FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

HECTOR F. GODINEZ C.
J. ABEL HERRERA C.

ALGEBRA LINEAL teoría y EJERCICIOS

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS BASICAS

ALGEBRA LINEAL

Teoría Y EJERCICIOS

Prólogo

La presente obra, cuyo contenido fundamental es de ejercicios y no de teoría, tiene como propósitos fundamentales constituir un complemento de la clase de álgebra lineal para los alumnos que cursan esta asignatura en la Facultad de Ingeniería y un material auxiliar de la enseñanza para el profesor que la imparte, pudiendo ser usada, además, en otras instituciones donde el álgebra lineal forma parte de las asignaturas que contribuyen a la formación profesional.

La obra comprende seis capítulos. Cada uno de ellos, comienza con un examen diagnóstico, el cual contiene preguntas y ejercicios alusivos a conceptos antecedentes indispensables, que requiere conocer el alumno, a fin de que pueda estudiar convenientemente el capítulo correspondiente. Enseguida se presenta una introducción, donde se da un panorama general sobre el contenido teórico del capítulo.

Cada capítulo contiene una o más secciones que incluyen teoría y ejercicios. En la parte teórica se presentan, en algunas secciones, conceptos esenciales del álgebra lineal, con el objeto de que el estudiante acreciente y reafirme sus conocimientos sobre ellos, en otras, la parte teórica incluye aplicaciones de los conceptos. En cualquier caso, se concluye con actividades complementarias.

Es importante insistir en que se presupone que antes de leer la parte teórica de cada capítulo, el estudiante ya conoce los conceptos que trata.

Los ejercicios de cada capítulo, han sido clasificados en tres partes: ejercicios propuestos, ejercicios adicionales y examen de capítulo. Los ejercicios propuestos pretenden contribuir a una mejor comprensión de los conceptos y a la adquisición de una mayor habilidad en el uso de ellos. Los ejercicios adicionales tienen, en general, un grado de dificultad mayor que los propuestos e incluso presentan algunos conceptos que no pertenecen al curso, pero que se está a un paso para su estudio. Estos ejercicios pretenden motivar al estudiante a profundizar y adquirir un conocimiento mayor de los temas del álgebra lineal. Al final de cada capítulo se presenta un examen, como uno de los elementos que permiten al alumno autoevaluarse en los conocimientos del correspondiente capítulo.

Finalmente se propone un examen general, a fin de que el estudiante pueda darse cuenta si ha adquirido los conocimientos y habilidades esenciales del álgebra lineal.

Esta obra contiene un total de 566 ejercicios, cuyas respuestas se incluyen al final, pretendiendo con ello que el profesor y el alumno dispongan de un material suficiente y variado que contribuya a un estudio eficaz del álgebra lineal.

Si bien cada capítulo presenta, en la parte teórica, sólo algunos conceptos, los ejercicios incluyen a todos los conceptos del programa de la asignatura de álgebra lineal de la Facultad de Ingeniería.

Esta obra está basada en el **Cuaderno de trabajo de álgebra lineal** que elaboramos conjuntamente con el DR. GUILLERMO MONSIVAIS G y el ING. H. CARLOS HERNANDEZ G., ambos profesores de la Facultad de Ingeniería.

Es de justicia reconocer que la elaboración de este material educativo pudo llevarse a cabo gracias a las licenciadas IRMA HINOJOSA FELIX y MARIA CUAIRAN RUIDIAZ, quienes nos brindaron todo su apoyo y supieron orientarnos y dirigirnos en el proceso editorial.

Agradecemos también a ARACELI MORA ARCEO por la dedicación y esmero que tuvo al mecanografiar el manuscrito, así como al señor ADAN CASTRO FLORES por su colaboración en los dibujos, gráficas y signos especiales que la obra requirió.

Conscientes de que esta obra puede tener fallas, agradeceremos las sugerencias y observaciones que nos hagan llegar profesores y alumnos para mejorar futuras ediciones.

HECTOR F. GODINEZ CABRERA y J. ABEL HERRERA CAMACHO

Contenido

CAPITULO I SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Examen diagnóstico 3

Introducción 7

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 9

Ejercicios propuestos 15

Ejercicios adicionales 19

Examen de capítulo 25

CAPITULO II MATRICES Y DETERMINANTES

Examen diagnóstico 31

Introducción 33

MATRICES 35

Ejercicios propuestos 44

DETERMINANTES 51

Ejercicios propuestos (Continuación) 57

Ejercicios adicionales 63

Examen de capítulo 72

CAPITULO III ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Examen diagnóstico 77

Introducción 79

OPERACION BINARIA 81

Ejercicios propuestos 85

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS 87

Ejercicios propuestos (Continuación) 92

MORFISMOS 95

Ejercicios propuestos (Continuación) 98

Ejercicios adicionales 99

Examen de capítulo 109

CAPITULO IV ESPACIOS VECTORIALES

Examen diagnóstico 115

Introducción 119

ESPACIOS VECTORIALES 121

Ejercicios propuestos 126

COMBINACION LINEAL, DEPENDENCIA LINEAL Y BASE 129

Ejercicios propuestos (Continuación) 139

ISOMORFISMOS ENTRE R^n Y OTROS ESPACIOS VECTORIALES. APLICACIONES 146

Ejercicios propuestos (Continuación) 152

Ejercicios adicionales 162

Examen de capítulo 177

CAPITULO V TRANSFORMACIONES LINEALES

Examen diagnóstico 183

Introducción 187

TRANSFORMACION LINEAL, NUCLEO Y RECORRIDO 189

Ejercicios propuestos 194

ALGEBRA DE TRANSFORMACIONES LINEALES . . . 199

Ejercicios propuestos (Continuación) 203

VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS 210

Ejercicios propuestos (Continuación) 217

Ejercicios adicionales 222

Examen de capítulo 248

CAPITULO VI OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Examen diagnóstico 255

Introducción 259

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO 261

Ejercicios propuestos 268

APLICACIONES DE LA ORTOGONALIDAD 274

Ejercicios propuestos (Continuación) 280

OPERADORES SIMETRICOS Y HERMITIANOS 283

Ejercicios propuestos (Continuación) 296

Ejercicios adicionales 301

Examen de capítulo 323

EXAMEN GENERAL 329

RESPUESTAS 339

Examen Diagnóstico

A continuación se presentan algunas preguntas sobre antecedentes indispensables para estudiar este capítulo. Trata de resolverlas y compara tus resultados con las soluciones presentadas después de las preguntas. Si aún tienes dudas de cómo se resuelven, intenta esclarecerlas leyendo los temas que se sugieren en la bibliografía propuesta al final de este examen.

1.- Dada la ecuación lineal: $3x - 4y + z = 0$, escribe en el paréntesis siguiente la letra que corresponda a una solución de esta ecuación --( )

A) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

B) $x = 0$, $y = 2$, $z = 1$

C) $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

D) $x = 3$, $y = -4$, $z = 1$

2.- Un método útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales que sean sencillas es el de sustitución. Se aplicará al sistema

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 10 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

Para ello, se despeja una incógnita de una ecuación; por ejemplo x de la primera ecuación; se obtiene: $x =$ __________. Esta variable se "sustituye" en la otra ecuación; en este ejemplo se obtiene una ecuación en y: __________, de donde $y =$ __________; por lo tanto, $x =$ __________.

3.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y &= -3 \\ 3x - 4y &= 5, \end{aligned}$$

escribe en el paréntesis siguiente la letra que corresponda a una solución de este sistema. - ( )

A) $x = 0$, $y = 0$ B) $x = 1$, $y = 2$ C) $x = -3$, $y = 0$ D) $x = -1$, $y = -2$

4.- Otro método usual para resolver sistemas sencillos de ecuaciones lineales es el de igualación. Se aplicará para resolver el sistema

$$\begin{aligned} x - 4y &= 3 \\ 3x + 4y &= 1 \end{aligned}$$

Se despeja una incógnita de ambas ecuaciones, por ejemplo, x de la primera; se obtiene x = ______________ y de la segunda ecuación se obtiene x = __________. "Igualando" ahora los valores de x se obtiene la ecuación en y: ____________, de donde y = ____________; por tanto, x = _____________.

5.- Completa correctamente la siguiente proposición: "Si tengo once monedas repartidas en valores de uno y cinco pesos, cuya suma da un total de 39 pesos, entonces el número de monedas de $ 1 es ______ y de $ 5 es ______".

6.- Responde correctamente la siguiente pregunta: Si un bote navegando a velocidad constante en favor de la corriente recorre 12 km en 3 horas y navegando en contra de la corriente recorre la misma distancia en 6 horas, ¿cuál es la velocidad del bote y cuál la de la corriente?

Respuesta: ____

RESPUESTAS

1.- (C)

2.- $x = 5 - y$; ecuación en y: $5 - 3y = -1$, de donde $y = 2$, por lo tanto, $x = 3$.

3.- (D)

4.- ... $x = 3 + 4y$, y de la segunda ... $x = -\frac{1}{3}(1 - 4y)$; la ecuación en y:
$3 + 4y = \frac{1}{3}(1 - 4y)$, de donde $y = -\frac{1}{2}$; por lo tanto, $x = 1$.

5.- De \$ 1 es 4 y de \$ 5 es 7.

6.- El bote a 3 km/h y la corriente a 1 km/h.

BIBLIOGRAFIA

El tema central de estas preguntas es Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas que puedes estudiarlo en:

- Algebra
  de Aurelio Baldor
  Edit. Publicaciones Culturales, S.A.
  Páginas 319 a 344.

o en

- Algebra Superior
  de Murray Spiegel
  Edit. Mc Graw-Hill, serie Schaum
  Páginas 100 a 109

Introducción

Nuestro curso de álgebra lineal lo empezaremos con un breve estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. En este capítulo estudiaremos la resolución de estos sistemas por el método de eliminación de Gauss[1], que por su sencillez de aplicación a sistemas con más de dos ecuaciones y más de dos incógnitas, es el más usado.

El dominio de este tema es indispensable para poder estudiar los siguientes temas del curso de álgebra lineal, y al mismo tiempo en algunos de estos temas se desarrollarán otros métodos que ayudarán a completar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Existen diversos problemas físicos, económicos, geométricos, etc., que pueden expresarse en términos de sistemas de ecuaciones lineales, como por ejemplo:

El equilibrio de sistemas de fuerzas (útiles en problemas de construcción), análisis de circuitos eléctricos, análisis simples de tráfico de vehículos en una ciudad o encontrar el punto de intersección entre dos rectas que se cortan.

Iniciaremos este capítulo planteando un sistema de ecuaciones lineales a partir de un sencillo problema de aplicación y relacionándolo posteriormente, con su interpretación geométrica; más adelante, te propondremos una serie de ejercicios de diferente grado de dificultad que te ayudarán a complementar tu estudio sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

---

[1] En algunos textos a este método se le llama método de Gauss-Jordán o método de reducción.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Con el fin de ilustrar el concepto y aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales, consideremos el siguiente ejemplo:

Supongamos que una fábrica compra X número de tractores y Y número de camiones, por los que pagó un total de 11 millones de pesos. Si el precio de los tractores es de tres millones de pesos, el de los camiones es de dos millones, y el número total de objetos comprados fue de cinco, deseamos determinar cuántos camiones y cuántos tractores compró.

Al igual que muchos problemas, el primer paso para resolverlo consiste en escribir el problema en lenguaje matemático.

Según los datos del problema, sabemos que el número total de objetos comprados es 5 y es la suma de X más Y. Por lo tanto, escribimos:

$$X + Y = 5 \qquad (1)$$

Además, como el precio pagado por los tractores fue de 3X y el pagado por los camiones fue de 2Y, podemos escribir:

$$3X + 2Y = 11 \qquad (2)$$

El problema se ha reducido a obtener los valores de X y Y que satisfagan simultáneamente las ecuaciones (1) y (2). Por lo tanto, el segundo paso consiste en hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, el que constituye el modelo matemático del problema original.

$$\begin{aligned} X + Y &= 5 \\ 3X + 2Y &= 11 \end{aligned} \qquad (3)$$

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este tema es el de estudiar un método general para resolver sistemas de ecuaciones lineales como el sistema (3), o aun sistemas con mayor número de variables y ecuaciones.

Sin embargo, antes de aplicar el método a nuestro ejemplo, conviene mencionar que en general la primera parte del problema que consiste en traducir el problema del lenguaje usual al lenguaje matemático no se estudiará en este curso, pero en la medida que avances en tu carrera tendrás la oportunidad de ir desarrollando esa capacidad.

Procedamos ahora a resolver el sistema (3) por el método de elimina ción de Gauss.

Para eliminar el término 3X de la segunda ecuación, debemos sumarle la primera ecuación multiplicada por -3.

La primera ecuación multiplicada por -3 es:

$$-3X - 3Y = -15$$

y al sumarla con la segunda, tenemos:

$$-Y = -4$$

Por lo tanto, el nuevo sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} X + Y &= 5 \\ -Y &= -4 \end{aligned} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (4)$$

De la segunda ecuación del sistema (4) se ve inmediatamente que $Y = 4$, y al sustituir en la primera ecuación se obtiene:

$$X + 4 = 5$$

de donde, $X = 1$

Por lo tanto, la solución de los sistemas (3) y (4) es $X = 1$ y $Y = 4$ como puede verificarse explícitamente.

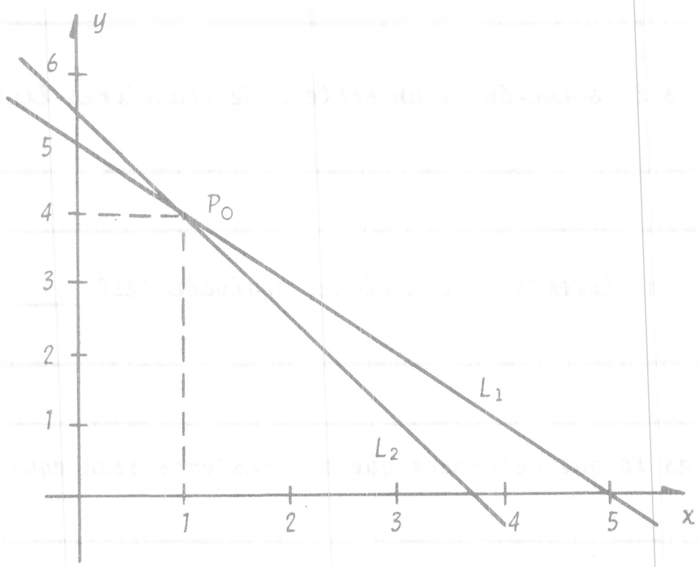
De esta manera, el problema cuyo modelo matemático está dado por el sistema (3), queda resuelto completamente.

Aquí cabe hacer un comentario interesante: Una misma expresión matemática puede ser el modelo que represente a distintos problemas. Por ejemplo, el sistema (3) que hemos resuelto puede representar un conjunto de dos rectas L_1 y L_2, de ecuaciones $X + Y = 5$ y $3X + 2Y = 11$ respectivamente. Su punto de intersección $P(X_0, Y_0)$, es aquel cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente las ecuaciones de ambas rectas, es decir:

$$Xo + Yo = 5$$
$$3Xo + 2Yo = 11 \; .$$

y ya sabemos que los valores de Xo y Yo son 1 y 4 respectivamente. Por lo tanto, el punto de intersección es Po(1, 4).

Las gráficas de estas rectas son:



En donde observamos que efectivamente el punto de intersección es Po(1, 4).

Puesto que en este ejemplo el punto de intersección es único, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas compatible determinado.

A continuación te sugerimos realices las siguientes cuatro actividades complementarias escribiendo en los renglones correspondientes tus respuestas.

I) Si con las ecuaciones de dos rectas situadas en el plano XY se forma un sistema de ecuaciones y éste resultara

a) Compatible indeterminado, ¿qué posición guardan las rectas entre sí? ________________________________

b) Incompatible, ¿qué posición guardan las rectas entre sí? ________

____

II) Es muy importante que vayas adquiriendo la capacidad de expresar con precisión los conceptos estudiados. Podemos decir, en general, que el poder expresar con precisión un concepto es señal que se ha entendido perfectamente y que se ha adquirido formalidad en el manejo del tema estudiado.

En este capítulo se han empleado diversos conceptos. Trata de responder con precisión a los siguientes sin consultar referencias:

-¿Qué es una ecuación lineal? ______________________________

____

-¿Qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales? _______

____

____

-¿Qué son sistemas de ecuaciones equivalentes? _______________

____

____

-¿Qué es lo que determina que dos sistemas sean equivalentes? _____

____

____

III) A través de los siguientes incisos se presentan problemas geométricos relacionados con sistemas de ecuaciones lineales. Completa correctamente las afirmaciones propuestas en cada inciso.

a) La ecuación lineal $x - 2y + z = 8$ representa un plano π en el espacio tridimensional.

una solución particular de esta ecuación es $x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________. Esta solución corresponde al punto de coordenadas (, ,) perteneciente al plano π .

La solución general de la ecuación dada es $x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________.

b) Consideremos ahora el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 7 \\ 2x + y - z &= -1 \\ x + 3y - 2z &= -8 \end{aligned}$$

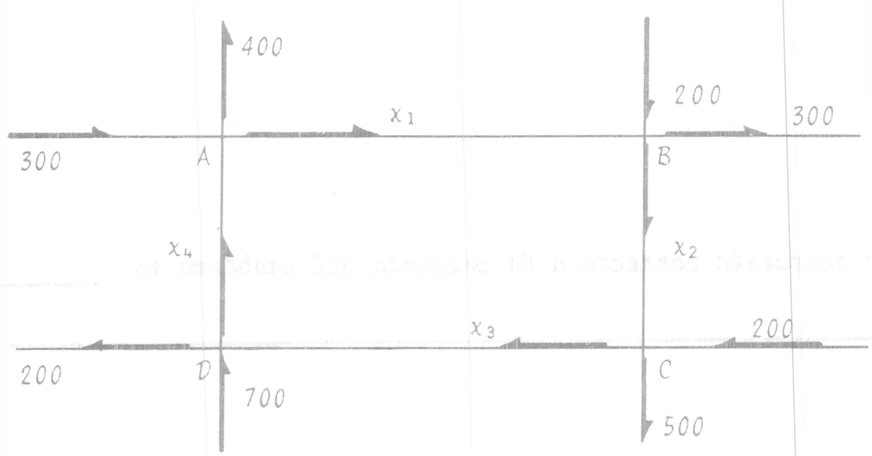
Después de resolverlo por el método de eliminación de Gauss se llega a la siguiente solución: $x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________.

Si cada ecuación del sistema representa la ecuación de un plano en el espacio tridimensional, entonces de acuerdo con la solución obtenida, la intersección de los planos es ____________________
(un punto / una recta / un plano)

IV) Como se mostró al principio de este capítulo, un sistema de ecuaciones lineales puede ser el modelo de un problema físico. Una aplicación sencilla e interesante se presenta en el siguiente ejercicio[2].

Se desea analizar el flujo de tránsito en calles de un solo sentido, en la ciudad de México.

En varios lugares se han colocado contadores, y el número de carros por hora promedio aparece en la siguiente gráfica que muestra dicha red de calles y el sentido de cada una de ellas con las flechas respectivas.



[2] Este ejercicio está basado en el que presenta Francis Florey en su libro "Fundamentos de Algebra Lineal y Aplicaciones", editado por Prentice-Hall Internacional, página 87.

Las intersecciones de las calles están señaladas por los puntos A, B C y D. El número de carros que llegan a las intersecciones es igual al número de carros que salen de ellas.

Si la calle que va de D a A estuviera en reparación, ¿cuál sería el mínimo permisible de tránsito de vehículos, que circularía por D A, para no cerrar las calles de esta red, y sin cambiar el sentido de la circulación?

El modelo matemático de este problema es

La respuesta correcta a la pregunta del problema es ________________

Para reforzar los conceptos sobre los sistemas de ecuaciones lineales y adquirir habilidad en su solución, te sugerimos que resuelvas algunos ejercicios que a continuación se presentan.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Obtén la solución general y dos particulares de cada una de las ecuaciones lineales siguientes :

a) $2x - y + 4z = 5$

b) $x + 6y + 6z + 6w = 1$

c) $x + y = 0$, si se restringe a $x \leq 0$

2.- Obtén, cuando existan, las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. (En el caso de ser compatibles indeterminados, obtén la solución general).

a) $$\begin{aligned} 2x - 3y - z &= 0 \\ x + 5y &= 1 \\ -3x - 2y + z &= -1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z - w &= 2 \\ -x + 4y - 5z + w &= 7 \\ 3x - 5y + z - 2w &= -3 \\ -x + 3y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ 5x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x + y - z + 5w &= 1 \\ y + 4z + w &= 3 \\ 3x - 5y + z + 8w &= 5 \\ x - 2y + z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 14x_3 &= -6 \end{aligned}$$

3.- Determina para qué valor(es) de β, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 2\beta y &= 2 \\ \beta x + 2\beta y &= \beta - 1 \end{aligned}$$

no tiene solución.

4.- Dado el sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3k \\ x_1 + x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

determina si existe algún valor de k para que:

a) El sistema sea incompatible

b) El sistema sea compatible indeterminado

c) El sistema sea compatible determinado

5.- Determina los valores de a, b y c para que $x = -4$, $y = 1$, $z = 4$ sea solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= a - b \\ 4x + 6y + 3z &= 2b - \frac{3}{2}a + 8c \\ 2x \qquad + 2z &= 4b - \frac{13}{4}a + \frac{5}{4}c \end{aligned}$$

6.- Obtén los números complejos z_1, z_2 y z_3 tales que

$$\begin{aligned} z_1 - 2z_2 - z_3 &= i \\ -z_1 + 3z_2 + 2z_3 &= 2 \\ iz_2 + z_3 &= -1 \end{aligned} \qquad , \qquad \text{donde} \quad i = \sqrt{-1}$$

7.- Obtén la solución en cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos :

a)
$$\begin{aligned} 2x + y \qquad &= 0 \\ 3x + y - 3z &= 0 \\ x \qquad + 3z &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x - 9y - 6z &= 0 \\ -4x + 6y + 4z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 0 \\ -2x + y + \frac{2}{3}z &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x - 2y \qquad &= 0 \\ 3x + y + z &= 0 \\ 2x \qquad + 4z &= 0 \\ x - 2y + 2z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x - y + z \qquad &= 0 \\ 3x + 2y - z - 2w &= 0 \\ -5x \qquad + 4z + 3w &= 0 \\ -2x - y \qquad + w &= 0 \end{aligned}$$

8.- Obtén el valor de α necesario para que el siguiente sistema homogéneo tenga solución distinta de la trivial. Obtén, entonces, la solución general y una particular.

$$\begin{aligned} \alpha r - 5s + 2t &= 0 \\ r - s + 3t &= 0 \\ 3r - 7s - 5t &= 0 \end{aligned}$$

9.- Se desea obtener el punto de intersección, si lo hay, entre la recta L y el plano π.

La recta L pasa por el punto (4, -1, 0) y es paralela al vector de componentes (6, -4, -2), y el plano π pasa por los puntos (2, -1, 0), (0, 1 - 2) y (-1, 3, -6).

a) Las ecuaciones de la recta L y el plano π son: (Elige la opción correcta)

A) $\begin{cases} \dfrac{x+6}{4} = 4 - y \; ; \quad z = 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} \dfrac{x-6}{4} = -y-4 \; ; \quad z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} \dfrac{-x-4}{3} = \dfrac{y-1}{2} = z \\ 2x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} \dfrac{4-x}{3} = \dfrac{y+1}{2} = z \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$

La opción correcta es ☐

b) Si la recta y el plano se cortan, el punto de intersección es: (Elige la opción correcta)

A) (-22, 13, 6)

B) (-14, 6, 2)

C) (16, -9, -4)

D) (14, -6, -2)

La opción correcta es ☐

10.- Una compañía recibió de cuatro proveedores, los siguientes presupuestos :

ARTICULO	PROVEEDORES			
	A	B	C	D
No. de compresores	0	2	1	1
No. de medidores	4	0	2	2
No. de válvulas	4	4	0	4
No. de reguladores	2	1	2	0
COSTO TOTAL (millones de pesos)	5	6	5	4

Si los proveedores tienen los mismos precios para cada artículo, ¿cuántos millones de pesos cuesta cada uno de los artículos?

11.- Un estudiante gastó cierta cantidad de dinero para comprar una carpeta, una caja de plumas y un libro. Si la carpeta y la caja hubieran costado 3 y 2 veces más baratos, respectivamente, y el libro el mismo precio, el costo de esta compra hubiera sido de 160 pesos. Asimismo, si el estudiante hubiera comprado 4 carpetas y 3 cajas de plumas, el costo hubiera sido 720 pesos. Determina el costo total de la compra de los tres artículos.

Ejercicios Adicionales

1.- A continuación se dan, en la columna izquierda, tres ecuaciones lineales y en la columna derecha cuatro soluciones. Relaciona ambas columnas escribiendo en el renglón correspondiente a cada ecuación, la letra o letras que correspondan a una solución de esa ecuación.

I) $x + 3y + z = 5$ ______

II) $3x - 4y + z = 2$ ______

III) $5x - y + z = 1$ ______

A) $x = 1,\ y = 2,\ z = -2$

B) $x = 1,\ y = -1,\ z = 5$

C) $x = k_1 + 1$
$2y = k_2 + 1$
$z = 2k_2 - 3k_1 + 1, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

D) $x = 2,\ y = 1,\ z = 0$

2.- Obtén la solución en cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos.

a)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z - w &= 10 \\ -x + 2y + 8z + 6w &= 0 \\ 5x + 2z - 2w &= 2 \\ 3x - y + 2z - 4w &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -3y + 2z - 5w &= -2 \\ 5x - 16y + 10z - 32w &= 0 \\ x - 3y + 2z - 5w &= -2 \\ x - y + 2z + 9w &= -22 \\ 2x - 9y + 4z - 31w &= 26 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 7x - y + 13z - 8w &= 82 \\ 3x + 3y + z &= -6 \\ x + 5y - 5z + 4w &= -50 \\ 5x + y + 7z - 4w &= 38 \\ 2x - 2y + 6z - 4w &= 44 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 5x - y + z &= 20 \\ 5x + 2z + w &= 14 \\ 3y + 3z - w &= -10 \\ 7x + y + 4w &= 18 \\ 4x - y + 3z + 2w &= 8 \end{aligned}$$

3.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones; elige el valor de α de modo tal que el sistema sea compatible.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= \alpha \end{aligned}$$

4.- Determina si los siguientes sistemas homogéneos tienen soluciones distintas a la trivial y, en caso afirmativo, obtén su solución general.

a) $$\begin{aligned} 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x - 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ 4x + 2y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} -2x + y \phantom{{}- 3z} + w &= 0 \\ 4x + 3y - 3z + 3w &= 0 \\ x - 3y + 2z + 4w &= 0 \\ -3x - y + z - 8w &= 0 \end{aligned}$$

5.- Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z - 2kw &= 0 \\ 2x + 2y - z - 3kw &= 0 \\ 3x - 2y + 8z - kw &= 0, \end{aligned}$$

determina para qué valor o valores de k se obtiene que $w = 6x$. Obtén luego la solución del sistema.

6.- Un estudiante desea formar una microcomputadora con los siguientes dispositivos: una impresora, una unidad de disco, un microprocesador y una pantalla. Los costos (en dólares) de dos fabricantes son:

U n i d a d	Fabricante 1	Fabricante 2
Impresora	$ 400	$ 450
Disco	$ 500	$ 600
Microprocesador	$ 500	$ 400
Pantalla	$ 400	$ 350

Como puede observarse, los costos totales (T) de los dos fabricantes son iguales, y además son iguales a un tercer fabricante.

El estudiante observa que si hubiera comprado una unidad de disco al primer fabricante, un microprocesador al mismo primer fabricante y una pantalla al tercer fabricante el costo hubiera sido el mismo que si estas tres unidades las hubiera comprado al tercer fabricante.

Combinando cualesquiera unidades de los tres fabricantes la microcomputadora más barata incluiría la unidad de disco y la pantalla del tercer fabricante y el costo sería $ 250 menor que T.

Finalmente, el estudiante compró una impresora y una unidad de disco del primer fabricante y un microprocesador y una pantalla del tercer fabricante, gastando $ 1750 por ellos.

¿ Cuál es el costo de cada dispositivo del tercer fabricante ?

7.- Determina el punto de intersección de las rectas:

$$L_1 : \quad x - 3 = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{4} \qquad\qquad L_2 : \quad \begin{aligned} x &= 3 - t \\ y &= -3 + 2t \\ z &= 2 + t \end{aligned}$$

8.- Obtén la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 0 \\ - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

9.- Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2kz - 2\alpha &= 4y - 2x \\ 6z + 3\alpha - 2 &= y - x \\ 2z - 2 &= 2y - x, \end{aligned} \qquad \alpha, k \in \mathbb{R}$$

Determina los valores que simultáneamente deben tomar α y k para que el sistema sea :

a) Compatible determinado

b) Compatible indeterminado

c) Incompatible

10.- Dados los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + 2y &= k \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x - ky &= -2 \\ kx + y &= 9 \end{aligned}$$

a) Determina el valor de k, $k \in \mathbb{Z}$, de manera que ambos sistemas tengan la misma solución. ($\mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros)

b) Obtén dicha solución.

11.- Obtén los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + |2y| &= 5 \\ y - |x| &= 1 \end{aligned}$$

12.- Determina para qué valores de K tiene solución única el sistema

$$x + Ky = 3$$
$$Kx + 4y = 6$$

que satisface la desigualdad $x > 0$.

13.- Al final de un curso de álgebra lineal quedaron 20 alumnos que recibieron calificaciones de 4, 6, 8 y 10. La suma de las calificaciones fue 122. El número de notas de 6 fue menor que el de notas de 4 y mayor que el de 10. El número de notas de 4 fue divisible entre 4 y el número de notas de 10 fue par. Determina cuántos alumnos recibieron cada una de las calificaciones.

14.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales, suponiendo que x, y, z, w son reales.

$$(1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)w = 1 + 5i$$
$$(3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + (4i)w = 2 - i$$

En muchas ocasiones, el modelo de un problema es un sistema de ecuaciones no lineales; tal es el caso de los dos siguientes ejercicios. Para cada uno de ellos, escribe el sistema de ecuaciones correspondiente y resuélvelo.

15.- Dos competidores automovilísticos se preparan para una carrera.

Al arrancar, el competidor 1 tiene problemas con el carburador de su auto y sólo puede desarrollar una cierta velocidad constante, hasta el punto medio de la carrera. De ahí en adelante, desarrolla su velocidad normal de 200 km/h, también constante.

El competidor 2 desde el arranque desarrolla una velocidad constante de 200 km/h, pero $\frac{1}{2}$ h antes de llegar a la meta tiene problemas con la caja de velocidades y disminuye su velocidad a 60 km/h menos que la velocidad del carro 1 con el carburador en mal estado.

Si el competidor 1 llega una hora después que el competidor 2 a la mitad de la carrera y, además, llega 36 minutos después que el competidor 2 a la meta:

¿ Cuál es la distancia que cubrió la carrera ?

¿ En qué tiempo desarrolló cada competidor la carrera ?

16.- Cada uno de tres obreros necesita un cierto tiempo para embobinar un motor tipo serie HP 300. Si el segundo obrero trabajara durante dos horas embobinando un motor del tipo antes mencionado y después el primer obrero continuara este trabajo por una hora, acabarían de embobinar todo el motor.

Por otro lado, el tercer obrero necesita dos horas más que el primero para embobinar un motor del tipo anterior. Y laborando juntos los tres obreros embobinarían un motor de este tipo en una hora.

¿En cuántas horas embobina cada obrero un motor de tipo serie HP 300 ?

Examen de Capítulo

1.- Obtén la solución general y dos soluciones particulares del sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 1$$
$$-3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 5$$

Solución:

2.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$x + y + az = 1$$
$$x + ay + z = a$$
$$ax + y + z = a^2$$

a) Determina para qué valores de a, $a \in \mathbb{R}$, el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

b) Obtén la solución general para $a = 1$

Solución:

3.- Obtén la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

4.- Una empresa tiene tres máquinas que son usadas para fabricar 4 productos distintos. El número de horas que requiere cada máquina en la producción de una unidad de cada uno de los cuatro productos está dada por:

MAQUINA	PRODUCTO			
	A	B	C	D
1	1	2	1	2
2	2	0	1	1
3	1	2	3	0

Determina el número de unidades que se deben producir de cada uno de los cuatro productos en un día de trabajo de ocho horas continuas, si por lo menos debe producirse un producto de cada tipo.

Solución:

CAPITULO II

Matrices y Determinantes

"Whitehead hizo notar entonces que si bien toda la física conocida hasta entonces (1900) podía ser tratada por los métodos del álgebra ordinaria, era posible que pudieran aparecer algún día nuevos campos en la física para los cuales el álgebra no conmutativa sería la única representación natural. En aquel mismo año comenzó el camino hacia la realización de esta conjetura".

Sir Edmund Whittaker.

Examen Diagnóstico

A continuación se presentan algunos ejercicios sobre antecedentes necesarios para estudiar este capítulo. Trata de resolverlos y compara tus resultados con las soluciones presentadas después de los ejercicios. Si aún tienes dudas de cómo se resuelven, intenta esclarecerlas leyendo los temas que se sugieren en la bibliografía propuesta al final de este examen.

1.- Sean los números complejos

$$z_1 = 1 + 4i, \quad z_2 = -6i, \quad z_3 = i, \quad z_4 = 3$$

Los resultados de las siguientes operaciones son:

a) $(z_1 + z_2)(z_3)^4 =$

b) $\overline{z_1} - \left(\overline{\dfrac{z_2}{z_3}}\right) =$

c) $\overline{z_4} + 8\left(\dfrac{z_4}{z_2}\right)^3 - (\overline{z_1 z_4}) =$

2.- Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$

RESPUESTAS

1.- a) $1 - 2i$
b) $7 - 4i$
c) $11i$

2.- a) 13
b) 44

BIBLIOGRAFIA

Los conceptos aludidos en estos ejercicios los puedes estudiar en:

- Algebra y Trigonometría con
Geometría Analítica
de Earl W. Swokowski
Edit. Grupo Editorial Iberoamérica
Páginas 439 a 444

o en

- Algebra Superior
de Spiegel Murray
Edit. Mc. Graw-Hill, serie Schaum
Páginas 172 a 181 y 252 a 259

Introducción

En este capítulo se estudiarán los conceptos de matriz y determinante. Para tal efecto, se ha dividido el capítulo en dos secciones; cada una de ellas contiene su parte teórica, sus actividades complementarias y sus problemas propuestos. Estos últimos pretenden cubrir todos los conceptos de este capítulo del curso.

En la primera sección presentaremos el concepto de matriz y en la segunda, el de determinante.

Una matriz es un arreglo o tabla de elementos en forma rectangular. La razón por la que a estos arreglos se les llama matrices es porque a partir de ellos se pueden originar o desarrollar diversos resultados. Las matrices aparecieron en 1850 y su nombre se debe al matemático inglés James Joseph Sylvester. Posteriormente William Rowan Hamilton en 1853 y Arthur Cayley en 1858 hicieron contribuciones importantes; no pasó mucho tiempo para que los matemáticos reconocieran que estos arreglos rectangulares son medios convenientes para ampliar las nociones comunes de números.

Aunque la idea de matriz precede a la de determinante, como lo hizo notar Cayley, históricamente el orden fue al revés. Los determinantes fueron estudiados a mediados del siglo XVIII y el tema de las matrices fue desarrollado formalmente en 1850; algunas de las propiedades básicas de las matrices fueron también establecidas en el desarrollo de los determinantes.

La teoría de las matrices ha tenido una gran evolución extendiéndose más allá del dominio del álgebra y de otros campos de la matemática pura, y han demostrado ser una herramienta muy poderosa en las matemáticas aplicadas, economía, física, etc.

Por ejemplo en el año de 1925 el físico alemán W. Heisenberg las introdujo en su formulación de la mecánica cuántica y desde entonces son indispensables en esta rama de la física.

Sin embargo, en este curso sólo veremos su aplicación en el álgebra lineal.

Matrices

En forma general se puede definir una matriz como un arreglo rectangular de elementos, donde cada uno de éstos puede ser un número real, un número complejo, un polinomio, una función, un operador, etc.

Por ejemplo, una matriz cuyos elementos son números reales es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y una matriz cuyos elementos son funciones es:

$$\begin{bmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$$

Para cada matriz particular la colocación de sus elementos es única, de tal forma que si dos matrices tienen los mismos elementos, pero colocados en distintos lugares, serán consideradas como dos matrices distintas.

Al conjunto completo de elementos que forman una matriz se le considera como un único objeto o ente matemático, el cual puede manipularse de acuerdo con ciertas reglas. Algunas de éstas serán estudiadas en este curso.

Al definir las operaciones de adición y multiplicación entre matrices se encuentra que estas nuevas operaciones tienen muchas propiedades semejantes a las de adición y multiplicación usuales entre números reales. Entre ellas podemos mencionar, la existencia de matrices análogas a los números cero y uno.

Estas matrices fueron introducidas por Cayley y son:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

llamadas matriz cero y matriz identidad, respectivamente.

Sin embargo, existen algunas propiedades del álgebra de las matrices que son diferentes a las de los números reales. Mencionaremos algunas de ellas.

a) La conmutatividad para la multiplicación se cumple en los números reales, mientras que en las matrices no se cumple; es decir, en los números reales se cumple que $ab = ba$ para todo número real "a" y "b"; sin embargo, para las matrices se tiene que, en general, $AB \neq BA$. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mientras que

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 4 & -8 & 12 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Como podemos ver, $AB \neq BA$; e incluso, el producto AB es una matriz de orden 2×2, mientras que el producto BA es una matriz de orden 3×3.

Otro ejemplo en el cual podríamos decir que se acentúa la no conmutatividad para la multiplicación en las matrices, es el siguiente:

sean

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$PQ = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$ pero la multiplicación QP no se puede efectuar.

Esta situación hace ver que en las matrices es necesario indicar con cuidado el orden en que se efectúa la multiplicación de dos matrices. Así, en la expresión

$$AB = C$$

a A se le llama prefactor y a B postfactor. También se acostumbra decir que A premultiplica y que B postmultiplica.

El hecho de que la multiplicación de matrices no sea conmutativa ha significado una ruptura grande con la matemática tradicional y ha tenido una infinidad de aplicaciones en muchas ramas de la ciencia.

b) El producto de dos números diferentes de cero siempre es diferente de cero, mientras que el producto de dos matrices diferentes de la matriz cero puede ser igual a la matriz cero. Por ejemplo

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observemos en este ejemplo que si bien AB es igual a la matriz nula o matriz cero, BA es diferente:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Nuevamente vemos la no conmutatividad en la multiplicación de las matrices: $AB \neq BA$.

Consideremos, sin embargo, el siguiente caso:

$$\text{si}\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso vemos nuevamente que no obstante que A y B son diferentes a la matriz cero, su producto es la matriz cero y además $AB = BA$, es decir, en este caso sí se verifica la conmutatividad para la multiplicación.

c) La ley de la cancelación en la multiplicación vale para los números, pero no vale para las matrices. Es decir, si a,b,c son números y $c \neq 0$, entonces:

$$ac = bc \qquad \text{implica} \quad a = b,$$

mientras que si A,B,C son matrices

$$AC = BC \qquad \text{no implica que} \quad A = B$$

d) La ecuación algebraica $x^2 = 0$ tiene una única solución $x = 0$, mientras que la ecuación matricial $X^2 = 0$, donde 0 es la matriz cero, tiene un número no finito de soluciones.

e) La ecuación algebraica $x^2 = -1$, no tiene solución en el conjunto de los números reales, mientras que la ecuación matricial $X^2 = -I$, donde I es la matriz identidad, puede tener solución con elementos reales. Por ejemplo,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

f) En el conjunto de los números reales no se cumple la igualdad

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2$$

excepto si $a = 0$ ó $b = 0$ ó $a = b = 0$

Sin embargo, considerando el conjunto de las matrices de orden 2×2, tal igualdad puede tener sentido para matrices diferentes de la matriz cero, por ejemplo:

si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces se cumple que $A^2 + B^2 = (A + B)^2$. En efecto, pues por un lado tenemos que

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

y por otro

$$(A + B)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2$$

Podríamos preguntarnos ahora si existe una matriz diferente a la matriz A, que junto con la matriz B, satisfaga la expresión anterior.

Para contestar esta pregunta, consideremos la matriz

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \quad \text{donde } X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{R}$$

e investiguemos qué valores deben tomar las variables X_1, X_2, X_3 y X_4 para que se satisfaga la expresión

$$X^2 + B^2 = (X + B)^2$$

Sustituyendo las matrices X y B en dicha expresión tenemos

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^2 = \left(\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \right)^2$$

efectuando operaciones e intercambiando ambos miembros de la ecuación :

$$\begin{bmatrix} X_1^2 + 2X_1 + X_2 X_3 + 4X_2 + X_3 + 5 & X_1 X_2 + X_1 + X_2 X_4 + X_4 \\ X_3 X_1 + 4X_1 + X_4 X_3 + 4X_4 & X_3 X_2 + X_3 + 4X_2 + X_4^2 - 2X_4 + 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1^2 + X_2 X_3 + 5 & X_1 X_2 + X_2 X_4 \\ X_3 X_1 + X_4 X_3 & X_3 X_2 + X_4^2 + 5 \end{bmatrix}$$

De la definición de igualdad de matrices tenemos:

$$X_1^2 + 2X_1 + X_2 X_3 + 4X_2 + X_3 + 5 = X_1^2 + X_2 X_3 + 5$$

$$X_1 X_2 + X_1 + X_2 X_4 + X_4 = X_1 X_2 + X_2 X_4$$

$$X_3 X_1 + 4X_1 + X_4 X_3 + 4X_4 = X_3 X_1 + X_4 X_3$$

$$X_3 X_2 + X_3 + 4X_2 + X_4^2 - 2X_4 + 5 = X_3 X_2 + X_4^2 + 5 \, ,$$

simplificando llegamos al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 + X_3 &= 0 \\ X_1 + X_4 &= 0 \\ 4X_1 + 4X_4 &= 0 \\ 4X_2 + X_3 - 2X_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{———} \quad (1)$$

Para resolver este sistema es conveniente transformarlo en una ecuación matricial. Para esto, de la definición de igualdad de matrices se tiene que

$$\begin{bmatrix} 2X_1 + 4X_2 + X_3 \\ X_1 + X_4 \\ 4X_1 + 4X_4 \\ 4X_2 + X_3 - 2X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y aplicando el concepto de multiplicación de matrices tenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{———} \quad (2)$$

La conveniencia de usar matrices en la solución del sistema de ecuaciones lineales (1), es que para resolver la ecuación (2) sólo necesitamos trabajar con los coeficientes del sistema.

Las matrices que aparecen en la ecuación (2) no deben confundirse con las matrices X y B de nuestro problema original, y sólo deben considerarse como una herramienta útil para resolver nuestro problema inicial. Este ejemplo muestra claramente que un mismo concepto matemático puede aparecer en dos contextos diferentes.

Continuemos ahora con nuestro problema. Para esto escalonemos la matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de acuerdo con esto, podemos volver a plantear un sistema de ecuaciones, pero ahora con la matriz escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} X_1 + X_4 \\ 4X_2 + X_3 - 2X_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de la definición de igualdad de matrices se tiene :

$$\begin{aligned} X_1 + X_4 &= 0 \\ 4X_2 + X_3 - 2X_4 &= 0 \end{aligned}$$

que corresponde a un sistema compatible indeterminado, y por lo tanto, existen una infinidad de matrices que, junto con la matriz B , satisfacen la expresión:

$$X^2 + B^2 = (X + B)^2$$

Como actividades complementarias te sugerimos las siguientes:

I) Contesta correctamente la siguiente pregunta: Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, ¿por qué se afirma, en general, que $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$?

4.- Demuestra que si A es una matriz cuadrada, la matriz $A - A^T$ es antisimétrica.

5.- Demuestra que si A y B son dos matrices cuadradas simétricas, la condición necesaria y suficiente para que AB sea simétrica es que AB sea conmutativo.

6.- Demuestra que para tres matrices cuadradas A, B y C se tiene que $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

7.- Sea A una matriz cuadrada de orden m simétrica.

Demuestra que si P es de orden $m \times n$, entonces la matriz $S = P^T A P$, es también una matriz simétrica.

8.- Las siguientes matrices son llamadas "matrices de spin de Pauli" utilizadas en la mecánica cuántica.

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Verifica que estas matrices anticonmutan estre sí tomadas en pares, y que son hermitianas y unitarias.

(Nota: Se dice que el producto AB es anticonmutativo si $AB = -BA$).

9.- Dadas las matrices

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

determina cuál es hermitiana y cuál antihermitiana.

10.- Demuestra que toda matriz cuadrada A cuyos elementos son números complejos, se puede descomponer en la suma de una matriz hermitiana $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ y otra antihermitiana $C = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

11.- Si

$$H = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

a) Comprueba que

$$H^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ -\operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

b) Comprueba que

$$H^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \operatorname{sen} 3\theta \\ -\operatorname{sen} 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$$

c) Sugiere una fórmula para H^n, $\forall n \in \mathbb{N}$ y demuestra su validez.

12.- Una matriz cuadrada A se llama nilpotente si $A^n = [0]$, para algún natural $n \geq 2$, donde $[0]$ es la matriz nula.

Se dice que la matriz A es nilpotente de índice p, si p es el menor natural para el cual $A^p = [0]$. Determina el índice de la matriz nilpotente siguiente

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

13.- Obtén dos matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_1E_2A = B$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

14.- Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

obtén la matriz P, tal que $PA = B$, si se sabe que A y B son matrices equivalentes.

15.- Si

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

obtén A empleando transformaciones elementales.

16.- Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

obtén, si existen, su inversa por la izquierda, si ésta contiene únicamente ceros en la tercera columna, y su inversa por la derecha.

17.- Obtén la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$A\,B\,X = C^{-1} - X\,B\,A$$

donde, $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 12 & 7 \end{bmatrix}$

18.- *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

obtén la matriz X *que satisface la ecuación matricial*

$$B(XA - B) = C^{T} + 2XA$$

19.- *Dadas las matrices*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

obtén la matriz X *tal que*

$$-AXB + 2AC = 2C$$

20.- *Determina si las matrices* A *y* B *son ortogonales*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

21.- *Determina si las matrices* C *y* D *son unitarias*

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}}(2+i) & \frac{1}{\sqrt{15}}(3+i) \\ \frac{1}{\sqrt{15}}(-3+i) & \frac{1}{\sqrt{15}}(2-i) \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\,i & \frac{-1}{\sqrt{2}}\,i \\ \frac{2}{\sqrt{2}}\,i & \frac{-2}{\sqrt{\sqrt{2}}}\,i \end{bmatrix}$$

22.- Tomando en cuenta que A^T , $\overline{A}$ y A^* indican, respectivamente, la transpuesta, la conjugada y la conjugada-transpuesta de la matriz A , escribe en cada paréntesis de la columna izquierda la letra de la expresión de la columna derecha que corresponda a la respuesta correcta.

Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n, y k un escalar.

1.- $(kA^TB + C)^T$ = - - - - - - - - - ( )

2.- $(\overline{C}\,\overline{A} + \overline{B})^T$ = - - - - - - - - ( )

3.- $[(A + B)C^*]^T$ = - - - - - - - - ( )

A) $kB^TA^T + C$

B) $(CA + B)^*$

C) $kB^TA + C^T$

D) $(\overline{A} + BC)^*$

E) $(AC + B)^*$

F) $kBA^T + C$

G) $C(A^* + B^*)$

H) $\overline{C}(A + B)^T$

23.- Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3+i \\ 4i & -9 \end{bmatrix}$$

Expresa la matriz A como la suma de una matriz simétrica (B) más otra antisimétrica (C) más otra antihermitiana(D).

24.- Sea la matriz

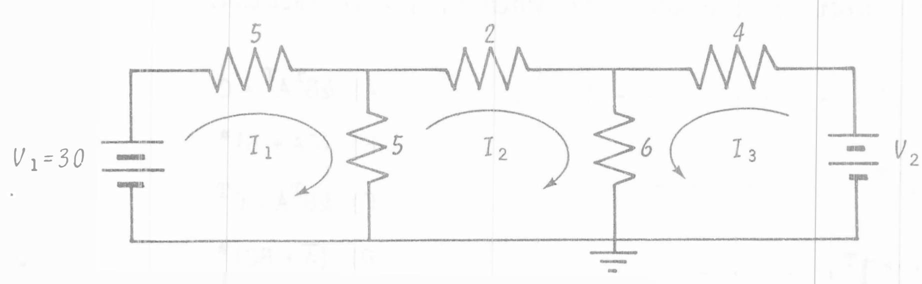
$$A = \begin{bmatrix} a+i & -i & -3+2i \\ b & -i & 4 \\ c & d & 4i \end{bmatrix}$$

a) ¿Qué valores pueden tomar $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ para que A sea antihermitiana?

b) Sea α un número complejo $\alpha = \beta + \gamma i$.
¿Qué característica debe tener α para que αA sea una matriz antihermitiana?
¿Qué característica debe tener α para que αA sea una matriz hermitiana?

25.- El ejercicio siguiente es un ejemplo que muestra la aplicación de matrices o representaciones matriciales.

Para el circuito eléctrico de la figura



su modelo matemático en forma matricial es:

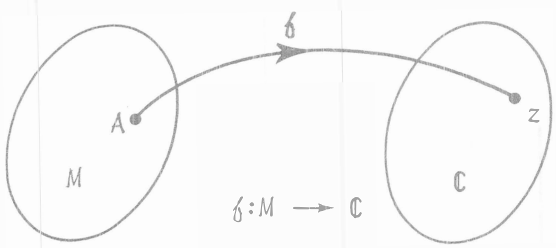
$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 13 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Si se sabe que $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, obtén los valores de I_1, I_2, I_3 y V_2

Determinantes

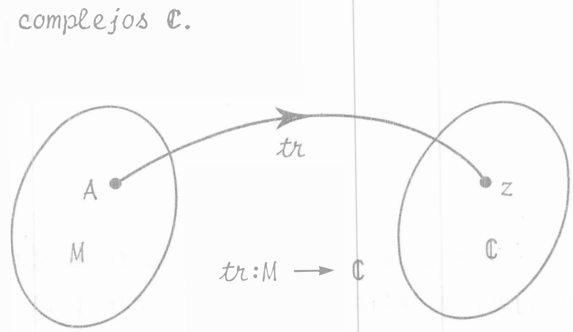
Es frecuente describir algunas características que distinguen a una matriz por medio de algunos números que se asocian a ésta. La regla que asocia a cada matriz un número concreto, define una función de valores numéricos de las matrices. Dos de las funciones con valores numéricos más importantes entre las que se definen para las matrices cuadradas son la función traza y la función determinante; estas funciones son reglas que asocian a cada matriz cuadrada A, un cierto número z.

Los conceptos de traza y determinante se pueden presentar de varias maneras; una de ellas es la de presentarlos como funciones.



Sean: M el conjunto de las matrices cuadradas de cualquier orden con elementos complejos, ℂ el conjunto de los números complejos y f una regla o criterio que asocia a cada matriz cuadrada un, y sólo un número complejo. En otras palabras, estamos estableciendo una función donde el dominio es el conjunto de las matrices cuadradas M y el codominio o contradominio es el conjunto de los números complejos ℂ.

La función traza, o simplemente la traza de una matriz cuadrada se define como "la suma de los elementos de su diagonal principal".

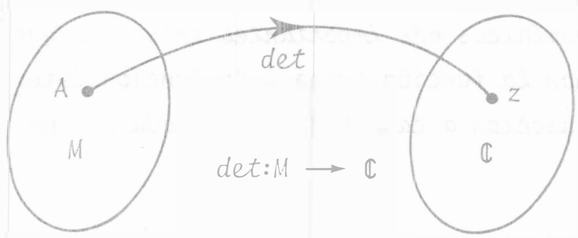


Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces, la traza de la matriz A es igual a tres:

$$tr\ (A) = 4 + 0 + (-1) = 3$$



Otra función que asocia a cada matriz cuadrada un cierto número, es la función determinante o simplemente determinante.

Nos detendremos a estudiar más esta función.

Al número que se obtiene al aplicar la función determinante a una matriz A, se le llama también determinante y se representa por det (A) o $|A|$.

El determinante de una matriz se puede representar también mediante una tabla o arreglo rectangular de números.

Por ejemplo, el arreglo

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

representa el determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

Por esta razón es frecuente hablar del orden de un determinante; así en el ejemplo anterior el determinante es de orden tres.

La notación de las líneas rectas verticales para identificar el determinante fue usada por los primeros que trataron el tema, tales como Jacobi, Cauchy y Cayley.

Es conveniente tener presente que una matriz es un arreglo rectangular de números, mientras que el determinante es un número.

Existen varios métodos para obtener el determinante de una matriz; entre ellos tenemos "desarrollo por cofactores", "condensación", "método de la matriz triangular", "regla de Sarrus" (este último aplicable sólo para matrices de segundo y tercer orden), etc.

Los determinantes de segundo y tercer orden y algunas de sus propiedades se pueden presentar también mediante un enfoque geométrico.

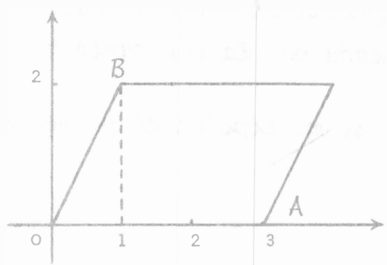


Figura 1

Consideremos el paralelogramo que muestra la figura.

Su área está dada por la expresión

Area = base x altura, y de la figura tenemos que es de 6 unidades de área.

Observemos que si escribimos los segmentos dirigidos $\overline{OA} = (3,0)$ y $\overline{OB} = (1,2)$ como renglones de un determinante de segundo orden

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{———————} \quad (1)$$

entonces, el valor absoluto del determinante, que es 6, es igual al área del paralelogramo.

En general, no importando la posición de un paralelogramo en el plano, su área está dada por el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{———————} \quad (2)$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son los elementos de los vectores $\overline{a} = (a_1, a_2)$ y $\overline{b} = (b_1, b_2)$ que están contenidos en dos lados concurrentes del paralelogramo.

Algunas propiedades de los determinantes pueden interpretarse geométricamente de la siguiente manera:

1) Si se multiplica un renglón o una columna del determinante (2) por un número $k \neq 0$

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ó } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ kb_1 & kb_2 \end{vmatrix} \text{ ó } \begin{vmatrix} ka_1 & a_2 \\ kb_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ó } \begin{vmatrix} a_1 & ka_2 \\ b_1 & kb_2 \end{vmatrix}$$

entonces por propiedades de determinantes tenemos:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ kb_1 & kb_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & a_2 \\ kb_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_2 \\ b_1 & kb_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

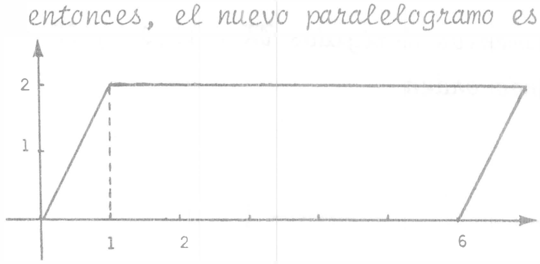
es decir, el determinante original queda multiplicado por el número k.

Geométricamente significa que al multiplicar uno de los lados por una constante k, el área original queda multiplicada por la constante k.

Por ejemplo, si en el determinante (1) se multiplica el primer renglón por 2:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

entonces, el nuevo paralelogramo es:



y su área es de 12 unidades.

Figura 2

2) Si al determinante (2) se le cambia de signo a un renglón o a una columna:

$$\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ó } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{vmatrix} \text{ ó } \begin{vmatrix} -a_1 & a_2 \\ -b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ó } \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{vmatrix},$$

entonces por propiedades de determinantes

$$\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ -b_1 & -b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_2 \\ -b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

es decir, el determinante original sólo cambia de signo.

Geométricamente, al cambiar de signo a un renglón o a una columna, se está rotando y/o trasladando al paralelogramo.

Por ejemplo, si en el determinante (1) se cambian de signo los elementos del primer renglón

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

el nuevo paralelogramo es

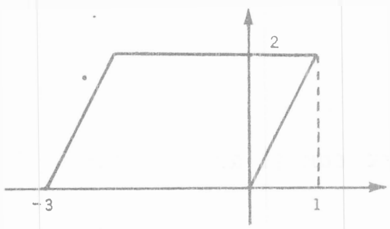


Figura 3

siendo su área de 6 unidades.

Obsérvese que el paralelogramo se trasladó con respecto al de la figura 1.

Ahora, si en el determinante (1) se cambian de signo los elementos de la primera columna:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

el nuevo paralelogramo es

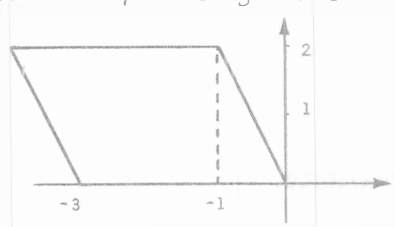


Figura 4

siendo su área de 6 unidades.

Obsérvese que, en este caso, el paralelogramo se giró y se trasladó con respecto al de la figura 1.

Te sugerimos que a continuación hagas las siguientes actividades complementarias.

I) El paralelogramo de la figura 4 no es más que el de la figura 1 girado y trasladado. ¿Cuánto es el ángulo de giro?

Respuesta ____________

II) Otras propiedades importantes de los determinantes son:

a) $\det(A) = \det(A^T)$.

Al aplicarle esta propiedad al determinante (1), tenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Dibuja el paralelogramo asociado a este determinante.

¿Qué relación geométrica tiene este paralelogramo con el de la figura 1?

Respuesta ______________________________

b) Si se multiplica una fila de un determinante por un número $k \neq 0$ y el resultado se suma a otra fila paralela, el valor del determinante no cambia. Así, por ejemplo, si multiplicamos la primera columna del determinante (1) por dos y el resultado lo sumamos a la segunda columna tenemos:

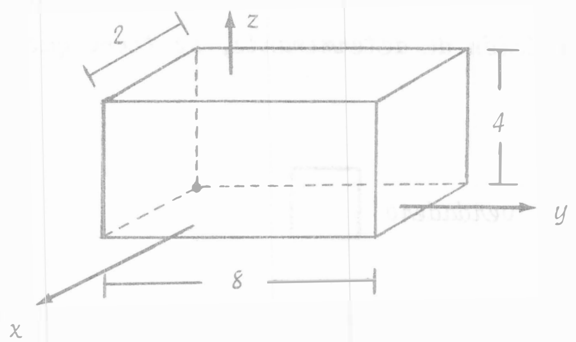
$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Dibuja el paralelogramo asociado a este determinante.

¿Qué relación geométrica tiene este paralelogramo con el de la figura 1?

