



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Efectos Magneto-hidrodinámicos
Producidos por Variaciones del
Flujo de Electrólitos en Micro-
canales**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecatrónico

P R E S E N T A

Marcel-André Ramírez Trocherie

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Enrique Guzmán Vázquez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Ingresada 2017

Jurado Asignado

Presidente: **Dr. Sergio Cuevas Serrano**
Secretario: **Dr. Federico Méndez Lavielle**
Suplente: **Dr. Frédéric Trillaud Phigi**
Suplente: **Dr. Marco Reyes Huesca**
Vocal: **Dr. Enrique Guzmán Vázquez**

Agradecimientos

A xxx

Resumen

En el presente trabajo se condensa la investigación teórico-experimental realizada en el ámbito del MHD (Magnetohidrodinámica), específicamente en micro generadores de corriente. Los experimentos se realizaron en el Lab On a Chip (laboratorio de BioMEMS) de la facultad de ingeniería.

El fenómeno estudiado a lo largo de la tesis, es la interacción de fluidos incompresibles y eléctricamente conductores moviéndose en canales de sección transversal rectangular ante campos magnéticos perpendiculares al flujo. Ello conlleva la conjunción de los fenómenos de mecánica de fluidos y electromagnéticos.

En el capítulo(??) se desarrollaron varios modelos analíticos estacionarios del fenómeno descrito. Se partió de modelos simplificados incrementando gradualmente su afinidad con la realidad. Cabe recalcar que el modelo con más realismo contempla tantos los efectos magnéticos (Fuerza de Lorentz) como las pérdidas viscosas en las cuatro paredes e incluso un posible deslizamiento en las mismas.

En el capítulo (3) se muestra el montaje y construcción experimental, con la finalidad de comprobar la existencia del fenómeno descrito en la hipótesis. El montaje experimental consta de un canal de sección cuadrada ($1.2 \times 10^{-3}m$) y una longitud de ($2.35 \times 10^{-2} m$) con un campo magnético uniforme en todo el canal de ($0.5T$) y un dispositivo de bombeo de desplazamiento positivo. Situándonos con ello a pequeñas escalas.

Posteriormente en los capítulos (3, ??). Se explica la experimentación realizada y los resultados obtenidos con el montaje previo así como las variables a medir y los regímenes de trabajo, Variando el parámetro del Reynold de $Re = 2 \times 10^1$ a $Re = 1.5 \times 10^2$ y manteniendo constante el Hartman en $Ha = 4.37 \times 10^{-2}$. El análisis comparativo se realizó entre los resultados obtenidos analíticamente y los experimentales.

El objetivo principal de la investigación es demostrar la existencia de corrientes generadas por el fenómeno previamente descrito

Contenido

Resumen	III
Nomenclatura	VII
1. Introducción	1
1.1. Relevancia del problema	1
1.2. Antecedentes	1
1.3. Objetivos y alcances	1
1.4. Hipótesis de trabajo	2
2. Modelo Matemático	3
2.1. Formulación del problema	3
2.2. La aproximación magnetohidrodinámica	5
2.3. Modelo para un micro-generador MHD	6
2.3.1. Caso I: canal con deslizamiento finito en dos paredes	7
2.3.2. Caso II: canal sin deslizamiento en las cuatro paredes	8
2.3.3. Caso III: canal con deslizamiento finito en las cuatro paredes	11
2.4. Flujo volumétrico	11
2.5. Densidad de corriente inducida	12
2.6. Distribución de la densidad de carga	12

2.7. Predicciones teóricas del perfil de Hartmann	14
3. Experimentos de Laboratorio	20
3.1. Fluidos de trabajo	20
3.1.1. Procedimiento de síntesis	21
3.1.2. Molaridad	22
3.1.3. Densidad	23
3.1.4. Comportamiento reológico	23
3.1.5. Propiedades eléctricas	24
3.2. Micro-canales	25
3.2.1. Diseño	25
3.2.2. Procedimiento de polimerización de PDMS	26
3.3. Arreglo experimental	28
3.3.1. Montaje Eléctrico	28
3.3.2. Montaje Hidráulico	29
3.3.3. Montaje de los imanes	29
3.4. Técnicas de medición	31
3.5. Series experimentales	31
4. Análisis de Resultados	35
4.0.1. Mediciones de la corriente inducida	35
4.1. Mediciones de la presión	36
4.2. Resultados de otros casos	36
4.3. Características estacionarias de la corriente	37
4.4. Discusión	37
5. Conclusiones	41

<i>CONTENIDO</i>	VI
5.1. Contribuciones	42
5.2. Recomendaciones y trabajo futuro	43
A. Ecuaciones Fundamentales	45
A.1. Ecuaciones del campo electromagnético	45
A.2. Ecuaciones del campo hidrodinámico	50

Lista de Figuras

2.1. Diagrama del microcanal . El campo magnético externo es perpendicular a la dirección de flujo, El sistema de referencia se localiza en el punto medio de la sección transversa y es un sistema dextrógiro(componente x ingresa al interior del documento)	3
2.2. $Ha = 100$	14
2.3. Perfiles de velocidad a presión constante y Ha variable	15
3.1. Iones en medios acuosos.	21
3.2. Propiedades reológicas del fluido. Densidad del fluido ρ como función de la fracción molar del cloruro de sodio M	23
3.3. Propiedades reológicas del fluido NaCl a $1.6M$, viscosidad μ contra esfuerzo cortante τ	24
3.4. Propiedades eléctricas del fluido. Conductividad eléctrica σ , como función de la fracción molar M de cloruro de sodio.	25
3.5. 1) PDMS, 2) Micro canal Canal, 3) Paredes conductoras , 4)Paredes no conductoras	26
3.6. Bomba de marca	28
3.7. 1)Bomba, 2) Dispositivo MHD, 3)Electrometro, 4) Transductor de presión, 5) Resistencia de carga	29
3.8.	30
3.9.	30

4.1. <i>Re</i> regresión lineal, <i>Ex</i> Datos Experimentales	38
4.2. (<i>Te</i>)Teórico , <i>Ex</i> Experimental	38
4.3. (<i>Te</i>)Regresión, <i>Ex</i> Experimental	40

Lista de Tablas

3.1. Tabla de molaridad contra conductividad en NaCl	25
3.2. Matriz experimental de fluido de trabajo NaCl	32

Nomenclatura

Mayúsculas

- B — Campo Magnético (T).
- C — Constante dimensional.
- E — Campo Eléctrico ($\frac{V}{m}$).
- F — Fuerza ($\frac{Kg\,m}{s^2}$).
- H — Ancho del canal (m).
- Ha — Numero adimensional de Hartmann.
- I — Corriente eléctrica (A).
- J — Densidad de corriente ($\frac{A}{m^2}$).
- Re — Numero adimensional de Reynolds.
- Re^m — Numero adimensional de Reynolds magnético.
- M — Molaridad ($\frac{mol}{L}$).
- P — Presión (KPa).
- Q — Gasto volumétrico ($\frac{m^3}{s}$).
- T — Temperatura (C).
- V — Volumen (m^3).

Minúsculas

- c — Velocidad de la luz en el vacío (m/s). La velocidad de la radiación electromagnética es independiente de la velocidad del emisor.
- h — Profundidad del canal (m).
- i — Índice de refacción (-).
- n — Índice de sucesiones .

- \hat{n} — Vector normal a la superficie .
 v — Velocidad $\left(\frac{m}{s^2}\right)$.
 t — Tiempo (numero de muestras).

Letras griegas

- α — El principio de todo (-).
 π — Numero Irracional (-).
 ϵ — Permitividad electrica del medio $\left(\frac{F}{m}\right)$.
 λ — Valor característico(eigenvalor).
 μ — Viscosidad cinematica $(Pa \cdot s 10^{-1})$.
 μ_m — Permeabilidad magnética del medio $\left(\frac{N}{A^2}\right)$
 ρ — Densidad $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$.
 ϱ — Densidad volumetrica de carga $\left(\frac{C}{m^3}\right)$.
 σ — Conductividad eléctrica $\left(\frac{S}{m}\right)$.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Relevancia del problema

Debido a la creciente crisis energética mundial y a la escasez de alternativas que sustituyan a los hidrocarburos , además de la poca investigación realizada en el campo de la magneto-hidrodinámica (MHD), se ha decidido desarrollar una investigación experimental entorno al tema.

Debido a la facilidad con la que es posible manejar los regímenes laminares de flujo, al igual de las pocas inversiones monetarias requeridas para la construcción de microcanales, se ha decidido trabajar la problemática en micro escala . Como consecuencia directa, es posible crear un control riguroso en cuanto las concentraciones y gastos volumétricos.

1.2. Antecedentes

Artículos de estudios previos

1.3. Objetivos y alcances

El objetivo general de la investigación es el de evaluar la capacidad para inducir una densidad de corriente significativa en un microdispositivo de flujo, cuando éste opera en régimen permanente bajo la acción de un campo magnético estático aplicado externamente.

Alcances:

- Desarrollar un modelo experimental para estudiar la densidad de corriente inducida.
- Desarrollar la metodología requerida para medir de manera directa la densidad de corriente en el microdispositivo.
- Desarrollar las técnicas de filtrado de señales y de análisis necesarias para procesar la información obtenida en el laboratorio.
- Desarrollar la técnica necesaria para medir directamente la presión de operación del microdispositivo.
- Evaluar de manera indirecta el flujo volumétrico del electrolito.
- Desarrollar un modelo matemático para explicar el principio de funcionamiento del dispositivo en la escala propuesta.
- Incorporar en el modelo matemático las dos condiciones de frontera que se presentan en la escala considerada, y que están dictadas por el tipo de materiales de construcción: a) cuando se cumple la condición de no-deslizamiento, y b) cuando sí se cumple la condición de deslizamiento.
- Evaluar numéricamente el modelo matemático para establecer la forma de los perfiles de flujo con las dos condiciones de frontera de interés.
- Validar el modelo matemático con los datos experimentales.

1.4. Hipótesis de trabajo

La densidad de corriente inducida en un electrolito con alta conductividad eléctrica es directamente proporcional al flujo de entrada en el régimen permanente de operación del dispositivo.

Capítulo 2

Modelo Matemático

2.1. Formulación del problema

El proceso físico considerado refiere al flujo de un electrolito saturado, que se mueve a través de un microcanal de sección transversal rectangular, y que se encuentra completamente inmerso en un campo magnético externo de tipo estático. La figura 2.1 ilustra esquemáticamente el arreglo correspondiente.

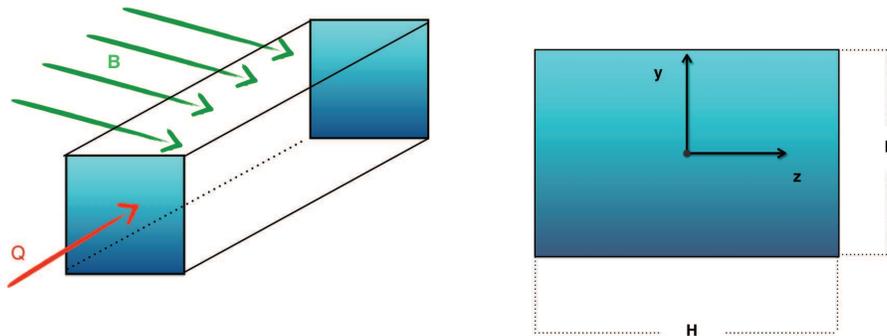


Figura 2.1: Diagrama del microcanal . El campo magnético externo es perpendicular a la dirección de flujo, El sistema de referencia se localiza en el punto medio de la sección transversal y es un sistema dextrógiro (componente x) ingresa al interior del documento)

Todo el dispositivo (es decir, el microcanal en su totalidad) se encuentra inmerso dentro del campo magnético \mathbf{B} aplicado externamente. Dicho campo es producido por dos imanes permanentes de Neodimio que tienen forma de placa. Estos imanes pueden ser colocados a una distancia predeterminada para regular la intensidad del campo en

la zona del canal. Por su lado, el microcanal está alineado dentro de la región de mayor uniformidad del campo magnético, con el objeto de evitar los efectos de borde.

Por un extremo del canal ingresa un cierto flujo volumétrico \mathbf{Q} de un electrolito con conductividad eléctrica conocida σ . Posteriormente éste es evacuado a presión atmosférica por el extremo opuesto, el cual ha sido especialmente diseñado a fin de evitar los efectos asociados a la descarga (por ejemplo los de tensión superficial).

