

$(1+a)^1 = 1 + (1)(a)$. SIN EMBARGO, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE P_n ES CIERTO PARA $n \geq 2$ MEDIANTE EL MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA, COMO SIGUE:

PRIMERO SE OBSERVA QUE $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$. COMO $a \neq 0$ SE TIENE QUE $a^2 > 0$ Y POR LO TANTO $1+2a+a^2 > 1+2a \Rightarrow (1+a)^2 > 1+2a$ Y POR LO TANTO P_2 ES VERDADERA.

SUPÓNGASE QUE P_k ES VERDADERA PARA $k \geq 2$. ENTONCES, LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN ES

$$(1+a)^k > 1+ka$$

SE DESEA DEMOSTRAR QUE P_{k+1} ES VERDADERA, ES DECIR, QUE

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a$$

COMO $a > -1$ SE TIENE QUE $a+1 > 0$, Y POR LO TANTO, MULTIPLICAR AMBOS LADOS DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN POR $1+a$ NO CAMBIARÁ EL SIGNO DE LA DESIGUALDAD. ASÍ:

$$(1+a)^k (1+a) > (1+ka)(1+a)$$

QUE SE PUEDE ESCRIBIR COMO $(1+a)^{k+1} > 1+ka+a+ka^2$ O COMO $(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a+ka^2$

COMO $ka^2 > 0$, SE TIENE QUE $1+(k+1)a+ka^2 > 1+(k+1)a$ Y POR LO TANTO

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a$$

DE ESTA FORMA, P_{k+1} ES VERDADERA Y LA DEMOSTRACIÓN ESTÁ COMPLETA.

ÁLGEBRA

RESOLVER LA SIGUIENTE DESIGUALDAD: $\frac{x+1}{x+3} \leq 2$

SOLUCIÓN. LAS SIGUIENTES DESIGUALDADES SON EQUIVALENTES:

$$\frac{x+1}{x+3} \leq 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+1-2x-6}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x-5}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x+5}{x+3} \geq 0$$

EL NUMERADOR Y EL DENOMINADOR DEL PRIMER LADO DE LA ÚLTIMA DESIGUALDAD TIENEN COMO RAÍCES A -5 Y -3 RESPECTIVAMENTE. NÓTESE TAMBIÉN

QUE -5 ES SOLUCIÓN DE ESTA DESIGUALDAD.

EN LA RECTA NUMÉRICA, CON LOS DOS VALORES ANTERIORES SE DETERMINAN LOS SIGUIENTES INTERVALOS.

$$(-\infty, -5), (-5, -3), (-3, \infty)$$

COMO $\frac{x+5}{x+3}$ ES UN COCIENTE DE DOS POLINOMIOS, SU VALOR SIEMPRE ES POSITIVO O SIEMPRE ES NEGATIVO EN TODO UN INTERVALO. SE PUEDEN UTILIZAR

VALORES DE PRUEBA PARA VER LOS SIGNOS Y SE CONSTRUYE LA SIGUIENTE TABLA:

INTERVALO	VALOR DE PRUEBA	SIGNO DE $x+5$	SIGNO DE $x+3$	SIGNO DE $\frac{x+5}{x+3}$
$(-\infty, -5)$	-6	NEGATIVO	NEGATIVO	POSITIVO
$(-5, -3)$	-4	POSITIVO	NEGATIVO	NEGATIVO
$(-3, \infty)$	0	POSITIVO	POSITIVO	POSITIVO

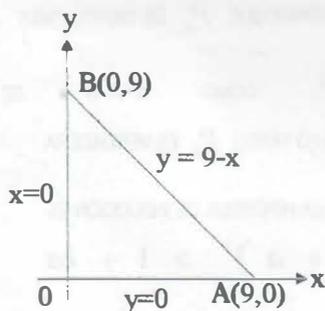
A PARTIR DE LA TABLA SE OBSERVA QUE LAS SOLUCION PARA QUE EL COCIENTE SEA POSITIVO ES $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$ Y, POR EL SIGNO 'MÁS MENOS' DE LA DESIGUALDAD, LA SOLUCIÓN DE ÉSTA ESTA DADA FINALMENTE POR:

$$x \in (-\infty, -5] \cup (-3, \infty)$$

CÁLCULO III

DETERMINAR LOS VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTOS DE LA FUNCIÓN $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ EN LA PLACA TRIANGULAR DEL PRIMER CUADRANTE LIMITADA POR LAS RECTAS $x=0$, $y=0$, $y=9-x$.

SOLUCIÓN. LA PLACA SE PRESENTA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



SE OBTIENEN LAS DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN QUE SON $f_x = 2 - 2x$ y $f_y = 2 - 2y$ SE IGUALAN A CERO Y $2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$; $2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 1$ POR LO QUE SE TIENE UN PUNTO CRÍTICO QUE ES $(1,1)$ AHORA SE OBTIENEN LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES Y LA MIXTA Y SE LLEGA A:

$$f_{xx} = -2 \quad ; \quad f_{yy} = -2 \quad y \quad f_{xy} = 0$$

ENTONCES $g(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$ LUEGO, PARA EL PUNTO $(1,1)$, $g(1,1) = 4 > 0$ Y ADEMÁS SE VE QUE $f_{xx}(1,1) = -2 < 0$ o $f_{yy}(1,1) = -2 < 0$ POR LO TANTO EN ESTE PUNTO SE PRESENTA UN MÁXIMO RELATIVO.

AHORA CONSIDÉRESE TODA LA FRONTERA DE LA PLACA

EN EL SEGMENTO 'OA' $y = 0$, LUEGO LA FUNCIÓN ES $f(x,0) = 2 + 2x - x^2$ QUE PUEDE CONSIDERARSE COMO UNA FUNCIÓN DE "x" DEFINIDA EN EL INTERVALO CERRADO $0 \leq x \leq 9$. EN LOS EXTREMOS, LA FUNCIÓN TIENE LOS SIGUIENTES VALORES.

$$x = 0 \Rightarrow f(0,0) = 2 \quad ; \quad x = 9 \Rightarrow f(9,0) = -61$$

Y MEDIANTE LA DERIVADA SE TIENE QUE: $f'(x,0) = 2 - 2x$; $2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1,0) = 3$

EN EL SEGMENTO 'OB' $x = 0$, LUEGO LA FUNCIÓN ES $f(0,y) = 2 + 2y - y^2$ POR LA SIMETRÍA DE f EN "x" y "y", EN ESTE SEGMENTO LAS POSIBILIDADES SON LAS MISMAS QUE EN EL SEGMENTO ANTERIOR, ESTO ES,

$$f(0,0) = 2 \quad ; \quad f(0,9) = -61 \quad ; \quad f(0,1) = 3$$

PARA EL SEGMENTO 'AB' YA SE HAN VISTO LOS EXTREMOS, POR LO QUE SÓLO QUEDA VER EL INTERIOR DEL MISMO. CON $y = 9 - x$ SE TIENE QUE

$f(x,y) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2 = -61 + 18x - 2x^2$ COMO SE TRATA DE UNA FUNCIÓN CON UN ARGUMENTO, SE DERIVA Y SE OBTIENE:

$$f' = 18 - 4x \quad ; \quad 18 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow f(x,y) = -61 + 18\left(\frac{9}{2}\right) - 2\left(\frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{41}{2}$$

CONCLUSIÓN DE TODOS LOS VALORES OBTENIDOS, QUE SON: 4, 2, -61, 3, $-\frac{41}{2}$ SE CONCLUYE QUE EL MÁXIMO ABSOLUTO ES 4, VALOR

QUE SE ALCANZA EN EL PUNTO $(1,1)$ Y EL MÍNIMO ABSOLUTO ES -61, EN LOS PUNTOS $(0,9)$ y $(9,0)$

TUTORÍA

A LOS ALUMNOS DE NUEVO INGRESO

AHORA QUE ESTÁN LLEGANDO A LA FACULTAD QUEREMOS DESEARLES MUCHO ÉXITO EN ESTA NUEVA ETAPA DE SU VIDA. DESEAMOS ATRAER SU ATENCIÓN PARA SUGERIRLES QUE DE AHORA EN ADELANTE LA AUTOMOTIVACIÓN JUEGA UN PAPEL IMPORTANTE EN SU TRAYECTORIA ACADÉMICA. SE PREGUNTARÁN ¿CÓMO LOGRARLO? PUES BIEN; PARA QUE SEAN CONSTANTES EN LA REALIZACIÓN DE SUS OBJETIVOS Y LA BÚSQUEDA DE SUS METAS, ES IMPORTANTE QUE CONOZCAN QUE EXISTEN DOS FORMAS DE MOTIVACIÓN: UNA ES EL **MIEDO** (ENERGÍA NEGATIVA) QUE SEGURAMENTE YA LO HABRÁN EXPERIMENTADO EN ALGUNA O MUCHAS OCASIONES. EL MIEDO SE HA DE ENFRENTAR PRIMERO RECONOCIÉNDOLO Y DESPUÉS HACIÉNDOLE FRENTE Y OBTENER DE ÉL LO POSITIVO. RECUERDEN QUE NO EXISTEN FRACASOS, SÓLO TROPIEZOS DE LOS CUALES SE HAN DE LEVANTAR Y HABRÁN GANADO EXPERIENCIAS. LA OTRA FORMA DE MOTIVACIÓN ES EL **DESEO** (ENERGÍA POSITIVA) QUE LOS LLEVARÁ A LA REALIZACIÓN DE LAS METAS QUE SE PROPONGAN. DESPUÉS DE HABER EXPERIMENTADO CIERTOS LOGROS, ENCONTRARÁN MÚLTIPLES SATISFACCIONES. ¡TIENEN EN SUS MANOS SU PROPIO MOTOR! LES DESEAMOS QUE SU ESTANCIA EN LA FACULTAD ESTÉ LLENA DE DESEOS Y ÉXITOS, Y QUE LOGREN ESA REALIZACIÓN PLENA QUE LOS CONDUZCA A UN FUTURO LLENO DE SATISFACCIONES, TANTO EN SU QUEHACER PROFESIONAL COMO EN SU CRECIMIENTO PERSONAL.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

SEGUNDA COMPILACIÓN DEL

BOLETÍN

COPADI

PRODUCCIÓN

ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

REVISIÓN

ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ

COLABORACIÓN

LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

UN ESPECIAL AGRADECIMIENTO A LOS PROFESORES DE
LA FACULTAD QUE COLABORARON CON EJERCICIOS Y
CUYOS NOMBRES APARECEN EN LOS BOLETINES



FACULTAD INGENIERIA

PROLOGO

En esta publicación se presentan 75 números del Boletín **COPADI** con 312 ejercicios resueltos de asignaturas de la Facultad de Ingeniería, en su mayoría de las que se cursan en su División de Ciencias Básicas. El objetivo de este trabajo es proporcionar a los estudiantes una amplia variedad de problemas en los que se aplican diversos conocimientos que adquieren en las aulas. También contiene exhortos a los estudiantes para que se esfuercen y alcancen sus metas académicas, así como información del Programa "Tutoría para todos" y cápsulas culturales. Todo ello con la finalidad de nutrir la vida académica de la Facultad y alentar la superación y el éxito de sus alumnos en su formación científica básica y en su crecimiento como seres humanos.

Esta segunda edición, a diferencia de la primera, tiene un índice mediante el cual es posible buscar fácilmente el tema del problema y la asignatura, en relación con el número del boletín.

Ing. Pablo García y Colomé



PROLOGO

En esta publicación se presentan 75 números del Boletín COPADE con 312 ejercicios resueltos de asignaturas de la Facultad de Ingeniería, en su mayoría de las que se cursan en su División de Ciencias Básicas. El objetivo de este trabajo es proporcionar a los estudiantes una amplia variedad de problemas en los que se aplican diversos conocimientos que adquieren en las aulas. También contiene ejercicios a los estudiantes para que se esfuerzen y adquieran sus metas académicas, así como información del Programa "Tutorías para todos" y cápsulas culturales. Todo ello con la finalidad de tutor la vida académica de la Facultad y elevar la superación y el éxito de sus alumnos en su formación científica básica y en su crecimiento como seres humanos.

Esta segunda edición, a diferencia de la primera, tiene un índice mediante el cual es posible buscar fácilmente el tema del problema y la asignatura en relación con el número del boletín.

Ing. Pablo García y Colina

ÍNDICE. 1-75

Álgebra

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Números Reales	
a) Resolución de desigualdades	31, 45
b) Inducción matemática	5, 7, 13, 22, 31, 32, 44, 46, 55, 62, 69
II. Números Complejos	
a) Forma binómica: igualdad	38
III. Polinomios	
a) Técnicas para buscar raíces	15, 25, 48
IV. Sistemas de Ecuaciones Lineales	
a) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss	71
V. Matrices y Determinantes	
a) Ecuaciones matriciales y su resolución	2
VI. Estructuras Algebraicas	
a) Grupo abeliano	30
b) Isomorfismos	11, 21

Álgebra Lineal

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Espacios Vectoriales	
a) Propiedades elementales	66, 70
b) Definición de Subespacio	47
c) Dependencia lineal	9, 33, 41, 55
II. Espacios con Producto Interno	
a) Conjuntos ortogonales	26
b) Complementos ortogonales	58
III. Transformaciones Lineales	
a) Matriz asociada a una transformación lineal	53
b) Diagonalización de una matriz	12

Análisis Gráfico

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Fundamentos para el análisis gráfico	26, 60, 66

Análisis de Sistemas y Señales

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
Periodicidad de señales	6

Cálculo I

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Funciones	
a) Dominio, codominio y recorrido	22, 31, 45, 54, 69
b) Funciones biyectivas	62
c) Función inversa	39
II. Límites y continuidad	
a) Cálculo de límites	7, 14, 32, 40, 46
III. La derivada y algunas de sus aplicaciones	
a) Cálculo a partir de la definición	15
b) Derivación de las funciones circulares	1, 17
c) Derivación de varios tipos de funciones	40
d) Funciones en forma implícita y paramétrica	35
e) Derivadas de orden superior	73
f) Aplicaciones geométricas de la derivada	53, 64
g) Aplicación física de la derivada	4, 8, 24, 57
h) La diferencial: Valores aproximados y errores	18, 49, 57
IV. Variación de funciones	
a) Funciones crecientes y decrecientes	17, 33
b) Máximos y mínimos relativos y absolutos	1, 4, 20, 37, 41, 42, 50, 59, 67, 68
c) Análisis de la variación de una función	10, 52
V. Sucesiones y series	
a) Convergencia de una serie	11, 29, 51

Cálculo II

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
Primera y segunda derivada de varias funciones	73
I. Las integrales definida e indefinida	
a) Interpretación geométrica y propiedades de sumas de Riemann	6, 54
b) Concepto de integral definida	69
II. Funciones logaritmo y exponencial	
a) Integración de la función exponencial	27
b) Desarrollo en series de potencias	24
c) La Regla de L' Hopital	17, 56
d) La integral impropia	15, 17, 56, 57
III. Métodos de integración y aplicaciones	
a) Integración por partes	42
b) Sustitución trigonométrica	59
c) Sustituciones diversas	14, 38, 46, 73
d) Varios métodos de integración	35, 64, 70
e) Longitud de arco	25, 26, 42, 58, 73
f) Área entre curvas	2
g) Volumen de revolución	2

IV. Funciones escalares de dos o mas variables	
a) Conceptos de dominio y recorrido y la representación gráfica de éstos	67
V. Derivación y diferenciación de funciones escalares de dos o mas variables	
a) Derivadas parciales	20
b) Derivadas parciales sucesivas	18, 29
c) Regla de la cadena	11
d) Definición de derivada direccional	28, 29

Cálculo III

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Extremos para funciones de dos o mas variables	
a) Máximos, mínimos y puntos críticos para funciones de dos variables independientes	14, 31
b) Establecimiento de la ecuación de Lagrange y Resolución de problemas de máximos y mínimos con restricciones y absolutos	6, 54, 70, 14, 22, 39
II. Funciones vectoriales	
a) Análisis de curvas a través de la longitud de arco como parámetro	63
b) Definiciones de divergencia y de rotacional	21, 57
c) Campos irrotacional y solenoidal	33
III. Integrales de línea	
a) Cálculo de la integral de línea	73
b) Aplicaciones de la integral de línea a la mecánica	24, 42
c) La integral de línea como modelo matemático del trabajo	3, 51
d) Conceptos físico y matemático de campo conservativo	10, 18
e) Cálculo de la función potencial	26, 73
f) Integración de la diferencial exacta	51, 67
IV. Integrales múltiples	
a) Cálculo de la integral doble mediante la reiterada	3
b) Concepto y representación gráfica de regiones normal y regular	63
c) Aplicaciones en áreas, volúmenes, momentos y centros de masa	3, 11, 27, 29, 30, 37, 51, 61, 68
d) Enunciado, demostración y aplicaciones del teorema de Green	20
e) Cálculo del área de una superficie	20, 27
f) Integral de superficie y aplicaciones	30
g) Teorema de Gauss	53

Cinemática

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Cinemática del punto	
a) Movimientos rectilíneos con aceleración variable	23
b) Cinemática de los movimientos curvilíneos	72
c) Tiro parabólico	1, 7, 33, 34
III. Cinemáticas del punto y de la recta relacionadas	
a) Movimiento circular	47
IV. Movimiento relativo	
a) Velocidad y aceleración absoluta, relativa y de arrastre	24, 28, 41, 65
V. Cinemática del cuerpo rígido	
a) Eje instantáneo de rotación	19

Computadoras y Programación

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
Programas en lenguaje C	4

Dinámica

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Aplicando ecuaciones de movimiento	
a) El modelo matemático de la Segunda Ley de Newton, para partículas de masa constante	34, 34, 48
b) Dinámica del movimiento curvilíneo de la partícula	49
c) Dinámica del movimiento de partículas conectadas	23, 66
II. Trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento en la dinámica de la partícula	
a) Trabajo realizado por una fuerza cualquiera que actúa sobre una partícula	25
b) Ecuación del impulso y la cantidad de movimiento lineales para una partícula	37
IV. La dinámica del cuerpo rígido con movimiento plano, aplicando ecuaciones de movimiento	
a) Definición de plano de movimiento	41
b) Ecuaciones vectoriales y escalares, de movimiento, para cuerpos rígidos con movimiento plano general	13, 16
V. Trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento en la dinámica del cuerpo rígido	

a) Trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido que realiza un movimiento plano general	25
b) Primera forma de la ecuación del trabajo y la energía	10
c) Principio de la conservación de la energía para cuerpos rígidos conectados con otros	59

Dinámica de Sistemas Físicos

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
Fluidos	2

Ecuaciones Diferenciales

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Ecuaciones diferenciales	
a) Solución de la ecuación diferencial: general, particular y singular	55
II. Ecuaciones diferenciales de primer orden	
a) Ecuaciones diferenciales de variables separables	46
b) Ecuaciones diferenciales homogéneas	75
c) Ecuaciones diferenciales exactas, factor integrante	5, 5, 14, 14
III. Ecuaciones diferenciales lineales	
a) Solución de la homogénea asociada y solución general	64, 75
b) Polinomios diferenciales	8, 35
c) Método de coeficientes indeterminados	52, 75
d) Método de variación de parámetros	1, 11, 48, 41
IV. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	
a) Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden	35
V. Transformada de Laplace	
a) Transformada inversa de Laplace	60
b) Aplicaciones de la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	20
VI. Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales	
a) Resolución de problemas de condiciones iniciales y de frontera	65

Electricidad y Magnetismo

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Campos y potencial eléctricos	
a) Concepto de carga eléctrica y distribuciones continuas de carga	55
b) Concepto de campo eléctrico	7
c) Obtención de campos eléctricos originados por distribuciones discretas y continuas de carga	32, 40
d) Ley de Gauss en forma integral y sus aplicaciones	63
II. Capacitancia y dieléctricos	
a) Cálculo de la energía almacenada	19
b) Conexiones de capacitores; capacitor equivalente	47
III. Circuitos eléctricos	
a) Leyes de Kirchhoff y su aplicación en circuitos resistivos con fuentes de voltaje continuo y alterno senoidal	4, 36
IV. Magnetostática	
a) Campo magnético (B)	60
b) Fuerza magnética entre conductores	28, 75
V. Inducción electromagnética	
a) Inductancia propia y mutua, y Fuerza electromotriz	43
b) Circuitos RL y RLC en serie	12

Estadística

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
II. Estadística descriptiva	56
IV. Distribuciones maestras, V. Estimación puntual de parámetros poblacionales y VI. Estimación de parámetros por intervalos de confianza	9

Estática

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
II. Conceptos básicos de la estática a) Vector representativo de una fuerza	16
III. Estudio de los sistemas de fuerzas a) Definición de equivalencia de sistemas de fuerzas	12, 47
IV. Diagramas de cuerpo libre a) Elaboración de diagramas de cuerpo libre donde intervienen diversos tipos de fuerzas y/o pares	5, 75

Física Experimental

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
II. Conceptos básicos de metrología a) Sensibilidad de un instrumento de medición. Obtención experimental de la precisión y de la exactitud de un instrumento de medición	72
III. Dinámica a) Modelos matemáticos y gráficos que relacionan la velocidad y la aceleración con el tiempo b) Obtención, y prueba del modelo y su aplicación en la solución de problemas de dinámica	39 23, 32, 45, 55
IV. Fluidos a) Determinación experimental de la presión atmosférica. Relación entre presión absoluta, relativa y atmosférica	27
V. Termodinámica a) Prueba del modelo y su aplicación en la determinación de la capacidad térmica específica de una sustancia y en la solución de problemas de calorimetría	61
VI. Electromagnetismo a) Obtención, y prueba del modelo y su aplicación en la solución de problemas de electromagnetismo	19, 50
VII. Ondas a) Ecuación de una línea recta que represente los valores experimentales. Significado físico de la pendiente de la recta obtenida	68
IX. Sistemas de unidades a) Sistemas FPS: gravitatorio y absoluto b) Ecuaciones dimensionales	28 43

Geometría Analítica

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Sistemas de referencia	
a) Transformación entre los sistemas de coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas	5, 39, 71
II. Álgebra vectorial	
a) Producto escalar de dos vectores y propiedades	56
b) Componente escalar y vectorial de un vector en la dirección de otro	25, 45
c) Producto vectorial	63
III. La recta y el plano	
a) Distancia de un punto a una recta	34
b) Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre rectas	57
c) Distancia entre dos rectas	15, 58
d) Distancia entre dos planos	36
e) Relaciones entre rectas y planos: ángulo entre una recta y un plano. Intersección de una recta con un plano	34, 43
IV. Curvas	
a) Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de una curva plana	69
V. Superficies	
a) Representación cartesiana. Superficies cilíndricas, cónicas, regladas y de revolución	21
b) Método de las generatrices para la determinación de la ecuación cartesiana de una superficie	60
c) Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de una superficie	12, 30, 44

Matemáticas Avanzadas

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Variable compleja	
a) Funciones de variable compleja	13, 38
b) Funciones analíticas	8
c) Integrales de línea de funciones de variable compleja	33, 59, 65
II. Análisis de Fourier	
a) Definición de series de Fourier trigonométricas	7, 43, 68, 75

b) Forma compleja de las series de Fourier	44
c) Desarrollo de la transformada de Fourier directa a partir de la serie de Fourier	74
d) Enunciado del teorema integral de Fourier	55

Métodos Numéricos

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
Juego numérico	37
I. Aproximación numérica y errores	
a) Aritmética de punto flotante y problemas fundamentales de los métodos numéricos al emplear equipo de cómputo	4

Probabilidad

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Conceptos básicos	
a) Fenómenos deterministas y aleatorios	65
b) Espacio muestral de un fenómeno aleatorio	44
III. Variables aleatorias	9, 13
IV. Variables aleatorias conjuntas	
a) Función de probabilidad conjunta: su definición y propiedades	2, 48
VI. Modelos analíticos de fenómenos aleatorios continuos	
a) Distribución uniforme	75
b) El teorema del límite central	71

Química

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Introducción a la química y a la estructura atómica	
a) Modelo atómico de Thomson	62
b) Experimento de Millikan	38
c) Teoría cuántica de Planck	56
d) Efecto fotoeléctrico	71
e) Modelo atómico de la mecánica cuántica	8
II. Clasificación periódica de los elementos	
a) Tabla periódica actual	32
IV. Estequiometría	
a) Antecedentes estequiométricos	3, 12, 23
b) Balanceo de ecuaciones químicas: método de tanteo, ion-electrón y cambio de número de oxidación	43, 44, 58
c) Cálculos estequiométricos. Reactivo	

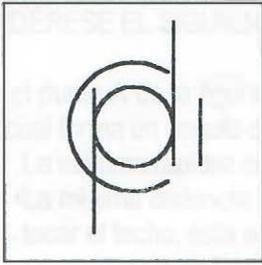
limitante y reactivo en exceso	50, 60
d) Ecuación del gas ideal	72
V. Termodinámica y equilibrio químicos	
a) Equilibrio químico	21
b) Conceptos de pH, pK y solubilidad	3, 53
c) Termoquímica	28
VI. Electroquímica	
a) Proceso electroquímico. Pilas	68

Teoría Electromagnética

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
Ley de Gauss	6
Ley de Biot-Savart	6

Termodinámica

TEMAS	Núm. de Boletín(es)
I. Conceptos fundamentales y la ley cero de la termodinámica	
a) Presión	47, 69
II. La 1ª ley de la termodinámica	
a) Concepto de calor: sensible (la capacidad térmica específica) y latente	65, 74
b) La energía interna y el calor a volumen constante: la C_v	72
III. Propiedades de las sustancias puras	
a) La ley de Joule para el gas ideal: $du = C_vdT$, $dh = C_pdT$	19, 36, 37
IV. El balance de energía. Aplicaciones de la primera ley de la termodinámica	
a) Los ciclos de Carnot, de Brayton, de Otto, de Diesel y de un compresor alternativo	61



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS TIENE COMO OBJETIVO APOYAR LA FORMACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, POR LO QUE SU CONTENIDO ESTARÁ CONSTITUIDO, ESENCIALMENTE, POR EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LAS DIVERSAS ASIGNATURAS QUE SE IMPARTEN EN TODAS LAS CARRERAS DE INGENIERÍA, ADEMÁS DE INCLUIR ALGUNOS AVISOS SOBRE ACTIVIDADES DE LA COORDINACIÓN, DE SUS PROGRAMAS Y ALGUNA MANIFESTACIÓN CULTURAL QUE SIEMPRE ALIMENTA EL ESPÍRITU.

CÁLCULO I

EJEMPLO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN TRASCENDENTE

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}; \dots \dots \text{FÓRMULA : } y = \ln u; u = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{u} \frac{dx}{dx}$$

Si se aplica la fórmula se tiene que:

$$f'(x) = \frac{(1 + \sin x)(-\cos x) - (1 - \sin x)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2} \dots \dots f'(x) = \frac{-\cos x - \sin x \cos x - \cos x + \sin x \cos x}{2(1 + \sin x)^2 \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \cos x}{2(1 + \sin x)^2 \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \dots \Rightarrow \dots f'(x) = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \dots \Rightarrow \dots f'(x) = \frac{-\cos x}{\cos^2 x} \dots \Rightarrow f'(x) = -\sec x$$

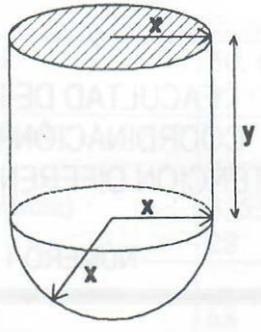
Nota. Sería interesante resolverla mediante la aplicación de las propiedades de la función logaritmo natural y ver cómo se llega al mismo resultado.

CÁLCULO I

CONSIDÉRESE EL SIGUIENTE PROBLEMA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS:

Un depósito de petróleo ha de contener 90,000 litros de crudo y debe ser de forma cilíndrica, con base semiesférica y sin tapa. El costo del material usado en la base es de \$ 100.00 por m² y para los lados, de \$ 60.00 por m². ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que el costo de su fabricación sea mínimo y cuál es este costo mínimo?

Solución. En este problema se pretende que el costo en la fabricación del tanque sea mínimo. Lo primero que se hace es construir un modelo geométrico:



El modelo matemático preliminar es la siguiente función del costo:

$$C = \text{Costo de la base} + \text{Costo de los lados}$$

de donde, de acuerdo con la figura se tiene que:

$$C = 2\pi x^2(100) + 2\pi xy(60) \dots \Rightarrow \dots C = 200\pi x^2 + 120\pi xy$$

Como se sabe, el volumen es de 90,000 litros, que equivalen a 90 m³. Luego, la ecuación auxiliar está dada por:

$$\frac{2}{3}\pi x^3 + \pi x^2 y = 90 \dots \Rightarrow \dots y = \frac{90 - \frac{2}{3}\pi x^3}{\pi x^2}$$

Y, si se sustituye esta expresión en el modelo matemático preliminar, se tendrá entonces el modelo matemático definitivo:

$$C = 200\pi x^2 + 120\pi x \left(\frac{90 - \frac{2}{3}\pi x^3}{\pi x^2} \right) \dots \Rightarrow \dots C = 200\pi x^2 + 120 \left(\frac{90 - \frac{2}{3}\pi x^3}{x} \right) \dots \Rightarrow \dots C = 200\pi x^2 + \frac{10,800}{x} - 80\pi x^2$$

$$\Rightarrow \dots C = 120\pi x^2 + \frac{10,800}{x}$$

Ahora se resuelve el problema de optimización y se obtiene:

$$\frac{dC}{dx} = 240\pi x - \frac{10,800}{x^2}; \dots \text{se iguala a cero} \dots 240\pi x - \frac{10,800}{x^2} = 0 \dots \Rightarrow \dots 240\pi x^3 = 10,800 \dots \Rightarrow \dots x = \sqrt[3]{\frac{45}{\pi}} \approx 2.43$$

Luego, x ≈ 2.43 es un valor crítico. Se obtiene la segunda derivada y se sustituye en ella el valor crítico. Así,

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 240\pi + \frac{21,600}{x^3}; \dots x \approx 2.43 \dots \Rightarrow \dots \frac{d^2C}{dx^2} > 0$$

Por lo que se tiene un mínimo relativo y si se calcula "y" se llega a:

$$y = \frac{90 - \frac{2}{3}\pi \left(\frac{45}{\pi} \right)}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{45}{\pi}} \right)^2} \dots \Rightarrow \dots y \approx 3.23$$

Finalmente, el radio de la base deberá ser de 2.43 m y la altura de 3.23 m, y el costo mínimo de:

$$C = 120\pi (2.43)^2 + 10,800 / 2.43; \text{ Costo mínimo} = \$ 6,670.54$$

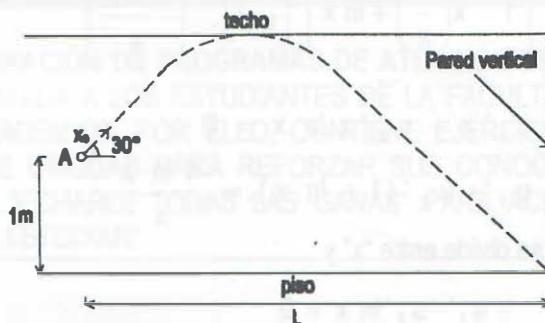
Vp

CINEMÁTICA

CONSIDÉRESE EL SIGUIENTE PROBLEMA RELACIONADO CON EL TIRO PARABÓLICO:

Desde el punto A de la figura, se lanza una pelota pequeña dentro de un recinto de 3.5 m de altura, con una cierta velocidad v_0 , la cual forma un ángulo de 30° con respecto a la horizontal, tal como se muestra en la figura. Determinar:

- La máxima rapidez con la que puede lanzarse la pelota de modo que no toque el techo y,
- La mínima distancia L a la cual se debe estar retirado de la pared vertical para que, después de lanzar la pelota y no tocar el techo, ésta no choque con dicha pared antes de tocar el piso.



Solución. Las condiciones iniciales en el punto A son: $\theta = 30^\circ$, $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$; y se puede escribir que:

$a = -g$, de donde $a = -9.81$ y si se integra se llega a: $v = -9.81 t + C$, y $C = v_0 \sin 30^\circ = v_0 / 2$. Luego $v = -9.81 t + v_0 / 2$. Si se vuelve a integrar, se tiene

$$y = \frac{-9.81 t^2}{2} + \frac{v_0 t}{2} + C = -4.905 t^2 + 0.5 v_0 t$$

donde la constante $C = 0$ por las condiciones iniciales.

- Para calcular la velocidad inicial se utilizan como condiciones: $\theta = 30^\circ$, $v = 0$, $y = 2.5$ m y entonces:

$$0 = -9.81 t + 0.5 v_0 \Rightarrow v_0 = 19.62 t.$$

se utiliza la ecuación obtenida para calcular "y", y se sustituye en ella la última expresión de la velocidad inicial, se llega a:

$$2.5 = -4.905 t^2 + 0.5 (19.62 t) t \Rightarrow 2.5 = 4.905 t^2 \Rightarrow t = 0.7139 \text{ s} \Rightarrow v_0 = 19.62 (0.7139) = 14 \text{ m/s}$$

- Para $y = -1$, en la misma expresión de "y", se tiene que:

$$-1 = -4.905 t^2 + 7 t \Rightarrow 4.905 t^2 - 7 t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1.5579 \text{ s.}$$

y en el sentido "x" se tiene que:

$$V_x = 14 \cos 30^\circ = 12.124 \text{ m/s. Luego, finalmente, } x = L = 12.124 (1.5579) = 18.89 \text{ m.}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

Si $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x$, y $y_3 = x(1 + \ln x)$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^2 y'' - x y' + y = 0$, obtener la solución general de la ecuación diferencial $x^2 y'' - x y' + y = 4 x \ln x$.

Solución. Una solución de la homogénea asociada es $y_H = c_1 x + c_2 x \ln x$ y, si se utiliza el método de variación de parámetros, se tiene que:

$y = u_1 x + u_2 x \ln x$; donde u_1 y u_2 son funciones de x . Si se divide la ecuación diferencial original entre x^2 , se llega a:

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{4 \ln x}{x}$$

De acuerdo con el método, es posible construir el sistema

$$\begin{bmatrix} x & x \ln x \\ 1 & x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4 \ln x}{x} \end{bmatrix}$$

o bien,

$$u_1' x + u_2' x \ln x = 0$$

$$u_1' + u_2' (1 + \ln x) = \frac{4 \ln x}{x}$$

Se multiplica la primera ecuación por (-1) y se divide entre "x" y:

$$-u_1' - u_2' \ln x = 0$$

$$u_1' + u_2' + u_2' \ln x = \frac{4 \ln x}{x}$$

de donde, se obtienen las derivadas de las funciones que definen a u_1 y a u_2 . Para obtener éstas, se integran las expresiones u_1' y u_2' . Así

$$u_2' = \frac{4 \ln x}{x} \dots \Rightarrow \dots u_2 = \int \frac{4 \ln x}{x} dx = 2 \ln^2 x + c_2; \dots u_1' = -\frac{4 \ln^2 x}{x} \dots \Rightarrow \dots u_1 = -\int \frac{4 \ln^2 x}{x} dx = -\frac{4 \ln^3 x}{3} + c_1$$

Se sustituyen estos valores en la expresión $y = u_1 x + u_2 x \ln x$ y entonces se llega a:

$$y = \left(\frac{-4 \ln^3 x}{3} + c_1 \right) x + (2 \ln^2 x + c_2) x \ln x \dots \Rightarrow \dots y = -\frac{4}{3} x \ln^3 x + c_1 x + 2x \ln^2 x + c_2 x \ln x$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + \frac{2}{3} x \ln^3 x$$

CULTURA

Gabriel Zaid es un mexicano nacido en Monterrey, Nuevo León, el 14 de octubre de 1934, que estudió ingeniería, administración y finalmente se dedicó al ensayo, a la prosa y a la poesía. Se dice que su escritura ha derivado hacia una lírica de la brevedad y la concentración en que la ironía, la nostalgia, el sentimiento del tiempo, se expresan con un tono cada vez más personal y con una economía de medios admirable. Uno de sus poemas, cuyo nombre es *Práctica Mortal*, dice así: Subir los remos y dejarse llevar / con los ojos cerrados. / Abrir los ojos y encontrarse / vivo: se repitió el milagro. / Anda, levántate y olvida / esta ribera oculta / en que has desembarcado.

AVISO. ESTUDIANTES DE INGENIERÍA GEOLÓGICA DE PRIMER INGRESO O PRIMEROS SEMESTRES. REUNIÓN CON COMPAÑEROS DE SEMESTRES SUPERIORES, EL JUEVES 4, A LAS 14:00 HORAS, EN EL SALÓN 121 DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS.



EDITORIAL

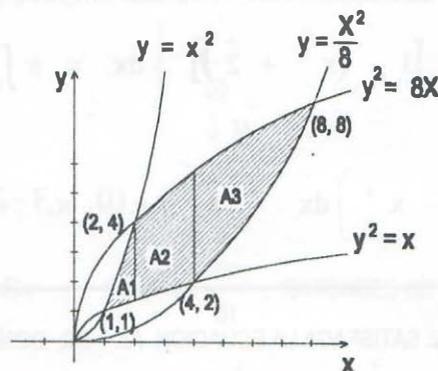
ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. POR ELLO, CONTIENE EJERCICIOS RESUELTOS DE LAS DIFERENTES ASIGNATURAS. OJALA SEA DE UTILIDAD PARA REFORZAR SUS CONOCIMIENTOS. SE ACERCA EL FINAL DEL SEMESTRE Y ES TIEMPO DE "ECHARLE TODAS LAS GANAS" PARA ACREDITAR LAS ASIGNATURAS QUE SE CURSAN. ¡MUCHA SUERTE Y A ESTUDIAR!

CÁLCULO II

ÁREA ENTRE CURVAS

CALCULAR EL ÁREA LIMITADA POR LA GRÁFICA DE LAS PARÁBOLAS: $y = x^2$; ... $y = \frac{x^2}{8}$; ... $y^2 = x$; ... $y^2 = 8x$

SOLUCIÓN. LA GRÁFICA DE LA SUPERFICIE LIMITADA POR ESTAS PARÁBOLAS SE MUESTRA EN LA FIGURA Y LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN ENTRE ELLAS SE OBTIENEN MEDIANTE SENCILLOS PROCESOS DE IGUALACIÓN Y/O SUSTITUCIÓN.



PARA DETERMINAR EL VALOR DEL ÁREA, SE DIVIDE ÉSTA EN TRES PARTES PARA QUE SEA FACTIBLE APLICAR LA EXPRESIÓN QUE DEFINE EL ÁREA ENTRE DOS CURVAS, LA QUE SE EXPRESA COMO: $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$. Y PARA CADA PARTE SE CONSTRUYE Y REALIZA LA CORRESPONDIENTE INTEGRAL DEFINIDA, TENIENDO CUIDADO EN ESCOGER ADECUADAMENTE LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$A_1 = \int_1^2 (x^2 - x^{\frac{1}{2}}) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) = 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1.114 \text{ u}^2$$

$$A_2 = \int_2^4 \left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left[(2\sqrt{2} - 1) \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_2^4 = (2\sqrt{2} - 1) \left(\frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \approx 6.304 \text{ u}^2$$

$$A_3 = \int_4^8 \left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \left[\frac{4\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{24} \right]_4^8 = \left(\frac{128}{3} - \frac{64}{3} \right) - \left(\frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3} \right) \approx 8.915 \text{ u}^2$$

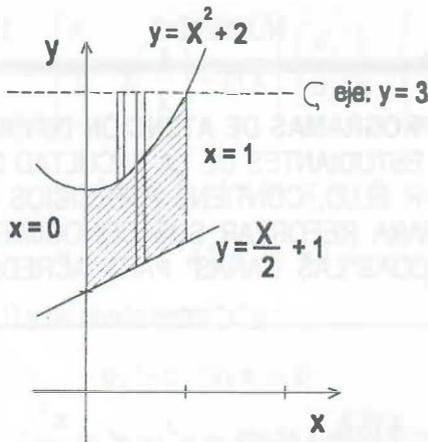
FINALMENTE, EL ÁREA PEDIDA ES $A = A_1 + A_2 + A_3 = 1.114 + 6.304 + 8.915 \approx 16.333 \text{ u}^2$.

CÁLCULO II

CALCULAR EL VOLUMEN QUE SE GENERA AL HACER GIRAR, ALREDEDOR DEL EJE $y = 3$, LA SUPERFICIE LIMITADA POR LAS GRÁFICAS DE

$$y = x^2 + 2; \dots y = \frac{x}{2} + 1; \dots x = 0; \dots x = 1.$$

SOLUCIÓN. EN LA FIGURA SE OBSERVA LA SUPERFICIE LIMITADA POR LA PARÁBOLA Y LA RECTA, ASÍ COMO LA RECTA $y = 3$, QUE ES EL EJE ALREDEDOR DEL CUAL GIRA PARA GENERAR EL VOLUMEN PEDIDO.



PARA CALCULAR EL VOLUMEN, SE DEBE EFECTUAR LA RESTA DE DOS VOLÚMENES: EL QUE SE GENERA AL GIRAR ALREDEDOR DEL EJE LA SUPERFICIE LIMITADA POR ÉSTE Y LA RECTA, MENOS EL GENERADO AL GIRAR SOBRE DICHO EJE, LA SUPERFICIE LIMITADA POR ÉL Y POR LA PARÁBOLA. SI AMBOS VOLÚMENES SE CONSIDERAN EN LA MISMA INTEGRAL DEFINIDA SE TIENE QUE:

$$V = \pi \int_0^1 \left\{ \left[3 - \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right]^2 - \left[3 - (x^2 + 2) \right]^2 \right\} dx = \pi \int_0^1 \left\{ \left(2 - \frac{x}{2} \right)^2 - (1 - x^2)^2 \right\} dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(3 - 2x + \frac{9}{4}x^2 - x^4 \right) dx = \pi \left[3x - x^2 + \frac{9x^3}{12} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{51}{20} \pi u^3$$

ÁLGEBRA

DETERMINAR UNA MATRIZ "X", SI EXISTE, QUE SATISFAGA LA ECUACIÓN $AX = BC$, DONDE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN. POR CONFORMABILIDAD SE PUEDE ESTABLECER LO SIGUIENTE: COMO LA MATRIZ "A" ES DE ORDEN 2×3 , LA "B" DE ORDEN 2×4 Y LA "C" DE ORDEN 4×1 , ENTONCES EL PRODUCTO "BC" ES DE ORDEN 2×1 Y POR LO TANTO LA MATRIZ "X" DEBE SER DE ORDEN 3×1 . POR OTRA PARTE, LA MATRIZ "X" NO PUEDE "DESPEJARSE" YA QUE "A" NO TIENE INVERSA POR NO SER CUADRADA; SIN EMBARGO PUEDE ESTABLECERSE LO SIGUIENTE:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{31} \\ -x_{11} + x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

POR IGUALDAD DE MATRICES: $x_{11} + 2x_{31} = 1$ Y SE APLICA EL MÉTODO DE GAUSS A ESTE SISTEMA DE ECUACIONES, DE
 $-x_{11} + x_{31} = -4$

DONDE:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

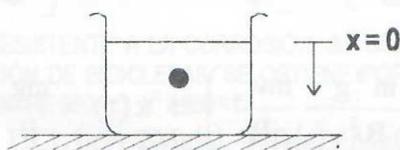
EL SISTEMA EQUIVALENTE ES: $x_{11} + 2x_{31} = 1$ ENTONCES: $x_{31} = -1$
 $3x_{31} = -3$ $x_{11} = 3$

COMO LA VARIABLE "x₂₁" NO INTERVIENE, PUEDE TOMAR CUALQUIER VALOR. ESTO SIGNIFICA QUE UNA INFINIDAD DE MATRICES "X" SATISFACEN LA ECUACIÓN Y SU FORMA GENERAL ES:

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ a \\ -1 \end{bmatrix} \quad \forall a \in \mathcal{R}$$

DINÁMICA DE SISTEMAS FÍSICOS

PROBL.FMA. SE TIENE UN OBJETO DE MASA m QUE SE DEJA CAER EN UN RECIPIENTE QUE CONTIENE UN FLÚIDO CON COEFICIENTE DE FRICCIÓN VISCOSA "B". CALCULAR LAS CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS (ACELERACIÓN, VELOCIDAD Y POSICIÓN) DEL OBJETO DENTRO DEL RECIPIENTE SI SE DEJA CAER CON UNA VELOCIDAD INICIAL v_0 .



SOLUCIÓN. SI "f" ES LA FUERZA DE FRICCIÓN VISCOSA, F_i LA FUERZA INERCIAL Y "W" EL PESO DEL OBJETO, ENTONCES EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE QUEDA COMO:



DE DONDE: $-W + f + F_i = 0 \Rightarrow \dots W = f + F_i, \dots (1)$

COMO SE SABE QUE $W = mg$; $f = Bv$; $F_i = m \frac{dv}{dt}$, ENTONCES SE SUSTITUYEN ESTAS EXPRESIONES EN (1) Y SE LLEGA A:

$$mg = Bv + m \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (2)$$

SI AHORA ESTA ECUACIÓN DIFERENCIAL SE RESUELVE MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE, SE OBTIENE LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$\frac{mg}{s} = BV(s) + m[sV(s) - v_0] \Rightarrow (B + ms)V(s) = \frac{mg}{s} + mv_0 \Rightarrow V(s) = \frac{mg + mv_0 s}{s(B + ms)} \Rightarrow V(s) = \frac{g + v_0 s}{s \left(s + \frac{B}{m} \right)}$$

SE DESCOMPONE EL SEGUNDO MIEMBRO DE ESTA EXPRESIÓN EN FRACCIONES PARCIALES, SE LLEGA A:

$$V(s) = \frac{g + v_0 s}{s \left(s + \frac{B}{m} \right)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s + \frac{B}{m}} = \frac{\alpha s + \alpha \frac{B}{m} + \beta s}{s \left(s + \frac{B}{m} \right)} \Rightarrow \alpha \frac{B}{m} = g; \alpha + \beta = v_0 \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{B}; \beta = v_0 - \frac{mg}{B}$$

SE SUSTITUYEN LOS VALORES DE α Y β EN V_0 Y SE TIENE QUE: $\dot{V}(s) = \frac{mg}{B} \frac{1}{s} + \left(v_0 - \frac{mg}{B} \right) \frac{1}{s + \frac{B}{m}} \dots (3)$

SE APLICA LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE A ESTA EXPRESIÓN (3) Y SE OBTIENE:

$$v(t) = \frac{mg}{B} + \left(v_0 - \frac{mg}{B} \right) e^{-\frac{B}{m}t} \quad \text{VELOCIDAD DEL OBJETO}$$

SE DERIVA $v(t)$ Y SE ENCUENTRA LA ACELERACIÓN:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{B}{m} \left(v_0 - \frac{mg}{B} \right) e^{-\frac{B}{m}t} \Rightarrow a(t) = \left(g - \frac{Bv_0}{m} \right) e^{-\frac{B}{m}t} \quad \text{ACELERACIÓN DEL OBJETO}$$

Y SI SE INTEGRA $v(t)$, SE ENCUENTRA LA POSICIÓN:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \left[\frac{mg}{B} + \left(v_0 - \frac{mg}{B} \right) e^{-\frac{B}{m}t} \right] dt \Rightarrow x(t) = \left[\frac{mg}{B} t + \frac{-m}{B} \left(v_0 - \frac{mg}{B} \right) e^{-\frac{B}{m}t} \right]_0^t$$

$$\dot{x}(t) = \frac{mg}{B} t + \left(\frac{m^2 g}{B^2} - \frac{mv_0}{B} \right) e^{-\frac{B}{m}t} - \left(\frac{m^2 g}{B^2} - \frac{mv_0}{B} \right) \Rightarrow x(t) = \frac{mg}{B} t + \left(\frac{m^2 g}{B^2} - \frac{mv_0}{B} \right) \left(e^{-\frac{B}{m}t} - 1 \right)$$

EXPRESIÓN QUE DEFINE LA POSICIÓN DEL OBJETO.

PROBABILIDAD

SUPONGA QUE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA TIENE LA FORMA: $f_{XY}(x, y) = k(x^2 - y + 1)$ PARA $0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1$ Y $f_{XY}(x, y) = 0$ PARA CUALQUIER OTRO VALOR. LA PROBABILIDAD DE QUE "X" Y "Y" ESTÉN EN LOS INTERVALOS $[a, b]$ Y $[c, d]$ ES:

$$P[a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d k(x^2 - y + 1) dy dx = k \left[\frac{b^3 - a^3}{3} (d - c) - \frac{b - a}{2} (d^2 - c^2) + (b - a)(d - c) \right]$$

LA CONSTANTE "k" SE OBTIENE DE LA CONDICIÓN: $F_{XY}(1,1) = 1$, EN DONDE $F_{XY}(1,1)$ SE VALÚA CON LA EXPRESIÓN ANTERIOR

PARA $a=c=0$ y $b=d=1$; POR LO TANTO: $k \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = 1 \Rightarrow k = \frac{6}{5}$. SI EN EL PLANO XY SE ESTABLECEN CUATRO REGIONES DE LAS MISMAS DIMENSIONES, LA PROBABILIDAD DE QUE UN PUNTO ESTÉ EN CADA UNA DE ELLAS SERÁ:

$$P[0 \leq X \leq 0.5, 0 \leq Y \leq 0.5] = 0.25$$

$$P[0 \leq X \leq 0.5, 0.5 \leq Y \leq 1] = 0.10$$

$$P[0.5 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 0.5] = 0.40$$

$$P[0.5 \leq X \leq 1, 0.5 \leq Y \leq 1] = 0.25$$

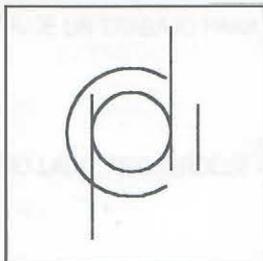
LAS FUNCIONES DE DENSIDAD MARGINALES SON:

$$f_X(x) = \int_0^1 k(x^2 - y + 1) dy = \frac{k}{2} (2x^2 + 1) \quad f_Y(y) = \int_0^1 k(x^2 - y + 1) dx = \frac{k}{3} (4 - 3y)$$

Y LAS FUNCIONES DE DENSIDAD CONDICIONALES ESTÁN DADAS POR:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{3(x^2 - y + 1)}{4 - 3y}; \quad f_{XY}(x, 0.5) = \frac{3x^2 + 1.5}{2.5} = \frac{6x^2 + 3}{5}$$

$$f_{YX}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{2(x^2 - y + 1)}{2x^2 + 1}; \quad f_{YX}(0.5, y) = \frac{2.5 - 2y}{1.5} = \frac{5 - 4y}{3}$$



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000

NÚMERO 3

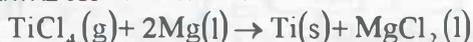
2 DE JUNIO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. FALTAN DOS SEMANAS PARA QUE TERMINEN LAS CLASES. ES TIEMPO DE PONERSE A ESTUDIAR CON DEDICACIÓN Y EMPEÑO PARA ACREDITAR LAS ASIGNATURAS. OJALÁ LOS EJERCICIOS QUE AQUÍ APARECEN, LES SEAN DE UTILIDAD. ¡MUCHA SUERTE Y A ESTUDIAR!

QUÍMICA

EL TITANIO, UN METAL FUERTE, LIGERO Y RESISTENTE A LA CORROSIÓN, SE UTILIZA TANTO EN LA CONSTRUCCIÓN DE AVIONES Y NAVES ESPACIALES, COMO EN LA FABRICACIÓN DE BICICLETAS. SE OBTIENE POR LA REACCIÓN DE CLORURO DE TITANIO (IV) CON MAGNESIO FUNDIDO, A UNA TEMPERATURA ENTRE 950 °C Y 1150 °C



EN UNA OPERACIÓN INDUSTRIAL, 3.54×10^7 (g) DE TiCl_4 REACCIONAN CON 1.13×10^7 (g) DE Mg. CALCULAR EL PORCENTAJE DE RENDIMIENTO SI REALMENTE SE OBTIENEN 7.91×10^6 (g) DE Ti.

SOLUCIÓN. PRIMERO SE CALCULA EL NÚMERO DE MOLES DE TiCl_4 Y DE Mg PRESENTES AL INICIO. .

$$\text{MOLES DE TiCl}_4 = 3.54 \times 10^7 (\text{g}) \text{TiCl}_4 \left[\frac{1 \text{ mol TiCl}_4}{189.7 (\text{g}) \text{TiCl}_4} \right] = 1.87 \times 10^5 \text{ mol DE TiCl}_4$$

$$\text{MOLES DE Mg} = 1.13 \times 10^7 (\text{g}) \text{Mg} \left[\frac{1 \text{ mol Mg}}{24.31 (\text{g}) \text{Mg}} \right] = 4.65 \times 10^5 \text{ mol DE Mg}$$

A CONTINUACIÓN SE DEBE DETERMINAR CUÁL DE LAS DOS SUSTANCIAS ES EL REACTIVO LIMITANTE. A PARTIR DE LA REACCIÓN BALANCEADA SE PUEDE VER QUE 1 mol DE TiCl_4 REACCIONA CON 2 mol DE Mg; POR LO TANTO, EL NÚMERO DE moles DE Mg QUE SE NECESITA PARA REACCIONAR CON 1.87 moles DE TiCl_4 ES:

$$1.87 \times 10^5 \text{ mol TiCl}_4 \left[\frac{2 \text{ mol Mg}}{1 \text{ mol TiCl}_4} \right] = 3.74 \times 10^5 \text{ mol Mg}$$

DEBIDO A QUE ESTÁN PRESENTES 4.65×10^5 moles. DE Mg, MÁS DE LO QUE SE NECESITA PARA REACCIONAR CON LA CANTIDAD DE TiCl_4 QUE SE TIENE, EL Mg DEBE SER EL REACTIVO EN EXCESO Y EL TiCl_4 , EL REACTIVO LIMITANTE.

LA REACCIÓN MUESTRA QUE 1 mol DE TiCl_4 REACCIONA CON 1 mol DE Ti; POR LO TANTO, LA MASA TEÓRICA DE Ti QUE SE FORMA ES:

$$\text{MASA DE Ti FORMADO} = 3.54 \times 10^7 (\text{g}) \text{DE TiCl}_4 \left[\frac{1 \text{ mol TiCl}_4}{189.7 (\text{g}) \text{TiCl}_4} \right] \left[\frac{1 \text{ mol Ti}}{1 \text{ mol TiCl}_4} \right] \left[\frac{47.88 \text{ g Ti}}{1 \text{ mol Ti}} \right] = 8.935 \times 10^6 (\text{g}) \text{Ti}$$

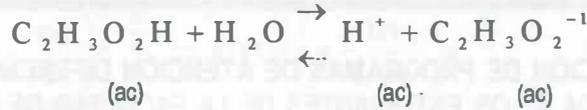
PARA CALCULAR EL PORCENTAJE DE RENDIMIENTO, SE HACE LO SIGUIENTE:

$$(\%) \text{ DE RENDIMIENTO} = \frac{\text{RENDIMIENTO REAL}}{\text{RENDIMIENTO TEÓRICO}} \times 100 = \frac{7.91 \times 10^6 (\text{g})}{8.935 \times 10^6 (\text{g})} \times 100 = 88.5 (\%)$$

QUÍMICA

SE COLOCAN 2 g/mol DE ÁCIDO ACÉTICO EN 1 LITRO DE AGUA. ¿QUÉ VALOR TENDRÁ EL pH?

SOLUCIÓN.

ÁCIDO ACÉTICO: CH_3COOH  $\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2\text{H}$; mm = 60 g/gmol

$$k_c = \text{CONSTANTE DE EQUILIBRIO}; \quad k_c = \frac{[\text{H}^+_{\text{ac}}] * [\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2^{-1}_{\text{ac}}]}{[\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2] * [\text{H}_2\text{O}]}$$

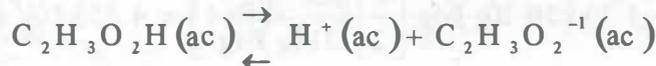


$$k_c = \frac{[\text{H}^+] * [\text{OH}^-]}{[\text{H}_2\text{O}]} \Rightarrow k_{\text{AGUA}} = k_c [\text{H}_2\text{O}]$$

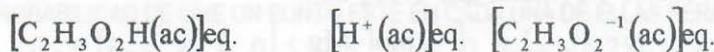
$$k_c [\text{H}_2\text{O}] = \frac{[\text{H}^+_{\text{ac}}] * [\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2^{-1}_{\text{ac}}]}{[\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2\text{H}_{\text{ac}}]} \equiv k_A$$

PARA EL ÁCIDO ACÉTICO: $k_A = 1.8 \times 10^{-5} (\text{M})$ LA CONCENTRACIÓN INICIAL DEL ÁCIDO ACÉTICO ES $2 \text{ M} = C_0$

ANÁLISIS DEL DESARROLLO:



INICIO	C_0	-	-
"REACCIONA"	α	α	α
EQUILIBRIO	$C_0 - \alpha$	α	α



$$k_A = \frac{(\alpha)(\alpha)}{C_0 - \alpha} \Rightarrow k_A C_0 - k_A \alpha = \alpha^2 \Rightarrow 0 = \alpha^2 + k_A \alpha - k_A C_0$$

$$\alpha = [\text{H}^+] = \frac{-1.8 \times 10^{-5} (\text{M}) \pm \sqrt{1.8 \times 10^{-10} (\text{M}^2) + 4(1.8 \times 10^{-5} (\text{M}))2(\text{M})}}{2} \Rightarrow \alpha = 9 \times 10^{-6} (\text{M}) = [\text{H}^+]$$

DE LA DEFINICIÓN DE pH

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+(\text{ac})] \Rightarrow \text{pH} = -\log_{10} (9 \times 10^{-6} (\text{M})) \Rightarrow \text{pH} = 5.045$$

CÁLCULO III

DETERMINAR EL TRABAJO QUE SE REALIZA AL MOVER, EN CONTRA DE LA GRAVEDAD, UNA PARTÍCULA DE MASA "m", A LO LARGO DE LA CURVA "C" DADA POR

$$x = \cos t; \dots y = \sin t; \dots z = t$$

DEL PUNTO A $(-1, 0, \pi)$ AL PUNTO B $(0, -1, \frac{3\pi}{2})$

SOLUCIÓN. PARA CALCULAR EL TRABAJO SE UTILIZA LA EXPRESIÓN: $W = \int_c \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_c (\bar{F} \cdot \bar{T}) ds$

SE TRATA DE UN TRABAJO PARA VENCER UN CAMPO DE FUERZA, EL CUAL ESTÁ DADO POR

$$\bar{F} = -mg \bar{k}$$

POR OTRO LADO, RECUÉRDASE QUE $\bar{T} = \frac{d\bar{r}}{ds}$; LUEGO, SI $\bar{r}(t) = \cos t \bar{i} + \sin t \bar{j} + t \bar{k}$ ENTONCES SE TIENE QUE:

$$\bar{r}'(t) = -\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j} + \bar{k} \Rightarrow |\bar{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow \bar{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j} + \bar{k})$$

ADEMÁS,
$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

PARA ENCONTRAR LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN SE VE QUE: $x = -1 \Rightarrow t = \pi$ Y $x = 0 \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}$

FINALMENTE, SE SUSTITUYE EN LA INTEGRAL Y SE LLEGA A:

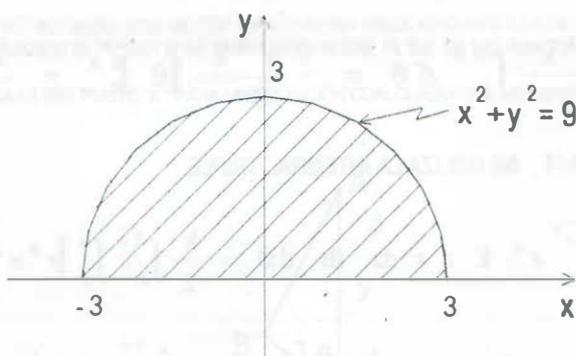
$$W = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left[(-mg \bar{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t \bar{i} + \cos t \bar{j} + \bar{k}) \right] \sqrt{2} dt = -\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} mg dt = -mg \frac{\pi}{2}$$

RESULTADO QUE ES EQUIVALENTE A LA EXPRESIÓN mgh QUE HABLA DE LA ENERGÍA POTENCIAL Y EN LA CUAL "h" ES LA DIFERENCIA ENTRE LAS COTAS $\frac{3\pi}{2}$..Y.. π .

CÁLCULO III

CALCULAR LA INTEGRAL REITERADA $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$

SOLUCIÓN. DE ACUERDO A LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN, LA REGIÓN "R" ES LA QUE SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA



COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA, SE TRATA DE UN SEMICÍRCULO Y, SI ADEMÁS SE TOMA EN CUENTA QUE EL INTEGRANDO CONTIENE LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE "x" Y DE "y", SE VE LA CONVENIENCIA DE CAMBIAR A COORDENADAS POLARES, DONDE EL FACTOR DE CAMBIO, DE ACUERDO A LO ESTUDIADO EN SISTEMAS DE COORDENADAS CURVILÍNEAS, ES "r". ADEMÁS, PARA FIJAR LOS NUEVOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN, SE VE CÓMO VARIAN LAS VARIABLES r Y θ . ASÍ, SE TIENE QUE:

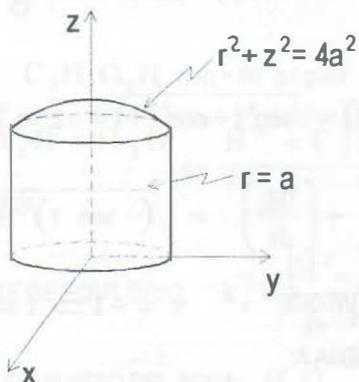
$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx &= \int_0^{\pi} \int_0^3 \frac{1+r^2}{r} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[r + \frac{r^3}{3} \right]_0^3 d\theta = \int_0^{\pi} (3+9) d\theta = [12\theta]_0^{\pi} = 12\pi \end{aligned}$$

¡IMAGINEN LAS INTEGRALES EN COORDENADAS CARTESIANAS!

CÁLCULO III

UN SÓLIDO TIENE LA FORMA DE LA REGIÓN QUE ESTÁ DENTRO DEL CILINDRO $r = a$ Y LA ESFERA $r^2 + z^2 = 4a^2$ Y SOBRE EL PLANO XY. CALCULAR LA MASA Y EL MOMENTO DE INERCIA I_z SI LA DENSIDAD EN UN PUNTO "P" ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA DISTANCIA DE ÉL AL PLANO XY.

SOLUCIÓN. SI SE HACE UN TRAZO APROXIMADO DE LA REGIÓN DESCRITA SE TIENE LA SIGUIENTE FIGURA:



SE UTILIZARÁN COORDENADAS CILÍNDRICAS. COMO LA DENSIDAD EN EL PUNTO $P(r, \theta, z)$ ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA DISTANCIA DEL PUNTO AL PLANO XY, ENTONCES SE PUEDE EXPRESAR COMO $\rho = kz$, DONDE "k" ES LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD. ENTONCES LA MASA "M" PUEDE SER CLACULADA MEDIANTE LA INTEGRAL TRIPLE:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} kzr \, dz \, dr \, d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a [z^2 r]_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} \, dr \, d\theta$$

$$M = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (4a^2 r - r^3) \, dr \, d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[2a^2 r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^a \, d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left(2a^4 - \frac{a^4}{4} \right) \, d\theta$$

$$M = \frac{7a^4 k}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7a^4 k}{8} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{7a^4 \pi k}{4}$$

PARA CALCULAR EL MOMENTO DE INERCIA I_z SE UTILIZA LA INTEGRAL TRIPLE

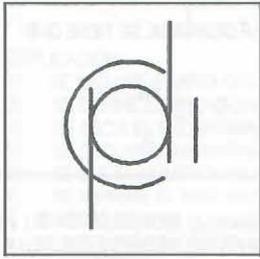
$$I_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} r^2 kzr \, dz \, dr \, d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a [r^3 z^2]_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} \, dr \, d\theta$$

$$I_z = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (4a^2 r^3 - r^5) \, dr \, d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[a^2 r^4 - \frac{r^6}{6} \right]_0^a \, d\theta = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left(a^6 - \frac{a^6}{6} \right) \, d\theta$$

$$I_z = \frac{5a^6 k}{12} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{5a^6 k}{12} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{5a^6 \pi k}{6}$$

EL BOLETÍN COPADI LES INFORMA QUE EL PROGRAMA DE APOYO ACADÉMICO ENTRE ESTUDIANTES AYUDARÁ PARA LOS FINALES DE ALGUNAS ASIGNATURAS CON LA RESOLUCIÓN DE EXÁMENES COLEGIADOS FINALES ANTERIORES. ESTÉN PENDIENTES DE LOS AVISOS EN LAS MAMPARAS DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS.

EL BOLETÍN COPADI AGRADECE UNA COLABORACIÓN DEL ING. ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA EN EL PASADO NÚMERO 2 Y LA DE LA QFB. VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ EN ESTE NÚMERO.



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000

NÚMERO 4

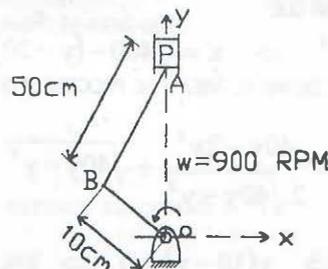
17 DE JUNIO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. "NO QUEDA OTRA" QUE ESTUDIAR MUCHO ESTOS DÍAS Y HACER TODO LO POSIBLE POR ACREDITAR LAS ASIGNATURAS. SE NECESITA VOLUNTAD, DEDICACIÓN Y CONFIANZA EN UNO MISMO. ASÍ QUE... ¡MUCHA SUERTE Y A ESTUDIAR!

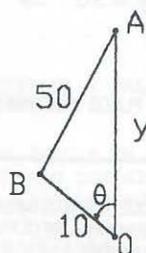
CÁLCULO I

UNA BIELA ES UN MECANISMO ELEMENTAL QUE CONVIERTE UN MOVIMIENTO CIRCULAR EN RECTILÍNEO O VICEVERSA. LA BIELA DE LA FIGURA SE PUEDE INTERPRETAR DE CUALQUIERA DE ESTAS DOS MANERAS: A) EL EJE DE UN MOTOR SE ENCUENTRA EN "O" Y HACE GIRAR EL BRAZO PEQUEÑO DE LA BIELA; ÉSTA A SU VEZ CONSIGUE QUE EL PISTÓN "P" SE MUEVA RECTILÍNEA Y ALTERNADAMENTE HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO. (ESTE PISTÓN PUEDE SER EL DE UNA BOMBA RECIPROCANTE, POR EJEMPLO). B) EL PISTÓN ES EL DE UN CILINDRO DE MOTOR DE EXPLOSIÓN INTERNA (COMO EL DE LOS AUTOMÓVILES) QUE, AL DESLIZARSE DE ARRIBA ABAJO, HACE GIRAR EL BRAZO MENOR DE LA BIELA Y ÉSTE A SU VEZ, AL EJE DE UNA RUEDA EN "O".



PARA ESTE PROBLEMA SE ACEPTARÁ LA INTERPRETACIÓN (A). SI EL MOTOR GIRA CON UNA VELOCIDAD ANGULAR DE 900 RPM Y LAS DIMENSIONES SON LAS DE LA FIGURA, CALCULAR LA VELOCIDAD DEL PISTÓN CUANDO EL PUNTO "B" SE ENCUENTRA SOBRE EL EJE DE LAS ABCISAS.

SOLUCIÓN. LA VELOCIDAD DEL PISTÓN "P" SERÁ LA DEL PUNTO "A". PARA UNA POSICIÓN CUALQUIERA DEL MECANISMO SE PUEDE HACER LA SIGUIENTE FIGURA:



LA ORDENADA DE A ES "y" Y SE CALCULA POR LA LEY DE LOS COSENOS. $2500 = y^2 + 100 - 20y \cos \theta$, DE DONDE:

$$\cos \theta = \frac{100 + y^2 - 2500}{20y} \Rightarrow 20y \cos \theta = y^2 - 2400$$

LA VELOCIDAD DE "A" SERÁ ENTONCES $\frac{dy}{dt}$ POR LO QUE, SI SE DERIVA IMPLÍCITAMENTE LA EXPRESIÓN ANTERIOR, SE TENDRÁ:

$$20 \cos \theta \frac{dy}{dt} - 20y \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 2y \frac{dy}{dt}$$

20

UN DATO DEL PROBLEMA ES $w = \frac{d\theta}{dt} = 900 \text{ RPM} = \frac{900 \times 2\pi}{60} = 30\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. SE PIDE CALCULAR LA VELOCIDAD CUANDO 'B' ESTÉ EN EL EJE DE LAS

ABSCISAS, ESTO ES, CUANDO $\theta = 90^\circ$ EN ESTE INSTANTE $y = \sqrt{2400}$ Y SUSTITUYENDO ESTE VALOR Y EL DE $\frac{d\theta}{dt}$ EN LA DERIVADA, SE TIENE QUE

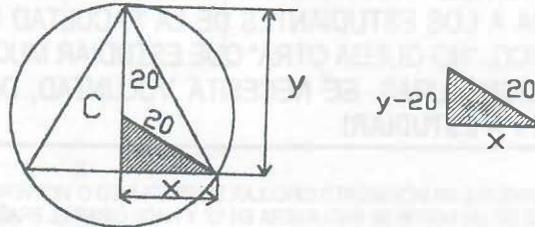
$$20(0) \frac{dy}{dt} - 20\sqrt{2400} (1) 30\pi = 2\sqrt{2400} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -942 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = -9.42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

EL SIGNO NEGATIVO INDICA QUE EL PISTÓN DESCENDE.

CÁLCULO I

UNA SEÑAL EXPERIMENTAL PARA MARCAR ¡ALTO TOTAL! EN UNA VÍA DE CIRCULACIÓN, CONSTA DE UN CÍRCULO CON UN TRIÁNGULO ISÓSCELES EN SU INTERIOR, PINTADO DE ROJO Y, MIENTRAS MAYOR SUPERFICIE TIENE EL TRIÁNGULO, LA SEÑAL FUNCIONA MEJOR. CALCULAR LAS DIMENSIONES DEL TRIÁNGULO ROJO DE MAYOR ÁREA QUE SE PUEDE INSCRIBIR EN UN CÍRCULO DE RADIO IGUAL A 20 CM.

SOLUCIÓN. EN LA FIGURA SE MUESTRA EL MODELO GEOMÉTRICO DE LA SEÑAL. CON SUS DATOS Y MAGNITUDES VARIABLES



LA EXPRESIÓN PARA EL ÁREA DEL TRIÁNGULO ES $A = \frac{2xy}{2} = xy$ Y TIENE DOS ARGUMENTOS, PERO SI SE APLICA EL TEOREMA DE PITÁGORAS AL TRIÁNGULO RECTÁNGULO SOMBREADO DE LA FIGURA, SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$x^2 + (y-20)^2 = 20^2 \Rightarrow x = \sqrt{400 - (y-20)^2} \Rightarrow x = \sqrt{40y - y^2}$$

AHORA SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA EXPRESIÓN QUE DEFINE EL ÁREA Y SE PROCEDE A DERIVAR, IGUALAR LA DERIVADA A CERO Y OBTENER LOS VALORES CRÍTICOS. ASÍ,

$$A = y\sqrt{40y - y^2} \Rightarrow \frac{dA}{dy} = \frac{40y - 2y^2}{2\sqrt{40y - y^2}} + \sqrt{40y - y^2} \Rightarrow \frac{40y - 2y^2 + 80y - 2y^2}{2\sqrt{40y - y^2}} = 0$$

$$120y - 4y^2 = 0 \Rightarrow y(30 - y) = 0 \Rightarrow \text{VALORES CRÍTICOS: } \begin{matrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 30 \end{matrix}$$

ES EVIDENTE QUE EL PRIMER VALOR NO CONDUCE A UN ÁREA MÁXIMA YA QUE NI SIQUIERA SE FORMA UN TRIÁNGULO. PARA EL SEGUNDO VALOR, MEDIANTE EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS SE TIENE QUE:

$$y = 25 \Rightarrow \frac{dA}{dy} > 0$$

\Rightarrow MÁXIMO RELATIVO

$$y = 30 \Rightarrow x = \sqrt{40(30) - 30^2} \Rightarrow x = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

$$y = 35 \Rightarrow \frac{dA}{dy} < 0$$

POR LO TANTO, EL TRIÁNGULO ISÓSCELES ROJO DE MAYOR ÁREA QUE SE PUEDE INSCRIBIR EN UN CÍRCULO DE RADIO IGUAL A 20 CM ES EL QUE TIENE 30 CM DE ALTURA Y 34.64 CM DE BASE.

COMPUTADORAS Y PROGRAMACIÓN

EN LA NATURALEZA EXISTEN PROCESOS QUE SE VUELVEN REPETITIVOS Y QUE ADEMÁS IMPLICAN RESULTADOS DE UNA EVALUACIÓN ANTERIOR DEL MISMO PROCESO. A ESTE CONCEPTO DE FUNCIONES QUE NECESITAN DE SÍ MISMAS SE LE DENOMINA RECURSIVIDAD. ESTAS FUNCIONES SON ÚTILES EN LOS MÉTODOS NUMÉRICOS, POR SU NATURALEZA ITERATIVA. CON ESTE CONCEPTO LOS PROCESOS O FUNCIONES SE VUELVEN MÁS COMPACTOS Y EFICIENTES. HE AQUÍ UNA DE LAS VIRTUDES DE LA PROGRAMACIÓN EN LENGUAJE C.

//FACTORIAL DE UN NÚMERO ENTERO.

//EL NOMBRE DEL ARCHIVO ES N!.H

```

1) #include <stdio.h>
2) float n_fact(int n);
3) void main()
   {
4)     int n;
5)     scanf("%d", &n);
6)     printf("\n %2d! = %9.0f", n, n_fact(n));
   }
7) float n_fact(int n)
   {
8)     float fact=n;

```

```

9)     if(n==0)
        return 1;
10)    else
        return fact*n_fact(n-1);
    }

```

EXPLICACIÓN:

- 1) SE INCLUYE EL ARCHIVO DE FUNCIONES DE ENTRADA Y SALIDA ESTÁNDAR.
- 2) SE DEFINE EL PROTOTIPO DE UNA FUNCIÓN LLAMADA 'n_fact' DE ARGUMENTO ENTERO Y QUE DEVUELVE UN FLOTANTE. [n_fact : int W float].
- 3) SE INICIA EL PROGRAMA PRINCIPAL.
- 4) SE DECLARA UNA VARIABLE ENTERA QUE ES EL ARGUMENTO DE LA FUNCIÓN
- 5) SE LEE EL NÚMERO DEL CUAL QUEREMOS OBTENER EL FACTORIAL.
- 6) SE IMPRIME EL ARGUMENTO Y SU FACTORIAL.

EN ESTE PASO SE LLAMA A LA FUNCIÓN 'n_fact'.

LA IMPRESIÓN EN PANTALLA SERÁ : X! = _YYYYYY YA QUE DEJA UNA SANGRÍA IZQUIERDA DE DOS ESPACIOS PARA EL ARGUMENTO Y UNA DE NUEVE PARA EL FACTORIAL.

- 7) INICIA LA DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN 'n_fact'.
- 8) SE DEFINE UNA VARIABLE AUXILIAR PARA LAS MULTIPLICACIONES SUCESIVAS
- 9) SI EL ARGUMENTO ES 0 POR DEFINICIÓN EL FACTORIAL ES 1.
- 10) SI NO ES ASÍ, LA FUNCIÓN REGRESA EL ARGUMENTO n MULTIPLICADO POR EL FACTORIAL DE (n-1).

ES AQUÍ DONDE SE APLICA EL CONCEPTO DE RECURSIVIDAD YA QUE :

$n! = n(n-1)!$; y $(n-1)! = (n-1)(n-2)!$; Y ASÍ SUCESIVAMENTE.

MÉTODOS NUMÉRICOS

UN PROBLEMA QUE ENFRENTA EL INGENIERO ES EL DE LAS APROXIMACIONES. EN EL CÁLCULO SE TOCA ESTE TEMA CON LAS SERIES DE POTENCIAS Y MÁS ESPECÍFICAMENTE CON LAS SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN, DONDE ADEMÁS SE HACE USO DEL PROBLEMA DEL FACTORIAL RESUELTO EN EL EJERCICIO ANTERIOR. SUPONGÁSE QUE SE REQUIERE LA APROXIMACIÓN DE LA FUNCIÓN COSENO POR MEDIO DE LA SERIE DE MACLAURIN.

RECORDEMOS QUE LAS SERIES DE MACLAURIN SE DEFINEN COMO SIGUE:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}; \text{ ENTONCES } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \text{ Y GENERALIZANDO: } \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2} x^{2k}}{(2k)!}$$

SI SE APLICAN ESTOS CONCEPTOS A LA PROGRAMACIÓN EN LENGUAJE C, SE TIENE QUE:

```

1) #include <stdio.h>
2) #define TOL 0.00000000000001
3) void main()
   {
4)     int n=1,k=1;
5)     double x,aux,tn=1,suma=0;
        printf("\nDE QUE ANGULO QUIERES OBTENER EL COSENO ? ");
6)     scanf ("%lf",&x);
7)     do{
            aux=suma;
8)         suma=suma+tn;
9)         tn=(tn*x*x)/((2*k-1)*(2*k));
            n=-n;
            k++;
10)    }while (fabs((suma-aux))>TOL);
11)    printf("\nCOS (%f) = %f \nCon los %d primeros t,rminos",x,suma,k);
        getch();
   }

```

EXPLICACIÓN:

- 1) SE INCLUYE EL ARCHIVO DE FUNCIONES DE ENTRADA Y SALIDA ESTÁNDAR.
- 2) SE DEFINE UNA CONSTANTE DE TOLERANCIA.
- 3) SE INICIA EL PROGRAMA PRINCIPAL.
- 4) SE DEFINE EL ÍNDICE DE LA SUMATORIA Y SE INICIA EN 1.
LA VARIABLE n NOS SERVIRÁ PARA IR ALTERNANDO LOS SIGNOS EN LAS SUMAS.
- 5) SE DEFINE EL ARGUMENTO, Y DOS VARIABLES PARA LAS SUMAS PARCIALES.
- 6) SE LEE EL ARGUMENTO EN RADIANES.
- 7) COMIENZA EL PROCESO ITERATIVO DE SUMAS PARCIALES.
- 8) SE MANTIENE LA SUMA PARCIAL (S_{n-1}).
- 9) SE CALCULA EL TÉRMINO ENÉSIMO.
- 10) SE SEGUIRÁN SUMANDO TÉRMINOS "MIENTRAS" QUE LA RESTA DE LAS SUMAS SEA MAYOR A LA TOLERANCIA.
- 11) IMPRIME EL RESULTADO APROXIMADO, Y EN PANTALLA SE LEERÁ:
COS (x) = suma
CON LOS k PRIMEROS TÉRMINOS

NOTA: ESTE PROGRAMA DIVERGE PARA VALORES MAYORES A 35 RADIANES.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

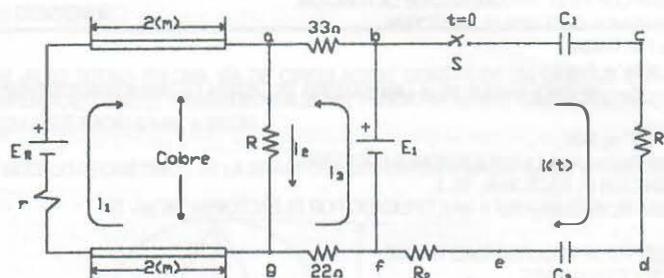
PARA EL CIRCUITO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA,

$$\epsilon_1 = 12(\text{V}), \epsilon_R = 10(\text{V}), r = 0.5(\Omega), R_1 = 2R_2 = 22(\text{K}\Omega), C_1 = 4C_2 = 10(\mu\text{F}), \text{ para } t = 0, V_{C1} = V_{C2} = 0(\text{V})$$

EL CONDUCTOR DE COBRE ES DE CALIBRE AWG # 40, $d = 0.079(\text{mm})$, $\rho_{\text{Cu}} = 1.72 \times 10^{-8}(\Omega\text{m})$, $\alpha_{\text{Cu}} = 0.0039^\circ\text{C}^{-1}$ (TODO ESTO A 20°C)

PARA ESTO, EL INTERRUPTOR ESTÁ ABIERTO. CON BASE EN ELLO, CALCULAR:

- A) LA RESISTENCIA ELÉCTRICA DE CADA ALAMBRE DE COBRE A 20°C Y A 40°C DESPRECIAR EL EFECTO DE LA DILATACIÓN TÉRMICA.
 B) LA POTENCIA ELÉCTRICA QUE DISIPA EL RESISTOR R SI SU VALOR FUESE DE $73(\Omega)$ A UNA TEMPERATURA DE 40°C .
 C) EL VALOR DE $i(1)$ PARA $0.05(\text{s})$ DESPUÉS DE HABER CERRADO EL INTERRUPTOR S.
 D) LA ENERGÍA ALMACENADA EN EL CAPACITOR C_2 , EN EL INSTANTE EN QUE $t = 0.06(\text{s})$.



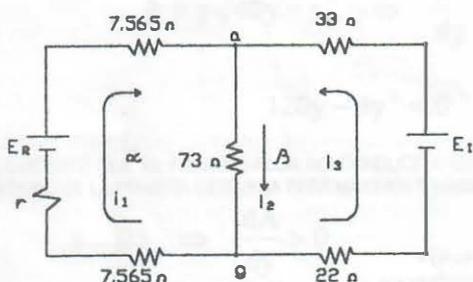
SOLUCIÓN A)

$$A_{\text{Cu}} = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow A_{\text{Cu}} = \frac{\pi(0.079 \times 10^{-3})^2}{4} \Rightarrow A_{\text{Cu}} = 4.9017 \times 10^{-9}(\text{m}^2)$$

$$R_{\text{Cu}_{20^\circ\text{C}}} = \frac{\rho_{\text{Cu}} L_{\text{Cu}}}{A_{\text{Cu}}} \Rightarrow R_{\text{Cu}_{20^\circ\text{C}}} = \frac{(1.72 \times 10^{-8})(2)}{4.9017 \times 10^{-9}} \Rightarrow R_{\text{Cu}_{20^\circ\text{C}}} = 7.018(\Omega)$$

$$R_{\text{Cu}_{40^\circ\text{C}}} = R_{\text{Cu}_{20^\circ\text{C}}}(1 + \alpha \Delta T) = 7.018[1 + (0.0039)(20)] = 7.565(\Omega)$$

B)



$$\text{NODO } a(\text{LCK}) : i_1 - i_2 + i_3 = 0 \quad i_1 = 0.0672(\text{A})$$

$$\text{MALLA } \alpha(\text{LVK}) : 15.631i_1 + 73i_2 + 0i_3 = 10 \Rightarrow i_2 = 0.1226(\text{A})$$

$$\text{MALLA } \beta(\text{LVK}) : 0i_1 + 73i_2 + 55i_3 = 12 \quad i_3 = 0.0554(\text{A})$$

$$P = R i_2^2 = 73(0.1226)^2 = 1\text{ W}$$

C)

$$R_o = R_1 + R_2 = 22(\text{k}\Omega) + 11(\text{k}\Omega) = 33(\text{k}\Omega); \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{(10)(2.5)}{10 + 2.5} = \frac{25}{12.5} = 2(\mu\text{F})$$

$$i = \frac{\varepsilon_1}{R_o} e^{-\frac{t}{\tau_c}}; \quad \tau_c = R_o C = 66 \times 10^{-3}(\text{s}) = 0.066(\text{s}) \Rightarrow i(0.05) = \frac{12}{33 \times 10^3} e^{-\frac{0.05}{0.066}} = 0.1705(\text{mA})$$

D)

$$V_c(t) = \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) = 12 \left(1 - e^{-\frac{0.06}{0.066}} \right) = 7.1653(\text{V})$$

$$\text{COMO } q_1 = q_2 = q_{\text{eq}} \Rightarrow V_{c_1} C_1 = V_{c_2} C_2 = V_c C \Rightarrow V_{c_2} = \frac{C}{C_2} V_c = \frac{2}{2.5} (7.1653) = 5.7322(\text{V})$$

$$U_{c_2} = (0.5)(C_2)(V_{c_2}^2) = (0.5)(2.5 \times 10^{-6})(5.73)^2 = 41(\mu\text{J})$$

ESTE NÚMERO DEL BOLETÍN COPADI AGRADECE LA PARTICIPACIÓN CON UN PROBLEMA DE LOS PROFESORES GABRIEL JARAMILLO MORALES Y MARTÍN BÁRCENAS ESCOBAR.

EL BOLETÍN NÚMERO 5 SALDRÁ EL LUNES 3 DE JULIO.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. BIENVENIDOS A ESTE NUEVO SEMESTRE. LES DESEAMOS LO MEJOR.

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $y \ln y \, dx + (x - \ln y) \, dy = 0$

SOLUCIÓN. SE HACEN ARREGLOS MATEMÁTICOS Y:

$$(x - \ln y) \frac{dy}{dx} + y \ln y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y \ln y}{x - \ln y} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{x - \ln y}{y \ln y} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y} x = \frac{1}{y}$$

COMO SE OBSERVA, SE TRATA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA, LINEAL Y DE PRIMER ORDEN, POR LO QUE SE PROCEDE A RESOLVERLA:

$$P(y) = \frac{1}{y \ln y}$$

POR SER UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL, EL FACTOR INTEGRANTE ES

$$e^{\int P(y) \, dy} = e^{\int \frac{dy}{y \ln y}} = e^{\ln(\ln y)} = \ln y$$

SE MULTIPLICA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL POR EL FACTOR INTEGRANTE Y SE LLEGA A:

$$\ln y \frac{dx}{dy} + \frac{\ln y}{y \ln y} x = \frac{\ln y}{y} \Rightarrow \ln y \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y}$$

EL PRIMERMIEMBRO DE ESTA ECUACIÓN EQUIVALE A LA DERIVADA CON RESPECTO A 'y' DEL PRODUCTO $x \ln y$, LUEGO LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR COMO:

$$\frac{d}{dy} (x \ln y) = \frac{\ln y}{y}$$

AHORA SE INTEGRAN AMBOS MIEMBROS Y SE OBTIENE LA SOLUCIÓN:

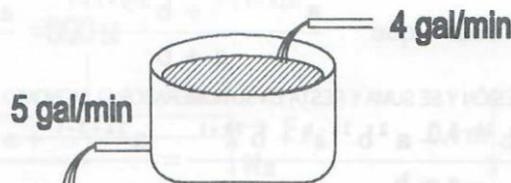
$$\int \frac{d}{dy} (x \ln y) \, dy = x \ln y + C_1; \quad \int \frac{\ln y}{y} \, dy; \quad u = \ln y; \quad du = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C_2 \Rightarrow \int \frac{\ln y}{y} \, dy = \frac{\ln^2 y}{2} + C_2$$

FINALMENTE SE TIENE QUE:

$$x \ln y = \frac{\ln^2 y}{2} + C; \quad C = C_1 + C_2; \quad \therefore 2x \ln y = \ln^2 y + C$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

UN TANQUE CILÍNDRICO CIRCULAR CONTIENE 50 GALONES DE UNA SOLUCIÓN COMPUESTA DE 90% DE AGUA Y 10% DE ALCOHOL. UNA SEGUNDA SOLUCIÓN QUE CONTIENE 50% DE AGUA Y 50% DE ALCOHOL ES AÑADIDA AL TANQUE A RAZÓN DE 4 GALONES POR MINUTO. AL MISMO TIEMPO QUE LA SEGUNDA SOLUCIÓN ES AÑADIDA, EL TANQUE ES VACIADO A RAZÓN DE 5 GALONES POR MINUTO, COMO SE VE EN LA FIGURA. SI SE ASUME QUE LA SOLUCIÓN EN EL TANQUE SE MEZCLA CONSTANTEMENTE, ¿CUÁNTO ALCOHOL HAY EN EL TANQUE DESPUÉS DE 10 MINUTOS?



SOLUCIÓN. SEA 'y' EL NÚMERO DE GALONES DE ALCOHOL EN EL TANQUE EN CUALQUIER TIEMPO 't'. SE SABE QUE $y = 5$ CUANDO $t = 0$. COMO EL TANQUE RECIBE 4 GALONES / MINUTO Y SACA 5 GALONES / MINUTO, ENTONCES PIERDE 1 GALÓN / MINUTO, POR LO QUE EL NÚMERO DE GALONES DE SOLUCIÓN EN EL TANQUE, EN CIERTO TIEMPO, ES $50 - t$. ADEMÁS, COMO PIERDE 5 GALONES DE SOLUCIÓN POR MINUTO, SE PUEDE DECIR QUE PIERDE

$$\left(\frac{5}{50-t}\right)y$$

GALONES DE ALCOHOL POR MINUTO. POR OTRO LADO, COMO RECIBE 2 GALONES DE ALCOHOL POR MINUTO, LA VARIACIÓN DEL ALCOHOL EN EL TANQUE ESTÁ DADA POR:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \left(\frac{5}{50-t}\right)y \Rightarrow \frac{dy}{dt} + \left(\frac{5}{50-t}\right)y = 2$$

QUE ES UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL, DE PRIMER ORDEN CON

$$P(t) = \frac{5}{50-t}$$

EL FACTOR INTEGRANTE ES $e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{5}{50-t} dt} = e^{-5 \ln |50-t|} = e^{-5 \ln(50-t)} = \frac{1}{(50-t)^5}$

SE MULTIPLICA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL POR EL FACTOR INTEGRANTE Y SE TIENE QUE:

$$\frac{1}{(50-t)^5} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{(50-t)^5} \frac{5}{50-t} y = \frac{2}{(50-t)^5}$$

COMO EL PRIMER MIEMBRO DE ESTA ECUACIÓN ES LA DERIVADA DE $\frac{1}{(50-t)^5} y$ CON RESPECTO A 't', ENTONCES LA ECUACIÓN DIFERENCIAL SE PUEDE

ESCRIBIR COMO:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{(50-t)^5} y \right] = \frac{2}{(50-t)^5}$$

SE INTEGRAN AMBOS MIEMBROS CON RESPECTO A 't' Y SE LLEGA A

$$\int \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{(50-t)^5} y \right] dt = \int \frac{2}{(50-t)^5} dt \Rightarrow \frac{y}{(50-t)^5} = \frac{1}{2(50-t)^4} + C$$

POR LO QUE LA SOLUCIÓN GENERAL ES

$$y = \frac{50-t}{2} + C(50-t)^5$$

DE LAS CONDICIONES DEL PROBLEMA $y(0) = 5$ LUEGO $5 = 25 + C(50)^5 \Rightarrow C = -\frac{20}{50^5}$; LUEGO LA SOLUCIÓN PARTICULAR ESTÁ DADA POR:

$$y = \frac{50-t}{2} - 20 \left(\frac{50-t}{50}\right)^5$$

FINALMENTE, CUANDO $t = 10$ MINUTOS SE OBTIENE

$$y = \frac{50-10}{2} - 20 \left(\frac{50-10}{50}\right)^5 \Rightarrow y = 13.45 \text{ GALONES DE ALCOHOL.}$$

ALGEBRA

DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA QUE $a+b$ ES FACTOR DE $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ PARA TODO VALOR DE $n \in \mathbb{Z}^+$

SOLUCIÓN. SI SE SIGUE EL PROCEDIMIENTO USUAL SE TIENE QUE:

$$\text{PARA } n = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a+b} = 1$$

$$\text{PARA } n = k \Rightarrow \frac{a^{2k-1} + b^{2k-1}}{a+b} = p \in \mathbb{Z}^+ \text{ (HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN)}$$

$$\text{PARA } n = k+1 \text{ se debe probar que } \frac{a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1}}{a+b} = \frac{a^{2k+1} + b^{2k+1}}{a+b} = q \in \mathbb{Z}^+$$

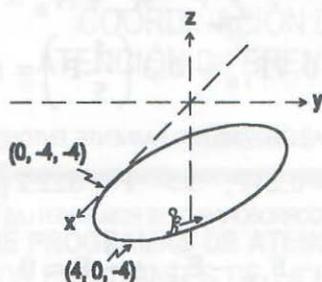
SI SE SIMPLIFICA ESTA EXPRESIÓN Y SE SUMA Y RESTA EN SU NUMERADOR EL MONOMIO $a^2 b^{2k-1}$ SE LLEGA A:

$$\begin{aligned} \frac{a^{2k+1} + b^{2k+1}}{a+b} &= \frac{a^{2k+1} + a^2 b^{2k-1} - a^2 b^{2k-1} + b^{2k+1}}{a+b} = \frac{a^{2k+2-1} + a^2 b^{2k-1} - a^2 b^{2k-1} + b^{2k+2-1}}{a+b} \\ &= \frac{a^2 (a^{2k-1} - b^{2k-1}) - b^{2k-1} (a^2 - b^2)}{a+b} = \frac{a^2 (a^{2k-1} - b^{2k-1}) - b^{2k-1} (a^2 - b^2)}{a+b} \end{aligned}$$

EL PRIMER SUMANDO ES DIVISIBLE ENTRE $a + b$ POR LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y EL SEGUNDO SUMANDO TAMBIÉN POR LA EVIDENCIA DE LA DIFERENCIA DE CUADRADOS. POR LO TANTO, SE CUMPLE LA DIVISIBILIDAD PARA $n = k + 1$ Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

UN ATLETA CORRE A LO LARGO DE UNA PISTA CIRCULAR QUE TIENE 4 M DE RADIO. SI CUANDO INICIA SU MOVIMIENTO ESTÁ EN EL PUNTO $(4, 0, -4)$ CON RESPECTO A UN SISTEMA COORDENADO CARTESIANO, ¿CUÁLES SERÁN SUS COORDENADAS ESFÉRICAS CUANDO HA RECORRIDO TRES CUARTAS PARTES DE LA PISTA, EN EL SENTIDO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA?



SOLUCIÓN. COMO SE OBSERVA EN LAS DOS FIGURAS, LAS ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA SON: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = -4 \end{cases}$, DE DONDE LAS COORDENADAS

CARTESIANAS DEL PUNTO EN EL QUE ESTÁ DESPUÉS DE RECORRER TRES CUARTAS PARTES DE LA PISTA SON $(0, -4, -4)$. PARA TRANSFORMAR ESTAS COORDENADAS AL SISTEMA COORDENADO CURVILÍNEO ESFÉRICO SE UTILIZAN LAS RESPECTIVAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN Y SE TIENE QUE:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-4)^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{16 + 16} \Rightarrow \rho = 4\sqrt{2}$$

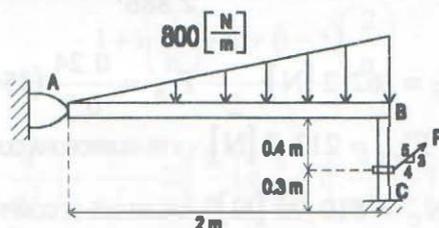
$$\theta = \text{angtan} \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \text{angtan} \frac{-4}{0} \Rightarrow \theta = \text{angtan} (-\infty) \Rightarrow \theta = 270^\circ$$

$$\varphi = \text{ang} \cos \frac{z}{\rho} \Rightarrow \varphi = \text{ang} \cos \frac{-4}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \text{ang} \cos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \varphi = 135^\circ$$

POR LO TANTO, LAS COORDENADAS ESFÉRICAS DEL PUNTO $(0, -4, -4)$ SON $(4\sqrt{2}, 270^\circ, 135^\circ)$.

ESTÁTICA

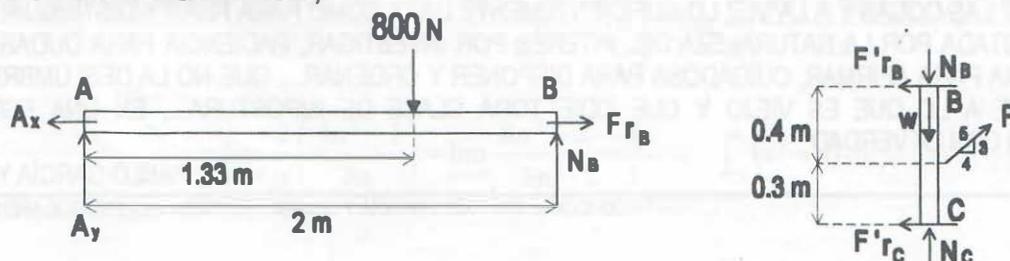
LA VIGA AB TIENE UNA MASA Y ANCHO DESPRECIABLES Y ESTÁ SUJETA A UNA CARGA DISTRIBUIDA TRIANGULAR. ESTÁ SOPORTADA EN UN EXTREMO POR UN PERNO Y EN EL OTRO, POR UN POSTE CUYA MASA ES DE 50 [kg] Y ESPESOR DESPRECIABLE. DETERMINAR LA FUERZA MÍNIMA 'P' NECESARIA PARA MOVER EL POSTE. LOS COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA EN B Y C SON RESPECTIVAMENTE, $\mu_B = 0.4$ y $\mu_C = 0.2$.



SOLUCIÓN. LA CARGA DISTRIBUIDA TRIANGULAR ES EQUIVALENTE A UNA SÓLA FUERZA CON MAGNITUD F IGUAL AL ÁREA DEL TRIÁNGULO DE LA FIGURA, APLICADA A LOS 2/3 DE LA DISTANCIA ENTRE A Y B. ASÍ,

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ [m]} \cdot 800 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \Rightarrow F = 800 \text{ [N]}; \quad \text{aplicados a } d = \frac{2}{3} \cdot 2 \text{ [m]} \Rightarrow d = 1.333 \text{ [m]}$$

EN LA SIGUIENTE FIGURA SE MUESTRAN LOS 'DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE' DE LA VIGA AB Y DEL POSTE BC (SE CONSIDERAN LOS MOMENTOS POSITIVOS SI EL GIRO ES CONTRARIO AL DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ):



$$\sum M_A : 2N_B - 1.333(800) = 0 \Rightarrow N_B = \frac{1067}{2} \Rightarrow N_B = 533.3 \text{ [N]}$$

$$F'_{rB} = 0.4(533.3) \Rightarrow F'_{rB} = 213.3 \text{ [N]}$$

$$\sum F_x : F'_{rB} - A_x = 0 \Rightarrow A_x = F'_{rB}; \quad \sum F_y : A_y + N_B - 800 = 0 \Rightarrow A_y = 266.7 \text{ [N]}$$

$$\sum M_C : 0.7F'_{rB} - 0.3 \left(\frac{4}{5} P \right) = 0$$

SI SE SUPONE QUE $F_{rB} = F'_{rB}$, ES DECIR, QUE EN B SE PRESENTA EL MOVIMIENTO INMINENTE, ENTONCES:

$$0.7(213.3) = 0.24P; \Rightarrow P = 622.2 \text{ [N]}$$

PODRÍA SUPONERSE QUE ESTE VALOR ES EL QUE SE PREGUNTA; PARA CORROBORARLO, SE RESUELVEN LAS DEMÁS ECUACIONES Y:

$$\sum F_x : -F'_{rB} - F'_{rC} + \frac{4}{5} P = 0$$

AQUÍ TAMBIÉN SE CONSIDERA QUE SE PRESENTA EL MOVIMIENTO INMINENTE EN B Y C. POR LO TANTO

$$F_{rB} = F'_{rB} \text{ y } F_{rC} = F'_{rC} \Rightarrow -213.3 - F'_{rC} + 0.8(622.2) = 0 \Rightarrow F'_{rC} = 497.7 - 213.3 \Rightarrow F'_{rC} = 284.4 \text{ [N]}$$

$$\sum F_y : N_C + \frac{3}{5} P - N_B - W = 0 \Rightarrow N_C + 0.6(622.2) - 533.3 - 50(9.81) = 0 \Rightarrow N_C = 533.3 + 490.5 - 373.3 \Rightarrow N_C = 650.5 \text{ [N]}$$

POR LO TANTO SE VERIFICA EL VALOR DE LA FUERZA DE FRICCIÓN LÍMITE $F'_{rC} : F'_{rC} = \mu_c N_C \Rightarrow F'_{rC} = 0.2(650.5) \Rightarrow F'_{rC} = 130.1 \text{ [N]}$

ESTE VALOR ES MENOR QUE EL OBTENIDO ANTERIORMENTE COMO $F'_{rC} = 284.4 \text{ [N]}$; (ESTE RESULTADO IMPLICA QUE SI $P = 622.2 \text{ [N]}$, EN B ESTÁ A PUNTO DE MOVERSE, PERO EN C YA SE MOVIÓ), POR LO TANTO, EN B NO PUEDE PRESENTARSE EL MOVIMIENTO INMINENTE; SÓLO SE PRESENTA EN C, QUE PARA ESTE CASO ES EL PUNTO CRÍTICO; ENTONCES, SI SE REPLANTEAN TODAS LAS ECUACIONES, SE TIENE QUE:

$$0.7F'_{rB} - 0.24P = 0 \dots (1), \quad -F'_{rB} - F'_{rC} + 0.8P = 0 \dots (2), \quad N_C + 0.6P - N_B - W = 0 \dots (3), \quad \text{de (1): } F'_{rB} = \frac{0.24}{0.7} P \dots (4)$$

$$(4) \text{ en } (2) \Rightarrow -\frac{0.24}{0.7} P - F'_{rC} + 0.8P = 0 \Rightarrow F'_{rC} = 0.4571P \dots (5)$$

$$\text{COMO } F'_{rC} = \mu_c N_C \Rightarrow N_C = \frac{1}{0.2} F'_{rC} \dots (6); \quad (5) \text{ y } (6) \text{ en } (3) \Rightarrow \frac{1}{0.2} (0.4571P) + 0.6P - 533.3 - 490.5 = 0$$

$$2.286P + 0.6P = 1023.8 \Rightarrow P = \frac{1023.8}{2.886} \Rightarrow P = 354.8 \text{ [N]}$$

SE VERIFICAN LOS DEMÁS VALORES Y:

$$F'_{rC} = 0.4571(354.8) \Rightarrow F'_{rC} = 162.2 \text{ [N]}, \quad F'_{rB} = \frac{0.24}{0.7}(354.8) \Rightarrow F'_{rB} = 121.2 \text{ [N]}$$

VALOR QUE ES MENOR QUE LA FUERZA DE FRICCIÓN LÍMITE $F'_{rB} = 213.3 \text{ [N]}$, Y SE CORROBORA QUE EN B NO SE PRESENTA EL MOVIMIENTO

INMINENTE; FINALMENTE: $N_C = \frac{1}{0.2}(162.2) \Rightarrow N_C = 810.96 \text{ [N]}$; VALOR QUE SE COMPRUEBA A PARTIR DE

$$N_C = 533.34 + 490.5 - 0.6(354.8) \Rightarrow N_C = 810.96 \text{ [N]}$$

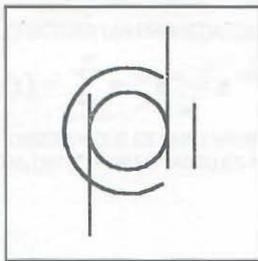
CON LO CUAL SE VERIFICA QUE EFECTIVAMENTE $F'_{rC} = 0.2(810.96) \Rightarrow F'_{rC} = 162.2 \text{ [N]}$.

CULTURA

CUANDO PIENSO CÓMO DEBE SER UN INGENIERO O INGENIERA CON UNA VIDA PLENA Y UN QUEHACER PROFESIONAL PLENO, RECUERDO AQUELLAS VIEJAS Y SABIAS PALABRAS DE FRANCIS BACON, CON LAS QUE ME ATREVO A DEFINIR COMO INGENIERA O INGENIERO A QUIEN POSEE "UNA MENTE LO SUFICIENTEMENTE DESPIERTA Y MALEABLE PARA CAPTAR LA SEMEJANZA DE LAS COSAS Y A LA VEZ LO SUFICIENTEMENTE LISTA COMO PARA FIJAR Y DISTINGUIR SUS MÁS SUTILES DIFERENCIAS; DOTADA POR LA NATURALEZA DEL INTERÉS POR INVESTIGAR, PACIENCIA PARA DUDAR, AFICIÓN PARA MEDITAR, PRUDENCIA PARA AFIRMAR, CUIDADOSA PARA DISPONER Y ORDENAR..., QUE NO LA DESLUMBRE LO QUE ES NUEVO NI SE APEGUE A LO QUE ES VIEJO Y QUE ODIE TODA CLASE DE IMPOSTURA..., EN UNA ESPECIE DE FAMILIARIDAD Y RELACIÓN CON LA VERDAD".

PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. A PETICIÓN DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, SE PUBLICARÁN TAMBIÉN EJERCICIOS DE LAS DIVISIONES PROFESIONALES. SI ALGUNOS EJERCICIOS QUE APAREZCAN NO LOS HAS ESTUDIADO, COLECCIONA EL BOLETÍN Y YA LOS NECESITARÁS. ¡FELICES VACACIONES!

CÁLCULO II

CALCULAR EL ÁREA LIMITADA POR LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = f(x) = x^2 + 1$ EL EJE DE LAS ABCISAS Y LAS RECTAS $x = -1$ y $x = 1$, MEDIANTE LA INTEGRAL DEFINIDA QUE SE OBTIENE A TRAVÉS DEL LÍMITE DE LA SUMA DE RIEMANN, CONSIDERANDO SUBINTERVALOS DE IGUAL LONGITUD EN LA PARTICIÓN Y TOMANDO LA ORDENADA CORRESPONDIENTE AL VALOR PROMEDIO DE LA ABCISCA DE LOS EXTREMOS DE CADA SUBINTERVALO

SOLUCIÓN EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA ES EL INTERVALO $(-\infty, \infty)$ LUEGO ES CONTINUA EN EL INTERVALO $[-1, 1]$ Y POR TANTO, LA INTEGRAL DEFINIDA CORRESPONDIENTE EXISTE PARA CALCULARLA SE CONSIDERA UNA PARTICIÓN DE "n" SUBINTERVALOS DE IGUAL LONGITUD

$$[-1, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, 1]$$

Y LA LONGITUD DE CADA UNO DE ELLOS ES IGUAL A $\Delta x = \frac{1 - (-1)}{n} = \frac{2}{n}$ LAS COORDENADAS DE LOS EXTREMOS DE CADA SUBINTERVALO ESTÁN DADAS POR

$$x_0 = -1; x_1 = -1 + \left(\frac{2}{n}\right); x_2 = -1 + 2\left(\frac{2}{n}\right); \dots; x_{i-1} = -1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right); x_i = -1 + i\left(\frac{2}{n}\right); \dots; x_n = -1 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 1$$

SE TOMA COMO ABCISCA " α_i " AL VALOR PROMEDIO DEL SUBINTERVALO I-ESIMO, LUEGO SE TIENE QUE

$$\alpha_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{-1 + i\left(\frac{2}{n}\right) - 1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right)}{2} = -1 + i\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

$$f(\alpha_i) = \left[-1 + i\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]^2 + 1 = 1 + i^2\left(\frac{4}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} - 2i\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} - i\left(\frac{4}{n^2}\right) + 1 = \left(\frac{4}{n^2}\right)i^2 - \left(\frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)i + \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$f(\alpha_i) \Delta x = \left[\left(\frac{4}{n^2}\right)i^2 - \left(\frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)i + \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \left(\frac{2}{n}\right)$$

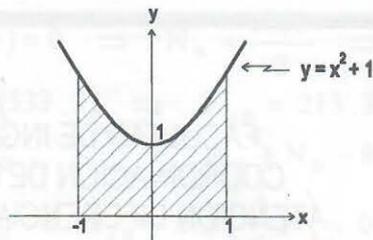
Y, MEDIANTE EL LÍMITE DE LA SUMATORIA, LA INTEGRAL DEFINIDA PARA CALCULAR EL ÁREA PEDIDA ESTÁ DADA POR

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left[\left(\frac{4}{n^2}\right)i^2 - \left(\frac{4n+4}{n^2}\right)i + \left(\frac{2n^2+2n+1}{n^2}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 - \left(\frac{4n+4}{n^2}\right) \sum_{i=1}^n i + \left(\frac{2n^2+2n+1}{n^2}\right) \sum_{i=1}^n 1 \right]$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n+4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n^2+2n+1}{n^2} \cdot n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[\frac{4n^2+6n+2}{3n} - \frac{2n^2+4n+2}{n} + \frac{2n^2+2n+1}{n} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left(\frac{4n^2 - 1}{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 2}{3n^2} = \frac{8}{3} \therefore \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \frac{8}{3} u^2$$

QUE ES EL VALOR DEL ÁREA MOSTRADA EN LA FIGURA

1



CÁLCULO III

DETERMINAR EL MÁXIMO ABSOLUTO Y EL MÍNIMO ABSOLUTO DE LA FUNCIÓN $f(x, y) = x^2 - x + 2y^2$ CUYO DOMINIO SE RESTRINGE A

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; x, y \in \mathbb{R}\}$$

SOLUCIÓN. SE CALCULAN LAS DERIVADAS PARCIALES Y SE IGUALAN A CERO PARA BUSCAR PUNTOS CRÍTICOS. ASÍ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1; 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y; 4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

DE DONDE EL PUNTO CRÍTICO ES $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ Y SATISFACE LA RESTRICCIÓN $x^2 + y^2 \leq 1$. SE DETERMINA SU NATURALEZA Y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 8 > 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

POR LO TANTO LA FUNCIÓN TIENE UN MÍNIMO RELATIVO EN EL PUNTO $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right)$

PARA ANALIZAR LA FRONTERA, ES DECIR, $x^2 + y^2 = 1$, SE UTILIZA EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, CUYA ECUACIÓN ESTÁ DADA POR

$L(x, y, \lambda) = x^2 - x + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ Y SUS DERIVADAS PARCIALES SON

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 1 + 2x\lambda; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2y\lambda \quad y \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$$

SE IGUALAN A CERO Y SE RESUELVE EL SISTEMA RESULTANTE. LUEGO

$$2x - 1 + 2x\lambda = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2 + 2\lambda}; \quad 4y + 2y\lambda = 0 \Rightarrow 2y(2 + \lambda) = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{aligned} f(1, 0) &= 0 \\ f(-1, 0) &= 2 \end{aligned}$$

$$\lambda = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{9}{4} \\ f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

POR LO TANTO SE CONCLUYE QUE EL MÁXIMO ABSOLUTO ES $\frac{9}{4}$ Y SE PRESENTA EN LOS PUNTOS $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Y $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Y EL MÍNIMO ABSOLUTO ES

$$-\frac{1}{4} \text{ Y SE PRESENTA EN EL PUNTO } \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

ANÁLISIS DE SISTEMAS Y SEÑALES

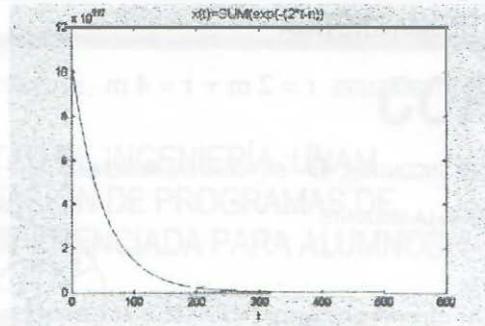
DIGA SI LAS SIGUIENTES SEÑALES SON PERIÓDICAS O NO, EN CASO DE SER PERIÓDICAS ENCONTRAR SUS PERIODO FUNDAMENTAL

A) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}$

AL EFECTUAR LAS PROPIEDADES DE LA SUMATORIA TENEMOS:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2t} e^n = e^{-2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^n = c e^{-2t}$$

SE OBSERVA QUE ES UNA EXPONENCIAL DECRECIENTE MULTIPLICADA POR UNA CONSTANTE, POR LO TANTO ES NO PERIÓDICA.



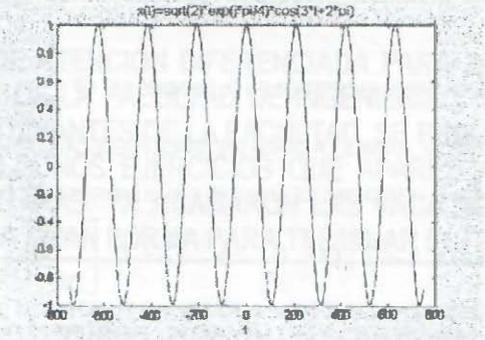
B) $x(t) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} j} \cos(3t + 2\pi)$

SE OBSERVA QUE LA SEÑAL TIENE LA FORMA $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$,

DONDE ω_0 ES LA FRECUENCIA NATURAL, A ES LA AMPLITUD Y ϕ ES EL ÁNGULO DE FASE. SE TIENE ENTONCES QUE:

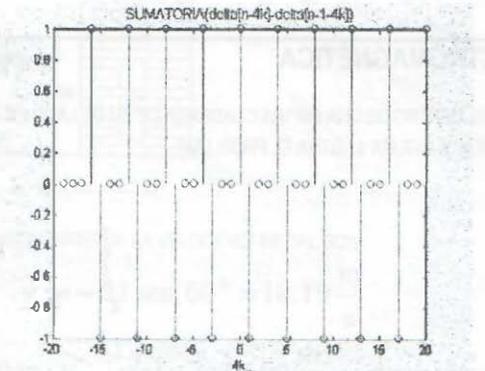
$$\omega_0 = 3 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2}{3} \pi$$

POR LO QUE SE OBSERVA QUE SI ES UNA SEÑAL PERIÓDICA.



C) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k] - \delta[n - 1 - 4k]$

ESTÁ SEÑAL REPRESENTA UN TREN DE IMPULSO. AL ANALIZARLA VEMOS QUE EL ARGUMENTO DE LA SUMATORIA SON IMPULSOS DESPLAZADOS CUATRO UNIDADES. POR LO QUE SE CONCLUYE QUE SON PERIÓDICAS, CON PERIODO $N_0 = 4$



D) EXPRESAR $x(t)$ EN TÉRMINOS DE LA FRECUENCIA NATURAL Y CALCULAR SU PERIODO, EN CASO DE SER PERIÓDICA

$$x(t) = 5 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{8} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

PARA CALCULAR LA FRECUENCIA NATURAL SE EMPLEA LA RELACIÓN

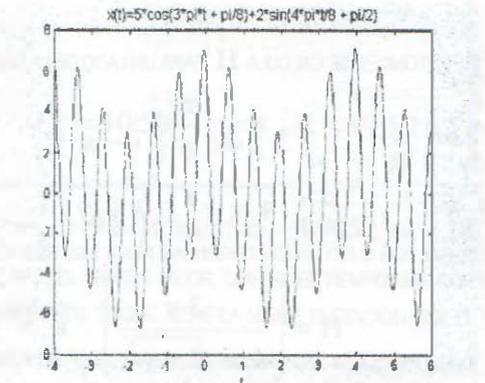
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1 \omega_0}{r_2 \omega_0}, \text{ DONDE } \omega_1 \text{ Y } \omega_2 \text{ SON LAS FRECUENCIAS NATURALES DE CADA}$$

SUMANDO, r_1 Y r_2 SON FACTORES DE PROPORCIONALIDAD Y ω_0 ES LA FRECUENCIA NATURAL DE LA SUMA DE FUNCIONES

LUEGO ENTONCES, SE TIENE QUE: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{3\pi}{\frac{4}{8}\pi} = 6$ POR LO TANTO

$$\omega_1 = r_1 \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_1}{r_1} = \frac{\pi}{2}; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4$$

FINALMENTE LA ECUACIÓN QUEDA COMO $x(t) = 5 \cos\left(6\omega_0 t + \frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

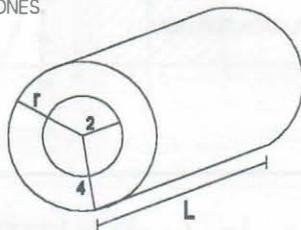


TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

UN VOLUMEN CILÍNDRICO ESTÁ ENTRE $r = 2 \text{ m}$ Y $r = 4 \text{ m}$, SU LONGITUD ES "L" Y CONTIENE UNA DENSIDAD UNIFORME DE CARGA $\rho \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$ UTILICE

LA LEY DE GAUSS PARA ENCONTRAR \vec{D} EN TODAS LAS REGIONES

SOLUCIÓN LA FIGURA ES LA SIGUIENTE



DE LA LEY DE GAUSS, LA CARGA ENCERRADA EN EL CILINDRO ES $Q_{enc} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$ POR LO QUE PUEDE COMPROBARSE QUE $\vec{D} = \frac{Q}{A} \hat{r}$ DONDE 'A' ES

EL ÁREA DE LA SUPERFICIE. ADEMÁS, LA CARGA ENCERRADA PUEDE CALCULARSE CON $Q = V \rho$, DONDE 'V' ES EL VOLUMEN DEL CILINDRO Y EQUIVALE A

$V = (r_2^2 - r_1^2) \pi L$ ENTONCES, SE ANALIZAN TODAS LAS REGIONES DONDE VARIA EL RADIO Y SE TIENE QUE

$$0 \leq r < 2; Q = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{0} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$$

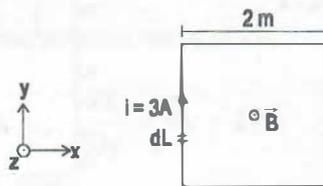
$$2 \leq r < 4 \Rightarrow Q = (r^2 - 2^2) \pi L \rho \Rightarrow \vec{D} = \frac{(r^2 - 4) \pi L \rho}{2 \pi r L} \hat{r} = \frac{\rho (r^2 - 4)}{2 r} \hat{r} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$$

$$r \geq 4 \Rightarrow Q = (4^2 - 4) \pi L \rho \Rightarrow \vec{D} = \frac{(4^2 - 4) \pi L \rho}{2 \pi r L} \hat{r} = \frac{12 \rho}{2 r} \hat{r} = \frac{6 \rho}{r} \hat{r} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$$

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

CALCULAR \vec{B} EN EL CENTRO DE UNA ESPIRA CUADRADA DE 2M DE LADO EN LA QUE CIRCULA UNA CORRIENTE DE 3 [A]

SOLUCIÓN LA SIGUIENTE FIGURA ILUSTR A EL PROBLEMA



POR LA LEY DE BIOT - SAVART, SE TIENE QUE $\vec{H} = \int \frac{I d\vec{L} \times \hat{a}_r}{4 \pi r^2}$ EL VECTOR \hat{R} ESTÁ DADO POR $\hat{R} = \hat{i} - y \hat{j}$, POR LO QUE $\hat{a}_r = \hat{R} = \frac{\hat{i} - y \hat{j}}{\sqrt{1 + y^2}}$

ADEMÁS $dL = dy$ ENTONCES, SE CALCULA \vec{H} PARA UN LADO DE LA ESPIRA Y

$$\vec{H} = \int \frac{I dy \times \hat{R}}{4 \pi r^2} = \int_{-1}^1 \frac{3 \hat{j} dy \times (\hat{i} - y \hat{j})}{4 \pi r^2 \sqrt{1 + y^2}} = \frac{3}{4 \pi} \int_{-1}^1 \frac{- dy \hat{k}}{(1 + y^2) \sqrt{1 + y^2}} = - \frac{3}{4 \pi} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(1 + y^2)^{3/2}} \hat{k}$$

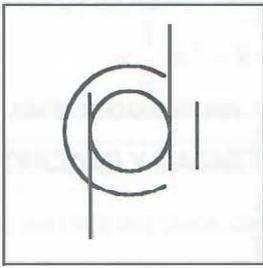
SE RESUELVE LA INTEGRAL POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA Y SU RESULTADO ES

$$\vec{H} = \left[\frac{-3 y}{4 \pi \sqrt{1 + y^2}} \right]_{-1}^1 \hat{k} = - \frac{3}{4 \pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \hat{k} = - \frac{3}{2 \sqrt{2} \pi} \hat{k}$$

Y, COMO SON CUATRO LADOS DE LA ESPIRA $\vec{H} = - \frac{6}{\sqrt{2} \pi} \hat{k}$; $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = - \frac{6 \mu_0}{\sqrt{2} \pi} \hat{k} = - 1.697 \times 10^{-6} \hat{k} \text{ [T]}$

¡HAY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SANCHEZ.



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000

NÚMERO 7

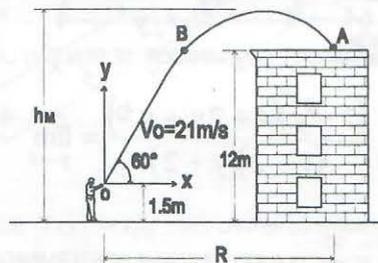
17 DE AGOSTO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. A PETICIÓN DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, SE PUBLICARÁN TAMBIÉN EJERCICIOS DE LAS DIVISIONES PROFESIONALES. SI ALGUNOS EJERCICIOS QUE APAREZCAN NO LOS HAS ESTUDIADO, COLECCIONA EL BOLETÍN Y YA LOS NECESITARÁS. YA ACABARON LAS VACACIONES. AHORA, ¡A ESTUDIAR! UN SEMESTRE BIEN APROVECHADO SERÍA UNA GRAN FORMA PARA TERMINAR ESTE AÑO 2000.

CINEMÁTICA

SE ARROJA UNA PELOTA DESDE UNA POSICIÓN 'O' A 1.5 M SOBRE EL PISO, HACIA EL TECHO DE UN EDIFICIO DE 12 M DE ALTURA, COMO SE VE EN LA FIGURA. SI LA VELOCIDAD INICIAL DE LA BOLA ES DE 21 M/S, CON UN ÁNGULO DE 60° CON RESPECTO A LA HORIZONTAL, CALCULAR LA DISTANCIA HORIZONTAL 'R', DESDE EL PUNTO EN QUE SE ARROJA LA PELOTA, HASTA EL PUNTO DONDE CHOCA CON EL TECHO Y DESPUÉS DETERMINAR LA ALTURA MÁXIMA 'h_M' QUE ALCANZA LA PELOTA.



SOLUCIÓN. SE CONSIDERA EL ORIGEN DE COORDENADAS EN 'O' Y ENTONCES LAS COMPONENTES DE LA VELOCIDAD INICIAL SON:

$$v_{ox} = 21 \cos 60^\circ = 10.50 \frac{m}{s} \quad \text{y} \quad v_{oy} = 21 \sin 60^\circ = 18.19 \frac{m}{s}$$

COMO SE SABE, LA COMPONENTE EN 'X' DE LA VELOCIDAD FINAL EN EL PUNTO 'A' ES $v_{Ax} = v_{ox} = 10.50 \frac{m}{s}$; Y LA ACCELERACIÓN EN 'Y' ES LA DE LA

GRAVEDAD, ES DECIR, $a_y = g = -9.81 \frac{m}{s^2}$.

MOVIMIENTO HORIZONTAL

$$x_A = x_o + v_{ox} t_{OA} ; \quad x_A = R ; \quad x_o = 0 \quad \text{y} \quad v_{ox} = 10.50 \frac{m}{s} \Rightarrow R = 10.50 t_{OA} \dots (1)$$

MOVIMIENTO VERTICAL

$$y_A = y_o + v_{oy} t_{OA} + \frac{1}{2} a_y t_{OA}^2 \Rightarrow (12 - 1.5) = 0 + 18.19 t_{OA} + \frac{1}{2} (-9.81) t_{OA}^2 \Rightarrow 4.905 t_{OA}^2 - 18.19 t_{OA} + 10.5 = 0$$

SE RESUELVE ESTA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SE LLEGA A LOS VALORES 0.716 S Y 2.99 S. EL PRIMER VALOR, QUE ES EL TIEMPO MÁS CORTO, SE IDENTIFICA COMO t_{OB} , YA QUE REPRESENTA EL TIEMPO NECESARIO PARA QUE LA PELOTA ALCANCE EL PUNTO 'B' QUE TIENE LA MISMA ELEVACIÓN QUE EL PUNTO 'A'. Y EL TIEMPO t_{OA} ES EL TIEMPO EN EL QUE LA PELOTA VUELVE A PASAR POR LA MISMA ALTURA DEL PUNTO 'B', QUE ES LA ALTURA DEL EDIFICIO. LUEGO, $t_{OA} = 2.99$ S. SE SUSTITUYE EN LA ECUACIÓN (1) Y SE OBTIENE QUE $R = 10.5(2.99) = 31.40$ m.

PARA DETERMINAR LA ALTURA MÁXIMA, SE TIENE QUE EL TIEMPO EN EL QUE LA ALCANZA ES LA MITAD DEL TIEMPO EN QUE SE DESPLAZA DE 'B' A 'A', ES DECIR, $t_{hM} = 2.99 - 0.716 = 2.274$ S. LUEGO

$$h_M = 5 + v_{oy} t_{hM} + \frac{1}{2} a_y t_{hM}^2 \Rightarrow h_M = 1.5 + 18.19(2.274) + \frac{1}{2} (-9.81)(2.274)^2 \Rightarrow h_M = 17.5 \text{ m.}$$

CÁLCULO I

CALCULAR EL VALOR DE LOS SIGUIENTES LÍMITES

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}}$; ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8-\sqrt{x+64}}{\sqrt[3]{x+64}-4}$; iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{5x}$

SOLUCIÓN. i) SE TIENE QUE $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}} = \frac{0}{0}$ QUE ES UNA FORMA INDETERMINADA. PARA DESAPARECER LA INDETERMINACIÓN, SE MULTIPLICAN, AL MISMO TIEMPO, NUMERADOR Y DENOMINADOR POR SUS RESPECTIVOS 'BINOMOS CONJUGADOS'. ASÍ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \cdot \frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1-1)(2+\sqrt{x+4})}{[4-(x+4)](\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2+\sqrt{x+4})}{-x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{4}{-2} = -2 \end{aligned}$$

QUE ES EL VALOR DEL LÍMITE.

ii) SE TIENE QUE $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8-\sqrt{x+64}}{\sqrt[3]{x+64}-4} = \frac{0}{0}$ QUE ES UNA FORMA INDETERMINADA. PARA DESAPARECER LA INDETERMINACIÓN, SE HACE LO

SIGUIENTE: SE SIMPLIFICA LA EXPRESIÓN MEDIANTE UN CAMBIO DE VARIABLE, EN EL QUE EL RADICANDO COMÚN DE AMBAS RAÍCES SE CAMBIA POR UNA NUEVA VARIABLE A LA QUE SE LE COLOCA COMO EXPONENTE EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE LOS ÍNDICES DE LAS DOS RAÍCES, QUE EN ESTE CASO ES 6. ENTONCES SE PUEDE ESCRIBIR

$x+64 = y^6$. EL LÍMITE DE $x+64$ CUANDO $x \rightarrow 0$ ES 64. LUEGO, PARA QUE EL LÍMITE DE y^6 SEA 64, LA NUEVA VARIABLE 'y' DEBE TENDER A 2 ASÍ SE REALIZA EL CAMBIO DE VARIABLE Y SE LLEGA A:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8-\sqrt{x+64}}{\sqrt[3]{x+64}-4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{8-\sqrt{y^6}}{\sqrt[3]{y^6}-4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{8-y^3}{y^2-4} = \frac{0}{0}$$

PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE FACTORIZAN NUMERADOR Y DENOMINADOR. SE REALIZAN LAS SIMPLIFICACIONES CORRESPONDIENTES Y SE LLEGA AL VALOR DEL LÍMITE. LUEGO,

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{8-y^3}{y^2-4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(2-y)(4+2y+y^2)}{(y-2)(y+2)} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{4+2y+y^2}{-(y+2)} = \frac{12}{-4} = -3$$

QUE ES EL VALOR DEL LÍMITE.

iii) SE TIENE QUE $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{5x} = \frac{\infty}{\infty}$ QUE ES UNA FORMA INDETERMINADA. PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE DIVIDEN NUMERADOR Y

DENOMINADOR ENTRE LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE, QUE EN ESTE CASO ES $x^1 = x$. ESTO SE HACE PARA BUSCAR QUE DESPUÉS DE LA DIVISIÓN SOLAMENTE QUEDA LA VARIABLE COMO DENOMINADOR Y, AL HACERLA TENDER A ∞ , COMO SE SABE, LA DIVISIÓN ENTRE ∞ ES CERO Y DESAPARECE LA INDETERMINACIÓN. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}}{5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}}{5} = \frac{\sqrt[3]{0+1}}{5} = \frac{1}{5}$$

QUE ES EL VALOR DEL LÍMITE.

ÁLGEBRA-GEOMETRÍA ANALÍTICA

DEMOSTRAR QUE EL NÚMERO DE DIAGONALES DE UN POLÍGONO DE 'n' LADOS ES $D_n = \frac{1}{2}n(n-3)$.

SOLUCIÓN UN TRIÁNGULO NO TIENE DIAGONALES LO QUE SE VERIFICA AL APLICAR ESTA EXPRESIÓN ASÍ,

$$D_3 = \frac{1}{2}(3)(3-3) = 0$$

SI SE UTILIZA EL MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN CONOCIDO COMO 'INDUCCIÓN MATEMÁTICA', SE TIENE QUE:

PARA $n = k \Rightarrow D_k = \frac{1}{2}k(k-3)$ HIPÓTESIS

PARA $n = k+1 \Rightarrow D_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)(k-2)$ TESIS

UN POLINOMIO DE 'k' LADOS, AL AUMENTARSE UN VÉRTICE, SE AUMENTAN $k-2+1 = k-1$ DIAGONALES LUEGO SE SUMA ESTE BINOMIO A LA HIPÓTESIS Y SE LLEGA A:

$$D_{k+1} = \frac{1}{2} k(k-3) + (k-1) = \frac{1}{2} k(k-3) + \frac{2(k-1)}{2} = \frac{k(k-3) + 2(k-1)}{2} = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (k^2 - k + 2) = \frac{1}{2} (k+1)(k-2)$$

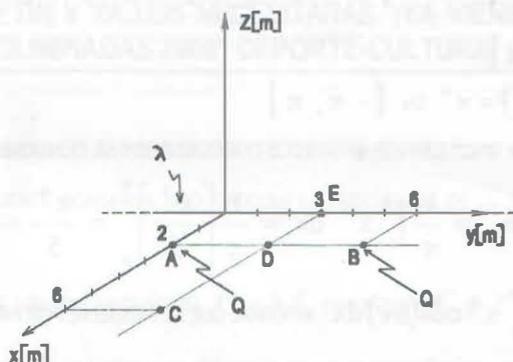
EXPRESIÓN QUE ES IGUAL A LA TESIS POR LO QUE LA FÓRMULA DADA ESTÁ DEMOSTRADA.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

SE TIENE UNA LÍNEA MUY LARGA, CON DENSIDAD LINEAL DE CARGA UNIFORME $\lambda = -2.0 \left[\frac{\mu\text{C}}{\text{m}} \right]$ LA QUE SE CONSIDERA QUE COINCIDE CON EL EJE 'y' DE UN

DETERMINADO SISTEMA COORDENADO, COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA; EN CADA UNO DE LOS PUNTOS $A(2, 0, 0) \text{ m}$ Y $B(2, 6, 0) \text{ m}$ SE COLOCA UNA CARGA PUNTUAL DE $Q = 4 \mu\text{C}$. TODAS LAS CARGAS DE ESTE CONJUNTO ESTÁN LO SUFICIENTEMENTE ALEJADAS COMO PARA DESPRECIAR EL EFECTO DE INDUCCIÓN. SUPÓNGASE QUE SE ENCUENTRAN EN EL VACÍO. DETERMINAR:

- a) EL CAMPO ELÉCTRICO TOTAL EN EL PUNTO $C(6, 3, 0) \text{ m}$.
- b) EL TRABAJO NECESARIO PARA TRASLADAR UNA CARGA $q = 1 \text{ nC}$ DESDE EL PUNTO 'C' HASTA EL PUNTO $D(2, 3, 0) \text{ m}$.



SOLUCIÓN

- a) CON EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN Y CONSIDERANDO QUE $\hat{r}_{CE} = \hat{r}_{CE}$, SE PLANTEA LO SIGUIENTE:

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{C\lambda} + \vec{E}_{CQ_A} + \vec{E}_{CQ_B} \quad ; \quad \vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r_{CE}} \hat{r}_{CE} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_A|}{r_{AC}^2} \hat{r}_{AC} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_B|}{r_{BC}^2} \hat{r}_{BC}$$

$$\vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2\lambda}{r_{CE}} \hat{i} + \frac{|Q_A|}{r_{AC}^2} \left(\frac{4\hat{i} + 3\hat{j}}{5} \right) + \frac{|Q_B|}{r_{BC}^2} \left(\frac{4\hat{i} - 3\hat{j}}{5} \right) \right]$$

COMO $|Q_A| = |Q_B|$ Y $r_{AC} = r_{BC}$ ENTONCES SE PUEDE ESCRIBIR

$$\vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2\lambda}{r_{CE}} \hat{i} + \frac{|Q_A|}{r_{AC}^2} \left(\frac{8\hat{i}}{5} \right) \right] = 9 \times 10^9 \left[\frac{-2(2 \times 10^{-6})}{6} \hat{i} + \frac{4 \times 10^{-6}}{(5)^2} \left(\frac{8\hat{i}}{5} \right) \right]$$

$$\vec{E}_C = 9 \times 10^3 \left(-\frac{4}{6} \hat{i} + \frac{32}{125} \hat{i} \right) = 9 \times 10^3 \left(-0.4107 \hat{i} \right) = -3,696 \hat{i} \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

- b) PARA CALCULAR EL TRABAJO REQUERIDO SE CONSIDERA LO SIGUIENTE:

$${}_C W_D = EP_D - EP_C = q V_{DC} \quad ; \quad V_{DC} = V_{DC\lambda} + V_{DCQ_A} + V_{DCQ_B}$$

POR INSPECCIÓN SE OBTIENE QUE: $V_{DC\lambda} < 0$; $V_{DCQ_A} > 0$; V_{DCQ_B}

$$V_{DC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \text{Ln} \frac{r_C}{r_D} + \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{AD}} - \frac{1}{r_{AC}} \right) + \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{BD}} - \frac{1}{r_{BC}} \right)$$

SE OBSERVA QUE $r_{AD} = r_{BD}$ Y, COMO $r_{AC} = r_{BC}$, ENTONCES SE PUEDE ESCRIBIR:

$$V_{DC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_c}{r_D} + \frac{2Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{AD}} - \frac{1}{r_{AC}} \right) = 2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \left[-2 \times 10^{-6} \ln \frac{6}{2} + 4 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right]$$

$$V_{DC} = -39,950 + 9,600 \quad ; \quad V_{DC} = -29,950 \text{ [V]}$$

Y, FINALMENTE, EL TRABAJO ES IGUAL A:

$${}_c W_D = (1 \times 10^{-9})(-29,950) \quad ; \quad {}_c W_D = -29.95 \times 10^{-6} \text{ [J]}$$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

SERIES Y COEFICIENTES DE FOURIER EN $[-\pi, \pi]$

SEA *f* UNA FUNCIÓN INTEGRABLE EN EL INTERVALO CERRADO $[-\pi, \pi]$. ENTONCES:

1. LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE *f* EN $[-\pi, \pi]$ SON LOS NÚMEROS:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad ; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. LA SERIE DE FOURIER DE *f* EN EL INTERVALO $[-\pi, \pi]$ ES: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$, DONDE LOS COEFICIENTES SON LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE *f* EN $[-\pi, \pi]$.

EJEMPLO. ENCONTRAR LA SERIE DE FOURIER DE $f(x) = x^4$ EN $[-\pi, \pi]$.

COMO x^4 ES PAR EN $[-\pi, \pi]$, $b_n = 0$. SE CALCULAN LOS OTROS DOS COEFICIENTES Y SE TIENE QUE:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}$$

Y, PARA $n = 1, 2, 3, \dots$ SE TIENE QUE: $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^4 \cos(nx) dx$, INTEGRAL QUE SE RESUELVE POR PARTES (4 VECES) Y DA POR RESULTADO:

$$a_n = \frac{2}{n\pi} [x^4 \sin(nx)]_0^{\pi} - \frac{8}{n\pi} \left[\frac{3n^2 x^2 - 6}{n^4} \sin(nx) - \frac{n^2 x^3 - 6x}{n^3} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{8}{\pi n^4} (n^2 \pi^3 - 6\pi) \cos(n\pi)$$

Y SE LLEGA A: $a_n = \frac{8}{n^4} (n^2 \pi^2 - 6)(-1)^n$, POR LO QUE LA SERIE DE FOURIER PARA $f(x) = x^4$ EN $[-\pi, \pi]$ ES:

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4} (n^2 \pi^2 - 6)(-1)^n \cos(nx)$$

UTOPIA CIENTÍFICA

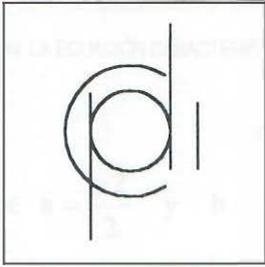
¿SON LOS SERES HUMANOS DEMASIADO INTELIGENTES PARA SU PROPIO BIEN?

A PRINCIPIOS DEL SIGLO XXI LOS SERES HUMANOS SE PREGUNTAN SI ESTÁN ESCLAVIZADOS POR LAS MÁQUINAS QUE UTILIZAN, LAS COSECHAS QUE HACEN CRECER O EL DINERO QUE GANAN. PERO HAY DOS POSIBILIDADES LATENTES EN LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA ACTUALES. UNA ES EL DESAFÍO DE LAS COMPUTADORAS QUE, EN CIERTO SENTIDO PRÁCTICO, SERÁN MÁS INTELIGENTES QUE LOS SERES HUMANOS. OTRA IDEA ES QUE EL CONOCIMIENTO DE LA GENÉTICA Y LA INGENIERÍA GENÉTICA PODRÍAN OFRECERNOS LOS MEDIOS PARA CREAR UNA NUEVA ESPECIE O RAZA DE SERES HUMANOS SUPERIORES AL HOMO SAPIENS SAPIENS EN PODERES TANTO FÍSICOS COMO MENTALES. EN CUALQUIER CASO, LA GENTE PUEDE CREER QUE SE LE HA CONDENADO A LA MISMA RELACIÓN CON SUPERCOMPUTADORAS O SUPERHOMBRES, QUE LA QUE TIENEN LOS CHIMPANCÉS CON LOS SERES HUMANOS. ESTAS POSIBILIDADES EXTREMAS TRAEN A COLACIÓN MUCHAS PREGUNTAS: ¿EN QUÉ MEDIDA EL TRABAJO CREATIVO DEL HOMBRE, EN LAS ARTES Y EN LA TECNOLOGÍA, SERÍA MANEJADO POR LAS COMPUTADORAS? ¿DÓNDE ESTÁ LA LÍNEA DIVISORIA ENTRE LA CURACIÓN DE DEFECTOS GENÉTICOS EN PACIENTES Y EL TRATAR DE CREAR SERES HUMANOS SUPERIORES? ¿CUÁL ES LA ESENCIA DE LA NATURALEZA HUMANA QUE LA HACE DIFERENTE A LAS MÁQUINAS O A LOS SUPERHOMBRES? CON EXCEPCIÓN DE LA EXTERMINACIÓN, NO PODRÍA HABER NADA TAN EMPOBRECEDOR COMO ROBAR A LOS SERES HUMANOS EL CONTROL SOBRE SUS PROPIOS ASUNTOS, Y DIRIGIRLO TODO DESDE COMPUTADORAS SUPERINTELIGENTES O SUPERHOMBRES. Y TÚ, LECTOR, ¿QUÉ CREES AL RESPECTO?

¡HAY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS INGENIEROS ERIK CASTAÑEDA Y GABRIEL JARAMILLO.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000

NÚMERO 8

2 DE SEPTIEMBRE DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. A PETICIÓN DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, SE PUBLICARÁN TAMBIÉN EJERCICIOS DE LAS DIVISIONES PROFESIONALES. SI ALGUNOS EJERCICIOS QUE APAREZCAN NO LOS HAS ESTUDIADO, COLECCIONA EL BOLETÍN Y YA LOS NECESITARÁS. **¡YA VIENE LA "SEMANA SEFI INGENIERÍA UNAM 2000" CON SUS FABULOSAS "SEFIOLIMPIADAS 2000" DEPORTE-CULTURA! ¡PARTICIPA Y GANA!**

QUÍMICA

EL ÚLTIMO ELECTRÓN DE UN ÁTOMO TIENE LOS NÚMEROS CUÁNTICOS SIGUIENTES. $n = 4, l = 1, m = -1$ y $\text{giro} = +\frac{1}{2}$. SUPONGA QUE AL ÁTOMO SE LE QUITAN ELECTRONES DE TAL MANERA QUE SOLAMENTE CONSERVA UNO. CALCULE LA FRECUENCIA DE LA SEÑAL ELECTROMAGNÉTICA QUE SE EMITE CUANDO EL ELECTRÓN SALTA DE LA SEXTA ÓRBITA A LA TERCERA.

SOLUCIÓN PARA EL CÁLCULO DE LA FRECUENCIA SE UTILIZA LA ECUACIÓN $C = \lambda f$ EN LA CUAL $C = 2.997924 \times 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $\lambda =$ LONGITUD DE ONDA

Y $f =$ FRECUENCIA. COMO SE OBSERVA, SE REQUIERE LA LONGITUD DE ONDA Y, COMO SE TRATA DE TRANSICIONES ELECTRÓNICAS EN UN ÁTOMO HIDROGENOIDE, SE PIENSA INMEDIATAMENTE EN LA ECUACIÓN DE BOHR:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right] \text{ donde } R = 10,973,731.53 \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$$

DE IGUAL FORMA, SE APRECIA QUE HAY VARIABLES DESCONOCIDAS COMO EL NÚMERO ATÓMICO (Z), n_f (NIVEL FINAL) Y n_i (NIVEL INICIAL). VEAMOS CÓMO CALCULARLAS

PARA Z

EN EL PROBLEMA SE MENCIONA QUE PARA EL ÚLTIMO ELECTRÓN DEL ÁTOMO $n = 4, l = 1, m = -1$ y $\text{giro} = +\frac{1}{2}$. ESTA INFORMACIÓN PERMITE IDENTIFICAR AL ELEMENTO DEL QUE SE TRATA, CON EL ANÁLISIS SIGUIENTE. PARA $n = 4$, l PUEDE TOMAR VALORES DE

$$0 = s ; l = p ; 2 = d ; 3 = f$$

EN ESTE CASO SE TRATA DEL ORBITAL "p". EN ÉSTE, "m" PUEDE ADQUIRIR VALORES DE $-1, 0, +1$ QUE CORRESPONDAN A LAS TRES ORIENTACIONES (np_x, np_y, np_z) DEL ORBITAL "p" EN EL ESPACIO. SE DEDUCE QUE SI $m = -1$, EL ELECTRÓN SE UBICA EN np_x .

FINALMENTE Y SEGÚN EL PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI, UN ORBITAL PUEDE CONTENER 2 ELECTRONES CON GIROS OPUESTOS $\left(+\frac{1}{2} \text{ y } -\frac{1}{2} \right)$. SI EL GIRO

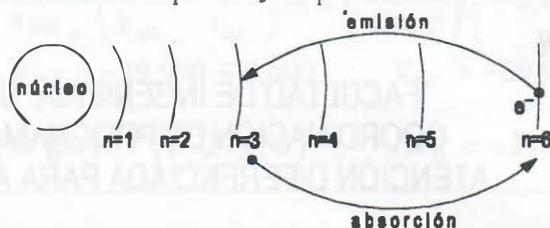
ES $+\frac{1}{2}$, LA REPRESENTACIÓN PUEDE PLANTEARSE DE LA MANERA SIGUIENTE

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \\ \hline 4p_x & 4p_y & 4p_z \\ \hline -1 & 0 & +1 \end{array}$$

ASÍ QUE SE TRATA DE UN ELEMENTO CUYO ÚLTIMO ELECTRÓN SE UBICA EN EL ORBITAL $4p^1$, QUE ES EL GALIO, CON NÚMERO ATÓMICO 31 Y CONFIGURACIÓN ELECTRÓNICA $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^1$

PARA n_f y n_i ,

COMO SE TRATA DE UN FENOMENO DE EMISION, SE SABE QUE $n_f = 3$ y $n_i = 6$, YA QUE EL ELECTRON SALTA DEL NIVEL 6 AL NIVEL 3



SI SE SUSTITUYE EN LA ECUACION DE BOHR, SE TIENE QUE:

$$\frac{1}{\lambda} = [31]^2 [10,973,731.53] \left[\frac{1}{m} \right] \left[\frac{1}{(3)^2} - \frac{1}{(6)^2} \right] \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 878.813 \times 10^6 \left[\frac{1}{m} \right]$$

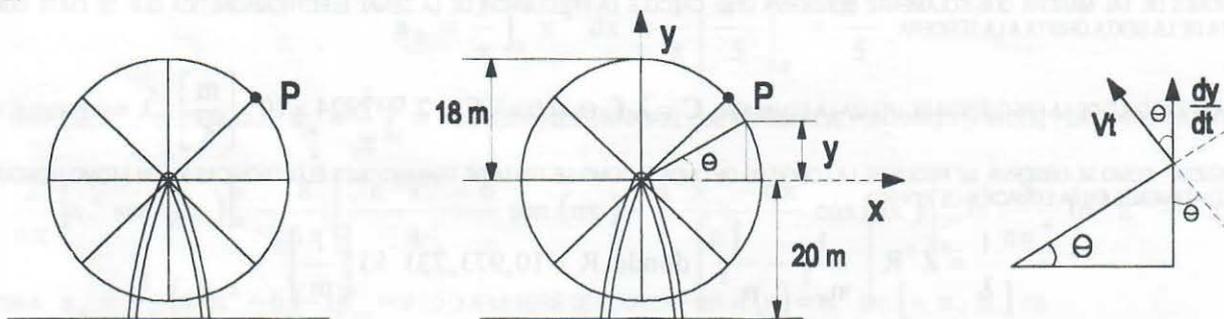
DE TAL FORMA QUE $\lambda = 1.1379 \times 10^{-9} [m]$ Y LA FRECUENCIA CORRESPONDIENTE SE CALCULA COMO:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2.997924 \times 10^8 \left[\frac{m}{s} \right]}{1.1379 \times 10^{-9} [m]} = 2.6346 \times 10^{17} \left[\frac{1}{s} \right]$$

QUE ES EL RESULTADO FINAL DE LO SOLICITADO.

CÁLCULO I

UNA 'RUEDA DE LA FORTUNA' COMO LA MOSTRDA EN LA FIGURA, DA UNA VUELTA Y MEDIA CADA DOS MINUTOS. ¿CON QUÉ VELOCIDAD SE ELEVA UNA PERSONA CUYO ASIENTO ESTÁ A 29 M SOBRE EL NIVEL DEL SUELO? Y, ¿CUÁL ES LA VELOCIDAD TANGENCIAL DE LA PERSONA CON RESPECTO A LA TRAYECTORIA CIRCULAR QUE DESCRIBE?



SOLUCIÓN. LA VELOCIDAD ANGULAR DE LA RUEDA ESTÁ DADA POR $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1.5(2\pi) \text{ rad}}{2 \text{ min}} = 1.5\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}$ Y, DE ACUERDO CON LA FIGURA EN LA QUE SE

HAN FIJADO MAGNITUDES VARIABLES Y CONSTANTES, LO QUE SE PIDE EN EL PROBLEMA ES LA RAPIDEZ CON LA QUE VARIA 'y', ES DECIR, $\frac{dy}{dt}$ Y LA SEGUNDA

PREGUNTA ES CON RESPECTO AL VALOR DE LA VELOCIDAD TANGENCIAL, LA QUE, EN RELACION CON EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE LA FIGURA ES 'v_t'

LA DISTANCIA 'y' SE EXPRESA COMO:

$$y = 18 \text{ sen } \theta \quad \text{DE DONDE} \quad \frac{dy}{dt} = 18 \text{ cos } \theta \frac{d\theta}{dt}$$

DE LOS DATOS

$$y = 9 \text{ m} \Rightarrow \theta = \text{ang sen } \frac{9}{18} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

LUEGO

$$\frac{dy}{dt} = 18 \text{ cos } 30^\circ (1.5\pi) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 73.46$$

POR OTRO LADO, DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE LA FIGURA, SE TIENE QUE:

$$\text{cos } \theta = \frac{73.46}{v_t} \Rightarrow v_t = 84.82$$

POR LO QUE LA PERSONA SE ELEVA A RAZÓN DE $73.46 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ Y SU VELOCIDAD TANGENCIAL ES DE $84.82 \frac{\text{m}}{\text{min}}$

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER EL SIGUIENTE PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES.

$$y'' - \sqrt{2} y' + y = 0 ; y(0) = \sqrt{2} ; y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA ES $m^2 - \sqrt{2} m + 1 = 0$, LUEGO

$$m = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2} i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

DE DONDE $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ POR LO QUE LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ES:

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)$$

DE LA PRIMERA CONDICIÓN

$$y(0) = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = C_1 (1) \Rightarrow C_1 = \sqrt{2} \Rightarrow y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} x} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)$$

SE DERIVA ESTA EXPRESIÓN Y SE TIENE QUE:

$$y' = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} x} \left(-\operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} x + C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} x} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)$$

Y, DE LA SEGUNDA CONDICIÓN

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} (1) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2}) \Rightarrow C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \Rightarrow C_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

FINALMENTE, LA SOLUCIÓN DE ESTE PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES ES:

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} x} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) \Rightarrow y = \sqrt{2} e^{\frac{\sqrt{2}}{2} x} \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} x - \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)$$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

SI LA FUNCIÓN ANALÍTICA $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ SE EXPRESA EN TÉRMINOS DE LAS COORDENADAS POLARES r y θ , DEMOSTRAR QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

SOLUCIÓN. $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$

COMO "f" ES ANALÍTICA, ENTONCES $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

SE DERIVAN "u" y "v" CON RESPECTO A "r" y "θ" Y SE TIENE QUE:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \operatorname{sen} \theta \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} (-r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \cos \theta) \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} (-r \operatorname{sen} \theta) + \frac{\partial v}{\partial y} (r \cos \theta) \quad \dots (4)$$

DE LAS ECUACIONES (1) y (3) REPRESENTADAS EN FORMA MATRICIAL, SE OBTIENE

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

SE RESUELVE EL SISTEMA POR KRAMER DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \text{sen } \theta \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & r \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -r \text{sen } \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial r} r \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \text{sen } \theta}{r \cos^2 \theta + r \text{sen}^2 \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\text{sen } \theta}{r} \dots (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & \frac{\partial u}{\partial r} \\ -r \text{sen } \theta & \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -r \text{sen } \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial r} r \text{sen } \theta}{r \cos^2 \theta + r \text{sen}^2 \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \text{sen } \theta \dots (6)$$

SI SE PROCEDE EN FORMA ANÁLOGA CON LAS ECUACIONES (2) y (4) SE OBTIENE

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\text{sen } \theta}{r} \dots (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \text{sen } \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \dots (8)$$

COMO "f" ES ANALÍTICA $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ DE DONDE, AL IGUALAR (5) y (8) SE LLEGA A

$$\frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\text{sen } \theta}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} \text{sen } \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \cos \theta - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \text{sen } \theta = 0$$

COMO LAS FUNCIONES $\cos \theta$ y $\text{sen } \theta$ SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES, PARA QUE UNA COMBINACIÓN LINEAL DE ELLAS SEA CERO, SE REQUIERE QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

DE DONDE, FINALMENTE, SE TIENE QUE:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

QUE ES LO QUE SE QUERÍA DEMOSTRAR.