Respuesta ______________________________

III) El determinante también se puede emplear para calcular volúmenes, como recordarás de tus cursos anteriores. Por ejemplo, para el paralelepípedo mostrado, ¿mediante qué determinante es posible obtener su volumen?



Respuesta:

El volumen es de ______ unidades de volumen.

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

(Continuación)

26.- Determina el número de inversiones y, de ser posible, la clase de cada una de las siguientes permutaciones.

a) (5, 3, 6, 1, 4, 2)
b) (1, 2, 3, 4)
c) (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
d) (1, 3, 5, ..., 2n - 1, 2, 4, 6, ..., 2n)

27.- La definición de determinante, a la que se refiere este ejercicio, es la que presentan los profesores E. Solar y L. Speziale en su libro "Algebra Lineal", páginas 428 - 430.

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ una matriz de orden 5×5.

Al calcular det(A) de acuerdo con la definición de determinante, se tiene que

a) El det(A) es la suma de 25 productos.

falso ☐ verdadero ☐

b) Los productos que contienen a los elementos a_{11} y a_{22} precedidos de signo positivo son: ____________________

c) El producto $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}a_{66}$ es un sumando del det(A).

falso ☐ verdadero ☐

d) Para que el producto $a_{34}a_{12}a_{5m}a_{21}a_{4n}$ del det(A) esté precedido de signo negativo, se debe cumplir que: m = ________ y n = ________

28.- Usando la definición, calcula el determinante de la siguiente matriz A si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$$

29.- Calcula, a partir de la definición de determinante, det(B) si

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

30.- Obtén dos matrices, $B = [b_{ij}]$ y $C = [c_{ij}]$, ambas de orden 3 x 3 tales que en sus dos primeros renglones se cumpla que $b_{ij} = c_{ij} = a_{ij}$, y que se cumpla también que $\det(A) = \det(B) + \det(C)$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

31.- Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcula:

a) $\det(A)\ \det(B)$ b) $\det(AB)$

32.- Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Calcula AB, BA, A^TB, AB^T, A^TB^T, B^TA^T

b) Calcula $\det(AB)$, $\det(BA)$, $\det(A^TB)$, $\det(AB^T)$, $\det(A^TB^T)$ y $\det(B^TA^T)$ utilizando propiedades de los determinantes.

33.- Usando la regla de Sarrus, calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} a+bi & 2a \\ -b & a-bi \end{bmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$

b) $B = \begin{bmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{bmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{R}^+$

c) $C = \begin{bmatrix} z & 1 & 1 \\ z^2 & z & 1 \\ z^3 & z & 1 \end{bmatrix}$, donde $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

34.- Calcula el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 1 & -8 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Por el método de condensación pivotal.

b) Por el método de la matriz triangular.

35.- El volumen de un tetraedro cuyos vértices son $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ y $P_4(x_4,y_4,z_4)$ está dado por el valor absoluto de V, donde

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Utiliza esta fórmula para calcular el volumen de un tetraedro cuyos vértices son: (-4, 6, 3), (8, -3, 5), (4, 0, -1) y (5, 3, 9).

36.- La ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ y $P_3(x_3,y_3)$ puede escribirse en la forma:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a) Comprueba que las coordenadas de cada uno de los puntos P_1, P_2 y P_3 satisfacen esta ecuación.

b) Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0,0), (3,6), (7,0).

37.- Calcula el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

38.- Sea

$$H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que $\det(H) = 1$, calcula el determinante de cada una de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 1 & 0 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 4a+3 & 4b & 4c+2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

39.- Obtén el valor de b, $b \in \mathbb{R}$, para que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

40.- Calcula el determinante de la siguiente matriz de orden $n \times n$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

41.- Sea la matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & b \end{bmatrix}$$

Determina los valores de a y b para que

$$tr(P) = det(P)$$

42.- Obtén la adjunta de cada una de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

43.- Obtén la inversa de cada una de las siguientes matrices empleando el método de la adjunta.

a) $E = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix}$ b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $G = \begin{bmatrix} i & 0 & -4i \\ -3 & 0 & 11 \\ i & -1 & 3i \end{bmatrix}$

donde $i = \sqrt{-1}$

44.- Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = A - \lambda I_3$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3 y λ un escalar, calcula todos los valores de λ que hacen que la matriz B sea singular.

45.- Para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

obtén el valor de x_2 empleando la regla de Cramer.

Ejercicios Adicionales

1.- Obtén el resultado de las siguientes operaciones :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

2.- Una matriz cuadrada A se llama **idempotente** si $A^2 = A$. Determina si las siguientes matrices son idempotentes.

a) $M = \begin{bmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{bmatrix}$ b) $N = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

3.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & -3 & 4 \\ \hline 5 & -7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

obtén, por particiones, el producto AB respetando la partición indicada para B.

4.- Sea la matriz $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]_{3\times 3}$ con $A_{22} = [\,0\,]_{1\times 1}$

y sea $B = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

Si con la partición indicada se tiene que la multiplicación por partición $AB = C$ resulta ser

$$C = \left[\begin{array}{c|cc} C_{11} & \multicolumn{2}{c}{C_{12}} \\ \hline 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

, obtén la submatriz A_{21}

5.- Sean: A una matriz simétrica de orden n; I la matriz identidad del mismo orden. Demuestra que

$$-2A^3 + 3A^2 + I$$

también es simétrica

6.- Si A es una matriz idempotente (ver ejercicio 2, página 63), obtén la matriz X tal que

$$X = \frac{1}{2}(A^4 - A^2) + \frac{1}{2}(A^3 + A)$$

7.- Para la matriz

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcula G^2 y G^3

b) Induce una expresión para G^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y demuestra su validez.

8.- a) Demuestra que el producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

b) Demuestra que la inversa de una matriz unitaria es una matriz unitaria.

9.- Demuestra que si $AB = BA$, entonces:

$$(AB)^n = A^n B^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

10.- *Si*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$, *obtén una matriz* P *no singular*

tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

11.- *Obtén la matriz* X *que satisface la siguiente ecuación*

$$A(PX - XA^T C) = P^T$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\overline{A}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

12.- *Obtén una matriz* X *que satisfaga la ecuación matricial*

$$D + AX = 3\,C^T + B^T X$$

donde:

$$D = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & -6 & -15 \end{bmatrix}$$

13.- *Obtén la matriz* X*, si existe, tal que*

$$CX = B + 2DX$$

donde

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \\ 11 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

14.- Obtén la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial

$$XA^2 - tr(X)\ D = XBC + tr(D)\ X + det(A)\ E$$

donde ,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 5/9 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

15.- Si A es una matriz no singular y k es una constante diferente de cero, demuestra que:

$$(k\ A)^{-1} = \frac{1}{k}\ A^{-1}$$

16.- Demuestra que para una matriz cuadrada A no singular

$$det\ (A^{-1}) = (det\ (A))^{-1}$$

17.- Demuestra que el determinante de una matriz ortogonal es igual a $\pm$ 1.

18.- Demuestra que el determinante de una matriz idempotente es cero o uno. (Ver ejercicio 2, página 63).

19.- Dadas las siguientes afirmaciones, escribe en el paréntesis correspondiente una V si la afirmación es verdadera y una F si es falsa:

a) El determinante de una matriz hermitiana es un número imaginario puro. - ( )

b) Si A es una matriz de orden n y α es un escalar, entonces: $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ - - - - - - - - - - - - - - - - ( )

c) Si A es una matriz cuadrada con números complejos, entonces: $\det(A^*) = \det(\overline{A})$ - - - - - - - - - - - - - - - - - ( )

d) Si A es una matriz cuadrada, no singular, entonces: $\det(A) = \det(A^{-1})$ - - - - - - - - - - - - - - - - - ( )

e) Si dos filas paralelas de una matriz cuadrada A son proporcionales entre sí, entonces $\det(A) \neq 0$ - - - - - - - ( )

20.- Demuestra que:

a) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$

b) Si A es antihermitiana, entonces $\det(A)$ es un número real o imaginario puro.

21.- Sean $A = \left[a_{ij} \right]$ y $B = \left[b_{ij} \right]$ matrices triangulares superiores de orden 2. ¿Qué condición deben satisfacer sus elementos para que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$? Verifica la respuesta con un ejemplo.

22.- Obtén el valor máximo del determinante de tercer orden que esté constituido sólo por elementos iguales a 0 y -2.

23.- Demuestra que el determinante de toda matriz antisimétrica de orden impar es nulo.

24.- Calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 4 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

25.- Empleando únicamente propiedades de los determinantes, demuestra que

$$\begin{vmatrix} (2^m - 2^{-m})^2 & (2^m + 2^{-m})^2 & 2 \\ (2^n - 2^{-n})^2 & (2^n + 2^{-n})^2 & 2 \\ (2^p - 2^{-p})^2 & (2^p + 2^{-p})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0 , \qquad m, n, p \in \mathbb{Z}$$

26.- Calcula el determinante de la siguiente matriz de orden $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

27.- a) Demuestra que

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{para todo } n > 2$$

b) ¿Cuánto vale para $n = 2$?

28.- Todo polinomio de grado n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ax + a_0$$

se puede expresar mediante la representación rectangular de un determinante de orden $n + 1$:

$$p(x) = \begin{vmatrix} a_n & -a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & (-1)^{n-k}a_k & \cdots & (-1)^n a_0 \\ 1 & x & & & & & \\ & 1 & x & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & x & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & x \end{vmatrix}$$

donde todos los elementos de la diagonal principal valen x con excepción del elemento del primer renglón y de la primera columna; todos los elementos de la diagonal inmediata inferior a la diagonal principal valen uno y todos los demás elementos que no aparecen valen cero.

a) Representa el polinomio

$$q(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 9x$$

en la forma anterior.

b) Sea la matriz $Q(x)$ la expresión rectangular obtenida en el inciso anterior; ¿ para qué valores de x, la matriz $Q(x)$ es singular ?

c) ¿ Cuáles son las raíces del polinomio $q(x)$?

29.- El término n-ésimo, a_n, del desarrollo

$$e^x = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

se puede obtener a partir de la expresión

$$a_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

Utilizando la expresión anterior y el método de condensación hasta reducir a determinantes de orden dos, obtén los términos a_3 y a_5

30.- Sea la ecuación

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

donde los a_i son coeficientes reales con $a_0 \neq 0$

Las raíces complejas de la ecuación anterior tienen la parte real negativa, si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

Determina para qué valores de k la ecuación

$$(3-k)x^3 + 2x^2 + (5-2k)x + 2 = 0$$

tiene todas sus raíces complejas con parte real negativa.

31.- La sucesión numérica de Fibonacci es una sucesión tal que comienza con los números 1,2 y todo número siguiente es la suma de los dos anteriores. Esto es 1,2,3,5,8,13,...

El n-ésimo término de esta sucesión está dado por el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

Verifica que coincida el determinante con el sexto término de la sucesión.

32.- a) *Demuestra que la matriz adjunta de una matriz simétrica es también simé_ trica.*

b) *Demuestra que si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces*

$$adj(AB) = adj(B)\, adj(A)$$

33.- *Sea A una matriz no singular de orden n. Demuestra que*

a) $A \cdot adj(A) = |A|\, I_n$, *donde* I_n *es la matriz identidad de orden n*

b) $|adj(A)| = |A|^{n-1}$

Nota: $|adj(A)|$, representa al determinante de la adjunta de A

34.- *Demuestra que si A es una matriz no singular de orden n, entonces*

$$|adj(adj(A))| = |A|^{(n-1)^2}$$

Sugerencia:

Utiliza las demostraciones del ejercicio anterior.

Examen de Capítulo

1.- Dadas las siguientes afirmaciones, escribe en el paréntesis correspondiente, una V si la afirmación es verdadera y una F si es falsa.

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden, $A \neq B$; siempre se cumple que:

a) $ABAB^2 = A^2B^3$ - ( )

b) $ABA^2AA^4B^2A = ABA^7B^2A$ - - - - - - - - - - - - - - - - ( )

c) $(AB)^T = A^TB^T$ - ( )

d) Si $B = A - A^T$, B es antisimétrica - - - - - - - - - - ( )

e) $(\overline{BA}) = \overline{B}\ \overline{A}$ - ( )

2.- Dadas las matrices

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y sabiendo que $A - B = D^{-1}$, obtén la matriz X tal que:

$$AXD - C = BXD$$

Solución:

3.- Dada la matriz $A = [a_{ij}]$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3.1) El menor del elemento a_{34} está dado por:

A) -4 B) 28 C) 31 D) 1

La respuesta correcta es - - - - - - - - - - - - - - $\boxed{}$

3.2) El cofactor del elemento a_{34} está dado por:

A) -31 B) -28 C) -4 D) 31

La respuesta correcta es - - - - - - - - - - - - - - $\boxed{}$

3.3) Empleando el método de condensación y desarrollando sobre la cuarta columna, el det(A) es:

A) -124 B) 120 C) -120 D) 0

La respuesta correcta es - - - - - - - - - - - - - - $\boxed{}$

4.- Dada la matriz adjunta de la matriz A y una columna de la matriz transpuesta de A:

$$\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & & \\ 3 & & \end{bmatrix}$$

obtén:

a) det(A)

b) A

Solución:

5.- Compara los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$A: \begin{array}{rcrcrcrcr} 2q & + & 4r & + & 2s & + & 2\alpha t & = & 4 \\ 2q & + & r & + & 2s & + & t & = & 0 \\ 2q & - & r & + & 3s & - & 3\beta t & = & -1 \\ -q & - & r & + & 2s & - & t & = & -3 \end{array} \qquad B: \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & \alpha w & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 2z & + & w & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & - & 3\beta w & = & -1 \\ -x & - & y & + & 2z & - & w & = & -3 \end{array}$$

donde α y β son constantes.

Sabiendo que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema A vale -22, calcula el valor de w del sistema B empleando la regla de Cramer.

Solución:

CAPITULO III

Estructuras Algebraicas

"Las matemáticas no estudian los objetos sino las relaciones entre los objetos; por tanto, les es indiferente reemplazar unos objetos por otros, con tal que no cambien las relaciones".

H. Poincaré.

Examen Diagnóstico

A continuación se presentan algunas preguntas sobre antecedentes, para estudiar este capítulo. Trata de contestarlas y compara tus respuestas con las presentadas después de las preguntas. Si tienes dudas, intenta esclarecerlas leyendo los temas que se sugieren en la bibliografía propuesta al final de este examen.

1.- Escribe el conjunto que resulta de efectuar cada una de las siguientes operaciones si el conjunto de los reales $\mathbb{R}$ es el conjunto universo.

a) $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q})' - \mathbb{R} =$

b) $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Z} - \mathbb{R}') =$

2.- Completa correctamente cada una de las siguientes proposiciones.

a) La ley cancelativa para la adición de números naturales $\mathbb{N}$ establece que:
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ ____________________________________

b) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ cumple las siguientes propiedades básicas para la adición:

____

____

c) La ley asociativa para la adición de números racionales dice que:
$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$ ____________________________________

d) El elemento idéntico para la multiplicación de números complejos es:

____

3.- Escribe en cada paréntesis un SI cuando la función respectiva sea del tipo mencionado o un NO si no es de ese tipo, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

		INYECTIVA	SUPRAYECTIVA	BIYECTIVA
a) $f(x) = 5x + 2$	es	( )	( )	( )
b) $g(t) = 2^t$	es	( )	( )	( )
c) $g(x) = x^2 - 1$	es	( )	( )	( )

RESPUESTAS

1.- a) $\phi = \{ \quad \}$

b) $\mathbb{Z}$

2.- a) $a + b = a + c \implies b = c$

b) Cerradura, asociatividad, conmutatividad, existencia de elemento idéntico, existencia de inversos, cancelación.

c) $x + (y + z) = (x + y) + z$

d) $1 = 1 + 0i$

3.- a) (SI) (SI) (SI)

b) (SI) (NO) (NO)

c) (NO) (NO) (NO)

BIBLIOGRAFIA

Los conceptos aludidos en estas preguntas los puedes estudiar en:

- Algebra I
  de Eduardo Solar González y Leda Speziale de Guzmán
  Editado por la Facultad de Ingeniería, UNAM
  Páginas 19, 34, 48 y 92

- Algebra Superior
  de Cárdenas-Lluis-Raggi-Tomás
  Edit. Trillas
  Páginas 24 y 25

Introducción

El objetivo de este tercer capítulo es estudiar el concepto de estructura algebraica.

En forma general se define una estructura algebraica como un conjunto en el que están definidas una o más operaciones. Las estructuras algebraicas que estudiaremos en este capítulo son: grupo, anillo y campo o cuerpo. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros con las operaciones de adición y multiplicación es un anillo.

Las estructuras algebraicas desempeñan un papel muy importante en muchas ramas de la ciencia como por ejemplo: La teoría de la relatividad, física nuclear, mecánica cuántica, cristalografía, etc. Sin embargo, en este curso sólo estudiaremos las nociones básicas del tema.

Esta poderosa herramienta matemática fue creada a principios del siglo XIX, y entre algunos de los matemáticos más importantes a quienes debemos su creación, podemos citar a Evariste Galois, brillante matemático francés muerto en un duelo en 1830 a la edad de 21 años. Galois fue el principal promotor de la teoría de grupos. Otros célebres matemáticos que también hicieron contribuciones en esta rama de las matemáticas fueron Augustin Louis Cauchy, Sir Arthur Cayley y Niels Henrik Abel.

A continuación daremos un panorama general de la distribución de este capítulo con el objetivo de ubicar al lector.

En primer término, se presentará el concepto de operación binaria que es esencial en el análisis de las estructuras algebraicas. Posteriormente, se analizarán algunos conjuntos y las operaciones binarias que se han definido en ellos y, de acuerdo con las propiedades que dichas operaciones posean, se determinará a qué tipo de estructura algebraica pertenecen.

Finalmente, en la última parte del capítulo se estudiarán dos conceptos de singular importancia: isomorfismos y homomorfismos entre grupos y anillos.

Operación Binaria

Introduciremos el concepto de operación binaria mediante la siguiente situación hipotética.

Era el primer día de clases en un grupo de matemáticas. Los alumnos, después de una breve plática, solicitaron al profesor que les indicara la forma en que los calificaría. Las condiciones quedaron establecidas de la siguiente manera:

a) Dur nte el curso se harán tres exámenes parciales.

b) Se calculará el promedio P de las tres calificaciones parciales.

c) Al terminar el curso se hará un examen final el cual proporcionará otra calificación E_F

d) La calificación final C_F de la materia se obtendrá de la suma del doble del promedio P más el examen final E_F, y dividiendo el resultado entre 3, es decir

$$C_F = \frac{2P + E_F}{3}$$

e) Todas las calificaciones parciales así como P y E_F qued rán comprendidas en una escala de 0 a 100.

f) En las calificaciones P, E_F y C_F se omitirán las cifras decimales.

Con el objeto de que estas condiciones queden claras para todos los alumnos, y evitar reclamaciones posteriores, el profesor expuso el siguiente ejemplo.

Alumno: Manuel Sánchez Hernández

1er. examen parcial = 75

2o. examen parcial = 30

3er. examen parcial = 68

Por lo tanto, $P = 57$

$E_F = 72$

y la calificacion final C_F es:

$$C_F = \frac{2(57) + 72}{3} = 62$$

Analicemos ahora cómo las condiciones establecidas en este ejemplo involucran, en toda su extensión, el concepto de operación binaria.

Según la definición de operación binaria, ésta es una regla que asocia a cada par de elementos de un conjunto S, un tercer elemento unívoco llamado resultado de la operación. Ahora bien, en nuestro ejemplo anterior tenemos una regla que asocia a cada par de valores P y E_F un tercer valor, que de acuerdo con la condición "d" es igual a $\frac{2P + E_F}{3}$

Además esta regla de asociación está definida en el conjunto[1]:

$$S = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x \leq 100 \}$$

puesto que tanto P como E_F sólo pueden tomar valores dentro de S (ver condiciones e y f).

Por lo tanto, en este ejemplo están presentes todos los elementos que definen a una operación binaria.

Si denotamos con el símbolo θ a las operaciones que se deban efectuar con P y E_F para obtener la calificación final C_F tendremos que

$$C_F = P \,\theta\, E_F \qquad (1)$$

donde la expresión $P \,\theta\, E_F$ significa

$$P \,\theta\, E_F = \frac{2P + E_F}{3} \qquad (2)$$

La ecuación (1) nos indica que a la pareja de números P y E_F se le asocia el número C_F de acuerdo con la regla θ. Es decir, θ representa a la operación binaria.

La ecuación (2) define a la operación θ mediante una expresión algebraica usual.

En general, el resultado de una operación binaria depende del orden en que se tomen los elementos. Esto se hace patente en el caso de nuestro ejemplo, ya que en términos generales

$$P \,\theta\, E_F \neq E_F \,\theta\, P$$

---

[1] En toda la presente obra, representaremos a los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos con los siguientes signos, respectivamente: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

$$\text{o bien} \quad \frac{2P + E_F}{3} \neq \frac{2E_F + P}{3}$$

Por ejemplo si $P = 57$ y $E_F = 72$ tenemos que

$$\frac{2(57) + 72}{3} \neq \frac{2(72) + 57}{3}$$

Analicemos ahora si la operación θ es cerrada[2] en el conjunto S.

Para que la operación sea cerrada debe cumplirse que:

$$(P \ \theta \ E_F) \in S \qquad \forall \ P, \ E_F \in S$$

En otras palabras, para que θ sea cerrada, debe cumplirse que la calificación final C_F esté comprendida entre 0 y 100 y que sea un número entero, para cualesquiera P, $E_F \in S$.

Debido a la condición (f), la calificación C_F siempre será un número entero. Por lo tanto sólo resta investigar si C_F está comprendida entre 0 y 100.

Sustituyendo en la expresión

$$P \ \theta \ E_F = \frac{2P + E_F}{3}$$

los valores máximos que pueden tomar P y E_F tendremos:

$$100 \ \theta \ 100 = \frac{2(100) + 100}{3} = 100 \in S$$

Lo cual indica que aun para los valores máximos de P y E_F el resultado es menor o igual a 100.

Procediendo de igual forma para los valores mínimos que pueden tomar P y E_F tenemos:

$$0 \ \theta \ 0 = \frac{2(0) + 0}{3} = 0 \in S$$

Por tanto, aun para los valores mínimos de P y E_F el resultado es mayor o igual a cero.

Tomando en cuenta el razonamiento anterior y la condición (f), podemos concluir que C_F siempre será un número entero x tal que $0 \leq x \leq 100$, de lo cual concluimos que la operación θ es cerrada en el conjunto S.

---

[2] Algunos autores consideran la propiedad de cerradura implícita en la definición de operación binaria; es decir, consideran que para que una operación sea binaria, debe suponerse de antemano la cerradura.

De acuerdo con la definición de operación binaria, ésta cumple, a su vez, con la definición de función. En el ejemplo que se ha presentado, podemos decir que θ es una función cuyo dominio es $S \times S$ y el codominio es S. Simbólicamente escribimos, $\theta : S \times S \longrightarrow S$, pudiendo expresar también (2) de la siguiente manera:

$$\theta(P, E_F) = \frac{2P + E_F}{3}$$

Existen algunas operaciones binarias muy importantes dentro de las matemáticas.

Por ejemplo, en el conjunto $V = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ se definen el producto escalar y el producto vectorial respectivamente como

$$(a_1,b_1,c_1) \cdot (a_2,b_2,c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

$$(a_1,b_1,c_1) \times (a_2,b_2,c_2) = (b_1c_2-b_2c_1,\ a_2c_1-a_1c_2,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

El producto escalar $\cdot$, y el producto vectorial $\times$, son dos tipos de operaciones binarias; es decir, son dos funciones. En el primer caso, el dominio es $V \times V$ y el codominio es $\mathbb{R}$; en el segundo, el dominio es también $V \times V$, pero el codominio es V.

Completa correctamente las siguientes afirmaciones.

La operación binaria "producto escalar" cumple con las propiedades de ____________________ y no cumple con las de ____________________

____

La operación binaria "producto vectorial" cumple con las propiedades de ____________________ y no cumple con las de ____________________

____

La expresión $x + y + z - 8 = 0$ representa, geométricamente, un plano. Esta misma ecuación la podemos escribir en la forma $z = \phi(x,y) = 8 - x - y$, pudiendo entonces considerar a ϕ como una operación binaria, ya que a toda pareja ordenada de números reales (x,y) se le asigna uno y sólo un valor de z. De acuerdo a esta operación binaria ϕ, se tiene que $\phi(4,4) = 4\,\phi\,4 =$ __________, $(-1)\,\phi\,8 = \phi(-1, 8) =$ __________.

Las propiedades que satisface la misma operación binaria ϕ son __________

____

En el espacio siguiente, establece una regla de asociación sobre el conjunto de números que tú elijas, tal que no constituya una operación binaria.

Para completar las actividades que contribuyan a la mejor comprensión y análisis de estos conceptos, trata de resolver los siguientes ejercicios.

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

1.- Sean los conjuntos $A = \{\alpha, \beta\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

a) Obtén el conjunto $A \times A$, es decir, el producto cartesiano de A consigo mismo.

b) Establece una relación f de $A \times A$ en B tal que $f: A \times A \rightarrow B$ sea una función.

c) Establece una relación g de $A \times A$ en A tal que $g: A \times A \rightarrow A$ sea una función.

d) ¿Son f y g operaciones binarias? ¿Por qué?

2.- Consideremos la siguiente operación:

$$a * b = 3(a + b) \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$$

a) ¿Es * una operación binaria? Justifica tu respuesta, verificando si satisface la definición de operación binaria.

b) Calcula el resultado de: $1 * (1 * (2 * (3 * 4)))$.

c) Determina si $a * (b * c) = (a * b) * c$; $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$

3.- Sea el conjunto $T = \{t \mid t = 3n, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ y la operación binaria Ⓟ definida por:

$$x \text{ Ⓟ } y = 2x + 2y + 6 \qquad \forall x, y \in T$$

a) Calcula, cuando estén definidas, las operaciones: 9 Ⓟ 6, 1 Ⓟ 6, 3 Ⓟ 3.

b) Demuestra que la operación Ⓟ es cerrada en T.

c) ¿Es conmutativa la operación Ⓟ en T?

d) ¿Es asociativa la operación Ⓟ en T?

4.- En el conjunto $\mathbb{R}$ se define la operación binaria ⓧ de la siguiente manera:

$$a \text{ ⓧ } b = a^b, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

a) ¿Es conmutativa la operación ⓧ ?

b) ¿Es asociativa la operación ⓧ ?

5.- Sean los sistemas $(A, *)$ y (B, Δ) donde $A = \mathbb{R} - \{-1\}$, $B = \mathbb{R} - \{1\}$ y las operaciones $*$ y Δ se definen de la siguiente manera:

$$a * b = a \Delta b = a + b + ab$$

a) Determina si $*$ es cerrada en A y si Δ es cerrada en B.

b) En caso que no exista cerradura, da un ejemplo donde se muestre la no existencia.

c) Obtén el resultado de $(-2) * (-2)$.

6.- Dadas las operaciones binarias $\square$ y Δ definidas en $\mathbb{R}$ por las siguientes reglas,

$$a \square b = 2b - a, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$
$$a \Delta b = 2a - b,$$

Determina si la operación Δ es distributiva sobre $\square$.

Estructuras Algebraicas

Cuando en un conjunto S se han definido una o varias operaciones binarias $*$, Δ,. . ., se acostumbra denotarlo como $(S, *, \Delta, . . .)$ y se dice que las operaciones $*$, Δ,. . ., determinan en S una estructura algebraica y que $(S, *, \Delta, . . .)$ es un sistema algebraico.

A continuación te presentamos un ejemplo en el que trataremos de ilustrar el concepto de estructura algebraica.

Sea el conjunto M de matrices cuadradas de orden 2 de la forma

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

y la siguiente operación binaria Φ que relaciona los elementos de este conjunto:

$$A \Phi B = A + I + B$$

donde A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto M e I es la matriz identidad.

Entre las estructuras algebraicas que puede formar el sistema (M, Φ) las más importantes son la de grupo y grupo abeliano. Analizaremos con base en sus propiedades si Φ determina en M alguna de estas estructuras.

a) En primer término, probaremos que la operación Φ es cerrada en el conjunto M.

Para esto, definamos dos matrices no particulares del conjunto:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \qquad A_1, A_2 \in M$$

y operemos con ellas de acuerdo a Φ:

$$A_1 \ \Phi \ A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + 1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + 1 + b_2 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que el resultado es una matriz que pertenece al conjunto M ya que es una matriz diagonal con elementos enteros. Este resultado se puede expresar como:

$$(A_1 \Phi A_2) \in M, \quad \forall A_1, A_2 \in M$$

b) Investiguemos ahora si

$$A_1 \Phi (A_2 \Phi A_3) = (A_1 \Phi A_2) \Phi A_3, \quad \forall A_1, A_2, A_3 \in M$$

es decir, si Φ es asociativa en M.

Operemos con el lado izquierdo

$$A_1 \Phi (A_2 \Phi A_3) = A_1 \Phi (A_2 + I + A_3) = A_1 + I + (A_2 + I + A_3) = A_1 + A_2 + A_3 + 2I$$

Operemos ahora con el lado derecho

$$(A_1 \Phi A_2) \Phi A_3 = (A_1 + I + A_2) \Phi A_3 = (A_1 + I + A_2) + I + A_3 = A_1 + A_2 + A_3 + 2I$$

Como las dos últimas expresiones son iguales, se cumple que Φ es asociativa.

c) Comprobemos en este inciso la existencia del elemento idéntico, es decir la existencia de una matriz única

$$U = \begin{bmatrix} a_u & 0 \\ 0 & b_u \end{bmatrix} \qquad a_u, b_u \in \mathbb{Z}$$

tal que

$$A \Phi U = U \Phi A = A, \quad \forall A \in M$$

Para esto, consideremos a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

que representa a cualquier matriz de M.

$$A \Phi U = \begin{bmatrix} a + 1 + a_u & 0 \\ 0 & b + 1 + b_u \end{bmatrix},$$ *lo cual, como puedes comprobar, es igual a* $U \Phi A$.

De acuerdo con la definición de idéntico, se debe cumplir que $A\Phi U = U\Phi A = A$, *es decir:*

$$\begin{bmatrix} a + 1 + a_u & 0 \\ 0 & b + 1 + b_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Longrightarrow a_u = b_u = -1$$

De donde,

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ *que pertenece a* M*; por tanto, existe elemento idéntico.*

d) Existencia de elementos inversos.

De acuerdo con su definición, esta propiedad se cumple si:

$$\forall A \in M \quad \exists A^{\urcorner} \in M, \text{ tal que; } A \Phi A^{\urcorner} = A^{\urcorner} \Phi A = U$$

Supongamos que:

$$A^{\urcorner} = \begin{bmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_i \end{bmatrix};$$ *entonces*

$$A \Phi A^{\urcorner} = \begin{bmatrix} a + 1 + a_i & 0 \\ 0 & b + 1 + b_i \end{bmatrix}$$ *lo cual, como puedes comprobar, es igual a* $A^{\urcorner} \Phi A$.

De acuerdo con la definición de elementos inversos $A\Phi A^{\urcorner} = A^{\urcorner} \Phi A - U$

$$\begin{bmatrix} a + 1 + a_i & 0 \\ 0 & b + 1 + b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ *de donde:* $$a_i = -2 - a$$ $$b_i = -2 - b$$

y por lo tanto,

$$A^{\urcorner} = \begin{bmatrix} -(2+a) & 0 \\ 0 & -(2+b) \end{bmatrix}$$

De esta expresión podemos observar que $A^{\urcorner}$ existe y es única para cada matriz de M y que $A^{\urcorner}$ pertenece a M.

Así, por ejemplo, si:

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{su inverso es} \quad B^{\urcorner} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y se cumple que:

$$B \Phi B^{\urcorner} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

Hemos demostrado que el sistema (M, Φ) cumple las propiedades de

- Cerradura
- Asociatividad
- Existencia de elemento idéntico
- Existencia de elementos inversos

por lo que (M, Φ) es un grupo.

Por otro lado, se cumple la propiedad conmutativa, es decir:

$$A_1 \,\Phi\, A_2 = A_2 \,\Phi\, A_1, \quad \forall\, A_1, A_2 \in M$$

ya que:

$$A_1 \,\Phi\, A_2 = A_1 + I + A_2 = A_2 + I + A_1 = A_2 \,\Phi\, A_1$$

Al cumplirse la conmutatividad adicionalmente a las 4 propiedades anteriores, podemos concluir que (M, Φ) es un grupo conmutativo (o grupo abeliano)

Te sugerimos que a continuación realices las actividades complementarias siguientes:

I) Despeja a la matriz X de la ecuación

$$A_0 \Phi X^{\urcorner} \Phi U \Phi A_1^{\urcorner} = (A_1 \Phi A_0)^{\urcorner} \Phi U^{\urcorner} \Phi A_0$$

donde $A_0, A_1, X \varepsilon M$ y U es el elemento idéntico del grupo abeliano (M, Φ)

Respuesta $X =$ ____________________.

II) Una estructura más simple que la de grupo es la de semigrupo. Se da este nombre al sistema $(S, *)$ que cumple con dos condiciones: La operación $*$ es cerrada y es asociativa en S.

Construye un sistema $(S, *)$ que sea un semigrupo, pero no un grupo.

Para ello, establece tu conjunto S :

$S =$ __________________________.

La operación $*$ definida en S que hace que $(S, *)$ sea un semigrupo es:

III) Dos tipos de semigrupo son el semigrupo conmutativo y el semigrupo con unidad. Este último también es llamado monoide[3].

En un semigrupo conmutativo $(S, *)$ se cumple el siguiente teorema:

Para cualesquiera elementos $a, b \varepsilon S$, si se conviene que $a^n = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ veces}}$, entonces $(a * b)^n = a^n * b^n$, donde $n \varepsilon \mathbb{N}$.

Demuestra este teorema.

Demostración:

[3] No todos los autores llaman monoide a un semigrupo con unidad; algunos llaman monoide a cualquier sistema $(S, *)$, independientemente de las propiedades que satisfaga la operación binaria $*$.

IV) a) Los sistemas $(\mathbb{N}, +)$ y $(\mathbb{N}, \cdot)$ son semigrupos conmutativos. Entonces, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{N}$, se tiene que, $(a+b)^n = a^n + b^n$ y $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, siendo $n \in \mathbb{N}$.

Dos casos particulares son, si $a = 2$, $b = 3$, $n = 3$:

$(3 \cdot 2)^3 =$ ______, $3^3 \cdot 2^3 =$ ______, de donde $(3 \cdot 2)^3 = 3^3 \cdot 2^3$

$(3 + 2)^3 =$ ______, $3^3 + 2^3 =$ ______, de donde $(3 + 2)^3 = 3^3 + 2^3$

b) ¿Qué parte del enunciado del teorema se tiene que tener presente para que $(a+b)^n = a^n + b^n$?

Respuesta: ______________________________

Como siguiente actividad, para reafirmar los conceptos que has aprendido, te invitamos a tratar de resolver los siguientes ejercicios.

E J E R C I C I O S P R O P U E S T O S

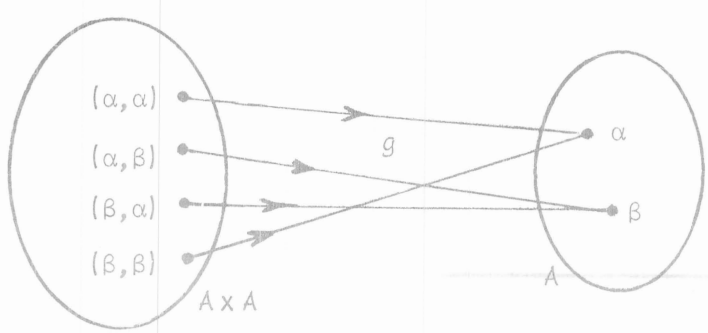
(Continuación)

7.- Sea el conjunto $A = \{a \mid a = \frac{x}{4},\ x \in \mathbb{Q}\}$

Determina si el sistema $(A, +)$ es un grupo abeliano. (La operación $+$ es la adición de los racionales).

8.- Considera el conjunto A del ejercicio uno, página 85.

Una relación g, que se pide en el inciso c) de dicho ejercicio puede ser la siguiente:



Determina si (A, g) es un grupo.

9.- En el conjunto $L = \{y \mid y = \log x,\ x > 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ se define la operación binaria de la siguiente manera:

$$\log x_1 \square \log x_2 = \log (x_1 x_2), \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 > 0,\quad x_2 > 0$$

Si la operación $\square$ es cerrada, asociativa y conmutativa, demuestra que $(L, \square)$ es un grupo abeliano.

10.- El sistema $(A, *)$, donde $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $*$ está definida por

$$a * b = a + b + ab, \quad \forall\, a, b \in A$$

es un grupo.

a) ¿Cuál es el elemento idéntico del grupo?

b) ¿Cuál es el inverso de $-\frac{8}{9}$?

c) ¿Cuál es el inverso de -2?

11.- Sea el sistema $(B, *)$ donde $B = \{a, b, c, u\}$ y $*$ está definida de acuerdo con la siguiente tabla.

*	a	b	c	u
a	b	c	u	a
b	a	u	c	b
c	u	a	b	c
u	a	b	c	u

a) Determina si para la operación $*$ existe:

1.- Cerradura

2.- Elemento idéntico

3.- Los inversos

4.- Asociatividad

b) ¿Es $(B, *)$ un grupo?

12.- Demuestra que el elemento neutro de un grupo es único. (Elemento neutro es otra forma de llamar al elemento idéntico).

13.- Sea $(G, *)$ un grupo. Demuestra que la ecuación $x * a = b$, donde x es la incógnita y a y b son elementos de G, tiene solución única.

14.- Demuestra que si a y b son dos elementos del grupo $(G, *)$, entonces $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

(x^{-1} significa inverso de x).

15.- Sea $(G, *)$ un grupo. Demuestra que si para todo $a \in G$, $a * a = u$, donde u es el idéntico de $(G, *)$, entonces $(G, *)$ es abeliano. (Sugerencia: utiliza la propiedad del ejercicio anterior).

16.- Sea el sistema $(B, *, \Theta)$, donde $B = \{4m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, y las operaciones $*$ y Θ están definidas por:

$$a * b = b + a$$

$$a \Theta b = \frac{ab}{2} \qquad \forall\, a, b \in B$$

Considerando que $(B, *)$ es un grupo abeliano, determina si $(B, *, \Theta)$ es un anillo.

17.- Sea el sistema $(\mathbb{Z}, +)$ cuya estructura es de grupo abeliano. Si se define una operación $*$ tal que:

$$a * b = K a b, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z} \text{ (donde } K \text{ es cualquier entero)},$$

a) demuestra que el sistema $(\mathbb{Z}, +, *)$ tiene estructura de anillo conmutativo.
b) Si $K = 1$ ¿Qué estructura tiene el sistema $(\mathbb{Z}, +, *)$?
c) Si $K = 0$, determina por qué el sistema $(\mathbb{Z}, +, *)$ no es un dominio entero.

18.- Sea M el conjunto de las matrices escalares de orden dos, es decir,

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Determina si $(M, +, \bullet)$ es un dominio entero. (Considera a $+$ y $\bullet$ como la adición y multiplicación ordinarias de matrices).

19.- El sistema $(A, +, \bullet)$ es un anillo, donde $A = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$$

$$(a, b) \bullet (c, d) = (ac,\ bd), \qquad \forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

a) Determina qué tipo de anillo es.
b) Determina si es un dominio entero.

20.- Determina si el conjunto $B = \{0, 1, 2\}$ con las operaciones de "adición" y "multiplicación" definidas como se muestra a continuación es un campo.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Morfismos

Sean dos grupos $(T, \oplus)$, $(S, \odot)$, donde $T = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y las operaciones binarias $\oplus$ y $\odot$ se definen por:

$$x \oplus y = x + y, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

$$(x, 2x, 3x) \odot (y, 2y, 3y) = (x + y, 2(x + y), 3(x + y)), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Definamos la función biyectiva

$$f(T, \oplus) \rightarrow (S, \odot) \text{ tal que}$$

$$f(x) = (x, 2x, 3x), \quad \forall\, x \in T$$

Así por ejemplo, $f(1) = (1, 2, 3)$

$f(-4) = (-4, -8, -12)$.

Calculemos por un lado

$$1 \oplus (-4) = -3 \quad \underline{\hspace{4cm}} \quad (1)$$

y por otro lado, calculemos $f(1) \odot f(-4)$, es decir,

$$f(1) \odot f(-4) = (1, 2, 3) \odot (-4, -8, -12) = (-3, -6, -9) \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \quad (2)$$

Observamos que los resultados mantienen la relación biyectiva establecida, puesto que aplicando la función f al resultado de la expresión (1) obtenemos el resultado de la expresión (2), o sea $f(-3) = (-3, -6, -9)$.

Lo anterior lo podemos escribir por tanto de la siguiente manera:

$$f(-3) = f(1 \oplus -4) = f(1) \odot f(-4) = (-3, -6, -9),$$

y en general, se puede probar que:

$$f(x \oplus y) = f(x) \odot f(y), \quad \forall\, x, y \in T \quad \underline{\hspace{3cm}} \quad (3)$$

Probémoslo:

$$f(x \oplus y) = f(x + y) = (x + y, 2(x + y), 3(x + y)) \quad \underline{\hspace{3cm}} \quad (4)$$

$$f(x) \odot f(y) = (x, 2x, 3x) \odot (y, 2y, 3y) = (x + y, 2(x + y), 3(x + y)) \quad \underline{\hspace{0.5cm}} \quad (5)$$

Como las expresiones (4) y (5) son iguales, entonces (3) es cierta.

Si ahora deseáramos obtener el resultado de operar con más de dos elementos de S, por ejemplo:

$$(-3, -6, -9) \odot (5, 10, 15) \odot (2, 4, 6) \odot (1, 2, 3) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (6)$$

en virtud de que la función es biyectiva el resultado se podría obtener en forma equivalente a partir de:

$$-3 \oplus 5 \oplus 2 \oplus 1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (7)$$

puesto que:

$$f(-3) = (-3, -6, -9)$$
$$f(5) = (5, 10, 15)$$
$$f(2) = (2, 4, 6)$$
$$f(1) = (1, 2, 3)$$

Entonces, $(-3 \oplus 5) \oplus (2 \oplus 1) = 2 \oplus 3 = 5$; y, como $f(5) = (5, 10, 15)$, podemos asegurar que el resultado de la expresión (6) es $(5, 10, 15)$, o sea,

$$(-3, -6, -9) \odot (5, 10, 15) \odot (2, 4, 6) \odot (1, 2, 3) = (5, 10, 15)$$

Como puedes observar, $\oplus$ es la adición ordinaria de números reales, por lo que resultó más sencillo obtener el resultado de (6) empleando la expresión (7).

Las funciones biyectivas que cumplen la ecuación (3) se llaman isomorfismos y como pudiste observar, una de sus aplicaciones fundamentales es la de poder manejar indistintamente dos estructuras algebraicas siendo equivalentes los resultados.

En resumen, las condiciones que se deben cumplir para la existencia de un isomorfismo entre grupos, son las siguientes:

Dados dos grupos $(A, *)$ y (B, Δ), exista una función $f: A \rightarrow B$, tal que:

a) f sea biyectiva, y

b) $f(a * b) = f(a) \,\Delta\, f(b), \quad \forall\, a, b \in A$

En ocasiones la función establecida entre dos estructuras no es biyectiva. Si tal función es varios a uno y cumple con

$$f(a * b) = f(a) \,\Delta\, f(b), \quad \forall\, a, b \in A \ \text{ y } \ f(a), f(b) \in B \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (8)$$

se dice entonces que la función f es un homomorfismo.

El isomorfismo y el homomorfismo son dos tipos de morfismos.

Un morfismo es, en general, una función ϕ que satisface la ecuación

$$\phi(a * b) = \phi(a) \Delta \phi(b)$$

donde $*$ y Δ son operaciones binarias definidas respectivamente en el dominio y codominio de la función.

De acuerdo con esto, las siguientes expresiones se pueden considerar como ejemplos de morfismos:

$$4(x + y) = 4x + 4y$$

$$\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} g$$

$$\log(x \bullet y) = \log x + \log y$$

Se establecen diferentes tipos de morfismos dependiendo si la función es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.

Esta clasificación está dada en la siguiente definición.

Sean A y B dos conjuntos en los cuales están definidas las operaciones binarias $*$ y Δ respectivamente. Si $f:A \longrightarrow B$ es un morfismo, diremos que:

a) Cuando la función es varios a uno, el morfismo se llama homomorfismo.

b) Cuando la función es uno a uno (inyectiva) el morfismo se llama monomorfismo.

c) Cuando la función es sobre (suprayectiva) el morfismo se llama epimorfismo.

d) Cuando la función es uno a uno y sobre (biyectiva) el morfismo se llama isomorfismo.

Existen además otras clasificaciones de morfismos entre grupos. Así tenemos que un endomorfismo es un monomorfismo de un grupo sobre sí mismo; un automorfismo es un isomorfismo de un grupo sobre sí mismo.

Clasificaciones similares se establecen para morfismos entre anillos, campos, espacios vectoriales y otros sistemas algebraicos.

Te invitamos a que resuelvas los siguientes ejercicios relacionados con estos conceptos.

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

(Continuación)

21.- Sean $(\mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, \Delta)$ dos grupos, donde las operaciones $*$ y Δ están definidas por

$$\begin{aligned} a * b &= a + b + 1 \\ a \Delta b &= a + b \end{aligned} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$$

Determina si la función biyectiva $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(a) = a + 1$, $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, es un isomorfismo entre los grupos $(\mathbb{Z}, *)$ y $(\mathbb{Z}, \Delta)$.

22.- Sean los grupos $(A, \bullet)$ y $(B, \bullet)$, donde

$$A = \mathbb{C} - \{0\} \quad y \quad B = \mathbb{R} - \{0\}$$

a) Si se define la función $f: A \longrightarrow B$ de la siguiente manera:

$$f(z) = |z|, \quad \forall z \in A,$$

demuestra que f no es biyectiva.

b) Determina si f es un homomorfismo entre los grupos $(A, \bullet)$ y $(B, \bullet)$

Nota: $|z|$ significa módulo de z y las operaciones $\bullet$ en A y B son las multiplicaciones ordinarias.

23.- Demuestra que si f es un isomorfismo entre los grupos $(G, *)$ y (G', Δ), y u es el idéntico de G, entonces $f(u)$ es el idéntico de G'.

24.- Sean $(\mathbb{Q}, +, \bullet)$ y $(\mathbb{R}, +, \otimes)$ dos anillos; las operaciones $+$ y $\bullet$ son la adición y la multiplicación ordinarias y $\otimes$ está definida como:

$$a \otimes b = 3ab \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Determina si la función $f(x) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ es un isomorfismo entre los anillos $(\mathbb{Q}, +, \bullet)$ y $(\mathbb{R}, +, \otimes)$.

25.- Sean $(A, *, \Delta)$ y $(B, \square, \bigcirc)$ dos anillos y sea la función $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo entre dichos anillos.

Demuestra que si $(A, *, \Delta)$ es un anillo conmutativo, entonces el anillo $(B, \square, \bigcirc)$ también es conmutativo.

Ejercicios Adicionales

1.- Sea el conjunto de puntos del plano xy y las operaciones ϕ y θ definidas como sigue:

$$Q \phi R = \text{el punto medio de la recta } \overline{QR}.$$

$$P \theta Q = \text{el punto sobre la prolongación de la recta } \overline{PQ}$$

La distancia de dicha prolongación es igual a la distancia de P a Q y se encuentra del lado del punto Q.

a) ¿Son ϕ y θ operaciones binarias? ¿Por qué?

b) Determina si se cumple que $P\phi(Q \phi R) = (P \phi Q) \phi R$

c) ¿Se cumple la distributividad de θ sobre ϕ por la izquierda?

d) ¿Se cumple la distributividad de θ sobre ϕ por la derecha?

2.- Demuestra que en un grupo $(G, *)$,

a) Cada elemento $a \in G$ tiene sólo un inverso.

b) Si $a^{\urcorner}$ es el inverso de $a \in G$, entonces $(a^{\urcorner})^{\urcorner} = a$

3.- El sistema algebraico $(G, *)$ es un grupo abeliano, donde el conjunto G está dado por

$$G = \{1, 2, 20, \hat{1}, \hat{2}, \hat{20}, u\}$$

donde $\hat{2}$ indica el inverso de 2 y u el idéntico de G con la operación binaria $*$

a) Dado que $(G, *)$ es un grupo abeliano, indica con una V en el cuadro correspondiente si las propiedades siguientes se cumplen en $(G, *)$, o una F si no se cumplen.

[ ] Ley cancelativa	[ ] El elemento $\hat{u}$ pertenece a G
[ ] $1 * \hat{1} = 1$	[ ] La ecuación $\hat{2} * x = 20$, $x \in G$, admite más de una solución
[ ] Conmutatividad	

b) Considerando la ecuación

$$1 * x * 2 * 20 * x = 2 * 1 * x, \quad x \in G$$

el inverso de x es (elige la opción correcta):

A) 1 B) 2 C) 20 D) 10 E) 0

F) $\hat{1}$ G) $\hat{2}$ H) $\hat{20}$ I) $\hat{10}$ J) u

La respuesta correcta es $\square$

4.- Sea el conjunto $B = \{b \mid b = x\sqrt{3}, \quad x \in \mathbb{Z}\}$ y la operación $a \square b = a + b + \sqrt{3}$, $\forall\, a,b \in B$. Determina si el sistema $(B, \square)$ es un grupo.

5.- Sea el conjunto $F = \{f(x) \mid f(x) = mx + b,\ m \neq 0,\ m,b \in \mathbb{R}\}$. Determina si $(F, \circ)$ es un grupo, siendo la operación binaria la composición de funciones, es decir

$$f \circ g = f(g(x)), \quad \forall\, f,g \in F$$

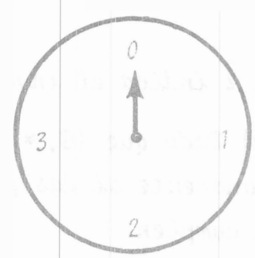
6.- Considera el conjunto: $A = \{a_0, a_1, a_2\}$ y la operación binaria $\oplus$ definida por:

$$a_i \oplus a_j = a_{i+j} \qquad \text{si } i + j < 3$$

$$a_i \oplus a_j = a_{i+j-3} \qquad \text{si } i + j \geq 3$$

donde a_j y a_i son elementos cualesquiera de A. Demuestra que $(A, \oplus)$ es un grupo abeliano.

7.- Considera el reloj mostrado en la figura cuya única manecilla tarda una hora en desplazarse de un número al siguiente; así, si la manecilla está en la posición 1, después de tres horas estará en la posición cero, pudiendo representar esto como $1 ⓓ 3 = 0$; si está en 3, después de dos horas se tendrá $3 ⓓ 2 = 1$, etc.



Considerando a ⓓ como la operación que indica el desplazamiento de la manecilla, demuestra que el conjunto cuyos elementos son las cuatro posiciones y la operación ⓓ forman un grupo abeliano.

8.- Determina qué estructura algebraica forman el conjunto $V = \{(x, y) \mid x \neq 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ y la operación # definida como

$$(a,b) \# (c,d) = (ac,\ bc + d), \quad \forall\ (a,b),\ (c,d) \in V$$

9.- El sistema $(S, \odot)$ es un grupo, donde

$$S = \{x \mid -1 < x < 1,\quad x \in \mathbb{R}\}$$

y la operación $\odot$ está definida por

$$x \odot y = \frac{x + y}{1 + xy}, \qquad \forall\ x, y \in S$$

a) Calcula el inverso de $-\frac{1}{2}$

b) Considerando que en el sistema $(S, \odot)$ está definida la ecuación $\frac{1}{2} \odot a = \frac{1}{2} \odot \frac{1}{5} \odot \frac{3}{4}$, donde a es la incógnita, obtén el valor de a que satisface a la ecuación.

10.- Sea $\quad M = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Demuestra que $(M, \bullet)$, donde $\bullet$ es la multiplicación usual de matrices, es un grupo abeliano.

11.- Sea M el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n cuyo determinante es uno; es decir,

$$M = \{A \mid \det(A) = 1,\quad A \text{ de orden } n \times n\}$$

Determina si $(M, \bullet)$ es un grupo siendo la operación $\bullet$ la multiplicación ordinaria de matrices.

12.- Sea el sistema $(B, \bullet)$ donde B es el conjunto de las raíces complejas de la ecuación $z^5 = 1$, es decir, $B = \{z \mid z^5 = 1,\quad z \in \mathbb{C}\}$, y la operación $\bullet$ es la multiplicación de los números complejos. Determina si $(B, \bullet)$ es un grupo.

13.- Sea S el conjunto formado por todos los subconjuntos de $U = \{1, 2, 3\}$.
El sistema $(S, +)$, donde la operación binaria $+$ está definida por

$$E + F = (E \cap F') \cup (F \cap E'), \quad \forall\, E, F \in S$$

es un grupo abeliano.

a) ¿Cuál es el idéntico de $(S, +)$?

b) Obtén el inverso de $B = \{1, 2\}$

c) Determina si $(S, +, \cdot)$ es un anillo donde la operación $\cdot$ se define como
$E \cdot F = E \cap F, \quad \forall\, E, F \in S$

Nota: E' significa el complemento del conjunto E.

14.- Demuestra que la intersección de dos subgrupos es también un subgrupo y que su unión, en general, no es un subgrupo.

15.- a) Determina cuáles de los siguientes sistemas son semigrupos. (Ver definición de semigrupo en la página 91).

1) $(\mathbb{N}, *)$, donde $a * b = 2(a + b), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$

2) $(\mathbb{N}, *)$, donde $a * b = 2 + a + b, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$

3) $(\mathbb{Z}, *)$, donde $a * b = a + b + ab, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$

4) $(\mathbb{Z}, *)$, donde $a * b = 3 + a, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$

5) $(\mathbb{Z}, *)$, donde $a * b = a, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$

b) Determina si alguno de los sistemas del inciso anterior es un grupo.

16.- Determina si el sistema $(\mathbb{Q}, \Delta)$ es un monoide donde Δ está definida por la regla

$$a \Delta b = a + b - ab, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Q}$$

(Ver definición de monoide en la página 91).

17.- En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ está definida la operación binaria Δ de la siguiente manera:

$$(a, b) \Delta (c, d) = (a + c + 1,\ b + d - 1), \quad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

El sistema $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \Delta)$ es un grupo.

a) Obtén el resultado de $(0, 6) \Delta (3, -1)$

b) Obtén la solución de la ecuación

$$(-1,\ 1)\ \Delta\ (x,\ y)\ \Delta\ (2,\ -2) = (-2,\ 0)$$

definida en el grupo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \Delta)$.

18.- En el conjunto $S = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\ ,\ x > -3\}$ se definen las operaciones binarias $\square$ y Δ. Considerando que en S, la operación Δ es cerrada, asociativa y distributiva sobre $\square$, determina si $(S, \square, \Delta)$ forma alguna estructura algebraica considerando que $\square$ se define por

$$a \square b = a + b + 2, \quad \forall\ a, b \in S$$

19.- Sea el conjunto de las funciones $F = \{f(x) \mid f(0) = f(1)\}$. Determina si $(F, \oplus, \odot)$ es un anillo estando las operaciones definidas por:

$$f \oplus g = f + g, \quad \text{es decir,} \quad (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$f \odot g = f \bullet g, \quad \text{es decir,} \quad (f \odot g)(x) = f(x) \bullet g(x)$$
$$\forall\ f, g \in F$$

20.- a) Demuestra que el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ con las operaciones de "adición" y "multiplicación" definidas por

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

es un anillo.

b) Determina si $(A, +, \bullet)$ es un anillo conmutativo con unidad.

c) ¿Tiene el anillo $(A, +, \bullet)$ divisores propios de cero?

d) ¿Es $(A, +, \bullet)$ un dominio entero?

21.- El sistema $(A, +)$ es un grupo abeliano. Determina si $(A, +, \Delta)$ es un dominio entero, donde

$$A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad y \quad a \Delta b = \frac{1}{2} ab, \quad \forall\ a, b \in A$$

22.- Demuestra que el conjunto $H = \{x \mid x = \frac{a}{2b},\ b \neq 0,\ a,b \in \mathbb{Z}\}$ es un campo con las operaciones $*$ y Δ definidas de la siguiente manera:

$$x * y = x + y$$

$$x \Delta y = \frac{1}{2} xy \qquad \forall\, x,y \in H$$

23.- El sistema $(S, \oplus, \odot)$ es un campo, donde

$$S = \{x + y\sqrt{2} \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$$

y las operaciones $\oplus$ y $\odot$ se definen por

$$(a + b\sqrt{2}) \oplus (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \odot (c + d\sqrt{2}) = ac + bd\sqrt{2}$$

a) Obtén el cero y la unidad del campo.

b) En el campo $(S, \oplus, \odot)$ se establece la ecuación

$$(1 + 3\sqrt{2}) \oplus [(x + y\sqrt{2}) \odot (4 - \sqrt{2})] = [(3 + 3\sqrt{2}) \odot (x + y\sqrt{2})] \oplus (5+3\sqrt{2})$$

Obtén la solución de dicha ecuación.

24.- a) En el campo $(\mathbb{R}, +, \bullet)$ donde $+$ y $\bullet$ son la adición y multiplicación ordinarias, se establece el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x + 2y = 1$$

$$x + 2y = 2$$

Obtén la solución del sistema de ecuaciones.

b) El sistema $(B, +, \bullet)$ del ejercicio 20, página 94, es un campo.

Obtén la solución del sistema de ecuaciones del inciso anterior en el campo $(B, +, \bullet)$.

25.- Sea $f: G \to G'$ un homomorfismo entre los grupos $(G, *)$ y (G', Δ).

Demuestra que si a^{-1} es el inverso del elemento a del grupo $(G, *)$, entonces $f(a^{-1})$ es el inverso del elemento $f(a)$ del grupo (G', Δ).

26.- Demuestra que si la función $f:G \rightarrow H$ es un isomorfismo entre los grupos $(G, *)$ y (H, Δ), entonces la función inversa $f^{-1}:H \rightarrow G$ también es un isomorfismo.

27.- a) Demuestra que $(\mathbb{R}^+, \bullet)$ es un grupo, donde $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x > 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ y la operación $\bullet$ es la multiplicación ordinaria.

b) Demuestra que la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+$ es biyectiva.

c) Determina si la función anterior es un isomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}^+, \bullet)$ y $(\mathbb{R}, +)$, donde la operación $+$ es la adición ordinaria.

28.- a) Completa el cuadro mostrado para que el sistema $(\{e,a,b,c\},*)$ sea un grupo.