Al pasar el electrolito por el campo magnético, se induce en éste una densidad de corriente eléctrica \mathbf{J} que es transversal al flujo. En principio, la corriente movilizada en el fluido, \mathbf{I} , puede ser recolectada en las paredes conductoras del microcanal. La carga eléctrica acumulada en dichas paredes produce un efecto similar al observado en un capacitor convencional. Gracias a la diferencia de potencial entre ambas paredes, ΔV , la carga se puede hacer fluir a través de un circuito eléctrico externo para alimentar una resistencia de carga.

En las aplicaciones de pequeña escala, por ejemplo en un micro-canal, el número de Reynolds magnético es $\text{Re}^m = \mu \sigma U_0 L \ll 1$. Asimismo, el número de Hartmann suele ser $\text{Ha} = B_0 L \sqrt{\sigma/\mu} \leq 1$ para los fluidos típicos.

El Re^m es una relación entre la advección magnética y la difusión magnética, en el experimento los valores de este número están acotados, $1.31 \times 10^{-12} \geq \text{Re}^m \geq 1.31 \times 10^{-11}$, lo que indica que los efectos advectivos dominan sobre los efectos difusivos en el proceso.

El Ha es una relación de fuerzas, las fuerzas magnéticas por un lado y por el otro las fuerzas viscosas, indica que las fuerzas magnéticas dominan el fenómeno estudiado. En nuestro caso de estudio, $\text{Ha} = 4.37 \times 10^{-2}$, por lo tanto si bien dominan las fuerzas viscosas no es del todo evidente.

Finalmente, cabe mencionar que el principio de operación descrito es el que corresponde a la configuración tipo generador de este arreglo. La operación tipo bomba también es posible mediante una modificación menor en la que se invierte el sentido de operación. Todo el proceso ocurre a temperatura ambiente, y los efectos de calentamiento en el fluido por efecto Joule son despreciables en el límite considerado.

2.2. La aproximación magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica¹ es la ciencia que estudia la dinámica de los fluidos conductores de electricidad en presencia de campos electromagnéticos. Por tal motivo, se hace indispensable considerar simultáneamente las ecuaciones de la hidrodinámica y del electromagnetismo. Estas ecuaciones se describen con detalle en el apéndice A.

Bajo ciertas condiciones es posible simplificar dicho conjunto de ecuaciones para modelar muchos casos de interés práctico. En particular, en la aproximación magnetohidrodinámica cabe hacer las siguientes simplificaciones:

1. El flujo es no-relativista.
2. El campo magnético externo es estacionario.
3. La corriente de desplazamiento puede ser ignorada.
4. La densidad de corriente convectiva en la Ley de Ohm puede ser ignorada.
5. La parte eléctrica en la Fuerza de Lorentz puede ser ignorada.
6. Para el electrolito $\mu \approx \mu_0$.
7. Los campos inducidos son mucho más pequeños que los aplicados (i.e. $Re^m = \mu \sigma Q_l/a \ll 1$).

El conjunto simplificado de ecuaciones, a partir del cual se desarrolla el modelo del sistema que nos ocupa, es el siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (2.5)$$

¹Este concepto fue introducido en 1942 por el científico sueco Hannes Alfvén, mientras estudiaba los procesos de la ionósfera terrestre.

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.6)$$

Es importante señalar que el Número de Reynolds del flujo en $Re = \rho u b / \mu \ll 1$ está en el orden $Re = 1.5 \times 10^2$. Esto corresponde a un flujo laminar, de tal manera que los efectos turbulentos son inexistentes. Los términos inerciales serán descartados puesto que se desea por el momento conocer el fenómeno en su estacionario. Dado que todos los términos de la derivada material desaparecen de la formulación, la versión final de las ecuaciones es lineal y permite una solución analítica. El acoplamiento, sin embargo, es evidente. Los valores particulares de las variables y parámetros se especifican en el capítulo 3.

2.3. Modelo para un micro-generador MHD

El momento de un flujo incompresible que transcurre en régimen estacionario a través de un canal infinito de sección transversal constante, y sobre el cual actúa un campo magnético externo, está gobernado por la ecuación de Navier-Stokes (ec. 2.2)

$$-\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{J} \times \vec{B} = 0. \quad (2.7)$$

En esta expresión P , μ , \vec{v} , \vec{J} , y \vec{B} , representan la presión promedio, la viscosidad dinámica, el campo de velocidades, la densidad de corriente inducida, y el campo magnético aplicado externamente. Es importante señalar que se hace la suposición de que \vec{B} es uniforme a lo largo del conducto.

El último término del lado derecho de la ecuación corresponde a la fuerza magnética. La densidad de corriente inducida que aparece en este término está dada por la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.8)$$

Evidentemente \vec{E} y \vec{B} se refieren a los campos eléctrico y magnético externos. Puesto que en nuestro caso de estudio $\vec{E} = \vec{0}$, la expresión se simplifica a

$$\vec{J} = \sigma \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.9)$$

En consecuencia, la fuerza magnética se escribe de la siguiente manera

$$\vec{F}_{mag} = \vec{J} \times \vec{B} = \sigma \vec{v} \times \vec{B} \times \vec{B}. \quad (2.10)$$

El proceso de flujo es tal que los vectores \vec{v} y \vec{B} son perpendiculares entre sí. Esto significa que la F_{mag} es antiparalela a la velocidad y se manifiesta, efectivamente, como una fuerza de frenado cuya magnitud es

$$F_{mag} = \sigma v B^2. \quad (2.11)$$

Este es el modelo básico que se aplica en las siguientes subsecciones para los diferentes casos concretos. Estos casos incluyen condiciones de frontera específicas en el contorno de la sección transversal del canal.

2.3.1. Caso I: canal con deslizamiento finito en dos paredes

Como primera aproximación se propone un modelo 1-D en el que se consideran los efectos viscosos asociados únicamente a dos paredes del conducto. Dado que todas las fuerzas son colineales, basta desarrollar la componente relevante de la ec. (2.2)

$$-\frac{\partial P_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \sigma v_x B^2 = 0. \quad (2.12)$$

De las componentes restantes se concluye que $\partial P/\partial y = \partial P/\partial z = 0$. La velocidad axial es exclusivamente función de la coordenada x , y el gradiente de presión es constante. Se trata de una ecuación ordinaria, no-homogénea, y por tanto admite una solución general del tipo $v_x(y) = v_{x_h} + v_{x_p}$, donde v_{x_h} corresponde a la solución homogénea y v_{x_p} a la solución particular. Concretamente, la solución particular es

$$v_{x_p} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} \frac{1}{\sigma B^2}$$

En relación con la solución homogénea, sigue que las raíces del polinomio característico (o de Cauchy)

$$\mu \lambda^2 - B^2 \sigma \lambda^0 = 0$$

son

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{B^2 \sigma}{\mu}} \in \mathbb{R}.$$

En términos de estas raíces, la solución homogénea queda como

$$v_{x_h}(y) = c_1 e^{y \sqrt{\frac{B^2 \sigma}{\mu}}} + c_2 e^{-y \sqrt{\frac{B^2 \sigma}{\mu}}}.$$

Se concluye de lo anterior que la solución general está dada por

$$v_x(y) = c_1 e^{y\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + c_2 e^{-y\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} - \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x}. \quad (2.13)$$

Las constantes se determinan a partir de las condiciones de frontera. Concretamente, puesto que hay una condición de deslizamiento finito en las dos caras del canal, se produce el siguiente sistema simultáneo

$$v_s = v_x(y = h/2) = c_1 e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + c_2 e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} - \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$v_s = v_x(y = -h/2) = c_1 e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + c_2 e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} - \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x}. \quad (2.15)$$

Este sistema se resuelve mediante las siguientes sustituciones

$$0 = (c_1 - c_2)e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + (c_2 - c_1)e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} \quad (2.16)$$

$$0 = (c_1 - c_2)\left(e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} - e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}}\right) \quad (2.17)$$

$$0 = c_1 - c_2 \quad (2.18)$$

$$c_1 = c_2 = c. \quad (2.19)$$

De lo anterior puede concluirse inmediatamente que

$$c = \frac{v_s + \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x}}{e^{\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}} + e^{-\frac{h}{2}\sqrt{\frac{B^2\sigma}{\mu}}}}. \quad (2.20)$$

El campo de velocidad solicitado establece las características del perfil de Hartmann²

$$\vec{v} = \left[c \cosh(y\lambda) - \frac{1}{\sigma B^2} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right] \hat{i}. \quad (2.21)$$

Es importante hacer notar que el perfil de Hartmann difiere fundamentalmente del perfil clásico de Hagen-Poiseuille

$$v_x(r) = \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) V_0. \quad (2.22)$$

Esto se debe al efecto que produce el frenado de Hartmann sobre el flujo. No obstante, en el límite $B \rightarrow 0$, se recupera el perfil de Hagen-Poiseuille como caso particular.

²Vale la pena recordar que el gradiente de presión es negativo.

De mayor interés aún, es la manera en la que se distribuye la densidad de carga a través del fluido. Entonces, dado que el régimen de flujo es permanente y el campo magnético externo es estático (funge como un campo lectrico), es posible considerar (ver ecuación (2.6)):

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.23)$$

Sustituyendo el resultado (2.19) se obtiene

$$\vec{E} = - \left[Bc \cosh(y\lambda) - \frac{1}{\sigma B} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right] \hat{j}. \quad (2.24)$$

Incorporando este resultado a Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.25)$$

se obtiene

$$\rho = -\epsilon\lambda Bc \sinh(y\lambda). \quad (2.26)$$

Existiendo una variacin espacial de la densidad de carga volumtrica.

2.3.2. Caso II: canal sin deslizamiento en las cuatro paredes

Ahora se aborda el problema 2-D, en el que las cuatro paredes con conforman la sección transversal del canal producen efectos viscosos. La ecuación (2.2) en este caso se reduce a

$$-\frac{\partial P_x}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \sigma v_x B^2 = 0. \quad (2.27)$$

Haciendo

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - v_x \frac{B^2 \sigma}{\mu} = 0 \quad (2.28)$$

surge la cantidad $B^2 \sigma / \mu = \text{Ha}^2 / L^2$, en la que se identifica al Número de Hartmann (Ha). La cantidad L es una longitud caracterstica del sistema. Puesto que se trabaja con un canal rectangular se propone el uso de el dimetro hidraulico D_h como longitud caracterstica (Apndice A)

Evidentemente, la expresión (??) es una ecuación diferencial parcial, lineal, de coeficientes constantes, y no-homogénea. La solución se obtiene por medio del método de separación de variables, en el que se propone formalmente

$$v_x = \gamma(y)G(z). \quad (2.29)$$

Sustituyendo en la ecuación homogénea se obtiene

$$G(z) \frac{d^2 \gamma(y)}{dy^2} + \gamma(y) \frac{d^2 G(z)}{dz^2} = \gamma(y) G(z) \frac{\text{Ha}^2}{L^2}. \quad (2.30)$$

Dividiendo entre γG se obtiene

$$\frac{1}{\gamma(y)} \frac{d^2 \gamma(y)}{dy^2} + \frac{1}{G(z)} \frac{d^2 G(z)}{dz^2} = \frac{\text{Ha}^2}{L^2}. \quad (2.31)$$

Al separar la ecuación se produce el siguiente sistema simultáneo de ecuaciones

$$\frac{1}{G(z)} \frac{d^2 G(z)}{dz^2} = \lambda_z^2, \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{\gamma(y)} \frac{d^2 \gamma(y)}{dy^2} = -\lambda_y^2, \quad (2.33)$$

y

$$\frac{\text{Ha}^2}{L^2} + \lambda_y^2 = \lambda_z^2. \quad (2.34)$$

Las constantes de separación λ son los valores propios que aparecen en la solución general del problema original, la solución debe satisfacer simetría en ambos ejes debido a las condiciones de frontera. Las soluciones de las ecuaciones anteriores se escriben como

$$G(z) = C_1 \cosh(\lambda_z z) + A, \quad (2.35)$$

y

$$\gamma(y) = C_2 \cos(\lambda_y y) + B. \quad (2.36)$$

Para determinar el valor de las constantes de integración es necesario considerar las condiciones de frontera en cada dirección. En las dos paredes sin deslizamiento se tiene

$$v_x(h/2, z) = 0 = \gamma(h/2)G(z). \quad (2.37)$$

Por tanto, una solución no-trivial requiere que γ satisfaga la condición

$$0 = C_2 \cos\left(\lambda_y \frac{h}{2}\right) + B, \quad (2.38)$$

que es posible solo si $B = 0$ (independientemente del tamaño del canal). Los valores propios posibles son los siguientes