NOTA UN RESULTADO IGUAL SE OBTIENE SI SE CONSIDERA LA IGUALDAD $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

CIENCIA Y TECNOLOGÍA

CUÁNTA RAZÓN TENIA LEIBNIZ CUANDO EN SU ÉPOCA EXPRESABA:
"NO ES ADMISIBLE QUE LOS ESTUDIOSOS Y CIENTÍFICOS EN LUGAR DE ELABORAR Y CONFRONTAR NUEVAS TÉCNICAS, PIERDAN SU TIEMPO COMO ESCLAVOS EN LAS FATIGAS DEL CÁLCULO, QUE PODÍA SER CONFIADO A CUALQUIERA SI SE PUDIERAN UTILIZAR MÁQUINAS PARA ELLO".

ESTUDIANTES: APROVECHEN LOS APOYOS ACADÉMICOS DE LA COPADI. HAY SESIONES EN QUE SE RESUELVEN EXÁMENES COLEGIADOS ANTERIORES. SON MÁS DE 90 MINUTOS DE EJERCICIOS PARA PREPARAR TUS EXÁMENES. ADEMÁS ESTÁN LAS "AACI" (ACCIONES ACADÉMICAS INDIVIDUALES) EN LAS QUE COMPAÑEROS TE AYUDAN EN DUDAS DE MUCHAS ASIGNATURAS. CONSULTA LOS HORARIOS EN LAS VENTANAS DE LA COPADI Y ENTRA. AHÍ TE ESPERAN ESTUDIANTES COMO TÚ QUE QUIEREN AYUDARTE Y APOYAR ASÍ TU APRENDIZAJE PARA QUE ALCANCES EL ÉXITO EN TUS ASIGNATURAS.

¡HAY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LA QFB. VIOLETA L. M. BRAVO HERNÁNDEZ Y DE LOS INGENIEROS ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, GABRIEL JARAMILLO MORALES Y ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

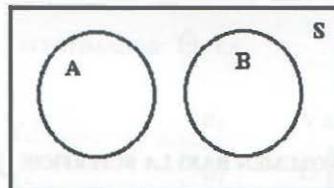


EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. A PETICIÓN DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, SE PUBLICARÁN TAMBIÉN EJERCICIOS DE LAS DIVISIONES PROFESIONALES. SI ALGUNOS EJERCICIOS QUE APAREZCAN NO LOS HAS ESTUDIADO, COLECCIONA EL BOLETÍN Y YA LOS NECESITARÁS. ¡YA VIENE LA "SEMANA SEFI INGENIERÍA UNAM 2000" CON SUS FABULOSAS "SEFIOLIMPIADAS 2000" DEPORTE-CULTURAL! ¡PARTICIPA Y GANA!

PROBABILIDAD (EJERCICIOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE)

1.- DADOS LOS EVENTOS A Y B , CUYA REPRESENTACIÓN EN UN DIAGRAMA DE VENN ES



ENTONCES, PARA LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

- I) SON EVENTOS INDEPENDIENTES.
- II) SU INTERSECCIÓN ES EL VACÍO.
- III) SON MUTUAMENTE EXCLUYENTES.

SE PUEDE AFIRMAR DE A Y B QUE:

- 1) SÓLO (I) ES CIERTA.
- 2) SÓLO (II) ES CIERTA.
- 3) SÓLO (III) ES CIERTA.
- 4) SÓLO (II) Y (III) SON CIERTAS.
- 5) TODAS SON CIERTAS.

2.- SEA X UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA CON FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 & 0 \leq x < 1 \\ 0.8 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

ENTONCES $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$ ES:

- 1) 0.1
- 2) 0.7
- 3) 0.8
- 4) 0.45
- 5) NINGUNA DE LAS ANTERIORES.

3.- EL VALOR DE LA CONSTANTE C , PARA QUE LA FUNCIÓN

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

SEA UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA ES:

- 1) 1
- 2) π
- 3) $\frac{1}{\pi}$
- 4) 2
- 5) NINGUNA DE LAS ANTERIORES.

- 4.- EL TIEMPO QUE TOMA REPARAR UNA COMPUTADORA PERSONAL ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON FUNCIÓN DE DENSIDAD.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EL COSTO DE LA REPARACIÓN DEPENDE DEL TIEMPO, Y ES IGUAL A $40 + 30\sqrt{x}$. EL COSTO ESPERADO AL REPARAR UNA COMPUTADORA PERSONAL ES:

- 1) 68.28 2) 70 3) 1 4) 16.56 5) NINGUNA DE LAS ANTERIORES.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

- 1.- RESPUESTA: 4
NO DEBE CONFUNDIRSE EL CONCEPTO DE INDEPENDENCIA CON EL DE EVENTOS EXCLUYENTES. DE HECHO, DOS EVENTOS EXCLUYENTES SON DEPENDIENTES.

- 2.- RESPUESTA: 2
DEBE OBSERVARSE QUE SE TRATA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, QUE SÓLO TOMA LOS VALORES 0, 1 Y 2.

X	0	1	2
$f_X(x)$	0.1	0.7	0.2

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = P(X=1) = 0.7$$

- 3.- RESPUESTA: C
RESOLUCIÓN

DE LA CONDICIÓN $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) dx dy = 1$

INTEGRAL QUE SE PUEDE INTERPRETAR COMO QUE EL VOLUMEN BAJO LA SUPERFICIE $f_{XY}(x,y) = c$ Y DENTRO DE LA REGIÓN $x^2 + y^2 \leq 1$, PUESTO QUE SE TIENE EL VOLUMEN DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO DE ALTURA c Y RADIO 1, ENTONCES:

$$c\pi = 1 \text{ ENTONCES: } c = \frac{1}{\pi}$$

- 4.- RESPUESTA: A

$$E(40 + 30\sqrt{x}) = 40 + 30E(\sqrt{x})$$

$$\text{PERO } E(\sqrt{x}) = \int_0^2 \sqrt{x} \frac{1}{2} dx = \frac{2}{3(2)} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \sqrt{2} = 0.9428$$

POR LO QUE

$$E(40 + 30\sqrt{x}) = 68.28427$$

ESTADÍSTICA (OPCIONES MÚLTIPLES)

- 1.- EL ERROR ESTÁNDAR DE UN ESTADÍSTICO ES:

- A) LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR ENTRE LA MEDIA.
B) EL ERROR EN LA ESTIMACIÓN PUNTUAL.
C) LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE SU DISTRIBUCIÓN MUESTRAL.

D)
$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

- E) NINGUNO DE LOS ANTERIORES.

- 2.- SI T ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT CON v GRADOS DE LIBERTAD, ENTONCES T^2 TIENE

DISTRIBUCIÓN:

- A) χ_v^2 B) $N(0, 1)$

C) $t_{v, \alpha}$ D) $F_{1, v, \alpha}$

E) t_v

3.- SI SE DEFINEN LOS ESTIMADORES DE LA VARIANCIA

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ Y } S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ENTONCES EL INTERVALO DE CONFIANZA DE DOS LADOS DEL $100(1-\alpha)\%$ PARA LA VARIANCIA ES:

A) $\left[\frac{n-1}{\chi_{\alpha, n}^2} S_{n-1}^2, \frac{n-1}{\chi_{1-\alpha, n}^2} S_{n-1}^2 \right]$ B) $\left[\frac{n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} S_n^2, \frac{n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} S_n^2 \right]$

C) $\left[\frac{n-1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} S_{n-1}^2, \frac{n-1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} S_{n-1}^2 \right]$ D) $\left[\frac{n-1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n}^2} S_n^2, \frac{n-1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n}^2} S_n^2 \right]$

E) $\left[\frac{n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n}^2} S_n^2, \frac{n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n}^2} S_n^2 \right]$

4.- EL ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE UN ESTIMADOR $\hat{\theta}$ ES:

A) $[\theta - E(\hat{\theta})]^2$ B) $\text{Var}(\hat{\theta})$
 C) $E[\hat{\theta}] - \theta$ D) $E\{[\theta - E(\hat{\theta})]^2\}$
 E) $E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\}$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE ESTADÍSTICA

1.- RESPUESTA: C

EL ERROR ESTÁNDAR DE UN ESTADÍSTICO ES LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE SU DISTRIBUCIÓN MUESTRAL.

2.- RESPUESTA: D

UNA VARIABLE ALEATORIA T SE DEFINE COMO UNA V.A. NORMAL ESTÁNDAR ENTRE LA RAÍZ CUADRADA DEL COCIENTE DE UNA χ^2 CUADRADA ENTRE SUS GRADOS DE LIBERTAD. ESTO ES:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{v}}}$$

AL ELEVARLA AL CUADRADO SE TIENE:

$$T^2 = \frac{Z^2}{\frac{\chi^2}{v}}$$

Y PUESTO QUE UNA V.A. χ^2 CUADRADA ES LA SUMA DE NORMALES ESTÁNDAR AL CUADRADO, ENTONCES EN EL NUMERADOR SE TIENE OTRA V.A. χ^2 CUADRADA. ENTONCES T^2 ES EL COCIENTE DE DOS χ^2 CUADRADAS ENTRE SUS GRADOS DE LIBERTAD. 1.º QUE DEFINE UN V.A. F .

3.- RESPUESTA: B

LA ESTIMACIÓN POR INTERVALOS ESTÁ DADA TRADICIONALMENTE POR

$$\left[\frac{n-1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} S_{n-1}^2, \frac{n-1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} S_{n-1}^2 \right]$$

TENIÉNDOSE EN EL NUMERADOR LA CANTIDAD $(n-1)S_{n-1}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, QUE ES IGUAL A

$$(n)S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ES DECIR, LA DISTRIBUCIÓN DE $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$ EN JI CUADRADA CON $n-1$ GRADOS DE LIBERTAD.

- 4- RESPUESTA E
EL ERROR CUADRÁTICO MEDIO PUEDE INTERPRETARSE COMO LA DIFERENCIA (ERROR) ENTRE EL ESTADÍSTICO Y EL PARÁMETRO A ESTIMAR ELEVADA AL CUADRADO (CUADRÁTICO) Y PUESTO QUE ESTO SE PUEDE HACER VARIAS VECES SE TOMA EL PROMEDIO (MEDIO), QUE PARA EL CASO DE UNA DISTRIBUCIÓN ES EL VALOR ESPERADO.
EL ERROR CUADRÁTICO MEDIO PARA UN ESTIMADOR SE DEFINE COMO

$$ECM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{sesgo}^2$$

ÁLGEBRA LINEAL

PARA EL CONJUNTO $D = \{f(x), g(x), h(x)\}$, DONDE: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$;

$$g(x) = \begin{cases} \text{sen}^2 x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}; h(x) = \begin{cases} \text{cos} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

DETERMINAR UN INTERVALO DE VALORES DE "x" PARA EL CUAL LAS FUNCIONES DEL CONJUNTO "D" SON:

- A) LINEALMENTE DEPENDIENTES
EN EL INTERVALO $x \leq 0$:

$$\alpha(1) + \beta(\text{sen}^2 x) + \gamma(\text{cos} 2x) = 0; \text{ COMO } \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos} 2x, \text{ CON } \alpha = -1; \beta = 2 \text{ y } \gamma = 1 \text{ SE OBSERVA QUE LA}$$

FUNCIÓN $\text{sen}^2 x$ SE PUEDE ESCRIBIR COMO UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LAS OTRAS DOS FUNCIONES. POR LO TANTO, LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE DEPENDIENTES EN EL INTERVALO $x \leq 0$

- B) LINEALMENTE INDEPENDIENTES
- EN EL INTERVALO $0 < x < 2$:

$$\alpha(1) + \beta(x) + \gamma(x^3) = 0 \Rightarrow \alpha = 0; \beta = 0; \gamma = 0$$

ENTONCES LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES. SI SE COMPRUEBA LA INDEPENDENCIA LINEAL CON EL

$$\text{WRONSKIANO, SE TIENE QUE } W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 0 & 1 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6x \end{vmatrix} = 6x \neq 0 \text{ entre } 0 \text{ y } 2$$

$$\text{- EN EL INTERVALO } x > 2 \\ \alpha(x-1) + \beta(x) + \gamma(x^3) = 0 \Rightarrow \alpha x - \alpha + \beta x + \gamma x^3 = 0x^3 + 0x + 0$$

$$\gamma = 0; \alpha + \beta = 0; -\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0; \beta = 0; \gamma = 0$$

ENTONCES LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES EN EL INTERVALO. SI SE COMPRUEBA LA INDEPENDENCIA LINEAL

$$\text{CON EL WRONSKIANO, SE TIENE QUE } W(x) = \begin{vmatrix} x-1 & x & x^3 \\ 1 & 1 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6x \end{vmatrix} = 6x(x-1-x) = -6x \neq 0 \text{ en } x > 2. \text{ POR LO TANTO,}$$

LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES EN $x > 0$.

NOTA CABE RECORDAR QUE SI EL WRONSKIANO ES DIFERENTE DE CERO, SE PRESENTA LA INDEPENDENCIA LINEAL.

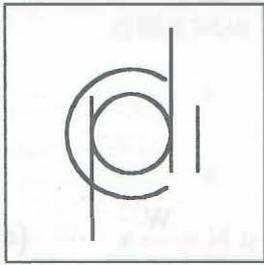
"LA LIBERTAD NO ES SÓLO UN SUEÑO. ESTÁ DETRÁS DE LAS CERCAS QUE ERIGIMOS NOSOTROS MISMOS"

¡HAY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS INGENIEROS ÁNGEL LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO Y RICARDO MARTÍNEZ GÓMEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

50



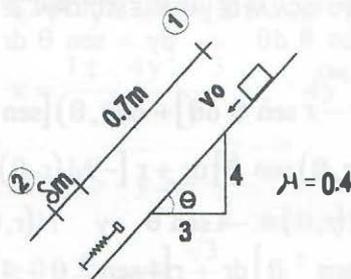
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ¡EL LUNES 9 DE OCTUBRE COMIENZA LA "SEMANA SEFI INGENIERÍA UNAM 2000" CON SUS "JORNADAS DE INGENIERÍA", SUS FABULOSAS "SEFIOLIMPIADAS 2000" DEPORTE-CULTURA", SU CONGRESO Y SU EXPOSICIÓN ¡PARTICIPA, APRENDE Y GANA! ¡INVITA A TUS PROFESORES!

DINÁMICA

¿CUÁL ES LA VELOCIDAD v_0 A LA QUE SE DEBE LANZAR UN BLOQUE DE 40 [N] DE PESO, CONTRA UN RESORTE LINEAL DE CONSTANTE $k = 3,584 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$,

PARA QUE DESPUÉS DE COMPRIMIRLO, REGRESE EXACTAMENTE A LA POSICIÓN DE LANZAMIENTO? ¿CUÁNTO VALE LA ACELERACIÓN DEL BLOQUE JUSTO EN EL MOMENTO CUANDO EL RESORTE EXPERIMENTA LA MÁXIMA COMPRESIÓN?



SOLUCIÓN. SEA δ_m LA COMPRESIÓN MÁXIMA PRODUCIDA AL RESORTE. EL TRABAJO TOTAL DE (1) A (2) LO REALIZAN EL PESO (+), LA FRICCIÓN (-) Y LA FUERZA DEL RESORTE (-) (LA FUERZA NORMAL NO REALIZA TRABAJO). LA SUMA DE ESTOS TRABAJOS ES IGUAL A LA VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA. POR OTRO LADO, LA RAPIDEZ EN (2) ES NULA.

$$U_w + U_\mu + U_k = EC_2 - EC_1 \quad ; \quad (EC_2 = 0)$$

$$W (\delta_m + 0.7) \sin \theta - \mu W (\delta_m + 0.7) \cos \theta - \frac{1}{2} k \delta_m^2 = 0 - \frac{1}{2} W v_0^2 \quad \dots (1)$$

DE LA MISMA MANERA SE FORMULA EL TRABAJO TOTAL DE LOS PUNTOS (2) AL (1), QUE LO REALIZAN LAS SIGUIENTES FUERZAS: EL PESO (-), LA FRICCIÓN (-) Y EL RESORTE (+). EN ESTAS CONDICIONES, $EC_1 = EC_2 = 0$.

$$-W (\delta_m + 0.7) \sin \theta - \mu W (\delta_m + 0.7) \cos \theta + \frac{1}{2} k \delta_m^2 = 0 \quad \dots (2)$$

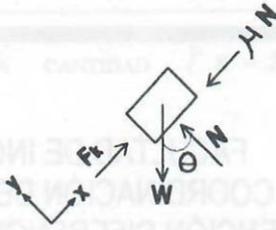
AL SUSTITUIR LOS DATOS: $W = 40 \text{ [N]}$, $\mu = 0.4$, $\cos \theta = 0.6$, $\sin \theta = 0.8$ y $k = 3,584 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ EN LAS ECUACIONES (1) Y (2) Y

SIMPLIFICAR, SE TIENE LO SIGUIENTE: SE SUSTITUYEN LOS VALORES EN LA ECUACIÓN (2) Y SE LLEGA A:

$$22.4 \delta_m + 15.68 - 1,792 \delta_m^2 = -2.038 v_0^2 \quad \Rightarrow \quad 1,792 \delta_m^2 - 41.6 \delta_m - 29.12 = 0$$

SE RESUELVE ESTA ECUACIÓN Y SE OBTIENE QUE $\delta_m = 0.1396$. CON ESTE VALOR, DE LA ECUACIÓN (1) SE TIENE QUE $v_0 = 2.81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$.

EL DIAGRAMA DE CUERPOLIBRE (DCL) CUANDO SE TIENE COMPRESIÓN MÁXIMA DEL RESORTE, ES DECIR, CUANDO EL BLOQUE ESTÁ A PUNTO DE SUBIR, SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



DE DONDE:

$$\sum F_y = 0 ; N - W \cos \theta = 0 \quad \dots (3) \quad \text{y} \quad \sum F_x = m \ddot{x} ; F_k - W \sin \theta - \mu N = \frac{W}{g} \ddot{x} \quad \dots (4)$$

DADO QUE $F_k = k \delta_m \quad \dots (5)$, SE UTILIZAN ESTAS TRES ECUACIONES Y SE OBTIENE FINALMENTE QUE $\ddot{x} = 112.5 \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

CÁLCULO III

UN CAMPO DE FUERZA ESTÁ DADO POR LA ECUACIÓN $\vec{F}(r, \theta) = -4 \operatorname{sen} \theta \hat{i} + 4 \operatorname{sen} \theta \hat{j}$ DONDE $x = r \cos \theta$; $y = r \operatorname{sen} \theta$

CALCULAR EL TRABAJO NECESARIO PARA MOVER UNA PARTÍCULA DEL PUNTO A (1,0) AL ORIGEN, A LO LARGO DE LA ESPIRAL CUYA ECUACIÓN POLAR ES $r = e^{-\theta}$.

SOLUCIÓN. EL TRABAJO SE OBTIENE A PARTIR DE LA EXPRESIÓN

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

DE DONDE, SI SE APLICA EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL DE UN CAMPO ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL, SE TIENE QUE:

$$dx = \cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta ; \quad dy = \operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

POR LO QUE LA EXPRESIÓN QUE DETERMINA EL TRABAJO QUEDA COMO:

$$W = \int_C M(r, \theta) [\cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta] + N(r, \theta) [\operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta]$$

$$\therefore W = \int_C [M(r, \theta) \cos \theta + N(r, \theta) \operatorname{sen} \theta] dr + r [-M(r, \theta) \operatorname{sen} \theta + N(r, \theta) \cos \theta] d\theta$$

PARA EL CASO DEL PRESENTE PROBLEMA SE TIENE QUE $M(r, \theta) = -4 \operatorname{sen} \theta$ y $N(r, \theta) = 4 \operatorname{sen} \theta$

LUEGO $W = \int_C [-4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta] dr + r [4 \operatorname{sen}^2 \theta + 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta] d\theta$

POR OTRO LADO, UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS PARA LA TRAYECTORIA 'C' SON LAS SIGUIENTES:

$$\theta = t ; \quad r = e^{-t}$$

$$d\theta = dt ; \quad dr = -e^{-t} dt$$

PARA DEFINIR LOS EXTREMOS DE INTEGRACIÓN, SE HACE LO SIGUIENTE:

$$\theta = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow r = 1 \quad \text{Y SE TIENE EL PUNTO (1, 0)}$$

$$\theta \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty \Rightarrow r = 0 \quad \text{Y SE TIENE EL PUNTO (0, 0)}$$

DE DONDE, EL TRABAJO EQUIVALE A:

$$W = \int_0^{\infty} (4e^{-t} \operatorname{sen} t \cos t - 4e^{-t} \operatorname{sen}^2 t + 4e^{-t} \operatorname{sen}^2 t + 4e^{-t} \operatorname{sen} t \cos t) dt$$

$$W = 8 \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{sen} t \cos t dt$$

Y, COMO $\operatorname{sen} t \cos t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$, ENTONCES LA INTEGRAL QUEDA COMO $W = 4 \int_0^{\infty} e^{-t} \operatorname{sen} 2t dt$, QUE AL INTEGRARSE (CABE RECORDAR QUE ES UNA INTEGRAL IMPROPIA) MEDIANTE EL MÉTODO POR PARTES, DA POR RESULTADO

$$W = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{4}{5} e^{-t} (2 \cos 2t + \operatorname{sen} 2t) \right]_0^R = \frac{8}{5} \text{ UNIDADES DE TRABAJO.}$$

CÁLCULO I

ESTUDIAR LA VARIACIÓN DE LA FUNCIÓN $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

SOLUCIÓN: 1) INTERSECCIONES

- i) CON EL EJE 'y': $x = 0 \Rightarrow y = -1$
 ii) CON EL EJE 'x': $y = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$ NO TIENE SOLUCIÓN REAL

2) SIMETRÍAS

- i) CON EL EJE 'x': y POR -y $\Rightarrow -y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \therefore$ NO HAY SIMETRÍA
 ii) CON EL EJE 'y': x POR -x $\Rightarrow y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1} \therefore$ NO HAY SIMETRÍA
 iii) CON EL ORIGEN: x POR -x $\Rightarrow -y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1} \therefore$ NO HAY SIMETRÍA
 Y POR -y

3) ASÍNTOTAS

i) VERTICALES
 COMO $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{0} \rightarrow \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} \rightarrow \infty$ ENTONCES $x = 1$ y $x = -1$ SON ASÍNTOTAS VERTICALES

ii) HORIZONTALES
 COMO $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} = 1$ entonces $y = 1$ ES ASÍNTOTA HORIZONTAL

4) EXTENSIÓN

i) EN EL EJE 'x': $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

ii) EN EL EJE 'y': $x^2 y - y = x^2 + x + 1 \Rightarrow (y - 1)x^2 - x - (y + 1) = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(y + 1)(y - 1)}}{2(y - 1)} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4y^2 - 3}}{2(y - 1)} ; 4y^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow (2y + \sqrt{3})(2y - \sqrt{3}) \geq 0$$

$$2y + \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2y + 3 \leq 0 \Rightarrow y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

PRIMERA POSIBILIDAD:

$$2y - \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2y - 3 \leq 0 \Rightarrow y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

SEGUNDA POSIBILIDAD:

POR LOTANTO, LA EXTENSIÓN EN 'y' ES: $y \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$

5) EXTREMOS RELATIVOS, PUNTOS DE INFLEXIÓN Y CONCAVIDAD.

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 1)(2x + 1) - (x^2 + x + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2 - 1)^2} ; \frac{-x^2 - 4x - 1}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = -2 - \sqrt{3} = -3.732 \quad y \quad x_2 = -2 + \sqrt{3} = -0.268$$

QUE SON LOS VALORES CRÍTICOS DONDE SE PUEDE PRESENTAR UN EXTREMO RELATIVO. PARA LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN SE DERIVA POR SEGUNDA OCASIÓN Y SE ANALIZA SI EXISTEN VALORES PARA LOS CUALES ESTA SEGUNDA DERIVADA ES NULA O NO EXISTE ASÍ,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(x^2 - 1)(-2x - 4) - (-x^2 - 4x - 1)2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} ; \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4 + 4x^3 + 16x^2 + 4x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2x^3 + 12x^2 + 6x + 4}{(x^2 - 1)^3} ; \frac{2x^3 + 12x^2 + 6x + 4}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -5.522$$

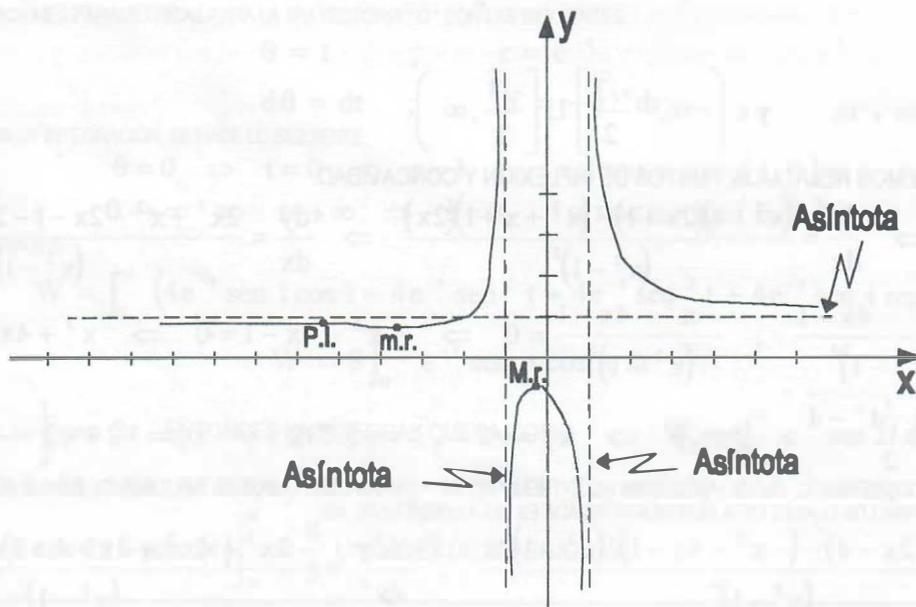
QUE ES LA ÚNICA RAÍZ REAL Y DONDE POSIBLEMENTE SE PRESENTA UN PUNTO DE INFLEXIÓN

AHORA SE CONSTRUYE LA TABLA CORRESPONDIENTE AL ESTUDIO DE LO QUE SUCEDE EN LOS VALORES CRÍTICOS Y EN EL POSIBLE PUNTO DE INFLEXIÓN. COMO SE OBSERVA, SE DEBE VER SI EXISTE VARIACIÓN DEL SIGNO DE LA DERIVADA PARA VER SI HAY EXTREMOS Y EN EL POSIBLE PUNTO DE INFLEXIÓN SE ANALIZA SI HAY CAMBIO DE SIGNO EN LA SEGUNDA DERIVADA, ANTES Y DESPUÉS, LO QUE CONFIRMARÍA SU EXISTENCIA. ADEMÁS, SI EL SIGNO DE LA PRIMERA DERIVADA CAMBIA DE MÁS A MENOS HAY UNA MÁXIMO RELATIVO Y EN CASO CONTRARIO SE TENDRÁ UN MÍNIMO RELATIVO. POR OTRO LADO, EL SIGNO MÁS O MENOS DE LA SEGUNDA DERIVADA HABLARÁ DE CONCAVIDAD 'HACIA ARRIBA' O 'HACIA ABAJO' RESPECTIVAMENTE. A CONTINUACIÓN SE PRESENTA LA TABLA:

x	y	y'	y''	CARACTERÍSTICA
$(-\infty, -5.522)$	DECRECIENTE	NEGATIVA	NEGATIVA	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x = -5.522$	PUNTO DE INFLEXIÓN		0	P.I. $(-5.522, 0.88)$
$(-5.522, -3.732)$	DECRECIENTE	NEGATIVA	POSITIVA	CÓNCAVA HACIA ARRIBA
$x = -3.732$	MÍNIMO RELATIVO	0		MIN $(-3.732, 0.866)$
$(-3.732, -1)$	CRECIENTE	POSITIVA	POSITIVA	CÓNCAVA HACIA ARRIBA
$x = -1$	NO ESTÁ DEFINIDA			ASÍNTOTA VERTICAL
$(-1, -0.268)$	CRECIENTE	POSITIVA	NEGATIVA	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x = -0.268$	MÁXIMO RELATIVO	0		MAX $(-0.268, -0.866)$
$(-0.268, 1)$	DECRECIENTE	NEGATIVA	NEGATIVA	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x = 1$	NO ESTÁ DEFINIDA			ASÍNTOTA VERTICAL
$(1, \infty)$	DECRECIENTE	NEGATIVA	POSITIVA	CÓNCAVA HACIA ARRIBA

LUEGO LA CURVA REPRESENTA UNA FUNCIÓN QUE ES CRECIENTE EN LOS INTERVALOS $(-3.732, -1)$ y $(-1, -0.268)$; DECRECIENTE EN $(-\infty, -3.732)$, $(-0.268, 1)$ y $(1, \infty)$; CÓNCAVA HACIA ABAJO EN $(-\infty, -5.522)$ y $(-1, 1)$; CÓNCAVA HACIA ARRIBA EN $(-5.522, -1)$ y $(1, \infty)$; TIENE UN MÁXIMO RELATIVO EN EL PUNTO $(-0.268, -0.866)$, UN MÍNIMO RELATIVO EN EL PUNTO $(-3.732, 0.866)$ Y UN PUNTO DE INFLEXIÓN EN EL PUNTO $(-5.522, 0.88)$.

6) REPRESENTACIÓN GRÁFICA. CON LA INFORMACIÓN DE LOS INCISOS (1) AL (5) Y LA OBTENIDA DE LA TABLA ANTERIOR, SE TRAZA LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN OBJETO DEL ESTUDIO, EN LA CUAL SE OBSERVA TODA SU VARIACIÓN



¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DEL PROFESOR HUGO GERMÁN SERRANO MRANDA

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRAÁVILA



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000

NÚMERO 11

17 DE OCTUBRE DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. PRONTO TERMINARÁ EL SEMESTRE Y ESTÁS A TIEMPO DE CERRAR MUY BIEN. ¡A ESTUDIAR CON MUCHAS GANAS! VALE LA PENA EL ESFUERZO. ¡Y LLEGARÁS A SER INGENIERO!

ECUACIONES DIFERENCIALES

DETERMINAR LA SOLUCIÓN GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO $X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ EN EL INTERVALO $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN. PRIMERO SE RESUELVE EL SISTEMA HOMOGÉNEO $X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X$

LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0$; DE DONDE, LOS VALORES CARACTERÍSTICOS SON

$\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -5$. AHORA SE OBTIENEN LOS VECTORES CARACTERÍSTICOS CORRESPONDIENTES:

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow -k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 ; k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = 1$$
$$2k_1 - 2k_2 = 0$$

$$\lambda_2 = -5 \Rightarrow 2k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -2k_1 ; k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = -2$$
$$2k_1 + k_2 = 0$$

POR LO TANTO, LOS VECTORES CARACTERÍSTICOS SON $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Y LOS VECTORES SOLUCIÓN DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO SON

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

DE ACUERDO CON EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS, LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO EQUIVALE A LA DEL HOMOGÉNEO MÁS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL NO HOMOGÉNEO. LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA HOMOGÉNEO ES $X = C \phi(t)$, DONDE $\phi(t)$ SE FORMA CON LOS VECTORES SOLUCIÓN DEL

SISTEMA HOMOGÉNEO. LUEGO $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$ Y SU INVERSA ES $\phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}$

Y LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA ES:

$$X_p = \phi(t) \int \phi^{-1}(t) F(t) dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ e^{-2t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Y ENTONCES, FINALMENTE, LA SOLUCIÓN GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO ESTÁ DADA POR:

$$X = C \phi(t) + \phi(t) \int \phi^{-1}(t) F(t) dt$$

$$X = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ e^{-2t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}$$

CÁLCULO II

SEA $w = yz^2 - x^3$, Y SEAN $x = e^{-t}$, $y = \ln(r + 2s + 3t)$ Y $z = \sqrt{rs + t}$. CALCULAR $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ Y $\frac{\partial w}{\partial t}$.

SOLUCIÓN. SE UTILIZA LA REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES ESCALÁRES DE VARIABLE VECTORIAL Y SE TIENE QUE:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = -3x^2 e^{-t} + z^2 \left(\frac{1}{r + 2s + 3t} \right) + 2yz \left(\frac{s}{2\sqrt{rs + t}} \right) = -3e^{3(r-t)} + \frac{rs + t}{r + 2s + 3t} + s \ln(r + 2s + 3t)$$

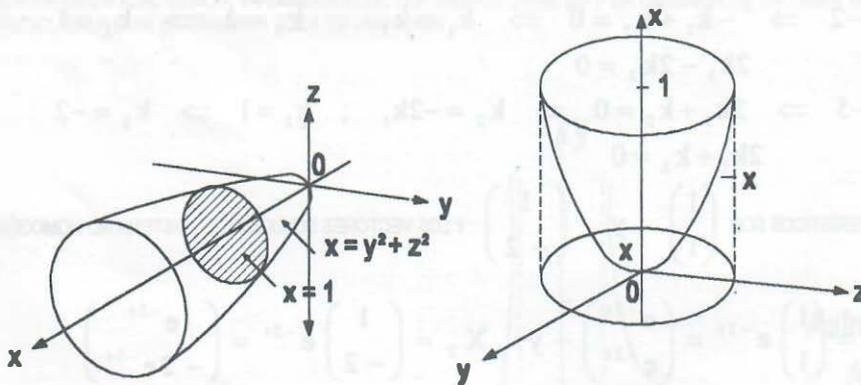
$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = -3x^2 \cdot 0 + z^2 \frac{2}{r + 2s + 3t} + 2yz \left(\frac{r}{2\sqrt{rs + t}} \right) = \frac{2(rs + t)}{r + 2s + 3t} + r \ln(r + 2s + 3t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -3x^2 (-e^{-t}) + z^2 \left(\frac{3}{r + 2s + 3t} \right) + 2yz \left(\frac{1}{2\sqrt{rs + t}} \right) = 3e^{3(r-t)} + \frac{3(rs + t)}{r + 2s + 3t} + \ln(r + 2s + 3t)$$

CÁLCULO III

ENCONTRAR EL VOLUMEN DEL SÓLIDO LIMITADO POR EL PARABOLOIDE CIRCULAR $x = y^2 + z^2$ Y EL PLANO $x = 1$

SOLUCIÓN. EL VOLUMEN QUE SE PIDE SE MUESTRA EN LA FIGURA (A). TAL VEZ LA MEJOR MANERA DE OBTENERLO ES MEDIANTE OTRA PERSPECTIVA DE LA GRÁFICA, COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA (B), CON EL EJE 'X' VERTICAL.



ASÍ, CONSIDERANDO LA REGIÓN EN EL PLANO 'y z', SE OBSERVA QUE LA FUNCIÓN DEL INTEGRANDO EQUIVALE AL VOLUMEN BAJO EL PLANO HORIZONTAL $x = 1$ Y EL VOLUMEN BAJO EL PARABOLOIDE CIRCULAR. ENTONCES, APROVECHANDO LA SIMETRÍA, EL VOLUMEN SE CALCULA MEDIANTE LA SIGUIENTE INTEGRAL DOBLE:

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (1-x) dy dz = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (1-y^2-z^2) dy dz = 4 \int_0^1 \left[y - \frac{y^3}{3} - yz^2 \right]_0^{\sqrt{1-z^2}} \\ &= 4 \int_0^1 \left[(1-z^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - z^2 (1-z^2)^{\frac{1}{2}} \right] dz \end{aligned}$$

ESTA INTEGRAL SE PUEDE RESOLVER MEDIANTE LA SUSTITUCIÓN $z = \operatorname{sen} \theta$, DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} - \sin^2 \theta \cos \theta \right) \cos \theta \, d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos \theta (1 - \sin^2 \theta) - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right] \cos \theta \, d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)^2 \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) \, d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{\sin 4\theta}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \frac{\pi}{2} + \sin \pi + \frac{\sin 2\pi}{8} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \, \text{u}^3
 \end{aligned}$$

CÁLCULO I

UNA SERIE TELESCÓPICA

USAR LA SUCESIÓN $\{S_n\}$ PARA DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}$ CONVERGE O DIVERGE. SI CONVERGE, CALCULAR SU SUMA.

SOLUCIÓN. LOS PRIMEROS TÉRMINOS DE $\{S_n\}$, ES DECIR, LAS PRIMERAS SUMAS PARCIALES DE TÉRMINOS SERÍAN:

$$S_1 = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

$$S_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = 0.8$$

$$S_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} \approx 0.857$$

$$S_4 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} \approx 0.889$$

$$S_5 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} \approx 0.909$$

SI SE CALCULARAN OTRAS SUMAS PARCIALES, SE LLEGARÁ A:

$$S_{10} \approx 0.952 \quad ; \quad S_{50} \approx 0.990 \quad ; \quad S_{100} \approx 0.995 \quad ; \quad S_{500} \approx 0.999$$

LO QUE HACE SOSPECHAR QUE LA SERIE CONVERGE A "1". PARA COMPROBARLO, SE DESARROLLA UNA EXPRESIÓN PARA S_n BASADA EN QUE:

$$a_n = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

LUEGO, DESCOMPONIENDO EN FRACCIONES RACIONALES SIMPLES, SE TIENE QUE:

$$a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

ASÍ, LOS TÉRMINOS DE $\{S_n\}$ SE PUEDEN ESCRIBIR EN LA FORMA:

$$S_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 1 - \frac{1}{5}$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = 1 - \frac{1}{7}$$

⋮

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

Y AHORA SE PUEDE VER QUE LA SERIE CONVERGE AL VALOR "1" YA QUE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 1$$

OBSÉRVESE QUE CADA TÉRMINO, TRAS EL PRIMERO, ES CANCELADO POR EL SIGUIENTE, ESTO ES,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$$

UNA SERIE QUE SE ESCRIBE DE ESTA FORMA, SE DENOMINA **SERIE TELESCÓPICA**.

ÁLGEBRA

SEAN $(A, *)$ Y (B, Δ) DOS GRUPOS, DONDE $a * b = a + b - 1$; $a, b \in A$ Y SEA LA FUNCIÓN $f : A \rightarrow B$ TAL QUE

$f(a) = 3^a \quad \forall a \in A$ QUE ESTABLECE UN ISOMORFISMO ENTRE AMBOS GRUPOS.

- a) DETERMINAR EL RESULTADO DE $a * a * b * \hat{a} * \hat{b}$ DONDE \hat{a} SIGNIFICA EL INVERSO DE a
 b) DETERMINAR EL ELEMENTO INVERSO DE $x \in B$ CON RESPECTO A LA OPERACIÓN Δ

SOLUCIÓN.

a) EL IDÉNTICO DEL GRUPO $(A, *)$; $e * a = a$; $e + a - 1 = a \Rightarrow e = 1$

EL INVERSO DE $a \in A$; $\hat{a} * a = 1$; $\hat{a} + a - 1 = 1 \Rightarrow \hat{a} = 2 - a$

ENTONCES:

$$\begin{aligned} a * a * b * \hat{a} * \hat{b} &= a * a * b * (\hat{a} * \hat{b}) = (a * a) * b * (2 - a * 2 - b) = (a + a - 1) * b * (2 - a + 2 - b - 1) \\ &= (2a - 1) * b * (2 - a + 2 - b - 1) = (2a - 1) * b * (3 - a - b) \\ &= (2a - 1 + b - 1) * (3 - a - b) = 2a + b - 2 + 3 - a - b - 1 \\ &= a \end{aligned}$$

- b) COMO NO SE CONOCE LA OPERACIÓN Δ , SE HACE USO DE UN TEOREMA. SI \hat{a} ES EL INVERSO DE $a \in A$, $f(\hat{a})$ ES EL INVERSO DE $f(a)$ CON RESPECTO A LA OPERACIÓN Δ .

$$f(a) = x \quad ; \quad f(\hat{a}) = x^{-1} \quad ; \quad f(a - 2) = 3^{a-2}$$

"TUTORÍA PARA TODOS"

¿QUIÉN ES UN TUTOR?

- UN PROFESOR QUE TIENE LA VOLUNTAD Y VOCACIÓN PARA ESTABLECER UN VÍNCULO ENTRE EL ESTUDIANTE Y LAS DIVERSAS PROBLEMÁTICAS ESCOLARES Y EXISTENCIALES QUE ENFRENTA DURANTE SU VIDA UNIVERSITARIA, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE SE PRESENTA ANTE EL ESTUDIANTE COMO UN SER HUMANO CON VIRTUDES Y DEFECTOS, FUERZAS Y DEBILIDADES, SEGURIDADES E INSEGURIDADES, PROBLEMAS Y LOGROS, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE MANIFIESTA AL ESTUDIANTE SU PLENA DISPOSICIÓN A ESCUCHAR, A COMPRENDER Y A REFLEXIONAR JUNTO CON ÉL, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE FACILITA LA INTEGRACIÓN DEL ESTUDIANTE CON LA UNIVERSIDAD, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE DEMUESTRA AL ESTUDIANTE UN GENUINO INTERÉS POR SU DESEMPEÑO ESCOLAR Y POR SU CRECIMIENTO PERSONAL, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE ORIENTA Y ALIENTA LA FORMACIÓN TÉCNICA Y CULTURAL DEL ESTUDIANTE, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE SE PREOCUPA Y OCUPA DEL DESARROLLO DEL ESTUDIANTE COMO SER HUMANO, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE PROPICIA EN EL ESTUDIANTE SU COMPROMISO SOCIAL DE FRENTE A LA REALIDAD NACIONAL, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE ENCAUZA AL ESTUDIANTE HACIA EL ÉXITO EN SU DEVENIR PROFESIONAL, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR AL QUE INTERESA QUE EL ESTUDIANTE SEA CREATIVO, INNOVADOR Y CON ESPÍRITU LIBRE Y CRÍTICO, ES UN TUTOR.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DEL PROFESOR ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
 COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA

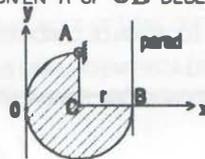


EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. VALE LA PENA UN ÚLTIMO ESFUERZO PARA TERMINAR BIEN EL SEMESTRE. ASÍ QUE: ¡A ESTUDIAR SE HA DICHO!

ESTÁTICA

LA PLACA DE LA FIGURA TIENE UN PESO ω POR UNIDAD DE SUPERFICIE, SE ENCUENTRA ARTICULADA EN 'A' Y APOYADA LIBREMENTE CONTRA UNA PARED VERTICAL LISA. DETERMINAR LA MAGNITUD DE LAS COMPONENTES DE LA REACCIÓN EN 'A' SI \overline{OB} DEBE PERMANECER HORIZONTAL.



ESTE EJERCICIO CONJUGA LOS TEMAS DE CENTROIDE Y EQUILIBRIO DE CUERPOS. PARA PODER RESOLVERLO ES NECESARIO UBICAR EL CENTROIDE Y POSTERIORMENTE TRAZAR EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (DCL) PARA PODER PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO. SI SE CONSIDERA EL ORIGEN DE COORDENADAS EN 'O' SE TIENE QUE:

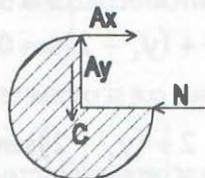
$$W_1 = \pi r^2 \omega = 3.1416 r^2 \omega ; W_2 = \frac{\pi r^2}{4} \omega = 0.7854 r^2 \omega ; x_2 = r + \frac{4r}{3\pi} = r(1 + 0.4244) = 1.4244 r$$

PLACA

	W_i	x_i	y_i	$W_i x_i$	$W_i y_i$
CÍRCULO	$3.1416 r^2 \omega$	r	0	$3.1416 r^3 \omega$	0
- CUARTO DE CÍRCULO	$-0.7854 r^2 \omega$	$1.4244 r$	$0.4244 r$	$-1.1187 r^3 \omega$	$-0.3333 r^3 \omega$
Σ	$2.3562 r^2 \omega$			$2.0229 r^3 \omega$	$-0.3333 r^3 \omega$

$$\bar{x} = \frac{2.0229 r^3 \omega}{2.3562 r^2 \omega} = 0.85854 r ; \bar{y} = \frac{-0.3333 r^3 \omega}{2.3562 r^2 \omega} = -0.14146 r \Rightarrow C(0.85854 r, -0.14146 r)$$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



ECUACIONES DE EQUILIBRIO

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 2.3562 r^2 \omega (1 - 0.85854)r - N r = 0 \Rightarrow N = 0.3333 r^2 \omega$$

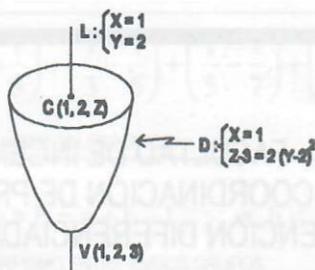
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - 0.3333 r^2 \omega = 0 \Rightarrow A_x = 0.3333 r^2 \omega$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 2.3562 r^2 \omega$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SE DESEA OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA, UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y UNA ECUACIÓN VECTORIAL DEL PARABOLOIDE CIRCULAR QUE TIENE SU VÉRTICE EN EL PUNTO V (1,2,3) Y QUE CONTIENE A LA PARÁBOLA 'D' DE ECUACIONES

$$D : \begin{cases} x = 1 \\ z - 3 = 2(y - 2)^2 \end{cases}$$



SOLUCIÓN. PARA OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA, SE TOMARÁ COMO GENERATRIZ A UNA CIRCUNFERENCIA PARALELA AL PLANO "xy" QUE SE DESPLAZA

VERTICALMENTE DE MODO QUE SU CENTRO SIEMPRE ESTÉ SOBRE LA RECTA $L: \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ Y CON RADIO VARIABLE IGUAL A $\sqrt{\alpha}$. ENTONCES, LAS ECUACIONES DE

LA GENERATRIZ SON $G: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = \alpha & \dots (a) \\ z = \beta & \dots (b) \end{cases}$

PUESTO QUE EN LAS ECUACIONES DE LA GENERATRIZ SE TIENEN DOS PARÁMETROS, α y β , SE REQUIERE SÓLO DE UNA DIRECTRIZ: LA PARÁBOLA "D" DE

ECUACIONES $D: \begin{cases} x=1 & \dots (c) \\ z-3=2(y-2)^2 & \dots (d) \end{cases}$

DEBIDO A QUE ÚNICAMENTE HAY UNA DIRECTRIZ, SE TENDRÁ UNA SÓLA ECUACIÓN DE CONDICIÓN, PARA OBTENERLA, SE SUSTITUYE (b) EN (d) Y (c) EN (a):

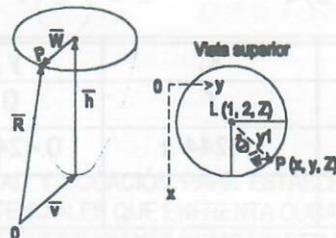
$\beta-3=2(y-2)^2 \Rightarrow \beta-3=2\alpha \dots$ (ECUACIÓN DE CONDICIÓN). FINALMENTE, PARA OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL PARABOLOIDE, SE

SUSTITUYEN (a) y (b) EN LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN Y SE LLEGA A:

$$Z-3=2(X-1)^2+2(Y-2)^2$$

ANTES DE OBTENER UNA ECUACIÓN VECTORIAL DEL PARABOLOIDE, ES CONVENIENTE RECORDAR QUE EN ÉSTA DEBEN APARECER DOS PARÁMETROS, Y QUE DICHA ECUACIÓN ES LA REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE UN VECTOR DE POSICIÓN QUE SE MUJVE DE MODO QUE SU EXTREMO RECORRE TODOS LOS PUNTOS DE LA

SUPERFICIE. PARA OBTENER DICHO VECTOR DE POSICIÓN \vec{p} , CONSIDÉRENSE LOS VECTORES \vec{v} , \vec{h} y \vec{w} QUE SE MUESTRAN EN LA SIGUIENTE FIGURA:



$$\vec{v} = (1, 2, 3) ; \quad \vec{h} = (0, 0, z_1 - 3) ; \quad \vec{w} = ((y_1 - 2)\cos \theta, (y_1 - 2)\sen \theta, 0) ; \quad \vec{w}' = y_1$$

$P(x, y, z)$ ES UN PUNTO CUALQUIERA DE LA SUPERFICIE

LA RELACIÓN ENTRE ESTOS VECTORES ES: $\vec{p} = \vec{v} + \vec{h} + \vec{w} = (1 + (y_1 - 2)\cos \theta, 2 + (y_1 - 2)\sen \theta, z_1)$;

PERO $z_1 - 3 = 2(y_1 - 2)^2$, POR LO QUE LA ECUACIÓN VECTORIAL QUE SE OBTIENE ES:

$$\vec{p} = (1 + (y_1 - 2)\cos \theta, 2 + (y_1 - 2)\sen \theta, 3 + 2(y_1 - 2)^2)$$

Y, FINALMENTE, LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PARABOLOIDE, QUE SE OBTIENEN DIRECTAMENTE DE ESTA ECUACIÓN VECTORIAL SON

$$S: \begin{cases} x = 1 + (y_1 - 2)\cos \theta \\ y = 2 + (y_1 - 2)\sen \theta \\ z = 3 + 2(y_1 - 2)^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y_1 \geq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

COMPROBACIÓN. LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL PARABOLOIDE SE PUEDE OBTENER POR ELIMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS y_1 y θ .

DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS, Y TOMANDO EN CONSIDERACIÓN LA IDENTIDAD $\sen^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, SE TIENE QUE:

$$\cos \theta = \frac{x-1}{y_1-2} ; \quad \sen \theta = \frac{y-2}{y_1-2} ; \quad (y_1-2)^2 = \frac{z-3}{2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{z-3}{2}$$

QUE ES LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL PARABOLOIDE

QUÍMICA

EL ANÁLISIS DE UNA MUESTRA DE CRISTALES APARENTEMENTE PUROS, OBTENIDA POR EVAPORACIÓN DE UNA MUESTRA DE AGUAS NEGRAS MUNICIPALES, INDICA QUE CONTIENEN 63.97 [%] DE CADMIO, 24.28 [%] DE OXÍGENO Y 11.75 [%] DE FÓSFORO. CALCULAR LA FÓRMULA EMPÍRICA.

SOLUCIÓN. CONVIENE CONVERTIR LOS DATOS DE COMPOSICIÓN PORCENTUAL EN RELACIONES DE MASAS, TOMANDO 100 [g] DE SUSTANCIA COMO BASE PARA LOS CÁLCULOS. EL NÚMERO DE MOLES DE CADMIO, OXÍGENO Y FÓSFORO SE CALCULAN COMO SIGUE:

$$63.97 \text{ g Cd} \left(\frac{1 \text{ mol Cd}}{112.4 \text{ g Cd}} \right) = 0.5691 \text{ mol de Cd}$$

$$24.28 \text{ g O} \left(\frac{1 \text{ mol O}}{15.999 \text{ g O}} \right) = 1.5176 \text{ mol de O}$$

$$11.75 \text{ g P} \left(\frac{1 \text{ mol P}}{30.973 \text{ g P}} \right) = 0.3794 \text{ mol de P}$$

LA RELACIÓN DE MOLES, 0.5691 : 1.5176 : 0.3794, ES TAMBIÉN LA RELACIÓN DE ÁTOMOS. EL OBJETIVO CONSISTE EN OBTENER LA RELACIÓN DE ÁTOMOS EN NÚMEROS ENTEROS PEQUEÑOS. PARA TAL FIN, SE DIVIDE CADA NÚMERO DE MOLES ENTRE EL MÁS PEQUEÑO DE ELLOS. ASÍ, PARA EL CADMIO:

$$\frac{0.5691 \text{ mol}}{0.3794 \text{ mol}} = 1.5, \text{ PARA EL OXÍGENO } \frac{1.5176 \text{ mol}}{0.3794 \text{ mol}} = 4, \text{ Y PARA EL FÓSFORO: } \frac{0.3794 \text{ mol}}{0.3794 \text{ mol}} = 1. \text{ EN ESTA ETAPA SUELE SER}$$

FRECUENTE QUE LA RELACIÓN NO SEA EN LA FORMA DE NÚMEROS ENTEROS, POR LO QUE ES NECESARIO MULTIPLICARLA POR UN NÚMERO PEQUEÑO (2, 3 ó 4).

UNA SIMPLE INSPECCIÓN BASTA PARA SELECCIONAR EL FACTOR DOS Y ENTONCES SE TIENE QUE PARA EL CADMIO $1.5 \times 2 = 3$, PARA EL OXÍGENO $4 \times 2 = 8$;

Y PARA EL FÓSFORO $1 \times 2 = 2$ DE TAL FORMA QUE LA FÓRMULA MÁS SIMPLE O EMPÍRICA ES $\text{Cd}_3 \text{O}_8 \text{P}_2$.

ÁLGEBRA LINEAL

SEA EL OPERADOR LINEAL $T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$

a) DETERMINAR SI EL OPERADOR LINEAL T PUEDE SER REPRESENTADO CON UNA MATRIZ DIAGONAL

b) EN CASO AFIRMATIVO, DETERMINAR LA MATRIZ DIAGONAL Y LA MATRIZ DIAGONALIZADORA

SOLUCIÓN. UN OPERADOR LINEAL PUEDE SER REPRESENTADO POR UNA MATRIZ DIAGONAL SI EXISTE UNA BASE DE VECTORES CARACTERÍSTICOS. UNA MATRIZ

ASOCIADA AL OPERADOR PARA LA BASE $B = \{(1,0), (0,1)\}$ SE OBTIENE COMO

$$T(1,0) = (2,1) ; T(0,1) = (2,3)$$

$$(2,1) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \alpha = 2 ; \beta = 1 ; (2,3) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \alpha = 2 ; \beta = 3$$

Y ENTONCES LA MATRIZ ESTÁ DADA POR $M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Y EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO ES EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$.

ES DECIR, $(2-\lambda)(3-\lambda) - 2$. O SEA $\lambda^2 - 5\lambda + 4$. LAS RAÍCES DE ESTE POLINOMIO CARACTERÍSTICO SON

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 4 ; \lambda_2 = 1$$

PARA

$$\lambda = 4 \text{ en } \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; x - y = 0 \Rightarrow x = y; E = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{R}\}$$

PARA

$$\lambda = 1 \text{ en } \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y; E = \{(-2y, y) \mid y \in \mathcal{R}\}$$

EL OPERADOR SI SE PUEDE REPRESENTAR CON UNA MATRIZ DIAGONAL $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Y LA MATRIZ DIAGONALIZADORA SERÍA $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. CABE RECORDAR

QUE LA MATRIZ DIAGONAL D SE OBTIENE A PARTIR DEL PRODUCTO $D = P^{-1} M(T) P$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

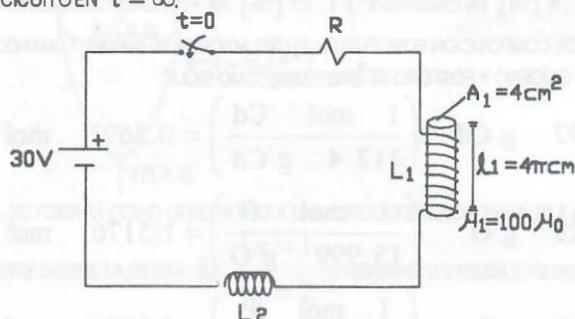
PARA EL CIRCUITO RL DE LA FIGURA, SE TIENE UN SOLENOIDE DE INDUCTANCIA $L_1 = 0.1 \text{ [H]}$ Y UN EMOBINADO DE INDUCTANCIA $L_2 = 0.2 \text{ [H]}$, AMBOS

DE RESISTENCIA DESPRECIABLE. SI EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA (M) SE DESPRECIA, CALCULAR

a) EL NÚMERO DE VUELTAS QUE TIENE EL SOLENOIDE

b) EL VALOR DE LA RESISTENCIA R , SI LA CONSTANTE DE TIEMPO ES $\tau_L = 10^{-3} \text{ [s]}$

- c) LA FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN L_1 CUANDO $f = \tau_L$
 d) LA ENERGÍA MAGNÉTICA ALMACENADA POR EL CIRCUITO EN $t = \infty$.



SOLUCIÓN.

a) EL MODELO MATEMÁTICO PARA EL CÁLCULO DE LA INDUCTANCIA PROPIA DE UN SOLENOIDE DE SECCIÓN CIRCULAR, ENROLLADO UNIFORME Y DE LONGITUD ℓ ES

$L_s = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} [H]$ EN DONDE $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Wb}{A \cdot m}$ (PERMEABILIDAD MAGNÉTICA DEL VACÍO), L ES LA INDUCTANCIA PROPIA DEL SOLENOIDE (H); N ES EL NÚMERO DE VUELTAS; A ES EL ÁREA TRANSVERSAL DEL SOLENOIDE (m^2), Y ℓ ES LA LONGITUD DEL SOLENOIDE (m)

$$\text{SE DESPEJA } N \text{ Y SE LLEGA A: } N = \left(\frac{L_s \ell_1}{\mu_1 A_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(0.1)(4\pi \times 10^{-2})}{(100)(4\pi \times 10^{-7})(4 \times 10^{-4})} \frac{H \cdot m}{\frac{Wb}{A \cdot m} \cdot m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow N = 500 \text{ VUELTAS}$$

b) LA CONSTANTE DE TIEMPO EN UN CIRCUITO RL ES $\tau_L = \frac{L_{eq}}{R} [s]$, EN DONDE τ_L ES LA CONSTANTE DE TIEMPO (s); L_{eq} ES LA INDUCTANCIA EQUIVALENTE DEL CIRCUITO (H); Y R ES LA RESISTENCIA DEL CIRCUITO (Ω) DE LA EXPRESIÓN SE TIENE QUE

$$R = \frac{L_{eq}}{\tau_L} = \frac{0.3}{1 \times 10^{-3}} \frac{(H)}{(s)} = 300 (\Omega)$$

c) LA FUERZA ELECTROMOTRIZ AUTOINDUCIDA. PRIMERO SE CALCULA LA AUTOINDUCTANCIA EQUIVALENTE DEL CIRCUITO

$$L_{eq} = L_1 + L_2 = 0.1 + 0.2 = 0.3 [H]$$

EL MODELO MATEMÁTICO PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ AUTOINDUCIDA ES

$$\varepsilon_i = -L_1 \frac{di}{dt} = \frac{L_1}{L_{eq}} \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{0.1}{0.3} (30) e^{-1} \Rightarrow \varepsilon_i = 3.7 (V)$$

d) LA ENERGÍA MAGNÉTICA ALMACENADA ESTÁ DADA POR $U = \frac{1}{2} L_{eq} I_{max}^2$, DONDE $I_{max} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{30}{300} = 0.1 (A)$ POR LO TANTO

$$U = (0.5)(0.3)(0.1)^2 = 1.5 \times 10^{-3} (J) = 1.5 (mJ)$$

PROGRAMA "TUTORÍA PARA TODOS"

TUTORÍA ES UNA LABOR EDUCATIVA DE ORIENTACIÓN, AYUDA Y SEGUIMIENTO, QUE REALIZA UN PROFESOR DE MANERA PERSONAL Y QUE DIRIGE A SUS ALUMNOS -PARTIENDO DE SUS NECESIDADES EDUCATIVAS-, PARA FACILITAR SU APRENDIZAJE ESCOLAR Y PROMOVER SU DESARROLLO INTEGRAL.

EL ESTUDIANTE QUE ACUDE A TUTORÍA PUEDE BUSCAR EN SU TUTOR ORIENTACIONES ACADÉMICAS, CONSEJOS PARA SU CRECIMIENTO CULTURAL Y OPINIONES, BASADAS EN LA EXPERIENCIA, SOBRE SUS PROBLEMÁTICAS EXISTENCIALES. SÓLO ES CUESTIÓN DE ACERCARSE AL TUTOR Y PEDIRLE SER ESCUCHADO, HACIENDO LO MISMO CUANDO EL TUTOR COMENTE ALGO AL ESTUDIANTE, SOBRE EL ALUMNO O CON RESPECTO DE SU VIDA.

CONSOLIDAR LA "TUTORÍA" EN LA FACULTAD ES UNA ARDUA LABOR PERO VALE LA PENA TODO LO QUE SE HAGA POR LOGRARLO. SE TRATA DE ESTABLECER UN CANAL IMPORTANTÍSIMO DE COMUNICACIÓN ENTRE PROFESORES Y ESTUDIANTES FUERA DEL SALÓN DE CLASES, LO QUE LE FALTABA AL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE PARA ESTAR COMPLETO.

¡TODO ES QUE SE SIENTEN TUTOR Y ESTUDIANTE Y COMIENCEN A HABLAR!

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LA QFB VIOLETA LUZ M. BRAVO HERNÁNDEZ Y LOS INGS. BERTHA FRANCO ROSAS, MANUEL DE J. VACÍO GONZÁLEZ, LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ Y RICARDO MARTÍNEZ GÓMEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA.



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTÁ COMENZANDO EL SEMESTRE 2001-1 . ESTE BOLETÍN LES DA LA BIENVENIDA A LOS ALUMNOS DE PRIMER INGRESO Y LES DESEA LO MEJOR. ESTÁN EN LA MEJOR FACULTAD DE INGENIERÍA DEL PAÍS. APROVECHEN TODO Y ESTUDIEN MUCHO. EN LA UNAM PUEDEN ENCONTRAR TODO PARA SU FORMACIÓN INTEGRAL, QUE COMPRENDE EL ASPETO TÉCNICO Y EL HUMANO.

ÁLGEBRA

DE ACUERDO CON LA LEYENDA, EL AUTOR DEL AJEDREZ LE PIDIÓ A SU REY, COMO RECOMPENSA POR SU INTERESANTE CREACIÓN, UN GRANO DE TRIGO EN EL PRIMER ESCAQUE (CUADRITO DEL TABLERO), DOS EN EL SEGUNDO, CUATRO EN EL TERCERO Y ASÍ SUCESIVAMENTE HASTA COMPLETAR LOS SESENTA Y CUATRO ESCAQUES QUE COMPONEN EL TABLERO. SEGUN LA HISTORIA, LOS "MATEMÁTICOS" DEL REY SE PASARON LA NOCHE CALCULANDO EL NÚMERO DE GRANOS QUE SE DEBÍAN PAGAR. ¿SI HUBIERAN CONOCIDO LA EXPRESIÓN QUE PROPORCIONA LA SUMA DE LA CANTIDAD DE GRANOS PARA CUALQUIER "n" NATURAL! Y, SOBRE TODO, SI HUBIERAN CONFIADO EN ELLA. AQUÍ SE PRESENTA Y SE DEMUESTRA POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DEMOSTRACIÓN. PARA $n = 1$ $1 = 2^1 - 1 \Rightarrow 1 = 1$ SI SE CUMPLE

SE SUPONE LA EXPRESIÓN VÁLIDA PARA $n = k$: $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ (HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN)

A PARTIR DE LA HIPÓTESIS DEBE DEMOSTRARSE QUE LA EXPRESIÓN SE CUMPLE PARA $n = k + 1$

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1 \quad (\text{TESIS})$$

EN LA HIPÓTESIS SE TIENE QUE LOS PRIMEROS "k" SUMANDOS VALÉN $2^k - 1$ SE SUSTITUYE EN LA TESIS Y SE LLEGA A:

$$\text{¿ } 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1 \text{ ?}$$

$$\text{¿ } 2(2^k) - 1 = 2^{k+1} - 1 \text{ ?}$$

$$2^{k+1} - 1 = 2^{k+1} - 1$$

VEMOS QUE SI SE CUMPLE Y POR LO TANTO LA EXPRESIÓN ES VÁLIDA PARA TODOS LOS NÚMEROS NATURALES. EN PARTICULAR,

$$n = 64 \Rightarrow 2^{64} - 1 \approx 1.84 \times 10^{19} \text{ GRANOS DE TRIGO}$$

PROBABILIDAD

1. si $P(A) = 0.6$ y $P(B) = 0.5$ y $P(A|B) = 0.9$

ENTONCES $P(A \cup B)$ ES:

- 1) 0.1 2) 0.45 3) 0.3 4) 0.65 5) 0.2

RESPUESTA: 4

RESOLUCIÓN:

SE SABE QUE $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, DE DONDE $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = 0.5(0.9) = 0.45$

POR LO QUÉ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.5 - 0.45 = 0.65$$

2. SI X Y Y SON VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS CON $\mu_x = 10$, $\mu_y = 20$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$ Y $\rho_{xy} = 0.5$. ENTONCES $\text{Var}(X - 2Y)$ ES:



- 1) -30 2) -11 3) -7 4) 13 5) 21

RESPUESTA 4

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X - 2Y) &= (1)\text{Var}(X) + (-2)^2\text{Var}(Y) + 2(1)(-2)\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} \\ &= 1 + 4(4) + 2(1)(-2)(1)(2)(0.5) = 13 \end{aligned}$$

3. SEA X UNA VARIABLE ALEATORIA CON FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

x	-1	0	1	2
$f_X(x)$	0.2	0.3	0.3	0.2

ENTONCES, $\text{Var}(X)$ ES:

- 1) 0.5 2) 2.1 3) 1.05 4) 1.36 5) 3.42

RESPUESTA 3

RESOLUCIÓN:

$$\mu_X = -1(0.2) + 0(0.3) + 1(0.3) + 2(0.2) = 0.5$$

$$\sigma_X^2 = (-1)^2(0.2) + 0^2(0.3) + 1^2(0.3) + 2^2(0.2) - (0.5)^2 = 1.05$$

4. CIERTOS AUTOBUSES LLEGAN A UNA PARADA ESPECÍFICA A INTERVALOS DE 15 MINUTOS COMENZANDO A LAS 7.00 A.M. ESTO ES 7.00, 7.15, 7.30 Y ASÍ SUCESIVAMENTE. SI EL TIEMPO DE LLEGADA DE UN PASAJERO ESTÁ DISTRIBUIDO UNIFORMEMENTE ENTRE LAS 7.00 Y LAS 7.30, LA PROBABILIDAD DE QUE UN PASAJERO TENGA QUE ESPERAR MENOS DE 5 MINUTOS PARA TOMAR EL AUTOBÚS ES

- 1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{5}{6}$ 5) NINGUNA DE LAS ANTERIORES

RESPUESTA 2

RESOLUCIÓN

SEA X LA v.a. QUE REPRESENTA EL TIEMPO DE LLEGADA EN MINUTOS DESPUÉS DE LAS 7.00

$$X \approx \text{uniforme}(0, 30)$$

PARA QUE TENGA QUE ESPERAR 5 MINUTOS O MENOS, SIGNIFICA QUE LLEGA 5 MINUTOS O MENOS ANTES DE QUE PASE EL CAMIÓN DE LAS 7.15 O EL DE LAS 7.30, ESTO ES:

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

5. DADA LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.3 & 0 \leq x < 1 \\ 0.4 & 1 \leq x < 2 \\ c & x \geq 2 \end{cases}$$

EL VALOR ESPERADO DE X , $E(X)$, ES EL QUE APARECE EN LA OPCIÓN:

- 1) 1 2) $\frac{1}{3}$ 3) 1.5 4) 3.25 5) 1.3

RESPUESTA 5

RESOLUCIÓN:

DEBE OBSERVARSE QUE LA v.a. ES DISCRETA Y SU FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ES:

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.3	0.1	0.6

EL VALOR DE 0.6 SE OBTUVO AL UTILIZAR LA PROPIEDAD $\sum_{\forall x} f_X(x) = 1$

Y EL VALOR ESPERADO ESTÁ DADO POR $E(X) = \sum_{\forall x} x f_x(x) = 0(0.3) + 1(0.1) + 2(0.6)$; $E(X) = 1.3$

DINÁMICA

SE DESEA ANALIZAR UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y PARA TAL FIN SE HIZO DESCENDER UN MOVIL CUYA MASA ERA DE $900 [g]$, POR UNA RAMPA, RECTA Y LARGA, CON UNA PENDIENTE CONSTANTE LA RAMPA FORMABA UN ÁNGULO DE 30° CON RESPECTO A LA HORIZONTAL. SE MIDIERON LOS TIEMPOS EN QUE EL MÓVIL ALCANZÓ DIFERENTES VALORES DE RAPIDEZ; LOS DATOS OBTENIDOS DEL EXPERIMENTO SE ANOTARON EN UNA TABLA. DETERMINAR, EN UNIDADES DEL S.I.:

- A) EL MODELO MATEMÁTICO EXPERIMENTAL QUE RELACIONA A LAS VARIABLES RAPIDEZ (v) Y TIEMPO (t)
 B) EL SIGNIFICADO FÍSICO DE LA PENDIENTE DEL MODELO MATEMÁTICO ANTERIOR, ASÍ COMO SU EXPRESIÓN DIMENSIONAL
 C) LA RAPIDEZ INICIAL DEL MÓVIL, ASÍ COMO SU ENERGÍA CINÉTICA EN ESE INSTANTE (EN $t = 0$).
 D) EL MODELO MATEMÁTICO EXPERIMENTAL QUE RELACIONA LAS VARIABLES DISTANCIA (x) Y TIEMPO (t) CONSIDERE QUE EN $t = 0$, $x = 0$.
 E) LA ACELERACIÓN GRAVITATORIA EXPERIMENTAL DEL LUGAR Y EL PESO DEL MÓVIL.

$t [s]$	2	3	4	5
$v \left[\frac{m}{s} \right]$	14.9	21.1	24.8	30

A) COMO SE TRATA DE UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO, ENTONCES $v(t) = \mu t + b$. SI SE UTILIZA EL MÉTODO DE PARES DE PUNTOS, SE TIENE QUE:

$$\mu = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{[(30 - 21.1) + (24.8 - 14.9)] \left[\frac{m}{s} \right]}{[(5 - 3) + (4 - 2)] [s]} = \frac{18.8 \left[\frac{m}{s} \right]}{4 \left[s^2 \right]} = 4.7 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

COMO $v = 22.7 \left[\frac{m}{s} \right]$; $t = 3.5 [s]$; ENTONCES

$$v = \mu t + b \Rightarrow b = v - \mu t = 22.7 \left[\frac{m}{s} \right] - \left(4.7 \left[\frac{m}{s^2} \right] \right) (3.5 [s]) = 6.25 \left[\frac{m}{s} \right] \text{ Y POR LO TANTO, EL MODELO MATEMÁTICO}$$

ES

$$v \left[\frac{m}{s} \right] = 4.7 \left[\frac{m}{s^2} \right] t [s] + 6.25 \left[\frac{m}{s} \right]$$

B) COMO ES UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO, SE TIENE QUE EL MODELO TEÓRICO QUE RELACIONA LA RAPIDEZ CON EL TIEMPO ES $v = a t + v_0$; COMPARANDO ESTE ÚLTIMO MODELO CON EL OBTENIDO EN EL PRIMER INCISO, SE TIENE QUE

$$a = \mu ; \mu = \text{aceleración del móvil} ; \text{como } [\mu]_u = \frac{m}{s^2} \text{ entonces } [\mu] = LT^{-2}$$

C) SI SE COMPARA EL MODELO TEÓRICO $v = a t + v_0$ CON EL MODELO EXPERIMENTAL, SE OBSERVA QUE $b = v_0$ Y POR LO TANTO

$v_0 = 6.25 \left[\frac{m}{s} \right]$. SI SE CALCULA LA ENERGÍA CINÉTICA EN $t = 0$, SE OBTIENE:

$$E_C = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} (0.9 [Kg]) \left(6.25 \left[\frac{m}{s} \right] \right)^2 = 17.5781 [J]$$

D) SE SABE QUE $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt$. SE INTEGRAN AMBOS MIEMBROS DE ESTA IGUALDAD Y

$$x = \int v dt = \int \left\{ 4.7 \left[\frac{m}{s} \right] t [s] + 6.25 \left[\frac{m}{s} \right] \right\} dt ; x(t) = 4.7 \left(\frac{1}{2} \right) t^2 + 6.25 t + x_0 \text{ (en el S.I.)}$$

COMO $x_0 = 0$, ENTONCES $x(t) = 2.35 \left[\frac{m}{s^2} \right] t^2 [s^2] + 6.25 \left[\frac{m}{s} \right] t [s]$

E) SE SABE QUE EN UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO EN UNA RAMPA $a = g \text{ sen } \alpha$; DE DONDE $g = \frac{a}{\text{sen } \alpha}$. COMO $a = 4.7 \left[\frac{m}{s^2} \right]$,

$$g = \frac{4.7 \left[\frac{m}{s^2} \right]}{\text{sen } 30^0} = 9.4 \left[\frac{m}{s^2} \right] . \text{ POR LO TANTO } g_{\text{exp.}} = 9.4 \left[\frac{m}{s^2} \right] . \text{ Y ADEMÁS } \left| \vec{W} \right| = m \left| \vec{g} \right| , \text{ DE DONDE}$$

$$W = m g = \left\{ (0.9 [Kg]) \left(9.4 \left[\frac{m}{s^2} \right] \right) \right\} = 8.46 [N] . \text{ LUEGO } W_{\text{exp.}} = 8.46 [N]$$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

EXPRESAR LA FUNCIÓN **sen z** EN FORMA BINÓMICA.

SOLUCIÓN. $\text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$;

$$z = x + iy \Rightarrow \text{sen } z = \frac{1}{2i} [e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}] = \frac{1}{2i} (e^{ix+i^2y} - e^{-ix-i^2y})$$

COMO $i^2 = -1 \Rightarrow \text{sen } z = \frac{1}{2i} (e^{ix-y} - e^{-ix+y}) = \frac{1}{2i} (e^{-y+ix} - e^{y-ix}) = \frac{1}{2i} (e^{-y} e^{ix} - e^y e^{-ix})$

$$= \frac{1}{2i} [e^{-y} (\cos x + i \text{sen } x) - e^y (\cos x - i \text{sen } x)] = \frac{1}{2i} [(e^{-y} \cos x - e^y \cos x) + i (e^{-y} \text{sen } x + e^y \text{sen } x)]$$
$$= \frac{1}{2i} (e^{-y} \cos x - e^y \cos x) + \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) \text{sen } x = \frac{1}{2i} (e^{-y} - e^y) \cos x + \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) \text{sen } x$$
$$= -\frac{1}{2} i (e^{-y} - e^y) \cos x + \frac{1}{2} (e^{-y} + e^y) \text{sen } x = \cosh y \text{sen } x + i \text{senh } y \cos x = u + i v$$

DONDE $u = \cosh y \text{sen } x$ y $v = \text{senh } y \cos x$

NOTA. $\frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \times \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{-1} = -i$

"TUTORÍA PARA TODOS"

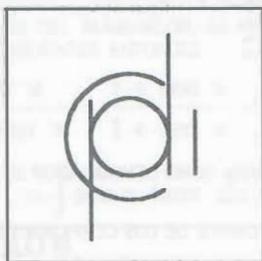
LA TUTORÍA, COMO ACTIVIDAD DOCENTE, PUEDE APOYAR AL ESTUDIANTE A CONFIRMAR SU VOCACIÓN; A INFORMARSE SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA CARRERA Y LAS CONDICIONES DE ESTUDIO EN LA FACULTAD; A CONOCER LOS SERVICIOS DE LA FACULTAD Y DE LA UNIVERSIDAD; A CANALIZARLO A LAS INSTANCIAS APROPIADAS DEPENDIENDO DE LA PROBLEMÁTICA PLANTEADA; A INCREMENTAR SU DESARROLLO CIENTÍFICO, CULTURAL, HUMANÍSTICO Y DEPORTIVO; A ESTIMULAR EN ÉL LA CRÍTICA Y EL ANÁLISIS PARA LA GENERACIÓN DE CONOCIMIENTO; A PROPICIAR EN SU FUTURO ACTITUDES PROFESIONALES ÚTILES PARA EL MEJORAMIENTO DE LA REALIDAD NACIONAL; Y A RESOLVER PROBLEMAS ACADÉMICOS Y EMOCIONALES.

LA TUTORÍA NO ES UNA ACCIÓN AISLADA SINO COLECTIVA Y DEBE SER PARTE INHERENTE DE LA ACTIVIDAD COTIDIANA DE TODO PROFESOR DE CARRERA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO, RIGEL GÁMEZ LEAL Y VERÓNICA GARCÍA CASANOVA

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTA PUBLICACIÓN LES DESEA UN FELIZ AÑO 2001, PLENO DE SATISFACCIONES, FELICIDAD, AMOR Y PAZ. OJALÁ SE LES CUMPLAN SUS MÁS PRECIADOS ANHELOS Y QUE LLEGUEN A SER UNOS GRANDES PROFESIONALES DE LA INGENIERÍA MEXICANA, PERO SOBRE TODO, MUJERES Y HOMBRES DE BIEN.

CÁLCULO I

CALCULAR EL VALOR NUMÉRICO DE LOS SIGUIENTES LÍMITES:

$$i) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1-8x^3}{6x^3-7x^2+2x} ; \quad ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{2-\sqrt[3]{10-x}} ; \quad iii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+6x+2}{6x^2+5x+1} ; \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x \cos^2 x}{x \tan x}$$

SOLUCIÓN. i) SE SUSTITUYE LA VARIABLE POR EL VALOR AL QUE TIENDE Y SE TIENE QUE $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1-8x^3}{6x^3-7x^2+2x} = \frac{0}{0}$, QUE ES UNA

INDETERMINACIÓN. SE FACTORIZAN NUMERADOR Y DENOMINADOR Y SE LLEGA A:

$$1-8x^3 = (1-2x)(1+2x+4x^2) ; \quad 6x^3-7x^2+2x = x(6x^2-7x+2) = x\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-4)$$

DE DONDE EL LÍMITE QUEDA COMO:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(1-2x)(1+2x+4x^2)}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-4)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(1+2x+4x^2)}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-4)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-2(1+2x+4x^2)}{x(6x-4)} = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} = 12$$

QUE ES EL VALOR NUMÉRICO DEL LÍMITE.

ii) AL SUSTITUIR LA VARIABLE POR EL VALOR AL QUE TIENDE SE LLEGA A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{2-\sqrt[3]{10-x}} = \frac{0}{0}$, QUE ES UNA FORMA INDETERMINADA

Y, PARA OBTENER EL VALOR DEL LÍMITE, SI EXISTE, SE FACTORIZA EL NUMERADOR Y DESPUÉS SE MULTIPLICAN, NUMERADOR Y DENOMINADOR POR EL TRINOMIO QUE RACIONALIZA (CONVIERTE AL DENOMINADOR EN UNA DIFERENCIA DE CUBOS) Y SE RESUELVE EL PROBLEMA DE LA INDETERMINACIÓN. ASÍ, SE LLEGA AL LÍMITE

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5) \left[4 + 2\sqrt[3]{10-x} + \sqrt[3]{(10-x)^2} \right]}{(2-\sqrt[3]{10-x}) \left[4 + 2\sqrt[3]{10-x} + \sqrt[3]{(10-x)^2} \right]} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5) \left[4 + 2\sqrt[3]{10-x} + \sqrt[3]{(10-x)^2} \right]}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+5) \left[4 + 2\sqrt[3]{10-x} + \sqrt[3]{(10-x)^2} \right] = 84 \text{ QUE ES EL VALOR BUSCADO.}$$

iii) SI SE SUSTITUYE LA VARIABLE POR "∞" SE TIENE QUE $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+6x+2}{6x^2+5x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ COMO SE TRATA DE UNA INDETERMINACIÓN. SE

DIVIDEN LOS POLINOMIOS DE NUMERADOR Y DENOMINADOR ENTRE LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE, SE REALIZAN LAS SIMPLIFICACIONES CORRESPONDIENTES Y SE OBTIENE:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}}{6 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3+0+0}{6+0+0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ENTONCES EL VALOR NUMÉRICO DEL LÍMITE ES $\frac{1}{2}$. CABE COMENTAR QUE LO QUE SE HIZO FUE HACER QUE LA VARIABLE QUEDARA COMO DENOMINADOR SIEMPRE Y COMO TIENDE A " ∞ ", LOS COCIENTES RESPECTIVOS SE ANULABAN Y EL VALOR DEL LÍMITE, SI SE OBSERVA, FUE EL COCIENTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VARIABLE DE MAYOR GRADO. ESTO HACE PENSAR QUE CUANDO SE TIENE UN LÍMITE DE COCIENTE DE POLINOMIOS Y LA VARIABLE TIENDE A " ∞ ", ENTONCES SE PRESENTAN TRES CASOS: SI LOS POLINOMIOS TIENEN EL MISMO GRADO, EL RESULTADO DEL LÍMITE ES EL COCIENTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VARIABLE CON MAYOR GRADO; SI EL GRADO DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR ES MAYOR, LA RESPUESTA SERÁ INVARIABLEMENTE "0"; Y SI EL POLINOMIO DEL NUMERADOR ES DE MAYOR GRADO, ENTONCES EL LÍMITE NO EXISTE.

v) EN ESTE CASO, AL SUSTITUIR LA VARIABLE POR "0" SE TIENE QUE $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x \cos^2 x}{x \tan x} = \frac{0}{0}$. PARA RESOLVER ESTE LÍMITE SE

ACUDE A LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y AL CONOCIMIENTO DE LOS SIGUIENTES LÍMITES: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} = 1$. ASÍ, SE LLEGA A:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sen^2 x \cdot \cos^2 x}{x \sen x}}{\frac{\cos x}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x \cos^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} \times (\lim_{x \rightarrow 0} \cos x)^2 = 1 \times 1^2 = 1$$

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES:

i) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt{x} + 2)^2}$; ii) $\int \frac{x-5}{\sqrt{x-1}} dx$; iii) $\int \frac{\sen x}{1 - \sen x} dx$

SOLUCIÓN. i) $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt{x} + 2)^2}$ SE OBTIENE PRIMERO LA INTEGRAL INDEFINIDA, PARA LO CUAL SE REALIZA EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE, LO QUE LA VUELVE "INMEDIATA":

$$u = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2 \int \frac{du}{u^2} = 2 \int u^{-2} du = 2 \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{u} + C = -\frac{2}{\sqrt{x} + 2} + C$$

AHORA SE APLICA LA REGLA DE BARROW PARA CALCULAR EL VALOR DE LA INTEGRAL DEFINIDA Y FINALMENTE SE LLEGA A:

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{x} + 2} \right]_1^9 = \left(-\frac{2}{\sqrt{9} + 2} \right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{1} + 2} \right) = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

ii) $\int \frac{x-5}{\sqrt{x-1}} dx$ EN ESTE TIPO DE INTEGRALES, EL CAMBIO DE VARIABLE QUE CONDUCE A SU OBTENCIÓN ES SUSTITUIR EL RADICANDO POR UNA NUEVA VARIABLE, LO QUE CONVIERTE A LA INTEGRAL EN VARIAS INTEGRALES "INMEDIATAS". DE ESTE MODO SE TIENE QUE:

$$u = x-1 \Rightarrow du = dx; x = u+1 \Rightarrow \int \frac{u+1-5}{\sqrt{u}} du = \int \frac{u-4}{\sqrt{u}} du = \int \frac{u}{\sqrt{u}} du - 4 \int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}} du - 4 \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4 \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} - 8 (x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

iii) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} dx$. PARA CALCULAR ESTA INTEGRAL, SE MULTIPLICAN NUMERADOR Y DENOMINADOR POR EL BINOMIO

CONJUGADO DEL NUMERADOR, SE REALIZAN OPERACIONES, SE UTILIZAN IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y SE APLICAN LAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN CORRESPONDIENTES. ENTONCES:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \times \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \sec x \tan x dx + \int \tan^2 x dx = \int \sec x \tan x dx + \int \sec^2 x dx - \int dx = \sec x + \tan x - x + C$$

CÁLCULO III

ENCONTRAR LOS EXTREMOS RELATIVOS Y LOS PUNTOS SILLA DE LA FUNCIÓN $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{4y^3}{3} - x^2 - 3x - 4y - 3$

SOLUCIÓN. LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES SON: $f'_x(x, y) = x^2 - 2x - 3$ y $f'_y(x, y) = 4y^2 - 4$

COMO AMBAS DERIVADAS EXISTEN PARA TODO PUNTO (x, y) LOS PUNTOS CRÍTICOS, QUE SE OBTIENEN DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA FORMADO POR LAS DERIVADAS PARCIALES IGUALADAS A CERO, SON:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 & \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 & \Rightarrow x = 3 ; x = -1 \\ 4y^2 - 4 = 0 & (y - 1)(y + 1) = 0 & y = 1 ; y = -1 \end{cases} \Rightarrow (3, 1), (3, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES Y LA MIXTA ESTÁN DADAS POR:

$$f''_{xx}(x, y) = 2x - 2 ; f''_{yy}(x, y) = 8y \text{ y } f''_{xy} = 0 \Rightarrow \text{que el Hessiano sea } g(x, y) = (2x - 2)(8y) - (0)^2 = 16xy - 16y$$

EN LA SIGUIENTE TABLA SE PUEDEN VER LOS RESULTADOS: UN MÁXIMO Y UN MÍNIMO RELATIVOS Y DOS PUNTOS SILLA.

PUNTOS CRÍTICOS	VALOR Y SIGNO DE "g"	VALOR Y SIGNO DE f''_{xx}	NATURALEZA DEL PUNTO CRÍTICO
(3, 1)	$g(3, 1) = 32 > 0$	$f''_{xx}(3, 1) = 4 > 0$	MÍNIMO RELATIVO (3, 1, -14.67)
(3, -1)	$g(3, -1) = -32 < 0$	IRRELEVANTE	PUNTO SILLA (3, -1, -9.33)
(-1, 1)	$g(-1, 1) = -32 < 0$	IRRELEVANTE	PUNTO SILLA (-1, 1, -4)
(-1, -1)	$g(-1, -1) = 32 > 0$	$f''_{xx}(-1, -1) = -4 < 0$	MÁXIMO RELATIVO (-1, -1, 1.33)

CÁLCULO III

SEA LA FUNCIÓN $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ ENCONTRAR EL PUNTO DEL PLANO $2x + 3y + 4z = 12$ DONDE LA FUNCIÓN f TOMA SU MENOR VALOR Y CALCULAR ÉSTE.

SOLUCIÓN. SE ESTABLECE COMO FUNCIÓN OBJETIVO A $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$ SUJETA A LA RESTRICCIÓN

$g(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 12 = 0$. MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE SE PUEDE ESCRIBIR LA SIGUIENTE ECUACIÓN, CONOCIDA COMO "ECUACIÓN DE LAGRANGE":

$$L = 4x^2 + y^2 + 5z^2 + \lambda(2x + 3y + 4z - 12)$$

Y SUS DERIVADAS PARCIALES, CON RESPECTO A x, y, z, λ IGUALADAS A CERO, FORMAN UN SISTEMA CUYA RESOLUCIÓN PROPORCIONA LOS PUNTOS CRÍTICOS, DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 8x + 2\lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = -4x \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 3\lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}y \Rightarrow -4x = -\frac{2}{3}y \Rightarrow y = 6x \Rightarrow 2x + 18x + \frac{32}{5}x - 12 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 10z + 4\lambda = 0 & \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}z \Rightarrow -4x = -\frac{5}{2}z \Rightarrow z = \frac{8}{5}x \Rightarrow x = \frac{5}{11}; y = \frac{30}{11}; z = \frac{8}{11} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 3y + 4z - 12 = 0 \end{cases}$$

COMO SÓLO SE TIENE UN PUNTO CRÍTICO, SE SIGUE QUE EL MÍNIMO VALOR DE LA FUNCIÓN SE OCURRE EN EL PUNTO $\left(\frac{5}{11}, \frac{30}{11}, \frac{8}{11}\right)$ Y SU VALOR APROXIMADO

ES DE 10.91

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $x^2 y' + 5xy + 3x^3 = 0$ DONDE $x \neq 0$.

SOLUCIÓN. SE TRATA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN Y PARA ENCONTRAR EL FACTOR INTEGRANTE, SE EXPRESA DE LA SIGUIENTE FORMA.

$$y' + \frac{5}{x} y = -3x^3$$

LUEGO, DICHO FACTOR EQUIVALE A $e^{\int p(x) dx} = e^{\int \frac{5}{x} dx} = e^{\ln |x|^5} = |x|^5$

SI $x > 0$, ENTONCES $|x|^5 = x^5$ SI $x < 0$, ENTONCES $|x|^5 = -x^5$ EN AMBOS CASOS, MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE LA ECUACIÓN POR $|x|^5$ PRODUCE

$$x^5 y' + 5x^4 y = -3x^8 \Rightarrow \frac{d}{dx} (x^5 y) = -3x^8$$

SE INTEGRAN AHORA AMBOS MIEMBROS Y SE LLEGA A LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN. ASÍ,

$$x^5 y = \int -3x^8 dx = -\frac{x^9}{3} + C \Rightarrow y = -\frac{x^4}{3} + \frac{C}{x^5}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $y' + y \tan x = \sec x + 2x \cos x$

SOLUCIÓN. SE TRATA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN, POR LO QUE EL FACTOR INTEGRANTE EQUIVALE A:

$$e^{\int \tan x dx} = e^{\ln |\sec x|} = |\sec x|$$

SE MULTIPLICAN AMBOS MIEMBROS DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL POR ESTE FACTOR Y SE TIENE QUE:

$$y' \sec x + y \sec x \tan x = \sec^2 x + 2x \Rightarrow \frac{d}{dx} (y \sec x) = \sec^2 x + 2x$$

SE INTEGRAN AMBOS MIEMBROS Y SE LLEGA A LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DADA. ASÍ,

$$y \sec x = \tan x + x^2 + C \Rightarrow y = \sin x + (x^2 + C) \cos x$$

TUTORÍA

CONSOLIDAR "UNA CULTURA DE LA TUTORÍA" EN LA FACULTAD ES UNA ARDUA TAREA EN LA QUE ESTAMOS INMERSOS MUCHOS ALUMNOS, PROFESORES -DE CARRERA EN SU MAYORÍA- Y LA COPADI.

SE TRATA DE QUE LOS ESTUDIANTES AL ENTRAR CUENTEN, DURANTE SU PRIMER SEMESTRE CURRICULAR, CON UN TUTOR Y DESPUÉS, EL RESTO DE SU CARRERA, PUEDAN ACUDIR CON ÉL O CON OTRO, CON LA PLENA SEGURIDAD DE QUE LES SERÁ ÚTIL PARA LA CULMINACIÓN EXITOSA DE SU CARRERA.

CON UN TUTOR UN ESTUDIANTE PUEDE PLANTEAR SUS PROBLEMAS ACADÉMICOS Y PEDIR ORIENTACIÓN PARA RESOLVERLOS DE LA MEJOR MANERA. PERO TAMBIÉN PUEDE ACUDIR AL TUTOR CON CUESTIONES EXISTENCIALES QUE TENGAN QUE VER CON SU CRECIMIENTO, CON SUS RELACIONES HUMANAS, CON PROBLEMÁTICAS FAMILIARES Y, EN GENERAL, CON CUALQUIER ASUNTO, POR DIFÍCIL QUE SEA, Y SE TRATARÁ INVARIABLEMENTE DE APOYAR, AYUDAR Y ENCONTRAR LA MEJOR SOLUCIÓN.

TODO ES CUESTIÓN DE ABRIRSE Y PEDIR APOYO. PARA ESO ESTÁN LOS TUTORES, PARA APOYAR Y AYUDAR.

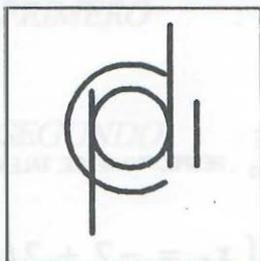
CULTURA

SI VEN EL LIBRO "TE DOY MI PALABRA DE AMOR" DE FERNANDO DÍEZ DE URDANIVIA, CÓMPRENLO. SON ESCRITOS DE 329 AUTORES DE LA LITERATURA UNIVERSAL SOBRE EL SENTIMIENTO AMOROSO. ALGUNOS DE ELLOS:

"ERES COMO EL SOL: CUANDO TU VIENES SE HACE DE DÍA EN MI CORAZÓN" (M. MACHADO); "QUIERO HACER CONTIGO LO QUE LA PRIMAVERA HACE CON LOS CEREZOS" (P. NERUDA); "EL AMOR ES LA MÁS FUERTE DE TODAS LAS PASIONES, PORQUE ATACA AL MISMO TIEMPO A LA CABEZA, AL CORAZÓN Y AL CUERPO" (VOLTAIRE); "A NADIE TE PARECES DESDE QUE YO TE AMO" (P. NERUDA); "TUS PALABRAS SON MI ALIMENTO Y TU ALIENTO MI VINO" (S. BERNHARDT); "SÓLO EN TORNO DE UNA MUJER QUE SE SIENTE AMADA PUEDE FORMARSE UNA FAMILIA" (F. SCHLEGEL); "MÁS TARDE, EN UN MUNDO MEJOR QUE ÉSTE, DESEARÉ AMARTE MÁS Y CONOCERTE MÁS" (SHAKESPEARE); "EN AMOR, SÓLO ES GRANDE EL QUE PERDONA" (E. ARCINIEGA); "DEBO ESTAR VIVO, AMOR / PARA SABERTE TODA, / PARA BEBERTE TODA / EN UN VASO DE AMOR" (EFRAÍN HUERTA)

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001

NÚMERO 15

17 DE ENERO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. COLECCIONALOS Y TENDRÁS UN GRAN NÚMERO DE EJERCICIOS DE VARIAS ASIGNATURAS.

ALGEBRA

OBTENER EL POLINOMIO DE COEFICIENTES REALES DE MENOR ORDEN CUYA GRÁFICA PASA POR LOS PUNTOS $A(-1, 0)$, $B(-2\sqrt{3}, 0)$, $C(0, 3)$

Y QUE TIENE COMO UNA DE SUS RAÍCES A $\alpha = -1 + 2i$

SOLUCIÓN. LA OTRA RAÍZ DEL POLINOMIO ES $\beta = -1 - 2i$. POR OTRA PARTE, DE LOS DATOS DEL PROBLEMA SE TIENEN OTRAS DOS RAÍCES, QUE SON $\gamma = -1$

Y $\delta = -2\sqrt{3}$. PODRÍA PENSARSE QUE OTRA RAÍZ ES $2\sqrt{3}$; SIN EMBARGO, ESTO NO ES ASÍ; NO SE TIENE INFORMACIÓN EN EL SENTIDO DE QUE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SEAN RACIONALES, LUEGO EL POLINOMIO ES:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_4 (x+1)(x+2\sqrt{3})(x+1-2i)(x+1+2i) \\ &= a_4 [x^4 + (3+2\sqrt{3})x^3 + (7+6\sqrt{3})x^2 + (5+14\sqrt{3})x + 10\sqrt{3}] \end{aligned}$$

PERO POR EL PUNTO 'C' SE TIENE QUE $p(0) = 3$; ENTONCES $3 = a_4 10\sqrt{3} \Rightarrow a_4 = \frac{3}{10\sqrt{3}}$

FINALMENTE, SE TIENE QUE

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{3}{10\sqrt{3}} [x^4 + (3+2\sqrt{3})x^3 + (7+6\sqrt{3})x^2 + (5+14\sqrt{3})x + 10\sqrt{3}] \\ &= \frac{3}{10\sqrt{3}} x^4 + \left(\frac{9}{10\sqrt{3}} + \frac{3}{5}\right)x^3 + \left(\frac{21}{10\sqrt{3}} + \frac{9}{5}\right)x^2 + \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{21}{5}\right)x + 3 \end{aligned}$$

PARA PRACTICAR EL DESARROLLO DE ESTE PROBLEMA CON NÚMEROS MÁS SENCILLOS, SE PODRÍA RESOLVER CON EL MISMO ENUNCIADO, LOS PUNTOS $A(-1, 0)$, $B(0, 5)$, $C(2, 0)$ Y LA RAÍZ CONOCIDA $\alpha = -1 + 2i$. ENTONCES, LA SOLUCIÓN SERÍA:

COMO EL POLINOMIO TIENE REPRESENTACIÓN GRÁFICA, SUS COEFICIENTES SON REALES Y OTRA DE SUS RAÍCES ES $\beta = -1 - 2i$. DE LOS DATOS SE TIENEN OTRAS DOS RAÍCES QUE SON $\gamma = -1$ Y $\delta = 2$. EL POLINOMIO ES ENTONCES:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_4 (x+1)(x-2)(x+1-2i)(x+1+2i) \\ &= a_4 (x^4 + x^3 + x^2 - 9x - 10) \end{aligned}$$

PERO POR EL PUNTO 'B' SE TIENE QUE $p(0) = 5$; ENTONCES $5 = -10a_4 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{2}$. Y, FINALMENTE SE LLEGA A:

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 5$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEAN LAS RECTAS $L_1 : \begin{cases} x = 3 + 3t_1 \\ y = 1 \\ z = -t_1 \end{cases}$ y $L_2 : \begin{cases} x = -2 + 2t_2 \\ y = 7 + 5t_2 \\ z = t_2 \end{cases}$

SE DESEA DETERMINAR LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS A y B PERTENECIENTES A LAS RECTAS L_1 y L_2 , RESPECTIVAMENTE, TALES QUE LA DISTANCIA ENTRE DICHS PUNTOS SEA MÍNIMA.

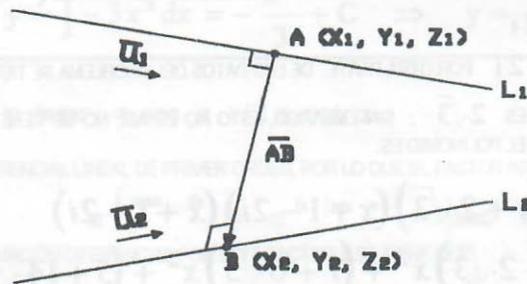
SOLUCIÓN. SEAN

$$A(x_1, y_1, z_1) \in L_1 \text{ y } B(x_2, y_2, z_2) \in L_2 \therefore L_1 : \begin{cases} x_1 = 3 + 3t_1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = -t_1 \end{cases} \text{ y } L_2 : \begin{cases} x_2 = -2 + 2t_2 \\ y_2 = 7 + 5t_2 \\ z_2 = t_2 \end{cases}$$

DE $L_1 : \bar{u}_1 = (3, 0, -1)$ Y DE $L_2 : \bar{u}_2 = (2, 5, 1)$

LOS PUNTOS A y B SON LOS EXTREMOS DEL SEGMENTO DE RECTA \overline{AB} QUE ES SIMULTÁNEAMENTE PERPENDICULAR A L_1 y L_2 , POR LO QUE

$$\overline{AB} \cdot \bar{u}_1 = 0 \text{ y } \overline{AB} \cdot \bar{u}_2 = 0 \text{ EN DONDE } \overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



$$\overline{AB} \cdot \bar{u}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \cdot (3, 0, -1) = 3(x_2 - x_1) - z_2 + z_1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\overline{AB} \cdot \bar{u}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \cdot (2, 5, 1) = 2(x_2 - x_1) + 5(y_2 - y_1) + 1(z_2 - z_1) = 0 \quad \dots (2)$$

CON OBJETO DE REDUCIR EL NÚMERO DE INCÓGNITAS EN EL SISTEMA DE ECUACIONES FORMADO POR (1) y (2), SE SUSTITUYEN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE L_1 y L_2 Y SE LLEGA A:

$$3[(-2 + 2t_2) - (3 + 3t_1)] - t_2 - t_1 = 0 \Rightarrow 5t_2 - 10t_1 - 15 = 0 \quad \dots (1')$$

$$2[(-2 + 2t_2) - (3 + 3t_1)] + 5[(7 + 5t_2) - 1] + t_2 + t_1 = 0 \Rightarrow 6t_2 - t_1 + 4 = 0 \quad \dots (2')$$

AL RESOLVER ESTE NUEVO SISTEMA DE ECUACIONES (1') y (2') SE OBTIENEN LOS VALORES $t_1 = -2$ y $t_2 = -1$, LOS CUALES SE SUSTITUYEN EN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE L_1 y L_2 RESPECTIVAMENTE, PARA OBTENER FINALMENTE LOS PUNTOS $A(-3, 1, 2)$ y $B(-4, 2, -1)$

CÁLCULO I

OBTENER LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES SIGUIENTES A PARTIR DE LA DEFINICIÓN (MÉTODO DE LOS "CUATRO PASOS"):

$$i) y = 2x^2 - 5x + 8 \quad ii) y = \frac{x+1}{x-1} \quad iii) y = \sqrt{3-x}$$

SOLUCIÓN. PARA DERIVAR A PARTIR DE LA DEFINICIÓN, LO QUE SE HACE ES SEGUIR LA SECUENCIA DE PASOS QUE SE ENCUENTRAN EN ELLA Y QUE SON: PRIMERO, SE INCREMENTA LA FUNCIÓN; SEGUNDO, SE LE RESTA A LA FUNCIÓN INCREMENTADA LA FUNCIÓN ORIGINAL; TERCERO, SE DIVIDE ESTA DIFERENCIA ENTRE EL INCREMENTO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE; Y CUARTO Y ÚLTIMO, SE CALCULA EL LÍMITE DEL COCIENTE OBTENIDO. ESTO NO ES OTRA COSA QUE TRANSFORMAR LA

FUNCIÓN $y = f(x)$ EN SU DERIVADA $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. PARA DERIVAR ASÍ LAS FUNCIONES DADAS SE SEGUIRÁN LOS

PASOS DEFINIDOS ANTERIORMENTE. CABE ACLARAR QUE EXISTEN VARIAS FORMAS DE HACERLO, ÉSTA ES UNA DE ELLAS QUE OJALÁ GUSTE A LOS LECTORES

$$i) y = 2x^2 - 5x + 8$$

$$\begin{aligned} \text{PRIMERO} \quad : \quad y + \Delta y &= 2(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 8 \\ &= 2x^2 + 4x \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x + 8 \end{aligned}$$

$$\text{SEGUNDO} \quad : \quad -y = -2x^2 + 5x - 8$$

$$\Delta y = 4x \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 5\Delta x$$

$$\text{TERCERO} \quad : \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x \Delta x + 2(\Delta x)^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 5$$

$$\text{CUARTO} \quad : \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x - 5)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x - 5$$

$$ii) y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{PRIMERO} \quad : \quad y + \Delta y = \frac{x + \Delta x + 1}{x + \Delta x - 1}$$

$$\text{SEGUNDO} \quad : \quad -y = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{x + \Delta x + 1}{x + \Delta x - 1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x + \Delta x + 1)(x-1) - (x+1)(x + \Delta x - 1)}{(x + \Delta x - 1)(x-1)} \\ &= \frac{x^2 - x + x \Delta x - \Delta x + x - 1 - x^2 - x \Delta x + x - x - \Delta x + 1}{(x + \Delta x - 1)(x-1)} = \frac{-2\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x-1)} \end{aligned}$$

$$\text{TERCERO} \quad : \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\Delta x}{\Delta x (x + \Delta x - 1)(x-1)} = \frac{-2}{(x + \Delta x - 1)(x-1)}$$

$$\text{CUARTO} \quad : \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{(x + \Delta x - 1)(x-1)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$iii) y = \sqrt{3-x}$$

$$\text{PRIMERO} \quad : \quad y + \Delta y = \sqrt{3 - (x + \Delta x)} = \sqrt{3 - x - \Delta x}$$

$$\text{SEGUNDO} \quad : \quad -y = -\sqrt{3-x}$$

$$\Delta y = \sqrt{3-x-\Delta x} - \sqrt{3-x}$$

$$\text{TERCERO} \quad : \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{3-x-\Delta x} - \sqrt{3-x}}{\Delta x}$$

CUARTO :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x-\Delta x} - \sqrt{3-x}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x-\Delta x} - \sqrt{3-x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{3-x-\Delta x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x-\Delta x} + \sqrt{3-x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3-x-\Delta x) - (3-x)}{\Delta x (\sqrt{3-x-\Delta x} + \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3-x-\Delta x-3+x}{\Delta x (\sqrt{3-x-\Delta x} + \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (\sqrt{3-x-\Delta x} + \sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{3-x-\Delta x} + \sqrt{3-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

CÁLCULO II

ESTUDIAR LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE LA SIGUIENTE INTEGRAL IMPROPIA: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

SOLUCIÓN. LA FUNCIÓN DEL INTEGRANDO ES CONTINUA EN LOS REALES PERO AL SER INFINITO (+Y-) LOS LÍMITES DE LA INTEGRAL, ENTONCES ÉSTA SE EXPRESA MEDIANTE:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

AHORA SE RESUELVE, EN PRIMER LUGAR, LA INTEGRAL INDEFINIDA, PARA PODER OBTENER LOS LÍMITES ANTERIORES CUYA EXISTENCIA DETERMINARÁ SU

CONVERGENCIA O DIVERGENCIA. ASÍ, SI SE MULTIPLICAN NUMERADOR Y DENOMINADOR POR e^x , SE TIENE QUE:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} dx = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

Y CON EL CAMBIO DE VARIABLE: $u^2 = e^{2x}$; $u = e^x$; $du = e^x dx$; $a^2 = 1$; $a = 1$

SE LLEGA A: $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \frac{u}{a} + C = \operatorname{arctan} e^x + C$

Y EN CONSECUENCIA

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \left[\operatorname{arctan} e^x \right]_M^0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\operatorname{arctan} e^x \right]_0^N \\ &= \lim_{M \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctan} e^0 - \operatorname{arctan} e^M) + \lim_{N \rightarrow \infty} (\operatorname{arctan} e^N - \operatorname{arctan} e^0) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Y LA INTEGRAL IMPROPIA ES CONVERGENTE.

TUTORÍA

UN PROFESOR QUE ENSEÑA, TRANSMITE, APRENDE Y CONVIVE CON LOS ESTUDIANTES, AL GRADO DE ESCUCHARLOS Y TRATAR DE AYUDARLOS EN SU DESARROLLO ACADÉMICO Y EN SU CRECIMIENTO ESPIRITUAL, ES UN SER HUMANO QUE REALIZA SU NOBLE LABOR CON AMOR.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA

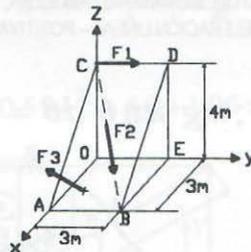


EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA.

ESTÁTICA. UN SISTEMA DE TRES FUERZAS ACTÚA SOBRE LA CUÑA, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA. SI $F_1 = 100 \text{ N}$, $F_2 = 58.31 \text{ N}$ Y SUS LÍNEAS DE SOPORTE PASAN POR LOS PUNTOS C Y B RESPECTIVAMENTE, Y $F_3 = 150 \text{ N}$ QUE ES PERPENDICULAR AL PLANO INCLINADO DE LA CUÑA Y LAS COORDENADAS VECTORIALES CANÓNICAS DEL SISTEMA SON $[150 \text{ i}, 130 \text{ j}, 50 \text{ k}, -520 \text{ i} - 150 \text{ j} + 0 \text{ k}] \text{ [N, Nm]}$ DETERMINAR:

- a) F_3 ; b) LAS COORDENADAS DE P PARA UNA COTA MÍNIMA DONDE F_3 CORTE EL PLANO INCLINADO DE LA CUÑA.



- $F_1 = 100 \text{ N}$
- $F_2 = 58.31 \text{ N}$
- $F_3 = 150 \text{ N}$
- $A (3, 0, 0)$
- $B (3, 3, 0)$
- $C (0, 0, 4)$

OBTENCIÓN DE FUERZAS EN FORMA VECTORIAL: $\vec{F}_1 = 100 \text{ j}$; $\vec{F}_2 = 58.31 \vec{e}_{CB} \Rightarrow \vec{F}_2 = 58.31 \frac{3\text{i} + 3\text{j} - 4\text{k}}{\sqrt{9+9+16}} = 30\text{i} + 30\text{j} - 40\text{k}$

$$\vec{CA} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 12\text{i} + 9\text{k} \Rightarrow \vec{F}_3 = 150 \frac{12\text{i} + 0\text{j} + 9\text{k}}{\sqrt{144 + 0 + 81}} = 120\text{i} + 90\text{k}$$

OBTENCIÓN DE MOMENTOS CON RESPECTO A "O" :

$$\vec{M}_1 = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 100 & 0 \end{vmatrix} = -400\text{i} ; \vec{M}_2 = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 30 & 30 & -40 \end{vmatrix} = \text{i}(-120) - \text{j}(-120) = -120\text{i} + 120\text{j}$$

$$\vec{M}_3 = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ x & y & z \\ 120 & 0 & 90 \end{vmatrix} = \text{i}(90y) - \text{j}(90x - 120z) + \text{k}(-120y) = 90y\text{i} + (120z - 90x)\text{j} - 120y\text{k}$$

$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = (-400 - 120 + 90y)\text{i} + (120 + 120z - 90x)\text{j} - 120y\text{k}$; PERO $\vec{M}_O = -520\text{i} - 150\text{j} + 0\text{k}$.

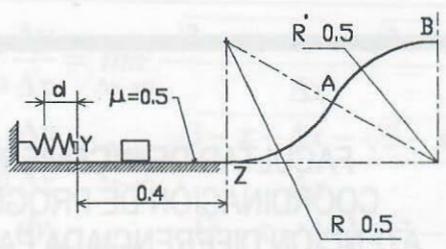
LUEGO: $-120y = 0 \Rightarrow y = 0$; $-150 = 120 + 120z - 90x$; $-270 = 120z - 90x$; si $z = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \therefore P(3, 0, 0)$

DINÁMICA. EL BLOQUE CON 30 [N] DE PESO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA, SE COLCOCA EN EL EXTREMO LIBRE DE UN RESORTE LINEAL CUYA

CONSTANTE DE RIGIDEZ ES $k = 1500 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$, Y POSTERIORMENTE SE COMPRIME ÉSTE UNA CIERTA LONGITUD "d". CONSIDERANDO QUE ÚNICAMENTE SE

TIENE FRICCIÓN (SECA) ENTRE EL CUERPO Y EL PLANO EN EL TRAMO RECTO (LOS TRAMOS CURVOS SON LISOS), DETERMINAR: a) EL VALOR "d" en [m],

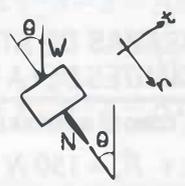
QUE SE DEBE COMPRIMIR EL RESORTE PARA QUE EL BLOQUE LLEGUE JUSTO AL PUNTO B CON RAPIDEZ NULA.; b) LA MAGNITUD DE LA ACELERACIÓN TOTAL EN EL PUNTO A.



Longitudes en metros.

SOLUCIÓN. ESTE PROBLEMA PUEDE RESOLVERSE EMPLEANDO " ECUACIONES DE MOVIMIENTO" O EL "MÉTODO DE TRABAJO Y ENERGÍA". SI SE APLICAN LAS "ECUACIONES DE MOVIMIENTO", CONVIENE ANALIZAR DE ATRÁS HACIA DELANTE, YA QUE SE CONOCEN LAS CONDICIONES FINALES, Y SE DESEA CALCULAR UN VALOR INICIAL, LA COMPRESIÓN "d" DEL RESORTE. DADO QUE SE CONOCE LA RAPIDEZ EN B, SE PUEDE DETERMINAR LA RAPIDEZ EN A.

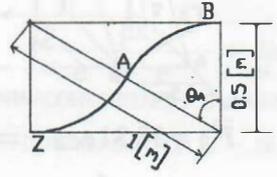
del DEL TRAMO CURVO ENTRE A y B



$$\sum F_t = -W \text{ sen } \theta = m \ddot{s} \quad ; \quad \sum F_n = W \text{ cos } \theta - N = m \frac{s^2}{R} \quad ; \quad \text{dado que: } \ddot{s} = -R \ddot{\theta}$$

(EL SIGNO NEGATIVO ES PORQUE EN ESTE MOVIMIENTO EL SENTIDO DEL MOVIMIENTO ANGULAR, θ , ES HORARIO, Y PORTANTO, NEGATIVO; Y AL MULTIPLICAR POR EL SIGNO CITADO SE OBTIENE LA MAGNITUD, EN ESTE CASO, DE LA ACELERACIÓN LINEAL - POSITIVA).. Y COMO

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad ; \quad -W \text{ sen } \theta = -mR \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \quad ; \quad mg \text{ sen } \theta d\theta = mR \dot{\theta} d\dot{\theta} \quad ; \quad \int_{\theta_A}^{\theta_B} g \text{ sen } \theta d\theta = \int_{\dot{\theta}_A}^{\dot{\theta}_B} R \dot{\theta} d\dot{\theta}$$



$$\text{cos } \theta_A = \frac{0.5}{1} \Rightarrow \theta = \text{ang cos } 0.5 \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

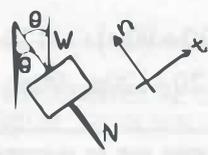
$$\int_{60^\circ}^{0^\circ} g \text{ sen } \theta d\theta = \int_{\dot{\theta}}^0 R \dot{\theta} d\dot{\theta} \Rightarrow [-g \text{ cos } \theta]_{60^\circ}^{0^\circ} = \left[\frac{0.5}{2} \dot{\theta}^2 \right]_{\dot{\theta}_A}^0$$

$$-g \text{ cos } 0^\circ + g \text{ cos } 60^\circ = 0 - 0.25 \dot{\theta}_A^2 \Rightarrow -9.8(1 - 0.5) = -0.25 \dot{\theta}_A^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_A^2 = \frac{9.8(0.5)}{0.25} \Rightarrow \dot{\theta}_A^2 = 19.6 \Rightarrow \dot{\theta}_A = -4.427 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (\text{EL SIGNO NEGATIVO ES PORQUE EL MOVIMIENTO ANGULAR ES EN SENTIDO HORARIO);}$$

$$s_A = -R \dot{\theta}_A \Rightarrow s_A = -0.5(-4.427) \therefore s_A = 2.214 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

LUEGO, SE PUEDE OBTENER LA RAPIDEZ EN Z : DEL TRAMO CURVO DE Z a A



$$\sum F_t = -W \text{ sen } \theta = m \ddot{s} \quad ; \quad \sum F_n = N - W \text{ cos } \theta = m \frac{s^2}{R} \quad \text{EN ESTE CASO } \ddot{s} = R \ddot{\theta} \quad (\text{MOVIMIENTO ANGULAR EN SENTIDO ANTIHORARIO) Y CON } \ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \text{ SE TIENE QUE:}$$

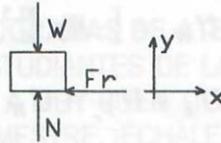
$$-mg \sin \theta d\theta = mR \dot{\theta} \frac{d\theta}{d\theta} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta_A} -g \sin \theta d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_A} 0.5 \dot{\theta} d\theta \Rightarrow [9.8 \cos \theta]_{0^\circ}^{60^\circ} = \left[0.25 \dot{\theta}^2 \right]_{\dot{\theta}_0}^{4.427}$$

EN ESTE TRAMO CURVO, COMO s_A es de 2.214 $\left[\frac{m}{s} \right]$ (POSITIVO) Y $s_A = R\theta_A$; θ_A ES POSITIVO Y VALE 4.427 $\left[\frac{rad}{s} \right]$. ENTONCES:

$$9.8(\cos 60^\circ - \cos 0^\circ) = 0.25(19.6 - \dot{\theta}_z^2) \Rightarrow 9.8(0.5 - 1) = 4.9 - 0.25\dot{\theta}_z^2 \Rightarrow 0.25\dot{\theta}_z^2 = 4.9 + 4.9$$

$$\dot{\theta}_z^2 = \frac{9.8}{0.25} \Rightarrow \dot{\theta}_z^2 = 39.2 \Rightarrow \dot{\theta}_z = 6.261 \left[\frac{m}{s} \right] \therefore s_z = 3.130 \left[\frac{m}{s} \right]$$

PARA EL TRAMO RECTO DE Y a Z, EL "dcl" ES:

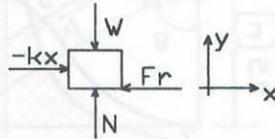


$$\sum F_x: -F_r = ma_x; \sum F_y: N - W = 0 \Rightarrow N = W \quad \text{COMO } F_r = \mu_k N \Rightarrow F_r = 0.5(30) \Rightarrow F_r = 15 [N]$$

$$-15 = \frac{30}{9.8} \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} \Rightarrow \int_0^{0.4} -4.9 dx = \int_{x_0}^{x_f} \dot{x} d\dot{x} \Rightarrow [-4.9x]_0^{0.4} = \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right]_{x_0}^{x_f}$$

$$\Rightarrow -4.9(0.4) = \frac{1}{2}(9.8) - \frac{1}{2}(\dot{x}_y^2) \Rightarrow 0.5\dot{x}_y^2 = 4.9 + 1.96 \Rightarrow \dot{x}_y^2 = 13.72 \Rightarrow \dot{x}_y = 3.704 \left[\frac{m}{s} \right]$$

FINALMENTE, PARA EL TRAMO RECTO EN EL QUE INTERACTÚA EL RESORTE, EL "dcl" ES:



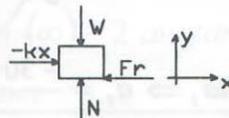
$$\sum F_x: -kx - F_r = ma_x; \sum F_y: N - W = 0$$

$$-1,500x - 15 = \frac{30}{9.8} \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} \Rightarrow \int_{-d}^0 (-490x - 4.9) dx = \int_0^{x_f} \dot{x} d\dot{x}$$

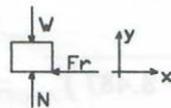
$$\left[-245x^2 - 4.9x \right]_{-d}^0 = \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right]_{x_0}^{x_f} \Rightarrow 0 - \left[-245(-d)^2 - 4.9(-d) \right] = \frac{1}{2}(13.72)$$

$$\Rightarrow d^2 - 0.02d - 0.028 = 0 \Rightarrow d_{1,2} = 0.01 \pm \sqrt{(0.01)^2 + 0.028} \Rightarrow d_1 = 0.1776 [m]; d_2 = -0.1576 [m]$$

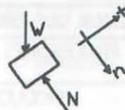
COMO EL VALOR NEGATIVO NO TIENE SIGNIFICADO FÍSICO, LA SOLUCIÓN ES $d = 0.1776 [m]$ AHORA, SI SE RESUELVE EL PROBLEMA CON EL "MÉTODO DE TRABAJO Y ENERGÍA", SE TIENE QUE: EL "dcl" (INTERACTUANDO EL RESORTE) ES:



EL "dcl" (PLANO) ES:



EL "dcl" (SUPERFICIE CURVAS) ES:



EL RESORTE REALIZA TRABAJO EN $-d \leq x \leq 0$ [m]

$$U_k = \int_{-d}^0 -kx \, dx \Rightarrow U_k = \left[-\frac{1}{2} kx^2 \right]_{-d}^0 \Rightarrow U_k = 0 - \left[-\frac{1}{2} (1500)(-d)^2 \right] \Rightarrow U_k = 750 d^2 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

LA FRICCIÓN REALIZA TRABAJO EN $-d \leq x \leq 0.4$ [m]

$$U_{F_r} = \int_{-d}^{0.4} -F_r \, dx; N - W = 0 \Rightarrow N = W; N = 30 \text{ [N]}; F_r = \mu N \Rightarrow F_r = 0.5(30) \Rightarrow F_r = 15 \text{ [N]}$$

$$U_{F_r} = \int_{-d}^{0.4} -15 \, dx \Rightarrow U_{F_r} = [-15x]_{-d}^{0.4} \Rightarrow U_{F_r} = -15(0.4) - [-15(-d)] \Rightarrow U_{F_r} = -6 - 15d \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

EL PESO REALIZA TRABAJO EN $0 \leq y \leq 0.5$ [m]

$$U_W = \int_0^{0.5} -W \, dy \Rightarrow U_W = [-Wy]_0^{0.5} \Rightarrow U_W = -15 \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

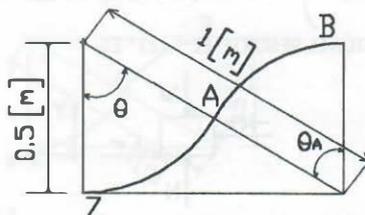
EL TRABAJO TOTAL ES IGUAL AL INCREMENTO DE ENERGÍA CINÉTICA: $U_k + U_{F_r} + U_W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

DADO QUE $v_1 = 0 \left[\frac{m}{s} \right]; v_2 = 0 \left[\frac{m}{s} \right]$, ENTONCES $750d^2 - 6 - 15d - 15 = 0 - 0 \Rightarrow 750d^2 - 15d - 21 = 0$

$$\Rightarrow d^2 - 0.02d - 0.028 = 0 \Rightarrow d_{1,2} = 0.01 \pm \sqrt{(0.01)^2 + 0.028} \Rightarrow d_{1,2} = 0.01 \pm \sqrt{0.0281}$$

$d_1 = 0.1776$ [m]; $d_2 = -0.1576$ [m]. EL VALOR NEGATIVO NO TIENE SIGNIFICADO FÍSICO, LUEGO $d = 0.1776$ [m].

b) PARA CALCULAR LA MAGNITUD DE LA ACELERACIÓN EN A, SE HACE LO SIGUIENTE:



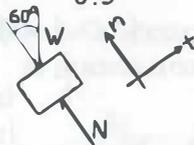
$$\cos \theta = \frac{0.5}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ; h_A = 0.5 \cos 60^\circ \Rightarrow h_A = 0.25 \text{ [m]}$$

$$U_W = \int_0^{0.25} -W \, dy \Rightarrow U_W = -7.5 \text{ [N} \cdot \text{m]}; U_k + U_{F_r} + U_W = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$750(0.1776)^2 - 6 - 15(0.1776) - 7.5 = \frac{1}{2} \frac{30}{9.8} v_A^2 \Rightarrow v_A^2 = \frac{7.5(19.6)}{30} \Rightarrow v_A^2 = 4.9 \left[\frac{m^2}{s^2} \right]$$

SUPOSICIÓN. A CONTENIDO EN LA PRIMERA CURVA: $a_n = \frac{v_A^2}{r} \Rightarrow a_n = \frac{4.9}{0.5} \Rightarrow a_n = 9.8 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

dcl:



$$\sum F_t: -W \sin 60^\circ = m a_t \Rightarrow a_t = \frac{-30(0.866)}{30} \Rightarrow a_t = -8.487 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$\therefore a_{TOT} = \sqrt{(9.8)^2 + (-8.487)^2} \Rightarrow a_{TOT} = 12.96 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES BERTHA FRANCO ROSAS Y YUKIHIRO MINAMI KOYAMA

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001

NÚMERO 17

17 DE FEBRERO DE 2001

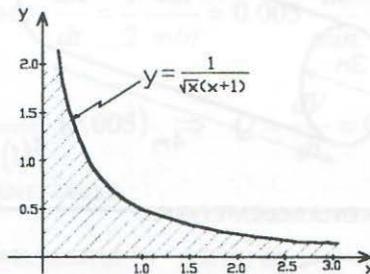
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTÁS A MUY BUEN TIEMPO DE RECUPERARTE SI TE HAS ATRASADO O NO HAS ESTUDIADO LO SUFICIENTE ESTE SEMESTRE. ¡ÉCHALE GANAS Y TENDRÁS ÉXITO!

CÁLCULO II

EVALUAR LA INTEGRAL IMPROPIA $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ Y PARA ELLO, GRAFICAR LA FUNCIÓN DEL INTEGRANDO.

SOLUCIÓN COMO SE OBSERVA EN LA GRÁFICA, ÉSTA ES ASINTÓTICA A LOS EJES "X" Y "Y"; LUEGO SE DEBEN CONSIDERAR DOS INTEGRALES IMPROPIAS, TOMANDO UN PUNTO, EN ESTE CASO, EL CORRESPONDIENTE A $x = 1$, COMO EL VALOR DE LAS ABCISAS QUE SEPARA EN DOS EL ÁREA.



FACULTAD INGENIERIA

ENTONCES LA INTEGRAL SE PUEDE EXPRESAR COMO $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

PARA RESOLVER LA INTEGRAL INDEFINIDA, SE REALIZA EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE: $u^2 = x; u = \sqrt{x}; du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Y SE HACE $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$, LUEGO SE TIENE QUE $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 1} = 2 \operatorname{arctan} \sqrt{x} + C$. DE DONDE

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{P \rightarrow 0} [2 \operatorname{arctan} \sqrt{x}]_P^1 + \lim_{R \rightarrow \infty} [2 \operatorname{arctan} \sqrt{x}]_1^R$$

$$= 2 \operatorname{arctan} (1) - 2 \operatorname{arctan} (0) + 2 \operatorname{arctan} (\infty) - 2 \operatorname{arctan} (1) = 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) + 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \pi$$

QUE ES EL VALOR DE LA INTEGRAL IMPROPIA LO QUE LA HACE "CONVERGENTE".

CÁLCULO II

CALCULAR EL VALOR DEL LÍMITE $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos 2x)^{\csc 3x}$

SOLUCIÓN. SI SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE "x", SE LLEGA A

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos 2x)^{\csc 3x} = 1^{\infty}$$

QUE ES UNA INDETERMINACIÓN. PARA CALCULAR ESTE LÍMITE SE PUEDE HACER LO SIGUIENTE:

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos 2x)^{\csc 3x} \Rightarrow \ln a = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos 2x)^{\csc 3x} \Rightarrow \ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + \cos 2x)^{\csc 3x}$$

$$\Rightarrow \ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \csc 3x \ln(x + \cos 2x) \Rightarrow \ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \cos 2x)}{\frac{1}{\csc 3x}} \Rightarrow \ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \cos 2x)}{\sin 3x}$$

AHORA SE CALCULA EL LIMITE DEL COCIENTE AL QUE SE LLEGÓ Y SE TIENE QUE: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \cos 2x)}{\sin 3x} = \frac{0}{0}$ (INDETERMINACIÓN)

SE APLICA LA REGLA DE L'HOPITAL Y SE TIENE QUE:

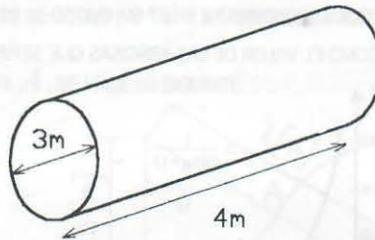
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \cos 2x)}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - 2 \sin 2x}{x + \cos 2x}}{3 \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin 2x}{3x \cos 3x + 3 \cos 2x \cos 3x} = \frac{1 - 0}{0 + 3} = \frac{1}{3}$$

DE DONDE $\ln a = \frac{1}{3} \Rightarrow a = e^{\frac{1}{3}} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} (x + \cos 2x)^{\csc 3x} = e^{\frac{1}{3}}$

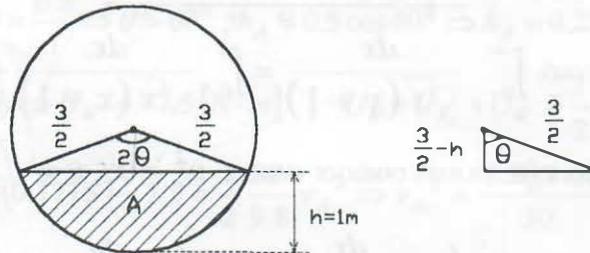
CÁLCULO I

EL TANQUE SUBTERRÁNEO DE UNA ESTACIÓN DE GASOLINA TIENE FORMA DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA Y ESTÁ SIENDO

LLENADO POR UNA PIPA. CUANDO EL NIVEL DE LA GASOLINA EN EL TANQUE ES DE 1 M, SE OBSERVA QUE ESTE NIVEL CRECE A RAZÓN DE $\frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ min}}$, ¿QUÉ VOLUMEN DE GASOLINA (GASTO) ESTÁ DESCARGANDO LA PIPA EN UN SEGUNDO?



SOLUCIÓN. UN CORTE TRANSVERSAL DEL TANQUE SE OBSERVA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



POR OTRA PARTE, EL GASTO "Q" SE DEFINE COMO LA DERIVADA DEL VOLUMEN CON RESPECTO AL TIEMPO. ESTO ES

$$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

EN ESTE PROBLEMA $V = 4A \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4 \frac{dA}{dt}$ DE LA FIGURA ANTERIOR SE PUEDE VER QUE EL ÁREA "MOJADA" (DONDE SÍ HAY GASOLINA) EQUIVALE A LA RESTA DEL ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR, MENOS EL ÁREA DEL TRIÁNGULO CENTRAL. Y ESTO SE DETERMINA DE LA SIGUIENTE FORMA

$$A = \frac{\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2\pi} 2\theta - 2 \left(\frac{\frac{3}{2} \sin \theta}{2} \frac{\frac{3}{2} \cos \theta}{2} \right) \Rightarrow A = \frac{9}{4} \theta - \frac{9}{4} \sin \theta \cos \theta \Rightarrow A = \frac{9}{8} (2\theta - \sin 2\theta)$$

COMO $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ ENTONCES $\frac{dA}{dt} = \frac{9}{8} (2 - 2 \cos 2\theta) \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{9}{4} (1 - \cos 2\theta) \frac{d\theta}{dt}$

LUEGO
$$\frac{dV}{dt} = 4 \left[\frac{9}{4} (1 - \cos 2\theta) \frac{d\theta}{dt} \right] \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 9 (1 - \cos 2\theta) \frac{d\theta}{dt}$$

EN LA MISMA FIGURA SE PUEDE ESTABLECER " θ " EN FUNCIÓN DE " h " DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\theta = \text{ang} \cos \frac{\frac{3}{2} - h}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \theta = \text{ang} \cos \frac{3-2h}{3} \quad \text{Y, COMO } \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dh} \frac{dh}{dt}, \text{ ENTONCES SE TIENE QUE}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3-2h}{3}\right)^2}} \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{9-9+12h-4h^2}} \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{\sqrt{4(3h-h^2)}} \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3h-h^2}} \frac{dh}{dt}$$

Y SUSTITUYENDO FINALMENTE ESTE RESULTADO, SE LLEGA A:
$$\frac{dV}{dt} = 9 (1 - \cos 2\theta) \frac{1}{\sqrt{3h-h^2}} \frac{dh}{dt}$$

AHORA SE OBTIENE EL VALOR DE θ CON $h = 1M$

$$\theta = \text{ang} \cos \frac{\frac{3}{2} - 1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \theta = \text{ang} \cos \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 70.529^\circ$$

CON ESTE VALOR Y LA RAZÓN DE CRECIMIENTO DEL NIVEL QUE ES $\frac{dh}{dt} = \frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ min}} = 0.005 \frac{m}{min}$ SE LLEGA POR ÚLTIMO AL RESULTADO DEL PROBLEMA QUE ES

$$Q = \frac{dV}{dt} = 9 \left[1 - \cos(141.058^\circ) \right] \frac{1}{\sqrt{3(1)-(1)^2}} (0.005) \Rightarrow Q = \frac{dV}{dt} = 0.0566 \frac{m^3}{min} \Rightarrow Q = 0.94 \frac{\text{litros}}{\text{segundo}}$$

POR LO QUE LA PIPA DESCARGA CASI UN LITRO POR SEGUNDO EN EL TANQUE.

CÁLCULO I

OBTENER LAS DERIVADAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES PARA EL VALOR DE " x " QUE SE PIDE:

i) $f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$; $x = 0$ ii) $y = \text{ang} \sec \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $x = 1.2$ iii) $x^3 + y^3 = 6xy$; $x = y = 3$

SOLUCIÓN SI SE PLANTEAN LAS CORRESPONDIENTES FÓRMULAS DE DERIVACIÓN Y SE APLICAN SE TIENE QUE:

i) $f(x) = \frac{\sec x}{1 + \tan x}$; $x = 0$. LA FÓRMULA PARA DERIVAR UN COCIENTE DE FUNCIONES ES $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$, DE DONDE, AL APLICAR TAMBIÉN

LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS, SE LLEGA A:

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)(\sec x \tan x) - \sec x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sec x \tan x + \sec x \tan^2 x - \sec x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

Y, COMO $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, ENTONCES

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x + \sec x (\sec^2 x - 1) - \sec^3 x}{(1 + \tan x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sec x \tan x + \sec^3 x - \sec x - \sec^3 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\sec x (\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2} \quad \text{Y, PARA } x = 0 \Rightarrow f'(0) = \frac{\sec 0 (\tan 0 - 1)}{(1 + \tan 0)^2} \therefore f'(0) = \frac{1(0-1)}{(1+0)^2} = -1$$

ii) $y = \text{ang sec } \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $x = 1.2$. LA FÓRMULA PARA DERIVAR LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA INVERSA "ang sec u" ES

$\frac{d}{dx} (\text{ang sen } u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2 - 1}}$. DE DONDE, AL PALICAR TAMBIÉN LAS DERIVADAS DE UN COCIENTE DE FUNCIONES Y DE UNA FUNCIÓN DENTRO DE UNA RAÍZ CUADRADA, SE LLEGA A:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1}(0) - 1 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)^2 - 1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x^2 - 1} \sqrt{\frac{1 - (x^2 - 1)}{x^2 - 1}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1} \sqrt{2 - x^2}}$$

Y PARA $x = 1.2 \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1.2} = \frac{-1.2}{\sqrt{1.2^2 - 1} \sqrt{2 - 1.2^2}} \therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1.2} = \frac{-1.2}{\sqrt{0.44} \sqrt{0.56}} \therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1.2} \approx -2.42$

iii) $x^3 + y^3 = 6xy$; $x = y = 3$. AQUÍ SE TRATA DE DERIVACIÓN IMPLÍCITA, PARA LA CUAL CABE RECORDAR QUE CADA OCASIÓN QUE APAREZCA LA VARIABLE DEPENDIENTE "y", SE TRATA DE UNA FUNCIÓN DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x" Y QUE POR CONSIGUIENTE SE DEBE APLICAR LA "REGLA DE LA CADENA". SE TIENE ENTONCES:

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6x \frac{dy}{dx} + 6y \Rightarrow \frac{dy}{dx} (3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} \quad \text{Y, PARA LOS VALORES}$$

PEDIDOS SE TIENE FINALMENTE QUE $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=y=3} = \frac{6(3) - 3(3)^2}{3(3)^2 - 6(3)} \therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=y=3} = -1$

TUTORÍA

* SE PUEDE DECIR QUE EL MÉTODO TUTORIAL ES UN CONJUNTO SISTEMATIZADO DE ACCIONES EDUCATIVAS CENTRADAS EN EL ESTUDIANTE. EN ESE SENTIDO, DENTRO DEL CONTEXTO DE LA UNAM SE LLEVAN A CABO EN LA ACTUALIDAD UN CONJUNTO DE PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS DENOMINADAS TUTORÍAS, QUE CONSISTE EN UN INSTRUMENTO DE LA ORIENTACIÓN EDUCATIVA PARA REALIZAR LA FUNCIÓN DE SUPERVISAR Y SERVIR A LOS ESTUDIANTES NO SÓLO EN EL ASPECTO COGNITIVO DEL APRENDIZAJE SINO INCLUSO EN EL AFECTIVO.

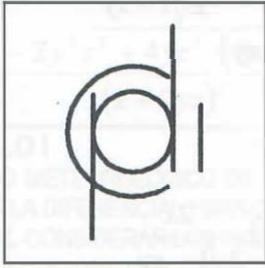
CON ESTO SE TRATA DE GUIAR DE UN MODO MÁS EFICAZ A LOS ESTUDIANTES TANTO EN LAS ACTIVIDADES ACADÉMICAS COMO EN LA PROBLEMÁTICA PROPIA DE LA JUVENTUD. CON BASE EN ESTAS CONSIDERACIONES, LA TUTORÍA ES UN MÉTODO CENTRADO EN EL ALUMNO Y EN EL CUAL EL PAPEL DEL PROFESOR - TUTOR TIENE ACTITUDES POSITIVAS HACIA LA ENSEÑANZA, LOS ESTUDIANTES, LA INSTITUCIÓN Y EL CAMBIO, CUMPLE CON LAS CONDICIONES PREVISTAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE.

LA TUTORÍA IMPLICA LA EXISTENCIA DE UNA RELACIÓN INTERPERSONAL ESTRECHA, CON MUCHA FRECUENCIA SU ÉXITO DEPENDE DE LA FORMA Y EL DESARROLLO DE DICHA RELACIÓN. NO SÓLO SE TRATA DEL CONTACTO FORMAL, DISCIPLINARIO, PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINADOS PROBLEMAS, NI TAMPOCO DE QUE EL TUTOR SE TRANSFORME EN UNA ESPECIE DE GUÍA SENTIMENTAL DEL ESTUDIANTE. SIN PERDER DE VISTA LOS OBJETIVOS ACADÉMICOS, MOTIVO PRINCIPAL DE LA RELACIÓN, LO IMPORTANTE ES EL EQUILIBRIO EN AMBAS SITUACIONES.*

ALCÁNTARA SANTUARIO ARMANDO. CONSIDERACIONES SOBRE LA TUTORÍA EN LA DOCENCIA UNIVERSITARIA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. CONSÉRVANLOS Y COLECCIONALOS. SIEMPRE SERÁN DE UTILIDAD.

CÁLCULO II

CALCULAR LAS DERIVADAS PARCIALES DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN, ASÍ COMO LAS DERIVADAS PARCIALES MIXTAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL:

$$i) z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2); \quad ii) z = f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}; \quad iii) u = f(x, y, z) = x^4 y^3 z^2;$$

$$iv) z = \cosh \sqrt{1 - xy}; \quad v) f(x, y) = e^{x^2 + y^2}; \quad vi) xy + xz + yz^2 = 5; \quad z = f(x, y)$$

SOLUCIÓN.

$$i) z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2)(2) - 2x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(2) - 2y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(0) - 2x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$ii) z = f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^3 + y^3)(3x^2) - (x^3 - y^3)(3x^2)}{(x^3 + y^3)^2} = \frac{3x^5 + 3x^2 y^3 - 3x^5 + 3x^2 y^3}{(x^3 + y^3)^2}$$

$$= \frac{6x^2 y^3}{(x^3 + y^3)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^3 + y^3)(-3y^2) - (x^3 - y^3)(3y^2)}{(x^3 + y^3)^2} = \frac{-3x^3 y^2 - 3y^5 - 3x^3 y^2 + 3y^5}{(x^3 + y^3)^2} = \frac{-6x^3 y^2}{(x^3 + y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x^3 + y^3)^2(12xy^3) - 6x^2 y^3 \cdot 2(x^3 + y^3) \cdot 3x^2}{(x^3 + y^3)^4} = \frac{12x^4 y^3 + 12xy^6 - 36x^4 y^3}{(x^3 + y^3)^3} = \frac{12xy^6 - 24x^4 y^3}{(x^3 + y^3)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x^3 + y^3)^2(-12x^3 y) - (-6x^3 y^2) \cdot 2(x^3 + y^3) \cdot 3y^2}{(x^3 + y^3)^4} = \frac{-12x^6 y - 12x^3 y^4 + 36x^3 y^4}{(x^3 + y^3)^3} = \frac{-12x^6 y + 24x^3 y^4}{(x^3 + y^3)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{(x^3 + y^3)^2 \cdot 18x^2 y^2 - 6x^2 y^3 \cdot 2(x^3 + y^3) \cdot 3y^2}{(x^3 + y^3)^4} = \frac{18x^5 y^2 + 18x^2 y^5 - 36x^2 y^5}{(x^3 + y^3)^3} = \frac{18x^5 y^2 - 18x^2 y^5}{(x^3 + y^3)^3}$$

$$iii) u = f(x, y, z) = x^4 y^3 z^2 \Rightarrow u_x = 4x^3 y^3 z^2; \quad u_y = 3x^4 y^2 z^2; \quad u_z = 2x^4 y^3 z$$

$$u_{xx} = 12x^2 y^3 z^2; \quad u_{yy} = 6x^4 y z^2; \quad u_{zz} = 2x^4 y^3; \quad u_{xy} = 12x^3 y^2 z^2; \quad u_{xz} = 8x^3 y^3 z; \quad u_{yz} = 6x^4 y^2 z$$

$$iv) z = \cosh \sqrt{1 - xy} \Rightarrow z_x = \frac{-y}{2\sqrt{1 - xy}} \sinh \sqrt{1 - xy}; \quad z_y = \frac{-x}{2\sqrt{1 - xy}} \sinh \sqrt{1 - xy}$$

$$z_{xx} = \left(\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}} \right) \left(-\cosh \sqrt{1-xy} \right) \left(\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}} \right) + \sinh \sqrt{1-xy} \cdot \frac{2\sqrt{1-xy}(0) - (-y) \frac{-2y}{2\sqrt{1-xy}}}{4(1-xy)}$$

$$= \frac{y^2 \cosh \sqrt{1-xy}}{4(1-xy)} - \frac{y^2 \sinh \sqrt{1-xy}}{4(1-xy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{yy} = \frac{-x}{2\sqrt{1-xy}} \cosh \sqrt{1-xy} \cdot \frac{-x}{2\sqrt{1-xy}} + \sinh \sqrt{1-xy} \cdot \frac{2\sqrt{1-xy}(0) - (-x) \frac{-2x}{2\sqrt{1-xy}}}{4(1-xy)}$$

$$= \frac{x^2 \cosh \sqrt{1-xy}}{4(1-xy)} - \frac{x^2 \sinh \sqrt{1-xy}}{4(1-xy)^{\frac{3}{2}}}$$

v) $f(x, y) = e^{x^2+y^2} \Rightarrow f_x = 2xe^{x^2+y^2}; f_y = 2ye^{x^2+y^2}; f_{xx} = 2x \cdot 2xe^{x^2+y^2} + 2e^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2}(2x^2 + 1)$
 $f_{yy} = 2y \cdot 2ye^{x^2+y^2} + 2e^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2}(2y^2 + 1); f_{xy} = 2x \cdot 2ye^{x^2+y^2} + e^{x^2+y^2}(0) = 4xye^{x^2+y^2}$

vi) $xy + xz + yz^2 = 5 \Rightarrow y + x \frac{\partial z}{\partial x} + z + 2yz \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y-z}{x+2yz}; x + x \frac{\partial z}{\partial y} + 2yz \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0 \therefore \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x-z^2}{x+2yz}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(x+2yz) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) - (-y-z) \left(1 + 2y \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{(x+2yz)^2} = \frac{(x+2yz) \left(-\frac{-y-z}{x+2yz} \right) + (y+z) \left[1 + 2y \left(\frac{-y-z}{x+2yz} \right) \right]}{(x+2yz)^2}$$

$$= \frac{y+z + (y+z) \left(\frac{x+2yz-2y^2-2yz}{x+2yz} \right)}{(x+2yz)^2} = \frac{xy + 2y^2z + xz + 2yz^2 + xy - 2y^3 - 2y^2z + xz}{(x+2yz)^3} =$$

$$= \frac{2xy + 2xz + 2yz^2 - 2y^3}{(x+2yz)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x+2yz) \left(-2z \frac{\partial z}{\partial y} \right) - (-x-z^2) \left(2y \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \right)}{(x+2yz)^2} = \frac{(x+2yz) \left[-2z \left(\frac{-x-z^2}{x+2yz} \right) \right] + (x+z^2) \left[2y \left(\frac{-x-z^2}{x+2yz} \right) + 2z \right]}{(x+2yz)^2} =$$

$$= \frac{2xz + 2z^3 + (x+z^2) \left[\frac{-2xy-2yz^2}{x+2yz} + 2z \right]}{(x+2yz)^2} = \frac{2x^2z + 4xyz^2 + 2xz^3 + 4yz^4 + (x+z^2)(-2xy-2yz^2+2xz+4yz^2)}{(x+2yz)^3}$$

$$= \frac{2x^2z + 4xyz^2 + 2xz^3 + 4yz^4 - 2x^2y + 2xyz^2 + 2x^2z - 2xyz^2 + 2yz^4 + 2xz^3}{(x+2yz)^3} = \frac{4x^2z + 4xyz^2 + 4xz^3 + 6yz^4 - 2x^2y}{(x+2yz)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{(x+2yz) \left(-1 - \frac{\partial z}{\partial y} \right) - (-y-z) \left(2y \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \right)}{(x+2yz)^2} = \frac{(x+2yz) \left(-1 - \frac{-x-z^2}{x+2yz} \right) + (y+z) \left(2y \cdot \frac{-x-z^2}{x+2yz} + 2z \right)}{(x+2yz)^2} =$$

$$= \frac{(x+2yz) \left(\frac{-x-2yz+x+z^2}{x+2yz} \right) + (y+z) \left(\frac{-2xy-2yz^2+2xz+4yz^2}{x+2yz} \right)}{(x+2yz)^2}$$

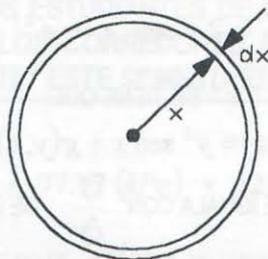
$$\frac{-2xyz + xz^2 - 4y^2z^2 + 2yz^3 - 2xy^2 + 2y^2z^2 + 2xyz - 2xyz + 2yz^3 + 2xz^2}{(x + 2yz)^3} =$$

$$= \frac{3xz^2 - 2y^2z^2 + 4yz^3 - 2xy^2 - 2xyz}{(x + 2yz)^3}$$

CÁLCULO I

UN GLOBO METEOROLÓGICO DE FORMA ESFÉRICA TIENE 2 M DE RADIO Y AL SUBIR A CIERTA ALTURA, SU RADIO AUMENTÓ 25 MM. UTILIZAR LA DIFERENCIAL PARA CALCULAR CUÁNTO AUMENTARON SU VOLUMEN Y SU SUPERFICIE, Y DETERMINAR EL PORCENTAJE DE ERROR AL CONSIDERARLOS INCREMENTOS APROXIMADOS QUE DA LA DIFERENCIAL, EN LUGAR DE LOS EXACTOS.

SOLUCIÓN. ENSEGUIDA SE PRESENTA EL MODELO GEOMÉTRICO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL GLOBO, DONDE SE DENOTA CON "x" AL RADIO Y CON "dx" INCREMENTO DEL MISMO.



AL APLICAR EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL AL VOLUMEN, SE TIENE QUE:

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow dV = 4\pi x^2 dx \Rightarrow dV = 4\pi(2)^2(0.025) \Rightarrow dV = 1.2566 \text{ m}^3$$

QUE ES EL VALOR APROXIMADO DEL INCREMENTO DEL VOLUMEN. PARA CALCULAR EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO, SE CALCULAN LOS VALORES INICIAL Y FINAL DEL VOLUMEN Y SE RESTAN. ASÍ SE LLEGA A:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 \Rightarrow V_1 = 33.5104 \text{ m}^3 \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi(2.025)^3 \Rightarrow V_2 = 34.7828 \text{ m}^3$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 \Rightarrow \Delta V = 1.2724 \text{ m}^3$$

QUE ES EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO DEL VOLUMEN. AHORA SE CALCULAN EL ERROR ABSOLUTO, EL RELATIVO Y EL PORCENTAJE DEL ERROR QUE SE COMETE AL UTILIZAR LA DIFERENCIAL EN LUGAR DEL INCREMENTO EXACTO. ESTO SE HACE COMO SIGUE:

$$E_a = |\Delta V - dV| = 0.0158 \Rightarrow E_r = \frac{E_a}{\Delta V} = \frac{0.0158}{1.2724} = 0.0124 \Rightarrow P_e = 1.24\%$$

AL APLICAR EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL A LA SUPERFICIE DEL GLOBO, SE TIENE QUE:

$$S = 4\pi x^2 \Rightarrow dS = 8\pi x dx \Rightarrow dS = 8\pi(2)(0.025) \Rightarrow dS = 1.2566 \text{ m}^2$$

QUE ES EL VALOR APROXIMADO DEL INCREMENTO DE LA SUPERFICIE DEL GLOBO. PARA CALCULAR EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO, SE CALCULAN LOS VALORES INICIAL Y FINAL DE LA SUPERFICIE Y SE RESTAN. ASÍ SE LLEGA A:

$$S_1 = 4\pi(2)^2 \Rightarrow S_1 = 50.2656 \text{ m}^2 \quad \text{y} \quad S_2 = 4\pi(2.025)^2 \Rightarrow S_2 = 51.5301 \text{ m}^2$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 \Rightarrow \Delta S = 1.2645 \text{ m}^2$$

QUE ES EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO DE LA SUPERFICIE. AHORA, IGUAL QUE CON EL VOLUMEN, SE CALCULAN EL ERROR ABSOLUTO, EL RELATIVO Y EL PORCENTAJE DEL ERROR QUE SE COMETE AL UTILIZAR LA DIFERENCIAL EN LUGAR DEL INCREMENTO EXACTO. ESTO SE HACE COMO SIGUE:

$$E_a = |\Delta S - dS| = 0.0079 \text{ m}^2 \Rightarrow E_r = \frac{E_a}{\Delta S} = \frac{0.0079}{1.2645} = 0.00625 \Rightarrow P_e = 0.625\%$$

CÁLCULO III

SEA EL CAMPO VECTORIAL DE FUERZAS CONSERVATIVO

$$\vec{F}(x, y, z) = y^2 \cos x \hat{i} + (2y \operatorname{sen} x + e^{2z}) \hat{j} + 2ye^{2z} \hat{k}$$

i) COMO EL CAMPO ES CONSERVATIVO, LA INTEGRAL $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA. ENCONTRAR LA FUNCIÓN POTENCIAL f DE \vec{F} .

ii) CALCULAR EL TRABAJO REALIZADO POR \vec{F} PARA LLEVAR UNA PARTÍCULA DEL PUNTO $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ AL PUNTO $\left(\frac{\pi}{2}, 3, 2\right)$

SOLUCIÓN.

i) UNA INTEGRAL DE LÍNEA ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA SI EXISTE UNA FUNCIÓN DIFERENCIABLE $f(x, y, z)$ TAL QUE

$\nabla f(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$, ESTO ES,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2ye^{2z}$$

SI SE INTEGRA LA PRIMERA EXPRESIÓN CON RESPECTO A "x" SE TIENE QUE:

$$f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + g(y, z)$$

SE DERIVA ESTA EXPRESIÓN CON RESPECTO A "y" Y SE IGUALA CON $\frac{\partial f}{\partial y}$, DE DONDE SE OBTIENE:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} \quad ; \quad 2y \operatorname{sen} x + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z} \Rightarrow \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = e^{2z}$$

SE INTEGRA ESTA ÚLTIMA EXPRESIÓN CON RESPECTO A "y" Y SE OBTIENE $g(y, z)$, QUE SE SUSTITUYE EN $f(x, y, z)$. ASÍ SE TIENE QUE:

$$g(y, z) = ye^{2z} + h(z) \Rightarrow f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + h(z)$$

PARA OBTENER EL VALOR DE $C(z)$ SE DERIVA LA EXPRESIÓN OBTENIDA CON RESPECTO A "z" Y SE IGUALA A $\frac{\partial f}{\partial z}$ DE DONDE:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2ye^{2z} + h'(z) \Rightarrow ; \quad 2ye^{2z} + h'(z) = 2ye^{2z} \Rightarrow h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C$$

ENTONCES, LA FUNCIÓN POTENCIAL f DE \vec{F} ES $f(x, y, z) = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + C$.

ii) PARA EL TRABAJO REQUERIDO ENTRE LOS PUNTOS DADOS, SE EVALÚA LA FUNCIÓN POTENCIAL ENTRE ELLOS Y SE LLEGA A:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} \right]_{\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}, 3, 2\right)} = (9 + 3e^4) - (0 + e) = 9 + 3e^4 - e \approx 170.08 \quad u.T.$$

TUTORÍA

AL ASISITIR CON SU TUTOR, EL ALUMNO: PUEDE PEDIR ORIENTACIÓN SOBRE LA RESOLUCIÓN DE ALGÚN PROBLEMA ACADÉMICO O EXISTENCIAL; TENER UN AMIGO O AMIGA CON EXPERIENCIA Y CONOCIMIENTOS; TENER ALGUIEN CON QUIEN COMUNICARSE, YA SEA SOBRE ALGO RELACIONADO CON SUS ESTUDIOS O SOBRE ALGUNA CUESTIÓN PERSONAL; PUEDE RECIBIR CONSEJOS SOBRE SUS REINSCRIPCIONES; PUEDE COMPARTIR UN LIBRO O EL GUSTO POR LA MÚSICA; PUEDE RECIBIR CONSUELO SI TUVO DIFICULTADES EN ALGÚN EXAMEN O COMPARTIR ALEGRIA SI TUVO ÉXITO; PUEDE HABLAR SOBRE MUCHOS TEMAS Y ESTAR SEGURO DE QUE SERÁ ESCUCHADO.

