



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA



FACULTAD DE INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTES DE

MECANICA DE MATERIALES III

ESTABILIDAD DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

G- 610925

MANUEL DIAZ CANALES

298

DIVISION DE INGENIERIA CIVIL TOPOGRAFICA Y GEODESICA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS

P R O L O G O

UNAM
FAC. DE INGENIERIA
CIVIL
1974

Ante la reciente instalación del curso de "Mecánica de Materiales III", dentro del plan de estudios para la carrera de Ingeniero Civil, en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, los directivos de la División de Ingeniería Civil, solicitaron al suscrito la formulación de apuntes que cubrieran en forma *completa y ordenada el programa de la materia.*

El curso de "Mecánica de Materiales III" se refiere fundamentalmente a la estabilidad de los elementos estructurales esbeltos. El capítulo IV describe los **métodos para el trazo y el uso** de los diagramas de interacción de elementos estructurales a flexocompresión, que se aplican principalmente en la revisión y el diseño de columnas cortas de concreto reforzado, lo cual es un complemento necesario del tema relativo a la estabilidad de piezas a flexocompresión con efectos de esbeltez, cuya teoría se presenta en el capítulo V.

G- 610925

En todos los casos que se ha tenido oportunidad, se ha procurado el desarrollo de cada tema, con aplicación de los conocimientos básicos de la Física y de la Matemática, para de esta manera lograr la deducción de las fórmulas con el debido rigor y mostrar a los estudiantes la necesidad de contar con esos conocimientos, para el entendimiento cabal de las materias técnicas -- que son el sustento de la carrera.

En aquellos casos en que el proceso matemático para llegar a alguna fórmula de aplicación, está fuera del nivel correspondiente a la licenciatura, se presentan los mismos en apéndice adicional al texto, como por ejemplo el planteamiento y resolución de la ecuación diferencial fundamental que expresa el pandeo de placas planas con carga en su plano. En repetidas ocasiones se hace uso de la literatura técnica apropiada, lo cual se indica haciendo referencia a diversos autores.

Al final de cada capítulo se presentan diversos ejemplos ilustrativos que pretenden orientar al alumno en la aplicación de la teoría.

Agradezco a los ingenieros Ricardo Pérez Ruiz y Rolando Salinas Vara, su colaboración en la revisión de los originales obtenidos de la exposición de la materia, que impartió el autor en los últimos semestres, así como también a los ingenieros Alejandro Vázquez Vera y Sergio Escamilla Aguilar sus observaciones y sugerencias. Al Ing. Enrique Del Valle Calderón por haber aceptado revisar los originales y por su participación en la formulación del tema de muros con efectos de esbeltez que forma parte -- del capítulo V. Agradezco también al Ing. Ricardo de la Barrera Santa Cruz su intervención para coordinar la presente edición.

Esta publicación abarca los cinco capítulos que integran el programa completo de la materia. Espero que sea de utilidad para profesores y estudiantes de la misma, a los que pido sus sugerencias encaminadas a lograr el perfeccionamiento del texto, las que atenderé con especial interés.

MANUEL DIAZ CANALES

México, D. F., Mayo de 1987.

I N D I C E

CAPITULO I.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A COMPRESION AXIAL.	Págs.
I.1.- Introducción al problema de Estabilidad. Equilibrio Estable, Inestable e Indiferente . Conceptos de carga crítica.	9
I.2.- Carga crítica en columnas elásticas sujetas a carga axial. Efecto de condiciones de apoyo. Longitud efectiva de pandeo. Longitudes efectivas en columnas de estructuras reales.	22
I.3 Limitaciones de la fórmula de Euler. Generalización para el rango inelástico.	42
I.4 Dimensionamiento y revisión de columnas de acero y madera sujetas a carga axial.	48
Ejempls.	58
Referencias.	78
 CAPITULO II.- ESTABILIDAD DE PLACAS	
II.1 Estabilidad de placas planas con carga en su plano.	
II.1.1 Introducción	30
II.1.2 La Ecuación Diferencial Fundamental del problema de placas y su solución.	80
II.1.3 Determinación del esfuerzo crítico en el rango ine- lástico de pandeo. Ejemplos 2.1 y 2.2.	94 97
II.2 Diseño basado en Esfuerzos Admisibles.	
II.2.1 Relación ancho/espesor de placas que forman una co- lumna a compresión axial.	100
II.2.2 Relación ancho/espesor de placas que forman parte - de barras sometidas a flexión.	101
II.2.3 Especificaciones de diseño. Ejemplos 2.3, 2.4 y 2.5	105 108

II.3	Resistencia Posterior al Pandeo de Placas Rectangulares Uniformemente comprimidas.	
II.3.1	Generalidades. Ecuaciones Diferenciales. Ancho - Efectivo.	116
II.3.2	Diseño basado en la resistencia posterior al pandeo.	127
II.3.3	Especificaciones de diseño.	
	II.3.3.1 Especificaciones del AISC	123
	II.3.3.2 Especificaciones del RCDF	131
II.4	Distinción entre Secciones compactas y no compactas.	133
	Ejemplo 2.6	134
Apéndice A		139
Apéndice B		143
Referencias		156
CAPITULO III.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A FLEXION.		
III.1.-	Pandeo Lateral Elástico en vigas. Momento Crítico.	157
III.2.-	Dimensionamiento y revisión de vigas de acero, concreto y madera, sujetas a flexión .	
III.2.1.-	Pandeo lateral en vigas de acero .	166
III.2.2.-	Pandeo lateral en vigas de concreto reforzado.	163
III.2.3.-	Pandeo lateral en vigas de madera.	171
Apéndice C.-	Obtención de la Resistencia a la Torsión	132
Apéndice D.-	Solución de la Ecuación Diferencial que produce Pandeo Lateral en Vigas.	186
CAPITULO IV.- DIAGRAMAS DE INTERACCION		
IV.1.-	Conceptos de Interacción	197
	Diagrama de Interacción en el intervalo elástico.	199
IV.2.-	Flexotensión y flexocompresión en el intervalo inelástico. Diagrama de Interacción.	202
IV.3.-	Flexocompresión en elementos cortos de concreto reforzado. Hipótesis para la obtención de resistencias de diseño.	208
IV.4.-	Determinación de Diagramas de Interacción de secciones de concreto reforzado, sujetos a flexión y carga axial.	211

	Págs.
Ejemplo 4.1.	217
Ejemplo 4.2.	228
Determinación del Diagrama de Interacción para una columna corta de sección cualquiera.	229
Dimensionamiento y Revisión de elementos cortos de concreto reforzado sujetos a flexocompresión. Uso de los Diagramas - de Interacción.	239
Ejemplo 4.3.	242
Diseño por flexocompresión biaxial.	245
Ejemplo 4.4.	249
Método de la fórmula de Bresler.	251
Ejemplo 4.5.	252
Referencias.	257

CAPITULO V.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS SUJETOS A FLEXOCOMPRESION.

V.1.- Conceptos de efecto de esbeltez y comportamiento.	
V.1.1.- Introducción.	258
V.1.2.- Fórmula de Interacción de columnas esbeltas sujetas a flexocompresión.	261
V.1.3.- Fórmula de Interacción de columnas esbeltas sujetas a flexocompresión biaxial.	267
V.2.- Dimensionamiento y revisión de columnas de acero sujetas a flexocompresión.	
V.2.1.- Dimensionamiento conforme a las Normas del -- AISC.	270
V.2.2.- Ejemplos.	279
V.3.- Dimensionamiento y revisión de columnas de madera sujetas a flexocompresión.	

	Págs.
V.3.1.- Introducción.	289
V.3.2.- Fórmula de Interacción.	289
V.3.3.- Identificación de los términos que intervienen en la fórmula de interacción.	293
V.3.4.- Ejemplos.	299
V.4.- Dimensionamiento y revisión de columnas de concreto reforzado sujetas a flexocompresión.	
V.4.1.- Comportamiento de columnas esbeltas y efecto en el diagrama de interacción.	302
V.4.2.- Métodos de dimensionamiento.	304
V.4.2.a.- Dimensionamiento conforme a las Normas del ACI.	306
V.4.2.b.- Amplificación de momentos por el método del momento complementario.	313
V.5.- Muros sometidos a compresión y a flexocompresión.	
V.5.1.- Generalidades.	322
V.5.2.- Resistencia de muros de mampostería.	325
V.5.3.- Resistencia de muros de concreto reforzado.	337
Apéndice E.	342
Referencias.	348

CAPITULO 1.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A COMPRESION AXIAL.

CAPITULO I.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A COMPRESION AXIAL.

I.1 Introducción al Problema de Estabilidad, Equilibrio Estable, Inestable e Indiferente. Conceptos de Carga Crítica.

Cuando una columna corta de cualquier material, se somete a la acción de una carga axial creciente que parte de un valor nulo, se observa que esta carga se puede incrementar hasta que el esfuerzo de compresión que se produce llega al valor correspondiente a la resistencia última del material, que en el caso del concreto es el valor de f'_c y f_y en el caso del acero.

Sin embargo, esta situación no se presenta en todos los casos, ya que la longitud de la columna es un factor decisivo en el comportamiento de elementos sujetos a compresión axial, aún suponiendo que la columna fuese perfectamente recta y la carga perfectamente axial.

Cuando a una columna larga se le aplica una carga axial creciente, se observa que, cuando la carga llega a un valor determinado, se produce una flexión súbita, y si se continúa incrementando la carga se produce de inmediato el colapso de la pieza. Bajo estas circunstancias el esfuerzo correspondiente a la carga que produce la falla, resulta menor que el de la resistencia última del material, esto significa que el colapso del elemento no se debió a la rotura del material, sino a que la columna ha perdido su estado inicial de equilibrio. Este comportamiento es el que caracteriza a este tipo de piezas.

A la carga para la que se inicia la falla se le llama "carga crítica" y a la falla en sí, falla por "pandeo" de la columna.

El problema de pandeo es entonces un problema de estabilidad y no de resistencia.

Una columna esbelta de eje recto bajo la acción de una carga axial P , permanecerá teóricamente recta y sólo se comprimirá sin flexionarse. Mientras P se conserve menor que cierto valor llamado carga crítica, denominado como P_{cr} , al aplicar a la columna una fuerza horizontal, ésta se flexionará, pero volverá a su condición recta después de cesar esa fuerza. En este caso se dice

que la columna está en "equilibrio estable" (fig. 1-1a).

Al tomar P gradualmente el valor P_{cr} , si se aplica una fuerza horizontal a la columna, se producirá en ella una flecha que ya no desaparece al dejar de actuar esa fuerza horizontal; se dice entonces, que la columna está en "equilibrio indiferente" (fig. 1-1b).

Si el valor de F se incrementa gradualmente hasta un valor mayor que el de P_{cr} y se aplica una fuerza horizontal a la columna, ocurrirá en ese proceso el colapso de la misma. Se dice en este caso que la columna está en una condición "inestable" o de "desequilibrio" (fig. 1-1c). Este fenómeno de inestabilidad se llama pandeo.

En las figuras 1-1d a 1-1f se presenta una analogía que puede ayudar a visualizar los conceptos anteriores.

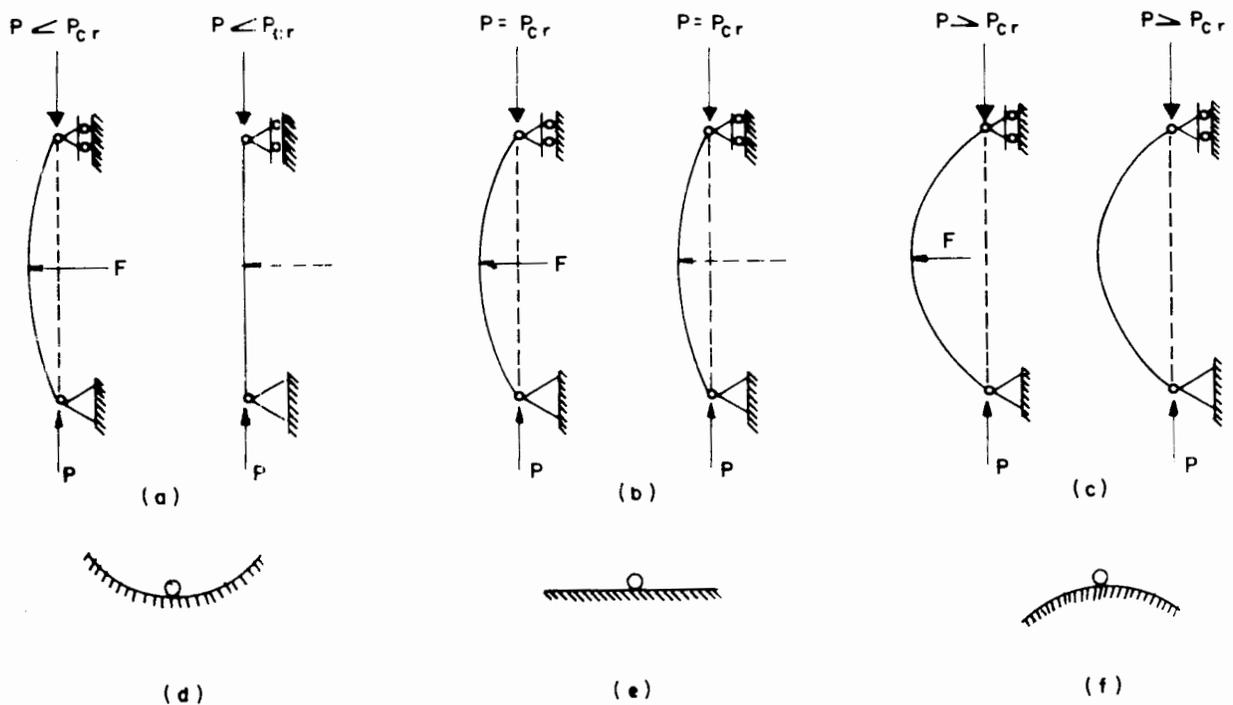


Fig. 1-1. ESTADOS DE EQUILIBRIO: (a) y (d) EQUILIBRIO ESTABLE, (b) y (e) EQUILIBRIO INDIFERENTE, (c) y (f) ESTADO INESTABLE O DESEQUILIBRIO.

La determinación de la carga crítica para columnas fué realizada por primera vez por Leonard Euler (1707-1783) y a él se deben los primeros estudios teóricos sobre el comportamiento de columnas largas.

El diseño de columnas es en general más complicado que el de las barras sujetas a flexión o torsión. Si una columna es larga en relación con su sección transversal se dice que es esbelta y puede fallar por pandeo, esto es, por flexión y desviación lateral, en vez de fallar por compresión directa. El pandeo puede ser elástico o inelástico, dependiendo de la esbeltez de la columna.

A fin de investigar el comportamiento de columnas, consideremos primero una columna esbelta, de claro L , sometida a una fuerza vertical P , aplicada excéntricamente para la cual el miembro se mantiene en equilibrio externo e interno (fig.1-2). La columna está simplemente apoyada en sus extremos y la excentricidad q , se mide desde el centroide de la sección transversal a la línea de acción de la fuerza P . Suponiendo que el plano XY es un plano de simetría de la columna, se observa que ésta se flexionará en el mismo -- plano.

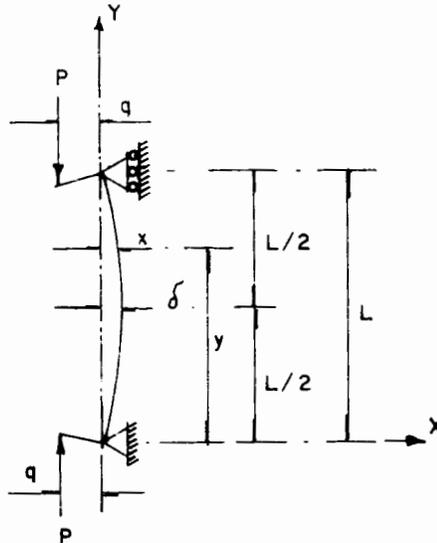


Fig. 1.-2. COLUMNA CON FUERZA EXCENTRICA

El momento flexionante en la columna a la distancia Y del extremo inferior es:

$$M = P (q + x) \quad \text{--- -- -- -- -- (1.1)}$$

donde x es la deflexión o flecha lateral de la columna en cada punto del eje de ordenada Y . Como consecuencia de la presencia del término x en la ecuación (1.1), se concluye que, para analizar la columna, se requiere la determinación de este término, para lo cual debemos resolver la ecuación diferencial de la curva elástica.

La ecuación diferencial para la curva elástica (o de flexión) de la columna es, de acuerdo con la teoría de la flexión:

$$x'' = - \frac{M}{EI} \quad (1.2)$$

sustituyendo en (1.2) el valor de M dado en (1.1):

$$x'' = - \frac{P(q + x)}{EI}$$

o sea

$$x'' + \frac{P}{EI} x = - \frac{P}{EI} q \quad (1.3)$$

introduciendo la notación:

$$k^2 = \frac{P}{EI}, \text{ siendo } k \text{ constante,}$$

se puede escribir la ecuación (1.3) en la forma:

$$x'' + k^2 x = - k^2 q \quad (1.4)$$

Esta ecuación es diferencial lineal con coeficientes constantes, no homogénea, y su solución consta de dos partes: a) la solución de la ecuación homogénea correspondiente obtenida sustituyendo por cero su segundo miembro, y b) la solución particular que corresponda al verdadero valor del segundo miembro.

a) Solución de la ecuación homogénea.

La ecuación homogénea

$$x'' + k^2x = 0 \quad \text{--- (1.5)}$$

puede representarse mediante operadores por la expresión:

$$(aD^2 + bD + cD^0) x = 0 \quad \text{--- (1.6)}$$

en la que $a = 1$, $b=0$, y $c = k^2$; por lo tanto, sustituyendo en (1.6) tenemos que:

$$(D^2 + k^2) x = 0 \quad \text{--- (1.7)}$$

La ecuación algebraica característica de (1.7) es:

$$D^2 + k^2 = 0$$

de donde $D^2 = -k^2$

cuyas raíces son $D_1 = 0 + ki$

$$D_2 = 0 - ki$$

Obsérvese que las raíces de la ecuación característica son números complejos de la forma $\lambda \pm \mu i$, en donde λ y μ son números reales. En consecuencia (ref. - 1.1) la solución general de la ecuación diferencial (1.5), es decir, la solución complementaria de (1.4) es:

$$x_c = e^{\lambda y} [C_1 \text{sen } \mu y + C_2 \text{cos } \mu y] \quad \text{--- (1.8)}$$

teniendo en cuenta que $\lambda = 0$ y $\mu = k$ en la ecuación (1.8), resulta:

$$x_c = e^{0y} [C_1 \text{sen } ky + C_2 \text{cos } ky]$$

o sea : $x_c = C_1 \text{sen } ky + C_2 \text{cos } ky \quad \text{--- (1.9)}$

b) Determinación de la solución particular.

La ecuación (1.4) puede escribirse

$$(D^2+k^2) x = - k^2 q \quad - - - - - (1.10)$$

Obtenemos la ecuación diferencial lineal homogénea cuya solución general - es la generalización del segundo miembro de (1.10), o sea $- k^2 q = S_1$; su generalización es:

$$S_1 e^{0y} \quad \text{para } S = - k^2 q$$

luego entonces proviene de la ecuación:

$$(D-0) x = 0 \quad - - - - - (1.11)$$

aplicando el operador (D-0) a los dos miembros de (1.10) se tiene:

$$(D-0)(D^2+k^2) x = 0 \quad - - - - - (1.12)$$

la ecuación algebraica característica correspondiente a (1.12) es:

$$(D-0)(D^2+k^2) = 0$$

cuyas raíces son $\beta = 0$, $\alpha_1 = 0 + ki$, $\alpha_2 = 0 - ki$; por lo tanto, su solución general es:

$$x_g = S_1 e^{0y} + C_1 \text{sen } ky + C_2 \text{cos } ky \quad - - - - - (1.13)$$

restando a cada miembro de (1.13) la solución complementaria x_c dada por la ecuación (1.9)

$$x_g - x_c = S_1 e^{0y}$$

pero como

$$x_g = x_c + x_p \quad \text{-----} \quad (1.14)$$

se tiene que

$$x_p = x_g - x_c$$

o sea

$$x_p = S_1 e^{0y}$$

puesto que $e^{0y} = 1$

$$x_p = S_1 \quad \text{-----} \quad (1.15)$$

la ecuación (1.15) es válida como solución particular de (1.4) para cierto valor de S_1 que obtendremos verificando (1.4) con:

$$x = x_p = S_1$$

$$\text{o sea} \quad 0 + k^2 S_1 = -k^2 q$$

$$\text{por lo tanto} \quad S_1 = -q \quad \text{-----} \quad (1.16)$$

al comparar las ecuaciones (1.15) y (1.16) obtenemos la solución particular:

$$x_p = -q \quad \text{-----} \quad (1.17)$$

La solución general de la ecuación diferencial (1.4), de acuerdo con la igualdad (1.14) es, en consecuencia, sumando miembro a miembro las ecuaciones (1.17) y (1.9)

$$x_g = C_1 \text{sen } ky + C_2 \text{cos } ky - q$$

como x_g representa la abscisa de cualquier punto de la curva elástica de la columna, esta igualdad es la ecuación analítica de dicha curva, por lo que -

FAC. DE INGENIERIA
DOCTORADO

la podemos escribir simplemente:

$$x = C_1 \operatorname{sen} ky + C_2 \operatorname{cos} ky - q \quad - - - - - (1.18)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias de integración que se evalúan a partir de las condiciones de frontera. Tales condiciones son:

$$x = 0 \text{ en } y = 0, \quad x = 0 \text{ en } y = L$$

aplicando la primera condición en la ecuación (1.18) se tiene:

$$0 = 0 + C_2 - q$$

$$\therefore C_2 = q$$

aplicando la segunda condición en la ecuación (1.18) y sustituyendo C_2 por su valor, se tiene:

$$0 = C_1 \operatorname{sen} kL - q \operatorname{cos} kL - q$$

entonces

$$C_1 = \frac{q(1 - \operatorname{cos} kL)}{\operatorname{sen} kL}$$

pero

$$\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha / 2}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore C_1 = q \tan \frac{kL}{2}$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en (1.18) por sus valores, la ecuación de la curva elástica es:

$$x = q \left(\tan \frac{kL}{2} \operatorname{sen} ky + \operatorname{cos} ky - 1 \right) \quad - - - - - (1.19)$$

Conociendo la excentricidad q , y la carga P , se puede calcular mediante la ecuación (1.19) la flecha de la columna en cualquier punto.

La flecha máxima, que ocurre en el punto medio de la columna, se obtiene haciendo $y = L/2$ en la ecuación (1.19), lo que da:

$$\delta = q \left(\tan \frac{kL}{2} \operatorname{sech} \frac{kL}{2} + \cos \frac{kL}{2} - 1 \right)$$

por identidades de funciones trigonométricas tenemos que:

$$\tan \alpha \operatorname{sech} \alpha + \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} + \cos \alpha$$

$$\tan \alpha \operatorname{sech} \alpha + \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\tan \alpha \operatorname{sech} \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\tan \alpha \operatorname{sech} \alpha + \cos \alpha = \operatorname{sec} \alpha$$

por lo tanto:

$$\delta = q \left(\operatorname{sec} \frac{kL}{2} - 1 \right) \quad \text{-----} \quad (1.20)$$

Como caso especial puede observarse por esta ecuación que si $P = 0$ (lo cual significa que $k = 0$ y $\operatorname{sec} kL/2 = 1$), la flecha δ , es cero.

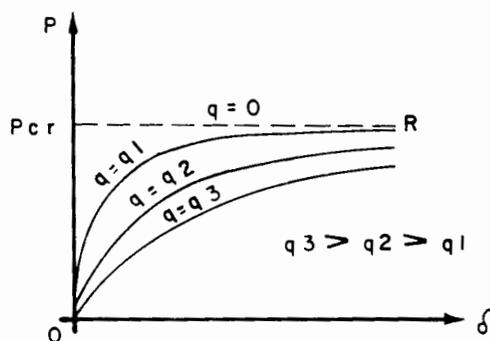


Fig. 1.-3. DIAGRAMA DEFORMACION TOTAL - CARGA, PARA LA COLUMNA DE LA FIGURA 1.-2.

Si ahora seleccionamos un valor particular q_1 , de la excentricidad q , y hacemos crecer progresivamente la carga P desde cero, se puede trazar, a partir de la ecuación (1.20), una gráfica deformación total-carga (P, δ) . Tal gráfica se muestra en la figura 1.3, y se ve que la flecha δ aumenta a medida que lo hace la carga P , aunque la relación no es lineal. Si se elige un nuevo valor q_2 mayor que q_1 , entonces el valor de la flecha δ , crece más rápidamente a medida que P aumenta.

Teorema.- La recta horizontal R , de ecuación $P = \pi^2 EI/L^2$, es asíntota de todas las curvas (P, δ) de ecuación (1.20).

En efecto, se tiene que

$$\sec \frac{kL}{2} \rightarrow +\infty$$

cuando

$$\frac{kL}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

por lo tanto, de la ecuación (1.20), resulta que

$$\delta \rightarrow +\infty \quad \text{cuando}$$

$$\frac{kL}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

En el límite:

$$\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2}, \text{ o sea}$$

$$kL = \pi$$

de donde se obtiene:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2}$$

pero como $k^2 = P/EI$ (en que k es constante), se tiene:

$$\frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\therefore P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

por lo tanto, $\sec kL/2 \rightarrow +\infty$ cuando $P \rightarrow \pi^2 EI/L^2$; entonces, por la ecuación (1.20)

$\delta \rightarrow +\infty$, cuando

$$P \rightarrow \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

en consecuencia, la recta $P = \pi^2 EI/L^2$ es asíntota de toda curva de ecuación (1.20), con lo cual el teorema está demostrado.

Ahora bien, si la carga P es axial ($q = 0$), la flecha δ obtenida de la ecuación (1.20) es cero para todos los valores de $kL/2$ menores que $\pi/2$, porque en todos estos casos el segundo término es finito. Por lo tanto, la flecha permanece nula cuando $kL/2$ es menor que $\pi/2$, o sea, cuando P es menor que $\pi^2 EI/L^2$. Pero cuando $P = \pi^2 EI/L^2$ la flecha δ resulta indefinida por la ecuación (1.20), es decir, $\delta \rightarrow +\infty$ cuando $P \rightarrow \pi^2 EI/L^2$, y entonces δ puede tener cualquier valor arbitrario. Esta condición está representada en la figura 1.3 por la recta horizontal R .

Con lo anterior queda demostrado que para la columna simplemente apoyada en sus extremos, sujeta a carga axial, el valor de la carga crítica es $\pi^2 EI/L^2$:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{-----} \quad (1.21)$$

La teoría anterior es válida si la flecha δ conserva valores pequeños para no exceder el límite de proporcionalidad. Como la relación de P y δ es no lineal, no puede aplicarse el principio de superposición y, como además, la carga P produce flexiones adicionales a las producidas por el momento Pq ,

Los momentos flexionantes finales no pueden calcularse independientemente de las flechas.

Si la fuerza axial que actúa sobre la columna de la figura 1.2 es extremadamente pequeña en relación con la carga crítica ($P < 0.02 P_{cr}$) entonces la cantidad $kL/2$ será lo suficientemente pequeña que permita representar la función secante por los dos primeros términos de su desarrollo en serie:

$$\sec \frac{kL}{2} = 1 + \frac{k^2 L^2}{8} + \dots$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.20) se tiene:

$$\delta = \frac{k^2 L^2 q}{8}$$

$$\delta = \frac{PqL^2}{8EI}$$

Este resultado concuerda con la flecha en el punto medio de una viga simplemente apoyada en la que actúan pares Pq , de sentidos contrarios, en ambos extremos. Por lo tanto, se puede concluir que siempre que P sea muy pequeña en relación con P_{cr} , como en el caso de un puntal corto, se puede despreciar la interacción entre la flecha y el momento flexionante y se podrán emplear las fórmulas usuales de las flechas de vigas.

Momento flexionante máximo.

El momento flexionante máximo en la columna libremente apoyada en sus extremos, con carga excéntrica, de la figura 1.2, ocurre en el punto medio y está dado por la ecuación

$$M_{m\acute{a}x} = P (q + \delta)$$

si sustituimos en esta ecuación el valor de δ dado por la ecuación (1.20) tenemos:

$$M_{m\acute{a}x} = P q \sec \frac{kL}{2} \quad \text{--- (1.22)}$$

Una gráfica de la relación $M_{m\acute{a}x}/Pq$ con P , se da en la figura 1.4 en la ---

que se ve que para valores muy pequeños de P , el momento flexionante máximo es Pq , que es el momento flexionante en la columna cuando se desprecia el efecto de las flechas; de aquí que $M_{\text{máx}}/Pq = 1$. A medida que P aumenta, el momento flexionante crece en forma no lineal y tiende a infinito cuando P tiende a P_{cr} .

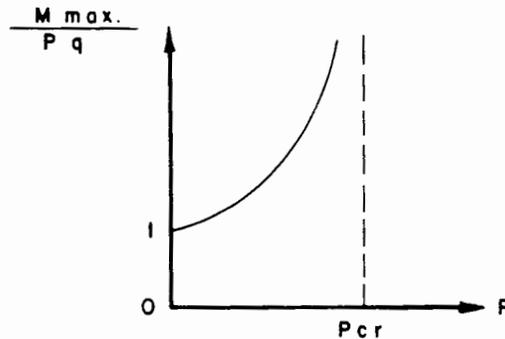


Fig. 1-4. GRAFICA DE LA RELACION $M_{\text{máx.}}/Pq$ CON RESPECTO A P , PARA LA COLUMNA DE LA Fig. 1-2.

El esfuerzo máximo de compresión en la columna, que se produce sobre el lado cóncavo en la sección al centro del claro, es:

$$f_{\text{c máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}}}{S}$$

sustituyendo $M_{\text{máx}}$ por su valor dado en la ecuación (1.22)

$$f_{\text{c máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{kL}{2} \quad \text{--- (1.23)}$$

donde A es el área y S el módulo de sección de la columna.

En la teoría anterior se ha supuesto que la flexión de la columna se produce en un plano de simetría (el plano XY de la figura 1.2). Si la columna tiene dos planos de simetría y la excentricidad q , no está en la dirección de uno de los ejes principales de la sección transversal, es necesario descomponer el par de flexión Pq , en dos pares componentes que actúen cada uno en un plano de simetría de la columna. La flecha en cada plano se calcula separadamente aplicando la teoría vista.

I.2 Carga Crítica en Columnas Elásticas Sujetas a Carga Axial.

Efecto de condiciones de Apoyo. Longitud Efectiva de Pandeo.

Longitudes Efectivas en Columnas de Estructuras Reales.

La carga crítica de una columna puede calcularse de manera directa considerando el comportamiento de una "columna ideal", la cual se supone perfectamente recta y comprimida por una carga aplicada en el centroide de la sección transversal.

Se acepta que una columna inicia su pandeo cuando la carga axial P , es igual a P_{cr} . Durante este proceso, si los esfuerzos actuantes en la columna no exceden el límite de proporcionalidad al llegar P al valor de P_{cr} , se produce el llamado pandeo elástico. En las columnas con este comportamiento, la carga crítica P_{cr} es de hecho la carga última y deberá tomarse en el diseño un factor de seguridad para fijar la carga admisible.

Si los esfuerzos actuantes en la columna son valores mayores al límite de proporcionalidad cuando la carga P es menor que P_{cr} , se dice que el pandeo es inelástico. En lo que sigue nos ocuparemos del pandeo elástico de columnas, mediante el cálculo de la carga crítica P_{cr} , a la cual para una columna elástica ideal suele llamarse "carga de Euler". Posteriormente trataremos el caso de pandeo inelástico.

Consideremos primero una columna ideal de longitud L , empotrada en su extremo inferior y libre en el superior, bajo la acción de una carga axial P , y en equilibrio externo e interno. Incrementamos la carga P progresivamente sin impacto, hasta que se produce el pandeo (fig. 1.5). Se supone que su material es linealmente elástico.

En la columna de la figura 1.5b, el momento flexionante a una distancia Y de su base es:

$$M = - P (\delta - x) \quad \text{-----} \quad (1.24)$$

Partiendo de la ecuación diferencial de la curva elástica, tenemos:

INSTITUTO DE INGENIERIA
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

$$x'' = - \frac{M}{EI}$$

$$x'' = \frac{P(\delta - x)}{EI}$$

$$x'' = \frac{P}{EI} \delta - \frac{P}{EI} x \quad , \text{ o sea}$$

$$x'' + \frac{P}{EI} x = \frac{P}{EI} \delta \quad \text{----- (1.25)}$$

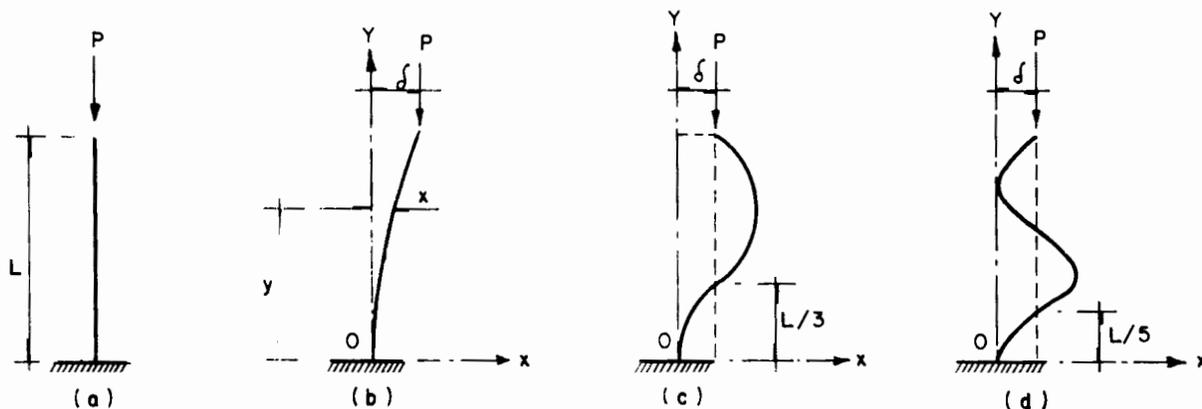


Fig. 1.- 5. COLUMNA IDEAL EMPOTRADA EN LA BASE Y LIBRE EN EL EXTREMO SUPERIOR

Debido a que el extremo superior de la columna tiene libertad para desviarse en cualquier dirección, es evidente que el pandeo de la barra ocurrirá en el plano de rigidez flexional mínima EI; es decir: la flexión se producirá con respecto al eje principal correspondiente al menor momento de inercia. Suponemos que el plano en que se produce el pandeo es el XY y que éste es un plano de simetría de la columna.

Empleando la notación $k^2 = P/EI$ ($k = \text{constante}$), la ecuación (1.25) se puede escribir en la forma:

$$x'' + k^2 x = k^2 \delta \quad \text{----- (1.26)}$$

La solución general de esta ecuación se obtiene en forma similar a la solución de la ecuación (1.4); y es:

$$x = C_1 \sin ky + C_2 \cos ky + \delta \quad - - - - - (1.27)$$

Para obtener las constantes C_1 y C_2 se utilizan las condiciones de frontera para el extremo empotrado de la columna:

$$\text{Para } y = 0: \quad x = 0, \text{ para } y = 0 : x' = 0$$

Por la primera condición, en (1.27)

$$0 = 0 + C_2 + \delta \quad \therefore C_2 = -\delta$$

la derivada de x , que obtenemos en (1.27) es:

$$x' = k C_1 \cos ky - k C_2 \sin ky$$

Si consideramos en esta ecuación la segunda condición:

$$0 = k C_1 \quad \therefore C_1 = 0$$

ahora, la ecuación de la curva elástica se obtiene sustituyendo en la ecuación (1.27) los valores de C_1 y C_2 :

$$x = -\delta \cos ky + \delta$$

$$x = \delta(1 - \cos ky) \quad - - - - - (1.28)$$

En esta ecuación la flecha δ queda todavía indeterminada.

A fin de obtener mayor información acerca de la flecha y para deducir la carga crítica de Euler, emplearemos la siguiente condición en el extremo superior de la columna, en que si

$$y = L, \quad x = \delta$$

entonces, a partir de la ecuación (1.28) se obtiene:

$$\delta = \delta (1 - \cos kL)$$

de donde:

$$\delta \cos kL = 0 \quad \text{--- (1.29)}$$

Esta ecuación presenta dos posibilidades:

Primera: Si $\delta = 0$, no hay flecha en la barra, y por tanto ningún pandeo -- (fig. 1.5a). En tal caso el producto kL puede teóricamente tener cualquier valor; por consiguiente, la carga P también podrá tener cualquier valor. Este resultado está representado por el eje P del diagrama deformación total-carga de la figura 1.6.

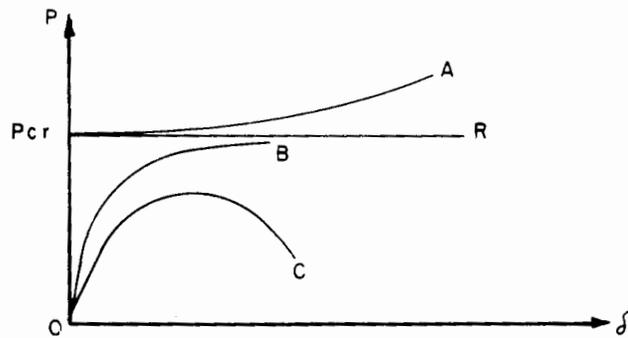


Fig. 1.-6. GRAFICAS DEFORMACION TOTAL - CARGA PARA COLUMNAS

Segunda: Esta posibilidad es que $\cos kL = 0$, en cuyo caso $\delta \neq 0$, puesto que la flecha es diferente de cero la columna se ha pandeado, luego la carga que opera en ella es crítica. La condición $\cos kL = 0$ requiere que

$$kL = \frac{n\pi}{2}$$

donde $n = 1, 3, 5, \dots$

por tanto, el valor mínimo de la carga crítica se obtiene cuando $n = 1$, esto es, cuando:

$$kL = \frac{\pi}{2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad y despejando k^2

$$k^2 = \frac{\pi^2}{4L^2}$$

recordando que $k^2 = P/EI$, en que k es constante:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

para este valor de P , se tiene que $\delta \neq 0$, es decir, se produce el pandeo de la columna, luego, es el valor de la carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \quad \text{--- (1.30)}$$

Para determinar la forma de la curva elástica observaremos que $k = \pi/2L$ y, por lo tanto, el producto ky de la ecuación (1.28) varía desde cero hasta $\pi/2$. La forma de la elástica es, en consecuencia, la indicada en la figura 1.5b. Sin embargo, por esta solución la magnitud de la flecha δ permanece indeterminada cuando $P = P_{cr}$, lo que sucede en el momento que se inicia el pandeo de la columna. Esta situación está representada por la recta R de la figura 1.6.

El motivo por el cual la flecha δ queda indeterminada en el proceso analítico anterior es porque la ecuación diferencial de la elástica que se ha planteado de la columna $X'' = -M/EI$ es aproximada, ya que se obtuvo suponiendo $\frac{dx}{dy} = 0$ en la expresión de la curvatura de la curva elástica.

De la ecuación (1.30) se desprende que la carga crítica es directamente proporcional a la rigidez flexional EI , e inversamente proporcional al cuadrado de su longitud. También puede observarse que la carga crítica es independiente de la resistencia a la compresión del material. Por tanto, la carga crítica de una columna esbelta de acero no aumentará empleando un acero con mayor esfuerzo de fluencia. La carga crítica puede incrementarse, sin embargo, haciendo mayor el momento de inercia I de su sección transversal. Este resultado puede lograrse distribuyendo el material tan lejos como sea posible del centroide de dicha sección. Por lo tanto, los miembros tubulares son más económicos para su empleo como columnas que los elementos macizos con la misma área transversal. Reduciendo el grueso de la pared de tales secciones y aumentando su dimensión transversal se dará mayor estabilidad a

la columna por tener mayor I . Sin embargo, hay un límite inferior para el espesor de la pared, por debajo del cual la propia pared llega a ser inestable. Entonces, antes de que ocurra el pandeo de la columna en conjunto, habrá un pandeo de la pared en forma de corrugaciones o abolladuras. Este tipo de efecto recibe el nombre de pandeo local cuyo estudio se tratará en el capítulo II de este libro.

Modos superiores de pandeo.

Recordando la expresión $kL = n\pi/2$, resulta $k = n\pi/2L$, entonces vemos que - tomando valores más altos del índice n , se obtiene un número infinito de - cargas críticas. Por lo tanto, la expresión general de la carga crítica de la columna de la figura 1-5a, que se obtiene a partir de la ecuación (1.30) es:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{4L^2}$$

La ecuación correspondiente para la curva elástica es (1.28); al hacer en ella $k = n\pi/2L$, obtenemos la ecuación general de todas las curvas elásticas posibles de la columna, esto es:

$$x = \delta \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2L} y\right)$$

Esta ecuación indica que a medida que n aumenta, dicha curva tiene cada vez más ondas. Cuando $n = 1$, la curva tiene una semionda (fig. 1-5b). Para el caso en que $n = 3$, obtenemos:

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2}, \quad x = \delta \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2L} y\right)$$

y para $n = 5$:

$$P_{cr} = \frac{25\pi^2 EI}{4L^2}, \quad x = \delta \left(1 - \cos \frac{5\pi}{2L} y\right)$$

Las curvas elásticas de estos dos casos se muestran en las figuras 1-5c y 1-5d, respectivamente. Aunque representan modos de pandeo teóricamente posi

bles la columna se pandeará según el primer modo (fig. 1-5b) cuando la carga P alcance el valor de P_{cr} dado por la ecuación (1.30). En consecuencia, una columna se debe diseñar para recibir una carga de servicio menor que la carga crítica, de acuerdo con cierto factor de seguridad.

Columna con extremos articulados.

La carga crítica de pandeo para columnas con extremos simplemente apoyados, bajo la acción de una carga axial P , para la cual la columna está en equilibrio externo e interno (fig. 1-7), se puede obtener de la solución del caso de la columna empotrada en su base y libre en su extremo superior (cantilever).

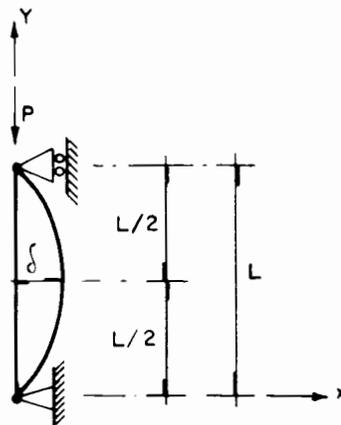


Fig. 1-7 COLUMNA CON EXTREMOS ARTICULADOS.

Por simetría sucede que, la curva elástica de la columna de la figura 1-7, en el primer modo de pandeo tendrá una tangente vertical en el punto medio. De esta manera, cada mitad de la columna está en la misma condición o estado que la barra de la figura 1-5b, y la carga crítica se obtiene a partir de la ecuación (1.30) sustituyendo L por $L/2$:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4(L/2)^2} \quad , \text{ o sea}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{-----} \quad (1.31)$$

Este mismo resultado se dedujo anteriormente, al estudiar el caso de "columnas libremente apoyadas en sus extremos con cargas excéntricas" (véase la ecuación 1.21).

El caso de la columna con extremos articulados es el que se presenta con mayor frecuencia en las estructuras, por lo que la carga crítica de la ecuación (1.31) representa el "caso fundamental de pandeo" de una barra prismática.

Columna con giros restringidos en los extremos.

Consideremos una columna ideal, de claro L , cuyos extremos están impedidos de girar (empotramientos para efecto de rotación) pero con posibilidad de desplazamiento vertical, en la que opera una carga axial P , para la cual la columna se conserva en equilibrio externo e interno. Se procede a incrementar progresivamente, sin impacto, la carga P , hasta que se presenta el pandeo.

Si la columna no puede girar en ambos extremos (fig. 1-8), hay momentos reactivos que se desarrollan en dichos extremos durante el pandeo.

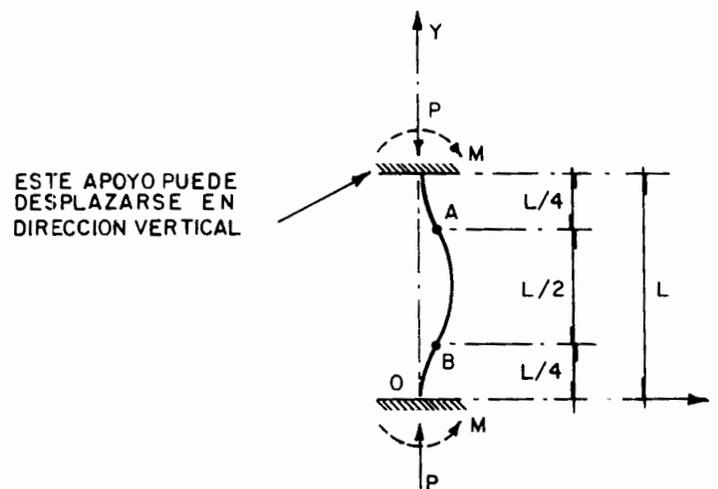


Fig. 1.- 8. COLUMNA CON GIROS RESTRINGIDOS EN LOS EXTREMOS

La curva elástica para el primer modo de pandeo es una cosenoide con puntos de inflexión a la distancia $L/4$ de los extremos (puntos A y B de la figura 1-8); entonces la parte media de la columna, de longitud $L/2$, se comporta igual que una columna con extremos articulados. Por lo tanto, la carga crítica se obtiene sustituyendo L por $L/2$ en la ecuación (1.31).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} \quad \text{--- (1.32)}$$

Grandes flechas en columnas.

En la deducción de la ecuación para la curva elástica de la columna cantilever (ecuación 1.28) la flecha máxima δ permanece indefinida, lo que ocurre cuando $P = P_{cr}$; condición representada por la recta horizontal R de la figura 1-6. La teoría se limitó a pequeñas flechas de acuerdo con la realidad, lo cual permite que se utilice la expresión aproximada de la ecuación diferencial de la curva elástica (ecuación 1.25). Si la ecuación de la elástica de cada columna se obtiene resolviendo la ecuación diferencial completa, entonces se demuestra que δ tiene un valor determinado, y la gráfica deformación total-carga en la figura 1-6 sigue la trayectoria de la curva A para el caso de una columna elástica ideal.

En experimentos con columnas elásticas, la gráfica (P, δ) suele ser semejante a la curva B de la figura 1-6. Debido a inexactitudes en la carga y en la construcción de la columna, aparecerán deflexiones o flechas laterales con cargas menores que P_{cr} . Estas flechas se incrementarán a medida que la carga se aproxime a P_{cr} . Cuanto más exactamente esté construida y cargada la columna, la curva B se aproximará a la gráfica teórica ideal formada por una recta vertical sobre el eje de las ordenadas desde el origen hasta P_{cr} , y una recta horizontal R.

Si los esfuerzos en la columna exceden el límite de proporcionalidad bajo la acción de cargas menores que P_{cr} (columna de comportamiento plástico), la gráfica (P, δ) será semejante a la curva C, cuyo punto máximo corresponde a la carga crítica de pandeo inelástico de la columna. Tal carga es menor que

la carga de Euler.

Columna empotrada en la base y articulada en su extremo superior.

Una columna esbelta de longitud L , bajo la acción de una carga axial P , para la cual la columna está en equilibrio externo e interno, está empotrada en su extremo inferior y libremente apoyada en su extremo superior (fig.1-9). Determinemos el valor de la carga crítica y la forma del modo de pandeo correspondiente.

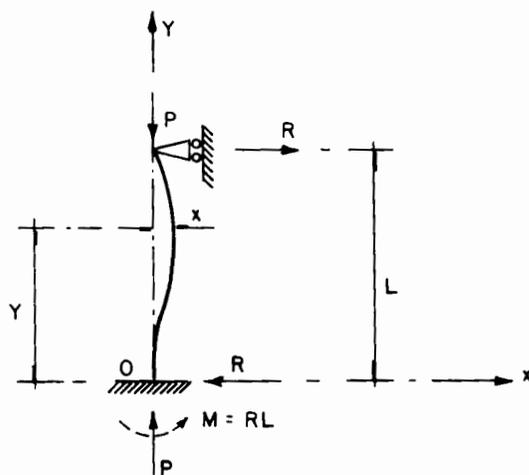


Fig. 1.- 9. COLUMNA EMPOTRADA EN LA BASE Y ARTICULADA EN SU EXTREMO SUPERIOR

Quando la carga P alcanza el valor crítico, P_{cr} , se inicia el pandeo y se origina una fuerza de reacción horizontal R , en el extremo superior de la columna. En el extremo empotrado se inducen una fuerza horizontal y un momento. Por equilibrio estático, vemos que tal fuerza es de la misma magnitud que R , pero de sentido contrario; y que el momento M es igual a RL .

El momento flexionante en un punto cualquiera (X,Y) de la columna es:

$$M = Px - R(L - y)$$

La ecuación diferencial de la curva elástica es:

$$x'' = - M/EI$$

por lo que

$$x'' = - \frac{P}{EI} x + \frac{R}{EI} (L - y)$$

recordando que $k^2 = P/EI$ (en que k es constante):

$$x'' + k^2 x = \frac{R}{EI} (L - y)$$

multiplicando y dividiendo por k^2 el segundo miembro de esta ecuación:

$$x'' + k^2 x = \frac{k^2 R}{\frac{P}{EI} \cdot EI} (L - y)$$

por lo tanto

$$x'' + k^2 x = k^2 \frac{R}{P} (L - y) \quad \text{--- (1.33)}$$

La igualdad (1.33) es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, cuya solución se obtiene de la misma manera que la obtenida para la ecuación (1.4). Por lo tanto, la solución de la ecuación (1.33) es (ver -- ecuación 1.18):

$$x = C_1 \text{sen } ky + C_2 \text{cos } ky + \frac{R}{P} (L - y) \quad \text{--- (1.34)}$$

Para determinar las constantes C_1 y C_2 y la reacción R , se tienen las siguientes condiciones de frontera:

en $y = 0$, $x = 0$; en $y = 0$, $x' = 0$; en $y = L$, $x = 0$.

de la ecuación (1.34), al derivar x con respecto a Y obtenemos:

$$x' = k C_1 \text{cos } ky - k C_2 \text{sen } ky - R/P \quad \text{--- (1.35)}$$

Considerando en (1.34) y (1.35) las condiciones de frontera, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} C_2 + RL/P &= 0 \\ C_1 k - R/P &= 0 \\ C_1 \text{sen } kL + C_2 \text{cos } kL &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (1.36)}$$

(1.36) es un sistema de 3 ecuaciones lineales homogéneas con 3 incógnitas: C_1 , C_2 , R ; cuya primera solución es la trivial, en que $C_1 = C_2 = R = 0$. En este caso, por la ecuación (1.34), la deformación "x" resulta nula y se tiene la forma de equilibrio recta; es decir, no se produce pandeo, lo cual carece de interés.

El sistema de ecuaciones (1.36) se puede escribir en la forma:

$$(0)C_1 + (1)C_2 + (L/P) R = 0$$

$$(k)C_1 + (0)C_2 - (1/P) R = 0$$

$$(\text{sen } kL)C_1 + (\text{cos } kL)C_2 + (0) R = 0$$

y tiene una solución diferente de la trivial si el determinante de los coeficientes es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & L/P \\ k & 0 & -1/P \\ \text{sen}kL & \text{cos}kL & 0 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante:

$$-\frac{1}{P} \text{sen } kL + \frac{kL}{P} \text{cos } kL = 0$$

dividiendo entre $\text{cos } kL$ y multiplicando por P ambos miembros de esta igualdad se obtiene:

$$-\tan kL + kL = 0$$

por lo tanto

$$kL = \tan kL \quad \text{--- (1.37)}$$

En esta ecuación, el valor mínimo no nulo de kL que la satisface es $kL = 4.493$ (véase gráfica de la figura 1-10):

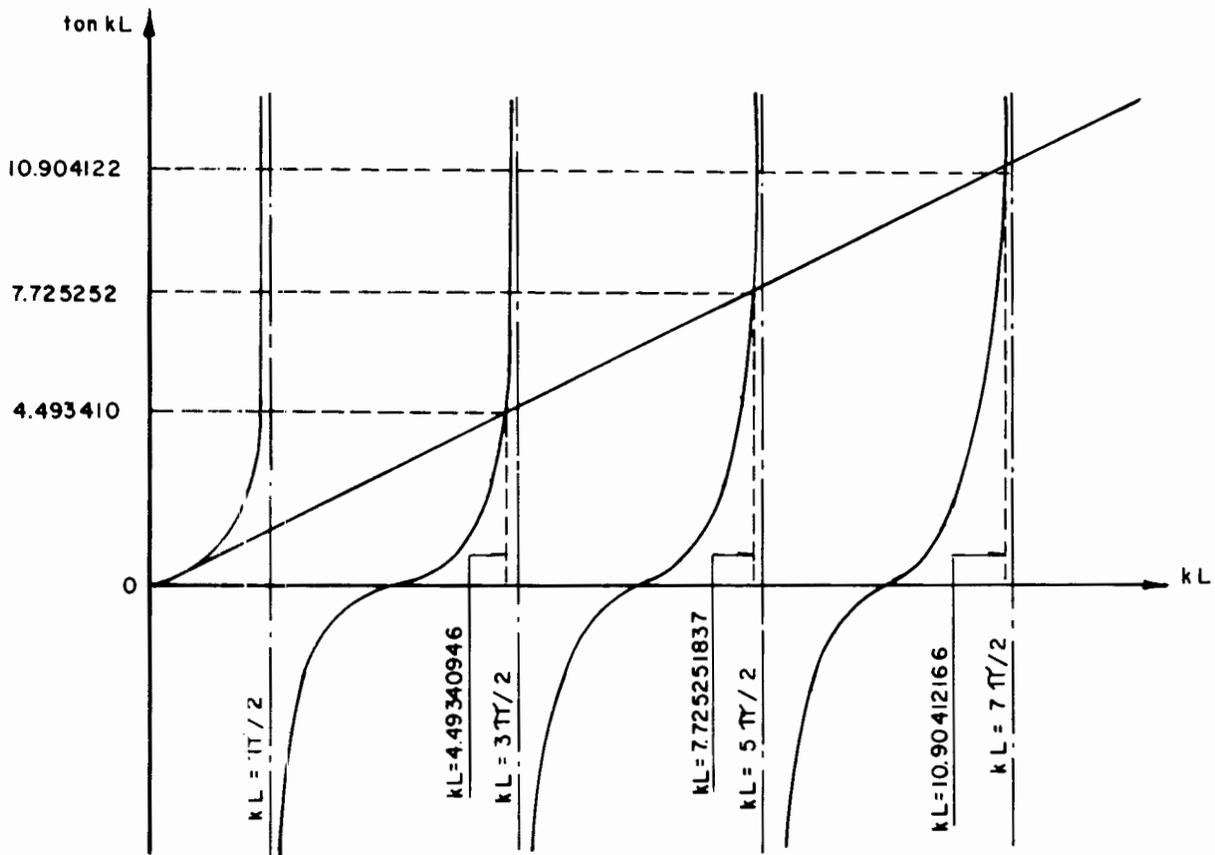


Fig. 1-10. SOLUCION DE LA ECUACION $kL = \tan kL$

entonces

$$(kL)^2 = 20.19$$

$k^2 = \frac{20.19}{L^2}$, pero $k^2 = P/EI$, en que k es constante, por lo tanto

$$P = \frac{20.19 EI}{L^2}$$

como para este valor de P se inicia el pandeo, corresponde a la carga crítica, luego

$$P_{cr} = \frac{20.19 EI}{L^2}$$

teniendo en cuenta que $20.19 = 2.046 \pi^2$, queda

$$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$$

o sea

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \quad \text{-----} \quad (1.38)$$

Para obtener la ecuación de la curva elástica, obtendremos C_1 y C_2 en función de R de las ecuaciones (1.36)

$$C_1 = \frac{R}{kP}, \quad C_2 = -\frac{RL}{P}$$

y sustituyendo en la ecuación (1.34) C_1 y C_2 por sus valores

$$x = \frac{R}{Pk} \operatorname{sen} ky - \frac{RL}{P} \cos ky + \frac{R}{P} (L - y), \quad \text{o sea}$$

$$x = \frac{R}{Pk} [\operatorname{sen} ky - kL \cos ky + kL (1 - \frac{y}{L})] \quad \text{-----} \quad (1.39)$$

En esta ecuación, los valores de P y k se han determinado en el párrafo anterior. El término entre corchetes de la ecuación (1.39) representa el modo de deformación de la columna pandeada, pero la amplitud de la flecha o deflexión permanece indefinida porque R está indeterminada.

Longitud efectiva de una columna.

La ecuación de la carga crítica (1.31) corresponde a una columna con extremos articulados; sin embargo, esta fórmula puede aplicarse a cualquier otro tipo de columnas, sustituyendo el término L por el llamado "longitud efectiva" o "equivalente".

Comparando la carga crítica para una columna en cantilever (ecuación 1.30) con la correspondiente a una columna con extremos articulados (ecuación 1.31) se ve que la fórmula para ésta última también se puede emplear para la columna en cantilever, sustituyendo L por una longitud efectiva igual a $2L$; es decir, del doble de la longitud de la columna en cantilever.

En consecuencia, la ecuación (1.31) se puede generalizar para la carga crítica escribiéndola en la forma:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad \text{--- (1.40)}$$

en donde KL es la "longitud efectiva" de la columna y el coeficiente K es el "factor de longitud efectiva".

De esta manera K vale 2 para una columna en cantilever, 0.5 para una columna con giros restringidos en los extremos (ecuación 1.32), 0.7 para una columna con un extremo empotrado y el otro articulado (ecuación 1.38) y 1.0 para columnas con ambos extremos articulados (ecuación 1.31). En general la ecuación (1.40) podrá utilizarse para columnas con cualquier condición de apoyo en los extremos, siempre que se conozca el factor de longitud efectiva.

Tratemos el caso de columnas articuladas en su base, que forman parte de un marco no contraventeado como el mostrado en la figura 1.11a, en el que se considera que la trabe es de rigidez infinita en comparación con la de las columnas.

Ante desplazamientos horizontales del marco, en su plano, se observa que la trabe impide el giro, pero no el desplazamiento, del extremo superior de las columnas, las cuales se comportan como un cantilever invertido y como conse -

cuencia, la longitud efectiva de las columnas es igual al doble de su longitud real (fig. 1-11b). Esta situación debe tomarse en cuenta en las columnas de todo edificio que no esté restringido contra desplazamientos laterales.

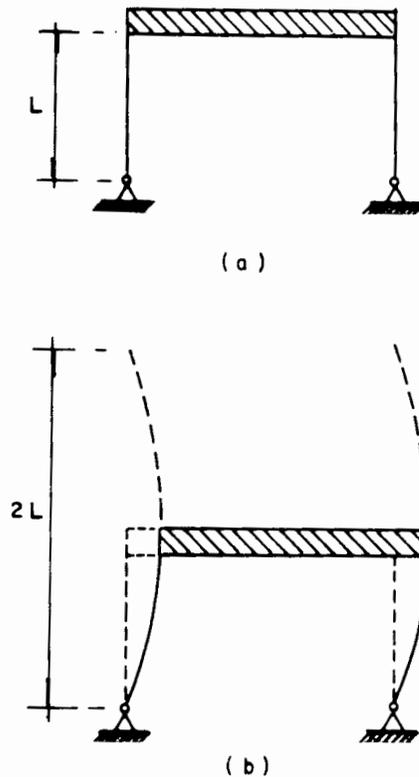


Fig. 1-11. MODO DE PANDEO DE COLUMNAS EN UN MARCO CON DESPLAZAMIENTO LATERAL

El análisis anterior justifica definir la longitud efectiva de pandeo de una columna, como la distancia entre los dos puntos de inflexión que se forman en la curva elástica, por efecto del sistema de cargas, sistema de apoyos, y desplazamientos horizontales relativos de los extremos.

En la figura 1-12 se resumen los valores del factor de longitud efectiva para columnas con diferentes condiciones de apoyo.

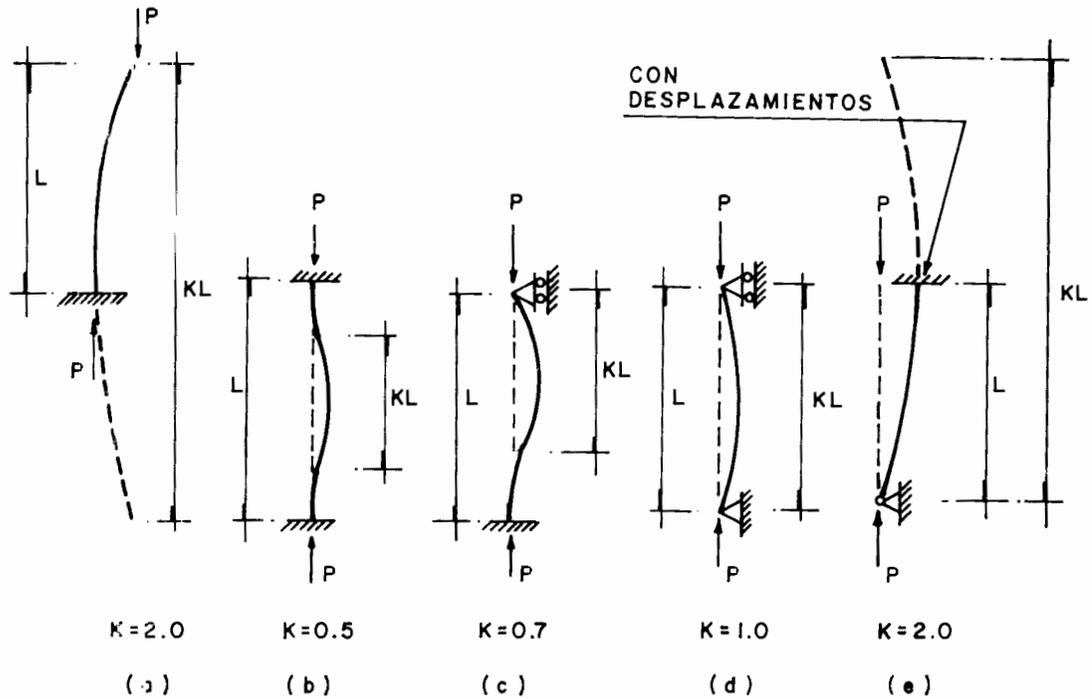


Fig.1-12. VALORES DEL FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA .