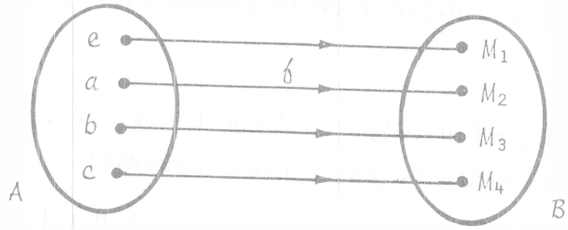
*	e	a	b	c
e			b	
a	a	e		
b			e	a
c	c	b		

b) El sistema $(B, \bullet)$, donde

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \{M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4\}$$

y la operación $\bullet$ es la multiplicación ordinaria de matrices, es un grupo.

Determina si la función $f:A \rightarrow B$ definida por



es un isomorfismo entre los grupos $(A, *)$ y $(B, \bullet)$, donde $(A, *)$ es el grupo del inciso anterior.

29.- Los sistemas $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$ y $(A, \bullet)$ son monoides o semigrupos con unidad, donde $\mathbb{Z}^+$ es el conjunto de los enteros positivos, $A = \{0, 1\}$ y la operación $\bullet$ es la multiplicación ordinaria.

Determina si la función f definida por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$$

es un homomorfismo entre los monoides $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$ y $(A, \bullet)$. (Ver definición de monoide en la página 91).

30.- Sean el conjunto $S = \{a,b,c,d\}$ y la operación $*$ definida en S como indica la siguiente tabla.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

a) La operación $*$ es cerrada, asociativa y conmutativa.
Determina si $(S, *)$ es un grupo abeliano.

b) Si la función biyectiva $f: (S, *) \longrightarrow (S, *)$ se define por $f(x) = x^{-1}$, $\forall\, x \in S$, determina si f es un isomorfismo.

Nota: x^{-1} significa inverso de x.

31.- Sea S el conjunto de las raíces del polinomio $p(t) = t^4 - 1$.

a) Demuestra que $(S, \bullet)$ es un grupo donde la operación binaria $\bullet$ es la multiplicación ordinaria de los números complejos.

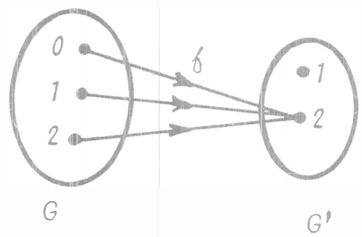
b) Determina una función f que establezca un isomorfismo entre el grupo $(S, \bullet)$ y el grupo del ejercicio 7 de la página 100.

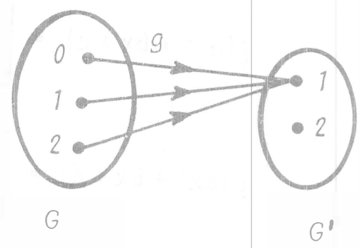
32.- Sean los grupos $(G, *)$ y (G', Δ), donde $G = \{0,1,2\}$, $G' = \{1,2\}$ y las operaciones $*$ y Δ están definidas de la siguiente manera:

*	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Δ	1	2
1	1	2
2	2	1

Determina si las siguientes funciones son un homomorfismo entre los grupos $(G, *)$ *y* (G', Δ)





33.- *La función* $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *definida por* $f(a) = -a$, $\forall\, a \in \mathbb{Q}$ *es un isomorfismo entre los grupos* $(\mathbb{Q}, *)$ *y* $(\mathbb{Q}, \Delta)$. *Si* $\mathbb{Q}$ *es el conjunto de los números racionales y la operación* Δ *está definida por*

$$a \Delta b = a + b + 9, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Q},$$

determina la regla de definición de la operación binaria $*$

34.- *Sea* $(A, +, \odot)$ *un anillo, donde* $A = \{ke^x \mid k \in \mathbb{R},\ x \in (-\infty, \infty)\}$ *y las operaciones* $+$, $\odot$ *están definidas por:*

$$k_1e^x + k_2e^x = (k_1 + k_2)e^x$$

$$k_1e^x \odot k_2e^x = k_1k_2e^x \qquad \forall\, k_1e^x,\ k_2e^x \in A$$

Determina si la función biyectiva $f: (A, +, \odot) \longrightarrow (A, +, \odot)$ *definida por* $f(g) = \dfrac{d}{dx} g$, $\forall\, g \in A$, *es un isomorfismo.*

35.- *Sean el conjunto de los polinomios* $P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ *y el conjunto de las matrices* $M = \left\{ \begin{bmatrix} d & 0 \\ e & f \end{bmatrix} \mid d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$

Los sistemas $(P, +, *)$ *y* $(M, +, \dot{\Delta})$ *son anillos, estando las operaciones* $*$ *y* Δ *definidas de la siguiente manera:*

$$P_1(x) * P_2(x) = a_1a_2x^2 + b_1b_2x + c_1c_2, \qquad \forall\, P_1(x),\ P_2(x) \in P$$

$$M_1 \,\Delta\, M_2 = \begin{bmatrix} d_1d_2 & 0 \\ e_1e_2 & f_1f_2 \end{bmatrix}, \qquad \forall\, M_1, M_2 \in M$$

Las operaciones binarias de adición definidas en P *y* M *indican la adición ordinaria de polinomios y de matrices, respectivamente.*

a) *Si* $f:P \to M$ *y* $g:P \to M$ *están definidas por:*

$$f(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ b^2 & c^2 \end{bmatrix},$$

$$g(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix},$$

I) *¿Qué tipo de funciones son* f *y* g *(inyectivas, suprayectivas y/o biyectivas)?*

II) *¿Son* f *y* g *morfismos entre los anillos* $(P, +, *)$ *y* $(M, +, \Delta)$*?*

III) *En caso afirmativo, ¿qué tipo de morfismo es?*

b) *Si* $h:M \to P$ *y* $j:M \to P$ *están definidas por:*

$$h\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\right) = 4ax^2 + 3bx + 2c,$$

$$j\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\right) = cx^2 - ax + b,$$

determina si h *y* j *son isomorfismos entre los anillos* $(M, +, \Delta)$ *y* $(P, +, *)$

Examen de Capítulo

1.- Determina si el conjunto $F = \{x + \sqrt{2} \mid x \in \mathbb{Z}\}$ y la operación binaria $*$ definida por

$$a * b = a + b - \sqrt{2}\ , \quad \forall\, a, b \in F$$

es un grupo.

Solución:

2.- Sea el grupo abeliano $(\mathbb{C}, +)$ donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de los números complejos y + es la adición ordinaria. Si se define una operación $*$ en $\mathbb{C}$ como $x * y = u$, $\forall\, x, y \in \mathbb{C}$ y u es el idéntico de $(\mathbb{C}, +)$, determina si $(\mathbb{C}, +, *)$ es un anillo.

Solución:

3.- Sean $(A, *)$ y (B, Δ) dos grupos, donde

$$a * b = a + b - 1, \quad \forall\, a, b \in A$$

y la función $f: A \to B$ definida por $f(a) = 3^a$, $\forall\, a \in A$, que es un isomorfismo.

a) El resultado de $a * a * b * a^{-1} * b^{-1}$ es: (Elige la opción correcta)

A) $a + b$ B) $2a$ C) $a + b - 1$ D) -1 E) 1

F) b G) a H) $a - 1$

El resultado correcto es $\boxed{}$

b) El elemento inverso de x del grupo (B, Δ) es: (Elige la opción correcta)

A) $-x$ B) $\frac{1}{9x}$ C) $\frac{1}{3x}$ D) $-3x$

E) $\frac{9}{x}$ F) -9 G) 9 H) 3^{-x}

El resultado correcto es $\boxed{}$

4.- Sea $(S, \otimes, \odot)$ un anillo, donde $S = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ y

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \otimes (c,d) = (a+c,\ b+d),\\ (a,b) \odot (c,d) = (ac, bd)\end{array}\right. \quad \forall (a,b), (c,d) \in S$$

y sea $(E, +, \bullet)$ otro anillo, donde $E = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$, y las operaciones $+$ y $\bullet$ son la adición y multiplicación ordinarias para los números racionales, respectivamente.

Determina si la función biyectiva $f: S \rightarrow E$ definida por $f(a,b) = b + a\sqrt{2}$, $\forall (a,b) \in S$ es un isomorfismo entre los anillos $(S, \otimes, \odot)$ y $(E, +, \bullet)$.

Solución:

CAPITULO IV

Espacios Vectoriales

"¿Cómo se pueden sumar cosas que no son números? La explicación consiste en que en álgebra moderna el signo + no significa que se realiza una suma en ningún sentido real. Significa meramente que se está realizando alguna operación que de alguna manera le hace al matemático recordar las reglas de la adición. El parecido es de esquema, no de contenido".

W. Sawyer.

Examen Diagnóstico

A continuación se presentan algunos ejercicios sobre antecedentes necesarios para estudiar este capítulo. Intenta resolverlos y compara tus resultados con los presentados después de este examen. Si tienes dudas acerca de la solución de los ejercicios, consulta la bibliografía propuesta al final de este examen.

1.- Dados los vectores de $\mathbb{R}^5$

$\bar{v}_1 = (-1, 0, -3, 1, -4)$, $\bar{v}_2 = (1, 0, 3, -1, 4)$, $\bar{v}_3 = (4, -1, 3, 0, 1)$

$\bar{v}_4 = (1, 0, 3, -1, 4)$, $\bar{v}_5 = (-4, 1, -3, 0, -1)$

¿Cuáles de ellos son iguales entre sí?

2.- Sea el polinomio $p(x) = x^4 + 3x - 6$

¿Qué valores deben tomar a, b, c, d y e para que el polinomio

$$q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

sea igual al polinomio $p(x)$?

3.- Calcula la primera y la segunda derivada de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 4x^3 - 3x^2 + x$

b) $f_2(x) = 3e^{4x} + 3x \cos x$

c) $f_3(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

4.- Verifica que las matrices A y B son equivalentes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RESPUESTAS

1.- $v_2 = v_4$

2.- $a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 3, \quad e = -6$

3.- a) $f_1'(x) = 12x^2 - 6x + 1$

$f_1''(x) = 24x - 6$

b) $f_2'(x) = 12e^{4x} + 3\cos x - 3x \operatorname{sen} x$

$f_2''(x) = 48e^{4x} - 6 \operatorname{sen} x - 3x \cos x$

c) $f_3'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2}$

$f_3''(x) = \dfrac{2 \ln x - 3}{x^3}$

BIBLIOGRAFIA

Los conceptos aludidos en estos ejercicios los puedes estudiar en:

- Geometría Analítica
  de Nolasco, Solís, Victoria
  Editado por la UNAM
  Página 17

- Algebra I
  de E. Solar y L. Speziale
  Editado por la UNAM
  Página 129

- Cálculo Diferencial e Integral
  de Andrade, García, Castañeda
  Editado por la UNAM
  Páginas 182 - 188, 228 - 229, 465

Introducción

El álgebra lineal es la parte de las matemáticas que estudia los espacios vectoriales y conceptos relacionados con ellos. Por lo tanto, el tema fundamental de cualquier curso de álgebra lineal es precisamente el de espacio vectorial.

A los espacios vectoriales también se les llama espacios vectoriales lineales o simplemente espacios lineales.

Un espacio vectorial es un conjunto de elementos que satisfacen ciertas propiedades[1] y a los elementos del espacio vectorial se les llama vectores.

Generalmente, los alumnos que inician el estudio del álgebra lineal ya han tenido contacto con el concepto de vector y están familiarizados con una serie de propiedades interesantes que tienen estos objetos. Pero, generalmente, sólo han visto casos particulares de vectores.

Uno de los objetivos de este capítulo es mostrar al estudiante que existe una gran cantidad de vectores distintos a los que habitualmente conoce.

Así, por ejemplo, al terminar este capítulo deberá haber aprendido que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es un vector; que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

son también vectores, etc.

El estudiante deberá saber explicar por qué cada uno de los objetos mencionados son vectores. La explicación siempre es muy sencilla y está basada en el hecho de que a cualquier conjunto, por arbitrario que parezca, pero si satisface ciertas propiedades, se le llama espacio vectorial y a sus elementos vectores.

---

[1] Por el momento, no mencionaremos cuáles son esas propiedades; pero, el lector interesado puede consultar cualquier libro de álgebra lineal. Ahí debe encontrar dichas propiedades.

Todos los espacios vectoriales tienen propiedades comunes que es conveniente estudiar en general y sin hacer referencia a ningún caso especial, lo cual podría obscurecer u ocultar lo más esencial del concepto. Una de las ventajas de esta abstracción es que las conclusiones que se deriven serán válidas para todos los espacios vectoriales.

Cuando en matemáticas se estudian los conceptos en forma abstracta, en un principio las cosas pueden parecer más complicadas, pero una vez que se ha comprendido el proceso de abstracción todo lo demás resulta más sencillo.

Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto V que satisface determinados axiomas con respecto a la adición de vectores y a la multiplicación de un vector por un escalar. Antes de continuar te sugerimos leas estos axiomas en cualquier libro de álgebra lineal.

Veamos ahora un ejemplo. Sea V el conjunto definido en la siguiente forma:

$$V = \{ b\sqrt{2} \mid b \in \mathbb{Q} \} \qquad (1)$$

es decir, V es el conjunto de todos los números que se obtienen al multiplicar el número irracional $\sqrt{2}$ por los números racionales.

Consideremos además la operación de adición usual entre elementos de V, esto es,

$$b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2} = (b_1 + b_2)\sqrt{2} \in V$$

y la operación usual de multiplicación entre elementos de V y elementos del campo de los números racionales $\mathbb{Q}$; esto es,

$$\alpha(b\sqrt{2}) = (\alpha b)\sqrt{2} \in V, \quad \text{donde } \alpha \in \mathbb{Q}$$

A los elementos de $\mathbb{Q}$ los llamamos escalares.

Determinemos ahora si V es un espacio vectorial sobre el campo de los racionales. Para esto, investiguemos si se satisfacen todos los axiomas que definen a los espacios vectoriales.

Analicemos primero si se satisfacen las propiedades relacionadas con la adición.

- En primer lugar, se cumple la cerradura ya que $(b_1 + b_2)\sqrt{2} \in V$
- Asociatividad de la adición.

Debemos investigar si se cumple que

$$(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) \text{ para cualesquiera elementos } \bar{u}, \bar{v} \text{ y } \bar{w} \text{ de } V.$$

Como $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$ son elementos de V, entonces tienen la forma

$$\overline{u} = b_1\sqrt{2}\ , \quad \overline{v} = b_2\sqrt{2}\ , \quad \overline{w} = b_3\sqrt{2}$$

donde b_1, b_2, b_3 son números racionales.

Entonces, por un lado tenemos:

$$\begin{aligned}(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w} &= (b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2}\,) + b_3\sqrt{2} \\ &= (b_1+b_2)\ \sqrt{2} + b_3\sqrt{2} \\ &= \left[(b_1+b_2) + b_3\right] \sqrt{2} \qquad \underline{\hspace{3cm}} \quad (2)\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w}) &= b_1\sqrt{2} + (b_2\sqrt{2} + b_3\sqrt{2}\,) \\ &= b_1\sqrt{2} + (b_2+b_3)\sqrt{2} \\ &= \left[b_1 + (b_2+b_3)\right] \sqrt{2} \\ &= \left[(b_1+b_2) + b_3\right] \sqrt{2} \qquad \underline{\hspace{3cm}} \quad (3)\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que b_1, b_2 y b_3 son números racionales y por lo tanto,

$$(b_1+b_2) + b_3 = b_1 + (b_2+b_3)$$

Comparando (2) y (3) tenemos que se cumple

$$\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u}+\overline{v}) + \overline{w}$$

- Existencia del vector cero.

Debemos investigar ahora si existe $\overline{0} \in V$ tal que

$$\overline{v} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{v} = \overline{v}, \quad \forall\ \overline{v} \in V$$

es decir, debemos buscar un vector que sumado con $\overline{v}$ dé como resultado $\overline{v}$. Obviamente, el vector buscado es el vector cero, pero tenemos que asegurarnos que es un elemento de V, lo cual es fácil verificar. En efecto, si hacemos $b = 0$ en la expresión (1) obtenemos el vector cero. Por lo tanto, sí existe el vector cero en el conjunto V.

- Existencia de elementos inversos.

Investiguemos ahora si a cada vector $\bar{v}$ de V le corresponde un vector $(-\bar{v})$ tal que $(-\bar{v}) + \bar{v} = \bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$, $\forall\, \bar{v} \in V$. Es decir, debemos buscar un vec tor que sumado con $\bar{v}$ dé como resultado el vector cero.

Sea $\bar{v} \in V$, es decir, $\bar{v}$ es de la forma $\bar{v} = b\sqrt{2}$

Si hacemos $(-\bar{v}) = (-b)\sqrt{2}$, vemos que tiene la propiedad requerida.

En efecto,

$$\begin{aligned} \bar{v} + (-\bar{v}) &= b\sqrt{2} + (-b)\sqrt{2} \\ &= (b + (-b))\sqrt{2} \\ &= (b - b)\sqrt{2} \\ &= 0 \\ &= (-\bar{v}) + \bar{v} \end{aligned}$$

Además como $(-b)\sqrt{2}$ es un elemento de V, entonces hemos demostrado que $\forall\, \bar{v} \in V$, existe $-\bar{v} \in V$ que tiene la propiedad requerida.

- Conmutatividad de la adición.

Investiguemos si se cumple que $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in V$, es decir, $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son de la forma $\bar{u} = b_1\sqrt{2}$ y $\bar{v} = b_2\sqrt{2}$

Entonces, por un lado,

$$\bar{u} + \bar{v} = b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2} = (b_1 + b_2)\sqrt{2} \quad \text{———} \quad (4)$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} \bar{v} + \bar{u} &= b_2\sqrt{2} + b_1\sqrt{2} = (b_2 + b_1)\sqrt{2} \\ &= (b_1 + b_2)\sqrt{2} \quad \text{———} \quad (5) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que b_1 y b_2 son números racionales y por lo tanto $b_1 + b_2 = b_2 + b_1$

Comparando, pues, (4) y (5) vemos que sí se cumple la conmutatividad.

Ahora analicemos las propiedades relacionadas con la multiplicación de un vector por un escalar.

- Se observa que la operación es cerrada ya que $(\alpha b)\sqrt{2} \in V$.
- Investiguemos si se cumple que

$$\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v} \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V \ldots$$

Sean $\bar{u} = b_1\sqrt{2}$ y $\bar{v} = b_2\sqrt{2}$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$

Desarrollando el lado izquierdo tenemos:

$$\begin{aligned}\alpha(\bar{u}+\bar{v}) &= \alpha(b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{2})\\ &= \alpha[(b_1+b_2)\sqrt{2}]\\ &= [\alpha(b_1+b_2)\sqrt{2}]\\ &= (\alpha b_1 + \alpha b_2)\sqrt{2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (6)\end{aligned}$$

Desarrollando ahora el lado derecho:

$$\begin{aligned}\alpha\bar{u}+\alpha\bar{v} &= \alpha(b_1\sqrt{2}) + \alpha(b_2\sqrt{2})\\ &= (\alpha b_1)\sqrt{2} + (\alpha b_2)\sqrt{2}\\ &= (\alpha b_1 + \alpha b_2)\sqrt{2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (7)\end{aligned}$$

Como (6) y (7) son iguales, se cumple la propiedad $\alpha(\bar{u}+\bar{v}) = \alpha\bar{u}+\alpha\bar{v}$.

Determinemos si se cumple que:

$$(\alpha+\beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}, \quad \forall\, \bar{u} \in V \quad y \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$$

Sea $\bar{u} = b\sqrt{2}$. Entonces, desarrollando el lado izquierdo

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\bar{u} &= (\alpha+\beta)(b\sqrt{2}) = \alpha(b\sqrt{2}) + \beta(b\sqrt{2})\\ &= (\alpha b)\sqrt{2} + (\beta b)\sqrt{2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (8)\end{aligned}$$

Ahora, con el lado derecho:

$$\alpha\bar{u}+\beta\bar{u} = \alpha(b\sqrt{2}) + \beta(b\sqrt{2}) = (\alpha b)\sqrt{2} + (\beta b)\sqrt{2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_} \quad (9)$$

comparando (8) y (9), vemos que se cumple la propiedad $(\alpha+\beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$

- La siguiente propiedad que debemos verificar si se cumple es

$$\alpha(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\bar{u}, \quad \forall\, \bar{u} \in V, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$$

Sea, $\bar{u} = b\sqrt{2}$

Entonces, por un lado,

$$\alpha(\beta\bar{u}) = \alpha[\beta(b\sqrt{2})] = \alpha(\beta b\sqrt{2}) = (\alpha\beta b)\sqrt{2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (10)$$

y por otro,

$$(\alpha\beta)\,\bar{u} = (\alpha\beta)\ (b\sqrt{2}\,) = (\alpha\beta b)\sqrt{2} \qquad \underline{\hspace{3cm}} \quad (11)$$

Por tanto, también se cumple esta propiedad.

- Finalmente investiguemos si se cumple que $1\bar{u} = \bar{u}$, donde 1 es el elemento unidad de los números racionales.

Sea $\bar{u} = b\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{Entonces,}\quad 1\bar{u} &= 1(b\sqrt{2}\,) \\ &= (1b)\sqrt{2} \\ &= b\sqrt{2} \\ &= \bar{u} \end{aligned}$$

En virtud de que también se satisface esta propiedad, concluimos que el conjunto V es un espacio vectorial sobre el campo de los racionales y, por lo tanto, los elementos de V son llamados vectores.

El conjunto de los reales $\mathbb{R}$ es un campo y, entonces, a sus elementos se les llama escalares o números. (También los llamamos escalares reales o números reales para distinguirlos de otros escalares u otros números).

Pero, como el conjunto de los reales $\mathbb{R}$ también es un espacio vectorial sobre los mismos reales $\mathbb{R}$, entonces en este caso también llamamos vector a cualquier número real.

Te sugerimos que contestes correctamente las siguientes preguntas como una actividad dirigida a que reafirmes el concepto de espacio vectorial.

I) El conjunto de los complejos $\mathbb{C}$, ¿es un espacio vectorial sobre el campo de los mismos complejos $\mathbb{C}$? __________ ¿Por qué? ____________________________
____

II) El conjunto de los complejos $\mathbb{C}$, ¿es un espacio vectorial sobre el campo de los reales $\mathbb{R}$? __________ ¿Por qué? ____________________________
____

III) El conjunto de los reales $\mathbb{R}$, ¿es un espacio vectorial sobre el campo de los complejos $\mathbb{C}$? __________ ¿Por qué? ____________________________
____

IV) El conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$, ¿es un espacio vectorial sobre el campo de los reales $\mathbb{R}$? __________ ¿Por qué? ____________________________________

V) El conjunto de los reales $\mathbb{R}$, ¿es un espacio vectorial sobre el campo de los racionales $\mathbb{Q}$? __________ ¿Por qué? ____________________________________

Te invitamos ahora a que resuelvas los siguientes ejercicios, referentes a los conceptos de espacio y subespacio vectorial.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Sea $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ el conjunto en el cual se definen las operaciones de adición y multiplicación por un escalar de la siguiente manera:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall\, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$$

$$k\bar{v} = k(x, y) = (kx, 0), \quad \forall\, \bar{v} \in V, \quad k \in \mathbb{R}$$

Determina cuál es la propiedad que al no satisfacerse impide que V sea un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

2.- Determina si el conjunto $H = \{h \mid h > 0,\ h \in \mathbb{R}\}$ en el que se definen las operaciones de "adición" y "multiplicación por un escalar" de la siguiente manera:

$$x + y = xy, \quad \forall\, x, y \in H$$

$$\alpha x = x^{\alpha}, \quad \forall\, x \in H, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

3.- Determina si el conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, estando las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas como

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 + 2 \\ b_1 + b_2 + 2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \quad \forall\, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in A$$

$$\alpha \bar{v} = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & b \\ b & \alpha c \end{bmatrix}, \qquad \forall\, \bar{v} \in A \quad y \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

4.- Determina si el conjunto $A = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre los reales.

5.- Determina si el conjunto $B = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre los reales.

6.- Considera el conjunto $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a + b = 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Determina si el conjunto E es un subespacio del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos sobre el campo de los números reales.

7.- ¿Es el conjunto $G = \{(0, 0, a, -3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ sobre el campo de los reales?

8.- Sea el conjunto $\mathbb{Q}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.

Indica por qué $\mathbb{Q}^3$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ sobre el campo de los reales $\mathbb{R}$.

9.- Determina si el conjunto $W = \{ax^6 + bx^5 + cx^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a seis sobre el campo de los reales.

10.- Sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ vectores del espacio $\mathbb{R}^n$.

Demuestra que el conjunto $W = \{\alpha\bar{u} + \beta\bar{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Combinación Lineal, Dependencia Lineal y Base

Consideremos el espacio vectorial $W = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ sobre el campo de los reales.

Dos vectores del espacio W son $\overline{v}_1 = (-3, 0, 3)$ y $\overline{v}_2 = (14, 0, -14)$.

Una combinación lineal de los vectores $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ está dada por la expresión

$$\alpha_1(-3, 0, 3) + \alpha_2(14, 0, -14)$$

donde α_1 y α_2 son escalares reales.

Si $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = -1$, tenemos que $2(-3, 0, 3) + (-1)(14, 0, -14)$
$= (-20, 0, 20)$.

Se dice entonces que el vector $(-20, 0, 20)$ es una combinación lineal de los vectores $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$

Si cualquier vector $\overline{w}$ del espacio W se puede expresar como una combinación lineal de los vectores $\overline{v}_1 = (-3, 0, 3)$ y $\overline{v}_2 = (14, 0, -14)$, entonces se dice que el conjunto $A = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\} = \{(-3, 0, 3), (14, 0, -14)\}$ genera el espacio W o que A es un conjunto generador del espacio W.

En otras palabras:

El conjunto A es generador de W si existen α_1 y α_2 tales que

$$\alpha_1(-3, 0, 3) + \alpha_2(14, 0, -14) = (x, 0, -x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \text{\_\_\_\_ (1)}$$

donde $(x, 0, -x)$ es el vector genérico de W.

La ecuación (1) se satisface para los valores

$$\alpha_1 = -\frac{x}{3} \quad y \quad \alpha_2 = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, A es conjunto generador de W.

Además, como puedes observar, estos valores de α_1 y α_2 no son únicos. Otros valores de α_1 y α_2 que satisfacen la ecuación (1) son:

$$\alpha_1 = 0 \quad y \quad \alpha_2 = \frac{x}{14}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$y \qquad \alpha_1 = 14 - \frac{x}{3} \quad y \quad \alpha_2 = 3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Sin embargo, este hecho no altera que A sea un conjunto generador de W.

Determinemos ahora si cualquier vector de W se puede obtener mediante una combinación lineal del vector $\overline{v}_3 = (6, 0, -6)$. En otras palabras, ¿es el conjunto $B = \{\overline{v}_3\} = \{(6, 0, -6)\}$ un conjunto generador del espacio W?

La respuesta es afirmativa ya que cualquier vector de W se puede obtener mediante una combinación lineal del vector $\overline{v}_3$, como se indica a continuación:

$$\text{si} \quad \alpha(6, 0, -6) = (x, 0, -x), \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{x}{6}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Tanto el conjunto A como el conjunto B generan al espacio W, pero existe una diferencia en la forma que lo generan:

Para el conjunto A los escalares α_1 y α_2 no son únicos, mientras que para el conjunto B el valor de α sí es único. Esta es una diferencia cualitativa fundamental entre ambos conjuntos que reforzaremos un poco más adelante.

Consideremos ahora el conjunto

$$C = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2\} = \{(3, 1, -3), (-3, 1, 3)\}$$

¿Es posible obtener cualquier vector de W como una combinación lineal de los vectores del conjunto C?

La ecuación siguiente muestra que cualquier vector de W, es decir, cualquier vector de la forma $(x, 0, -x)$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores del conjunto C.

$$\frac{x}{6}(3, 1, -3) + (-\frac{x}{6})(-3, 1, 3) = (x, 0, -x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Sin embargo, el conjunto C no es un conjunto generador del espacio W.

La razón es la siguiente: Se conviene que para que un conjunto de vectores sea generador de un espacio vectorial debe reunir dos características. Una de ellas es que cualquier vector del espacio se pueda obtener mediante una combinación lineal de los vectores del conjunto y la otra es que los vectores del conjunto pertenezcan al espacio.[2]

En nuestro ejemplo, el conjunto C no es generador porque sus vectores no pertenecen al espacio W.

Situaciones similares a la del conjunto C se presentan con los conjuntos $D = \{(2, 0, 0), (0, 0, -2)\}$ y $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Cualquier vector del espacio $W = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores del conjunto D y de los vectores del conjunto E:

$$\frac{x}{2}(2, 0, 0) + \frac{x}{2}(0, 0, -2) = (x, 0, -x)$$

$$x(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + (-x)(0, 0, 1) = (x, 0, -x)$$

Sin embargo, D y E no son conjuntos generadores del espacio vectorial W porque sus vectores no pertenecen a W.

---

[2] Consultar la definición de conjunto generador presentada por los profesores Eduardo Solar González y Leda Speziale de Guzmán en su libro de "Algebra Lineal", página 569, editado por la Facultad de Ingeniería, UNAM.

Los conjuntos A y B de nuestro ejemplo son generadores del espacio W y, como ya lo dijimos anteriormente, se diferencian en que para el conjunto A los escalares no son únicos y para el conjunto B sí.

La no unicidad y la unicidad de los escalares respectivamente para los conjuntos A y B se debe a que A es linealmente dependiente y B es linealmente independiente.

Dado que B es linealmente independiente y genera al espacio W, se dice que B es una base del espacio vectorial W.

Hablaremos ahora de este último concepto.

Para hacer más fácil su estudio, cambiemos de ejemplo y consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ lo podemos obtener mediante una combinación lineal de los vectores de una base del espacio $\mathbb{R}^2$.

La base natural o base canónica[3] del espacio $\mathbb{R}^2$ es el conjunto

$$E = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

Es muy fácil expresar cualquier vector $\overline{v}$ de $\mathbb{R}^2$ como una combinación lineal de los vectores de esta base debido a que el vector de coordenadas de $\overline{v}$ en la base canónica es precisamente el vector $\overline{v}$.

Así, por ejemplo, si $\overline{v} = (6, -3)$, entonces $(\overline{v})_E = (6, -3)$, ya que $(6, -3) = 6(1, 0) + (-3)(0, 1)$

---

[3] El concepto de base canónica lo aplicaremos solamente a los espacios $\mathbb{R}^n$. Así, se conviene que si $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ entonces su base canónica es el conjunto $\{(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$

Asociando a cada vector de $\mathbb{R}^2$ un segmento dirigido o vector geométrico, el ejemplo anterior lo podemos representar "paso a paso" en el plano cartesiano XY como se muestra en las siguientes figuras

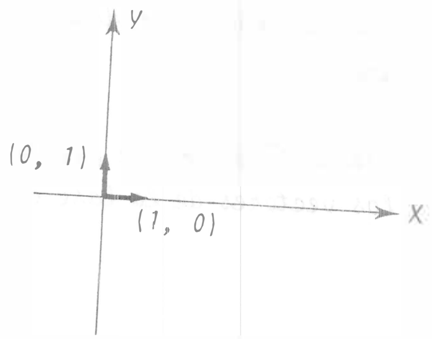


Figura 1

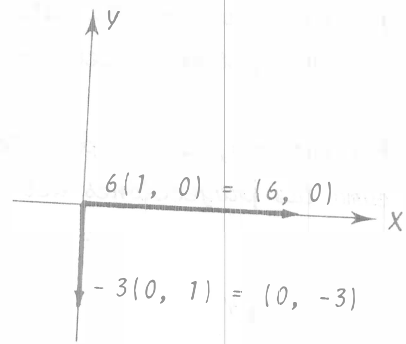


Figura 2

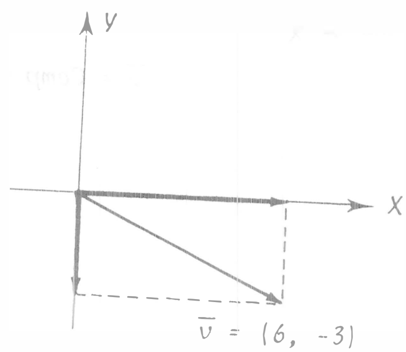


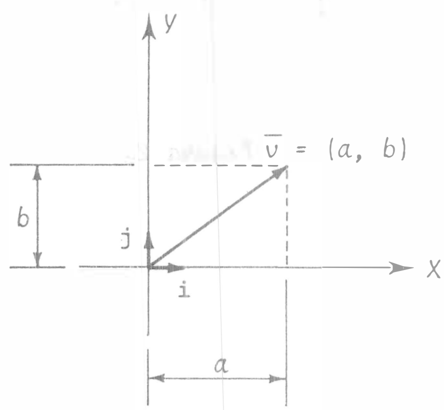
Figura 3

Se acostumbra representar a los vectores de la base canónica (1, 0) y (0, 1) por las letras i y j . (Esta representación es muy común sobre todo en el cálculo vectorial y en la geometría vectorial).

Con esta representación podemos escribir $\overline{v} = 6i - 3j$, en vez de $\overline{v} = 6(1, 0) - 3(0, 1) = (6, -3)$.

La elección de la base canónica como base de $\mathbb{R}^2$ *generalmente simplifica mucho los cálculos y, además, nos permite trabajar de una manera que podríamos llamar "natural" ya que con esta base siempre hemos trabajado aunque sea de una manera implícita al estudiar la geometría euclidiana, que es la geometría que se identifica de una manera* natural *con el estudio del espacio tridimensional (y por supuesto, también del espacio bidimensional).*

Por ejemplo, las componentes de cualquier vector $\overline{v}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *se pueden considerar como las proyecciones del vector* $\overline{v}$ *sobre los vectores de la base canónica.*



$$\overline{v} = ai + bj$$

$$\overline{v} = Comp\ vect_i\ \overline{v} + Comp\ vect_j\ \overline{v}$$

Figura 4

Otra característica de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ *que contribuye a facilitar el trabajo analítico es que sus vectores son ortogonales y tienen longitud o módulo igual a la unidad.*[4]

Sin embargo, hay ocasiones en las que es útil y muy práctico trabajar con una base de $\mathbb{R}^2$ *que no sea la canónica.*

---

[4] En el capítulo VI generalizaremos y haremos abstracción de los conceptos de ortogonalidad y módulo de vectores. Mientras tanto, estos conceptos nos indicarán lo que ya sabemos hasta el momento: ángulo de 90° que forman dos segmentos dirigidos y longitud o tamaño de ellos respectivamente.

Esta situación se presenta, por ejemplo, cuando se efectúa una rotación de ejes[5] *y el proceso analítico para cambiar de base se puede realizar median- te la* matriz de transición *o también llamada* matriz de cambio de base.

Por ejemplo, consideremos que una partícula se desplaza en el plano XY describiendo la trayectoria representada por la ecuación

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \ . \qquad (2)$$

La ecuación anterior representa la elipse que muestra la figura 5.

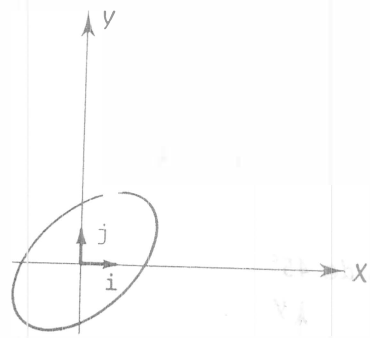


Figura 5

La descripción del movimiento se simplifica mucho si en vez de trabajar con los ejes X y Y, es decir, con un sistema de referencia determinado por la base canónica, trabajamos con un sistema de referencia cuya base esté contenida en los ejes de la elipse como muestra la figura 6.

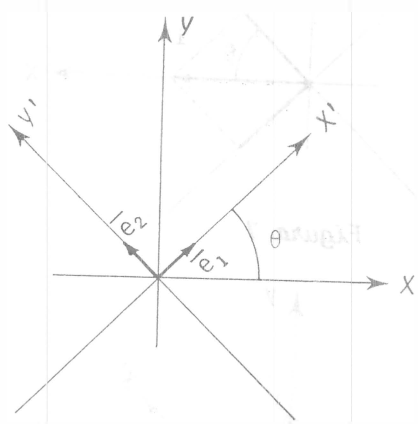


Figura 6

La base $A = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ *determina el nuevo sistema de referencia X'Y'. En este sistema se simplifica notablemente la ecuación de la elipse y se puede trazar fácilmente. ¿Cuál es la ecuación de la elipse en el nuevo sistema de referencia?; ¿cuáles son los vectores* $\overline{e}_1$ *y* $\overline{e}_2$ *?*

---

5 Si el lector quiere recordar lo relacionado con rotación y traslación de ejes le sugerimos consultar "Geometría Analítica" de Kindle, edit. Mc Graw-Hill, serie Schaum, págs. 66-68, cap. 8, o cualquier otro libro de geometría analítica en el capítulo de transformación de coordenadas (Rotación y traslación de ejes).

La base A se obtiene a partir de la base canónica B = {i, j} por la rotación de un ángulo θ. De cursos anteriores sabemos que el ángulo θ que deben girar los ejes para eliminar el término XY de toda ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se obtiene de la expresión

$$tg\ 2\theta = \frac{B}{A - C}$$

Para nuestro ejemplo, de (2) se tiene que

$$tg\ 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0}; \quad \text{de donde} \quad 2\theta = 90^\circ \quad y \quad \theta = 45^\circ$$

Es decir, la rotación θ, en nuestro ejemplo, es de 45°

Obtengamos la matriz de transición de la base B = {i, j} a la base A = $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$

$$i = \gamma_1\ \overline{e}_1 + \gamma_2\ \overline{e}_2$$

$$j = \delta_1\ \overline{e}_1 + \delta_2\ \overline{e}_2$$

siendo $M_A^B = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix}$

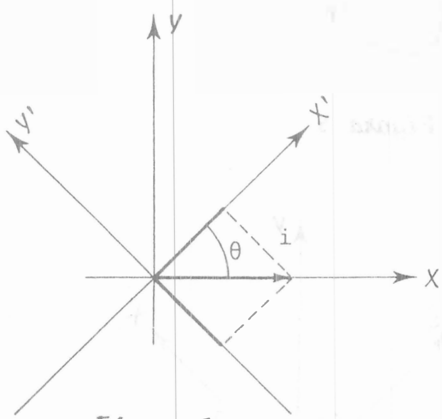


Figura 7

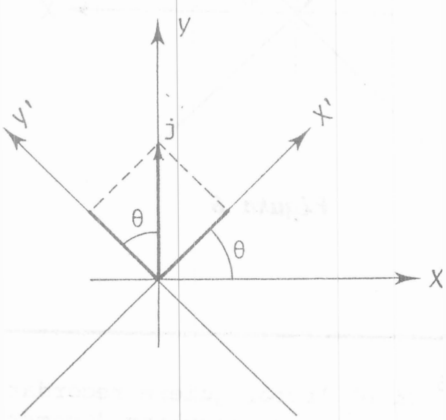


Figura 8

De las figuras 7 y 8 tenemos que

$$i = \cos\theta\ \overline{e}_1 - sen\theta\ \overline{e}_2$$

$$j = sen\theta\ \overline{e}_1 + \cos\theta\ \overline{e}_2$$

Por lo tanto, la matriz de transición es:

$$M_A^B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Como $\theta = 45°$, tenemos:

$$M_A^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

El vector (x, y) del sistema XY que corresponde al vector (x', y') del sistema X'Y' está dado por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M_A^B \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ y $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$ en la ecuación (2) se obtiene

$$x'^2 + 3y'^2 = 6 \qquad \text{——— (3)}$$

que es la ecuación de la elipse en el sistema de referencia X'Y'.

De (3) se observa que la longitud del semieje mayor es $\sqrt{6}$ y la del menor $\sqrt{2}$ según se muestra en la figura 9.

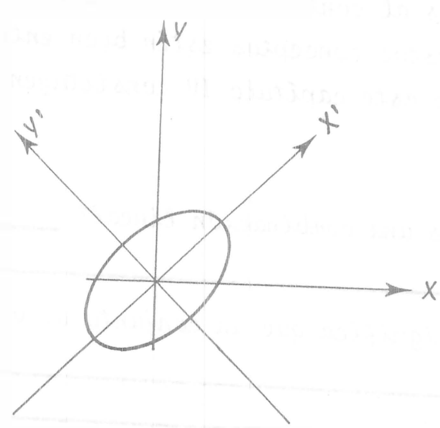


Figura 9

Los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ estarán determinados por los giros de i y j, respectivamente.

$$\bar{e}_1 = M_B^A\, i \qquad y \qquad \bar{e}_2 = M_B^A\, j$$

Como $M_B^A = \begin{bmatrix} M_A^B \end{bmatrix}^{-1}$, entonces $M_B^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

y

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,\ 1)$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1,\ 1)$$

que son los vectores que corresponden a i y j en el nuevo sistema de referencia.

Más aplicaciones importantes de la matriz de transición se presentan en las transformaciones lineales, en el Cálculo Vectorial y en otros temas de matemáticas y física.

Antes de resolver ejercicios relacionados con los conceptos que corresponden a esta sección, te sugerimos contestes las siguientes preguntas correctamente.

Si tienes dudas al contestar las preguntas, te aconsejamos que no sigas adelante hasta que estos conceptos estén bien entendidos. Recuerda que los conceptos estudiados en este capítulo IV constituyen la parte esencial del álgebra lineal.

I) ¿Qué es una combinación lineal? ______________________________

____

II) ¿Qué significa que un conjunto de vectores es linealmente independiente? ____

____

III) ¿Qué significa que un conjunto de vectores es linealmente dependiente? ______________________________

____

IV) ¿Qué es un conjunto generador de un espacio vectorial? ______________________________

____

V) ¿Qué es una base de un espacio vectorial? ______________________________

____

VI) ¿Qué significa el concepto de base ordenada de un espacio vectorial?

____

____

VII) ¿Qué es la dimensión de un espacio vectorial? ______________________________

____

VIII) ¿Qué es el vector de coordenadas de un vector con respecto a una base ordenada? ______________________________

____

IX) ¿Qué es la matriz de transición de una base a otra? ______________________________

____

Ahora, resuelve los siguientes ejercicios:

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

(Continuación)

11.- Determina el valor de k para que el vector $\overline{u} = (1, k, 5)$ de $\mathbb{R}^3$ sea una combinación lineal de los vectores $\overline{v} = (1, -3, 2)$ y $\overline{w} = (2, -1, 1)$

12.- *Expresa el vector de* $\mathbb{R}^2$, $\overline{v} = (3, -1)$, *como una combinación lineal de los vectores*

a) $\overline{v}_1 = (4, 0)$, $\overline{v}_2 = (-6, 2)$, $\overline{v}_3 = (8, 3)$

b) $\overline{w}_1 = (2, 0)$, $\overline{w}_2 = (0, -8)$, $\overline{w}_3 = (1, -1)$

c) $\overline{u}_1 = (1, 0)$, $\overline{u}_2 = (2, 1)$, $\overline{u}_3 = (0, -1)$

13.- a) *Si* $\overline{v}_1 = (1 - k, k + 1)$ *y* $\overline{v}_2 = (k + 1, 1 - k)$, *determina los valores de* k *para los cuales* $\overline{v}_1$ *y* $\overline{v}_2$ *son linealmente independientes considerando que son vectores del espacio* $\mathbb{R}^2$.

b) *Determina el valor de* h *para que el conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^3$, $\{(h, 1, 0), (1, h, 1), (0, 1, h)\}$ *sea linealmente dependiente.*

14.- *En un espacio vectorial V sobre el campo* $\mathbb{R}$, *el conjunto* $E = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ *es linealmente independiente.*

Determina si los siguientes conjuntos son linealmente dependientes o linealmente independientes

a) $A = \{\overline{u} + \overline{v},\ 2\overline{v} + \overline{w},\ \overline{u} + \overline{w}\}$

b) $B = \{\overline{u},\ \overline{u} + \overline{v},\ \overline{u} + \overline{v} + \overline{w}\}$

15.- *Determina si el conjunto de vectores* $A = \{(2, -1, 3), (0, 4, 1), (4, 2, 7)\}$ *genera el espacio* $\mathbb{R}^3$

16.- *Considera el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *sobre el campo* $\mathbb{R}$.

a) *Da un conjunto A que contenga 4 vectores de* $\mathbb{R}^3$ *y que genere el espacio* $\mathbb{R}^3$

b) Da un conjunto B que contenga 4 vectores de $\mathbb{R}^3$ y que no genere el espacio $\mathbb{R}^3$

17.- Con vectores del siguiente conjunto:

$$A = \{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (3, 1, 3), (1, 1, 1)\}$$

a) Elige una base de $\mathbb{R}^3$

b) Expresa cada uno de los vectores de la base canónica como combinación lineal de los vectores de la base elegida en el inciso anterior.

18.- a) Sea el plano π de ecuación $3x - y + 2z = 0$, y sea V el conjunto de todos los puntos contenidos en el plano π representados por ternas (a, b, c)

Demuestra que V es un espacio vectorial sobre los reales.

b) Obtén una base y la dimensión de V

c) La recta ℓ de ecuación

$$x + 2 = y + 2 = 2 - z$$

está contenida en el plano π.

Sea W el conjunto de todos los puntos contenidos en dicha recta. Es decir, $W = \{(x, y, z) \mid x + 2 = y + 2 = 2 - z\}$

Demuestra que W es un subespacio de V.

d) Obtén una base y la dimensión de W.

e) Muestra que cualquier vector de W se puede expresar como una combinación lineal de dos vectores $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ que tengan la siguiente característica: $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in V$, $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \notin W$

f) ¿Se considera al conjunto formado por los vectores $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ del inciso anterior como un conjunto generador de W? ¿Por qué?

19.- El conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los complejos $\mathbb{C}$ y también sobre el campo de los reales $\mathbb{R}$.

Obtén una base y la dimensión del espacio $\mathbb{C}$

a) Sobre el campo $\mathbb{C}$

b) Sobre el campo $\mathbb{R}$

20.- El conjunto $\mathbb{C}^2 = \{(a + bi,\ c + di) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y también sobre $\mathbb{R}$.

Obtén una base y la dimensión del espacio $\mathbb{C}^2$

a) Sobre el campo $\mathbb{C}$

b) Sobre el campo $\mathbb{R}$

21.- Demuestra que el conjunto de vectores de $\mathbb{C}^2$, $\{(-4-7i,\ 1-2i),\ (2-3i,\ 1)\}$, es linealmente dependiente cuando $\mathbb{C}^2$ está definido sobre el campo complejo y es linealmente independiente cuando $\mathbb{C}^2$ está definido sobre el campo real.

22.- Demuestra que el conjunto $\{(0,\ i,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ i)\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ sobre el campo $\mathbb{C}$.

23.- Completa correctamente las siguientes expresiones, escribiendo en las líneas las palabras correspondientes.

Sea el conjunto $B = \{\bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ \bar{v}_3,\ \bar{v}_4\}$ una base del espacio vectorial V definido sobre un campo K, entonces:

a) La ecuación

$$\alpha_1\ \bar{v}_1 + \alpha_2\ \bar{v}_2 + \alpha_3\ \bar{v}_3 + \alpha_4\ \bar{v}_4 = \bar{0}$$

se satisface si, y sólo si, ____________________

b) Todo conjunto con más de cuatro vectores de V es linealmente ____________________

c) El conjunto $\{\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es linealmente ____________________

d) Si las coordenadas del vector $\bar{w} \in V$ en la base B son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, entonces,

$\bar{w}$ = ____________________

e) El conjunto $\{\bar{v}_2, \bar{v}_4, \bar{0}\}$, donde $\bar{0}$ es el vector cero de V, es linealmente ____________________

24.- Sea $S = \{ax^3 + 2ax^2 + 3bx + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ un espacio vectorial sobre el campo de los números reales. Obtén una base y la dimensión de dicho espacio vectorial.

25.- Se tienen tres vectores $\bar{v}_1 = 1$, $\bar{v}_2 = t - 1$, $\bar{v}_3 = (t - 1)^2$

a) Demuestra que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es una base del espacio vectorial de los polinomios $\{at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ sobre $\mathbb{R}$.

b) Obtén las coordenadas del vector $\bar{w} = 2t^2 - 5t + 6$ con respecto a dicha base.

26.- Sea el espacio vectorial

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & -a \\ 0 & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

definido sobre el campo de los reales.

a) Escribe una base de M.

b) ¿Cuál es la dimensión de M?

c) Escribe el vector $\bar{v} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores de la base dada en el inciso a).

27.- Determina el valor de λ para que el conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 4+\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3+\lambda & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 \\ -4 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \right\}$$

sea linealmente dependiente, siendo A un subconjunto de un espacio vectorial sobre el campo de los reales.

28.- Sea V un espacio vectorial sobre el campo de los reales. Si

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad y \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

son dos bases de V, obtén la matriz de transición de la base A a la base B.

29.- Sea V un espacio vectorial sobre IR y $B_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una de sus bases. Si $(\bar{v})_{B_1} = (2, -1, 3)$, determina las coordenadas del vector $\bar{v}$ en la base $B_2 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ donde,

$$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 + 2\bar{v}_2$$

$$\bar{w}_2 = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3$$

$$\bar{w}_3 = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + 3\bar{v}_3$$

30.- En el espacio vectorial de los polinomios $P = \{a + bt + ct^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ se tienen los siguientes datos.

Una base de P es $B_2 = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\} = \{t-2,\ 3t,\ t-t^2\}$.

Además se sabe que $(\bar{u}_1)_{B_2} = (-3,\ 1,\ 0)$, $(\bar{u}_2)_{B_2} = (-1,\ 0,\ 0)$ y $(\bar{u}_3)_{B_2} = (1,\ 0,\ -1)$, donde $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$ son los vectores de una base B_1.

Con estos datos, obtén:

a) El vector de coordenadas del vector $\bar{v} = 6 - 3t^2$ en la base B_1.

b) El vector de coordenadas del mismo vector $\bar{v}$ en la base B_2 utilizando la ecuación

$$(\bar{v})_{B_2} = M_{B_2}^{B_1}\ (\bar{v})_{B_1}$$

c) El vector de coordenadas del vector $\bar{p}$ en la base B_1 si se sabe que $(\bar{p})_{B_2} = (-3,\ 1,\ -1)$.

Isomorfismos entre R^n y otros espacios vectoriales. Aplicaciones

Los espacios $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *ya sean expresados en forma de renglón o columna,*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$$

tienen gran aplicación en el estudio mismo de los espacios vectoriales.

Es probable que la aplicación más útil resulte del teorema que establece que los espacios vectoriales de la misma dimensión son isomorfos. *Es decir, todos los espacios vectoriales de la misma dimensión son, algebraicamente hablando, iguales. De esta manera, al estudiar un espacio vectorial cualquiera V, de dimensión* n, *emplearemos el isomorfismo para trabajar con vectores del espacio* $\mathbb{R}^n$ *y el resultado lo aplicaremos al espacio* V.

Para ilustrar lo anterior, consideremos el espacio vectorial de los polinomios de la forma

$$P = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\} .$$

Este espacio es de dimensión cuatro sobre el campo de los reales y, por lo tanto, podemos establecer una función biyectiva entre el espacio P *y el espacio* $\mathbb{R}^4$.

La función $f : P \to \mathbb{R}^4$ *definida por*

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a, b, c, d) \qquad \text{——— (1)}$$

es un isomorfismo entre los espacios P y $\mathbb{R}^4$ ya que para cualesquiera vectores $\overline{p}_1$ y $\overline{p}_2$ de P y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$f(\overline{p}_1 + \overline{p}_2) = f(\overline{p}_1) + f(\overline{p}_2)$$

$$f(\alpha \overline{p}_1) = \alpha\, f(\overline{p}_1)$$

Determinemos si el subconjunto de P,

$$S = \{x^3 + 3x^2 - 6x - 6,\ 4x^3 + 4x^2,\ 2x^3 + 2x^2 - x - 1,\ x^3 - 5x^2 + 12x + 12\}\ ,$$

es linealmente dependiente o independiente.

Una manera de determinar el tipo de dependencia lineal del conjunto S es a partir de la ecuación de dependencia lineal:

$$\alpha_1\, \overline{p}_1 + \alpha_2\, \overline{p}_2 + \alpha_3\, \overline{p}_3 + \alpha_4\, \overline{p}_4 = \overline{0}$$

Esta manera puede resultar laboriosa. La alternativa se presenta aplicando el isomorfismo.

De acuerdo con la función f, definida por (1), podemos asociar a cada vector del conjunto S un vector de $\mathbb{R}^4$. De esta manera tenemos que:

$$f(x^3 + 3x^2 - 6x - 6) = (1,\ 3,\ -6,\ -6)$$

$$f(4x^3 + 4x^2) = (4,\ 4,\ 0,\ 0)$$

$$f(2x^3 + 2x^2 - x - 1) = (2,\ 2,\ -1,\ -1)$$

$$f(x^3 - 5x^2 + 12x + 12) = (1,\ -5,\ 12,\ 12),$$

y, entonces, podemos expresar el conjunto isomorfo a S de la siguiente manera:

$$f(S) = \{(1,\ 3,\ -6,\ -6),\ (4,\ 4,\ 0,\ 0),\ (2,\ 2,\ -1,\ -1),\ (1,\ -5,\ 12,\ 12)\}\ .$$

Como los conjuntos S y $f(S)$ son -algebraicamente hablando- iguales, ambos tendrán el mismo tipo de dependencia lineal.

Para determinar si el conjunto $f(S)$ es linealmente dependiente o independiente, emplearemos el concepto de rango de una matriz.

Si los vectores de $f(S)$ los consideramos como los renglones de una matriz M y escalonamos dicha matriz, tenemos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & -6 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 12 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & -8 & 24 & 24 \\ 0 & -4 & 11 & 11 \\ 0 & -8 & 18 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 11 & 11 \\ 0 & -8 & 18 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto, el rango de la matriz M es igual a tres.

El rango de una matriz indica cuántos renglones linealmente independientes posee dicha matriz. Por consiguiente, la matriz M tiene tres renglones linealmente independientes; es decir, el conjunto formado por los cuatro renglones de la matriz M es linealmente dependiente. Pero, los renglones de M son precisamente los vectores de $f(S)$. Por lo tanto, el conjunto $f(S)$ es linealmente dependiente, lo que implica, a su vez, que el conjunto de polinomios S es linealmente dependiente.

Obtengamos ahora el espacio vectorial W que genera el conjunto S.

Como el espacio generado por S es isomorfo al espacio generado por $f(S)$, obtendremos primero el espacio generado por este último y el resultado lo aplicaremos al espacio de polinomios tomando en cuenta la expresión (1).

El espacio que genera $f(S)$ *es, precisamente, el espacio generado por los renglones de la matriz* M. *Obtengamos, pues, el espacio renglón de la matriz* M.

Si continuamos haciendo transformaciones elementales a la matriz escalonada de M *tenemos:*

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

donde E *es la matriz escalonada en forma canónica de* M.

Por lo tanto, los vectores del espacio renglón de M *serán de la forma*

$$a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 1) = (a, b, c, c)$$

es decir,

$$L(M_r) = \{(a, b, c, c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

que es también el espacio vectorial generado por el conjunto $f(S)$.

Aplicando el isomorfismo tenemos entonces que el espacio vectorial W *generado por el conjunto* S *es*

$$W = \{ax^3 + bx^2 + cx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

La dimensión de W *es* $\dim W = 3$ *y una de sus bases es* $B = \{x^3, x^2, x + 1\}$.

Si hubiésemos trabajado directamente con los vectores del conjunto S, *sin hacer uso del isomorfismo, la obtención del espacio* W *hubiera resultado más laboriosa.*

Los espacios $\mathbb{R}^n$ permiten también tratar la solución de un sistema de ecuaciones lineales como un problema de dependencia lineal. Esto constituye otra de las aplicaciones de los espacios $\mathbb{R}^n$.

Sea un sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Podemos considerar a cada renglón de la matriz de coeficientes como un vector de $\mathbb{R}^n$ y a cada columna de la matriz como un vector de $\mathbb{R}^m$.

Si denotamos a las columnas por

$$\bar{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad y \quad a \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

entonces, el sistema de ecuaciones lo podemos expresar como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

es decir,

$$x_1\bar{c}_1 + x_2\bar{c}_2 + \dots + x_n\bar{c}_n = \bar{b} \qquad (3)$$

lo cual quiere decir que el sistema de ecuaciones tendrá solución si y sólo si el vector $\bar{b}$ es una combinación lineal de los vectores $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$; o en otras palabras, el sistema de ecuaciones tiene solución si y sólo si el vector $\bar{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_m]^T$ pertenece al espacio generado por los vectores $\bar{c}_j$.

Obsérvese que la ecuación (3) no es más que otra manera de escribir (2); es decir, mediante los espacios $\mathbb{R}^n$ hemos expresado el problema de la solución de un sistema de ecuaciones lineales como un problema de dependencia lineal.

Para reafirmar los conceptos tratados en esta sección, te sugerimos que contestes las preguntas y completes las afirmaciones siguientes.

I) Si el rango de una matriz A de orden $m \times n$ es $R(A) = m$, entonces dicha matriz tiene ___m___ renglones linealmente independientes.

II) Contesta SI o NO a las siguientes preguntas:

Para una matriz A de orden $m \times n$,

a) ¿La dimensión de su espacio renglón es igual a la dimensión de su espacio columna? ___SI___

b) ¿El espacio renglón y el espacio columna son iguales? ___NO___

III) Dos espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos si y sólo si

____

IV) Sea un sistema de ecuaciones lineales $A\bar{x} = \bar{b}$.

¿Qué relación debe haber entre la dimensión del espacio renglón de la matriz A y la dimensión del espacio renglón de la matriz ampliada $(A, \bar{b})$ para que el sistema de ecuaciones tenga solución? ______________________________

____

V) El conjunto solución de un sistema de ecuaciones $A\bar{x} = \bar{b}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, ¿es un espacio vectorial? ______________ ¿Por qué? ______________________________

____

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

(Continuación)

31.- Obtén el espacio vectorial V que genera el conjunto A y determina la dimensión de dicho espacio.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \right\}$$

32.- Un subconjunto de vectores del espacio vectorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

sobre el campo de los reales es el siguiente:

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se quiere determinar si el conjunto G es linealmente dependiente o independiente. Para ello, se recurrirá a su espacio isomorfo $\mathbb{R}^n$ correspondiente.

I) De acuerdo con los datos, el espacio $\mathbb{R}^n$ isomorfo al espacio V es: (Elige la opción correcta)

A) $\mathbb{R}^4$ B) $\mathbb{R}^3$ C) $\mathbb{R}^2$ D) $\mathbb{R}$

☐ es la opción correcta

II) Una función que establece un isomorfismo entre el espacio V y su correspondiente $\mathbb{R}^n$ es: (Elige la opción correcta)

1) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = (a+b,\ a+c)$ 2) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = (a,\ b,\ c)$

3) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, 0)$ 4) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = (c, b, a)$

A) Sólo 1 es correcta
B) Sólo 2 es correcta
C) Sólo 3 es correcta
D) Sólo 4 es correcta
E) Sólo 1 y 3 son correctas
F) Sólo 2 y 4 son correctas
G) Sólo 2 y 3 son correctas
H) Sólo 3 y 4 son correctas
I) Sólo 2, 3 y 4 son correctas
J) Todas son correctas

$\boxed{}$ es la opción correcta.

