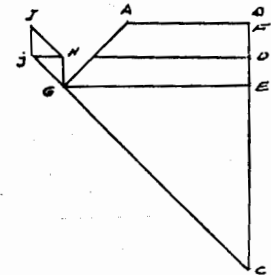
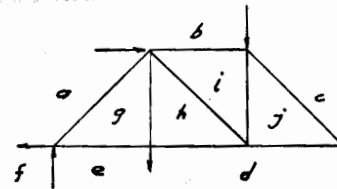


Inicialmente se obtienen las reacciones en los apoyos analíticamente o gráficamente.

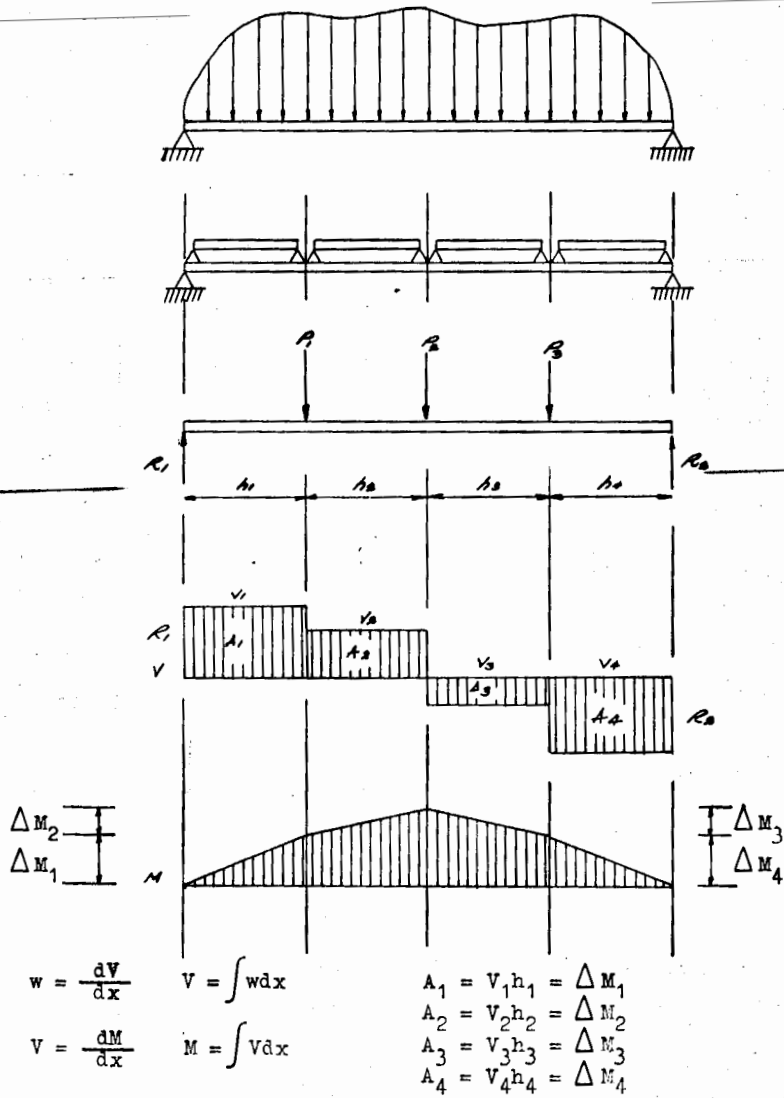
A continuación se dibuja a escala la armadura y se considera el equilibrio de cada nudo trazando a escala el polígono de fuerzas correspondiente.

$$E_P = \frac{0.5 \text{ cm}}{1 \text{ ton}} = \frac{2 \text{ Ton}}{\text{cm}}$$

$$E_L = \frac{0.5 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = \frac{2 \text{ m}}{\text{cm}}$$