Longitud efectiva en columnas de estructuras reales.

Los valores del factor de longitud efectiva K , obtenidos en el artículo anterior, corresponden a columnas con condiciones de apoyo ideales. Sin embargo, en columnas de estructuras reales es muy poco frecuente identificar estas condiciones de apoyo, encontrándose por lo general entre los dos casos extremos de articulación y empotramiento. En las figuras 1-13a y 1-13b se muestran las longitudes efectivas para condiciones intermedias de apoyo en columnas que forman parte de marcos sin y con desplazamientos horizontales.

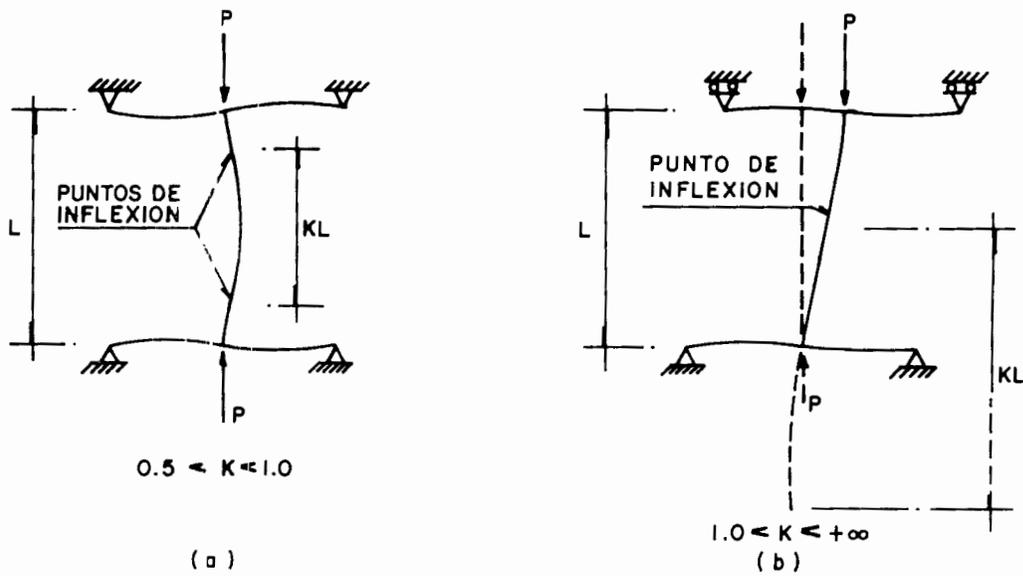


Fig. 1-13. LONGITUD EFECTIVA EN COLUMNAS DE ESTRUCTURAS REALES: (a) SIN DESPLAZAMIENTO (b) CON DESPLAZAMIENTO.

Obsérvese en la figura 1-13a que las columnas en los marcos arriostrados tienen valores de K que varían entre 0.5 y 1.0. En cambio, en las columnas de marcos no arriostrados (fig. 1-13b), el valor de K siempre es mayor que 1.0. Debido a que el comportamiento de los marcos arriostrados y no arriostrados son tan diferentes (fig. 1-14), normalmente se dan valores de K para los marcos dentro de estas dos categorías; de manera que, antes de analizar una columna, se debe decidir a que tipo de marco pertenece.

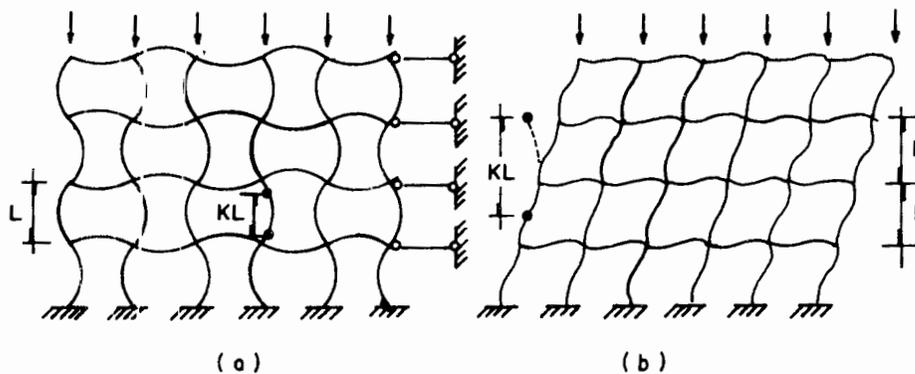


Fig. 1. 4. MODOS DE PANDEO PARA MARCOS ARRIOSTRADOS Y NO ARRIOSTRADOS: (a) ARRIOSTRADO, (b) NO ARRIOSTRADO.

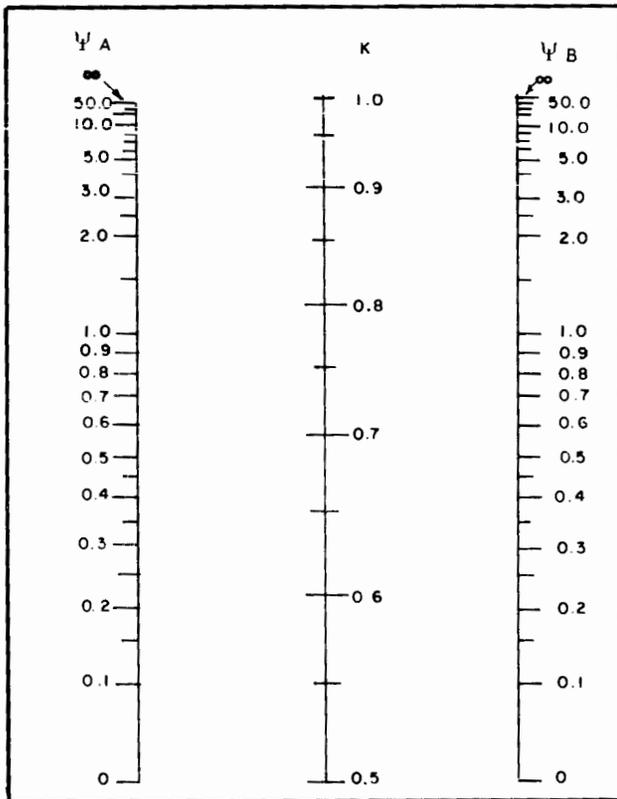
En la práctica, para la mayoría de los edificios, el desplazamiento lateral de los marcos puede restringirse mediante muros de cortante o un adecuado sistema de contraventeo diagonal, pero para edificios construidos con marcos y muros ligeros de tableros desmontables, muros desligados de la estructura o marcos no contraventeados, el desplazamiento lateral es apreciable.

El valor de K para columnas de marcos arriostrados y no arriostrados depende de la restricción rotacional en las juntas, expresada, para cada una de las juntas, por el parámetro ψ , dado por:

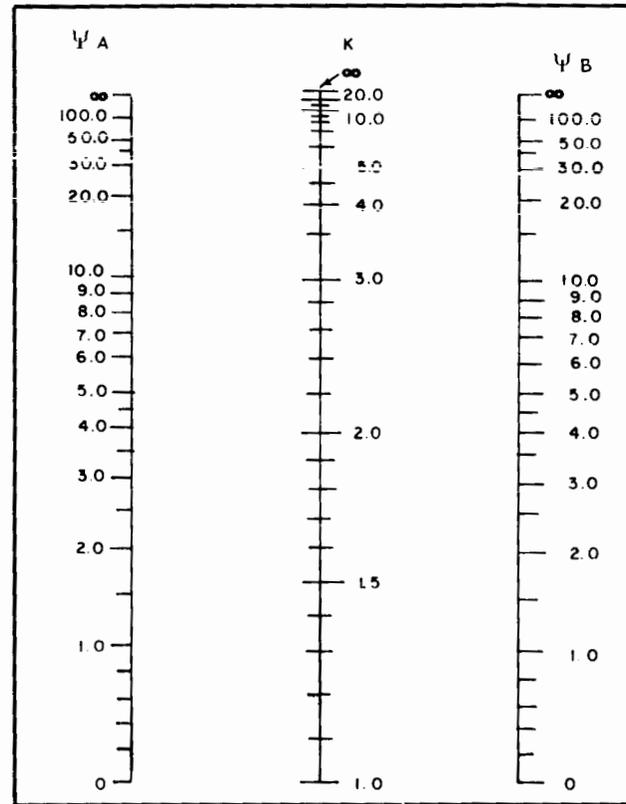
$$\psi = \frac{\Sigma(I_c/L_c)}{\Sigma(I_b/L_b)} \quad \text{--- (1.41)}$$

en donde $\Sigma(I_c/L_c)$ es la suma de las rigideces relativas de las columnas que concurren en una junta y $\Sigma(I_b/L_b)$ es la suma correspondiente a las traveses u otros elementos (no columnas) concurrentes en la misma junta. I_c y L_c son el momento de inercia y la longitud libre de cada una de las columnas que concurren a la junta y los términos I_b y L_b son el momento de inercia y la longitud libre de cada trabe o elemento (no columna) que concurren a la junta. Los términos I_c , L_c , I_b y L_b , deberán calcularse en el plano en que se considere el pandeo de la columna.

Conocidos los valores de ψ en cada junta de la columna que se esté estudiando, se puede calcular el valor de K mediante los nomogramas de Jackson y Moreland (fig. 1-15). Estos nomogramas permiten la determinación gráfica de K para una columna de sección transversal constante en un marco arriostrado o no arriostrado. Los subíndices A y B se refieren a las juntas en los extremos superior e inferior de la columna.



a). MARCOS ARRIESTRADOS
(SIN DESPLAZAMIENTOS LATERALES)



b). MARCOS NO ARRIESTRADOS
(CON DESPLAZAMIENTOS LATERALES)

Fig. 1-15 NOMOGRAMAS DE JACKSON Y MORELAND PARA DETERMINAR K.

1.3 Fórmula de Euler. Limitaciones de la Fórmula de Euler. Generalización para el Rango Inelástico.

Esfuerzos en columnas.

El esfuerzo medio de compresión en una columna cargada axialmente se calcula dividiendo la carga axial entre el área de la sección transversal. El esfuerzo obtenido de esta manera para el caso en que la carga axial sea igual a la carga crítica se llama esfuerzo crítico f_{cr} , por lo tanto:

$$f_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

aplicando la ecuación (1.40)

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL)^2 A}$$

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL)^2 A/I}$$

si designamos con $r^2 = I/A$ el radio de giro de la sección transversal de la columna, tendremos:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL)^2 / r^2}$$

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad \text{-----} \quad (1.42)$$

A KL/r le llamamos "relación de esbeltez" de la columna. Se puede observar que el esfuerzo crítico es inversamente proporcional al cuadrado de la relación de esbeltez.

Cuando las condiciones de apoyo de los extremos de una columna son las mismas en todas direcciones, el cálculo del esfuerzo crítico debe hacerse considerando el radio de giro mínimo de la sección. Diremos en este caso que el pandeo ocurre alrededor del eje de menor momento de inercia, esto signi-

fica que la columna al pandearse se flexionará alrededor de ese eje.

Cuando las condiciones de apoyo son diferentes en direcciones distintas, - deberá investigarse el pandeo en las dos direcciones perpendiculares entre si y se utilizará para el cálculo del esfuerzo crítico el mayor de ambos - valores de la relación de esbeltez.

La ecuación (1.42) llamada "fórmula de Euler", es válida siempre que el -- esfuerzo crítico, f_{cr} , sea menor o igual que el límite de proporcionalidad del material, esto es cuando el pandeo de la columna es elástico, cuando f_{cr} es mayor que dicho límite el pandeo es inelástico.

Por esto resulta conveniente trazar una gráfica que relacione el esfuerzo de compresión, con la relación de esbeltez de la columna (fig.1-16).

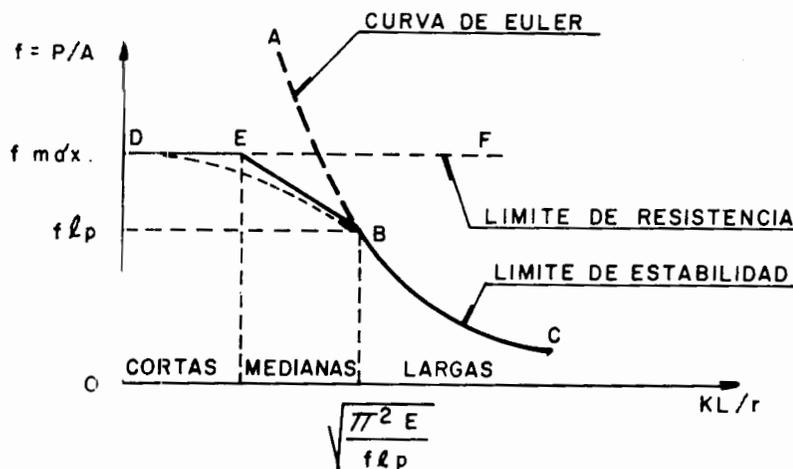


Fig. 1-16 DIAGRAMA DE ESFUERZOS DE COMPRESION, EN FUNCION DE LA RELACION DE ESBELTEZ.

En la figura 1-16, la curva ABC, llamada curva de Euler, es la representación gráfica de la ecuación (1.42). Esta curva es válida físicamente sólo en el tramo BC, donde f_{cr} es menor que el límite de proporcionalidad, f_{lp} . El valor mínimo de KL/r para el cual es aplicable la fórmula de Euler (el correspondiente al punto B), se obtiene haciendo $f_{cr} = f_{lp}$ en la ecuación (1.42) y despejando KL/r , es decir:

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{f_{lp}}} \quad \text{--- (1.43)}$$

De este valor en adelante, el pandeo de la columna es de comportamiento elástico y decimos que se trata de una columna "larga" cuando su relación de esbeltez es igual o mayor que el valor límite.

Cuando la relación de esbeltez de una columna es muy baja (columnas "cortas") la falla por carga axial ocurre por aplastamiento o fluencia del material.- En estas circunstancias se puede fijar un esfuerzo máximo de compresión P/A como límite de la resistencia del material. Tal límite está representado en la figura 1-16 por la recta horizontal DEF trazada por el punto de esfuerzo máximo, $f_{m\acute{a}x}$; y representa un "límite de resistencia" para la columna. En este caso no es aplicable la fórmula de Euler, puesto que el esfuerzo llega al límite de proporcionalidad, f_{1p} , antes de que se inicie el pandeo.

Entre los rangos de columnas cortas y largas hay un intervalo de relaciones de esbeltez intermedias demasiado pequeñas para que rijan la estabilidad elástica y demasiado grandes para que sólo gobiernen las consideraciones de resistencia. Tales columnas de "mediana longitud" se pandean inelásticamente, y están representadas por la recta EB.

De esta manera se obtiene la línea quebrada DEBC, que puede emplearse como base para proyectar columnas de cualquier longitud. En forma alternativa-- se puede utilizar una curva continua que una los puntos D y B y la curva de Euler de B a C.

En una columna con relación de esbeltez conocida, el esfuerzo P/A obtenido de un diagrama similar al mostrado en la figura 1-16 debe considerarse como el esfuerzo máximo que hará fallar la columna, ya sea por falla directa del material o por pandeo, dependiendo de la relación de esbeltez. Por lo tanto, el esfuerzo de trabajo admisible para la compresión debe tomarse como el esfuerzo máximo obtenido, dividido entre un factor de seguridad cuyo valor depende de la relación de esbeltez de la columna.

GENERALIZACION DE LA FORMULA DE EULER PARA EL RANGO INELASTICO.

En este artículo consideraremos el comportamiento de columnas sujetas a la acción de un esfuerzo crítico que ocurre en el rango inelástico del mate --

rial empleado, o bien, de columnas construidas con un material no elástico, cuya curva esfuerzo-deformación (f, ϵ) no muestra un límite de proporcionalidad definido (figura 1-17).

Para estudiar el problema de pandeo en el rango inelástico Engesser propuso en 1889 que el esfuerzo crítico para este caso podría calcularse con la fórmula de Euler (ecuación 1.42) sustituyendo en ella el módulo de elasticidad E o módulo de Young, por el módulo tangente E_t definido como la pendiente de la tangente a la curva esfuerzo-deformación en el punto A de la figura 1.17. Así:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} \quad \text{-----} \quad (1.44)$$

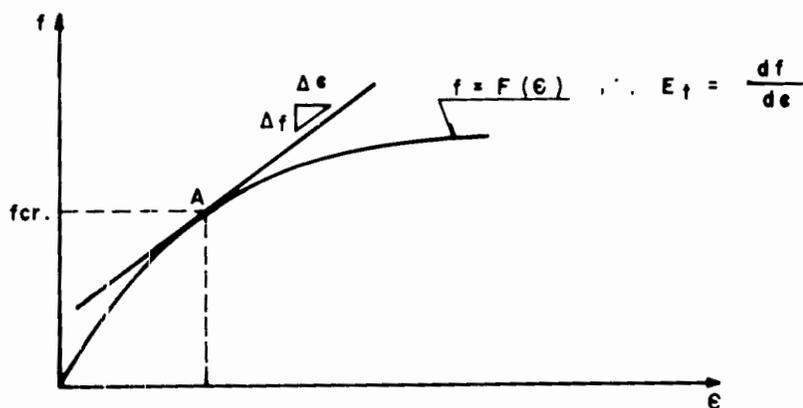


Fig. 1.17 CURVA ESFUERZO-DEFORMACION DE UN MATERIAL (SIN LIMITE DE PROPORCIONALIDAD DEFINIDO).

Conocida la curva esfuerzo-deformación (f, ϵ) de un material en la cual el esfuerzo es función de la deformación:

$$f = F(\epsilon) \quad \text{-----} \quad (1.45)$$

se puede obtener de ella el valor del módulo de elasticidad tangente, para

cualquier esfuerzo, como

$$E_t = \frac{df}{d\varepsilon} \quad \text{-----} \quad (1.46)$$

si se supone que ese esfuerzo, calculado con la ecuación (1.45), es el esfuerzo crítico para una columna determinada, se puede conocer el valor de KL/r , correspondiente al f_{cr} considerado, despejándolo de la ecuación (1.44):

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t}{f_{cr}}} \quad \text{-----} \quad (1.47)$$

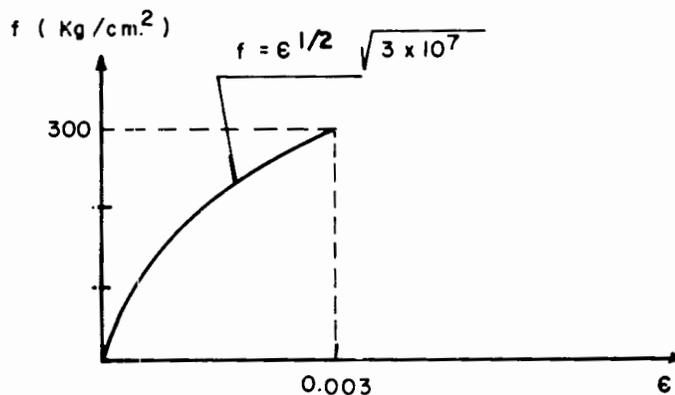
En la que f_{cr} y E_t se han determinado con las ecuaciones (1.45) y (1.46) respectivamente.

Para trazar un diagrama de esfuerzos críticos de compresión en función de la relación de esbeltez de una columna, el procedimiento consiste en suponer un valor de deformación unitaria ε , y calcular con la ecuación (1.45) el esfuerzo crítico que deberá graficarse en el eje de las ordenadas. El valor de E_t se determina con la ecuación (1.46) y, finalmente, se calcula KL/r y se grafica en el eje de las abscisas.

Con objeto de comprender el método, se aplica éste en el ejemplo siguiente.

Ejemplo:

Dada la gráfica esfuerzo-deformación unitaria (f, ε) de un material de comportamiento inelástico, trazar un diagrama esfuerzo crítico-relación de esbeltez ($f_{cr}, KL/r$) que permita diseñar columnas esbeltas de ese material. El esfuerzo que produce el aplastamiento del material es de 300 Kg/cm^2 .



El valor de f como función de ϵ está dado por:

$$f = \epsilon^{1/2} \sqrt{3 \times 10^7} \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{--- (a)}$$

por lo tanto, aplicando la ecuación (1.46):

$$E_t = \frac{df}{d\epsilon}$$

$$E_t = \frac{d}{d\epsilon} (\epsilon^{1/2} \sqrt{3 \times 10^7})$$

$$E_t = \frac{1}{2} \epsilon^{-1/2} \sqrt{3 \times 10^7}$$

$$E_t = 0.5 \epsilon^{-1/2} \sqrt{3 \times 10^7} \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_t = \frac{2738.6}{\sqrt{\epsilon}} \quad \text{--- (b)}$$

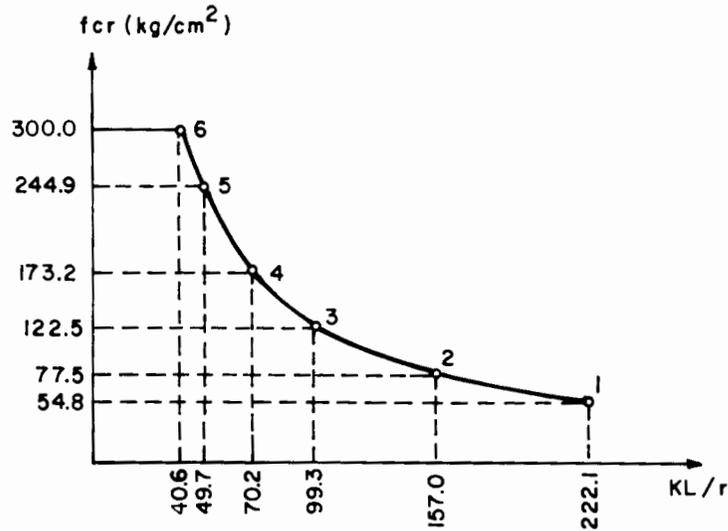
el valor de KL/r , por la ecuación (1.47), es:

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t}{f_{cr}}} \quad \text{--- (c)}$$

Para trazar el diagrama (f_{cr} , KL/r) escogeremos arbitrariamente una serie de valores de ϵ dentro del rango $0 < \epsilon < 0.003$, y sustituyendo en (a), (b) y (c) obtendremos respectivamente los valores de f_{cr} , E_t y KL/r , que anotaremos en la siguiente tabla:

PUNTO	ϵ (arbitrario)	(a) f_{cr} (Kg/cm ²)	(b) E_t (Kg/cm ²)	(c) KL/r (adim.)
1	0.0001	54.8	273860	222.1
2	0.0002	77.5	193648	157.0
3	0.0005	122.5	122474	99.3
4	0.0010	173.2	86602	70.2
5	0.0020	244.9	61237	49.7
6	0.0030	300.0	50000	40.6

Por lo tanto, la gráfica esfuerzo crítico-relación de esbeltez es:



GRAFICA ESFUERZO CRITICO - RELACION DE ESBELTEZ

I.4 Dimensionamiento y Revisión de Columnas de Acero y de Madera Sujetas a Carga Axial.

Proyecto de columnas de acero con carga axial.

Los métodos descritos en los artículos anteriores se han basado en consideraciones teóricas; en la práctica deben incluirse factores de seguridad que limiten los esfuerzos admisibles. Dichos factores varían en función de la relación de esbeltez KL/r de las columnas. Para fijar el valor de los factores de seguridad se han realizado ensayos con columnas, los cuales han conducido al uso de fórmulas empíricas, que trataremos adelante.

Para columnas de acero, el "Column Research Council" (CRC) (Consejo de Investigación de Columnas), ha propuesto el valor del esfuerzo crítico f_{cr} , - dado por la ecuación (1.42), como el esfuerzo máximo que puede ser aplicado a una columna. Por lo tanto, se tiene que

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad \text{-----} \quad (1.48)$$

Esta ecuación sólo es aplicable en tanto el esfuerzo real en la columna permanezca inferior al límite de proporcionalidad, lo cual se traduce a que sólo es aplicable cuando la relación de esbeltez KL/r es mayor que cierto valor dado por la ecuación (1.43). En el caso del acero estructural el límite

de proporcionalidad se identifica con el esfuerzo de fluencia f_y .

La generalidad de perfiles de acero estructural presentan esfuerzos residuales f_r , por lo cual, el esfuerzo real de compresión f_c en una columna es:

$$f_c = f_{\text{máx}} + f_r$$

donde f_c no debe exceder el límite de proporcionalidad f_y , y f_r no debe ser mayor que $f_y/2$; entonces, sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, se tiene:

$$f_y = f_{\text{máx}} + \frac{f_y}{2}, \quad \text{de donde}$$

$$f_{\text{máx}} = \frac{f_y}{2}$$

llevando a la ecuación (1.48) este valor de $f_{\text{máx}}$, se tiene:

$$\frac{f_y}{2} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$$

de donde podemos despejar KL/r :

$$\frac{KL}{r} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{f_y}}$$

designando este valor de KL/r por C_c , tenemos:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{f_y}} \quad \text{----- (1.49)}$$

Esta ecuación define el valor límite de la relación de esbeltez a partir del cual es aplicable la fórmula de Euler. El término C_c de la ecuación (1.49) es el llamado "coeficiente de columna" y depende únicamente de las características del material.

De lo anterior resulta que:

si $KL/r \geq C_c$ el pandeo es en el rango elástico y
 si $KL/r < C_c$ el pandeo ocurre en el rango inelástico.

El esfuerzo máximo de compresión que se puede aplicar a una columna dentro del rango elástico, se puede obtener dividiendo ambos miembros de la ecuación (1.48) entre f_y :

$$\frac{f_{\text{máx}}}{f_y} = \frac{\pi^2 E}{f_y (KL/r)^2}$$

multiplicando y dividiendo entre 2 el segundo término de esta igualdad obtenemos:

$$\frac{f_{\text{máx}}}{f_y} = \frac{2\pi^2 E}{f_y} \left[\frac{1}{2(KL/r)^2} \right]$$

teniendo en cuenta la ecuación (1.49), se llega a :

$$\frac{f_{\text{máx}}}{f_y} = \frac{C_c^2}{2(KL/r)^2} \quad \text{-----} \quad (1.50)$$

por lo tanto:

$$f_{\text{máx}} = \left[\frac{C_c^2}{2(KL/r)^2} \right] f_y \quad \text{-----} \quad (1.51)$$

la ecuación (1.51) sólo es aplicable para $KL/r \geq C_c$.

Para la zona de pandeo inelástico, esto es, cuando $KL/r < C_c$, el "Column -- Research Council" (CRC) propone, para la obtención de $f_{\text{máx}}$, una curva parabólica dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{f_{\text{máx}}}{f_y} = 1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \quad \text{-----} \quad (1.52)$$

o sea

$$f_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2 C_c^2} \right] f_y \text{ ----- (1.53)}$$

la ecuaci3n (1.53) es aplicable cuando $KL/r < C_c$.

Con las ecuaciones (1.50) y (1.52) se puede trazar la gr1fica de la figura-1-18, en la que la relaci3n $f_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}/f_y$ es funci3n de KL/r .

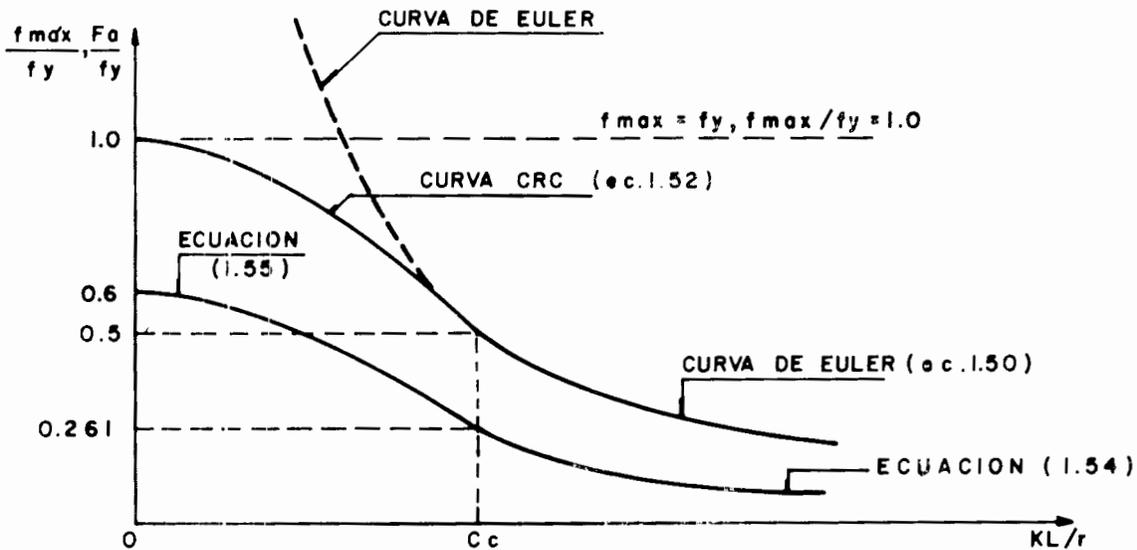


Fig. 1-18. GRÁFICAS DE $(f_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}/f_y)$ Y (F_a/f_y) EN FUNCIÓN DE KL/r .

Observamos en esta figura que para $KL/r = 0$, por la ecuaci3n (1.52), resulta $f_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} = f_y$, y que la recta horizontal $f_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}/f_y = 1.0$ es tangente a la curva de la ecuaci3n (1.52), adem1s, esta curva se confunde con la curva de Euler (ec. 1.50) en el punto en que $KL/r = C_c$.

Para fines de dise1o tiene que introducirse en las ecuaciones (1.51) y --- (1.53) un factor de seguridad apropiado, con el cual se pasa del esfuerzo m1ximo, $f_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}}$, al esfuerzo admisible F_a .

$$F_a = \frac{f_{\text{máx}}}{F.S.}$$

El "American Institute of Steel Construction" (AISC), ha propuesto los siguientes factores de seguridad (.F.S.) para ser aplicados en la fórmula (1.51) y en la (1.53) del C.R.C.:

$$FS_1 = \frac{23}{12} \doteq 1.92 \quad \text{para } KL/r \geq C_c$$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3} \quad \text{para } KL/r < C_c$$

Llevando a la ecuación (1.51) el factor de seguridad FS_1 y a la ecuación (1.53) el factor FS_2 , se obtienen las fórmulas empíricas de esfuerzos admisibles, o sea:

$$F_a = \left[\frac{C_c^2}{2 (KL/r)^2} \right] \frac{f_y}{FS_1} \quad \text{para } KL/r \geq C_c \quad - - \quad (1.54)$$

$$F_a = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] \frac{f_y}{FS_2} \quad \text{para } KL/r < C_c \quad - - - \quad (1.55)$$

Las ecuaciones (1.54) y (1.55) se representan gráficamente como F_a/f_y en función de KL/r , en la figura 1-18.

Valores del factor de longitud efectiva K para condiciones ideales de apoyo						
La configuración de forma de la columna se muestra con línea punteada.						
Valor teórico de K	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Valor recomendado para diseño K	0.65	0.80	1.2	1.0	2.1	2.0
Condiciones de los apoyos						

Dimensionamiento y Revisión de Columnas de Madera Sujetas a Carga Axial.

El estudio de columnas de madera que a continuación se expone, parte de la fórmula de Euler, y está basado fundamentalmente en las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Madera del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (Ref. 1.2).

Consideremos una columna de sección rectangular maciza, sujeta a una carga axial paralela a las fibras (fig. 1-19). Suponemos que por las condiciones de apoyo, la longitud efectiva de dicha columna es KL

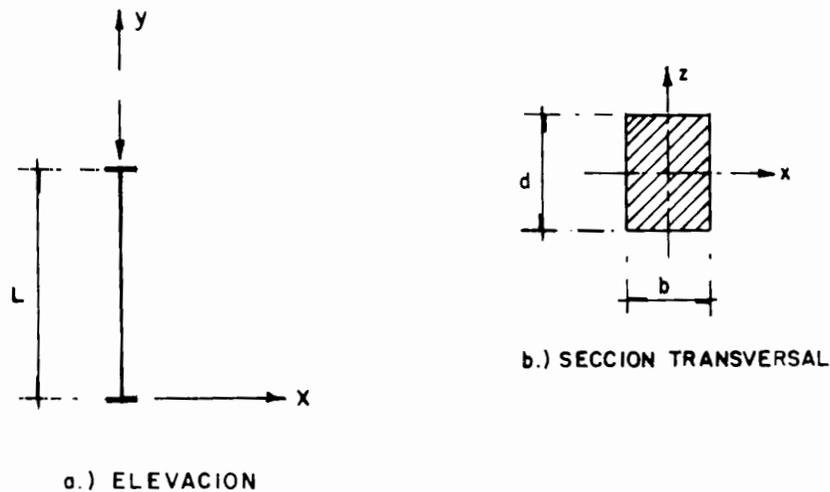


Fig. 1.19- C O L U M N A D E M A D E R A

Con fines de diseño, las dimensiones de la sección transversal de la columna deberán reducirse 1cm de cada lado, así, las dimensiones netas son:

en dirección del eje X: $b_n = b - 1$ (en cm.)

en dirección del eje Z: $d_n = d - 1$ (en cm.)

Para obtener el esfuerzo admisible de diseño en compresión paralela a las fibras (f_{cd}), partimos del esfuerzo crítico de Euler (ecuación 1.42) o sea:

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \quad \text{----- (1.56)}$$

Suponiendo que el pandeo de la columna ocurre en el plano XY (flexión debida al pandeo alrededor del eje Z), el radio de giro respecto al eje Z será:

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A_n}}$$

donde I_z es el momento de inercia respecto al eje Z y A_n es el área neta de la sección transversal.

$$I_z = \frac{(d_n)(b_n)^3}{12}$$

$$A_n = (d_n)(b_n)$$

$$\therefore r_z = \sqrt{\frac{(d_n)(b_n)^3}{12(d_n)(b_n)}}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{(b_n)^2}{12}}$$

$$r_z^2 = \frac{(b_n)^2}{12}$$

Llevando este resultado a la ecuación (1.56):

$$f_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(KL/b_n)^2} \quad \text{-----} \quad (1.57)$$

Introduciendo un factor de seguridad, el esfuerzo admisible - - -

f_{cd} será:

$$f_{cd} = \frac{f_{cr}}{FS}$$

usando $FS = 2.75$:

entonces, en la ecuación (1.57) tenemos:

$$f_{cd} = \frac{\pi^2 E}{(2.75)(12)(KL/b_n)^2} \quad , \text{ o sea:}$$

$$f_{cd} = \frac{0.3E}{(KL/b_n)^2} \quad \text{-----} \quad (1.58)$$

El esfuerzo f_{cd} , dado por la ecuación (1.58), no debe exceder el valor del esfuerzo admisible de compresión dado para columnas cortas, denominado como f_{cp} , o sea:

$$f_{cd} \leq f_{cp}$$

Esto significa que la ecuación (1.58), que representa la curva de Euler en la gráfica de la figura 1-20, sólo puede ser aplicada hasta un cierto límite de relación de esbeltez que se presenta cuando f_{cd} es igual a f_{cp} . Así, para conocer ese valor límite haremos $f_{cd} = f_{cp}$ en la ecuación (1.58), y despejaremos la relación de esbeltez:

$$f_{cp} = \frac{0.3E}{(KL/b_n)^2}$$

$$\frac{KL}{b_n} = \sqrt{\frac{0.3 E}{f_{cp}}}$$

Este valor de (KL/b_n) , es el límite de aplicación de la fórmula de Euler, se designa como el "coeficiente de columna" C_c ; por lo tanto:

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3 E}{f_{cp}}} \quad \text{-----} \quad (1.59)$$

Para relaciones de esbeltez menores que C_c , el esfuerzo admisible por compresión f_{cd} , es igual al esfuerzo admisible para columnas cortas f_{cp} . Esta condición se representa con la recta horizontal $f_{cd} = f_{cp}$ en la figura 1-20.

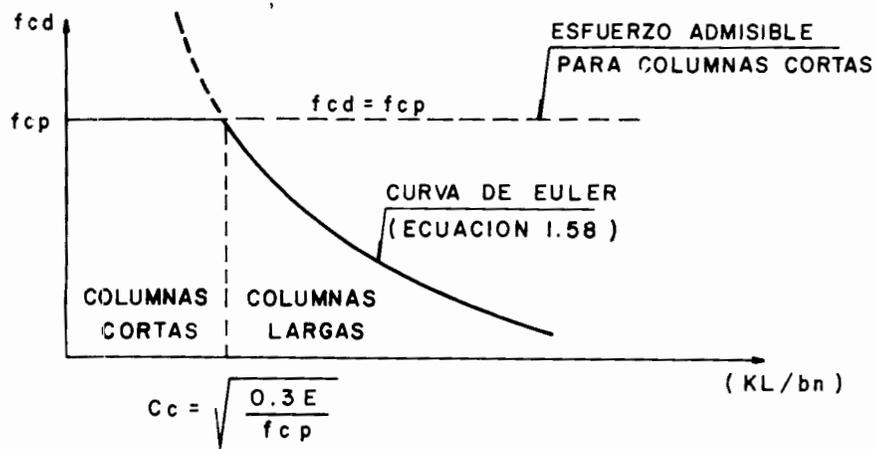


Fig.1-20 GRAFICA DEL ESFUERZO ADMISIBLE EN FUNCION DE KL/b_n .

En la deducción de la ecuación (1.58) supusimos que el pandeo ocurre en el plano XY; sin embargo, cuando las condiciones de apoyo son diferentes en cada plano, deberá investigarse el pandeo en las dos direcciones de análisis mediante el cálculo de la relación de esbeltez para cada dirección y se utilizará para el cálculo del esfuerzo admisible f_{cd} , el mayor de ambos valores de la relación de esbeltez. Así:

en el plano XY, la relación de esbeltez es: (KL/b_n) y
 en el plano ZY, la relación de esbeltez es: (KL/d_n)

Resumiendo; el esfuerzo de compresión uniforme actuante f , en toda sección transversal recta, de la columna es:

$$f = \frac{P}{A_n} \leq f_{cd}$$

donde

$$f_{cd} = f_{cp} \quad \text{cuando el mayor de } (KL/b_n) \text{ o } (KL/d_n) < C_c$$

$$f_{cd} = \frac{0.3E}{(KL/b)_{\text{mayor}}^2} \quad \text{cuando el mayor de } (KL/b_n) \text{ o } (KL/d_n) \geq C_c$$

en que:

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3E}{f_{cp}}}$$

f_{cp} = esfuerzo admisible de compresión para columnas cortas (Tabla T.1)

f_{cd} = esfuerzo admisible de compresión para columnas largas.
 E = módulo de elasticidad de la madera.
 K = factor de longitud efectiva.

Para valores de K , el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal recomienda (fig. 1-21):
 Restringido al giro, con posibilidad de desplazamiento vertical.

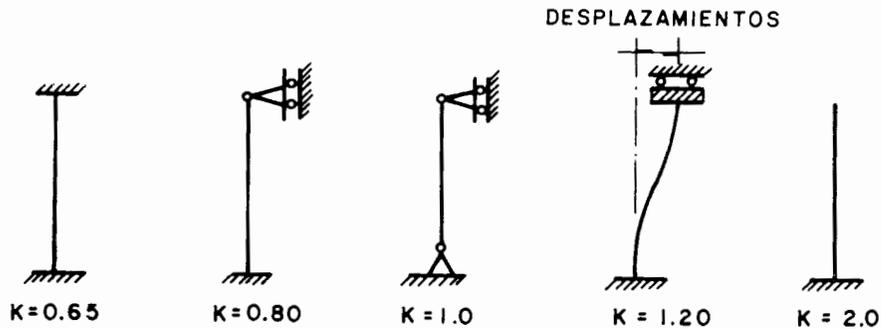


Fig. 1-21 VALORES DE K PARA COLUMNAS DE MADERA DE ACUERDO CON EL R C D F.

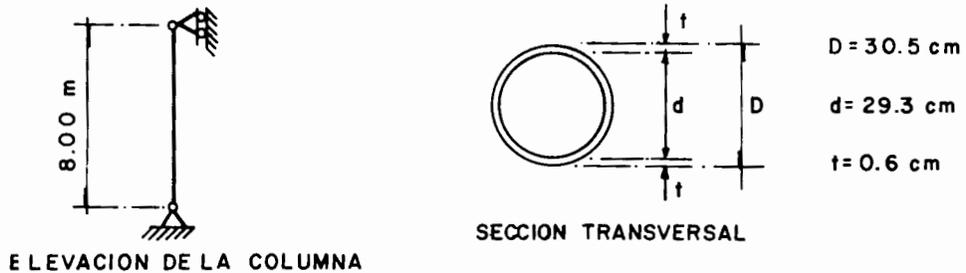
Tabla T-1

ESFUERZOS ADMISIBLES DE COMPRESION PARA COLUMNAS CORTAS (RCDF)	
Tipo de Madera	f_{cp} (Kg/cm ²)
SELECTA	70
PRIMERA	50
SEGUNDA	25
TERCERA	17

En la práctica, el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal recomienda el uso de una excentricidad mínima accidental igual a 0.10 de la sección transversal de la columna en las dos direcciones de análisis. Esto produce un efecto de flexión y obliga a diseñar la columna por flexocompresión, tema que se tratará detalladamente en el capítulo V de este libro.

EJEMPLOS DE APLICACION

- 1.1.- Determinar la carga crítica que produciría el pandeo de una columna de acero A-36, de sección tubular mostrada en la figura. La columna es de 8.00m de altura y está articulada en sus dos extremos. Considere que el acero A-36 tiene un esfuerzo de fluencia de $F_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$ y un módulo de elasticidad de $E = 2.039 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Además, calcular la carga axial que puede admitir la columna en condiciones de servicio.



Solución:

Propiedades de la sección transversal:

$$A = \frac{\pi[D^2 - d^2]}{4} = \frac{\pi[(30.50)^2 - (29.3)^2]}{4} = 56.4 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{\pi[D^4 - d^4]}{64} = \frac{\pi[(30.5)^4 - (29.3)^4]}{64} = 6301 \text{ cm}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{6301}{56.4}} = 10.57 \text{ cm.}$$

Cálculo de la relación de esbeltez:

$K = 1.0$ por estar articulada en ambos extremos.

$$L = 800 \text{ cm.}$$

$$\frac{KL}{r} = \frac{(1.0)(800)}{10.57} = 75.7$$

Coefficiente de columna:

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 (2.039)(10^6)}{2530}} = 126.1$$

Como KL/r es menor que C_c , el pandeo ocurrirá en el rango inelástico; por lo tanto, por la ecuación (1.53), el esfuerzo máximo que soporta la columna, vale:

$$f_{\text{máx}} = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] F_y$$

$$f_{\text{máx}} = \left[1 - \frac{(75.7)^2}{2(126.1)^2} \right] 2530 = 2074 \text{ Kg/cm}^2$$

luego, la carga axial que produce la falla de la columna, se obtiene multiplicando el esfuerzo máximo $f_{\text{máx}}$, por el área de la sección transversal, así:

$$P_{cr} = A f_{\text{máx}}$$

$$P_{cr} = (56.4)(2074) = 116974 \text{ Kg}$$

$$P_{cr} = 116.974 \text{ Ton.}$$

La carga axial que admite la columna bajo condiciones de servicio, se obtiene dividiendo el esfuerzo máximo, $f_{\text{máx}}$, entre el factor de seguridad correspondiente a la falla por pandeo inelástico (ecuación 1.55), y multiplicando por el área de la sección transversal; de esta forma, el esfuerzo admisible es, de acuerdo con la ecuación (1.55):

$$F_a = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] \frac{F_y}{FS_2}$$

donde

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3} \quad (\text{para } KL/r < C_c)$$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(75.7)}{8(126.1)} - \frac{(75.7)^3}{8(126.1)^3} = 1.865$$

así:

$$F_a = \left[1 - \frac{(75.7)^2}{2(126.1)^2} \right] \frac{2530}{1.865} = 1112 \text{ kg/cm}^2$$

por lo tanto, la carga axial admisible bajo condiciones de servicio, vale:

$$P = A F_a$$

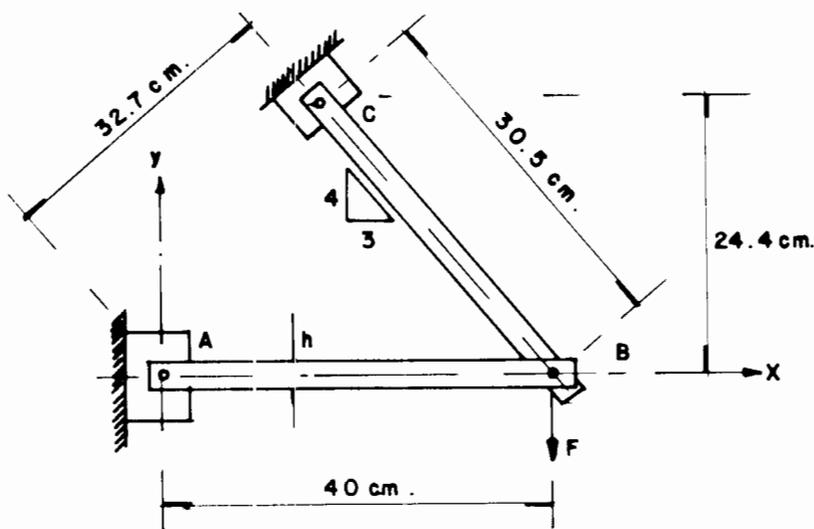
$$P = (56.4)(1112) = 62717 \text{ kg}$$

$$P = 62.717 \text{ Ton.}$$

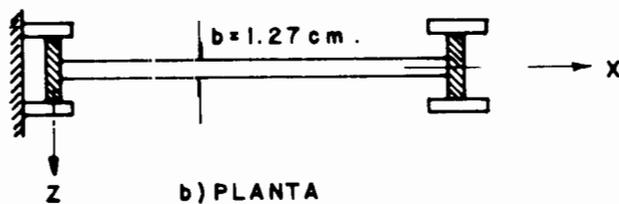
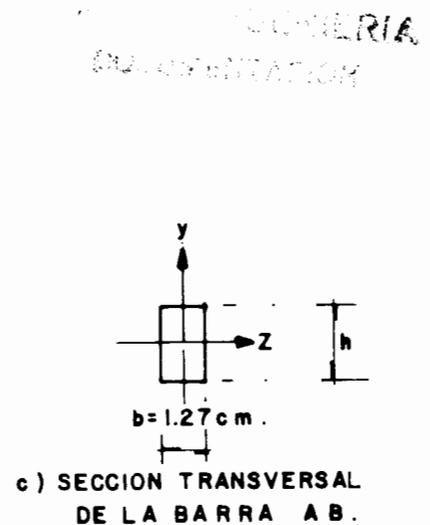
1.2.- Se tiene una armadura de acero como se muestra en la figura. El miembro AB sujeto a compresión, está colocado de tal manera que puede pandear como una columna con extremos articulados en el plano XY, y como una columna con giros restringidos en ambos extremos en el plano XZ.

a) Si el espesor b del miembro es de 1.27 cm., ¿Cuál deberá ser su peralte, h , para que tenga la misma posibilidad de pandearse en las dos direcciones perpendiculares?

b) Si se considera el módulo de elasticidad, $E = 2.039 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$, ¿Cuál será la fuerza F que puede ser aplicada en el punto B?



a) ELEVACION



Solución:

a) Para que la barra AB tenga la misma posibilidad de pandearse en las dos direcciones, se debe cumplir que la carga crítica para cada uno de los pla-

nos sea la misma:

en el plano XY, el giro por pandeo será alrededor del eje Z, por lo tanto:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(KL)_z^2} \quad \text{-----} \quad (a)$$

en donde $K_z = 1.0$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (a)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E b t^3}{12 L^2} \quad \text{-----} \quad (b)$$

Análogamente, en el plano XZ, el giro por pandeo será alrededor del eje Y, -
por lo tanto:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)_y^2} \quad \text{-----} \quad (c)$$

en la que: $K_y = 0.65$ (Valor recomendado para diseño, que es mayor que el teórico igual a 0.5)

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

llevando estos valores a la ecuación (c):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E b^3 h}{12(0.65L)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E b^3 h}{5.07L^2} \quad \text{-----} \quad (d)$$

Comparando las ecuaciones (b) y (d), se obtiene:

$$\frac{\pi^2 E b h^3}{12L^2} = \frac{\pi^2 E b^3 h}{5.07L^2}$$

simplificando

$$\frac{bh^3}{12} = \frac{b^3h}{5.07}$$

de donde

$$h^2 = 2.367 b^2$$

o sea

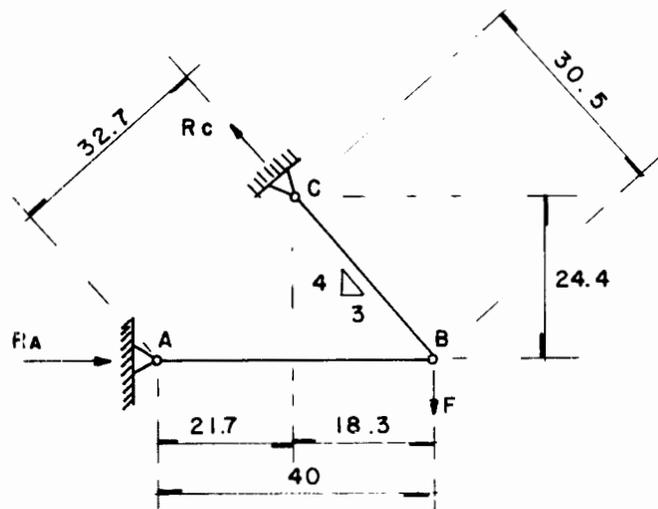
$$h = 1.539 b$$

pero $b = 1.27 \text{ cm}$

por lo tanto, el peralte, h , será:

$$h = (1.539)(1.27) = 1.95 \text{ cm}$$

b) Para conocer cuál es la fuerza F que se puede aplicar en el punto B, tenemos que resolver la armadura:



Por equilibrio de momentos flexionantes:

$$\Sigma M_C = 0 \quad \therefore$$

$$R_A = \frac{18.3 F}{24.4} = 0.75 F \quad \text{----- (e)}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \therefore$$

$$R_C = \frac{40F}{32.7} = 1.223 F \quad \text{----- (f)}$$

La carga axial a la que estará sujeta el miembro AB es igual a R_A ; por lo tanto, el esfuerzo en la barra es :

$$f = \frac{R_A}{A}$$

o sea

$$f = \frac{0.75F}{A}$$

de donde

$$F = \frac{f \cdot A}{0.75} \quad \text{----- (g)}$$

En la expresión (g), f representa el esfuerzo admisible de compresión axial, cuyo valor depende de la relación de esbeltez de la barra AB, que se obtiene como sigue:

En el plano X'Y vale $(KL/r)_z$ en donde $K = 1.0$, $L = 40$ cm y

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

donde

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{(1.27)(1.95)^3}{12} = 0.78 \text{ cm}^4$$

de modo que

$$r_z = \sqrt{\frac{0.78}{1.27 \times 1.95}} = 0.561 \text{ cm}$$

por lo tanto

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_z = \frac{1 \times 40}{0.561} = 71.3$$

En el plano XZ:

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

donde

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_y = \frac{(1.27)^3 (1.95)}{12} = 0.33 \text{ cm}^4$$

sustituyendo:

$$r_y = \sqrt{\frac{0.33}{1.27 \times 1.95}} = 0.365 \text{ cm}$$

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{0.65 \times 40}{0.365} = 71.3$$

Obsérvese que $(KL/r)_z = (KL/r)_y$, debido a que en el inciso a, el peralte h se obtuvo de tal manera que la barra tuviera la misma posibilidad de pandearse en las dos direcciones perpendiculares.

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 (2.039 \times 10^6)}{2530}} = 126.1$$

$$\frac{KL}{r} < C_c \therefore \text{pandeo inelástico}$$

Como el pandeo ocurrirá en el rango inelástico, el esfuerzo admisible se obtiene a partir de la ecuación (1.55):

$$F_a = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] \frac{F_y}{FS_2}$$

donde

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}$$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(71.3)}{8(126.1)} - \frac{(71.3)^3}{8(126.1)^3} = 1.856$$

en consecuencia

$$F_a = \left[1 - \frac{(71.3)^2}{2(126.1)^2} \right] \frac{2530}{1.856} = 1145 \text{ Kg/cm}^2$$

Por lo tanto, la fuerza F que se puede aplicar en el punto B vale, por la ecuación (g):

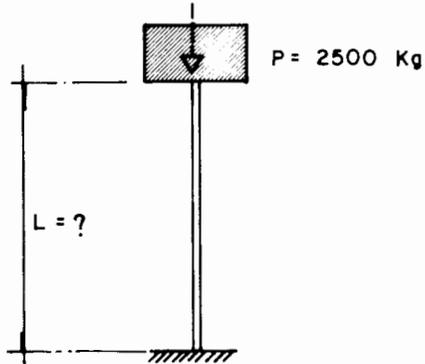
$$F = \frac{F_a A}{0.75}$$

o sea:

$$F = \frac{1145 \times 1.27 \times 1.95}{0.75} = 3780 \text{ Kg}$$

$$F = 3.78 \text{ Ton}$$

- 1.3.- Una pieza de equipo mecánico, que pesa 2500 Kg, debe estar soportada en el extremo superior de un tubo de acero, de diámetro nominal igual a 5" (cédula 40). La base del tubo está empotrada en un dado de concreto, y su extremo superior está libre. Si se requiere un factor de seguridad contra pandeo de 2.5, ¿Cuál será la altura máxima de la columna capaz de soportar dicha pieza? Su ponga que $E = 2.039 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$. Calcular adicionalmente el es fuerzo admisible por compresión axial.



Solución

Propiedades de la sección (tomadas del manual AHMSA) (ref. 1.9)

Momento de inercia	$I = 631 \text{ cm}^4$
Area	$A = 27.8 \text{ cm}^2$
Radio de giro	$r = 4.8 \text{ cm}$

si la carga de servicio P es igual a P_{cr}/FS , entonces

$$P_{cr} = (FS) P$$

$$P_{cr} = (2.5)(2500) = 6250 \text{ Kg}$$

de la ecuación (1.40):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

despejamos L :

$$L = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr}}}$$

donde $K = 2.1$ por tratarse de una columna en cantilever, por lo tanto

$$L = \frac{1}{2.1} \sqrt{\frac{\pi^2 (2.039 \times 10^6) (631)}{6250}} = 6.78 \text{ cm} = 6.78 \text{ m}$$

la altura máxima será de 6.78 m.

Averigüemos ahora, el esfuerzo admisible de compresión axial. La relación de esbeltez vale:

$$\frac{KL}{r} = \frac{2.1 \times 678}{4.8} = 297.0$$

comparando con C_c :

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 (2.039 \times 10^6)}{2530}} = 126.1$$

$$\frac{KL}{r} > C_c \quad \therefore \text{pandeo elástico}$$

El esfuerzo admisible se obtiene mediante la ecuación (1.54):

$$F_a = \left[\frac{C_c^2}{2(KL/r)^2} \right] \frac{F_y}{FS_1}$$

donde

$$FS_1 = 1.92$$

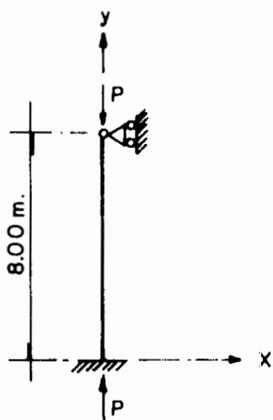
$$F_a = \left[\frac{(126.1)^2}{2(297)^2} \right] \frac{2530}{1.92} = 119 \text{ Kg/cm}^2$$

el esfuerzo actuante vale

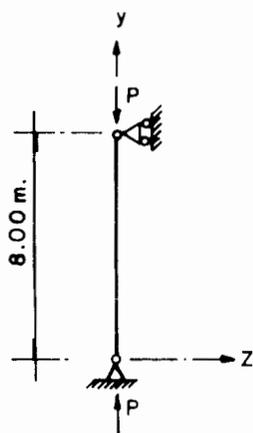
$$f_a = \frac{P}{A}$$

$$f_a = \frac{2500}{27.8} = 90 \text{ Kg/cm}^2 < F_a = 119 \text{ Kg/cm}^2$$

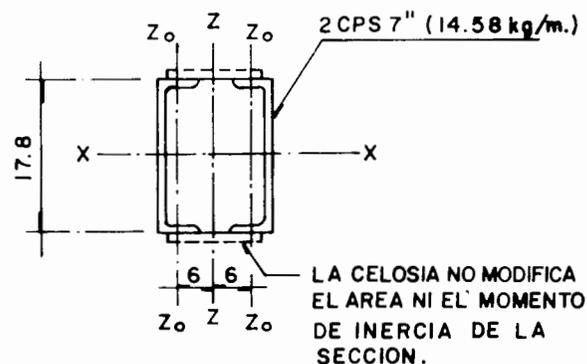
- 1.4.- Determinar la capacidad de carga de una columna de acero A-36, de 8.00 m. de altura, que en el plano XY está empotrada en la base y articulada en el extremo superior, y en el plano ZY está articulada en ambos extremos. La sección de la columna está formada por 2 canales CPS-7" de peso igual a 14.58 Kg/m cada una, unidas entre sí por elementos que forman una celosía. Considerar que $E = 2.039 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ y $F_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$.



PLANO XY (FLEXION POR PANDEO
ALREDEDOR DEL EJE Z)

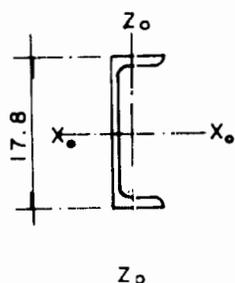


PLANO ZY (FLEXION POR PANDEO
ALREDEDOR DEL EJE X)



SECCION TRANSVERSAL

Nota: Las características de un perfil CPS-7" (14.58 Kg/m.) de acuerdo con el manual AHMSA son:



$$\begin{aligned} A_o &= 18.39 \text{ cm}^2 \\ I_{X_o} &= 878.2 \text{ cm}^4 \\ r_{X_o} &= 6.91 \text{ cm} \\ I_{Z_o} &= 40.79 \text{ cm}^4 \\ r_{Z_o} &= 1.50 \text{ cm} \end{aligned}$$

Solución:

a) Propiedades de la sección de la columna.

$$A = 2A_o = (2)(18.39) = 36.78 \text{ cm}^2$$

$$I_X = 2I_{X_o} = (2)(878.2) = 1756.4 \text{ cm}^4$$

$$I_Z = (I_{Z_o} + A_o d^2) 2 = [40.79 + (18.39)(6)^2] 2 = 1405.7 \text{ cm}^4$$

$$r_X = \sqrt{I_X/A} = \sqrt{1756.4/36.78} = 6.91 \text{ cm.}$$

$$r_Z = \sqrt{I_Z/A} = \sqrt{1405.7/36.78} = 6.18 \text{ cm.}$$

b) Relación de esbeltez en el plano XY:

$K_z = 0.8$ (Valor recomendado para diseño, mayor que el valor teórico igual a 0.7)

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_z = \frac{(0.8)(800)}{6.18} = 103.6 \text{ (adimensional)}$$

c) Relación de esbeltez en el plano ZY:

$$K_x = 1.0$$

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_x = \frac{(1.0)(800)}{6.9} = 115.8 \text{ (adimensional)}$$

d) Por ser $(KL/r)_x > (KL/r)_z$ el plano de pandeo será el ZY, es decir, la flexión por pandeo ocurrirá alrededor del eje x, y para calcular el esfuerzo admisible tomaremos el mayor de los valores de relación de esbeltez, o sea:

$$(KL/r)_x = 115.8$$

e) Coeficiente de columna.

