



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Cinemática Diferencial de un
Robot Paralelo con una
Cadena Virtual**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniera Mecatrónica

P R E S E N T A

Asiely Scarlet Boche Lucio

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Patricio Martínez Zamudio



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017

Agradecimientos

A mi familia

Agradezco al Dr. Víctor Javier González Villela por su apoyo como Co-Director del Trabajo

Agradezco en lo que corresponde a la DGAPA, por el apoyo brindado para la realización de este trabajo, a través del proyecto UNAM-DGAPA-PAPIIT IN117614: “Robótica intuitiva, adaptable, reactiva, híbrida y móvil aplicada al servicio, el rescate y la medicina”

Agradezco en lo que corresponde a la DGAPA, por el apoyo brindado para la realización de este trabajo, a través del proyecto UNAM-DGAPA-PAPIIT IN118117: "Investigación sobre robótica topofixadaptable aplicada a robots móviles híbridos, que operan en ambientes inteligentes estructurados, en tareas de sujeción, traslación y orientación de objetos con cierto grado de asimetría”

Dedicatoria

Por la gracia de Dios soy lo que soy,

A mis padres; estoy muy agradecida por sus enseñanzas, amor y apoyo en todo momento

A mi hermana, mi mejor amiga y aliada

A mis tíos y familia espiritual, gracias por todo su apoyo y cariño

Resumen

Los robots o manipuladores paralelos son cadenas cinemáticas cerradas conectadas entre sí por una base fija, y una base móvil o efector final [2, 3], en este trabajo los manipuladores paralelos pueden ser descritos por una cadena cinemática equivalente al manipulador; conocida como cadena virtual. Una Cadena virtual se define como un elemento que existe en la cinemática del manipulador pero no en la dinámica de este[4]; mediante la cadena virtual es posible agregar restricciones cinemáticas al manipulador paralelo[5]. Para llevar a cabo la experimentación se realizó el modelado cinemático diferencial del manipulador 3RRR_ (RRR)v y Delta 4, al igual que la cinemática diferencial de la cadena virtual (RRR)v, Se implementó en un modelo físico de los manipuladores paralelos y de sus cadenas virtuales, sustituyendo los resultados del análisis de la cadena virtual en variables de estado del manipulador paralelo, probando que es posible controlar al manipulador paralelo a través de su cadena virtual.

Tabla de contenido

1	INTRODUCCIÓN	7
1.1	CONTEXTO	8
1.1.1	<i>Historia de la Robótica</i>	8
1.2	CLASIFICACIÓN	12
1.2.1	<i>Base Móvil-Robot Móvil</i>	13
1.2.2	<i>Base Fija-Robot Manipulador</i>	14
1.3	ASPECTOS DEL PROBLEMA	19
1.4	OTRAS INVESTIGACIONES	20
1.5	ANTECEDENTES	22
1.6	PROPUESTA	23
1.6.1	<i>Objetivo</i>	23
1.6.2	<i>Objetivos Específicos</i>	24
1.6.3	<i>Hipótesis</i>	24
1.6.4	<i>Meta</i>	24
2	TEORÍAS BASE	25
2.1	CINEMÁTICA	26
2.2	TEORÍA DE MATRICES DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA	29
2.2.1	<i>Sistemas de referencia</i>	29
2.2.2	<i>Matrices de Rotación</i>	30
2.3	CINEMÁTICA DIRECTA	32
2.3.1	<i>Manipuladores seriales</i>	32
2.3.2	<i>Manipuladores Paralelos</i>	33
2.4	CINEMÁTICA INVERSA	34
2.4.1	<i>Geométrico</i>	34
2.4.2	<i>Algebraico</i>	35
2.4.3	<i>Sustitución Polinomial</i>	35
2.5	CINEMÁTICA DIFERENCIAL	36
2.5.1	<i>Cinemática Diferencial</i>	36
2.6	SÍNTESIS ESTRUCTURAL	38
2.7	CADENAS VIRTUALES	41
2.8	CONTROL	43
2.8.1	<i>Retroalimentación</i>	43
2.8.2	<i>Control</i>	43
2.8.3	<i>Sistemas Multi-variables</i>	43
2.8.4	<i>Variables de estado</i>	44
3	TEORÍA DE MANIPULADORES CON CADENAS VIRTUALES	45
3.1	POSTURA DEL MANIPULADOR PARALELO EN EL ESPACIO	46
3.1.1	<i>Representación de la Posición de un Punto entre el Sistema Inercial y el Sistema Local</i>	48
3.1.2	<i>Representación de la Velocidad de un Punto entre el Sistema Inercial y el Sistema Local</i>	49
3.2	PROPAGACIÓN DE VELOCIDADES INVERTIDA	50
3.2.1	<i>Ejemplo</i>	52
3.3	CADENAS VIRTUALES	56
3.3.1	<i>Cadenas virtuales en el espacio</i>	57
3.4	COORDENADAS DE CONFIGURACIÓN	59
3.4.1	<i>Cinemática Externa</i>	60
3.5	REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS	61
4	MODELADO E IMPLEMENTACIÓN DE 3RRR_ (RRR)_v	64
4.1	DEFINICIÓN DE CASOS PARTICULARES	66

4.2	DESCRIPCIÓN GENERAL	67
4.2.1	<i>Paralelo 3RRR</i>	67
4.3	CADENA VIRTUAL	68
4.3.1	<i>Sistemas de Referencia de la Cadena Virtual</i>	69
4.3.2	<i>Modelado Cinemático de la Cadena Virtual</i>	70
4.1	IMPLEMENTACIÓN ROBOT PARALELO 3RRR_(RRR) _v	73
4.2	DESCRIPCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE LA SIMULACIÓN	77
4.2.1	<i>Software</i>	77
4.2.2	<i>Estructura de la Simulación</i>	77
4.3	ROBOT 3RRR_(RRR) _v	78
4.3.1	<i>Simulación</i>	78
4.3.2	<i>Modelo Funcional</i>	80
5	MODELADO E IMPLEMENTACIÓN DE DELTA 4	82
5.1	DESCRIPCIÓN GENERAL	83
5.2	SISTEMAS DE REFERENCIA	84
5.3	MODELADO CINEMÁTICO DEL MANIPULADOR	86
5.4	MANIPULADOR PARALELO DELTA4-(RRR) _v .	93
5.4.1	<i>Configuración en Variables de Estado</i>	94
5.5	SIMULACIÓN	97
5.6	MODELO FUNCIONAL	101
6	CONCLUSIÓN Y TRABAJO A FUTURO	103
6.1	CONCLUSIONES	104
6.2	TRABAJO A FUTURO	105
7	REFERENCIAS	106
8	APÉNDICE I MATHEMATICA	108
8.1	CINEMÁTICA DE POSICIÓN DELTA 4	109
8.2	CINEMÁTICA DIFERENCIAL DELTA 4	112
9	APÉNDICE II MATHLAB	127
9.1	3RRR_(RRR) _v	128
9.1.1	<i>Cinemática Diferencial de La cadena Virtual</i>	128
9.1.2	<i>Cinemática diferencial 3RRR_(RRR)_v</i>	129
9.2	DELTA 4	132
9.2.1	<i>Cinemática Diferencial de la Cadena Virtual</i>	132
9.2.2	<i>Cinemática diferencial Delta 4</i>	134
10	APÉNDICE III SIMULINK	142
10.1	3RRR_(RRR) _v	143
	<i>Cinemática diferencial 3RRR_(RRR)_v</i>	143
10.2	DELTA 4	144

1 Introducción

“No tengo talentos especiales, pero sí soy profundamente curioso”

Albert Einstein

1.1 Contexto

1.1.1 Historia de la Robótica

A través de los años, la humanidad ha buscado la manera de crear artefactos que sustituyan e imiten el comportamiento en distintos ambientes.

Los primeros antecedentes datan del primer siglo, existen evidencias de mecanismos, que a través de dispositivos hidráulicos, poleas y palancas permitían abrir y cerrar puertas; conocidos como los mecanismos animados de Herón de Alejandría (Ilustración 1).

Entre los siglos VIII y XV los árabes heredaron y difundieron conocimientos griegos que aplicaron en artefactos automáticos para dispensar agua o bañarse, empleados por la realeza, en su mayoría estos artefactos eran diseñados con fines lúdicos; entre algunos ejemplos destacados se encuentran el gallo de Estrasburgo en 1352; que al alimentarlo movía las alas y el pico; la cabeza parlante de Roger Bacon.

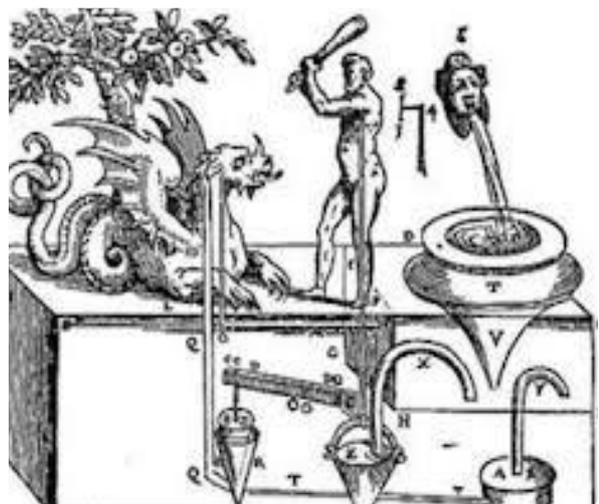


Ilustración 1-1 Mecanismo de Herón

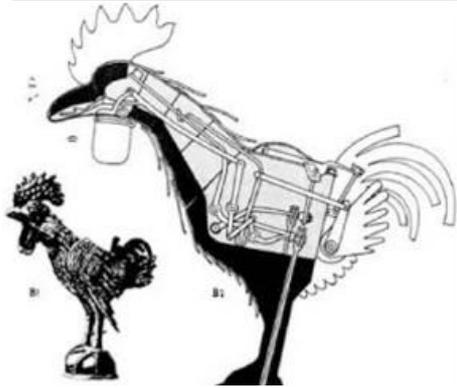


Ilustración 1-2 Galo de Estrasburgo

En un principio la robótica se evocó a imitar el comportamiento de los seres vivos; lo que permitió la comprensión del universo que

rodea al hombre.

Más tarde Leonardo Da Vinci[6] desarrolló algunos artefactos mecánicos automáticos (Ilustración 3); se evocó principalmente a comprender la composición y razones del movimiento de los seres vivos e imitarlo, pero también



Ilustración 1-3 León de Da Vinci

resolver problemas de la vida cotidiana, como la limpieza de las cocinas, así como la automatización de varias labores; a través de mecanismos conformados principalmente por poleas y engranes.

Durante el período comprendido entre los siglos XVII al XVIII se crearon ingenios mecánicos que comenzaban a poseer características similares a las de los robots autómatas de la actualidad, como ejemplo; se crearon muñecos capaces de pintar, escribir, tocar el piano entre otras actividades. Estos ingenios poseen mecanismos a base de levas y engranes.

A finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX se

comenzaron a desarrollar invenciones mecánicas usadas en la industria textil principalmente, dentro de las invenciones más importantes se encuentran el telar de Jacquard [7]. Dando lugar al desarrollo tecnológico de la automatización industrial, permitiendo así el desarrollo de computadoras y robots industriales como hoy se conocen.

El término **Robot** no fue introducido sino hasta el año de 1920, por el autor checo Karel Capek en su obra Rossum's Universal Robots (R.U.R.), derivado de la palabra Robot que significa ejecutor en Eslavo, refiriéndose mecanismo autónomo antropomórfico construido por Rossum. [2, 6, 9]

Actualmente el término *robot* se emplea para referirse a distintos sistemas, por un lado un robot es cualquier mecanismo antropomórfico creado por el hombre que desempeñe la actividad de algún ser humano[6], y por otro lado, definición del Instituto de Robótica de América[6], "Un robot es un manipulador multifuncional re-programable, diseñado para mover material, partes, herramientas, o dispositivos especiales, a través de movimientos variables programados para desempeñar alguna variedad de tareas"; de manera tal que se da lugar a dos grandes ramas de la robótica, lo que amplifica su campo de estudio, para aumentar su movilidad, destreza y autonomía.

A partir de la Revolución Industrial, se comenzó a desarrollar

la producción en masa; lo que provocó la necesidad de crear mecanismos capaces de superar la velocidad de producción aumentando los estándares de calidad; procurando la estandarización de los productos.

A principios de los 1950's, George Devol [7] desarrolló un manipulador mecánico programable, más tarde refinado en conjunto con Enegelberger hacia un robot Industrial. Una característica

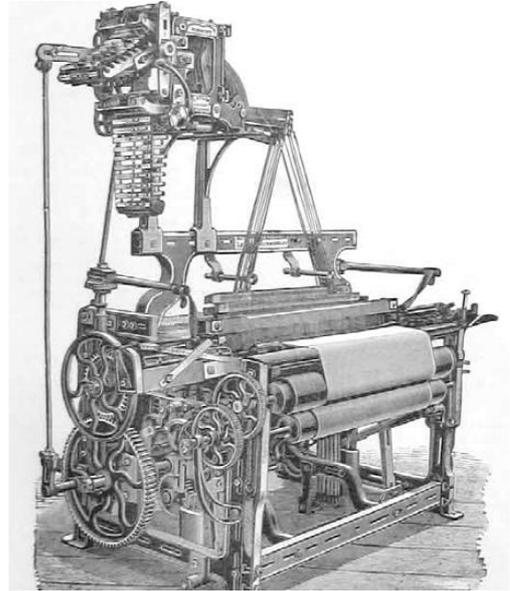


Ilustración 1-4 Telar de Jacquard

importante de un robot Industrial es la incorporación de un control por medio de una computadora (o microprocesador), con realimentación sensorial para alcanzar una funcionalidad programable.

En 1960 El Laboratorio de Inteligencia Artificial de Stanford y el Laboratorio Lincoln del MIT comenzaron el desarrollo de robots manipuladores con sensores táctiles y visión artificial [6].

En 1980 hubo una gran demanda de la industria robótica, debido a la demanda de una industrial más flexible y económica, para el ámbito automovilístico y espacial, lo que permitió generar conocimientos importantes en el campo; permitiendo a la robótica tomar posiciones en casi todas las áreas productivas y tipos de industria; realizando tareas repetitivas y peligrosas para el ser humano; adaptándose a las demanda de producción.

Más tarde se generaron dos grandes clasificaciones de la robótica, robots auxiliares e industriales. Las clasificaciones de la robótica son variadas; éstas van desde su estructura mecánica; hasta sus aplicaciones, una clasificación basada en las aplicaciones pueden distinguirse dos grandes áreas, a partir de composición mecánica, dividiéndose en dos: los robots móviles, y los robots manipuladores [10].

Dentro de la clasificación de los robots manipuladores se distinguen; manipuladores seriales, móviles, paralelos e híbridos [3].

En las décadas recientes, los robots móviles han sido usados principalmente para operaciones repetitivas y/o en ambientes peligrosos para el ser humano que incluyen manipulación de materiales radioactivos, exploraciones espaciales o submarinas, pintado en spray, etc.

1.2 Clasificación

La variedad existente de robots es amplia, como consecuencia se dificulta crear una clasificación. Se presenta una clasificación basada en la característica principal de un robot; su estructura mecánica, a partir de aquí se generan dos áreas tomando en cuenta la forma en que se sostiene su base; robots móviles y robots manipuladores.

1.2.1 Base Móvil-Robot Móvil

La principal característica de un robot móvil es que posee una base móvil que permite al robot desplazarse libremente en su entorno. Esta clase de robots es principalmente usada en robots de servicio, donde se requiere de desplazamientos autónomos. Se pueden clasificar en dos subclases [10]:

De llantas, normalmente consisten en un cuerpo rígido (base o chasis) y un sistema de llantas que permite desplazamiento sobre el suelo, otros cuerpos pueden ser sujetos a la base, para la realización de otras tareas.



Ilustración 1-5 CURIOSITY NASA

De piernas, se encuentran conformados de múltiples cuerpos rígidos, interconectados por distintos tipos de juntas; principalmente rotacionales; dando la forma de la parte inferior del cuerpo, con extremidades inferiores (pies) que periódicamente están en contacto con el suelo para realizar un desplazamiento[10].



Ilustración 1-6 Artropodo

1.2.2 Base Fija-Robot Manipulador

El propósito esencial de esta clase de robots es principalmente el manipular objetos, normalmente se emplean de manera industrial; de esta clasificación se desprenden dos subclases; robots seriales y robots paralelos; basados en el tipo de cadena cinemática que poseen.

La estructura fundamental de cualquier robot manipulador, es una cadena cinemática abierta, constituida por articulaciones y eslabones [10]: “Una cadena cinemática abierta se refiere a una secuencia de eslabones que conectan dos extremos de una cadena, por el contrario una cadena cinemática cerrada es aquella que forma un lazo cerrado”.

Robots Seriales

La principal tarea de un robot serial es posicionar al efector final en la posición deseada.

El tipo y secuencia de los Grados de Libertad (GDL) de un robot serial, comenzando con la articulación de la base, permite la clasificación de los manipuladores en: Cartesianos, cilíndricos, esféricos, SCARA, y antropomórficos.

Robots o manipuladores Cartesianos.
Se encuentra conformado por tres juntas prismáticas con los ejes de

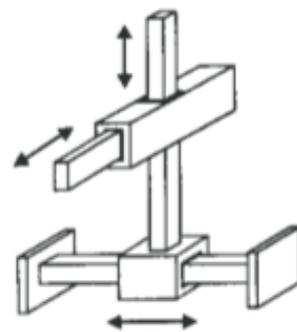


Ilustración 1-7 Cartesiano

forma ortogonal entre sí. (Ilustración 1-7)

Robots o manipuladores Cilíndricos. A diferencia de los cartesianos, el cilíndrico, su primer junta es rotacional, las coordenadas son dadas de manera cilíndrica, en este caso los GDL pertenecen a un espacio cartesiano. (Ilustración 1-8)

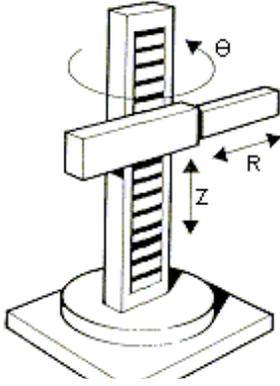


Ilustración 1-8 Cilíndrico

Esféricos. Su cadena está compuesta por una junta rotacional seguida de una junta prismática, y finalmente una junta rotacional, dando así un espacio de trabajo esférico, cada GDL pertenece a una variable del espacio Cartesiano.

SCARA. Esta geometría está conformada al disponer de dos juntas rotacionales y una prismática de manera que todos los ejes de movimiento son paralelos entre sí. El nombre proviene de sus siglas en Inglés *Selective Compliance Assembly Robot Arm* (Montaje Selectivo Compatible de un Brazo Robótico) (Ilustración 1-9)

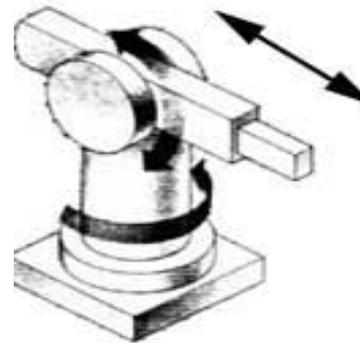


Ilustración 1-9 SCARA

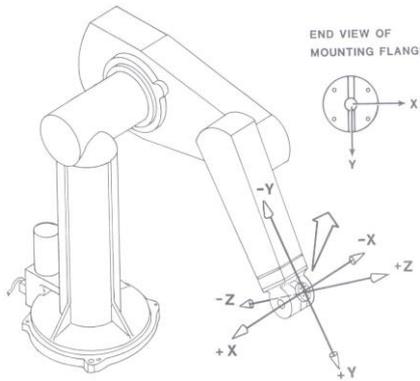


Ilustración 1-10 Antropomórfivo

Antropomórficos. Se encuentra conformado por tres juntas rotacionales, el eje de giro de la primer junta se encuentra de manera ortogonal a los ejes de las siguientes juntas; es una de las configuraciones con mayor destreza debido al tipo de juntas. Los GDL y las variables articulares del espacio cartesiano

varían dentro del espacio de trabajo. (Ilustración 1-11)

Robot Paralelo

Es un manipulador que posee una o varias cadenas cinemáticas conectadas de un extremo a una base fija y a una base móvil. Su mayor ventaja recae en la rigidez estructural, permitiéndole adquirir altas velocidades en comparación con manipuladores seriales; como desventaja es que posee un espacio de trabajo pequeño [2, 6, 9]. Existen dos clasificaciones principales, los robots planares y los robots espaciales, que se refiere

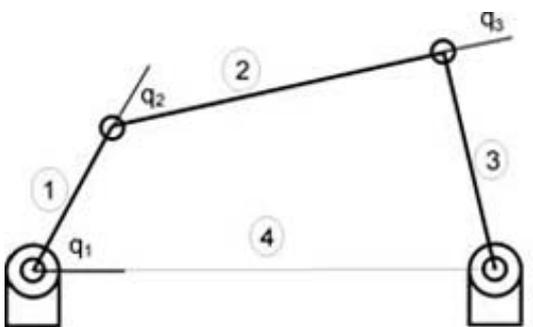


Ilustración 1-12 Paralelo 2GDL

principalmente al tipo de espacio de trabajo que cada uno tiene. A continuación se mencionan brevemente algunos de los robots paralelos espaciales más importantes.

Existen dos clasificaciones principales, los robots planares y los robots espaciales, que se refiere principalmente al tipo de espacio de trabajo que cada uno tiene. A continuación se mencionan brevemente algunos de los robots paralelos espaciales más importantes.

Plataforma Stewart-Gough. El robot paralelo más celebrado históricamente es la plataforma de Stewart, que fue diseñada en 1947 por V.E. Gough. Stewart y Gough llegaron a una configuración similar trabajando separadamente, ambos basados en hexápodos que usualmente poseían tres barras verticales, llegando a una configuración con seis barras; creando un mecanismo con seis GDL completamente paralelo [6].

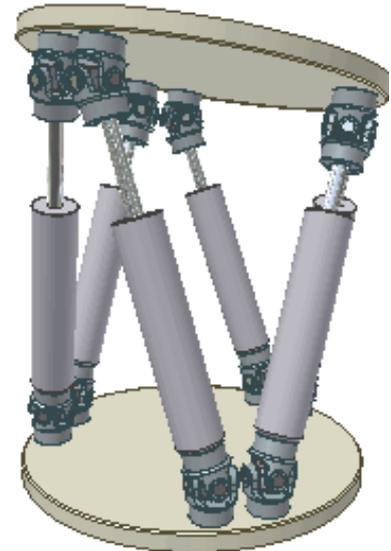


Ilustración 1-13 Plataforma Stewart-Gough

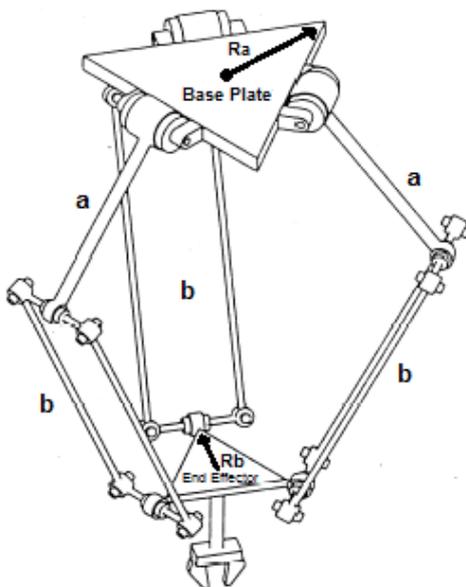


Ilustración 1-15 Mary Land

Robot Delta.

Es un mecanismo paralelo con tres brazos unidos a la base por medio de juntas universales. Una parte principal del diseño es el uso de paralelogramos en los brazos, que mantiene la orientación del efector final.

Fueron inventados en la década de los 80's por Reymond Clavel en EPFL, Suiza. Años más tarde alrededor del mundo se desarrollaron variantes del robot Delta. Adept creó un mecanismo parecido al tipo Delta, llamado

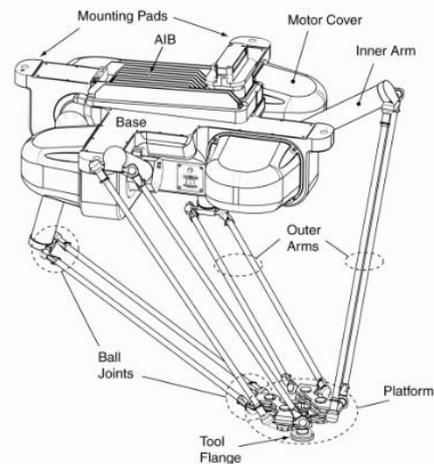


Ilustración 1-14 Adept Quattro

Quattro, que posee un grado de redundancia y consiste en cuatro extremidades de paralelogramo; creando un mecanismo paralelo completo [11] : “Un robot paralelo completo, es aquel que los GDL es estrictamente el mismo que la cantidad de cadenas cinemática sé que posee el manipulador”.

En años recientes el desarrollo de los robots paralelos ha incrementado, a partir del diseño creado por Adept, se han creado otros robots; como ejemplos se encuentran ARABA y el robot H4.



Ilustración 1-16 Araba II

singularidad de poseer un espacio de trabajo mucho mayor[10].

Robots por cables. Debido al espacio de trabajo limitado que poseen los manipuladores paralelos y las regiones de limitación, se sustituyeron los actuadores lineales por actuadores por cables eléctricos, su cinemática se realiza de manera similar, con la

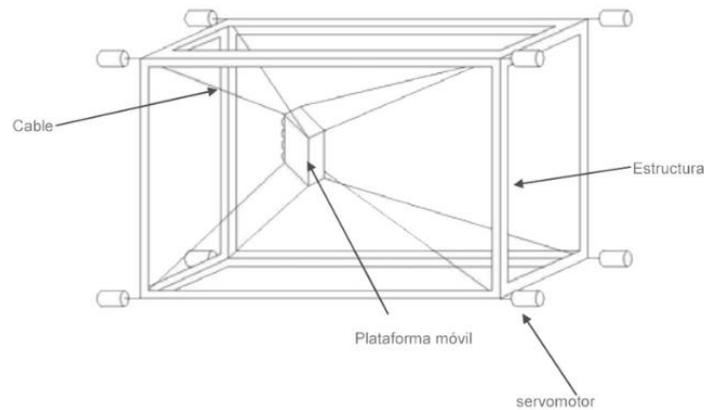


Ilustración 1-17 Robot por cables

1.3 Aspectos del Problema

El procedimiento seguido para el modelado de la cinemática directa de los manipuladores seriales varía de acuerdo al manipulador; en los manipuladores paralelos es complicada la simplificación y obtención de resultados incluso en los manipuladores paralelos más sencillos, como se ve en el libro de Lung Wen Tsai [3]. Los distintos métodos empleados para la simplificación de cálculos de la cinemática del manipulador en realidad no logran disminuir de manera considerable la complejidad [3].

Durante las últimas décadas se comenzó una investigación con respecto al problema expuesto anteriormente. Algunas de las investigaciones más prolíficas al respecto conllevan el uso de Cadenas Cinemáticas Virtuales.

1.4 Otras Investigaciones

Durante las últimas décadas se comenzó una investigación con respecto al problema expuesto anteriormente. Algunas de las investigaciones más prolíficas al respecto conllevan el uso de Cadenas cinemáticas Virtuales.

En otras investigaciones se ha buscado mejorar la capacidad de un manipulador paralelo planar 3RRR para seguir una trayectoria, usando herramientas de control de manera experimental, pero no con cadenas virtuales [12, 13].

Para resolver el problema que representa resolver la cinemática de un manipulador paralelo, se han realizado algunas investigaciones mencionadas en el punto anterior, en las que se propone emplear cadenas cinemáticas virtuales para simplificar dicho problema; en la mayoría de las investigaciones no se lleva a la práctica, dejándolo todo en suposiciones; salvo en la investigación realizada por Simas [1], en la que realizaron un prototipo de un manipulador serial controlado por una cadena virtual de ASSUR, pero no se ha documentado un procedimiento similar empleado en un manipulador paralelo.

Simas (2009) [1] realizó una investigación en el ámbito de las cadenas virtuales, en el cual usa cadenas virtuales adicionadas al modelado cinemático directo de un

manipulador serial, para simplificar la complejidad de los cálculos y poder imponer una trayectoria al manipulador serial; en este caso se emplea la definición de las cadenas de ASSUR [13]:

Una cadena cinemática virtual de ASSUR, es una cadena virtual que cumple con las siguientes propiedades:

1. Es serial
2. Sus articulaciones se dividen en dos grupos: $\lambda-2$ articulaciones internas conectando dos eslabones virtuales internos con dos eslabones externos (de la cadena original)
3. Cuando dos eslabones externos de la cadena virtual de Assur se encuentran conectados a una cadena cinemática con movilidad M , la movilidad de la cadena modificada (la cadena original más la cadena virtual) sigue siendo M .

La aplicación de este tipo de cadena es esencialmente la de obtener información sobre el movimiento de una cadena cinemática, o la de imponer restricciones a la cadena cinemática original.

En otras investigaciones se ha buscado mejorar la capacidad de un manipulador paralelo planar 3RRR para seguir una trayectoria, usando herramientas de control de manera experimental, pero no con cadenas virtuales [12, 13].

Para resolver la cinemática de un manipulador paralelo, se han realizado algunas investigaciones mencionadas en el punto anterior, en las que se propone emplear cadenas cinemáticas virtuales para simplificar dicho problema; en la mayoría de las investigaciones no se lleva a la práctica, dejándolo todo en suposiciones; salvo en la investigación realizada por H.Simas [1], en la cuál se realiza un prototipo de un manipulador serial controlado por una cadena virtual

de ASSUR.

Una investigación similar a la de Simas [1], trasladada al ámbito de los manipuladores paralelos no ha sido documentada al momento.

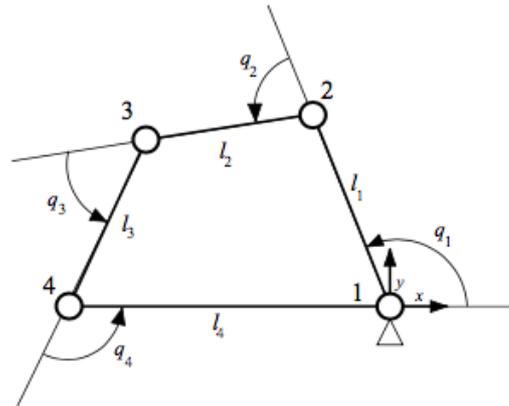


Ilustración 1-18 [1]

El principal objetivo de éste trabajo es el de documentar los resultados del seguimiento de una trayectoria de un robot paralelo espacial, a través de la implementación de una cadena virtual serial, para probar la teoría que se ha generado en relación con cadenas virtuales.

1.5 Antecedentes

La investigación que puede ser considerada anterior a la presente es una realizada por Patricio Martinez Zamudio [4], en la que se emplea una cadena virtual para retroalimentar a un robot manipulador paralelo plano 3RRR_(RRR)v;

Para llevar a cabo la experimentación se realizó el modelado cinemático diferencial del manipulador 3RRR_(RRR)v , el cual se implementó en un modelo físico del

manipulador paralelo, sustituyendo los resultados del análisis de la cadena virtual en variables de estado del manipulador paralelo, probando que es posible controlar al manipulador paralelo a través de su cadena virtual. Siendo ésta una de las mayores implicaciones de la metodología descrita en el trabajo presente.

Se probó que es posible retroalimentar a un robot paralelo 3RRR a partir de su cadena virtual $(RRR)_v$, para el seguimiento de trayectorias. Una de las mayores implicaciones de la metodología mencionada se refiere principalmente a la implementación de una cadena virtual al modelado cinemático de un manipulador paralelo 3RRR- $(RRR)_v$. De acuerdo con la investigación de Patricio Martínez Zamudio, [4], La experimentación del modelo 3RRR- $(RRR)_v$, funciona similarmente al modelo en la investigación , construido en el espacio físico , permitiendo empatar la simulación con un prototipo.

1.6 Propuesta

1.6.1 Objetivo

Modelar, simular e implementar un robot paralelo en el espacio, aplicando las teorías de cinemática diferencial para su retroalimentación con cadenas virtuales; poniendo así, en práctica los conocimientos teóricos que se han generado durante la carrera, además de buscar dar un avance en ésta área del conocimiento.

1.6.2 Objetivos Específicos

Implementar en un prototipo a una cadena cinemática virtual $(RRR)_v$ a un robot paralelo plano 3RRR, simulando el comportamiento del sistema.

Obtener la cinemática diferencial de una cadena virtual.

Obtener la cinemática diferencial de un robot paralelo Delta 4 espacial. Implementar una cadena cinemática virtual, a un robot paralelo Delta 4 en el espacio, simulando el comportamiento del sistema, en uno de los casos particulares.

1.6.3 Hipótesis

Es posible aplicar una cadena virtual en un robot paralelo espacial como medio de retroalimentación de la cinemática para el seguimiento de una trayectoria.

1.6.4 Meta

Probar la teoría de cadenas virtuales en un robot paralelo, en por lo menos un caso particular de la trayectoria seguida por el manipulador.

2 Teorías Base

“La robótica no se trata de reemplazar a los humanos, sino de aprender sobre nosotros mismos”

Henrik Scharfe

2.1 Cinemática

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo con respecto a un sistema de referencia, describiendo analíticamente el movimiento espacial como función de tiempo, y en particular por las relaciones entre la posición y orientación del efector final del robot con los valores que toman sus variables articulares [6].

Los manipuladores están compuestos por una serie de cuerpos móviles (eslabones), unidos por articulaciones. A continuación se muestra una tabla de la clasificación de las articulaciones

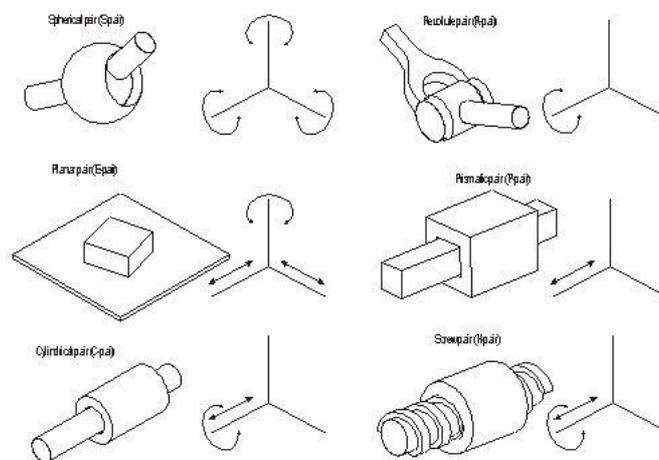


Ilustración 2-19 Tipos de Juntas[6]

Uno de los métodos más empleado para la descripción de las relaciones entre cada eslabón de los robots manipuladores seriales es el Algoritmo Denavit-Hartenberg [6]. A continuación se describe el algoritmo paso a paso:

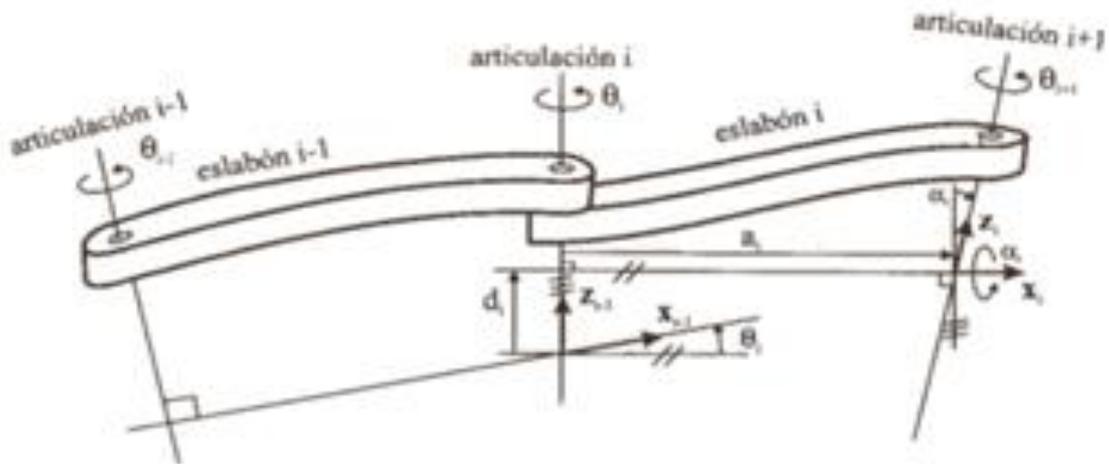


Ilustración 2-2 Parámetros para un Eslabón [6]

D-H 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

D-H 2. Numerar los eslabones comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.