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.39)$$

Este último resultado se puede reescribir de manera más clara como

$$\lambda_y = \frac{\pi n}{h}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.40)$$

Fijados los valores en la dirección y , se procede a calcular los valores propios en la dirección z , de modo que

$$\lambda_{zn} = \sqrt{\frac{(Ha)^2}{(L)^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{h}\right)^2}. \quad (2.41)$$

Esto requiere satisfacer la segunda condición de frontera

$$v_x(y, H/2) = 0 = \gamma(y)G(H/2) \quad (2.42)$$

que conduce a

$$\therefore 0 = C_1 \cosh\left(\lambda_{zn} \frac{H}{2}\right) + A. \quad (2.43)$$

Nuevamente, la solución no-trivial implica

$$C_1 = \frac{-A}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}, \quad (2.44)$$

por lo que la función G queda especificada como

$$G_n(z) = \left[1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}\right] A_n. \quad (2.45)$$

Finalmente, la solución global se expresa de la siguiente manera

$$v_x(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}\right] \cos(\lambda_{yn} y). \quad (2.46)$$

Los coeficientes A_n se determinan requiriendo que la solución satisfaga a la ecuación diferencial original (??) en términos del forzamiento. Entonces es necesario sustituir las derivadas correspondientes al Laplaciano

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{yn}^2 A_n \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}\right) \cos(\lambda_{yn} y) \quad (2.47)$$

y

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{zn}^2 A_n \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})} \cos(\lambda_{yn} y). \quad (2.48)$$

en la ecuación original (??). Tras la sustitución se llega a la igualdad

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{yn}^2 + \frac{\text{Ha}^2}{L^2} \right) A_n \cos(\lambda_{yn} y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x}, \quad (2.49)$$

que se puede reacomodar como sigue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right)^{-1} \left(\lambda_{yn}^2 + \frac{H a^2}{L^2} \right) A_n \cos(\lambda_{yn} y) = 1. \quad (2.50)$$

Claramente se trata de un desarrollo de Fourier en serie de cosenos, cuyos coeficientes se calculan aprovechando la propiedad de ortogonalidad usual de las funciones circulares.

Es importante reconocer que la función $f(x) = 1$ es un miembro del conjunto básico de funciones trigonométricas, que son ortogonales en cualquier intervalo de longitud 2π ; es decir, $\phi_n \in \{1, \dots, \cos(n\pi x/l), \sin(n\pi x/l), \dots\}$. Consecuentemente se satisfacen las condiciones

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad n \neq m \quad (2.51)$$

y

$$\int_a^b \phi_n^2(x) dx \neq 0 \quad (2.52)$$

para $n, m = 0, 1, 2, \dots$ en el intervalo $[a, b]$, y es lícito asumir la representación formal de la función $f(x) = a_0 \phi_0 + a_1 \phi_1 + \dots$. Evidentemente la expansión (??) es una representación de este mismo tipo, puesto que tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (2.53)$$

con $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. En particular, se observa que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 \implies a_0 = 2 \quad (2.54)$$

como era de esperar.

Estas consideraciones son de gran importancia, porque el dominio válido de la solución debe concretarse exclusivamente el interior del canal. En este caso los valores propios obtenidos, λ_{yn} , cumplen exactamente estas mismas condiciones ya que

$$\lambda_{yn} = \frac{n\pi}{h} = \frac{2n\pi}{L}, \quad (2.55)$$

siendo $L = 2h$ el intervalo de longitud indicada previamente. Entonces, para realizar el cálculo hacemos

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos(\lambda_{ym} y) dy - \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} \cos(\lambda_{ym} y) dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}} D_n \cos(\lambda_{ym} y) \cos(\lambda_{yn} y) dy. \quad (2.56)$$

Realizando las integrales queda

$$D_n = \frac{\operatorname{sen}(\lambda_{yn} y)}{\lambda_{yn} 2h} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \frac{\operatorname{sen}(\lambda_{yn} y)}{\lambda_{yn} 2h} \Big|_{\frac{h}{2}}^{\frac{3h}{2}}, \quad (2.57)$$

y evaluando

$$D_n = \frac{\operatorname{sen}(\lambda_{yn} \frac{h}{2}) - \operatorname{sen}(-\lambda_{yn} \frac{h}{2})}{\lambda_{yn} 2h} + \frac{-\operatorname{sen}(\lambda_{yn} \frac{3h}{2}) + \operatorname{sen}(\lambda_{yn} \frac{h}{2})}{\lambda_{yn} 2h}. \quad (2.58)$$

Ahora se sustituye el valor de λ_{yn} para obtener

$$D_n = \frac{\operatorname{sen}(\frac{2n\pi}{2h} \frac{h}{2}) - \operatorname{sen}(-\frac{2n\pi}{2h} \frac{h}{2})}{\frac{2n\pi}{2h} 2h} + \frac{-\operatorname{sen}(\frac{2n\pi}{2h} \frac{3h}{2}) + \operatorname{sen}(\frac{2n\pi}{2h} \frac{h}{2})}{\frac{2n\pi}{2h} 2h}, \quad (2.59)$$

de la que surge finalmente

$$D_n = \frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.60)$$

Esta última expresión se puede reescribir en forma alternativa como

$$D_n = \frac{4(-1)^{\frac{2n-2}{2}}}{\pi(2n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.61)$$

Ahora se realiza la sustitución de este resultado en la correspondiente definición de los coeficientes

$$D_n = \left(\frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right)^{-1} \left(\lambda_{yn}^2 + \frac{Ha^2}{L^2} \right) A_n. \quad (2.62)$$

Sigue que

$$\frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} = \left(\frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right)^{-1} \left(\lambda_{yn}^2 + \frac{Ha^2}{L^2} \right) A_n, \quad (2.63)$$

de la cual resulta finalmente

$$A_n = \frac{4(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} \left(\frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} \right) \left(\lambda_{yn}^2 + \frac{Ha^2}{L^2} \right)^{-1}. \quad (2.64)$$

Nuevamente, esta expresión se puede reescribir en la forma más conveniente

$$A_n = \frac{4(-1)^{\frac{2n-2}{2}}}{\mu \lambda_{zn}^2 \pi (2n-1)} \left(\frac{-\partial P_x}{\partial x} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.65)$$

La solución general para el perfil de Hartmann es en este caso

$$v_x(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})} \right) \cos(\lambda_{yn} y), \quad (2.66)$$

en la que

$$\lambda_z^2 = \frac{Ha^2}{L^2} + \lambda_y^2,$$

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h},$$

y

$$A_n = \frac{4(-1)^{\frac{2n-2}{2}}}{\mu \lambda_{zn}^2 \pi(2n-1)} \left(\frac{-\partial P_x}{\partial x} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.3.3. Caso III: canal con deslizamiento finito en las cuatro paredes

Ahora se considera el caso en el que existe una velocidad de deslizamiento finita en las cuatro paredes que conforman la sección transversal del canal. La ecuación de transporte es la misma que en el caso anterior (ecuación (??)), pero las condiciones de frontera ahora son no-homogéneas. Se procede, entonces, a probar la solución

$$v_x^* = v_x + v_s$$

$$v_x = \gamma(y)G(z)$$

$$v_x(y = \pm h/2) = v_x(z = \pm H/2) = v_s, \quad (2.67)$$

en la que v_s representa la velocidad de deslizamiento. La sustitución en la ecuación (??) conduce a

$$-\frac{\partial P_x}{\mu \partial x} - \frac{B^2 \sigma v_w}{\mu} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - v_x \frac{B^2 \sigma}{\mu} = 0. \quad (2.68)$$

Resalta inmediatamente el nuevo término constante que aparece en la ecuación. En este sentido, el contorno de las paredes constituye una equipotencial del flujo.

Desde el punto de vista operativo, el esquema de resolución cambia muy poco porque solamente el término no-homogéneo requiere modificación. Por esta razón es posible plantear directamente el perfil de Hartmann como

$$v_x(y, z) = v_w + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn} z)}{\cosh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})} \right) \cos(\lambda_{yn} y), \quad (2.69)$$

donde

$$\lambda_{zn}^2 = \frac{Ha^2}{L^2} + \lambda_y^2,$$

$$\lambda_{yn} = \frac{\pi(2n-1)}{h},$$

y

$$A_n = \frac{4(-1)^{\frac{2n-2}{2}}}{\lambda_{zn}^2 \pi(2n-1)} \left(\frac{-1}{\mu} \frac{\partial P_x}{\partial x} - v_w \frac{B^2 \sigma}{\mu} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esta es la solución más general posible que describe el proceso físico planteado. Cabe señalar que este problema no posee discontinuidades en el dominio, ni tampoco en las condiciones de frontera. Sin embargo, el caso más realista en el que dos de las paredes satisfacen la condición de no-deslizamiento, mientras que las otras dos no la satisfacen, sí presenta tales discontinuidades. Este caso queda para ser desarrollado en un trabajo futuro.

2.4. Flujo volumétrico

Con los perfiles de Harmtmann obtenidos en la sección anterior se puede calcular el flujo volumétrico Q y, por consiguiente, la densidad de corriente inducida \vec{J} y la corriente total I que se puede hacer circular por la carga externa.

Por definición

$$Q = \int \vec{v} \cdot \hat{n} da, \quad (2.70)$$

Puesto que la velocidad es perpendicular al rea transversa, siendo esta la seccion rectangular la integral doble se simplifica.

$$Q = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_x dydz, \quad (2.71)$$

Sustituyendo la ecuacin(2.41) se llega

$$Q = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_{wall} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn}z)}{\cosh(\lambda_{zn}(\frac{H}{2}))} \right) \cos(\lambda_{yn}y) dydz, \quad (2.72)$$

Obteniendo finalmente

$$Q = v_{wall}hH + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(H - \frac{2 \tanh(\lambda_{zn} \frac{H}{2})}{\lambda_{zn}} \right), \quad (2.73)$$

donde

$$\lambda_z^2 = \frac{(Ha)^2}{(L)^2} + \lambda_y^2,$$

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N},$$

y

$$A_n = \frac{8}{\lambda_{zn}^2 \pi(2n-1)\lambda_{yn}} \left(\frac{-\partial P_x}{\mu \partial x} - v_{wall} \frac{B^2 \sigma}{\mu} \right) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

2.5. Densidad de corriente inducida

A partir del gasto previamente calculado se puede inferir la velocidad media del flujo. El canal tiene una sección transversal de área $A_t = hH$, de modo que

$$Q = \int \vec{v} \cdot \hat{n} da = \beta \bar{v}_n A_t, \quad (2.74)$$

donde $\bar{v}_n = \bar{v} \cos(0)$ es la velocidad normal promedio, y β es un factor de corrección. Cuando el campo externo B es suficientemente grande el perfil de Hartmann se hace relativamente plano, y el campo de velocidades en el microcanal se hace relativamente uniforme. Entonces $\beta \approx 1$ y

$$\bar{v}_n \approx \frac{Q}{A_t}. \quad (2.75)$$

La densidad promedio de corriente inducida es (ver ecuación (2.6))

$$\vec{J} \approx \frac{\sigma Q}{hH} \hat{i} \times \vec{B}. \quad (2.76)$$

Finalmente la corriente que se puede hacer circular por una carga externa está dada por

$$I \approx \vec{J} A_c, \quad (2.77)$$

en la que A_c representa la sección del conductor eléctrico.

2.6. Distribución de la densidad de carga

Al establecerse la densidad de corriente \vec{J} en el fluido, la carga iónica del electrolito también se distribuye con un perfil específico a lo largo de la sección transversal. La forma de esta distribución se puede calcular a partir de la ecuación (2.6) y del perfil de Hartmann. Por ejemplo, para el caso sin deslizamiento en toda la sección transversal se considera (2.40).