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 (2.039)(10^6)}{(2530)}} = 126.1$$

f) Como $(KL/r)_x = 115.8$ es menor que $C_c = 126.1$, el pandeo ocurrirá en el rango inelástico; por lo tanto,

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}$$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(115.8)}{8(126.1)} - \frac{(115.8)^3}{8(126.1)^3} = 1.914$$

y

$$F_a = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] \frac{F_y}{FS_2} \quad (\text{ecuación 1.55})$$

$$F_a = \left[1 - \frac{(115.8)^2}{2(126.1)^2} \right] \frac{2530}{1.914} = 764 \text{ Kg/cm}^2$$

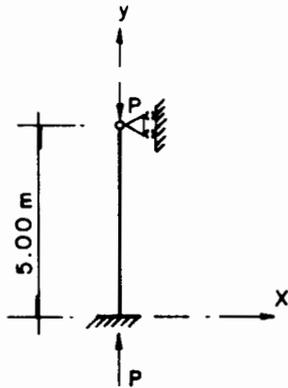
g) La capacidad de carga de la columna, en condiciones de servicio, será:

$$P = F_a A$$

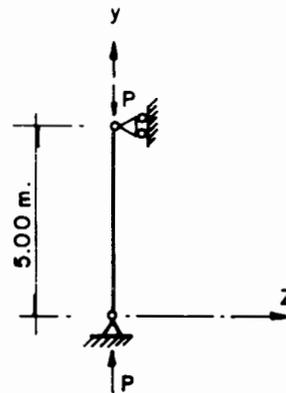
$$P = (764)(36.78) = 28\,100 \text{ Kg}$$

$$P = 28.1 \text{ Ton.}$$

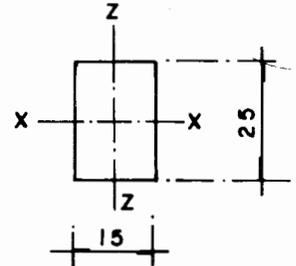
1.5.- Determinar la carga axial admisible, en condiciones de servicio, para una columna de madera de primera que en el plano XY, mostrado en la figura, está empotrada en la base y articulada en su extremo superior, y en el plano ZY está articulada en ambos extremos. La sección de la columna es de 15 x 25 cm y su altura es de 5.00m. Considerar que $E = 70000 \text{ Kg/cm}^2$.



a) PLANO XY (FLEXION POR PANDEO ALREDEDOR DEL EJE Z)



b) PLANO ZY (FLEXION POR PANDEO ALREDEDOR DEL EJE X)



c) SECCION TRANSVERSAL

Solución:

Por ser madera de primera consideraremos, de acuerdo con la Tabla T-1,

$$f_{cp} = 50 \text{ Kg/cm}^2$$

Las dimensiones netas, reducidas por efectos de intemperismo, son:

$$\text{en la dirección del eje X: } b_n = 15 - 1 = 14 \text{ cm}$$

$$\text{en la dirección del eje Z: } d_n = 25 - 1 = 24 \text{ cm}$$

Con la ecuación (1.59), C_c vale:

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3E}{f_{cp}}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3 \times 70000}{50}} = 20.49 \quad (\text{adimensional})$$

La relación de esbeltez en el plano XY se calcula con $(KL/b_n)_z$,

en donde $K_z = 0.8$, y en el plano ZY se calcula con $(KL/d_n)_x$,

en donde $K_x = 1.0$, por lo tanto:

$$\left(\frac{KL}{b_n}\right)_z = \frac{(0.80)(500)}{14} = 28.6$$

$$\left(\frac{KL}{d_n}\right)_x = \frac{(1.0)(500)}{24} = 20.8$$

Comparando $(KL/b_n)_z$ y $(KL/d_n)_x$ se observa que, por ser mayor $(KL/b_n)_z$, el pandeo ocurrirá en el plano XY, es decir, la flexión por pandeo ocurrirá alrededor del eje z; por lo tanto, para calcular el esfuerzo admisible f_{cd} tomaremos el mayor de ambos valores, o sea $(KL/b_n)_z = 28.6$

Además:

$$\left(\frac{KL}{b_n}\right)_z = 28.6 > C_c = 20.49 \therefore \text{el pandeo ocurrirá en el rango elástico}$$

por lo tanto, aplicando la ecuación (1.58)

$$f_{cd} = \frac{0.3E}{(KL/b_n)^2}$$

$$f_{cd} = \frac{(0.3)(70000)}{(28.6)^2} = 25.7 \text{ Kg/cm}^2$$

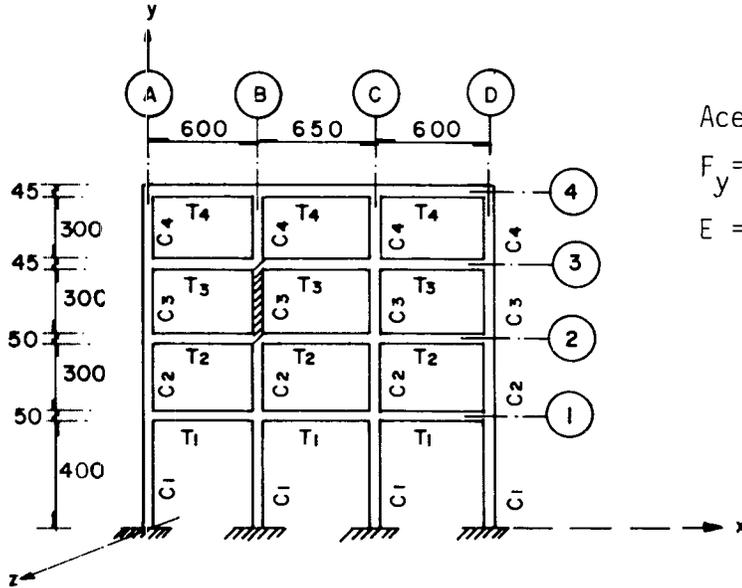
La carga axial admisible será:

$$P = A_n f_{cd}$$

$$P = (14)(24)(25.7) = 8635 \text{ Kg}$$

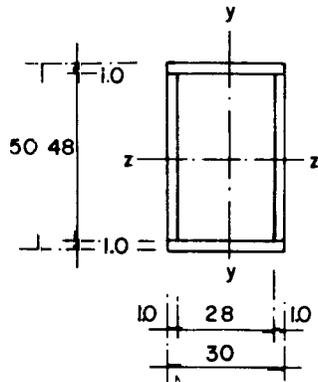
$$P = 8.635 \text{ Ton.}$$

1.6 Calcular la carga axial máxima admisible de la columna de acero A-36, localizada sobre el eje B entre los niveles 2 y 3 del marco no restringido contra desplazamientos laterales (marco no contraventeado) mostrado en la siguiente figura. Considere que en el plano perpendicular al marco, la columna no tiene problemas de pandeo.

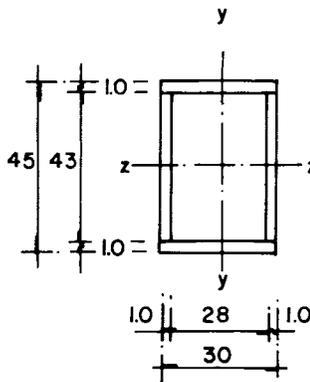


Acero A - 36
 $F_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$
 $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

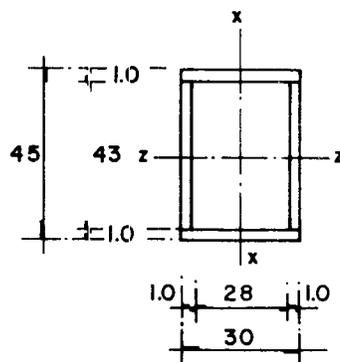
MARCO NO CONTRAVENTEADO EN PLANO xy
 (FLEXION DEBIDA A PANDEO ALREDEDOR DEL EJE z)



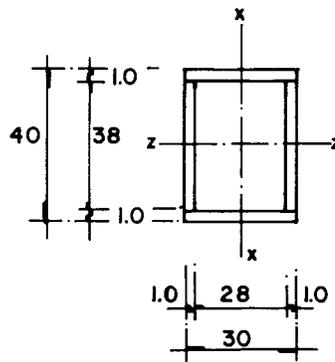
TRABES T_1 y T_2



TRABES T_3 y T_4



COLUMNAS C_1 y C_2



COLUMNAS C_3 y C_4

Solución:

a) Momentos de inercia de las secciones:

$$\text{Trabes } T_1 \text{ y } T_2 \quad I_z = \frac{(30)(50)^3}{12} - \frac{(28)(48)^3}{12} = 54\,452 \text{ cm}^4$$

$$\text{Trabes } T_3 \text{ y } T_4 \quad I_z = \frac{(30)(45)^3}{12} - \frac{(28)(43)^3}{12} = 42\,296 \text{ cm}^4$$

columnas C_1 y C_2

$$\text{Columnas } C_3 \text{ y } C_4 \quad I_z = \frac{(30)(40)^3}{12} - \frac{(28)(38)^3}{12} = 31\,965 \text{ cm}^4$$

b) Rigideces relativas:

$$T_3 \text{ de A a B.} \quad \frac{I}{L} = \frac{42296}{600} = 70.49$$

$$T_3 \text{ de B a C.} \quad \frac{I}{L} = \frac{42296}{650} = 65.07$$

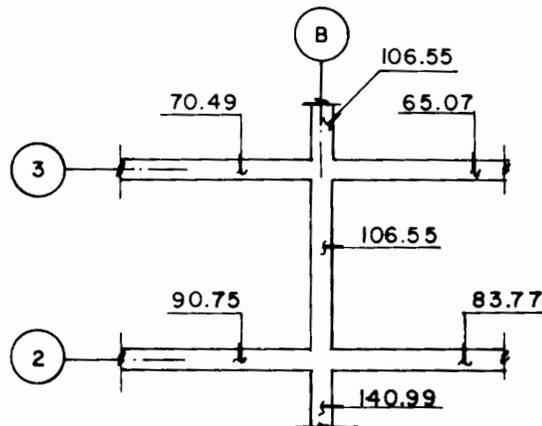
$$T_2 \text{ de A a B.} \quad \frac{I}{L} = \frac{54452}{600} = 90.75$$

$$T_2 \text{ de B a C.} \quad \frac{I}{L} = \frac{54452}{650} = 83.77$$

$$C_2 \text{ de 1 a 2.} \quad \frac{I}{L} = \frac{42296}{300} = 140.99$$

$$C_3 \text{ de 2 a 3.} \quad \frac{I}{L} = \frac{31965}{300} = 106.55$$

$$C_4 \text{ de 3 a 4.} \quad \frac{I}{L} = \frac{31965}{300} = 106.55$$



c) Restricción rotacional en las juntas (ecuación 1.41):

$$\psi = \frac{\Sigma(I_c/L_c)}{\Sigma(I_b/L_b)}$$

en el nudo 2:

$$\psi_2 = \frac{140.99 + 106.55}{90.75 + 83.77} = 1.42$$

en el nudo 3:

$$\psi_3 = \frac{106.55 + 106.55}{70.49 + 65.07} = 1.57$$

d) Determinación del factor de longitud efectiva K:

Por ser un marco no contraventeado usaremos el nomograma de la figura 1-15b.

Con $\psi_2 = 1.42$ y $\psi_3 = 1.57$ se obtiene:

$$K = 1.45$$

e) Propiedades de la columna C_3 :

$$A = (30)(40) - (28)(38) = 136 \text{ cm}^2$$

$$I_z = 31965 \text{ cm}^4 \quad (\text{ver inciso a}),$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{31965}{136}} = 15.33 \text{ cm}$$

f) Relación de esbeltez

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_z = \frac{1.45 \times 300}{15.33} = 28.38$$

NOTA: En este caso el valor de $(KL/r)_z$ es mayor que $(KL/r)_x$ debido a que en el plano ZY la columna C_3 no tiene problemas de pandeo.

g) Coeficiente de columna (ecuación 1.49)

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{F_y}}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 (2 \times 10^6)}{2530}} = 124.9$$

Por ser $(KL/r)_z = 28.38$ menor que C_c , el pandeo ocurrirá en el rango inelástico; por lo tanto, el esfuerzo admisible por compresión se calculará mediante la ecuación (1.55).

h) Obtención del esfuerzo admisible para $KL/r < C_c$

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}$$

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3(28.38)}{8(124.9)} - \frac{(28.38)^3}{8(124.9)^3} = 1.75$$

para $KL/r < C_c$

$$F_a = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] \frac{F_y}{FS}$$

$$F_a = \left[1 - \frac{(28.38)^2}{2(124.9)^2} \right] \frac{2530}{1.75} = 1408 \text{ Kg/cm}^2$$

i) Carga axial máxima admisible:

$$P = F_a \cdot A$$

$$P = (1408)(136) = 191488 \text{ Kg}$$

$$P = 191.48 \text{ Ton.}$$

REFERENCIAS

- 1.1.- Boyce, W.E., y Di Prima, R.C. , "Elementary Differential Equations" --
3a. edición, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1977.
- 1.2.- "Diseño y Construcción de Estructuras de Madera", Normas Técnicas -
Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito -
Federal, Publicación 404 del Instituto de Ingeniería de la UNAM,- -
1977.
- 1.3.- Timoshenko, S.P., y Gere, J.M., "Mecánica de Materiales", 1a. edi -
ción en Español, Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, - -
México, D.F., 1974.
- 1.4.- B.C. Johnston (Ed.), "The Column Research Council. Guide to Desing -
Criteria for Metal Compression Members", 2a. edición, John Wiley - -
and Sons, Inc., Nueva York, 1966.
- 1.5.- Park, R., and Paulay, T., "Estructuras de Concreto Reforzado", 1a. -
edición, Ed. LIMUSA, S.A., México, D.F., 1980.
- 1.6.- Manual of Steel Construction, 7a. edición, publicado por American --
Institute of Steel Construction, Inc., Nueva York, 1970.
- 1.7.- Sánchez Martínez, J.L., "Efectos de Esbeltez", Apuntes para el curso
de Mecánica de Materiales II, Facultad de Ingeniería, UNAM, México-
D.F.
- 1.8.- Popov, E.P., "Introduction to Mechanics of Solids", 1a. edición. -
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.
- 1.9.- Manual de Construcción de acero, publicado por Altos Hornos de Mé--
xico, S.A., (Manual AHMSA), México, D.F., 1975.

FAC. DE INGENIERIA
POLITECNICO NACIONAL

CAPITULO II.- ESTABILIDAD DE PLACAS .



FACULTAD DE INGENIERIA

G- 610925

CAPITULO II.- ESTABILIDAD DE PLACAS

II.1 Estabilidad de Placas Planas con Carga en su Plano.

FAC. DE INGENIERIA
DOCUMENTOS

II.1.1 Introducción.

En la investigación de la condición de inestabilidad de columnas en el capítulo anterior se ha considerado a la columna como un todo, como un miembro prismático que tiene rigidez flexionante y torsionante, sin considerar la posibilidad de algún cambio en la forma de la sección transversal y su efecto sobre la capacidad de carga de la columna. Sin embargo, es casi una regla que los miembros en compresión de las estructuras metálicas están formados por placas. Es por lo tanto concebible que aún antes de que se inicie el pandeo general de una columna o de una viga, las placas de las cuales está compuesta, alcancen un estado de equilibrio inestable y se pandeen localmente, ocurriendo una falla prematura de la pieza caracterizada por una distorsión de su sección transversal. Por lo tanto se deberá tomar en cuenta la inestabilidad de placas en el diseño de columnas y de vigas. La teoría que se presenta a continuación sirve para el doble propósito de describir las leyes fundamentales que gobiernan el comportamiento de placas comprimidas sujetas a varios tipos de restricciones a las que, por lo general, están sujetas las placas que forman una columna y la zona comprimida de una viga, y a proveer las bases para determinar, de una manera confiable, el espesor requerido de las placas en problemas prácticos.

Este capítulo tratará el caso de placas rectangulares bajo esfuerzos de compresión uniformes, estudiándose el comportamiento en los rangos elástico e inelástico.

II.1.2 La Ecuación Diferencial Fundamental del Problema de Placas y su Solución.

Se considera una placa plana que está cargada en los bordes \underline{b} , paralelos al eje \underline{Y} , por la carga uniformemente distribuida $t\sigma_x$ donde t es el espesor de la placa (fig. 2.1.-a). Se supone que estos bordes están simplemente apoyados de tal forma que la placa puede girar libremente en esos apoyos.-

El empotrar los bordes cargados tiene poco efecto en la carga crítica en placas largas como es el caso de columnas, sin embargo la influencia del tipo de apoyo en los bordes paralelos a la dirección de la carga sí es decisiva.- Los bordes paralelos al eje X (bordes a) pueden estar apoyados en varias formas.

CASO I: la placa está elásticamente restringida en ambos bordes a. Este caso incluye como límites los bordes simplemente apoyados y los empotrados.

CASO II: Un borde a está elásticamente restringido; el otro está libre. Este caso, asimismo, incluye las dos condiciones límite en las cuales el borde apoyado es libre de girar o está empotrado.

La fig. (2.1.-b) muestra cortes longitudinales típicos de la placa pandeada, y la fig. (2.1.-c) cortes transversales para cada caso de apoyos.

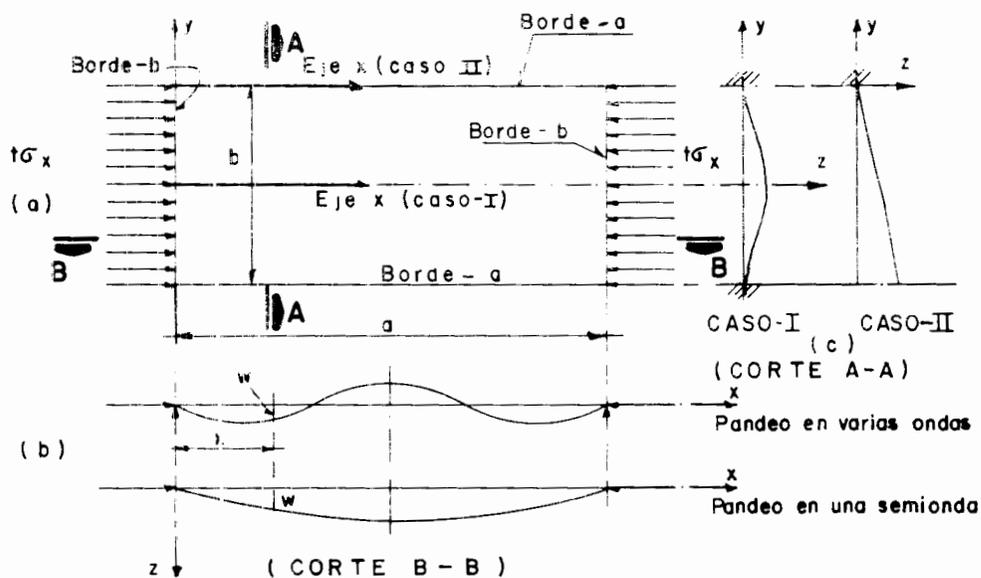


FIG. 2.1. PLACA DE $a \times b$ CARGADA EN LOS BORDES b

En placas apoyadas en ambos bordes (Caso I), el pandeo ocurre en una o más semiondas dependiendo de la relación a/b . En el caso II, donde un borde a de la placa está libre, se pandeará en una semionda cuando esté libre para girar en el borde apoyado pero en una o más semiondas si está restringido elásticamente o empotrado.

Este capítulo se basa en la ecuación diferencial fundamental para la defle--

ción ω (en el sentido z) de una placa delgada sometida a cargas en su plano medio. Esta ecuación es válida para deformaciones ω pequeñas, comparadas -- con el espesor t de la placa. La ecuación es:

$$\frac{EI}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) + t \left(\sigma_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (2.1)$$

σ_x y σ_y son los esfuerzos en la dirección X y Y respectivamente y τ_{xy} es el esfuerzo cortante en los bordes; $I = t^3/12$ es el momento de inercia de la sección transversal de la placa de ancho unitario y espesor t ; μ módulo de Poisson, se considera $\mu = 0.3$ para el caso del acero. En la referencia 2.5 de este capítulo se presenta la derivación de la ecuación diferencial fundamental de placas, que se incluye como Apéndice A de este texto.

Si se considera solamente una carga de compresión distribuida uniformemente en los bordes b, como se indica en la fig. (2.1), el esfuerzo σ_x se hace constante y σ_y y τ_{xy} desaparecen. La ecuación diferencial para el desplazamiento ω toma la forma siguiente:

$$\frac{EI}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) + t\sigma_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (2.2)$$

En la forma en que aparece la ec. (2.2) es válida sólo en el rango elástico y tiene que ser modificada para cuando excede σ_x el límite de proporcionalidad. Bleich (ref.2.1) ha propuesto la siguiente aproximación para tratar el problema inelástico.

$$\frac{EI}{1-\mu^2} \left(\tau \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\sqrt{\tau} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) + t\sigma_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

Donde $\tau = E_t/E$, siendo E_t el módulo tangente. La expresión (2.3) ha demostrado buena concordancia con resultados de laboratorio.

Esta ecuación es una ecuación diferencial homogénea y desempeña el mismo papel en la teoría de estabilidad de placas que la ecuación diferencial homogénea

nea $EI(d^2y/dx^2) + Py = 0$ en la teoría de la flexión. Análogamente a lo que sucede en la teoría de columnas, las soluciones de y en la ec. (2.3) existen solamente para ciertos valores σ_c (valores característicos) del parámetro σ_x . Tales soluciones describen la configuración deformada de la placa en equilibrio inestable correspondiente a los valores característicos σ_c . Si el parámetro σ_x es diferente de los valores característicos, la ec. (2.3) se satisface sólo por la solución $w = 0$.

El valor característico de σ_x que se obtiene al resolver la ecuación (2.3) está dado por la expresión:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E_1 \bar{E}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{E_1}{b}\right)^2 K \quad (2.4)$$

Donde K es un coeficiente adimensional que depende de la relación de aspecto a/b de la placa, de la restricción al giro en los bordes descargados, μ y del valor de ν . En la referencia 2.1 de este capítulo se hace el desarrollo de la solución (2.4) para la ecuación diferencial fundamental (2.3) que conduce al valor σ_c dado en (2.4), que se presenta como Apéndice B al final del texto.

Para el caso de una placa aislada simplemente apoyada en sus bordes longitudinales, la forma en la que el coeficiente K , que se denomina factor de placa, varía con la relación a/b de la placa se muestra en la fig. 2.2. Las curvas, para distintos número de semiondas n , que aparecen en esta figura nos muestran gráficamente la dependencia del factor de placa K con la relación a/b .

En la tabla 2.1 se dan los valores de K relativo a placas aisladas, para diferentes condiciones de apoyo en los bordes paralelos a la carga y para diversos valores de a/b . Los valores de K correspondientes al caso 1 se obtienen de la fig. 2.2, los valores de K para los casos 2,3 y 4 se obtienen de gráficas semejantes a la de la fig. 2.2.

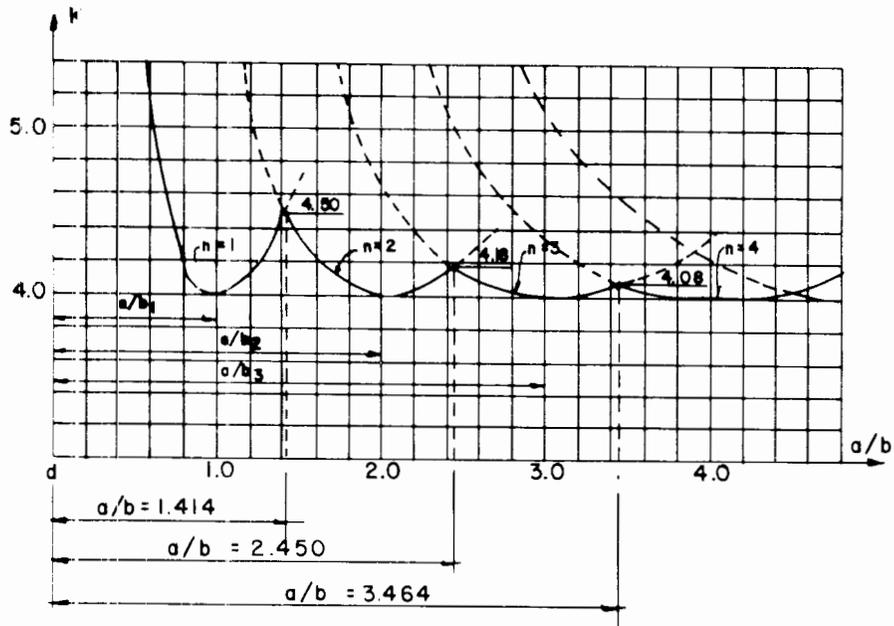
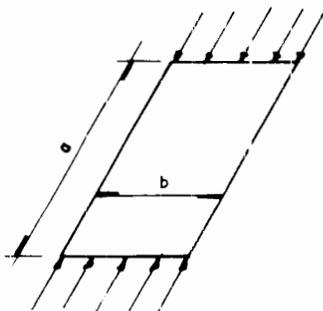


FIG. 2.2 VARIACION DEL FACTOR DE PLACA K CON LA RELACION DE ASPECTO a/b

TABLA 2.1 VALORES DE K PARA PANDEO DE PLACAS COMPRIMIDAS

CASO	TIPO DE APOYO EN LOS BORDES PARALELOS A LA CARGA (LOS CARGADOS ESTAN SIEMPRE LIBREMENTE APOYADOS)	RELACION a/b y VALORES DE K								
		a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
1	LOS DOS BORDES LIBREMENTE APOYADOS	a/b	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	
		k	27.0	13.2	8.41	6.25	5.14	4.53	4.20	
		a/b	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.41	
2	LOS DOS BORDES EMPOTRADOS	a/b	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
		k	9.44	7.69	7.05	7.00	7.29	7.83	7.09	
		a/b	1.7	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4		
3	UN BORDE EMPOTRADO, EL OTRO LIBRE	a/b	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	
		k	1.70	1.56	1.47	1.41	1.36	1.34	1.33	
		K	1.33	1.34	1.36	1.30	1.45	1.47		
4	UN BORDE LIBREMENTE APOYADO, EL OTRO LIBRE	a/b	0.5	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	
		k	4.40	1.44	1.14	0.952	0.835	0.755	0.698	
		a/b	2.5	3.0	4.0	5.0	PARA PLACAS MAS LARGAS $k = 0.456 + (b/a)^2$			
		k	0.610	0.564	0.516	0.506				



VALORES MINIMOS DE K

- 1.- LOS DOS BORDES APOYADOS LIBREMENTE, $k = 4.00$
- 2.- LOS DOS BORDES EMPOTRADOS, $k = 6.97$
- 3.- UN BORDE EMPOTRADO, EL OTRO LIBRE $k = 1.277$
- 4.- UN BORDE APOYADO LIBREMENTE, EL OTRO LIBRE $k = 0.425$
- 5.- UN BORDE APOYADO LIBREMENTE, EL OTRO EMPOTRADO $k = 5.42$

El coeficiente K de placas que forman parte de secciones a compresión, se puede determinar por medio de la siguiente ecuación:

$$K = p + 2 \sqrt{q} \quad (2.5)$$

Donde p y q son coeficientes adimensionales que dependen del coeficiente de restricción ζ . El coeficiente de restricción ζ es función de las dimensiones de la placa que se pandea y de las que restringen el pandeo. Teóricamente ζ puede asumir valores de 0 a ∞ . Cuando $\zeta = 0$, la placa está empotrada en los bordes a , y cuando $\zeta \rightarrow \infty$, (convencionalmente $\zeta = \infty$), está libre para girar con respecto a estos bordes, es decir, el coeficiente de restricción es inversamente proporcional a la rigidez al giro que se tenga en los bordes a .

En la tabla (2.2) se presentan las fórmulas con las que se puede calcular el coeficiente de restricción ζ para diferentes secciones formadas con placas.

Una vez que se determina ζ , se utilizan las gráficas de las figs. (2.3) ó (2.4) para obtener los coeficientes p y q . Haciendo la sustitución de estos en la ec. 2.5 se obtiene el factor de placa K . La fig. (2.3) se utiliza cuando la placa pertenece al caso I y la fig. (2.4) cuando la placa pertenece al caso II. Como una simplificación del procedimiento anterior se puede obtener directamente de la tabla 2.2 el valor aproximado de \sqrt{K} , pues en la tercera columna de esta tabla se incluyen expresiones aproximadas para calcular \sqrt{K} como función de ζ .

Los nomogramas de la fig. 2.5 son soluciones gráficas de la mayor parte de los casos incluidos en la tabla 2.2, con la cual se tiene un tercer método para obtener el factor de placa K .

Una vez obtenido el factor de placa K , se sustituye en la ec. (2.4) y se obtiene el esfuerzo crítico de pandeo local σ_c .

Es conveniente aclarar que para el caso I cuando para calcular el factor de placa K , se tienen restricciones desiguales en los bordes descargados de la placa se puede emplear el siguiente criterio: primero usando el coeficiente de restricción ζ_1 de un lado, se obtiene un coeficiente K_1 con la ec. (2.5) -

TABLA 2.2 FORMULAS PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE RESTRICCIÓN ζ Y EL FACTOR K DE PLACAS QUE FORMAN PARTE DE SECCIONES A COMPRESION

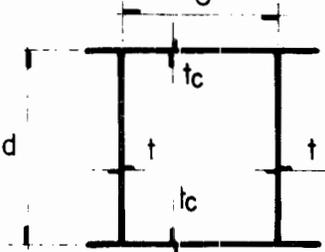
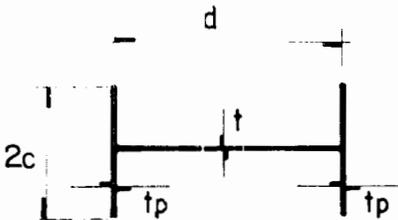
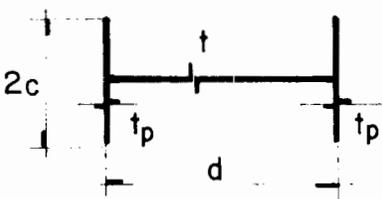
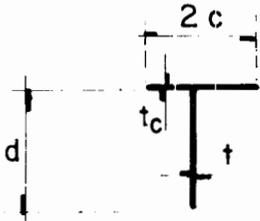
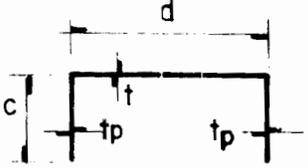
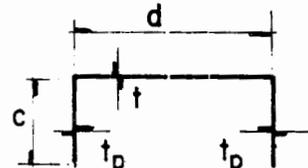
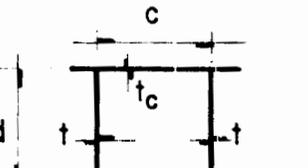
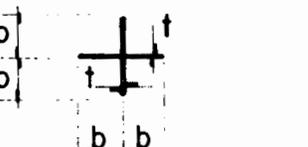
Tipo de sección transversal	Coeficiente de restricción ζ	\sqrt{K}
<p>ALMAS DE SECCIONES EN CAJON</p> 	$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{0.38}{1 - \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>válido para $\frac{t_c}{t_{cd}} \leq 1$</p>	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$
<p>ALMAS DE SECCIONES I</p> 	$\zeta = \frac{t^3}{t_p^3} \frac{0.16 + 0.0056(d/c)^2}{1 - 9.4 \frac{t^2}{t_p^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>válido para $9.4 \frac{t_c^2}{t_p^2 d^2} \leq 1$</p>	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$
<p>PATINES DE SECCIONES I</p> 	$\zeta = 2 \frac{t_p^3 d}{t^3 c} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t_p^2}{t^2} \frac{d^2}{c^2}}$ <p>válido para $9.4 \frac{t_c^2}{t_p^2 d^2} \geq 1$</p>	$0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$
<p>ALMAS DE SECCIONES T</p> 	$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}}$ <p>válido para $0.106 \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2} \leq 1$</p>	$0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$

TABLA 2.2 (CONTINUACION)

Tipo de sección transversal	Coeficiente de restricción ζ	\sqrt{k}
ALMAS DE CANALES 	$\zeta = 2 \frac{t^2 c^2 + 0.016 + 0.0056(d/c)^2}{t^3 c - 9.4 \frac{t^2 c^2}{t_p^2 d^2}}$ <p>válido para $9.4 \frac{t^2 c^2}{t_p^2 d^2} \leq 1$</p>	$2 + \frac{2}{10\zeta + 3}$
PATINES DE CANALES 	$\zeta = \frac{3 t_p d}{t^3 c} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t^2 d^2}{t^2 c^2}}$ <p>válido para $9.4 \frac{t^2 c^2}{t_p^2 d^2} \geq 1$</p>	$0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$
ALMAS DE SECCIONES U* 	$\zeta = \frac{t^2 c}{t^3 d} \frac{1}{1 - 0.106 \frac{t^2 c^2}{t^2 d^2}}$ <p>válido para $9.4 \frac{t^2 d^2}{t^2 c^2} \geq 1$</p>	$0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4}$
ANGULOS 		$b_1/b = 1 : 0.652$ $b_1/b = \frac{2}{3} : 0.711$ $b_1/b = \frac{1}{2} : 0.754$
SECCIONES EN CRUZ 		0.652

* LA FORMULA NC ES APLICABLE SI LOS BORDES INFERIORES DE LAS ALMAS ESTAN UNIDOS ENTRE SI POR DIAGONALES O PLACAS INTERRUMPIDAS.

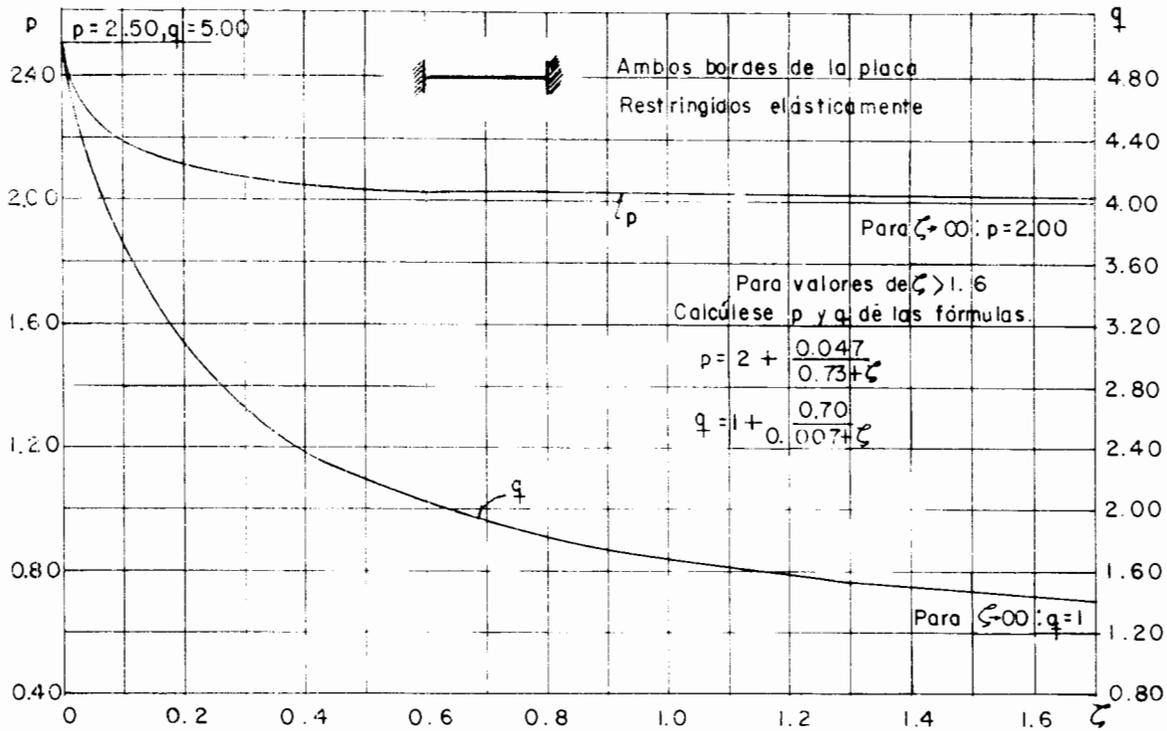


FIG. 2.3. VALORES DE p y q EN FUNCION DEL COEFICIENTE DE RESTRICION ζ (CASO I)

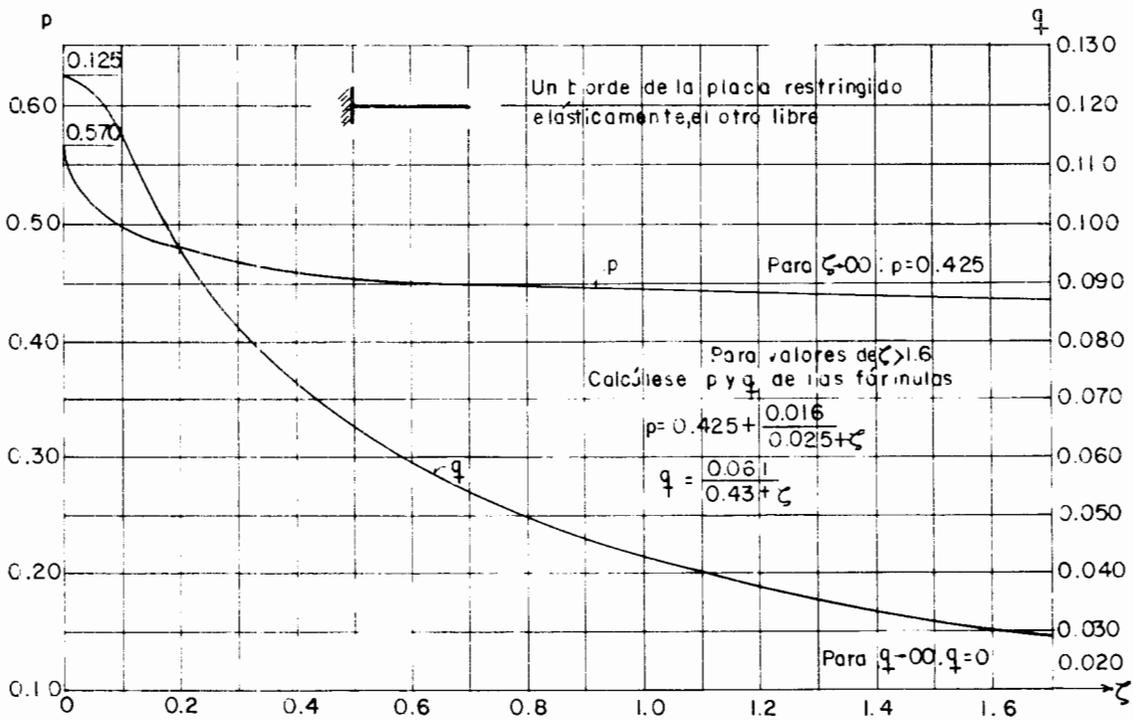
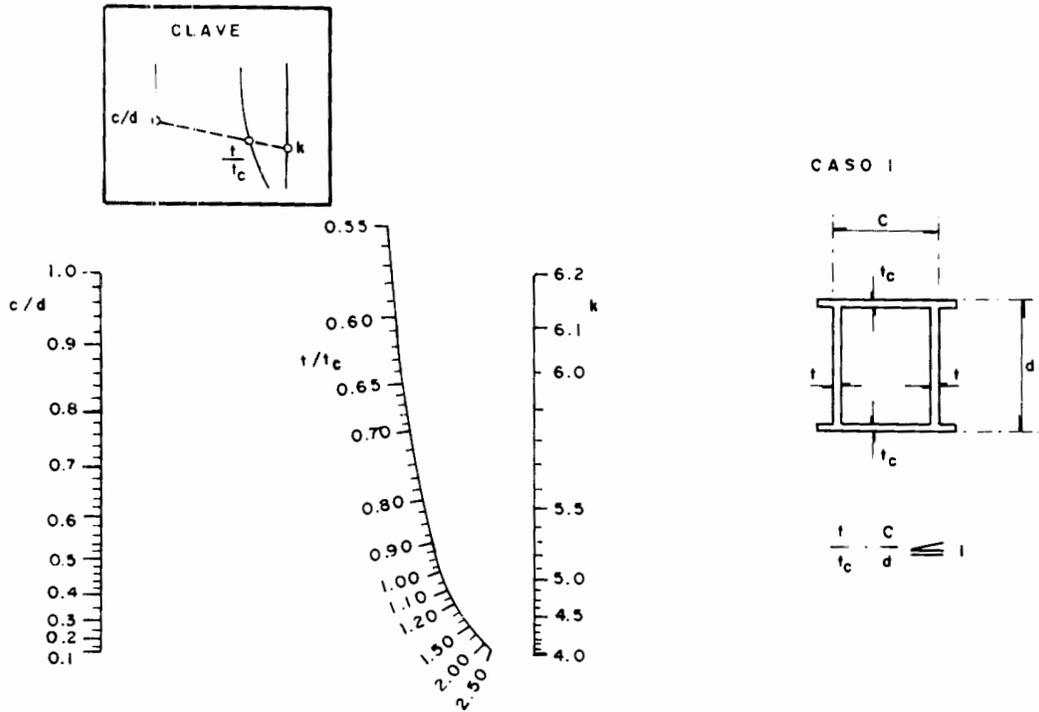
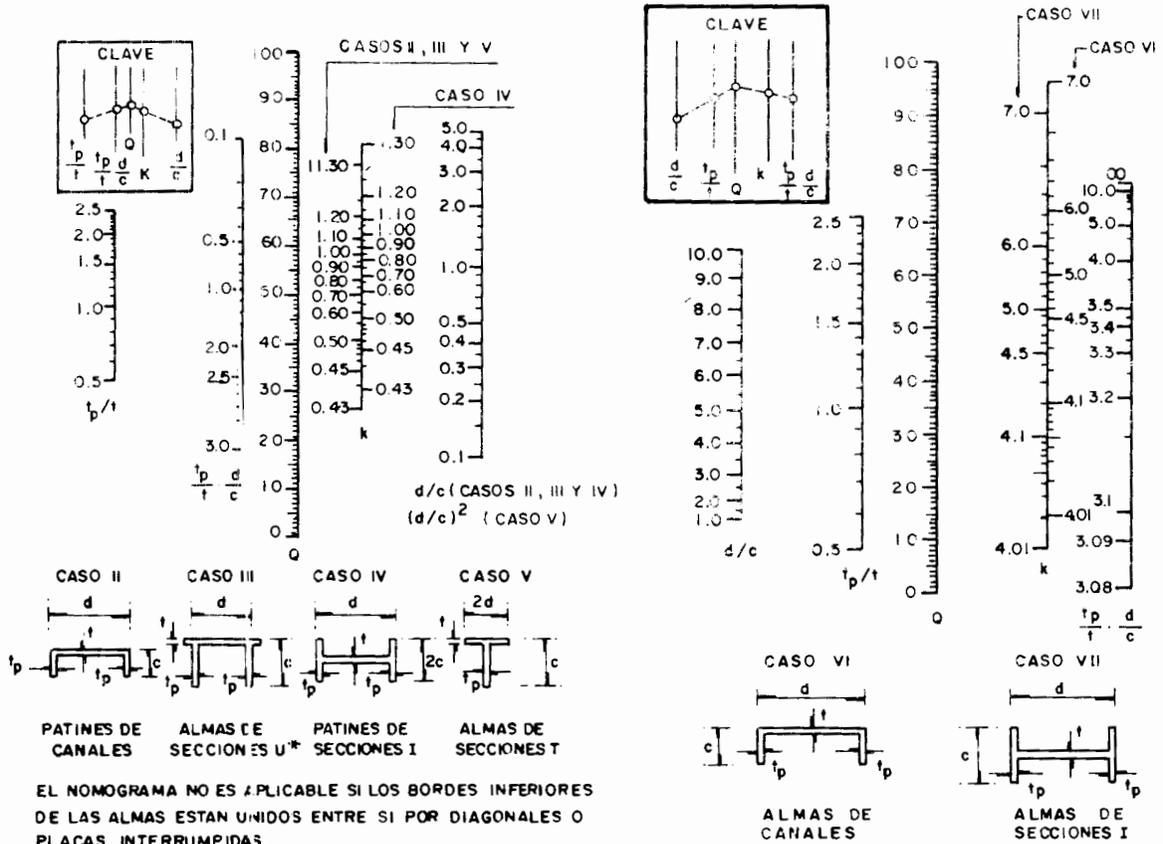


FIG. 2.4. VALORES DE p y q EN FUNCION DEL COEFICIENTE DE RESTRICION ζ (CASO II)



a) ALMAS DE SECCIONES EN CAJON



b) PATINES DE CANALES Y SECCIONES I Y EN ALMAS DE SECCIONES U Y T

c) ALMAS DE CANALES Y DE SECCIONES I

FIG. 2.5 NOMOGRAMAS PARA DETERMINAR EL FACTOR DE PLACA K

y después utilizando el valor ζ_2 del otro lado se obtienen un coeficiente K_2 . El valor medio, $K = (K_1 + K_2)/2$ representa una muy buena aproximación del valor exacto de K . Cuando, para este caso, σ_c es mayor que el límite de proporcionalidad, es recomendable calcular el valor de σ_c correspondiente a K_1 y después el valor σ_c correspondiente a K_2 y promediar los dos valores de σ_c .

Enseguida se hará la aplicación de la ec. (2.5) a tres casos particulares del caso I.

a) Placa apoyada simplemente en los bordes descargados a.

De la fig. (2.3) para $\zeta = \infty$, $p = 2.0$ y $q = 1.0$

FAC. DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE LOS RIOS

De la ec. (2.5) $K = p + 2\sqrt{q} = 2 + 2\sqrt{1} = 4$

b) Placa con los bordes a empotrados.

De la fig. (2.3) para $\zeta = 0$, $p = 2.5$ y $q = 5.0$

De la ec. (2.5) $K = p + 2\sqrt{q} = 2.5 + 2\sqrt{5} = 6.97$

c) Placa con un borde a empotrado y el otro simplemente apoyado.

De acuerdo al criterio que se describe arriba y a los resultados de a) y b)

$$K = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{4 + 6.97}{2} = 5.485$$

El resultado exacto es $K = 5.42$, que se tiene en el grupo de valores mínimos de K , adicional a la tabla 2.1. Por lo tanto el valor calculado es bastante aproximado al real.

Enseguida se analizarán dos casos particulares del caso II.

a) Placa apoyada simplemente en un borde a y libre en el otro.

De la fig. (2.4) para $\zeta = \infty$, $p = 0.425$ y $q = 0$.

De la ec. (2.5) $K = p + 2\sqrt{q} = 0.425 + 2\sqrt{0} = 0.425$.

b) Placa empotrada en un borde a y libre en el otro.

De la fig. (2.4) para $\zeta = 0$, $p = 0.570$ y $q = 0.125$.

De la ec. (2.5) $K = p + 2\sqrt{q} = 0.570 + 2\sqrt{0.125} = 1.277$.

Para entender mejor el comportamiento de piezas comprimidas formadas por varias placas, es conveniente escribir la ec. (2.4) en la forma siguiente:

$$\sigma_c = \left[\frac{\pi^2 E \sqrt{I}}{12(1-\mu^2)} \right] \left[\frac{K}{(b/t)^2} \right] \quad (2.6)$$

En donde al factor $K/(b/t)^2$ se le denomina módulo de rigidez de placa. En la ecuación anterior se puede observar que el esfuerzo crítico varía en razón directa con el módulo de rigidez de placa, debe notarse que la cantidad encerrada en el primer paréntesis es constante para un material dado. En cuanto al módulo de rigidez de placa se advierte que b/t depende de la geometría de cada una de las placas, pero K es función de las restricciones que las demás -- producen en sus bordes, de manera que la simple inspección de la sección --- transversal de una sección dada no siempre permite determinar cual placa tiene el factor de rigidez mínimo.

En una columna formada por varias placas, aquella que tendrá tendencia a pandearse primero será la que tenga un módulo de rigidez de placa menor, por lo que deberá revisarse que el esfuerzo crítico de dicha placa sea mayor que el que se presenta para la sección completa. De esta forma se evitarán fallas -- por pandeo local.

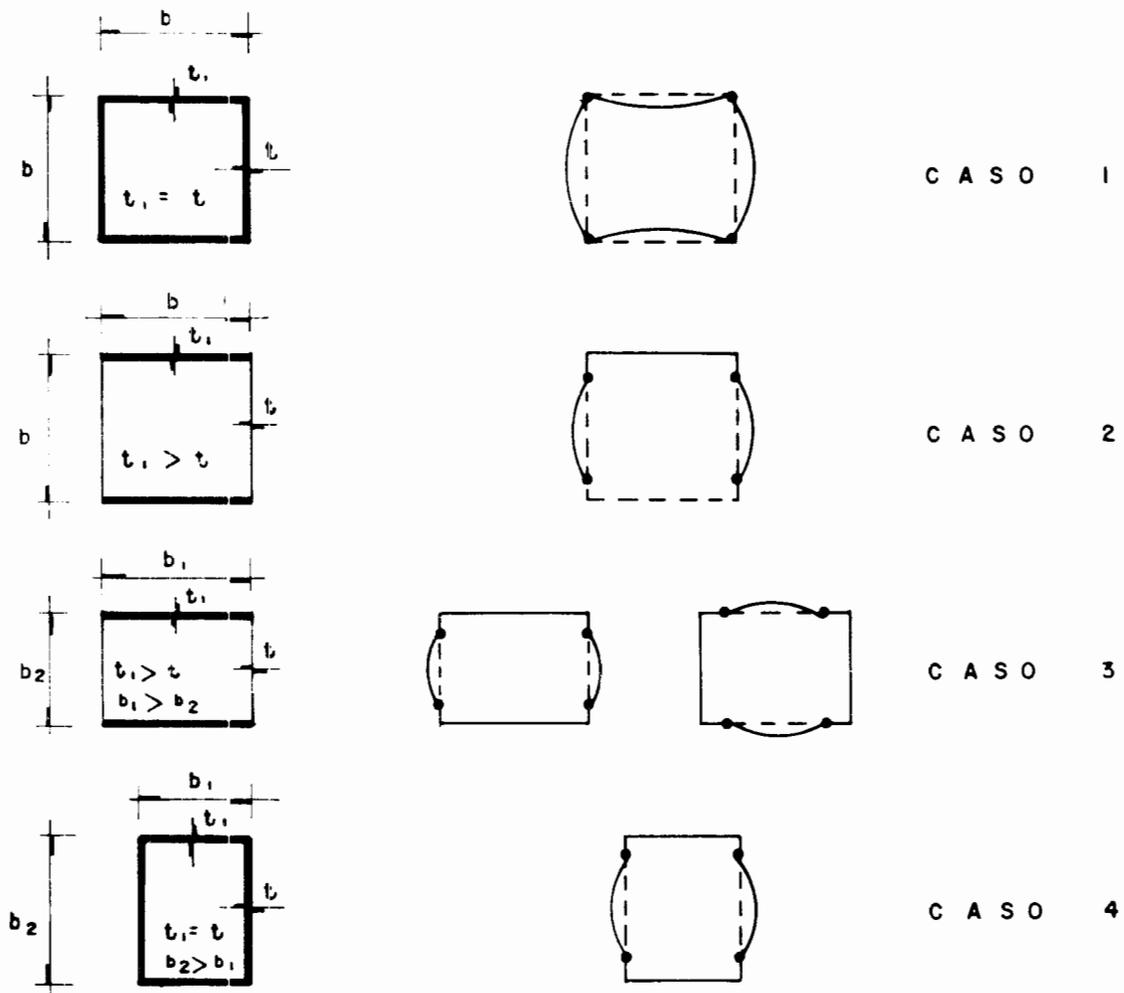
Este fenómeno de la interacción de los elementos planos que constituye una -- pieza comprimida puede ilustrarse estudiando el comportamiento de una columna de sección en cajón, formada por cuatro placas y sometida a esfuerzos uniformes de compresión que hacen que se pandee localmente.

En el caso 1 de la figura (2.6), siendo todas las placas iguales, el pandeo -- se presenta simultáneamente en todas ellas ya que todas tienen la misma rigi-

dez y ninguna se opone al pandeo de las demás, actuando como si estuvieran apoyadas en los bordes longitudinales.

En el caso 2, que se ilustra en la figura (2.6), el grueso t_1 de las placas horizontales es mayor que el de las laterales, t_2 . Siendo las placas laterales menos rígidas, el pandeo se iniciará en éstas.

El caso 3 de la figura (2.6) es el de una sección rectangular, siendo el grueso t_1 de las placas horizontales mayor que el grueso t_2 de las placas la-



a) DIMENSIONES GEOMETRICAS

b) DEFORMACION

FIG. 2.6 INTERACCION DE LAS PLACAS DE UNA COLUMNA DE SECCION CAJON

terales, pero el ancho de las placas horizontales es mayor que el ancho de -- las placas verticales. Este es el caso de una sección cuya simple inspección no permite determinar que placa se pandeará primero. Será necesario calcular el módulo de rigidez de placa de ambas para saberlo. Las placas verticales se pandearán primero que las horizontales, si $\frac{K_2}{(b_2/t_2)^2} < \frac{K_1}{(b_1/t_1)^2}$, en que K_1 -

K_2 son los factores de placa que corresponden a las placas horizontales y verticales, respectivamente. En caso contrario se pandearán primero las placas horizontales.

El caso 4 de la fig. (2.6), es de una sección rectangular formada con placas de igual espesor, donde el ancho de las placas laterales es mayor que el de -- las placas horizontales: $b_2 > b_1$, por lo que $\frac{K_2}{(b_2/t_2)^2} < \frac{K_1}{(b_1/t_1)^2}$, por lo tan-

to el pandeo se iniciará en las placas laterales.

En una columna cuya sección está formada por placas, la interacción entre las placas se presenta cuando al iniciarse el pandeo en una de ellas, las placas - en las que se apoya dicha placa tratarán de impedir el giro de sus bordes, lo que ocasiona la aparición de momentos flexionantes a lo largo de sus bordes, - produciendo en ellas una condición intermedia entre el apoyo libre y el empo- trado, al mismo tiempo que tratan de hacer girar a los elementos más rígidos. Como resultado de esa interacción el módulo de rigidez de las placas menos rí- gidas crece y el de las más rígidas decrece, alcanzando la sección un estado de equilibrio inestable cuando ambos módulos se igualan y las placas se pan- dean simultáneamente.

El fenómeno que se acaba de describir se presenta sólo cuando los espesores - de las placas que componen la sección son del mismo orden de magnitud; si unas son mucho más rígidas que otras se pandean únicamente las más esbeltas, que - tienen un comportamiento cercano al de las placas empotradas en los bordes, - ya que su carga crítica se alcanza antes que la de los elementos más rígidos, sin que lleguen a igualarse los módulos de rigidez.

El comportamiento de otras secciones tales como viguetas, canales, zetas, --- etc., es semejante al de las secciones en cajón.

II.1.3 Determinación del Esfuerzo Crítico en el Rango Inelástico de Pandeo.

En el rango elástico de pandeo, cuando $\tau = 1$, el esfuerzo crítico σ_c puede calcularse directamente de la ec. (2.4). Sin embargo, en el rango inelástico, $\tau < 1$, que depende de σ_c , es una cantidad desconocida al principio del cálculo, y sería necesario un método iterativo para determinar σ_c . Esto se puede evitar escribiendo la ec. (2.4) en la forma:

$$\frac{\sigma_c}{\sqrt{\tau}} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 K \quad (2.7)$$

Determinando $\sigma_c/\sqrt{\tau}$ de esta ecuación, los valores correspondientes de σ_c pueden encontrarse de una tabla precalculada que relacione los valores de σ_c como función de $\sigma_c/\sqrt{\tau}$. Para calcular dicha tabla es necesario disponer de una ecuación que relacione ambas cantidades. Esta relación se obtiene a partir de dos ecuaciones; una es la ecuación modificada de Euler para pandeo de columnas en el rango inelástico,

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E t}{(L/r)^2} \quad (2.8)$$

en la que L es la longitud efectiva de la pieza y la otra es la ecuación aproximada para pandeo de columnas en el rango inelástico propuesta por Bleich (Ref. 2.1),

$$\sigma_c = \sigma_y - \frac{\sigma_{1p}}{\pi^2 E} (\sigma_y - \sigma_{1p}) (L/r)^2 \quad (2.9)$$

despejando (L/r) de cada una de las ecuaciones, e igualando los resultados se llega a

$$\tau = \frac{(\sigma_y - \sigma_c) \sigma_c}{(\sigma_y - \sigma_{1p}) \sigma_{1p}} \quad (2.10)$$

donde σ_{1p} es el esfuerzo correspondiente al límite de proporcionalidad y para el caso de columnas se considera que

$$\sigma_{1p} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (2.11)$$

sustituyendo en la ec. (2.10) a σ_{1p} por $\sigma_y/2$, sacando raíz cuadrada a ambos miembros, obteniendo el inverso y multiplicando ambos miembros por σ_c , se llega a que

$$\frac{\sigma_c}{\sqrt{T}} = \frac{\sigma_c \sigma_y}{2\sqrt{(\sigma_y - \sigma_c) \sigma_c}} \quad (2.12)$$

elevando al cuadrado ambos miembros, simplificando y despejando a σ_c , se tiene que

$$\sigma_c = \frac{\left(\frac{\sigma_c}{\sqrt{T}}\right)^2 J_y}{\frac{\sigma_y^2}{4} + \left(\frac{\sigma_c}{\sqrt{T}}\right)^2} \quad (2.13)$$

Para el caso del Acero A-36 ($\sigma_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$), la ec. (2.13) se convierte en

$$\sigma_c = \frac{2530 \left(\frac{\sigma_c}{\sqrt{T}}\right)^2}{1600225 + \left(\frac{\sigma_c}{\sqrt{T}}\right)^2} \quad (2.14)$$

En la tabla (2.3) se presenta el conjunto usual de valores de σ_c correspondientes a los valores de σ_c/\sqrt{T} , obtenidos a partir de la ec. (2.14)

TABLA 2.3 ESFUERZO CRITICO DE PANDEO INELASTICO EN FUNCION DE σ_c / \sqrt{T} ACERO A-36.

σ_c / \sqrt{T}	σ_c						
1265	1265	2200	1900	4500	2340	14000	2505
1300	1300	2400	1970	5000	2370	16000	2510
1400	1390	2600	2050	6000	2410	20000	2520
1500	1470	2800	2100	7000	2460	30000	2525
1600	1550	3000	2150	8000	2470	40000	2525
1800	1690	3500	2230	10000	2490	50000	2525
2000	1810	4000	2290	12000	2500	∞	2530

Si el pandeo se inicia en el rango elástico ($\tau=1$), la ec. (2.4) deberá proporcionar un valor de σ_c menor o igual que $\sigma_y/2$, en caso contrario, es decir, si σ_c es mayor que el 50 por ciento del esfuerzo de fluencia, la ec. (2.4), proporciona un esfuerzo crítico elástico hipotético, que es equivalente a $\sigma_c/\sqrt{\tau}$ y deberá corregirse por inelasticidad aplicando la ec.(2.11) o la tabla (2.3).

EJEMPLO 2.1

Se desea investigar el esfuerzo crítico de pandeo de una placa larga para dos condiciones de apoyo en sus bordes longitudinales, a) simplemente apoyada y b) empotrada. La sección de la placa es de 40x0.95 cm y es de acero -- A-36

a) Apoyos simples.

Para esta condición de apoyo, de la tabla (2.1) se obtiene: $K = 4.0$

De la ec. 2.4, suponiendo $\tau = 1$

$$\sigma_c = \frac{(3.14)^2 \times 2.039 \times 10^6}{12 (1 - 0.3^2)} \left(\frac{0.95}{40}\right)^2 \times 4.0 = 4,154 \text{ Kg/cm}^2 > \frac{\sigma_y}{2}$$

Por lo tanto debe corregirse por inelasticidad; de la ec. (2.6)

$$\frac{\sigma_c}{\sqrt{\tau}} = 4,154 \text{ Kg/cm}^2$$

De la tabla (2.3), interpolando linealmente, se obtiene que

$$\sigma_c = 2,305 \text{ Kg/cm}^2$$

b) Apoyos empotrados

De la tabla (2.1), $K = 6.97$

$$\sigma_c = \frac{(3.14)^2 \times 2.039 \times 10^6}{12 (1 - 0.3^2)} \left(\frac{0.95}{40}\right)^2 \times 6.97 = 7,238 \text{ Kg/cm}^2 > \frac{\sigma_y}{2}$$

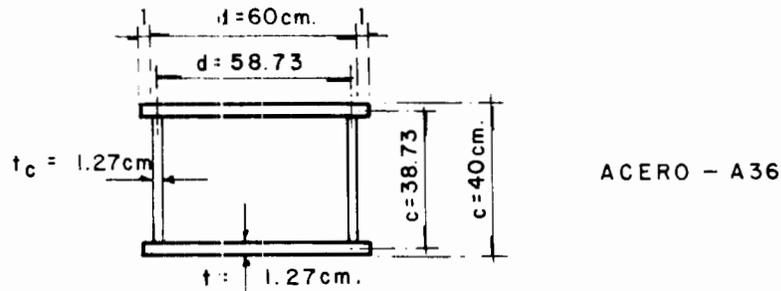
Corrigiendo por inelasticidad, se interpola linealmente de la tabla(2.3)

$$\sigma_c = 2,462.38 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_c \approx 2,462 \text{ Kg/cm}^2$$

EJEMPLO 2.2

Determinar la carga crítica de pandeo local de una columna, sujeta a carga axial de compresión, con sección en cajón, como se muestra en la figura. El pandeo de conjunto está restringido por contraventeos adecuados.



De la tabla (2.2)

$$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{0.38}{\left[1 - \frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}\right]}$$

Cuando el parámetro $\frac{t^2}{t_c^2} \frac{c^2}{d^2}$ es mayor que 1.0, falla primero la placa corta, si es igual a 1.0 ambas empiezan a pandearse simultáneamente.

$$\zeta = \frac{1.27^3}{1.27^3} \frac{0.38}{1 - \frac{1.27^2}{1.27^2} \frac{38.73^2}{58.73^2}} = 0.672$$

De la fig. (2.3) para $\zeta = 0.672$, $p = 2.05$ y $q = 1.9$

De la ec. (2.5)

$$K = 2.05 + 2\sqrt{1.9} = 4.81$$

De la ec. (2.4), suponiendo $\tau = 1$.

$$\sigma_c = \frac{(3.14)^2 \times 2.039 \times 10^6}{12 (1 - 0.3^2)} \left(\frac{1.27}{58.73} \right)^2 \times 4.81 = 4140.80 \text{ Kg/cm}^2 > \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\sigma_c \doteq 4141 \text{ Kg/cm}^2 > \frac{\sigma_y}{2}$$

Se corrige por inelasticidad, interpolando linealmente de la tabla (2.3) -

$$\sigma_c = 2,304 \text{ Kg/cm}^2$$

$$P_c = 2 \times (62+38) \times 1.27 \times 2,304$$

$$P_c = 585,216 \text{ Kg}$$

$$P_c \doteq 585 \text{ Ton}$$

La carga crítica de la columna por pandeo general dependerá de la relación de esbeltez. Si la columna es muy corta dominará $P_c = 585 \text{ Ton}$, pero a medida que es más larga la carga crítica puede reducirse por pandeo de conjunto.