CULTURA . DOS PEQUEÑOS Y BELLOS POEMAS DE MARIO BENEDETTI**TALANTES**

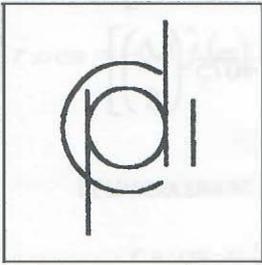
UN HOMBRE / ALEGRE / ES UNO MÁS / EN EL CORO / DE HOMBRES / ALEGRES / UN HOMBRE / TRISTÉ / NO SE PARECE / A NINGÚN OTRO / HOMBRE / TRISTE.

EL OLVIDO

EL OLVIDO NO ES VICTORIA / SOBRE EL MAL NI SOBRE NADA / Y SÍ ES LA FORMA VELADA / DE BURLARSE DE LA HISTORIA / PARA ESO ESTÁ LA MEMORIA / QUE SE ABRE DE PAR EN PAR / EN BUSCA DE ALGÚN LUGAR / QUE DEVUELVA LO PERDIDO / NO OLVIDA EL QUE FINJE OLVIDO / SINO EL QUE PUEDE OLVIDAR.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA



EDITORIAL

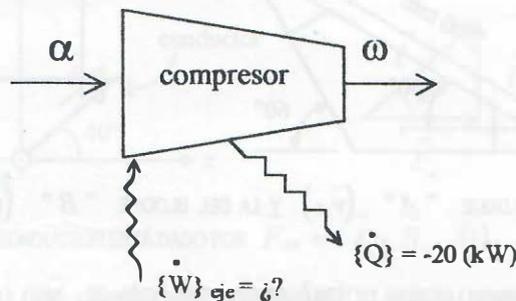
ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. **LOS CORREDORES GUARDAN ENERGÍA PARA "CERRAR FUERTE" Y GANAR. ¡YA ES HORA DE "CERRAR FUERTE" ESTE SEMESTRE! ¡ÉCHALE TODAS LAS GANAS Y GANARÁS!**

TERMODINÁMICA

UN COMPRESOR RECIBE $45 \left(\frac{m^3}{min} \right)$ DE UN GAS IDEAL A $77.17 (kPa)$ Y $22 (^{\circ}C)$. EL EQUIPO PIERDE $20 (kW)$ DE POTENCIA CALORÍFICA Y ENTREGA AL GAS A $700 (kPa)$ Y $50 (^{\circ}C)$ POR UN TUBO DE $20 (cm)$ DE DIÁMETRO. CALCULE LA POTENCIA DE COMPRESIÓN. CONSIDERE PARA EL GAS $R = 0.2969 (J/(gK))$ Y $k = 1.4$.

RESOLUCIÓN

SISTEMA: ABIERTO (EL COMPRESOR Y EL GAS QUE CONTIENE EN CADA INSTANTE).



$$\dot{V}_\alpha = 45 \left(\frac{m^3}{min} \right), P_\alpha = 77.17 (kPa), T_\alpha = 295.15 (K)$$

$$D_\omega = 0.2 (m), P_\omega = 700 (kPa), T_\omega = 423.15 (K) ; \dot{a}_\omega = \frac{\pi D_\omega^2}{4}$$

1. BALANCE DE MASA

CONSIDERE QUE EL PROCESO SUCEDE EN CONDICIONES DE FLUJO ESTABLE Y DE ESTADO ESTABLE.

POR SER FLUJO ESTABLE: $m_\alpha - m_\omega = 0$

$$m_\alpha = m_\omega = m ; m = \frac{\dot{V}_\alpha P_\alpha}{R T_\alpha} = 660.4756 \left(\frac{g}{s} \right) ; \vec{V}_\omega = \dot{V}_\alpha \frac{T_\alpha P_\omega}{T_\omega P_\alpha \dot{a}_\omega} = 151.0461 \left(\frac{m}{s} \right)$$

2. BALANCE DE ENERGÍA

CONSIDERE QUE LA VELOCIDAD EN LA ENTRADA ES DESPRECIABLE (EN COMPARACIÓN CON LA DE LA SALIDA), QUE EL CAMBIO EN LA ENERGÍA POTENCIAL ES NULO Y QUE NO HAY TRABAJO DE EXPANSIÓN NI DE OTROS TIPOS CASIESTÁTICOS.

$$m \left(h_\alpha - h_\omega - \frac{1}{2} \vec{V}_\omega^2 \right) + \left\{ \dot{Q} \right\} + \left\{ \dot{W} \right\}_{ eje } = 0 ; \left\{ \dot{W} \right\}_{ eje } = - \left\{ \dot{Q} \right\} - m \left(h_\alpha - h_\omega - \frac{1}{2} \vec{V}_\omega^2 \right)$$

POR LAS FÓRMULAS DE JOULE Y DE MAYER

$$h_\alpha - h_\omega = \frac{kR}{k-1} (T_\alpha - T_\omega) ; \left\{ \dot{W} \right\}_{\text{eje}} = - \left\{ \dot{Q} \right\} - m \left[\frac{kR}{k-1} (T_\alpha - T_\omega) - \frac{1}{2} \vec{V}_\omega^2 \right]$$

$$\left\{ \dot{W} \right\}_{\text{eje}} = - \left[-20 \times 10^3 \left(\frac{J}{s} \right) \right] - 660.4756 \left(\frac{g}{s} \right) \left[-133.0112 \left(\frac{J}{g} \right) - 11.4075 \left(\frac{J}{g} \right) \right]$$

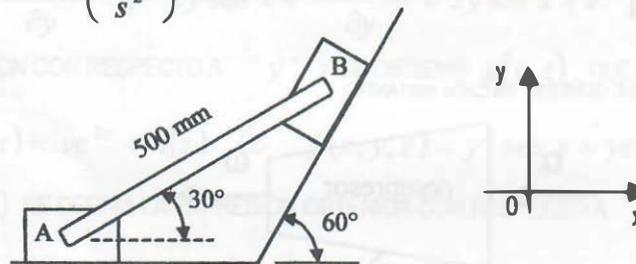
$$\left\{ \dot{W} \right\}_{\text{eje}} = 115384.9977 (W) = 115.385 (kW)$$

COMENTARIOS:

- EL GASTO VOLUMÉTRICO EN LA ENTRADA α $\left[45 \left(\frac{m^3}{min} \right) \right]$ ES DISTINTO DEL DE LA SALIDA ω $\left[7.11 \left(\frac{m^3}{min} \right) \right]$ PUES EL GAS ES UNA SUSTANCIA COMPRESIBLE. SIN EMBARGO, EL GASTO MÁSSICO ES EL MISMO EN LA ENTRADA Y EN LA SALIDA.
- OBSERVE QUE EL CAMBIO EN LA ENERGÍA CINÉTICA ES SOLAMENTE EL 8.6 (%) DEL CAMBIO EN LA ENTALPIA. EL CAMBIO EN LA ENERGÍA CINÉTICA SE DESPRECIA EN MUCHAS APLICACIONES.
- LA POTENCIA DE COMPRESIÓN SE USA PARA CAMBIAR EL ESTADO DEL GAS, PARA ACELERARLO Y PARA COMPENSAR LA POTENCIA CALORÍFICA QUE SE ENVÍA AL EXTERIOR DEL SISTEMA.

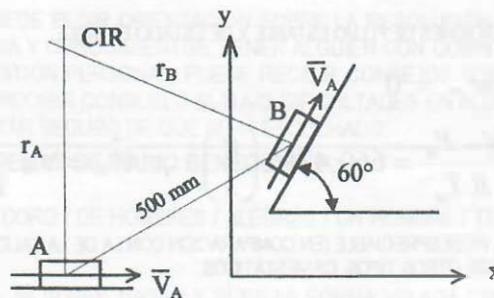
CINEMÁTICA

PARA EL ARREGLO MOSTRADO EN LA FIGURA Y EN EL INSTANTE CONSIDERADO, LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN ANGULARES DE LA BARRA \overline{AB} SON $\overline{\omega} = 20 \hat{k} \left(\frac{rad}{s} \right)$ y $\overline{\alpha} = -10 \hat{k} \left(\frac{rad}{s^2} \right)$. PARA TALES CONDICIONES, DETERMINAR LAS VELOCIDADES DE CADA BLOQUE.



SOLUCIÓN. PARA DETERMINAR LA VELOCIDAD DEL BLOQUE "A" (\overline{v}_A) Y LA DEL BLOQUE "B" (\overline{v}_B), SE APLICARÁ EL CONCEPTO DE CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN (CIR)

PARA DETERMINAR LA UBICACIÓN DEL "CIR", PRIMERO DEBERÁ DETERMINARSE LA DIRECCIÓN DE \overline{v}_A y \overline{v}_B ; PARA LOGRAR ESTO, NÓTESE QUE LA BIELA "AB" GIRA EN SENTIDO ANTIHORARIO ($\overline{\omega} = 20 \hat{k}$), POR LO QUE LA VELOCIDAD DEL BLOQUE "A" SERÁ PARALELA AL PLANO HORIZONTAL POR OTRA PARTE, EL BLOQUE "B" SE DESPLAZARÁ HACIA ARRIBA DEL PLANO INCLINADO, TENIÉNDOSE LA VELOCIDAD DE "B" EN ESA DIRECCIÓN. CONOCIDAS LAS DIRECCIONES DE \overline{v}_A y \overline{v}_B , SE TRAZAN RECTAS PERPENDICULARES Y DONDE SE INTERSECTAN ÉSTAS, SE TIENE EL "CIR".



EN ESTA FIGURA SE OBSERVA QUE LA BARRA Y LAS LÍNEAS " r_A " y " r_B " FORMAN EL TRIÁNGULO $ABCIR$, EL CUAL ES EQUILÁTERO; POR LO TANTO: $r_A = r_B = 0.5 m \dots (1)$. LA VELOCIDAD DEL BLOQUE "A" SE OBTIENE AL APLICAR LA EXPRESIÓN:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/CIR} \dots (2) \text{ de donde : } \vec{\omega}_{AB} = 20 \hat{k} \left(\frac{\text{rad}}{s} \right) \dots (3)$$

ADEMÁS $\vec{r}_{A/CIR} = -0.5 \hat{j} (m) \dots (4)$. AHORA SE SUSTITUYEN (3) y (4) en (2) Y SE TIENE QUE:

$$\vec{v}_A = \left(20 \hat{k} \right) \times \left(-0.5 \hat{j} \right) \therefore \vec{v}_A = 10 \hat{i} \left(\frac{m}{s} \right)$$

DE MANERA SIMILAR SE OBTIENE LA VELOCIDAD DEL BLOQUE "B", ES DECIR, $\vec{v}_B = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/CIR} \dots (5)$; EN DONDE

$$\vec{r}_{B/CIR} = 0.5 \left(\cos 60^\circ \hat{i} - \sin 60^\circ \hat{j} \right) \Rightarrow \vec{r}_{B/CIR} = 0.25 \hat{i} - 0.433 \hat{j} \dots (6)$$

SE SUSTITUYEN (3) y (6) en (5) Y SE TIENE QUE:

$$\vec{v}_B = \left(20 \hat{k} \right) \times \left(0.25 \hat{i} - 0.433 \hat{j} \right) \therefore \vec{v}_B = 5 \hat{i} + 8.66 \hat{j} \left(\frac{m}{s} \right)$$

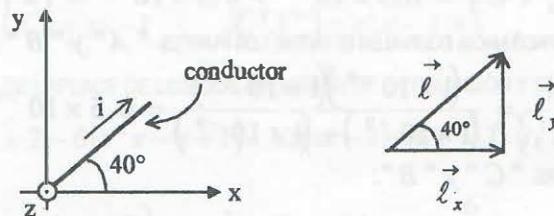
COMO EJERCICIO, SE DEJA AL LECTOR DETERMINAR LAS ACELERACIONES LINEALES DE CADA BLOQUE, DEBIENDO LLEGAR A LOS VALORES:

$$\vec{a}_A = 110.47 \hat{i} \left(\frac{m}{s^2} \right) \text{ y } \vec{a}_B = -60.235 \hat{i} - 104.33 \hat{j} \left(\frac{m}{s^2} \right).$$

FÍSICA EXPERIMENTAL

UN CONDUCTOR, CUYA LONGITUD ES DE $3.6 [cm]$ SE ENCUENTRA COLOCADO COMO SE INDICA EN LA FIGURA. SI LA CORRIENTE ELÉCTRICA QUE TRANSPORTA EL CONDUCTOR ES DE $3.4 [A]$, DETERMINAR EL VECTOR FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO QUE ACTÚA SOBRE EL CONDUCTOR, CONSIDERANDO QUE ÉSTE SE HALLA

INMERSO EN EL CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B} = 0.5 \hat{j} - 0.4 \hat{k} [T]$; EXPRESAR EL RESULTADO EN LA UNIDAD DEL "SI".



RESOLUCIÓN.

EL VECTOR FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO EN UN CONDUCTOR ESTÁ DADO POR $\vec{F}_m = i \vec{\ell} \times \vec{B} \dots (1)$. AHORA, DE LA SEGUNDA FIGURA,

$$\vec{\ell} = \ell_x \hat{i} + \ell_y \hat{j}; \ell_x = \ell \cos 40^\circ = 0.036 \cos 40^\circ = 0.0276 [m]; \ell_y = \ell \sin 40^\circ = 0.036 \sin 40^\circ = 0.0231 [m]$$

$$\vec{\ell} = 0.0276 \hat{i} + 0.0231 \hat{j} [m] \dots (2); i = 3.4 [A] \dots (3); \vec{B} = 0.5 \hat{j} - 0.4 \hat{k} [T] \dots (4)$$

SE SUSTITUYEN (2), (3) y (4) en (1) Y SE TIENE QUE:

$$\vec{F}_m = (3.4 A) \left[(0.0276 \hat{i} + 0.0231 \hat{j}) m \times (0.5 \hat{j} - 0.4 \hat{k}) T \right]. \text{ LUEGO, SE REALIZA EL PRODUCTO CRUZ Y SE LLEGA A:}$$

$$\vec{\ell} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.0276 & 0.0231 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.4 \end{vmatrix} = -0.00924 \hat{i} + 0.1104 \hat{j} + 0.0138 \hat{k} [T \cdot m]$$

$$\text{LUEGO } \vec{F}_m = -0.031416 \hat{i} + 0.037536 \hat{j} + 0.0138 \hat{k}$$

SI SE HACE UN ANÁLISIS DE UNIDADES, SE VE QUE:

$$\left[\vec{F} \right]_u = A \cdot m \cdot T = A \cdot m \cdot \frac{Wb}{m^2} = A \cdot \frac{Wb}{m} = A \cdot \frac{V \cdot s}{m} = A \cdot V \cdot \frac{s}{m} = A \cdot \frac{J}{C} \cdot \frac{s}{m} = \frac{C}{s} \cdot \frac{J}{C} \cdot \frac{s}{m} = \frac{J}{m} = \frac{N \cdot m}{m} = [N]$$

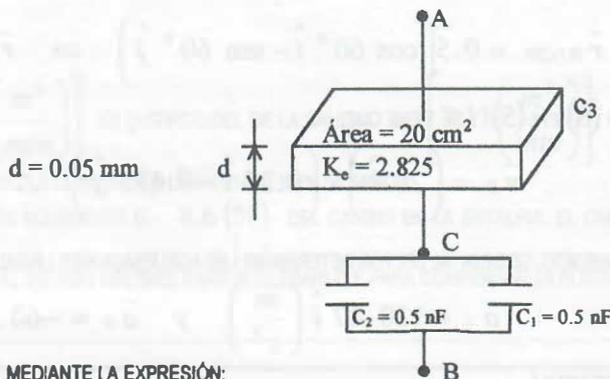
$$\text{POR LO TANTO } \vec{F}_m = -0.0314 \hat{i} + 0.0375 \hat{j} + 0.0138 \hat{k} [N]$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

UN CIRCUITO CON CAPACITORES SE MUESTRA EN LA FIGURA. CON BASE EN ELLO, DETERMINAR:

- LA CAPACITANCIA EQUIVALENTE ENTRE LOS PUNTOS "A" y "B".
- LA DIFERENCIA DE POTENCIAL V_{AB} SI $Q_{C_1} = 0.25 \mu C$ y $C_3 = 1 nF$.
- LA ENERGÍA ALMACENADA POR EL CAPACITOR C_2 SI $Q_{C_2} = 0.25 \mu C$ y $C_3 = 1 nF$.
- ELEGIR EL DIELECTRICO ADECUADO DE MODO QUE EL CAPACITOR C_3 NO SE DAÑE SI $V_{AC} = 1000 V$. EMPLEAR LA TABLA ADJUNTA Y JUSTIFICAR LA RESPUESTA

DIELECTRICO	E máx [kV/min]
NEOPRENO	12
PAPEL	14
POLIESTIRENO	25



SOLUCIÓN. a) PRIMERO SE DETERMINA EL VALOR DEL CAPACITOR C_3 MEDIANTE LA EXPRESIÓN:

$$C_3 = \frac{K_e \epsilon_0 A}{d} = \frac{(2.825)(8.85 \times 10^{-12})(20 \times 10^{-4})}{(0.05 \times 10^{-3})} = \frac{5 \times 10^{-14}}{5 \times 10^{-5}} = 1 \times 10^{-9} (F)$$

POSTERIORMENTE SE OBTIENE EL VALOR DEL CAPACITOR EQUIVALENTE ENTRE LOS PUNTOS "C" y "B" DEL ARREGLO:

$$C_{eq\ CB} = C_1 + C_2 = 0.5 \times 10^{-9} + 0.5 \times 10^{-9} = 1 \times 10^{-9} (F)$$

UNA VEZ OBTENIDO ESTE VALOR, SE CALCULA LA CAPACITANCIA EQUIVALENTE ENTRE LOS PUNTOS "A" y "B":

$$C_{e\ AB} = \frac{C_{CB} C_3}{C_{CB} + C_3} = \frac{(1 \times 10^{-9})(1 \times 10^{-9})}{(1 \times 10^{-9}) + (1 \times 10^{-9})} = 0.5 \times 10^{-9} (F) = 0.5 nF$$

b) SE DETERMINA LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE "C" y "B":

$$V_{CB} = \frac{Q_{C_1}}{C_1} = \frac{0.25 \times 10^{-6}}{0.5 \times 10^{-9}} = 500 V. \text{ LUEGO, MEDIANTE UNA EXPRESIÓN SEMEJANTE, SE OBTIENE LA CARGA } Q_{C_2} :$$

$$Q_{C_2} = C_2 V_{CB} = (0.5 \times 10^{-9})(500) = 0.25 \times 10^{-6} (C) = 0.25 \mu C$$

SE OBTIENE LA CARGA Q_3 A PARTIR DE: $Q_3 = Q_{C_1} + Q_{C_2} = 0.25 \mu C + 0.25 \mu C = 0.5 \mu C$.

ENTONCES ES POSIBLE DETERMINAR LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE "A" y "C": $V_{AC} = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{0.5 \mu C}{1 \times 10^{-9} F} = 500 V$.

LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE "A" y "B" ES: $V_{AB} = V_{CB} + V_{AC} = 500 V + 500 V = 1000 V$.

c) LA ENERGÍA ALMACENADA POR EL CAPACITOR C_2 SE DETERMINA MEDIANTE LA EXPRESIÓN:

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_{CB}^2 = (0.5)(0.5 \times 10^{-9})(500)^2 = 62.5 \mu J$$

d) AHORA SE CALCULA EL CAMPO ELÉCTRICO DE RUPTURA (MÁXIMO) PARA CADA MATERIAL:

$$\text{NEOPRENO} \Rightarrow (12 \times 10^6)(0.05 \times 10^{-3}) = 600 V$$

$$\text{PAPEL} \Rightarrow (14 \times 10^6)(0.05 \times 10^{-3}) = 700 V$$

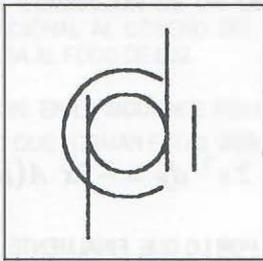
$$\text{POLIESTIRENO} \Rightarrow (25 \times 10^6)(0.05 \times 10^{-3}) = 1250 V$$

EL DIELECTRICO QUE CUMPLE CON LOS REQUISITOS ES EL POLIESTIRENO.

EL BOLETÍN "COPADI" AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES FÉLIX NÚÑEZ, FERNANDO SÁNCHEZ R., RIGEL GÁMEZ L. Y MANUEL VACIO G.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001

NÚMERO 20

2 DE ABRIL DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. **DÍAS DE FINALES. ¡A ESTUDIAR! ¡USTEDES PUEDEN! LA COPADI CONFÍA EN USTEDES, PORQUE LA COPADIES DE Y PARA LOS ESTUDIANTES:**

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$X''' - 6X'' + 12X' - 8X = t^3 e^{2t}; \text{ DONDE } X(0) = 1; X'(0) = -1; X''(0) = -2$$

SOLUCIÓN. DE ACUERDO CON LA EXPRESIÓN DE LAPLACE PARA DERIVADAS:

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \dots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

CON LOS VALORES INICIALES DADOS, SE TIENE QUE:

$$\mathcal{L}\{X\} = x; \quad \mathcal{L}\{X'\} = sx - 1; \quad \mathcal{L}\{X''\} = s^2x - s + 1; \quad \mathcal{L}\{X'''\} = s^3x - s^2 + s + 2$$

AHORA SE IGUALAN LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE LOS DOS MIEMBROS DE LA ECUACIÓN Y SE LLEGA A:

$$s^3x - s^2 + s + 2 - 6(s^2x - s + 1) + 12(sx - 1) - 8x = \mathcal{L}\{t^3 e^{2t}\} = \frac{6}{(s-2)^4}$$

DE DONDE

$$(s^3 - 6s^2 + 12s - 8)x - s^2 + 7s - 16 = \frac{6}{(s-2)^4}$$

PERO

$$s^3 - 6s^2 + 12s - 8 = (s-2)^3$$

POR LO QUE

$$x = (s^2 - 7s + 16)(s-2)^{-3} + 6(s-2)^{-7}$$

COMO

$$s^2 - 7s + 16 = s^2 - 4s + 4 - 3s + 12 = (s-2)^2 - 3(s-4) = (s-2)^2 - 3(s-2) + 6$$

LUEGO

$$x = (s-2)^{-1} - 3(s-2)^{-2} + 6(s-2)^{-3} + 6(s-2)^{-7}$$

SI SE APLICA AHORA LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-2)^{n+1}}\right\} = t^n e^{2t}; n \geq 0$, SE LLEGA FINALMENTE A LA INVERSA QUE

RESUELVE EL PROBLEMA ENTONCES

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = e^{2t} \left(1 - 3t + 3t^2 + \frac{t^6}{120} \right)$$

CÁLCULO III

EVALUAR LA INTEGRAL $\int_C xy \, dx - 2x^2 \, dy$ DONDE "C" ES EL TRIÁNGULO CON VÉRTICES $(-2, 0)$, $(2, 0)$ Y $(0, 3)$

SOLUCIÓN. EL TEOREMA DE GREEN RELACIONA A LA INTEGRAL DE LÍNEA CON LA INTEGRAL DOBLE. MEDIANTE LA EXPRESIÓN:

$$\int_C M(x, y) \, dx + N(x, y) \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dA$$

DEL INTEGRANDO DE LA INTEGRAL DEL PROBLEMA SE TIENE QUE: $M(x, y) = xy$ y $N(x, y) = -2x^2$. LUEGO, A TRAVÉS DE LAS DERIVADAS PARCIALES, SE LLEGA A:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -4x - x = -5x$$

Y, DE ACUERDO CON ESTE TEOREMA

$$\oint_C xy \, dx - 2x^2 \, dy = -5 \iint_R x \, dA ; \text{ PERO } \iint_R x \, dA = \bar{x} A(R) ; \text{ LUEGO } \oint_C xy \, dx - 2x^2 \, dy = -5\bar{x} A(R)$$

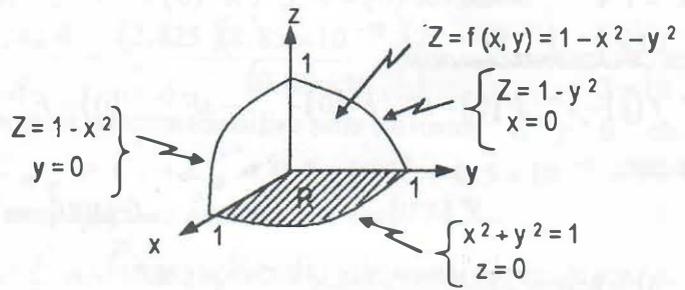
DONDE " \bar{x} " ES LA ABCISCA DEL CENTROIDE DE LA REGIÓN " R ". PERO, POR SIMETRÍA DE LA REGIÓN, $\bar{x} = 0$. POR LO QUE, FINALMENTE

$$\oint_C xy \, dx - 2x^2 \, dy = 0$$

CÁLCULO III

CALCULAR EL ÁREA DE LA SUPERFICIE DE LA PARTE DEL PARABOLOIDE $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ QUE SE ENCUENTRA SOBRE EL PLANO " xy "

SOLUCIÓN: LA GRÁFICA DE LA PARTE DEL PARABOLOIDE QUE ESTÁ SOBRE EL PLANO " xy ", EN EL PRIMER OCTANTE SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



LAS DERIVADAS PARCIALES DE LA FUNCIÓN QUE DEFINE AL PARABOLOIDE, CON RESPECTO A " x " y " y " ESTÁN DADAS POR:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Y SI SE APLICA LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR EL ÁREA DE LA SUPERFICIE, SE TIENE QUE:

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA = \iint_R \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} \, dA = \iint_R \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dx \, dy$$

AL PLANTEAR LA DOBLE INTEGRAL EN TÉRMINOS DE COORDENADAS CARTESIANAS SE LLEGARÍA A UNA EXPRESIÓN COMO:

$$S = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dy \, dx$$

COMO SE PUEDE APRECIAR, EL PROCESO DE INTEGRACIÓN ES COMPLICADO, POR LO QUE, SI SE UTILIZAN COORDENADAS POLARES, LA INTEGRAL DOBLE SE PLANTEA COMO SIGUE:

$$S = \iint_R \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 \, d\theta = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1) \int_0^{2\pi} \, d\theta =$$

$$S = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1) \approx 5.33$$

CÁLCULO I

UNA LÁMPARA ESTÁ COLGADA SOBRE EL CENTRO DE UNA MESA REDONDA DE RADIO IGUAL A 0.70 M. ¿A QUÉ ALTURA SE DEBERÁ COLOCAR PARA QUE LA ILUMINACIÓN DE UN OBJETO QUE SE ENCUENTRA EN EL BORDE SEA LA MÁXIMA POSIBLE? LA ILUMINACIÓN ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL COSENO DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA DE LOS RAYOS LUMINOSOS E INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA AL FOCO DE LUZ.

SOLUCIÓN: EN LA SIGUIENTE FIGURA SE PUEDE VER EL FOCO DE LUZ Y SUS DISTANCIAS AL CENTRO DE LA MESA Y AL BORDE DE LA MISMA Y AL ÁNGULO QUE FORMAN ESTAS DOS REFERENCIAS, QUE ES EL ÁNGULO DE INCIDENCIA, SE LE DENOTA CON " θ ".



EL MODELO MATEMÁTICO PRELIMINAR, QUE RELACIONA A LA ILUMINACIÓN CON EL COSENO DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA Y CON EL CUADRADO DE LA DISTANCIA " z " AL FOCO DE LUZ, Y QUE CONSIDERA A UNA CONSTANTE " k " DE PROPORCIONALIDAD ES:

$$I = \frac{k \cos \theta}{z^2}$$

PERO DE LA FIGURA $z^2 = 0.7^2 + y^2 = 0.49 + y^2$ y $\cos \theta = \frac{y}{z} = \frac{y}{\sqrt{0.49 + y^2}}$, DE DONDE:

$$I = \frac{k \frac{y}{\sqrt{0.49 + y^2}}}{0.49 + y^2} \Rightarrow I = \frac{k y}{(0.49 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ QUE ES EL MODELO MATEMÁTICO A OPTIMIZAR; LUEGO SE TIENE QUE:}$$

$$\frac{dI}{dy} = \frac{(0.49 + y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot k - k \cdot y \cdot \frac{3}{2} (0.49 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y}{(0.49 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{(0.49 + y^2) \cdot k - k \cdot y \cdot \frac{3}{2} \cdot 2y}{(0.49 + y^2)^2}$$

$$\frac{dI}{dy} = \frac{0.49 k + k y^2 - 3ky^2}{(0.49 + y^2)^2} = \frac{0.49 k - 2ky^2}{(0.49 + y^2)^2}$$

SE IGUALA A CERO LA DERIVADA, DE DONDE SALEN LOS PUNTOS CRÍTICOS Y, MEDIANTE EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA, SE OBTIENE EL MÁXIMO DE LA FUNCIÓN ILUMINACIÓN. ASÍ

$$\frac{0.49 k - 2ky^2}{(0.49 + y^2)^2} = 0 \Rightarrow 0.49 k - 2ky^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{0.49}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{0.7}{\sqrt{2}} = \pm 0.495$$

LÓGICAMENTE SE TOMA EL VALOR POSITIVO YA QUE NO SE CONCIBE UNA DISTANCIA NEGATIVA DE LA LÁMPARA A LA MESA. ENTONCES:

$$y = 0.4 \Rightarrow \frac{dI}{dy} > 0$$

$\therefore I$ MÁXIMA

$$y = 0.5 \Rightarrow \frac{dI}{dy} < 0$$

POR LO QUE PARA QUE LA ILUMINACIÓN SEA MÁXIMA EN EL BORDE, LA LÁMPARA DEBE ESTAR A 0.495 m DE ALTURA SOBRE LA MESA.

CÁLCULO II

SEAN LAS ECUACIONES: $u^2 - v^2 - x^3 + 3y = 0$ y $u + v - y^2 - 3x = 0$. CALCULAR EL VALOR DE LAS DERIVADAS PARCIALES:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial v}{\partial y}$$

SOLUCIÓN.. SI SE DENOTA A LAS ECUACIONES CON LAS LETRAS " F " y " G " RESPECTIVAMENTE SE TIENE QUE :

$$u^2 - v^2 - x^3 + 3y = 0 \quad (F)$$

$$u + v - y^2 - 3x = 0 \quad (G)$$

LUEGO, UTILIZANDO "DETERMINANTES JACOBIANOS" SE TIENE QUE:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{J\left(\frac{F, G}{x, v}\right)}{J\left(\frac{F, G}{u, v}\right)} = - \frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} -3x^2 & -2v \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3x^2 + 6v}{2u + 2v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{J\left(\frac{F, G}{y, v}\right)}{J\left(\frac{F, G}{u, v}\right)} = - \frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2v \\ -2y & 1 \end{vmatrix}}{2u + 2v} = \frac{4vy - 3}{2u + 2v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{J\left(\frac{F, G}{u, x}\right)}{J\left(\frac{F, G}{u, v}\right)} = - \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} 2u & -3x^2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{2u + 2v} = \frac{6u - 3x^2}{2u + 2v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{J\left(\frac{F, G}{u, y}\right)}{J\left(\frac{F, G}{u, v}\right)} = - \frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} 2u & 3 \\ 1 & -2y \end{vmatrix}}{2u + 2v} = \frac{4uy + 3}{2u + 2v}$$

TUTORÍA

ES HERMOSO EL CONSTATAR COMO POCO A POCO - COMO CUANDO SE VIVE LA TRANSFORMACIÓN DE SEMILLAS EN BELLOS ÁRBOLES QUE DAN FRUTO-, SE ACERCAN CADA VEZ MÁS PROFESORES A COPADI Y NOS HABLAN CON EMOCIÓN, ENTUSIASMO Y COMPROMISO, DE LA TUTORÍA, EXPRESAN QUE YA ENTRÓ EN SUS MENTES Y CORAZONES LO IMPORTANTE QUE ES ESCUCHAR, ACONSEJAR, CONVIVIR Y AYUDAR A UN SEMEJANTE -EN ESTE CASO UN ESTUDIANTE-. ES FASCINANTE VER CÓMO SE VA COSOLIDANDO ESTE SERVICIO QUE, A LA LARGA, VA A HUMANIZAR MÁS A LA FACULTAD Y LOGRARÁ UNA MAYOR INTEGRACIÓN DE SU COMUNIDAD. ¡FELICIDADES A LOS TUTORES QUE YA ESTÁN "METIDOS" EN LA TUTORÍA. AHÍ ENCONTRARÁN SABIDURÍA, BONDAD, CRECIMIENTO, FELICIDAD Y UNA SATISFACCIÓN MUY ÍNTIMA, MUY PERSONAL, QUE LOS ACOMPAÑARÁ SIEMPRE.

CULTURA

XAVIER VILLARRUTIA NACIÓ AN LA CIUDAD DE MÉXICO EN 1903, MURIÓ EN 1950, Y DESDE 1955 LOS ESCRITORES DE MÉXICO INSITUYERON UN PREMIO NACIONAL, DE ESCRITORES PARA ESCRITORES, CON SU NOMBRE.

UN POCO DE SU POESÍA:

AYER TE SOÑÉ. TEMBLANDO / LOS DOS EN EL GOCE IMPURO / Y ESTÉRIL DE UN SUEÑO OSCURO. / Y SOBRE TU CUERPO BLANDO / MIS LABIOS IBAN DEJANDO / HUELLAS, SEÑALES, HERIDAS... / Y TUS PALABRAS TRANSIDAS / Y LAS MÍAS DELIRANTES / DE AQUELLOS BREVES INSTANTES / PROLONGABAN NUESTRAS VIDAS.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

ÁLGEBRA

SEA LA FUNCIÓN $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ TAL QUE $f(a) = -a$ PARA TODA $a \in \mathcal{R}$ ESTA FUNCIÓN ES UN ISOMORFISMO ENTRE LOS GRUPOS $(\mathcal{R}, \#)$ Y (\mathcal{R}, ∇) LA OPERACIÓN ∇ ESTÁ DEFINIDA POR $a \nabla b = a + b + 2$; $a, b \in \mathcal{R}$ DETERMINAR LA REGLA DE DEFINICIÓN DE LA OPERACIÓN $\#$

SOLUCIÓN. COMO f ES UN ISOMORFISMO, ENTRE LOS GRUPOS, SE TIENE QUE:

$$f(x \# y) = f(x) \nabla f(y) = f(x) + f(y) + 2 \quad \dots (1)$$

POR OTRA PARTE, SI SE APLICA LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE LA FUNCIÓN, SE LLEGA A:

$$f(x \# y) = -(x \# y) \quad \dots (2)$$

SE IGUALAN (1) Y (2) Y:

$$\begin{aligned} -(x \# y) &= f(x) + f(y) + 2 \\ (x \# y) &= -f(x) - f(y) - 2 \end{aligned}$$

PERO

$$f(x) = -x \quad y \quad f(y) = -y$$

Y, FINALMENTE SE TIENE QUE:

$$x \# y = x + y - 2$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

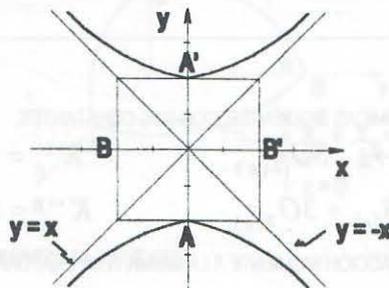
OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA SUPERFICIE QUE SE GENERA AL GIRAR LA HIPÉRBOLA DE ECUACIONES

$$\begin{cases} z = 0 \\ y^2 - x^2 = 4 \end{cases}$$

ALREDEDOR DE: i) SU EJE TRANSVERSO
ii) SU EJE CONJUGADO

IDENTIFICAR LA SUPERFICIE GENERADA PARA CADA UNO DE LOS INCISOS ANTERIORES.

SOLUCIÓN. LA FIGURA DE LA HIPÉRBOLA ES LA SIGUIENTE, DONDE AA' Y BB' SON, RESPECTIVAMENTE, LOS EJES TRANSVERSO Y CONJUGADO



i) COMO SE TRATA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN, SE TOMA COMO GENERATRIZ A LA CIRCUNFERENCIA "G" DE ECUACIONES:

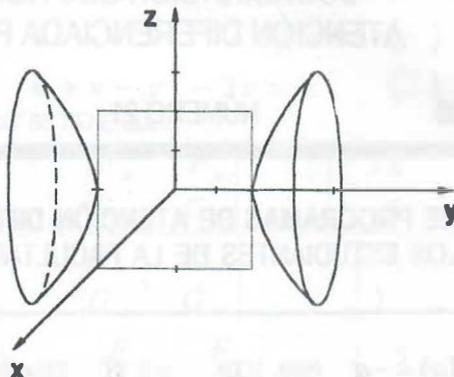
$$G: \begin{cases} x^2 + z^2 = \alpha^2 & \dots (a) \\ y = \beta & \dots (b) \end{cases} \text{ Y COMO DIRECTRIZ A LA HIPÉRBOLA DE ECUACIONES: } D: \begin{cases} y^2 - x^2 = 4 & \dots (c) \\ z = 0 & \dots (d) \end{cases}$$

PARA OBTENER LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN, SE REALIZAN LAS SIGUIENTES SUSTITUCIONES:

$$(b) \text{ en } (c) \Rightarrow \beta^2 - x^2 = 4 ; (d) \text{ en } (a) \Rightarrow x^2 = \alpha^2$$

DE DONDE, LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN ES: $\beta^2 - \alpha^2 = 4$. FINALMENTE SE SUSTITUYEN (a) y (b) EN LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN Y SE

OBTIENE LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA SUPERFICIE: $y^2 - x^2 - z^2 = 4$, QUE ES LA ECUACIÓN DE UN HIPERBOLOIDE CIRCULAR DE DOS MANTOS, CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS $C(0,0,0)$ Y EJE COINCIDENTE CON EL EJE "y".



ii) COMO AHORA LA HIPÉRBOLA GIRA ALREDEDOR DEL EJE CONJUGADO Y ÉSTE ESTÁ CONTENIDO EN EL EJE "x", LA GENERATRIZ ES LA CIRCUNFERENCIA "G" DE ECUACIONES:

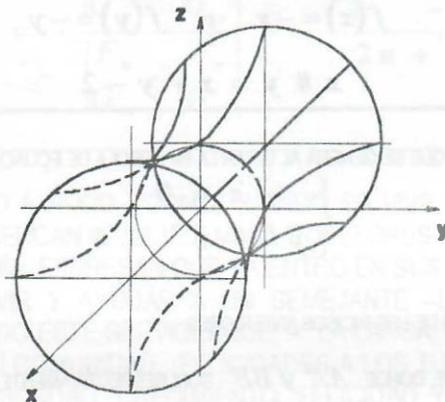
$$G : \begin{cases} y^2 + z^2 = \alpha^2 & \dots (A) \\ x = \beta & \dots (B) \end{cases} \text{ Y LA DIRECTRIZ ES LA HIPÉRBOLA DE ECUACIONES } D : \begin{cases} y^2 - x^2 = 4 & \dots (C) \\ z = 0 & \dots (D) \end{cases}$$

PARA OBTENER LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN, SE REALIZAN LAS SIGUIENTES SUSTITUCIONES:

$$(B) \text{ en } (C) \Rightarrow y^2 - \beta^2 = 4 ; (D) \text{ en } (A) \Rightarrow y^2 = \alpha^2$$

DE DONDE, LA ECUACIÓN DE CONDICIONES: $\alpha^2 - \beta^2 = 4$. FINALMENTE SE SUSTITUYEN (A) y (B) EN LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN Y SE

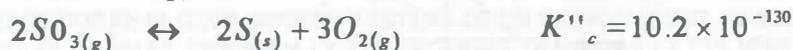
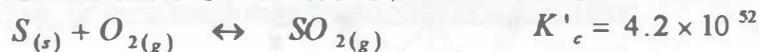
OBTIENE LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA SUPERFICIE: $y^2 + z^2 - x^2 = 4$, QUE ES LA ECUACIÓN DE UN HIPERBOLOIDE CIRCULAR DE UN MANTO, CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS $C(0,0,0)$ Y EJE COINCIDENTE CON EL EJE "x".



QUÍMICA

EQUILIBRIOS MÚLTIPLES

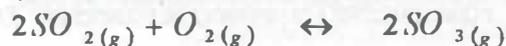
A DETERMINADA TEMPERATURA, SE TIENEN LAS REACCIONES QUÍMICAS SIGUIENTES, CON SUS CONSTANTES:



CALCULAR LA CONSTANTE DE EQUILIBRIO " K_c " PARA LA REACCIÓN SIGUIENTE A LA MISMA TEMPERATURA:



RESOLUCIÓN. AL TRATARSE DE EQUILIBRIOS MÚLTIPLES, HAY QUE ANALIZAR LA UBICACIÓN DE LAS ESPECIES QUÍMICAS EN LA REACCIÓN QUE SE SOLICITA:



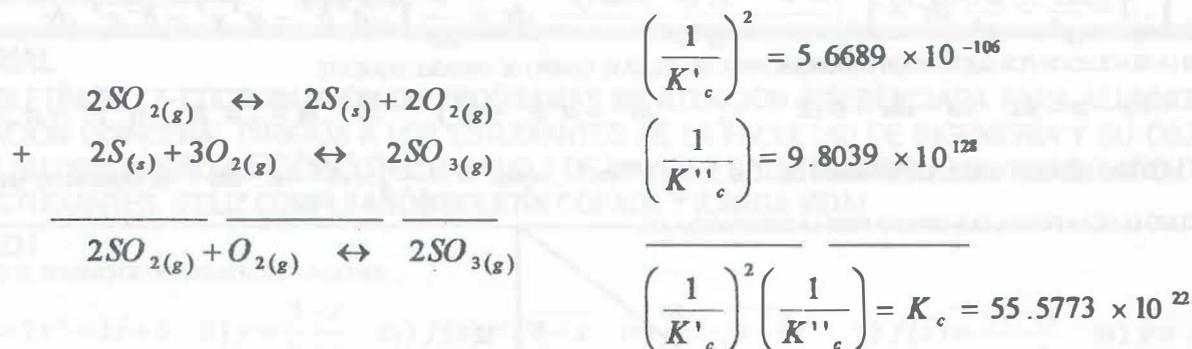
EN PRIMER LUGAR SE OBSERVA QUE APARECEN DOS MOLES DE $SO_{2(g)}$ COMO REACTIVO; LUEGO HAY QUE INVERTIR LA PRIMERA REACCIÓN CUYO

$$K'_c = 4.2 \times 10^{32}, \text{ Y MULTIPLICARLA POR 2. ESTO IMPLICA QUE LA CONSTANTE DE EQUILIBRIO DE LA REACCIÓN RESULTANTE DEBERÁ SER } \left(\frac{1}{K'_c} \right)^2$$

SE OBSERVA TAMBIÉN QUE APARECEN DOS MOLES DE $SO_{3(g)}$ COMO PRODUCTO, POR LO TANTO, HAY QUE INVERTIR LA SEGUNDA REACCIÓN CUYO

$$K''_c = 10.2 \times 10^{-130}, \text{ MISMO QUE MATEMÁTICAMENTE DEBERÁ SER } \left(\frac{1}{K''_c} \right)$$

LO QUE SE HA EXPLICADO SE REPRESENTA DE LA SIGUIENTE FORMA:



OBSÉRVESE QUE AL SUMAR LAS DOS REACCIONES, DEBERÁN MULTIPLICARSE LAS CONSTANTES DE EQUILIBRIO, DE TAL FORMA QUE A DETERMINADA TEMPERATURA

$$K_c = 55.5773 \times 10^{22} \text{ PARA EL PROCESO}$$



ES IMPORTANTE MENCIONAR QUE ES POSIBLE QUE LAS CALCULADORAS MARQUEN ERROR AL INTENTAR REALIZAR LAS OPERACIONES INDICADAS Y, SI SUCEDE ESTO, EL ESTUDIANTE TENDRÁ QUE USAR LAS LEYES DE LOS EXPONENTES PARA OBTENER EL RESULTADO SOLICITADO.

CÁLCULO

USAR EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA PARA CALCULAR EL VOLUMEN DEL ELIPSOIDE DE ECUACIÓN

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

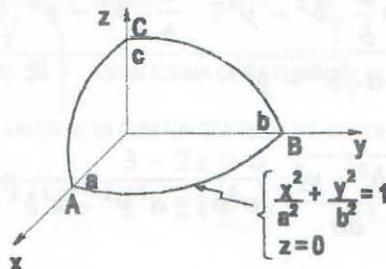
SOLUCIÓN. EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EXPRESA LO SIGUIENTE:

$$\iiint_R (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{N}) dS \quad \text{COMO } \vec{N} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

SI SE HACE $\vec{F} = x \hat{i} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = 1$, POR LO QUE $\iiint_R (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \iiint_R dV = V$ POR LO TANTO, SE TIENE QUE:

$$V = \iint_S x \cos \alpha dS \quad \text{Y, DE MANERA SEMEJANTE: } V = \iint_S y \cos \beta dS \quad \text{Y } V = \iint_S z \cos \gamma dS$$

PARA EL ELIPSOIDE EN CUESTIÓN, SE TOMARÁ LA OCTAVA PARTE DE SU VOLUMEN, ES DECIR, LA DEL PRIMER OCTANTE, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA:



SI SE UTILIZA LA TERCERA EXPRESIÓN DEFINIDA PARA EL VOLUMEN, SE TIENE QUE:

$$V = \iint_S z \cos \gamma dS = \left[\iint_{AOC} z \cos \gamma dS + \iint_{AOB} z \cos \gamma dS + \iint_{BOC} z \cos \gamma dS + \iint_{\text{elipsoide}} z \cos \gamma dS \right]$$

PARA LAS CARAS AOB y BOC SE TIENE QUE $\cos \gamma = 0$ Y PARA LA CARA AOC ; $\cos \gamma = -1$, PERO $z = 0$; POR LO TANTO:

$$V = \iint_{\text{elipsoide}} z \cos \gamma \, dS = \iint_{\text{elipsoide}} z \, dx \, dy$$

YA QUE $dS \cos \gamma = dx \, dy$. LUEGO, SE EFECTÚA LA INTEGRAL DOBLE Y SE LLEGA AL VOLUMEN DEL ELIPSOIDE. ASÍ,

$$V = 8 \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} z \, dx \, dy = 8 \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right) dx \, dy$$

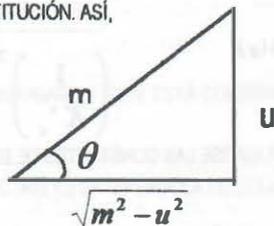
SE RESUELVE PRIMERO LA INTEGRAL INDEFINIDA CON RESPECTO A "x" Y SE TIENE QUE:

$$\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx = \int \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2}{a^2 b^2}} \, dx = \frac{1}{ab} \int \sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2 - b^2 x^2} \, dx$$

PARA FACILITAR LA RESOLUCIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONÓMétrica, SE UTILIZA EL CAMBIO DE VARIABLE SIGUIENTE:

$$u^2 = b^2 x^2 \Rightarrow u = bx \Rightarrow du = b \, dx \quad ; \quad m^2 = a^2 b^2 - a^2 y^2 \Rightarrow m = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2} = a \sqrt{b^2 - y^2}$$

DE DONDE, LA INTEGRAL DEFINIDA QUEDA, EN TÉRMINOS DE "u" y "m", COMO: $\frac{1}{ab^2} \int \sqrt{m^2 - u^2} \, du$ SE CONSTRUYE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO COMO EL DE LA FIGURA, QUE SERVIRÁ PARA LA SUSTITUCIÓN. ASÍ,



DEL TRIÁNGULO SE OBTIENEN QUE: $u = m \operatorname{sen} \theta \Rightarrow du = m \cos \theta \, d\theta$; $\sqrt{m^2 - u^2} = m \cos \theta$

DE DONDE, LA INTEGRAL SE TRANSFORMA EN:

$$\frac{1}{ab^2} \int m^2 \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{m^2}{ab^2} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta = \frac{m^2}{2ab^2} \theta + \frac{m^2}{4ab^2} \operatorname{sen} 2\theta + C = \frac{m^2}{2ab^2} \theta + \frac{m^2}{2ab^2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C$$

AHORA SE SUSTITUYEN, PRIMERO, EL ÁNGULO Y LAS FUNCIONES SEÑO Y COSENO, DE ACUERDO CON EL TRIÁNGULO DE LA FIGURA Y, DESPUÉS, LOS VALORES DE "u" y "m". ENTONCES:

$$\frac{m^2}{2ab^2} \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{u}{m} + \frac{m^2}{2ab^2} \frac{u}{m} \frac{\sqrt{m^2 - u^2}}{m} + C = \frac{a^2 b^2 - a^2 y^2}{2ab^2} \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{bx}{a\sqrt{b^2 - y^2}} + \frac{bx \sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2 - b^2 x^2}}{2ab^2} + C$$

POR LO QUE, REGRESANDO A LA INTEGRAL DOBLE SE TIENE QUE:

$$V = 8 \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} z \, dx \, dy = \frac{8ac}{2b} \int_0^b \left[\frac{b^2 - y^2}{b} \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{bx}{a\sqrt{b^2 - y^2}} + \frac{x \sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2 - b^2 x^2}}{a^2} \right]_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}} dy$$

$$V = \frac{4ac}{b} \int_0^b \left[\frac{b^2 - y^2}{b} \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{b \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}}{a \sqrt{b^2 - y^2}} + \frac{\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2 - b^2 \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2)}}{a^2} \right]$$

$$V = \frac{4ac}{b} \int_0^b \left(\frac{b^2 - y^2}{b} \operatorname{ang} \operatorname{sen}(1) + \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{ab} \sqrt{a^2 b^2 - a^2 y^2 - a^2 b^2 + a^2 y^2} \right) dy = \frac{4ac}{b} \int_0^b \frac{b^2 - y^2}{b} \left(\frac{\pi}{2} \right) dy$$

$$V = \frac{2\pi ac}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) dy = \frac{2\pi ac}{b^2} \left[b^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^b = \frac{2\pi ac}{b^2} \frac{2b^3}{3} = \frac{4}{3} \pi abc$$

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ,
ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. EL PASADO 2 DE MAYO EL BOLETÍN CUMPLIÓ SU PRIMER AÑO DE SERVIR A LOS ESTUDIANTES. ¡FELIZ CUMPLEAÑOS BOLETÍN COPADII Y ¡LARGA VIDA!

CÁLCULO I

DETERMINAR EL DOMINIO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

i) $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$ ii) $y = \frac{3-x}{2+x}$ iii) $f(x) = \sqrt{8-x}$ iv) $y = \sqrt{9-4x^2}$ v) $f(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{x+1}$ vi) $y = \frac{x-4}{x^2-x-20}$

SOLUCIÓN:

i) $f(x) = 2x^2 - 5x + 6$. SE TRATA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL EN LA CUAL PARA CUALQUIER VALOR DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x", LA FUNCIÓN "f" TIENE UN VALOR REAL. LUEGO SU DOMINIO ES EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES. ES DECIR $D_f = \mathcal{R} = (-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathcal{R}\}$.

ii) $y = \frac{3-x}{2+x}$. ESTA ES UNA FUNCIÓN ALGEBRÁICA Y COMO SE TRATA DE UN COCIENTE CUYO DENOMINADOR ES UNA FUNCIÓN DE "x", ESTA VARIABLE NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE "-2" PUES SE TENDRÍA UNA DIVISIÓN ENTRE CERO LO QUE NO DETERMINA UN VALOR REAL. LUEGO EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ESTÁ DADO POR $D_f = \mathcal{R} - \{-2\} = (-\infty, +\infty) - \{-2\} = \{x | -\infty < x < +\infty; x \neq -2; x \in \mathcal{R}\}$

iii) $f(x) = \sqrt{8-x}$. AQUÍ SE PRESENTA UNA FUNCIÓN ALGEBRÁICA Y COMO SE SABE, EL RADICANDO NO PUEDE SER NEGATIVO. LUEGO PARA DETERMINAR PARA QUÉ VALORES ES POSITIVO, LO QUE DEFINE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN, SE HACE LO SIGUIENTE:

$$8 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -8 \Rightarrow x \leq 8 \Rightarrow D_f = (-\infty, 8] = \{x | -\infty < x \leq 8; x \in \mathcal{R}\}$$

iv) $y = \sqrt{9-4x^2}$. EN ESTA FUNCIÓN ALGEBRÁICA, SI SE ACUDE A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA, SE PUEDE OBTENER LO SIGUIENTE:

$$y = \sqrt{9-4x^2} \Rightarrow y^2 = 9-4x^2 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

QUE ES LA ECUACIÓN DE UNA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y SEMIEJES $a = \frac{3}{2}$ $b = 3$ DE DONDE SE CONCLUYE QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES

$D_f = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = \left\{x \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}; x \in \mathcal{R}\right\}$ OTRA FORMA DE DETERMINAR EL DOMINIO ES MEDIANTE UNA DESIGUALDAD, TOMANDO EN CUENTA QUE EL RADICANDO DEBE SER POSITIVO PARA QUE EL VALOR DE LA FUNCIÓN SEA REAL. ASÍ, SE PUEDE HACER LO SIGUIENTE:

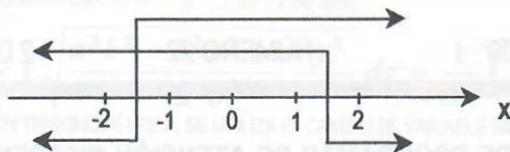
$$9 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow (3 - 2x)(3 + 2x) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3 - 2x \geq 0 & \text{ó} & 3 - 2x \leq 0 \\ 3 + 2x \geq 0 & & 3 + 2x \leq 0 \end{matrix}$$

SI SE ANALIZAN LAS DOS POSIBILIDADES, SE TIENE QUE:

$$1^a: \begin{matrix} 3 - 2x \geq 0 & \Rightarrow & -2x \geq -3 & \Rightarrow & x \leq \frac{3}{2} \\ 3 + 2x \geq 0 & & 2x \geq -3 & & x \geq -\frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$2^A : \begin{cases} 3 - 2x \leq 0 \\ 3 + 2x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x \leq -3 \\ 2x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

SI SE UBICAN LOS RESULTADOS DE LAS DOS POSIBILIDADES EN EL EJE DE LAS "x", SE OBSERVA QUE EN LA PRIMERA EXISTE UNA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS Y PARA LA SEGUNDA LA INTERSECCIÓN ES EL VACÍO, LUEGO LA DESIGUALDAD ORIGINAL ES VÁLIDA PARA LOS VALORES COMPRENDIDOS ENTRE $-\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$, QUE ES EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN.



v) $f(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{x+1}$. PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, SE OBSERVA QUE LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x" NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE "-1", LO QUE CONDUCIRÍA A UNA DIVISIÓN ENTRE CERO. TAMBIÉN HAY QUE TOMAR EN CUENTA QUE EL RADICANDO DEL NUMERADOR NO PUEDE SER NEGATIVO. ASÍ, PARA EL NUMERADOR SE TIENE QUE $7-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -7 \Rightarrow x \leq 7$ Y $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ LUEGO, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES

$$D_f = (-\infty, 7] - \{-1\} = \{x | -\infty < x \leq 7; x \neq -1; x \in \mathbb{R}\}$$

vi) $y = \frac{x-4}{x^2-x-20}$. EN ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, LA VARIABLE INDEPENDIENTE NO PUEDE TOMAR LOS VALORES DE LAS RAÍCES DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR SI ÉSTAS SON REALES, LO QUE SE PUDE INVESTIGAR MEDIANTE UNA FACTORIZACIÓN O CON LA FÓRMULA GENERAL DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. ASÍ, SE TIENE QUE

$$x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-5) = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ y } x = 5 \text{ POR LO QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES.}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 5\} = \{x | -\infty \leq x \leq \infty; x \neq -4; x \neq 5; x \in \mathbb{R}\}.$$

ALGEBRA

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1. MOSTRAR QUE 3 ES UN FACTOR DE $n^3 - n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

DEMOSTRACIÓN

$$\text{PARA } n = 1 \Rightarrow \frac{1-1+3}{3} = \frac{3}{3} = 1 \text{ CUMPLE}$$

$$\text{PARA } n = k \Rightarrow \frac{k^3 - k + 3}{3} = p \in \mathbb{Z} \text{ HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN}$$

PARA

$$n = k + 1 \Rightarrow \frac{(k+1)^3 - (k+1) + 3}{3} = q \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 + 3}{3}$$

$$\frac{k^3 - k + 3 + 3k^2 + 3k}{3}$$

$$\frac{k^3 - k + 3}{3} + \frac{3(k^2 + k)}{3}$$

EL PRIMER SUMANDO ES DIVISIBLE ENTRE 3 POR LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y EL SEGUNDO SUMANDO LO ES TAMBIÉN POR RAZONES EVIDENTES, POR LO QUE 3 ES UN FACTOR PARA $n = k + 1$ Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN.

2. DEMOSTRAR QUE $\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{Z}; n \geq 2$

DEMOSTRACIÓN.

$$\text{PARA } n = 2 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{9}{16} < \frac{3}{4} \text{ CUMPLE}$$

PARA $n = k \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^k < \frac{3}{4}$ HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

PARA $n = k + 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} < \frac{3}{4}$

SE MULTIPLICAN AMBOS MIEMBROS DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN POR $\frac{3}{4}$ Y SE TIENEN QUE:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{3}{4} < \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} < \frac{9}{16}$$

COMO $\frac{9}{16} < \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} < \frac{3}{4}$ POR LO QUE ES VERDADERA PARA $n = k + 1$ Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN.

3. DEMOSTRAR QUE $\text{sen } \theta + \dots + \text{sen } (2n - 1)\theta = \frac{\text{sen}^2 n\theta}{\text{sen } \theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

PARA $n = 1 \Rightarrow \text{sen } \theta = \text{sen } \theta$ CUMPLE

PARA $n = k \Rightarrow \text{sen } \theta + \dots + \text{sen } (2k - 1)\theta = \frac{\text{sen}^2 k\theta}{\text{sen } \theta}$ HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

PARA $n = k + 1 \Rightarrow \text{sen } \theta + \dots + \text{sen}[2(k+1) - 1]\theta = \frac{\text{sen}^2(k+1)\theta}{\text{sen } \theta} = \text{sen } \theta + \dots + \text{sen}(2k+1)\theta = \frac{\text{sen}^2(k\theta + \theta)}{\text{sen } \theta}$

SE SUMA $\text{sen}(2k\theta + \theta)$ EN AMBOS MIEMBROS DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y SE LLEGA A:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta + \dots + \text{sen}(2k\theta + \theta) &= \frac{\text{sen}^2 k\theta + \text{sen}(2k\theta + \theta)\text{sen } \theta}{\text{sen } \theta} \\ &= \frac{\text{sen}^2 k\theta + \text{sen } \theta (\text{sen } 2k\theta \cos \theta + \cos 2k\theta \text{sen } \theta)}{\text{sen } \theta} \\ &= \frac{\text{sen}^2 k\theta + \text{sen } \theta (2 \text{sen } k\theta \cos k\theta \cos \theta + \cos^2 k\theta \text{sen } \theta - \text{sen}^2 k\theta \text{sen } \theta)}{\text{sen } \theta} \\ &= \frac{\text{sen}^2 k\theta + 2 \text{sen } \theta \text{sen } k\theta \cos k\theta \cos \theta + \cos^2 k\theta \text{sen}^2 \theta - \text{sen}^2 k\theta \text{sen}^2 \theta}{\text{sen } \theta} \\ &= \frac{\text{sen}^2 k\theta (1 - \text{sen}^2 \theta) + 2 \text{sen } k\theta \cos k\theta \text{sen } \theta \cos \theta + \cos^2 k\theta \text{sen}^2 \theta}{\text{sen } \theta} \\ &= \frac{\text{sen}^2 k\theta \cos^2 \theta + 2 \text{sen } k\theta \cos k\theta \text{sen } \theta \cos \theta + \cos^2 k\theta \text{sen}^2 \theta}{\text{sen } \theta} \\ &= \frac{(\text{sen } k\theta \cos \theta + \cos k\theta \text{sen } \theta)^2}{\text{sen } \theta} = \frac{\text{sen}^2(k\theta + \theta)}{\text{sen } \theta} \end{aligned}$$

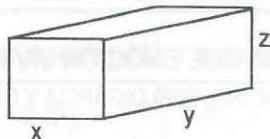
COMO SE OBSERVA, SE PARTIÓ DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN QUE ES VERDADERA Y SE LLEGÓ A LA EXPRESIÓN PARA $n = k + 1$, LUEGO LA EXPRESIÓN DADA ES VERDADERA PARA ESTE VALOR Y SE CONCLUYE LA DEMOSTRACIÓN.

CÁLCULO III

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

DEMOSTRAR QUE ENTRE TODOS LOS PARALELEPÍEDOS RECTANGULARES CON UNA SUPERFICIE LATERAL DE 600 m^2 , EL CUBO DE 10 m DE LADO ES EL QUE TIENE VOLÚMEN MÁXIMO Y DETERMINAR ESTE VOLUMEN.

SOLUCIÓN. LA FIGURA DE UN PARALELEPÍEDO CUALQUIERA SERÍA LA SIGUIENTE CON SUS DIMENSIONES VARIABLES:



ESTE PROBLEMA SE RESOLVERÁ UTILIZANDO EL MÉTODO CONOCIDO COMO "MULTIPLICADORES DE LAGRANGE". LA EXPRESIÓN QUE DEFINE EL VOLUMEN DE ESTE PARALELEPÍPEDO ES: $V = x y z$ QUE ES LA FUNCIÓN OBJETIVO. LA RESTRICCIÓN ES EL ÁREA DE LA SUPERFICIE, ESTO ES, $2xy + 2xz + 2yz = 600$ LUEGO, SI SE APLICA EL MÉTODO SELECCIONADO, LA FUNCIÓN DE LAGRANGE ESTÁ DADA POR:

$$L = xyz + \lambda (2xy + 2xz + 2yz - 600)$$

AHORA SE CALCULAN SUS DERIVADAS PARCIALES, SE IGUALAN A CERO, SE OBTIENEN LOS PUNTOS CRÍTICOS Y SE RESUELVE EL PROBLEMA. ASÍ:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + (2y + 2z)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{yz}{2y + 2z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + (2x + 2z)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xz}{2x + 2z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + (2x + 2y)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xy}{2x + 2y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2xy + 2xz + 2yz - 600 = 0$$

AL IGUALAR LAS PRIMERAS TRES EXPRESIONES QUE DEFINEN A λ , SE TIENE QUE:

$$-\frac{yz}{2y + 2z} = -\frac{xz}{2x + 2z} \Rightarrow 2xy + 2yz = 2xy + 2xz \Rightarrow y = x$$

POR LO TANTO $x = y = z$

$$-\frac{yz}{2y + 2z} = -\frac{xy}{2x + 2y} \Rightarrow 2xz + 2yz = 2xy + 2xz \Rightarrow z = x$$

NOTA. AL IGUALAR ESTAS EXPRESIONES, SE DEBIÓ CONSIDERAR, PARA EL PRIMER CASO, LA POSIBILIDAD DE " $z = 0$ " Y PARA EL SEGUNDO, QUE " $y = 0$ ", PERO SE OMITIERON YA QUE ES LÓGICO QUE AL ANULARSE CUALQUIERA DE LAS DOS, NO SE TIENE PARALELEPÍPEDO Y POR LO TANTO VOLUMEN.

SI SE UTILIZA EL RESULTADO AL QUE SE LLEGÓ EN LA CUARTA EXPRESIÓN SE TIENE QUE

$$2xy + 2xz + 2yz - 600 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 600 \Rightarrow 6x^2 = 600 \Rightarrow x = \pm 10 \text{ (PUNTOS CRÍTICOS)}$$

NO SE TOMA EN CUENTA EL VALOR NEGATIVO POR RAZONES OBIVAS, LUEGO $x = y = z = 10$ ENTONCES EL PARALELEPÍPEDO DE MÁXIMO VOLUMEN ES EL CUBO DE 10 m DE LADO Y SU VOLUMEN ES DE 1000 m^3 .

TUTORÍA

ESTÁN POR INICIAR LAS TUTORÍAS PARA LOS ESTUDIANTES QUE CURSAN EL PRIMER SEMESTRE CURRICULAR DE LA GENERACIÓN 2001, ES DECIR, PARA AQUÉLLOS QUE LLEVARON EL CURSO PROPEDÉUTICO. CABE EXPRESARLES QUE LA TUTORÍA ES UN SERVICIO ACADÉMICO QUE DEBEN LLEVAR Y APROVECHAR AL MÁXIMO. SE TRATA DE MANTENER, DURANTE UN SEMESTRE, UNA RELACIÓN CON UN PROFESOR DE CARRERA DE LA FACULTAD, DISPUESTO A AYUDAR Y ACONSEJAR EN CUESTIONES ACADÉMICAS Y TAMBIÉN EXISTENCIALES. UN TUTOR ES UN ALIADO EN EL QUE TE PUEDES APOYAR Y QUE TE PUEDE ORIENTAR EN TODO AQUELLO QUE REQUIERAS PARA INICIAR BIEN TUS ESTUDIOS DE LICENCIATURA EN INGENIERÍA. ASISTE CON ÉL, PLÁTICALE LO QUE QUIERAS Y VERÁS QUE ENCUENTRAS UN OÍDO ATENTO Y UNA PALABRA PRONTA. LA FACULTAD OFRECE ESTE TRASCENDENTAL SERVICIO ACADÉMICO Y DEBES APROVECHARLO.

SI YA TUVISTE TUTORÍA, RECUERDA QUE PUEDES MANTENER LA COMUNICACIÓN CON TU TUTOR DURANTE TODA LA CARRERA. SIEMPRE, DURANTE TU ESTANCIA EN LA FACULTAD, SERÁ ALGUIEN CON QUIEN PUEDAS HABLAR DE DIFERENTES TEMAS, INCLUYENDO TU FUTURO COMO PROFESIONAL. DE LA INGENIERÍA, UNA BELLA CARRERA QUE VALE LA PENA ESTUDIAR Y EJERCER CON CALIDAD Y ÉTICA PROFESIONAL.

CULTURA

EN LA FANTÁSTICA NOVELA "NINGUNA ETERNIDAD COMO LA MÍA" DE LA ESCRITORA MEXICANA ÁNGELES MASTRETTA, LA PROTAGONISTA HACE UN JURAMENTO QUE BIEN VALDRÍA LA PENA RECORDAR Y EXTERNAR EN MUCHAS OCASIONES DE NUESTRAS VIDAS: "ME COMPROMETO A VIVIR CON INTENSIDAD Y REGOCIJO, A NO DEJARME VENCER POR LOS ABISMOS DEL AMOR, NI POR EL MIEDO QUE DE ÉSTE ME CAIGA ENCIMA, NI POR EL OLVIDO, NI SIQUIERA POR EL TORMENTO DE UNA PASIÓN CONTRARIADA. ME COMPROMETO A RECORDAR, A CONOCER MIS YERROS, ABENDECIR MIS ARREBATOS. ME COMPROMETO A PERDONAR LOS ABANDONOS, A NO DESDEÑAR NADA DE TODO LO QUE ME CONMUEVA, ME DESLUMBRE, ME QUEBRANTE, ME ALEGRE. LARGA VIDA PROMETO, LARGA PACIENCIA, HISTORIAS LARGAS. Y NADA ABREVIARÉ QUE DEBA SUCEDERME, NI LA PENA NI EL ÉXTASIS, PARA QUE CUANDO SEA VIEJA TENGA COMO DELEITE LA DETALLADA HISTORIA DE MIS DÍAS."

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA



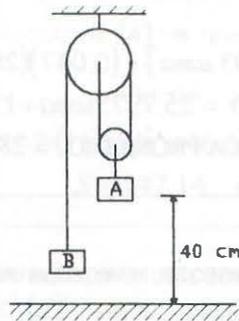
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

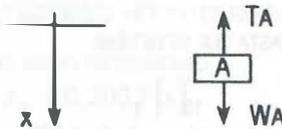
DINÁMICA

CONSIDÉRESE QUE EL SISTEMA MECÁNICO MOSTRADO EN LA FIGURA PARTE DEL REPOSO EL BLOQUE "A" QUE PESA 30 [N] Y, DESPUÉS DE TRANSCURRIR UN INTERVALO DE TIEMPO DE 0.8 [s], TOCA EL PISO. DETERMINAR:

- A) EL PESO DEL BLOQUE "B"
- B) LA TENSIÓN EN EL CABLE INEXTENSIBLE Y DE PESO DESPRECIABLE QUE SOSTIENE AL BLOQUE "B"



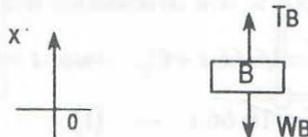
SOLUCIÓN. SI SE ANALIZA EL BLOQUE "A" SE TIENE QUE:



$$\sum F_x = m a_A \Rightarrow W_A - T_A = \frac{W_A}{g} a_A \dots (1) \text{ Y, DADOQUE } T_A = 2T_B \dots (2) \text{ y } a_B = 2a_A \dots (3).$$

SI SE SUSTITUYEN (2) y (3) EN (1) SE TIENE QUE $W_A - 2T_B = \frac{W_A}{g} \left(\frac{1}{2} a_B\right) \dots (4)$

SI SE ANALIZA AHORA EL BLOQUE "B" SE LLEGA A:



$$\sum F_x = m a_B \Rightarrow T_B - W_B = \frac{W_B}{g} a_B \dots (5)$$

SE MULTIPLICA LA EXPRESIÓN (5) POR 2 Y SE SUMA CON LA ECUACIÓN (4) Y SE PUEDE ESCRIBIR ENTONCES QUE

$$W_A - 2W_B = \frac{a_B}{g} \left(2W_B + \frac{W_A}{2}\right) \dots (6)$$

COMO $a_B = cte$; $v_B = a_B t$ Y ADEMÁS $x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 \dots (7)$ SE SUSTITUYEN VALORES EN ESTA ÚLTIMA ECUACIÓN Y:

$$0.4 = \frac{1}{2} a_B (0.8)^2 \Rightarrow a_B = 1.25 \left[\frac{m}{s^2} \right]; \text{ Y DE LA ECUACIÓN (3) } a_A = 0.625 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

AHORA SE SUSTITUYEN VALORES EN (6) Y SE PUEDE ESCRIBIR: $30 - 2W_B = \frac{1.25}{9.81} \left(2W_B + \frac{30}{2} \right)$, DE DONDE LA RESPUESTA AL INCISO A) ES:

$W_B = 12.48 [N]$ Y, AL SUSTITUIR VALORES EN (5) SE LLEGA A LA RESPUESTA DEL INCISO B) ASÍ,

$$T_B - 12.48 = \frac{12.48}{9.81} (1.25) \Rightarrow T_B = 12.48 \left(1 + \frac{1.25}{9.81} \right) \Rightarrow T_B = 14.06 [N]$$

QUÍMICA

MASA ATÓMICA PROMEDIO

LA MAYOR PARTE DE LOS ELEMENTOS ESTÁN PRESENTES EN LA NATURALEZA COMO MEZCLAS DE ISÓTOPOS. SE PUEDE DETERMINAR LA MASA ATÓMICA PROMEDIO DE UN ELEMENTO A PARTIR DE LAS MASAS DE SUS DIVERSOS ISÓTOPOS Y DE SUS ABUNDANCIAS RELATIVAS. ASÍ POR EJEMPLO, ANALICE EL EJERCICIO SIGUIENTE: EXISTEN TRES ISÓTOPOS DEL SILICIO EN LA NATURALEZA.

^{28}Si (92.21 %) , QUE TIENE UNA MASA DE 27.97693 [uma] ;

^{29}Si (4.70 %) , QUE TIENE UNA MASA DE 28.97659 [uma] Y

^{30}Si (3.09 %) , QUE TIENE UNA MASA DE 29.97376 [uma]

CALCULE LA MASA ATÓMICA DEL SILICIO

RESOLUCIÓN. LA MASA ATÓMICA PROMEDIO SE OBTIENE AL MULTIPLICAR LA ABUNDANCIA DE CADA ISÓTOPO POR SU MASA ATÓMICA Y SUMANDO LOS PRODUCTOS OBTENIDOS. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\text{MASA ATÓMICA PROMEDIO} = [(0.9221)(27.97693 \text{ uma}) + (0.047)(28.97659 \text{ uma}) + (0.0309)(29.97376 \text{ uma})]$$

$$\text{MASA ATÓMICA PROMEDIO} = 25.7975 \text{ uma} + 1.3619 \text{ uma} + 0.9262 \text{ uma}$$

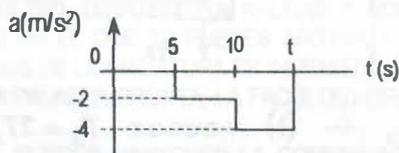
$$\text{MASA ATÓMICA PROMEDIO} = 28.0856 \text{ uma}$$

CINEMÁTICA

UN AUTOMÓVIL VIAJA POR UNA CARRETERA RECTA. SI AL INICIO DEL CONTEO DEL TIEMPO LLEVA UNA RAPIDEZ DE $60 \frac{km}{h}$, Y EL COMPORTAMIENTO DE LA MAGNITUD

DE SU ACCELERACIÓN ES EL MOSTRADO EN LA GRÁFICA, DETERMINAR

- A) EL TIEMPO QUE TARDA EN DETENERSE Y
B) LA DISTANCIA TOTAL QUE RECORRE DESDE $t = 0$ SEGUNDOS HASTA QUE SE DETIENE.



RESOLUCIÓN. LA RAPIDEZ DE $60 \frac{km}{h}$ SE PUEDE EXPRESAR COMO $v = 16.66 \frac{m}{s}$. DE LA INFORMACIÓN PROPORCIONADA SE DEDUCE QUE EL MOVIMIENTO

DESCRITO POR EL AUTOMÓVIL ES RECTILÍNEO. PARA DETERMINAR EL TIEMPO QUE TARDA EN DETENERSE Y LA DISTANCIA RECORRIDA, SE ANALIZARÁ EL EJERCICIO PARA LOS DIFERENTES INTERVALOS DE TIEMPO MOSTRADOS EN LA GRÁFICA.

SI SE ANALIZA LA INFORMACIÓN DE LA GRÁFICA, DE 0 A 5 SEGUNDOS, SE TIENE UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME, YA QUE

$$a = 0 \frac{m}{s^2} \text{ Y } v = 16.66 \frac{m}{s}, \text{ COMO } v = \frac{dS}{dt} \Rightarrow S = 16.66 t + C_1 \text{ PARA } t = 0, S = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \text{ Y POR LO TANTO}$$

$$S = 16.66 t \dots (1)$$

SI SE ANALIZA AHORA EL INTERVALO DE 5 A 10 SEGUNDOS, SE TIENE UNA ACCELERACIÓN DE MAGNITUD CONSTANTE E IGUAL A $-2 \frac{m}{s^2}$, POR LO QUE EL AUTOMÓVIL EXPERIMENTA UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACCELERADO

$$\text{DE } a = \frac{dv}{dt}; v = -2t + C_2; \text{ PARA } t = 5 s; v = 16.66 \frac{m}{s} \Rightarrow C_2 = 26.66 \text{ Y POR LO TANTO}$$

$$v = -2t + 26.66 \frac{m}{s} \dots (2)$$

Y COMO $v = \frac{ds}{dt}$; $S = -t^2 + 26.66t + C_3$ PARA DETERMINAR EL VALOR DE C_3 , SE SUSTITUYE EN LA EXPRESIÓN (1) $t = 5s$ Y SE LLEGA A

QUE $S = 83.3 m$, POR LO QUE $83.3 = -(5)^2 + 26.66(5) + C_3 \Rightarrow C_3 = -25$ Y POR LO TANTO

$$S = -t^2 + 26.66t - 25 m \dots (3)$$

AHORA SE ANALIZARÁ EL INTERVALO DE 10 A t SEGUNDOS. PARA ESTE CASO, LA ACELERACIÓN ES CONSTANTE E IGUAL A $-4 \frac{m}{s^2}$ POR LO QUE EL

MOVIMIENTO DEL AUTOMÓVIL ES RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO COMO $a = \frac{dv}{dt}$; $v = -4t + C_4$, SE EVALÚA LA EXPRESIÓN (2) CON

$t = 10s$ Y SE LLEGA A $v = 6.66 \frac{m}{s}$, POR LO QUE $6.66 = -4(10) + C_4 \Rightarrow C_4 = 46.66$ Y, POR LO TANTO

$$v = -4t + 46.66 \frac{m}{s} \dots (4)$$

Y DE $v = \frac{ds}{dt}$; $S = -2t^2 + 46.66t + C_5$, SE SUSTITUYE $t = 10s$ EN LA ECUACIÓN (3). SE TIENE QUE $S = 141.6 m$ POR LO QUE

$141.6 = -2(10)^2 + 46.66(10) + C_5 \Rightarrow C_5 = -125$ Y, POR LO TANTO

$$S = -2t^2 + 46.66t - 125 m \dots (5)$$

CUANDO EL AUTOMÓVIL SE DETIENE, $v = 0 \frac{m}{s}$, POR LO QUE DE LA ECUACIÓN (4) SE TIENE QUE $0 = -4t + 46.66$ POR LO QUE

A) $t = 11.66 s$

Y SI SE EVALÚA (5) CON EL TIEMPO OBTENIDO SE TIENE QUE $S = -2(11.66)^2 + 46.66(11.66) - 125$, POR LO QUE

B) $S = 147.14 m$

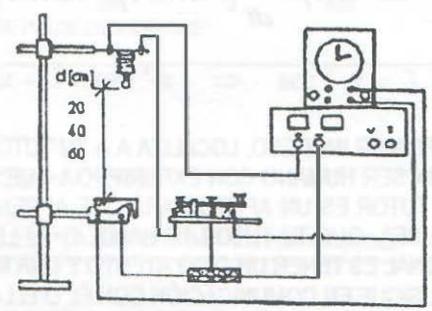
FÍSICA EXPERIMENTAL

UN ALUMNO DE LA ASIGNATURA FÍSICA EXPERIMENTAL REALIZÓ LA PRÁCTICA DE CAÍDA LIBRE CON EL EQUIPO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA. CALCULÓ LOS TIEMPOS (t_p) QUE EL BALÍN EMPLEARÍA EN RECORRER CIERTAS DISTANCIAS (d) Y LUEGO LOS MIDIÓ CON UN CRONÓMETRO COMO EL DE LA FIGURA. PARTE DE LAS

MEDICIONES SE MUESTRAN EN LA TABLA CON BASE EN ELLO Y UTILIZANDO EL MÉTODO DE PARES DE PUNTOS. DETERMINAR EN EL $S/$

- A) LA SENSIBILIDAD DEL CRONÓMETRO
- B) EL MODELO MATEMÁTICO DE LA CURVA DE CALIBRACIÓN DEL MISMO INSTRUMENTO
- C) EL PORCENTAJE DE EXACTITUD PARA EL TIEMPO PATRÓN $t_p = 0.2022 [s]$
- D) EL MODELO MATEMÁTICO LINEAL QUE RELACIONA A LA DISTANCIA (d) CON EL TIEMPO (t_L) SI LA VARIABLE INDEPENDIENTE FUE d .
- E) LA RAPIDEZ EXPERIMENTAL DEL MÓVIL PARA EL INSTANTE EN QUE $t_p = 0.143 [s]$
- F) LA ACELERACIÓN EXPERIMENTAL DEL BALÍN PARA EL INSTANTE DEL INCISO INTERIOR

d [dm]	\bar{t}_L [cs]	t_p [s]
0	0	0
1	16	0.143
2	21	0.2022
3	25	0.2477



RESOLUCIÓN

A) $t_L = m t_p + b$; $m = S$; $m = \frac{\Delta t_L}{\Delta t_p}$; $m = \frac{[(25 - 16) + (21 - 0)](10^{-2})[s]}{[(0.2477 - 0.143) + (0.2022 - 0)][s]}$ $S =$ SENSIBILIDAD

$$m = \frac{0.3 \text{ s}}{0.3069 \text{ s}} = 0.9775 \left[\frac{\text{s}}{\text{s}} \right] ; S = 0.9775 \left[\frac{\text{s}}{\text{s}} \right]$$

B) SE CALCULA EL CENTROIDE Y SE TIENE QUE:

$$\bar{t}_L = 15.5 [\text{cs}] = 0.155 [\text{s}] ; \bar{t}_P = 0.1482 [\text{s}]$$

CON EL CENTROIDE SE CALCULA LA ORDENADA AL ORIGEN:

$$b = \bar{t}_L - m \bar{t}_P = (0.155 \text{ s}) - \left(0.9775 \frac{\text{s}}{\text{s}} \right) (0.1482 \text{ s}) = 0.0101 \text{ s}$$

Y ENTONCES EL MODELO MATEMÁTICO ES:

$$t_L [\text{s}] = 0.9775 \left[\frac{\text{s}}{\text{s}} \right] t_P [\text{s}] + 0.0101 [\text{s}]$$

C) PARA CALCULAR EL PORCENTAJE DE EXACTITUD SE NECESITA EL PORCENTAJE DE ERROR DE EXACTITUD. POR LO TANTO

$$\% EE = \left| \frac{t_P - t_L}{t_P} \right| \times 100 = \left| \frac{(0.2022 - 0.21) \text{ s}}{0.2022 \text{ s}} \right| \times 100 = 3.8576 \% ; \% E = 100 - \% EE = 100 - 3.8576 = 96.1424 \%$$

D) SE REALIZA EL CAMBIO DE VARIABLE $z = t_L^2 [\text{s}^2]$

$d [dm]$	0	1	2	3
$z [\text{s}^2]$	0	0.0256	0.0441	0.0625

EL MODELO MATEMÁTICO QUEDARÍA COMO: $z = m d + b$ SE CALCULA LA PENDIENTE:

$$m = \frac{\Delta z}{\Delta d} = \frac{[(0.0625 - 0.0256) + (0.0441 - 0)] [\text{s}^2]}{[(3 - 1) + (2 - 0)] (10^{-1}) [m]} = \frac{0.081 \text{ s}^2}{0.4 \text{ m}} = 0.2025 \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right]$$

EL CENTROIDE SERÍA: $\bar{d} = 1.5 \text{ dm} = 0.15 \text{ m}$; $\bar{z} = 0.03305 \text{ s}^2$ CON LO CUAL SE CALCULA LA ORDENADA AL ORIGEN:

$$b = \bar{z} - m \bar{d} = (0.03305 \text{ s}^2) - \left(0.2025 \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right) (0.15 \text{ m}) = 0.0027 [\text{s}^2]; \text{ Y ENTONCES EL MODELO MATEMÁTICO SOLICITADO ES:}$$

$$t_L^2 [\text{s}^2] = 0.2025 \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right] d [\text{m}] + 0.0027 [\text{s}^2]$$

E) $v(t) = \frac{d}{dt} [d]$; SE DESPEJA "d" DEL MODELO ANTERIOR Y SE TIENE: $d = \frac{t^2 - 0.0027}{0.2025}$. POR LO TANTO:

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{t^2 - 0.0027}{0.2025} \right] = \frac{1}{0.2025} \frac{d}{dt} [t^2 - 0.0027] \Rightarrow v(t) = \frac{1}{0.2025} [2t] = 9.8765 t \quad (\text{EN EL S.I.}) . \text{ AHORA SE SUSTITUYE}$$

EN ESTA EXPRESIÓN EL VALOR $t = 0.143 \text{ s}$ Y SE LLEGA A: $v(0.143 \text{ s}) = \left(9.8765 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (0.143 \text{ s}) = 1.4123 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

$$F) a(t) = \frac{d}{dt} [v(t)] \Rightarrow a(t) = \frac{d}{dt} [9.8765 t] = 9.8765 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

TUTORÍA

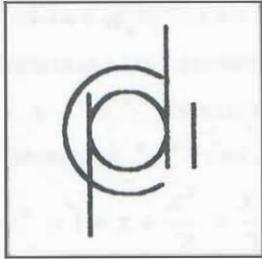
SI ERES ALUMNO DE PRIMER INGRESO, LOCALIZA A A TU TUTOR Y APROVECHA ESTA OPORTUNIDAD DE TENER UN ALIADO, UN AMIGO EN QUIEN CONFIAR, UN SER HUMANO CON EXPERIENCIA QUE TE PUEDE AYUDAR PARA QUE TU INICIO EN LA FACULTAD RESULTE UN ÉXITO ROTUNDO. UN TUTOR ES UN APOYO PARA QUE APRENDAS A APRENDER, PARA QUE APRENDAS A EMPRENDER Y PARA QUE APRENDAS A SER. YA SEA QUE TU TUTOR TE HABLE O TÚ LE HABLES PERO OJALÁ QUE SE DÉ LA COMUNICACIÓN MUY PRONTO Y VERÁS QUE SENSACIONAL ES TENER UN OÍDO ATENTO Y UNA MANO AMIGA.

SI YA TUVISTE TUTOR, SIGUE EN COMUNICACIÓN CON ÉL O ELLA Y SIEMPRE TE APOYARÁ.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ,
RIGEL GÁMEZ LEAL Y FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA



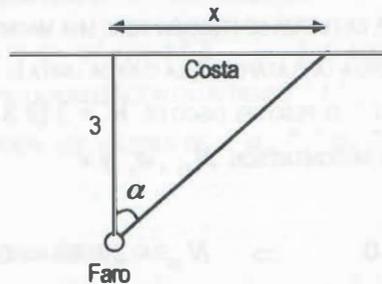
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

CÁLCULO I

UN FARO FUE CONSTRUIDO EN UN ISLOTE SITUADO A 3 km DE LA COSTA, LA QUE FRENTE AL FARO ES RECTA. EL HAZ LUMINOSO DEL FARO GIRA A UNA VELOCIDAD CONSTANTE DE 0.15° POR MINUTO. DETERMINAR LA VELOCIDAD CON LA QUE SE DESPLAZA LA LUZ A LO LARGO DE LA COSTA, EN UN PUNTO LOCALIZADO A 5 km DEL PUNTO MÁS PRÓXIMO AL FARO.

SOLUCIÓN. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE PRESENTA UN MODELO GEOMÉTRICO CON LA COSTA, EL FARO, LA DISTANCIA A LA COSTA Y EL ÁNGULO ENTRE DICHA DISTANCIA (PERPENDICULAR A LA COSTA) Y LA COSTA MISMA.



COMO DATOS SE TIENEN LA DISTANCIA DEL FARO A LA COSTA, LA RAPIDEZ DE VARIACIÓN DEL ÁNGULO, ES DECIR, $\frac{d\alpha}{dt}$ DONDE

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0.15 \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0.0026 \frac{\text{rad}}{\text{min}} ; \text{ Y SE PREGUNTA LA RAPIDEZ DE VARIACIÓN DE LA DISTANCIA DEL PUNTO QUE ESTÁ A 5 km AL PUNTO MÁS PRÓXIMO A LA COSTA, ES DECIR, } \frac{dx}{dt}$$

DE LA TRIGONOMETRÍA Y APLICANDO LA DERIVADA CON RESPECTO AL TIEMPO, SE TIENE QUE

$$\frac{x}{3} = \tan \alpha \Rightarrow x = 3 \tan \alpha \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3 \sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Y, POR OTRO LADO, EN EL INSTANTE CONSIDERADO Y POR IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$\tan \alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \tan^2 \alpha = 2.78 ; \sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha = 3.78$$

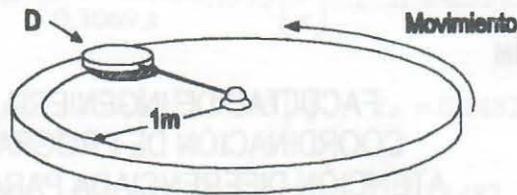
FINALMENTE, SE SUSTITUYE ESTE VALOR Y SE LLEGA A:

$$\frac{dx}{dt} = 3 (3.78) (0.0026) = 0.029$$

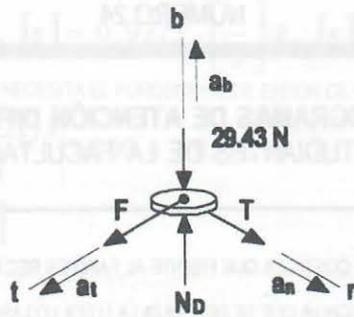
LUEGO LA LUZ DEL FARO SE DESPLAZA A RAZÓN DE 0.029 KILÓMETROS POR MINUTO, O BIEN, A 48 CENTÍMETROS POR SEGUNDO.

CINEMÁTICA

EL DISCO "D" DE 3 kg DE MASA ESTÁ FIJO AL EXTREMO DE UNA CUERDA COMO SE VE EN LA FIGURA. EL OTRO EXTREMO DE LA CUERDA ESTÁ FIJO A UNA RÓTULA EN EL CENTRO DE UNA PLATAFORMA. SI LA PLATAFORMA GIRA RÁPIDAMENTE Y EL DISCO ESTÁ COLOCADO SOBRE ELLA Y SE SUELTA DESDE EL REPOSO, CALCULAR EL TIEMPO QUE SE TARDA EL DISCO EN ALCANZAR UNA VELOCIDAD SUFICIENTEMENTE GRANDE PARA ROMPER LA CUERDA. LA TENSIÓN MÁXIMA QUE PUEDE SOSTENER ÉSTA ES DE 100 N, Y EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CINÉTICA ENTRE EL DISCO Y LA PLATAFORMA ES $\mu_k = 0.1$.



SOLUCIÓN. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.



COMO SE VE EN LA FIGURA, EL DISCO TIENE COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN COMO RESULTADO DE LAS FUERZAS T y F QUE NO ESTÁN EN EQUILIBRIO. COMO SE TIENE DESLIZAMIENTO, LA FUERZA DE FRICCIÓN TIENE UNA MAGNITUD $F = \mu_k N_D = 0.1 N_D$ Y UN SENTIDO QUE SE OPONE AL MOVIMIENTO RELATIVO DEL DISCO CON RESPECTO A LA PLATAFORMA. LA CUERDA LIMITA EL MOVIMIENTO DEL DISCO EN LA DIRECCIÓN "n" Y, POR LO TANTO, F ACTÚA EN LA DIRECCIÓN POSITIVA DE LAS "t". EL PESO DEL DISCO ES $W = 3(9.81) = 29.43 \text{ N}$ COMO " a_n " PUEDE RELACIONARSE CON " v " Y A VELOCIDAD MÁXIMA $T = 100 \text{ N}$, LAS INCÓGNITAS SON N_D , a_t y v

ECUACIONES DE MOVIMIENTO:

$$\sum F_b = 0 \Rightarrow N_D - 29.43 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\sum F_t = m a_t \Rightarrow 0.1 N_D = 3 a_t \quad \dots (2)$$

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow T = 3 \left(\frac{v^2}{1} \right) \quad \dots (3)$$

SI SE SUSTITUYE $T = 100 \text{ N}$, SE PUEDE DESPEJAR, DE LA ECUACIÓN (3), LA VELOCIDAD CRÍTICA " v_{cr} " QUE ES LA QUE NECESITA TENER EL DISCO PARA ROMPER LA CUERDA. SE RESUELVEN TODAS LAS ECUACIONES Y SE TIENE QUE:

$$N_D = 29.43 \text{ N}$$

$$a_t = 0.981 \frac{m}{s^2}$$

$$v_{cr} = 5.77 \frac{m}{s}$$

COMO " a_t " ES CONSTANTE, EL TIEMPO NECESARIO PARA ROMPER LA CUERDA SE OBTIENE COMO SIGUE:

$$v_{cr} = v_0 + a t \Rightarrow 5.77 = 0 + (0.981)t \Rightarrow t = 5.89 \text{ s}$$

CALCULO II

ENCONTRAR SERIES DE POTENCIAS PARA REPRESENTAR A LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS DIRECTAS $\sinh x$ y $\cosh x$ Y DECIR PARA QUÉ VALORES REALES LAS REPRESENTAN.

SOLUCIÓN. SE PARTE DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x) = e^x$ DE LA CUAL SE SABE QUE TODAS SUS DERIVADAS EQUIVALEN A ELLA MISMA, ES DECIR, QUE $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ Y POR LO TANTO TODAS EQUIVALEN A "1" LUEGO, ME DIANTE LA SERIE DE MACLAURIN SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x$$

SI SE APLICA EL CRITERIO DE LA RAZÓN ESTA SERIE, SE TIENE QUE:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) |x| = 0 < 1 \quad \therefore \text{ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE EN } x \in \mathbb{R}$$

PARA REPRESENTAR A LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS $\sinh x$ y $\cosh x$ ES NECESARIO CONOCER LAS SERIES PARA REPRESENTAR A LAS FUNCIONES " e^x " y " e^{-x} " (ÉSTA ÚLTIMA MEDIANTE LAS SUSTITUCIÓN DE " x " POR " $-x$ " EN LA SERIE DE LA FUNCIÓN OBTENIDA PARA REPRESENTAR A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL " e^x ") ASÍ, SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad y \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

FUNCIÓN SENO HIPERBÓLICO

COMO SE SABE $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, POR LO QUE BASTARÁ SEMISUMAR LOS TÉRMINOS DE LAS DOS SERIES ANTERIORES Y SE LLEGA A:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad y \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

QUE SON LAS SERIES DE MACLAURIN QUE REPRESENTAN A LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS REQUERIDAS Y, EN AMBOS CASOS, EL INTERVALO DE CONVERGENCIA SON TODOS LOS REALES YA QUE ES EL MISMO QUE PARA LA FUNCIÓN EXPONENCIAL " e^x "

CÁLCULO III

EL VECTOR DE POSICIÓN DE UNA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO EN UN TIEMPO " t " ESTÁ DADA POR:

$$\vec{r}(t) = t \hat{i} + t^2 \hat{j} + t^3 \hat{k} \quad ; \quad 1 \leq t \leq 4$$

- A) ENCONTRAR LAS COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN EN UN TIEMPO " t "
 B) CALCULAR, CON DOS CIFRAS DECIMALES DE APROXIMACIÓN, LOS VALORES DE " a_N ", " a_T " y " $|\vec{v}|$ ", PARA $t = 1, 2, 3$ y 4 , Y DESCRIBIR EL RECORRIDO DE LA PARTÍCULA.

SOLUCIÓN

A) COMO SE SABE, A TRAVÉS DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA SE TIENE QUE:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \hat{i} + 2t \hat{j} + 3t^2 \hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = 2 \hat{j} + 6t \hat{k}$$

$$|\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)| = (1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}$$

DE LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN TANGENCIAL SE TIENE QUE:

$$a_T = \frac{\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{4t + 18t^3}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}}$$

PARA CALCULAR a_N PRIMERO SE PUEDE CALCULAR EL PRODUCTO

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2 \hat{i} - 6t \hat{j} + 2 \hat{k}$$

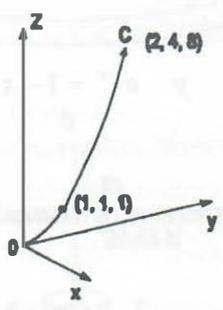
DE LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN NORMAL SE TIENE QUE:

$$a_N = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(36t^4 + 36t^2 + 4)^{\frac{1}{2}}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{1}{2}}} = 2 \left(\frac{9t^4 + 9t^2 + 1}{9t^4 + 4t^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

B) LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA CURVA DEFINIDA POR LA FUNCIÓN VECTORIAL $\vec{r}(t)$ SON:

$$x = t \quad ; \quad y = t^2 \quad ; \quad z = t^3 \quad ; \quad t \geq 0$$

SI SE ELIMINA EL PARÁMETRO EN LAS PRIMERAS DOS ECUACIONES SE OBTIENE $y = x^2$. ESTO IMPLICA QUE CUALQUIER PUNTO DE LA CURVA $\vec{r}(t)$ PERTENECE TAMBIÉN AL CILINDRO PARABÓLICO DE ECUACIÓN $y = x^2$. Y SI SE ELIMINA EL PARÁMETRO DE LAS ECUACIONES PRIMERA Y TERCERA SE OBTIENE $z = x^3$ QUE ES LA ECUACIÓN DE UN CILINDRO QUE SE APOYA EN EL EJE "y". ENTONCES, LA CURVA $\vec{r}(t)$ ES LA INTERSECCIÓN DE LOS CILINDROS $y = x^2$ y $z = x^3$ EN LA SIGUIENTE FIGURA SE PUEDE VER LA GRÁFICA DE ESTA CURVA



COMO $1 \leq t \leq 4$ EL RECORRIDO ES EL CONSIDERADO DEL PUNTO $(1,1,1)$ AL PUNTO $(4,16,64)$. SE REALIZAN LAS CORRESPONDIENTES SUSTITUCIONES EN LAS EXPRESIONES OBTENIDAS EN EL INCISO (A) Y SE TIENE QUE:

t	1	2	3	4
POSICIÓN DEL PUNTO P	(1,1,1)	(2,4,8)	(3,9,27)	(4,16,64)
a_N	2.33	2.12	2.06	2.03
a_T	5.88	11.98	17.99	(24.00)
$ \vec{v}(t) $	3.74	12.69	27.68	48.67

ENTONCES, MIENTRAS "t" CRECE DE 1 A 4, EL PUNTO SE MUEVE SOBRE LA CURVA DEL PUNTO $(1,1,1)$ AL PUNTO $(4,16,64)$ INCREMENTANDO SU VELOCIDAD RÁPIDAMENTE. LA COMPONENTE NORMAL DE SU ACELERACIÓN SE APROXIMA A 2 (NÓTESE QUE $\lim_{t \rightarrow \infty} a_N = 2$) EN LA TABLA SE OBSERVA QUE LA

COMPONENTE TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN SE INCREMENTA 6 UNIDADES APROXIMADAMENTE POR CADA UNIDAD QUE AUMENTA EL TIEMPO.
 NOTA. OTRA FORMA PARA HABER CALCULADO LA COMPONENTE NORMAL DE LA ACELERACIÓN, HUBIERA SIDO LA SIGUIENTE:
 COMO SE SABE

$$|\vec{a}| = |\vec{r}''| = \sqrt{4 + 36t^2} \quad \text{Y, ADEMÁS TAMBIÉN SE PUEDE ESCRIBIR QUE } |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}; \text{ DE DONDE}$$

$$a_N = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{(4 + 36t^2) - \frac{(4t + 18t^3)^2}{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

EXPRESIÓN QU SI SE SIMPLIFICA, SE LLEGA AL RESULTADO ANTES OBTENIDO PARA LA COMPONENTE NORMAL DE LA ACELERACIÓN.

PROMOTORES DE LA COPADI

LA COPADI NECESITA PROMOTORES QUE ES COMO LLAMAMOS A LOS ESTUDIANTES QUE SE OFRECEN PARA AYUDAR CON SESIONES DE PREPARACIÓN PARA LOS EXÁMENES COLEGIADOS Y PARA DAR ASESORÍAS INDIVIDUALES DE LA ASIGNATURA EN LA QUE CONSIDEREN ESTAR MEJOR. ES UNA EXCELENTE FORMA DE AYUDAR A LOS COMPAÑEROS. SE TRATA DE UNA ACTIVIDAD EXENTA DE EGOÍSMOS. VEN A COPADI Y OFRECE TUS SERVICIOS COMO PROMOTOR. SI QUIERES TE PUEDE VALER COMO SERVICIO SOCIAL. RECUERDEN QUE EN EL SALÓN 129, ESTUDIANTES APOYAN A ESTUDIANTES CON ASESORÍAS INDIVIDUALES EN ALGUNAS ASIGNATURAS.

TUTORÍA

"DESDE LA PRIMERA VEZ QUE HABLAMOS, ME PLANTEÓ UN PROBLEMA EXISTENCIAL EN EL QUE LE PUDE AYUDAR PORQUE LO MISMO ME PASÓ DE JOVEN. AL TERMINAR ESA SESIÓN ME SENTÍ MUY BIEN"
 (TESTIMONIO DE UN TUTOR DE LA FACULTAD)

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
 COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA



EDITORIAL

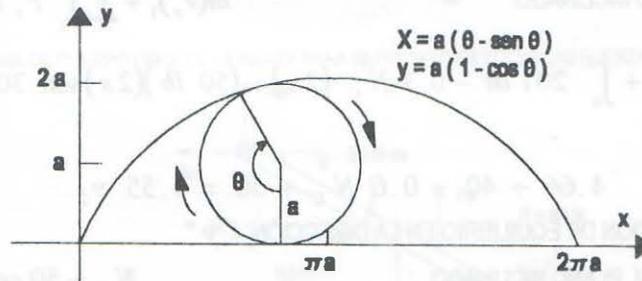
ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

CÁLCULO II

CALCULAR LA LONGITUD "L" DE LA CICLOIDE $x = a(\theta - \text{sen } \theta)$; $y = a(1 - \text{cos } \theta)$, $a > 0$

SOLUCIÓN LA GRÁFICA DE ESTA CURVA SE OBSERVA EN LA SIGUIENTE FIGURA, EN LA CUAL SE VE QUE UN ARCO DE ELLA CORRSPONDE AL INEVALO

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ Y LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA LONGITUD DE CURVA ES $L = \int_a^b \left(\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right) d\theta$



SI SE DERIVAN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS, SE TIENE QUE

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \text{cos } \theta) \quad ; \quad \frac{dy}{d\theta} = a \text{sen } \theta$$

COMO LA EXPRESIÓN QUE VA EN EL INTEGRANDO ES LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE ESTAS DOS DERIVADAS, ENTONCES SE PUEDE HACER LO SIGUIENTE

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = a^2(1 - 2 \text{cos } \theta + \text{cos}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) = 2a^2(1 - \text{cos } \theta)$$

LUEGO

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \text{cos } \theta)} d\theta$$

PARA EVALUAR ESTA INTEGRAL SE HACE USODE LA IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA $\text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2}(1 - \text{cos } \theta)$ ENTONCES

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 \cdot 2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \text{sen} \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \left[-\text{cos} \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 4a [-(-1) + (1)] = 8a$$

EL PRIMERO EN OBTENER ESTE RESULTADO. ESTO ES, QUE LA LONGITUD DEL ARCO DE UNA CICLOIDE ES OCHO, VECES EL RADIO DEL CÍRCULO QUE LA GENERA, FUE SIR CHRISTOPHER WREN. EL ARQUITECTO CONSTRUCTOR DE LA CATEDRAL DE SAN PABLO Y DE MUCHAS OTRAS IGLESIAS EN INGLATERRA

DINÁMICA

LA CAJA QUE APARECE EN LA FIGURA TIENE UN PESO DE 50 lb Y SOBRE ELLA ACTÚA UNA FUERZA CON UNA MAGNITUD VARIABLE $P = (20t) \text{ lb}$, DONDE "t" SE EXPRESA EN SEGUNDOS DETERMINAR LA VELOCIDAD DE LA CAJA 2 s DESPUÉS DE APLICAR P SI LA CAJA TIENE UNA VELOCIDAD INICIAL

$v_1 = 3 \frac{\text{pies}}{\text{s}}$, DESCENDIENDO SOBRE EL PLANO INCLINADO A 30° , Y EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CINÉTICA ENTRE LA CAJA Y EL PLANO ES $\mu_k = 0.3$

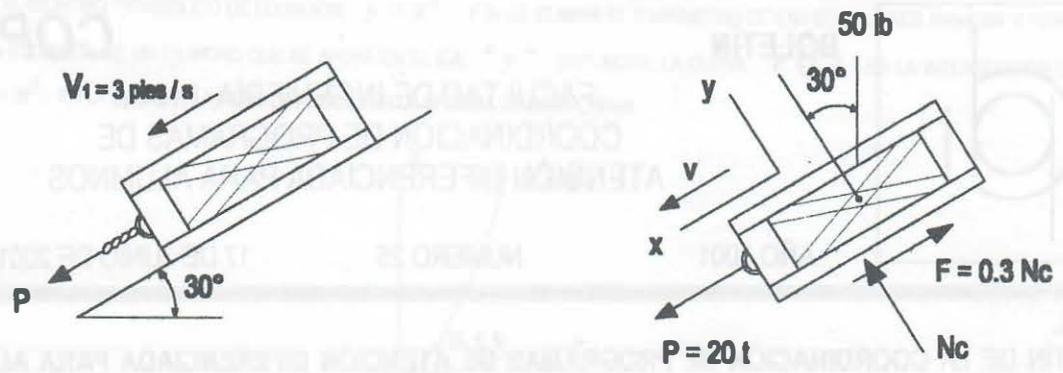


DIAGRAMA DE CUERPOLIBRE. OBSÉRVESE LA SEGUNDA FIGURA. COMO LA MAGNITUD DE LA FUERZA $P = 20t$ VARÍA CON EL TIEMPO, ES PRECISO DETERMINAR EL IMPULSO POR INTEGRACIÓN EN EL INTERVALO DE TIEMPO DE $2s$. EL PESO, LAS FUERZAS NORMAL Y DE FRICCIÓN (QUE ACTÚAN EN DIRECCIÓN OPUESTA A LA DEL MOVIMIENTO) SON CONSTANTES, DE MODO QUE EL IMPULSO QUE ORIGINA CADA UNA DE ESTAS FUERZAS ES SIMPLEMENTE LA MAGNITUD DE LA FUERZA MULTIPLICADA POR $2s$.

PRINCIPIO DE IMPULSO Y MOMENTO. AL APLICAR LAS ECUACIONES QUE REPRESENTAN EL PRINCIPIO DE IMPULSO LINEAL Y EL MOMENTO PARA LA PARTICULA, EN ESTE CASO EN LA DIRECCIÓN "x", SE LLEGA A:

(+) HACIA ABAJO PARALELA AL PLANO INCLINADO

$$m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m(v_x)_2$$

$$\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \frac{\text{pies}}{s^2}} \left(3 \frac{\text{pies}}{s} \right) + \int_0^2 20t dt - 0.3 N_c (2s) + (50 \text{ lb})(2s) \sin 30^\circ = \frac{50 \text{ lb}}{32.2 \frac{\text{pies}}{s^2}} v_2$$

$$4.66 + 40 - 0.6 N_c + 50 = 1.55 v_2$$

AHORA ES POSIBLE APLICAR LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN LA DIRECCIÓN "y"

(+) HACIA ARRIBA PERPENDICULAR AL PLANO INCLINADO

$$N_c - 50 \cos 30^\circ \text{ lb} = 0$$

SE DESPEJA Y SE TIENE QUE $N_c = 43.3 \text{ lb}$ VALOR QUE SE SUSTITUYE EN LA ANTERIOR ECUACIÓN Y SE OBTIENE " v_2 ". ASI,

$$4.66 + 40 - 0.6 (43.3) + 50 = 1.55 v_2 \Rightarrow v_2 = 44.3 \frac{\text{pies}}{s}$$

ÁLGEBRA

SEA "p" UN POLINOMIO DE GRADO TRES, DEL CUAL SE TIENE QUE:

$$p(1) = 5 ; p(-1) = 3 ; p(2) = 18$$

ADEMÁS SE SABE QUE SU GRÁFICA CORTA EL EJE DE LAS ORDENADAS EN EL PUNTO DE COORDENADAS $P(0,4)$. CALCCULAR $p(-2)$.

SOLUCIÓN.

SI $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; COMO $p(0) = 4 \Rightarrow a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 4 \Rightarrow d = 4$

ENTONCES $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$

AHORA, COMO $p(1) = 5 \Rightarrow a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + 4 = 5 \Rightarrow a + b + c = 1 \dots (1)$

DE MANERA ANÁLOGA, $p(-1) = 3 \Rightarrow a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + 4 = 3 \Rightarrow -a + b - c = -1 \dots (2)$

Y PARA $p(2) = 18 \Rightarrow a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + 4 = 18 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 14 \dots (3)$

SI SE DIVIDE ENTRE DOS LA TERCERA ECUACIÓN, EL SISTEMA QUEDARÍA COMO:

$$a + b + c = 1 ; -a + b - c = -1 ; 4a + 2b + c = 7$$

SI SE RESUELVE POR CRAMER. SE TIENE QUE:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

LUEGO

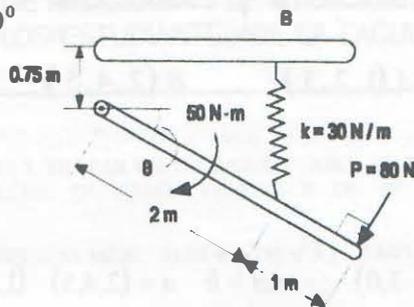
$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2 ; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{0}{-6} = 0 ; \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$$

POR LO QUE EL POLINOMIO ESTÁ DADO POR:

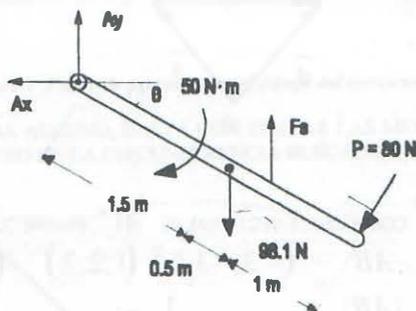
$$p(x) = 2x^3 - x + 4 \quad \text{DE DONDE } p(-2) \text{ SE OBTIENE COMO } p(-2) = 2(-2)^3 - (-2) + 4 ; \quad p(-2) = -10$$

DINÁMICA

LA BARRA QUE APARECE EN LA FIGURA TIENE UNA MASA DE 10 kg Y ESTÁ SOMETIDA A UN MOMENTO DE 50 N m Y A UNA FUERZA DE $P = 80 \text{ N}$, SIEMPRE APLICADA PERPENDICULAR AL EXTREMO DE LA BARRA. ASIMISMO, EL RESORTE TIENE UNA LONGITUD NO ESTIRADA DE 0.5 m Y PERMANECE EN POSICIÓN VERTICAL DEBIDO A LA GUÍA EN "B". DETERMINAR EL TRABAJO TOTAL REALIZADO POR TODAS LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA BARRA CUANDO ÉSTA HA GIRADO HACIA ABAJO DESDE $\theta = 0^\circ$ a $\theta = 90^\circ$



SOLUCIÓN: PRIMERO SE TRAZA EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA BARRA PARA REPRESENTAR TODAS LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA MISMA



PESO W EL PESO ES $10 (9.81) \text{ N} = 98.1 \text{ N}$ DESPLAZÁNDOSE 1.5 m HACIA ABAJO, EL TRABAJO ENTONCES ES:

$$U_w = 98.1 \text{ N} (1.5 \text{ m}) = 147.2 \text{ J}$$

MOMENTO M EL MOMENTO GIRA A TRAVÉS DE UN ÁNGULO $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ POR LO TANTO

$$U_M = 50 \text{ N m} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 78.5 \text{ J}$$

FUERZA DE RESORTE F_s : CUANDO $\theta = 0$, EL RESORTE ESTÁ ESTIRADO $(0.75 - 0.5 \text{ m}) = 0.25 \text{ m}$, Y CUANDO $\theta = 90^\circ$, EL ESTIRAMIENTO ES $(2 \text{ m} + 0.75 \text{ m}) - 0.5 \text{ m} = 2.25 \text{ m}$ POR LO TANTO

$$U_s = - \left[\frac{1}{2} \left(30 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (2.25 \text{ m})^2 - \frac{1}{2} \left(30 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) (0.25 \text{ m})^2 \right] = -75.0 \text{ J}$$

EL RESORTE REALIZA UN TRABAJO NEGATIVO SOBRE LA BARRA DEBIDO A QUE F_s ACTÚA EN DIRECCIÓN OPUESTA AL DESPLAZAMIENTO.

FUERZA P A MEDIDA QUE LA BARRA SE MUEVE HACIA ABAJO, LA FUERZA SE DESPLAZA UNA DISTANCIA DE $\frac{\pi}{2} (3 \text{ m}) = 4.712 \text{ m}$ ENTONCES

$$U_p = 80 \text{ N} (4.712 \text{ m}) = 377.0 \text{ J}$$

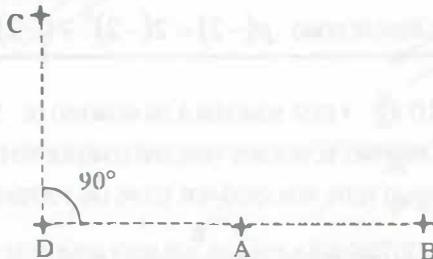
REACCIONES EN EL PERNO LAS FUERZAS A_x Y A_y NO REALIZAN TRABAJO PORQUE NO EXISTE UN DESPLAZAMIENTO

TRABAJO TOTAL POR LO TANTO, EL TRABAJO DE TODAS LAS FUERZAS CUANDO LA BARRA SE DESPLAZA DE $\theta = 0^\circ$ a $\theta = 90^\circ$ ES

$$U \approx 147.2 + 78.5 - 75.0 + 377.0 \approx 528 \text{ J}$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEAN LOS PUNTOS A, B, C y D QUE SE MUESTRAN EN LA FIGURA



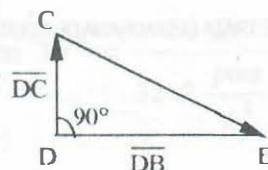
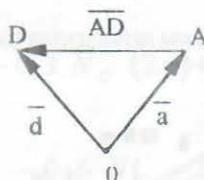
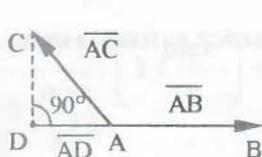
LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS A, B y C SON $A(1,2,3)$; $B(2,4,5)$; $C(-2,-1,3)$

EMPLEAR ÁLGEBRA VECTORIAL PARA:

- DETERMINAR LAS COORDENADAS DEL PUNTO "D"
- CALCULAR EL ÁREA DEL TRIÁNGULO BDC

RESOLUCIÓN

$$\overline{AC} = c - a = (-2, -1, 3) - (1, 2, 3) = (-3, -3, 0) ; \overline{AB} = b - a = (2, 4, 5) - (1, 2, 3) = (1, 2, 2) ; |\overline{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$



DE LA FIGURA (a)

$AD =$ COMPONENTE VECTORIAL DE AC' EN DIRECCIÓN DE AB

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AB}|} \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{(-3, -3, 0) \cdot (1, 2, 2)}{3} \frac{(1, 2, 2)}{3} = (-1, -2, -2)$$

DE LA FIGURA (b)

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + \overline{AD} = (1, 2, 3) + (-1, -2, -2) = (0, 0, 1) \therefore D(0, 0, 1)$$

DE LA FIGURA (c)

$$\overline{DC} = c - \mathbf{d} = (-2, -1, 3) - (0, 0, 1) = (-2, -1, 2) ; \overline{DB} = b - \mathbf{d} = (2, 4, 5) - (0, 0, 1) = (2, 4, 4)$$

$$\overline{DC} \times \overline{DB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-12, 12, -6) ; |\overline{DC} \times \overline{DB}| = \sqrt{144 + 144 + 36} = 18 \therefore \text{ÁREA} = \frac{1}{2} |\overline{DC} \times \overline{DB}| = 9u^2$$

LA COPADI NECESITA ESTUDIANTES QUE QUIERAN AYUDAR A SUS COMPAÑEROS. VENGAN A LAS JUNTAS LOS VIERNES A LAS 13:00 HORAS Y APÚNTENSE. LO PUEDEN HACER DE MANERA VOLUNTARIA O CUMPLIENDO SU SERVICIO SOCIAL. ¡LOS NECESITAMOS! HAY MUCHAS COSAS EN LAS QUE PUEDEN AYUDAR A SUS COMPAÑEROS.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y LUIS HUMBERTO SORIANO SANCHEZ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000

NÚMERO 26

2 DE JULIO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

ANÁLISIS GRÁFICO

PROBLEMA DE MÉTODO AXIOMÁTICO

A PARTIR DEL PUNTO A MOSTRADO EN LA FIGURA 1, TRAZAR UN TRIÁNGULO ABC DE TAL FORMA QUE EL LADO AB SEA HORIZONTAL Y MIDA 90 mm, EL ÁNGULO EN EL VÉRTICE A SEA DE 75° Y EN EL VÉRTICE B DE 45°. DIBUJAR LA CIRCUNFERENCIA QUE CIRCUNSCRIBA AL TRIÁNGULO ABC.

DEMOSTRAR QUE EL RADIO DE DICHA CIRCUNFERENCIA MIDE 51.93 mm ($30\sqrt{3}$), EMPLEANDO LA TRIGONOMETRÍA, ASÍ COMO TEOREMAS GEOMÉTRICOS.

+
A

Figura 1 Punto de partida para el dibujo del ejercicio.

EL TRAZO DE LA FIGURA NO DEBE TENER PROBLEMA ALGUNO, BASTA CON TRAZAR LAS MEDIATRICES DE LOS LADOS DEL TRIÁNGULO (CON DOS ES SUFICIENTE) Y SU INTERSECCIÓN ES EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA BUSCADA, QUE SE IDENTIFICÓ EN LA FIGURA 2 COMO O.

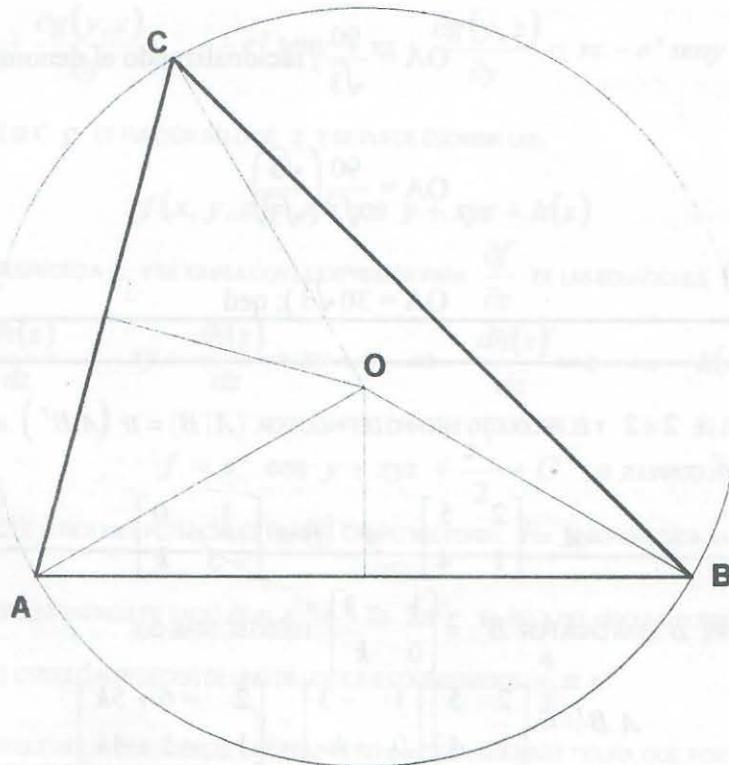


FIGURA 2 SOLUCIÓN GRÁFICA.

Razones	Resultados
D: circunferencia	OA = OB OB = OC OC = OA
T: $\forall \Delta \Sigma \mu < \text{int} = \pi$	$75^\circ + 45^\circ + \gamma + \beta = 180^\circ$ $\gamma + \beta = 60^\circ$
$\mu \forall = \Sigma \mu \text{ partes}$	$\alpha + \beta = 45^\circ$ (1) $\beta + \gamma = 60^\circ$ (2) $\gamma + \alpha = 75^\circ$ (3)
	de (1) $\alpha = 45^\circ - \beta$ (4) de (2) $\gamma = 60^\circ - \beta$ (5) (4) y (5) en (3) $45^\circ - \beta + 60^\circ - \beta = 75^\circ$ $\beta = 15^\circ$ $\therefore \alpha = 30^\circ$
D: Coseno	$\cos \alpha = \frac{45}{OA}$ $OA = \frac{45}{\cos 30^\circ}$; pero como $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $OA = \frac{90}{\sqrt{3}}$; racionalizando el denominador $OA = \frac{90}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right)$ $OA = 30\sqrt{3}$; qed

ÁLGEBRA LINEAL

SEA M EL ESPACIO DE LAS MATRICES DE 2×2 Y EL PRODUCTO INTERNO DEFINIDO POR $\langle A | B \rangle = \text{tr}(AB^T)$. DETERMINAR EL VALOR DE " k " PARA QUE LAS MATRICES A Y B SEAN ORTOGONALES, SI

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & k \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN. LA TRANSPUESTA DE LA MATRIZ B ESTÁ DADA POR $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ LUEGO SE TIENE QUE:

$$AB^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6 + 5k \\ 1 & -3 + 4k \end{bmatrix}$$

LA TRAZA DE LA MATRIZ OBTENIDA ES: $\text{tr}(A B^T) = 2 + (-3 + 4k) = 2 - 3 + 4k = -1 + 4k$ Y PARA QUE LAS MATRICES A Y B SEAN ORTOGONALES, SE DEBE CUMPLIR QUE SU PRODUCTO INTERNO SEA NULO, ES DECIR, QUE $\langle A | B \rangle = 0$, POR LO QUE, FINALMENTE SE LLEGA AL VALOR DE " k " QUE ES:

$$-1 + 4k = 0 \Rightarrow 4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

CÁLCULO III

DEMOSTRAR QUE EL SIGUIENTE CAMPO VECTORIAL ES CONSERVATIVO Y ENCONTRAR UNA FUNCIÓN POTENCIAL PARA ÉL.

$$\vec{F} = (e^x \cos y + yz) \hat{i} + (xz - e^x \text{sen} y) \hat{j} + (xy + z) \hat{k}$$

SOLUCIÓN. PARA ESTE CAMPO VECTORIAL SE TIENE QUE:

$$M = e^x \cos y + yz \quad ; \quad N = xz - e^x \text{sen} y \quad ; \quad P = xy + z$$

DE DONDE

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^x \text{sen} y + z = \frac{\partial N}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial z} = x = \frac{\partial P}{\partial y}$$

ESTAS IGUALDADES EXPRESAN QUE EXISTE UNA FUNCIÓN f CUYO GRADIENTE ES EL CAMPO VECTORIAL \vec{F} , ES DECIR, QUE $\nabla f = \vec{F}$ PARA ENCONTRAR LA FUNCIÓN f , QUE ES LA FUNCIÓN POTENCIAL REQUERIDA, SE PARTE DE QUE LA DIFERENCIAL TOTAL DE LA FUNCIÓN f QUE ESTÁ DADA POR:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

DONDE

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = e^x \cos y + yz \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N = xz - e^x \text{sen} y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P = xy + z \quad \dots \quad (1)$$

SE INTEGRA LA PRIMERA ECUACIÓN DE (1) CON RESPECTO A x , MANTENIENDO FIJAS A y Y A z Y SE OBTIENE

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z)$$

SE ESCRIBE LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN g COMO UNA FUNCIÓN DE y Y z . AHORA SE DERIVA ESTA ECUACIÓN CON RESPECTO A y Y SE IGUALA CON LA

EXPRESIÓN PARA $\frac{\partial f}{\partial y}$ DE LAS ECUACIONES (1). ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \text{sen} y + xz + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} \quad ; \quad -e^x \text{sen} y + xz + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = xz - e^x \text{sen} y \Rightarrow \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 0$$

COMO $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, ENTONCES SE TIENE QUE g ES FUNCIÓN SÓLO DE z Y SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

AHORA SE DERIVA ESTA ECUACIÓN CON RESPECTO A z Y SE IGUALA CON LA EXPRESIÓN PARA $\frac{\partial f}{\partial z}$ DE LAS ECUACIONES (1). ASÍ, SE LLEGA A:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + \frac{dh(z)}{dz} \quad ; \quad xy + \frac{dh(z)}{dz} = xy + z \Rightarrow \frac{dh(z)}{dz} = z \Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + C$$

POR LO TANTO:

$$f = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

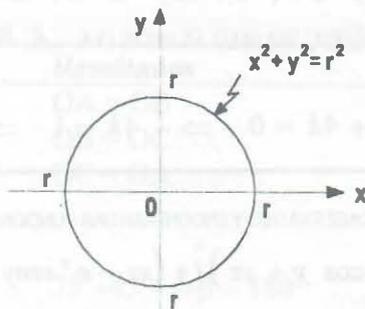
ASI SE HA OBTENIDO UN NÚMERO INFINITO DE FUNCIONES POTENCIALES PARA EL CAMPO VECTORIAL \vec{F} , UNA PARA CADA VALOR DE LA CONSTANTE C

CÁLCULO II

DEMOSTRAR QUE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO IGUAL A " r " ES $2\pi r$, EL ÁREA DEL CÍRCULO CORRESPONDIENTE πr^2 Y EL VOLUMEN

DE LA ESFERA QUE SE FORMA AL GIRAR EL CÍRCULO ALREDEDOR DE UNO DE LOS EJES COORDENADOS $\frac{4}{3} \pi r^3$

SOLUCIÓN. PARA LOS TRES PROBLEMAS REQUERIDOS, CONSIDÉRESE LA CIRCUNFERENCIA DE LA SIGUIENTE FIGURA, QUE, POR COMODIDAD Y SIMPLIFICACIÓN EN LAS OPERACIONES MATEMÁTICAS, SE UBICA CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS.



PARA CALCULAR LA LONGITUD, SE CONSIDERA LA CUARTA PARTE DE LA CIRCUNFERENCIA DEL PRIMER CUADRANTE Y SE PROCEDE COMO SIGUE, TOMANDO EN CUENTA LA EXPRESIÓN QUE SE UTILIZA PARA CALCULAR LA LONGITUD DE ARCO CUANDO LA CURVA ESTÁ DEFINIDA POR SUS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$x = r \cos \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -r \operatorname{sen} \theta ; y = r \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta$$

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta = 4r [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r$$

PARA CALCULAR EL ÁREA DEL CÍRCULO, TAMBIÉN SE CONSIDERA LA CUARTA PARTE DE LA CIRCUNFERENCIA DEL PRIMER CUADRANTE Y SE PROCEDE COMO SIGUE, TOMANDO EN CUENTA LA EXPRESIÓN QUE SE UTILIZA PARA CALCULAR EL ÁREA BAJO LA CURVA, CON LA ECUACIÓN DE ESTA EN COORDENADAS CARTESIANAS.

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

SE OBTIENE PRIMERO LA INTEGRAL INDEFINIDA CON UN CAMBIO DE VARIABLES Y LA CORESPONSIENTE SUSTITUCIÓN TRIGONÓMICA. ASÍ:

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx ; u^2 = x^2 ; u = x ; du = dx ; a^2 = r^2 ; a = r \Rightarrow \int \sqrt{a^2 - u^2} du$$

$$u = a \operatorname{sen} y ; du = a \cos y dy ; \sqrt{a^2 - u^2} = a \cos y \Rightarrow \int a \cos y a \cos y dy = a^2 \int \cos^2 y dy = \frac{a^2}{2} \int dy + \frac{a^2}{2} \int \cos 2y dy$$

$$= \frac{a^2}{2} y + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2y + C = \frac{a^2}{2} \operatorname{angsen} \frac{u}{a} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} y \cos y + C = \frac{a^2}{2} \operatorname{angsen} \frac{u}{a} + \frac{a^2 u}{2a} \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} + C = \frac{r^2}{2} \operatorname{angsen} \frac{x}{r} + \frac{x \sqrt{r^2 - x^2}}{2} + C$$

SE RESUELVE AHORA LA INTEGRAL DEFINIDA Y SE TIENE QUE:

$$A = 4 \left[\frac{r^2}{2} \operatorname{angsen} \frac{x}{r} + \frac{x \sqrt{r^2 - x^2}}{2} \right]_0^r = 4 \left(\frac{r^2}{2} \frac{\pi}{2} \right) = \pi r^2$$

PARA CALCULAR EL VOLUMEN DE LA ESFERA, TAMBIÉN SE CONSIDERA LA CUARTA PARTE DE LA CIRCUNFERENCIA DEL PRIMER CUADRANTE Y SE PROCEDE COMO SIGUE, TOMANDO EN CUENTA LA EXPRESIÓN QUE SE UTILIZA PARA CALCULAR EL VOLUMEN DEL SÓLIDO DE REVOLUCIÓN, CON LA ECUACIÓN DE LA CURVA EN COORDENADAS CARTESIANAS.

ASÍ:

$$V = 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

TUTORÍA

ESTUDIANTE: UN TUTOR PUEDE

- APOYARTE EN EL DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA DE ESTUDIO Y DE TRABAJO APROPIADA AL PRIMER AÑO DE TU CARRERA.
- OFRECERTE APOYO Y SUPERVISIÓN EN TEMAS DE MAYOR DIFICULTAD DE TUS ASIGNATURAS, YA SEA DE MERA DIRECTA O CONSIGUIÉNDOTE QUIEN TE AYUDE.
- CREAR UN CLIMA DE CONFIANZA CONTIGO QUE LE PERMITA CONOCER LOS ASPECTOS DE TU VIDA PERSONAL QUE PUDIERAN INFLUIR EN TU DESEMPEÑO.
- SUGERIRTE ACTIVIDADES EXTRACURRICULARES QUE FAVOREZCAN TU DESARROLLO PROFESIONAL INTEGRAL.
- PROPORCIONARTE INFORMACIÓN ACADÉMICO-ADMINISTRATIVA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ALFREDO ARENAS Y RICARDO MARTÍNEZ GÓMEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.

COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001

NÚMERO 27

17 DE JULIO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. AHORA, ¡A ESTUDIAR Y SALIR BIEN EN ESTE SEMESTRE!

CÁLCULO II

INTEGRALES DE LA FORMA $I_n = \int x^n e^x dx$; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

LA INTEGRAL DE LA FORMA $\int x^n e^x dx$, CUANDO $n = 0$, ES DIRECTA CUANDO $n = 1$, EL MÉTODO POR USARES EL DE INTEGRACIÓN POR PARTES. A PARTIR DE $n = 2$, LA INTEGRAL SE REALIZA MEDIANTE EL MÉTODO POR PARTES, EN EL CUAL SE PRESENTA LA REDUCCIÓN $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$. ESTA INTEGRAL TIENE MUCHAS Y VARIADAS APLICACIONES EN CÁLCULO Y EN ECUACIONES DIFERENCIALES. ADEMÁS, EN ÁLGEBRA LINEAL, EN ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO, EN PARTICULAR EN PROBLEMAS DONDE SE REQUIERE OBTENER LA PROYECCIÓN DEL VECTOR $\vec{v} = e^x$ SOBRE UN ESPACIO VECTORIAL, CON BASE POLINOMIOS. A CONTINUACIÓN SE PRESENTAN EN UNA TABLA LAS INTEGRALES DE ESTE TIPO, DESDE $n = 0$ HASTA $n = 6$ Y CON LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN DE 0 A 1 Y DE -1 A 1 , CON VALORES EXACTOS Y VALORES NUMÉRICOS APROXIMADOS.

$$I_0 = \int e^x dx = e^x + C$$

$$I_1 = \int x e^x dx = e^x (x - 1) + C$$

$$I_2 = \int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

$$I_3 = \int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

$$I_4 = \int x^4 e^x dx = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

$$I_5 = \int x^5 e^x dx = e^x (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

$$I_6 = \int x^6 e^x dx = e^x (x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720) + C$$

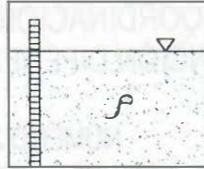
I_n	$\int_0^1 x^n e^x dx$	$\int_{-1}^1 x^n e^x dx$
I_0	$e - 1 \approx 1.7182818$	$e - e^{-1} \approx 2.3504024$
I_1	$e^0 = 1.0000000$	$2e^{-1} \approx 0.7357588$
I_2	$e - 2 \approx 0.7182818$	$e - 5e^{-1} \approx 0.8788846$
I_3	$-2e + 6 \approx 0.5634363$	$-2e + 16e^{-1} \approx 0.4495074$
I_4	$9e - 24 \approx 0.4645364$	$9e - 65e^{-1} \approx 0.5523728$
I_5	$-44e + 120 \approx 0.3955995$	$-44e + 326e^{-1} \approx 0.3242973$
I_6	$265e - 720 \approx 0.3446845$	$265e - 1957e^{-1} \approx 0.4046181$

FÍSICA EXPERIMENTAL

TIPO PRESIÓN ABSOLUTA

EN UN EXPERIMENTO DE LABORATORIO SE MIDIERON PRESIONES ABSOLUTAS Y PROFUNDIDADES PARA OBTENER EL MODELO MATEMÁTICO QUE RELACIONA AMBAS VARIABLES. LAS MEDICIONES EFECTUADAS SE RESUMEN EN LA TABLA SIGUIENTE

$$g = 9.78 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$



z [cm]	P_{abs} [Pa]
0	78000
20	79760
40	81521
60	83281
80	85042
100	86802

Material	ρ $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
Alcohol	810
Benceno	900
Glicerina	1260
Mercurio	13600

OBTENER:

1. LA PENDIENTE DEL MODELO $P = m z + b$ Y EL SIGNIFICADO FÍSICO DE LA PENDIENTE
2. EL MODELO MATEMÁTICO DEL FENÓMENO
3. LA DENSIDAD DEL FLUIDO QUE SE UTILIZÓ EN EL EXPERIMENTO
4. EL MATERIAL DEL QUE SE TRATA DE ACUERDO CON LA SEGUNDA TABLA
5. LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA DONDE SE REALIZÓ EL EXPERIMENTO

RESOLUCIÓN

1. EL MODELO MATEMÁTICO LINEAL $P_{abs} = m z + b$ SE PUEDE OBTENER A TRAVÉS DEL MÉTODO DE PARES DE PUNTOS, DONDE LA PENDIENTE m TIENE COMO SIGNIFICADO AL PESO ESPECÍFICO DE LA SUSTANCIA QUE SE UTILIZÓ EN EL EXPERIMENTO Y CUYO VALORES.

$$m = \frac{(86802 - 81521) + (85042 - 79760) + (83281 - 78000)}{(1.0 - 0.4) + (0.8 - 0.2) + (0.6 - 0.0)} \left[\frac{P_a}{m} \right] = \frac{15844}{1.8} \left[\frac{P_a}{m} \right]$$

$$m = 8802.2222 \left[\frac{P_a}{m} \right] = 8802.2222 \left[\frac{N}{m^3} \right] \text{ (PESO ESPECÍFICO)}$$

2. EL MODELO MATEMÁTICO SE COMPLETA CON EL CÁLCULO DE LA ORDENADA AL ORIGEN b , ES DECIR $b = \bar{P}_{abs} - m \bar{z}$ LUEGO,

$$\bar{P}_{abs} = \frac{86802 + 85042 + 83281 + 81521 + 79760 + 78000}{6} = 82401 [P_a]$$

$$\bar{z} = \frac{1.0 + 0.8 + 0.6 + 0.4 + 0.2 + 0.0}{6} = 0.5 [m] \Rightarrow b = 82401 - (8802.2222)(0.5) = 77999.8889 [P_a]$$

POR LO QUE EL MODELO MATEMÁTICO ES

$$P_{abs} [P_a] = \left(8802.2222 \left[\frac{P_a}{m} \right] \right) z [m] + 77999.8889 [P_a]$$

120

3. COMO LA PENDIENTE m REPRESENTA AL PESO ESPECÍFICO Y ÉSTE A SU VEZ ES IGUAL AL PRODUCTO DE LA DENSIDAD POR LA GRAVEDAD, ENTONCES

$$m = \rho g \Rightarrow \rho = \frac{m}{g} = \frac{8802.2222 \left[\frac{N}{m^3} \right]}{9.78 \left[\frac{m}{s} \right]} = 900.0227 \left[\frac{kg}{m^3} \right]; \text{ QUE ES LA DENSIDAD DEL MATERIAL UTILIZADO.}$$

4. LA DENSIDAD EXPERIMENTAL OBTENIDA EN EL INCISO ANTERIOR SE APROXIMA AL VALOR DE LA DENSIDAD DEL BENCENO POR LO QUE MUY PROBABLEMENTE EL MATERIAL UTILIZADO FUE EL BENCENO.
5. SE SABE QUE EL MODELO TEÓRICO PARA LA PRESIÓN ABSOLUTA ES:

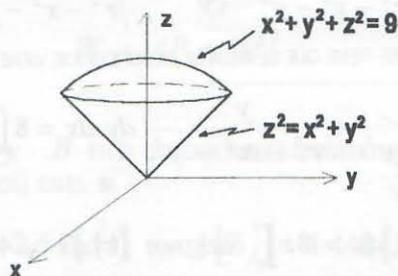
$$P_{abs} = P_{relativa} + P_{atmosférica}$$

SI SE COMPARA CON EL MODELO MATEMÁTICO EXPERIMENTAL OBTENIDO $P_{abs} [P_a] = \left(8802.2222 \left[\frac{P_a}{m} \right] \right) z [m] + 77999.8889 [P_a]$

SE PUEDE DECIR QUE $P_{atmosférica} = 77999.8889 [P_a]$ OTRA FORMA DE SABER CUÁL ES EL VALOR DE $P_{atmosférica}$ ES HACER CERO EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD z . ASÍ, SI $z = 0 [m]$, ENTONCES $P_{relativa} = 0 [P_a]$ Y DEL MODELO MATEMÁTICO OBTENIDO SE OBTIENE EL VALOR SEÑALADO ANTERIORMENTE. TAMBIÉN SE OBSERVA, EN LA TABLA DE VALORES QUE, CUANDO $z = 0 [cm]$, SE TIENE QUE $P_{abs} = 78000 [P_a] = P_{atmosférica}$.

CÁLCULO III

CALCULAR EL VOLUMEN Y EL CENTRO DE MASA DEL SÓLIDO LIMITADO SUPERIORMENTE POR LA ESFERA $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ E INFERIORMENTE POR LA HOJA SUPERIOR DEL CONO $z^2 = x^2 + y^2$ SUPÓNGASE QUE EL SÓLIDO TIENE DENSIDAD UNIFORME.
SOLUCIÓN EN LA SIGUIENTE FIGURA SE APRECIA EL SÓLIDO CONSIDERADO.



LA ECUACIÓN DE LA ESFERA EN COORDENADAS ESFÉRICAS ESTÁ DADA POR:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ OSEA } r = 3$$

ADEMÁS, LA ESFERA Y EL CONO SE CORTAN CUANDO

$$x^2 + y^2 = -z^2 + 9; \quad x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow -z^2 + 9 = z^2 \Rightarrow 2z^2 = 9 \Rightarrow z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

POR LO TANTO, COMO $z = r \cos \phi$ SE DEDUCE QUE $\cos \phi = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{3} \Rightarrow \phi = \text{ang} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$

Y ENTONCES EL VOLUMEN SE CALCULA MEDIANTE LA INTEGRAL TRIPLE SIGUIENTE:

$$V = \iiint_R dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^3 r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3} \sin \phi \right]_0^3 d\phi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 9 \sin \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} [-9 \cos \phi]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{9}{\sqrt{2}} + 9 \right) d\theta = \left(-\frac{9}{\sqrt{2}} + 9 \right) [\theta]_0^{2\pi} \approx 16.56$$

POR LA SIMETRÍA DEL PROBLEMA, EL CENTRO DE MASA ESTÁ SOBRE EL EJE z Y, POR CONSIGUIENTE, SÓLO ES NECESARIO CALCULAR LA COTA \bar{z} DEL CENTRO DE MASA, LO QUE SE HACE MEDIANTE LA EXPRESIÓN $\bar{z} = \frac{M_z}{V}$, COMO $z = r \cos \phi$, ENTONCES

$$M_z = \iiint_R z \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^3 (r \cos \phi) r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^4}{4} \sin \phi \cos \phi \right]_0^3 d\phi \, d\theta$$

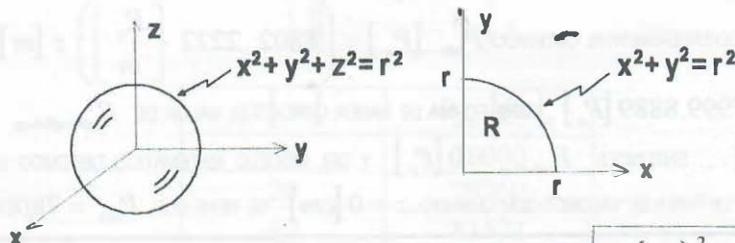
$$M_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{81}{4} \sin \phi \cos \phi \right) d\phi d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{81}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{81}{16} [\theta]_0^{2\pi} \approx 31.81$$

DEDONDE $\bar{z} = \frac{31.81}{16.56} \approx 1.92$ Y ENTONCES LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE MASA SON $(0, 0, 1.92)$

CÁLCULO III

VERIFICAR QUE EL ÁREA DE LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA DE RADIO r EQUIVALE A $4\pi r^2$

SOLUCIÓN. CONSIDÉRESE UNA ESFERA CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS Y RADIO r



LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR EL ÁREA DE LA SUPERFICIE $z = f(x, y)$ ES: $S = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$

COMO $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$; LUEGO, SI SE CONSIDERA LA REGIÓN CIRCULAR

$x^2 + y^2 = r^2$ Y SE TRABAJA EN UN CUARTO DE ELLA, SE TIENE QUE EL ÁREA DE LA SUPERFICIE VIENE DADA POR:

$$S = 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{r^2 - x^2 - y^2}} dy dx = 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dy dx$$

$$S = 8r \int_0^r \left[\operatorname{angsen} \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right]_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 8r \int_0^r \operatorname{angsen} (1) dx = 4\pi r [x]_0^r = 4\pi r^2$$

TUTORÍA

ALGUNOS TESTIMONIOS DE ESTUDIANTES Y TUTORES

ESTUDIANTES

“Como programa puede ser una forma de que alguien esté al pendiente de ti y sabes que cuentas con un tutor”.

“Es cuando alguien nos guía en las decisiones que tomamos y nos aclara sobre las dudas de la carrera que queremos”.

“Es una especie de reunión donde alguien va a “cuidarnos” y ayudarme cuando tenga problemas”

“Es un programa en el cual una persona, en este caso un profesor de la Facultad te ayuda como estudiante y como ser humano. Es una guía en tu carrera”.

TUTORES

“Yo concibo a la Tutoría no como una clase, o como una actividad que tenga un programa estricto a seguir. Yo veo a la Tutoría como una labor libre y humana”.

“En la Tutoría, no sólo hay que trabajar en las cosas técnicas, sino en todo aquello que envuelve a las personas”.

“Durante la Tutoría yo le muestro a los estudiantes las ventajas y desventajas de lo que es la carrera; trato de darles un panorama general de las actitudes que requiere esta profesión; los llevo a visitar instituciones como el Instituto de Ingeniería, de Geofísica, de Astronomía, etcétera.”

“Yo creo que en la Tutoría el profesor debe exponer lo que se puede o no hacer en el programa. Debe dar oportunidad a que los estudiantes expongan sus problemas personales. Canalizarlos hacia las instancias donde los puedan ayudar. Porque pienso que la Tutoría debe ofrecer una atención humana y personal. Siempre se puede hacer más y mejor”.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES GUSTAVO BALMORI NEGRETE Y MARTÍN BÁRCENAS ESCOBAR

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVI A Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001

NÚMERO 28

17 DE AGOSTO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. SE ACERCA EL FINAL DEL SEMESTRE. ¡TODAVÍA ES TIEMPO DE RECUPERARSE Y ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS!

FÍSICA EXPERIMENTAL

EN EL SISTEMA INGLÉS (FPS) GRAVITATORIO SE TIENE LA EXPRESIÓN SIGUIENTE QUE RELACIONA LA VARIABLE W (TRABAJO, EN $lb_f \cdot ft$) CON LAS VARIABLES

P (PRESIÓN MANOMÉTRICA, EN $psi = \frac{lb_f}{in^2}$) Y ℓ (DISTANCIA EN ft):

$$W = AP + B\ell^2$$

SEAN $A = 4$ y $B = 0.5$. DETERMINAR:

- LAS UNIDADES DE CADA UNA DE LAS CONSTANTES A y B EN EL SISTEMA INGLÉS GRAVITATORIO.
- EL VALOR DE LAS CONSTANTES (COEFICIENTES NUMÉRICOS) EN EL SI
- LA TRADUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN DADA AL SI

CONSIDÉRESE QUE $1 [ft] = 0.3048 [m]$; $1 [in] = 2.54 [cm]$; $1 [lb_f] = 4.448 [N]$

SOLUCIÓN: A) DE ACUERDO CON LA INFORMACIÓN PROPORCIONADA

$$[W]_u = lb_f \cdot ft \quad ; \quad [P]_u = \frac{lb_f}{in^2} \quad ; \quad [\ell]_u = ft$$

$$W = 4P + 0.5\ell^2 = AP + B\ell^2$$

CON BASE EN EL PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL, SE PUEDE ESTABLECER QUE:

$$[A]_u [P]_u = [W]_u = lb_f \cdot ft$$

$$\text{POR LO TANTO } [A]_u = \frac{[W]_u}{[P]_u} = \frac{lb_f \cdot ft}{\frac{lb_f}{in^2}} = ft \cdot in^2$$

$$\text{POR OTRA PARTE } [B]_u [\ell^2]_u = [W]_u = lb_f \cdot ft \Rightarrow [B]_u = \frac{[W]_u}{[\ell^2]_u} = \frac{lb_f \cdot ft}{ft^2} = \frac{lb_f}{ft}$$

B) SE DETERMINA EL VALOR DE LA CONSTANTE A EN EL SI:

$$A = 4 ft \cdot in^2 = 4 ft \cdot in^2 \left(\frac{0.3048 m}{1 ft} \right) \left(\frac{2.54^2 cm^2}{1 in^2} \right) \left(\frac{1 m^2}{100^2 cm^2} \right) \Rightarrow A = 0.000787 [m^3]$$

PARA LA CONSTANTE B SE TIENE QUE:

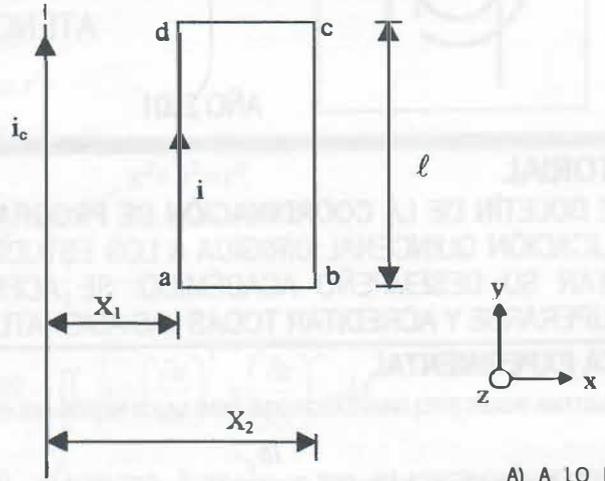
$$B = 0.5 \frac{lb_f}{ft} \left(\frac{4.448 N}{1 lb_f} \right) \left(\frac{1 ft}{0.3048 m} \right) \Rightarrow B = 7.2966 \left[\frac{N}{m} \right]$$

$$c) W [N \cdot m] = 0.000787 [m^3] P [Pa] + 7.2966 \left[\frac{N}{m} \right] \ell^2 [m^2]$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

EN LA FIGURA SE MUESTRAN UN CONDUCTOR RECTO MUY LARGO Y UNA ESPIRA RECTANGULAR, AMBOS COPLANARES AL PLANO xy . SI POR EL CONDUCTOR RECTO CIRCULA UNA CORRIENTE ELÉCTRICA DE $100 [A]$ Y POR LA ESPIRA UNA DE $20 [A]$; $x_1 = 2 [cm]$; $x_2 = 10 [cm]$ y $\ell = 20 [cm]$; CALCULAR:

- A) LA FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO EN EL LADO ab DE LA ESPIRA, DEBIDA AL CONDUCTOR RECTO MUY LARGO.
 B) EL FLUJO MAGNÉTICO DEBIDO AL CONDUCTOR RECTO A TRAVÉS DEL ÁREA ENCERRADA POR LA ESPIRA RECTANGULAR.
 C) LA fem INDUCIDA EN LA ESPIRA SI POR EL CONDUCTOR RECTO CIRCULARA UNA CORRIENTE ELÉCTRICA $i_c = 100 \text{ sen } \omega t$, SIENDO $\omega = 2\pi f$ y $f = 60 [Hz]$.
 D) EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA ENTRE LA ESPIRA Y EL CONDUCTOR.



RESOLUCIÓN

DEL LADO ab DE LA ESPIRA SE TIENE UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE EN MAGNITUD PERO DE DIRECCIÓN $(-\hat{k})$ CONSTANTE; POR ESTA RAZÓN LA FUERZA

F_{ab} SE OBTENDRÁ POR INTEGRACIÓN DE $d\vec{F}_{ab} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$; EN MAGNITUD:

$$dF_{ab} = idl B \text{ sen } \theta \quad ; \quad \theta \left(\text{entre } \vec{B} \text{ y } d\vec{\ell} \right) = \frac{\pi}{2} [\text{rad}] \quad ; \quad \vec{F}_{ab} = F_{ab} (-\hat{j}) \quad \text{y} \quad F_{ab} = \int dF_{ab}$$

$$F_{ab} = i \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i_c i}{2\pi} \text{Ln} \frac{x_2}{x_1} \quad \text{donde} \quad dr = dl$$

$$\therefore \vec{F}_{ab} = - \left[\frac{4\pi \times 10^{-7} (100) 20}{2\pi} \text{Ln} \frac{10}{2} \right] \hat{j} = -0.6438 \hat{j} [mN]$$

B) DE LA DEFINICIÓN DE FLUJO MAGNÉTICO: $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ SE OBTIENE:

$$\phi = \iint B dS \cos \alpha \quad ; \quad \alpha = 0, \alpha \left(\text{entre } \vec{B} \text{ y } d\vec{S} \right) \text{ y } B = f(r) \quad \therefore \quad \phi = \iint B dx dy = \int_c^t \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0 i_c}{2\pi x} dx dy$$

$$\phi_{ec} = \frac{\mu_0 i_c \ell}{2\pi} \text{Ln} \frac{x_2}{x_1} \quad \Rightarrow \quad \phi_{ec} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (100) 0.2}{2\pi} \text{Ln} \frac{10}{2} = 6.438 [\mu Wb] \quad \text{entrando a la figura}$$

C) CON LA LEY DE FARADAY: $\varepsilon = -N \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -N \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 i_c \ell}{2\pi} \text{Ln} \frac{x_2}{x_1} \right)$

$$\varepsilon = -N \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \text{Ln} \frac{x_2}{x_1} \frac{d(i_c)}{dt} = -N \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \text{Ln} \frac{x_2}{x_1} \frac{d(100 \text{ sen } \omega t)}{dt} = -N \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \text{Ln} \frac{x_2}{x_1} 100 \omega \cos \omega t$$

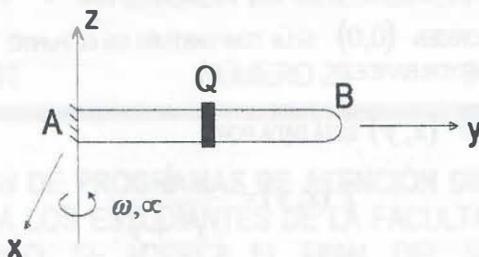
$$\varepsilon = -(1) \frac{4\pi \times 10^{-7} (0.2)}{2\pi} \left(\text{Ln} \frac{10}{2} \right) 100 [2\pi (60)] \cos \omega t = 2.4269 \cos (120 \pi t) [mV]$$

D) EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA SE OBTIENE CON: $M = \frac{N \phi_{ec}}{i_c} \Rightarrow M = \frac{N \mu_0 i_c \ell}{(i_c) 2\pi} \text{Ln} \frac{x_2}{x_1}$

$$M = (1) \frac{4\pi \times 10^{-7} (0.2)}{2\pi} \text{Ln} \frac{10}{2} = 64.378 [nH]$$

CINEMÁTICA

UN ANILLO Q SE DESPLAZA A LO LARGO DE LA BARRA \overline{AB} PARTIENDO DE A CUANDO DICHA BARRA GIRA ALREDEDOR DEL EJE "z" CON UNA ACELERACIÓN DE MAGNITUD $10 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right)$ Y UNA RAPIDEZ ANGULAR DE $5 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$, DETERMINAR LA ACELERACIÓN ABSOLUTA DEL ANILLO CUANDO SE ENCUENTRA A 60 (cm) DE A , SI SE SABE QUE PARA DICHA POSICIÓN SU RAPIDEZ A LO LARGO DE LA BARRA Y LA MAGNITUD DE SU ACELERACIÓN SON, RESPECTIVAMENTE, $120 \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right)$ Y $90 \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \right)$



SOLUCIÓN. SI SE HACE COINCIDIR EL ORIGEN DEL SISTEMA DE REFERENCIA MÓVIL CON A , SE OBTIENE:

$$\vec{R} = \vec{0} \text{ (m)} ; \quad \dot{\vec{R}} = \vec{0} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) ; \quad \ddot{\vec{R}} = \vec{0} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

ADemás SE SABE QUE:

$$\vec{\rho} = 0.6 \vec{e}_r \text{ (m)} ; \quad \dot{\vec{\rho}}_r = 1.2 \vec{e}_r \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right) ; \quad \ddot{\vec{\rho}}_{rr} = 0.9 \vec{e}_r \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\vec{\omega} = 5 \hat{k} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) ; \quad \vec{\alpha} = 10 \hat{k} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right)$$

LA ACELERACIÓN ABSOLUTA DE Q ESTARÁ DADA POR:

$$\vec{a}_Q = \ddot{\vec{R}} + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_r + \ddot{\vec{\rho}}_{rr}$$

SE SUSTITUYEN LOS DATOS CONOCIDOS Y SE TIENE QUE:

$$\vec{a}_Q = \vec{0} + 10 \hat{k} \times 0.6 \vec{e}_r + 5 \hat{k} \times (5 \hat{k} \times 0.6 \vec{e}_r) + 2 (5 \hat{k}) \times 1.2 \vec{e}_r + 0.9 \vec{e}_r$$

$$\text{DE DONDE: } \vec{a}_Q = -14.1 \vec{e}_r + 18 \vec{e}_\phi \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

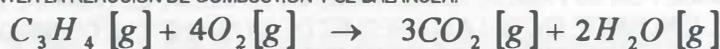
QUÍMICA

LA ENTALPIA DE FORMACIÓN DEL PROPINO GASEOSO C_3H_4 [g] ES $+185.4 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{gmol}} \right]$. CALCULAR CUÁNTO CALOR SE DESPRENDERÍA DE LA COMBUSTIÓN

COMPLETA DE 325 [g] DE PROPINO. TODOS LOS PRODUCTOS SON GASES A 298.15 [K].