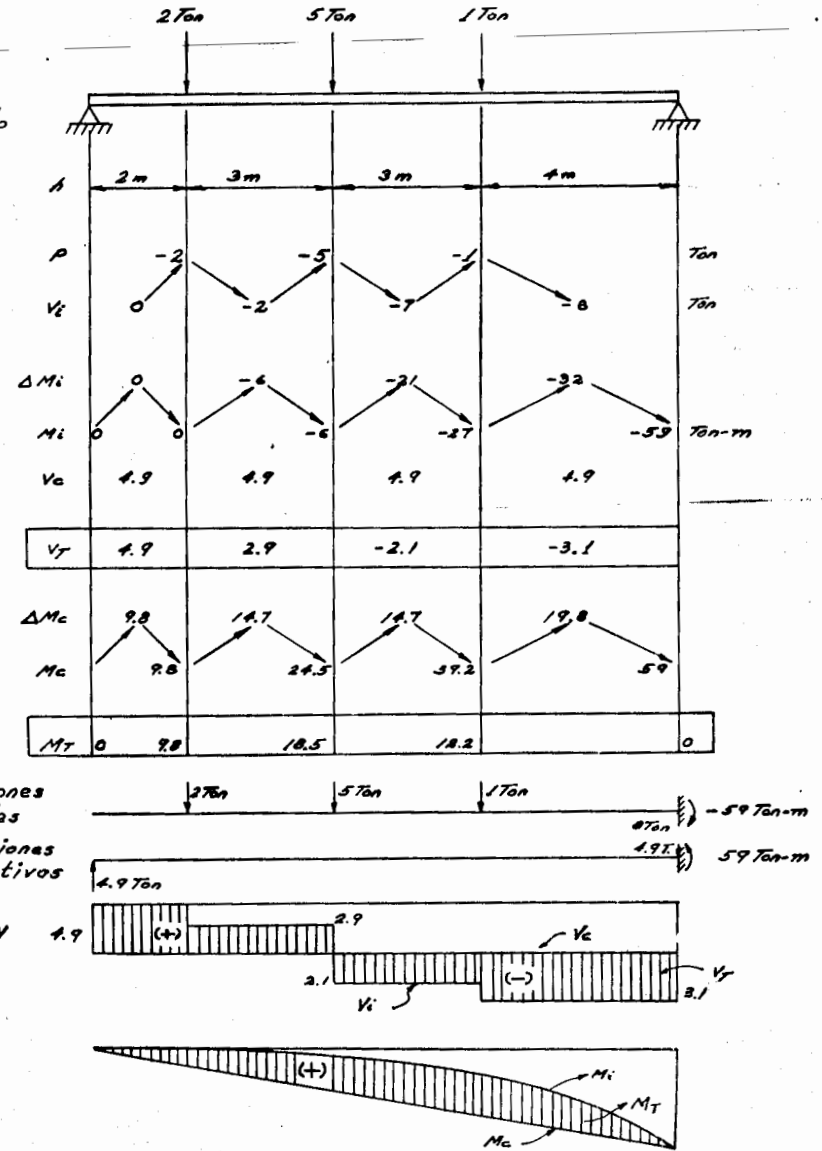


OBTENCION NUMERICA DE ELEMENTOS MECANICOS

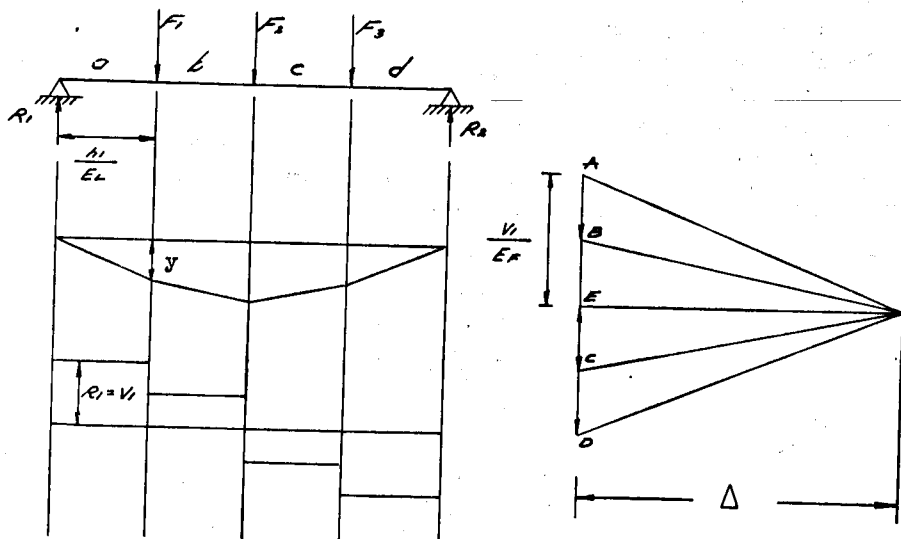


EJEMPLO.-

concepto



OBTENCION GRAFICA DE ELEMENTOS MECANICOS



$$E_L = \frac{L}{L} = \frac{m}{cm}, \frac{ft}{in} \dots\dots$$

$$E_F = \frac{F}{L} = \frac{Ton}{m}, \frac{lb}{in} \dots\dots$$

$$\frac{\Delta}{\frac{h_1}{E_L}} = \frac{\frac{v_1}{E_F}}{y}$$

$$y = \frac{v_1}{E_F} \frac{h_1}{E_L} \frac{1}{\Delta}$$

$$y = \frac{v_1 h_1}{E_L E_F \Delta}$$

$$\text{pero } v = \frac{dM}{dx} = \frac{\Delta M}{\Delta x}$$

$$\Delta M = v \Delta x$$

$$M_1 = v_1 \Delta x_1 = v_1 h_1$$

$$y = \frac{M_1}{E_L E_F \Delta}$$

por lo que el diagrama indicado (poligono funicular) es el de momento flexionante con la escala:

$$E_M = E_L E_F \Delta$$

APENDICE II
FORMULARIO.

- 1.- $\text{sen}(90 - \alpha) = \cos \alpha$
- 2.- $\text{cos}(90 - \alpha) = \text{sen } \alpha$
- 3.- $\text{tan}(90 - \alpha) = \text{cot } \alpha$
- 4.- $\text{cot}(90 - \alpha) = \text{tan } \alpha$
- 5.- $\text{sec}(90 - \alpha) = \text{csc } \alpha$
- 6.- $\text{csc}(90 - \alpha) = \text{sec } \alpha$
- 7.- $\text{csc } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$
- 8.- $\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha}$
