



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS GRÁFICO

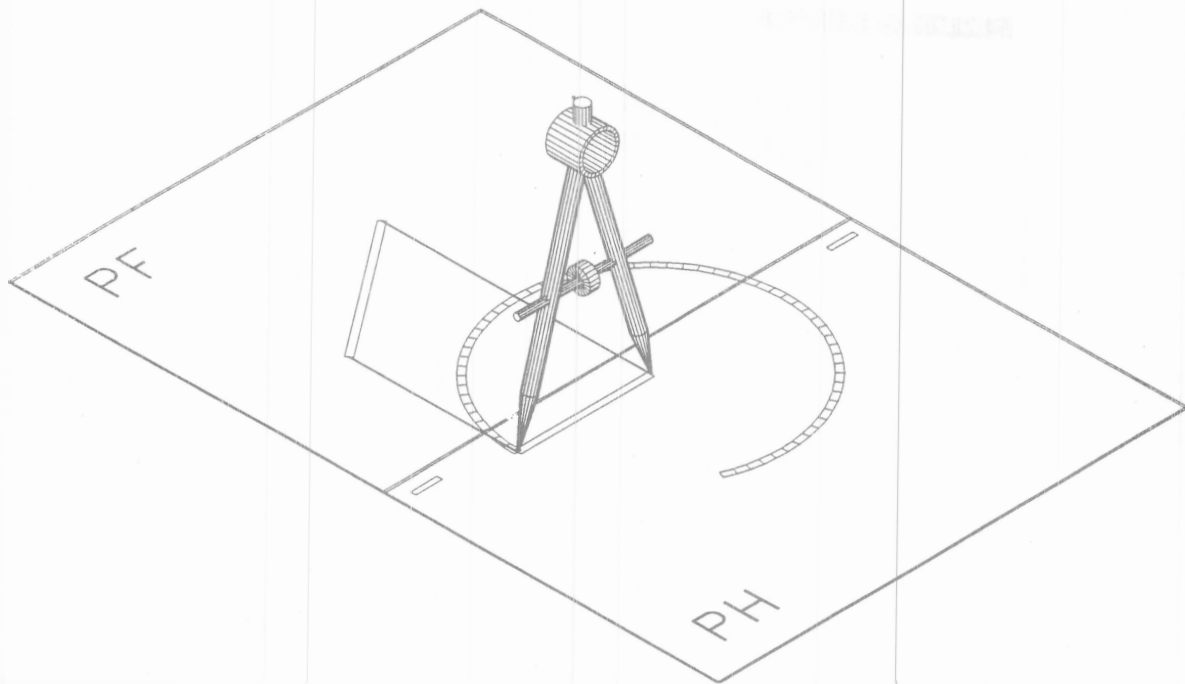
ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL.

ING. ALFREDO ARENAS GONZÁLEZ.

Tema 2

Cuaderno de Apuntes de Análisis Gráfico

Análisis Tridimensional



Alfredo Arenas González

Enero, 1999

Prólogo

G- 612785

Las presentes notas forman parte de lo que será el *Cuaderno de Apuntes de Análisis Gráfico*, que por diferentes razones ha pospuesto su finalización. En virtud de la importancia que reviste contar con un material actualizado que contemple los alcances de la asignatura, se ha decidido publicar por temas el material que se tenga a la mano, y en un futuro inmediato, esperamos contar con la totalidad de los apuntes, para que podamos tener un material de apoyo tanto los facilitadores del aprendizaje, o sea los profesores, como los alumnos, para poder llevar a cabo felizmente el proceso enseñanza- aprendizaje. En términos generales se plantea primero la

teoría, para posteriormente presentar algunos ejercicios con su resolución respectiva comentada. La idea es presentarlos a escala, para que quien quiera resolverlos de forma separada, pueda tomar la información de este mismo material y comparar sus resultados con los presentados, únicamente sobreponiendo su hoja de resultado con la correspondiente de las notas.

Se agradece a las personas que hicieron posible esta publicación, así como a los que directa o indirectamente participaron en ella, nos ponemos también a sus órdenes para cualquier comentario que tengan a bien hacernos.

Tema 2

Análisis Tridimensional

El análisis tridimensional, se basa en el estudio de la geometría descriptiva, disciplina de carácter formativo que permite visulizar en el plano, problemas en el espacio de tres dimensiones. Su concepción es fundamental para entender cabalmente el tema siguiente que es la teoría de las proyecciones. Los conceptos, aunque de fácil asimilación, van teniendo tanta relación entre sí, que llega un momento en el que, si no se han comprendido realmente, llegan a verse como trazos sin ton ni son, inclusive la forma de presentación de los temas puede variar de acuerdo al gusto particular del instructor, como es el caso de las presentes notas, en donde primero se da el tratamiento general de la recta y posteriormente se entra al estudio del plano, mientras otros instructores antes de acabar con la recta intercalan el estudio del plano. La anterior aclaración se hace porque, dada las características de las notas, *Apuntes de Análisis Gráfico*, lo ideal sería que siguieran al pie de la letra el contenido del programa de la asignatura, cosa que no sucede, sobre todo en este tema, por lo que se pide la comprensión de los lectores por la carencia de recursos del autor para presentarlos en el orden del programa.

Subtema II.1 Elementos geométricos del espacio. Concepto de proyección ortogonal. Proyecciones diédricas del punto.

Marco de referencia. Del tema I de las presentes notas, recordemos que la geometría se clasifica según su campo de estudio en plana y tridimensional, y por la forma de resolución de problemas específicos, en formal, analítica y descriptiva. Para el análisis tridimensional, estaremos el espacio de tres dimensiones empleando la teoría de las proyecciones, es decir, estudiaremos la geometría descriptiva. El objetivo del presente tema será que:

el estudiante sea capaz de percibir las características geométricas de los objetos, y las relaciones entre ellas, mediante el manejo de proyecciones, que le permita analizar y desarrollar aspectos geométricos en problemas de ingeniería.¹

Los conceptos estudiados en el tema I se basan en la geometría euclidiana, es decir, en la geometría plana, que tiene su fundamento en el método axiomático. Existen otras geometrías conocidas como no euclidianas que tienen su punto de partida en la negación de algún axioma de la geometría euclidiana, la anterior aclaración se hace porque la teoría de las proyecciones trabaja sobre dos dimensiones y el campo de estudio de la geometría descriptiva es el espacio de tres dimensiones, por tanto surge la pregunta, ¿es válido extrapolar los axiomas, proposiciones y teoremas de la geometría plana al estudio de la geometría tridimensional? En principio adoptaremos las mismas bases teniendo en cuenta que no trabajaremos con geometrías no euclidianas.

Los elementos geométricos que estudiaremos en el espacio son los mismos que se estudiaron en el tema anterior pero ahora incorporando al *cuerpo*, quedan así integrados en el campo de estudio: *el punto, la línea, la superficie y el cuerpo*, de donde en términos generales, en lugar de línea se estudiarán segmentos de recta o rectas y en lugar de superficies se estudiarán planos. Debido a que estamos hablando de la teoría de las proyecciones, definiremos lo que es una proyección. Decimos que la:

proyección es la intersección de una recta proyectante que contiene a un elemento geométrico del espacio con un plano de proyección.

¹ Programa de la asignatura.

A reserva de ser más explícitos en el tema correspondiente, tema III de las presentes notas, supondremos que la recta proyectante y el plano de proyección forman un ángulo recto, de donde las proyecciones reciben el nombre de proyecciones ortogonales y estaremos hablando de la proyección cilíndrica ortogonal, esto nos permitirá obtener proyecciones congruentes de los elementos geométricos que sean paralelos al plano de proyección, la figura 2.1 presenta los elementos y características que intervienen en la proyección cilíndrica ortogonal, de la cual a partir de ahora nos referiremos únicamente como *proyección ortogonal*.

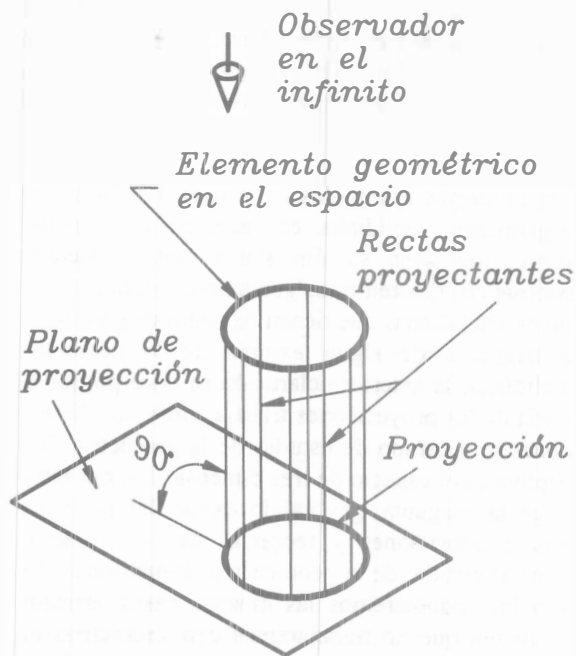


Figura 2.1 Proyección cilíndrica ortogonal

La sistematización de la teoría de las proyecciones tiene su origen en los estudios hechos por el matemático francés Gaspard Monge, quien a finales del siglo XVIII (1795-99) publica *Géométrie descriptive*² en donde sienta las bases de lo que ahora se conoce como geometría descriptiva; el procedimiento seguido por Monge se describe en los siguientes párrafos. Se parte de un elemento geométrico en el espacio (para facilidad en la explicación se empleará un punto) del cual se requieren obtener sus proyecciones sobre dos planos perpendiculares entre sí y que dividen a la región del espacio en cuatro cuadrantes: I, II, III y IV, y al elemento geométrico en el espacio se le identifica

por medio de una letra mayúscula, y por él se hacen pasar rectas proyectantes que, por trabajar en proyección cilíndrica ortogonal, resultarán perpendiculares a los planos de proyección, en este momento incorporamos a un observador ubicado en el infinito y por el cual pasarían las rectas proyectantes. La identificación de los planos de proyección será *plano horizontal* y *plano frontal*, la región del plano frontal comprendida entre el I y II cuadrantes la denominaremos como plano frontal superior (*PFS*) y a la región del mismo plano pero comprendida entre los cuadrantes III y IV la denominaremos plano frontal inferior (*PFI*); de la misma forma para el plano horizontal comprendido entre los cuadrantes I y IV lo identificaremos como plano horizontal anterior (*PHA*), mientras la región correspondiente del mismo plano en los cuadrantes II y III la identificaremos como plano horizontal posterior (*PHP*), la figura 2.2 ilustra el contenido del párrafo anterior.

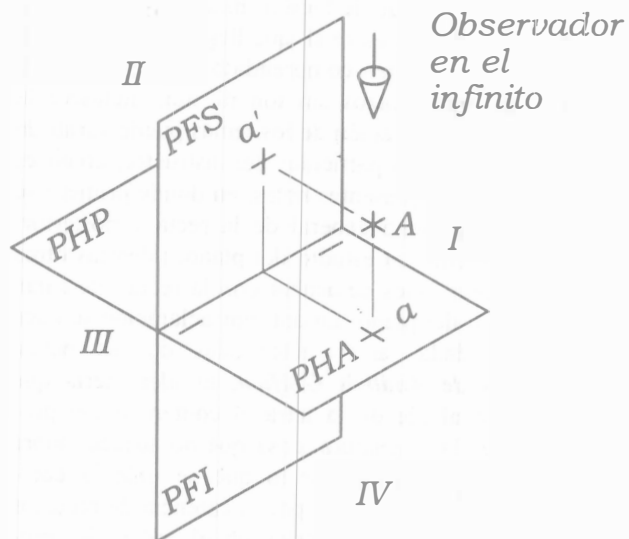


Figura 2.2 Ubicación de un elemento geométrico en el espacio

Obsérvese en la figura 2.2 la obtención de las proyecciones del punto A, la proyección sobre el plano horizontal anterior se designó con la letra minúscula correspondiente a la que identifica al elemento geométrico del espacio, y la proyección frontal con la misma letra minúscula pero acompañada de un apóstrofo " ' ", a la recta de intersección de los planos de proyección se le conoce como *línea de tierra* y va identificada por medio de dos segmentos de recta contenidos en la proyección horizontal.

² Historia concisa de las matemáticas. Dirk Jan Struik. P. 212, IPN, México.

El siguiente paso es quitar al elemento geométrico en el espacio para trabajar únicamente con las proyecciones, para esto se hacen coplanares los planos de proyección tomando como eje de giro la línea de tierra, moviendo al plano horizontal en sentido horario y dejando fijo al plano frontal; las proyecciones del punto y los planos de proyección quedan como se muestra en la figura 2.3, nótese que los planos FS y HP así como los planos HA y FI, quedan *encimados*, de ahí que en la figura queden representados entre paréntesis. El siguiente paso es hacer un nuevo giro ahora de los dos planos de proyección que se encuentran coplanares, de tal forma que su posición sea paralela a la superficie de trabajo, la figura 2.4 ilustra este procedimiento.

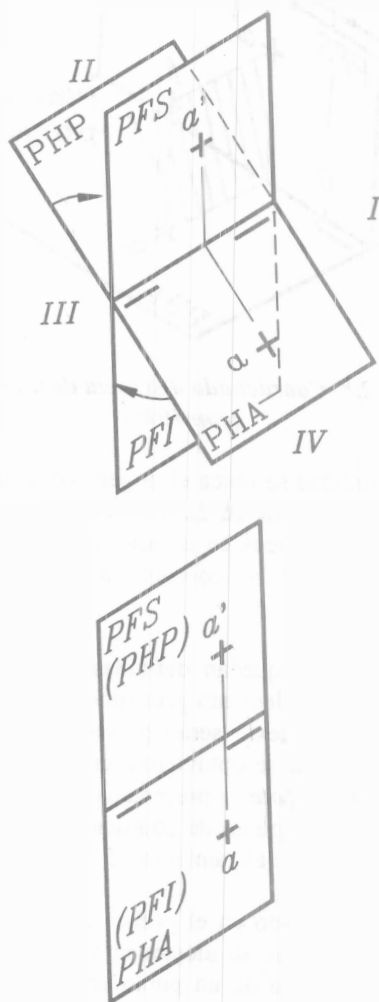


Figura 2.3 Planos de proyección coplanares

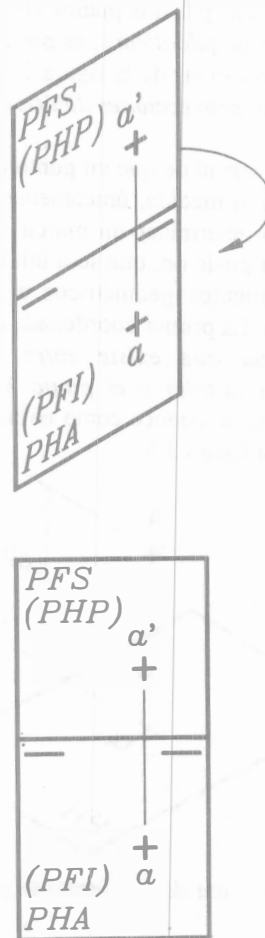


Figura 2.4 Colocación de los planos de proyección coplanares a la superficie de trabajo

Finalmente, dado que los planos son superficies ilimitadas (los limitamos únicamente para su estudio) quitamos los límites establecidos para ilustrar su obtención, y nos quedamos sólo con las proyecciones del punto así como con la delimitación de los dos planos de proyección representada por la línea de tierra, como se muestra en la figura 2.5.

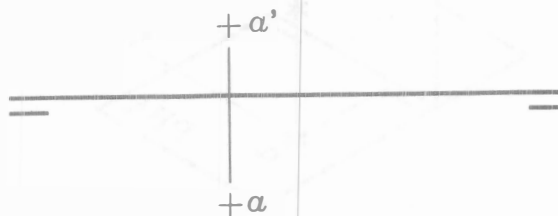


Figura 2.5 Proyecciones diédricas de un punto A

Al ángulo formado por dos planos en el espacio se le conoce como *ángulo diedro*, es por ello que a las proyecciones, como las de la figura 2.5, también se les conoce como *proyecciones diédricas*.

Ahora bien, en virtud de que un punto en el espacio no tiene forma ni medida, únicamente posición, se hace necesario determinar un marco de referencia para fijar dicha posición, que será útil también para los demás elementos geométricos a saber: recta, plano y cuerpo. La primer coordenada que se define es la *distancia que existe entre el elemento geométrico en estudio y el plano horizontal de proyección*, y se le conoce como *cota*, se ilustra su obtención en la figura 2.6.

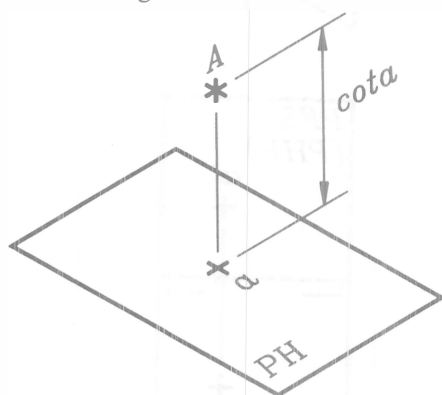


Figura 2.6 Cota de un elemento geométrico

Representando nuevamente al punto con respecto a los dos planos de proyección antes establecidos, observamos que la cota ya la podríamos definir, y de la misma forma obtenemos la *distancia que existe entre el plano frontal de proyección y el elemento geométrico*, que se le conoce como *alejamiento* y su obtención queda ilustrada en la figura 2.7.

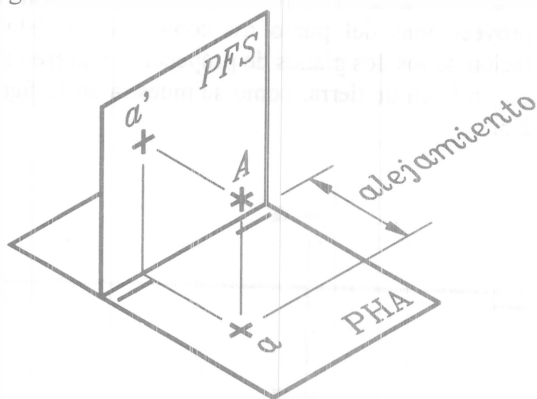


Figura 2.7 Alejamiento de un elemento geométrico

Una vez definidas estas coordenadas, en la figura 2.8 se muestra como las rectas proyectantes forman un plano que recibe el nombre de *plano proyectante*, con relación a este plano se determina la tercer y última coordenada que hace falta para ubicar un punto en el espacio de tres dimensiones, haciéndolo de forma ortogonal, tal coordenada recibe el nombre de *distancia*, que es la *longitud que existe entre el plano proyectante y el origen del marco de referencia*.

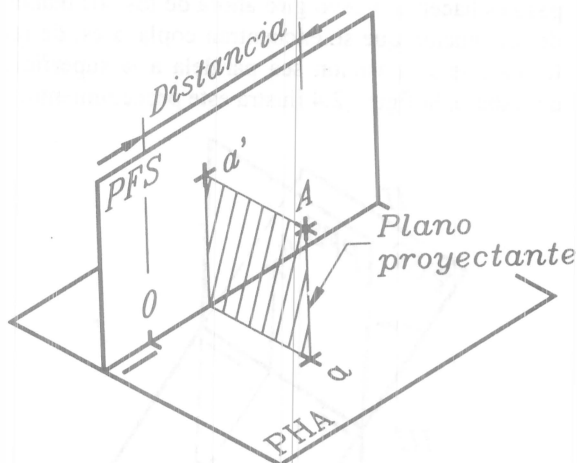


Figura 2.8 Coordenada distancia de un elemento geométrico

Por comodidad se ubica el origen sobre la línea de tierra y a la izquierda del más cercano de los elementos geométricos en estudio, esto con el fin de obtener siempre las coordenadas distancias positivas.

De esta forma quedan definidas las coordenadas para ubicar un elemento geométrico en el espacio y a lo largo del texto serán presentadas de manera inversa a como se obtuvieron, es decir: *distancia*, *alejamiento* y *cota*, y presentadas entre paréntesis, es decir, en un punto de coordenadas (1,2,3), 1 es su distancia, 2 su alejamiento y 3 su cota.

Un punto ubicado en el primer cuadrante tiene la característica que su alejamiento y cota son positivos, en el caso de un punto en el segundo cuadrante su alejamiento es negativo, pero su cota es positiva, la figura 2.9 ilustra una representación tridimensional de cuatro puntos ubicados en los diferentes cuadrantes, asimismo, en la figura 2.10 se muestran sus respectivas proyecciones diédricas.

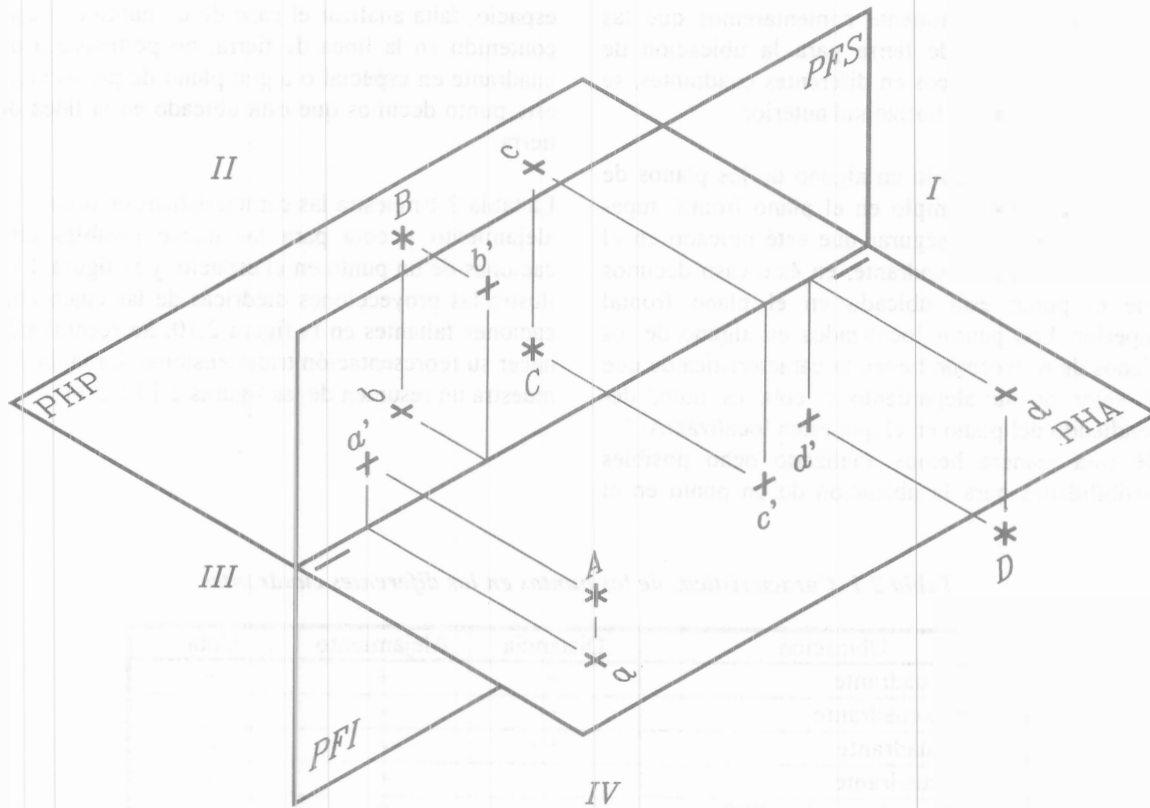


Figura 2.9 Representación tridimensional de puntos en los diferentes cuadrantes

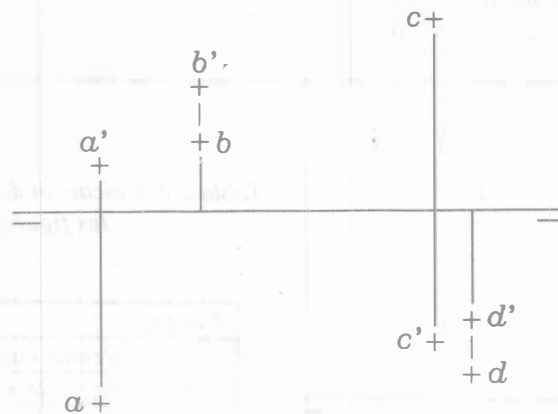


Figura 2.10 Proyecciones diédricas de los puntos representados en la figura 2.9

Los puntos A, B, C y D en el espacio, están en los cuadrantes I, II, III y IV respectivamente, analicémoslos sus alejamientos y cotas. Se puede observar en las figuras antes citadas, que la representación de un punto en el espacio, además de estar identificado por una letra mayúscula, está definido por tres segmentos de recta perpendiculares entre sí, los cuales a su vez o son perpendiculares a uno de los planos de proyección o al plano proyectante, en el

caso de la proyección propiamente dicha, ésta queda definida por dos segmentos de recta, uno de los cuales es paralelo a la línea de tierra y el otro perpendicular a ella.

En lo que respecta a la representación en proyecciones diédricas, las proyecciones del punto quedan definidas por dos segmentos de recta que tienen las mismas características que en la representación

tridimensional. Finalmente comentaremos que las marcas de línea de tierra para la ubicación de elementos geométricos en diferentes cuadrantes, se pondrán en el plano horizontal anterior.

Para un punto ubicado en alguno de los planos de proyección, por ejemplo en el plano frontal superior, no podemos asegurar que esté ubicado en el primer o segundo cuadrante, en este caso decimos que el punto está ubicado en el plano frontal superior. Los puntos localizados en alguno de los planos de proyección tienen la característica de que el valor de su alejamiento o cota es nulo, dependiendo del plano en el que estén localizados.

De esta manera hemos analizado ocho posibles posibilidades para la ubicación de un punto en el

espacio, falta analizar el caso de un punto que esté contenido en la línea de tierra, no pertenece a un cuadrante en especial o algún plano de proyección, este punto decimos que está ubicado en la línea de tierra.

La tabla 2.1 muestra las características de distancia, alejamiento y cota para las nueve posibles ubicaciones de un punto en el espacio, y la figura 2.11 ilustra las proyecciones diédricas de las cinco ubicaciones faltantes en la figura 2.10. Se recomienda hacer su representación tridimensional. La tabla 2.2 muestra un resumen de las figuras 2.10 y 2.11

Tabla 2.1 Características de los puntos en los diferentes cuadrantes

Ubicación	Distancia	Alejamiento	Cota
Primer cuadrante	+	+	+
Segundo cuadrante	+	-	+
Tercer cuadrante	+	-	-
Cuarto cuadrante	+	+	-
Plano frontal superior (PFS)	+	0	+
Plano frontal inferior (PFI)	+	0	-
Plano horizontal anterior (PHA)	+	+	0
Plano horizontal posterior (PHP)	+	-	0
En la línea de tierra	+	0	0

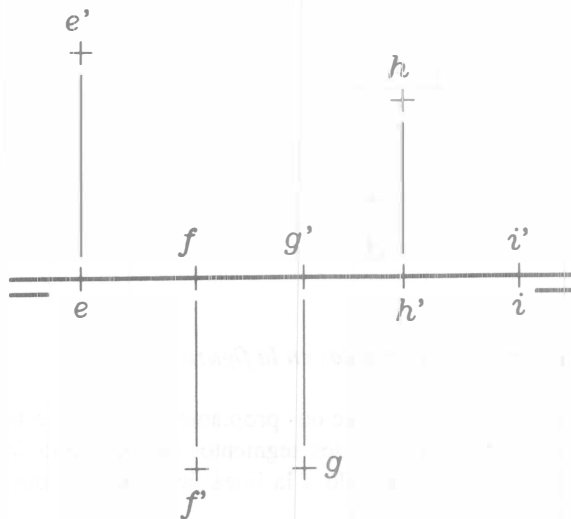


Figura 2.11 Proyecciones diédricas de puntos contenidos en los planos de proyección y en la línea de tierra.

Tabla 2.2 Ubicación de los puntos presentados en las figuras 2.10 y 2.11

Punto	Ubicación
A	Primer cuadrante
B	Segundo cuadrante
C	Tercer cuadrante
D	Cuarto cuadrante
E	Plano frontal superior (PFS)
F	Plano frontal inferior (PFI)
G	Plano horizontal anterior (PHA)
H	Plano horizontal posterior (PHP)
I	En la línea de tierra

Subtema II.2 Análisis de la recta.

Para iniciar con el estudio de la recta, es indispensable dominar el estudio del punto, pues es con base en éste que ubicamos una recta en el espacio, partiendo del postulado de Euclides, extrapolado al espacio, de que *por dos puntos podemos hacer pasar una y sólo una recta*, es conveniente aclarar que a lo largo del capítulo se hará referencia a rectas y segmentos de recta como si fueran sinónimos, aunque sabemos que no lo son, esto es con el fin de dar fluidez a la explicación.

Las rectas reciben su nombre dependiendo de las características de paralelismo, perpendicularidad u oblicuidad que guarden con respecto a los planos principales de proyección (en ese orden), el análisis para los diferentes tipos de rectas se hará únicamente para el primer cuadrante, esto no quiere decir que una recta no pueda estar ubicada en cualquier otro cuadrante, solo que sus características son exactamente las mismas y nos evitamos tener que trabajar de un solo lado de la línea de tierra, lo cual crea confusión.

Recta fronto-horizontal

Iniciamos el estudio de la recta con una que sea paralela tanto al plano horizontal como al plano frontal de proyección, este tipo de recta recibe el nombre de **recta fronto-horizontal** y debido a que estamos en la proyección cilíndrica ortogonal sus proyecciones diédricas resultan paralelas a la línea de tierra, por lo que en ambas proyecciones aparece la magnitud real de la recta (Mr). Por ser paralela a ambos planos el ángulo que forma con ellos resulta ser nulo; la figura 2.12 muestra las proyecciones diédricas de un segmento de recta definido por los puntos A y B; y la figura 2.13 ilustra una representación tridimensional de la misma.

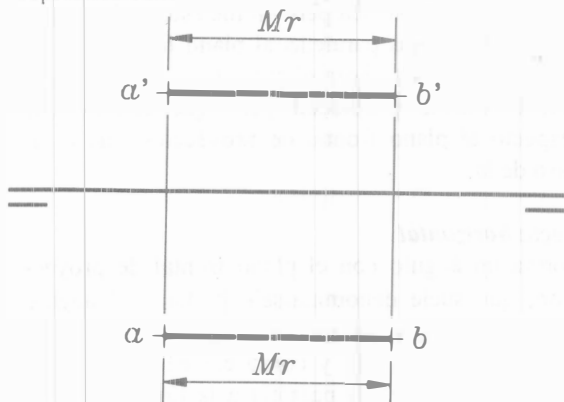


Figura 2.12 Proyecciones diédricas de un segmento de recta fronto-horizontal

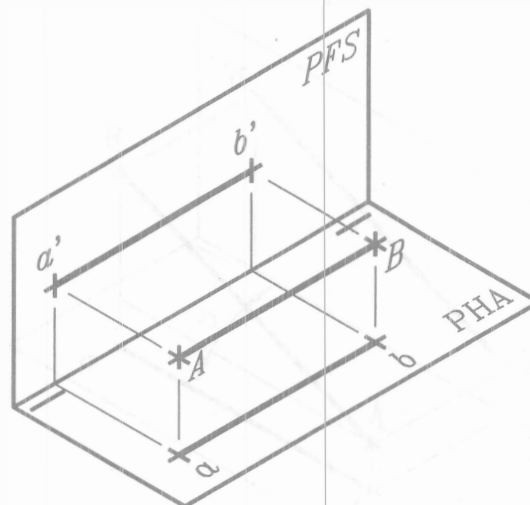


Figura 2.13 Representación tridimensional de un segmento de recta fronto-horizontal

Recta frontal

Este tipo de recta es paralela al plano de frontal de proyección, (por lo que sus alejamientos son constantes) pero oblicua con respecto al plano horizontal de proyección, su magnitud real aparece en la proyección frontal, este tipo de recta forma un ángulo con el plano horizontal que suele denominarse α , (aunque se le puede asignar cualquier otra sigla) y tal ángulo aparece también en proyecciones diédricas en magnitud real, las figuras 2.14 y 2.15 muestran sus proyecciones diédricas y una representación tridimensional, respectivamente.

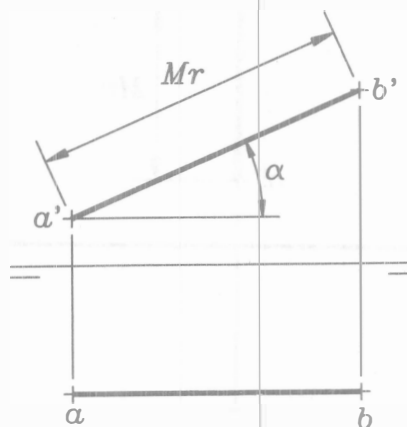


Figura 2.14 Proyecciones diédricas de un segmento de recta frontal

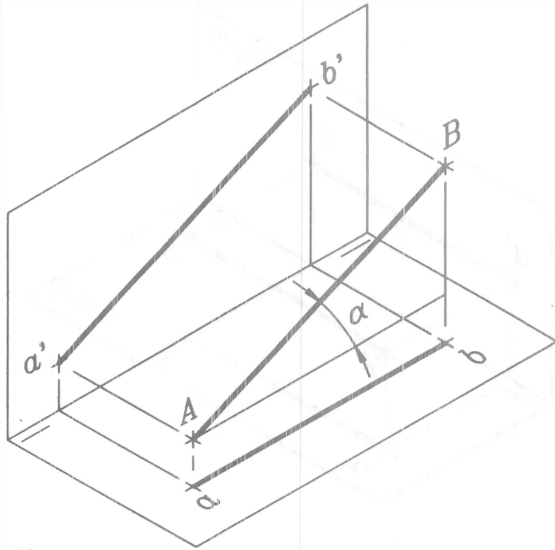


Figura 2.15 Representación tridimensional de la figura 2.14

Recta vertical

Este tipo de recta es paralela al plano de frontal de proyección, pero a diferencia de la recta frontal, ahora es perpendicular respecto al plano horizontal de proyección, su magnitud real aparece en la proyección frontal, el ángulo que forma con el plano horizontal de proyección es un ángulo recto, las figuras 2.16 y 2.17 muestran sus proyecciones diédricas y una representación tridimensional respectivamente

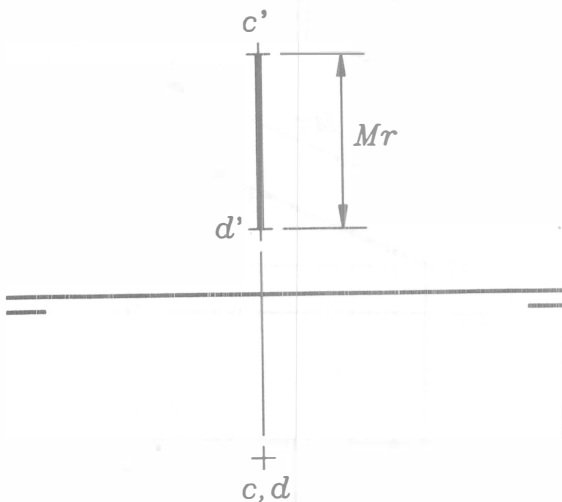


Figura 2.16 Recta vertical

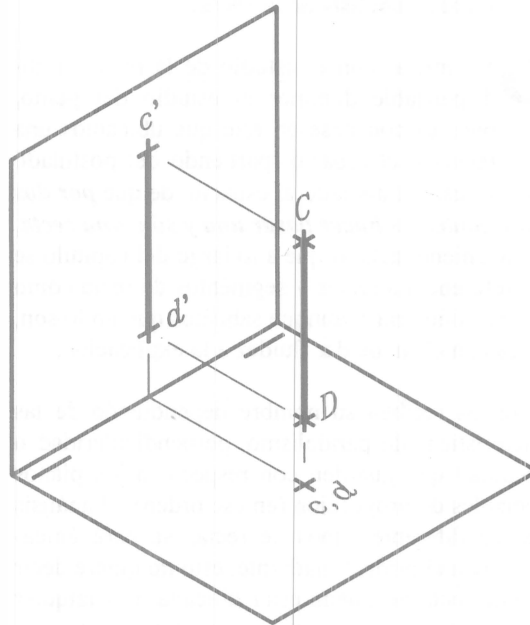


Figura 2.17 Representación tridimensional de la figura 2.16

Los tipos de rectas que acabamos de estudiar tienen la característica de ser paralelas al plano frontal de proyección, por lo que todos los puntos que pertenezcan a ella tienen la característica que su alejamiento es constante, con lo que se han agotado las características de paralelismo, perpendicularidad y oblicuidad que guarda con el otro plano de proyección a saber, en este caso el horizontal.

Siguiendo con la misma lógica, estudiaremos ahora las rectas que sean paralelas al plano horizontal de proyección, este tipo de rectas tendrán la propiedad de que todos los puntos que pertenezcan a ellas tengan su cota constante, la recta fronto-horizontal tiene esa característica pero ya fue estudiada para el caso de las rectas paralelas al plano frontal, por lo que analizaremos ahora el caso de un tipo de recta con la misma propiedad pero que sea oblicua respecto al plano frontal de proyección que es el caso de la:

Recta horizontal

Forma un ángulo con el plano frontal de proyección, que suele denominársele β , tanto el ángulo como la recta aparecen en magnitud real en la proyección horizontal y como era de esperarse la proyección frontal es paralela a la línea de tierra; las figuras 2.18 y 2.19 muestran sus proyecciones diédricas y su representación tridimensional.

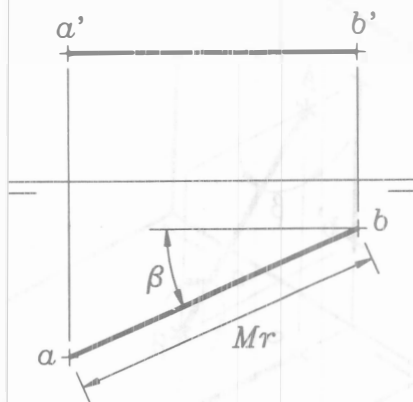


Figura 2.18 Recta horizontal

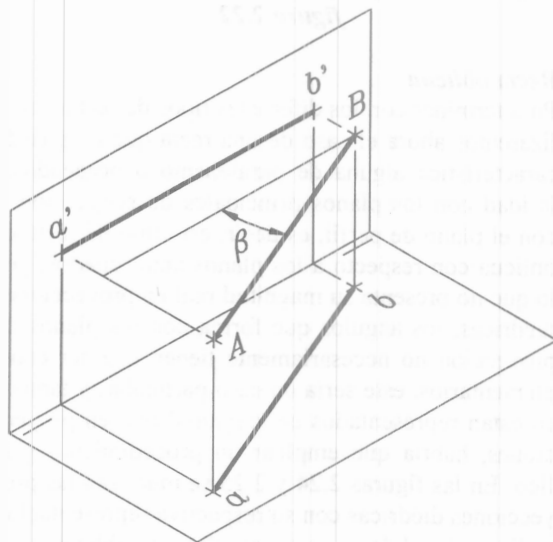


Figura 2.19 Representación tridimensional de la figura 2.18

Recta de punta

Esta recta tiene la característica de ser perpendicular al plano frontal de proyección y desde luego paralela al plano horizontal de proyección, por lo que sus cotas son constantes, la proyección frontal de este tipo de recta resulta ser un punto y la convención que adoptaremos para identificarla es colocar en primera instancia el extremo del segmento que veamos primero; para ello nos auxiliaremos de la proyección horizontal, en donde se puede apreciar qué extremo está más cercano al observador (véanse las figuras 2.20 y 2.21)

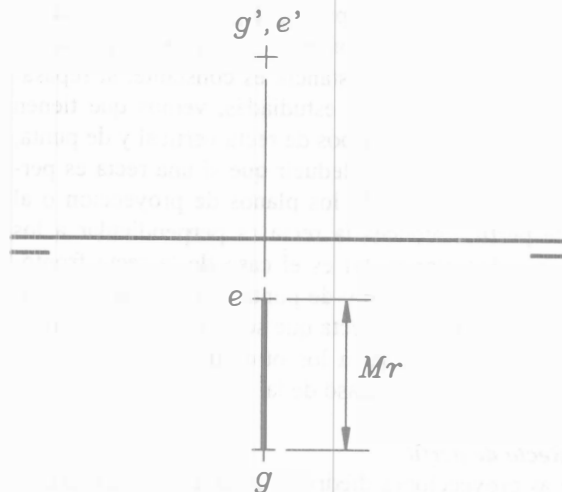


Figura 2.20 Recta de punta

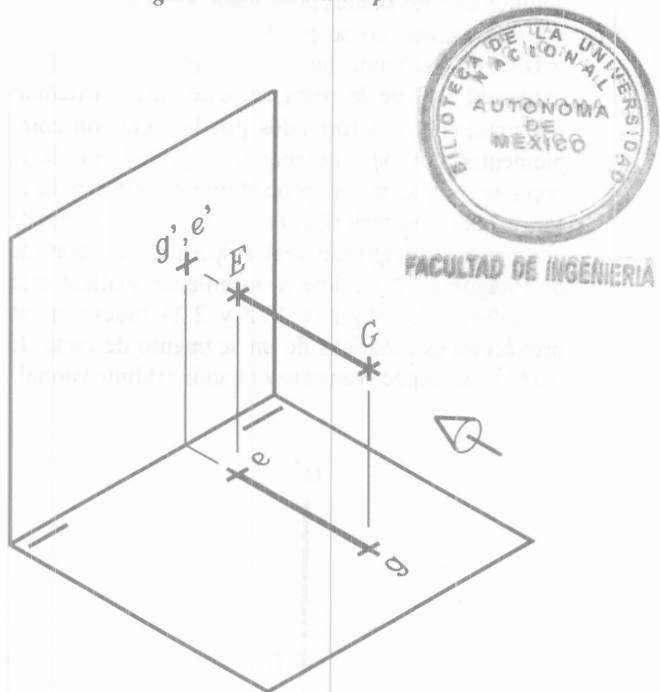


Figura 2.21 Representación tridimensional de la figura 2.20

Una vez analizadas las proyecciones de los diferentes tipos de recta que son paralelas al plano horizontal de proyección, procedemos a estudiar los diferentes tipos de rectas que sean paralelas ahora al plano de perfil, conviene aclarar que en el estudio de la geometría descriptiva, cualquier otro plano diferente a los planos de proyección horizontal y frontal se considera un plano auxiliar, inclusive el plano de perfil (que en la teoría de las proyecciones

se considera como principal); la característica de los tipos de recta con esta peculiaridad es que la coordenada de su distancia es constante, si repasamos las rectas antes estudiadas, vemos que tienen esta propiedad los tipos de recta vertical y de punta, de donde podemos deducir que si una recta es perpendicular a uno de los planos de proyección o al de perfil, entonces la recta es perpendicular a los otros dos planos, tal es el caso de la recta fronto-horizontal, vertical y de punta. Por lo que sólo nos resta estudiar una recta que sea paralela al plano de perfil pero oblicua a los otros dos planos de proyección, que es el caso de la:

Recta de perfil

Las proyecciones diédricas de este tipo de recta resultan ser perpendiculares a la línea de tierra, forma ángulos con los planos principales de proyección (α y β) pero estos no se pueden apreciar en sus proyecciones, así como tampoco se puede apreciar la magnitud real de la recta, en este caso particular, los ángulos α y β formados por la recta son complementarios y para obtener la magnitud real de la recta se empleará un procedimiento gráfico (que será tratado posteriormente) a pesar de que puede obtenerse su magnitud real empleando el teorema de Pitágoras. Se sugiere al estudiante analizar esta posibilidad. Las figuras 2.22 y 2.23 muestran las proyecciones diédricas de un segmento de recta de perfil y su respectiva representación tridimensional.

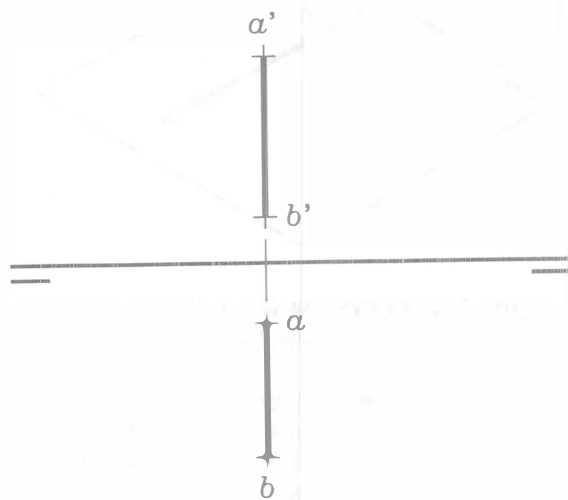


Figura 2.22 Recta de perfil

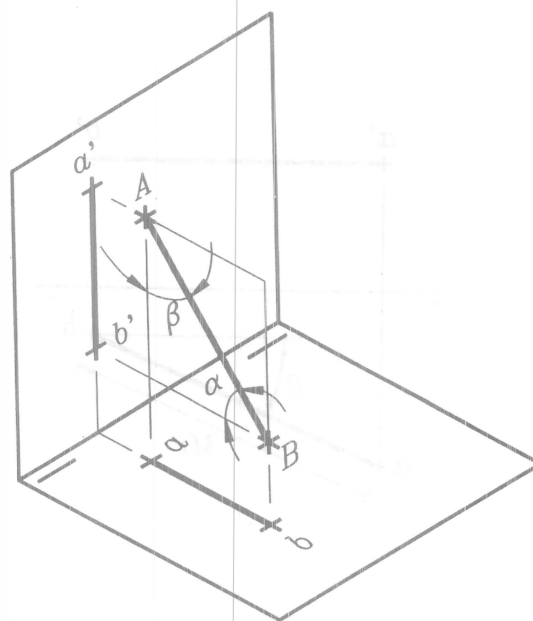


Figura 2.23 Representación tridimensional de la figura 2.22

Recta oblicua

Para terminar con los diferentes tipos de rectas, analizaremos ahora el caso de una recta que no guarde característica alguna de paralelismo o perpendicularidad con los planos principales de proyección o con el plano de perfil, es decir, este tipo de recta es oblicua con respecto a los planos antes citados, por lo que no presenta su magnitud real en proyecciones diédricas, los ángulos que forma con los planos de proyección no necesariamente tienen que ser complementarios, este sería un caso particular, y tampoco están representados en magnitud real en proyecciones, habría que emplear un procedimiento gráfico. En las figuras 2.24 y 2.25 se muestran las proyecciones diédricas con su respectiva representación tridimensional de un segmento de recta oblicua.