III) De lo anterior, un conjunto isomorfo al conjunto G es: (Elige la opción correcta)

A) $f(G) = \{(1, 1, -1), (2, 1, -3), (3, 7, 1)\}$

B) $f(G) = \{(-1, 1, 1), (-3, 1, 2), (3, 7, 1)\}$

C) $f(G) = \{(2, 0), (3, -1), (10, 4)\}$

D) $f(G) = \{(1, 1, -1, 0), (2, 1, -3, 0), (3, 7, 1, 0)\}$

$\boxed{}$ es la opción correcta.

IV) Para determinar si el conjunto $f(G)$ es linealmente dependiente o independiente, se recurrirá al concepto de rango de una matriz. Para ello, escribiremos primero a los vectores del conjunto $f(G)$ como los renglones de una matriz M. Dicha matriz es: (Elige la opción correcta)

A) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

☐ es la opción correcta.

V) Después de escalonar la matriz M, se obtiene que su rango es igual a: (Elige la opción correcta)

A) 3   B) 1   C) 2   D) 4   E) 5

☐ es la opción correcta.

VI) De donde se concluye que el conjunto $f(G)$ es linealmente __________ __________ y, por lo tanto, el conjunto G es linealmente __________ __________________.

33.- Comprueba el resultado obtenido en el inciso VI) del ejercicio anterior utilizando la ecuación de dependencia lineal. (Es decir, determina el tipo de dependencia lineal del conjunto G a partir de la ecuación $\alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{v}_n = \bar{0}$).

34.- Obtén el espacio vectorial W generado por el conjunto G del ejercicio 32.

I) Para ello obtén -a partir del inciso V) de dicho ejercicio- la forma canónica escalonada de la matriz M. Dicha matriz es: (Elige la opción correcta)

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

☐ es la opción correcta.

II) El espacio renglón $L(M_r)$ es, por lo tanto: (Elige la opción correcta)

A) $\{(a-2c,\ b+c,\ 0,\ 0,\ 0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

B) $\{(a,\ b,\ b-2a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

C) $\{(a,\ 2a+b,\ 0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

D) $\{(a,\ b,\ c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

☐ es la opción correcta.

III) El espacio renglón $L(M_r)$ es isomorfo a: (Elige la opción correcta)

1) Al espacio generado por el conjunto $f(G)$.

2) Al espacio generado por el conjunto G.

3) Al espacio $\mathbb{R}^3$.

4) Al espacio $\mathbb{R}^2$.

A) Sólo 1 es correcta.
B) Sólo 2 es correcta.
C) Sólo 3 es correcta.
D) Sólo 4 es correcta.
E) Sólo 1 y 2 son correctas.
F) Sólo 1 y 3 son correctas.
G) Sólo 1 y 4 son correctas.
H) Sólo 2 y 3 son correctas.
I) Sólo 2 y 4 son correctas.
J) Sólo 1, 2 y 3 son correctas.
K) Sólo 1, 2 y 4 son correctas.
L) Sólo 2, 3 y 4 son correctas.
M) Todas son correctas.

☐ es la opción correcta.

IV) Por lo tanto, el espacio vectorial W generado por el conjunto G es: (Elige la opción correcta)

A) $\left\{ \begin{bmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ B) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

C) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ D) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b-2a \end{bmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R} \right\}$

$\boxed{}$ es la opción correcta.

35.- a) Obtén el espacio vectorial generado por las columnas de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -9 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

b) De acuerdo con el resultado obtenido en el inciso anterior, se concluye que el rango de la matriz, $R(A)$, es igual a ____________________

c) Por lo tanto, de los resultados obtenidos anteriormente se concluye que la dimensión del espacio renglón de la matriz A es igual a ____________________

36.- a) Obtén una base y la dimensión del espacio vectorial V sobre el campo de los reales si

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & -2a \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Demuestra que el conjunto

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

genera al espacio vectorial V

c) ¿Es el conjunto G una base de V? ¿Por qué?

37.- Para las matrices siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Determina cuáles tienen el mismo espacio renglón.

b) ¿Cuáles de los espacios renglones, obtenidos en el inciso anterior, son isomorfos?

38.- a) Obtén una base y la dimensión del espacio vectorial P sobre $\mathbb{R}$ si

$$P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

b) Demuestra que el conjunto

$$H = \{18x^2 - 6x,\ x^2 - x + 4,\ x^2 - 2,\ 9x^2 - 3x\}$$

no genera al espacio vectorial P.

c) Demuestra que $W = \{ax^2 + bx - (2a + 6b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de P.

d) Obtén una base y la dimensión de W.

e) Demuestra que cualquier vector de W, es decir, cualquier vector de la forma $ax^2 + bx - (2a + 6b)$ es posible expresarlo como una combinación lineal de los vectores del conjunto H.

f) ¿Es H un conjunto generador de W ? ¿Por qué?

g) ¿Es H una base de W ? ¿Por qué?

39.- a) Obtén el espacio vectorial P sobre el campo $\mathbb{R}$ que genera el conjunto

$$\{-2x^2 + 6,\ x^2 - 3,\ 4x^2 - 12\}$$

b) Verifica que el espacio vectorial M sobre el campo $\mathbb{R}$ que genera el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/3 & 0 \\ 2 & -2/3 \end{bmatrix} \right\}$$

es isomorfo al espacio P del inciso anterior.

c) Un espacio vectorial isomorfo a los espacios anteriores P y M es

$$V = \{(3a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}\ .$$

Obtén una base B de este espacio.

d) Da una función $f : P \to V$ tal que f establezca un isomorfismo entre el espacio P y el espacio V. Da también una función $g : M \to V$ tal que g establezca un isomorfismo entre el espacio M y el espacio V.

e) Obtén una base del espacio P y una base del espacio M, a partir de la base del espacio V obtenida en el inciso c). Para ello, emplea las funciones f y g respectivamente.

40.- a) Demuestra que el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\overline{x} = \overline{0}$ es un espacio vectorial. (A este espacio vectorial se le llama espacio solución).

b) Demuestra que el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $A\overline{x} = \overline{b}$ no es un espacio vectorial.

41.- Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales, obtén su espacio solución, y da una base y la dimensión de dicho espacio.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z &= 0 \\ x + y \phantom{{}+6z} &= 0 \\ -x + 4y - 6z &= 0 \\ 3x + 8y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

42.- Determina el valor de k para que el espacio solución del siguiente sistema de ecuaciones sea de dimensión tres.

$$\begin{aligned} x + 3y - 4z + w &= 0 \\ -x - \frac{1}{2}ky + 4z - \frac{1}{6}kw &= 0 \\ -2x - ky + 8z - 2w &= 0 \\ 10x + 5ky - 40z + 10w &= 0 \end{aligned}$$

43.- Expresa la solución del siguiente sistema de ecuaciones como una variedad lineal.

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 8 \\ 3x - y + 3z &= 12 \\ 4x + 4y + 4z &= 16 \end{aligned}$$

44.- Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2ax_1 - bx_2 + x_3 &= -5 \\ -ax_1 + ax_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - ax_2 + 3bx_3 &= 15 \end{aligned}$$

Del conjunto solución de este sistema, expresado como variedad lineal, se sabe lo siguiente:

$$L = \{(x_2,\ x_2,\ 0) + \bar{v}_0 \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Con estos datos,

a) *Determina los valores de* a *y* b

b) *Obtén un* apoyo $\bar{v}_0$, *de la variedad lineal* [6]

c) *Obtén el conjunto solución del sistema*

45.- *De un sistema de ecuaciones lineales* $A\bar{x} = \bar{b}$, *con* $\bar{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$, *se sabe que la dimensión del espacio solución de su homogéneo asociado es cero y que* $x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{1}{6}$ *satisfacen cada una de las ecuaciones del sistema no homogéneo. Con estos datos, expresa el conjunto solución del sistema no homogéneo como una variedad lineal.*

46.- *Sea* Φ *el espacio vectorial de todas las funciones reales de variable real sobre el campo* $\mathbb{R}$.

Determina si el subconjunto de Φ,

$$F = \{f(x) \mid f(x) = f(2\alpha - x),\ x \in (-\infty, \infty),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio.

47.- *Sea* F *el espacio vectorial de funciones*

$$F = \{f(x) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \in \mathbb{R}\}$$

definido sobre el campo $\mathbb{R}$.

---

[6] Consulta estos conceptos en "Algebra lineal" de E. Solar y L. Speziale, páginas 612-614.

Determina cuáles de los siguientes subconjuntos de F son subespacios de F

a) $F_1 = \{f(x) \mid f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

b) $F_2 = \{f(x) \mid f(x) = f(1 - x), \forall x \in \mathbb{R}\}$

c) $F_3 = \{f(x) \mid 2f(0) = f(1)\}$

d) $F_4 = \{f(x) \mid f(1) = f(0) + 1\}$

48.- Determina si el conjunto de funciones

$\{\log 6x, \log 18x^2, \log x, \log 3x\}$

es linealmente dependiente o independiente en el intervalo $x \in (0, \infty)$

49.- Sea el espacio vectorial de funciones de la forma

$A = \{c_1e^x + c_2e^{-x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

definidas en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

a) Demuestra que el conjunto

$$B = \{3e^x, e^{-x}\}$$

es una base de A.

b) Obtén el vector de coordenadas de $f(x) = 6e^x + 7e^{-x}$ en la base B.

50.- Para el conjunto de funciones $\{3x, xe^x, x\}$,

a) Calcula su wronskiano.

b) Determina si el conjunto es linealmente dependiente o independiente.

Ejercicios Adicionales

1.- Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Demuestra que para todo escalar $\alpha \in K$ y $\overline{0} \in V$, $\alpha \overline{0} = \overline{0}$

2.- Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Demuestra que para $0 \in K$ y para todo $\overline{v} \in V$, $0\,\overline{v} = \overline{0}$

3.- Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Demuestra que para cualquier escalar $\beta \in K$ y $\overline{v} \in V$, $(-\beta)\overline{v} = \beta(-\overline{v}) = -\beta\overline{v}$.

4.- Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Demuestra que si $\alpha \in K$, $\overline{v} \in V$, $\overline{v} \neq \overline{0}$ y $\alpha \overline{v} = \overline{0}$, entonces $\alpha = 0$

5.- Sea el conjunto $V = \{*\}$. Determina si V es un espacio vectorial sobre el campo K si la adición en V y la multiplicación por un escalar se definen como

$$* + * = *$$

$$\alpha * = * , \qquad \forall \alpha \in K$$

6.- Determina si el conjunto de los números complejos es un espacio vectorial,

a) sobre el campo real

b) sobre el campo complejo

si la adición en $\mathbb{C}$ se define en la forma usual y la multiplicación por un escalar se define como

$$\alpha z = \begin{cases} \overline{\alpha z}, & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ z, & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

Nota: $\overline{\alpha z}$ es el conjugado de αz.

7.- Sea el conjunto $F = \{f(x) \mid f(x) = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}\}$ y sea el campo $(K, +, \cdot)$ donde

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \middle|\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

y las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas en K son la adición y la multiplicación usuales de las matrices.

Determina si el conjunto F es un espacio vectorial sobre el campo K, si la adición en F es la adición usual de las funciones y la multiplicación por escalar se define como

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot (mx + b) = \alpha mx + \alpha b$$

8.- Sea el conjunto $A = \{0, 1\}$. Demuestra que el conjunto A no es un espacio vectorial sobre el campo de los reales, indicando la(s) propiedad(es) de la definición que no se cumple(n), tomando en cuenta que la adición en A y la multiplicación por escalar se definen, respectivamente, como se indica a continuación:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

, y, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$

9.- El sistema algebraico $(B, +, \bullet)$ del ejercicio 20 del capítulo III, página 94, es un campo.

Demuestra que el conjunto $B^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in B\}$ es un espacio vectorial sobre el campo B, estando las operaciones de adición en B^3 y multiplicación por escalar definidas de la siguiente manera:

$$(x_1, y_1, z_1) \oplus (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2), \quad \forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in B^3$$

$$\alpha \odot (x, y, z) = (\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z), \quad \forall \alpha \in B,\ \forall (x, y, z) \in B^3$$

10.- *Sea el conjunto*

$A = \{p(x) \mid p(x)$ *es un polinomio y* $p(0) = 1, \quad p'(0) = 0\}$

a) *Demuestra que* A *no es un espacio vectorial sobre el campo* $\mathbb{R}$.

b) *Expresa a* A *como una variedad lineal, indicando cuál es su apoyo.*

11.- *Para las siguientes afirmaciones, escribe en el paréntesis correspondiente una* V *o una* F *según que la afirmación sea verdadera o falsa.*

a) *Una de las propiedades de la definición de espacio vectorial es* $(\alpha + \beta)\,\bar{v} = \alpha\bar{v} + \beta\bar{v}$. *La operación de adición del lado izquierdo de esta ecuación es la misma que la del lado derecho* ______________________ ( )

b) *Todo espacio vectorial es una variedad lineal* ____________ ( )

c) *Toda variedad lineal es un espacio vectorial* ____________ ( )

12.- *Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de* $\mathbb{R}^2$

a) $A = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{(x, y) \mid y = 0, \quad x \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{(x, y) \mid y = \sqrt{\pi}\, x, \; x, y \in \mathbb{R}\}$

d) $D = \{(x, y) \mid y = 6, \quad x \in \mathbb{R}\}$

13.- *Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio* $P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ *sobre el campo de los reales.*

a) $A = \{ax^2 + 3 \mid a \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{ax^2 + bx + c \mid a + b + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{(x^2 + x + 3)a \mid a \in \mathbb{R}\}$

d) $D = \{kx^2 \mid k \in \mathbb{R}\}$

14.- Sean los siguientes conjuntos de matrices cuadradas de orden n con elementos reales:

$A = \{M \mid det\ (M) = 0\}$ $\qquad\qquad$ $B = \{M \mid tr\ (M) = 0\}$

Determina si A y B son subespacios del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n sobre el campo $\mathbb{R}$.

15.- Sea W el conjunto que consta de todas las matrices cuadradas de orden 3 que conmutan con la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Demuestra que W es un subespacio del espacio vectorial de la matrices de orden 3 sobre el campo de los reales.

16.- Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio $P = \{ax^2 + bx + c \mid a;b,c \in \mathbb{R}\}$ sobre el campo $\mathbb{R}$

a) $A = \{x^2 + x + a \mid a \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{ax^2 + bx + c \mid a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R},\ p(i) = p(-i) = 0\}$

17.- Sea F el espacio vectorial de las funciones reales de variable real sobre $\mathbb{R}$.

Determina si el siguiente conjunto es un subespacio de F. (Se considera que las operaciones de adición de funciones y multiplicación por escalar son las usuales).

$$\left\{ \frac{f(x)}{1 + x + x^2} \;\middle|\; f(x) \in F \right\}$$

18.- La ecuación $f''(x) - f(x) = 0$ es una ecuación diferencial.

Demuestra que el conjunto de todas las funciones que satisfacen dicha ecuación es un subespacio del espacio vectorial de las funciones sobre el campo de los reales.

19.- Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial de las funciones reales de variable real.

a) $A = \{f(x) \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\}$

b) $B = \{f(x) \mid \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$

c) $C = \{f(x) \mid \int_0^1 f(x)\, dx = 1\}$

d) $D = \{f(x) \mid \frac{d}{dx} f(x) = 0\}$

e) $E = \{f(x) \mid \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{d}{dx} f(x) + f(x) = 0\}$

20.- Sea el conjunto de funciones

$$F = \{f(x) \mid f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ es convergente en el intervalo } (-1, 1)\}$$

Determina si F es un subespacio del espacio de las funciones reales de variable real.

21.- Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^2$ y, en caso afirmativo, da la dimensión de dicho subespacio

a) $A = \{(x, y) \mid x \leq |2| \quad y \quad y \leq |2| , \quad x,y \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 , \quad x,y \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0 , \quad x,y \in \mathbb{R}\}$

22.- Sean A el conjunto de las matrices simétricas de orden cuatro y B el conjunto de las matrices antisimétricas también de orden cuatro.

a) Demuestra que A y B son subespacios del espacio vectorial de las matrices de orden cuatro sobre el campo real.

b) Determina la dimensión de los espacios A y B.

23.- a) Demuestra que el conjunto $W = \{f(x) \mid \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 0\}$ es un subespacio del espacio vectorial de las funciones reales sobre $\mathbb{R}$.

b) Determina la dimensión del espacio W.

24.- Sean W y V dos espacios vectoriales sobre un campo K.

a) Demuestra que la unión de W y V no es un espacio vectorial.

b) Demuestra que la intersección de W y V sí es un espacio vectorial.

Nota: Se definen la unión y la intersección de los espacios vectoriales W y V de la siguiente manera:

$$W \cup V = \{\bar{x} \mid \bar{x} \in W \text{ ó } \bar{x} \in V\}$$

$$W \cap V = \{\bar{x} \mid \bar{x} \in W \text{ y } \bar{x} \in V\}$$

25.- Demuestra que si el conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es linealmente dependiente y si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n-1}\}$ es linealmente independiente, entonces $\bar{v}_n$ es una combinación lineal de $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_{n-1}$

26.- En un espacio vectorial V sobre el campo de los reales, el conjunto $A = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ es linealmente independiente. Los vectores $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ del mismo espacio vectorial están relacionados con los vectores del conjunto A, de acuerdo con las ecuaciones

$$\overline{u} = -\overline{a} + \beta\overline{b} + 3\overline{c}$$

$$\overline{v} = 2\overline{a} - \overline{b} + \beta\overline{c}$$

$$\overline{w} = -\overline{a} + \beta\overline{b} + \overline{c}$$

Determina los valores que debe tomar β para que $\{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ sea linealmente independiente.

27.- Obtén una base y determina la dimensión del espacio vectorial B^3 del ejercicio 9 (página 163).

28.- a) Demuestra que el conjunto $H = \{(2, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ es linealmente dependiente en el espacio vectorial B^3 del ejercicio 9 (página 163).

b) ¿Puede el conjunto $N = \{(2, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 1)\}$ ser una base del espacio B^3 ? ¿Por qué?

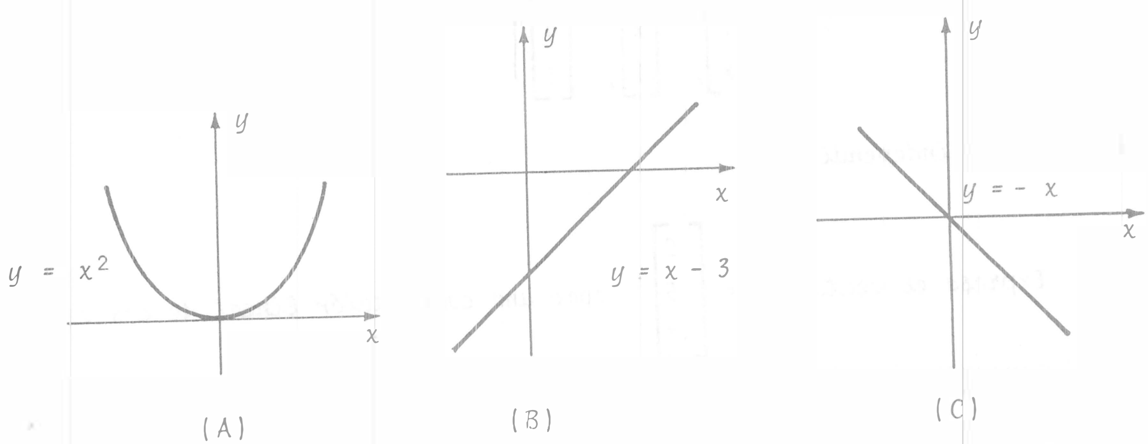
c) Demuestra que el conjunto $G = \{(2, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 1)\}$ genera el espacio B^3

29.- Resuelve el ejercicio 14 de la página 140, considerando ahora que el conjunto $E = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial B^3 sobre el campo B . (Este espacio B^3 es el del ejercicio 9, página 163). Compara los resultados de este ejercicio con los del 14 de la página 140.

30.- Una curva de ecuación $y = f(x)$ se puede escribir como un conjunto de puntos de la siguiente manera:

$$\{(x,y) \mid y = f(x)\}$$

a) Para las siguientes curvas, expresa cada una de ellas como un conjunto de puntos.



b) Determina cuáles de los conjuntos del inciso anterior constituyen un subespacio de $\mathbb{R}^2$

c) Para los subespacios del inciso anterior, obtén una base y determina su dimensión.

31.- Sean los espacios A y B generados por los conjuntos de vectores $\{(1,-1,0), (2,1,3), (-1,-2,-3)\}$ y $\{(1,2,1), (2,3,3), (3,5,6)\}$, respectivamente.

a) Determina el espacio intersección $A \cap B$.

b) Obtén una base y la dimensión del espacio $A \cap B$

32.- a) Obtén una base y determina la dimensión del espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, donde,

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Determina los valores de $x \in \mathbb{R}$ para que el conjunto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

sea linealmente independiente.

c) Expresa el vector $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de los vectores del conjunto B si $x = -2$

d) Da a x un valor con el cual el conjunto B es una base del espacio V.

e) Obtén el vector de coordenadas de $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ en la base obtenida en el inciso anterior.

33.- Demuestra que cualquier conjunto de vectores que contiene al vector cero es linealmente dependiente.

34.- Sea B una base de un espacio vectorial V de dimensión n. Demuestra que para cualquier vector $\bar{v} \in V$, el vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base B es único.

35.- Sean $\overline{u} = (x_1, x_2)$ y $\overline{v} = (y_1, y_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que

$x_1y_1 + x_2y_2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$

a) Demuestra que $B = \{\overline{u}, \overline{v}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

b) Obtén las coordenadas del vector (a, b) en la base ordenada B.

36.- a) Demuestra que el conjunto $A = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid b + c + d = 0,$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio del espacio vectorial de los polinomios $\{a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ sobre el campo $\mathbb{R}$.

b) Obtén una base y determina la dimensión de A .

37.- Sea el espacio vectorial $P = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

a) Demuestra que el conjunto $W = \{p(x) \in P \mid p'(3) = 0\}$ es un subespacio de P sobre los reales.

b) Obtén una base de W y determina su dimensión.

38.- Los vectores $(-5, -3, 2, 4)$, $(-2, -1, 1, 1)$ y $(-1, -1, 0, 2)$ pertenecen al espacio solución de dimensión dos de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Con estos datos, obtén el sistema de ecuaciones homogéneo.

39.- Sea el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, $A = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ donde $\overline{v}_1 = (1, 0, -4)$, $\overline{v}_2 = (0, 3, 1)$, $\overline{v}_3 = (3, 3, -11)$.

Un subespacio de $\mathbb{R}^3$ es $V = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \overline{x} \cdot \overline{v}_1 = \overline{x} \cdot \overline{v}_2 = \overline{x} \cdot \overline{v}_3 = 0\}$ donde la operación $\cdot$ es el producto escalar de vectores.

a) Obtén una base y determina la dimensión de V .

b) Obtén el espacio vectorial W que genera el conjunto A.

c) ¿Son iguales los espacios V y W ? Fundamenta tu respuesta.

40.- El conjunto F del ejercicio 7, página 163, es un espacio vectorial sobre el campo K, también éste definido en el mismo ejercicio.

a) Determina si el conjunto $E = \{1 - x, 4\}$ es una base del espacio F sobre el campo K.

b) Expresa el vector $\bar{v} = -3x + 12$ como una combinación lineal de los vectores 3, $x + 8$, $x - 1$

41.- a) Obtén una base y la dimensión del espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, donde

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Demuestra que el conjunto

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \right\}$$

genera el espacio V.

c) ¿Es G una base de V? ¿Por qué?

d) Demuestra que el conjunto

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio de V.

e) Obtén una base y la dimensión de W.

f) Demuestra que cualquier vector de W es posible expresarlo como una combinación lineal de los vectores del conjunto G del inciso b).

g) ¿Se considera a G un conjunto generador del espacio W? ¿Por qué?

h) Demuestra que cualquier vector del espacio W es posible expresarlo como una combinación lineal de los vectores del conjunto H, donde

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \right\}$$

i) ¿Se considera a H un conjunto generador del espacio W? ¿Por qué?

j) Da un conjunto generador del espacio W que no sea base de dicho espacio.

42.- a) El sistema algebraico $(B, +, \cdot)$ del ejercicio 20, página 94 es un campo. Demuestra que el conjunto M es un espacio vectorial sobre B, donde

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in B \right\}$$

y las operaciones de adición en M y multiplicación de una matriz por un escalar son las ordinarias.

b) Obtén una base de M y determina su dimensión.

c) Demuestra que el espacio M y el espacio B^3 del ejercicio 9, página 163, son isomorfos.

43.- a) Un conjunto de vectores del espacio M del ejercicio anterior es

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Demuestra que el conjunto G genera el subespacio de M,

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b \in B \right\}$$

b) Demuestra que $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ es una base del subespacio W.

c) Obtén el vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base A del inciso anterior, donde

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

44.- a) Obtén el subespacio vectorial de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ que genera el conjunto

$$G = \{(1,i),\ (3-i,\ -1+3i),\ (-3i,\ -3),\ (-1+i,\ 1-i)\}$$

b) Obtén una base y determina la dimensión del subespacio obtenido en el inciso anterior.

c) ¿Con cuál espacio $\mathbb{R}^n$ es isomorfo el subespacio obtenido en el inciso a)?

45.- a) Demuestra que el conjunto

$$G = \{(3+6i,\ 2,\ 2-2i,\ 12),\ (0,\ 1,\ 1-i,0),\ (2+4i,\ 2,\ 2-2i,\ 8),\ (1+2i,\ 0,\ 0,\ 4)\}$$

genera el subespacio de $\mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{R}$

$$W = \{(a+2ai,\ b,\ b-bi,\ 4a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

b) Una base de W es

$$B = \{(1+2i,\ 0,0,\ 4),\ (0,\ -1,-1+i,\ 0)\}$$

Obtén el vector de coordenadas de $\bar{v}$ en la base B si
$\bar{v} = (-4 - 8i,\ 3,\ 3 - 3i,\ -16)$

c) ¿Con cuál espacio $\mathbb{R}^n$ es isomorfo el subespacio W?

d) Obtén la matriz de transición de la base B a la base C si

$C = \{(1 + 2i,\ 1,\ 1 - i,\ 4),\ (0,\ 2,\ 2 - 2i,\ 0)\}$

46.- Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Si V es el espacio vectorial generado por los renglones de A y W el espacio vectorial generado por los renglones de B, obtén el espacio intersección $V \cap W$.

b) Obtén una base y determina la dimensión del espacio $V \cap W$.

47.- Sean $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ y $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\}$ bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Obtén la matriz de transición de la base A a la base B y la matriz de transición de la base B a la base A, si los vectores de las bases A y B satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$-\bar{a}_2 - \bar{b}_3 = \bar{0}$$

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_3 = -2\bar{b}_2$$

$$\bar{a}_3 + \bar{b}_1 = \bar{0}$$

48.- Sea F el espacio vectorial de las funciones reales de variable real continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Y sea $G \subset F$ el conjunto

$$G = \{f(x) \mid f(0) = f(1) = f(2)\}$$

Determina si G es una variedad lineal.

49.- Determina si el conjunto siguiente es linealmente dependiente o independiente

$$\{\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen}(x+1),\ \cos x\}$$

50.- Demuestra que si el conjunto de funciones $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}$ es linealmente dependiente en un intervalo (a, b), entonces el wronskiano $W(x) = 0$, $\forall\ x \varepsilon (a, b)$.

51.- Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \varepsilon [-1, 0] \\ 0, & x \varepsilon (0, 1] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \varepsilon (0, 1] \\ 0, & x \varepsilon [-1, 0] \end{cases}$$

a) Grafica las funciones $f(x)$ y $g(x)$

b) Obtén el wronskiano del conjunto de funciones $\{f(x), g(x)\}$ en el intervalo $(-1, 1)$

c) Las funciones $f(x)$ y $g(x)$, ¿son linealmente dependientes o independientes?

52.- Sean las funciones f_1 y f_2 definidas por:

$$f_1(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \ln x, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = 2x^3, \quad \forall\ x \varepsilon \mathrm{IR}$$

Determina si el conjunto $\{f_1, f_2\}$ es linealmente dependiente o independiente.

Examen de Capítulo

1.- Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre el campo de los reales.

a) $A = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{(x, 0, z) \mid x^2 = z^2,\ x, z \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{(x, y, z) \mid y = z - x,\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Solución:

2.- Escribe una V o una F en el paréntesis correspondiente a cada proposición según ésta sea verdadera o falsa respectivamente, de acuerdo con el siguiente enunciado:

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y sea $A = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\}$ una base de V.

( ) *Cualquier vector* $\bar{v} \in V$ *se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de* A.

( ) $\bar{v}_1$ *se puede expresar como una combinación lineal de* $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ *y* $\bar{v}_4$

( ) *El conjunto* $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5\}$ *es generador de* V, *donde* $\bar{v}_5 \in V$.

( ) *Cualquier subconjunto de* A *es linealmente independiente.*

( ) *Cualquier conjunto de cinco vectores de* V *es linealmente dependiente.*

3.- *Considera el espacio vectorial* $W = \{(-x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. *A continuación se dan varios conjuntos de vectores. Marca con una* X *en el cuadro correspondiente a los conjuntos que son generadores del espacio* W .

- ☐ $\{(1, -1)\}$
- ☐ $\{(3, 0, -3), (-16, 0, 16), (0, 0, 0)\}$
- ☐ $\{(3, 0, -3), (16, 0, -16)\}$
- ☐ $\{(-3, 1, 3), (3, 1, -3)\}$
- ☐ $\{(2, 0, 0), (0, 0, -2)\}$
- ☐ $\{(1, 0), (0, -1)\}$
- ☐ $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
- ☐ $\{(-4, 0, 4)\}$
- ☐ $\{(1, 1, -1)\}$
- ☐ $\{(0, 0, 0), (1, 0, -1)\}$

4.- Sea $A = \{(1, 0, 3),\ \bar{v},\ (1, -1, 0)\}$ una base ordenada del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

Si se sabe que el vector de coordenadas de $\bar{u} = (4, 2, 7)$ en la base A es $(\bar{u})_A = (2, 1, 2)$, obtén el vector $\bar{v}$.

Solución:

5.- Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{———— } (1)$$

que se puede representar como:

$$x_1\bar{c}_1 + x_2\bar{c}_2 + x_3\bar{c}_3 = \bar{0}$$

a) Completa correctamente la siguiente expresión:

El sistema (1) tiene solución única $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, si, y sólo si, los vectores $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ son linealmente ______________________

b) Si $\bar{c}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, $\bar{c}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$, $\bar{c}_3 = [2 \quad 1 \quad 0]^T$, obtén una base y la dimensión del espacio solución del sistema de ecuaciones.

Solución:

6.- *Sea el conjunto*

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 24 \end{bmatrix} \right\}$$

a) *Obtén el espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *que genera el conjunto* G.

b) *Indica el espacio* $\mathbb{R}^n$ *con el cual es isomorfo el espacio obtenido en el inciso anterior.*

Solución:

CAPITULO V

Transformaciones Lineales

David Hilbert (refiriéndose a un antiguo alumno):

"... dejó mis cursos y se hizo poeta. Evidentemente no poseía suficiente imaginación para dedicarse a las matemáticas".

Examen Diagnóstico

A continuación se presentan algunos ejercicios que aluden a conceptos que se consideran antecedentes para estudiar este capítulo. Trata de resolverlos y compara tus resultados con los presentados al final de este examen diagnóstico. Si tienes dudas, lee los temas que se sugieren en la bibliografía presentada a continuación de los resultados.

1.- Determina si las siguientes funciones son inyectivas y/o suprayectivas.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 2x - 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

2.- Determina si la siguiente función f es biyectiva

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(m) = 2m, \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$

3.- Sea la ecuación vectorial

$$(2x - y,\ -x - 3y + z,\ 3x + 2y - z) = (0, 0, 0)$$

a) Escríbela como una ecuación matricial $A\bar{x} = \bar{b}$, donde la matriz de incógnitas es $\bar{x} = [x \quad y \quad z]^T$

b) Obtén los valores de x, y, z que satisfacen $A\bar{x} = \bar{b} = \bar{0}$

4.- Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Obtén la matriz X tal que $X = AB - 2C$

b) Determina si existen B^{-1} y C^{-1}, y en caso afirmativo obtenlas.

5.- Sea el polinomio

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6$$

a) Comprueba que $x = 1/2$ es una raíz de este polinomio.

b) Obtén las demás raíces de $P(x)$.

RESPUESTAS

1.- a) NO es inyectiva ni suprayectiva

b) Es inyectiva y suprayectiva

2.- No es biyectiva porque f es inyectiva pero no suprayectiva.

3.- a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $x = \frac{1}{7}k, \quad y = \frac{2}{7}k, \quad z = k, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$

4.- a)
$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) No existe B^{-1}

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5.- b) -3, 2, -1

BIBLIOGRAFIA

Los conceptos aludidos en estos ejercicios los puedes estudiar en:

- Cálculo diferencial e integral
  de Andrade, Castañeda, García
  Editado por la UNAM
  páginas 67-71

- Algebra superior
  de Cárdenas, Raggi, Tomás
  Editorial Trillas
  páginas 24 y 25

- Algebra I
  de E. Solar, L. Speziale
  Editado por la UNAM
  páginas 151-160

Introducción

En este capítulo estudiaremos las transformaciones lineales y algunos conceptos básicos relacionados con ellas.

Consideraremos a las transformaciones como casos particulares de funciones en donde el dominio y el codominio son espacios vectoriales. Es decir, una transformación es una regla que asocia con cada vector de un espacio vectorial V uno y sólo un vector de otro espacio vectorial W.

En este curso nos restringiremos a un tipo especial de transformaciones llamadas transformaciones lineales y, aunque son un caso muy particular, juegan un papel sumamente importante en muchas ramas de la ciencia. Además, tienen la ventaja de que son más sencillas de trabajar que las transformaciones no lineales.

En matemáticas existe una gran cantidad de problemas que es posible expresar mediante transformaciones lineales. También en física existen fenómenos que pueden describirse con este tipo de transformaciones, sobre todo aquellos fenómenos en donde es válido el llamado principio de superposición.

De manera semejante a cualquier función, las transformaciones lineales tienen asociados conceptos tales como dominio, codominio, núcleo y recorrido. La primera sección de este capítulo estará dedicada a estos conceptos.

En la segunda sección se estudiarán algunas de las operaciones que pueden definirse entre las transformaciones lineales, lo cual da lugar al álgebra de las transformaciones.

Finalmente, en la tercera y última sección del capítulo estudiaremos el tema de valores y vectores característicos y su relación con las formas cuadráticas. Los conceptos de valores y vectores característicos son de gran aplicación en todos los campos de la ingeniería.

En la segunda y tercera sección será de primordial ayuda el uso de matrices. Se mostrará que una forma de describir la acción de una transformación lineal definida entre espacios vectoriales de dimensión finita es precisamente mediante una matriz. *La representación de una transformación lineal mediante una matriz es en muchas ocasiones más conveniente que cualquier otra representación.*

Transformación Lineal, Núcleo y Recorrido

Una transformación T es, por definición, una función que asocia a cada elemento de un espacio vectorial V uno y sólo un vector de otro espacio vectorial W, lo que se expresa como $T : V \to W$.

En ocasiones $V = W$ y entonces a la transformación le llamaremos operador.

Cuando la transformación T asocia al vector $\bar{v}$ el vector $\bar{w}$, se escribe como

$$T(\bar{v}) = \bar{w} \qquad \bar{v} \in V \; , \quad \bar{w} \in W$$

que puede expresarse también diciendo que la transformación de $\bar{v}$ es $\bar{w}$ ó que T valuada en $\bar{v}$ es igual a $\bar{w}$ ó que la imagen de $\bar{v}$ bajo T es $\bar{w}$.

Si una transformación $T : V \to W$, donde V y W están definidos sobre el campo K, tiene además las dos propiedades siguientes:

$$T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$

$$T(\alpha\, \bar{u}) = \alpha\, T(\bar{u}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$

$\forall\; \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\forall\; \alpha \in K$, entonces se le llama transformación lineal[1].

De las ecuaciones (1) y (2) tenemos que una transformación lineal es un

[1] Las propiedades (1) y (2) es posible reemplazarlas por una sola:

$$T(\alpha\, \bar{u} + \bar{v}) = \alpha\, T(\bar{u}) + T(\bar{v}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (3)$$

homomorfismo entre espacios vectoriales. De esta manera, la función f definida en la página 146, es una transformación lineal.

Presentaremos los conceptos de transformación lineal, dominio, codominio, núcleo y recorrido a través del siguiente ejemplo.

Sea V el siguiente espacio vectorial de polinomios

$$V = \{ax^2 + bx + c \mid a = b; \quad a, c \in \mathrm{IR}\}$$

y apliquemos el operador derivada $\frac{d}{dx}$ sobre los elementos de V.

En primer término, observamos que al derivar cualquier elemento de V siempre obtendremos un polinomio de grado menor o igual a uno. Por lo tanto, dicho operador es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de V un y sólo un elemento de W, siendo W el espacio vectorial formado por el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a uno,
$W = \{ex + f \mid e, f \in \mathrm{IR}\}$.

En consecuencia, el operador derivada es una transformación de dominio V y codominio W, lo que se expresa $\frac{d}{dx} : V \to W$, o bien, si $T = \frac{d}{dx}$, $T : V \to W$.

Notamos también que al derivar todos los elementos de V no cubrimos todo el espacio W, pues al derivar cualquier vector de V obtendremos un vector de la forma

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + ax + c) = 2ax + a$$

que es sólo un caso particular de los elementos de W. Por lo tanto, el recorrido de la transformación[2], $T(V)$, es el conjunto de polinomios

$$T(V) = \{2ax + a \mid a \in \mathrm{IR}\}$$

que es un subespacio vectorial de W.

---

[2] El recorrido de una transformación es el conjunto de vectores del codominio que son imagen de al menos un vector del dominio.

Para determinar si $\frac{d}{dx} : V \to W$ es una transformación lineal necesitamos comprobar que se cumple la siguiente propiedad

$$\frac{d}{dx}(\alpha\, \overline{v}_1 + \overline{v}_2) = \alpha \frac{d}{dx}\overline{v}_1 + \frac{d}{dx} v_2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (4)$$

$$\forall\, \overline{v}_1, \overline{v}_2 \varepsilon V , \qquad \alpha \varepsilon \mathbb{R} .$$

Para ello, sean: $\overline{v}_1 = a_1 x^2 + a_1\, x + c_1$

$\overline{v}_2 = a_2 x^2 + a_2\, x + c_2$

Operando con el lado izquierdo de (4):

$$\frac{d}{dx}(\alpha\, \overline{v}_1 + \overline{v}_2) = \frac{d}{dx}\Big[(\alpha a_1 + a_2)x^2 + (\alpha a_1 + a_2)x + (\alpha c_1 + c_2)\Big]$$

$$= 2(\alpha a_1 + a_2)x + (\alpha a_1 + a_2) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (5)$$

Operando con el lado derecho de (4)

$$\alpha \frac{d}{dx}\overline{v}_1 = 2\alpha a_1\, x + \alpha a_1 \quad , \qquad \frac{d}{dx}\overline{v}_2 = 2a_2\, x + a_2$$

$$\alpha \frac{d}{dx}\overline{v}_1 + \frac{d}{dx}\overline{v}_2 = 2(\alpha a_1 + a_2)x + (\alpha a_1 + a_2) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (6)$$

De (5) y (6) concluimos que la transformación $\frac{d}{dx} : V \to W$ es lineal.

Determinemos ahora el núcleo de la transformación, así como las dimensiones del dominio, recorrido y núcleo.

El núcleo está formado por todos aquellos elementos del dominio cuya imagen es el vector cero del codominio, es decir, el núcleo es el conjunto de los vectores $(ax^2 + ax + c)\, \varepsilon V$ tales que

$$\frac{d}{dx}(ax^2 + ax + c) = 0x + 0$$

Obviamente, para que la derivada sea cero, los vectores de V deben ser de la forma

$$\overline{v} = 0x^2 + 0x + c = c$$

Entonces el núcleo de la transformación es el conjunto

$$N\left(\frac{d}{dx}\right) = \{c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

que es siempre un subespacio vectorial del dominio.

Mediante las técnicas estudiadas en el capítulo IV se puede comprobar fácilmente que, para el ejemplo que estamos presentando, las dimensiones del núcleo y del dominio son uno y dos respectivamente, y, para determinar la dimensión del recorrido, podemos hacer uso de la siguiente relación que es válida para cualquier transformación lineal definida sobre cualquier espacio vectorial V de dimensión finita:

dimensión del dominio = dimensión del núcleo + dimensión del recorrido.

Simbólicamente: $\dim V = \dim N(T) + \dim T(V)$

Sustituyendo los valores $\dim V$ y $\dim N(T)$ obtenemos que

$$\dim T(V) = 1$$

En el ejemplo que acabamos de desarrollar, hemos visto que el operador derivación es una transformación lineal.

Así como $\frac{d}{dx}$, existen otras transformaciones importantes que tienen una gran aplicación en la misma matemática, en la física y en otras áreas de la ciencia. Unas de esas transformaciones son lineales y otras no lo son.

I) Una transformación $T: F \rightarrow \mathbb{R}$, donde F es el espacio vectorial de las funciones integrables en un intervalo $[a, b]$ es aquella que se puede definir por

$$T(f(x)) = \int_a^b f(x)\, dx \,, \quad \forall f(x) \in F \,.$$

Esta transformación la conoces desde tus cursos de cálculo diferencial e integral. Ahora con tus conocimientos de álgebra lineal puedes determinar si esta transformación es lineal o no lo es. Efectuando las operaciones que determinan si una transformación es lineal se concluye que

$$T(f(x)) = \int_a^b f(x)\, dx \quad \underset{\text{(sí es / no es)}}{\underline{\hspace{3cm}}} \quad \text{una transformación lineal.}$$

II) Una clase de transformaciones llamadas transformadas integrales *son de fundamental importancia en las matemáticas aplicadas. A esta clase pertenece la* transformada de Laplace *la cual se define de la siguiente manera:*

$$T(f(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx ,$$

donde s *es un parámetro.*

En este caso, la transformación T *tiene por dominio al conjunto de todas las funciones reales* $f(x)$ *y por codominio al conjunto de las funciones reales* $F(s)$. *Empleando las expresiones (1) y (2) para determinar si la transformada de Laplace es una transformación lineal, concluimos que* ____

Hay que hacer notar que para hablar estrictamente de linealidad, en el caso de la transformada de Laplace, se debe hacer una cierta consideración[3] *, aunque muchos autores hacen la prueba directamente sin mencionar alguna observación*[4] .

---

3 Consultar "Ecuaciones diferenciales y en diferencias" de P. García y C. de la Lanza, páginas 131 y 132, editado por la UNAM, o también consultar "Ecuaciones diferenciales" de Kreider, Kuller y Ostberg, edit. Fondo Educativo Interamericano, página 149.

4 Ver por ejemplo, "Ecuaciones diferenciales aplicadas" de Murray Spiegel, edit. Prentice-Hall Internacional, página 264 y "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones" de Derrick y Grossman, edit. Fondo Educativo Interamericano, páginas 256 y 257.

III) Otra transformada integral muy importante es la transformada de Fourier.

Si consideramos a F como el conjunto de las funciones reales y a W como el conjunto de las funciones complejas, podemos definir una transformación $T: F \to W$ de la siguiente manera:

$$T(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-jwx}\, dx\,, \qquad \forall\, f(x) \in F$$

Efectuando las operaciones que determinan si una transformación es lineal se concluye que la transformada de Fourier ________________ una transformación lineal.
(sí es / no es)

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

1.- Sean las siguientes transformaciones

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x, |y|)$

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (1,4)$

c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (0, 3y, y + z)$

d) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (y, x^2, x)$

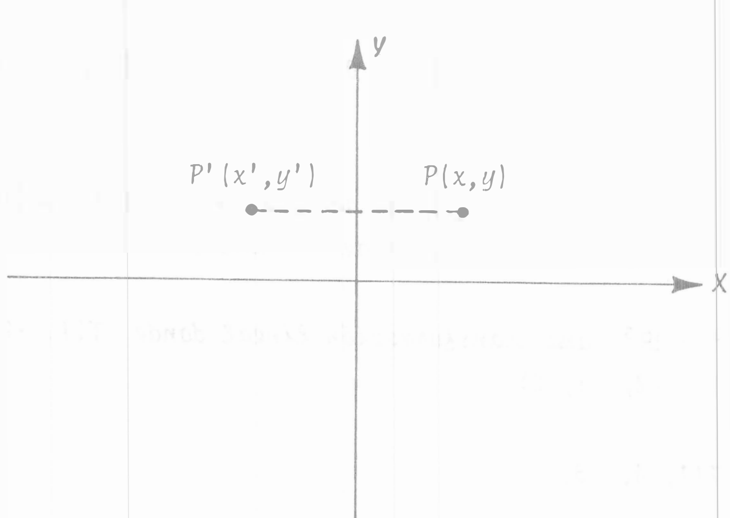
e) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x - y, 1)$

f) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x + 2y, -x, z + 1)$

g) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x + y - z, x + 2y, 3x - 2y)$

Determina cuáles de ellas son transformaciones lineales.

2.- Demuestra que la reflexión de cada punto (x,y) sobre el eje Y, como muestra la figura, es una transformación lineal.



3.- Sea $T: U \to V$ una transformación lineal. Demuestra que el conjunto

$$W = \{T(\overline{u}) \mid T(\overline{u}) = 2\overline{u},\ \overline{u} \in V\}$$

es un subespacio de V.

4.- Dibuja el lugar geométrico en que mapea a la recta $y = x$ la transformación lineal $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $S(x,y) = (x + y,\ x)$

5.- Sea U un espacio vectorial sobre el campo real y $\mathbb{R}$ el espacio vectorial de los reales sobre el campo real. Sean $F: U \to \mathbb{R}$ y $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos transformaciones lineales. Determina si la transformación $H: U \to \mathbb{R}$ definida por:

$$H(\overline{u}) = G(F(\overline{u})), \quad \forall\, \overline{u} \in U$$

es una transformación lineal.

6.- Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo campo K, y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Demuestra que si $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_n\}$ es un subconjunto de W linealmente independiente, entonces $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de V, donde $T(\overline{v}_i) = \overline{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

7.- Sean las transformaciones lineales

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (1, -1, 3)$ y $T(0, 2) = (0, -2, 4)$

b) $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(-1, 0) = (-2, -1)$, $S(1, -1) = (3, 0)$ y $S(1, 2) = (0, 3)$

Obtén para cada inciso la regla de asignación de la transformación. En el inciso b), ¿es la regla de asignación de S única?

8.- Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal donde $T(1, -2, 1) = (0, 2, 2)$ y $T(3, -4, -1) = (2, -2, 2)$

a) Obtén $T(1, 0, -3)$

b) A partir de los datos, ¿es posible obtener la regla de asignación de T? Justifica tu respuesta.

9.- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base del espacio V, demuestra que entonces el conjunto $G = \{T(\bar{v}_1), T(\bar{v}_2), \ldots, T(\bar{v}_n)\}$ genera el espacio $T(V)$.

10.- Relaciona la columna de la izquierda con la de la derecha, escribiendo en algunos de los paréntesis la letra que corresponda.

Para la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y,z) = (x, y + z)$$

A) El recorrido de T es el conjunto

B) El núcleo de T es el conjunto

C) El dominio de T es el conjunto

(b) $\{(0,k,-k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

(   ) $\{(k,0,0) \mid k \in \mathbb{R}\}$

(a) $\{(k_1,k_2) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$

(   ) $\{(0,k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

(C) $\{(k_1,k_2,k_3) \mid k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{R}\}$

(   ) $\{(k,k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

(   ) $\{(k_1,k_2,-k_2) \mid k_1,k_2 \in \mathbb{R}\}$

11.- Completa correctamente las siguientes expresiones.

I) Sea V un espacio vectorial sobre un campo K.

Al operador lineal $T: V \to V$ tal que $T(\bar{v}) = \bar{v}$, $\forall\, \bar{v} \in V$ se le llama "operador identidad". El núcleo de T es ____________________ y el recorrido de T es __________________________.

II) Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo K.

A la transformación lineal $T: V \to W$ tal que $T(\bar{v}) = \bar{0}_W$, $\forall\, \bar{v} \in V$ se le llama "transformación nula". El núcleo de T es ____________________ y el recorrido de T es _______________________.

12.- Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, determina su núcleo y recorrido, así como una base y la dimensión de ambos.

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (2x - y + z,\ 3x + z,\ x + y)$

b) $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ tal que $T(a,b,c) = ax^2 + (a - b)x + b$

donde,

$$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

13.- Para la transformación lineal $T: M \to D$ donde

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \quad y \quad D = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$$

definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a + b & a + c \\ 0 & c - b \end{bmatrix}, \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$$

a) Determina el codominio, el recorrido y el núcleo de la transformación.

b) Comprueba que el núcleo de la transformación es un subespacio vectorial del dominio.

c) Obtén una base y la dimensión del núcleo.

14.- Demuestra que si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces

$$T(\overline{0}_V) = \overline{0}_W$$

15.- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Demuestra que T es inyectiva si y sólo si el núcleo de T contiene únicamente al vector cero.

16.- Sea $T: V \to W$ una transformación lineal tal que su núcleo contiene únicamente al vector cero. Demuestra que T es suprayectiva si y sólo si $\dim V = \dim W$.

17.- Determina cuáles de las siguientes transformaciones son inyectivas y/o suprayectivas.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x - 2y,\ 2x + y)$

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x - 3y,\ x + y,\ 4y)$

c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x + y - 2z,\ 2x + y + z,\ 3x + y + 4z)$$

Algebra de Transformaciones Lineales

Dijimos en la introducción que las transformaciones lineales son funciones entre espacios vectoriales. Al mencionar la palabra función, empezamos a recordar algunas ideas sobre este concepto; como por ejemplo, las operaciones fundamentales de adición y composición de funciones. En las transformaciones lineales también se definen operaciones cuyo manejo constituye el álgebra de las transformaciones lineales. Iniciaremos nuestro estudio con las operaciones de adición, multiplicación por un escalar y composición.

Consideremos el problema de resolver la siguiente ecuación matricial

$$2\,BAX - 2\,CX = D$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y X es la matriz incógnita. Esta matriz la podemos obtener con los procedimientos estudiados en el capítulo II; sin embargo, la obtendremos empleando operaciones con transformaciones lineales.

Sean las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por las siguientes reglas de correspondencia

$$T(x_1,x_2) = x_1 - x_2\,, \quad S(x_1) = (2x_1,x_1) \quad y \quad P(x_1,x_2) = (x_1 - x_2,\; x_1 + x_2)$$

Se puede verificar que las matrices A, B y C definidas anteriormente son las matrices asociadas a las transformaciones T, S y P con respecto a las bases canónicas.

Por lo tanto, la ecuación matricial anterior la podemos llevar a su equivalente en transformaciones lineales, quedando

$$2(S \circ T)(x_1,x_2) - 2P(x_1,x_2) = (-1, -1)$$

Para llegar a estas equivalencias debemos recordar que la multiplicación de las matrices asociadas[5] a dos transformaciones lineales equivale a la composición de esas transformaciones, que la adición de las matrices equivale a la adición de las transformaciones y que la multiplicación de un escalar por la matriz asociada a una transformación[6] equivale a la multiplicación de un escalar por esa transformación.

Desarrollando la última expresión:

$$2S(T(x_1,x_2)) - 2P(x_1,x_2) = (-1, -1)$$

Aplicando T a (x_1,x_2):

$$2S(x_1 - x_2) - 2P(x_1,x_2) = (-1, -1)$$

Aplicando S a la diferencia $x_1 - x_2$ y P a (x_1,x_2) tenemos:

$$2(2x_1 - 2x_2,\ x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2,\ x_1 + x_2) = (-1, -1),$$

de donde, $$2(x_1 - x_2,\ -2x_2) = (-1, -1)$$

---

[5] Cuando hablemos de la matriz asociada a una transformación lineal sin especificar a qué bases está referida, se sobreentenderá que son las bases canónicas.

[6] Usaremos indistintamente las expresiones "multiplicación de una matriz por un escalar" o "multiplicación de un escalar por una matriz".

Esta última igualdad vectorial, la podemos llevar al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$2x_1 - 2x_2 = -1$$

$$-4x_2 = -1$$

de donde $x_2 = \frac{1}{4}$ y $x_1 = -\frac{1}{4}$

Entonces la matriz buscada es:

$$x = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Te sugerimos que compruebes este resultado resolviendo la ecuación matricial planteada, utilizando el método estudiado en el capítulo II. Al hacerlo te podrás dar cuenta que es más simple que el desarrollado aquí. Sin embargo, lo hemos hecho de esta forma para ilustrar las operaciones entre transformaciones lineales.

Además de las operaciones de adición, multiplicación por un escalar y composición, otra operación importante de las transformaciones lineales es la inversión de una transformación lineal.

La transformación inversa, denotada T^{-1}, de una transformación lineal $T : V \rightarrow W$ es la transformación lineal única $T^{-1} : W \rightarrow V$ tal que

$$(T \circ T^{-1})(\bar{w}) = \bar{w} \qquad \forall\, \bar{w} \in W$$

$$(T^{-1} \circ T)(\bar{v}) = \bar{v} \qquad \forall\, \bar{v} \in V$$

Para que exista la transformación inversa de una transformación lineal $T : V \rightarrow W$, ésta debe ser biyectiva, que es equivalente a:

a) $\dim V = \dim W$

b) $N(T) = \{\bar{0}_V\}$

Para el estudio de este concepto consideremos el siguiente ejemplo.

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \text{———} \ (1)$$

La representación matricial, en la forma $A\overline{x} = \overline{b}$, de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matriz A puede definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de regla de correspondencia:

$$T(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$$

Determinemos si A tiene inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, existe A^{-1} y es

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si A representa la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, A^{-1} representa matricialmente la transformación lineal $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T^{-1}(y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{2}\,(y_1 - y_2,\ -y_2 + y_3,\ -y_1 + 2y_2 + y_3)$$

En general, si A es la representación matricial de una transformación lineal T, A^{-1}, si existe, es la representación matricial de la transformación inversa de T. Si A^{-1} no existe, T no tiene transformación inversa.

Volviendo al sistema de ecuaciones iniciales planteado, su solución es única porque A^{-1} existe; entonces, hay un vector único de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es el vector $(1,0,-1)$ bajo la transformación T.

Si el sistema de ecuaciones (1) hubiera sido compatible indeterminado o incompatible, ¿qué implicaciones hubiera tenido para la transformación T definida en el ejemplo? Desde el punto de vista de las transformaciones lineales, ¿qué representa el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo? Trata de contestar a estas preguntas y consulta tus respuestas con tu profesor o un asesor de la materia.

E J E R C I C I O S P R O P U E S T O S

(Continuación)

18.- Obtén las matrices asociadas a las siguientes transformaciones lineales

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x,y) = (x - y,\ 3x + y,\ y)$ referida a las bases canónicas.

b) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $S(x,y,z) = (2x,\ y,\ x + z)$ referida a las bases $\{(1,0,1),\ (0,1,1),\ (2,1,1)\}$ del dominio y $\{(2,1,1),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\}$ del recorrido.

19.- La matriz asociada a una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, referida a las bases canónicas, es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obtén la regla de correspondencia de dicha transformación y determina las dimensiones del recorrido y del núcleo.

20.- Sean $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ y $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$, relacionadas por:

$$\bar{b}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$$

$$\bar{b}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

y sea la transformación lineal $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(\bar{e}_1) = \bar{b}_1$ y $S(\bar{e}_2) = \bar{b}_2$. Obtén las matrices asociadas a S

$$M_B^E(S) \quad y \quad M_E^B(S)$$

21.- Dadas las transformaciones lineales

$R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $R(x,y,z) = (2x + y,\ x,\ z - y)$

$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $S(x,y,z) = (x,\ 2y,\ x - y)$

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (0,\ x + y + z,\ x - 2y - 2z)$,

a) Obtén $(R + 3S)(1, -1, -1)$

b) Determina la regla de asignación de la transformación $R - 2S + 3T$

22.- Sea $M(T) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ referida a las bases canónicas y $M_B^A\,(S) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ referida a las bases $A = \{(2,1,0),\ (1,1,1),\ (-1,3,0)\}$ del dominio y $B = \{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}$ del codominio. Obtén $M_B^A\,(T + 2S)$

23.- Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo K, y sea $\mathscr{L}(V, W)$ el conjunto de transformaciones lineales de V en W.

a) Demuestra que $(\mathscr{L}(V, W), +)$ es un grupo abeliano, donde $+$ denota la adición ordinaria de transformaciones lineales.

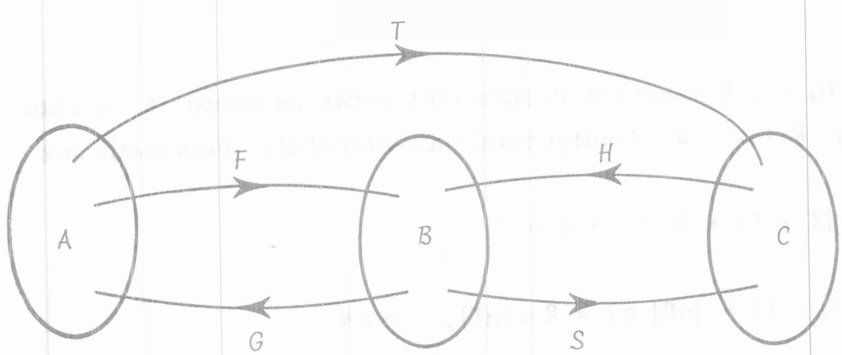
b) Demuestra que $\mathscr{L}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre el campo K, siendo la adición y multiplicación por escalar las ordinarias con transformaciones lineales.