D-H 3. Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

D-H 4. Para i de 0 a n-1 situar el eje z_i sobre el eje de la articulación $i+1$.

D-H 5. Situar el origen del sistema de la base [14] en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0 y y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0 .

D-H 6. Para i de 1 a n-1, situar el sistema [15] (soldado al eslabón i) en la intersección del eje z_i con la línea normal común a z_{i-1} y z_i . Si ambos ejes se cortasen se situaría [15] en el punto de corte. Si fuesen paralelos [15] se situaría en la articulación $i+1$.

D-H 7. Situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i .

D-H 8. Situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i .

D-H 9. Situar el sistema $\{S_n\}$ en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n .

D-H 10. Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.

D-H 11. Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1} que habría de desplazar $\{S_{i-1}\}$ para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.

D-H 12. Obtener a_i como la distancia medida a lo largo de x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}) que habría que desplazar al nuevo $\{S_{i-1}\}$ para que su origen coincidiese con $\{S_i\}$.

D-H 13. Obtener α_i como el ángulo que habría que girar en torno a x_i (que ahora coincidiría con x_{i-1}), para que el nuevo $\{S_{i-1}\}$ coincida totalmente con $\{S_i\}$

D-H 14. Obtener las matrices de transformación ${}^{i-1}A_i$.

D-H 15. Obtener la matriz de transformación que relaciona al sistema de la base con el extremo del robot $T = {}^0A_1, {}^1a_2 \dots {}^{n-1}A_n$

D-H 16. La matriz T define la orientación (sub matriz de rotación) y posición (sub matriz de traslación) del extremo referido a la base en función de la n coordenadas articulares.

θ_i Es el ángulo que forman los ejes X_{i-1} y X_i medido en un plano perpendicular al eje Z_{i-1} , utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.

d_i Es la distancia a lo largo del eje Z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas $(i-1)$ -ésimo hasta la intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i . Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

a_i Es a la distancia a lo largo del eje X_i que va desde la

intersección del eje Z_{i-1} con el eje X_i hasta el origen del sistema i -ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes Z_{i-1} y Z_i .

α_i Es el ángulo de separación del eje Z_{i-1} y el eje Z_i , medido en un plano perpendicular al eje X_i , utilizando la regla de la mano derecha.

Para robots paralelos se utilizan normalmente matrices de transformación homogéneas.

2.2 Teoría de matrices de transformación homogénea

2.2.1 Sistemas de referencia

Los sistemas de referencia son normalmente definidos mediante ejes perpendiculares entre sí con un origen definido. Éstos se denominan como sistemas cartesianos.

En la Ilustración a continuación (Ilustración 2-3) se representa un vector en coordenadas cartesianas en 2 (a)

y 3 (b) dimensiones [6].

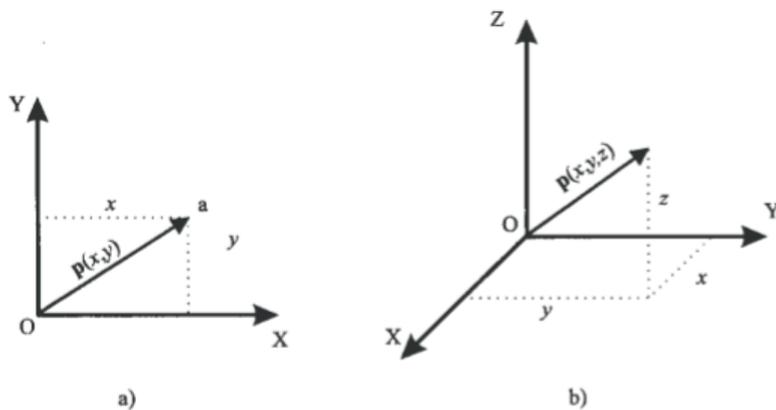


Ilustración 2-3 Sistemas de Referencia[6]

2.2.2 Matrices de Rotación

Las matrices de rotación permiten el uso del álgebra matricial, por lo que son el método más extendido para la descripción de orientaciones [6].

Supóngase que en el plano se tienen dos sistemas de referencia OXY y OUV, ambos con un mismo origen O, siendo OXY el sistema de referencia fijo (inercial) y el sistema OUV el móvil solidario al objeto.

Los vectores unitario de los ejes coordenados del sistema OXY son i_x , j_y , y los del sistema OUV son i_u , j_v .

Un vector del plano se puede representar en ambos sistemas como:

$$P_{xy} = [p_x, p_y]^T = p_x \cdot i_x + p_y \cdot j_y \quad 2.1$$

$$P_{uv} = [p_u, p_v]^T = p_u \cdot i_u + p_v \cdot j_v \quad 2.2$$

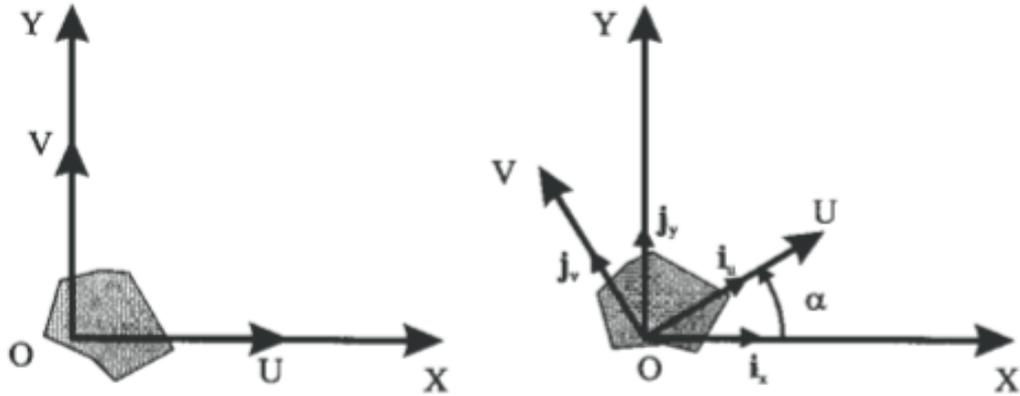


Ilustración 2-4 Sistemas de Referencia inercial y local [6]

Se puede llegar a la siguiente equivalencia:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix} \quad 2.3$$

$$R = \begin{bmatrix} i_x i_u & i_x j_v \\ j_y i_u & j_y j_v \end{bmatrix} \quad 2.4$$

Donde R, es conocida como matriz de rotación, y define la orientación del sistema OUV con respecto al sistema OXY, permite transformar las coordenadas de un vector de un sistema a las del otro. Para comprobar que se trata de una matriz ortonormal $R^{-1}=R^T$.

Si se considera la posición relativa del sistema OUV girado un ángulo α sobre el OXY, la matriz R será de la forma:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad 2.5$$

Siendo el razonamiento sobre un espacio tridimensional similar al descrito.

2.3 Cinemática directa

La cinemática directa de un manipulador consiste en determinar la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia (sistema inercial), conocidos los valores de las articulaciones actuadas y los parámetros geométricos de los elementos del robot [11]. Para el caso de la cinemática directa de los robots paralelos la solución no es única, cada manipulador posee un método distinto de solución, debido a que se llega a una ecuación polinomial con más de una solución [10].

2.3.1 Manipuladores seriales

Consideremos una cadena abierta constituida por $n+1$ eslabones, conectados por n articulaciones, donde el Eslabón 0 es considerado tierra; asumimos que cada articulación provee a la estructura mecánica con cierto GDL (Grado de Libertad).

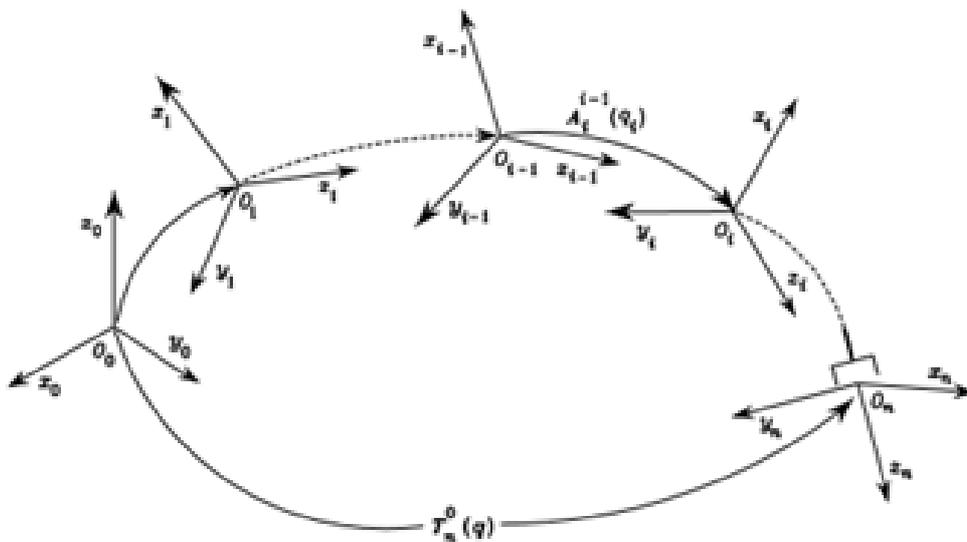


Ilustración 2-5 Sistemas Locales de un manipulador serial [2]

Si cada articulación conecta a dos eslabones consecutivamente, se busca una descripción del manipulador completo de manera recursiva.

Se comienza por localizar sistemas de referencia en cada articulación, empleando el Algoritmo de Denavit Hartenberg (DH), de modo que es posible obtener la descripción general.

A partir de dicha descripción, se sustituyen los valores de los ángulos conocidos, es posible obtener la posición del efector final [10].

2.3.2 Manipuladores Paralelos

Dado que sólo son conocidas las posiciones de las articulaciones actuadas, se busca en las matrices de transformación homogéneas del manipulador, las relaciones en las que un ángulo sea descrito a partir de los otros.

2.4 Cinemática Inversa

El problema cinemático inverso depende fuertemente de la configuración, no pudiendo generar un método general para cada manipulador. Por lo cual no es posible generar un método por el cual se caracterice de forma general la obtención de las ecuaciones finales.

Cuando se resuelve el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución de forma cerrada. Esto implica encontrar una relación matemática de la forma: $q_x = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$

Este tipo de solución presenta, entre otras, las siguientes ventajas:

- En muchas aplicaciones el problema cinemático inverso debe ser resuelto en tiempo real, por lo que una solución de tipo iterativo no garantiza una solución en el momento adecuado.
- Al contrario de la cinemática directa, el método inverso no siempre tiene una solución única.

Existen ciertos métodos para resolver el problema de la cinemática inversa de un manipulador.

2.4.1 Geométrico

El procedimiento en sí se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos [3].

2.4.2 Algebraico

En principio es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelo directo, es decir, suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de la posición en función de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación de aquellas las relaciones inversas [6].

2.4.3 Sustitución Polinomial

Parte del hecho de que las ecuaciones trascendentales son normalmente difíciles de resolver, debido a la aparición de $\text{sen}\theta$ y $\text{cos}\theta$. Por lo cual se hacen sustituciones en términos de una sola variable [3]:

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \tag{2.6}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \tag{2.7}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{2u}{1 + u^2} \tag{2.8}$$

Usando las ecuaciones anteriores para realizar un cambio de variables, permitiendo realizar una sustitución.

2.5 Cinemática Diferencial

Es la relación entre las velocidades del movimiento de las articulaciones y las del extremo, a través de la matriz Jacobiana.

La propagación de velocidades, se refiere a la descripción de la velocidad angular y lineal de cada eslabón de un manipulador, basado en distintos sistemas de referencia dentro del mismo.

2.5.1 Cinemática Diferencial

Propagación de velocidades

De acuerdo con el método descrito por J.J. Craig [2], como se sabe un manipulador es una cadena de cuerpos, cada uno capaz de movimiento relativo con respecto a los cuerpos vecinos; por lo tanto es posible numerar en orden comenzando desde la base, hasta el extremo del efector final.

La velocidad angular $i+1$ es la misma que la velocidad i más un nuevo componente causado por el giro en la junta $i+1$.

Esto puede ser descrito en términos del sistema $\{i\}$ por la ecuación la ecuación 1

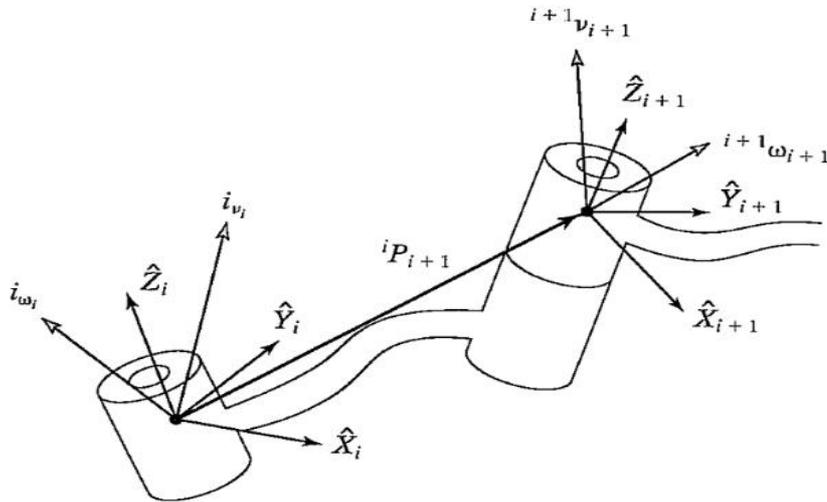


Ilustración 2-6 Sistemas de un eslabón [2]

$${}^i\omega_{i+1} = {}^i\omega_i + {}^i_{i+1}R\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\dot{Z}_{i+1} \quad 2.8$$

Donde

$$\dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\dot{Z}_{i+1} = {}^{i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{pmatrix} \quad 2.9$$

La velocidad linear del sistema $\{i+1\}$ que represente la componente rotacional añadiendo el movimiento del sistema $\{i\}$ es la siguiente considerando ${}^iP_{i+1}$ constante es la descrita en la ecuación 3.

$${}^i\mathbf{v}_{i+1} = {}^i\mathbf{v}_i + {}^i\boldsymbol{\omega}_i \times {}^iP_{i+1}$$

2.10

Las ecuaciones 4 y 5 se consideran las ecuaciones generales para realizar la propagación de velocidades.

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i{}^{i+1}R^i\omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\dot{Z}_{i+1} \quad 2.11$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^i{}^{i+1}R(i v_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) \quad 2.12$$

Si simplemente se consideran las relaciones para la junta prismática $i+1$, las ecuaciones serían las siguientes:

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^i{}^{i+1}R^i\omega_i \quad 2.13$$

$${}^{i+1}v_{i+1} = {}^i{}^{i+1}R(i v_i + {}^i\omega_i \times {}^iP_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\dot{Z}_{i+1} \quad 2.14$$

Aplicando las ecuaciones anteriores de eslabón en eslabón, podemos obtener ${}^N\omega_N$ y Nv_N del último punto de la cadena.

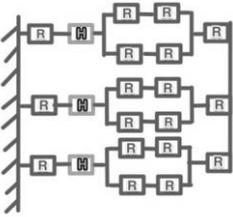
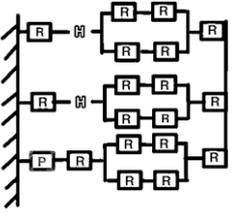
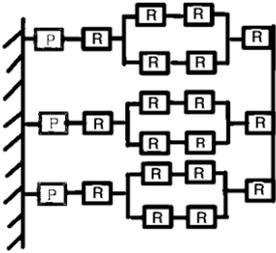
2.6 Síntesis Estructural

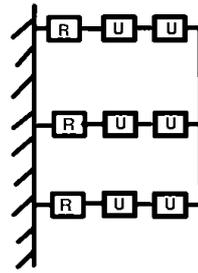
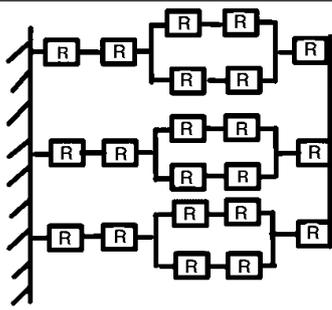
La síntesis estructural, o de tipo, es un método mediante el cual se buscan generar todas las estructuras que tienen cierto funcionamiento cinemático [7].

A partir del esquema que se genera es posible ver de

manera sencilla las distintas configuraciones que se pueden generar a partir del uso de las distintas clases de juntas.

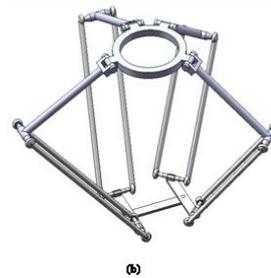
Para este trabajo se realizó una investigación de los manipuladores ya existentes, parecidos al que se desea desarrollar, a continuación se muestran las síntesis de tipo de cada uno de dichos manipuladores.

<p>Prism Robot</p> 	<p>Y Star</p>
<p>HRobot</p> 	
<p>Delta</p> <p>Existen tres variaciones de esta clase de Robots</p>	<p><i>PRPAR</i></p> 
<p><i>3RPAR</i></p>	<p><i>RUU</i></p>

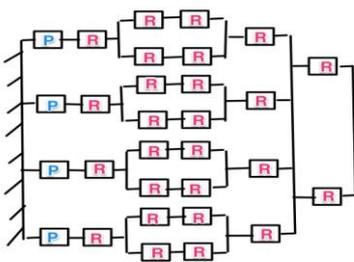


Robot H4

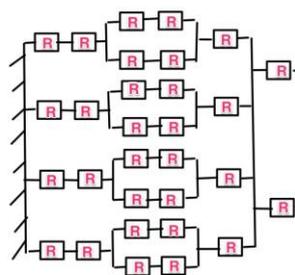
Existen dos variaciones de esta clase de Robots



a. PRPAR



b. RRPAP



Araba

Existen dos variaciones de

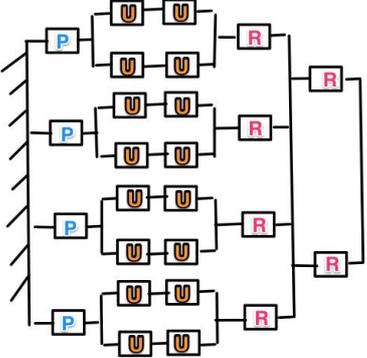
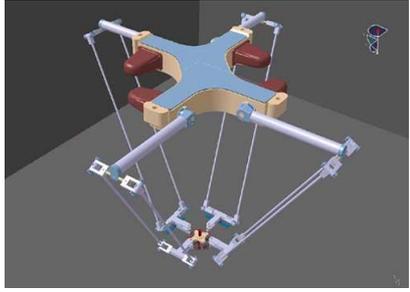
esta clase de Robots	
<p><i>Araba I</i></p> 	<p><i>Araba II</i></p> 

Ilustración 2-20

2.7 Cadenas Virtuales

Una Cadena virtual se define como un elemento que existe en la cinemática del manipulador pero no en la dinámica de este. Debido a que la masa de los eslabones de la cadena virtual es considerada cero, los efectos inerciales en el modelo dinámico son nulos, existiendo matemáticamente en el modelo cinemático, pero no en el dinámico[16]. Esto se puede interpretar, pero no existe físicamente [4]; mediante la cadena virtual es posible imponer movimientos a la cadena original del manipulador paralelo[5]. Los patrones de movimiento son descritos a través de la propagación de

velocidades del manipulador, virtual u original.

Existen distintos patrones de movimiento para cada manipulador paralelo. Es posible describir el patrón de movimiento de un manipulador paralelo mediante el uso de una cadena cinemática abierta o una cadena paralela.

Existen diferentes tipos de cadenas virtuales, uno muy conocido son las cadenas de ASSUR, es una cadena virtual que cumple con las siguientes propiedades:

Es serial

Sus articulaciones se dividen en dos grupos: $\lambda-2$ articulaciones internas conectando dos eslabones virtuales internos con dos eslabones externos (de la cadena original)

Tiene puntos donde sus tornillos normalizados son independientes

Cuando dos eslabones externos de la cadena virtual de ASSUR se encuentran conectados a una cadena cinemática con movilidad M , la movilidad de la cadena modificada (la cadena original más la cadena virtual) sigue siendo M .

La aplicación de este tipo de cadena es esencialmente la de obtener información sobre el movimiento de una cadena cinemática, o la de imponer movimientos a la cadena cinemática original [17].

2.8 Control

2.8.1 Retroalimentación

Un sistema dinámico es un sistema cuyo comportamiento cambia con el tiempo, en respuesta a estimulación externa o fuerzas externas. El término retroalimentación se refiere a la situación en la que uno o más sistemas dinámicos se encuentran conectados entre sí y su dinámica se encuentra íntimamente relacionados. Su razonamiento ligero es complicado, ya que el primer sistema afecta al segundo y la respuesta del segundo afecta al primero, creando un ciclo [18].

2.8.2 Control

El término control, en el ámbito ingenieril, se define como un sistema que emplea algoritmos y retroalimentación [18].

2.8.3 Sistemas Multi-variables

De acuerdo con Albertos en su libro *Multivariable Control Systems and Engineering Approach*, la definición de sistemas multi-variables es: “Si p -variables independientes son seleccionadas para ser controladas, por lo tanto al menos el mismo número de variables independientes debe ser manipulador ($m \geq p$). Siendo independiente significa que no producen efectos similares en las variables controladas [19]” .

2.8.4 Variables de estado

La teoría moderna de control está basada en el conocimiento del comportamiento interno de los sistemas, reflejado en las variables que influyen en su dinámica, dichas variables constituyen el concepto de estado del sistema. Presentando varias ventajas, ya que es aplicable a sistemas multivariables, a sistemas con relaciones no lineales entre las variables del sistema, es aplicable a sistemas cuyos parámetros varían en el tiempo.

Se conoce como *estado del sistema* a la mínima cantidad de información necesaria en un instante para que, conociendo la entrada a partir de ese instante se pueda determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior.

$$X(t) = ST(t).U$$

Donde X representa a las variables de salida, U las variables de entrada y ST las ecuaciones a partir de las cuales es posible determinar las variables de estado [20].

Este tipo de análisis es aplicable a sistemas con relaciones entre sus variables no lineales, permitiendo así establecer relaciones entre las variables del sistema.

Un estado de sistema es posible ser definido como la cantidad mínima de información necesaria en un cierto instante, donde conociendo los valores de las entradas en dicho instante sea posible determinar el valor de las salidas en el instante posterior.

3 Teoría de Manipuladores con cadenas virtuales

“La ciencia de hoy es la ciencia del mañana”

Edward Teller

Como se mencionó anteriormente, en el capítulo 2, no existe una sola definición para las cadenas virtuales, para definir las se han empleado distintos métodos entre ellos la síntesis de tipo, en algunos trabajos es posible presentar un modelo de la cinemática en variables de estado para manipuladores paralelos en el plano [4, 16].

En este capítulo se muestran herramientas matemáticas necesarias para obtener la representación de posición y orientación de un manipulador paralelo y su cadena virtual.

3.1 Postura del manipulador paralelo en el espacio

La Ilustración 3-1 muestra el robot paralelo delta 4 en estudio, con n cadenas cinemáticas independientes, cada una de ellas accionada por un actuador; cada una de las cadenas se encuentra conectada a la base fija, tierra, y al efector final al mismo tiempo; por lo tanto hay n puntos de anclaje a la base fija y n puntos de unión al efector final o plataforma móvil.

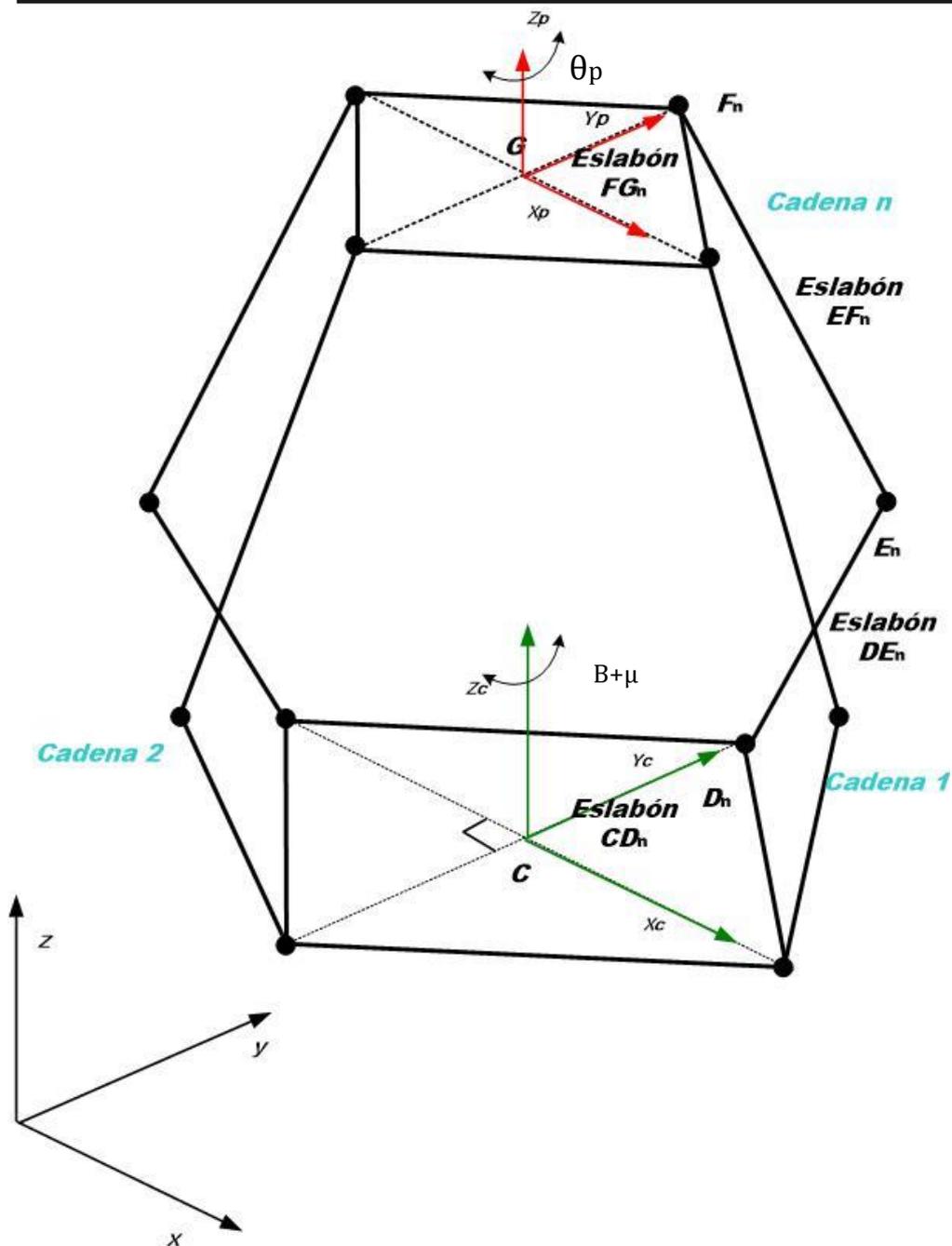


Ilustración 3-1 Manipulador Delta 4

La postura del manipulador plano en el espacio puede ser descrita por:

$$\zeta = [x, y, z, \theta_p]^T \quad 3.1$$

En donde se describe la posición del punto final $P = (x, y, z)$ con respecto al sistema inercial $\{x, y, z\}$ y θ_p es la orientación del efector final [2].

La matriz de rotación de la postura es una matriz ortogonal que puede ir del sistema inercial al sistema local.

$$R(\theta).R^T(\theta) = I \quad 3.2$$

Donde $R(\theta)$, puede ser representada por las siguientes:

$$Q_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[\theta_x] & -\sin[\theta_x] & 0 \\ 0 & \sin[\theta_x] & \cos[\theta_x] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.3$$

$$Q_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos[\theta_y] & 0 & \sin[\theta_y] & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin[\theta_y] & 0 & \cos[\theta_y] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.4$$

$$Q_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos[\theta_x] & -\sin[\theta_x] & 0 & 0 \\ \sin[\theta_x] & \cos[\theta_x] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.5$$

3.1.1 Representación de la Posición de un Punto entre el Sistema Inercial y el Sistema Local

Se define el vector \overrightarrow{OC} relativo al sistema inercial como 0C , el vector \overrightarrow{PC} relativo al sistema local como 0P . El vector 0C puede ser representado como [2] :

$${}^0C = R(\theta)^P + {}^0C \quad 3.6$$

$${}^PC = R(\theta)^T + ({}^0C - {}^0P) \quad 3.7$$

3.1.2 Representación de la Velocidad de un Punto entre el Sistema Inercial y el Sistema Local

La velocidad de un punto es un vector libre; por lo cual es posible posicionarlo en cualquier lugar del espacio, sin que se experimenten pérdidas o cambios en el sentido, si la magnitud y la dirección se mantienen [2].

Si la velocidad del punto C definido con respecto al sistema inercial se puede expresar como el vector ${}^0\dot{C}$, y la velocidad del punto C con respecto al sistema local se puede expresar por el vector ${}^P\dot{C}$, se puede expresar de la siguiente manera

$${}^0\dot{C} = R(\theta)^P \dot{C} \quad 3.8$$

$${}^P\dot{C} = R(\theta)^T {}^0\dot{C} \quad 3.9$$

3.2 Propagación de velocidades invertida

En el presente el presente trabajo se emplea un método distinto al que se encuentra en la literatura[2]. El método consiste en tomar como punto de partida el efector final de la cadena, haciendo las transformaciones necesarias para llegar al sistema de origen. Dicho método fue empleado en otras investigaciones, aportando resultados satisfactorios[4, 16]

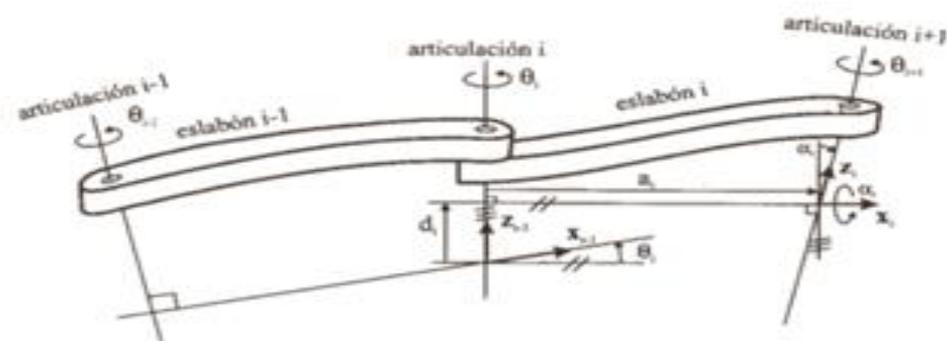


Ilustración 3-2 Diagrama de eslabones [6]

Las matrices de transformación y sus nomenclaturas empleadas en éste método con las siguientes:

$${}^i_{i-1}R = \begin{bmatrix} \text{Cos}[\theta_{i-1}] & -\text{Sin}[\theta_{i-1}] & 0 \\ \text{Sin}[\theta_{i-1}] & \text{Cos}[\theta_{i-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.10$$

$${}^i_{i-1}R = ({}^i_{i-1}R)^T \quad 3.11$$

Para este tipo de sistemas se emplean las matrices transpuestas, de igual forma que las inversas; ya que al ser sistemas ortogonales éstas son equivalentes.

$${}^i_{i-1}R = \begin{bmatrix} \text{Cos}[\theta_{i-1}] & \text{Sin}[\theta_{i-1}] & 0 \\ -\text{Sin}[\theta_{i-1}] & \text{Cos}[\theta_{i-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.12$$

De manera análoga al método anterior, la velocidad angular $i-1$ es la misma que la velocidad i más un nuevo componente causado por el giro en la junta $i-1$, y así sucesivamente.

Para el cálculo de las velocidades lineares y angulares iniciales, simplemente se describen como incógnitas.

La ecuación 13 describe el procedimiento para el cálculo de las velocidades angulares:

$${}^{i-1}\omega_{i-1} = {}^{i-1}R^i\omega_i + \dot{\theta}_{i-1}{}^{i-1}\dot{Z}_{i-1} \quad 3.13$$

Donde

$$\dot{\theta}_{i-1} {}^{i-1}\dot{Z}_{i-1} = {}^{i-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{i-1} \end{pmatrix}$$

3.14

En el caso de la ecuación 13, es necesario considerar sólo los giros presentes en el punto que se analiza.

Para conocer la velocidad linear del sistema $\{i-1\}$ que representa la componente rotacional que añade el movimiento del sistema $\{i\}$, es necesario emplear la ecuación 14:

$${}^{i-1}v_{i-1} = {}^i R({}^i v_i + {}^i \omega_i \times {}^i P_{i-1})$$

3.15

De esta manera si se aplican las ecuaciones para propagar las velocidades del efector final a la base, facilita la obtención de la cinemática diferencial directa en inversa de un manipulador.

3.2.1 Ejemplo

Respecto al uso del método descrito anteriormente, se analiza un manipulador serial plano (x,y) de 2GDL, como en el esquema siguiente.