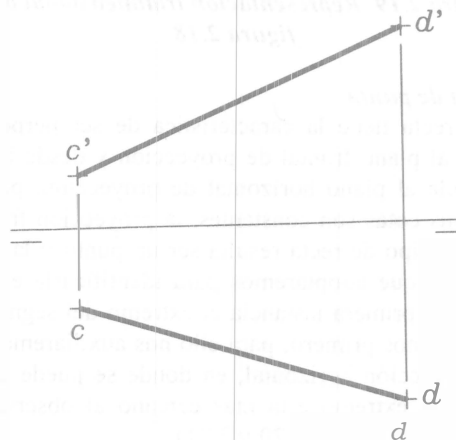


Figura 2.24 Recta oblicua

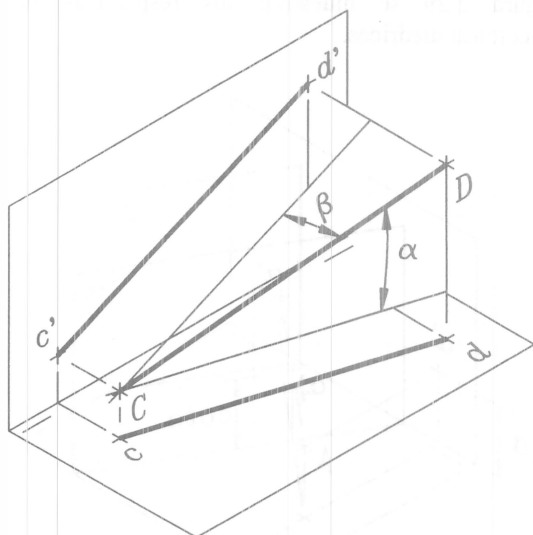


Figura 2.25 Representación tridimensional de la figura 2.24

En la tabla 2.3 se presentan los siete diferentes tipos de rectas con sus respectivas características de paralelismo, perpendicularidad y oblicuidad (representadas por II, $\perp$ y X respectivamente) así como los ángulos que forman con los planos principales de proyección (PPP) a saber: frontal, horizontal y de perfil (PF, PH y PP).

Tabla 2.3 Características de rectas

Recta tipo	Características de II, $\perp$ y X con:			Ángulo con	
	PF	PH	PP	PF	PH
Fronto-horizontal	II	II	$\perp$	0	0
Frontal	II	X	X	0	α
Vertical	II	$\perp$	II	0	90
Horizontal	X	II	X	β	0
De punta	$\perp$	II	II	90	0
De perfil	X	X	II	β	α
Oblicua	X	X	X	β	α

Subtema II.3 Método de cambio de planos

Este método sirve para obtener, entre otras cosas, la magnitud real de las rectas de perfil y oblicuas, que como sabemos no presentan dicha magnitud en proyecciones así como muestra la magnitud real de los ángulos que forman con los planos de proyección. El método consiste en obtener una proyección sobre un plano diferente a alguno de los planos de proyección; este plano deberá ser perpendicular al plano frontal o al horizontal pero oblicuo respecto al otro, por lo que en una de sus proyecciones aparecerá visto como filo, es decir, todos los puntos que pertenezcan al plano se verán en un segmento de recta que representa a ese plano, por ejemplo, el plano horizontal de proyección es perpendicular al plano frontal, es por ello que para el observador que está ubicado

perpendicular a dicho plano frontal el plano horizontal queda representado por la línea de tierra.

En la figura 2.26 se muestran los planos principales de proyección, un elemento geométrico en el espacio y un plano identificado como α el cual es perpendicular al plano horizontal de proyección, la idea es, con base en la proyección cilíndrica ortogonal, obtener la proyección del elemento geométrico ahora sobre el plano α . La intersección del plano α con el plano horizontal será la nueva línea de tierra, la cual servirá como eje de giro para hacer coplares al plano α y al plano horizontal, la figura 2.27 muestra las proyecciones diédricas de la figura 2.26.

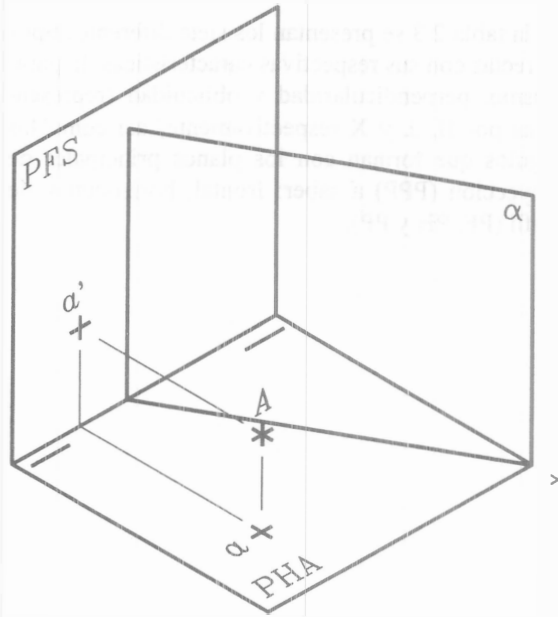


Figura 2.26 Identificación de componentes para un cambio de plano

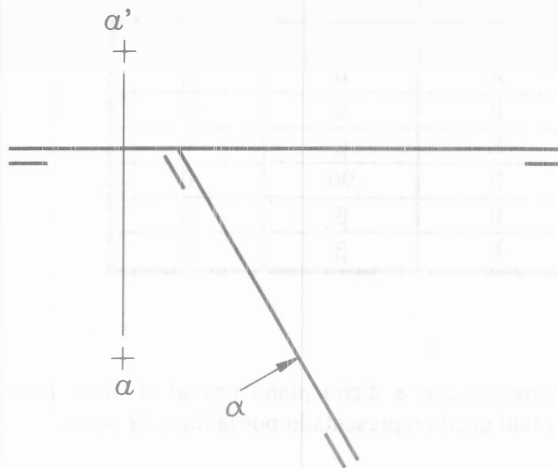


Figura 2.27 Proyecciones diédricas de la figura 2.26

Obsérvese que la ubicación del plano α se pudo hacer más cercana o alejada del elemento geométrico, inclusive se pudo haber puesto “antes” del elemento geométrico, la nueva proyección, la cual identificaremos como a' para distinguirla de la proyección frontal original, tiene la característica de conservar la misma cota del elemento geométrico en estudio, independientemente de la ubicación del plano α , en la figura 2.28 se muestran dos diferentes planos, α y β , que ilustran esa característica; en la

figura 2.29 se muestran sus respectivas proyecciones diédricas.

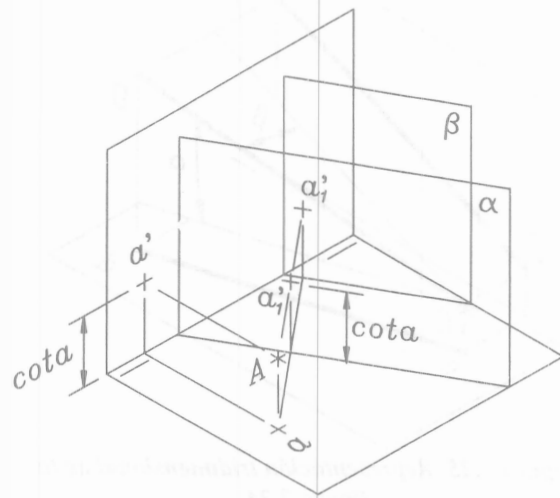


Figura 2.28 Ubicación del plano α para el cambio de planos

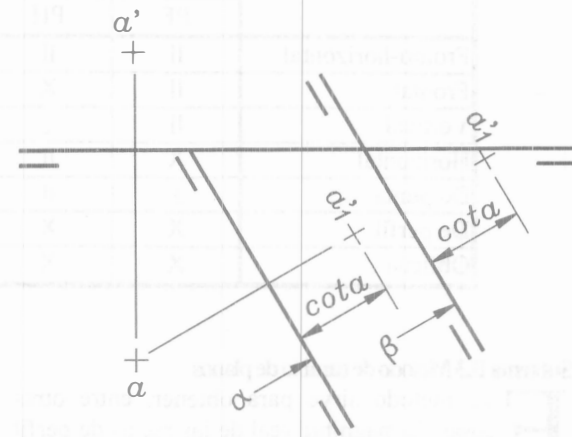


Figura 2.29 Proyecciones de la figura 2.28

En caso de tener un cambio de planos perpendicular al plano frontal de proyección, lo que se mantendrá constante ahora será el alejamiento y la nueva proyección que se obtenga se identificará como a_1 , para distinguirla de la proyección horizontal original, en las figuras 2.30 y 2.31 se muestran una representación tridimensional y sus proyecciones diédricas respectivamente.

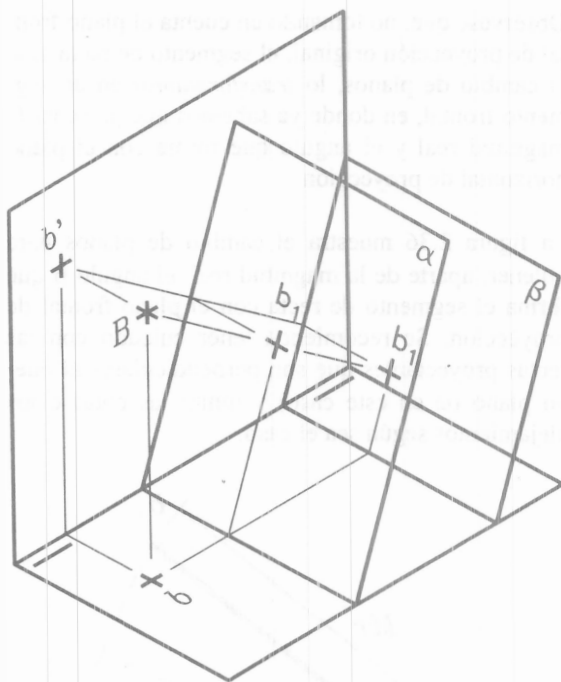


Figura 2.30 Cambio de planos perpendicular al plano frontal



Figura 2.31 Proyecciones de la figura 2.30

Conviene aclarar que la nomenclatura para la identificación de las proyecciones obtenidas por medio de un cambio de planos, difieren de lo que se pudiera encontrar en algunos textos de la bibliografía recomendada, se sugiere que al estudiar en otros textos se tenga en mente la nomenclatura del autor, en lo que a estas notas respecta la nomenclatura se tomó con base en acuerdos tomados por el cuerpo colegiado de profesores de la asignatura.

Una vez ilustrado el método de cambio de planos, lo podemos emplear en la resolución de diferentes tipos de problemas que se nos presenten, por ejemplo para obtener los ángulos que una recta oblicua forma con los planos de proyección así como su magnitud real, que sabemos no presenta en proyecciones. La figura 2.32 muestra las proyecciones diédricas de un segmento de recta oblicua del cual obtendremos su magnitud real y los ángulos que forma con los planos principales de proyección.

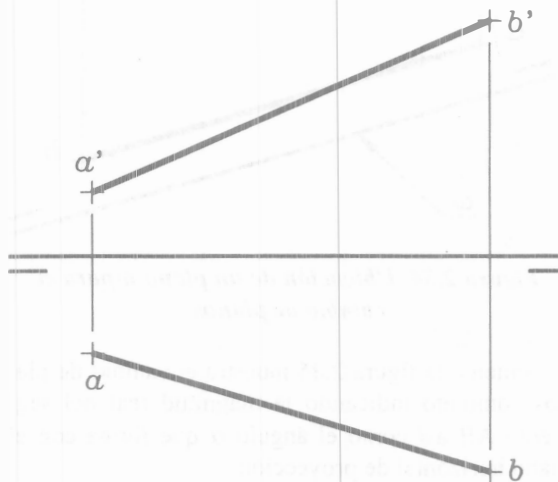


Figura 2.32 Recta oblicua

A tal efecto colocamos un plano que sea perpendicular al plano horizontal de proyección pero que sea paralelo al segmento de recta en el espacio (identificado como ω), en las figuras 2.33 y 2.34 se ilustran una representación tridimensional de lo expuesto en este párrafo así como sus proyecciones diédricas, respectivamente.

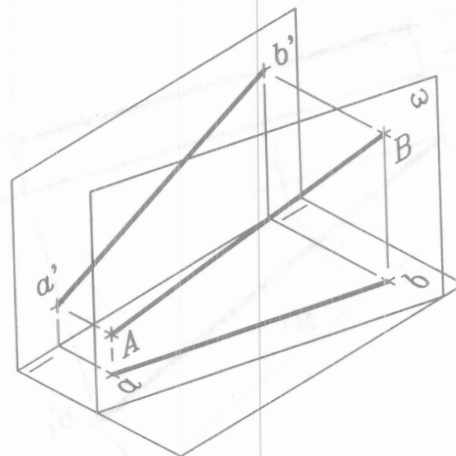


Figura 2.33 Plano ω paralelo al segmento AB y perpendicular al plano horizontal

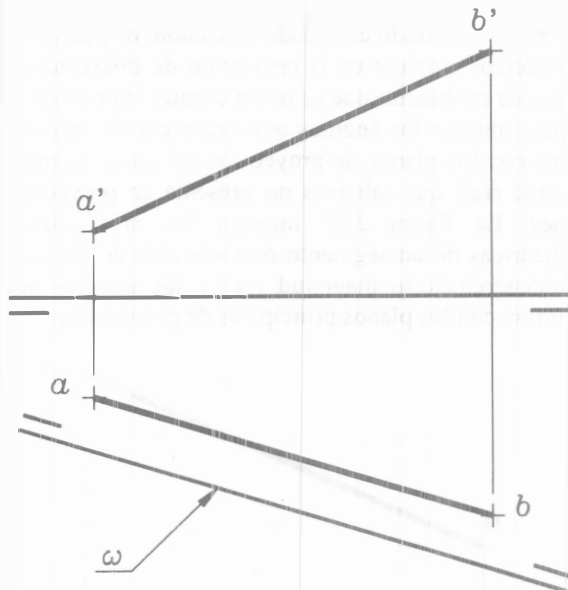


Figura 2.34 Ubicación de un plano ω para el cambio de planos

Finalmente la figura 2.35 muestra el cambio de planos completo indicando la magnitud real del segmento AB así como el ángulo α que forma con el plano horizontal de proyección.

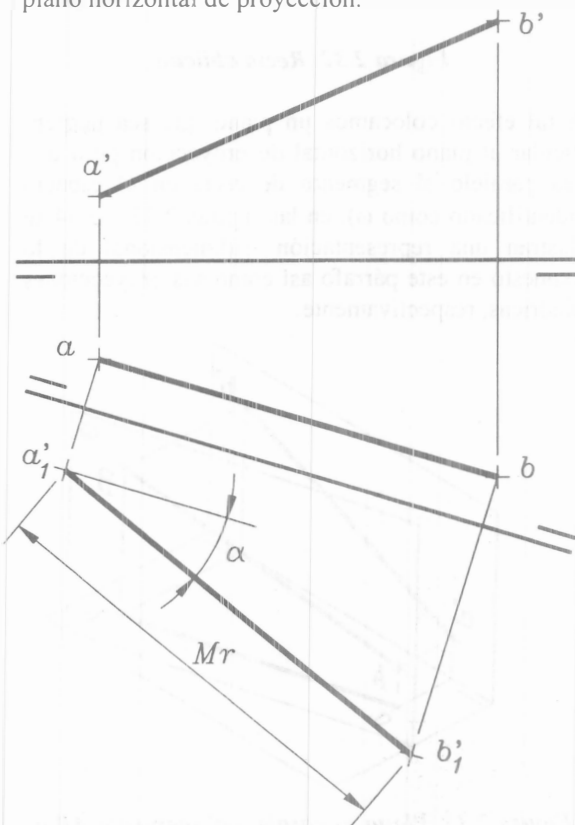


Figura 2.35 Cambio de planos para obtener MR y ángulo α de una recta oblicua

Obsérvese que, no tomando en cuenta el plano frontal de proyección original, el segmento de recta, con el cambio de planos, lo transformamos en un segmento frontal, en donde ya sabemos que presenta la magnitud real y el ángulo que forma con el plano horizontal de proyección.

La figura 2.36 muestra el cambio de planos para obtener, aparte de la magnitud real, el ángulo β que forma el segmento de recta con el plano frontal de proyección. Se recomienda tener cuidado con las rectas proyectantes que son perpendiculares al nuevo plano (ω en este caso) y tomar las cotas o los alejamientos según sea el caso.

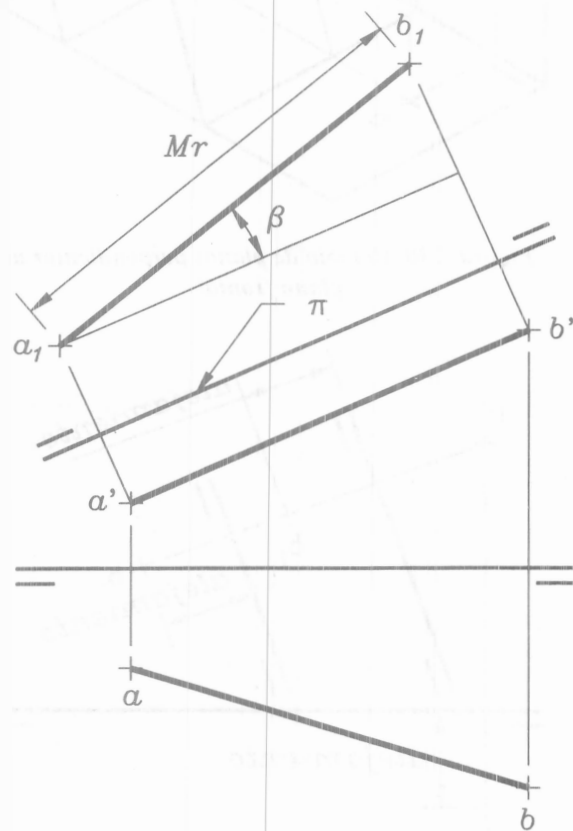


Figura 2.36 Cambio de planos para obtener MR y ángulo β de una recta oblicua

Una vez conocido el procedimiento de cambio de planos, resolveremos ahora problemas típicos de geometría descriptiva de recta y en algunos de estos ejercicios se hace uso de este método. Para la resolución de los ejercicios estableceremos un teorema de fácil asimilación y que se enuncia sin demostrarse.

Teorema de punto contenido en una recta.

Un punto está contenido en una recta si y sólo si en todas las proyecciones el punto pertenece a la recta.

Se hace la aclaración de *en todas las proyecciones*, dado que para una recta de perfil puede aparentar un punto estar contenido en la recta, pero al hacer un cambio de planos en algunos casos resulta no ser así, se recomienda hacer este ejercicio.

Ejercicio 2.1

Con base en la figura 2.37 determinar las proyecciones diédricas faltantes de un segmento de recta frontal AB de 35mm de magnitud real, si se sabe que el alejamiento del punto B es igual a su cota y ésta es de 20mm. El segmento de recta debe estar en el primer cuadrante.



Figura 2.37 Proyecciones diédricas del ejercicio 1
Solución al ejercicio 2.1

Se traza el lugar geométrico del alejamiento y la cota del punto B (LG en la figura 2.38) y como es un segmento de recta frontal, sabemos que los alejamientos de todos sus puntos es constante e igual con 20 mm, posteriormente hacemos centro en la proyección frontal del punto A y con un radio igual a 35mm trazamos una circunferencia que corte al lugar geométrico de la cota, se determina así la proyección frontal del punto B.

Finalmente trazamos las rectas proyectantes partir de las proyecciones frontales del segmento AB, que sabemos son perpendiculares a la línea de tierra y en la intersección con el lugar geométrico encontramos las proyecciones horizontales del segmento AB. La figura 2.38 muestra la solución del ejercicio.

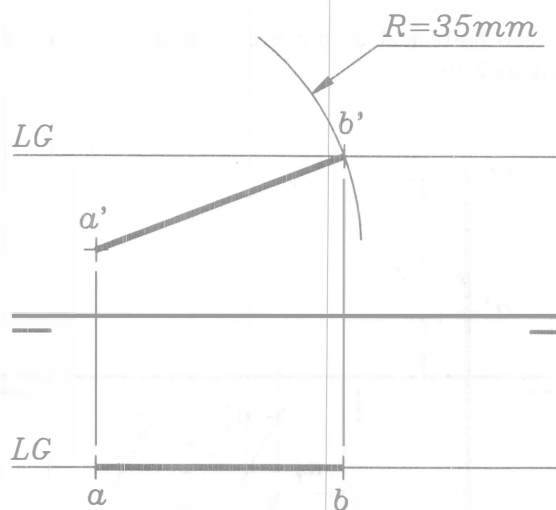


Figura 2.38 Solución al ejercicio 2.1

Ejercicio 2.2

Con base en las proyecciones de la figura 2.39, determinar las proyecciones faltantes de un segmento de recta de perfil AB con 35mm de magnitud real, y que forme 30° con el plano horizontal de proyección. El segmento deberá estar completamente en el primer cuadrante, y el alejamiento de A deberá ser menor que el de B.

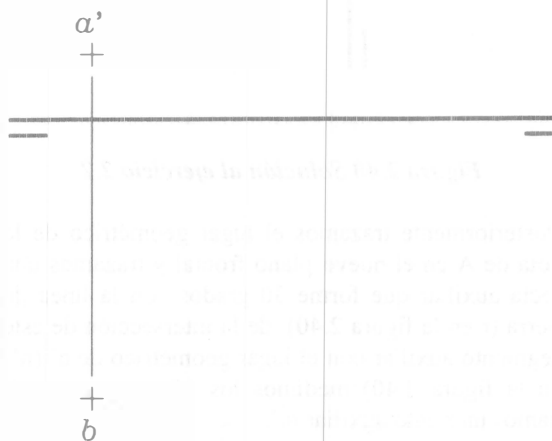


Figura 2.39 Proyecciones del ejercicio 2.2

Solución al ejercicio 2.2

Dado que es una recta de perfil, el lugar geométrico de todos sus puntos deberá estar en la perpendicular a la línea de tierra que pase por a'. Sabemos que una recta de perfil no presenta su magnitud real en proyecciones diédricas, por lo que hacemos un cambio de planos que deberá ser paralelo a la proyección horizontal y transformar al segmento CD de perfil en uno frontal, en donde se apreciará el ángulo de 30 grados que forma el segmento con el

plano horizontal de proyección, como se ve en la figura 2.40.

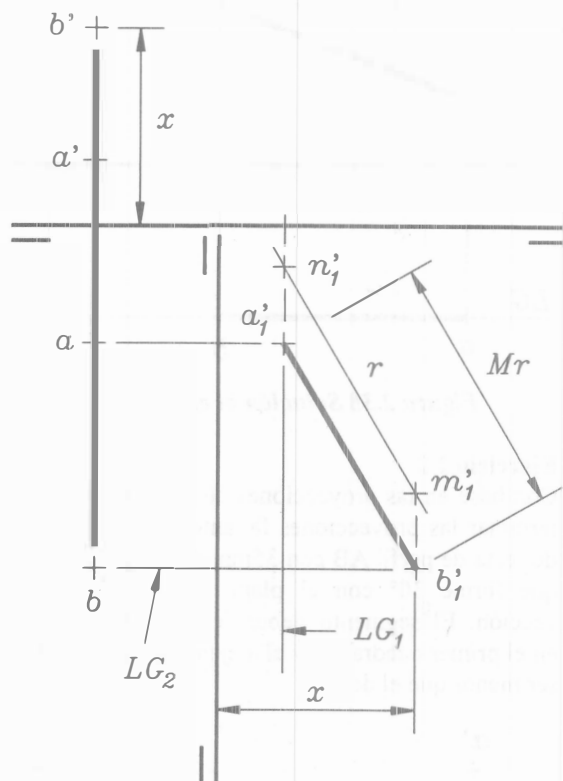


Figura 2.40 Solución al ejercicio 2.2

Posteriormente trazamos el lugar geométrico de la cota de A en el nuevo plano frontal y trazamos una recta auxiliar que forme 30 grados con la línea de tierra (r en la figura 2.40), de la intersección de este segmento auxiliar con el lugar geométrico de a' (n'_1 en la figura 2.40) medimos los 35mm y determinamos un punto auxiliar m' .

El segmento MN cumple las características del segmento AB pero difícilmente la recta auxiliar trazada caerá en las proyecciones de AB, por lo que trazamos una recta paralela a la nueva línea de tierra que pase por m'_1 (en el cambio de planos) y que corte al lugar geométrico para la cota de B (LG_2 en la figura 2.40) este punto será la proyección frontal buscada b'_1 , por lo que ahora trazamos una recta paralela a N_1M_1 que pase por el punto b'_1 y determinamos la proyección a'_1 . Finalmente trazamos perpendiculares por a'_1 a la línea de tierra del cambio de planos y determinamos la proyección hori-

zontal del punto A, para la cota del punto B medimos la cota de b'_1 y la transportamos a la proyección frontal original. (x en la figura 2.40)

Rumbo y pendiente de una recta.

El rumbo de una recta es la dirección de un segmento de recta dirigido medido en la proyección horizontal, y se mide a partir del norte o sur, y en dirección este u oeste.

Por ejemplo, en la figura 2.41 se muestran las proyecciones diédricas de un segmento de recta oblicuo definido por los puntos AB y deseamos saber el rumbo del segmento en el sentido de A hacia B. A tal efecto se colocan los ejes geográficos en A y se mide el ángulo que forma el segmento con respecto al norte o sur, en este caso α , y se denota el rumbo como $S\delta^\circ E$, véase la figura.

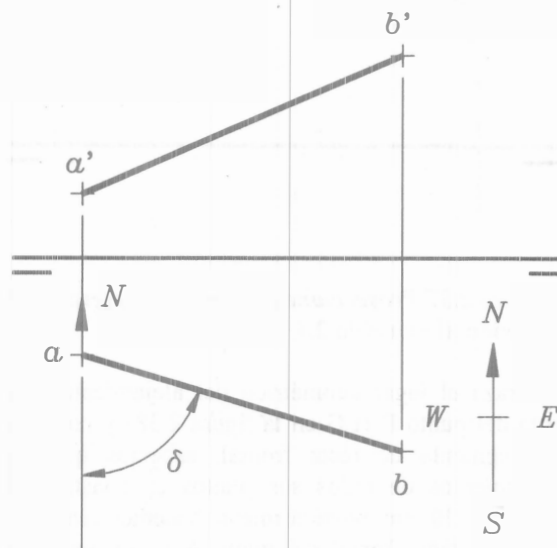


Figura 2.41 Rumbo de una recta

En lo que respecta al resto de las siguientes notas, en caso que no se proporcionen los ejes geográficos se supondrán perpendiculares a la línea de tierra.

El rumbo de una recta varía de más de cero a menos de noventa grados, si una recta coincide con alguna de las direcciones de los ejes geográficos, su rumbo será el de la dirección con la que coincide, por ejemplo, en la figura 2.42 se muestran las proyecciones de un segmento de recta frontal, así el rumbo del segmento AB sería E mientras que el rumbo del mismo segmento pero ahora considerando BA sería W (suele denominársele así, *west*, para no confundirlo con el origen, O en la figura).

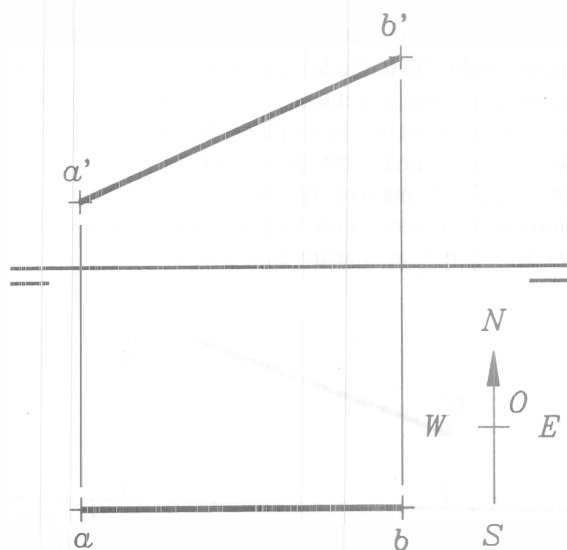


Figura 2.42 Rumbo de una recta frontal

De los diferentes tipos de rectas, la fronto-horizontal, de punta, de perfil y frontal, sus rumbos coinciden con las direcciones de los ejes geográficos, de la recta vertical carece de sentido hablar de su rumbo dado que es perpendicular al plano horizontal de proyección y por tanto en esa proyección aparece como un punto; finalmente las rectas oblicua y horizontal son las únicas que su rumbo no coincide con los ejes geográficos, es decir su rumbo será de la forma **N** o **S** α° **E** u **W**.

La pendiente de una recta se toma como el valor de la tangente del ángulo que forma el segmento con el plano horizontal de proyección. Si recordamos el concepto matemático de pendiente en el plano, ésta queda definida como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Para la pendiente de una recta en el espacio de tres dimensiones, y refiriéndonos a la figura 2.43, se define como:

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}} \quad (2)$$

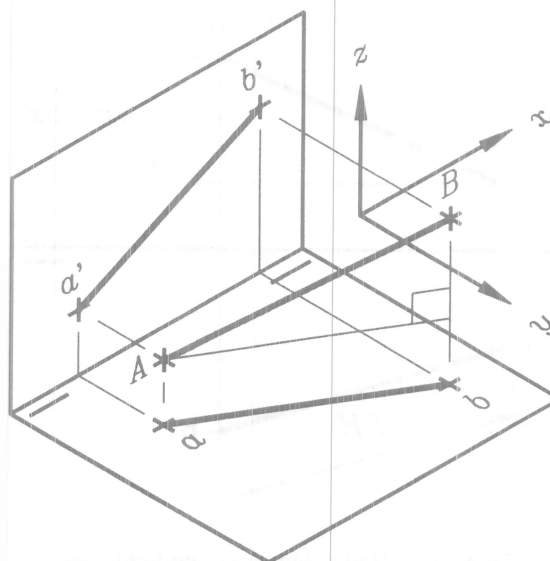


Figura 2.43 Recta oblicua para la obtención de su pendiente

Obsérvese que por el extremo A se hace pasar un segmento paralelo a la proyección horizontal de la recta en el espacio, por lo que se forma un triángulo rectángulo con esta paralela y el segmento de recta en el espacio. Se han colocado los ejes x , y y z únicamente para ilustrar la obtención de la pendiente, el denominador en la fórmula es la aplicación del teorema de Pitágoras. Considerando ahora conceptos de la geometría descriptiva, vemos que $z_2 - z_1$ es una diferencia de cotas que definiremos como $\Delta cotas$, y

$$\sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \quad (3)$$

no es otra cosa mas que la longitud de la proyección horizontal y que denotaremos como **IPH**, por lo que la pendiente en geometría descriptiva está definida como

$$m = \frac{\Delta \cot as}{IPH} \quad (4)$$

Para la obtención de la pendiente, en la fórmula observamos que toda la información está en proyecciones y se ilustra en la figura 2.44

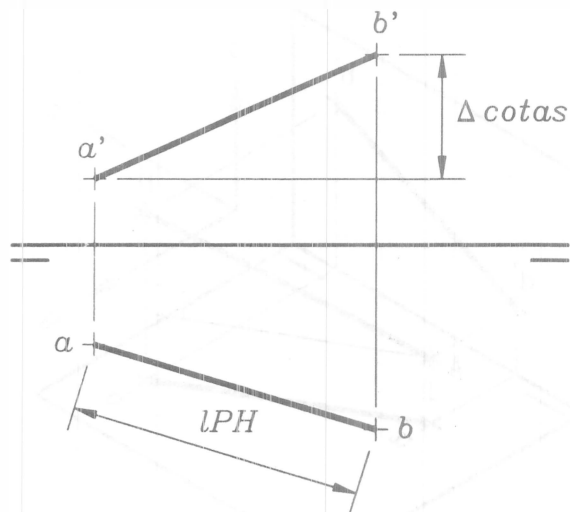


Figura 2.44 Obtención de la pendiente, en conceptos de geometría descriptiva

Es usual encontrar el valor de la pendiente expresada como porcentaje, por lo que a la expresión (4) únicamente la multiplicamos por cien y obtenemos así la **pendiente porcentual**, así una pendiente del 40% la podríamos expresar diciendo que por cada cien unidades que se avance en sentido horizontal se sube (o baja, dependiendo el signo de la pendiente) cuarenta unidades en sentido vertical.

Ejercicio 2.3

La figura 2.45 muestra las proyecciones del punto A de coordenadas (5,30,10). Trazar un segmento de recta AB de 40mm de magnitud real, que tenga un rumbo de N60°E y una pendiente (m%) de 30%.

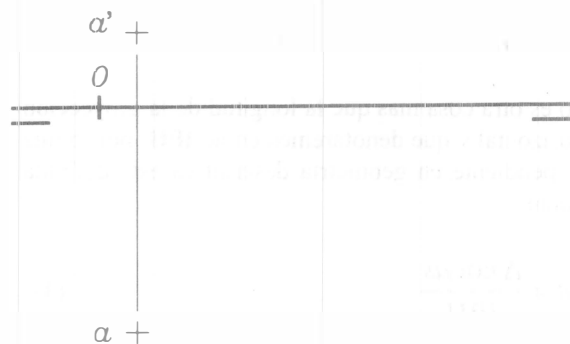


Figura 2.45 Datos del ejercicio 2.3

Solución del ejercicio 2.3

Dado que el segmento de recta tiene un rumbo, que no coincide con los ejes geográficos y una pendiente diferente de cero, deducimos que se trata de una recta oblicua, por lo que sería un error trazar por el punto A una recta auxiliar paralela a la línea de

tierra, en ésta medir cien unidades y por este último punto medir 30 unidades en sentido vertical, pues recordemos que la pendiente es el valor del ángulo que forma la recta con el plano horizontal de proyección, y en una recta oblicua no se puede medir este ángulo de manera directa, por lo que el procedimiento de construcción es el que a continuación se describe, y que se muestra en la figura 2.46.

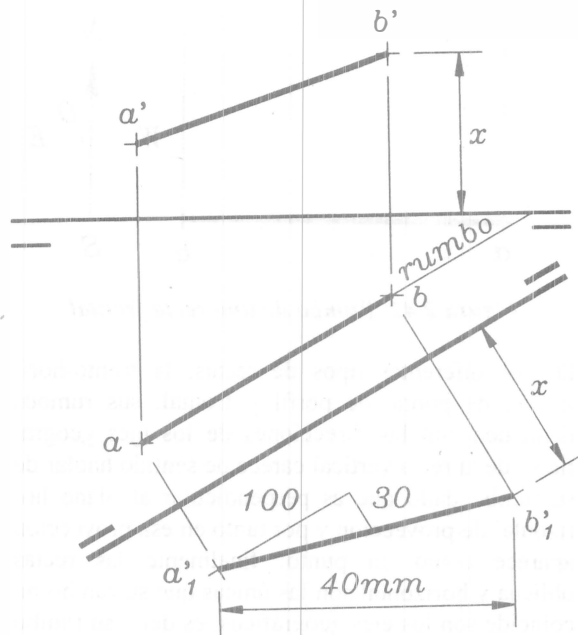


Figura 2.46 Solución del ejercicio 2.3

Trazamos el rumbo de la recta y sabemos que es el lugar geométrico en donde estará localizado el punto **B**, por otro lado sabemos que para ver el ángulo que una recta forma con el plano horizontal de proyección ésta deberá ser paralela al plano frontal, es decir, debe ser una recta de tipo frontal, por lo que hacemos un cambio de planos paralelo al rumbo del segmento, dado que una recta frontal tiene sus alejamientos constantes, y determinamos la proyección **a'1**. A partir de este punto ahora sí trazamos la pendiente, que será el lugar geométrico donde localizaremos la proyección del punto **b'1** a 40mm de **a'1**. Finalmente "por proyecciones" obtenemos la proyección horizontal del punto **B** que es la intersección de la perpendicular a la línea de tierra de nuestro cambio de planos y el rumbo. Una vez conocida la proyección horizontal trazamos la recta proyectante por la proyección horizontal del punto **B** para localizar su cota, que la determinamos tomándola de su proyección **b'1** (x en la figura) y transportándola a la proyección frontal original, con lo cual queda resuelto el ejercicio.

Ejercicio 2.4

La figura 2.47 muestra las proyecciones horizontal del punto **C** y la frontal del punto **D**. Con base en esta información, se desea trazar las proyecciones de un segmento de recta oblicuo **CD** de 35mm de magnitud real y que tenga una pendiente ascendente del 40%. Determinar también el rumbo de dicho segmento.

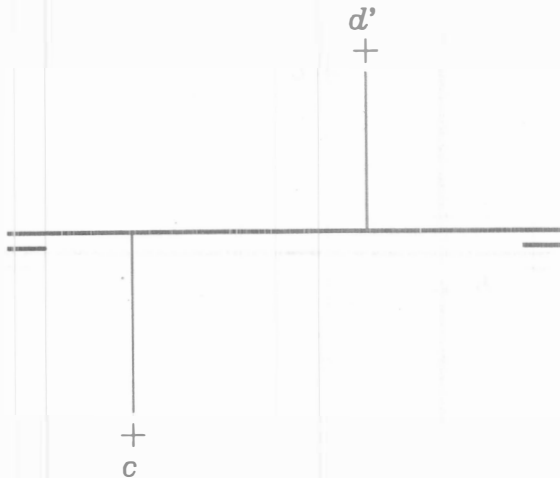


Figura 2.47 Datos para el ejercicio 2.4

Solución del ejercicio 2.4

Sabemos que la pendiente de un segmento está definida como

$$m = \frac{\Delta \cot as}{IPH}$$

por lo que trazamos un segmento con las características solicitadas en un diagrama que se conoce como **diagrama de longitudes reales**, el cual se muestra en la figura 2.48

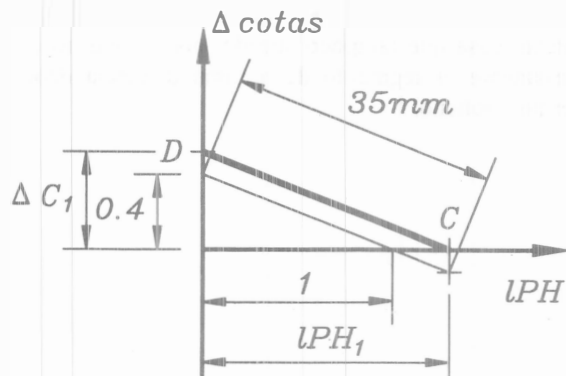
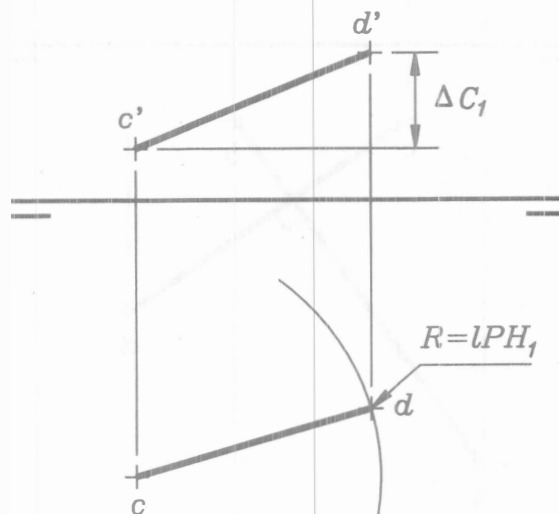


Figura 2.48 Diagrama de longitudes reales

Obsérvese que en el eje de las abscisas se coloca la longitud de la proyección horizontal y en el de las ordenadas la diferencia de cotas, siendo la hipotenusa la magnitud real. Como la escala empleada para la obtención de la pendiente puede variar dependiendo del instrumento de medición, la hipotenusa difícilmente coincidirá con la magnitud real deseada, pero al menos tenemos las características de un segmento como el que se nos pide, lo único que resta hacer es medir la longitud real sobre este segmento y medir en los ejes correspondientes las longitudes de la proyección horizontal y la diferencia de cotas (identificadas como ΔC_1 y IPH_1 en la figura 2.48) que permiten hacer el trazo de las proyecciones. La figura 2.49 muestra una de las dos posibles soluciones del ejercicio.



$$\text{Rumbo } \overline{CD} = N73.17^\circ E$$

Figura 2.49 Solución del ejercicio 2.4

Subtema II.4 Análisis de paralelismo, perpendicularidad y oblicuidad entre rectas. Intersección y visibilidad entre recta y plano, y entre planos.

Como punto de partida iniciaremos con perpendicularidad entre rectas. Existen rectas de perpendicularidad obligada, tal es el caso de la recta fronto-horizontal con las rectas vertical y de punta. Cualquier recta contenida en un plano de proyección es perpendicular a una recta perpendicular al plano, por ejemplo, la recta frontal es perpendicular a la recta de punta, que a su vez es perpendicular al plano frontal de proyección el cual contiene a la recta frontal mencionada.

Existe perpendicularidad ocasional, como podría ser el caso de dos rectas de perfil o dos horizontales, y que pueden o no estar contenidas en el mismo plano sin perder esta característica, la figura 2.50 ilustra las proyecciones diédricas de dos rectas horizontales que no están contenidas en el mismo plano y que son perpendiculares. Obsérvese que en este caso la perpendicularidad se manifiesta en donde las rectas aparecen en magnitud real, es decir, en la proyección horizontal.

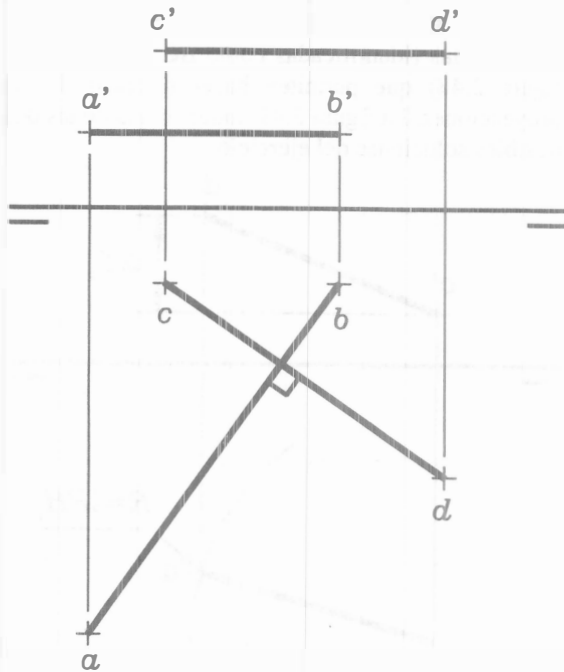


Figura 2.50 Perpendicularidad ocasional de dos rectas horizontales

Mínima distancia de un punto a una recta.

Sabemos que la distancia mínima entre dos puntos, es el segmento de recta que los une. Para el caso de una recta y un punto, la mínima distancia entre estos dos elementos geométricos es la perpendicular a la recta que pase por el punto.

La Figura 2.51 muestra las proyecciones de una recta de perfil AB y un punto C en el espacio, para conocer la mínima distancia entre estos dos ele-

mentos geométricos es necesario analizar las proyecciones y no únicamente trazar un segmento perpendicular a las proyecciones de la recta y que pasen por el punto. El primer paso es visualizar el problema en el espacio y ver que tipos de rectas son perpendiculares a una recta de perfil, que en este caso son: otra recta de perfil, una oblicua y una fronto-horizontal.

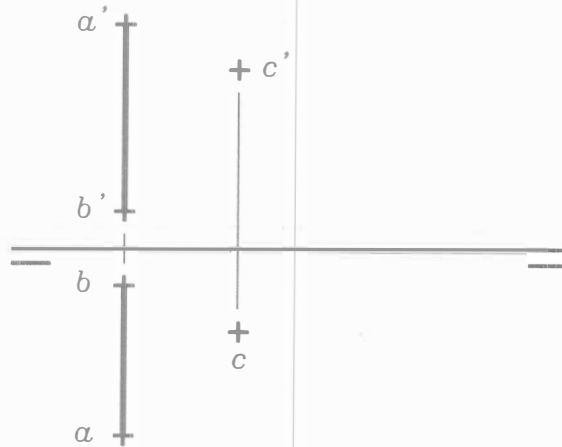


Figura 2.51 Recta de perfil y un punto C

Ahora bien, la distancia mínima entre estos dos elementos geométricos debe ser un segmento de recta, uno de cuyos extremos es el mismo punto C y el otro punto deberá estar contenido en el segmento definido por los puntos AB (al que denominaremos D). Si el segmento de mínima distancia entre los dos elementos fuera una recta fronto-horizontal, bastaría con verificar si el punto D pertenece al segmento AB, cosa que no sucede, (ver figura 2.52), por lo que el segmento de mínima distancia no es fronto-horizontal, se descarta también la posibilidad de que sea de perfil, dado que si así fuera, el punto C debería tener el mismo valor de la coordenada distancia, cosa que tampoco sucede, por lo que necesariamente el segmento de mínima distancia debe ser uno oblicuo.

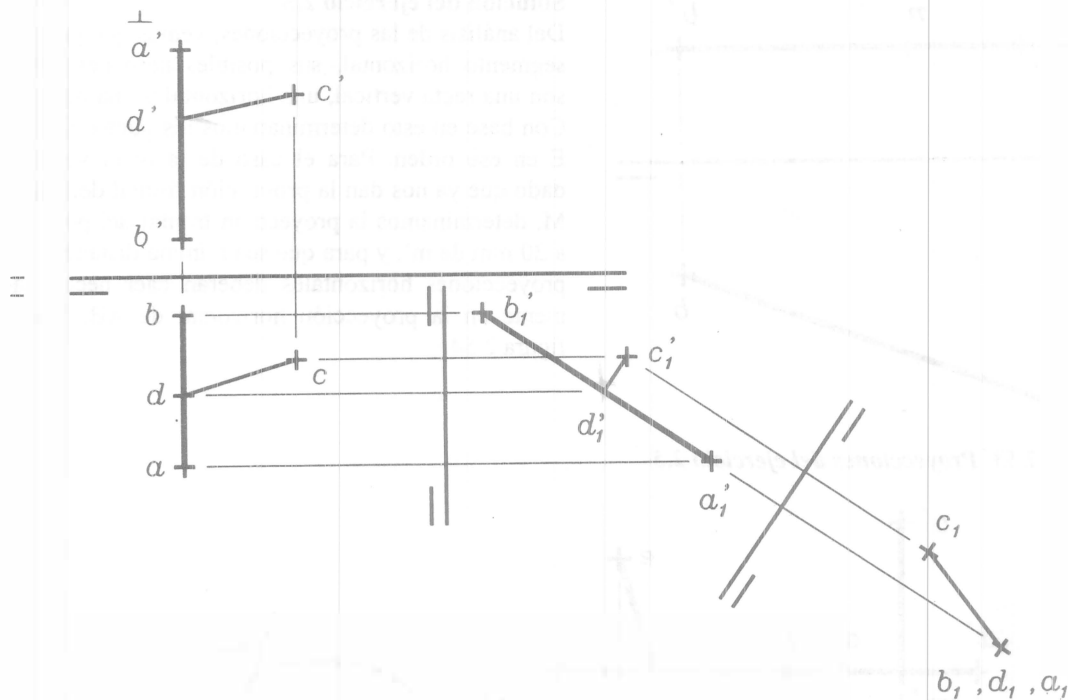


Figura 2.52 Mínima distancia entre los elementos geométricos mostrados en la figura 2.51

La mínima distancia entre un segmento de recta y un punto, se obtiene en una proyección en la cual el segmento aparezca en una de sus proyecciones visto como un punto, para el caso específico de nuestro ejemplo, debemos hacer primero un cambio de planos para ver el segmento en magnitud real, y posteriormente hacer un cambio de planos perpendicular a la proyección en donde presenta su magnitud real, para poder ver el segmento en una de sus proyecciones como un punto, y dado que el segmento de mínima distancia debe ser perpendicular al segmento AB, por consecuencia es paralelo al plano de proyección al cual el segmento AB es perpendicular, véase al figura 2.52.