24.- Las transformaciones lineales

$F : A \to B$ $\qquad H : C \to B$ $\qquad T : A \to C$

$G : B \to A$ $\qquad S : B \to C$

se muestran en el siguiente diagrama:



De las siguientes operaciones, determina cuáles se pueden efectuar y, en caso afirmativo, determina el dominio y el codominio de las transformaciones que resultan de efectuar dichas operaciones:

a) $G \circ F$ c) $H \circ F$ e) $T \circ F$

b) $G \circ H$ d) $S \circ F$ f) $H \circ T \circ G$

25.- Sean las transformaciones lineales

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x - y,\ 2x + z,\ x + y + z)$

$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $S(x,y,z) = (z - x,\ x + z - y)$

$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $R(x,y) = (x + y,\ y,\ -2y)$

a) Determina cuáles de las siguientes operaciones se pueden efectuar y, en caso afirmativo, obtén la regla de asignación de las transformaciones que resultan de efectuar dichas operaciones:

$$S \circ R,\quad R \circ S,\quad T \circ S,\quad S \circ T$$

b) Obtén la regla de asignación de la transformación

$$R \circ S \circ T$$

26.- Sean U, V y W espacios vectoriales sobre un campo K, y sean $T : U \to V$, $S : U \to V$ y $R : V \to W$ transformaciones lineales. Demuestra que

a) $R \circ (T + S) = R \circ T + R \circ S$

b) $\alpha\,(R \circ T) = (\alpha R) \circ T = R \circ (\alpha T), \quad \alpha \in K$

27.- *Verifica que la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$T(x,y,z) = (x + y + 3z,\ 5x + 2y + 6z,\ -2x - y - 3z)$$

cumple con $T^3(x,y,z) = (0,0,0)$

donde, $T^3 = T \circ T \circ T$

28.- *Sea* T *una transformación lineal que consiste en una rotación de* $90°$ *del plano cartesiano alrededor del origen en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj; y sea* S *una transformación lineal que consiste en asignar a cada punto del plano su simétrico respecto al eje* X. *Calcula:*

a) $(T + S)(1,1)$

b) $(T + S)(x,y)$

c) $[T - (3T \circ S) + I - 4(S \circ T)](x,y)$

donde I *es la transformación identidad en* $\mathbb{R}^2$.

29.- *Sean* U, V *y* W *espacios vectoriales y sean* $T : U \to V$ *y* $S : V \to W$ *transformaciones lineales. Demuestra que si la transformación lineal* $S \circ T$ *es inyectiva (uno a uno) entonces* T *es también inyectiva.*

30.- *Sean los operadores lineales* $T : P_2 \to P_2$ *y* $S : P_2 \to P_2$ *donde* $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$. *Si*

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & -1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz asociada a T *referida a las bases* $A = \{2x^2,\ x - 1,\ 3\}$ *del dominio y* $B = \{1,\ 2x,\ x^2\}$ *del codominio y*

$$M_B^A\ (S \circ T) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz asociada a $S \circ T$ referida a las bases A y B.

a) Obtén $M_B^A\ (S)$

b) Determina la regla de asignación de $S \circ T$

31.- Demuestra, de dos maneras distintas, que la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x + 2y,\ x + 3y)$ tiene inversa.

32.- Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, donde los espacios vectoriales están definidos sobre un campo K. Demuestra que si T tiene inversa T^{-1}, entonces T^{-1} es lineal.

33.- Obtén la inversa, si existe, de cada una de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x + 2y,\ x + 3y)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y) = (x,\ y,\ x + y)$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x,\ x + y,\ x + y + z)$

34.- Sea $T : F \to F$, donde $F = \{ax^2 + b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, una transformación lineal tal que

$$M_B^A(T^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es su matriz asociada referida a las bases $A = \{2x^2, 3\}$ del dominio y $B = \{x^2, x^2 + 3\}$ del codominio. Obtén la matriz $M_A^B(T)$ y la regla de asignación de T.

35.- Para que una transformación lineal tenga inversa es condición necesaria y suficiente que la transformación sea biyectiva.

a) Da un ejemplo de una transformación $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que sea inyectiva pero que no tenga inversa.

b) Da un ejemplo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que sea suprayectiva pero que no tenga inversa.

36.- Determina si la transformación lineal $T : P \to D$, donde

$$P = \{ax + b \mid a,b \in \mathbb{R}\} \quad y \quad D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; a,b \in \mathbb{R} \right\}$$ definida por

$$T(f) = \begin{bmatrix} f(0) & 0 \\ 0 & f(1) \end{bmatrix} \quad \forall f \in P$$

tiene inversa y en caso afirmativo, obtenla.

Valores y Vectores Característicos

Dos de los conceptos de mayor importancia y aplicación dentro de las transformaciones lineales son los de valor y vector característico.

A su vez, una de las aplicaciones más interesantes de los valores y vectores característicos es la que se refiere a las formas cuadráticas.

A una ecuación de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{———} \quad (1)$$

donde a, b, c, d, e, f son números reales, se le llama ecuación cuadrática de las variables x y y.

A la suma de los tres primeros términos de la ecuación (1), es decir, a la expresión $ax^2 + bxy + cy^2$ se le llama forma cuadrática de las variables x, y.

El problema consiste en eliminar el término xy de la ecuación (1) mediante un cambio de variable de tal manera que la ecuación (1) se reduzca a una ecuación de la forma

$$\alpha x''^2 + \beta y''^2 + \gamma = 0 \qquad \text{———} \quad (2)$$

Obviamente la ecuación (2) es más fácil de identificar que la ecuación (1) debido a que la cónica que representa (2) tiene centro en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados.

Una forma cuadrática de las variables x, y siempre puede escribirse en forma matricial con una matriz simétrica:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{x}^T A \bar{x}$$

Observemos que el término xy de la ecuación de la forma cuadrática aparece debido a los elementos que no están en la diagonal principal de la matriz A. En cambio, si A fuera diagonal el término xy no aparecería.

Por lo tanto, para tener una ecuación sin el término xy debemos hacer un cambio de variable que diagonalice a la matriz A. Para esto, nos apoyaremos en una de las propiedades de las matrices simétricas que establece que se puede obtener una matriz P que diagonaliza a la matriz A mediante el producto $P^{-1}AP$ estando P formada con los vectores característicos unitarios[7] de A. La matriz P se puede formar con vectores característicos no unitarios, sin embargo, es preferible usar vectores unitarios ya que entonces la matriz P es ortogonal y, por lo tanto $P^T = P^{-1}$.

El producto $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D con los valores característicos λ_1 y λ_2.

El nuevo sistema de coordenadas x', y' en el cual la cónica carece en su ecuación de término xy está dado por la expresión

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \bar{x}' = P^T \bar{x} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad i.e. \qquad \bar{x} = P\,\bar{x}'$$

Hagamos un ejemplo. Sea la cónica de ecuación

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2\sqrt{2}\,x + 6\sqrt{2}\,y + 2 = 0$$

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2 = 0$$

o bien $\bar{x}^T A\,\bar{x} + B\,\bar{x} + 2 = 0$

---

7 Recuérdese que un vector $\bar{u}$ es unitario si $|\bar{u}| = 1$

donde $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Como $\bar{x} = P\,\bar{x}'$, entonces sustituyendo se tiene

$$\bar{x}'^T P^T A\ P\bar{x}' + B\,P\bar{x}' + 2 = 0 \qquad \text{———————— (3)}$$

es decir, $\bar{x}'^T D\,\bar{x}' + B\,P\bar{x}' + 2 = 0$ ———————— (4)

donde $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ y P está formada por vectores característicos unitarios de A .

Obtengamos los valores y vectores característicos de A .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

Por lo tanto, los valores característicos son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$

Los vectores $\bar{v}_1 = (1, -1)$ y $\bar{v}_2 = (1, 1)$, son vectores característicos asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente. Haciendo unitarios $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ tenemos:

$$\frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, -1) \quad \text{y} \quad \frac{\bar{v}_2}{|\bar{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 1)$$

por lo que la matriz P es

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en (4) tenemos

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2 = 0$$

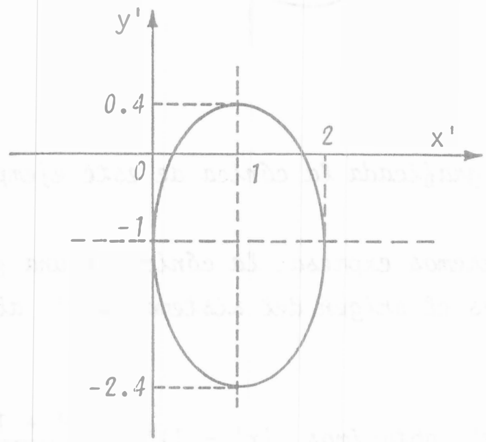
Haciendo operaciones se obtiene

$$4x'^2 + 2y'^2 - 8x' + 4y' + 2 = 0$$

que se puede escribir como

$$(x' - 1)^2 + \frac{(y' + 1)^2}{2} = 1$$

la cual es una elipse con centro en $(1, -1)$ *en el sistema* $x'y'$ *como muestra la siguiente figura.*



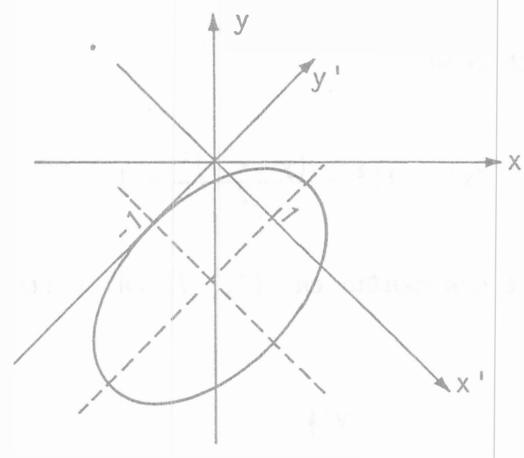
Para referir la elipse al sistema xy *recurrimos a la ecuación*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Obteniendo P^{-1} *y sustituyendo en* $\overline{x}' = P^{T}\,\overline{x}$:

$$P^{-1} = P^{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{aligned}$$

es decir, el eje x' *está localizado (haciendo* $y' = 0$*) a lo largo del vector* $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ *y* y' *a lo largo del vector* $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ *haciendo* $x' = 0$. *Su* *gráfica es, por tanto:*



quedando identificada y graficada la cónica de este ejemplo.

Finalmente, si queremos expresar la cónica de una forma como indica la ecuación (2), trasladamos el origen del sistema $x'y'$ *al punto* $(1, -1)$ *de dicho sistema*[8] .

En el sistema $x'y'$ *obtuvimos* $(x' - 1)^2 + \frac{(y' + 1)^2}{2} = 1$.

Por lo tanto, haciendo las sustituciones $x' = x'' + 1$, $y' = y'' - 1$ *se obtiene*

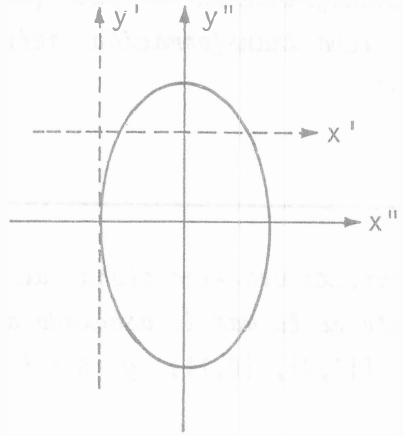
$$\left[(x'' + 1) - 1\right]^2 + \frac{\left[(y'' - 1) + 1\right]^2}{2} = 1, \quad \textit{es decir,}$$

$$x''^2 + \frac{y''^2}{2} = 1 \qquad \textit{ó} \qquad 2x''^2 + y''^2 - 2 = 0$$

que es una ecuación de la forma $\alpha x''^2 + \beta y''^2 + \gamma = 0$

---

[8] Si el lector quiere recordar lo referente a traslación de ejes le sugerimos consultar "Geometría Analítica" de J. Kindle, edit. Mc Graw-Hill, serie Schaum, páginas 66 y 67 o "Geometría Analítica" de Lehmann, edit. UTEHA, páginas 135-137.



La gráfica muestra cómo la cónica $2x''^2 + y''^2 - 2 = 0$ tiene centro en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes coordenados.

Te sugerimos que realices las siguientes actividades.

1) Al hacer la rotación de los ejes x, y a los ejes x', y', se mostró que el eje x' está localizado a lo largo del vector $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ y que el eje y' está a lo largo del vector $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. Entonces una base del sistema x', y' es

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \right\}.$$

Al expresar los vectores de la base canónica del sistema de referencia x, y como una combinación lineal de los vectores de la base B, se obtiene que la matriz de transición de la base canónica A del sistema x, y en la base B del sistema x', y' es

$$M_B^A = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

El cambio o transformación de coordenadas del sistema x, y al sistema x', y' lo podemos considerar como una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. ¿Cómo debe definirse la transformación T para que la matriz de transición M_B^A sea la matriz asociada a dicha transformación, referida a las bases A del dominio y B del codominio?

Respuesta: ______________________________

Con tu respuesta correcta verifica ahora que la matriz de transición M_B^A que obtuviste anteriormente es la matriz asociada a dicha transformación lineal referida a las bases $A = \{(1,0), (0,1)\}$ y $B = \{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \}$

La transformación lineal de tu respuesta correcta anterior tiene la característica de que $M_E^E(T)$ es una ______________________________,
matriz nula/matriz identidad/cualquier matriz

donde $M_E^E(T)$ es la matriz asociada a T referida a una base cualquiera E (en este caso, base de $\mathbb{R}^2$). Verifica lo anterior primero con la base A y luego con la base B; es decir, verifica que

$$M_A^A(T) = M_B^B(T) = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

II) Identifica las siguientes cónicas y escribe su ecuación en un sistema de referencia cartesiano en el cual estén centradas en el origen y su eje focal sea paralelo a algún eje coordenado.

a) $4xy = 1$

b) $10x^2 + 24xy + 17y^2 = 26$

c) $39x^2 + 96xy + 11y^2 - 210x - 220y + 200 = 0$

Hemos visto que los conceptos de valor y vector característico nos han ayudado para simplificar la ecuación de una cónica apoyándonos, a su vez, en otros conceptos. Sin embargo, no es ésta la única aplicación de los valores y vectores característicos. Estos se aplican en todas las ramas de la ingeniería y en un amplio campo de la física y en otras ciencias.

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

(Continuación)

37.- *Sea* T *un operador lineal sobre un espacio vectorial* V . *Demuestra que:*

a) $\{\ \overline{0}\ \}$ *y* V *son subespacios invariantes en* T .

b) $N(T)$ *y* $T(V)$ *son subespacios invariantes en*[9] T .

38.- *Para el operador lineal* $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *definido por*

$$T(x\ ,\ y,\ z) = (x,\ 2y,\ x - 2y)$$

determina cuáles de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$ *son invariantes en* T

a) $M = \{(0,\ 0,\ k)\ |\ k \in \mathbb{R}\}$

b) $N = \{(k,\ -2k,\ 0)\ |\ k \in \mathbb{R}\}$

c) $P = \{(0,\ k,\ -k)\ |\ k \in \mathbb{R}\}$

39.- *Verifica el teorema de Cayley-Hamilton para la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

40.- *Sea* $T : V \rightarrow V$ *una transformación lineal. Si la representación matricial de* T *referida a una base* B *de* V *es*

$$M_B^B\ (T) = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

[9] Además de la expresión "invariante EN T", se suele decir también "invariante BAJO T", "invariante POR T" o "T-invariante"

a) Determina los valores de a y b de tal manera que

$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$ sea el polinomio característico de T.

b) Verifica que T satisface el teorema de Cayley-Hamilton.

41.- Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Demuestra que si A tiene inversa entonces $A^{-1}B$ y BA^{-1} tienen los mismos valores característicos.

42.- Sea la matriz

$$M(T) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

la representación matricial de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Determina los valores característicos de T y los vectores característicos asociados a ellos.

43.- Demuestra que si A es una matriz ortogonal, entonces los valores característicos de A son iguales a ± 1.

44.- Sea λ un valor característico de una transformación lineal T. Si la transformación T tiene inversa, T^{-1}, demuestra que λ^{-1} es un valor característico de T^{-1}. ¿Cuál es la relación entre los vectores característicos de T y T^{-1}?

45.- Dadas las funciones $\operatorname{sen} x$, e^{2x}, $x^2 - 1$, 3^x determina cuáles de ellas son vectores característicos de los siguientes operadores lineales y a qué valor característico real están asociados.

a) $T(f) = \dfrac{d}{dx} f$

b) $T(f) = \displaystyle\int^{x} f(t)\, dt$

46.- Demuestra que un espacio característico de un operador lineal T, es un subespacio invariante en T.

47.- Obtén todos los valores característicos, una base y la dimensión de cada espacio característico de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x,y,z) = (2x + y,\ y - z,\ 2y + 4z)$$

48.- Sea V un espacio vectorial definido sobre un campo K y sean T y S operadores lineales sobre el espacio V, tales que $T \circ S = S \circ T$. Demuestra que si $\bar{v}$ es un vector característico de S asociado al valor característico λ entonces $T(\bar{v})$, donde $T(\bar{v}) \neq \bar{0}$, es un vector característico de S asociado al valor λ.

49.- Obtén en radianes los valores de θ, $\theta \geq 0$, para los cuales el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x,\ y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta,\ x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$$

tiene como valor característico a 1. Y con el menor valor de θ obtenido, calcula los vectores característicos asociados al valor $\lambda = 1$.

50.- La matriz asociada a la transformación lineal T, referida a la base

$A = \{(2,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1)\}$ es

$$M_A^A(T) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifica que $M_B^B(T) = P^{-1} M_A^A(T) P$, donde P es la matriz de transición de la base $B = \{(2,\ 3,\ 1),\ (0,\ 2,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1)\}$ a la base A.

51.- Demuestra que si las matrices A y B son similares o semejantes entonces sus trazas son iguales.

52.- *Si la matriz asociada al operador lineal* T *referida a la base* A *es*

$$M_A^A(T) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

y la matriz de transición de la base A *a la base* B *es*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

obtén la matriz $M_B^B(T)$

53.- *Para cada uno de los siguientes operadores lineales:*

I) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x,y,z) = (x + 2y + 4z,\ 3y,\ x + 7y - 2z)$

II) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$T(x,y,z) = (4x + y - 2z,\ -x + 2y + 2z,\ x + y + z)$$

III) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x,y,z) = (x + 2y,\ -y + z,\ 2x - y)$

a) *Obtén sus valores característicos.*

b) *Determina si* T *es* diagonalizable[10]. *En caso afirmativo, obtén una matriz diagonal asociada a* T *y una base a la cual esté referida.*

---

[10] La expresión "operador o transformación diagonalizable" significa que el operador o transformación lineal se puede representar por una matriz diagonal.

54.- Al diagonalizar la matriz asociada al operador lineal $T : P_2 \to P_2$, donde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, se llega a que una matriz diagonal asociada a T es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y una matriz diagonalizadora es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén la regla de asignación de T .

55.- Sobre el espacio vectorial $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ se define el operador lineal $T : M \to M$ de la siguiente manera

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3b - a & 2b \\ 2c & a - 3b \end{bmatrix}$$

a) Obtén los valores y vectores característicos asociados al operador T.

b) Obtén, si es posible, una matriz diagonal asociada a T y su matriz diagonalizadora.

Ejercicios Adicionales

1.- Determina si las siguientes transformaciones son lineales

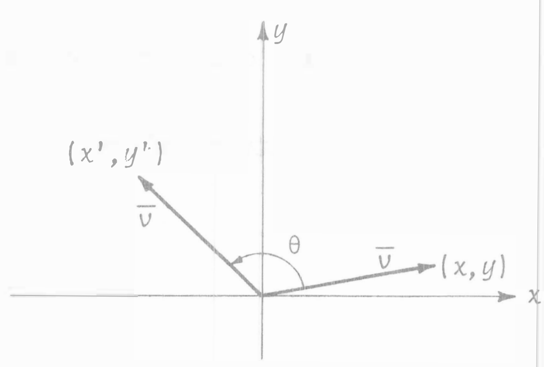
a) $T : M_n \rightarrow IR$, definida por $T(A) = det(A)$, $\forall A \varepsilon M_n$, donde M_n es el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con elementos reales.

b) $S : P_2 \rightarrow P_2$, definida por $S(f(x)) = 2f(0) - f'(x)$, $\forall f(x) \varepsilon P_2$ donde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \varepsilon IR\}$

c) $T : M_n \rightarrow IR$, definida por $T(A) = tr(A)$, $\forall A \varepsilon M_n$

d) $S : P_2 \rightarrow M_2$, definida por $S(f(x)) = \begin{bmatrix} f(0) & 0 \\ 0 & f(1) \end{bmatrix}$, $\forall f(x) \varepsilon P_2$

2.- Sean (x, y) las componentes de un vector $\bar{v}$ del plano el cual se hace girar un ángulo θ como muestra la figura.

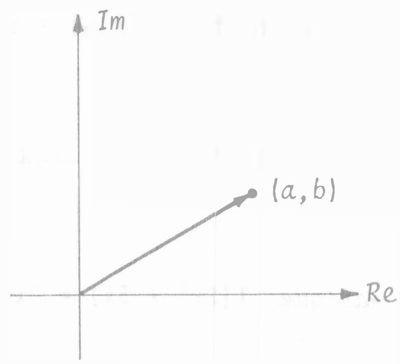


La rotación que efectúa el vector es una transformación $T : IR^2 \rightarrow IR^2$.

a) Obtén la regla de asignación de la transformación T .

b) Determina si dicha transformación es lineal.

3.- Un número complejo $z = a + bi$ se puede considerar como un par ordenado de números reales (a, b) y, por lo tanto, representar en un plano cartesiano llamado Plano Complejo o Diagrama de Argand. Además, a cada punto se le puede asignar un vector de posición como muestra la figura.



a) Representa en el plano complejo los números $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$

b) Verifica que al multiplicar por i los números z_1 y z_2 del inciso anterior, éstos efectúan una rotación de $90°$ en sentido contrario a las manecillas del reloj.

c) Podemos entonces considerar a i como un operador $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. ¿Cómo se definiría la regla de asignación del operador i ?

d) ¿Es un operador lineal?

4.- Cualquier transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene la forma

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

donde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

a) ¿Para qué valores de a,b,c y d la transformación T mapea una recta en un punto?

b) ¿Para qué valores de a,b,c y d la transformación T mapea a la recta $y = x + 1$ en la recta $x = 3$?

c) ¿Puede la transformación T mapear una recta en una cónica cualquiera? Justifica tu respuesta.

5.- Determina el lugar geométrico en que cada una de las siguientes transformaciones lineales mapean a una circunferencia de radio 4 con centro en el origen.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (0,x)$

b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $S(x,y) = (2y,x)$

6.- Determina la regla de asignación de las siguientes transformaciones lineales.

a) $T : P_2 \to P_2$ tal que

$$T(2x^2 + 5x) = 3x^2$$

$$T(x^2 - 1) = -x^2 - 1$$

$$T(4) = 4$$

donde $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

b) $T : M \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1, -1, 4)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0, -1, 1)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1, 0, 3)$$

donde $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

7.- Sea T una transformación

$$T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

donde el dominio es el producto cartesiano de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}^2$.

La regla de la transformación T se define de las siguientes maneras:

a) $T(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{u} \cdot \overline{v})\overline{a} \qquad \forall\ \overline{u},\overline{v} \in \mathbb{R}^2 \qquad \overline{a} \in \mathbb{R}^2 , \quad \overline{a} \neq \overline{0}$

b) $T(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{u} \cdot \overline{a})\overline{b} \qquad \forall\ \overline{u},\overline{v} \in \mathbb{R}^2 \qquad \overline{a},\overline{b} \in \mathbb{R}^2 , \quad \overline{a} \neq \overline{0} , \ \overline{b} \neq \overline{0}$

Determina, para cada inciso, si T es lineal o no lo es. (La operación $\cdot$ es el producto escalar).

8.- Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un campo K y $T : U \to V$ una transformación lineal. Demuestra que si A es un subespacio vectorial de U , entonces el conjunto

$$\{\overline{w} \mid \overline{w} = T(\overline{u}) , \quad \overline{u} \in A\}$$

es un subespacio de V .

9.- Se tienen dos transformaciones lineales

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad y \qquad S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

a) Al aplicar la transformación T a cada uno de los vectores del conjunto $E = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ se obtienen, respectivamente, los vectores del conjunto $\{(2,0,2,1), (2,0,0,0), (1,1,0,0)\}$.

¿Es posible obtener con estos datos la regla de la transformación T ? En caso afirmativo obtenla. En caso negativo di por qué no es posible obtenerla.

b) Al aplicar la transformación S a cada uno de los vectores del conjunto $G = \{(1,-2,1), (6,2,-2)(2,3,-2)\}$ se obtienen, respectivamente, los vectores del conjunto $\{(3,-3,3,3), (-4,-4,22,-6), (-5,1,8,-6)\}$.

¿Es posible obtener con estos datos la regla de la transformación S ? En caso afirmativo obtenla. En caso negativo di por qué no es posible obtenerla.

10.- En el ejercicio 3 página 223 se mostró que, asignando un vector de posición en el diagrama de Argand a cada número complejo, el multiplicar dicho número complejo por i equivalía a rotar el vector 90° en sentido antihorario.

a) ¿Se obtiene alguna rotación al multiplicar un número complejo por i^2 ?, ¿al multiplicar por i^3 ? En caso afirmativo, ¿de cuánto es la rotación en ambos casos? (i es la unidad imaginaria: $i = \sqrt{-1}$)

b) ¿Se puede considerar a i^2 y i^3 como operadores lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, ¿cuál es la regla de asignación de dichos operadores?

11.- Un caso particular de transformaciones son las funciones reales de variable real.

a) Determina cuáles de las siguientes funciones corresponden a una transformación lineal.

I) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$

II) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 6x$

III) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2$

b) Para las transformaciones lineales obtenidas en el inciso anterior calcula la dimensión del núcleo y del recorrido.

12.- Se define en el espacio vectorial de funciones reales de variable real una transformación de la siguiente manera:

$$T(f(x)) = f'(x) - af(x) \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Demuestra que T es una transformación lineal.

b) Determina el núcleo de T y su dimensión.

13.- Sean los espacios vectoriales $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

Para la transformación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ definida por:

$$T(z) = (\overline{z}, iz), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

a) Obtén $T(2 - 3i)$

b) Determina si T es lineal para cuando:

I) $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^2$ están definidos sobre el campo $\mathbb{C}$

II) $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^2$ están definidos sobre el campo $\mathbb{R}$

c) En el caso que T sea lineal, obtén su núcleo y su recorrido, así como una base y la dimensión de ambos.

14.- Sean F el espacio vectorial de las funciones continuas y el operador $T : F \to F$ definido por:

$$T(f(x)) = \int_0^x e^{-2x} f(t)\, dt \qquad \forall\, f(x) \in F$$

a) Demuestra que T es lineal

b) Determina el núcleo de T

15.- Una transformación lineal es un homomorfismo entre espacios vectoriales. Si la transformación lineal es biyectiva, entonces también se dice que es un isomorfismo. Determina para cada uno de los siguientes incisos si T es un isomorfismo, es decir, si T es biyectiva.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x + y,\ 2x)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (x,\ 0,\ y)$

16.- Sean los espacios vectoriales $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$,

$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $T : M_2 \to P_2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b + c)x^2 + (b - c + d)x + (c - d + a)$$

Determina si T es inyectiva y/o supravectiva.

17.- Sea $T : V \to W$ una transformación lineal

a) Demuestra que si $\dim V < \dim W$, entonces T no puede ser suprayectiva.

b) *Demuestra que si* $\dim V > \dim W$, *entonces* T *no puede ser inyectiva.*

18.- *Sean los espacios vectoriales* $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ *y*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$ *ambos sobre el campo de los reales. Obtén las matrices asociadas a las transformaciones lineales*

a) $T : P_2 \rightarrow P_2$ *definida por* $T(f(x)) = f(0) - f'(x),\ \forall\, f(x) \in P_2$ *referida a las bases* $\{2x + 1,\ 3,\ x^2\}$ *del dominio y* $\{2,\ x,\ x^2\}$ *del recorrido.*

b) $T : M \rightarrow P_2$ *definida por* $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}\right) = (a+b)x^2 + (2a+c)x + (a-b+c)$,

referida a las bases $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ *del dominio y*

$\{x^2 + 1,\ -x + 2,\ 2\}$ *del recorrido.*

Obtén también, en ambas transformaciones, la dimensión del recorrido a partir de las matrices obtenidas.

19.- *Sea el espacio vectorial* $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ *y sea* $T : P_2 \rightarrow P_2$ *una transformación lineal tal que*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

es su matriz asociada referida a la base $\{x^2, x, 1\}$.

a) *Calcula* $T(x^2 + 2)$

b) *Determina la regla de asignación de* T

20.- *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión dos y sea* $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ *una base de* V.

Si $T : V \to V$ *es una transformación lineal tal que*

$$T(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = 3\bar{v}_1 + 9\bar{v}_2$$

$$T(3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2) = 7\bar{v}_1 + 23\bar{v}_2 ,$$

calcula:

a) $T(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$

b) *La matriz asociada a* T *referida a la base* $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

21.- *Sea* M *el espacio vectorial* $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle| \; x,y,z,w \in \mathbb{R} \right\}$ *y sea la transformación lineal* $T : M \to M$ *definida por:*

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} w - y & 0 \\ 0 & x - z \end{bmatrix}$$

Obtén:

a) *La matriz asociada a la transformación referida a la base*

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) α *y* β *para que la imagen de* $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \beta \end{bmatrix}$ *sea* $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) *La dimensión del recorrido mediante el rango de la matriz asociada a la transformación.*

22.- *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una transformación lineal y sean* $A = \{(2,0), (0,2)\}$ *y* $B = \{(0,3), (3,0)\}$ *dos bases de* $\mathbb{R}^2$

Si se sabe que

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

y que para un vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $(\bar{v})_B = (2,1)$, *obtén* $\left[T(\bar{v}) \right]_A$

23.- *Sea la transformación lineal* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, *donde* $\mathbb{C}^2 = \{(z_1,z_2) \mid z_1,z_2 \in \mathbb{C}\}$, *definida por* $T(z_1,z_2) = (iz_1 - z_2,\ z_2)$

a) *Si* $\mathbb{C}^2$ *está definido sobre el campo de los complejos, obtén la matriz asociada a* T *referida a la base* $\{(1,0),\ (0,1)\}$ *de* $\mathbb{C}^2$

b) *Si* $\mathbb{C}^2$ *está definido sobre el campo de los reales, obtén la matriz asociada a* T *referida a la base* $\{(1,0),\ (2i,0),\ (0,1),\ (0,\ 2 - 3i)\}$ *de* $\mathbb{C}^2$

24.- *La matriz asociada a una transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *referida a las bases* $A = \{(1,-1),\ (0,2)\}$ *y* $B = \{(1,0,-1),\ (0,1,2),\ (1,2,0)\}$ *es*

$$M_B^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) *Obtén la regla de asignación de* T

b) *Obtén una base* C *de* $\mathbb{R}^3$ *para que*

$$M_C^A(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

25.- *Sean* $B_1 = \{x + 1,\ 3\}$ *y* $B_2 = \{x^2 + 1,\ x,\ 1\}$ *bases de los espacios* $P_1 = \{ax + b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ *y* $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, *respectivamente. Si la matriz asociada a la transformación* $T : P_1 \to P_2$ *referida a las bases* B_1 *y* B_2 *es*

$$M_{B_2}^{B_1}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a) Calcula $T(3)$

b) Calcula $T(x + 1) + T(3)$

c) Si $S : P_2 \to P_1$ está definida como

$S(ax^2 + bx + c) = (2c - a)x + (2a - c)$, calcula $(S \circ T)(ax + b)$

d) Calcula $(T \circ S)(ax^2 + bx + c)$

26.- Sean los espacios vectoriales $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ y

$D = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ambos definidos sobre el campo de los reales y sean las transformaciones lineales $T : P_2 \to D$ y $S : P_2 \to D$ definidas de la siguiente manera:

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) & 0 \\ 0 & p(1) \end{bmatrix}, \quad S(p(x)) = \begin{bmatrix} p'(0) & 0 \\ 0 & p(3) \end{bmatrix}, \quad \forall\, p(x) \in P_2$$

a) Obtén $(T + S)(3x^2 - 2x + 1)$

b) Determina la regla de asignación de la transformación $U : P_2 \to D$ tal que $2T = S - U - T$.

27.- Sean las transformaciones lineales

$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(x,y) = (2x - y,\ y + x)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (3x + 2y,\ x)$

$\left[(T \circ H) + S\right] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\left[(T \circ H) + S\right](x,y) = (2x - 3y,\ y - x)$.

Obtén la regla de la transformación lineal $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

28.- a) Una transformación T se llama transformación nilpotente si $T^n(\bar{v}) = 0(\bar{v})$ para algún $n \in \mathbb{N}$, donde 0 es la transformación nula.

Verifica que la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (0,x)$ es nilpotente para $n = 2$.

b) Una transformación T se llama transformación idempotente si $T^2(\bar{v}) = T(\bar{v})$.

Verifica que la transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x,0)$ es idempotente.

c) Verifica que para la transformación $T(x,y,z) = (z,x,y)$ se cumple que $T^3(\bar{v}) = I(\bar{v})$ $\forall\ \bar{v} \in \mathbb{R}^3$, donde I es la transformación identidad.

Nota: $T^n(\bar{v}) = (\underbrace{T \circ T \circ \ldots . \circ T}_{\text{n veces}})(\bar{v})$

29.- Sean los espacios vectoriales $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle|\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$

y $P_1 = \{ax + b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, y sean las transformaciones lineales $S: M \to P_1$ y $T: M \to P_1$ definidas por

$$S\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = (a+b)x + b \quad y \quad T\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = (b-a)x + a$$

Si se conoce que $(T \circ H + S \circ H)(ax+b) = bx + (a+b)$, obtén la regla de correspondencia de $H: P_1 \to M$

30.- Dadas las transformaciones lineales $T: V \to V$ y $S: V \to V$, donde

$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \middle|\ x,y,z,w \in R \right\}$, definidas como

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x & x+y \\ x+y+z & x+y+z+w \end{bmatrix}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} w & z \\ y & x \end{bmatrix}$$

Obtén, de ser posible, las reglas de asignación de:

a) S^{-1}

b) T^{-1}

c) $(S \circ T)^{-1}$

31.- *Sea la transformación lineal* $T : P \rightarrow P$, *donde*

$$P = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in R\} ,$$

definida por

$$T(f) = f' + f \quad \forall\, f \in P$$

Obtén, de ser posible, la transformación inversa T^{-1}

32.- *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal definida como* $T(x,y) = (y,\ 2x,\ 2x)$

a) *Verifica que la transformación lineal* $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $S(x,y,z) = (\frac{3}{2}y - z,\ x)$ *es* transformación inversa por la izquierda *de* T *(Es decir,* $S = T^{-1}_{\text{izq.}}$).

b) *Verifica que la transformación* S *del inciso anterior no es* transformación inversa por la derecha de T .

c) *Comprueba que la transformación lineal* $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $H(x,y,z) = (\frac{1}{2}y,\ x)$ *es también una transformación inversa por la izquierda de* T .

d) *¿Es posible obtener una transformación inversa por la derecha de* T ? *En caso afirmativo, obtenla.*

33.- *Sea el espacio vectorial* $A = \{(x,0,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ *sobre el campo de los reales y sea la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to A$ *definida por*

$$T(x,y) = (y,0,\ y - x)$$

a) *Comprueba que la transformación lineal* $S : A \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$S(x,0,y) = (x - y,\ x)$$

es la transformación inversa por la izquierda y transformación inversa por la derecha de T .

b) *¿Se puede afirmar que* S *es la transformación inversa de* T *?*

c) *Sabemos que (en el caso de espacios de dimensión finita) las transformaciones lineales pueden ser representadas por matrices. ¿De qué orden es la matriz que representa a la transformación* T *? ¿De qué orden es la matriz que representa a la transformación* S *?*

34.- *El conjunto de todas las transformaciones lineales del espacio* V *al espacio* W *forman un espacio vectorial denotado* $\mathscr{L}(V,W)$[11] .

---

[11] Un caso particular es cuando $V = W$, teniéndose entonces el conjunto $\mathscr{L}(V,V)$. Este conjunto constituye un ALGEBRA LINEAL. Formalmente definimos:

Un conjunto V es un ALGEBRA sobre un campo K si V es un espacio vectorial sobre K y, además para todo $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \varepsilon V$ y $k \varepsilon K$ se cumple que

$$(\bar{v}_1 \oplus \bar{v}_2) \odot \bar{v}_3 = (\bar{v}_1 \odot \bar{v}_3) \oplus (\bar{v}_2 \odot \bar{v}_3)$$

$$\bar{v}_3 \odot (\bar{v}_1 \oplus \bar{v}_2) = (\bar{v}_3 \odot \bar{v}_1) \oplus (\bar{v}_3 \odot \bar{v}_2)$$

$$\bar{v}_1 \odot (\bar{v}_2 \odot \bar{v}_3) = (\bar{v}_1 \odot \bar{v}_2) \odot \bar{v}_3$$

$$k(\bar{v}_1 \odot \bar{v}_2) = (k\,\bar{v}_1) \odot \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \odot (k\,\bar{v}_2)$$

donde $\oplus$ y $\odot$ son la adición y multiplicación de vectores.

Si el espacio vectorial es el conjunto $\mathscr{L}(V,V)$, entonces al ALGEBRA se le llama ALGEBRA LINEAL.

Si el lector quiere profundizar sobre estos conceptos le sugerimos consultar, entre otros libros, los siguientes: "Topics in algebra". N. Herstein, editorial Blaisdell Publishing Co., Mass. U.S.A., capítulo 6; "Introducción al álgebra", A. Kostrikin, editorial Mir de Moscú, capítulo 9, sección 4; "Algebra moderna", F. Ayres, editorial Mc. Graw-Hill, serie Schaum, capítulo 16.

Un caso particular es el espacio $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. *En este espacio se definen las siguientes transformaciones lineales:*

$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $R(x,y) = (y - x,\ y,\ x)$

$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $S(x,y) = (x + y,\ 2x,\ x + y)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x,y) = (3x,\ 2y,\ y - x)$

Determina si el conjunto $\{R, S, T\}$ *es linealmente dependiente o independiente.*

35.- *En el espacio vectorial* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ *se tienen las transformaciones* T *y* S *tales que*

$T(1,0,0) = (1,1,0)$, $T(0,1,0) = (-1,0,3)$, $T(0,0,1) = (0,0,1)$

$S(1,0,0) = (0,-1,-1)$, $S(0,1,0) = (0,0,3)$, $S(0,0,1) = (1,1,0)$

a) *Obtén la regla de la transformación* $T + S$

b) *Obtén la matriz asociada a la transformación* $T + S$ *referida a la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

c) *Expresa la transformación* $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *como una combinación lineal de las transformaciones* T *y* S *donde* R *está definida por*

$$R(x,y,z) = (3x - 3y - 6z,\ 9x - 6z,\ 6x - 9y + 3z)$$

36.- a) *Obtén una base del espacio vectorial* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

b) *Expresa la transformación* $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *como una combinación lineal de los vectores de la base obtenida en el inciso anterior, donde* S *está definida por* $S(x,y) = (3x - y,\ 2y)$

37.- a) *Obtén una base y determina la dimensión del espacio vectorial* $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1)$

b) Expresa la transformación $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ como una combinación lineal de los vectores de la base obtenida en el inciso anterior, donde S está definida por $S(x,y) = 6x$.

c) Define una transformación $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ tal que $\{S, G\}$ sea linealmente independiente, donde S es la transformación del inciso b).

d) Define una transformación $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ tal que $\{S, H\}$ sea linealmente dependiente, donde S es la transformación del inciso b).

38.- Sea la transformación lineal $H : \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definida por $H(T(x,y)) = 3T(x,y)$, $\forall\, T(x,y) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

a) Obtén la matriz asociada a la transformación H referida a la base

$B = \{T_1(x,y) = (x,0),\ T_2(x,y) = (0,x),\ T_3(x,y) = (y,0),\ T_4(x,y) = (0,y)\}$

b) Obtén el resultado de $H^2(T(x,y))$, donde $H^2 = H \circ H$

39.- Sean los espacios vectoriales $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, $P_1 = \{ax + b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ y el conjunto de transformaciones $A = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ de P_2 en P_1 definidas por

$$T_1(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

$$T_2(ax^2 + bx + c) = (2a - b)x + c$$

$$T_3(ax^2 + bx + c) = (a - c)x + b$$

$$T_4(ax^2 + bx + c) = (b + c)x$$

a) Determina si el conjunto A es linealmente independiente o dependiente.

b) La transformación $S : P_2 \to P_1$ definida por $S(ax^2 + bx + c) = 3ax + c - 2b$, ¿pertenece al espacio generado por las transformaciones de A?

40.- *Sea el espacio vectorial* $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ *y sea la transformación lineal* $T : P_2 \to P_2$ *definida por*

$$T(f) = xf' - f(1), \quad \forall\, f \in P_2$$

Determina cuáles de los siguientes subespacios de P_2 *son invariantes en* T :

a) $\{ax + b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

b) $\{ax^2 - ax + b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

c) $\{a \mid a \in \mathbb{R}\}$

41.- *El operador lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *se define por*

$$T(x,y) = (x + y,\ -3x + 2y)$$

Demuestra que los únicos subespacios invariantes de $\mathbb{R}^2$ *en* T *son* $\{\bar{0}\}$ *y* $\mathbb{R}^2$

42.- *Sea el espacio vectorial* $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$ *y sea la transformación lineal* $T : M \to M$ *definida por*

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} z & x + y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina cuáles de los siguientes subespacios de M *son invariantes en* T

a) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

b) $B = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -(x + y) & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R} \right\}$

c) $C = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

43.- El polinomio característico de la matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 6$. A partir, únicamente, de combinaciones lineales de las matrices M^2, M, I, obtén M^3 y M^{-1}

44.- Demuestra que una matriz A es no singular si y sólo si, cero no es un valor característico de A .

45.- Sea A una matriz cuadrada. Demuestra que A y A^T tienen el mismo polinomio característico.

46.- Determina los valores y vectores característicos de la transformación lineal $T : M \rightarrow M$, donde

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$ y T está definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y & y + 2z \\ 0 & 2z \end{bmatrix}$$

47.- Sea A la matriz asociada, referida a las bases canónicas, de un operador lineal T, λ un valor característico de T y $\bar{v}$ su vector característico asociado.

Para la transformación lineal T^k, $k \in \mathbb{N}$, cuya matriz asociada referida a las bases canónicas es A^k , demuestra que λ^k es un valor característico de T^k y $\bar{v}$ es su vector característico asociado.

48.- Aplica la demostración del ejercicio anterior para obtener los valores característicos asociados al operador lineal T^4 si se sabe que el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define por

$$T(x,y) = (2x - 3y,\ y)$$

49.- Este ejercicio y el siguiente muestran algunas de las muchas aplicaciones de los valores característicos.

Se quiere obtener el volumen que encierra la superficie $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0$.

a) *Se trata de una superficie cuádratica de la forma*

$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2 + 2\beta_1 xy + 2\beta_2 xz + 2\beta_3 yz + \delta = 0$ *y, por lo tanto, es conveniente pasarla a una forma sencilla mediante una rotación de ejes. La teoría de las formas cuadráticas nos dice que hay que obtener primero la matriz* A *cuyos elementos son*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_3 \\ \beta_2 & \beta_3 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con esto, la matriz A *de nuestro ejemplo es:*

$$A = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

b) *El siguiente paso es calcular los* valores característicos *de la matriz* A . *Escribe dichos valores teniendo presente que* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$

$\lambda_1 =$ ________, $\lambda_2 =$ ________, $\lambda_3 =$ __________

c) *La ecuación de la superficie en el sistema* x', y', z' *está dada por*

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \delta = 0$

Por lo tanto, en nuestro ejemplo se trata de la ecuación: __________

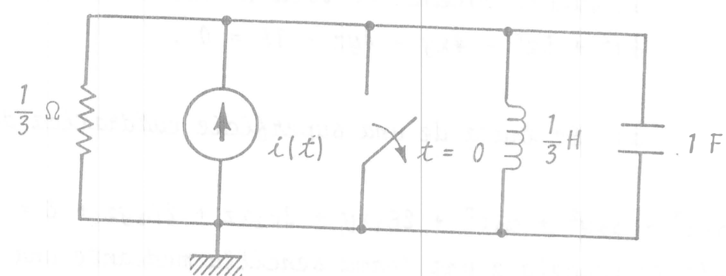
---

d) *Y utilizando tus conceptos de cálculo vectorial, el volumen se obtiene mediante la expresión*

$$V = 8 \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}} \int_{z=0}^{z=\sqrt{\frac{18-6y^2}{9}}} \sqrt{\frac{18-6y^2-9z^2}{3}} \; dy\, dz$$

obteniéndose finalmente que: volumen = ____________

50.- a) El circuito eléctrico que muestra la figura corresponde a un sistema físico de segundo orden y tiene el siguiente modelo matemático en variables de estado:



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i(t)$$

El comportamiento de la respuesta del circuito se puede clasificar de acuerdo con los valores característicos de la matriz

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera:

- Si los valores característicos son reales e iguales, la respuesta es críticamente amortiguada.

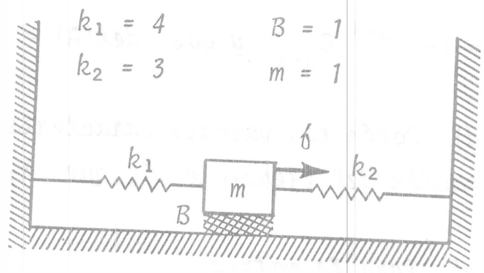
- Si los valores característicos son reales y distintos, la respuesta es sobreamortiguada.

- Si los valores característicos son complejos la respuesta es subamortiguada.

- Si los valores característicos son imaginarios la respuesta es no amortiguada.

Determina el tipo de respuesta del sistema eléctrico de la figura.

b) La figura muestra un sistema mecánico de segundo orden que se puede modelar mediante la siguiente ecuación en variables de estado:



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f$$

De acuerdo con la clasificación del inciso anterior, determina el tipo de respuesta del sistema mecánico de la figura.

51.- Sea A la matriz asociada a un operador lineal $T : V \to V$. El polinomio característico se puede escribir de la siguiente manera:

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + C_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + C_1\lambda + C_0$$

donde n es el orden de la matriz cuadrada A y los C_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, son los coeficientes del polinomio. Demuestra que

1.- $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = (-1)^{n-1} C_{n-1}$

2.- $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n = (-1)^n C_0$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos.

52.- a) Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcula $tr(A)$ y $\det(A)$

b) Obtén el polinomio característico de A

c) *Utilizando la demostración del ejercicio 51, comprueba que*

$tr(A) = (-1)^{n-1}\, C_{n-1}$ *y que* $det(A) = (-1)^n\, C_0$

d) *Obtén los valores característicos de* A *y comprueba, utilizando la demostración del ejercicio 51, que* $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$ *y que* $\lambda_1 \lambda_2 = det(A)$

e) *Para la matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

aplica la demostración del ejercicio 51.

53.- *Sean el espacio vectorial* $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ *y la transformación lineal* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *definida por*

$$T(z_1, z_2) = (-z_2, z_1)$$

Obtén los valores y vectores característicos de T *si* $\mathbb{C}^2$ *está definido*

a) *sobre el campo real*

b) *sobre el campo complejo*

54.- a) *Sea* $T : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$ *un operador lineal definido por*

$$T(x,y) = (3x,\ 3x + 5y)$$

Considerando a los vectores de IR^2 *como segmentos dirigidos en el plano, obtén los conjuntos de vectores de* IR^2 *tales que al aplicarles el operador* T *se preserve la dirección.*

b) *Sea* $S : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$ *un operador lineal definido por*

$$S(x,y) = (2\sqrt{3}\,x - 2y,\ \ 2x + 2\sqrt{3}\,y)\ .$$

Demuestra que no existen vectores de IR^2 *tales que al aplicarles el* operador S se preserve la dirección.

c) Demuestra que el operador S del inciso anterior produce, al aplicarse a vectores de $\mathbb{R}^2$, una rotación de $30°$.

55.- a) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

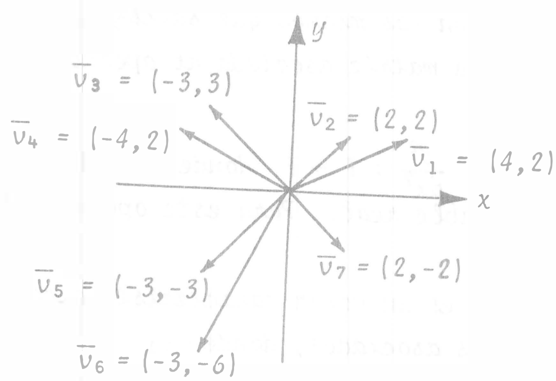
$$T(x,y) = (2x + y, \quad 2x + 3y)$$

Obtén los valores y vectores característicos, es decir, obtén los valores λ y los vectores correspondientes $\overline{v}$ tales que

$$T(\overline{v}) = A\,\overline{v} = \lambda\,\overline{v}$$

donde A es la matriz asociada a T referida a las bases canónicas.

b) Considerando a los vectores de $\mathbb{R}^2$ como segmentos dirigidos en el plano, determina cuáles de los siete vectores que muestra la figura son vectores característicos de los obtenidos en el inciso anterior indicando a cuál valor característico están asociados.



c) ¿Qué resultado geométrico se obtiene al aplicar la transformación T a los vectores característicos?

d) A los vectores $\overline{v}$ que satisfacen la ecuación $A\,\overline{v} = \lambda\,\overline{v}$ los podemos llamar también vectores característicos derechos ya que también existen vectores $\overline{u}$ que satisfacen la ecuación $\overline{u}^T A = \lambda\,\overline{u}^T$ y que los podemos llamar vectores característicos izquierdos. (Los valores característicos son los mismos tanto para $A\,\overline{v} = \lambda\,\overline{v}$ como para $\overline{u}^T A = \lambda\,\overline{u}^T$ y se pide demostrarlo en el ejercicio 56).

Obtén los vectores característicos izquierdos asociados a los valores característicos obtenidos en el inciso a) .

e) Determina cuáles de los siete vectores que muestra la figura del inciso b) son vectores característicos izquierdos de los obtenidos en el inciso anterior e indica a cuál valor característico están asociados.

f) ¿Qué resultado geométrico se obtiene al aplicar la transformación T a los vectores característicos izquierdos? (En este caso la aplicación se expresa $(\bar{u}^T)T = \bar{u}^T A = \lambda \bar{u}^T)$.

g) Determina la relación geométrica que guardan entre sí los vectores característicos derechos asociados al valor λ_1 con los vectores característicos izquierdos asociados al valor λ_2 . Determina también la relación geométrica que guardan entre sí los vectores característicos izquierdos asociados al valor λ_1 con los vectores característicos derechos asociados al valor λ_2 .

56.- En el ejercicio anterior definimos los conceptos de vectores característicos derechos e izquierdos. Demuestra que los valores característicos derechos e izquierdos son los mismos, es decir, demuestra que los valores λ que satisfacen la ecuación $A\,\bar{v} = \lambda\,\bar{v}$ son los mismos que satisfacen la ecuación $\bar{u}^T A = \lambda\,\bar{u}^T$, donde A es la matriz asociada al operador lineal.

57.- Sea el operador lineal $\frac{d^2}{dx^2} : F \rightarrow F$ donde F es el espacio vectorial de las funciones reales de variable real. Para este operador lineal verifica que:

a) Todo valor $\lambda \varepsilon \mathrm{IR}^+$ es un valor característico con $c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ como vectores característicos asociados, donde c_1 y c_2 son constantes reales.

b) $\lambda = 0$ es un valor característico con $c_1 + c_2 x$ como vectores característicos asociados, donde c_1 y c_2 son constantes reales.

c) Todo valor $\lambda \varepsilon \mathrm{IR}^-$ es un valor característico con $c_1 \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}\, x + c_2 \cos \sqrt{-\lambda}\, x$ como vectores característicos asociados, donde c_1 y c_2 son constantes reales.

Nota: IR^+ representa a los reales positivos y IR^- a los reales negativos.

58.- Demuestra que si la matriz A es similar a la matriz B y la matriz B es similar a la matriz C, entonces la matriz A es similar a la matriz C.

59.- Demuestra que si las matrices A y B son similares, entonces las matrices A^k y B^k también son similares, donde k es un número natural.

Nota: En lugar del término "similar" algunos autores emplean el término "semejante".

60.- Demuestra que si A y B son matrices similares, entonces su polinomio característico es el mismo.

61.- Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina si la matriz A es similar a la matriz B y si la matriz C es similar a la matriz D.

62.- a) $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ referida a una base E distinta de la canónica.

Demuestra que para la transformación T existen vectores $\bar{v} \neq \bar{0}$ tales que $T(\bar{v}) = -\bar{v}$.

b) Si $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de transición de la base canónica a la base E, determina el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la condición $T(\bar{v}) = -\bar{v}$.

63.- Sea $T : M \to M$ un operador lineal donde

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Si se sabe que $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada a T referida a la base

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, obtén la regla de asignación de T empleando los conceptos de similaridad y matriz de transición.

64.- Para cada uno de los siguientes operadores lineales

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (2x + y,\ 3x)$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (y - z,\ x + 4z,\ x + 4y)$,

obtén una matriz diagonal D asociada a T y una matriz "diagonalizadora" P. Verifica, para cada inciso, que $D = P^{-1}AP$ donde A es la matriz asociada a T referida a las bases canónicas.

65.- Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (x - 2z,\ 0,\ -2x + 4z), \quad \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Determina si el operador T es diagonalizable. En caso afirmativo, obtén una matriz diagonal D asociada a T y determina una base a la cual esté referida la matriz diagonal.

66.- Para el operador lineal $T : P_2 \to P_2$, donde

$$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

definida por

$$T(f) = f' + f(0), \quad \forall\ f \in P_2$$

determina si T es diagonalizable. En caso afirmativo, obtén una matriz diagonal asociada a T y una base a la cual esté referida.

67.- La matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada a una transformación lineal $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ referida a una cierta base, donde el espacio $\mathbb{C}^3$ está definido sobre el campo $\mathbb{C}$.

Determina si la transformación lineal T se puede representar por una matriz diagonal. En caso afirmativo, obtén dicha matriz y una base a la cual esté referida.

68.- Sean A y B matrices que representan al mismo operador lineal, es decir $B = P^{-1}AP$. Demuestra que si $\bar{v}$ es un vector característico de B correspondiente al valor característico λ_i, entonces $\bar{w} = P\bar{v}$ es un vector característico de A correspondiente al mismo valor λ_i de A.

69.- Dos matrices A y B se dicen simultáneamente diagonalizables si existe una matriz no singular Q, del mismo orden, tal que $Q^{-1}AQ$ y $Q^{-1}BQ$ son ambas matrices diagonales.

Demuestra que si A y B son matrices simultáneamente diagonalizables, entonces $AB = BA$.

70.- Sean los operadores lineales

$$T_1(x,y,z) = (x + 2z,\ 2y,\ y + 3z)$$

$$T_2(x,y,z) = (2x + 2y + 2z,\ 2y,\ 2y + 4z)$$

a) Demuestra que las matrices asociadas a T_1 y T_2 referidas ambas a las bases canónicas son simultáneamente diagonalizables. (Ver ejercicio anterior).

b) Comprueba la demostración del ejercicio 69, es decir, comprueba que $M(T_1)\,M(T_2) = M(T_2)\,M(T_1)$.

c) En términos de los operadores lineales, se dice que T_1 y T_2 son simultáneamente diagonalizables si y solamente si $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. Comprueba, para los operadores lineales de este ejercicio, que $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

Examen de Capítulo

1.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación definida por

$T(\bar{x}) = \text{Comp vect}_{\bar{a}}\ \bar{x}$, $\quad \forall\ \bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3$

donde $\bar{a} = (1,\ 0,\ -1)$

a) Demuestra que T es lineal.

b) Determina el núcleo de la transformación, una base del núcleo y la dimensión del recorrido.

Solución:

2.- *Dadas las transformaciones lineales*

$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $H(x,y) = (x - y,\ x + y)$

$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $P(x,y,z) = (-x,\ 2z)$

$S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $S(x,y) = (y,\ x + y,\ x)$

Obtén la regla de la transformación T , *si:*

$$T \circ H + T \circ H^{-1} = 2P \circ S + 3H$$

Solución:

3.- *Para la transformación lineal* $S : M \to P_2$, *donde*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle|\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \quad y \quad P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

definida por

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right) = (a + c)x^2 + (b + c)x + (a - c) \ ,$$

a) *Demuestra que la transformación* S *es inyectiva y suprayectiva.*

b) *Determina la regla de correspondencia de la transformación inversa.*

Solución:

4.- *Sea el operador lineal* $T : P_2 \rightarrow P_2$, *donde*

$P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ *y* T *está definido por*

$T(ax^2 + bx + c) = (2a + b)x^2 + (2b - c)x + 4c$

a) *Obtén los valores y vectores característicos de* T .

b) *Obtén, si es posible, una matriz diagonal asociada a* T *y una base a la cual está referida.*

CAPITULO VI

Operadores Lineales en Espacios con Producto Interno

"La matemática no es un cuerpo aislado y autosuficiente de conocimientos. Existe sobre todo para ayudar al hombre a comprender y dominar el mundo físico y también, en alguna medida, los mundos económico y social. La matemática está al servicio de determinados fines y propósitos. Si no fuese así, no habría lugar para ella en los programas de enseñanza. Si las matemáticas son objeto de gran demanda y se les concede tanta importancia, la razón es que son un instrumento de gran ayuda".

MORRIS KLINE.

Examen Diagnóstico

A continuación se presentan algunos ejercicios sobre antecedentes necesarios para estudiar este capítulo. Intenta resolverlos y compara tus resultados con los que se presentan después de este examen . Si tienes dudas acerca de la solución de los ejercicios, consulta la bibliografía propuesta al final de este examen.