RESOLUCIÓN.

1. SE PLANTEA LA REACCIÓN DE COMBUSTIÓN Y SE BALANCEA.



2. SE CALCULA LA ENTALPIA DE REACCIÓN (COMBUSTIÓN) UTILIZANDO LAS TABLAS DE DATOS TERMODINÁMICOS QUE APARECEN EN LOS LIBROS DE QUÍMICA GENERAL.

$$\Delta H^0_r = \left[3 \text{ mol } CO_2 \left(-393.5 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \right) + 2 \text{ mol } H_2O \left(-241.8 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \right) \right] - \left[1 \text{ mol } C_3H_4 \left(185.4 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \right) \right]$$

$$\Delta H^0_r = -1664.1 [kJ] - 185.4 [kJ] \Rightarrow \Delta H^0_r = -1849.5 [kJ]$$

3. DE ACUERDO A LOS CÁLCULOS, SE OBSERVA QUE LA COMBUSTIÓN DE 1 [mol] de C_3H_4 LIBERA 1849.5 [kJ] DE ENERGÍA EN FORMA DE CALOR; ESTO SE PUEDE PLANTEAR DE LA FORMA SIGUIENTE:

40.0653 [g] de C_3H_4 (QUE EQUIVALE A 1 [mol]) LIBERAN 1849.5 [kJ] DE ENERGÍA EN FORMA DE CALOR, CUANDO SE QUEMAN, DE TAL FORMA QUE 325 [g] LIBERARÁN:

$$325 \text{ [g]} C_3H_4 \left(\frac{-1849.5 \text{ [kJ]}}{40.0653 \text{ [g]} C_3H_4} \right) = -15,002.6844 \text{ [kJ]}$$

QUE ES EL RESULTADO DEL PROBLEMA, ES DECIR QUE:

$$Q = -15,002.6844 \text{ [kJ]}$$

NOTA. EJERCICIO DEL CUADERNO DE EJERCICIOS DE QUÍMICA GENERAL, EDITADO POR LA FACULTAD DE INGENIERÍA.

CÁLCULO II

UN PLATO METÁLICO ESTÁ SITUADO EN EL PLANO xy DE TAL FORMA QUE LA TEMPERATURA T EN CUALQUIER PUNTO $P(x, y)$ ES INVERSAMENTE PROPORCIONAL A LA DISTANCIA DEL PUNTO P AL ORIGEN $(0,0)$. SI LA TEMPERATURA EN EL PUNTO $(-3,4)$ ES IGUAL A $50^\circ C$, ¿EN QUÉ DIRECCIÓN DESDE ESTE PUNTO LA TEMPERATURA AUMENTA CON MAYOR RAPIDEZ?

SOLUCIÓN. LA TEMPERATURA T EN CUALQUIER PUNTO (x, y) ESTÁ DADA POR:

$$T(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

DONDE k ES LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD. COMO $T = 50^\circ C$ CUANDO $(x, y) = (-3, 4)$ ENTONCES SE TIENE QUE:

$$k = T(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow k = 50 \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} \Rightarrow k = 50(5) = 250$$

EL GRADIENTE DE T ES:

$$\begin{aligned} \nabla T &= \frac{\partial T}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{j} = \frac{-250 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{-250 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \hat{j} = \frac{-250x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} + \frac{-250y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{j} \\ \nabla T(-3, 4) &= \frac{-250(-3)}{(5)^3} \hat{i} + \frac{-250(4)}{(5)^3} \hat{j} \Rightarrow \nabla T(-3, 4) = 6 \hat{i} - 8 \hat{j} \end{aligned}$$

Y ES EN ESTA DIRECCIÓN DEL GRADIENTE EN LA CUAL LA TEMPERATURA SE INCREMENTA CON MAYOR RAPIDEZ DESDE EL PUNTO CONSIDERADO.

LA TEMPERATURA DECRECE CON MAYOR RAPIDEZ EN LA DIRECCIÓN OPUESTA, ESTO ES, EN LA DIRECCIÓN $-6 \hat{i} + 8 \hat{j}$ EN CUALQUIER DIRECCIÓN PERPENDICULAR A $6 \hat{i} - 8 \hat{j}$ LA TEMPERATURA NI CRECE NI DECRECE SINO QUE PERMANECE CONSTANTE. ESTA DIRECCIÓN PERPENDICULAR DEFINE LO QUE SE CONOCE COMO CURVA ISOTÉRMICA, QUE ES EQUIVALENTE A AL CONCEPTO DE 'CURVA DE NIVEL'.

CULTURA

LA PERFECCIÓN

ME PREGUNTAS, HERMANO MÍO, ¿CUÁNDO SERÁ PERFECTO EL HOMBRE? ESCUCHA, PUES, MI CONTESTACIÓN:

SE DIRIGE ÉSTE A LA PERFECCIÓN CUANDO SIENTE QUE ES EL ESPACIO, SIN CONTORNOS Y SIN LÍMITES; QUE ES EL MAR, SIN RIBERAS Y SIN PLAYAS; QUE ES EL FUEGO SIEMPRE ENCENDIDO; LA LUZ, ETERNAMENTE ESPLENDOROSA; LOS VIENTOS, TRANQUILOS O BORRASCOSOS; LAS NUBES, CON LA LLUVIA, EL RELÁMPAGO Y EL TRUENO; LOS ARROYOS GEMEBUNDOS O RISUEÑOS; LOS ÁRBOLES, FLORECIDOS EN PRIMAVERA Y DESNUDOS EN OTOÑO; LOS MONTES ENHIESTOS; LOS VALLES PROFUNDOS; Y LOS CAMPOS, YA ESTÉRILES, YA FERACES. SI EL HOMBRE SE IDENTIFICA CON TODAS ESTAS COSAS, ALCANZA LA MITAD DEL CAMINO DE LA PERFECCIÓN.

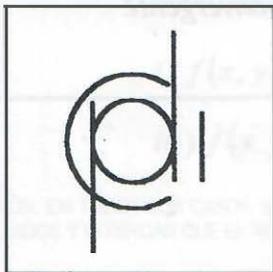
PERO SI DESEA LLEGAR A LA META, DEBE IDENTIFICARSE CON SU ÍNTIMO SER. DEBE SENTIRSE EL NIÑO QUE SE REFUGIA EN SU MADRE; EL JOVEN EXTRAVIADO ENTRE SU AMOR Y SUS ESPERANZAS; EL HOMBRE MADURO QUE LUCHA ENTRE SU PASADO Y SU PORVENIR; EL ANCIANO QUE RESPONDE POR SU FAMILIA; EL RELIGIOSO EN LA CELDA, EL CRIMINAL EN LA PRISIÓN; EL SABIO ENTRE SUS LIBROS Y SUS DOCUMENTOS; EL IGNORANTE ENTRE LA LOBREGUEZ DE SU NOCHE Y LA OSCURIDAD DE SU DÍA; LA MONJA ENTRE LAS FLORES DE SU FE Y LAS ESPINAS DE SU MELANCOLÍA; LA RAMERA ENTRE LOS COLMILLOS DE SU DEBILIDAD Y LAS GARRAS DE SUS NECESIDADES; EL POBRE ENTRE SU AMARGURA Y SU SUMISIÓN; EL RICO ENTRE SU CODICIA Y SU OBEDIENCIA; Y EL POETA ENTRE LAS NIEBLAS DE SU CREPÚSCULO Y LA CLARIDAD DE SUS DESLUMBRAMIENTOS. SI PUEDE EL HOMBRE CONOCER Y SENTIR TODAS ESTAS COSAS, ALCANZARÁ LA PERFECCIÓN, CONVIRTIÉNDOSE, ENTONCES, EN UNA DE LAS SOMBRAS DE DIOS.

GIBRÁN JALIL GIBRÁN

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ, RIGEL GÁMEZ LEAL, GABRIEL JARAMILLO MORALES Y FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. SE ACERCA EL FINAL DEL SEMESTRE. ¡TODAVÍA ES TIEMPO DE RECUPERARSE Y ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS!

CÁLCULO I

¿CONVERGEN O DIVERGEN LAS SIGUIENTES SERIES?

$$i) \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} ; \quad ii) \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$iii) \frac{101}{3} + \frac{102}{10} + \frac{103}{29} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100+n}{n^3+2} ; \quad iv) \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

SOLUCIÓN

i) Sean $a_n = \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$ y $b_n = \frac{1}{n}$. LA SERIE $\sum b_n$ ES LA SERIE ARMÓNICA DIVERGENTE. POR LA PRUEBA DEL LÍMITE DEL COCIENTE, SI

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$, ENTONCES LAS DOS SERIES CONVERGEN O LAS DOS DIVERGEN. LUEGO,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2+2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2 > 0 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} \text{ es divergente}$$

ii) EL LÍMITE DEL TÉRMINO ENÉSIMO ES IGUAL A: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$. ENTONCES, POR EL CRITERIO DEL LÍMITE DEL TÉRMINO ENÉSIMO, LA

SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ ES DIVERGENTE.

iii) Sean $a_n = \frac{100+n}{n^3+2}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$. LA SERIE $\sum b_n$ ES CONVERGENTE YA QUE SE TRATA DE UNA SERIE "p" CON $p = 2 > 1$. POR

LA PRUEBA DEL LÍMITE DEL COCIENTE, SI $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$, ENTONCES LAS DOS SERIES CONVERGEN O LAS DOS DIVERGEN. LUEGO,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{100+n}{n^3+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n^2+n^3}{n^3+2} = 1 > 0 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100+n}{n^3+2} \text{ es convergente}$$

iv) Sean $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ y $b_n = \frac{1}{2^n}$. LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ES CONVERGENTE YA QUE SE TRATA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA CON $r = \frac{1}{2} < 1$.

POR LA PRUEBA DEL LÍMITE DEL COCIENTE, SI $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$, ENTONCES LAS DOS SERIES CONVERGEN O LAS DOS DIVERGEN. LUEGO,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1 > 0 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \text{ es convergente}$$

CÁLCULO II

PARA LA FUNCIÓN $f(x, y) = x^2y + 2y^2x$, EN EL PUNTO $P(1,3)$, DETERMINAR:

- LA DERIVADA DIRECCIONAL DE LA FUNCIÓN f EN LA DIRECCIÓN DEL VECTOR $\bar{a} = 5\hat{i} + 6\hat{j}$.
- LA DIRECCIÓN DE MAYOR CRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN f .
- LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f EN LA DIRECCIÓN DE SU MAYOR CRECIMIENTO.
- LA DIRECCIÓN DE MAYOR DECRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN f .
- LAS DIRECCIONES EN LAS QUE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f ES NULA.
- LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE $z = f(x, y)$ EN EL PUNTO $(1, 3, 21)$.

SOLUCIÓN. PARA CALCULAR LA DERIVADA DIRECCIONAL DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y EN UNA CIERTA DIRECCIÓN DADA SE USA LA EXPRESIÓN

$$D_{\omega} f(x, y) = \nabla f \cdot \bar{\omega}$$

PRIMERO SE CALCULARÁ EL GRADIENTE DE LA FUNCIÓN. ASÍ

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} = (2xy + 2y^2) \hat{i} + (x^2 + 4yx) \hat{j} \Rightarrow \nabla f|_P = 24 \hat{i} + 13 \hat{j}$$

i) SE APLICA LA EXPRESIÓN DADA PARA LA DERIVADA DIRECCIONAL, PERO ANTES SE HACE UNITARIA LA DIRECCIÓN DADA. ASÍ,

$$|\bar{a}| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \approx 7.81 \Rightarrow \bar{\omega} \approx \frac{5}{7.81} \hat{i} + \frac{6}{7.81} \hat{j} \approx 0.64 \hat{i} + 0.768 \hat{j}$$

LUEGO, LA DERIVADA DIRECCIONAL ES:

$$D_{\omega} f(x, y) = \nabla f|_P \cdot \bar{\omega} \approx (24, 13) \cdot (0.64, 0.768) \approx 15.36 + 9.984 \approx 25.344$$

ii) LA DIRECCIÓN DE MAYOR CRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN SE PRESENTA EN LA DIRECCIÓN DEL GRADIENTE, ES DECIR, EN LA DIRECCIÓN

$$\nabla f|_P = 24 \hat{i} + 13 \hat{j}$$

iii) LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f EN LA DIRECCIÓN DE SU MAYOR CRECIMIENTO EQUIVALE A LA MÁXIMA DERIVADA DIRECCIONAL, ESTO ES, AL MÓDULO DEL GRADIENTE. ASÍ,

$$D_{\omega} f(1, 3)_{\max} = |\nabla f| = \sqrt{24^2 + 13^2} \approx 27.29$$

iv) LA DIRECCIÓN DE MAYOR DECRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN f EQUIVALE A LA DIRECCIÓN OPUESTA A LA DEL GRADIENTE, ESTO ES:

$$-\nabla f|_P = -24 \hat{i} - 13 \hat{j}$$

v) LAS DIRECCIONES EN LAS QUE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f ES NULA, SON LAS QUE SON PERPENDICULARES A LA DIRECCIÓN DEL GRADIENTE, ES DECIR, AQUÉLLAS CUYO PRODUCTO ESCALAR (O PUNTO) CON EL GRADIENTE, ES CERO. ENTONCES SON:

$$-13 \hat{i} + 24 \hat{j} \quad \text{y} \quad 13 \hat{i} - 24 \hat{j}$$

vi) PARA ENCONTRAR LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE $z = f(x, y)$ EN EL PUNTO $(1, 3, 21)$ SE HACE LO SIGUIENTE: SE OBTIENE UN VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE $z = f(x, y)$ Y PARA ELLO SE OBTIENE EL GRADIENTE DE LA FUNCIÓN $F = -f(x, y) + z = 0$, ESTO ES, DE LA FUNCIÓN $F = -x^2y - 2y^2x + z = 0$. LUEGO, EL VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE ES:

$$\bar{N} = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{k} = (-2xy - 2y^2) \hat{i} + (-x^2 - 4yx) \hat{j} + \hat{k} \Rightarrow \bar{N}|_{(1, 3, 21)} = -24 \hat{i} - 13 \hat{j} + \hat{k}$$

Y UN VECTOR PARALELO AL PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE EN EL PUNTO $(1, 3, 21)$ ESTA DADO POR $(x-1)\hat{i} + (y-3)\hat{j} + (z-21)\hat{k}$, DONDE EL PUNTO (x, y, z) PERTENECE A DICHO PLANO. LUEGO, LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE SE OBTIENE A TRAVÉS DEL PRODUCTO ESCALAR DEL ESTE VECTOR CON EL VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE IGUALADO A CERO, LA CUAL ES LA CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD. ASÍ, FINALMENTE SE TIENE QUE:

$$-24(x-1) - 13(y-3) + 1(z-21) = 0 \Rightarrow -24x + 24 - 13y + 39 + z - 21 = 0 \Rightarrow 24x + 13y - z - 42 = 0$$

CÁLCULO II

PROBAR QUE LAS SIGUIENTES FUNCIONES SON ARMÓNICAS, ES DECIR, QUE EN SUS RESPECTIVOS DOMINIOS SATISFACEN LA ECUACIÓN

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

i) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; ii) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

iii) $f(x, y) = \cos x \sinh y + \sin x \cosh y$; iv) $f(x, y) = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$

SOLUCIÓN. EN TODOS LOS CASOS SE DEBEN OBTENER LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES CON RESPECTO A AMBAS VARIABLES INDEPENDIENTES, SUMAR LOS RESULTADOS Y VERIFICAR QUE EL RESULTADO ES CERO PARA QUE LAS FUNCIONES SEAN ARMÓNICAS.

i)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2)(1) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(1) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ii)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(x^2 + y^2)(0) - (-y)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(0) - x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

iii)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \sinh y + \cos x \cosh y; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x \sinh y - \sin x \cosh y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos x \cosh y + \sin x \sinh y; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cos x \sinh y + \sin x \cosh y$$

iv)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x} \cos y - e^{-y} \sin x; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

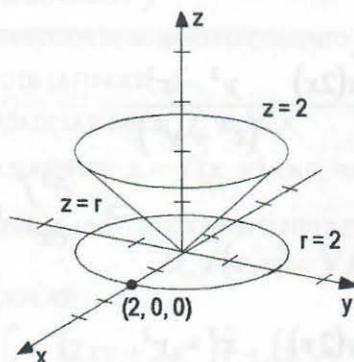
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{-x} \sin y - e^{-y} \cos x; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$$

CÁLCULO III

UN SÓLIDO ESTÁ LIMITADO POR EL CONO DE ECUACIÓN $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ Y EL PLANO $z = 2$. LA DENSIDAD EN CUALQUIER PUNTO $P(x, y, z)$ DEL SÓLIDO ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE SU DISTANCIA AL ORIGEN DE COORDENADAS. ENCONTRAR SU MASA.

SOLUCIÓN. EL SÓLIDO SE MUESTRA EN LA FIGURA. LA ECUACIÓN DEL CONO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS ES $z = r$, CON $r \geq 0$. Nótese que si $z = 2$, ENTONCES $2 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 4 = x^2 + y^2$. POR LO TANTO, LA PARTE SUPERIOR DEL CONO PROYECTA EN EL PLANO xy EL CÍRCULO $x^2 + y^2 = 4$ O $r = 2$. LA DENSIDAD EN EL PUNTO (x, y, z) ESTÁ DADA POR:

$$\rho = k(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{o} \quad \rho = k(r^2 + z^2)$$



ENTONCES LA MASA SE OBTIENE COMO:

$$M = \iiint_R \rho \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 k(r^2 + z^2) r \, dz \, dr \, d\theta$$

SE RESUELVEN LAS INTEGRALES REITERADAS Y SE OBTIENE:

$$M = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[r^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_r^2 r \, dr \, d\theta = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\left(2r^2 + \frac{8}{3} \right) - \left(r^3 + \frac{r^3}{3} \right) \right] r \, dr \, d\theta$$

$$M = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(2r^3 + \frac{8}{3}r - \frac{4}{3}r^4 \right) dr \, d\theta = k \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{r^4}{4} + \frac{8}{3} \frac{r^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{r^5}{5} \right]_0^2 d\theta$$

$$M = k \int_0^{2\pi} \frac{24}{5} d\theta = \frac{24}{5} k [\theta]_0^{2\pi} = \frac{48}{5} \pi k$$

CULTURA

ALGUNAS MÁXIMAS DE GIBRÁN JALIL GIBRÁN

"APENAS AYER ME SENTÍA UNA PARTÍCULA OSCILANDO SIN RITMO DENTRO DE LA ESFERA DE LA VIDA. AHORA SÉ QUE SOY ESA ESFERA, Y TODA LA VIDA PALPITA EN RÍTMICA FAENA EN MI INTERIOR."

"LA VERDADERA DIMENSIÓN DE HOMBRE NO REDIDE EN LO QUE LOGRA, SINO EN LO QUE ANSÍA LOGRAR."

"LA VOZ DE LA VIDA QUE HAY EN MÍ NO PUEDE LLEGAR AL OÍDO DE LA VIDA QUE HAY EN TI. PERO HABLEMOS PARA QUE NO NOS SINTAMOS SOLOS."

"¿CÓMO PODRÁS CANTAR, SI TU BOCA ESTÁ LLENA DE COMIDA? ¿CÓMO PODRÁS ALZARSE TU MANO PARA BENDECIR, SI ESTÁ LLENA DE ORO?"

"EL ENGAÑO TIENE ÉXITOS A VECES, PERO SIEMPRE TERMINA SUICIDÁNDOSE."

"PREFERIRÍA SER EL ÚLTIMO ENTRE LOS HOMBRES QUE SUEÑAN, Y QUE TIENEN EL DESEO DE REALIZAR SUS SUEÑOS, Y NO EL MÁS ENCUMBRADO DE TODOS, SIN SUEÑOS NI DESEOS."

"¿CUÁN ESTRECHA ES LA VISIÓN QUE EXALTA LA LABORIOSIDAD DE LA HORMIGA POR ENCIMA DEL CANTO DEL GRILLO!"

"LO EVIDENTE ES ESO QUE NO SE VE HASTA QUE ALGUIEN LO EXPRESA CON SENCILLEZ."

"UNA RAÍZ ES UNA FLOR QUE DESPRECIA LA FAMA."

"ES LA MENTE LA QUE SE PLIEGA A LAS LEYES QUE HEMOS HECHO, PERO NUNCA NUESTRO ESPÍRITU."

"LAS TORTUGAS PUEDEN DECIRNOS MÁS ACERCA DE LOS CAMINOS QUE LAS LIEBRES."

"SI TE SENTARAS EN UNA NUBE, NO VERÍAS LAS FRONTERAS ENTRE PAÍS Y PAÍS, NI LOS CERCOS DE PIEDRAS ENTRE GRANJA Y GRANJA. ES UNA LÁSTIMA QUE NO PUEDAS SENTARTE EN UNA NUBE..."

"ESPERO LIBERAR CON MIS ACCIONES CADA PENSAMIENTO QUE HE ENCARCELADO EN MIS PALABRAS."

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTA PUBLICACIÓN LES DESEA LO MEJOR EN SUS EXÁMENES FINALES Y DESPUÉS ESPERA QUE LOGREN UNA BUENA REINSCRIPCIÓN Y ¡A ESTUDIAR DURO!, PARA LOGRAR UNA BUENA CARRERA Y CON ELLA LAS GRANDES SATISFACCIONES DE LA VIDA. ESTE PAÍS NECESITA DE PROFESIONALES DE LA INGENIERÍA CREATIVOS, INNOVADORES Y CON UN ESPÍRITU LIBRE Y CRÍTICO, COMO SE FORMAN EN NUESTRA QUERIDA UNIVERSIDAD.

ÁLGEBRA

DETERMINAR EL TIPO DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA QUE FORMAN EL CONJUNTO

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; \text{ para } \theta \in \mathfrak{R} \right\}$$

Y LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES. CONSIDERAR QUE SE CUMPLE QUE $(AB)C = A(BC)$

SOLUCIÓN. EN PRIMER LUGAR SE DETERMINARÁ SI EXISTE CERRADURA:

$$\text{SEAN } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen} \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta & -\cos \alpha \operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \\ \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta & -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \dots (1)$$

COMO $\alpha + \beta \in \mathfrak{R}$, $AB \in M$; POR LO TANTO SÍ HAY CERRADURA.

LA ASOCIATIVIDAD SE CUMPLE DE ACUERDO CON EL ENUNCIADO.

AHORA SE VERÁ SI EXISTE ELEMENTO IDÉNTICO. ES EVIDENTE QUE SI $\theta = 0$, SE TIENE QUE

$$I = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

POR OTRA PARTE, ¿EXISTEN ELEMENTOS INVERSOS? LA RESPUESTA ES AFIRMATIVA YA QUE SI $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, ENTONCES

$\det A = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$, POR LO QUE SE TRATA DE MATRICES NO SINGULARES Y CADA UNA DE ELLAS TIENE SU INVERSA.

ENTONCES LA ESTRUCTURA ES UN GRUPO. AHORA SE VERÁ SI ES ABELIANO. DE (1) SE TIENE QUE

$$AB = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Y POR OTRA PARTE

$$BA = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\operatorname{sen} \beta \\ \operatorname{sen} \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha & -\cos \beta \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \\ \operatorname{sen} \beta \cos \alpha + \cos \beta \operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha + \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \alpha) & -\operatorname{sen}(\beta + \alpha) \\ \operatorname{sen}(\beta + \alpha) & \cos(\beta + \alpha) \end{bmatrix} \dots (2)$$

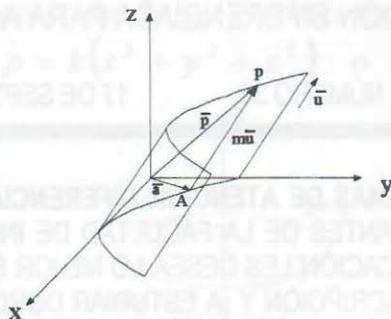
LAS MATRICES (1) y (2) SON EQUIVALENTES POR LA CONMUTATIVIDAD EN LA ADICIÓN DE LOS REALES Y, POR LO TANTO, LA ESTRUCTURA ES UN GRUPO ABELIANO.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

DETERMINAR UNA ECUACIÓN VECTORIAL, UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CILINDRO PARABÓLICO CUYA RECTA GENERATRIZ ES PARALELA AL VECTOR $\vec{u} = (0, 2, 3)$ Y QUE CONTIENE A LA PARÁBOLA "C" DE ECUACIONES:

$$C : \begin{cases} y = (x - 3)^2 + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN. LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA PORCIÓN DEL CILINDRO PARABÓLICO ES LA SIGUIENTE:



UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA PARÁBOLA SON:

$$C : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t^2 + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

SEA " \vec{a} " EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA " A " DE LA PARÁBOLA, POR LO QUE:

$$\vec{a} = (3 + t, t^2 + 1, 0)$$

Y SEA " \vec{p} " EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA " P " DEL CILINDRO. ENTONCES ES POSIBLE ESCRIBIR QUE:

$$\vec{p} = \vec{a} + m \vec{u} = (3 + t, t^2 + 1, 0) + m(0, 2, 3) = (3 + t, t^2 + 1 + 2m, 3m) \dots (A)$$

LA ECUACIÓN (A) ES LA ECUACIÓN VECTORIAL OBTENIDA PARA EL CILINDRO, LA QUE SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIÉN COMO:

$$\vec{p} = (3 + t)\hat{i} + (t^2 + 1 + 2m)\hat{j} + 3m\hat{k}$$

LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL CILINDRO, QUE SE OBTIENEN DE LA ECUACIÓN (A) SON LAS SIGUIENTES:

$$\begin{cases} x = 3 + t & \dots & (1) \\ y = t^2 + 2m + 1 & ; & m, t \in \mathbb{R} \dots (2) \\ z = 3m & \dots & (3) \end{cases}$$

UNA FORMA DE OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA SUPERFICIE ES ELIMINANDO LOS PARÁMETROS m y t DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS. ASÍ, SE OBTIENE QUE:

$$\text{de (1): } t = x - 3$$

$$\text{en (2): } y = (x - 3)^2 + 2m + 1$$

$$\text{de (3): } m = \frac{z}{3}$$

$$\therefore y = (x - 3)^2 + \frac{2z}{3} + 1$$

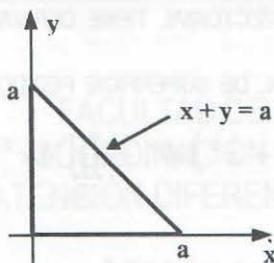
DE DONDE, LA ECUACIÓN DEL CILINDRO ES:

$$3y = 3(x - 3)^2 + 2z + 3$$

CÁLCULO III

UNA LÁMINA TIENE LA FORMA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES CUYOS LADOS IGUALES MIDEN " a " UNIDADES. CALCULAR SU MASA Y EL CENTRO DE MASA SI LA DENSIDAD DE ÁREA EN CUALQUIER PUNTO " P " ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA DE " P " AL VÉRTICE OPUESTO A LA HIPOTENUSA.

SOLUCIÓN. RESULTA CONVENIENTE INTRODUCIR UN SISTEMA COORDENADO, DONDE EL VÉRTICE DEL TRIÁNGULO SEA EL ORIGEN DE COORDENADAS Y LA HIPOTENUSA ESTÉ SOBRE LA RECTA DE ECUACIÓN $x + y = a$. CONSIDÉRESE ENTONCES LA SIGUIENTE FIGURA:



SI SE DENOTA COMO "k" A LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD, ENTONCES LA DENSIDAD SE EXPRESA COMO $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$ Y LA MASA SE OBTIENE AMEDIANTE LA INTEGRAL DOBLE

$$M = \iint_R k(x^2 + y^2) dA = \int_0^a \int_0^{a-x} k(x^2 + y^2) dy dx$$

$$M = \int_0^a \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{a-x} dx = k \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3} \right] dx$$

$$M = k \int_0^a \left(ax^2 - x^3 + \frac{a^3}{3} - \frac{3a^2x}{3} + \frac{3ax^2}{3} - \frac{x^3}{3} \right) dx = k \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{a^3x}{3} - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right]_0^a$$

$$M = k \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{12} \right) = \frac{ka^4}{6}$$

PARA CALCULAR EL MOMENTO ESTÁTICO CON RESPECTO AL EJE "y", SE PROCEDE MEDIANTE LA SIGUIENTE INTEGRAL DOBLE:

$$M_y = \iint_R x k(x^2 + y^2) dA = \int_0^a \int_0^{a-x} x k(x^2 + y^2) dy dx = k \int_0^a \int_0^{a-x} (x^3 + xy^2) dy dx$$

$$M_y = k \int_0^a \left[x^3 y + \frac{xy^3}{3} \right]_0^{a-x} dx = k \int_0^a \left[x^3(a-x) + \frac{x(a-x)^3}{3} \right] dx$$

$$M_y = k \int_0^a \left(ax^3 - x^4 + \frac{a^3x}{3} - \frac{3a^2x^2}{3} + \frac{3ax^3}{3} - \frac{x^4}{3} \right) dx$$

$$M_y = k \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{a^3x^2}{6} - \frac{a^2x^3}{3} + \frac{ax^4}{4} - \frac{x^5}{15} \right]_0^a = k \left(\frac{a^5}{4} - \frac{a^5}{5} + \frac{a^5}{6} - \frac{a^5}{3} + \frac{a^5}{4} - \frac{a^5}{15} \right) = \frac{ka^5}{15}$$

ENTONCES LA ABCISA DEL CENTRO DE MASA ESTÁ DADA POR: $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{ka^5}{15}}{\frac{ka^4}{6}} = \frac{2}{5}a$. Y, POR SIMETRÍA, TANTO DE LA REGIÓN COMO DE LA

DISTRIBUCIÓN DE DENSIDAD, LA ORDENADA TIENE EL MISMO VALOR. LUEGO, EL CENTRO DE MASA ES: $CM \left(\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a \right)$

CÁLCULO III

SEA "Q" LA REGIÓN LIMITADA POR EL CILINDRO $z = 4 - x^2$, EL PLANO $y + z = 5$ Y LOS PLANOS "xy" y "xz". Y SEA "S" LA SUPERFICIE QUE ENVUELVE A LA REGIÓN "Q". SI SE TIENE EL CAMPO VECTORIAL

$$F(x, y, z) = (x^3 + \operatorname{sen} z)\hat{i} + (x^2y + \operatorname{cos} z)\hat{j} + e^{x^2+y^2}\hat{k},$$

CALCULAR EL VALOR DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

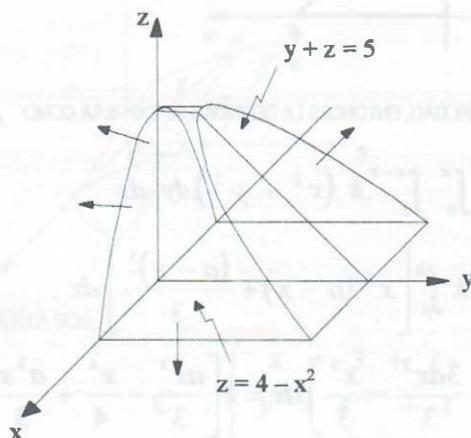
SOLUCIÓN. COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA, LA REGIÓN "Q" TIENE MUCHOS VECTORES NORMALES UNITARIOS EXTERNOS, POR LO QUE SERÍA UN TRABAJO SUMAMENTE COMPLICADO EVALUAR LA INTEGRAL DE SUPERFICIE PEDIDA, DE FORMA DIRECTA. SIN

EMBARGO, SI SE USA EL TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA, QUE SE EXPRESA MEDIANTE LA IDENTIDAD:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_Q \nabla \cdot \vec{F} dV, \text{ DADO QUE EL CAMPO VECTORIAL TIENE DERIVADAS PARCIALES CONTINUAS EN LA REGIÓN "Q",}$$

ENTONCES SE TIENE QUE EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE PEDIDO EQUIVALE AL CÁLCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE SIGUIENTE:

$$\iiint_Q (3x^2 + x^2) dV = \iiint_Q 4x^2 dV$$



ESTA INTEGRAL TRIPLE EQUIVALE A:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{5-z} 4x^2 dy dz dx &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} [4x^2 y]_0^{5-z} dz dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} 4x^2 (5-z) dz dx = \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (20x^2 - 4x^2 z) dz dx \\ &= \int_{-2}^2 [20x^2 z - 2x^2 z^2]_0^{4-x^2} dx = \int_{-2}^2 [20x^2(4-x^2) - 2x^2(4-x^2)^2] dx \\ &= \int_{-2}^2 (80x^2 - 20x^4 - 32x^2 + 16x^4 - 2x^6) dx = \int_{-2}^2 (48x^2 - 4x^4 - 2x^6) dx \\ &= \left[16x^3 - \frac{4x^5}{5} - \frac{2x^7}{7} \right]_{-2}^2 = \left(128 - \frac{128}{5} - \frac{256}{7} \right) - \left(-128 + \frac{128}{5} + \frac{256}{7} \right) = \frac{4608}{35} \approx 131.7 \end{aligned}$$

POR LO TANTO SE TIENE QUE

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \approx 131.7$$

CULTURA

SOY TU YO

HAY UNA REVELADORA HISTORIA ACERCA DE UN MONJE QUE VIVÍA EN EL DESIERTO EGIPCIO Y AL QUE LAS TENTACIONES ATORMENTARON DE TAL MODO QUE YA NO PUDO SOPORTARLO. DE MANERA QUE DECIDIÓ ABANDONAR EL CENOBIO Y MARCHARSE A OTRA PARTE.

CUANDO ESTABA CALZÁNDOSE LAS SANDALIAS PARA LLEVAR A EFECTO SU DECISIÓN, VIO, CERCA DE DONDE ÉL ESTABA, A OTRO MONJE QUE TAMBIÉN ESTABA PONIÉNDOSE LAS SANDALIAS.

"¿QUIÉN ERES TÚ?", PREGUNTÓ EL DESCONOCIDO.

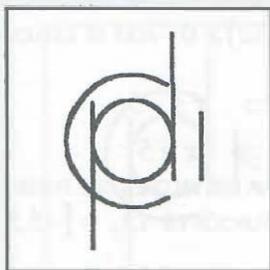
"SOY TU YO", FUE LA RESPUESTA. "SI ES POR MI CAUSA POR LO QUE VAS A ABANDONAR ESTE LUGAR, DEBO HACERTE SABER QUE, VAYAS A DONDE VAYAS, YO IRÉ CONTIGO".

ANTHONY DE MELLO

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTA PUBLICACIÓN LES DA LA MÁS CORDIAL BIENVENIDA AL SEMESTRE 2002-1, EN ESPECIAL A LOS ALUMNOS DE PRIMER INGRESO DE LA GENERACIÓN 2002. Y AHORA, ¡A ESTUDIAR CON RESPONSABILIDAD, ENTUSIASMO COMPROMISO Y ESPÍRITU UNIVERSITARIO!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO I

DETERMINAR EL DOMINIO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

i) $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$; ii) $y = \frac{x-2}{x+2}$; iii) $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x-1}$; iv) $y = +\sqrt{5-x}$; v) $f(x) = -\frac{1}{5}\sqrt{225-9x^2}$

vi) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$; vii) $f(x) = \frac{5}{x^2 - x - 12}$; viii) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}$; ix) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$; x) $y = \sqrt{-x}$

SOLUCIÓN.

i) $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$. SE TRATA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL Y COMO SE OBSERVA PARA TODO VALOR REAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x", LA FUNCIÓN ES REAL. POR LO TANTO SU DOMINIO ES $D_f = \mathbb{R}$

ii) $y = \frac{x-2}{x+2}$. PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, EL ÚNICO VALOR QUE NO HARÍA REAL A LA FUNCIÓN ES $x = -2$ YA QUE SE TENDRÍA UNA DIVISIÓN ENTRE "CERO". LUEGO, EL DOMINIO ES $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ EN ESTE VALOR SE PRESENTA UNA ASÍNTOTA VERTICAL CUYA ECUACIÓN ES $x = -2$.

iii) $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x-1}$ PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x" NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE "1" POR LO QUE SU DOMINIO ES $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ SIN EMBARGO, EN ESTE VALOR NO SE PRESENTA UNA ASÍNTOTA VERTICAL, YA QUE SI SE FACTORIZA LA EXPRESIÓN QUE DEFINE A LA FUNCIÓN SE TIENE QUE $\frac{x^3 - x^2}{x-1} = \frac{x^2(x-1)}{x-1} = x^2$. LUEGO LA FUNCIÓN QUE HAY QUE GRAFICAR ES LA PARÁBOLA $y = x^2$, PERO EN EL VALOR CORRESPONDIENTE A $x = 1$, ES DECIR, EN EL PUNTO (1,1) SE COLOCARÁ UN HUECO O UN "VACÍO" QUE INDICA QUE LA FUNCIÓN NO TIENE VALOR AHÍ.

iv) $y = +\sqrt{5-x}$. EN ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, EL RADICANDO TIENE QUE SER MAYOR O IGUAL QUE CERO, Y DE AHÍ SE PARTE PARA OBTENER SU DOMINIO. ASÍ, SE TIENE QUE

$$5 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -5 \Rightarrow x \leq 5$$

POR LO TANTO, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES $D_f = \{x | -\infty < x \leq 5; x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 5]$ MEDIANTE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA SE PUEDE TAMBIÉN DETERMINAR EL DOMINIO, DEFINIENDO DE QUE CÓNICA SE TRATA. ASÍ, SE TIENE QUE

$$y = +\sqrt{5-x} \Rightarrow y^2 = 5-x \Rightarrow y^2 = -(x-5)$$

QUE ES UNA MEDIA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN (5,0) CON EJE DE SIMETRÍA EL EJE "x" Y, POR EL SIGNO NEGATIVO, ABRE HACIA LA IZQUIERDA, LUEGO SÓLO TIENE VALORES POSITIVOS DE "y" O EL VALOR CERO.

v) $f(x) = -\frac{1}{5}\sqrt{225-9x^2}$ COMO EN EL CASO ANTERIOR, AQUÍ SE PUEDE OBTENER EL DOMINIO MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE UNA DESIGUALDAD O A

TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. CON LA DESIGUALDAD SE TIENE QUE $225-9x^2 \geq 0 \Rightarrow (15+3x)(15-3x) \geq 0$. AQUÍ SE ESTUDIAN DOS POSIBILIDADES: LOS DOS FACTORES POSITIVOS O LOS DOS NEGATIVOS. DE DONDE

$$\text{PRIMERA POSIBILIDAD: } \begin{cases} 15+3x \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \\ 15-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \end{cases} \quad \text{SEGUNDA POSIBILIDAD: } \begin{cases} 15+3x \leq 0 \Rightarrow x \leq -5 \\ 15-3x \leq 0 \Rightarrow x \geq 5 \end{cases}$$

DE ESTOS RESULTADOS SE VE QUE LA PRIMERA POSIBILIDAD ES LA QUE POR LA INTERSECCIÓN DE LOS CONJUNTOS, PROPORCIONA LOS VALORES QUE PUEDE TOMAR LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x" DE TAL FORMA QUE LA VARIABLE DEPENDIENTE "y" SEA REAL. ASÍ, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES $D_f = [-5, 5]$ CON LA GEOMETRÍA ANALÍTICA SE HACE LO SIGUIENTE:

$$y = -\frac{1}{5}\sqrt{225-9x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{25}(225-9x^2) \Rightarrow 25y^2 = 225-9x^2 \Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

QUE ES UNA MEDIA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y SEMIEJES MAYOR Y MENOR CON VALORES 5 y 3 RESPECTIVAMENTE. LUEGO, EL DOMINIO ES, EVIDENTEMENTE, EL ANTES OBTENIDO. EL SIGNO NEGATIVO DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA HABLARÍA DE LA PARTE INFERIOR DE LA CÓNICA.

vi) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$ PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, EL DENOMINADOR NO PUEDE VALER CERO, POR LO QUE LA "x" NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE "1"

ADEMÁS, EL RADICANDO DEL NUMERADOR TIENE QUE SER MAYOR O IGUAL QUE CERO, DE DONDE $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ POR LO TANTO EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES $D_f = [-3, \infty) - \{1\} = \{x | x \geq -3; x \neq 1; x \in \mathbb{R}\}$

vii) $f(x) = \frac{5}{x^2 - x - 12}$ EN ESTA FUNCIÓN SE DEBEN BUSCAR LOS VALORES DE "x" QUE HACEN CERO EL DENOMINADOR. ASÍ, MEDIANTE UNA

FACTORIZACIÓN SE LLEGA A: $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-4) = 0$ LUEGO EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 4\}$ Y EN ESOS VALORES, -3 y 4, QUE ANULAN EL DENOMINADOR. SE PRESENTAN ASÍNTOTAS VERTICALES.

viii) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$. COMO EN CASOS ANTERIORES, SI SE RESUELVE LA DESIGUALDAD QUE SE DERIVA DEL HECHO DE QUE EL RADICANDO DEBE SER MAYOR

O IGUAL QUE CERO, SE LLEGA AL DOMINIO DE LA FUNCIÓN. ASÍ $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \geq 0$

$$\text{PRIMERA POSIBILIDAD: } \begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \quad \text{SEGUNDA POSIBILIDAD: } \begin{cases} x+2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \\ x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases}$$

AQUÍ, EN LAS DOS POSIBILIDADES HAY INTERSECCIÓN Y SU UNIÓN ES LA SOLUCIÓN. ENTONCES $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. QUE TAMBIÉN SE PUEDE ESCRIBIR COMO $D_f = \mathbb{R} - (-2, 2)$. Y CON LA GEOMETRÍA ANALÍTICA, SE TIENE QUE:

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}(x^2-4) \Rightarrow 4y^2 = x^2-4 \Rightarrow x^2-4y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

SE TRATA DE UNA HIPÉRBOLA CON EL EJE "x" COMO EJE DE SIMETRÍA Y SU SEMIEJE TRANSVERSO IGUAL A "2", POR LO QUE LA VARIABLE "x" TOMA LOS VALORES OBTENIDOS EN EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN.

ix) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. ESTA FUNCIÓN TIENE TRES REGLAS DE CORRESPONDENCIA, ES DECIR QUE ESTÁ DEFINIDA EN TRES INTERVALOS. SE LE

CONOCE COMO FUNCIÓN "VALOR ABSOLUTO" Y DE ACUERDO A LOS INTERVALOS SE VE QUE SU DOMINIO SON TODOS LOS VALORES REALES, ES DECIR, $D_f = \mathbb{R}$

x) $y = \sqrt{-x}$. SI SE PROCEDE COMO YA SE HA VISTO CON EL RADICANDO QUE DEBE SER POSITIVO O CERO, SE TIENE QUE: $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ LUEGO EL DOMINIO ES $D_f = (-\infty, 0]$ Y CON LA GEOMETRÍA ANALÍTICA SE TIENE QUE: $y = \sqrt{-x} \Rightarrow y^2 = -x$, QUE ES UNA PARÁBOLA CONVÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE "x" POR EL SIGNO, ABRE HACIA LA IZQUIERDA LO QUE ES CONGRUENTE CON EL DOMINIO OBTENIDO.

ÁLGEBRA

SEA "a" UN NÚMERO REAL NO NULO, TAL QUE $a > -1$ DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA QUE $(1+a)^n > 1+na$ PARA TODO ENTERO $n \geq 2$ SOLUCIÓN. PARA CADA ENTERO POSITIVO n, SEA P_n LA DESIGUALDAD $(1+a)^n > 1+na$ NÓTESE QUE P_1 ES FALSO. PUESTO QUE



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001

NÚMERO 32

17 DE NOVIEMBRE DE 2001

EDITORIAL

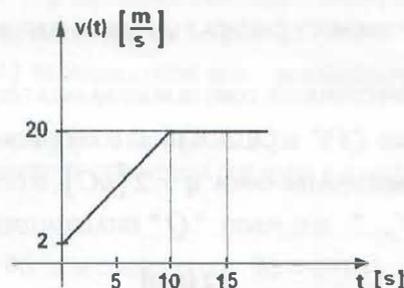
ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. LA COPADI LES DESEA FELICIDAD, PAZ Y AMOR EN ESTAS FIESTAS DE FIN DE AÑO Y UN 2002 CON LAS COSAS MÁS BELLAS DE LA VIDA.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

FÍSICA EXPERIMENTAL

LA GRÁFICA MUESTRA LA VARIACIÓN DE LA RAPIDEZ DE UN MÓVIL QUE SE DESPLAZA EN LÍNEA RECTA EN UN INTERVALO DE TIEMPO. DETERMINAR:

- A) LA DISTANCIA QUE HA RECORRIDO A LOS 8 SEGUNDOS.
- B) LA ACELERACIÓN DEL MÓVIL A LOS 5 SEGUNDOS.
- C) LA ACELERACIÓN DEL MÓVIL A LOS 12 SEGUNDOS.



SOLUCIÓN. DE LA GRÁFICA:

A) $v(0) = v_0 = 2 \left[\frac{m}{s} \right]$ COMO $v(t) = m t + v_0$ PARA $0 \leq t \leq 10$ [s], ENTONCES, AL CALCULAR LA PENDIENTE, SE TIENE QUE:

$$m = \frac{(20 - 2) \left[\frac{m}{s} \right]}{(10 - 0) [s]} = 1.8 \left[\frac{m}{s^2} \right]; \text{ POR LO TANTO } v(t) = 1.8 \left[\frac{m}{s^2} \right] t [s] + 2 \left[\frac{m}{s} \right]; \text{ ADEMÁS SE SABE QUE } v = \frac{dr}{dt} \text{ DE DONDE}$$

$$r(t) = \int v dt = \int (1.8 t + 2) dt; r(t) = \int 1.8 t dt + \int 2 dt = 1.8 \int t dt + 2 \int dt \text{ SI SE INTEGRA SE TIENE QUE: } r(t) = 0.9 t^2 + 2 t + r_0.$$

PERO $r_0 = 0$, LUEGO $r(t) = 0.9 t^2 + 2 t$ COMO SE QUIERE SABER LA DISTANCIA QUE HA RECORRIDO A LOS 8 SEGUNDOS, ENTONCES

$$r(t = 8 [s]) = 0.9 (8)^2 + 2 (8) = 73.6 [m]$$

B) DEL MODELO MATEMÁTICO $v(t) = m t + v_0$, OBTENIDO EN EL INCISO ANTERIOR, SE TIENE QUE: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [m t + v_0] = m$. POR LO TANTO, EN EL

INTERVALO $0 \leq t \leq 10$ [s], LA ACELERACIÓN ES $a = 1.8 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ POR LO QUE $a(t = 5 [s]) = a(5) = 1.8 \frac{m}{s^2}$

C) EN EL INTERVALO $10 \leq t \leq 15$ [s] SE TIENE QUE $v(t) = 20 \left[\frac{m}{s} \right]$ (CONSTANTE)

COMO $a = \frac{dv}{dt}$, ENTONCES $a = \frac{d}{dt} [20] = 0$ Y POR LO TANTO $a(t = 12 [s]) = a(12) = 0 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

QUÍMICA

ACOMODAR LAS ESPECIES SIGUIENTES EN ORDEN CRECIENTE DE RADIO ATÓMICO O IÓNICO.



RESOLUCIÓN. SE PUEDE ARMAR UNA TABLA PARA VISUALIZAR CON CLARIDAD LAS CARACTERÍSTICAS DE CADA ESPECIE:

ESPECIE	NÚMERO DE PROTONES	NÚMERO DE ELECTRONES
Na	11	11
Mg ⁺	12	11
Al ²⁺	13	11
Si ³⁺	14	11

SEGÚN SE OBSERVA, TODAS LAS ESPECIES SON ISOELECTRÓNICAS, ES DECIR, TIENEN LA MISMA CONFIGURACIÓN ELECTRÓNICA = $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$, SIN EMBARGO, EL NÚMERO DE PROTONES AUMENTA PROGRESIVAMENTE, LO CUAL PROVOCA MAYOR INFLUENCIA DEL NÚCLEO HACIA LA NUBE ELECTRÓNICA, EMPEQUEÑECIÉNDOLA A MEDIDA QUE AUMENTA EL NÚMERO ATÓMICO. CON BASE EN ESTO, EL ACOMODO EN ORDEN CRECIENTE DE RADIO QUEDA ASI:



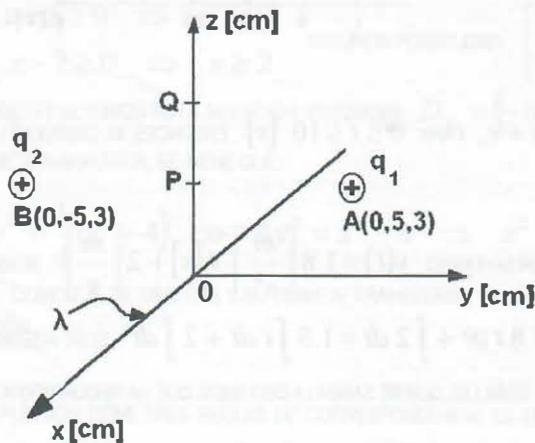
COMENTARIO FINAL:

SE SABE QUE AL MOVERNOS HORIZONTALMENTE POR CUALQUIER PERÍODO DE LA TABLA PERIÓDICA, LA CARGA NUCLEAR EFECTIVA AUMENTA EN TANTO QUE EL NÚMERO CUÁNTICO PRINCIPAL NO VARIA. AL AUMENTAR LA CARGA NUCLEAR EFECTIVA (DE IZQUIERDA A DERECHA) LOS ELECTRONES SON ATRAIDOS MÁS CERCA DEL NÚCLEO, ES POR ESTO QUE EL RADIO DISMINUYE CONFORME NOS MOVEMOS DE IZQUIERDA A DERECHA.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

SE TIENE UNA LÍNEA CON $\lambda = 50 \left[\frac{pC}{m} \right]$ UNIFORMEMENTE CARGADA Y LAS CARGAS PUNTALES q_1 y q_2 , DE $10 [pC]$ CADA UNA, LOCALIZADAS EN LOS PUNTOS $(0,5,3)$ y $(0,-5,3)$ RESPECTIVAMENTE, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA.

- A) DETERMINAR EL CAMPO ELÉCTRICO EN EL PUNTO "P" LOCALIZADO EN LAS COORDENADAS $P(0,0,3)$ [cm].
 B) CALCULAR LA FUERZA ELÉCTRICA QUE EXPERIMENTARÍA UNA CARGA $q = 2 [\mu C]$, SI ÉSTA SE LOCALIZARA EN EL PUNTO "P".
 C) CALCULAR LA DIFERENCIA DE POTENCIAL " V_{PQ} ", SI EL PUNTO "Q" ESTÁ LOCALIZADO EN LAS COORDENADAS $Q(0,0,6)$ [cm].



RESOLUCIÓN.

- A) SI SE APLICA EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, SE PLANTEA QUE: $\vec{E}_p = \vec{E}_{p\lambda} + \vec{E}_{p1} + \vec{E}_{p2}$

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2|\lambda|}{r_{op}} \hat{r}_{op} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{AP}^2} \hat{r}_{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{BP}^2} \hat{r}_{BP}$$

$$\vec{E}_p = 9 \times 10^9 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right] \left[\frac{2(50 \times 10^{-12}) \left[\frac{C}{m} \right]}{0.03 [m]} \hat{k} - \frac{10 \times 10^{-12} [C]}{(0.05)^2 [m^2]} \hat{j} + \frac{10 \times 10^{-12} [C]}{(0.05)^2 [m^2]} \hat{j} \right] \Rightarrow \vec{E}_p = 30 \hat{k} \left[\frac{N}{C} \right]$$

- B) DE LA DEFINICIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO:

$$\vec{E}_p = \frac{\vec{F}_p}{q}; \vec{F}_p = q \vec{E}_p; \vec{F}_p = 2 \times 10^{-6} [C] 30 \hat{k} \left[\frac{N}{C} \right] = 60 \hat{k} [\mu N]$$

C) MEDIANTE EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: $V_{PQ} = V_{PQ\lambda} + V_{PQ1} + V_{PQ2}$

$$V_{PQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \operatorname{Ln} \frac{r_{OQ}}{r_{OP}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \left[\frac{1}{r_{AP}} - \frac{1}{r_{AQ}} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left[\frac{1}{r_{BP}} - \frac{1}{r_{BQ}} \right]$$

$$V_{PQ} = 9 \times 10^9 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right] \left[2 (50 \times 10^{-12}) \left[\frac{C}{m} \right] \operatorname{Ln} \frac{6}{3} + 10 \times 10^{-12} \left[\frac{C}{m} \right] \left[\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.0583} + \frac{1}{0.5} - \frac{1}{0.0583} \right] \right]$$

$$V_{PQ} = (0.6238 + 0.5125) [V]; \quad V_{PQ} = 1.1363 [V]$$

ÁLGEBRA

DEMOSTRAR, POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA, QUE $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS.

SOLUCIÓN:

SE COMPRUEBA PARA $n=1$

$$(1)(2)(3)(4) = 24 \quad \text{QUE SÍ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS.}$$

SE SUPONE VÁLIDO PARA $n=k$

$$k(k+1)(k+2)(k+3) \text{ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS ... (HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN)}$$

CON BASE EN LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN, DEBE DEMOSTRARSE QUE ES VÁLIDO PARA $n=k+1$

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \text{ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS ... (AFIRMACIÓN POR DEMOSTRAR)}$$

DE LA AFIRMACIÓN, POR DISTRIBUTIVIDAD: $k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)$

EL PRIMER TÉRMINO ES DIVISIBLE ENTRE SEIS POR HIPÓTESIS. EL SEGUNDO SE DEMOSTRARÁ QUE LO ES, A SU VEZ, POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA, DE LA SIGUIENTE FORMA:

PARA $k=1$

$$4(2)(3)(4) = 96 \quad \text{SÍ SE CUMPLE YA QUE } 96 = 6(16)$$

AHORA SE SUPONE QUE SE CUMPLE PARA $k=m$

$$4(m+1)(m+2)(m+3) \text{ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS ... (NUEVA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN)}$$

SI SE ACEPTA ESTA HIPÓTESIS, CON BASE EN ELLA DEBE DEMOSTRARSE QUE PARA $k=m+1$ TAMBIÉN SE CUMPLE:

$$4(k+2)(k+3)(k+4) \text{ ... (NUEVA AFIRMACIÓN POR DEMOSTRAR)}$$

DE LA AFIRMACIÓN:

$$4(k+2)(k+3)(k+4) = 4(k+2)(k+3)(k+1+3) = 4(k+1)(k+2)(k+3) + 12(k+2)(k+3)$$

EL PRIMER TÉRMINO ES DIVISIBLE ENTRE SEIS POR LA NUEVA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y EL SEGUNDO TAMBIÉN POR CONTENER COMO FACTOR A 12 QUE ES DIVISIBLE ENTRE SEIS. Y QUEDA FINALIZADA LA DEMOSTRACIÓN.

CÁLCULO I

RESOLVER LOS SIGUIENTES LÍMITES:

$$A) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 8x}{5x^2 + 8x - 4}; \quad B) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{5 - \sqrt[3]{x+122}}; \quad C) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 9}}{15x - 7}$$

SOLUCIÓN:

$$A) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 8x}{5x^2 + 8x - 4} = \frac{(-2)^4 + 8(-2)}{5(-2)^2 + 8(-2) - 4} = \frac{16 - 16}{20 - 16 - 4} = \frac{0}{0} \quad (\text{INDETERMINACIÓN})$$

PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, Y EN CASO DE QUE EXISTA CALCULAR SU LÍMITE, SE FACTORIZAN NUMERADOR Y DENOMINADOR Y SE LLEGA A:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 8x}{5x^2 + 8x - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x^3 + 8)}{(x+2)(5x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(5x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 8x}{5x^2 + 8x - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{5x - 2} = \frac{(-2)^3 - 2(-2)^2 + 4(-2)}{5(-2) - 2} = \frac{-8 - 8 - 8}{-10 - 2} = \frac{-24}{-12} = 2$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{5 - \sqrt[3]{x+122}} = \frac{\sqrt{3+13} - 4}{5 - \sqrt[3]{3+122}} = \frac{\sqrt{16} - 4}{5 - \sqrt[3]{125}} = \frac{4 - 4}{5 - 5} = \frac{0}{0} \quad (\text{INDETERMINACIÓN})$$

PARA QUITAR EN ESTE CASO LA INDETERMINACIÓN, SE MULTIPLICAN NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA EXPRESIÓN ORIGINAL, PRIMERO POR EL CONJUGADO DEL BINOMIO DEL NUMERADOR PARA LOGRAR UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS Y, DESPUÉS, POR EL TRINOMIO QUE AL MULTIPLICARSE POR EL DENOMINADOR, DEVIENE EN UNA DIFERENCIA DE CUBOS. ASÍ SE TIENE QUE:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{5 - \sqrt[3]{x+122}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{5 - \sqrt[3]{x+122}} \cdot \frac{\sqrt{x+13} + 4}{\sqrt{x+13} + 4} \cdot \frac{25 + 5\sqrt[3]{x+122} + \sqrt[3]{(x+122)^2}}{25 + 5\sqrt[3]{x+122} + \sqrt[3]{(x+122)^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{5 - \sqrt[3]{x+122}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+13-16)(25 + 5\sqrt[3]{x+122} + \sqrt[3]{(x+122)^2})}{[125 - (x+122)](\sqrt{x+13} + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{5 - \sqrt[3]{x+122}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(25 + 5\sqrt[3]{x+122} + \sqrt[3]{(x+122)^2})}{-(x-3)(\sqrt{x+13} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{25 + 5\sqrt[3]{x+122} + \sqrt[3]{(x+122)^2}}{-(\sqrt{x+13} + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{5 - \sqrt[3]{x+122}} = \frac{25 + 25 + 25}{-4 - 4} = \frac{75}{-8} = -\frac{75}{8}$$

$$C) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 9}}{15x - 7} = \frac{\sqrt[3]{27(\infty)^3 + 9}}{15(\infty) - 7} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{INDETERMINACIÓN})$$

PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE DIVIDEN NUMERADOR Y DENOMINADOR ENTRE LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE Y SE TIENE ENTONCES QUE:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 9}}{15x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{27x^3 + 9}{x^3}}}{\frac{15x - 7}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{27x^3}{x^3} + \frac{9}{x^3}}}{\frac{15x}{x} - \frac{7}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3 + 9}}{15x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27 + \frac{9}{x^3}}}{15 - \frac{7}{x}} = \frac{\sqrt[3]{27 + \frac{9}{\infty}}}{15 - \frac{7}{\infty}} = \frac{\sqrt[3]{27 + 0}}{15 - 0} = \frac{\sqrt[3]{27}}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

CULTURA

SAJUD Y QUE COMIENCE EL BAILE

QUERIDOS JÓVENES DE TODOS LOS PAÍSES: PERMITIDME QUE OS PRESENTE LOS JUEGOS, LOS BAILES, LAS CANCIONES TRISTES Y ALEGRES, LA PICARDÍA Y LA ESENCIA DE LOS PUEBLOS AMERICANOS.

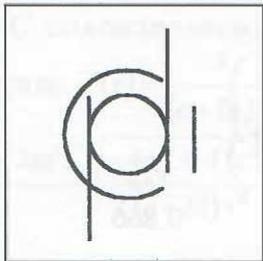
NOS DEJARON LOS AZTECAS SU SEMILLA, SUS CANTOS DE LAS COSECHAS, SUS HIMNOS DE GUERRA, SUS RITOS DE PAZ. LOS MAYAS ESTABLECIERON SU FUEGO FLORIDO EN LA DELGADA CINTURA DE AMÉRICA CENTRAL. LOS ARAUCANOS BAILARON BAJO SUS ÁRBOLES TUTELARES. LOS ESPAÑOLES DEJARON UNA CINTA DE SUSPIROS, EL AIRE ALEGRE DE LAS COMARCAS MONTAÑESAS Y EL LENGUAJE EN QUE POR SIGLOS SE DESGRANARON LUCHAS, ILUSIONES, OSCUROS DRAMAS DEL PUEBLO, HISTORIAS INCREIBLES. EN EL BARSIL TEMBLARON LOS RÍOS MÁS PODEROSOS DE LA TIERRA, CONTANDO Y CANTANDO HISTORIAS. LOS HOMBRES Y LAS MUJERES SE ARRULLARON Y BAILARON BAJO LAS PALMERAS. DESDE EL PORTUGAL LLEGARON LOS MÁS DULCES SONIDOS, Y LA VOZ DEL BRASIL SE PENETRÓ DE SUS PROFUNDIDADES SELVÁTICAS Y DE AZAHARES MARINOS. ESTAS SON LAS CANCIONES Y LOS BAILES DE AMÉRICA. EN ESTE CONTINENTE, LA SANGRE Y LA SOMBRA SUMERGIERON MUCHAS VECES LA ESPERANZA, PARECIAN DESANGRADOS LOS PUEBLOS, UNA OLA DE TERROR ANIQUILÓ LOS CORAZONES. SIN EMBARGO, CANTAMOS. LINCOLN FUE ASESINADO, PARECIÓ MORIR TAMBIÉN LA LIBERACIÓN, SIN EMBARGO, POR LAS ORILLAS DEL MISSISSIPPI CANTARON LOS NEGROS. ERA UN CANTO DE DOLOR QUE AÚN NO TERMINA, ERA UN CANTO PROFUNDO, UN CANTO CON RAÍCES. EN EL SUR, EN LAS GRANDES PAMPAS, SÓLO LA LUNA ILUMINÓ A LA SOLEDAD DE LAS PRADERAS, LA LUNA Y LAS GUITARRAS. EN EL ALTO PERÚ CANTARON LOS INDIOS COMO LOS MANANTIALES EN LA CORDILLERA. EN TODO EL CONTINENTE EL HOMBRE HA GUARDADO SUS CANCIONES, HA AMPARADO, CON SUS BRAZOS Y SU FUERZA, LA PAZ DE SUS PLACERES, HA DESARROLLADO SU ANTIGUA TRADICIÓN, EL FÚLGOR Y LA DULZURA DE SUS FIESTAS, EL TESTIMONIO DE SUS DOLORES. OS PRESENTO EL TESORO DE NUESTROS PUEBLOS, LA GRACIA DE ELLOS, LO QUE PRESERVARON A TRAVÉS DE ACONTECIMIENTOS TERRIBLES, DESAMPARADOS Y MARTIRIZADOS. QUE LA ALEGRÍA, LAS CANCIONES Y LOS BAILES DE LAS TIERRAS AMERICANAS BRILLEN EN ESTA FIESTA DE LA JUVENTUD Y DE LA PAZ, JUNTO A OTRAS ALEGRÍAS, OTRAS CANCIONES Y OTRAS DANZAS. DESDE EL MÁS LEJANO DE LOS PAÍSES DE AMÉRICA, DESDE CHILE, SEPARADO DEL MUNDO POR LA CORDILLERA ANDINA Y UNIDO A TODOS LOS PUEBLOS POR SU OCEANO Y POR SU HISTORIA DE LUCHAS, YO SALUDO A LOS JÓVENES Y LES DIGO: MÁS ALTAS QUE NUESTRAS MONTAÑAS FUERON NUESTRAS CANCIONES, PUESTO QUE AQUÍ PUEDEN ESCUCHARSE, MÁS INSISTENTE QUE LAS OLAS DEL OCEANO FUERON NUESTRAS DANZAS, PUESTO QUE AQUÍ MOSTRARÁN SU ALEGRÍA. DEFENDAMOS TODA ESTA FUERZA DELICADA, DEFENDAMOS UNIDOS EL AMOR Y LA PAZ QUE LOS MANTUVO. ESTA ES LA TAREA DE TODOS LOS HOMBRES, EL TESORO CENTRAL DE LOS PUEBLOS Y LA LUZ DE ESTE FESTIVAL. SALUD Y QUE COMIENCE EL BAILE.

PABLO NERUDA, PREMIO NOBEL AMERICANO

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ, ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, RIGEL GÁMEZ LEAL Y GABRIEL JARAMILLO MORALES

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

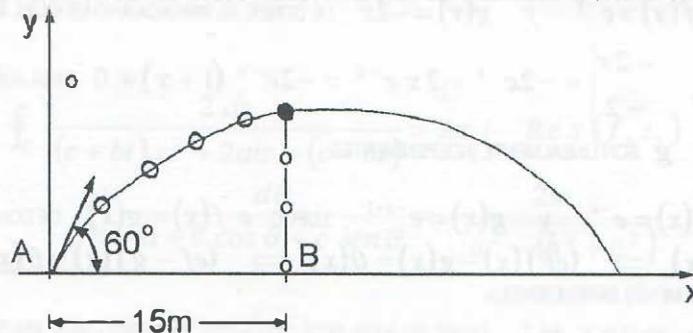


EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. DICIEMBRE ES UN MES QUE INVITA A LA REFLEXIÓN, A HACER UN ALTO EN EL CAMINO DE LA VIDA Y REPLANTEAR MUCHAS COSAS. ¿POR QUÉ NO SER MÁS GENEROSOS, MÁS BUENOS, MÁS ESTUDIOSOS, MÁS SOLIDARIOS, MÁS LECTORES, MÁS AMIGOS, MÁS ENTUSIASTAS, MÁS COMPROMETIDOS, MÁS RESPONSABLES, MÁS DIVERTIDOS Y MÁS SENCILLOS?

CINEMÁTICA

CON UNA RAPIDEZ DE $17.32 \frac{m}{s}$ SE DISPARA EN EL PUNTO "B", VERTICALMENTE HACIA ARRIBA, UN PROYECTIL. AL MISMO TIEMPO, DE LA POSICIÓN "A" ES LANZADO OTRO CON UN MOVIMIENTO DE TIRO PARABÓLICO, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA. SI SE CONSIDERA COMO TIRO VERTICAL AL MOVIMIENTO DEL PROYECTIL DISPARADO DESDE "B", DETERMINAR LA RAPIDEZ CON QUE DEBE LANZARSE EL PROYECTIL DESDE EL PUNTO "A", PARA QUE CHOQUEN AMBOS PROYECTILES.



RESOLUCIÓN.
SI SE ANALIZA EL PROYECTIL QUE SE LANZA DEL PUNTO "B" (TIRO VERTICAL), SE TIENE QUE:

$$a_B = -g = \text{CONSTANTE}$$

$$\text{COMO } a_B = \frac{dv_B}{dt} \Rightarrow v_B = v_{0B} - g t$$

$$\text{ADEMÁS } v_B = \frac{dy_B}{dt} \Rightarrow y_B = v_{0B} t - \frac{1}{2} g t^2 \dots (1)$$

SI SE ANALIZA EL PROYECTIL QUE SE LANZA DEL PUNTO "A" (TIRO PARABÓLICO), SE TIENE QUE:

$$\vec{v}_A = v_0 \cos 60^\circ \hat{i} + (v_0 \text{sen } 60^\circ - g t) \hat{j}$$

$$\text{COMO } \vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{r}_A = v_0 t \cos \theta \hat{i} + \left(v_0 t \text{sen } \theta - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j} \dots (2)$$

DADO QUE $\cos 60^\circ = 0.5$ y $\text{sen } 60^\circ = 0.866$ SE LLEGA A:

$$\vec{r}_A = 0.5 v_0 t \hat{i} + \left(0.866 v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j} \dots (3)$$

DE (3) SE TIENE QUE: $x_A = 0.5 v_0 t \Rightarrow t = \frac{x_A}{0.5 v_0} \dots (4)$ y $y_A = 0.866 v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \dots (5)$

SE IGUALAN (1) y (4) Y SE LLEGA A: $v_{0B} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.866 v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \dots$ (6)

AHORA SE SUSTITUYE (4) EN (6) Y:

$$v_{0B} \left(\frac{x_A}{0.5v_0} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_A}{0.5v_0} \right)^2 = 0.866 v_0 \left(\frac{x_A}{0.5v_0} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_A}{0.5v_0} \right)^2$$

$$v_{0B} \left(\frac{x_A}{0.5v_0} \right) - \frac{g x_A^2}{0.5 v_0^2} = \frac{0.866 x_A}{0.5} - \frac{g x_A^2}{0.5 v_0^2} \Rightarrow \frac{v_{0B}}{v_0} = 0.866 \Rightarrow v_0 = \frac{v_{0B}}{0.866}$$

Y DADO QUE $v_{0B} = 17.32 \frac{m}{s}$ ENTONCES SE TIENE FINALMENTE QUE $v_0 = \frac{17.32}{0.866} \Rightarrow v_0 = 20 \frac{m}{s}$

ÁLGEBRA LINEAL

DETERMINAR UN INTERVALO PARA EL CUAL LAS FUNCIONES

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } -\infty < x \leq -2 \\ e^{-x} & \text{para } -2 < x < +\infty \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} -2x & \text{para } -\infty < x < 0 \\ e^{-x+1} & \text{para } 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES

SOLUCIÓN.

PARA $-\infty < x \leq -2$ SE TIENE QUE: $f(x) = x$ y $g(x) = -2x$; LUEGO $g(x) = -2f(x)$; DE DONDE

$$2f(x) + g(x) = \theta(x) \Rightarrow (2f)(x) + g(x) = \theta(x) \Rightarrow (2f + g)(x) = \theta(x) \Rightarrow 2f + g = \theta$$

POR LO TANTO LAS FUNCIONES f y g SON LINEALMENTE DEPENDIENTES.

PARA $-2 < x < 0$ SE TIENE QUE: $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = -2x$; DE DONDE, EL WRONSKIANO ES IGUAL A

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & -2x \\ -e^{-x} & -2 \end{vmatrix} = -2e^{-x} - 2x e^{-x} = -2e^{-x} (1+x) \neq 0 \text{ PARA ALGUNA } x \in (-2, 0)$$

POR LO TANTO LAS FUNCIONES f y g SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

PARA $0 \leq x < \infty$ SE TIENE QUE: $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x+1}$; LUEGO $e f(x) = g(x)$; DE DONDE

$$e f(x) - g(x) = \theta(x) \Rightarrow (ef)(x) - g(x) = \theta(x) \Rightarrow (ef - g)(x) = \theta(x) \Rightarrow ef - g = \theta$$

POR LO TANTO LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE DEPENDIENTES.

NO EXISTEN VALORES $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, NO AMBOS NULOS, TALES QUE $\alpha f(x) + \beta g(x) = \theta(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \dots$ (1). POR LO TANTO, LA EXPRESIÓN (1) SÓLO SE SATISFACE PARA $\alpha = \beta = 0$. DE DONDE SE CONCLUYE QUE LAS FUNCIONES f y g SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES EN $(-\infty, \infty)$.

MATEMÁTICAS AVANZADAS

CALCULAR EL VALOR DE LA INTEGRAL

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \sin \theta}$$

SI $a^2 > b^2 + c^2$. SUGERENCIA: HACER EL CAMBIO DE VARIABLE $z = e^{i\theta}$.

SOLUCIÓN.

SEA $z = e^{i\theta}$. ENTONCES

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} (z - z^{-1}) ; \quad \cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} (z + z^{-1}) \quad y \quad dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$$

POR LO QUE

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \sin \theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{a + \frac{b(z+z^{-1})}{2} + \frac{c(z-z^{-1})}{2i}} = \oint_C \frac{2 dz}{2aiz + bi(z^2+1) + c(z^2-1)}$$

SI SE EXPRESA EL DENOMINADOR COMO UNA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE "z" SE TIENE QUE:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \operatorname{sen} \theta} = \oint_C \frac{2 dz}{(c + bi)z^2 + 2aiz - (c - bi)}$$

DONDE C ES LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO UNO CON CENTRO EN EL ORIGEN.

LOS POLOS DE $f(z) = \frac{2}{(c + bi)z^2 + 2aiz - (c - bi)}$ SE OBTIENEN AL RESOLVER LA ECUACIÓN CUADRÁTICA DEL DENOMINADOR, Y ESTÁN DADOS POR:

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 + 4(c^2 + b^2)}}{2(c + bi)} = \frac{-ai \pm \sqrt{(b^2 + c^2) - a^2}}{c + bi} = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)})i}{c + bi} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{b^2 + c^2} (b + ci)$$

$$\therefore z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{b^2 + c^2} (b + ci) \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{b^2 + c^2} (b + ci)$$

SOLAMENTE z_1 ESTÁ DENTRO DE C PUESTO QUE:

$$|z_1| = \left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{b^2 + c^2} (b + ci) \right| = \left| \frac{-a + \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)} - a}{\sqrt{b^2 + c^2}} \frac{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)} + a}{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)} + a} \right|$$

$$|z_1| = \left| \frac{-(b^2 + c^2)}{\sqrt{b^2 + c^2} (\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)} + a)} \right| = \left| \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)} + a} \right| < 1 \quad \text{si} \quad a^2 > b^2 + c^2$$

EL RESIDUO DE f EN z_1 ES:

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{2}{(c + bi)z^2 + 2aiz - (c - bi)} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{(c + bi)z + ai} = \frac{1}{(c + bi)z_1 + ai} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}} i$$

POR LA REGLA DE L'HOPITAL.

ENTONCES, POR EL TEOREMA DEL RESIDUO

$$\oint_C \frac{2 dz}{(c + bi)z^2 + 2aiz - (c - bi)} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$$

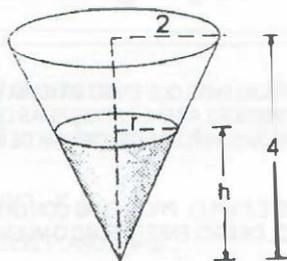
$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - (b^2 + c^2)}}$$

CÁLCULO I

UN TANQUE DE AGUA TIENE LA FORMA DE UN CONO CIRCULAR INVERTIDO, CON BASE DE RADIO 2 m Y ALTURA 4 m . SI SE BOMBEA AGUA A RAZÓN DE

$2 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$, ENCONTRAR LA RAZÓN A LA CUAL SUBE EL NIVEL DEL AGUA CUANDO ÉSTA TIENE UNA PROFUNDIDAD DE 3 m .

SOLUCIÓN. SE DIBUJA UN ESQUEMA DEL CONO Y SE LE ASOCIAN LAS MAGNITUDES CONSTANTES Y VARIABLES, COMO SIGUE:



SEAN V , r y h EL VOLUMEN DEL AGUA, EL RADIO EN LA SUPERFICIE DE LA MISMA Y LA ALTURA EN EL INSTANTE t , DONDE ÉSTE SE MIDE EN MINUTOS. COMO

DATO SE EXPRESA QUE $\frac{dV}{dt} = 2 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ Y SE PIDE CALCULAR $\frac{dh}{dt}$ CUANDO $h = 3 \text{ m}$. LAS CANTIDADES V y h ESTÁN RELACIONADAS POR LA ECUACIÓN

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

PERO PARA ESTE PROBLEMA ES NECESARIO EXPRESAR A V COMO FUNCIÓN SÓLO DE h . SI SE OBSERVA LA FIGURA, SE PUEDE ESTABLECER UNA RELACIÓN ENTRE LAS VARIABLES r y h , POR TRIÁNGULOS SEMEJANTES, DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$$

Y AL SUSTITUIR ESTE RESULTADO EN EL VOLUMEN SE TIENE QUE:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h \Rightarrow V = \frac{\pi}{12} h^3$$

AHORA SE DERIVA CADA MIEMBRO DE ESTA ECUACIÓN CON RESPECTO A t Y SE LLEGA A:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}$$

SE SUSTITUYEN LOS VALORES DE $h = 3 \text{ m}$ y $\frac{dV}{dt} = 2 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ Y SE OBTIENE FINALMENTE $\frac{dh}{dt}$ QUE ES:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi (3)^2} \cdot 2 = \frac{8}{9\pi} = 0.28 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

CÁLCULO III

DADO EL CAMPO VECTORIAL

$$\vec{F} = (ax^2 + 2z^2 - \text{sen } e^y) \hat{i} + xy \hat{j} - 2xz \hat{k}$$

- A) DETERMINAR EL VALOR DE LA CONSTANTE a DE TAL MANERA QUE EL CAMPO VECTORIAL SEA SOLENOIDAL.
B) CALCULAR EL ROTACIONAL DEL CAMPO VECTORIAL DADO.

SOLUCIÓN.

- A) PARA QUE EL CAMPO VECTORIAL SEA SOLENOIDAL, SU DIVERGENCIA DEBE SER CERO. LUEGO:

$$\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (ax^2 + 2z^2 - \text{sen } e^y, xy, -2xz) = 0 \Rightarrow 2ax + x - 2x = 0 \Rightarrow 2a + 1 - 2 = 0 \Rightarrow 2a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

- B) PARA CALCULAR EL ROTACIONAL DEL CAMPO VECTORIAL, SE HACE LO SIGUIENTE:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax^2 + 2z^2 - \text{sen } e^y & xy & -2xz \end{vmatrix} = -\hat{j}(-2z - 4z) + \hat{k}(y + e^y \cos e^y)$$

$$\therefore \text{rot}(\vec{F}) = 6z \hat{j} + (y + e^y \cos e^y) \hat{k}$$

TUTORÍA

¿SABÍAS QUE LOS DISTRACTORES PSICOLÓGICOS, SON DEL TIPO DE PROBLEMAS QUE EN SU MAYORÍA INTERFIEREN EN EL APRENDIZAJE? ¿PODRÁS IDENTIFICARLOS? CUANDO SIENTAS QUE NO TE PUEDES CONCENTRAR, Y POR ELLO COMIENCES A TENER PROBLEMAS DE BAJO RENDIMIENTO ACADÉMICO, O BIEN EN DIFERENTES ÁREAS DE TU VIDA; ENTONCES ES CONVENIENTE IDENTIFICARLOS Y ASUMIRLOS CON PLENA CONCIENCIA DE LA REALIDAD, TENER CONTROL, EQUILIBRIO Y MADUREZ PARA ENFRENTARLOS.

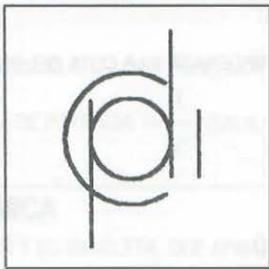
¿CUÁLES SON ALGUNOS DE LOS DISTRACTORES PSICOLÓGICOS? POR EJEMPLO: PROBLEMAS CON LA FAMILIA PADRES, HERMANOS; FRICCIONES CON LOS COMPAÑEROS EN EL GRUPO, CON LA NOVIA (O), DIFICULTADES POR EL DINERO, ENFERMEDAD O MUERTE DE UN SER QUERIDO.

SUGERENCIAS: PENSAR ANTES DE ACTUAR, RESPONDER CON SOLUCIONES INMEDIATAS, NO PREOCUPARSE DEMASIADO MEJOR ENFRENTAR. RECUERDA QUE TODAS LAS PERSONAS TIENEN PROBLEMAS EN MENOR O MAYOR INTENSIDAD PERO QUIENES LOS ENFRENTAN PUEDEN SALIR ADELANTE. -ÁNIMO-. PIENSA SIEMPRE QUE HAY ALGUIEN CERCA DE TI DISPUESTO A ESCUCHARTE. ACÉRCATE Y HABLE.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, JOSÉ ROMEROLÓPEZ Y BRAULIO TORRES MIRANDA Y LA COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 34

2 DE ENERO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ¡AÑO NUEVO!, ¡VIDA NUEVA! ES TIEMPO DE PROPONERSE NUEVOS OBJETIVOS DE VIDA, COMO: SER MEJOR ESTUDIANTE, SER MEJOR HIJO, HERMANO Y AMIGO Y, SOBRE TODO, SER MEJOR SER HUMANO. ¡YA ES TIEMPO! ¡TIENES TODA LA VIDA POR ADELANTE!

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEA LA RECTA ℓ QUE CONTIENE AL PUNTO $A(2, -3, 6)$ Y ES PARALELA AL VECTOR $\vec{u} = \hat{i} + \hat{k}$ DETERMINAR LAS COORDENADAS DE UN PUNTO B QUE PERTENECE A LA RECTA ℓ Y QUE ESTÁ A UNA DISTANCIA DE CINCO UNIDADES DEL ORIGEN.

SOLUCIÓN. LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA ℓ SON

$$x = 2 + t ; y = -3 ; z = 6 + t$$

COMO LA DISTANCIA DEL PUNTO $B(x, y, z)$ AL ORIGEN ES DE CINCO UNIDADES, ENTONCES SE TIENE QUE:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

SI SE SUSTITUYEN EN ESTA EXPRESIÓN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA ℓ YA QUE EL PUNTO B PERTENECE A ELLA, SE TIENE QUE:

$$(2 + t)^2 + (-3)^2 + (6 + t)^2 = 25 \Rightarrow 4 + 4t + t^2 + 9 + 36 + 12t + t^2 = 25 \Rightarrow 2t^2 + 16t + 24 = 0$$

$$t^2 + 8t + 12 = 0 \Rightarrow (t + 2)(t + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = -6 \end{cases}$$

SI SE SUSTITUYEN ESTOS VALORES EN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA ℓ SE OBTIENEN DOS PUNTOS DE ELLA QUE SATISFACEN LAS CONDICIONES DADAS; ESTOS PUNTOS SON:

$$B_1(0, -3, 4) \text{ y } B_2(-4, -3, 0)$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CONSIDÉRESE LA RECTA ℓ , UNA DE CUYAS ECUACIONES VECTORIALES ES

$$\vec{r} = (2, 2, -2) + (\sqrt{3}t, -\sqrt{3}t, -\sqrt{3}t)$$

DETERMINAR:

- EL ÁNGULO QUE FORMA LA RECTA ℓ CON EL PLANO xy .
- EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LA RECTA ℓ CON EL PLANO yz .
- UNAS ECUACIONES CARTESIANAS EN FORMA SIMÉTRICA DE LA RECTA ℓ .

SOLUCIÓN

A) UN VECTOR PARALELO A LA RECTA ℓ ES: $\vec{u} = (1, -1, -1)$ Y EL VECTOR PERPENDICULAR AL PLANO xy ES: $\vec{N} = \hat{k} = (0, 0, 1)$.

LUEGO EL ÁNGULO ENTRE LA RECTA ℓ Y EL PLANO xy ESTÁ DADO POR:

$$\text{sen } \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{N}|}{|\vec{u}| |\vec{N}|} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 35.3^\circ \\ \theta_2 = 144.7^\circ \end{cases}$$

COMO SE OBSERVA, LA RECTA FORMA CON EL PLANO DOS ÁNGULOS, UNO AGUDO Y EL OTRO OBTUSO, SIENDO AMBOS SUPLEMENTARIOS.

B) SI SE IGUALA A CERO LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA ℓ CORRESPONDIENTE A x , SE TIENE QUE:

$$x = 2 + \sqrt{3} t = 0 \Rightarrow t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

AHORA SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LAS OTRAS DOS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA ℓ Y SE OBTIENEN LA ORDENADA Y LA COTA DEL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE ELLA CON EL PLANO yz . ASÍ,

$$y = 2 - \sqrt{3} t \Rightarrow y = 2 - \sqrt{3} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow y = 4$$

$$z = -2 - \sqrt{3} t \Rightarrow z = -2 - \sqrt{3} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow z = 0$$

POR LO TANTO, EL PUNTO DE INTERSECCIÓN ES $(0,4,0)$.

C) SI SE CONSIDERA EL VECTOR $\vec{u} = (1, -1, -1)$ PARALELO A LA RECTA Y EL PUNTO $(2, 2, -2)$ QUE PERTENECE A ELLA, ENTONCES UNAS DE SUS ECUACIONES CARTESIANAS EN FORMA SIMÉTRICA SON:

$$\ell : \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 2}{-1}$$

Y SI, CON EL MISMO VECTOR PARALELO, SE TOMA EN CUENTA AL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL PLANO yz , ES DECIR, EL PUNTO $(0, 4, 0)$, ENTONCES UNAS DE SUS ECUACIONES CARTESIANAS EN FORMA SIMÉTRICA SON:

$$\ell : \frac{x}{1} = \frac{y - 4}{-1} = \frac{z}{-1}$$

DINÁMICA

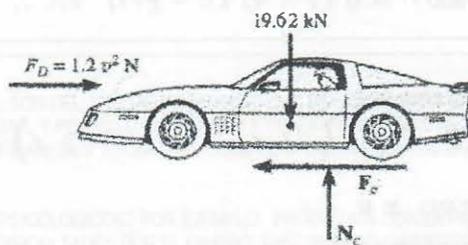
EL AUTOMÓVIL DEPORTIVO DE LA FIGURA TIENE UNA MASA DE $2 Mg$ Y LA EFICIENCIA DE SU MOTOR ES $\epsilon = 0.63$. AL MOVERSE HACIA DELANTE EL AIRE

CREA UNA RESISTENCIA $F_D = 1.2 v^2 N$, SIENDO v LA VELOCIDAD DEL AUTO EN $\frac{m}{s}$. SI EL AUTO VIAJA A UNA VELOCIDAD CONSTANTE DE $50 \frac{m}{s}$

CALCULAR LA POTENCIA MÁXIMA QUE SE SUMINISTRA AL MOTOR.



SOLUCIÓN. EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA, DONDE SE INDICA QUE LA FUERZA NORMAL N_c Y LA FUERZA DE FRICCIÓN F_c , REPRESENTAN LAS FUERZAS RESULTANTES DE LAS CUATRO RUEDAS.



EN ESPECIAL, LA FUERZA DE FRICCIÓN, NO BALANCEADA, IMPULSA O EMPUJA EL VEHÍCULO HACIA DELANTE. ESTE EFECTO SE CREA, NATURALMENTE, POR EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN DE LAS CUATRO RUEDAS SOBRE EL PAVIMENTO, Y ESTÁ DESARROLLADO POR LA POTENCIA DEL MOTOR.

SI SE APLICA LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO EN LA DIRECCIÓN x , SE TIENE QUE:

$$\sum F_x = m a_x \Rightarrow F_c - 1.2 v^2 = 2000 \frac{dv}{dt}$$

COMO EL AUTOMÓVIL VIAJA CON VELOCIDAD CONSTANTE, $\frac{dv}{dt} = 0$ POR LO TANTO, SI $v = 50 \frac{m}{s}$, ENTONCES:

$$F_c = 1.2 (50)^2 = 3000 N$$

LA POTENCIA DE SALIDA DEL AUTOMÓVIL SE MANIFIESTA POR LA FUERZA DE FRICCIÓN F_c . ASÍ, SE TIENE QUE:

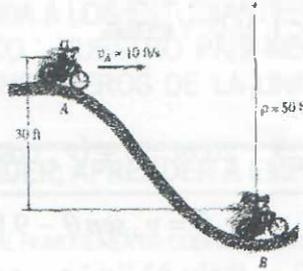
$$P = F_c \cdot v = (3000 \text{ N}) \left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = 150 \text{ kW}$$

LA POTENCIA QUE SUMINISTRA EL MOTOR (POTENCIA DE ENTRADA AL VEHÍCULO) ES, POR LO TANTO, IGUAL A:

$$\text{ENTRADA DE POTENCIA} = \frac{1}{\epsilon} (\text{SALIDA DE POTENCIA}) = \frac{1}{0.63} (150) = 238 \text{ kW}$$

DINÁMICA

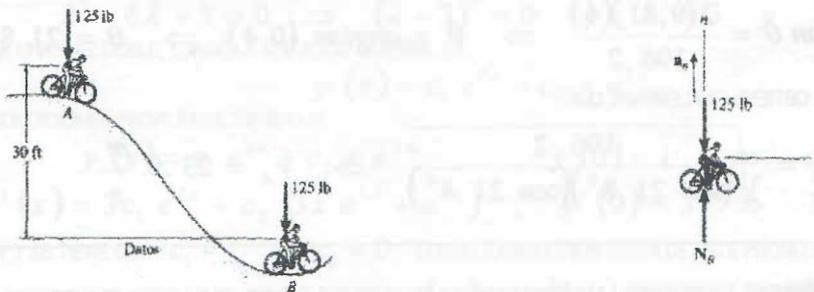
EL JOVEN Y SU BICICLETA, QUE APARECEN EN LA FIGURA, TIENEN UN PESO TOTAL DE 125 lb Y SU CENTRO DE MASA ESTÁ EN G . SI RUEDA SIN IMPULSO, ES DECIR, QUE NO PEDALEA, CON UNA VELOCIDAD DE $10 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ EN LA CUMBRE DE LA COLINA, EN A , CALCULAR LA FUERZA NORMAL QUE SE EJERCE EN AMBAS RUEDAS DE LA BICICLETA CUANDO LLEGA A B , EN DONDE EL RADIO DE CURVATURA DEL PAVIMENTO ES $\rho = 50 \text{ ft}$. DESPRECIAR LA FRICCIÓN.



SOLUCIÓN. COMO LA FUERZA NORMAL NO EFECTÚA TRABAJO, DEBE CALCULARSE EMPLEANDO LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO:

$$\sum F_n = m \left(\frac{v^2}{\rho} \right)$$

SIN EMBARGO, SE PUEDE DETERMINAR LA VELOCIDAD DE LA BICICLETA EN B EMPLEANDO LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA. ¿POR QUÉ?



ENERGÍA POTENCIAL. EN LA FIGURA SE MUESTRA LA BICICLETA EN LOS PUNTOS A y B . POR COMODIDAD, SE HA ESTABLECIDO LA REFERENCIA DE ENERGÍA POTENCIAL EN EL CENTRO DE MASA CUANDO LA BICICLETA ESTÁ EN EL PUNTO B .
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

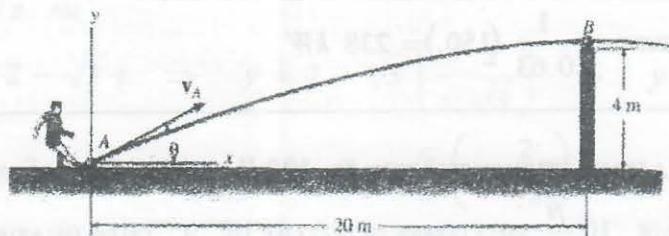
$$\begin{aligned} \{T_A\} + \{V_A\} &= \{T_B\} + \{V_B\} \\ \left\{ \frac{1}{2} m_A v_A^2 \right\} + \{m_A g h_A\} &= \left\{ \frac{1}{2} m_B v_B^2 \right\} + \{m_B g h_B\} \\ \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{125}{32.2} \right) (10)^2 \right\} + \{(125)(30)\} &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{125}{32.2} \right) (v_B)^2 \right\} + \{(125)(0)\} \\ \therefore v_B &= 45.1 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \end{aligned}$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO. SI SE USAN LOS DATOS DEL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE CUANDO LA BICICLETA ESTÁ EN B , SE TIENE QUE:

$$\sum F_n = m a_n \Rightarrow N_B - 125 = \frac{125}{32.2} \frac{(45.1)^2}{50} \therefore N_B = 283 \text{ lb}$$

CINEMÁTICA

POR MEDIO DE UNA CÁMARA DE VIDEO SE OBSERVA QUE CUANDO SE GOLPEA UN BALÓN EN A , COMO SE INDICA EN LA FIGURA, APENAS LOGRA PASAR POR ENCIMA DE UN MURO EN B CUANDO ALCANZA SU MÁXIMA ALTURA. SI SE SABE QUE LA DISTANCIA DE A AL MURO ES DE 20 m Y QUE LA ALTURA DE ÉSTE ES DE 4 m , CALCULAR LA VELOCIDAD INICIAL CON LA QUE SE PATEÓ EL BALÓN. IGNORAR EL TAMAÑO DEL MISMO.



SOLUCIÓN.

SISTEMA DE COORDENADAS. LA RAPIDEZ INICIAL v_A , EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN θ Y EL TIEMPO t_{AB} PARA RECORRER DE A A B REPRESENTAN LAS TRES INCÓGNITAS. EN SU PUNTO MÁXIMO, B , LA VELOCIDAD $(v_B)_y = 0$ Y ADEMÁS:

$$(v_B)_x = (v_A)_x = v_A \cos \theta$$

MOVIMIENTO HORIZONTAL

$$x_B = x_A + (v_A)_x t_{AB} \Rightarrow 20\text{ m} = 0 + (v_A \cos \theta) t_{AB} \quad \dots (1)$$

MOVIMIENTO VERTICAL

$$(v_B)_y = (v_A)_y + g t_{AB} \Rightarrow 0 = v_A \sin \theta - 9.81 t_{AB} \quad \dots (2)$$

$$(v_B)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2g(y_B - y_A) \Rightarrow 0 = v_A^2 \sin^2 \theta + 2(-9.81)(4 - 0) \quad \dots (3)$$

DE LAS ECUACIONES (1) Y (2) SE TIENE QUE $v_A^2 \sin \theta \cos \theta = 196.2 \Rightarrow v_A^2 = \frac{196.2}{\sin \theta \cos \theta} \quad \dots (4)$; SE SUSTITUYE ESTE VALOR

EN LA EXPRESIÓN (3) Y SE LLEGA A.

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{2(9.81)(4)}{196.2} \Rightarrow \theta = \text{angtan}(0.4) \Rightarrow \theta = 21.8^\circ$$

POR LO TANTO, EN LA ECUACIÓN (4) SE OBTIENE FINALMENTE QUE.

$$v_A = \sqrt{\frac{196.2}{(\sin 21.8^\circ)(\cos 21.8^\circ)}} \Rightarrow v_A = 23.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

CULTURA

AUGUSTO MONTERROSO ES UNO DE LOS GRANDES ESCRITORES LATINOAMERICANOS DE NUESTRO TIEMPO, QUE LOGRA SEDUCIRNOS, DE PRINCIPIO A FIN, CON SU PROSA RÁPIDA Y AMENA. UNA DE SUS FÁBULAS:

EL ZORRO MÁS SABIO

UN DÍA QUE EL ZORRO ESTABA MUY ABURRIDO Y HASTA CIERTO PUNTO MELANCÓLICO Y SIN DINERO DECIDIÓ CONVERTIRSE EN ESCRITOR, COSA A LA CUAL SE DEDICÓ INMEDIATAMENTE, PUES ODIABA ESE TIPO DE PERSONAS QUE DICEN VOY A HACER ESTO O LO OTRO Y NUNCA LO HACEN.

SU PRIMER LIBRO RESULTÓ MUY BUENO, UN ÉXITO; TODO EL MUNDO LO APLAUDIÓ, Y PRONTO FUE TRADUCIDO (A VECES NO MUY BIEN) A LOS MÁS DIVERSOS IDIOMAS.

EL SEGUNDO FUE TODAVÍA MEJOR QUE EL PRIMERO, Y VARIOS PROFESORES NORTEAMERICANOS DE LO MÁS GRANADO DEL MUNDO ACADÉMICO DE AQUELLOS REMOTOS DÍAS LO COMENTARON CON ENTUSIASMO Y AUN ESCRIBIERON LIBROS SOBRE LOS LIBROS QUE HABLABAN DE LOS LIBROS DEL ZORRO.

DESDE ESE MOMENTO EL ZORRO SE DIO CON RAZÓN POR SATISFECHO, Y PASARON LOS AÑOS Y NO PUBLICABA OTRA COSA.

PERO LOS DEMÁS EMPEZARON A MURMURAR Y A REPETIR "¿QUÉ PASA CON EL ZORRO?", Y CUANDO LO ENCONTRABAN EN LOS COCTELES PUNTUALMENTE SE LE ACERCABAN A DECIRLE TIENE USTED QUE PUBLICAR MÁS.

-PERO SI YA HE PUBLICADO DOS LIBROS -RESPONDÍA ÉL CON CANSANCIO.

-Y MUY BUENOS -LE CONTESTABAN-; POR ESO MISMO TIENE USTED QUE PUBLICAR OTRO.

EL ZORRO NO LO DECÍA, PERO PENSABA: "EN REALIDAD LO QUE ÉSTOS QUIEREN ES QUE YO PUBLIQUE UN LIBRO MALO; PERO COMO SOY EL ZORRO, NO LO VOY A HACER". Y NO LO HIZO.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.

COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 35

17 DE ENERO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. NUESTRO PAÍS NECESITA DEL CONCURSO SERIO, RESPONSABLE, COMPROMETIDO Y EFICIENTE DE LOS INGENIEROS DE LA UNAM. ASÍ HA SIDO SIEMPRE. HAY QUE SEGUIR LA TRADICIÓN.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

ECUACIONES DIFERENCIALES

OBTENER LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES

$$y'' - 6y' + 9 = 0$$

SUJETA A LAS CONDICIONES INICIALES

$$y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 3$$

SOLUCIÓN

LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA, ASÍ COMO SU SOLUCIÓN, ESTÁN DADAS POR:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \quad y \quad \lambda_2 = 3$$

COMO SE OBSERVA, SE TIENE UNA RAÍZ DOBLE, LUEGO LA SOLUCIÓN GENERAL ES:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

SI SE UTILIZAN AHORA LAS CONDICIONES INICIALES SE TIENE QUE:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} \quad ; \quad y(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ y'(x) &= 3c_1 e^{3x} + c_2 (3x e^{3x} + e^{3x}) \quad ; \quad y'(0) = 3 \Rightarrow 3c_1 + c_2 = 3 \end{aligned}$$

SE RESUELVE ESTE SISTEMA Y SE TIENE QUE $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$ LUEGO, LA SOLUCIÓN ÚNICA DE ESTE PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES ES:

$$y(x) = e^{3x}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER EL SISTEMA

$$x' = x + y \quad ; \quad x(0) = 1$$

$$y' = -3x - y \quad ; \quad y(0) = 0$$

SOLUCIÓN.

SE DERIVA LA PRIMERA ECUACIÓN Y SE SUSTITUYE EN ELLA A y' POR LA SEGUNDA ECUACIÓN. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$x'' = x' + y' \Rightarrow x'' = x' + (-3x - y)$$

AHORA SE DESPEJA y EN LA PRIMERA ECUACIÓN DEL SISTEMA Y SE SUSTITUYE EN LA ÚLTIMA EXPRESIÓN OBTENIDA, LUEGO SE LLEGA A:

$$y = x' - x \Rightarrow x'' = x' - 3x - (x' - x) \Rightarrow x'' = x' - 3x - x' + x \Rightarrow x'' + 2x = 0$$

LA SOLUCIÓN DE ESTA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTÁ DADA POR:

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{2} t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2} t$$

DE ACUERDO CON LA PRIMERA ECUACIÓN DEL SISTEMA DADO, SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$\begin{aligned} y(t) &= x' - x = -\sqrt{2} c_1 \operatorname{sen} \sqrt{2} t + \sqrt{2} c_2 \cos \sqrt{2} t - c_1 \cos \sqrt{2} t - c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2} t \\ y(t) &= (\sqrt{2} c_2 - c_1) \cos \sqrt{2} t - (\sqrt{2} c_1 + c_2) \operatorname{sen} \sqrt{2} t \end{aligned}$$

SI SE UTILIZAN LAS CONDICIONES INICIALES, SE TIENE QUE:

$$x(0) = c_1 = 1 \quad ; \quad y(0) = \sqrt{2} c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

POR LO TANTO, LA SOLUCIÓN ÚNICA DEL SISTEMA ESTÁ DADA POR LAS FUNCIONES SIGUIENTES:

$$x(t) = \cos \sqrt{2} t + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2} t$$

$$y(t) = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen} \sqrt{2} t = -\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \sqrt{2} t$$

CÁLCULO I

LAS ECUACIONES DE UNA SEMIELIPSE, EN FORMA IMPLÍCITA Y PARAMÉTRICA, SON LAS SIGUIENTES:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad ; \quad y \geq 0 \quad y \quad f: \begin{cases} x = 5 \cos \theta \\ y = 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

CALCULAR EL VALOR DE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA ELIPSE EN EL PUNTO EN EL CUAL $\theta = \frac{\pi}{3}$. UTILIZAR PARA ELLO LOS PROCEDIMIENTOS DE DERIVACIÓN CORRESPONDIENTES A FUNCIONES DEFINIDAS EN FORMA IMPLÍCITA Y EN FORMA PARAMÉTRICA.

SOLUCIÓN. COMO SE SABE, LA DERIVADA ES LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE. LUEGO:

FORMA IMPLÍCITA

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad ; \quad y \geq 0$$

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y}{16} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{25} \frac{8}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{25y}$$

COMO $\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$; $y = 2\sqrt{3}$

POR LO TANTO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{16 \left(\frac{5}{2}\right)}{25 (2\sqrt{3})} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{40}{50\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \approx -0.4619$$

FORMA PARAMÉTRICA

$$f: \begin{cases} x = 5 \cos \theta \\ y = 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -5 \operatorname{sen} \theta \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} = \frac{4 \cos \theta}{-5 \operatorname{sen} \theta} = -\frac{4}{5} \cot \theta$$

Y PARA $\theta = \frac{\pi}{3}$ SE TIENE QUE:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5} \cot \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{4 \cdot 1}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \approx -0.4619$$

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES:

$$i) \int \frac{2x+5}{9+16x-4x^2} dx \quad ii) \int x^2 \operatorname{angtan} x dx \quad iii) \int \frac{2x+1}{x^3-8} dx$$

SOLUCIÓN.

$$i) \int \frac{2x+5}{9+16x-4x^2} dx$$

LO PRIMERO QUE SE ACONSEJA ES LLAMAR AL DENOMINADOR CON UNA NUEVA VARIABLE u Y VER CÓMO SE PRESENTA LA DIFERENCIAL. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$u = 9 + 16x - 4x^2 \Rightarrow du = (16 - 8x) dx = -4(2x - 4) dx$$

ENTONCES LA EXPRESIÓN ORIGINAL SE PUEDE ESCRIBIR COMO:

$$\int \frac{2x + 5}{9 + 16x - 4x^2} dx = \int \frac{2x + 5 - 4 + 4}{9 + 16x - 4x^2} dx = \int \frac{2x - 4 + 9}{9 + 16x - 4x^2} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{-4(2x - 4)}{9 + 16x - 4x^2} dx + 9 \int \frac{dx}{9 + 16x - 4x^2} dx$$

LA PRIMERA INTEGRAL SE RESUELVE HACIENDO USO DEL CAMBIO DE VARIABLE PROPUESTO Y QUEDA COMO,

$$-\frac{1}{4} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{4} \ln|u| + C_1 = -\frac{1}{4} \ln|9 + 16x - 4x^2| + C_1$$

PARA RESOLVER LA SEGUNDA INTEGRAL SE COMPLETA EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO EN EL DENOMINADOR, LO QUE CONDUCE A LO SIGUIENTE:

$$9 \int \frac{dx}{9 + 16x - 4x^2} = 9 \int \frac{dx}{-(4x^2 - 16x - 9)} = 9 \int \frac{dx}{-(4x^2 - 16x + 16 - 16 - 9)} = 9 \int \frac{dx}{25 - (2x - 4)^2}$$

SE REALIZAN LOS CORRESPONDIENTES CAMBIOS DE VARIABLE, DE DONDE:

$$a^2 = 25 \quad ; \quad a = 5 \quad ; \quad u^2 = (2x - 4)^2 \quad ; \quad u = 2x - 4 \quad ; \quad du = 2 dx$$

LUEGO

$$9 \int \frac{dx}{9 + 16x - 4x^2} = 9 \int \frac{dx}{25 - (2x - 4)^2} = \frac{9}{2} \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{9}{2} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + C_2 = \frac{9}{2} \ln \left| \frac{1 + 2x}{9 - 2x} \right| + C_2$$

FINALMENTE, LA SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL ES:

$$\int \frac{2x + 5}{9 + 16x - 4x^2} dx = -\frac{1}{4} \ln|9 + 16x - 4x^2| + \frac{9}{2} \ln \left| \frac{1 + 2x}{9 - 2x} \right| + C \quad ; \quad C = C_1 + C_2$$

ii) $\int x^2 \operatorname{ang} \tan x dx$

ESTA ES UNA INTEGRAL QUE SE RESUELVE POR EL MÉTODO CONOCIDO COMO "INTEGRACIÓN POR PARTES". ASÍ SE TIENE QUE:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{ang} \tan x & dv &= x^2 dx \\ du &= \frac{dx}{x^2 + 1} & v &= \frac{x^3}{3} \end{aligned} \Rightarrow \int x^2 \operatorname{ang} \tan x dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{ang} \tan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$$

SE EFECTÚA LA DIVISIÓN DEL INTEGRANDO DE LA INTEGRAL QUE APARECE EN EL SEGUNDO TÉRMINO DE LA EXPRESIÓN QUE SE ACABA DE OBTENER Y SE LLEGA A:

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C_1$$

FINALMENTE SE TIENE QUE:

$$\int x^2 \operatorname{ang} \tan x dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{ang} \tan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln|x^2 + 1| + C$$

iii) $\int \frac{2x + 1}{x^3 - 8} dx$

POR EL MÉTODO DE "INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES RACIONALES", SE TIENE QUE:

$$\frac{2x + 1}{x^3 - 8} = \frac{2x + 1}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}$$

$$2x + 1 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)$$

$$2x + 1 = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

DE DONDE:

$$0 = A + B$$

$$2 = 2A - 2B + C$$

$$1 = 4A - 2C$$

SE RESUELVE EL SISTEMA Y SE LLEGA A:

$$B = -A \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = 4A + C \\ 1 = 4A - 2C \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = 4A + C \\ -1 = -4A + 2C \end{array} \Rightarrow 1 = 3C \Rightarrow \begin{array}{l} C = \frac{1}{3} \\ A = \frac{5}{12} \\ B = -\frac{5}{12} \end{array}$$

POR LO QUE LA INTEGRAL QUEDA COMO

$$\int \frac{2x+1}{x^3-8} dx = \int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{-\frac{5}{12}x + \frac{1}{3}}{x^2+2x+4} dx = \frac{5}{12} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{12} \int \frac{5x-4}{x^2+2x+4} dx$$

LA PRIMERA INTEGRAL SE RESUELVE FÁCILMENTE MEDIANTE UN SENCILLO CAMBIO DE VARIABLE QUE CONDUCE A UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

$$\frac{5}{12} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{5}{12} \ln|x-2| + C_1$$

Y LA SEGUNDA INTEGRAL SE RESUELVE DE MANERA SEMEJANTE A LA (i) DE ESTA SERIE DE INTEGRALES. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$u = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow du = (2x+2)dx = 2(x+1)dx$$

$$\int \frac{5x-4}{x^2+2x+4} dx = \int \frac{5x+5-5-4}{x^2+2x+4} dx = 5 \int \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx - 9 \int \frac{dx}{x^2+2x+4}$$

$$5 \int \frac{x+1}{x^2+2x+4} dx = \frac{5}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{5}{2} \ln|u| + C_2 = \frac{5}{2} \ln|x^2+2x+4| + C_2$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+4} dx = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

$$a^2 = 3 \quad ; \quad a = \sqrt{3} \quad ; \quad u^2 = (x+1)^2 \quad ; \quad u = x+1 \quad ; \quad du = dx$$

$$-9 \int \frac{dx}{x^2+2x+4} dx = -9 \int \frac{dx}{(x+1)^2+3} = -9 \int \frac{du}{u^2+a^2} = -9 \cdot \frac{1}{a} \operatorname{angtan} \frac{u}{a} + C_3 = -\frac{9}{\sqrt{3}} \operatorname{angtan} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C_3$$

FINALMENTE LA SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL ES:

$$\int \frac{2x+1}{x^3-8} dx = \frac{5}{12} \ln|x-2| + \frac{5}{2} \ln|x^2+2x+4| - \frac{9}{\sqrt{3}} \operatorname{angtan} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C \quad ; \quad C = C_1 + C_2 + C_3$$

TUTORÍA

ALUMNOS DE PRIMER INGRESO CURRICULAR

APROVECHEN LA TUTORÍA. ES UN SERVICIO ACADÉMICO QUE PUEDE SER FUNDAMENTAL EN SUS ESTUDIOS. EL TUTOR ES UN ALIADO QUE PUEDE ORIENTAR ACADÉMICA Y HUMANAMENTE. ES UN PROFESOR DE LA FACULTAD DISPUESTO A AYUDAR, A ESCUCHAR Y A TRATAR DE ENCONTRAR SOLUCIONES A TODAS LAS PROBLEMÁTICAS QUE USTEDES LE PLANTEEN.

ALUMNOS DE PRIMER INGRESO PROPEDEÚTICO

EL PRÓXIMO SEMESTRE, CUANDO ESTÉN EN PRIMER SEMESTRE CURRICULAR, SE LES PROPORCIONARÁ UN TUTOR, DISPUESTO A APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ENTREVÍSTENSE CON ÉL, APOYENSE EN ÉL, PÍDANLE SU CONSEJO SOBRE TODO AQUELLO QUE LES PREOCUPE O QUIZÁ HASTA LOS ANGUSTIE.

ALUMNOS DE OTROS SEMESTRES

SI TUVIERON UNA BUENA RELACIÓN CON SU TUTOR EN EL PRIMER SEMESTRE - LO QUE DESEAMOS SINCERAMENTE-, PUEDEN SEGUIR BUSCANDO SU AYUDA Y SU ORIENTACIÓN, Y CONTINUAR LA RELACIÓN DE AFECTO QUE SE ESTABLECIÓ.

CULTURA

LA MOSCA QUE SOÑABA QUE ERA UN ÁGUILA (AUGUSTO MONTERROSO)

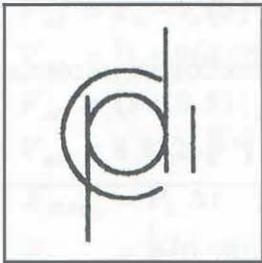
HABÍA UNA VEZ UNA MOSCA QUE TODAS LAS NOCHES SOÑABA QUE ERA UN ÁGUILA Y QUE SE ENCONTRABA VOLANDO POR LOS ALPES Y POR LOS ANDES. EN LOS PRIMEROS MOMENTOS ESTO LA VOLVÍA LOCA DE LA FELICIDAD; PERO PASADO UN TIEMPO LE CAUSABA UNA SENSACIÓN DE ANGUSTIA, PUES HALLABA LAS ALAS DEMASIADO GRANDES, EL CUERPO DEMASIADO PESADO, EL PICO DEMASIADO DURO Y LAS GARRAS DEMASIADO FUERTES; BUENO, QUE TODO ESE GRAN APARATO LE IMPEDÍA POSARSE A GUSTO SOBRE LOS RICOS PASTELES O SOBRE LAS INMUNDICIAS HUMANAS, ASÍ COMO SUFRIR A CONCIENCIA DÁNDOSE TOPES CONTRA LOS VIDRIOS DE SU CUARTO.

EN REALIDAD NO QUERÍA ANDAR EN LAS GRANDES ALTURAS, O EN LOS ESPACIOS LIBRES, NI MUCHO MENOS.

PERO CUANDO VOLVÍA EN SÍ LAMENTABA CON TODA EL ALMA NO SER UN ÁGUILA PARA REMONTAR MONTAÑAS, Y SE SENTÍA TRISTÍSIMA DE SER UNA MOSCA, Y POR ESO VOLABA TANTO, Y ESTABA TAN INQUIETA, Y DABA TANTAS VUELTAS, HASTA QUE LENTAMENTE, POR LA NOCHE, VOLVÍA A PONER LAS SIENES EN LA ALMOHADA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 36

2 DE FEBRERO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. LA COPADI LES DESEA TODO TIPO DE ÉXITOS EN EL SEMESTRE QUE ESTÁ POR TERMINAR. BIEN VALE LA PENA UN PROFUNDO Y DEDICADO ESTUDIO FINAL PARA ACREDITAR LAS ASIGNATURAS Y AVANZAR EN EL CAMINO QUE LOS CONDUCIRÁ A SER UNOS EXCELENTES INGENIEROS.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE LOS PLANOS PARALELOS π_1 y π_2 DE ECUACIONES:

$$\pi_1 : 2x - 3y + 6z + 28 = 0$$

$$\pi_2 : 2x - 3y + 6z + 14 = 0$$

SOLUCIÓN:

PRIMERA FORMA

SE HACE USO DE LA EXPRESIÓN: $d = \frac{|(\bar{q} - \bar{p}_0) \cdot \bar{N}|}{|\bar{N}|}$ EN DONDE \bar{q} ES EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA Q , DEL PLANO π_1 ;

\bar{p}_0 ES EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA P_0 DEL PLANO π_2 ; Y \bar{N} ES EL VECTOR NORMAL A CUALQUIERA DE LOS DOS PLANOS.

PARA OBTENER EL PUNTO Q Y EL VECTOR \bar{q} , SE HACE LO SIGUIENTE: SEAN $y = 0$ y $z = 0$ EN π_1 . LUEGO

$$2x + 28 = 0 \Rightarrow x = -14 \Rightarrow Q(-14, 0, 0) \Rightarrow \bar{q} = (-14, 0, 0)$$

PARA OBTENER EL PUNTO P_0 Y EL VECTOR \bar{p}_0 , SE HACE LO SIGUIENTE: SEAN $y = 0$ y $z = 0$ EN π_2 . LUEGO

$$2x + 14 = 0 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow P_0(-7, 0, 0) \Rightarrow \bar{p}_0 = (-7, 0, 0)$$

UN VECTOR NORMAL AL PLANO π_1 ES: $\bar{N} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k} \Rightarrow |\bar{N}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = 7$. ENTONCES:

$$\bar{q} - \bar{p}_0 = (-14, 0, 0) - (-7, 0, 0) = (-7, 0, 0)$$

$$(\bar{q} - \bar{p}_0) \cdot \bar{N} = (-7, 0, 0) \cdot (2, -3, 6) = -14$$

$$d = \frac{|-14|}{7} = 2 \text{ UNIDADES DE LONGITUD}$$

OTRA FORMA

CON LA DISTANCIA DE UN PLANO DE ECUACIÓN $Ax + By + Cz + D = 0$, AL ORIGEN, QUE ESTÁ DADA POR $d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

SE CALCULA LA DISTANCIA ENTRE CADA UNO DE LOS PLANOS Y EL ORIGEN

$$\text{PARA } \pi_1 : d_1 = \frac{|D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{28}{7} = 4 \text{ UNIDADES DE LONGITUD}$$

$$\text{PARA } \pi_2 : d_2 = \frac{|D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{14}{7} = 2 \text{ UNIDADES DE LONGITUD}$$

PUESTO QUE PARA $\vec{N}_1 = \vec{N}_2$ SE TIENE QUE $D_1 D_2 > 0$, ENTONCES EL ORIGEN DE COORDENADAS NO ESTÁ COMPRENDIDO ENTRE LOS DOS PLANOS, POR LO QUE LA DISTANCIA ENTRE ELLOS ESTÁ DADA POR

$$d = d_1 - d_2 = 4 - 2 = 2 \text{ UNIDADES DE LONGITUD}$$

NOTA. SI PARA $\vec{N}_1 = \vec{N}_2$ SE TUVIERA QUE $D_1 D_2 < 0$, ENTONCES ESTO QUERRÍA DECIR QUE EL ORIGEN ESTÁ COMPRENDIDO ENTRE LOS DOS PLANOS. Y EN ESTE CASO SE TENDRÍA QUE:

$$d = d_1 + d_2$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

CON BASE EN LA INFORMACIÓN SIGUIENTE:

$$\varepsilon_1 = 12 \text{ [V]} \quad r_1 = 2 \text{ [\Omega]} \quad R_1 = 18 \text{ [\Omega]}$$

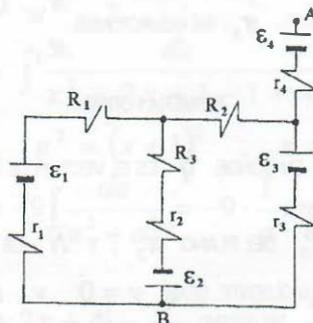
$$\varepsilon_2 = 6 \text{ [V]} \quad r_2 = 1 \text{ [\Omega]} \quad R_2 = 9 \text{ [\Omega]}$$

$$\varepsilon_3 = 6 \text{ [V]} \quad r_3 = 2 \text{ [\Omega]} \quad R_3 = 28 \text{ [\Omega]}$$

$$\varepsilon_4 = 3 \text{ [V]} \quad r_4 = 1 \text{ [\Omega]}$$

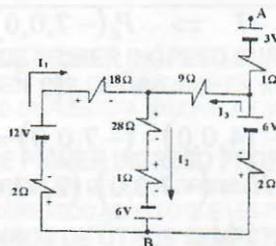
QUE CORRESPONDE AL CIRCUITO DE LA FIGURA, OBTENER:

- LA CORRIENTE ELÉCTRICA EN CADA UNA DE LAS FUENTES DE fem
- LA ENERGÍA ELÉCTRICA QUE SE TRANSFORMA EN CALOR, CADA SEGUNDO, EN EL RESISTOR R_1
- LA DIFERENCIA DE POTENCIAL V_{AB}
- LA ENERGÍA SUMINISTRADA POR LA FUENTE ε_2 AL RESTO DEL CIRCUITO, EN 5 SEGUNDO



RESOLUCIÓN

- EN LA FIGURA SIGUIENTE SE MUESTRAN LAS CORRIENTES EN CADA RAMA.



CON LA ICK EN EL NODO B TENEMOS QUE

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

CON LA LVK EN LA MALLA IZQUIERDA, SE TIENE QUE:

$$\begin{aligned} r_1 I_1 - \varepsilon_1 + R_1 I_1 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2 &= 0 \\ 20 I_1 + 29 I_2 &= 18 \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

CON LA LVK EN LA MALLA DERECHA, SE TIENE QUE:

$$\begin{aligned} r_3 I_3 - \varepsilon_3 + R_2 I_3 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2 &= 0 \\ 29 I_2 + 11 I_3 &= 12 \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

AL RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES SE ENCUENTRAN

$$I_1 = 0.3324 \text{ [A]} ; \quad I_2 = 0.3914 \text{ [A]} ; \quad I_3 = 0.059 \text{ [A]} ; \quad \text{Y ADEMÁS } I_{\varepsilon_3} = 0$$

$$B) E_{dis_{R_1}} = P_1 \Delta t ; P_1 = R_1 I_1^2 \therefore E_{dis_{R_1}} = 18 [\Omega] 0.3324^2 [A]^2 1 [S] \Rightarrow E_{dis_{R_1}} = 1.989 [J]$$

$$V_{AB} = \varepsilon_4 - r_4(0) + R_2 I_3 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2$$

$$V_{AB} = [3 + 9(0.059) + 28(0.3914) + 1(0.3914) - 6] [V]$$

$$C) V_{AB} = (3 + 0.531 + 10.959 + 0.3914 - 6) [V]$$

$$V_{AB} = 8.882 [V]$$

$$D) E_{SUM_2} = P_2 \Delta t ; P_2 = \varepsilon_2 I_2 - r_2 I_2^2 \text{ YA QUE ES FUENTE REAL ; } \Delta t = 5 [s]$$

$$E_{SUM_2} = [6(0.3914) - 1(0.3914)^2] [W] 5 [S] \Rightarrow E_{SUM_2} = 10.976 [J]$$

TERMODINÁMICA

EN UN CILINDRO VERTICAL, CON UN ÉMBOLO LIBRE DE FRICCIÓN, HAY 23 (g) DE UN GAS IDEAL $\left(R = 2.0786 \left(\frac{J}{gK} \right), k = \frac{5}{3} \right)$.

EL FLUIDO SE ENFRÍA CASIESTÁTICAMENTE DESDE 200 ($^{\circ}C$) HASTA 90 ($^{\circ}C$). LA MASA DEL ÉMBOLO ES TAL, QUE EL GAS ESTABA INICIALMENTE A

300 (kPa). EL CILINDRO TIENE 40 (cm) DE DIÁMETRO Y SE HALLA EN LA CU (CIUDAD UNIVERSITARIA) $\left(77.17 (kPa), 18 (^{\circ}C), 9.78 \left(\frac{m}{s^2} \right) \right)$.

CALCULAR EL CAMBIO EN LA ENERGÍA DEL GAS QUE EL PROCESO PROVOCA.

RESOLUCIÓN

SISTEMA: CERRADO (LA MASA DEL GAS EN EL CILINDRO)

PARA LA APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS DE LA TERMODINÁMICA, DEBEN CONOCERSE LOS ESTADOS DE EQUILIBRIO INICIAL Y FINAL.

EL ESTADO DE EQUILIBRIO INICIAL SE DETERMINA MEDIANTE 200 ($^{\circ}C$) y 300 (kPa)

EN EL ESTADO DE EQUILIBRIO FINAL SE DA ÚNICAMENTE 90 ($^{\circ}C$); PARA LA DETERMINACIÓN DE ESTE ESTADO, APÓYESE EN EL HECHO DE QUE UN PROCESO CASIESTÁTICO ES UNA SUCESIÓN DE ESTADOS DE EQUILIBRIO.

PARA QUE HAYA EQUILIBRIO TERMODINÁMICO HA DE HABER EQUILIBRIO MECÁNICO. SI SE APLICA ESTA CONDICIÓN AL ÉMBOLO, EN CUALQUIERA DE LOS ESTADOS DE EQUILIBRIO A LOS LARGO DEL PROCESO, SE LLEGA A:

$$P_{gas}^{abs} = \frac{M_{\text{émbolo}} \cdot g}{\dot{a}} + P_{amb} \dots (I)$$

LOS SÍMBOLOS DE LA ECUACIÓN (I) SON:

$$M_{\text{émbolo}} = \text{DESCONOCIDA, PERO CONSTANTE}$$

$$P_{amb} = \text{CONSTANTE}$$

$$\dot{a} = \frac{\pi D^2}{4} = \text{CONSTANTE}$$

$$g = \text{CONSTANTE}$$

DE LA ECUACIÓN (I) PUEDE CONCLUIRSE QUE LA PRESIÓN DEL SISTEMA SE MANTIENE CONSTANTE DURANTE EL ENFRIAMIENTO.

POR LO TANTO, LA SEGUNDA PROPIEDAD QUE SE NECESITA PARA LA DETERMINACIÓN DEL ESTADO FINAL ES 300 (kPa).

APLIQUE LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA AL SISTEMA CERRADO. CONSIDERE QUE DURANTE EL PROCESO LOS CAMBIOS EN LA ENERGÍA CINÉTICA Y EN LA ENERGÍA POTENCIAL DEL SISTEMA SON DESPRECIABLES:

$$E_{final} - E_{inicial} \approx U_{final} - U_{inicial}$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES UN GAS IDEAL, QUE ES UNA SUSTANCIA SIMPLE COMPRESIBLE, EL ÚNICO TRABAJO CASIESTÁTICO ES TRABAJO DE EXPANSIÓN.

$$\{W\}_{exp} = - \int_{\forall_{ini}}^{\forall_{fin}} P_{sistema}^{abs} d\forall$$

$$\text{YA QUE EL PROCESO ES ISOBÁRICO: } \{W\}_{exp} = -P_{sistema}^{abs} \cdot (\forall_{fin} - \forall_{ini})$$

$$\text{POR LA ECUACIÓN DEL GAS IDEAL: } \{W\}_{exp} = -M_{sist} \cdot R \cdot (T_{fin} - T_{ini}) \dots (II)$$

COMO EL PROCESO ES ISOBÁRICO: $\{Q\} = M_{sist} \cdot C_p (T_{fin} - T_{ini})$

POR LA FÓRMULA DE MAYER, $C_p - C_v = R$, Y POR LA DEFINICIÓN DEL EXPONENTE ADIABÁTICO DE POISSON, $k = \frac{C_p}{C_v}$; $C_p = \frac{kR}{k-1}$

$$\{Q\} = M_{sist} \frac{kR}{k-1} (T_{fin} - T_{ini}) \dots \quad (III)$$

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA, CON LA CONSIDERACIÓN ANTERIOR, QUEDA COMO:

$$\{Q\} + \{W\}_{exp} \approx U_{final} - U_{inicial}$$

POR LAS ECUACIONES (II) y (III) EL LADO IZQUIERDO ES EVALUABLE CON FACILIDAD. PARA EVALUAR EL LADO DERECHO, SE HACE LO SIGUIENTE:

$$M_{sist} \frac{kR}{k-1} (T_{fin} - T_{ini}) + (-M_{sist} \cdot R \cdot (T_{fin} - T_{ini})) \approx U_{fin} - U_{ini}$$

$$M_{sist} \frac{R}{k-1} (T_{fin} - T_{ini}) = U_{fin} - U_{ini}$$

$$23 \text{ (g)} \cdot 2.0876 \left(\frac{\text{J}}{\text{gK}} \right) \frac{1}{5-1} (90 \text{ } (^{\circ}\text{C}) - 200 \text{ } (^{\circ}\text{C})) \approx U_{fin} - U_{ini}$$

$$- 7.9224 \text{ (kJ)} \approx U_{fin} - U_{ini}$$

COMENTARIOS

OBSERVE QUE INMEDIATAMENTE DESPUÉS DE ESCOGER AL SISTEMA HAY QUE ESTAR SEGURO DE QUE LOS ESTADOS INICIAL Y FINAL SE CONOCEN. A VECES, COMO EN ESTE CASO, DEBE USARSE LA INFORMACIÓN ACERCA DEL PROCESO PARA TAL DETERMINACIÓN. EL LECTOR FAMILIARIZADO CON LA LEY DE JOULE PODRÍA HABER ENCONTRADO LA RESPUESTA MÁS CONCISAMENTE.

CULTURA

LA RANA QUE QUERÍA SER UNA RANA AUTÉNTICA

HABÍA UNA VEZ UNA RANA QUE QUERÍA SER UNA RANA AUTÉNTICA, Y TODOS LOS DÍAS SE ESFORZABA EN ELLO.

AL PRINCIPIO SE COMPRÓ UN ESPEJO EN EL QUE SE MIRABA LARGAMENTE BUSCANDO SU ANSIADA AUTENTICIDAD.

UNAS VECES PARECÍA ENCONTRARLA Y OTRAS NO, SEGÚN EL HUMOR DE ESE DÍA O DE LA HORA, HASTA QUE SE CANSÓ DE ESTO Y GUARDÓ EL ESPEJO EN UN BAÚL.

POR FIN PENSÓ QUE LA ÚNICA FORMA DE CONOCER SU PROPIO VALOR ESTABA EN LA OPINIÓN DE LA GENTE, Y COMENZÓ A PEINARSE Y A VESTIRSE Y A DESVESTIRSE (CUANDO NO LE QUEDABA OTRO RECURSO) PARA SABER SI LOS DEMÁS LA APROBABAN Y RECONOCÍAN QUE ERA UNA RANA AUTÉNTICA.

UN DÍA OBSERVÓ QUE LO QUE MÁS ADMIRABAN DE ELLA ERA SU CUERPO, ESPECIALMENTE SUS PIERNAS, DE MANERA QUE SE DEDICÓ A HACER SENTADILLAS Y A SALTAR PARA TENER UNAS ANCAS CADA VEZ MEJORES, Y SENTÍA QUE TODOS LA APLAUDÍAN.

Y ASÍ SEGUÍA HACIENDO ESFUERZOS HASTA QUE, DISPUESTA A CUALQUIER COSA PARA LOGRAR QUE LA CONSIDERARAN UNA RANA AUTÉNTICA, SE DEJABA ARRANCAR LAS ANCAS, Y LOS OTROS SE LAS COMÍAN, Y ELLA TODAVÍA ALCANZABA A OIR CON AMARGURA CUANDO DECÍAN QUE QUÉ BUENA RANA, QUE PARECÍA POLLO.

AUGUSTO MONTERROSO

TUTORÍA

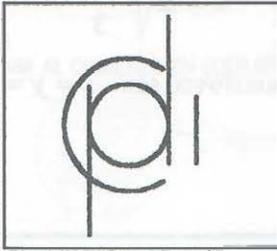
EL PRÓXIMO SEMESTRE, EL PROGRAMA "TUTORÍA PARA TODOS" SE DEDICARÁ ESPECIALMENTE A LOS ESTUDIANTES DE LA GENERACIÓN 2002 QUE ESTÁN AHORA EN EL CURSO PROPEDÉUTICO. PERO ESTO NO QUERE DECIR QUE QUIENES YA HAN ESTABLECIDO COMUNICACIÓN E INTERACCIÓN CON SU TUTOR, DEJEN DE HACERLO. AL CONTRARIO, SE PRETENDE QUE EL CONTACTO PERDURE Y QUE LA AMISTAD Y EL AFECTO SIGAN. DE ESTA MANERA EL ESTUDIANTE PUEDE SEGUIR RECIBIENDO APOYO Y ALIENTO EN SUS ESTUDIOS Y EL TUTOR CONTINÚA CON ESTA NOBLE LABOR QUE ES INHERENTE A SU LABOR ACADÉMICA Y A SU VOCACIÓN DOCENTE. ES TAN IMPORTANTE LA TUTORÍA QUE HAY BECAS DE LICENCIATURA QUE PIDEN COMO REQUISITO QUE EL ESTUDIANTE CUENTE CON UN TUTOR.

ESTUDIANTES: APROVECHEN ESTE SERVICIO ACADÉMICO Y BUSQUEN A ESE PROFESOR QUE ESTÁ DISPUESTO A AYUDARLOS

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO, GABRIEL JARAMILLO MORALES, HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ Y DE LA COORDINACIÓN DE TERMODINÁMICA.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



EDITORIAL

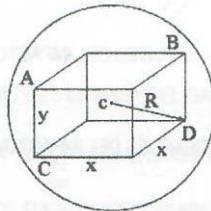
ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. EN LA VIDA DE LOS ESTUDIANTES, TODO ES CUESTIÓN DE DECISIÓN Y VOLUNTAD. Y DESPUÉS VENDRÁN TODOS LOS FRUTOS DE LA "COSECHA". UNA VIDA DIGNA, UN SALARIO DIGNO Y LA INMENSA OPORTUNIDAD DE AYUDAR A LOS DEMÁS Y SER FELIZ.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

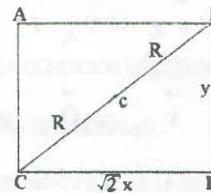
CÁLCULO I

CALCULAR LAS DIMENSIONES DEL PARALELEPÍPEDO DE BASE CUADRADA, DE VOLUMEN MÁXIMO, QUE SE PUEDE INSCRIBIR EN UNA ESFERA DE RADIO " R ". OBTENER TAMBIÉN EL VOLUMEN MÁXIMO.

SOLUCIÓN.



(A)



(B)

EN LA FIGURA (A) SE OBSERVA EL PARALELEPÍPEDO INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO " R ". SOLAMENTE LOS VÉRTICES DEL PRISMA RECTANGULAR PERTENECEN A LA ESFERA. LA FUNCIÓN A OPTIMIZAR ES EL VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO, ES DECIR, $V = x^2 y$ COMO ESTÁ INSCRITO EN LA ESFERA, SUS VÉRTICES PERTENECEN A ELLA. LUEGO, PARA PODER ESTABLECER UNA ECUACIÓN AUXILIAR QUE RELACIONE A LOS LADOS DEL PARALELEPÍPEDO CON EL RADIO DE LA ESFERA, SE CONSIDERA LA SECCIÓN PLANA " ABCD " QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA (B). DE ÉSTA SE TIENE QUE:

$$2x^2 + y^2 = 4R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4R^2 - y^2}{2} \dots (1)$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA FUNCIÓN A OPTIMIZAR Y SE RESUELVE EL PROBLEMA PLANTEADO. ASÍ,

$$V = \frac{4R^2 - y^2}{2} y \Rightarrow V = 2R^2 y - \frac{y^3}{2} ; \frac{dV}{dy} = 2R^2 - \frac{3y^2}{2} ; 2R^2 - \frac{3y^2}{2} = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{4R^2}{3} ; y = \pm \sqrt{\frac{4R^2}{3}}$$

COMO SE TRATA DE UNA LONGITUD, EL VALOR LÓGICO ES EL POSITIVO. LUEGO, EL VALOR CRÍTICO ES $y = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. PARA VERIFICAR QUE SE TRATA DE UN VALOR

CRÍTICO QUE CONDUCE A UN VOLUMEN MÁXIMO, SE DERIVA POR SEGUNDA VEZ Y SE LLEGA A $\frac{d^2V}{dy^2} = -3y$ Y SI SE SUSTITUYE EN ESTA SEGUNDA DERIVADA EL

VALOR CRÍTICO OBTENIDO, SE TIENE QUE $\left. \frac{d^2V}{dy^2} \right|_{y=\frac{2R}{\sqrt{3}}} < 0$. POR LO TANTO SE TRATA DEL VOLUMEN MÁXIMO. Y PARA ENCONTRAR EL VALOR DEL LADO DE LA

BASE, SE SUSTITUYE EL VALOR OBTENIDO DE " y " EN LA EXPRESIÓN (1) Y SE TIENE QUE:

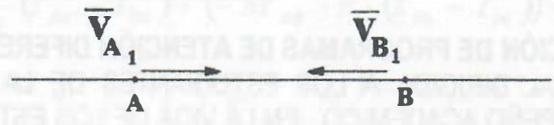
$$x^2 = \frac{4R^2 - 4R^2}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{12R^2 - 4R^2}{6} \Rightarrow x^2 = \frac{4R^2}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4R^2}{3}}$$

SE TOMA EL VALOR POSITIVO POR SER LA LONGITUD DEL LADO DE LA BASE. FINALMENTE, LAS DIMENSIONES DEL PARALELEPÍPEDO SON $x = y = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ Y EL

VOLUMEN MÁXIMO ES $V = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$

DINÁMICA (IMPACTO)

DOS PARTÍCULAS SE MUEVEN EN LÍNEA RECTA TAL COMO SE INDICA EN LA FIGURA



SI SE CONSIDERA QUE LAS MASAS DE LAS PARTÍCULAS SON IGUALES Y QUE LA MAGNITUD DE LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA A ES EL DOBLE DE LA MAGNITUD DE LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA B, ANTES DEL IMPACTO, ENTONCES DETERMINAR EL VALOR DEL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN PARA QUE LA PARTÍCULA A NO SE MUEVA Y LA PARTÍCULA B CAMBIE DE SENTIDO SU MOVIMIENTO DESPUÉS DEL IMPACTO.

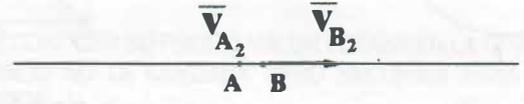
SOLUCIÓN. POR COMODIDAD, LLAMAREMOS "x" A LA LÍNEA DE IMPACTO. DEFINIMOS LAS VELOCIDADES COMO:



$$\vec{v}_{A_1} = v_{A_1} \hat{i} \quad y \quad \vec{v}_{B_1} = -v_{B_1} \hat{i} \quad (\text{ANTES DEL IMPACTO})$$

Y DESPUÉS DEL IMPACTO SE TIENE QUE

$$\vec{v}_{A_2} = \vec{0} \quad y \quad \vec{v}_{B_2} = v_{B_2} \hat{i} \quad (\text{DESPUÉS DEL IMPACTO})$$



DEL PRINCIPIO DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO SE TIENE QUE:

$$m_A v_{A_1} + m_B v_{B_1} = m_A v_{A_2} + m_B v_{B_2} \quad \dots (1)$$

DADO QUE LAS MASAS SON IGUALES, LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA B ANTES DEL CHOQUE Y QUE LA PARTÍCULA A SE DETIENE DESPUÉS DEL CHOQUE, SE TIENE QUE:

$$v_{A_1} - v_{B_1} = v_{B_2} \quad \dots (2)$$

ADEMÁS $v_{A_1} = 2v_{B_1} \quad \dots (3)$. ENTONCES, SE SUSTITUYE EN (2) Y SELLEGA: $v_{B_2} = v_{B_1} \quad \dots (4)$

POR OTRA PARTE, EL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN ESTÁ DADO POR:

$$e = \frac{v_{B_2} - v_{A_2}}{v_{A_1} - v_{B_1}} \quad \dots (5)$$

DE (3) y (4) Y, CONSIDERANDO LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA B ANTES DEL CHOQUE, SE TIENE QUE: $e = \frac{v_{B_1}}{2v_{B_1} + v_{B_1}}$ Y POR LO TANTO

$$e = \frac{1}{3}$$

NOTA. RECORDAR QUE HAY QUE TOMAR EN CUENTA LOS SENTIDOS DE LAS VELOCIDADES.

TERMODINÁMICA

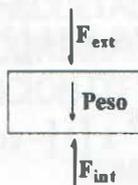
EN UN CILINDRO VERTICAL, CON UN ÉMBOLO LIBRE DE FRICCIÓN, HAY 23 (g) DE UN GAS IDEAL $\left(R = 2.0786 \left(\frac{J}{gK} \right), k = \frac{5}{3} \right)$. EL FLUIDO SE ENFRÍA CASIESTÁTICAMENTE DESDE 200 (°C) HASTA 90 (°C). LA MASA DEL ÉMBOLO ES TAL, QUE EL GAS ESTABA INICIALMENTE A 300 (kPa). EL CILINDRO

TIENE 40 (cm) DE DIÁMETRO Y SE HALLA EN LA CU (CIUDAD UNIVERSITARIA) $\left(77.17 \text{ (kPa)}, 18 \text{ (}^\circ\text{C)}, 9.78 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \right)$. ESTABLEZCA LA MASA DEL

ÉMBOLO.

RESOLUCIÓN.

EL GAS ESTABA AL COMIENZO EN EQUILIBRIO TERMODINÁMICO (EL ESTADO INICIAL). EN ESAS CONDICIONES DEBE HABER EQUILIBRIO MECÁNICO SI SE APLICA AL ÉMBOLO



$$\sum F_{\text{verti}} = 0 \quad ; \quad F_{\text{int}} - \text{peso} - F_{\text{ext}} = 0$$

$$F_{\text{int}} = P_{\text{abs}} \cdot a' \quad ; \quad F_{\text{ext}} = P_{\text{amb}} \cdot a' \quad ; \quad \text{peso} = M_{\text{émbolo}} \cdot g \Rightarrow \left(P_{\text{abs}} - P_{\text{amb}} \right) \frac{a'}{g} = M_{\text{émbolo}} \quad \dots \quad (I)$$

LOS SÍMBOLOS DE LA ECUACIÓN (I) SON:

$$P_{\text{abs}} = 300 \text{ (kPa)} \quad ; \quad P_{\text{amb}} = 77.17 \text{ (kPa)} \quad ; \quad a' = \frac{\pi D^2}{4} = 125.6637 \times 10^{-3} \text{ (m}^2) \quad ; \quad g = 9.78 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

AL SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN (I) QUEDA:

$$\left(300 \times 10^3 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) - 77.17 \times 10^3 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \right) \frac{125.6637 \times 10^{-3} \text{ (m}^2)}{9.78 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = M_{\text{émbolo}} \Rightarrow 2863.1537 \text{ (kg)} = M_{\text{émbolo}}$$

COMENTARIOS:

EL SISTEMA QUE SE ESCOGE NATURALMENTE ES LA MASA DEL GAS EN EL CILINDRO. OBSERVE QUE LA CONDICIÓN DEL EQUILIBRIO MECÁNICO SE APLICA AL ÉMBOLO, QUE NO FORMA PARTE DEL SISTEMA.

SI DE LA ECUACIÓN (I) SE DESPEJARA P_{abs} SE VERÍA QUE EL PROCESO CASIESTÁTICO DEBIERA SER ISOBÁRICO.

NOTE QUE UNA GRAN CANTIDAD DE DATOS FUERON INNECESARIOS EN LA RESOLUCIÓN. ESTE HECHO NO DIFICULTÓ LA DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA QUE SE SOLICITÓ.

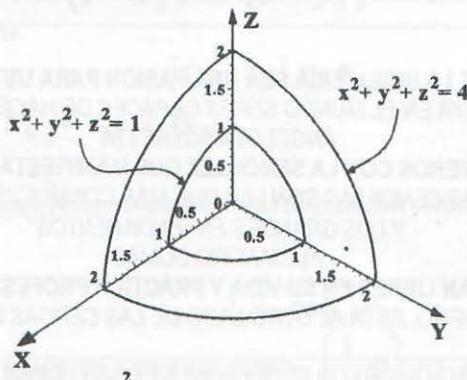
OBSERVE FINALMENTE QUE LA CONDICIÓN DEL EQUILIBRIO MECÁNICO SE LE EXPLICÓ EN CURSOS PREVIOS, NO EN EL DE TERMODINÁMICA.

CÁLCULO III

ENCONTRAR LA MASA DEL SÓLIDO LIMITADO POR LAS ESFERAS $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (EXTERIOR A LA PRIMERA E INTERIOR A LA SEGUNDA) SI LA DENSIDAD δ EN UN PUNTO P DEL SÓLIDO DESCRITO ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA DEL CENTRO DE LAS ESFERAS AL PUNTO P .

SOLUCIÓN. LAS ESFERAS SE MUESTRAN EN LA FIGURA, AL IGUAL QUE UN CIERTO PUNTO P SITUADO ENTRE ELLAS, CUYA DISTANCIA A SU CENTRO EQUIVALE A LA DISTANCIA DE ÉL AL ORIGEN DE COORDENADAS, ESTO ES, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. LUEGO, LA DENSIDAD EN CUALQUIER PUNTO P DEL SÓLIDO ES IGUAL A:

$\delta = k(x^2 + y^2 + z^2)$ DONDE k ES LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.



LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA MASA ES $M = \iiint_R \delta \, dV = \iiint_R k(x^2 + y^2 + z^2) \, dV$

POR LA FORMA DE LA REGIÓN, ES CONVENIENTE UTILIZAR COORDENADAS ESFÉRICAS. POR OTRO LADO, DADA LA SIMETRÍA DE LA EXPRESIÓN QUE DEFINE A LA DENSIDAD, CON RESPECTO A x, y, z , ES POSIBLE REALIZAR EL CÁLCULO DE LA MASA EN UN OCTANTE Y MULTIPLICAR POR 8. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$M = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 k r^2 \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = 8k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r^4 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$M = 8k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{5} \sin \varphi \right]_1^2 \, d\varphi \, d\theta = 8k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{32}{5} \sin \varphi - \frac{1}{5} \sin \varphi \right) \, d\varphi \, d\theta$$

$$M = 8 \left(\frac{31}{5} \right) k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{248}{5} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta = \frac{248}{5} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta = \frac{248}{5} k [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$M = \frac{124}{5} k \pi$$

JUEGO NUMÉRICO

UN CÍRCULO ES ROTULADO CON LOS NÚMEROS DEL 1 AL 1000.

EL JUEGO CONSISTE EN TACHAR EL NÚMERO 1 Y, A CONTINUACIÓN, TACHAR EL NÚMERO QUE DISTA 15 LUGARES DEL MISMO. ES DECIR, EL NÚMERO 16. EL PROCESO ANTERIOR SE REPITE TACHANDO LOS NÚMEROS QUE DISTAN 15 LUGARES DEL ÚLTIMO NÚMERO MARCADO. EL JUEGO TERMINA CUANDO AL CONTAR 15, DESPUÉS DEL ÚLTIMO NÚMERO TACHADO, EL NÚMERO CORRESPONDIENTE YA SE HABÍA TACHADO ANTERIORMENTE. AL FINAL DEL PROCESO, ¿CUÁNTOS NÚMEROS QUEDAN SIN MARCAR EN EL CÍRCULO?

SOLUCIÓN

LA CANTIDAD DE NÚMEROS TACHADOS ANTES DE COMPLETAR UNA VUELTA AL CÍRCULO SE OBTIENE AL DESPEJAR n DE LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$1 + 15n \leq 1000 \Rightarrow 15n \leq 999 \Rightarrow n \leq \frac{999}{15} \Rightarrow n \leq 66.6$$

ESTO SIGNIFICA QUE SE HABRÁN TACHADO 67 NÚMEROS ($n+1$), Y EL ÚLTIMO NÚMERO TACHADO ES EL 991. AL SEGUIR EL JUEGO, EL SIGUIENTE NÚMERO TACHADO SERÁ EL 6 (DE LA SEGUNDA VUELTA) Y SE PUEDE APLICAR EL MISMO CRITERIO ANTERIOR PARA ENCONTRAR n :

$$6 + 15n \leq 1000 \Rightarrow n \leq \frac{994}{15} = 66.27$$

ASÍ PUES, EN LA SEGUNDA VUELTA SE HABRÁN TACHADO NUEVAMENTE 67 NÚMEROS, Y EL ÚLTIMO NÚMERO TACHADO ES EL 996.

EN LA TERCERA VUELTA, EL PRIMER NÚMERO TACHADO ES EL 11, Y LA CANTIDAD DE NÚMEROS TACHADOS SE OBTENDRÁ AL RESOLVER n DE:

$$11 + 15n \leq 1000 \Rightarrow n \leq \frac{989}{15} = 65.93$$

ES DECIR, 66 NÚMEROS TACHADOS, SIENDO EL ÚLTIMO NÚMERO TACHADO EL 986. AL SUMAR 15 UNIDADES A ESTE NÚMERO PARA INICIAR LA CUARTA VUELTA, SE OBSERVA QUE EL NÚMERO QUE SE DEBE TACHAR ES EL 1; SIN EMBARGO, ÉSTE FUE EL PRIMER NÚMERO QUE SE TACHÓ AL INICIAR EL JUEGO, Y, POR LO TANTO, EL PROCESO FINALIZA. EN CONSECUENCIA, LA CANTIDAD DE NÚMEROS QUE QUEDAN SIN TACHAR EN EL CÍRCULO ES DE:

$$1000 - (67 + 67 + 66) = 800$$

(EL PROBLEMA FUE PROPUESTO POR EL DR. ROGELIO SOTO AYALA Y ESTA SOLUCIÓN FUE PROPUESTA POR EL ESTUDIANTE ULISES MIRANDA GONZÁLEZ)

HUMANISMO E INGENIERÍA

¡QUE LA INGENIERÍA SEA UNA PASIÓN PARA USTEDES!

"LA VIDA VALDRÁ LA PENA MIENTRAS HAYA EN EL MUNDO SERES CAPACES DE HACER MAGIA CUANDO PROFESAN UNA PASIÓN"
 ÁNGELES MASTRETTA

¡SEAN INGENIEROS CON LA SENCILLEZ QUE MANIFIESTA LA SABIDURÍA!

*"ES INNEGABLE QUE LAS COSAS SENCILLAS SON LAS QUE MÁS CONMUEVEN LOS CORAZONES PROFUNDOS
 Y LOS GRANDES ENTENDIMIENTOS"*
 ALEJANDRO DUMAS

¡SEAN LIBRES EN SU VIDA Y PRÁCTICA PROFESIONAL!

"LA LIBERTAD NO ES SÓLO UN SUEÑO. ESTÁ AL OTRO LADO DE LAS CERCAS QUE ERIGIMOS NOSOTROS MISMOS"

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES EDGAR LÓPEZ TÉLLEZ, ROGELIO SOTO AYALA
 Y LA COORDINACIÓN DE TERMODINÁMICA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
 COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 38

17 DE ABRIL DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTA INICIANDO UN NUEVO SEMESTRE. ES TIEMPO DE REFLEXIÓN SOBRE LA ACTITUD Y EL COMPORTAMIENTO ACADÉMICO DEL SEMESTRE ANTERIOR Y DE PONERSE UNAS PILAS NUEVAS Y LANZARSE AL FUTURO CON GANAS DE TRIUNFAR, DE ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS Y DE BUSCAR LA ARMONÍA Y LA FELICIDAD CON LOS AMIGOS Y AMIGAS, Y TAMBIÉN EN CASA. ¿DE ACUERDO?

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

MATEMÁTICAS AVANZADAS

CARACTERIZAR LAS CÓNICAS EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE COMPLEJA $z \in \mathbb{C}$ EN ESTE TRABAJO SE DEBEN APLICAR LAS RELACIONES

$$z = x + iy ; \bar{z} = x - iy ; x = \operatorname{Re}(z) ; y = \operatorname{Im}(z).$$

SOLUCIÓN

1. LA RECTA

$$Ax + By + C = 0$$

SE PUEDE ESCRIBIR EN LA FORMA

$$A \frac{z + \bar{z}}{2} + B \frac{z - \bar{z}}{2i} + C = 0$$

ENTONCES

$$Az + A\bar{z} - Biz + Bi\bar{z} + 2C = 0 \quad \text{OBIEN} \quad (A + Bi)z + (A + Bi)\bar{z} + 2C = 0$$

SI SE DEFINEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS $\lambda = A + Bi$; $\mu = 2C$ LA ECUACIÓN QUEDA COMO:

$$\lambda z + \lambda \bar{z} + \mu = 0$$

2. LA CIRCUNFERENCIA

CUYA ECUACIÓN ES

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

QUE SIN DIFICULTAD SE SUSTITUYE POR LA EXPRESIÓN

$$|z - z_0| = r$$

SI SE CONSIDERAN $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$

3. LA PARÁBOLA

CUYO FOCO SE ENCUENTRA EN EL ORIGEN Y SE EXTIENDE HORIZONTALMENTE HACIA LA IZQUIERDA Y TIENE COMO REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS POLARES A LA EXPRESIÓN

$$\rho = \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

(SI SE CONSIDERAN COORDENADAS CARTESIANAS, SU VÉRTICE ESTÁ EN EL PUNTO $(\frac{1}{2}, 0)$ Y LA DISTANCIA FOCAL ES $p = \frac{1}{2}$ POR OTRO LADO, AL

INTRODUCIR COORDENADAS POLARES AL PLANO COMPLEJO, OCURRE QUE $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

ENTONCES $|z| = \rho$ y $\operatorname{Re} z = \rho \cos \theta$. LUEGO

$$\rho(1 + \cos \theta) = \rho + \rho \cos \theta = |z| + \operatorname{Re} z$$

COMO LA PARÁBOLA SE CARACTERIZA PORQUE $\rho = \frac{1}{1 + \cos \theta}$, EL PRODUCTO ANTERIOR ES IGUAL A UNO. FINALMENTE, LLEVADA A LA VARIABLE COMPLEJA,

LA ECUACIÓN QUEDA COMO:

$$|z| + \operatorname{Re} z = 1$$

SE PUEDE HACER LO MISMO CON LA PARÁBOLA VERTICAL.