- 9.- $\text{cot } \alpha = \frac{1}{\text{tan } \alpha}$
- 10.- $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$
- 11.- $\text{sec}^2 \alpha = 1 + \text{tan}^2 \alpha$
- 12.- $\text{csc}^2 \alpha = 1 + \text{cot}^2 \alpha$
- 13.- $\text{sen}(180 - \alpha) = -\text{sen } \alpha$
- 14.- $\text{cos}(180 - \alpha) = -\text{cos } \alpha$
- 15.- $\text{tan}(180 - \alpha) = -\text{tan } \alpha$
- 16.- $\text{cot}(180 - \alpha) = -\text{cot } \alpha$
- 17.- $\text{sec}(180 - \alpha) = -\text{sec } \alpha$
- 18.- $\text{csc}(180 - \alpha) = \text{csc } \alpha$
- 19.- $\text{sen}(180 + \alpha) = -\text{sen } \alpha$
- 20.- $\text{cos}(180 + \alpha) = -\text{cos } \alpha$
- 21.- $\text{tan}(180 + \alpha) = \text{tan } \alpha$
- 22.- $\text{cot}(180 + \alpha) = \text{cot } \alpha$
- 23.- $\text{sec}(180 + \alpha) = \text{sec } \alpha$
- 24.- $\text{csc}(180 + \alpha) = -\text{csc } \alpha$
- 25.- $\text{sen}(360 - \alpha) = -\text{sen } \alpha$
- 26.- $\text{cos}(360 - \alpha) = \text{cos } \alpha$
- 27.- $\text{tan}(360 - \alpha) = -\text{tan } \alpha$
- 28.- $\text{cot}(360 - \alpha) = -\text{cot } \alpha$
- 29.- $\text{sec}(360 - \alpha) = \text{sec } \alpha$
- 30.- $\text{csc}(360 - \alpha) = -\text{csc } \alpha$