Dicho de otra forma, a partir del primer cambio de planos, la recta de perfil se ha “convertido” en una recta frontal, por lo que, para el segundo cambio de planos, el segmento de mínima distancia es una recta de tipo horizontal, la obtención de la proyección del punto D en el primer cambio de planos, se obtuvo al trazar la perpendicular al segmento AB en magnitud real y que pase por el punto C, si observamos la figura 2.52 eliminando las proyecciones frontal original y la horizontal que resulta de hacer el segundo cambio de planos, vemos que el segmento definido por los puntos CD es un segmento oblicuo, y para obtener su magnitud real

tendríamos que hacer un cambio de planos paralelo a alguna de sus proyecciones en este caso las definidas por c' y d' y al efectuarlo vemos que llegamos al mismo resultado que el seguido con el anterior procedimiento. Lo que nos lleva a enunciar el siguiente teorema

En proyecciones diédricas, para un segmento de recta y un punto, si en una proyección el segmento aparece en magnitud real, las proyecciones del segmento de mínima distancia se obtienen de trazar la perpendicular al segmento en magnitud real y que pase por el punto.

Lo que restaría hacer, es obtener la magnitud real del segmento de mínima distancia, si es que se solicita.

Ejercicio 2.5

Con base en la información de la figura 2.53, trazar las proyecciones faltantes de los puntos C, D y E si se sabe que su mínima distancia al segmento AB es de 20 mm, que están en el primer cuadrante y que se unen con los puntos M, N y O, para formar segmentos de tipo vertical, horizontal y oblicuo respectivamente, estos últimos puntos están contenidos en el segmento AB.

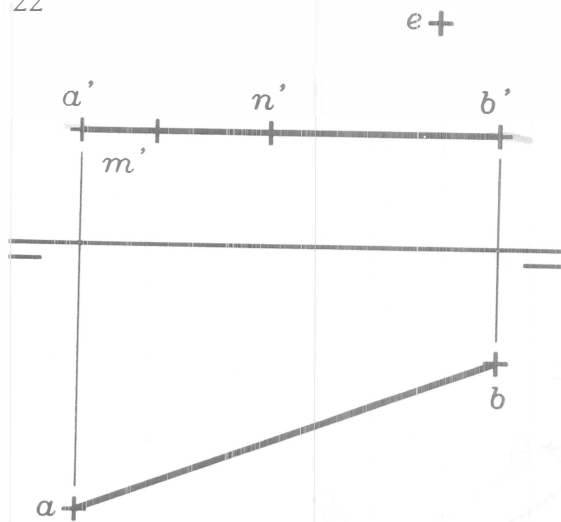


Figura 2.53 Proyecciones del ejercicio 2.5

Solución del ejercicio 2.5

Del análisis de las proyecciones, vemos que para un segmento horizontal, sus posibles perpendiculares son una recta vertical, una horizontal y una oblicua. Con base en esto determinaremos los puntos C, D y E en ese orden. Para el caso de la recta vertical, dado que ya nos dan la proyección frontal del punto M, determinamos la proyección frontal del punto C a 20 mm de m', y para que sea mínima distancia sus proyecciones horizontales deberán caer necesariamente en la proyección horizontal de AB. Véase figura 2.54.

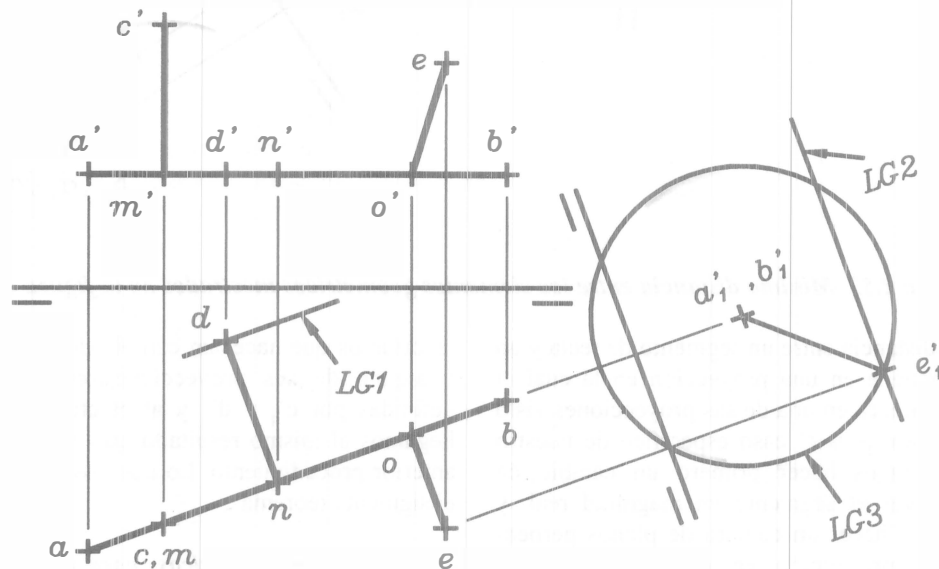


Figura 2.54 Solución del ejercicio 2.5

El segmento DN debe ser horizontal, ubicamos la proyección horizontal de N en la proyección horizontal de AB y dado que AB ya está en magnitud real trazamos una paralela a 20 mm que sería el lugar geométrico de la mínima distancia, (representado como LG_1 en la figura 2.54) y a partir de la proyección horizontal del punto N trazamos una perpendicular que corte a LG_1 con lo cual obtenemos la proyección horizontal del punto D, por ser una DN recta horizontal deberá tener cotas constantes y por proyecciones obtenemos la proyección frontal d'. Para el segmento oblicuo EO, únicamente tenemos su proyección frontal e', pero sabemos que la mínima distancia entre una recta y un punto se ve, cuando en una proyección la recta aparece como un punto, para lo cual hacemos un cambio de planos

perpendicular a la proyección horizontal del segmento AB. En este cambio de planos el segmento AB aparece como punto, hacemos centro en ese punto y con un radio igual a 20 mm trazamos una circunferencia, que será el lugar geométrico en donde debe estar la proyección del punto E, (LG_2 en la figura 2.54). Por otro lado conocemos también la cota del punto E y trazamos el lugar geométrico de la cota de E en el cambio de planos (LG_3 en la figura 2.54), la intersección de los lugares geométricos definirá la ubicación de la proyección e'. Cabe aclarar que hay dos intersecciones, pero se toma la marcada en la figura 2.54 por ser la que cumple la característica de estar en el primer cuadrante. Finalmente por proyecciones obtenemos la proyección horizontal del punto E y a partir de ésta,

trazamos una perpendicular a la proyección horizontal de AB para definir sobre ésta la proyección horizontal del punto O, y hacemos lo propio para definir su proyección frontal.

Se recomienda tener especial cuidado en la resolución de este ejercicio, pues es muy fácil “mecanizarse” en la geometría descriptiva y es mejor tener claros los conceptos antes de aplicarlos sin comprenderlos.

Posiciones relativas entre rectas.

Para dos rectas en el espacio existe una de tres posibilidades; se *cruzan*, se *cortan* (o se empleará indistintamente el término *se intersecan*) o son paralelas.

Establecemos así que:

dos rectas se cruzan en el espacio, si no tienen un punto común en sus proyecciones diédricas

En la figura 2.55 se muestran las proyecciones diédricas de dos rectas que se cruzan en el espacio, vale aclarar que el único punto donde puede haber duda si pertenece a ambas rectas, es aquel en donde se crucen sus proyecciones, se ilustra la proyección frontal del punto I, del cual vemos que no pertenece simultáneamente a los segmentos AB y CD.

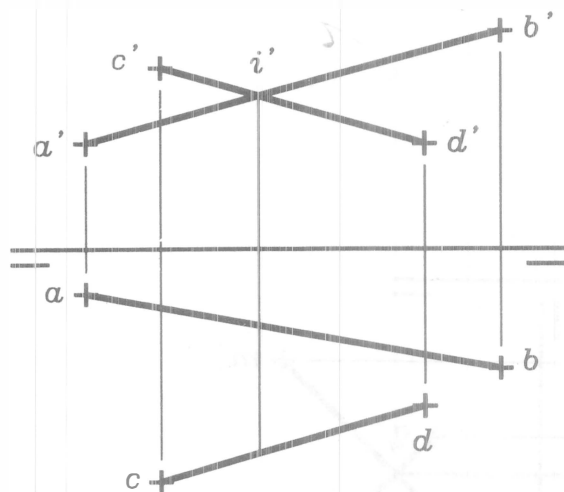


Figura 2.55 Rectas que se cruzan

En la figura 2.56 se muestra el caso de dos rectas que se intersecan en el espacio, establecemos entonces que:

dos rectas se cortan en el espacio, si y sólo si, en proyecciones tienen un punto común. Puede apreciarse que el punto definido como K en la figura 2.56, pertenece a las rectas MN y OP, con lo

cual aseguramos que estas rectas se cortan en el espacio.

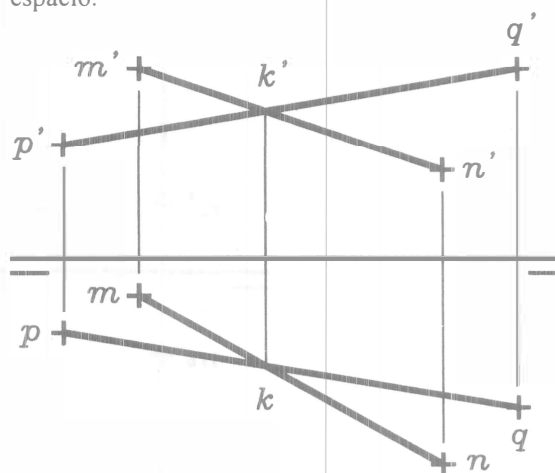


Figura 2.56 Rectas que se cortan

Finalmente decimos que:

dos rectas son paralelas en el espacio, si y sólo si, en todas sus proyecciones son paralelas, la figura 2.57 ilustra el caso de dos rectas frontales que son paralelas.

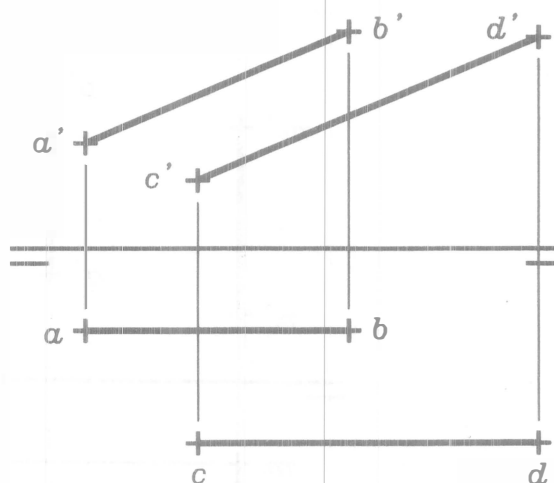


Figura 2.57 Rectas paralelas

En esta última definición se resalta *en todas las proyecciones*, pues puede darse el caso que se presente las proyecciones de dos rectas de perfil, como en la figura 2.58, en donde a priori (con lo visto hasta ahora) no se puede asegurar la posición relativa que guardan estos dos segmentos de recta. En principio podría pensarse que son dos rectas paralelas, dado que sus proyecciones lo son, pero al hacer un cambio de planos (figura 2.58), vemos claramente que son dos rectas que se cruzan.

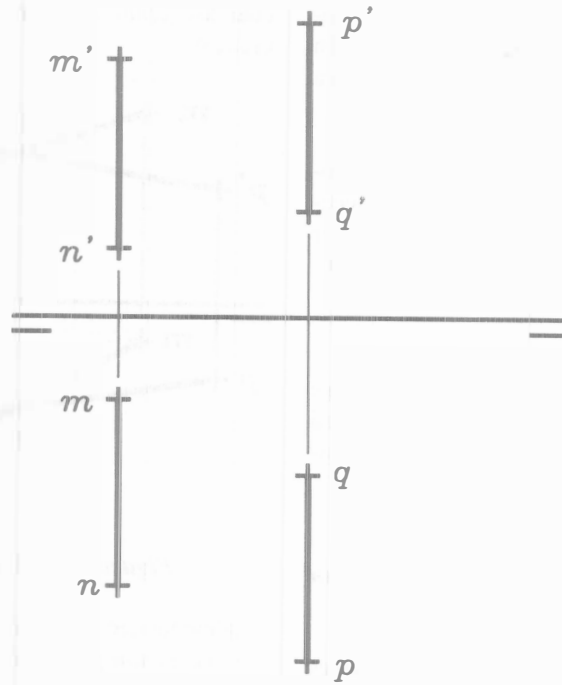


Figura 2.58 Rectas de perfil

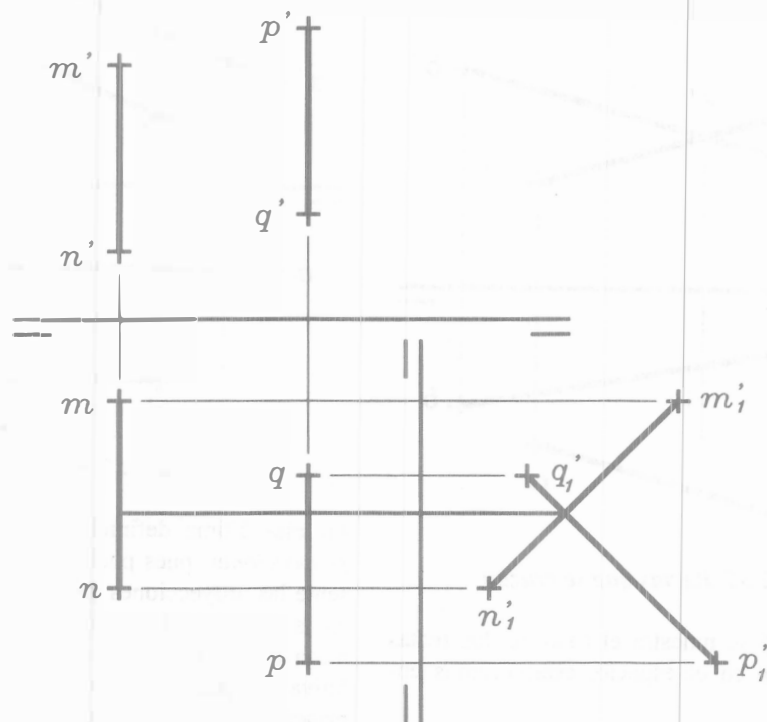


Figura 2.59 Rectas que se cruzan

Las proyecciones de las rectas de perfil, son el único caso en donde puede haber duda en cuanto a su posición relativa, por lo que se recomienda hacer un cambio de planos para verificarla, o bien hacer un análisis más exhaustivo de sus proyecciones diédricas.

De la posición relativa entre dos rectas, puede interesarnos: su mínima distancia, en el caso que sean paralelas o se crucen; o el ángulo que forman, en el caso de que las rectas se corten.

Analizaremos primero el caso de dos rectas paralelas; su mínima distancia es un segmento de recta que sea perpendicular a ambas, pues sabemos por el axioma de paralelas de Euclides que:

por un punto cualquiera del plano puede trazarse no más de una paralela a una recta dada.

Y la proposición que se desprende del axioma:

si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas dadas, entonces también es perpendicular a la segunda.

Es válido extrapolar esta proposición al espacio, dado que dos rectas paralelas definen un plano, y trabajar con proyecciones.

Ejercicio 2.6

La figura 2.60 muestra dos segmentos de recta oblicuos que son paralelos, se desea saber la mínima distancia entre dichos segmentos.

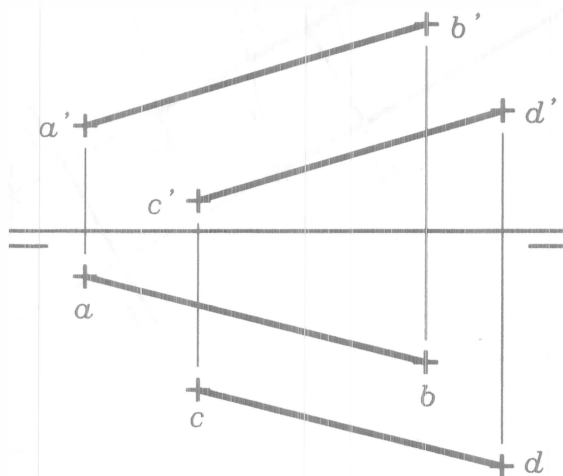


Figura 2.60 Rectas que se cruzan

Solución al ejercicio 2.6

La mínima distancia debe ser un segmento perpendicular a las rectas paralelas dadas, y para obtenerlo hacemos un primer cambio de planos para obtener la magnitud real de los segmentos paralelos, y un segundo cambio para que en una de sus proyecciones aparezcan los segmentos vistos como un punto, véase la figura 2.61.

En el segundo cambio de planos las rectas AB y CD son perpendiculares al plano horizontal de proyección, por lo que cualquier segmento de recta que tenga cada uno de sus extremos en cada uno de los dos segmentos, sus proyecciones estarán en donde los segmentos aparecen como punto.

Ahora bien, si queremos un segmento perpendicular a dos rectas que aparecen en una de sus proyecciones como un punto, **necesariamente** el segmento deberá ser paralelo al plano de proyección al cual los segmentos son perpendiculares, por lo que está en magnitud real, tal es el caso del segmento definido por los puntos S y T en la figura 2.61, por lo que para obtener sus proyecciones en el primer cambio de planos, por cualquier punto de los segmentos, AB o CD, trazamos una paralela a la línea de tierra (que resulta ser perpendicular a los segmentos) y definimos las proyecciones respectivas s'_1 y t'_1 , para obtener las proyecciones originales del segmento de mínima distancia únicamente se llevan por proyecciones, con lo que queda resuelto el ejercicio.

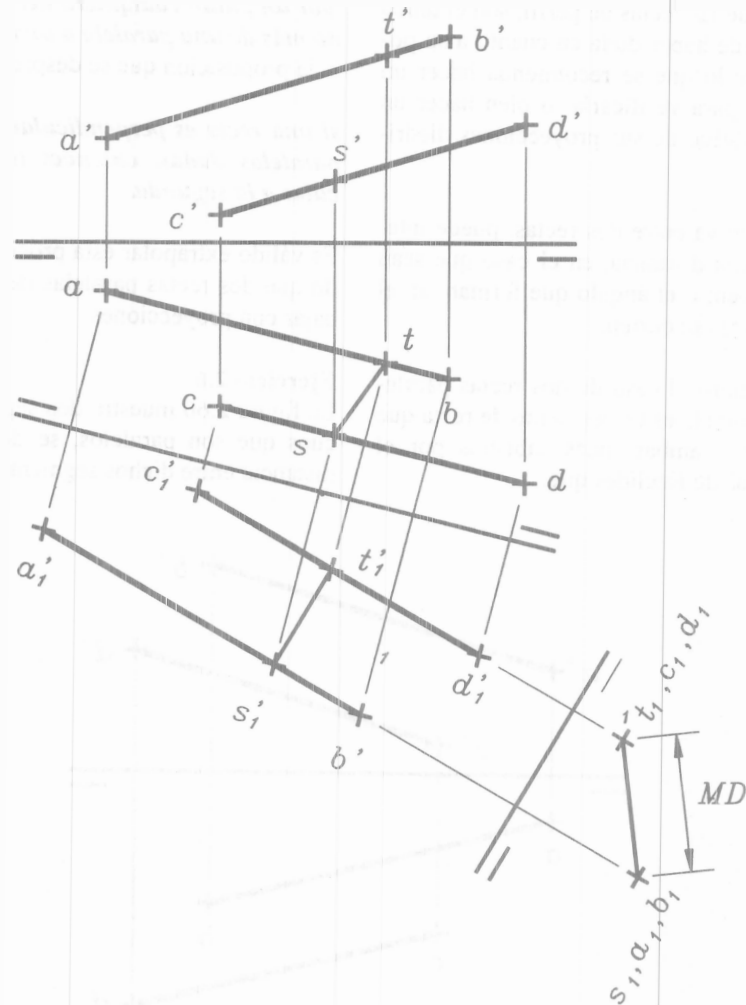


Figura 2.61 Solución del ejercicio 2.6

Antes de seguir con el análisis de las posiciones relativas entre rectas, enunciaremos (sin demostrar) tres teoremas que nos serán de gran utilidad y que apoyaremos mediante las figuras 2.62 hasta la 2.64.

Teorema 2.6

La magnitud real del ángulo entre dos rectas, se determina en una proyección en la que ambas aparezcan en magnitud real. Figuras 2.62 y 2.63

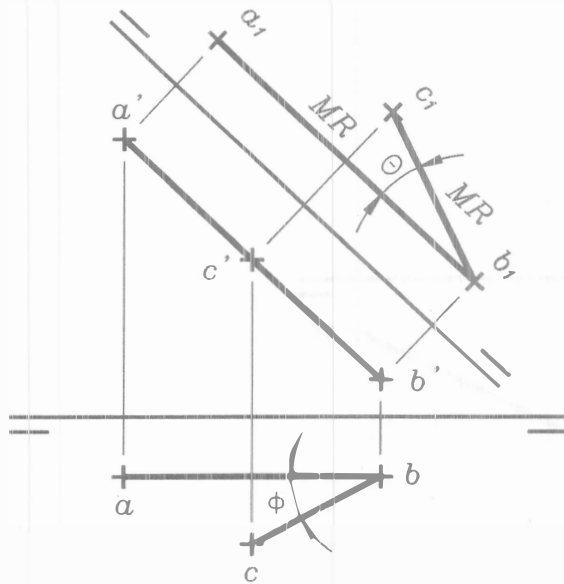
Teorema 2.7

Dos rectas son perpendiculares si en una proyección una de las rectas aparece como un "punto" y la proyección de la otra está en magnitud real. Figura 2.64.

Teorema 2.8

Dos rectas son perpendiculares, si en una proyección aparece una de las rectas en magnitud real y la proyección de la segunda es perpendicular a ella. Figura 2.64.

Θ = magnitud real del ángulo entre AB y BC



ϕ = ángulo aparente

Figura 2.62 Ángulo real formado por dos rectas

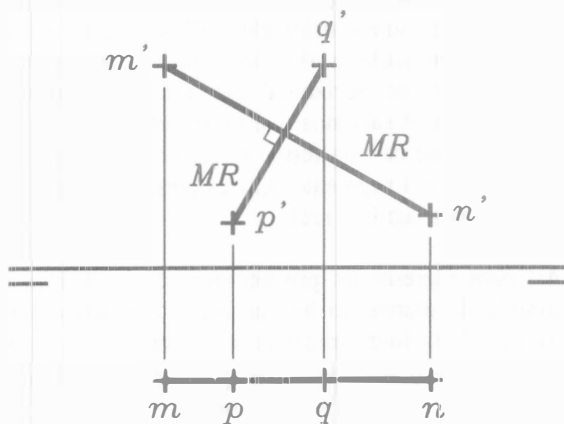


Figura 2.63 Magnitud real del ángulo entre dos rectas

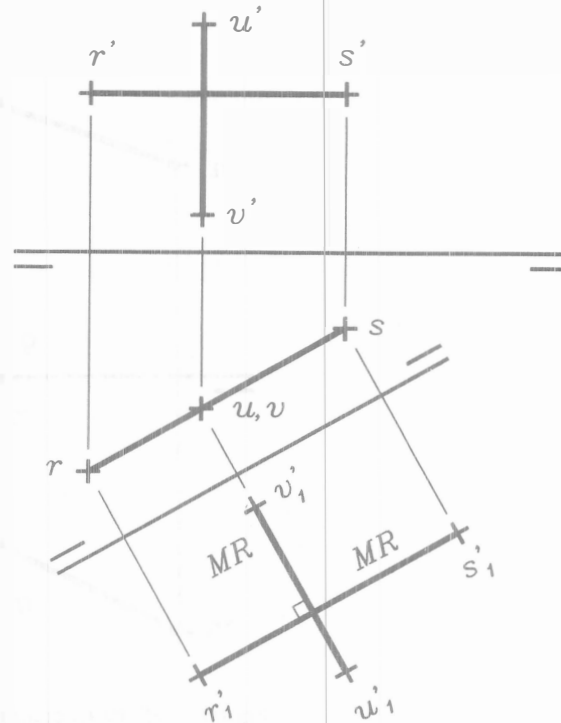


Figura 2.64 Perpendicularidad entre rectas

Los anteriores teoremas nos servirán para determinar la mínima distancia que existe entre dos rectas que se cruzan, y que sabemos es una recta que es perpendicular a ambas.

La figura 2.65 muestra las proyecciones de dos segmentos de recta MN y PQ de los cuales deseamos conocer su mínima distancia. Lo primero que hacemos es un cambio de planos para determinar si las rectas se cortan o se cruzan. En la figura 2.66 se verifica que las rectas se cruzan, el cambio de planos se hizo paralelo a la proyección horizontal del segmento MN.

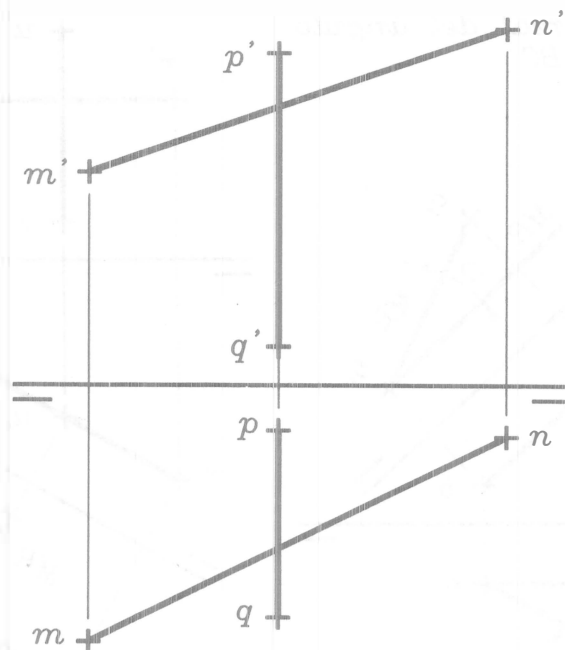


Figura 2.65 *Proyecciones de dos segmentos de recta*

Revisando los teoremas 2.6 al 2.8, vemos que no se cumple alguno de ellos, por lo que hacemos un nuevo cambio de planos para ver la proyección de una de las rectas como un punto, dado que MN ya está en magnitud real, el segundo cambio de planos lo hacemos perpendicular a ella para lograr nuestro objetivo, ver figura 2.66.

Definiremos al segmento de mínima distancia como IJ, que debe ser perpendicular tanto a MN como a PQ. Ahora bien, el segmento MN es perpendicular (en el segundo cambio de planos) al plano horizontal de proyección, por lo que cualquier segmento que sea perpendicular a la proyección m_1n_1 , necesariamente deberá ser paralelo a dicho plano horizontal y por tanto estará en magnitud real, determinemos así sobre MN al punto I, cuya proyección es también el punto que define a MN.

Aplicando el teorema 2.8, trazamos un segmento perpendicular a PQ y que pase por MN, determinando así al punto J, con lo que quedan definidos los extremos del segmento de mínima distancia entre las rectas MN y PQ.

Vále la pena analizar detenidamente las proyecciones del segundo cambio de planos para “regresar” IJ a las proyecciones originales. El segmento IJ se trazó perpendicular a MN (teorema 2.7) por lo que es un segmento horizontal que está en magnitud real, del cual sabemos que tiene cotas constantes, cumpliéndose de esta forma el teorema 2.8, pues la proyección del segmento p_1q_1 es perpendicular a IJ que está en magnitud real.

Así para regresar las proyecciones de j_1 al primer cambio de planos no hay problema, la determinación de i'_1 se logra trazando una paralela a la línea de tierra que pase por j'_1 y que corte a MN, definiéndose de esta manera la proyección i_1 , la obtención de las proyecciones originales se obtiene aplicando los conceptos de proyección cilíndrica ortogonal y de punto contenido en una recta.

La perfecta asimilación de los conceptos vertidos en los anteriores párrafos, nos permitirá abordar ejercicios de mayor grado de complejidad, se recomienda, que de no tener claros los conceptos, se acuda a asesoría o se vuelvan a repasar hasta dominarlos, para poder seguir con los ejercicios que continúan.

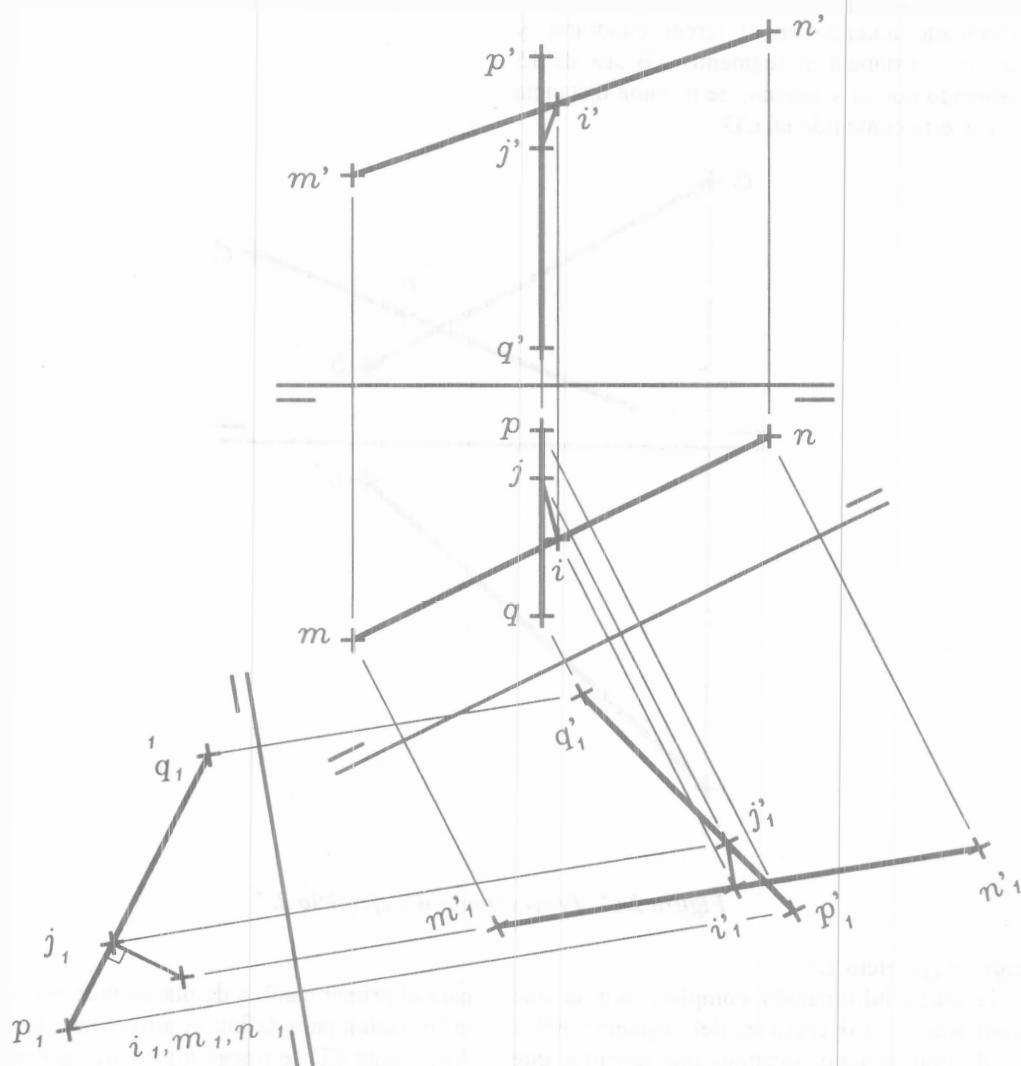


Figura 2.66 Obtención del segmento de mínima distancia entre dos rectas que se cruzan

Ejercicio 2.7. Figura 2.67

Dibujar la proyección frontal del segmento CD completamente ubicado en el tercer cuadrante y cuya mínima distancia al segmento AB sea de 15 mm, sabiendo que el segmento de mínima distancia es MN y N está contenido en CD.

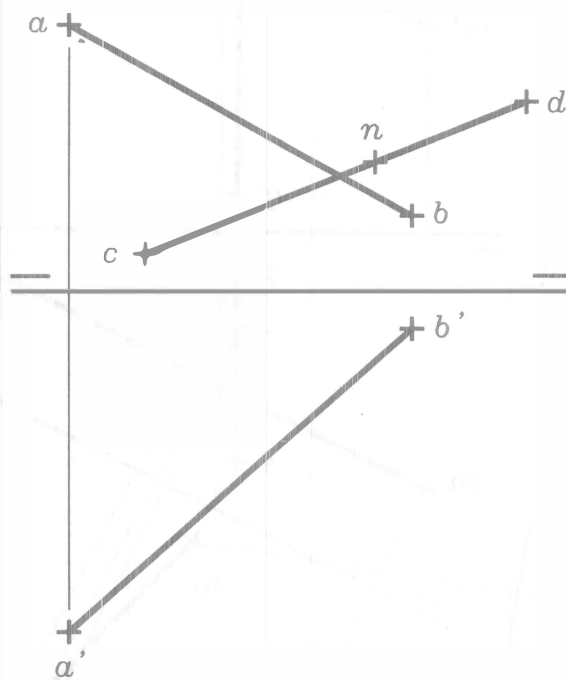


Figura 2.67 Proyecciones del ejercicio 2.7

Solución al ejercicio 2.7

Como la única información completa con la que contamos son las proyecciones del segmento AB y éste es de tipo oblicuo, sabemos que tenemos que hacer dos cambios de planos y poder aplicar los teoremas 2.6 a 2.8; el primero será para obtener la magnitud real y el segundo (en caso de ser necesario) para ver al segmento como un punto.

Con base en un análisis de proyecciones determinamos inicialmente en qué proyección hacemos el primer cambio de planos. Conviene hacerlo en la proyección horizontal (verifíquese que estamos en tercer cuadrante), para que en el segundo cambio de planos podamos contar con información del segmento CD, cosa que no sucedería si partimos del primer cambio de planos en la proyección frontal.

La figura 2.68 muestra los dos cambios de planos, hasta lograr ver al segmento AB como un punto, es decir, lo hemos convertido en un segmento de tipo vertical. Hasta aquí no debe haber algún problema;

para el primer cambio de planos únicamente se tiene información para definir la proyección del segmento AB, y para CD se trazan los lugares geométricos de sus proyecciones (marcados en la figura como LG_1 y LG_2 respectivamente) dado que no se conoce el valor de su cota.

El segundo cambio de planos se hace perpendicular a la magnitud real de AB para verla como un punto, y haciendo centro en esta proyección se traza un arco de 15 mm de radio (mínima distancia) que será el lugar geométrico donde se ubique al punto N (LG_3 en la figura 2.68), el punto M sabemos pertenece al segmento AB por lo que su proyección queda determinada por el punto que define a AB.

Los segmentos identificados como LG_C , LG_D y LG_N , son los valores de alejamiento definidos por la proyección horizontal original y el primer cambio de planos, vemos así que para N existen dos posibles ubicaciones (las intersecciones de LG_N y

LG_3) pero solo la marcada cumple las restricciones del ejercicio. Aplicamos el teorema 2.7 sabiendo que MN está en magnitud real y por tanto CD debe ser perpendicular a él, se traza un segmento con estas características y en donde se intersequen el

segmento perpendicular a MN con LG_C y LG_D quedan determinadas las proyecciones c_1 y d_1 respectivamente. Lo que restaría sería completar las proyecciones faltantes aplicando el concepto de proyección ortogonal, dando por terminado el ejercicio.

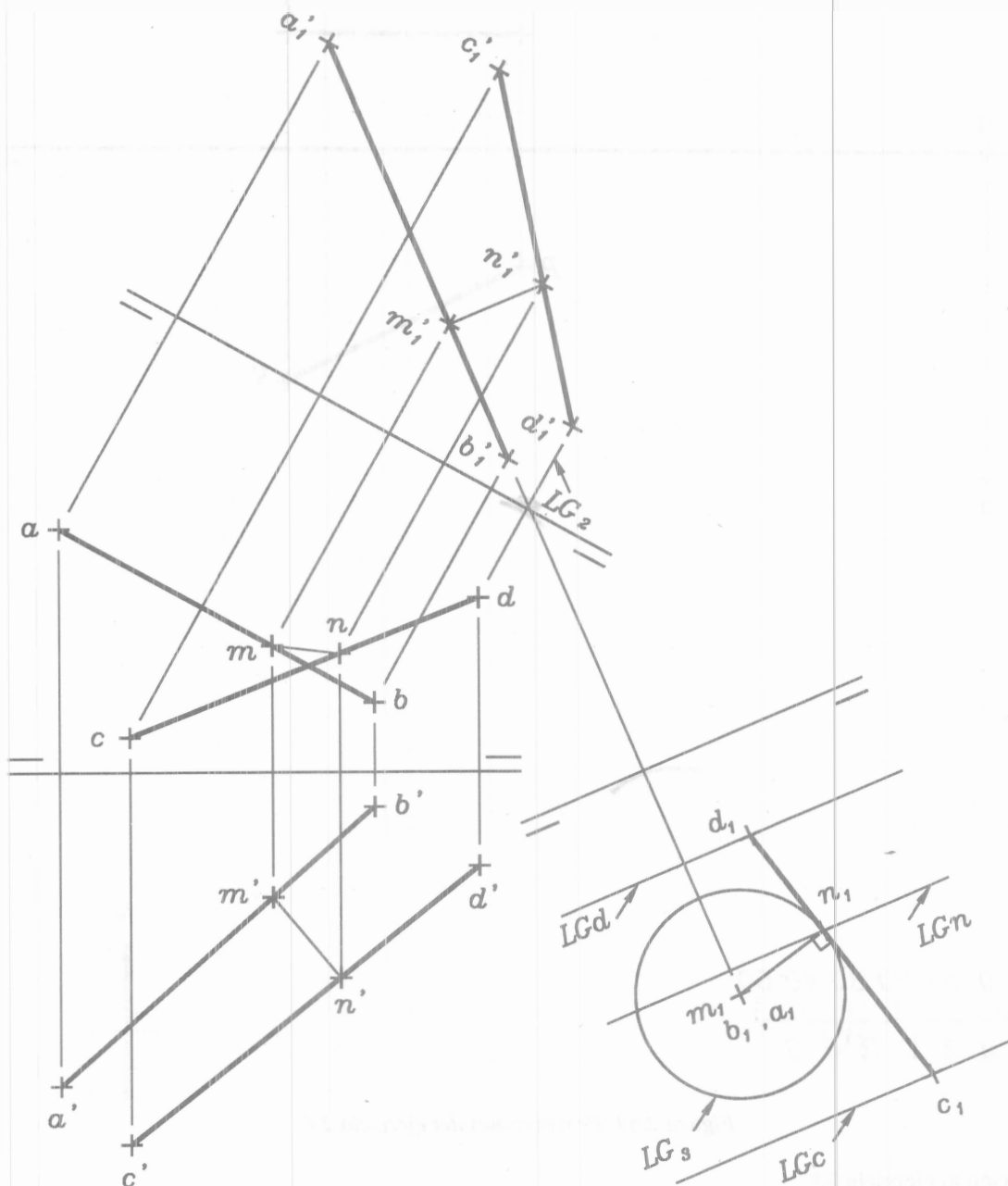


Figura 2.68 Solución al ejercicio 2.7

Ejercicio 2.8. Figura 2.69

Un avión que se dispone a despegar, se encuentra en el punto A, corriendo por la pista con un rumbo N75°E. Si dicho avión al despegar sigue una trayectoria rectilínea con el mismo rumbo y 50% de

pendiente ascendente, y debe pasar a una distancia mínima (no vertical) de 20 m por arriba de la línea de alta tensión representada por el segmento PQ; determinar la longitud real en metros, a partir de A, en donde dicho avión debe despegar.

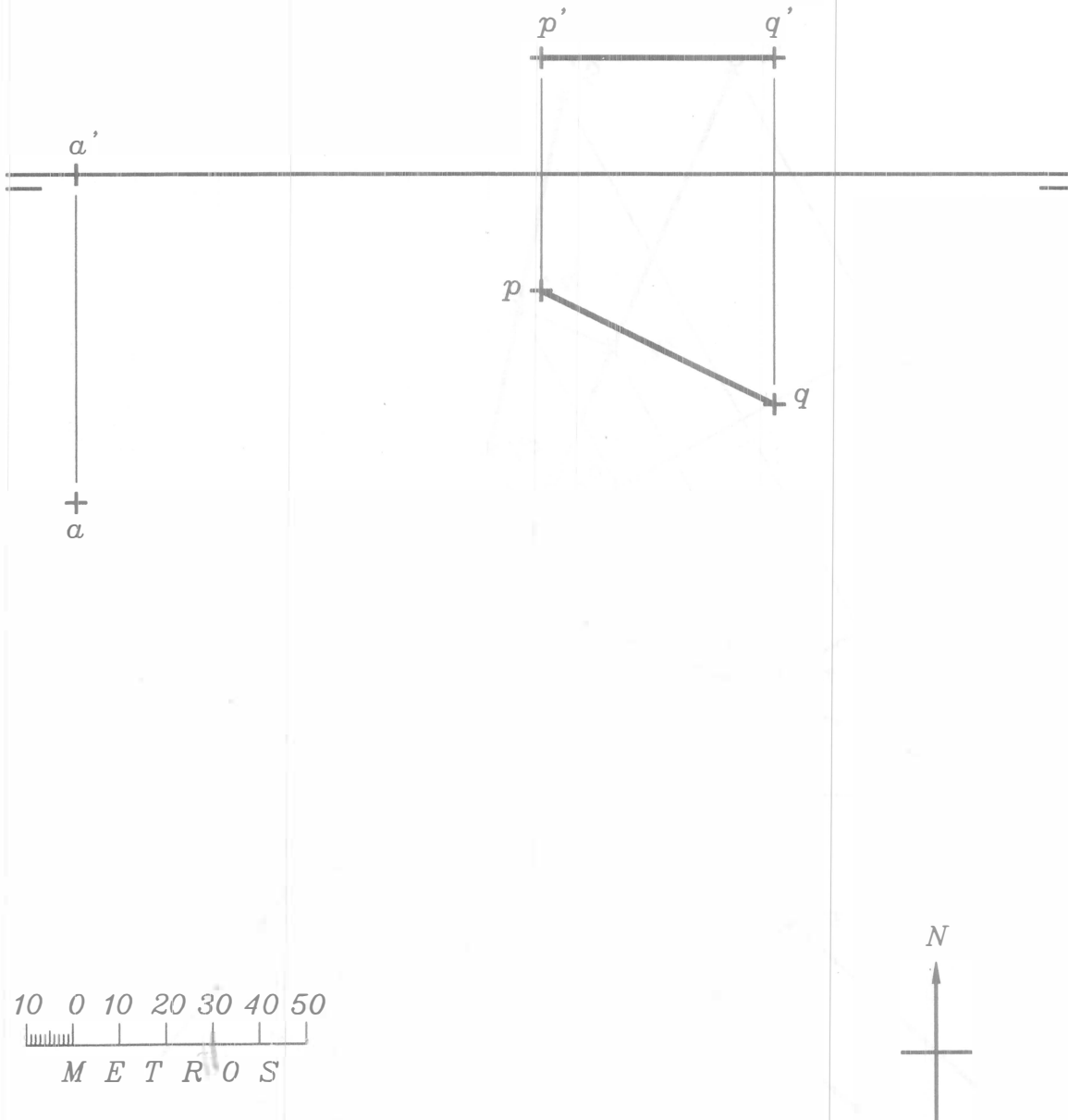


Figura 2.69 Proyecciones del ejercicio 2.8

Solución al ejercicio 2.8

A partir del análisis de proyecciones vemos que el segmento PQ es de tipo horizontal, por lo que solo necesitaremos de un cambio de planos para verlo en una proyección como un punto, ver figura 2.70, y trazamos desde ese punto el lugar geométrico de la

mínima distancia (LG_1 en la figura). Por otro lado trazamos en la proyección original a partir de a el rumbo que nos es dado como dato, y con esta información podemos trazar en el cambio de planos, un segmento auxiliar (XY en la figura) que cumpla

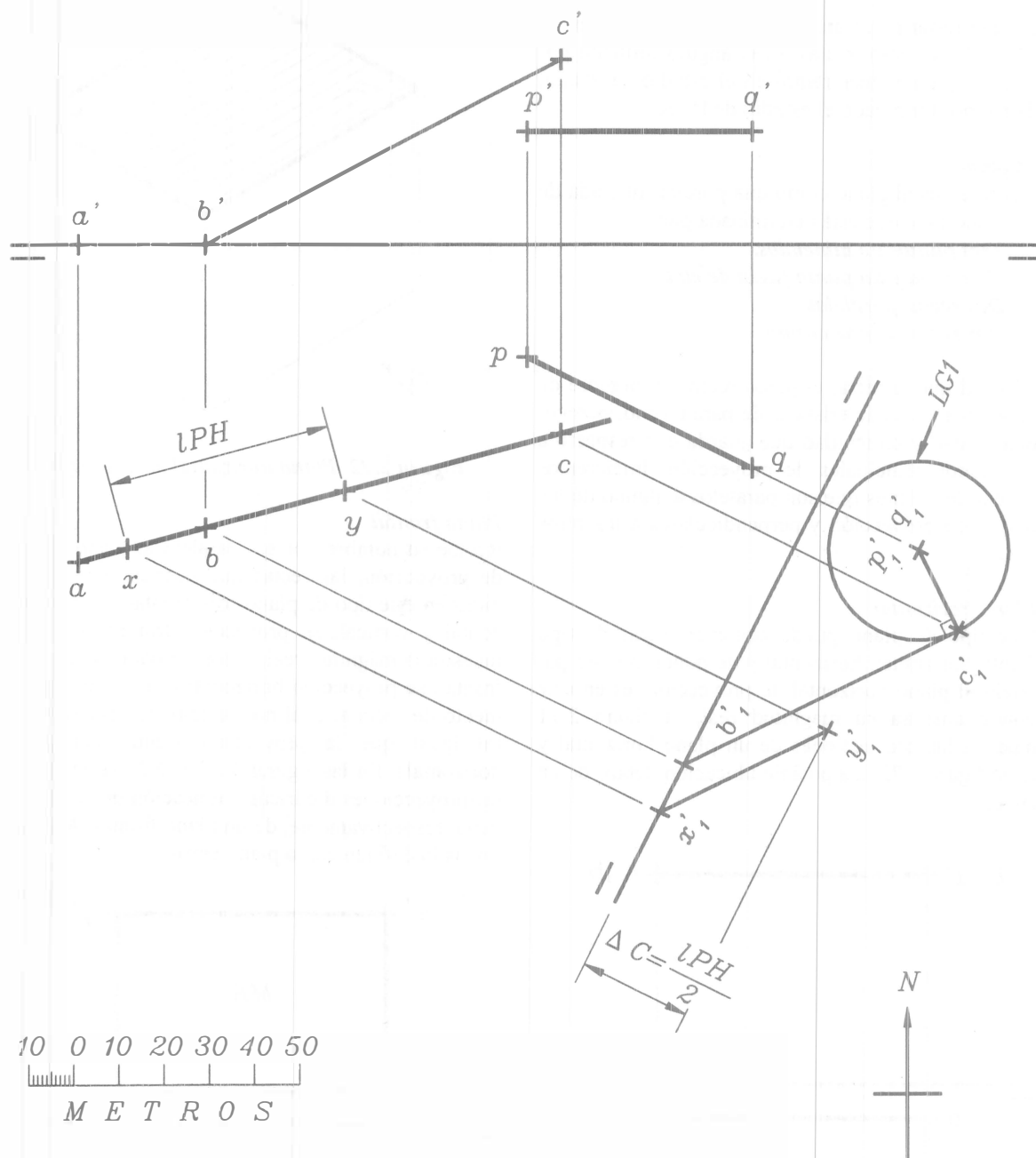


Figura 2.70 Solución del ejercicio 2.8

con las características de pendiente que se solicitan, aplicando el concepto de pendiente en geometría descriptiva. Una vez trazado este segmento auxiliar, sabemos que la mínima distancia tiene que ser perpendicular a él y PQ simultáneamente, por lo que trazamos un segmento perpendicular a XY que pase por PQ (que se ve como punto) y que se interseque con $LG1$, a este punto lo designamos como c_1 , que representa la mínima distancia entre la trayectoria

del avión y la línea de alta tensión. A partir de c_1 trazamos un segmento paralelo a XY , en donde corte a la línea de tierra definimos al punto b_1 , para completar el ejercicio se determinan las proyecciones faltantes y se mide la longitud de AB en la proyección horizontal, que es donde muestra su magnitud real, midiéndola con la escala gráfica proporcionada para dar respuesta a lo que se pide en el ejercicio.