1.- Obtén el módulo de los siguientes vectores

a) $\bar{v} = (1,\ 6)$

b) $\bar{w} = (-3,\ 2,\ \sqrt{12}\ )$

2.- Dados los siguientes vectores, determina cuáles de ellos son ortogonales entre sí:

$\bar{u} = (1,\ -3,\ 2)$, $\quad \bar{v} = (-1,\ 3,\ 5)$, $\quad \bar{w} = (9,\ 8,\ -3)$

3.- Obtén un vector unitario en la dirección del vector

$$\bar{a} = (3,\ -6,\ 6)$$

4.- Calcula el valor de la siguiente integral definida

$$\int_0^1 (t^3 - 3t^2 + \frac{3}{4})\ dt$$

5.- Calcula el resultado de la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}$$

6.- Calcula la traza de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

7.- a) Para que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & c & -3+3i & 4i \\ 8-i & -5 & 6 & -i \\ a & d & 0 & f \\ b & e & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

sea una matriz hermitiana se requiere que

$a=$________, $b=$________, $c=$________, $d=$________, $e=$________

$f=$________

b) Para que la matriz

$$B = \begin{bmatrix} -i & 1-i & z \\ x & 0 & 13 \\ -8+4i & y & w+3i \end{bmatrix}$$

sea una matriz antihermitiana se requiere que

$x=$________, $y=$________, $z=$________, $w=$________

c) Determina si la matriz

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal

RESPUESTAS

1.- a) $|\overline{v}| = \sqrt{37}$

b) $|\overline{w}| = 5$

2.- $\overline{u}$ es ortogonal con $\overline{v}$

$\overline{v}$ es ortogonal con $\overline{w}$

3.- $\left(\frac{1}{3} , -\frac{2}{3} , \frac{2}{3} \right)$

4.- 0

5.- $\left[-2 \right]$

6.- 8

7.- a) $a = -3 - 3i$, $b = -4i$, $c = 8 + i$, $d = 6$, $e = i$, $f = 10$

b) $x = -1 - i$, $y = -13$, $z = 8 + 4i$, $w = 0$

c) Sí es ortogonal

BIBLIOGRAFIA

Los conceptos aludidos en estos ejercicios los puedes estudiar en:

- Geometría Analítica
  de Nolasco, Solís, Victoria
  Editado por la UNAM
  páginas 13 a 17 y 23

- *Cálculo Diferencial e Integral*
  de Andrade, Castañeda, García
  Editado por la UNAM
  páginas 428-429

- *Algebra Lineal*
  de Solar, Speziale
  Editado por la UNAM
  páginas 328-333, 369, 390

Introducción

El concepto de vector que se ha estudiado hasta antes de iniciar el curso de álgebra lineal ha sido el de una cantidad que tiene magnitud y dirección. Esta noción de vector se estudió en el curso de álgebra y geometría analítica, particularmente en los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$; en estos espacios, los vectores siempre tienen una interpretación geométrica. En ese curso se estudió también que aunque en los espacios $\mathbb{R}^n$ (con $n > 3$) no existe interpretación geométrica, se pueden generalizar directamente las operaciones de adición de vectores y multiplicación por un escalar independientemente del valor de n, y que por lo tanto los elementos de $\mathbb{R}^n$ también son vectores.

En el capítulo IV de esta asignatura se estudió la estructura algebraica de espacio vectorial que es un concepto más general que los espacios $\mathbb{R}^n$. Se estudió también que esta estructura incluye como casos particulares a los espacios $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, y a los conjuntos de polinomios, matrices y funciones. Por esta razón, a los polinomios, matrices y funciones se les llama también vectores aunque carezcan de interpretación geométrica en lo referente a magnitud y dirección.

Cuando se estudió la estructura de espacio vectorial no se definieron los conceptos de magnitud y ángulo entre vectores. Uno de los objetivos de este capítulo será precisamente generalizar las nociones de magnitud y ángulo entre vectores de un espacio vectorial cualquiera. Dicho espacio lo consideraremos tan arbitrario como se desee, con tal de que esté definido sobre el campo de los números reales o los complejos.

Como los axiomas que definen a los espacios vectoriales no dan elementos suficientes para generalizar las definiciones de longitud y ángulo, vamos a recurrir al concepto de producto interno, que nos permitirá definirlos de una manera muy conveniente. El producto interno es una generalización del producto escalar usual (producto punto); sin embargo, en los espacios vectoriales abstractos, la interpretación del producto interno dista mucho de nuestra noción geométrica del producto escalar usual.

A un espacio vectorial donde se ha definido un producto interno le llamaremos espacio con producto interno; de éste y otros conceptos trataremos en la primera sección de este capítulo.

En la segunda sección presentaremos una de las aplicaciones importantes de la ortogonalidad entre vectores: el teorema de proyección.

En la tercera sección hablaremos de los operadores hermitianos. Una de las razones por la cual estos operadores son importantes es que siempre se pueden diagonalizar mediante un cambio de base apropiado, lo cual permite simplificar considerablemente todos los cálculos y apreciar más fácilmente sus propiedades.

En este punto debemos recordar que, el que un operador lineal se pueda diagonalizar, significa que existe una base respecto a la cual la matriz asociada al operador es una matriz diagonal.

En general, puede resultar bastante complicado determinar si un operador arbitrario se puede diagonalizar, pero si nos restringimos a operadores hermitianos y operadores unitarios entonces es fácil demostrar que siempre se pueden diagonalizar.

Los operadores hermitianos tienen además la importante propiedad de que todos sus valores característicos son números reales aunque el espacio vectorial esté definido sobre los complejos. Esta propiedad ha sido extensamente utilizada en una de las ramas de la física moderna más fascinante, la mecánica cuántica. Esto se debe a que los valores de cualquier magnitud física medible son siempre números reales y por lo tanto pueden representarse mediante valores característicos de operadores hermitianos. Los operadores hermitianos aparecen también, de una manera natural, en problemas que involucran simetría y su estudio es importante en lo que se conoce en matemáticas como la teoría de Sturm-Liouville.

En la tercera sección estudiaremos también a los operadores ortogonales y unitarios. Los operadores ortogonales aparecen en varios problemas de física e ingeniería como, por ejemplo, en la dinámica de los cuerpos rígidos, ligados a problemas de rotación y traslación.

Espacios con Producto Interno

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, los axiomas que definen al espacio vectorial no dan elementos para definir los conceptos de "longitud" y "distancia" entre vectores. Es decir, el espacio vectorial carece de métrica.

La métrica de un espacio vectorial V *es una operación binaria* d *que asocia a cada pareja* $(\overline{x},\overline{y})$ *de elementos de* V *un número real, tal que:*

Para todo $\overline{x},\overline{y},\overline{z} \in V$

1.- $d(\overline{x},\overline{y}) \geq 0$

2.- $d(\overline{x},\overline{y}) = 0$, *si y sólo si,* $\overline{x} = \overline{y}$

3.- $d(\overline{x},\overline{y}) = d(\overline{y},\overline{x})$

4.- $d(\overline{x},\overline{z}) \leq d(\overline{x},\overline{y}) + d(\overline{y},\overline{z})$

A un espacio V *provisto de una métrica se le suele llamar* espacio métrico, *a sus elementos* puntos *y a* $d(\overline{x},\overline{y})$ *la* distancia *entre los puntos* $\overline{x},\overline{y}$.

En un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, *se puede definir la métrica, por ejemplo, de la siguiente manera:*

Sean $\overline{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *y* $\overline{y} = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$.

Entonces la operación binaria $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$\overline{x}\ d\ \overline{y} = d(\overline{x},\overline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \qquad \text{------ (1)}$$

es una métrica del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ ya que satisface los axiomas anteriormente enunciados.

Con esta métrica, estamos dotando a los espacios $\mathbb{R}^n$ de herramientas para poder definir los conceptos de longitud y distancia.

Así, por ejemplo, la longitud de un vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ estará determinada por la expresión

$$d(\overline{x},\overline{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (2)$$

A la operación binaria d que define la métrica de un espacio se le suele llamar también función distancia o simplemente distancia.

Otro concepto mediante el cual se pueden establecer los conceptos de longitud y distancia en un espacio vectorial es el de norma.

La norma de un espacio vectorial V, simbolizada $||\cdot||$, es una función que asocia a cada elemento $\overline{x}$ de V un número real, tal que:

Para todo $\overline{x},\overline{y} \in V$

1.- $||\,\overline{x}\,|| \geq 0$

2.- $||\,\overline{x}\,|| = 0$, si y sólo si, $\overline{x} = \overline{0}$

3.- $||\alpha\,\overline{x}|| = |\alpha|\;||\,\overline{x}\,||$, donde α es un escalar

4.- $||\overline{x}+\overline{y}|| \leq ||\,\overline{x}|| + ||\,\overline{y}||$

A un espacio vectorial provisto de una norma se le suele llamar espacio normado.

En un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se puede definir la norma de la siguiente manera:

Sea $\overline{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$.

Entonces la función $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$|| \overline{x} || = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (3)$$

es una norma del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ ya que satisface los axiomas establecidos para la norma.

Con la norma estamos dotando al espacio $\mathbb{R}^n$ de herramientas para poder definir los conceptos de longitud y distancia.

Así, por ejemplo, la longitud de un vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ estará definida por la expresión

$$|| \overline{x} || = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (4)$$

La distancia entre los vectores $\overline{x}$ y $\overline{y}$ se definirá por la expresión

$$|| \overline{x} - \overline{y} || = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad (5)$$

Comparando (1) y (5) podemos ver que

$$d(\overline{x},\overline{y}) = || \overline{x} - \overline{y} || \qquad (6)$$

es decir, podemos definir la métrica (la distancia) en función de la norma.

Siempre se puede definir la distancia o métrica de un espacio vectorial en función de la norma de tal manera que todo espacio normado es un espacio métrico.

En general, se puede definir una métrica (distancia) o una norma en un espacio vectorial arbitrario, teniéndose entonces un espacio métrico o un espacio normado respectivamente.

Sin embargo, cuando la función distancia se define en el espacio $\mathbb{R}^n$ y precisamente mediante la expresión (1), entonces al espacio métrico $\mathbb{R}^n$ se le llama comúnmente espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

De igual manera, si la expresión (3) es la norma que se define en $\mathbb{R}^n$, entonces al espacio normado $\mathbb{R}^n$, también se le acostumbra llamar espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Probablemente la razón por la cual a los espacios $\mathbb{R}^n$ se les llama euclidianos cuando están dotados de una función distancia y/o una norma definidas por (1) y (3) es porque entonces se trabaja, aunque sea de una manera implícita, con la geometría euclidiana, es decir, con la geometría estudiada en los cursos de matemáticas de la enseñanza elemental y media superior[1].

Se considera por esta razón que las expresiones (1) y (3) nos dan la métrica ordinaria o métrica usual de los espacios $\mathbb{R}^n$.

La métrica en un espacio $\mathbb{R}^n$ se puede definir por lo tanto de manera diferente a (1) y (3) y, entonces, al espacio $\mathbb{R}^n$ no se le llama euclidiano, sino espacio métrico o espacio normado.

Otro concepto, además de los de métrica y norma, mediante el cual se pueden definir los conceptos de longitud y distancia en un espacio vectorial es el de producto interno.

El producto interno definido en un espacio vectorial V se define de la siguiente manera:

Sea V un espacio vectorial definido sobre el campo $\mathbb{C}$.

Entonces, a la operación binaria $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ se le llama producto interno si satisface los siguientes axiomas:

Sean $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$

1.- $(\bar{x} \mid \bar{y}) = \overline{(\bar{y} \mid \bar{x})}$ donde $\overline{(\bar{y} \mid \bar{x})}$ es el complejo conjugado de $(\bar{y} \mid \bar{x})$

2.- $(\bar{x} \mid \bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} \mid \bar{y}) + (\bar{x} \mid \bar{z})$

---

[1] Ciertamente en los niveles de enseñanza básica y media básica se estudia la geometría de nuestro mundo físico, es decir, en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, pero es sencillo generalizar los conceptos a cualquier espacio $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$.

3.- $(\alpha \overline{x} \mid \overline{y}) = \alpha(\overline{x} \mid \overline{y})$

4.- $(\overline{x} \mid \overline{x}) > 0$, *si* $\overline{x} \neq \overline{0}$

Creemos que el nombre de "producto interno" no es el más adecuado ya que, llamar interna a una operación cuyo resultado sale fuera del conjunto en el cual se define dicha operación, no es acertado.

Sin embargo, como la mayoría de los autores que exponen este tema así lo denominan, continuaremos nosotros también así llamándolo.

A un espacio vectorial provisto de un producto interno se le llama espacio con producto interno.[2]

En un espacio $\mathbb{R}^n$ *se puede definir el producto interno de la siguiente manera:*

Sean $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$.

Entonces la operación binaria $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = \overline{x}^T \, \overline{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (7)}$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^n$ *ya que satisface los axiomas establecidos para el producto interno.*[3]

Con este producto interno, estamos dotando al espacio $\mathbb{R}^n$ *de herramientas para poder definir los conceptos de longitud y distancia.*

---

[2] Algunos autores llaman a un espacio vectorial con producto interno, espacio euclidiano. Sin embargo, el primer nombre es más general.

[3] Obsérvese que (7) es precisamente el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^n$

Así, por ejemplo, la longitud de un vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *estará determinada por la expresión*

$$\text{Longitud de } \overline{x} = (\overline{x} \mid \overline{x})^{1/2} = (\overline{x}^T \overline{x})^{1/2} = \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)^{1/2} \quad \text{——— } (8)$$

De (3) y (8) tenemos que se pueden relacionar los conceptos de producto interno y de norma:

$$(\overline{x} \mid \overline{x})^{1/2} = \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = \| \overline{x} \|$$

Es decir, la norma se puede expresar en función de un producto interno:

$$\| \overline{x} \| = (\overline{x} \mid \overline{x})^{1/2}$$

De la expresión (6) podemos ver que la distancia entre dos vectores se puede expresar también en función de un producto interno:

$$d(\overline{x},\overline{y}) = \| \overline{x} - \overline{y} \| = ((\overline{x} - \overline{y}) \mid (\overline{x} - \overline{y}))^{1/2} \quad \text{—————— } (9)$$

De la expresión (9) podemos concluir que la métrica ordinaria de los espacios $\mathbb{R}^n$ *se puede establecer mediante (7), es decir, mediante el producto escalar ordinario.*

Por lo tanto, cuando en $\mathbb{R}^n$ *el producto interno que se define es precisamente el producto escalar ordinario o producto punto, entonces a* $\mathbb{R}^n$ *se le llama comúnmente espacio euclidiano.*

Si el producto interno definido en $\mathbb{R}^n$ no es el escalar ordinario, entonces al espacio $\mathbb{R}^n$ no se le llama espacio euclidiano, sino espacio con producto interno.

Resumiendo todo lo anterior diremos que: el nombre de espacio euclidiano lo reservamos al espacio $\mathbb{R}^n$ cuando en éste se define el producto interno mediante el producto escalar ordinario, teniéndose entonces definida a su vez la métrica ordinaria de $\mathbb{R}^n$ llamada también métrica euclídea.

En general, a todo espacio que no posee una métrica euclídea se le acostumbra llamar espacio no euclidiano recibiendo posteriormente un nombre más específico dependiendo del tema o rama de la matemática que se está estudiando.

Así, por ejemplo, a los espacios con producto interno se les llama también espacios pre-hilbert o espacios prehilbertianos.

Como hemos visto, los conceptos de longitud y distancia entre vectores se pueden definir mediante una función distancia, una norma o un producto interno. Nosotros recurriremos al producto interno ya que, comparativamente con los espacios normados y espacios métricos, los espacios con producto interno son más ricos en estructura geométrica y alcance analítico, partiendo del hecho mismo que todo espacio vectorial con producto interno (espacio pre-hilbert) es un espacio normado y, por lo tanto, también un espacio métrico.

Las siguientes actividades complementarias consisten en realizar una pequeña investigación sobre ciertos conceptos que si bien no forman parte del programa de la asignatura, estamos a un paso de su estudio.

Escribe en el renglón correspondiente lo que falta para que dichas afirmaciones estén completas y correctas.

La diferencia entre un espacio unitario y un espacio euclidiano es ______

____

Un espacio de Hilbert es ______________________________

____

La diferencia entre un espacio de Hilbert y un espacio con producto interno es ____
____

Todo espacio con producto interno de dimensión ______________ *es un espacio de Hilbert.*

Un espacio de Banach es ____
____

La diferencia entre un espacio de Banach y un espacio normado es ______
____

La diferencia entre un espacio de Hilbert y un espacio de Banach es ____
____

Finalmente, otra actividad que te sugerimos realices para reforzar los conceptos aludidos en esta sección es que resuelvas los siguientes ejercicios.

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

1.- A continuación se definen algunas funciones de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Determina cuáles de ellas son un producto interno en* $\mathbb{R}^2$ *; en caso negativo, indica qué propiedades no cumplen para ser un producto interno y da un contraejemplo.*

$$\forall\ \overline{x} = (x_1,\ x_2)\ ,\quad \overline{y} = (y_1,\ y_2) \in \mathbb{R}^2$$

a) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = x_1x_2 + y_1y_2$

b) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = 4$

c) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$

d) $(\bar{x} \mid \bar{y}) = x_1 y_1$

e) $(\bar{x} \mid \bar{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$

2.- Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{C}$ y sea la función $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ un producto interno en V. Demuestra que

I) $(\bar{u} \mid \alpha\, \bar{v}) = \bar{\alpha}(\bar{u} \mid \bar{v})$, $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

II) $(\bar{v} \mid \bar{0}) = 0$, $\forall\, \bar{v} \in V$

III) $(\bar{v} \mid \bar{v}) = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$, $\bar{v} \in V$

3.- En $\mathbb{R}^3$ se define el producto interno

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2 - y_1x_2 + 4x_3y_3$$

$$\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) , \quad \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Verifica que $(\bar{x} \mid \bar{x}) = 0 \iff \bar{x} = (0, 0, 0)$

b) Obtén el conjunto S de vectores de $\mathbb{R}^3$, tal que

$(\bar{x} \mid \bar{v}_1) = 0 \quad \forall\, \bar{x} \in S$, donde $\bar{v}_1 = (0, 0, 1)$

4.- Sean $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$
¿Para qué valores de a_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, la función

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\, y_i$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^n$?

5.- *Demuestra que para todo espacio real* V *con producto interno, se cumple que*

$$4(\overline{x} \mid \overline{y}) = (\overline{x} + \overline{y} \mid \overline{x} + \overline{y}) - (\overline{x} - \overline{y} \mid \overline{x} - \overline{y}) \qquad \forall\ \overline{x}, \overline{y} \in V$$

6.- *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$ *se define la operación binaria:*

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = \overline{x}\, A\, \overline{y}^{T} \qquad \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Demuestra que esta operación no es un producto interno, indicando la(s) propiedad(es) que no se cumple(n).

Nota: Considera, al operar, que $\overline{x}$, $\overline{y}$ son matrices renglón y que el resultado $\overline{x}\, A\, \overline{y}^{T}$ es un escalar y no una matriz de orden 1×1.

7.- *Sea* $\mathbb{C}^2$ *un espacio vectorial definido sobre el campo complejo. En* $\mathbb{C}^2$ *se define el producto interno*

$$(\overline{w} \mid \overline{z}) = \sum_{k=1}^{2} k^2 w_k \overline{z}_k \qquad \forall\ \overline{w} = (w_1, w_2), \quad \overline{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

a) *Si* $\overline{x}_1 = (2 - i, 3i)$ *y* $\overline{x}_2 = (4, 2 - i)$, *obtén* $(\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2)$

b) *Obtén los vectores* $\overline{x} \in \mathbb{C}^2$ *tales que* $(\overline{x} \mid \overline{y}) = 8$, *donde* $\overline{y} = (1, i)$

c) *Verifica la propiedad de positividad para el producto interno dado.*

8.- *En el espacio vectorial* P_2 *de polinomios de grado* ≤ 2, *se define la función*

$$(f \mid g) = \sum_{k=1}^{2} f\left(\frac{k}{2}\right) g\left(\frac{k}{2}\right) \qquad \forall\ f, g \in P_2$$

Determina por qué esta función no es un producto interno en P_2 *y da un contraejemplo de cada propiedad que no se verifique.*

9.- *En el espacio vectorial* F *de funciones continuas en* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *se define la función*

$$(f \mid g) = \int_0^{\pi/2} f(x)\, g(x)\, \operatorname{sen} x\, dx \qquad \forall\, f,g \in F$$

a) *Obtén* $(f \mid f)$ *si* $f(x) = \operatorname{sen} x$

b) *De uestra que la función dada es un producto interno.*

10.- *Sea* V *un espacio vectorial en el cual se definen los productos internos* $(\bar{u} \mid \bar{v})_1$ *y* $(\bar{u} \mid \bar{v})_2$ $\forall\, \bar{u},\bar{v} \in V$.

Demuestra que $\alpha(\bar{u} \mid \bar{v})_1 + (\bar{u} \mid \bar{v})_2$, *donde* $\alpha > 0$, *es un producto interno en* V .

11.- *Determina, si existen, qué propiedades no cumplen cada una de las siguientes funciones para no ser productos internos, en el espacio de polinomios* P_n *de grado menor o igual que* n . *Da un contraejemplo en cada propiedad no cumplida.*

$\forall\, f,g \in P_n$

a) $(f \mid g) = \sum_{k=0}^{n} f'(k)\, g'(k)$

b) $(f \mid g) = \int_0^1 e^t f(t)\, g(t)\, dt$

c) $(f \mid g) = \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)\left(\int_0^2 g(t)\, dt\right)$

d) $(f \mid g) = \sum_{k=0}^{n} \left[(f \circ g)(k)\right]$; $f \circ g = f$ *composición* g .

12.- Calcula la norma del vector $\bar{v} = (1, 0, -1)$ para los siguientes productos internos

$$\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) $(\bar{x} \mid \bar{y}) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, y_i$

b) $(\bar{x} \mid \bar{y}) = 3x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 4x_3y_3$

c) $(\bar{x} \mid \bar{y}) = \sum_{i=1}^{3} 4x_i y_i$

13.- Demuestra que en todo espacio con producto interno se cumple que:

I) $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + (\bar{x} \mid \bar{y}) + (\bar{y} \mid \bar{x})$

II) $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 + \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = 2\|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{y}\|^2$

14.- Para el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ se define el producto interno

$$(\bar{u} \mid \bar{v}) = \sum_{i=1}^{2} x_i\, \bar{y}_i \qquad \forall\, \bar{u} = (x_1, x_2)\,, \quad \bar{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$$

donde $\bar{y}_i$ es el conjugado de y_i

a) Si $\bar{v} = (4 + 2i, 5 - 6i)$, calcula la norma de $\bar{v}$

b) Si $\bar{u} = (3 - 2i, -2i)$ y $\bar{v} = (-2 - 2i, i)$, obtén el ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$, y verifica para $\bar{u}$ y $\bar{v}$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

15.- Sean $\bar{v}$ y $\bar{w}$ vectores de un espacio real con producto interno. Demuestra que

$$(\bar{v} + \bar{w} \mid \bar{v} - \bar{w}) = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad \|\bar{v}\| = \|\bar{w}\|$$

16.- En un espacio con producto interno V se define la función

$$\|\bar{x}\| = k(\bar{x} \mid \bar{x})^{1/2}, \quad \forall\, \bar{x} \in V, \quad k \in \mathbb{R}$$

Utilizando la definición de norma de la página 262, determina para qué valores de k la función dada es una norma.

17.- Demuestra la ley del paralelogramo:

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = 2\,(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2)$$

donde V es un espacio con producto interno cualquiera y $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Además explica el porqué del nombre de esta propiedad, relacionándola con el caso geométrico.

18.- En $\mathbb{R}^2$ se define el producto interno

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 \qquad \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

a) Obtén el conjunto S de vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que su norma sea igual a la unidad.

b) ¿Es S un subespacio de $\mathbb{R}^2$?

c) Si cada vector de $\mathbb{R}^2$ representa un punto del plano, dibuja el lugar geométrico que representa S.

19.- Sea V un espacio real con producto interno. Demuestra que $\bar{x}, \bar{y} \in V$ son linealmente dependientes, si y sólo si, el ángulo formado por $\bar{x}$ y $\bar{y}$ es 0 o π.

20.- Determina el valor o los valores del escalar β para que la norma del vector $\bar{v} = (3, \beta)$ valga lo mismo con el producto escalar ordinario que con el producto interno

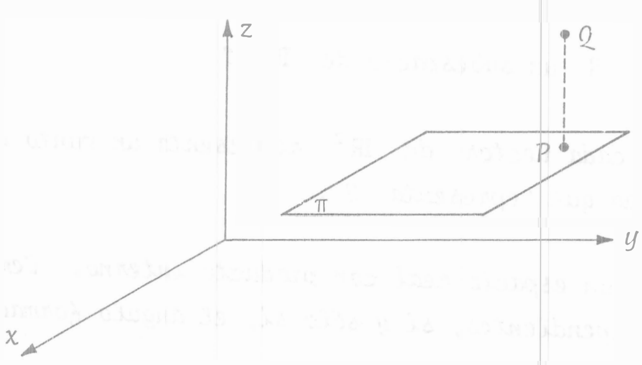
$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_1) + 10x_2y_2$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Aplicaciones de la Ortogonalidad

Muchas de las aplicaciones del teorema de ortogonalización se obtienen a través de otro teorema llamado de aproximación o de proyección, el cual se muestra a continuación con algunas de sus aplicaciones. Te sugerimos que participes realizando los ejercicios que se te sugieren durante este desarrollo.

Uno de los problemas más interesantes de la geometría analítica es el de obtener el punto P del plano π más cercano al punto Q que está fuera de dicho plano.



Sabemos que el punto P es tal que el segmento $\overline{PQ}$ es perpendicular al plano π .

Cuando el plano pasa por el origen, el problema anterior puede resolverse fácilmente, usando conceptos del álgebra lineal. Para ello utilizamos el teorema de aproximación, el cual dice que:

"Sea S un subespacio de dimensión finita de un espacio con producto interno V y sea $\overline{x}$ un elemento de V. El elemento $\overline{s}$ de S más próximo a $\overline{x}$ que cualquier otro elemento de S, es decir,

$$\| \overline{x} - \overline{s} \| < \| \overline{x} - \overline{t} \| , \qquad \forall\, \overline{t} \in S , \quad \overline{t} \neq \overline{s}$$

está dado por

$$\overline{s} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} \mid \overline{e}_i)\overline{e}_i$$

donde $\{\overline{e}_i\}$ es una base ortonormal de S".

En nuestro problema original S es el plano π, V es $\mathbb{R}^3$, $\overline{x}$ el punto Q y $\overline{s}$ el punto P. El producto interno elegido es el producto escalar ordinario para que nos proporcione distancias euclidianas.

Así, por ejemplo, usando el teorema de aproximación obtenemos el punto del plano $x - y + 2z = 0$ más cercano al punto $Q(0, 2, -6)$.

Primeramente, el subespacio S representado por el plano es:

$$S = \{(x,y,z) \mid x - y + 2z = 0,\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

ó $$S = \{(y - 2z,\ y,\ z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$$

Una base de S es el conjunto $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\} = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$

Esta base se ortogonaliza[4] *usando el proceso de Gram-Schmidt:*

$$\overline{w}_1 = \overline{v}_1$$

$$\overline{w}_2 = \overline{v}_2 - \frac{(\overline{v}_2 \mid \overline{w}_1)}{(\overline{w}_1 \mid \overline{w}_1)}\overline{w}_1 = (-2, 0, 1) - \frac{-2}{2}(1, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$

---

4 Con el término "ortogonalizar" queremos decir que se obtiene una base cuyos vectores son ortogonales entre sí.

Ahora, la base ortogonal $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$ *se normaliza*[5] *para obtener la base ortonormal pedida:*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1) \right\} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$$

Sabemos que $\bar{x} = (0, 2, -6)$; *por tanto,* $(\bar{x} \mid \bar{e}_1) = \frac{2}{\sqrt{2}}$ *y*

$(\bar{x} \mid \bar{e}_2) = \frac{-4}{\sqrt{3}}$

Finalmente el vector $\bar{s}$ *está dado por*

$$\bar{s} = (\bar{x} \mid \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (\bar{x} \mid \bar{e}_2)\bar{e}_2 = \frac{2}{2} (1, 1, 0) - \frac{4}{3} (-1, 1, 1)$$

$$\bar{s} = (1, 1, 0) + \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3} \right)$$

Por lo tanto, el punto del plano más cercano al punto Q *es:*

$P\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3} \right)$.

Se puede comprobar que el punto P *pertenece al plano* π *y el segmento*

$\overline{PQ} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$ *es perpendicular al plano* π .

I) *Verifica que el segmento* $\overline{PQ}$ *es perpendicular al plano* π

---

[5] Con el término "normalizar" queremos decir que se obtienen vectores unitarios, es decir, vectores cuya norma es igual a uno.

II) ¿Por qué no se puede aplicar este método directamente cuando el plano no contiene al origen?

Este método puede usarse para planos que no contienen al origen utilizando el plano paralelo que pasa por el origen, pero ya no resulta tan sencillo como el caso expuesto.

Afortunadamente, la anterior no es la mejor aplicación del teorema de aproximación.

Si suponemos que el espacio V es el espacio de funciones reales, S es el subespacio de polinomios de grado menor o igual a n y $\overline{x}$ una función dada, entonces el problema de aproximar a la función $\overline{x}$ por un polinomio en un intervalo (a,b) estará resuelto por el teorema de aproximación. Considerando como producto interno a

$$(f \mid g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\,, \qquad \forall\ f,g \in S$$

entonces el polinomio $\overline{p}$ más cercano a la función $\overline{x}$ lo será en el sentido en que la norma

$$\| \overline{x} - \overline{p} \|$$

es mínima, llamada aproximación media cuadrática.

Por ejemplo, consideremos a la función $f(t) = \text{sen}\ \pi\ t$ del espacio de las funciones continuas en el intervalo $(-1, 1)$. Obtengamos el polinomio de grado menor o igual a uno "más próximo" a esta función según el producto interno anteriormente mencionado.

El polinomio buscado $p(t)$ está dado por

$$p(t) = \sum_{i=1}^{2} (f \mid \phi_i)\phi_i$$

donde $\{\phi_1, \phi_2\}$ es una base ortonormal del espacio de los polinomios de grado menor o igual a uno. Esta base está formada por los siguientes polinomios llamados polinomios de Legendre

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \, , \, \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \right\}$$

Se tiene entonces que

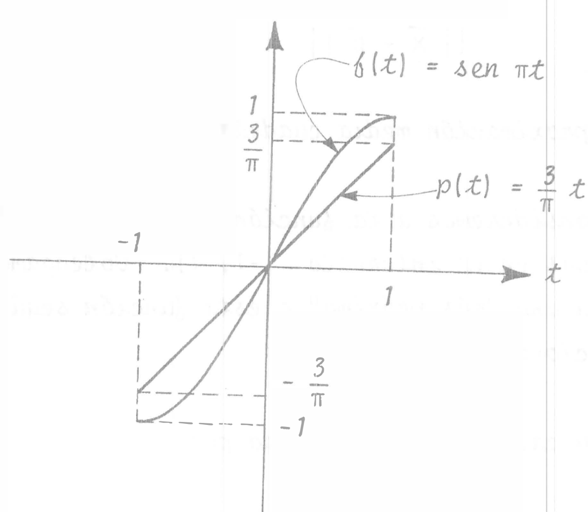
$$(f \mid \phi_1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \pi t \, dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \cos \pi t \right]_{-1}^{1} = 0$$

$$(f \mid \phi_2) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \operatorname{sen} \pi t \, dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{\pi^2} \operatorname{sen} \pi t - \frac{t}{\pi} \cos \pi t \right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$$

de donde,

$$p(t) = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, t \right) = \frac{3}{\pi}\, t$$

Por lo tanto, el polinomio de grado menor o igual a uno más cercano a $\operatorname{sen} \pi t$ en el intervalo $(-1, 1)$ es $p(t) = \frac{3}{\pi} t$. La figura siguiente muestra las gráficas de $f(t) = \operatorname{sen} \pi t$ y $p(t) = \frac{3}{\pi} t$



Si definimos el error e en la aproximación como

$$e = \| \, f(t) - p(t) \, \|^2$$

entonces, tenemos que

$$e = \int_{-1}^{1} (\text{sen } \pi t - \frac{3}{\pi} t)^2 \, dt = \frac{\pi^2 - 6}{\pi^2}$$

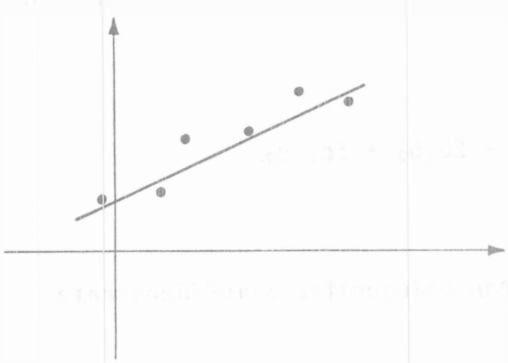
III) ¿Cómo se interpretaría geométricamente el error e ? ________

____

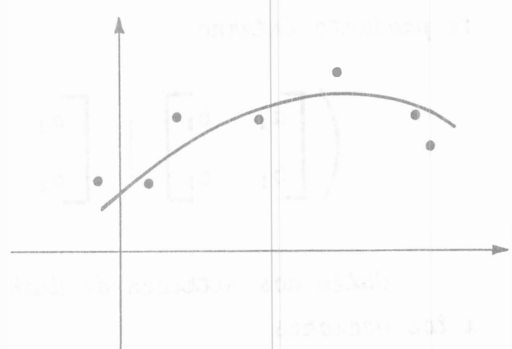
____

IV) Sabiendo que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \sqrt{\frac{45}{8}}\,(t^2 - \frac{1}{3}) \right\}$ *es una base ortonormal de los polinomios de grado menor o igual a dos para el producto interno anteriormente definido, obtén el polinomio de grado menor o igual a dos más próximo a* $f(t) = \text{sen } \pi t$ *en el intervalo* $(-1, 1)$

Otra aplicación importante del teorema de aproximación es el método de ajuste por mínimos cuadrados, *el cual consiste en obtener la curva que mejor se ajuste a un conjunto de puntos dispersos en el plano. Las dos figuras siguientes muestran lo anterior.*



ajuste por la ecuación $y = ax + b$



ajuste por la ecuación $y = ax^2 + b$

En la primera figura, la recta escogida es tal que minimiza la suma de distancias a los puntos. Lo mismo sucede en la segunda figura con la curva mostrada.

Este método lo estudiarás y aplicarás en cursos posteriores. Sin embargo, puede desarrollarse en forma muy simple usando elementos del álgebra lineal.

A continuación se presentan ejercicios correspondientes a esta sección. Te sugerimos que los resuelvas para reafirmar tus conocimientos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

(Continuación)

21.- Sea V un espacio euclidiano definido sobre el campo K, y sea $\bar{v}$ un vector cualquiera de V. Demuestra que el conjunto W, formado por vectores ortogonales a $\bar{v}$, es un subespacio vectorial de V.

22.- En el espacio de las matrices simétricas de orden dos se define el siguiente producto interno

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \right) = a_1\, a_2 + 2b_1b_2 + 3c_1\, c_2$$

Obtén dos matrices de dicho espacio que sean ortogonales simultáneamente a los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

23.- *Demuestra que todo conjunto de vectores ortogonales que no contiene al vector cero es linealmente independiente.*

24.- *En el espacio* F *de las funciones reales continuas en el intervalo* $(0, 1)$ *se define el producto interno*

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \,, \qquad \forall\, f, g \in F$$

Sea el conjunto no finito $S = \{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$, *donde* $f_0 = 1$, $f_{2n-1}(x) = \operatorname{sen} 2\pi nx$ *y* $f_{2n}(x) = \cos 2\pi nx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. *Demuestra que* S *es un conjunto ortogonal y obtén la norma de* f_0, f_{2n-1} *y* f_{2n}

25.- *Demuestra el* teorema de Parseval, *el cual dice que: Sea* V *un espacio euclidiano de dimensión finita. Si* $\{\overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2, \ldots, \overline{\phi}_n\}$ *es una base ortonormal de* V , *entonces* $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V$ *se tiene que*

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{x} \mid \overline{\phi}_i)\overline{(\overline{y} \mid \overline{\phi}_i)}$$

26.- *Obtén el subconjunto* S *de* $\mathbb{R}^3$ *formado por los vectores ortogonales a* $(1, 0, -1)$ *con el producto escalar ordinario y simultáneamente con el producto interno*

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + 3x_3y_3$$

donde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$

27.- *En el espacio* $\mathbb{R}^3$ *se define el producto interno*

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 4x_3y_3$$

donde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$. *Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, obtén una base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$ *a partir de la base* $\{(2, 2, 1), (0, 2, -1), (-4, 0, -10)\}$.

28.- En el espacio vectorial $P_2 = \{at^2 + bt + c \mid a,b,c\varepsilon IR\}$ se define el siguiente producto interno

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt\,, \qquad \forall\, f,g\varepsilon P_2$$

Obtén una base ortonormal de P_2 a partir de la base $\{1, t, t^2\}$

29.- En el espacio $\mathbb{C}^2$ definido sobre el campo complejo, se define el producto interno

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = 2x_1\bar{y}_1 - x_1\bar{y}_2 - x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$, $\bar{x},\bar{y}\varepsilon\mathbb{C}^2$ y $\bar{y}_i$ indica el conjugado de y_i

a) ¿Son los vectores $(1, i)$ y $(0, -i)$ ortogonales con el producto interno definido?

b) Obtén una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ a partir de la base $\{(1, 0), (1, i)\}$

30.- Sean $B_1 = \{(1, 0, -1), \bar{v}, \bar{u}\}$ y $B_2 = \{(1, 0, -1), \bar{v}, \bar{w}\}$ dos bases de IR^3. Determina los vectores $\bar{v}$, $\bar{u}$ y $\bar{w}$ para que B_1 sea una base ortogonal con el producto escalar ordinario y B_2 sea una base ortogonal con el producto interno

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

donde, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$

Operadores Simétricos y Hermitianos

Existen varios tipos especiales de operadores lineales definidos en espacios con producto interno. Para algunos de esos operadores, los valores característicos tienen particularidades importantes acompañadas de muchas aplicaciones prácticas; así, existen operadores cuyos valores característicos son reales, otros en que son imaginarios y otros operadores en que el módulo de los valores es igual a la unidad.

En esta sección hablaremos principalmente del tipo de operadores lineales en los cuales sus valores característicos son reales. Comenzaremos por responder a la pregunta: ¿qué condiciones debe cumplir este tipo de operadores al aplicárseles el producto interno?

Sea $T : V \to V$ un operador lineal, donde V es un espacio con producto interno, y sean $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ dos vectores característicos asociados al valor característico λ de T:

$$(T(\bar{v}_1) \mid \bar{v}_2) = (\lambda\, \bar{v}_1 \mid \bar{v}_2) = \lambda\, (\bar{v}_1 \mid \bar{v}_2) \qquad \text{(1)}$$

Por otro lado, $(\bar{v}_1 \mid T(\bar{v}_2)) = (\bar{v}_1 \mid \lambda\, \bar{v}_2) = \bar{\lambda}\, (\bar{v}_1 \mid \bar{v}_2)$. Si suponemos que λ es real, entonces $\bar{\lambda} = \lambda$ y, por tanto

$$(\bar{v}_1 \mid T(\bar{v}_2)) = \lambda\, (\bar{v}_1 \mid \bar{v}_2) \qquad \text{(2)}$$

Por consiguiente, de (1) y (2) tenemos que

$$(T(\bar{v}_1) \mid \bar{v}_2) = (\bar{v}_1 \mid T(\bar{v}_2))$$

Si generalizamos esta expresión tal que se cumpla para todo $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$ no importando si son o no vectores característicos de T, entonces con pedir que se cumpla

$$(T(\bar{v}_1) \mid \bar{v}_2) = (\bar{v}_1 \mid T(\bar{v}_2)), \quad \forall\, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \qquad \text{(3)}$$

aseguramos que los valores característicos de T son reales.

A un operador lineal que cumpla la expresión (3) se le llama operador hermitiano y es un operador de suma importancia en la física e ingeniería.

De acuerdo con la definición de operador hermitiano conviene resaltar que:

1) Como la expresión (3) está generalizada a cualesquiera vectores del espacio, entonces se cumple que para cualquier operador hermitiano sus valores característicos son reales; sin embargo, un operador puede tener sus valores característicos reales y no ser hermitiano, es decir, no cumplir con la expresión (3).

2) No debe confundirse el concepto de operador hermitiano con el de matriz hermitiana. Un operador hermitiano es un operador lineal que satisface la ecuación (3); en cambio, una matriz hermitiana es aquella que es igual a su conjugada-transpuesta. Sin embargo, ambos conceptos están relacionados, como podrá observarse más adelante.

3) Si T es hermitiano con un producto interno, puede dejar de serlo con otro producto interno, pero basta que sea hermitiano respecto a algún producto interno para que se llame como tal y tenga las propiedades de todo operador hermitiano.

Convie e comentar aquí que los conceptos de valores y vectores característicos son independientes del concepto de producto interno. Por lo tanto, los valores característicos de un operador arbitrario son siempre los mismos independientemente del producto interno elegido.

Si T es un operador hermitiano definido sobre el campo de los números reales, se le llama también operador simétrico. En consecuencia, los operadores simétricos son un caso particular de los operadores hermitianos, y cuando un operador es simétrico se acostumbra decir indistintamente que es simétrico o es hermitiano.

También en este caso, no debe confundirse un operador simétrico con una matriz simétrica y, nuevamente, un operador simétrico respecto a un producto interno puede no serlo respecto a otro.

Por ejemplo, consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar ordinario. Determinemos si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2), \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

es un operador simétrico.

Sean $\bar{v} = (v_1, v_2)$ y $\bar{w} = (w_1, w_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$. Al aplicarse T a cada uno de estos vectores se tiene que

$$T(\bar{v}) = T(v_1, v_2) = (v_1 + 2v_2, 2v_1 + 3v_2)$$

$$T(\bar{w}) = T(w_1, w_2) = (w_1 + 2w_2, 2w_1 + 3w_2)$$

Entonces, el lado izquierdo de la ecuación (3) es:

$$(T(\bar{v}) \mid \bar{w}) = ((v_1+2v_2, 2v_1+3v_2) \mid (w_1,w_2)) = v_1w_1 + 2v_2w_1 + 2v_1w_2 + 3v_2w_2$$

y el lado derecho de la ecuación (3) es:

$$(\bar{v} \mid T(\bar{w})) = ((v_1,v_2) \mid (w_1+2w_2, 2w_1+3w_2)) = v_1w_1 + 2v_1w_2 + 2v_2w_1 + 3v_2w_2$$

por lo que se cumple que $(T(\bar{v}) \mid \bar{w}) = (\bar{v} \mid T(\bar{w}))$, y por lo tanto el operador T es un operador simétrico respecto al producto escalar ordinario. En este caso, como $\mathbb{R}^2$ es un espacio sobre los reales, se puede decir indistintamente que T es un operador simétrico o hermitiano.

Observemos que la matriz asociada á T referida a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

que es una matriz simétrica.

En generel, para cualesquiera dos bases ortonormales A y B, la matriz asociada a T referida a dichas bases y denotada $M_B^A(T)$, es una matriz simétrica. Para un operador hermitiano definido sobre el campo complejo, la matriz asociada a dos bases ortonormales cualesquiera del espacio es una matriz hermitiana.

Sea el operador $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$G(x, y) = (17x - 4y, -2x + 10y) \qquad (5)$$

el cual, como se puede verificar, no es un operador hermitiano con el producto escalar ordinario.

Consideremos el siguiente producto interno en $\mathbb{R}^2$:

$$(\bar{v} \mid \bar{w}) = ((v_1, v_2) \mid (w_1, w_2)) = 5v_1w_1 + 2v_1w_2 + 2v_2w_1 + 17v_2w_2 \qquad (6)$$

Determinemos si los operadores T y G definidos por las expresiones (4) y (5) son hermitianos con este producto interno.

Para T tenemos que, por un lado,

$$(T(\bar{v}) \mid \bar{w}) = 5(v_1+2v_2)w_1 + 2(v_1+ 2v_2)w_2 + 2(2v_1+3v_2)w_1 + 17(2v_1+3v_2)w_2$$

$$= 9v_1w_1 + 36v_1w_2 + 16v_2w_1 + 55v_2w_2$$

por otro lado,

$$(\bar{v} \mid T(\bar{w})) = 5v_1(w_1+2w_2) + 2v_1(2w_1+3w_2) + 2v_2(w_1+2w_2) + 17v_2(2w_1+3w_2)$$

$$= 9\ v_1w_1 + 16v_1w_2 + 36v_2w_1 + 55v_2w_2$$

por lo tanto, T no es un operador simétrico (hermitiano) respecto al producto interno definido por la expresión (6).

Para el operador G tenemos que, por un lado,

$$(G(\bar{v}) \mid \bar{w}) = 5(17v_1-4v_2)w_1 + 2(17v_1-4v_2)w_2 + 2(-2v_1+10v_2)w_1 + 17(-2v_1+10v_2)w_2$$

$$= 81v_1w_1 + 162v_2w_2$$

por otro lado,

$$(\overline{v} \mid G(\overline{w})) = 5v_1(17w_1-4w_2) + 2v_1(-2w_1+10w_2) + 2v_2(17w_1-4w_2) + 17v_2(-2w_1+10w_2)$$

$$= 81v_1w_1 + 162v_2w_2$$

por lo tanto, G sí es un operador simétrico (hermitiano) respecto al producto interno definido por la expresión (6).

Como T y G son operadores simétricos respecto a algún producto interno entonces se les puede diagonalizar. Veamos el caso de G.

La matriz asociada a G respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $E = \{(1,0), (0,1)\}$, es:

$$M_E^E(G) = \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

la cual no es una matriz simétrica.

Aunque G es un operador simétrico, la matriz $M(G)$ no es simétrica porque la base canónica no es una base ortonormal con el producto interno definido en (6).

Una base ortonormal $\{\overline{w}_1,\overline{w}_2\}$ de G, con el producto interno definido en (6), la podemos obtener a partir de la base canónica $\{\overline{v}_1,\overline{v}_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$ usando el proceso de Gram-Schmidt:

$$\overline{a} = \overline{v}_1 = (1,0)$$

$$\overline{b} = \overline{v}_2 - \frac{(\overline{v}_2 \mid \overline{v}_1)}{(\overline{v}_1 \mid \overline{v}_1)}\, \overline{v}_1 = (0,1) - \frac{2}{5}(1,0) = (-\frac{2}{5}, 1)$$

Como $\| \overline{a} \| = \sqrt{5}$ y $\| \overline{b} \| = \frac{9}{\sqrt{5}}$, entonces se tiene que

$$\{\overline{w}_1,\overline{w}_2\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\frac{2}{9\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{9}\right) \right\}$$

La matriz asociada a G referida a la base $B = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2\}$ es:

$$M_B^B(G) = \begin{bmatrix} \frac{81}{5} & -\frac{18}{5} \\ -\frac{18}{5} & \frac{54}{5} \end{bmatrix}$$

la cual sí es una matriz simétrica.

Al ser el operador G hermitiano respecto a algún producto interno entonces es diagonalizable. Además, sus valores característicos serán reales y los vectores característicos asociados a valores característicos distintos serán ortogonales.

Para el cálculo de los valores y vectores característicos y de la matriz diagonal podemos usar cualquiera de las matrices

$$M_E^E(G) = \begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \qquad ó \qquad M_B^B(G) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 81 & -18 \\ -18 & 54 \end{bmatrix}$$

ya que los resultados serán los mismos.

$$|M_B^B(G) - \lambda I| = |M_E^E(G) - \lambda I| = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -4 \\ -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 27\lambda + 162 = 0$$

Por lo tanto, los valores característicos son $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 9$

Para cada valor característico, un vector característico asociado es $\overline{v}_1 = (-4, 1)$ y $\overline{v}_2 = (1, 2)$, respectivamente.

Obsérvese que $(\overline{v}_1 \mid \overline{v}_2) \neq 0$ con el producto escalar ordinario y $(\overline{v}_1 \mid \overline{v}_2) = 0$ con el producto interno definido en (6); esto es, $\overline{v}_1$ y $\overline{v}_2$ son ortogonales con este último producto interna. Esta es una propiedad de los ope-

radores hermitianos: vectores característicos asociados a valores característicos distintos son ortogonales.

Por consiguiente, una matriz diagonal asociada a G *es:*

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{D}$ *es la matriz asociada a* G *referida a la base* A = {(-4,1), (1,2)} *o a cualquier base que contenga vectores múltiplos de éstos.*

De acuerdo con el teorema de diagonalización:

$$\mathcal{D} = P_1^{-1} M_E^E(G) P_1 = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Para el caso de la matriz $M_B^B(G)$, *su matriz diagonalizadora* P_2 *no se obtiene directamente de los vectores característicos, sino que* P_2 , *al ser la matriz de transición de la base* A *normalizada* $\{ \frac{1}{9}(-4,1), \frac{1}{9}(1,2) \}$, *a la base* B , *se obtiene como*

$$\frac{1}{9}(-4,1) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{9\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{9}\right)$$

$$\frac{1}{9}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{9\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

por lo que

$$D = P_2^{-1} M_B^B(G) P_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 81 & -18 \\ -18 & 54 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 450 & 0 \\ 0 & 225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que P_2 es más difícil de obtener que P_1. Sin embargo, como B es una base ortonormal, entonces P_2 es una matriz unitaria (en este caso ortogonal), por lo que el cálculo de la matriz P_2^{-1} es más sencillo ya que $P_2^{-1} = P_2^T$

De los ejemplos anteriores podemos concluir que:

1. Un operador lineal puede ser hermitiano para un producto interno y puede no ser hermitiano para otros productos internos.

2. Dado un operador hermitiano (simétrico), aseguramos que su matriz asociada será hermitiana (simétrica), si la base o las bases a la que está referida es o son ortonormal (es) respecto al producto interno usado.

3. Basta que un operador lineal sea hermitiano respecto a algún producto interno, para que sea diagonalizable, sus valores característicos sean números reales y, si éstos son distintos, sus vectores característicos son ortogonales.

4. Dados un operador hermitiano (simétrico) y una matriz asociada a él referida a una base ortonormal, entonces la matriz diagonalizadora es una matriz unitaria (ortogonal).

Te exhortamos a que realices las siguientes actividades que complementarán tu aprendizaje de lo tratado hasta aquí.

I) Para el operador T definido en esta sección por la expresión (4), verifica que:

a) Sus valores característicos son reales y éstos son ____.

b) Sus vectores característicos asociados a valores distintos son ortogonales: ____

c) Una matriz diagonalizadora P formada por vectores característicos es:

$$P = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

d) $D = P^{-1}M_E^E(T)P$, donde D es una matriz diagonal asociada a T y $M_E^E(T)$ es la matriz asociada a T referida a la base canónica E de $\mathbb{R}^2$.

$$P^{-1}M_E^E(T)P = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

II) Supongamos que para el operador T definido en (4) se establece el producto interno

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = ((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

Respecto a este producto interno,

a) Los valores característicos de T son ________________________ y sus respectivos vectores característicos asociados son ____.

b) A partir de la base $\{(1,1), (1,2)\}$, obtén una base ortonormal B usando el proceso de Gram-Schmidt. El resultado es B = ____.

Como los valores característicos son distintos, entonces los vectores característicos asociados son linealmente independientes y, por lo tanto S es un operador diagonalizable. Pero, ¿es S hermitiano, y si lo es, para qué producto interno? Se observa que no lo es respecto al producto escalar ordinario. Determina el conjunto de productos internos para el cual S es hermitiano.

El resultado es ______________________________

En la página 288 obtuvimos la matriz $M_B^B(G)$ que es una matriz asociada al operador hermitiano G definido por la expresión (5). La matriz $M_B^B(G)$ resultó hermitiana (simétrica) porque la base B a la cual está referida es ortonormal. En la página 289 se obtuvo la matriz

$$D = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

que es otra matriz asociada al mismo operador G. Esta matriz resultó diagonal porque a la base a la cual está referida está formada por vectores característicos de G. Este resultado es siempre válido para los operadores hermitianos y está establecido en el siguiente teorema conocido como el teorema espectral.

Teorema espectral. Sea $T : V \to V$ un operador hermitiano donde V es un espacio real o complejo con producto interno de dimensión finita n, ó un operador antihermitiano donde V es un espacio complejo con producto interno de dimensión finita n. Entonces existe una base ortonormal B del espacio V construida con los vectores característicos de T y la matriz $M_B^B(T)$ es una matriz diagonal formada por los valores característicos de T

No hay unanimidad, entre los que escriben sobre este tema, para enunciar el teorema espectral. Incluso, algunos le dan hasta otro nombre: teorema de los ejes principales.

El término o expresión "teorema espectral" o "descomposición espectral" -como le llaman algunos- proviene en gran medida de las aplicaciones a la física, en donde al conjunto de los valores característicos se le define como el espectro de un operador lineal.

Existen otros tipos importantes de operadores lineales definidos en espacios con producto interno. Uno de ellos es el operador unitario.

Definición.- Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ con un producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal. Entonces se dice que T es un operador unitario, respecto al producto interno definido, si para todo $\bar{u}, \bar{v} \varepsilon V$ se cumple que

$$(T(\bar{u}) \mid T(\bar{v})) = (\bar{u} \mid \bar{v}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (7)$$

Si el espacio V está definido sobre los reales $\mathbb{R}$ es más común decir que T es un operador ortogonal cuando se satisface la ecuación (7).

Los operadores ortogonales y unitarios tienen propiedades muy interesantes e importantes. Algunas de ellas son las siguientes:

a) Si T es un operador unitario (ortogonal), entonces T preserva las normas, es decir,

$$\| T(\bar{v}) \| = \| \bar{v} \| , \quad \forall \, \bar{v} \varepsilon V$$

b) Los valores característicos de un operador unitario (ortogonal) tienen módulo uno.

c) La matriz asociada a un operador unitario (ortogonal) referida a una base ortonormal tiene, entre otras, las siguientes propiedades:

- La suma de los productos de los elementos de cualquier fila (renglón o columna) por los conjugados de los correspondientes elementos de cualquier otra fila paralela es igual a cero.

- La suma de los cuadrados de los módulos de los elementos de cualquier fila es igual a uno.

Si $T : V \rightarrow V$ es un operador unitario, definido sobre $\mathbb{C}$, entonces V tiene una base ortonormal formada con vectores característicos de T

Lo anterior no es sino la versión del teorema espectral para operadores unitarios, y como un corolario se tiene que los operadores unitarios se pueden representar mediante matrices diagonales.

Si el espacio V está definido sobre los reales y T es ortogonal, entonces sus vectores característicos pueden ser complejos y por lo tanto no forman en general una base de V. En consecuencia, los operadores ortogonales en general no se pueden diagonalizar. Sin embargo, existe una representación de estos operadores que es "casi" diagonal, como puede verse en el siguiente teorema.

Teorema.- Sea V un espacio vectorial sobre los reales de dimensión finita mayor que cero y en el cual está definido un producto interno.
Sea $T : V \to V$ un operador ortogonal. Entonces existe una base de V tal que la matriz M, que representa a T respecto a esta base, consta de bloques

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_r \end{bmatrix}$$

donde cada uno de los bloques B_i es una matriz de 1×1 o una matriz de 2×2 de los siguientes tipos:

a) $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

A fin de reforzar lo estudiado en esta sección y ejercitarte en los conceptos relacionados con los presentados aquí, te sugerimos resuelvas los siguientes ejercicios.

E J E R C I C I O S   P R O P U E S T O S

(Continuación)

31.- Determina si el operador lineal $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $S(x,y) = (2y, 2x)$ es un operador hermitiano (simétrico),

a) Con el producto interno

$$((v_1,v_2) \mid (w_1,w_2)) = v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + 2v_2w_2$$

b) Con el producto escalar ordinario.

32.- Determina si el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (-y,x)$ es un operador antihermitiano (antisimétrico),

a) Con el producto interno

$$((v_1,v_2) \mid (w_1,w_2)) = v_1w_1 + 3(v_1w_2 + v_2w_1) + v_2w_2$$

b) Con el producto escalar ordinario.

33.- Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ un operador lineal definido por $T(a + bi,\ c + di) = (-(b + d) + (a - c)i,\ \ -b + ai)$

Determina si T es un operador antihermitiano con el producto interno

$$(\bar{v} \mid \bar{w}) = (a_1 + b_1i)\overline{(a_2 + b_2i)} + (c_1 + d_1i)\overline{(c_2 + d_2i)}, \quad \forall\ \bar{v},\bar{w} \in \mathbb{C}^2$$

donde $\bar{v} = (a_1 + b_1i,\ c_1 + d_1i)$ y $\bar{w} = (a_2 + b_2i,\ c_2 + d_2i)$

34.- Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $0 \le x \le 1$, y sea $T : V \to V$ un operador lineal definido por $T(f(x)) = x\,f(x),\ \ \forall\ f(x) \in V$.

Determina si el operador T es un operador hermitiano con el producto interno

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

35.- Sea el espacio vectorial de polinomios $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ sobre el campo $\mathbb{R}$, y sea $T : P \to P$ un operador lineal definido por

$$T(ax + b) = (2a - 2b)x + (5b - 2a), \quad \forall (ax + b) \in P$$

Determina si el operador T es hermitiano con el producto interno

$$(f \mid g) = f(0)g(0) + f'(0)g'(0), \quad \forall\, f, g \in P$$

36.- Demuestra que los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos de un operador hermitiano son ortogonales.

37.- Sean S y T operadores hermitianos. Demuestra que el operador $(S + T)$ también es hermitiano.

38.- Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (-2x + 5y,\ 5x + 4y)$$

Considerando el producto interno como el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^2$,

a) Comprueba que T es un operador simétrico

b) Verifica que la representación matricial de T respecto a la base $\{(1,0),\ (0,1)\}$ es una matriz simétrica.

c) Verifica que la representación matricial de T respecto a la base $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \right\}$ es también una matriz simétrica.

d) Verifica que la representación matricial de T respecto a la base $\{(2,-1),\ (2,4)\}$ no es una matriz simétrica.

e) ¿Qué característica debe tener una base de $\mathbb{R}^2$ para que la matriz asociada del operador simétrico respecto a dicha base sea una matriz simétrica?

39.- En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ se define el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ por la siguiente regla de correspondencia:

$$T(x,y) = (2x + (2 + i)y,\ (2 - i)x), \quad \forall\ x,y \in \mathbb{C}$$

a) Demuestra que el operador T es hermitiano para el producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^2$

b) Verifica que $\{(1,0),\ (0,i)\}$ es una base ortonormal para el producto escalar ordinario en $\mathbb{C}^2$

c) Obtén la matriz asociada al operador T respecto a la base del inciso anterior y comprueba que dicha matriz es hermitiana.

d) En la página 283 demostramos que los valores característicos de un operador hermitiano son reales. Comprueba esta propiedad para el operador hermitiano de este ejercicio.

40.- a) Demuestra que los valores característicos de un operador antihermitiano son imaginarios puros.

b) Demuestra que el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x,y,z) = (4y + z,\ -4x - 2z,\ -x + 2y)$$

es un operador antihermitiano para el producto escalar ordinario en $\mathbb{R}^3$.

c) Obtén los valores característicos de T y observa que dichos valores son imaginarios, de acuerdo con lo que establece el inciso a).

41.- Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar ordinario.

Para el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x,y) = (2x + 2y,\ 2x - y),$$

a) Verifica que se cumple la hipótesis del teorema espectral, es decir, T es hermitiano.

b) Obtén la representación matricial diagonal del operador y la base cuya existencia garantiza el teorema.

42.- Sea el operador lineal $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$S(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x + z), \;\; y, \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + z) \right)$$

Determina si S es un operador unitario (ortogonal) con el producto escalar ordinario.

43.- Demuestra que si λ es un valor característico de un operador unitario, entonces λ tiene módulo uno, es decir, $| \lambda | = 1$.

TAZAS

44.- Sea el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por:

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{6}} - \frac{z}{\sqrt{2}}, \;\; \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2y}{\sqrt{6}}, \;\; \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right)$$

a) Demuestra que T es un operador ortogonal con el producto escalar ordinario.

b) Obtén la matriz asociada al operador T referida a la base ortonormal $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

c) Comprueba, para la matriz obtenida en el inciso anterior, las propiedades enunciadas en el inciso c), página 294.