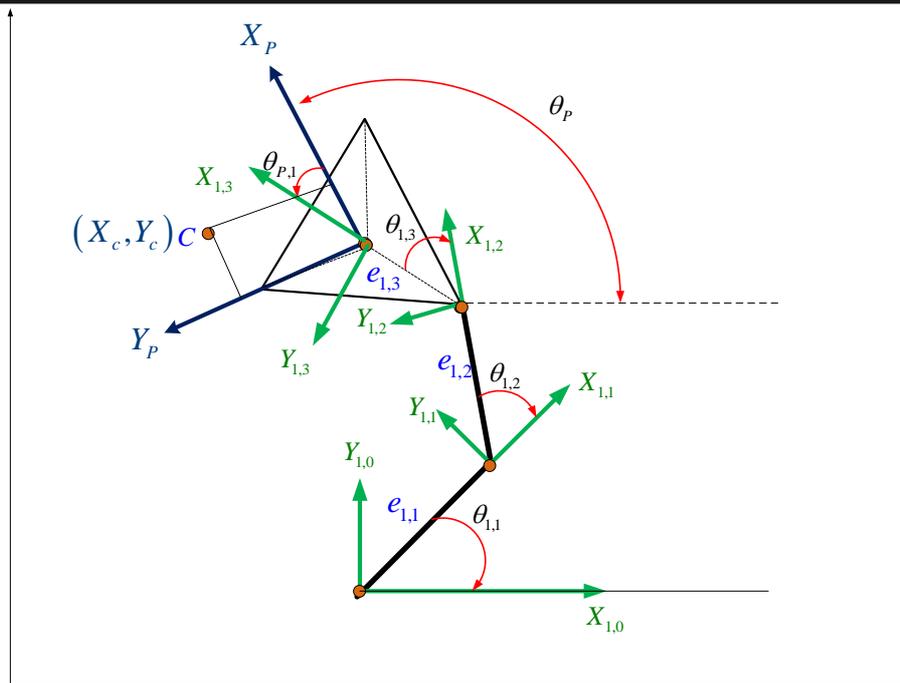


Ilustración 3-3 Diagrama de Cadena [16]

Las velocidades angulares y lineares en el punto P son las siguientes respectivamente:

$$\omega_{PP} = (0, 0, \dot{\theta}_p)^T \quad 3.16$$

$$V_{PP} = (\dot{X}_p, \dot{Y}_p, 0)^T \quad 3.17$$

La matriz de rotación, siendo el giro en P siguiendo la regla de la mano derecha, negativo; se emplea la matriz inversa del giro negativo.

$$R_{1,3p} = {}^{i-1}R(\theta_{p1}) \quad 3.18$$

Le velocidad angular del sistema 1,3

$$\dot{\theta}_{1,31,3} = (0, 0, \dot{\theta}_p)^T \quad 3.19$$

Y el desplazamiento del sistema 1, 3 al sistema P

$$P_{p1,3} = (0,0,0)^T \quad 3.20$$

Las velocidades angular y lineal del sistema P en 1,3

$$\omega_{1,31,3} = (0,0,\dot{\theta}_p)^T \quad 3.21$$

$$V_{1,3p} = \begin{pmatrix} \text{Cos}(\theta_{p1})\dot{X}_p + \text{Sin}(\theta_{p1})\dot{Y}_p \\ -\text{Sin}(\theta_{p1})\dot{X}_p + \text{Cos}(\theta_{p1})\dot{Y}_p \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3.22$$

Del sistema 1,3 al sistema 1,2

La matriz de rotación es la siguiente

$$R_{1,21,3} = {}_i^{-1}R(-\theta_{1,3})^T \quad 3.23$$

La velocidad angular

$$\dot{\theta}_{1,21,2} = (0,0,\dot{\theta}_{1,3})^T \quad 3.24$$

El desplazamiento del sistema 1,2 al sistema 1,3

$$P_{1,31,2} = (e_{1,3}, 0,0)^T \quad 3.25$$

Resultantes

$$\omega_{1,21,2} = (0,0,\dot{\theta}_p + \dot{\theta}_{1,3})^T \quad 3.26$$

$$V_{1,21,2} = R_{1,21,3} \cdot (V_{1,3p} + (\omega_{1,31,3} \times P_{1,31,2})) \quad 3.27$$

Del sistema 1,2 al sistema 1,1

La matriz de rotación

$$R_{1,11,2} = \text{Rz}(-\theta_{1,2})^T \quad 3.28$$

La velocidad angular

$$\dot{\theta}_{1,11,1} = (0, 0, \dot{\theta}_{1,2})^T \quad 3.29$$

El desplazamiento del sistema 1,1 al sistema 1,2

$$P_{1,11,2} = (e_{1,2}, 0, 0)^T \quad 3.30$$

Resultantes

$$\omega_{1,11,1} = (0, 0, \dot{\theta}_p + \dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{1,3})^T \quad 3.31$$

$$V_{1,11,1} = \begin{pmatrix} \text{Cos}(\theta_{p1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3})\dot{X}_p + \text{Sin}(\theta_{p1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3})\dot{Y}_p - \dot{\theta}_p(\text{Sin}(\theta_{1,2})e_{1,2} + \text{Sin}(\theta_{1,2} + \theta_{1,3})e_{1,3}) - \text{Sin}(\theta_{1,2})e_{1,2}\dot{\theta}_{1,3} \\ -\text{Sin}(\theta_{p1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3})\dot{X}_p + \text{Cos}(\theta_{p1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3})\dot{Y}_p + \dot{\theta}_p(\text{Cos}(\theta_{1,2})e_{1,2} + \text{Cos}(\theta_{1,2} + \theta_{1,3})e_{1,3}) + \text{Cos}(\theta_{1,2})e_{1,2}\dot{\theta}_{1,3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3.32$$

Del sistema 1,1 al 1

La matriz de rotación, velocidad angular y vector de posición respectivamente

$$R_{1,01,1} = \text{Rz}(-\theta_{1,1})^T \quad 3.33$$

$$\dot{\theta}_{1,01,0} = (0, 0, \dot{\theta}_{1,1})^T \quad 3.34$$

$$P_{1,11,0} = (e_{1,1}, 0, 0)^T \quad 3.35$$

Las resultantes con las siguientes

$$\omega_{1,01,0} = (0,0,\dot{\theta}_p + \dot{\theta}_{1,1} + \dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{1,3})^T \quad 3.36$$

$$\begin{aligned} V_{1,01,0}X &= \text{Cos}(\theta_{p1} - \theta_{1,1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3}) \dot{X}_p \\ &+ \text{Sin}(\theta_{p1} - \theta_{1,1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3}) \dot{Y}_p - \dot{\theta}_p (\text{Sin}(\theta_{1,1}) e_{1,1} \\ &+ \text{Sin}(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) e_{1,2} + \text{Sin}(\theta_{1,1} + \theta_{1,2} + \theta_{1,3}) e_{1,3}) \\ &- \text{Sin}(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) e_{1,2} \dot{\theta}_{1,3} - \text{Sin}(\theta_{1,1}) e_{1,1} (\dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{1,3}) \end{aligned} \quad 3.37$$

$$\begin{aligned} V_{1,01,0}Y &= -\text{Sin}(\theta_{p1} - \theta_{1,1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3}) \dot{X}_p \\ &+ \text{Cos}(\theta_{p1} - \theta_{1,1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3}) \dot{Y}_p + \dot{\theta}_p (\text{Cos}(\theta_{1,1}) e_{1,1} \\ &+ \text{Cos}(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) e_{1,2} + \text{Cos}(\theta_{1,1} + \theta_{1,2} + \theta_{1,3}) e_{1,3}) \\ &+ \text{Cos}(\theta_{1,1} + \theta_{1,2}) e_{1,2} \dot{\theta}_{1,3} + \text{Cos}(\theta_{1,1}) e_{1,1} (\dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{1,3}) \end{aligned} \quad 3.38$$

3.3 Cadenas virtuales

Como se mencionó en el capítulo 2, la definición de Cadena virtual es la siguiente:

Una Cadena virtual se define como un elemento que existe en la cinemática del manipulador pero no en la dinámica de este. Debido a que la masa de los eslabones de la cadena

virtual es considerada cero, los efectos inerciales en el modelo dinámico son nulos, existiendo matemáticamente en el modelo cinemático, pero no en el dinámico [4, 16].

3.3.1 Cadenas virtuales en el espacio

La selección de una cadena virtual puede depender de varios factores, como los grados de libertad del manipulador “real” o el movimiento que se desea imponer.

Existen tres posibilidades para implementar una cadena virtual:

- Los GDL (grados de libertad) del manipulador real son menores a los de la cadena virtual.
- Los GDL de ambos manipuladores son iguales.
- Los GDL del manipulador real son menores que los del manipulador virtual.

Para el objetivo de ésta investigación, sólo se desea controlar al manipulador paralelo, que se analizó en la sección anterior, debido a la complejidad del manipulador real, se seleccionó como cadena virtual, una con GDL menores a los disponibles en el manipulador real; restringiendo el movimiento a sólo en el plano XZ.

El proceso de diseño a partir de la trayectoria seleccionada, comienza con plantear las cadenas capaces de realizar el movimiento deseado, en la siguiente tabla se muestran los manipuladores planteados.

La cadena virtual seleccionada es la que está marcada con la letra (a) en la ilustración 3.4; fue seleccionada debido a

que cumple con lo deseado para la cadena virtual, que posea menor número de GDL que el manipulador real; además de que es el manipulador más sencillo que permite seguir una trayectoria en un plano XZ.

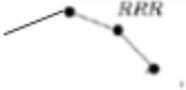
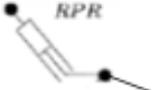
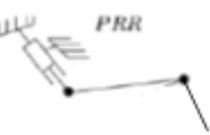
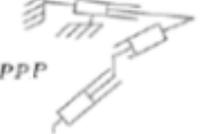
			
a) $(RRR)_v$	a) $(RPR)_v$	a) $(PPR)_v$	a) $(PRP)_v$
			
a) $(PRR)_v$	a) $(RPP)_v$	a) $(RRP)_v$	a) $(PPP)_v$

Ilustración 3-4 Cadenas de 3GDL [16]

En el siguiente capítulo (4) se muestra detalladamente la obtención de las ecuaciones cinemáticas de la cadena virtual seleccionada (Ilustración 5-5)

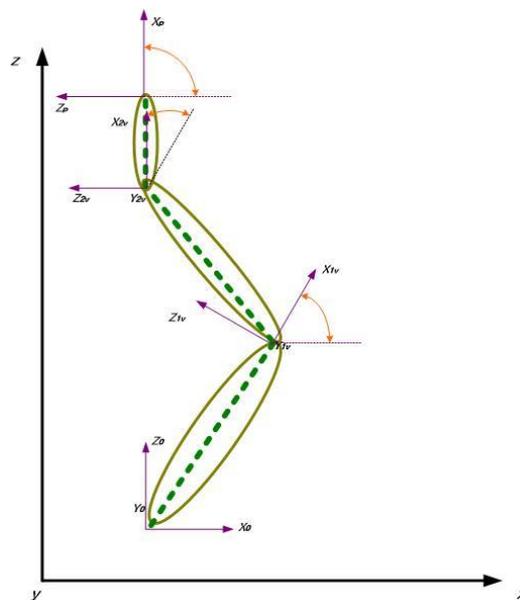


Ilustración 3-5 Cadena seleccionada

3.4 Coordenadas de configuración

[16]Cualquier manipulador ya sea serial o paralelo convencional tiene lo que se conoce como coordenadas de configuración a las coordenadas $q = [q_1, \dots, q_n]$; y se constituye de los siguientes elementos:

- Coordenadas de postura, respecto al sistema inercial:

$$\zeta = [x, y, z, \theta_p]^T$$

- Y las coordenadas de configuración correspondientes al tipo de manipulador a analizar

- Manipulador Serial: $q_s = [q_{s1}, \dots, q_{sn}]$

- Manipulador Virtual: $q_v = [q_{v1}, \dots, q_{vn}]$

- Manipulador Paralelo; en éste caso se encuentran dadas no sólo por las juntas activas, sino incluye también a las pasivas: $q_d = [q_{i,j}, \dots, q_{n,m}]$

Permitiendo definir las coordenadas de manera general de la siguiente manera:

$$q = [\zeta \ q_k]^T$$

3.39

Donde $K = s, v, d$; dependiendo del manipulador a estudiar.

Siguiendo las mismas normas de obtienen las velocidades generalizadas como sigue:

$$\dot{q} = [\dot{\zeta} \dot{q}_k]^T \quad 3.40$$

3.4.1 Cinemática Externa

La cinemática de un manipulador asociada al sistema inercial, es conocida como cinemática externa. Teniendo las coordenadas generalizadas, q , donde las restricciones cinemáticas se pueden describir de la forma:

$$A_T(q)\dot{q} = 0 \quad 3.41$$

Es posible obtener la matriz asociada a la cinemática externa y parametrizada por las coordenadas generalizadas; de la forma

$$A_T(q) \in R^{(n.m) \times (r_m+n.m)} \quad 3.42$$

La cinemática interna de un manipulador es aquella que está asociada al sistema de referencia $\{x_p, y_p, z_p\}$, y es independiente a la orientación del manipulador, θ .

Por lo cual para encontrar la cinemática interna del manipulador, es necesario igualar $\theta = 0$; la expresión quedaría de la siguiente forma:

$$A_{T_p}(q)\dot{q}_p = 0 \quad 3.43$$

Donde $A_{T_p}(q) \in R^{(n.m) \times (r_m+n.m)}$ es la matriz asociada a las restricciones de la cinemática interna, que se encuentra parametrizada por las coordenadas generalizadas.

3.5 Representación en el espacio de estados

Como se mencionó en el capítulo 2, el estado de un sistema es la mínima cantidad de información necesaria en un instante, que conociendo la entrada en ese instante, es posible determinar el estado del sistema en cualquier instante posterior.

Una forma de encontrar una representación de la cinemática en variables de estado es mediante la realización de un mapeo de las velocidades de entrada r_m , donde $\eta(t) = [\eta_1, \dots, \eta_2]$ [18, 20].

Siendo el espacio nulo $N(A_{T_p})$, puede ser utilizado para encontrar un conjunto de vectores suaves de r_m , donde $\sigma_{m1}(q), \dots, \sigma_{mr_m}(q)$.

Estableciendo $\Sigma(q) = [\sigma_{m1}(q), \dots, \sigma_{mr_m}(q)]$ es una matriz con los vectores de velocidades, parametrizada por las coordenadas angulares $\theta_{i,j}$, expresamos el espacio de estados de las restricciones cinemáticas como

$$\dot{q}_p = \sum (\theta_{i,j}) [\eta]$$

3.44

Donde η es la matriz que representa la velocidad lineal y angular, de la plataforma móvil. Introduciendo la configuración de la matriz de rotación como una extensión de la matriz de rotación de postura, como:

$$R_q = \begin{bmatrix} {}^0R_p(\theta_p) & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

3.45

Lo anterior se puede expresar de la forma generalizada:

$$\dot{q}_p = \begin{pmatrix} \zeta_p \\ \dot{\theta}_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \zeta \\ \sum q_k(\dot{\theta}_{i,j}) \end{pmatrix} \cdot [\eta]$$

3.46

Pre multiplicando por la matriz de rotación R_q en ambos lados la expresión queda de la siguiente manera:

$$\dot{q} = R_q \cdot \dot{q}_p = R_q \cdot \begin{pmatrix} \zeta_p \\ \dot{\theta}_{i,j} \end{pmatrix} = R_q \cdot \begin{pmatrix} \sum \zeta \\ \sum q_k(\dot{\theta}_{i,j}) \end{pmatrix} \cdot [\eta]$$

3.47

Siendo la ecuación anterior la representación en variables de estado completo del modelo cinemático de la configuración del manipulador.

$$\dot{q} = S_T(q) \cdot u = \begin{pmatrix} \dot{\zeta}_p \\ \dot{\theta}_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta) \cdot \sum \zeta \\ \sum q_k(\dot{\theta}_{i,j}) \end{pmatrix} \cdot [\eta]$$

3.48

Donde $S_T(q) \in R^{r_m \times (3+nN)}$ y $u(t) = [\eta] \in R^{r_m \times 1}$. Desde $S_T(q) \in \text{null}[A_T(q)]$

Entonces

$$S_T^T(q) \cdot A_T^T(q) = 0$$

3.49

4 Modelado e Implementaci ón de 3RRR_ (RRR)_v

“El diseño no es sólo lo que se ve o lo que se siente. Diseño es cómo funciona”

En la siguiente tabla se muestran algunos manipuladores espaciales de 3 Grado de Libertad (GDL) a 4 en el espacio

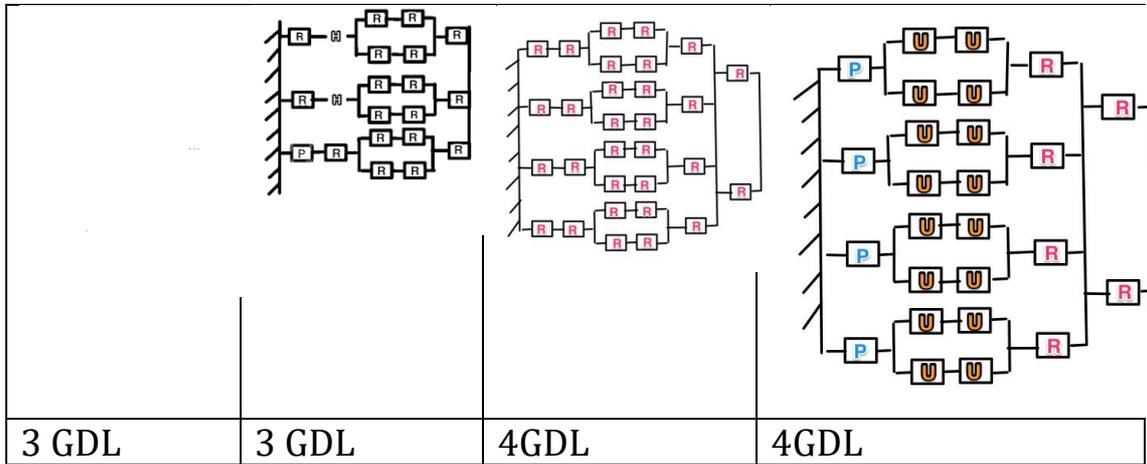


Ilustración 4-1 Síntesis de Tipo de manipuladores espaciales

En la ilustración 2 se muestra una tabla con las configuraciones de 1 Grado de Libertad (GDL) a 4 de manipuladores seriales.

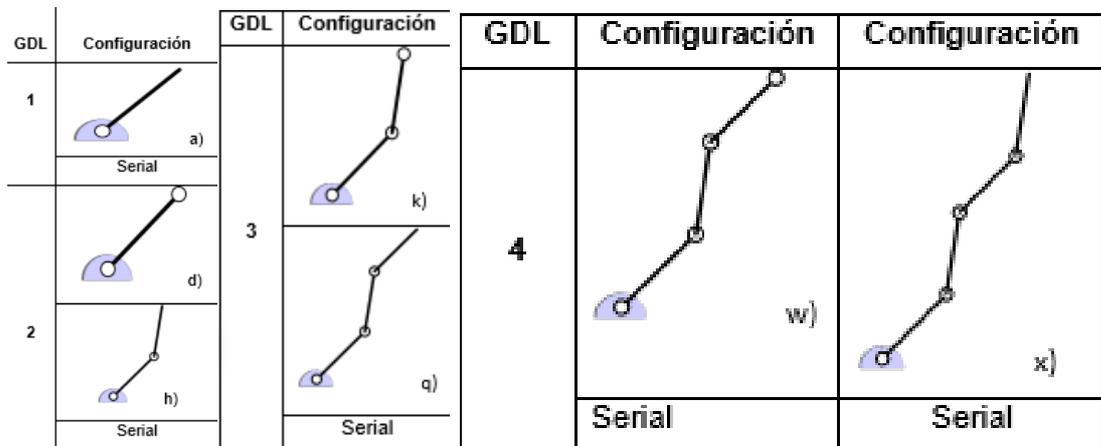


Ilustración 4-2 Síntesis de Tipo de manipuladores seriales

4.1 Definición de Casos Particulares

Como se mencionó anteriormente los robots paralelos se pueden subdividir en dos grupos, paralelos planos y paralelos espaciales; esto debido al espacio de trabajo que poseen.

Dentro de las investigaciones realizadas se implementó de un manipulador plano 3RRR-(RRR_v), basándose en el trabajo respecto el tema analizado por el Dr. Patricio Martínez Zamudio.

En el presente capítulo se analiza a un robot paralelo plano 3RRR-(RRR_v) a partir de sus ecuaciones de estado; así como su implementación. Así mismo se analiza un manipulador paralelo espacial y su cadena virtual, con el fin de seleccionar los casos particulares para ser estudiados.

El análisis se enfoca a los siguientes manipuladores:

- Implementación de un Robot Paralelo Plano con su cadena virtual 3RRR-(RRR)_v,
- Manipulador Paralelo espacial Delta 4, 4RUSR, similar al cuarto manipulador en la ilustración 1 del presente capítulo.

-
- Cadena virtual, RRR de 3GDL

Se decidió estudiar las configuraciones descritas arriba para comprender el comportamiento y validar la teoría descrita en el capítulo anterior, así como probar la hipótesis de este trabajo, validando que es posible controlar a un manipulador paralelo en el espacio en función de una cadena virtual.

4.2 Descripción General

4.2.1 Paralelo 3RRR

- a. El manipulador paralelo plano 3RRR, posee un movimiento $\{x, y, \theta\}$, donde θ es una rotación de la plataforma móvil sobre el eje y .
- b. Se encuentra compuesto por una plataforma móvil y una plataforma fija.
- c. Posee tres cadenas cinemáticas con la configuración RRR.
- d. Cada cadena del manipulador posee una junta actuada.
- e. El movimiento de cada eslabón del manipulador 3RRR es dependiente de la junta actuada correspondiente.

Para esto se realizó una síntesis de tipo morfológica, de cada una de las posibles configuraciones del manipulador a usar, permitiendo observar de manera sencilla las mismas; eligiendo la configuración de la ilustración siguiente:

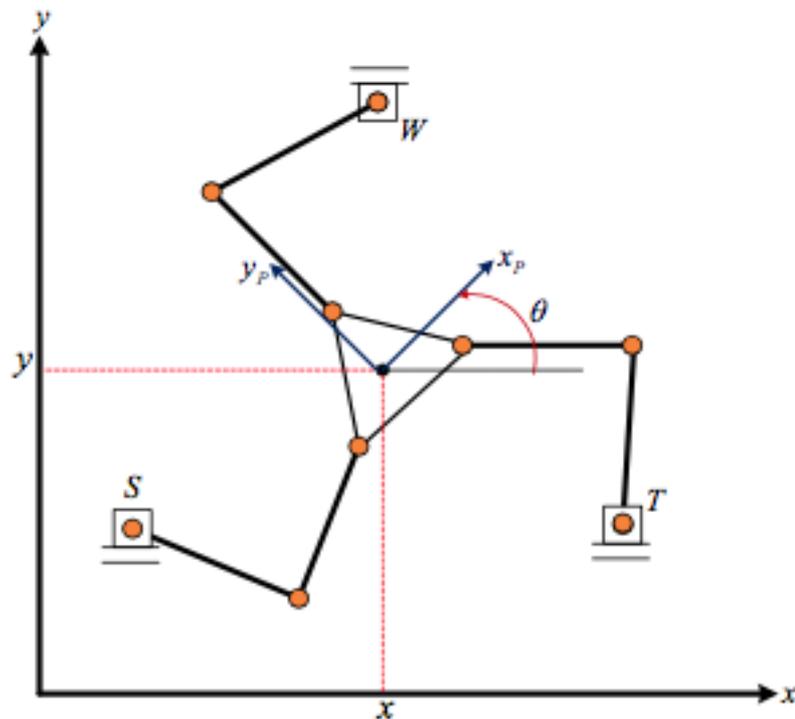


Ilustración 4-3 Robot Paralelo 3RRR [16]

4.3 Cadena Virtual

La selección de una cadena virtual puede depender de varios factores, como los grados de libertad del manipulador “real” o el movimiento que se desea imponer.

Existen tres posibilidades para implementar una cadena virtual:

- a. Los GDL (grados de libertad) del manipulador real son menores a los de la cadena virtual.
- b. Los GDL de ambos manipuladores son iguales.
- c. Los GDL del manipulador real son mayores que los del manipulador virtual.

Para el objetivo de ésta investigación, sólo se desea controlar al manipulador paralelo, que se analizó en la sección anterior, debido a la complejidad del manipulador real, se seleccionó como cadena virtual, una con GDL menores a los disponibles en el manipulador real.

Los movimientos posibles que puede presentar la cadena virtual seleccionada; y por lo tanto el manipulador Delta 4, son: sobre el eje X, sobre el eje Z, un desplazamiento y un giro en Y; por lo tanto es posible generar trayectorias en cada uno de los movimientos o en todos a la vez. Por lo tanto, en primera instancia es necesario comprender el movimiento en cada uno de ellos, para poder hacer una trayectoria en todos los grados de libertad de la cadena virtual.

4.3.1 Sistemas de Referencia de la Cadena Virtual

Como se puede ver en la ilustración 4-4, se definen los sistemas coordenados que permitan describir el comportamiento del efector final con respecto al sistema inercial, así como el comportamiento de los elementos internos que presenten un movimiento relativo entre ellos.

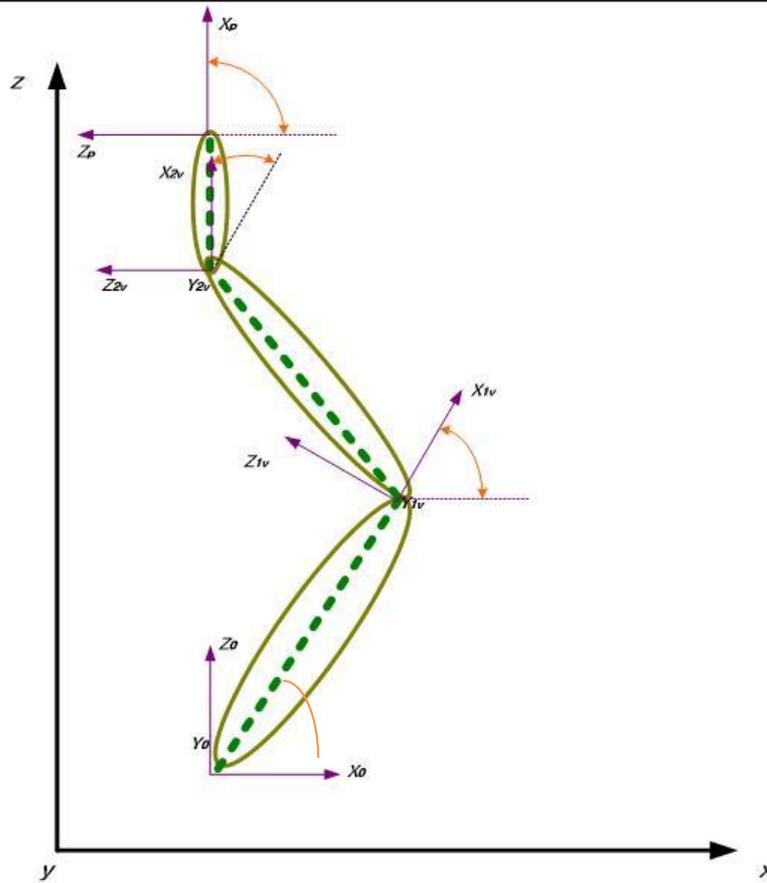


Ilustración 4-4

4.3.2 Modelado Cinemático de la Cadena Virtual

Cinemática de Posición

El principal propósito de realizar la cinemática de posición es conocer las componentes de cada eslabón del manipulador, para poder implementar la simulación; por lo cual simplemente se realizó la cinemática inversa de posición, que se encuentra descrita a continuación.

Las matrices de transformación que se emplearon para el proceso son:

$$OA = T_{xyz}(0,0,0)$$

4.1

$$AB = Qx\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot Qz(\theta_1) \cdot Tx(e_1)$$

4.2

$$BC = Qz(\theta_2) \cdot Tx(e_2)$$

4.3

$$CD = Qz(\theta_3) \cdot Tx(e_3)$$

4.4

La matriz que describe la posición del efector final es la que sigue:

$$q_v = \begin{pmatrix} e1\cos(\theta_1) + e2\cos(\theta_1 + \theta_2) + e3\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ e1\sin(\theta_1) + e2\sin(\theta_1 + \theta_2) + e3\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 1 \end{pmatrix}$$

4.5

Cinemática Diferencial

El objetivo de este análisis es generar la matriz de estados del manipulador virtual, para esto es necesario primero obtener la descripción diferencial del manipulador.

Para esto comenzamos el análisis desde el efector final en el espacio de las velocidades.

$$\omega_{pp} = (0, \dot{\theta}_p, 0)^T$$

4.6

$$V_{pp} = (\dot{x}_m, \dot{y}_m, \dot{z}_m)^T$$

4.7

En este caso θ_p es la suma de los ángulos, representando el giro de la plataforma móvil del manipulador paralelo.

Siguiendo las ecuaciones de la teoría unificadora,

obtenemos el velocidad de 2 a partir de p

$$\omega_{22} = (0, \dot{\theta}_p + \dot{\theta}_3, 0)^T \quad 4.8$$

$$V_{22} = \begin{pmatrix} \text{Cos}(t3)\dot{x}_m + \text{Sin}(t3)(-e3\dot{\theta}_p + \dot{z}_m) \\ \dot{y}_m \\ -\text{Sin}(t3)\dot{x}_m + \text{Cos}(t3)(-e3\dot{\theta}_p + \dot{z}_m) \end{pmatrix} \quad 4.9$$

Y las ecuaciones del sistema 1 a partir de las obtenidas en 2

$$\omega_{11} = (0, \dot{\theta}_p + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3, 0)^T \quad 4.10$$

$$V_{11} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_p(e2\text{Sin}(t2) + e3\text{Sin}(t2 + t3)) + \text{Cos}(t2 + t3)\dot{x}_m + \text{Sin}(t2 + t3)\dot{z}_m - e2\text{Sin}(t2)\dot{\theta}_3 \\ \dot{y}_m \\ -(e2\text{Cos}(t2) + e3\text{Cos}(t2 + t3))\dot{\theta}_p - \text{Sin}(t2 + t3)\dot{x}_m + \text{Cos}(t2 + t3)\dot{z}_m - e2\text{Cos}(t2)\dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \quad 4.11$$

Hasta llegar a las ecuaciones que describen la base del manipulador, con las variables y constantes del manipulador completo.

$$\omega_{00} = (0, \dot{\theta}_p + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3, 0)^T \quad 4.12$$

Para la velocidad lineal V00 se encuentra representada en tres ecuaciones, cada una correspondiente a un renglón de la matriz V00.

$$\begin{aligned}
V_{00}(x) &= -\dot{\theta}_p(e_1\sin(t_1) + e_2\sin(t_1 + t_2) + e_3\sin(t_1 + t_2 + t_3)) \\
&+ \cos(t_1 + t_2 + t_3)\dot{x}_m + \sin(t_1 + t_2 + t_3)\dot{z}_m - e_1\sin(t_1)\dot{\theta}_2 \\
&\quad - (e_1\sin(t_1) + e_2\sin(t_1 + t_2))\dot{\theta}_3
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

$$V_{00}(y) = \dot{y}_m
\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
V_{00}(z) &= -(e_1\cos(t_1) + e_2\cos(t_1 + t_2) + e_3\cos(t_1 + t_2 + t_3))\dot{\theta}_p \\
&- \sin(t_1 + t_2 + t_3)\dot{x}_m + \cos(t_1 + t_2 + t_3)\dot{z}_m - e_1\cos(t_1)\dot{\theta}_2 \\
&\quad - (e_1\cos(t_1) + e_2\cos(t_1 + t_2))\dot{\theta}_3
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

4.1 Implementació n Robot Paralelo 3RRR_(RRR)_v

La implementació de este sistema se basó en las ecuaciones obtenidas por un análisis cinemático diferencial del sistema, similar al descrito en el capítulo anterior [4, 16]. Después del análisis de velocidad se tiene que la matriz de

$$\dot{q}_v = \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) & 0 \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos(t_3) \csc(t_2)}{s_{11}} & \frac{-\csc(t_2) \sin(t_3)}{s_{11}} & \frac{-s_{13}(\csc(t_2) \sin(t_3))}{s_{11}} \\ \csc(t_2) \left(\frac{-\cos(t_2+t_3)}{s_{12}} - \frac{\cos(t_3)}{s_{11}} \right) & \csc(t_2) \left(\frac{\sin(t_2+t_3)}{s_{12}} + \frac{\sin(t_3)}{s_{11}} \right) & s_{13} \cdot \csc(t_2) \left(\frac{\sin(t_2+t_3)}{s_{12}} + \frac{\sin(t_3)}{s_{11}} \right) \\ \frac{\cos(t_2+t_3) \csc(t_2)}{s_{12}} & \frac{-\csc(t_2) \sin(t_2+t_3)}{s_{12}} & -1 - \left(\frac{\csc(t_2) \sin(t_2+t_3) s_{13}}{s_{12}} \right) \end{bmatrix}$$

4.16

Donde

S11, S12 y S13 son las dimensiones de los eslabones de la cadena virtual, y t1, t2, t3 los giros correspondientes.

La matriz del manipulador 3RRR en variables de estado

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_{v,3} \\ \dot{\theta}_{v,2} \\ \dot{\theta}_{v,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) & 0 \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos(\theta_{v,2} + \theta_{v,3} - \theta_{v,p}) \csc(\theta_{v,2})}{e_{v,2}} & \frac{-\csc(\theta_{v,2}) \sin(\theta_{v,2} + \theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,2}} & -1 - \frac{\csc(\theta_{v,2}) \sin(\theta_{v,2} + \theta_{v,3}) e_{v,3}}{e_{v,2}} \\ \csc(\theta_{v,2}) \left(\frac{-\cos(\theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,1}} - \frac{\cos(\theta_{v,2} + \theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,2}} \right) & \csc(\theta_{v,2}) \left(\frac{\sin(\theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,1}} + \frac{\sin(\theta_{v,2} + \theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,2}} \right) & \csc(\theta_{v,2}) \left(\frac{\sin(\theta_{v,3})}{e_{v,1}} + \frac{\sin(\theta_{v,2} + \theta_{v,3})}{e_{v,2}} \right) e_{v,3} \\ \frac{\cos(\theta_{v,3} - \theta_{v,p}) \csc(\theta_{v,2})}{e_{v,1}} & \frac{-\csc(\theta_{v,2}) \sin(\theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,1}} & \frac{-\csc(\theta_{v,2}) \sin(\theta_{v,3}) e_{v,3}}{e_{v,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{px} \\ V_{py} \\ \omega_p \end{pmatrix}$$

4.17

donde

$$\theta_{ib} = \theta_{i,1} + \theta_{i,2} + \theta_{i,3} - \theta_{i,p}$$

$$\theta_{ib} = \theta_{i,1} + \theta_{i,2}$$

$$\theta_{ic} = \theta_{i,1} + \theta_{i,2} + \theta_{i,3}$$

4.18

Posteriormente se realiza un análisis en el que se dejan expresadas las ecuaciones del manipulador paralelo plano 3RRR con las variables de la cadena virtual; por lo que las variables de entrada son sólo las variables de las

articulaciones del manipulador virtual, por lo que el manipulador paralelo plano responde a los cambios en la cadena virtual.

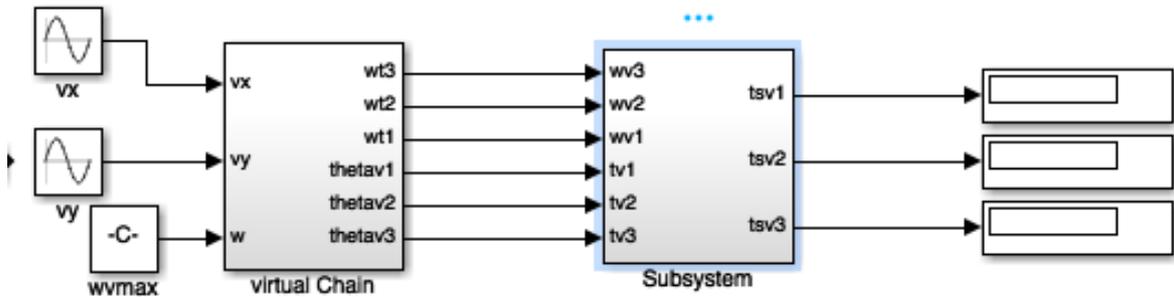


Ilustración 4-6

Dicha ecuación queda expresada de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_{v,3} \\ \dot{\theta}_{v,2} \\ \dot{\theta}_{v,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_p) & -\sin(\theta_p) & 0 \\ \sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos(\theta_{v,2} + \theta_{v,3} - \theta_{v,p}) \csc(\theta_{v,2})}{e_{v,2}} & -\frac{\csc(\theta_{v,2}) \sin(\theta_{v,2} + \theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,2}} & -1 - \frac{\csc(\theta_{v,2}) \sin(\theta_{v,2} + \theta_{v,3}) e_{v,3}}{e_{v,2}} \\ \csc(\theta_{v,2}) \left(-\frac{\cos(\theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,1}} - \frac{\cos(\theta_{v,2} + \theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,2}} \right) & \csc(\theta_{v,2}) \left(\frac{\sin(\theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,1}} + \frac{\sin(\theta_{v,2} + \theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,2}} \right) & \csc(\theta_{v,2}) \left(\frac{\sin(\theta_{v,3})}{e_{v,1}} + \frac{\sin(\theta_{v,2} + \theta_{v,3})}{e_{v,2}} \right) e_{v,3} \\ \frac{\cos(\theta_{v,3} - \theta_{v,p}) \csc(\theta_{v,2})}{e_{v,1}} & -\frac{\csc(\theta_{v,2}) \sin(\theta_{v,3} - \theta_{v,p})}{e_{v,1}} & -\frac{\csc(\theta_{v,2}) \sin(\theta_{v,3}) e_{v,3}}{e_{v,1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{px} \\ V_{py} \\ \omega_p \end{pmatrix}$$

4.19

Para la implementación se realizó primeramente una simulación con una estructura como la siguiente.