- 31.- $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$
- 32.- $\text{cos}(-\alpha) = \text{cos } \alpha$
- 33.- $\text{tan}(-\alpha) = -\text{tan } \alpha$
- 34.- $\text{cot}(-\alpha) = -\text{cot } \alpha$
- 35.- $\text{sec}(-\alpha) = \text{sec } \alpha$
- 36.- $\text{csc}(-\alpha) = -\text{csc } \alpha$
- 37.- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta$
- 38.- $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$
- 39.- $\text{tan}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tan } \alpha + \text{tan } \beta}{1 - \text{tan } \alpha \text{ tan } \beta}$
- 40.- $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta - \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta$
- 41.- $\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$
- 42.- $\text{tan}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tan } \alpha - \text{tan } \beta}{1 + \text{tan } \alpha \text{ tan } \beta}$
- 43.- $\text{sen } 2\alpha = 2 \text{sen } \alpha \text{ cos } \alpha$
- 44.- $\text{cos } 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$
- 45.- $\text{tan } 2\alpha = \frac{2 \text{tan } \alpha}{1 - \text{tan}^2 \alpha}$
- 46.- $\text{cos}^2 \alpha = \frac{1 + \text{cos } 2\alpha}{2}$
- 47.- $\text{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \text{cos } 2\alpha}{2}$
- 48.- $\text{sen } hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- 49.- $\text{cos } hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- 50.- $\text{cos } h^2\theta - \text{sen } h^2\theta = 1$
- 51.- $\text{tan } hx = \frac{\text{sen } hx}{\text{cos } hx} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$
- 52.- $\text{cot } hx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- 53.- $\frac{d}{dx} \text{sen } hx = \text{cos } hx$
- 54.- $\frac{d}{dx} \text{tan } hx = \text{sec } h^2x$

$$55.- \frac{d}{dx} \sec hx = - \sec hx \tan hx$$

$$56.- \frac{d}{dx} \cos hx = - \sin hx$$

$$57.- \frac{d}{dx} \cot hx = - \csc hx \cot hx$$

$$58.- \frac{d}{dx} \csc hx = - \csc hx \cot hx$$

$$59.- \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$60.- \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$61.- \sin ix = i \sinh x$$

$$62.- \cos ix = \cosh x$$

$$63.- \cos h(x + y) = \cos hx \cos hy + \sin hx \sin hy$$

$$64.- \sec^2 x + \tan^2 x = 1$$

$$65.- \frac{d}{dx} c = 0$$

$$66.- \frac{d}{dx} x = 1$$

$$67.- \frac{d}{dx} (u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

$$68.- \frac{d}{dx} (uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

$$69.- \frac{d}{dx} au = a \frac{du}{dx}$$

$$70.- \frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$71.- \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$72.- \frac{d}{dx} \frac{u}{a} = \frac{1}{a} \frac{du}{dx}$$

$$73.- \frac{d}{dx} \frac{a}{u} = - \frac{a}{u^2} \frac{du}{dx}$$

$$74.- \frac{d}{dx} \sqrt{u} = \frac{\frac{du}{dx}}{2\sqrt{u}}$$

$$75.- \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$76.- \frac{d}{dx} \cos u = - \sin u \frac{du}{dx}$$

$$77.- \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$78.- \frac{d}{dx} \cot u = - \csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$79.- \frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$80.- \frac{d}{dx} \csc u = - \csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$81.- \frac{d}{dx} \text{ang sen } u = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \text{sen}^{-1}u \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$82.- \frac{d}{dx} \text{ang cos } u = \frac{-\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left(0 \leq \text{cos}^{-1}u \leq \pi \right)$$

$$83.- \frac{d}{dx} \text{ang tan } u = \frac{\frac{du}{dx}}{u^2 + 1} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \text{tan}^{-1}u < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$84.- \frac{d}{dx} \operatorname{ang} \cot u = \frac{-\frac{du}{dx}}{u^2 + 1} \quad (0 < \cot^{-1} u < \pi)$$

$$85.- \frac{d}{dx} \operatorname{ang} \sec u = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2 - 1}} \quad \begin{array}{l} \text{si } u \geq 1 \quad (0 \leq \sec^{-1} u < \frac{\pi}{2}) \\ \text{si } u \leq -1 \quad (-\pi \leq \sec^{-1} u < -\frac{\pi}{2}) \end{array}$$