II.2 Diseño Basado en Esfuerzos Admisibles

II.2.1 Relación Ancho/Espesor de Placas que Forman una Columna a Compresión Axial.

En columnas es necesario que se evite que los elementos planos que la componen, fallen bajo una carga menor a la carga crítica de pandeo del conjunto, lo que se logra haciendo que el esfuerzo crítico de pandeo de cada placa sea mayor o igual que el esfuerzo de pandeo de la columna en conjunto.

Por lo tanto para pandeo elástico se debe tener:

$$\frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} \leq \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 K \quad (2.15)$$

en que l es la longitud efectiva de la columna.

El primer miembro de la ec. (2.15) es el esfuerzo crítico de pandeo de las columnas, y el segundo es de las placas, ambos son válidos en el rango elástico. Simplificando la ec. (2.15) se tiene que:

$$\frac{1}{(l/r)^2} \leq \frac{K}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

despejando b/t , se obtiene

$$\frac{b}{t} \leq \sqrt{\frac{(l/r)^2}{12(1-\mu^2)} K}$$

haciendo $\mu = 0.3$, resulta:

$$\frac{b}{t} \leq 0.303 \frac{l}{r} \sqrt{K} \quad (2.16)$$

PARA PANDEO INELÁSTICO:

$$\left[1 - \frac{(1/r)^2}{2 C_c^2} \right] \sigma_y \leq \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-u^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 K \quad (2.17)$$

El primer miembro de la ec. (2.17) es el esfuerzo crítico de pandeo de columnas cuando $\frac{1}{r} < C_c$ (rango inelástico, véase I.4) y el segundo el de placas, - incluyendo el factor $\sqrt{\tau}$ para corregir por inelasticidad.

Sustituyendo C_c^2 por $2\pi^2 E/\sigma_y$

$$y \quad \tau \text{ por } \frac{(\sigma_y - \sigma_c) \sigma_c}{(\sigma_y - \sigma_{lp}) \sigma_{lp}}$$

$$\text{tomando } \sigma_{lp} = \sigma_y/2 \quad y \quad \sigma_c = \left[1 - \frac{(1/r)^2}{2 C_c^2} \right] \sigma_y$$

y efectuando operaciones se llega a la siguiente relación:

$$\frac{b}{t} \leq \frac{1920 \sqrt{\tau/r}}{\sqrt[4]{2C_c^2 - (1/r)^2} \sqrt{\sigma_y}} \sqrt{K} \quad (2.18)$$

Para acero A-36 ($E = 2.039 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$, $\sigma_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$ y $C_c = 126.1$) se obtiene en la ec. (2.18):

$$\frac{b}{t} \leq \frac{38.2 \sqrt{\tau/r}}{\sqrt[4]{31802 - (1/r)^2}} \sqrt{K} \quad (2.19)$$

II.2.2 Relación Ancho/espesor de Placas que Forman Parte de Barras Sometidas a Flexión.

De acuerdo con las especificaciones del AISC, el esfuerzo permisible σ_p en las fibras extremas del patín de compresión cuando es sólido, de sección -- transversal aproximadamente rectangular y su área no es menor que el patín de tensión, de piezas flexionadas que tengan un eje de simetría en el plano de su alma, es el mayor de los dados por las ecuaciones siguientes, pero no mayor que $0.60 \sigma_y$.

$$\text{I.- } \sigma_p = \frac{0.6(0.69 E C_b)}{l d / A_p} \quad (2.20)$$

II.- Cuando $l/r < C_c$, caso de pandeo inelástico.

$$\sigma_p = 0.6 \left[1 - \frac{(l/r)^2}{2 C_c^2 C_b} \right] \sigma_y \quad (2.21)$$

Cuando $l/r \geq C_c$, caso de pandeo elástico.

$$\sigma_p = \frac{0.6 \pi^2 E C_b}{(l/r)^2} \quad (2.22)$$

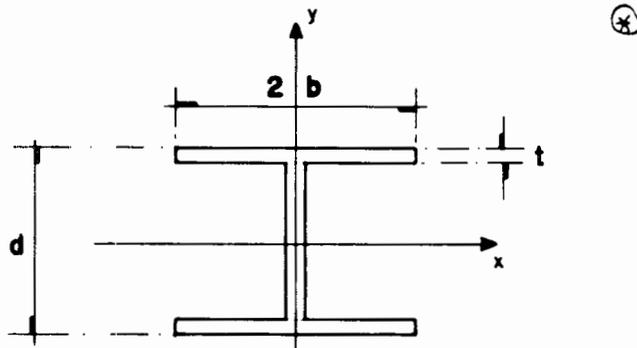


FIG. 2.7 GEOMETRIA DE UNA SECCION "I"

Donde:

l = Distancia entre secciones transversales del patín en compresión --- arriostradas contra el giro o contra desplazamientos laterales.

r = Radio de giro con respecto al eje de simetría en el plano del alma- (eje y , de la fig. 2.7), de una sección formada por el patín de com presión y $1/6$ del área del alma.

d = Peralte de la viga.

A_p = Área del patín de compresión ($A_p = 2bt$).

C_b = $1.75 + 1.05 (M_1/M_2) + 0.3 (M_1/M_2)^2$, pero no mayor que 2.3, donde M_1 -

es el menor y M_2 es el mayor de los momentos flexionantes en los extremos de la longitud sin arriostrar, tomados alrededor del eje de mayor resistencia, donde M_1/M_2 , la relación de los momentos extremos, es positiva cuando M_1 y M_2 tienen el mismo signo, fig. 2.8a (flexión en curvatura doble) y negativa cuando tienen signos contrarios, fig. 2.8b (flexión en curvatura simple). Cuando el momento flexionante dentro de la longitud no arriostrada sea mayor que los de ambos extremos C_b se deberá tomar como la unidad, fig. ---- 2.8c.

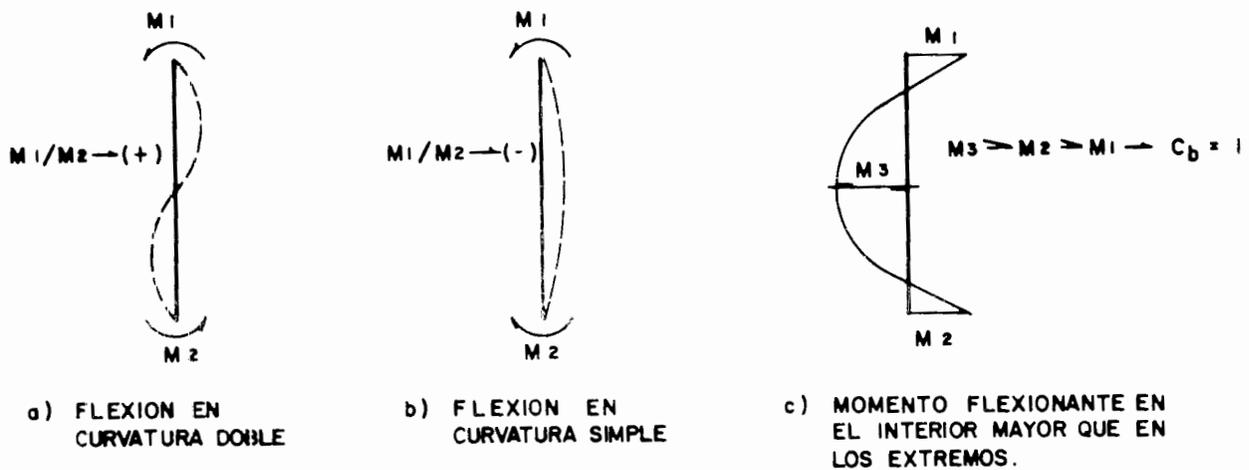


FIG. 2.8 ESQUEMA DE MOMENTOS FLEXIONANTES M_1, M_2 y M_3 .

Se procederá de manera análoga a como se hizo en el caso de columnas cargadas axialmente; por consiguiente las ecuaciones básicas son:

Cuando rige I; ec. (2.20)

$$\frac{0.69 E C_b}{I_d/A_p} \leq \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 K \quad (2.23)$$

Cuando rige II:

a) Si el pandeo es inelástico, ec. (2.21)

$$\left[1 - \frac{(l/r)^2}{2 C_c^2 C_b} \right] \sigma_y \leq \frac{\pi^2 E \sqrt{T}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 K \quad (2.24)$$

b) Si el pandeo es elástico, ec. (2.22)

$$\frac{\pi^2 E C_b}{(l/r)^2} \leq \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 K \quad (2.25)$$

En las tres ecuaciones anteriores se impone la condición de que el esfuerzo crítico de pandeo local sea mayor o igual que el esfuerzo crítico de pandeo de conjunto.

Los miembros de la izquierda de las ecs. (2.23), (2.24) y (2.25) son las expresiones generales del esfuerzo permisible dado en las ecs. (2.20), (2.21) y (2.22) respectivamente. Las ecs. (2.20), (2.21) y (2.22) incluyen un factor de reducción de 0.6 el cual se ha eliminado de las expresiones generales, --asimismo en la ec. (2.23) no se introduce el factor \sqrt{t} en el segundo miembro para ser congruentes con la obtención de la ec. (2.20) en la que tampoco se hace ninguna corrección por pandeo inelástico.

Cuando rige I, de la ec. (2.23) obtenemos:

$$\left(\frac{t}{b}\right)^2 \geq \frac{(0.69 E C_b) 12 (1-\mu^2)}{(l d / A_p) \pi^2 E K}$$

$$\left(\frac{b}{t}\right)^2 \leq \frac{l d \pi^2 K}{(0.69) 12 (1-\mu^2) C_b A_p}$$

haciendo $\mu = 0.3$ y $A_p = 2bt$ nos da que

$$\frac{b^3}{t} \leq \frac{1.3 l d K}{C_b} \quad (2.26)$$

Cuando rige II, para $l/r < C_c$; caso de pandeo inelástico, y siguiendo un procedimiento igual al de columnas cargadas axialmente se llega a lo siguiente:

Para Acero A-36

$$\frac{b}{t} \leq \frac{38.2 \sqrt{1/r}}{\sqrt[4]{31802C_b - (1/r)^2}} \sqrt{K} \quad (2.27)$$

Cuando rige II, para $1/r \geq C_c$; caso de pandeo elástico.

$$\frac{b}{t} \leq 0.303 \frac{1}{rC_b} \sqrt{K} \quad (2.28)$$

II.2.3 Especificaciones de Diseño.

Actualmente se emplean dos criterios diferentes para evitar el pandeo local en elementos comprimidos axialmente o sujetos a flexión. En el primero, que se utiliza en general en Europa (Normas DIN), se impide que se inicie ese fenómeno dimensionando las secciones transversales de manera que las placas individuales que las componen ofrezcan al pandeo una resistencia igual o mayor que la que el miembro completo presenta al pandeo de conjunto. Este criterio es el que se ha utilizado para deducir las ecuaciones de los artículos II.2.1 y --- II.2.2.

En el segundo criterio, empleado en los Estados Unidos (Normas AISC), la condición básica que rige el diseño de las placas es que se pueda alcanzar el esfuerzo de fluencia del material sin que se pandeen localmente, independientemente del esfuerzo crítico del miembro considerado en conjunto, además supone comportamiento elástico ($\tau=1$) hasta que $\sigma_{cr} = \sigma_y$, esto es,

$$\frac{\pi^2 E}{12 (1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 K \geq \sigma_y$$

despejando b/t ,

$$\frac{b}{t} \leq \sqrt{\frac{\pi^2 E k}{12 (1-\mu^2) \sigma_y}}$$

haciendo $\mu = 0.3$ y $E = 2.039 \times 10^6$ ésta igualdad se reduce a:

$$\frac{b}{t} \leq 1357 \sqrt{\frac{K}{\sigma_y}} \quad (2.29)$$

En la tabla (2.4) aparecen las relaciones b/t obtenidas al aplicar la ec. --- (2.29) a placas comprimidas con condiciones idealizadas de apoyos, y los límites especificados por el AISC y por el Reglamento de Construcciones para el -- Distrito Federal (RCDF) para elementos planos reales más o menos equivalentes a los idealizados. Cuando se trata de placas que están apoyadas en sus bordes longitudinales se les denomina placas atiesadas y cuando están libres en uno - de ellos se les denomina placas no atiesadas.

TABLA - 2.4. RELACIONES b/t NECESARIAS PARA EVITAR EL PANDEO LOCAL DE PLACAS EN MIEMBROS COMPRIMIDOS, NORMAS A.I.S.C. Y R.C.D.F.

VALORES TEORICOS (V.T.)			E S P E C I F I C A C I O N E S (E S P .)				E S P . / V . T .		
TIPO DE APOYO EN LOS BORDES LONGITUDINALES	K (MIN)	b/t (MAX) Ec 2.29	TIPO DE ELEMENTO COMPRIMIDO	RELACION (b/t) MAXIMA				%	
				A. I. S. C.		R. C. D. F.		AISC	RCDF
				GENERAL	A-36	GENERAL	A-36		
	4.00	$2714/\sqrt{\sigma_y}$	PATINES DE SECCIONES EN CAJON RECTANGULARES O CUADRADOS, DE GRUESO UNIFORME. (*)	$1995/\sqrt{\sigma_y}$	39.7	$2000/\sqrt{\sigma_y}$	39.8	73	74
			TODOS LOS ELEMENTOS ATIESADOS COMPRIMIDOS UNIFORMEMENTE NO INCLUIDOS EN LA CATEGORIA ANTERIOR.	$2121/\sqrt{\sigma_y}$	42.2	$2100/\sqrt{\sigma_y}$	41.8	78	77
	5.42	$3159/\sqrt{\sigma_y}$							
	6.97	$3583/\sqrt{\sigma_y}$							
	1.277	$1533/\sqrt{\sigma_y}$	ALMAS DE TES	$1064/\sqrt{\sigma_y}$	21.2			69	
	0.425	$884/\sqrt{\sigma_y}$	PUNTALES FORMADOS POR UN SOLO ANGULO O POR DOS ANGULOS CON SEPARADORES	$637/\sqrt{\sigma_y}$	12.7	$640/\sqrt{\sigma_y}$	12.7	72	72
			PUNTALES FORMADOS POR DOS ANGULOS EN CONTACTO; PATINES COMPRIMIDOS DE VIGAS, ATIESADORES, ETC.	$796/\sqrt{\sigma_y}$	15.8	$800/\sqrt{\sigma_y}$	15.9	90	90

* NOTA: Para las almas de secciones en cajón rectangulares o cuadradas de grueso uniforme a compresión uniforme, se puede tomar el mismo valor de la relación b/t que especifica el AISC o el RCDF para los patines de estas secciones.

Al calcular las relaciones ancho a espesor de placas no atiesadas, el ancho de las placas se medirá desde el borde libre a la primera línea de remaches o tornillos, o al primer cordón de soldadura; el ancho de las alas de ángulos, de los patines de canales y zetas y de las almas de las tes se tomará igual a la dimensión nominal completa, y el ancho de patines de vigas y tes, igual a la mitad del ancho nominal. En el caso de las placas atiesadas, el ancho de las placas se medirá entre las dos líneas más cercanas de remaches, tornillos o soldaduras, o entre los arranques de los patines.

Como se puede apreciar en la tabla (2.4) las especificaciones del AISC y el RCDF que limitan la relación ancho/espesor de placas de columnas a compresión axial y de placas comprimidas de secciones a flexión son muy semejantes.

Tanto el AISC como el RCDF admiten que la relación ancho/espesor de un elemento estructural comprimido puede ser mayor que el límite que marca la especificación reglamentaria correspondiente, siempre que se justifique con un análisis, que el pandeo de esa placa no ocurrirá antes que el pandeo general de la sección. En este caso deberá aplicarse el criterio de los artículos II.2.1 y II.2.2.

En general la relación ancho/espesor de placas comprimidas resulta menor aplicando las especificaciones AISC o RCDF que por la aplicación del criterio de los artículos II.2.1 y II.2.2 derivado de la teoría de estabilidad de placas, lo cual significa que este criterio conduce a un diseño más económico de placas, que el que resulta de las especificaciones.

EJEMPLO 2.3

De acuerdo con el criterio AISC calcular la relación b/t máxima permisible para el alma de un perfil "I", que trabaja como columna a compresión axial. Supóngase Acero A-36.

De acuerdo a la ec. (2.29)

$$\frac{b}{t} = 1357 \sqrt{\frac{K}{\sigma_y}}$$

Considerando $K = 4$; correspondiente al valor mínimo de placas simplemente apoyadas en sus dos bordes longitudinales, cubriéndose todos los casos de almas de secciones "I", esto es

$$\frac{b}{t} = 1357 \sqrt{\frac{4}{2530}} = 54$$

Las especificaciones AISC establecen en la sección 1.9.2.2 que la relación máxima es de

$$\frac{b}{t} = \frac{2121}{\sqrt{\sigma_y}} = \frac{2121}{\sqrt{2530}} = 42$$

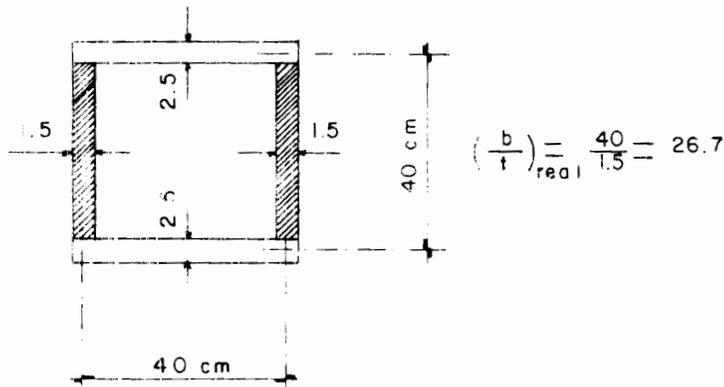
Por lo que la relación máxima establecida en las especificaciones AISC es el 78% de la que se obtiene con el criterio teórico de las mismas.

EJEMPLO 2.4

Revisar el valor de la relación b/t de las placas más delgadas, que forman la sección cajón que se muestra en la figura de una columna cargada axialmente, para dos alternativas de relaciones de esbeltez, $l/r = 50$ y $l/r = 138$, mediante los criterios:

- Especificaciones AISC
- Especificaciones R.C.D.F.
- Teoría de estabilidad de placas.

Considerese Acero A - 36



$$a) \frac{b}{t} = \frac{1995}{\sqrt{\sigma_y}} = \frac{1995}{\sqrt{2530}} = 39.7 ; \text{ donde } 26.7 < 39.7 \text{ si cumple}$$

$$b) \frac{b}{t} = \frac{2000}{\sqrt{\sigma_y}} = \frac{2000}{\sqrt{2530}} = 39.8 ; \text{ donde } 26.7 < 39.8 \text{ si cumple}$$

$$c) C_c = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.14^2 \times 2.039 \times 10^6}{2530}} = 126.1$$

Para la alternativa de $l/r = 50$, donde $50 < 126.1$, se presenta pandeo inelástico y se aplica la ec. (2.19), esto es:

$$\frac{b}{t} \leq \frac{38.2 \sqrt{l/r}}{\sqrt{31802 - (l/r)^2}} \sqrt{K} \quad (1)$$

De la tabla (2.2)

$$\zeta = \frac{t^3}{t_c^3} \frac{0.38}{1 - \frac{t^2 c^2}{t_c^2 d^2}} \quad (2)$$

Donde

$$t = 1.5$$

$$t_c = 2.5$$

$$c = 40$$

$$d = 40$$

Sustituyendo valores en (2)

$$\zeta = \frac{1.5^3}{2.5^3} \frac{0.38}{1 - \frac{1.5^2 40^2}{2.5^2 40^2}} = 0.128$$

De la fig. (2.3) para $\zeta = 0.128$, $p = 2.15$ y $q = 3.50$

De la ec. (2.5)

$$K = p + 2 \sqrt{q} = 2.15 + 2 \sqrt{3.5} = 5.89$$

Sustituyendo valores en (1)

$$\frac{b}{t} \leq \frac{38.2\sqrt{50}}{\sqrt{31802 - (50)^2}} \sqrt{5.89} = 50.1; \quad \text{Donde } 26.7 < 50.1 \text{ si cumple}$$

Para la alternativa de $l/r = 138$, donde $138 > 126.1$, se presenta pandeo elástico y se aplica la e.c (2.16) esto es:

$$\frac{b}{t} \leq 0.303 \frac{l}{r} \sqrt{K} = 0.303 \times 138 \times \sqrt{5.89} = 101.5; \quad \text{donde } 26.7 < 101.5 \text{ si cumple.}$$

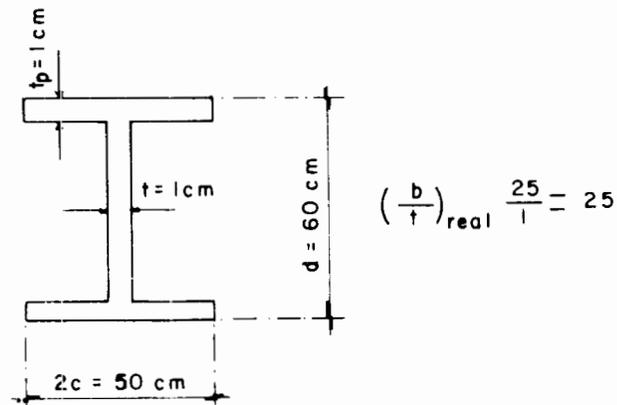
De lo anterior se concluye que las especificaciones del AISC y las del RCDF proporcionan relaciones ancho/espesor más conservadoras, además se puede observar que las relaciones b/t que proporcionan las especificaciones

AISC y RCDF son independientes de la relación de esbeltez, mientras que con la "teoría de estabilidad de placas" la relación b/t admisible aumenta con la relación de esbeltez.

EJEMPLO 2.5

Se tiene una viga de acero A-36, de 10 m. de claro, libremente apoyada en sus extremos, sometida a una cierta condición de carga y cuya sección transversal se indica en la figura, revisar si la relación ancho/espesor del patín en com presión cumple con:

- AISC.
- RCDF.
- Teoría de estabilidad de placas.



$$a) \frac{b}{t} \leq \frac{796}{\sqrt{\sigma_y}} = \frac{796}{\sqrt{2530}} = 15.8$$

como $25 > 15.8$ no cumple la especificación del AISC; el patín debería ser de $25/15.8 = 1.58$ cm. de espesor.

$$b) \frac{b}{t} \leq \frac{800}{\sqrt{\sigma_y}} = \frac{800}{\sqrt{2530}} = 15.9$$

Como $25 > 15.9$ no cumple la especificación del RCDF y el patín debería ser de $25/15.9 = 1.57$ cm. de espesor.

c) La fórmula por aplicar depende del valor que rija del esfuerzo permisible (ecs. 2.20, 2.21 y 2.22), por estar la viga simplemente apoyada, se infiere - que el momento flexionante, en la parte intermedia de la viga es mayor que en los extremos, por lo cual debe ser $C_b=1$.

I.- Entonces en la ec. (2.20) se tiene:

$$\sigma_p = \frac{0.6 (0.69E C_b)}{l d / A_p}$$

para $E = 2.039 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ y $C_b = 1$, queda

$$\sigma_p = \frac{844,146}{1000 \times 60 / 25 \times 1}$$

$$\sigma_p = 351.73 \text{ kg/cm}^2 \quad (1)$$

como

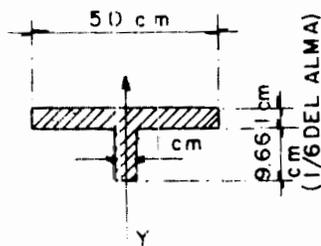
$$351.73 < 0.6 \sigma_y = 1518 \text{ Kg/cm}^2$$

se acepta $\sigma_p = 351.73 \text{ Kg/cm}^2$

II.- Para decidir ahora si se aplica la ec. (2.21) o la ec. (2.22) investiguemos el tipo de pandeo de la zona comprimida de la sección, para esto debemos - comparar su relación de esbeltez l/r con el coeficiente C_c :

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 E / \sigma_y} = 126.1$$

Obtención de la relación de esbeltez l/r :



$$I_y = \frac{1 \times 50^3}{12} + \frac{9.66 \times 1^3}{12} = 10,417.5 \text{ cm}^4$$

$$A = 50 \times 1 + 9.66 \times 1 = 59.7 \text{ cm}^2$$

$$r_y = \sqrt{I/A} = \sqrt{10,417.5 / 59.7} = 13.2$$

$(l/r_y) = 1000 / 13.2 = 75.7 < C_c$, luego el pandeo de la zona comprimida de la sección es inelástico,

por tanto se aplica la ec. (2.21)

$$\sigma_p = \left[1 - \frac{(l/r)^2}{2 C_c^2 C_b} \right] 0.6 \sigma_y = \left[1 - \frac{(75.7)^2}{2 \times 126.1^2 \times 1} \right] 0.6 \times 2530$$

$$\sigma_p = 1244 \text{ Kg/cm}^2 \quad (2)$$

como

$$1244 < 0.6 \sigma_y$$

se acepta $\sigma_p = 1244 \text{ Kg/cm}^2$

De (1) y (2) se debe tomar el mayor, por lo que rige la ec. (2.21) para esfuerzos permisibles, aplicándose por lo tanto la ec. (2.27) para la relación ancho/espesor, esto es

$$b/t \leq \frac{38.2 \sqrt{1/r}}{\sqrt[4]{31,802 C_b - (1/r)^2}} \quad \sqrt{K} = 26.2 \sqrt{K} \quad (3)$$

Obtención del coeficiente de placa K, de la tabla (2.2),

$$\zeta = \frac{2t_p^2 d}{t^3 c} \frac{1}{1-0.106 \frac{t_p^2 d^2}{t^2 c^2}} = \frac{2 \times 1^3 \times 60}{1^3 \times 25} \times \frac{1}{1-0.106 \times \frac{1^2}{1^2} \times \frac{60^2}{25^2}} = 12.3$$

De la fig. (2.4) para $\zeta = 12.3$, $p = 0.426$ y $q = 0.005$

De la ec. 2.5

$$K = p + 2 \sqrt{q} = 0.426 + 2 \sqrt{0.005} = 0.57 \quad (4)$$

Nota: Si el valor de K se calcula directamente de la tabla 2.2 resulta -----
 $K = 0.49$, la diferencia se debe a que las fórmulas de la tabla son ---
 aproximadas, esto es,

$$\sqrt{K} = 0.65 + \frac{2}{3\zeta + 4} = 0.65 + \frac{2}{3 \times 12.3 + 4}$$

$$\sqrt{K} = 0.699$$

$$K = 0.49$$

sustituyendo el valor K dado en (4) en (3):

$$b/t \leq 26.2 \times \sqrt{0.57} = 19.8$$

como $b/t = 25 > 19.8$, no cumple

por lo anterior el espesor del patín debe ser tal que

$$\frac{b}{t} = 19.8 \quad \text{o sea} \quad \frac{c}{t_p} = 19.8, \text{ luego}$$

$$t_p = \frac{25}{19.8}$$

$$t_p = 1.26 \text{ cm}$$

Por lo tanto puede concluirse que para cumplir con el Reglamento AISC o el RCDF el patín deberá ser de 1.58 ó 1.57 cm. de espesor, mientras que de acuerdo con la teoría de estabilidad de placas sólo necesitará ser de 1.26 cm. de grueso. El RCDF admite que la relación b/t de placas comprimidas de acero, pueda ser mayor que la especificada, siempre que se justifique mediante un análisis de estabilidad, por lo cual se puede admitir en este caso que el espesor de patín sea de 1.26 cm.

El comportamiento de placas en los diferentes intervalos, se ilustra en la fig. 2.9, donde se muestran las gráficas esfuerzo normal medio ($\sigma = P/bt$) contra la deformación longitudinal unitaria media ϵ (fig. 2.9-a), y las gráficas de esfuerzo normal medio contra la deflexión lateral ω (fig. 2.9-b) de placas rectangulares planas y con distintas relaciones ancho/espesor, sometidas a fuerzas de compresión P de intensidad creciente, aplicadas en una dirección.

Las gráficas OABC muestran el comportamiento típico de una placa con relación b/t elevada. En ellas pueden observarse varias regiones diferentes: Al principio las deformaciones ϵ crecen linealmente con el esfuerzo σ , que es constante en todo el ancho de la pieza, y no hay deflexiones laterales. Esta etapa termina cuando σ alcanza un cierto valor crítico, σ_c (punto A), a partir del cual la placa empieza a deformarse lateralmente, es decir, se pandea. La placa en ésta condición puede aún soportar cargas adicionales importantes debido a que las deformaciones laterales están restringidas por la resistencia a la flexión entre los bordes verticales.

Cuando la carga es mayor que la de pandeo los esfuerzos dejan de estar uniformemente repartidos (zona AB); crecen más rápidamente en los bordes que en el centro, hasta que llegan en ellos al valor de fluencia (puntos B, B' ó B'' de las curvas), y las regiones plastificadas se extienden rápidamente hasta que se alcanza la resistencia máxima de la placa (puntos C); el esfuerzo medio correspondiente es σ_u . Si las relaciones b/t son altas, el incremento de esfuerzo arriba del crítico de pandeo puede ser muy importante.

En la fig. 2.9-b se muestra que la placa se conserva plana hasta que se alcanza el esfuerzo crítico, y a partir de entonces se deforma lateralmente siguiendo cualquiera de las ramas ABC; al llegar al punto C las deflexiones siguen creciendo sin incremento de carga. En la realidad las placas tienen, desde un principio, pequeñas deformaciones laterales que hacen que su curva $\sigma-\omega$ sea del tipo de la dibujada con línea interrumpida.

En placas con relaciones ancho/grueso menores, el esfuerzo crítico está cerca de σ_y , y el flujo plástico se inicia casi inmediatamente después de que empieza el pandeo; la resistencia última es poco mayor que la carga --

crítica (curvas CA'B'C').

Si la relación b/t está por debajo de un cierto valor específico, el esfuerzo medio puede llegar al punto en que comienza la fluencia sin que se inicie el pandeo, y las deformaciones crecen bajo esfuerzo constante de acuerdo con la línea OB''C'' de la fig. 2.9-a .

La diferencia entre la carga para la que se inicia el pandeo y la resistencia última aumenta al decrecer el esfuerzo crítico σ_c , y se hace considerable cuando éste es menor que el límite de proporcionalidad, en cambio tiende a cero cuando se acerca al de fluencia (fig.2.9) .

Después de que se inicia el pandeo de una placa delgada originalmente plana las deformaciones laterales aumentan con bastante rapidez al crecer las cargas, y pronto llegan a ser del mismo orden de magnitud que el grueso de la placa, de manera que para comprender el comportamiento posterior al pandeo deben estudiarse placas deformadas en las que las deflexiones sean comparables con el grueso, pero siguen siendo pequeñas en relación con las dimensiones restantes.

La suposición de que los esfuerzos normales y tangenciales que actúan en el plano de la placa no cambian de intensidad cuando ésta se deforma, que sirve como base para la obtención de la ecuación de equilibrio de la placa ligeramente deformada, cuando los desplazamientos laterales son pequeños con respecto al grueso, deja de ser aceptable al crecer las deflexiones, ya que los esfuerzos de membrana, despreciables originalmente, se hacen más y más importantes al aumentar las cargas y crecer las distorsiones fuera del plano original, ejerciendo dichos esfuerzos un efecto estabilizador.

La teoría de placas planas con deflexiones grandes está gobernada por las siguientes ecuaciones diferenciales parciales (Ref. 2.1) :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{t}{D} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{2 \partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.31)$$

donde (ver Fig. 210) :

F = Es una función de esfuerzos.

ω = Es la deformación de la placa perpendicular a su plano, en el punto (x,y).

t = Es el espesor de la placa.

E = Es el módulo de elasticidad.

x,y = Son las coordenadas de un punto cualquiera, con respecto a los ejes cartesianos x,y, en el plano de la placa.

μ = Es el módulo de Poisson.

D = $Et^3/12 (1-\mu^2)$.

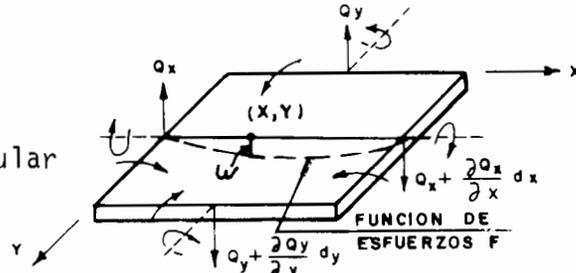


FIG. 2.10 ELEMENTOS QUE INTERVIENEN EN UNA PLACA

La solución de estas ecuaciones es muy complicada, a causa principalmente de su carácter no lineal, por lo que hasta ahora se cuenta con resultados teóricos sólo para algunos casos sencillos de poco interés práctico lo que hace -- que el problema de la determinación de la resistencia posterior al pandeo --- tenga que ser investigado principalmente por métodos experimentales.

En la figura (2.11) se muestra la forma en que se distribuyen los esfuerzos en una placa plana rectangular, simplemente apoyada y sometida a cargas de -- compresión en una sola dirección; al iniciarse el pandeo los esfuerzos de -- compresión σ_x dejan de estar uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes cargados, teniendo intensidades máximas en los bordes longitudinales, y disminuyendo hacia el centro. Además como las condiciones de apoyo obligan a los bordes no cargados a permanecer rectos y fijos, sin acercarse uno al -- otro, aparecen en la superficie media esfuerzos transversales σ_y , que son de importancia capital, en la región central son de tensión, de manera que -- tienden a rigidizar a la placa contra deflexiones laterales adicionales, lo que hace que pueda soportar cargas de compresión considerablemente mayores que la crítica. Por consiguiente, cuando el esfuerzo llega a - - - - - $\sigma_c = \pi^2 E/12 (1-\mu^2) (t/b)^2 K$ en la mayor parte de las placas aparecen ligeras ondas de pandeo que crecen gradualmente con el esfuerzo, pero sin que se -

presente la falla; siguen soportando cargas cada vez mayores y su resistencia es, en ocasiones, varias veces más grande que la que causó las primeras ondas.

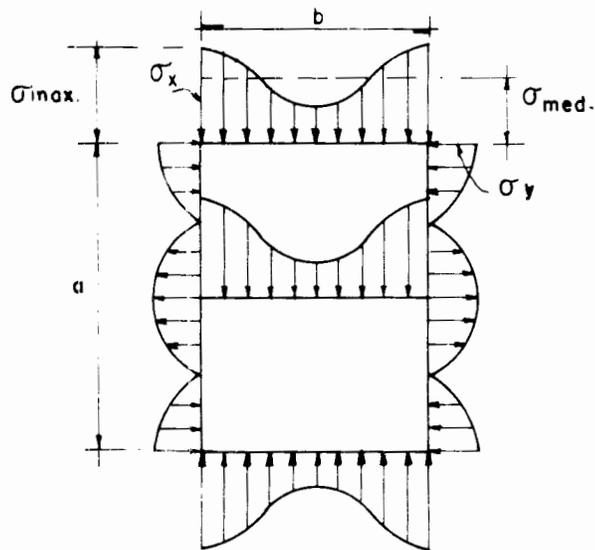


FIG. 2.11. ESFUERZOS EN UNA PLACA COMPRIMIDA, DESPUES DE LA INICIACION DEL PANDEO.

La naturaleza física del fenómeno se entiende fácilmente al considerar, por ejemplo, el patín comprimido de la sección de paredes delgadas de la fig. - (2.12) que se pandea en ondas pronunciadas, aproximadamente cuadradas, cuando el esfuerzo de compresión llega a su valor crítico. Si se aísla, por -- simplicidad una serionda, y se sustituye a la placa por un modelo formado -

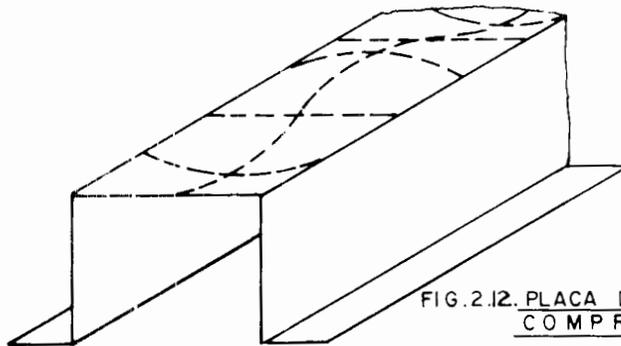


FIG. 2.12. PLACA DELGADA COMPRIMIDA

por una retícula ortogonal de barras, se obtiene la estructura de la fig. - (2.13-a), en la que las guías rígidas colocadas en los bordes verticales re presentan la acción de las almas que mantienen rectos los bordes del patín. Al alcanzarse la carga de pandeo de las barras comprimidas, la retícula em pieza a deformarse, si cada barra actuase aislada de las restantes, todas - fallarían bajo el mismo esfuerzo, y el colapso se presentaría immediatamen te después de la iniciación del pandeo, sin embargo, una placa es un elemen

to estructural de dos dimensiones y las barras horizontales de la retícula permiten representar, aproximadamente, su forma de trabajo en sentido perpendicular a la dirección de la compresión. Al iniciarse la deformación lateral de las barras verticales comprimidas aparecen esfuerzos de tensión y flexión en las horizontales, que se oponen a cualquier aumento de las deflexiones y hacen que la capacidad de carga de los puntales crezca más arriba de la que tendrían si trabajasen aisladas unas de otras.

La influencia de las barras horizontales es mayor en los elementos verticales más próximos a los bordes atiesados que en los que están alejados de ellos, y con una consecuencia, al aumentar la carga por encima de la que origina la iniciación del pandeo, la faja central de la placa se deforma lateralmente con más rapidez que las fajas cercanas a los bordes y los esfuerzos de compresión que al principio estaban distribuidos uniformemente en todo el ancho b , adoptan otra distribución que varía al crecer la carga (fig. 2.13-b).

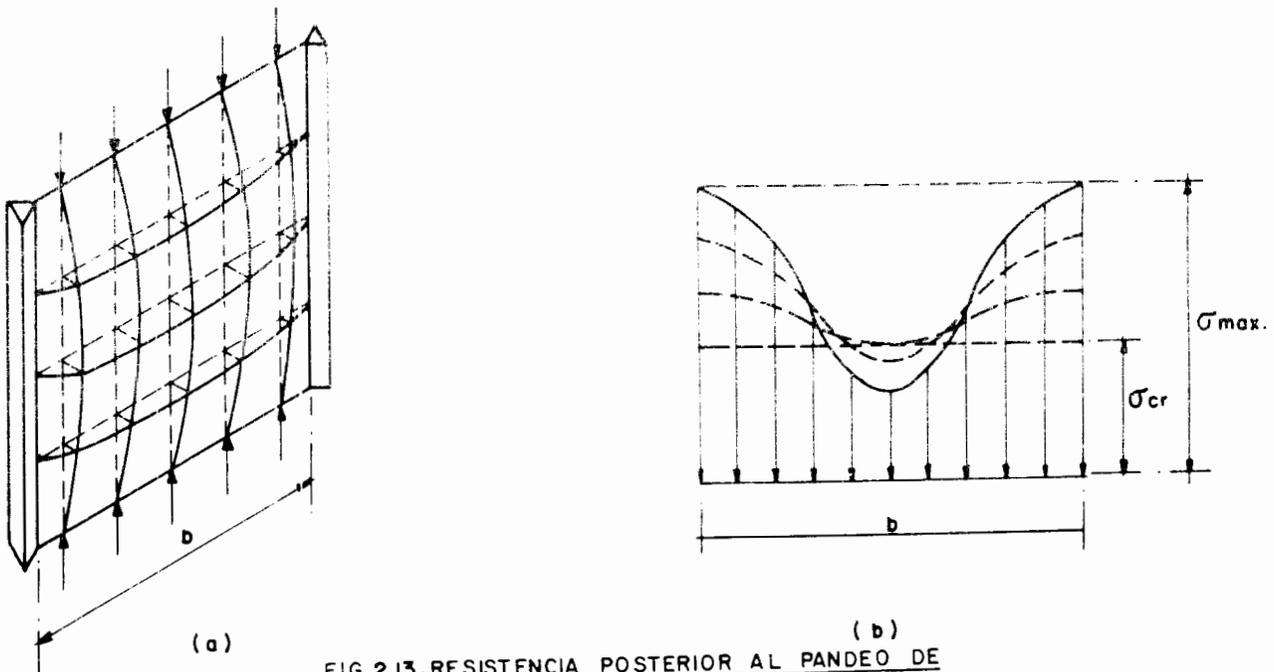


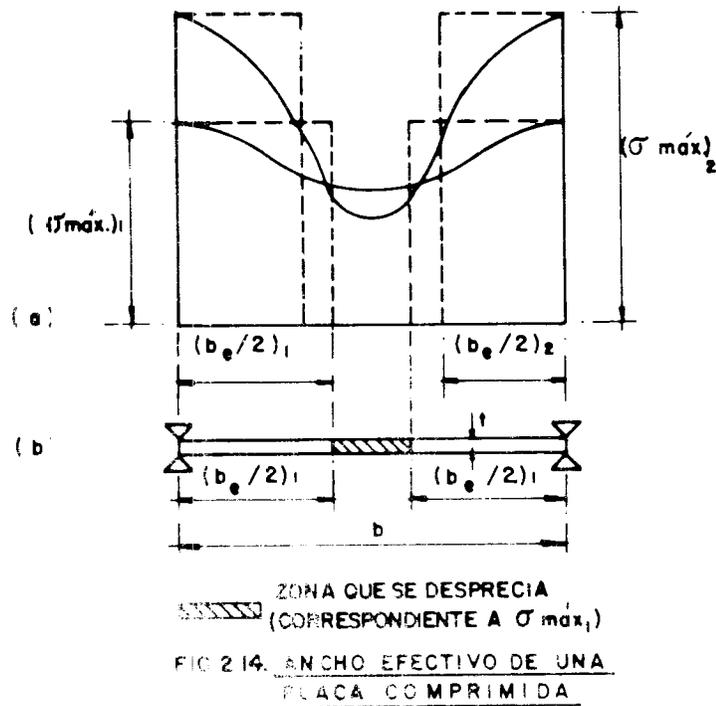
FIG.2.13. RESISTENCIA POSTERIOR AL PANDEO DE UNA PLACA DELGADA COMPRIMIDA

La resistencia máxima se alcanza cuando el esfuerzo $\sigma_{m\acute{a}x}$ (en los bordes atiesados) llega a un valor para el cual la placa completa se deforma rápidamente con poco o ningún aumento de carga.

Para determinar la resistencia máxima de una placa deben conocerse los esfuerzos que hay en ella cuando se llega a la condición de colapso. En problemas prácticos de diseño resultaría incomodo trabajar con los esfuerzos reales no uniformes (fig. 2.13-b), pero ésta dificultad se elimina utilizando el concepto de ancho efectivo de diseño introducido -- por T. Von Kármán en 1932.

La fuerza total de compresión, igual al área bajo la curva que representa los esfuerzos no uniformes, multiplicada por el grueso t (fig. 2.14-a), se obtiene también despreciando el efecto de la porción media, en la que los esfuerzos son de poca intensidad, y considerando cada una de las dos fajas laterales como una placa larga, libremente apoyada, sujeta a un esfuerzo de compresión uniforme igual al esfuerzo real en el borde, $\sigma_{m\acute{a}x}$, cuyo ancho $b_e/2$ se escoge de manera que la suma de las áreas de los dos rectángulos de base $b_e/2$ y altura $\sigma_{m\acute{a}x}$ sea igual al área bajo la curva que corresponde a los esfuerzos reales. Se supone, por consiguiente, que se suprime la porción central de la placa y que el elemento plano de ancho real "b" se sustituye por dos de ancho $b_e/2$ cuya suma, b_e , se denomina ancho efectivo (fig. 2.14-b). El ancho efectivo disminuye al aumentar el esfuerzo en los bordes, $\sigma_{m\acute{a}x}$. En la fig. (2.14-b) se ha dibujado la sección neta correspondiente a $\sigma_{m\acute{a}x_1}$.

En esta figura se puede observar que para un esfuerzo en los bordes $\sigma_{m\acute{a}x_1} < \sigma_{m\acute{a}x_2}$ se tendrá un semiancho efectivo -----
 $(b_e/2)_1 > (b_e/2)_2$.



Una vez que se ha determinado b_e la resistencia de la placa se calcula de la manera usual, pero utilizando el ancho efectivo en vez del real.

Empleando la ecuación (2.4) para valuar $\sigma_{m\acute{a}x}$, haciendo $\tau = 1$, $\mu = 0.3$ y utilizando el valor mínimo del factor de placa $K=4.0$ que corresponde a placas comprimidas libremente apoyadas y suponiendo comportamiento elástico hasta el límite de fluencia, Von Kármán obtuvo una expresión para determinar el ancho efectivo en el instante en que se alcanza la resistencia última, como sigue:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{\pi^2 E}{12 (1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 K$$

como $\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_y$ y $b=b_e$ resulta que

$$\sigma_y = \frac{4.0 \pi^2 E}{12 (1-0.3^2)} \left(\frac{t}{b_e}\right)^2$$

$$\sigma_y = 3.6 E \left(\frac{t}{b_e} \right)^2$$

$$\therefore b_e = 1.9 t \sqrt{E/\sigma_y} \quad (2.32)$$

Experiencias realizadas para comprobar la validez de la ecuación (2.32) - han demostrado que su forma general es correcta, pero que la constante -- 1.9 debe sustituirse por un coeficiente variable que depende del paráme-- tro $\sqrt{E/\sigma_y}$ (t/b). El AISI (American Iron And Steel Institute) en la edición de las Normas de 1968 dispone la siguiente fórmula:

$$b_e = 1.9 t \sqrt{E/\sigma_{m\acute{a}x}} \left[1 - 0.415 \frac{t}{b} \sqrt{E/\sigma_{m\acute{a}x}} \right] \quad (2.33)$$

Donde $\sigma_{m\acute{a}x}$ es el esfuerzo máximo de compresión que se presenta en los bor-- des y es numéricamente igual al cociente de la fuerza total dividida en-- tre el área efectiva $b_e t$, $\sigma_{m\acute{a}x} = P_{m\acute{a}x}/b_e t$. Para determinar la capacidad máxima de una placa delgada se sustituye en la ec. (2.33) a $\sigma_{m\acute{a}x}$ por σ_y y se obtiene el ancho efectivo b_e ; conociendo el ancho efectivo b_e y el -- esfuerzo máximo que está actuando ($\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_y$), la obtención de la capaci-- dad de la placa es directa, $P_{m\acute{a}x} = b_e t \sigma_y$. Para obtener la capacidad ad-- misible de una placa se utilizan los anchos efectivos correspondientes a las sol-- icitaciones de colapso, $\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma_y$, pues si se emplean los de car-- gas de trabajo se sobrestima su resistencia, ya que ese ancho es mayor -- que el que estaría trabajando inmediatamente antes de la falla. Por --- otro lado, si se conoce de antemano la carga que está actuando en la pla-- ca, la ec. (2.33) obliga a proceder por aproximaciones sucesivas puesto - que $\sigma_{m\acute{a}x}$ y b_e dependen mutuamente uno del otro.

Cuando se calculan las deformaciones de una estructura, lo que interesa -- conocer, por lo general, son las deformaciones producidas por las cargas de trabajo, por lo que habrá que emplear las propiedades geométricas de-- terminadas con los anchos efectivos correspondientes a ellas.

Si se impone en la ec. (2.33) la condición de que el ancho efectivo b_e -- sea igual al real b , y se despeja b/t, se determina la relación ancho/--- grueso máxima para la que las placas comprimidas, libremente apoyadas en -

Los bordes longitudinales sean completamente efectivas. En efecto:

dividiendo ambos miembros de la ec. (2.33) entre b

$$\frac{b_e}{b} = 1.9 \frac{t}{b} \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}} \left[1 - 0.415 \frac{t}{b} \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}} \right]$$

imponiendo la condición de que $b_e = b$ y simplificando,

$$1 = 1.9 \frac{t}{b} \left(\sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}} \right) - 0.7885 \left(\frac{t}{b} \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}} \right)^2$$

haciendo $S = \frac{t}{b} \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}}$ y reordenando términos se tiene que

$$0.7885 S^2 - 1.9S + 1 = 0$$

resolviendo para S se tiene que

$$S = \frac{+ 1.9 \pm \sqrt{(1.9)^2 - 4 \times 0.7885 \times 1}}{2 \times 0.7885} = \frac{+ 1.9 \pm 0.6753}{1.577}$$

considerando el signo negativo

$$S = \frac{1.9 - 0.6753}{1.577} = 0.7766$$

$$\therefore \frac{t}{b} \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}} = 0.7766$$

de donde

$$\frac{b}{t} = \frac{1}{0.7766} \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}}, \text{ esto es}$$

$$\frac{b}{t} = 1.2877 \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}}, \text{ o sea}$$

$$\frac{b}{t} = 1.29 \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}}$$

si se considera el signo positivo

$$S = \frac{1.9 + 0.6753}{1.577}$$

$$S = 1.633$$

entonces

$$1.633 = \frac{t}{b} \sqrt{E/\sigma_{\text{m\acute{a}x}}}$$

$$\frac{b}{t} = \frac{1}{1.633} \sqrt{E/\sigma_{\text{m\acute{a}x}}}$$

$$\frac{b}{t} = 0.612 \sqrt{E/\sigma_{\text{m\acute{a}x}}}$$

para $E = 2.039 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ y $\sigma_{\text{m\acute{a}x}} = \sigma_y$

$$\text{queda } \frac{b}{t} = 0.612 \sqrt{2.039 \times 10^6 / \sigma_y}$$

$$\frac{b}{t} = \frac{873.90}{\sigma_y}$$

si $\sigma_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$

se tendría $\frac{b}{t} = 17.30$

lo que sólo ocurriría si la placa es demasiado gruesa, por lo cual no se presenta problema de pandeo local y por tanto carece de interés.

El valor de la relación $\frac{b}{t} = 1.29 \sqrt{E/\sigma_{\text{m\acute{a}x}}}$ se obtuvo para --
la condición de que el ancho efectivo es igual al - - -

ancho total, por lo que representa un valor límite, por tanto

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{\text{lím}} = 1.29 \sqrt{E/\sigma_{\text{máx}}} \quad (2.34)$$

II.3.2 Diseño basado en la resistencia posterior al pandeo.

La determinación de la resistencia posterior al pandeo se hace necesaria -- cuando la relación ancho/espesor de una placa, excede los límites que se es-- tablecieron en los artículos II.2.1, II.2.2 y II.2.3.

La resistencia posterior al pandeo tiene importancia cuando se trata de ele-- mentos atiesados, razón por la cual se plantean en este artículo las ecua-- ciones teóricas que se aplican a dichos elementos. La resistencia poste-- rior al pandeo tiene mucho menos importancia en elementos planos no atiesa-- dos, por lo que no se plantearán las ecuaciones teóricas para este caso só-- lo se darán las especificaciones al respecto.

La resistencia posterior al pandeo de placas comprimidas apoyadas en los -- bordes longitudinales (atiesadas), se basa en la ecuación (2.34) - - - - Sustituyendo E y $\sigma_{\text{máx}}$, en dicha ecuación, por 2.039×10^6 y σ_y respectiva-- mente, se llega a las siguientes expresiones:

Las placas atiesadas son totalmente efectivas ($b_e = b$) hasta que (ec. 2.34).

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{\text{lím}} = \frac{1842}{\sqrt{\sigma_y}} \quad (2.35)$$

Para relaciones ancho/grueso mayores que $(b/t)_{\text{lím}}$ el ancho efectivo de pla-- cas atiesadas es (ec. 2.33)

$$b_e = \frac{2713 t}{\sqrt{\sigma_y}} \left[1 - \frac{593}{(b/t) \sqrt{\sigma_y}} \right] \quad (2.36)$$

Entonces la carga máxima o última que resiste la placa es $P_{\text{máx}} = b_e t \sigma_y$. -- Para determinar la carga de servicio en la placa deberá multiplicarse a --- $P_{\text{máx}}$ por 0.6, esto es, $P_a = b_e t 0.6 \sigma_y$.

II.3.3 Especificaciones de Diseño.

II.3.3.1 Especificaciones del AISC

Las especificaciones del AISC contienen normas para determinar la resistencia posterior al pandeo de los elementos planos.

Como el comportamiento de las placas apoyadas en los dos bordes longitudinales (atiesadas) difiere sustancialmente de las que están libres en uno de ellos (no atiesadas) las especificaciones AISC proporcionan métodos diferentes para el cálculo de resistencia en uno y otro caso.

a).- Elementos atiesados.

El AISC establece que cuando la relación ancho/espesor de un elemento plano atiesado sujeto a carga axial de compresión excede el límite aplicable (tabla 2.4) el cálculo debe efectuarse utilizando un ancho efectivo reducido - b_e . Las ecuaciones que se establecen son las siguientes:

Para las placas que forman parte de secciones en cajón, cuadradas o rectangulares, de grueso uniforme,

$$b_e = \frac{2121 t}{\sqrt{0.6\sigma_y}} \left[1 - \frac{422}{(b/t)\sqrt{0.6\sigma_y}} \right] \leq b \quad (2.37)$$

Para todos los demás elementos uniformemente comprimidos,

$$b_e = \frac{2121 t}{\sqrt{0.6\sigma_y}} \left[1 - \frac{371}{(b/t)\sqrt{0.6\sigma_y}} \right] \leq b \quad (2.38)$$

El esfuerzo de compresión admisible que se utiliza es el esfuerzo permisible para pandeo de conjunto, pero afectando éste por el factor de forma --- Q_a .

$$Q_a = \frac{\text{Area efectiva}}{\text{Area total}} \quad (2.39)$$

Para todo tipo de secciones transversales el área efectiva es igual al área total menos $\Sigma (b-b_e) t$.

Cuando para la sección en conjunto $l/r < C'_c$, en que "l" es la longitud efectiva del elemento, el esfuerzo admisible en toda la sección es:

$$\sigma_a = \frac{Q_s Q_a \left[1 - \frac{(l/r)^2}{2C_c'^2} \right] \sigma_y}{\frac{5}{3} + \frac{3(l/r)}{8C_c'} - \frac{(l/r)^3}{8C_c'^3}} \quad (2.40)$$

donde:

$$C_c' = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{Q_s Q_a \sigma_y}} \quad (2.41)$$

$Q_s = 1$ para elementos atiesados

Cuando $l/r \geq C_c'$

$$\sigma_a = \left[\frac{C_c'^2}{2(l/r)^2} \right] \frac{\sigma_y}{FS}$$

$$\sigma_a = \frac{12 \pi^2 E}{23(l/r)^2} \quad (2.42)$$

Multiplicando el esfuerzo permisible (ec. 2.40 ó 2.42) por el área total se obtiene la capacidad permisible del elemento.

b).- Elementos no atiesados.

Cuando se trata de elementos no atiesados, la resistencia posterior al pandeo es de poca importancia por lo que se procede de manera diferente al caso de elementos atiesados. En elementos no atiesados cuya relación b/t sea mayor que los límites especificados por el AISC (tabla 2.4), se utilizan -- las ecs. (2.40) ó (2.42), según el caso, pero considerando Q_a como la unidad, esto es, se considera el área total de la placa. El coeficiente Q_s , que para este caso es diferente de la unidad, es un coeficiente de reducción en cuyo cálculo se toma en cuenta el hecho de que la relación b/t excede los límites de la tabla 2.4.

Las expresiones que recomienda el AISC para el cálculo de esfuerzos permisibles se basan en el criterio de la iniciación de la inestabilidad, y la resistencia posterior al pandeo se tiene en cuenta únicamente como un margen de seguridad contra el colapso en placas de relación b/t muy alta.

Las expresiones con las que se obtiene Q_s son las siguientes:

Para ángulos aislados:

Cuando $637/\sqrt{\sigma_y} < b/t < 1300/\sqrt{\sigma_y}$,

$$Q_s = 1.34 - 0.000533 (b/t) \sqrt{\sigma_y} \quad (2.43)$$

Cuando $b/t \geq 1300/\sqrt{\sigma_y}$,

$$Q_s = 1,092,000/[\sigma_y (b/t)^2] \quad (2.44)$$

Para ángulos o placas, que sobresalen de columnas y otros miembros en compresión, y patines comprimidos de traveses:

Cuando $796/\sqrt{\sigma_y} < b/t < 1475/\sqrt{\sigma_y}$,

$$Q_s = 1.415 - 0.00052 (b/t) \sqrt{\sigma_y} \quad (2.45)$$

Cuando $b/t \geq 1475/\sqrt{\sigma_y}$,

$$Q_s = 1,409,000/[\sigma_y (b/t)^2] \quad (2.46)$$

Para almas de TES :

Cuando $1064/\sqrt{\sigma_y} < b/t < 1475/\sqrt{\sigma_y}$,

$$Q_s = 1.908 - 0.000852 (b/t) \sqrt{\sigma_y} \quad (2.47)$$

Cuando $b/t \geq 1475/\sqrt{\sigma_y}$,

$$Q_s = 1,409,000 / [\sigma_y (b/t)^2] \quad (2.48)$$

II.3.3.2 Especificaciones del RCDF

Las especificaciones del R.C.D.F. al igual que las del AISC, proporcionan métodos diferentes para el cálculo de resistencia de elementos atiesados y de los no atiesados, siendo el criterio muy parecido al del AISC.

a).- Elementos atiesados.

Cuando la relación b/t excede el límite aplicable de la tabla 2.4 se utiliza un ancho reducido b_e , que se obtiene con las ecuaciones siguientes:

En secciones cuadradas o rectangulares huecas de espesor uniforme,

$$b_e = \frac{2720 t}{\sqrt{\sigma_y}} \left[1 - \frac{540}{(b/t)\sqrt{\sigma_y}} \right] \leq b \quad (2.49)$$

En cualquier otro elemento plano atiesado comprimido uniformemente,

$$b_e = \frac{2720 t}{\sqrt{\sigma_y}} \left[1 - \frac{480}{(b/t)\sqrt{\sigma_y}} \right] \leq b \quad (2.50)$$

El esfuerzo de compresión admisible que se utiliza está dado por las siguientes ecuaciones:

Cuando para la sección en conjunto $l/r < C'_c$, el esfuerzo admisible en toda la sección es

$$\sigma_a = -\frac{Q_s Q_a}{23/12} \left[1 - \frac{(l/r)^2}{2 C'_c{}^2} \right] \sigma_y \phi \quad (2.51)$$

donde :

$Q_s = 1$ para elementos atiesados.

$Q_a = \text{Area efectiva} / \text{Area total}$

$$C'_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{Q_s Q_a \sigma_y}}$$

ϕ Es un coeficiente que vale 1.15 para $l/r = 0$ y decrece linealmente hasta 1.0 cuando $l/r = C_c$ y conserva este valor para relaciones de esbeltez más elevadas (ver Fig.215).

Cuando $l/r \geq C_c$

$$\sigma_a = \frac{\pi^2 E}{23/12 (l/r)^2} \quad (2.52)$$

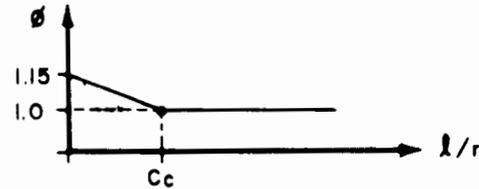


FIG. 2.15 VARIACION DEL COEFICIENTE ϕ

Para obtener la capacidad permisible del elemento se multiplica el esfuerzo permisible (ec. 2.51 ó 2.52) por el área total.

b).- Elementos no atiesados

El criterio para elementos no atiesados es el mismo que se describe en II.3.3.1-b, pero se deberán utilizar las ecs. 2.51 ó 2.52, según sea el caso, para calcular los esfuerzos admisibles. Las expresiones para calcular Q_s son las siguientes:

Para ángulos aislados:

$$\text{si } 640/\sqrt{\sigma_y} < b/t < 1300/\sqrt{\sigma_y},$$

$$Q_s = 1.34 - 0.00052 (b/t)\sqrt{\sigma_y} \quad (2.53)$$

$$\text{si } b/t \geq 1300/\sqrt{\sigma_y},$$

$$Q_s = 1090000/[\sigma_y (b/t)^2] \quad (2.54)$$

Para ángulos o placas que sobresalen de columnas u otros miembros comprimidos y para patines comprimidos de traveses:

$$\text{si } 800/\sqrt{\sigma_y} < b/t < 1470/\sqrt{\sigma_y},$$

$$Q_s = 1.41 - 0.00052 (b/t) \sqrt{\sigma_y} \quad (2.55)$$

si $b/t \geq 1470/\sqrt{\sigma_y}$,

$$Q_s = 1400000 / [\sigma_y (b/t)^2] \quad (2.56)$$

Para el cálculo de la resistencia posterior al pandeo de placas comprimidas con carga en su plano en general es recomendable apoyarse en las especificaciones descritas, ya sean del AISC o del RCDF, en nuestro medio se sugiere -- atender estas últimas.

II.4 Distinción entre Secciones Compactas y no Compactas.