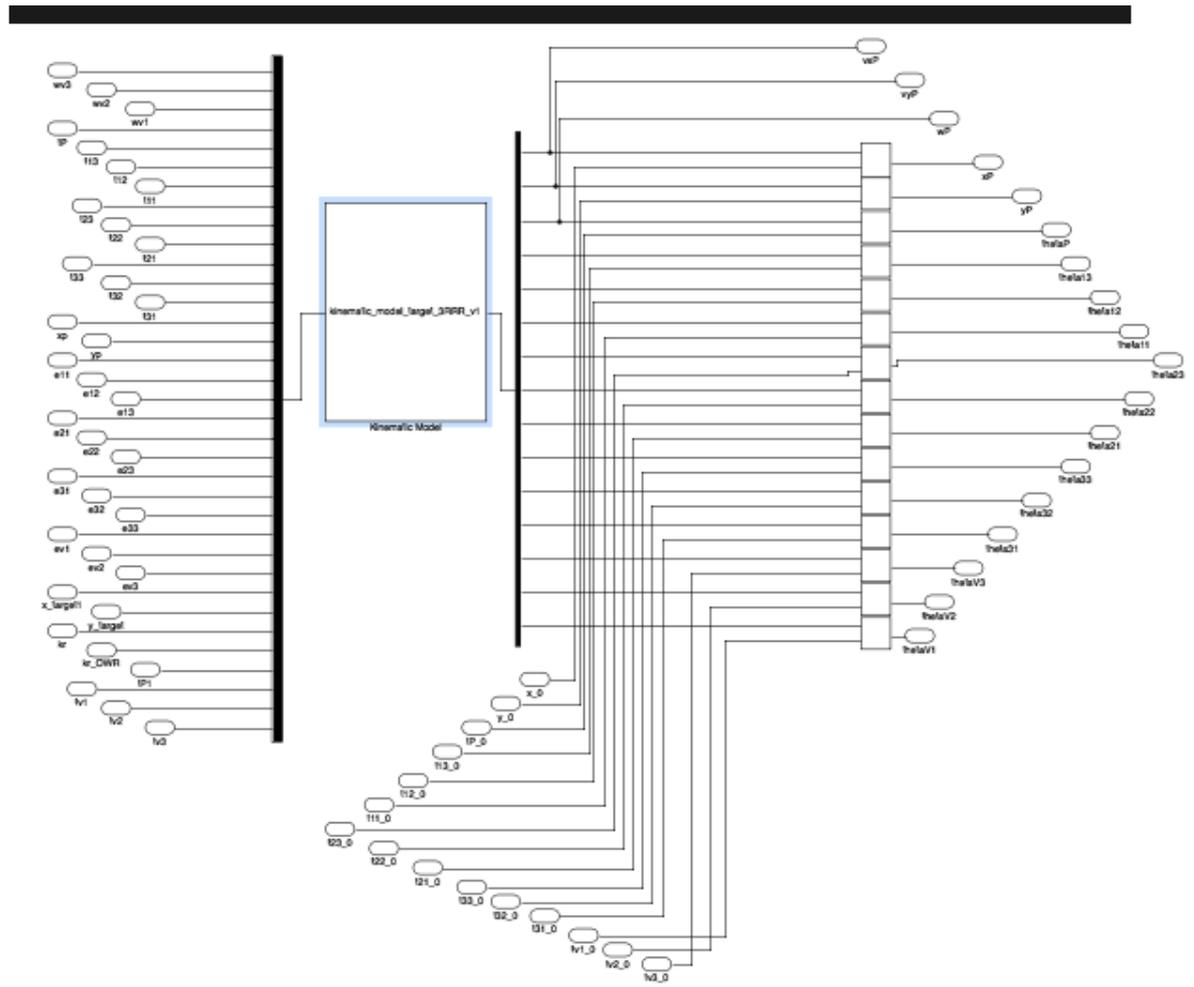


Ilustración 4-7

Donde el bloque de Kinematic_model_target_3RRR_v1, es el bloque de programación donde se especifica la matriz de variables de estado, resolviendo las salidas de la misma de forma integración numérica.

Una vez ya obtenidas las matrices de variables de estado de los manipuladores, se realizan simulaciones buscando comprobar los cálculos hechos, y si los resultados son coherentes, y que cada manipulador responde de la manera esperada.

Las simulaciones también sirven para tener una forma de comparación de los resultados de manera ideal y los resultados de la implementación.

4.2 Descripción de los elementos de la simulación

4.2.1 Software

Para la realización de la simulación se eligió usar la paquetería de MathWorks Matlab y Simulink, ya que los cálculos a desarrollar son amplios y permite realizar operaciones de cálculo diferencial, control entre otras en “tiempo real”. Además de que Simulink proporciona un entorno gráfico que facilita la interpretación de los resultados.

Este software también permite comunicación con microprocesadores, permitiendo hacer la implementación del modelo funcional de manera sencilla. Para esta aplicación específicamente se decidió usar una tarjeta Arduino UNO, debido a la facilidad de adquisición y la sencillez de programación, y para la comunicación de manera serial entre Simulink y Arduino se llevó a cabo mediante la librería desarrollada por MathWorks.

4.2.2 Estructura de la Simulación

Modelar de manera virtual el manipulador Delta 4, así como

el manipulador de la cadena virtual, para posteriormente realizar la retroalimentación de la cadena virtual al manipulador *real*.

En la ilustración 7 se muestra el diagrama de bloques general de la programación en bloques, del lado izquierdo entran las velocidades del efector final, así como los parámetros del manipulador como las longitudes de los eslabones y las posiciones iniciales del mismo, y del lado derecho la resultante de la matriz de variables de estado, velocidades del efector final y de cada articulación, para ser procesados por integración numérica y obtener las posiciones.

En el Apéndice 2, se encuentran en detalle la programación de las matrices en Matlab, así como los diagramas de bloques de las simulaciones.

4.3 Robot

3RRR_(RRR)_v

4.3.1 Simulación

Para la realización de la simulación, primero es necesario programar el módulo de la cadena virtual, ya que ésta es la responsable de implementar el movimiento al manipulador.

La trayectoria seleccionada para este manipulador es una lemniscata creada con funciones senoidales, paramétricas, quedando de la siguiente manera:

$$v_{xmax} = \frac{0.5 \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) - 0.5 \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)}{3}$$

$$v_{ymax} = \frac{0.5 \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + 0.5 \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)}{3}$$

$$\omega_{max} = 0$$

Con las dimensiones siguientes:

	Virtual	Real
Eslabón 1[cm]	9.6	9.6
Eslabón 2	11.5	11.5
Eslabón 3[cm]	12.5	12.5

Ilustración 4-8

El diagrama de bloques para la simulación fue el siguiente:

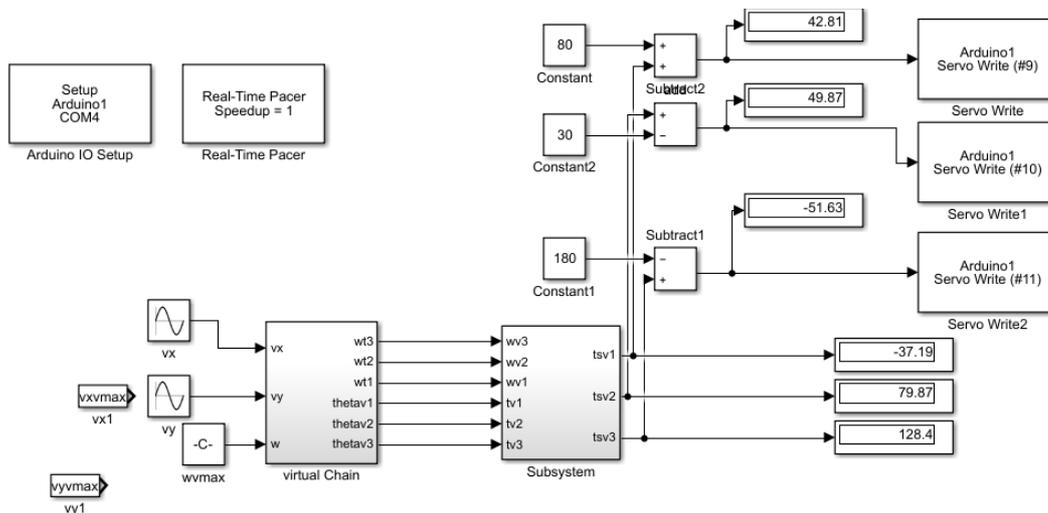


Ilustración 4-9

En la simulación se pueden ver dos manipuladores sobrepuestos, la trayectoria a seguir se encuentra marcada con puntos negros. En la figura 10, se puede apreciar más

caramente la trayectoria, ésta graficada a partir de los puntos de posición de los efectores finales.

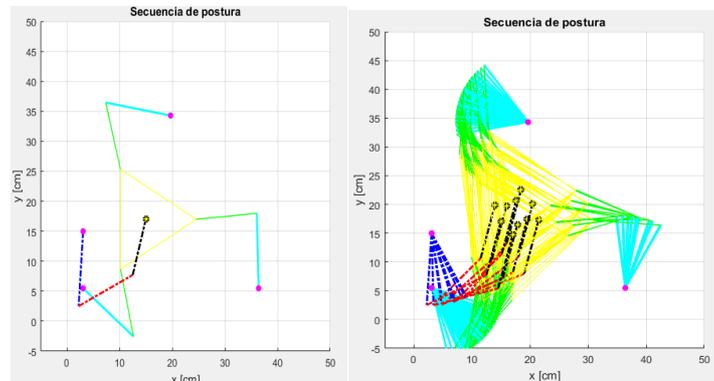


Ilustración 4-10

4.3.2 Modelo Funcional

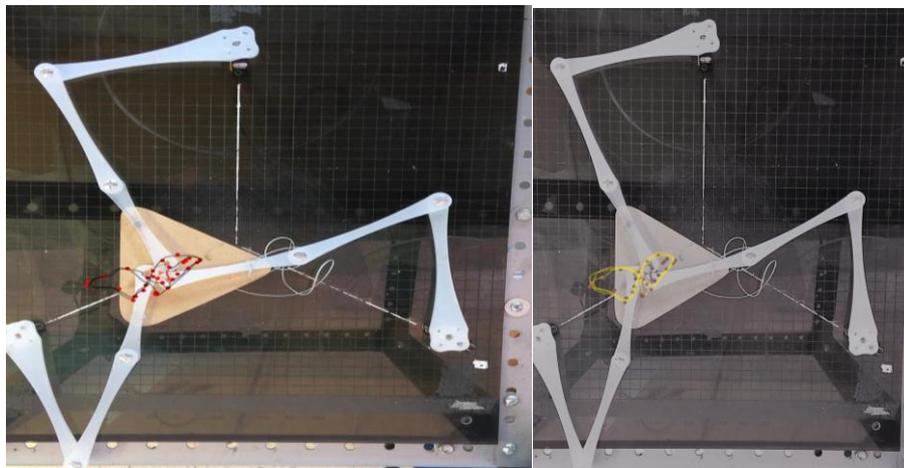


Ilustración 4-11

Como se puede apreciar en la ilustración 11 la trayectoria que sigue el manipulador es similar a la que se realizó en la simulación, habiendo errores debidos a la precisión de los motores y a la dinámica del manipulador.

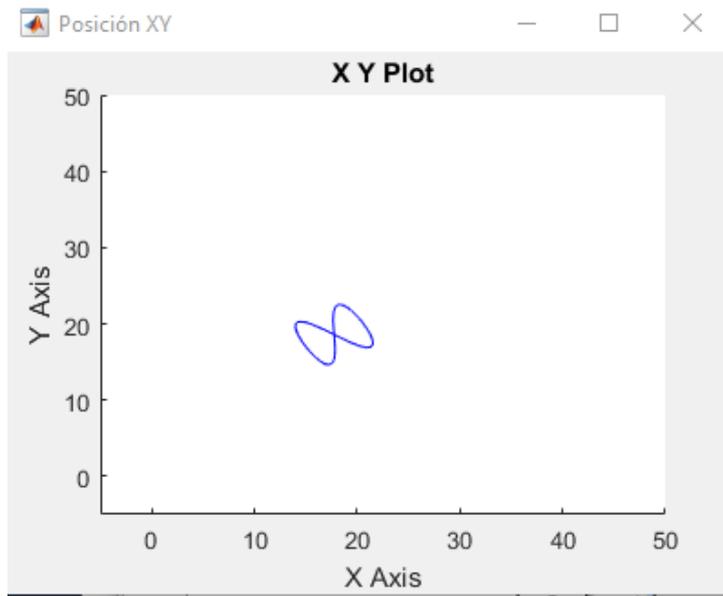


Ilustración 4-12 Trayectoria de la Simulación

5 Modelado e Implementaci ón de Delta 4

**“No he fracasado, he
encontrado 10000 maneras
que no funcionan”**

Thomas Alva Edison

5.1 Descripción general

- El manipulador espacial Delta 4, posee un movimiento $\{x, y, z, \theta\}$, donde θ es una rotación de la plataforma móvil sobre el eje z .
- Se encuentra compuesto por una plataforma móvil y una plataforma fija.
- Posee cuatro cadenas cinemáticas con la configuración RUSR.
- Cada cadena del manipulador posee una junta actuada.
- El movimiento de cada eslabón del manipulador Delta 4 es dependiente de la junta actuada correspondiente.

Para esto se realizó una síntesis de tipo morfológica, de cada una de las posibles configuraciones del manipulador a usar, permitiendo observar de manera sencilla las mismas; eligiendo la configuración de la ilustración 1

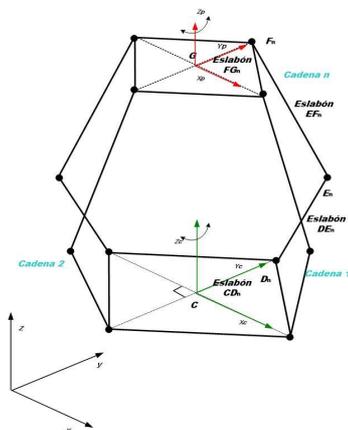


Ilustración 5-1

5.2 Sistemas de Referencia

De acuerdo con la metodología descrita con anterioridad para el posicionamiento variables de estado de la cadena virtual en el plano X,Z

o de los sistemas coordenados, que permiten describir el desplazamiento de la plataforma con respecto a un sistema inercial fijo, se obtuvo un diagrama como el siguiente:

Para poder hacer el análisis cinemático, es necesario realizar una descripción con matrices de transformación homogénea del manipulador completo; en el caso de los manipuladores paralelos, si las cadenas cinemáticas que se encuentran dentro del mismo, se describe una cadena general.

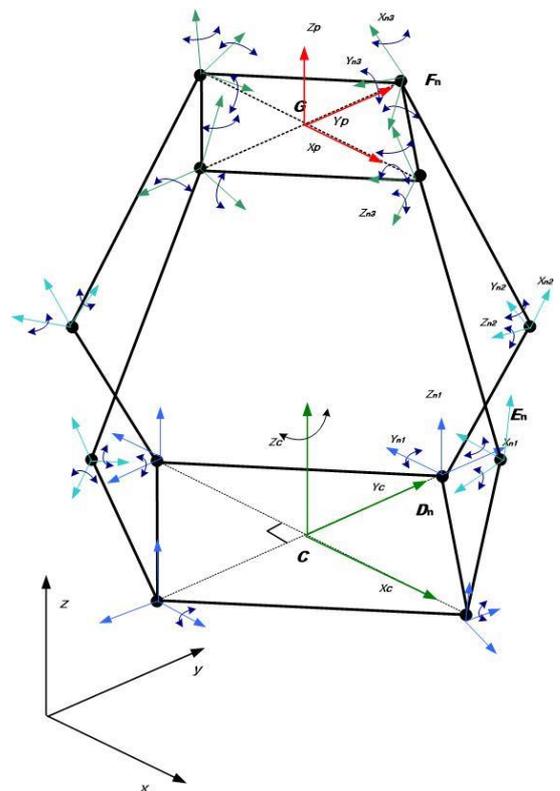


Ilustración 5-1

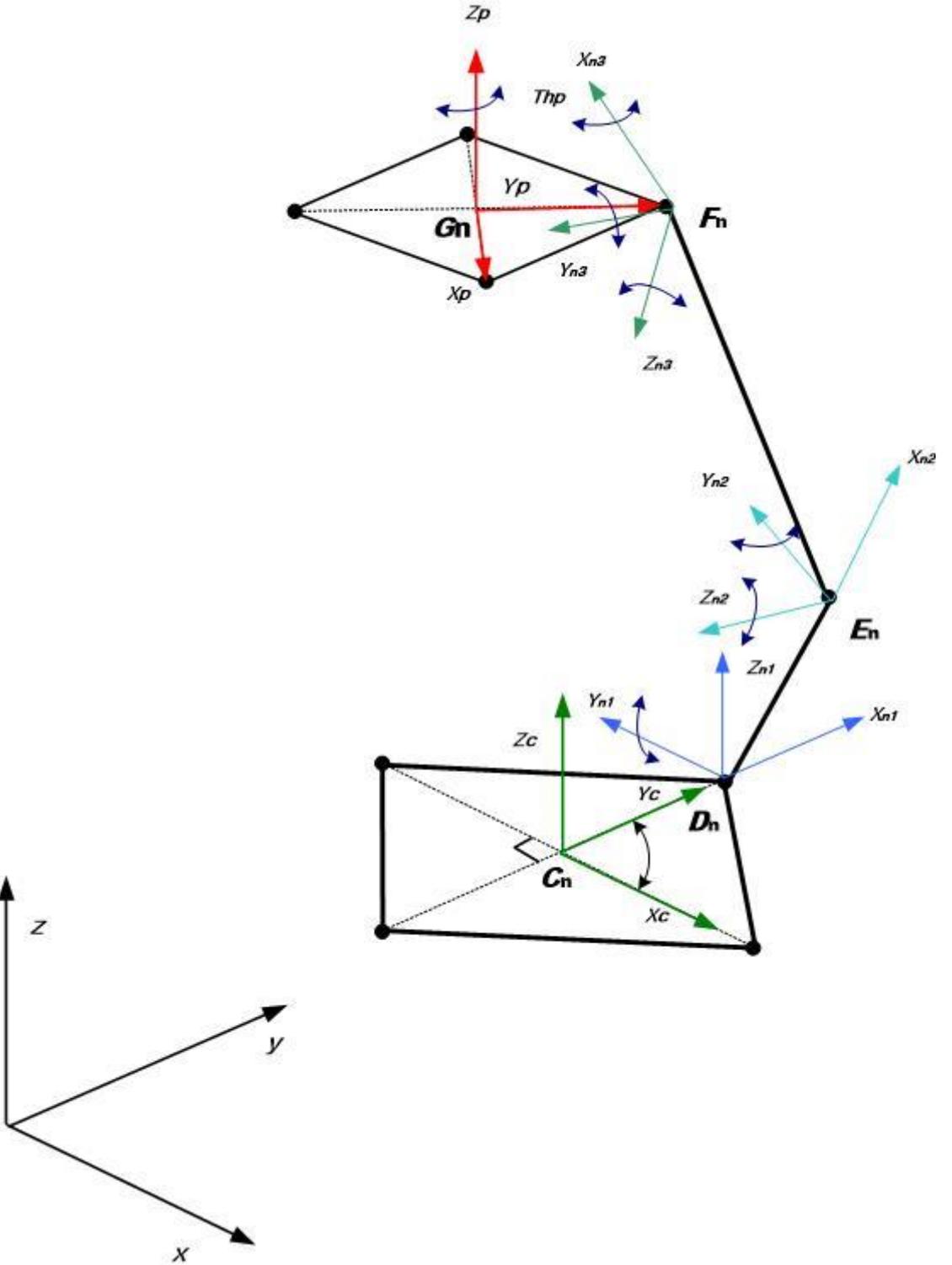


Ilustración 5-2 Cadena n del manipulador Delta 4

5.3 Modelado Cinemático del manipulador

Para el modelado cinemático del manipulador Delta 4, se emplearon los pasos siguientes. Con $n = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$OC_n = Qz(\phi + \mu_n) \tag{5.1}$$

$$CD_n = Qz(\phi + \mu_n).Tx(e1) \tag{5.2}$$

$$DE_n = Qz(\phi + \mu_n).Qy(-\theta_{n1}).Tx(e2) \tag{5.3}$$

$$EF_n = Qz(\phi + \mu_n).Qy(-\theta_{n1}).Qy(-\theta_{n2}).Qz\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{n3}\right).Tx(e3) \tag{5.4}$$

$$FG_n = Qz(\phi + \mu_n).Qy(-\theta_{n1}).Qy(-\theta_{n2}).Qz\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{n3}\right).Qz(\theta_{n6}).Qy(-\theta_{n5}).Tx(G) \tag{5.5}$$

Donde:

$$\theta_{n5} = \pi + (\theta_{n1} + \theta_{n2}) \quad 5.6$$

$$\theta_{n4} = \theta_{n7} = 0 \quad 5.7$$

$$\theta_{n6} = \theta_{n3} - \frac{\pi}{2} \quad 5.8$$

$$\phi = 0 \quad 5.9$$

$$\mu_n = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3*\pi}{2}\right\} \quad 5.10$$

$$\phi_n = \phi + \mu_n \quad 5.11$$

Con esto queda descrito de manera vectorial el manipulador con respecto a las posiciones de cada una de las articulaciones de cada cadena.

$$\begin{pmatrix} G - e1 + Px\text{Cos}(\phi_n) + Py\text{Sin}(\phi_n) \\ Py\text{Cos}(\phi_n) - Px\text{Sin}(\phi_n) \\ Pz \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e2\text{Cos}(\theta_{n1}) + e3\text{Cos}(\theta_{n1} + \theta_{n2})\text{Sin}(\theta_{n3}) \\ e3\text{Cos}(\theta_{n3}) \\ e2\text{Sin}(\theta_{n1}) + e3\text{Sin}(\theta_{n1} + \theta_{n2})\text{Sin}(\theta_{n3}) \\ 2 \end{pmatrix} \quad 5.12$$

Se parte del sistema Gn (punto central del efector final) al sistema Fn; con $n\{1,2,3,4\}$.

Siendo las velocidades angulares y lineares del efector final, las siguientes respectivamente.

$$\omega_{\text{gn gn}} = (\dot{A}, \dot{\phi}, \dot{\psi})^T \quad 5.13$$

$$V_{\text{gn gn}} = (\dot{x}_m, \dot{y}_m, \dot{z}_m)^T \quad 5.14$$

La rotación del manipulador está dada por:

$$R_{\text{fn gn}} = \left(\left[\text{Rz}(\gamma + (\beta + \mu_n)) [\gamma + (\beta + \mu_n)] \right] \right)^T \quad 5.15$$

Los giros hechos en el sistema Fn son:

$$\dot{\theta}_{fnfn} = (0,0,\dot{\gamma})^T \quad 5.16$$

La distancia de Fn a Gn son

$$P_{gnfn} = (G, 0,0)^T \quad 5.17$$

Las velocidades quedan como sigue (considerando $\mu_n = 0$)

$$\omega_{fnfn} = (0,0,0)^T \quad 5.18$$

$$V_{fnfn} = \begin{pmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{z}_m \end{pmatrix} \quad 5.19$$

Del sistema Fn al sistema En.

$$R_{enfn} = [Rz(-t_{n6}). Ry(-t_{n5}). Rx(-t_{n7})]^T \quad 5.20$$

$$\dot{\theta}_{enen} = (\dot{\theta}_{n7}, \dot{\theta}_{n5}, \dot{\theta}_{n6})^T \quad 5.21$$

$$P_{fnen} = (e_3, 0,0)^T \quad 5.22$$

Tenemos

$$\omega_{enen} = (\dot{\theta}_{n7}, \dot{\theta}_{n5}, \dot{\theta}_{n6})^T \quad 5.23$$

$$V_{enenx}$$

$$= \sin(t_{n5})(\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n5}) + \cos(t_{n5})(\cos(t_{n6})\dot{x}_m - \sin(t_{n6})(\dot{y}_m + e_3\dot{\theta}_{n6}))$$

5.24

$$V_{eneny}$$

$$= (\cos(t_{n7})\sin(t_{n6}) + \cos(t_{n6})\sin(t_{n7}))\dot{x}_m + \cos(t_{n5})\sin(t_{n7})(-\dot{z}_m + e_3\dot{\theta}_{n5}) + (\cos(t_{n6})\cos(t_{n7}) - \sin(t_{n5})\sin(t_{n6})\sin(t_{n7}))(\dot{y}_m + e_3\dot{\theta}_{n6})$$

5.25

$$V_{enenz}$$

$$= -(\cos(t_{n6})\cos(t_{n7})\sin(t_{n5}) - \sin(t_{n6})\sin(t_{n7}))\dot{x}_m + \cos(t_{n5})\cos(t_{n7})(\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n5}) + (\cos(t_{n7})\sin(t_{n5})\sin(t_{n6}) + \cos(t_{n6})\sin(t_{n7}))(\dot{y}_m + e_3\dot{\theta}_{n6})$$

5.26

Para los cálculos de En a Dn, y Dn a Cn; debido a la longitud de los términos, sólo se muestran las ecuaciones de las velocidades angulares, así como las ecuaciones conceptuales de las velocidades lineales y algunas restricciones; las ecuaciones completas se encuentran en el Apéndice I.

Del sistema En al Dn

$$R_{dnen} = [Ry(t_{n2}) \cdot Rz\left(t_{n3} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot Rx(-t_{n4})]^T$$

5.27

$$\dot{\theta}_{dndn} = (\dot{\theta}_{n4}, \dot{\theta}_{n2}, \dot{\theta}_{n3})^T$$

5.28

$$P_{\text{endn}} = (e_2, 0, 0)^T \quad 5.29$$

$$t_{n4} = t_{n7} = 0, \dot{\theta}_{n4} = \dot{\theta}_{n7} = 0, t_{n6} = t_{n3} - \frac{\pi}{2}, \dot{\theta}_{n6} = \dot{\theta}_{n3}, \quad 5.30$$

$$t_{n5} = \pi + (t_{n1} + t_{n2}), \dot{\theta}_{n5} = \dot{\theta}_{n1} + \dot{\theta}_{n2} \quad 5.31$$

$$\omega_{\text{dndn}} = \left(-\text{Cos}(t_{n3})(\dot{\theta}_{n1} + \dot{\theta}_{n2}) - \text{Sin}(t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})\dot{\theta}_{n3}, -\dot{\theta}_{n2} + \text{Sin}(t_{n3})(\dot{\theta}_{n1} + \dot{\theta}_{n2}) - \text{Cos}(t_{n3})\text{Sin}(t_{n2})\dot{\theta}_{n3}, \dot{\theta}_{n3} - \text{Cos}(t_{n2})\dot{\theta}_{n3} \right)^T \quad 5.32$$

Del sistema Dn al Cn

$$R_{\text{cndn}} = \text{Ry}^T(t_{n1}) \quad 5.33$$

$$\dot{\theta}_{\text{cncn}} = (0, \dot{\theta}_{n1}, 0)^T \quad 5.34$$

$$P_{\text{dncn}} = (e_n, 0, 0)^T \quad 5.35$$

$$\omega_{\text{cncn}} = \begin{pmatrix} -2\text{Sin}(t_{n1})\text{Sin}\left(\frac{t_{n2}}{2}\right)^2 \dot{\theta}_{n3} - \text{Cos}(t_{n1})(\text{Cos}(t_{n3})(\dot{\theta}_{n1} + \dot{\theta}_{n2}) + \text{Sin}(t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})\dot{\theta}_{n3}) \\ (1 + \text{Sin}(t_{n3}))(\dot{\theta}_{n1} + \dot{\theta}_{n2}) + \text{Cos}(t_{n3})\text{Sin}(t_{n2})\dot{\theta}_{n3} \\ -\text{Cos}(t_{n3})\text{Sin}(t_{n1})(\dot{\theta}_{n1} + \dot{\theta}_{n2}) + \left(2\text{Cos}(t_{n1})\text{Sin}\left(\frac{t_{n2}}{2}\right)^2 + \text{Sin}(t_{n1})\text{Sin}(t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})\right)\dot{\theta}_{n3} \end{pmatrix} \quad 5.36$$

Las ecuaciones finales obtenidas son las que describen las ecuaciones de velocidades lineares y angulares.

A continuación las velocidades lineares:

 \dot{a}_{qx}

$$\begin{aligned} &= -\text{Sin}(t_{n1})(-\text{Sin}(t_{n3})e_1\dot{\theta}_{n1} + e_1\dot{\theta}_{n2} - \text{Sin}(t_{n3})e_1\dot{\theta}_{n2} \\ &\quad - \text{Cos}(t_{n3})\text{Sin}(t_{n2})e_1\dot{\theta}_{n3} \\ &\quad + \text{Sin}(t_{n2})(-\text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})(\dot{x}_m) \\ &\quad - \text{Sin}(t_{n1} + t_{n2})(\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) \\ &\quad + \text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})\text{Cos}(t_{n3})(\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \\ &\quad + \text{Cos}(t_{n2})(\text{Sin}(t_{n1} + t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})(\dot{x}_m) - e_2\dot{\theta}_{n1} - e_2\dot{\theta}_{n2} \\ &\quad - \text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})(\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) + \text{Cos}(t_{n3})\text{Sin}(t_{n1} \\ &\quad + t_{n2})(y_m - e_3\dot{\theta}_{n3}))) \\ &\quad + \text{Cos}(t_{n1})(\text{Cos}(t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})(-\text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})(\dot{x}_m) \\ &\quad - \text{Sin}(t_{n1} + t_{n2})(\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) \\ &\quad + \text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})\text{Cos}(t_{n3})(\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \\ &\quad - \text{Sin}(t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})(\text{Sin}(t_{n1} + t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})(\dot{x}_m) - e_2\dot{\theta}_{n1} - e_2\dot{\theta}_{n2} \\ &\quad - \text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})(\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2})) \\ &\quad - \text{Cos}(t_{n3})\text{Sin}(t_{n1} + t_{n2})(\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) - \text{Cos}(t_{n3})(-\text{Cos}(t_{n3})\dot{x}_m \\ &\quad + e_2\dot{\theta}_{n3} + \text{Sin}(t_{n3})(\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3}))) \end{aligned}$$

5.37

 \dot{a}_{qy}

$$\begin{aligned} &= -e_1\dot{\theta}_{n3} - \text{Cos}(t_{n2})e_1\dot{\theta}_{n3} \\ &\quad + \text{Cos}(t_{n2})\text{Cos}(t_{n3})(-\text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})\dot{x}_m \\ &\quad - \text{Sin}(t_{n1} + t_{n2})(\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) \\ &\quad - \text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})\text{Cos}(t_{n3})(\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \\ &\quad - \text{Cos}(t_{n3})\text{Sin}(t_{n2})(\text{Sin}(t_{n1} + t_{n2})\text{Sin}(t_{n3})\dot{x}_m - e_2\dot{\theta}_{n1} - e_2\dot{\theta}_{n2} \\ &\quad - \text{Cos}(t_{n1} + t_{n2})(\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) \\ &\quad - \text{Cos}(t_{n3})\text{Sin}(t_{n1} + t_{n2})(\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \\ &\quad + \text{Sin}(t_{n3})(\text{Cos}(t_{n3})\dot{x}_m + e_2\dot{\theta}_{n3} + \text{Sin}(t_{n3})(\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \end{aligned}$$

5.38

 \dot{a}_{qz}

$$\begin{aligned} &= \text{Cos}[t_{n1}](-\text{Sin}[t_{n3}]e_1\dot{\theta}_{n1} + e_1\dot{\theta}_{n2} - \text{Sin}[t_{n3}]e_1\dot{\theta}_{n2} \\ &- \text{Cos}[t_{n3}]\text{Sin}[t_{n2}]e_1\dot{\theta}_{n3} + \text{Sin}[t_{n2}](-\text{Cos}[t_{n1} + t_{n2}]\text{Sin}[t_{n3}]\dot{x}_m \\ &\quad - \text{Sin}[t_{n1} + t_{n2}](\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) + \text{Cos}[t_{n1} \\ &\quad\quad + t_{n2}]\text{Cos}[t_{n3}](\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \\ &\quad + \text{Cos}[t_{n2}](\text{Sin}[t_{n1} + t_{n2}]\text{Sin}[t_{n3}]\dot{x}_m - e_2\dot{\theta}_{n1} - e_2\dot{\theta}_{n2} \\ &- \text{Cos}[t_{n1} + t_{n2}](\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) - \text{Cos}[t_{n3}]\text{Sin}[t_{n1} \\ &\quad\quad + t_{n2}](\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \\ &\quad + \text{Sin}[t_{n1}](\text{Cos}[t_{n2}]\text{Sin}[t_{n3}](-\text{Cos}[t_{n1} + t_{n2}]\text{Sin}[t_{n3}]\dot{x}_m \\ &\quad\quad - \text{Sin}[t_{n1} + t_{n2}](\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) \\ &\quad\quad + \text{Cos}[t_{n1} + t_{n2}]\text{Cos}[t_{n3}](\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \\ &+ \text{Sin}[t_{n2}]\text{Sin}[t_{n3}](\text{Sin}[t_{n1} + t_{n2}]\text{Sin}[t_{n3}]\dot{x}_m - e_2\dot{\theta}_{n1} - e_2\dot{\theta}_{n2} \\ &\quad - \text{Cos}[t_{n1} + t_{n2}](\dot{z}_m - e_3\dot{\theta}_{n1} - e_3\dot{\theta}_{n2}) - \text{Cos}[t_{n3}]\text{Sin}[t_{n1} \\ &\quad\quad + t_{n2}](\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) - \text{Cos}[t_{n3}](-\text{Cos}[t_{n3}]\dot{x}_m - e_2\dot{\theta}_{n3} \\ &\quad\quad + \text{Sin}[t_{n3}](\dot{y}_m - e_3\dot{\theta}_{n3})) \end{aligned} \tag{5.39}$$

5.4 Manipulador Paralelo Delta4-(RRR)_v.

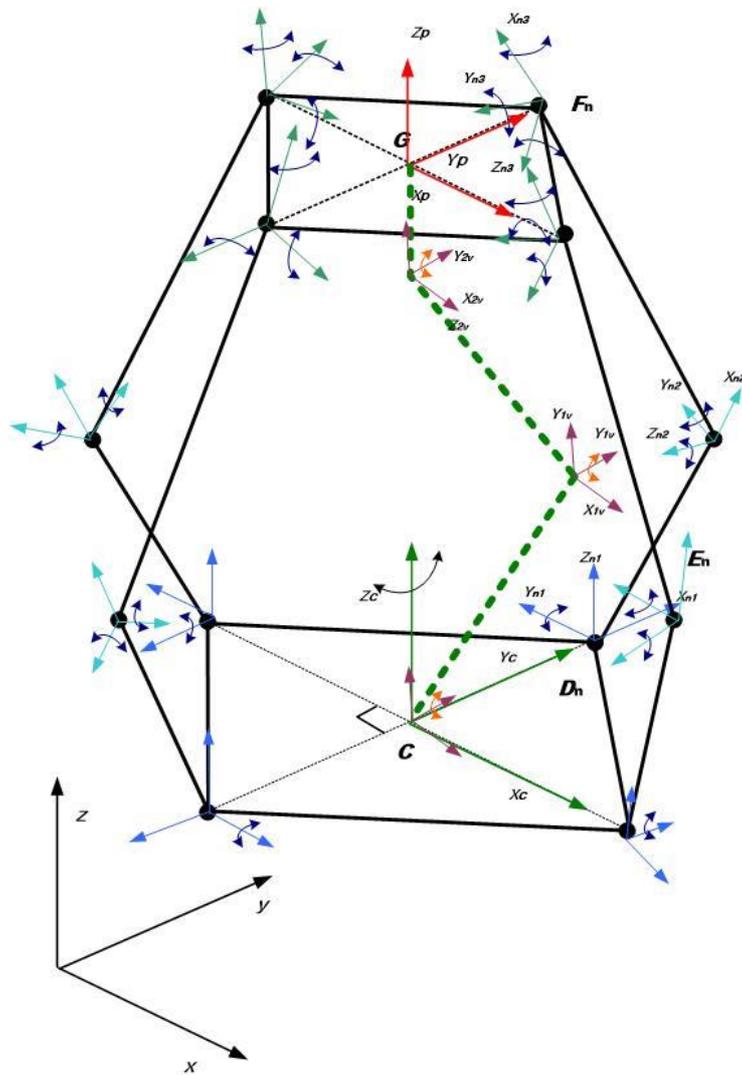


Ilustración 5-3

5.4.1 Configuración en Variables de Estado

La matriz en variables de estado, se calcula igualando las ecuaciones obtenidas de velocidad linear; y resolviendo el sistema de ecuaciones para las velocidades angulares $\dot{\theta}_{n1}$, $\dot{\theta}_{n2}$ y $\dot{\theta}_{n3}$.

Derivando los resultados obtenidos de $\dot{\theta}_{n1}$ con respecto a \dot{x}_m , \dot{y}_m y \dot{z}_m ; que son las variables que controlan al efector final del manipulador; obteniendo tres ecuaciones $ecnn11$, $ecnn12$ y $ecnn13$ respectivamente.