45.- Sean S y T operadores lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definidos por las siguientes reglas de correspondencia:

$$S(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} y, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y \right)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{1}{5}(3x + 4y), \quad \frac{1}{5}(4x - 3y) \right)$$

a) Demuestra que los operadores S y T son ortogonales con el producto escalar ordinario.

b) Demuestra que el operador S no es diagonalizable y que el operador T sí es diagonalizable.

c) En la página 295 enunciamos un teorema relativo a los operadores ortogonales. Obtén la representación matricial de S y T, verificando que tiene la forma que indica el teorema, y obtén también la base cuya existencia garantiza el mismo teorema.

Ejercicios Adicionales

1.- En el espacio $\mathbb{R}^2$ se define la siguiente función

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = x_1y_1 - ax_1y_2 - 4x_2y_1 + bx_2y_2$$

para todo $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ y $a, b \in \mathbb{R}$

a) Si $b = 20$, ¿para qué valores de a la función es un producto interno?

b) Si $a = 4$, ¿para qué valores de b la función es un producto interno?

2.- En $\mathbb{R}^3$ se define la función

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + a_3x_3y_3 - a_2x_2y_3 - a_2x_3y_2$$

donde $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3$

Determina los valores a_1, a_2, a_3, todos reales, para los cuales la función es un producto interno.

3.- Sea V un espacio con producto interno sobre $\mathbb{C}$. Demuestra que:

a) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = 0 \iff (\overline{x} + \overline{y} \mid \overline{x} + \overline{y}) = (\overline{x} \mid \overline{x}) + (\overline{y} \mid \overline{y})$

b) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = 0 \iff (\alpha_1\overline{x} + \alpha_2\overline{y} \mid \alpha_1\overline{x} + \alpha_2\overline{y}) \geq (\overline{x} \mid \overline{x})$

donde $\overline{x}, \overline{y} \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$

4.- Supongamos que en el espacio vectorial complejo V se establece que la función $(\cdot \mid \cdot)\ V \times V \to \mathbb{C}$ es un "producto interno" si:

I) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = (\overline{y} \mid \overline{x})$

II) $(\alpha\overline{x} + \overline{y} \mid \overline{z}) = \alpha(\overline{x} \mid \overline{z}) + (\overline{y} \mid \overline{z})$

III) $(\overline{x} \mid \overline{x}) > 0$, si $\overline{x} \neq \overline{0}$, $\forall\, \overline{x},\overline{y} \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$

Demuestra que este conjunto de propiedades conduce a contradicciones, esto es, es inconsistente.

5.- Demuestra que si $|(\overline{u} \mid \overline{v})| = \|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|$ entonces $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son linealmente dependientes.

6.- Sean $\overline{x}$, $\overline{y}$ vectores de un espacio con producto interno. Demuestra que $\|\overline{x} + \overline{y}\| = \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ si y sólo si $\overline{y} = \lambda\overline{x}$, donde $\lambda > 0$.

7.- En el espacio $\mathbb{C}^n$ se definen las siguientes funciones, donde $\overline{w},\overline{z} \in \mathbb{C}^n$:

a) $(\overline{w} \mid \overline{z}) = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i$

b) $(\overline{w} \mid \overline{z}) = \sum_{k=1}^{n} (k)^n w_k \overline{z}_k$, donde $\overline{z}_k$ es el conjugado de z_k

c) $(\overline{w} \mid \overline{z}) = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{z}_i$

(Esta función es llamada "producto escalar complejo").

d) $(\overline{w} \mid \overline{z}) = \sum_{i=1}^{n} |w_i|\,|z_i|$

Determina cuáles funciones son producto interno.

8.- En el espacio vectorial M de matrices cuadradas de orden n con elementos reales, se definen las siguientes funciones, donde $A,B \in M$:

a) $f(A,B) = (A \mid B) = \det(AB)$

b) $g(A,B) = (A \mid B) = tr(B^T A)$

c) $h(A,B) = (A \mid B) = tr(AFB^T)$, donde los elementos f_{ij} de F son tales que $f_{ij} = 1$, $\forall i,j$ y F es de orden n.

Determina si cada una de las funciones anteriores definen un producto interno en M ; en caso negativo, indica qué propiedades no cumplen.

9.- En el espacio P de polinomios de grado menor o igual a n se define el siguiente producto interno:

$$(f \mid g) = \sum_{k=0}^{n} f(k)\ g(k) \ , \qquad \forall\ f(x), g(x) \in P$$

a) Si $n = 2$, $f(x) = 2x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - x + 2$, calcula $(f \mid g)$

b) Demuestra que, efectivamente, se trata de un producto interno.

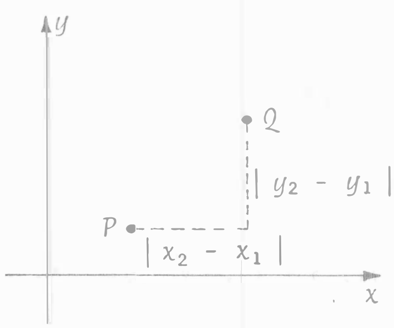
10.- En el espacio vectorial F de funciones continuas reales en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ se define el siguiente producto interno

$$(f \mid g) = \int_0^1 e^{-x}\ f(x)\ g(x)\ dx \ , \qquad \forall\ f, g \in F$$

a) Calcula $(f \mid g)$ y $(g \mid g)$ si $f(x) = 2x$ y $g(x) = -3$

b) Obtén una función $g(x)$ de F , no polinomial, tal que $(f \mid g) = 0$, donde $f(x) = e^{-x}$

11.- Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ puntos del plano xy . Definamos la distancia entre los puntos P y Q por una función d de la siguiente manera:



$$d(P, Q) = |\ x_2 - x_1\ | + |\ y_2 - y_1\ |$$

Determina si la función

$$d(P, Q) = (P \mid Q) = |\ x_2 - x_1\ | + |\ y_2 - y_1\ |$$

es un producto interno.

12.- Sea el espacio vectorial $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$ sobre el campo de los reales.

a) Demuestra que la función

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) = a_1a_2 + 2b_1b_2 + 3c_1c_2 + d_1d_2$$

es un producto interno.

b) Calcula el ángulo entre las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

13.- En el espacio $\mathbb{R}^2$ se define el producto interno

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2 , \qquad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$. Obtén el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que forman un ángulo de 180° con el vector $\bar{v} = (1, 0)$.

14.- Considera el "producto escalar ordinario complejo" en el espacio $\mathbb{C}^2$, es decir,

$$(\bar{x} \mid \bar{y}) = \sum_{i=1}^{2} x_i \bar{y}_i \qquad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{C}^2$$

donde $\bar{y}_i$ es el conjugado de y_i, $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$.

Sean los vectores de $\mathbb{C}^2$, $\bar{u} = (-1 + 4i, 3 - i)$, $\bar{v} = (2 - i, 2)$.

a) Calcula el ángulo entre los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

b) Determina si los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ortogonales.

15.- Sea $P = \{at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ cuyo producto interno está definido como

$$(p \mid q) = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt\ , \qquad \forall\ p,q \varepsilon P$$

Obtén un vector f_3 que sea ortogonal a los vectores $f_1(t) = t^2 - t$ y $f_2(t) = t - 1$.

16.- Sea W el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a tres con el producto interno

$$(p \mid q) = \int_{-1}^1 p(x)\, q(x)\, dx\ , \qquad \forall\ p,q \varepsilon W$$

Obtén una base ortonormal de W a partir de la base $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$, utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

17.- a) Obtén una base ortonormal, considerando el producto escalar ordinario, para el siguiente subespacio de IR^3 , $W = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\}$

b) ¿Es $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$ una base ortonormal de W ? ¿Por qué?

18.- Sea M el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos sobre IR en el que se define el producto interno

$$(A \mid B) = tr(B^T A), \qquad \forall\ A,B \varepsilon M$$

Obtén una base ortonormal de M a partir de la base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

19.- Sea $\{\ 1,\ x^2\ \}$ un conjunto generador del espacio de polinomios V en el cual se define el producto interno

$$(f \mid g) = \int_0^{\pi} f(x)\, g(x)\, \text{sen}\ x\, dx\ , \qquad \forall\ f,g \varepsilon V$$

Obtén una base ortogonal de V a partir del conjunto dado.

20.- *Obtén dos bases* $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ *y* $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *tales que*

$$(\overline{v}_i \mid \overline{e}_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

a) *con el producto escalar ordinario*

b) *con el producto interno*

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$$

donde $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$

21.- *Sean los siguientes productos internos en el espacio* $\mathbb{R}^2$

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = ((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2 \qquad (\alpha)$$

$$(\overline{x} \mid \overline{y}) = ((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = [x_1 \quad y_1] \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (\beta)$$

y el producto escalar ordinario.

a) *Verifica que la base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *es ortogonal con los tres productos internos mencionados pero sólo es ortonormal con el producto escalar ordinario.*

b) *Verifica que la base de* $\mathbb{R}^2$, $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ *es ortogonal con los tres productos internos pero sólo es ortonormal con el producto interno definido en* (α).

c) *Verifica que la base de* $\mathbb{R}^2$, $\left\{ \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\}$ *es ortogonal con los tres productos internos mencionados pero sólo es ortonormal con el producto interno definido en* (β).

22.- *Define el producto interno en el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$ *tal que el conjunto* $\{(1, 0), (1, 1)\}$ *sea una base ortonormal de dicho espacio.*

23.- Sean los vectores del espacio $\mathbb{R}^2$, $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$ y $\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$

a) Demuestra que el conjunto $\{\bar{v}, \bar{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

b) Obtén las normas de $\bar{v}$ y $\bar{w}$ considerando el producto escalar ordinario.

c) ¿Es $\{\bar{v}, \bar{w}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar ordinario? Justifica tu respuesta.

24.- En el espacio $P = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ se define el siguiente producto interno:

$$(p(x) \mid q(x)) = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx, \qquad \forall\, p(x), q(x) \in P$$

a) Determina el ángulo que forman entre sí los vectores

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{\sqrt{180}}{6}(6x^2 - 6x + 1) \quad y \quad h(x) = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

b) Calcula la norma de cada uno de los vectores del inciso anterior.

c) ¿Constituyen los tres vectores del inciso a) una base ortonormal del espacio P? ¿Por qué?

25.- Determina el producto interno en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el cual el conjunto $\{(0, 2, 2), (2, 0, 2), (2, 2, 0)\}$ es una base ortonormal de dicho espacio.

26.- Determina el producto interno en el espacio vectorial de polinomios $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ con el cual el conjunto $\{-x - 1, -x\}$ es una base ortonormal de dicho espacio.

27.- En el espacio vectorial de las matrices $M = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ se define el siguiente producto interno:

$$(A \mid B) = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) = a_1 b_1 - a_1 b_2 - b_1 a_2 + \frac{65}{64} a_2 b_2$$

a) Calcula el ángulo que forman las matrices $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ con el producto interno definido.

b) ¿Constituyen las matrices del inciso anterior una base ortonormal de M con el producto interno definido? ¿Por qué?

28.- Sea la función $|| \cdot || : M \to \mathbb{R}$, donde M es el espacio vectorial del ejercicio anterior, definida por

$$\left|\left| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \right|\right| = |x| + |y|$$

donde $|x|$ y $|y|$ indican valores absolutos.

a) Demuestra, utilizando la definición general de norma de la página 262, que la función es una norma.

b) Con esta norma, verifica las propiedades $|| \bar{v} - \bar{w} || = || \bar{w} - \bar{v} ||$ y $\left| \, || \bar{v} || - || \bar{w} || \, \right| \leq || \bar{v} - \bar{w} ||$ con las matrices del inciso a) del ejercicio anterior.

29.- El conjunto $B = \{(3, -3), (1, 1)\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

a) Determina si la base B es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$

I) Con el producto escalar ordinario.

II) Con el producto interno siguiente:

$$((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = \frac{5}{18}(x_1x_2 + y_1y_2) + \frac{2}{9}(x_1y_2 + x_2y_1)$$

b) Determina si la base B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$

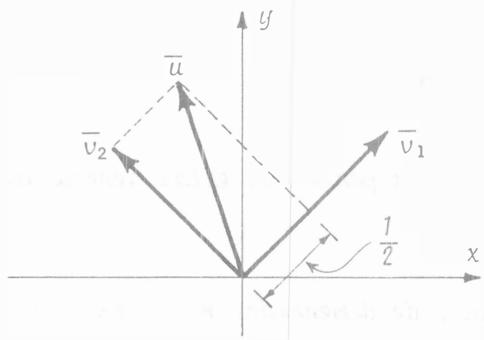
I) Con el producto escalar ordinario.

II) Con el producto interno definido en II) del inciso a).

c) *Sean los vectores de* $\mathbb{R}^2$, $\overline{v} = (4, -20)$ *y* $\overline{w} = (0, -12)$. *Verifica que, con el producto interno definido en II) del inciso* a), *se tiene que* $(\overline{v} \mid \overline{w}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$, *donde* $(\alpha_1, \alpha_2) = (\overline{v})_B$ *y* $(\beta_1, \beta_2) = (\overline{w})_B$.

d) *¿Se verifica también con el producto escalar ordinario que* $\overline{v} \cdot \overline{w} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$? *¿Por qué?*

30.- *La figura muestra dos vectores* $\overline{v}_1$ *y* $\overline{v}_2$ *que constituyen una base ortonormal de* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar ordinario. La figura muestra, además, las componentes escalares del vector* $\overline{u}$ *sobre los vectores* $\overline{v}_1$ *y* $\overline{v}_2$



a) *Con estos datos, obtén las coordenadas del vector* $\overline{u}$ *en la base*

$$B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$$

b) *Si las coordenadas de un vector* $\overline{w}$ *en la base* $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ *son* 2 *y* -1, *es decir* $(\overline{w})_B = (2, -1)$, *calcula el producto escalar* $\overline{u} \cdot \overline{w}$ (Para recordar lo referente a componentes escalares consulta "Geometría Analítica" de E. Nolasco, R. Solís, A. Victoria, editado por la UNAM, páginas 35 y 36).

31.- *Sean el conjunto* $A = \{\phi_n(t) \mid \phi_n(t) = e^{jnw_\circ t}, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}\}$ *y el producto interno*

$$(f \mid g) = \int_0^{T_\circ} f(t)\,\overline{g}(t)\,dt, \qquad \text{donde} \qquad T_\circ = \frac{2\pi}{\omega_\circ}$$

Nota: En este ejercicio j representa la unidad imaginaria, es decir, $j = \sqrt{-1}$ y $\overline{g}(t)$ es el conjugado de $g(t)$.

a) *Demuestra que los vectores del conjunto* A *son ortogonales entre sí.*

b) *Obtén la norma de los vectores del conjunto* A .

c) *Escribe la función* sen t *como combinación lineal de los vectores del conjunto* A .

32.- Sea el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n con el producto interno

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$$

Una base ortogonal de este espacio está constituida por los polinomios de Legendre, $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ donde $P_0 = 1$ y $P_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!} \dfrac{d^k}{dx^k}\left[(x^2 - 1)\right]^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$

a) Escribe los polinomios de Legendre para $k = 1,2,3$

b) Demuestra que $(P_0 \mid P_k) = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

c) Obtén la norma de P_0, P_1 y P_2, y a partir de ellas genera una fórmula para la norma de P_k.

33.- Sea V un espacio con producto interno, de dimensión n, definido sobre el campo K, y sea $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ un conjunto de vectores de V. Se llama matriz de Gram de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ a la matriz

$$\begin{bmatrix} (\bar{v}_1 \mid \bar{v}_1) & (\bar{v}_1 \mid \bar{v}_2) & \cdots & (\bar{v}_1 \mid \bar{v}_n) \\ (\bar{v}_2 \mid \bar{v}_1) & (\bar{v}_2 \mid \bar{v}_2) & \cdots & (\bar{v}_2 \mid \bar{v}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\bar{v}_n \mid \bar{v}_1) & (\bar{v}_n \mid \bar{v}_2) & \cdots & (\bar{v}_n \mid \bar{v}_n) \end{bmatrix}$$

y a su determinante se le llama determinante de Gram o grammiano, denotado $g(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$.

Escribe una V o una F en los siguientes paréntesis si la afirmación correspondiente es verdadera o falsa, respectivamente.

( ) La matriz de Gram es una matriz simétrica.

( ) Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es un conjunto ortogonal del espacio V, entonces su matriz de Gram es diagonal y su grammiano positivo.

( ) *Si* $\overline{v}_1 = \overline{0}$, *entonces la matriz de Gram de* $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ *es singular.*

( ) *Si* $g(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n) = 4$, *entonces* $g(2\overline{v}_1, 2\overline{v}_2, \ldots, 2\overline{v}_n) = 4 \cdot 2^n$

( ) *Si* $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ *es un conjunto ortonormal de* V , *entonces el grammiano es igual a la unidad.*

( ) *Si* $\overline{v}_2 = 2\overline{v}_1$, *entonces* $g(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n)$ *es nulo.*

34.- *Con el producto interno en* $\mathbb{R}^2$ *definido por*

$$((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 ,$$

ortogonaliza la base $A = \{(1, 0), (2, 1)\}$ *y verifica que los grammianos de la base ortogonalizada y de la base* A *son iguales.*

35.- *Sea* $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ *una base ortonormal de un espacio real con producto interno, y sean* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *y* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ *los vectores de coordenadas de* $\overline{v}$ *y* $\overline{w}$, *respectivamente, en la base* B. *Demuestra que*

$$(\overline{v} \mid \overline{w}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

36.- *Sean* $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)$ *los polinomios de Legendre*[6] *normalizados, es decir,* $\| P_0(t) \| = \| P_1(t) \| = \ldots = \| P_n(t) \| = 1$.

Sea $B = \{P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)\}$ *una base del espacio de los polinomios de grado menor o igual a* n *con producto interno*

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt .$$

Demuestra que si el vector de coordenadas en la base B *de un polinomio* $q(t)$ *de grado menor o igual a* n *es* $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, *entonces*

$$\alpha_i = \int_{-1}^{1} q(t)\, P_i(t)\, dt , \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

[6] En el ejercicio 32, página 310 se definieron los polinomios de Legendre.

37.- *Determina cuáles de los siguientes operadores lineales de* $\mathbb{R}^2$ *en* $\mathbb{R}^2$ *son simétricos con el producto escalar ordinario.*

$$T_1(x\ ,\ y) = (3x,\ 4y)$$

$$T_2(x\ ,\ y) = (2x - y,\ x + 2y)$$

$$T_3(x\ ,\ y) = (-y,\ 4y - x)$$

38.- a) *Demuestra que el operador lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $T(x,\ y) = (2x,\ x)$ *es un operador simétrico con el producto interno siguiente:*

$$((x_1,\ y_1) \mid (x_2,\ y_2)) = x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$$

b) *Obtén la matriz* M_1 *asociada al operador* T *referida a la base canónica.*

c) *Obtén la matriz* M_2 *asociada al operador* T *referida a la base* $A = \{(1,\ 1),\ (1,\ 0)\}$.

d) *Obtén la matriz* M_3 *asociada al operador* T *referida a la base*

$$B = \left\{ \left(\sqrt{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2} \right),\ \left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

e) *De las matrices* M_1, M_2 *y* M_3 *obtenidas en los incisos anteriores, ¿cuáles son simétricas?*

f) *¿Qué característica, en relación al producto interno, tienen las bases a las cuales están referidas las matrices* M_1, M_2 *y* M_3 , *para que estas matrices sean o no sean simétricas?*

39.- *En el espacio vectorial de polinomios* $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ *se definen el operador lineal* $T : P \to P$ *y la función* $(\cdot \mid \cdot) : P \times P \to \mathbb{R}$ *de la siguiente manera:*

$$T(ax + b) = bx + b$$

$$(a_1x + b_1 \mid a_2x + b_2) = \frac{1}{9}\, a_1(a_2 - b_2) + \frac{1}{9}\, b_1 \left(\frac{13}{4}\, b_2 - a_2 \right)$$

a) *Demuestra que el operador* T *es un operador simétrico con el producto interno definido.*

b) *Sean las bases* $B_1 = \{x, 1\}$ *y* $B_2 = \{3x, 2x + 2\}$ *del espacio vectorial* P .

Obtén las matrices asociadas $M(T)^{B_1}_{B_1}$ *y* $M(T)^{B_2}_{B_2}$, *verificando que la matriz que está asociada a la base que es ortonormal con el producto interno dado es una matriz simétrica.*

40.- *En el espacio* $\mathbb{R}^2$ *se define el siguiente producto interno:*

$$((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$$

En el mismo espacio se define también el operador lineal

$$T(x, y) = (-y, y - x)$$

a) *Comprueba que la matriz asociada a* T *referida a la base canónica es simétrica.*

b) *De acuerdo con el inciso anterior, ¿se puede afirmar que* T *es un operador simétrico con el producto interno definido? ¿Por qué?*

c) *Comprueba que la matriz asociada a* T *referida a la base* $\{(1, 1), (1, 0)\}$ *es simétrica.*

d) *De acuerdo con el inciso anterior, ¿se puede afirmar que* T *es un operador simétrico con el producto interno definido? ¿Por qué?*

e) *Utiliza la definición de operador simétrico para determinar si* T *es simétrico con el producto interno definido.*

41.- *En el espacio* $\mathbb{R}^2$ *se define el siguiente producto interno*

$$((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = 5x_1x_2 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + 4y_1y_2$$

a) *Demuestra que el operador* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por*

$$T(x, y) = \left(2y, \frac{1}{2}x + 2y\right)$$

es un operador simétrico con el producto interno definido.

b) Determina si la matriz asociada a T referida a la base

$$B = \{(0, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$$

es una matriz simétrica.

c) Si la matriz $M_B^B(T)$ obtenida en el inciso anterior no es simétrica, realiza -en la base B-, las modificaciones convenientes para tener una base B' a fin de que $M_{B'}^{B'}(T)$ sí sea una matriz simétrica.

d) ¿Qué característica tiene la base B' del inciso anterior para que la matriz asociada a T referida a esa base sea simétrica?

42.- Se definen en el espacio IR^2 un operador lineal T y un producto interno de la siguiente manera:

$$T(x, y) = (0, 4x + y)$$

$$((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = 17x_1x_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + y_1y_2$$

a) Verifica que se cumple la hipótesis del teorema espectral, es decir, T es un operador simétrico (hermitiano).

b) Demuestra que $B = \{(0, 1), (1, -4)\}$ es una base cuya existencia garantiza el teorema; es decir, B es una base ortonormal de IR^2 construida con vectores característicos de T.

c) Comprueba, de acuerdo con el teorema espectral, que $M_B^B(T)$ es una matriz diagonal formada por los valores característicos del operador T.

43.- a) Determina cuáles de los siguientes operadores lineales son antisimétricos con el producto escalar ordinario

$$T_1 : IR^2 \to IR^2, \quad T_1(x, y) = (-3y, 3x + 3y)$$

$$T_2 : IR^2 \to IR^2, \quad T_2(x, y) = (-3y, 3x)$$

$$T_3 : IR^3 \to IR^3, \quad T_3(x, y, z) = (y, 2z - x, -2y)$$

b) Para los operadores antisimétricos obtenidos en el inciso anterior, verifica que sus valores característicos son imaginarios puros.

44.- En el espacio $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ se define el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ de la siguiente manera:

$$T(a + bi,\ c + di) = (d - ci,\ -b + ai)$$

a) Demuestra que el operador T es hermitiano con el producto escalar ordinario definido en $\mathbb{C}$

b) verifica que, al ser T hermitiano, sus valores característicos son reales.

45.- a) Para el operador T del ejercicio anterior se tiene que, de acuerdo al teorema espectral, existe una base ortonormal B del espacio $\mathbb{C}^2$ construida con vectores característicos de T. Obtén dicha base B.

b) Comprueba que $M_B^B(T)$ es una matriz diagonal formada por los valores característicos obtenidos en el inciso b) del ejercicio 44.

c) Obtén una matriz diagonalizadora P construida con los vectores de la base B, y verifica que es una matriz unitaria.

d) Obtén la matriz asociada al operador T referida a la base

$$A = \{(1 + i,\ 0),\ (0,\ 1 + i)\}$$

e) Si $M_A^A(T)$ es la matriz obtenida en el inciso anterior, verifica que $M_B^B(T) = P^* M_A^A(T) P$, donde P^* es la transpuesta-conjugada de la matriz P obtenida en el inciso c).

46.- Sea el operador lineal $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$T(a + bi,\ c + di) = ((2a - d) + (2b + c)i,\ (b + 2c) + (2d - a)i),$$

donde $\mathbb{C}^2$ está definido sobre el campo $\mathbb{C}$.

a) Obtén la representación matricial del operador T referida a la base $\{(1+i,\ 0),\ (0,\ 1+i)\}$.

b) De acuerdo a la matriz obtenida en el inciso anterior, podemos afirmar que T es un operador hermitiano con el producto escalar ordinario definido en $\mathbb{C}$. ¿Por qué?

c) Si T es hermitiano, entonces el teorema espectral garantiza la existencia de una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ construida con vectores característicos de T . Obtén esta base.

d) Si B es la base obtenida en el inciso anterior, verifica que $M_B^B(T)$ es una matriz diagonal formada por los valores característicos del operador T .

47.- Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones complejas de variable real en el intervalo $[-a,\ a]$ tal que

$$\int_{-a}^{a} \bar{f}_1(x)\ f_2(x)\ dx = \left[\ \bar{f}_1(x)\ f_2(x)\ \right]_{-a}^{a} = 0$$

es decir,

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid x \varepsilon [-a,\ a],\ \int_{-a}^{a} \bar{f}_1(x)\ f_2(x)\ dx = \left[\ \bar{f}_1(x)\ f_2(x)\ \right]_{-a}^{a} = 0\}$$

Determina si el operador $P : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definido por $P(f) = i\dfrac{d}{dx} f$, $\forall\ f \varepsilon \mathcal{F}$ es un operador hermitiano con el producto interno

$$(f \mid g) = \int_{-a}^{a} \bar{f}(x)\ g(x)\ dx$$

48.- Sea F el conjunto de todas las funciones reales continuas en el intervalo $[a,\ b]$ tal que, para una función fija $p(x) \varepsilon F$,

$$p(b)\ f(b) = p(a)\ f(a) = 0, \qquad \forall\ f(x) \varepsilon F$$

Determina si el operador de Sturm - Liouville $T : F \to F$ definido por $T(f) = (pf')' + qf$, donde p y q son funciones fijas de F , es un opera-

dor hermitiano con el producto interno

$$(f \mid g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

Nota: f' *es la derivada primera de* f *con respecto a* x *, es decir,* $f' = \frac{df}{dx}$

Sugerencia para obtener la solución: La condición $(T(f) \mid g) = (f \mid T(g))$ exprésala como $(T(f) \mid g) - (f \mid T(g)) = 0$ y luego integra por partes.

49.- *Sea el espacio vectorial* $W = \{(0,\ 0,\ x,\ y,\ 0) \mid x, y \in \mathrm{IR}\}$ *y sea la transformación lineal* $T : W \to \mathrm{IR}^5$ *definida por*

$$T(0,\ 0,\ x,\ y,\ 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, y,\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\, x,\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\, x,\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\, y\ ,\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\, x \right)$$

Determina si T *es una transformación ortogonal con el producto escalar ordinario de* IR^5 .

50.- *De un operador ortogonal* $T : \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^3$ *con el producto escalar ordinario se sabe que* $T(\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{6}\ ,\ \sqrt{2}) = (1,\ -1,\ 3)$. *Considerando a los vectores de* IR^3 *como segmentos dirigidos en el espacio tridimensional, obtén un vector* $\overline{u}$ *de* IR^3 , *contenido en el plano* xy , *tal que* $T(\overline{u}) = (3,\ 0,\ 3)$.

51.- a) *En el ejercicio 3 del capítulo V , página 223, se pidió demostrar que la transformación que resulta de aplicar* i *es un operador lineal.*

Demuestra que dicho operador es ortogonal con el producto escalar ordinario.

b) *Demuestra que el operador lineal* $i^2 : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$ *definido en el ejercicio 10 de la página 226 es también un operador ortogonal con el producto escalar ordinario.*

c) *Comprueba que las matrices asociadas a los operadores* i *y* i^2 , *referidas a la base canónica de* IR^2 *son ambas matrices ortogonales.*

d) *Comprueba que el producto de las matrices del inciso anterior es también una matriz ortogonal.*

52.- Sean P_1 y P_3 los espacios vectoriales de polinomios de grado menor o igual a uno y tres, respectivamente.

Una transformación lineal $T : P_1 \rightarrow P_3$ se define por

$$T(ax + b) = \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}ax^2 - bx + b, \qquad \forall\ (ax + b)\varepsilon P_1$$

Determina si la transformación T es ortogonal con el producto interno

$$(f(x) \mid g(x)) = f'(1)\ g'(1) + f(0)\ g(0), \qquad \forall\ f, g\varepsilon P_1$$

53.- En el espacio vectorial D_2 de las matrices diagonales de orden dos sobre IR se define el siguiente producto interno

$$(A \mid B) = \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) = tr(AB)$$

Sea T una transformación lineal $T : D_2 \rightarrow D_4$, donde D_4 es el espacio vectorial de las matrices escalares de orden cuatro definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \end{bmatrix}, \qquad \forall \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \varepsilon D_2$$

a) Demuestra que T es una transformación ortogonal.

b) Si $\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, verifica que la transformación T preserva la norma de $\bar{v}$, es decir, $\| \bar{v} \| = \| T(\bar{v}) \|$.

c) Si $\bar{w} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, verifica que la transformación T preserva el ángulo entre $\bar{v}$ y $\bar{w}$, es decir,

$$\cos\theta = \frac{(\bar{v} \mid \bar{w})}{\| \bar{v} \|\ \| \bar{w} \|} = \frac{(T(\bar{v}) \mid T(\bar{w}))}{\| T(\bar{v}) \|\ \| T(\bar{w}) \|},$$ donde $\bar{v}$ es el vec-

tor del inciso anterior.

54.- Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por

$$T(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\ -z \right)$$

a) Demuestra que T es un operador ortogonal con el producto escalar ordinario.

b) Determina si T se puede diagonalizar.

c) Obtén la representación matricial de T, verificando que tiene la forma que indica el teorema de la página 295.

55.- En el espacio vectorial M de las matrices cuadradas de orden dos se define el operador lineal $S : M \rightarrow M$ de la siguiente manera

$$S(A) = A^T, \qquad \forall\, A \in M$$

a) Demuestra que S es un operador ortogonal con el producto interno

$$(A \mid B) = tr(B^T A), \qquad \forall\, A, B \in M$$

b) Determina si el operador S se puede diagonalizar.

c) Obtén la representación matricial de S, verificando que tiene la forma que indica el teorema de la página 295 e indica la base a la cual está referida dicha representación matricial.

56.- Es importante que el estudiante aprenda a relacionar conceptos de la matemática con problemas de la física. Tal es la finalidad del presente ejercicio. Plantearemos en términos del álgebra lineal un problema elemental de la mecánica y lo aprovecharemos para recordar también algunos conceptos de nuestro curso ya estudiados.

En términos de la mecánica, el problema es el siguiente.

La partícula de la figura 1 es la péndola de un péndulo simple y, sobre la misma, en la posición mostrada, actúan las fuerzas $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$, indicadas en la figura 2, de magnitudes 20 y 30 newtons, respectivamente.

Obtén la suma de las componentes $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ sobre los ejes x y y y sobre $\overline{e}_t$ y $\overline{e}_n$

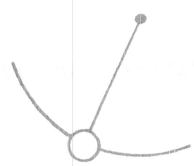


Figura 1

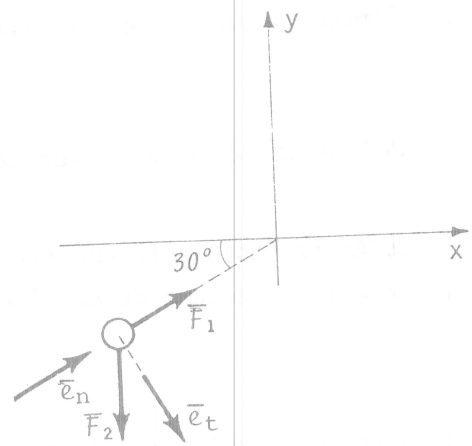


Figura 2

En términos del álgebra lineal, un planteamiento es el siguiente.

a) Si la norma (magnitud o módulo) de $\overline{F}_1$ es $\|\overline{F}_1\| = 20$ y la de $\overline{F}_2$ es $\|\overline{F}_2\| = 30$, entonces con los datos de la figura 2 se calculan las componentes escalares de los vectores $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ sobre los vectores i y j o, en otras palabras, se calculan las coordenadas de $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ en la base $B = \{i, j\}$.

De la figura se tiene, pues, que:

$\overline{F}_1$ = ____________________ i + ____________________ j ,

$\overline{F}_2$ = ____________________ i + ____________________ j ,

de donde los vectores de coordenadas de $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ en la base B son, respectivamente: $(\overline{F}_1)_B$ = ____________________ y $(\overline{F}_2)_B$ = ____________________ .

Por lo tanto, la suma de las componentes de $\overline{F}_1$ *y* $\overline{F}_2$ *sobre el eje* x *es:* ΣF_x = ________________ ; *y sobre el eje* y *es:* ΣF_y = ______________ .

b) *Considerando a* $A = \{\overline{e}_t , \overline{e}_n\}$ *como la base de un sistema curvilíneo ortogonal* (t, n) , *tenemos entonces, de acuerdo con la figura 2, que la matriz transición de la base* $B = \{i, j\}$ *a la base* $A = \{\overline{e}_t , \overline{e}_n\}$ *es*

$$M = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

c) *De la figura 3 se puede establecer una regla de transformación lineal del sistema* (x, y) *al sistema* (t, n). *Esta regla de transformación es:*

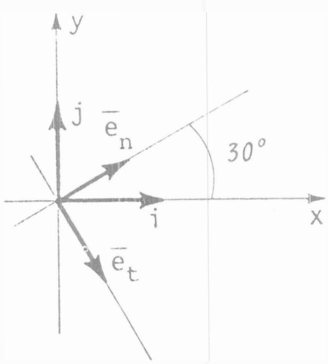


Figura 3

T(x, y) = ____________________ .

d) *De esta manera, la imagen -según T - de las componentes de* $\overline{F}_1$ *y* $\overline{F}_2$ *en la base* $B = \{i, j\}$ *son las componentes de* $\overline{F}_1$ *y* $\overline{F}_2$ *en la base* $A = \{\overline{e}_t , \overline{e}_n\}$; *es decir,* $(\Sigma F_t, \Sigma F_n) = T(\Sigma F_x, \Sigma F_y)$ = ____________________ ; *por lo tanto,* ΣF_t = ______________ *y* ΣF_n = ________________ .

e) *Demuestra que* T , *definido en el inciso* c) , *es un operador ortogonal con el producto escalar ordinario.*

f) *Verifica que la representación matricial de T tiene la forma que indica el teorema de la página 295.*

g) *Comprueba que el operador T preserva las normas (las magnitudes) de las fuerzas $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$* (Esta característica que es muy importante en la física-matemática se llama "invariante" . INVARIANTE es una cantidad matemática o física que no depende del sistema de coordenadas, es decir, que no se altera al aplicársele determinadas transformaciones).

Examen de Capítulo

1.- Sea $S = \{ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ un espacio vectorial definido sobre el campo de los reales, en el que se define la siguiente operación binaria

$$(p \mid q) = p(1)q(1) + p(0)q(0) + p(2)q(2), \qquad \forall\ p,q \in S$$

Determina si la operación binaria $(p \mid q)$ es un producto interno.

Nota: $p(1)$ es el valor del polinomio $p(x)$ evaluado en $x = 1$

Solución:

2.- Relaciona las siguientes columnas escribiendo en el paréntesis de la derecha la letra que corresponda para completar correctamente la expresión de la izquierda.

Sea V un espacio con producto interno sobre el campo $\mathbb{C}$. Entonces, si $\overline{x},\overline{y}\in V$ y $\alpha\in\mathbb{C}$:

A) $(\overline{x} \mid \overline{y}) =$	( )	$(\alpha\overline{x} \mid \overline{y})$
	( )	$(\overline{x} \mid \overline{y}) > 0$
B) $\overline{\alpha}(\overline{x} \mid \overline{y}) =$	( )	$(\overline{x} \mid \overline{x}) = 0$
	( )	$(\alpha\overline{x} \mid \alpha\overline{y})$
C) $\alpha(\overline{x} \mid \overline{y}) =$	( )	$(\overline{x} \mid \overline{x}) > 0$
	( )	$(\overline{x} \mid \overline{y}) = 0$
D) si $\overline{x} \neq \overline{0}$, entonces	( )	$\overline{(\overline{y} \mid \overline{x})}$
	( )	$(\overline{x} \mid \alpha\overline{y})$
E) $\overline{x}$, $\overline{y}$ son ortogonales si	( )	$(\overline{y} \mid \overline{x})$

3.- Demuestra que si $\overline{v}$ y $\overline{w}$ son ortogonales, entonces cualquier múltiplo escalar de $\overline{v}$, $\alpha\overline{v}$, también es ortogonal al vector $\overline{w}$.

Solución:

4.- En el espacio vectorial V de las matrices cuadradas de orden 2×3 sobre el campo $\mathbb{C}$ se define el siguiente producto interno

$$(A \mid B) = tr(A^*B) , \qquad \forall\ A,B\in V$$

Nota: A^* es la conjugada-transpuesta de A

Con el producto interno anteriormente definido, calcula:

a) La norma de $A = \begin{bmatrix} -i & 0 & 3 \\ 1 & 3i & 2+i \end{bmatrix}$

b) El ángulo entre los vectores

$$C = \begin{bmatrix} -i & 0 & 3 \\ 1 & 3i & 2-i \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6i & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

5.- Para cada una de las siguientes afirmaciones, escribe en el paréntesis correspondiente una V si la afirmación es verdadera y una F si es falsa.

I) Una condición necesaria y suficiente para que un operador lineal sea hermitiano es que su representación matricial, referida a una base ortogonal, sea una matriz hermitiana ______________________________ ( )

II) Sea T un operador ortogonal. Si $T(\bar{u})$ y $T(\bar{v})$ "forman" un ángulo de 60°, entonces $\bar{u}$ y $\bar{v}$ también "forman" entre ellos un ángulo de 60° ______________________________ ( )

III) Si $T : V \to V$ es un operador hermitiano con un producto interno, y la matriz asociada a T referida a una base B de V es una matriz hermitiana, entonces se implica que B es ortonormal con ese producto interno _ (   )

IV) Sea $T : V \to V$ un operador lineal. Si T es ortogonal con un producto interno, entonces se garantiza que T se puede diagonalizar, es decir, que T se puede representar con una matriz diagonal _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ (   )

V) Sea $T : V \to V$ un operador lineal. Si T es hermitiano con un producto interno, entonces se garantiza que T se puede diagonalizar, es decir, que T se puede representar con una matriz diagonal _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ (   )

VI) Sea $T : V \to V$ un operador lineal. Si los valores característicos del operador T son todos reales, entonces se garantiza que T es hermitiano (   )

VII) Los valores característicos de un operador antihermitiano son siempre imaginarios puros _ (   )

VIII) Sea $T : V \to V$ un operador lineal. Si T es ortogonal, entonces se garantiza que sus valores característicos son todos reales _ _ _ _ _ (   )

IX) Si $T : V \to V$ es un operador unitario con un producto interno, entonces necesariamente es hermitiano con el mismo producto interno _ _ _ (   )

X) Si $T : V \to V$ es un operador hermitiano, entonces se garantiza la existencia de una base ortonormal de V formada por vectores característicos del operador T _ (   )

6.- Sean los operadores lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidos de la siguiente manera:

$$T(x, y) = (2x, x + y), \quad S(x, y) = (0, 2x - 2y)$$

a) Determina si con los operadores lineales T y S se verifica la hipótesis del teorema espectral, es decir, determina si T y S son hermitianos con el producto interno siguiente:

$$((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = \frac{25}{144} x_1 x_2 + \frac{1}{9} (y_1 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

b) En el caso que el operador sea hermitiano, obtén la representación matricial diagonal del operador y la base ortonormal cuya existencia garantiza el teorema espectral.

Solución:

7.- *Sea* M *el espacio vectorial sobre el campo de los reales, donde*

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

y sea el producto interno $(A \mid B) = tr(AB^T)$, $A, B \in M$.

a) *Demuestra que el operador lineal* $T : M \to M$ *definido por* $T(A) = A$, $\forall\, A \in M$, *es un operador ortogonal.*

b) *A partir de la base* $\left\{ \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$, *obtén una base ortonormal de* M , *empleando el proceso de Gram-Schmidt.*

Solución:

Examen General

Este examen está dirigido al alumno que recién termina un primer curso de álgebra lineal dentro de las carreras de ingeniería, y consta de dos partes. La parte I contiene conceptos esenciales que el alumno debe responder con facilidad y la parte II, ejercicios que incluyen conceptos representativos del álgebra lineal. Los resultados de los ejercicios de la parte II de este examen se presentan después de los enunciados, a fin de que los compares con los que tu obtengas.

PARTE I

1.- Identifica cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales y escribe una X en el paréntesis correspondiente. (Las incógnitas se representan por las letras x, y, z).

( ) $x = 8$, ( ) $2x^2 - 3 = 0$, ( ) $\pi x + (\operatorname{sen}\frac{\pi}{6})y = 0$,

( ) $x + xy + y = 0$, ( ) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = 8$, ( ) $3e^x + 4y = 1$

( ) $y = \frac{1}{2}(x - z)$, ( ) $x^{1/2} + y^{1/2} = z$, ( ) $y - z = 6$

2.- ¿Qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales?

____

____

3.- ¿Cuál es la diferencia entre una matriz y un determinante?

____

____

4.- Escribe una V o una F en el paréntesis que corresponde a cada afirmación según sea verdadera o falsa, respectivamente.

a) La inversa de una matriz, si existe, es única _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ( )

b) Una matriz de orden $m \times n$, $m \neq n$, puede tener inversa _ _ _ _ ( )

c) Si A es una matriz de orden 3×4, y B de 3×3, entonces el producto AB es una matriz de orden 4×3 _______________ ( )

d) La multiplicación de matrices es conmutativa __________ ( )

e) Si una matriz es singular, entonces su determinante es nulo__ ( )

5.- ¿Qué propiedades adicionales debe cumplir un anillo para ser un campo?

____

____

6.- ¿Qué es un isomorfismo entre grupos?

____

____

7.- ¿Qué es un espacio vectorial?

____

____

____

8.- Escribe una V o una F en el paréntesis que corresponde a cada una de las siguientes afirmaciones según sean verdaderas o falsas, respectivamente.

a) Sean $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4$ vectores de un espacio vectorial. Si $\overline{x}_1 = 2\overline{x}_2 + 3\overline{x}_3 - \overline{x}_4$, entonces el conjunto $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4\}$ es linealmente independiente ______________________________ ( )

b) Toda base de un espacio vectorial es un conjunto linealmente independiente ______________________________ ( )

c) Si un conjunto B genera a un espacio vectorial W, entonces necesariamente B es una base de W ____________________ ( )

d) Todo espacio vectorial es una variedad lineal __________ ( )

e) Si el wronskiano de un conjunto de funciones es nulo, entonces dicho conjunto es linealmente dependiente ____________________ ( )

9.- ¿Qué es una transformación, y cuándo es lineal?

10.- ¿Qué es el núcleo de una transformación lineal?

11.- ¿Qué son los valores y vectores característicos de un operador lineal?

12.- Indica, escribiendo una X en el paréntesis correspondiente, cuáles de las siguientes propiedades deben cumplirse para que una función $(\cdot \mid \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ sea un producto interno

Sean $\overline{x}, \overline{y}, z \varepsilon V$ y $\alpha \varepsilon \mathbb{C}$

( ) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = (\overline{y} \mid \overline{x})$

( ) $(\overline{x} \mid \overline{x}) = 0$

( ) $(\overline{x} \mid \overline{x}) \leq 0$

( ) $(\overline{x} + \overline{y} \mid \overline{z}) = (\overline{x} \mid \overline{y})\overline{z}$

( ) $(\alpha\overline{x} \mid \overline{y}) = \alpha(\overline{x} \mid \overline{y})$

( ) $(\alpha\overline{x} \mid \alpha\overline{y}) = (\overline{x} \mid \overline{y})$

( ) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = \overline{(\overline{y} \mid \overline{x})}$

( ) $(\overline{x} + \overline{y} \mid \overline{z}) = (\overline{x} \mid \overline{z}) + (\overline{y} \mid \overline{z})$

( ) $(\overline{x} \mid \alpha\overline{y}) = (\alpha\overline{x} \mid \overline{y})$

( ) $(\overline{x} \mid \alpha\overline{y}) = \alpha(\overline{x} \mid \overline{y})$

( ) $(\alpha\overline{x} \mid \alpha\overline{y}) = \alpha^2(\overline{x} \mid \overline{y})$

( ) $(\overline{x} \mid \overline{x}) > 0$, si $\overline{x} \neq \overline{0}$

13.- ¿Qué es un conjunto ortonormal de vectores?

14.- Relaciona las siguientes columnas escribiendo en los paréntesis de la derecha la letra que corresponda para completar correctamente los enunciados de la columna izquierda.

Nota: No todos los paréntesis llevan letra.

Sea $T : V \to V$ un operador lineal. Si $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \varepsilon V$ entonces

	( ) $(T(\bar{v}) \mid \bar{w}) = -(\bar{v} \mid T(\bar{w}))$
A) T es un operador unitario si ..	( ) $(T(\bar{v}) \mid \bar{w}) = (\bar{w} \mid T(\bar{v}))$
	( ) $(\bar{u} \mid \bar{v}) = -(T(\bar{u}) \mid T(\bar{v}))$
B) T es un operador antihermitiano si	( ) $(T(\bar{u}) \mid T(\bar{v})) = (\bar{u} \mid \bar{v})$
	( ) $(T(\bar{v}) \mid \bar{w})) = (\bar{v} \mid T(\bar{w}))$
C) T es un operador hermitiano si	( ) $(T(\bar{u}) \mid \bar{v}) = (T(\bar{v}) \mid \bar{u})$
	( ) $(T(\bar{v}) \mid T(\bar{w})) = -\overline{(T(\bar{v}) \mid T(\bar{w}))}$

15.- ¿Qué es el álgebra lineal?

PARTE II

1.- Sea el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 3 \\
2x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 6 \\
6x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 6 \\
x_1 - x_2 + \beta x_3 &= -5
\end{aligned}
$$

a) Determina el valor de β para que el sistema de ecuaciones no tenga solución.

b) Determina el valor o los valores de β para que el sistema de ecuaciones tenga solución única con $x_1 = 0$.

2.- Obtén, si existe, la matriz X que satisface la ecuación matricial

$$AB + CX = XD + E$$

donde,

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.- Determina si el sistema $(\mathbb{Z}^3, *)$ es un grupo, donde $\mathbb{Z}^3 = \{(m_1, m_2, m_3) \mid m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}$ y la operación $*$ está definida por

$$(a,b,c) * (x,y,z) = (a + x - 2,\ b + y + 2,\ c + z + 2)$$

En caso de ser $(\mathbb{Z}^3, *)$ un grupo, obtén el inverso de $(2, -2, -2)$.

4.- Determina cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial IR^2

a) $\{(x,y) \mid x + y = 0, \quad x,y \in \mathrm{IR}\}$

b) $\{(x,y) \mid x + y = 1, \quad x,y \in \mathrm{IR}\}$

c) $\{(x,y) \mid y - x^2 = 0, \quad x,y \in \mathrm{IR}\}$

5.- Determina si es posible expresar el vector $(-3, 3, -5)$ como una combinación lineal de los vectores del conjunto

a) $A = \{(0, 1, 3), (1, 0, 2)\}$

b) $B = \{(1, 4, -2), (12, 3, 9)\}$

6.- Sean los espacios vectoriales V y W generados, respectivamente, por los conjuntos de vectores

$$\{(1, -1, 0), (2, 1, 3), (-1, -2, -3)\} \quad y \quad \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 5, 4)\}.$$

a) Obtén el espacio intersección $V \cap W$

b) Obtén una base y la dimensión del espacio $V \cap W$

7.- Sean los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ sobre el campo de los reales.

Determina cuáles de las siguientes transformaciones son lineales:

$T_1 : \mathbb{R}^2 \to P$, $\quad T_1(a,b) = abx + (b - a)$

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to P$, $\quad T_2(a,b) = (3a - 2b)x$

8.- Sea M el espacio de las matrices cuadradas de orden dos y sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to M$ definida por

$$T(x,y,z) = A \begin{bmatrix} y & x - z \\ y & y \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtén el recorrido y el núcleo de la transformación T .

9.- Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dos transformaciones lineales tales que, para las bases $A = \{(1, 0), (1, 1)\}$ y $B = \{(-1, 0), (2, 1)\}$ se tiene que

$$M_B^A(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad M_A^A(T \circ S) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $M_B^A(S)$ indica la matriz asociada a S referida a las bases A del dominio de S y B del codominio de S .

a) Obtén la matriz asociada a T referida a la base B del dominio y A del codominio de T .

b) Determina la regla de correspondencia de la transformación T .

10.- Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un operador lineal definido por
$T(x, y, z, w) = (y + z,\ z,\ 0,\ x + y + z)$

a) Obtén los valores y vectores característicos del operador T.

b) ¿Se puede representar el operador T por una matriz diagonal? En caso afirmativo, obtén dicha matriz diagonal.

11.- Los valores característicos de un operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son -1 y 5. Si un vector característico asociado al valor -1 es $(6, 0)$, y un vector característico asociado a 5 es $(1, -1)$, obtén la regla de asignación del operador T.

12.- En el espacio vectorial de los polinomios $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ sobre el campo de los reales se define la operación binaria $*$ de la siguiente manera:

$$f * g = (f \mid g) = \frac{1}{2} f(0) g(0) + \frac{1}{3} f'(0) g'(0), \qquad \forall f, g \in P$$

donde $f' = \dfrac{d}{dx} f$, $\qquad g' = \dfrac{d}{dx} g$

Determina si la operación binaria $*$ es un producto interno.

13.- El conjunto $B = \{(2, 0, 0),\ (0, 2, 0),\ (0, 1, 1)\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

a) Calcula el ángulo que forman entre sí los vectores del conjunto B con el producto interno

$$((x_1, y_1, z_1) \mid (x_2, y_2, z_2)) = \frac{1}{4}(x_1 x_2 + y_1 y_2 + 5 z_1 z_2) - \frac{1}{4}(y_1 z_2 + z_1 y_2)$$

b) Calcula la norma de cada uno de los vectores del conjunto B con el producto interno definido en el inciso anterior.

c) De acuerdo con los resultados obtenidos, ¿es el conjunto B una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con el producto interno definido en el inciso a) ?

14.- En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$ *se define el siguiente operador lineal*

$$T(x,y) = (3x + y,\ x + y)$$

a) Obtén la representación matricial de T *referida a la base* $B = \{(3,\ 1),\ (1,\ 1)\}$

b) De acuerdo con la matriz obtenida en el inciso anterior, ¿se puede afirmar que el operador T *es hermitiano? ¿Por qué?*

c) ¿Es T *un operador hermitiano?*

Nota: Recuerda que, en este tema, el término "espacio euclidiano" alude a un espacio $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar ordinario.

15.- En el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ *sobre* $\mathbb{C}$ *se define el operador lineal* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *de la siguiente manera:*

$$T(a + bi,\ c + di) = (-b + ai,\ d - ci)$$

Determina si T *es un operador unitario con el producto escalar ordinario complejo y, en caso afirmativo, obtén la matriz diagonal que representa a* T *formada por los valores característicos.*

RESPUESTAS

1.- a) $\beta = -4$

b) $\beta = 6$

2.- $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.- $(\mathbb{Z}^3, *)$ sí es un grupo.

El inverso de $(2, -2, -2)$ es $(2, -2, -2)$

4.- a) Sí es subespacio

b) No es subespacio

c) No es subespacio

5.- a) No es posible

b) Sí es posible

6.- a) $V \cap W = \{(x, x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) Una base es $\{(1, 1, 2)\}$

$\dim (V \cap W) = 1$

7.- T_1 no es lineal

T_2 sí es lineal

8.- $N(T) = \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$T(\mathbb{R}^3) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -\frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Otra manera de expresar el recorrido es

$$T(\mathbb{R}^3) = \left\{ \begin{bmatrix} 2x & y \\ -x & -x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

9.- a) $M_A^B(T) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $T(x,y) = (x - y,\ y)$

10.- a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

Los vectores característicos asociados son:

$\{(0,\ 0,\ 0,\ k) \mid k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}\}$

b) T no se puede representar por una matriz diagonal.

11.- $T(x,y) = (-x - 6y,\ 5y)$

12.- Sí es un producto interno.

13.- a) Los vectores de B forman entre sí un ángulo de $90°$

b) La norma de cada uno de los vectores de B es igual a uno.

c) Sí; B es una base ortonormal.

14.- a) $M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) No; porque la base a la cual está referida no es ortonormal.

c) Sí; T es hermitiano.

15.- T es unitario.