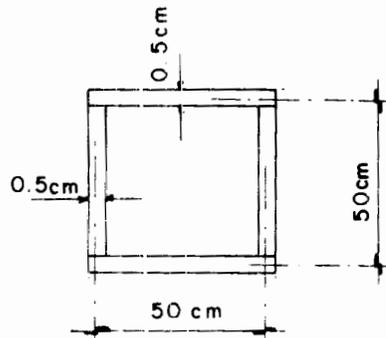
Reciben el nombre de secciones compactas aquellas que tienen características geométricas tales, que eviten que se presente un pandeo local, antes de que se llegue al momento flexionante o carga axial para la que se diseña la sección.

EJEMPLO 2.6

Calcular la capacidad de carga axial permisible de la columna cuya sección transversal está indicada en la figura utilizando los siguientes criterios:

- Por esfuerzo admisible de la columna en conjunto
- Teoría de estabilidad de placas
- Especificaciones AISC
- Especificaciones RCDF

Considérese que la columna es de acero A-36 y que tiene una relación de esbeltez $l/r = 150$, en que "l" es la longitud efectiva.



a) $C_c = \sqrt{2\pi^2 E / \sigma_y} = 126.3$, $l/r = 150 > 126.1$, luego el pandeo de la columna es elástico, por lo que el esfuerzo admisible, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo I, (I.4), es:

$$\sigma_a = \left[\frac{C_c^2}{2(l/r)^2} \right] \frac{\sigma_y}{23/12}$$

$$\sigma_a = \frac{(126.3)^2}{2(150)^2} \frac{2530}{23/12}$$

$$\sigma_a = 467.9 \text{ Kg/cm}^2$$

El área de la sección transversal es

$$A = 50 \times 0.5 \times 4 = 100 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto la carga axial admisible

$$P_a = 467.9 \times 100$$

$$P_a = 46,790 \text{ Kg}$$

$$P_a = 46.79 \text{ Ton}$$

b) La relación ancho/espesor real de cada placa de la columna es

$$(b/t)_{\text{real}} = \frac{50}{0.5} = 100$$

Debido a que el pandeo de la columna en conjunto es elástico se aplica la ec. (2.16);

$$b/t \leq 0.303 (1/r) \sqrt{K}$$

Para una sección cuacrada hueca de espesor uniforme $K=4$, sustituyendo valores

$$b/t \leq 0.303 \times 150 \times \sqrt{4} = 90.9$$

como $(b/t)_{\text{real}} = 100 > 90.9$ se presenta primero el pandeo local, para evitarlo se puede optar por incrementar el espesor de la placa en el valor correspondiente o aceptar que se presente el inicio de pandeo local y revisar la resistencia posterior al pandeo. Se analizará la segunda opción.

Una placa es totalmente efectiva ($b_e = b$) cuando (ec. 2.35)

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{\text{lím}} = \frac{1842}{\sqrt{\sigma_y}}$$

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{\text{lím}} = \frac{1842}{\sqrt{2530}} = 36.62 \quad ; \quad \left(\frac{b}{t}\right)_{\text{real}} = 100 > 36.62$$

por lo tanto de la ec. (2.36) se determina el ancho efectivo.

$$b_e = \frac{2713 \times 0.5}{\sqrt{2530}} \left[1 - \frac{593}{100 \sqrt{2530}} \right] = 23.8$$

por lo que la capacidad última de la sección para que no se presente la falla de pandeo local, considerando su resistencia posterior al pandeo es $P_e = b_e t n \sigma_y$ (n =número de placas, pues todas tienen las mismas dimensiones)

$$P_e = 23.8 \times 0.5 \times 4 \times 2530 = 120,428 \text{ Kg.}$$

$$P_e = 120.4 \text{ Ton}$$

La capacidad admisible de la sección es de

$$P = 0.6 \times 120.4 = 72.2 \text{ Ton} > 46.7 \text{ Ton.}$$

por lo que la sección sí es aceptable, dado que tiene una resistencia al pandeo local mayor que la del conjunto de la columna, de acuerdo con la teoría de estabilidad de placas.

c) El AISC establece que para elementos atiesados de secciones en cajón la relación ancho/espesor máxima para que no se inicie el pandeo local es (tabla 2.4)

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{\text{máx}} = \frac{1995}{\sqrt{\sigma_y}} = \frac{1995}{\sqrt{2530}} = 39.7$$

como $(b/t)_{\text{real}} = 100 > 39.7$, se aplica la ec. (2.37) para determinar un ancho efectivo.

$$b_e = \frac{2121 \times 0.5}{\sqrt{0.6 \times 2530}} \left[1 - \frac{422}{100\sqrt{0.6 \times 2530}}\right] = 24.3 \text{ cm.}$$

De la ec. (2.39)

$$Q_a = \frac{24.3 \times 0.5 \times 4}{50 \times 0.5 \times 4} = 0.486$$

$Q_s = 1$ por ser elemento atiesado

de la ec. (2.41)

$$C'_c = \sqrt{\frac{2 \times 3.14^2 \times 2.039 \times 10^6}{1 \times 0.486 \times 2530}} = 180.9$$

como $1/r < 180.9$ se la ec. (2.40)

$$\sigma_a = \frac{1 \times 0.486 \left[1 - \frac{150^2}{2 \times 180.9^2} \right] 2530}{\frac{5}{3} + \frac{3 \times 150}{8 \times 180.9} - \frac{150^3}{8 \times 180.9^3}} = 423.3 \text{ Kg/cm}^2$$

luego la carga axial permisible es:

$$P_a = 50 \times 0.5 \times 4 \times 423.3 = 42,330 \text{ Kg.}$$

$$P_a = 42.3 \text{ Ton} < 46.7 \text{ Ton.}$$

por lo tanto se presenta primero el pandeo local que el pandeo de conjunto, -- por lo que la sección no es aceptable, de acuerdo al AISC.

d) El RCDF establece que para placas de secciones en cajón, la relación ancho/ espesor, máxima, para que no se presente pandeo local (tabla 2.4) es:

$$\frac{b}{t} = \frac{2000}{\sqrt{\sigma_y}} = \frac{2000}{\sqrt{2530}} = 39.8$$

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{\text{real}} = 100 > 39.8$$

Cuando esto sucede, el RCDF propone que se utilice un ancho efectivo b_e , que - para el caso de sección en cajón es ec. (2.49)

$$b_e = \frac{2720 t}{\sqrt{\sigma_y}} \left[1 - \frac{540}{(b/t) \sqrt{\sigma_y}} \right] \leq b$$

$$b_e = \frac{2720 \times 0.5}{\sqrt{2530}} \left[1 - \frac{540}{100 \sqrt{2530}} \right] = 24.1 \text{ cm} < 50 \text{ cm.}$$

$$b_e = 24.1 \text{ cm}$$

obteniendo el factor Q_a ,

$$Q_a = \frac{24.1 \times 0.5 \times 4}{50 \times 0.5 \times 4} = 0.482.$$

$Q_s = 1$, por tratarse de elementos atiesados

$$C'_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{Q_s Q_a \sigma_y}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.14^2 \times 2.039 \times 10^6}{1 \times 0.482 \times 2530}} = 181.7 > 150$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2 \pi^2 E}{\sigma_y}} = 126.1$$

$\phi = 1$ debido que $l/r > C_c$

Como $l/r < C'_c$ el esfuerzo admisible es (ec. 2.51)

$$\sigma_a = \frac{12}{23} \times 1 \times 0.482 \left[1 - \frac{150^2}{2 \times 181.7^2} \right] \times 2530 \times 1 = 419.4 \text{ Kg/cm}^2$$

luego la carga axial permisible es:

$$P_a = 50 \times 0.5 \times 4 \times 419.4 = 41,940 \text{ Kg.}$$

$$P_a = 41.9 \text{ Ton} < 46.7 \text{ Ton}$$

por lo tanto, no se acepta la sección de acuerdo al RCDF debido a que se presenta primero el pandeo local.

En resumen, la sección propuesta de la columna sí es aceptable, ya que de acuerdo con la teoría de estabilidad de placas, la carga axial admisible es mayor que la correspondiente al pandeo general de la pieza, aún cuando las cargas admisibles resultantes de las especificaciones del AISC y del RCDF, sean menores. El RCDF señala que la relación ancho/espesor de una placa que forma parte de la sección transversal de un elemento estructural a compresión, puede ser mayor que la especificada, si se justifica, con un análisis de estabilidad que no se presentará pandeo local antes del pandeo de conjunto

APENDICE A

En este apéndice se hace la derivación de las ecuaciones generales del comportamiento de placas. La derivación se desarrolla haciendo una comparación con la teoría correspondiente a las vigas, de este modo se tiene una analogía con lo visto en cursos anteriores de Mecánica de Materiales.

A.- ECUACIONES GENERALES DE PLACAS

A.1 Ecuación de Comportamiento de Placas Rectangulares Cargadas Perpendicularmente a su Plano (Método de Navier).

Los pasos a seguir son muy similares a los que se utilizan cuando se considera una viga cargada perpendicularmente, esto es, para una viga se tiene que (fig. 2.16)

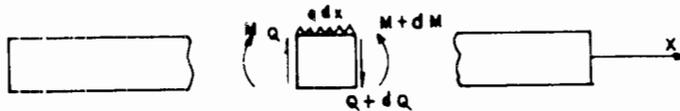


FIG. 2.16 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UN ELEMENTO dx DE UNA VIGA

$$\Sigma F_v = 0$$

$$dQ = - q dx$$

$$\frac{dQ}{dx} = - q \quad \text{----- (A.1)}$$

$$\Sigma M = 0: \quad (\text{despreciando terminos de segundo orden, procediendo al límite}).$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad \text{----- (A.2)}$$

Diferenciando la ec. (A.2) con respecto a x

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} \quad \text{----- (A.3)}$$

Sustituyendo la ec. (A.1) en la ec. (A.3)

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad \text{-----} \quad (A.4)$$

Por otro lado tenemos que

$$M = -EI \frac{d^2\omega}{dx^2} \quad \text{-----} \quad (A.5)$$

La expresión (A.5) es la ecuación de la elástica para una viga (ω =deflexión)

Obteniendo la segunda derivada de la ec. (A.5) con respecto a x se tiene que,

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -EI \frac{d^4\omega}{dx^4} \quad \text{-----} \quad (A.6)$$

Sustituyendo la ec. (A.6) en la ec. (A.4)

$$\frac{d^4\omega}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad \text{-----} \quad (A.7)$$

Para establecer el comportamiento de una placa con carga perpendicular a su plano se sigue el mismo tipo de razonamiento. Los pasos a seguir son:

- 1) Sumatoria de fuerzas verticales, nos da una relación entre fuerza cortante y carga aplicada.
- 2) Momentos alrededor de ejes apropiados, nos dan una relación entre momentos flexionantes, momentos torsionantes y fuerzas cortantes.
- 3) Se hace una suposición que relaciona los momentos flexionantes y momentos torsionantes con la curvatura y torsión de la superficie.
- 4) Se eliminan momentos y fuerzas cortantes combinando las diversas ecuaciones, por lo tanto, se obtiene una ecuación que relaciona la deflexión con la carga aplicada.

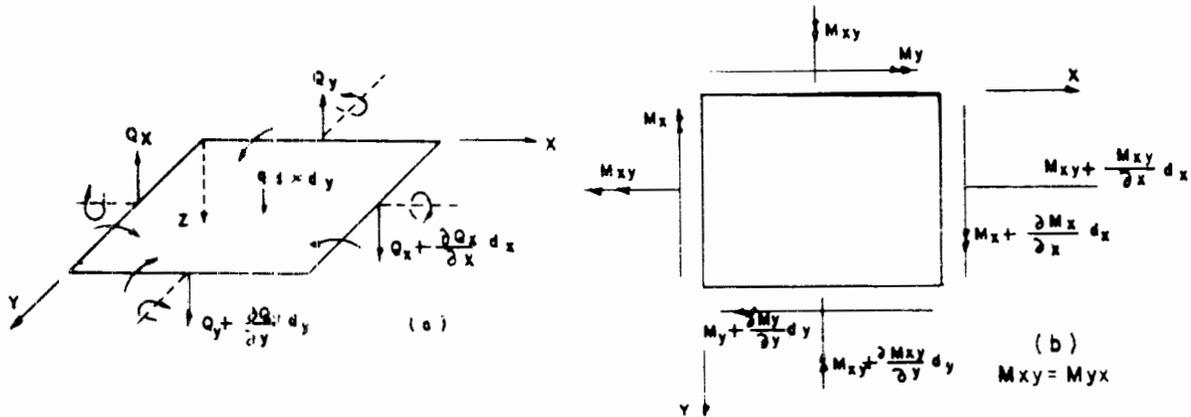


FIG.2.17 ELEMENTO $dx \cdot dy$ DE UNA PLACA CARGADA PERPENDICULARMENTE. a). SE INDICAN LAS FUERZAS CORTANTES b). SE INDICAN LOS MOMENTOS FLEXIONANTES Y TORSIONANTES

En la figura (2.17-a) se muestran las fuerzas cortantes y la dirección de los momentos flexionantes y torsionantes, en la fig(2.17-b) se muestran solamente los momentos flexionantes y torsionantes, haciendo notar que tanto cortantes como momentos son por unidad de longitud.

$$\Sigma F_v = 0 \quad :$$

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx\right) dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dy\right) dx + q dx dy = 0 \quad \text{----- (A.8)}$$

Dividiendo la ec. (A.8) entre $dx dy$,

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad \text{----- (A.9)}$$

La ecuación (A.9) es similar a la ec. (A.1)

$$\Sigma M_x = 0 \quad (\text{alrededor del eje } x)$$

$$(Q_y \cdot dx) dy - \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot dy\right) dx + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot dx\right) dy = 0 \quad \text{----- (A.10)}$$

Dividiendo la ec. (A.10) entre $dx dy$,

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_y = 0 \quad \text{---} \quad \text{(A.11)}$$

Similarmente, haciendo $\Sigma M_y = 0$ (alrededor del eje Y),

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad \text{---} \quad \text{(A.12)}$$

Las ecs. (A.11) y (A.12) son similares a la ec. (A.2)

Si asumimos ahora que M_x , M_y y M_{xy} están relacionados a la deflexión " ω " en una forma similar a como lo expresa la ec. (A.5), se llega así a las siguientes ecuaciones:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{---} \quad \text{(A.13)}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad \text{---} \quad \text{(A.14)}$$

$$M_{xy} = D (1 - \mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad \text{---} \quad \text{(A.15)}$$

En donde "D" para este caso es

$$D = \frac{E t^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \text{---} \quad \text{(A.16)}$$

t = espesor de la placa.

La "D" es fácilmente relacionada con el "EI" de la ec. (A.5), esto es,

$$EI = \frac{E b h^3}{12} \quad \text{si } b = \text{unitario, } EI = \frac{E h^3}{12} \quad \text{---} \quad \text{(A.17)}$$

La ec. (A.17) es parecida a la ec. (A-15), salvo que en el caso de placas si -

influye el módulo de Poisson, y este se toma en cuenta dividiendo la ec. (A.17) entre $(1 - \mu^2)$, dándonos como resultado la ec. (A.16).

Diferenciando las ecs. (A.13), (A.14) y (A.15) con respecto a x y y se tiene que

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{--- (A.18)}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \mu \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \partial x^2} \right) \quad \text{--- (A.19)}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = D (1 - \mu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{--- (A.20)}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D (1 - \mu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \quad \text{--- (A.21)}$$

Sustituyendo las ecs. (A.18) y (A.21) en la ec. (A.12) se obtiene

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) - D (1 - \mu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{--- (A.22)}$$

similarmente

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad \text{--- (A.23)}$$

Sustituyendo las ecs. (A.22) y (A.23) en la ec. (A.9) se tiene

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \text{--- (A.24)}$$

La ec. (A.24) es similar a la ec. (A.7), representa el comportamiento de --

placas planas cargadas perpendicularmente a su plano.

A.2 Efecto de Fuerzas en el Plano sobre la Ecuación (A.24)

Supóngase que existen fuerzas resultantes S_x, S_y y S_{xy} actuando por unidad de longitud en los bordes de un elemento de $d_x \cdot d_y$, (fig. 2.19), adicionalmente a la carga de superficie $q dx dy$ y a los momentos y fuerzas cortantes. Es de esperarse que la ecuación (A.24) se altere como consecuencia de las fuerzas S_x, S_y y S_{xy} .

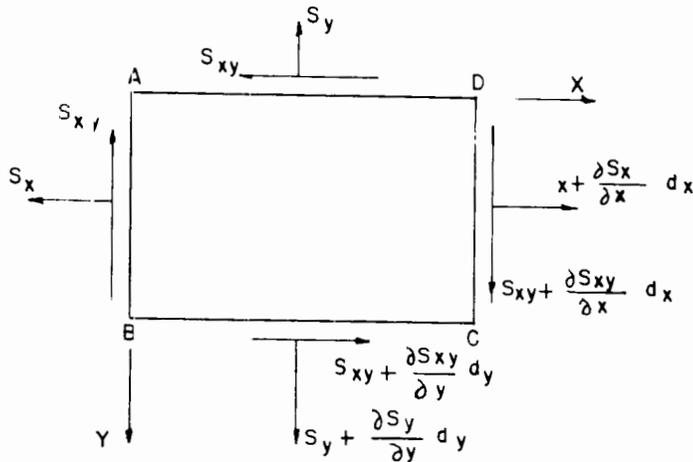


FIG. 2.18 ELEMENTO $dx \times dy$ DE UNA PLACA CARGADA EN SU PLANO

La ecuación (A.24) se derivó a partir del equilibrio de fuerzas verticales - (Ec. A.9), donde se relacionó la carga hacia abajo $q dx dy$ con la resultante de cortantes hacia arriba que actúan en los bordes de la placa; por lo tanto para este caso debemos encontrar la contribución vertical de las fuerzas S_x, S_y y S_{xy} .

Consideremos la contribución de S_x (fig. 2.19). La componente vertical de la fuerza S_x sobre \overline{AE} es:

$$F_{xz_1} = S_x dy \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (\text{hacia arriba}) \quad \text{-----} \quad (A.25)$$

y la componente vertical de la fuerza en \overline{CD} es:

$$F_{xz_2} = S_x dy \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (S_x dy \frac{\partial \omega}{\partial y}) dx \quad \text{----- (A.26)}$$

(hacia abajo)

Sumando (A.25) y (A.26) nos da una resultante hacia abajo de

$$F_{xz} = F_{xz_1} + F_{xz_2} = [S_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial S_x}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x}] dx dy \quad \text{----- (A.27)}$$

(Contribución de S_x)

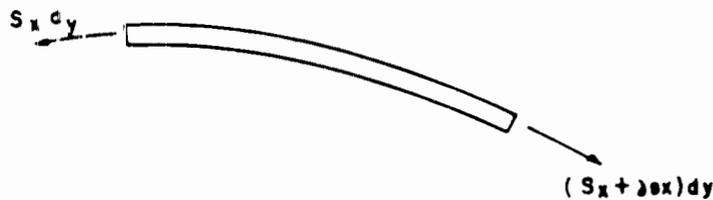


FIG. 2.19 FUERZA S_x ACTUANDO EN SU ELEMENTO DE FORMADO

Similarmente la contribución hacia abajo de S_y es

$$F_{yz} = [S_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial S_y}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}] \delta x \delta y \quad \text{----- (A.28)}$$

y de la fuerza S_{xy} es

$$F_{xyz} = \left[S_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} + S_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] dx dy \quad \text{--- (A.29)}$$

En la ec. (A.29) los dos primeros términos provienen de las fuerzas en \overline{AB} y \overline{CD} y los dos últimos de las fuerzas en \overline{AC} y \overline{BD} .

Sumando las contribuciones hacia abajo de las fuerzas S_x , S_y y S_{xy} (ecs. A.27 A.28 y A.29) se tiene que

$$F_z = F_{xz} + F_{yz} + F_{xyz} = \left[S_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] dx dy \quad \text{--- (A.30)}$$

De la ec. (A.30) se pueden eliminar los dos últimos términos debido a que si hacemos sumatoria de fuerzas en x (fig.2.18) se tiene que

$$\Sigma F_x = (\partial S_x / \partial x + \partial S_{xy} / \partial y) = 0 \quad \text{--- (A.31)}$$

similarmente la sumatoria de fuerzas en y nos da que

$$\Sigma F_y = (\partial S_x / \partial y + \partial S_{xy} / \partial x) = 0 \quad \text{--- (A.32)}$$

Por lo tanto la contribución neta hacia abajo de las fuerzas en el plano es

$$F_z = \left[S_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] dx dy \quad \text{--- (A.33)}$$

Ahora bien mientras que las fuerzas cortantes en los bordes de la placa --- (ec. A.9) tenían que soportar una carga hacia abajo de intensidad q por unidad de área y de lo cual resultó la ec. (A.24), ahora dichas fuerzas cortantes en los bordes tienen que soportar una carga hacia abajo de.

$$F_{zt} = \left(q + S_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{--- (A.34)}$$

por unidad de área.

Por lo tanto la ecuación que gobierna el comportamiento de una placa con carga perpendicular a su plano y carga en su plano es,

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + S_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.35})$$

Para el caso particular donde q y $S_x = \text{CTE}$. y $S_{xy} = S_y = 0$ se tiene

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(q + S_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad \text{-----} \quad (\text{A.36})$$

Otro caso particular donde $S_x = \text{CTE}$ y $S_{xy} = S_y = q = 0$ se tiene

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{1}{D} S_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad \text{-----} \quad (\text{A.37})$$

La ec. (A.37) es la expresión que se aplica a una placa plana cargada axialmente en el sentido x .

APENDICE B

Solución de la ecuación diferencial (2.2).

Se presenta la solución de la ecuación diferencial (2.2), la cual se repite aquí como ec. B.1.

$$\frac{EI}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) + t_{\sigma_x} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

La solución se desarrolla para placas con los bordes b simplemente apoyados y diferentes condiciones de apoyo en los bordes a (fig. 2.1). La suposición de que los bordes b están simplemente apoyados se hace, por un lado, porque simplifica notablemente la solución y por otro porque en los casos prácticos de columnas y vigas el empotrar o restringir estos bordes tiene un efecto -- despreciable en la carga crítica de pandeo local. En cambio la influencia -- del tipo de apoyo en los bordes a, paralelos a la dirección de la carga, es decisiva.

La solución por lo tanto, deberá ser una expresión de $\omega(x,y)$ que satisfaga -- tanto la ecuación de equilibrio (B.1) como las condiciones de frontera que -- tenga la placa. La solución que se presenta es a base de series trigonométri -- cas sencillas de senos (método de Levy). Para aplicar este método es condi -- cionante de los bordes de frontera, que dos bordes opuestos estén simplemente apoyados (i.e en $x = 0$ y $x = a$). La deflexión $\omega(x,y)$ se puede expresar como:

$$\omega(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (\text{B.2})$$

Esta expresión satisface las condiciones de borde supuestas en la dirección x, dado que en $x = 0$ y $x = a$.

$$\omega = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo la ec. (B.2) en la ec. (B.1), haciendo $D = Et^3/12(1-\mu^2)$ y reem -- plazando a σ_x por σ_c , el esfuerzo longitudinal crítico desconocido, se -----

tiene,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \left[\frac{n^4 \tau^4}{a^4} Y_n(y) - 2\sqrt{\tau} \frac{n^2 \tau^2}{a^2} Y_n''(y) + Y_n^{IV}(y) \right] - t \sigma_c \frac{n^2 \tau^2}{a^2} Y_n(y) \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} = 0 \quad (B.4)$$

Para un valor específico de n y anulando sen $\frac{n\pi x}{a}$ la ec. (B.4) se convierte en:

$$D \left[\frac{n^4 \tau^4}{a^4} Y_n(y) - 2\sqrt{\tau} \frac{n^2 \tau^2}{a^2} Y_n''(y) + Y_n^{IV}(y) \right] - t \sigma_c \frac{n^2 \tau^2}{a^2} Y_n(y) = 0 \quad (B.5)$$

La ec. (B.5) es una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden. Introduciendo la notación

$$\nu^2 = \frac{t \sigma_c}{D \tau} \left(\frac{a}{n\tau} \right)^2 \quad (B.6)$$

y arreglando términos, la ec. (B.5) queda como

$$Y_n^{IV}(y) - 2\sqrt{\tau} \left(\frac{n\tau}{a} \right)^2 Y_n''(y) + \tau \left(\frac{n\tau}{a} \right)^4 (1 - \nu^2) Y_n(y) = 0 \quad (B.7)$$

La solución de esta ecuación diferencial proporciona el parámetro ν mismo que sustituido en la ec. (B.6) nos proporciona la fórmula para el esfuerzo crítico, esto es

$$\sigma_c = \left(\frac{n\tau}{a} \right)^2 \frac{D \tau}{t} \nu^2 \quad (B.8)$$

La solución general de la ec. (B.7) es de la forma.

$$Y_n(y) = C_1 \cosh K_1 y + C_2 \sinh K_1 y + C_3 \cos K_2 y + C_4 \sin K_2 y \quad (B.9)$$

Donde K_1 y K_2 se definen como

$$K_1 = \frac{n\tau}{a} \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\nu + 1} \quad y \quad K_2 = \frac{n\tau}{a} \sqrt[4]{\tau} \sqrt{\nu - 1} \quad (B.10)$$

Así la solución general de la ecuación (B.1), representada por la ec. (B.2) toma finalmente la forma.

$$\omega(x,y) = \text{sen } \frac{n\pi x}{a} (C_1 \cosh K_1 y + C_2 \sinh K_1 y + C_3 \cos K_2 y + C_4 \sin K_2 y) \quad (\text{B.11})$$

Las constantes C_1 a C_4 se determinan introduciendo en la ec. (B.11) las condiciones de frontera de los bordes \underline{a} . A continuación se considera un caso especial de estas condiciones de frontera,

Caso I, placas simplemente apoyadas en los bordes \underline{b} , elásticamente restringidas en los bordes \underline{a} .

El origen de las coordenadas $\underline{x}, \underline{y}$, se asume en el punto medio del borde izquierdo de la placa como se indica en la fig.(2.1). Si se asumen iguales restricciones elásticas en los dos bordes \underline{a} , la deflexión $\omega(x,y)$ correspondiente al valor más pequeño de σ_c es una función simétrica de y , y los términos $C_2 \sinh K_1 y$, y $C_4 \sin K_2 y$ en la ec. (B.11) desaparecen. La ec. (B.11) queda como:

$$\omega(x,y) = \text{sen } \frac{n\pi x}{a} (C_1 \cosh K_1 y + C_3 \cos K_2 y) \quad (\text{B.12})$$

Para determinar las constantes C_1 y C_3 se utilizan las condiciones de frontera en los bordes descargados, principalmente,

$$\left[\omega(x,y) \right]_{y = \pm b/2} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\phi = \bar{\phi} \quad (\text{B.14})$$

La primera condición expresa el hecho de que los bordes $y = \pm b/2$ permanecen rectos cuando la placa se pandea. La segunda ecuación es una condición de continuidad que indica que el ángulo de rotación en el borde de la placa que se pandea es igual al ángulo de rotación de la placa restringente adyacente que se asume rígidamente conectada (fig.2.20).

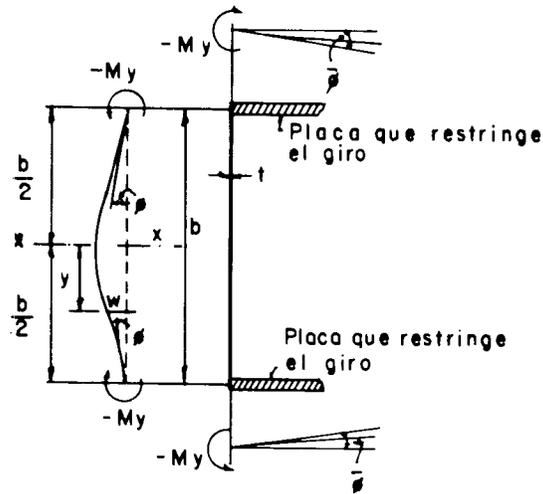


FIGURA - 2.20

Para poder introducir la solución (B.12) en la condición de frontera (B.14) es necesario expresar ϕ y $\bar{\phi}$ en términos de la deflexión $\omega(x,y)$. El momento flexionante M_y por unidad de longitud que ocurre a lo largo del borde cuando las placas se distorsionan se asume proporcional al ángulo $\bar{\phi}$. Esta restricción elástica puede expresarse como:

$$M_y = - \bar{\zeta} \bar{\phi} \quad (\text{B.15})$$

Donde $\bar{\zeta}$ es un factor de proporcionalidad que depende de las dimensiones de la estructura restringente, supuesta constante a lo largo del borde. El momento M_y por otro lado, es, de acuerdo a la ec. (A.14) e introduciendo en ella el factor \sqrt{t}

$$M_y = - D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \sqrt{t} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] y = \pm \frac{b}{2} \quad (\text{B.16})$$

debido a que $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ en cualquier punto a lo largo de los bordes \underline{a} , la ec. (B.16) se reduce a

$$M_y = - D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] y = \pm \frac{b}{2} \quad (\text{B.17})$$

Sustituyendo la ec. (B.17) en la ec. (B.15), nos da que:

$$\bar{\phi} = \frac{D}{\zeta} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (\text{B.18})$$

Además se sabe que

$$\phi = \pm \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (\text{B.19})$$

Sustituyendo las ecs. (B.18) y (B.19) en la ec. (B.14) nos da que

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \pm \frac{D}{\zeta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad (\text{B.20})$$

D/ζ tiene dimensiones de longitud, y conviene escribir esta ecuación como:

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \pm \frac{b}{2} \zeta \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \quad y = \pm \frac{b}{2} = 0 \quad (\text{B.21})$$

Donde:

$$\zeta = \frac{2}{b} \frac{D}{\zeta} \quad (\text{B.22})$$

ζ es el número adimensional, que se asume constante a lo largo de los bordes a . Es función de las dimensiones de la placa que se pandea y de las que restringen el pandeo y se le llamará coeficiente de restricción. Su determinación se discute más adelante. Se puede observar que teóricamente ζ puede asumir valores de 0 a ∞ . Cuando $\zeta = 0$, la placa está empotrada en los bordes a , y cuando $\zeta = \infty$, está libre para girar con respecto a estos bordes.

Sustituyendo la solución (B.12) en las condiciones de frontera (B.13) y (B.21) nos resultan dos ecuaciones:

$$C_1 \cosh_1 K_1 \frac{b}{2} + C_3 \cos K_2 \frac{b}{2} = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$(C_1 K_1 \sinh_1 K_1 \frac{b}{2} - C_3 K_2 \sin K_2 \frac{b}{2}) + \frac{b}{2} (C_1 K_1^1 \cosh K_1 \frac{b}{2} - C_3 K_2^2 \cos K_2 \frac{b}{2}) = 0 \quad (\text{B.24})$$

Las ecs. (B.23) y (B.24) son ecuaciones lineales homogéneas y sólo resultan-

valores diferentes de cero para C_1 y C_3 , cuando el determinante Δ de éste sistema de ecuaciones es igual a cero. Por lo tanto, Δ es el criterio de pandeo que nos lleva a la condición de estabilidad, esto es,

$$K_1 \tanh K_1 \frac{b}{2} + K_2 \tan K_2 \frac{b}{2} + \zeta \frac{b}{2} (K_1^2 + K_2^2) = 0 \quad (\text{B.25})$$

Introduciendo la relación de aspecto $\alpha = a/b$ en las ecs. (B.8) y (B.10), estas ecs. toman la siguiente forma:

$$\sigma_c = \frac{1}{b^2} \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{D_T}{t} \nu^2 \quad (\text{B.26})$$

$$K_1 \frac{b}{2} = \frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt[4]{T} \sqrt{\nu+1} \quad \text{y} \quad K_2 \frac{b}{2} = \frac{n\pi}{2\alpha} \sqrt[4]{T} \sqrt{\nu-1} \quad (\text{B.27})$$

Sustituyendo (B.27) en la ec. (B.25) nos da que la condición de estabilidad se transforma en:

$$\sqrt{\nu+1} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt[4]{T}}{\alpha}\right) + \sqrt{\nu-1} \tan\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\nu-1} \frac{\sqrt[4]{T}}{\alpha}\right) + \zeta \pi \nu \frac{\sqrt[4]{T}}{\alpha} = 0 \quad (\text{B.28})$$

La ecuación (B.28) define la relación entre el parámetro ν y la relación $\frac{\sqrt[4]{T}}{\alpha}$. Si se calcula ν de esta ecuación para el valor dado de $\frac{\sqrt[4]{T}}{\alpha}$, la obtención de σ_c por medio de la ec. (B.26) es relativamente sencilla. Sin embargo, se encuentra que la forma trascendental en la que ν depende de $\frac{\sqrt[4]{T}}{\alpha}$ es inconveniente para aplicaciones prácticas; por lo que es necesario encontrar expresiones más sencillas.

Si se considera el caso de una placa simplemente apoyada en los bordes descargados, para la que el coeficiente de restricción ζ es igual a ∞ y se sustituye este valor en la ec. (B.28), se obtiene la condición de estabilidad para este caso (téngase en cuenta que la función \tanh toma valores solo entre +1 y -1),

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\nu-1} \frac{\sqrt[4]{T}}{\alpha}\right) = \infty$$

La raíz más pequeña que satisface esta ecuación es

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\nu-1} \frac{n\sqrt[4]{\tau}}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.30})$$

de donde

$$\nu^2 = \left[\left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} \right)^2 + 1 \right]^2 \quad (\text{B.31})$$

Desarrollando el binomio al cuadrado se tiene que

$$\nu^2 = 1 + 2 \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} \right)^4 \quad (\text{B.32})$$

Esta ecuación representa una relación más sencilla entre ν^2 y $\alpha/n\sqrt[4]{\tau}$, para el caso de placas simplemente apoyadas en los bordes \underline{b} , que la de la ec. (B.28). Es posible expresar esta relación para todos los valores posibles de restricción elástica por medio de una expresión algebraica similar a la ec. (B.32). Con un error de menos de 1%, los valores de ν^2 pueden calcularse de:

$$\nu^2 = 1 + p \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} \right)^2 + q \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} \right)^4 \quad (\text{B.33})$$

Donde p y q son factores que dependen del coeficiente de restricción ζ . En las figs. (2.3) y (2.4) se muestran las gráficas de p y q vs. ζ .

Sustituyendo la ec. (B.33) en la ec. (B.26) e introduciendo $D = Et^3/12(1-\mu^2)$, se obtiene la siguiente ecuación para σ_c :

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \left[\left(\frac{n\sqrt[4]{\tau}}{\alpha} \right)^2 + p + q \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} \right)^2 \right] \quad (\text{B.34})$$

Introduciendo la rotación

$$K = \left(\frac{n\sqrt[4]{\tau}}{\alpha} \right)^2 + p + c \left(\frac{\alpha}{n\sqrt[4]{\tau}} \right)^2 \quad (\text{B.35})$$

La ecuación para σ_c toma la forma convencional

$$\sigma_c = \frac{n\sqrt{\tau}}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 K \quad (\text{B.36})$$

Donde K es el coeficiente adimensional, llamado coeficiente de placa, que depende de la relación de aspecto α de la placa, de las condiciones de apoyo - en los bordes descargados y del valor de τ .

El valor mínimo de σ_c se obtiene de la condición $\delta\sigma_c/\delta\alpha = 0$, que puede sustituirse por $\delta K/\delta\alpha = 0$, puesto que K es el único término en la expresión de σ_c que varía con α , obteniéndose el mínimo de la ec. (B.35), igualando a cero y simplificando términos, se encuentra el valor de α para el que σ_c alcanza un mínimo, esto es,

$$\alpha = n\sqrt{\tau/q} \quad (\text{B.37})$$

Sustituyendo el valor de α dado por la ec. (B.37) en la ec. (B.35) se llega a que

$$K = p + 2\sqrt{q} \quad (\text{B.38})$$

Donde se observa que el coeficiente de placa mínimo se vuelve independiente de τ . Esto es importante porque permite el uso de tablas y gráficas precalculadas para el coeficiente K que son aplicables para pandeo en los rangos elástico e inelástico.

El desarrollo de la solución del caso II, semejante al del caso I, no se presenta en este texto. El estudiante puede recurrir a la ref. 2.1, donde aparece el desarrollo de dicha solución.

REFERENCIAS.

- 2.1 F. Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York (1952).
- 2.2 De Buen, O., Estructuras de Acero; Comportamiento y Diseño, Limusa, - México (1980).
- 2.3 S.P. Timoshenko y J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, 2a. Ed., Mc - Graw-Hill Book Co., Inc., Nueva York (1961).
- 2.4 R. Szilard, Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical -- Methods, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1974)
- 2.5 L.F. Jaeger, Elementary Theory of Elastic Plates, Pergamon Press Ltd., London (1964).
- 2.6 E.P. Popov, Introduction to Mechanics of Solids, Prentice-Hall, Inc. New Jersey (1968)
- 2.7 W.E. Boyce y R.C. DiPrima, Elementary Differential Equations, 3a. Ed., John Wiley and Sons, Nueva York (1977).
- 2.8 Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural - Steel for Buildings, Ed. 1973, Instituto Americano de la Construcción - en Acero (AISC), Nueva York (1973).
- 2.9 Commentary on the Specification for the Design, Fabrication and Erec - tion of Structural Steel for Buildings, Ed., 1973. Instituto Americano de la Construcción en Acero (AISC), Nueva York (1973).
- 2.10 Reglamento de las Construcciones para el Distrito Federal (RCDF) Méxi - co (1976).

CAPITULO III.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A FLEXION.

CAPITULO III.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS SUJETOS A FLEXION

III.1 Pandeo Lateral Elástico en Vigas. Momento Crítico.

Cuando se utilizan vigas esbeltas, es muy probable que la falla se presente por inestabilidad antes del desarrollo de la resistencia a flexión. La falla por inestabilidad toma la forma de pandeo lateral acompañado de torsión, como se muestra en la figura (3.1). Este tipo de falla puede ocurrir en vigas -- que no tienen apoyo lateral, si la rigidez a la flexión en el plano de flexión es muy grande comparada con su rigidez lateral.

En efecto, en vigas con una longitud considerable y poco espesor, el esfuerzo que corresponde a la falla, es menor que el necesario para agotar la resistencia del material, esto nos indica que en este caso, como en el de columnas esbeltas, la falla se ha producido por inestabilidad de la pieza.

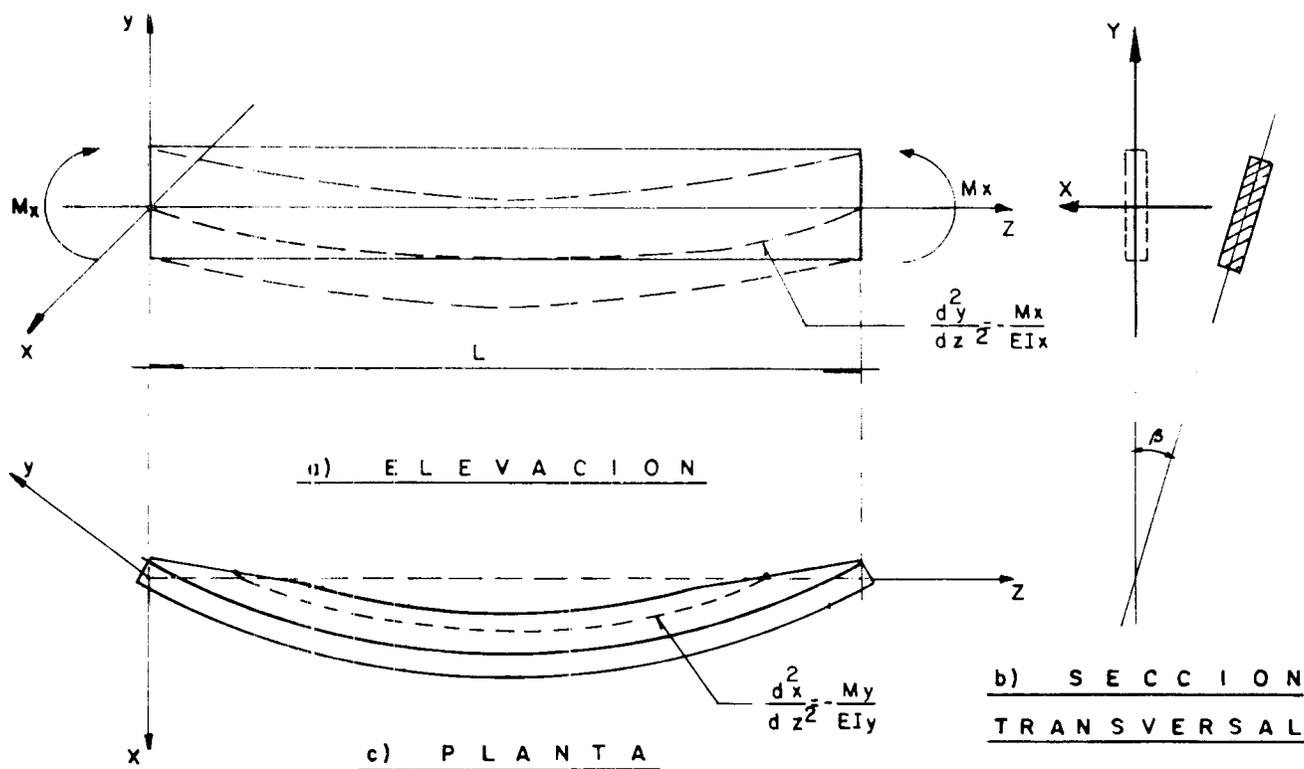


FIGURA. 3.1.- FALLA POR INESTABILIDAD LATERAL EN VIGAS.

La figura (3.2) nos muestra una viga esbelta de claro L , cuyos extremos están libremente apoyados y restringidos contra desplazamientos laterales y giro -- alrededor del eje Z . La viga está sometida a flexión pura por los momentos M_x en cada uno de los extremos.

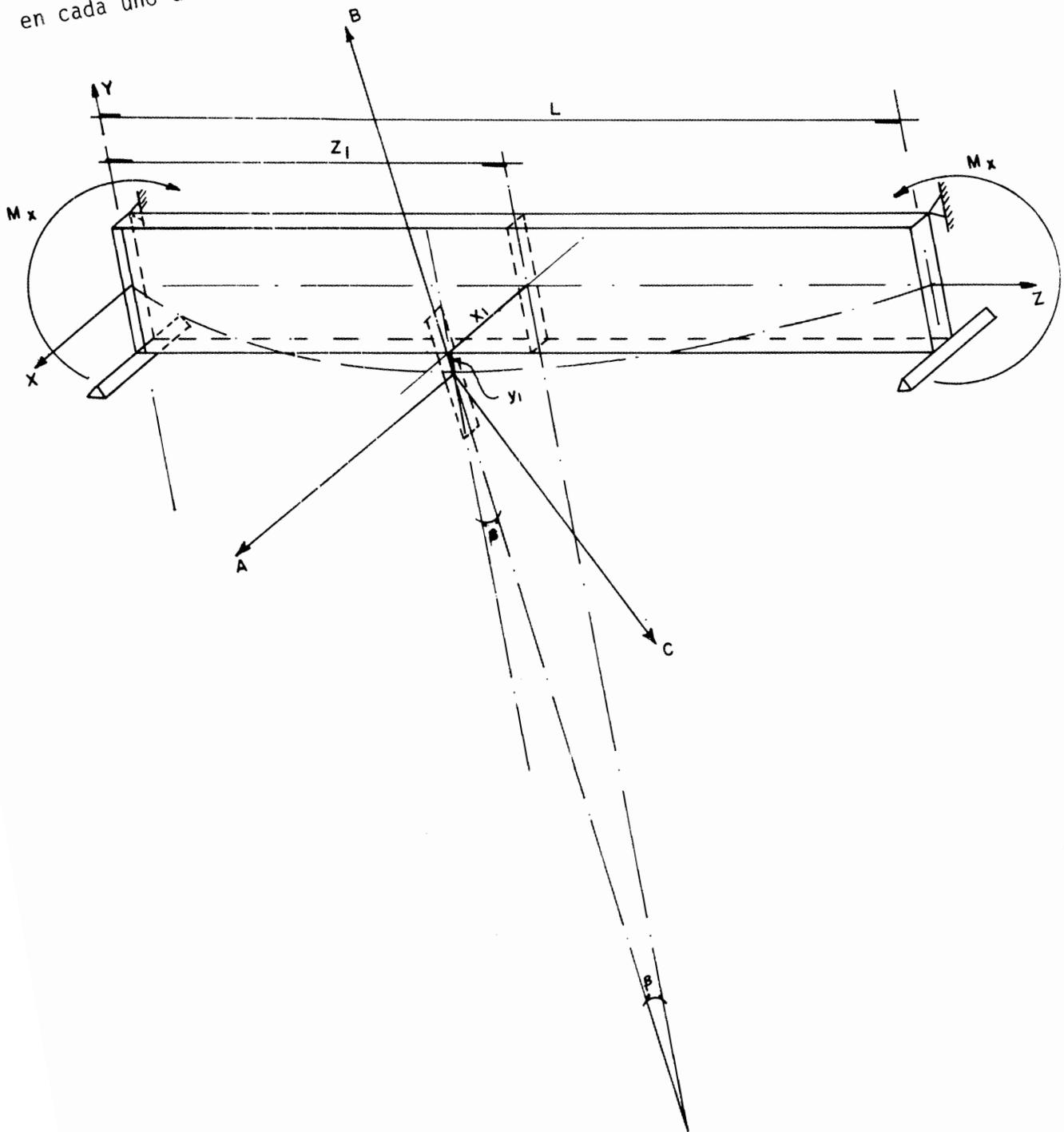


FIGURA 3.2

Al ocurrir la flexión lateral, el centro de gravedad de la sección transversal sufre un desplazamiento con valores de x_1 y y_1 en la dirección de los ejes cartesianos X y Y respectivamente y, además, se produce una rotación β alrededor del eje Z , por efecto de la torsión de la sección de la viga.

El momento correspondiente a la falla por pandeo lateral recibe el nombre de momento crítico (en forma similar a lo que ocurre cuando se llega a la carga crítica en piezas cargadas axialmente), y cuando se obtiene, se presentan simultáneamente dos configuraciones de equilibrio. La primera de ellas es una flexión sólo alrededor del eje Y , es decir, en el plano XZ (figura 3.3) en donde el momento externo M_x y el momento resistente en la sección Z_1 , se indican como vectores paralelos al eje X .

Si designamos con θ el ángulo de rotación horizontal de la sección transversal Z_1 , las componentes del momento resistente son $M_x \cos \theta$, en el plano de la sección transversal flexionada (fig. 3.3), o sea alrededor del eje A ; y $M_x \sin \theta$ en el plano normal al anterior, o sea alrededor del eje C . La primera componente $M_x \cos \theta$ genera flexión de la sección alrededor del eje A ; la segunda componente $M_x \sin \theta$ induce torsión de la sección alrededor del eje C .

Los ejes A, B, C son las posiciones de los ejes originales X, Y, Z , respectivamente, de la sección Z_1 deformada.

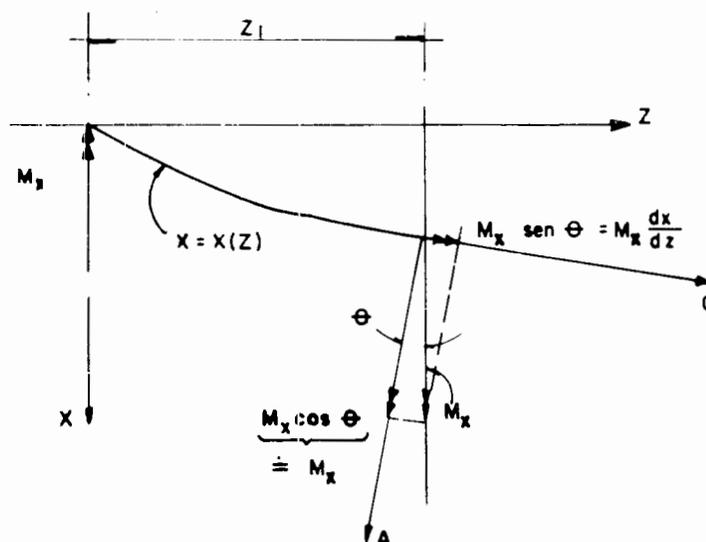


FIGURA 3.3 - PLANTA

Si nos limitamos a la determinación del valor de los momentos extremos M_x , en el instante en que la viga se empieza a flexionar fuera del plano de estos momentos, x_1 , y_1 , θ y θ se pueden considerar con un valor suficientemente pequeño, por lo cual podemos considerar:

$$\cos \theta \doteq 1$$

$$\text{sen } \theta \doteq \tan \theta = \frac{dx}{dz}$$

de manera que las componentes del momento resistente en la posición flexionada son :

$$M_x \cos \theta \doteq M_x$$

$$M_x \text{ sen } \theta = M_x \frac{dx}{dz}$$

como se indica en la figura (3.3).

La segunda configuración de equilibrio se presenta en la proyección del plano XY y representa la torsión de la viga producida por el pandeo lateral. En forma similar a la primera configuración, las componentes en las direcciones de los ejes principales en la posición deformada son $M_x \cos \beta$ sobre el eje A y $-M_x \text{ sen } \beta$ sobre el eje B (fig.3.4). En estas expresiones, β es la rotación vertical de la sección transversal alrededor del eje Z, para valores pequeños puede considerarse:

$$\cos \beta \doteq 1$$

$$\text{sen } \beta \doteq \beta$$

entonces:

$$M_x \cos \beta \doteq M_x$$

$$\text{y } M_x \text{ sen } \beta \doteq M_x \beta$$

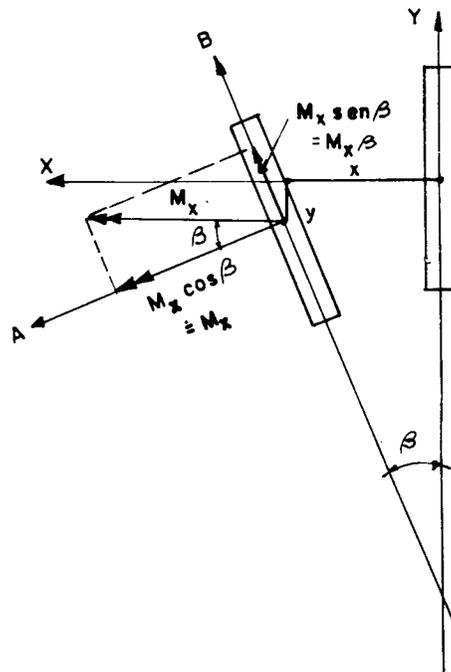


FIGURA 34- CORTE TRANSVERSAL

Para los casos que estamos considerando, las ecuaciones diferenciales de las curvas elásticas de la viga en los planos YZ y XZ son, respectivamente:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \frac{M_x}{EI_x}$$

y

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = - \frac{M_x \beta}{EI_y}$$

FALTA INDICAR
DE

de las ecuaciones anteriores obtenemos las resistencias a la flexión de la viga en cada uno de dichos planos, las cuales valen:

$$M_x = -EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} \quad \text{----- (3.1)}$$

$$M_x \beta = -EI_y \frac{d^2 x}{dz^2} \quad \text{----- (3.2)}$$

Por otra parte, la resistencia a la torsión, de la sección transversal de una viga, está dada por la siguiente ecuación:

$$T = GJ \frac{d\phi}{dz} - EC_w \frac{d^3 \beta}{dz^3}$$

esta ecuación se deduce en forma completa en el Apéndice C de este texto.

Como quedó establecido antes, la componente del momento externo que genera torsión en la sección Z, es $M_x \frac{dx}{dz}$, por lo cual

$$T = M_x \frac{dx}{dz}$$

$$\text{por tanto } M_x \frac{dx}{dz} = GJ \frac{d\beta}{dz} - EC_w \frac{d^3 \beta}{dz^3}$$

$$\text{o sea } GJ \frac{d\beta}{dz} - EC_w \frac{d^3 \beta}{dz^3} - M_x \frac{dx}{dz} = 0 \quad \text{--- (3.3)}$$

Las igualdades (3.1) (3.2) son las ecuaciones diferenciales de la elástica que relacionan las curvaturas con los momentos, con respecto a los ejes que les corresponden.

La igualdad (3.3) relaciona la deformación por torsión con el momento que la produce, en donde el primer término del primer miembro representa el momento torsionante necesario para hacer girar a la sección alrededor de su eje longitudinal venciendo la rigidez torsional GJ de la pieza. En el apéndice C se muestra el desarrollo para su obtención.

El segundo término aparece debido al hecho de que, excepto en ciertos casos especiales (p.ej. piezas de sección recta circular), al producirse la torsión, las secciones rectas planas antes de la deformación no continúan siéndolo después de ella, sino que se alabeo y, en los casos en que este alabeo no pueda producirse libremente, se requiere la aplicación de un momento de torsión, que si bien en ciertas secciones es pequeño comparado con el requerido para vencer la rigidez torsional de la pieza, en otros casos (viguetas I, p. ej.) tiene una gran importancia. C_w es una constante llamada de alabeo que depende de la forma de la sección recta de la pieza y define la importancia relativa de este efecto del alabeo.

La ecuación (3.1) es independiente y puede resolverse de manera directa para el desplazamiento y_1 , pero las ecuaciones (3.2) y (3.3) son simultáneas, es decir, - que los desplazamientos x_1 y β no pueden existir independientemente uno del otro, por lo que forman el sistema:

$$M_x \beta = -EI_y \frac{d^2 x}{dz^2} \quad (3.2)$$

$$GJ \frac{d\beta}{dz} - EC_w \frac{d^3 \beta}{dz^3} - M_x \frac{dx}{dz} = 0 \quad (3.3)$$

derivando cada miembro de la ecuación (3.3) con respecto a Z :

$$GJ \frac{d^2 \beta}{dz^2} - EC_w \frac{d^4 \beta}{dz^4} - M_x \frac{d^2 x}{dz^2} = 0 \quad (3.4)$$

de la ecuación (3.2):

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = - \frac{M_x \beta}{EI_y}$$

sustituyendo en la ecuación (3.4), $\frac{d^2x}{dz^2}$ por el valor anterior:

$$GJ \frac{d^2\beta}{dz^2} - EC_w \frac{d^4\beta}{dz^4} + \frac{M_x^2 \beta}{EI_y} = 0$$

o sea:

$$EC_w \frac{d^4\beta}{dz^4} - GJ \frac{d^2\beta}{dz^2} - \frac{M_x^2 \beta}{EI_y} = 0 \quad \text{----- (3.5)}$$

que es una ecuación diferencial homogénea de cuarto grado con coeficientes constantes, en donde β es el ángulo de torsión de una sección cualquiera de la viga con respecto a la variable Z , que representa la posición de la sección. Esta ecuación nos indica el estado que guarda la viga en el instante en que - por efecto del momento flexionante M_x , se produce el pandeo lateral de la viga (desplazamiento lateral y torsión en cada sección al mismo tiempo).

Al resolver la ecuación diferencial (3.5), se puede determinar el valor del momento flexionante M_x , para el que $\beta \neq 0$, o sea para el cual se produce el pandeo lateral de la viga, al cual designamos como momento crítico y su valor es:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJL^2}\right)} \quad \text{----- (3.6)}$$

La solución de la ecuación diferencial (3.5) se encuentra desarrollada en forma completa en el Apéndice D, de este texto.

La expresión anterior tiene una serie de limitaciones y es por esta razón, que se afecta con ciertos coeficientes que la hacen más general.

Primeramente consideraremos la limitación de que sólo es aplicable en el -- rango de comportamiento elástico del material, esto es, para esfuerzos menores que el correspondiente al límite de proporcionalidad. Se puede, como en el caso de columnas con carga axial, subsanar esta limitación si se sustituye el módulo de elasticidad E y el módulo de rigidez al cortante G , por sus correspondientes módulos tangentes E_T y G_T .

Otras limitaciones que deben tenerse en cuenta son las que se refieren a la variación del momento flexionante a lo largo de la viga, ya que la expresión deducida (3.6) corresponde a un momento flexionante constante y las que se refieren a la forma de aplicación de la carga sobre la viga (sólo momentos en los extremos en la fórmula deducida).

La ecuación general del momento crítico tomando en cuenta las limitaciones anteriores y para cuando la constante de alabeo C_w se puede desprestigiar es:

$$M_{cr} = \frac{C_1}{L} \sqrt{EI_y GJ} \quad \text{---} \quad (3.7)$$

siendo C_1 una constante.

El momento crítico se podrá siempre expresar en función de la carga crítica que lo produce, es decir:

$$M_{cr} = C_2 P_{cr} L$$

de donde:

$$P_{cr} = \frac{M_{cr}}{C_2 L}$$

en la cual C_2 es constante, entonces sustituyendo en la expresión anterior el valor de M_{cr} dado en la igualdad (3.7), se tiene:

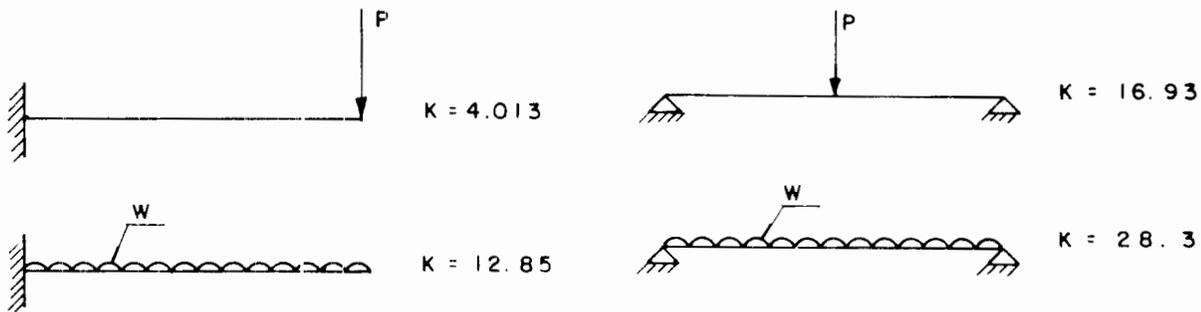
$$P_{cr} = \frac{C_1}{C_2 L^2} \sqrt{EI_y GJ}$$

haciendo:

$$\frac{C_1}{C_2} = K$$

$$P_{cr} = \frac{K}{L^2} \sqrt{EI_y GJ} \quad \text{--- (3.8)}$$

que es la ecuación que nos da el valor de la CARGA CRITICA que produce el pandeo lateral de la pieza. Se pueden utilizar los siguientes valores de K, obtenidos para diferentes condiciones de apoyo y carga (ref. 3.1).



El valor del módulo de rigidez al cortante G, puede considerarse como $G = \frac{3}{8} E$. El valor del momento polar de inercia J, puede ser sustituido por la constante de torsión J_R y en el caso de que los esfuerzos excedan el límite de proporcionalidad del material, los valores E y G deben multiplicarse por las relaciones E_T/E y G_T/E , respectivamente.

III.2 Dimensionamiento y Revisión de Vigas de Acero, Concreto y Madera, Sujetas a Flexión.

En vigas de concreto reforzado ó de madera, el pandeo lateral no ocurre muy fácilmente ya que normalmente se utilizan secciones de forma rectangular -- con una rigidez torsional considerable. El problema adquiere importancia si

la sección recta de las piezas sometidas a flexión es abierta (secciones en forma de viga I o canal), ya que la rigidez torsional de ellas es relativamente pequeña.

III.2.1.- Pandeo Lateral en Vigas de Acero.

Para el caso de viguetas de acero estructural, se han desarrollado algunas expresiones que indican los esfuerzos máximos que pueden aceptarse considerando la posibilidad de pandeo lateral, basadas en la ecuación:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJL^2}\right)}$$

A continuación se presentan las expresiones que recomiendan las especificaciones para el diseño de miembros de acero estructural del American Institute of Steel Construction (AISC).

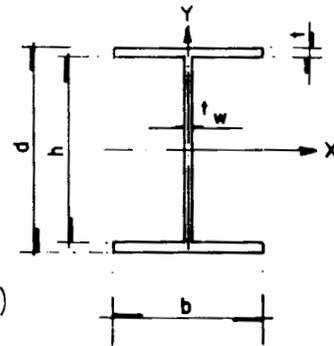
Para evitar el efecto del pandeo lateral en vigas, el esfuerzo permisible máximo a flexión de la viga debe ser el mayor de los siguientes dos valores, pero sin exceder de $0.6 F_y$.

$$I).- F_b = \frac{0.6(0.69 E) C_b}{Ld/bt} \text{ ----- (3.9)}$$

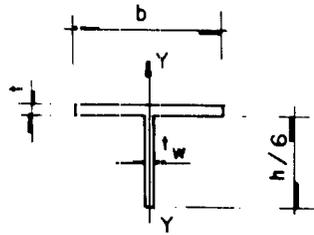
II).-

$$a).- \text{ Si } \frac{L}{r_T} > C_c = \sqrt{\frac{(35.86) (10)^6 C_b}{F_y}} \text{ (pandeo elástico)}$$

$$F_b = \frac{(11.95) (10)^6 C_b}{(L/r_T)^2} \text{ ----- (3.10)}$$



en que r_T es el radio de giro de una porción de la sección transversal de la viga compuesta por el patín comprimido más un sexto del área total del alma.



$$r_T = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

b) si $\frac{L}{r_T} < C'_c$ (pandeo inelástico)

$$F_b = \left[\frac{2}{3} - \frac{F_y(L/r_T)^2}{(107.5)(10)^6 C_b} \right] F_y \quad \text{--- (3.11)}$$

F_b es el esfuerzo máximo permisible a flexión.