Para $\dot{\theta}_{n2}$ igualmente se deriva con respecto a \dot{x}_m , \dot{y}_m y \dot{z}_m ; para obtener las ecuaciones $ecnn21$, $ecnn22$ y $ecnn23$ respectivamente.

Como en los casos anteriores $\dot{\theta}_{n3}$ se deriva con respecto a \dot{x}_m , \dot{y}_m y \dot{z}_m ; para obtener las ecuaciones $ecnn31$, $ecnn32$ y $ecnn33$ respectivamente. Con las ecuaciones obtenidas, entonces se puede obtener una matriz de cinemática diferencial de una cadena, como sigue:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_{n1} \\ \dot{\theta}_{n2} \\ \dot{\theta}_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta p) & -\text{sen}(\theta p) & 0 \\ \text{sen}(\theta p) & \cos(\theta p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ ecnn11 & ecnn12 & ecnn13 \\ ecnn21 & ecnn22 & ecnn23 \\ ecnn31 & ecnn32 & ecnn33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\omega}_p \end{pmatrix}$$

5.40

De manera similar a la obtención de la matriz de cinemática diferencial de una cadena, es posible obtener una matriz que describa la cinemática diferencial de un manipulador paralelo, en este caso sería del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_{1,1} \\ \dot{\theta}_{1,2} \\ \dot{\theta}_{1,3} \\ \dot{\theta}_{2,1} \\ \dot{\theta}_{2,2} \\ \dot{\theta}_{2,3} \\ \dot{\theta}_{3,1} \\ \dot{\theta}_{3,2} \\ \dot{\theta}_{3,3} \\ \dot{\theta}_{4,1} \\ \dot{\theta}_{4,2} \\ \dot{\theta}_{4,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta p) & -\text{sen}(\theta p) & 0 \\ \text{sen}(\theta p) & \cos(\theta p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \text{ecnn11} & \text{ecnn12} & \text{ecnn13} \\ \text{ecnn21} & \text{ecnn22} & \text{ecnn23} \\ \text{ecnn31} & \text{ecnn32} & \text{ecnn33} \\ \text{ec}(n+1)11 & \text{ec}(n+1)12 & \text{ec}(n+1)13 \\ \text{ec}(n+1)21 & & \\ \text{ec}(n+1)31 & & \\ \text{ec}(n+2)11 & \ddots & \\ \text{ec}(n+2)21 & & \\ \text{ec}(n+2)31 & & \\ \vdots & & \\ \text{ec}(n+3)33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\omega}_p \end{pmatrix}$$

5.41

Y para el cálculo de los estados del manipulador virtual

A partir de las ecuaciones correspondientes a x,z y el giro en y, igualadas en cero, se resuelve el sistema de ecuaciones para $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_3$.

Obteniendo

$$\dot{\theta}_1 \rightarrow \frac{\text{Csc}(t2)(\text{Cos}(t3)\dot{x}_m + \text{Sin}(t3)(-e3\theta p + \dot{z}_m))}{e1}$$

5.42

$$\dot{\theta}_2$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow -\frac{1}{e_1 e_2} \text{Csc}(t_2) (-e_3 \dot{\theta}_p (e_2 \text{Sin}(t_3]) + e_1 \text{Sin}(t_2 + t_3)) \\ &+ (e_2 \text{Cos}(t_3) + e_1 \text{Cos}(t_2 + t_3)) \dot{x}_m + (e_2 \text{Sin}(t_3) + e_1 \text{Sin}(t_2 \\ &+ t_3)) \dot{z}_m \end{aligned} \quad 5.43$$

$$\dot{\theta}_3$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{1}{e_2} (-\dot{\theta}_p (e_2 + e_3 \text{Csc}(t_2) \text{Sin}(t_2 + t_3])) \\ &+ \text{Csc}(t_2) (\text{Cos}(t_2 + t_3) \dot{x}_m + \text{Sin}(t_2 + t_3) \dot{z}_m) \end{aligned} \quad 5.44$$

Como es posible apreciar son significativamente más cortas que las obtenidas para el manipulador “real”. Para obtener la matriz de Variables de Estado, se deriva parcialmente a cada $\dot{\theta}_n$ obtenida, con respecto a \dot{x}_m , \dot{z}_m y $\dot{\theta}_p$. Obteniendo la siguiente matriz

Stv

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\text{Cos}[t_3] \text{Csc}[t_2]}{e_1} & \frac{\text{Csc}[t_2] \text{Sin}[t_3]}{e_1} & -\frac{e_3 \text{Csc}[t_2] \text{Sin}[t_3]}{e_1} \\ -\frac{(e_2 \text{Cos}[t_3] + e_1 \text{Cos}[t_2 + t_3]) \text{Csc}[t_2]}{e_1 e_2} & -\frac{\text{Csc}[t_2] (e_2 \text{Sin}[t_3] + e_1 \text{Sin}[t_2 + t_3])}{e_1 e_2} & \frac{e_3 \text{Csc}[t_2] (e_2 \text{Sin}[t_3] + e_1 \text{Sin}[t_2 + t_3])}{e_1 e_2} \\ \frac{\text{Cos}[t_2 + t_3] \text{Csc}[t_2]}{e_2} & \frac{\text{Csc}[t_2] \text{Sin}[t_2 + t_3]}{e_2} & -\frac{e_2 + e_3 \text{Csc}[t_2] \text{Sin}[t_2 + t_3]}{e_2} \end{pmatrix} \quad 5.45$$

Donde t1, t2 y t3 equivalen a θ_1 , θ_2 y θ_3 respectivamente.

En este caso la matriz de velocidades \dot{r}_m para la matriz de variables de estado de la cadena virtual sería la siguiente:

$$\eta^T = [\dot{x}_p \quad \dot{z}_p \quad \dot{\theta}_p \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3] \quad 5.46$$

La matriz de variables de estado de la cadena virtual tiene como salidas las velocidades en $\dot{x}_p, \dot{z}_p, \dot{\theta}_p$, los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ y las posiciones del efector final; y éstos son los valores de entrada para la matriz de variables de estado del manipulador Delta4.

5.5 Simulación

La simulación para éste manipulador consta de dos partes principales, la primera la simulación de la cadena virtual para obtener los valores de retroalimentación de la trayectoria y posición del efector final, y la segunda es la que se refiere al manipulador real, que recibe los valores anteriores al punto actual de posición y velocidades del efector final, obtenidas de la fase previa, de la cadena virtual, para el cálculo del parámetro siguiente.

Como se mencionó en el capítulo anterior; los movimientos posibles que puede presentar la cadena virtual seleccionada; y por lo tanto el manipulador Delta 4, son: sobre el eje X, sobre el eje Z y un giro en Y; por lo tanto es posible generar trayectorias en cada uno de los movimientos o en todos a la vez. Por lo tanto, en primera instancia es necesario comprender el movimiento en cada uno de ellos, para poder hacer una trayectoria en todos los grados de libertad de la cadena virtual.

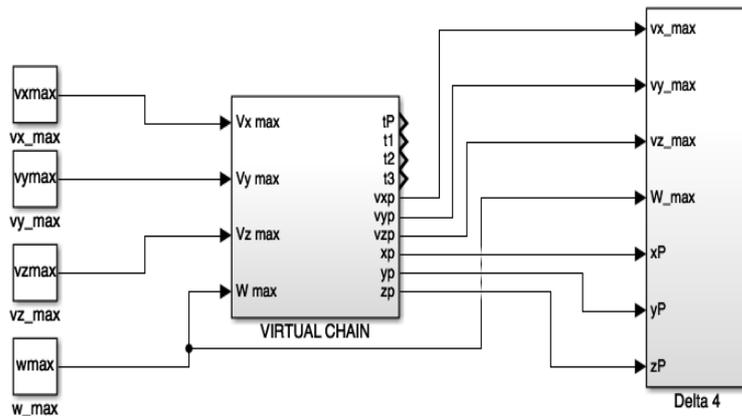


Ilustración 5-4

Por lo cual la trayectoria seleccionada es sobre el eje Z, para comprobar los movimientos y comportamientos de los manipuladores en un solo movimiento.

Para generar la trayectoria, se plantea como velocidades máximas en cada movimiento del efector final como sigue:

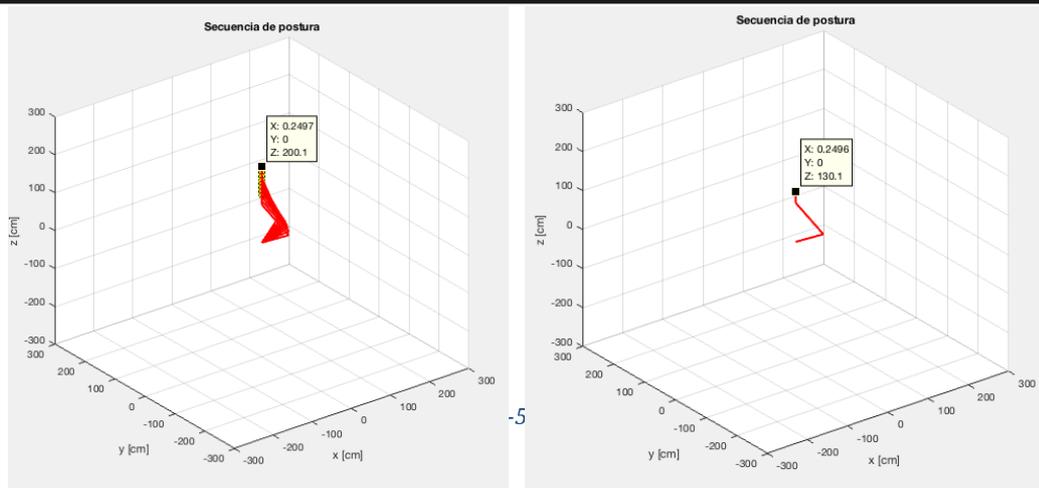
$$\dot{X}_{max} = 0 \left[\frac{u}{s} \right];$$

$$\dot{Y}_{max} = 0 \left[\frac{u}{s} \right];$$

$$\dot{Z}_{max} = 2 \left[\frac{u}{s} \right];$$

5.46

$\dot{\omega}_{max} = 0 \left[\frac{u}{s} \right]$; En la ilustración siguiente se pueden apreciar, los puntos iniciales de la trayectoria, basados en esos puntos iniciales se realizan los cálculos de los estados, con una velocidad constante sobre el eje Z, la postura final del manipulador virtual se vería de la siguiente forma:



Siendo la trayectoria en el plano XZ la siguiente (Ilustración 5-6):

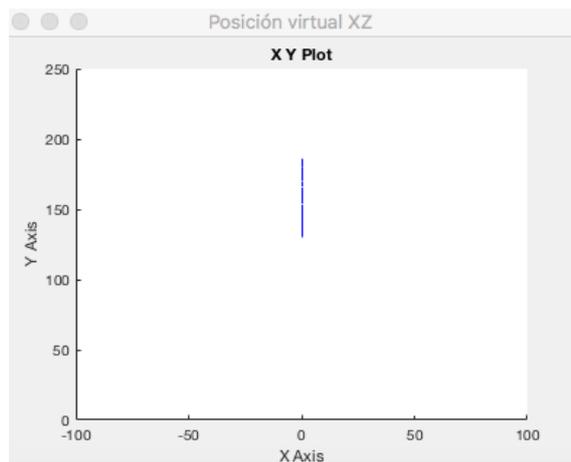


Ilustración 5-6

A partir de estos resultados, se simuló el manipulador Delta 4, coincidiendo los puntos iniciales para poder proceder con la simulación.

El tiempo máximo de la simulación sin provocar que las cadenas del manipulador desensamblen o generen ruido es de 28[s], a partir de eso por los ángulos adquiridos por las articulaciones actuadas, en la simulación siendo ideal, dejan de seguir la trayectoria.

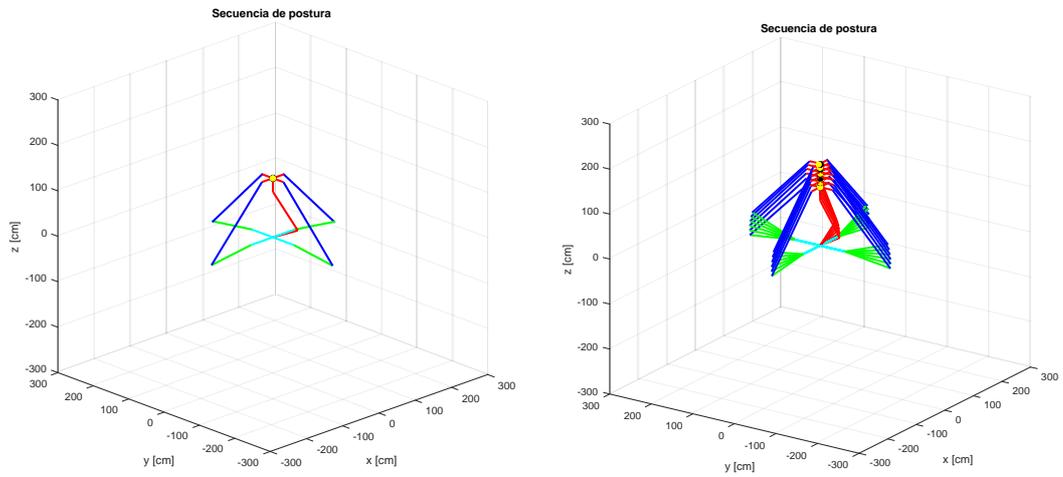


Ilustración 5-7

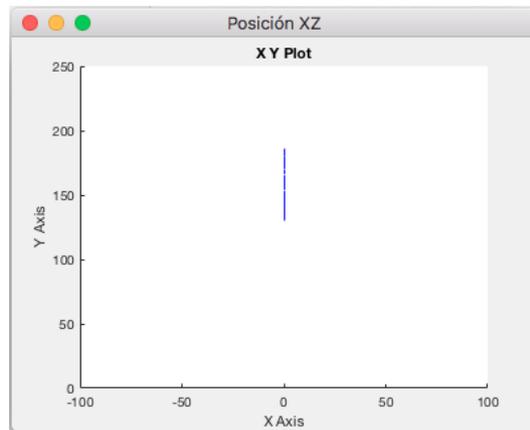


Ilustración 5-8

5.6 Modelo Funcional

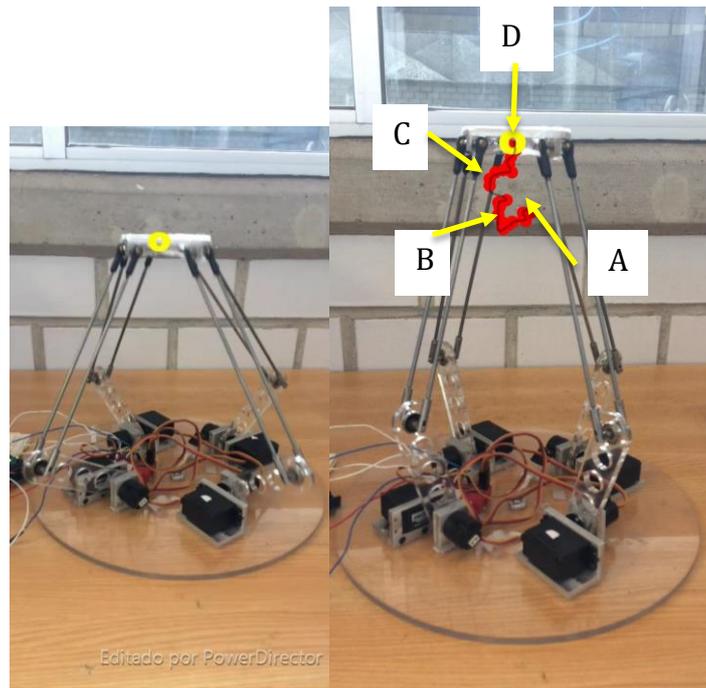


Ilustración 5-9

Como se puede observar en la ilustración anterior, del lado izquierdo el manipulador Delta 4 se encuentra en la posición inicial; y del lado derecho se puede ver al manipulador en la posición final con la trayectoria seguida, similar al movimiento mostrado en las Ilustraciones 5-9 y 5-10.

Es posible apreciar que el manipulador no sigue una trayectoria rectilínea perfecta, esto debido a varios factores.

En la primera sección (AB) de la trayectoria, el manipulador busca colocarse en la posición inicial que la simulación le pide. En la siguiente sección (BD), se puede apreciar una vibración en la trayectoria, especialmente cerca del punto C,

cuasi vertical. La vibración se debe a un fenómeno que es posible apreciarse en la simulación, si ésta se lleva más allá del tiempo en el que la trayectoria requerida permanece dentro del espacio de trabajo de ambos manipuladores.

En la Ilustración 5-12 se puede ver a detalle el fenómeno ocurrido, debido a que los giros en la cinemática son considerados ceros, la plataforma no puede acoplarse a los ángulos θ_{n3} de cada cadena. Por lo que las cadenas en la simulación se desacoplan del efector final, y en la implementación se genera la vibración que se aprecia en la Ilustración 5-11 del lado derecho.

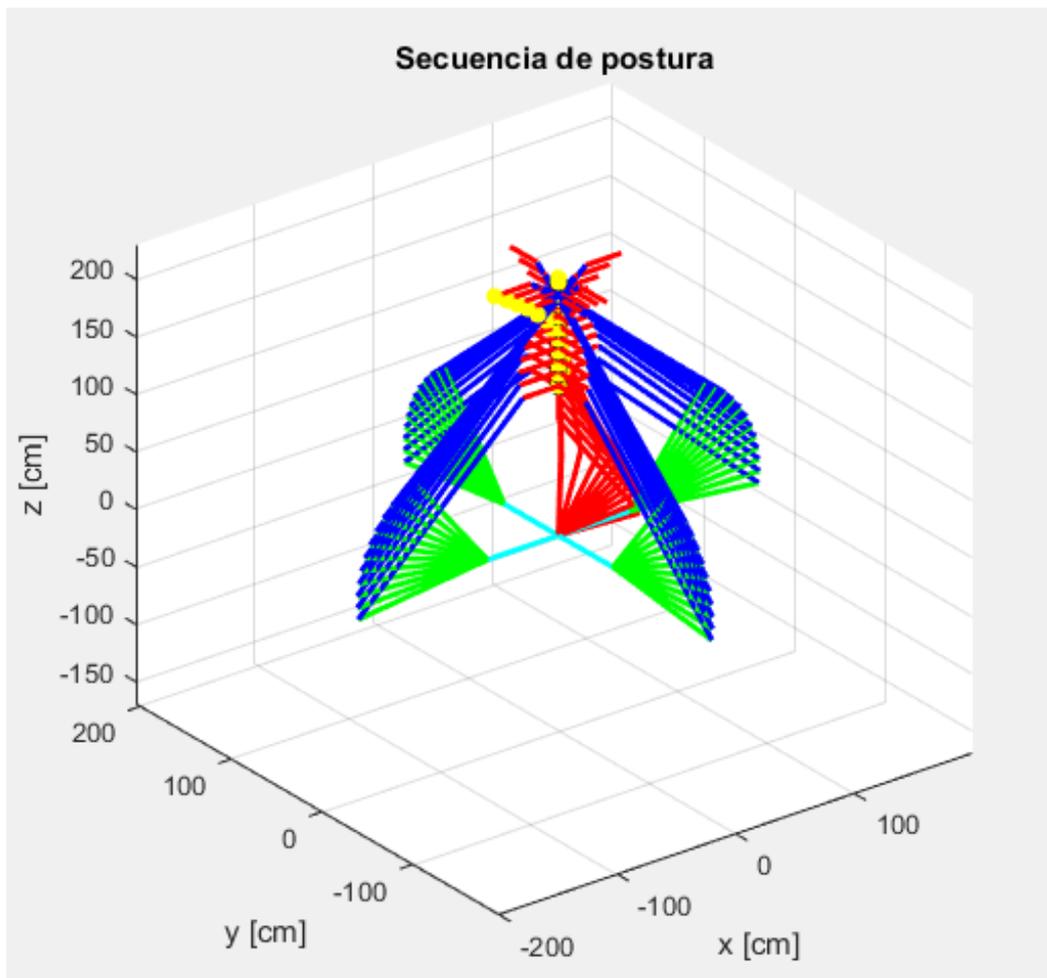


Ilustración 5-10

6 Conclusión y trabajo a futuro

**“Lo importante es no dejar
de hacerse preguntas”**

Albert Einstein

6.1 Conclusiones

Al realizar la implementación del manipulador paralelo $3RRR_{(RRR)_v}$ se comprueba que el modelado de un manipulador paralelo en el plano es posible ser retroalimentado; no sólo en simulación, sino también es factible ser implementado; por su cadena virtual. Permitiendo así simplificar el cálculo cinemático del mismo, y llegando también a un modelo que permite percibir los cambios articulares, no sólo en las articulaciones actuadas, sino en todo el manipulador, en el espacio de las velocidades.

Durante la fase de experimentación se probó que es posible retroalimentar un robot paralelo Delta 4 a partir de su cadena virtual, para el seguimiento de trayectorias.

Una de las mayores implicaciones de la metodología mencionada se refiere principalmente a la implementación de una cadena virtual al modelado cinemático de un manipulador paralelo Delta 4 $_{(RRR)_v}$. De acuerdo con la investigación de Patricio Martínez Zamudio [21].

6.2 Trabajo a Futuro

En cuanto al manipulador 3RRR_(RRR)_v, el siguiente paso es construir un banco de pruebas, en el que sea posible experimentar en el ámbito de las cadenas virtuales, y experimentar con la cadena virtual en el espacio físico.

Como se mencionó a lo largo del trabajo, se seleccionó una trayectoria sobre el eje Z, para probar la hipótesis propuesta, de forma tal que la trayectoria seguida por el manipulador serial fuera la misma seguida por el manipulador paralelo delta, el siguiente paso de la investigación en este sentido es pasar de un movimiento rectilíneo a uno planar, y poder aprovechar la configuración del manipulador.

Otra vertiente de la investigación, es el implementar como manipulador virtual uno que posea igual número de grados de libertad que el manipulador real, y/o un manipulador que posea mayor número de grados de libertad, para probar que es posible implementar movimientos distintos en un manipulador a los que se modelan por su cinemática.

7 Referencias

- [1] H. Simas, R. Guenther, D. F. M. da Cruz, and D. Martins, "A new method to solve robot inverse kinematics using Assur virtual chains," *Robotica*, vol. 27, pp. 1017-1026, 2009/12/001 2009.
- [2] J. J. Craig. (2005). *Introduction to Robotics Mechanics (3rd ed.)*.
- [3] T. Lung-Wen. (1999). *Robot analysis*
- [4] P. G.-V. Martinez-Zamudio, Victor J.; López-Parra, Marcelo; Ramirez-Reivich, Alejandro C., "Cinemática Diferencial de un Manipulador Paralelo Plano 3RRR-(RRR)v con Actuación Virtual Indirecta," *INGENIERÍA MECÁNICA TECNOLOGÍA Y DESARROLLO*, vol. 5, pp. 321-333, 2015.
- [5] X. Kong and C. M. Gosselin, "Type Synthesis of 3-DOF Translational Parallel Manipulators Based on Screw Theory," *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 126, pp. 83-92, 2004.
- [6] A. Barrientos, *Fundamentos de Robotica*. Madrid, Mexico: McGraw Hill, 2007.
- [7] H. D. Taghirad, *Parallel Robots* 1st ed. United States: CRC Press, 2013.
- [8] "<[Antonio_Barrientos_y_otros]_Fundamentos_de_Roboti(BookFi.org).pdf>."
- [9] (2005). *Robotics and Automation Handbook (1ST ed.)*.
- [10] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo. (2009). *Robotics*.
- [11] J. P. Merlet. (2006). *Parallel Robots*.
- [12] L. Ren and J. K. Mills, "Comparison of control approaches for tracking control of a 3 DOF parallel robot: Experimental results," in *9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2006, ICARCV '06, December 5, 2006 - December 8, 2006*, Singapore, Singapore, 2006.
- [13] L. Ren, J. K. Mills, and D. Sun, "Experimental comparison of control approaches on trajectory tracking control of a 3-DOF parallel robot," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 15, pp. 982-988, 2007.
- [14] H.-B. Choi, A. Konno, and M. Uchiyama, "Design, implementation, and performance evaluation of a 4-DOF parallel robot," *Robotica*, vol. 28, pp. 107-118, 2010.
- [15] "<Structure_Synthesis_of_a_Class_of_4-DoF_and_5-DoF_.pdf>."
- [16] P. Martinez Zamudio, "Manipulador Paralelo Plano 3RRR-(RRR)v con actuación virtual Indirecta," Doctor, Ingeniería Mecatrónica, UNAM, CDMX, Mex, 2015.
- [17] A. Campos, R. Guenther, and D. Martins, "Differential kinematics of serial manipulators using virtual chains," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 27, pp. 345-356, 2005.

-
- [18] G. B. Campion, and B.D'-Andréa-Novel, "Structural properties and classification on kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots " *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, pp. 733-769, 2011.
- [19] P. S. Albertos, A;. (2004). *Multivariable Control Systems: An Engineering Approach*.
- [20] V. J. González Villela, "Research on a semiautonomous mobile robot for loosely structured environments focused on transporting mail trolleys," 2006.
- [21] "<ICRA2001.pdf>."

8 Apéndice I

Mathematica

8.1 Cinemática de Posición Delta 4

Cadena 1

$$OA1=Qz[\phi 1].Tx[r];$$

$$AB1=Qz[\phi 1].Qy[-\theta 11].Tx[a];$$

$$BC1=Qz[\phi 1].Qy[-\theta 11].Qy[-\theta 21].Qz[\pi/2-\theta 31].Tx[b];$$

$$\theta 51=180^\circ+(\theta 11+\theta 21);$$

$$\theta 41=0^\circ;$$

$$\theta 71=\theta 41;$$

$$\theta 61=\theta 31-\pi/2;$$

$$CP1=Qz[\phi 1].Qy[\theta 11].Qy[\theta 21].Qz[\pi/2\theta 31].Qz[\theta 61].Qy[\theta 51].Tx[h];$$

$$A1=OA1.n$$

$$B1=AB1.n$$

$$C1=BC1.n//FullSimplify$$

$$P1=CP1.n//FullSimplify$$

$$Qlz=Qz[\phi 1]//Inverse //FullSimplify$$

$$OP1=A1+B1+C1+P1//FullSimplify$$

$$\{\text{Cos}[\phi 1] (-h+r+a \text{Cos}[\theta 11]+b \text{Cos}[\theta 11+\theta 21] \text{Sin}[\theta 31])-b \text{Cos}[\theta 31] \text{Sin}[\phi 1], b \text{Cos}[\theta 31] \text{Cos}[\phi 1]+(-h+r+a \text{Cos}[\theta 11]+b \text{Cos}[\theta 11+\theta 21] \text{Sin}[\theta 31]) \text{Sin}[\phi 1], a \text{Sin}[\theta 11]+b \text{Sin}[\theta 11+\theta 21] \text{Sin}[\theta 31], 4\}$$

$$OPm=Txxyz[Px,Py,Pz];$$

$$OPv1=Qlz.OPm;$$

$$OPv1//MatrixForm$$

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\phi 1] & \text{Sin}[\phi 1] & 0 & Px \text{Cos}[\phi 1]+Py \text{Sin}[\phi 1] \\ -\text{Sin}[\phi 1] & \text{Cos}[\phi 1] & 0 & Py \text{Cos}[\phi 1]-Px \text{Sin}[\phi 1] \\ 0 & 0 & 1 & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\phi 1] & \text{Sin}[\phi 1] & 0 & Px \text{Cos}[\phi 1]+Py \text{Sin}[\phi 1] \\ -\text{Sin}[\phi 1] & \text{Cos}[\phi 1] & 0 & Py \text{Cos}[\phi 1]-Px \text{Sin}[\phi 1] \\ 0 & 0 & 1 & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Li11=(OPv1-(Qlz.OA1)-(Qlz.CP1)).n//ExpandAll//MatrixForm;$$

$$Li11//FullSimplify//MatrixForm$$

$$(h-r+Px \text{Cos}[\phi 1]+Py \text{Sin}[\phi 1])$$

Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1]

Pz

-1)

Ld11=((Qlz.AB1)+(Qlz.BC1)).n//ExpandAll//FullSimplify

(a Cos[θ11]+b Cos[θ11+θ21] Sin[θ31]

b Cos[θ31]

a Sin[θ11]+b Sin[θ11+θ21] Sin[θ31]

2)

Cinemática Inversa

cθ31=Cy1/b

Ld21=Ld11[[1,1]]^2+Ld11[[1,2]]^2+Ld11[[1,3]]^2//Simplify(*=Cx1^2+Cy1^2+Cz1^2*)

Cy1/b

a^2+b^2+2 a b Cos[θ21] Sin[θ31]

sθ31=Sqrt[1-cθ31^2]

Sqrt[1-Cy1^2/b^2]

T31=ArcTan[cθ31,sθ31]

ArcTan[Cy1/b,Sqrt[1-Cy1^2/b^2]]

cθ21=(Cx1^2+Cy1^2+Cz1^2-a^2-b^2)/(2a b Sin[θ31])

((-a^2-b^2+Cx1^2+Cy1^2+Cz1^2) Csc[θ31])/(2 a b)

sθ21=Sqrt[1-cθ21^2]

Sqrt[1-((-a^2-b^2+Cx1^2+Cy1^2+Cz1^2)^2 Csc[θ31]^2)/(4 a^2 b^2)]

T21=ArcTan[cθ21,sθ21]

ArcTan[((-a^2-b^2+Cx1^2+Cy1^2+Cz1^2) Csc[θ31])/(2 a b),Sqrt[1-((-a^2-b^2+Cx1^2+Cy1^2+Cz1^2)^2 Csc[θ31]^2)/(4 a^2 b^2)]]

a11=Ld11[[1,3]]//TrigExpand//Simplify

a21=Ld11[[1,1]]//TrigExpand//Simplify

b Cos[θ11] Sin[θ21] Sin[θ31]+Sin[θ11] (a+b Cos[θ21] Sin[θ31])

-b Sin[θ11] Sin[θ21] Sin[θ31]+Cos[θ11] (a+b Cos[θ21] Sin[θ31])

S1C1=Solve[{Li11[[1,1]]==a21,Li11[[1,3]]==a11},{Cos[θ11],Sin[θ11]}//Flatten
//FullSimplify(*=Cx1*)

{Cos[θ11]->(2 (h Pz Sin[θ11]+h Cos[θ11] (r-Px Cos[φ1]-Py Sin[φ1])+a (-r+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])+b Sin[θ31] (Pz Sin[θ21]+Cos[θ21] (-r+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])))/(2 a^2+b^2+2 h^2-4 a h Cos[θ11]-b^2 Cos[2 θ31]+4 b (a Cos[θ21]-h Cos[θ11+θ21]) Sin[θ31]),Sin[θ11]->(2 (-h Pz Cos[θ11]+Pz (a+b Cos[θ21] Sin[θ31])+h Sin[θ11]+b Sin[θ21] Sin[θ31]) (r-Px Cos[φ1]-Py Sin[φ1]))/(2 a^2+b^2+2 h^2-4 a h Cos[θ11]-b^2 Cos[2 θ31]+4 b (a Cos[θ21]-h Cos[θ11+θ21])

Sin[θ31])}

c11=Cos[θ11]/.S1C1[[1]]//FullSimplify

(2 (h Pz Sin[θ11]+h Cos[θ11] (r-Px Cos[φ1]-Py Sin[φ1])+a (-r+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])+b Sin[θ31] (Pz Sin[θ21]+Cos[θ21] (-r+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1]))))/(2 a^2+b^2+2 h^2-4 a h Cos[θ11]-b^2 Cos[2 θ31]+4 b (a Cos[θ21]-h Cos[θ11+θ21]) Sin[θ31])

s11=Sin[θ11]/.S1C1[[2]]//FullSimplify

(2 (-h Pz Cos[θ11]+Pz (a+b Cos[θ21] Sin[θ31]))+(h Sin[θ11]+b Sin[θ21] Sin[θ31]) (r-Px Cos[φ1]-Py Sin[φ1]))/(2 a^2+b^2+2 h^2-4 a h Cos[θ11]-b^2 Cos[2 θ31]+4 b (a Cos[θ21]-h Cos[θ11+θ21]) Sin[θ31])

T11=ArcTan[c11,s11]

ArcTan[(e3 Pz Sin[θ21] Sin[θ31]-(e2+e3 Cos[θ21] Sin[θ31]) (e1-g-Px Cos[φ1]-Py Sin[φ1]))/(e2^2+e3 Sin[θ31] (2 e2 Cos[θ21]+e3 Sin[θ31])),(Csc[θ31] (e3 Pz Cos[θ21]+e2 Pz Csc[θ31]+e3 Sin[θ21] (e1-g-Px Cos[φ1]-Py Sin[φ1])))/(e3^2+e2 Csc[θ31] (2 e3 Cos[θ21]+e2 Csc[θ31]))]

Cx1=Li11[[1,1]];

Cy1=Li11[[1,2]];

Cz1=Li11[[1,3]];

T31//FullSimplify

ArcTan[(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])/b,Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]]

T21/.θ31->T31 //FullSimplify

ArcTan[(-a^2-b^2+Pz^2+(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2+(-e1+g+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])^2)/(2 a b Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]),√(1-(-a^2-b^2+Pz^2+(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2+(-e1+g+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])^2)^2/(4 a^2 b^2 (1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2)))]

T11/.θ21->T21/.θ31->T31

ArcTan[(-(e1-g-Px Cos[φ1]-Py Sin[φ1]) (e2+(1/(2 a b))e3 (-a^2-b^2+Pz^2+(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2+(-e1+g+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])^2))+e3 Pz Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2] √(1-(-a^2-b^2+Pz^2+(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2+(-e1+g+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])^2)^2/(4 a^2 b^2 (1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2))))/(e2^2+e3 Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2] (e3 Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]+(e2 (-a^2-b^2+Pz^2+(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2+(-e1+g+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])^2))/(a b Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]))),((e2 Pz)/Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]+(e3 Pz (-a^2-b^2+Pz^2+(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2+(-e1+g+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])^2))/(2 a b Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]+e3 (e1-g-Px Cos[φ1]-Py Sin[φ1]) √(1-(-a^2-b^2+Pz^2+(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2+(-e1+g+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])^2)^2/(4 a^2 b^2 (1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2))))/(Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2] (e3^2+(e2 (e2/Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]+(e3 (-a^2-b^2+Pz^2+(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2+(-e1+g+Px Cos[φ1]+Py Sin[φ1])^2))/(a b Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]))/(Sqrt[1-(Py Cos[φ1]-Px Sin[φ1])^2/b^2]))]

8.2 Cinemática diferencial Delta

4

$$\omega_{g1g1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix}; (*\text{velocidades angulares de la plataforma movil}*) \quad V_{g1g1} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix};$$

$$R_{f1g1} = \text{Transpose}[\text{Rz}[\gamma + (\beta + \mu_1)]];$$

R_{f1g1} // MatrixForm;

$(\beta + \mu_1)$ es el ángulo en el que se encuentra la cadena dentro de la plataforma móvil, es esta caso por ser la primer cadena es $\beta=0, \mu_1=0$; γ es el angulo de orientacion de la plataforma considerando que no hay

$$\text{rotación dentro de la misma} *) \quad \Theta_{f1f1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}; \quad P_{g1f1} = \{G, 0, 0\}; \quad \beta = 0; \quad \mu_1 = 0; \quad \gamma = 0; \quad \dot{\gamma} = 0; \quad A =$$

0;

$$\phi = 0; \quad \psi = 0;$$

$$\omega_{f1f1} = R_{f1g1} \cdot \omega_{g1g1} + \Theta_{f1f1} \cdot V_{f1f1} = R_{f1g1} \cdot (V_{g1g1} + (\omega_{g1g1} \cdot P_{g1f1}));$$

V_{f1f1} // MatrixForm

{0, 0, 0}

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix}$$

$$(*\text{del sistema F1 al sistema E1}*) \quad R_{e1f1} = \text{Transpose}[\text{Rz}[-t_{16}].\text{Ry}[-t_{15}].\text{Rx}[-t_{17}]];$$