El campo eléctrico es entonces

$$E(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} -BA_n \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn}z)}{\cosh(\lambda_{zn}(\frac{H}{2}))} \right) \cos(\lambda_{yn}y) \hat{j} \quad (2.78)$$

Con

$$\lambda_z^2 = \frac{(Ha)^2}{(L)^2} + \lambda_y^2$$

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$A_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{\mu\lambda_{zn}^2\pi(2n-1)} \left(\frac{-\partial P_x}{\partial x} \right) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

Incorporando la solución de campo eléctrico obtenida (2.47) a la ecuación de Maxwell del campo eléctrico (A.11), se llega a la distribución de densidad de carga .

$$\varrho(y, z) = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} B\lambda_y A_n \left(1 - \frac{\cosh(\lambda_{zn}z)}{\cosh(\lambda_{zn}(\frac{H}{2}))} \right) \sin(\lambda_{yn}y) \quad (2.79)$$

Con

$$\lambda_z^2 = \frac{(Ha)^2}{(L)^2} + \lambda_y^2$$

$$\lambda_y = \frac{\pi(2n-1)}{h} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

$$A_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{\mu\lambda_{zn}^2\pi(2n-1)} \left(\frac{-\partial P_x}{\partial x} \right) \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

La distribución satisface el requisito de conservación de la carga. En otras palabras, satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.80)$$

Esto se comprueba fácilmente porque para un proceso estacionario tenemos

$$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\varrho \vec{v}_x) = \nabla \varrho \cdot \vec{v}_x + \varrho \nabla \cdot \vec{v}_x = 0. \quad (2.81)$$

Como el flujo es incompresible el segundo término es cero; por otra parte el gradiente de la densidad de carga y la velocidad son ortogonales, y el término correspondiente también se hace cero. En consecuencia

$$\nabla \cdot (\rho_e \vec{v}_x) = 0 \quad (2.82)$$

como es debido para satisfacer la conservación de la carga.

2.7. Predicciones teóricas del perfil de Hartmann

El modelo numérico se elaboró con base en las ecuaciones obtenidas en el capítulo ???. La serie de imágenes de la figura 2.2 muestra los perfiles de velocidad de Hartmann para diferentes valores del número de Hartmann, Ha .

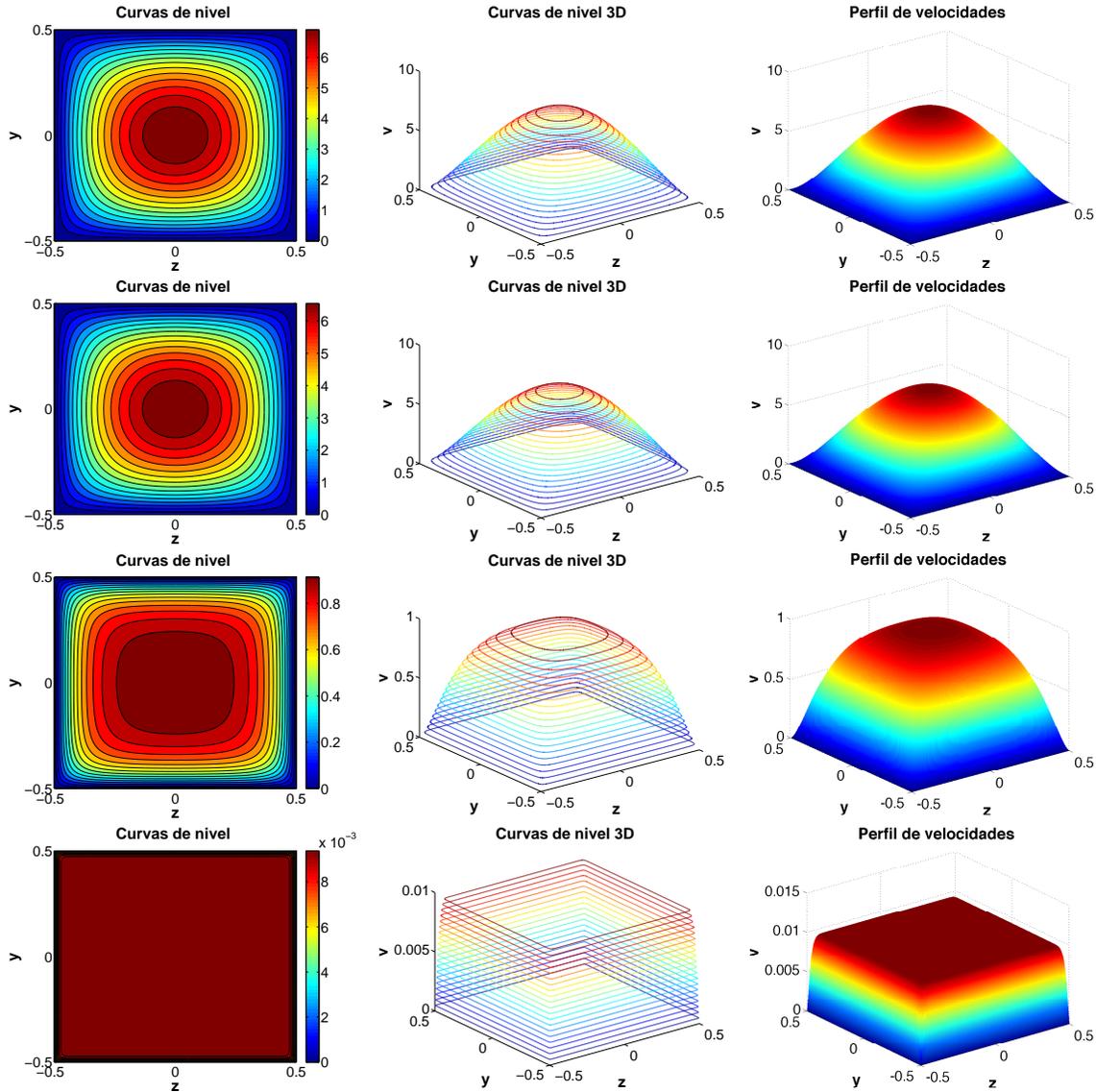


Figura 2.2: $Ha = 100$.

El efecto que tiene el número de Hartmann es evidente. Según aumenta el campo magnético externo, aumenta también el Ha y el perfil de velocidades se hace menos parabólico. Con campos magnéticos intensos se alcanza una situación límite en la que

el frenado magnético produce un perfil prácticamente plano. En este caso, como la velocidad es muy similar en todos los puntos, el flujo volumétrico disminuye notablemente. Como resultado, para mantener el flujo solicitado es preciso incrementar la presión del sistema de flujo. No obstante, esto plantea una limitación práctica debido al tamaño del dispositivo.

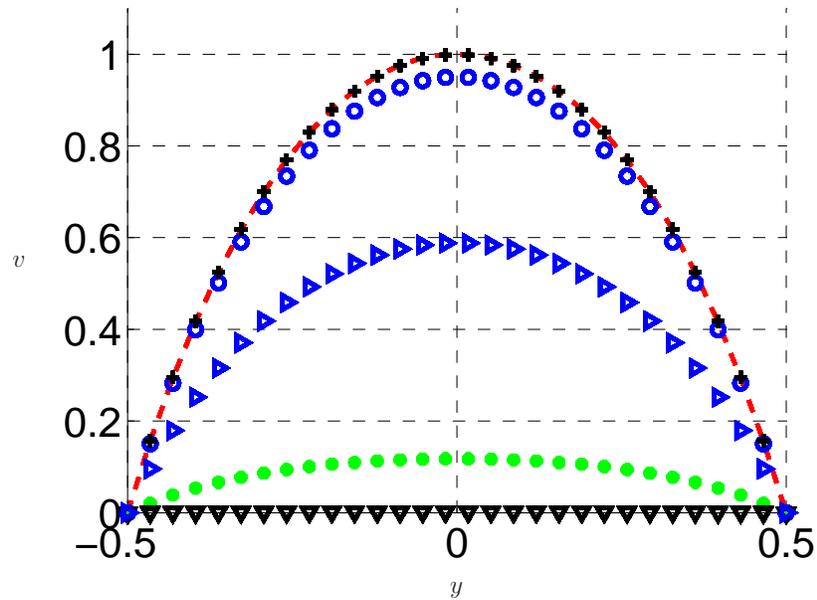


Figura 2.3: Perfiles de velocidad a presión constante y Ha variable

Capítulo 3

Experimentos de Laboratorio

3.1. Fluidos de trabajo

Los dispositivos MHD requieren de fluidos que posean la capacidad de conducir corrientes eléctricas cuando se les aplica un campo magnético externo. En la mayoría de las aplicaciones se utilizan líquidos conductores, de los cuales hay tres tipos fundamentales : a) metales líquidos, b) suspensiones con partículas metálicas y c) soluciones electrolíticas. Es importante reconocer que la corriente inducida depende fuertemente de la conductividad eléctrica del fluido, como se puede ver en la ecuación (2.10). Por tal motivo, en aquellos casos donde se requieren elevadas densidades de corriente (como sucede con los generadores eléctricos de alta eficiencia) el fluido de trabajo es un plasma (?). Por otro lado el uso de plasmas en aplicaciones de pequeña escala presenta una serie de problemas técnicos de muy difícil resolución. Evidentemente la construcción de un canal capaz de confinar un plasma sería técnicamente muy difícil y sumamente costoso.

En este caso se optó por realizar los experimentos con soluciones preparadas a base de agua desionizada y reactivos analíticos de NaCl y KCl (en el apéndice A se muestran los certificados correspondientes). Esto obedece a cuatro motivos principales:

1. La medición de las velocidades requiere que el medio sea prácticamente transparente.
2. Los electrolitos son seguros y son compatibles con los materiales de los canales.
3. Sus propiedades físicas se pueden modificar fácilmente.
4. El costo correspondiente es inferior al de otras alternativas de mayor escala.

5. La facilidad para el escalamiento debido a que los reactivos son accesibles.
6. Son sustancias simples con propiedades de transporte fácilmente medibles.

Fueron elegidos como fluidos de trabajo disoluciones de cloruro de Sodio (NaCl) y de Potasio (KCl), debido a que son sustancias simples que cumplen con los requisitos anteriores. Inicialmente estos fluidos fueron sembrados con partículas para efectos de visualización (especialmente con la técnica PIV). Las partículas trazadoras se seleccionaron para tener flotabilidad neutra para disminuir los efectos inerciales. Las partículas x micras de radio tienen un recubrimiento de plata y una densidad relativa de $\gamma = 1.05$. A nivel molecular, la estructura iónica de estas disoluciones está caracterizada como se indica en la figura (??), y el comportamiento es el que típicamente corresponde a las soluciones salinas.

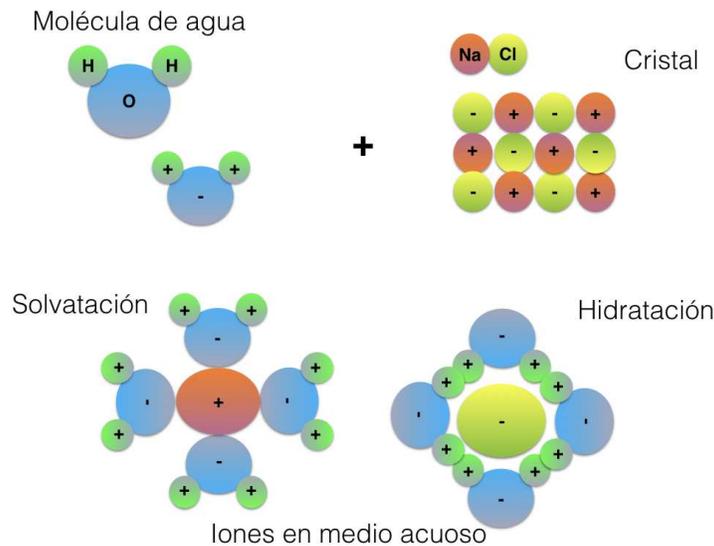


Figura 3.1: Iones en medios acuosos.

Este esquema de organización molecular es importante porque permite discernir cómo se mueven las cargas en una solución de alta conductividad. A diferencia del modelo del mar electrónico en un metal, en este caso son los iones en el medio acuoso los que son susceptibles de ser desplazados bajo la acción de campos electromagnéticos externos. Cabe mencionar que estas sales se disuelven en el agua por la interacción entre los dipolos de las moléculas de agua que rompen el cristal iónico, disolviéndolo e hidratándolo, hasta que finalmente se liberan los iones sodio Na^{+1} y de cloruro Cl^{-1} .

3.1.1. Procedimiento de síntesis

El procedimiento de síntesis se puede describir mejor enumerando los pasos seguidos:

1. Con ayuda de una espátula cromada y una balanza analítica se miden los pesos (en gramos) indicados para el soluto requerido (NaCl o KCl) en función de la molaridad solicitada.
2. Se coloca el soluto dentro de un matraz aforado y se disuelve con agua des-ionizada, hasta alcanzar la marca del aforo (la parte inferior del menisco debe ajustarse a la línea del aforo).
3. Se coloca el tapón del matraz aforado, y se agita vigorosamente hasta que se logra disolver completamente el soluto.
4. Se envasar y etiqueta la disolución con la molaridad correspondiente.

3.1.2. Molaridad

La molaridad se relaciona con las cantidades de solvente y disolvente requeridas, así como con la densidad del fluido, de la manera que se describe a continuación.