Lo que restaría por analizar con respecto a la posición relativa entre rectas, es el ángulo formado por ellas, y que involucraremos en el estudio del plano, dando por terminado el estudio de la recta.

El plano

Definiremos al plano como una porción limitada de una superficie que está determinada por:

Tres puntos no alineados.

Una recta y un punto fuera de ella.

Dos rectas paralelas.

Dos rectas que se cortan.

Al igual que la recta, el plano recibe su nombre de acuerdo a las características de paralelismo, perpendicularidad y oblicuidad que guarda con respecto a los planos principales de proyección. Iniciaremos así con los planos que son paralelos a alguno de los planos de proyección y perpendiculares a los otros dos.

Plano horizontal

Este tipo de plano puede contener rectas de tipo fronto-horizontal, horizontal y de punta, por ser paralelo al plano horizontal de proyección, es en éste donde muestra su magnitud real, la figura 2.71 muestra las proyecciones de un plano horizontal y en la figura 2.72 una posible ubicación dentro de un cubo.

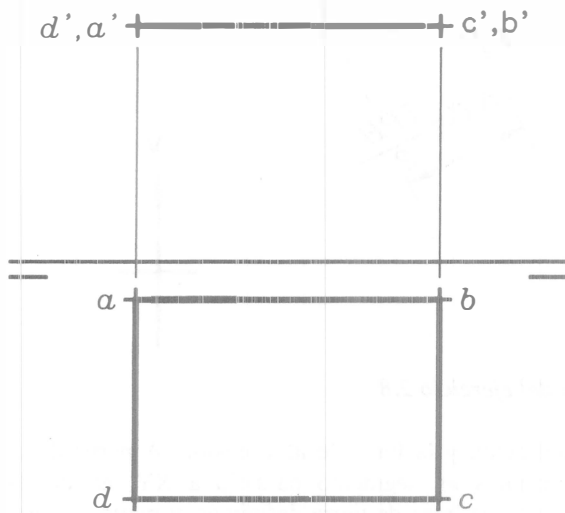


Figura 2.71 Plano horizontal

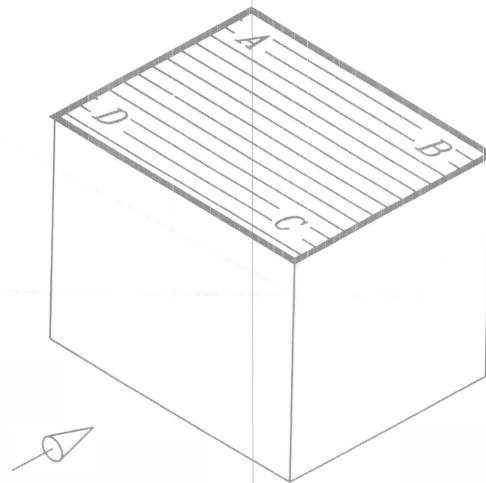


Figura 2.72 Plano horizontal en el espacio

Plano frontal

Recibe su nombre por ser paralelo al plano frontal de proyección, las rectas que pueden estar contenidas en este tipo de plano son: frontal, fronto-horizontal y vertical, su proyección frontal es la que muestra la magnitud real, y por ser paralelo al plano frontal, su proyección horizontal resulta ser un segmento de recta al cual nos referiremos como "filo" (al igual que la proyección frontal del plano horizontal). En las figuras 2.73 y 2.74 se muestran las proyecciones diédricas y ubicación dentro de un cubo, respectivamente, de un plano frontal. Algunos textos lo definen como plano vertical.

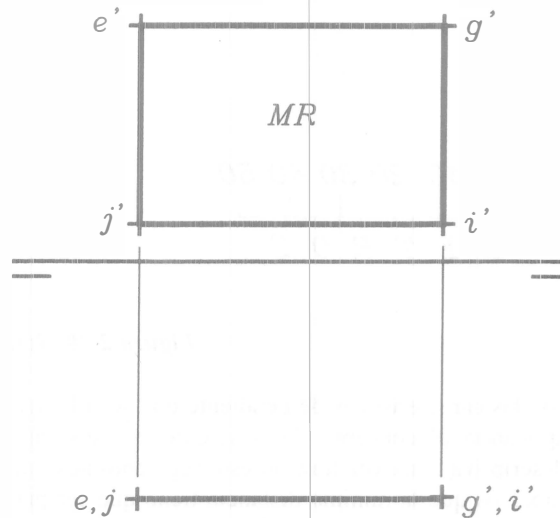


Figura 2.73 Plano frontal

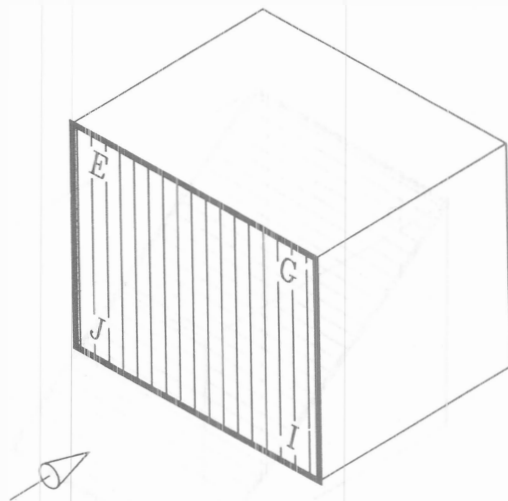


Figura 2.74 Plano frontal en el espacio

Plano de perfil

Visto como filo en sus proyecciones diédricas, dado que es un plano paralelo al plano de proyección de perfil y perpendicular a los otros dos, no muestra su magnitud real; este plano puede contener rectas de tipo de perfil, vertical y de punta, en las figuras 2.75 y 2.76 se ilustran las proyecciones diédricas y ubicación limitando un cubo, de un plano de perfil.



Figura 2.75 Plano de perfil

Ahora analizaremos las proyecciones de los planos que son perpendiculares a algún plano de proyección, pero oblicuos respecto a los otros dos, iniciando con el:

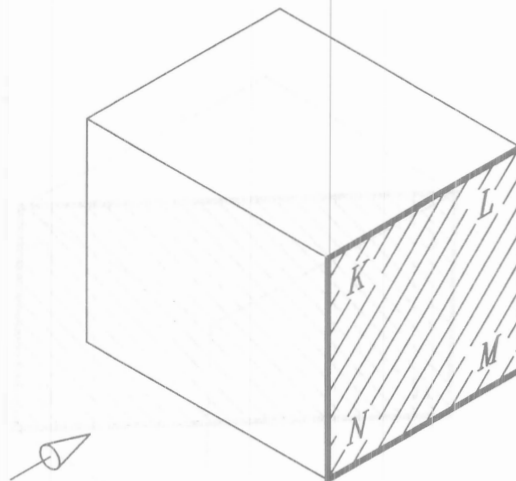


Figura 2.76 Plano de perfil en el espacio

Plano vertical

Forma un ángulo con el plano frontal de proyección, el cual aparece en su magnitud real en la proyección horizontal (α en la figura 2.77). El plano vertical no presenta su magnitud real en proyecciones, únicamente muestra su forma y puede contener rectas de tipo horizontal, vertical y oblicua. En su proyección horizontal aparece como filo. En las figuras 2.77 y 2.78 se presentan sus proyecciones diédricas y una posible ubicación dentro de un cubo.

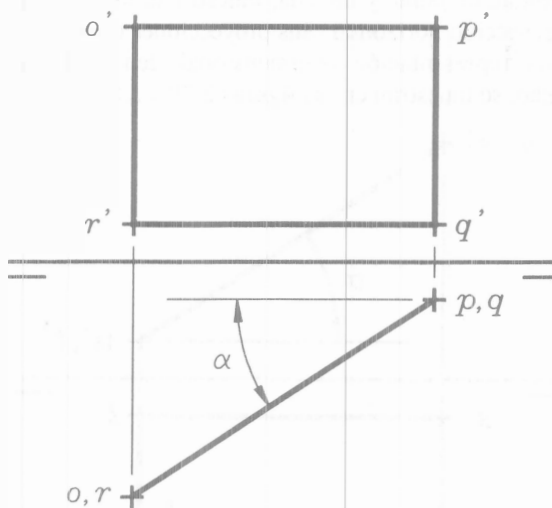


Figura 2.76 Plano vertical

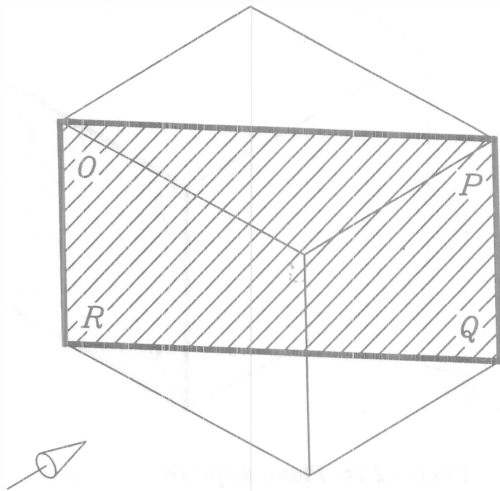


Figura 2.78 Plano vertical en el espacio

Plano de canto

Este tipo de plano es perpendicular al plano frontal de proyección, por lo que en esta proyección aparece visto como filo, y es también en esta proyección donde aparece en magnitud real el ángulo que forma con el plano horizontal de proyección (α en la figura 2.79); los diferentes tipos de rectas que pueden estar contenidas en un plano de canto son: frontal, de punta y oblicua, muestra su forma en la proyección horizontal. Sus proyecciones diédricas y una representación tridimensional dentro de un cubo, se muestran en las figuras 2.79 y 2.80.

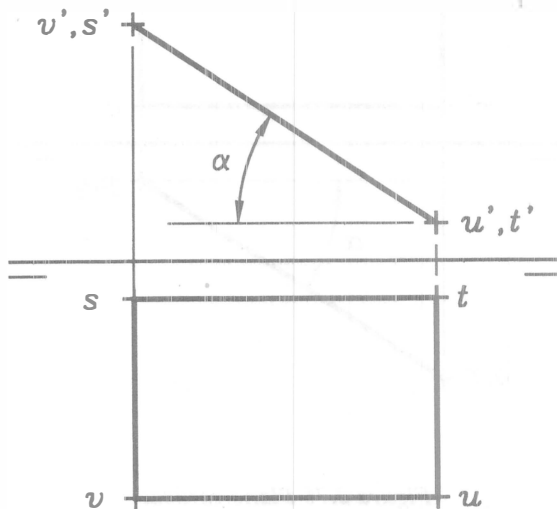


Figura 2.79 Plano de canto

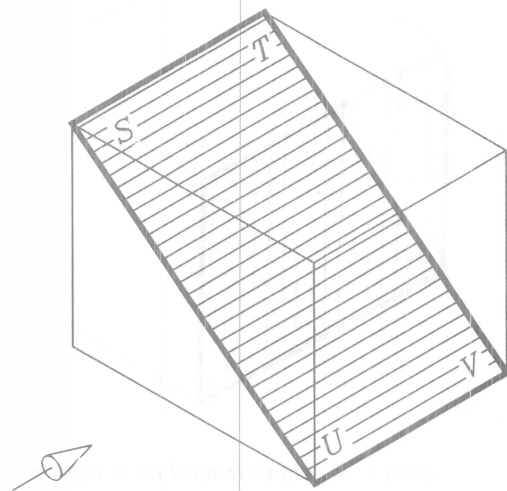


Figura 2.80 Plano de canto en el espacio

Plano paralelo a la línea de tierra

Este plano es perpendicular al plano de proyección de perfil y por tanto en éste aparece visto como filo, muestra su forma en proyecciones diédricas pero no en magnitud real, los ángulos que forma con los planos de proyección se verían en la proyección de perfil, y por supuesto son complementarios. Los tipos de rectas que pueden estar contenidas en un plano paralelo a la línea de tierra son: de perfil, fronto-horizontal y oblicua. Las figuras 2.81 y 2.82 muestran las proyecciones y ubicación dentro de un cubo, respectivamente, de un plano paralelo a la línea de tierra.

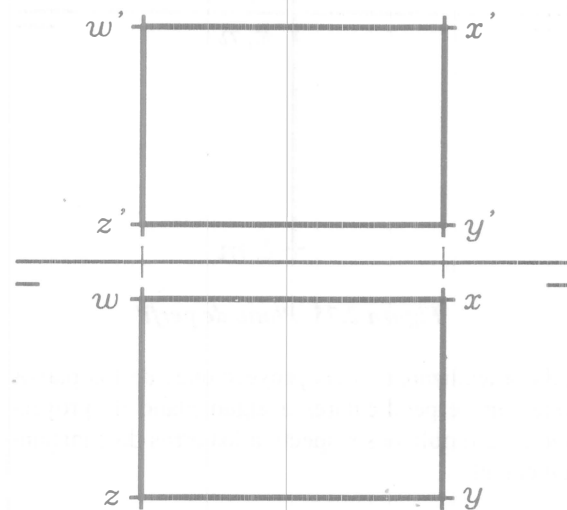


Figura 2.81 Plano paralelo a la línea de tierra

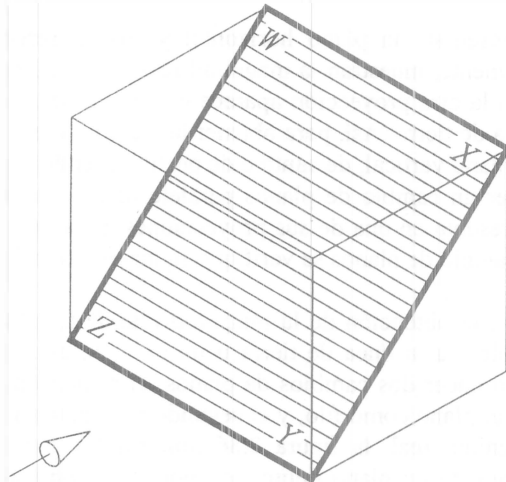


Figura 2.82 Plano paralelo a la línea de tierra en el espacio

Únicamente nos falta por analizar un plano que no sea paralelo o perpendicular a los planos principales de proyección, que es el caso del:

Plano oblicuo

Este tipo de plano es el único que puede contener cuatro diferentes tipos de rectas: horizontal, frontal, de perfil y oblicua, a diferencia de los otros que solo pueden contener tres; no muestra su magnitud real en alguna de sus proyecciones, los ángulos que forma con los planos principales de proyección no pueden ser medidos directamente. Las figuras 2.83 y 2.84 muestran sus proyecciones diédricas y una posible ubicación en un cubo.

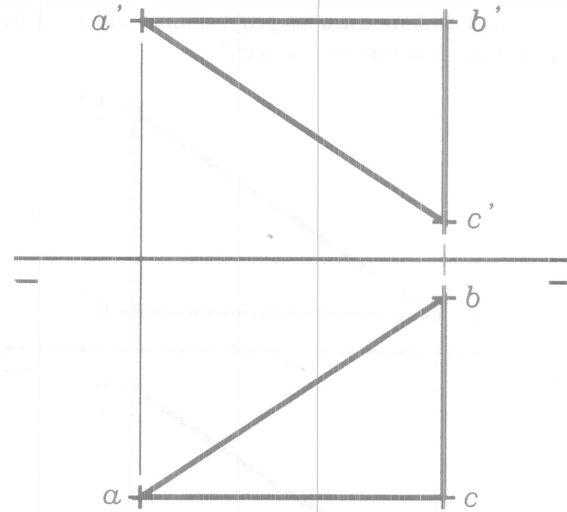


Figura 2.83 Plano oblicuo

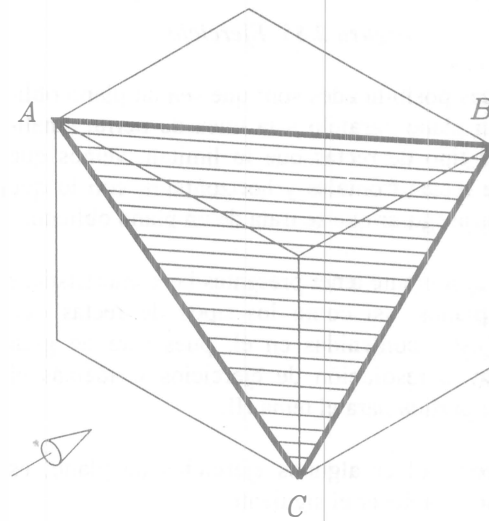


Figura 2.84 Plano oblicuo en el espacio

La tabla 2.4 muestra a los diferentes tipos de planos con los diferentes tipos de rectas que cada uno puede contener.

Tabla 2.4 Tipos de rectas contenidas en los diferentes planos

Plano	Tipo de rectas que puede contener			
Horizontal	Fronto-horizontal	Horizontal	De punta	
Frontal	Fronto-horizontal	Frontal	Vertical	
De perfil	De perfil	De punta	Vertical	
Vertical	Horizontal	Horizontal	Oblicua	
De canto	Frontal	De punta	Oblicua	
Paralelo a LT	Fronto-horizontal	De perfil	Oblicua	
Oblicuo	Horizontal	Frontal	De perfil	Oblicua

La figura 2.85 muestra las proyecciones diédricas de un plano, ¿qué tipo de plano es?

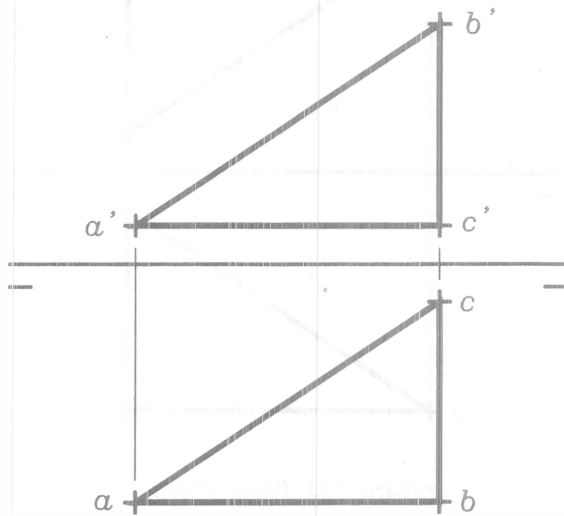


Figura 2.85 Ejercicio

Las únicas posibilidades son: que sea un plano oblicuo o un plano paralelo a la línea de tierra. Analizando el tipo de rectas que lo limitan, vemos que contiene rectas frontales y horizontales, con lo que podemos asegurar que se trata de un plano oblicuo.

Es muy importante tener presentes las características de los planos, así como los tipos de rectas que puedan estar contenidas en él, pues será de gran ayuda en la resolución de ejercicios y además el punto de partida para el tema III.

Antes de resolver algunos ejercicios de plano, es necesario establecer el siguiente:

Teorema del punto contenido en un plano.

Un punto está contenido en un plano, si el punto está contenido a su vez en una recta que está contenida en el plano. Y una recta está contenida en un plano si todos sus puntos están contenidos en el plano.

Para no tener problemas con el anterior teorema, véase el inicio del tema en relación a cómo se determina un plano.

Magnitud real de un plano. Se determina en una proyección en la cual el plano es paralelo a algún plano de proyección y por tanto perpendicular al otro (considerando únicamente proyecciones diédricas), de donde resulta que en una proyección el plano aparece como un filo paralelo a la línea de tierra. Obsérvese como las figuras 2.71 y 2.73, que

representan un plano horizontal y frontal respectivamente, muestran la magnitud real de los planos, y en la otra proyección aparece el filo paralelo a la línea de tierra. Así, para obtener la magnitud real de un plano vertical, de canto o de perfil, se tendría que hacer un cambio de planos paralelo al filo que los representa en una de sus proyecciones, para que en el cambio de planos se verifique su magnitud real.

Para la obtención de la magnitud real de un plano paralelo a la línea de tierra o un oblicuo, es necesario hacer dos cambios de planos, el primero para ver al plano como filo, y el segundo para obtener su magnitud real, la figura 2.86 muestra las proyecciones de un plano delimitado por rectas oblicuas, se desea conocer el ángulo que forma dicho plano con el plano horizontal de proyección así como su área.

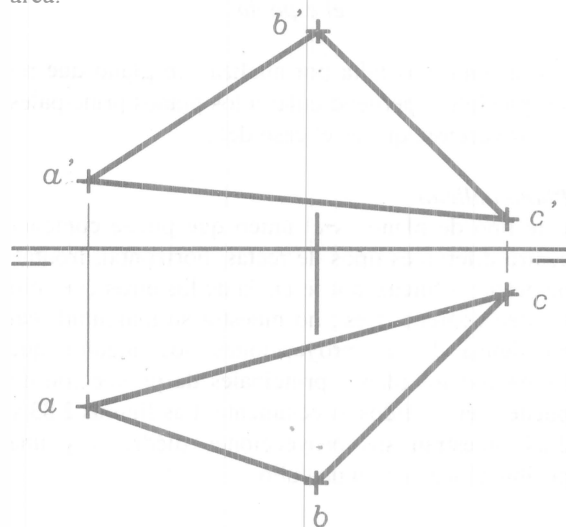


Figura 2.86 Figura plana

Debido a que las rectas que limitan al plano son todas oblicuas, no podemos, con base en un análisis de tipo de rectas contenidas en un plano, asegurar a priori de que tipo de plano se trata, por lo que hacemos contener una recta en el plano con determinadas características, y con base en ésta determinar el tipo de plano que es. El tipo de recta que haremos contener será una recta con cotas constantes, y por facilidad de construcción, uno de sus extremos será uno de los vértices del plano, en este caso a' , y el otro extremo lo determinaremos en la intersección del segmento de cotas constantes y la recta BC que limita al plano, a este punto lo definiremos como m' , (véase figura 2.87), la proyección horizontal del punto M , para que esté contenido en el plano, necesariamente deberá caer en la proyección horizontal de BC , (aplicación del

teorema 2.9) y ahora si analizamos a esta recta, vemos que es una recta de tipo horizontal y a partir de ahí deducimos que al plano definido por los puntos ABC es un plano oblicuo, dado que un plano

paralelo a la línea de tierra no contiene rectas horizontales, para que fuera un plano paralelo a la línea de tierra el segmento auxiliar AM debería ser fronto-horizontal.

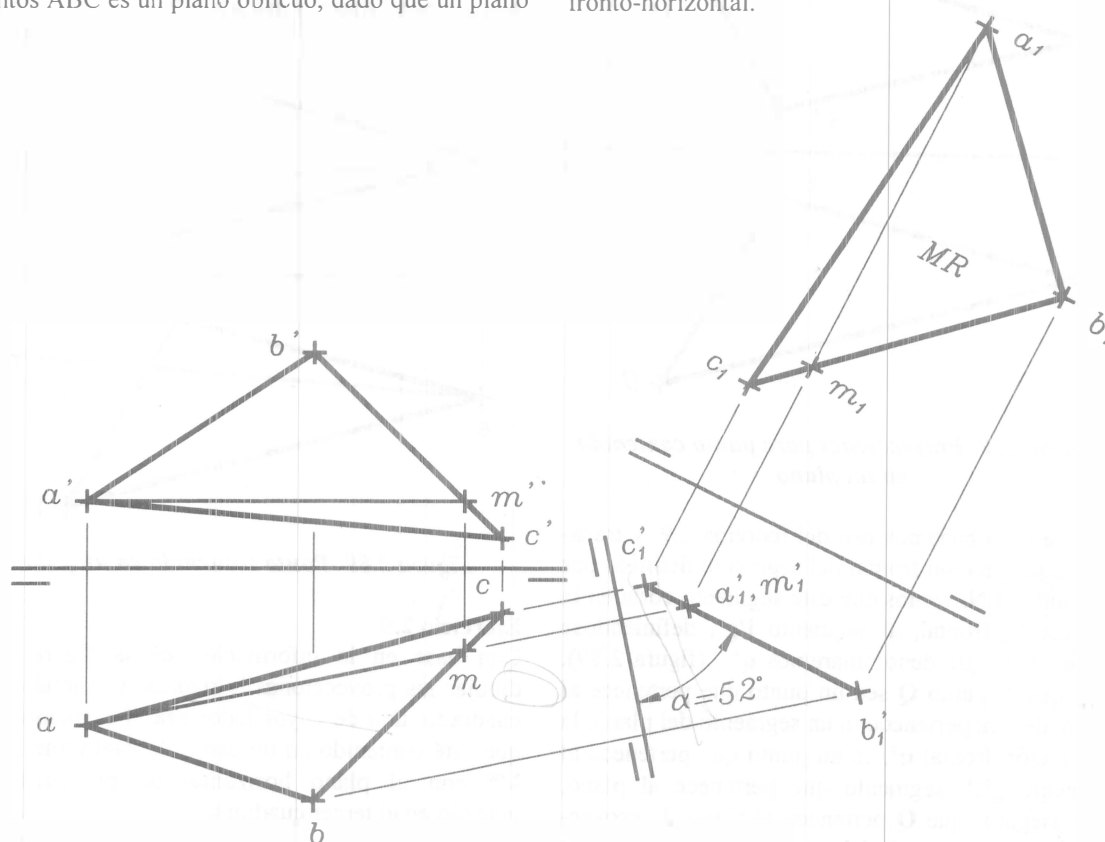


Figura 2.87 Magnitud real de la figura plana mostrada en la figura 2.86

Una vez con la recta horizontal contenida en el plano, hacemos un cambio de planos perpendicular a AM en magnitud real para ver al plano como filo (figura 2.87), pues en el momento en que a una recta la veamos como punto, al plano lo veremos como filo, en este cambio de planos ya podemos determinar el ángulo que forma el plano ABC con el plano horizontal de proyección, pues no considerando la proyección frontal original, vemos que lo hemos "convertido" en un plano de canto.

Para la obtención de la magnitud real, hacemos un segundo cambio de planos paralelo al filo, para convertirlo en un plano horizontal y determinar en esta nueva proyección el área del plano ABC con lo cual queda resuelto el ejercicio.

El tipo de recta auxiliar para determinar la magnitud real del plano, en este caso fue horizontal, pero bien

pudo haberse hecho contener una frontal, pero el ángulo obtenido hubiera sido con el plano frontal de proyección y no con el horizontal, que era el que se pedía. Se recomienda tener especial cuidado con el tipo de recta auxiliar a emplear, y su elección dependerá de las características del ejercicio que se trate junto con un análisis geométrico del mismo, como se verá en los ejercicios 2.9 y 2.10.

Antes de entrar de lleno a la resolución de los ejercicios que tengan que ver con el plano, veremos el concepto de **punto contenido en un plano**.

La figura 2.88 muestra las proyecciones de un plano definido por los puntos EGI, y la proyección frontal del punto N, se pide determinar la proyección horizontal del punto N, tal que esté contenido en la figura plana que definen los puntos E, G e I.

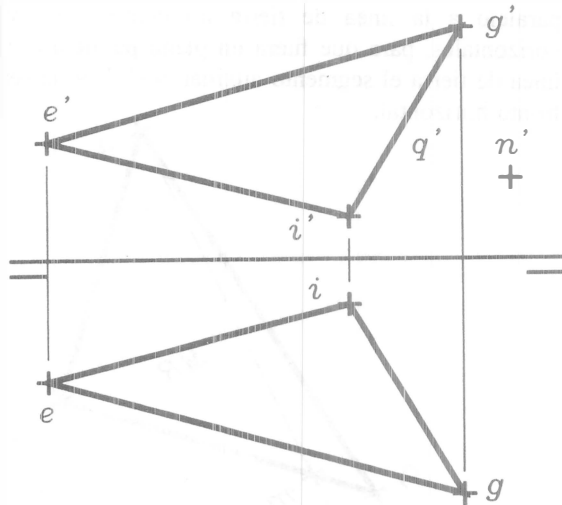


Figura 2.88 Proyecciones para punto contenido en un plano

En este caso hacemos uso del teorema 2.9, y trazamos la proyección frontal del segmento definido por los puntos EN , vemos que este segmento corta en la proyección frontal, al segmento $i'g'$, definiéndose un punto al que denominaremos q' . (figura 2.89). Para que el punto Q sea un punto que pertenece al plano, deberá pertenecer a un segmento del plano, la proyección frontal q' , es un punto que pertenece al segmento $g'i'$, segmento que pertenece al plano, para asegurar que Q pertenece al plano, la proyección horizontal de Q deberá estar contenida en la proyección horizontal ig . Con este trazo aseguramos que el punto Q pertenece al plano, ahora uni-

mos las proyecciones horizontales eq , y en donde se interseque con el lugar geométrico de la proyección horizontal de N (LG_N en la figura 2.89) definimos la proyección horizontal del punto N .

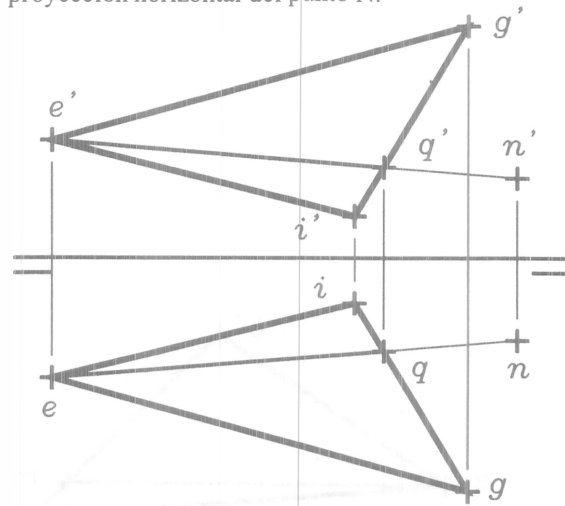


Figura 2.89 Punto contenido en un plano

Ejercicio 2.9

Con base en la información de la figura 2.90, dibujar las proyecciones horizontal y frontal de un cuadrado, uno de cuyos lados sea el segmento CD , que esté contenido en un plano de canto que forme 45° con el plano horizontal de proyección, y ubicado en el tercer cuadrante.

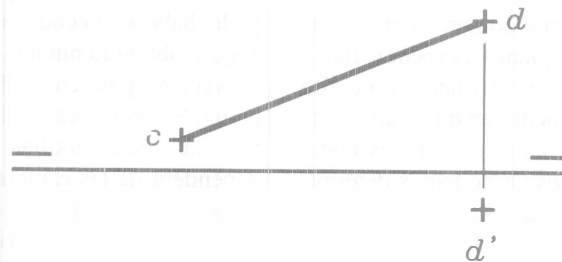


Figura 2.90 Proyecciones para el ejercicio 2.9

Solución al ejercicio 2.9

Sabemos que un plano de canto se ve como filo en la proyección frontal, y que en esta proyección se ve el ángulo que forma con el plano horizontal de proyección, 45° en este caso, verifíquese que estamos en tercer cuadrante, trazamos ese filo, que será el lugar geométrico de todos los puntos que estén contenidos en el plano (LG_p en la figura 2.91), la

proyección frontal del punto C se determina en la intersección del filo, y el lugar geométrico para la proyección frontal del punto C (LG_C en la figura).

Una vez conocido el filo del plano, hacemos un cambio de planos, paralelo a este filo, para ver al plano en magnitud real, se determina sobre éste la

proyección del segmento c_1d_1 , y a partir de este segmento que está en magnitud real y que pertenece al plano buscado, dibujamos el cuadrado solicitado.

Identificamos los vértices faltantes como **A** y **B**, finalizando el ejercicio con la determinación de las proyecciones faltantes de los puntos **A** y **B** en las proyecciones originales.

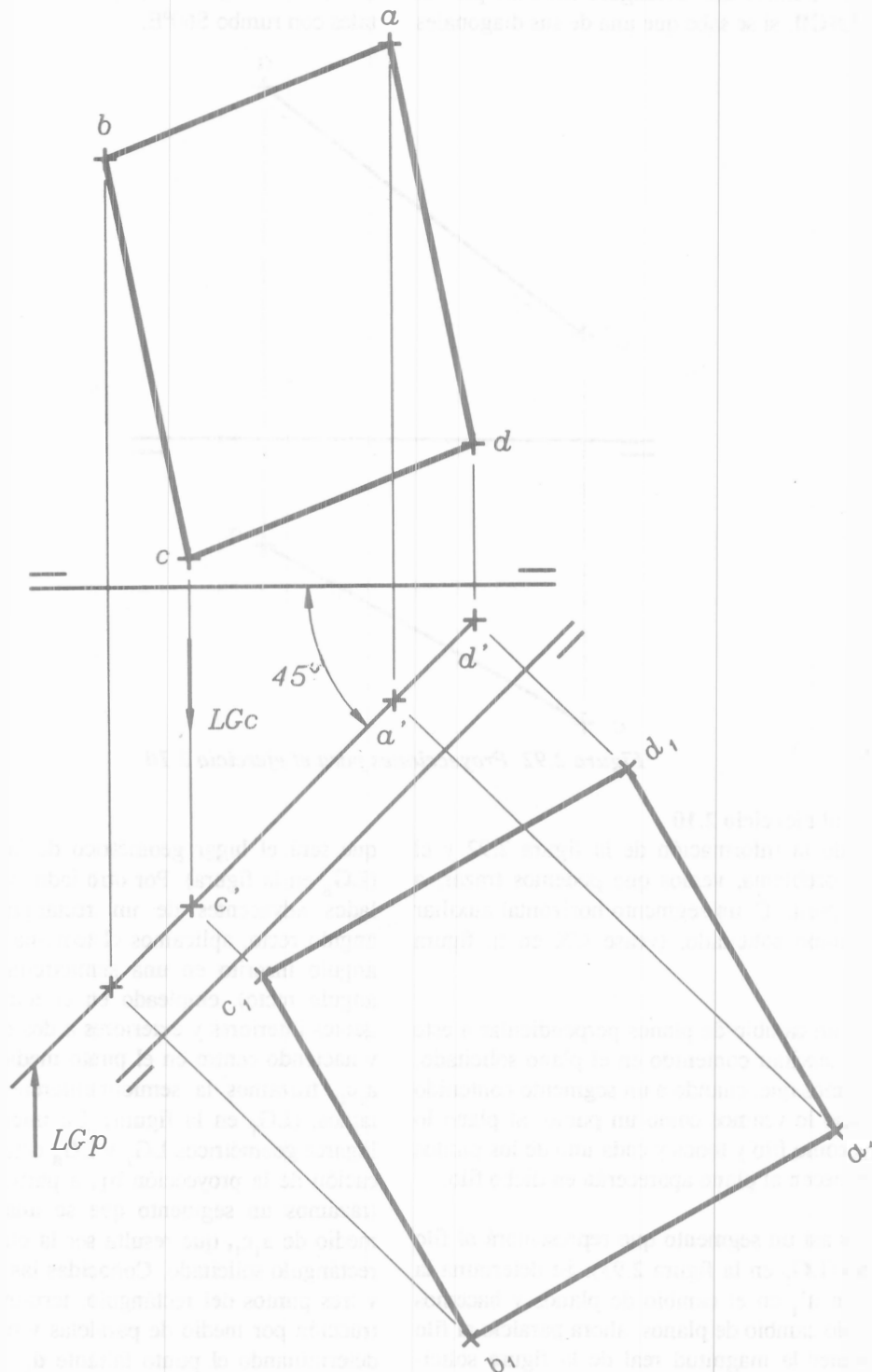


Figura 2.91 Solución del ejercicio 2.9

Ejercicio 2.10

Con base en la figura 2.92, determinar las proyecciones faltantes del rectángulo definido por los puntos **ABCD**, si se sabe que una de sus diagonales

es el segmento **AC**, que la magnitud real del segmento **AB** es de 40 mm y contiene rectas horizontales con rumbo $S60^\circ E$.

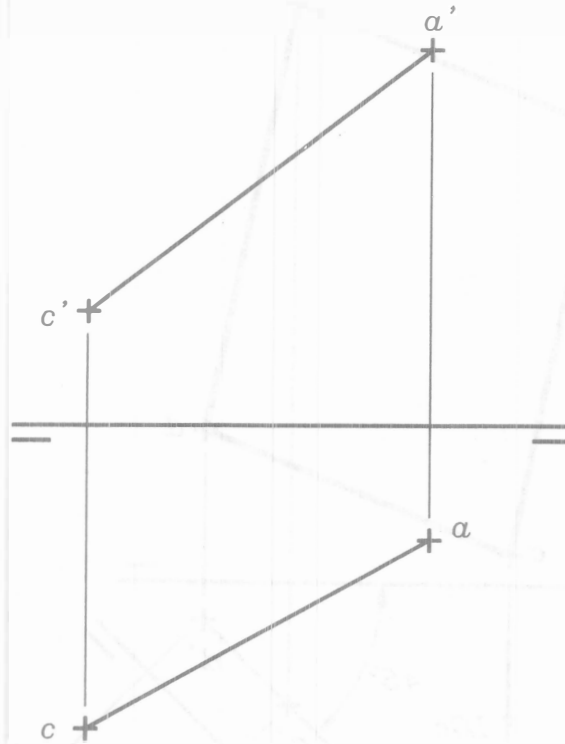


Figura 2.92 Proyecciones para el ejercicio 2.10

Solución al ejercicio 2.10

Analizando la información de la figura 2.92 y el texto del problema, vemos que podemos trazar, a partir del punto **C**, un segmento horizontal auxiliar con el rumbo solicitado, (véase **CX** en la figura 2.93).

Hacemos un cambio de planos perpendicular a este segmento auxiliar contenido en el plano solicitado, pues sabemos que, cuando a un segmento contenido en el plano lo veamos como un punto, al plano lo veremos como filo y todos y cada uno de los puntos que pertenecen al plano aparecerán en dicho filo.

Trazamos así un segmento que representará al filo del plano (LG_P en la figura 2.93). Se determina la proyección a'_1 en el cambio de planos y hacemos un segundo cambio de planos, ahora paralelo al filo para obtener la magnitud real de la figura solicitada, se obtiene la proyección a_1c_1 , y haciendo centro en a_1 trazamos un arco de 40 mm de radio

que será el lugar geométrico de la proyección b_1 (LG_B en la figura). Por otro lado, sabemos que los lados adyacentes de un rectángulo forman un ángulo recto, aplicamos el teorema de Tales (todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto), empleado en el tema II para tangentes interiores y exteriores a dos circunferencias, y haciendo centro en el punto medio del segmento a_1c_1 , trazamos la semicircunferencia que necesitamos, (LG_T en la figura). La intersección de los lugares geométricos LG_T y LG_B determinan la ubicación de la proyección b_1 , a partir de este punto trazamos un segmento que se una con el punto medio de a_1c_1 , que resulta ser la otra diagonal del rectángulo solicitado. Conocidas las dos diagonales y tres puntos del rectángulo, terminamos su construcción por medio de paralelas y perpendiculares, determinando el punto faltante d_1 . Finalizamos el ejercicio regresando las proyecciones del rectángulo en magnitud real a las proyecciones originales.

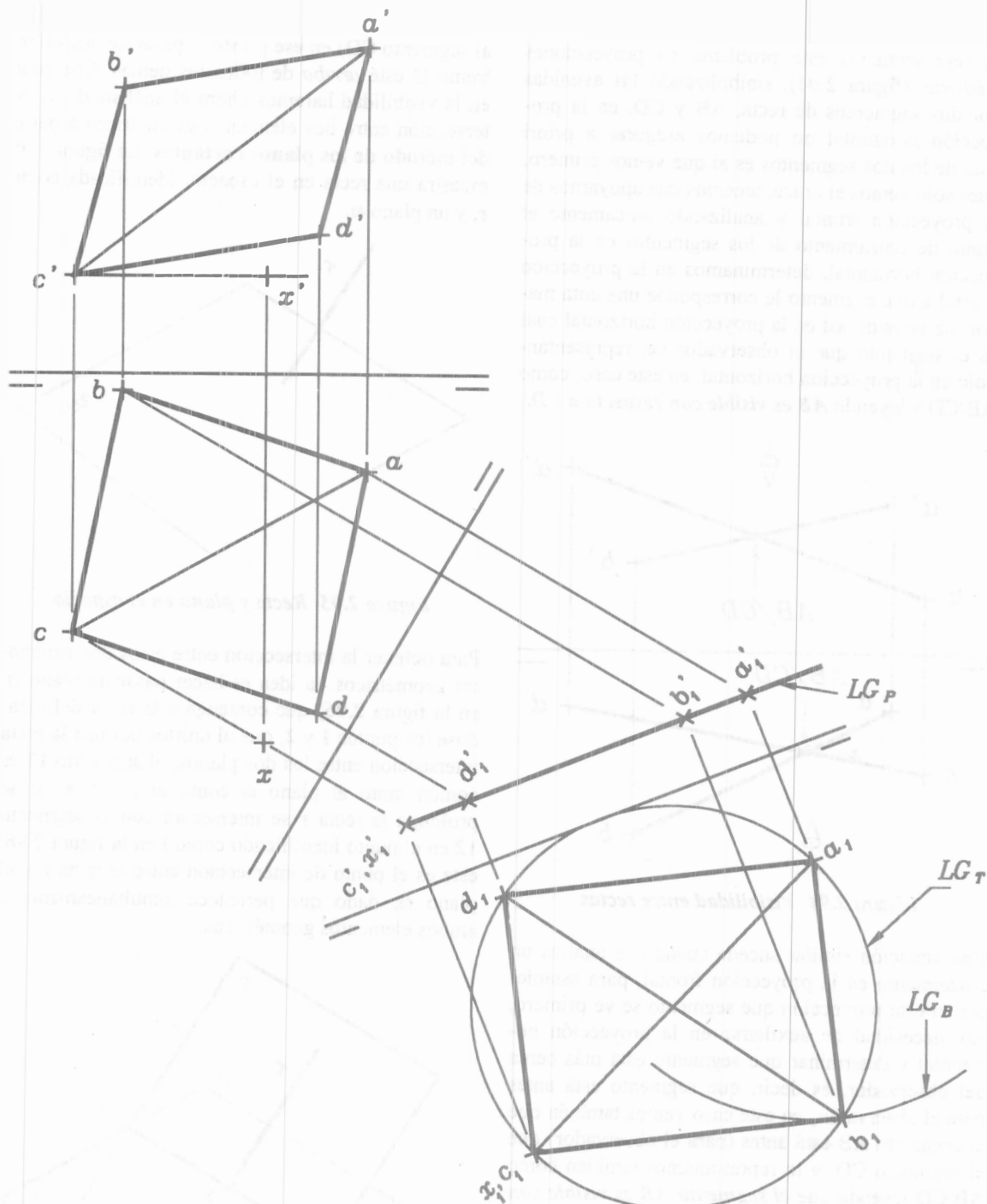


Figura 2.93 Solución del ejercicio 2.10

Se aprecia en este último ejercicio, que puede darse una gran variedad de conceptos en un mismo problema, es conveniente repasarlos y sobre todo tener una idea clara de lo que se está haciendo, para no *mecanizarse* en la resolución de los problemas que se nos presentan en la geometría descriptiva.

Intersección y visibilidad

Supóngase que vamos en un helicóptero y al ver hacia abajo vemos dos avenidas de gran circulación vehicular, si existe entre ellas un puente en lugar de un semáforo, la avenida que veremos primero desde el helicóptero en el cruce de ambas, será aquella que esté más cercana al observador, es decir, la que tenga mayor cota.