R_{e1f1} // MatrixForm;

$$\Theta_{e1e1} = \Theta_{17}, \Theta_{15}, \Theta_{16}; P_{f1e1} = \{e_3, 0, 0\};$$

$$\omega_{e1e1} = R_{e1f1} \cdot \omega_{f1f1} + \Theta_{e1e1} V_{e1e1} = R_{e1f1} \cdot (V_{f1f1} + (\omega_{e1e1} \cdot P_{f1e1}));$$

V_{e1e1} // MatrixForm // FullSimplify

$$\begin{aligned} & \Theta_{17}, \Theta_{15}, \Theta_{16} (\cos[t_{17}] \sin[t_{16}] + \cos[t_{16}] \sin[t_{15}] \sin[t_{17}]) x_m + \cos[t_{15}] \sin[t_{17}] z_m + e_3 \\ & \Theta_{15} + (\cos[t_{16}] \cos[t_{17}] - \sin[t_{15}] \sin[t_{16}] \sin[t_{17}]) y_m + e_3 \Theta_{16} \\ & \sin[t_{15}] z_m - e_3 \Theta_{15} + \cos[t_{15}] \cos[t_{16}] x_m - \sin[t_{16}] y_m + e_3 \Theta_{16} (-\cos[t_{16}] \cos[t_{17}] \\ & \sin[t_{15}] + \sin[t_{16}] \sin[t_{17}]) x_m + \cos[t_{15}] \cos[t_{17}] z_m - e_3 \Theta_{15} + (\cos[t_{17}] \sin[t_{15}] \sin[t_{16}] + \\ & \cos[t_{16}] \sin[t_{17}]) y_m + e_3 \Theta_{16} \end{aligned}$$

(*del sistema E1 al D1*) $R_{d1e1} = \text{Transpose}[Ry[t_{12}], Rz[t_{13} - \pi/2], Rx[-t_{14}]];$

R_{d1e1} // MatrixForm;

$$\Theta_{d1d1} = \Theta_{14}, \Theta_{12}, \Theta_{13}; P_{e1d1} = \{e_2, 0, 0\};$$

$$t_{14} = t_{17}; t_{14} = 0; t_{17} = 0;$$

$$t_{16} = \frac{\pi}{2} - t_{13};$$

$$t_{15} = -\pi + (t_{11} + t_{12}); \Theta_{14} = 0; \Theta_{17} = 0; \Theta_{16} = -\Theta_{13};$$

$$\theta_{15} = \theta_{11} + \theta_{12}; \omega_{d1d1} = R_{d1e1} \cdot \omega_{e1e1} + \theta_{d1d1}$$

$$V_{d1d1} = R_{d1e1} \cdot (V_{e1e1} + (\omega_{e1e1} \otimes P_{e1d1})); V_{d1d1} // \text{MatrixForm} // \text{FullSimplify}$$

$$\begin{aligned} & -\text{Cos}[t_{13}] \theta_{11} + \theta_{12} + \text{Sin}[t_{12}] \text{Sin}[t_{13}] \theta_{13}, \theta_{12} + \text{Sin}[t_{13}] \theta_{11} + \theta_{12} + \text{Cos}[t_{13}] \text{Sin}[t_{12}] \\ & \theta_{13}, \theta_{13} - \text{Cos}[t_{12}] \theta_{13} - \text{Sin}[t_{11}] + \text{Cos}[t_{11}] + 2 \text{Cos}[2 t_{13}] \text{Sin}[t_{11}]^2 x_m + \text{Sin}[t_{13}] \text{Sin}[t_{11}] z_m \\ & + (\text{Sin}[t_{12}] e_2 + \text{Sin}[t_{11}] e_3) \theta_{11} + \theta_{12} + \text{Cos}[t_{13}] e_2 \theta_{13} + \text{Sin}[t_{11}]^2 \text{Sin}[2 t_{13}] y_m + e_3 \\ & \theta_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 \text{Sin}[t_{11}]^2 \text{Sin}[2 t_{13}] x_m + \text{Cos}[t_{11}] \text{Cos}[t_{13}]^2 + \text{Sin}[t_{13}]^2 y_m + \text{Cos}[t_{13}] \text{Sin}[t_{11}] z_m + \\ & (\text{Sin}[t_{12}] e_2 + \text{Sin}[t_{11}] e_3) \theta_{11} + \theta_{12} - \text{Sin}[t_{13}] e_2 + \text{Cos}[t_{11}] \text{Cos}[t_{13}]^2 + \text{Sin}[t_{13}]^2 e_3 \theta_{13} \end{aligned}$$

$$(*\text{del sistema D1 al C1} *) R_{c1d1} = \text{Transpose}[Ry[t_{11}]];$$

$$R_{c1d1} // \text{MatrixForm};$$

$$\theta_{c1c1} = \{0, \theta_{11}, 0\}; P_{d1c1} = \{e_1, 0, 0\};$$

$$\begin{aligned} & -\text{Cos}[t_{11}] z_m - (\text{Cos}[t_{12}] e_2 - \text{Cos}[t_{11}] e_3) \theta_{11} + \theta_{12} + \text{Sin}[t_{11}] \text{Sin}[t_{13}] x_m + \text{Cos}[t_{13}] y_m + e_3 \\ & \theta_{13} \end{aligned}$$

$$\omega_{c1c1} = R_{c1d1} \cdot \omega_{d1d1} + \theta_{c1c1} // \text{FullSimplify}$$

$$V_{c1c1} = R_{c1d1} \cdot (V_{d1d1} + (\omega_{d1d1} \otimes P_{d1c1})); V_{c1c1} // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{aligned} & -2 \text{Sin}[t_{11}] \text{Sin}[t_{12}]^2 \theta_{13} + \text{Cos}[t_{11}] \text{Cos}[t_{13}] \theta_{11} + \theta_{12} + \text{Sin}[t_{12}] \text{Sin}[t_{13}] \theta_{13}, 2 \\ & (1 + \text{Sin}[t_{13}]) \theta_{11} + \theta_{12} + \text{Cos}[t_{13}] \text{Sin}[t_{12}] \theta_{13}, -\text{Cos}[t_{13}] \text{Sin}[t_{11}] \theta_{11} + \theta_{12} + 2 \text{Cos}[t_{11}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin^2 t_{12} + \sin t_{11} \sin t_{12} \sin t_{13} \theta_{13} \\
& - \sin t_{11} \sin t_{13} e_1 \theta_{11} - e_1 \theta_{12} - \sin t_{13} e_1 \theta_{12} - \cos t_{13} \sin t_{12} e_1 \theta_{13} + \sin t_{12} \cos t_{11} \\
& + t_{12} \sin t_{13} x_m - \sin t_{11} + t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} + \cos t_{11} + t_{12} \cos t_{13} y_m - e_3 \\
& \theta_{13} + \cos t_{12} \sin t_{11} + t_{12} \sin t_{13} x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos t_{11} + t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \\
& \theta_{12} - \cos t_{13} \sin t_{11} + t_{12} y_m - e_3 \theta_{13} + \cos t_{11} \cos t_{12} \sin t_{13} - \cos t_{11} + t_{12} \\
& \sin t_{13} x_m - \sin t_{11} + t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} + \cos t_{11} + t_{12} \cos t_{13} y_m - e_3 \theta_{13} - \\
& \sin t_{12} \sin t_{13} \sin t_{11} + t_{12} \sin t_{13} x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos t_{11} + t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \\
& \theta_{12} - \cos t_{13} \sin t_{11} + t_{12} y_m - e_3 \theta_{13} - \cos t_{13} \cos t_{13} x_m - e_2 \theta_{13} + \sin t_{13} y_m - \\
& e_3 \theta_{13} e_1 \theta_{13} - \cos t_{12} e_1 \theta_{13} + \cos t_{12} \cos t_{13} - \cos t_{11} + t_{12} \sin t_{13} x_m - \sin t_{11} + t_{12} \\
& z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} + \cos t_{11} + t_{12} \cos t_{13} y_m - e_3 \theta_{13} - \cos t_{13} \sin t_{12} \sin t_{11} + t_{12} \\
& \sin t_{13} x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos t_{11} + t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} - \cos t_{13} \sin t_{11} + t_{12} \\
& y_m - e_3 \theta_{13} + \sin t_{13} \cos t_{13} x_m - e_2 \theta_{13} + \sin t_{13} y_m - e_3 \theta_{13} \cos t_{11} - \sin t_{13} \\
& e_1 \theta_{11} - e_1 \theta_{12} - \sin t_{13} e_1 \theta_{12} - \cos t_{13} \sin t_{12} e_1 \theta_{13} + \sin t_{12} \cos t_{11} + t_{12} \sin t_{13} x_m \\
& - \sin t_{11} + t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} + \cos t_{11} + t_{12} \cos t_{13} y_m - e_3 \theta_{13} + \cos t_{12} \\
& \sin t_{11} + t_{12} \sin t_{13} x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos t_{11} + t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} - \cos t_{13} \\
& \sin t_{11} + t_{12} y_m - e_3 \theta_{13} + \sin t_{11} \cos t_{12} \sin t_{13} - \cos t_{11} + t_{12} \sin t_{13} x_m - \sin t_{11} + \\
& t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} + \cos t_{11} + t_{12} \cos t_{13} y_m - e_3 \theta_{13} - \sin t_{12} \sin t_{13} \sin t_{11} + \\
& t_{12} \sin t_{13} x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos t_{11} + t_{12} z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} - \cos t_{13} \sin t_{11} + t_{12} \\
& y_m - e_3 \theta_{13} - \cos t_{13} \cos t_{13} x_m - e_2 \theta_{13} + \sin t_{13} y_m - e_3 \theta_{13}
\end{aligned}$$

2

$$ecAw = \omega_{c1c1} - \{W_{fax}, W_{fay}, W_{faz}\}; \quad ecAx = V_{c1c1} \quad [1] \quad ecAy = V_{c1c1} \quad [2] \quad ecAz = V_{c1c1} \quad [3]$$

$$ecAA = \omega_{c1c1} \quad [1] \quad ecA\phi = \omega_{c1c1} \quad [2] \quad ecA\psi = \omega_{c1c1} \quad [3]$$

$$ecA\theta1 = ecAw \quad [1] \quad ecA\theta2 = ecAw \quad [2] \quad ecA\theta3 = ecAw \quad [3]$$

$$-\sin[t_{11}] \sin[t_{13}] e_1 \theta_{11} - e_1 \theta_{12} - \sin[t_{13}] e_1 \theta_{12} - \cos[t_{13}] \sin[t_{12}] e_1 \theta_{13} + \sin[t_{12}] \cos[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - \sin[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} \cos[t_{12}]$$

$$\sin[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} \cos[t_{11}] \cos[t_{12}] \sin[t_{13}] - \cos[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - \sin[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12}$$

$$\cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} - \sin[t_{12}] \sin[t_{13}] \sin[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} \cos[t_{13}] \sin[t_{11} + t_{12}] y_m - e_3 \theta_{13}$$

$$\cos[t_{13}] \cos[t_{13}] x_m - e_2 \theta_{13} + \sin[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} e_1 \theta_{13} - \cos[t_{12}] e_1 \theta_{13} + \cos[t_{12}] \cos[t_{13}]$$

$$\cos[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - \sin[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} - \cos[t_{13}] \sin[t_{12}]$$

$$\sin[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} + \sin[t_{13}] \cos[t_{13}] x_m - e_2 \theta_{13} + \sin[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13}$$

$$\cos[t_{11}] \sin[t_{13}] e_1 \theta_{11} - e_1 \theta_{12} - \sin[t_{13}] e_1 \theta_{12} - \cos[t_{13}] \sin[t_{12}] e_1 \theta_{13} + \sin[t_{12}] \cos[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - \sin[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} \cos[t_{12}]$$

$$\begin{aligned}
& \sin[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \theta_{12} - \cos[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} - \cos[t_{13}] \\
& \sin[t_{11} + t_{12}] y_m - e_3 \theta_{13} + \sin[t_{11}] \cos[t_{12}] \sin[t_{13}] - \cos[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - \sin[t_{11} + \\
& t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} + \\
& \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} - \sin[t_{12}] \sin[t_{13}] \sin[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - e_2 \theta_{11} - e_2 \\
& \theta_{12} - \cos[t_{11} + t_{12}] z_m - e_3 \theta_{11} + \theta_{12} - \cos[t_{13}] \sin[t_{11} + t_{12}] y_m - e_3 \theta_{13} - \\
& \cos[t_{13}] \cos[t_{13}] x_m - e_2 \theta_{13} + \sin[t_{13}] y_m - e_3 \theta_{13} - 2 \sin[t_{11}] \sin^2 t_{12} \theta_{13} + \cos[t_{11} \\
&] - \cos[t_{13}] \theta_{11} + \theta_{12} + \sin[t_{12}] \sin[t_{13}] \theta_{13} \\
& 2 (1 + \sin[t_{13}]) \theta_{11} + \theta_{12} + \cos[t_{13}] \sin[t_{12}] \theta_{13} \\
& - \cos[t_{13}] \sin[t_{11}] \theta_{11} + \theta_{12} + 2 \cos[t_{11}] \sin^2 t_{12} + \sin[t_{11}] \sin[t_{12}] \sin[t_{13}] \theta_{13}^2 \\
& - W_{fax} - 2 \sin[t_{11}] \sin^2 t_{12} \theta_{13} + \cos[t_{11}] - \cos[t_{13}] \theta_{11} + \theta_{12} + \sin[t_{12}] \sin[t_{13}] \theta_{13}^2 \\
& - W_{fay} + (1 + \sin[t_{13}]) \theta_{11} + \theta_{12} + \cos[t_{13}] \sin[t_{12}] \theta_{13} - W_{faz} - \cos[t_{13}] \sin[t_{11}] \theta_{11} + \theta_{12} \\
& + 2 \cos[t_{11}] \sin^2 t_{12} + \sin[t_{11}] \sin[t_{12}] \sin[t_{13}] \theta_{13}
\end{aligned}$$

$C1 = \text{Solve}\{ecAx == 0, ecAy == 0, ecAz == 0\}, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13} // \text{Flatten}$

$$\begin{aligned}
& \theta_{11} \rightarrow -\cos[t_{13}] \sin[t_{12}] e_2 - \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] e_3 + \cos[t_{12}] \cos[t_{13}] \sin[t_{11} + \\
& t_{12}] e_3 + \\
& \cos[t_{13}] \sin[t_{12}] e_2 - \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] e_3 + \cos[t_{12}] \cos[t_{13}] \sin[t_{11} + t_{12}] e_3 + \\
& - \cos[t_{13}] \sin[t_{12}] e_2 - \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] e_3 + \cos[t_{12}] \cos[t_{13}] \sin[t_{11} + t_{12}] e_3 + \\
& \theta_{13} \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{c1s1} = \theta_{11} / . C1 \text{ [1]} // \text{Simplify} \\
& 4 \sin^2 t_{12} \cos^2 t_{13} + \sin^2 t_{13} e_1^2 (-2 - 2 \cos[t_{11}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] - 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} \\
& + 2 t_{13}]) x_m - 2222 \\
& 2 \sin^2 t_{11} \sin[2 t_{13}] y_m + \sin[t_{11}] \sin[t_{13}] z_m^2 - 2 \\
& 2 e_2^2 x_m - 2 e_2^2 \cos[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m + \sin[t_{11} + t_{12}] z_m^2 - 2 \\
& e_2 e_3 (\cos[t_{11} + t_{12}] - \sin[t_{13}]) x_m + \cos[t_{13}] y_m + \sin[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] z_m^2 + \\
& 1 \\
& e_1^2 - e_2^2 (-4 - 6 \cos[t_{11}] + 4 \cos[t_{12}] + 4 \cos[t_{11} + t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + 2 t_{12}] + 3 \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \cos[t_{12} - 2 t_{13}] - \\
& 2 \\
& 2 \cos[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12} - 2 t_{13}] - 4 \cos[2 t_{13}] + 3 \cos[t_{11} + 2 t_{13}] + 2 \cos[t_{12} + 2 t_{13}] - \\
& 2 \cos[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2(t_{12} + t_{13})] + 4 \sin[t_{11} - t_{13}] - 4 \sin[t_{11} + t_{13}] x_m + 4 \cos[t_{13}] ((-2 + 2 \\
& \cos[t_{12}] + \sin[t_{11}] (2 \sin[t_{12}] - \sin[2 t_{12}])) \sin[t_{13}] + \\
& \cos[t_{11}] (2 + (3 - 2 \cos[t_{12}] + \cos[2 t_{12}]) \sin[t_{13}]) y_m + 2 (-3 \cos[t_{11} - t_{13}] + 2 \cos[t_{11} + t_{12} - t_{13}] - \\
& \cos[t_{11} + 2 t_{12} - t_{13}] + 3 \cos[t_{11} + t_{13}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12} + t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12} + t_{13}] - 4 \sin[t_{11}]) z_m^2 + \\
& 2 e_3 (2 + 6 \cos[t_{11}] - 2 \cos[t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + \cos[t_{12} - 2 t_{13}] - \cos[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] - \\
& 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}] + \cos[t_{12} + 2 t_{13}] - \cos[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}] - 2 \sin[t_{11} - t_{13}] + 2 \sin[t_{11} + t_{13}]) x_m + \\
& 4 \cos^2 (t_{11} + t_{12}) \sin^2 t_{11} \sin^2 t_{12} \sin[2 t_{13}] y_m + \sin[t_{11}] \sin[t_{13}] (1 + \sin[t_{13}]) z_m^2 + \\
& 22 \\
& t_{12}^2 \\
& 4 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) - 2 \sin^2 t_{13} e_1 + e_2 + \sin[t_{13}] e_3 \text{ c1s2} = \theta_{12} / . C1 \text{ [2]} // \\
& 2
\end{aligned}$$

Simplify

$$-8 \sin^2 t_{12} \sin^2 t_{13} e_1^2 (-2 - 2 \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] - 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}]) x_m -$$

22

$$2 \sin^2 t_{11} \sin[2 t_{13}] y_m + \sin[t_{11}] \sin[t_{13}] z_m^2 + 2$$

$$8 e_3^2 x_m^2 + e_2^2 \cos[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] x_m - \cos[t_{11} + t_{12}] \cos[t_{13}] y_m + \sin[t_{11} + t_{12}] z_m^2 + e_2$$

$$e_3^2 (\cos[t_{11} + t_{12}] - \sin[t_{13}]) x_m + \cos[t_{13}] y_m + \sin[t_{11} + t_{12}] \sin[t_{13}] z_m^2 +$$

$$e_1 e_2 (-4 - 6 \cos[t_{11}] + 4 \cos[t_{12}] + 4 \cos[t_{11} + t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + 2 t_{12}] + 3 \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \cos[t_{12} - 2 t_{13}] - 2$$

$$\cos[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12} - 2 t_{13}] - 4 \cos[2 t_{13}] + 3 \cos[t_{11} + 2 t_{13}] + 2 \cos[t_{12} + 2 t_{13}] - 2$$

$$\cos[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2(t_{12} + t_{13})]) x_m^2 - (-2 + 3 \cos[t_{11}] + 2 \cos[t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) \sin[2 t_{13}] y_m + 4 (3 \sin[t_{11}] - 2 \sin[t_{11} + t_{12}] + \sin[t_{11} + 2 t_{12}]) \sin[t_{13}] z_m^2 +$$

$$2 e_3 (2 + 2 \cos[t_{11}] - 2 \cos[t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + \cos[t_{12} - 2 t_{13}] - \cos[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] -$$

$$2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}] + \cos[t_{12} + 2 t_{13}] - \cos[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}] - 2 \sin[t_{11} - t_{13}] + 2 \sin[t_{11} + t_{13}]) x_m +$$

$$8 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) - 2 \sin^2 t_{13} = \theta_{13} / . C1 [3] // Simplify$$

$$\cos[t_{13}] x_m + \sin[t_{13}] y_m - 2 \sin^2 t_{12} \sin^2 t_{13} e_1 + e_2 + \sin[t_{13}] e_3$$

$$e_{ca11} = D[c1s1, x_m] // FullSimplify$$

$$e_{ca12} = D[c1s1, y_m] // FullSimplify$$

$$e_{ca13} = D[c1s1, z_m] // Simplify$$

$$-4 \cos^2 t_{11} + \cos[2 t_{13}] \sin^2 t_{11} \sin^2 t_{12} (1 + \sin[t_{13}]) e_1^2 + 2 (\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 - e_3)$$

$$(\sin[t_{13}] e_2 + e_3) + 222$$

$$e_1^2 \cos^2 t_{13} \sin^2 t_{12} + 2 \cos[t_{11}] \sin[t_{13}] + (3 \cos[t_{11}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) \sin[t_{13}]^2 e_2 + 2$$

$$1 - \cos[t_{12}] - \cos[t_{11} + t_{12}] + 4 \cos^2 (t_{11} + t_{12}) \cos[2 t_{13}] \sin^2 t_{11} \sin^2 t_{12} + \cos[t_{11}] (3 + 2 \sin[t_{13}]) e_3 + 222$$

$$8 \cos^2 (t_{11} + t_{12}) \sin^2 t_{11} \sin^2 t_{12} \sin[2 t_{13}] y_m + 4 \sin[t_{11}] \sin[t_{13}]^2 z_m^2 + 222$$

$$12 \sin^2 t_{13} e_1 + e_2 + \sin[t_{13}] e_3 + 222$$

$$(2 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) (e_2 + \sin[t_{13}] ((-1 + \cos[t_{12}]) e_1 + e_3))) - 8 \sin^2 t_{11} \sin^2 t_{12} (1 + \sin[t_{13}]) \sin[2 t_{13}] e_1^2 + 4 \cos[t_{13}] e_2 (-\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 + e_3) +$$

$$22 e_1 (-4 \cos[t_{11}] \cos[t_{13}] + (-2 + 3 \cos[t_{11}] + 2 \cos[t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) \sin[2 t_{13}] e_2 +$$

$$8 \cos^2 (t_{11} + t_{12}) \sin^2 t_{11} \sin^2 t_{12} \sin[2 t_{13}] e_3 + 222$$

$$(4 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) (e_2 + \sin[t_{13}] ((-1 + \cos[t_{12}]) e_1 + e_3))) \sin[t_{11}] (1 + \sin[t_{13}]) e_1 + \sin[t_{11} + t_{12}] e_2$$

$$e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) \text{ ecaa21} = \text{D}\{\text{c1s2}, x_m\} // \text{FullSimplify}$$

$$\text{ecaa22} = \text{D}\{\text{c1s2}, y_m\} // \text{FullSimplify}$$

$$\text{ecaa23} = \text{D}\{\text{c1s2}, z_m\} // \text{Simplify}$$

$$-16 \cos^2 t_{13} + \cos[2 t_{13}] \sin^2 t_{11} + \sin^2 t_{12} \sin^2 t_{13} e_1^2 + 8 (\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 - e_3)$$

$$(\sin[t_{13}] e_2 + e_3) + 222$$

$$4 e_1 \cos^2 t_{13} \sin^2 t_{12} + (3 \cos[t_{11}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) \sin^2 t_{13} e_2 + 2$$

$$2 \cos[t_{11}] \sin[t_{13}] + 2 \sin^2 t_{12} \cos^2 t_{13} \sin^2 t_{11} + \sin^2 t_{12} \sin^2 t_{13} e_3 + 222$$

$$(8 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) (e_2 + \sin[t_{13}] ((-1 + \cos[t_{12}]) e_1 + e_3))) \sin^2 t_{11} \sin^2 t_{12} \sin[t_{13}] \sin[2 t_{13}] e_1^2 + 4 \cos[t_{13}] e_2 (\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 - e_3) + \sin[2 t_{13}] e_1$$

$$22 ((-2 + 3 \cos[t_{11}] + 2 \cos[t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) e_2 - 2 (-1 + \cos[t_{11}] + \cos[t_{12}] - \cos[t_{11} + t_{12}]) e_3$$

$$(4 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) (e_2 + \sin[t_{13}] ((-1 + \cos[t_{12}]) e_1 + e_3))) \sin[t_{11}] \sin[t_{13}] e_1 + \sin[t_{11} + t_{12}] e_2$$

$$e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) \text{ ecaa31} = D^2 c1s3, x_m$$

$$\text{ecaa32} = D^2 c1s3, y_m$$

$$\text{ecaa33} = D^2 c1s3, z_m$$

$$\cos[t_{13}] - 2 \sin^2 t_{12} \sin[t_{13}] e_1 + e_2 + \sin[t_{13}] e_3$$

$$\sin[t_{13}] - 2 \sin^2 t_{12} \sin[t_{13}] e_1 + e_2 + \sin[t_{13}] e_3$$

20

$$va1 = \{1, 0, 0, 0\}; va2 = \{0, 1, 0, 0\}; va3 = \{0, 0, 1, 0\}; va4 = \{\text{ecaa11}, \text{ecaa12}, \text{ecaa13}, 0\}; va5 = \{\text{ecaa21},$$

ecaa22, ecaa23, 0}; va6 = {ecaa31, ecaa32, ecaa33, 0};

ST1 = {va1, va2, va3, va4, va5, va6}; ST1 // MatrixForm // Simplify

1000 0100 0010

$$-4 \sin^2 t_{12} \cos^2 t_{11} + t_{12}^2 \cos[2 t_{13}] + \sin^2 t_{11} + t_{12}^2 (-1 + \sin[t_{13}]) e_1^2 - 2 (\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 - e_3) (\sin[t_{13}] e_2 + e_3) + e_1^2 - 2 (-1 + \cos[t_{12}]) \cos[t_{13}]^2 + \sin[t_{13}] (\cos[t_{11} + 2 t_{12}] (2 - 3 \sin[t_{13}]) + (-\cos[t_{11}] + 2 \cos[t_{11} + t_{12}]) \sin[t_{13}]) e_2 + (-1 + \cos[t_{12}]) - \cos[t_{11} + t_{12}] + 2 \cos[2 t_{13}] \sin^2 t_{12} \sin^2 t_{12} - \sin^2 t_{11} + 3 t_{12}^2 \cos[t_{11} + 2 t_{12}] (3 - 2 \sin[t_{13}]) e_3$$

$$8 \cos^2 t_{11} + t_{12}^2 \sin^2 t_{12} (-1 + \sin[t_{13}]) \sin[2 t_{13}] e_1^2 + 4 \cos[t_{13}] e_2 (-\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 + e_3) + e_1^2 (\cos[t_{11} + 2 t_{12}] (4 \cos[t_{13}] - 3 \sin[2 t_{13}]) + (-\cos[t_{11}] + 2 (-1 + \cos[t_{12}] + \cos[t_{11} + t_{12}])) \sin[2 t_{13}] e_2 + 4 \sin^2 t_{12} - \sin^2 t_{12} + \sin^2 t_{11} + 3 t_{12}^2 \sin[2 t_{13}] e_3 \sin[t_{11} + 2 t_{12}] (-1 + \sin[t_{13}]) e_1 + \sin[t_{11} + t_{12}] e_2 - 2 \sin^2 t_{12} - 111213111122_0$$

$$4 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 - \sin[t_{11} + 2 t_{12}] e_3) - 2 \sin^2 t_{12} \sin[t_{13}] e_1 + e_2 + \sin[t_{13}] e_3 - 16 \cos^2 t_{11} + t_{12}^2 \cos[t_{13}] \sin^2 t_{12} \sin[t_{13}]^2 e_1^2 + 4 \cos[t_{13}] e_2 (-\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 + e_3) + \sin[2 t_{13}] e_1 (-\cos[t_{11}] - 2 (-1 + \cos[t_{12}] + \cos[t_{11} + t_{12}]) + 3 \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) e_2 + 2 (-1 + \cos[t_{12}] + \cos[t_{11} + t_{12}] - \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) e_3$$

$$4 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 - \sin[t_{11} + 2 t_{12}] e_3) (e_2 + \sin[t_{13}] ((-1 + \cos[t_{12}]) e_1 + e_3)) \frac{\sin[t_{13}]}{t_{12}^2}$$

$$-2 \sin^2 t_{12} \sin[t_{13}] e_1 + e_2 + \sin[t_{13}] e_3$$

22 2

222

$$e_1 (\sin[t_{12}] e_2 - \sin[t_{11} + 2 t_{12}] e_3) \sin[t_{11} + 2 t_{12}] \sin[t_{13}] e_1 + \sin[t_{11} + t_{12}] e_2 - 2 \sin^2 t_{12} - 111213111122_0$$

$$2 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 - \sin[t_{11} + 2 t_{12}] e_3) (e_2 + \sin[t_{13}] ((-1 + \cos[t_{12}]) e_1 + e_3)) \sin^2 t_{12} (1 - 3 \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) \sin[t_{13}] + 2 \cos^2 t_{11} + t_{12}^2 \sin[3 t_{13}] e_1^2 + 2 (\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 - e_3) (\sin[t_{13}] e_2 + e_3) + e_1^2 - 4$$

$$\cos^2[t_{13}] \sin^2 t_{12} + (\cos[t_{11}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + 3 \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) \sin[t_{13}]^2 e_2 + 2 \cos[t_{13}]^2 \sin^2 t_{12} \sin t_{11} + 3 t_{12} \sin[t_{13}] \cos[t_{11} + 2 t_{12}] + 2 \sin^2 t_{12} \sin[t_{13}] e_3$$

$$e_1 (\sin[t_{12}] e_2 - \sin[t_{11} + 2 t_{12}] e_3) (e_2 + \sin[t_{13}] ((-1 + \cos[t_{12}]) e_1 + e_3))$$

22

$$111213111122 e_1 (\sin[t_{12}] e_2 - \sin[t_{11} + 2 t_{12}] e_3)$$

-2 Sin

$$\cos[t_{13}]^2 \sin[t_{13}] e_1 + e_2 + \sin[t_{13}] e_3$$

00

100 010 001

$$\begin{aligned} & -8 \sin[t_{13}] (2 - 2 \cos[t_{11}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}] - \sin[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \sin[2 t_{13}] \\ & + \sin[t_{11} + 2 t_{13}]) \sin[t_{11}] \sin[t_{12}] e_1 + \cos[t_{11}] e_2 + 2 \cos^2 t_{11} (1 + \cos[t_{11}] (-1 + \cos[t_{13}])) e_3 \\ & + (2 - 4 \cos[t_{11}] + 2 \cos[2 t_{11}] + 2 \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + \cos[2 (t_{11} - t_{13})] - 2 \cos[2 t_{11} - t_{13}] + 4 \cos[t_{13}] + 2 \\ & \cos[2 t_{13}] + \cos[2 (t_{11} + t_{13})] - 2 \cos[2 t_{11} + t_{13}] + 2 \cos[t_{11} + 2 t_{13}] + 2 \sin[t_{11} - 2 t_{13}] + \sin[2 (t_{11} - t_{13})] - \\ & 2 \sin[2 t_{11} - t_{13}] - 4 \sin[t_{13}] - 2 \sin[2 t_{13}] - \sin[2 (t_{11} + t_{13})] + 2 \sin[2 t_{11} + t_{13}] - 2 \sin[t_{11} + 2 t_{13}]) (4 (- \\ & 1 + \cos[t_{12}]) e_1 + 4 \cos[t_{13}] e_2 + (2 - 2 \cos[t_{11}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}]) e_3) e_1 \\ & - 8 \cos[t_{11}] \sin^2 t_{13} e_1 + 4 (\cos[t_{11}] \cos[t_{12}] - \cos[t_{13}] \sin[t_{11}] \sin[t_{12}]) e_2 + (-2 - 2 \cos[2 t_{11}] \\ & + \cos[2 t_{11} - t_{13}] - 2 \cos[t_{13}] + \cos[2 t_{11} + t_{13}]) e_3 (-1 + \cos[t_{12}]) e_1 - \cos[t_{13}] e_2 - (2 - 2 \cos[t_{11}] \\ & + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}]) e_3 + \sin[t_{13}]^2 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) - \cos[t_{11}] \\ & \sin[t_{12}] e_1 + \sin[t_{11}] e_2 + (-\sin[2 t_{11}] + \cos[t_{13}] (2 \sin[t_{11}] + \sin[2 t_{11}])) e_3 + 2 \sin[2 t_{11}] \sin^2 \\ & t_{13} (\cos[t_{13}] - \sin[t_{13}]) + \sin[t_{11}] (1 - \cos[2 t_{13}] + \sin[2 t_{13}]) (4 (-1 + \cos[t_{12}]) e_1 + 4 \cos[t_{13}] e_2 + (2 - \\ & 2 \cos[t_{11}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}]) e_3) + \sin[t_{13}] (2 - 2 \cos[t_{11}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] \\ & + 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}] - \sin[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \sin[2 t_{13}] + \sin[t_{11} + 2 t_{13}]) (2 \cos[t_{11}] \sin[t_{12}] e_1 - \\ & 2 \sin[t_{11}] e_2 + (\sin[2 t_{11}] - \cos[t_{13}] (2 \sin[t_{11}] + \sin[2 t_{11}])) e_3 - 2 \sin[t_{13}]^2 \sin[t_{11}] \sin[t_{12}] e_1 \\ & + 2 \cos[t_{11}] e_2 + 4 \cos^2 t_{11} (1 + \cos[t_{11}] (-1 + \cos[t_{13}])) e_3 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3) + (4 (- \\ & 1 + \cos[t_{12}]) e_1 + 4 \cos[t_{13}] e_2 + (2 - 2 \cos[t_{11}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}]) e_3) e_2 \\ & \sin[t_{11}] \sin^2 t_{13} e_1 - (\cos[t_{12}] \sin[t_{11}] + \cos[t_{11}] \cos[t_{13}] \sin[t_{12}]) e_2 + \sin[2 t_{11}] \sin^2 t_{13} e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin^2 t_{13} \left(2 - 2 \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2t_{13}] + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}] + \sin[t_{11} - 2t_{13}] - 2 \sin 2t_{13} \right. \\
& \left. - \sin[t_{11} + 2t_{13}] \right) \sin t_{12} \left(e_1 + \cos t_{11} e_2 + 2 \cos^2 t_{11} (1 + \cos t_{11}) (-1 + \cos t_{13}) \right) e_3 \\
& + (2 - 4 \cos t_{11} + 2 \cos 2t_{11} + 2 \cos[t_{11} - 2t_{13}] + \cos 2(t_{11} - t_{13}) - 2 \cos 2t_{11} - t_{13} + 4 \cos t_{13} + 2 \\
& \cos 2t_{13} + \cos 2(t_{11} + t_{13}) - 2 \cos 2t_{11} + t_{13} + 2 \cos[t_{11} + 2t_{13}] - 2 \sin[t_{11} - 2t_{13}] - \sin 2(t_{11} - t_{13}) + 2 \\
& \sin 2t_{11} - t_{13} + 4 \sin t_{13} + 2 \sin 2t_{13} + \sin 2(t_{11} + t_{13}) - 2 \sin 2t_{11} + t_{13} + 2 \sin[t_{11} + 2t_{13}]) (4 (- \\
& 1 + \cos t_{12})) e_1 + 4 \cos t_{13} e_2 + (2 - 2 \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2t_{13}] + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}]) e_3 \sin^2 t_{13} \\
& - 8 \cos t_{11} \sin^2 t_{13} e_1 + 4 (\cos t_{11} \cos t_{12} - \cos t_{13} \sin t_{11} \sin t_{12}) e_2 + (-2 - 2 \cos 2t_{11} \\
& + \cos 2t_{11} - t_{13} - 2 \cos t_{13} + \cos 2t_{11} + t_{13}) e_3 \sin^2 t_{13} (-1 + \cos t_{12}) e_1 - \cos t_{13} e_2 - (2 - 2 \cos t_{11} \\
& + \cos[t_{11} - 2t_{13}] + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}]) e_3 \sin^2 t_{13} (\sin t_{12} e_2 + \sin t_{11} e_3) - \cos t_{11} \sin \\
& t_{12} e_1 + \sin t_{11} e_2 + (-\sin 2t_{11} + \cos t_{13} (2 \sin t_{11} + \sin 2t_{11})) e_3 \sin^2 t_{13} \sin 2t_{11} \sin^2 \\
& t_{13} (\cos t_{13} + \sin t_{13}) - \sin t_{11} (-1 + \cos 2t_{13} + \sin 2t_{13}) (4 (-1 + \cos t_{12})) e_1 + 4 \cos t_{13} e_2 \\
& + (2 - 2 \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2t_{13}] + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}]) e_3 - \sin t_{13} (2 - 2 \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2 \\
& t_{13} + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}] + \sin[t_{11} - 2t_{13}] - 2 \sin 2t_{13} - \sin[t_{11} + 2t_{13}]) (2 \cos t_{11} \sin t_{12} \\
& e_1 - 2 \sin t_{11} e_2 + (\sin 2t_{11} - \cos t_{13} (2 \sin t_{11} + \sin 2t_{11})) e_3 \sin^2 t_{13} - 2 \sin t_{13} \sin^2 t_{11} \sin t_{12} \\
& e_1 + 2 \cos t_{11} e_2 + 4 \cos^2 t_{11} (1 + \cos t_{11}) (-1 + \cos t_{13}) e_3 \sin t_{12} e_2 + \sin t_{11} e_3 + (4 (- \\
& 1 + \cos t_{12})) e_1 + 4 \cos t_{13} e_2 + (2 - 2 \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2t_{13}] + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}]) e_3 \sin^2 \\
& \sin t_{11} \sin^2 t_{13} e_1 - (\cos t_{12} \sin t_{11} + \cos t_{11} \cos t_{13} \sin t_{12}) e_2 + \sin 2t_{11} \sin^2 t_{13} e_3 \\
& - 2 \sin t_{11} \sin^2 t_{13} e_1 + \sin[t_{11} + t_{12}] e_2
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
& 42.4 \sqrt{2} e_1 - 2 \cos t_{13} \sin^2 t_{13} e_1 + e_2 + \cos t_{13} e_3 (4 (-1 + \cos t_{12})) e_1 + 4 \cos t_{13} e_2 \\
& + (2 - 2 \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2t_{13}] + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}]) e_3 (\sin t_{12} e_2 + \sin t_{11} e_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 42.4 e_1 - 2 \cos t_{13} \sin^2 t_{13} e_1 + e_2 + \cos t_{13} e_3 (4 (-1 + \cos t_{12})) e_1 + 4 \cos t_{13} e_2 + (2 - 2 \\
& \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2t_{13}] + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}]) e_3 (\sin t_{12} e_2 + \sin t_{11} e_3)
\end{aligned}$$