La matriz diagonal que representa a T es

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Respuestas

CAPITULO I

EJERCICIOS PROPUESTOS

1- a) $x = k_1$

$z = k_2$

$y = 2k_1 + 4k_2 - 5, \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Dos soluciones particulares son:

$x = 0 \qquad x = 1$

$y = -5 \qquad y = 1$

$z = 0\ , \qquad z = 1$

b) $y = k_1$

$z = k_2$

$w = k_3$

$x = 1 - 6k_1 - 6k_2 - 6k_3, \qquad \forall\, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

Dos soluciones particulares son:

$x = 1 \qquad x = -5$

$y = 0 \qquad y = 1$

$z = 0 \qquad z = 0$

$w = 0\ , \qquad w = 0$

c) $x = k$

$y = -k \qquad k \notin \mathbb{R}^+$

Dos particulares:

$x = 0 \qquad x = -2$

$y = 0\ , \qquad y = 2$

2- a) $x = 1 - 5k$
$y = k$
$z = 2 - 13k$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$

b) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$

c) $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$, $w = 4$

d) No tiene solución

e) $x = 35$, $y = 0$, $z = 4$, $w = -13$

f) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{2}$

3- Para que no tenga solución, $\beta = 0$

4- a) Incompatible si $k = 1$

b) No existe valor alguno de $k \in \mathbb{R}$ que haga que el sistema sea compatible indeterminado

c) Compatible determinado $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $k \neq 1$

5- $a = 16$, $b = 13$, $c = 0$

6- $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 1 - i$

7- a) $x = y = z = 0$

b) $x = 0$

$y = -\frac{2}{3}k$

$z = k$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$

c) $x = y = z = 0$

d) $x = -k$
$y = -k$
$z = k$
$w = -3k$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$

8- $r = -\frac{13}{2}k$

$s = -\frac{7}{2}k$

$t = k$ $\forall\, k \in \mathbb{R}$

9- a) D

b) C

10- Compresores: 2 millones

Medidores: 0.5 millones

Válvulas: 0.25 millones

Reguladores: 1 millón

11- 280 pesos

EJERCICIOS ADICIONALES

1- I) A y D

II) C y D

III) A

2- a) $x = z = 0, \quad y = 3, \quad w = -1$

b) $x = 0$

$y = -10 - 7k$

$z = -16 - 8k$

$w = k \qquad \forall\, k \in \mathbb{R}$

c) $x = 10 - \frac{5}{3}k_1 + k_2$

$y = -12 + \frac{4}{3}k_1 - k_2$

$z = k_1$

$w = k_2 \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

d) $x = 4, \quad y = z = w = -2$

3- Para que el sistema tenga solución, $\alpha = 5$

4- a) $x_1 = k_1$

$x_2 = k_2$

$x_3 = -3k_1 - 2k_2$

$x_4 = 2k_1 + k_2 \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

b) $x = y = z = 0$

c) $x = -\frac{21}{5}k$

$y = -\frac{47}{5}k$

$z = -14k$

$w = k \qquad \forall\, k \in \mathbb{R}$

5- $k = \frac{1}{2}$

La solución general es:

$x = \frac{1}{6}w$

$y = \frac{2}{3}w$

$z = \frac{1}{6}w \qquad \forall\, w \in \mathbb{R}$

Una solución particular es:

$x = 1, \quad y = 4, \quad z = 1, \quad w = 6$

6- impresora = \$ 500

disco = \$ 450

microprocesador = \$ 550

pantalla = \$ 300

7- $(2, -1, 3)$

8- $x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = -k$

$x_4 = k \qquad \forall\, k \in \mathbb{R}$

9- a) Para que el sistema de ecuaciones sea compatible determinado,

$$k \neq 2 \quad y \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

b) Para que sea compatible indeterminado, $k = 2$ y $\alpha = 2$

c) Para que sea incompatible, $k = 2$ y $\alpha \neq 2$

10- a) $k = 4$

b) $x = 2, \quad y = 1$

11- Se tienen dos soluciones:

Una solución: $x = 1, \quad y = 2$
La otra solución: $x = -3, \quad y = 4$

12- $K > -2, \quad K \neq 2$

13.- Se tienen dos soluciones:

Una solución:

Número de alumnos con 10 : 4
Número de alumnos con 8 : 1
Número de alumnos con 6 : 7
Número de alumnos con 4 : 8

La otra solución:

Número de alumnos con 10 : 2
Número de alumnos con 8 : 5
Número de alumnos con 6 : 5
Número de alumnos con 4 : 8

14- $x = -2, \quad y = \frac{3}{2}, \quad z = 2, \quad w = -\frac{1}{2}$

15- $d = 400$ km
$tc_1 = 3$ horas ; $tc_2 = 2$ horas, 24 min

16- Primer obrero: 2 horas

Segundo y tercer obreros: 4 horas

EXAMEN DE CAPITULO

1- Solución general:

$x_1 = -23 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$

$x_5 = 8 + x_4$

Una solución particular:

$x_1 = -23, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 8$

Otra solución particular:

$x_1 = 9, \quad x_2 = x_3 = x_5 = 0, \quad x_4 = -8$

2- a) Para $a = -2$, el sistema es incompatible

Para $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado

Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, $a \neq -2$, el sistema es compatible determinado

b) $x = 1 - k_1 - k_2$

$y = k_1$

$z = k_2 \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

3- $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

4- Producto A : 3 unidades

Producto B : 1 unidad

Producto C : 1 unidad

Producto D : 1 unidad

C A P I T U L O II

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 0$

2.-
$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 6 & 11 & 8 & 5 \\ 11 & 2 & -6 & 4 & 15 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & -10 & 5 & 4 & 2 \\ 17 & 1 & 10 & 18 & 21 & 2 \end{bmatrix}$$

3.-
$$MN = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9.- C *es hermitiana*
D *es antihermitiana*

11.- c) $H^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \operatorname{sen} n\theta \\ -\operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$

Te sugerimos demostrar su validez por inducción matemática

12.- *Es nilpotente de índice 3*

13.-
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14.-
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

15.- $$A = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

16.- $$A^{-1}_{izq} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

No existe inversa por la derecha

17.- $$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18.- $$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

Sobre el tema de "ecuaciones matriciales" te sugerimos consultar "Algebra Lineal" de E. Solar y L. Speziale, páginas 357-360

19.- $$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

20.- A *no es ortogonal*
B *sí es ortogonal*

21.- C *sí es unitaria*
D *no es unitaria*

22.- 1.- (C)
2.- (B)
3.- (H)

23.- $A = B + C + D = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & -36 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -6i \\ 6i & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3+5i \\ 3+5i & 0 \end{bmatrix}$

24.- a) $a = ki, \quad \forall k \in \mathbb{R}$
$b = -i$
$c = 3 + 2i$
$d = -4$

25.- $I_1 = 14, \quad I_2 = 22, \quad I_3 = -36, \quad V_2 = -228$

26.- a) 10; par
b) 0; par
c) 21; impar
d) $\frac{n(n-1)}{2}$

27.- a) Verdadero
b) $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}\ a_{55}$
$a_{11}\ a_{22}\ a_{35}\ a_{43}\ a_{54}$
$a_{11}\ a_{22}\ a_{34}\ a_{45}\ a_{53}$
c) Verdadero
d) $m = 3, \quad n = 5$

28.- $\det(A) = -\,a_{14}\,a_{21}\,a_{32}\,a_{43} + a_{14}\,a_{22}\,a_{31}\,a_{43}$

(La definición de determinante que estamos considerando es la que dan los profesores Eduardo Solar y Leda Speziale en su libro de Algebra Lineal, página 430)

29.- $\det(B) = 1$

30.- $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

31.- a) -22, b) -22

32.- b) Cada uno de los determinantes vale 64

33.- a) $(a+b)^2$
b) 0
c) -1

34.- $\det(A) = 3$; $\det(B) = 136$

35.- Volumen = 88 unidades de volumen

36.- b) $x^2 + y^2 - 7x - 4y = 0$

37.- $\det(A) = 0$

38.- a) $\det(A) = 1$
b) $\det(B) = -3$
c) $\det(C) = -1$

39.- $b = -2$

40.- $\det(B) = 1$

41.- $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $b = -2$

42.- a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\operatorname{adj}(B) = B$

43.- a) $E^{-1} = E$

b) $F^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $G^{-1} = \begin{bmatrix} 11i & -4 & 0 \\ -20 & -7i & -1 \\ 3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$

44.- 3, -3, 0

45.- $x_2 = 1$

EJERCICIOS ADICIONALES

1.- [4]

2.- a) $M^2 = M$ M *es idempotente*

b) $N^2 = N$ N *es idempotente*

3.- $AB = \begin{bmatrix} 32 & -36 & -27 & 9 & -4 \\ 5 & 4 & 21 & -14 & 16 \\ -11 & 7 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Partición de A: $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$

4.- $A_{21} = [\,1 \quad -2\,]$

6.- $X = A$

7.- a) $G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $G^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n}{2}(n+1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10.- *Una matriz* P *es* $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Otra matriz P *es* $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$

11.- $X = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$

12.- $X = \frac{1}{177}\begin{bmatrix} -203 \\ 140 \\ 17 \end{bmatrix}$

13.- $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

14.- $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

19.- (F)
(V)
(V)
(F)
(F)

21.- *Si* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$

la condición es $\frac{a_{11}}{a_{22}} = -\frac{b_{11}}{b_{22}}$

Un ejemplo es: $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

22.- 16

24.- $3^{n-1}(3+n)$, donde n es el orden de la matriz

26.- $(-1)^{n-1}$ Si n es par, determinante = -1
Si n es impar, determinante = 1

27.- b) $(a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$

28.- b) 0, -1, 3
c) 0, -1, 3, 3

29.- $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_5 = \frac{1}{120}$

30.- $k < \frac{1}{2}$

EXAMEN DE CAPITULO

1.- (F)
(V)
(F)
(V)
(V)

2.- $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3.- 3.1) C
3.2) A
3.3) C

4.- a) $det(A) = -1$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

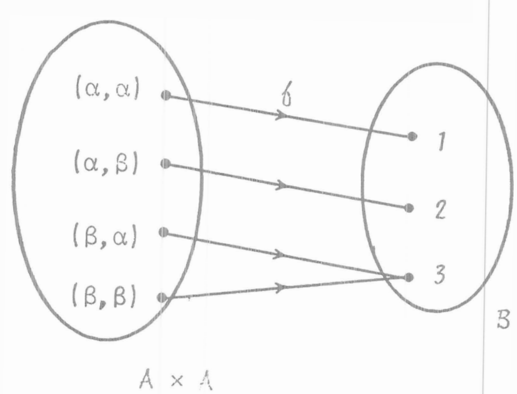
5.- $w = -2$

C A P I T U L O III

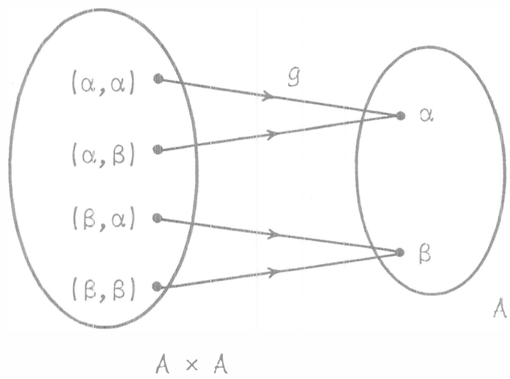
EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- a) $A \times A = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\beta), (\beta,\alpha), (\beta,\beta)\}$

b)



c)



d) *Sí;* f *y* g *son operaciones binarias*

2.- a) *Sí*

b) 633

c) No

3.- a) 9 Ⓟ 6 = 36
1 $\notin$ T $\Rightarrow$ 1 Ⓟ 6 *no se puede efectuar*
3 Ⓟ 3 = 18

c) *Sí*

d) No

4.- a) No

b) No

5.- a) $*$ *es cerrada en* A
Δ *no es cerrada en* B

c) $(-2)*(-2) = 0$

6.- Sí

7.- Sí es grupo abeliano

8.- Sí es grupo

10.- a) 0

b) 8

c) -2

11.- a) 1. Sí
2. Sí; el idéntico o neutro es u
3. Sí; el inverso de a es c
el inverso de b es b
el inverso de c es a
el inverso de u es u
4. No es asociativa

b) No es grupo

16.- Sí es anillo

17.- b) Anillo conmutativo con unidad y también dominio entero

c) Porque existen divisores propios de cero

18.- Sí

19.- a) Anillo conmutativo con unidad

b) Sí

20.- Sí

21.- Sí

22.- b) Sí es homomorfismo

24.- No

EJERCICIOS ADICIONALES

1.- a) Sí

b) Sí

c) Sí

d) Sí

3.- a) $\boxed{V}$ Ley cancelativa

$\boxed{V}$ El elemento $\hat{u}$ pertenece a G

$\boxed{F}$ $1 * \hat{1} = 1$

$\boxed{F}$ La ecuación $\hat{2} * x = 20$, $x \varepsilon G$, admite más de una solución

$\boxed{V}$ Conmutatividad

b) $\boxed{C}$

4.- Sí

5.- Sí

7.- Se puede construir la siguiente tabla que muestra que ({0,1,2,3}, (d)) es un grupo abeliano

(d)	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

8.- $(V, \#)$ *es un grupo*

9.- a) $\frac{1}{2}$

b) $a = \frac{19}{23}$

11.- *Sí es grupo*

12.- *Sí es grupo*

13.- a) *Es el conjunto vacío,* $\{ \} = \emptyset$

b) $B^{-1} = \{1, 2\} = B$

c) *Sí es anillo*

15.- a) 1. No

2. *Sí*

3. *Sí*

4. No

5. *Sí*

b) *Ninguno es grupo*

16.- *Sí es monoide (o semigrupo con unidad)*

17.- a) $(4,4)$

b) $(x,y) = (-5,3)$

18.- *No forma estructura algebraica alguna (No es campo, no es anillo)*

19.- *Sí*

20.- b) Es anillo conmutativo, pero no es anillo con unidad

c) Sí

d) No

21.- Sí

23.- a) El cero del campo es: $0 + 0\sqrt{2}$
La unidad del campo es: $1 + \sqrt{2}$

b) La solución es $4 + 0\sqrt{2}$

24.- a) $x = -1, \quad y = \frac{3}{2}$

b) $x = 2, \quad y = 0$

27.- c) Sí

28.- a)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

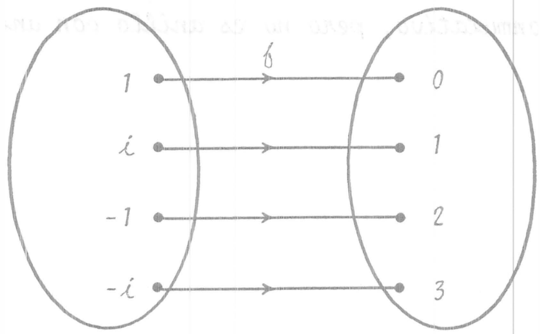
b) Sí es isomorfismo

29.- Sí; f es un homomorfismo

30.- a) Sí es grupo abeliano

b) Sí es isomorfismo

31.- b) Una función f que establece un isomorfismo entre dichos grupos es:



32.- f no es homomorfismo
g sí es homomorfismo

33.- $a * b = a + b - 9, \quad \forall\, a,b \in \mathbb{Q}$

34.- Sí es isomorfismo

35.- a) I) f no es inyectiva, ni suprayectiva
g es biyectiva

II) f no es morfismo
g sí es morfismo

III) g es un isomorfismo

b) No

EXAMEN DE CAPITULO

1.- Sí es grupo

2.- Sí es anillo

3.- a) El resultado correcto es $\boxed{G}$

b) El resultado correcto es $\boxed{E}$

4.- No es isomorfismo

C A P I T U L O IV

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- La propiedad que no se cumple es

$$1 \cdot \overline{v} = \overline{v}, \quad \forall \overline{v} \in V$$

2.- Sí

3.- No

4.- No

5.- No

6.- No

7.- Sí

8.- Porque no se cumple la cerradura de la multiplicación por escalar

9.- Sí

11.- $k = -8$

12.- a) $\overline{v} = (3,-1) = 0\,\overline{v}_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\overline{v}_2 + 0\,\overline{v}_3$

b) $\overline{v} = (3,-1) = \overline{w}_1 + 0\,\overline{w}_2 + \overline{w}_3$

c) $\overline{v} = (3,-1) = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + 2\,\overline{u}_3$

13.- a) $k \neq 0$

b) $h = 0, \quad h = \pm\sqrt{2}$

14.- a) A es linealmente independiente

b) B es linealmente independiente

15.- A no genera $\mathbb{R}^3$

16.- a) Un conjunto es $A = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,1,1)\}$

b) Un conjunto es $B = \{(1,0,0),\ (-8,0,0),\ (0,1,0),\ (0,6,0)\}$

17.- a) Base $= \{(1,-3,2),\ (2,4,1),\ (1,1,1)\}$

b) $(1,0,0) = \frac{3}{2}(1,-3,2) + \frac{5}{2}(2,4,1) + (-\frac{11}{2})(1,1,1)$

$(0,1,0) = -\frac{1}{2}(1,-3,2) - \frac{1}{2}(2,4,1) + \frac{3}{2}(1,1,1)$

$(0,0,1) = -(1,-3,2) - 2(2,4,1) + 5(1,1,1)$

18.- a) Para la demostración pedida te sugerimos expresar el conjunto V de la siguiente manera:

$$V = \{(x,y,z) \mid 3x - y + 2z = 0,\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

ó

$$V = \{(x,3x + 2z,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$$

siendo V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

b) Una base es: $\{(1,3,0),\ (0,2,1)\}$ y $\dim V = 2$

c) Para demostrarlo te sugerimos expresar W de la siguiente manera:

$$W = \{(x,x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

d) Una base de W es: $\{(1,1,-1)\}$ y $\dim W = 1$

f) El conjunto $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2 \mid \bar{v}_1,\bar{v}_2 \in V,\ \bar{v}_1,\bar{v}_2 \notin W\}$ no es un conjunto generador de W porque, precisamente, $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ no pertenecen a W

19.- a) Una base es $\{1+i\}$ y $\dim \mathbb{C} = 1$

b) Una base es $\{1, i\}$ y $\dim \mathbb{C} = 2$

20.- a) Una base es $\{(1,0), (0,i)\}$ y $\dim \mathbb{C}^2 = 2$

b) Una base es $\{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$ y $\dim \mathbb{C}^2 = 4$

23.- a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

b) dependiente

c) independiente

d) $\bar{w} = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \alpha_3\bar{v}_3 + \alpha_4\bar{v}_4$

e) dependiente

24.- Una base es $\{x^3+2x^2, 3x+1\}$ y $\dim S = 2$

25.- b) $(3,-1,2)$

26.- a) Una base es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) $\dim M = 2$

c) $$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

27.- $\lambda = -1$

28.- $$M_B^A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

29.- $(\bar{v})_{B_2} = \left(-\frac{1}{3}\ ,\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$

30.- a) $(\bar{v})_{B_1} = (0,0,-3)$

b) $(\bar{v})_{B_2} = (-3,0,3)$

c) $(\bar{p})_{B_1} = (1,1,1)$

31.- $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ -a & a \end{bmatrix} \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\}$; $\quad$ dim V = 1

32.- I) $\boxed{B}$

II) $\boxed{F}$

III) $\boxed{A}$

IV) $\boxed{C}$

V) $\boxed{C}$

VI) ... $f(G)$ *es linealmente* *dependiente* *y, por lo tanto, el conjunto* G *es linealmente* *dependiente*.

34.- I) $\boxed{A}$

II) $\boxed{B}$

III) $\boxed{K}$

IV) $\boxed{D}$

35.- a) $L(A_C) = \mathbb{R}^3$

b) *tres*

c) *tres*

36.- a) Una base: $\left\{\begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

$\dim V = 3$

c) G no es una base de V porque es linealmente dependiente

37.- a) Las matrices M y N tienen el mismo espacio renglón

b) Los tres espacios son isomorfos entre sí

38.- a) Una base: $\{x^2, x, 1\}$ y $\dim P = 3$

d) Una base: $\{x^2-2, x-6\}$ y $\dim W = 2$

f) Sí; porque todos los vectores de H pertenecen al espacio vectorial W; además, cualquier vector de W se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de H

g) No; porque H es linealmente dependiente

39.- a) $P = \{ax^2 - 3a \mid a \in \mathbb{R}\}$

b) $\dim P = 1, \quad \dim M = 1 \Rightarrow$ son isomorfos

c) Una base es: $\{(3,-1)\}$

d) $f : P \longrightarrow V, \qquad f(ax^2 - 3a) = (3a, -a)$

$g : M \longrightarrow V, \qquad g\left(\begin{bmatrix}a & 0\\-3a & a\end{bmatrix}\right) = (3a, -a)$

e) Base de P : $\{x^2 - 3\}$

Base de M : $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\-3 & 1\end{bmatrix}\right\}$

41.- *El espacio solución es:*

$$S = \left\{ \left(-\frac{6}{5}K, \ \frac{6}{5}K, \ K \right) \mid K \in \mathbb{R} \right\}$$

Una base es: $\{(-6, 6, 5)\}$ *y* $\dim S = 1$

42.- $k = 6$

43.- *El conjunto solución expresado como variedad lineal es:*

$$S = \{(-z, 0, z) + (4, 0, 0) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

44.- a) $a = 3, \quad b = 6$

b) *Un apoyo es* $\overline{v}_o = (-1, 0, 1)$

c) $S = \{(x_2 - 1, \ x_2, \ 1) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$

45.- $L = \{(0,0,0) + (4, \ 1, \ \frac{1}{6})\}$

46.- *Sí es un subespacio vectorial*

47.- a) F_1 *no es subespacio de* F

b) F_2 *sí es subespacio de* F

c) F_3 *sí es subespacio de* F

d) F_4 *no es subespacio de* F

48.- *Es linealmente dependiente*

49.- b) $(f(x))_B = (2, 7)$

50.- a) $W(x) = 0$

b) *Es linealmente dependiente*

EJERCICIOS ADICIONALES

5.- Sí es espacio vectorial

6.- a) No

b) No

7.- El conjunto F sí es un espacio vectorial sobre el campo K

8.- Lo único que no se cumple es:

$$(\alpha + \beta)\overline{v} = \alpha\,\overline{v} + \beta\,\overline{v}\,, \quad \text{para} \quad \overline{v} = 1$$

10.- b) $A = \{x^2 q(x) + 1 \mid q(x)$ es un polinomio de cualquier grado$\}$

El apoyo es $\overline{v}_o = 1$

11.- a) (F)

b) (V)

c) (F)

12.- a) A sí es subespacio

b) B sí es subespacio

c) C sí es subespacio

d) D no es subespacio

13.- a) A no es subespacio

b) B sí es subespacio

c) C sí es subespacio

d) D sí es subespacio

14.- El conjunto A no es subespacio
El conjunto B sí es subespacio

16.- a) A no es subespacio

b) B no es subespacio

c) C sí es subespacio

17.- Sí es un subespacio vectorial de F

19.- a) A sí es subespacio

b) B sí es subespacio

c) C no es subespacio

d) D sí es subespacio

e) E sí es subespacio

20.- Sí es un subespacio vectorial

21.- a) A no es subespacio

b) B no es subespacio

c) C sí es subespacio

22.- b) $\dim A = 10$, $\dim B = 6$

23.- b) $\dim W = 2$

26.- $\beta \neq \frac{1}{2}$

27.- Una base es $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ $\dim B^3 = 3$

28.- b) No; porque el conjunto N no puede ser linealmente independiente ya que $\dim B^3 = 3$

29.- a) A es linealmente dependiente

b) B es linealmente independiente

30.- a) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$

$B = \{(x,y) \mid y = x - 3\}$

$C = \{(x,y) \mid y = -x\}$

b) Sólo C es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

c) Una base de C es, $B = \{(1,-1)\}$ y $\dim C = 1$

31.- a) $A \cap B = \{(a,b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

b) $\dim (A \cap B) = 2$ y una base de $A \cap B$ es: $\{(1,0,1), (0,1,1)\}$

32.- a) Una base es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim V = 3$

b) $x \neq 1, \quad x \neq -2$

c) $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

otra manera es: $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $x = 0$

e) $(7,-5,-2)$

35.- b) *Las coordenadas del vector* (a,b) *en la base ordenada* B *son:*

$$\alpha_1 = \frac{a}{x_1} - \frac{y_1(ax_2 - bx_1)}{x_1(x_2y_1 - x_1y_2)}, \qquad \alpha_2 = \frac{ax_2 - bx_1}{x_2y_1 - x_1y_2}$$

36.- b) *Una base del espacio* A *es:*

$$\{1,\ x-x^3,\ x^2-x^3\}$$

y, por lo tanto, $\dim A = 3$

37.- b) *Una base es:* $\{1,\ 3x^2-18x\}$ *y* $\dim W = 2$

38.-
$$\begin{aligned} x - y + z \quad &= 0 \\ x - 3y - w &= 0 \end{aligned}$$

39.- a) *Una base de* V *es el conjunto* $B = \{(12,-1,3)\}$

Por lo tanto, $\dim V = 1$

b) $W = \{(a,\ 3b,\ b-4a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

c) *No; basta observar que* $\dim V \neq \dim W$

40.- a) *El conjunto* E *sí es una base de* F

b) Escalares *que hacen posible expresar a* $\bar{v}$ *como una combinación lineal de los vectores* $3,\ x+8,\ x-1$ *son*

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ya que entonces:

$$\bar{v} = -3x + 12 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}(3) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}(x+8) + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}(x-1)$$

Otra manera es la siguiente:

$$\bar{v} = -3x + 12 = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}(3) + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}(x+8) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(x-1)$$

etc.

41.- a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$; dim $V = 2$

b) $$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}(a-6b)\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{12}(a+6b)\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

c) *Sí, porque* G *es linealmente independiente y genera el espacio* V

e) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$; dim $W = 1$

f) $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}a\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{12}a\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

g) *No; porque los vectores de* G *no pertenecen al espacio* W

h) $$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}a\begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{8}a\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

i) *No, porque los vectores de* H *no pertenecen a* W

j) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 68 & 0 \\ 0 & -68 \end{bmatrix} \right\}$;

otro es $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \right\}$, etc.

42.- b) *Una base de* M *es* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

por lo tanto, $\dim M = 3$

c) M y B^3 son de la misma dimensión y están definidos sobre el mismo campo. Una función biyectiva $f : M \to B^3$ está definida de la siguiente manera:

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = (a,b,c),$$

y, esta función satisface las condiciones de isomorfismo entre espacios vectoriales:

$$f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix}\right) \oplus f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$f\left(k\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = k \odot f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right)$$

lo cual demuestra que los espacios vectoriales M y B^3 son isomorfos

43.- a) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & b \end{bmatrix} = (a+b)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

También se puede escribir, entre otras, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & b \end{bmatrix} = (a+b)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (a+1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $(\bar{v})_A = (2,2)$

44.- a) $\{(a+bi,\ b+ai) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(1,i),\ (i,1)\}$
Dimensión igual a 2

c) Con $\mathbb{R}^2$

45.- b) $(\bar{v})_B = (-4,-3)$

c) Con $\mathbb{R}^2$

d) $M_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

46.- a) $V \cap W = \{(7k,\ 0,\ k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(7,0,1)\}$; $\dim\ V \cap W = 1$

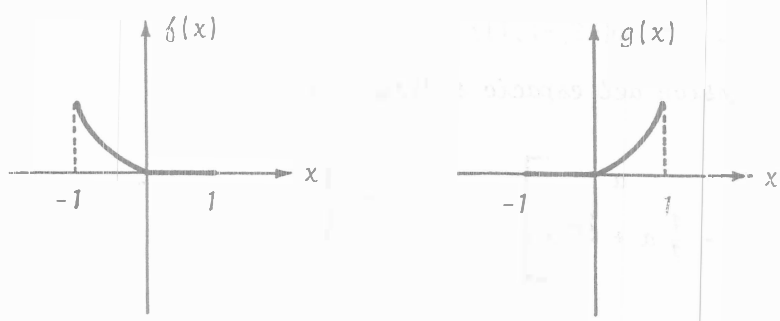
47.- $M_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_A^B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

48.- Como G es un subespacio de F, entonces G es también una variedad lineal

49.- Linealmente dependiente

51.-

a)



b) *Wronskiano* = $W(x) = 0$

c) *Linealmente independientes*

52.- *Es linealmente independiente*

EXAMEN DE CAPITULO

1.- a) A *no es subespacio*

b) B *no es subespacio*

c) C *sí es subespacio*

2.- (V)
(F)
(V)
(V)
(V)

3.- *Son generadores los conjuntos*

$\{(3,0,-3),\ (-16,0,16),\ (0,0,0)\},\ \{(3,0,-3),\ (16,0,-16)\},$

$\{(-4,0,4)\}$ *y* $\{(0,0,0),\ (1,0,-1)\}$

4.- $\bar{v} = (0,4,1)$

5.- a) *independientes*

b) *Una base es:* $\{(-2,-1,1)\}$

La dimensión del espacio solución es uno

6.- a) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & -\frac{4}{7}a + \frac{24}{7}b \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$

b) Con $\mathbb{R}^2$

CAPITULO V

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- a) No

b) No

c) Sí

d) No

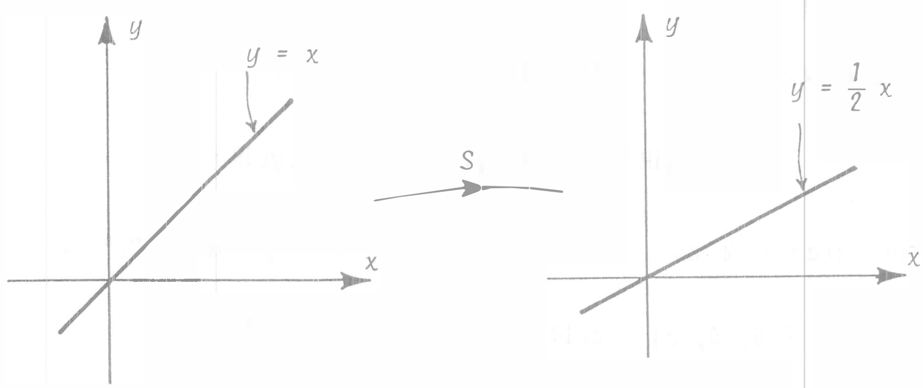
e) No

f) No

g) Sí

2.- La regla de asignación es $T(x,y) = (-x,y)$ que corresponde a una transformación lineal

4.-



5.- H es lineal

7.- a) $T(x,y) = (x, -y, x + 2y)$

b) $S(x,y) = (2x - y, x + y)$

8.- a) $T(1, 0, -3) = (2, -6, -2)$

b) No, porque $(1, -2, 1)$, $(3, -4, -1)$ y $(1, 0, -3)$ son linealmente dependientes

10.- A) El recorrido de T es el conjunto

$$\{(k_1, k_2) \mid k_1, k_2 \varepsilon \mathrm{IR}\}$$

B) El núcleo de T es el conjunto

$$\{(0, k, -k) \mid k \varepsilon \mathrm{IR}\}$$

C) El dominio de T es el conjunto

$$\{(k_1, k_2, k_3) \mid k_1, k_2, k_3 \varepsilon \mathrm{IR}\}$$

11.- I) El núcleo de T es $N(T) = \{\overline{0}\}$ y el recorrido de T es $T(V) = V$

II) El núcleo de T es $N(T) = V$ y el recorrido de T es $T(V) = \{\overline{0}_W\}$

12.- a) $N(T) = \left\{(-\frac{1}{3}k, \frac{1}{3}k, k) \mid k \varepsilon \mathrm{IR}\right\}$

Una base del núcleo es $\{(-1, 1, 3)\}$ y $\dim N(T) = 1$

$$T(\mathrm{IR}^3) = \{(x, y, y - x) \mid x, y \varepsilon \mathrm{IR}\}$$

Una base del recorrido es $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ y $\dim T(\mathrm{IR}^3) = 2$

b) $N(T) = \{(0, 0, c) \mid c \varepsilon \mathrm{IR}\}$

Una base del núcleo es $\{(0, 0, 1)\}$ y $\dim N(T) = 1$

$$T(\mathrm{IR}^3) = \{ax^2 + bx + (a - b) \mid a, b \varepsilon \mathrm{IR}\}$$

Una base del recorrido es $\{x^2 + 1, x - 1\}$ y $\dim T(\mathrm{IR}^3) = 2$

13.- a) Codominio = D

$$\text{Núcleo} = N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} -c & c \\ c & d \end{bmatrix} \mid c, d \varepsilon \mathrm{IR} \right\}$$

$$\text{Recorrido} = T(M) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & y - x \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim N(T) = 2$

17.- a) Es inyectiva y suprayectiva

b) Es inyectiva pero no es suprayectiva

c) No es inyectiva ni suprayectiva

18.- a) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

19.- $T(x,y,z) = (x + 4y,\ y - x,\ 2x - 2y + z,\ y - z)$

$\dim T(\mathbb{R}^3) = 3, \quad \dim N(T) = 0$

20.- $M_B^E(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_E^B(S) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

21.- a) $(4, -5, 6)$

b) $(y,\ 4x - y + 3z,\ x - 5y - 5z)$

22.- $M_B^A(T + 2S) = \begin{bmatrix} 11 & 8 & -2 \\ -10 & -6 & 12 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$M_B^A(T) + 2M_B^A(S)$

24.- a) $G \circ F : A \to A$

b) $G \circ H : C \to A$

c) $H \circ F$, *no se puede efectuar*

d) $S \circ F : A \to C$

e) $T \circ F$, *no se puede efectuar*

f) $H \circ T \circ G : B \to B$

25.- a) $(S \circ R)(x,y) = (-x - 3y,\ x - 2y)$

$(R \circ S)(x,y,z) = (-y + 2z,\ x - y + z,\ -2x + 2y - 2z)$

$T \circ S$, *no se puede efectuar*

$(S \circ T)(x,y,z) = (2y + z,\ 0)$

b) $(R \circ S \circ T)(x,y,z) = (2y + z,\ 0,\ 0)$

28.- T *está definida por* $T(x,y) = (-y,x)$

S *está definida por* $S(x,y) = (x,-y)$

a) $(T + S)(1,\ 1) = (0,\ 0)$

b) $(T + S)(x,y) = (x - y,\ x - y)$

c) $(x,\ 2x + y)$

30.- a) $M_B^A(S) = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $(S \circ T)(ax^2 + bx + c) = -ax^2 + (2a - b)x + (3b - c)$

33.- a) $T^{-1}(x,y) = (3x - 2y,\ y - x)$

b) No existe T^{-1}

c) $T^{-1}(x,y,z) = (x,\ y - x,\ z - y)$

34.- $M_A^B(T) = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$T(ax^2 + b) = (a + b)x^2 + b$

35.- a) $T(x,y) = (x,\ x + y,\ y)$

b) $T(x,y,z) = (3x - y + z,\ x)$

36.- $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) = (b - a)x + a$

38.- a) M sí es invariante

b) N no es invariante

c) P sí es invariante

40.- $a = -1, \qquad b = 2$

42.- $\lambda_1 = -1, \quad \{\bar{v}_{\lambda_1}\} = \{(k,\ 0,\ 0) \mid k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}\}$

$\lambda_2 = 4, \quad \{\bar{v}_{\lambda_2}\} = \{(\frac{2}{3}k,\ k,\ k) \mid k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}\}$

$\lambda_3 = 3, \quad \{\bar{v}_{\lambda_3}\} = \{(\frac{1}{2}k,\ k,\ 0) \mid k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}\}$

45.- a) Para $T(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x)$

sen x no es vector característico de T

e^{2x} sí es vector característico de T, asociado al valor característico 2

$x^2 - 1$ no es vector característico de T

3^x sí es vector característico de T, asociado al valor característico $\ln 3$

b) Para $T(f(x)) = \int^x f(t)\, dt$

sen x no es vector característico de T

e^{2x} sí es vector característico de T, asociado al valor característico $\frac{1}{2}$

$x^2 - 1$ no es vector característico de T

3^x sí es vector característico de T, asociado al valor característico $\frac{1}{\ln 3}$

47.- $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3$

$E(\lambda_1) = E(\lambda_2) = \{(k, 0, 0) \mid k \in \mathbb{R}\}$

Una base es $\{(1, 0, 0)\}$ y $\dim E(\lambda_1) = \dim E(\lambda_2) = 1$

$E(\lambda_3) = \{(-\frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

Una base es $\{(-1, -1, 2)\}$ y $\dim E(\lambda_3) = 1$

49.- $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$

Es decir, $\theta = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Los vectores característicos asociados a $\lambda = 1$ para el menor valor de θ son

$\{\bar{v}_\lambda\} = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq 0, \quad k_2 \neq 0, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$

52.- $M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ -9 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

53.- a) I) $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$

II) $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

III) *Sólo tiene un valor característico* $\lambda = \sqrt[3]{5}$

b) I) Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, *entonces* T *es diagonalizable*

$$D(T) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; \{(-1,\ 0,\ 1),\ (4,\ 0,\ 1),\ (19,\ 3,\ 8)\}$$

II) T *sí es diagonalizable*

$$D(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; ; \; \{(1,\ -1,\ 1),\ (2,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 1,\ 0)\}$$

III) Como $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, *entonces no se puede diagonalizar*

54.- $T(ax^2 + bx + c) = -ax^2 - 2bx + (5a - 4b + 2c)$

55.- a) *Los valores característicos son:*

$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

Los correspondientes vectores característicos asociados son:

$$\{\bar{v}_{\lambda_1}\} = \left\{ \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix} \;\middle|\; k \neq 0, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\{\bar{v}_{\lambda_2}\} = \{\bar{v}_{\lambda_3}\} = \left\{ \begin{bmatrix} k_2 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS ADICIONALES

1.- a) No es lineal

b) Sí es lineal

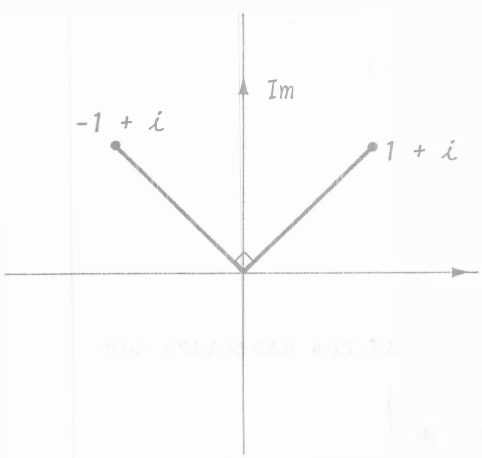
c) Sí es lineal

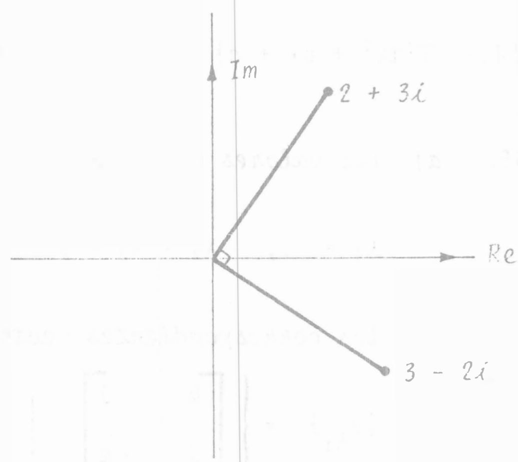
d) Sí es lineal

2.- a) $T(x,y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta,\ x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$

b) T es lineal

3.- b) $i(1 + i) = -1 + i$; $i(3 - 2i) = 2 + 3i$





c) $i(a,b) = (-b,a)$, $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

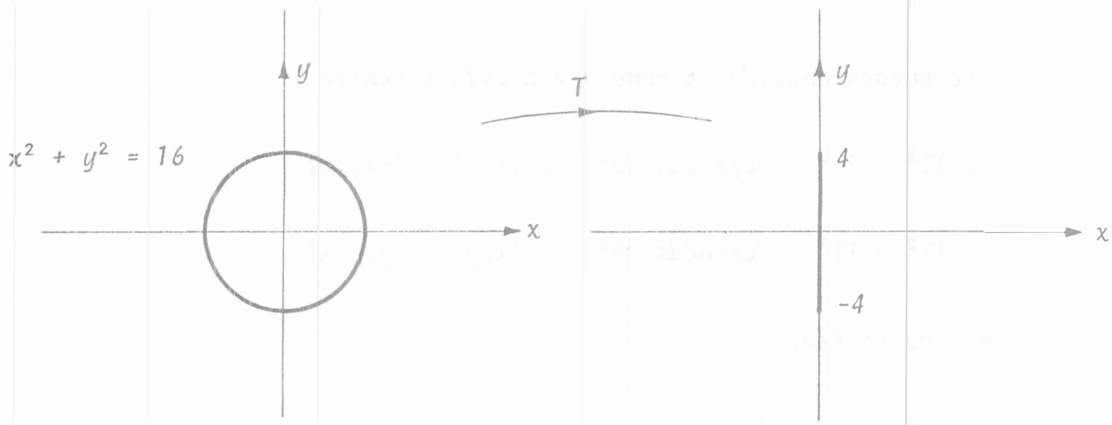
d) Sí

4.- a) $a = b = c = d = 0$

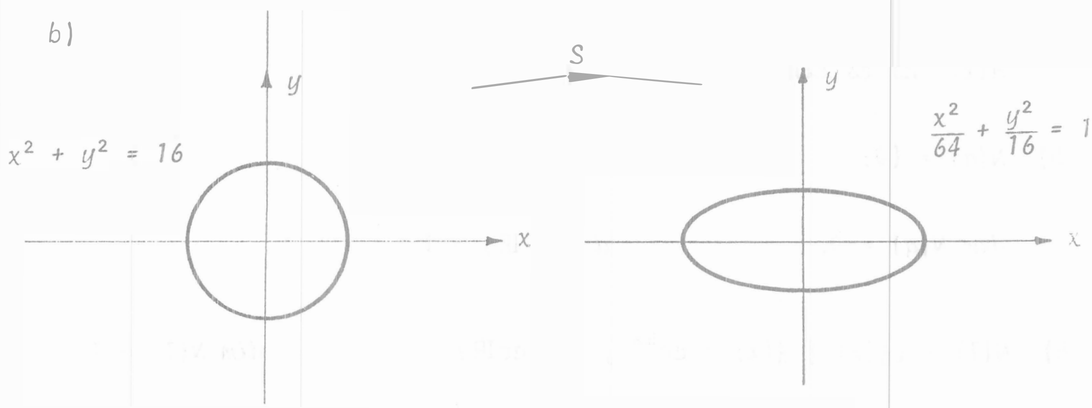
b) $a = -3,\ b = 3,\ c = 0,\ d = 1$

c) No

5.- a)



b)



6.- a) $T(ax^2 + bx + c) = (b - a)\ x^2 + c$

b) $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = (a,\ a - b,\ 2a + b)$

7.- a) No es lineal

b) Sí es lineal

9.- a) $T(x,y,z) = (x + y,\ x - y,\ 2z,\ z)$

b) No es posible obtener la regla de la transformación S porque el conjunto G es linealmente dependiente

10.- a) Multiplicar por i^2 equivale a una rotación de $180°$ en sentido antihorario

Multiplicar por i^3 equivale a una rotación de $270°$ en sentido antihorario

b) Sí se pueden considerar como operadores lineales

$i^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $i^2(x,y) = (-x,-y)$

$i^3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $i^3(x,y) = (y,\ -x)$

11.- a) $f(x)$ no es lineal

$g(x)$ sí es lineal

$h(x)$ no es lineal

b) $N(g) = \{0\}$

$\dim N(g) = 0,$ $\dim g(\mathbb{R}) = 1$

12.- b) $N(T) = \{f(x) \mid f(x) = ce^{ax}\ ,\ \ a, c\in\mathbb{R}\}$ $\dim N(T) = 1$

13.- a) $(2 + 3i,\ 3 + 2i)$

b) I) T no es lineal II) T sí es lineal

c) $N(T) = \{\overline{0}\}$; $T(\mathbb{C}) = \{(\overline{z}, iz) \mid z\in\mathbb{C}\}$

Una base del recorrido es $\{(1,\ i),\ (-i,\ -1)\}$

Por lo tanto, $\dim T(\mathbb{C}) = 2$ y $\dim N(T) = 0$

14.- b) $N(T) = \{f(x) \mid f(x) = 0\} = \{0\}$

15.- a) Sí es biyectiva, es decir, T es un isomorfismo

b) T es inyectiva pero no es suprayectiva, por lo tanto T no es un isomorfismo

16.- La transformación lineal T no es inyectiva porque

$$T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \text{ no implica que } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo:

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right), \text{ pero } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformación lineal T sí es suprayectiva porque el recorrido es igual al codominio

18.- a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como el rango de la matriz es dos, entonces la dimensión del recorrido es dos

b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ -1 & \frac{11}{2} & -3 \end{bmatrix}$

Como el rango de la matriz es dos, entonces la dimensión del recorrido es dos

19.- a) $T(x^2 + 2) = 2x - 1$

b) $T(ax^2 + bx + c) = -bx^2 + 2ax + (a - c)$

20.- a) $T(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = \overline{v}_1 - \overline{v}_2$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

21.- a) $M_E^E(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\alpha = -2, \quad \beta = 3$

c) $\dim T(M) = 2$

22.- $\left[T(\overline{v})\right]_A = \left(0, \frac{27}{4}\right)$

23.- a) $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24.- a) $T(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y\right)$

b) Una base C es $\{(1,1,1), (0,1,0), (-1,-1,2)\}$;

otra es $\{(1,1,1), (0,1,1), (-1,-1,2)\}$

25.- a) $T(3) = 2x^2 + 1$

b) $T(x+1) + T(3) = 3x^2 + 3x + 2$

c) $(S \circ T)(ax + b) = ax + b$

d) $(T \circ S)(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (6c - 3a)x + c$

26.- a) $(T + S)(3x^2 - 2x + 1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$

b) $U(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} b - 3c & 0 \\ 0 & 6a - 2c \end{bmatrix}$

27.- $H(x,y) = (-2x,\ 3x - y)$

29.- $H(ax + b) = \begin{bmatrix} a + \frac{1}{2} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} b \end{bmatrix}$

30.- a) $\begin{bmatrix} w & z \\ y & x \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x & y - x \\ z - y & w - z \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} w & z - w \\ y - z & x - y \end{bmatrix}$

31.- $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (b - 2a)x + (2a - b + c)$

que también se puede escribir como

$T^{-1}(f) = f - f' + f'' , \quad \forall f \in P$

32.- a) S *es inversa izquierda de* T *porque* $(S \circ T)(x,y) = (x,y)$

b) S *no es inversa derecha de* T *porque* $(T \circ S)(x,y,z) \neq (x,y,z)$

d) No

33.- b) *Sí,* $S = T^{-1}$

c) *Ambas son de orden* 2×2

34.- *Es linealmente independiente*

35.- a) $(T + S)(x,y,z) = (x - y + z,\ z,\ -x + 6y + z)$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $R = 3T + (-6)S$

36.- a) $\{T_1(x,y) = (x,0),\ T_2(x,y) = (0,x),\ T_3(x,y) = (y,0),\ T_4(x,y) = (0,y)\}$

b) $S(x,y) = 3(x,0) + 0(0,x) + (-1)(y,0) + 2(0,y)$

37.- a) *Una base es* $\{T_1(x,y) = x,\ \ T_2(x,y) = y\}$

dim $\mathscr{L}(\mathrm{IR}^2,\ \mathrm{IR}^1) = 2$

b) $S(x,y) = 6T_1(x,y) + 0T_2(x,y)$

c) $G(x,y) = -4y$

d) $H(x,y) = -2x$

38.- a) $$M_B^B(H) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $H^2(T(x,y)) = (H \circ H)(T(x,y)) = 9T(x,y)$

39.- a) *Es linealmente independiente*

b) *La transformación* S *sí pertenece al espacio generado por* $\{T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4\}$ *porque* $0T_1 + T_2 + (-2)T_3 + T_4 = S$.

40.- a) *Sí es invariante*

b) *No es invariante*

c) *Sí es invariante*

42.- a) *Sí es invariante*

b) *Sí es invariante*

c) *No es invariante*

43.- $M^3 = 2M^2 - 3M + 6I = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - 2M + 3I) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

46.- $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 2$

$\{\bar{v}_{\lambda_1}\} = \left\{ \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; k \neq 0, \;\; k \in \mathbb{R} \right\}$

$\{\bar{v}_{\lambda_3}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 4k & 2k \\ 0 & k \end{bmatrix} \;\middle|\; k \neq 0, \;\; k \in \mathbb{R} \right\}$

48.- $\lambda_1 = 16, \qquad \lambda_2 = 1$

49.- a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 6, \qquad \lambda_3 = 9$

c) $3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 18 = 0$

d) *Volumen* $= 24\pi$ *unidades de volumen*

50.- a) *Sobreamortiguada*

b) *Subamortiguada*

52.- a) $tr(A) = 6, \quad det(A) = 11$

b) $p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 11$

d) $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}\, i, \quad \lambda_2 = 3 - \sqrt{2}\, i$

e) $tr(B) = 0, \quad det(B) = -60$

53.- *No existen; es decir, la transformación lineal no tiene valores característicos y, por lo tanto, tampoco vectores característicos*

b) *Los valores característicos son* i *y* $-i$

Los vectores característicos asociados a los valores i *y* $-i$ *son, respectivamente,*

$\{(ik,\ k) \mid k \neq 0,\ \ k \in \mathbb{C}\}$

$\{(-ik,\ k) \mid k \neq 0,\ \ k \in \mathbb{C}\}$

54.- a) $\{(-\frac{2}{3}k,\ k) \mid k \neq 0,\ \ k \in \mathbb{R}\}$

$\{(0,\ k) \mid k \neq 0,\ \ k \in \mathbb{R}\}$

c) *Ayuda para la solución de este inciso:*

Obsérvese que la matriz asociada a la transformación lineal S *se puede escribir de la siguiente manera:*

$$M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

teniendo presente que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$ *y que* $\frac{1}{2} = \operatorname{sen} 30°$

(El lector podrá darse cuenta que, además de obtener una rotación de

30° al aplicar el operador S, se obtiene un aumento de cuatro veces la longitud del vector)

55.- a) $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4$

$\{\bar{v}_{\lambda_1}\} = \{(-k,\ k) \mid k \neq 0, \quad k \in \mathbb{R}\}$

$\{\bar{v}_{\lambda_2}\} = \{(k,\ 2k) \mid k \neq 0, \quad k \in \mathbb{R}\}$

b) $\bar{v}_3$ asociado a λ_1

$\bar{v}_6$ asociado a λ_2

$\bar{v}_7$ asociado a λ_1

c) Se preserva la dirección de los vectores

d) Los vectores característicos izquierdos son:

$\{\bar{v}_{\lambda_1}\} = \{(-2k,\ k) \mid k \neq 0, \quad k \in \mathbb{R}\}$

$\{\bar{v}_{\lambda_2}\} = \{(k,\ k) \mid k \neq 0, \quad k \in \mathbb{R}\}$

e) $\bar{v}_2$ asociado a λ_2

$\bar{v}_4$ asociado a λ_1

$\bar{v}_5$ asociado a λ_2

f) Se preserva la dirección de los vectores

g) Son ortogonales entre sí

61.- A no es similar a B

C sí es similar a D

62.- b) $\{(-k,\ 0,\ k) \mid k \neq 0, \quad k \in \mathbb{R}\}$

63.- $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+2b & a+c \\ a+c & a-b-c \end{bmatrix}$

64.- a) $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & -17 \\ 1 & 1 & 15 \end{bmatrix}$

65.- Sí es diagonalizable

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Una base a la cual está referida D es

$$\{(2,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ -2)\}$$

66.- No es diagonalizable

67.- Sí se puede representar por una matriz diagonal. Dicha matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

y una base a la cual está referida es

$$\{(1,\ -2,\ -3),\ (-3+4i,\ 1-3i,\ 5),\ (-3-4i,\ 1+3i,\ 5)\}$$

70.- a) Efectivamente, existe una matriz $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

obtenida con vectores característicos independientes de T_1 o T_2, tal que

$$Q^{-1}M(T_1)Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad Q^{-1}M(T_2)Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) $M(T_1)M(T_2) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix} = M(T_2)M(T_1)$

c) $(T_1 \circ T_2)(x,y,z) = (2x + 6y + 10z,\ 4y,\ 8y + 12z) = (T_2 \circ T_1)(x,y,z)$

EXAMEN DE CAPITULO

1.- b) $N(T) = \{(k_1,\ k_2,\ k_1) \mid k_1, k_2 \varepsilon \mathbb{R}\}$

Una base de $N(T)$ *es* $\{(1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0)\}$

dimensión del recorrido = $\dim T(\mathbb{R}^3) = 1$

2.- $T(x,y) = \left(\frac{14}{5}x - \frac{12}{5}y\ ,\ \frac{18}{5}x + \frac{16}{5}y \right)$

3.- b)

$$S^{-1}(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c \\ -\frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$$

4.- a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$

$\{\bar{v}_{\lambda_1}\} = \{\bar{v}_{\lambda_2}\} = \{kx^2 \mid k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}\}$

$\{\bar{v}_{\lambda_3}\} = \{\ \frac{1}{2} kx^2 + kx - 2k \mid k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}\}$

ó $\{\bar{v}_{\lambda_3}\} = \{kx^2 + 2kx - 4k \mid k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}\}$

b) No es posible obtener una matriz diagonal asociada a T

C A P I T U L O VI

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- a) No es producto interno porque no cumple con tres condiciones

b) No es producto interno porque no cumple con dos condiciones

c) Sí es producto interno

d) No es producto interno porque no cumple con una condición

e) Sí es producto interno

3.- b) $S = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

4.- $\forall\, a_i > 0$

6.- No cumple $(\bar{x} \mid \bar{x}) > 0$, $\forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^2$

7.- a) $-4 + 20i$

b) $\overline{x} = ((8 - 4k_2) + 4k_1 i,\ k_1 + k_2 i)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

ó $\overline{x} = (8 + 4ik,\ k)$, $k \in \mathbb{C}$

8.- No cumple que: si $f \neq 0 \Rightarrow (f \mid f) > 0$

9.- a) $(f \mid f) = \frac{2}{3}$

11.- a) No cumple una condición

b) Ninguna condición deja de cumplir (es producto interno)

c) No cumple dos condiciones

d) No cumple tres condiciones

12.- a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{7}$

c) $\sqrt{8}$

14.- a) $|| \overline{v} || = 9$

b) $\theta = \text{ang cos } \dfrac{-4}{3\sqrt{17}}$

16.- $0 \leq k \leq 1$

18.- a) $S = \{(x_1,\ x_2) \mid x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1,\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

b) No lo es

c) Es una elipse

20.- $\beta = 0$ y $\beta = -2$

22.- $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

24.- $\| f_0 \| = 1, \quad \| f_{2n-1} \| = \| f_{2n} \| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

26.- $S = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

27.- $\{(2, 2, 1), (0, 2, -1), (2, -4, -2)\}$

28.- $\{1, \sqrt{12}\,(t - \frac{1}{2}), \sqrt{180}\,(t^2 - t + \frac{1}{6})\}$

29.- a) No

b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0), \sqrt{2}\,(\frac{1}{2}i, i) \right\}$

30.- $\bar{v} = (1, -2, 1), \quad \bar{u} = (-2, -2, -2), \quad \bar{w} = (9, 6, 1)$

Entonces: $B_1 = \{(1, 0, -1), (1, -2, 1), (-2, -2, -2)\}$

$B_2 = \{(1, 0, -1), (1, -2, 1), (9, 6, 1)\}$

31.- a) No es hermitiano (simétrico)

b) Sí es hermitiano (simétrico)

32.- a) No es antihermitiano (antisimétrico)

b) Sí es antihermitiano (antisimétrico)

33.- No es antihermitiano

34.- Sí es hermitiano

35.- Sí es hermitiano (simétrico)

38.- e) Debe ser una base ortonormal con el producto interno respecto al cual el operador es simétrico; o bien, una base ortogonal cuyos vectores tengan la misma norma.

39.- c) $\begin{bmatrix} 2 & -1+2i \\ -1-2i & 0 \end{bmatrix}$

41.- b) La representación diagonal de T es: $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

y la base pedida es $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ 1),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ -2) \right\}$

42.- Sí es unitario (ortogonal).

44.- b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

45.- c) La matriz asociada a S es

$$M_B^B(S) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

y la base es $B = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$

La matriz asociada a T es

$$M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

y la base es $B = \{(2,\ 1),\ (1,\ -2)\}$

EJERCICIOS ADICIONALES

1.- a) $a = 4$

b) $b > 16$

2.- $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$; $a_3 > a_2$

7.- a) No es producto interno

b) Sí es producto interno

c) Sí es producto interno

d) No es producto interno

8.- a) No es producto interno. No se cumplen tres condiciones

b) Sí es producto interno

c) Sí es producto interno

9.- a) $(f \mid g) = 60$

10.- a) $(f \mid g) = 12e^{-1} - 6$; $(g \mid g) = 9(1 - e^{-1})$

b) Una función es $g(x) = e^{2x}(1 - 2x)$

11.- No es un producto interno

12.- $\theta = \text{áng cos } \dfrac{1}{2\sqrt{10}}$

13.- $\{(x, 0) \mid x < 0\}$

14.- a) $90°$

b) No son ortogonales

15.- Un vector es $f_3(t) = 10t^2 - 8t + 1$

16.- $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,x, \ \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}}\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right), \ \dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\left(x^3 - \dfrac{3}{5}x\right) \right\}$

17.- a) $\left\{ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \right\}$

b) No

18.- $$\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$$

19.- $\left\{ 1, \ x^2 - \dfrac{\pi^2 - 4}{2} \right\}$

20.- a) $\{(2, 0), (0, 2)\}$ y $\{(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})\}$

b) $\{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\{(1, 1), (1, 2)\}$

22.- $((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)) = x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$

23.- b) $\| \overline{v} \| = \| \overline{w} \| = 1$

c) No, porque $\overline{v}$ y $\overline{w}$ no son ortogonales

24.- a) Los vectores $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ forman entre sí un ángulo de 90°

b) $\| f \| = \| g \| = \| h \| = 1$

c) Sí

25.- $$((x_1,y_1,z_1) \mid (x_2,y_2,z_2)) = \frac{3}{16}(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) - \frac{1}{16}(x_1y_2 + x_1z_2 + x_2y_1 + x_2z_1 + y_1z_2 + y_2z_1)$$

26.- $(f \mid g) = (a_1x + b_1 \mid a_2x + b_2) = a_1a_2 - a_1b_2 - a_2b_1 + 2b_1b_2$

que también se puede expresar como:

$(f \mid g) = (a_1x + b_1 \mid a_2x + b_2) = f'(0)g'(0) - f'(0)g(0) - f(0)g'(0) + 2f(0)g(0)$

27.- a) Forman un ángulo de 90°

b) Sí porque las matrices son ortogonales y, además, sus normas valen uno.

29.- a) La base B es ortogonal con los dos productos internos

b) La base B no es ortonormal con el producto escalar ordinario, pero sí lo es con el otro producto interno

d) No, porque B no es ortonormal con el producto escalar ordinario

30.- a) $(\bar{u})_B = (\frac{1}{2}, 1)$

b) $\bar{u} \cdot \bar{w} = 0$

31.- b) $|| \phi_n(t) || = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\omega_0}}$

32.- a) $P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{8}(20x^3 - 13x)$

c) $|| P_0 || = \sqrt{2}$

$|| P_1 || = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$|| P_2 || = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

$\vdots$

$|| P_k || = \sqrt{\dfrac{2}{2k + 1}}$

33.- (F)

(V)

(V)

(F)

(V)

(V)

34.- La base ortogonal es $\{(1, 0), (1, 1)\}$

37.- T_1 es simétrico

T_2 no es simétrico

T_3 es simétrico

38.- b) $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) Son simétricas M_2 y M_3

f) La característica que tienen las bases A y B para que las matrices M_2 y M_3 sean simétricas es que son ortonormales

39.- b) $M_{B_1}^{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La base B_2 es ortonormal

$$M_{B_2}^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

40.- b) *Aunque la matriz es simétrica, no se puede afirmar que* T *es simétrico porque la base canónica no es ortogonal con el producto interno definido*

d) *Sí; porque la base* $\{(1, 1), (1, 0)\}$ *es ortonormal con el producto interno definido*

e) *El operador* T *es simétrico*

41.- b) $M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Por lo tanto, no es una matriz simétrica

c) *A partir de* B *se obtiene una base ortonormal* B'

$B' = \{(0, -\frac{1}{2}), (1, 1)\}$

Luego: $M_{B'}^{B'}(T) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

d) *Es ortonormal*

42.- c) $M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

43.- T_1 *no es antisimétrico*

T_2 *sí es antisimétrico*

T_3 *sí es antisimétrico*

44.- b) *Los valores característicos son* $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$

45.- a) *Una base es* $B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, i) \right\}$

d) $M_A^A(T) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

46.- a) $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$

b) Porque la base es ortogonal y la matriz es hermitiana

c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ i),\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(i,\ 1) \right\}$

d) $M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

47.- P es un operador hermitiano

48.- T es un operador hermitiano

49.- T es una transformación ortogonal

50.- Un vector es $\bar{u} = (2\sqrt{3},\ \sqrt{6},\ 0)$

El otro vector que satisface las condiciones que establece el enunciado es $\bar{u} = (\frac{2}{3}\sqrt{3},\ \frac{5}{3}\sqrt{6},\ 0)$

51.- c) $M(i) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $M(i^2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Ambas matrices son ortogonales

52.- T es una transformación ortogonal

53.- b) $\| \bar{v} \| = \| T(\bar{v}) \| = 5$

54.- b) T sí se puede diagonalizar

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

55.- b) S sí se puede diagonalizar

c) La representación matricial es $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y la base a la cual está referida es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

56.- a) $\bar{F}_1 = 10\sqrt{3}i + 10j$

$\bar{F}_2 = 0i - 30j$

$(\bar{F}_1)_B = (10\sqrt{3}, 10)$, $(\bar{F}_2)_B = (0, -30)$

$\Sigma F_x = 10\sqrt{3}$, $\Sigma F_y = -20$

b) $M_A^B = \begin{bmatrix} \text{sen } 30° & \cos 30° \\ -\cos 30° & \text{sen } 30° \end{bmatrix}$

c) $T(x, y) = \left(\frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y, \ \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y \right)$ donde, en este caso, a cada x, y se le asocia una componente de una fuerza

d) $T(\Sigma F_x , \Sigma F_y) = (15\sqrt{3} , 5)$

$\Sigma F_t = 15\sqrt{3}$, $\Sigma F_n = 5$

f) $\begin{bmatrix} \cos 300° & \text{sen } 300° \\ -\text{sen } 300° & \cos 300° \end{bmatrix}$

y, la base a la cual está referida es $\{(1, 0), (0, 1)\}$

g) $T(\bar{F}_1) = (0, 20)$

$\| T(\bar{F}_1) \| = 20 = \| \bar{F}_1 \|$

$$T(\overline{F}_2) = (15\sqrt{3},\ -15)$$

$$||\ T(\overline{F}_2)\ || = 30 = ||\ \overline{F}_2\ ||$$

EXAMEN DE CAPITULO

1.- *Sí es un producto interno*

2.- (C) $(\alpha\overline{x} \mid \overline{y})$

( ) $(\overline{x} \mid \overline{y}) > 0$

( ) $(\overline{x} \mid \overline{x}) = 0$

( ) $(\alpha\overline{x} \mid \alpha\overline{y})$

(D) $(\overline{x} \mid \overline{x}) > 0$

(E) $(\overline{x} \mid \overline{y}) = 0$

(A) $(\overline{\overline{y} \mid \overline{x}})$

(B) $(\overline{x} \mid \alpha\overline{y})$

( ) $(\overline{y} \mid \overline{x})$

4.- a) $||\ A\ || = 5$

b) *Los vectores* A *y* B *forman un ángulo de* 90° (*sin embargo, los vectores* A *y* B *no son ortogonales*).

5.- I) (F)

II) (V)

III) (F)

IV) (F)

V) (V)

VI) (F)

VII) (V)

VIII) (F)

IX) (F)

X) (V)

6.- a) T y S son hermitianos.

b) Para el operador T :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{(0,\ 3),\ (4,\ 4)\}$$

Para el operador S :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \{(4,\ 4),\ (0,\ 3)\}$$

7.- b) $\left\{ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \right\}$

Esta obra se terminó de imprimir
en mayo de 2003
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 500 ejemplares
más sobrantes de reposición.