Si representamos este problema en proyecciones diédricas (figura 2.94), simbolizando las avenidas por dos segmentos de recta, AB y CD, en la proyección horizontal no podemos asegurar a priori cual de los dos segmentos es al que vemos primero, pues solo vemos el cruce, tenemos que apoyarnos de la proyección frontal y analizando únicamente el punto de cruzamiento de los segmentos en la proyección horizontal, determinamos en la proyección frontal a que segmento le corresponde una cota mayor, obteniendo así en la proyección horizontal cual es el segmento que el observador ve, representándolo en la proyección horizontal, en este caso, como AB/CD y leyendo *AB es visible con respecto a CD*.

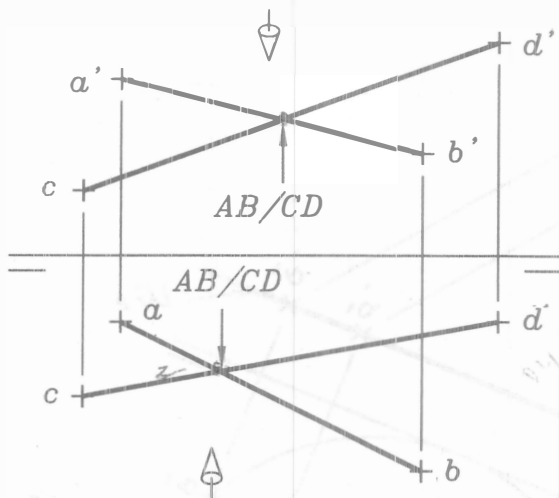


Figura 2.94 Visibilidad entre rectas

Una situación similar sucede cuando se analiza un cruzamiento en la proyección frontal, para establecer en esta proyección que segmento se ve primero, hay necesidad de auxiliarse en la proyección horizontal y determinar que segmento está más cerca del observador, es decir, que segmento está antes para el observador, en este caso vemos también que el segmento AB está antes (para el observador) que el segmento CD, y lo representamos también como AB/CD leyendo que *el segmento AB es visible con respecto al segmento CD*.

Vemos así que para el análisis de visibilidad, siempre será visible lo que esté *arriba* y lo que esté *antes*. Cuando se comparan dos elementos geométricos, vale la pena resaltar que el análisis se hace puntual, es decir, en un punto específico, a pesar de que uno de los extremos que limitan a un elemento geométrico esté por encima de todos los demás, por ejemplo, en la figura 2.94, para la proyección horizontal AB/CD, (el segmento AB es visible respecto

al segmento CD) **en ese punto**, a pesar de que el extremo D esté *arriba* de todos los demás. Con base en la visibilidad haremos ahora el análisis de la intersección entre dos elementos geométricos a partir del **método de los planos cortantes**. La figura 2.95 muestra una recta en el espacio, identificada como r , y un plano ω .

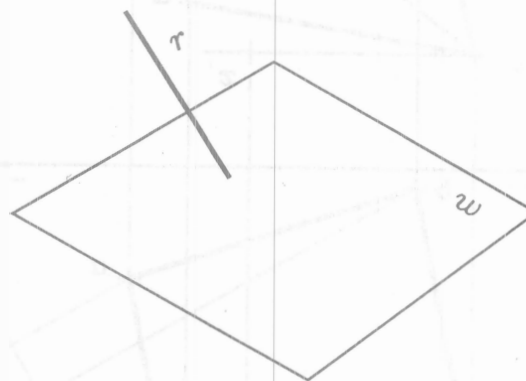


Figura 2.95 Recta y plano en el espacio

Para obtener la intersección entre estos dos elementos geométricos, la idea es hacer pasar un plano (π en la figura 2.96) que contenga a la recta definiéndose los puntos 1 y 2, que al unirlos definen la recta intersección entre los dos planos; el segmento 12 es común tanto al plano ω como al plano π , si se prolonga la recta r se intersectará con el segmento 12 en el punto identificado como i en la figura 2.96, éste es el punto de intersección entre la recta r y el plano ω , dado que pertenece simultáneamente a ambos elementos geométricos.

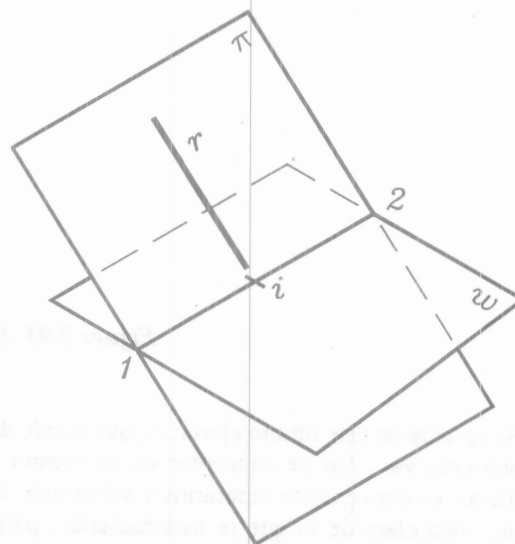


Figura 2.96 Ilustración tridimensional del método de planos cortantes

Haciendo el mismo análisis de intersección en proyecciones diédricas, en la figura 2.97 tenemos las proyecciones de un plano y una recta definidos por los puntos ABC y MN respectivamente.

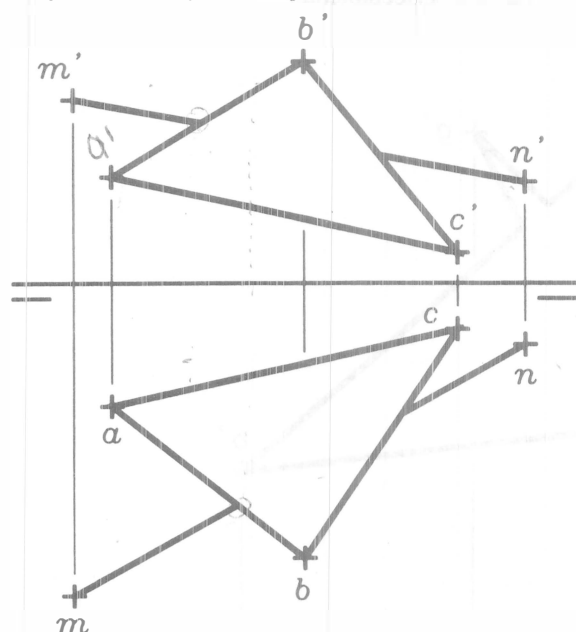


Figura 2.97 Proyecciones para determinar la intersección entre recta y plano

Aplicando el método de planos cortantes, hacemos pasar un plano que contenga a la recta, por facilidad conviene seleccionar siempre un plano de canto o uno vertical, dado que en una de sus proyecciones aparecen vistos como filo, en este caso seleccionamos uno de canto (π en la figura 2.98) el cual corta, en la proyección frontal, al plano ABC en los puntos señalados como 1' y 2' en dicha proyección, se determina la proyección horizontal de los puntos 1 y 2 y al unirlos en esta proyección horizontal, cortan al segmento MN en el punto i, el cual como mencionamos anteriormente, es el punto de intersección, sólo resta encontrar la proyección frontal i' y hacer el análisis de visibilidad.

Para la visibilidad, una vez conocido el punto de intersección, basta con analizar un cruzamiento entre la recta y uno de los segmentos que pertenecen al plano, en este caso analizaremos en la proyección frontal el cruzamiento de los segmentos $m'n'$ con $b'c'$, vemos que el segmento BC está antes que el segmento MN por lo que en la proyección frontal marcamos en el cruce que BC/MN, luego entonces el segmento MN estará oculto por el plano hasta el punto i', que es la intersección y a partir de ahí pasa a ser visible. Procedemos de manera análoga en la proyección horizontal, es decir, hacemos al análisis

de visibilidad entre mn y bc y verificamos que AB/MN, esto quiere decir que el segmento es ocultado por el plano hasta el punto i, y a partir de ahí es visible.

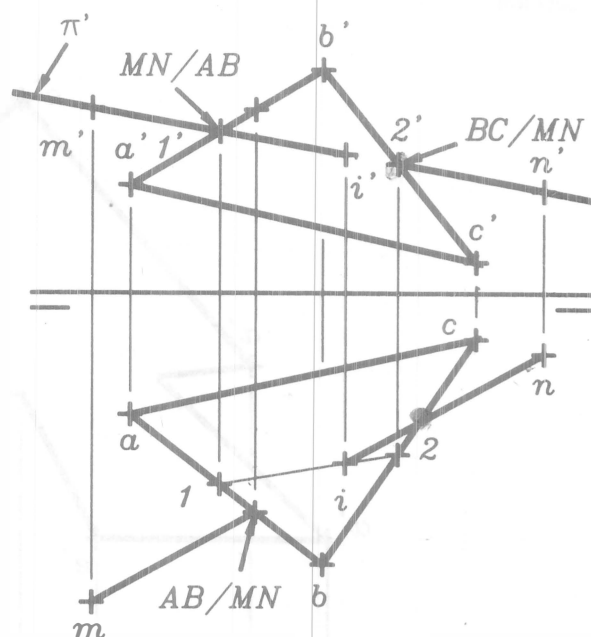


Figura 2.98 Análisis de intersección y visibilidad entre las figuras mostradas en la figura 2.96

Es conveniente analizar primero la visibilidad en una proyección, pues si resulta que el segmento en ambos casos es visible u oculto, respecto a los segmentos que limitan al plano, en ese caso no existe intersección y no tiene caso hacer pasar el plano cortante. Verifíquese que si se hace el análisis de visibilidad (figura 2.98) en la proyección frontal entre $a'b'$ y $m'n'$, necesariamente tiene que resultar que MN/AB, es decir, hay alternancia de visibilidades, pues por un lado MN/AB y por otro BC/MN, dicho de otra forma, el segmento MN primero es visible y luego es oculto, de otra forma no habría intersección.

En el caso de tener dos figuras planas, se hace primero un análisis de visibilidad en algunas de las proyecciones, y sólo en aquel caso en donde existan alternancia de visibilidades, se aplica el método del plano cortante. La figura 2.99 muestra las proyecciones de dos figuras planas definidas por los puntos ABC y DEG. Hacemos el análisis de visibilidad en todos y cada uno de los cruzamientos de la proyección frontal y de ahí observamos que existe alternancia de visibilidades en los segmentos EG y DG, pues resulta que primero EG/CB y poste-

riormente AB/EG lo que quiere decir que existe una intersección en EG , para el segmento DG resulta que AB/DG y luego DG/CB (véase figura 2.100), concluimos que en DG está el otro punto de intersección.

La intersección entre dos figuras planas es una recta, por lo que si conocemos dos de los puntos por donde pasa, podemos determinar la recta de intersección perfectamente.

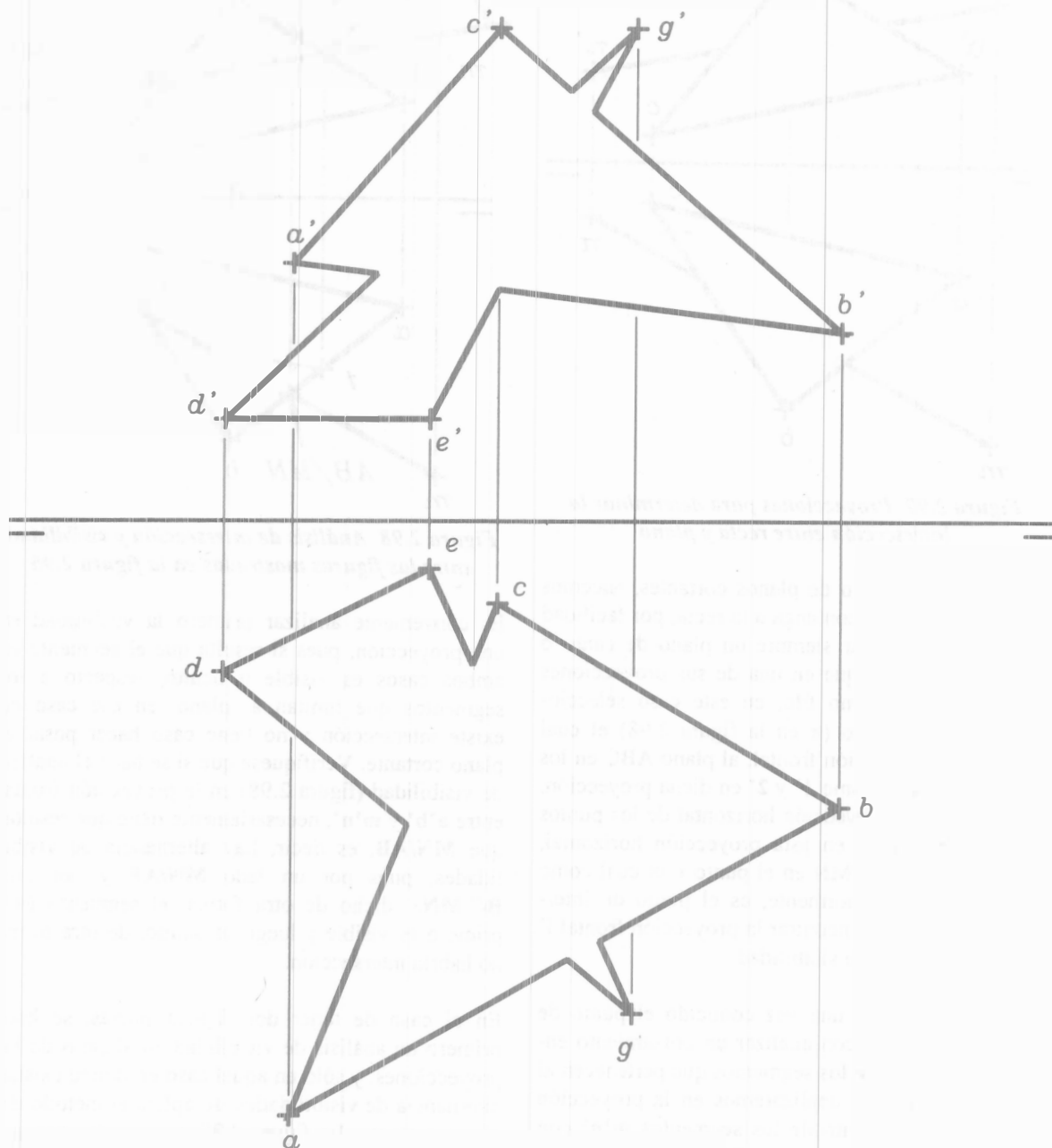


Figura 2.99 Figuras planas para determinar su intersección y visibilidad

Aplicamos el método de los planos cortantes, y hacemos pasar dos planos de canto, uno que contenga al segmento EG (π en la figura 2.100), y otro que contenga a DG (ω en la figura). Con el plano π de-

finimos a los puntos $1'$ en CB y $2'$ en AB , determinamos sus respectivas proyecciones horizontales, y en donde se corten las proyecciones horizontales de 12 con EG determinamos el punto i , que será

nuestro primer punto de intersección de las dos figuras planas, definiendo posteriormente su proyección frontal i' , se hace lo propio para el segmento DG , se hace pasar un plano de canto que lo contenga y definimos los puntos $3'4'$, obtenemos sus respectivas proyecciones horizontales, que al unir las definirán

al punto j sobre DG , que será el segundo punto de intersección buscado, obtenemos su proyección frontal j' y al unir las proyecciones horizontal y frontal de IJ hemos encontrado la intersección de las figuras planas.

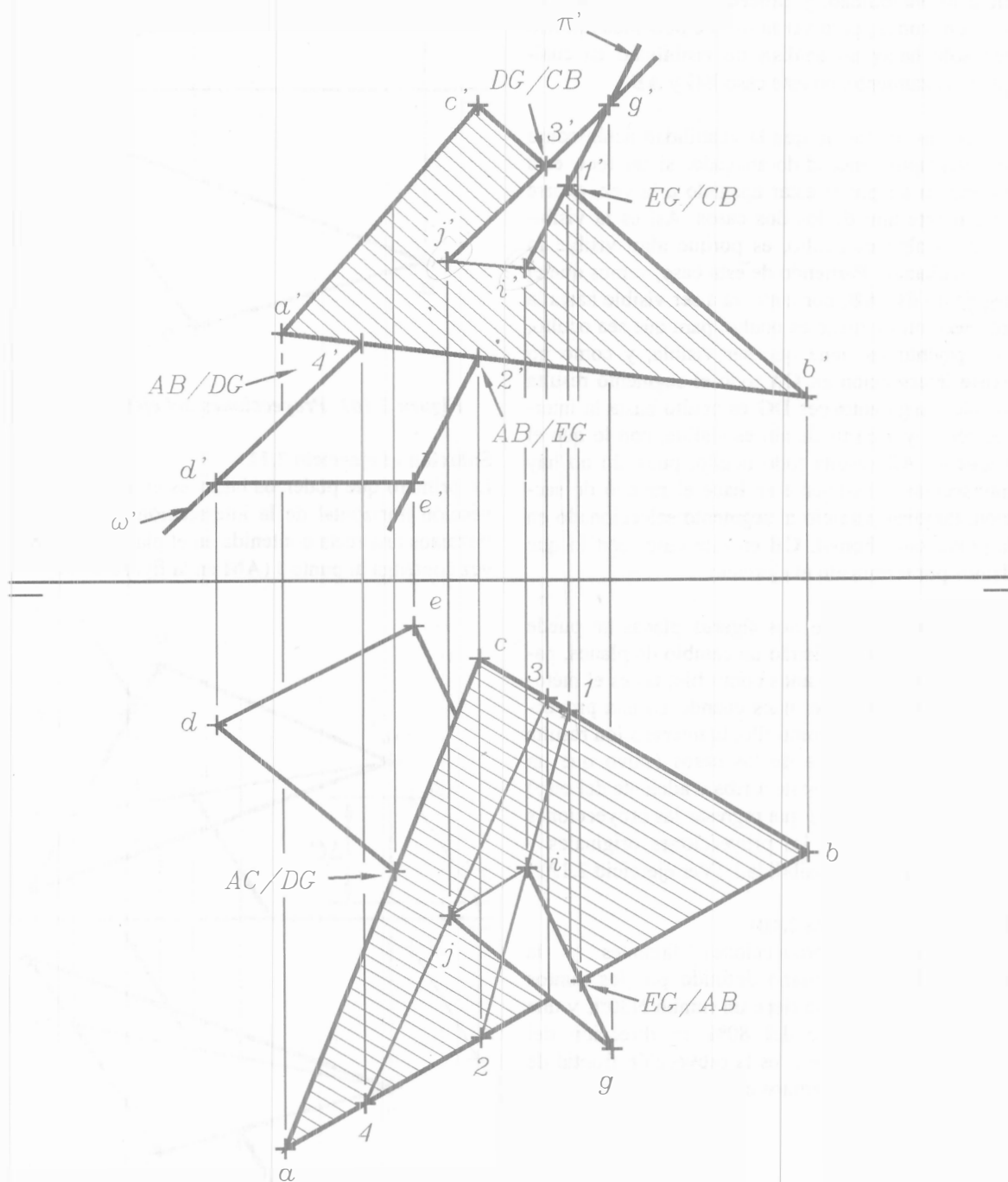


Figura 2.100 Intersección de las figuras planas mostradas en la figura 2.99

Falta hacer el análisis de visibilidad, pero resulta que en la proyección frontal ya lo tenemos, así que únicamente completamos las figuras, se recomienda hacer un rayado de sección, preferentemente paralelo a algún lado de las figuras (paralelo a **CB** en este caso), para resaltar la intersección. Para la proyección horizontal se podría hacer un análisis completo de visibilidad, y proceder como con la proyección frontal, pero veremos que podemos hacerlo con sólo hacer un análisis de visibilidad en cualquier cruzamiento, en este caso **EG** y **AB**.

Partiremos del hecho que la visibilidad actúa como un interruptor encendido-apagado, si un foco está encendido no puede estar apagado a la vez, ocurre únicamente uno de los dos casos. Así es la visibilidad, si algo es oculto, es porque algo visible lo está ocultando. Partiendo de esta base, vemos que el segmento **EG/AB**, por tanto va a ser visible hasta la intersección **i** y luego es oculto, para que sea oculto, el segmento **ca** tiene que ser visible, y como no existe intersección en **CA** todo el segmento resulta visible, luego entonces **DG** es oculto hasta la intersección **j**, y a partir de ahí es visible, con lo que el segmento **AB** resulta todo oculto, pues ahí no hay intersección. Finalmente se hace el rayado de sección, también paralelo al segmento seleccionado en la proyección frontal, **CB** en este caso, con lo que damos por terminado el ejercicio.

La intersección entre dos figuras planas se puede resolver también haciendo un cambio de planos, para ver a uno de los planos como filo, tal es el método del plano cortante, pues cuando en una proyección un plano se ve como filo, la intersección resulta directa en la mayoría de los casos (salvo que un plano esté completamente arriba o adelante del otro) por lo que sólo habría que regresar las proyecciones de la intersección a las proyecciones originales y hacer el análisis de visibilidad. (Ver ejercicio 2.12)

Ejercicio 2.11 Figura 2.101

Determinar las proyecciones faltantes y la visibilidad entre el plano definido por los puntos **ABC** y la recta **r** que tiene un rumbo **N30°E** y una pendiente ascendente del **80%** en dirección del rumbo, si se sabe que **i'** es la proyección frontal de la intersección entre ambos elementos geométricos.

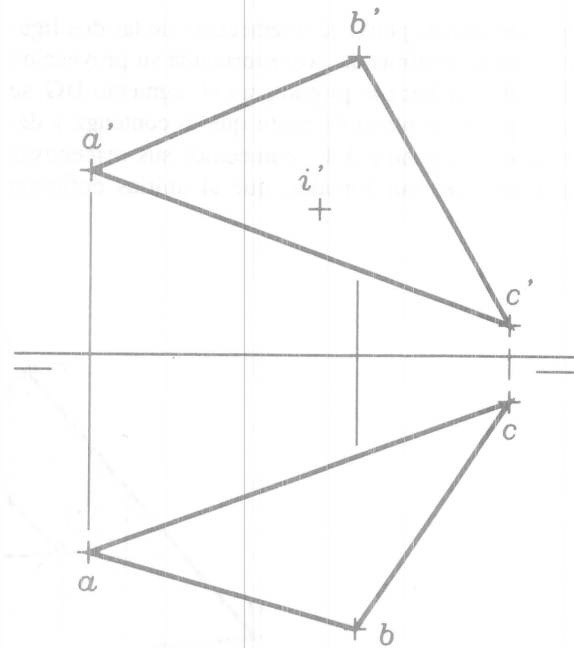


Figura 2.101 *Proyecciones del ejercicio 2.11*

Solución al ejercicio 2.11

Lo primero que podemos hacer es encontrar la proyección horizontal de la intersección, para lo cual trazamos una recta contenida en el plano, y que a su vez contenga al punto **I** (**AM** en la figura 2.102).

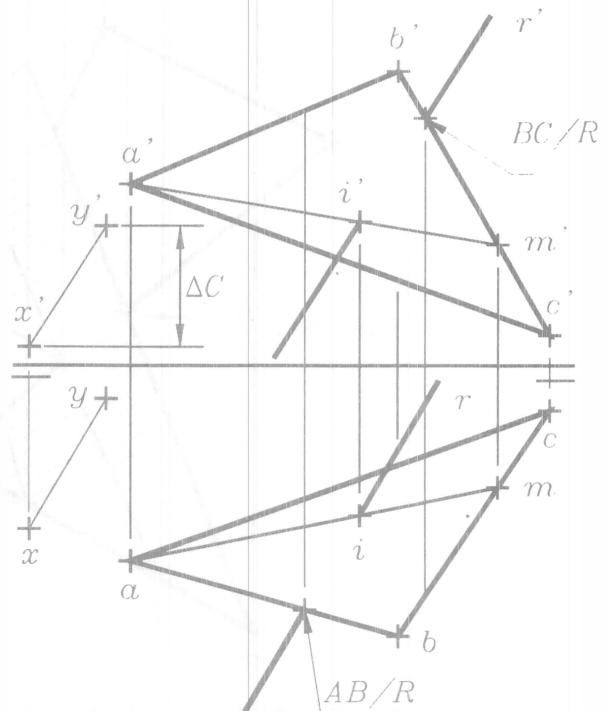


Figura 2.102 Solución del ejercicio 2.11

A partir de la proyección horizontal de la intersección trazamos el rumbo de la recta y posteriormente aplicamos el concepto de pendiente, midiendo 100 unidades en la proyección horizontal (xy en la figura 2.102) determinando a la misma escala la diferencia de cotas en la proyección frontal. El segmento XY tiene el rumbo y la pendiente solicitadas, pero su proyección frontal debe pasar por el punto i' , así que trazamos una paralela a $x'y'$ que pase por i' pa-

ra determinar la proyección frontal de la recta r , finalmente en la figura se muestra un análisis de visibilidad por proyección para completar el ejercicio.

Ejercicio 2.12

La figura 2.103 muestra las proyecciones de dos planos definidos por los puntos ABC y EDG respectivamente, determinar la intersección y visibilidad de ambos planos.

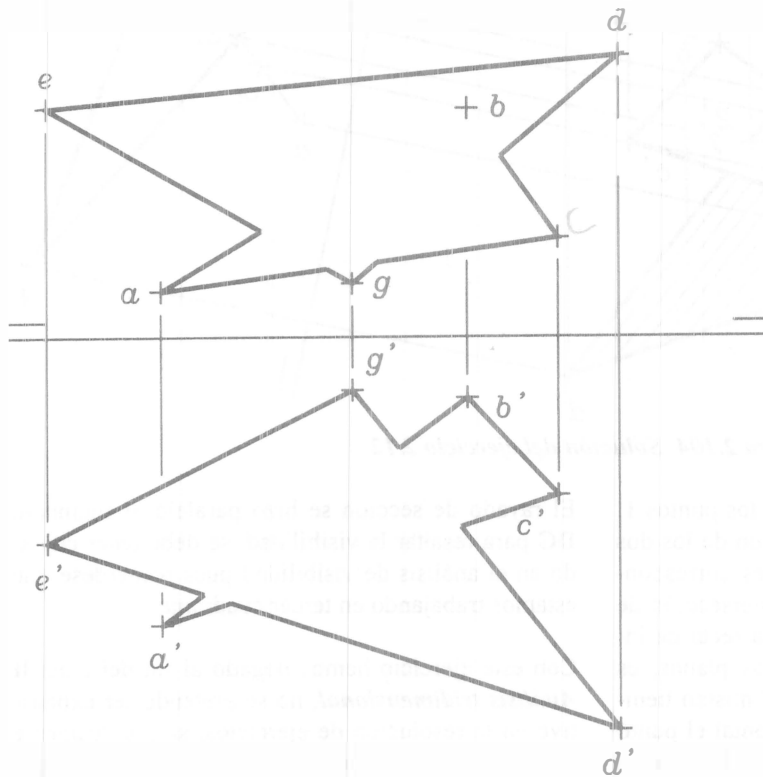


Figura 2.103 Proyecciones para el ejercicio 2.12

Solución al ejercicio 2.12

El ejercicio es susceptible de resolverse por el método del plano cortante, pero emplearemos un cambio de planos para ver a uno de los planos como filo, en este caso al plano ABC , para lo cual trazamos

una recta frontal contenida en el plano (CM en la figura 2.104) y hacemos un cambio de planos perpendicular al segmento CM en magnitud real para ver al plano ABC como filo.

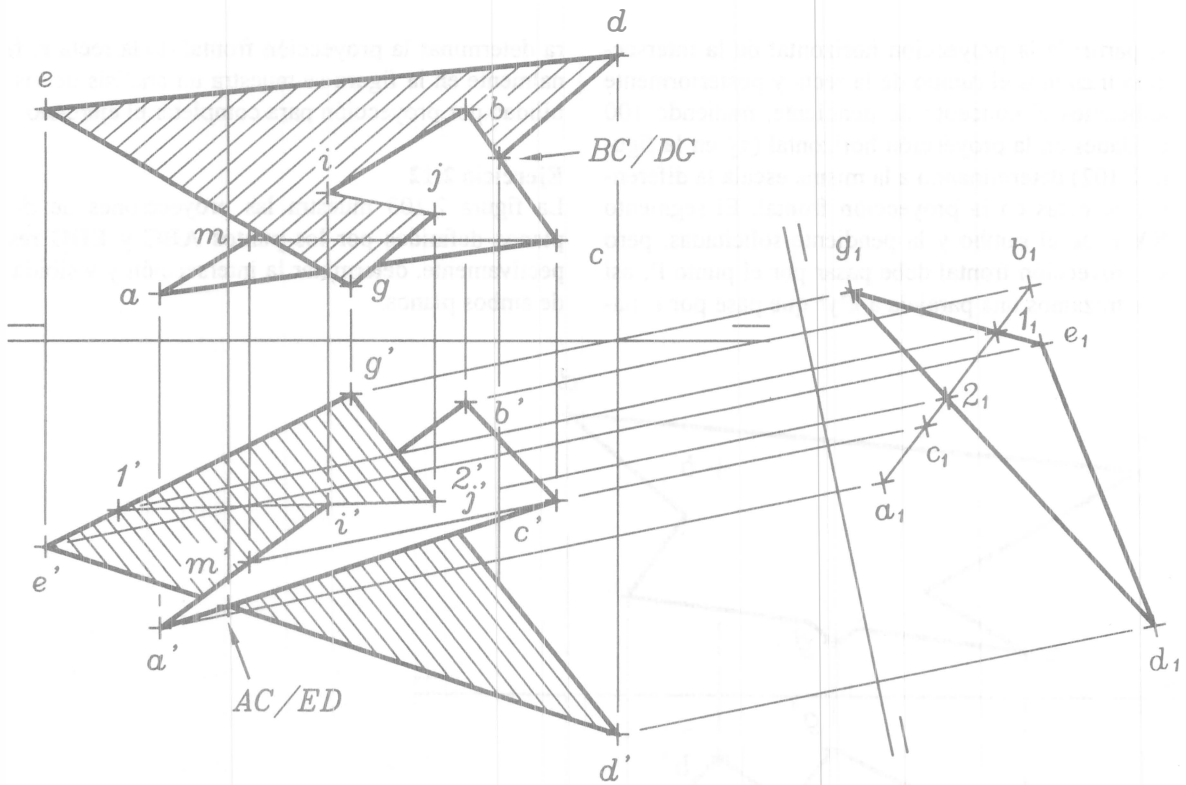


Figura 2.104 Solución del ejercicio 2.12

En el cambio de planos se determinan los puntos 1_1 y 2_1 , que definen la recta de intersección de los dos planos y encontramos las proyecciones correspondientes en la proyección frontal. La intersección de dos figuras planas son los puntos de la recta de intersección que son comunes a los dos planos, es decir, que están en uno y otro plano al mismo tiempo, vemos así que en la proyección frontal el punto $1'$ pertenece al plano DEG pero no al ABC con lo que el segmento de intersección entre ambas figuras planas estará contenido en la recta 12 y es el segmento identificado como $i'j'$ en la figura 2.104, se obtienen sus proyecciones horizontales y se hace el análisis de visibilidad a partir de un sólo cruzamiento en ambas proyecciones.

El rayado de sección se hizo paralelo al segmento DG para resaltar la visibilidad, se debe tener cuidado en el análisis de visibilidad pues recuérdese que estamos trabajando en tercer cuadrante.

Con este ejercicio hemos llegado al fin del tema II *Análisis tridimensional*, no se pretende ser exhaustivo en la resolución de ejercicios, sino únicamente mostrar algunos que son representativos y que tienen cierto grado de dificultad. La clara asimilación de los conceptos aquí vertidos, permitirán visualizar con eficacia los planteamientos espaciales que se presentan normalmente en la ingeniería por medio de dos dimensiones.

Tema 3

Proyecciones Multiplanares e Isométricos

SUBTEMA 3.1 CLASIFICACIÓN DE PROYECCIONES: DESCRIPCIÓN DE LOS ELEMENTOS QUE INTERVIENEN

El empleo de las Proyecciones, como método de representación y/o interpretación de la forma de los cuerpos en el plano, es fundamental en la ingeniería, independientemente que dicha representación sea en papel o inclusive en la misma computadora. Es en el papel (o quizás en el monitor) donde el diseñador plasma sus ideas preliminares en el proceso del diseño, para que posteriormente dichas ideas se puedan materializar en un taller o cualquier otro lugar adecuado. La información en las proyecciones debe ser clara y precisa, amén de seguir con una serie de reglas de fácil asimilación, con el fin de que puedan ser interpretadas en cualquier parte del mundo, dado que la representación gráfica es considerada como uno de los medios de comunicación que rompe las barreras del idioma, y que por lo mismo puede ser interpretado por cualquier persona que posea los conocimientos básicos de la información gráfica.

El presente capítulo plantea los fundamentos de la teoría de las proyecciones para que, junto con el análisis tridimensional y la normalización, el futuro profesional de la ingeniería adquiera los conocimientos que le permitan expresar gráficamente sus ideas, o bien interpretar las de otros, independientemente de su nacionalidad.

Si bien se sabe que las primeras representaciones gráficas del hombre datan de hace ya muchos siglos (por medio de pinturas rupestres del llamado *hombre de las cavernas*), no es sino hasta con Gaspard Monge que se tiene una sistematización de las mismas. Esto no quiere decir que no exista evidencia gráfica de las manifestaciones culturales del hombre antes de Monge, recordemos tan sólo ese momento de la historia de México cuando la llegada de los españoles.

Moctezuma mandó a sus *escribanos* a lo que ahora se conoce como Veracruz, a que plasmaran en lienzos las impresiones que obtuvieran de la llegada de los *dioses* que venían del mar.

Antes de entrar de lleno a lo que es la teoría de las proyecciones, recordemos la conceptualización del vocablo dada en el capítulo anterior:

proyección es la intersección de una recta proyectante que contiene a un elemento geométrico del espacio, con un plano de proyección.

Vale la pena mencionar que en algunos libros de texto en lugar del concepto de proyección se maneja el de vistas, probablemente por la traducción del vocablo *view* que emplean, en el presente texto se manejará el concepto proyección por considerar que posee una estructura más consistente. Asimismo, es común escuchar que se habla de dos sistemas de proyección, el sistema europeo y el americano, aquí se hablará del sistema del primer cuadrante (que algunos conocen como europeo) y del tercer cuadrante (lo que se conoce como americano), esto obedece a que, dada la necesidad de conceptualizar, debemos de hablar en un lenguaje universal y los sistemas americano y europeo únicamente tienen aceptación en México.

Una vez hecha la aclaración, definiremos los diferentes tipos de proyección, que son la cilíndrica y la cónica, cuya diferencia fundamental estriba en la posición del observador respecto al plano de proyección, y por otro lado las rectas proyectantes.

Cuando el elemento geométrico a proyectar deja de ser un punto y se considera cualquier otro elemento

geométrico, debe de considerarse la ubicación del observador, en el caso de la proyección cónica se considera que el observador se encuentra a una distancia finita con respecto al plano de proyección, con lo cual convergen, o bien divergen depende del punto de vista, las rectas proyectantes, a diferencia de lo que sucede en la proyección cilíndrica, en donde se considera la ubicación del observador a una distancia infinita, por lo que las rectas proyectantes son paralelas entre sí, hay que hacer la aclaración que esto definitivamente es con carácter ilustrativo, las figuras 3.1 y 3.2 muestran los diferentes tipos de proyección.

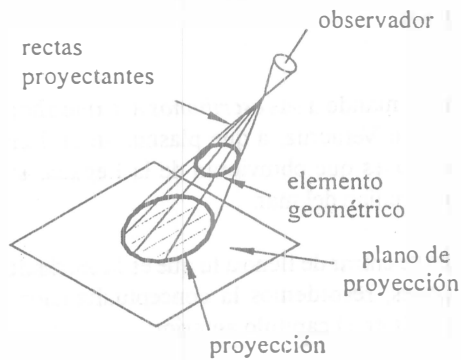


Figura 3.1 Proyección cónica

Observador en el infinito

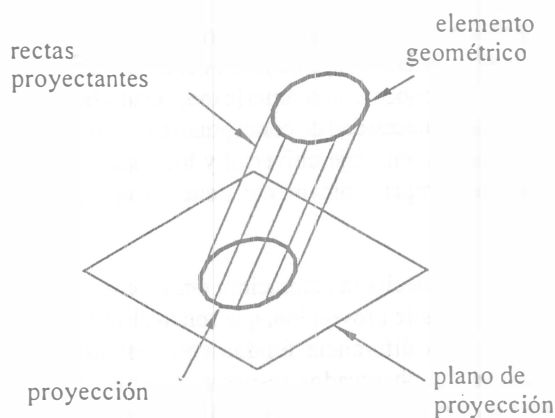


Figura 3.2 Proyección cilíndrica

Se puede apreciar que en la proyección cónica, la proyección propiamente dicha resulta más grande que el elemento geométrico en el espacio, esto es debido a que las rectas proyectantes encuentran primero el elemento geométrico y después el plano de proyección, resulta fácil imaginar que la proyección resultaría de menor tamaño si se diera el caso inverso, es decir, primero el plano de proyección y después el elemento geométrico.

Dentro de la proyección cilíndrica existe otra subdivisión, y ésta se hace con base en la relación que guardan las rectas proyectantes con respecto al plano de proyección, en este caso o bien son perpendiculares, de donde surge la **proyección cilíndrica ortogonal**, o bien forman un ángulo diferente de noventa grados, lo que da origen a la **proyección cilíndrica oblicua**; en ambos casos las rectas proyectantes son paralelas entre sí, las figuras 3.3 y 3.4 ilustran la diferencia.

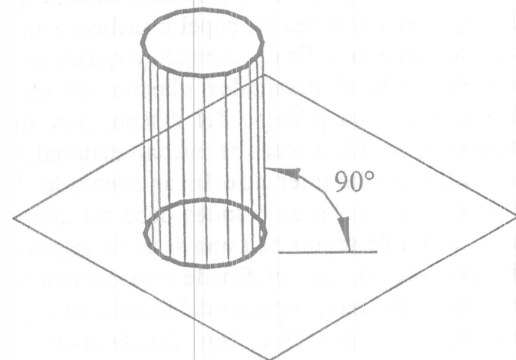


Figura 3.3 Proyección cilíndrica ortogonal

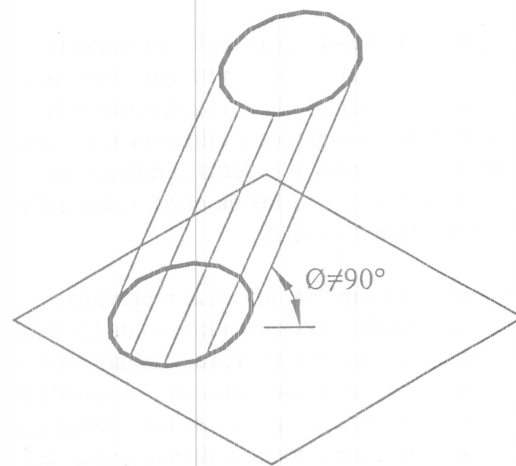


Figura 3.4 Proyección cilíndrica oblicua

En lo que resta de las presentes notas se hará referencia únicamente a la proyección cilíndrica ortogonal, por ser la que muestra la forma y el tamaño verdadero de los elementos geométricos y en caso de que no los muestre, por medio de la aplicación de los conocimientos aprehendidos en el capítulo anterior se puede llegar a ellos. De la proyección cilíndrica ortogonal surge otra subdivisión que a continuación se menciona:

Proyecciones multiplanares: por medio de dos proyecciones se pueden definir perfectamente las dimensiones de un objeto a saber: ancho, profundidad y altura, en caso de que sea un cuerpo complejo se hace uso de una tercera proyección, generalmente se emplean las proyecciones horizontal y frontal, y en su caso la proyección de perfil; para definir la proyección frontal se toma como base que *sea la que más información proporcione del cuerpo*, y con base en ella, se definen las otras proyecciones, en este caso estaremos hablando de **proyecciones principales**, la figura 3.5 ilustra un ejemplo de lo anterior.

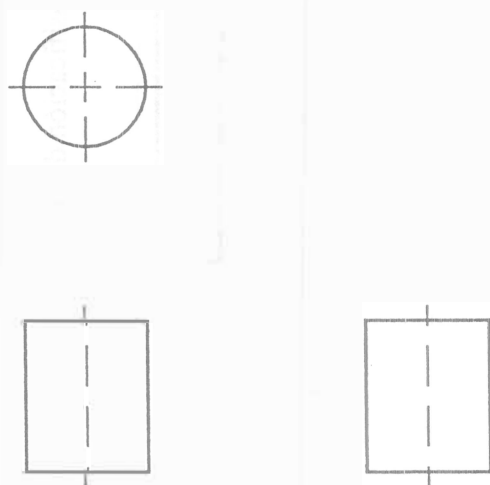


Figura 3.5 Proyecciones principales de un cuerpo

Proyecciones auxiliares: si en determinado momento hubiera la necesidad de obtener una proyección, dentro de las principales, estaremos haciendo uso de una proyección auxiliar, como en el caso de hacer un cambio de planos para obtener el tamaño verdadero de algún plano.

Proyecciones seccionales: para finalizar con la clasificación de las proyecciones multiplanares mencionaremos a las proyecciones seccionales, que no son más que el resultado de hacer un corte por medio

de algún plano, generalmente perpendicular a alguno de los planos principales de proyección, con el fin de apreciar detalles que no puedan ser percibidos en las proyecciones principales. A diferencia de las proyecciones auxiliares, en este tipo de proyección se elimina una parte del cuerpo que se ha *seccionado* y se dibuja la proyección correspondiente.

Existen otro tipo de proyecciones dentro de la proyección cilíndrica ortogonal que son las proyecciones axonométricas, en donde la superficie plana de representación gráfica muestra el ancho, profundidad y altura del cuerpo, es decir, es una ilustración espacial en el plano y que se puede obtener a través de sus proyecciones principales.

Las proyecciones axonométricas se subdividen a su vez en:

Proyección isométrica: emplea la misma escala para los tres ejes que definen un cuerpo: ancho, profundidad y altura respectivamente.

Proyección dimétrica: emplea dos escalas; una para un eje y otra para los dos ejes restantes.

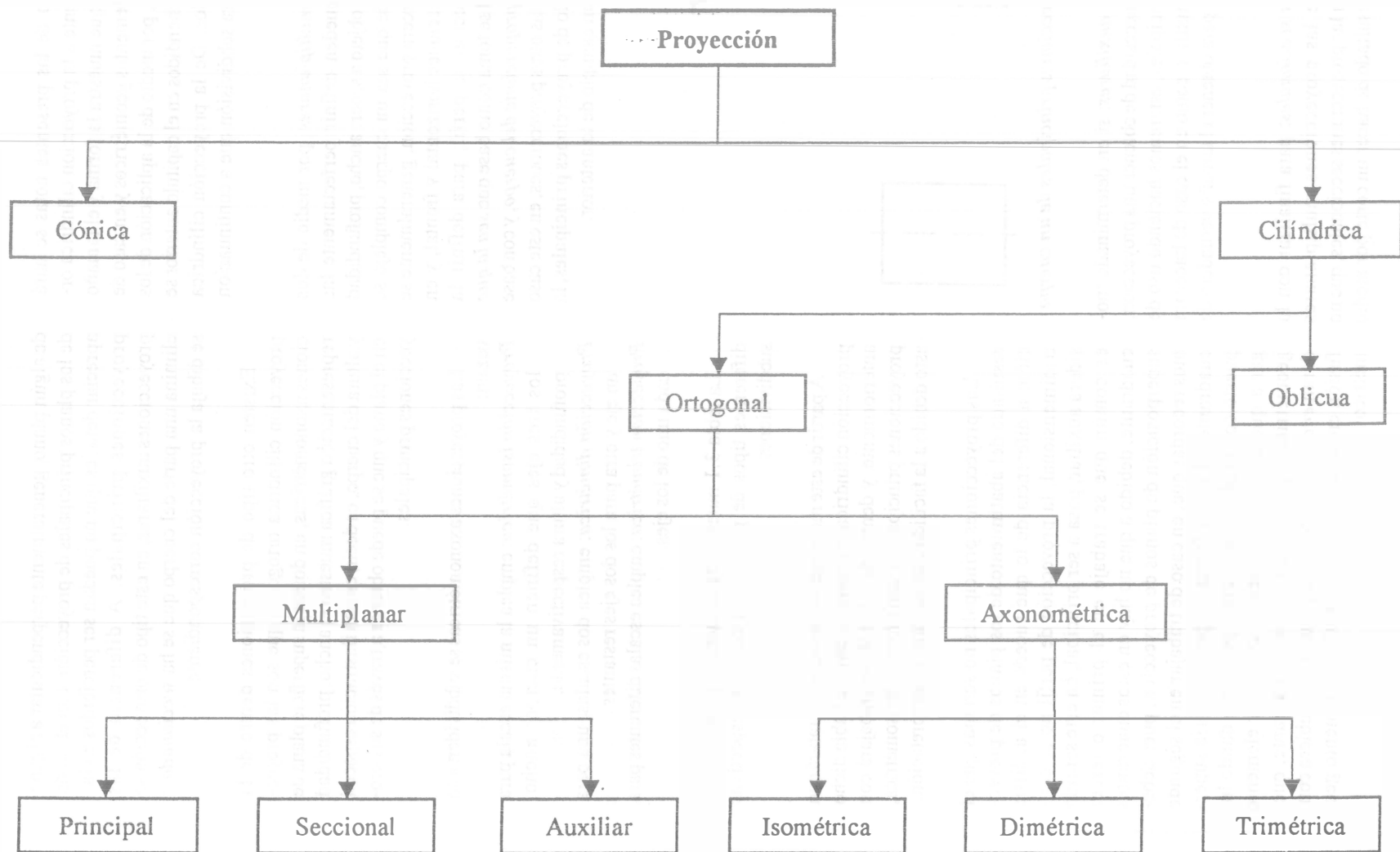
Proyección trimétrica: emplea escalas diferentes para cada uno de los ejes.

La tabla 3.1 muestra de manera esquemática los diferentes tipos de proyección con sus respectivas subdivisiones.

A partir de este momento únicamente se tratará con proyección cilíndrica ortogonal, como se había dicho anteriormente, y dentro de esta sólo se trabajará con proyecciones principales y con proyección isométrica, esto debido a la facilidad de su trazo e interpretación.