La molaridad se define como:

$$M = \frac{n}{V} = \frac{m}{Pm} \frac{1}{V} \quad (3.1)$$

En lo que respecta a la densidad se tiene que:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.2)$$

donde las variables involucradas tienen el siguiente significado:

m : Masa

ρ : Densidad

V : Volumen

n : Numero de moles

Pm : Masa molar

M : Molaridad

En suma, para conocer la densidad de una solución molar se deben considerar las siguientes relaciones:

$$\rho_{\text{solución}} = \frac{m_{\text{Total}}}{V_{\text{Total}}} \quad (3.3)$$

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}}(V_{\text{Total}} - V_{\text{soluto}}) \quad (3.4)$$

$$V_{\text{soluto}} = \frac{m_{\text{soluto}}}{\rho_{\text{soluto}}} \quad (3.5)$$

$$m_{\text{soluto}} = V_{\text{Total}} M P m_{\text{soluto}} \quad (3.6)$$

$$m_{\text{Total}} = m_{\text{soluto}} + m_{\text{H}_2\text{O}} \quad (3.7)$$

$$3V_{\text{Total}} = V_{\text{soluto}} + V_{\text{H}_2\text{O}} \quad (3.8)$$

Sustituyendo retroactivamente las expresiones en la primera ecuación se obtiene

$$\rho_{\text{solucin}} = \frac{M \cdot P m_{\text{soluto}} \cdot V_{\text{Total}} + \rho_{\text{H}_2\text{O}}(V_{\text{Total}} - \frac{M \cdot P m_{\text{soluto}} \cdot V_{\text{Total}}}{\rho_{\text{soluto}}})}{V_{\text{Total}}}$$

Posteriormente, se simplifica y se llega a la ecuación

$$\rho_{\text{solucin}} = M \cdot P m_{\text{soluto}} + \rho_{\text{H}_2\text{O}}(1 - \frac{M \cdot P m_{\text{soluto}}}{\rho_{\text{soluto}}}) \quad (3.9)$$

3.1.3. Densidad

La curva de la. densidad se muestra en la figura (??) a continuación

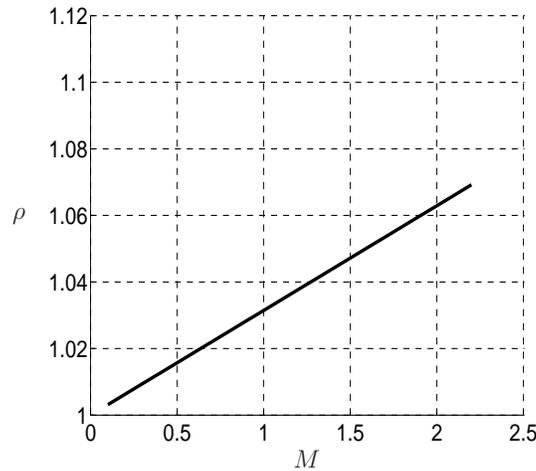


Figura 3.2: Propiedades reológicas del fluido. Densidad del fluido ρ como función de la fracción molar del cloruro de sodio M .

Se puede apreciar claramente la relación lineal que guarda la densidad con la concentración molar de sal en solución. Vale la pena señalar que, con el objeto de mantener la flotabilidad neutra de los trazadores, se fijó la concentración de NaCl en $1.6M$, y la de KCl en $1.3M$.

Las propiedades de las soluciones se especifican en la tabla xxx.

3.1.4. Comportamiento reológico

Una prueba de viscosidad efectuada en un medidor de la marca xxx, permitió establecer el carácter newtoniano de los fluidos de trabajo. Es importante conocer este debido a que las ecuaciones de Navier-Stokes son válidas para fluidos que mantienen una relación

$$\mu = \frac{\tau}{\partial u / \partial y} \quad (3.10)$$

entre el esfuerzo cortante τ y la velocidad angular de deformación del fluido $\dot{\gamma}$. La figura (??) muestra a la densidad como función de la fracción molar. Se ve con toda claridad que la relación es esencialmente lineal, tal como se desea para los fluidos de trabajo.

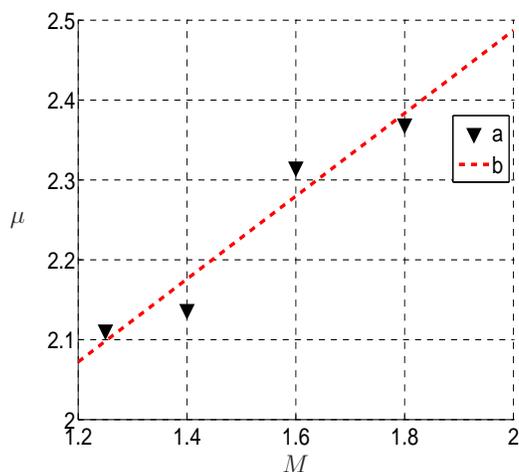


Figura 3.3: Propiedades reológicas del fluido NaCl a $1.6M$, viscosidad μ contra esfuerzo cortante τ .

3.1.5. Propiedades eléctricas

La conductividad eléctrica constituye la propiedad más importante en el tipo de proceso considerado. Típicamente en las aplicaciones MHD en microdispositivos la conducti-

vidad eléctrica se encuentra en el intervalo $10 \leq \sigma \leq 20$ S/m (Nguyen (2012)). Las conductividades reportadas en las tablas 3.1 y 3.1 para las soluciones desarrolladas, se midieron con un equipo Oaklon de la serie 2700. La incertidumbre asociada a las mediciones es de xxx % dentro del rango (xxx - xxx mS/cm), según indica el certificado de calibración del fabricante (ver apéndice A).

Tabla 3.1: Tabla de molaridad contra conductividad en NaCl

M mol	σ S/m	V m ³	NaCl kg
1.4	11.18	10	0.8181
1.5	11.85	10	0.8765
1.6	12.54	10	0.9350
1.7	13.70	10	0.9935
1.8	14.13	10	1.0520
1.9	14.73	10	1.1105
2.0	15.30	10	1.1688

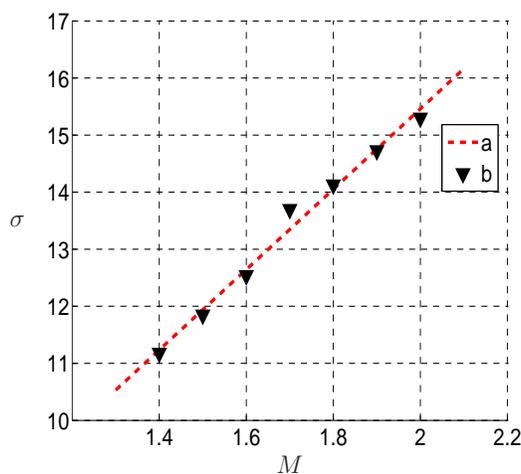


Figura 3.4: Propiedades eléctricas del fluido. Conductividad eléctrica σ , como función de la fracción molar M de cloruro de sodio.

La σ de la solución utilizada en los experimentos fue de xxxS/m. Esto concuerda con los valores reportados en la mayoría de las investigaciones (por ejemplo, en ???).

3.2. Micro-canales

3.2.1. Diseño

Como primera opción se han elegido geometrías simples; en este caso se trata de una sección transversal rectangular. Ello facilita el estudio enormemente porque la sección se mantiene constante. Físicamente, la complicación para la etapa de modelado consiste en que la construcción del cual implica que dos de sus paredes sean conductoras y dos no. Además, se tiene la complicación de que las paredes de polímero no satisfacen la condición de no-deslizamiento. Un diagrama de la geometría básica ilustra este concepto (fig. (??)).

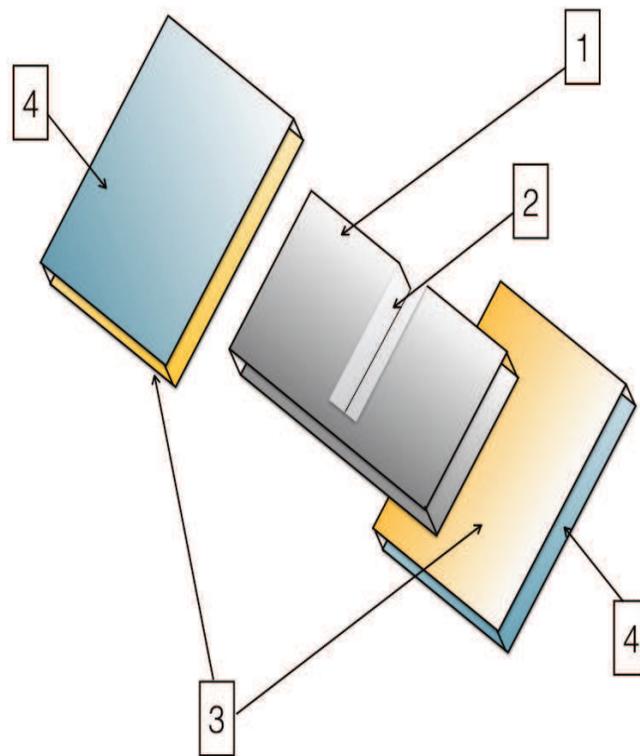


Figura 3.5: 1) PDMS, 2) Micro canal Canal, 3) Paredes conductoras , 4)Paredes no conductoras

Por cuestiones de facilidad en la manufactura en escalas de 10^{-3} m, y dado que 2 de las paredes son conductoras y dos no lo son, fue necesario construir los canales en tres secciones acopladas (3.5). La parte intermedia (1) esta hecha de polidimetilsiloxano

(PDMS). Ésta provee el espesor de dieléctrico que evita movimientos indeseados de cargas. Las otras dos paredes (2) proveen rigidez a la construcción, y están formadas por porta objetos recubiertos con una capa de óxido de Estaño e Indio (ITO). Este material es un buen conductor, por lo que us uso convienen mucho a los objetivos de generación de energía eléctrica y de medición.

3.2.2. Procedimiento de polimerización de PDMS

La construcción del canal requiere de un cuidadoso proceso de curación del polímero PDMS. En resumen, los pasos que se deben seguir son los siguientes:

1. Con ayuda de un agitador de vidrio y una balanza analítica, se vierte en un vaso de precipitado el peso (en gramos) requerido para obtener una capa del grosor deseado. Se agragan 2 gramos extra para compensar las mermas posibles a causa del catalizador.
2. Se revuelve vigorosamente la mezcla con un agitador de vidrio durante un par de minutos.
3. Se introduce la mezcla y el vaso de precipitado en una campana de vacío, y se aumenta la presión vacuométrica.
4. Se corta la presión vacuométrica en cuanto todas las burbujas de aire en la mezcla desaparecen, y se reestablece la presión en la campana a su valor atmosférico.
5. Se retira el vaso de precipitado con la mezcla, y se vierte en una caja de petri colocada sobre la balanza analítica previamente tarada. Se deposita la cantidad deseada según el grosor que se requiera.
6. Se coloca la caja de petri en un horno a 50°C durante unas 6 horas, procurando que la superficie en donde repose la caja sea perfectamente plana y sin inclinaciones.

Una vez que se obtiene la capa de PDMS con el grosor constante solicitado, se procede a retirar la capa de la caja de petri. Es necesario limpiar la capa cuidadosamente con alcohol isopropílico. Posteriormente se corta en una cortadora laser en la que se han preseleccionado el tamaño del corte, así como la potencia y la velocidad requeridas. Es importante que la temperatura no se eleve porque se daña la capa de PDMS, y porque se liberan gases tóxicos. El recorte se ajusta al tamaño de los porta objetos.

La construcción misma del canal requiere de los siguientes pasos:

1. Se limpia el canal recortado retirando las partes quemadas con un punzón muy delgado, y una mezcla de alcohol con agua.
2. Al terminar la limpieza se introduce el recorte al horno unos 20 minutos, a $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ con el fin de evaporar cualquier residuo de agua remanente.
3. Se retira con ayuda de cinta adhesiva cualquier posible pelusa del las paredes, y en paralelo se limpian los dos porta objetos de ITO del lado conductor.
4. **VOLVER A ESCRIBIR** Con ayuda de la pistola de efecto corona las protecciones requeridas para su utilizacin irradiar 40 segundos el PDMS e inmediatamente 120 segundos al portaobjetos del lado conductor juntarlos del lado a pegar procurando que no quede aire entre las superficies pegadas.
5. Repetir el proceso anterior con el otro lado del PDMS y el porta objetos restante.
6. Colocar en una caja de petri para evitar que se ensucie y dejarle una noche en el horno a a unos 50 grados para que se relajen los esfuerzos.