4. LA ELIPSE SE CARACTERIZA PORQUE

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

DONDE $a \in \mathbb{R}$ SI F_1 Y F_2 SON DOS PUNTOS DISTINTOS QUE SE LLAMAN FOCOS, ENTONCES EN VARIABLE COMPLEJA LA ECUACIÓN QUEDA COMO:

$$|z - F_1| + |z - F_2| = 2a$$

5. LA HIPÉRBOLA

ES CASI IDÉNTICA A LA ELIPSE. LA DIFERENCIA ESTÁ EN UN SIGNO, LUEGO LA ECUACIÓN QUEDA COMO.

$$||z - F_1| - |z - F_2|| = 2a$$

QUÍMICA

EXPERIMENTO DE MILLIKAN

SE APLICAN 31.5 V A DOS PLACAS METÁLICAS PARALELAS, SEPARADAS ENTRE SÍ 10 mm . UNA GOTA DE ACEITE CARGADA ELÉCTRICAMENTE, Y COLOCADA

ENTRE LAS PLACAS, EXPERIMENTA UNA VELOCIDAD ASCENDENTE DE $0.02 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$. BAJO EL EFECTO ÚNICAMENTE DE LA GRAVEDAD, LA GOTA CAE CON UNA

VELOCIDAD DE $0.002 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$, ¿CUÁNTAS CARGAS ELECTRÓNICAS POSITIVE LA GOTA? (DESPRECIAR LA RESISTENCIA DEL AIRE).

DATOS:

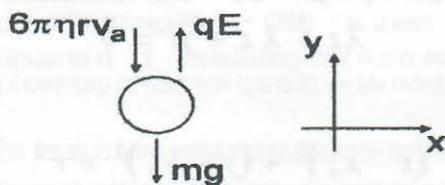
$$\text{COEFICIENTE DE VISCOSIDAD DEL AIRE } (\eta): 1.8 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$$

$$\text{DENSIDAD DEL ACEITE } (\rho): 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD } (g): 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

SOLUCIÓN

EL DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE DE LA GOTA EN EL ASCENSO ES:



ES DECIR, $qE - mg = 6\pi\eta r v_a$; $v_a =$ VELOCIDAD DE ASCENSO

YA QUE LA GOTASE CONSIDERA ESFÉRICA, $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow qE - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_a \dots (1)$

POR OTRA PARTE, CUANDO LA GOTASE CAE SÓLO POR EFECTO DE LA GRAVEDAD,

$$mg = 6\pi\eta r v_d \dots (2)$$

DONDE $v_d =$ VELOCIDAD DE DESCENSO.

ES DECIR,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_d ; r = \left(\frac{9\eta v_d}{2\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

AL SUSTITUIR (2) EN (1)

$$qE - 6\pi\eta r v_d = 6\pi\eta r v_a ; \quad q = \frac{6\pi\eta \left(\frac{9\eta v_d}{2\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} (v_a + v_d)}{\frac{V}{D}}$$

DONDE LA ÚLTIMA EXPRESIÓN SE OBTUVO AL CONSIDERAR QUE $E = \frac{V}{D}$

POR LO TANTO:

$$q = \frac{6\pi\eta^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9v_d}{2\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} (v_a + v_d)}{\frac{V}{D}} = \frac{6\pi \left(1.8 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9 \left(2 \times 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{2 \left(900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(2 \times 10^{-5} + 2 \times 10^{-6}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\frac{31.5 V}{1 \times 10^{-2} \text{ m}}}$$

$$q = 3.21 \times 10^{-19} \text{ C}$$

LO CUAL SIGNIFICA QUE LA GOTA DE ACEITE POSEE 2 CARGAS ELECTRÓNICAS EN EXCESO $q = 2e$

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES

$$i) \int \frac{(1 + \sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx \quad ii) \int \frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{7}{3}} dx \quad iii) \int \frac{2x + 3}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$iv) \int \frac{(5 - \ln x)^{\frac{3}{2}}}{x} dx \quad v) \int \frac{2 - x^2}{(x^3 - 6x + 1)^3} dx \quad vi) \int \frac{\sqrt{x} dx}{\left(30 - x^{\frac{3}{2}}\right)^3}$$

SOLUCIÓN. TODAS ESTAS INTEGRALES INDEFINIDAS SE RESUELVEN MEDIANTE UN CAMBIO DE VARIABLE. CONSIDÉRENSE ENTONCES LAS SIGUIENTES RESOLUCIONES:

$$i) I = \int \frac{(1 + \sqrt{x})^5}{\sqrt{x}} dx. \quad u = 1 + \sqrt{x} ; \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow I = 2 \int \frac{(1 + \sqrt{x})^5}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow I = 2 \int u^5 du = 2 \frac{u^6}{6} + C = \frac{u^6}{3} + C = \frac{(1 + \sqrt{x})^6}{3} + C$$

$$ii) I = \int \frac{1}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{7}{3}} dx. \quad u = 1 + \frac{1}{x^2} ; \quad du = -\frac{2dx}{x^3} \Rightarrow I = -\frac{1}{2} \int \frac{-2}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{7}{3}} dx$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \int u^{\frac{7}{3}} du = -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}} + C = -\frac{3}{20} u^{\frac{10}{3}} + C = -\frac{3}{20} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{10}{3}} + C$$

$$iii) I = \int \frac{2x + 3}{\sqrt{x-1}} dx. \quad u = x - 1 ; \quad du = dx ; \quad x = u + 1 \Rightarrow$$

$$I = \int \frac{2(u+1) + 3}{\sqrt{u}} du = \int \frac{2u + 2 + 3}{\sqrt{u}} du = \int \frac{2u + 5}{\sqrt{u}} du = \int \left(2u^{\frac{1}{2}} + 5u^{-\frac{1}{2}}\right) du =$$

$$= \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{5u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} + 10 u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + 10 (x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\text{iv) } I = \int \frac{(5 - \ln x)^{\frac{3}{2}}}{x} dx. \quad u = 5 - \ln x \quad ; \quad du = -\frac{dx}{x} \Rightarrow I = -\int (5 - \ln x)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= -\int u^{\frac{3}{2}} du = -\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = -\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + C = -\frac{2}{5} (5 - \ln x)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\text{v) } I = \int \frac{2 - x^2}{(x^3 - 6x + 1)^3} dx. \quad u = x^3 - 6x + 1 \quad ; \quad du = (3x^2 - 6) dx \quad ; \quad du = -3(2 - x^2) dx$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{3} \int \frac{-3(2 - x^2)}{(x^3 - 6x + 1)^3} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{3} \int u^{-3} du = -\frac{1}{3} \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{6(x^3 - 6x + 1)^2} + C$$

$$\text{vi) } I = \int \frac{\sqrt{x} dx}{\left(30 - x^{\frac{3}{2}}\right)^3}. \quad u = 30 - x^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad du = -\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx \quad ; \quad du = -\frac{3}{2} \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow I = -\frac{2}{3} \int \left(-\frac{3}{2} \frac{\sqrt{x} dx}{\left(30 - x^{\frac{3}{2}}\right)^3} \right) = -\frac{2}{3} \int \frac{du}{u^3} = -\frac{2}{3} \int u^{-3} du = -\frac{2}{3} \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{3 \left(30 - x^{\frac{3}{2}}\right)^2} + C$$

ALGEBRA

DETERMINAR EL CONJUNTO DE NÚMEROS $z \in \mathbb{C}$ QUE CUMPLEN CON LA IGUALDAD $|z - 3i| + |z + 3i| = 12$

SOLUCIÓN. LA REPRESENTACIÓN BINÓMICA DE z ES $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$, POR LO QUE:

$$|x + yi - 3i| + |x + yi + 3i| = 12 \Rightarrow |x + (y - 3)i| + |x + (y + 3)i| = 12$$

AHORA SE APLICA LA EXPRESIÓN DEL MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO:

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 12 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 12 - \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$$

SE ELEVAN AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS Y SE TIENE QUE:

$$x^2 + (y - 3)^2 = 144 - 24\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} + x^2 + (y + 3)^2 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 144 - 24\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} + y^2 + 6y + 9$$

$$24\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 144 + 12y \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 12 + y$$

SE ELEVA NUEVAMENTE AL CUADRADO Y SE LLEGA A:

$$4(x^2 + (y + 3)^2) = 144 + 24y + y^2 \Rightarrow 4(x^2 + y^2 + 6y + 9) = 144 + 24y + y^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 + 24y + 36 = 144 + 24y + y^2 \Rightarrow 4x^2 + 3y^2 = 108 \Rightarrow \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$$

POR LO QUE, LOS NÚMEROS COMPLEJOS QUE CUMPLEN CON LA IGUALDAD TIENEN SU REPRESENTACIÓN, EN EL PLANO COMPLEJO, EN LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN, EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE IMAGINARIO, EJE MAYOR DE 12 UNIDADES Y EJE MENOR DE $6\sqrt{3}$ UNIDADES.

TUTORÍA

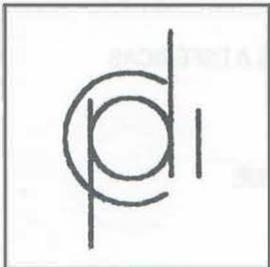
ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR DE LA GENERACIÓN 2002 QUE CURSARON PROPEDÉUTICO:

¡BUSQUEN A SU TUTOR EN LA COPADI Y EMPIECEN A INTERACTUAR CON ÉL! ES UNA EXPERIENCIA FORMIDABLE TENER A ALGUIEN QUE SE OCUPE DE UNO AL INICIAR LA CARRERA Y CON QUIEN SE PUEDA TENER AMISTAD, AFECTO, APOYO Y CONSEJO TODA LA CARRERA.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA,
AUGUSTO GUADALUPE MISS PAREDES Y ROGELIO SOTO AYALA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. PARA ADQUIRIR EL HÁBITO DEL ESTUDIO SE REQUIERE EN PRIMER LUGAR EL "MIRAR" HACIA EL FUTURO DONDE SE VERÁN DOS ESCENARIOS: UNO SIN LA CARRERA Y EL OTRO CON LA CULMINACIÓN DE ÉSTA; Y PREGUNTARSE: ¿CUÁL QUIERO? DESPUÉS SE TRATA DE HACER UN SACRIFICIO QUE MUCHAS VECES TIENE QUE VER CON LOS ANTECEDENTES ACADÉMICOS QUE SE TRAEN DEL BACHILLERATO, LA DISTANCIA RECORRIDA, LA SITUACIÓN ECONÓMICA, LAS PROBLEMÁTICAS FAMILIARES, ETCÉTERA. Y DECIDIRSE A VENCER TODOS LOS OBSTÁCULOS Y PONERSE A ESTUDIAR. SEGURAMENTE LO LOGRARÁN. ¿POR QUÉ NO INTENTARLO? ¡CON SEGURIDAD TRIUNFARÁN! ¡LA COPADI TIENE FE EN USTEDES!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEA EL PUNTO $P(4, 150^\circ, -1)$ DADO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS. DETERMINAR LAS COORDENADAS ESFÉRICAS DEL PUNTO Q , QUE ES SIMÉTRICO DEL PUNTO P RESPECTO AL PLANO xy .

PRIMERA FORMA DE RESOLUCIÓN. LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS DE Q SE OBTIENEN AL CAMBIAR EL SIGNO A LA COTA DEL PUNTO P . ESTO ES:

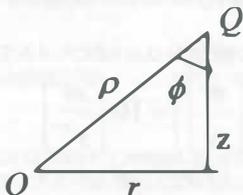
$Q(4, 150^\circ, 1)$. SE TRANSFORMA Q A COORDENADAS CARTESIANAS Y:

$$Q : \begin{cases} x = r \cos \theta = 4 \cos 150^\circ = 4(-\cos 30^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \\ y = r \operatorname{sen} \theta = 4 \operatorname{sen} 150^\circ = 4(\operatorname{sen} 30^\circ) = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \\ z = z = 1 \end{cases} \quad \therefore Q(-2\sqrt{3}, 2, 1)$$

AHORA SE TRANSFORMA Q A COORDENADAS ESFÉRICAS Y SE TIENE QUE:

$$Q : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{17} \\ \theta = \operatorname{ang} \tan \frac{y}{x} = \operatorname{ang} \tan \frac{2}{-2\sqrt{3}} = 150^\circ \\ \phi = \operatorname{ang} \cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{ang} \cos \frac{1}{\sqrt{17}} = 75.9^\circ \end{cases} \quad \therefore Q(\sqrt{17}, 150^\circ, 75.9^\circ)$$

SEGUNDA FORMA DE RESOLUCIÓN. LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS Y VICEVERSA SE PUEDE HACER DIRECTAMENTE (SIN PASAR POR COORDENADAS CARTESIANAS) SI SE HACE USO DE LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN QUE SE OBTIENEN DE LA SIGUIENTE FIGURA.



$$\left. \begin{array}{l} r = \rho \operatorname{sen} \phi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{array} \right\} \text{ DE ESFÉRICAS A CILÍNDRICAS} \quad \left. \begin{array}{l} \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \theta \\ \phi = \operatorname{ang} \tan \left(\frac{r}{z} \right) \end{array} \right\} \text{ DE CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS}$$

LA SEGUNDA COORDENADA, θ NO CAMBIA, SI SE APLICAN LAS ECUACIONES ANTERIORES, SE TIENE QUE:

$$Q(4, 150^\circ, 1) : \begin{cases} \rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \\ \theta = \theta = 150^\circ \\ \phi = \operatorname{ang} \tan \frac{r}{z} = \operatorname{ang} \tan \frac{4}{1} = 75.9^\circ \end{cases}$$

$$\therefore Q(\sqrt{17}, 150^\circ, 75.9^\circ)$$

FÍSICA EXPERIMENTAL

EN UN EXPERIMENTO DE CAÍDA DE UN MÓVIL, SE MIDIÓ SU RAPIDEZ PARA DIFERENTES INSTANTES DE TIEMPO, COMO SE MUESTRA EN LA TABLA. DETERMINAR, EN EL S.I.

- a) EL MODELO MATEMÁTICO LINEAL QUE RELACIONA LAS VARIABLES DEL EXPERIMENTO CONSIDERAR QUE LA VARIABLE INDEPENDIENTE FUE EL TIEMPO.
 b) LA RAPIDEZ INICIAL DEL MÓVIL.
 c) LA GRÁFICA DE LA ACELERACIÓN DEL MÓVIL PARA EL INTERVALO DE TIEMPO EN EL QUE SE REALIZARON LAS MEDICIONES.

t [s]	v $\left[\frac{m}{s} \right]$
0	0.2
0.04	0.6
0.08	1.0
0.12	1.4

RESOLUCIÓN.

- a) $v = m t + b$; SE CALCULA LA PENDIENTE Y:

$$m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow m = \frac{[(1.4 - 0.6) + (1 - 0.2)] \frac{m}{s}}{[(0.12 - 0.04) + (0.08 - 0)] s} = \frac{1.6 \frac{m}{s}}{0.16 s} = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

PARA ENCONTRAR LA ORDENADA AL ORIGEN SE CALCULA EL CENTROIDE ASÍ:

$$\bar{t} = 0.06 [s], \quad \bar{v} = 0.8 \left[\frac{m}{s} \right] ; \quad \text{DE } v = m t + b \text{ SE TIENE QUE: } b = \bar{v} - m \bar{t} = \left(0.8 \frac{m}{s} \right) - \left(10 \frac{m}{s^2} \right) (0.06 s) = 0.2 \left[\frac{m}{s} \right]$$

POR LO TANTO, EL MODELO MATEMÁTICO SOLICITADO ES:

$$v \left[\frac{m}{s} \right] = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right] t [s] + 0.2 \left[\frac{m}{s} \right]$$

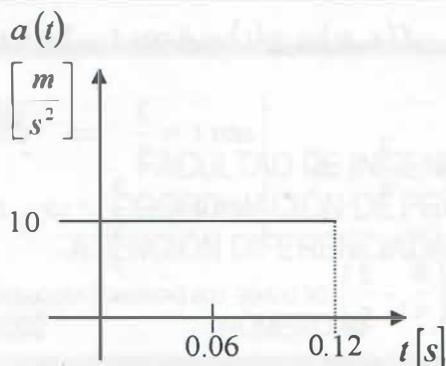
- b) LA RAPIDEZ INICIAL SE TIENE PARA $t = 0$, POR LO QUE

$$v_0 = v(t=0) = v(0) = \left(10 \frac{m}{s^2} \right) (0 s) + 0.2 \frac{m}{s} \Rightarrow v_0 = 0.2 \left[\frac{m}{s} \right]$$

- c) PARA ENCONTRAR LA GRÁFICA SE DETERMINARÁ PRIMERO LA EXPRESIÓN QUE INDICA LA ACELERACIÓN DEL MÓVIL.

COMO $a = \frac{dv}{dt}$, ENTONCES $a(t) = \frac{d}{dt} \left[10 \left[\frac{m}{s^2} \right] t [s] + 0.2 \left[\frac{m}{s} \right] \right] = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $a(t) = 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ ES:



CÁLCULO III

ENCONTRAR EL MÁXIMO ABSOLUTO Y EL MÍNIMO ABSOLUTO DE $f(x, y) = 2x - 3y$ EN LA REGIÓN $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

SOLUCIÓN. COMO $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = -3$, NO HAY PUNTOS CRÍTICOS PARA LA FUNCIÓN f LO QUE ES OBVIO YA QUE SE TRATA DE UN PLANO. LUEGO, EL

MÁXIMO ABSOLUTO Y EL MÍNIMO ABSOLUTO DEBEN PRESENTARSE EN LA FRONTERA DE LA REGIÓN. COMO SE TRATA DE EXTREMOS CONDICIONADOS, SE UTILIZA EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE. ASÍ, SE TIENE QUE LA ECUACIÓN DE LAGRANGE SE ESTABLECE CON LA FUNCIÓN OBJETIVO (EL PLANO) MAS LA RESTRICCIÓN (LA FRONTERA DE LA REGIÓN QUE ES UNA ELIPSE) POR UN MULTIPLICADOR ASÍ:

$$L = 2x - 3y + \lambda \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right)$$

DE DONDE

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + \frac{2x}{4}\lambda \Rightarrow \frac{4 + x\lambda}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{x} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -3 + 2y\lambda \Rightarrow -3 + 2y\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2y} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \dots (3)$$

DE (1) y (2) SE TIENE QUE:

$$-\frac{4}{x} = \frac{3}{2y} \Rightarrow -8y = 3x \Rightarrow y = -\frac{3}{8}x$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOREN LA EXPRESIÓN (3) Y SE LLEGA A:

$$\frac{x^2}{4} + \left(-\frac{3}{8}x\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{9x^2}{64} = 1 \Rightarrow 25x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm \frac{8}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5} \\ x = \frac{8}{5} \Rightarrow y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

ESTOS SON LOS PUNTOS CRÍTICOS DE LA FUNCIÓN DE LAGRANGE. AHORA SE EVALÚA LA FUNCIÓN EN ELLOS Y SE TIENE QUE:

$$f\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right) = -5 \quad \therefore \quad \text{MÍNIMO ABSOLUTO} \qquad f\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 5 \quad \therefore \quad \text{MÁXIMO ABSOLUTO}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA ES SI SE CONSIDERA LA CURVA FRONTERA (ELIPSE) Y SE SUSTITUYEN EN ELLA SUS ECUACIONES PARAMÉTRICAS, CON LO QUE QUEDA UNA FUNCIÓN CON UNA SÓLA VARIABLE. LO QUE CONDUCE A UNA SOLUCIÓN MÁS SIMPLE DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN. ASÍ, EL DESARROLLO DE ESTE MÉTODO ES EL SIGUIENTE:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right\} ; 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow f(x, y) = g(t) = 4 \cos t - 3 \sin t ; \frac{dg}{dt} = -4 \sin t - 3 \cos t ;$$

$$-4 \sin t - 3 \cos t = 0 \Rightarrow \tan t = -\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos t = -\frac{4}{5} \\ \sin t = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos t = \frac{4}{5} \end{cases}$$

LUEGO LOS PUNTOS CRÍTICOS SON: $\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ DE DONDE, LOS EXTREMOS ABSOLUTOS SON:

$$f\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right) = -5 \quad \therefore \quad \text{MÍNIMO ABSOLUTO}$$

$$f\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 5 \quad \therefore \quad \text{MÁXIMO ABSOLUTO}$$

CÁLCULO I

SI SE ASUME QUE LAS SIGUIENTES FUNCIONES SON BIYECTIVAS, ES DECIR QUE SON INYECTIVAS (A DIFERENTES ELEMENTOS DEL DOMINIO LES CORRESPONDEN DIFERENTES ELEMENTOS DEL CODOMINIO) Y SUPRAYECTIVAS (TODOS LOS ELEMENTOS DEL CODOMINIO ESTÁN ASOCIADOS CON ELEMENTOS DEL DOMINIO), POR LO QUE ADMITEN FUNCIÓN INVERSA, ENCONTRAR LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE DICHA FUNCIÓN INVERSA Y EXPRESARLA EN FORMA EXPLÍCITA, ES DECIR, A LA VARIABLE DEPENDIENTE EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE.

$$i) y = \frac{+\sqrt{4-x^2}}{2}; -2 \leq x \leq 0 \quad ii) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad iii) y = \ln(3-x); x < 3$$

SOLUCIÓN

$$i) y = \frac{+\sqrt{4-x^2}}{2}; -2 \leq x \leq 0$$

$$x = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{4-y^2} = 2x \Rightarrow 4-y^2 = 4x^2 \Rightarrow y^2 = 4-4x^2 \Rightarrow y = -\sqrt{4-4x^2}; 0 \leq x \leq 1$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{4-4x^2}; 0 \leq x \leq 1$$

$$ii) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}; y = \frac{x}{2}; x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x; -2 \leq x < 0$$

$$y = \text{sen } x; x = \text{sen } y \Rightarrow y = \text{angsen } x; 0 \leq x \leq 1 \quad \therefore f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \text{angsen } x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$iii) y = \ln(3-x); x \in (-\infty, 3); x = \ln(3-y) \Rightarrow e^x = e^{\ln(3-y)} \Rightarrow e^x = 3-y; y = 3-e^x; x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 3-e^x; x \in \mathbb{R}$$

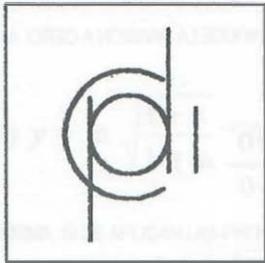
TUTORÍA

ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR: BUSQUEN A SU TUTOR, APROVECHEN ESTE SERVICIO ACADÉMICO E INFÓRMENLE A SU PROFESOR DE CULTURA Y COMUNICACIÓN QUE YA ESTABLECIERON CONTACTO CON ÉL Y PLATÍQUENLE DE CÓMO VA LA INTERACCIÓN ENTRE AMBOS. A PROPÓSITO DE LA TUTORÍA, HAY UNAS PALABRAS DEL PREMIO NOBEL DE LITERATURA JOSÉ SARAMAGO QUE REZAN COMO SIGUE: "EL JOVEN NO SABE LO QUE PUEDE Y EL VIEJO NO PUEDE LO QUE SABE. ESTE ASUNTO SE RESOLVERÁ SI LOS JÓVENES PUSIERAN LA VOLUNTAD Y LOS VIEJOS LA EXPERIENCIA, SIN ENTRAR EN ESA COMPETENCIA DE VER QUIÉN TIENE MÁS RAZÓN QUE OTRO". ¡APROVECHEN A SU TUTOR! ¡ÉL TIENE GANAS DE AYUDAR Y APOYAR!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES RIGEL GÁMEZ LEAL Y LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. UNA GRAN CIENTÍFICA MEXICANA, RECIENTEMENTE GALARDONADA A NIVEL MUNDIAL, EXPRESÓ QUE VALE LA PENA SER EGRESADA DE LA UNAM Y TRABAJAR E INVESTIGAR EN ELLA. TÚ TAMBIÉN PUEDES. ESTÁS EN LA MEJOR UNIVERSIDAD DE ESTE PAÍS Y EN UNA DE LAS MEJORES FACULTADES DE INGENIERÍA DE AMÉRICA LATINA. APROVECHA TODO LO QUE LA UNAM TE DA Y LLEGARÁS A SER UN GRAN INGENIERO Y UN MAGNÍFICO SER HUMANO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

CÁLCULO I

CALCULAR EL VALOR DE LOS SIGUIENTES LÍMITES

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} \quad iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} \quad v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

SOLUCIÓN.

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{0}{0} \text{ (INDET) } . \text{ PARA ELIMINAR LA INDETERMINACIÓN SE FACTORIZAN AMBOS POLINOMIOS Y SE LLEGA A:}$$

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2) \quad y \quad 3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1) \quad \text{LUEGO, EL LÍMITE QUEDA COMO:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 5)(x - 2)}{(x - 2)(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 5}{3x + 1} = \frac{7}{7} = 1$$

EN ESTE EJERCICIO, SE PUDO HABER REALIZADO LA DIVISIÓN ALGEBRAICA DE LOS DOS POLINOMIOS ENTRE EL BINOMIO $(x - 2)$ YA QUE 2 ES RAÍZ DE AMBOS POLINOMIOS. DESPUÉS SE OBTENDRÍA EL LÍMITE DEL COCIENTE DE LOS RESULTADOS DE LAS DIVISIONES Y SE LLEGARÍA AL MISMO RESULTADO.

$$ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \text{ (INDET) } . \text{ EN ESTE CASO, PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE PUEDE HACER EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE. SE CAMBIA EL}$$

RADICANDO, QUE ES COMÚN, POR OTRA VARIABLE A LA QUE SE LE COLOCA COMO EXPONENTE EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE LOS ÍNDICES DE LOS RADICALES, QUE EN ESTE CASO ES 6. ASÍ,

$$x = u^6 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} x = \lim_{u \rightarrow ?} u^6 \Rightarrow u^6 = 1 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{u^6} - 1}{\sqrt{u^6} - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - 1}{u^3 - 1}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{(u - 1)(u + 1)}{(u - 1)(u^2 + u + 1)} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u + 1}{u^2 + u + 1} = \frac{2}{3}$$

ESTE EJERCICIO TAMBIÉN SE PODRÍA HABER RESUELTO MULTIPLICANDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA EXPRESIÓN ORIGINAL POR LAS EXPRESIONES $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$ y $\sqrt{x} + 1$ PARA LOGRAR LA DIFERENCIA DE CUBOS Y DE CUADRADOS Y ASÍ QUITAR LA INDETERMINACIÓN. SE LLEGARÍA AL MISMO RESULTADO.

$$iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} = \frac{0}{0} \text{ (INDET) } . \text{ PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE MULTIPLICAN, NUMERADOR Y DENOMINADOR, POR EL BINOMIO}$$

CONJUGADO DEL NUMERADOR Y SE RESUELVE EL LÍMITE. ASÍ

$$iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2} + 1}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - 1}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2} + 1} = \frac{1}{2}$$

iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} = \frac{\infty}{\infty} = (\text{INDET})$. PARA QUITARLA INDETERMINACIÓN, SE DIVIDEN NUMERADOR Y DENOMINADOR ENTRE LA VARIABLE ELEVADA A SU MAYOR EXPONENTE. ESTO ES CON LA FINALIDAD DE LOGRAR COCIENTES CON EL INFINITO COMO DENOMINADOR LO QUE CONDUCE LA DIVISIÓN A CERO. ASI, EN ESTE CASO, HABRÁ QUE DIVIDIR ENTRE x QUE, DEBIDO A LAS RAÍCES, ES LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE. LUEGO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x}}{\frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 - 3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}} = \frac{\sqrt{1 + 0}}{\sqrt[3]{1 + 0}} = 1$$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \text{sen} x}{x^3} = \frac{0}{0} (\text{INDET})$. PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE ACUDE A LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y AL HECHO DE QUE SE

SABE QUE DOS LÍMITES CONOCIDOS Y MUY IMPORTANTES EN MATEMÁTICAS SON $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

LUEGO, EL LÍMITE EN CUESTIÓN SE RESUELVE DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\begin{aligned} \text{v) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \text{sen} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen} x}{\cos x} - \text{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x - \text{sen} x \cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x (1 - \cos x) (1 + \cos x)}{x^3 \cos x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x \text{sen}^2 x}{x^3 \cos x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^3 x}{x^3 (\cos x + \cos^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}^3 x}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x + \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} \right)^3}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x + \left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \right)^2} = \frac{1^3}{1 + 1^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

CÁLCULO I

ENCONTRAR LAS DERIVADAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

i) $y = \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}}$ ii) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ iii) $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ iv) $y = e^{x^x}$

v) $y = \text{ang} \text{sen} \sqrt{\text{sen} x}$ vi) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ vii) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \text{sen}^3 t \end{cases}$ viii) $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$

SOLUCIÓN.

i) $y = \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1+x^2}(4x) - (2x^2 - 1)\left(x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}(1)\right)}{(x\sqrt{1+x^2})^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2\sqrt{1+x^2} - (2x^2 - 1)x^2 + 1 + x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{4x^2(1+x^2) - (2x^2 - 1)(2x^2 + 1)}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{4x^2 + 4x^4 - 4x^4 + 1}{x^2(1+x^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 1}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}}$$

ii) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{2\sqrt{x + \sqrt{x}} + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

$$iii) y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \cdot 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}} = \frac{1-x+1+x}{2(1-x)^2 \frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

DE OTRA FORMA, SI SE APLICAN LAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA, SE TIENE QUE:

$$y = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right] = \frac{1}{2} \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$iv) y = (e^x)^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(e^x)^{x-1} e^x + (e^x)^x \ln e^x (1) = (e^x)^x (x+x) = 2x(e^x)^x$$

$$v) y = \arcsen \sqrt{\sen x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sen x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sen x - \sen^2 x}}$$

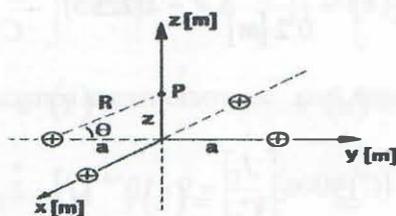
$$vi) x^3 + y^3 - 3axy = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3ax \frac{dy}{dx} - 3ay = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3ay - 3x^2}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$vii) \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sen^3 t \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3b \sen^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sen t} = -\frac{b}{a} \tan t$$

$$viii) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1+t^2)6at - 3at^2(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{6at + 6at^3 - 6at^3}{3a + 3at^2 - 6at^2} = \frac{6at}{3a - 3at^2} = \frac{2t}{1-t^2}$$

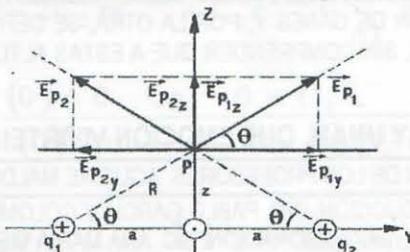
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

CUATRO CARGAS PUNTALES DE 50 [nC] EN EL ESPACIO LIBRE, ESTÁN SITUADAS SIMÉTRICAMENTE SOBRE UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO $a = 0.2 \text{ [m]}$, CENTRADA EN EL ORIGEN Y LOCALIZADA EN EL PLANO $z = 0$. DETERMINAR: A) ¿EN QUÉ PUNTO DEL EJE z EL CAMPO ELÉCTRICO ES MÁXIMO? B) EL VALOR DE E_z MÁXIMO. C) EL POTENCIAL ELÉCTRICO DEL ORIGEN. D) EL TRABAJO NECESARIO PARA MOVER UNA CARGA $q_0 = 1 \text{ [nC]}$ DESDE EL INFINITO HASTA EL ORIGEN.



RESOLUCIÓN:

A) SEA P EL PUNTO DEL EJE z EN EL CUAL EL CAMPO ELÉCTRICO ES MÁXIMO. DE ACUERDO CON EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, EL CAMPO TOTAL EN P SE DEBE A LA SUMA DE LAS CONTRIBUCIONES DE CADA UNA DE LAS CARGAS PUNTALES: $E_P = E_{P_1} + E_{P_2} + E_{P_3} + E_{P_4}$. CONVIENE RESALTAR QUE LOS TÉRMINOS DEL SEGUNDO MIEMBRO DE LA ECUACIÓN ANTERIOR SON DE MAGNITUDES IGUALES, YA QUE LAS CARGAS PUNTALES SON DE VALORES IGUALES Y SE ENCUENTRAN A LA MISMA DISTANCIA DEL PUNTO P . ADEMÁS, DEBIDO A LA SIMETRÍA DEL CONJUNTO DE CARGAS, EL CAMPO ELÉCTRICO TOTAL EN DICHO PUNTO TENDRÁ LA DIRECCIÓN DEL EJE z YA QUE LAS COMPONENTES HORIZONTALES SE CANCELAN.



COMO $E_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R^2}$, POR LO ANTERIOR, EL CAMPO EN P RESULTA $E_P = 4E_R \cdot \text{sen}\theta \hat{k} \left[\frac{N}{C} \right]$ y $E_P = 4 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q_1}{R^2} \frac{z}{R}$.

$R = \sqrt{a^2 + z^2}$; $E_P = 4 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_1 \frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$. SE OBSERVA QUE $E_P = f(z)$. SI SE OBTIENE LA DERIVADA DE E_P CON

RESPECTO A LA VARIABLE z Y SE IGUALA CON CERO, SE OBTENDRÁ EL VALOR DE z PARA EL CUAL E_P ES MÁXIMO; ENTONCES

$$\frac{dE_P}{dz} = \frac{4q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}(1) - z \left(\frac{3}{2} \right) (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}(2z)}{(a^2 + z^2)^3} \right] = \frac{4q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + z^2)^3} \right]$$

AL IGUALAR ESTA DERIVADA CON CERO, SE ENCUENTRA EL PUNTO CRÍTICO; PARA ESTO ES SUFICIENTE QUE EL NUMERADOR DE LA FRACCIÓN SEA CERO, ES DECIR:

$$(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow (a^2 + z^2) - 3z^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2z^2 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{2}z \text{ ó } z = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

PARA ESTE VALOR DE z SE TIENE UN MÁXIMO, YA QUE SI $z = 0$ SE TIENE UN MÍNIMO EN EL ORIGEN.

B) EL VALOR DE E_z MÁXIMO SE OBTIENE CON LA EXPRESIÓN DE E_P CON EL VALOR $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$:

$$E_{MAX} = 4 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_1 \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\left(a^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}; \quad E_{MAX} = 4 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] q_1 \frac{a}{\sqrt{2}a^3 \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}; \quad E_{MAX} = \left[\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \right] q_1 \frac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}a^2 \sqrt{3}^3}$$

$$E_{MAX} = 4q_1 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{2}{a^2(\sqrt{3})^3}. \text{ COMO } a = 0.2 [m] \Rightarrow E_{MAX} = 17,320.508 \hat{k} \left[\frac{N}{C} \right]$$

C) EL POTENCIAL EN EL ORIGEN SE DEBERÁ A LAS CUATRO CARGAS; ES DECIR, $V_0 = V_{01} + V_{02} + V_{03} + V_{04}$ Y POR LA SIMETRÍA DEL CONJUNTO, LOS CUATRO

TÉRMINOS DEL SEGUNDO MIEMBRO DE LA ECUACIÓN ANTERIOR SON IGUALES A $V_{01} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a} \therefore V_0 = 4 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{q_1}{a}$

$$\therefore V_0 = 4(9 \times 10^9) \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right] \frac{50 \times 10^{-9} [C]}{0.2 [m]} = 4(2250) \left[\frac{N \cdot m}{C} \right]; \quad V_0 = 9000 [V]$$

D) ${}_{\infty}W_0 = EP_0 - EP_{\infty}$; PERO q_0 Y CUALQUIER CARGA, EN EL ∞ , TENDRÁ ENERGÍA POTENCIAL NULA. COMO $V_P = \frac{EP_P}{q_0}$; $EP_P = q_0 V_P$

$$\therefore {}_{\infty}W_0 = q_0(V_0 - 0); \quad {}_{\infty}W_0 = 1 \times 10^{-19} (C) 9000 \left[\frac{J}{C} \right] = 9 \times 10^{-6} [J] \therefore {}_{\infty}W_0 = 9 [\mu J]$$

COMO EL SIGNO DEL TRABAJO RESULTÓ POSITIVO, SIGNIFICA QUE q_0 INCREMENTA SU ENERGÍA AL SER TRASLADADA DESDE EL INFINITO AL ORIGEN.

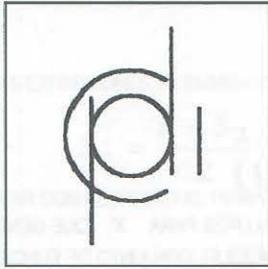
PRESERVACIÓN DEL MEDIO AMBIENTE

"... EL EFECTO INVERNADERO LLEVADO AL PAROXISMO EN VENUS, DEBERÍA HACERNOS PENSAR EN LA LOCURA QUE ES CALENTAR UN PLANETA. EL HIELO DE MARTE DEBERÍA ALERTARNOS SOBRE LO QUE SIGNIFICA RAPAR LA TIERRA DE TODA VEGETACIÓN, Y AMBAS DEMENCIALES Y COMPLEMENTARIAS ACCIONES ESTÁN OCURRIENDO SIMULTÁNEAMENTE EN NUESTRO PLANETA. POR UNA PARTE SE SOBRECALIENTA LA ATMÓSFERA CON LA EMISIÓN DE GASES Y, POR LA OTRA, SE DEFORESTAN CONTINENTES ENTEROS. LO HEMOS VENIDO OBSERVANDO DESDE HACE DOS SIGLOS, SIN COMPRENDER QUE A ESTAS ALTURAS LOS HUMANOS NO HAYAMOS ENTENDIDO LA CATÁSTROFE QUE PREPARAMOS..."

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES AGUIRRE MALDONADO Y JARAMILLO MORALES

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 41

2 DE JUNIO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. MUY PRONTO SALDRÁ A LA VENTA LA PRIMERA COLECCIÓN COPADI DE EJERCICIOS RESUELTOS CON LOS PRIMEROS CUARENTA BOLETINES. SON APROXIMADAMENTE 200 EJERCICIOS RESUELTOS DE DIFERENTES ASIGNATURAS. SEGURAMENTE SERÁ UNA VALIOSA HERRAMIENTA DE ESTUDIO Y APRENDIZAJE.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER EL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

$$y'' + 4y' + 4y = x^{\frac{5}{2}} e^{-2x} \quad ; \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN.

PARA y_h :

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

SE UTILIZA EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS Y SE TIENE QUE:

PARA y_p :

$$y_p = u(x) e^{-2x} + v(x) x e^{-2x}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & x e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2x e^{-2x} + e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{\frac{5}{2}} e^{-2x} \end{bmatrix}$$

SE RESUELVE Y

$$u'(x) = -x^{\frac{7}{2}} \quad y \quad v'(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

Y AL INTEGRAR SE TIENE QUE

$$u(x) = -\frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} \quad y \quad v(x) = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \Rightarrow y_p = \frac{4}{63} x^{\frac{9}{2}} e^{-2x}$$

POR LO QUE LA SOLUCIÓN GENERAL ES:

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{4}{63} x^{\frac{9}{2}} e^{-2x}$$

PARA APLICAR CONDICIONES INICIALES SE DERIVA Y SE OBTIENE:

$$y' = -2C_1 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{8}{63} x^{\frac{9}{2}} e^{-2x} + \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} e^{-2x}$$

AHORA SE APLICAN CONDICIONES INICIALES Y

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = -2C_1 + C_2$$

DE DONDE $C_1 = 0$ y $C_2 = 0 \therefore y = \frac{4}{63} x^{\frac{9}{2}} e^{-2x}$ SOLUCIÓN QUE SATISFACE LAS CONDICIONES INICIALES.

ÁLGEBRA LINEAL

DETERMINAR SI EL CONJUNTO $D = \{2 \operatorname{sen} x, -\cos x, 4x\}$ ES LINEALMENTE DEPENDIENTE O LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN EL INTERVALO $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DEPENDENCIA LINEAL SE TIENE QUE:

$$\alpha_1 (2 \operatorname{sen} x) + \alpha_2 (-\cos x) + \alpha_3 (4x) = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$2\alpha_1 \operatorname{sen} x - \alpha_2 \cos x + 4\alpha_3 x = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R} \quad \dots (1)$$

COMO LA ECUACIÓN (1) SE SATISFACE PARA CUALQUIER VALOR DE x EN LOS REALES, SE PUEDEN PROPONER TRES VALORES PARA x QUE GENEREN UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS. SI EL SISTEMA PROPUESTO SÓLO ADMITE LA SOLUCIÓN TRIVIAL, ENTONCES EL CONJUNTO DE FUNCIONES ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE.

$$\text{PARA } x = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 \operatorname{sen} 0 - \alpha_2 \cos 0 + 4\alpha_3(0) = 0 \Rightarrow 0 - \alpha_2 + 0 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{PARA } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\alpha_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \alpha_2 \cos \frac{\pi}{4} + 4\left(\frac{\pi}{4}\right)\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \alpha_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi \alpha_3 = 0$$

$$\sqrt{2} \alpha_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha_2 + \pi \alpha_3 = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{PARA } x = \pi \Rightarrow 2\alpha_1 \operatorname{sen} \pi - \alpha_2 \cos \pi + 4\pi \alpha_3 = 0 \Rightarrow 0 + \alpha_2 + 4\pi \alpha_3 = 0 \quad \dots (3)$$

DE LA ECUACIÓN (1) SE OBTIENE QUE $\alpha_2 = 0$. SI SE SUSTITUYE $\alpha_2 = 0$ EN LA ECUACIÓN (3), SE LLEGA A $\alpha_3 = 0$. FINALMENTE $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ IMPLICA, DE LA ECUACIÓN (2) QUE $\alpha_1 = 0$.

DE ESTE MODO, COMO $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, SE CONCLUYE QUE EL CONJUNTO D ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN $(-\infty, \infty)$.

COMO MÉTODO ALTERNATIVO SE PUEDE UTILIZAR EL CRITERIO DEL WRONSKIANO. ASÍ, PARA EL CONJUNTO D SE TIENE QUE:

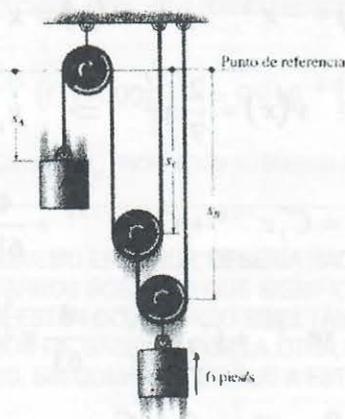
$$W(x) = \begin{vmatrix} 2 \operatorname{sen} x & -\cos x & 4x \\ 2 \cos x & \operatorname{sen} x & 4 \\ -2 \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \end{vmatrix} = 2 \operatorname{sen} x (-4 \cos x) + \cos x (8 \operatorname{sen} x) + 4x (2 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x) = 8x$$

EL CRITERIO DEL WRONSKIANO ESTABLECE QUE SI $W(x_0) \neq 0$ PARA ALGÚN VALOR $x_0 \in (a, b)$, ENTONCES EL CONJUNTO DE FUNCIONES ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN DICHO INTERVALO.

SI $x = 1$ ENTONCES $W(1) = 8 \neq 0$; POR LO TANTO EL CONJUNTO D ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN $(-\infty, \infty)$.

CINEMÁTICA

DETERMINAR LA RAPIDEZ DEL BLOQUE A QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA, SI EL BLOQUE B TIENE UNA RAPIDEZ ASCENDENTE DE $6 \frac{\text{pies}}{\text{s}}$.



SOLUCIÓN

ECUACIONES DE LAS COORDENADAS DE POSICIÓN. COMO SE ILUSTRAN EN LA FIGURA, LAS POSICIONES DE LOS BLOQUES A y B SE DEFINEN POR MEDIO DE LAS COORDENADAS S_A y S_B . COMO EL SISTEMA TIENE DOS CUERDAS DE LONGITUD VARIABLE, SERÁ NECESARIO USAR UNA TERCERA COORDENADA, S_C , CON OBJETO DE RELACIONAR S_A CON S_B . EN OTRAS PALABRAS, ES POSIBLE EXPRESAR LA LONGITUD DE UNA DE LAS CUERDAS EN TÉRMINOS DE S_A y S_C , Y LA LONGITUD DE LA OTRA SE EXPRESA EN TÉRMINOS DE S_B y S_C .

DE LA FIGURA SE PUEDEN FIJAR LAS SIGUIENTES LONGITUDES

$$l_1 = S_A + 2S_C \quad \text{y} \quad l_2 = S_B + (S_B - S_C)$$

DE AMBAS EXPRESIONES, AL ELIMINAR S_C , SE OBTIENE UNA ECUACIÓN QUE DEFINE LAS POSICIONES DE AMBOS BLOQUES, ES DECIR,

$$S_C = \frac{l_1 - S_A}{2} ; S_C = 2S_B - l_2 \Rightarrow \frac{l_1 - S_A}{2} = 2S_B - l_2 \Rightarrow S_A + 4S_B = 2l_2 + l_1$$

AL DERIVAR CON RESPECTO AL TIEMPO SE TIENE QUE:

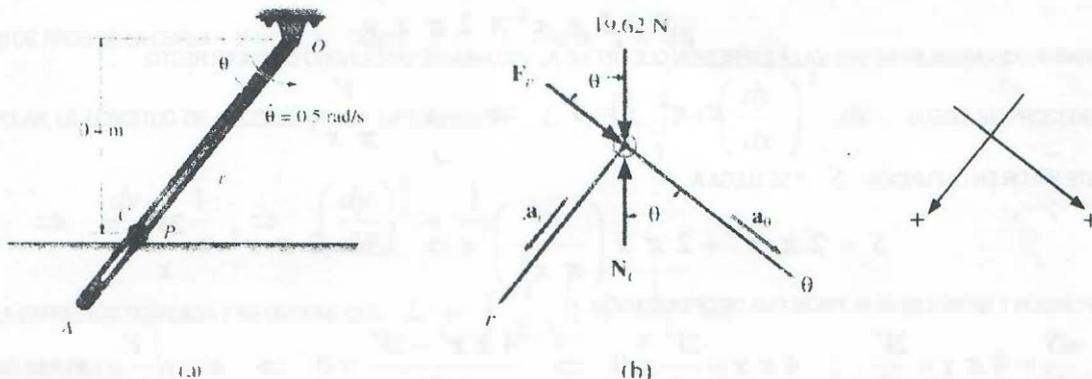
$$v_A + 4v_B = 0$$

POR LO QUE, FINALMENTE, CUANDO $v_B = -6 \frac{\text{pies}}{\text{s}}$ (HACIA ARRIBA), ENTONCES.

$$v_A = +24 \frac{\text{pies}}{\text{s}} \quad \downarrow$$

DINÁMICA

EL CILINDRO LISO DE 2 kg , MOSTRADO EN LA FIGURA (A), TIENE UN PERNO P QUE LO ATRAVIESA POR EL CENTRO Y QUE PASA POR LA RANURA EN EL BRAZO OA . SI EL BRAZO GIRA EN EL PLANO VERTICAL CON UNA RAPIDEZ CONSTANTE $\omega = \dot{\theta} = 0.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, DETERMINAR LA FUERZA QUE EJERCE EL BRAZO SOBRE EL PERNO, EN EL INSTANTE EN QUE $\theta = 60^\circ$.



SOLUCIÓN

LA FIGURA (B) ILUSTRAS EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL CILINDRO. LA FUERZA DEL PERNO, F_p ACTÚA EN FORMA PERPENDICULAR A LA RANURA EN EL BRAZO COMO ES USUAL, SE SUPONE QUE a_r Y a_θ ACTÚAN EN LAS DIRECCIONES r Y θ POSITIVAS, RESPECTIVAMENTE.

SI SE UTILIZAN LOS DATOS DE LA FIGURA (B), TOMADO EN CONSIDERACIÓN LOS EJES PROPUESTOS Y SU SENTIDO, SE TIENE QUE:

$$\sum F_r = m a_r ; 19.62 \operatorname{sen} \theta - N_c \operatorname{sen} \theta = 2a_r \quad \dots (1)$$

$$\sum F_\theta = m a_\theta ; 19.62 \cos \theta + F_p - N_c \cos \theta = 2a_\theta \quad \dots (2)$$

POR OTRO LADO, CON BASE EN LA FIGURA (A), ES POSIBLE RELACIONAR r CON θ POR MEDIO DE LA ECUACIÓN

$$r = \frac{0.4}{\operatorname{sen} \theta} = 0.4 \operatorname{csc} \theta$$

COMO $d(\operatorname{csc} \theta) = -\operatorname{csc} \theta \cot \theta d\theta$ Y $d(\cot \theta) = -\operatorname{csc}^2 \theta d\theta$, ENTONCES, PARA $\omega = \dot{\theta} = 0.5$ Y $\alpha = \ddot{\theta} = 0$ SE TIENE QUE:

$$r = 0.4 \operatorname{csc} \theta \Rightarrow \dot{r} = -0.4 \operatorname{csc} \theta \cot \theta \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{r} = -0.4 \left[-\operatorname{csc} \theta \cot^2 \theta \dot{\theta}^2 - \operatorname{csc}^3 \theta \ddot{\theta} + \operatorname{csc} \theta \cot \theta \ddot{\theta} \right]$$

$$\text{SE SUSTITUYEN } \dot{\theta} = 0.5 \text{ Y } \ddot{\theta} = 0 \text{ Y SE LLEGA A: } \ddot{r} = 0.1 \operatorname{csc} \theta (\operatorname{csc}^2 \theta + \cot^2 \theta) = 0.1 \operatorname{csc}^3 \theta + 0.1 \operatorname{csc} \theta \cot^2 \theta$$

AL EVALUAR ESTAS EXPRESIONES PARA $\theta = 60^\circ$ SE LLEGA A

$$r = 0.462 \quad ; \quad \dot{r} = -0.133 \quad ; \quad \ddot{r} = 0.192$$

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462 (0.5)^2 = 0.0765$$

$$a_\theta = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = 0 + 2 (-0.133)(0.5) = -0.133$$

SE SUSTITUYEN ESTOS RESULTADOS EN LAS ECUACIONES (1) y (2), CON $\theta = 60^\circ$ Y DESPEJANDO SE OBTIENE:

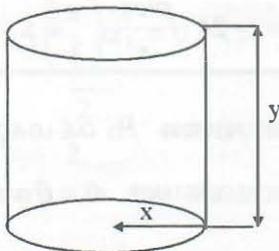
$$N_C = 19.4 \text{ N} \quad \text{y} \quad F_p = -0.355 \text{ N}$$

EL SIGNO NEGATIVO INDICA QUE F_p ACTÚA EN FORMA OPUESTA A LO QUE SE ILUSTR EN LA FIGURA (B).

CÁLCULO I

¿CUÁLES SON LAS DIMENSIONES DE UN DEPÓSITO EN FORMA DE CILINDRO CIRCULAR RECTO CON TAPA, DE VOLUMEN IGUAL A "V", QUE TIENE MENOR SUPERFICIE TOTAL?

SOLUCIÓN:



DE LAS MAGNITUDES VARIABLES, RADIO DE LA BASE Y ALTURA, SE TIENE QUE LA FUNCIÓN A OPTIMIZAR ES LA SUPERFICIE, DADA POR:

$$S = 2 \pi x^2 + 2 \pi x y$$

Y, PARA RELACIONAR A LAS VARIABLES SE UTILIZA LA EXPRESIÓN QUE DEFINE AL VOLUMEN DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

$$\pi x^2 y = V \Rightarrow y = \frac{V}{\pi x^2}$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA FUNCIÓN S Y SE LLEGA A:

$$S = 2 \pi x^2 + 2 \pi x \left(\frac{V}{\pi x^2} \right) \Rightarrow S = 2 \pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

SE DERIVA ESTA FUNCIÓN Y SE RESUELVE EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN:

$$\frac{dS}{dx} = 4 \pi x - \frac{2V}{x^2} \quad ; \quad 4 \pi x - \frac{2V}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{4 \pi x^3 - 2V}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \pi}} \quad (\text{PUNTO CRÍTICO})$$

EL VALOR $x = 0$ NO SE TOMA EN CONSIDERACIÓN YA QUE NO EXISTIRÍA CILINDRO.

SE OBTIENE LA SEGUNDA DERIVADA Y SE SUSTITUYE EN ELLA AL PUNTO CRÍTICO:

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = 4 \pi + \frac{4V}{x^3} \quad ; \quad \left. \frac{d^2 S}{dx^2} \right|_{x = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \pi}}} = 4 \pi + \frac{4V}{\frac{V}{2 \pi}} = 12 \pi > 0 \Rightarrow \text{MÍNIMO}$$

SE CALCULA LA ALTURA Y:

$$y = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi \left(\frac{V}{2 \pi} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(2 \pi)^{\frac{2}{3}} V}{\pi V^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{3}} V^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{1}{3}}} = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2 \pi}}$$

LUEGO EL CILINDRO CIRCULAR RECTO DE MENOR SUPERFICIE TOTAL ES EL QUE TIENE COMO ALTURA EL DIÁMETRO DE SU BASE

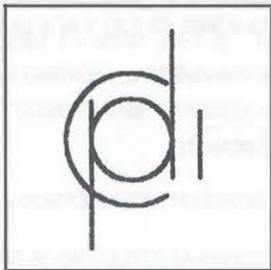
TUTORÍA

ESTUDIANTE DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR: ¿YA COMENZASTE A INTERACTUAR CON TUTOR. ¿QUÉ ESPERAS? CONÓCELO Y VERÁS QUÉ MAGNÍFICO ES TENER UN ALIADO, UN AMIGO, ALGUIEN EN QUIEN CONFIAR CUESTIONES ACADÉMICAS Y EXISTENCIALES. ¡APÚRATE, TODAVÍA HAY TIEMPO!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DEL PROFESOR JUAN VELÁZQUEZ TORRES Y DE LA COORDINACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCIA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 42

17 DE JUNIO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTUDIAR UNA CARRERA DE INGENIERÍA ES ALGO MUY DIGNO DE APRECIAR EN TODO SER HUMANO. LA INGENIERÍA ES ÍNTIMA UNIÓN CON LA NATURALEZA Y UNO DE LOS PRINCIPALES OBJETIVOS DE SU QUEHACER COTIDIANO ES EL MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DE LA VIDA. ¡REALMENTE VALE LA PENA SER INGENIERO!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO II

CALCULAR LA LONGITUD DE ARCO DE LA CURVA $y = \ln x$ DESDE $x = \sqrt{3}$ HASTA $x = \sqrt{8}$.

SOLUCIÓN. PARA CALCULAR LA LONGITUD DE ARCO SE UTILIZA LA EXPRESIÓN $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. LUEGO SE PROCEDE DE LA SIGUIENTE

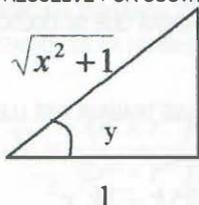
MANERA: $y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$

DE DONDE, SE APLICA LA EXPRESIÓN SEÑALADA Y SE OBTIENE QUE: $L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$

SE OBTIENE LA INTEGRAL INDEFINIDA

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx = \int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$$

SE RESUELVE POR SUSTITUCIÓN TRIGONÓMETRICA, POR LO QUE SE LLEGA A:



x

$$\begin{aligned} x = \tan y &\Rightarrow dx = \sec^2 y dy ; \sqrt{x^2 + 1} = \sec y \\ \int \frac{\sec y \sec^2 y dy}{\tan y} &= \int \frac{\sec y (\tan^2 y + 1)}{\tan y} dy = \int \sec y \tan y dy + \int \frac{\sec y}{\tan y} dy \\ &= \int \sec y \tan y dy + \int \csc y dy = \sec y + \ln(\csc y - \cot y) + C \\ &= \sqrt{x^2 + 1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}\right) + C \end{aligned}$$

LUEGO LA INTEGRAL DEFINIDA QUEDA COMO:

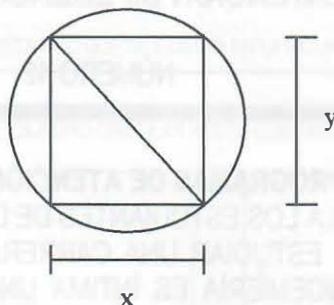
$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \left[\sqrt{x^2 + 1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}\right) \right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \\ &= 3 + \ln \frac{2}{\sqrt{8}} - 2 - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \ln \frac{2\sqrt{2}}{1} = 1 + \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \approx 1.2027 \end{aligned}$$

CÁLCULO I

DE UN TRONCO REDONDO, DE DIÁMETRO IGUAL A 1.5 m , HAY QUE CORTAR UNA VIGA DE SECCIÓN RECTANGULAR. ¿QUÉ ANCHO Y QUÉ PERALTE (ALTURA) DEBERÁ TENER ESTA SECCIÓN PARA QUE LA VIGA TENGA LA RESISTENCIA MÁXIMA POSIBLE: A) A LA COMPRESIÓN (ESFUERZO SOBRE SU EJE) Y B) A LA FLEXIÓN (ESFUERZO PERPENDICULAR A SU EJE)?

OBSERVACIÓN. LA RESISTENCIA DE LA VIGA A LA COMPRESIÓN ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL ÁREA DE SU SECCIÓN TRANSVERSAL, MIENTRAS QUE A LA FLEXIÓN LO ES AL PRODUCTO DEL ANCHO POR EL CUADRADO DEL PERALTE.

SOLUCIÓN. SE TIENE LA SIGUIENTE FIGURA DONDE SE DESIGNA CON x AL ANCHO DE LA SECCIÓN Y CON y SU LA ALTURA O PERALTE.



A) LA FUNCIÓN OBJETIVO A OPTIMIZAR ES EN ESTE CASO: $R_C = k xy$ Y DE LA FIGURA SE OBTIENE UNA RELACIÓN ENTRE EL ANCHO Y EL PERALTE DE LA SECCIÓN, MEDIANTE EL TEOREMA DE PITÁGORAS, DE LA QUE SE DESPEJA UNA VARIABLE, SE SUSTITUYE EN LA FUNCIÓN OBJETIVO Y SE RESUELVE EL PROBLEMA PLANTEADO. ASÍ SE TIENE QUE:

$$x^2 + y^2 = 1.5^2 \Rightarrow y = \sqrt{1.5^2 - x^2} \Rightarrow y = \sqrt{2.25 - x^2}$$

$$R_C = k x \sqrt{2.25 - x^2} \Rightarrow \frac{dR_C}{dx} = k x \frac{-x}{\sqrt{2.25 - x^2}} + k \sqrt{2.25 - x^2} = \frac{-k x^2 + k(2.25 - x^2)}{\sqrt{2.25 - x^2}} = \frac{-k x^2 + 2.25k - k x^2}{\sqrt{2.25 - x^2}}$$

$$\frac{dR_C}{dx} = \frac{-2k x^2 + 2.25k}{\sqrt{2.25 - x^2}} ; \quad \frac{-2k x^2 + 2.25k}{\sqrt{2.25 - x^2}} = 0 \Rightarrow -2k x^2 + 2.25k = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2.25}{2}} = 1.06$$

$$\begin{aligned} x = 1.0 &\Rightarrow \frac{dR_C}{dx} > 0 \\ x = 2.0 &\Rightarrow \frac{dR_C}{dx} < 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{máximo} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1.06 \text{ m} \\ y &= \sqrt{2.25 - 1.06^2} = 1.06 \text{ m} \end{aligned}$$

CABE DECIR QUE EN ESTE PROBLEMA, LA RESISTENCIA MÁXIMA A LA COMPRESIÓN SE DA CUANDO $x = y = \frac{D}{\sqrt{2}}$, DONDE D ES EL DIÁMETRO DEL TRONCO.

ES IMPORTANTE TAMBIÉN HACER NOTAR QUE EN ESTE CASO LA SECCIÓN ES CUADRADA. RECUÉRDESE LA SECCIÓN DE LOS POLINES DE MADERA QUE SE COLOCAN PARA SOPORTAR LA CIMBRA EN UNA OBRA, ¡SON DE SECCIÓN CUADRADA!

B) AHORA LA FUNCIÓN OBJETIVO ES: $R_F = k xy^2$. CON LA MISMA RELACIÓN ENTRE EL ANCHO Y EL PERALTE DEL INCISO ANTERIOR SE TRABAJA Y SE LLEGA A:

$$y = \sqrt{2.25 - x^2} \Rightarrow R_F = k x (2.25 - x^2) \Rightarrow R_F = 2.25k x - k x^3 \Rightarrow \frac{dR_F}{dx} = 2.25k - 3k x^2$$

$$2.25k - 3k x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2.25}{3}} = 0.866$$

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow \frac{dR_F}{dx} > 0 \\ x = 1 &\Rightarrow \frac{dR_F}{dx} < 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{máximo} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0.866 \text{ m} \\ y &= \sqrt{2.25 - 0.866^2} = 1.225 \text{ m} \end{aligned}$$

AQUÍ, LA RESISTENCIA MÁXIMA A LA FLEXIÓN SE DA CUANDO $x = \frac{D}{\sqrt{3}}$ y $y = \sqrt{\frac{2}{3}} D$, DONDE D ES EL DIÁMETRO DEL TRONCO. ES IMPORTANTE

DESTACAR QUE EN ESTE CASO EL PERALTE ES MAYOR QUE EL ANCHO DE LA SECCIÓN DE LA VIGA, LO QUE RESULTA LÓGICO. VALGA PENSAR EN UNA VIGA DE MADERA UTILIZADA COMO BANCA PARA SENTARSE. ES MAYOR EL PERALTE QUE EL ANCHO PARA QUE AGUANTE MÁS. OBSÉRVENSE LAS TRABES EN UNA EDIFICACIÓN. GENERALMENTE CUMPLEN CON ESTO Y HASTA SE DICE QUE SON POCO O MUY PERALTADAS.

CÁLCULO III

CALCULAR LAS COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA QUE SE MUEVE EN LA HÉLICE DE ECUACIÓN

$\vec{r}(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + t \hat{k}$. TAMBIÉN EXPRESAR ESTAS COMPONENTES DE MANERA VECTORIAL, EN TÉRMINOS DE LOS VECTORES \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} .

SOLUCIÓN. COMO SE SABE, LA ACELERACIÓN DE LA PARTÍCULA SE EXPRESA A TRAVÉS DE LA ECUACIÓN: $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N}$.

LUEGO, LAS COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL ESTÁN DADAS, RESPECTIVAMENTE, POR $\frac{dv}{dt}$ Y $\frac{v^2}{\rho}$.

SE PROCEDE AL CÁLCULO DE LA RAPIDEZ v , DE SU DERIVADA, DE SU CUADRADO Y DEL RADIO DE CURVATURA ρ , DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\vec{r}(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + t \hat{k} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + \hat{k} \Rightarrow v = |\vec{v}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

POR LO TANTO LA COMPONENTE TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN ES IGUAL A CERO. DE AQUÍ SE DEDUCE QUE LA ACELERACIÓN NORMAL ES LA ÚNICA QUE SE PRESENTA Y POR LO TANTO EQUIVALE A LA ACELERACIÓN DE LA PARTÍCULA, ES DECIR QUE:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\cos t \hat{i} - \sin t \hat{j} \Rightarrow |\vec{a}| = a_N = 1$$

Y LA ACELERACIÓN NORMAL, EN TÉRMINOS DE LOS VECTORES \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} ES LA MISMA EXPRESIÓN QUE DEFINE A LA ACELERACIÓN, ESTO ES:

$$\vec{a}_N = -\cos t \hat{i} - \sin t \hat{j}$$

SIN EMBARGO, PARA PRACTICAR LAS EXPRESIONES DE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL, SE OBTENDRÁ LA COMPONENTE NORMAL CON LAS EXPRESIONES CORRESPONDIENTES:

$$k = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}; \quad \vec{r}' = -\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + \hat{k} \Rightarrow \vec{r}'' = -\cos t \hat{i} - \sin t \hat{j}$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \sin t \hat{i} - \cos t \hat{j} + (\sin^2 t + \cos^2 t) \hat{k} = \sin t \hat{i} - \cos t \hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}; \quad |\vec{r}'|^3 = v^3 = 2\sqrt{2} \quad \therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = \frac{1}{k} = 2 \quad \therefore a_N = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1$$

LUEGO, LAS COMPONENTES DE LA ACELERACIÓN SON: $a_T = 0$ Y $a_N = 1$. PARA EXPRESAR LA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN NORMAL COMO

VECTOR, EN TÉRMINOS DE \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} BASTARÍA CON MULTIPLICARLA POR EL VECTOR NORMAL UNITARIO \vec{N} , LO QUE SE HARÁ PARA MOSTRAR LA UTILIZACIÓN DE LA FÓRMULA RESPECTIVA. ASÍ:

$$\vec{N} = \frac{(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'}{|\vec{r}' \times \vec{r}''| |\vec{r}'|}; \quad (\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sin t & -\cos t & 1 \\ -\sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix} = -2 \cos t \hat{i} - 2 \sin t \hat{j} \Rightarrow |(\vec{r}' \times \vec{r}'') \times \vec{r}'| = 2$$

$$\Rightarrow \vec{N} = -\cos t \hat{i} - \sin t \hat{j} \quad \therefore \vec{a}_N = -\cos t \hat{i} - \sin t \hat{j}$$

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES: i) $\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$ ii) $\int \sin x \ln \tan x dx$ iii) $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$

SOLUCIÓN.

i) $\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$. PARA RESOLVER ESTA INTEGRAL, SE TRABAJA PRIMERO CON LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA, APROVECHANDO SUS PROPIEDADES. ASÍ

SE TIENE QUE:

$$\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int x \ln \frac{x+1}{x} dx = \int x [\ln(x+1) - \ln x] dx = \int x \ln(x+1) dx - \int x \ln x dx$$

Y LAS DOS INTEGRALES SE RESUELVEN POR PARTES DE LA SIGUIENTE MANERA: .

PARA $\int x \ln(x+1) dx$ SE PROCEDE COMO SIGUE:

$$u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1} ; dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int x \ln(x+1) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(x+1) + C = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$$

PARA $\int x \ln x dx$ SE PROCEDE COMO SIGUE:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} ; dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

FINALMENTE, LA SOLUCIÓN A LA INTEGRAL PLANTEADA ES LA SUMA DE LAS SOLUCIONES DE LAS DOS INTEGRALES, ES DECIR:

$$\int x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2-1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x}{2} + C$$

ii) $\int \operatorname{sen} x \ln \tan x dx$. ESTA INTEGRAL SE RESUELVE POR PARTES COMO SIGUE.

$$u = \ln \tan x \Rightarrow du = \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} ; dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\therefore \int \operatorname{sen} x \ln \tan x dx = -\cos x \ln \tan x - \int (-\cos x) \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = -\cos x \ln \tan x + \int \operatorname{csc} x dx$$

$$= -\cos x \ln \tan x + \ln(\operatorname{csc} x - \cot x) + C$$

iii) $\int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$. PARA EFECTUAR ESTA INTEGRAL SE UTILIZA EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES, DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$u = x \Rightarrow du = dx ; dv = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} dx ; w = \operatorname{sen} x \Rightarrow dw = \cos x dx \Rightarrow v = \int \frac{dw}{w^3} = -\frac{1}{2w^2} = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\therefore \int \frac{x \cos x}{\operatorname{sen}^3 x} dx = -\frac{x}{2\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\frac{x}{2\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{2} \int \operatorname{csc}^2 x dx = -\frac{x}{2\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\cot x}{2} + C$$

CULTURA

ALGUNOS PENSAMIENTOS SOBRE EL AMOR

- "EL AMOR DEBE SER ESENCIALMENTE UN ACTO DE LA VOLUNTAD, LA DECISIÓN DE DEDICAR TODA NUESTRA VIDA A LA DE LA OTRA PERSONA" (ERICH FROMM)
- "HEMOS VIVIDO EN COMPAÑÍA DE UNA MUJER ENJAULADA. PERO YA LE ABRIMOS LA PUERTA. AHORA SABREMOS POR FIN SI SOMOS AMADOS DE VERDAD" (JUAN JOSÉ ARREOLA)
- "AMAR NO ES RETIRARSE EL UNO EN LOS OJOS DEL OTRO SINO MIRAR JUNTOS EN UNA MISMA DIRECCIÓN" (SAINT-EXUPÉRY)
- "ME ESTÁS ENSEÑANDO A AMAR. YO NO SABÍA. AMAR NO ES PEDIR, ES DAR. NOCHE TRAS DÍA" (GERARDO DIEGO)
- "CUANDO EL AMOR HA SIDO UNA COMEDIA, FORZOSAMENTE TIENE QUE TERMINAR EN TRAGEDIA" (LAMARTINE)
- "AMAR ES ENCONTRAR EN LA FELICIDAD DE OTRO LA PROPIA FELICIDAD" (LEIBNIZ)
- "A MAYOR POSESIÓN, MENOR AMOR" (TITA VALENCIA)
- "ESTABAS A RAS DE TIERRA Y NO TE VI. TUVE QUE CAVAR HASTA EL FONDO DE MÍ PARA ENCONTRARTE" (JUAN JOSÉ ARREOLA)
- "EL AMOR ES UN ACTO DE FE, Y QUIEN TENGA Poca FE TAMBIÉN TIENE POCO AMOR" (ERICH FROMM)
- "EN AMOR SÓLO ES GRANDE EL QUE PERDONA" (ENRIQUE ARCINIEGA)
- "SÓLO EN TORNO DE UNA MUJER QUE SE SIENTE AMADA PUEDE FORMARSE UNA FAMILIA" (FEDERICO SCHLEGEL)
- "A NADIE TE PARECES DESDE QUE YO TE AMO" (PABLO NERUDA)
- "SÓLO AQUELLAS RELACIONES HUMANAS INSPIRADAS POR EL AMOR TENDRÁN LA VIRTUD DE SATISFACER NUESTRO ANHELO INMORTAL" (ALEXIS CARREL)
- "MÁS TRISTE QUE LA MUERTE ES LA AGONÍA DE UN AMOR ENTRE DUDAS Y TEMORES" (JACINTO BENAVENTE)

TUTORÍA

"... TUVE UN SUEÑO ... ERA UN ESPACIO GRANDE VERDE Y ARBOLADO, HABÍA MUCHOS TUTORES, CADA UNO CON UN ESTUDIANTE; DE LAS MANOS DE LOS TUTORES, ASÍ COMO DE SUS BOCAS, SALÍAN DESTELLOS DE LUZ FOSFORESCENTE QUE SE ESTRELLABAN EN LAS HUMANIDADES DE LOS ESTUDIANTES Y ÉSTOS EMPEZABAN A BRILLAR ... A RATOS SE REPETÍA EL MISMO FENÓMENO PERO AL REVÉS" ... (PENSAMIENTO DE UN TUTOR DE LA FACULTAD)

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 43

2 DE JULIO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. SE DICE QUE EL INGENIERO PUEDE DESARROLLAR MUCHAS ACTIVIDADES COLATERALES A SU PROFESIÓN, LO CUAL ES VERDADERO POR LA FORMACIÓN Y DISCIPLINA MENTALES QUE ADQUIERE DURANTE SU APRENDIZAJE DE LA INGENIERÍA, EN LA QUE TIENEN QUE VER MUCHO LAS CIENCIAS BÁSICAS. POR LO TANTO, A ECHARLE GANAS A ESTAS ASIGNATURAS Y PRONTO SE VERÁ LA LUZ RESPLANDECIENTE DEL EJERCICIO DIGNO Y HERMOSO DE LA INGENIERÍA.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

GEOMETRÍA ANALÍTICA

RELACIÓN RECTA CON PLANO. LA RECTA Y EL PLANO SE RELACIONAN A TRAVÉS DE:

- ÁNGULO FORMADO POR LA RECTA Y EL PLANO, TAL QUE $0 \leq \phi \leq 90^\circ$.
- LA INTERSECCIÓN DE LA RECTA CON EL PLANO PUEDE SER UN PUNTO, LA MISMA RECTA O NO EXISTIR.
- LA DISTANCIA MÍNIMA DE SEPARACIÓN, EN CASO DE SER PARALELOS LA LÍNEA RECTA CON EL PLANO, CALCULADA COMO LA DISTANCIA DE UN PUNTO DE LA RECTA, AL PLANO.

SEA EL PLANO DE ECUACIÓN $2x - 3y - 6z = -23$ Y LA LÍNEA RECTA $\frac{x - 16}{6} = \frac{y - 12}{-2} = \frac{z - 16}{3}$

- A) DETERMINAR EL ÁNGULO ϕ FORMADO POR LA LÍNEA RECTA Y EL PLANO
B) CALCULAR LA DISTANCIA MÍNIMA DE SEPARACIÓN ENTRE LA RECTA Y EL PLANO

SOLUCIÓN

A) \vec{N} : VECTOR NORMAL DEL PLANO $\vec{N} = (2, -3, -6)$; \vec{u} : VECTOR DIRECCIÓN DE LA RECTA $\vec{u} = (6, -2, 3)$

LOS MÓDULOS DE ESTOS VECTORES SON:

$$|\vec{N}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} \Rightarrow |\vec{N}| = \sqrt{49} \Rightarrow |\vec{N}| = 7$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{49} \Rightarrow |\vec{u}| = 7$$
$$\text{sen } \phi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{u}|}{|\vec{N}| |\vec{u}|} \Rightarrow \text{sen } \phi = \frac{(2, -3, -6) \cdot (6, -2, 3)}{(7)(7)} \Rightarrow \text{sen } \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0^\circ$$

POR LO TANTO LA RECTA Y EL PLANO SON PARALELOS.

- B) SEA P_P UN PUNTO CUALQUIERA DEL PLANO $P_P (5, -7, 9)$
SEA P_R UN PUNTO CUALQUIERA DE LA RECTA $P_R (16, 12, 16)$

POR LO QUE EL VECTOR $\overline{P_R P_P} = (-11, -19, -7)$. ENTONCES, LA DISTANCIA ESTÁ DADA POR:

$$d = \frac{|\overline{P_R P_P} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|} = \frac{(-11, -19, -7) \cdot (2, -3, -6)}{7} = \frac{-22 + 57 + 42}{7} = \frac{77}{7} \therefore d = 11 u$$

QUÍMICA

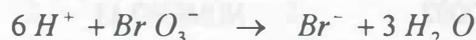
BALANCEO DE REACCIONES QUÍMICAS POR EL MÉTODO DEL "ION - ELECTRÓN" PARA ESTE CASO PARTICULAR, SE TRABAJARÁ EN MEDIO ÁCIDO CON LA REACCIÓN SIGUIENTE.



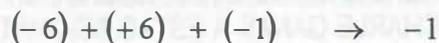
1. SE ESCRIBEN DOS SEMIREACCIONES, UNA DE OXIDACIÓN Y OTRA DE REDUCCIÓN (O BIEN, SE ASOCIAN LAS ENTIDADES QUE TIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS):



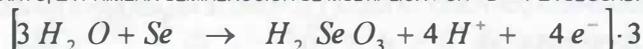
2. SE BALANCEAN LAS SEMIREACCIONES SUMANDO MOLÉCULAS DE AGUA EN DONDE HAYA DEFICIENCIA DE OXÍGENO Y SUMANDO IONES H^+ DONDE HAYA DEFICIENCIA DE HIDRÓGENO:



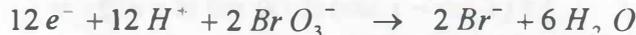
3. SE SUMAN ELECTRONES PARA QUE EL BALANCEO DE CARGA SEA IGUAL TANTO EN REACTIVOS COMO EN PRODUCTOS:



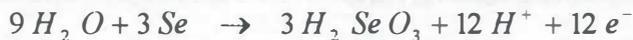
4. SE IGUALA EL NÚMERO DE ELECTRONES OBTENIENDO EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE 4 y 6 (QUE REPRESENTAN A LOS MOLES DE ELECTRONES QUE SE SUMARON) QUE ES 12. POR LO TANTO, LA PRIMERA SEMIREACCIÓN SE MULTIPLICA POR 3 Y LA SEGUNDA POR 2 Y SE TIENE QUE:



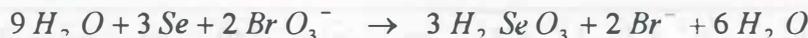
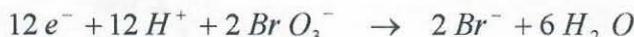
SE REALIZAN LAS OPERACIONES INDICADAS Y SE OBTIENE:



5. SE SUMAN LAS SEMIREACCIONES Y SE ELIMINAN TÉRMINOS SEMEJANTES, DE DONDE SE LLEGA A:



+



SE PUEDE SIMPLIFICAR AÚN MÁS, REDUCIENDO LOS MOLES DE AGUA Y SE TIENE QUE:



SE PUEDE OBSERVAR QUE LA REACCIÓN TOTAL ESTÁ BALANCEADA, TANTO EN MASA COMO EN CARGA

FÍSICA EXPERIMENTAL

LA MAGNITUD DEL CAMPO MAGNÉTICO EN EL CENTRO DE UNA BOBINA CIRCULAR DE RADIO "a" COLOCADA EN EL VACÍO, ESTÁ DADA POR LA

EXPRESIÓN: $B = \frac{\mu_0 i N}{2 a}$, EN LA CUAL μ_0 ES LA PERMEABILIDAD MAGNÉTICA DEL VACÍO, a ES EL RADIO DE LA BOBINA, N ES EL NÚMERO DE

ESPIRAS DE LA BOBINA E i ES LA CORRIENTE ELÉCTRICA EN DICHA BOBINA. DETERMINAR, EN EL S. I. :

A) LA EXPRESIÓN DIMENSIONAL DEL CAMPO MAGNÉTICO B, DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA i Y DEL NÚMERO DE ESPIRAS N.

B) LA EXPRESIÓN DIMENSIONAL DE LA PERMEABILIDAD MAGNÉTICA DEL VACÍO. CONSIDERAR QUE EL NÚMERO 2 QUE APARECE EN LA EXPRESIÓN ES UNA CONSTANTE ADIMENSIONAL.

A) PARA DETERMINAR LA EXPRESIÓN DIMENSIONAL DEL CAMPO MAGNÉTICO, RECORDEMOS QUE LA MAGNITUD DE LA FUERZA MAGNÉTICA (Fm) QUE ACTÚA EN UN CONDUCTOR DE LONGITUD "l", INMERSO EN UN CAMPO MAGNÉTICO B Y QUE TRANSPORTA UNA CORRIENTE ELÉCTRICA i, ESTÁ DADA POR:

$$F_m = i l B \text{ sen } \alpha$$

SI SE DESPEJA B, SE TIENE QUE:

$$B = \frac{Fm}{i \ell \text{sen } \alpha} \quad \therefore [B] = \left[\frac{Fm}{i \ell \text{sen } \alpha} \right] = \frac{[Fm]}{[i][\ell][\text{sen } \alpha]}$$

LA EXPRESIÓN DIMENSIONAL DE CADA TÉRMINO ES:

$$[Fm] = L M T^{-2}$$

$$[i] = I$$

$$[\ell] = L$$

$$[\text{sen } \alpha] = 1$$

$$\therefore [B] = \frac{L M T^{-2}}{(I)(L)(1)} = M T^{-2} I^{-1}$$

A LA CORRIENTE ELÉCTRICA i LE CORRESPONDE UNA UNIDAD DE BASE (EL AMPERE), POR LO QUE:

$$[i] = I$$

EL NÚMERO DE ESPIRAS ES UN FACTOR QUE SÓLO INDICA CANTIDAD POR LO QUE NO TIENE DIMENSIONES, ES DECIR:

$$[N] = 1$$

B) DE LA EXPRESIÓN $B = \frac{\mu_0 i N}{2 a}$ SE TIENE QUE $\mu_0 = \frac{2 a B}{i N}$. POR LO TANTO:

$$[\mu_0] = \left[\frac{2 a B}{i N} \right] = \frac{[2][a][B]}{[i][N]}$$

COMO $[2]=1$; $[a]=L$; $[B]=M T^{-2} I^{-1}$; $[i]=I$; $[N]=1$, ENTONCES, FINALMENTE SE LLEGA A:

$$[\mu_0] = \frac{(1)(L)(M T^{-2} I^{-1})}{(I)(1)} = L M T^{-2} I^2$$

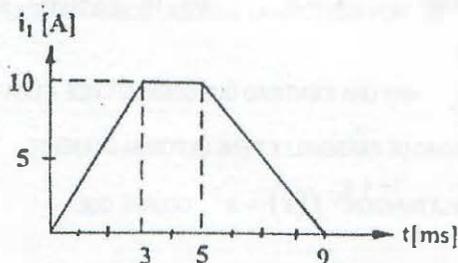
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

EN LA FIGURA SE MUESTRA UN NÚCLEO TOROIDAL DE MATERIAL FERROMAGNÉTICO ($\mu = 100 \mu_0$) SOBRE EL CUAL SE HAN DEVANADO

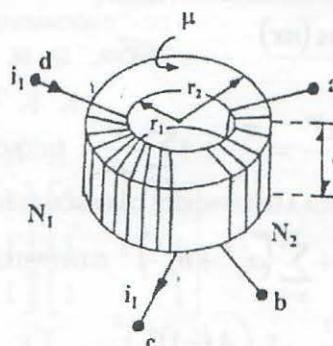
$N_1 = 850$ vueltas , POR CUYO EMBOBINADO SE HACE CIRCULAR LA CORRIENTE i_1 , QUE SE PRESENTA EN LA GRÁFICA. SOBRE EL MISMO NÚCLEO SE COLOCA

UNA BOBINA DE 25 vueltas (N_2) ; SI $r_1 = 15$ [cm], $r_2 = 20$ [cm] y $e = 4$ cm , DETERMINAR.

- EL FLUJO MAGNÉTICO A TRAVÉS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL TOROIDE, CUANDO $t = 4$ [ms].
- EL COEFICIENTE DE INDUCTANCIA MUTUA ENTRE LOS DOS EMBOBINADOS.
- LA FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA (V_{ab}) ENTRE LAS TERMINALES DE LA BOBINA, CUANDO $t = 7$ [ms].
- LA FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA (V_{cd}) EN $t = 6$ [ms].



SOLUCIÓN.



A) DE LA DEFINICIÓN: $\phi_b = \iint B \cdot dS = \iint B dS \cos \alpha$; $\alpha = 0$ y $\cos \alpha = 1$; $\phi_b = \iint B dS$

$$\phi_b = \int_0^e \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu N_1 i_1}{2 \pi r} dr de = \frac{\mu N_1 i_1 e}{2 \pi} \ln \frac{r_2}{r_1} ; \phi_b = \frac{4 \pi \times 10^{-5} (850)(10)(0.04)}{2 \pi} \ln \frac{20}{15} = 1.956 \text{ [mWb]}$$

YAQUE $i_1 = 10$ [A] en $t = 4$ [ms]

B) EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA SE OBTIENE CON $M = \frac{N_2 \phi_{21}}{i_1}$

$$\text{COMO } \mu \gg \mu_0 ; \phi_{21} = \phi_{11} = \phi_b \quad \therefore M = \frac{e \mu N_2 N_1}{2 \pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{4 \pi \times 10^{-5} (25)(850) 0.04}{2 \pi} \ln \frac{20}{15} = 4.8906 \text{ [mH]}$$

C) CON LA LEY DE FARADAY: $|V_{ab}| = M \left| \frac{di_1}{dt} \right| = 4.8906 \times 10^{-3} \left| \frac{-10}{4 \times 10^{-3}} \right| = 12.2265 [V]$

SI SE APLICA EL PRINCIPIO DE LENZ: $V_b > V_a \therefore V_{AB} = -12.2265 [V]$

D) SI SE APLICA LA LEY DE FARADAY: $|V_{cd}| = \left| L_1 \frac{di_1}{dt} \right|$

COMO $I_1 = \frac{N_1 \phi_1}{i_1} = \frac{N_1 \mu N_1 i_1 e}{i_1 2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{4 \pi \times 10^{-5} (850)^2 0.04}{2 \pi} \ln \frac{20}{15} = 0.1663 [H]$, ENTONCES SE TIENE QUE:

$|V_{cd}| = 0.1663 \left[\frac{-10}{(9-5)10^{-3}} \right] = 415.7 [V]$; DE ACUERDO CON EL PRINCIPIO DE LENZ, COMO $i_1 \downarrow$ (DISMINUYE),

$V_c > V_d \therefore V_{cd} = 415.7 [V]$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

EN EL CONJUNTO DE TODAS LAS FUNCIONES PERIÓDICAS CON PERIODO 2π DEFINIDAS EN EL SEGMENTO $[-\pi, \pi]$, CONSIDÉRESE LA FUNCIÓN $f(x) = x^2$.

OBTENER EL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE ELLA EN DICHO INTERVALO Y UTILIZAR LA IDENTIDAD DE PARSEVAL PARA CALCULAR LA SUMA DE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

SOLUCIÓN. ESTA FUNCIÓN ES PAR, ENTONCES PARA DESARROLLARLA EN UNA SERIE DE FOURIER ES SUFICIENTE CON CALCULAR LOS COEFICIENTES a_0 y a_n . DE ACUERDO CON ESTO:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right]$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] = \frac{4[(-1)^n \pi - 0]}{n^2 \pi} - \frac{4 \sin(nx)}{n^3 \pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n 4}{n^2}$$

(SE HA EMPLEADO EL MÉTODO DE "INTEGRACIÓN POR PARTES")

$x^2 - \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$; AHORA, SI SE SUSTITUYE EL VALOR $x = \pi$ EN LA IGUALDAD SE TIENE QUE:

$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ENTONCES $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. HAY UNA IDENTIDAD QUE CORRESPONDE A UNA GENERALIZACIÓN

DEL TEOREMA DE PITÁGORAS LLEVADA A UN ESPACIO DE DIMENSIÓN INFINITA; ÉSTA ES LA "IDENTIDAD DE PARSEVAL" Y TIENE LA FORMA SIGUIENTE:

$\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$. SI EN PARTICULAR NOS FIJAMOS EN LA FUNCIÓN $f(x) = x^2$, OCURRE QUE

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [x^2]^2 dx = 2 \left(\frac{\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \right)^2$; LA INTEGRAL DE LA IZQUIERDA TOMA LA FORMA $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^5}{5} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5}$

MIENTRAS QUE EL LADO DERECHO QUEDA COMO: $\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^4} = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. LUEGO, REUNIÉNDOLOS, DE ACUERDO A LA IDENTIDAD

DE PARSEVAL, SE OBTIENE: $\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9} \right) \pi^4 = \frac{8}{45} \pi^4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ, GUSTAVO BALMORI NEGRETE, RIGEL GÁMEZ LEAL, ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO, GABRIEL JARAMILLO MORALES Y AUGUSTO GUADALUPE MISS PAREDES.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 44

17 DE JULIO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI)**, ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. FALTA UN MES PARA QUE TERMINE EL SEMESTRE. ES TODO UN MES PARA RECUPERARSE Y **"CERRAR A TAMBOR BATIENTE"**. ESTUDIAR ES ALGO VALIOSO Y PRODUCTIVO. SI SE HACE CON SENCILLEZ, CONDUCE A LA SABIDURÍA Y ÉSTA AL BIEN Y A LA FELICIDAD. **¡A ESTUDIAR Y TRIUNFAR!**

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ÁLGEBRA

DEMOSTRAR QUE PARA LA MATRIZ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, SU ENÉSIMA POTENCIA ESTÁ DADA POR $A^n = 3^{n-1} A$

SOLUCIÓN.
SE UTILIZARÁ EL MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

- i) COMPROBACIÓN PARA $n=1$; $A^1 = 3^{1-1} A = 3^0 A = A$ SÍ SE CUMPLE
- ii) SE SUPONE QUE LA EXPRESIÓN SE CUMPLE PARA ALGÚN VALOR $n=k$ DE HECHO, YA SE COMPROBÓ QUE SE CUMPLE AL MENOS PARA $n=1$.

$$A^k = 3^{k-1} A \quad \dots \quad \text{HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN}$$

CON BASE EN LA HIPÓTESIS, DEBE DEMOSTRARSE QUE LA EXPRESIÓN ES CIERTA PARA $n = k + 1$

$$A^{k+1} = 3^k A \quad \dots \quad \text{AFIRMACIÓN O TESIS}$$

AL POSTMULTIPlicAR EN AMBOS LADOS DE LA HIPÓTESIS POR A SE TIENE QUE

$$\begin{aligned}
 A^k A &= 3^{k-1} A A \\
 A^{k+1} &= 3^{k-1} A A \\
 A^{k+1} &= 3^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 3^{k-1} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= 3^{k-1} \cdot 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 3^k A \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

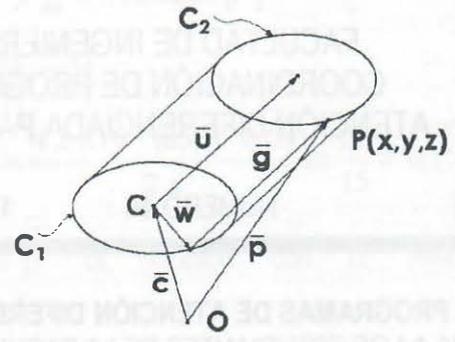
GEOMETRÍA ANALÍTICA

DETERMINAR UNA ECUACIÓN VECTORIAL, UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CILINDRO CIRCULAR OBLICUO CUYAS TRAZAS EN LOS PLANOS $z=0$ y $z=6$ SON LAS CURVAS C_1 y C_2 REPRESENTADAS POR LAS ECUACIONES

$$C_1 : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$C_2 : \begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4 \\ z = 6 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN CONSIDÉRESE LA SIGUIENTE FIGURA



SEA $\bar{c} = (1, 2, 0)$ EL VECTOR DE POSICIÓN DEL PUNTO C , CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA C_1

SEA $\bar{w} = (2 \cos \theta, 2 \text{sen} \theta, 0)$; $0 \leq \theta < 2\pi$, EL VECTOR CON ORIGEN EN EL PUNTO C Y CUYO EXTREMO VA A "RECORRER" LA CIRCUNFERENCIA C_1 CUANDO θ TOMA TODOS LOS VALORES DEL INTERVALO $[0, 2\pi)$

SEA EL VECTOR $\bar{u} = (4, 3, 6) - (1, 2, 0) = (3, 1, 6)$, PARALELO AL EJE DEL CILINDRO.

SEA \bar{g} EL VECTOR CUYO ORIGEN ESTÁ EN EL EXTREMO DEL VECTOR \bar{w} Y QUE ES PARALELO AL VECTOR \bar{u} LUEGO $\bar{g} = \lambda \bar{u} = \lambda (3, 1, 6)$; $\lambda \neq 0$

SEA \bar{p} EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO $P(x, y, z)$ QUE PERTENECE AL CILINDRO Y QUE ESTÁ EN EL EXTREMO DEL VECTOR \bar{g} LUEGO

$$\bar{p} = \bar{c} + \bar{w} + \bar{g} = (1, 2, 0) + (2 \cos \theta, 2 \text{sen} \theta, 0) + \lambda (3, 1, 6) \Rightarrow \bar{p} = (1 + 2 \cos \theta + 3\lambda, 2 + 2 \text{sen} \theta + \lambda, 6\lambda)$$

EXPRESIÓN QUE REPRESENTA UNA ECUACIÓN VECTORIAL DEL CILINDRO.

LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL CILINDRO QUE CORRESPONDEN A LA ECUACIÓN VECTORIAL OBTENIDA SON:

$$S : \begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta + 3\lambda \\ y = 2 + 2 \text{sen} \theta + \lambda \\ z = 6\lambda \end{cases} ; 0 \leq \theta < 2\pi ; \lambda \in \mathbb{R}$$

LA ECUACIÓN CARTESIANA SE PUEDE OBTENER "ELIMINANDO" LOS PARÁMETROS θ y λ DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA SUPERFICIE, COMO SIGUE:

DE LA PRIMERA ECUACIÓN: $\cos \theta = \frac{x-1-3\lambda}{2} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{(x-1-3\lambda)^2}{4}$

DE LA SEGUNDA ECUACIÓN: $\text{sen} \theta = \frac{y-2-\lambda}{2} \Rightarrow \text{sen}^2 \theta = \frac{(y-2-\lambda)^2}{4}$

DE LA TERCERA ECUACIÓN: $\lambda = \frac{z}{6}$

DE LA IDENTIDAD $\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ PARA LOS DOS PRIMEROS RESULTADOS, Y UTILIZANDO EL VALOR DE λ , SE LLEGA A

$$\frac{\left(x-1-3 \cdot \frac{z}{6}\right)^2}{4} + \frac{\left(y-2-\frac{z}{6}\right)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{(2x-z-2)^2}{16} + \frac{(6y-z-12)^2}{144} = 1$$

QUE ES LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CILINDRO.

ESTA ECUACIÓN TAMBIÉN SE PUEDE OBTENER UTILIZANDO EL MÉTODO DE LAS GENERATRICES. ASÍ, SI SE CONSIDERA COMO DIRECTRIZ A LA TRAZA EN EL PLANO $z = 0$ Y COMO GENERATRIZ A UNA FAMILIA DE RECTAS PARALELAS AL EJE DEL CILINDRO, SE TIENE QUE

$$D : \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 & \dots (a) \\ z = 0 & \dots (b) \end{cases} \quad G : \begin{cases} x = \frac{a}{c}z + \alpha = \frac{3}{6}z + \alpha = \frac{1}{2}z + \alpha & \dots (c) \\ y = \frac{b}{c}z + \beta = \frac{1}{6}z + \beta & \dots (d) \end{cases}$$

SE SUSTITUYE (b) EN (c) Y SE TIENE QUE: $x = \alpha$. SE SUSTITUYE (b) EN (d) Y SE TIENE QUE: $y = \beta$ Y AL SUSTITUIR AMBOS RESULTADOS EN (a) SE LLEGA A: $(\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 = 4 \dots$ ECUACIÓN DE CONDICIÓN

DE (c) SE OBTIENE QUE: $\alpha = x - \frac{z}{2}$ Y DE (d) QUE: $\beta = y - \frac{z}{6}$. Y CON ESTOS RESULTADOS EN LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN, SE LLEGA FINALMENTE A LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CILINDRO, ESTO ES, A:

$$\frac{(2x - z - 2)^2}{16} + \frac{(6y - z - 12)^2}{144} = 1$$

PROBABILIDAD

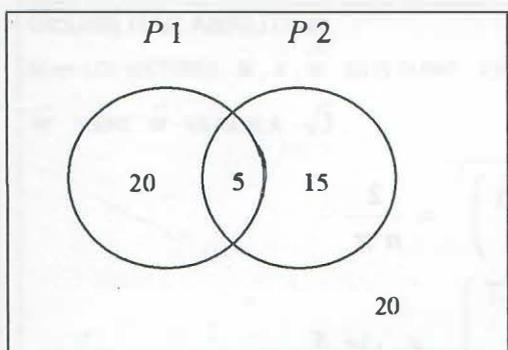
EN UN GRUPO DE ESTADÍSTICA DEL SEMESTRE 2002-1 DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNAM ESTÁN INSCRITOS 60 ALUMNOS. DE ÉSTOS, 25 PERTENECEN A UN PROGRAMA ACADÉMICO DENOMINADO $P1$; 20 A OTRO PROGRAMA DENOMINADO $P2$ Y CINCO PERTENECEN A AMBOS PROGRAMAS. SI SE SELECCIONA ALEATORIAMENTE UN ALUMNO DEL GRUPO MENCIONADO:

- A) ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ALUMNO SELECCIONADO PERTENEZCA AL MENOS A UNO DE LOS PROGRAMAS?
 B) ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ALUMNO SELECCIONADO PERTENEZCA EXACTAMENTE A UN PROGRAMA ACADÉMICO?
 C) ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ALUMNO SELECCIONADO NO PERTENEZCA A NINGUNO DE LOS PROGRAMAS ACADÉMICOS?

SOLUCIÓN. PRIMERO SE HACE UNA DEFINICIÓN DE EVENTOS COMO SIGUE:

$AP1$	ALUMNO QUE PERTENECE O ESTÁ EN UN PROGRAMA
$AP0$	ALUMNO QUE NO ESTÁ EN NINGUNO DE LOS PROGRAMAS
$A1$	ALUMNO QUE ESTÁ AL MENOS EN UNO DE LOS DOS PROGRAMAS ACADÉMICOS

AHORA SE REALIZA UN DIAGRAMA DE "VENN"



A) $P(A1) = \frac{N(A1)}{N(S)} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

B) $P(AP1) = \frac{N(AP1)}{N(S)} = \frac{35}{60}$

C) $P(AP0) = \frac{N(AP0)}{N(S)} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

DONDE:

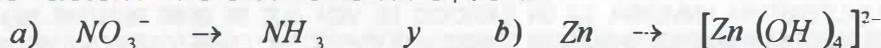
$N(S) = 60$	NÚMERO DE ALUMNOS DEL ESPACIO MUESTRAL
$N(A1) = 40$	NÚMERO DE ALUMNOS QUE ESTÁN AL MENOS EN UN PROGRAMA (EN UNO O DOS DE LOS PROGRAMAS ACADÉMICOS)
$N(AP1) = 35$	NÚMERO DE ALUMNOS QUE ESTÁN EN UN PROGRAMA ACADÉMICO
$N(AP0) = 20$	NÚMERO DE ALUMNOS QUE NO ESTÁN EN NINGUNO DE LOS PROGRAMAS ACADÉMICOS

QUÍMICA

EL EMPLEO DE NITRATOS COMO FERTILIZANTES EN AGRICULTURA SE HA CONVERTIDO EN UN FACTOR DE CONTAMINACIÓN PARA LAS AGUAS EN MUCHAS REGIONES. EL ANÁLISIS CUANTITATIVO DIRECTO DE LOS NITRATOS ES DIFÍCIL DE REALIZAR, POR LO QUE UN MÉTODO ACONSEJABLE PARA DETERMINARLOS, EN ANÁLISIS DE MUESTRAS DE AGUAS CONTAMINADAS, ES MEDIANTE SU REDUCCIÓN CON CINCO Y LA POSTERIOR DETERMINACIÓN DEL AMINÍACO FORMADO. COMPLETE Y BALANCEE LA ECUACIÓN QUÍMICA DE LA CITADA REDUCCIÓN:



SOLUCIÓN. LA REACCIÓN QUÍMICA SE LLEVA A CABO EN MEDIO BÁSICO POR LA FORMACIÓN DEL ÚLTIMO COMPUESTO. SI SE UTILIZA EL MÉTODO DEL IÓN-ELECTRÓN, LA ECUACIÓN QUÍMICA GLOBAL SE PUEDE DESCOMPONER EN DOS SEMIREACCIONES, QUE SON:



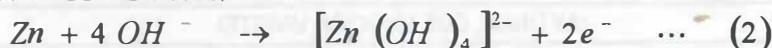
EL BALANCEO DE LA PRIMERA SEMIREACCIÓN DA LUGAR A:



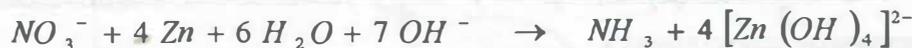
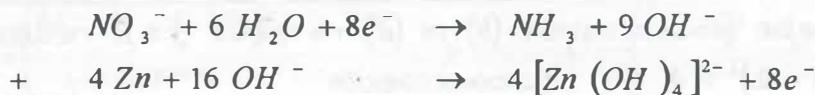
QUE SE SIMPLIFICA A:



MIENTRAS QUE LA SEGUNDA SEMIREACCIÓN SE EXPRESA COMO:



ANTES DE SUMAR LAS ECUACIONES (1) Y (2), SE DEBE VERIFICAR QUE EL NÚMERO DE ELECTRONES PERDIDOS Y GANADOS SEA EL MISMO. ESTO IMPLICA MULTIPLICAR LA ECUACIÓN (2) POR 4. ENTONCES SE TIENE QUE:



ES ACONSEJABLE, POR ÚLTIMO, CORROBORAR QUE LA ECUACIÓN QUÍMICA SE ENCUENTRA BALANCEADA, TANTO EN ESPECIES QUÍMICAS, COMO EN CARGAS ELÉCTRICAS. LA ECUACIÓN QUÍMICA ANTERIOR, COMO SE OBSERVA, SATISFACE ESTOS REQUISITOS.

MATEMÁTICAS AVANZADAS

SEA LA FUNCIÓN f CUYA SERIE DE FOURIER EN FORMA COMPLEJA ES $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} i e^{i n \pi t}$. DETERMINAR:

a) SU SERIE TRIGONOMÉTRICA Y b) SU SERIE EN FORMA ARMÓNICA

SOLUCIÓN. DEL ARGUMENTO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL SE TIENE QUE $\omega_0 = \pi$. COMO $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, ENTONCES $T = 2$

$$a) \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \Rightarrow 2c_n = a_n - i b_n$$

$$\text{ENTONCES } a_n - i b_n = \frac{2}{n\pi} (-1)^n i, \text{ POR LO QUE } a_n = 0; \quad b_n = -\frac{2}{n\pi} (-1)^n = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

ADEMÁS $c_0 = 0$, DE DONDE $a_0 = 0$

ENTONCES, LA FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LA SERIE ES:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \text{sen}(n\pi t)$$

$$b) \quad c_0 = 0; \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \text{ ENTONCES } c_n = \sqrt{\left(\frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}\right)^2} = \frac{2}{n\pi}$$

$$\delta_n = \text{ang tan} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right) = \text{ang tan} \left(-\frac{\frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}}{0} \right) = (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

POR LO QUE, LA SERIE, EN FORMA ARMÓNICA, QUEDA COMO:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cos \left(n\pi t + (-1)^n \frac{\pi}{2} \right)$$

TUTORÍA

LA COPADI AGRADECE A LA DIVISIÓN DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES, Y EN PARTICULAR A LOS PROFESORES DE LA ASIGNATURA CULTURA Y COMUNICACIÓN POR EL VALIOSO APOYO AL PROGRAMA "TUTORÍA PARA TODOS", YA QUE A TRAVÉS DE ESTOS DOCENTES Y SU ASIGNATURA, SE PODRÁ DAR UN SEGUIMIENTO MAS EFICIENTE A LA TUTORÍA Y TAMBIÉN HABRÁ POSIBILIDAD DE EVALUAR ESTE NOBLE SERVICIO ACADÉMICO. ASÍ PUES, ALUMNOS Y TUTORES, A TRABAJAR POR EL BIEN DE USTEDES, DE LA FACULTAD, DE NUESTRA QUERIDA UNIVERSIDAD Y DE LA SOCIEDAD, QUIEN RECIBIRÁ FINALMENTE LOS BENEFICIOS DEL QUEHACER PROFESIONAL DE INGENIERAS E INGENIEROS MEJOR PREPARADOS, TANTO EN LA TÉCNICA COMO EN EL OFICIO DE SERES HUMANOS CAPACES DE REALIZARSE PLENAMENTE Y LLEVAR UNA VIDA Y UN TRABAJO DIGNOS.

CULTURA

LEER OBRAS MAESTRAS DE LA LITERATURA UNIVERSAL ES UN EJERCICIO DE VIDA QUE SE DEBE REALIZAR SIEMPRE. LEER NOS PERMITE RELACIONARNOS CON GRANDES AUTORES A QUIENES NI SIQUIERA CONOCEMOS Y VER CÓMO ENFRENTARON SITUACIONES DIVERSAS QUE SE NOS PODRÍAN PRESENTAR EN NUESTRAS VIDAS. LEER ES VIAJAR POR EL PENSAMIENTO Y REFLEXIÓN DE NUMEROSOS SERES HUMANOS Y COMPARTIR CON ELLOS LA MAGIA, EL MISTERIO Y LA BELLEZA DE LA VIDA Y DE MUCHAS DE SUS MANIFESTACIONES. LEER ES DARNOS LA OPORTUNIDAD DE REÍR Y LLORAR, DE SOÑAR E IMAGINAR, DE SENTIR Y PRESENTIR. LEER ES LA MEJOR COMPAÑÍA QUE SE PUEDA TENER, PORQUE LA LECTURA INVOLUCRA A SERES HUMANOS Y SENTIMIENTOS.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ, MIGUEL EDUARDO GONZÁLEZ CÁRDENAS Y ROGELIO SOTO AYALA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRAÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



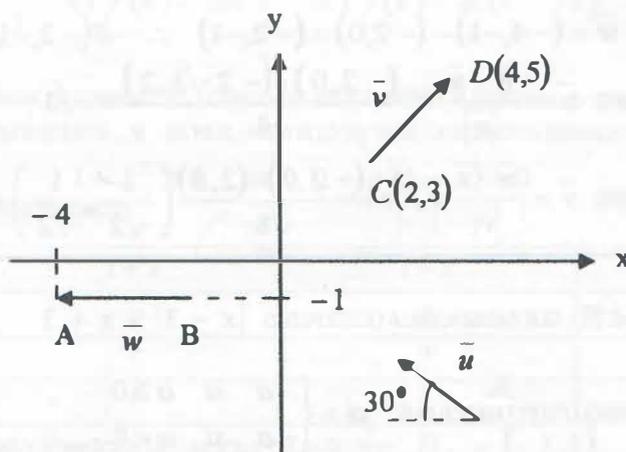
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. COMIENZA UN NUEVO SEMESTRE Y ES TIEMPO DE REFLEXIÓN, ASÍ COMO DE PROPONERSE NUEVAS METAS COMO ESTUDIAR, ADQUIRIR CONOCIMIENTOS, HACER AMIGOS Y ACTUAR CON SENCILLEZ. ¡BIENVENIDOS LOS ESTUDIANTES DE NUEVO INGRESO DE LA GENERACIÓN 2003! ESTA PUBLICACIÓN LES DESEA LO MEJOR DE LA VIDA Y ÉXITO EN SUS ESTUDIOS DE INGENIERÍA.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEAN LOS VECTORES \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} EN EL PLANO xy QUE SE MUESTRAN EN LA FIGURA, TALES QUE $|\vec{u}| = 4$ Y EL MÓDULO DE LA COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{w} SOBRE \vec{u} ES IGUALA $\sqrt{3}$.



DETERMINAR:

- | | |
|---|---|
| A) LA COMPONENTE ESCALAR DE \vec{v} SOBRE \vec{u} . | B) LA COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{v} SOBRE \vec{u} . |
| C) LA COMPONENTE ESCALAR DE \vec{u} SOBRE \vec{w} . | D) LA COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{u} SOBRE \vec{w} . |
| E) LAS COORDENADAS DEL PUNTO B . | F) LA COMPONENTE ESCALAR DE \vec{w} SOBRE \vec{u} . |
| G) LA COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{w} SOBRE \vec{v} . | |

RESOLUCIÓN.

COSENOS DIRECTORES DE \vec{u} : $\alpha = 150^\circ$ y $\beta = 60^\circ$. LUEGO, EL VECTOR UNITARIO EN LA DIRECCIÓN DE \vec{u} ESTÁ DADO POR

$$\vec{u}_u = (\cos 150^\circ, \cos 60^\circ) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ Y COMO } |\vec{u}| = 4 \text{ , ENTONCES SE TIENE QUE: } \vec{u} = 4\vec{u}_u = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-2\sqrt{3}, 2)$$

ADEMÁS, COMO EL VECTOR \vec{v} ES IGUAL A LA RESTA DE LOS VECTORES DE POSICIÓN DE LOS PUNTOS D y C SE TIENE QUE:

$$\vec{v} = \vec{d} - \vec{c} = (4, 5) - (2, 3) = (2, 2) \text{ Y SE PUEDE ESCRIBIR QUE } \vec{w} = (-w_1, 0)$$

A) COMPONENTE ESCALAR DE \vec{v} SOBRE $\vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(2, 2) \cdot (-2\sqrt{3}, 2)}{4} = 1 - \sqrt{3}$

B) COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{v} SOBRE $\vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} \vec{u}_u = (1 - \sqrt{3}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \right)$

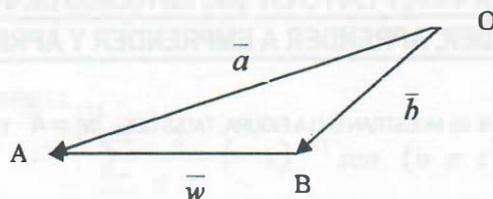
C) COMPONENTE ESCALAR DE \vec{u} SOBRE $\vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{(-2\sqrt{3}, 2) \cdot (-w_1, 0)}{w_1} = 2\sqrt{3}$

D) COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{u} SOBRE $\vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} \vec{w}_u = 2\sqrt{3} \frac{(-w_1, 0)}{w_1} = (-2\sqrt{3}, 0)$

E) PARA OBTENER EL PUNTO B ES NECESARIO CONOCER \vec{w} . SE SABE QUE LA COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{w} SOBRE \vec{u} ES $\sqrt{3}$. LUEGO LA COMPONENTE ESCALAR DE \vec{w} SOBRE \vec{u} ES $-\sqrt{3}$ ó $\sqrt{3}$. PERO LA COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{w} SOBRE \vec{u} TIENE DIRECCIÓN IGUAL A LA DE \vec{u}_u , POR LO QUE LA COMPONENTE ESCALAR DE \vec{w} SOBRE \vec{u} ES POSITIVA. ENTONCES, LA COMPONENTE ESCALAR DE \vec{w} SOBRE \vec{u} ES IGUAL A $\sqrt{3}$. ESTO ES,

$$\frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(-w_1, 0) \cdot (-2\sqrt{3}, 2)}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}w_1}{4} = \sqrt{3} \therefore w_1 = 2 \therefore \vec{w} = (-2, 0)$$

SI SE CONSIDERA LA FIGURA SIGUIENTE



SE VE QUE $\vec{b} + \vec{w} = \vec{a} \therefore \vec{b} = \vec{a} - \vec{w} = (-4, -1) - (-2, 0) = (-2, -1) \therefore B(-2, -1)$

F) COMPONENTE ESCALAR DE \vec{w} SOBRE $\vec{u} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(-2, 0) \cdot (-2\sqrt{3}, 2)}{4} = \sqrt{3}$

G) COMPONENTE VECTORIAL DE \vec{w} SOBRE $\vec{v} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \vec{v}_u = \frac{(-2, 0) \cdot (2, 2)}{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-4}{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (-1, 1)$

ÁLGEBRA

DETERMINAR EL CONJUNTO DE VALORES DE $x \in \mathfrak{R}$ QUE SATISFACEN LA DESIGUALDAD $|x - 3| > x + 3$

SOLUCIÓN. DADO QUE LA DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO ESTABLECE QUE $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

SE TIENEN DOS CASOS:

CASO 1 : $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ y $|x - 3| = x - 3$

POR LO QUE $x - 3 > x + 3 \Rightarrow -3 > 3$ QUE ES IMPOSIBLE. LUEGO ESTE CASO NO SE CUMPLE.

CASO 2 : $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$ y $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$

ENTONCES $-x + 3 > x + 3 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$

COMO $x < 3$ A LA VEZ QUE $x < 0$ LA SOLUCIÓN ES $S = \{x | x \in \mathfrak{R}, x < 0\}$

FÍSICA EXPERIMENTAL

EN UN EXPERIMENTO SE DEJÓ RODAR, SIN FRICCIÓN, UN MÓVIL A LO LARGO DE UN PLANO INCLINADO DE 80 [cm] DE LARGO Y QUE FORMABA $\frac{\pi}{12} \text{ [rad]}$ CON RESPECTO A LA HORIZONTAL. SABRIENDO QUE A PARTIR DE LAS MEDICIONES SE OBTUVO EL MODELO MATEMÁTICO:

$$x \text{ [m]} = 1.279 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] z \text{ [s}^2\text{]} + 0.001 \text{ [m]} \text{ EN EL CUAL } x \text{ ES EL DESPLAZAMIENTO, } z = t^2 \text{ Y QUE LA MASA DEL MÓVIL ERA } 55 \text{ [g]}$$

DETERMINAR:

A) LA ACELERACIÓN DEL MÓVIL CUANDO HA RECORRIDO LA MITAD DEL PLANO, ES DECIR, SI $x = 40 \text{ [cm]}$ Y CUANDO HA RECORRIDO EL PLANO EN SU TOTALIDAD, ES DECIR, CUANDO $x = 80 \text{ [cm]}$.

B) LA RAPIDEZ DEL MÓVIL CUANDO HA RECORRIDO 80 [cm] SI TARDÓ 0.791 [s] EN RECORRERLOS.
SOLUCIÓN.

A) MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO (M.U.A.) $\Rightarrow a = \text{cte.}$

$$\text{POR EL MOVIMIENTO SE TIENE QUE: } x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \quad ; \quad v_0 = 0$$

$$\text{SI SE COMPARA CON EL MODELO OBTENIDO EXPERIMENTALMENTE Y SE HACE } \mu = \frac{1}{2} a = 1.279$$

$$\text{DE DONDE } a = 2 \mu = 2(1.279) = 2.558 \quad \therefore a = 2.558 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

$$B) \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [1.279 t^2 + 0.001] = 2(1.279) t = 2.558 t$$

$$v(0.791) = 2.558 (0.791) = 2.0234 \quad \therefore v = 2.0234 \left[\frac{m}{s} \right]$$

CÁLCULO I

DAR EL DOMINIO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

$$i) f(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad ii) f(x) = +\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2} \quad iii) f(x) = \frac{5-x}{x^2-x-12}$$

$$iv) f(x) = +\sqrt{\frac{5x}{x-3}} \quad v) f(x) = \tan x \quad vi) f(x) = \ln(4-3x) \quad vii) f(x) = e^{4-x}$$

SOLUCIÓN.

i) $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, BASTA CON ANALIZAR PARA QUÉ VALORES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE x , LA VARIABLE DEPENDIENTE y ES REAL. PARA ELLO SE TIENE LA SIGUIENTE DESIGUALDAD:

$$1 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (1+x)(1-x) \geq 0$$

QUE SE PUEDE RESOLVER MEDIANTE EL SIGUIENTE CUADRO:

INTERVALOS EN "x"	$1+x$	$1-x$	$(1+x)(1-x)$
$(-\infty, -1)$	-	+	-
$(-1, 1)$	+	+	+
$(1, \infty)$	+	-	-

POR LO TANTO, LA SOLUCIÓN DE LA DESIGUALDAD Y DOMINIO DE LA FUNCIÓN ESTÁ DADO POR: $D_f = [-1, 1]$.

TAMBIÉN SE PODRÍA OBTENER MEDIANTE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. SI SE ELEVAN AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS DE LA EXPRESIÓN QUE DEFINIÓ A LA FUNCIÓN Y SE REALIZAN ALGUNOS ARREGLOS SE TIENE QUE:

$$y = -\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad y^2 = 1-x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

QUE ES LA ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y RADIO IGUAL A LA UNIDAD. EL SIGNO NEGATIVO SIGNIFICA QUE SE TRATA DE LA PARTE INFERIOR DE LA CURVA. LUEGO EL DOMINIO ES EL OBTENIDO CON ANTERIORIDAD, ES DECIR, $D_f = [-1, 1]$.

$$ii) f(x) = +\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}. \text{ PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, SE TIENE LA DESIGUALDAD:}$$

$$25 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (5-x)(5+x) \geq 0$$

QUE SE PUEDE RESOLVER COMO LA ANTERIOR MEDIANTE UN CUADRO DE SIGNOS O BIEN DE LA MANERA TRADICIONAL COMO SIGUE:

$$1^{\text{a}} \text{ posibilidad: } \begin{aligned} 5-x < 0 &\Rightarrow -x < -5 \Rightarrow x > 5 \\ 5+x < 0 &\Rightarrow x < -5 \end{aligned} \quad \therefore \text{no tiene solución}$$

$$2^{\text{a}} \text{ posibilidad: } \begin{aligned} 5-x > 0 &\Rightarrow -x > -5 \Rightarrow x < 5 \\ 5+x > 0 &\Rightarrow x > -5 \end{aligned} \quad \therefore \text{solución: } -5 < x < 5$$

Y ENTONCES EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES: $D_f = [-5, 5]$.

TAMBIÉN, A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA SE PUEDE ENCONTRAR EL DOMINIO COMO SIGUE:

$$y = +\frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2} \quad ; \quad y^2 = \frac{16}{25}(25 - x^2) \Rightarrow 25y^2 = 400 - 16x^2 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$$

Y FINALMENTE $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ QUE ES UNA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y SEMIEJES 5 y 6 RESPECTIVAMENTE. Y EL SIGNO POSITIVO

SIGNIFICA QUE SE TIENE LA PARTE SUPERIOR DE LA CÓNICA. POR LO TANTO, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES $D_f = [-5, 5]$.

iii) $f(x) = \frac{5-x}{x^2-x-12}$. PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, SE BUSCA, MEDIANTE UNA FACTORIZACIÓN, PARA

QUÉ VALORES DE LA VARIABLE "x" SE ANULA EL DENOMINADOR, LO QUE HARÍA QUE LA FUNCIÓN NO EXISTIERA. LUEGO SE TIENE QUE:

$$f(x) = \frac{5-x}{(x-4)(x+3)} \quad \text{DE DONDE, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES: } D_f = \mathbb{R} - \{3, 4\}.$$

iv) $f(x) = +\sqrt{\frac{5x}{x-3}}$. PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, EL DOMINIO SE PUEDE OBTENER CON UNA TABLA DE SIGNOS PARA RESOLVER LA

DESIGUALDAD QUE SE PRESENTA Y TOMANDO EN CONSIDERACIÓN QUE EL DENOMINADOR NO PUEDE SER NULO. ASÍ SE TIENE QUE:

INTERVALOS EN "x"	5x	x-3	$\frac{5x}{x-3}$
$(-\infty, 0)$	-	-	+
$(0, 3)$	+	-	-
$(3, \infty)$	+	+	+

POR LO TANTO, LA SOLUCIÓN DE LA DESIGUALDAD Y DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES: $D_f = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.

ESTE DOMINIO TAMBIÉN SE PODRÍA ENCONTRAR MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE LA DESIGUALDAD POR OTROS MÉTODOS.

v) $f(x) = \tan x$. ESTA FUNCIÓN TAMBIÉN SE PUEDE EXPRESAR COMO $f(x) = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ Y ENTONCES, PARA DETERMINAR SU DOMINIO,

HABRÍA QUE ELIMINAR EN EL CONJUNTO DE LOS VALORES REALES DE "x" AQUELLOS VALORES PARA LOS CUALES EL COSENO ES CERO, QUE SON LOS NÚMEROS

IMPARES, POSITIVOS Y NEGATIVOS, QUE MULTIPLICAN A $\frac{\pi}{2}$. LUEGO EL DOMINIO QUEDA COMO: $D_f = \mathbb{R} - (2n-1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$ (enteros).

vi) $f(x) = \ln(4-3x)$. PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN BASTA CON RECORDAR QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL ES EL INTERVALO $(0, \infty)$. LUEGO SE TIENE QUE:

$$4 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -4 \Rightarrow 3x < 4 \Rightarrow x < \frac{4}{3} \quad \therefore D_f = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$$

vii) $f(x) = e^{4-x}$. PARA DETERMINAR EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN BASTA CON RECORDAR QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL ES EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES. ASÍ, SE LLEGA A:

$$x \in \mathbb{R} \quad \therefore D_f = \mathbb{R}$$

TUTORÍA

¡ATENCIÓN ALUMNOS DE PRIMER INGRESO!

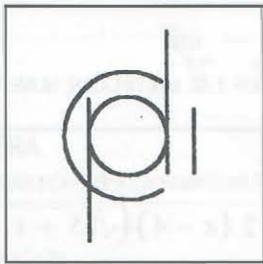
ES IMPORTANTE QUE SE ENTREVISTEN CON SU TUTOR Y COMIENCEN A INTERACTUAR CON ÉL. APARTE DE QUE PUEDE SER FUNDAMENTAL EN SUS ESTUDIOS, YA QUE ES UN AMIGO, UN APOYO PARA TODO LO QUE VIVAN EN LA FACULTAD, HAY BECAS EN LAS QUE ES INDISPENSABLE QUE SE TENGA TUTOR.

APROVECHEN ESTE SERVICIO ACADÉMICO Y BUSQUEN A SU TUTOR. SI TIENEN ALGUNA DUDA O NO PUEDEN ESTABLECER CONTACTO CON ÉL, VENGAN A LA **COPADI** Y HABLEN CON LA LIC. MARÍA ELENA CANO, DE LAS 8:30 A LAS 16:30 HORAS.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA,
RIGEL GÁMEZ LEAL Y LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTUDIANTES: APROVECHEN TODAS LAS ASESORÍAS GRUPALES E INDIVIDUALES QUE DA LA COPADI CON **ESTUDIANTES QUE APOYAN A ESTUDIANTES**. SON MAGNÍFICAS OPORTUNIDADES PARA RESOLVER DUDAS, APRENDER Y REAFIRMAR CONOCIMIENTOS.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO I

RESOLVER LOS SIGUIENTES LÍMITES:

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 6}{8 - x^3} \quad ii) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{27 + x^3}{x^2 - 6x - 27} \quad iii) \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{6x^2 + 7x + 2}{\frac{4}{9} - x^2} \quad iv) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{85 + x} - 9}{2x^2 - 32}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{6 - x}}{\sqrt{x + 20} - 5} \quad vi) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10 - x} - 2}{2 - x} \quad vii) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt[4]{22 - x} - 2}{4 - \sqrt{22 - x}} \quad viii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^6 - 21}}{4 - 3x^3}$$

RESOLUCIÓN.

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 6}{8 - x^3} \text{ SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE INDEPENDIENTE } x \text{ Y SE LLEGA A } \frac{2(2)^2 - 5(2) + 6}{8 - (2)^3} = \frac{4}{0} \rightarrow \infty$$

Y POR LO TANTO EL LÍMITE NO EXISTE.

$$ii) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{27 + x^3}{x^2 - 6x - 27} \text{ SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE INDEPENDIENTE } x \text{ Y SE LLEGA A } \frac{27 + (-3)^3}{(-3)^2 - 6(-3) - 27} = \frac{0}{0} \text{, QUE}$$

ES UNA INDETERMINACIÓN. PARA QUITARLA SE FACTORIZAN NUMERADOR Y DENOMINADOR Y SE TIENE QUE:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(3+x)(9-3x+x^2)}{(x+3)(x-9)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-3x+x^2}{x-9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{9-3(-3)+(-3)^2}{-3-9} = \frac{9+9+9}{-12} = \frac{27}{-12} = -\frac{9}{4}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{6x^2 + 7x + 2}{\frac{4}{9} - x^2} \text{ SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE INDEPENDIENTE } x \text{ Y SE LLEGA A}$$

$$\frac{6\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 7\left(-\frac{2}{3}\right) + 2}{\frac{4}{9} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{14}{3} + 2}{\frac{4}{9} - \frac{4}{9}} = \frac{0}{0} \text{, QUE ES UNA INDETERMINACIÓN. PARA QUITARLA SE FACTORIZAN NUMERADOR Y DENOMINADOR Y SE}$$

TIENE QUE:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)(6x + 3)}{\left(\frac{2}{3} + x\right)\left(\frac{2}{3} - x\right)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{6x + 3}{\frac{2}{3} - x} = \frac{6\left(-\frac{2}{3}\right) + 3}{\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

iv) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{85+x}-9}{2x^2-32}$. SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE INDEPENDIENTE x Y SE LLEGA A

$$\frac{\sqrt{85+(-4)}-9}{2(-4)^2-32} = \frac{\sqrt{81}-9}{32-32} = \frac{0}{0}$$

QUE ES UNA INDETERMINACIÓN. PARA QUITARLA SE FACTORIZA EL DENOMINADOR Y SE MULTIPLICAN, NUMERADOR Y

DENOMINADOR POR EL BINOMIO CONJUGADO DEL NUMERADOR. ASÍ SE LLEGA A:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(\sqrt{85+x}-9)(\sqrt{85+x}+9)}{2(x+4)(x-4)(\sqrt{85+x}+9)} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{85+x-81}{2(x+4)(x-4)(\sqrt{85+x}+9)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{2(x-4)(\sqrt{85+x}+9)} \\ &= \frac{1}{2(-8)(9+9)} = -\frac{1}{288} \end{aligned}$$

v) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+20}-5}$. SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE INDEPENDIENTE x Y SE LLEGA A $\frac{1-\sqrt{6-5}}{\sqrt{5+20}-5} = \frac{1-1}{5-5} = \frac{0}{0}$, QUE

ES UNA INDETERMINACIÓN. PARA QUITARLA SE MULTIPLICAN, NUMERADOR Y DENOMINADOR, POR EL BINOMIO CONJUGADO DEL NUMERADOR Y DEL DENOMINADOR. ASÍ SE LLEGA A:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+20}-5} \cdot \frac{1+\sqrt{6-x}}{1+\sqrt{6-x}} \cdot \frac{\sqrt{x+20}+5}{\sqrt{x+20}+5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{[1-(6-x)](\sqrt{x+20}+5)}{(x+20-25)(1+\sqrt{6-x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x+20}+5)}{(x-5)(1+\sqrt{6-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+20}+5}{1+\sqrt{6-x}} = \frac{5+5}{1+1} = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

vi) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{2-x}$. SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE INDEPENDIENTE x Y SE LLEGA A $\frac{\sqrt[3]{8}-2}{2-2} = \frac{0}{0}$, QUE ES UNA

INDETERMINACIÓN. PARA QUITARLA SE MULTIPLICAN, NUMERADOR Y DENOMINADOR, POR EL TRINOMIO QUE TRANSFORMA EL NUMERADOR DE LA EXPRESIÓN ORIGINAL EN UNA DIFERENCIA DE CUBOS. ASÍ SE TIENE QUE

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{2-x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4}{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(10-x-8)}{(2-x)(\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER ESTE LÍMITE ES MEDIANTE EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE:

$$\begin{aligned} u^3 = 10-x \Rightarrow x = 10-u^3 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (10-x) &= \lim_{u \rightarrow ?} u^3 \Rightarrow u \rightarrow 2 \quad \therefore \lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{u^3}-2}{2-(10-u^3)} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u-2}{u^3-8} \\ &= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u-2}{(u-2)(u^2+2u+4)} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{1}{u^2+2u+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

vii) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt[4]{22-x}-2}{4-\sqrt{22-x}}$. SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE INDEPENDIENTE x Y SE LLEGA A $\frac{\sqrt[4]{22-6}-2}{4-\sqrt{22-6}} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}$

QUE ES UNA INDETERMINACIÓN. PARA QUITARLA SE CAMBIA EL RADICANDO COMÚN DE AMBAS RAÍCES POR UNA NUEVA VARIABLE ELEVADA A UN EXPONENTE QUE ES EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE LOS ÍNDICES DE LAS RAÍCES. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\begin{aligned} 22-x = u^4 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 6} (22-x) &= \lim_{u \rightarrow ?} u^4 \Rightarrow u \rightarrow 2 \quad \therefore \lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{u^4}-2}{4-\sqrt{u^4}} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u-2}{4-u^2} \\ &= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u-2}{(2-u)(2+u)} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{-(2-u)}{(2-u)(2+u)} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{-1}{(2+u)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

viii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^6}-21}{4-3x^3}$. SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE INDEPENDIENTE x Y SE LLEGA A $\frac{\sqrt{5(\infty)^6}-21}{4-3(\infty)^3} = \frac{\infty}{\infty}$ QUE ES

UNA INDETERMINACIÓN. PARA QUITARLA SE DIVIDEN, NUMERADOR Y DENOMINADOR, ENTRE LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE QUE EN ESTE CASO ES x^3 . EL OBJETO DE ESTO ES LOGRAR QUE LA VARIABLE APAREZCA COMO DENOMINADOR SIEMPRE Y ASÍ LA DIVISIÓN ENTRE ELLA, CUANDO TIENDE A ∞ ES CERO DE ESTA FORMA, SE TIENE QUE:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^6 - 21}}{4 - 3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{5x^6}{x^6} - \frac{21}{x^6}}}{\frac{4}{x^3} - \frac{3x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{21}{x^6}}}{\frac{4}{x^3} - 3} = \frac{\sqrt{5}}{-3} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ALGEBRA

DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA QUE PARA TODO ENTERO POSITIVO "n" SE CUMPLE QUE

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

DEMOSTRACIÓN

PARA $n = 1$ SE TIENE QUE $1 = 1$

PARA $n = k$ SE TIENE QUE $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$ HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

PARA $n = k + 1$ SE TIENE QUE $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + [2(k+1)-1]^3 = (k+1)^2[2(k+1)^2 - 1]$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k+1)^3 = (k+1)^2(2k^2 + 4k + 1)$$

SE SUMA $(2k+1)^3$ EN AMBOS MIEMBROS DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y SE LLEGA A:

$$\begin{aligned} 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + (2k+1)^3 &= k^2(2k^2 - 1) + (2k+1)^3 \\ &= 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ &= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 \end{aligned}$$

SI SE REALIZA LA DIVISIÓN ALGEBRAICA DE ESTE POLINOMIO ENTRE $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ SE OBTIENE EL POLINOMIO $2k^2 + 4k + 1$, ES DECIR, QUE SE OBTIENE QUE $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + (2k+1)^3 = (k+1)^2(2k^2 + 4k + 1)$ LO QUE PRUEBA QUE PARA $n = k + 1$ ES VERDADERA Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN.

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES QUE SE VUELVEN INMEDIATAS MEDIANTE UN CAMBIO DE VARIABLE:

$$i) \int \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{\frac{3}{2}})^2} dv \quad ii) \int \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^3} \quad iii) \int \cot^5 x \sec^2 x dx \quad iv) \int \frac{(\ln x)^{-3}}{x} dx \quad v) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad vi) \int \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}}$$

RESOLUCIÓN.

$$i) \int \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{\frac{3}{2}})^2} dv \quad u = 1 + v^{\frac{3}{2}} \Rightarrow du = \frac{3}{2}v^{\frac{1}{2}} dv \quad \therefore \frac{10}{\frac{3}{2}} \int \frac{du}{u^2} = \frac{20}{3} \int u^{-2} du = \frac{20}{3} \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{20}{3(1+v^{\frac{3}{2}})} + C$$

$$ii) \int \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^3} \quad u = 1 + \sqrt{y} \Rightarrow du = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \quad \therefore \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(1+\sqrt{y})^2} + C$$

$$iii) \int \cot^5 x \sec^2 x dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^5 x} dx \quad u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx \quad \therefore \int \frac{du}{u^5} = \int u^{-5} du = \frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4 \tan^4 x} + C$$

$$iv) \int \frac{(\ln x)^{-3}}{x} dx \quad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \quad \therefore \int u^{-3} du = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + C$$

$$v) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} \quad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \quad \therefore \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

$$vi) \int \frac{x dx}{\sqrt{2x-1}} \quad u^2 = 2x-1 \quad ; \quad x = \frac{u^2+1}{2} \Rightarrow dx = u du \quad \therefore \int \frac{\frac{u^2+1}{2} u du}{\sqrt{u^2}} = \frac{1}{2} \int (u^2+1) du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} + u \right) + C$$

$$= \frac{u^3}{6} + \frac{u}{2} + C = \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER POR EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES, LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$i) 3e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0 \quad ii) y' \tan x = y$$

SOLUCIÓN.

i) $3e^x \tan y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$. SE DIVIDEN AMBOS MIEMBROS DE LA ECUACIÓN ENTRE EL PRODUCTO $(1 - e^x) \tan y$ Y SE TIENE QUE:

$$\frac{3e^x \tan y}{(1 - e^x) \tan y} \, dx + \frac{(1 - e^x) \sec^2 y}{(1 - e^x) \tan y} \, dy = 0 \Rightarrow \frac{3e^x}{1 - e^x} \, dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} \, dy = 0$$

AHORA SE RESUELVEN LAS DOS INTEGRALES Y SE OBTIENE LO SIGUIENTE: $\int \frac{3e^x}{1 - e^x} \, dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} \, dy = 0$

PARA LA PRIMERA INTEGRAL SE HACE EL CAMBIO DE VARIABLE: $u = 1 - e^x \Rightarrow du = -e^x \, dx$

Y PARA LA SEGUNDA, EL CAMBIO DE VARIABLE ES EL SIGUIENTE: $v = \tan y \Rightarrow dv = \sec^2 y \, dy$

SE REALIZAN LAS CORRESPONDIENTES SUSTITUCIONES Y SE RESUELVEN LAS INTEGRALES OBTENIDAS, DE DONDE:

$$-3 \int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{v} = 0 \Rightarrow -3 \ln u + \ln v = C_1 \Rightarrow -3 \ln(1 - e^x) + \ln \tan y = C_1$$

POR PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

$$\ln \frac{\tan y}{(1 - e^x)^3} = C_1 \Rightarrow e^{\ln \frac{\tan y}{(1 - e^x)^3}} = e^{C_1} \Rightarrow \frac{\tan y}{(1 - e^x)^3} = C \Rightarrow \tan y = C(1 - e^x)^3 \Rightarrow y = \text{ang} \tan C(1 - e^x)^3$$

ii) $y' \tan x = y$. SE REALIZAN LAS OPERACIONES NECESARIAS PARA PASAR TODO AL PRIMER MIEMBRO DE LA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE LAS DIFERENCIALES DE x y y , DE DONDE SE TIENE QUE:

$$\tan x \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \tan x \, dy = y \, dx \Rightarrow y \, dx - \tan x \, dy = 0$$

AHORA SE DIVIDEN AMBOS MIEMBROS ENTRE EL PRODUCTO $y \tan x$ Y YA SEPARADAS LAS VARIABLES SE FORMAN LAS RESPECTIVAS INTEGRALES. ASÍ,

$$\frac{y \, dx}{y \tan x} - \frac{\tan x \, dy}{y \tan x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{\tan x} - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \int \cot x \, dx - \int \frac{dy}{y} = 0$$

EN LAS DOS INTEGRALES SE APLICAN LAS FÓRMULAS CORRESPONDIENTES Y DESPUÉS SE HACEN LOS ARREGLOS MATEMÁTICOS NECESARIOS, DE DONDE:

$$\ln(\text{sen} x) - \ln y = C_1 \Rightarrow \ln \frac{\text{sen} x}{y} = C_1 \Rightarrow e^{\ln \frac{\text{sen} x}{y}} = e^{C_1} \Rightarrow \frac{\text{sen} x}{y} = C_2 \Rightarrow y = C \text{sen} x$$

CULTURA

SER OTRO

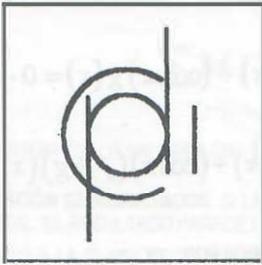
NO HAY SER HUMANO QUE NO QUIERA SER OTRO
Y METERSE EN ESE OTRO COMO EN UNA ESCAFANDRA
COMO EN UN AURA TAL VEZ O EN UNA BRUMA
EN UN SEDUCTOR O EN UN ASCETA
EN UN AVENTURERO O UN BOYANTE

SÓLO YO NO QUISERA SER OTRO
MEJOR DICHO YO
QUISIERA SER YO
PERO UN POCO MEJOR

MARIO BENEDETTI

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



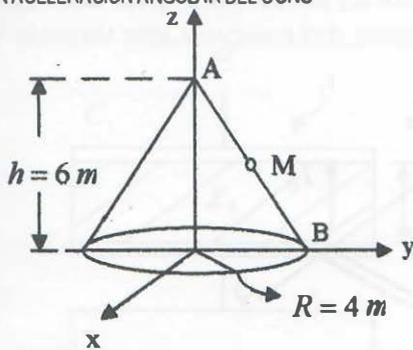
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. LA UNAM ES EL MEJOR LUGAR PARA FORMARSE. ¡QUÉ HONOR ESTAR!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CINEMÁTICA

EL CONO DE LA FIGURA GIRA RESPECTO AL EJE "z". SI SE SABE QUE "M" ES EL PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO \overline{AB} Y TIENE UNA VELOCIDAD DE $\vec{v}_M = 12 \hat{i} \frac{m}{s}$ Y UNA ACELERACIÓN DE $\vec{a}_M = -4 \hat{i} - 72 \hat{j}$, EN LA POSICIÓN MOSTRADA, DETERMINAR: A) LA VELOCIDAD ANGULAR DEL CONO Y B) LA ACELERACIÓN ANGULAR DEL CONO



RESOLUCIÓN. A) DADO QUE "M" DESCRIBE UN MOVIMIENTO CIRCULAR, SE TIENE QUE $\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M$ DE DONDE $\vec{v}_M = 12 \hat{i}$; $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ y $\vec{r}_M = 2 \hat{j} + 3 \hat{k}$ POR LO

$$\text{QUE } 12 \hat{i} = \omega \hat{k} \times (2 \hat{j} + 3 \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\omega \hat{i} \text{ . LUEGO}$$

$$12 = -2\omega \Rightarrow \omega = -6 \frac{\text{rad}}{s} \therefore \vec{\omega} = -6 \hat{k} \frac{\text{rad}}{s}$$

B) LA ACELERACIÓN DE "M" SE OBTIENE DE $\vec{a}_M = \vec{\alpha} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M)$, DE DONDE

$$\vec{a}_M = -4 \hat{i} - 72 \hat{j}; \quad \vec{\alpha} = \alpha \hat{k}; \quad \vec{r}_M = 2 \hat{j} + 3 \hat{k}; \quad \vec{\omega} = -6 \hat{k}; \quad \text{POR LO QUE SE LLEGA A:}$$

$$-4 \hat{i} - 72 \hat{j} = \alpha \hat{k} \times (2 \hat{j} + 3 \hat{k}) + (-6 \hat{k}) \times ((-6 \hat{k}) \times (2 \hat{j} + 3 \hat{k}))$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\alpha \hat{i}; \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \hat{i}; \quad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -6 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -72 \hat{j} \Rightarrow -4 \hat{i} - 72 \hat{j} = -2\alpha \hat{i} - 72 \hat{j}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{rad}}{s^2} \therefore \vec{\alpha} = 2 \hat{k} \frac{\text{rad}}{s^2}$$

ALGEBRA LINEAL

SEA F EL ESPACIO VECTORIAL REAL DE LAS FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL, CON LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR, DEFINIDAS POR

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad (\alpha f)(x) = \alpha [f(x)]; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

DETERMINAR SI LOS SIGUIENTES CONJUNTOS SON SUBESPACIOS DE F :

A) A ES EL CONJUNTO DE LAS FUNCIONES CON DOMINIO EL INTERVALO $[0,1]$, CON TERCERA DERIVADA EN DICHO INTERVALO Y TALES QUE:

$$f'''(x) - x f'(x) + (\cos x) f(x) = 0$$

B) B ES EL CONJUNTO DE LAS FUNCIONES DERIVABLES EN $[0,1]$ CUYA DERIVADA ES $8x^3$

SOLUCIÓN

A) $i) \forall f, g \in A : (f+g) \in A$

$$f \in A \Rightarrow f'''(x) - x f'(x) + (\cos x) f(x) = 0 \dots (1) ; g \in A \Rightarrow g'''(x) - x g'(x) + (\cos x) g(x) = 0 \dots (2)$$

SE SUMAN (1) y (2) Y SE TIENE QUE

$$f'''(x) + g'''(x) - x f'(x) - x g'(x) + (\cos x) f(x) + (\cos x) g(x) = 0 \Rightarrow (f+g)'''(x) - x(f+g)'(x) + (\cos x)(f+g)(x) = 0$$

$$\therefore f+g \in A$$

ii) COMO $f \in A$ ENTONCES $f'''(x) - x f'(x) + (\cos x) f(x) = 0$ SE MULTIPLICAN AMBOS MIEMBROS POR α Y:

$$\alpha(f'''(x)) - \alpha(x f'(x)) + \alpha(\cos x) f(x) = 0 \Rightarrow (\alpha f)'''(x) - x(\alpha f)'(x) + (\cos x)(\alpha f)(x) = 0$$

$$\therefore \alpha f \in A$$

POR LO TANTO, A ES UN SUBESPACIO DE F

B) $\forall f, g \in B : (f+g) \in B$

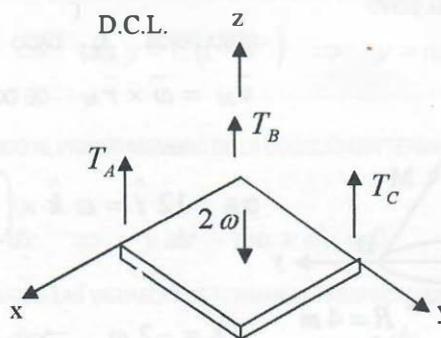
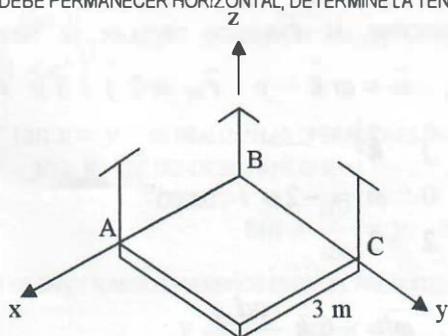
$$f \in B \Rightarrow f'(x) = 8x^3 \dots (3) ; g \in B \Rightarrow g'(x) = 8x^3 \text{ SE SUMAN AMBAS EXPRESIONES Y SE TIENE QUE}$$

$$f'(x) + g'(x) = 16x^3 \Rightarrow (f+g)'(x) = 16x^3 \therefore (f+g) \notin B$$

POR LO TANTO B NO ES SUBESPACIO DE F

ESTÁTICA

A) UNA PLACA RECTANGULAR Y HOMOGÉNEA, DE ESPESOR CONSTANTE Y PESO 2ω , SE SOSTIENE MEDIANTE TRES CABLES, SEGÚN MUESTRA LA FIGURA. SI LA PLACA DEBE PERMANECER HORIZONTAL, DETERMINE LA TENSIÓN EN CADA CABLE



DEL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE SE TIENE QUE $\sum F_z = 0 : T_A + T_B + T_C = 2\omega \dots (1)$

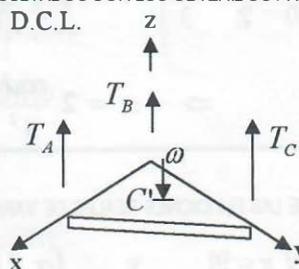
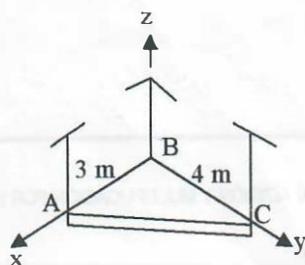
$$\sum M_x = 0 ; 2 \hat{j} \times (-2\omega \hat{k}) + 4 \hat{j} \times T_C \hat{k} = 0 \dots (2) \Rightarrow T_C = \omega$$

$$\sum M_y = 0 ; 1.5 \hat{i} \times (-2\omega \hat{k}) + 3 \hat{i} \times T_A \hat{k} = 0 \dots (3) \Rightarrow T_A = \omega$$

Y AL SUSTITUIR ESTOS VALORES EN (1) SE OBTIENE QUE $T_B = 0$

B) AHORA, SI EN LUGAR DE SER RECTANGULAR, SE PROPONE UNA PLACA TRIANGULAR Y HOMOGÉNEA, DE ESPESOR CONSTANTE Y PESO ω , SOSTENIDA POR TRES CABLES, SE PIDE DETERMINAR LA TENSIÓN EN CADA UNO DE ELLOS Y COMPARAR LOS RESULTADOS CON LOS OBTENIDOS PARA LA PLACA RECTANGULAR.

SOLUCIÓN.



COMO SE OBSERVA, EL PESO ω ESTÁ APLICADO EN EL PUNTO $C'(\bar{x}, \bar{y})$, DE DONDE $\bar{x} = \frac{3}{3} = 1 \text{ m}$ y $\bar{y} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ m}$

DEL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE SE TIENE QUE: $\sum F_z = 0 ; T_A + T_B + T_C = \omega \dots (4)$

$$\sum M_x = 0 ; 1.33 \hat{j} \times (-\omega \hat{k}) + 4 \hat{j} \times T_C \hat{k} = 0 \quad \dots (5) \Rightarrow T_C = \frac{\omega}{3}$$

$$\sum M_y = 0 ; 1 \hat{i} \times (-\omega \hat{k}) + 3 \hat{i} \times T_A \hat{k} = 0 \quad \dots (6) \Rightarrow T_A = \frac{\omega}{3}$$

Y AL SUSTITUIR ESTOS VALORES EN (4) SE TIENE QUE $T_B = \frac{\omega}{3}$

COMPARACIÓN DE RESULTADOS: SI LA PLACA ES TRIANGULAR Y DE LA MITAD DEL PESO DE LA PLACA RECTANGULAR, CADA CABLE ABSORBE LA TERCERA PARTE DEL PESO TOTAL. EL RESULTADO PARECE LÓGICO A PRIMERA VISTA.

EN CUANTO A LA PLACA RECTANGULAR, SÓLO TRABAJAN LOS CABLES A y C , ABSORBIENDO CADA UNO DE ELLOS LA MITAD DEL PESO TOTAL, EN UN EQUILIBRIO "INESTABLE". EL RESULTADO PARECE ILÓGICO A PRIMERA VISTA, YA QUE AL PERMANECER LA PLACA HORIZONTAL, SÓLO REQUIERE DE LA SUJECIÓN DE LOS CABLES EXTREMOS.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

SE TIENE UN CAPACITOR C_1 FORMADO POR DOS PLACAS CONDUCTORAS PLANAS Y PARALELAS, CON ÁREA $A = 250 \text{ [cm}^2\text{]}$. CADA PLACA POSEE UNA DENSIDAD SUPERFICIAL $|\sigma| = 5 \left[\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \right]$, POSITIVA LA PLACA SUPERIOR Y NEGATIVA LA INFERIOR. SE INTRODUCE UN DIELECTRICO CON SUSCEPTIBILIDAD $\chi_e = 4$ ENTRE LAS PLACAS DE C_1 , CON BASE EN ELLO Y EN LA CONEXIÓN DE LA FIGURA, DONDE $C_2 = 1.5 \text{ [nF]}$ y $C_3 = 1.0 \text{ [nF]}$. DETERMINE:

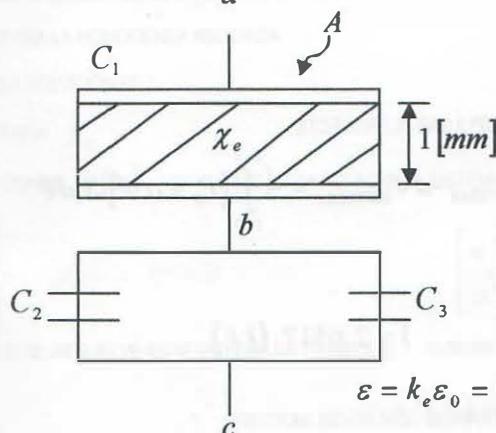
A) LA CARGA EN CADA UNA DE LAS PLACAS DE C_1

B) LA MAGNITUD DEL CAMPO ELÉCTRICO EN EL DIELECTRICO DE C_1 .

C) LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE LOS PUNTOS a y c .

D) LA CAPACITANCIA DEL ARREGLO (C_{ac}).

D) LA ENERGÍA TOTAL ALMACENADA EN EL ARREGLO.



RESOLUCIÓN. A) COMO $\sigma = \frac{Q}{A}$; $Q_1 = \sigma A$

$$Q_1 = 5 \times 10^{-6} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right) 250 \times 10^{-4} \text{ (m}^2\text{)} = 0.125 \text{ [\mu C]}$$

Q_1 POSITIVA EN LA PLACA SUPERIOR Y Q_1 NEGATIVA EN LA PLACA INFERIOR.

B) EL CAMPO ELÉCTRICO SE CALCULA CON $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ Y COMO

$$\epsilon = k_e \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \Rightarrow E = \frac{5 \times 10^{-6} \left(\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right)}{(1 + 4) 8.85 \times 10^{-12} \left(\frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right)} = 112,994.35 \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

C) LA DIFERENCIA DE POTENCIAL V_{ac} SE OBTIENE DE $V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$, DONDE $V_{ab} = \frac{Q_1}{C_1}$ COMO

$$C_1 = \frac{k_e \epsilon_0 A}{d} = \frac{(1 + \chi_e) \epsilon_0 A}{d} = \frac{(1 + 4) 8.85 \times 10^{-12} (250 \times 10^{-4})}{1 \times 10^{-3}} = 1.1063 \text{ [nF]} \Rightarrow V_{ab} = \frac{0.125 \times 10^{-6} \text{ (C)}}{1.1063 \times 10^{-9} \text{ (F)}} = 112.99 \text{ [V]}$$

$$\text{y } V_{bc} = \frac{Q_1}{C_{2,3}} \text{ ya que } Q_1 = Q_{2,3} \text{ y } C_{2,3} = C_2 + C_3 \Rightarrow C_{2,3} = (1.5 + 1) \text{ [nF]} = 2.5 \text{ [nF]}$$

$$\text{LUEGO } V_{bc} = \frac{0.125 \times 10^{-6} \text{ (C)}}{2.5 \times 10^{-9} \text{ (F)}} = 50 \text{ [V]} \therefore V_{ac} = 112.99 + 50 = 162.99 \text{ [V]}$$

D) LA CAPACITANCIA C_{ac} SE PUEDE CALCULAR DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$C_{ac} = \frac{C_1 C_{2,3}}{C_1 + C_{2,3}} = \frac{1.1063 (2.5) \text{ [nF]}}{1.1063 + 2.5} \therefore C_{ac} = 0.7669 \text{ [nF]}$$

E) LA ENERGÍA TOTAL SE CALCULA CON $U = 0.5 C_{ac} V_{ac}^2 = 0.5 (0.7669 \times 10^{-9} \text{ F}) (162.99 \text{ V})^2 = 10.187 \text{ [\mu J]}$

TERMODINÁMICA

DURANTE LA SEMANA DE LA SEFI SE ORGANIZA EL CONCURSO DE CONSTRUCCIÓN DE MORTEROS. EL PROPÓSITO ES EL LANZAMIENTO VERTICAL DE PROYECTILES DE 15 (kg), CON FORMA CILÍNDRICA (25 (cm) DE DIÁMETRO Y 12 (cm) DE ALTURA).

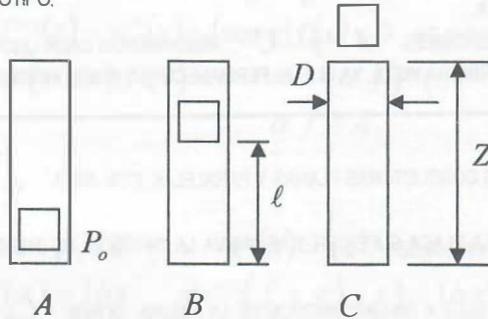
EL GANADOR ES EL QUE HAGA QUE EL PROYECTIL ALCANCE LA ALTURA MÁXIMA.