Las proyecciones principales no son más que el resultado del abatimiento de los planos de proyección; a diferencia de lo que sucede en el análisis tridimensional, la proyección de perfil no se considera auxiliar, pasa a ser principal, en este sentido es común que se trabaje en el primer o tercer cuadrante, debido a que no hay en estos cuadrantes superposición de planos de proyección, pues debemos recordar que, en caso de trabajar en el segundo cuadrante, el plano frontal superior estaría superpuesto con el plano horizontal posterior, dando lugar a que las proyecciones de cualquier elemento geométrico representado en dicho cuadrante, quedarán *encimadas*, lo que originaría que hubiera confusión en la interpretación de dicho elemento geométrico.

Tabla 3.1 Clasificación de las proyecciones



Ahora bien, dado que se toma en cuenta la proyección de perfil como plano principal, para la obtención de este plano principal de proyección se procedió de manera análoga a la obtención de los planos principales frontal y horizontal, pero con la salvedad de que el plano de perfil quedará *ligado* al plano frontal de proyección, es decir, para hacer coplanares los planos frontal y de perfil se tomó como eje de giro la recta que es común a ambos, en este caso la recta vertical. En las figuras 3.6 a 3.8 se ilustra dicha obtención.

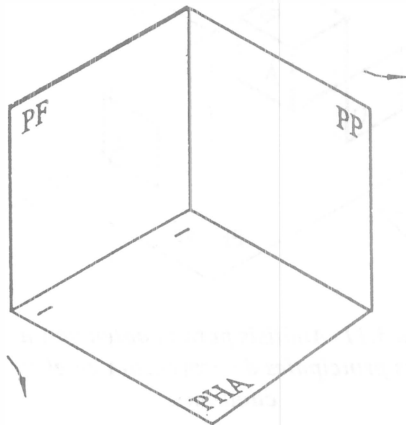


Figura 3.6 Identificación de los planos principales de proyección.

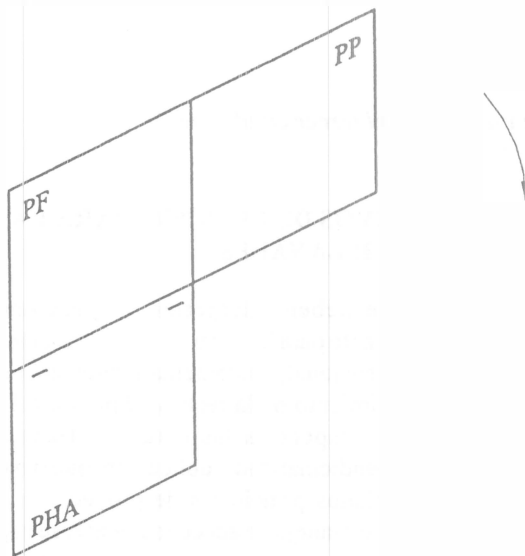


Figura 3.7 Primer paso para la obtención de los planos principales de proyección.

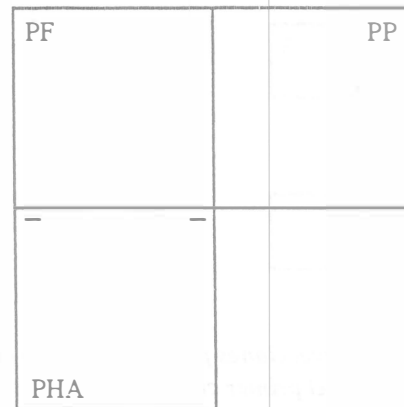


Figura 3.8 Segundo paso para la obtención de los planos principales de proyección.

Asumiendo la posición del observador perpendicular a los planos principales de proyección, figura 3.9, para el primer cuadrante se tiene que las rectas proyectantes encuentran primero el cuerpo a proyectar y posteriormente los planos de proyección, por lo que, en el caso de la proyección de perfil, lo que el observador vea de lado izquierdo del cuerpo (tomando como referencia el plano frontal de proyección) tendrá que ser representado en las proyecciones principales (figura 3.10), del lado derecho.

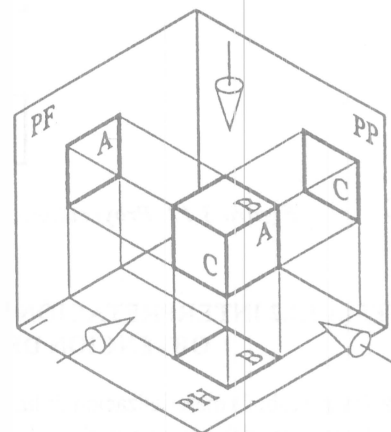


Figura 3.9 Análisis para la obtención de los planos principales de proyección en el primer cuadrante

En lo que respecta al tercer cuadrante, tanto para la proyección frontal como para la horizontal, las rectas proyectantes encuentran primero al plano de proyección y después al elemento geométrico, cosa que no sucede con la proyección de perfil; se consideró que no había consistencia; por lo que hubo necesidad de estimar el plano de perfil, con las

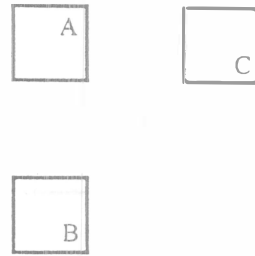


Figura 3.10 Proyecciones principales de un cubo en el primer cuadrante

rectas fronto-horizontal y vertical que ve primero el observador, y así junto con los planos de proyección horizontal y frontal se consideraron *transparentes*, y se formó una *caja de cristal*, en donde dentro quedaba el elemento geométrico, y así se resolvió el problema para el plano de proyección de perfil (figura 3.11), con lo que el sistema quedó consistente y lo que se ve del lado derecho del cuerpo para la proyección de perfil, (nuevamente con respecto al plano frontal), se dibuja a la derecha de la proyección frontal, Figura 3.12.

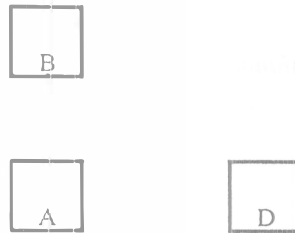


Figura 3.12 Proyecciones principales de un cubo en el tercer cuadrante.

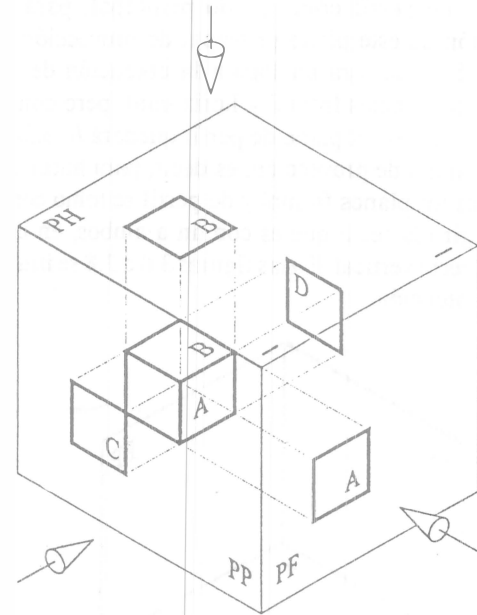


Figura 3.11 Análisis para la obtención de los planos principales de proyección en el tercer cuadrante

SUBTEMA III.2 INTERPRETACIÓN DE DIBUJOS ILUSTRATIVOS DE CUERPOS, PARA LA OBTENCIÓN DE PROYECCIONES MULTIPLANARES.

Para llevar a cabo la materialización de las ideas del diseñador, éste debe representarlas y lo hace por medio de proyecciones principales generalmente, sobre todo porque ya posee la formación que le permite hacerlo. Solo en caso de ser necesario se recurre a una dibujo isométrico, ya sea para fines ilustrativos o aclaratorios. El hecho de presentar la información por medio de proyecciones principales, obedece a que es más fácil poner notas y hacer el dimensionamiento del cuerpo, que en el caso de las representaciones isométricas, donde el proceso se hace un poco más complicado. Asimismo, ya que se maneja la teoría de las proyecciones, es suficiente con interpretarlas adecuadamente para poder concebir al cuerpo de manera espacial, de aquí su importancia.

Dado que se deben interpretar proyecciones diédricas es relevante para la teoría de las proyecciones el análisis tridimensional, fundamentalmente tener un excelente conocimiento de la recta y el plano, sobre todo en lo que respecta a las características de paralelismo perpendicularidad y oblicuidad que tienen respecto a los planos principales de proyección, se sugiere que, de no manejarse adecuadamente, se haga un repaso a dichos conceptos en el capítulo anterior. Se partirá del hecho de que todos y cada uno de los segmentos de recta que aparezcan en un dibujo isométrico son consecuencia de la intersección de dos planos y se denominarán *aristas* y nos referiremos a ellos como *rectas*, así en un cubo con sus caras

paralelas a los planos principales de proyección, sus aristas son perpendiculares a uno de los planos de proyección y por tanto, paralelas a los otros planos de proyección, es decir, sus aristas son rectas del tipo fronto-horizontal, de punta y vertical. En este momento es importante destacar que, si hay necesidad de tomar medidas de un dibujo isométrico, únicamente se deben de tomar de éste, y sólo de este tipo de rectas, dado que aún en las rectas de tipo frontal u horizontal, no presentan su magnitud real, esto debido a que en

isométrico se sufre una deformación en las medidas que se le conoce como *escorzo*.

En las figuras 3.13 a 3.19 se muestran los siete diferentes tipos de recta, cada una inscrita o delimitando un paralelepípedo en isométrico, asimismo, se dan sus respectivas proyecciones principales, con las del paralelepípedo incluido para tener una referencia, en el sistema de proyección del tercer cuadrante.

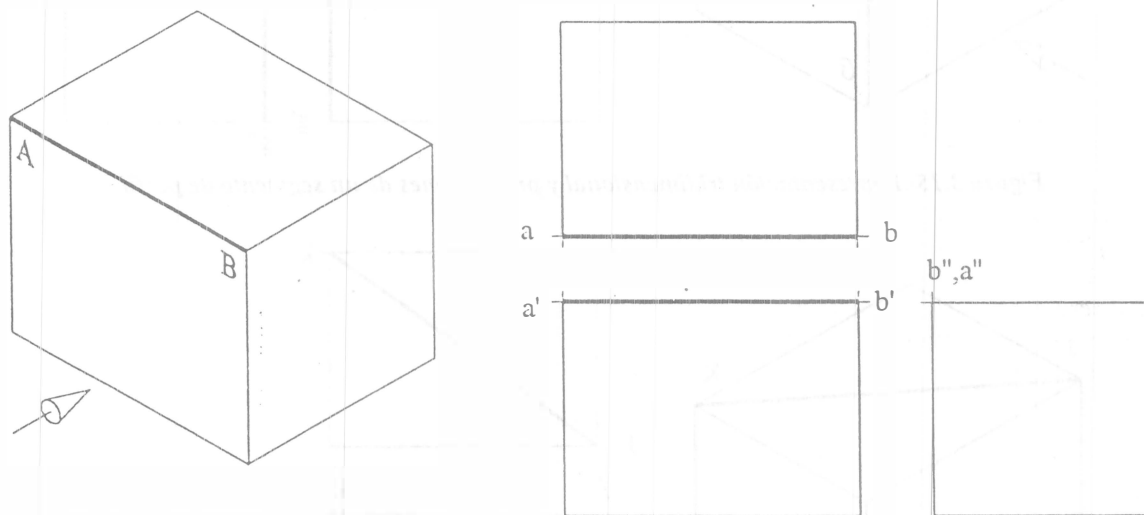


Figura 3.13 Representación tridimensional y proyecciones de un segmento fronto-horizontal

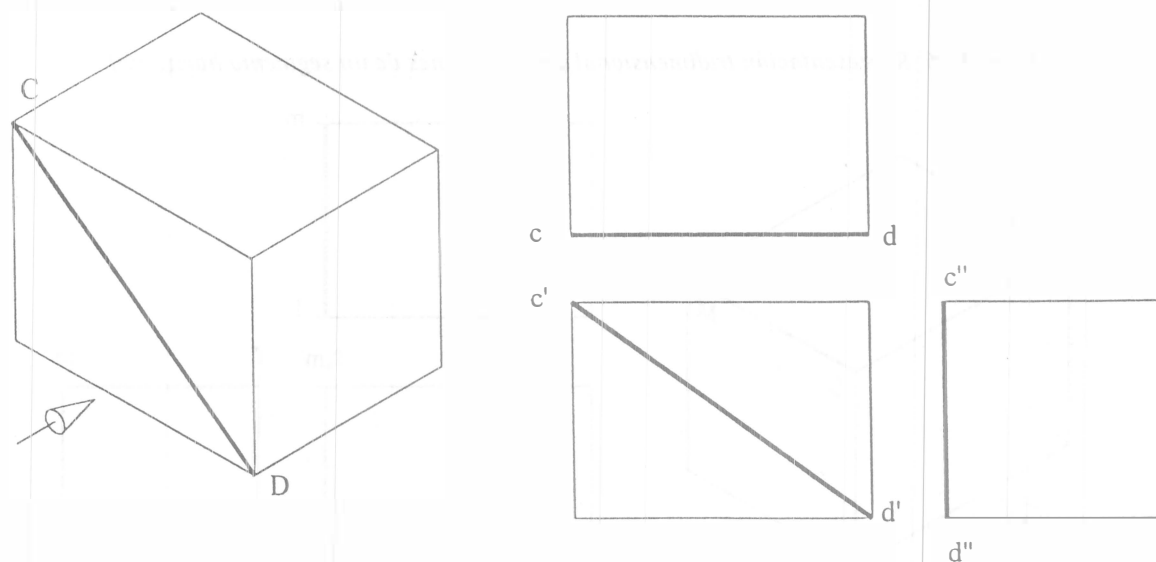


Figura 3.14 Representación tridimensional y proyecciones de un segmento frontal

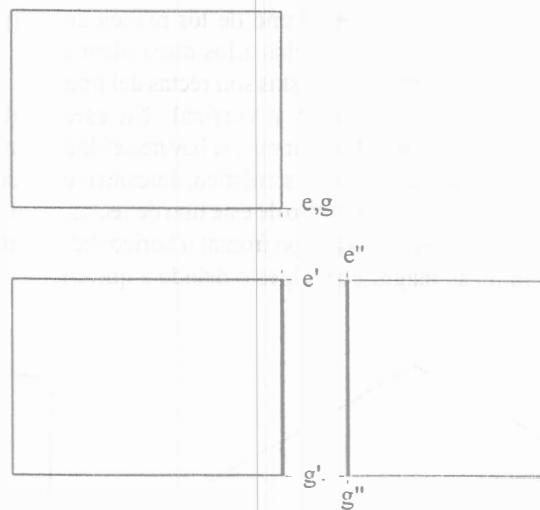
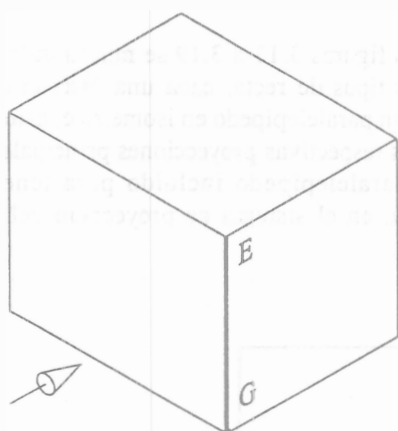


Figura 3.15 Representación tridimensional y proyecciones de un segmento de perfil

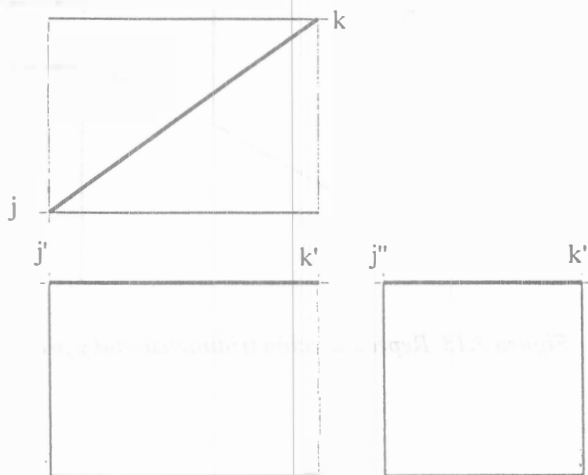
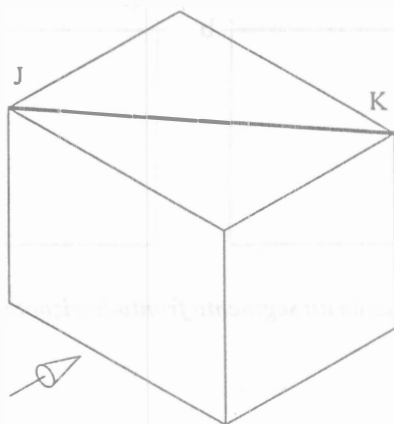


Figura 3.16 Representación tridimensional y proyecciones de un segmento horizontal

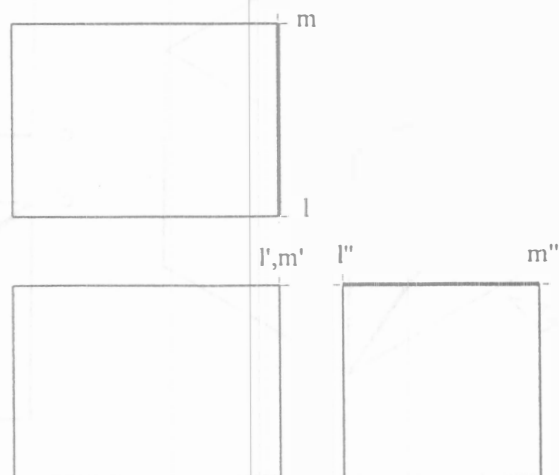
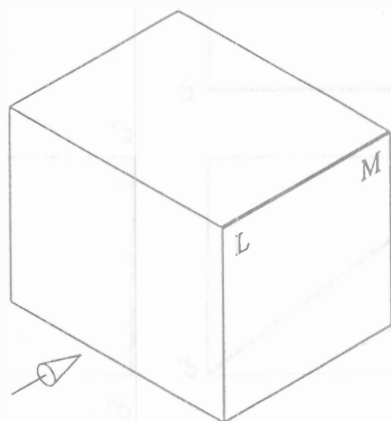


Figura 3.17 Representación tridimensional y proyecciones de un segmento de punta

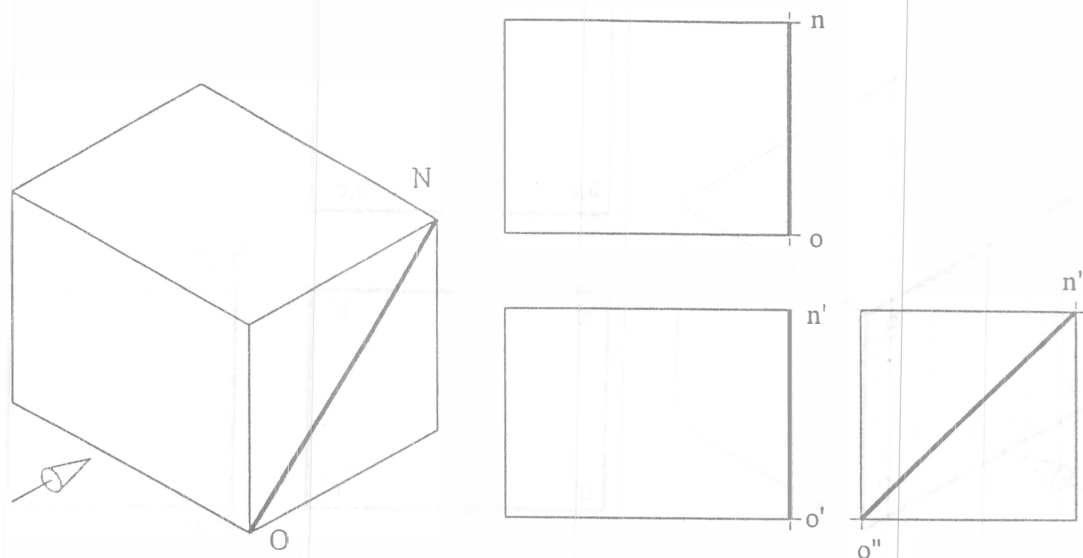


Figura 3.18 Representación tridimensional y proyecciones de un segmento de perfil

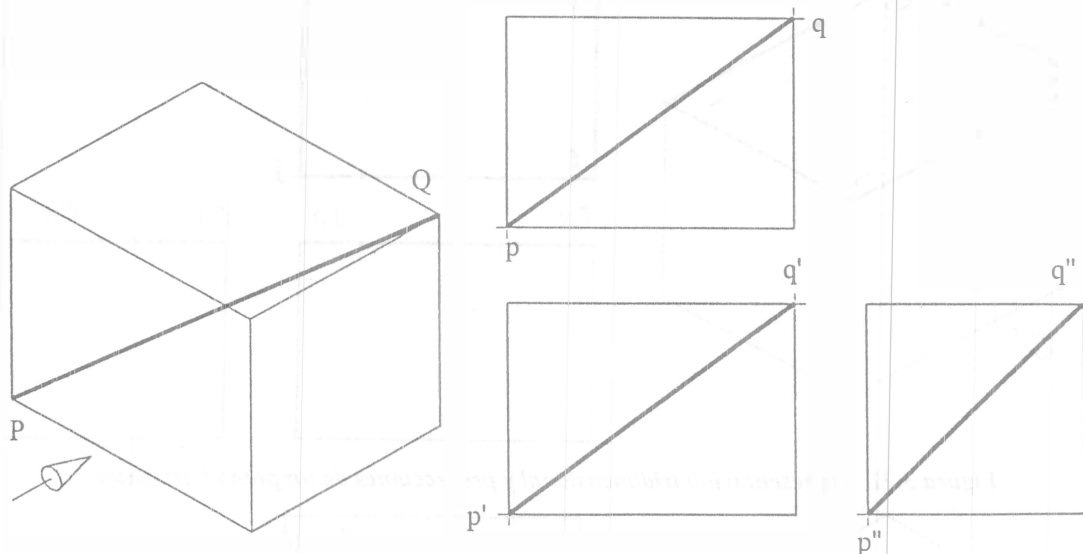


Figura 3.19 Representación tridimensional y proyecciones de un segmento oblicuo

En lo que se refiere a los diferentes tipos de planos, aquellos que sean paralelos a uno de los planos principales de proyección, en las otras dos proyecciones aparecerán vistos como un filo, es decir, son perpendiculares a dichos planos, tal es el caso de los planos del tipo frontal, horizontal y de perfil, figuras 3.20 a 3.22. Los planos que son perpendiculares a uno de los planos de proyección pero oblicuos a los otros dos, aparecerán como filo en la proyección del plano al cual sean perpendiculares, y aparecerá la forma de dicho plano en las otras dos proyecciones, aunque en ninguna de éstas aparezca su magnitud real, tal es el caso del plano vertical, que en su proyección horizontal,

aparecerá visto como un filo, pues es perpendicular al plano horizontal de proyección, y en las proyecciones frontal y de perfil, aparecerá la forma del plano, los otros dos planos que cumplen con las características anteriores son los planos de canto y paralelo a la línea de tierra, figuras 3.23 a 3.25.

Finalmente tenemos al plano oblicuo, dado que no es perpendicular ni paralelo a alguno de los planos de proyección, aparecerá únicamente la forma del plano en sus proyecciones, figura 3.26. Las siguientes figuras ilustran los diferentes tipos de planos, ya sea inscritos en un cubo o bien delimitándolo, con sus respectivas proyecciones principales.

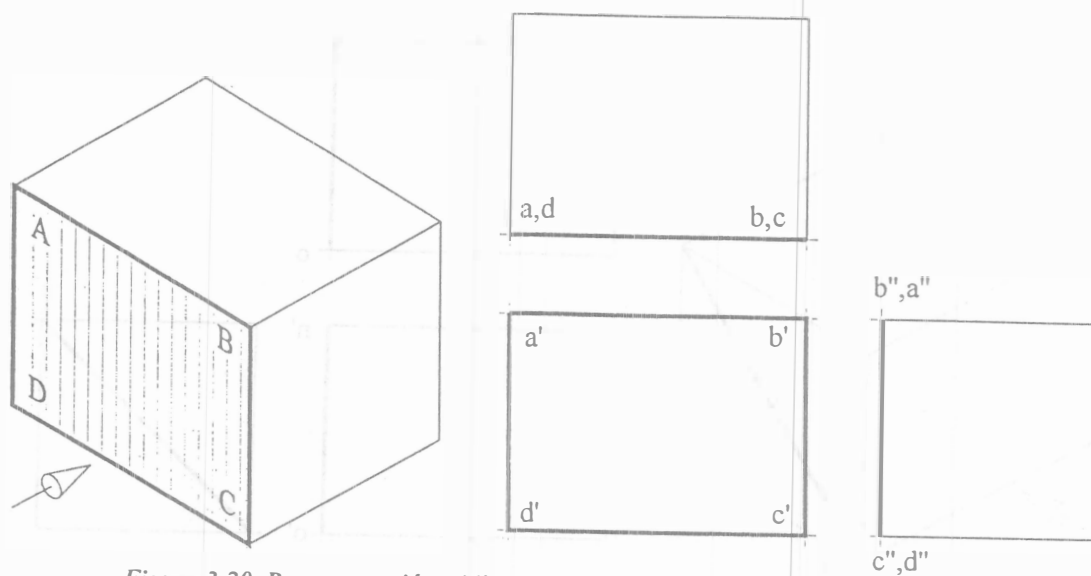


Figura 3.20 Representación tridimensional y proyecciones de un plano frontal

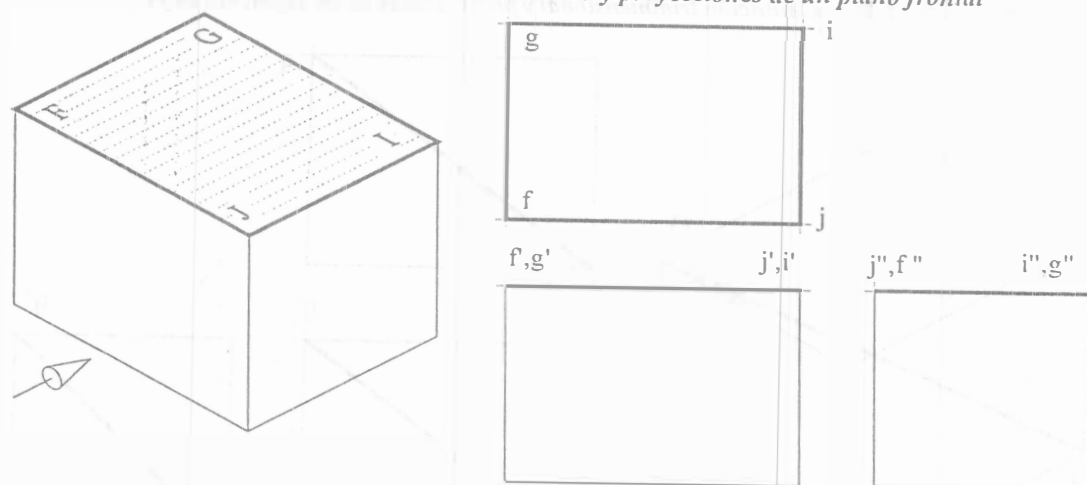


Figura 3.21 Representación tridimensional y proyecciones de un plano horizontal

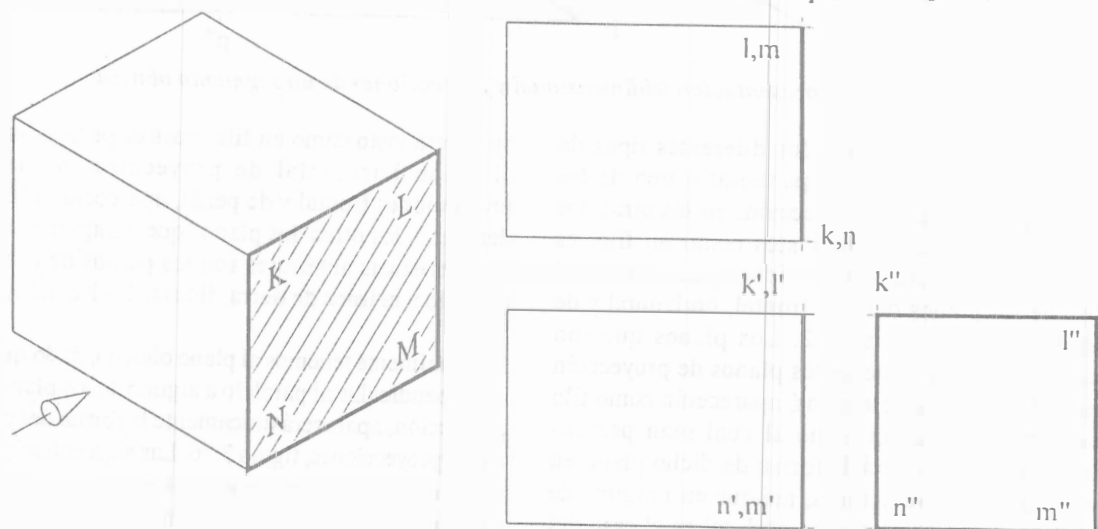


Figura 3.22 Representación tridimensional y proyecciones de un plano de perfil

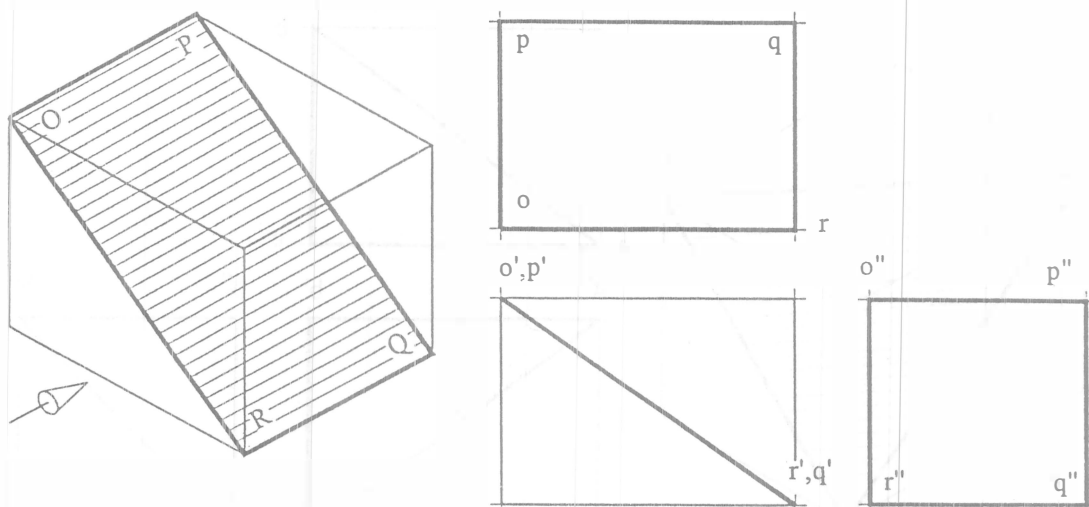


Figura 3.23 Representación tridimensional y proyecciones de un plano de canto

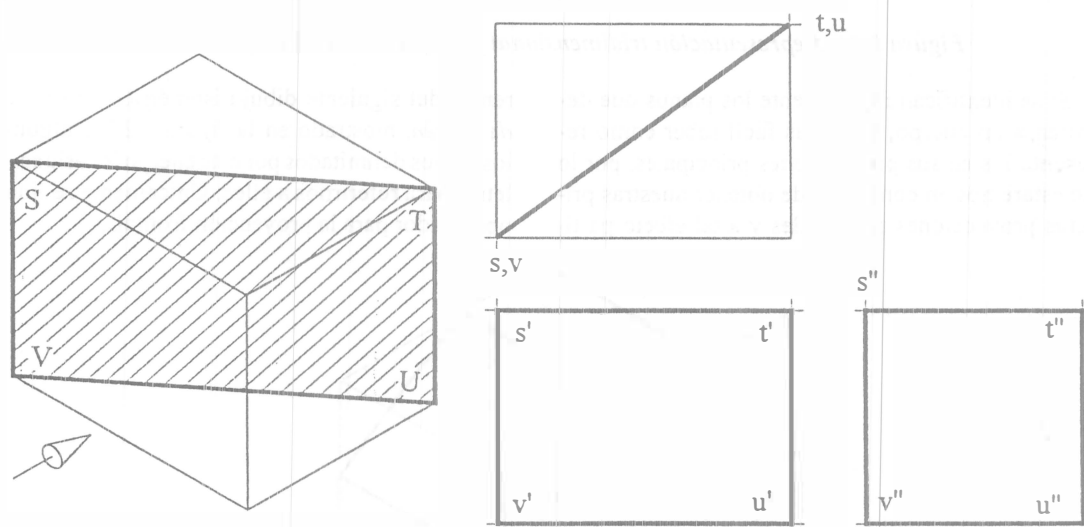


Figura 3.24 Representación tridimensional y proyecciones de un plano vertical

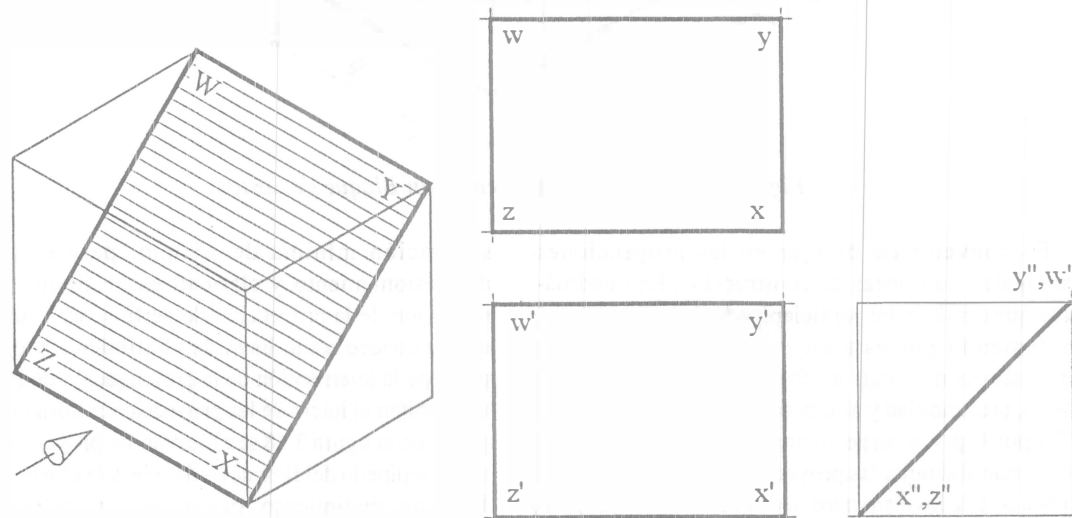


Figura 3.25 Representación tridimensional y proyecciones de un plano paralelo a la línea de tierra

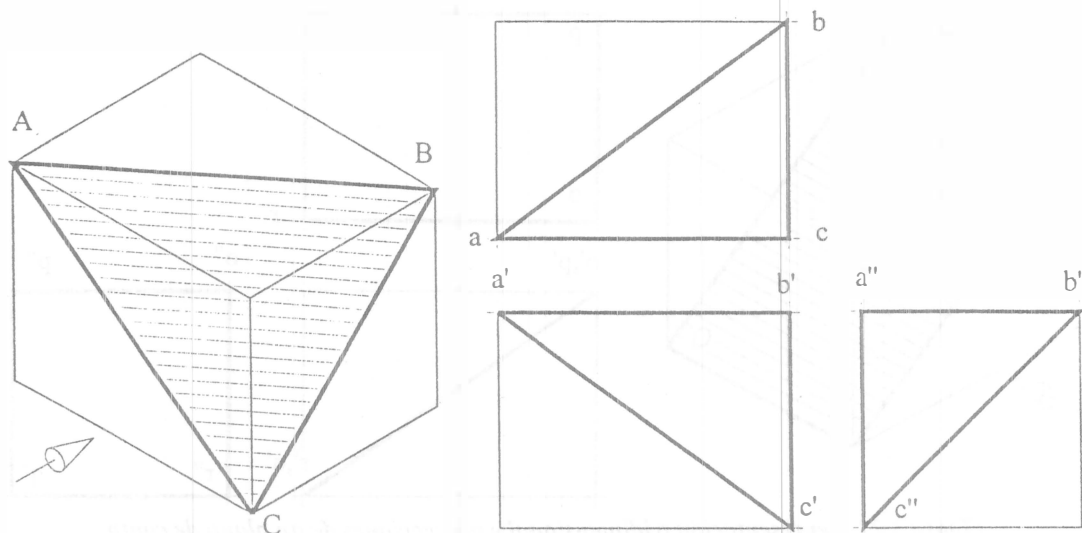


Figura 3.26 Representación tridimensional y proyecciones de un plano oblicuo

Si se identifican rápidamente los planos que delimitan a un cuerpo, será más fácil saber como representarlos en sus proyecciones principales, por lo que estaremos en condición de obtener nuestras primeras proyecciones principales y a tal efecto parti-

remos del siguiente dibujo isométrico de un *Bloque de Sostén*, mostrado en la figura 3.27, y algunos de los planos delimitados por este cuerpo les asignaremos letras para referirnos a ellos. Únicamente se ilustra el observador para la proyección frontal.

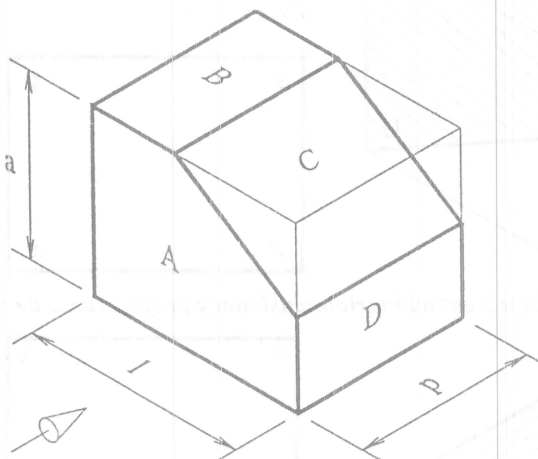


Figura 3.27 Dibujo isométrico de un *Bloque de Sostén*

Es conveniente dibujar en las proyecciones principales, con líneas de construcción, los cuadriláteros que resultan del paralelepípedo de la envolvente, entendiendo por ésta un paralelepípedo con las dimensiones máximas a saber del cuerpo en estudio (largo, profundidad y altura, representadas en la figura 3.28 por l, p y a respectivamente) y que lo inscribe, por lo que al dibujar las proyecciones del cuerpo, todos y cada uno de los elementos que lo constituyen quedarán dentro de dicha envolvente, asimismo, las proyecciones de dichos cuadriláteros se recomienda que tengan una

separación mínima de 15 mm, para efectos de dimensionamiento y claridad en el dibujo. Para la obtención de la proyección de perfil se traza una línea que se conoce como *línea de abatimiento* y que debe partir de la intersección de la prolongación de las líneas que limitan el inicio de las proyecciones horizontal y de perfil, en la figura 3.28 se muestran las proyecciones del paralelepípedo del *Bloque de Sostén*, y la ubicación de la línea de abatimiento, que sirve para referir, en la proyección de perfil, por medio de las proyecciones horizontal y frontal, la proyección correspondiente.

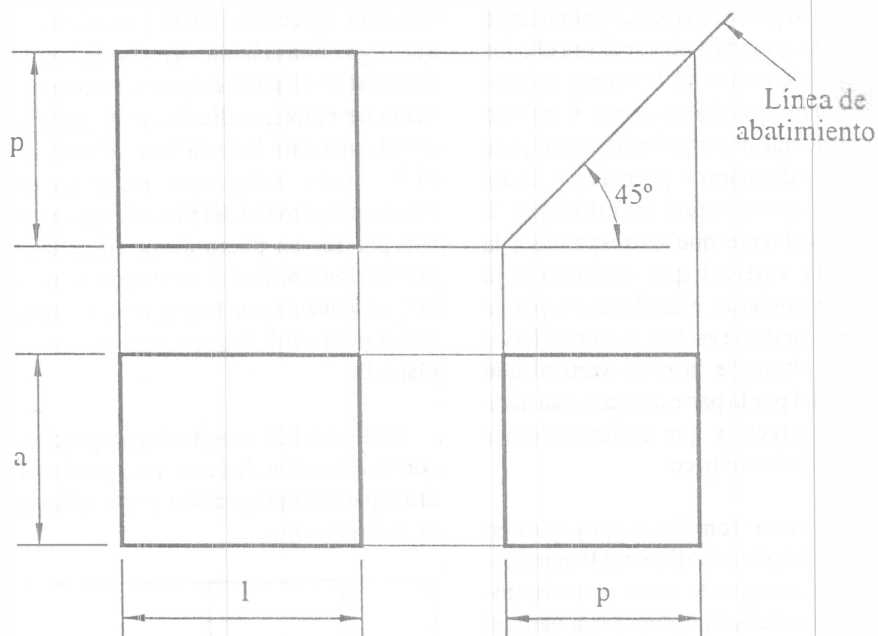


Figura 3.28 Envolvente para la figura 3.27

Como metodología de desarrollo, empezaremos por ubicar los planos que son paralelos a los planos principales de proyección y que están ubicados hasta el límite de la envolvente y más cercanos al observador, esto con el fin de dibujar primero los planos que aparecerán con línea de perfil definitivo, empezaremos por identificar, si existen, dichos planos en el orden horizontal, frontal y de perfil, para posteriormente dibujarlos en las proyecciones. Verificamos que el plano **B** es un plano horizontal que está hasta el límite de la envolvente y delimitado por

rectas fronto-horizontales y de punta, podemos tomar las medidas directamente del dibujo isométrico y llevarla a la proyección horizontal; ahora bien, un plano horizontal se ve como filo tanto en la proyección frontal como en la de perfil. dibujamos dichos filos con longitudes iguales a la longitud de la recta fronto-horizontales en la proyección frontal y de punta en la proyección de perfil respectivamente. La figura 3.29 ilustra la envolvente del bloque de sostén y el plano que definimos como **B** en el dibujo isométrico, así como sus proyecciones horizontal, frontal y de perfil.

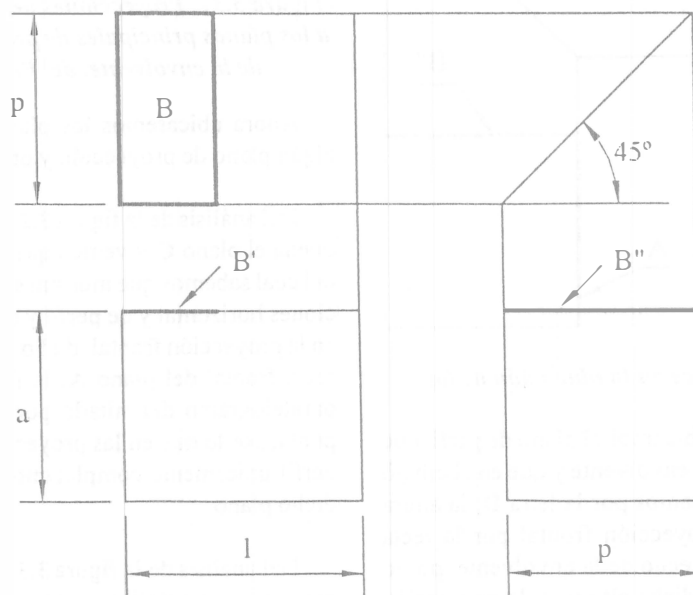


Figura 3.29 Ubicación del plano horizontal en el límite de la envolvente

Dado que es el único plano horizontal delimitando al *Bloque de Sostén* pasaremos a ubicar ahora el o los planos frontales que delimiten al bloque y al cual designamos en el dibujo isométrico como A, debido a que un plano frontal muestra su magnitud real en la proyección frontal lo dibujamos primero en dicha proyección, y vemos que su altura está dada por la altura total de la envolvente que corresponde a la longitud de la recta vertical que delimita a la envolvente en la parte izquierda; el ancho corresponde a la recta fronto-horizontal que está en la parte inferior de la envolvente; la altura de la recta vertical que delimita al plano frontal por la parte derecha está dada por la longitud de esa recta y que podemos tomar directamente del dibujo isométrico.

Para el trazo de la recta frontal nos apoyamos en la proyección frontal del plano horizontal B anteriormente trazado y que corresponde a una recta fronto-horizontal del plano frontal y la última recta vertical trazada; finalmente dibujamos las proyecciones horizontal y de perfil y como sabemos que es un plano frontal dichas proyecciones se verán como un filo, que en la proyección de perfil está hasta el límite izquierdo de la envolvente y en la proyección horizontal está en la parte inferior de la envolvente. La figura 3.30 muestra el avance de las proyecciones con la ubicación de los planos A y B.

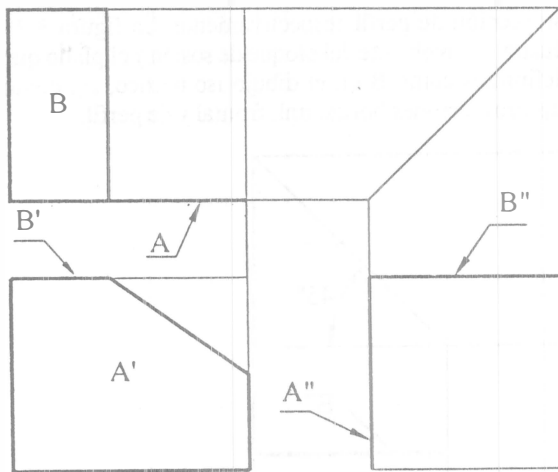


Figura 3.30 Avance en la obtención de las

Como tercer paso ubicamos el plano de perfil que está hasta el límite de la envolvente y que en el dibujo isométrico lo representamos por la letra D; la altura ya está dada en la proyección frontal por la recta vertical en el límite derecho de la envolvente, por lo que solo proyectamos dicha altura en la proyección de perfil, y a partir de esta altura en dicha proyección

trazamos la recta de punta que delimita el plano D y que llega hasta el límite derecho de la envolvente; para completar el paralelogramo trazamos las rectas paralelas correspondientes en la parte derecha de la envolvente para la recta vertical y en la inferior para la de punta; solo resta trazar las proyecciones horizontal y frontal del plano D, que aparecerán como filo por ser un plano de perfil, y dicho filo en la proyección horizontal corresponde al límite derecho de la envolvente y en la proyección frontal ya está dado por la recta vertical que tomamos como altura para el plano D.

La figura 3.31 muestra las proyecciones del bloque con la ubicación de los planos paralelos a los planos principales de proyección y que están hasta el límite de la envolvente.