222222

$$2222 e_1 (\sin t_{12} e_2 + \sin t_{11} e_3)$$

$$\begin{aligned}
& -8 \cos t_{13} \sin^2 t_{12} (-2 + 2 \cos t_{11} + \cos[t_{11} - 2t_{13}] + 2 \cos 2t_{13} + \cos[t_{11} + 2t_{13}] + \sin[t_{11} - 2t_{13}] - \\
& 2 \sin 2t_{13} - \sin[t_{11} + 2t_{13}]) e_1^2 + 16 (\cos t_{11} + t_{12} e_2 - e_3) ((\cos t_{13} - \sin t_{13}) e_2 + e_3) + 2 e_1 ((-4 + 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos[t_{11}] + 4 \cos[t_{12}] - 4 \cos[t_{11} + t_{12}] + 2 \cos[t_{11} + 2 t_{12}] + 3 \cos[t_{11} - 2 t_{13}] - 2 \cos[t_{12} - 2 t_{13}] - 2 \cos[t_{11} \\ & + t_{12} - 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12} - 2 t_{13}] + 4 \cos[2 t_{13}] + 3 \cos[t_{11} + 2 t_{13}] - 2 \cos[t_{12} + 2 t_{13}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12} \\ & + 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 (t_{12} + t_{13})] + 3 \sin[t_{11} - 2 t_{13}] - 2 \sin[t_{12} - 2 t_{13}] - 2 \sin[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] + \sin[t_{11} + 2 \\ & t_{12} - 2 t_{13}] - 4 \sin[2 t_{13}] - 3 \sin[t_{11} + 2 t_{13}] + 2 \sin[t_{12} + 2 t_{13}] + 2 \sin[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}] - \sin[t_{11} + 2 (t_{12} + t_{13})] \\ &)) e_2 - 2 (-2 + 2 \cos[t_{11}] + 2 \cos[t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] - \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + \cos[t_{12} - 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + t_{12} - 2 \\ & t_{13}] - 2 \cos[t_{11} - t_{13}] - 2 \cos[2 t_{13}] - 2 \cos[t_{11} + t_{13}] - \cos[t_{11} + 2 t_{13}] + \cos[t_{12} + 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + t_{12} + 2 \\ & t_{13}] - \sin[t_{11} - 2 t_{13}] + \sin[t_{12} - 2 t_{13}] + \sin[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] + 2 \sin[2 t_{13}] + \sin[t_{11} + 2 t_{13}] - \sin[t_{12} + 2 t_{13}] - \\ & \sin[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}]) e_3 \end{aligned}$$

$$t_2 \quad 16 \quad 2 \quad e_1 \quad \sin^2[t_{13}] \quad \sin^2[t_{12}] \quad e_1 + e_2 + \cos[t_{13}] e_3 \quad (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3)$$

$$\begin{aligned} & -8 \cos[t_{13}] \sin^2[t_{12}] (-2 + 2 \cos[t_{11}] + \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \cos[2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{13}] - \sin[t_{11} - 2 t_{13}] \\ & + 2 \sin[2 t_{13}] + \sin[t_{11} + 2 t_{13}]) e_1^2 + 16 (\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 - e_3) ((\cos[t_{13}] + \sin[t_{13}]) e_2 + e_3) + 2 e_1 ((- \\ & 4 + 6 \cos[t_{11}] + 4 \cos[t_{12}] - 4 \cos[t_{11} + t_{12}] + 2 \cos[t_{11} + 2 t_{12}] + 3 \cos[t_{11} - 2 t_{13}] - 2 \cos[t_{12} - 2 t_{13}] - 2 \\ & \cos[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12} - 2 t_{13}] + 4 \cos[2 t_{13}] + 3 \cos[t_{11} + 2 t_{13}] - 2 \cos[t_{12} + 2 t_{13}] - 2 \\ & \cos[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}] + \cos[t_{11} + 2 (t_{12} + t_{13})] - 3 \sin[t_{11} - 2 t_{13}] + 2 \sin[t_{12} - 2 t_{13}] + 2 \sin[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] - \\ & \sin[t_{11} + 2 t_{12} - 2 t_{13}] + 4 \sin[2 t_{13}] + 3 \sin[t_{11} + 2 t_{13}] - 2 \sin[t_{12} + 2 t_{13}] - 2 \sin[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}] + \sin[t_{11} \\ & + 2 (t_{12} + t_{13})]) e_2 - 2 (-2 + 2 \cos[t_{11}] + 2 \cos[t_{12}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] - \cos[t_{11} - 2 t_{13}] + \cos[t_{12} - 2 t_{13}] \\ & + \cos[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] - 2 \cos[t_{11} - t_{13}] - 2 \cos[2 t_{13}] - 2 \cos[t_{11} + t_{13}] - \cos[t_{11} + 2 t_{13}] + \cos[t_{12} + 2 t_{13}] \\ & + \cos[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}] + \sin[t_{11} - 2 t_{13}] - \sin[t_{12} - 2 t_{13}] - \sin[t_{11} + t_{12} - 2 t_{13}] - 2 \sin[2 t_{13}] - \sin[t_{11} + 2 t_{13}] \\ & + \sin[t_{12} + 2 t_{13}] + \sin[t_{11} + t_{12} + 2 t_{13}]) e_3 \end{aligned}$$

$$t_2 \quad 16 \quad 2 \quad e_1 \quad \sin^2[t_{13}] \quad \sin^2[t_{12}] \quad e_1 + e_2 + \cos[t_{13}] e_3 \quad (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3)$$

$$\cos[t_{13}] \sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3$$

$$e_1 (\sin[t_{12}] e_2 + \sin[t_{11}] e_3)$$

$$\cos[t_{13}] + \sin[t_{13}]$$

$$2 \cos[t_{13}] \sin^2[t_{12}] e_1 + e_2 + \cos[t_{13}] e_3$$

$$2 \cos[t_{13}] \sin^2[t_{12}] e_1 + e_2 + \cos[t_{13}] e_3$$

100 010 001

$$\begin{aligned} & -4 \cos[t_{11}] + \cos[t_{11}] + 2 \cos^2[t_{11}] \cos[2 t_{13}] \sin^2[t_{12}] \sin^2[t_{13}] e_1^2 - 2 (\cos[t_{11} + t_{12}] e_2 - e_3) \\ & (\cos[t_{13}] e_2 + e_3) + e_1 \cos[t_{13}] (2 \cos[t_{11}] - (3 \cos[t_{11}] - 2 \cos[t_{11} + t_{12}] + \cos[t_{11} + 2 t_{12}]) \cos[t_{13}]) - \end{aligned}$$

$$2(-1+\cos[t_{12}])\sin[t_{13}]^2 e_2 - 2(1-\cos[t_{12}]+\cos[t_{11}+t_{12}]+\cos[t_{11}](-3+2\cos[t_{13}]))+4\cos^2 t_{11} \cos[2t_{13}]\sin^2 t_{12} \sin^2(t_{11}+t_{12}) e_3$$

$$2e_1(\sin[t_{12}]e_2+\sin[t_{11}]e_3)(e_2+\cos[t_{13}]((-1+\cos[t_{12}])e_1+e_3)) - 2\cos[t_{13}](1+\cos[t_{11}]+2\cos^2 t_{11} \cos[2t_{13}]\sin^2 t_{12} e_1^2 + 2(\cos[t_{11}+t_{12}]e_2-e_3)(\cos[t_{13}]e_2+e_3)+e_1(3\cos[t_{11}]-2\cos[t_{11}+t_{12}]+\cos[t_{11}+2t_{12}])\cos[t_{13}]^2 + 2(-1+\cos[t_{12}])\sin[t_{13}]^2 e_2 - 2(-1+\cos[t_{12}])\cos[t_{13}]^2 + \cos[t_{11}](-1+2\cos[t_{13}]+\cos[2t_{13}]))+2\cos[t_{11}+t_{12}]\sin[t_{13}]^2 e_3$$

$$-16\cos^2 t_{11} \sin^2 t_{12} \sin^2 t_{13} \sin[2t_{13}]e_1^2 + 4\sin[t_{13}]e_2(-\cos[t_{11}+t_{12}]e_2+e_3)+e_1(4\cos[t_{11}]\sin[t_{13}]-3\cos[t_{13}])e_2 - 8\cos^2 t_{11} \sin^2 t_{12} \sin^2(t_{11}+t_{12})\sin[2t_{13}]e_3$$

$$4e_1(\sin[t_{12}]e_2+\sin[t_{11}]e_3)(e_2+\cos[t_{13}]((-1+\cos[t_{12}])e_1+e_3))$$

$$-2\sin[t_{11}]\sin^2 t_{13} e_1 + \sin[t_{11}+t_{12}]e_2^2$$

$$e_1(\sin[t_{12}]e_2+\sin[t_{11}]e_3)$$

$$-8\cos^2 t_{11} \cos[t_{13}]\sin^2 t_{12} \sin[2t_{13}]e_1^2 + 4\sin[t_{13}]e_2(\cos[t_{11}+t_{12}]e_2-e_3)+\sin[2t_{13}]e_1((3\cos[t_{11}]-2(-1+\cos[t_{12}])-\cos[t_{11}+t_{12}])e_3)$$

$$4e_1(\sin[t_{12}]e_2+\sin[t_{11}]e_3)(e_2+\cos[t_{13}]((-1+\cos[t_{12}])e_1+e_3))$$

22

$$\cos[t_{13}]\sin[t_{11}]e_1 + \sin[t_{11}+t_{12}]e_2 e_1(\sin[t_{12}]e_2+\sin[t_{11}]e_3)$$

$$2e_1(\sin[t_{12}]e_2+\sin[t_{11}]e_3)(e_2+\cos[t_{13}]((-1+\cos[t_{12}])e_1+e_3)) \sin[t_{13}]$$

$\frac{1}{0} i$

$$e_2+\cos[t_{13}]((-1+\cos[t_{12}])e_1+e_3) (-1+\cos[t_{12}])e_1 + \sec[t_{13}]e_2+e_3$$

9 Apéndice II

MathLab

9.1 3RRR_(RRR)_v

9.1.1 Cinemática Diferencial de La cadena Virtual

```
% Variables de velocidad de entrada
U = [u(1); u(2); u(3)];

% Variables de retroalimentación angular

tPv = u(4);
tv1 = u(5);
tv2 = u(6);
tv3 = u(7);

% Dimensiones de la plataforma

global ev1 ev2 ev3;

ev1 = u(8);
ev2 = u(9);
ev3 = u(10);

tvP=pi/4;

% Cálculo de las velocidades generaliza

Sq=[cos(tPv),-sin(tPv),0;
    sin(tPv),cos(tPv),0; 0,0,1;

%% Con la de Rotacion y eii perfecto para senoidal perfecto linea
recta sistema desplazado

(((cos(tv2+tv3-tvP))*csc(tv2))/ev2), -(csc(tv2)*sin(tv2+tv3-
tvP))/ev2, -1-(csc(tv2)*sin(tv2+tv3)*ev3)/ev2;

csc(tv2)*((-cos(tv3-tvP))/ev1 - (cos(tv2+tv3-tvP))/ev2),
csc(tv2)*((sin(tv3-tvP))/ev1 + (sin(tv2+tv3-tvP))/ev2),
csc(tv2)*((sin(tv3))/ev1 + (sin(tv2+tv3))/ev2)*ev3 ;

(cos(tv3-tvP)*csc(tv2))/ev1, -(csc(tv2)*sin(tv3-tvP))/ev1, -
(csc(tv2)*sin(tv3)*ev3)/ev1;

];

X= Sq*U;
```

```
sys = [X];
```

9.1.2 Cinemática diferencial

3RRR_(RRR)_v

```
% Variables de velocidad de entrada
```

```
wv3 = u(1);  
wv2 = u(2);  
wv1 = u(3);
```

```
% Variables de retroalimentación angular
```

```
tP = u(4);  
t13 = u(5);  
t12 = u(6);  
t11 = u(7);
```

```
t23 = u(8);  
t22 = u(9);  
t21 = u(10);
```

```
t33 = u(11);  
t32 = u(12);  
t31 = u(13);
```

```
tv1 = u(33);  
tv2 = u(34);  
tv3 = u(35);
```

```
global xp yp ;
```

```
xp = u(14);  
yp = u(15);
```

```
% Dimensiones de la plataforma
```

```
global e11 e12 e13 e21 e22 e23 e31 e32 e33 ev1 ev2 ev3;
```

```
e11 = u(16);  
e12 = u(17);  
e13 = u(18);
```

```
e21 = u(19);  
e22 = u(20);  
e23 = u(21);
```

```
e31 = u(22);  
e32 = u(23);
```

```

e33 = u(24);

ev1 = u(25);
ev2 = u(26);
ev3 = u(27);

% Coordinadas del robot y del objetivo

global xt yt kr k_OWR tP1;

xt = u(28);
yt = u(29);

kr = u(30);
k_OWR = u(31);

tP1 = u(32);

U = [wv3; wv2; wv1];

tP_1=pi/6;

tP_2=5*pi/6;

tP_3=3*pi/2;

tP_v=pi/4;

tP=pi/6;
% Cálculo de las velocidades generalizadas

Sq=[
-sin(tP+tP_v)*ev3, -sin(tP+tP_v-tv3)*ev2-
sin(tP+tP_v)*ev3, -sin(tP+tP_v-tv2-tv3)*ev1-sin(tP+tP_v-
tv3)*ev2-sin(tP+tP_v)*ev3;
cos(tP+tP_v)*ev3, cos(tP+tP_v-
tv3)*ev2+cos(tP+tP_v)*ev3, cos(tP+tP_v-tv2-
tv3)*ev1+cos(tP+tP_v-tv3)*ev2+cos(tP+tP_v)*ev3;
-1, -1,
-1;

% % PRIMERA CADENA-----
-----

(e12+csc(t12)*(sin(tP_1-tP_v-t12-t13)*ev3+sin(t12+t13)*e13))/e12,
(csc(t12)*(sin(tP_1-tP_v+tv3-t12-t13)*ev2+sin(tP_1-tP_v-t12-
t13)*ev3+sin(t12)*e12+sin(t12+t13)*e13))/e12,
1/e12*(csc(t12)*(sin(tP_1-tP_v+tv2+tv3-t12-t13)*ev1+sin(tP_1-tP_v+tv3-
t12-t13)*ev2+sin(tP_1-tP_v-t12-
t13)*ev3+sin(t12)*e12+sin(t12+t13)*e13));

-(csc(t12)*(ev3*(sin(tP_1-tP_v-t12-t13)*e11+sin(tP_1-tP_v-
t13)*e12)+(sin(t12+t13)*e11+sin(t13)*e12)*e13))/(e11*e12),
-(csc(t12)*(ev3*(sin(tP_1-tP_v-t12-t13)*e11+sin(tP_1-tP_v-

```

```

t13)*e12)+ev2*(sin(tP_1-tP_v+tv3-t12-t13)*e11+sin(tP_1-tP_v+tv3-
t13)*e12)+(sin(t12+t13)*e11+sin(t13)*e12)*e13)/(e11*e12),
-(csc(t12)*(ev3*(sin(tP_1-tP_v-t12-t13)*e11+sin(tP_1-tP_v-
t13)*e12)+ev2*(sin(tP_1-tP_v+tv3-t12-t13)*e11+sin(tP_1-tP_v+tv3-
t13)*e12)+ev1*(sin(tP_1-tP_v+tv2+tv3-t12-t13)*e11+sin(tP_1-
tP_v+tv2+tv3-
t13)*e12)+(sin(t12+t13)*e11+sin(t13)*e12)*e13))/(e11*e12);

```

```

(csc(t12)*sin(tP_1-tP_v-t13)*ev3+sin(t13)*e13)/e11,
(csc(t12)*(sin(tP_1-tP_v+tv3-t13)*ev2+sin(tP_1-tP_v-
t13)*ev3+sin(t13)*e13))/e11,
(csc(t12)*(sin(tP_1-tP_v+tv2+tv3-t13)*ev1+sin(tP_1-tP_v+tv3-
t13)*ev2+sin(tP_1-tP_v-t13)*ev3+sin(t13)*e13))/e11;

```

```

%SEGUNDA CADENA-----
-----

```

```

(e22+csc(t22)*(sin(tP_2-tP_v-t22-t23)*ev3+sin(t22+t23)*e23))/e22,
(csc(t22)*(sin(tP_2-tP_v+tv3-t22-t23)*ev2+sin(tP_2-tP_v-t22-
t23)*ev3+sin(t22)*e22+sin(t22+t23)*e23))/e22,
1/e22*(csc(t22)*(sin(tP_2-tP_v+tv2+tv3-t22-t23)*ev1+sin(tP_2-tP_v+tv3-
t22-t23)*ev2+sin(tP_2-tP_v-t22-
t23)*ev3+sin(t22)*e22+sin(t22+t23)*e23));

```

```

-(csc(t22)*(ev3*(sin(tP_2-tP_v-t22-t23)*e21+sin(tP_2-tP_v-
t23)*e22)+(sin(t22+t23)*e21+sin(t23)*e22)*e23))/(e21*e22),
-(csc(t22)*(ev3*(sin(tP_2-tP_v-t22-t23)*e21+sin(tP_2-tP_v-
t23)*e22)+ev2*(sin(tP_2-tP_v+tv3-t22-t23)*e21+sin(tP_2-tP_v+tv3-
t23)*e22)+(sin(t22+t23)*e21+sin(t23)*e22)*e23))/(e21*e22),
-(csc(t22)*(ev3*(sin(tP_2-tP_v-t22-t23)*e21+sin(tP_2-tP_v-
t23)*e22)+ev2*(sin(tP_2-tP_v+tv3-t22-t23)*e21+sin(tP_2-tP_v+tv3-
t23)*e22)+ev1*(sin(tP_2-tP_v+tv2+tv3-t22-t23)*e21+sin(tP_2-
tP_v+tv2+tv3-
t23)*e22)+(sin(t22+t23)*e21+sin(t23)*e22)*e23))/(e21*e22);

```

```

(csc(t22)*sin(tP_2-tP_v-t23)*ev3+sin(t23)*e23)/e21,
(csc(t22)*(sin(tP_2-tP_v+tv3-t23)*ev2+sin(tP_2-tP_v-
t23)*ev3+sin(t23)*e23))/e21,
(csc(t22)*(sin(tP_2-tP_v+tv2+tv3-t23)*ev1+sin(tP_2-tP_v+tv3-
t23)*ev2+sin(tP_2-tP_v-t23)*ev3+sin(t23)*e23))/e21;

```

```

%TERCER CADENA-----
-----

```

```

(e32+csc(t32)*(sin(tP_3-tP_v-t32-t33)*ev3+sin(t32+t33)*e33))/e32,
(csc(t32)*(sin(tP_3-tP_v+tv3-t32-t33)*ev2+sin(tP_3-tP_v-t32-
t33)*ev3+sin(t32)*e32+sin(t32+t33)*e33))/e32,
1/e32*(csc(t32)*(sin(tP_3-tP_v+tv2+tv3-t32-t33)*ev1+sin(tP_3-tP_v+tv3-
t32-t33)*ev2+sin(tP_3-tP_v-t32-
t33)*ev3+sin(t32)*e32+sin(t32+t33)*e33));

```

```

-(csc(t32)*(ev3*(sin(tP_3-tP_v-t32-t33)*e31+sin(tP_3-tP_v-
t33)*e32)+(sin(t32+t33)*e31+sin(t33)*e32)*e33))/(e31*e32),
-(csc(t32)*(ev3*(sin(tP_3-tP_v-t32-t33)*e31+sin(tP_3-tP_v-
t33)*e32)+ev2*(sin(tP_3-tP_v+tv3-t32-t33)*e31+sin(tP_3-tP_v+tv3-
t33)*e32)+(sin(t32+t33)*e31+sin(t33)*e32)*e33))/(e31*e32),

```

```

-(csc(t32)*(ev3*(sin(tP_3-tP_v-t32-t33)*e31+sin(tP_3-tP_v-
t33)*e32)+ev2*(sin(tP_3-tP_v+tv3-t32-t33)*e31+sin(tP_3-tP_v+tv3-
t33)*e32)+ev1*(sin(tP_3-tP_v+tv2+tv3-t32-t33)*e31+sin(tP_3-
tP_v+tv2+tv3-
t33)*e32)+(sin(t32+t33)*e31+sin(t33)*e32)*e33))/(e31*e32);

```

```

(csc(t32)*sin(tP_3-tP_v-t33)*ev3+sin(t33)*e33)/e31,
(csc(t32)*(sin(tP_3-tP_v+tv3-t33)*ev2+sin(tP_3-tP_v-
t33)*ev3+sin(t33)*e33))/e31,
(csc(t32)*(sin(tP_3-tP_v+tv2+tv3-t33)*ev1+sin(tP_3-tP_v+tv3-
t33)*ev2+sin(tP_3-tP_v-t33)*ev3+sin(t33)*e33))/e31;

```

```

%CADENA VIRTUAL-----
-----
1,0,0;
0,1,0;
0,0,1;

];
X= Sq*U;

sys = [X];

```

9.2 Delta 4

9.2.1 Cinemática Diferencial de la Cadena Virtual

```

% Programa creado por Asiely Scarlet Boche,
% alumna de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad Nacional
Autónoma de México,
% para el proyecto de tesis "Cinemática Diferencial de un robot
paralelo con una cadena Virtual"
% Rutina para el cálculo de la cinemática de una plataforma móvil
%
% Las entradas están definidas de la siguiente manera:
%
% u(1) = vx_max   Velocidad lineal máxima en el eje "Xp"
% u(2) = vy_max   Velocidad lineal máxima en el eje "Yp"
% u(3) = vz_max   Velocidad lineal máxima en el eje "Zp"
% u(4) = w_max    Velocidad angular máxima de la plataforma móvil
% u(5) = tP       ángulo de orientación de la plataforma con respecto
al sistema {X,Y}
% u(6) = t1      ángulo de orientación de la primera articulación

```

```

% u(7) = t2      ;ngulo de orientaci3n de la segunda articulaci3n
% u(8) = t3      ;ngulo de orientaci3n de la tercer articulaci3n
% u(9) = e1v     Longitud del eslab3n 1 de la cadena virtual
% u(10)= e2v     Longitud del eslab3n 2 de la cadena virtual
% u(11)= e3v     Longitud del eslab3n 3 de la cadena virtual
%
% Las salidas est3n definidas de la siguiente manera:
%
% o(1) = vxP     velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "X"
% o(2) = vyP     velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Y"
% o(3) = vzP     velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Z"
% o(4) = wP      velocidad angular de la plataforma m3vil
% o(5) = w1      velocidad angular de la primer articulaci3n
% o(6) = w2      velocidad angular de la segunda articiulaci3n
% o(7) = w3      velocidad angular de la tercer articulaci3n

% Variables de velocidad de entrada
vxmax = u(1);
vymax = u(2);
vzmax = u(3);
wmax = u(4);
    U = [vxmax;vymax; vzmax; wmax];

% Variables de retroalimentaci3n angular

    tP = u(5);
    t1 = u(6);
    t2 = u(7);
    t3 = u(8);

% Dimensiones de la plataforma

    global e1v e2v e3v;

    e1v = u(9);
    e2v = u(10);
    e3v = u(11);

% C3lculo de las velocidades generaliza

    Sq=[

        -sin(tP),0,cos(tP),0;
        0,1,0,0;
        cos(tP),0,sin(tP),0;
        0,0,0,1;

% Con la de Rotacion y eii perfecto para lineal

        (-csc(t2)*sin(t3))/e1v ,0,(cos(t3)*csc(t2))/e1v,-
        (csc(t2)*sin(t3)*e3v)/e1v;

```

```

        csc(t2)*((sin(t2+t3)/e2v)+sin(t3)/e1v),0,csc(t2)*((-
cos(t2+t3)/e2v)-
cos(t3)/e1v),csc(t2)*e3v*((sin(t2+t3)/e2v)+sin(t3)/e1v);
        (-csc(t2)*sin(t2+t3))/e2v,0,(cos(t2+t3)*csc(t2))/e2v,-1-
(csc(t2)*sin(t2+t3)*e3v)/e2v;

```

```
];
```

```
X= Sq*U;
```

```
sys = [X];
```

9.2.2 Cinemática diferencial Delta 4

```

% Programa creado por Asiely Scarlet Boche,
% alumna de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad Nacional
Autónoma de México,
% para el proyecto de tesis "Cinemática Diferencial de un robot
paralelo con una cadena Virtual"
%
% Rutina para el cálculo de la cinemática de una plataforma móvil de
un manipulador paralelo delta 4
%
% Las entradas están definidas de la siguiente manera:
%
% u(1) = vx_max    Velocidad lineal máxima en el eje "X"
% u(2) = vz_max    Velocidad lineal máxima en el eje "Z"
% u(3) = w_max     Velocidad angular máxima de la plataforma móvil
%
% u(4) = t11      ángulo de orientación de la primera articulación de
la
%                 primera cadena
% u(5) = t12      ángulo de orientación de la segunda articulación de
la
%                 primera cadena
% u(6) = t13      ángulo de orientación de la tercer articulación de
la
%                 primera cadena
% u(7) = t21      ángulo de orientación de la primera articulación de
la
%                 segunda cadena
% u(8) = t22      ángulo de orientación de la segunda articulación de
la
%                 segunda cadena
% u(9) = t23      ángulo de orientación de la tercer articulación de
la
%                 segunda cadena
% u(10) = t31     ángulo de orientación de la primera articulación
de la
%                 tercer cadena
% u(11) = t32     ángulo de orientación de la segunda articulación
de la
%                 tercer cadena
% u(12) = t33     ángulo de orientación de la tercer articulación de
la
%                 tercer cadena
% u(13) = t41     ángulo de orientación de la primera articulación

```

```

de la
%
% cuarta cadena
% u(14) = t42      ;ngulo de orientación de la segunda articulación
de la
%
% cuarta cadena
% u(15) = t43      ;ngulo de orientación de la tercer articulación de
la
%
% cuarta cadena
% u(16) = xp      posición del efector final sobre el eje X
% u(17) = yp      posición del efector final sobre el eje Y
% u(18) = zp      posición del efector final sobre el eje Z
%
%
% u(19) = e1      Longitud del eslabón 1
% u(20) = e2      Longitud del eslabón 2
% u(21) = e3      Longitud del eslabón 3
% u(22) = g      Longitud del eslabón de la plataforma móvil
% u(24) = vymax   Velocidad lineal máxima en el eje "Y"
%
% Las salidas están definidas de la siguiente manera:
%
% o(1) = vxP      velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "X"
% o(2) = vyP      velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Y"
% o(3) = vzP      velocidad lineal del punto "P" sobre el eje "Z"
% o(4) = wP      velocidad angular de la plataforma móvil
% o(5) = w11     velocidad angular de la primer articulación
% o(6) = w12     velocidad angular de la segunda articiulacin
% o(7) = w13     velocidad angular de la tercer articulación
% o(8) = w21     velocidad angular de la primer articulación
% o(9) = w22     velocidad angular de la segunda articiulacin
% o(10)= w23     velocidad angular de la tercer articulación
% o(11)= w31     velocidad angular de la primer articulación
% o(12)= w32     velocidad angular de la segunda articiulacin
% o(13)= w33     velocidad angular de la tercer articulación
% o(14)= w41     velocidad angular de la primer articulación
% o(15)= w42     velocidad angular de la segunda articiulacin
% o(16)= w43     velocidad angular de la tercer articulación

%*****%
%Clculo de las velocidades
%tp=0;
Sq =[
-sin(tp),0,cos(tp),0;
0,1,0,0;
cos(tp),0,sin(tp),0;
0,0,0,1;

% cos(tp),0,-sin(tp),0;
% 0,1,0,0;
% sin(tp),0,cos(tp),0;
% 0,0,0,1;

% -cos(tp),0,sin(tp),0;
% 0,1,0,0;
% -sin(tp),0,cos(tp),0;
% 0,0,0,1;

%Primera cadena 1

```

```

%
0,0,(8*(cos(t11/2)^2)*sin(t13)*(sin(t12/2)^2)*(sin(2*t13))*(e1^2)+4*cos(t13)*e2*(cos(t11+t12)*e2-e3)+sin(2*t13)*e1*((-2+3*cos(t11)+2*cos(t12)-2*cos(t11+t12)+cos(t11+2*t12))*e2-2*(-1+cos(t11)+cos(t12)-cos(t11+t12))*e3))/(4*e1*(sin(t12)*e2+sin(t11)*e3)*(e2+sin(t13))*((-1+cos(t12))*e1+e3)),0;
% 0,0,-
(8*(sin((t11/2))^2)*(sin(t12/2)^2)*(1+sin(t13))*sin(2*t13)*(e1^2)+4*cos(t13)*e2*(-cos(t11+t12)*e2+e3)+e1*(-(4*cos(t11)*cos(t13)+(-2+3*cos(t11)+2*cos(t12)-2*cos(t11+t12)+cos(t11+2*t12))*sin(2*t13))*e2+8*cos((t11+t12)/2)*sin(t11/2)*sin(t12/2)*sin(2*t13)*e3))/(4*e1*(sin(t12)*e2+sin(t11)*e3)*(e2+sin(t13))*((-1+cos(t12))*e1+e3)),0;
% 0,0,sin(t13)/(-2*(sin(t12/2)^2)*sin(t13)*e1+e2+sin(t13)*e3),0;

% -((16*((sin(t12/2))^2)*(-1+sin(t13))*((sin(t11/2))^2)+((cos(t11/2))^2)*(cos(2*t13)+sin(2*t13)))*(e1^2)-8*(cos(t11+t12)*e2-e3)*((cos(t13)-sin(t13))*e2-e3)+2*e1*((-2+cos(t11)+2*cos(t12)-2*cos(t11+t12)+3*cos(t11+2*t12)+4*cos(t11-2*t12)*cos(t13)-(cos(t11)-2*(1+cos(t12)+cos(t11+t12))+3*cos(t11+2*t12))*cos(2*t13)-4*cos(t11+2*t12)*sin(t13)-(cos(t11)-2*(-1+cos(t12)+cos(t11+t12))+3*cos(t11+2*t12))*sin(2*t13))*e2+2*(1-cos(t12)+cos(t11+t12)+cos(t11+2*t12))*(-3+2*sin(t13))+2*sin(t12/2)*(-sin((t12/2))+sin(t11+3*t12/2))*cos(2*t13)+sin(2*t13))*e3))/(8*sqrt(2))*e1*(sin(t12)*e2-sin(t11+2*t12)*e3)*(e2+sin(t13))*((-1+cos(t12))*e1+e3))),0,0,0;
% -(sin(t11+2*t12)*sin(t13)*e1+sin(t11+t12)*e2)/(e1*(sin(t12)*e2-sin(t11+2*t12)*e3)), -
(8*(sin(t12/2)^2)*(sin(t13))*((sin(t12+t11/2)^2)+(cos(t12+t11/2)^2)*(cos(2*t13)-sin(2*t13)))*(e1^2)+4*(cos(t11+t12)*e2-e3)*((cos(t13)-sin(t13))*e2-e3)+e1*((-2+2*cos(t12)-2*cos(t11+t12)+3*cos(t11+2*t12)-2*cos(2*t13)+(2*(cos(t12)+cos(t11+2*t12))-3*cos(t11+2*t12))*cos(2*t13)-sin(2*t13))+2*sin(2*t13)+cos(t11)*(1-cos(2*t13)+sin(2*t13)))*e2+4*(1-cos(t11+2*t12)*sin(t13)+sin(t12/2)*sin(t11+3*t12/2)*(1+cos(2*t13)-sin(2*t13))+((sin(t12/2))^2)*(1-cos(2*t13)+sin(2*t13))*e3))/(4*sqrt(2))*e1*(sin(t12)*e2-sin(t11+2*t12)*e3)*(e2+sin(t13))*((-1+cos(t12))*e1+e3)),(8*(sin(t12/2)^2)*sin(t13))*((sin(t12+t11/2)^2)+(cos(t12+t11/2)^2)*(cos(2*t13)+sin(2*t13)))*(e1^2)-4*(cos(t11+t12)*e2-e3)*((cos(t13)-sin(t13))*e2-e3)+e1*((2*cos(t12)-2*cos(t11+t12)+3*cos(t11+2*t12)-cos(t11))*(-1+cos(2*t13)+sin(2*t13))+2*(cos(t12)+cos(t11+t12))-3*cos(t11+2*t12))*cos(2*t13)+sin(2*t13))-2*(1+cos(2*t13)+sin(2*t13))*e2+4*(cos(t11+2*t12)*sin(t13)-(sin(t12/2)^2)*(-1+cos(2*t13)+sin(2*t13))+sin(t12/2)*sin((3*t12/2)+t11)*(1+cos(2*t13)+sin(2*t13))*e3))/(4*sqrt(2))*e1*(sin(t12)*e2-sin(t11+2*t12)*e3)*(e2+sin(t13))*((-1+cos(t12))*e1+e3)),0;
% 0,0,-(cos(t13)-sin(t13))/(sqrt(2))*(e2+sin(t13))*((-1+cos(t12))*e1+e3)),0;

% % %sin giro f1

% t1
-

```

```

(cos(t11)*(1+sin(t13))*e1+sin(t11+t12)*e2)/(e1*(sin(t12)*e2+sin(t11+2*
t12)*e3)), -((-
16*((cos(t11/2)^2)+cos(2*t13)*(sin(t11/2)^2))*(sin(t12/2)^2)*sin(t13)*
(e1^2)+8*(cos(t11+t12)*e2-
e3)*(sin(t13)*e2+e3)+4*e1*((4*(cos(t13)^2)*(sin(t12/2)^2)+(3*cos(t11)-
2*cos(t11+t12)+cos(t11+2*t12))*(sin(t13)^2))*e2+2*(cos(t11)*sin(t13)+2
*sin(t12/2)*((cos(t13)^2)*sin(t11+(t12/2))+sin(t12/2)*(sin(t13)^2)))*e
3))/(8*e1*(sin(t12)*e2+sin(t11)*e3)*(e2+sin(t13))*((-
1+cos(t12))*e1+e3))), -(-
8*(sin((t11/2))^2)*(sin(t12/2)^2)*(1+sin(t13))*sin(2*t13)*(e1^2)+4*cos
(t13)*e2*(-cos(t11+t12)*e2+e3)+e1*(-(4*cos(t11)*cos(t13)+(-
2+3*cos(t11)+2*cos(t12)-
2*cos(t11+t12)+cos(t11+2*t12))*sin(2*t13))*e2+8*cos((t11+t12)/2)*sin(t
11/2)*sin(t12/2)*sin(2*t13)*e3))/(4*e1*(sin(t12)*e2+sin(t11)*e3)*(e2+s
in(t13))*((-1+cos(t12))*e1+e3))), 0;