UN PROTOTIPO ES UN MORTERO-UN TUBO-DE 70 (cm) DE ALTURA Y 25 [cm] DE DIÁMETRO.

PARA QUE EL PROYECTIL (EN LA PARTE INFERIOR DEL MORTERO) COMIENCE A MOVERSE, LOS GASES QUE PRODUCE LA EXPLOSIÓN DE LA PÓLVORA HAN DE ALCANZAR 5 (MPa).

LA PRESIÓN DE LOS GASES DISMINUYE 25 (kPa) POR CADA CENTÍMETRO QUE RECORRE EL PROYECTIL DENTRO DEL MORTERO, DEBIDO A LA FRICCIÓN. ESTIME LA ALTURA QUE SE ALCANZARÁ CON ESTE PROTOTIPO.

RESOLUCIÓN



A LA PÓLVORA ESTALLA Y LOS GASES QUE ESTÁN DEBAJO DEL PROYECTIL ALCANZAN LA PRESIÓN NECESARIA PARA EL DISPARO, P_0 . $P_0 = 5$ (MPa)

B LOS GASES TIENEN UNA PRESIÓN $P = P_0 - \alpha \ell$, $\alpha = 25 \left(\frac{\text{kPa}}{\text{cm}} \right)$

C EL PROYECTIL ESTÁ A PUNTO DE ABANDONAR EL MORTERO, CUYAS DIMENSIONES SON $D = 25$ (cm), $Z = 70$ (cm)

SISTEMA: LA MASA DE LOS GASES DE LA EXPLOSIÓN (CERRADO).

EL ÁREA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL MORTERO: $S = \frac{\pi}{4} D^2$

EL TRABAJO TOTAL DEL SISTEMA TIENE DOS DESTINOS: i) ECHAR ATRÁS LA ATMÓSFERA CIRCUNDANTE Y ii) IMPULSAR AL PROYECTIL.

$$\{W\}_{\text{SISTEMA}} = \{W\}_{\text{ATMÓSFERA}} + \{W\}_{\text{PROYECTIL}} ; \{W\}_{\text{SISTEMA}} = - \int_{\forall_{DG=0}}^{\forall_{\text{MORTERO}}} P_{\text{SISTEMA}} \cdot d\forall_{\text{SISTEMA}} = - \int_{\ell=0}^{\ell=Z} [P_0 - \alpha \ell] S d\ell$$

$$\{W\}_{\text{SISTEMA}} = -141.7398 \text{ (kJ)}$$

$$\{W\}_{\text{ATMÓS}} = - \int_{\forall_{\text{ATMÓS}}^{\text{IN}}}^{\forall_{\text{ATMÓS}}^{\text{FIN}}} P_{\text{ATMÓS}} D \forall_{\text{ATMÓS}} = - \int P_{\text{ATMÓS}} (-d\forall_{\text{SISTEMA}}) = 2.6517 \text{ (kJ)}$$

$$\{W\}_{\text{PROYECTIL}} = 139.0882 \text{ (kJ)} \quad \text{EL PROYECTIL RECIBE ESTE TRABAJO DENTRO DEL MORTERO.}$$

POR EL TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA, EL PROYECTIL SALE DEL MORTERO CON UNA VELOCIDAD, QUE AL CUADRADO ES:

$$\left(\{W\}_{\text{PROYECTIL}} - mgz \right) \frac{2}{m} = v^2 \Rightarrow 18.5314 \times 10^3 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = v^2$$

LA ALTURA MÁXIMA, POR ARRIBA DE LA BOCA DEL MORTERO, ES $h - \frac{v^2_{\text{SALIDA}}}{2g} + Z + \frac{Z}{2} = 948.1730$ (m)

TUTORÍA

ALUMNOS DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR: COMO DIJO UN ESTUDIANTE DE LA GENERACIÓN 2002: "VALE LA PENA TENER UN TUTOR PORQUE ASÍ DE ENTRADA TIENE UNO ALGUIEN A QUIEN CONFIARLE MUCHAS COSAS". APROVECHEN ESTE IMPORTANTE SERVICIO ACADÉMICO DE ESTA NUESTRA QUERIDA FACULTAD Y BUSQUEN A SU TUTOR. ¿QUIÉN NO QUIERE TENER ALGUIEN CON MÁS EXPERIENCIA QUE LE PUEDA DAR CONSEJOS DE CÓMO ESTUDIAR, DE CÓMO APROVECHAR ESTA HERMOSA UNIVERSIDAD PARA EL CRECIMIENTO Y LA FORMACIÓN?

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, JUAN VELÁSQUEZ TORRE, BERTHA FRANCO ROSAS, ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO, GABRIEL ALEJANDRO JARAMILLO MORALES Y FÉLIX NÚÑEZ OROZCO

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 48

2 DE NOVIEMBRE DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESUELVA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

RESOLUCIÓN:

ES UNA ECUACIÓN QUE PUEDE RESOLVERSE POR VARIACIÓN DE PARÁMETROS, PARA OBTENER y_p (SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA).

LA SOLUCIÓN GENERAL ESTÁ DADA POR:

$$y_G = y_h + y_p$$

PARA LA HOMOGÉNEA ASOCIADA

$$y'' - 2y' + y = 0$$

LA SOLUCIÓN ES:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

PARA y_p :

$$y_p = u(x)e^x + v(x)xe^x$$

DONDE $u(x)$ y $v(x)$ SATISFACEN EL SISTEMA

$$\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{x^2 + 1} \end{bmatrix}$$

SI SE RESUELVE ESTE SISTEMA SE TIENE QUE

$$u'(x) = -\frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow u(x) = \text{Ln} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow v(x) = \text{ang tan } x$$

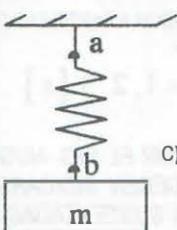
ENTONCES:

$$y_p = \text{Ln} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) e^x + (\text{ang tan } x) x e^x$$

FINALMENTE, LA SOLUCIÓN GENERAL ES

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^x \left[\text{Ln} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) + x \text{ang tan } x \right]$$

DINÁMICA



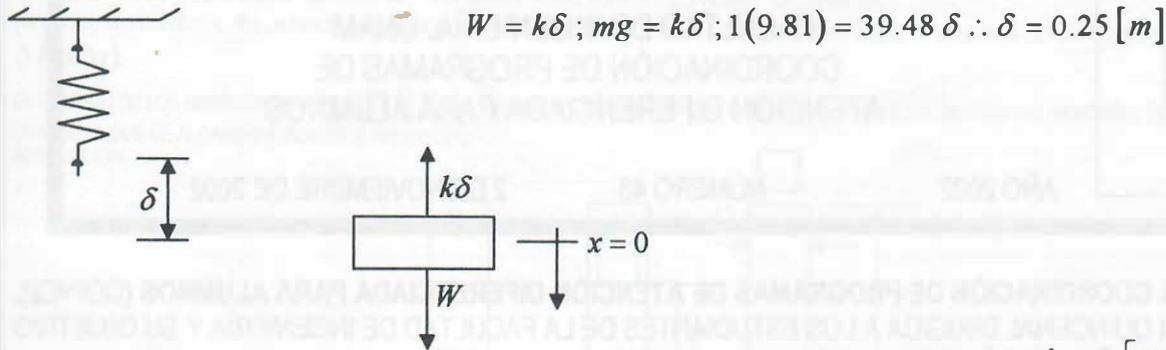
EL SISTEMA QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA SE ENCUENTRA EN SU POSICIÓN NATURAL DE EQUILIBRIO. SI SE CONSIDERA QUE EL SISTEMA TIENE UNA FRECUENCIA NATURAL $f_n = 1 \text{ Hz}$, Y EL VALOR DE LA MASA ES DE $m = 1 \text{ kg}$, OBTENGA:

- A) EL VALOR DE LA CONSTANTE k DEL RESORTE
- B) EL VALOR DE LA DEFORMACIÓN δ DEL RESORTE EN LA POSICIÓN NATURAL DE EQUILIBRIO
- C) SI SE COLOCA PARALELAMENTE, ENTRE LOS PUNTOS a y b DEL RESORTE, UN AMORTIGUADOR LINEAL, ¿CUÁL DEBERÁ SER EL VALOR DE SU CONSTANTE β PARA QUE EL SISTEMA PUEDA VIBRAR?

SOLUCIÓN

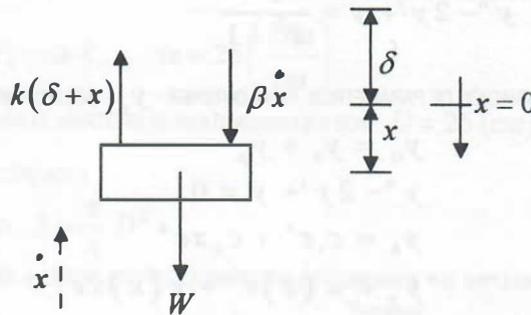
A) $f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{1}} \therefore k = 39.48 \left[\frac{N}{m} \right]$

B) SE TIENE EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (DCL) EN LA POSICIÓN NATURAL DE EQUILIBRIO



C) SEGÚN LAS FIGURAS, EN $t = 0$ SE TIENEN LAS CONDICIONES INICIALES: $x = 0.125 [m]$ y $\dot{x} = 0 \left[\frac{m}{s} \right]$

DE ESTA MANERA, EL DCL, EN UNA POSICIÓN COMPROMETIDA EN EL INTERVALO $0 < x < 0.125 [m]$ QUEDA COMO:



LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTOS: $\sum F_x = m \ddot{x} \Rightarrow -k(\delta + x) + W + \beta(-\dot{x}) = m \ddot{x}$

NOTA. ES IMPORTANTE OBSERVAR QUE LA VELOCIDAD DEL BLOQUE ESTÁ DIRIGIDA HACIA ARRIBA Y POR LO TANTO ES NEGATIVA DE ACUERDO AL MARCO DE REFERENCIA.

$\Rightarrow -k\delta - kx + W - \beta\dot{x} = m\ddot{x}$ Y DE ACUERDO CON EL INCISO (A) SE TIENE QUE $W = k\delta$; POR CONSIGUIENTE

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + kx = 0$$

LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA ES $\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$

PARA QUE VIBRE, DEBEN TENERSE AL MENOS RAÍCES COMPLEJAS, ESTO ES:

$$\frac{\beta^2}{4m^2} < \frac{k}{m} \Rightarrow \beta^2 < 4km \Rightarrow \beta^2 < 4(39.48)(1) \therefore \beta < 12.57 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$$

PREMIO PARA EL ALUMNO QUE RESUELVA EL SIGUIENTE INCISO DEL PROBLEMA ANTERIOR

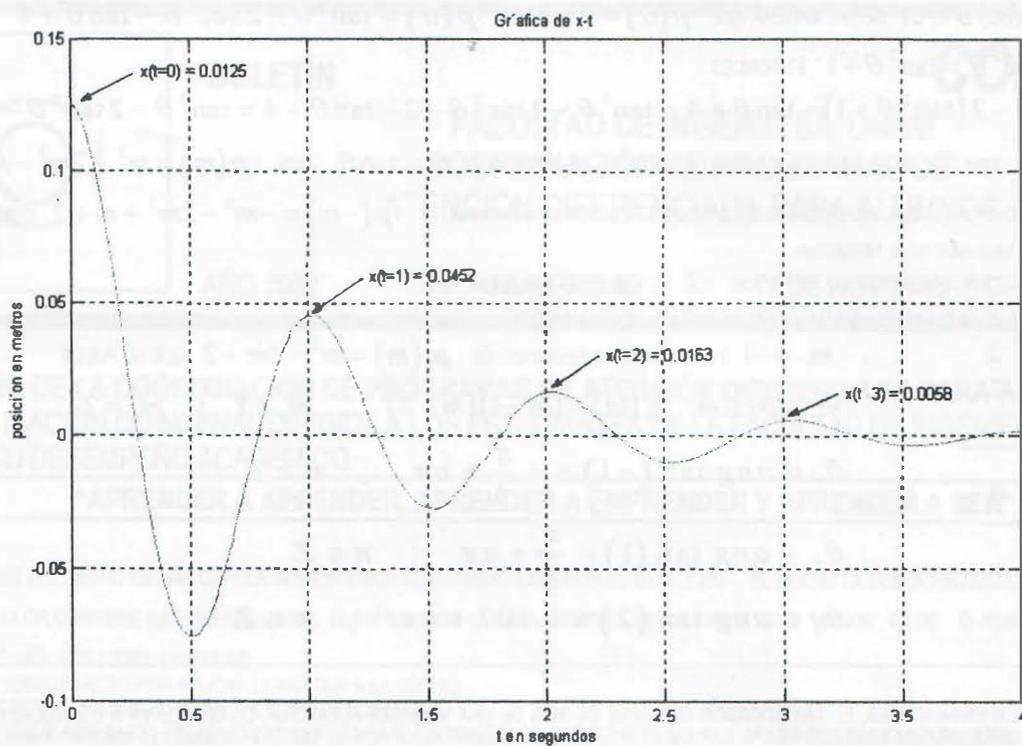
CONSIDERE LOS VALORES DE $m = 1 [kg]$ y $k = 39.48 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$. LAS GRÁFICAS (1) y (2) DETERMINAN EL COMPORTAMIENTO DE LA

POSICIÓN Y DE LA VELOCIDAD EN EL INTERVALO $0 \leq t \leq 4 [s]$. OBTENGA PARA ESTAS CONDICIONES EL VALOR DE β DEL AMORTIGUADOR A PARTIR DE LOS

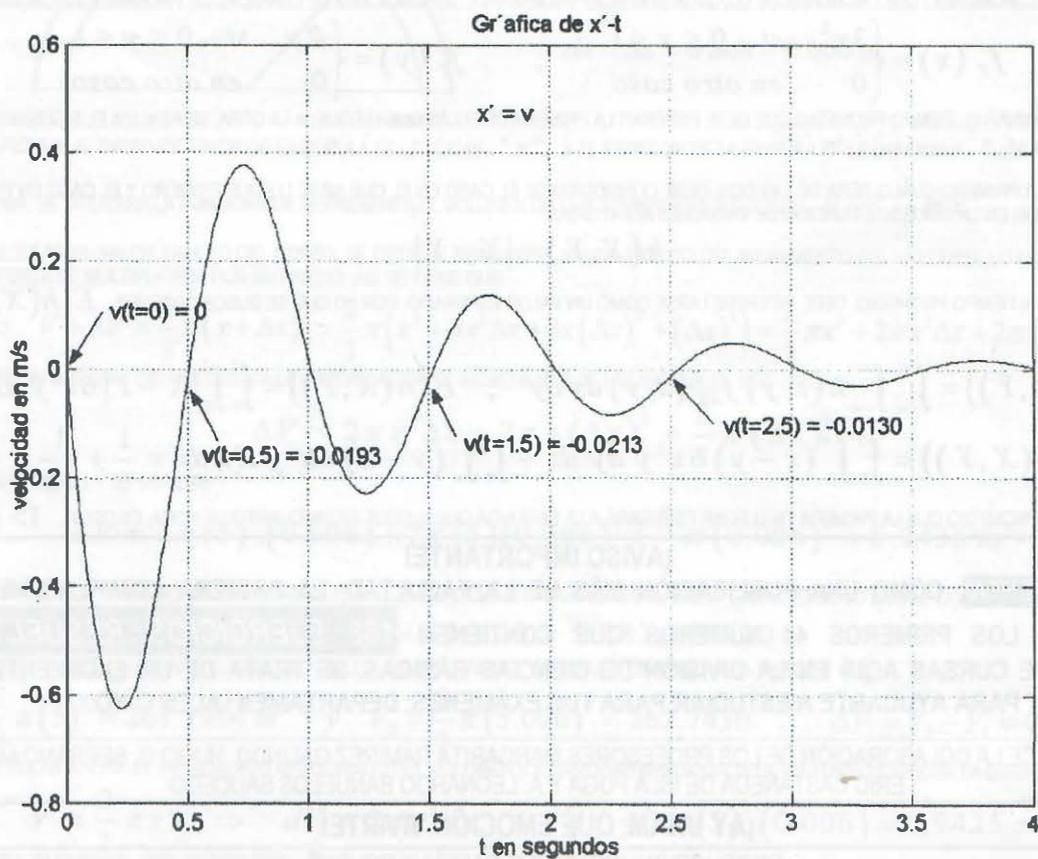
MODELOS MATEMÁTICOS PLANTEADOS PARA $x(t)$ y $\dot{x}(t)$. VERIFIQUE QUE ESTOS MODELOS MATEMÁTICOS SE CUMPLEN PARA $t = 1, 2, 3 [s]$.

AL PRIMER ALUMNO QUE RESUELVA DETALLADAMENTE ESTE INCISO, SE LE REGALARÁ UN LIBRO DE DINÁMICA, POR EL ING. HUGO SERRANO MIRANDA. LA SOLUCIÓN DEBE ENTREGARSE EN LA COPADI, A MANO O EN COMPUTADORA, PERO DEBEN INDICARSE DETALLADAMENTE LOS PASOS DE LA OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES, LAS CONSIDERACIONES SUSTENTADAS Y MÉTODOS COMPLEMENTARIOS DE SOLUCIÓN.

GRÁFICA 1



GRÁFICA 2



ÁLGEBRA

DETERMINAR LOS VALORES DE $\theta \in \mathfrak{R}$ DE TAL MANERA QUE $p(\theta) = 0$, DONDE $p(\theta) = \tan^3 \theta - 2 \sec^2 \theta - \tan \theta + 4$

SOLUCIÓN. DADO QUE $\sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1$, ENTONCES

$$p(\theta) = \tan^3 \theta - 2(\tan^2 \theta + 1) - \tan \theta + 4 = \tan^3 \theta - 2 \tan^2 \theta - 2 - \tan \theta + 4 = \tan^3 \theta - 2 \tan^2 \theta - \tan \theta + 2$$

QUE ES UN POLINOMIO EN $\tan \theta$ SI SE HACE UN CAMBIO DE VARIABLE SE TIENE QUE: $m = \tan \theta \Rightarrow p(m) = m^3 - 2m^2 - m + 2$ QUE TIENE

DOS VARIACIONES DE SIGNO, POR LO QUE TIENE DOS RAÍCES REALES POSITIVAS O NINGUNA Y $p(-m) = -m^3 - 2m^2 + m + 2$ CON UNA VARIACIÓN DE SIGNO, POR LO QUE EXISTE UNA RAÍZ REAL NEGATIVA.

LAS RAÍCES RACIONALES PUEDEN TENER COMO NUMERADOR ± 2 Y COMO DENOMINADOR ± 1 .

COMO SE TIENE LA CERTEZA DE QUE EXISTE UNA RAÍZ REAL NEGATIVA, SE PRUEBA CON -1

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

$\therefore m_1 = -1$ Y EL POLINOMIO REDUCIDO ES $p_1(m) = m^2 - 3m + 2$ QUE SE PUEDE

FACTORIZAR COMO $p_1(m) = (m-1)(m-2) \therefore m_2 = 1$ Y $m_3 = 2$

$$\theta_1 = \text{ang tan}(-1) = -\frac{\pi}{4} + n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta_2 = \text{ang tan}(1) = \frac{\pi}{4} + n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta_3 = \text{ang tan}(2) \approx 1.107 + n\pi \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}$$

PROBABILIDAD

EN MUCHAS SITUACIONES EXPERIMENTALES, EL INVESTIGADOR REQUIERE DE MÁS DE UNA VARIABLE ALEATORIA, LO QUE LLEVA A L ESTUDIO DE LAS VARIOABLES ALEATORIAS CONJUNTAS. UN EJEMPLO ILUSTRATIVO DE LAS VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS, DONDE SE OBSERVA ADEMÁS EL USO DE LA INTEGRACIÓN MÚLTIPLE, ES EL SIGUIENTE:

NAYE Y GABY, DOS AMIGAS DE LA FACULTAD, HAN ACORDADO REUNIRSE PARA TOMAR UN REFRIGERIO ENTRE EL MEDIO DÍA (12:00 HORAS) Y LA UNA DE LA TARDE (13:00 HORAS). SI LA HORA DE LLEGADA DE NAYE ES UNA VARIABLE ALEATORIA DENOTADA POR X Y LA HORA DE LLEGADA DE GABY ES OTRA VARIABLE ALEATORIA DENOTADA POR Y , Y SUPONIENDO QUE LAS HORAS DE LLEGADA SON INDEPENDIENTES CON FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DADAS POR:

$$f_x(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad ; \quad f_y(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ENTONCES, PARA DETERMINAR EL TIEMPO PROMEDIO QUE DEBE ESPERAR LA PRIMERA DE ELLAS QUE LLEGUE, A LA OTRA, SE REALIZA EL SIGUIENTE ANÁLISIS.

RESOLUCIÓN.

DADO QUE PUEDE LLEGAR PRIMERO CUALQUIERA DE LAS DOS, DEBE CONSIDERARSE EL CASO EN EL QUE NAYE LLEGUE PRIMERO Y EL CASO EN EL QUE GABY LLEGUE PRIMERO; ESTO SE RESUME EN LA SIGUIENTE FUNCIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS:

$$h(X, Y) = |X - Y|$$

Y PUESTO QUE SE PIDE UN TIEMPO PROMEDIO, DEBE INTERPRETARSE COMO UN VALOR ESPERADO, POR LO QUE SE BUSCA OBTENER $E(h(X, Y))$. DE DONDE SE TIENE QUE:

$$E(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{xy}(x, y) dx dy \quad ; \quad E(h(X, Y)) = \int_0^1 \int_0^1 |X - Y| 6x^2 y dx dy$$

$$E(h(X, Y)) = \int_0^1 \int_0^x (x - y) 6x^2 y dy dx + \int_0^1 \int_x^1 (y - x) 6x^2 y dy dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

FINALMENTE, EL TIEMPO PROMEDIO QUE LA PRIMERA EN LLEGAR ESPERARÁ A LA SEGUNDA QUE LLEGUE ES UN CUARTO DE HORA, ES DECIR, 15 MINUTOS.

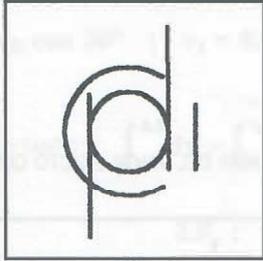
¡AVISO IMPORTANTE!

¡YA ESTÁ A LA VENTA! COMO UNA PUBLICACIÓN MÁS DE LA FACULTAD, LA PRIMERA COMPILACIÓN DEL **BOLETÍN COPADI**, CON LOS PRIMEROS 44 NÚMEROS QUE CONTIENEN **188 EJERCICIOS RESUELTOS** DE LAS ASIGNATURAS QUE CURSAS AQUÍ EN LA DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS. SE TRATA DE UN EXCELENTE DOCUMENTO PARA APRENDER Y PARA AYUDARTE A ESTUDIAR PARA TUS EXÁMENES, DEPARTAMENTALES O NO.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES MARGARITA RAMÍREZ GALINDO, HUGO G. SERRANO MIRANDA, ERIC CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y A. LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 49

17 DE NOVIEMBRE DE 2002

EDITORIAL

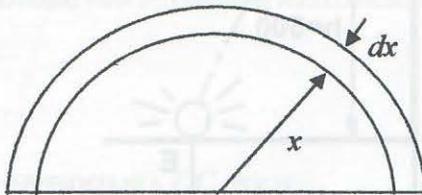
ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO I

EN UN MUSEO, PARTE DEL TECHO ES UNA CÚPULA SEMIESFÉRICA CUYO RADIO EXTERIOR ES DE 5 m EL DUEÑO LA DESEA PINTAR POR FUERA CON UNA MEZCLA QUE ADEMÁS DEL COLOR CONTIENE IMPERMEABILIZANTE. EL ESPESOR DE LA CAPA, DESPUÉS DE APLICARLE TRES "MANOS", ES DE 6 mm . ESTA MEZCLA TIENE UN PRECIO DE $\$300.00$ POR LITRO. CALCULAR:

- A) EL COSTO EXACTO POR APLICAR LA MEZCLA A LA CÚPULA.
B) EL COSTO APROXIMADO UTILIZANDO DIFERENCIALES.
C) EL ERROR ABSOLUTO, RELATIVO Y EN PORCENTAJE (EN DINERO) QUE SE COMETE AL UTILIZAR LOS COSTOS EXACTO Y APROXIMADO.



$$x = 5\text{ m}$$

$$dx = \Delta x = 6\text{ mm} = 0.006\text{ m}$$

COMO SE VE EN LA FIGURA, AL RADIO EXTERIOR DE LA CÚPULA SE LE LLAMA " x " Y AL ESPESOR DE LA PINTURA SE LE DENOMINA " dx " (DIFERENCIAL DE x).

PARA ESTE PROBLEMA, SE UTILIZARÁ LA FUNCIÓN QUE REPRESENTA EL VOLUMEN DE UNA SEMIESFERA, ES DECIR, $V = \frac{2}{3}\pi x^3$.

A) PARA CALCULAR EL VALOR EXACTO DEL COSTO, SE OBTIENE PRIMERO EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO DEL VOLUMEN, LO QUE DARÁ LA CANTIDAD DE MEZCLA Y DESPUÉS ESTA SE MULTIPLICARÁ POR SU PRECIO. ASÍ SE TIENE QUE:

$$V = \frac{2}{3}\pi x^3 \Rightarrow V + \Delta V = \frac{2}{3}\pi(x + \Delta x)^3 = \frac{2}{3}\pi(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) = \frac{2}{3}\pi x^3 + 2\pi x^2\Delta x + 2\pi x(\Delta x)^2 + \frac{2}{3}\pi(\Delta x)^3$$

SE RESTA LA EXPRESIÓN ORIGINAL DEL VOLUMEN A LA OBTENIDA CON EL INCREMENTO DE LAS VARIABLES Y SE LLEGA A:

$$\Delta V = 2\pi x^2\Delta x + 2\pi x(\Delta x)^2 + \frac{2}{3}\pi(\Delta x)^3$$

SE SUSTITUYEN LOS VALORES Y SE OBTIENE

$$\Delta V = 2\pi(5)^2(0.006) + 2\pi(5)(0.006)^2 + \frac{2}{3}\pi(0.006)^3 = 0.9436\text{ m}^3$$

QUE EQUIVALEN A 943.6 lt Y AL SER MULTIPLICADOS POR EL PRECIO DEL LITRO SE LLEGA AL VALOR EXACTO DE LO QUE LE COSTÓ APLICAR LA MEZCLA, ESTO ES

$$943.6 \times 300.00 = \$ 283,080.00$$

ESTO SE PUEDE HACER TAMBIÉN MEDIANTE EL CÁLCULO DE LOS VALORES ANTES Y DESPUÉS DE APLICAR LA MEZCLA. ASÍ

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi(5)^3 = 261.7994\text{ m}^3 \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{2}{3}\pi(5.006)^3 = 262.7430 \quad \therefore \Delta V = V_2 - V_1 = 0.9436\text{ m}^3$$

B) PARA CALCULAR AHORA EL INCREMENTO APROXIMADO DEL VOLUMEN (LA CANTIDAD APROXIMADA DE PINTURA) SE UTILIZA LA DIFERENCIAL Y SE TIENE QUE:

$$V = \frac{2}{3}\pi x^3 \Rightarrow dV = 2\pi x^2 dx \quad \therefore dV = 2\pi(5)^2(0.006) = 0.9425\text{ m}^3$$

LO QUE LLEVA AL COSTO APROXIMADO DE LA MEZCLA QUE ES:

$$0.9425 \text{ m}^3 = 942.5 \text{ lt} ; 942.5 \times 300.00 = \$ 282,750.00$$

C) PARA DETERMINAR EL ERROR ABSOLUTO, EL RELATIVO Y EL PORCENTAJE DE ERROR SE HACE LO SIGUIENTE:

$$\text{ERROR ABSOLUTO: } E_a = 283,080.00 - 282,750.00 = \$ 330.00$$

$$\text{ERROR RELATIVO: } E_r = \frac{E_a}{283,080} = \frac{330}{283,080} = 0.001166$$

$$\text{PORCENTAJE DE ERROR: } P_e = E_r \times 100 = 0.1166 \%$$

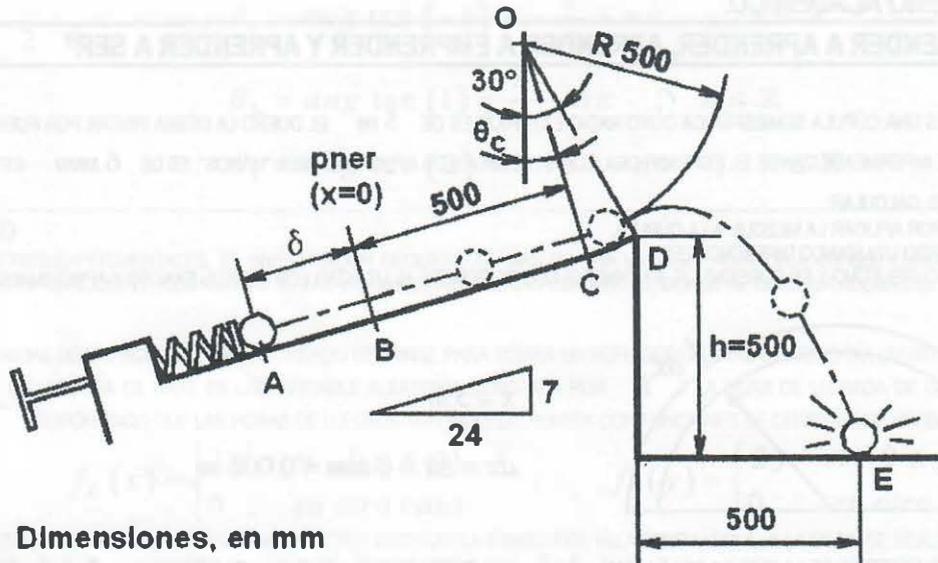
O SEA QUE SI EL DUEÑO CALCULA CON DIFERENCIALES LA PINTURA QUE NECESITA POR MEDIO DE LA DIFERENCIAL, EN LUGAR DEL VALOR EXACTO QUE DA EL INCREMENTO DE LA FUNCIÓN, COMETE UN ERROR DE 0.1166%, QUE EN DINERO EQUIVALE A \$330.00.

DINÁMICA DE LA PARTÍCULA: MOVIMIENTO CURVILÍNEO

UN JUEGO DE MESA ESTÁ FORMADO POR SU MECANISMO DISPARADOR, QUE SE COMPONE DE UN ÉBOLO ACCIONADO POR UN RESORTE QUE TIENE UNA CONSTANTE DE RIGIDEZ $K = 5 \text{ N/mm}$. UN BALÍN Y UNA "SUPERFICIE INCLINADA" LISA, FORMADA POR EL TRAMO RECTO AC QUE TIENE LA PENDIENTE INDICADA, Y UN TRAMO CURVO CD QUE ES UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN O .

CON EL MECANISMO DISPARADOR SE QUIERE LANZAR AL BALÍN, CUYA MASA $m = 0.05 \text{ KG}$, SOLTANDO EL ÉBOLO CUANDO EL RESORTE ESTÁ COMPRIMIDO UNA LONGITUD δ , DE TAL FORMA QUE DICHO BALÍN CAIGA EN EL PUNTO E , COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA.

DETERMINE LA LONGITUD δ QUE DEBE COMPRIMIRSE EL RESORTE PARA QUE ESTO OCURRA



Dimensiones, en mm

RESOLUCIÓN

EL MOVIMIENTO DEL BALÍN SE PUEDE SUBDIVIDIR EN LOS SIGUIENTES INTERVALOS:

- DE A A B , ES UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO, EN EL QUE ACTÚA LA FUERZA DEL RESORTE;
- DE B A C , ES UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO, EN EL QUE EL BALÍN ESTÁ SUJETO A UNA ACELERACIÓN NEGATIVA DEBIDA A LA COMPONENTE DEL PESO,
- DE C A D , ES UN MOVIMIENTO CURVILÍNEO CIRCULAR; Y
- DE D A E , ES UN TIRO PARABÓLICO.

PARA SIMPLIFICAR LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA, SE PROCEDERÁ ANALIZANDO DE ATRÁS PARA ADELANTE, ES DECIR, PRIMERO CONVIENE ANALIZAR EL TIRO PARABÓLICO, LUEGO EL MOVIMIENTO CURVILÍNEO CIRCULAR, Y ASÍ SUCESIVAMENTE.

PARA ABORDAR EL TIRO PARABÓLICO, SE REQUIERE DETERMINAR EL ÁNGULO DE TIRO PARA OBTENER LA RAPIDEZ INICIAL QUE SE REQUIERE, DE MANERA QUE EL BALÍN CAIGA EN EL PUNTO E .

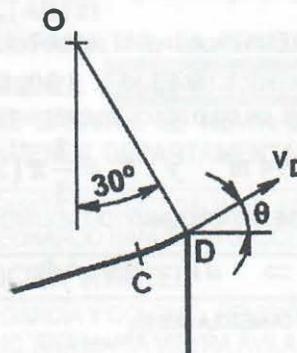
DE LA GEOMETRÍA DEL TRAMO CURVO:

DADO QUE OD ES LA NORMAL DEL ARCO CD EN EL PUNTO D , Y EL VECTOR v_0 ES TANGENTE A LA

TRAYECTORIA, ÉSTE DEBE SER PERPENDICULAR A OD ,

Y POR TANTO $\theta_D = 30^\circ$, CON BASE EN EL TEOREMA DE ÁNGULO ENTRE PERPENDICULARES.

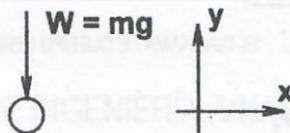
POR TANTO, $v_{D,x} = v_D \cos 30^\circ$; Y $v_{D,y} = v_D \sen 30^\circ$



PARA EL TIRO PARABÓLICO, EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL BALÍN ES:

$$\Sigma F_x : 0 = m a_x ; \int_{v_x \cos 30^\circ}^{v_x} d v_x = \int_0^t 0 dt$$

$$v_x = v_D \cos 30^\circ ; v_x = 0.8660 v_D$$



Y POR LO TANTO: $\int_0^{0.5} dx = \int_0^{t_E} 0.8660 v_D dt \Rightarrow 0.5 = 0.8660 v_D t_E \dots (1)$

$$\Sigma F_y : -m g = m a_y ; \int_{v_D \sin 30^\circ}^{v_y} d v_y = \int_0^t -g dt \Rightarrow v_y = -g t + v_D \sin 30^\circ$$

$$v_y = -9.8 t + 0.5 v_D ; \int_{0.5}^0 dy = \int_0^{t_E} (-9.8 t + 0.5 v_D) dt \Rightarrow -0.5 = 4.9 t_E^2 + 0.5 v_D t_E \dots (2)$$

SI SE DESPEJA t_E DE (1): $t_E = \frac{0.5}{0.8660 v_D} \dots (3)$

SUSTITUYENDO (3) EN (2) SE TIENE QUE $-0.5 = -4.9 \left(\frac{0.5774}{v_D} \right)^2 + 0.5 v_D \left(\frac{0.5774}{v_D} \right)$; DE DONDE

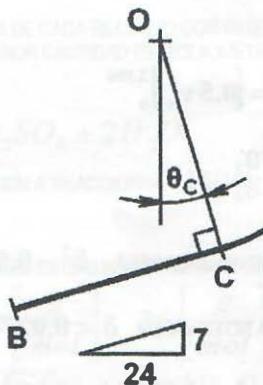
$$-0.5 = -\frac{1.633}{v_D^2} + 0.2887 \Rightarrow \frac{1.633}{v_D^2} = 0.7887 \Rightarrow v_D = \sqrt{2.071} \Rightarrow v_D = 1.439 \text{ m/s}$$

LA RAPIDEZ INICIAL DEL TIRO PARABÓLICO DEBE SER IGUAL A LA RAPIDEZ FINAL DEL BALÍN EN EL TRAMO CURVO. POR LO TANTO, SE REQUIERE EL ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE DICHO TRAMO. PARA DETERMINAR EL ÁNGULO INICIAL θ_C :

DADO QUE BC ES PERPENDICULAR A OC , POR EL TEOREMA DE ÁNGULOS ENTRE PERPENDICULARES:

$$\theta_C = \text{ángtan} \frac{7}{24}$$

$$\theta_C = 16.26^\circ$$



ENTONCES, EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL BALÍN EN EL TRAMO CURVO QUEDA:

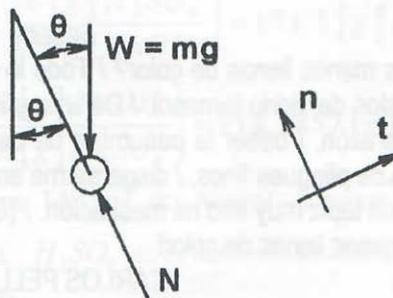
$$\Sigma F_t : -m g \sin \theta = m a_t$$

COMO LA CURVA ES UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA:

$$a_t = \alpha r$$

Y ADEMÁS: $\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

ENTONCES: $\int_{\omega_C}^{\omega_D} 0.5 \omega d\omega = \int_{16.26^\circ}^{30^\circ} -g \sin \theta d\theta$



DADO QUE $v_D = 1.439 \text{ m/s}$ y $v_D = \omega_D r$: $\therefore \omega_D = 2.878 \text{ rad/s}$ Y POR LO TANTO:

$$[0.25 \omega^2]_{\omega_C}^{2.878} = [9.8 \cos \theta]_{16.26^\circ}^{30^\circ} \Rightarrow 0.25(2.878^2 - \omega_C^2) = 9.8(\cos 30^\circ - \cos 16.26^\circ)$$

$$2.071 - 0.25 \omega_C^2 = -0.9210 \Rightarrow \omega_C = \sqrt{11.97} \Rightarrow \omega_C = 3.461 \text{ rad/s}$$

POR LO CUAL: $v_C = 1.731 \text{ m/s}$

PARA EL TRAMO RECTO DE B A C, EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE QUEDA:

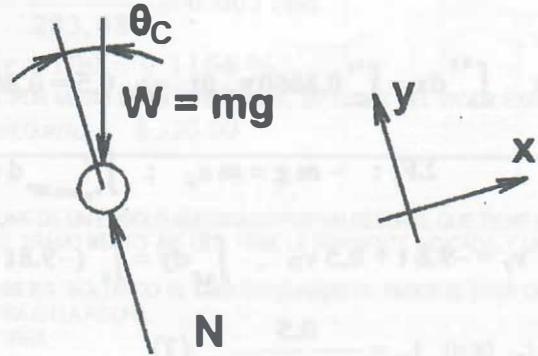
$$\Sigma F_x : -mg \sin \theta_C = ma_x$$

$$\int_{v_B}^{1.731} v_x dv_x = \int_0^{0.5} -9.8 \sin 16.26^\circ dx$$

$$[0.5 v_x^2]_{v_B}^{1.731} = [-2.744 x]_0^{0.5}$$

$$0.5(1.731^2 - v_B^2) = -1.372 \Rightarrow v_B^2 = 2.996 + 2.744$$

$$v_B = \sqrt{5.740} \therefore v_B = 2.396 \text{ m/s}$$



Y FINALMENTE, PARA EL INTERVALO EN EL QUE ACTÚA LA FUERZA DEL RESORTE, EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE QUEDA:

$$\Sigma F_x : -kx - mg \sin \theta_C = ma_x$$

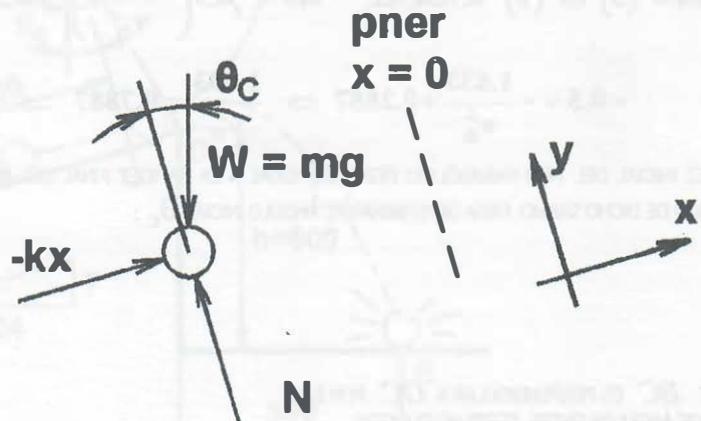
$$-5x - 0.05(9.8) \sin 16.26^\circ = 0.05a_x$$

$$-100x - 2.744 = a_x$$

$$\int_{-0.5}^0 (-100x - 2.744) dx = \int_0^{2.396} v_x dv_x$$

$$[-50x^2 - 2.744x]_{-0.5}^0 = [0.5 v_x^2]_0^{2.396}$$

$$50\delta^2 - 2.744\delta = 2.870$$



ENTONCES, LA ECUACIÓN CUADRÁTICA NORMALIZADA SERÁ: $\delta^2 - 0.05488\delta - 0.05740 = 0$

DADO QUE FÍSICAMENTE LA RAÍZ NEGATIVA NO ES VÁLIDA: $\delta = 0.02744 + \sqrt{(0.02744)^2 + 0.05740}$

$$\delta = 0.02744 + \sqrt{0.05815} \text{ Y POR LO TANTO: } \delta = 0.2686 \text{ m}$$

QUE ES LA LONGITUD QUE DEBE COMPRIMIRSE EL RESORTE PARA QUE EL BALÍN CAIGA EN EL PUNTO E.

CULTURA

DESEOS

Trópico, ¿para qué me diste / las manos llenas de color? / Todo lo que yo toque / se llenará de sol. / En las tardes sutiles de otras tierras / pasaré con mis ruidos de vidrio tornasol. / Déjame un solo instante / dejar de ser grito y color. / Déjame un solo instante / cambiar de clima el corazón, / beber la penumbra de una cosa desierta, / inclinarme en silencio sobre un remoto balcón, / ahondarme en el manto de pliegues finos, / dispersarme en la orilla de una suave devoción, / acariciar dulcemente las cabelleras lacias / y escribir con un lápiz muy fino mi meditación. / ¡Oh, dejar un solo instante / al ayudante de Campo del sol! / ¡Trópico, para qué me diste las manos llenas de color!

CARLOS PELLICER

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DEL PROFESOR YUKIHIRO MINAMI KOYAMA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 50

2 DE DICIEMBRE DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTE BOLETÍN LES DESEA FELICIDAD Y LAS COSAS MÁS BELLAS DE LA VIDA EN ESTAS FIESTAS DECEMBRINAS Y EN EL AÑO NUEVO 2003.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

QUÍMICA

PROCEDIMIENTO PARA IDENTIFICAR EL RECURSO LIMITANTE EN UNA REACCIÓN QUÍMICA

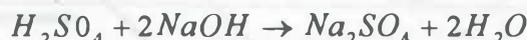
DEFINICIÓN DE REACTIVO LIMITANTE (R.L.): ES AQUEL QUE SE ENCUENTRA EN LA MENOR CANTIDAD ESTEQUIOMÉTRICA CON RESPECTO A LOS OTROS REACTIVOS.

EL R.L. SE EMPLEA PARA DETERMINAR LAS CANTIDADES DE REACTIVOS Y PRODUCTOS QUE SE INVOLUCRAN EN UNA REACCIÓN QUE PROCEDE CON UN 100 % DE RENDIMIENTO.

SE SUGIEREN LOS PASOS SIGUIENTES PARA IDENTIFICAR EL R.L.:

- OBTENGA LAS CANTIDADES DE REACTIVOS EN LAS MISMAS UNIDADES.
- REALICE LOS CÁLCULOS PARA DETERMINAR LAS CANTIDADES ESTEQUIOMÉTRICAS DE CADA REACTIVO CON BASE EN LOS DATOS PROPORCIONADOS.
- IDENTIFIQUE EL REACTIVO LIMITANTE COMO AQUEL QUE SE ENCUENTRA EN LA MENOR CANTIDAD ESTEQUIOMÉTRICA.

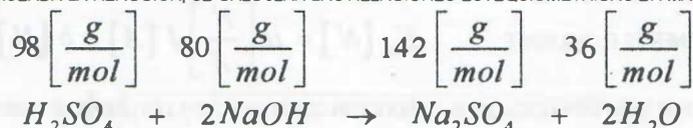
EJEMPLO. CON BASE EN LA REACCIÓN SIGUIENTE:



OBTENGA LA MASA EN GRAMOS DEL SULFATO DE SODIO QUE SE PRODUCE CUANDO SE PONEN A REACCIONAR 140 [g] DE ÁCIDO SULFÚRICO CON 140 [g] DE HIDRÓXIDO DE SODIO.

RESOLUCIÓN.

DESPUÉS DE RECTIFICAR QUE ESTÉ BALANCEADA LA REACCIÓN, SE CALCULAN LAS RELACIONES ESTEQUIOMÉTRICAS EN MASA:



- SE PUEDE TRABAJAR EN MOLES O EN GRAMOS, EN ESTE CASO SE ESCOGERÁ LA SEGUNDA OPCIÓN.
- SE REALIZAN LOS CÁLCULOS:

$$m_{H_2SO_4} = 140 [g] NaOH \left(\frac{98 [g] H_2SO_4}{80 [g] NaOH} \right) = 171.5 [g] H_2SO_4$$

$$m_{NaOH} = 140 [g] H_2SO_4 \left(\frac{80 [g] NaOH}{98 [g] H_2SO_4} \right) = 114.2857 [g] NaOH$$

- COMO SE OBSERVA, PARA QUE REACCIONEN EN SU TOTALIDAD LOS 140 [g] DE NaOH SE REQUIEREN 171.5 [g] DE H₂SO₄ Y SÓLO SE TIENEN 140 [g] DE H₂SO₄. POR LO TANTO, EL H₂SO₄ ES EL REACTIVO LIMITANTE YA QUE SE ENCUENTRA EN MENOR CANTIDAD ESTEQUIOMÉTRICA. EL NaOH ES EL REACTIVO EN EXCESO.

PARA CALCULAR LA CANTIDAD DE SAL QUE SE PRODUCE, SE USA EL REACTIVO LIMITANTE:

$$m_{Na_2SO_4} = 140 [g] H_2SO_4 \left(\frac{142 [g] Na_2SO_4}{98 [g] H_2SO_4} \right) = 202.857 [g] de Na_2SO_4$$

∴ Se producen $m_{Na_2SO_4} = 202.8571 [g] de Na_2SO_4$

FÍSICA EXPERIMENTAL

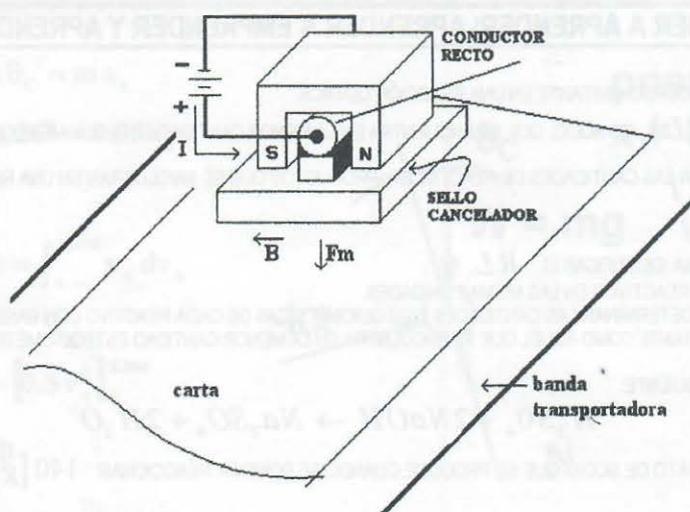
PARA EL DESARROLLO DEL PROYECTO PARA DISPONER DE UNA MÁQUINA CANCELADOTA DE TIMBRES POSTALES, SE DETERMINÓ APLICAR EL PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE TIPO ELECTROMAGNÉTICO. CON BASE EN HACER CIRCULAR UNA INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA A TRAVÉS DE UN CONDUCTOR RECTO, INMERSO EN UN CAMPO MAGNÉTICO CONSTANTE, DE ACUERDO AL ARREGLO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA

COMO PARTE DEL PROCESO DE DISEÑO SE REALIZARON PRUEBAS Y MEDICIONES CON REGISTRO ESTADÍSTICO, LAS CUALES SE MUESTRAN EN LA SIGUIENTE TABLA:

$F_m [N]$	2.934	5.868	8.802	11.736
$I [A]$	0.09	0.17	0.26	0.37

CON EL PROPÓSITO DE INTEGRAR EL INFORME COMPLETO DEL PROYECTO QUE SE MENCIONA SE REQUIERE DAR EL SEGUIMIENTO SECUENCIAL SIGUIENTE:

- OBTENER EL MODELO MATEMÁTICO REPRESENTATIVO DE LA FUERZA DE ORIGEN ELECTROMAGNÉTICO PROPUESTO A PARTIR DE LOS DATOS QUE SE PROPORCIONAN.
- A PARTIR DEL ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO Y DE LOS DATOS PROPORCIONADOS, DETERMINE LA MAGNITUD DE LA INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO DEL IMÁN EMPLEADO EN DICHO DISPOSITIVO.
- DETERMINE LA FUERZA CON LA QUE IMPRIME EL DESPLAZADOR DEL SELLO (CLICHÉ) SI SE APLICA UNA CORRIENTE DE $0.13 [A]$, CONSIDERANDO EL PESO DEL CLICHÉ QUE CONTIENE A L SELLO.
- SI POR EL CONDUCTOR LA INTENSIDAD DE CORRIENTE ES CERO, DETERMINE LA MAGNITUD DE LA FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO EN LA POSICIÓN SUPERIOR O INICIAL DE LA SIGUIENTE SECUENCIA:



SOLUCIÓN.

A) EL MODELO MATEMÁTICO A OBTENER ES EL SIGUIENTE:
$$F_m [N] = \mu \left[\frac{N}{A} \right] I [A] + b [N]$$

$F_m = BIL \text{ sen } \theta$ si $\theta = 90^\circ$ POR SER PERPENDICULAR EL CONDUCTOR CON RESPECTO A LAS LÍNEAS DE CAMPO MAGNÉTICO DEL IMÁN.

$$\therefore F_m = BIL \text{ sen } 90^\circ = BIL (1) = BIL$$

COMO $F_m = f(I) \Rightarrow F_m = (BL)I + b$ Y POR ELLO $F_m [N] = \mu \left[\frac{N}{A} \right] I [A] + b [N]$

PRIMERO SE OBTIENE LA μ (PENDIENTE) POR EL MÉTODO DE PARES DE PUNTOS:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta F_m}{\sum_{i=1}^n \Delta I} = \frac{(11.736 - 5.868) + (8.802 - 2.934)}{(0.37 - 0.17) + (0.26 - 0.09)} = \frac{5.868 + 5.868}{0.20 + 0.17} = \frac{11.736}{0.37} \therefore \mu = 31.71 \left[\frac{N}{A} \right]$$

AHORRA SE OBTIENE EL CENTROIDE QUE CONSISTE DE LOS VALORES PROMEDIO DE: $\bar{F} = 7.335 [N]$ y $\bar{I} = 0.222 [A]$

POR LO QUE CONTINUAMOS CON LA OBTENCIÓN DE LA ORDENADA AL ORIGEN (b):

$$\bar{F}_m [N] = \mu \left[\frac{N}{A} \right] \bar{I} [A] + b [N]$$

SE SUSTITUYEN LOS VALORES CONOCIDOS Y SE TIENE QUE:

$$7.335 [N] = \left(31.71 \left[\frac{N}{A} \right] \right) (0.222 [A]) + b [N] \Rightarrow 7.335 [N] = 7.039 [N] + b [N]$$

$$b [N] = 7.335 [N] - 7.039 [N] \therefore b [N] = 0.2953 [N]$$

POR LO QUE EL MODELO MATEMÁTICO QUEDA COMO

$$F_m [N] = 31.71 \left[\frac{N}{A} \right] I [A] + 0.2953 [N]$$

B) A PARTIR DE LA INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA PENDIENTE (μ) SE OBTIENE EL VALOR DEL CAMPO MAGNÉTICO DEL IMÁN.

SI $\mu = BL \Rightarrow B = \frac{\mu}{L}$ DONDE L ES LA LONGITUD DEL CONDUCTOR Y B ES LA INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO.

SE SUSTITUYE Y:

$$B [T] = \frac{31.71 \left[\frac{N}{A} \right]}{0.09 [m]} \Rightarrow B [T] = 352.33 [T] ; [T] = \text{TESLA}$$

C) PRIMERO OBTENEMOS LA F_m CON EL VALOR DE $I = 0.13 [A]$ A PARTIR DEL MODELO MATEMÁTICO OBTENIDO:

$$F_m [N] = 31.71 \left[\frac{N}{A} \right] (0.13 [A]) + 0.2953 [N] \Rightarrow F_m [N] = 4.122 + 0.2953 \therefore F_m [N] = 4.4176 [N]$$

SI EL PESO DEL SELLO (CLICHÉ) ES:

$$W_{\text{SELLO}} = (0.300 [kg]) \left(9.78 \left[\frac{m}{s^2} \right] \right) \therefore W_{\text{SELLO}} = 2.934 [N]$$

SI SE TIENE EN CUENTA EL PESO DEL SELLO Y LA FUERZA QUE EJERCE:

$$F_{\text{IMPRESIÓN}} = F_m + W_{\text{SELLO}} \Rightarrow F_{\text{IMPRESIÓN}} = 4.4176 + 2.934 \therefore F_{\text{IMPRESIÓN}} = 7.3616 [N]$$

D) SI ES NULA LA INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA, LA FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO NECESARIA ES:

$$F_{\text{NECESARIA}} = F_m + W_{\text{SELLO}} ; F_m = 0 \therefore F_{\text{NECESARIA}} = W_{\text{SELLO}} = 2.934 [N]$$

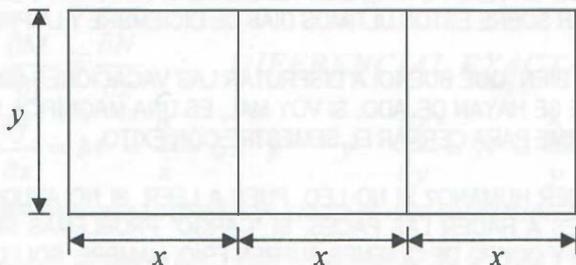
CÁLCULO I

UN TERRENO RECTANGULAR SE VA A CERCAR Y SE DIVIDIRÁ EN TRES PORCIONES IGUALES UTILIZANDO DOS CERCAS DIVISORIAS QUE SON PARALELAS A DOS DE LOS LADOS DEL TERRENO.

A) SI EL ÁREA QUE DEBE ABARCARSE ES $8000 m^2$, ENCUENTRE LAS DIMENSIONES DEL TERRENO QUE REQUIEREN LA MENOR CANTIDAD DE CERCA.

B) SI LA CERCA TOTAL QUE VAA UTILIZARSE ES DE $16,000 m$, ENCONTRAR LAS DIMENSIONES DEL TERRENO ABARCADO QUE TENGA LA MAYOR ÁREA:

SOLUCIÓN



A) LA CANTIDAD DE CERCA, QUE SE DESEA SEA MÍNIMA, SE EXPRESA MEDIANTE EL SIGUIENTE MODELO "PRELIMINAR":

$$C' = 6x + 4y$$

SE LE LLAMA "PRELIMINAR" PORQUE AÚN NO ES EL DEFINITIVO YA QUE LA CANTIDAD DE CERCA ESTÁ EXPRESADA EN TÉRMINOS DE DOS VARIABLES. UNA EXPRESIÓN PARA RELACIONAR A LAS VARIABLES "x" y "y" ES LA QUE DEFINE EL ÁREA DEL TERRENO. ASÍ SE TIENE QUE:

$$3xy = A \Rightarrow 3xy = 8000 \Rightarrow y = \frac{8000}{3x}$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN EL MODELO MATEMÁTICO "PRELIMINAR" Y SE OBTIENE EL MODELO MATEMÁTICO DEFINITIVO CON EL QUE SE PROCEDE A REALIZAR EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN. LUEGO:

$$C = 6x + 4 \left(\frac{8000}{3x} \right) \Rightarrow C = 6x + \frac{32000}{3x}$$

$$\frac{dC}{dx} = 6 - \frac{96000}{9x^2} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = 6 - \frac{32000}{3x^2}$$

$$6 - \frac{32000}{3x^2} = 0 \Rightarrow \frac{18x^2 - 32000}{3x^2} = 0 \Rightarrow x^2 \approx 1777.78 \Rightarrow x \approx \pm 42.16$$

EVIDENTEMENTE SE TOMA EL SIGNO POSITIVO Y PARA VER SI SE TRATA DE UN MÁXIMO O UN MÍNIMO, SE UTILIZA EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$x = 40 \Rightarrow \frac{dC}{dx} < 0 \quad y \quad x = 45 \Rightarrow \frac{dC}{dx} > 0 \quad \therefore \text{MÁXIMO}$$

ENTONCES, LAS DIMENSIONES DEL TERRENO QUE REQUIEREN LA MENOR CANTIDAD DE CERCAS, SON:

$$\text{LARGO} = 3x \approx 3(42.16) \approx 126.48 \text{ m}$$

$$\text{ANCHURA} = y \approx \frac{8000}{3(42.16)} \approx 63.25 \text{ m}$$

B) EL MODELO PRELIMINAR DE LO QUE SE DESEA OPTIMIZAR QUE ES EL ÁREA, EQUIVALE A:

$$A = 3xy$$

QUE, COMO SE OBSERVA, TIENE DOS VARIABLES, POR LO QUE SE UTILIZARÁ LA CANTIDAD DE CERCAS DADA PARA RELACIONARLAS.

$$6x + 4y = 16000 \Rightarrow y = \frac{16000 - 6x}{4} \Rightarrow y = 4000 - \frac{3}{2}x$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN EL MODELO MATEMÁTICO PRELIMINAR Y SE LLEGA AL DEFINITIVO, CON EL QUE SE RESUELVE EL PROBLEMA DE ÁREA MÁXIMA. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$A = 3x \left(4000 - \frac{3}{2}x \right) \Rightarrow A = 12000x - \frac{9}{2}x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 12000 - 9x \quad ; \quad 12000 - 9x = 0 \Rightarrow x \approx 1333.33$$

PARA VER SI SE TRATA DE UN MÁXIMO O UN MÍNIMO, SE UTILIZA EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$x = 1300 \Rightarrow \frac{dA}{dx} > 0 \quad y \quad x = 1350 \Rightarrow \frac{dA}{dx} < 0 \quad \therefore \text{MÁXIMO}$$

ENTONCES, LAS DIMENSIONES DEL TERRENO ABARCADO QUE TENGA LA MAYOR ÁREA, SON:

$$\text{LARGO} = 3x \approx 3(1333.33) \approx 3999.99 \approx 4000 \text{ m}$$

$$\text{ANCHURA} = y \approx 4000 - \frac{3}{2}(1333.33) \approx 2000 \text{ m}$$

REFLEXIÓN

LLEGARON LAS VACACIONES Y SE VOLVERÁ A LAS ACTIVIDADES ACADÉMICAS EL LUNES 6 DE ENERO DE 2003. UN BONITO DÍA DE UN NUEVO AÑO. ¿POR QUÉ NO REFLEXIONAR SOBRE ESTOS ÚLTIMOS DÍAS DE DICIEMBRE Y LA PRIMERA SEMANA DE ENERO?

1. ¿CÓMO VOY EN LA ESCUELA? SI VOY BIEN ¡QUÉ BUENO! A DISFRUTAR LAS VACACIONES SIN OLVIDAR REPASAR ALGUNAS COSAS Y HACER LAS TAREAS O PROYECTOS QUE SE HAYAN DEJADO. SI VOY MAL, ES UNA MAGNÍFICA OPORTUNIDAD PARA RECUPERAR, PARA ESTUDIAR Y APRENDER Y ASÍ PREPARARME PARA CERRAR EL SEMESTRE CON ÉXITO.

2. ¿CÓMO VA MI CRECIMIENTO COMO SER HUMANO? SI NO LEO, PUES A LEER. SI NO AYUDO EN CASA, PUES A AYUDAR. SI ESTOY ENOJADO CON ALGUIEN EN CASA, PUES A HACER LAS PACES. SI "CARGO" PROBLEMAS FAMILIARES QUE NO SON MÍOS, PUES A "DESCARGARLOS". SI NO ME PREOCUPO Y OCUPO DE QUIENES SUFREN FRÍO, HAMBRE, SOLEDAD Y POBREZA, PUES A PREOCUPARME Y OCUPARME.

3. ES UNA BUENA ÉPOCA PARA RENOVARSE, PARA CAMBIAR ALGUNAS COSAS, PARA FIJARSE METAS QUE LO CONDUZCAN A UNO A CONVERTIRSE EN UN SER HUMANO DE BIEN, SENCILLO, EN BUSCA DE LA SABIDURÍA Y FELIZ.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ Y CÉSAR ENRIQUE BENÍTEZ JOYNER

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002

NÚMERO 51

17 DE DICIEMBRE DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. EL SEMESTRE TERMINARÁ EL SÁBADO 25 DE ENERO Y SI SE VE QUE AÚN HAY UN BUEN TIEMPO PARA MEJORAR O PARA RECUPERAR Y ASÍ LOGRAR ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS QUE CURSAN. Y LO MÁS IMPORTANTE: ESTAR SEGUROS DE HABER APRENDIDO CONOCIMIENTOS QUE LES AYUDARÁN A TENER ÉXITO EN SU VIDA FUTURA. HAY TIEMPO PARA ESTUDIAR Y TAMBIÉN PARA DESCANSAR. TODO SE PUEDE SI UNO LO QUIERE Y LO HACE CON ENTREGA, PASIÓN, COMPROMISO Y RESPONSABILIDAD.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO III

INVESTIGAR SI LA SIGUIENTE EXPRESIÓN ES UNA DIFERENCIAL EXACTA Y EN CASO DE SERLO, ENCONTRAR LA FUNCIÓN DE LA CUAL ES DIFERENCIAL TOTAL

$$\left(\frac{2}{x} - 6x^2y^2\right)dx + \left(\frac{2}{y} - 4x^3y\right)dy$$

SOLUCIÓN

COMO SE SABE, EN LA EXPRESIÓN DADA SE PUEDEN DENOTAR AMBAS FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL COMO:

$$M = \frac{2}{x} - 6x^2y^2 \quad y \quad N = \frac{2}{y} - 4x^3y$$

Y SI SE OBTIENEN LAS PARCIALES "CRUZADAS" SE LLEGA A:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -12x^2y \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -12x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \therefore \quad \text{DIFERENCIAL EXACTA}$$

LUEGO EXISTE UNA FUNCIÓN "f" TALQUE: $\frac{\partial f}{\partial x} = M = \frac{2}{x} - 6x^2y^2 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N = \frac{2}{y} - 4x^3y$

PARA ENCONTRAR LA FUNCIÓN DE LA CUAL LA EXPRESIÓN DADA ES DIFERENCIAL EXACTA SE HACE LO SIGUIENTE: SE INTEGRA "M" CON RESPECTO A "x" Y SE TIENE QUE:

$$f = \int \left(\frac{2}{x} - 6x^2y^2\right) dx \Rightarrow f = 2 \ln|x| - 2x^3y^2 + C(y)$$

PARA EVALUAR LA FUNCIÓN "C", QUE ESTÁ EN TÉRMINOS DE "y", SE DERIVA LA EXPRESIÓN OBTENIDA CON RESPECTO A "y" Y SE IGUALA CON LA EXPRESIÓN QUE DEFINE A "N". ASÍ,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^3y + C'(y) \quad ; \quad -4x^3y + C'(y) = \frac{2}{y} - 4x^3y \Rightarrow C'(y) = \frac{2}{y}$$

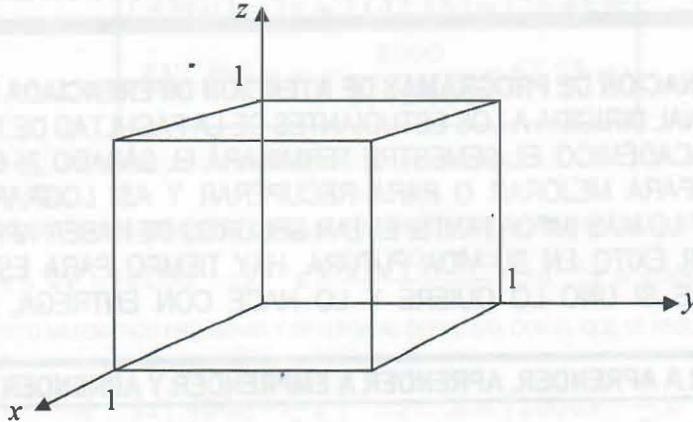
SE INTEGRA CON RESPECTO A "y" Y EL RESULTADO SE SUSTITUYE EN "f", CON LO QUE FINALMENTE SE OBTIENE LA FUNCIÓN REQUERIDA:

$$C(y) = \int \frac{2}{y} dy \Rightarrow C(y) = 2 \ln |y| + C$$

$$\therefore f = 2 \ln |x| - 2x^3 y^2 + 2 \ln |y| + C \Rightarrow f = \ln |x^2 y^2| - 2x^3 y^2 + C$$

CÁLCULO III

ENCONTRAR EL CENTRO DE MASA DEL CUBO UNIDAD $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$, SI LA DENSIDAD DE CUALQUIER PUNTO (x, y, z) ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE SU DISTANCIA AL ORIGEN.
SOLUCIÓN



LA DENSIDAD DEL CUBO ESTÁ DADA POR: $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$. ENTONCES LA MASA SE CALCULA DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx = k \int_0^1 \int_0^1 \left[x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 dy dx = k \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) dy dx = \\ &= k \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y}{3} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = k \int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = k \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right]_0^1 \therefore M = k \end{aligned}$$

EL MOMENTO CON RESPECTO AL PLANO "yz" ES:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x(x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx = k \int_0^1 x \left[\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy \right] dx = \\ &= k \int_0^1 x \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = k \int_0^1 x \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) dx = k \int_0^1 \left(x^3 + \frac{2x}{3} \right) dx = k \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{3} \right]_0^1 \therefore M_{yz} = \frac{7k}{12} \end{aligned}$$

LUEGO LA ABCISA DEL CENTRO DE MASA ES IGUAL A:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\frac{7k}{12}}{k} = \frac{7}{12}$$

Y POR SIMETRÍA, LA ORDENADA Y LA COTA DEL CENTRO DE MASA TIENEN EL MISMO VALOR, ES DECIR $\bar{y} = \frac{7}{12}$ $\bar{z} = \frac{7}{12}$. FINALMENTE

$$CM \left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12} \right)$$

CÁLCULO I

PROBAR QUE LA SIGUIENTE SERIE INFINITA ES CONVERGENTE Y ENCONTRAR SU SUMA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{5}{6^{n-1}} + \frac{8}{n^2 + 7n + 12} \right]$$

SOLUCIÓN

SE ANALIZARÁ POR SEPARADO CADA SUMANDO DE LA SERIE DADA.

ASÍ, SI SE ANALIZA LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^{n-1}}$ SE VE QUE SE TRATA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA CON $|r| = \frac{1}{6} < 1$ POR LO QUE ES CONVERGENTE Y SU SUMA "S" SE OBTIENE COMO SIGUE:

$$S = \frac{a}{1-r} ; a = 5 \text{ y } r = \frac{1}{6} \therefore S = \frac{5}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{5}{6}} \Rightarrow S = 6$$

SI SE ESCRIBEN ALGUNAS DE SUS SUMAS PARCIALES SE OBSERVA QUE SU VALOR TIENDE A "6" QUE ES LA SUMA DE LA SERIE. ASÍ,

$$S_1 = \frac{5}{6^0} = 5 ; S_2 = \frac{5}{6^0} + \frac{5}{6^1} \approx 5.83333333 ; S_3 = \frac{5}{6^0} + \frac{5}{6^1} + \frac{5}{6^2} \approx 5.9722221$$

$$S_4 \approx 5.9953702 ; S_5 \approx 5.9992282 ; S_6 \approx 5.9998712 ; S_7 \approx 5.9999783$$

$$S_8 \approx 5.9999961 ; S_9 \approx 5.9999990 ; S_{10} \approx 5.9999994$$

COMO SE OBSERVA MIENTRAS MAYOR ES LA SUMA PARCIAL, SU VALOR SE ACERCA MÁS A "6" QUE ES LA SUMA DE LA SERIE Y EQUIVALE AL LÍMITE DE LA SUMA PARCIAL ENÉSIMA S_n CUANDO EL NÚMERO DE SUMANDOS TIENDE A INFINITO.

CONSIDÉRESE AHORA LA OTRA SERIE, ES DECIR, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2 + 7n + 12}$ SI SE FACTORIZA EL DENOMINADOR, SE OBTIENE:

$$n^2 + 7n + 12 = (n + 3)(n + 4)$$

LUEGO LA SERIE SE PUEDE EXPRESAR COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(n+3)(n+4)}$ SI ESTE COCIENTE SE DESCOMPONE EN FRACCIONES RACIONALES SE LLEGA A:

$$\frac{8}{n^2 + 7n + 12} = \frac{8}{(n + 3)(n + 4)} = \frac{A}{n + 3} + \frac{B}{n + 4}$$

DE DONDE $8 = A(n+4) + B(n+3) \Rightarrow 8 = An + 4A + Bn + 3B$

COMO SE SABE, DOS POLINOMIOS SON IGUALES SI LOS COEFICIENTES DE LA VARIABLE EN SUS DIFERENTES POTENCIAS, ASÍ COMO LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES, SON RESPECTIVAMENTE IGUALES. LUEGO SE PUEDE ESCRIBIR:

$$0 = A + B \text{ y } 8 = 4A + 3B \Rightarrow \begin{matrix} 0 = -3A - 3B \\ 8 = 4A + 3B \\ \hline 8 = A \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = 8 \\ B = -8 \end{matrix}$$

POR LO QUE LA SERIE INFINITA SE PUEDE EXPRESAR COMO: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{n+3} - \frac{8}{n+4} \right)$

Y SI SE ESCRIBEN ALGUNOS DE SUS TÉRMINOS SE TENDRÁ QUE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{n+3} - \frac{8}{n+4} \right) = \left(\frac{8}{4} - \frac{8}{5} \right) + \left(\frac{8}{5} - \frac{8}{6} \right) + \left(\frac{8}{6} - \frac{8}{7} \right) + \left(\frac{8}{7} - \frac{8}{8} \right) + \left(\frac{8}{8} - \frac{8}{9} \right) + \dots + \left(\frac{8}{n+3} - \frac{8}{n+4} \right) + \dots$$

COMO SE VE, LA SUMA PARCIAL ENÉSIMA EQUIVALE A:

$$S_n = \frac{8}{4} - \frac{8}{n+4} \Rightarrow S_n = \frac{8n + 32 - 32}{4(n+4)} \Rightarrow S_n = \frac{8n}{4(n+4)} \therefore S_n = \frac{2n}{n+4}$$

DE DONDE SU LÍMITE, SI EXISTE, ES LA SUMA "FINITA" DE LA SERIE "INFINITA" Y LA SERIE ES CONVERGENTE. ASÍ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \therefore S = 2$$

FINALMENTE SE CONCLUYE QUE LA SERIE EN ESTUDIO ES CONVERGENTE Y SU SUMA ES IGUAL A $6 + 2 = 8$. POR LO TANTO,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{5}{6^{n-1}} + \frac{8}{n^2 + 7n + 12} \right] \text{ es convergente y } S = 8$$

CÁLCULO III

DEMOSTRAR QUE SI $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \cos x \hat{i} + (2y \operatorname{sen} x + e^{2z}) \hat{j} + 2ye^{2z} \hat{k}$, ENTONCES LA INTEGRAL $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA Y ENCONTRAR UNA FUNCIÓN DE POTENCIAL f PARA \vec{F} . SI \vec{F} ES UN CAMPO DE FUERZA. CALCULAR EL TRABAJO REALIZADO POR \vec{F} AL LLEVAR UNA PARTÍCULA A LO LARGO DE LA CURVA "C" DEL PUNTO $(0, 1, \frac{1}{2})$ AL PUNTO $(\frac{\pi}{2}, 3, 2)$

SOLUCIÓN

LA INTEGRAL ES INDEPENDIENTE DE LA TRAYECTORIA SI EXISTE UNA FUNCIÓN ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL DIFERENCIABLE $f(x, y, z)$ TAL QUE $\nabla f(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$, ES DECIR, QUE:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2ye^{2z}$$

AHORA SE INTEGRA LA PRIMERA EXPRESIÓN CON RESPECTO A "x" Y SE TIENE QUE

$$f = \int y^2 \cos x \, dx = y^2 \operatorname{sen} x + Q(y, z)$$

PARA EVALUAR LA FUNCIÓN "Q" SE DERIVA f CON RESPECTO A "y" Y SE IGUALA A $\frac{\partial f}{\partial y}$. LUEGO,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y} \quad ; \quad 2y \operatorname{sen} x + \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + e^{2z} \Rightarrow \frac{\partial Q(y, z)}{\partial y} = e^{2z}$$

SE INTEGRA CON RESPECTO A "y" Y SE LLEGA A:

$$Q(y, z) = \int e^{2z} \, dy \Rightarrow Q(y, z) = ye^{2z} + R(z)$$

SE SUSTITUYE ESTE RESULTADO EN LA FUNCIÓN "f" Y SE TIENE QUE

$$f = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + R(z)$$

PARA OBTENER LA FUNCIÓN "R" SE DERIVA f CON RESPECTO A "z" Y SE IGUALA A $\frac{\partial f}{\partial z}$ LUEGO,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2ye^{2z} + \frac{dR(z)}{dz} \quad ; \quad 2ye^{2z} + \frac{dR(z)}{dz} = 2ye^{2z} \Rightarrow \frac{dR(z)}{dz} = 0$$

SE INTEGRA CON RESPECTO A "z" Y SE LLEGA A $R(z) = C$, QUE AL SUSTITUIRSE EN LA FUNCIÓN "f" DADO COMO RESULTADO

$$f = y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} + C$$

QUE ES LA FUNCIÓN POTENCIAL PARA \vec{F}

Y ENTONCES EL TRABAJO REALIZADO QUE SE PIDE EQUIVALE A:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[y^2 \operatorname{sen} x + ye^{2z} \right]_{\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}, 3, 2\right)} = (9 + 3e^4) - (0 + e) = 9 + 3e^4 - e$$

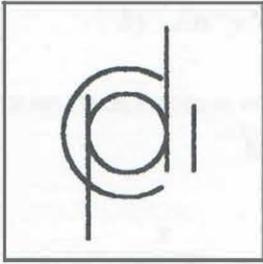
$$\therefore W \approx 170 \text{ (unidades de trabajo)}$$

TUTORÍA**ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR**

AÚN ES TIEMPO DE CONTACTAR A SU TUTOR E INTERACTUAR CON ÉL. NO PIERDAN LA MAGNÍFICA OPORTUNIDAD DE CONTAR CON UN ALIADO PARA TODA SU CARRERA. EN LA COPADI LA LIC. MARÍA ELENA CANO LES PUEDE DAR TODA LA INFORMACIÓN QUE NECESITEN AL RESPECTO. EL TUTOR LOS PUEDE ESCUCHAR, AYUDAR, APOYAR, ALENTAR, ACONSEJAR Y MOTIVAR PARA SEGUIR ADELANTE. ES ALGUIEN CON QUIEN PUEDEN HABLAR DE LO QUE USTEDES QUIERAN. HÁGANLO Y NO SE ARREPENTIRÁN. ES PARTE DE LA VIDA ACADÉMICA. ES PARTE DE LO QUE NUESTRA QUERIDA FACULTAD HACE POR USTEDES, PARA SU FORMACIÓN COMPLETA, COMO SERES HUMANOS DE BIEN Y CON ÉXITO EN SU DEVENIR PROFESIONAL.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 52

2 DE ENERO DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ES TIEMPO DE LOS PROPÓSITOS PARA ESTE AÑO NUEVO 2003. Y DE LOS PRIMEROS Y MÁS IMPORTANTES PARA UN ESTUDIANTE ESTÁ EL DE ALCANZAR LA ACREDITACIÓN EN LAS ASIGNATURAS QUE SE CURSEN, CON EL APRENDIZAJE CORRESPONDIENTE DE CONOCIMIENTOS, ASÍ COMO EL DE REALIZAR TODAS LAS ACCIONES NECESARIAS PARA CONSTITUIRSE EN UN SER HUMANO DE BIEN, DISPUESTO A LA REALIZACIÓN PLENA Y AL TRABAJO SOLIDARIO POR QUIENES HAN ESTADO MÁS ALEJADOS DE LOS BENEFICIOS.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

$$y' - 2y = 3 - 3u(t-3)$$

PARA $y(0) = 1$

$$\text{Y DONDE } u = u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

a) POR MEDIO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

b) POR COEFICIENTES INDETERMINADOS

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} a) \quad L\{y' - 2y\} &= L\{3 - 3u(t-3)\} \Rightarrow sF(s) - 1 - 2F(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-3s} \Rightarrow (s-2)F(s) = 1 + \frac{3}{s} - \frac{3}{s}e^{-3s} \\ &\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s(s-2)} - \frac{3}{s(s-2)}e^{-3s} \end{aligned}$$

AHORA SE DESCOMPONE EN FRACCIONES SIMPLES:

$$\frac{3}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} \Rightarrow 3 = A(s-2) + Bs \Rightarrow \begin{cases} \text{si } s=0, & A = -\frac{3}{2} \\ \text{si } s=2, & B = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ENTONCES

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} - \frac{\frac{3}{2}}{s} + \frac{\frac{3}{2}}{s-2} + \left(\frac{\frac{3}{2}}{s} - \frac{\frac{3}{2}}{s-2} \right) e^{-3s} \right\} = e^{2t} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{2t} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{2(t-3)} \right) u(t-3) = \\ &= \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{2(t-3)} \right) u(t-3) \quad \text{O BIEN} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{3}{2} & ; t < 3 \\ \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{2(t-3)} & ; t > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

b) EL PROBLEMA SE DEBE DIVIDIR EN DOS INTERVALOS:

$$y' - 2y = 3 \quad \text{para } t < 3, \quad y(0) = 1$$

SOLUCIÓN DE LA HOMOGÉNEA ASOCIADA:

$$y' - 2y = 0; \quad y_H = ce^{2t}$$

EL TÉRMINO INDEPENDIENTE ES $q(t) = 3$

SU OPERADOR ANULADOR ES: $P(D) = D - 2$

SE APLICA Y SE TIENE QUE:

$$D(D-2)y = D(3) \Rightarrow D(D-2)y = 0 \quad \therefore y = ce^{2t} + A$$

ENTONCES $y_p = A \Rightarrow y'_p = 0$

Y AL SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN ORIGINAL SE LLEGA A:

$$0 - 2A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{2}; \quad y = ce^{2t} - \frac{3}{2}; \quad \text{como } y(0) = 1 \Rightarrow 1 = ce^0 - \frac{3}{2} \quad \therefore c = \frac{5}{2}$$

Y POR LO TANTO

$$y = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{3}{2} \quad \text{para } t < 3$$

AHORA, PARA $t > 3$, SE UTILIZA LA SOLUCIÓN EN EL OTRO INTERVALO $y(3) = \frac{5}{2}e^6 - \frac{3}{2}$, ENTONCES HAY QUE RESOLVER:

$$y' - 2y = 0 \quad \text{para } y(3) = \frac{5}{2}e^6 - \frac{3}{2}$$

$y = ce^{2t}$; COMO SE CONOCE $y(3)$, SE TIENE ENTONCES QUE:

$$\frac{5}{2}e^6 - \frac{3}{2} = ce^6 \Rightarrow c = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}e^{-6} \quad \therefore y = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}e^{-6}\right)e^{2t} = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{3}{2}e^{2(t-3)} \quad \text{PARA } t > 3$$

QUE COINCIDE CON LA SOLUCIÓN DE OTRO INCISO.

NOTA. OBSÉRVESE QUE SE UTILIZÓ LA SOLUCIÓN PARA $t < 3$ PARA OBTENER LA CONDICIÓN PARTICULAR EN $t = 3$, A PESAR DE SER INTERVALO ABIERTO. EN ESTE CASO SIRVIÓ, PERO NO SIEMPRE ES ASÍ DE SENCILLO; HAY QUE HACER OTRO TIPO DE CONSIDERACIONES QUE REBASAN LOS OBJETIVOS DEL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES. POR ELLO, SE OBSERVA LA GRAN UTILIDAD DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

CÁLCULO I

ANALIZAR LA SIGUIENTE FUNCIÓN

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

INTERSECCIONES CON LOS EJES

a) Eje "x"; $y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \therefore$ origen

b) Eje "y"; $x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \therefore$ origen

SIMETRÍAS

a) Eje "x"; y por $-y \Rightarrow$ HAY CAMBIO, POR LO QUE NO HAY SIMETRÍA

b) Eje "y"; x por $-x \Rightarrow$ HAY CAMBIO, POR LO QUE NO HAY SIMETRÍA

c) Origen; x por $-x$
 y por $-y \Rightarrow$ NO HAY CAMBIO, LUEGO SÍ HAY SIMETRÍA

ASÍNTOTAS

a) VERTICALES: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \rightarrow +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \rightarrow +\infty$
 $\Rightarrow x = -1 \quad \therefore$ ASÍNTOTAS VERTICALES
 $x = +1$

b) HORIZONTALES: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \rightarrow \infty \Rightarrow$ NO TIENE

EXTENSIÓN

a) $En "x"$; $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

b) $En "y"$; $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow x^3 - y^3 x^2 + y^3 = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$

EXTREMOS RELATIVOS, PUNTOS DE INFLEXIÓN, INTERVALOS DE CRECIENTE Y DECRECIENTE Y CONCAVIDAD

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} ; \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}(1) - x \left[\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(2x) \right]}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} ; \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - \frac{2x^2}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x^2-1) - 2x^2}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

$$\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} ; \begin{cases} x = -\sqrt{3} \doteq -1.732 \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \doteq -1.37 \\ x = \sqrt{3} \doteq 1.732 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \doteq 1.37 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \rightarrow \infty \Rightarrow 3\sqrt[3]{(x^2-1)^4} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{EN ESTOS VALORES DE } x \text{ NO HAY EXTREMOS YA QUE HAY ASÍNTOTAS}$$

VERTICALES COMO YA SE VIO.

LUEGO, LOS PUNTOS CRÍTICOS DONDE PUEDE HABER EXTREMOS RELATIVOS SON: $(-1.732, -1.37)$ y $(1.732, 1.37)$

AHORA SE CALCULA LA SEGUNDA DERIVADA Y SE VE DÓNDE VALE CERO PARA ENCONTRAR LOS PUNTOS QUE PUEDEN SER DE INFLEXIÓN.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} ; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}(2x) - (x^2-3)4(x^2-1)^{\frac{1}{3}}(2x)}{9(x^2-1)^{\frac{8}{3}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x(x^2-1)^{\frac{4}{3}} - (8x^3-24x)(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{9(x^2-1)^{\frac{8}{3}}} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x^3-6x-8x^3+24x}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18x-2x^3}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}}$$

$$\frac{18x-2x^3}{9\sqrt[3]{(x^2-1)^7}} = 0 \Rightarrow 18x-2x^3 = 0 \Rightarrow 2x(9-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} = -1.5 \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} = 1.5 \end{cases}$$

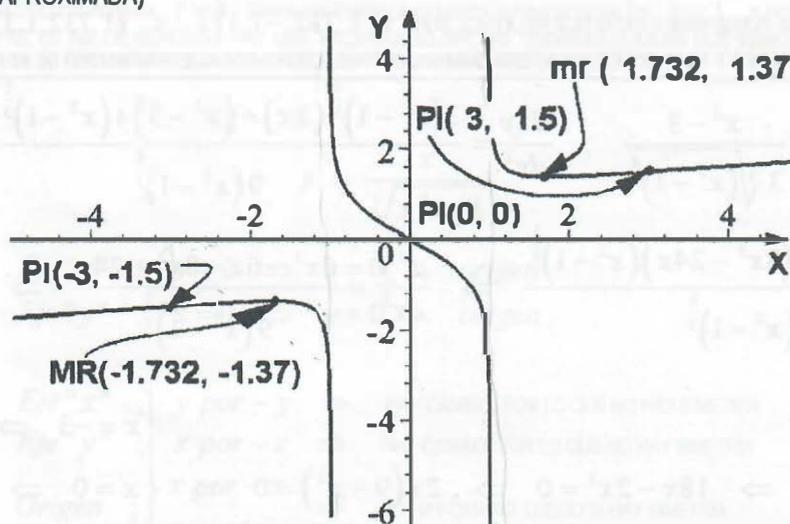
LUEGO LOS PUNTOS DONDE PUEDE HABER PUNTOS DE INFLEXIÓN Y POR CONSIGUIENTE CAMBIO EN LA CONCAVIDAD DE LA CURVA SON:

$$(-3, -1.5), (0, 0) \text{ y } (3, 1.5)$$

AHORA, CON LOS PUNTOS OBTENIDOS SE CONSTRUYE UNA TABLA QUE CONSIDERE EL ESTUDIO DE TODO EL EJE DE LAS ABCISAS Y QUE, A TRAVÉS DEL SIGNO DE LA PRIMERA Y SEGUNDAS DERIVADAS, PROPORCIONE LOS EXTREMOS, LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN Y LOS INTERVALOS DE CRECIENTE, DECRECIENTE, CÓNCAVA HACIA ARRIBA Y CÓNCAVA HACIA ABAJO.

x	y	y'	y''	CARACTERÍSTICA
$(-\infty, -3)$	CRECIENTE	+	+	CÓNCAVA HACIA ARRIBA
$x = -3$	PUNTO DE INFLEXIÓN		0	$PI(-3, -1.5)$
$(-3, -1.732)$	CRECIENTE	+	-	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x = -1.732$	MÁXIMO RELATIVO	0		$MR(-1.732, -1.37)$
$(-1.732, -1)$	DECRECIENTE	-	-	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x = -1$	$\pm\infty$			ASÍNTOTA VERTICAL
$(-1, 0)$	DECRECIENTE	-	+	CÓNCAVA HACIA ARRIBA
$x = 0$	PUNTO DE INFLEXIÓN		0	$PI(0, 0)$
$(0, 1)$	DECRECIENTE	-	-	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x = 1$	$\pm\infty$			ASÍNTOTA VERTICAL
$(1, 1.732)$	DECRECIENTE	-	+	CÓNCAVA HACIA ARRIBA
$x = 1.732$	MÍNIMO RELATIVO	0		$mr(1.732, 1.37)$
$(1.732, 3)$	CRECIENTE	+	+	CÓNCAVA HACIA ARRIBA
$x = 3$	PUNTO DE INFLEXIÓN		0	$PI(3, 1.5)$
$(3, \infty)$	CRECIENTE	+	-	CÓNCAVA HACIA ABAJO

REPRESENTACIÓN GRÁFICA (APROXIMADA)



NOTA LAS RECTAS $x = -1$ y $x = 1$ SON ASÍNTOTAS VERTICALES POR LO QUE DICHS VALORES DE "x" NO PERTENECEN AL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ANALIZADA.

TUTORÍA

ESTUDIANTES QUE EN EL SEMESTRE 2003-2 CURSARÁN EL PRIMER SEMESTRE CURRICULAR

NO DESAPROVECHEN LA OPORTUNIDAD ACADÉMICA QUE LES DA LA FACULTAD PARA TENER UN TUTOR. AL INICIO DEL SEMESTRE SE LES CITARÁ Y SE LES INFORMARÁ QUIÉN ES SU TUTOR. SE TRATA DE UN PROFESOR QUE LOS PUEDE ORIENTAR Y APOYAR AL INICIAR SUS ESTUDIOS Y SI SE PONEN DE ACUERDO, EN TODA LA CARRERA. ES UN APOYO ACADÉMICO Y EXISTENCIAL QUE PUEDE SER TRASCENDENTAL EN SU FORMACIÓN PROFESIONAL Y HUMANA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 53

17 DE ENERO DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

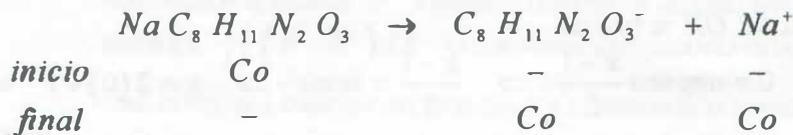
QUÍMICA

EL VERONAL ES UNA DROGA QUE SE ADMINISTRA GENERALMENTE COMO BARBITURATO DE SODIO ($Na C_8 H_{11} N_2 O_3$). ¿CUÁL ES EL pH DE UNA SOLUCIÓN DE BARBITURATO DE SODIO QUE CONTIENE 10 mg DE LA DROGA EN 250 ml DE LA SOLUCIÓN? PARA EL VERONAL, EL VALOR DE K_a ES DE 3.7×10^{-8} SOLUCIÓN

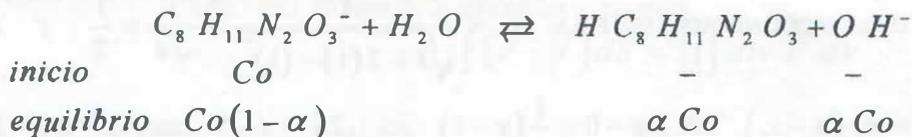
ES CONVENIENTE PRIMERO DETERMINAR LA CONCENTRACIÓN MOLAR DEL BARBITURATO DE SODIO (C_o)

$$C_o = \frac{n}{V} = \frac{m}{M V} = \frac{0.010 \text{ g}}{206 \frac{\text{g}}{\text{mol}} (0.25 \text{ L})} = 1.94 \times 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

DONDE M REPRESENTA LA MASA MOLECULAR DE LA SAL ($Na C_8 H_{11} N_2 O_3$). EN VISTA DE QUE LA SAL SE ENCUENTRA TOTALMENTE DISOCIADA EN AGUA, LA CONCENTRACIÓN DEL IÓN BARBITURATO ($C_8 H_{11} N_2 O_3^-$) ES LA MISMA QUE LA DE LA SAL,



EL EQUILIBRIO QUE SE ESTABLECE ENTRE EL IÓN BARBITURATO Y EL AGUA ES EL SIGUIENTE:



NOTA. SE HA SUPUESTO QUE LA CONCENTRACIÓN DE LOS IONES $O H^-$ PRODUCIDOS POR LA DISOCIACIÓN DEL AGUA ES MUY PEQUEÑA COMPARADA CON αC_o . EL EQUILIBRIO ANTERIOR ESTÁ CARACTERIZADO POR UNA CONSTANTE K_b , EXPRESADA COMO:

$$K_b = \frac{[H C_8 H_{11} N_2 O_3][O H^-]}{[C_8 H_{11} N_2 O_3^-]} = \frac{K_w}{K_a} = \frac{1 \times 10^{-14}}{3.7 \times 10^{-8}} = 2.70 \times 10^{-7}$$

$$\text{ASÍ, } K_b = \frac{\alpha^2 C_o^2}{C_o(1 - \alpha)} ; \text{ YA QUE } K_b \text{ ES MUY PEQUEÑA, } \alpha \ll 1 \text{ Y, EN CONSECUENCIA,}$$

$$K_b = \alpha^2 C_o ; \alpha = \left\{ \frac{K_b}{C_o} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{2.70 \times 10^{-7}}{1.94 \times 10^{-4}} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0.037$$

EL VALOR TAN PEQUEÑO DE α (3.7%), INDICA QUE EL IÓN BARBITURATO SE HA HIDROLIZADO MUY POCO Y QUE LA CONSIDERACIÓN DE QUE $\alpha \ll 1$, ESTÁ PLENAMENTE JUSTIFICADA.

$$[O H^-] = \alpha C_o = 0.037 (1.94 \times 10^{-4}) M = 7.18 \times 10^{-6} M$$

$$[H^+] = \frac{K_w}{[OH^-]} = \frac{1 \times 10^{-14}}{7.18 \times 10^{-6}} M = 1.39 \times 10^{-9} M ; \quad pH = -\log [H^+] = 8.86$$

CÁLCULO I

DETERMINAR LAS ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL A LAS SIGUIENTES CURVAS EN LOS PUNTOS QUE SE INDICAN:

i) $y = \text{ang tan } 2x$; EN EL ORIGEN DE COORDENADAS ; ii) $y = \text{angsen} \frac{x-1}{2}$; EN EL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL EJE OX

iii) $y = \text{ang cos } 3x$; EN EL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL EJE OY ; iv) $y = \ln x$ EN EL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL EJE OX

v) $y = e^{1-x^2}$ EN LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LA RECTA $y = 1$

SOLUCIÓN

i) $y = \text{ang tan } 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+4x^2}$; COMO SE SABE, LA DERIVADA ES LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE; LUEGO, EN EL ORIGEN DE

COORDENADAS SU VALOR ES: $m_T = \frac{dy}{dx} \Big|_{(0,0)} = \frac{2}{1+4(0)^2} = 2$; Y LA PENDIENTE DE LA RECTA NORMAL, QUE ES PERPENDICULAR A LA RECTA TANGENTE

ES: $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{2}$

LUEGO, CON ESTOS VALORES, CON EL PUNTO, QUE ES EL ORIGEN DE COORDENADAS, Y MEDIANTE LA ECUACIÓN DE LA RECTA "PUNTO-PENDIENTE", SE OBTIENEN LAS ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL. ASÍ, LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE ES:

$$y - y_1 = m_T(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$$

Y LA DE LA RECTA NORMAL

$$y - y_1 = m_N(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} \Rightarrow x + 2y = 0$$

ii) $y = \text{angsen} \frac{x-1}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4-x^2+2x-1}{4}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

EN EL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL EJE OX SE TIENE QUE:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = \text{angsen} \frac{x-1}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \text{sen} 0 \Rightarrow x = 2(0) + 1 \Rightarrow x = 1$$

AHORA SE HACE LO MISMO QUE EN EL EJERCICIO ANTERIOR Y SE LLEGA A: $m_T = \frac{1}{\sqrt{3+2(1)-(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ y $m_N = -2$

$$y - y_1 = m_T(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y = x - 1 \Rightarrow x - 2y - 1 = 0$$

$$y - y_1 = m_N(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$$

iii) $y = \text{ang cos } 3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ EN EL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL EJE OY SE TIENE QUE:

$$x = 0 \Rightarrow y = \text{ang cos } 3(0) \Rightarrow y = \text{ang cos } 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}; \quad m_T = -\frac{3}{\sqrt{1-9(0)^2}} = -3 \quad \text{y} \quad m_N = \frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m_T(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{\pi}{2} = -3(x - 0) \Rightarrow 2y - \pi = -6x \Rightarrow 6x + 2y - \pi = 0$$

$$y - y_1 = m_N(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}(x - 0) \Rightarrow 6y - 3\pi = 2x \Rightarrow 2x - 6y + 3\pi = 0$$

iv) $y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$; EN EL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL EJE OX SE TIENE QUE:

$$y=0 \Rightarrow 0=\ln x \Rightarrow e^0=x \Rightarrow x=1 ; m_T=\frac{1}{1}=1 \text{ y } m_N=-1$$

$$y-y_1=m_T(x-x_1) \Rightarrow y-0=1(x-1) \Rightarrow y=x-1 \Rightarrow x-y-1=0$$

$$y-y_1=m_N(x-x_1) \Rightarrow y-0=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+1 \Rightarrow x+y-1=0$$

$$v) y=e^{1-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2xe^{1-x^2}; \text{ EN LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LA RECTA } y=1 \text{ SE TIENE QUE:}$$

$$y=1 \Rightarrow 1=e^{1-x^2} \Rightarrow \ln 1=1-x^2 \Rightarrow 0=1-x^2 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} (-1,1) \\ (1,1) \end{cases}$$

$$\text{EN } (-1,1) \Rightarrow m_T=-2(-1)e^{1-(-1)^2}=2e^0=2 \text{ y } m_N=-\frac{1}{2}$$

$$y-y_1=m_T(x-x_1) \Rightarrow y-1=2[x-(-1)] \Rightarrow y-1=2x+2 \Rightarrow 2x-y+3=0$$

$$y-y_1=m_N(x-x_1) \Rightarrow y-1=-\frac{1}{2}[x-(-1)] \Rightarrow 2y-2=-x-1 \Rightarrow x+2y-1=0$$

$$\text{EN } (1,1) \Rightarrow m_T=-2(1)e^{1-(1)^2}=-2e^0=-2 \text{ y } m_N=\frac{1}{2}$$

$$y-y_1=m_T(x-x_1) \Rightarrow y-1=-2(x-1) \Rightarrow y-1=-2x+2 \Rightarrow 2x+y-3=0$$

$$y-y_1=m_N(x-x_1) \Rightarrow y-1=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y-2=x-1 \Rightarrow x-2y+1=0$$

CÁLCULO III

CALCULAR EL FLUJO DE $\vec{F} = xy \hat{i} + yz \hat{j} + xz \hat{k}$ HACIA FUERA, A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE DEL CUBO QUE SE FORMA EN EL PRIMER OCTANTE CON LOS PLANOS: $x=1$; $y=1$; $z=1$ UTILIZAR PARA ESTO EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA O DE GAUSS

SOLUCIÓN

PARA CALCULAR EL FLUJO DE \vec{F} A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE DEL CUBO, HABRÍA QUE EVALUAR LA INTEGRAL DE SUPERFICIE $\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{N}) dS$, LA CUAL HABRÍA QUE CALCULARLA EN LAS SEIS CARAS DEL CUBO, PERO,

COMO SE PIDE EN EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA, POR EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA, CALCULAR EL VALOR DE

DICHA INTEGRAL EQUIVALE A EVALUAR LA TRIPLE INTEGRAL DE LA DIVERGENCIA DE \vec{F} SOBRE LA REGIÓN INTERIOR AL CUBO Y ESTE TEOREMA DE GAUSS EXPRESA LO SIGUIENTE

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{N}) dS = \iiint_R \text{div } \vec{F} dV ;$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} = y + z + x &\Rightarrow \iiint_R \text{div } \vec{F} dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (z + y + x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} + (y+x)z \right]_0^1 dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y + x \right) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} + xy \right]_0^1 dx = \int_0^1 (1+x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ÁLGEBRA LINEAL

SEAN V EL ESPACIO VECTORIAL REAL DE LAS MATRICES SIMÉTRICAS DE 2×2 CON ELEMENTOS REALES Y W EL ESPACIO VECTORIAL REAL DE LOS POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A DOS CON COEFICIENTES REALES Y SEA $T: V \rightarrow W$ LA TRANSFORMACIÓN LINEAL DEFINIDA POR

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = (a+c)x^2 + (b-c)x + (a+2b)$$

a) DETERMINAR LA MATRIZ ASOCIADA A T REFERIDA A LAS BASES

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y } B = \{x^2, x-1, x^2+1\} \text{ DE } V \text{ y } W \text{ RESPECTIVAMENTE}$$

b) OBTENER LA IMAGEN DEL VECTOR $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, UTILIZANDO LA MATRIZ OBTENIDA EN EL INCISO (a)

SOLUCIÓN

$$T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = x^2 + 1 = \alpha_{11}x^2 + \alpha_{12}(x-1) + \alpha_{13}(x^2+1) = (\alpha_{11} + \alpha_{13})x^2 + \alpha_{12}x + (-\alpha_{12} + \alpha_{13})$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{11} + \alpha_{13} = 1 \\ \alpha_{12} = 0 \\ -\alpha_{12} + \alpha_{13} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_{11} = 0 \\ \alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{13} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -x - 2 = \alpha_{21}x^2 + \alpha_{22}(x-1) + \alpha_{23}(x^2+1) = (\alpha_{21} + \alpha_{23})x^2 + \alpha_{22}x + (-\alpha_{22} + \alpha_{23})$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{21} + \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{22} = -1 \\ -\alpha_{22} + \alpha_{23} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_{21} = 3 \\ \alpha_{22} = -1 \\ \alpha_{23} = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = x^2 - x = \alpha_{31}x^2 + \alpha_{32}(x-1) + \alpha_{33}(x^2+1) = (\alpha_{31} + \alpha_{33})x^2 + \alpha_{32}x + (-\alpha_{32} + \alpha_{33})$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{31} + \alpha_{33} = 1 \\ \alpha_{32} = -1 \\ -\alpha_{32} + \alpha_{33} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_{31} = 2 \\ \alpha_{32} = -1 \\ \alpha_{33} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

LA MATRIZ ASOCIADA A T REFERIDA A LAS BASES A Y B , ES: $m_B^A(T) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

AHORA SE DETERMINAN LAS COORDENADAS DEL VECTOR $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ EN LA BASE A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 3; \quad [\vec{v}]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

SE MULTIPLICA LA MATRIZ $m_B^A(T)$ POR EL VECTOR $[\vec{v}]_A$ Y $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [T(\vec{v})]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

SE OBTIENE EL VECTOR $T(\vec{v})$ A PARTIR DE SUS COORDENADAS EN LA BASE B

$$T(\vec{v}) = 0x^2 - 1(x-1) + 4(x^2+1) \Rightarrow T(\vec{v}) = 4x^2 - x + 5$$

SI SE OBTIENE $T(\vec{v})$ CON LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE T , SE OBTIENE

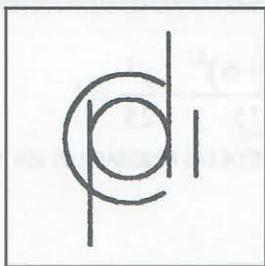
$$T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (1+3)x^2 + (2-3)x + (1+4) = 4x^2 - x + 5$$

QUE CORRESPONDE AL RESULTADO OBTENIDO UTILIZANDO LA MATRIZ ASOCIADA A T

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ROGELIO SOTO AYALA Y JUAN VELÁZQUEZ TORRES

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 54

2 DE MARZO DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO I

DETERMINAR EL DOMINIO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

$$i) f(x) = -\sqrt{8-x} \quad ; \quad ii) f(x) = \frac{5x}{2x^2+11x-6} \quad ; \quad iii) f(x) = +\sqrt{x^2-12x+11}$$

$$iv) f(x) = \frac{\sqrt{10-2x}}{x-3} \quad ; \quad v) f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{x-1}} \quad ; \quad vi) f(x) = \frac{7-\sqrt{x-1}}{\sqrt{5x-3}}$$

SOLUCIÓN

PARA ENCONTRAR EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN, HAY QUE DETERMINAR PARA QUÉ VALORES DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x" LOS CORRESPONDIENTES VALORES DE LA FUNCIÓN, ES DECIR, DE LA VARIABLE DEPENDIENTE "y", SON REALES. AL DAR EL DOMINIO, SE EXPRESARÁ DE DOS MANERAS DIFERENTES PARA PROPICIAR UNA MEJOR COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO

$$i) f(x) = -\sqrt{8-x}$$

EN ESTE CASO EL PROBLEMA ES LA RAÍZ CUADRADA. SE SABE QUE NO HAY RAÍCES REALES DE NÚMEROS NEGATIVOS. LUEGO LOS ÚNICOS VALORES DE "x" PARA LOS CUALES "y" ES REAL SON AQUELLOS PARA LOS CUALES EL INTEGRANDO ES POSITIVO O NULO LUEGO SE RESUELVE LA SIGUIENTE DESIGUALDAD:

$$8-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -8 \Rightarrow x \leq 8$$

POR LO QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES:

$$D_f = (-\infty, 8] \text{ OBIEN } D_f = \{x | -\infty < x \leq 8; x \in \mathbb{R}\}$$

$$ii) f(x) = \frac{5x}{2x^2+11x-6}$$

EN ESTA FUNCIÓN, EL PROBLEMA RESIDE EN QUE NO EXISTE UN VALOR REAL CON UN DIVISOR NULO. POR LO QUE SE BUSCARÁ PARA QUÉ VALORES DE LA VARIABLE "x" SE ANULA EL DENOMINADOR Y ESTOS VALORES NO PERTENECERÁN AL DOMINIO DE LA FUNCIÓN. ASÍ, SE FACTORIZA EL POLINOMIO Y SE TIENE QUE:

$$2x^2+11x-6 \quad ; \quad 4x^2+11(2)x-12$$

SE BUSCAN DOS VALORES QUE MULTIPLICADOS DEN POR RESULTADO -12 Y QUE SU SUMA ALGEBRAICA SEA 11. ASÍ SE LLEGA A:

$$(2x+12)(2x-1)$$

COMO SE MULTIPLICÓ POR 2 AL PRINCIPIO, SE TENDRÁ QUE DIVIDIR ENTRE ESTE VALOR PARA LLEGAR A LOS FACTORES DEL POLINOMIO ORIGINAL. LUEGO LOS FACTORES BUSCADOS SON:

$$(x+6)(2x-1)$$

POR LO QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-6, \frac{1}{2}\right\} \text{ OBIEN } D_f = \left\{x | -\infty < x < \infty; x \in \mathbb{R}; x \neq -6; x \neq \frac{1}{2}\right\}$$

$$iii) f(x) = +\sqrt{x^2-12x+11}$$

PARA ESTA FUNCIÓN, HABRÁ QUE BUSCAR PARA QUÉ VALORES DE "x" EL RADICANDO ES POSITIVO O NULO. PARA ELLO SE HACE LO SIGUIENTE:

$$x^2 - 12x + 11 = x^2 - 12x + 36 - 36 + 11 = (x - 6)^2 - 25$$

$$f(x) = y \Rightarrow y^2 = (x - 6)^2 - 25 \Rightarrow (x - 6)^2 - y^2 = 25 \Rightarrow \frac{(x - 6)^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$$

COMO SE OBSERVA, SE TRATA DE UNA HIPÉRBOLA CUYO CENTRO ESTÁ EN EL PUNTO (6, 0) CUYO EJE DE SIMETRÍA ES EL EJE DE LAS ABCISAS. LOS VÉRTICES DE LAS DOS RAMAS DE ESTA HIPÉRBOLA SON: (1, 0) y (11, 0) LUEGO, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES:

$$D_f = (-\infty, 1] \cup [11, \infty) \text{ OBIEN } D_f = \mathbb{R} - (1, 11)$$

$$iv) f(x) = \frac{\sqrt{10 - 2x}}{x - 3}$$

EN ESTE CASO SE OBSERVA QUE EL DENOMINADOR SE ANULA CUANDO $x = 3$, POR LO QUE ESTE VALOR NO PUEDE PERTENECER AL DOMINIO DE LA FUNCIÓN. ADEMÁS, POR LA RAÍZ CUADRADA DEL NUMERADOR, SU INTEGRANDE DEBE SER MAYOR O IGUAL A CERO. LUEGO,

$$10 - 2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -10 \Rightarrow x \leq 5$$

POR LO TANTO, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ESTÁ DADO POR:

$$D_f = (-\infty, 5] - \{3\} \text{ OBIEN } D_f = \{x \mid -\infty < x \leq 5; x \in \mathbb{R}; x \neq 3\}$$

$$v) f(x) = \sqrt{\frac{2x + 4}{x - 1}}$$

EN ESTA FUNCIÓN, EL DOMINIO SERÁ EL CONJUNTO DE VALORES DE LA VARIABLE "x", PARA LOS CUALES EL COCIENTE DEL RADICANDO ES MAYOR O IGUAL A CERO. LUEGO HABRÁ QUE RESOLVER LA CORRESPONDIENTE DESIGUALDAD. ASÍ,

$$\frac{2x + 4}{x - 1} \geq 0 \quad ; \quad x \neq 1$$

x	2x+4	x-1	$\frac{2x+4}{x-1}$
$(-\infty, -2)$	-	-	+
$(-2, 1)$	+	-	-
$(1, \infty)$	+	+	+

DE DONDE SE OBTIENE QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES:

$$x \in (-\infty, -2] \cup (1, \infty) \text{ OBIEN } D_f = \mathbb{R} - (-2, 1]$$

$$vi) f(x) = \frac{7 - \sqrt{x - 1}}{\sqrt{5x - 3}}$$

PARA ESTA FUNCIÓN, HAY QUE BUSCAR PARA QUÉ VALORES DE LA VARIABLE "x", EL RADICANDO DEL NUMERADOR DEBE SER MAYOR O IGUAL A CERO Y EL DEL DENOMINADOR ÚNICAMENTE MAYOR QUE CERO, Y DESPUÉS DETERMINAR LA INTERSECCIÓN DE LOS DOS RESULTADOS (CONJUNTOS). LUEGO,

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$5x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{5}$$

$$[1, \infty) \cap \left(\frac{3}{5}, \infty\right) = [1, \infty)$$

LUEGO EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES IGUAL A:

$$D_f = [1, \infty) \text{ OBIEN } D_f = \{x \mid 1 \leq x < \infty; x \in \mathbb{R}\}$$

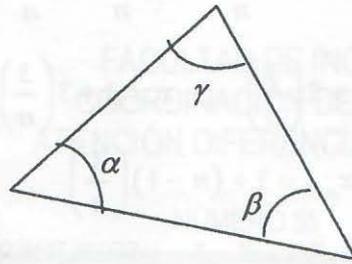
ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO III

PROBAR QUE EL PRODUCTO DE LOS SENOS DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO ES MÁXIMO CUANDO EL TRIÁNGULO ES EQUILÁTERO.

SOLUCIÓN

PARA RESOLVER ESTE PROBLEMA SE UTILIZA, COMO FUNCIÓN OBJETIVO, EL PRODUCTO DE LOS SENOS DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO CUALQUIERA Y COMO RESTRICCIÓN EL HECHO DE QUE LA SUMA DE LOS ÁNGULOS DEL TRIÁNGULO ES DE 180° . ASÍ SE TIENE QUE:



SI SE CONSTRUYE LA ECUACIÓN DE LAGRANGE CON LA FUNCIÓN OBJETIVO Y LA RESTRICCIÓN SE LLEGA A:

$$L = (\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma) + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - 180)$$

SE OBTIENEN LAS DERIVADAS PARCIALES CON RESPECTO A LOS TRES ARGUMENTOS (ÁNGULOS), SE IGUALAN A CERO Y SE RESUELVE EL SISTEMA. ASÍ, SE LLEGA A:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = (\cos\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma) + \lambda = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = (\text{sen}\alpha)(\cos\beta)(\text{sen}\gamma) + \lambda = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = (\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)(\cos\gamma) + \lambda = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \alpha + \beta + \gamma - 180 = 0 \quad \dots \quad (4)$$

SE DESPEJA λ EN LAS TRES ECUACIONES, SE IGUALAN Y SE OBTIENE:

$$\lambda = -(\cos\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma) ; \lambda = -(\text{sen}\alpha)(\cos\beta)(\text{sen}\gamma) ; \lambda = -(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)(\cos\gamma)$$

$$-(\cos\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma) = -(\text{sen}\alpha)(\cos\beta)(\text{sen}\gamma) \Rightarrow \tan\alpha = \tan\beta \quad \dots \quad (5)$$

$$-(\cos\alpha)(\text{sen}\beta)(\text{sen}\gamma) = -(\text{sen}\alpha)(\text{sen}\beta)(\cos\gamma) \Rightarrow \tan\alpha = \tan\gamma \quad \dots \quad (6)$$

DE (5) y (6) Y CONSIDERANDO QUE UN ÁNGULO DE UN TRIÁNGULO NO PUEDE SER MAYOR DE 180° SE TIENE QUE:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

POR LO QUE SE TRATA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO CUYOS TRES ÁNGULOS MIDEN CADA UNO 60° LO QUE SE OBTIENE DE LA RESTRICCIÓN.

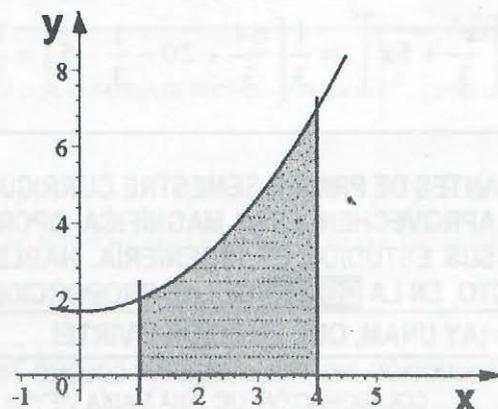
ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO II

CALCULAR, A PARTIR DE LA DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA, ESTO ES, CON EL LÍMITE DE LA SUMATORIA DE RIEMANN, EL ÁREA LIMITADA POR LA CURVA

$f(x) = \frac{x^2 + 5}{3}$, EL EJE DE LAS ABCISAS Y LAS RECTAS $x = 1$ y $x = 4$ COMPROBAR EL RESULTADO CON LA INTEGRAL DEFINIDA.

SOLUCIÓN. LA GRÁFICA DEL ÁREA PEDIDA SE PRESENTA EN LA SIGUIENTE FIGURA



EL INTERVALO SE DIVIDE EN n SUBINTERVALOS CUYA LONGITUD ES:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 1}{n} = \frac{3}{n}$$

LUEGO, LOS EXTREMOS DE LOS SUBINTERVALOS EQUIVALEN A:

$$x_0 = 1 ; x_1 = 1 + \frac{3}{n} ; x_2 = 1 + 2\left(\frac{3}{n}\right) ; x_3 = 1 + 3\left(\frac{3}{n}\right) \cdots x_{i-1} = 1 + (i-1)\left(\frac{3}{n}\right) ;$$

$$x_i = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) \cdots x_{n-1} = 1 + (n-1)\left(\frac{3}{n}\right) ; x_n = 1 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 4$$

AHORA SE TOMA EL VALOR α_i COMO EL VALOR PROMEDIO DE x_{i-1} Y x_i LUEGO SE TIENE QUE:

$$\alpha_i = \frac{1 + (i-1)\left(\frac{3}{n}\right) + 1 + i\left(\frac{3}{n}\right)}{2} \Rightarrow \alpha_i = \frac{1 + i\left(\frac{3}{n}\right) - \left(\frac{3}{n}\right) + 1 + i\left(\frac{3}{n}\right)}{2} \Rightarrow \alpha_i = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) - \frac{3}{2n} \quad \text{Y EL VALOR DE LA}$$

FUNCION EN ESTE VALOR ES:

$$f(\alpha_i) = \frac{\left[1 + i\left(\frac{3}{n}\right) - \frac{3}{2n}\right]^2 + 5}{3} \Rightarrow f(\alpha_i) = \frac{1 + i^2\left(\frac{9}{n^2}\right) + \frac{9}{4n^2} + 2i\left(\frac{3}{n}\right) - \frac{3}{n} - i\left(\frac{9}{n^2}\right) + 5}{3}$$

$$f(\alpha_i) = \frac{1}{3} \left[\frac{9}{n^2} \left(i^2 - i + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{n} (2i - 1) + 6 \right]$$

Y EL LÍMITE DE LA SUMA DE RIEMANN, QUE CONDUCE AL ÁREA PEDIDA ES:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \left[\frac{9}{n^2} \left(i^2 - i + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{n} (2i - 1) + 6 \right] \frac{3}{n}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{9}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n 1 \right) + \frac{3}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \right) + 6 \sum_{i=1}^n 1 \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{9}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{4}n \right) + \frac{3}{n} \left(2 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) + 6n \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{9}{n} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} \right) + 3(n+1-1) + 6n \right]$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{9}{n^2} \left(\frac{4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3}{12} \right) + \frac{3n + 6n}{n} \right] \Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{36n^2 - 9}{12n^2} + 9 \right]$$

$$\Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{36n^2 - 9 + 108n^2}{12n^2} \right] \Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{144n^2 - 9}{12n^2} \right] \therefore A = \frac{144}{12} = 12 u^2$$

COMPROBACIÓN CON LA INTEGRAL DEFINIDA DIRECTA:

$$A = \int_1^4 \frac{x^2 + 5}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} + 5x \right]_1^4 = \frac{1}{3} \left[\frac{64}{3} + 20 - \frac{1}{3} - 5 \right] = \frac{1}{3} [21 + 15] = 12 u^2$$

ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

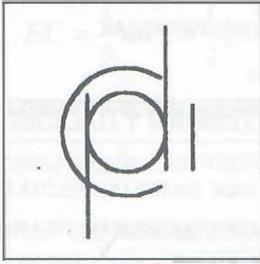
TUTORÍA

ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR

PRONTO CONOCERÁN A SU TUTOR. APROVECHEN ESTA MAGNÍFICA OPORTUNIDAD PARA CONTAR CON UN AMIGO, UN ALIADO EN EL INICIO DE SUS ESTUDIOS DE INGENIERÍA. HABLEN CON ÉL, CONVIVAN CON ÉL. SI REQUIEREN INFORMACIÓN AL RESPECTO, EN LA COPADI SE LAS PROPORCIONAMOS.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 55

17 DE MARZO DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

MATEMÁTICAS AVANZADAS

REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN

LA FUNCIÓN $f(t)$ TIENE LA REPRESENTACIÓN INTEGRAL

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{DONDE } F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi$$

ENTONCES

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{+\beta} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right) e^{i\omega t} d\omega$$

EN EL CASO DE LA FUNCIÓN

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

LA CUAL CUMPLE LAS CONDICIONES NECESARIAS PARA TENER TRANSFORMADA DE FOURIER, SE TIENE QUE:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-\xi} e^{-i\omega\xi} d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)\xi} d\xi = -\frac{1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)\xi} \Big|_{\xi=0}^{\infty} = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1-i\omega}{1+\omega^2}$$

SI SE SUSTITUYE $t = 0$ (DONDE SE DEBE NOTAR QUE NO ESTÁ DEFINIDA LA FUNCIÓN), OCURRE QUE

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{+\beta} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right) e^{i\omega \cdot 0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{1-i\omega}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{+\beta} \left(\frac{1}{1+\omega^2} - \frac{i\omega}{1+\omega^2} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\arctan \omega - \frac{i}{2} \ln(1+\omega^2) \right) \Big|_{-\beta}^{+\beta} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} (2 \arctan \beta) = \frac{1}{2\pi} \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

QUE PRODUCE COMO RESULTADO QUE DEBE TENER JUSTAMENTE EL VALOR PROMEDIO ENTRE LOS LÍMITES POR LA IZQUIERDA Y POR LA DERECHA EN ESE PUNTO.
PROFESOR: AUGUSTO MIS PAREDES

ECUACIONES DIFERENCIALES

- a) OBTENER UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA CUAL LA FAMILIA DE RECTAS $y = cx + c^2$ ES SOLUCIÓN.
- b) DETERMINAR CUÁLES DE LAS FUNCIONES

$$y_1 = -\frac{1}{4}x^2 ; \quad y_2 = x+1 ; \quad y_3 = x+3$$

ES SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN OBTENIDA EN EL INCISO ANTERIOR E INDIQUE, EN CADA CASO, QUÉ TIPO DE SOLUCIÓN ES:

a) $y = cx + c^2 \quad \dots \quad (1)$

RESOLUCIÓN:

$y' = c \quad \dots \quad (2)$

(2) en (1) : $y = y'x + (y')^2$ QUE ES LA ECUACIÓN DIFERENCIAL PEDIDA

$$b) \quad y_1 = -\frac{1}{4}x^2 \quad ; \quad -\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 \quad ; \quad -\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}x^2 \quad \therefore \quad y_1 \text{ SÍ ES SOLUCIÓN Y ES SINGULAR}$$

$$y_2 = x+1 \quad ; \quad x+1 = x+1 \quad \therefore \quad y_2 \text{ SÍ ES SOLUCIÓN Y ES PARTICULAR}$$

$$y_3 = x+3 \quad ; \quad x+3 = x+1 \quad \therefore \quad y_3 \text{ NO ES SOLUCIÓN}$$

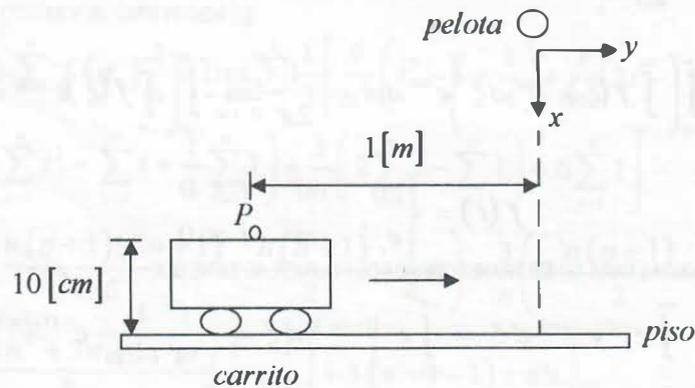
PROFESORA: MARGARITA RAMÍREZ GALINDO

FÍSICA EXPERIMENTAL

PARA VERIFICAR DOS MODELOS MATEMÁTICOS OBTENIDO EN EL LABORATORIO, UN ALUMNO DE FÍSICA EXPERIMENTAL PRETENDE SOLTAR UNA PELOTA PEQUEÑA, CUYA MASA ES DE 120 [g] , EN CAÍDA LIBRE SOBRE UN CARRITO ELÉCTRICO (PUNTO P) QUE MIDE 10 [cm] DE ALTO Y QUE VIAJA EN LÍNEA RECTA CON VELOCIDAD CONSTANTE, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA. SI LAS VARIABLES DE LOS MODELOS PARA EL MOVIMIENTO DE LA PELOTA Y EL CARRITO ESTÁN EN UNIDADES DEL SI Y DICHS MODELOS SON: $x_{\text{pelota}} = 4.89 t^2$; $d_{\text{carrito}} = 1.2 t$, DETERMINAR:

- LA ACELERACIÓN GRAVITATORIA DEL LUGAR.
- LA ALTURA NECESARIA, CON RESPECTO AL PISO, A LA QUE HABRÍA QUE SOLTAR LA PELOTA PARA QUE SE CUMPLA EL OBJETIVO, SI EL PUNTO "P" DEL CARRITO SE ENCUENTRA A 1 [m] DEL PUNTO DE CONTACTO.
- LA VELOCIDAD DE LA PELOTA UN INSTANTE ANTES DE CHOCAR CON EL CARRITO.
- EL TIEMPO EN EL CUAL LA PELOTA HA RECORRIDO LA MITAD DE LA ALTURA DEL INCISO (b)
- LA ENERGÍA CINÉTICA DE LA PELOTA UN INSTANTE ANTES DE CHOCAR CON EL CARRITO.

SOLUCIÓN



pelota (MUA) ; $m_p = 0.12 \text{ [kg]}$; $x_p = 4.89 t^2 \text{ [m]}$; carrito (MRU) ; $d_c = 1.2 t \text{ [m]}$

- a) SI SE ANALIZA EL MOVIMIENTO DE LA PELOTA, SE TIENE QUE:

$$v_p = \frac{dx_p}{dt} = 2(4.89)t = 9.78 t \quad ; \quad a_p = \frac{dv_p}{dt} = 9.78 \quad ; \quad a_p = g \quad ; \quad g = 9.78 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

- b) SI SE ANALIZA EL MOVIMIENTO DEL CARRITO, SE LLEGA A:

$$v = \frac{d}{dt}(d_c) = \frac{d}{dt}(1.2 t) = 1.2 \frac{m}{s} \quad ; \quad d_c = 1.2 t \Rightarrow t = \frac{d_c}{1.2} = \frac{1 m}{1.2 \frac{m}{s}} = 0.8333 s$$

$$\text{MOV. DE LA PELOTA } x_p = 4.89(0.8333)^2 = 3.3956 m \quad ; \quad L_{\text{necesaria}} = x_p + L_{\text{carrito}}$$

$$L_{\text{necesaria}} = 3.3956 + 0.1 \quad \therefore \quad L_{\text{necesaria}} = 3.4956 \text{ [m]}$$

c) $v_p(t = 0.8333) = 9.78(0.8333) \quad \therefore \quad v_p = 8.1497 \left[\frac{m}{s} \right]$

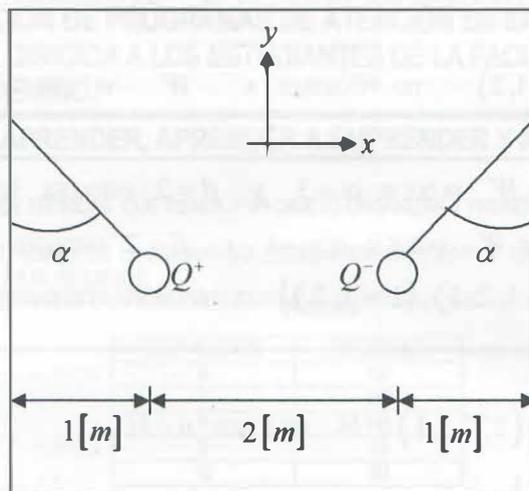
$$d) \quad x = \frac{1}{2} L_{necesaria} = \frac{1}{2}(3.4956) = 1.7478 \quad ; \quad x_p = 4.89 t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x_p}{4.89}} = \sqrt{\frac{1.7478}{4.89}} \quad \therefore \quad t = 0.5978 [s]$$

$$e) \quad EC = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (0.12) (8.1497)^2 \quad ; \quad EC = 3.9851 [J]$$

PROFESOR RIGEL GÁMEZ LEAL

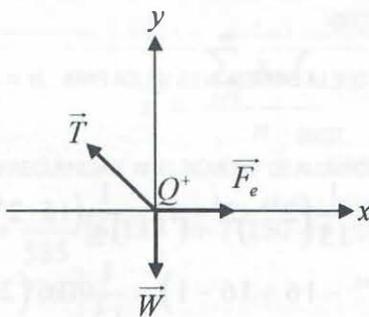
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

DOS ESFERAS PEQUEÑAS QUE POSEEN IGUAL CANTIDAD DE MASA (100 g) E IGUAL CANTIDAD DE CARGA, PERO DE SIGNOS DIFERENTES, SE SUSPENDEN CON HILOS DE PESO DESPRECIABLE, COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA. CON BASE EN ELLA Y EN QUE $\alpha = 45^\circ$ Y $g = 9.8 \left(\frac{m}{s^2}\right)$, CALCULAR LA FUERZA DE ORIGEN ELÉCTRICO QUE EXPERIMENTA CADA ESFERA.



RESOLUCIÓN.

a) COMO LAS ESFERAS SE ENCUENTRAN EN EQUILIBRIO ESTÁTICO, PARA EL ANÁLISIS DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE CADA UNA SE EMPLEA EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE, PARA LA ESFERA IZQUIERDA SE TIENE:



DE LAS CONDICIONES DE EQUILIBRIO:

$$\sum F_x = F_e - T \sin \alpha = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\sum F_y = T \cos \alpha - W = 0 \quad \dots \quad (2)$$

DE (2) SE TIENE QUE: $T = \frac{W}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha} \quad \dots \quad (2')$

DE (1) SE TIENE QUE: $F_e = T \sin \alpha \quad \dots \quad (1')$

SE SUSTITUYE (2') EN (1') Y SE OBTIENE:

$$F_e = mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow F_e = mg \tan \alpha = 0.1 (kg) 9.8 \left(\frac{m}{s^2}\right) \tan 45^\circ \quad \therefore \quad F_e = 0.98 (N)$$

PROFESORA ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO Y PROFESOR GABRIEL A. JARAMILLO MALDONADO

ÁLGEBRA LINEAL

DETERMINAR UN CONJUNTO DE TRES VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES EN \mathbb{R}^3 , QUE CONTENGA A LOS VECTORES $\bar{u} = (3, 2, 13)$ Y $\bar{w} = (-1, 2, 1)$

SOLUCIÓN.

SE OBTIENE EL SUBESPACIO W DE \mathbb{R}^3 GENERADO POR LOS VECTORES \bar{u} Y \bar{w} .

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 13 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

EL SUBESPACIO W ES: $W = \{\alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 2) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \Rightarrow W = \{(\alpha, \beta, 3\alpha + 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

PARA DETERMINAR UN CONJUNTO DE TRES VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN \mathbb{R}^3 , QUE CONTENGA A LOS VECTORES \bar{u} Y \bar{w} , BASTA CON ELEGIR UN VECTOR DE \mathbb{R}^3 QUE NO PERTENEZCA A W .

ASÍ POR EJEMPLO, EL VECTOR $\bar{h} = (1, -1, 2)$ NO PERTENECE A W , YA QUE SI $\alpha = 1$ Y $\beta = -1$, ENTONCES $3\alpha + 2\beta = 3(1) + 2(-1) = 1 \neq 2$

ES CLARO QUE EL VECTOR $\bar{u} = (3, 2, 13) \in W$ YA QUE SI $\alpha = 3$ Y $\beta = 2$ ENTONCES $3\alpha + 2\beta = 3(3) + 2(2) = 13$

ANÁLOGAMENTE, EL VECTOR $\bar{w} = (-1, 2, 1) \in W$ YA QUE SI $\alpha = -1$ Y $\beta = 2$ ENTONCES $3\alpha + 2\beta = 3(-1) + 2(2) = 1$

POR LO TANTO, EL CONJUNTO $\{(3, 2, 13), (-1, 2, 1), (1, -1, 2)\}$ ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE

PROFESOR JUAN VELÁSQUEZ TORRES

ÁLGEBRA

DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA QUE $\frac{1}{15}(2^{4n} - 1) \in \mathbb{N}$ PARA TODA $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN: i) COMPROBACIÓN PARA $n = 1$

$$\frac{1}{15}(2^{4(1)} - 1) = \frac{1}{15}(2^4 - 1) = \frac{1}{15}(16 - 1) = \frac{1}{15}(15) = 1 \text{ COMO } 1 \in \mathbb{N}, \text{ SE CUMPLE}$$

SE SUPONE LA EXPRESIÓN CIERTA PARA $n = k$ Y ENTONCES:

$$\frac{1}{15}(2^{4k} - 1) \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \dots \text{ HIPÓTESIS}$$

SE TOMA COMO BASE A LA HIPÓTESIS Y DEBE DEMOSTRARSE QUE LA EXPRESIÓN ES VÁLIDA PARA $n = k + 1$:

$$\frac{1}{15}(2^{4(k+1)} - 1) \text{ DEBE PERTENECER A } \mathbb{N} \quad \dots \text{ TESIS}$$

$$\begin{aligned} \text{DE LA TESIS: } \frac{1}{15}(2^{4(k+1)} - 1) &= \frac{1}{15}(2^{4k+4} - 1) = \frac{1}{15}(2^{4k} \cdot 2^4 - 1) = \frac{1}{15}(16 \cdot 2^{4k} - 1) = \frac{1}{15}(16 \cdot 2^{4k} - 1 - 16 + 16) \\ &= \frac{1}{15}(16 \cdot 2^{4k} - 16 + 16 - 1) = \frac{1}{15}[16(2^{4k} - 1) + 15] \end{aligned}$$

ESTA EXPRESIÓN SÍ PERTENECE A LOS NATURALES PUESTO QUE: $\frac{1}{15}[16(2^{4k} - 1)] = 16 \left[\frac{1}{15}(2^{4k} - 1) \right]$ Y ESTA ES LA HIPÓTESIS QUE PERTENECE A LOS

NATURALES MULTIPLICADA POR 16 Y COMO EXISTE CERRADURA EN LA MULTIPLICACIÓN DE NATURALES, ES UN NÚMERO DE ESE CONJUNTO. ADEMÁS,

$\frac{1}{15}(15) = 1$ Y COMO LA ADICIÓN EN \mathbb{N} TAMBIÉN ES CERRADA, SE HA COMPLETADO LA DEMOSTRACIÓN.

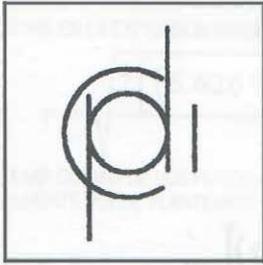
PROFESOR ERIC CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

TUTORÍA

ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE. ¡YA PUEDEN CONOCER A SU TUTOR! SU NOMBRE Y UBICACIÓN ESTÁN EN LAS VITRINAS DE LA COPADI. HABLEN CON ÉL Y ENCONTRARÁN UN ALIADO, UN GRAN APOYO.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 56

2 DE ABRIL DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA ES UN CONJUNTO DE TÉCNICAS QUE TIENEN POR OBJETO ORGANIZAR Y PRESENTAR DE MANERA CONVENIENTE PARA SU ANÁLISIS, LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN UNA MUESTRA.

LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA SE ESTUDIA EN EL TEMA II DE LA ASIGNATURA ESTADÍSTICA. UN EJEMPLO, UTILIZANDO INFORMACIÓN REAL DE LOS ALUMNOS QUE CURSARON ESTADÍSTICA EN EL SEMESTRE 2003-1, ES EL SIGUIENTE.

LA TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS MUESTRA LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS EN PROBABILIDAD DE LOS 585 ALUMNOS INSCRITOS EN ESTA OÍSTICA.

CALIFICACIÓN	FRECUENCIA
6	137
7	150
8	145
9	93
10	60

- OBTENER LA MEDIA, LA MEDIANA Y LA MODA.
- CALCULAR LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR.
- A PARTIR DE LA INFORMACIÓN OBTENIDA EN EL INCISO A), INDICAR EL TIPO DE SESGO QUE PRESENTAN LOS DATOS.
- TRAZAR EL HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS

RESOLUCIÓN

- LA MEDIA, \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i f_i}{n}$$

DONDE x_i ES LA MARCA DE CLASE (CALIFICACIÓN), f_i ES LA FRECUENCIA Y n EL NÚMERO DE ALUMNOS

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{585} [6(137) + 7(150) + \dots + 10(60)] \\ &= 7.6393\end{aligned}$$

LA MEDIANA, \tilde{x} . LA MEDIANA SE OBTIENE A TRAVÉS DE UNA INTERPOLACIÓN

CALIFICACIÓN	FRECUENCIA ACUMULADA
6	137
7	287
8	432
9	525
10	585

DE DONDE:

7	287
\tilde{x}	293
8	432

DE DONDE: $\tilde{x} = 7.041379$

LA MODA, x_{mo} , PUEDE APROXIMARSE CON LA MARCA DE CLASE, OBTENIÉNDOSE: $x_{mo} \approx 7$

O BIEN:

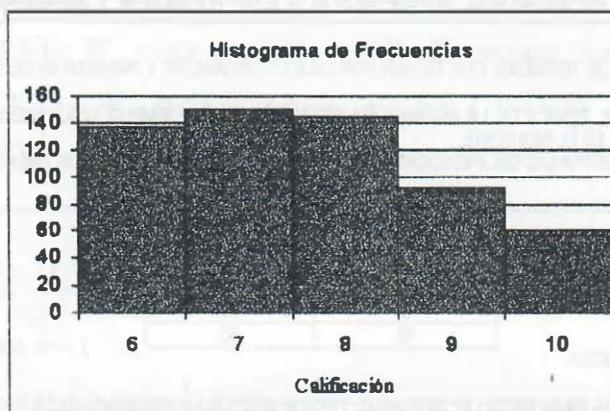
$$x_{mo} = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} c = 6.5 + \frac{13}{13 + 5} (1) = 7.2222$$

b) PUESTO QUE SE TIENE TODA LA POBLACIÓN

$$\begin{aligned} s^2 &= s^2_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i \\ &= \frac{1}{585} [(6 - 7.6393)^2 (137) + \dots + (10 - 7.6393)^2 (60)] \\ &= 1.6323 \\ \therefore s &= 1.2776 \end{aligned}$$

c) PUESTO QUE $\bar{x} > x$ Y $\bar{x} > x_{mo}$ SE PUEDE CONCLUIR QUE LOS DATOS PRESENTAN UN LIGERO SESGO POSITIVO.

d) EL HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ESTÁ DADO POR:



A. LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO

QUÍMICA

CALCULAR LA VELOCIDAD MÁXIMA DE LOS FOTOELECTRONES EMITIDOS POR UNA SUPERFICIE LIMPIA DE ORO, CUANDO ESTÁ EXPUESTA A UNA LUZ CON FRECUENCIA DE 3.4×10^{15} [Hz]. CONSIDERAR LA FUNCIÓN DE TRABAJO DEL ORO DE 5.1 [eV].

RESOLUCIÓN:

SE TRATA DE UN PROBLEMA DEL EFECTO FOTOELÉCTRICO DE EINSTEIN, DE TAL FORMA QUE SE USARÁ LA ECUACIÓN QUE RIGE DICHO FENÓMENO.

$$E_{foton} = P + EC$$

EN LA CUAL:

E_{foton} = ENERGÍA DEL FOTÓN (DE LA LUZ INCIDENTE).

P = FUNCIÓN DE TRABAJO DEL METAL.

EC = ENERGÍA CINÉTICA DE LOS FOTOELECTRONES.

COMO SE SOLICITA LA VELOCIDAD DE LOS FOTOELECTRONES, PUEDE USARSE LA ECUACIÓN SIGUIENTE:

$$h_f = P + \frac{1}{2} m v^2$$

SE DESPEJA "v" Y SE TIENE QUE:

$$v = \sqrt{\frac{2(h_f - P)}{m}}$$

EN LA CUAL:

h = CONSTANTE DE PLANCK

$$h = 6.6261 \times 10^{-34} \text{ [J} \cdot \text{s]}$$

f = FRECUENCIA DE LA LUZ INCIDENTE

$$f = 3.4 \times 10^{15} \text{ [Hz]}$$

$$P = 5.1 \text{ [eV]}$$

m = MASA DE LOS FOTOELECTRONES

$$m = 9.1094 \times 10^{-31} \text{ [Kg]}$$

ANTES DE SUSTITUIR LOS VALORES ANTERIORES EN LA ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD, ES NECESARIO TRANSFORMAR LAS UNIDADES DE P , DE [eV] a [J]. PARA ELLO SE HACE LO SIGUIENTE:

$$P = 5.1 [eV] \left(\frac{1.6022 \times 10^{-19} [J]}{1 [eV]} \right) = 8.1712 \times 10^{-19} [J]$$

SE SUSTITUYE EN LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR v Y SE LLEGA A:

$$v = \sqrt{\frac{2 \left[(6.6261 \times 10^{-34} [Js]) (3.4 \times 10^{15} [s^{-1}]) - 8.1712 \times 10^{-19} [J] \right]}{9.1094 \times 10^{-31} [kg]}} ; v = 1.7754 \times 10^6 \left[\frac{m}{s} \right]$$

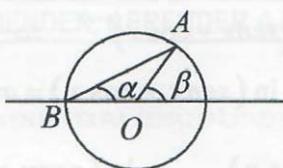
QUE ES LA VELOCIDAD DE LOS FOTOELECTRONES QUE SALEN DE LA PLACA DE ORO, DEBIDO A LA LUZ INCIDENTE SOBRE LA MISMA. ADICIONALMENTE PUEDE PLANTEARSE EL ANÁLISIS DE UNIDADES SIGUIENTE:

$$[v]_v = \sqrt{\frac{Js(s^{-1}) - J}{kg}} = \sqrt{\frac{J}{kg}} = \sqrt{\frac{kg m^2}{s^2}} = \sqrt{\frac{kg m^2}{kg s^2}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

PROFESORA VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ

GEOMETRÍA ANALÍTICA

DEMOSTRAR, POR MEDIO DEL ÁLGEBRA VECTORIAL, QUE EN UNA CIRCUNFERENCIA CUALQUIERA SE CUMPLE QUE



$$\beta = 2\alpha$$

SOLUCIÓN

SEA EL PUNTO A CON COORDENADAS $A(x, y)$. SI EL ORIGEN DE COORDENADAS SE CONSIDERA EN EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA Y EL EJE DE LAS ABCISAS EN LA DIRECCIÓN DEL DIÁMETRO, ENTONCES:

$$\cos \beta = \frac{\hat{i} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} ; \text{PERO } \overrightarrow{OA} = (x, y) - (0, 0) = (x, y) \quad \therefore \cos \beta = \frac{(1, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} \quad \dots (1)$$

$$\text{POR OTRA PARTE: } \cos \alpha = \frac{\hat{i} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} ; \text{PERO } \overrightarrow{BA} = (x, y) - (-r, 0) = (x + r, y)$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{(1, 0) \cdot (x + r, y)}{\sqrt{(x + r)^2 + y^2}} = \frac{x + r}{\sqrt{x^2 + 2xr + r^2 + y^2}} = \frac{x + r}{\sqrt{2xr + 2r^2}} \quad \dots (2)$$

COMO SE QUIERE DEMOSTRAR QUE $\beta = 2\alpha$, SE USARÁ LA IDENTIDAD $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$

ES DECIR, QUE DEBE CUMPLIRSE QUE $\cos \beta = 2 \cos^2 \alpha - 1$. LUEGO, SE UTILIZAN (2) Y (1), PARA LLEGAR A:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{x + r}{\sqrt{2xr + 2r^2}} \right)^2 - 1 &= 2 \cdot \frac{x^2 + 2xr + r^2}{2xr + 2r^2} - 1 = \frac{2x^2 + 4xr + 2r^2}{2xr + 2r^2} - 1 = \frac{2x^2 + 4xr + 2r^2 - 2xr - 2r^2}{2xr + 2r^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2xr}{2xr + 2r^2} = \frac{2x(x + r)}{2r(x + r)} = \frac{x}{r} = \cos \beta \quad \therefore \beta = 2\alpha \end{aligned}$$

Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN

PROFESOR ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

CÁLCULO II

CALCULAR VALOR DE LOS SIGUIENTES LÍMITES, SI EXISTEN, MEDIANTE LA REGLA DE L'HOPITAL:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + x \sin x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\csc x}$$

SOLUCIÓN

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + x \operatorname{sen} x}$. SE SUSTITUYE PRIMERO EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE x Y SE LLEGA A:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} ;$$

SE APLICA LA REGLA DE L'HOPITAL Y: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{x^2 + x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x}{2x + x \cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$

SE VUELVE A APLICAR L'HOPITAL Y:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x}{2x + x \cos x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x - 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x}{2 - x \operatorname{sen} x + \cos x + \cos x} = \frac{2(1)}{2+1+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{csc} x}$. SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE x Y SE LLEGA A:

$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{csc} x} = 1^\infty$. SE DENOTA CON "a" AL LÍMITE Y SE APLICA LA FUNCIÓN $\ln x$ DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{csc} x} ; \ln a = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{csc} x} \Rightarrow \ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{csc} x}$$

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{csc} x \ln (\operatorname{sen} x + \cos x) = \infty \cdot 0$$

AHORA SE REALIZA EL SIGUIENTE ARTIFICIO ALGEBRAICO:

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\operatorname{sen} x + \cos x)}{\frac{1}{\operatorname{csc} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\operatorname{sen} x + \cos x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

SE APLICA LA REGLA DE L'HOPITAL Y:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\operatorname{sen} x + \cos x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x} = \frac{1-0}{0+1^2} = 1$$

Y FINALMENTE SE TIENE QUE:

$$\ln a = 1 \Rightarrow a = e^1 \Rightarrow a = e \therefore \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{csc} x} = e$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO II

EVALUAR LA SIGUIENTE INTEGRAL IMPROPIA $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

SOLUCIÓN

COMO SE TRATA DE UNA INTEGRAL IMPROPIA, SE PUEDE ESCRIBIR QUE: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

SE RESUELVE LA INTEGRAL INDEFINIDA Y:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} dx = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} ; \text{ SE HACE UN CAMBIO DE VARIABLE Y:}$$

$$u^2 = e^{2x} \Rightarrow u = e^x \Rightarrow du = e^x dx ; a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ . DE DONDE SE LLEGA A LA INTEGRAL}$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ang} \tan \frac{u}{a} + C \therefore \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{ang} \tan e^x + C$$

LUEGO, LA INTEGRAL IMPROPIA SE RESUELVE DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\operatorname{ang} \tan e^x \right]_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} (\operatorname{ang} \tan e^R - \operatorname{ang} \tan e^0) = \operatorname{ang} \tan (\infty) - \operatorname{ang} \tan (1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

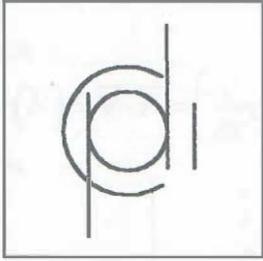
PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

TUTORÍA

LAS BECAS **PRONABES** OBLIGAN A QUE EL ESTUDIANTE TENGA TUTOR. ASISTE E INTERACTÚA CON TU TUTOR PARA TU BIEN Y PARA NO TENER PROBLEMAS CON TU BECA. EL TUTOR ES UN PROFESOR QUE DESEA APOYARTE Y AYUDARTE. ¡ACÉRCATE A ÉL!

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRAÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 57

17 DE ABRIL DE 2003

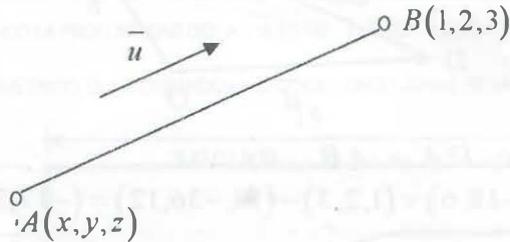
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEA EL SEGMENTO DE RECTA \overline{AB} QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA, CUYA LONGITUD ES IGUAL A 21 Y QUE ES PARALELO AL VECTOR $\vec{u} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$



DETERMINAR:

- LAS COORDENADAS DEL PUNTO A
- LAS COORDENADAS DEL PUNTO C QUE ES EL PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO DE RECTA \overline{AB}
- LAS COORDENADAS DEL PUNTO D QUE ES SIMÉTRICO DEL PUNTO B RESPECTO DEL PUNTO A

RESOLUCIÓN

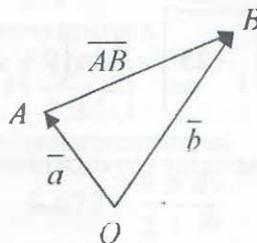
- PRIMERA FORMA DE RESOLUCIÓN

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y, z) \\ B(1, 2, 3) \end{array} \right\} \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (1, 2, 3) - (x, y, z) = (1-x, 2-y, 3-z)$$

$$\text{POR OTRA PARTE: } \overline{AB} = 21 \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = 21 \frac{(3, -6, 2)}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = 3(3, -6, 2) = (9, -18, 6)$$

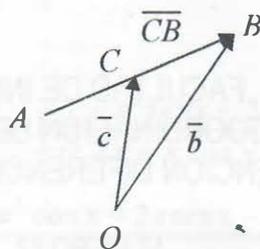
$$\begin{aligned} 1-x=9 &\Rightarrow x=-8 \\ 2-y=-18 &\Rightarrow y=20 \\ 3-z=6 &\Rightarrow z=-3 \end{aligned} \quad \therefore A(-8, 20, -3)$$

SEGUNDA FORMA DE RESOLUCIÓN:



DE LA FIGURA: $\vec{a} + \vec{AB} = \vec{b} \therefore \vec{a} = \vec{b} - \vec{AB} = (1, 2, 3) - (9, -18, 6) = (-8, 20, -3) \therefore A(-8, 20, -3)$

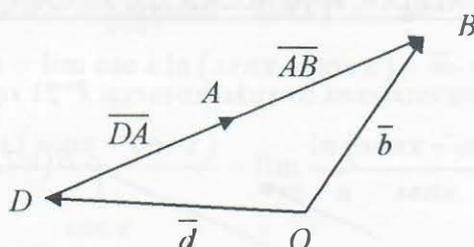
b)



DE LA FIGURA: $\vec{c} + \vec{CB} = \vec{b} \Rightarrow \vec{c} = \vec{b} - \vec{CB}$; $\vec{CB} = \frac{1}{2}\vec{AB} \Rightarrow \vec{CB} = \frac{1}{2}(9, -18, 6) \Rightarrow \vec{CB} = \left(\frac{9}{2}, -9, 3\right)$

LUEGO: $\vec{c} = (1, 2, 3) - \left(\frac{9}{2}, -9, 3\right) = \left(-\frac{7}{2}, 11, 0\right) \therefore C\left(-\frac{7}{2}, 11, 0\right)$

c)



DE LA FIGURA: $\vec{d} + \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{b}$ PERO $\vec{DA} = \vec{AB}$; POR LO QUE:

$\vec{d} = \vec{b} - 2\vec{AB} = (1, 2, 3) - 2(9, -18, 6) = (1, 2, 3) - (18, -36, 12) = (-17, 38, -9) \therefore D(-17, 38, -9)$

PROFESOR LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

CÁLCULO II

CALCULAR EL VALOR DE LA SIGUIENTE INTEGRAL IMPROPIA $\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}}$

SOLUCIÓN. COMO LA FUNCIÓN DEL INTEGRANDO NO ES CONTINUA EN $x = \frac{5}{2}$, SE TRATA DE UNA INTEGRAL IMPROPIA Y SU CÁLCULO SE PLANTEA COMO SIGUE.

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}} = \lim_{R \rightarrow \frac{5}{2}^+} \int_R^{\frac{9}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}} ; \text{ SE CALCULA LA INTEGRAL INDEFINIDA Y SE TIENE QUE:}$$

$$\begin{aligned} u^2 = 4x^2 &\Rightarrow u = 2x \Rightarrow du = 2dx ; a = 25 \Rightarrow a = 5 ; \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - 25}| + C = \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2 - 25}| + C \end{aligned}$$

POR LO TANTO

$$\begin{aligned} \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}} &= \lim_{R \rightarrow \frac{5}{2}^+} \left[\frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2 - 25}| \right]_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}} = \lim_{R \rightarrow \frac{5}{2}^+} \left[\frac{1}{2} \ln \left| 2\left(\frac{9}{2}\right) + \sqrt{4\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 25} \right| - \frac{1}{2} \ln |2R + \sqrt{4R^2 - 25}| \right] = \\ &= \frac{1}{2} \ln (9 + \sqrt{56}) - \frac{1}{2} \ln \left[2\left(\frac{5}{2}\right) + \sqrt{4\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 25} \right] = \frac{1}{2} \ln (9 + \sqrt{56}) - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} \ln \frac{9 + \sqrt{56}}{5} \doteq 0.5965 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}} \text{ ES CONVERGENTE Y SU VALOR ES APROXIMADAMENTE } 0.5965$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO III

CALCULAR LA DIVERGENCIA Y EL ROTACIONAL DEL CAMPO VECTORIAL

$$\vec{F} = (\cos y + y \cos x) \hat{i} + (\operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y) \hat{j} + xyz \hat{k}$$

DIVERGENCIA

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\cos y + y \cos x, \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y, xyz) \quad \therefore \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -y \operatorname{sen} x - x \cos y + xy$$

ROTACIONAL

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos y + y \cos x & \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} y & xyz \end{vmatrix} = (xz - 0) \hat{i} - (yz - 0) \hat{j} + [\cos x - \operatorname{sen} y - (-\operatorname{sen} y + \cos x)] \hat{k}$$

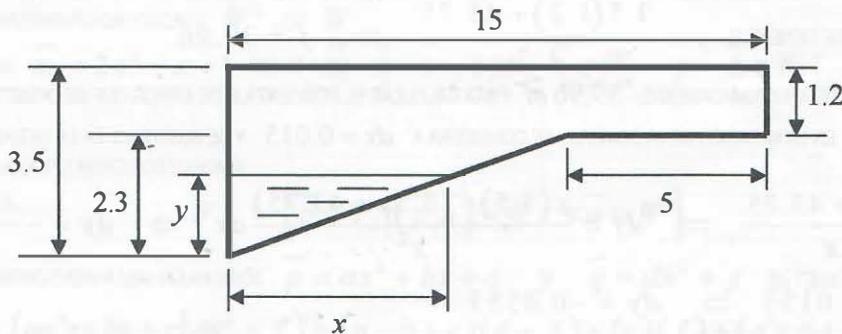
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = xz \hat{i} - yz \hat{j} + (\cos x - \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y - \cos x) \hat{k} \quad \therefore \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = xz \hat{i} - yz \hat{j}$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO I

UNA ALBERCA TIENE 15 m DE LARGO POR 7.5 m DE ANCHO. SU PROFUNDIDAD SE CONSERVA DE 1.2 m EN 5 m DE SU LONGITUD Y DESPUÉS (DESCIENDE) AUMENTA EN LÍNEA RECTA HASTA ALCANZAR 3.5 m EN EL OTRO EXTREMO. SI ESTÁ SIENDO LLENADA A RAZÓN DE 675 LITROS POR MINUTO, ¿CON QUÉ VELOCIDAD ESTÁ SUBIENDO EL NIVEL CUANDO LA PROFUNDIDAD DEL AGUA ES DE 1.8 m MEDIDA DESDE LO MÁS HONDO?