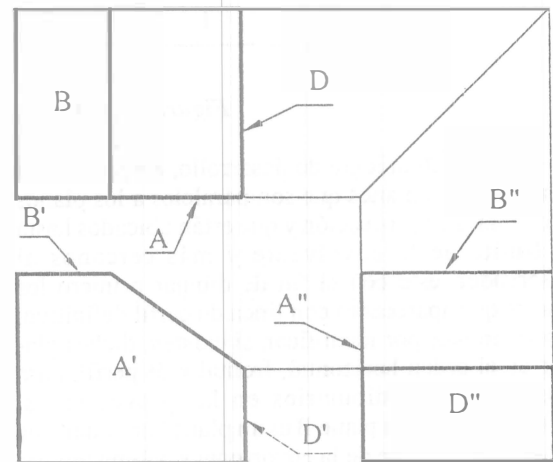


Figura 3.31 Proyecciones de los planos paralelos a los planos principales de proyección, en el límite de la envolvente, del *Bloque de Sostén*

Ahora ubicaremos los planos perpendiculares a algún plano de proyección y oblicuo a los otros dos.

Del análisis de la figura 3.27 observamos que solo queda el plano C y vemos que es un plano de canto, del cual sabemos que muestra su forma en las proyecciones horizontal y de perfil y que se ve como un filo en la proyección frontal, dicho filo ya está dado por la recta frontal del plano A; la forma del plano es un paralelogramo delimitado por rectas frontales y de punta, por lo que en las proyecciones horizontal y de perfil únicamente completamos las proyecciones de dicho plano.

Del análisis de la figura 3.31 se desprende que las proyecciones prácticamente están completas, ya que no existen líneas de perfil oculto, y los planos que

hacen falta son planos paralelos a los planos que designamos con letras y que por estar más alejados del observador se confunden con estos, por lo que únicamente completamos las proyecciones, que se muestran en la figura 3.32.

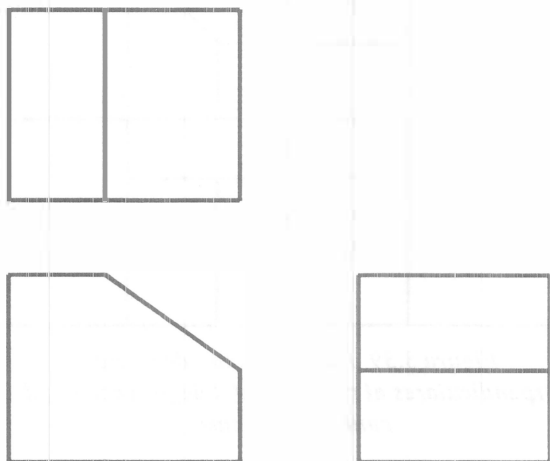


Figura 3.32 Proyecciones principales completas del Bloque de Sosten

La figura 3.33 muestra el dibujo isométrico de un Apoyo, que es una figura con mayor grado de complejidad y a partir de la figura 3.34 y hasta la 3.42 se muestran, paso a paso, la obtención de sus proyecciones principales siguiendo la metodología aquí planteada, y que resumimos a continuación:

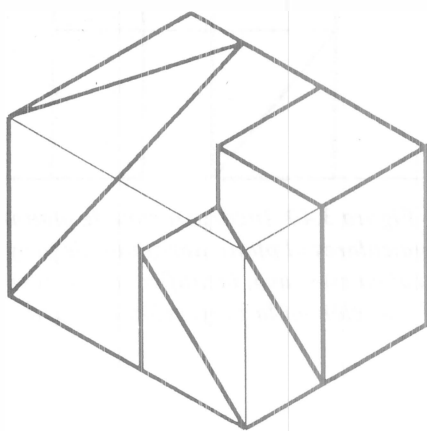


Figura 3.33 Dibujo isométrico de un Apoyo

1. Identificación de planos en el dibujo isométrico. Figura 3-34.
2. Ubicación de planos horizontales en el límite superior de la envolvente. Figura 3.35

3. Ubicación de planos frontales en el límite anterior de la envolvente. Figura 3.36.
4. Ubicación de planos de perfil en el límite derecho de la envolvente. Figura 3.37.
5. En el mismo orden, los planos perpendiculares a los planos de proyección, que no están en el límite de la envolvente. Figura 3.38.
6. Ubicación de planos perpendiculares a un plano de proyección y oblicuos a los otros iniciando con el perpendicular al frontal. Figura 3.39.
7. Ubicación del plano perpendicular al horizontal. Figura 3.40.
8. Ubicación del plano perpendicular al de perfil. Figura 3.41.

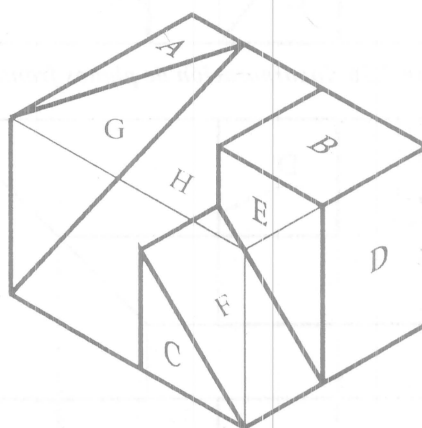


Figura 3.34 Identificación de planos para la obtención de las proyecciones principales del Apoyo.

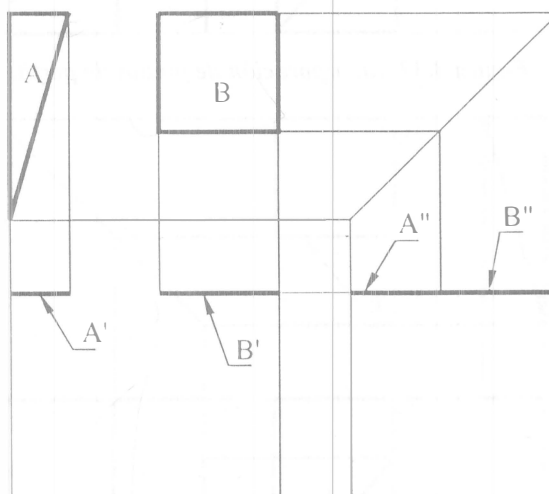


Figura 3.35 Ubicación de planos horizontales en el límite superior de la envolvente.

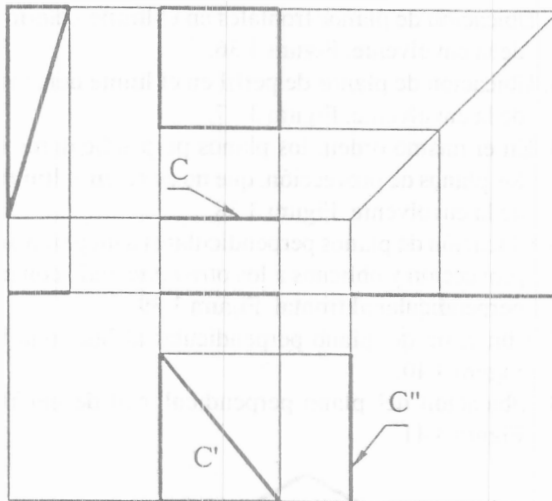


Figura 3.36 Incorporación de planos frontales .

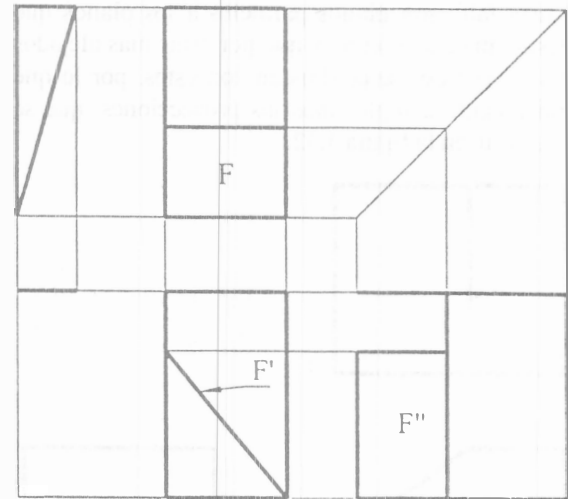


Figura 3.39 Incorporación de planos perpendiculares al plano frontal de proyección, de canto en este caso

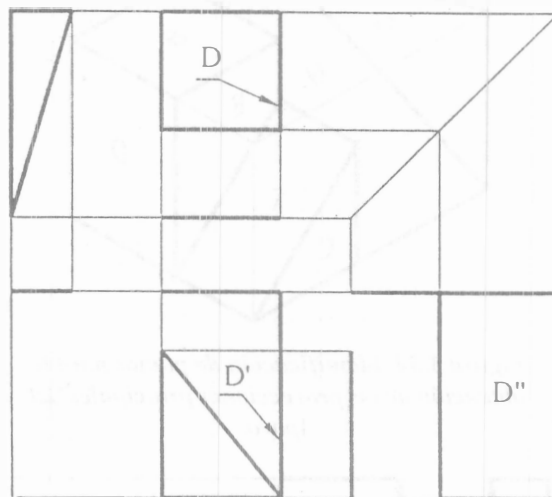


Figura 3.37 Incorporación de planos de perfil.

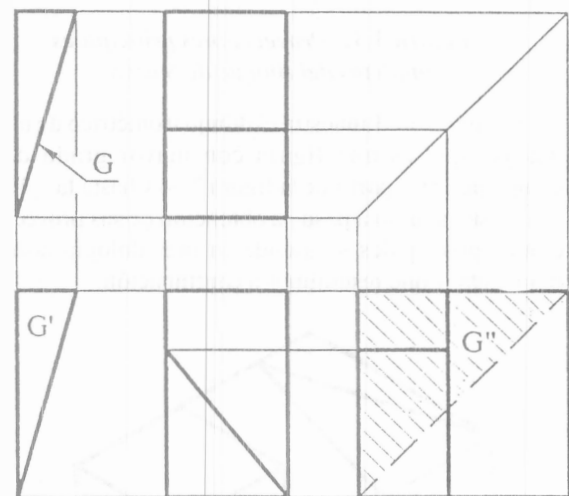


Figura 3.40 Incorporación de planos perpendiculares al plano horizontal de proyección, vertical en este caso, identificado con rayado de sección en la proyección de perfil.

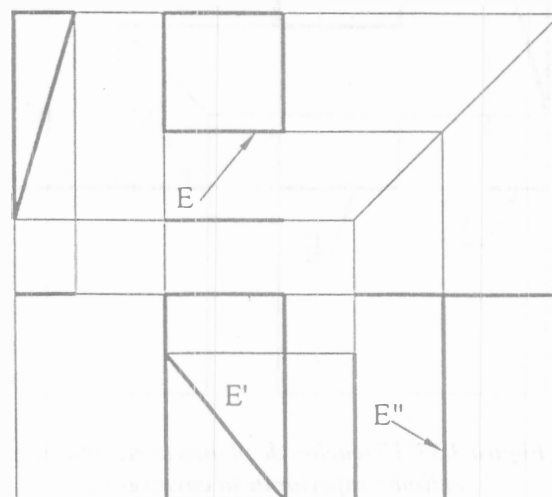


Figura 3.38 Incorporación de planos frontales que no se ubican en el límite anterior de la envolvente.

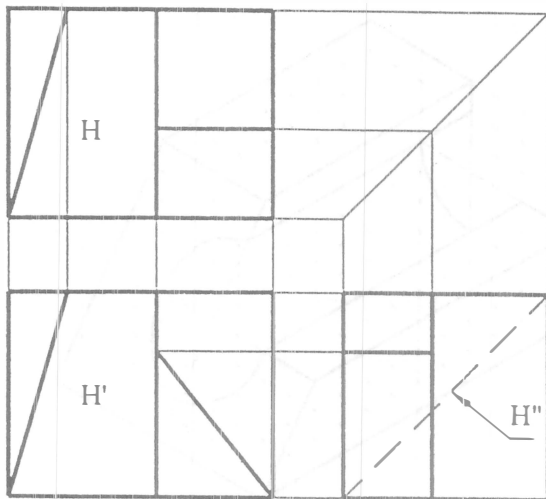


Figura 3.41 Incorporación de planos perpendiculares al plano principal de perfil, paralelo a la línea de tierra en este caso

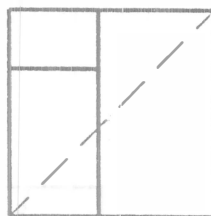
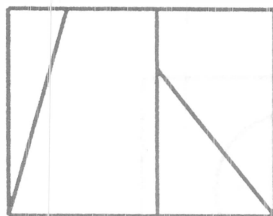
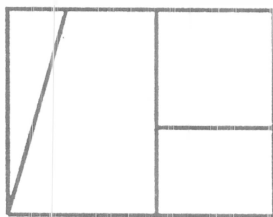


Figura 3.42 Proyecciones principales completas del Apoyo mostrado en la figura 3.33

En el caso de tener cuerpos con superficies cónicas o cilíndricas, debe tenerse en cuenta que son superficies de revolución generadas por dos rectas: directriz y generatriz y que el observador ve la generatriz extrema del cuerpo. Por ejemplo, en el caso de una esfera, sus proyecciones serán siempre una circunferencia del radio de la esfera, independientemente del plano de proyección.

Si ahora suponemos un cilindro recto de base circular (directriz) paralela al plano horizontal de proyección, y con generatriz perpendicular a dicha base, figura 3.43, y queremos obtener sus proyecciones principales, en la proyección horizontal ve-

remos únicamente una circunferencia, dado que las generatrices son segmentos de tipo vertical y por tanto se verán como un punto en la proyección horizontal, y dichos puntos se confundirán con la directriz, la circunferencia en este caso.

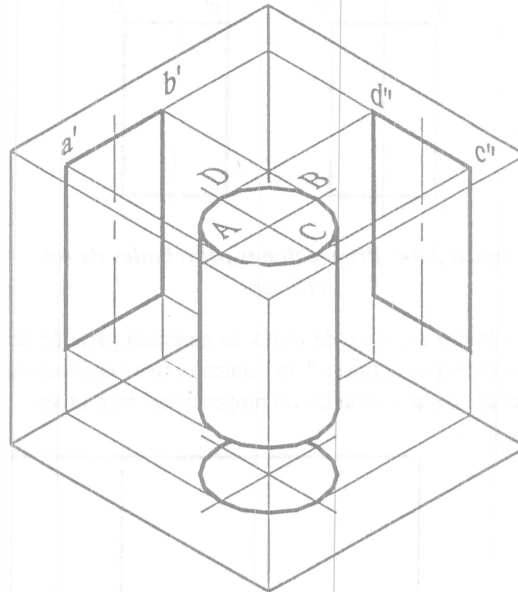


Figura 3.43 Obtención de las proyecciones principales de un cilindro

Para la obtención de la proyección frontal, la base y la tapa del cilindro son planos horizontales y por tanto se verán como filo, tanto en la proyección frontal como en la de perfil, y la parte que limita al cilindro y que ve el observador, es la directriz extrema tanto del lado izquierdo como del derecho y que necesariamente tiene que estar ubicada en la intersección de una recta fronto-horizontal AB que pase por el centro de la circunferencia vista en la proyección horizontal.

Para el caso de la proyección de perfil el observador ve las generatrices que están ubicadas hasta delante y atrás, respectivamente, y que están definidas por las rectas verticales que parten de la intersección de la recta de punta CD en este caso, y que por supuesto también pasa por el centro de la circunferencia. La figura 3.44 muestra las proyecciones principales del cilindro con las rectas fronto-horizontal AB y de punta CD que definen las generatrices extremas a representar en las proyecciones frontal y de perfil.

Otra parte importante a representar en proyecciones, son las intersecciones de dos elementos geométricos, como en el caso de la figura 3.45 donde aparece un cuerpo, **Guía Circular**, con una perforación cilíndrica de base circular paralela al plano de perfil,

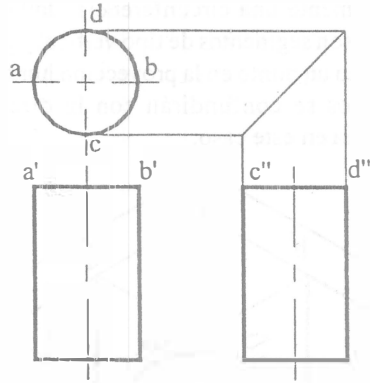


Figura 3.44 *Proyecciones principales de un cilindro*

truncado por un plano de canto; se muestran parte de las proyecciones en la figura 3.46 y únicamente se explicará la obtención de las curvas en las proyecciones respectivas.

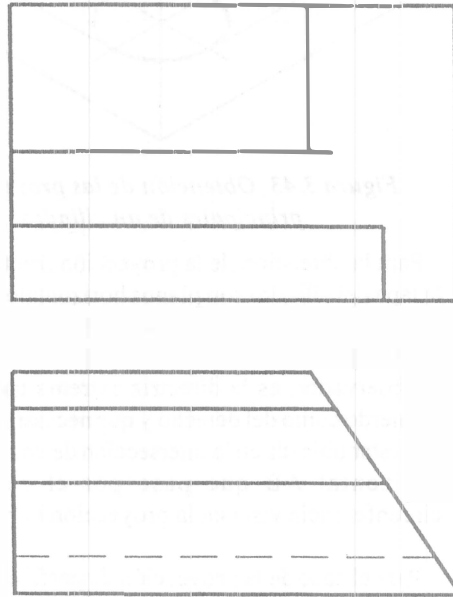


Figura 3.46 *Proyecciones principales de una Guía Circular*

Dado que la perforación es un cilindro de sección circular paralelo a uno de los planos de proyección, en este caso al de perfil, es en esta proyección donde aparecerá vista como una circunferencia, ahora bien, sabemos que si un cilindro es cortado por un plano el cual es oblicuo respecto al eje del cilindro, se generará una elipse, que es nuestro caso, cuyos ejes mayor y menor los obtendremos por medio de proyecciones y que están identificados en la figura 3.47 por los puntos A, B, C y D.

Por dichos puntos pasan generatrices que se ven como punto en la proyección de perfil y que definen los ejes de la elipse en la proyección horizontal, en la

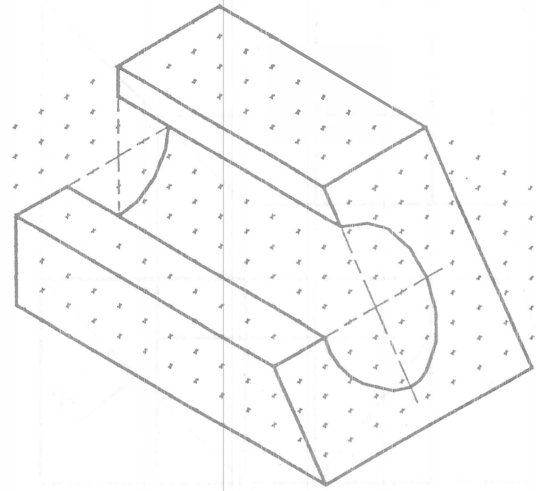


Figura 3.45 *Dibujo isométrico de una Guía Circular*

proyección frontal dichos puntos quedarán ubicados en el filo que define al plano. Así como se encontraron esos puntos para el trazo de la elipse, se ubican tantos puntos como sean necesarios en la proyección de perfil, por donde pasarán generatrices de tipo fronto-horizontal, y se obtienen sus proyecciones correspondientes para generar la elipse en la proyección horizontal, como se ve en la figura 3.47, en donde las proyecciones aparecen completas. Cabe mencionar que las líneas que aparecen segmentadas, son líneas de perfil oculto, es decir, son líneas que está obstruida su visibilidad por otra parte del cuerpo pero que deben ser representadas en las proyecciones principales del cuerpo.

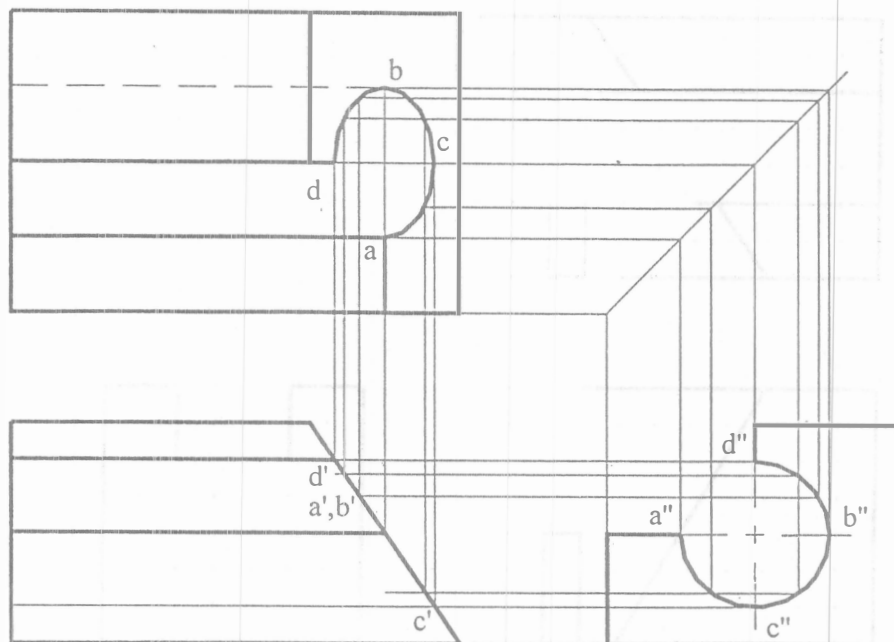


Figura 3.47 Obtención de los ejes, en proyección horizontal, de la Guía Circular.

En la figura 3.48 se muestra un cuerpo, *Base Angular*, en donde aparecen otro tipo de intersecciones, como las que se presentan con el plano oblicuo y los planos horizontal A y de perfil B.

La figura 3.49 presenta parte de las proyecciones, y en algunos casos, con línea de construcción, el fragmento del cuerpo a definir, y únicamente se explicará la obtención de las intersecciones del plano oblicuo y los planos mencionados.

En la figura 3.50 se puede observar que en la proyección de perfil el segmento AB es la intersección del plano horizontal del "canal" con el plano oblicuo del cual deseamos obtener sus proyecciones, y dicho segmento es fácil de ubicar en la proyección de perfil. También es fácil ubicar en la proyección frontal el plano frontal, del cual sólo se identifica su segmento fronto-horizontal MN. Conviene hacer notar que el segmento AB es horizontal y que **necesariamente** tendrá que ser paralelo a cualquier otro segmento horizontal contenido en el plano oblicuo, como aquellos que limitan al plano oblicuo con los extremos superior e inferior de la envolvente.

Si trazamos la recta definida por los puntos a'b', esta recta se intersectará con la recta frontal que está en el límite de la envolvente, identificado como c' en la figura, y que es la intersección del plano oblicuo con el plano frontal que está en el límite de la envolvente. Obtenemos la proyección horizontal del punto C y por

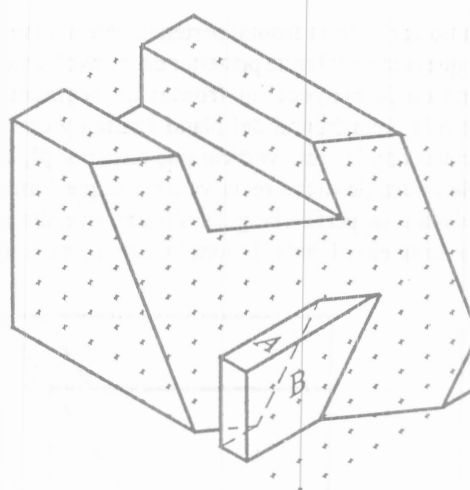


Figura 3.48 Dibujo isométrico de un Bloque Angular.

este punto trazamos una recta horizontal paralela a las rectas horizontales contenidas en el plano oblicuo, segmento dc, que es el que contiene a los puntos ab buscados, por lo que sólo resta trazar en la proyección horizontal los segmentos fronto-horizontales que pasan por los puntos A y B y que en su intersección con el segmento CD definen la proyección horizontal del canal. Para la obtención de la proyección frontal, dado que AB es un segmento horizontal, sus cotas son constantes y deberán pasar por el punto c', por lo que es fácil obtener la proyección frontal a'b', y a partir de estos puntos trazar segmentos paralelos a la recta frontal del plano oblicuo, con lo que queda definida la proyección frontal del canal.

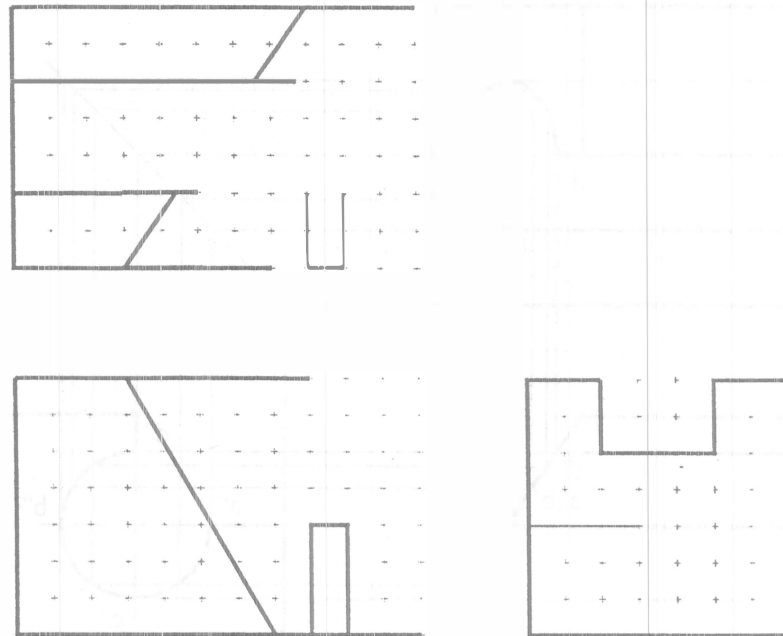


Figura 3.49 Proyecciones incompletas del Bloque Angular.

Para ubicar la recta frontal perteneciente al plano oblicuo que está en el límite posterior de la envolvente, trazamos en la proyección frontal un segmento paralelo a la recta frontal del plano frontal, y en su intersección con la recta vertical que pasa por p' , se define la altura de dicha recta vertical y que forma parte del plano de perfil triangular ubicado en el límite derecho de la envolvente, la longitud de la recta de

punta que limita a este plano de perfil, estará dada por la intersección de la proyección horizontal de dicha recta, y la recta horizontal inferior del plano oblicuo, identificada como S en la figura 3.50, se obtienen, con ayuda de la línea de abatimiento, las proyecciones de perfil de los puntos R y S, que es justamente la intersección del plano oblicuo con el plano de perfil que limita la envolvente.

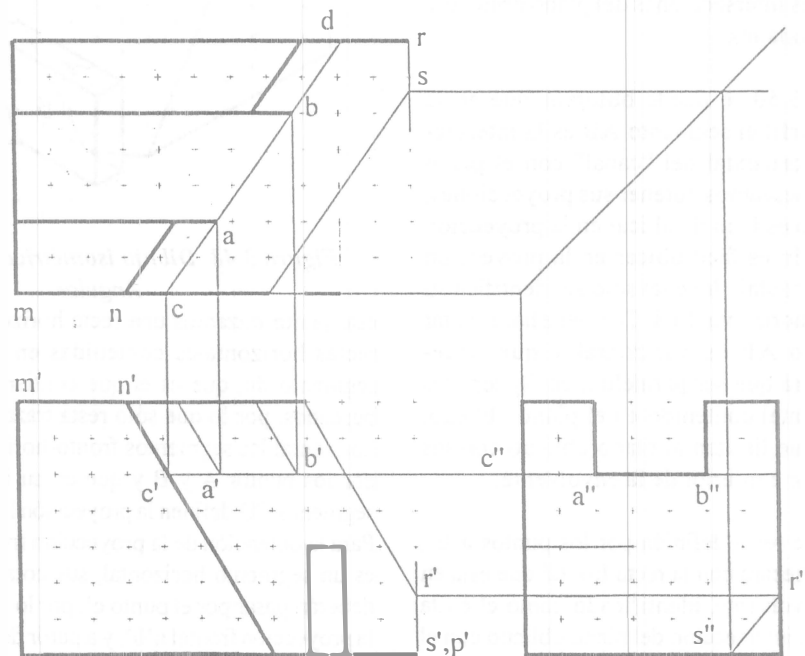


Figura 3.50 Construcción de las proyecciones del Bloque Angular.

En la figura 3.51, se muestran las proyecciones del plano oblicuo ya dibujadas con líneas definitivas, y se procederá a obtener las proyecciones del bloque

que contiene al segmento fronto-horizontal MN y el plano oblicuo del *Bloque Angular*.

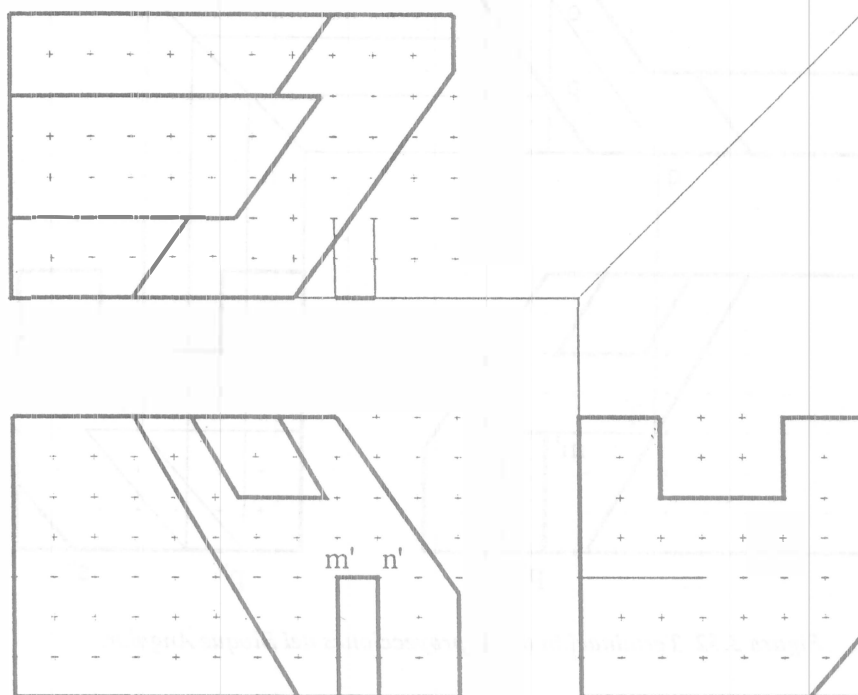


Figura 3.51 Avance de las proyecciones del *Bloque Angular* con la colocación del plano oblicuo.

Se obtendrá primero la intersección del plano de perfil que contiene al segmento de punta que pasa por m' , con el plano oblicuo, vemos que dicho plano se interseca con el plano oblicuo en la recta horizontal del plano oblicuo que pasa por el punto q en la proyección horizontal, identificando como p a tal intersección en la figura 3.52; posteriormente se obtiene la proyección de perfil p'' , y por este punto se traza un segmento de perfil paralelo al segmento, también de perfil $r''s''$, que al intersecarse con la proyección de perfil de la recta de punta que pasa por m' , define el segmento de intersección buscado, $o''p''$ en la figura 3.52.

Es importante destacar que esta recta deberá dibujarse con línea de perfil oculto, dado que el plano de perfil que contiene al punto n' , es visto primero por el observador. Se obtiene la proyección horizontal p ,

y por ésta se traza una paralela a cualquier segmento horizontal del plano oblicuo quedando completamente definida la proyección horizontal del *Bloque Angular*.

Para la obtención de la intersección del plano de perfil que contiene al punto n' (que resulta ser de perfil definitivo), con el plano oblicuo, se procede de manera análoga a la anteriormente obtenida con el plano de perfil que contiene al punto m' , con lo cual quedan definidas completamente las proyecciones principales del *Bloque Angular* y que se muestran en la figura 3.53 con la simbología de líneas adecuada.

Se sugiere resolver los ejercicios del *Cuaderno de ejercicios de Análisis Gráfico* para la mejor asimilación del concepto y la técnica para la obtención de proyecciones principales.

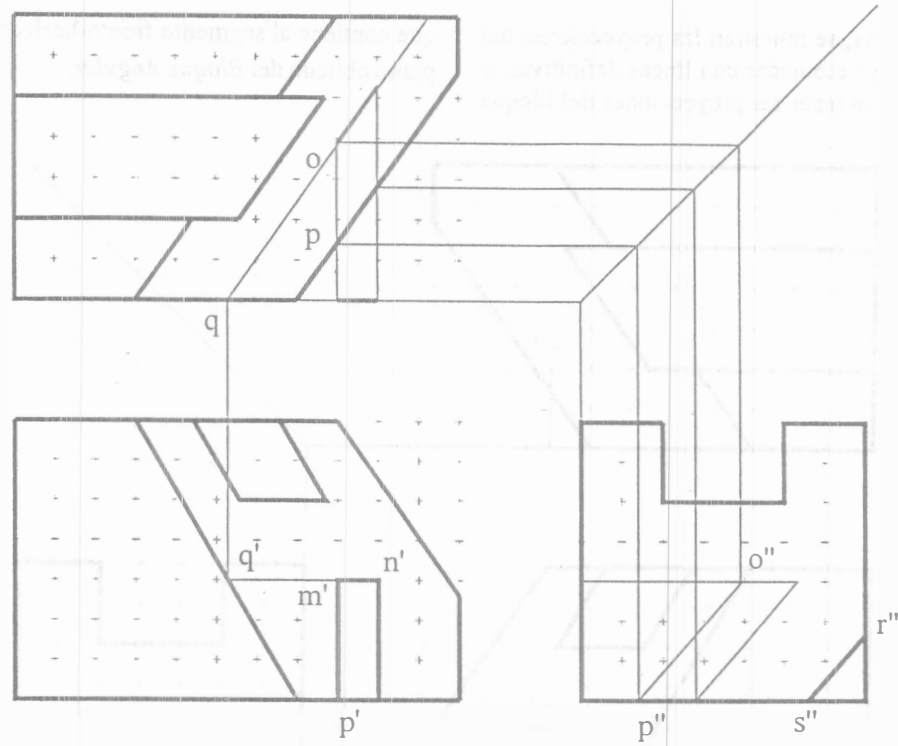


Figura 3.52 Terminación de las proyecciones del Bloque Angular.

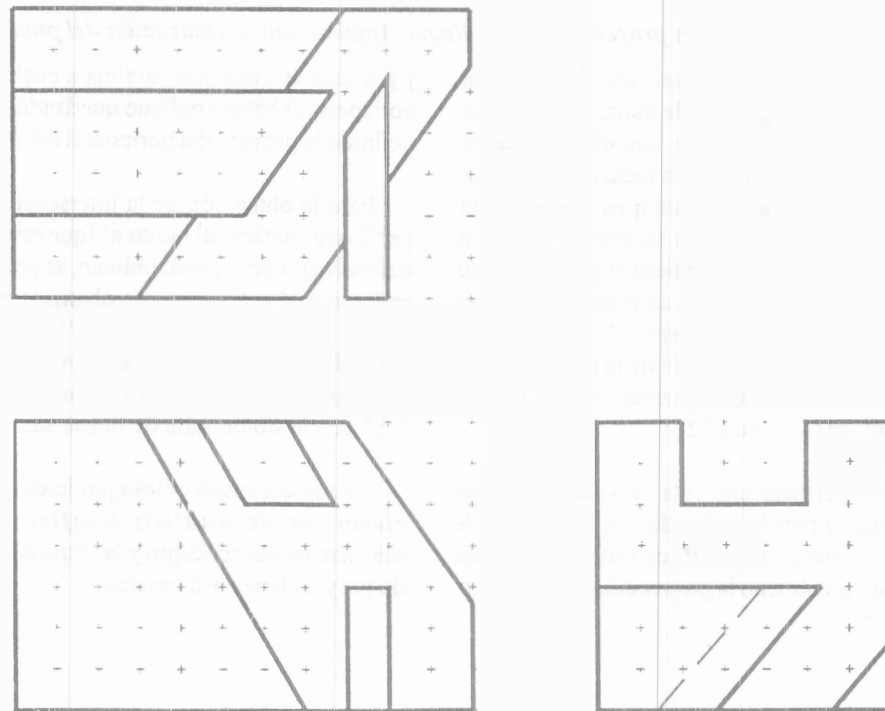


Figura 3.53 Proyecciones principales completas del Bloque Angular.

TEMA 3.3 INTERPRETACIÓN DE PROYECCIONES MULTIPLANARES DE CUERPOS PARA LA OBTENCIÓN DE DIBUJOS ISOMÉTRICOS.

En rigor, la interpretación de las proyecciones principales de un cuerpo deben dar la idea tridimensional del mismo, pero muchas veces una ilustración espacial es necesaria para fines de aclaración, sobre todo si no se poseen los conocimientos de la teoría de las proyecciones. Si nos referimos a la tabla 3.1, vemos que dentro de la clasificación de las proyecciones, en la proyección cilíndrica ortogonal, existe una división que corresponde a las proyecciones axonométricas y multiplanares, que junto con la perspectiva (proyección cónica) son las más empleadas para hacer ilustraciones espaciales. La proyección cilíndrica oblicua no es muy empleada en el quehacer de la ingeniería, a diferencia de la proyección axonométrica, en especial la isométrica, que tiene gran aceptación. En cuanto a la proyección cónica (perspectiva), queda definitivamente descartada debido a que su técnica de elaboración es más compleja, y por tanto no es de uso común en el quehacer profesional de la ingeniería.

Por lo que se puede apreciar, este subtema únicamente se dedicará al estudio de la proyección axonométrica en general y a la isométrica en particular. El significado de *axonometría es medida sobre ejes* y dado que es una proyección vamos a analizar cómo obtenerla. La figura 3.54 muestra las proyecciones principales (horizontal y frontal únicamente) de un cubo, con longitud de sus lados igual a una unidad y ubicado en el tercer cuadrante, con una diagonal identificada como AB.

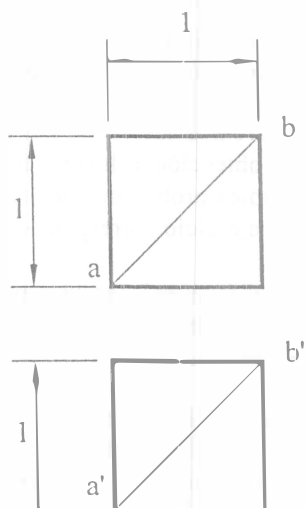


Figura 3.54 Proyecciones horizontal y frontal de un cubo

La idea central se basa en que al momento en que en una proyección veamos dicha diagonal como un punto, figura 3.55, veremos tres caras del cubo, es decir, las proyecciones horizontal, frontal y de perfil al mismo tiempo, dicho de otra forma, tendremos una representación tridimensional del elemento geométrico en el plano. El primer paso es hacer un cambio de planos paralelo a una de las proyecciones del segmento de recta AB; en este caso proponemos un plano de canto paralelo a la proyección frontal del segmento, dado que la recta es oblicua y la necesitamos en magnitud real para poder verla como un punto.

Hacemos ahora un cambio de planos perpendicular a la nueva proyección horizontal de AB para ver al segmento en una de sus proyecciones como un punto, se muestra el resultado en la figura 3.55 con la obtención de la **proyección isométrica** del cubo a partir de sus proyecciones principales.

Analizando la figura observamos que en el primer cambio de planos la longitud total de la nueva proyección horizontal es $\sqrt{2}$ (tomando la medida paralela a la nueva línea de tierra), lo que estamos haciendo es verificar el cambio en la longitud del lado unitario del cubo en la proyección isométrica, vemos que se forman dos triángulos rectángulos semejantes y que en la figura se resaltan por medio de un rayado de sección, uno de los catetos (el menor) del triángulo de menor medida es paralelo al lado del cubo en la proyección isométrica, que lo calcularemos por medio de sus lados homólogos y resulta:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} : \frac{1}{x}$$

por lo que el valor del lado es

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

o bien 0.816; con lo que verificamos que la proyección isométrica sufre una reducción al 81%, aproximadamente, de sus longitudes reales.

Si se nos pidiera obtener una **proyección isométrica** de algún cuerpo tendríamos que obtenerla con

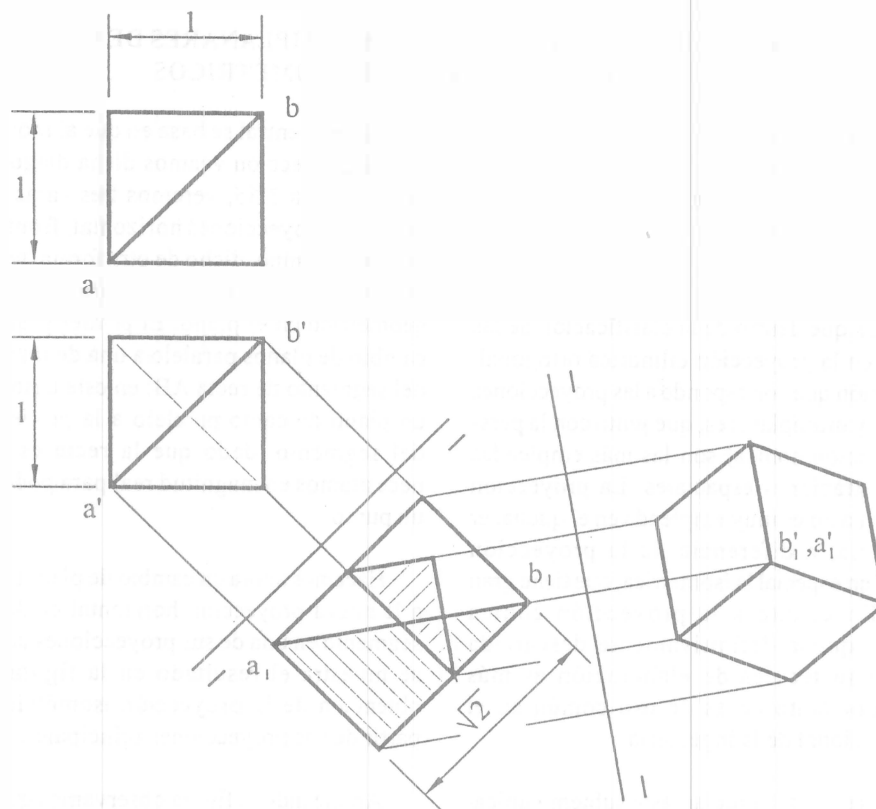


Figura 3.55 Obtención de una proyección isométrica

el método anteriormente descrito, lo que implicaría trabajo extra con los cambios de planos, y se ha optado por hacer un **dibujo isométrico** en el cual se representan tres ejes con una misma separación angular, que necesariamente resulta de 120 grados y sobre estos ejes se miden el ancho, altura y profundidad respectivamente, tomados directamente de las proyecciones principales, con lo cual se simplifica considerablemente el trabajo.

Vale la pena destacar que el nombre *isométrica* indica la misma escala de medida sobre los ejes, de donde inferimos que para la proyección dimétrica se emplea la misma escala sobre dos ejes y diferente para el restante, y para la proyección trimétrica se emplea una escala diferente para cada uno de los ejes.

La figura 3.56 muestra la ubicación de los ejes así como del observador para la proyección frontal, en lo que resta del tema se debe considerar que únicamente se trabajará con el sistema de proyección del tercer cuadrante. Ahora estamos en condición de poder hacer nuestro primer dibujo isométrico, para

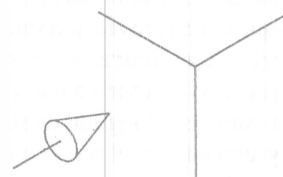


Figura 3.56 Ubicación de ejes y observador para el sistema de proyección del tercer cuadrante

lo cual emplearemos la misma metodología que usamos para la obtención de las proyecciones principales, los posibles problemas que se presenten se comentarán el ejercicio correspondiente.

La figura 3.57 muestra las proyecciones principales de un cuerpo, *Bloque*, del cual deseamos obtener su dibujo isométrico.

El primer paso es identificar los planos que delimitan al cuerpo, en este caso únicamente en la proyección horizontal, la figura 3.58 muestra al cuerpo con las letras que identifican a los planos que delimitan al cuerpo.

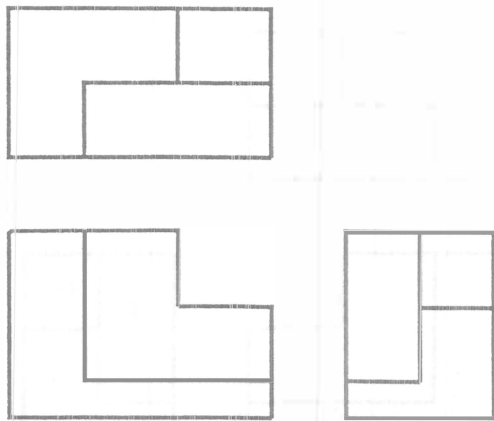


Figura 3.57 Proyecciones principales de un Bloque

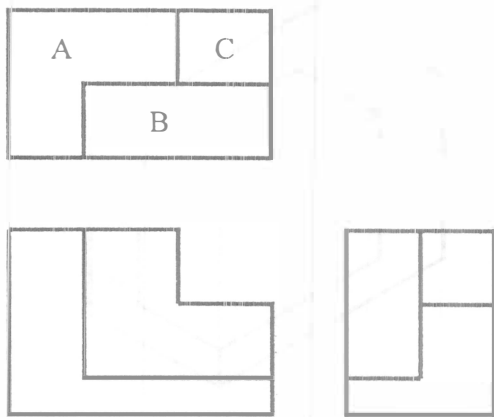


Figura 3.58 Identificación de planos en la proyección horizontal

De acuerdo a la metodología planteada, dibujamos primero a los planos que se encuentran en el límite de la envolvente y que son paralelos a los planos principales de proyección, el problema que se presenta es que no podemos decir a priori cual de los tres planos es un plano horizontal localizado en el límite de la envolvente, por lo que tenemos que hacer un análisis y con base en los conocimientos adquiridos en el capítulo II sobre el plano, lo aplicamos a la teoría de las proyecciones.

En principio podríamos suponer que el plano ^AC es un plano que cumple con las características de la metodología, es decir, un plano que limita en la parte

superior al cuerpo y que es paralelo al plano horizontal de proyección; sabemos que un plano horizontal se ve como un filo en la proyección frontal, y si dicho plano lo suponemos en el límite de la envolvente, su proyección frontal deberá ser un filo en la parte superior de tal proyección, verificando las proyecciones vemos que no existe filo en la proyección frontal, esta parte de la envolvente no la ocupa el cuerpo, por lo que de manera automática queda también descartado el plano identificado con la letra B; la única opción que queda y cumple con las características es el plano A, que al analizarlo en las otras proyecciones verificamos que existen aristas que podrían ser el filo del plano en la proyección correspondiente, la figura 3.59 muestra la ubicación del plano junto con la envolvente.