C_b es un factor que toma en cuenta la variación del momento flexionante a lo largo del claro de la viga y fue definido en el capítulo II.

III.2.2 Pandeo Lateral en Vigas de Concreto Reforzado.

El pandeo lateral muy raras veces rige en el diseño de elementos de concreto reforzado, ya que normalmente los esfuerzos que se producen en la zona del concreto sujeta a compresión, son muy pequeños y además, la mayor parte de los muros y vigas se apoyan en los sistemas de piso, los cuales impiden las deformaciones laterales en las zonas de compresión.

Existen sin embargo, casos específicos en donde los elementos de concreto no están restringidos lateralmente y presentan espesores muy pequeños, motivos por los cuales se puede presentar el pandeo lateral. Un caso en el que se presenta este problema, es el de muros de cortante en edificios altos. Estos muros se comportan esencialmente como elementos a flexión y tienen por lo general, restricciones contra pandeo lateral en cada uno de los niveles, siendo su longitud de pandeo relativamente pequeña, pero puede ser que la relación peralte a espesor sea muy grande, y debido a esto, la capacidad a flexión del muro no alcance a desarrollarse completamente, precisamente por problemas de pandeo lateral. Si además de la flexión, actúa sobre los muros la carga vertical, el problema de pandeo lateral se vuelve aún más crítico.

Las pruebas de laboratorio han demostrado que las vigas de concreto reforzado sin contraventeos laterales, con una relación peralte-espesor razonable, no fallan prematuramente por pandeo lateral, sino que la falla se produce por flexión, siempre y cuando las vigas se carguen sin excentricidad lateral, ya que ésta carga produce torsión.

Por lo general, se debe buscar que el tipo de falla que se presente en trabes de concreto reforzado sea dúctil, de manera que es necesario evitar el pandeo lateral antes de que la viga alcance el momento de fluencia y además procurar que se produzca toda la ductilidad de la pieza. En otras palabras, se trata de buscar que la falla se presente cuando el concreto alcance su deformación de aplastamiento sin que se presenten problemas de pandeo lateral mientras ocurre la fluencia del acero. Con este fin, los diferentes reglamentos se limitan a especificar restricciones en las dimensiones de los elementos, de tal manera que si se cumplen éstas, no es necesario revisar el pandeo lateral.

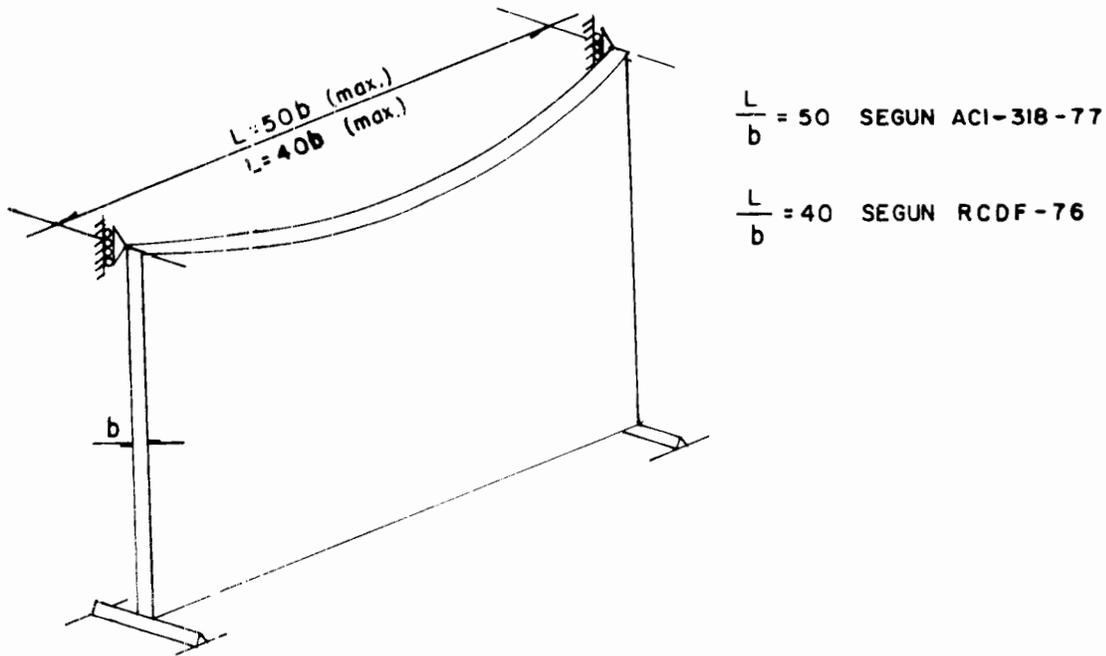
El ACI-318-77, especifica lo siguiente:

Para evitar el pandeo lateral en vigas de concreto, se requiere de algún tipo de apoyo lateral, a intervalos que no excedan 50 veces el ancho menor (b) del patín o cara de compresión, aún si el miembro se sostiene por sí solo.

El Reglamento de Construcciones para el D. F. 1976, considera valores más conservadores, y señala que deben analizarse los efectos de pandeo lateral cuando la separación entre apoyos laterales sea mayor de 40 veces al ancho de la viga o el ancho del patín a compresión.

Adicional a la consideración anterior, se debe tomar en cuenta que cuando la relación L/b resulte mayor que 20, no podrán suponerse valores del factor de ductilidad (Q) mayores que 2, a menos que se tomen precauciones que garanticen que la viga en cuestión no fallará antes de que en el resto de -

la estructura se desarrolle la ductilidad supuesta en el diseño.



**FIGURA 3.5.- CONTRAVENTEO LATERAL MAXIMO.
EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO.**

En lo que respecta al pandeo lateral en la dirección vertical, éste se presenta sobre todo cerca de las cargas concentradas y en las zonas de apoyo de los elementos de concreto y se puede revisar utilizando el criterio de diseño para columnas tomando en cuenta los efectos de esbeltez. Si la relación peralte-espesor del miembro es menor que 25, se puede considerar -- que el pandeo lateral no ocurrirá antes que la falla por flexión.

$$\frac{h}{b} \leq 25$$

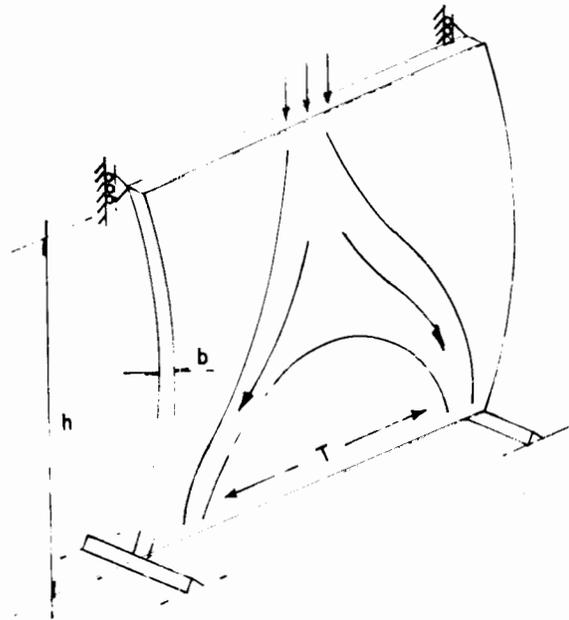


FIGURA 3.6.- PANDEO LATERAL VERTICAL
SEGUN EL A.C.I.- 318-77

III.2.3- Pandeo Lateral en Vigas de Madera

Describiremos la forma de resolver el problema de pandeo lateral, en vigas de madera, a través del siguiente ejemplo 3.1 .

EJEMPLO 3.1.-

Una viga de madera selecta está cargada como se muestra en la figura 3.7 . Si el módulo de elasticidad de la madera se considera de 90,000 Kg/cm² y el esfuerzo permisible a flexión es de 80 Kg/cm², determinar la carga máxima, P, que podría aceptar la viga para que no se presente falla por pandeo lateral si se toma contra tal efecto un factor de seguridad de 2. Determinar también el valor de la carga máxima que se aceptaría por flexión.

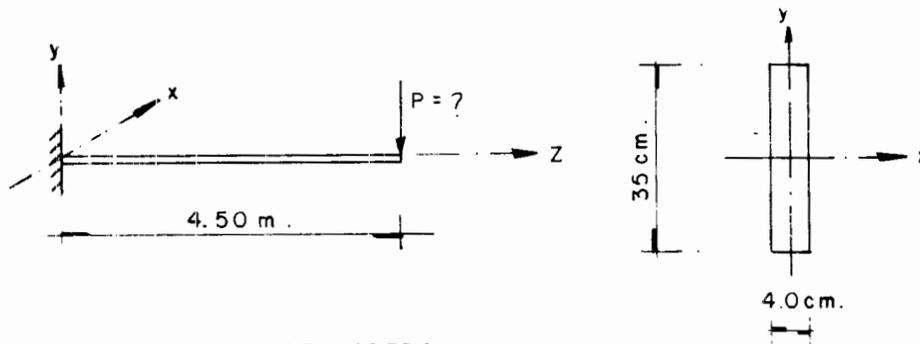


FIG. 3.7. - VIGA DE MADERA

Solución.-

La carga crítica que produciría el pandeo lateral se calcula con

$$P_{cr} = \frac{K}{L^2} \sqrt{EI_y GJ_R}$$

en donde K vale, por ser un voladizo:

$$K = 4.013$$

$$L = 450 \text{ cm}$$

$$E = 90,000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I_y = \frac{35 (4)^3}{12} = 186.7 \text{ cm}^4$$

$$G = \frac{3}{8} E = \frac{3}{8} \times 90,000 = 33,750 \text{ Kg/cm}^2$$

$$J_R = \frac{b^3 h}{3} = \frac{(4)^3 (35)}{3} = 746.67 \text{ cm}^4$$

sustituyendo:

$$P_{cr} = \frac{4.013 \sqrt{90,000 \times 186.7 \times 33,750 \times 746.67}}{(450)^2} = 407.8 \text{ Kg}$$

Como el factor de seguridad contra pandeo debe ser de 2, la carga máxima será:

$$P = \frac{P_{cr}}{2} = \frac{407.8}{2}$$

$$P = 204 \text{ Kg}$$

Revisaremos ahora si con la aplicación de esta carga, $P = 204 \text{ Kg}$, el esfuerzo flexionante actuante, f_b , excede o no el valor admisible por flexión de -- 80 Kg/cm^2

El momento flexionante máximo se presenta en el empotramiento, y vale:

$$M_x = PL$$

$$M_x = (204)(450) = 91,800 \text{ Kg cm}$$

de la fórmula de la escuadría:

$$f_b = \frac{M_x}{I_x} C$$

donde

$$I_x = \frac{4(35)^3}{12} = 14,291.7 \text{ cm}^4$$

$$C = \frac{h}{2} = \frac{35}{2} = 17.5 \text{ cm}$$

∴

$$f_b = \frac{91,800}{14,291.7} (17.5) = 112.4 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_b = 112.4 \text{ Kg/cm}^2 > F_b = 80 \text{ Kg/cm}^2$$

Como f_b excede el valor admisible por flexión, se observa que la carga máxima admisible que puede ser aplicada no está determinada por el pandeo lateral, sino por la capacidad a flexión de la viga, de manera que si el esfuerzo actuante lo igualamos al admisible por flexión, podremos despejar el valor de P.

Así:

$$\frac{M_x}{I_x} C = 80 \text{ Kg/cm}^2$$

despejando M_x :

$$M_x = \frac{80 I_x}{C}$$

$$M_x = \frac{80 \times 14291.7}{17.5} = 65,333 \text{ Kg cm}$$

Como el momento máximo vale $M_x = PL$, despejamos P:

$$P = \frac{M_x}{L} = \frac{65,333}{450} = 145 \text{ Kg}$$

$$P = 145 \text{ Kg}$$

Como puede observarse, la carga máxima admisible, P, es de 145 Kg y no de - 204 Kg; por lo tanto, el pandeo lateral no rige en el diseño de la sección, siendo la flexión el efecto que rige en el diseño.

EJEMPLO 3.2.- Investigar si la viga de acero A-36 que se muestra en la figura 3.8, tiene suficiente capacidad para que no se presente falla por pandeo lateral. Supóngase que la viga está restringida contra pandeo lateral en los apoyos y en el extremo del voladizo. Considerar para el acero A-36 los siguientes valores:

$$F_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2 \text{ y } E = 2.039 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

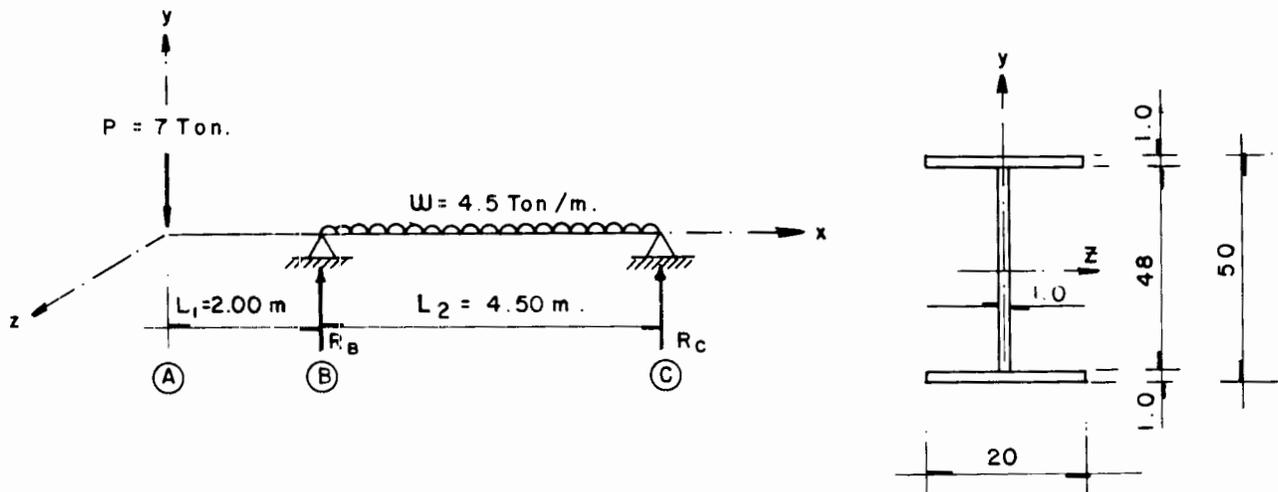


FIG. 3.8.- PANDEO LATERAL EN VIGAS DE ACERO

a) Determinación de los diagramas de Momento y Cortante.

Reacción en los apoyos:

$$\Sigma M_C = 0:$$

$$R_B L_2 - P(L_1 + L_2) - \frac{\omega(L_2)^2}{2} = 0$$

$$R_B = \left[P(L_1 + L_2) + \frac{\omega(L_2)^2}{2} \right] \frac{1}{L_2}$$

$$R_B = \left[7(2+4.50) + \frac{4.5(4.50)^2}{2} \right] \frac{1}{4.50} = 20.236 \text{ Ton}$$

$$\Sigma M_B = 0:$$

$$\frac{\omega(L_2)^2}{2} - PL_1 - R_C L_2 = 0$$

$$R_c = \left[\frac{\omega (L_2)^2}{2} - PL_1 \right] \frac{1}{L_2}$$

$$R_c = \left[\frac{4.5 (4.5)^2}{2} - 7 \times 2 \right] \frac{1}{4.50} = 7.014 \text{ Ton}$$

Ecuaciones de Momento y Cortante:

En el tramo AB :

Para $0 < x < 2.00 \text{ m}$

$$M_x = -Px \text{ ----- (a)}$$

Sustituyendo en (a) el valor de P:

$$M_x = -7x \text{ (para } 0 < x < 2.00 \text{ m) ----- (b)}$$

$$V_x = \frac{dM_x}{dx}$$

$$V_x = -P = -7 \text{ (para } 0 < x < 2.00 \text{ m) ----- (c)}$$

Tramo BC:

Para $2.00 < x < 6.50 \text{ m}$

$$M_x = -Px + R_B (x-L_1) - \frac{\omega (x-L_1)^2}{2} \text{ ----- (d)}$$

Llevando a la ecuación (d) los valores de P, R_B , L_1 y ω :

$$M_x = -7x + 20.236 (x-2) - \frac{4.5(x-2)^2}{2} \text{ (para } 2.00 < x < 6.50 \text{ m) ----- (e)}$$

Para obtener el valor del Cortante, sacaremos la derivada del Momento respecto a x de la ecuación (d):

$$V_x = \frac{dM_x}{dx} = -P + R_B - \omega(x-L_1) \text{ ----- (f)}$$

llevando a (f) los valores de P, R_B , ω y L_1 :

$$V_x = -7 + 20.235 - 4.5 (x-2.0) \text{ para } 2.00 < x < 6.50 \text{ m ----- (g)}$$

Tabulando las ecuaciones (b), (c), (e) y (g) obtenemos:

SECCION X (m)	MOMENTO FLEXIONANTE		CORTANTE	
	ECUACION	M _x (Ton - m)	ECUACION	V _x (Ton.)
0.0	b	0.00	c	-7.000
2.00	b	-14.00	c	-7.000
2.00	e	-14.00	g	+13.236
4.94	e	+ 5.47	g	0.000
6.50	e	0.00	g	- 7.014

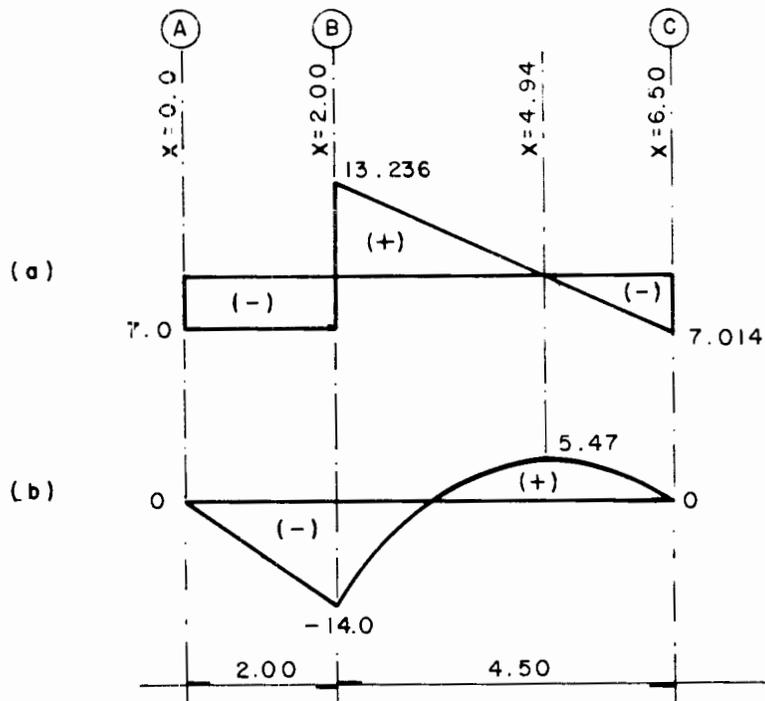


FIG. 3.9.- (a) DIAGRAMA DE CORTANTES EN Ton. (b) DIAGRAMA DE MOMENTOS EN Ton-m

b) Revisión del tramo A-B.

Esfuerzo admisible (ecuación 3.9)

$$F_{bI} = \frac{0.6(0.69E)C_b}{Ld/bt}$$

en donde

$$L = 200 \text{ cm}$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$t = 1.0 \text{ cm}$$

además

$$C_b = 1.75 + 1.05 (M_1/M_2) + 0.3 (M_1/M_2)^2 \leq 2.3$$

debido a que en los extremos del tramo AB los momentos flexionantes son del mismo signo (curvatura simple), tenemos :

$$\frac{M_1}{M_2} = -\frac{0}{14} = 0$$

por tanto,

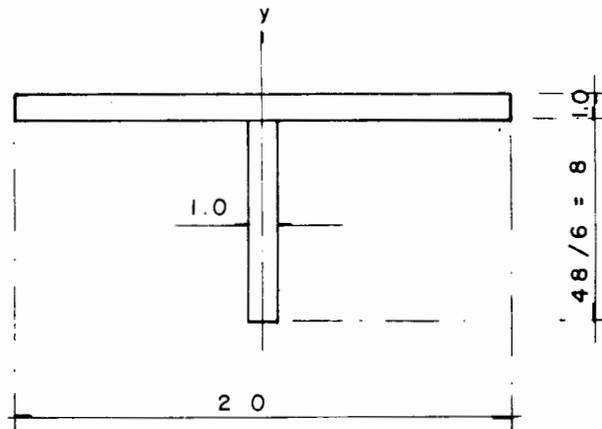
$$C_b = 1.75$$

sustituyendo valores en la ecuación (3.9):

$$F_{bI} = \frac{0.6 \times 0.69 \times 2.039 \times 10^6 \times 1.75}{2.00 \times 50 / 20 \times 1} =$$

$$F_{bI} = 2955 \text{ Kg/cm}^2$$

Relación de esbeltez L/r_T :



$$I_y = \frac{1.0 (20)^3}{12} + \frac{8(1.0)^3}{12} = 667.3 \text{ cm}^4$$

$$A = 1.0 \times 20 + 8 \times 1.0 = 28 \text{ cm}^2$$

$$r_T = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{667.3}{28}}$$

$$r_T = 4.9 \text{ cm}$$

$$\frac{L}{r_T} = \frac{200}{4.9} = 40.8$$

$$C'_c = \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 C_b}{F_y}}$$

$$C'_c = \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 \times 1.75}{2530}} = 157.5$$

como $L/r_T < C'_c$ el pandeo ocurre en el rango inelástico y el esfuerzo admisible se calcula con la ecuación (3.11):

$$F_{b_{II}} = \left[\frac{2}{3} - \frac{F_y (L/r_T)^2}{107.6 \times 10^6 C_b} \right] F_y$$

$$F_{b_{II}} = \left[\frac{2}{3} - \frac{2530 (40.8)^2}{107.6 \times 10^6 \times 1.75} \right] 2530 = 1630 \text{ Kg/cm}^2 > 0.6 F_y$$

El esfuerzo admisible es el mayor de los valores obtenidos de las ecuaciones (3.9) y (3.11); por tanto, rige $F_{b_I} = 2955 \text{ Kg/cm}^2$, pero como excede de $0.6 F_y$, el valor del esfuerzo admisible será $0.6 F_y$, o sea: $F_b = 0.6 F_y = 0.6 \times 2530$

$$F_b = 1518 \text{ Kg/cm}^2$$

Esfuerzo actuante:

$$f_b = \frac{M_z}{I_z} \cdot C$$

el máximo valor de M_z en el tramo AB vale:

$$M_z = 14 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

I_z es el valor del momento de inercia de la sección completa respecto al eje z, así:

$$I_z = \frac{20(50)^3}{12} - \frac{19(48)^3}{12} = 33229 \text{ cm}^4$$

$$c = \frac{d}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$$

∴

$$f_b = \frac{14 \times 10^5}{33229} \times 25 = 1053 \text{ Kg/cm}^2 < F_b = 1518 \text{ Kg/cm}^2$$

por tanto se acepta la sección en el tramo AB.

c) Revisión del tramo B-C .

En este caso:

$$L = 450 \text{ cm}$$

$$d = 50 \text{ cm}$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$t = 1.0 \text{ cm}$$

Para el cálculo de C_b se observa que en el diagrama de momentos de la figura 3.9.b, los momentos en los extremos del tramo BC producen curvatura doble, por lo que:

$$\frac{M_1}{M_2} = + \frac{0}{14} = 0$$

por tanto:

$$C_b = 1.75$$

sustituyendo en la ecuación (3.9) :

$$F_{bI} = \frac{0.6 \times 0.69 \times 2.039 \times 10^6 \times 1.75}{450 \times 50/20 \times 1} = 1313 \text{ Kg/cm}^2 < (0.6 F_y = 1518 \text{ Kg/cm}^2)$$

Para determinar la relación de esbeltez L/r_T , el valor de r_T es el mismo que el correspondiente a la sección del tramo AB, así:

$$\frac{L}{r_T} = \frac{450}{4.9} = 91.8$$

Por otro lado:

$$C'_c = \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 \times 1.75}{2530}} = 157.5$$

$$\frac{L}{r_T} < C'_c \quad (\text{pandeo inelástico})$$

de manera que:

$$F_{bII} = \left[\frac{2}{3} - \frac{F_y (L/r_T)^2}{107.6 \times 10^6 C'_b} \right] F_y$$

$$F_{bII} = \left[\frac{2}{3} - \frac{2530 (91.8)^2}{107.6 \times 10^6 \times 1.75} \right] 2530 = 1400 \text{ Kg/cm}^2 < (0.6 F_y = 1518 \text{ Kg/cm}^2)$$

comparando F_{bI} y F_{bII} rige el mayor, o sea:

$$F_b = 1400 \text{ Kg/cm}^2 < 1518 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo actuante máximo, f_b , que se presenta en el tramo BC es el mismo que el calculado para el tramo AB debido a que el valor del momento flexionante máximo que actúa en el tramo BC es igual al del tramo AB, por tanto:

$$f_b = 1053 \text{ kg/cm}^2 < F_b = 1400 \text{ Kg/cm}^2$$

Se puede concluir que la viga no tendrá problemas de pandeo lateral.

APENDICE C

OBTENCION DE LA RESISTENCIA A LA TORSION.

El ángulo de giro por torsión, por unidad de longitud de sección transversal no circular, sólida o tubular, esta dado por:

$$\theta = \frac{T_V}{GJ} \quad , \text{ de donde: } T_V = GJ\theta$$

Observando que θ es la torsión por unidad de longitud, mientras que β es el ángulo de torsión en cualquier sección transversal, tenemos que:

$$d\beta = \theta dz, \text{ de donde } \theta = \frac{d\beta}{dz} \text{ por lo tanto:}$$

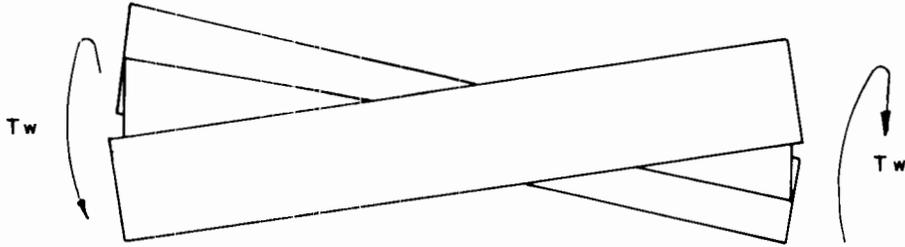
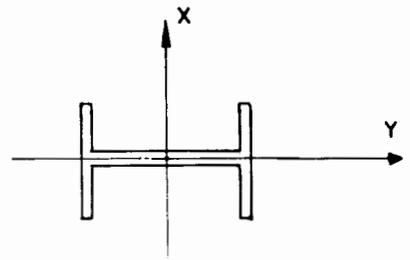
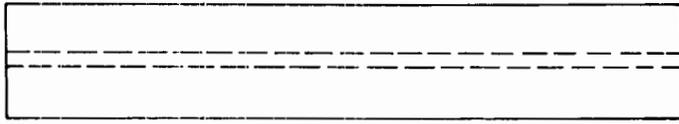
$$T_V = GJ \frac{d\beta}{dz} \quad \text{--- (C.1)}$$

T_V es el momento torsionante necesario para hacer girar a la sección alrededor de su eje longitudinal.

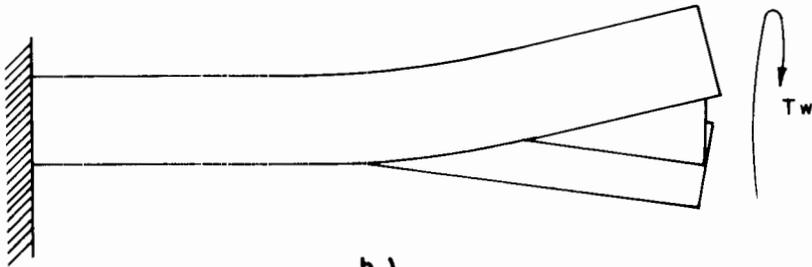
Cuando se produce la torsión, la sección transversal de la pieza después de la deformación ya no permanece plana, sino que sufre un desplazamiento llamado de alabeo. Si no existe restricción a dicho alabeo, éste se presenta en forma uniforme en toda su longitud y por lo tanto, la distribución de esfuerzos será también uniforme a lo largo de toda la pieza.

Para el caso específico de una vigueta I sometida a torsión, el alabeo uniforme se muestra en la figura (C.1a). Sin embargo, los miembros estructurales por lo regular están soportados de tal manera que se evita el alabeo uniforme, entonces, si la vigueta está rígidamente apoyada en su extremo, al no existir alabeo en el apoyo, la torsión se ve acompañada de un alabeo no uniforme (fig. C.1b), el cual origina esfuerzos cortantes adicionales y por lo tanto un incremento en la rigidez torsional. En este caso, la flexión directamente opuesta de los patines de la vigueta I produce el cortante V que constituye un par opuesto al de torsión T aplicado externamente (fig. C.1c).

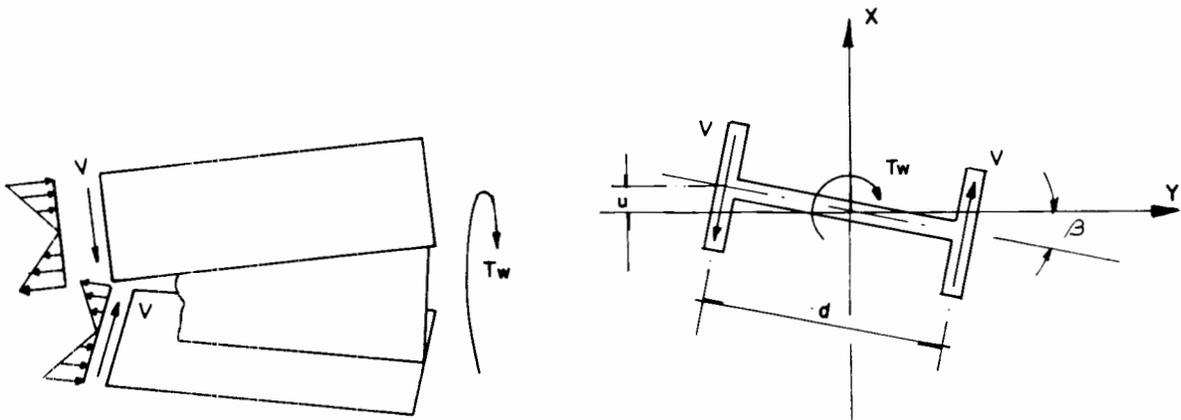
La resistencia a la torsión por alabeo se valúa de la siguiente manera:



a)



b)



c)

sabiendo que $V = \frac{dM}{dz}$ y $M = -EI_f \frac{d^2u}{dz^2}$

donde:

u = desplazamiento de un patín

I_f = momento de inercia de un patín alrededor del eje y .

Tenemos entonces:

$$V = -EI_f \frac{d^3u}{dz^3}$$

pero $u = 3d/2$ (fig. C.1c)

donde:

β = ángulo de torsión

d = distancia entre líneas centrales de los patines.

Por lo tanto:

$$V = -EI_f \frac{d}{2} \frac{d^3\beta}{dz^3}$$

El momento resistente es $T_w = V \cdot d$ y vale:

$$T_w = -EI_f \frac{d^2}{2} \frac{d^3\beta}{dz^3}$$

pero $I_y = 2I_f$

entonces:

$$T_w = -EI_y \frac{d^2}{4} \frac{d^3\beta}{dz^3} \quad \text{-----} \quad (C.2)$$

La resistencia a la torsión está dada por :

$$T = T_v + T_w \quad \text{--- (C.3)}$$

Sustituyendo en la ecuación los valores de T_v y T_w dados en las ecuaciones (C.1) y (C.2)

$$T = GJ \frac{d\beta}{dz} - EI_y \frac{d^2}{dz^2} \frac{d^3\beta}{dz^3} \quad \text{--- (C.4)}$$

Como puede verse, la resistencia a la torsión por alabeo no uniforme depende de la forma de la sección transversal, por lo tanto la constante de alabeo para la vigueta analizada es:

$$C_w = \frac{d^2 I_y}{4}$$

Finalmente, la ecuación nos queda:

$$T = GJ \frac{d\beta}{dz} - EC_w \frac{d^3\beta}{dz^3}$$

La cual es la ecuación de la resistencia a la torsión para una vigueta I.

APENDICE D.

SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL QUE PRODUCE PANDEO LATERAL EN VIGAS.

La ecuación resulta:

$$EC_w \frac{d^4 \beta}{dz^4} - GJ \frac{d^2 \beta}{dz^2} - \frac{M_x^2 \beta}{EI_y} = 0 \quad \text{----- (D.1)}$$

dividiendo los términos de la ecuación entre EC_w , obtenemos:

$$\frac{d^4 \beta}{dz^4} - \frac{GJ}{EC_w} \frac{d^2 \beta}{dz^2} - \frac{M_x^2 \beta}{EI_y EC_w} = 0$$

haciendo :

$$\alpha = \frac{GJ}{2EC_w} \quad y \quad \gamma = \frac{M_x^2}{EI_y EC_w}$$

la ecuación nos queda :

$$\frac{d^4 \beta}{dz^4} - 2\alpha \frac{d^2 \beta}{dz^2} - \gamma \beta = 0 \quad \text{----- (D.2)}$$

que es una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes, -
la cual tiene una solución del tipo $\beta = e^{rz}$.

obteniendo las derivadas respectivas:

$$\beta = e^{rz}$$

$$\frac{d\beta}{dz} = r e^{rz}$$

$$\frac{d^2 \beta}{dz^2} = r^2 e^{rz}$$

$$\frac{d^3 \beta}{dz^3} = r^3 e^{rz}$$

$$\frac{d^4 \beta}{dz^4} = r^4 e^{rz}$$

y sustituyendo valores en la ecuación (D.2)

$$r^4 e^{rz} - 2\alpha r^2 e^{rz} - \gamma e^{rz} = 0$$

dividiendo entre e^{rz} :

$$r^4 - 2\alpha r^2 - \gamma = 0 \quad \text{--- (D.3)}$$

A esta ecuación se le denomina ecuación característica o auxiliar de la -- ecuación diferencial (D.2), y se puede escribir de la forma:

$$(r^2)^2 - 2\alpha r^2 - \gamma = 0 \quad \text{--- (D.4)}$$

la cual es una ecuación cuadrática en r^2 , y sus raíces valen:

$$r^2 = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 4\gamma}}{2}$$

$$r^2 = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma}$$

$$r_{1,2}^2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma}$$

$$r_{3,4}^2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \gamma}$$

Las raíces $r_{1,2}$ son reales de la forma: $r_{1,2} = \pm n$

$$r_1 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma}}$$

$$r_2 = -\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma}}$$

Las raíces $r_{3,4}$ son complejas de la forma: $r_{3,4} = \pm m\dot{i}$

$$r_3 = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \gamma}}$$

$$r_4 = -\sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \gamma}} = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma}}$$

Si " r_n " es una raíz de la ecuación característica (D.3), entonces $\beta = e^{r_n z}$ es una solución de la ecuación diferencial (D.2), la cual depende de la na turaleza de la raíces " r_n ".

Para raíces reales y diferentes, la solución general es de la forma:

$$\beta = A_1 e^{r_1 z} + A_2 e^{r_2 z} + \dots + A_n e^{r_n z}$$

Para raíces complejas diferentes, las cuales se presentan en pares conjug ados $r_n = \lambda \pm \mu\dot{i}$, la solución general es de la forma:

$$\beta = B_1 e^{\lambda_1 z} \cos \mu_1 z + B_2 e^{\lambda_1 z} \operatorname{sen} \mu_1 z + \dots +$$

$$+ B_{n-1} e^{\lambda_{n-1} z} \cos \mu_{n-1} z + B_n e^{\lambda_n z} \operatorname{sen} \mu_n z$$

Para raíces repetidas, si $r=r_1$ se repite "s" veces, la solución general es de la forma:

$$\beta = C_1 e^{r_1 z} + C_2 z e^{r_1 z} + C_3 z^2 e^{r_1 z} + \dots +$$

$$+ C_s z^{s-1} e^{r_1 z}$$

La solución de la ecuación diferencial (D.2) es una combinación de las soluciones para raíces complejas y para raíces reales diferentes, es decir:

$$\beta = A_1 \operatorname{sen} mz + A_2 \cos mz + A_3 e^{nz} + A_4 e^{-nz} \quad \text{--- (D.5).}$$

en donde:

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma}} \quad \text{y} \quad n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma}}$$

De las condiciones iniciales del problema, sabemos que en los extremos de la viga, ésta no puede girar alrededor del eje Z, pero sí lo puede hacer alrededor de los ejes X y Y, por lo tanto:

$$\beta = \frac{d^2\beta}{dz^2} = 0 \quad \text{para } Z = 0 \text{ y } Z = L$$

derivando la solución general (ec. D.5) dos veces, obtenemos:

$$\frac{d\beta}{dz} = m A_1 \cos mz - m A_2 \sin mz + n A_3 e^{nz} - n A_4 e^{-nz}$$

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} = -m^2 A_1 \sin mz - m^2 A_2 \cos mz + n^2 A_3 e^{nz} - n^2 A_4 e^{-nz} \quad \text{--- (D.6)}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $\beta = 0$ y $\frac{d^2\beta}{dz^2} = 0$ para $Z = 0$, en las ecuaciones (D.5) y (D.6), respectivamente:

$$0 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \quad \text{--- (D.7)}$$

$$0 - m^2 A_2 + n^2 A_3 + n^2 A_4 = 0 \quad \text{--- (D.8)}$$

multiplicando (D.7) por n^2 y restándola a (D.8), nos queda:

$$n^2 A_2 + m^2 A_2 = 0$$

$$A_2 (n^2 + m^2) = 0$$

$$\text{de donde } A_2 = 0$$

Sustituyendo este valor en (D.7)

$$A_3 = -A_4$$

Sustituyendo A_2 y A_3 en la ecuación de la solución general (ec. D.5):

$$\beta = A_1 \sin mz - A_4 e^{nz} + A_4 e^{-nz}$$

$$\beta = A_1 \sin mz - A_4 (e^{nz} - e^{-nz})$$

$$\text{pero } e^{nz} - e^{-nz} = 2 \operatorname{senh} nz$$

por lo tanto:

$$\beta = A_1 \operatorname{sen} mz - 2A_4 \operatorname{senh} nz \quad \text{--- -- (D.9)}$$

derivando la ecuación anterior dos veces, se tiene:

$$\frac{d\beta}{dz} = m A_1 \cos mz - 2 n A_4 \operatorname{cosh} nz$$

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} = -m^2 A_1 \operatorname{sen} mz - 2 n^2 A_4 \operatorname{senh} nz \quad \text{--- -- (D.10)}$$

Sustituyendo las condiciones de frontera $\beta = 0$ y $\frac{d^2\beta}{dz^2} = 0$ para $Z = L$, en las ecuaciones (D.9) y (D.10) obtenemos:

de (D.9):

$$A_1 \operatorname{sen} mL - 2 A_4 \operatorname{senh} nL = 0 \quad \text{--- -- (D.11)}$$

y de (D.10)

$$- m^2 A_1 \operatorname{sen} mL - 2 n^2 A_4 \operatorname{senh} nL = 0 \quad \text{--- -- (D.12)}$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, formado por las ecuaciones (D.11) y (D.12):

$$A_1 \operatorname{sen} mL - 2 A_4 \operatorname{senh} nL = 0$$

$$A_1 m^2 \operatorname{sen} mL + 2 A_4 n^2 \operatorname{senh} nL = 0$$

Su determinante vale:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} mL & - 2 \operatorname{senh} nL \\ m^2 \operatorname{sen} mL & 2 n^2 \operatorname{senh} nL \end{vmatrix} = 0$$

Resolviéndolo:

$$(\text{sen } mL)(2n^2 \text{senh } nL) + (m^2 \text{sen } mL)(2 \text{senh } nL) = 0$$

Factorizando y simplificando:

$$\text{sen } mL (n^2 + m^2) = 0 \quad \text{--- (D.13)}$$

y dado que n y m son diferentes de cero, entonces :

$$\text{sen } mL = 0 \quad \text{---, (D.14)}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (D.11)

$$-2A_4 \text{senh } nL = 0$$

$$A_4 = 0$$

finalmente, la ecuación (D.9) nos queda al sustituir A_4 en ella:

$$\beta = A_1 \text{sen } mz \quad \text{--- (D.15)}$$

El valor más pequeño de m , que satisface a la ecuación (D.14) es:

$$m = \frac{\pi}{L}$$

por lo tanto:

$$\beta = A_1 \text{sen } \frac{\pi z}{L} \quad \text{--- (D.16)}$$

que es una solución de la ecuación diferencial (D.1).

Si hacemos :

$$m = \frac{\pi}{L} = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma}}$$

y sustituyendo los valores de α y γ :

$$\alpha = \frac{GJ}{2EC_w} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{M_x^2}{EI_y EC_w}$$

$$\frac{\pi^2}{L^2} = -\frac{GJ}{2EC_w} + \sqrt{\left(\frac{GJ}{2EC_w}\right)^2 + \frac{M_x^2}{EI_y EC_w}}$$

$$\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{GJ}{2EC_w} = \sqrt{\left(\frac{GJ}{2EC_w}\right)^2 + \frac{M_x^2}{EI_y EC_w}}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{GJ}{2EC_w}\right)^2 = \left(\frac{GJ}{2EC_w}\right)^2 + \frac{M_x^2}{EI_y EC_w}$$

$$\frac{\pi^4}{L^4} + \frac{2\pi^2 GJ}{2L^2 EC_w} + \left(\frac{GJ}{2EC_w}\right)^2 = \left(\frac{GJ}{2EC_w}\right)^2 + \frac{M_x^2}{EI_y EC_w}$$

Reduciendo términos:

$$\frac{\pi^4}{L^4} + \frac{\pi^2 GJ}{L^2 EC_w} = \frac{M_x^2}{EI_y EC_w}$$

despejando M_x :

$$M_x = \sqrt{EI_y EC_w \left(\frac{\pi^4}{L^4} + \frac{\pi^2 GJ}{L^2 EC_w} \right)}$$

$$M_x = \sqrt{\frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{\pi^2 EI_y EC_w}{L^2} + \frac{GJ}{EC_w} \right)}$$

finalmente:

$$M_x = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJ L^2} \right)}$$

o sea:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJ L^2} \right)} \quad \text{--- (D.17)}$$

Esta expresión nos da el valor del MOMENTO CRITICO; es decir, el momento para el cual se inicia el pandeo lateral torsionante de la pieza en el rango elástico, pero no nos da información con relación al comportamiento posterior de la pieza.

Otra forma de obtener el valor del momento crítico, es determinando el valor de la constante A_1 que aparece en la ecuación (D.16), tomando valores al centro del claro de la viga, es decir:

$$\beta = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L} \quad \text{--- (D.16)}$$

$$\text{Para } z = \frac{L}{2}, \quad \beta = \beta_{L/2}$$

sustituyendo estos valores en (D.16):

$$\beta_{L/2} = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi L}{2L}$$

$$\beta_{L/2} = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

como $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

entonces:

$$\beta_{L/2} = A_1$$

de manera que la ecuación (D.16) nos queda:

$$\beta = \beta_{L/2} \text{ sen } \frac{\pi Z}{L} \quad \text{-----} \quad \text{(D.13)}$$

en donde $\beta_{L/2}$ es el ángulo de torsión al centro del claro.

Obteniendo $\frac{d^2\beta}{dz^2}$ y $\frac{d^4\beta}{dz^4}$ de la ecuación (D.13) se tiene:

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} = - \frac{\pi^2}{L^2} \beta_{L/2} \text{ sen } \frac{\pi Z}{L}$$

$$\frac{d^4\beta}{dz^4} = \frac{\pi^4}{L^4} \beta_{L/2} \text{ sen } \frac{\pi Z}{L}$$

Sustituyendo estos valores en (D.1):

$$EC_w \frac{\pi^4}{L^4} \beta_{L/2} \text{ sen } \frac{\pi Z}{L} + GJ \frac{\pi^2}{L^2} \beta_{L/2} \text{ sen } \frac{\pi Z}{L} - \frac{M_x^2}{EI_y} \beta_{L/2} \text{ sen } \frac{\pi Z}{L} = 0$$

factorizando:

$$\left(\frac{\pi^4}{L^4} EC_w + \frac{\pi^2}{L^2} GJ - \frac{M_x^2}{EI_y} \right) \beta_{L/2} \text{ sen } \frac{\pi Z}{L} = 0 \quad \text{-----} \quad \text{(D.19)}$$

Esta ecuación se satisface si $\beta_{L/2}$ vale cero, lo que significa que tanto β como u son cero para todos los puntos, es decir, que no hay deformación lateral de la viga, siendo en caso trivial que carece de interés, o bien si:

$$\frac{\pi^4}{L^4} EC_w + \frac{\pi^2}{L^2} GJ - \frac{M_x^2}{EI_y} = 0$$

despejando M_x :

$$M_x^2 = \frac{\pi^2}{L^2} EI_y GJ + \frac{\pi^4}{L^4} EI_y EC_w$$

$$M_x = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJL^2}\right)}$$

o sea:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJL^2}\right)} \quad \text{----- (D.20)}$$

que es la misma ecuación obtenida con anterioridad, (ecuación D.17), para valuar el MOMENTO CRITICO.

CAPITULO IV.- DIAGRAMAS DE INTERACCION

CAPITULO IV.- DIAGRAMAS DE INTERACCION.

IV.1.- CONCEPTOS DE INTERACCION.

El objeto fundamental de este capítulo es poder determinar la resistencia de un elemento de concreto reforzado o de acero, sujeto a la acción combinada de carga axial de compresión y momento flexionante (flexocompresión). Consideraremos en este capítulo sólo elementos cortos, en los que los efectos de esbeltez pueden despreciarse.

Para abordar el problema, se puede afirmar que la carga axial de compresión P , y el momento flexionante, M , guardan una estrecha relación que se podría definir como la excentricidad, e , de la carga.

En la figura 4-1a se muestra la sección transversal de un elemento bajo la acción de P y M , y en la figura 4-1b, se muestra un sistema equivalente en el que la excentricidad vale $e = M/P$.

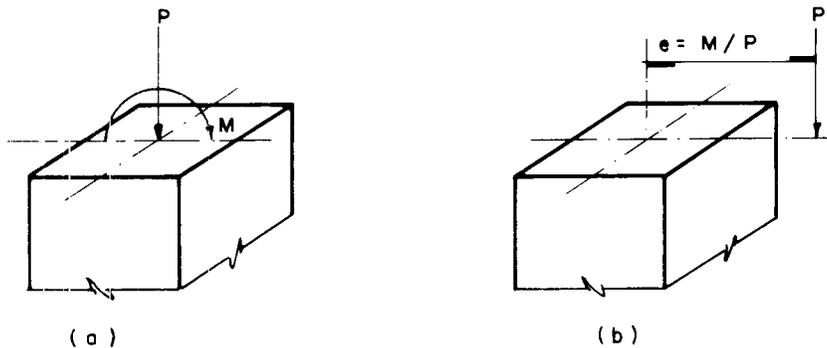


Fig. 4 - 1.- ELEMENTO SUJETO A FLEXOCOMPRESION

Cuando en una estructura, P y M varían en la misma proporción en una sección transversal dada, la excentricidad, e , permanece constante. Bajo estas condiciones, para una excentricidad constante, e , si hacemos variar P en forma progresiva, uniforme y sin impacto, partiendo desde $P=0$, el valor de M varía en proporción directa a la variación de P , o sea:

$$M = Pe \quad \text{--- (4.1)}$$

Esta igualdad representa la ecuación de una recta en la que M es función de P , y " e " es la pendiente de esa recta. En la figura 4-2 se muestra la gráfica de la ecuación (4.1) para una excentricidad e , y para una excentricidad e_2 mayor que e_1 .

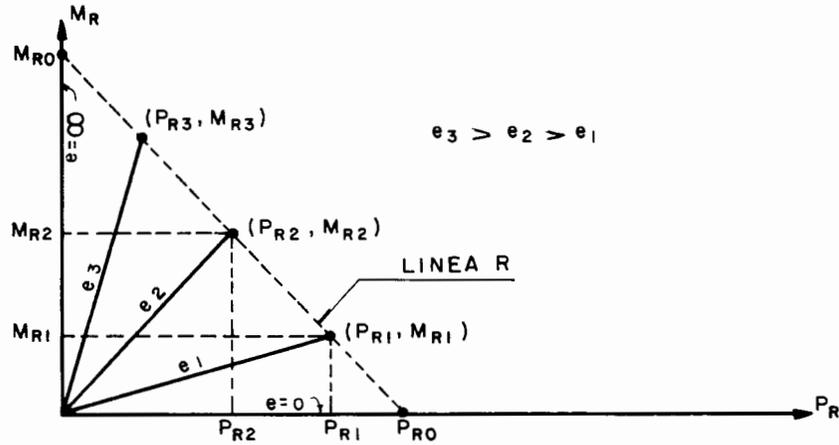


Fig 4 - 2.- PRINCIPIOS DEL DIAGRAMA DE INTERACCION

En esta figura se observa que el límite de cada recta lo representa la resistencia del material, es decir, cuando se presenta la falla del material, y los términos P y M se expresan como P_R y M_R respectivamente.

Análogamente, podríamos escoger una serie indefinida de excentricidades, para las cuales obtendremos diferentes combinaciones de P_R y M_R , desde una excentricidad $e = 0$ en la que la resistencia está dada solamente por la carga axial P_{R0} , hasta una excentricidad tan grande que se requiere un valor muy pequeño de P para llegar a la resistencia por flexión expresada por M_{R0} en el eje de las ordenadas. La unión de los puntos (P_{R1}, M_{R1}) , (P_{R2}, M_{R2}) define a la línea R de la figura 4-2 como la resistencia del material, para un número infinito de combinaciones de P y M , a la que llamaremos "diagrama de interacción".

Por lo tanto, se concluye que un elemento puede alcanzar su resistencia bajo innumerables combinaciones de carga axial y momento flexionante. Estas combinaciones varían desde una carga axial máxima de tensión o compresión, y un momento nulo, hasta un momento en combinación con una carga axial nula.

Podríamos definir entonces al "diagrama de interacción" como el lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante con las que un elemento puede alcanzar un estado de esfuerzos determinado, que generalmente es su resistencia última.

DIAGRAMA DE INTERACCION EN EL INTERVALO ELASTICO.

Consideremos un material de comportamiento elasto-plástico como el mostrado en la figura 4-3, en la que se observa que tiene el mismo comportamiento a compresión y a tensión.

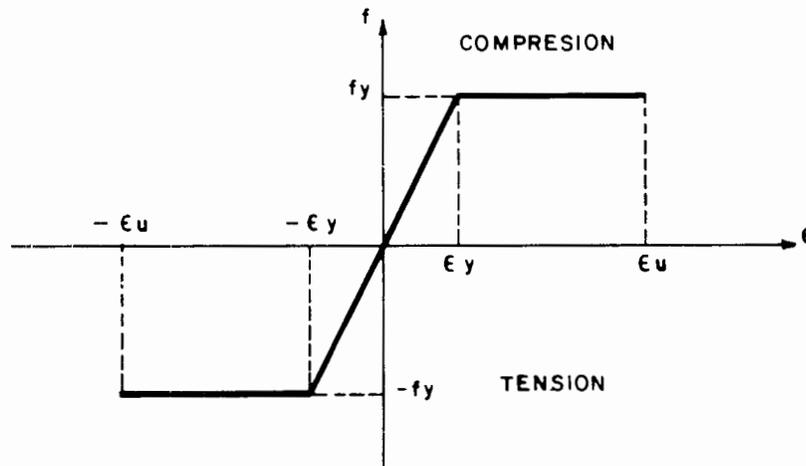


Fig. 4-3. DIAGRAMA ESFUERZO - DEFORMACION DE UN MATERIAL ELASTO-PLASTICO

Para determinar el diagrama de interacción de la sección rectangular de la fig. (4.4a) en el intervalo elástico, vamos a establecer la condición de que el esfuerzo máximo producido no exceda el límite de proporcionalidad - que en este caso es el esfuerzo de fluencia f_y , fig. (4.4d)

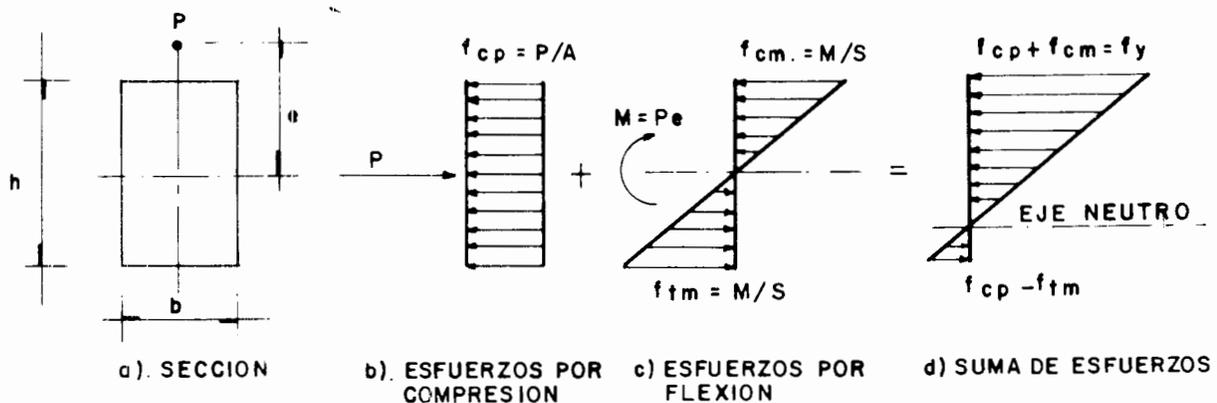


Fig. 4.4.- SECCION RECTANGULAR SUJETA A COMPRESION AXIAL Y FLEXION.

Para una sección rectangular sujeta a compresión axial y flexión en un sólo plano, el esfuerzo máximo se obtiene a partir de la fórmula de la ecuación, o sea:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M}{S} \quad \text{--- (4.2)}$$

donde A y S son el área y el módulo de sección, de la sección transversal, en el plano de flexión.

Si sólo actuara la carga axial P (fig. 4.5), el esfuerzo máximo se obtiene haciendo M=0 en la ecuación (4.2), es decir:

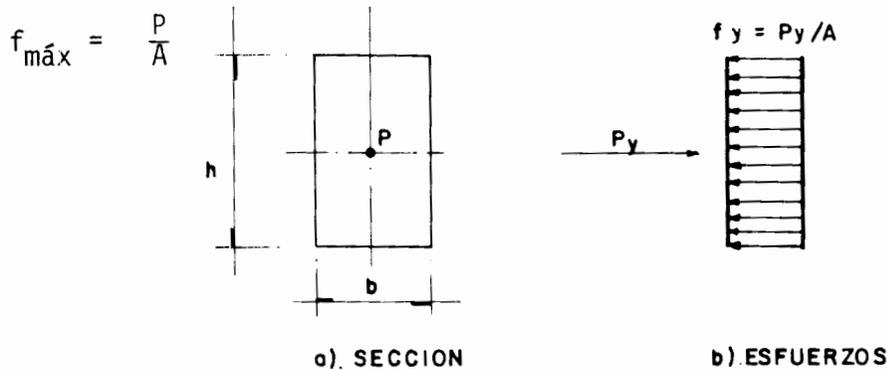


Fig. 4.5.- SECCION RECTANGULAR SUJETA A COMPRESION AXIAL.

pero como $f_{\text{máx}} = f_y$, despejando P tenemos $P = f_y A$. A este valor de P le llamaremos P_y por ser el valor de la carga axial que produce el esfuerzo de fluencia, de este modo:

$$P_y = f_y A \quad \text{--- (4.3)}$$

Si sólo actuara el momento flexionante M (fig. 4.6), el esfuerzo máximo se obtiene de la ecuación (4.2) haciendo P = 0:

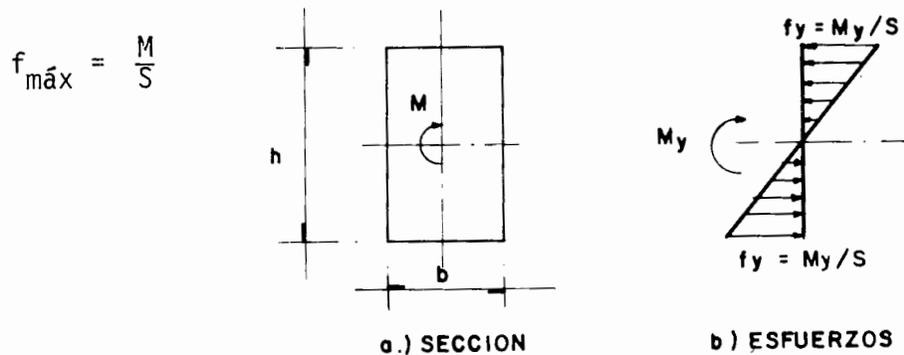


Fig. 4.6.- SECCION RECTANGULAR SUJETA A FLEXION.

Análogamente, si $f_{m\acute{a}x} = f_y$, $M = f_y S$. A este valor de M le llamaremos M_y - por ser el momento que produce un esfuerzo máximo igual al de fluencia:

$$M_y = f_y S \quad \text{-----} \quad (4.4)$$

Si dividimos ambos miembros de la ecuación (4.2) entre $f_y = f_{m\acute{a}x}$, tenemos:

$$1 = \frac{P}{f_y A} + \frac{M}{f_y S}$$

Llevando a esta expresión las igualdades (4.3) y (4.4), y ordenando los términos, obtenemos:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad \text{-----} \quad (4.5)$$

La igualdad (4.5) es la ecuación de una recta que representa, en la figura 4.7b, el diagrama de interacción para esfuerzos máximos de compresión en la fibra de la sección más alejada del eje neutro.

El diagrama de interacción para efectos de tensión axial y flexión, se obtiene en forma análoga invirtiendo el signo de P a $-P$ desde la ecuación (4.2), lo que conduce a una ecuación similar a la (4.5), que resulta:

$$-\frac{P}{P_y} + \frac{M}{M_y} = 1 \quad \text{-----} \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) representa, en el plano cartesiano de ejes (M,P) en la figura 4-7a, el diagrama de interacción para esfuerzos máximos de tensión que no excedan f_y , en la fibra de la sección más alejada del eje neutro.

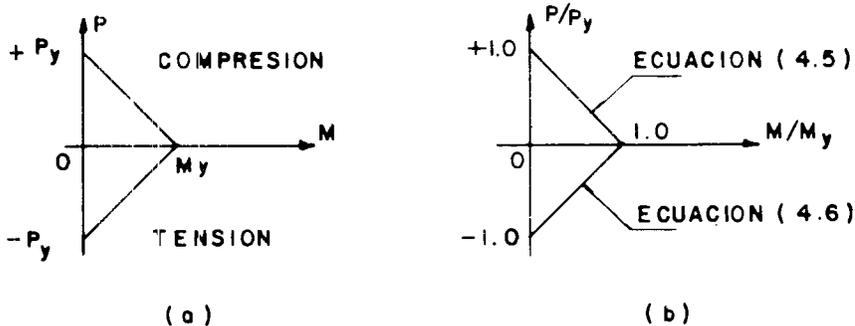


Fig. 4.7.- DIAGRAMA DE INTERACCION EN EL RANGO ELASTICO.

IV.2.- FLEXOTENSION Y FLEXOCOMPRESION EN EL INTERVALO INELASTICO. DIAGRAMA DE INTERACCION.

Consideremos una sección rectangular de un material elasto-plástico de comportamiento mostrado en la figura 4-3, sujeto a $P=0$ y a $M \neq 0$, de tal modo que la sección está totalmente plastificada, como se muestra en la figura 4.8.

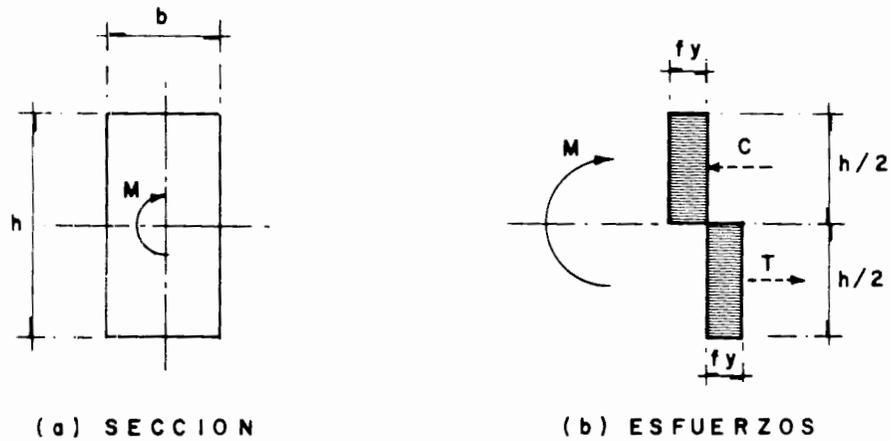


Fig. 4.8 - SECCION RECTANGULAR PLASTIFICADA, SUJETA SOLO A FLEXION.