3.3. Arreglo experimental

El montaje del canal, de los imanes y de otros elementos del sistema experimental se muestran en la fotografía de la figura (??). La bomba de desplazamiento positivo produce un flujo laminar y un control muy exacto de la dosificación.



Figura 3.6: Bomba de marca

La bomba en cuestión funciona por medio de un motor a pasos de alta calidad. Al girar se desplaza el émbolo por medio de un tornillo sin fin que empuja una jeringa. Dependiendo de la velocidad de giro, se tiene un gasto constante particular. Las conexiones

eléctricas e hidráulicas se señalan, respectivamente, con líneas punteada y continua en la figura (3.7).

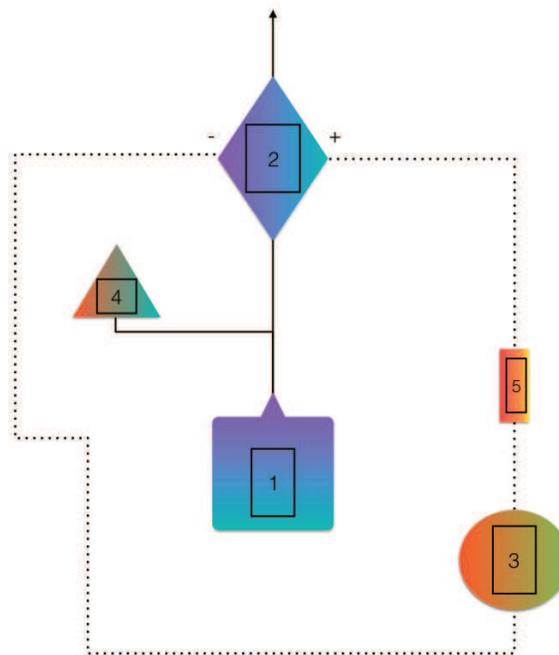


Figura 3.7: 1)Bomba, 2) Dispositivo MHD, 3)Electrometro, 4) Transductor de presión, 5) Resistencia de carga

3.3.1. Montaje Eléctrico

REESCRIBIR TODO ESTO Si bien es cierto que el el dispositivo MHD Posee una resistencia interna y esta no esta concentrada e incluso se encuentra en movimiento, Por simplicidad y feil tratamiento del sistema se le considerara al dispositivo MHD como una fuente de corriente (una simplificacion similar a la de una batera) , siendo requerido poder medir tanto la corriente que genera como la potencia que otorga el sistema, de tal manera se conectara en seria una resistencia de carga lo suficientemente grande como para que los efectos de la resistencia interna sean despreciados y via la ecuacin de la potencia en un resistor se obtenga una aproximacin a la potencia generada por el sistema. En cuanto a la medicin de corriente se a optado por un electrometro (especificaciones en el anexo) dado que las corrientes que se pretenden medir sera como mximo del orden de $1 \times 10^{-6} A$.

3.3.2. Montaje Hidráulico

Con el fin de eliminar fuentes de vibración y perturbaciones espurias en las presiones y en los gastos, se acopló el conjunto de mangueras como se muestra en la figura (3.8). La salida del fluido se realiza a presión atmosférica a un depósito diseñado expreso para tal propósito.



Figura 3.8

Cerca del punto de entrada al canal se conectó un transductor de presión de la marca xxx. La conexión se realizó mediante una “Y” en la manguera que lleva el fluido a la sección de pruebas.

3.3.3. Montaje de los imanes

Puesto que el campo magnético se generara por medio de imanes permanentes, la graduación fina del campo en la sección de pruebas requirió del montaje especial mostrado en la figura (??). El tornillo permite garantizar que la distancia entre los imanes es medible y repetible.

Este dispositivo consta de dos placas paralelas, una de las cuales es móvil y la otra es fija (Fig. (??)).

El dispositivo posee la rigidez necesaria para no verse afectado por la fuerza de los imanes. Ambos imanes se encuentran empotrados a placas que los retienen (Fig. (??)).

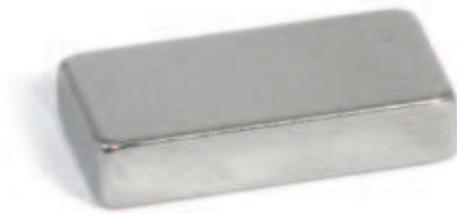


Figura 3.9: iman de dimensiones $47.63mm \times 22.23mm \times 9.84mm$,



Figura 3.10

3.4. Técnicas de medición

La medición de los parámetros experimentales de interés requirió de los siguientes pasos:

1. En primer lugar se llena la tubería que conecta la bomba con sensor de presión. Es muy importante eliminar de los conductos todas las burbujas de aire que quedan atrapadas.
2. Posteriormente se conecta la manguera a la entrada del microcanal.
3. El dispositivo completo se debe colocar en el centro del soporte que aloja los imanes. Esto permite tener el experimento inmerso en un campo magnético bien alineado. Mediante el tornillo se ajustan las placas hasta obtener el campo magnético deseado (en este caso el campo máximo de $0.5T$).

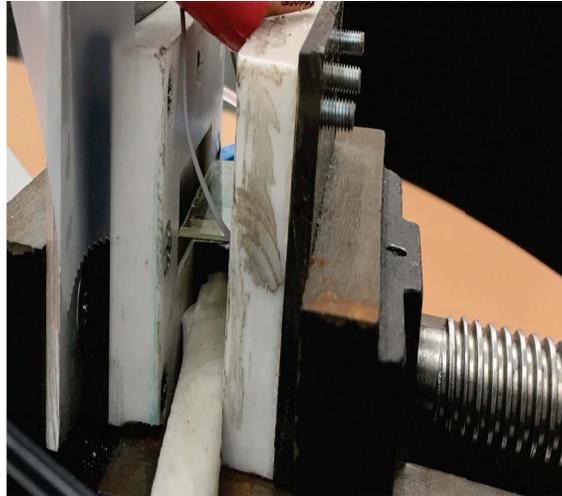


Figura 3.11

4. Se conectan las terminales del electrómetro al ánodo y cátodo del microcanal.
5. Se activa la bomba un momento para llenar el microcanal.
6. Se encienden los instrumentos de adquisición, y se ajustan las frecuencias de muestreo a las tasas deseadas (previamente han sido conectados los instrumentos de medición).
7. Se enciende la bomba al gasto solicitado, y después de un par de minutos se alcanza el estado estacionario (en cuanto la medida de presión deja de fluctuar). Se apaga la bomba y se enciende nuevamente hasta un nuevo estado estacionario. Se guardan los datos registrados en la memoria del aparato.
8. El último paso se repite tantas veces como sea necesario para tener un conjunto mínimo de datos confiables.
9. Al finalizar los experimentos se sustituye el líquido de trabajo por agua desionizada con el objeto de limpiar el sistema. Para este fin, se deben bombear aproximadamente $40 \text{ m}^3/\text{s}) \times 10^{-8}$ durante un minuto.
10. El paso anterior se puede repetir sustituyendo el líquido por aire con la finalidad de secar el interior de los conductos.
11. El sistema se puede desensamblar y almacenar en un ambiente seco.

3.5. Series experimentales

Los experimentos considerados se realizaron con gastos e intensidades del campo magnético específicas. Los valores concretos se muestran en la tabla siguiente

Tabla 3.2: Matriz experimental de fluido de trabajo NaCl

M mol	σ S/m	B T	Q (m ³ /s) $\times 10^{-8}$
1.6	12.54	0.5	1
1.6	12.54	0.5	1.5
1.6	12.54	0.5	2
1.6	12.54	0.5	3
1.6	12.54	0.5	4

Capítulo 4

Análisis de Resultados

4.0.1. Mediciones de la corriente inducida

La densidad de corriente inducida en el electrolito es la variable más importante del estudio. Su medición típicamente produce curvas como la que se ilustra en la figura (??).

Evidentemente la curva muestra todos los detalles del proceso físico, debido a que no se ha implementado ningún tipo de filtrado sobre los datos. Destacan las fluctuaciones que hay montadas en la señal, y que pueden deberse a una contaminación causada por fuentes espurias (por ejemplo, la iluminación y vibraciones de la bomba). Con el objeto de hacer visibles las características principales de la respuesta dinámica es necesario limpiar la señal. Posprocesando la señal mediante la transformada de Fourier es posible eliminar las fluctuaciones de alta frecuencia¹; el resultado se muestra en la figura (??).

Cada imagen ilustra un ensayo particular de la serie que corresponde a un experimento dado (en este caso para un gasto de entrada de $20 \mu L/min$). Se realizaron en promedio 5 ensayos con el fin de caracterizar estadísticamente dicho experimento. El grado de similitud que hay entre las curvas de cada ensayo permite anticipar una incertidumbre experimental relativamente pequeña, tal y como se demuestra al final de esta sección.

¹La aplicación del método se puede consultar en la tesis “Estudio de Flujos Horizontales de Mezclas Bifásicas Gas-Líquido con Fases de Alta Viscosidad”, de de Juan Carlos Montiel Cortés, UNAM, 2017.

4.1. Mediciones de la presión

Las presiones registradas en el transductor colocado cerca de la entrada del canal se comportan como se puede ver en la figura (??). Nuevamente, se trata de cinco ensayos para un solo experimento.

En las curvas se ve con claridad la duración del intervalo de tiempo en el que sistema opera en el régimen estacionario. El estado estacionario coincide con la meseta de la señal. A partir de estas gráficas también pueden ser determinados los tiempos característicos de relajación del flujo τ . Este tiempo representa el efecto combinado de las mangeras, la bomba, el micro-canal, y el puerto de descarga atmosférico.

Es importante hacer notar que los tiempos característicos del electrolito τ_r y τ_e no son iguales a τ . Esto queda claramente establecido si se comparan las gráficas de ambas figuras. De manera muy concreta resalta que el efecto de relajación del electrolito es significativamente más prolongado que el tiempo de reacción. En otras palabras, hay una especie de efecto de histéresis asociado. Una posible explicación en relación con este comportamiento, estaría asociada a los procesos de advección y difusión iónica dentro del electrolito, así como a la formación de capas eléctricas en las paredes recolectoras. Para esclarecer este asunto es necesario realizar un mayor número de experimentos. También es importante considerar la naturaleza iónica y sus procesos de pequeña escala (a nivel molecular). Estas cuestiones quedan fuera de los alcances del presente trabajo, y se plantean como trabajo futuro.

4.2. Resultados de otros casos

Las figuras (??) y (??) recogen los resultados de todos los experimentos propuestos en la matriz experimental (ver capítulo anterior). Tanto las corrientes inducidas, como las presiones correspondientes, están dispuestas una arriba de la otra para efectos de comparación.

Es posible apreciar en cada par de imágenes, la sincronía que hay en el momento que marca el inicio de los estados transitorios. Por otra parte, el efecto del incremento en la amplitud de los pulsos de presión repercute directamente en las densidades de corriente como se puede ver: En cuanto más grande es la presión, más grande es j . Esto indica que

$$j \propto P^n.$$

Como $\Delta p \propto Q$ se tiene, por consiguiente, que la densidad de corriente también es directamente proporcional al flujo volumétrico del electrolito. En la siguiente sección se aprovecha esta proporcionalidad para establecer un factor de corrección, con base en una regresión, que compense las idealizaciones de modelado.

4.3. Características estacionarias de la corriente

Una vez alcanzado el estado estacionario, la corriente inducida mantiene un nivel fijo que solamente se modifica cuando se conecta un circuito externo por el que circula la carga previamente acumulada. El nivel de corriente estacionaria que se alcanza con cada gasto de entrada se muestra en la figura (??a), mientras que la figura (??b) muestra la misma información para la presión en la entrada del canal.

Los puntos indican el valor promedio de las series experimentales, y las barras indican la desviación estándar correspondiente. Es evidente que las dispersiones son bajas en todos los experimentos. Se concluye en consecuencia que el grado de precisión de la medición es significativo. Como se dijo anteriormente la corriente también es proporcional al flujo volumétrico de entrada. Sin embargo, el crecimiento de la corriente no aparenta ser monótono; de hecho se observa un salto en el valor de la corriente que pasa de $1.75 \times 10^{-6} \text{A}$ a $2.9 \times 10^{-6} \text{A}$, cuando el gasto es aproximadamente $2.0 \mu\text{L/s}$. Salvo por el salto que se produce en la curva, la relación de proporcionalidad es claramente lineal en los regímenes altos y bajos de gasto. Como se verá en la siguiente sección, la curva debe ser analizada en forma global a fin de tomar en consideración los límites operativos (en particular cuando el campo magnético externo desaparece). La relación en tal caso sigue siendo lineal, aunque con dispersiones más significativas en la respuesta promedio. Puede intentarse una explicación de este efecto en términos de la dinámica local de los iones en el electrolito.