```

```
% t2
```

```

((-
16*((cos(t11/2)^2)+cos(2*t13)*(sin(t11/2)^2))*(sin(t12/2)^2)*sin(t13)*
(e1^2)+8*(cos(t11+t12)*e2-
e3)*(sin(t13)*e2+e3)+4*e1*((4*(cos(t13)^2)*(sin(t12/2)^2)+(3*cos(t11)-
2*cos(t11+t12)+cos(t11+2*t12))*(sin(t13)^2))*e2+2*(cos(t11)*sin(t13)+2
*sin(t12/2)*((cos(t13)^2)*sin(t11+(t12/2))+sin(t12/2)*(sin(t13)^2)))*e
3))/(8*e1*(sin(t12)*e2+sin(t11)*e3)*(e2+sin(t13))*((-
1+cos(t12))*e1+e3))), -
(8*(cos(t11/2)^2)*sin(t13)*(sin(t12/2)^2)*(sin(2*t13))*(e1^2)+4*cos(t1
3)*e2*(cos(t11+t12)*e2-e3)+sin(2*t13)*e1*((-2+3*cos(t11)+2*cos(t12)-
2*cos(t11+t12)+cos(t11+2*t12))*e2-2*(-1+cos(t11)+cos(t12)-
cos(t11+t12))*e3))/(4*e1*(sin(t12)*e2+sin(t11)*e3)*(e2+sin(t13))*((-
1+cos(t12))*e1+e3))), (cos(t11)*cos(t13)*e1+cos(t11+t12)*e2)/(e1*(cos(t
12)*e2+cos(t11)*e3)), 0;

```

```
% t3
```

```

0, (cos(t13))/(2*(sin(t12/2)^2)*sin(t13)*e1+e2+sin(t13)*e3), +4.45*cos(-
pi/6)*((sin(t13))/(2*(sin(t12/2)^2)*sin(t13)*e1+e2+sin(t13)*e3)), 0;

```

```
%Segunda Cadena
```

```
% t1
```

```

-
(cos(t21)*(1+sin(t23))*e1+sin(t21+t22)*e2)/(e1*(sin(t22)*e2+sin(t21+2*
t22)*e3)), -((-
16*((cos(t21/2)^2)+cos(2*t23)*(sin(t21/2)^2))*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*
(e1^2)+8*(cos(t21+t22)*e2-
e3)*(sin(t23)*e2+e3)+4*e1*((4*(cos(t23)^2)*(sin(t22/2)^2)+(3*cos(t21)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*(sin(t23)^2))*e2+2*(cos(t21)*sin(t23)+2
*sin(t22/2)*((cos(t23)^2)*sin(t21+(t22/2))+sin(t22/2)*(sin(t23)^2)))*e
3))/(8*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*((-
1+cos(t22))*e1+e3))), (-
8*(sin((t21/2))^2)*(sin(t22/2)^2)*(1+sin(t23))*sin(2*t23)*(e1^2)+4*cos
(t23)*e2*(-cos(t21+t22)*e2+e3)+e1*(-(4*cos(t21)*cos(t23)+(-
2+3*cos(t21)+2*cos(t22)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*sin(2*t23))*e2+8*cos((t21+t22)/2)*sin(t
21/2)*sin(t22/2)*sin(2*t23)*e3))/(4*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+s
in(t23))*((-1+cos(t22))*e1+e3))), 0;

```

```
% t2
```

```

((-
16*((cos(t21/2)^2)+cos(2*t23)*(sin(t21/2)^2))*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*
(e1^2)+8*(cos(t21+t22)*e2-
e3)*(sin(t23)*e2+e3)+4*e1*((4*(cos(t23)^2)*(sin(t22/2)^2)+(3*cos(t21)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*(sin(t23)^2))*e2+2*(cos(t21)*sin(t23)+2

```

```

* sin(t22/2) * ((cos(t23)^2) * sin(t21+(t22/2)) + sin(t22/2) * (sin(t23)^2)) * e3) / (8*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*(-1+cos(t22))*e1+e3)), -
(8*(cos(t21/2)^2)*sin(t23)*(sin(t22/2)^2)*(sin(2*t23))*(e1^2)+4*cos(t23)*e2*(cos(t21+t22)*e2-e3)+sin(2*t23)*e1*(-2+3*cos(t21)+2*cos(t22)-2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*e2-2*(-1+cos(t21)+cos(t22)-cos(t21+t22))*e3)/(4*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*(-1+cos(t22))*e1+e3)), (cos(t21)*cos(t23)*e1+cos(t21+t22)*e2)/(e1*(cos(t22)*e2+cos(t21)*e3)), 0;
    % t3

0, (cos(t23))/(2*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*e1+e2+sin(t23)*e3), +4.45*cos(-pi/6)*(sin(t23))/(2*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*e1+e2+sin(t23)*e3), 0;
%
%
% -(8*(sin(t22/2)^2)*(-1+sin(t23))*((sin(t21/2)^2)+(cos(t21/2)^2)*(cos(2*t23)-sin(2*t23)))*(e1^2)-4*(cos(t21+t22)*e2-e3)*((cos(t23)+sin(t23))*e2+e3)+e1*((2-2*cos(t22)+2*cos(t21+t22)-cos(t21+2*t22)+2*cos(t23)+cos(t21))*(-3-4*cos(t23)+3*cos(2*t23)+4*sin(t23)-3*sin(2*t23)))+(-2*(cos(t22)+cos(t21+t22))+cos(t21+2*t22))*(cos(2*t23)-sin(2*t23))-2*sin(2*t23))*e2+2*(-1+cos(t22))-cos(t21+t22)+cos(t21)*(3-2*sin(t23))+4*cos(t21/2)*sin(t22/2)*sin(1/2*(t21+t22))*(cos(2*t23)-sin(2*t23))*e3)/(4*sqrt(2)*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*((-1+cos(t22))*e1+e3))), 0, -(8*(sin(t22/2)^2)*(-1+sin(t23))*((sin(t21/2)^2)+(cos(t21/2)^2)*(cos(2*t23)-sin(2*t23)))*(e1^2)-4*(cos(t21+t22)*e2-e3)*((cos(t23)-sin(t23))*e2+e3)+e1*((2*cos(t22)-2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22)+cos(t21)*(3+4*cos(t23)-3*cos(t23)-4*sin(t23)-3*sin(2*t23)))+(2*(cos(t22)+cos(t21+t22))-cos(t21+t22))*(cos(2*t23)+sin(2*t23))-2*(1+cos(2*t23)+sin(2*t23))*e2+2*e3+2*(-cos(t22)+cos(t21+t22)+cos(t21)*(3+2*sin(t23)))-2*sin(t22/2)*(sin(t21+(t22/2))+sin(t22/2))*(cos(2*t23)+sin(2*t23))*e3)/(4*sqrt(2)*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*((-1+cos(t22))*e1+e3))), -(sin(t21)*(-1+sin(t23))*e1+sin(t21+t22)*e2)/(e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)));
    % (2*(sin(t22/2)^2)*(cos(t23)-cos(3*t23))-4*(cos(t23)^2)*sin(t23)+4*cos(t21)*sin(t23)^2*(cos(t23)+sin(t23)))*(e1^2)-4*(cos(t21+t22)*e1-e3)*((cos(t23)+sin(t23))*e2+e3)+e1*((2-2*cos(t22)+2*cos(t21+t22))-cos(t21+2*t22)+2*cos(2*t23)+3*cos(t21))*(-1+cos(2*t23)-sin(2*t23))+(-2*(cos(t22)+cos(t21+t22))+cos(t21+2*t22))*(cos(2*t23)-sin(2*t23))-2*sin(2*t23))*e2-2*(1-cos(t22)+cos(t21+t22)+cos(t21))*(-1+2*sin(t23))+4*cos(t21/2)*sin(t22/2)*sin(1/2*(t21+t22))*(cos(2*t23)+sin(2*t23))*e3)/(4*sqrt(2)*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*((-1+cos(t22))*e1+e3))), 0, -((-4*(sin(t22/2)^2)*(cos(t23)-cos(3*t23)+sin(t23))+4*cos(t21)*(cos(t23)-sin(t23))*(sin(t23)^2)+sin(3*t23))*(e1^2)+8*(cos(t21+t22)*e2-e3)*((cos(t23)-sin(t23))*e2-e3)+2*e1*((-2*cos(t22)+2*cos(t21+t22))-cos(t21+2*t22)+3*cos(t21))*(-1+cos(2*t23)+sin(2*t23)))+(-2*(cos(t22)+cos(t21+t22))+cos(t21+2*t22))*(cos(2*t23)+sin(2*t23))+2*(1+cos(2*t23)+sin(2*t23))*e2+2*(-1+cos(t22))-cos(t21+t22)+cos(t21)*(1-2*sin(t23))+4*cos(t21/2)*sin(t22/2)*sin(1/2*(t21+t22))*(cos(2*t23)+sin(2*t23))*e3))/(8*sqrt(2)*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*((-1+cos(t22))*e1+e3))), (sin(t21)*sin(t23)*e1+sin(t21+t22)*e2)/e1*(sin(t

```

```

22)*e2+sin(t21*e3));
% (-cos(t23)+sin(t23))/(sqrt(2))*(e2+cos(t23))*((-
1+cos(t22))*e1+e3)),0,(cos(t23)+sin(t23))/(sqrt(2))*(e2+cos(t23))*((-
1+cos(t22))*e1+e3)),0;

% t1
%completo
%-
(cos(t31)*(1+sin(t33))*e1+sin(t31+t32)*e2)/(e1*(sin(t32)*e2+sin(t31+2*
t32)*e3)),-((-
16*((cos(t31/2)^2)+cos(2*t33)*(sin(t31/2)^2))*(sin(t32/2)^2)*sin(t33)*
(e1^2)+8*(cos(t31+t32)*e2-
e3)*(sin(t33)*e2+e3)+4*e1*((4*(cos(t33)^2)*(sin(t32/2)^2)+(3*cos(t31)-
2*cos(t31+t32)+cos(t31+2*t32))*(sin(t33)^2))*e2+2*(cos(t31)*sin(t33)+2
*sin(t32/2)*(cos(t33)^2)*sin(t31+(t32/2))+sin(t32/2)*(sin(t33)^2))*e
3))/(8*e1*(sin(t32)*e2+sin(t31)*e3)*(e2+sin(t33))*((-
1+cos(t32))*e1+e3))),(-
8*(sin((t31/2)^2)*(sin(t32/2)^2)*(1+sin(t33))*sin(2*t33)*(e1^2)+4*cos
(t33)*e2*(-cos(t21+t22)*e2+e3)+e1*(-(4*cos(t21)*cos(t23)+(-
2+3*cos(t21)+2*cos(t22)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*sin(2*t23))*e2+8*cos((t21+t22)/2)*sin(t
21/2)*sin(t22/2)*sin(2*t23)*e3))/(4*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin
(t23))*((-1+cos(t22))*e1+e3))),0;
% t2
%((-
16*((cos(t21/2)^2)+cos(2*t23)*(sin(t21/2)^2))*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*
(e1^2)+8*(cos(t21+t22)*e2-
e3)*(sin(t23)*e2+e3)+4*e1*((4*(cos(t23)^2)*(sin(t22/2)^2)+(3*cos(t21)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*(sin(t23)^2))*e2+2*(cos(t21)*sin(t23)+2
*sin(t22/2)*(cos(t23)^2)*sin(t21+(t22/2))+sin(t22/2)*(sin(t23)^2))*e
3))/(8*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*((-
1+cos(t22))*e1+e3))),-
(8*(cos(t21/2)^2)*sin(t23)*(sin(t22/2)^2)*(sin(2*t23))*(e1^2)+4*cos(t2
3)*e2*(cos(t21+t22)*e2-e3)+sin(2*t23)*e1*(-(2+3*cos(t21)+2*cos(t22)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*e2-2*(-1+cos(t21)+cos(t22)-
cos(t21+t22))*e3))/(4*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*((-
1+cos(t22))*e1+e3))),cos(t21)*cos(t23)*e1+cos(t21+t22)*e2)/(e1*(cos(t
22)*e2+cos(t21)*e3)),0;
% t3
%0,(cos(t23))/(2*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*e1+e2+sin(t23)*e3),+4.45*cos(-
pi/6)*(sin(t23))/(2*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*e1+e2+sin(t23)*e3),0;
%

%para trayectoria en z
0,0,(-
8*(sin((t31/2)^2)*(sin(t32/2)^2)*(1+sin(t33))*sin(2*t33)*(e1^2)+4*cos
(t33)*e2*(-cos(t31+t32)*e2+e3)+e1*(-(4*cos(t31)*cos(t33)+(-
2+3*cos(t31)+2*cos(t32)-
2*cos(t31+t32)+cos(t31+2*t32))*sin(2*t33))*e2+8*cos((t31+t32)/2)*sin(t
31/2)*sin(t32/2)*sin(2*t33)*e3))/(4*e1*(sin(t32)*e2+sin(t31)*e3)*(e2+sin
(t33))*((-1+cos(t32))*e1+e3))),0;
0,0,(cos(t31)*cos(t33)*e1+cos(t31+t32)*e2)/(e1*(cos(t32)*e2+cos(t31)*e
3)),0;
0,0,+4.45*cos(-
pi/6)*(sin(t33))/(2*(sin(t32/2)^2)*sin(t33)*e1+e2+sin(t33)*e3),0;

% -((-8*(sin(t32/2)^2)*(-
1+sin(t33))*((sin(t31/2)^2)+cos(t31/2)^2)*(cos(2*t33)+sin(2*t33)))*(e
1^2)+4*(cos(t31+t32)*e2-e3)*(cos(t33)-sin(t33))*e2-e3)+e1*((-

```

```

2*cos(t32)+2*cos(t31+t32)-cos(t31+2*t32)+(-
2*(cos(t32)+cos(t31+t32))+cos(t31+2*t32))*cos(2*t33)+sin(2*t33))+2*(1
+cos(2*t33)+sin(2*t33))+cos(t31)*(-3-
4*cos(t33)+3*cos(2*t33)+4*sin(t33)+3*sin(2*t33))*e2+2*(-1+cos(t32)-
cos(t31+t32)+cos(t31)*(3-
2*sin(t33))+4*cos(t31/2)*sin(t32/2)*sin(1/2*(t31+t32))*(cos(2*t33)+sin
(2*t33))*e3))/(4*sqrt(2)*e1*(sin(t32)*e2+sin(t31)*e3)*(e2+sin(t33))*(-
-1+cos(t32))*e1+e3))),0,-((8*(sin(t32/2)^2)*(-
1+sin(t33))*((sin(t31/2)^2)+(cos(t31/2)^2)*cos(2*t33)-
sin(2*t33)))*(e1^2)-4*(cos(t31+t32)*e2-
e3)*((cos(t33)+sin(t33))*e2+e3)+e1*((2-2*cos(t32)+2*cos(t31+t32)-
cos(t31+2*t32)+2*cos(2*t33)+cos(t31)*(-
3+4*cos(t33)+3*cos(2*t33)+4*sin(t33)-3*sin(2*t33)))+(-
2*(cos(t32)+cos(t31+t32))+cos(t31+2*t32))*cos(2*t33)-sin(2*t33))-
2*sin(2*t33))*e2+2*(-1+cos(t32)-cos(t31+t32)+cos(t31)*(3-
2*sin(t33))+4*cos(t31/2)*sin(t32/2)*sin(1/2*(t31+t32))*(cos(2*t33)-
sin(2*t33))*e3))/(4*sqrt(2)*e1*(sin(t32)*e2+sin(t31)*e3)*(e3+sin(t33)
*(-1+cos(t32))*e1+e3))),-(sin(t31)*(-
1+sin(t33))*e1+sin(t31+t32)*e3)/(e1*(sin(t32)*e2+sin(t31)*e3));
% (-2*(sin(t32/2)^2)*cos(t33)-cos(3*t33)+4*cos(t31)*cos(t33)-
sin(t33))*sin(t33)+sin(3*t33))*e1^2+4*(cos(t31+t32)*e2-
e3)*((cos(t33)-sin(t33))*e2+e3)+e1*((-2-2*cos(t32)+2*cos(t31+t32)-
cos(t31+2*t32)+3*cos(t31)*(-1+cos(2*t33)+sin(2*t33))+(-2*(cos(t32)-
cos(t31+t32))+cos(t31+2*t32))*cos(2*t33)-
sin(2*t33))+2*(1+cos(2*t33)+sin(2*t33))*e2+2*(-1+cos(t32)-
cos(t31+t32)+cos(t31)*(1-
2*sin(t33))+4*cos(t31/2)*sin(t32/2)*sin(1/2*(t31+t32))*(cos(2*t33)+sin
(2*t33))*e3))/(4*sqrt(2)*e1*(sin(t32)*e2+sin(t31)*e3)*(e2+sin(t33))*(-
-1+cos(t32))*e1+e3))),0,(2*(sin(t32/2)^2)*cos(t33)-cos(3*t33)-
4*(cos(t33)^2)*sin(t33)+4*cos(t31)*sin(t33)^2*cos(t33)+sin(t33))*e1^2-4*(cos(t31+t32)*e2-e3)*((cos(t33)+sin(t33))*e2+e3)+e1*((2-
2*cos(t32)+2*cos(t31+t32)-cos(t31+2*t32)+2*cos(2*t33)+3*cos(t31)*(-
1+cos(2*t33)-sin(2*t33)))+(-
2*(cos(t32)+cos(t31+t32))+cos(t31+2*t32))*cos(2*t33)-sin(2*t33))-
2*sin(2*t33))*e2-2*(1-cos(t32)+cos(t31+t32)+cos(t31)*(-
1+2*sin(t33))+4*cos(t31/2)*sin(t32/2)*sin(1/2*(t31+t32))*(-
cos(2*t33)+sin(2*t33))*e3))/(4*sqrt(2)*e1*(sin(t32)*e2+sin(t31)*e3)*(e2+sin(t33))*(-
1+cos(t32))*e1+e3))),(sin(t31)*sin(t33)*e1+sin(t31+t32)*e2)/e1*(sin(t3
2)*e2+sin(t31)*e3));
% -(cos(t33)+sin(t33))/((sqrt(2))*(e2+cos(t33))*(-
1+cos(t32))*e1+e2))),0,(-
cos(t33)+sin(t33))/((sqrt(2))*(e2+cos(t33))*(-1+cos(t32))*e1+e2))),0;

%Cuarta Cadena
%0,0,0,0; 0,0,0,0; 0,0,0,0;

%completa
% % t1
% -
(cos(t21)*(1+sin(t23))*e1+sin(t21+t22)*e2)/(e1*(sin(t22)*e2+sin(t21+2*
t22)*e3)),-(
16*((cos(t21/2)^2)+cos(2*t23)*(sin(t21/2)^2))*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*
(e1^2)+8*(cos(t21+t22)*e2-
e3)*(sin(t23)*e2+e3)+4*e1*((4*(cos(t23)^2)*(sin(t22/2)^2)+(3*cos(t21)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*(sin(t23)^2))*e2+2*(cos(t21)*sin(t23)+2
*sin(t22/2)*((cos(t23)^2)*sin(t21+(t22/2))+sin(t22/2)*(sin(t23)^2)))*e
3))/(8*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23))*(-
1+cos(t22))*e1+e3))),(-

```

```

8*(sin((t21/2))^2)*(sin(t22/2)^2)*(1+sin(t23))*sin(2*t23)*(e1^2)+4*cos
(t23)*e2*(-cos(t21+t22)*e2+e3)+e1*(-(4*cos(t21)*cos(t23))+(-
2+3*cos(t21)+2*cos(t22)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*sin(2*t23))*e2+8*cos((t21+t22)/2)*sin(t
21/2)*sin(t22/2)*sin(2*t23)*e3)/(4*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+s
in(t23)*((-1+cos(t22))*e1+e3))),0;
%% t2
% ((-
16*((cos(t21/2)^2)+cos(2*t23)*(sin(t21/2)^2))*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*
(e1^2)+8*(cos(t21+t22)*e2-
e3)*(sin(t23)*e2+e3)+4*e1*((4*(cos(t23)^2)*(sin(t22/2)^2)+(3*cos(t21)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*sin(t23)^2))*e2+2*(cos(t21)*sin(t23)+2
*sin(t22/2)*((cos(t23)^2)*sin(t21+(t22/2))+sin(t22/2)*(sin(t23)^2))*e
3))/(8*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23)*((-
1+cos(t22))*e1+e3))),-
(8*(cos(t21/2)^2)*sin(t23)*(sin(t22/2)^2)*(sin(2*t23))*e1^2)+4*cos(t2
3)*e2*(cos(t21+t22)*e2-e3)+sin(2*t23)*e1*((-2+3*cos(t21)+2*cos(t22)-
2*cos(t21+t22)+cos(t21+2*t22))*e2-2*(-1+cos(t21)+cos(t22)-
cos(t21+t22))*e3))/(4*e1*(sin(t22)*e2+sin(t21)*e3)*(e2+sin(t23)*((-
1+cos(t22))*e1+e3))),(cos(t21)*cos(t23)*e1+cos(t21+t22)*e2)/(e1*(cos(t
22)*e2+cos(t21)*e3)),0;
%% t3
%
0,(cos(t23))/(2*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*e1+e2+sin(t23)*e3),+4.45*cos(-
pi/6)*sin(t23))/(2*(sin(t22/2)^2)*sin(t23)*e1+e2+sin(t23)*e3),0;

%para trayectoria en z
0,0,(-
8*(sin((t41/2))^2)*(sin(t42/2)^2)*(1+sin(t43))*sin(2*t43)*(e1^2)+4*cos
(t43)*e2*(-cos(t41+t42)*e2+e3)+e1*(-(4*cos(t41)*cos(t43))+(-
2+3*cos(t41)+2*cos(t42)-
2*cos(t41+t42)+cos(t41+2*t42))*sin(2*t43))*e2+8*cos((t41+t42)/2)*sin(t
41/2)*sin(t42/2)*sin(2*t43)*e3)/(4*e1*(sin(t42)*e2+sin(t41)*e3)*(e2+s
in(t43)*((-1+cos(t42))*e1+e3))),0;
0,0,(cos(t41)*cos(t43)*e1+cos(t41+t42)*e2)/(e1*(cos(t42)*e2+cos(t41)*e
3)),0;
0,0,+4.45*cos(-
pi/6)*sin(t43))/(2*(sin(t42/2)^2)*sin(t43)*e1+e2+sin(t43)*e3),0;

];

X = Sq*U;
sys = [X];

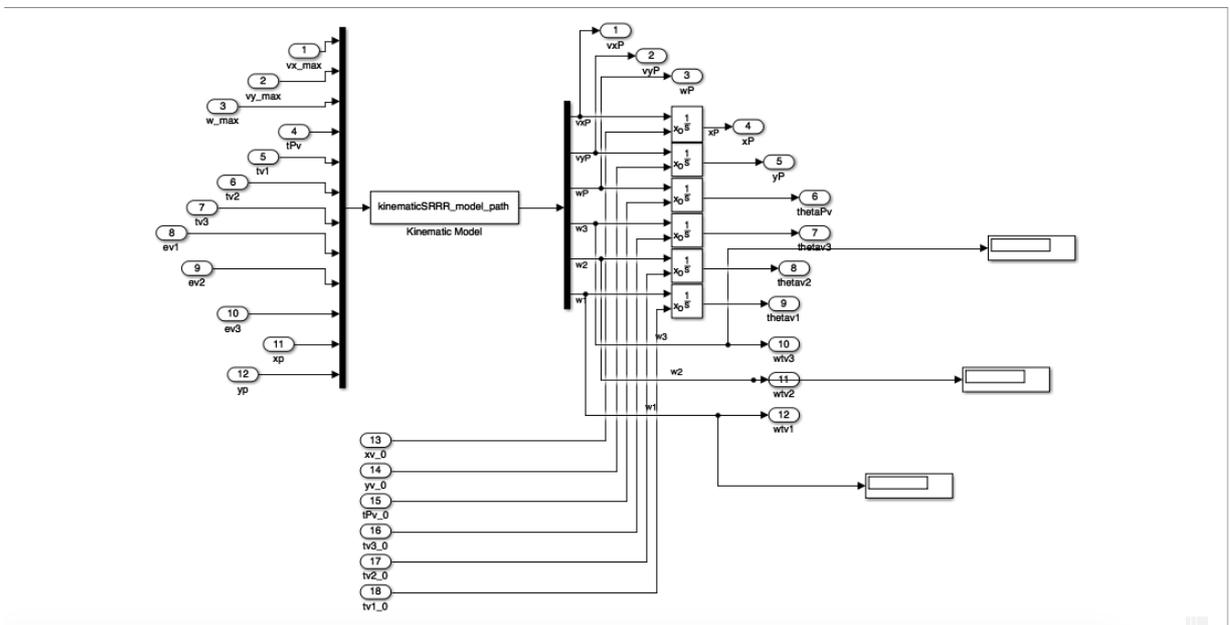
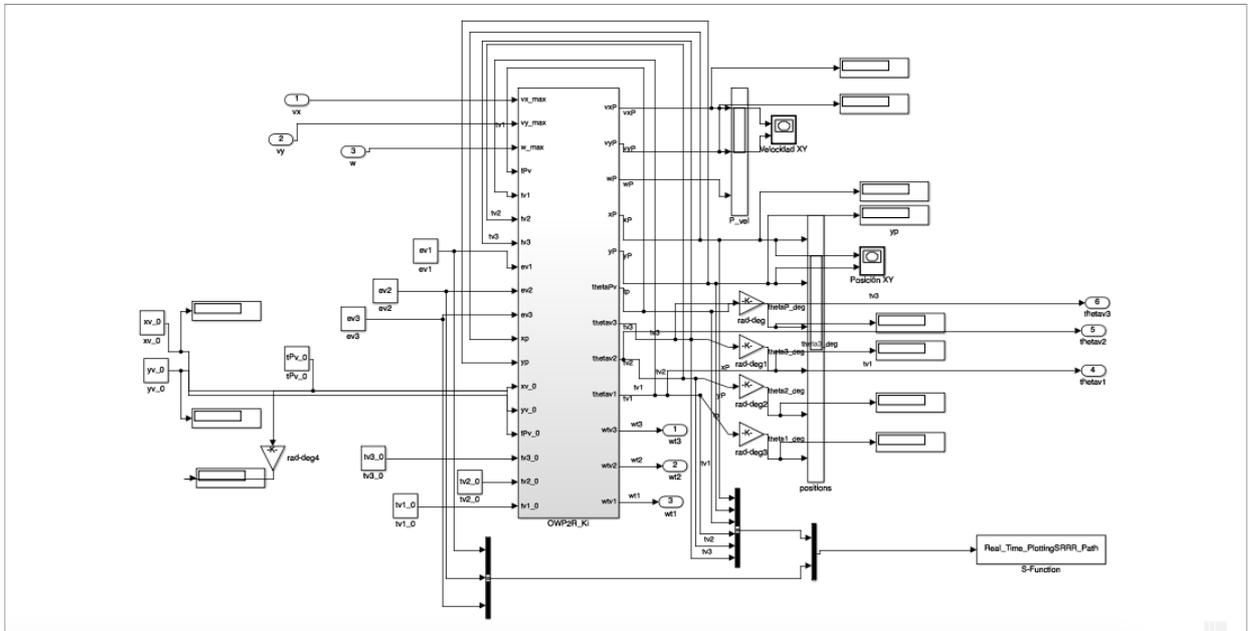
```

10 Apéndice III

Simulink

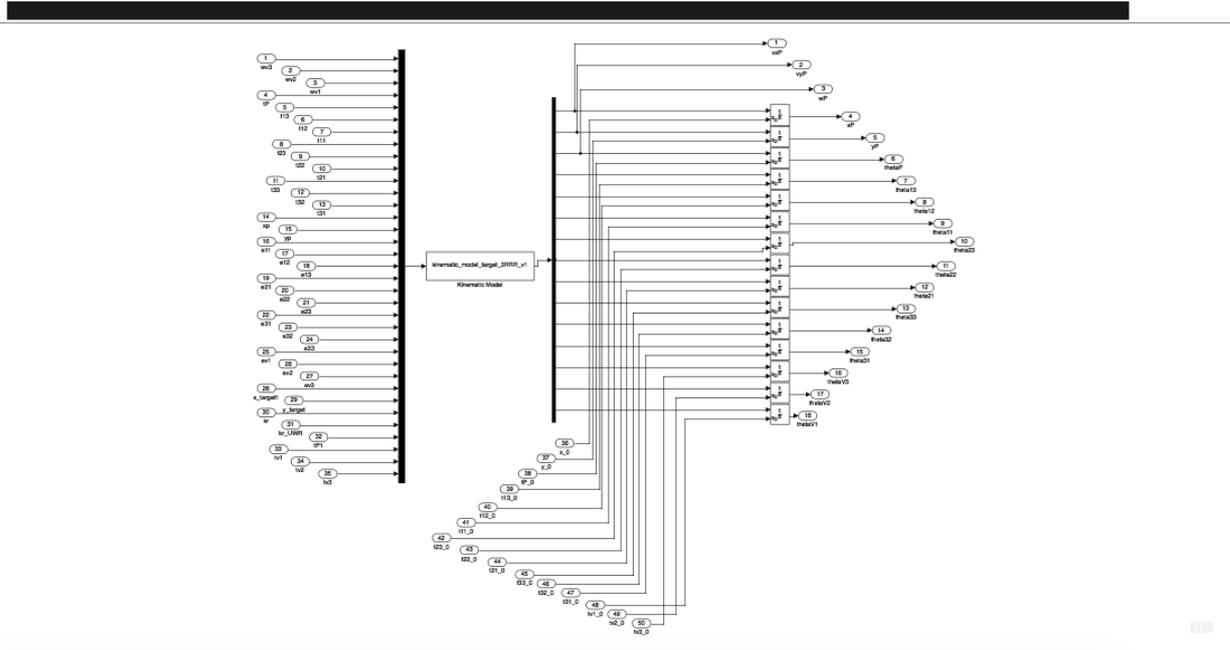
10.1 3RRR_(RRR)_v

Cinemática Diferencial de La cadena Virtual

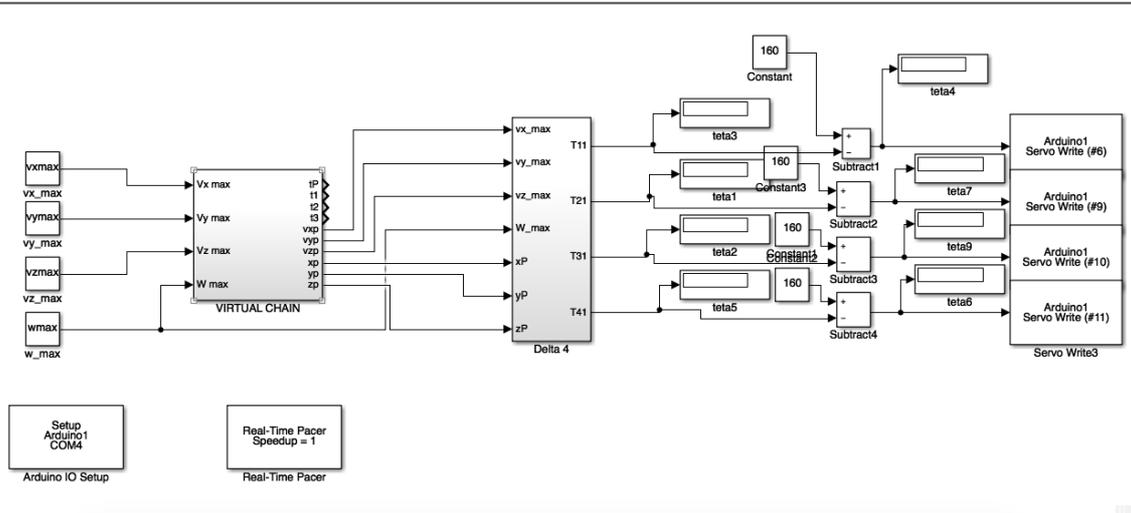


Cinemática
3RRR_(RRR)_v

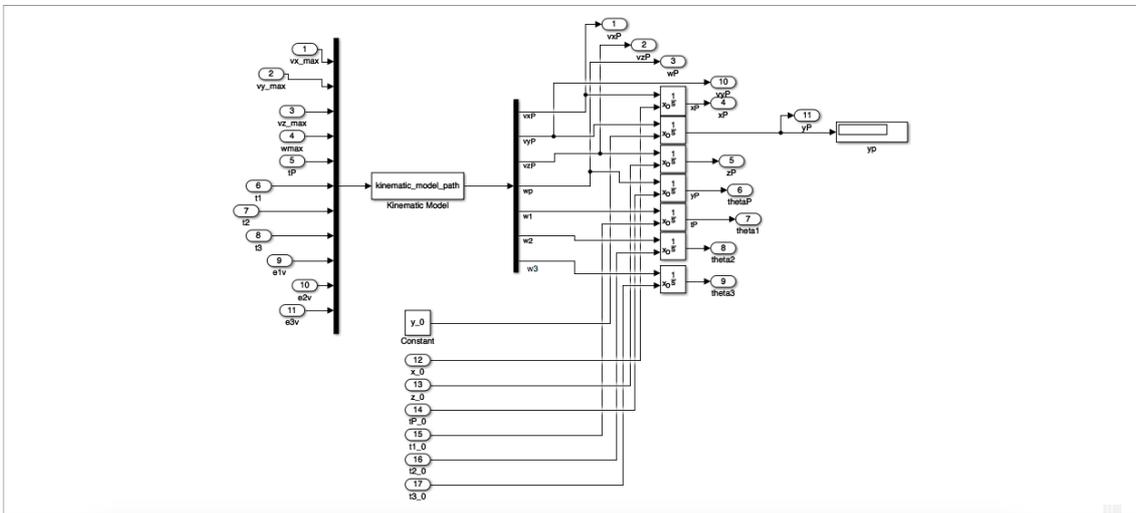
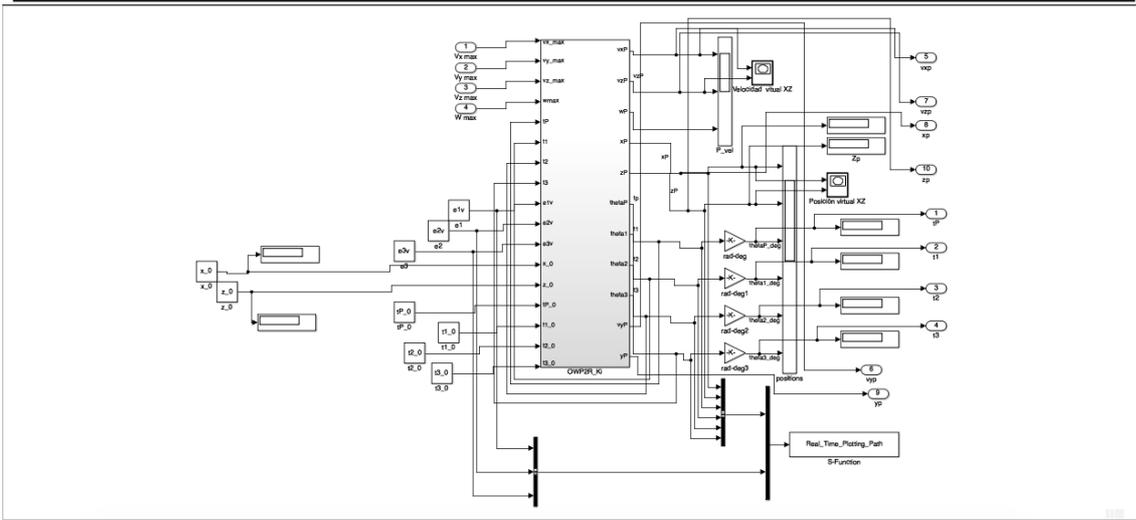
diferencial



10.2 Delta 4



Cinemática diferencial de la cadena virtual



Cinemática

diferencial

Delta

4