Por equilibrio de fuerzas horizontales, se tiene:

$$C = T = \frac{bh}{2} f_y$$

y por equilibrio de momentos respecto al eje principal de la sección:

$$M = C \frac{h}{2} = T \frac{h}{2}$$

llevando a esta ecuación el valor de C o T :

$$M = \frac{bh^2}{4} f_y$$

este valor de M es el que sin actuar P , origina la plastificación de la sección, por lo que lo llamaremos M_p :

$$M_p = \frac{bh^2}{4} f_y \quad \text{----- (4.7)}$$

La relación que existe entre este valor (M_p) y el momento M_y para el cual se inicia la fluencia del material en la fibra más alejada del eje neutro, se obtiene dividiendo la ecuación (4.7) miembro a miembro entre la ecuación (4.4):

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{bh^2 f_y}{4 f_y S}$$

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{bh^2}{4S}$$

pero, el valor del módulo de sección, S , para una sección rectangular es:

$$S = \frac{bh^2}{6}$$

por lo tanto

$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{6 bh^2}{4 bh^2}$$

de donde

$$M_p = \frac{3}{2} M_y \quad \text{----- (4.8)}$$

La ecuación (4.8) significa que el momento flexionante que produce la plastificación total de la sección vale una vez y media el momento para el cual se inicia la fluencia de la sección.

Consideremos ahora la sección rectangular de la figura 4-8a sujeta a flexo-compresión de modo tal que la sección se encuentra completamente plastificada (fig. 4.9).

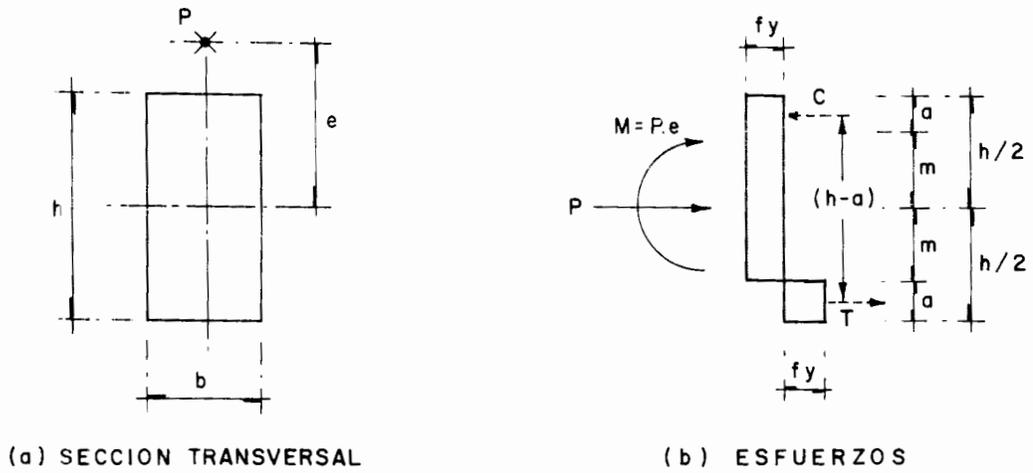


Fig. 4.9 - SECCION RECTANGULAR PLASTIFICADA, SUJETA A FLEXOCOMPRESION

De la figura 4-9b por equilibrio de fuerzas horizontales:

$$P = C - T$$

en donde

$$C = (a + 2m)bf_y$$

$$T = abf_y$$

por lo tanto

$$P = (a + 2m)bf_y - abf_y$$

$$P = 2m bf_y$$

de donde

$$m = \frac{P}{2bf_y} \quad \text{----- (4.9)}$$

En la figura 4-9b, por equilibrio de momentos:

$$M = C (h-a) = T (h-a)$$

$$M = abf_y (h-a) \quad \text{-----} \quad (4.10)$$

tomando en cuenta que:

$$a = \frac{h}{2} - m$$

y sustituyendo en (4.10):

$$M = \left(\frac{h}{2} - m \right) bf_y \left[h - \left(\frac{h}{2} - m \right) \right]$$

$$M = \left(\frac{h}{2} - m \right) bf_y \left(\frac{h}{2} + m \right)$$

$$M = bf_y [(h/2)^2 - m^2]$$

$$M = \frac{bf_y h^2}{4} - bf_y m^2$$

multiplicando y dividiendo por 6 el primer término del segundo miembro tenemos:

$$M = \frac{6 bf_y h^2}{6 \times 4} - bf_y m^2$$

$$M = \frac{3}{2} \frac{bh^2}{6} f_y - bf_y m^2$$

pero $S = \frac{bh^2}{6}$ por lo tanto

$$M = \frac{3}{2} S f_y - bf_y m^2$$

por la ecuación (4.4)

$$M = \frac{3}{2} M_y - bf_y m^2$$

sustituyendo en esta ecuación el valor de m por el dado en la ecuación --- (4.9) tenemos

$$M = \frac{3}{2} M_y - \frac{b f_y p^2}{4 b^2 f_y^2}$$

$$M = \frac{3}{2} M_y - \frac{p^2}{4 b f_y} \quad \text{----- (4.11)}$$

dividamos ahora cada miembro de la ecuación (4.11) entre M_p , recordando - que por la ecuación (4.7) $M_p = bh^2 f_y / 4$ y por la ecuación (4.8) $M_p = 3M_y / 2$:

$$\frac{M}{\frac{3}{2} M_y} = 1 - \frac{4 p^2}{4 b^2 f_y^2 h^2}$$

simplificando:

$$\frac{M}{\frac{3}{2} M_y} = 1 - \frac{p^2}{f_y^2 A^2}$$

teniendo en cuenta la ecuación (4.3), en que $P_y = f_y A$, y ordenando obtenemos:

$$\frac{M}{\frac{3}{2} M_y} + \left(\frac{P}{P_y}\right)^2 = 1 \quad \text{----- (4.12)}$$

La igualdad (4.12) es la ecuación del diagrama de interacción de la sección supuesta; tiene la forma $x/x_o + (y/y_o)^2 = 1$, que representa una parábola en el plano cartesiano (x,y), cuyo eje de simetría es el eje x, y su vértice $(x_o, 0)$; (fig. 4.10). Vemos que si $y = 0$, $x = x_o$; si $x = 0$, $y = \pm y_o$.

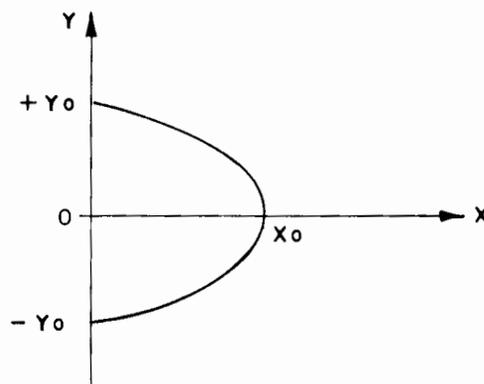


Fig. 4.10

Por lo tanto, la ecuación (4.12) representa una parábola en el plano cartesiano de ejes (M,P) , cuyo eje de simetría es M y su vértice $(3/2 M_y, 0)$; si $P = 0$, $M = 3/2 M_y$ y si $M = 0$, $P = \pm P_y$; (fig. 4.11).

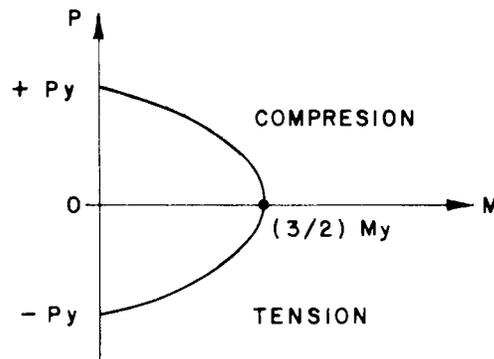


Fig. 4.11.- DIAGRAMA DE INTERACCION DE UNA SECCION RECTANGULAR TOTALMENTE PLASTIFICADA.

La parte del diagrama en el primer cuadrante de la figura 4.11 corresponde a puntos de flexocompresión, los puntos del cuarto cuadrante son de -- flexotensión.

Si el diagrama de interacción cuya ecuación es (4.12), se traza en el plano cartesiano de ejes $(M/M_y, P/P_y)$, resulta una parábola con eje de simetría M/M_y y vértice $(3/2, 0)$. Cuando $P = 0$, se tiene $M/M_y = 3/2$; cuando $M = 0$, se obtiene $P/P_y = \pm 1$. Como vemos, los puntos de este diagrama -- carecen de dimensión, lo cual conduce a mayor facilidad en su aplicación - (fig. 4.12).

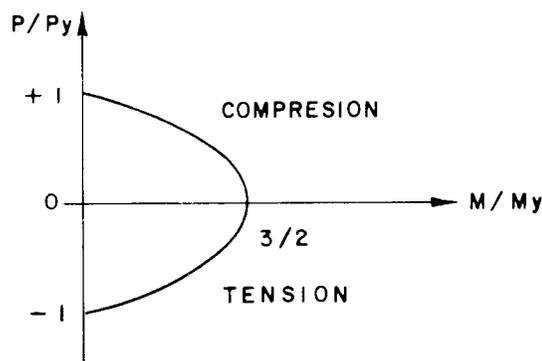


Fig. 4.12.- DIAGRAMA DE INTERACCION ADIMENSIONAL, DE UNA SECCION RECTANGULAR TOTALMENTE PLASTIFICADA.

IV.3.- FLEXOCOMPRESION EN ELEMENTOS CORTOS DE CONCRETO REFORZADO.

En este artículo se presentan los procedimientos para determinar la resistencia de elementos cortos de concreto reforzado sujetos a flexocompresión, en los que no tenemos problemas de esbeltez. Para tal efecto nos apoyaremos en las hipótesis que marca el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (Ref. 4.1) que a continuación se enumeran.

HIPOTESIS PARA LA OBTENCION DE RESISTENCIAS DE DISEÑO.-

- a. La distribución de deformaciones unitarias longitudinales en la sección transversal de un elemento es plana.
- b. Existe adherencia entre el concreto y el acero de tal manera que la deformación unitaria del acero es igual a la del concreto adyacente.
- c. El concreto no resiste esfuerzos de tensión.
- d. La deformación unitaria del concreto en compresión cuando se alcanza la resistencia de la sección es 0.003.
- e. La distribución de esfuerzos de compresión en el concreto cuando se alcanza la resistencia es uniforme (f''_c) en una zona cuya profundidad es 0.8 veces la del eje neutro, definido éste de acuerdo con las hipótesis anteriores. El esfuerzo uniforme f''_c se tomará como:

$$f''_c = 0.85 f^*_c \quad \text{si} \quad f^*_c \leq 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f''_c = \left(1.05 - \frac{f^*_c}{1250}\right) f^*_c \quad \text{si} \quad f^*_c > 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{en que } f^*_c = 0.8 f'_c$$

- f. El diagrama esfuerzo-deformación unitaria del acero de refuerzo ordinario, sea o no torcido en frío, puede idealizarse como se indica en la figura 4.13 en la que E_s es el módulo de elasticidad del ace

ro.

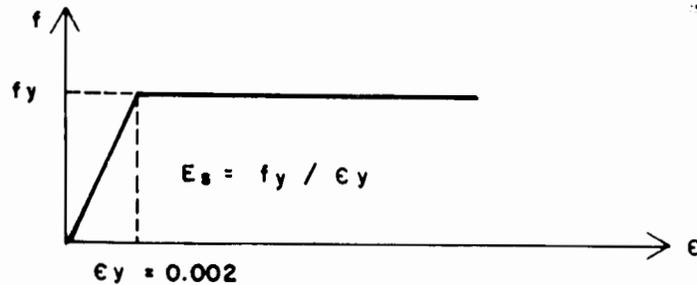


FIG. 4.13.- DIAGRAMA ESFUERZO - DEFORMACION UNITARIA DEL ACERO DE REFUERZO ORDINARIO.

Para determinar la resistencia de diseño (P_R , M_R), el mismo Reglamento especifica que la resistencia directa obtenida con estas hipótesis, deberá reducirse aplicando un "factor de reducción de resistencia", F_R . Los elementos mecánicos últimos (P_u , M_u) que resultan de multiplicar los elementos mecánicos obtenidos de un análisis estructural por su correspondiente factor de carga, no deben exceder los valores de las resistencias de diseño, o sea, $P_u \leq P_R$ y $M_u \leq M_R$.

En flexocompresión, F_R se tomará igual a 0.85 cuando el elemento falle en tensión, y si la falla es en compresión, F_R se tomará igual a 0.75.

Se dice que la falla es en tensión cuando el acero sujeto a tensión fluye antes de que el concreto alcance su deformación útil ($\epsilon_{cu} = 0.003$), y la falla es en compresión cuando el concreto sujeto a compresión alcanza su deformación útil antes de que el acero en tensión alcance la deformación de fluencia. Cuando la deformación útil del concreto se presenta simultáneamente con la deformación de fluencia del acero, se dice que la falla ocurre en una condición balanceada.

La figura 4.14 muestra un diagrama de interacción típico para una sección rectangular de concreto reforzado con acero simétrico, y sujeta a carga axial y flexión en un sólo plano.

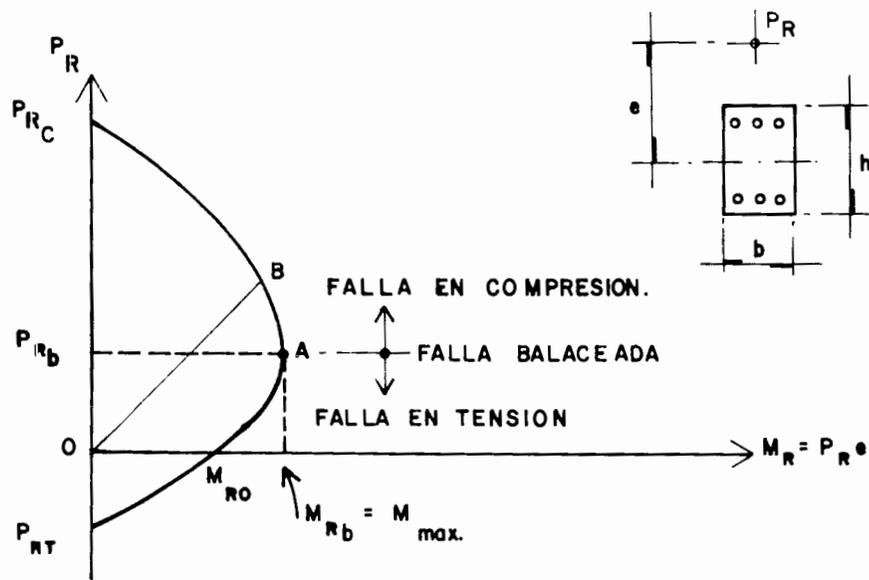


FIG. 4.14.- DIAGRAMA DE INTERACCION TÍPICO.

Cualquier punto sobre la curva del diagrama, representa una combinación de valores de carga axial y momento flexionante, con los cuales la sección alcanza su resistencia.

Obsérvese que, si la sección estuviera sujeta únicamente a carga axial de compresión y momento flexionante nulo, la carga máxima que podría aplicarse, es decir, su resistencia, corresponde al punto P_{RC} ; de la misma manera, su resistencia a carga axial de tensión, queda representada por P_{RT} .

En el diagrama, P_{RC} resulta mayor que P_{RT} , debido a que el concreto no aporta capacidad de tensión.

Si la sección estuviera sujeta sólo a momento flexionante, el valor que ésta podría resistir, sería el representado por M_{RO} ; sin embargo, el máximo momento flexionante que la sección es capaz de resistir, corresponde a una carga axial no nula.

El punto A, definido por M_{Rb} y P_{Rb} , es de singular importancia, ya que representa la condición de falla balanceada de la sección. Cualquier combinación de P y M , que defina un punto en el diagrama por arriba del punto A, -

producirá falla en compresión y, en caso contrario, falla en tensión.

En la generalidad de los casos, el momento flexionante máximo que una sección de concreto reforzado, sujeta a flexocompresión, resiste, es el correspondiente a la falla balanceada, esto es, en general $M_{\text{máx}} = M_{\text{Rb}}$.

Cuando se incrementa la carga externa con una excentricidad constante, el momento flexionante aumenta en proporción directa al incremento de la carga ya que $M = Pe$, y la historia de carga queda representada por la recta OB, - cuya pendiente resulta ser el cociente:

$$P/M = 1/e.$$

IV.4.- DETERMINACION DE DIAGRAMAS DE INTERACCION DE SECCIONES DE CONCRETO - REFORZADO, SUJETAS A FLEXION Y CARGA AXIAL.

Para conocer la resistencia de una sección cualquiera, bajo la acción combinada de carga axial P y momento flexionante M , uno de los métodos más prácticos es el uso de su diagrama de interacción en condiciones de resistencia, cuyo principal empleo es cuando la sección se ve sujeta a diferentes condiciones de carga, o sea, diferentes combinaciones de P y M .

La determinación del diagrama de interacción consiste en determinar una serie de puntos en un sistema de ejes cartesianos (M,P) , cada uno de los cuales corresponde a una condición de resistencia de la sección y se obtiene - con base en las hipótesis señaladas al principio de este capítulo y con el siguiente procedimiento general:

1) Se supone la profundidad del eje neutro que, junto con la deformación -- útil del concreto ($\epsilon_{cu} = 0.003$), fija la distribución de deformaciones unitarias, que deber ser medidas siempre paralelas al eje neutro; así, la deformación unitaria de cada varilla longitudinal se determina mediante triángulos semejantes, o interpolación lineal (hipótesis a).

2) Obtenidas las deformaciones en cada varilla, el esfuerzo que se genera - en cada una de ellas vale $f_s = \epsilon_s E_s$ sin que éste exceda el valor de fluen-

cia, es decir, $f_s \leq f_y$ (hipótesis f). La fuerza que se desarrolla en cada varilla se obtiene multiplicando el esfuerzo generado por el área de acero correspondiente, o sea, $F_s = f_s A_s$.

3) La fuerza de compresión que el concreto es capaz de resistir, de acuerdo con la hipótesis e, vale $C_c = abf_c''$, en donde $a = 0.8C$, b es el ancho de la sección cuando ésta es rectangular y c es la profundidad supuesta del eje neutro. Esta expresión, en forma gráfica, se explica en la figura 4.15

4) La carga axial resistente, P_R , de la sección, se obtiene como la suma de todas las fuerzas internas en el acero y en el concreto, afectada por el factor de reducción de resistencia, F_R , correspondiente. Análogamente, el momento flexionante resistente, M_R , de la sección, se obtiene multiplicando por F_R , la suma de momentos producidos por cada fuerza respecto de un eje de la sección.

Este procedimiento general se expresa en forma gráfica en la figura 4.15

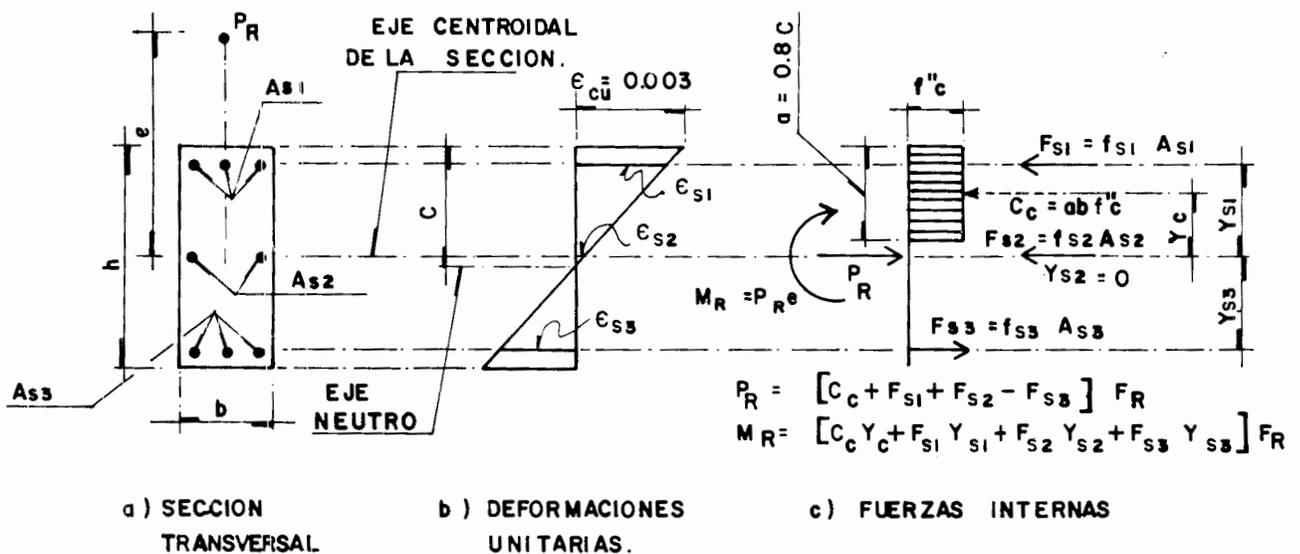


FIG. 4.15 SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO REFORZADO SUJETA A FLEXOCOMPRESION EN UN SOLO PLANO.

Un diagrama de interacción, que tiene la forma de la fig. 4.14, se puede definir en forma aproximada calculando los siguientes puntos:

a).- El punto P_{RC} , que corresponde a la carga axial de compresión pura, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias de compresión uniforme, esto es:

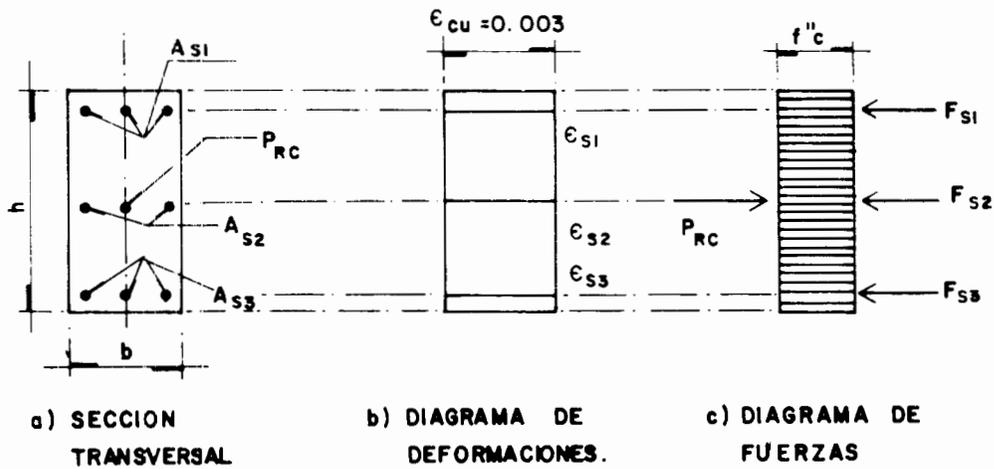


FIG. 4.16.- OBTENCION DEL PUNTO P_{RC} .

$$P_{RC} = (C_C + F_{S1} + F_{S2} + F_{S3}) (F_R)$$

en que

$$C_C = bhf''_c$$

$$F_{S1} = A_{S1} f_y$$

$$F_{S2} = A_{S2} f_y$$

$$F_{S3} = A_{S3} f_y$$

$$F_R = 0.75 \text{ (Falla por compresión)}$$

luego

$$P_{RC} = (bh f''_c)(F_R) + (A_{S1} f_y + A_{S2} f_y + A_{S3} f_y) (F_R)$$

$$P_{RC} = (bh f''_c) (F_R) + (A_{S1} + A_{S2} + A_{S3}) f_y (F_R)$$

si hacemos

$$bh = A_g$$

$$A_{S1} + A_{S2} + A_{S3} = A_s$$

queda

$$P_{RC} = (A_g f''_c + A_s f_y) F_R$$

b).- El punto M_{R0} , que corresponde a un momento flexionante con carga axial nula, $P=0$. Este se obtiene considerando las condiciones de la figura 4.17:

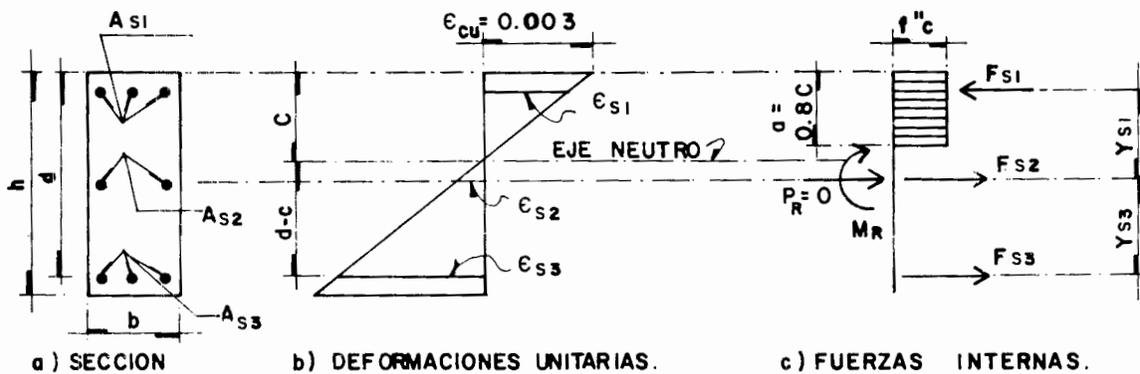


FIG. 4.17: SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO REFORZADO SUJETA SOLO A FLEXION.

Para obtener el punto $(P=0, M)$ se debe determinar el esfuerzo en cada lecho de acero en función de la profundidad del eje neutro, c . Por ejemplo, para el lecho de A_{S3} , la deformación ϵ_{S3} se puede calcular, por triángulos semejantes, de la figura 4.17b:

$$\frac{\epsilon_{S3}}{d-c} = \frac{0.003}{c}$$

$$\epsilon_{s_3} = \frac{0.003 (d-c)}{c}$$

pero, como

$$f_{s_3} = \epsilon_{s_3} E_s \leq f_y$$

$$f_{s_3} = \frac{0.003 E_s (d-c)}{c} \leq f_y$$

de manera que f_{s_3} lo podemos expresar como función de c ,

así:

$$f_{s_3} = \phi_3 (c)$$

análogamente:

$$f_{s_1} = \phi_1 (c)$$

$$f_{s_2} = \phi_2 (c)$$

La fuerza que toma cada lecho de acero será:

$$F_{s_1} = A_{s_1} f_{s_1} = A_{s_1} \phi_1 (c)$$

$$F_{s_2} = A_{s_2} \phi_2 (c)$$

$$F_{s_3} = A_{s_3} \phi_3 (c)$$

la fuerza de compresión que toma el concreto es:

$$C_c = abf_c''$$

o sea

$$C_c = 0.8 \text{ cbf}_c''$$

Por suma de fuerzas horizontales de la figura 4.17 c):

$$C_c + F_{s1} - F_{s2} - F_{s3} = 0$$

llevando a esta expresión los valores obtenidos de las fuerzas, llegamos a:

$$0.8 \text{ cbf}_c'' + A_{s1} \phi_1(c) - A_{s2} \phi_2(c) - A_{s3} \phi_3(c) = 0$$

de donde se despeja el valor de c .

Una vez conocido c , se pueden calcular los esfuerzos y la fuerza en el acero, así como la fuerza en el concreto y el valor del momento resistente -- M_{RO} será, de acuerdo con la figura 4.17 c):

$$M_{RO} = [F_{s1} Y_{s1} + F_{s2} Y_{s2} + F_{s3} Y_{s3} + 0.8 \text{ cbf}_c'' \left(\frac{h-0.8c}{2}\right)] F_R$$

c).- Obtención del punto A de la figura 4.14: Este punto corresponde a la falla balanceada, para lo cual se supone un estado de deformaciones unitarias definidas por la deformación útil del concreto, ϵ_{cu} , en la fibra extrema de compresión y por la deformación de fluencia del acero, ϵ_y , en el acero a tensión. En la figura 4.18 b se ilustra este estado de deformaciones.

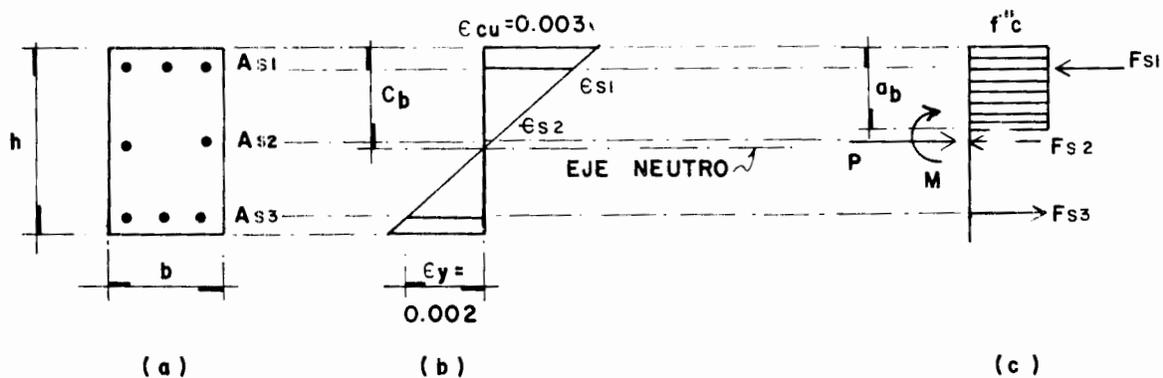


FIG. 4.18.- SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO REFORZADO EN CONDICION DE FALLA BALANCEADA.

d) Definición de un punto arbitrario entre los puntos P_{RC} y A.- Este se define suponiendo un valor de la profundidad del eje neutro, c , mayor que el obtenido en la condición de falla balanceada, c_b . A este punto corresponde falla de compresión.

e) Definición de un punto arbitrario entre los puntos M_{RO} y A.- Este se define suponiendo un valor de la profundidad del eje neutro, c , menor que el obtenido en la condición de falla balanceada, c_b , y mayor que el obtenido para el punto M_{RO} . A este punto corresponde falla de tensión.

f) Finalmente, el punto P_{RT} , que corresponde a la carga axial de tensión pura.

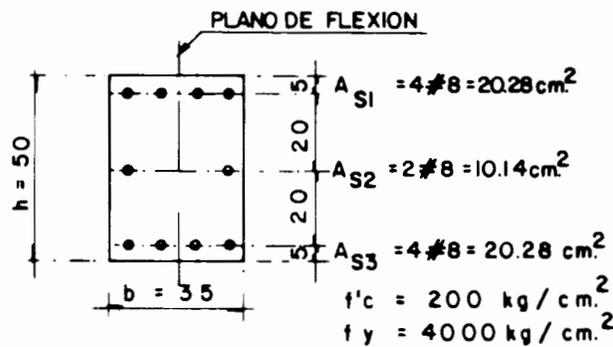
$$P_{RT} = (A_{S1} f_y + A_{S2} f_y + A_{S3} f_y) (F_R)$$

En este caso $F_R = 0.85$

Para ser más objetivo el procedimiento, se planteará el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4.1.- Determinación del diagrama de interacción para una columna corta de concreto reforzado de sección rectangular, sujeta a flexocompresión -- simple.

Datos:



Solución:

Obtención de los parámetros de resistencia

$$f_c^* = 0.8 f'_c$$

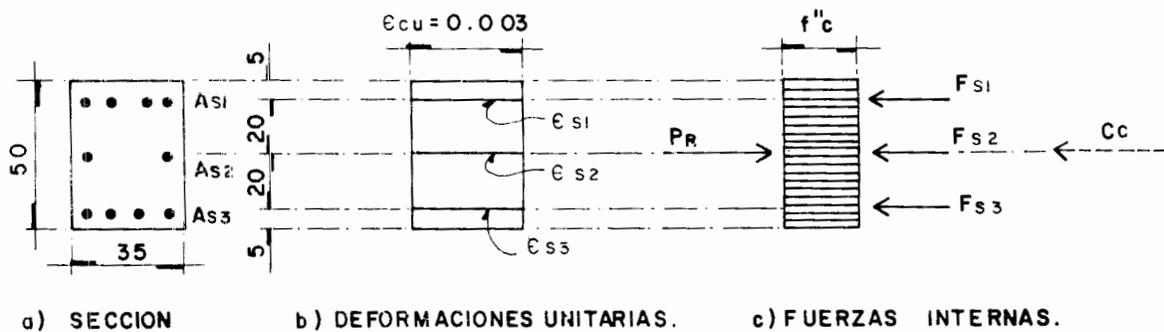
$$f_c^* = 0.8 (200) = 160 \text{ kg/cm}^2 < 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85 f_c^*$$

$$f_c'' = 0.85 (160) = 136 \text{ kg/cm}^2$$

Nota: Como consecuencia de la variación reglamentaria del factor de reducción F_R , al pasar de la zona de compresión a la de tensión, conviene trazar el diagrama para los elementos mecánicos divididos entre F_R , o sea $(M/F_R, P/F_R)$ como se muestra adelante:

a) Obtención del punto P_{RC} (Punto 1).



Por ser una sección sujeta sólo a carga axial de compresión, su resistencia está dada por la contribución del concreto y del acero, mediante la siguiente expresión:

$$P_{RC} = (A_g f_c'' + A_s f_y) F_R$$

En la que A_g es el área total de concreto, sin descontar el área ocupada por las varillas; así, despejando P_{RC} :

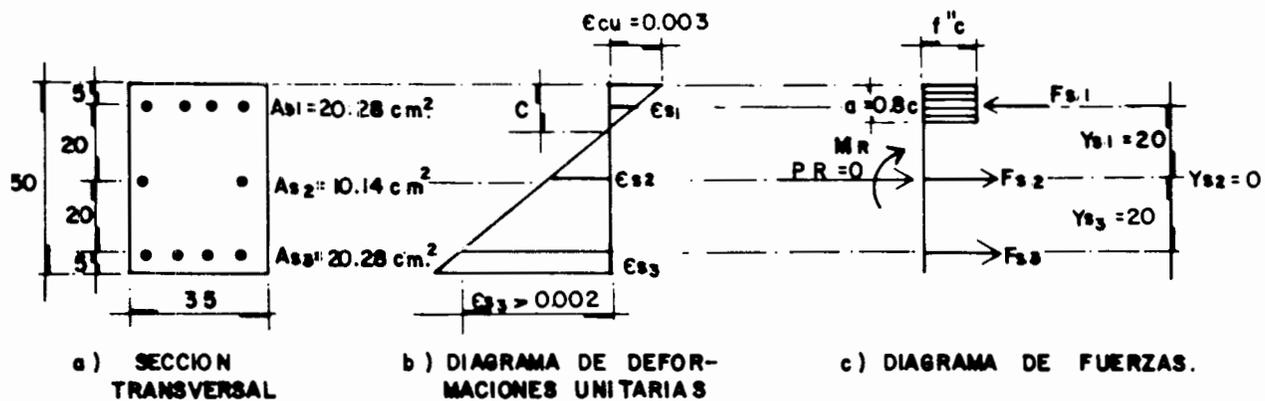
$$P_{RC} = (35 \times 50 \times 136 + 50.7 \times 4000) (F_R)$$

$$P_{RC} = (440,800) (F_R) \text{ Kg}$$

$$\frac{P_R}{F_R} = 440.80 \text{ Ton.}$$

b) Obtención del punto M_{R0} (punto 2), en el cual la carga axial es nula - - ($P_R = 0$).

Si Observamos la fig. 4.14 sabemos que este punto cae en la zona de falla en tensión, lo que nos hace pensar que el acero A_{S3} está fluyendo. Supongamos que, para el trazo del diagrama de deformaciones unitarias, el acero - A_{S2} también fluye; por lo tanto, tenemos:



Deformaciones unitarias (por triángulos semejantes):

$$\epsilon_{S1} = \frac{(c-5)(0.003)}{c}$$

$$\epsilon_{S2} = \frac{(25-c)(0.003)}{c}$$

$$\epsilon_{S3} = \frac{(45-c)(0.003)}{c}$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{S1} = \epsilon_{S1} E_S$$

$$f_{S1} = \frac{(c-5)(0.003) E_S}{c}$$

Como $E_S = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

$$f_{S1} = \frac{(c-5)(0.003)(2 \times 10^6)}{c}$$

$$f_{s1} = 6000 - \frac{30000}{c}$$

Como supusimos que $\epsilon_{s2} > \epsilon_y$ y $\epsilon_{s3} > \epsilon_y$, el acero A_{s2} y A_{s3} fluye, por tanto:

$$f_{s2} = f_{s3} = f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_{s1} = f_{s1} A_{s1} = \left(6000 - \frac{30000}{c}\right) 20.28$$

$$F_{s1} = 121680 - \frac{608400}{c}$$

$$F_{s2} = f_{s2} A_{s2} = 4000 \times 10.14 = 40560 \text{ kg}$$

$$F_{s3} = f_{s3} A_{s3} = 4000 \times 20.28 = 81120 \text{ kg}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = abf_c''$$

$$\text{pero } a = 0.8c$$

por tanto

$$C_c = 0.8cbf_c''$$

Llevando a esta igualdad los valores de b y f_c''

$$C_c = 0.8c (35) (136) = (3808)c \text{ kg}$$

Como sabemos que la carga axial es nula podemos escribir que la suma de fuerzas horizontales vale:

$$C_c + F_{s1} - F_{s2} - F_{s3} = 0$$

$$3808 c + 121680 - \frac{608400}{c} - 40560 - 81120 = 0$$

Simplificando y ordenando:

$$3808 c - \frac{608400}{c} = 0$$

de donde:

$$3808 c^2 - 608400 = 0$$

despejando c:

$$c = \sqrt{\frac{608400}{3808}} = 12.64 \text{ cm}$$

verifiquemos ahora que $\epsilon_{s_1} < \epsilon_y$, $\epsilon_{s_2} > \epsilon_y$ y $\epsilon_{s_3} > \epsilon_y$:

$$f_{s_1} = \frac{(12.64-5)(0.003)}{12.64} = 0.00181 < \epsilon_y = 0.002$$

$$\epsilon_{s_2} = \frac{(25-12.64)(0.003)}{12.64} = 0.00293 > \epsilon_y = 0.002$$

$$\epsilon_{s_3} = \frac{(45-12.64)(0.003)}{12.64} = 0.00768 > \epsilon_y = 0.002$$

Como si se cumplen las suposiciones hechas, el valor de $c=12.64$ cm es correcto. Llevando a las igualdades correspondientes el valor de c, obtenemos:

$$f_{s_1} = 6000 - \frac{30000}{12.64} = 3626.6 \text{ kg/cm}^2 < f_y$$

$$F_{s_1} = 121680 - \frac{608400}{12.64} = 73547 \text{ kg}$$

$$a = (0.8)(12.64) = 10.11 \text{ cm}$$

$$C_c = 3808(12.64) = 48133 \text{ kg}$$

Cálculo de P_R/F_R

$$P_R = (C_c + F_{s_1} - F_{s_2} - F_{s_3})F_R$$

$$\frac{P_R}{F_R} = 48133 + 73547 - 40560 - 81120 = 0.0 \text{ kg}$$

se comprueba que $P_R = 0$.

Cálculo de M_{R0} :

$$M_{R0} = (F_{S1} y_{S1} + F_{S2} y_{S2} + F_{S3} y_{S3} + C_c y_c) F_R$$

donde:

$$y_{S1} = 20 \text{ cm}, y_{S2} = 0, y_{S3} = 20 \text{ cm y } y_c = h/2 - a/2$$

$$y_c = \frac{50}{2} - \frac{10.11}{2} = 19.95 \text{ cm}$$

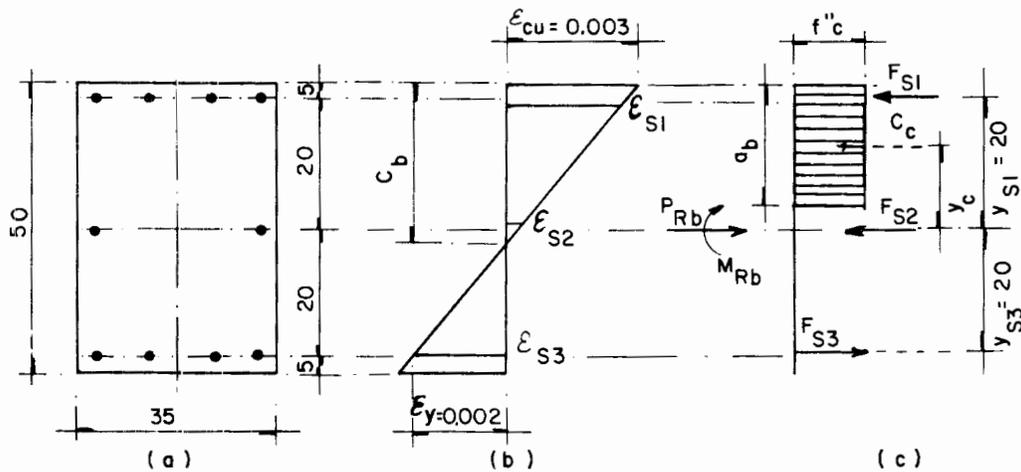
despejando M_{R0}/F_R :

$$\frac{M_{R0}}{F_R} = 73547 \times 20 + 40560 \times 0 + 81120 \times 20 + 48133 \times 19.95 = 40.54 \times 10^5 \text{ kg-cm.}$$

$$\frac{M_{R0}}{F_R} = 40.54 \text{ ton - m}$$

c) Obtención del punto de falla balanceada (punto 3): (M_{Rb}, P_{Rb}) .

La falla balanceada implica suponer que la deformación de fluencia del acero, $\epsilon_y = 0.002$, se presenta simultáneamente con la deformación útil del concreto, $\epsilon_{cu} = 0.003$



Por triángulos semejantes:

$$c_b = \frac{(45) (0.003)}{0.005} = 27 \text{ cm}$$

$$\epsilon_{s_1} = \frac{(27-5) (0.003)}{27} = 0.0024 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s_2} = \frac{(27-25) (0.003)}{27} = 0.000222$$

$$\epsilon_{s_3} = \epsilon_y = 0.002$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s_1} = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s_2} = 0.000222 \times 2 \times 10^6 = 444 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s_3} = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_{s_1} = 4000 \times 20.28 = 81120 \text{ kg} = 81.12 \text{ Ton}$$

$$F_{s_2} = 444 \times 10.14 = 4502 \text{ kg} = 4.50 \text{ Ton}$$

$$F_{s_3} = 4000 \times 20.28 = 81120 \text{ kg} = 81.12 \text{ Ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$a = 0.8 \times 27 = 21.6 \text{ cm}$$

$$C_c = 21.6 \times 35 \times 136 = 102816 \text{ kg} = 102.82 \text{ Ton}$$

Cálculo de P_R :

$$P_R = F_R (F_{s_1} + F_{s_2} - F_{s_3} + C_c)$$

despejando P_R/F_R :

$$\frac{P_R}{F_R} = 81.12 + 4.50 - 81.12 + 102.82 = 107.32 \text{ Ton}$$

Cálculo de M_R :

$$M_R = F_R (F_{s_1} y_{s_1} + F_{s_2} y_{s_2} + F_{s_3} y_{s_3} + C_c y_c)$$

en que:

$$y_c = \frac{h}{2} - \frac{a}{2} = \frac{50}{2} - \frac{21.6}{2} = 14.2 \text{ cm}$$

despejando M_R/F_R :

$$\frac{M_R}{F_R} = 81.12 \times 0.20 + 4.50 \times 0 + 81.12 \times 0.20 + 102.82 \times 0.142 = 47.05 \text{ Ton-m}$$

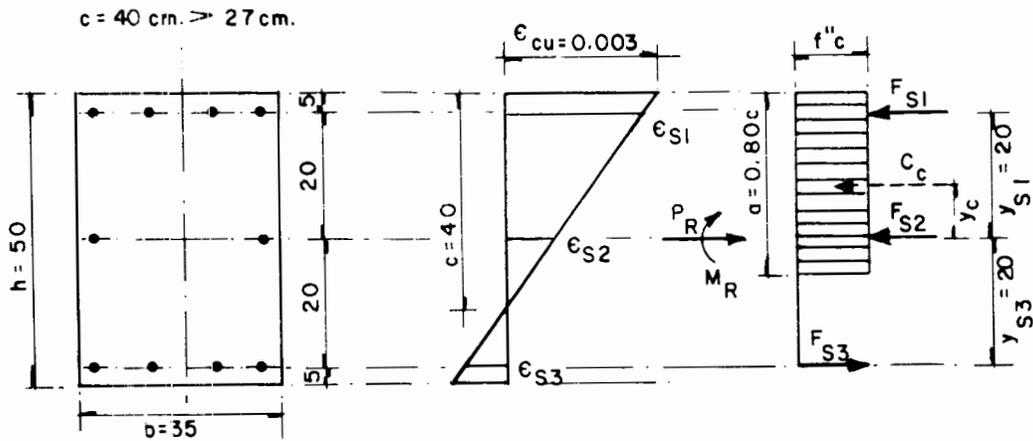
por lo tanto, para el punto 3:

$$\frac{P_R}{F_R} = 107.32 \text{ ton}$$

$$\frac{M_R}{F_R} = 47.05 \text{ Ton - m}$$

d) Obtención de un punto arbitrario entre los puntos 1 y 3 (punto 4).

Para obtener este punto, que cae en la zona de falla en compresión, supondremos un valor de c , mayor que el valor correspondiente al de la falla balanceada: $c = 40 \text{ cm} > 27 \text{ cm}$



Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{S1} = \frac{(40-5)(0.003)}{40} = 0.002625 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{S2} = \frac{(40-25)(0.003)}{40} = 0.001125$$

$$\epsilon_{S3} = \frac{(45-40)(0.003)}{40} = 0.000375$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{S1} = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{S2} = 0.001125 \times 2 \times 10^6 = 2250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{S3} = 0.000375 \times 2 \times 10^6 = 750 \text{ Kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_{S1} = 4000 \times 20.28 = 81120 \text{ kg} = 81.12 \text{ Ton}$$

$$F_{S2} = 2250 \times 10.14 = 22815 \text{ kg} = 22.82 \text{ Ton}$$

$$F_{S3} = 750 \times 20.28 = 15210 \text{ kg} = 15.21 \text{ Ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$a = 0.8 \times 40 = 32 \text{ cm}$$

$$C_c = abf_c'' = 32 \times 35 \times 136 = 152320 \text{ kg} = 152.32 \text{ Ton.}$$

Cálculo de P_R :

$$\frac{P_R}{F_R} = F_{S1} + F_{S2} - F_{S3} + C_c = 81.12 + 22.82 - 15.21 + 152.32 = 241.05 \text{ Ton}$$

Cálculo de M_R :

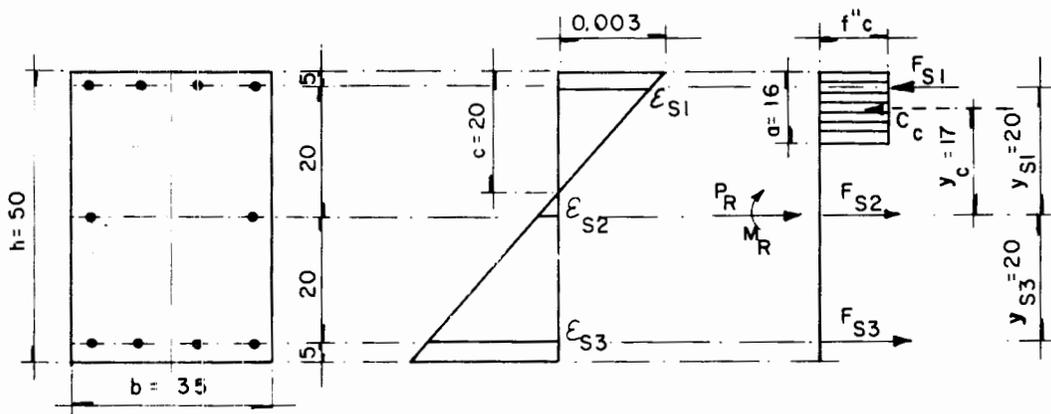
$$y_c = \frac{h}{2} - \frac{a}{2} = \frac{50}{2} - \frac{32}{2} = 9 \text{ cm}$$

$$\frac{M_R}{F_R} = F_{S1} y_{S1} + F_{S2} y_{S2} + F_{S3} y_{S3} + C_c y_c$$

$$\frac{M_R}{F_R} = 81.12 \times 0.20 + 22.82 \times 0 + 15.21 \times 0.20 + 152.32 \times 0.09 = 32.97 \text{ Ton-m}$$

e) Obtención de un punto arbitrario entre los puntos 2 y 3 (punto 5).

Para esto supondremos un valor de la profundidad del eje neutro comprendido entre los correspondientes a dichos puntos 2 y 3; es decir, $12.64 < c < 27$. Se elige $c=20$ cm



$$\epsilon_{s_1} = \frac{(20-5)(0.003)}{20} = 0.00225 > \epsilon_y \dots f_{s_1} = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s_2} = \frac{(25-20)(0.003)}{20} = 0.00075 \dots f_{s_2} = 0.00075 \times 2 \times 10^6 = 1500 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{s_3} = \frac{(45-20)(0.003)}{20} = 0.0037 > \epsilon_y \dots f_{s_3} = 4000 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_{s_1} = 4000 \times 20.28 = 81120 \text{ kg} = 81.12 \text{ Ton}$$

$$F_{s_2} = 1500 \times 10.14 = 15210 \text{ kg} = 15.21 \text{ Ton}$$

$$F_{s_3} = 4000 \times 20.28 = 81120 \text{ kg} = 81.12 \text{ Ton}$$

$$C_c = 16 \times 35 \times 136 = 76160 \text{ kg} = 76.16 \text{ Ton}$$

$$\frac{P_R}{F_R} = 81.12 - 15.21 - 81.12 + 76.16 = 60.95 \text{ Ton}$$

$$\frac{M_R}{F_R} = 81.12 \times 0.20 + 15.21 \times 0 + 81.12 \times 0.20 + 76.16 \times 0.17 = 45.40 \text{ Ton-m}$$

f) Obtención del punto de tensión pura (punto 6).

En este caso, la capacidad a tensión sólo la proporciona el acero ya que, - por la hipótesis c, el concreto no resiste esfuerzos de tensión, entonces:

$$P_R = F_R (A_s f_y)$$

$$\frac{P_R}{F_R} = A_s f_y$$

$$\frac{P_R}{F_R} = 10 \times 5.07 \times 4000 = 202800 \text{ kg} = 202.8 \text{ Ton}$$

Los puntos obtenidos se muestran en la siguiente figura:

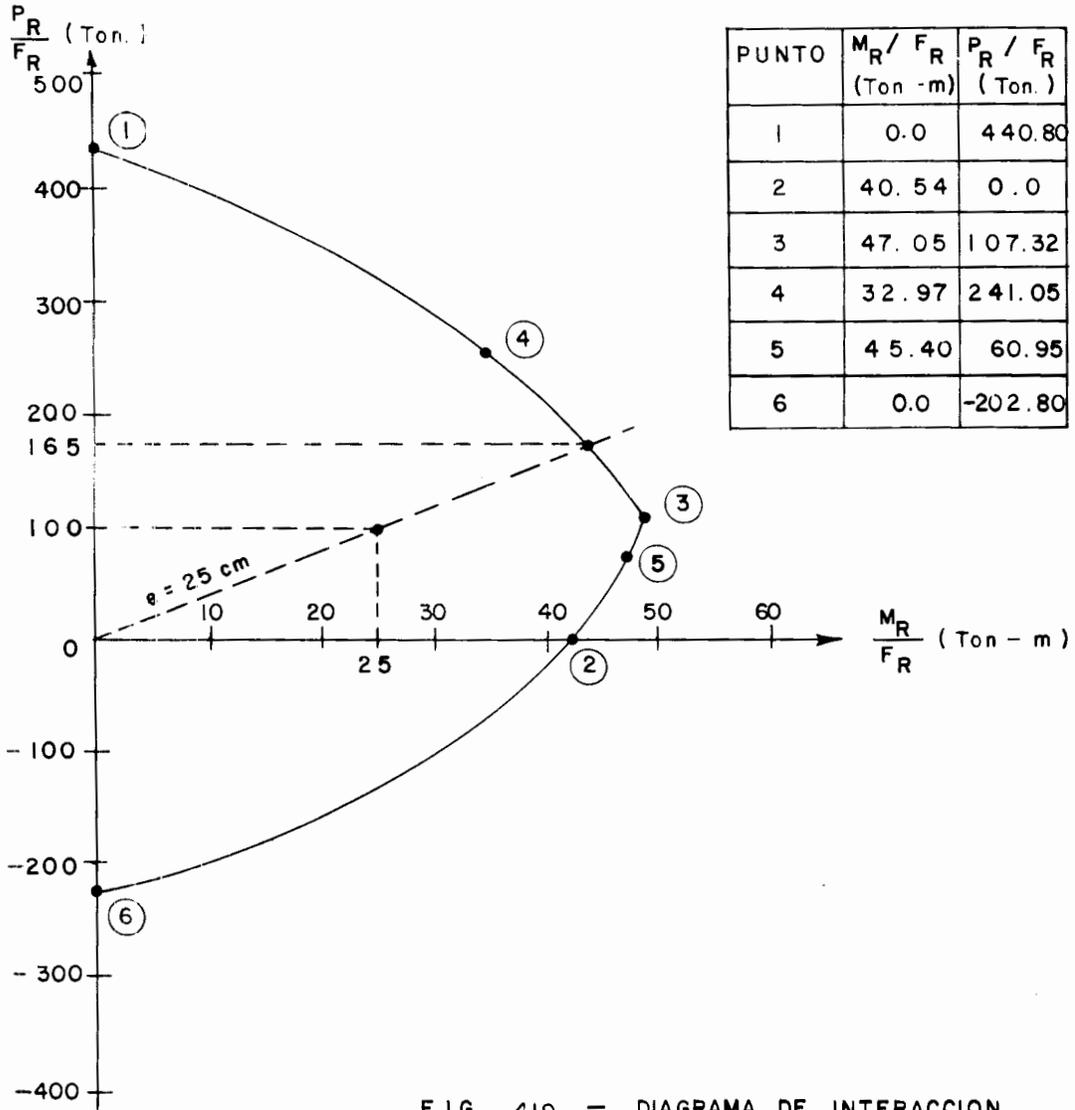
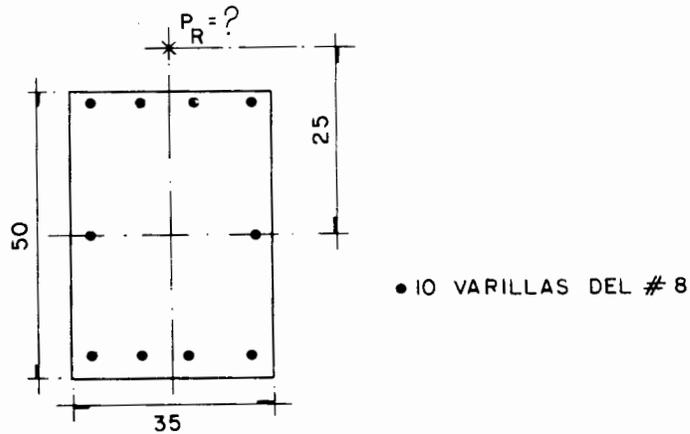


FIG 4.19 .- DIAGRAMA DE INTERACCION

EJEMPLO 4.2.- Aplicación del diagrama de interacción.

Determinar la carga y el momento resistente de la sección del ejemplo anterior, si ésta se aplica con una excentricidad de 25 cm.



Para fijar en el diagrama de interacción la recta que define la excentricidad de aplicación de la carga, se parte de la igualdad (4.1),

$M = P e$, de donde $e = M/P$. Para trazar la recta que corresponde a $e = 25$ cm supondremos $P = 100$ ton y M valdrá: $M = 100 \times 0.25 = 25$ ton-m. (ver figura 4.19)

De esta manera se cuenta con el punto ($M = 25$, $P = 100$) del histograma de carga de variación, el cual es una recta que pasa por el origen pues $M = 0$, si $P = 0$.

La intersección de esa recta con el diagrama de interacción, define un valor de $P_R / F_R = 165$ Ton en la zona de falla en compresión, que implica un factor de reducción de resistencia igual a 0.75, por lo tanto:

$$P_R = 165 F_R$$

$$P_R = 165 \times 0.75 = 123.75 \text{ Ton}$$

$$M_R = P_R e$$

$$M_R = 123.75 \times 0.25 = 30.94 \text{ Ton-m}$$

DETERMINACION DEL DIAGRAMA DE INTERACCION PARA UNA COLUMNA CORTA DE SECCION CUALQUIERA.

Para determinar el diagrama de interacción de una columna corta de sección cualquiera, el procedimiento es el mismo que el ya visto para una sección rectangular. La diferencia básica consiste en la determinación del área de concreto sujeta a compresión y la ubicación de su centroide, punto en el cual se considera concentrada la fuerza de compresión del concreto, C_c .

A continuación se describe el procedimiento para trazar el diagrama de interacción de una columna de concreto reforzado de sección circular. En la figura 4.20, se muestra la sección transversal, el diagrama de deformaciones y el diagrama de fuerzas.

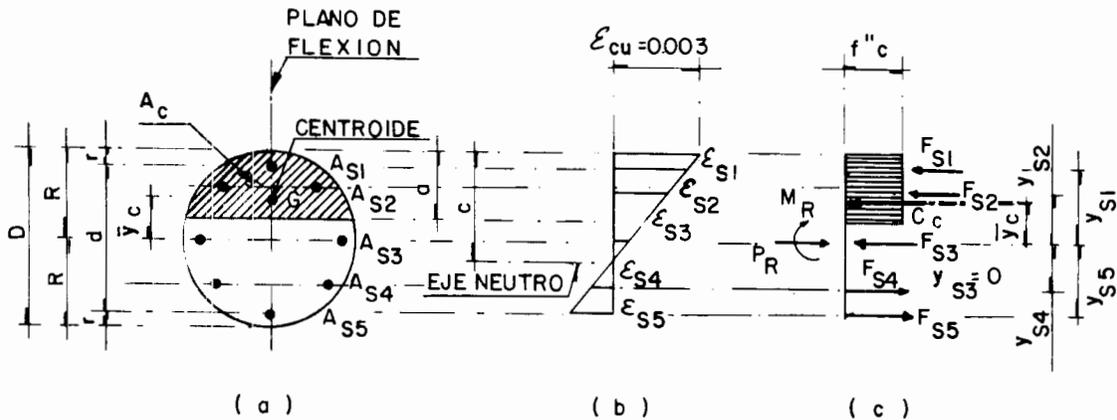


Fig. 4.20: SECCION CIRCULAR DE CONCRETO REFORZADO SUJETA A FLEXOCOMPRESION

Para determinar un punto cualquiera (M,P) del diagrama de interacción de esta sección, debe primero elegirse la profundidad "c" del eje neutro, entonces la profundidad "a" del bloque equivalente de esfuerzos uniformes, $f''c$, -- del concreto es inmediata: $a=0.8c$. De esta manera se tiene que la zona de la sección en la cual se genera, en cada punto, el esfuerzo interno del concreto, $f''c$, es un segmento circular, así, la reacción interna del concreto es --- (fig. 4.20):

$$C_c = A_c f''c$$

y el momento de esta fuerza con respecto al eje central de la sección es:

$$M_c = C_c \bar{y}_c$$

por tanto, debemos calcular el área del segmento circular A_c y la ordenada \bar{y}_c de su centro de gravedad.