4.4. Discusión

La gráfica 4.1 sugiere que el sistema de flujo responde al incremento de la presión como una resistencia hidráulica. Cabe recalcar que aunque la presión no está medida estrictamente en la entrada del canal, el flujo volumétrico guarda una relación lineal (como es de esperar) con la presión (Fig. (??)). Este hecho permite utilizar el gasto de entrada como variable independiente. Se concluye que las condiciones de frontera

quedan perfectamente bien definidas en los bordes del canal, y que se apegan a las idealizaciones consideradas en el modelo matemático.

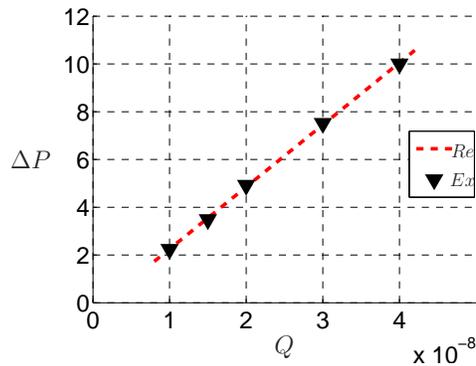


Figura 4.1: Re regresión lineal, Ex Datos Experimentales

Las predicciones teóricas se muestran conjuntamente con las mediciones experimentales en la figura (??). La línea punteada representa dichas predicciones como función del gasto (con y sin deslizamiento), y establece un límite superior para la corriente inducida.

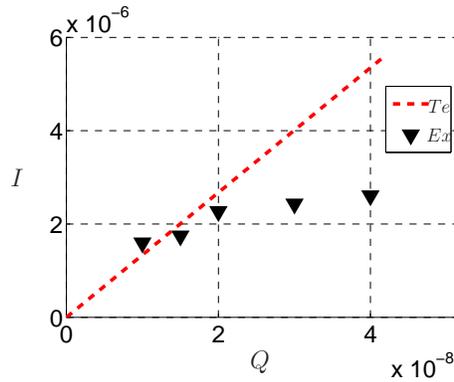


Figura 4.2: (Te) Teórico, Ex Experimental

Resulta muy destacable el buen acuerdo que hay entre los datos experimentales y la predicción teórica. Las crudas estimaciones iniciales (basadas en las escalas del sistema) indicaban que la corriente inducida sería, cuando menos, un orden de magnitud más chica. Esta primera estimación no tomaba en consideración los detalles de la geometría del conducto, ni del campo magnético, ni de los efectos de deslizamiento ocasionada por el PDMS.

Por otro lado, el hecho de que predicción teórica corresponda a valores más altos para

la corriente inducida, obedece a que el electrolito ha sido modelado de manera idealizada. Por ejemplo, se ha considerado que toda la carga en movimiento es carga libre. Asimismo, los procesos de difusión y advección iónica, y la formación de bicapas, han sido ignorados. Globalmente, la regresión de la figura (??) para la relación $J = kQ^1$ permite que la constante k sea establecida como factor de corrección para los modelos propuestos. Este factor compensa todos los efectos discutidos anteriormente que han sido omitidos en el modelo.

La gráfica de la Fig. (4.3) representa la potencia disipada. Ésta se calculó como una potencia disipada en resistores $W = I^2 * R$, donde $R = 1034\Omega$ representa una resistencia de carga.

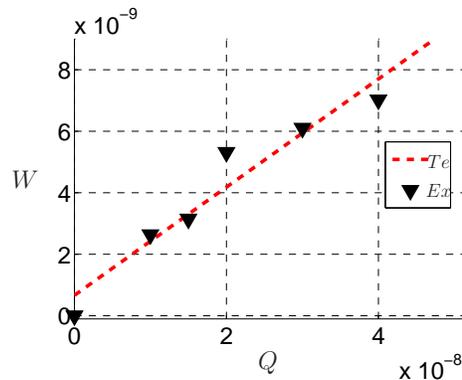


Figura 4.3: (T_e)Regresión, Ex EXperimental

La tendencia que muestran los datos es engañosa. Aparentemente hay dos regímenes de generación de corriente en torno al punto $Q = 2 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}$, donde los datos parecen tener un salto. El origen de este efecto no-lineal no ha sido precisado aún. No obstante, si el conjunto de datos se lee globalmente se percibe un comportamiento lineal, aunque con mayor dispersión en los datos. Esto podría deberse al movimiento y reacomodo de iones en el electrolito, que alcanza un cierto valor crítico con ese flujo volumétrico. En todo caso es pertinente ampliar el conjunto de experimentos para incluir más puntos muestrales que verdaderamente indiquen el comportamiento en esa región.

Otro aspecto que debe resaltarse es el decremento de la corriente inducida según disminuye el gasto. En el límite, cuando no hay flujo, la corriente inducida debe ser cero. Nuevamente, es necesario hacer más experimentos a bajos gastos para determinar la verdadera forma de la respuesta para $Q \rightarrow 0 \text{ m}^3/\text{s}$.

Capítulo 5

Conclusiones

El presente trabajo resume los resultados teórico-experimentales concernientes a los efectos magneto-hidrodinámicos (o MHD) inducidos en electrolitos que fluyen por micro-canales, y que fueron analizados en esta investigación.

El proceso considerado consiste en generar una densidad de corriente estacionaria en un fluido conductor que circula por un canal de sección transversal rectangular, y que está inmerso en un campo magnético externo de tipo estático.

Primeramente se desarrolló un modelo analítico en el que se consideraron algunos de los procesos físicos fundamentales. Las idealizaciones relativas a la naturaleza del electrolito tienen una repercusión clara en los resultados, aunque las predicciones son bastante cercanas a los valores medidos experimentalmente.

El modelo está representado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, que tiene la particularidad de ser lineal y no-homogéneo (incluidas las condiciones de frontera). Se basa en el acoplamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes y de Maxwell, en lo que constituye la aproximación MHD. Las condiciones de frontera son las que corresponden a un canal de sección transversal rectangular con paredes que satisfacen la condición de no-deslizamiento, y también paredes que no la satisfacen. Las presiones se asumen conocidas y forman parte de la formulación del problema.

En paralelo se llevaron a cabo pruebas de laboratorio en un dispositivo diseñado y construido para tal fin. El montaje experimental permitió observar el fenómeno, y cuantificar debidamente las corrientes inducidas mediante un electrómetro de alta resolución.

El diseño y fabricación de los micro-canales requirió trabajar en una escala de $10^{-3}m$. El material utilizado fue el polímero PDMS, y su elaboración requirió la utilización de

técnicas de microfabricación especializadas.

Asimismo, cabe mencionar que se formuló químicamente el fluido de trabajo (es decir el electrolito). Esto permitió garantizar una reología newtoniana de la sustancia, a la vez que se incrementó su conductividad eléctrica a $\sigma \sim 10\text{S/m}$ aproximadamente.

También se desarrolló un dispositivo para alinear y graduar el conjunto de dos imanes permanentes de Neodimio con los que se produjo el campo magnético externo. Los imanes fueron caracterizados con un “gaussmetro” prestado por la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

El microcanal fue operado mediante bombas de émbolo (desplazamiento positivo) que entregan gastos constantes dentro del intervalo $1 \times 10^{-14}\text{m}^3/\text{s}$ a $1 \times 10^{-6}\text{m}^3/\text{s}$. La bomba permitió generar gastos en forma de escalón¹ de presión en instantes de tiempo concretos. La generación de los escalones de presión (y gasto) permitió establecer que los tiempos de reacción de la densidad de corriente no son simétricos con respecto a la excitación.

La comparación de las predicciones teóricas con los datos experimentales fue favorable. No obstante, el modelo solamente es válido para los estados estacionarios y para las condiciones de frontera descritas arriba.

El resultado más relevante es que se demostró ampliamente la posibilidad de generar corrientes significativas en dispositivos de tamaño muy reducido. Se demuestra también el principio de operación de los generadores de alta eficiencia.

Los resultados indican que, en general, la corriente inducida es directamente proporcional al gasto ². La predicción sugiere que dicha relación es lineal (ver ec . 2.44 y 2.46), mientras que los resultados experimentales no permiten concluir esto de manera definitiva para todo el intervalo de gastos (ver figura 4.1). Esto se debe a una carencia de puntos en las regiones de bajos gastos.

A pesar de los resultados positivos, quedan varios asuntos que deben ser resueltos en la continuación de este trabajo.

5.1. Contribuciones

Se recogen las siguientes contribuciones relevantes:

¹En el sentido de la función de Heaviside

²Entendiendo por “directamente proporcional” que una cantidad aumenta cuando la otra lo hace.

1. Se desarrollaron modelos teóricos apropiados
2. Se desarrollaron técnicas experimentales especiales para este tipo de sistemas
3. Se demostró que se producen corrientes significativas en estos dispositivos
4. Se demostró el principio de operación que permite estudiar su escalamiento
5. Se demostraron los tipos de relaciones subyacentes en los fenómenos observados
6. Se cuantificaron aproximadamente los efectos asociados al deslizamiento ocasionado por los materiales

5.2. Recomendaciones y trabajo futuro

En primera instancia resultará absolutamente relevante la búsqueda de las aplicaciones potenciales de los procesos estudiados. Existen múltiples vertientes que son muy interesantes. Sin embargo, inicialmente se pretende buscar aplicaciones de médicas y para procesos industriales (específicamente, en el contexto de los hidrocarburos pesados).

Evidentemente hay varias mejoras que implementar, tanto en el modelo, como en el experimento. Se deben cuidar ciertos aspectos que modifican las mediciones obtenidas, tales como:

1. La medición de la presión y la ubicación del puerto de medición
2. El blindaje eléctrico del experimento para evitar la contaminación con armónicos espurios en las mediciones
3. La temperatura a la cual se realiza el experimento
4. Asegurar las condiciones para que se logre un verdadero estado estacionario
5. Se tiene que desgasificar el electrolito
6. Mejorar el dispositivo de soporte de los imanes

También es muy importante implementar y realizar mediciones de las velocidades de deslizamiento. Esto implica que se empleen técnicas de velocimetría avanzada. Aquí se propone la implementación de la micro-velocimetría por imágenes de partículas (o micro-PIV), que permitiría tener una primera estimación de la velocidad finita de deslizamiento en las paredes.

Adicionalmente, en trabajos futuros sería de gran interés realizar las siguientes mejoras al modelo:

1. Considerar los regímenes transitorios
2. Considerar las condiciones de frontera reales, es decir, deslizamiento en dos paredes y no-deslizamiento en las otras dos paredes
3. Considerar variaciones temporales del campo magnético
4. Considerar con mayor detalle la naturaleza advectiva-difusiva de los iones en el electrolito

En relación con los experimentos, se ha visto la necesidad de:

1. Ampliar los intervalos experimentales para el gasto y el campo magnético
2. Incrementar el número de experimentos en puntos intermedios
3. Incluir variaciones temporales del B
4. Evaluar el efecto de la geometría de microcanales (e.g. venturis, cambios de sección, etc.)
5. Incrementar la conductividad del fluido de trabajo incluyendo soluciones de cloruro de potasio (KCl) y mercurio
6. Proponer escalamientos del experimento

Apéndice A

Ecuaciones Fundamentales

La magneto-hidrodinámica es la ciencia que estudia la dinámica de los fluidos conductores de electricidad en presencia de campos electromagéticos. Este concepto fue introducido en 1942 por el científico escandinavo Hannes Alfvén.

En la siguiente sección se explicaran las bases esenciales para comprender el MHD, de tal manera se explicaran las leyes fundamentales que rigen el comportamiento de los fluidos, el comportamiento de los campos electromagéticos y el funcionamiento de los conductores.

En la siguiente sección se deducirán las ecuaciones de continuidad, Navier-Stokes, ecuaciones de Maxwell y Ley de Ohm.

Primeramente se explicará todo el contexto electromagnético.

A.1. Ecuaciones del campo electromagnético

La densidad de carga se define como

$$\rho = \frac{dq}{dv} \tag{A.1}$$

En la cual q , v , \vec{v} son respectivamente la carga, el volumen y la velocidad. Denotando que la propiedad de densidad de carga volumétrica es intensiva. Partiendo de la ley de la conservación de la carga

$$\frac{dq}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int \rho dV + \oint \rho \vec{v} \hat{n} da \tag{A.2}$$

Al introducir la variación temporal al interior de la integral y ocupando el teorema de la divergencia,

$$\int \frac{d\rho}{dt} dV + \int \nabla \cdot \vec{v}\rho dV = 0. \quad (\text{A.3})$$

Debido a que sin importar el volumen control la igualdad se mantiene y por medio del teorema del residuo, rexpresamos en su versión diferencial la Ley conservación de la carga.