SOLUCIÓN. ES CONVENIENTE HACER UN MODELO GEOMÉTRICO, CONSIDERANDO LA SECCIÓN LONGITUDINAL DE LA ALBERCA.



LA RAPIDEZ CON QUE ESTÁ SIENDO LLENADA LA ALBERCA EQUIVALE A LA DERIVADA DEL VOLUMEN CON RESPECTO AL TIEMPO, ES DECIR, A $\frac{dV}{dt} = 675 \frac{\ell}{\text{min}} = 0.675 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ Y SE PREGUNTA LA RAPIDEZ CON QUE EL AGUA SUBE CUANDO ESTÁ A 1.8 m DEL FONDO, ES DECIR, LA

DERIVADA DE DEL TIRANTE DE AGUA, "y", CON RESPECTO AL TIEMPO, ESTO ES, $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=1.8 \text{ m}}$

EL VOLUMEN DE LA "PARTE MOJADA", ES DECIR, DE LA PARTE DE LA ALBERCA CON AGUA ES IGUAL A:

$$V = 7.5 \left(\frac{xy}{2} \right) \Rightarrow V = 3.75 xy$$

POR TRIÁNGULOS SEMEJANTES, SE TIENE QUE:

$$\frac{x}{y} = \frac{10}{2.3} \Rightarrow x = \frac{10}{2.3} y$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA EXPRESIÓN QUE DEFINE AL VOLUMEN Y SE LLEGA A:

$$V = 3.75 y \left(\frac{10}{2.3} y \right) \Rightarrow V = \frac{37.5}{2.3} y^2$$

SE DERIVA CON RESPECTO A y Y SE SUSTITUYEN LOS VALORES CORRESPONDIENTES. ASÍ,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{75}{2.3} \frac{dy}{dt} \Rightarrow 0.675 = \frac{7.5}{2.3} \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2.3 \times 0.675}{7.5} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0.207$$

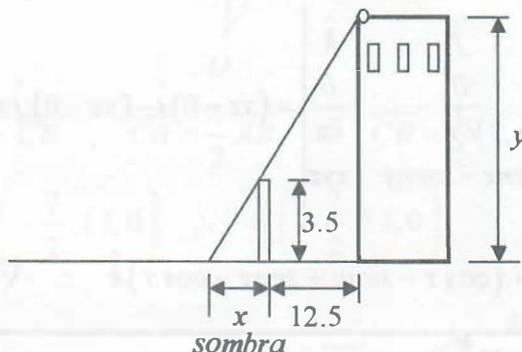
POR LO QUE EL NIVEL DEL AGUA ESTÁ SUBIENDO A RAZÓN DE 0.207 METROS POR MINUTO, O SEA, 20.7 CENTÍMETROS POR MINUTO.

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO I

EN LA ORILLA DE LA PARTE SUPERIOR DE UN EDIFICIO HAY UNA LÁMPARA QUE PROYECTA LA SOMBRA DE UN POSTE DE 3.5 m DE ALTURA, QUE SE ENCUENTRA A 12.5 m DE LA BASE DEL EDIFICIO. SI LA SOMBRA DEL POSTE ES DE 1.2 m, CON UN POSIBLE ERROR DE 1.5 cm EN SU MEDICIÓN; ¿CUÁL ES LA ALTURA DEL EDIFICIO Y CUÁL EL PORCENTAJE DE ERROR EN EL CÁLCULO DE LA ALTURA?

SOLUCIÓN. PRIMERO HAY QUE TRAZAR UN MODELO GEOMÉTRICO DEL PROBLEMA PLANTEADO.



DE ACUERDO CON LOS DATOS DEL PROBLEMA, SI A LA SOMBRA SE LE LLAMA "x", Y A LA ALTURA DEL EDIFICIO "y", SE PUEDE ESCRIBIR, POR TRIÁNGULOS SEMEJANTES, QUE:

$$\frac{y}{x+12.5} = \frac{3.5}{x} \Rightarrow y = \frac{3.5(x+12.5)}{x} \Rightarrow y = \frac{3.5x + 43.75}{x}$$

SI SE TOMA A x COMO 1.2, SE TIENE QUE $y = \frac{3.5(1.2) + 43.75}{1.2} \Rightarrow y \doteq 39.96$

LUEGO, LA ALTURA DEL EDIFICIO ES DE APROXIMADAMENTE 39.96 m. PARA CALCULAR EL PORCENTAJE DE ERROR QUE SE COMETE AL CALCULAR LA ALTURA, CON UN POSIBLE ERROR DE 1.5 cm EN LA MEDICIÓN DE LA SOMBRA, SE CONSIDERA A $dx = 0.015$ Y SE SUSTITUYE EN LA DIFERENCIAL DE LA FUNCIÓN. ASÍ,

$$y = \frac{3.5x + 43.75}{x} \Rightarrow dy = \frac{x(3.5) - (3.5x + 43.75)}{x^2} dx \Rightarrow dy = -\frac{43.75}{x^2} dx$$

LUEGO $dy = -\frac{43.75}{(1.2)^2}(0.015) \Rightarrow dy = -0.4557$

POR LO QUE EL POSIBLE ERROR AL CALCULAR LA ALTURA ES DE -0.4557 m, QUE EQUIVALEN A UN PORCENTAJE DE ERROR DE

$$P.E. = \frac{|dy|}{y} \times 100 = \frac{0.4557}{39.96} \times 100 = 1.14\%$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

TUTORÍA

EN EL MES DE JUNIO DEL PRESENTE AÑO COMENZARÁN LA TUTORÍAS POR INTERNET. SE TRATA DE LO SIGUIENTE: EN LA PÁGINA WEB DE LA FACULTAD ESTARÁN LOS CORREOS DE ALGUNOS DE LOS PROFESORES DE CARRERA (TUTORES) QUE DE MANERA VOLUNTARIA SE OFRECEN PARA INICIAR ESTA EXPERIENCIA ACADÉMICA. ESTE SERVICIO SERÁ PARA CUALQUIER ESTUDIANTE DE LA FACULTAD QUE REQUIERA DE UN CONSEJO ACADÉMICO, UNA ORIENTACIÓN ACADÉMICA O DE LA ADMINISTRACIÓN ESCOLAR, O ALGUNA CONSULTA DE CARÁCTER EXISTENCIAL QUE SE QUIERA HACER. LOS TUTORES SE COMPROMETEN A MANTENER LA CONFIDENCIALIDAD CON QUIENES LOS CONSULTEN. SI EL ESTUDIANTE DESEA ACLARAR ALGO, PODRÁ VISITAR AL TUTOR EN SU CUBÍCULO.

COMO VEN, LA FACULTAD OFRECE ESTA VARIANTE DE LA TUTORÍA COMO UNA MUESTRA DEL INTERÉS PORQUE LOS ESTUDIANTES TENGAN MAYORES PROBABILIDADES DE ÉXITO EN SUS ESTUDIOS DE LICENCIATURA AL CONTAR CON ALGUIEN CUYO ÚNICO DESEO ES APOYARLOS ACADÉMICA Y HUMANAMENTE.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SANCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANAMARÍA VIEYRA VILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 58

2 DE MAYO DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ÁLGEBRA LINEAL

SEA P_2 EL ESPACIO VECTORIAL REAL DE LOS POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A DOS, CON COEFICIENTES REALES Y $W = \{dx^2 + f \mid d, f \in \mathbb{R}\}$ UN SUBESPACIO DE P_2 , Y SEA EL PRODUCTO INTERNO EN P_2 DEFINIDO POR

$$(\overline{p} | \overline{q}) = \sum_{i=1}^2 p(i)q(i) \quad \forall \overline{p}, \overline{q} \in P_2$$

- a) DETERMINAR EL COMPLEMENTO ORTOGONAL W^\perp DE W
- b) EXPRESAR EL VECTOR $\overline{m} = 2x^2 - x - 1$ COMO $\overline{m} = \overline{n} + \overline{s}$, DONDE $\overline{n} \in W$ Y $\overline{s} \in W^\perp$

SOLUCIÓN.

- a) DE LA DEFINICIÓN DE COMPLEMENTO ORTOGONAL

$$W^\perp = \{ \overline{p} \in P_2 \mid (\overline{p} | \overline{u}) = 0 \quad \forall \overline{u} \in W \}$$

SI SE APLICA EL PRODUCTO INTERNO DADO A LOS POLINOMIOS $\overline{p} = ax^2 + bx + c$ Y $\overline{q} = dx^2 + f$ SE TIENE QUE:

$$\begin{aligned}
 (\overline{p} | \overline{q}) &= (ax^2 + bx + c | dx^2 + f) = (a - b + c)(d + f) + (c)(f) + (a + b + c)(d + f) \\
 &= ad + af - bd - bf + cd + cf + cf + ad + af + bd + bf + cd + cf \\
 &= 2ad + 2af + 2cd + 3cf = (2a + 2c)d + (2a + 3c)f = 0
 \end{aligned}$$

COMO $(2a + 2c)d + (2a + 3c)f = 0 \quad \forall d, f \in \mathbb{R}$ ENTONCES $\left. \begin{matrix} 2a + 2c = 0 \\ 2a + 3c = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = c = 0$

LUEGO $W^\perp = \{bx \mid b \in \mathbb{R}\}$

- b) $\overline{m} = \overline{n} + \overline{s}$, DONDE $\overline{n} \in W$ Y $\overline{s} \in W^\perp$

$$2x^2 - x - 1 = (dx^2 + f) + (bx) \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = dx^2 + bx + f \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ b = -1 \\ f = -1 \end{cases}$$

$$(2x^2 - x - 1) = (2x^2 - 1) + (-x) ; (2x^2 - 1) \in W \quad \text{Y} \quad -x \in W^\perp$$

NÓTESE ADEMÁS QUE EN EFECTO LOS POLINOMIOS $\overline{n} = 2x^2 - 1$ Y $\overline{s} = -x$ SON ORTOGONALES CON EL PRODUCTO INTERNO DADO. ESTO ES,

$$(2x^2 - 1 | -x) = (1)(1) + (-1)(0) + (1)(-1) = 1 - 1 = 0$$

QUÍMICA

PROBLEMA DE ESTEQUIOMETRÍA (TEMA IV)

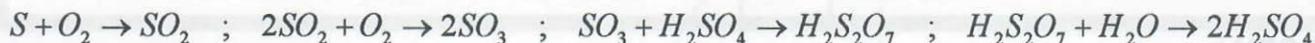
PARA PREPARAR ÁCIDO SULFÚRICO (H_2SO_4) SE LLEVAN AL CABO LAS REACCIONES SIGUIENTES:



CALCULAR LA CANTIDAD DE AZUFRE (S) EN GRAMOS, NECESARIA PARA OBTENER $249.2 [mL]$ DE ÁCIDO SULFÚRICO $\left(\rho = 1.84 \frac{g}{mL}\right)$.

RESOLUCIÓN.

ANTES DE REALIZAR LOS CÁLCULOS ESTEQUIOMÉTRICOS, HAY QUE BALANCEAR LAS REACCIONES QUÍMICAS:



LA SECUENCIA DE PASOS ES LA SIGUIENTE:

$m = masa$

$$m_s = 249.2 mL H_2SO_4 \left(\frac{1.84 g H_2SO_4}{1 mL H_2SO_4} \right) \left(\frac{1 mol H_2SO_4}{98 g H_2SO_4} \right) \left(\frac{1 mol H_2S_2O_7}{2 mol H_2SO_4} \right) \\ \left(\frac{1 mol SO_3}{1 mol H_2S_2O_7} \right) \left(\frac{2 mol SO_2}{2 mol SO_3} \right) \left(\frac{1 mol S}{1 mol SO_2} \right) \left(\frac{32.064 g S}{1 mol S} \right)$$

$$m_s = 75.0114 g de S$$

EXPLICACIÓN DE LA SECUENCIA DE CÁLCULOS

EN LAS REACCIONES QUÍMICAS PUEDE OBSERVARSE QUE EL H_2SO_4 ES EL PRODUCTO FINAL, DE MANERA QUE HAY QUE PROPONER UNA SECUENCIA DE CÁLCULOS DE PRODUCTOS HACIA REACTIVOS.

EN EL PROBLEMA SE PLANTEA QUE DEBEN OBTENERSE $249.2 [mL]$ DE H_2SO_4 , DE TAL FORMA QUE ESTE DATO APARECE AL PRINCIPIO DE LOS CÁLCULOS. DICHO VOLUMEN SE RELACIONA CON LA DENSIDAD PARA PASAR DE MILILITROS A GRAMOS DE H_2SO_4 . LOS GRAMOS SE PASAN A MOLES CON LA MASA MOLAR DEL H_2SO_4 .

EN LOS FACTORES SIGUIENTES APARECEN LAS RELACIONES ESTEQUIOMÉTRICAS QUE SE OBSERVAN EN LAS ECUACIONES QUÍMICAS BALANCEADAS. AL FINAL LOS MOLES DE AZUFRE SE PASAN A GRAMOS CON SU MASA ATÓMICA.

PROFESORA: VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE LAS RECTAS L y R REPRESENTADAS EN LA FORMA:

$$L: \frac{2x-6}{6} = \frac{y-2}{6} = \frac{1-z}{-2} \quad y \quad R: \bar{p}(t) = (5-6t, -1+6t, 7+5t)$$

RESOLUCIÓN.

PRIMERA FORMA

EL CÁLCULO PUEDE HACERSE UTILIZANDO LA EXPRESIÓN
$$d = \frac{|(\bar{p}_L - \bar{p}_R) \cdot (\bar{u}_L \times \bar{u}_R)|}{|\bar{u}_L \times \bar{u}_R|}$$

EN DONDE:

\bar{p}_L = VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA CONOCIDO DE LA RECTA $L = (3, 2, 1)$

\bar{p}_R = VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA CONOCIDO DE LA RECTA $R = (5, -1, 7)$

\bar{u}_L = VECTOR PARALELO A LA RECTA $L = (3, 6, 2)$

\bar{u}_R = VECTOR PARALELO A LA RECTA $R = (-6, 6, 5)$

SE PROCEDE A CALCULAR LA EXPRESIÓN DADA Y:

$$\bar{p}_L - \bar{p}_R = (3, 2, 1) - (5, -1, 7) = (-2, 3, -6)$$

$$\bar{u}_L \times \bar{u}_R = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 6 & 5 \end{vmatrix} = (18, -27, 54)$$

DADO QUE DEL VECTOR $\bar{u}_L \times \bar{u}_R$ LO QUE IMPORTA ES LA DIRECCIÓN, SE PUEDE CONSIDERAR AL VECTOR $\bar{v} = (2, -3, 6)$ PARALELO A $\bar{u}_L \times \bar{u}_R$, DE DONDE

$$|\bar{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = 7$$

$$(\bar{p}_L - \bar{p}_R) \cdot \bar{v} = (-2, 3, -6) \cdot (2, -3, 6) = -49$$

POR LO QUE:

$$d = \frac{|-49|}{7} = 7 \text{ UNIDADES DE LONGITUD}$$

SEGUNDA FORMA

LA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN ES IGUAL A LA DISTANCIA ENTRE LOS PLANOS PARALELOS QUE LAS CONTIENEN. SEA π_L EL PLANO QUE CONTIENE A LA RECTA L Y SEA π_R EL PLANO QUE CONTIENE A LA RECTA R .

UN VECTOR \bar{n} NORMAL A DICHS PLANOS ES $\bar{n} = \bar{u}_L \times \bar{u}_R \Rightarrow \bar{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 6 & 5 \end{vmatrix} = (18, -27, 54)$

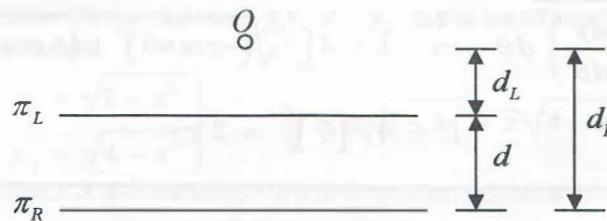
AQUÍ TAMBIÉN, PARA SIMPLIFICAR EL CÁLCULO, SE TOMA $\bar{n} = (2, -3, 6)$

$$\text{ECUACIÓN CARTESIANA DEL PLANO } \pi_L : 2(x-3) - 3(y-2) + 6(z-1) = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6z - 6 = 0$$

$$\text{ECUACIÓN CARTESIANA DEL PLANO } \pi_R : 2(x-5) - 3(y+1) + 6(z-7) = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6z - 55 = 0$$

$$\text{en } \pi_L : D_L = -6 \quad \text{y} \quad \text{en } \pi_R : D = -55$$

D_L y D_R TIENEN EL MISMO SIGNO, LO CUAL INDICA QUE EL ORIGEN DE COORDENADAS NO ESTÁ COMPRENDIDO ENTRE LOS PLANOS. OBSÉRVESE LA SIGUIENTE FIGURA:



DE LA FIGURA : $d = |d_R - d_L|$

$$d_R = \frac{|D_R|}{|N|} = \frac{|-55|}{7} = \frac{55}{7} \text{ UNIDADES DE LONGITUD} \quad \text{y} \quad d_L = \frac{|D_L|}{|N|} = \frac{|-6|}{7} = \frac{6}{7} \text{ UNIDADES DE LONGITUD}$$

$$\therefore d = \frac{55}{7} - \frac{6}{7} = 7 \text{ UNIDADES DE LONGITUD}$$

PROFESOR: HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

CÁLCULO II

VERIFICAR QUE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO r ES $2\pi r$

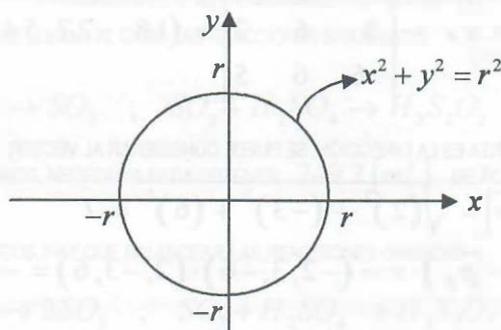
a) UTILIZANDO PRIMERO LA EXPRESIÓN QUE DEFINE LA LONGITUD DE ARCO CUANDO LA FUNCIÓN ESTÁ EXPRESADA EN SU FORMA EXPLÍCITA, ES DECIR,

$$y = f(x)$$

b) MEDIANTE LA EXPRESIÓN QUE DEFINE LA LONGITUD DE ARCO CUANDO LA FUNCIÓN ESTÁ DADA POR SUS ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

SOLUCIÓN

SE SUPONE UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS Y RADIO IGUAL A r . ENTONCES LA FIGURA SERÍA LA SIGUIENTE:



- a) EN ESTE CASO, POR SIMETRÍA, BASTA CON CALCULAR UN CUARTO DE LA CIRCUNFERENCIA, LA QUE ESTÁ EN EL PRIMER CUADRANTE, Y DESPUÉS SE MULTIPLICA EL RESULTADO POR CUATRO.

LA ECUACIÓN DE ESTE SEGMENTO, EXPRESADO COMO FUNCIÓN EXPLÍCITA CON LA VARIABLE y EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE x , ESTÁ DADA POR

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq r$$

LUEGO SE APLICA LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA LONGITUD DE ARCOY SE TIENE QUE:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad ; \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow L = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx$$

$$L = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$L = 4r \left[\operatorname{angsen} \frac{x}{r} \right]_0^r = 4r \left[(\operatorname{angsen} 1) - (\operatorname{angsen} 0) \right] = 4r \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2\pi r$$

- b) LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE ESTA CURVA, EN TÉRMINOS DE UN PARÁMETRO θ SON LAS SIGUIENTES:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

SI SE APLICA LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA LONGITUD DE ARCO CUANDO LAS VARIABLES ESTÁN EN FUNCIÓN DE UN PARÁMETRO, SE TIENE QUE:

$$x = r \cos \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -r \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad y = r \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \Rightarrow L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-r \operatorname{sen} \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta$$

$$L = 4r \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r$$

PROFESOR: PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CULTURA CIENTÍFICA

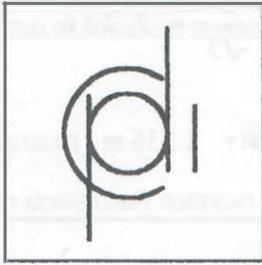
PERSONAJES FAMOSOS

ARQUÍMEDES (287 A.C. - 212 A.C.)

NACIÓ EN SIRACUSA, SICILIA Y ESTUDIÓ EN ALEJANDRÍA, EGIPTO. UNA HISTORIA NARRA QUE EL REY HERÓN RECURRIÓ A SU PARIENTE ARQUÍMEDES PARA QUE DETERMINARA SI SU CORONA, RECIENTEMENTE ENTREGADA POR UN ORFEBRE, ERA REALMENTE DE ORO PURO O TENÍA ALGÚN OTRO METAL. ARQUÍMEDES ESTABA ADVERTIDO QUE DEBÍA HACER SU INVESTIGACIÓN SIN CAUSAR EL MENOR DAÑO O DETERIORO AL OBJETO REAL. SE CUENTA QUE UN DÍA AL METERSE A LA TINA DE BAÑO OBSERVÓ QUE EL AGUA SE DESBORDABA; SE LE OCURRIÓ ENTONCES QUE LA CANTIDAD DE AGUA SALIDA DE LA BAÑERA CORRESPONDÍA AL VOLUMEN DE LA PARTE DE SU CUERPO QUE ESTABA DENTRO DEL BAÑO. EN CONSECUENCIA, SI SUMERGIA LA CORONA DENTRO DEL AGUA PODRÍA SABER, POR EL CAMBIO DEL NIVEL DEL AGUA, EL VOLUMEN DE LA CORONA, Y EN ESTA MISMA FORMA COMPARARLO CON EL VOLUMEN DE UN MISMO PESO DE ORO. SI LOS DOS VOLÚMENES ERAN IGUALES, LA CORONA ESTARÍA ELABORADA EXCLUSIVAMENTE DE ORO PURO. SI LA CORONA TENÍA MEZCLADA PLATA O ALGÚN OTRO METAL, EL VOLUMEN NO SERÍA EQUIVALENTE. "EUREKA! ¡EUREKA!" ("¡LO ENCONTRÉ! ¡LO ENCONTRÉ!") SALIÓ GRITANDO AL HABER OBSERVADO ESTE FENÓMENO MIENTRAS SE BAÑABA. SU EMOCIÓN FUE TAL QUE NI SIQUERA SE PERCATÓ DE SU DESNUDEZ. SU PRINCIPIO DICE: "TODO CUERPO SUMERGIDO EN UN LÍQUIDO SUFRE UN EMPUJE DE ABAJO HACIA ARRIBA IGUAL AL PESO DEL VOLUMEN DEL LÍQUIDO QUE DESALOJA. OTRA APORTACIÓN SUYA ES LA DE LA PALANCA. AL RESPECTO, EXPRESÓ: "DADME UN PUNTO DE APOYO Y MOVERÉ EL MUNDO". ENTRE SUS CUARENTA INVENTOS MECÁNICOS SE MENCIONAN LA RUEDA DENTADA Y EL TORNILLO SIN FIN. MURIÓ CUANDO LOS ROMANOS ORGANIZARON EL SAQUEO A SIRACUSA. AL MARGEN DEL PELIGRO, REALIZABA SUS DIBUJOS GEOMÉTRICOS EN LA ARENA CUANDO UN SOLDADO ROMANO LE ORDENÓ QUE LO SIGUIERA. ARQUÍMEDES RESPONDIÓ QUE NO LO IMPORTUNARA Y CONTINUÓ SUS REFLEXIONES. EL SOLDADO ROMANO, IMPACIENTE Y MOLESTO POR LA ACTITUD DEL MATEMÁTICO, SIN LA MENOR CONSIDERACIÓN VICTIMÓAL NOTABLE ARQUÍMEDES.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

CÁLCULO I

SE QUIERE CONSTRUIR LA ESTRUCTURA DE UN PAPALOTE GIGANTE CON SEIS VARILLAS DE DIÁMETRO MUY PEQUEÑO PERO BUENA RIGIDEZ, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA. YA SE TIENEN LAS CUATRO PIEZA EXTERIORES CON LAS MEDIDAS INDICADAS (EN METROS). ¿CUÁL DEBE SER LA LONGITUD DE LAS DOS VARILLAS DIAGONALES PARA QUE EL ÁREA DEL PAPALOTE SEA LA MAYOR POSIBLE?

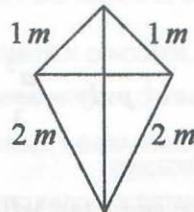


FIGURA A

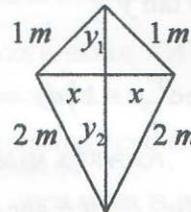


FIGURA B

SOLUCIÓN. COMO SE OBSERVA, EN LA FIGURA A SE TIENEN LOS DATOS DE LAS CUATRO VARILLAS EXTERNAS. PARA RESOLVER EL PROBLEMA SE COLOCAN LAS VARIABLES DE ACUERDO CON LA FIGURA B. ASÍ, SE TIENE QUE EL MODELO MATEMÁTICO PRELIMINAR QUE HABLA DEL ÁREA DEL PAPALOTE ES LA SIGUIENTE:

$$A = \frac{2xy_1}{2} + \frac{2xy_2}{2} \Rightarrow A = xy_1 + xy_2$$

Y POR EL TEOREMA DE PITÁGORAS, SE ENCUENTRAN EXPRESIONES PARA y_1 y y_2 , QUE SE SUSTITUYEN EN LA ECUACIÓN ANTERIOR, CON LO QUE SE LLEGA AL MODELO MATEMÁTICO DEFINITIVO QUE SE OPTIMIZARÁ.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \sqrt{1-x^2} \\ y_2 &= \sqrt{4-x^2} \end{aligned} \right\} ; A = x\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{4-x^2}$$

SE DERIVA AHORA CON RESPECTO A x , SE IGUALA LA DERIVADA ACERO Y SE BUSCAN LOS PUNTOS CRÍTICOS. ASÍ SE TIENE QUE:

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{4-x^2} \Rightarrow \frac{dA}{dx} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$\frac{(1-2x^2)\sqrt{4-x^2} + (4-2x^2)\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow (1-2x^2)\sqrt{4-x^2} + (4-2x^2)\sqrt{1-x^2} = 0$$

(SE DESPRECIAN LOS PUNTOS CRÍTICOS CORRESPONDIENTES A $x=1$ y $x=2$ YA QUE EL CATETO NO PUEDE VALER LO QUE LA HIPOTENUSA PUES NO HABRÍA TRIÁNGULO)

$$(1-2x^2)^2(4-x^2) = (4-2x^2)^2(1-x^2) \Rightarrow (1-4x^2+4x^4)(4-x^2) = (16-16x^2+4x^4)(1-x^2)$$

$$4-x^2-16x^2+4x^4+16x^4-4x^6 = 16-16x^2-16x^2+16x^4+4x^4-4x^6 \Rightarrow 15x^2 = 12$$

$$x^2 = \frac{12}{15} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{5}} \doteq 0.894$$

$$x = 0.8 \Rightarrow \frac{dA}{dx} > 0 ; x = 0.9 \Rightarrow \frac{dA}{dx} < 0 \therefore \text{ÁREAMÁXIMA}$$

$$y_1 = \sqrt{1 - \frac{12}{15}} = \sqrt{\frac{3}{15}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y_2 = \sqrt{4 - \frac{12}{15}} = \sqrt{\frac{48}{15}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$y_1 + y_2 = \frac{5}{\sqrt{5}} = 2.236$$

FINALMENTE SE CONCLUYE QUE EL PAPANOTE DE ÁREA MÁXIMA TIENE $2(0.894) = 1.788 \text{ m}$ EN SU DIAGONAL MENOR Y 2.236 m EN SU DIAGONAL MAYOR.

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO II

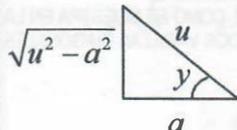
CALCULAR LA SIGUIENTE INTEGRAL:

$$\int \sqrt{9x^2 - 16} \, dx$$

SOLUCIÓN: ESTA INTEGRAL SE CALCULA POR SUSTITUCIÓN TRIGONÓMETRICA. ASÍ, PRIMERO SE CAMBIAN VARIABLES Y SE LLEGA A:

$$u^2 = 9x^2 \quad ; \quad u = 3x \quad ; \quad du = 3dx \quad ; \quad a^2 = 16 \quad ; \quad a = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \int \sqrt{u^2 - a^2} \, du$$

SE CONSTRUYE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE LAS SIGUIENTES CARACTERÍSTICAS:



$$\left. \begin{array}{l} u = a \sec y \\ du = a \sec y \tan y \, dy \\ \sqrt{u^2 - a^2} = a \tan y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \int a \tan y \, a \sec y \tan y \, dy = \frac{a^2}{3} \int \sec y \tan^2 y \, dy$$

$$\frac{a^2}{3} \int \sec y (\sec^2 y - 1) \, dy = \frac{a^2}{3} \int \sec^3 y \, dy - \frac{a^2}{3} \int \sec y \, dy$$

PRIMERO SE RESOLVERÁ LA INTEGRAL CON LA $\sec^3 y$, POR PARTES. ASÍ SE LLEGA A:

$$\int \sec^3 y \, dy = \int \sec y \sec^2 y \, dy \quad ; \quad u = \sec y \quad ; \quad du = \sec y \tan y \, dy \quad ; \quad dv = \sec^2 y \, dy \quad ; \quad v = \tan y$$

$$\int \sec^3 y \, dy = \sec y \tan y - \int \sec y \tan^2 y \, dy$$

$$\int \sec^3 y \, dy = \sec y \tan y - \int \sec y (\sec^2 y - 1) \, dy$$

$$\int \sec^3 y \, dy = \sec y \tan y - \int \sec^3 y \, dy + \int \sec y \, dy$$

$$2 \int \sec^3 y \, dy = \sec y \tan y + \int \sec y \, dy$$

$$\int \sec^3 y \, dy = \frac{1}{2} \sec y \tan y + \frac{1}{2} \ln |\sec y + \tan y| + C$$

DE DONDE, AL SUSTITUIR ESTE VALOR EN LA CORRESPONDIENTE INTEGRAL, SE TIENE QUE:

$$\frac{a^2}{3} \left(\frac{1}{2} \sec y \tan y + \frac{1}{2} \ln |\sec y + \tan y| \right) - \frac{a^2}{3} \ln |\sec y + \tan y| + C = \frac{a^2}{6} \sec y \tan y - \frac{a^2}{6} \ln |\sec y + \tan y| + C$$

SE SUSTITUYEN LAS FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS Y:

$$\frac{a^2 u}{6 a} \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} - \frac{a^2}{6} \ln \left| \frac{u}{a} + \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| + C = \frac{u \sqrt{u^2 - a^2}}{6} - \frac{a^2}{6} \ln \left| \frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right| + C$$

$$\therefore \int \sqrt{9x^2 - 16} \, dx = \frac{3x \sqrt{9x^2 - 16}}{6} - \frac{16}{6} \ln \left| \frac{3x + \sqrt{9x^2 - 16}}{4} \right| + C = \frac{x \sqrt{9x^2 - 16}}{2} - \frac{8}{3} \ln \left| \frac{3x + \sqrt{9x^2 - 16}}{4} \right| + C$$

PROFESOR: PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

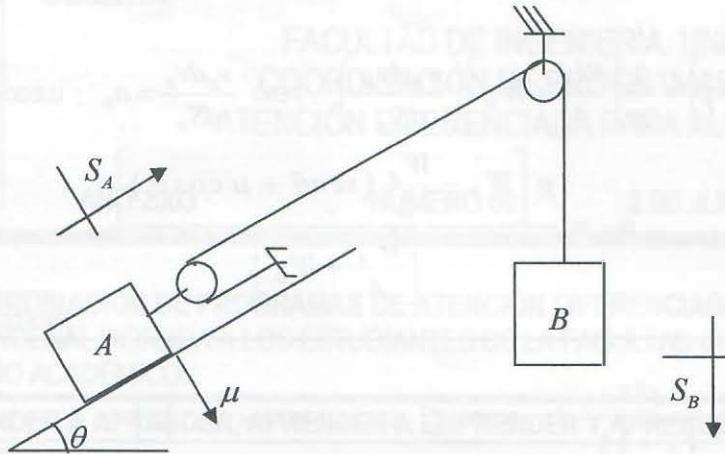
DINÁMICA

“LAS VICISITUDES DEL MÉTODO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA”

EL MÉTODO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA SE UTILIZA CONVENCIONALMENTE EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DINÁMICA DONDE LAS VARIABLES INVOLUCRADAS EN EL ANÁLISIS CORRESPONDEN A DESPLAZAMIENTOS Y VELOCIDADES, TANTO LINEALES COMO ANGULARES, FUERZAS EXTERNAS CONSTANTES O BIEN FUERZAS QUE DEPENDEN DE LA POSICIÓN; ESTE ARGUMENTO SUENA MUY RAZONABLE, PUES EL MODELO MATEMÁTICO DE TRABAJO Y ENERGÍA CONTIENE JUSTAMENTE LAS VARIABLES ANTERIORMENTE MENCIONADAS; EN CAMBIO, LAS VARIABLES DE TIEMPO Y ACELERACIÓN NO ESTÁN INCLUIDAS DE MANERA EXPLÍCITA EN DICHO MODELO. CABE RESALTAR QUE ESTE MÉTODO EXPRESA ENTERAMENTE SUS BONDADES CUANDO SE TIENEN PROBLEMAS DE PARTÍCULAS CONECTADAS POR CABLES IDEALES, ES DECIR, CABLES FLEXIBLES, INEXTENSIBLES Y DE MASA DESPRECIABLE.

A CONTINUACIÓN SE PRESENTA UN PROBLEMA DONDE ES POSIBLE OBTENER ACELERACIONES EN PARTÍCULAS CONECTADAS A PARTIR DEL MÉTODO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA. EL EJEMPLO EMPLEADO EN ESTE EJERCICIO SENCILLO CONSTITUYE UNA PEQUEÑA VARIANTE DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES, PRINCIPIO QUE NO SE FUNDAMENTARÁ MATEMÁTICAMENTE POR RAZONES DE ESPACIO.

EN EL SISTEMA MECÁNICO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA SE CONOCEN EL PESO W_A , EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN μ Y EL ÁNGULO θ



SI SE CONSIDERA QUE EL SISTEMA PARTE DEL REPOSO Y QUE ADEMÁS EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICA ES IGUAL AL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CINÉTICA, OBTENER:

A) EL VALOR DEL PESO W_B EN FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS CONOCIDOS, A FIN DE QUE EL BLOQUE "A" SUBA.

B) CONSIDERANDO LA CONDICIÓN DEL INCISO (A), DETERMINAR EL VALOR DE LA ACELERACIÓN DEL BLOQUE B.

SOLUCIÓN SE RESOLVERÁ EL INCISO (B) PUES CONTIENE DE MANERA IMPLÍCITA LA SOLUCIÓN DEL INCISO (A).

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

- SI EL BLOQUE A SE DESPLAZA SOBRE EL PLANO INCLINADO UNA DISTANCIA S_A HACIA ARRIBA, EL BLOQUE B BAJA UNA DISTANCIA S_B , LA CUAL ES DIFERENTE A S_A .

- LAS FUERZAS QUE REALIZAN TRABAJO DIFERENTE DE CERO SON LOS PESOS A y B Y LA FUERZA DE FRICCIÓN EJERCIDA EN LA SUPERFICIE INFERIOR DEL BLOQUE A Y EL PLANO.

- LOS SIGNOS DE LOS TRABAJOS SON: POSITIVO PARA EL PESO W_B Y NEGATIVOS PARA EL PESO W_A Y LA FRICCIÓN.

PLANTEAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE TRABAJO Y ENERGÍA:

$$U_{TOTAL} = (\Delta EC)_{TOTAL} = \Delta EC_A + \Delta EC_B$$

$$U_A + U_B + U_\mu = \Delta EC_A + \Delta EC_B$$

$$-W_A S_A \sin\theta + W_B S_B - \mu S_A W_A \cos\theta = \frac{1}{2} \frac{W_A}{g} v_A^2 + \frac{1}{2} \frac{W_B}{g} v_B^2 \quad \dots (1)$$

$$S_B = 2S_A \quad \dots (2)$$

RELACIONES CINEMÁTICAS DEL SISTEMA:

$$v_B = 2v_A \quad \dots (3)$$

LA ECUACIÓN (1) DEBE ESTAR EXPRESADA EN TÉRMINOS DE LAS PROPIEDADES CINEMÁTICAS DEL BLOQUE B, POR LO QUE AL DESPEJAR A S_A y v_A EN (2) y (3) Y SUSTITUIRLAS EN (1) SE TIENE QUE:

$$-W_A \left(\frac{S_B}{2} \right) \sin\theta + W_B S_B - \mu \left(\frac{S_B}{2} \right) W_A \cos\theta = \frac{1}{2} \frac{W_A}{g} \left(\frac{v_B}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{W_B}{g} v_B^2$$

$$\left[W_B - \frac{W_A}{2} \sin\theta - \mu \frac{W_A}{2} \cos\theta \right] S_B = \frac{1}{g} \left[\frac{W_A}{8} + \frac{W_B}{2} \right] v_B^2$$

PARA OBTENER LA RAPIDEZ DEL BLOQUE B DESPUÉS DE QUE SE DESPLAZA UNA CIERTA LONGITUD S_B SE REQUIERE QUE EL MIEMBRO IZQUIERDO SEA POSITIVO, ES DECIR:

$$W_B > \frac{1}{2} W_A (\sin\theta + \mu \cos\theta)$$

LA CONDICIÓN ANTERIOR ES LA RESPUESTA AL INCISO (A). AUNQUE TAMBIÉN SE PUEDE OBTENER APLICANDO LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

AHORA BIEN, DADO QUE LAS CANTIDADES QUE APARECEN EN LOS PARÉNTESIS RECTANGULARES DE LA ECUACIÓN ANTERIOR SON PARÁMETROS CONSTANTES, AL DIFERENCIAR SE TIENE QUE:

$$\left[W_B - \frac{W_A}{2} \operatorname{sen} \theta - \mu \frac{W_A}{2} \cos \theta \right] dS_B = \frac{1}{g} \left[\frac{W_A}{8} + \frac{W_B}{2} \right] (2v_B dv_B)$$

AL DIVIDIR ENTRE dS_B Y SIMPLIFICAR:

$$\left[W_B - \frac{W_A}{2} (\operatorname{sen} \theta + \mu \cos \theta) \right] = \frac{1}{g} \left[\frac{W_A}{4} + W_B \right] \left(\frac{v_B dv_B}{dS_B} \right); \text{ PERO } \frac{v_B dv_B}{dS_B} = a_B; \text{ LUEGO AL DESPEJAR SE LLEGA A:}$$

$$a_B = \frac{g \left[W_B - \frac{W_A}{2} (\operatorname{sen} \theta + \mu \cos \theta) \right]}{\left[\frac{W_A}{4} + W_B \right]}$$

PROFESOR: HUGO GERMÁN SERRANO MIRANDA

MATEMÁTICAS AVANZADAS

CALCULAR EL VALOR DE LA INTEGRAL $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^5} dz$ DONDE C ES LA CURVA DADA POR $|z| = 4$.

SOLUCIÓN. LA CURVA DADA ES UNA CIRCUNFERENCIA; C ES UNA CURVA SUAVE CERRADA SIMPLE. LA FUNCIÓN $f(z) = e^{2z}$ ES ENTERA, ENTONCES ES ANALÍTICA DENTRO Y SOBRE LA CURVA C . EL PUNTO $z = -1$ ESTÁ DENTRO DE LA CURVA C . DE LAS FÓRMULAS INTEGRALES DE CAUCHY:

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(-1)$$

EN ESTE CASO $n+1=5 \Rightarrow n=4$

AHORA SE DERIVA Y SE OBTIENE:

$$f^{(0)}(z) = e^{2z} \Big|_{z=-1} = e^{-2}; \quad f^{(1)}(z) = 2e^{2z} \Big|_{z=-1} = 2e^{-2}$$

$$f^{(2)}(z) = 4e^{2z} \Big|_{z=-1} = 4e^{-2}; \quad f^{(3)}(z) = 8e^{2z} \Big|_{z=-1} = 8e^{-2}$$

$$f^{(4)}(z) = 16e^{2z} \Big|_{z=-1} = 16e^{-2}$$

ENTONCES, LA SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL ES:

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} (16e^{-2}) \quad \therefore \quad \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^5} dz = \frac{4\pi i}{3e^2}$$

ESTUDIANTE: JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

CULTURA CIENTÍFICA

PERSONAJES FAMOSOS

AUGUSTIN - LOUIS CAUCHY (1789 - 1857)

DE JOVEN, EN LA ESCUELA POLITÉCNICA DE PARÍS, COBRÓ UN GRAN RENOMBRE POR SU ORIGINAL FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA DE UN CÍRCULO TANGENTE A OTROS TRES. COMO INGENIERO MILITAR, TRABAJÓ EN LOS PUERTOS Y LAS FORTIFICACIONES QUE NAPOLEÓN USARÍA EN SU INVASIÓN A INGLATERRA. EN 1811 PUDO RESOLVER UN PROBLEMA QUE LE ENVIÓ LAGRANGE EN EL QUE ESTABLECIÓ UNA RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO DE VÉRTICES Y EL NÚMERO DE LADOS DE LOS POLIEDROS. A LOS 24 AÑOS EXPUSO EL MÉTODO PARA DETERMINAR EL NÚMERO DE RAÍCES REALES POSITIVAS Y NEGATIVAS DE UNA ECUACIÓN DE GRADO CUALQUIERA. A LOS 25 AÑOS ESCRIBIÓ UN INFORME SOBRE INTEGRALES DEFINIDAS QUE FUE LA BASE DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES COMPLEJAS. FUE PROFESOR DE MECÁNICA, ÁLGEBRA SUPERIOR, FÍSICA MATEMÁTICA Y ASTRONOMÍA MATEMÁTICA EN LA FACULTAD DE CIENCIAS. SUS TRABAJOS MÁS IMPORTANTES EN EL CAMPO DE LA GEOMETRÍA FUERON LOS CONTACTOS, RECTIFICACIONES Y CUADRATURAS; EN ANÁLISIS, ACLARÓ LOS PRINCIPIOS DEL CÁLCULO, PONIÉNDOLOS EN TÉRMINOS DE LÍMITES Y CONTINUIDAD, LAS SERIES, LA INTERPOLACIÓN, LAS FRACCIONES DOBLEMENTE PERIÓDICAS, LA TEORÍA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y ORDINARIAS; EN MECÁNICA DE SÓLIDOS DEFORMABLES INVENTÓ EL MÉTODO DE LA CONTINUIDAD; EN ÓPTICA REALIZÓ ESTUDIOS SOBRE LA DOBLE REFRACCIÓN, LA DISPERSIÓN, LA REFLEXIÓN VÍTREA Y METÁLICA; LEGÓ TAMBIÉN INVESTIGACIONES A LA ASTRONOMÍA.

ESTE DISTINGUIDO CIENTÍFICO, ADEMÁS DE SU EXTRAORDINARIA CAPACIDAD PARA LAS CIENCIAS, ERA POSEEDOR DE UNA GRAN FORMACIÓN HUMANÍSTICA Y LITERARIA. MURIÓ EN SU CASA DE CAMPO, EN SCEAUX, EL 22 DE MAYO DE 1857

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 60

2 DE JUNIO DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

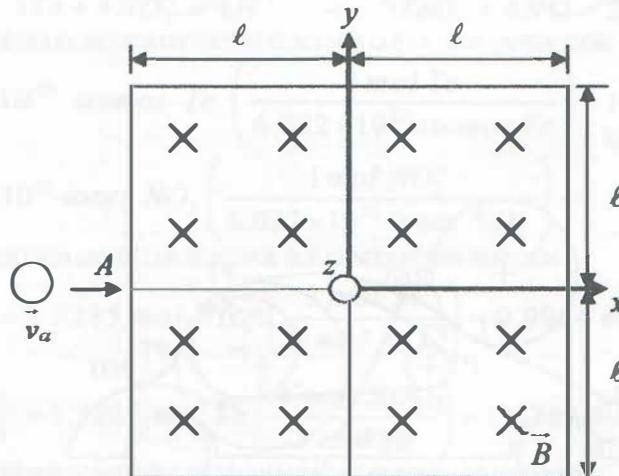
“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

UNA PARTÍCULA α (NÚCLEO DE HELIO) ES LANZADA A UNA REGIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME $\vec{B} = -0.2 \hat{k} [T]$ y $\ell = 0.3131 [m]$, COMO LA MOSTRADA EN LA FIGURA, CON UNA VELOCIDAD $\vec{v} = 3 \times 10^6 \hat{i} \left[\frac{m}{s} \right]$ Y ENTRA EN EL PUNTO $A(-0.3131, 0, 0) [m]$ EL NÚMERO ATÓMICO DEL

H_e ES 2 Y EN SU NÚCLEO HAY DOS PROTONES Y DOS NEUTRONES, CON: $m_p \approx m_n = 1.67 \times 10^{-27} [kg]$ y $q_\alpha = 2(1.6 \times 10^{-19}) [C]$ CALCULE:

- LA FUERZA MAGNÉTICA F_m QUE ACTÚA SOBRE LA PARTÍCULA α INMEDIATAMENTE DESPUÉS DE ENTRAR A LA ZONA DE CAMPO MAGNÉTICO.
- LA MASA DE LA PARTÍCULA α .
- EL RADIO DE LA TRAYECTORIA QUE DESCRIBE LA PARTÍCULA α Y EL DE LA TRAYECTORIA QUE DESCRIBIRÍA UN ELECTRÓN QUE ENTRARA A LA ZONA DE CAMPO B CON VELOCIDAD \vec{v}_α .
- EL TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA MAGNÉTICA PARA QUE LA PARTÍCULA α DESCRIBA SU TRAYECTORIA, IDENTIFIQUE LA FORMA DE ÉSTA.
- LA VELOCIDAD \vec{v}_α DE LA PARTÍCULA α AL SALIR DE LA REGIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO.



RESOLUCIÓN

a) LA FUERZA ES $\vec{F}_m = q_\alpha \vec{v}_\alpha \times \vec{B}$; $\vec{F}_m = 2(1.6 \times 10^{-19}) \left[3 \times 10^6 \hat{i} \times (-0.2 \hat{k}) \right] = 1.92 \times 10^{-13} \hat{j} [N]$

b) LA MASA DE LA PARTÍCULA α ES: $m_\alpha = 2m_p + 2m_n$; $m_\alpha = 4m_n$, ES DECIR, $m_\alpha = 4(1.67 \times 10^{-27}) [kg] = 6.68 \times 10^{-27} [kg]$

c) COMO LA FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO ES PERPENDICULAR A LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA Y NO MODIFICA EL MÓDULO DE \vec{v}_α DENTRO DEL CAMPO UNIFORME, LA FUERZA TIENE MÓDULO CONSTANTE Y ORIGINA QUE LA PARTÍCULA DESCRIBA UNA TRAYECTORIA EN FORMA DE CIRCUNFERENCIA. LA FUERZA APUNTA HACIA EL CENTRO DE LA TRAYECTORIA, ES UNA FUERZA CENTRAL Y LE PRODUCE A LA PARTÍCULA UNA ACELERACIÓN CENTRÍPETA: DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON,

$$F_m = m_\alpha \frac{v_\alpha^2}{r_\alpha} ; r_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{F_m} = \frac{(6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}) \left(3 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1.92 \times 10^{-13} \text{ N}} = 0.3131 \text{ [m]}$$

PARA EL ELECTRÓN $\vec{F}_e = -0.96 \times 10^{-13} \hat{j} \text{ [N]}$ y $r_e = \frac{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \left(3 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0.96 \times 10^{-13} \text{ [N]}} = 0.0853 \times 10^{-3} \hat{i} \text{ [m]}$

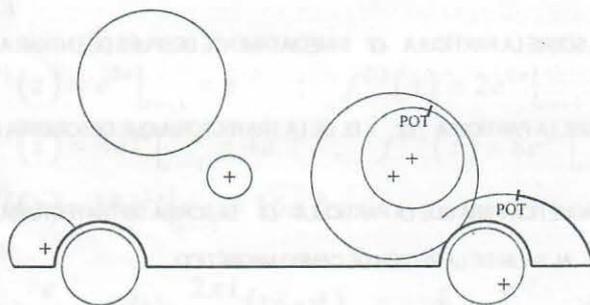
d) COMO LA FUERZA ES SIEMPRE PERPENDICULAR A LA VELOCIDAD, NO REALIZA TRABAJO ALGUNO YA QUE ÉSTE SE CALCULA CON $W = \int_C \vec{F}_m \cdot d\vec{\ell}$ Y COMO \vec{F}_m ES PERPENDICULAR A $d\vec{\ell}$, $W = 0$; LA FORMA DE LA TRAYECTORIA ES UNA CIRCUNFERENCIA, AUNQUE EN LA ZONA DISPONIBLE SÓLO DESCRIBE UN ARCO DE LA CUARTA PARTE DE LA CIRCUNFERENCIA, ESTO PARA LA PARTÍCULA α . EL ELECTRÓN DESCRIBE MEDIA CIRCUNFERENCIA HACIA ABAJO.

e) LA PARTÍCULA α SALE DE LA REGIÓN DE \vec{B} EN EL PUNTO $(0, 0.3131, 0) \text{ m}$ Y CON LA VELOCIDAD $\vec{v}_{\alpha \text{ salida}} = 3 \times 10^6 \hat{j} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

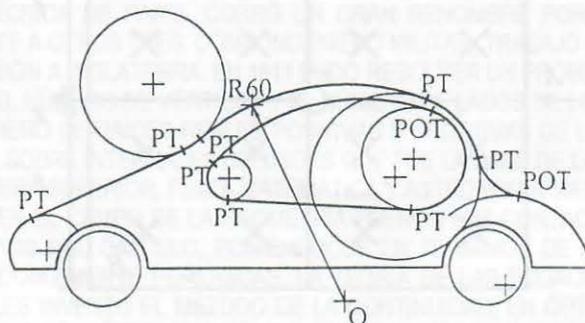
PROFESORES ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO Y GABRIEL A. JARAMILLO MORALES

ANÁLISIS GRÁFICO

DIBUJAR A ESCALA NATURAL, EL "PERFIL DE UN AUTO" MOSTRADO EN EL CROQUIS A PARTIR DE LOS DATOS PROPORCIONADOS ABAJO, DEJANDO TODOS LOS TRAZOS AUXILIARIOS NECESARIOS E INDICANDO CON PT LOS PUNTOS DE TANGENCIA Y CON O LOS CENTROS DE ARCOS DE CIRCUNFERENCIA.



SOLUCIÓN



CROQUIS (SOLUCIÓN):
Dimensiones en mm

ECUACIONES DIFERENCIALES

OBTENER $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+2}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1} \right\}$

RESOLUCIÓN:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+2}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3 \left(s + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4}}{\left(s + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{16}} \right\} = 3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{16}} \right\} + \frac{5}{\sqrt{15}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\left(s + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{16}} \right\}$$

ENTONCES, DE ACUERDO AL PRIMER TEOREMA DE TRASLACIÓN:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3s+2}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1} \right\} = 3e^{-\frac{1}{4}t} \cos \frac{\sqrt{15}}{4}t + \frac{5}{\sqrt{15}} e^{-\frac{1}{4}t} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{4}t$$

PROFESORA MARGARITA RAMÍREZ GALINDO

QUÍMICA

SE PONEN A REACCIONAR 8×10^{23} ÁTOMOS DE TELURIO CON 8×10^{23} ÁTOMOS IONES NITRATO. SI SE PRODUCEN 1.3 mol DE MONÓXIDO DE NITRÓGENO, DETERMINAR EL RENDIMIENTO PORCENTUAL.

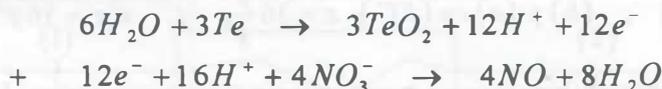


RESOLUCIÓN

HAY QUE BALANCEAR LA REACCIÓN POR EL MÉTODO ION-ELECTRÓN EN MEDIO ÁCIDO:



SE SUMAN LAS SEMIREACCIONES ANTERIORES Y SE TIENE QUE:



A CONTINUACIÓN SE CALCULA EL NÚMERO DE MOLES DE CADA UNO DE LOS REACTIVOS QUE SE TIENE EN REACCIÓN

$$\eta_{\text{Te}} = 8 \times 10^{23} \text{ átomos Te} \left(\frac{1 \text{ mol Te}}{6.022 \times 10^{23} \text{ átomos Te}} \right) = 1.3285 \text{ mol Te}$$

$$\eta_{\text{NO}_3^-} = 8 \times 10^{23} \text{ iones NO}_3^- \left(\frac{1 \text{ mol NO}_3^-}{6.022 \times 10^{23} \text{ iones NO}_3^-} \right) = 1.3285 \text{ mol NO}_3^-$$

HAY QUE CALCULAR EL NÚMERO DE MOLES DE CADA UNO DE LOS REACTIVOS QUE SE NECESITA EN REACCIÓN:

$$\eta_{\text{Te}} = 1.3285 \text{ mol NO}_3^- \left(\frac{3 \text{ mol Te}}{4 \text{ mol NO}_3^-} \right) = 0.9964 \text{ mol Te}$$

$$\eta_{\text{NO}_3^-} = 1.3285 \text{ mol Te} \left(\frac{4 \text{ mol NO}_3^-}{3 \text{ mol Te}} \right) = 1.7713 \text{ mol NO}_3^-$$

HAY QUE COMPARAR LO QUE SE TIENE CON LO QUE SE NECESITA, DE TAL MANERA QUE SE CONCLUYE LO SIGUIENTE:

SE NECESITA 1.7713 mol DE NO_3^- PARA REACCIONAR CON 1.3285 mol DE Te ; SIN EMBARGO, SÓLO SE TIENE 1.3285 mol DE NO_3^- ; POR LO TANTO, ÉSTE ES EL REACTIVO LIMITANTE.

PARA DETERMINAR EL RENDIMIENTO TEÓRICO SE TIENE EL CÁLCULO SIGUIENTE:

$$\eta_{\text{NO}} = 1.3285 \text{ mol NO}_3^- \left(\frac{4 \text{ mol NO}}{4 \text{ mol NO}_3^-} \right) = 1.3285 \text{ mol NO} \quad \text{SE DEBE PRODUCIR.}$$

CÁLCULO DEL RENDIMIENTO PORCENTUAL:

$$\frac{\text{rendimiento experimental}}{\text{rendimiento teorico}} \times 100 = \frac{1.3 \text{ mol NO}}{1.3285 \text{ mol NO}} \times 100 = 97.85 [\%]$$

POR LO TANTO EL RENDIMIENTO ES DEL 97.85 [%]

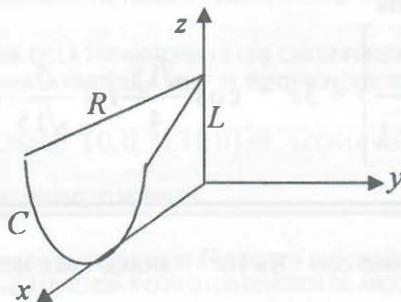
PROFESORA VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ

GEOMETRÍA ANALÍTICA

UTILIZAR EL MÉTODO DE LAS GENERATRICES PARA DETERMINAR LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CONOIDE FORMADO POR LA FAMILIA DE RECTAS PARALELAS AL PLANO

$$xy \text{ QUE SE APOYAN EN LA PARÁBOLA } C : \begin{cases} x = 6 \\ z = y^2 \end{cases} \text{ Y EN LA RECTA } L : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} ; 0 \leq t \leq 4$$

RESOLUCIÓN. LA FIGURA EN FORMA APROXIMADA, SERÍA LA SIGUIENTE:



PRIMERA FORMA DE RESOLUCIÓN. SE TIENE COMO GENERATRIZ A LA FAMILIA DE RECTAS Y COMO DIRECTRIZ A LA PARÁBOLA.

$$G : \begin{cases} y = \alpha x \dots (a) \\ z = \beta \dots (b) \end{cases} ; D : \begin{cases} x = 6 \dots (c) \\ z = y^2 \dots (d) \end{cases} ; \begin{matrix} (c) \text{ en } (a) : y = 6\alpha \\ (b) \text{ en } (d) : y^2 = \beta \end{matrix} \Rightarrow 36\alpha^2 = \beta \dots (\text{ECUACIÓN DE CONDICIÓN} = EC)$$

$$de (a) : \alpha = \frac{y}{x} \dots (e) ; (b) \text{ y } (e) \text{ en } (EC) : z = 36 \frac{y^2}{x^2} \therefore x^2 z = 36 y^2 ; z \in [0, 4]$$

SEGUNDA FORMA DE RESOLUCIÓN. TOMEMOS POR GENERATRIZ A LA FAMILIA DE PARÁBOLAS QUE SE APOYAN EN LA RECTA R Y QUE TIENEN SU VÉRTICE SOBRE EL EJE x.

$$R : \begin{cases} z = 4 \\ x = 3y \end{cases} \text{ YAQUE } R \text{ CONTIENE A LOS PUNTOS } (0, 0, 4) \text{ y } (6, 2, 4) . \text{ ENTONCES:}$$

$$G : \begin{cases} x = \alpha \dots (a) \\ \beta z = y^2 \dots (b) \end{cases} ; D : \begin{cases} z = 4 \dots (c) \\ x = 3y \dots (d) \end{cases} ; \begin{matrix} (d) \text{ en } (a) : 3y = \alpha \\ (c) \text{ en } (b) : 4\beta = y^2 \end{matrix} 4\beta = \frac{\alpha^2}{9} \Rightarrow 36\beta = \alpha^2 \dots (EC)$$

$$de (b) : \beta = \frac{y^2}{z} \dots (e) ; (a) \text{ y } (e) \text{ en } (EC) : 36 \frac{y^2}{z} = \alpha^2 \therefore 36y^2 = \alpha^2 z$$

PROFESOR LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

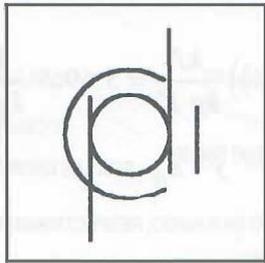
TUTORÍA

ESTUDIANTES QUE CURSAN PRIMER SEMESTRE CURRICULAR

TODAVÍA ES TIEMPO DE INTERACTUAR CON SU TUTOR. SI NO SABEN QUIÉN ES, EN LA **COPADI** LES AYUDAMOS. VALE LA PENA. ES UN APOYO QUE PUEDE DURAR TODA LA CARRERA. ES UN ALIADO, UN AMIGO EN QUIEN CONFIAR Y A QUIEN CONFIARLE MUCHAS COSAS. PLATIQUEN CON ÉL Y NO SE ARREPENTIRÁN.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

TERMODINÁMICA

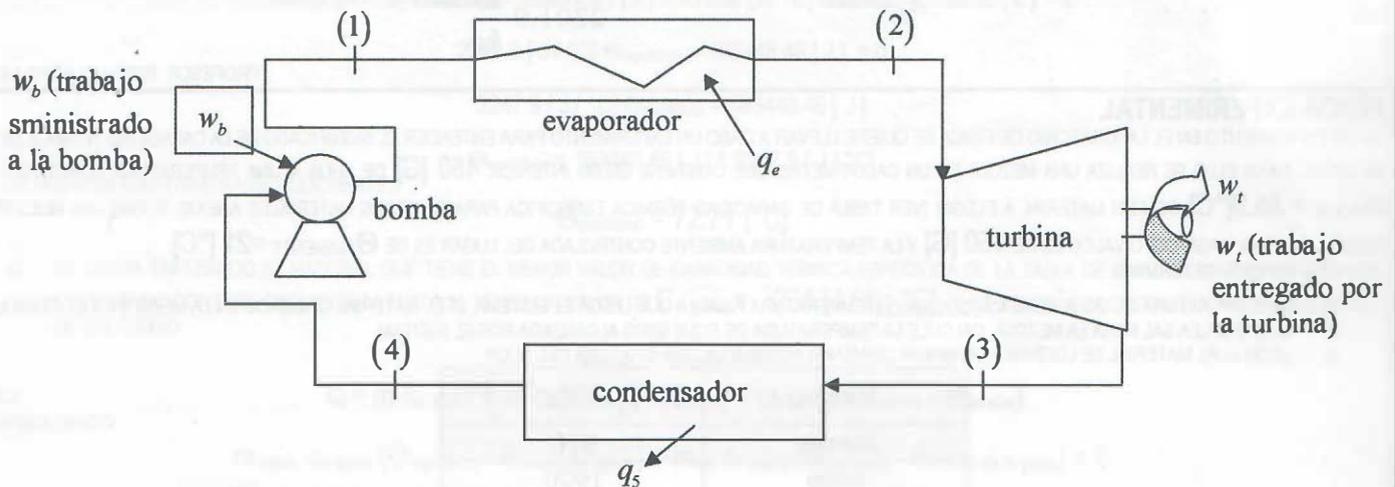
UNA MÁQUINA DE CARNOT ESTÁ COMPUESTA POR UN CONDENSADOR, UNA TURBINA, UN EVAPORADOR Y UNA BOMBA, Y SU FLUIDO DE TRABAJO ES AGUA. LOS ESTADOS TERMODINÁMICOS EN EL CICLO ESTÁN CARACTERIZADOS POR LAS PROPIEDADES TERMODINÁMICAS SIGUIENTES:

ESTADO	1	2	3	4
$P, \text{ bar}$	10	10	2	2
x	0.8	1.0	0.9	—

DETERMINAR:

- a) LA EFICIENCIA TÉRMICA (η) DE LA MÁQUINA.
- b) EL CALOR SUMINISTRADO AL CICLO.
- c) EL TRABAJO NETO DESARROLLADO POR LA MÁQUINA.
- d) EL CALOR DISIPADO POR LA MÁQUINA.
- e) LA CALIDAD EN EL ESTADO 4.

SOLUCIÓN. LOS COMPONENTES DEL CICLO ESTÁN DISTRIBUIDOS DE LA MANERA SIGUIENTE:



a) COMO ES UNA MÁQUINA DE CARNOT, LA EFICIENCIA CON LA QUE OPERA ES LA MÁXIMA, ES DECIR: $\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A}$

$T_A =$ TEMPERATURA EN EL EVAPORADOR = 179.91 °C

$T_B =$ TEMPERATURA EN EL CONDENSADOR = 120.23 °C

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{393.38 \text{ K}}{453.06 \text{ K}} = 0.1317 \text{ (13.17\%)}$$

NOTA. T_A y T_B SE BUSCAN EN LAS TABLAS DE SATURACIÓN DEL AGUA A 10 bar y 2 bar RESPECTIVAMENTE.

b) EL CALOR SUMINISTRADO AL CICLO (q_e) SE OBTIENE MEDIANTE:

$$q_e = T_A \Delta s = T_A (s_2 - s_1)$$

$$s_2 = s_g (a \ 10 \ bar) = 6.5865 \frac{kJ}{kg \ K} \quad ; \quad s_1 = s_f + x_1 s_{fg} (a \ 2 \ bar) = (2.1387 + 0.8(4.4478)) \frac{kJ}{kg \ K} = 5.6969 \frac{kJ}{kg \ K}$$

CABE ACLARAR QUE $s_2 = s_g$ (ENTROPÍA ESPECÍFICA DEL VAPOR SATURADO A 10 bar) = 6.5865 $\frac{kJ}{kg \ K}$; Y QUE s_f Y s_{fg} SON LAS ENTROPÍAS ESPECÍFICAS DEL LÍQUIDO SATURADO Y DE LA DIFERENCIA ENTRE LA ENTROPÍA ESPECÍFICA DEL VAPOR SATURADO Y DEL LÍQUIDO SATURADO, RESPECTIVAMENTE, A LA PRESIÓN DE 2 bar

$$\Rightarrow q_e = 453.06 \ K (6.5865 - 5.6969) \frac{kJ}{kg \ K} = 403.04 \frac{kJ}{kg}$$

POSITIVO, YA QUE ENTRA AL SISTEMA.

$$c) \eta = \frac{w_n}{q_e} \quad ; \quad w_n = \eta q_e = 0.1317 (403.04) \frac{kJ}{kg} = 53.08 \frac{kJ}{kg}$$

$$d) \eta = \frac{w_n}{q_e} = \frac{q_e - |q_s|}{q_e} = 1 - \frac{|q_s|}{q_e} \quad ; \quad |q_s| = q_e (1 - \eta) = 403.04 (1 - 0.1317) \frac{kJ}{kg} = 349.96 \frac{kJ}{kg}$$

$$e) \text{ YAQUE } q_s = (h_4 - h_3) \quad ; \quad |q_s| = (h_3 - h_4)$$

$$h_3 = h_f + x_3 h_{fg} (a \ 2 \ bar) = (504.70 + 0.9(2201.9)) \frac{kJ}{kg} = 2486.41 \frac{kJ}{kg}$$

$$\Rightarrow h_4 = h_3 - |q_s| = (2486.41 - 349.96) \frac{kJ}{kg} = 2136.45 \frac{kJ}{kg}$$

$$\therefore x_4 = \frac{h_4 - h_f}{h_{fg}} (a \ 2 \ bar) = \frac{(2136.45 - 504.70) \frac{kJ}{kg}}{2201.9 \frac{kJ}{kg}} = 0.74$$

PROFESOR ROGELIOSOTO AYALA

FÍSICA EXPERIMENTAL

EN UN EXPERIMENTO EN EL LABORATORIO DE FÍSICA SE QUIERE LLEVAR A CABO UN EXPERIMENTO PARA ENTENDER EL SIGNIFICADO DE LA CAPACIDAD TÉRMICA DE UN MATERIAL, PARA ELLO SE REALIZA UNA MEZCLA EN UN CALORÍMETRO QUE CONTIENE EN SU INTERIOR 450 [G] DE AGUA A UNA TEMPERATURA CONSTANTE DE $\Theta_{AGUA} = 85.3[^\circ\text{C}]$ CON UN MATERIAL A ELEGIR (VER TABLA DE CAPACIDAD TÉRMICA ESPECÍFICA PARA DIVERSOS MATERIALES ANEXA). TODAS LAS MUESTRAS TIENEN LA MISMA MASA, CUYO VALOR ES DE 150 [G] Y LA TEMPERATURA AMBIENTE CONTROLADA DEL LUGAR ES DE $\Theta_{AMBIENTE} = 21[^\circ\text{C}]$. CON BASE EN ESTO DETERMINE:

- LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO $\Theta_{EQUILIBRIO}$ (TEMPERATURA FINAL) A QUE LLEGA EL SISTEMA, SI EL MATERIAL UTILIZADO EN LA MEZCLA ES EL ETANOL.
- SI SE EMPLEA SAL PARA LA MEZCLA, CALCULE LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO ALCANZADA POR EL SISTEMA.
- ¿CON CUÁL MATERIAL SE LOGRARÍA DISMINUIR LO MENOS POSIBLE LA TEMPERATURA DEL AGUA

Material	$C_e [J/kg \ ^\circ\text{C}]$
Aluminio	910
Berilio	1970
Hierro	470
Mercurio	138
Mármol (CaCO_3)	879
Sal (NaCl)	879
Plata	234
Etanol	2428

SOLUCIÓN

- POR INSPECCIÓN EN LA TABLA $C_e \text{ ETANOL} = 2428 [J/kg \ ^\circ\text{C}]$.

CALCULANDO LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO DE LA MEZCLA ENTRE AGUA Y ETANOL: $Q_{\text{agua}} + Q_{\text{etanol}} = 0$

DONDE: $Q = m c_e \Delta\Theta = m c_e (\Theta_{\text{final}} - \Theta_{\text{inicial}}) = m c_e (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial}})$

DESARROLLANDO: $m_{\text{agua}} c_{e \text{ agua}} (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial del agua}}) + m_{\text{etanol}} c_{e \text{ etanol}} (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial del etanol}}) = 0$

SUSTITUYENDO

$$(0.450 \text{ [kg]}) (4186 \text{ [J/kg } ^\circ\text{C]}) (\Theta_{\text{equilibrio}} - 85.3 \text{ [}^\circ\text{C]}) + (0.150 \text{ [kg]}) (2428 \text{ [J/kg } ^\circ\text{C]}) (\Theta_{\text{equilibrio}} - 21 \text{ [}^\circ\text{C]}) = 0$$

$$1883.7 \text{ [J/}^\circ\text{C]} (\Theta_{\text{equilibrio}} - 85.3 \text{ [}^\circ\text{C]}) + 364.2 \text{ [J/}^\circ\text{C]} (\Theta_{\text{equilibrio}} - 21 \text{ [}^\circ\text{C]}) = 0$$

$$1883.7 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 160679.61 \text{ [J]} + 364.2 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 7648.2 \text{ [J]} = 0$$

$$2247.9 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 168327.81 \text{ [J]} = 0$$

$$2247.9 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} = 168327.81 \text{ [J]}$$

$$\Theta_{\text{equilibrio}} = 168327.81 \text{ [J]} / 2247.9 \text{ [J/}^\circ\text{C]}$$

POR LO TANTO LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO ES:

$$\Theta_{\text{equilibrio}} = 74.88 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

b) SI EL MATERIAL EMPLEADO ES SAL PARA REALIZAR LA MEZCLA CON EL AGUA, SE PROCEDE A CALCULAR LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO DE LA MISMA:

$$Q_{\text{agua}} + Q_{\text{sal}} = 0$$

DONDE:

$$Q = m c_e \Delta\Theta = m c_e (\Theta_{\text{final}} - \Theta_{\text{inicial}}) = m c_e (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial}})$$

DESARROLLANDO:

$$m_{\text{agua}} c_{e \text{ agua}} (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial del agua}}) + m_{\text{sal}} c_{e \text{ sal}} (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial de la sal}}) = 0$$

SUSTITUYENDO

$$(0.450 \text{ [kg]}) (4186 \text{ [J/kg } ^\circ\text{C]}) (\Theta_{\text{equilibrio}} - 85.3 \text{ [}^\circ\text{C]}) + (0.150 \text{ [kg]}) (879 \text{ [J/kg } ^\circ\text{C]}) (\Theta_{\text{equilibrio}} - 21 \text{ [}^\circ\text{C]}) = 0$$

$$1883.7 \text{ [J/}^\circ\text{C]} (\Theta_{\text{equilibrio}} - 85.3 \text{ [}^\circ\text{C]}) + 131.85 \text{ [J/}^\circ\text{C]} (\Theta_{\text{equilibrio}} - 21 \text{ [}^\circ\text{C]}) = 0$$

$$1883.7 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 160679.61 \text{ [J]} + 131.85 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 2768.85 \text{ [J]} = 0$$

$$2247.9 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 163448.46 \text{ [J]} = 0$$

$$2247.9 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} = 163448.46 \text{ [J]}$$

$$\Theta_{\text{equilibrio}} = 163448.46 \text{ [J]} / 2247.9 \text{ [J/}^\circ\text{C]}$$

POR LO TANTO LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO ES:

$$\Theta_{\text{equilibrio}} = 72.71 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

c) SE LOGRA EMPLEANDO EL MATERIAL QUE TIENE EL MENOR VALOR DE CAPACIDAD TÉRMICA ESPECÍFICA DE LA TABLA DE MATERIALES PROPORCIONADA, CUMPLIENDO CON ESTE REQUISITO LA PLATA AL TENER UN VALOR DE $C_{e \text{ plata}} = 234 \text{ [J/kg } ^\circ\text{C]}$, Y SE COMPROBEA OBTENIENDO LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO.

$$Q_{\text{agua}} + Q_{\text{plata}} = 0$$

DONDE:

$$Q = m c_e \Delta\Theta = m c_e (\Theta_{\text{final}} - \Theta_{\text{inicial}}) = m c_e (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial}})$$

DESARROLLANDO:

$$m_{\text{agua}} c_{e \text{ agua}} (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial del agua}}) + m_{\text{sal}} c_{e \text{ plata}} (\Theta_{\text{equilibrio}} - \Theta_{\text{inicial de la plata}}) = 0$$

SUSTITUYENDO

$$(0.450 \text{ [kg]}) (4186 \text{ [J/kg } ^\circ\text{C]}) (\Theta_{\text{equilibrio}} - 85.3 \text{ [}^\circ\text{C]}) + (0.150 \text{ [kg]}) (234 \text{ [J/kg } ^\circ\text{C]}) (\Theta_{\text{equilibrio}} - 21 \text{ [}^\circ\text{C]}) = 0$$

$$1883.7 \text{ [J/}^\circ\text{C]} (\Theta_{\text{equilibrio}} - 85.3 \text{ [}^\circ\text{C]}) + 35.1 \text{ [J/}^\circ\text{C]} (\Theta_{\text{equilibrio}} - 21 \text{ [}^\circ\text{C]}) = 0$$

$$1883.7 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 160679.61 \text{ [J]} + 35.1 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 737.1 \text{ [J]} = 0$$

$$1918.8 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} - 159942.51 \text{ [J]} = 0$$

$$1918.8 \text{ [J/}^\circ\text{C]} \Theta_{\text{equilibrio}} = 159942.51 \text{ [J]}$$

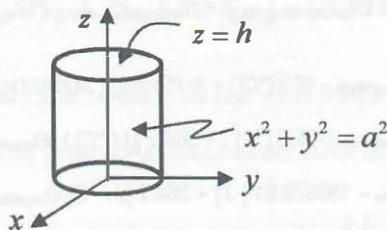
$$\Theta_{\text{equilibrio}} = 159942.51 \text{ [J]} / 1918.8 \text{ [J/}^\circ\text{C]}$$

POR LO TANTO LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO ES: $\Theta_{\text{equilibrio}} = 83.35 \text{ [}^\circ\text{C]}$

CÁLCULO III

UN SÓLIDO TIENE LA FORMA DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO CUYO RADIO DE LA BASE ES "a" Y SU ALTURA "h". ENCONTRAR SU CENTRO DE MASA SI LA DENSIDAD EN UN PUNTO "P" ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA DISTANCIA DE UNA DE LAS BASES A "P"

SOLUCIÓN. ES CONVENIENTE UBICAR UN SISTEMA COORDENADO CON EL CILINDRO COMO SIGUE:



DE ACUERDO CON LA FIGURA, EL SÓLIDO ESTÁ LIMITADO POR LAS GRÁFICAS DE $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$ y $z = h$. DE ACUERDO CON LOS DATOS, LA DENSIDAD EN UN PUNTO (x, y, z) ES $\rho(x, y, z) = kz$ PARA ALGÚN VALOR DE "k" EVIDENTEMENTE EL CENTRO DE MASA ESTÁ EN EL EJE z y

ENTONCES ES SUFICIENTE ENCONTRAR $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ ADEMÁS, POR LA SIMETRÍA DE SU DISTRIBUCIÓN DE DENSIDAD "ρ" Y LA SIMETRÍA DEL SÓLIDO, SE PUEDEN CALCULAR M y M_{xy} EN EL PRIMER OCTANTE Y MULTIPLICAR POR "4". POR OTRO LADO COMO SE TRATA DE UN CILINDRO, ES POSIBLE UTILIZAR COORDENADAS CILÍNDRICAS; LUEGO SE TIENE QUE:

$$M = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \int_0^h k z r dz dr d\theta = 4k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \left[\frac{r z^2}{2} \right]_0^h dr d\theta = 2kh^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a d\theta = kh^2 a^2 [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{kh^2 a^2 \pi}{2}$$

$$\text{ADEMÁS } M_{xy} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \int_0^h k z^2 r dz dr d\theta = 4k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \left[\frac{r z^3}{3} \right]_0^h dr d\theta = \frac{4kh^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a d\theta = \frac{2kh^3 a^2}{3} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{kh^3 a^2 \pi}{3}$$

$$\text{FINALMENTE, } \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2h}{3} \text{ LUEGO, LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE MASA SON: } CM\left(0, 0, \frac{2h}{3}\right)$$

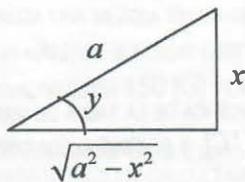
SI SE HUBIERA RESUELTO MEDIANTE COORDENADAS CARTESIANAS, SIN APROVECHAR LAS VENTAJAS DEL SISTEMA COORDENADO CILÍNDRICO ORTOGONAL, SE TENDRÍA EL SIGUIENTE CÁLCULO, QUE, COMO SE OBSERVA, SE DIFICULTA MÁS QUE EL ANTERIOR:

$$M = 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h k z dz dy dx = 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{h^2}{2} dy dx = 2kh^2 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$$

SE RESUELVE LA INTEGRAL POR SUSTITUCIÓN TRIGONÓMÉTRICA Y SE TIENE QUE:

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad \int a \cos y \cdot a \cos y dy = a^2 \int \cos^2 y dy = a^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2y \right) dy$$

$$x = a \operatorname{sen} y$$



$$dx = a \cos y dy$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos y$$

$$= \frac{a^2}{2} y + \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2y + C = \frac{a^2}{2} y + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} y \cos y + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + C$$

$$\text{LUEGO: } M = 2kh^2 \left[\frac{a^2}{2} \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{x}{a} + \frac{x \sqrt{a^2-x^2}}{2} \right]_0^a = 2kh^2 \left[\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{2kh^2 a^2 \pi}{4} = \frac{k\pi h^2 a^2}{2}$$

$$\text{POR OTRO LADO, } M_{xy} = 4 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h z(kz) dz dy dx = 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{h^3}{3} dy dx = \frac{4kh^3}{3} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{k\pi h^3 a^2}{3}$$

$$\therefore CM\left(0, 0, \frac{2h}{3}\right)$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 62

2 DE SEPTIEMBRE DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ¡BIENVENIDOS ESTUDIANTES DE LA GENERACIÓN 2004! ACABAN DE ENTRAR A LA MEJOR FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA MEJOR UNIVERSIDAD DE ESTE PAÍS. ÉCHENLE GANAS Y PODRÁN HACER UNA MARAVILLOSA CARRERA. ¡FELICIDADES!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ÁLGEBRA

DEMOSTRAR POR EL MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA LA SIGUIENTE PROPOSICIÓN:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2 \leq m^3$$

SOLUCIÓN

PARA $m = 1$; $1 \leq 1$

PARA $m = k$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 \leq k^3 \dots (1)$

QUE ES LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN QUE SE ACEPTA COMO VÁLIDA

SE PRUEBA AHORA SU VALIDEZ PARA $m = k + 1$ Y SE TIENE QUE:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 \leq (k + 1)^3 \dots (2)$$

SE SUMA $(k + 1)^2$ EN AMBOS MIEMBROS DE (1) Y:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 \leq k^3 + (k + 1)^2 \dots (3)$$

SE DESARROLLAN LAS EXPRESIONES DEL LADO DERECHO DE (2) y (3) Y SE LLEGA A:

$$(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 ; \quad k^3 + (k + 1)^2 = k^3 + k^2 + 2k + 1$$

AL COMPARAR AMBOS RESULTADOS SE VE QUE

$$k^3 + k^2 + 2k + 1 \leq k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

Y POR LO TANTO LA PROPOSICIÓN SE CUMPLE, ESTO ES, QUE

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k + 1)^2 \leq k^3 + (k + 1)^2 \leq (k + 1)^3$$

PROFESOR RICARDO MARTÍNEZ GÓMEZ

QUÍMICA

EJERCICIO DE THOMSON

EN UN APARATO DE THOMSON SE TIENEN LAS CONDICIONES SIGUIENTES:

DIFERENCIA DE POTENCIAL $(V) = 250 [V]$

RADIO DE LAS BOBINAS DE HELMHOLTZ $(a) = 0.15 (m)$

NÚMERO DE VUELTAS DE CONDUCTOR EN LA BOBINA $(N) = 130$

LA CONSTANTE DE PERMEABILIDAD EN EL VACÍO $(\mu_0) = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{T \cdot m}{A} \right]$

AL VARIAR LA INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA, SE MIDIERON DIFERENTES RADIOS, COMO SE MUESTRA EN LA TABLA SIGUIENTE:

$I [A]$	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
$r [m]$	0.066	0.058	0.053	0.049	0.044

OBTENER EL MEJOR VALOR POSIBLE PARA LA RELACIÓN ENTRE LA CARGA Y LA MASA $\left(\frac{q}{m} \right)$ DE LOS RAYOS CATÓDICOS.

RESOLUCIÓN.

LA FÓRMULA PARA CALCULAR LA RELACIÓN $\frac{q}{m}$ ES $\frac{q}{m} = \frac{2V \left(\frac{5}{4}\right)^3 a^2}{\mu_0^2 N^2 I^2 r^2}$ DONDE r ES EL RADIO DEL HAZ DE RAYOS CATÓDICOS E I ES LA CORRIENTE ELÉCTRICA.

SE VA A USAR EL PROCEDIMIENTO QUE INVOLUCRA A LA TOTALIDAD DE LOS PUNTOS, ES DECIR, SE OBTENDRÁ EL MODELO MATEMÁTICO DE UNA RECTA,

$r^2 = f\left(\frac{1}{I^2}\right)$. DE MANERA QUE LA ECUACIÓN ANTERIOR SE ACOMODA DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$r^2 = \frac{2V \left(\frac{5}{4}\right)^3 a^2}{\mu_0^2 N^2 \left(\frac{q}{m}\right)} \cdot \frac{1}{I^2}$$

$$y = mx + b$$

SE OBSERVA QUE LA PENDIENTE m CONTIENE A LA RELACIÓN CARGA MASA. $m = \frac{2V \left(\frac{5}{4}\right)^3 a^2}{\mu_0^2 N^2 \left(\frac{q}{m}\right)}$

POR LO TANTO, AY QUE CALCULAR LA PENDIENTE PARA OBTENER $\left(\frac{q}{m}\right)$: $\frac{q}{m} = \frac{2V \left(\frac{5}{4}\right)^3 a^2}{\mu_0^2 N^2 m}$

LOS DATOS QUE SE GRAFICARÁN SON LOS SIGUIENTES:

$\frac{1}{I^2} \left[\frac{1}{A^2}\right]$	0.3906	0.3086	0.2500	0.2066	0.1736
$r^2 [m^2]$	4.356×10^{-3}	3.364×10^{-3}	2.809×10^{-3}	2.401×10^{-3}	1.936×10^{-3}

SE DETERMINA EL VALOR DE LA PENDIENTE EMPLEANDO LA EXPRESIÓN DE MINIMOS CUADRADOS SIGUIENTE.

$$m = \frac{\sum x \sum y - n \sum xy}{(\sum x)^2 - n \sum x^2} = \frac{\sum \left(\frac{1}{I^2}\right) \sum r^2 - n \sum \left(\frac{1}{I^2}\right) r^2}{\left[\sum \left(\frac{1}{I^2}\right)\right]^2 - n \sum \left(\frac{1}{I^2}\right)^2}$$

EN DONDE n ES IGUAL AL NÚMERO DE EVENTOS (PAREJAS DE DATOS).

EL VALOR DE LAS SUMATORIAS ES:

$$\sum x = \sum \left(\frac{1}{I^2}\right) = 1.3292 \left[\frac{1}{A^2}\right] ; \quad \sum y = \sum r^2 = 1.4866 \times 10^{-2} [m^2]$$

$$\sum x^2 = \sum \left(\frac{1}{I^2}\right)^2 = 0.3831 \left[\frac{1}{A^4}\right] ; \quad \sum xy = \sum \left(\frac{1}{I^2}\right) r^2 = 4.2739 \times 10^{-3} \left[\frac{m^2}{A^2}\right]$$

$$n = 5$$

SE SUSTITUYE EN LA FÓRMULA ANTERIOR, PARA LA PENDIENTE, Y

$$m = \frac{1.3294 \left[\frac{1}{A^2}\right] (1.4866 \times 10^{-2}) [m^2] - 5 (4.2739 \times 10^{-3}) \left[\frac{m^2}{A^2}\right]}{(1.3294)^2 \left[\frac{1}{A^2}\right] - 5 (0.3831) \left[\frac{1}{A^4}\right]} \Rightarrow m = 1.08436 \times 10^{-2} [m^2 \cdot A^2]$$

EL ANÁLISIS DE UNIDADES DE LA PENDIENTE ES: $[m]_u = \frac{\left(\frac{m^2}{A^2}\right)}{\left(\frac{1}{A^4}\right)} = \frac{m^2 \cdot A^4}{A^2} = m^2 \cdot A^2$

EL VALOR DE LA PENDIENTE SE SUSTITUYE EN LA FÓRMULA SIGUIENTE, PARA EL CÁLCULO DE $\left(\frac{q}{m}\right)$:

$$\frac{q}{m} = \frac{2V \left(\frac{5}{4}\right)^3 a^2}{\mu_0^2 N^2 m} = \frac{2(250)[V] \left(\frac{5}{4}\right)^3 (0.15)^2 [m]^2}{(4\pi \times 10^{-7})^2 \left[\frac{m \cdot T}{A}\right]^2 (130)^2 (1.0844 \times 10^{-2}) [m^2 \cdot A^2]} \Rightarrow \frac{q}{m} = 7.5928 \times 10^{-10} \left[\frac{C}{kg}\right]$$

QUE ES EL RESULTADO SOLICITADO EN EL EJERCICIO. EL ANÁLISIS DE UNIDADES DE LA RELACIÓN $\left(\frac{q}{m}\right)$ ES:

$$\left[\frac{q}{m}\right]_u = \frac{V \cdot m^2}{m^2 \cdot T^2 \cdot m^2 \cdot A^2} = \frac{V}{m^2 \cdot T^2} = \frac{\frac{J}{C}}{m^2 \cdot \frac{N^2}{A^2 \cdot m^2}} = \frac{JA^2}{CN^2}; \quad \left[\frac{q}{m}\right]_u = \frac{\left(\frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right) \cdot \left(\frac{C^2}{s^2}\right)}{C \cdot \left(\frac{kg^2 \cdot m^2}{s^4}\right)} = \frac{kg \cdot m^2 \cdot C^2 \cdot s^4}{kg^2 \cdot m^2 \cdot C \cdot s^4} = \left[\frac{C}{kg}\right]$$

PROFESORA VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ

CÁLCULO I

DADAS LAS SIGUIENTES FUNCIONES, VERIFICAR QUE SON BIYECTIVAS Y, EN CASO DE SERLO, OBTENER SU FUNCIÓN INVERSA Y DAR DOMINIO, RECORRIDO Y GRÁFICA DE f y f^{-1} :

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{(x+5)^2}{2} - 8 & \text{si } -5 \leq x < -1 \\ |x+1| & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \end{cases}; \quad ii) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{(x+5)^2}{2} - 8 & \text{si } -5 \leq x < -1 \\ |x+1| & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

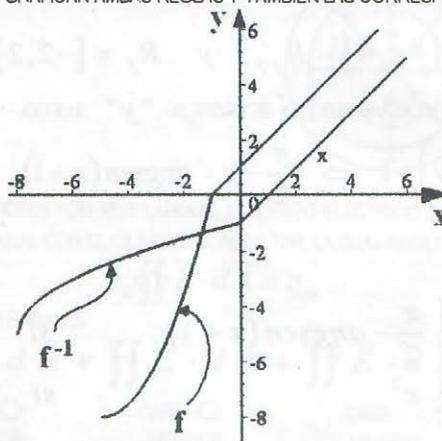
SI SE ANALIZA LA PRIMERA REGLA DE CORRESPONDENCIA, SE PUEDE VER A TRAVÉS DE LA

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA, QUE SE TRATA DE UNA PARÁBOLA Y PARA VER SUS CARACTERÍSTICAS SE HACE LO SIGUIENTE.

$$y = \frac{(x+5)^2}{2} - 8 \Rightarrow (x+5)^2 = 2(y+8)$$

LUEGO SE TRATA DE UNA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN $(-5, -8)$ Y CUYO EJE DE SIMETRÍA ES PARALELO AL EJE "y". DADO QUE EL INTERVALO ES A PARTIR DEL VALOR -5 , ENTONCES SÓLO SE TRATA DE LA RAMA DERECHA. LUEGO ES UNA FUNCIÓN INYECTIVA O "UNO A UNO" Y, SI SE CONSIDERA QUE SU CODOMINIO ES IGUAL A SU RECORRIDO, ENTONCES ES SUPRAYECTIVA O "SOBRE", POR LO QUE ES BIYECTIVA Y TIENE FUNCIÓN INVERSA.

LA SEGUNDA REGLA DE CORRESPONDENCIA ES UNA FUNCIÓN "VALOR ABSOLUTO" Y SUS DOS RAMAS PARTEN DEL PUNTO $(-1, 0)$. Y DADO SU INTERVALO DE DEFINICIÓN, SE TIENE SOLAMENTE LA RAMA DE LA DERECHA POR LO QUE ES INYECTIVA Y SI SU CODOMINIO ES IGUAL QUE SU RECORRIDO, ES SUPRAYECTIVA Y POR LO TANTO BIYECTIVA LUEGO ADMITE FUNCIÓN INVERSA. SI SE GRAFICAN AMBAS REGLAS Y TAMBIÉN LAS CORRESPONDIENTES A LA FUNCIÓN INVERSA, SE TIENE QUE:



COMO SE OBSERVA, CUALQUIER RECTA HORIZONTAL CORTA A LA GRÁFICA EN UN SÓLO PUNTO, POR LO QUE LA INVERSA EN SU CONJUNTO ES FUNCIÓN. EL DOMINIO Y RECORRIDO DE LA FUNCIÓN Y SU INVERSA ESTÁN DADOS POR:

$$D_f = \{x | -5 \leq x \leq 5; x \in \mathbb{R}\} = [-5, 5] = R_{f^{-1}} \quad ; \quad R_f = \{y | -8 \leq x \leq 6; x \in \mathbb{R}\} = [-8, 6] = D_{f^{-1}}$$

Y PARA OBTENER LAS REGLAS DE CORRESPONDENCIA QUE DEFINEN A LA FUNCIÓN INVERSA SE CAMBIAN VARIABLES Y SE DESPEJA LA NUEVA VARIABLE INDEPENDIENTE "y" ASÍ SE LLEGA A

$$y = \frac{(x+5)^2}{2} - 8 \quad ; \quad x = \frac{(y+5)^2}{2} - 8 \Rightarrow (y+5)^2 = 2x+16 \Rightarrow y = -5 + \sqrt{2x+16}$$

(SE TOMA EL SIGNO POSITIVO DE LA RAÍZ PORQUE SE TRATA DE LA RAMA DE LA DERECHA DE LA PARÁBOLA)

$$y = |x+1| \quad ; \quad x = |y+1| \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow y = x-1$$

(SE TOMA EL SIGNO POSITIVO YA QUE SE TRATA DE LA RAMA DE LA DERECHA DE LA FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO) LUEGO, FINALMENTE SE TIENE QUE LA FUNCIÓN INVERSA ESTÁ DADA POR:

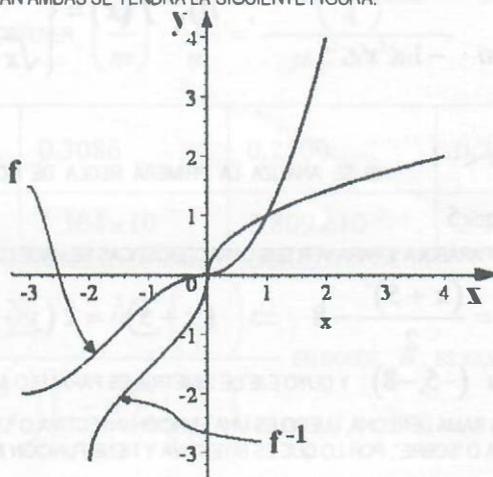
$$f^{-1} = \begin{cases} -5 + \sqrt{2x+16} & \text{si } -8 \leq x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } 0 < x \leq 6 \end{cases}$$

$$ii) \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

LA PRIMERA REGLA DE CORRESPONDENCIA ES UNA FUNCIÓN TRASCENDENTE, EN SU INTERVALO

DE DEFINICIÓN ES INYECTIVA, Y SI SU CODOMINIO SE IGUALA A SU RECORRIDO, ENTONCES ES SUPRAYECTIVA Y POR LO TANTO BIYECTIVA, POR LO QUE TIENE FUNCIÓN INVERSA.

LA SEGUNDA REGLA DE CORRESPONDENCIA ES UNA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE DE SIMETRÍA EL EJE "x", LA QUE AL SER POSITIVA EN EL INTERVALO INDICADO, SE LIMITA A LA RAMA SUPERIOR. ENTONCES ES INYECTIVA, Y SI SU CODOMINIO SE IGUALA A SU RECORRIDO, ES SUPRAYECTIVA Y POR LO TANTO BIYECTIVA Y ADMITE FUNCIÓN INVERSA. SI SE GRAFICAN AMBAS SE TENDRÁ LA SIGUIENTE FIGURA:



LA GRÁFICA DE AMBAS REGLAS ES A SU VEZ UNO A UNO POR LO QUE LA FUNCIÓN EN SU CONJUNTO TIENE INVERSA. EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE f Y f^{-1} SON:

$$D_f = [-\pi, 4] = R_{f^{-1}} \quad \text{y} \quad R_f = [-2, 2] = D_{f^{-1}}$$

PARA DEFINIR f^{-1} , EN AMBAS REGLAS SE INVIERTEN LAS VARIABLES Y SE DESPEJA "y" LUEGO,

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1 \quad ; \quad x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-1 \Rightarrow \frac{\pi}{2}-y = \operatorname{angsen}(x+1) \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{angsen}(x+1)$$

$$y = \sqrt{x} \quad ; \quad x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2$$

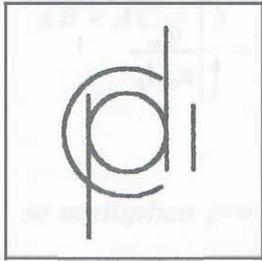
POR LO TANTO LA FUNCIÓN INVERSA QUEDA COMO:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{angsen}(x+1) & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

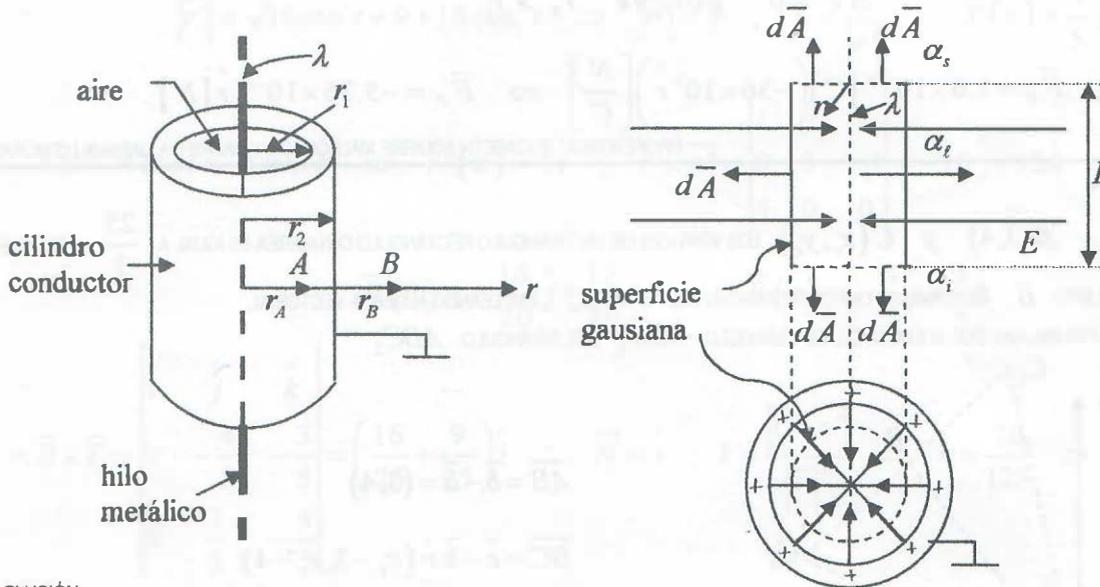
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

SE COLOCA UN HILO METÁLICO EN EL EJE DE UN CILINDRO CONDUCTOR HUECO; AMBOS SON MUY LARGOS. EL HILO TIENE UNA DISTRIBUCIÓN UNIFORME DE CARGA

$\lambda = -80 \left[\frac{nC}{m} \right]$ Y EL TUBO, ORIGINALMENTE NEUTRO, SE CONECTÓ A TIERRA. CON BASE EN ESTO Y CONSIDERANDO QUE

$r_1 = 5 [cm] ; r_2 = 7 [cm] ; r_A = 4 [cm] \text{ y } r_B = 10 [cm] :$

- a) DEDUZCA EL CAMPO ELÉCTRICO EN FUNCIÓN DE "r" Y CALCE EL VALOR QUE TOMA PARA LOS PUNTOS "A" y "B"
- b) CALCE LA FUERZA ELÉCTRICA QUE ACTUARÍA SOBRE UN PROTÓN QUE FUESE UBICADO EN EL PUNTO "A"



RESOLUCIÓN.

a) COMO LOS CUERPOS CARGADOS (HILO Y CILINDRO) SON MUY LARGOS, EL CAMPO ELÉCTRICO PUEDE SER EVALUADO A TRAVÉS DE LA LEY DE GAUSS, EMPLEANDO UNA SUPERFICIE GAUSIANA CILÍNDRICA Y COAXIAL CON EL CILINDRO CONDUCTOR, LA CUAL FACILITA EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL CORRESPONDIENTE:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{ne}$$

PARA EL CILINDRO ES CONVENIENTE SEPARAR EN TRES INTEGRALES:

$$\epsilon_0 \left[\iint \vec{E} \cdot d\vec{A} + \iint \vec{E} \cdot d\vec{A} + \iint \vec{E} \cdot d\vec{A} \right] = q_{ne}$$

CARA ○ CARA ○ CARA
SUPERIOR INFERIOR LATERAL

LA PARED LATERAL DEL CILINDRO GAUSIANO ES CRUZADA POR LAS LÍNEAS DEL CAMPO ELÉCTRICO, LAS CUALES SON PERPENDICULARES AL HILO CARGADO NEGATIVAMENTE EN LA DIRECCIÓN RADIAL NEGATIVA DE LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS; LAS INTEGRALES QUEDAN COMO:

$$\epsilon_0 \left[\iint E dA \cos \alpha_s + \iint E dA \cos \alpha_i + \iint E dA \cos \alpha_t \right] = q_{ne}$$

$$\alpha_s \angle_{\vec{E}}^{d\vec{A}} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} ; \alpha_t \angle_{d\vec{A}}^{\vec{E}} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} ; \alpha_t \angle_{d\vec{A}}^{\vec{E}} = \pi \text{ rad}$$

$$-\varepsilon_0 \iint E dA = q_{ne} \Rightarrow -\varepsilon_0 E \iint dA = q_{ne} ; -\varepsilon_0 EA_t = q_{ne} \Rightarrow E = -\frac{q_{ne}}{\varepsilon_0 A_t}$$

$$E = -\frac{q_{ne}}{\varepsilon_0 A_1} ; E = \frac{-|\lambda|L}{\varepsilon_0 (2\pi L)} ; E = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2|\lambda|}{r}$$

POR LO TANTO, LA FUNCIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO SERÁ: $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2|\lambda|}{r} \hat{r}$ para $0 < r \leq r_1$

PARA EL INTERVALO $r_1 < r < r_2$, LA CARGA NETA ENCERRADA POR LA SUPERFICIE GAUSIANA SERÁ CERO, DEBIDO A LA CARGA POSITIVA QUE POR INDUCCIÓN (RECHAZO DE ELECTRONES HACIA TIERRA OCASIONADO POR EL HILO NEGATIVO) SE PRESENTA EN LA CARA INTERIOR DEL CILINDRO HUECO. PARA LA CONDICIÓN DE CARGAS ESTÁTICAS, EL CAMPO ELÉCTRICO EN EL INTERIOR DE UN CONDUCTOR ES NULO.

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ para } r_1 < r < r_2$$

PARA $r \geq r_2$ LA CARGA NETA ENCERRADA POR EL CILINDRO GAUSIANO SIGUE SIENDONULA Y DE ESTE MODO:

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ para } r \geq r_2$$

$$\vec{E}_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2|\lambda|}{r_A} \hat{r} \text{ , YAQUE } 0 < r_A < r_1$$

$$\vec{E}_A = \frac{-9 \times 10^9 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right] 2 \left| -80 \times 10^{-9} \right| \left[\frac{C}{m} \right] \hat{r}}{0.04 [m]} = -36 \times 10^3 \hat{r} \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\vec{E}_B = \vec{0} \text{ porque } r_B > r_1$$

$$b) \quad \vec{F}_p = q_p \vec{E}_A ; \vec{F}_p = 1.6 \times 10^{-19} [C] \left(-36 \times 10^3 \hat{r} \right) \left[\frac{N}{C} \right] \Rightarrow \vec{F}_p = -5.76 \times 10^{-15} \hat{r} [N]$$

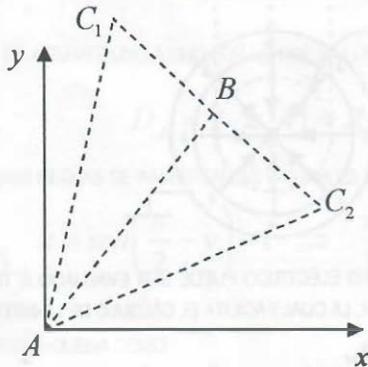
PROFESORES ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO Y GABRIEL A. JARAMILLO MORALES

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEAN LOS PUNTOS $A(0,0)$, $B(3,4)$ y $C(x_c, y_c)$ LOS VÉRTICES DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CUYA ÁREA ES IGUAL A $\frac{25}{3}$ Y TAL QUE EL

ÁNGULO RECTO LO TIENE EN EL PUNTO B DETERMINAR LAS COORDENADAS DEL PUNTO C , EMPLEANDO ÁLGEBRA VECTORIAL.

RESOLUCIÓN: COMO SE VE EN LA FIGURA, HAY DOS SOLUCIONES: EL TRIÁNGULO ABC_1 Y EL TRIÁNGULO ABC_2 .



$$\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3,4)$$

$$\overline{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (x_c - 3, y_c - 4)$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 \Rightarrow (3,4) \cdot (x_c - 3, y_c - 4) = 0 \Rightarrow 3x_c + 4y_c - 25 = 0 \dots (i)$$

POR OTRA PARTE: $\text{ÁREA} = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2}$; $\overline{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (x_c, y_c)$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ x_c & y_c & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 3y_c - 4x_c) ; |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(3y_c - 4x_c)^2} = 3y_c - 4x_c$$

$$\therefore \text{ÁREA} = \frac{3y_c - 4x_c}{2} = \frac{25}{3} \Rightarrow 3y_c - 4x_c = \frac{50}{3} \dots (ii)$$

(i) se multiplica por 4 : $12x_c + 16y_c = 100$; (ii) se multiplica por 3 : $-12x_c + 9y_c = 50$

$$\text{SUMA: } 25y_c = 150 \therefore y_c = 6 \quad y \quad x_c = \frac{1}{3} \therefore C_1 \left(\frac{1}{3}, 6 \right)$$

PARA OBTENER EL PUNTO C_2 $\overline{C_1B} = \overline{b} - \overline{c_1} = (3, 4) - \left(\frac{1}{3}, 6 \right) = \left(+\frac{8}{3}, -2 \right) = \overline{BC_2}$

$$\overline{C_2} = \overline{b} + \overline{BC_2} = (3, 4) + \left(\frac{8}{3}, -2 \right) = \left(\frac{17}{3}, 2 \right) \therefore C_2 \left(\frac{7}{3}, 2 \right)$$

PROFESOR LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

CÁLCULO III

DADA LA CURVA DE ECUACIONES $x = 4 \cos t$; $y = 3t$; $z = 4 \operatorname{sen} t$, DETERMINAR $\overline{T}, \overline{N}, \overline{B}, k, \rho, \tau, \sigma$ PARA $t = \pi$

i) A PARTIR DEL PARÁMETRO "t"

ii) A PARTIR DEL PARÁMETRO "LONGITUD DE ARCO"

RESOLUCIÓN.

$$\overline{r} = 4 \cos t \hat{i} + 3t \hat{j} + 4 \operatorname{sen} t \hat{k} \Rightarrow \overline{r}' = -4 \operatorname{sen} t \hat{i} + 3 \hat{j} + 4 \cos t \hat{k} \Rightarrow \overline{r}'(\pi) = 3 \hat{j} - 4 \hat{k}$$

$$|\overline{r}'| = \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 t + 9 + 16 \cos^2 t} \Rightarrow |\overline{r}'| = 5 ; \overline{T} = \frac{\overline{r}'}{|\overline{r}'|} \therefore \overline{T}(\pi) = \frac{3}{5} \hat{j} - \frac{4}{5} \hat{k}$$

$$\overline{r}'' = -4 \cos t \hat{i} - 4 \operatorname{sen} t \hat{k} \Rightarrow \overline{r}''(\pi) = 4 \hat{i} ; \overline{r}' \times \overline{r}'' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -16 \hat{j} - 12 \hat{k} \Rightarrow |\overline{r}' \times \overline{r}''| = 20$$

$$\overline{B}(\pi) = -\frac{16}{20} \hat{j} - \frac{12}{20} \hat{k} \Rightarrow \overline{B}(\pi) = -\frac{4}{5} \hat{j} - \frac{3}{5} \hat{k}$$

$$\overline{N} = \overline{B} \times \overline{T} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{vmatrix} = \left(\frac{16}{25} + \frac{9}{25} \right) \hat{i} \therefore \overline{N} = \hat{i} ; k = \frac{|\overline{r}' \times \overline{r}''|}{|\overline{r}'|^3} \Rightarrow k = \frac{20}{125} \Rightarrow k = \frac{4}{25} \Rightarrow \rho = \frac{25}{4}$$

$$\overline{r}''' = 4 \operatorname{sen} t \hat{i} - 4 \cos t \hat{k} \Rightarrow \overline{r}'''(\pi) = 4 \hat{k} ; \overline{r}' \times \overline{r}'' \cdot \overline{r}''' = (-16 \hat{j} - 12 \hat{k}) \cdot (4 \hat{k}) = -48$$

$$\tau = \frac{\overline{r}' \times \overline{r}'' \cdot \overline{r}'''}{|\overline{r}' \times \overline{r}''|^2} \Rightarrow \tau = \frac{-48}{400} \Rightarrow |\tau| = \frac{3}{25} ; \sigma = \frac{25}{3}$$

ii) $s = \int_0^t \sqrt{16 \operatorname{sen}^2 t + 9 + 16 \cos^2 t} dt \Rightarrow s = \int_0^t 5 dt \Rightarrow s = 5t \Rightarrow t = \frac{s}{5} \therefore \overline{r}(s) = 4 \cos \frac{s}{5} \hat{i} + \frac{3s}{5} \hat{j} + 4 \operatorname{sen} \frac{s}{5} \hat{k}$

$$\overline{T} = \frac{d\overline{r}}{ds} = -\frac{4}{5} \operatorname{sen} \frac{s}{5} \hat{i} + \frac{3}{5} \hat{j} + \frac{4}{5} \cos \frac{s}{5} \hat{k} ; t = \pi \Rightarrow s = 5\pi \Rightarrow \overline{T} = \frac{3}{5} \hat{j} - \frac{4}{5} \hat{k}$$

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = -\frac{4}{25} \cos \frac{s}{5} \hat{i} - \frac{4}{25} \operatorname{sen} \frac{s}{5} \hat{k} ; \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right| = \frac{4}{25} ; k = \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right| \Rightarrow k = \frac{4}{25} ; \rho = \frac{25}{4}$$

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = k\bar{N} \Rightarrow \bar{N} = -\cos \frac{s}{5} \hat{i} - \operatorname{sen} \frac{s}{5} \hat{k} \Rightarrow \bar{N} = \hat{i}$$

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{4}{5} \hat{j} - \frac{3}{5} \hat{k} \therefore \bar{B} = -\frac{4}{5} \hat{j} - \frac{3}{5} \hat{k}$$

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{4}{5} \operatorname{sen} \frac{s}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \cos \frac{s}{5} \\ -\cos \frac{s}{5} & 0 & -\operatorname{sen} \frac{s}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{5} \operatorname{sen} \frac{s}{5} \hat{i} - \left(\frac{4}{5} \operatorname{sen}^2 \frac{s}{5} + \frac{4}{5} \cos^2 \frac{s}{5} \right) \hat{j} + \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5} \hat{k} = -\frac{3}{5} \operatorname{sen} \frac{s}{5} \hat{i} - \frac{4}{5} \hat{j} + \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5} \hat{k}$$

$$|\tau| = \left| \frac{d\bar{B}}{ds} \right| ; \frac{d\bar{B}}{ds} = -\frac{3}{25} \cos \frac{s}{5} \hat{i} - \frac{3}{25} \operatorname{sen} \frac{s}{5} \hat{k} \Rightarrow \left| \frac{d\bar{B}}{ds} \right| = \frac{3}{25} \therefore |\tau| = \frac{3}{25} ; \sigma = \frac{25}{3}$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO III

SEAN LAS SUPERFICIES: $S_1 : \bar{r}(s,t) = (s+t)\hat{i} + (s-t)\hat{j} + 4st\hat{k}$ y $S_2 : \bar{r}(s,t) = s\hat{i} + t\hat{j} + 8\hat{k}$

DETERMINAR LAS ECUACIONES DEL PLANO NORMAL Y LA RECTA TANGENTE A LA CURVA DE INTERSECCIÓN ENTRE S_1 y S_2 EN EL PUNTO $P(3, -1, 8)$

RESOLUCIÓN. SE OBTIENEN LOS VECTORES NORMALES A CADA SUPERFICIE Y SE TIENE QUE:

$$\text{PARA } S_1 : \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \hat{i} + \hat{j} + 4t\hat{k} ; \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \hat{i} - \hat{j} + 4s\hat{k} ; \bar{n}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 4t \\ 1 & -1 & 4s \end{vmatrix} = (4s+4t)\hat{i} - (4s-4t)\hat{j} + (-1-1)\hat{k}$$

$$\text{PARA } S_2 : \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} = \hat{i} ; \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \hat{j} ; \bar{n}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}$$

AHORA SE REALIZA EL PRODUCTO VECTORIAL ENTRE LOS DOS VECTORES NORMALES Y SE OBTIENE UN VECTOR PARALELO A LA RECTA TANGENTE A LA CURVA DE

$$\text{INTERSECCIÓN, ASÍ: } \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4s+4t & -4s+4t & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-4s+4t)\hat{i} - (4s+4t)\hat{j} ; \begin{matrix} s+t=3 \\ s-t=-1 \\ 4st=8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} s=1 \\ t=2 \end{matrix}$$

$$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 4\hat{i} - 12\hat{j}$$

POR LO TANTO LAS ECUACIONES PEDIDAS SON:

$$\text{RECTA TANGENTE: } \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-12} ; z=8 ; \text{ RECTANORMAL: } (\bar{r}-\bar{r}_0) \cdot (\bar{n}_1 \times \bar{n}_2) = 0 \Rightarrow 4(x-3) - 12(y+1) = 0$$

$$\therefore x-3y-6=0$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 64

2 DE OCTUBRE DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

CÁLCULO I

PARA LA ELIPSE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- i) UTILIZAR DERIVACIÓN IMPLÍCITA PARA CALCULAR LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A ELLA EN EL PUNTO $P(x_1, y_1)$
- ii) DETERMINAR EN QUÉ PUNTOS LA RECTA TANGENTE ES HORIZONTAL
- iii) DETERMINAR EN QUÉ PUNTOS LA RECTA TANGENTE ES VERTICAL
- iv) DETERMINAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE EN $P(x_1, y_1)$
- v) GRAFICAR LA ELIPSE Y MOSTRAR LOS RESULTADOS OBTENIDOS

SOLUCIÓN.

i) COMO SE SABE, LA DERIVADA ES LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE. LUEGO SE DERIVA IMPLÍCITAMENTE Y SE LLEGA A:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{a^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2b^2x}{2a^2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

POR LO QUE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE m_T EN EL PUNTO $P(x_1, y_1)$ ESTÁ DADA POR:

$$m_T \Big|_P = \left. \frac{dy}{dx} \right|_P = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

ii) LA RECTA TANGENTE SERÁ HORIZONTAL CUANDO SU PENDIENTE SEA CERO, POR LO QUE SE IGUALA SU VALOR A CERO, DE DONDE:

$$-\frac{b^2x}{a^2y} = 0 \Rightarrow -b^2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

SE DESPEJA "y" : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

Y PARA $x = 0 \therefore y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - 0^2} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2} \Rightarrow y = \pm b$

POR LO TANTO LA TANGENTE ES HORIZONTAL EN LOS PUNTOS $(0, b)$ y $(0, -b)$

iii) LA RECTA TANGENTE SERÁ VERTICAL CUANDO SU PENDIENTE NO ESTÁ DEFINIDA, DE DONDE:

$$-\frac{b^2x}{a^2y} \neq 0 \Rightarrow -a^2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

SE DESPEJA "x" : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2} \Rightarrow x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$

Y PARA $y = 0 \therefore x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - 0^2} \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2} \Rightarrow x = \pm a$

POR LO TANTO LA TANGENTE ES HORIZONTAL EN LOS PUNTOS $(a,0)$ y $(-a,0)$

iv) LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE ES

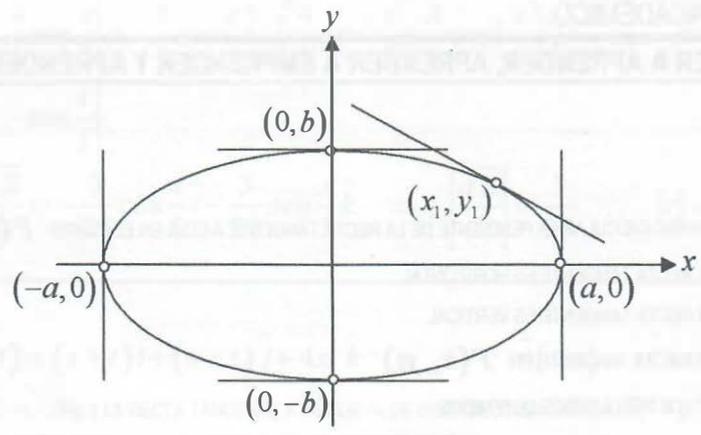
$$y - y_1 = m_T (x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \Rightarrow a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2$$

$$\therefore b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = 0$$

QUE TAMBIÉN SE PUEDE ESCRIBIR EN SU FORMA SIMÉTRICA COMO:

$$\frac{b^2 x_1 x}{a^2 b^2} + \frac{a^2 y_1 y}{a^2 b^2} = \frac{b^2 x_1^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2 y_1^2}{a^2 b^2} \Rightarrow \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \therefore \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

v)



PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES:

- i) $\int \cos(\ln x) dx$; ii) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$; iii) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{16 - x^2}}$; iv) $\int \frac{x^3 - 20x^2 - 63x - 198}{x^4 - 81} dx$

SOLUCIÓN.

i) $\int \cos(\ln x) dx$. ESTA INTEGRAL SE RESUELVE POR PARTES COMO SIGUE:

$$u = \cos(\ln x) \quad ; \quad du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \quad ; \quad dv = dx \quad ; \quad v = x$$

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$$

$$u = \sin(\ln x) \quad ; \quad du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \quad ; \quad dv = dx \quad ; \quad v = x$$

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$2 \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) \quad \therefore \quad \int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$$

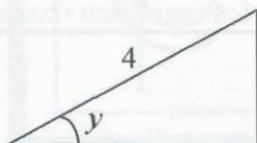
$$ii) \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx = \int \frac{\cos x (1 - \sin^2 x)}{\sqrt{1 + \sin x}} dx = \int (1 - \sin^2 x) (1 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cos x dx$$

$$u = 1 + \sin x \quad ; \quad du = \cos x dx \quad ; \quad \sin x = u - 1 \quad ; \quad \sin^2 x = u^2 - 2u + 1$$

$$\int (1 - u^2 + 2u - 1) u^{-\frac{1}{2}} du = \int (-u^2 + 2u) u^{-\frac{1}{2}} du = -\int u^{\frac{3}{2}} du + 2 \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{5}(1 + \operatorname{sen}x)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(1 + \operatorname{sen}x)^{\frac{3}{2}} + C$$

iii) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{16-x^2}}$ SE RESUELVE POR SUSTITUCIÓN TRIGONÓMETRICA Y SE TIENE QUE:



$$x = 4 \cos y \quad ; \quad x^4 = 256 \cos^4 y \quad ; \quad \sqrt{16-x^2} = 4 \operatorname{sen} y$$

$$dx = -4 \operatorname{sen} y dy$$

$$\int \frac{-4 \operatorname{sen} y dy}{256 \cos^4 y \cdot 4 \operatorname{sen} y} = -\int \frac{dy}{256 \cos^4 y} = -\frac{1}{256} \int \frac{dy}{\cos^4 y} = -\frac{1}{256} \int \sec^4 y dy = -\frac{1}{256} \int \sec^2 y \cdot \sec^2 y dy$$

$$= -\frac{1}{256} \int (1 + \tan^2 y) \sec^2 y dy = -\frac{1}{256} \int \sec^2 y dy - \frac{1}{256} \int \tan^2 y \sec^2 y dy$$

$$u = \tan y \quad ; \quad du = \sec^2 y dy \quad ; \quad \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$= -\frac{1}{256} \tan y - \frac{1}{256} \frac{\tan^3 y}{3} + C = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{256x} - \frac{(16-x^2)^{\frac{3}{2}}}{768x^3} + C$$

iv) $\int \frac{x^3 - 20x^2 - 63x - 198}{x^4 - 81} dx$ SE APLICA EN ESTE CASO LA INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES RACIONALES Y:

$$\frac{x^3 - 20x^2 - 63x - 198}{(x-3)(x+3)(x^2+9)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$$

$$x^3 - 20x^2 - 63x - 198 = A(x+3)(x^2+9) + B(x-3)(x^2+9) + (Cx+D)(x^2-9)$$

$$= (Ax+3A)(x^2+9) + (Bx-3B)(x^2+9) + (Cx+D)(x^2-9)$$

$$= Ax^3 + 9Ax + 3Ax^2 + 27A + Bx^3 + 9Bx - 3Bx^2 - 27B + Cx^3 - 9Cx + Dx^2 - 9D$$

$$1 = A + B + C \quad A + B + C = 1 \quad \dots (1)$$

$$-20 = 3A - 3B + D \quad 3A - 3B + D = -20 \quad \dots (2)$$

$$-63 = 9A + 9B - 9C \quad A + B - C = -7 \quad \dots (3)$$

$$-198 = 27A - 27B - 9D \quad 3A - 3B - D = -22 \quad \dots (4)$$

DE (1) y (3) $A + B + C = 1$ DE (2) y (4) $3A - 3B + D = -20$

$$A + B - C = -7 \quad 3A - 3B - D = -22$$

$$\hline 2A + 2B = -6$$

$$\hline 6A - 6B = -42$$

$$A + B = -3 \quad \dots (5)$$

$$A - B = -7 \quad \dots (6)$$

DE (5) y (6) $A + B = -3$

$$A - B = -7$$

$$\hline 2A = -10$$

$$A = -5 \quad \Rightarrow \quad \text{EN (5)} \Rightarrow B = -3 + 5 \Rightarrow B = 2$$

$$\text{EN (1)} \quad -5 + 2 + C = 1 \Rightarrow C = 4 \quad ;$$

$$\text{EN (2)} \quad 3(-5) - 3(2) + D = -20 \Rightarrow -15 - 6 + D = -20 \Rightarrow D = 1$$

$$\int \frac{x^3 - 20x^2 - 63x - 198}{x^4 - 81} dx = \int \frac{-5}{x-3} dx + \int \frac{2}{x+3} dx + \int \frac{4x+1}{x^2+9} dx$$

$$= -5 \int \frac{dx}{x-3} + 2 \int \frac{dx}{x+3} + 4 \int \frac{x}{x^2+9} dx + \int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$= -5 \ln|x-3| + 2 \ln|x+3| + 2 \ln(x^2+9) + \frac{1}{3} \operatorname{ang} \tan \frac{x}{3} + C$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES SIGUIENTES:

$$i) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 \quad ; \quad ii) \quad \frac{dy}{dx} - y \cot x = 2x \operatorname{sen} x$$

$$i) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 \quad . \text{ SE INTEGRA LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA CORRESPONDIENTE Y}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln C \Rightarrow y = Cx$$

$$\text{SE CONSIDERA A } C \text{ COMO FUNCIÓN DE } x \text{ ; ENTONCES, } y = C(x)x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}x + C(x)$$

SE SUSTITUYE EN LA ECUACIÓN INICIAL Y SE TIENE QUE:

$$\frac{dC}{dx}x + C(x) - \frac{y}{x} = x^2 \Rightarrow \frac{dC}{dx}x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2 \Rightarrow \frac{dC}{dx}x = x^2$$

$$\text{O BIEN } dC = x dx \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \text{ ; POR LO TANTO, LA SOLUCIÓN GENERAL ES: } y = C_1 x + \frac{x^3}{2}$$

$$ii) \quad \frac{dy}{dx} - y \cot x = 2x \operatorname{sen} x \quad . \text{ SE INTEGRA LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA CORRESPONDIENTE:}$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cot x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|\operatorname{sen} x| + \ln C \Rightarrow y = C \operatorname{sen} x$$

SE CONSIDERA A C COMO FUNCIÓN DE x ; ENTONCES,

$$y = C(x) \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \operatorname{sen} x + C(x) \cos x$$

SE SUSTITUYE EN LA ECUACIÓN INICIAL Y SE TIENE QUE:

$$\frac{dC}{dx} \operatorname{sen} x + C(x) \cos x - y \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 2x \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{dC}{dx} \operatorname{sen} x + C(x) \cos x - C(x) \operatorname{sen} x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 2x \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + C_1 \text{ ; POR LO TANTO, LA SOLUCIÓN GENERAL ES: } y = x^2 \operatorname{sen} x + C_1 \operatorname{sen} x$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

TUTORÍA**ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR**

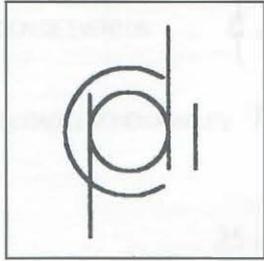
APROVECHEN EL SERVICIO ACADÉMICO DE LA TUTORÍA E INTERACTÚEN CON SU TUTOR. ES UN ALIADO, UN CONSEJERO, UN AMIGO QUE DESEA APOYARLOS PARA QUE TENGAN ÉXITO EN SUS ESTUDIOS. SI SABEN QUIÉN ES VENGAN A LA **COPADI** Y LES DECIMOS.. RECUERDEN QUE HAY BECAS COMO LA "PRONABES" EN LAS QUE LOS BECARIOS DEBEN TENER UN TUTOR.

ESTUDIANTES DE CUALQUIER SEMESTRE

¡YA HAY TUTORÍA POR INTERNET! SÓLO ENTREN A LA PÁGINA WEB DE LA FACULTAD, A "MAPA DEL SITIO", A "SERVICIOS" Y A "TUTORÍA POR INTERNET". AHÍ ESCOJAN TUTOR Y COMIENCEN A COMUNICARSE CON ÉL O ELLA. VERÁN QUE NO LOS DEFRAUDARÁ. APROVECHEN ESTE SERVICIO ACADÉMICO QUE PUEDE SER DECISIVO EN SU CARRERA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 65

17 DE OCTUBRE DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

TERMODINÁMICA

DESDE 15 m DE ALTURA SE DEJA CAER UN CUERPO ESFÉRICO. CADA VEZ QUE REBOTA EL CUERPO EN EL PISO, LO HACE A LA TERCERA PARTE DE SU ALTURA ANTERIOR. SI LA CAPACIDAD TÉRMICA ESPECÍFICA DEL CUERPO ES $0.33 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$ ($g = 9.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$), Y LA TRANSFORMACIÓN DE ENERGÍA SÓLO REPERCUTE EN LA VARIACIÓN DE SU ENERGÍA INTERNA Y POTENCIAL, DETERMINE:

- a) LA ELEVACIÓN EN LA TEMPERATURA DEL CUERPO DESPUÉS DEL PRIMER REBOTE.
- b) LA ELEVACIÓN EN LA TEMPERATURA DEL CUERPO DESPUÉS DEL SEGUNDO REBOTE.
- c) EL NÚMERO DE REBOTES NECESARIOS PARA QUE EL AUMENTO EN LA TEMPERATURA DEL CUERPO SEA DE 1.0576 °C
- d) LA ELEVACIÓN EN LA TEMPERATURA DEL CUERPO CUANDO ESTE SE DETIENE EN EL PISO.

SOLUCIÓN.

- a) DESPUÉS DEL PRIMER REBOTE, EL CUERPO SE ENCONTRARÁ A 5 m DEL PISO Y EL PRINCIPIO DE LA ENERGÍA SERÁ:

$$mgH = mgh_1 + mC\Delta T$$

EXPRESIÓN EN LA QUE H REPRESENTA LA ALTURA INICIAL Y h₁ CORRESPONDE A 5 m SE DESPEJA Y CALCULA EL INCREMENTO ΔT Y SE LLEGA A:

$$\Delta T = \frac{g(H-h_1)}{C} = \frac{9.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (15-5) \text{ m}}{0.033 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}} \left(\frac{4.186 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \right) \left(\frac{10^3 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \right)} = 0.7080^\circ\text{C}$$

- b) DESPUÉS DEL SEGUNDO REBOTE, EL CUERPO SE ENCONTRARÁ A $\frac{5}{3}$ m (h₂) DEL PISO; POR LO TANTO,

$$\Delta T = \frac{g(H-h_2)}{C} = \frac{9.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(15 - \frac{5}{3} \right) \text{ m}}{138.138 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}} = 0.9440^\circ\text{C}$$

- c) LA RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO DE REBOTES (n) Y LA ALTURA (h) QUE RECORRE EL CUERPO ES:

n	1	2	3	...	m	...
h(m)	$\frac{H}{3}$	$\frac{H}{3^2}$	$\frac{H}{3^3}$...	$\frac{H}{3^m}$...

SI h_m ES LA ALTURA CUANDO EL AUMENTO EN LA TEMPERATURA DEL CUERPO ES EL INDICADO, ENTONCES

$$\Delta T = \frac{g(H-h_m)}{C} = \frac{g\left(H - \frac{H}{3^m}\right)}{C}$$

$$H \left(1 - \frac{1}{3^m} \right) = \frac{C \Delta T}{g} ; \quad \frac{1}{3^m} = 1 - \frac{C \Delta T}{gH} ; \quad m \ln 3 = \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{C \Delta T}{gH}} \right)$$

$$m = \frac{\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{C \Delta T}{gH}} \right)}{\ln 3} = \frac{\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{138.138 \frac{J}{kg \text{ } ^\circ C} (1.0576 \text{ } ^\circ C)}{9.78 \frac{m}{s^2} (15 m)}} \right)}{\ln 3} = 4.99 \approx 5$$

LO CUAL INDICA QUE A LOS 5 REBOTES SE ALCANZARÁ LA VARIACIÓN DE TEMPERATURA YA ESPECIFICADA.

d) CUANDO EL CUERPO SE DETIENE EN EL PISO,

$$\Delta T = \frac{gH}{C} = \frac{9.78 \frac{m}{s^2} (15 m)}{138.138 \frac{J}{kg \text{ } ^\circ C}} = 1.0620 \text{ } ^\circ C$$

PROFESOR ROGELIO SOTO AYALA

MATEMÁTICAS AVANZADAS

CALCULAR EL VALOR DE $\int_c (z^2 + 1)^2 dz$ A LO LARGO DE LA CICLOIDE $x = a(\theta - \text{sen}\theta)$; $y = a(1 - \text{cos}\theta)$, DESDE $\theta = 0$ HASTA EL

PUNTO DONDE $\theta = 2\pi$

SOLUCIÓN. SESABE QUE $z = x + iy$ CUANDO θ VARÍA DE $\theta = 0$ A $\theta = 2\pi$, z VARIARÁ DE LA MANERA SIGUIENTE:

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= a(0 - \text{sen}0) = 0 \\ y &= a(1 - \text{cos}0) = 0 \end{aligned} \Rightarrow z = 0 + i0 \Rightarrow z = 0$$

$$\theta = 2\pi \Rightarrow \begin{aligned} x &= a(2\pi - \text{sen}2\pi) = 2\pi a \\ y &= a(1 - \text{cos}2\pi) = 0 \end{aligned} \Rightarrow z = 2\pi a + i0 \Rightarrow z = 2\pi a$$

PARA RESOLVER EL PROBLEMA SE PODRÍAN SUSTITUIR LOS VALORES DE "x" y "y" DADOS, PEROLA INTEGRAL SERÍA MUY DIFÍCIL DE RESOLVER. POR LO TANTO SE RESOLVERÁ LA INTEGRAL EN TÉRMINOS DE "z" COMO SIGUE:

$$\begin{aligned} \int_c (z^2 + 1)^2 dz &= \int_c (z^4 + 2z^2 + 1) dz = \left[\frac{z^5}{5} + \frac{2z^3}{3} + z \right]_0^{2\pi a} \\ &= \frac{32\pi^5 a^5}{5} + \frac{16\pi^3 a^3}{3} + 2\pi a = \frac{96\pi^5 a^5 + 80\pi^3 a^3 + 30\pi a}{15} \end{aligned}$$

AYUDANTE DE PROFESOR JORGE ALEJANDRO RANGEL RANGEL

PROBABILIDAD

EN UN GRUPO SE DISCUTIÓ EL TEMA DEL ABORTO. DE LOS 61 ALUMNOS QUE INTEGRAN EL GRUPO, 25 SON CATÓLICOS, 16 SON MORMONES Y EL RESTO SON ATEOS. AL FINALIZAR LA DISCUSIÓN, EL 40% DE LOS CATÓLICOS MANIFESTARON ESTAR A FAVOR DEL ABORTO, AL IGUAL QUE EL 25% DE LOS MORMONES Y EL 20% DE LOS ATEOS.

SI SE SELECCIONA ALEATORIAMENTE UN ALUMNO DEL GRUPO:

- ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE ESTÉ DE ACUERDO CON EL ABORTO?
- ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE SEA ATEO Y ESTÉ DE ACUERDO CON EL ABORTO?
- SI SE SELECCIONAN ALEATORIAMENTE TRES ALUMNOS, ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EXACTAMENTE UNO DE ELLOS SEA MORMÓN?

SOLUCIÓN.

- SE TIENEN 61 ALUMNOS: 25 CATÓLICOS ; 16 MORMONES y 20 ATEOS

$$N(S) = 61$$

	C	M	A
FA	10	4	4

DEFINICIÓN DE EVENTOS: C : CATÓLICOS ; M : MORMONES ; A : ATEOS ; FA : A FAVOR DEL ABORTO

$$P(FA|C) = 0.4$$

PROBABILIDADES CONDICIONALES: $P(FA|M) = 0.25$

$$P(FA|A) = 0.2$$

DONDE:

$$25 \times 0.4 = 10 ; N(C \cap FA) = 10 ; \text{ ESTUDIANTES CATÓLICOS Y A FAVOR DEL ABORTO}$$

$$16 \times 0.25 = 4 ; N(M \cap FA) = 4 ; \text{ ESTUDIANTES MORMONES Y A FAVOR DEL ABORTO}$$

$$20 \times 0.2 = 4 ; N(A \cap FA) = 4 ; \text{ ESTUDIANTES ATEOS Y A FAVOR DEL ABORTO}$$

$$a) P(FA) = \frac{10 + 4 + 4}{61} = \frac{18}{61} = 0.198$$

$$b) P(A \cap FA) = \frac{N(A \cap FA)}{N(S)} = \frac{4}{61} = 0.066$$

c) DEFINICIÓN DE EVENTO: $E1M$; EXACTAMENTE UN ESTUDIANTE ES MORMÓN Y DOS NO MORMONES

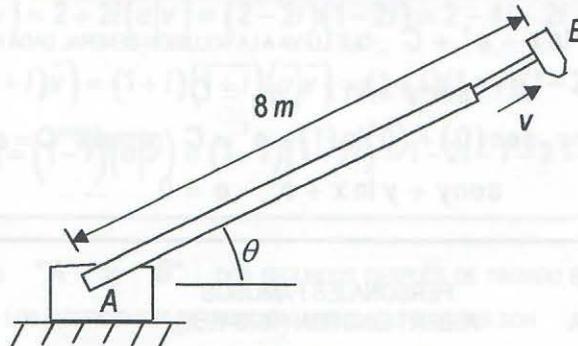
$$P(E1M) = \frac{\binom{16}{1} \binom{45}{2}}{\binom{61}{3}} = \frac{{}_{16}C_1 \cdot {}_{45}C_2}{{}_{61}C_3} = \frac{(990)(16)}{35990} = 0.44$$

PROFESOR MIGUEL EDUARDO GONZÁLEZ CÁRDENAS

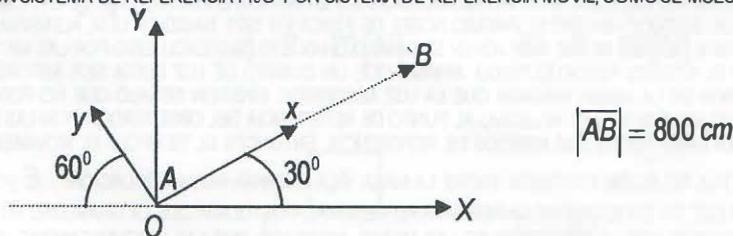
CINEMÁTICA

EN EL INSTANTE MOSTRADO, LA LONGITUD DE LA PLUMA ESTÁ SIENDO INCREMENTADA A UNA RAPIDEZ CONSTANTE DE $8 \frac{cm}{s}$ Y SUBE CON UNA RAPIDEZ ANGULAR

CONSTANTE DE $0.08 \frac{rad}{s}$, SI $\theta = 30^\circ$, DETERMINE PARA ESE INSTANTE LA VELOCIDAD Y LA ACCELERACIÓN DE B.



SOLUCIÓN. SE ESTABLECE UN SISTEMA DE REFERENCIA FIJO Y UN SISTEMA DE REFERENCIA MÓVIL, COMO SE MUESTRA A CONTINUACIÓN:



PARA DETERMINAR LA \vec{v}_B SE TIENE QUE:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{AB} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{0} + 8\hat{i} + (0.08\hat{k}) \times (800\hat{i}) \Rightarrow \vec{v}_B = 8\hat{i} + 64\hat{j} \frac{cm}{s} ; \text{ REFERIDO AL MARCO MÓVIL}$$

O BIEN

$$\bar{v}_B = 8 \left(\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j} \right) + 64 \left(-\cos 60^\circ \hat{i} + \sin 60^\circ \hat{j} \right)$$

$$\bar{v}_B = \left(6.9282 \hat{i} + 4 \hat{j} \right) + \left(-32 \hat{i} + 55.4256 \hat{j} \right) \Rightarrow \bar{v}_B = -25.0718 \hat{i} + 59.4256 \hat{j} \frac{\text{cm}}{\text{s}} ; \text{REFERIDO AL MARCO FIJO}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{rel} + \bar{\alpha} \times \overline{AB} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AB}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}$$

$$\bar{a}_B = \left(0.08 \hat{k} \times 64 \hat{j} \right) + 2 \left(0.08 \hat{k} \right) \times 8 \hat{i} \Rightarrow \bar{a}_B = -5.12 \hat{i} + 1.28 \hat{j} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} ; \text{REFERIDO AL MARCOMÓVIL}$$

O BIEN

$$\bar{a}_B = -5.12 \left(\cos 30^\circ \hat{i} + \sin 30^\circ \hat{j} \right) + 1.28 \left(-\cos 60^\circ \hat{i} + \sin 60^\circ \hat{j} \right)$$

$$\bar{a}_B = \left(-4.4341 \hat{i} - 2.56 \hat{j} \right) + \left(0.64 \hat{i} + 1.1085 \hat{j} \right) \Rightarrow \bar{a}_B = -3.7941 \hat{i} - 1.4515 \hat{j} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} ; \text{REFERIDO AL MARCO FIJO}$$

PROFESOR FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESUELVA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $\left(\frac{y}{x} + e^x \right) dx + (\cos y + \ln x) dy = 0$ PARA LA CONDICIÓN INICIAL $y(1) = 0$

RESOLUCIÓN. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL NO ES DE VARIABLES SEPARABLES, NI DE COEFICIENTES HOMOGÉNEOS. SE VERÁ SI ES EXACTA:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x} ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad \text{SÍ ES EXACTA. ENTONCES EXISTE } f(x,y) \text{ TAL QUE}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{donde} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N \quad \text{CON} \quad M = M(x,y) = \frac{y}{x} + e^x \quad \text{y} \quad N = N(x,y) = \cos y + \ln x$$

$$\text{PARA OBTENER } f(x,y) \text{ SE CONSIDERA QUE } f(x,y) = \int N dy + g(x) = \int (\cos y + \ln x) dy + g(x) = \text{sen } y + y \ln x + g(x) \quad \dots \quad (I)$$

$$\text{ADEMÁS SE TIENE QUE } \frac{\partial f}{\partial x} = M \text{ POR LO QUE SE DERIVA (I) Y SE LLEGA A: } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + g'(x) = \frac{y}{x} + e^x \text{ DE DONDE}$$

$$g'(x) = e^x \quad \text{y} \quad g(x) = \int e^x dx = e^x + C \quad \text{SE SUSTITUYE EN (I) Y RESULTA QUE:}$$

$$f(x,y) = \text{sen } y + y \ln x + e^x + C \quad \text{QUE LLEVA A LA SOLUCIÓN GENERAL DADA POR } f(x,y) = C$$

$$\text{sen } y + y \ln x + e^x = C$$

$$\text{PARA LA CONDICIÓN INICIAL } y(1) = 0 \text{ SE TIENE } \text{sen}(0) + (0) \ln(1) + e^1 = C \text{ DE DONDE } C = e \text{ Y FINALMENTE}$$

$$\text{sen } y + y \ln x + e^x - e = 0$$

PROFESORA MARGARITA RAMÍREZ GALINDO

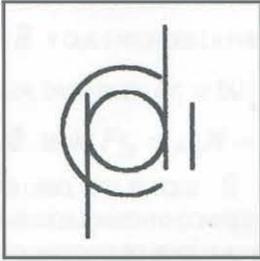
CULTURA CIENTÍFICA

PERSONAJES FAMOSOS ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

JUNTO CON NEWTON, ES CONSIDERADO UNO DE LOS CIENTÍFICOS QUE MÁS HAN REVOLUCIONADO LA CIENCIA EN LA HISTORIA DE LA HUMANIDAD. POR SUS TRABAJOS DE FÍSICA TEÓRICA Y POR LA LEY DEL EFECTO FOTOELÉCTRICO RECIBIÓ EL PREMIO NOBEL DE FÍSICA EN 1921. NACIÓ EN ULM, ALEMANIA, EL 14 DE MARZO DE 1879 Y MURIÓ EN PRINCETON, ESTADOS UNIDOS, EL 18 DE ABRIL DE 1955. DESDE MUY JOVEN EVIDENCIÓ UN GUSTO CASI EXCLUSIVO POR LAS MATEMÁTICAS. RECURRIÓ A LOS NÚMEROS CUÁNTICOS DE PLANCK PARA EXPLICAR EL EFECTO FOTOELÉCTRICO. AFIRMÓ QUE UN CUANTO DE LUZ PODÍA SER ABSORBIDO POR UN ÁTOMO DE UN SÓLIDO, Y SER CAPAZ DE DESPRENDER UN ELECTRÓN DE LA MISMA ENERGÍA QUE LA LUZ ABSORBIDA. EINSTEIN SEÑALÓ QUE NO PODÍA EXISTIR EN EL UNIVERSO NINGÚN MOVIMIENTO ABSOLUTO. EXPRESÓ QUE TODO MOVIMIENTO ES RELATIVO AL PUNTO DE REFERENCIA DEL OBSERVADOR, Y SI LAS LEYES DE LA NATURALEZA Y LA VELOCIDAD DE LA LUZ PERMANECEN INMUTABLES PARA TODOS LOS MARCOS DE REFERENCIA, ENTONCES EL TIEMPO Y EL MOVIMIENTO SON RELATIVOS. EN SU TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL, DESARROLLÓ LA RELACIÓN EXISTENTE ENTRE LA MASA Y LA ENERGÍA CON LA ECUACIÓN: $E = mc^2$, DONDE E ES LA ENERGÍA, m LA MASA Y c LA VELOCIDAD DE LA LUZ. EN SU TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL, POSTULABA QUE LA GRAVEDAD NO ERA UNA FUERZA, SINO UNA CONSECUENCIA DE LA CURVATURA DEL ESPACIO CREADA POR LA PRESENCIA DE LAS MASAS. MOTIVADO POR LAS CIRCUNSTANCIAS, PROPUSO UN PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN PARA DESARROLLAR LA BOMBA ATÓMICA; COMO RESULTADO, SURTIÓ EL LABORATORIO DONDE SE HIZO LA BOMBA "H". EL ELEMENTO NÚMERO ATÓMICO "99". EN SU HONOR, RECIBIÓ EL NOMBRE DE EINSTEINIO.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 66

2 DE NOVIEMBRE DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ALGEBRA LINEAL

SEAN \bar{u} y \bar{v} VECTORES DE UN ESPACIO VECTORIAL V SI $(\bar{u}|\bar{v}) = 1 - 2i$, OBTENER:

- a) $(-1 - 2i)(\bar{u}|\bar{v})$; b) $((2 - i)\bar{u}|\bar{v})$; c) $(\bar{u}|(2 + 2i)\bar{v})$
d) $((1 + i)\bar{u}|(1 + i)\bar{v})$; e) $(\bar{u}|(1 - i)\bar{v})$

SOLUCIÓN. COMO $(\alpha\bar{u}|\bar{v}) = \alpha(\bar{u}|\bar{v})$ y $(\bar{u}|\alpha\bar{v}) = \bar{\alpha}(\bar{u}|\bar{v}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$, ENTONCES:

- a) $(-1 - 2i)(\bar{u}|\bar{v}) = (-1 - 2i)(1 - 2i) = -(1 + 2i)(1 - 2i) = -(1 + 4) = -5$
b) $((2 - i)\bar{u}|\bar{v}) = (2 - i)(\bar{u}|\bar{v}) = (2 - i)(1 - 2i) = 2 - 4i - i - 2 = -5i$
c) $(\bar{u}|(2 + 2i)\bar{v}) = \overline{2 + 2i}(\bar{u}|\bar{v}) = (2 - 2i)(1 - 2i) = 2 - 4i - 2i - 4 = -2 - 6i$
d) $((1 + i)\bar{u}|(1 + i)\bar{v}) = (1 + i)(\overline{1 + i})(\bar{u}|\bar{v}) = (1 + i)(1 - i)(1 - 2i) = 2(1 - 2i) = 2 - 4i$
e) $(\bar{u}|(1 - i)\bar{v}) = (\overline{1 - i})(\bar{u}|\bar{v}) = (1 - i)(1 - 2i) = 1 - 2i - i - 2 = -1 - 3i$

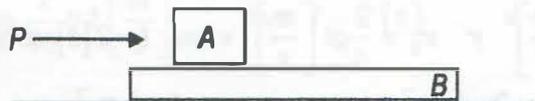
PROFESOR JUAN VELÁSQUEZ TORRES

DINÁMICA

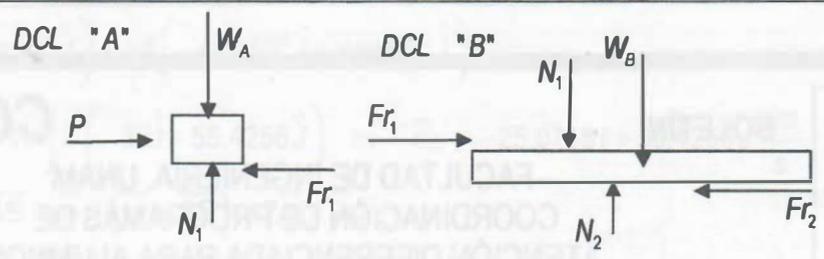
DETERMINAR LA RAPIDEZ DE LOS BLOQUES "A" y "B" DOS SEGUNDOS DESPUÉS DE INICIADO EL MOVIMIENTO SI SE APLICA UNA FUERZA "P" CONSTANTE SOBRE EL BLOQUE "A" SI LOS COEFICIENTES DE FRICCIÓN ENTRE LOS BLOQUES SON $\mu_s = 0.3$ Y $\mu_d = 0.2$. CONSIDERAR QUE $W_A = 100 [N]$ Y $W_B = 50 [N]$. EL SISTEMA SE ENCUENTRA EN REPOSO.

- a) $P = 70 [N]$; b) $P = 50 [N]$

SOLUCIÓN.



- a) CASO EN EL QUE $P = 70 [N]$. SE DETERMINARÁ SI LA FUERZA P VENCE A LA FRICCIÓN MÁXIMA ($F_{r_{max}}$) GENERADA ENTRE A y B



COMO $N_1 = W_A = 100 [N]$, ENTONCES: $Fr_{1max} = \mu_e N_1 = 0.6(100) = 60 [N]$.

SI SE COMPARA P CON Fr_{1max} , SE CONCLUYE QUE EL BLOQUE A SE MOVERÁ CON RESPECTO AL BLOQUE B Y LA FUERZA DE FRICCIÓN ENTRE LOS BLOQUES SERÁ $Fr_1 = \mu_d N_1 = 0.5(100) = 50 [N]$.

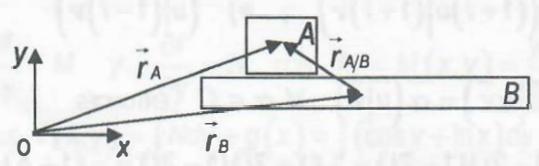
AHORA SE VERIFICARÁ SI EL BLOQUE B DESLIZA SOBRE EL PISO. PARA QUE ELLO OCURRA SE DEBE CUMPLIR QUE Fr_1 SEA MAYOR QUE Fr_{2max} . EN ESTE CASO, $N_2 = N_1 + w_B = 150 [N]$; EN CONSECUENCIA

$$Fr_{2max} = \mu_e N_2 \Rightarrow Fr_{2max} = 0.3(150) = 45 [N]$$

DADO QUE $Fr_1 > Fr_{2max}$, EL BLOQUE B TAMBIÉN PRESENTARÁ MOVIMIENTO, SIENDO ENTONCES:

$$Fr_2 = \mu_d N = 0.2(150) = 30 [N]$$

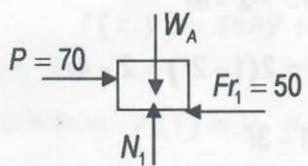
PARA ANALIZAR EL MOVIMIENTO DE AMBOS CUERPOS, UBICAREMOS UN MARCO DE REFERENCIA FIJO EN EL PISO (MARCO INERCIAL) PARA PODER APLICAR LA SEGUNDA LEY DE NEWTON EN LA FORMA $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.



$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \text{ POR LO QUE } \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

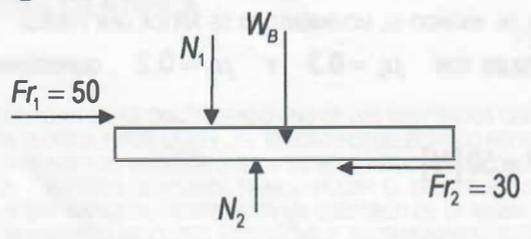
LOS VALORES ABSOLUTOS DE LA ACELERACIONES DE LOS BLOQUES A y B SE OBTIENEN DE LA SIGUIENTE FORMA:

PARA "A"



$$70 - 50 = \frac{100}{g} a_A \Rightarrow a_A = \frac{1}{5} g \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

PARA "B"



$$50 - 30 = \frac{50}{g} a_B \Rightarrow a_B = \frac{2}{5} g \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

LAS EXPRESIONES DE RAPIDEZ SON: $v_A = \frac{1}{5} gt \left[\frac{m}{s} \right]$ y $v_B = \frac{2}{5} gt \left[\frac{m}{s} \right]$ Y PARA $t = 2 [s]$ SE TIENE FINALMENTE QUE:

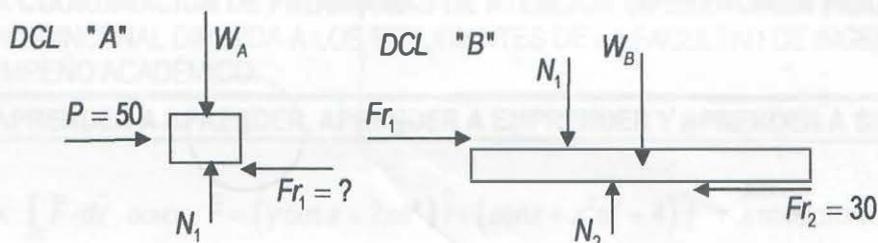
$$v_A = \frac{2}{5} g \left[\frac{m}{s} \right] \text{ y } v_B = \frac{4}{5} g \left[\frac{m}{s} \right]$$

b) CASO EN EL QUE $P = 50 [N]$

SI SE PROCEDE EN FORMA SIMILAR AL CASO ANTERIOR, SE CONCLUYE QUE AL SER " P " MENOR QUE Fr_{1max} , EL BLOQUE A NO DESLIZARÁ CON RESPECTO AL BLOQUE B Y QUE ENTONCES LA FUERZA DE FRICCIÓN ENTRE LOS BLOQUES ADOPTARÁ UN VALOR IDÉNTICO AL DE " P ", ES DECIR, $Fr_1 = 50 [N]$

AHORA BIEN, DADO QUE $Fr_1 = 50 [N]$ ES SUPERIOR A $Fr_{2max} = 45 [N]$, EL BLOQUE B SI DESLIZA CON RESPECTO AL PISO, Y LA FRICCIÓN ENTRE EL PISO Y B SERÁ $Fr_2 = \mu_d N = 0.2(150) = 30 [N]$.

POR OTRO LADO, SI EL BLOQUE B SE MUEVE, NECESARIAMENTE EL BLOQUE A SE MOVERÁ CON RESPECTO AL MARCO DE REFERENCIA FIJO, A PESAR DE NO PRESENTAR DESLIZAMIENTO CON RESPECTO A B . ESTO ÚLTIMO IMPLICA QUE AL ANALIZAR NUEVAMENTE EL DCL DEL BLOQUE A , LA FUERZA DE FRICCIÓN Fr_1 NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE $50 [N]$, COMO SE COMENTÓ ANTERIORMENTE PORQUE LA RESULTANTE DE FUERZAS SERÍA NULA Y LA ACELERACIÓN TAMBIÉN. EN ESTE CASO, Fr_1 ES UNA INCÓGNITA.