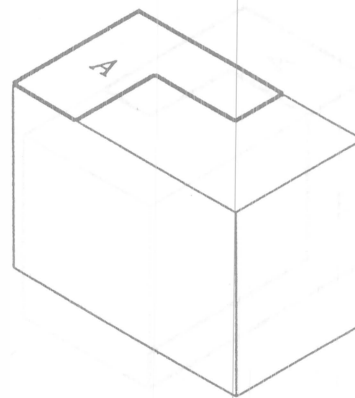


Figura 3.59 Ubicación del primer plano

La figura 3.60 muestra la identificación de los planos en la proyección frontal para posteriormente colocarlos en la envolvente, verificamos que cualquiera de los dos planos puede ser un plano frontal en el límite de la envolvente, pues al analizar las proyecciones horizontal y de perfil existen aristas que pueden representar el filo del plano frontal, por lo que optamos en principio por el plano E considerando que satisface las características de la metodología, y aparte porque contiene una recta fronto-horizontal común con el plano horizontal ya trazado; en la figura 3.61 se muestra la envolvente con los planos analizados. No consideramos al plano D, pues si dos planos son frontales, uno y sólo uno de ellos está en el límite de la envolvente, y por tanto son mutuamente excluyentes.

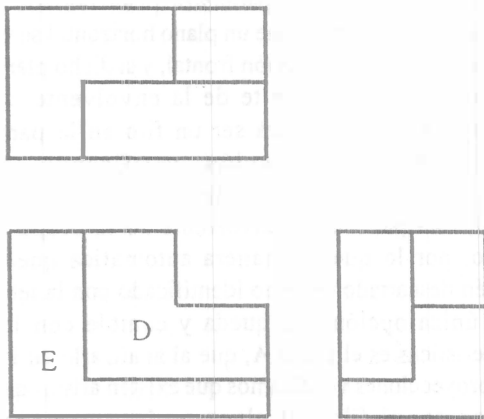


Figura 3.60 Identificación de planos en la proyección frontal

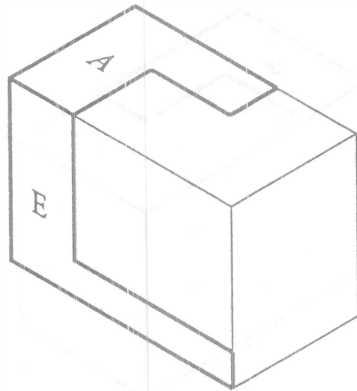


Figura 3.61 Avance del dibujo isométrico con la ubicación de dos planos.

Para terminar con el análisis de los planos paralelos a los planos principales de proyección en el límite de la envolvente, se muestran en la figura 3.62 los planos que se pueden considerar como planos de perfil, y nuevamente vemos que el único que satisface las características de estar en el límite de la envolvente, es el plano identificado como **H**, dado que en la proyección frontal existe un *filo* que corresponde a dicho plano, cosa que no sucede con los planos identificados como **F** y **G**.

La figura 3.63 muestra el avance del dibujo isométrico con la colocación de los planos paralelos a los planos principales de proyección localizados en el límite de la envolvente.

Para seguir con la metodología planteada, lo que procede ahora es ubicar los planos paralelos a los pla-

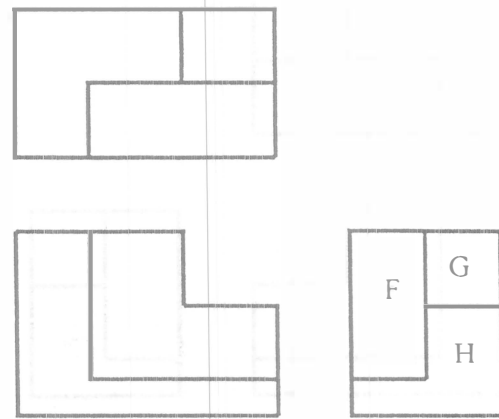


Figura 3.62 Identificación de planos en la proyección de perfil

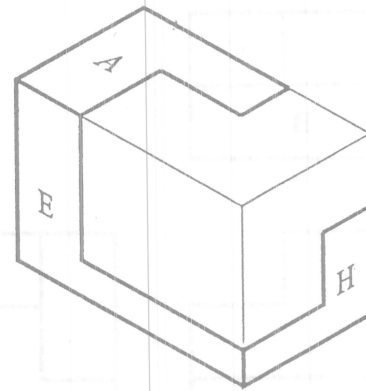


Figura 3.63 Avance del dibujo isométrico, con la colocación de los plano paralelos a los planos principales de proyección y que están en el límite de la envolvente

nos principales de proyección pero *que no estén en el límite de la envolvente*; iniciamos nuevamente con la proyección **horizontal** (ver figura 3.58) y verificamos que tanto el plano identificado como **B** así como el **C** pueden suponerse como horizontales, pues si nos apoyamos en las proyecciones frontal y de perfil, vemos que existen aristas que pueden representar al filo de los planos en las proyecciones correspondientes, en la figura 3.64 se muestra la ubicación de dichos planos, y para fines aclaratorios, en este caso se muestran también los fillos con sus respectivas proyecciones, auxiliándonos por la letra que identifica al plano seguida por un ' en el caso de la proyección frontal, ej **C'**; y por la letra y'' en el caso de la proyección de perfil, ej **C''**, asimismo, la figura 3.65 muestra el dibujo isométrico del cuerpo con la colocación de los planos **B** y **C**.

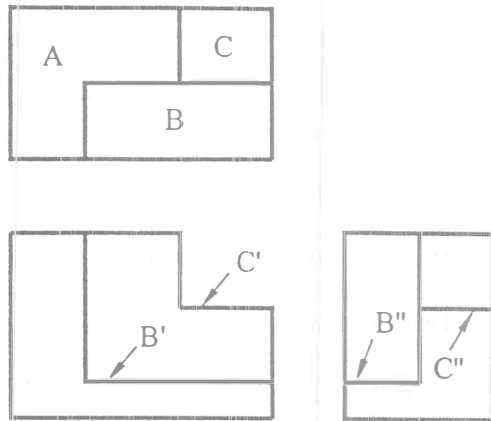


Figura 3.64 Identificación de planos horizontales que no están en el límite de la envolvente.

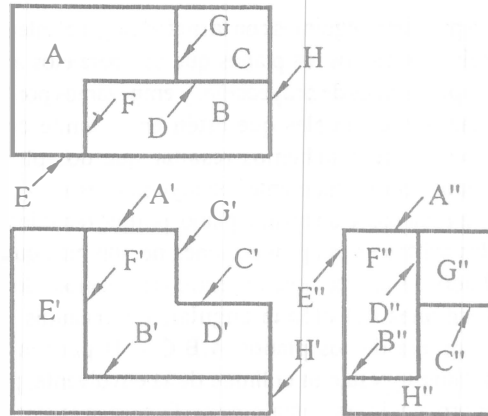


Figura 3.66 Identificación de planos frontales y de perfil que no están en el límite de la envolvente.

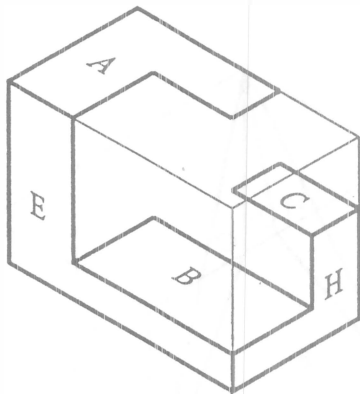


Figura 3.65 Avance del dibujo isométrico

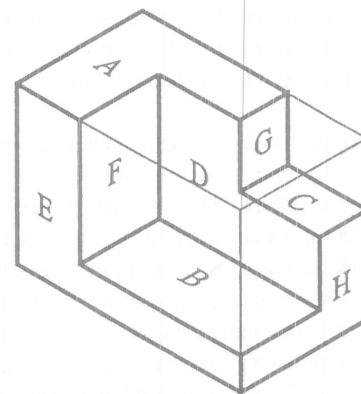


Figura 3.67 Dibujo isométrico completo del Bloque, con la identificación de los planos que lo conforman

De forma similar, identificamos los planos frontales y de perfil en las proyecciones horizontal y de perfil, en el caso de los primeros; y en las proyecciones horizontal y frontal, en el caso de los segundos; la figura 3.66 muestra las proyecciones principales con tales planos; y la figura 3.67 muestra el dibujo isométrico completo, pues ya están considerados todos los planos.

El ejercicio que acabamos de resolver involucró únicamente planos paralelos a los planos principales de proyección, en el siguiente ejercicio involucraremos planos perpendiculares a los planos de proyección, así como planos triangulares, que tienen una interpretación más difícil. La figura 3.68 muestra las proyecciones principales de un **Bloque Angular** del cual obtendremos su dibujo isométrico, vale la pena destacar que la solución ya no es tan directa y que requiere de más análisis.

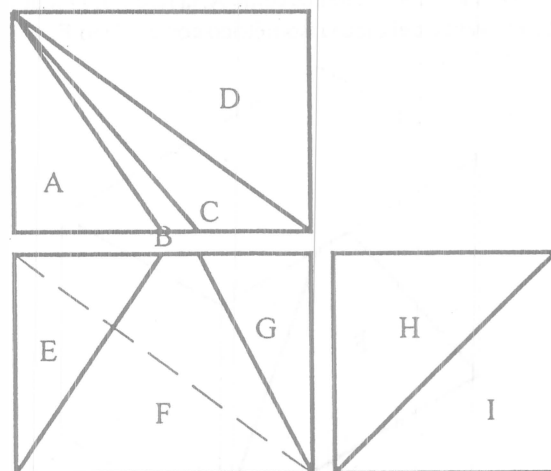


Figura 3.68 Proyecciones principales de un Bloque Angular

En principio seguimos con la metodología planteada, es decir, colocamos los planos que son paralelos a los planos principales de proyección, y empezamos por el o los planos horizontales que estén en el límite de la envolvente, pero debemos resaltar que dos planos contiguos son mutuamente excluyentes, es decir, no pueden estar sobre un mismo plano, porque recordemos que las aristas en las proyecciones no son más que el resultado de la intersección entre dos planos; de las proyecciones del bloque angular, observamos que cualesquiera de los planos A, B, C o D pueden ser horizontales y estar en el límite de la envolvente, pues en las proyecciones frontal y de perfil existen aristas que pueden representar a tales planos, en casos como éste conviene seguir con los planos frontales y/o de perfil, para tener más elementos de análisis con los planos horizontales, se recomienda que antes de proceder a hacer el dibujo isométrico con instrumentos, **se haga primero un croquis a mano libre**, y hasta no estar completamente seguros de que el isométrico corresponde con las proyecciones, proceder a hacerlo con instrumentos.

En la proyección frontal se presenta casi el mismo caso, pero si observamos detenidamente, tenemos dos triángulos y un trapezoide, sabemos que si un plano muestra su forma en dos o tres proyecciones, entonces no es un plano paralelo a los planos principales de proyección, de otra forma es un plano perpendicular a uno de ellos o bien oblicuo; vemos entonces que el plano F no muestra su forma en alguna otra proyección y por tanto es un plano frontal, con lo que quedan eliminados como planos frontales los identificados como E y G, por lo que podemos suponer que el plano identificado como A en la proyección horizontal y el plano E de la proyección frontal son en realidad un mismo plano el cual a partir de ahora lo identificaremos como A, la figura 3.69 muestra el avance del dibujo isométrico con el plano F.

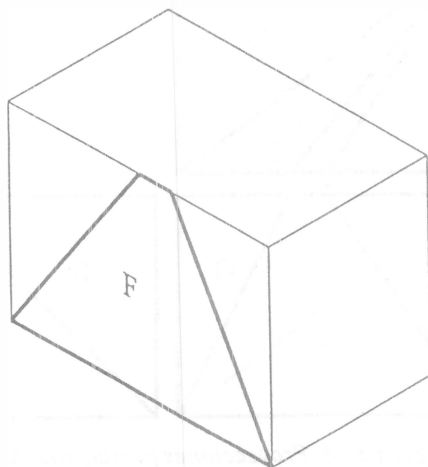


Figura 3.69 Colocación del plano F.

La colocación del plano F en la envolvente nos permite discriminar planos horizontales, dado que si ya tenemos una arista en el límite de la envolvente, ésta puede ser parte de un plano horizontal que en este caso sería el plano B, con lo cual quedan eliminados como planos horizontales A y C; por otro lado el plano A (identificado en la proyección frontal como E) está delimitado por una recta frontal, que también pertenece al plano F, y una horizontal, contenida en el plano B, podemos entonces asegurar que es un plano oblicuo, pues es el único que puede contener estos dos tipos de rectas, y analizando proyecciones, el único lado que hace falta analizar del plano A es una recta de perfil, lo cual confirma que es un plano oblicuo; el plano C tiene las mismas consideraciones que el A, y la arista que falta analizar es de tipo oblicuo y aparece en la proyección frontal con línea de perfil oculto; la figura 3.70 ilustra el análisis anterior.

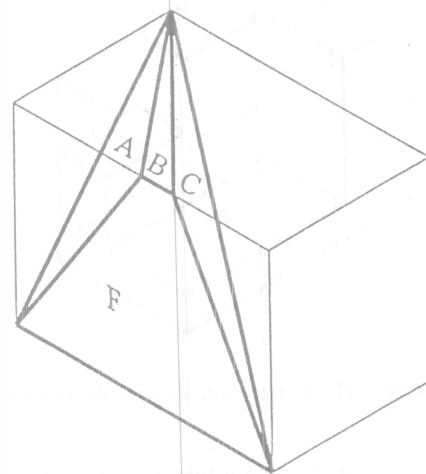


Figura 3.70 Avance del dibujo isométrico del Bloque Angular.

Vemos que la última recta oblicua identificada es una arista común entre los planos identificados en la proyección horizontal como C y D (figura 3.68), por lo cual el plano D no puede ser horizontal (un plano horizontal no puede contener rectas oblicuas) y dado que una arista que lo limita tiene alejamientos constantes existen dos posibilidades, o es una recta horizontal o es una fronto-horizontal, por lo que analizaremos los dos casos que se muestran en las figuras 3.71 y 3.72 respectivamente, considerando en el primero al plano H como plano de perfil e I como plano de canto, y en el segundo considerando a I como plano de perfil y a H como plano paralelo a la línea de tierra.

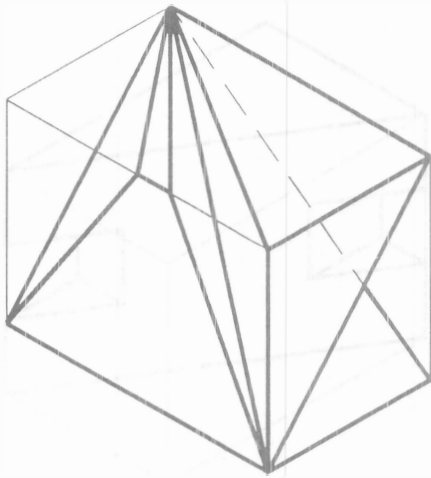


Figura 3.71 Primera consideración.

Existen dos soluciones para el *Bloque Angular* a partir de las mismas proyecciones principales, de ahí la importancia de dar un dibujo ilustrativo para aclarar la idea, no sea que uno quiera que le maquinen una pieza y le regresen otra. Estos casos son raros, pero pueden llegar a presentarse, por lo que vale la pena invertir tiempo en la selección de la proyección frontal de la pieza, y tener cuidado sobre todo con los planos de forma triangular.

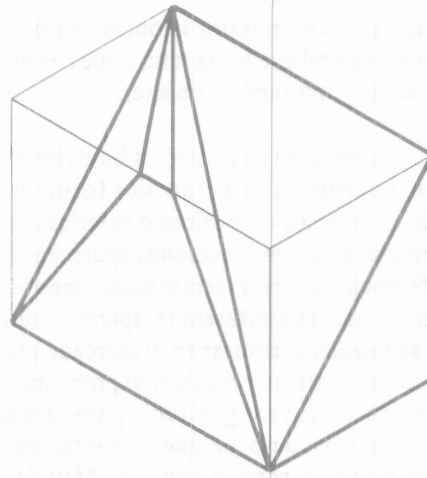


Figura 3.72 Segunda consideración.

Hay ocasiones en las que se tienen únicamente dos proyecciones y se desea obtener la proyección faltante así como el dibujo isométrico: en tales casos resulta más fácil **elaborar primero el dibujo isométrico y a partir de éste obtener la proyección faltante**, que hacerlo a la inversa; la figura 3.73 muestra las proyecciones frontal y de perfil de un **Apoyo** (ya con identificación de planos) y a partir de éstas obtendremos primero el dibujo isométrico y posteriormente la proyección horizontal faltante.

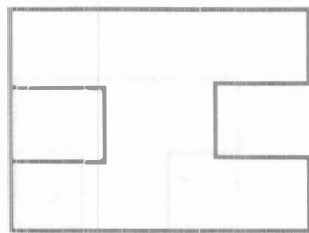
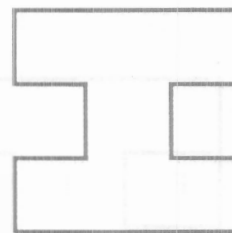


Figura 3.73 Proyecciones principales de un *Apoyo*

Cuando tengamos planos de los cuales se vea su forma inmediatamente en dos o tres proyecciones, los colocamos después de ubicar los planos paralelos a los planos principales de proyección en el límite de la envolvente, en el caso del **Apoyo** vemos que el plano con forma de **I** muestra su forma en las dos proyecciones (no existen planos frontales, horizontales o de perfil en el límite de la envolvente, se sugiere hacer el análisis); sabemos que los planos que muestran su forma en tales proyecciones o son planos oblicuos o bien verticales, y como está limitado por rectas verticales descartamos que sea oblicuo, la figura 3.74 muestra la colocación del plano identificado como **I**.

El plano **F** vemos que es un plano frontal y el plano **G** es uno de perfil, la figura 3.75 muestra la solución del dibujo isométrico completo del **Apoyo**.



FACULTAD DE INGENIERIA

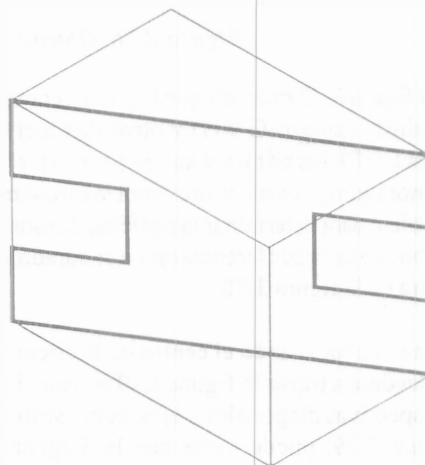


Figura 3.74 Colocación del plano vertical **I**.

La figura 3.76 muestra la obtención de la proyección horizontal que hacía falta y que con el dibujo isométrico fue más fácil de obtener.

En la elaboración de algunos dibujos isométricos existen cuerpos que están conformados por superficies cónicas, cilíndricas o esféricas, en tales casos en una de sus proyecciones aparecen arcos de circunferencia para representar tales superficies. En isométrico una circunferencia aparece como una elipse; se pueden encontrar en el mercado plantillas de elipses isométricas y resolver el problema, o bien hay varios métodos gráficos para dibujarlas (aproximarlas) como el que a continuación se presenta y que se conoce como el *Método de los Cuatro Centros*, en las figuras 3.77 a 3.81 se muestra su procedimiento de construcción.

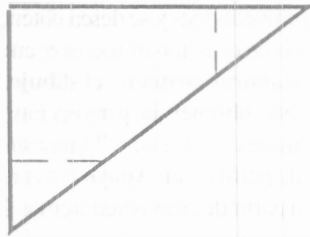


Figura 3.75 Dibujo isométrico del Apoyo

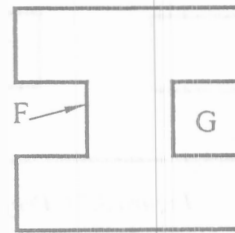
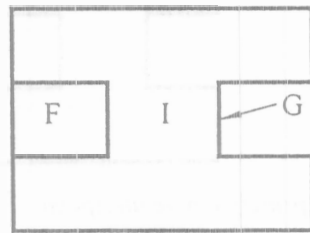


Figura 3.76 Obtención de la proyección horizontal del Apoyo.

La figura 3.77 muestra que hay dos centros dentro de la elipse (puntos G y H) y otros dos fuera de ella (puntos E y F); los primeros sirven para trazar los arcos de menor radio y los exteriores para los arcos mayores, ahora bien, para determinar la posición de esos centros, inscribimos la circunferencia en un cuadrado como se muestra en la figura 3.78

Una vez localizado el centro de la circunferencia se procederá a trazar la figura 3.79 en isométrico con sus respectivas diagonales y ejes, como se muestra en la figura 3.79, puede verse que la diagonal AC es

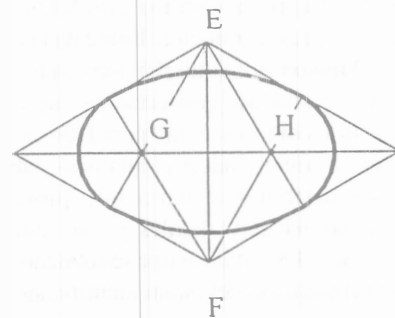


Figura 3.77 Ubicación de los cuatro centros.

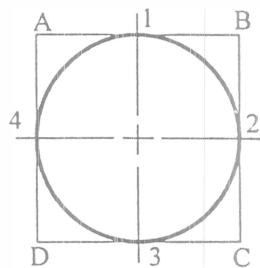


Figura 3.78 Circunferencia inscrita en un cuadrado.

mayor que BD; debido a esto la diagonal AC será la dirección del eje mayor de la elipse y el lugar geométrico que contenga a los centros interiores (estos equivalen a los focos de la elipse).

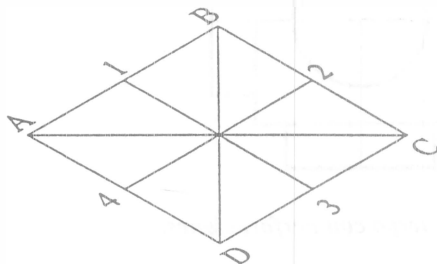


Figura 3.79 Dibujo isométrico de la figura 3.78

Los centros exteriores estarán definidos por los puntos extremos de la diagonal menor, Figura 3.80, en este caso BD y los puntos de tangencia (que en realidad no lo son, pues no comparten la misma normal, además recordemos que estamos aproximando el trazo de la elipse) se definirán por los puntos medios de cada uno de los segmentos de recta AB, BC, CD y DA identificados como 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Para localizar los centros interiores bastará con trazar segmentos a partir de los puntos B y D, con sus respectivos puntos de tangencia opuestos a cada uno de ellos, y a partir de las intersecciones de estos segmentos con el eje mayor de la elipse (diagonal AC), se definen los centros interiores buscados, figura 3.81. La elipse se traza con compás haciendo centro en los puntos señalados hasta los puntos de tangencia, los cuales indicarán el cambio de curvatura.

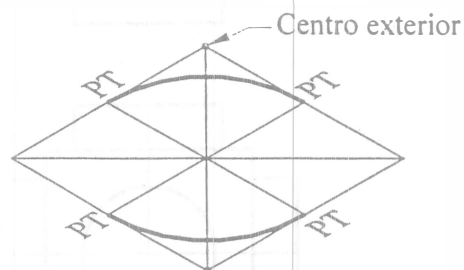


Figura 3.80 Ubicación de los puntos de tangencia.

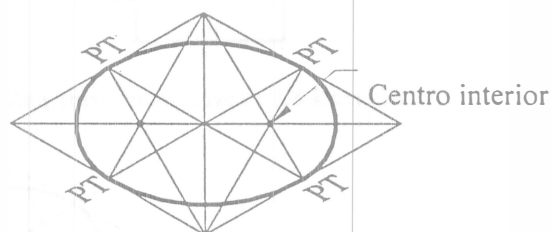


Figura 3.81 Ubicación de los centros interiores y trazo de la elipse.

La figura 3.83 muestra las proyecciones principales de un cuerpo con cilindros para ejemplificar el método, y en la figura 3.84 se muestra su correspondiente dibujo isométrico con los trazos auxiliares que sirvieron para el trazo de las circunferencias (elipses).

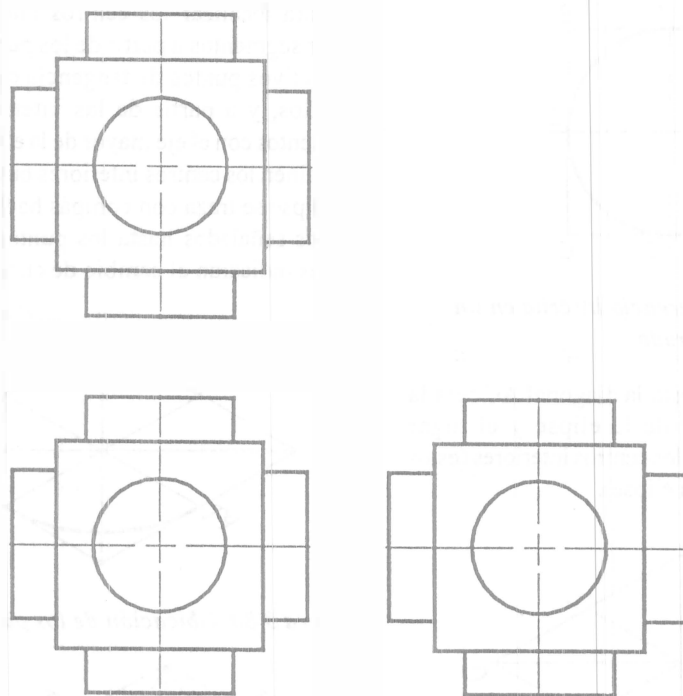


Figura 3.82 Proyecciones principales de un cuerpo con perforaciones.

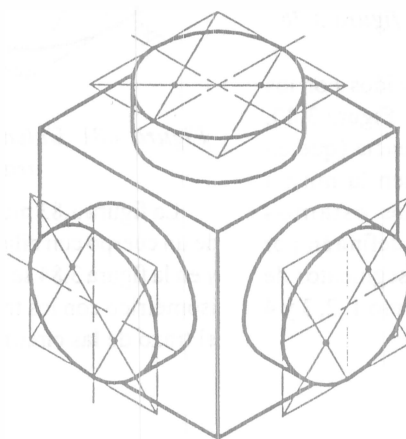


Figura 3.83 Dibujo isométrico de la figura 3.82.

SUBTEMA 3.4 FORMAS PRIMITIVAS TRIDIMENSIONALES DEL DIBUJO CON COMPUTADORA

La representación tridimensional es posible hacerla de manera directa con ayuda de la computadora, así en lugar de hacer un dibujo isométrico se puede dibujar en tercera dimensión. Existen varios paquetes para dibujar por medio de la computadora, al que se hará referencia en lo que resta del presente subtema será AutoCAD en su versión conocida como 10, debido a que es fácil de obtener e

instalar, y no es tan costosa como las últimas versiones, que inclusive ya vienen para ser trabajadas bajo entorno Windows, por otro lado no se necesita un equipo de gran capacidad y por lo mismo es más probable que se tenga acceso a uno para poder practicar.

Partiremos de la premisa que se sabe entrar al editor de dibujo de AutoCAD y que se conocen los

comandos básicos, de no ser así, se sugiere leer el apéndice de estos apuntes para adquirir los conocimientos mínimos indispensables y poder realizar los dibujos recomendados. Por otro lado, dados los alcances de estas notas en general, y del subtema en particular, se recomienda leerlo a efecto de saber lo que son las formas primitivas, sin necesidad de teclear los comandos para obtenerlas con AutoCAD.

Todos los elementos trazados en AutoCAD se realizan en un plano, siempre se hace referencia al plano **XY**, es posible girar los ejes y tener una nueva ubicación del plano, es decir, si consideramos el plano cartesiano con la dirección positiva de las abscisas a la derecha y de las ordenadas hacia arriba, tenemos que el eje Z es perpendicular a dicho plano, su dirección sería «saliendo de la hoja» (o bien de la pantalla), si giramos el eje Z 90 grados (el sentido positivo sigue siendo contrario a las manecillas del reloj) ahora el sentido positivo del eje de las abscisas sería hacia arriba y el de las ordenadas hacia la izquierda. En AutoCAD la ubicación del origen es en la parte inferior izquierda de la pantalla de la computadora.

Sabemos que si dibujamos una esfera en isométrico su proyección en cualquier plano será una circunferencia, de la misma forma si dibujamos un paralelepípedo delimitado por rectas perpendiculares a los planos principales de proyección, cualquiera de sus proyecciones resultará un cuadrilátero.

Estos dos cuerpos geométricos es posible generarlos a partir de un dibujo en AutoCAD, si tenemos dibujada una proyección es suficiente con darle espesor y por medio de un comando obtener una representación tridimensional. Normalmente cuando se dibuja en proyecciones se emplean los comandos **Line**: y **Pline**: para segmentos de recta, y **Arc**: y **Circle** para contornos circulares, cuando a estos elementos se les cambia el grosor (*Thickness* en AutoCAD), sus proyecciones permanecen inalterables, pero ya tenemos un elemento dibujado en tercera dimensión, por ejemplo, supongamos que tenemos dibujados un rectángulo de 40x50 mm y una circunferencia de 35 mm de radio, como se muestra en las figuras 3.84 y 3.85; si deseamos a partir de estas figuras geométricas obtener un paralelepípedo y un

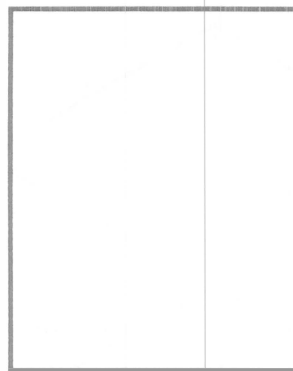


Figura 3.84 Rectángulo dibujado con AutoCAD.

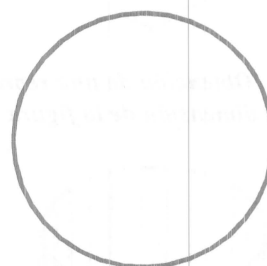


Figura 3.85 Circunferencia dibujado con AutoCAD.

cilindro respectivamente, debemos teclear en AutoCAD lo siguiente, estando el indicador en **Command**:

Change (enter)

select objects: (seleccionar el rectángulo y la circunferencia) (enter) (enter) P (enter) T 50 (enter)(enter).

Con el empleo de estos comandos hemos dado instrucciones a la computadora para que le de grosor a las figuras que seleccionamos; a todo elemento dibujado en AutoCAD se le pueden cambiar de 1 a 5 propiedades (de aquí que hayamos tecleado P) que son capa (layer), color, Elevación (elev) Tipo de línea (linetype) y grosor (thickness), ahora para ver el efecto de la tercera dimensión tecleamos **vp**point, forma abreviada del comando Viewpoint (punto de vista) y posteriormente -1,-1.1 (enter) con lo cual obtenemos una representación tridimensional de nuestros dibujos y que se muestran en las figuras 3.86 y 3.87.

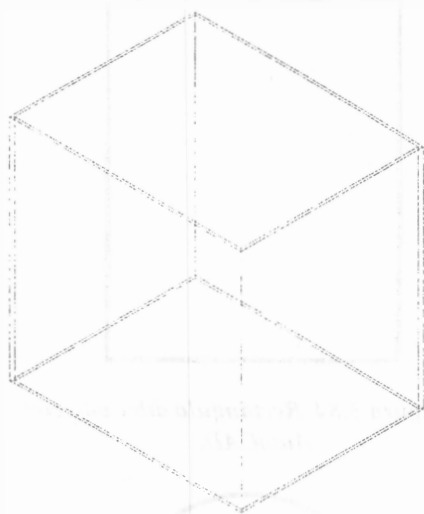


Figura 3.86 Obtención de una representación en tercera dimensión de la figura 3.84.

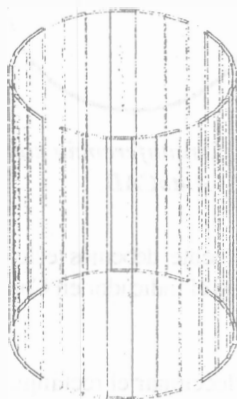


Figura 3.87 Obtención de una representación en tercera dimensión de la figura 3.85.

A este tipo de representaciones se les conoce como *estructuras de alambre*, ya que lo único que hace es delimitar el dibujo por medio de segmentos, es decir, no son sólidos, los simula uniendo tales segmentos por medio de superficies, pero no son sólidos.

Vale la pena observar la ubicación que se le dio al observador, los números tecleados indican que el observador se ubicará en -1 en el eje de las X, en -1 en Y y en 1 en Z y a partir de ese punto dirigir la visual hacia el origen, que si analizamos un poco, es como si a partir de un cubo con medida unitaria a una de sus diagonales la observáramos como un punto (lo que se hizo para obtener la proyección isométrica) y de ahí que tengamos una representación espacial.

Se pueden obtener representaciones espaciales de esta forma o bien con lo que se conoce como *formas*

primitivas, de las que existen bidimensionales y tridimensionales. Estas formas primitivas no son más que elementos **geométricos** simples, tales como líneas, rectángulos, arcos, circunferencias, polígonos regulares, etc. y que son almacenados en la computadora en forma de librerías, para que puedan ser empleadas por el usuario u obtener formas más complejas a partir de éstas, por ejemplo, para el trazo de una línea, aplicando el axioma de Euclides que establece que *por dos puntos se puede hacer pasar una recta*, basta con que el usuario defina dos puntos en un marco de referencia, y sea trazada la línea, se establece un algoritmo para este axioma, y se puede emplear tantas veces como sea necesario, en el caso de una circunferencia, un algoritmo podría ser que se pida el centro de la circunferencia y se dé el radio de la misma para poder emplearla las veces que uno quiera.

En el caso de las formas primitivas tridimensionales, se consideran como básicas a la caja (paralelepípedo), esfera, cuña, pirámide, cilindro, cono, toroide y *semiesfera*. A partir de estas formas básicas se pueden construir formas compuestas con los operadores booleanos **and**, **or** y **not**, que no son otra cosa que la adición, sustracción e intersección de dos primitivas. De esta forma si a una esfera y un cilindro se les aplica el operador lógico **or**, se tendrá un nuevo elemento con el resultado de esa suma. Asimismo si se tienen dos cilindros circulares rectos de diferente radio y teóricamente se hace que ocupen el mismo espacio para posteriormente aplicarles el operador booleano **not**, el resultado será un tubo con espesor igual a la diferencia de los radios de los cilindros, si coinciden los ejes.

Finalmente el operador booleano **and** dará como resultado una forma compuesta que será la intersección de las dos primitivas básicas.

Se han ejemplificado los operadores con las primitivas básicas, pero es posible operar con formas compuestas y primitivas, o bien entre formas compuestas diferentes. En lo que resta de las notas se hará referencia a cómo obtener las formas primitivas básicas, sin operar con ellas, dado que esto se puede hacer con un programa diferente a AutoCAD (se compra aparte) pero que necesita de AutoCAD para trabajar. El acceso a estas formas primitivas es por medio de los comandos que aparecerán al seleccionar del menú principal el bloque de comandos 3D, y posteriormente seleccionar **3d objects**, con lo cual aparecen las formas primitivas tridimensionales que proporciona AutoCAD, a continuación se describe, en

el orden en que aparecen, la forma de dibujarlas y qué es lo que se pide en la zona de comandos y para qué, una vez seleccionadas:

Box (caja, figura 3.88)

Corner of box: (indicar la esquina donde va a empezar a dibujar, considerará la inferior izquierda)

Length: (largo, siempre en el sentido de las abscisas)

Cube/<Width>: (ancho, siempre en el sentido de las ordenadas, es el valor por default con opción a dibujar un cubo)

Height: (altura, en el sentido de Z)

Rotation angle about Z axis: (ángulo de rotación respecto al eje Z)

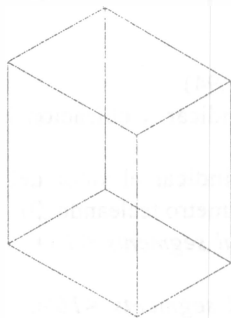


Figura 3.88 Caja en tercera dimensión.

Cone (cono, figura 3.89; lo dibuja siempre recto y de base circular)

Base center point: (indicar el centro de la circunferencia que servirá como directriz)

Diameter/<radius> of base: (radio de la base con opción a indicar el diámetro)

Diameter/<radius> of top <0>: (radio de la tapa superior en caso de querer un cono truncado, con valor por default cero y opción para indicar el diámetro)

Height: (altura del cono, en caso de ser truncado indica la altura de la tapa superior)

Number of segments <16>: (número de segmentos en que dividirá la circunferencia para generar)

Dish: (plato, figura 3.90; dibuja una semiesfera del ecuador al polo sur)

Center of dish: (indicar el centro de la semiesfera)

Diameter/<radius>: (radio de la semiesfera con opción a dar el diámetro)

Number of longitudinal segments <16>: (número de meridianos para dar forma a la semiesfera, 16 es el valor por default)

Number of latitudinal segments <8>: (número de paralelos para dar forma a la semiesfera) superficies que simularán la forma del cono, mientras más sean más se tardará en generarlo)

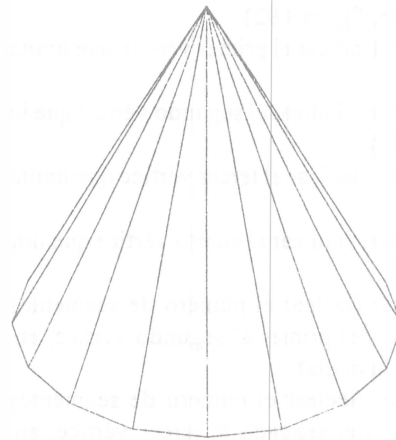


Figura 3.89 Cono en tercera dimensión.

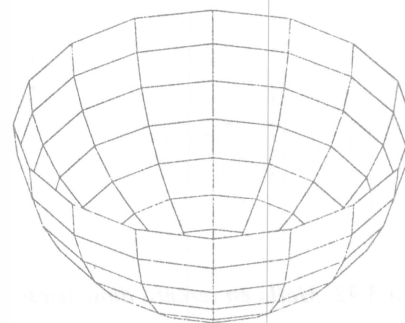


Figura 3.90 Plato en tercera dimensión.

Dome: (domo, figura 3.91; dibuja una semiesfera del ecuador al polo norte)

Center of dome: (indicar el centro de la semiesfera)

Diameter/<radius>: (radio de la semiesfera con opción a dar el diámetro)

Number of longitudinal segments <16>: (número de meridianos para dar forma a la semiesfera, 16 es el valor por default)

Number of latitudinal segments <8>: (número de paralelos para dar forma a la semiesfera)

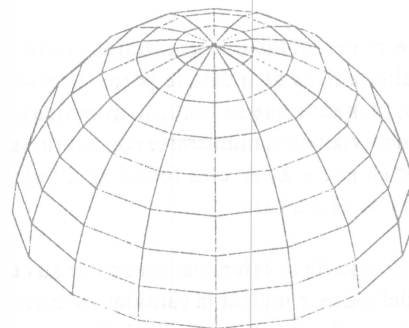


Figura 3.91 Domo en tercera dimensión.

Mesh: (malla, figura 3.92)

First corner: (indicar el primer vértice que limita a la malla)

Second corner: (indicar el segundo vértice que limita a la malla)

Third corner: (indicar el tercer vértice que limita a la malla)

Fourth corner: (indicar el cuarto vértice que limita a la malla)

Mesh M size: (teclear el número de segmentos, en dirección del primer al segundo vértice, en que formará la malla)

Mesh N size: (teclear el número de segmentos, en dirección del segundo al tercer vértice, en que formará la malla)

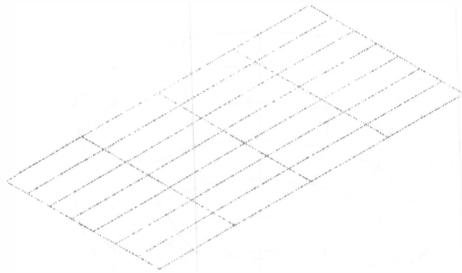


Figura 3.92 Malla en tercera dimensión.

Pyramid: (pirámide, figura 3.93; la dibuja con vértice, truncada o ; de base triangular o cuadrangular)

First base point: (indicar el primer punto de la base)

Second base point: (indicar el segundo punto de la base)

Third base point: (indicar el tercer punto de la base)

Tetrahedron/ <fourth base point>: (indicar el cuarto punto de la base en caso de quererla cuadrangular o teclear *T* para que sea triangular)

Ridge/Top/ <apex point>: (por default se pide el vértice con alternativas para dibujarla truncada, en el caso de teclear *T*, o bien que los lados sean dos cuadriláteros y dos triángulos en caso de teclear *R*)

Conviene hacer notar que en cualesquiera de las últimas alternativas se indica la parte superior de la pirámide, (a menos que se necesite invertida), por lo que los puntos deben suministrarse con altura, es decir, con valor en el eje *Z*, de otra forma se dibujará una pirámide con altura cero.

Para el caso de la esfera basta con dar su centro y el valor del radio, e indicar la cantidad de meridianos y paralelos con los que se le va a dar la forma (mientras mayor sean la cantidad de éstos, más se tardará en regenerar el dibujo).

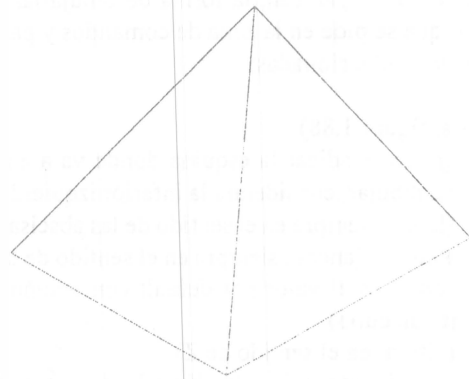


Figura 3.93 Pirámide en tercera dimensión.

Sphere (esfera, figura 3.94)

Center of the sphere: (indicar la ubicación del centro de la esfera)

Diameter/ <radius>: (indicar el valor del radio, con opción a dar el diámetro tecleando *D*)

Number of longitudinal segments <16>: (número de meridianos)

Number of latitudinal segments <16>: (número de paralelos)

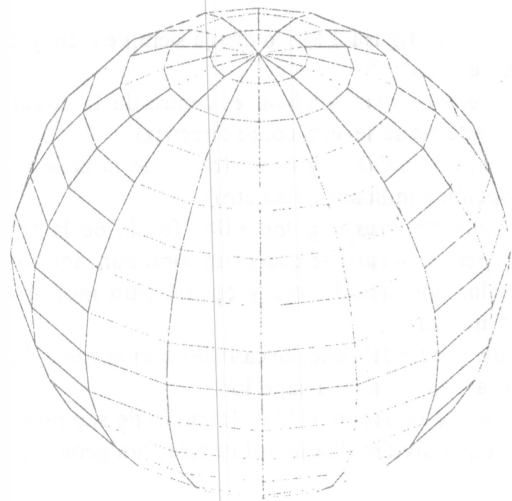


Figura 3.94 Esfera en tercera dimensión.

Torus (toroide, figura 3.95)

Center of torus: (indicar la ubicación del centro del toroide)

Diameter/ <radius>: (indicar el valor del radio de la directriz del toroide con opción a dar el diámetro si se teclea *D*)

Segments around tube circumference <16>: (la cantidad de arcos para dar la forma alrededor de la directriz)

Segments around torus circumference <16>: (la cantidad de circunferencias generatrices del toroide)

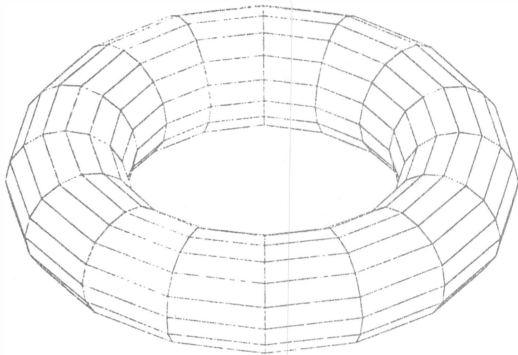


Figura 3.95 Toroide en tercera dimensión.

Wedge (cuña, figura 3.96)

Corner of wedge: (indicar una esquina de la cuña)

Length: (indicar el largo de la base de la cuña, se tomará en sentido del eje de las x)

Width: (indicar el ancho de la cuña, se tomarán en sentido del eje de las y)

Height: (indicar la altura de la cuña, se trazará un plano perpendicular al determinado con el largo y el ancho a partir del punto final indicado como largo, y se cerrará la cuña a partir del plano perpendicular, cerrándolo por medio de otro plano, con el punto que se indicó como esquina de la cuña)

Rotation angle about Z axis: (indicar el ángulo de rotación alrededor del eje z)

Todas y cada una de las primitivas mostradas, se imprimieron considerando la característica ocultar

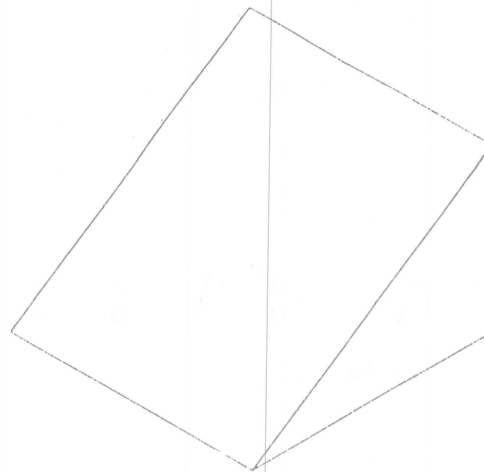


Figura 3.96 Cuña en tercera dimensión.

líneas, **Hide** en AutoCAD, sería conveniente trazarlas y en la primera oportunidad que se tenga, operar con ellas para obtener formas complejas.

Con esta parte hemos llegado al fin del tema, intentando dar un panorama de las formas primitivas tridimensionales, sabemos que no es suficiente, pero por otro lado una vez que se pueda operar con ellas, quedará de manifiesto que no basta con la computadora para la obtención de formas complejas, es necesario tener un conocimiento mínimo de la teoría de las proyecciones para facilitar la interpretación del dibujo y la ejecución de los comandos, la computadora sustituye a las escuadras, compás, escalímetro y demás instrumentos de dibujo, lo que no puede sustituir es la interpretación geométrica.

Esta obra se terminó de imprimir
en junio de 2001
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 1,500 ejemplares
más sobrantes de reposición.