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.4})$$

O en forma alterna puesto que a la densidad de carga se le conoce $\vec{J} = \vec{v}\rho$

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Poniendo a prueba la soluciones obtenidas y recordando que partimos del precepto que las velocidades del flujos y la de las cargas son las mismas. Incorporando el perfil de velocidades (2.40) y la densidad de carga (2.48), obtenemos por las propiedades del operador nabla.

$$\nabla \cdot \vec{v}\rho = \nabla\rho \cdot \vec{v} + \rho\nabla \cdot \vec{v} \quad (\text{A.6})$$

Dada la ecuación de la incompresibilidad (A.34) el segundo termino se vuelve 0, en el caso del primer termino el gradiente sólo tendrá componentes en z y y , puesto que la velocidad sólo posee componentes en x el resultado es 0.

$$\nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.7})$$

Demostrando por consecuencia que la variación temporal es 0 llegando con ello a que el fenómeno modelado se encuentra plenamente en estado estacionario.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{A.8})$$

La ley de Gauss eléctrica: En sus comienzos se estableció que exista una relación de proporcionalidad entre el flujo de un campo eléctrico y la carga eléctrica.

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da \propto q \quad (\text{A.9})$$

Transformando la proporcionalidad en igualdad por medio de una constante que llamaron permitividad eléctrica, esta constante depende del medio en el cual se encuentren las cargas.

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \frac{q}{\epsilon}. \quad (\text{A.10})$$

Al incorporar el teorema de la divergencia y considerando que la carga está dispersa en el espacio que la contiene es posible hablar de una densidad de carga puntual dispersa en el volumen de control.

$$\int \nabla \cdot \vec{E} dV = \int \frac{\rho}{\epsilon} dV \quad (\text{A.11})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de la ley de Gauss.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{carga}}{\epsilon}. \quad (\text{A.12})$$

Fenomenológicamente la ec(A.12) indica que la existencia de cargas eléctricas provoca la existencia de campos eléctricos, la intensidad de los mismos dependerá del medio en el que se encuentren las cargas.

Ley de Gauss Magnética:

Al igual que la ley anterior en esta se establece que el flujo de el campo magnético siempre es 0.

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} da = 0 \quad (\text{A.13})$$

Aplicando el teorema de la divergencia,

$$\int \nabla \cdot \vec{B} dV = 0. \quad (\text{A.14})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de esta ley.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.15})$$

La interpretación física de éste fenómeno es que los monopolos magnéticos no existen y que las líneas de flujo en un campo magnético son siempre cerradas sin importar el volumen de control.

Ley de Faraday

Faraday encontró que debido a la variación temporal del flujo magnético que atraviesa una superficie, produce circulación de un campo eléctrico a través de un conductor que encierra la superficie.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (\text{A.16})$$

Al incorporar el teorema de Stokes e introduciendo la derivada temporal al interior de la integral.

$$\int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.17})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial de la ley.

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{A.18})$$

El fenómeno físico se interpreta que la existencia de variaciones temporales de B provoca la generación de E , cabe recalcar que este fenómeno es el principio fundamental de los transformadores eléctricos de corriente alterna y en electrostática E es irrotacional.

Ley de Maxwell- Ampere:

En un comienzo Ampere explica que la circulación de un campo magnético en un contorno cerrado es proporcional al flujo de densidad de corriente que se desliza en el conductor.

Posteriormente Maxwell agrega un término correctivo que es nombrado corriente de desplazamiento y se da cuando hay variaciones temporales del campo eléctrico, agregándolo como el flujo de la variación temporal del campo eléctrico multiplicado por la permitividad eléctrica del medio en el cual se encuentra el campo eléctrico.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \propto \int \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{A.19})$$

La proporcionalidad se transforma en igualdad por medio de una constante que fue nombrada permeabilidad magnética y varía en función del medio en el cual se encuentre inmerso el campo magnético

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_m \left(\int \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \right) \quad (\text{A.20})$$

Aplicando el teorema de Stokes

$$\int \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_m \left(\int \vec{J} \cdot ds + \int \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot ds \right) \quad (\text{A.21})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a su forma diferencial de la ley.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_m \left(\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.22})$$

El fenómeno físico se puede interpretar, al existir desplazamiento de cargas producto de corrientes eléctricas se generan campos magnéticos normales al flujo de las cargas eléctricas, existiendo una proporcionalidad con respecto a la magnitud del campo dependiendo de la permittividad magnética del medio en el cual se encuentren en movimiento las cargas.

Ley de Ohm generalizada

Es una ley muy conocida aunque en su versión macroscópica en la cual se relacionan las diferencias de potencial (voltaje) y las corrientes en conductores conocidos como conductores óhmicos que cumplen esta ley

$$\Delta V \propto I \quad (\text{A.23})$$

La proporcionalidad se transforma en igualdad mediante una constante que se llama resistencia, aunque para el fin de esta demostración se ocupará su inverso que es la conductancia.

$$G = \frac{1}{R}$$

$$G\Delta V = I \quad (\text{A.24})$$

Siendo esta una expresión muy específica puesto que la conductancia depende de propiedades intrínsecas al material de modo que se replantea esta relación de la siguiente manera.

$$G \int \vec{E} \cdot dl = \int \vec{J} \cdot ds \quad (\text{A.25})$$

A su vez la conductancia se puede definir, en un volumen de control infinitesimal.

$$G = \frac{\sigma s}{l} = \sigma \frac{ds}{dl}$$

$$\int \sigma \frac{ds}{dl} \vec{E} \cdot dl = \int \vec{J} \cdot ds \quad (\text{A.26})$$

quedando

$$\sigma \vec{E} = \vec{J} \quad (\text{A.27})$$

se sabe que hay una equivalencia entre los campos elctricos y campos magnticos con cargas con velocidad, generando campos elctricos equivalentes .

$$\vec{E}_{equivalente} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{A.28})$$

Quedando la forma ms general de la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{A.29})$$

Estas ecuaciones nos hablan de los movimientos de cargas elctricas son debidos a campos electromagnticos y la facilidad con la cual se mueven las cargas depender de la conductividad del medio en el cual se muevan las cargas.

A.2. Ecuaciones del campo hidrodinámico

Partiendo del teorema de transporte de Reynolds.

Que relaciona la variacin de una propiedad transportada por el fluido con sus variaciones en el volumen de control y aquello que sale y entra por las superficie del volumen de control

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int \beta \rho dV + \oint \beta \rho \vec{v} \hat{n} da \quad (\text{A.30})$$

Donde $\beta = \frac{\partial B}{\partial m}$

Primeramente se tomar como propiedad de transporte la m .

$\frac{dm}{dm} = 1$ Por definicin .

Por la ley de la conservacin de la materia (Lomonsov-Lavoisier).

$$\frac{dm}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \int \rho dV + \oint \rho \vec{v} \hat{n} da \quad (\text{A.31})$$

De tal forma que, ocupando el teorema de la divergencia e introduciendo la derivada al interior de la integral obtenemos .

$$\int \frac{d\rho}{dt} dV + \int \nabla \cdot \vec{v} \rho dV = 0 \quad (\text{A.32})$$

Por el teorema del residuo llegamos a la forma diferencial de la conservacin de la masa

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{v}\rho = 0 \quad (\text{A.33})$$

Puesto que el fenmeno ocurre en un rgimen estacionario y el fluido posee una densidad constante se llega a la ecuacin de incomprensibilidad de un fluido .

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{A.34})$$

Desglosando esta expresin en coordenadas cartesianas .

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.35})$$

Puesto que se analiza un flujo en tubera y es unidireccional de acuerdo al sistema de referencia impuesto podemos afirmar que $v_y = 0 = v_z$ por lo que .

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.36})$$

Cabe resaltar que esta ecuacin nos indica que $v_x \neq f(x)$.

Sin embargo esto no es suficiente informacin para describir el perfil de velocidades de modo que la siguiente propiedad a transportar ser el momentum lineal $m\vec{v}$, Por definicin :

$$\frac{dm\vec{v}}{dm} = \frac{\vec{v}dm}{dm} + \frac{m d\vec{v}}{dm} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{dm\vec{v}}{dm} = \vec{v} \cdot 1 = \vec{v} \quad (\text{A.38})$$

Al aplicar la definicin de la segunda ley de Newton

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (\text{A.39})$$

Puesto que el canal no pose cambios de altura en el eje z la suma de fuerzas que acta sobre el sistema es igual a :

$$\sum \vec{F} = F_{mag}^{\vec{}} + \vec{F}_{\mu} + \vec{F}_p \quad (\text{A.40})$$

La Fuerza magntica que se presenta es mejor conocida como la fuerza de Lorentz:

$$F_{mag}^{\vec{}} = \int \vec{J} \times \vec{B} dV \quad (\text{A.41})$$

En la cual J la densidad de corriente se define $\vec{J} = \rho_{carga}\vec{v}_{carga}$, \vec{B} el campo magnético.

$$\int \frac{dv\rho}{dt} dV + \int \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v}\rho dV = \int \vec{J} \times \vec{B} dV \oint \nabla \vec{v} \cdot \hat{n} ds - \int \nabla P dV \quad (\text{A.42})$$

Volviendo a ocupar el teorema de la divergencia se llega

$$\int \frac{dv\rho}{dt} dV + \int \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v}\rho dV = \int \vec{J} \times \vec{B} dV + \int \nabla \cdot \nabla \vec{v} dV - \int \nabla P dV \quad (\text{A.43})$$

Por medio del teorema del residuo se llega a la versión diferencial del balance de fuerzas conocida como Navier- Stokes para fluidos newtonianos con fuerzas magnéticas.

$$\frac{dv\rho}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \vec{v}\rho = \vec{J} \times \vec{B} + \nabla \vec{v} - \nabla P \quad (\text{A.44})$$

Bibliografía

- Alfvén, H. (1942), ‘Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves’, *Nature* **150**(3805), 405–406.
- Andò, B., Ascia, A., Baglio, S. & Beninato, A. (2009), ‘The “one drop” ferrofluidic pump with analog control’, *Sensors and Actuators A: Physical* **156**(1), 251–256.
- Berker, R. (1963), ‘Hand book of fluid dynamics, vol viii/3’.
- Brogan, T., Kantrowitz, A., Rosa, R. & Stekly, Z. (1962), ‘Progress in mhd power generation’, *Engineering Aspects of Magnetohydrodynamics* .
- Davidson, P. A. (2016), *Introduction to magnetohydrodynamics*, Vol. 55, Cambridge university press.
- Eijkel, J., Dalton, C., Hayden, C., Burt, J. & Manz, A. (2003), ‘A circular ac magnetohydrodynamic micropump for chromatographic applications’, *Sensors and Actuators B: Chemical* **92**(1), 215–221.
- Jang, J. & Lee, S. S. (2000), ‘Theoretical and experimental study of mhd (magnetohydrodynamic) micropump’, *Sensors and Actuators A: Physical* **80**(1), 84–89.
- Lei, W., Jiankang, W. & Bo, C. (2009), ‘Analytic solution of liquid flow in rectangular pdms-glass microchannel with wall slip and electro-viscous effects’, *Applied Mathematical Sciences* **3**(44), 2195–2214.
- Lekner, J. (2007), ‘Viscous flow through pipes of various cross-sections’, *European Journal of Physics* **28**(3), 521.
- Manyonge, W., Kiema, D. & Iyaya, C. (2012), ‘Steady mhd poiseuille flow between two infinite parallel porous plates in an inclined magnetic field’, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **76**(5), 661–668.

- Nguyen, N.-T. (2012), ‘Micro-magnetofluidics: interactions between magnetism and fluid flow on the microscale’, *Microfluidics and nanofluidics* **12**(1-4), 1–16.
- Ramos, A. (2007), Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic micropumps, *in* ‘Microfluidic technologies for miniaturized analysis systems’, Springer, pp. 59–116.
- Reitz, J. R., Milford, F. J. & Christy, R. W. (2008), *Foundations of electromagnetic theory*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Ryabinin, A. & Khozhainov, A. (1967), ‘Transient-state flow of a conducting liquid in an mhd generator at constant flow rate in the presence of side walls’, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **8**(2), 17–19.
- White, F. M. & Corfield, I. (2006), *Viscous fluid flow*, Vol. 3, McGraw-Hill New York.