SI SE APLICA LA SEGUNDA LEY DE NEWTON:

$$\text{PARA } A : 50 - Fr_1 = \frac{100}{g} a_A \quad \dots (1) \quad \text{PARA } B : Fr_1 - 30 = \frac{50}{g} a_B \quad \dots (2)$$

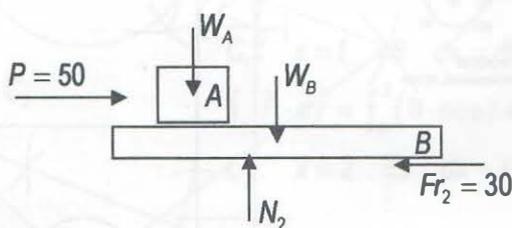
SE DESPEJA A Fr_1 DE LA ECUACIÓN (1) Y SE SUSTITUYE EN LA (2):

$$Fr_1 = 50 - \frac{100}{g} a_A ; \quad 50 - \frac{100}{g} a_A - 30 = \frac{50}{g} a_B$$

PUESTO QUE NO EXISTE MOVIMIENTO RELATIVO ENTRE A y B , CONCLUIMOS QUE $a_A = a_B$ POR LO QUE LA ECUACIÓN ANTERIOR SE REESCRIBE ASÍ:

$$20 = \frac{150}{g} a_B \Rightarrow a_B = \frac{2}{15} g \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

ESTE RESULTADO SE OBTENDRÍA TAMBIÉN SI SE APLICA A TODO EL CONJUNTO LA SEGUNDA LEY DE NEWTON.



$$50 - 30 = \left(\frac{100 + 50}{g} \right) a \Rightarrow 20 = \frac{150}{g} a \Rightarrow a = \frac{2}{15} g \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

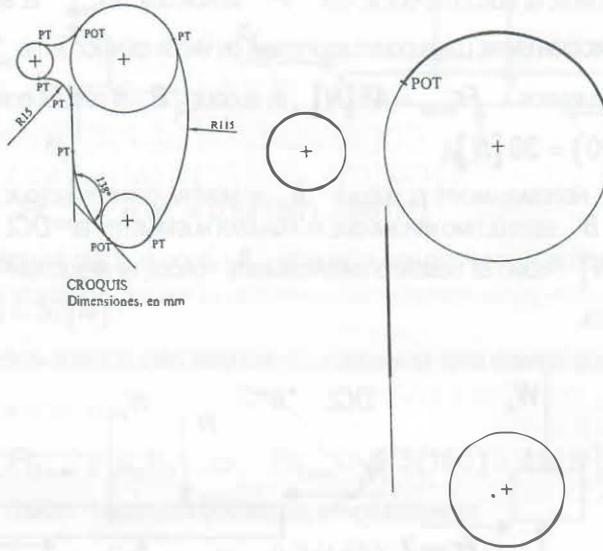
FINALMENTE, PARA OBTENER LA RAPIDEZ EN $t = 2 [s]$, INTEGRAMOS UNA VEZ Y SE LLEGA A:

$$v = \frac{2}{15} g t \left[\frac{m}{s} \right] ; \quad \text{PARA } t = 2 [s] \quad \therefore \quad v = \frac{4}{15} g \left[\frac{m}{s} \right]$$

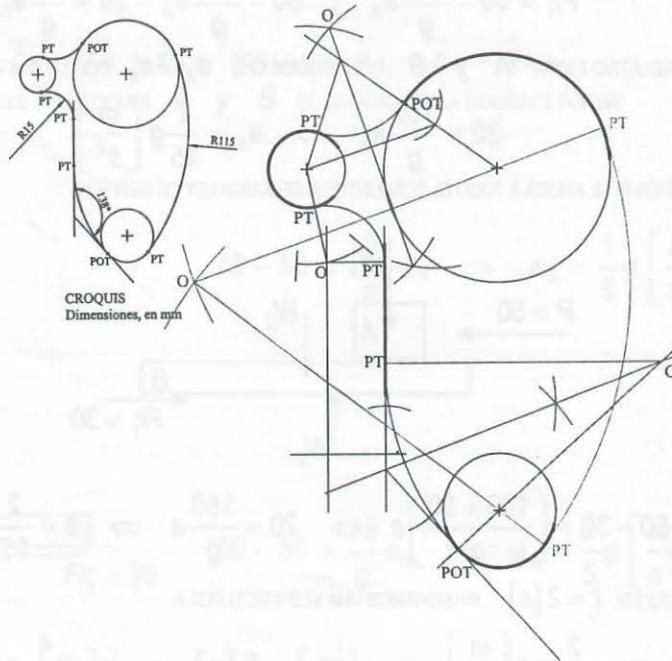
PROFESOR LORENZO MIRANDA CORDERO

ANÁLISIS GRÁFICO

COMPLETAR EL DIBUJO A ESCALA NATURAL, DE LA LEVA DE CORTE, QUE SE MUESTRA EN EL CROQUIS, A PARTIR DE LOS TRAZOS PROPORCIONADOS; DEJANDO SIN BORRAR TODOS LOS TRAZOS AUXILIARES E INDICANDO LOS PUNTOS DE TANGENCIA CON PT, Y CON C LOS CENTROS DE ARCOS DE CIRCUNFERENCIA.



SOLUCIÓN.



¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO III

DADA LA INTEGRAL CURVILÍNEA $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ DONDE $\vec{F} = (y \cos x + 2xe^y) \hat{i} + (\text{sen} x + x^2 e^y + 4) \hat{j}$ Y LA TRAYECTORIA "C" DEL PUNTO (0,0) AL PUNTO (2,4)

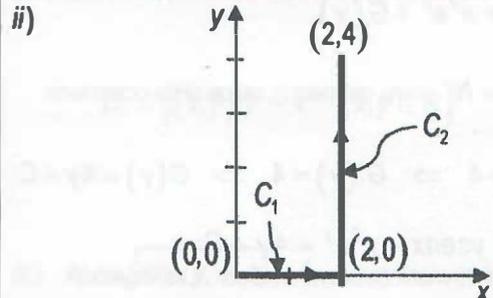
- i) VERIFICAR QUE EL INTEGRANDO ES UNA DIFERENCIAL EXACTA.
- ii) EVALUARLA SI "C" ESTÁ CONFORMADA POR LOS SEGMENTOS RECTOS QUE VAN DEL PUNTO (0,0) AL PUNTO (2,0) Y DE ÉSTE AL PUNTO (2,4)
- iii) EVALUARLA SI "C" ES LA RECTA QUE UN LOS PUNTOS.
- iv) EVALUARLA SIN UTILIZAR UNA TRAYECTORIA.

SOLUCIÓN.

i) PARA QUE EL INTEGRANDO SEA UNA DIFERENCIAL EXACTA SE DEBE CUMPLIR QUE $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. LUEGO

$$M = y \cos x + 2xe^y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y ; N = \text{sen} x + x^2 e^y + 4 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y \quad \text{Y, COMO} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ENTONCES EL INTEGRANDO ES UNA DIFERENCIAL EXACTA.



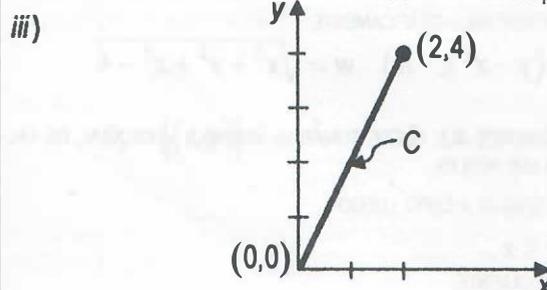
$$C_1: x=t \Rightarrow dx=dt ; y=0 \Rightarrow dy=0 ; 0 \leq t \leq 2$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (0 \cdot \cos t + 2te^0) dt = \int_0^2 2t dt = [t^2]_0^2 = 4$$

$$C_2: x=2 \Rightarrow dx=0 ; y=t \Rightarrow dy=dt ; 0 \leq t \leq 4$$

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 (\text{sen} 2 + 2^2 e^t + 4) dt = [(\text{sen} 2)t + 4e^t + 4t]_0^4 = 4\text{sen} 2 + 4e^4 + 16 - 4 \doteq 234.0298$$

$$\therefore \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4 + 234.0298 \doteq 238.0298$$



LA ECUACIÓN DE LA RECTA ESTÁ DADAPOR: $y - 0 = \frac{4-0}{2-0}(x-0) \Rightarrow y = 2x$
LUEGO,
 $C: x=t \Rightarrow dx=dt ; y=2t \Rightarrow dy=2dt ; 0 \leq t \leq 2$

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 [(2t \cos t + 2te^{2t})(1) + (\sin t + t^2 e^{2t} + 4)(2)] dt = \int_0^2 (2t \cos t + 2te^{2t} + 2\sin t + 2t^2 e^{2t} + 8) dt$$

AHORA SE RESUELVEN LAS CORRESPONDIENTES INTEGRALES INDEFINIDAS Y SE TIENE QUE:

$$\int 2t \cos t dt ; u = 2t \Rightarrow du = 2dt ; dv = \cos t dt \Rightarrow v = \sin t$$

$$\int 2t \cos t dt = 2t \sin t - 2 \int \sin t dt = 2t \sin t + 2 \cos t + C$$

$$\int 2te^{2t} dt ; u = 2t \Rightarrow du = 2dt ; dv = e^{2t} dt \Rightarrow v = \frac{e^{2t}}{2}$$

$$\int 2te^{2t} dt = te^{2t} - \int e^{2t} dt = te^{2t} - \frac{e^{2t}}{2} + C$$

$$\int 2\sin t dt = -2 \cos t + C$$

$$\int 2t^2 e^{2t} dt ; u = 2t^2 \Rightarrow du = 4t dt ; dv = e^{2t} dt \Rightarrow v = \frac{e^{2t}}{2}$$

$$\int 2t^2 e^{2t} dt = t^2 e^{2t} - \int 2te^{2t} dt ; u = 2t \Rightarrow du = 2dt ; dv = e^{2t} dt \Rightarrow v = \frac{e^{2t}}{2}$$

$$\int 2t^2 e^{2t} dt = t^2 e^{2t} - te^{2t} + \int e^{2t} dt = t^2 e^{2t} - te^{2t} + \frac{e^{2t}}{2} + C$$

$$\int 8 dt = 8t + C$$

LUEGO, LA INTEGRAL CURVILÍNEA QUEDA COMO:

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[2t \sin t + 2 \cos t + te^{2t} - \frac{e^{2t}}{2} - 2 \cos t + t^2 e^{2t} - te^{2t} + \frac{e^{2t}}{2} + 8t \right]_0^2 = [2t \sin t + t^2 e^{2t} + 8t]_0^2 = 4 \sin 2 + 4e^4 + 16 \doteq 238.0298$$

iv) SI EL INTEGRANDO ES UNA DIFERENCIAL EXACTA, ENTONCES EXISTE UNA FUNCIÓN F TAL QUE ES SU DIFERENCIAL TOTAL, ES DECIR QUE

$$dF = (y \cos x + 2xe^y) dx + (\sin x + x^2 e^y + 4) dy \text{ DE DONDE } \frac{\partial F}{\partial x} = M = y \cos x + 2xe^y \text{ Y } \frac{\partial F}{\partial y} = N = \sin x + x^2 e^y + 4 \text{ PARA}$$

ENCONTRAR LA FUNCIÓN F, SE INTEGRA LA PRIMERA EXPRESIÓN CON RESPECTO A "x", DE DONDE:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx \Rightarrow F = y \sin x + x^2 e^y + G(y)$$

AHORA SE DERIVA ESTA ÚLTIMA EXPRESIÓN CON RESPECTO A "y" Y SE IGUALA CON LA DERIVADA $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, PARA OBTENER EL VALOR DE LA CONSTANTE

"G" DE DONDE: $\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + x^2 e^y + G'(y) ; \sin x + x^2 e^y + G'(y) = \sin x + x^2 e^y + 4 \Rightarrow G'(y) = 4 \Rightarrow G(y) = 4y + C$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA EXPRESIÓN DETERMINADA PARA "F" Y SE LLEGA FINALMENTE A $F = y \sin x + x^2 e^y + 4y + C$

AHORA SE EVALÚA ESTA FUNCIÓN ENTRE LOS PUNTOS EXTREMOS DE LA TRAYECTORIA Y SE TIENE FINALMENTE EL VALOR DE LA INTEGRAL CURVILÍNEA. LUEGO,

$$\int_c (y \cos x + 2xe^y) dx + (\sin x + x^2 e^y + 4) dy = [y \sin x + x^2 e^y + 4y]_{(0,0)}^{(2,4)} = 4 \sin 2 + 2^2 e^4 + 4(4) = 238.0298$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO II

DETERMINAR EL DOMINIO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL Y REPRESENTARLO GRÁFICAMENTE:

i) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$; ii) $z = \sqrt{4-2x^2-y^2}$; iii) $f(x,y) = x^2 \ln(y-x^2)$; iv) $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2-4}$

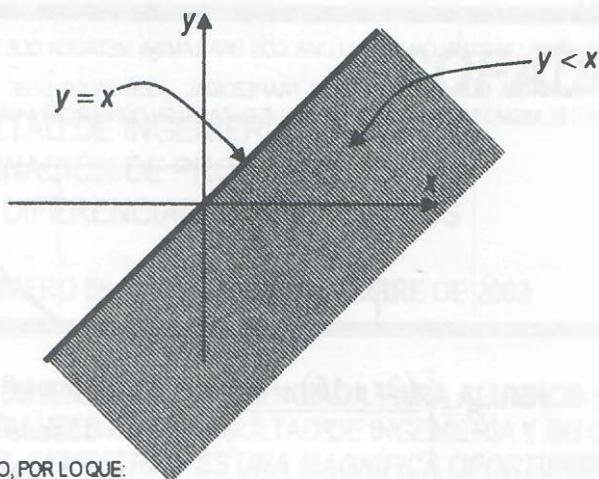
SOLUCIÓN. EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL ES EL CONJUNTO DE VALORES QUE PUEDE TOMAR LA VARIABLE VECTORIAL, DE TAL FORMA QUE LA FUNCIÓN SEA REAL, ES DECIR, QUE LA VARIABLE DEPENDIENTE ESCALAR PERTENEZCA A LOS REALES.

i) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$; EN ESTA FUNCIÓN SE OBSERVA QUE EL RADICANDO DEBE SER MAYOR O IGUAL A CERO. LUEGO

$$x - y \geq 0 \Rightarrow -y \geq -x \Rightarrow y \leq x$$

POR LO TANTO EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN Y LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE ESTE DOMINIO ES LA SIGUIENTE:

$$D_f = \{(x,y) | y \leq x ; x,y \in \mathbb{R}\}$$

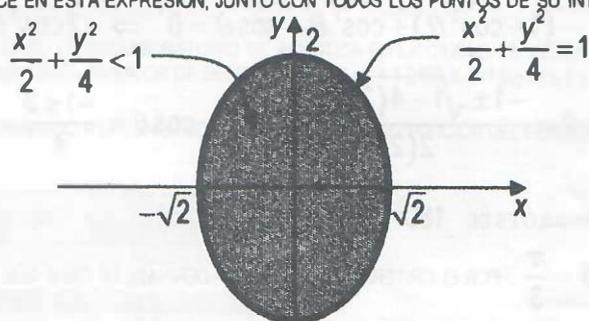


ii) $z = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$; EL RADICANDO DEBE SER MAYOR O IGUAL A CERO, POR LO QUE:

$$4 - 2x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow -2x^2 - y^2 \geq -4 \Rightarrow 2x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

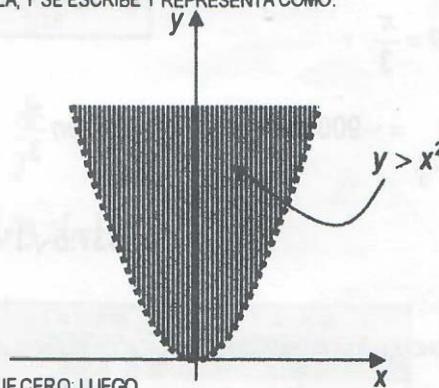
POR LO QUE EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN ES LA ELIPSE QUE APARECE EN ESTA EXPRESIÓN, JUNTO CON TODOS LOS PUNTOS DE SU INTERIOR. ASÍ. ÉSTE Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA ES:

$$D_f = \left\{ (x,y) \mid \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \leq 1 ; x,y \in \mathbb{R} \right\}$$



iii) $f(x,y) = x^2 \ln(y - x^2)$; LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL ESTÁ DEFINIDA PARA UN VARIABLE POSITIVA, POR LO QUE: $y - x^2 > 0 \Rightarrow y > x^2$ LUEGO EL DOMINIO ES EL CONJUNTO DE PUNTOS QUE ESTÁN DENTRO DE LA PARÁBOLA, Y SE ESCRIBE Y REPRESENTA COMO:

$$D_f = \{(x,y) | y > x^2 ; x,y \in \mathbb{R}\}$$

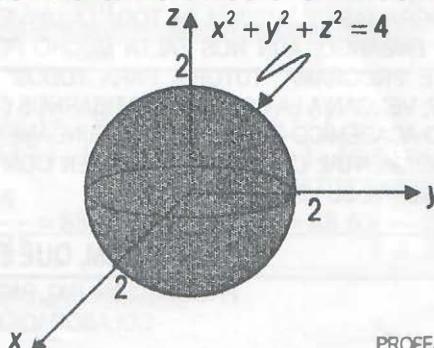


iv) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$, EL RADICANDO DEBE SER MAYOR O IGUAL QUE CERO; LUEGO,

$$4 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 - y^2 - z^2 \geq -4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

POR LO QUE EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN ES EL CONJUNTO DE LOS PUNTOS QUE ESTÁN EN EL INTERIOR DE LA ESFERA CUYA ECUACIÓN ES LA QUE SE LLEGÓ, INCLUYENDO LOS PUNTOS DE LA ESFERA. ASÍ, LA GRÁFICA SERÍA LA SIGUIENTE:

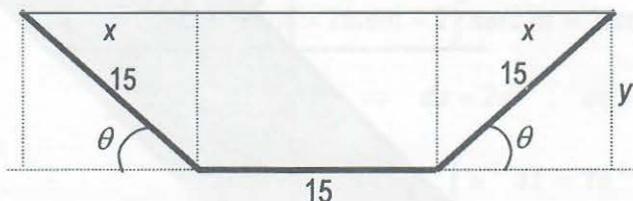
$$D_f = \{(x,y) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 ; x,y,z \in \mathbb{R}\}$$



CÁLCULO I

SE DEBE CONSTRUIR UN CANALÓN PARA LLUVIA CON UNA LÁMINA METÁLICA QUE TIENE **45 cm** DE ANCHO. SE HACE DOBLANDO LA LÁMINA EN TRES PARTES IGUALES DE TAL FORMA QUE LA SECCIÓN ES TRAPEZOIDAL, ¿QUÉ VALOR DEBE TENER EL ÁNGULO " θ " QUE FORMA CADA UNO DE LOS TALUDES CON LA HORIZONTAL (ES EL MISMO EN CADA CASO) PARA QUE EL CANALÓN CONDUZCA LA MÁXIMA CANTIDAD DE AGUA?

SOLUCIÓN.



COMO SE OBSERVA EN EL MODELO GEOMÉTRICO PARA EL CANALÓN, ÉSTE LLEVARÁ LA MAYOR CANTIDAD DE AGUA CUANDO EL ÁREA DE SU SECCIÓN SEA MÁXIMA, POR LO QUE SE PROCEDERÁ A OPTIMIZAR EL ÁREA:

$$A = \left[\frac{(2x + 15) + 15}{2} \right] y ; \quad \begin{aligned} x &= 15 \cos \theta \\ y &= 15 \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{2(15 \cos \theta) + 30}{2} \cdot (15 \sin \theta)$$

$$A = 225 \sin \theta \cos \theta + 225 \sin \theta ; \quad \frac{dA}{d\theta} = -225 \sin^2 \theta + 225 \cos^2 \theta + 225 \cos \theta$$

$$-225 \sin^2 \theta + 225 \cos^2 \theta + 225 \cos \theta = 0 \Rightarrow -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta = 0 \Rightarrow$$

$$-(1 - \cos^2 \theta) + \cos^2 \theta + \cos \theta = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$\cos \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{2(2)} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} (60^\circ) \\ \cos \theta &= -1 \Rightarrow \theta = \pi (180^\circ) \end{aligned}$$

ES EVIDENTE QUE SI EL ÁNGULO ES DE 180° NO SE TENDRÁ LA SECCIÓN Y POR CONSIGUIENTE EL CANAL. AHORA SE PROCEDERÁ A ANALIZAR EL PUNTO CRÍTICO

CORRESPONDIENTE A $\theta = \frac{\pi}{3}$. POR EL CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA SE TIENE QUE:

$$\frac{d^2 A}{d\theta^2} = -450 \sin \theta \cos \theta - 450 \sin \theta \cos \theta - 225 \sin \theta \Rightarrow \frac{d^2 A}{d\theta^2} = -900 \sin \theta \cos \theta - 225 \sin \theta$$

SE SUSTITUYE EL VALOR DE $\theta = \frac{\pi}{3}$ Y

$$\left. \frac{d^2 A}{d\theta^2} \right|_{\theta = \frac{\pi}{3}} = -900 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - 225 \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \left. \frac{d^2 A}{d\theta^2} \right|_{\frac{\pi}{3}} = -900 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) - 225 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\left. \frac{d^2 A}{d\theta^2} \right|_{\frac{\pi}{3}} = -337.5 \sqrt{3} < 0 \quad \therefore \text{MÁXIMO RELATIVO.}$$

POR LO TANTO EL CANALÓN CONDUZCA LA MÁXIMA CANTIDAD DE AGUA CUANDO $\theta = \frac{\pi}{3} (60^\circ)$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

TUTORÍA

ESTUDIANTES

EN UNA REUNIÓN DE PROGRAMAS DE TUTORÍA DE TODA LA UNIVERSIDAD, SE HABLÓ DEL DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, COMO UN EJEMPLO A SEGUIR. SIN EMBARGO, AÚN NOS FALTA MUCHO POR HACER Y SON USTEDES LOS ESTUDIANTES QUIENES PUEDEN AYUDAR PARA QUE ESTE PROGRAMA "TUTORÍA PARA TODOS" LOGRE SUS OBJETIVOS. ¿YA CONOCIERON A SU TUTOR?, ¿YA INTERACTUARON CON ÉL?, VENGAN A LA COPADI A PLATICARNOS CÓMO LES VA CON SU TUTOR.

SE TRATA DE UN SERVICIO ACADÉMICO QUE PUEDE SER FUNDAMENTAL EN EL ÉXITO DE SUS ESTUDIOS DE LICENCIATURA.

¿NO CREEN QUE ES FUNDAMENTAL CONTAR CON ALGUIEN CON EXPERIENCIA QUE LOS ESCUCHE, LOS ALIENTE, LOS IMPULSE AL ESTUDIO, LES ACONSEJE SOBRE SU VIDA?

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2003

NÚMERO 68

2 DE DICIEMBRE DE 2003

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. **SE TERMINA EL SEMESTRE Y ES UNA MAGNÍFICA OPORTUNIDAD PARA DAR EL "SPRINT" FINAL Y ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS, ¡SÍ ES POSIBLE!**

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

FÍSICA EXPERIMENTAL

TEMA: ONDAS

A PARTIR DE UN EXPERIMENTO DE ONDAS ESTACIONARIAS LLEVADO A CABO EN UN LABORATORIO DE ACÚSTICA EN LA CIUDAD DE MÉXICO ($g = 9.78 \text{ [m/s}^2\text{]}$), SE RECABARON LOS DATOS MOSTRADOS EN LA TABLA. LA CUERDA EMPLEADA TENÍA UN VALOR DE DENSIDAD LINEAL $\mu = 1.2450 \times 10^{-3} \text{ [kg/m]}$ Y LA DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS DE APOYO DE ÉSTA FUE DE 3 [m]. OBTENER:

- A) EL MODELO MATEMÁTICO DE DICHO FENÓMENO FÍSICO CONSIDERANDO A LA LONGITUD DE ONDA λ COMO FUNCIÓN DEL PERIODO T .
- B) ¿CUÁL ES LA INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA PENDIENTE.
- C) LA MASA EMPLEADA PARA LOGRAR LA TENSIÓN EN LA CUERDA.

n	f [Hz]
MODOS DE VIBRACIÓN	FRECUENCIA
1	14.2
2	28.6
3	42.3
4	56.8
5	71.5
6	85.2
7	99.9
8	113.6

SOLUCIÓN

- A) PARA OBTENER EL MODELO MATEMÁTICO SE CONSIDERA LO SIGUIENTE:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

CONSIDERANDO A $\lambda(T)$ COMO $\lambda = vT + b$, DONDE $\lambda[m] = m \left[\frac{m}{s} \right] T[s] + b[m]$

CALCULANDO EL PERIODO Y LA LONGITUD DE ONDA:

n	f [Hz]	T = 1/f [s]	$\lambda = 2L/n$
MODOS DE VIBRACIÓN	FRECUENCIA	PERIODO	LONGITUD DE ONDA
1	14.2	0.0704	6
2	28.6	0.0349	3
3	42.3	0.0236	2
4	56.8	0.0176	1.5
5	71.5	0.0139	1.2
6	85.2	0.0117	1
7	99.9	0.0100	0.85
8	113.6	0.0088	0.75

AHORA SE CALCULA LA PENDIENTE:

$$m = \frac{\sum \Delta \lambda}{\sum \Delta T} = \frac{(6-1.2) + (3-1) + (2-0.85) + (1.5-0.75)}{(0.0704-0.0139) + (0.0349-0.0117) + (0.0236-0.0100) + (0.0176-0.0088)}$$

$$m = \frac{4.8 + 2 + 1.15 + 0.75}{0.0565 + 0.0232 + 0.0136 + 0.0088} = \frac{9.05}{0.1021} = 88.63 \left[\frac{m}{s} \right] \therefore m = 88.63 \left[\frac{m}{s} \right] \text{ PENDIENTE}$$

AHORA PARA OBTENER LA ORDENADA AL ORIGEN (b) DEL MODELO MATEMÁTICO, SE OBTIENE EL CENTROIDE:

$$\text{CENTROIDE } (\bar{T}, \bar{\lambda}) = (0.0238 [s], 2.03 [m])$$

$b = \bar{\lambda} - mT$; $b[m] = 2.03 - 88.63(0.0238)$ \therefore $b[m] = -0.0793[m]$ ORDENADA AL ORIGEN
POR LO TANTO EL MODELO MATEMÁTICO ES:

$$\lambda[m] = 88.63 \left[\frac{m}{s} \right] T[s] - 0.0793 [m]$$

B) LA INTERPRETACIÓN DE LA PENDIENTE SE OBTIENE DE INSPECCIONAR EL MODELO MATEMÁTICO:

$m = v =$ VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LA ONDA

$$v = m = 88.63 \left[\frac{m}{s} \right]$$

C) PARA OBTENER EL VALOR DE LA MASA EMPLEADA PARA LOGRAR LA TENSIÓN DE LA CUERDA:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{Tensión}}{\text{Densidad Lineal}}}$$

A PARTIR DE LA EXPRESIÓN ANTERIOR:

$$T = v^2 \mu \Rightarrow T = v^2 \mu = (88.63)^2 (1.2450 \times 10^{-3}) = 9.779 \approx 9.78 [N]$$

SI LA TENSIÓN ES

$$T = mg$$

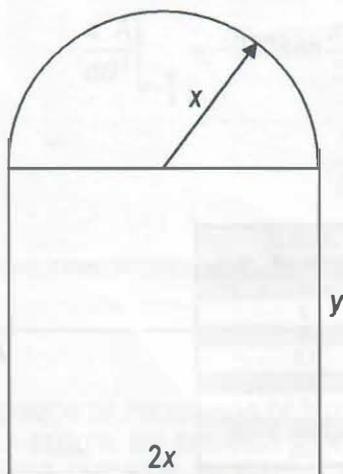
POR LO TANTO EL VALOR DE LA MASA EMPLEADA ES:

$$m = \frac{T}{g} = \frac{9.78}{9.78} = 1 [kg]$$

PROFESOR CÉSAR ENRIQUE BENÍTEZ JOYNER

CÁLCULO I

HAY QUE EDIFICAR UN SILO (SIN INCLUIR LA BASE) EN FORMA DE CILINDRO REMATADO POR UNA SEMIESFERA. EL COSTO DE LA CONSTRUCCIÓN PARA EL ÁREA DE SUPERFICIE PARA LA SEMIESFERA ES DE \$350.00 / m² Y PARA LA PARED DEL CILINDRO ES DE \$250.00 / m². DETERMINAR LAS DIMENSIONES QUE HAN DE USARSE SI SU CAPACIDAD DEBE SER DE 60 m³ Y EL COSTO DE CONSTRUCCIÓN HA DE SER MÍNIMO. NO CONSIDERAR EL ESPESOR DE LA PARED DEL SILO NI EL DESPERDICIO GENERADO DURANTE LA CONSTRUCCIÓN.
SOLUCIÓN. UNA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL SILO ES LA SIGUIENTE:



LA FUNCIÓN A MINIMIZAR ES EL COSTO DE CONSTRUCCIÓN, QUE, DE ACUERDO CON LAS DIMENSIONES SUPUESTAS ES:

$$C = 2\pi xy(250) + 2\pi x^2(350) \Rightarrow C = 500\pi xy + 700\pi x^2$$

COMO SE OBSERVA, ESTA FUNCIÓN DEPENDE DE DOS VARIABLES: EL RADIO DE LA SEMIESFERA QUE ES EL RADIO DEL CILINDRO Y LA ALTURA DE ÉSTE. PERO SE CONOCE EL VOLUMEN, POR LO QUE SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$\pi x^2 y + \frac{2}{3} \pi x^3 = 60 \text{ DE DONDE } y = \frac{60 - \frac{2}{3} \pi x^3}{\pi x^2} \text{ Y SI SE SUSTITUYE EN EL COSTO,}$$

$$C = 500\pi x \frac{60 - \frac{2}{3} \pi x^3}{\pi x^2} + 700\pi x^2 \Rightarrow C = \frac{30000}{x} - \frac{1000}{3} \pi x^2 + 700\pi x^2 \Rightarrow C = \frac{30000}{x} + \frac{1100}{3} \pi x^2$$

AHORA SE RESUELVE EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN Y

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{30000}{x^2} + \frac{2200}{3} \pi x ; \frac{-90000 + 2200\pi x^3}{3x^2} = 0 \Rightarrow 2200\pi x^3 - 90000 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{450}{11\pi}} \Rightarrow x \doteq 2.35$$

POR EL CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{60000}{x^3} + \frac{2200}{3}\pi ; \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=2.35} = \frac{60000}{(2.35)^3} + \frac{2200}{3}\pi \doteq 6927 > 0 \quad \therefore \text{MÍNIMO}$$

Y "y" ES IGUAL A:

$$y = \frac{60 - \frac{2}{3}\pi(2.35)^3}{\pi(2.35)^2} \Rightarrow y = \frac{60 - 27.18}{\pi(2.35)^2} \doteq 1.89$$

POR LO TANTO, PARA QUE EL COSTO DE LA CONSTRUCCIÓN SEA MÍNIMO, CON LOS COSTOS DE LOS MATERIALES ESTABLECIDOS, LAS DIMENSIONES DEL SILO DEBEN SER: RADIO DEL CILINDRO Y LA SEMIESFERA 2.35 m Y ALTURA DEL CILINDRO 1.89 m

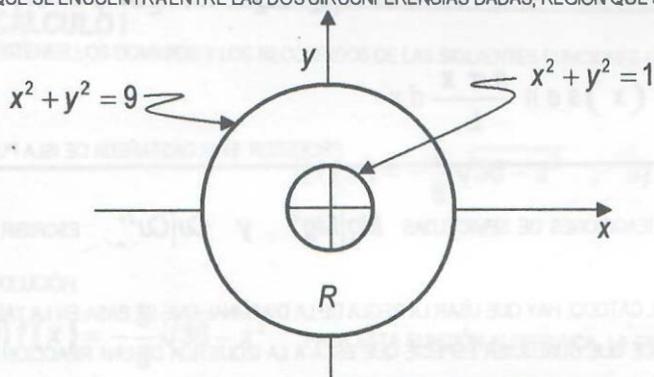
PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO III

CALCULAR EL VOLUMEN DE LA REGIÓN LIMITADA ARRIBA POR LA SUPERFICIE $z = x^2 + y^2$, ABAJO POR EL PLANO xy Y LOCALIZADA SOBRE LA REGIÓN "R" LIMITADA POR LAS CURVAS

$$x^2 + y^2 = 1 \quad y \quad x^2 + y^2 = 9$$

SOLUCIÓN. LA SUPERFICIE ES UN PARABOLOIDE CIRCULAR O DE REVOLUCIÓN CUYO VÉRTICE ESTÁ EN EL ORIGEN DE COORDENADAS. Y LA GRÁFICA DE LA REGIÓN ES LA QUE SE ENCUENTRA ENTRE LAS DOS CIRCUNFERENCIAS DADAS, REGIÓN QUE SE REPRESENTA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



EL VOLUMEN REQUERIDO SE OBTIENE A PARTIR DE $V = \iint_R (x^2 + y^2) dA$

DADA LA FORMA DE LA ECUACIÓN DE LA SUPERFICIE Y DE LAS CURVAS QUE LIMITAN LA REGIÓN, RESULTA CONVENIENTE UTILIZAR COORDENADAS POLARES, POR LO QUE LA DOBLE INTEGRAL PARA OBTENER EL VOLUMEN QUEDA COMO:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^2 \rho d\rho d\theta$$

Y AL RESOLVERLA SE LLEGA A:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^3 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{81}{4} - \frac{1}{4} \right) d\theta = 20 \int_0^{2\pi} d\theta = 20[\theta]_0^{2\pi} = 40\pi \text{ u}^3$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

MATEMÁTICAS AVANZADAS

OBTENER LOS COEFICIENTES DE EULER DE LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER, APLICANDO ELGEBRA LINEAL.

SOLUCIÓN. LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA f CON PERIODO $T = 2L$ NO ES OTRA COSA QUE UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LOS ELEMENTOS DE LA BASE

$$B = \left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{L}, \text{sen} \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \text{sen} \frac{2\pi x}{L}, \dots \right\}$$

ES DECIR,

$$f(x) = a_0(1) + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + b_1 \text{sen} \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + b_2 \text{sen} \frac{2\pi x}{L} + \dots$$

PARA LA OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES (COORDENADAS) SE HACE USO DEL TEOREMA DE ÁLGEBRA LINEAL: SEA V UN ESPACIO CON PRODUCTO INTERNO Y SEA $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots\}$ UNA BASE ORTOGONAL. ENTONCES

$$\forall \bar{v} \in V \quad (\bar{v})_B = (\alpha_i) \quad \text{donde} \quad \alpha_i = \frac{(\bar{v} | \bar{e}_i)}{(\bar{e}_i | \bar{e}_i)}$$

EN NUESTRO CASO, LA BASE B DE LAS FUNCIONES PERIODICAS ES ORTOGONAL PARA EL PRODUCTO INTERNO $(f|g) = \int_{-L}^L f(x)g(x) dx$

ENTONCES, PARA a_0 :
$$a_0 = \frac{\int_{-L}^L f(x)(1)dx}{\int_{-L}^L (1)(1)dx} = \frac{\int_{-L}^L f(x)dx}{[x]_{-L}^L} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)dx$$

AHORA, PARA a_n :
$$a_n = \frac{\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx}$$

DE DONDE
$$\int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4n\pi} \text{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right]_{-L}^L = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L = L$$

POR LO QUE:
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

POR ÚLTIMO:
$$b_n = \frac{\int_{-L}^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_{-L}^L \text{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx}$$
 ; Y DE MANERA SIMILAR
$$\int_{-L}^L \text{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = L$$

POR LO QUE:
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

PROFESOR ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

QUÍMICA

CALCULAR LA FUERZA ELECTROMOTRIZ ESTÁNDAR DE UNA PILA QUE UTILIZA LAS REACCIONES DE SEMICELDAS $Mg|Mg^{2+}$ y $Cu|Cu^{2+}$. ESCRIBIR LA ECUACIÓN DE LA REACCIÓN DE LA PILA.

RESOLUCIÓN. PARA DETERMINAR CUÁL SUSTANCIA ESTARÁ EN EL ÁNODO Y CUÁL EN EL CÁTODO, HAY QUE USAR LA REGLA DE LA DIAGONAL QUE SE BASA EN LA TABLA DE LOS POTENCIALES ESTÁNDAR DE REDUCCIÓN A $25^{\circ}C$, LA CUAL ESTABLECE QUE CUALQUIER ESPECIE QUE ESTÁ A LA IZQUIERDA DE UNA REACCIÓN DE SEMICELDA DADA, REACCIONARÁ EN FORMA ESPONTÁNEA CON LA ESPECIE QUE ESTÁ A LA DERECHA EN CUALQUIER REACCIÓN DE SEMICELDA QUE SE UBIQUE POR DEBAJO DE ÉSTA EN LA TABLA DE POTENCIALES DE REDUCCIÓN.

EN TABLAS SE OBSERVA QUE EL $Mg_{(s)}$ ESTÁ A LA DERECHA Y POR DEBAJO DEL IÓN $Cu^{2+}_{(ac)}$ COMO SE OBSERVA A CONTINUACIÓN.



$$\varepsilon^{\circ} = +0.34 [V]$$



$$\varepsilon^{\circ} = -2.37 [V]$$

DE MANERA QUE EL $Mg_{(s)}$ REACCIONARÁ CON EL IÓN $Cu^{2+}_{(ac)}$ PARA PRODUCIR $Cu_{(s)}$ y $Mg^{2+}_{(ac)}$, DE ACUERDO A LA REACCIÓN DE LA PILA SIGUIENTE:



COMO SE OBSERVA, LA SEMIREACCIÓN DEL MAGNESIO SE INVIERTE, POR LO TANTO HAY QUE CAMBIAR EL SIGNO DEL POTENCIAL RESPECTIVO, DE MANERA QUE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ DE PILA SE CALCULA DE LA MANERA SIGUIENTE:

$$E^{\circ}_{pila} = E^{\circ}_{oxidacion} + E^{\circ}_{reduccion} = E^{\circ}Cu^{2+}/Cu^{\circ} + E^{\circ}Mg/Mg^{2+}$$

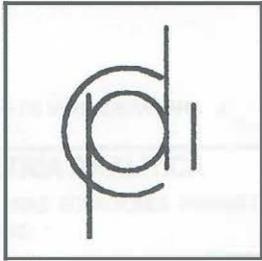
$$E_{pila} = +0.34 [V] + (+2.37) [V] = +2.71 [V]$$

OBSÉRVESE QUE EL POTENCIAL DE PILA ES POSITIVO, LO CUAL IMPLICA QUE LA REACCIÓN ES ESPONTÁNEA.

PROFESORA VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2004

NÚMERO 69

17 DE FEBRERO DE 2004

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO I

OBTENER LOS DOMINIOS Y LOS RECORRIDOS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE REAL:

$$i) f(x) = -\frac{5}{6}\sqrt{36-x^2} \quad ; \quad ii) f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 + \cos x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \frac{3\pi - 3x}{\pi - 5} & \text{si } \pi < x < 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

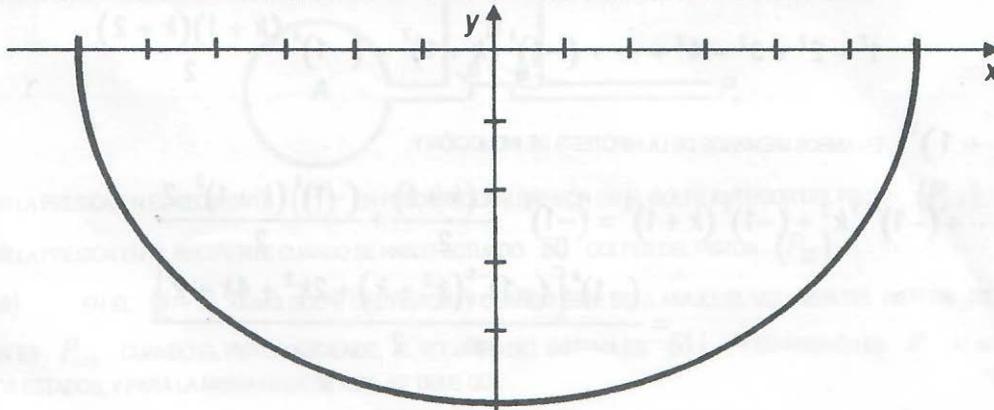
$i) f(x) = -\frac{5}{6}\sqrt{36-x^2}$ PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, LA EXPRESIÓN DEL RADICANDO NO DEBE SER NEGATIVA. LUEGO HABRÁ QUE RESOLVER LA DESIGUALDAD: $36-x^2 \geq 0$. PARA ELLO SE CONSIDERAN LAS DOS RAÍCES DE SUS FACTORES $(6-x)$ y $(6+x)$ Y SE CONSTRUYE LA SIGUIENTE TABLA:

x	(6-x)	(6+x)	(6-x)(6+x)
$(-\infty, -6)$	+	-	-
$(-6, 6)$	+	+	+
$(6, \infty)$	-	+	-

DE LA TABLA SE OBTIENE QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ESTÁ DADO POR: $D_f = [-6, 6]$. SI SE ANALIZA LA FUNCIÓN CON LA GEOMETRÍA ANALÍTICA, SE VE QUE:

$$y = -\frac{5}{6}\sqrt{36-x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{25}{36}(36-x^2) \Rightarrow 36y^2 = 900 - 25x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

QUE ES UNA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y SEMIEJES 6 y 5 RESPECTIVAMENTE EN LOS EJES "x" y "y" Y EL SIGNO 'MENOS' SEÑALA QUE ÚNICAMENTE SE TOMA LA PARTE INFERIOR DE LA CURVA. LUEGO LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ES LA DE LA SIGUIENTE FIGURA:



EL RECORRIDO DE LA FUNCIÓNES: $R_f = [-5, 0]$

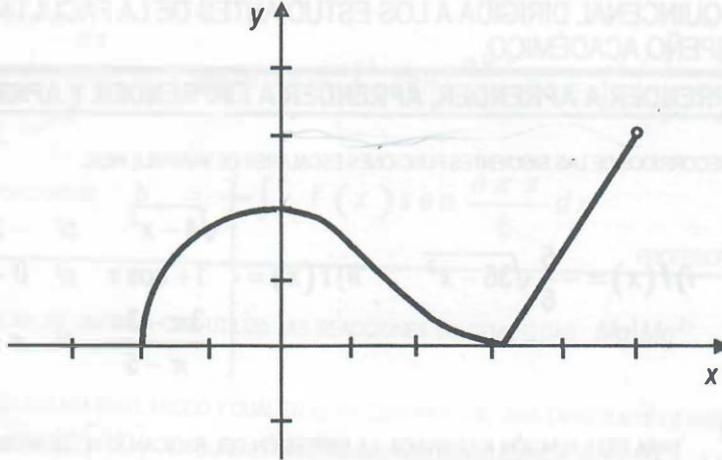
$$ii) f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 + \cos x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \frac{3\pi - 3x}{\pi - 5} & \text{si } \pi < x < 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN. LA PRIMERA REGLA DE CORESPONDENCIA ES UN SEGMENTO DE CIRCUNFERENCIA YA QUE:

$$y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow y^2 = 4-x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Y ESTA CURVA NO TIENE PROBLEMA ALGUNO EN EL INTERVALO CONSIDERADO. LA SEGUNDA REGLA DE CORRESPONDENCIA ES UNA FUNCIÓN TRASCENDENTE QUE ES CONTINUA EN SU INTERVALO DE DEFINICIÓN Y LA TERCERA REGLA ES UN SEGMENTO DE RECTA. LUEGO, SU DOMINIO ES: $D_f = [-2, 5)$

SE TRAZA LA GRÁFICA DE MANERA APROXIMADA Y:



Y EL RECORRIDO DE LA FUNCIÓN ESTÁ DADO POR: $R_f = [0, 3)$

PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

ÁLGEBRA

DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA QUE PARA TODO ENTERO POSITIVO

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

SOLUCIÓN.

PARA $n=1 \Rightarrow 1=1$ SE CUMPLE

PARA $n=k \Rightarrow 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}$... HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

PARA $n=k+1 \Rightarrow 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k+1-1} (k+1)^2 = (-1)^{k+1-1} \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

SE SUMA $(-1)^k (k+1)^2$ EN AMBOS MIEMBROS DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y:

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 &= (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(-1)^k (k+1)^2 \cdot 2}{2} \\ &= \frac{(-1)^k [(-1)^{-1} (k^2 + k) + 2k^2 + 4k + 2]}{2} \end{aligned}$$

$$= (-1)^k \frac{-k^2 - k + 2k^2 + 4k + 2}{2}$$

$$= (-1)^k \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

POR LO QUE ES VERDADERA PARA $n = k + 1$ Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN.

PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

GEOMETRÍA ANALÍTICA

OBTENER UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y LA CORRESPONDIENTE ECUACIÓN VECTORIAL DE LA CURVA "C" REPRESENTADA POR LAS ECUACIONES CARTESIANAS:

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 - z & \dots (a) \\ x^2 + y^2 = 4 & \dots (b) \end{cases}$$

RESOLUCIÓN. CON OBJETO DE QUE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS QUE SE OBTENGAN PARA LA CURVA "C" SEAN LO MÁS SENCILLAS POSIBLE, RESULTA CONVENIENTE REPRESENTAR DICHA CURVA POR MEDIO DE OTRAS SUPERFICIES. PARA ELLO, SE SUSTITUYE (a) EN (b) Y SE OBTIENE:

$$4 - z = 4 \Rightarrow z = 0$$

ASÍ, LA CURVA PUEDE SER REPRESENTADA EN FORMA CARTESIANA POR:

$$C: \begin{cases} z = 0 & \dots (A) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

POR LO QUE UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS PARA LA CURVA "C" SON:

$$C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t & ; 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

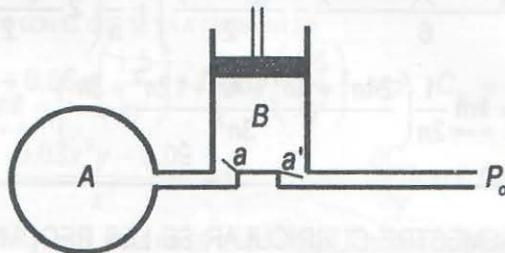
LA ECUACIÓN VECTORIAL DE LA SUPERFICIE, CORRESPONDIENTE A LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS OBTENIDAS, ES: $\vec{r}(t) = (2\cos t)\hat{i} + (2\sin t)\hat{j}$

NOTA. LA ECUACIÓN (a) REPRESENTA UN PARABOLOIDE CIRCULAR CON VÉRTICE EN $V(0,0,4)$ Y QUE ABRE EN DIRECCIÓN NEGATIVA DEL EJE "z" EL QUE ES SU EJE DE SIMETRÍA. LA ECUACIÓN (b) REPRESENTA UN CILINDRO CIRCULAR RECTO CUYO RADIO ES IGUAL A "2" Y CUYO EJE COINCIDE CON EL EJE "z". LA INTERSECCIÓN DE ESTAS DOS SUPERFICIES ES LA CURVA "C", QUE ES UNA CIRCUNFERENCIA CONTENIDA EN EL PLANO "xy", CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS Y RADIO IGUAL A "2", LO CUAL ES POSIBLE AFIRMAR A PARTIR DE LAS ECUACIONES (A).

LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

TERMODINÁMICA

PARA VACIAR UN RECIPIENTE "A" DE 50L LLENO INICIALMENTE DE AIRE A UNA PRESIÓN ATMOSFÉRICA ($P_0 = 0.78 \text{ atm}$), SE UTILIZA UNA BOMBA DE PISTÓN "B" DE 1L. LAS VÁLVULAS a y a' ASEGURAN LA CIRCULACIÓN DEL AIRE DEL RECIPIENTE A LA BOMBA Y DE ALLÍ AL EXTERIOR. UN GOLPE DEL PISTÓN CORRESPONDE AL ASCENSO DE ÉSTE (a ABIERTA, a' CERRADA), SEGUIDO POR SU DESCENSO (a CERRADA, a' ABIERTA).



a) DETERMINAR LA PRESIÓN EN EL RECIPIENTE (P_i) EN FUNCIÓN DE SU PRESIÓN EN EL GOLPE ANTERIOR DEL PISTÓN (P_{i-1})

b) DETERMINAR LA PRESIÓN EN EL RECIPIENTE CUANDO SE HAN EFECTUADO 50 GOLPES DEL PISTÓN (P_{50})

SOLUCIÓN. a) EN EL $(i-1)$ ÉSIMO GOLPE DEL PISTÓN, Y CUANDO ÉSTE ESTÁ ABAJO, EL VOLUMEN DEL SISTEMA (RECIPIENTE + BOMBA) ES 50L, Y SU PRESIÓN ES P_{i-1} . CUANDO EL PISTÓN ASCIENDE, EL VOLUMEN DEL SISTEMA ES 51L, Y SU PRESIÓN ES P_i . AL APLICAR LA LEY DE BOYLE-MARIOTTE A ESTOS DOS ESTADOS, Y PARA LA MISMA MASA DE AIRE, SE TIENE QUE:

$$P_i = \frac{50}{51} P_{i-1}$$

b) LA RELACIÓN DE RECURRENCIA ENCONTRADA ANTERIORMENTE PERMITE ESTABLECER LAS IGUALDADES SIGUIENTES:

$$P_i = x P_{i-1} ; P_{i-1} = x P_{i-2} ; P_{i-2} = x P_{i-3} \dots P_1 = x P_0 ; \text{DONDE } x = \frac{50}{51} \text{ y } P_0 \text{ ES LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA}$$

LAS CUALES DAN LUGAR A: $P_i = x^i P_0$

POR LO TANTO, $P_{50} = \left(\frac{50}{51}\right)^{50} (0.78 \text{ atm}) = 0.37 (0.78 \text{ atm}) = 0.29 \text{ atm}$

ROGELIO SOTO AYALA

CÁLCULO II

EVALUAR LA INTEGRAL DEFINIDA $\int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx$ A PARTIR DEL LÍMITE DE LA SUMA DE RIEMANN $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \Delta x$, TOMANDO EN CONSIDERACIÓN

SUBINTERVALOS IGUALES Y COMO α_i EL VALOR MEDIO DE CADA SUBINTERVALO.

SOLUCIÓN. EL INTEGRANDO ES UNA FUNCIÓN POLINOMIAL Y POR LO TANTO CONTINUA; LUEGO LA INTEGRAL EXISTE. LA LONGITUD DE CADA SUBINTERVALO ES

$\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$. LUEGO LAS ABCISAS DE LOS SUBINTERVALOS SON:

$$x_0 = 2 ; x_1 = 2 + \left(\frac{2}{n}\right) ; x_2 = 2 + 2\left(\frac{2}{n}\right) \dots x_{i-1} = 2 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) ; x_i = 2 + i\left(\frac{2}{n}\right) \dots x_n = 2 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 4$$

DE DONDE EL VALOR MEDIO DEL INTERVALO IESIMO ES:

$$\alpha_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} ; \alpha_i = \frac{2 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) + 2 + i\left(\frac{2}{n}\right)}{2} = 2 + i\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

POR LO QUE EL VALOR DE LA FUNCIÓN EN ESTE PUNTO ES:

$$f(\alpha_i) = \frac{\left[2 + i\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]^2}{4} + 1 = \frac{4 + i^2\left(\frac{4}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} + i\left(\frac{8}{n}\right) - \frac{4}{n} - i\left(\frac{4}{n^2}\right) + 4}{4} = \frac{1}{4} \left[8 + \frac{4}{n^2}(i^2 - i) + \frac{4}{n}(2i - 1) + \frac{1}{n^2} \right]$$

LUEGO EL LÍMITE QUE EVALÚA A LA INTEGRAL QUEDA COMO:

$$\begin{aligned} \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \left[8 + \frac{4}{n^2}(i^2 - i) + \frac{4}{n}(2i - 1) + \frac{1}{n^2} \right] \left(\frac{2}{n}\right) \\ \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left[8 \sum_{i=1}^n 1 + \frac{4}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i \right) + \frac{4}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1 \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left[8n + \frac{4}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{4}{n} \left(2 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) + \frac{1}{n^2} n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left[8n + \frac{2}{3n^2} (2n^3 - 2n) + 4n + \frac{1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{24n^3 + 4n^3 - 4n + 12n^3 + 3n}{3n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{40n^3 - n}{6n^3} \therefore \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

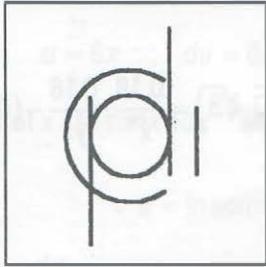
PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

TUTORÍA

A TODOS LOS ALUMNOS DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR SE LES RECOMIENDA HABLAR CON SU TUTOR E INICIAR UNA MAGNÍFICA INTERACCIÓN CON ÉL. SE TRATA DE UN ALIADO, UN AMIGO, ALGUIEN EN QUIEN CONFÍAR Y CON EL QUE SE PUEDEN TRATAR ASUNTOS ACADÉMICOS Y EXISTENCIALES. SI NO SABEN QUIÉN ES SU TUTOR VENGAN A LA COPADI Y LOS AYUDAMOS.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2004

NÚMERO 70

2 DE MARZO DE 2004

EDITORIAL

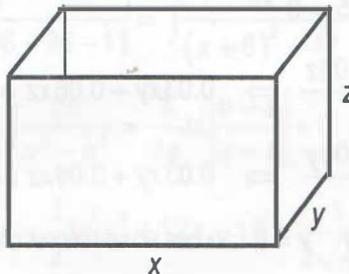
ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO III

CALCULAR LAS DIMENSIONES EXTERIORES QUE DEBERÁ TENER UNA CAJA RECTANGULAR ABIERTA CON EL ESPESOR DEL MATERIAL IGUAL A 3 cm Y EL VOLUMEN INTERIOR IGUAL A 1.5 m^3 , PARA QUE AL CONSTRUIRLO SE UTILICE LA MENOR CANTIDAD POSIBLE DE MATERIAL, LO QUE SE REFLEJARÍA EN SU COSTO. RESOLVER EL PROBLEMA SUSTITUYENDO LA RESTRICCIÓN Y CON MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

SOLUCIÓN. EL MODELO GEOMÉTRICO DEL PROBLEMA ES EL SIGUIENTE:



MÉTODO DE LA SEGUNDA DERIVADA

LA CANTIDAD DE MATERIAL SE PUEDE EXPRESAR MEDIANTE EL SIGUIENTE MODELO MATEMÁTICO "PRELIMINAR":

$$C_M = 0.03xy + 2(0.03)xz + 2(0.03)yz \quad ; \quad C_M = 0.03xy + 0.06xz + 0.06yz$$

Y DEL VOLUMEN REQUERIDO SE OBTIENE QUE: $xyz = 1.5 \Rightarrow z = \frac{1.5}{xy}$

POR LO QUE EL MODELO MATEMÁTICO DEFINITIVO CON EL QUE SE VA A TRABAJAR ES:

$$C_M = 0.03xy + 0.06x\left(\frac{1.5}{xy}\right) + 0.06y\left(\frac{1.5}{xy}\right) \Rightarrow C_M = 0.03xy + \frac{0.09}{y} + \frac{0.09}{x}$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial x} = 0.03y - \frac{0.09}{x^2} \quad ; \quad \frac{0.03x^2y - 0.09}{x^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial C_M}{\partial y} = 0.03x - \frac{0.09}{y^2} \quad ; \quad \frac{0.03xy^2 - 0.09}{y^2} = 0$$

NO SE CONSIDERAN LOS VALORES $x = 0$ y $y = 0$ PUES NO SE TENDRÍA CAJA. LOS PUNTOS CRÍTICOS SE CALCULAN COMO SIGUE:

$$0.03x^2y - 0.09 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{x^2} \quad ; \quad 0.03xy^2 - 0.09 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{x}$$

DE ESTAS DOS ECUACIONES SE TIENE QUE:

$$\frac{9}{x^4} = \frac{3}{x} \Rightarrow x^3 = 3 \quad \therefore x = \sqrt[3]{3} \quad ; \quad y = \frac{3}{(\sqrt[3]{3})^2} \quad \therefore y = \sqrt[3]{3} \Rightarrow z = \frac{1.5}{(\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3})} = \frac{1.5}{\sqrt[3]{9}}$$

POR LO QUE EL PUNTO CRÍTICO QUE RESUELVE EL PROBLEMA PLANTEADO ES $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$.

EL PROBLEMA YA ESTÁ RESUELTO Y POR LO TANTO SE TIENE UN MÍNIMO EN LA CANTIDAD DE MATERIAL, CON LAS DIMENSIONES OBTENIDAS DE SUMAR LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA MAS DOS VECES EN CADA UNA DE LA DE LOS LADOS Y UNA EN EL FONDO, EL ESPESOR DEL MATERIAL. ASÍ,

$$largo = 2(0.03) + \sqrt[3]{3} \approx 1.5 \text{ m} ; ancho = 2(0.03) + \sqrt[3]{3} \approx 1.5 \text{ m} ; altura = 1(0.03) + \frac{1.5}{\sqrt[3]{9}} \approx 0.75 \text{ m}$$

SI PARA PRACTICAR SE QUISIERA COMPROBAR QUE EL PUNTO CRÍTICO CONDUCE A UN MÍNIMO SE HARÍA LO SIGUIENTE:
SE CALCULAN LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES Y LA MIXTA, Y SE PROCEDE COMO SIGUE:

$$\frac{\partial^2 C_M}{\partial x^2} = \frac{0.18}{x^3} ; \frac{\partial^2 C_M}{\partial y^2} = \frac{0.18}{y^3} ; \frac{\partial^2 C_M}{\partial y \partial x} = 0.03 ; g(x,y) = \frac{\partial^2 C_M}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 C_M}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 C_M}{\partial y \partial x} \right)^2 ; g(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}) = \frac{0.18}{x^3} \cdot \frac{0.18}{y^3} - (0.03)^2$$

$$g(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}) = 0.0027 > 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 C_M}{\partial x^2} \Big|_{(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})} = 0.06 > 0$$

POR LO TANTO, EFECTIVAMENTE SE TIENE UN MÍNIMO EN LA CANTIDAD DE MATERIAL.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

SI SE TOMA EN CONSIDERACIÓN LA FUNCIÓN OBJETIVO " C_M " Y LA RESTRICCIÓN $V = 1.5 \text{ m}^3$, SE PROCEDE COMO SIGUE

$$L = 0.03xy + 2(0.03)xz + 2(0.03)yz + \lambda(xyz - 1.5) \Rightarrow L = 0.03xy + 0.06xz + 0.06yz + \lambda(xyz - 1.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0.03y + 0.06z + \lambda yz = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{0.03y + 0.06z}{yz}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0.03x + 0.06z + \lambda xz = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{0.03x + 0.06z}{xz}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0.06x + 0.06y + \lambda xy = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{0.06x + 0.06y}{xy}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xyz - 1.5 = 0$$

$$-\frac{0.03y + 0.06z}{yz} = -\frac{0.03x + 0.06z}{xz} \Rightarrow 0.03xy + 0.06xz = 0.03xy + 0.06yz \Rightarrow y = x$$

$$-\frac{0.03y + 0.06z}{yz} = -\frac{0.06x + 0.06y}{xy} \Rightarrow 0.03xy + 0.06xz = 0.06xz + 0.06yz \Rightarrow z = \frac{x}{2}$$

(EN AMBOS RESULTADOS SE OMITEN LOS VALORES $z = 0$ y $y = 0$, YA QUE NO SE TENDRÍA CAJA).

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xyz - 1.5 = 0 \Rightarrow x^2 \frac{x}{2} = 1.5 \quad x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3} ; y = \sqrt[3]{3} ; z = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

LUEGO, EL PUNTO CRÍTICO OBTENIDO QUE CONDUCE AL COSTO MÍNIMO ES: $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3})$, Y LAS DIMENSIONES DE LA CAJA SON:

$$largo = 2(0.03) + \sqrt[3]{3} \approx 1.5 \text{ m} ; ancho = 2(0.03) + \sqrt[3]{3} \approx 1.5 \text{ m} ; altura = 1(0.03) + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \approx 0.75 \text{ m}$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES:

$$i) \int \frac{\csc \frac{1}{x} \cot \frac{1}{x}}{x^2} dx ; ii) \int \frac{dx}{1 - \sin 6x} ; iii) \int (\cot x) \ln \sin x dx ; iv) \int \frac{dx}{e^{3x} - 2} ; v) \int \frac{x+5}{x^2 + 12x - 11} dx$$

SOLUCIÓN.

$$i) \int \frac{\csc \frac{1}{x} \cot \frac{1}{x}}{x^2} dx \quad \text{SE REALIZA EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE CON LO QUE PUEDE RESOLVERSE FÁCILMENTE LA INTEGRAL:}$$

$$u = \frac{1}{x} ; du = -\frac{dx}{x^2} ; - \int \csc u \cot u du = \csc u + C = \csc \frac{1}{x} + C$$

$$ii) \int \frac{dx}{1 - \sin 6x} \quad \text{SE MULTIPLICA Y DIVIDE POR EL BINOMIO CONJUGADO DEL DENOMINADOR Y SE LLEGA A INTEGRALES CONOCIDAS A TRAVÉS DE IDENTIDADES$$

TRIGONOMÉTRICAS Y SIMPLIFICACIONES ALGEBRAICAS. ASÍ,

$$\int \frac{1}{1-\sin 6x} \cdot \frac{1+\sin 6x}{1+\sin 6x} dx = \int \frac{1+\sin 6x}{1-\sin^2 6x} dx = \int \frac{1+\sin 6x}{\cos^2 6x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 6x} + \frac{\sin 6x}{\cos^2 6x} \right) dx = \int (\sec^2 6x + \sec 6x \tan 6x) dx$$

$$u = 6x \quad ; \quad du = 6dx \quad ; \quad \frac{1}{6} \int (\sec^2 u + \sec u \tan u) du = \frac{1}{6} (\tan u + \sec u) + C = \frac{1}{6} (\tan 6x + \sec 6x) + C$$

iii) $\int \cot x (\ln \sin x) dx$. MEDIANTE EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE SE RESUELVE FÁCILMENTE LA INTEGRAL:

$$u = \ln \sin x \quad ; \quad du = \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad ; \quad du = \cot x dx \quad ; \quad \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln \sin x)^2}{2} + C$$

iv) $\int \frac{dx}{e^{3x}-2}$. SE MULTIPLICA Y DIVIDE POR e^{-3x} Y DESPUÉS SE CALCULA A TRAVÉS DE UN CAMBIO DE VARIABLE.

$$\int \frac{1}{e^{3x}-2} \cdot \frac{e^{-3x}}{e^{-3x}} dx = \int \frac{e^{-3x} dx}{1-2e^{-3x}} \quad ; \quad u = 1-2e^{-3x} \quad ; \quad du = 6e^{-3x} dx \quad ; \quad \frac{1}{6} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{6} \ln|u| + C = \frac{1}{6} \ln|1-2e^{-3x}| + C$$

v) $\int \frac{x+5}{x^2+12x-11} dx$. $u = x^2+12x-11$; $du = (2x+12)dx = 2(x+6)dx$

SE EXPRESA EL NUMERADOR COMO SIGUE Y SE DIVIDE LA INTEGRAL EN DOS. LA PRIMERA SE INTEGRA MEDIANTE EL CAMBIO DE VARIABLE PROPUESTO Y LA SEGUNDA SE INTEGRA A TRAVÉS DE COMPLETAR EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO Y APLICANDO UNA FÓRMULA DE INTEGRACIÓN.

$$\int \frac{x+5}{x^2+12x-11} dx = \int \frac{x+6-1}{x^2+12x-11} dx = \int \frac{x+6}{x^2+12x-11} dx - \int \frac{dx}{x^2+12x-11}$$

RESOLUCIÓN DE $\int \frac{x+6}{x^2+12x-11} dx$; $\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2+12x-11| + C$

RESOLUCIÓN DE $\int \frac{dx}{x^2+12x-11} = \int \frac{dx}{x^2+12x+36-36-11} = \int \frac{dx}{(x+6)^2-47}$; $u^2 = (x+6)^2$; $u = x+6$; $du = dx$

$$a^2 = 47 \quad ; \quad a = \sqrt{47} \quad ; \quad \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{47}} \ln \left| \frac{x+6-\sqrt{47}}{x+6+\sqrt{47}} \right| + C$$

$$\therefore \int \frac{x+5}{x^2+12x-11} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+12x-11| + \frac{1}{2\sqrt{47}} \ln \left| \frac{x+6-\sqrt{47}}{x+6+\sqrt{47}} \right| + C$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

ÁLGEBRA LINEAL

DETERMINAR SI EL CONJUNTO $A = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ ES UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE \mathbb{R} , CON LAS LEYES DE COMPOSICIÓN DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR DEFINIDOS POR

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', 0)$$

$$c(x, y, z) = (cx, cy, 0)$$

EN CASO DE NO SERLO, DECIR QUÉ AXIOMAS NO SE CUMPLEN

SOLUCIÓN.

i) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in A : \bar{x} + \bar{y} \in A$; SEAN $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$; $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in A$.

ii) $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in A : \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$; SEAN $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$

$$\begin{aligned} \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) &= (x_1, x_2, x_3) + [(y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)] = (x_1, x_2, x_3) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, 0) = [x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), 0] \\ &= [(x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, 0] = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) + (z_1, z_2, z_3) = [(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] + (z_1, z_2, z_3) \\ &= (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} \end{aligned}$$

iii) $\exists \bar{e} \in A$ TAL QUE $\bar{x} + \bar{e} = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in A$

SEA $\bar{e} = (e_1, e_2, e_3)$

$$\bar{x} + \bar{e} = (x_1, x_2, x_3) + (e_1, e_2, e_3) = (x_1 + e_1, x_2 + e_2, 0) = (x_1, x_2, x_3)$$

ENTONCES

$$x_1 + e_1 = x_1 \Rightarrow e_1 = 0$$

$$x_2 + e_2 = x_2 \Rightarrow e_2 = 0$$

$$0 = x_3 \Rightarrow x_3 = 0$$

LUEGO $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = 0$; $\theta_3 \in \square$

NO EXISTE IDÉNTICO YA QUE, POR EJEMPLO, SI $\bar{e} = (0, 0, 4)$

$$(x_1, x_2, x_3) + (0, 0, 4) = (x_1, x_2, 0)$$

ES DECIR $\bar{x} + \bar{e} \neq \bar{x}$

O BIENSI $\bar{e} = (0, 0, -5)$

$$\bar{x} + \bar{e} = (x_1, x_2, x_3) + (0, 0, -5) = (x_1, x_2, 0) \neq \bar{x}$$

IV) $\forall \bar{x} \in A \quad \exists -\bar{x} \in A$ TAL QUE $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{e}$

NO EXISTEN ELEMENTOS INVERSOS PORQUE NO EXISTE ELEMENTO INVERSO

v) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in A : \bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, 0) = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3) = \bar{y} + \bar{x}$$

vi) $\forall \bar{x} \in A; \alpha \in \square : \alpha \bar{x} \in A$

$$\alpha \bar{x} = \alpha (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0) \in A$$

vii) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in A; \alpha \in \mathbb{R} : \alpha (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}$

$$\begin{aligned} \alpha (\bar{x} + \bar{y}) &= \alpha [(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] = \alpha (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) = [\alpha (x_1 + y_1), \alpha (x_2 + y_2), 0] \\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, 0) = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0) + (\alpha y_1, \alpha y_2, 0) = \alpha (x_1, x_2, x_3) + \alpha (y_1, y_2, y_3) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y} \end{aligned}$$

viii) $\forall \alpha, \beta \in \square; \bar{x} \in A : (\alpha + \beta) \bar{x} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \bar{x} &= (\alpha + \beta) (x_1, x_2, x_3) = [(\alpha + \beta) x_1, (\alpha + \beta) x_2, 0] = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, 0) = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0) + (\beta x_1, \beta x_2, 0) \\ &= \alpha (x_1, x_2, x_3) + \beta (x_1, x_2, x_3) = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x} \end{aligned}$$

ix) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \bar{x} \in A : \alpha (\beta \bar{x}) = (\alpha \beta) \bar{x}$

$$\alpha (\beta \bar{x}) = \alpha [\beta (x_1, x_2, x_3)] = \alpha (\beta x_1, \beta x_2, 0) = (\alpha \beta x_1, \alpha \beta x_2, 0) = (\alpha \beta) (x_1, x_2, x_3) = (\alpha \beta) \bar{x}$$

x) CON LA UNIDAD DE $\mathbb{R} \quad 1 \bar{x} = \bar{x}$

$$1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0) \neq (x_1, x_2, x_3) \quad \forall \bar{x} \in A$$

A NO ES ESPACIO VECTORIAL SOBRE \mathbb{R} YA QUE NO SE CUMPLEN LOS AXIOMAS (III), (IV) Y (X)

PROFESOR JUAN VELÁSQUEZ TORRES

CULTURA

REFLEXIÓN

"DEBEMOS ADQUIRIR CONOCIMIENTO PARA ELEGIR EL BIEN, PERO NINGÚN CONOCIMIENTO NOS AYUDARÁ SI HEMOS PERDIDO LA CAPACIDAD DE CONMOVERNOS CON LA DESGRACIA DE OTRO SER HUMANO, CON LA MIRADA AMISTOSA DE OTRA PERSONA, CON EL CANTO DE UN PÁJARO, CON EL VERDOR DEL CÉSPED. SI EL SER HUMANO SE HACE INDIFERENTE A LA VIDA, NO HAY NINGUNA ESPERANZA DE QUE PUEDA ELEGIR EL BIEN. ENTONCES, CIERTAMENTE, SU CORAZÓN SE HABRÁ ENDURECIDO TANTO, QUE SU "VIDA" HABRÁ TERMINADO".

ERICH FROMM

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2004

NÚMERO 71

17 DE MARZO DE 2004

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ¡AÚN ES TIEMPO DE RECUPERAR TUS ASIGNATURAS SI LAS HAS DESCUIDADO. PUEDES CERRAR EL SEMESTRE "A *TAMBOR BATIENTE*". ES CUESTIÓN DE PROPONÉRTELO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ÁLGEBRA

RESUELVA EL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

$$(2 - 2i)x + (1 + i)y = 9 + i$$

$$(3 + i)x + (1 - 3i)y = -7 + 11i$$

DONDE $x, y \in \mathbb{C}$

SOLUCIÓN:

DADO QUE $x, y \in \mathbb{C}$; AMBAS VARIABLES TIENEN PARTE REAL Y PARTE IMAGINARIA; ENTONCES SI $x = x_1 + x_2i$, $y = y_1 + y_2i$

$$(2 - 2i)(x_1 + x_2i) + (1 + i)(y_1 + y_2i) = 9 + i$$

$$(3 + i)(x_1 + x_2i) + (1 - 3i)(y_1 + y_2i) = -7 + 11i$$

SE EFECTÚAN LAS OPERACIONES CORRESPONDIENTES Y:

$$2x_1 + 2x_2i - 2x_2i + 2x_2 + y_1 + y_2i + y_1i - y_2 = 9 + i$$

$$3x_1 + 3x_2i + x_2i - x_2 + y_1 + y_2i - 3y_1i + 3y_2 = -7 + 11i$$

SE AGRUPAN TÉRMINOS Y:

$$(2x_1 + 2x_2 + y_1 - y_2) + (-2x_2 + 2x_2 + y_1 + y_2)i = 9 + i$$

$$(3x_1 - x_2 + y_1 + 3y_2) + (x_2 + 3x_2 - 3y_1 + y_2)i = -7 + 11i$$

POR IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS:

$$2x_1 + 2x_2 + y_1 - y_2 = 9$$

$$-2x_2 + 2x_2 + y_1 + y_2 = 1$$

$$3x_1 - x_2 + y_1 + 3y_2 = -7$$

$$x_1 + 3x_2 - 3y_1 + y_2 = 11$$

AHORA SE UTILIZA EL MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSS:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 11 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & -4 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 8 & -5 & 3 & 23 \\ 0 & -10 & 10 & 0 & -40 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & -3 & -13 \\ 0 & 8 & -5 & 3 & 23 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

EL SISTEMA EQUIVALENTE ES:

$$x_1 + 3x_2 - 3y_1 + y_2 = 11 \quad \dots \quad (1)$$

$$x_2 - y_1 = 4 \quad \dots \quad (2)$$

$$y_1 - y_2 = 1 \quad \dots \quad (3)$$

$$y_2 = -2 \quad \dots \quad (4)$$

EN (4) YASE TIENE EL VALOR DE y_2 ; SE LLEVA ESTE VALOR A (3) Y SE OBTIENE: $y_1 + 2 = 1 \therefore y_1 = -1$

EN (2): $x_2 + 1 = 4 \therefore x_2 = 3$; CON x_2, y_1, y_2 EN (1): $x_1 + 3(3) - 3(-1) + (-2) = 11 \therefore x_1 = 1$

ENTONCES:

$$x = 1 + 3i$$

$$y = -1 - 2i$$

PROFESOR ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

QUÍMICA

BIBLIOGRAFÍA: BROWN, THEODORE; LEMAY, EUGENE Y BURSTEN, BRUCE.

"QUÍMICA. LA CIENCIA CENTRAL"

PEARSON, PRENTICE HALL, 9ª EDICIÓN,

MÉXICO, 2004, P. 210

PROBLEMA.

USE LA RELACIÓN DE DE BROGLIE PARA DETERMINAR LA LONGITUD DE ONDA DE LOS OBJETOS SIGUIENTES:

a) UNA PERSONA DE $85[\text{kg}]$ QUE ESQUÍA A $50 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$.

b) UNA BALA DE $10[\text{g}]$ DISPARADA A $250 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$.

c) EL ELECTRÓN DE UN IÓN DE Li^{2+} QUE SE MUEVE A $2.5 \times 10^5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$.

ANALICE LOS RESULTADOS Y CONCLUYA.

RESOLUCIÓN. LA LONGITUD DE ONDA DE UNA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO ESTÁ DADA POR LA ECUACIÓN SIGUIENTE:

$$\lambda = \frac{h}{mV}, h = 6.6261 \times 10^{-34} [\text{Js}]$$

EN DONDE λ ES LA LONGITUD DE ONDA, h ES LA CONSTANTE DE PLANK, m ES LA MASA Y V ES LA VELOCIDAD. DE MANERA QUE PARA CALCULAR λ , BASTA CON SUSTITUIR LAS CANTIDADES CONOCIDAS DE h , m Y V . SE RECOMIENDA TRABAJAR CON LAS UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL.

EN EL INCISO (A) HAY QUE CONVERTIR LAS UNIDADES DE LA VELOCIDAD A METROS EN CADA SEGUNDO:

$$V = 50 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] \left[\frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \right] \left[\frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \right] = 13.8888 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

AL SUSTITUIR EN LA FÓRMULA SE TIENE:

$$\lambda = \frac{6.6261 \times 10^{-34} [\text{Js}]}{85[\text{kg}] \left(13.8888 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \right)} = 5.6127 \times 10^{-37} [\text{m}]$$

EN EL INCISO (B) HAY QUE CONVERTIR LAS UNIDADES DE LA MASA A KILOGRAMOS:

$$m = 10 [\text{g}] \left[\frac{1\text{kg}}{1000\text{g}} \right] = 0.01 [\text{kg}]$$

SE SUSTITUYE EN LA FÓRMULA Y SE TIENE QUE:

$$\lambda = \frac{6.6261 \times 10^{-34} [\text{Js}]}{0.01[\text{kg}] \left(250 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \right)} = 2.6504 \times 10^{-34} [\text{m}]$$

EN EL INCISO (C) NO SE PROPORCIONA LA MASA DEL ELECTRÓN, SIN EMBARGO, PUEDE OBTENERSE DE TABLAS, DE MANERA QUE AL SUSTITUIR EN LA FÓRMULA SE TIENE:

$$\lambda = \frac{6.6261 \times 10^{-34} [\text{Js}]}{9.1094 \times 10^{-31} [\text{kg}] \left(2.5 \times 10^5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \right)} = 2.9096 \times 10^{-9} [\text{m}]$$

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES:

TODAS LAS PARTÍCULAS EN MOVIMIENTO LLEVAN ASOCIADA UNA LONGITUD DE ONDA; SIN EMBARGO, ÉSTA ES IMPERCEPTIBLE PARA CUERPOS GRANDES; TAL ES EL CASO DE LA PERSONA Y LA BALA, CUYAS LONGITUDES DE ONDA SON PEQUEÑAS PARA QUE PUEDAN DETECTARSE.

EN EL CASO DEL ELECTRÓN, SE TIENE UNA LONGITUD DE ONDA MÁS GRANDE EN COMPARACIÓN CON LAS ANTERIORES, LO CUAL PRUEBA QUE LA LONGITUD DE ONDA ASOCIADA A PARTÍCULAS PEQUEÑAS ES MAYOR Y POR LO TANTO, PUEDE DETECTARSE. LA TEORÍA DE DE BROGLIE SE APLICA PARA PARTÍCULAS PEQUEÑAS.

PROFESORA VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEA EL PUNTO $A(6, 225^\circ, 135^\circ)$ EN COORDENADAS ESFÉRICAS.

OBTENER

- LAS COORDENADAS ESFÉRICAS DEL PUNTO B , SIMÉTRICO DE A RESPECTO AL EJE Z ,
- LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS DEL PUNTO C , SIMÉTRICO DE A RESPECTO AL PLANO xz , Y
- LAS COORDENADAS CARTESIANAS DEL PUNTO A

RESOLUCIÓN.

- AL SER SIMÉTRICOS RESPECTO AL EJE Z , EL PUNTO A Y EL PUNTO B SE LOCALIZAN SOBRE LA MISMA ESFERA.

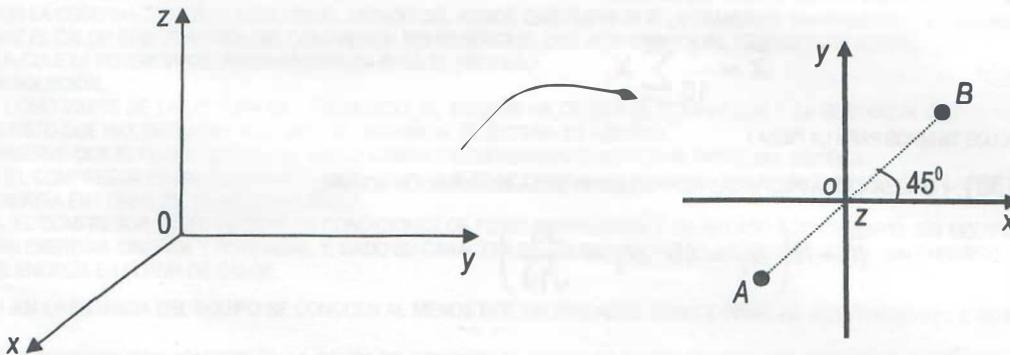
$$\therefore \rho_A = \rho_B = 6$$

POR SUS VALORES ANGULARES, EL PUNTO A SE LOCALIZA EN EL OCTANTE CUYAS 3 COORDENADAS CARTESIANAS SON NEGATIVAS, (ALGUNOS AUTORES LOS NUMERAN Y ESTE HA RECIBIDO EL NÚMERO 7, PERO NO ES GENERALIZADO).

VISTO DE PLANTA EL PUNTO A ESTARÍA EN EL TERCER CUADRANTE Y EL PUNTO B EN EL PRIMERO

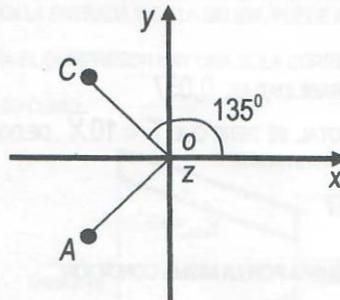
$$\therefore \theta_B = 45^\circ$$

$$y \quad \phi_B = \phi_A = 135^\circ$$



$$\therefore B(6, 45^\circ, 135^\circ)$$

- DE MANERA SEMEJANTE, EL PUNTO C QUEDA LOCALIZADO EN EL SEGUNDO CUADRANTE



$$\left. \begin{aligned} x_A &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3 \\ y_A &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3 \end{aligned} \right\} \therefore r_A = 3\sqrt{2} = r_C$$

$$\theta_C = \operatorname{ang} \tan \frac{3}{-3} = 135^\circ \quad ; \quad z_A = z_C = \rho \cos \phi = 6 \cos(135^\circ) = 6 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -3\sqrt{2}$$

$$\therefore C(3\sqrt{2}, 135^\circ, -3\sqrt{2})$$

c) $A(6, 225^\circ, 135^\circ)$: MEDIANTE LAS FÓRMULAS DE CONVERSIÓN:

$$x_A = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3 \quad y_A = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3$$

$$z_A = \rho \cos \phi = 6 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -3\sqrt{2} \quad \therefore \quad A(-3, -3, -3\sqrt{2})$$

PROFESOR FRANCISCO JOSÉ CASTILLO CORTÉS

PROBABILIDAD

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

EL TIEMPO PARA QUE EL SISTEMA AUTOMATIZADO DE UNA BODEGA LOCALICE UNA PIEZA TIENE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL CON UNA MEDIA DE 45 SEGUNDOS Y UNA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE 30 SEGUNDOS. SUPÓNGASE QUE SE HACEN PEDIDOS INDEPENDIENTES DE 10 PIEZAS.

- OBTENER LA PROBABILIDAD DE QUE EL TIEMPO PROMEDIO PARA LOCALIZAR LAS 10 PIEZAS EXCEDA 60 SEGUNDOS.
- DETERMINAR LA PROBABILIDAD DE QUE EL TIEMPO TOTAL PARA LOCALIZAR LAS 10 PIEZAS EXCEDA 600 SEGUNDOS.

RESOLUCIÓN

A) SEA \bar{X} LA VARIABLE ALEATORIA QUE DENOTA EL PROMEDIO DE LOS 10 TIEMPOS, ESTO ES:

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$$

DONDE $X_i, i = 1, 2, \dots, 10$ REPRESENTAN LOS TIEMPOS PARA LA PIEZA i .

PUESTO QUE $X_i \sim N(\mu_x = 45, \sigma_x = 30)$, Y UTILIZANDO LA PROPIEDAD REPRODUCTIVA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL,

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}} = 45, \sigma_{\bar{X}} = \frac{30}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\text{POR LO QUE } P(\bar{X} > 60) = P\left(Z > \frac{60 - 45}{\frac{30}{\sqrt{10}}}\right) = P(Z > 1.58) = 0.057$$

UTILIZANDO TABLAS DE DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR, LA PROBABILIDAD ES: 0.057

B) SEA T LA VARIABLE ALEATORIA QUE REPRESENTA EL TIEMPO TOTAL, SE TIENE QUE $T = 10\bar{X}$, DE DONDE

$$P(T > 600) = P(10\bar{X} > 600) = P(\bar{X} > 60) = 0.057$$

LA PROBABILIDAD ES LA MISMA PUESTO QUE EN REALIDAD SE PREGUNTA POR LA MISMA CONDICIÓN.

PROFESOR LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2004

NÚMERO 72

2 DE ABRIL DE 2004

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

TERMODINÁMICA

EJERCICIO DE LA 1ª LEY DE LA TERMODINÁMICA

UN COMPRESOR QUE CUENTA CON UNA CAMISA DE ENFRIAMIENTO RECIBE $48 \left[\frac{\text{kg}}{\text{min}} \right]$ DE UNA SUSTANCIA COMPRESIBLE Y SIMPLE. EL COMPRESOR FUNCIONA EN CONDICIONES DE ESTADO ESTACIONARIO Y DE FLUJO PERMANENTE.

LAS PROPIEDADES DEL FLUJO EN LA ENTRADA SON $77(\text{kPa})$, $1.24 \left[\frac{\text{l}}{\text{g}} \right]$ Y $324.52 \left[\frac{\text{J}}{\text{g}} \right]$ DE ENERGÍA INTERNA ESPECÍFICA, MIENTRAS QUE EN LA SALIDA SON

$390[\text{kPa}]$, $83.2 \left[\frac{\text{l}}{\text{kg}} \right]$ Y $412.55 \left[\frac{\text{J}}{\text{g}} \right]$ DE ENERGÍA INTERNA ESPECÍFICA.

POR LA OBSERVACIÓN DEL CAMBIO EN EL ESTADO DEL FLUIDO QUE FLUYE POR LA CAMISA DE ENFRIAMIENTO, EL INGENIERO RESPONSABLE DE LA OPERACIÓN AFIRMA QUE EL CALOR QUE SE RETIRA DEL COMPRESOR REPRESENTA EL DIEZ POR CIENTO DEL TRABAJO QUE ADMITE.

CALCULE LA POTENCIA MECÁNICA NECESARIA PARA EL PROCESO.

RESOLUCIÓN.

I. COMO PARTE DE LA LECTURA DEL ENUNCIADO, EL SISTEMA HA DE SER EL COMPRESOR Y LA SUSTANCIA SIMPLE Y COMPRESIBLE QUE FLUYE POR SU INTERIOR. PUESTO QUE HAY ENTRADAS Y SALIDAS DE SUSTANCIA, EL SISTEMA ES ABIERTO.

OBSERVE QUE EL FLUIDO QUE FLUYE POR LA CAMISA DE ENFRIAMIENTO NO FORMA PARTE DEL SISTEMA.

II. EL COMPRESOR ES UN EQUIPO MECÁNICO, EN EL QUE SE MODIFICAN LAS PROPIEDADES TERMODINÁMICAS DE LA SUSTANCIA DE INTERÉS GRACIAS A UN APORTE DE ENERGÍA EN FORMA DE TRABAJO MECÁNICO.

III. EL COMPRESOR SUELE OPERAR EN CONDICIONES DE FLUJO PERMANENTE Y DE ESTADO ESTACIONARIO, SIN MODIFICACIONES APRECIABLES EN LOS VALORES DE LAS ENERGÍAS CINÉTICA Y POTENCIAL, Y, DADO SU CARÁCTER DE EQUIPO MECÁNICO, ADIABÁTICAMENTE. SIN EMBARGO, EL ENUNCIADO INDICA QUE HAY TRANSMISIÓN DE ENERGÍA EN FORMA DE CALOR.

IV. EN LA ENTRADA DEL EQUIPO SE CONOCEN AL MENOS DOS PROPIEDADES TERMODINÁMICAS INDEPENDIENTES E INTENSIVAS (P, v, u) , POR LO QUE EL ESTADO

ESTÁ DEFINIDO. SIMILARMENTE EN LA SALIDA SE CONOCEN AL MENOS DOS PROPIEDADES TERMODINÁMICAS INDEPENDIENTES E INTENSIVAS, DE NUEVO (P, v, u) .

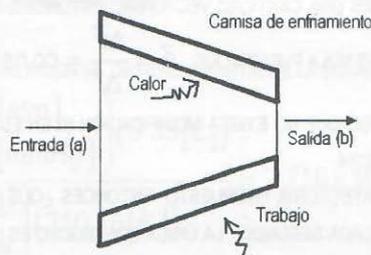
POR LO QUE EL ESTADO TAMBIÉN ESTÁ DEFINIDO.

AL ANALIZAR LOS DATOS, SE DETERMINA QUE, EN EFECTO, EL EQUIPO FUNCIONA EN CONDICIONES DE ESTADO ESTACIONARIO, PUES LOS VALORES DE LAS PROPIEDADES EN LA ENTRADA Y EN LA SALIDA NO VARIAN CON RESPECTO DEL TIEMPO. PARA QUE HAYA FUNCIONAMIENTO DE ESTADO ESTACIONARIO SUELE NECESITARSE QUE HAYA CONDICIONES DE FLUJO PERMANENTE, COMO SE SUGIERE EN EL ENUNCIADO.

AL TENER LOS ESTADOS TERMODINÁMICOS DE EQUILIBRIO EN LA ENTRADA Y EN LA SALIDA, PUEDE APLICARSE EL MÉTODO DE LA TERMODINÁMICA CLÁSICA.

V. DE LA LECTURA DEL ENUNCIADO SE ESTABLECE QUE PARA EL COMPRESOR HAY UNA SOLA CORRIENTE DE ENTRADA Y UNA SOLA CORRIENTE DE SALIDA.

SI SE DIBUJA UN ESQUEMA DE LA SITUACIÓN SE TENDRÁ ALGO COMO



POR LAS OBSERVACIONES (V) Y (III), EL BALANCE DE MASA SE REDUCE A $\dot{m}_a - \dot{m}_b = 0$

EL GASTO MÁSICO EN LA ENTRADA (Y EN LA SALIDA) ES $48 \left[\frac{\text{kg}}{\text{min}} \right]$. ES DECIR, $\dot{m}_a = \dot{m}_b = \dot{m}$, $\dot{m} = 48 \left[\frac{\text{kg}}{\text{min}} \right]$

POR LAS OBSERVACIONES (III), EL BALANCE DE ENERGÍA SE REDUCE A $\dot{m}_a(h_a) - \dot{m}_b(h_b) + \{\dot{Q}\} + \{\dot{W}\} = 0$

POR OBSERVACIÓN DEL INGENIERO, LA POTENCIA CALORÍFICA SALE DEL SISTEMA, PUES SE ENVÍA AL FLUIDO DE LA CAMISA DE ENFRIAMIENTO, Y ADEMÁS VALE EL 10[%] DE LA POTENCIA MECÁNICA QUE RECIBE EL COMPRESOR, $\{\dot{Q}\} = -0.1\{\dot{W}\}$

POR LO QUE EL BALANCE DE ENERGÍA QUEDA COMO $\dot{m}(h_a - h_b) - 0.1\{\dot{W}\} + \{\dot{W}\} = 0$

AL OPERAR PARA CONSEGUIR EL DESPEJE DE LA POTENCIA MECÁNICA, SE LLEGA A $\{\dot{W}\} = \frac{\dot{m}(h_b - h_a)}{0.9}$

EN LA INFORMACIÓN NO APARECE DIRECTAMENTE EL VALOR DE NINGUNA DE LAS ENTALPIAS ESPECÍFICAS, PERO PUEDEN CALCULARSE DE ACUERDO CON LA DEFINICIÓN:

$$h_a = u_a + (Pv)_a = 324.52 \left[\frac{\text{J}}{\text{g}} \right] + \left(77 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right] 1.24 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \right) = 420 \left[\frac{\text{J}}{\text{g}} \right]$$

$$h_b = u_b + (Pv)_b = 412.55 \left[\frac{\text{J}}{\text{g}} \right] + \left(390 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3} \right] 8.32 \times 10^{-2} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \right) = 444.998 \left[\frac{\text{J}}{\text{g}} \right]$$

AHORA NO QUEDA SINO SUSTITUIR LOS VALORES EN LA ECUACIÓN PARA LA POTENCIA

$$\{\dot{W}\} = \frac{0.8 \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \left(444.998 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] - 420 \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right] \right)}{0.9} = 22.2204 \text{ [kW]}$$

EL RESULTADO INDICA QUE LA POTENCIA MECÁNICA HA DE INGRESAR EN EL COMPRESOR.

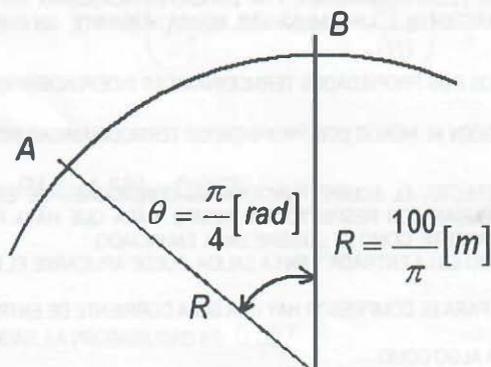
COMO EJERCICIO ADICIONAL, SE SUGIERE QUE EL LECTOR CORROBORE CADA UNA DE LAS CONVERSIONES DE UNIDADES, ADEMÁS DE QUE RECALCULE TODAS Y CADA UNA DE LAS OPERACIONES QUE SE PRESENTAN.

PROFESOR FÉLIX NÚÑEZ OROZCO

CINEMÁTICA

EN EL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS, LOS TEXTOS O LIBROS EMPLEAN DIVERSOS TÉRMINOS COMO VELOCIDAD, ACELERACIÓN, RAPIDEZ, DISTANCIA, ETC., LOS CUALES PUEDEN CAUSAR CONFUSIÓN AL SER EMPLEADOS EN LA REDACCIÓN DE EJERCICIOS. COMO EJEMPLO CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE ENUNCIADO.

UN MÓVIL SE MUEVE DE TAL FORMA QUE SU VELOCIDAD SE INCREMENTA EN FORMA CONSTANTE A RAZÓN DE 2 [m/s] CADA SEGUNDO. SI LA TRAYECTORIA ES LA MOSTRADA EN LA FIGURA. CALCULAR SU ACELERACIÓN EN EL INSTANTE EN QUE ALCANCE EL PUNTO MÁS ALTO (B) SI PARTE DESDE EL REPOSO EN EL PUNTO A.



SI EN EL SALÓN DE CLASE ENSEÑAMOS QUE LA VELOCIDAD ES UNA CANTIDAD VECTORIAL, ENTONCES, AL AFIRMAR QUE LA VELOCIDAD SE INCREMENTA EN FORMA CONSTANTE, PODRÍA INTERPRETARSE QUE LA ACELERACIÓN ES NULA PUESTO QUE $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \text{constante} = \vec{0}$

SIN EMBRAGO, PARA QUE SUCEDA LO ANTERIOR ES NECESARIO QUE NO EXISTA MODIFICACIÓN NI EN EL MÓDULO DE \vec{v} NI EN LA DIRECCIÓN DEL VECTOR UNITARIO \vec{e}_T . LO CUAL IMPLICA QUE LA TRAYECTORIA DEBERÍA SER RECTA.

EVIDENTEMENTE ESTE NO ES EL CASO POR EL TIPO DE TRAYECTORIA PROPUESTO. ENTONCES ¿QUÉ DEBEMOS ENTENDER AL ENUNCIAR QUE SU VELOCIDAD SE INCREMENTA EN FORMA CONSTANTE A RAZÓN DE 2 [m/s] CADA SEGUNDO? LA ÚNICA POSIBILIDAD ES QUE DICHO CAMBIO SE REFIERE AL MÓDULO O MAGNITUD DE

LA VELOCIDAD, O LO QUE ENSEÑAMOS COMO RAPIDEZ $|\vec{v}| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$, ENTENDIDO ÉSTE COMO EL CAMBIO TEMPORAL DEL RECORRIDO Δs QUE PRESENTA EL CUERPO DURANTE SU MOVIMIENTO, INDEPENDIEMENTE SI LA TRAYECTORIA ES CURVA, RECTA O UNA COMBINACIÓN DE AMBAS.

ENTONCES, EL PLANTEAMIENTO INICIAL CORRECTO DE ESTE EJERCICIO SERÍA $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{constante} = \frac{dv}{dt}$, $\frac{dv}{dt} = \frac{2[m/s]}{s} = 2[m/s^2]$. PERO JUSTAMENTE ESTE TÉRMINO, QUE MIDE LA VARIACIÓN TEMPORAL DEL MÓDULO DE LA VELOCIDAD, ES LA MAGNITUD DE LA ACELERACIÓN TANGENCIAL DE UN CUERPO EN MOVIMIENTO.

ASÍ QUE $a_T = \frac{dv}{dt} = 2[m/s^2]$; DE DONDE $dv = 2dt$

AL INTEGRAR $\int_0^v dv = 2 \int_0^t dt$, $v = 2t[m/s]$, (NÓTESE QUE $v = a_T t + v_0$ EN ESTE CASO $v_0 = 0[m/s]$)

COMO ANTERIORMENTE SE SEÑALÓ QUE $v = \frac{ds}{dt}$ ENTONCES $\frac{ds}{dt} = 2t[m/s]$

SEPARANDO VARIABLES E INTEGRANDO SE OBTENDRÁ $\int_0^s ds = 2 \int_0^t dt$, $s = 2\left(\frac{t^2}{2}\right) = t^2[m]$, (NÓTESE TAMBIÉN QUE $s = a_T \frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0$, SIENDO EN ESTE

CASO, $v_0 = 0[m/s]$ Y $s_0 = 0[m]$);

ES DECIR, TENEMOS YA TRES ECUACIONES QUE NOS PERMITEN CONOCER LA POSICIÓN, RAPIDEZ Y ACELERACIÓN TANGENCIAL DEL MOVIL EN CUALQUIER INSTANTE

$s = t^2[m]$ (MEDIDO A PARTIR DE A); $v = 2t[m/s]$; $a_T = 2[m/s^2]$.

ASÍ QUE PARA CONCLUIR EL EJERCICIO PROPUESTO BASTARÁ CON DETERMINAR EL TIEMPO QUE NECESITARÍA EL MÓVIL PARA MOVERSE DESDE A HASTA B:

DETERMINAR σ Y SUSTITUIR ESTE VALOR EN LA EXPRESIÓN CONOCIDA PARA LA ACELERACIÓN NORMAL $a_N = \frac{v^2}{R}$, QUIEN ES LA RESPONSABLE DE CUANTIFICAR EL

CAMBIO TEMPORAL DE LA DIRECCIÓN DEL VECTOR UNITARIO \vec{e}_T , ASOCIADO A LA VELOCIDAD.

ES DECIR, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_T + v\frac{d\vec{e}_T}{dt}$; $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ $\therefore \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\vec{e}_N$

DE ACUERDO A LOS DATOS PROPUESTOS EN LA FIGURA, $s = R\theta = \frac{100}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 25[m]$

POR LO TANTO, $s = 25 = t^2$; $t = \sqrt{25} = 5[s]$ Y $v = 2t = 10[m/s]$; $a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{\frac{100}{\pi}} = \pi[m/s^2]$

FINALMENTE $\vec{a} = 2\vec{e}_T + \pi\vec{e}_N [m/s^2]$

PROFESOR LORENZO MIRANDA CORDERO

QUIMICA

A USTED SE LE DA EL ENCARGO DE SUMINISTRAR OXIGENO A UN ASTRONAUTA, DURANTE $24[h]$, A PARTIR DE UNA FUENTE DE COMBUSTIBLE SÓLIDA. EL ASTRONAUTA REQUERIRÁ, EN CADA INHALACIÓN, $350[cm^3]$ DE OXIGENO A $150[mmHg]$ Y $37[^\circ C]$. USTED DECIDE SUMINISTRAR EL OXIGENO MEDIANTE LA REACCIÓN QUIMICA ENTRE EL SUPERÓXIDO DE LITIO (LiO_2) Y EL DIÓXIDO DE CARBONO. SI CADA INHALACIÓN SE REALIZA CADA $6[s]$, ¿CUANTOS GRAMOS DE SUPERÓXIDO DE LITIO SERÁN NECESARIOS PARA SATISFACER DICHA DEMANDA?

SOLUCIÓN.

EL NÚMERO DE MOLES DE OXIGENO REQUERIDOS EN CADA INHALACIÓN SE OBTIENE A PARTIR DE LA ECUACIÓN DEL GAS IDEAL,

$$PV = nRT \therefore n = \frac{PV}{RT} = \frac{150[mmHg] \left(\frac{1[atm]}{760[mmHg]} \right) (0.35[L])}{0.082 \left[\frac{atm \cdot L}{K \cdot mol} \right] (310.15[K])} = 2.716 \times 10^{-3} [moles]$$

LA CANTIDAD DIARIA DE OXÍGENO REQUERIDA SERÁ: $\frac{2.716 \times 10^{-3}}{6} \cdot 86400 [\text{moles}] = 39.110 [\text{moles}]$

LA REACCIÓN QUE SE LLEVA A CABO ENTRE EL SUPERÓXIDO DE LITIO Y EL DIÓXIDO DE CARBONO ES:



POR LO TANTO, EL NÚMERO DE MOLES DE LiO_2 NECESARIOS SERÁN: $\frac{4}{3}(39.110 [\text{moles}]) = 52.147 [\text{moles}]$

QUE CORRESPONDE A UNA MASA DE: $52.147 [\text{moles}] \left(\frac{38.94 [\text{g}]}{1 [\text{mol}]} \right) = 2030.604 [\text{g}]$ DE LiO_2

PROFESOR ROGELIO SOTO AYALA

FÍSICA EXPERIMENTAL

UN MANÓMETRO DIGITAL, CON DISPLAY DE SIETE SEGMENTOS, REQUIERE CALIBRACIÓN PARA LO CUAL SE USÓ COMO INSTRUMENTO PATRÓN, UN MANÓMETRO DE TUBO DE BOURDON.

CONSIDERANDO LOS DATOS ESTADÍSTICOS MOSTRADOS EN LA TABLA:

$V_p [\text{Pa}]$	$V_L [\text{Pa}]$
0	1
10	12
20	21
30	31
40	41
50	49
$\bar{V}_p = 25$	$\bar{V}_L = 25.83$

A) OBTENGA EL MODELO MATEMÁTICO REPRESENTATIVO DEL FUNCIONAMIENTO DEL APARATO QUE SE CALIBRÓ

B) DETERMINAR LA SENSIBILIDAD DEL INSTRUMENTO

C) UTILIZANDO EL MODELO MATEMÁTICO DETERMINE EL VALOR CONFIABLE (PATRÓN) QUE SE TENDRÍA, SI EL VALOR LEÍDO FUERA DE: $25 [\text{Pa}]$

D) DEL MODELO MATEMÁTICO OBTENIDO, DEDUZCA EL VALOR NUMÉRICO DEL ERROR DE CALIBRACIÓN DEL INSTRUMENTO CALIBRADO.

SOLUCIÓN.

A) POR PARES DE PUNTOS SE DETERMINA EL VALOR DE LA PENDIENTE COMO SIGUE:

$$m = \frac{(49 - 21) + (41 - 12) + (31 - 1)}{(50 - 20) + (40 - 10) + (30 - 0)} = \frac{87 [\text{Pa}]}{90 [\text{Pa}]} = 0.9666 [1]$$

OBTENCIÓN DEL VALOR NUMÉRICO DE LA ORDENADA AL ORIGEN, A PARTIR DEL MODELO MATEMÁTICO PLANTEADO.

$$\bar{V}_L = m\bar{V}_p + b$$

DESPEJANDO LA ORDENADA AL ORIGEN Y SUSTITUYENDO VALORES NUMÉRICOS:

$$b = \bar{V}_L - m\bar{V}_p = (25.83) + (0.9666)(25) = (25.83) - (24.165) = 1.665 [\text{Pa}]$$

∴ EL MODELO MATEMÁTICO PEDIDOS: $\bar{V}_L [\text{Pa}] = 0.9666 [1] V_p [\text{Pa}] + 1.665 [\text{Pa}]$

B) COMO LA INTERPRETACIÓN FÍSICA DE SENSIBILIDAD ES LA PENDIENTE, SE TIENE QUE $S = m$. ∴ $S = 0.9666 \left[\frac{\text{Pa}}{\text{Pa}} \right]$

LO QUE SE INTERPRETA COMO UN INSTRUMENTO CONFIABLE PARA MEDIR LA VARIABLE PARA LO QUE FUE DISEÑADO.

C) A PARTIR DEL MODELO MATEMÁTICO, SE TIENE QUE PARA UNA LECTURA DE $25 [\text{Pa}]$

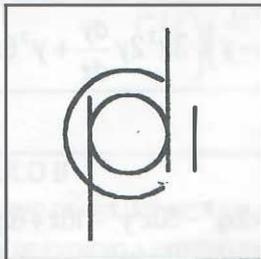
$$V_p = \frac{V_L - 1.665}{0.9666} = \frac{25 - 1.665}{0.9666} = 24.1413 [\text{Pa}]$$

D) ES $b = 1.665$ Y LA INTERPRETACIÓN FÍSICA ES EL ERROR DEL INSTRUMENTO PARA CADA MEDIDA QUE REALIZA POR LO TANTO, SE TRATA DE UN ERROR SISTEMÁTICO.

PROFESOR JUAN MANUEL CASTILLO MIRANDA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2004

NÚMERO 73

17 DE ABRIL DE 2004

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO II

OBTENER LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

$$i) f(x) = \operatorname{sen}^2 \sqrt{1-x} \quad ii) y = e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)} \quad iii) x^2 y^3 - 5x^2 = 6 - xy \quad iv) f: \begin{cases} x = \sqrt[3]{2+x^3} \\ y = \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN.

$$i) f(x) = \operatorname{sen}^2 \sqrt{1-x} \quad ; \quad f'(x) = 2 \operatorname{sen} \sqrt{1-x} \cos \sqrt{1-x} \left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} 2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{1-x} \left[-\cos 2\sqrt{1-x} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) \right] + \operatorname{sen} 2\sqrt{1-x} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)}{4(1-x)}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2\sqrt{1-x} \cos 2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}}{4(1-x)} \quad \therefore f''(x) = \frac{2\sqrt{1-x} \cos 2\sqrt{1-x} - \operatorname{sen} 2\sqrt{1-x}}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$ii) y = e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)} \left(\frac{-3x^2}{(2-x^2)^2 + 1} \right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)}}{x^6 - 4x^3 + 5}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(x^6 - 4x^3 + 5) \left[3x^2 e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)} \left(\frac{-3x^2}{(2-x^2)^2 + 1} \right) + e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)} (6x) \right] - 3x^2 e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)} (6x^5 - 12x^2)}{(x^6 - 4x^3 + 5)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{9x^4 e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)}}{x^6 - 4x^3 + 5} + 6x e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)}}{x^6 - 4x^3 + 5} - \frac{(18x^7 - 36x^4) e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)}}{(x^6 - 4x^3 + 5)^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)} (9x^4 + 6x^7 - 24x^4 + 30x - 18x^7 + 36x^4)}{(x^6 - 4x^3 + 5)^2} \quad \therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-12x^7 + 21x^4 + 30x) e^{\operatorname{ang} \cot(2-x^2)}}{(x^6 - 4x^3 + 5)^2}$$

$$\text{iii) } x^2y^3 - 5x^2 = 6 - xy \quad ; \quad x^23y^2 \frac{dy}{dx} + y^32x - 10x = -x \frac{dy}{dx} - y \Rightarrow (3x^2y^2 + x) \frac{dy}{dx} = -2xy^3 + 10x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 + 10x - y}{3x^2y^2 + x} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3x^2y^2 + x) \left(-2x3y^2 \frac{dy}{dx} - y^32 + 10 - \frac{dy}{dx} \right) - (-2xy^3 + 10x - y) \left(3x^22y \frac{dy}{dx} + y^26x + 1 \right)}{(3x^2y^2 + x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx} (-18x^3y^4 - 3x^2y^2 - 6x^2y^2 + 12x^3y^4 - 60x^3y + 6x^2y^2 - x) - 6x^2y^5 + 30x^2y^2 - 2xy^3 + 10x + 12x^2y^5 + 2xy^3 - 60x^2y^2 - 10x + 6xy^3 + y}{(3x^2y^2 + x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx} (-6x^3y^4 - 60x^3y - 3x^2y^2 - x) + 6x^2y^5 - 30x^2y^2 + 6xy^3 + y}{(3x^2y^2 + x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^3 + 10x - y (-6x^3y^4 - 60x^3y - 3x^2y^2 - x) + 6x^2y^5 - 30x^2y^2 + 6xy^3 + y}{(3x^2y^2 + x)^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-2xy^3 + 10x - y) (-6x^3y^4 - 60x^3y - 3x^2y^2 - x) + (3x^2y^2 + x) (6x^2y^5 - 30x^2y^2 + 6xy^3 + y)}{(3x^2y^2 + x)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{30x^4y^7 - 30x^4y^4 - 600x^4y + 36x^3y^5 + 14x^2y^3 - 10x^2 + 2xy}{(3x^2y^2 + x)^3}$$

$$\text{iv) } f: \begin{cases} x = \sqrt[3]{2+t^3} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(2+t^3)^{-\frac{2}{3}}(3t^2) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{(2+t^3)^{\frac{2}{3}}} \quad ;$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}{\frac{t^2}{(2+t^3)^{\frac{2}{3}}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4(2+t^3)^{\frac{2}{3}}}{t(1+t^2)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4(2+t^3)^{\frac{2}{3}}}{t+2t^3+t^5}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(t+2t^3+t^5) \left[-4 \left(\frac{2}{3} \right) (2+t^3)^{-\frac{1}{3}} (3t^2) \right] + 4(2+t^3)^{\frac{2}{3}} (1+6t^2+5t^4)}{t^2(t+2t^3+t^5)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{-8t^2(t+2t^3+t^5)}{(2+t^3)^{\frac{1}{3}}} + 4(1+6t^2+5t^4)(2+t^3)^{\frac{2}{3}}}{t^2(t+2t^3+t^5)^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8t^3 - 16t^5 - 8t^7 + 4(2+t^3)(1+6t^2+5t^4)}{t^2(t+2t^3+t^5)^2}$$

$$(2+t^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8t^3 - 16t^5 - 8t^7 + 8 + 48t^2 + 40t^4 + 4t^3 + 24t^5 + 20t^7}{t^2(t^2 + 4t^6 + t^{10} + 4t^4 + 2t^6 + 4t^8)} \quad \therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2+t^3)^{\frac{1}{3}}(12t^7 + 8t^5 + 40t^4 - 4t^3 + 48t^2 + 8)}{t^4(t^8 + 4t^6 + 6t^4 + 4t^2 + 1)}$$

$$(2+t^3)^{\frac{1}{3}}$$

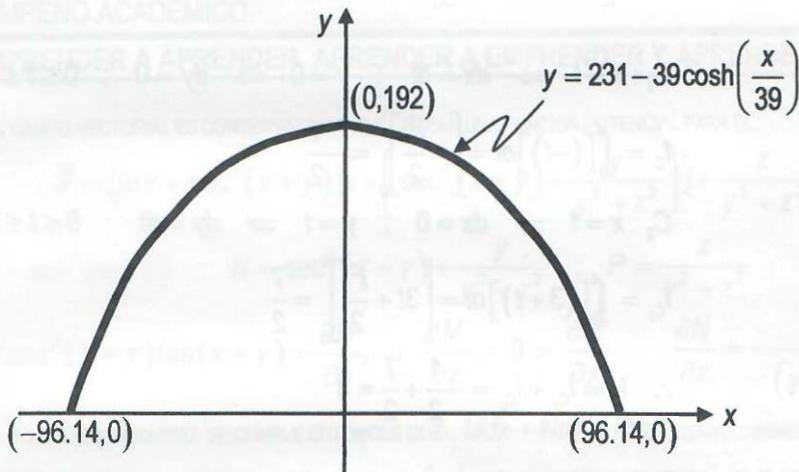
PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO II

EN LA CIUDAD DE SAN LUIS MISSOURI, EUA, SE CONSTRUYÓ UN ARCO QUE POSEE LA FORMA DE UNA CATENARIA INVERTIDA. EN EL CENTRO TIENE 192 m DE ALTURA Y DE EXTREMO A EXTREMO EN LA BASE, HAY UNA LONGITUD DE 192.28 m. LA FORMA DEL ARCO OBEDECE, EN FORMA APROXIMADA, A LA CURVA DE ECUACIÓN

$$y = 231 - 39 \cosh\left(\frac{x}{39}\right)$$

DETERMINAR LA LONGITUD TOTAL DEL ARCO, ASÍ COMO EL ÁREA TOTAL BAJO EL ARCO.
SOLUCIÓN. LA GRÁFICA APROXIMADA DE ESTA CURVA ES LA SIGUIENTE:



SE CONSIDERARON DIFERENTES ESCALAS PARA FACILIDAD DEL DIBUJO.
LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA LONGITUD DE ARCO ES:

$$L = 2 \int_0^{96.14} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$y = 231 - 39 \cosh\left(\frac{x}{39}\right) ; \quad \frac{dy}{dx} = -\sinh\left(\frac{x}{39}\right) \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \sinh^2\left(\frac{x}{39}\right)$$

$$L = 2 \int_0^{96.14} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{39}\right)} dx = 2 \int_0^{96.14} \cosh\left(\frac{x}{39}\right) dx = 2 \left[39 \sinh\left(\frac{x}{39}\right) \right]_0^{96.14} \quad \therefore L \approx 455.52 m$$

LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR EL ÁREA BAJO LA CURVA ESTÁ DADA POR:

$$A = 2 \int_0^{96.14} f(x) dx$$

DE DONDE

$$A = 2 \int_0^{96.14} \left[231 - 39 \cosh\left(\frac{x}{39}\right) \right] dx = 2 \left[231x - 39^2 \sinh\left(\frac{x}{39}\right) \right]_0^{96.14} = 2(22,208.34 - 8,882.63) \quad \therefore A = 26,651.42 m^2$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

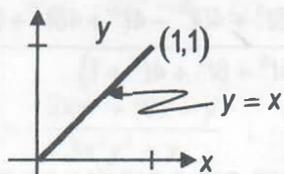
CÁLCULO III

EVALUAR LA INTEGRAL DE LÍNEA $I_C = \int_C (2y - x)dx + (3x + y)dy$ PARA CADA UNA DE LAS SIGUIENTES TRAYECTORIAS Y GRAFICARLAS:

- a) LA RECTA QUE VA DE (0,0) a (1,1). b) LA PARÁBOLA $y = x^2$ DE (0,0) a (1,1).
c) LOS SEGMENTOS DE RECTA DE (0,0) a (1,0) Y DE (1,0) a (1,1). d) LA CURVA $x = y^2$ DE (0,0) a (1,1)

SOLUCIÓN.

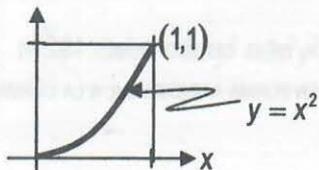
a)



$$x=t \Rightarrow dx=dt ; y=t \Rightarrow dy=dt ; 0 \leq t \leq 1$$

$$l_c = \int_0^1 [(2t-t) + (3t+t)] dt = \left[\frac{5t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

b)

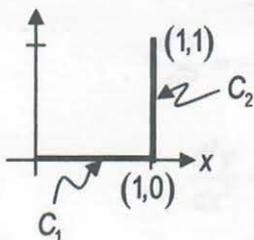


$$x=t \Rightarrow dx=dt ; y=t^2 \Rightarrow dy=2t dt ; 0 \leq t \leq 1$$

$$l_c = \int_0^1 [(2t^2-t) + (3t+t^2)(2t)] dt = \int_0^1 (2t^3 + 8t^2 - t) dt$$

$$l_c = \left[\frac{t^4}{2} + \frac{8t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{3}$$

c)



$$C_1: x=t \Rightarrow dx=dt ; y=0 \Rightarrow dy=0 ; 0 \leq t \leq 1$$

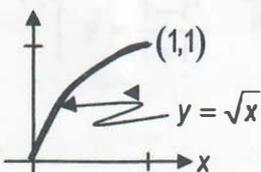
$$l_{C_1} = \int_0^1 [(-t)] dt = \left[-\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

$$C_2: x=1 \Rightarrow dx=0 ; y=t \Rightarrow dy=dt ; 0 \leq t \leq 1$$

$$l_{C_2} = \int_0^1 [(3+t)] dt = \left[3t + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{7}{2}$$

$$\therefore l_c = l_{C_1} + l_{C_2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$$

d)

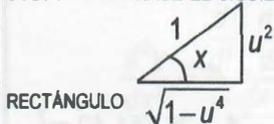


$$x=t^2 \Rightarrow dx=2t dt ; y=t \Rightarrow dy=dt ; 0 \leq t \leq 1$$

$$l_c = \int_0^1 [(2t-t^2)(2t) + (3t^2+t)] dt = \left[-\frac{t^4}{2} + \frac{7t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

(LAS GRÁFICAS DE LA PARÁBOLAS SON APROXIMADAS)

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

CÁLCULO IIRESOLVER LA INTEGRAL $\int \frac{\cos^7 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx$ SOLUCIÓN. SE HACE EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE: $\sqrt{\operatorname{sen} x} = u \Rightarrow \operatorname{sen} x = u^2 \Rightarrow \cos x dx = 2udu$. SE CONSTRUYE EL TRIÁNGULORECTÁNGULO DE DONDE $dx = \frac{2udu}{\sqrt{1-u^4}}$ Y LA INTEGRAL QUEDA COMO

$$\int \frac{(1-u^4)^{\frac{7}{2}} \cdot 2udu}{u \sqrt{1-u^4}} \Rightarrow 2 \int (1-u^4)^3 du$$

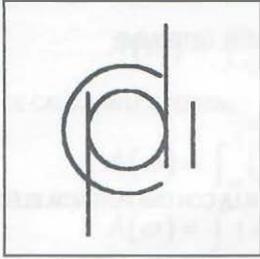
$$2 \int (1-3u^4+3u^8-u^{12}) du = 2 \left(u - \frac{3u^5}{5} + \frac{u^9}{3} - \frac{u^{13}}{13} \right) + C \quad \therefore \int \frac{\cos^7 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{6\operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x}{5} + \frac{2\operatorname{sen}^{\frac{9}{2}} x}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^{\frac{13}{2}} x}{13} + C$$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.

COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2004

NÚMERO 74

2 DE MAYO DE 2004

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

CÁLCULO III

DEMOSTRAR QUE EL SIGUIENTE CAMPO VECTORIAL ES CONSERVATIVO Y ENCONTRAR UNA FUNCIÓN POTENCIAL PARA ÉL.

$$\vec{F} = (\ln x + \sec^2(x+y))\hat{i} + \left(\sec^2(x+y) + \frac{y}{y^2+z^2}\right)\hat{j} + \frac{z}{y^2+z^2}\hat{k}$$

SOLUCIÓN. SEAN $M = \ln x + \sec^2(x+y)$; $N = \sec^2(x+y) + \frac{y}{y^2+z^2}$; $P = \frac{z}{y^2+z^2}$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\sec^2(x+y)\tan(x+y) = \frac{\partial N}{\partial x} ; \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x} ; \frac{\partial N}{\partial z} = -\frac{2yz}{(y^2+z^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

POR LO QUE SE TRATA DE UN CAMPO CONSERVATIVO. SE CUMPLE ENTONCES QUE $Mdx + Ndy + Pdz$ ES UNA DIFERENCIAL EXACTA, LUEGO SE BUSCA DE QUE FUNCIÓN $\varphi(x,y,z)$ ES SU DIFERENCIAL TOTAL Y ESTA FUNCIÓN ESCALAR "φ" CONSTITUIRÍA EL POTENCIAL DE LA FUNCIÓN VECTORIAL. ENTONCES:

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; N = \frac{\partial \varphi}{\partial y} ; P = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

SE INTEGRA "P" CON RESPECTO A "z" Y SE OBTIENE: $\int Pdz = \int \frac{z}{y^2+z^2} dz \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \ln(y^2+z^2) + C_1(x,y)$

SE DERIVA ESTA EXPRESIÓN CON RESPECTO A "y" Y SE IGUALA CON "N", DE DONDE:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{y^2+z^2} + \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial y} ; \frac{y}{y^2+z^2} + \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial y} = \sec^2(x+y) + \frac{y}{y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial y} = \sec^2(x+y)$$

SE INTEGRA CON RESPECTO A "y" Y SE OBTIENE: $C_1(x,y) = \int \sec^2(x+y) dy \Rightarrow C_1(x,y) = \tan(x+y) + C_2(x)$

SE SUSTITUYE EN LA FUNCIÓN "φ" Y SE LLEGA A: $\varphi = \frac{1}{2} \ln(y^2+z^2) + \tan(x+y) + C_2(x)$

SE DERIVA ESTA EXPRESIÓN CON RESPECTO A "x" Y SE IGUALA CON "M", DE DONDE:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sec^2(x+y) + C_2'(x) ; \sec^2(x+y) + C_2'(x) = \ln x + \sec^2(x+y) \Rightarrow C_2'(x) = \ln x$$

SE INTEGRA CON RESPECTO A "x" Y SE OBTIENE: $C_2(x) = \int \ln x dx$. ESTA INTEGRAL SE RESUELVE POR PARTES Y:

$$\int \ln x dx ; u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} ; dv = dx \Rightarrow v = x ; \int \ln x dx = x \ln x - x + C ; \text{ LUEGO: } C_2(x) = x \ln x - x + C$$

SE SUSTITUYE EN LA FUNCIÓN "φ" Y SE TIENE FINALMENTE EL POTENCIAL: $\varphi = \frac{1}{2} \ln(y^2+z^2) + \tan(x+y) + x \ln x - x + C$

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

TERMODINÁMICA

EN UN RECIPIENTE ADIABÁTICO SE DEPOSITAN $200[\text{g}]$ DE AGUA A $\Theta_{\text{AGUA}} = 93.0[^\circ\text{C}]$, SE LE AGREGA UNA BARRA DE COBRE A TEMPERATURA AMBIENTE $\Theta_{\text{COBRE}} = 20[^\circ\text{C}]$ DE $2[\text{cm}]$ DE LARGO, $1[\text{cm}]$ DE ANCHO Y $0.5[\text{cm}]$ DE GRUESO; CON BASE EN LO ANTERIOR, DETERMINE:

- A) LA MASA DE LA BARRA DE COBRE, SI LA DENSIDAD DEL COBRE ES $\rho_{\text{COBRE}} = 8920 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
- B) LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO ALCANZADA POR EL SISTEMA.
- C) LA ENERGÍA SUMINISTRADA AL AGUA PARA ELEVAR SU TEMPERATURA A $93[^\circ\text{C}]$ EN $5[\text{min}]$, SI SE USÓ UNA PARRILLA CON UNA POTENCIA ELÉCTRICA DE $84[\text{W}]$.

SOLUCIÓN. A) SE CALCULA PRIMERAMENTE EL VOLUMEN DE LA BARRA:

$$V_{\text{BARRA DE COBRE}} = (L)(A)(G) = (0.02[\text{m}])(0.01[\text{m}])(0.005[\text{m}]) = 1 \times 10^{-6} [\text{m}^3]$$

AHORA A PARTIR DE LA DEFINICIÓN DE DENSIDAD, $\rho = \frac{m}{V}$, SE OBTIENE LA MASA DE LA BARRA DE COBRE:

$$m_{\text{BARRA DE COBRE}} = \rho V = \left(8920 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \right) (1 \times 10^{-6} [\text{m}^3]) \Rightarrow m_{\text{BARRA DE COBRE}} = 8920 \times 10^{-6} [\text{kg}]$$

B) SE CALCULA LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO DE LA MEZCLA ENTRE AGUA Y LA BARRA DE COBRE: $Q_{\text{AGUA}} + Q_{\text{COBRE}} = 0$

$$\text{DONDE: } Q = m C_E \Delta\Theta = m C_E (\Theta_{\text{FINAL}} - \Theta_{\text{INICIAL}}) = m C_E (\Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - \Theta_{\text{INICIAL}})$$

SE DESARROLLA Y:

$$m_{\text{AGUA}} C_{\text{AGUA}} (\Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - \Theta_{\text{INICIAL DEL AGUA}}) + m_{\text{COBRE}} C_{\text{COBRE}} (\Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - \Theta_{\text{INICIAL DEL COBRE}}) = 0$$

AHORA SE SUSTITUYE:

$$(0.2[\text{kg}]) \left(4186 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right] \right) (\Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - 93.0[^\circ\text{C}]) + (8920 \times 10^{-6} [\text{kg}]) \left(390 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right] \right) (\Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - 20[^\circ\text{C}]) = 0$$

$$837.2 \left[\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \right] (\Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - 93.0[^\circ\text{C}]) + \left(3.4788 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right] \right) (\Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - 20[^\circ\text{C}]) = 0$$

$$837.2 \left[\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \right] \Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - 77859.6[\text{J}] + 3.4788 \left[\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \right] \Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - 69.576[\text{J}] = 0$$

$$840.6788 \left[\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \right] \Theta_{\text{EQUILIBRIO}} - 77929.176[\text{J}] = 0 ; 840.6788 \left[\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \right] \Theta_{\text{EQUILIBRIO}} = 77929.176[\text{J}] \Rightarrow \Theta_{\text{EQUILIBRIO}} = \frac{77929.176[\text{J}]}{840.6788 \left[\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \right]}$$

POR LO TANTO LA TEMPERATURA DE EQUILIBRIO ES:

$$\Theta_{\text{EQUILIBRIO}} = 92.69[^\circ\text{C}]$$

C) PARA CALCULAR LA ENERGÍA SUMINISTRADA AL AGUA:

$$Q_{\text{SUMINISTRADO}} = P_{\text{POTENCIA}} t_{\text{TIEMPO}} ; Q_{\text{SUMINISTRADO}} = (84[\text{W}])(300[\text{s}]) ; \text{DONDE } Q_{\text{SUMINISTRADO}} = \left(84 \left[\frac{\text{J}}{\text{s}} \right] \right) (300[\text{s}])$$

POR LO TANTO LA ENERGÍA SUMINISTRADA ES:

$$Q_{\text{SUMINISTRADO}} = 25200[\text{J}]$$

PROFESOR CÉSAR ENRIQUE BENÍTEZ JOYNER

MATEMÁTICAS AVANZADAS

DETERMINAR LA INTEGRAL DE FOURIER DE LA SIGUIENTE FUNCIÓN:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ 2t + 2 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 2 - 2t & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

LA INTEGRAL DE FOURIER ESTÁ DEFINIDA COMO $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \operatorname{sen} \omega t) d\omega$

DONDE: $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) \cos \omega t) dt$ y $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) \operatorname{sen} \omega t) dt$

PRIMERO SE CALCULAN LOS TÉRMINOS $A(\omega)$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^1 (0 \cdot \cos \omega t) dt + \int_1^0 ((2t+2) \cos \omega t) dt + \int_0^1 ((2-2t) \cos \omega t) dt + \int_1^{\infty} (0 \cdot \cos \omega t) dt$$

$$A(\omega) = \int_{-1}^0 (2t \cos \omega t) dt + \int_{-1}^0 (2 \cos \omega t) dt + \int_0^1 (2 \cos \omega t) dt - \int_0^1 (2t \cos \omega t) dt$$

$$A(\omega) = 2 \int_{-1}^0 (t \cos \omega t) dt + 2 \int_{-1}^1 (\cos \omega t) dt - 2 \int_0^1 (t \cos \omega t) dt$$

SE INTEGRA POR PARTES: $\int_{-1}^0 (t \cos \omega t) dt$ y $\int_0^1 (t \cos \omega t) dt$

$$u = t, \quad dv = \cos \omega t dt, \quad du = dt, \quad v = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

$$A(\omega) = 2 \left(\frac{t}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{\omega} \int_{-1}^0 \operatorname{sen} \omega t dt \right) + \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \Big|_{-1}^1 - 2 \left(\frac{t}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \Big|_0^1 - \frac{1}{\omega} \int_0^1 \operatorname{sen} \omega t dt \right)$$

$$A(\omega) = 2 \left(\frac{1}{\omega} \operatorname{sen}(-\omega) + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \Big|_{-1}^0 \right) + \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega - \frac{2}{\omega} \operatorname{sen}(-\omega) - 2 \left(\frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \Big|_0^1 \right)$$

$$A(\omega) = -\frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \cos \omega + \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega + \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega - \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega - \frac{2}{\omega^2} \cos \omega + \frac{2}{\omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{4}{\omega^2} - \frac{4}{\omega^2} \cos \omega = \frac{4}{\omega^2} (1 - \cos \omega)$$

PARA LOS TÉRMINOS $B(\omega)$, MEDIANTE UN PROCEDIMIENTO SIMILAR SE TIENE:

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^1 (0 \cdot \operatorname{sen} \omega t) dt + \int_1^0 ((2t+2) \operatorname{sen} \omega t) dt + \int_0^1 ((2-2t) \operatorname{sen} \omega t) dt + \int_1^{\infty} (0 \cdot \operatorname{sen} \omega t) dt$$

$$B(\omega) = \int_{-1}^0 (2t \operatorname{sen} \omega t) dt + \int_{-1}^0 (2 \operatorname{sen} \omega t) dt + \int_0^1 (2 \operatorname{sen} \omega t) dt - \int_0^1 (2t \operatorname{sen} \omega t) dt$$

$$B(\omega) = 2 \int_{-1}^0 (t \operatorname{sen} \omega t) dt + 2 \int_{-1}^1 (\operatorname{sen} \omega t) dt - 2 \int_0^1 (t \operatorname{sen} \omega t) dt$$

INTEGRANDO POR PARTES: $\int_{-1}^0 (t \operatorname{sen} \omega t) dt$ y $\int_0^1 (t \operatorname{sen} \omega t) dt$

$$u = t, \quad dv = \operatorname{sen} \omega t dt, \quad du = dt, \quad v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t$$

$$B(\omega) = 2 \left(-\frac{t}{\omega} \cos \omega t \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{\omega} \int_{-1}^0 \cos \omega t dt \right) - \frac{2}{\omega} \cos \omega t \Big|_{-1}^1 - 2 \left(-\frac{t}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^1 + \frac{1}{\omega} \int_0^1 \cos \omega t dt \right)$$

$$B(\omega) = 2 \left(-\frac{1}{\omega} \cos(-\omega) + \frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \Big|_{-1}^0 \right) - \frac{2}{\omega} \cos \omega + \frac{2}{\omega} \cos(-\omega) - 2 \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega + \frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \Big|_0^1 \right)$$

$$B(\omega) = -\frac{2}{\omega} \cos \omega - \frac{2}{\omega^2} \operatorname{sen}(-\omega) - \frac{2}{\omega} \cos \omega + \frac{2}{\omega} \cos \omega + \frac{2}{\omega} \cos \omega - \frac{2}{\omega^2} \operatorname{sen} \omega$$

$$B(\omega) = 0$$

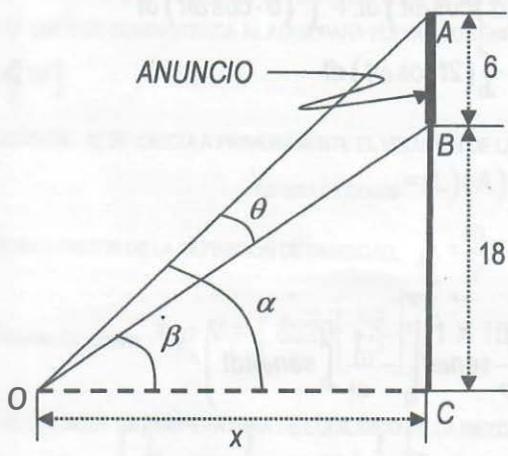
POR LO TANTO, LA INTEGRAL DE FOURIER ES:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{4}{\omega^2} (1 - \cos \omega) \cos \omega t \right] d\omega$$

CÁLCULO I

UN ANUNCIO ESPECTACULAR DE 6 m DE ALTURA ESTÁ UBICADO EN EL TECHO DE UN EDIFICIO QUE TIENE UNA ALTURA DE 18 m MEDIDA DESDE LA PARTE SUPERIOR, JUSTO DONDE INICIA EL ANUNCIO, HASTA EL NIVEL DE UN OBSERVADOR QUE SE ENCUENTRA A UNA DETERMINADA DISTANCIA EN LA CALLE. ¿CUÁNTO DEBE MEDIR ESTA DISTANCIA DE TAL MANERA QUE SEA MÁXIMO EL ÁNGULO ENTRE LAS RECTAS QUE VAN DE LA PARTE SUPERIOR Y DE LA INFERIOR DEL ANUNCIO AL OBSERVADOR? CABE DECIR QUE ESTE ÁNGULO TIENE QUE VER CON LA MEJOR VISTA DEL ANUNCIO POR PARTE DEL OBSERVADOR.

SOLUCIÓN. PRIMERO SE REPRESENTAN LOS DATOS Y EL ÁNGULO REQUERIDO EN UN MODELO GEOMÉTRICO:



SI SE UTILIZAN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS AOC y BOC QUE TIENEN EL LADO COMÚN OC, QUE ES LA DISTANCIA PEDIDA "x", ES POSIBLE ESCRIBIR QUE:

$$\tan \alpha = \frac{24}{x} \quad \text{y} \quad \tan \beta = \frac{18}{x}$$

EL ÁNGULO $\theta = \alpha - \beta$ SE PUEDE EXPRESAR EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE "x" SI SE HACE USO DE LA IDENTIDAD QUE RELACIONA A LAS TANGENTES. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

SE SUSTITUYEN LOS VALORES DE $\tan \alpha$ y $\tan \beta$ Y SE REALIZAN LAS CORRESPONDIENTES SIMPLIFICACIONES, DE DONDE:

$$\tan \theta = \frac{\frac{24}{x} - \frac{18}{x}}{1 + \left(\frac{24}{x}\right)\left(\frac{18}{x}\right)} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\frac{6}{x}}{1 + \frac{432}{x^2}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{6x}{x^2 + 432} \Rightarrow \theta = \text{ang} \tan \frac{6x}{x^2 + 432}$$

SE DERIVA E IGUALA A CERO, POR LO QUE:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{6(x^2 + 432) - 2x(6x)}{(x^2 + 432)^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{6x^2 + 2592 - 12x^2}{x^4 + 864x^2 + 186624 + 36x^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{2592 - 6x^2}{x^4 + 900x^2 + 186624}$$

$$2592 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x \approx 20.78 ; \begin{cases} x = 20 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} > 0 \\ x = 21 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} < 0 \end{cases} \therefore \text{MÁXIMO}$$

POR LO TANTO, EL ÁNGULO "θ" ES MÁXIMO CUANDO LA DISTANCIA DEL EDIFICIO AL OBSERVADOR ES DE x = 20.78 m

PROFESOR PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

TUTORÍA

AÚN ES TIEMPO DE INTERACTUAR CON TU TUTOR Y ESTABLECER CON ÉL UN BUEN PLAN DE ACTIVIDADES PARA TERMINAR CON ÉXITO EL PRESENTE SEMESTRE. RECUERDA QUE EL TUTOR ES UN APOYO, UN ALIADO, UN AMIGO, ALGUIEN CON QUIEN PLATICAR, ALGUIEN DISPUESTO A ESCUCHARTE Y ACONSEJARTE. BÚSCALO Y NO TE ARREPENTIRÁS. ENTRE LOS DOS PUEDEN ANALIZAR CÓMO ENFRENTAR LAS ASIGNATURAS EN SU PARTE FINAL Y EN LOS CORRESPONDIENTES EXÁMENES.

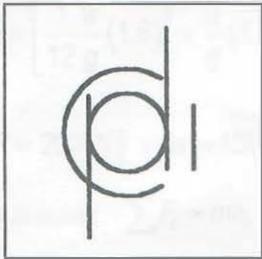
ESTUDIO Y APRENDIZAJE

ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

EN UN POCO MÁS DE UN MES TERMINAN LAS CLASES Y COMIENZAN LOS EXÁMENES FINALES. SI NO LES HA IDO BIEN EN LA ESCUELA O SI LES HA IDO REGULAR, ES UN BUEN TIEMPO PARA TOMAR UNA DECISIÓN DE GRAN TRASCENDENCIA EN LA VIDA. "BORRÓN Y CUENTA NUEVA" Y A ESTUDIAR, A DEDICARLE ESTE MES MUCHO TIEMPO, MUCHO ESFUERZO, MUCHA DEDICACIÓN. A ESTUDIAR, APRENDER Y ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS DEL SEMESTRE. Y DESPUÉS VERÁN LA ENORME SATISFACCIÓN Y DIRÁN "REALMENTE VALIÓ LA PENA".

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ. COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2004

NÚMERO 75

17 DE MAYO DE 2004

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

“APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER”

ECUACIONES DIFERENCIALES

OBTENGA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL, PARA LA CUAL LAS FUNCIONES $y_1 = e^{x^2}$ Y $y_2 = e^{-x^2}$ FORMAN UN CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES.

RESOLUCIÓN.

POR SER UN CONJUNTO FUNDAMENTAL DE TIENE

$$y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$$

ESTA FUNCIÓN ES SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN. ENTONCES, AL DERIVAR DOS VECES:

$$y' = 2xc_1 e^{x^2} - 2xc_2 e^{-x^2} \Rightarrow y' = x(2c_1 e^{x^2} - 2c_2 e^{-x^2}) \Rightarrow \frac{y'}{x} = 2c_1 e^{x^2} - 2c_2 e^{-x^2}$$

$$y'' = 4x^2 c_1 e^{x^2} + 2c_1 e^{x^2} + 4x^2 c_2 e^{-x^2} - 2c_2 e^{-x^2}$$

AGRUPANDO TÉRMINOS:

$$y'' = 4x^2 \underbrace{(c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2})}_y + \underbrace{2c_1 e^{x^2} - 2c_2 e^{-x^2}}_{\frac{y'}{x}}$$

DE DONDE, LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ES:

$$y'' = 4x^2 y + \frac{y'}{x} \quad \text{OBIEN} \quad xy'' - y' - 4xy = 0$$

PROFESORA MARGARITA RAMÍREZ GALINDO

ECUACIONES DIFERENCIALES

DETERMINE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL, HOMOGÉNEA, DE COEFICIENTES CONSTANTES, DE CUARTO ORDEN, PARA LA CUAL LA FUNCIÓN

$f(x) = xe^{2x} \cos 3x$ ES UNA SOLUCIÓN.

RESOLUCIÓN.

A PARTIR DE $f(x)$ SE IDENTIFICAN LAS RAÍCES QUE PERMITIRÁN DEFINIR LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA ASOCIADA A LA ECUACIÓN DIFERENCIAL:

$$f(x) = xe^{2x} \cos 3x$$

LAS RAÍCES SON $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = 2 \pm 3i$ QUE CORRESPONDEN A $(\lambda^2 - 4\lambda + 13)^2 = 0$

DE DONDE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL EN TÉRMINOS DEL OPERADOR DIFERENCIAL ES $(D^2 - 4D + 13)^2 y = 0$

LA CUAL CORRESPONDE A LAS CARACTERÍSTICAS INDICADAS.

PROFESORA MARGARITA RAMÍREZ GALINDO

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESUELVA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

RESOLUCIÓN:

LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIÉN COMO: $x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2} + y \Rightarrow xdy = (\sqrt{x^2 + y^2} + y)dx$

ESTA ECUACIÓN ES DE COEFICIENTES HOMOGÉNEOS. SE EMPLEA LA SUSTITUCIÓN $y = ux$ DE DONDE $dy = udx + xdu$

AL SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL SE TIENE:

$$x(udx + xdu) = (\sqrt{x^2 + u^2x^2} + ux)dx \Rightarrow uxdx + x^2du = \sqrt{x^2 + u^2x^2}dx + uxdx$$

$$\Rightarrow x^2du = \sqrt{x^2(1+u^2)}dx \Rightarrow x^2du = x\sqrt{1+u^2}dx$$

SE SEPARAN VARIABLES Y SE INTEGRAN, DE DONDE:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} ; \quad \text{Ln}|x| = \text{Ln}|u + \sqrt{1+u^2}| + C$$

PERO $u = \frac{y}{x}$, POR LO QUE RESULTA QUE $\text{Ln}|x| = \text{Ln}\left|\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right| + C$ QUE ES LA SOLUCIÓN GENERAL.

PROFESORA MARGARITA RAMÍREZ GALINDO

MATEMÁTICAS AVANZADAS

CALCULAR EL VALOR DE LA SERIE DE TÉRMINOS POSITIVOS $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ TOMANDO COMO DATO QUE LA SERIE DE FOURIER DE LA FUNCIÓN $f(t) = t^2$, $0 < t < \pi$,

$$f(t) = f(t + \pi) \text{ ES: } \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos 2nt - \frac{\pi}{n} \sin 2nt \right)$$

SOLUCIÓN. AL CONSIDERAR QUE $t = 0$ EN LA SERIE DE FOURIER QUE SE TIENE COMO DATO: $f(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

YA QUE $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$

PARA CALCULAR EL VALOR DE LA SERIE QUE SE QUIERE, EL VALOR DE $f(0)$ QUE DEBE UTILIZARSE SE OBTIENE DE LAS CONDICIONES DE DIRICHLET PUES ES EL VALOR AL QUE CONVERGE LA SERIE DE FOURIER PARA $t_0 = 0$:

$$f(0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) \right] = \frac{1}{2} [0 + \pi^2] = \frac{\pi^2}{2}$$

ENTONCES

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

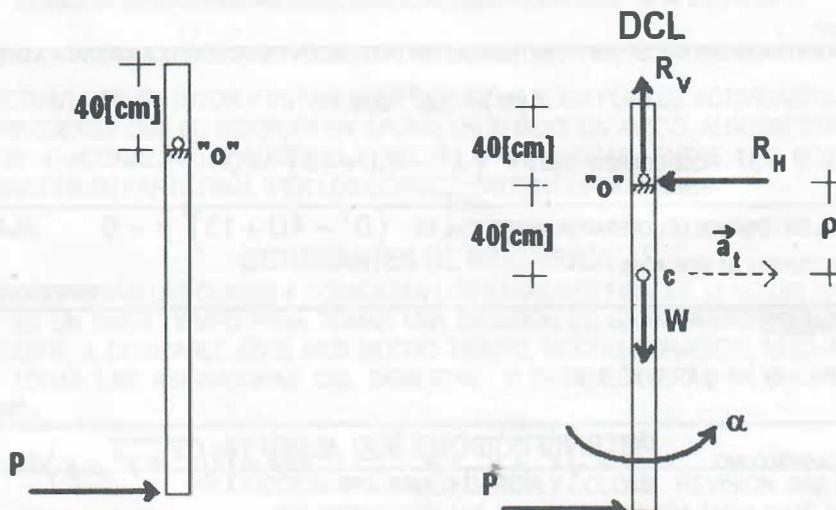
PROFESOR ERIC CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

ESTÁTICA

UNA BARRA HOMOGÉNEA DE $1.6m$ DE LONGITUD SE ENCUENTRA EN REPOSO SUSPENDIDA DE UN PASADOR LISO QUE PASA POR "O". LA BARRA SE SOMETE A LA ACCIÓN HORIZONTAL DE LA FUERZA $P = 200[N]$.

DETERMINE LA REACCIÓN HORIZONTAL EN EL PASADOR "O" EN EL INSTANTE DE APLICAR LA FUERZA P . CONSIDERE EL PESO DE LA BARRA DE $150[N]$.

SOLUCIÓN.



MEDIANTE LA $\sum M_{CIR} = I_{CIR} \alpha$ Y UTILIZANDO EL TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA OBTENER I_{CIR} :

$$P(1.2) = \left[\frac{1}{12} \frac{w}{g} (1.6)^2 + \frac{w}{g} (1.6)^2 \right] \alpha$$

COMO $P = 200[N]$ Y $w = 150[N]$ SE OBTIENE $\alpha = 5.66 [s^{-2}]$ CON LO CUAL $a_{cr} = \alpha \rho = (5.66)(0.4) = 2.26 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

AHORA, AL REALIZAR $\sum F_i = ma_i$

$$P - R_H = \frac{w}{g} a_i \Rightarrow 200 - R_H = \frac{150}{9.81} (2.26) \therefore R_H = 165.38 [N]$$

FERNANDO SÁNCHEZ RODRIGUEZ

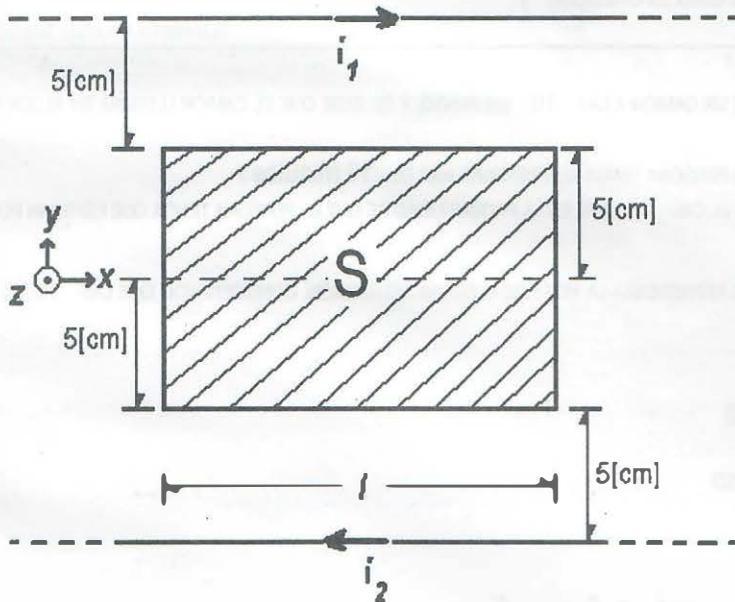
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

PROBLEMA DE CUADERNO DE EJERCICIOS

SE TIENEN DOS CONDUCTORES PARALELOS MUY GRANDES COMO SE MUESTRAN EN LA FIGURA, EN LOS CUALES $i_1 = 50[A]$, $i_2 = 100[A]$ Y $l = 30[cm]$.

CALCULE:

- EL FLUJO MAGNÉTICO A TRAVÉS DE LA SUPERFICIE S COPLANAR CON LOS CONDUCTORES.
- LA FUERZA QUE EXPERIMENTAN OCHO METROS DEL CONDUCTOR 1, DEBIDA AL CONDUCTOR 2.
- EL CAMPO MAGNÉTICO TOTAL EN EL CENTRO DEL ÁREA S .
- LA FUERZA MAGNÉTICA TOTAL QUE EXPERIMENTARÍA UN TERCER CONDUCTOR PARALELO CON LA CORRIENTE $i_3 = 40[A]$, HACIA LA DERECHA, COLOCADO EN MEDIO DE LOS DOS CONDUCTORES INICIALES.



A) EL FLUJO SE CALCULA CON LA EXPRESIÓN $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ Y $\phi = \iint B dS \cos \alpha$ DEBIDO A i_1

$$\phi_{s1} = \iint B_1 dS, \alpha = 0, \text{ TANTO } \vec{B}_1 \text{ Y } d\vec{S} \text{ ENTRAN A LA FIGURA, } \cos \alpha = 1$$

$$\phi_{s1} = \int_0^l \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} dr dx; \phi_{s1} = \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}; \text{ EN ESTE CASO ENTRA A LA FIGURA.}$$

$$\phi_{s1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (50)(0.30)}{2\pi} \ln \frac{15}{5} = 3.296 [\mu Wb], \text{ HACIA } -Z. \text{ DE MANERA ANALOGA}$$

$$\phi_{s2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (100)(0.30)}{2\pi} \ln \frac{15}{5} = 6.592 [\mu Wb], \text{ HACIA } -Z$$

DE ACUERDO CON EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: $\phi_s = \phi_{s1} + \phi_{s2} = 9.888 [\mu Wb] \otimes$

$$b) \vec{F}_{12} = i_1 \vec{l}_1 \times \vec{B}_{12}; \vec{F}_{12} = i_1 \vec{l}_1 \times \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} (-\hat{k}) = 50(8)\hat{i} \times \frac{4\pi \times 10^{-7} (100)}{2\pi (0.20)} (-\hat{k})$$

$$\vec{F}_{12} = 0.04\hat{j}[N]; \text{ SE PUEDE COMPROBAR QUE PARA } 8[m] \text{ DE } 2: \vec{F}_{12} = -0.04\hat{j}[N]$$

c) EL PUNTO CENTRAL DEL ÁREA S SE ENCUENTRA A 10[cm] DE CADA CONDUCTOR; APLICANDO EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN TENEMOS

$$\vec{B}_c = \vec{B}_{c1} + \vec{B}_{c2}$$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_{1c}} (-\hat{k}) + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r_{2c}} (-\hat{k}); B_c = -\frac{\mu_0 \hat{k}}{2\pi r_{1c}} (i_1 + i_2); r_{1c} = r_{2c} = 10[cm]$$

$$\text{DE ESTA FORMA } \vec{B}_c = -\frac{4\pi \times 10^{-7} (50+100)}{2\pi (0.10)} \hat{k} = -3 \times 10^{-4} \hat{k}[T]$$

d) POR LA SIMETRÍA DEL CONJUNTO DE CONDUCTORES, EL TERCER CONDUCTOR, PARALELO A LOS INICIALES, PASARÁ POR P Y EL CAMPO MAGNÉTICO QUE LE AFECTARÁ EN TODA SU LONGITUD, ES EL CALCULADO EN EL INCISO C, QUE ES EL EFECTO TOTAL DE LOS CONDUCTORES 1 Y 2; DE ACUERDO CON ESTO:

$$\vec{F}_3 = i_3 \vec{l}_3 \times \vec{B}_3; \vec{F}_3 = 40[A] 8[m] \hat{i} \times (-3 \times 10^{-4} \hat{k})[T]$$

NÓTESE QUE $\vec{B}_3 = \vec{B}_c$ Y QUE HEMOS TOMADO $i_3 = 8[m]$ COMO EN b.

$$\vec{F}_3 = 0.096\hat{j}[N]$$

SI SE CALCULARAN POR SEPARADO LA FUERZA PRODUCIDA POR CADA CONDUCTOR RESULTARÍA QUE EL 1 ATRAERÍA AL 3, Y QUE EL 2 RECHAZARÍA AL 3. DE ESTA FORMA LA FUERZA RESULTANTE SERÍA EN DIRECCIÓN \hat{j} .

ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO Y GABRIEL JARAMILLO MORALES

PROBABILIDAD

SI UNA PERSONA LLEGA A LA PARADA DE UN CAMIÓN A LAS 10 EN PUNTO, Y SE SABE QUE EL CAMIÓN LLEGARÁ EN ALGÚN MOMENTO ENTRE LAS 10:00 Y LAS 10:30, CON DISTRIBUCIÓN UNIFORME.

A) ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LA PERSONA TENGA QUE ESPERAR MÁS DE 10 minutos ?

B) SI A LAS 10:15 AÚN NO HA LLEGADO EL CAMIÓN, ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE LA PERSONA TENGA QUE ESPERAR POR LO MENOS OTROS 10 minutos ?

RESOLUCIÓN

SEA X LA VARIABLE ALEATORIA QUE REPRESENTA LA HORA DE LLEGADA DEL CAMIÓN, CONSIDERANDO QUE LAS 10:00 HORAS CORRESPONDEN AL TIEMPO CERO.

$X \sim \text{uniforme}(0, 30)$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & ; 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$a) P(X > 10) = \int_{10}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{2}{3}$$

$$b) P(X > 25 | X > 15) = \frac{P(X > 25)}{P(X > 15)} = \frac{\int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx}{\int_{15}^{30} \frac{1}{30} dx} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

PROFESOR LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO

"ALGUNAS PERSONAS SON IRRAZONABLES, INCONSECuentes Y EGOÍSTAS... ÁMALAS DE TODOS MODOS"

"SI HACES EL BIEN, PUEDEN ACUSARTE DE TENER OSCUROS MOTIVOS EGOÍSTAS... HAZ EL BIEN DE TODOS MODOS"

"LO QUE HAS TARDADO AÑOS EN CONSTRUIR PUEDE SER DESTRUIDO EN UNA NOCHE... CONSTRUYE DE TODOS MODOS"

MADRE TERESA DE CALCUTA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR



El presente es un documento de carácter
confidencial y no debe ser divulgado
ni utilizado para fines ajenos a los
de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad Nacional Autónoma de México
D.F. 06810

Presentado en la Facultad de Ingeniería
El día veintidós de mayo de 2004

102-B
908721

FACULTAD DE INGENIERIA
BIBL. "MTR. ENRIQUE RIVERO BORRELL"
ESTE LIBRO FUE DADO DE BAJA

* 26 JUL 2015 *

SUSTITUIDO _____
NOMBRE _____
FIRMA _____

FACULTAD INGENIERIA
BORRACION

Esta obra se terminó de imprimir
en agosto de 2004
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 500 ejemplares.

gover
BR
ENRI
E'