$$86.- \frac{d}{dx} \operatorname{ang} \csc u = \frac{-\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2 - 1}} \quad \begin{array}{l} \text{si } u \geq 1 \quad (0 < \csc^{-1} u \leq \frac{\pi}{2}) \\ \text{si } u \leq -1 \quad (-\pi \leq \csc^{-1} u \leq -\frac{\pi}{2}) \end{array}$$

$$87.- \frac{d}{dx} Lu = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$88.- \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$89.- \frac{d}{dx} a^u = a^u La \frac{du}{dx}$$

$$90.- \frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v Lu \frac{dv}{dx}$$

$$91.- \int \tan^2 u \, du = \tan u - u + C$$

$$92.- \int \cot^2 u \, du = -\cot u - u + C$$

$$93.- \int \operatorname{sen} hu \, du = \cos hu + C$$

$$94.- \int \cos hu \, du = \operatorname{sen} hu + C$$

$$95.- \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$96.- \int du = u + C$$

$$97.- \int a \, du = au + C$$

$$98.- \int (du + dv - dw) = du + dv - dw$$

$$99.- \int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$100.- \int \frac{du}{u} = Lu + C$$

$$101.- \int e^u \, du = e^u + C$$

$$102.- \int a^u \, du = \frac{a^u}{La} + C$$

$$103.- \int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

$$104.- \int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$$

$$105.- \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$106.- \int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$107.- \int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$108.- \int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$109.- \int \tan u \, du = L \sec u + C$$

$$110.- \int \cot u \, du = L \operatorname{sen} u + C$$

$$111.- \int \sec u \, du = L(\sec u + \tan u) + C$$

$$112.- \int \csc u \, du = L(\csc u - \cot u) + C$$

$$113.- \int \csc h^2 u \, du = -\cot hu + C$$

$$114.- \int \sec hu \tan hu \, du = -\sec hu + C$$

$$115.- \int \csc hu \cot hu \, du = -\csc hu + C$$

$$116.- \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ang} \tan \frac{u}{a} + C$$

$$117.- \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} L \frac{u - a}{u + a} + C$$

$$118.- \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} L \frac{a + u}{a - u} + C$$

$$119.- \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{u}{a} + C$$

$$120.- \int \frac{du}{-\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{ang} \cos \frac{u}{a} + C$$

$$121.- \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = L(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$122.- \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{u}{a} + C$$

$$123.- \int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{ang} \csc \frac{u}{a} + C$$

$$124.- \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ang} \cot \frac{u}{a} + C$$

B I B L I O G R A F I A

- 1) Ejemplos de Estructuras Isostáticas (Enunciados y Soluciones),
Sección de Estructuras,
Facultad de Ingeniería,
U. N. A. M.
- 2) Análisis de Estructuras Isostáticas.- Ing. Sergio Gerard Bertrand.
- 3) Mecánica Aplicada.- Jaime Torres H.
Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A.
- 4) Aplicaciones de la Estática.- Antonio Murrieta Necochea.
Editorial Limusa, S. A.
- 5) Vectorial Mechanics - Louis Brand, E. E. Ph. D. John Wiley
and Sons, Inc.
- 6) Engineering Mechanics - S. Timoshenko and D. H. Young
Mc. Graw Hill Book Company, Inc.
- 7) Strength of Materials - S. Timoshenko
Mc. Graw Book Company, Inc.
- 8) Estática Aplicada.- Rudolf Saliger.- Editorial Labor, S. A.
- 9) Engineering. Mechanics.- Irving H. Shames
Prentice Hall, Inc.
- 10) Strength of Materials - Leon Singer Ferdinand
New York Harper & Row 1967.
- 11) Engineering Mechanics - T. C. Huang
Addison Wesley Publishing Company.
- 12) Vector Mechanics for Engineers .- F.P. Beer and E.R. Johnston Jr.
Mc. Graw Hill Book Company.
- 13) Bases para el Análisis de Estructuras Marítimas,
L. Herrejón.