Para obtener estos valores situemos la sección circular en el plano cartesiano (X,Y) con centro en el origen, para lo cual se presentan dos casos:

Caso I.- $a \leq R$ (fig. 4.21)

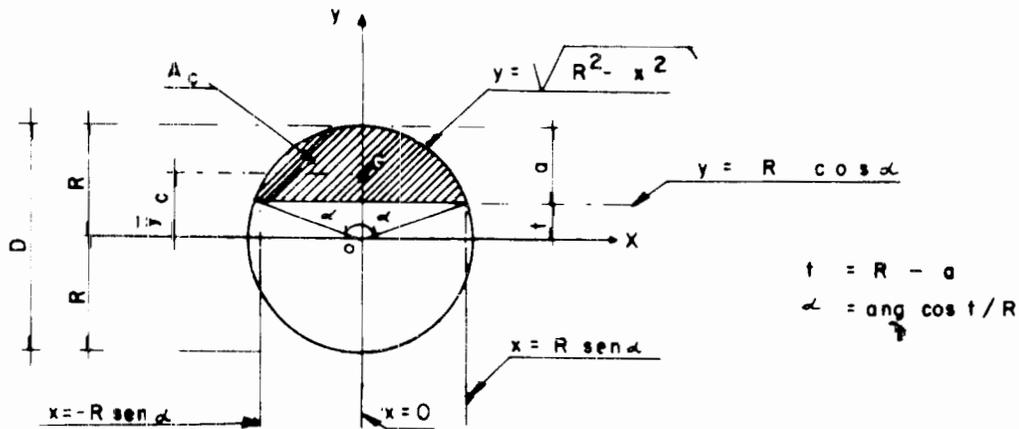


FIG. 4.21.- CASO EN QUE $a \leq R$

El valor de A_C es el doble del área del segmento en el primer cuadrante de la figura 4.21, la cual podemos calcular con una integral doble:

$$A_C = 2 \iint_S ds$$

Identificamos la región "S" con una región del tipo R_x , esto es:

$$S = R_x [0, R \operatorname{sen} \alpha, R \operatorname{cos} \alpha, \sqrt{R^2 - x^2}]$$

entonces, por el Teorema Fundamental de la Integral Doble:

$$A_C = 2 \int_0^{R \operatorname{sen} \alpha} dx \int_{R \operatorname{cos} \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy$$

Calculemos la primera integral del proceso de integración reiterada:

$$\int_{R \operatorname{cos} \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = \left[y \right]_{R \operatorname{cos} \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R \cos \alpha} dy = \sqrt{R^2 - x^2} - R \cos \alpha$$

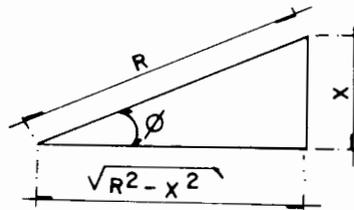
entonces:

$$A_C = 2 \int_0^{R \operatorname{sen} \alpha} (\sqrt{R^2 - x^2} - R \cos \alpha) dx$$

$$A_C = 2 \int_0^{R \operatorname{sen} \alpha} \sqrt{R^2 - x^2} dx - 2 R \cos \alpha \left[x \right]_0^{R \operatorname{sen} \alpha}$$

$$A_C = 2 \int_0^{R \operatorname{sen} \alpha} \sqrt{R^2 - x^2} dx - 2 R^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Para calcular esta integral hagamos el siguiente cambio de variable:



$$x = R \operatorname{sen} \phi \quad \text{--- (4.13)}$$

entonces:

$$dx = R \cos \phi d \phi$$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos \phi$$

Obtengamos los extremos de integración de la nueva variable ϕ ; en la ecuación (4.13):

$$\text{Si } x = 0, \phi = 0$$

Si $x = R \operatorname{sen} \alpha$, en la ecuación (4.13) resulta:

$$R \operatorname{sen} \alpha = R \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \phi$$

$$\therefore \alpha = \phi$$

Luego:

$$\int_0^{R \operatorname{sen} \alpha} \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R \cos \alpha} dx = \int_0^{\alpha} R^2 \cos^2 \phi d \phi$$

$$\int_0^{\alpha} R \sin \alpha \sqrt{R^2 - x^2} dx = R^2 \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi \right) d\phi$$

$$\int_0^{\alpha} R \sin \alpha \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{R^2}{2} \int_0^{\alpha} d\phi + \frac{R^2}{2} \int_0^{\alpha} \cos 2\phi d\phi$$

$$\int_0^{\alpha} R \sin \alpha \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{R^2}{2} \left[\phi \right]_0^{\alpha} + \frac{R^2}{2^2} \int_0^{\alpha} \cos 2\phi (2d\phi)$$

$$\int_0^{\alpha} R \sin \alpha \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{R^2}{2} \alpha + \frac{R^2}{4} \left[\sin 2\phi \right]_0^{\alpha}$$

$$\int_0^{\alpha} R \sin \alpha \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{R^2}{2} \alpha + \frac{R^2}{4} \sin 2\alpha$$

Por tanto:

$$A_C = 2 \left(\frac{R^2}{2} \alpha + \frac{R^2}{4} \sin 2\alpha \right) - 2 R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$A_C = R^2 \alpha + R^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$A_C = R^2 \alpha - R^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$A_C = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \alpha - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$A_C = \frac{D^2}{4} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \quad \text{---} \quad (4.14)$$

Observamos en la figura 4.21 que

$$\cos \alpha = \frac{t}{R} \quad \text{---} \quad (4.15)$$

por lo cual

$$\alpha = \arccos \frac{t}{R}$$

La ordenada del centroide G del segmento circular es por una aplicación de la integral doble:

$$\bar{y}_c = \frac{\iint_S y ds}{\iint_S ds} \quad \text{----- (4.16)}$$

en este caso identificamos la región "S" con una región R_x que cubre todo el segmento circular, esto es:

$$S = R_x[-R \operatorname{sen} \alpha, R \operatorname{sen} \alpha, R \operatorname{cos} \alpha, \sqrt{R^2 - x^2}]$$

Por el Teorema Fundamental de la Integral Doble:

$$\iint_S y ds = \int_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{+R \operatorname{sen} \alpha} dx \int_{R \operatorname{cos} \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dy$$

Obtenemos la primera integral del proceso reiterado:

$$\int_{R \operatorname{cos} \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_{R \operatorname{cos} \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\int_{R \operatorname{cos} \alpha}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y dy = \frac{R^2 - x^2}{2} - \frac{R^2 \operatorname{cos}^2 \alpha}{2}$$

entonces

$$\iint_S y ds = \int_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{+R \operatorname{sen} \alpha} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{R^2 \operatorname{cos}^2 \alpha}{2} \right) dx$$

$$\iint_S y ds = \int_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{+R \operatorname{sen} \alpha} \frac{R^2}{2} dx - \int_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{+R \operatorname{sen} \alpha} \frac{x^2}{2} dx - \int_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{+R \operatorname{sen} \alpha} \frac{R^2 \operatorname{cos}^2 \alpha}{2} dx$$

$$\iint_S y ds = \frac{R^2}{2} \left[x \right]_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{+R \operatorname{sen} \alpha} - \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{+R \operatorname{sen} \alpha} - \frac{R^2 \operatorname{cos}^2 \alpha}{2} \left[x \right]_{-R \operatorname{sen} \alpha}^{+R \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\iint_S y ds = \frac{R^2}{2} (2R \operatorname{sen} \alpha) - \left(\frac{R^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{6} - \frac{-R^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{6} \right) - \frac{R^2 \operatorname{cos}^2 \alpha}{2} (2R \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\iint_S y ds = R^3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{R^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{6} + \frac{R^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{6} - R^3 \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha$$

$$\iint_S y ds = R^3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{R^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{3} - R^3 (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha$$

$$\iint_S y ds = R^3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{R^3 \operatorname{sen}^3 \alpha}{3} - R^3 \operatorname{sen} \alpha + R^3 \operatorname{sen}^3 \alpha$$

$$\iint_S y ds = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{sen}^3 \alpha = \frac{2}{3} \left(\frac{D}{2} \right)^3 \operatorname{sen}^3 \alpha$$

$$\iint_S y ds = \frac{D^3}{12} \operatorname{sen}^3 \alpha \text{ ----- (4.17)}$$

como

$$\iint_S ds = A_C$$

por la ecuación (4.14)

$$\iint_S ds = \frac{D^2}{4} (\alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha) \text{ ----- (4.18)}$$

resulta en la ecuación (4.16), sustituir las integrales dobles por sus valores dados en las igualdades (4.17) y (4.18):

$$\bar{y}_C = \frac{\frac{D^3}{12} \operatorname{sen}^3 \alpha}{\frac{D^2}{4} (\alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha)}$$

por lo tanto:

$$\bar{y}_C = \frac{D}{3} \left(\frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{\alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha} \right) \text{ ----- (4.19)}$$

Caso 2.- $a > R$ (fig. 4.22):

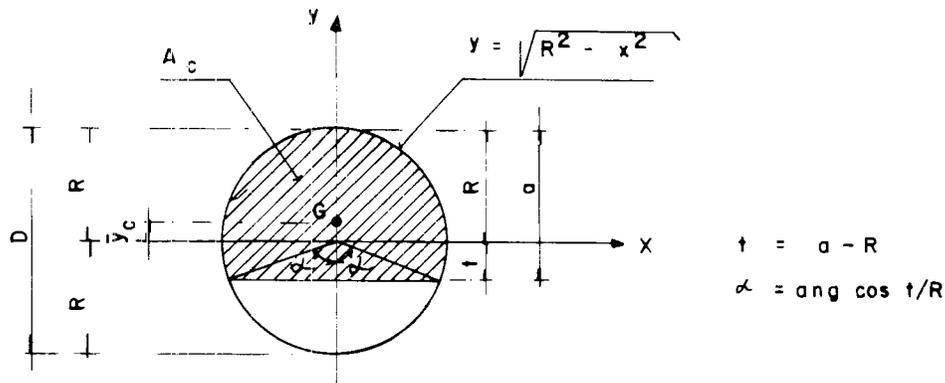


FIG. 4.22.- CASO EN QUE $a > R$

En este caso, el área de concreto sujeta a compresión, es el área total de la sección circular menos el área del segmento en la parte inferior de la sección, dada por la ecuación (4.14). Por lo tanto:

$$A_c = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{D^2}{4} (\alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha) \quad (4.20)$$

que corresponde en la figura 4.22 con el segmento circular sombreado. La ordenada del centroide G de este segmento es igual al momento estático del mismo, M_c , con respecto al origen, entre su área A_c , esto es:

$$\bar{y}_c = \frac{M_c}{A_c} \quad (4.21)$$

Por el Teorema de Varignon, si designamos con M_o al momento primero de todo el círculo con respecto al origen y con M_s al momento primero, con respecto al origen, del sector en la parte inferior de la sección, se tiene:

$$M_o = M_c + M_s$$

pero

$$M_o = 0$$

luego

$$M_c = - M_s \text{ ----- (4.22)}$$

Por el caso 1 (ecuación 4.17) sabemos que:

$$M_s = - \frac{D^3}{12} \text{ sen}^3 \alpha \text{ ----- (4.23)}$$

con signo negativo porque dicho sector está en la parte inferior del eje X. Entonces, sustituyendo en la ecuación (4.22) a M_s por su valor dado en (4.23) se obtiene:

$$M_c = \frac{D^3}{12} \text{ sen}^3 \alpha \text{ ----- (4.24)}$$

Llevando a la igualdad (4.21) los valores de M_c y A_c dados en las ecuaciones (4.24) y (4.20), respectivamente, resulta:

$$\bar{y}_c = \frac{\frac{D^3}{12} \text{ sen}^3 \alpha}{\frac{\pi D^2}{4} - \frac{D^2}{4} (\alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha)}$$

por lo tanto:

$$\bar{y}_c = \frac{D \text{ sen}^3 \alpha}{3 (\pi - \alpha + \text{sen } \alpha \cos \alpha)} \text{ ----- (4.25)}$$

Habiendo obtenido el área reactiva del concreto de la sección, A_c , y la ordenada de su centro de gravedad, \bar{y}_c , calculamos la fuerza interna que genera el concreto con:

$$C_c = A_c f''_c$$

y su momento con respecto al eje central de la sección con:

$$M_c = C_c \bar{y}_c$$

Para obtener las fuerzas internas con que reacciona el área de acero en cada nivel, determinamos primero cada una de las correspondientes deformaciones unitarias mediante los triángulos semejantes del diagrama de la figura 4.20 b, por ejemplo:

$$\frac{0.003}{c} = \frac{\epsilon_{s1}}{c-r}$$

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 (c-r)}{c}$$

en igual forma obtenemos $\epsilon_{S_2}, \epsilon_{S_3}, \epsilon_{S_4}$ y ϵ_{S_5}

Aplicamos ahora la ley de Hooke para obtener el esfuerzo interno del acero en cada nivel, esto es:

$$f_{S_1} = E_S \epsilon_{S_1}$$

$$f_{S_2} = E_S \epsilon_{S_2}$$

$$f_{S_3} = E_S \epsilon_{S_3}$$

$$f_{S_4} = E_S \epsilon_{S_4}$$

$$f_{S_5} = E_S \epsilon_{S_5}$$

Sin embargo, debe tomarse en cuenta que, por la hipótesis f (fig. 4.13), -- cuando la deformación unitaria en el acero excede $\epsilon_y = 0.002$, el esfuerzo máximo que se genera en éste es el de fluencia, o sea, $f_S = E_S \epsilon_S$ nunca debe exceder de f_y , o sea:

$$f_S = E_S \epsilon_S \leq f_y$$

El producto de cada uno de los esfuerzos calculados por el área de acero correspondiente nos da la fuerza interna del acero en cada nivel:

$$F_{S_1} = f_{S_1} A_{S_1}$$

$$F_{S_2} = f_{S_2} A_{S_2}$$

$$F_{S_3} = f_{S_3} A_{S_3}$$

$$F_{S_4} = f_{S_4} A_{S_4}$$

$$F_{S_5} = f_{S_5} A_{S_5}$$

Entonces podemos calcular el valor de la fuerza axial resistente P_R , pues -- por el equilibrio interno de fuerzas en la sección de la figura 4.20 tenemos:

$$P_R = (C_C + F_{S_1} + F_{S_2} + F_{S_3} - F_{S_4} - F_{S_5})F_R$$

donde F_R es el factor reglamentario de reducción de resistencia. Nótese que F_{S_4} y F_{S_5} tienen signo negativo por estar abajo del eje neutro - (fig. 4.20c) zona en la que se generan esfuerzos de tensión.

A continuación calculamos el momento flexionante resistente, M_R , pues también, por el equilibrio de la sección debe ser igual a la suma de los momentos de las fuerzas internas. Si para calcular los momentos se elige el eje central de la sección se tiene:

$$M_R = (C_C \bar{y}_C + F_{S_1} y_{S_1} + F_{S_2} y_{S_2} + F_{S_3} y_{S_3} + F_{S_4} y_{S_4} + F_{S_5} y_{S_5}) F_R$$

En este caso, el momento resistente, M_R , debe también afectarse por el factor de reducción de resistencia F_R .

De esta forma queda determinado el punto (M_R, P_R) del diagrama de interacción de una sección circular de concreto reforzado sujeta a flexocompresión. Con un conjunto de puntos suficientemente próximos, obtenidos en igual forma, - se puede trazar el diagrama de interacción. Como en el caso de las secciones rectangulares convendrá obtener los puntos que corresponden a : compresión pura P_{RC} , tensión pura P_{RT} , falla balanceada (M_{Rb}, P_{Rb}) en el que generalmente M_{Rb} es el valor máximo en el diagrama, el punto para el cual $P_R = 0$ --- $(M_{RO}, 0)$.

En forma similar a la descrita para las secciones rectangulares y circulares, se podrá trazar el diagrama de interacción de otras secciones de concreto - reforzado sujetos a flexocompresión.

DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE ELEMENTOS CORTOS DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A FLEXOCOMPRESION. USO DE LOS DIAGRAMAS DE INTERACCION.

Para obtener la resistencia de una sección de concreto reforzado sujeta a - flexocompresión, el uso del diagrama de interacción de esa sección es muy útil; sin embargo, ese diagrama sólo sería aplicable a esa sección en particular y cualquier variación en dimensiones o refuerzo obligarían a trazar -- otro diagrama de interacción. Para aliviar estos inconvenientes, el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, ha elaborado unas - gráficas para diseñar columnas cortas de concreto reforzado para las fami-- lias de secciones más usuales, tales como las rectangulares y las - - -

circulares (ref. 4.2). En dichas gráficas se manejan valores variables de dimensiones, refuerzo, excentricidad de la carga, resistencia del concreto y esfuerzo de fluencia del acero.

En la figura 4.23 se muestra un diagrama típico para sección rectangular - con acero de refuerzo uniformemente distribuido en las cuatro caras opuestas y sujeta a flexocompresión simple. En ella, los términos R y K son parámetros adimensionales que están en función del momento flexionante último, M_u , y de la carga axial última, P_u , respectivamente. Para casos como el descrito en la figura 4.23 (flexocompresión simple) R y K se valúan con las siguientes expresiones:

$$R = \frac{M_u}{F_R b h^2 f_c''} \quad \text{--- (4.26)}$$

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f_c''} \quad \text{--- (4.27)}$$

donde:

F_R = factor de reducción de resistencia

b = dimensión perpendicular al plano de la flexión

h = dimensión paralela al plano de la flexión

En la misma figura, e es la excentricidad de la carga respecto al eje -- central de la sección y se mide siempre paralela a la dimensión h; q es un parámetro adimensional que está en función del área de acero:

$$q = p \frac{f_y}{f_c''} \quad \text{--- (4.28)}$$

donde p es el porcentaje de acero de refuerzo respecto al área de la sección transversal de la columna:

$$p = \frac{A_s}{bh} \quad \text{--- (4.29)}$$

siendo A_s el área de acero de refuerzo.

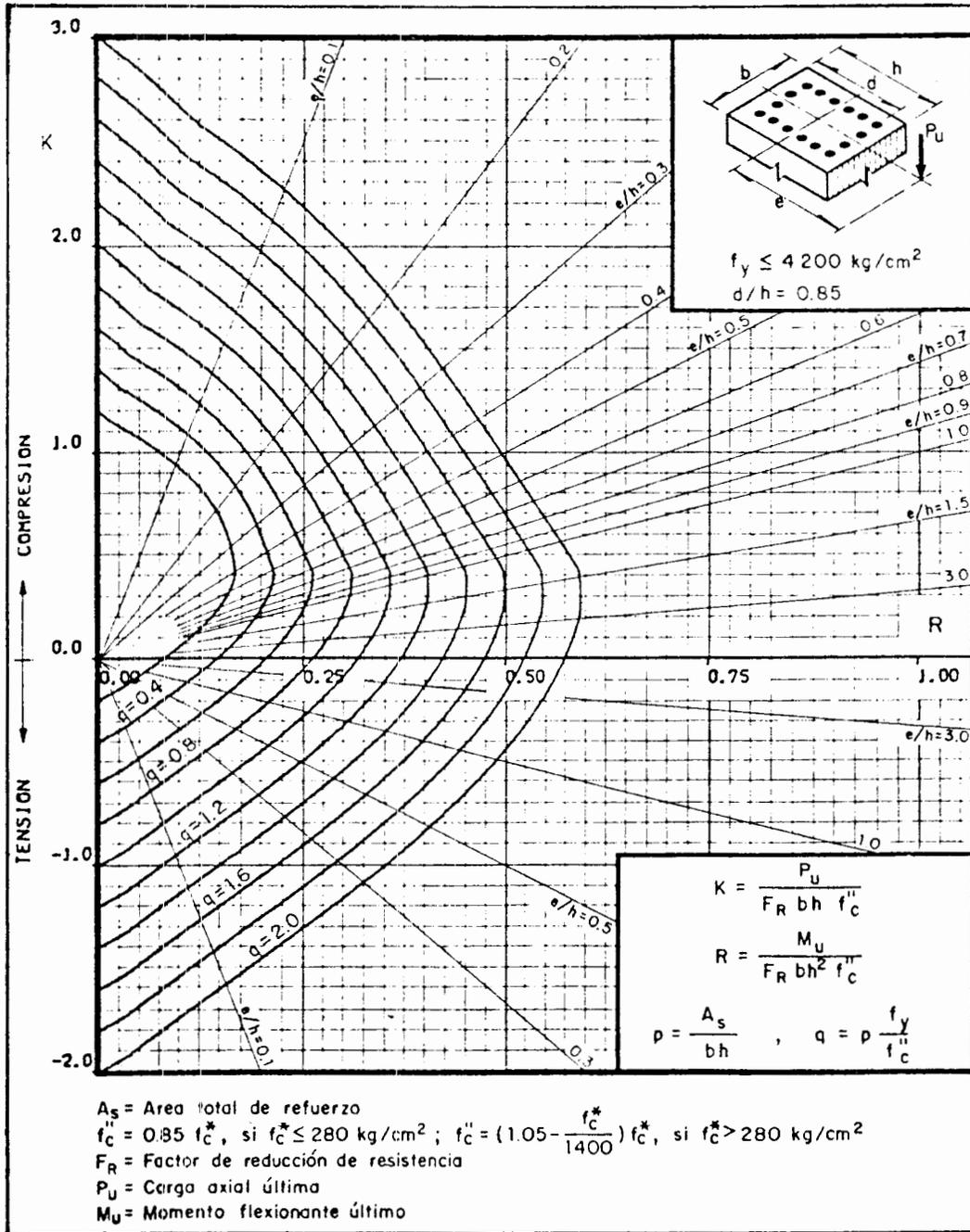
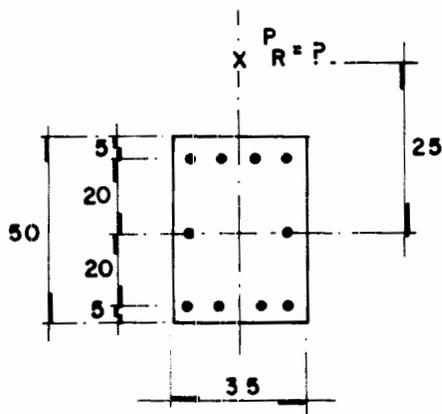


FIG. 4.23 .- DIAGRAMA DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION UNIAxIAL, DEL INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM.

En el diseño por flexocompresión mediante estas gráficas, se debe seguir el procedimiento de diseño por resistencia última o de diseño plástico; de manera que, para obtener los elementos mecánicos últimos M_u , P_u que intervienen en el uso de las gráficas, los elementos mecánicos obtenidos del análisis bajo cargas de servicio deben multiplicarse por los factores de carga correspondientes (ref. 4.3). Conocidos M_u y P_u , la determinación del área de acero de refuerzo, A_s , se hace calculando los parámetros R , K o e/h y mediante la gráfica se obtiene q , valor a partir del cual se puede despejar A_s de la expresión (4.29). En el caso de revisión de una sección de concreto reforzado, que se presenta cuando se conocen las dimensiones de la sección, el área de acero de refuerzo y la resistencia a compresión del concreto, se pretende determinar el momento flexionante resistente, M_R , y la carga axial resistente, P_R , para una relación $e = M_R/P_R$ conocida. El proceso consiste en calcular q y e/h . La intersección de estas dos curvas define los valores de R y K sobre los ejes de las abscisas y de las ordenadas, respectivamente; entonces, se despejan de las ecuaciones (4.26) y (4.27) los valores de M_u y P_u que en este caso son los elementos mecánicos últimos que la sección es capaz de resistir y a los cuales les llamaremos M_R y P_R , respectivamente.

EJEMPLO 4.3.- Determinar, mediante el uso de diagramas de interacción, la carga axial resistente y el momento flexionante resistente de la sección rectangular de concreto reforzado del ejemplo 4.2 y comparar los resultados obtenidos por ambos métodos.



DATOS:

AREA DE ACERO = 10 VARILLAS $\# 8$

$$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

(AREA DE ACERO DE UNA VARILLA $\# 8 = 5.07 \text{ cm}^2$.)

FIG. 4.24 SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO REFORZADO.

Parámetros de resistencia

$$f_c^* = 0.8f_c' = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{como } f_c^* < 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85f_c^* = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2$$

Por tratarse de un caso de revisión, calculemos los parámetros q y e/h :

$$A_s = 10 \times 5.07 = 50.7 \text{ cm}^2$$

porcentaje de acero de refuerzo, p :

$$p = \frac{A_s}{bh}$$

donde $b = 35 \text{ cm}$ y $h = 50 \text{ cm}$

$$p = \frac{50.7}{35 \times 50} = 0.02897$$

parámetro q :

$$q = p \frac{f_y}{f_c''}$$

$$q = 0.02897 \times \frac{4000}{136} = 0.852$$

relación e/h :

$$\frac{e}{h} = \frac{25}{50} = 0.5$$

relación d/h :

Para poder determinar que gráfica usar de la referencia 4.2 se requiere la relación d/h , en la que d es la distancia entre las varillas a tensión y la fibra a compresión más alejada del eje principal, así :

$$\frac{d}{h} = \frac{45}{50} = 0.9$$

De la figura 2 de la referencia 4.2 se obtiene en la intersección de las líneas e/h y q calculadas, los siguientes valores de K y R : ---

$$K = 0.76$$

$$R = 0.38$$

Obsérvese en la misma figura que el punto definido por $K = 0.76$ y $R = 0.38$ cae en la zona de falla por compresión, por lo que $F_R = 0.75$

Despejando de las ecuaciones (4.26) y (4.27) se obtienen M_u y P_u respectivamente, a los cuales, por tratarse de un caso de revisión llamaremos M_R y P_R ; así:

$$M_R = R F_R b h^2 f_c''$$

$$M_R = 0.38 \times 0.75 \times 35 \times (50)^2 \times 136 = 33.915 \times 10^5 \text{ kg-cm} = 33.915 \text{ Ton-m}$$

$$P_R = K F_R b h f_c''$$

$$P_R = 0.76 \times 0.75 \times 35 \times 50 \times 136 = 135.660 \times 10^3 \text{ kg} = 135.660 \text{ Ton}$$

Además, se debe verificar que la relación M_R/P_R sea igual a la excentricidad que se dió como dato:

$$e = \frac{M_R}{P_R} = \frac{33.915}{135.660} = 0.25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

Comparando los valores de M_R y P_R obtenidos en el ejemplo 4.2 se puede observar que ambos métodos dan valores muy aproximados.

DISEÑO POR FLEXOCOMPRESION BIAXIAL

En el caso de flexocompresión biaxial, el diagrama de interacción resulta ser una superficie de falla en tres dimensiones, la cual se puede reducir a un problema de dos dimensiones haciendo cortes verticales a la superficie original (fig. 4.25). Cada corte corresponde a una relación fija entre los momentos adimensionales en las dos direcciones (R_x/R_y).

El Instituto de Ingeniería de la UNAM ha elaborado gráficas para valores de $R_x/R_y = 0.5$ y de $R_x/R_y = 1.0$ (ref. 4.2), además, si se toma en cuenta que el caso de flexocompresión en una dirección corresponde a $R_x/R_y = 0$, se tienen tres cortes verticales a la superficie de falla, con lo que se puede cubrir, con una aproximación aceptable, todos los casos posibles mediante interpolación lineal (fig.4.26).

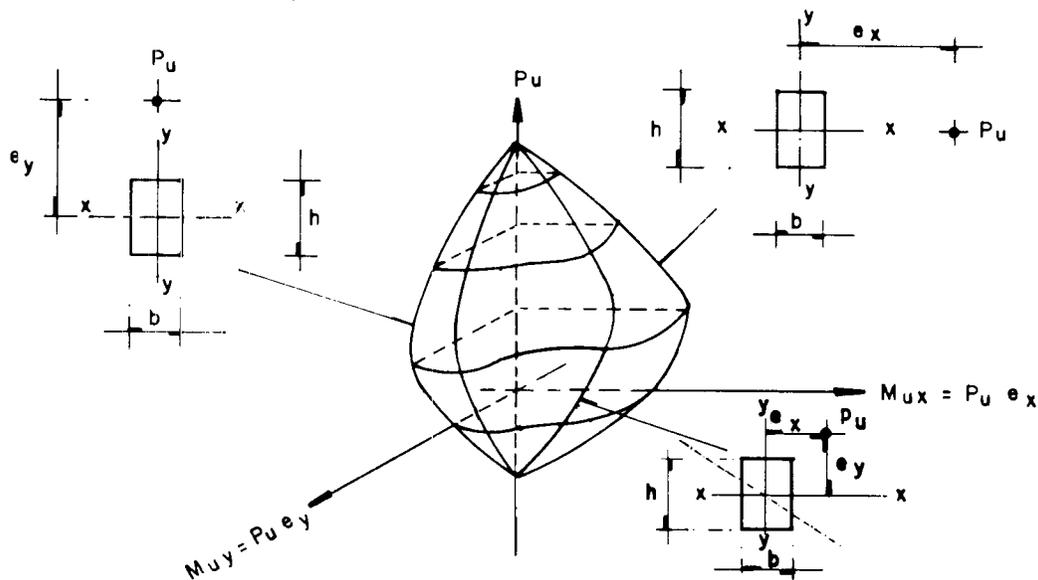


FIGURA 4.25 - SUPERFICIE DE FALLA EN TRES DIMENSIONES

Si hacemos:

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f''_c}$$

$$R_x = \frac{M_{ux}}{F_R b^2 h f''_c}$$

$$R_y = \frac{M_{uy}}{F_R b h^2 f''_c}$$

obtenemos la figura 4.26:

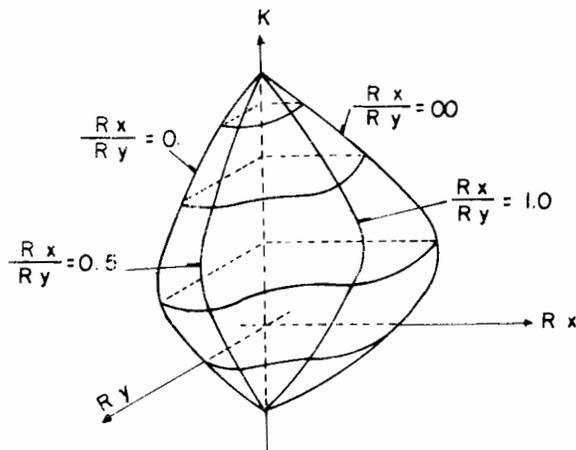


Fig. 4.26 -SUPERFICIE DE FALLA EN TRES DIMENSIONES (ADIMENSIONAL).

Consideremos para una sección rectangular cualquiera, la siguiente nomenclatura:

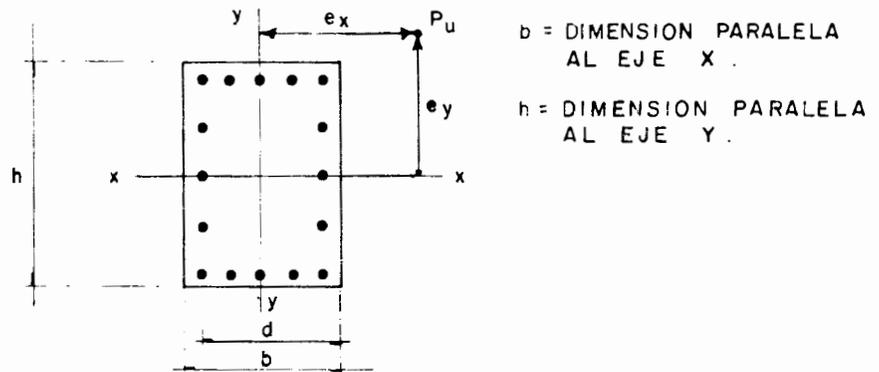


FIG. 4.27.- SECCION RECTANGULAR DE CONCRETO REFORZADO SUJETA A FLEXOCOMPRESION BIAIXIAL

De la figura 4.27 se obtiene lo siguiente:

$$M_{ux} = P_u e_x$$

$$M_{uy} = P_u e_y$$

Además

$$R_x = \frac{M_{ux}}{F_R b^2 h f''_c} \text{----- (4.30)}$$

$$R_y = \frac{M_{uy}}{F_R b h^2 f''_c} \text{----- (4.31)}$$

Como se debe cumplir que $R_x/R_y \leq 1.0$, entonces, R_x está asociado al menor de ambos momentos adimensionales, siendo el plano de este momento perpendicular al eje Y. El diagrama de interacción para flexocompresión biaxial se selecciona en la referencia 4.4 con la relación d/b , donde b es la dimensión de la columna en la dirección de e_x , y d es el peralte efectivo en la dirección de b (ver figura 4.27); usualmente, en la práctica, b es el lado menor de la sección, sin embargo, puede ocurrir que b no coincida con el lado menor, basta que con la posición supuesta de los ejes X y Y se cumpla lo siguiente:

$$\frac{e_x/b}{e_y/h} \leq 1.0$$

Esto se demuestra si dividimos la ecuación (4.30) entre (4.31)

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{M_{ux} F_R b h^2 f''_c}{M_{uy} F_R b^2 h f''_c} \leq 1.0$$

$$\text{pero } M_{ux} = P_u e_x$$

$$M_{uy} = P_u e_y$$

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{P_u e_x F_R b h^2 f''_c}{P_u e_y F_R b^2 h f''_c} \leq 1.0$$

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{e_x h}{e_y b} \leq 1.0$$

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{e_x/b}{e_y/h} \leq 1.0 \quad \text{--- (4.32)}$$

En la figura 4.28 se muestra un diagrama de interacción típico para flexocompresión biaxial del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

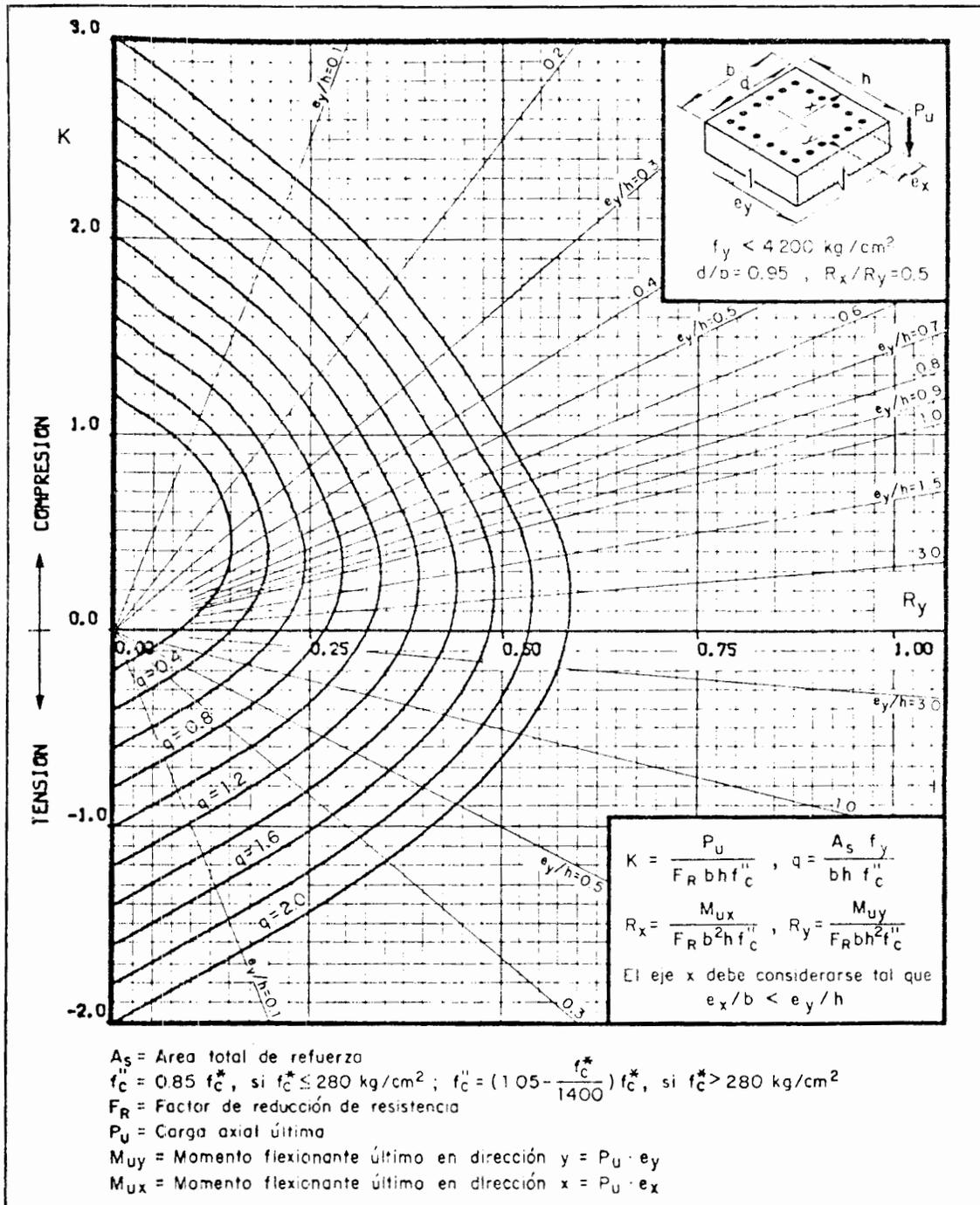
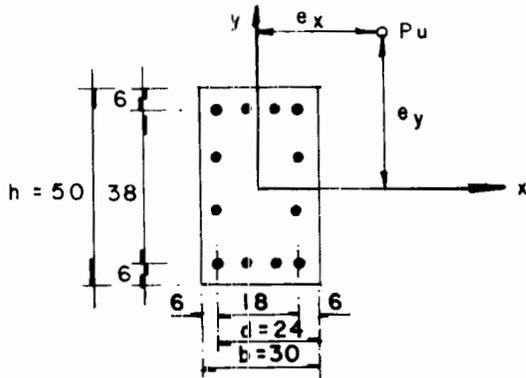


FIG. 4.28 — DIAGRAMA DE INTERACCION PARA FLEXOCOMPRESION BIAIXIAL, DEL INSTITUTO DE INGENIERIA DE LA UNAM

EJEMPLO 4.4.- Calcular mediante diagramas de interacción para secciones sujetas a flexocompresión biaxial, la carga última que puede resistir la siguiente sección rectangular de concreto reforzado.



Datos:

12 varillas de $\phi = 1''$ (#8)
distribuidas en las cuatro caras

$$e_x = 12 \text{ cm}$$

$$e_y = 32 \text{ cm}$$

$$f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f^*_c = 0.8 \times 250 = 200 < 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f''_c = 0.85 \times 200 = 170 \text{ Kg/cm}^2$$

de acuerdo con la figura

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 24 \text{ cm}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{24}{30} = 0.8$$

además

$$q = \frac{A_s f_y}{b h f''_c} = \frac{12 \times 5.07 \times 4000}{30 \times 50 \times 170} = 0.95$$

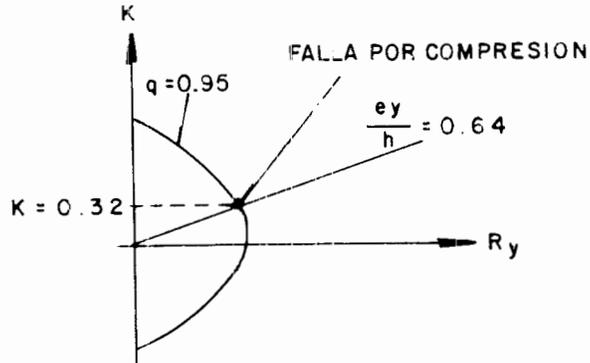
$$\frac{e_x}{b} = \frac{12}{30} = 0.40$$

$$\frac{e_y}{h} = \frac{32}{50} = 0.64$$

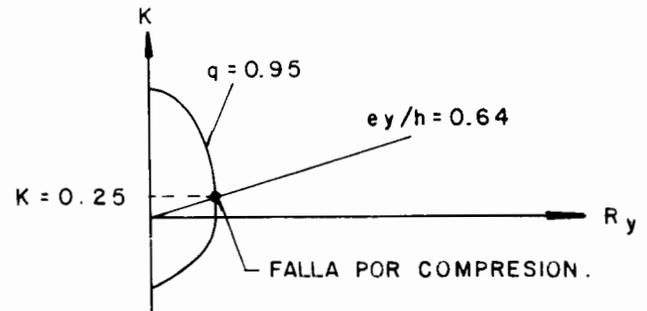
aplicando la ecuación (4.32)

$$\frac{R_x}{R_y} = \frac{e_x/b}{e_y/h} = \frac{0.40}{0.64} = 0.625 < 1.0 \quad (\text{si se cumple})$$

Se emplean las gráficas para acero uniforme con $f_y < 4200 \text{ Kg/cm}^2$ para $d/b=0.8$. Como $R_x/R_y = 0.625$ se obtiene K para $R_x/R_y = 0.5$ y para $R_x/R_y = 1.0$ y posteriormente se interpola.



a) $R_x/R_y = 0.5$ (FIG. 44 DE LA REF. 4.2)



b) $R_x/R_y = 1.0$ (FIG. 52 DE LA REF. 4.2)

Interpolando para $R_x/R_y = 0.625$:

$$K = 0.25 + x$$

$$\frac{0.32 - 0.25}{1.00 - 0.5} = \frac{x}{1.00 - 0.625}$$

$$x = \frac{(0.32 - 0.25)(1.00 - 0.625)}{1.00 - 0.5}$$

$$x = \frac{0.07 \times 0.375}{0.5}$$

$$x = 0.052$$

$$K = 0.25 + 0.052$$

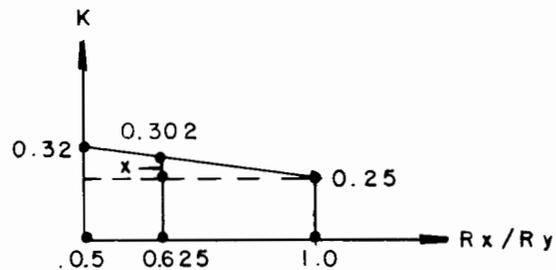
$$K = 0.302$$

Por lo tanto, la carga última que puede resistir la sección es:

$$P_u = K F_R b h f_c$$

$$P_u = 0.302 \times 0.75 \times 30 \times 50 \times 170 = 57\,758 \text{ Kg}$$

$$P_u \cong 57.76 \text{ Ton}$$



En forma alternativa, los casos de flexocompresión biaxial pueden resolverse con las gráficas para flexocompresión uniaxial y con algún método aproximado para tomar en cuenta el efecto en dos direcciones.

METODO DE LA FORMULA DE BRESLER

Un primer método proviene de la fórmula de Bresler dada por la expresión:

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{Rx}} + \frac{1}{P_{Ry}} - \frac{1}{P_{R0}}} \quad (4.33)$$

o en forma adimensional

$$K_R = \frac{1}{\frac{1}{K_{Rx}} + \frac{1}{K_{Ry}} - \frac{1}{K_{R0}}} \quad (4.34)$$

donde:

P_R = carga normal resistente, aplicada con las excentricidades e_x y e_y

P_{R0} = carga axial resistente para $e_x = e_y = 0$, $P_{R0} = F_R(bhf''_c + A_s f_y)$

P_{Rx} = carga normal resistente, aplicada con una excentricidad e_x en un plano de simetría.

P_{Ry} = carga normal resistente, aplicada con una excentricidad e_y en el otro plano de simetría.

$$K_R = \frac{P_R}{F_R b h f''_c} \quad (4.35)$$

$$K_{Rx} = \frac{P_{Rx}}{F_R b h f''_c} \quad (4.36)$$

$$K_{Ry} = \frac{P_{Ry}}{F_R b h f''_c} \quad (4.37)$$

$$K_{R0} = 1 + q$$

Las expresiones (4.33) o (4.34) son aplicables cuando

$$\frac{P_R}{P_{R0}} \geq 0.1 \quad \text{o} \quad \frac{K_R}{K_{R0}} \geq 0.1$$

En el caso de que

$$\frac{P_R}{P_{R0}} < 0.1 \quad \text{o} \quad \frac{K_R}{K_{R0}} < 0.1$$

Las expresiones (4.33) o (4.34) dejan de ser aplicables y se da como alternativa la expresión

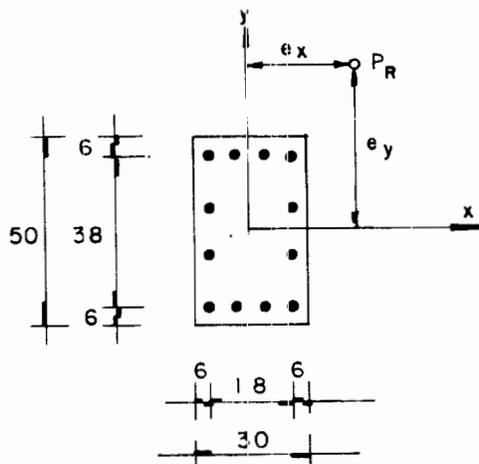
$$\frac{M_{ux}}{M_{Rx}} + \frac{M_{uy}}{M_{Ry}} \leq 0.1 \quad \text{--- (4.38)}$$

en que

M_{ux} y M_{uy} son los momentos últimos de diseño según los ejes X e Y; M_{Rx} y M_{Ry} son los momentos resistentes según los mismos ejes.

EJEMPLO 4.5.-

Determinar la carga resistente P_R , de la sección del ejemplo 4.4



12 varillas # 8
 $e_x = 12 \text{ cm}$
 $e_y = 32 \text{ cm}$
 $f'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$

Resistencias de diseño

$$f_c^* = 0.8 \times 250 = 200 < 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_c'' = 0.85 \times 200 = 170 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

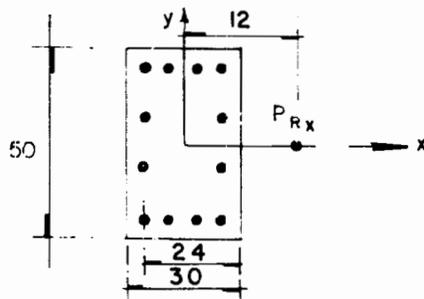
$$h = 50 \text{ cm}$$

$$A_s = 12 \times 5.07 = 60.84 \text{ cm}^2$$

$$q = \frac{A_s f_v}{bh f_c''} = \frac{60.84 \times 4000}{30 \times 50 \times 170} = 0.95$$

$$K_{R0} = 1 + q = 1 + 0.95 = 1.95$$

Cálculo de K_{RX}



Como usaremos gráficas de flexocompresión uniaxial tenemos para nomenclatura:
la dimensión paralela al plano de flexión debe ser el peralte, en cada caso

$$b = 50 \text{ cm}$$

$$h = 30 \text{ cm}$$

$$d = 30 - 6 = 24 \text{ cm}$$

$$e = 12 \text{ cm}$$

$$\frac{d}{h} = \frac{24}{30} = 0.8$$

$$\frac{e}{h} = \frac{12}{30} = 0.4$$

Utilizaremos la figura 12 de la referencia 4.2

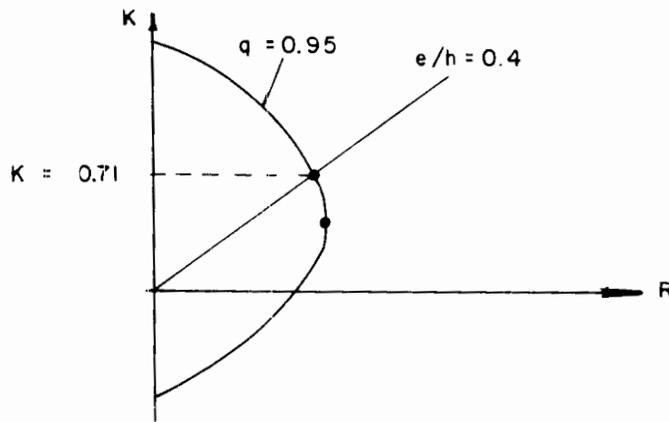
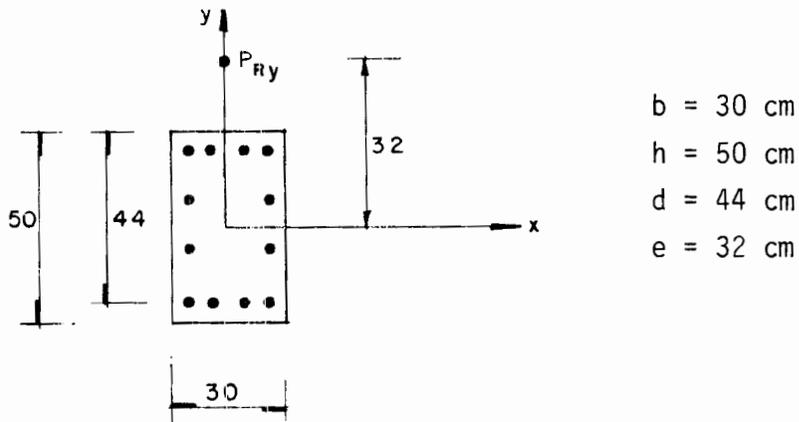


FIGURA 12 DE LA REF. 4.2

Para $q = 0.95$ y $e/h = 0.4$ se obtiene
 $K_{RX} = 0.71$

Cálculo de K_{RY}

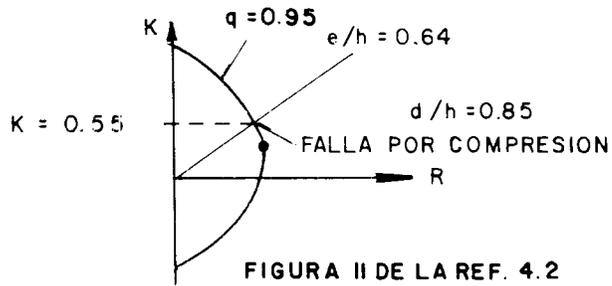


$$\frac{d'}{h} = \frac{44}{50} = 0.88$$

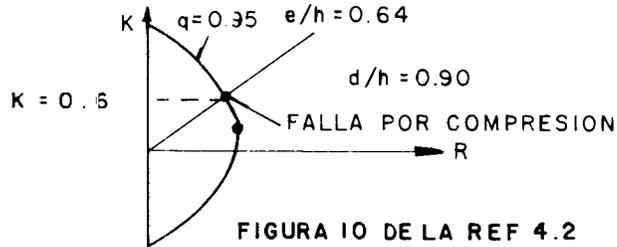
$$\frac{e}{h} = \frac{32}{50} = 0.64$$

Como $d/h = 0.88$, obtendremos el valor de K_{RY} para $d/h = 0.85$ y $d/h = 0.9$ (figuras 11 y 10 de la referencia 4.2, respectivamente), y por interpolación se obtendrá el valor de K_{RY} para $d/h = 0.88$.

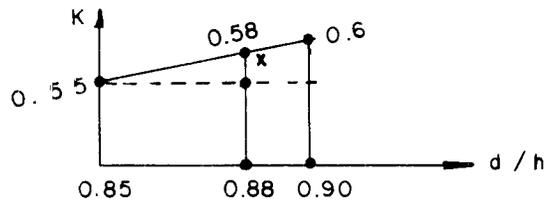
Para $d/h = 0.85$, $q = 0.95$ y $e/h = 0.64$ se obtiene $K=0.55$:



Para $d/h = 0.9$, $q = 0.95$ y $e/h = 0.64$, se obtiene $K= 0.60$:



Interpolando para $d/h = 0.88$:



$K_{RY} = 0.55 + x$
por triángulos semejantes

$$\frac{0.60 - 0.55}{0.90 - 0.85} = \frac{x}{0.88 - 0.85}$$

despejando x

$$x = \frac{(0.60 - 0.55)(0.88 - 0.85)}{(0.90 - 0.85)}$$

$$x = 0.03$$

por tanto

$$K_{RY} = 0.55 + 0.03 = 0.58$$

Aplicando la ecuación (4.34)

$$K_R = \frac{1}{\frac{1}{K_{Rx}} + \frac{1}{K_{Ry}} - \frac{1}{K_{Ro}}}$$

$$K_R = \frac{1}{\frac{1}{0.71} + \frac{1}{0.58} - \frac{1}{1.95}} = 0.382$$

Como $K_R = 0.382$, despejamos P_R de la ecuación (4.35)

$$P_R = K_R F_R b h f''_c$$

donde $F_R = 0.75$ (falla en compresión)

$$P_R = 0.382 \times 0.75 \times 30 \times 50 \times 170 = 73057 \text{ Kg}$$

$$P_R \cong 73.06 \text{ ton}$$

Verificaremos si se cumple la condición de que K_R/K_{Ro} sea mayor que 0.1

$$\frac{K_R}{K_{Ro}} = \frac{0.382}{1.950} = 0.196 > 0.1 \text{ sí se cumple}$$

Por lo tanto, el valor de la carga resistente es $P_R = 73.06 \text{ Ton}$

R E F E R E N C I A S

- 4.1.- "Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito - Federal, Publicación 401 del Instituto de Ingeniería de la UNAM, 1977.
- 4.2.- Meli R., Rodríguez M., "Gráficas para Diseñar Columnas de Concreto - Reforzado", Publicación 428 del Instituto de Ingeniería de la UNAM, septiembre de 1980.
- 4.3.- "Requisitos de Seguridad y Servicio para las Estructuras", Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Publicación 400 del Instituto de Ingeniería de la UNAM, julio de 1977.

CAPITULO V.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS SUJETOS
A FLEXOCOMPRESION

CAPITULO V.- ESTABILIDAD DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES ESBELTOS SUJETOS A FLEXOCOMPRESION.

V.1.-CONCEPTOS DE EFECTO DE ESBELTEZ Y COMPORTAMIENTO

V.1.1.- Introducción

Un elemento esbelto sujeto a flexocompresión tiene la característica de presentar menor resistencia que un elemento corto del mismo material y sección transversal. Esto se debe fundamentalmente a que, bajo la acción de carga axial y momento flexionante, aparecen deformaciones del elemento, cualquiera que sea su longitud; sin embargo, este efecto es importante sólo en los elementos esbeltos ya que en un elemento corto las deformaciones son tan pequeñas que pueden ser despreciadas. Para comprender este comportamiento, consideremos una columna de longitud L , en equilibrio interno y externo, simplemente apoyada en sus extremos y bajo una carga excéntrica, ubicada en un sistema de ejes cartesianos (x,y) como se muestra en la figura 5.1.a.

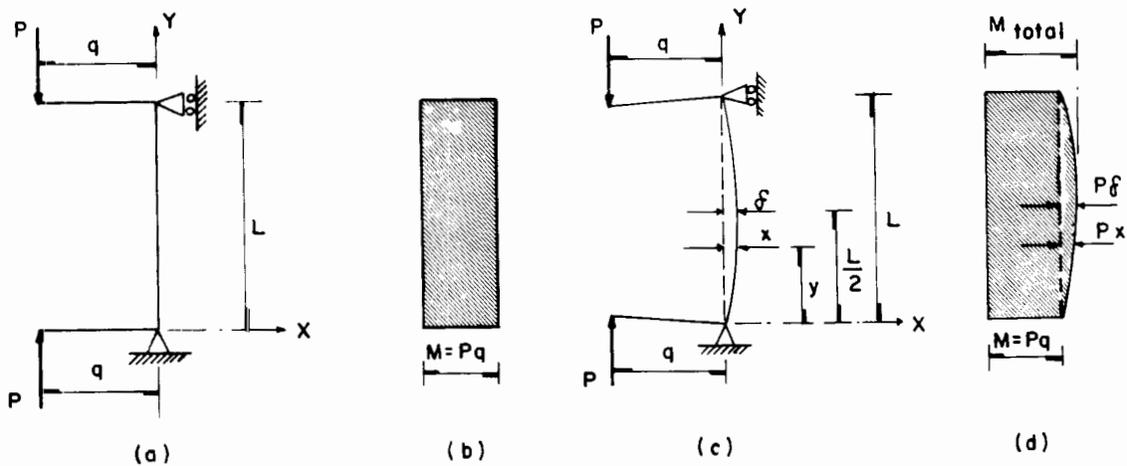


FIG. 5.1. COLUMNA ESBELTA SUJETA A FLEXOCOMPRESION

Cuando la carga P , es sumamente pequeña o se trata de una columna corta, el diagrama de momentos flexionantes de primer orden es como el mostrado en la figura 5.1.b; definimos aquí como momentos de primer orden los que se evalúan sin considerar las deformaciones de la columna. Ahora bien, en el caso de una columna larga bajo la acción de P , se presentan deformaciones que aumentan la distancia de la línea de acción de la carga al eje de la columna, lo que equivale a que se incremente la excentricidad de la carga un valor " x " en cualquier punto de ordenada " y " como se muestra en la figura 5.1.c. Por lo tanto,-

el momento flexionante en cualquier sección de la columna es $M = Pq + Px$, siendo Px un momento de segundo orden que podemos definir como un momento adicional debido a la deformación de la columna.

Existen dos aspectos importantes que influyen notablemente en la reducción de la resistencia por esbeltez de una columna sujeta a flexocompresión, estos son: el efecto de los momentos flexionantes en los dos extremos de la columna y la forma de la curvatura del eje de la columna, así como el desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna, efectos de los cuales haremos -- una breve descripción.

a) Efecto de los momentos flexionantes en los extremos de la columna y forma de la curvatura.

El efecto de los momentos flexionantes en los dos extremos de la columna tiene influencia en la magnitud de las deformaciones y, en consecuencia, en los momentos de segundo orden. Consideremos por ejemplo, el caso de la columna que vimos en la figura 5.1., en la cual los momentos en los extremos son iguales y de signo contrario. Podemos observar que el momento de primer orden es constante a lo largo del eje de la columna (fig. 5.1.b.) y la columna se deforma en curvatura simple (fig. 5.1.c.). El momento máximo de segundo orden, $P\delta$, que se presenta a la media altura de la columna se suma al momento de primer orden para obtener el momento total. En estas columnas siempre hay reducción de resistencia por efectos de esbeltez ya que como se puede apreciar, el momento total obtenido es la suma de los momentos máximos de primero y segundo orden.

Consideremos ahora una columna como la mostrada en la figura 5.2.a, bajo la acción de la carga axial P y de momentos flexionantes del mismo signo en sus extremos; el diagrama de momentos de primer orden es como el de la figura 5.2.b. La columna deformada es de curvatura doble como la mostrada en la figura 5.2.c y el diagrama de momentos totales, obtenido como la suma de momentos de primer orden de la figura 5.2.b y los momentos de segundo orden, se ilustra en la figura 5.2.d. En este caso es muy importante observar que los momentos máximos de primero y segundo orden no se presentan en la misma sección, por lo que el momento máximo total no será la suma de los momentos máximos de primero y segundo orden; por lo tanto, si observamos los diagramas de momento flexionante total-

en la figura 5.1.d y 5.2.d, podemos concluir que el efecto de esbeltez es más crítico en los casos en que la columna tiene momentos flexionantes de signo contrario en sus extremos y le producen a ésta curvatura simple.

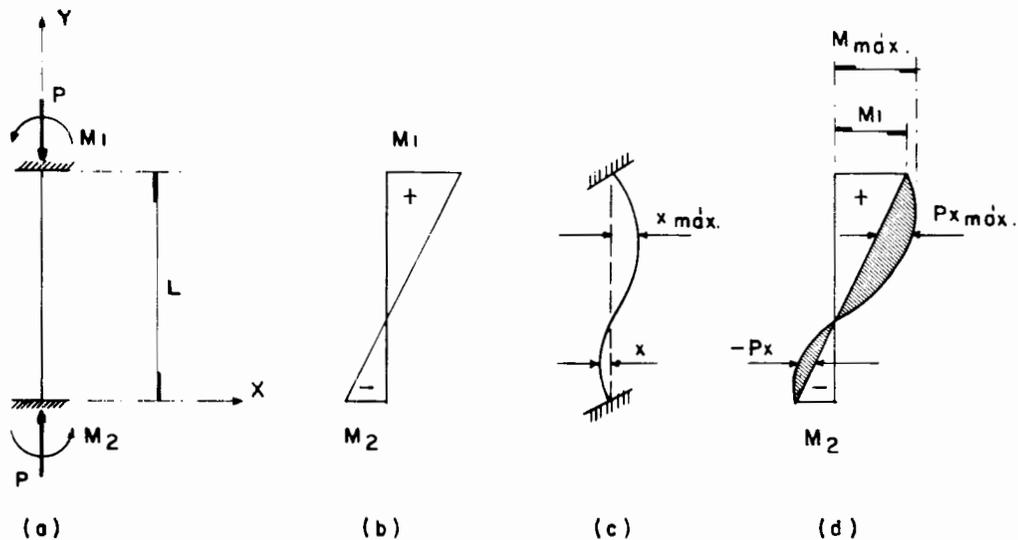


FIG. 5.2. COLUMNA ESBELTA CON MOMENTOS DEL MISMO SIGNO EN LOS EXTREMOS

b) Desplazamiento lateral relativo entre los extremos de la columna.

Este efecto se presenta normalmente en columnas que forman parte de marcos no contraventados, es decir, en aquellos que no tienen elementos que impidan el desplazamiento en su plano. En la figura 5.3.a, se muestra un marco de este tipo. La columna de eje A tiene un diagrama de momentos de primer orden como se indica en la figura 5.3.b y considerando las deformaciones de la figura 5.3.c, se presentan en la columna los momentos de segundo orden indicados en la figura 5.3.d. Como podemos observar en la figura 5.3.b, los momentos flexionantes en los extremos de la columna le producen a ésta una deformación con curvatura doble, pero por efecto del desplazamiento lateral de los extremos, los momentos máximos de primero y segundo orden se presentan en la misma sección a diferencia del caso tratado en la figura 5.2, por lo que podemos asegurar que el efecto de esbeltez de una columna es más crítico cuando existen desplazamientos laterales relativos entre sus extremos que cuando éstos últimos están restringidos contra tal desplazamiento.

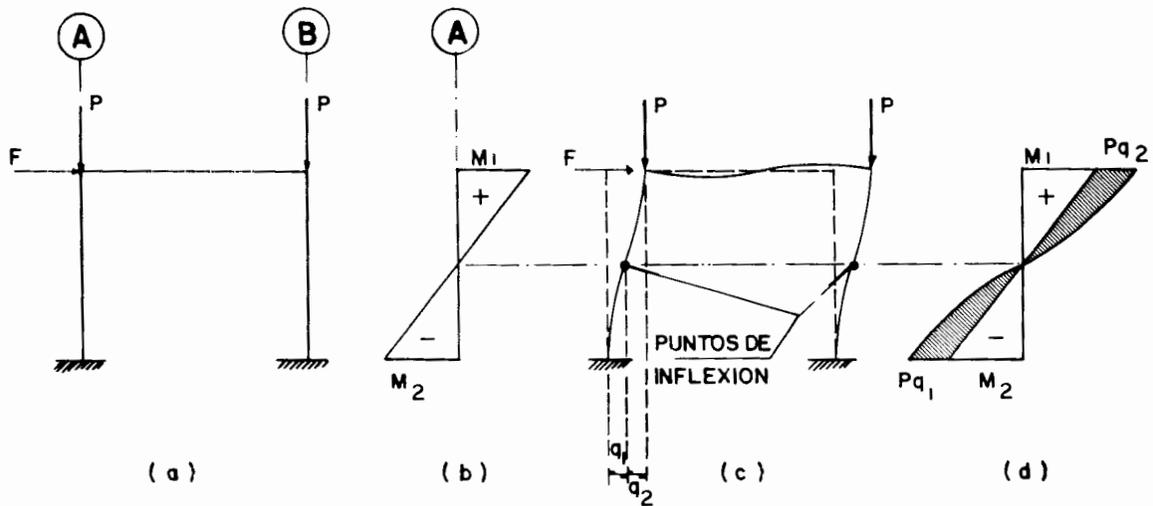


FIG. 5.3. MOMENTOS DE SEGUNDO ORDEN EN UNA COLUMNA POR EFECTO DE DESPLAZAMIENTO LATERAL RELATIVO DE SUS EXTREMOS

V.1.2.- Fórmula de interacción de columnas esbeltas sujetas a flexocompresión. Con el objeto de investigar el comportamiento de este tipo de elementos, consideremos una columna esbelta en equilibrio interno y externo, de material elástico lineal, bajo la acción de una carga excéntrica P , de excentricidad q en un plano definido por los ejes x , y (figura 5.4).

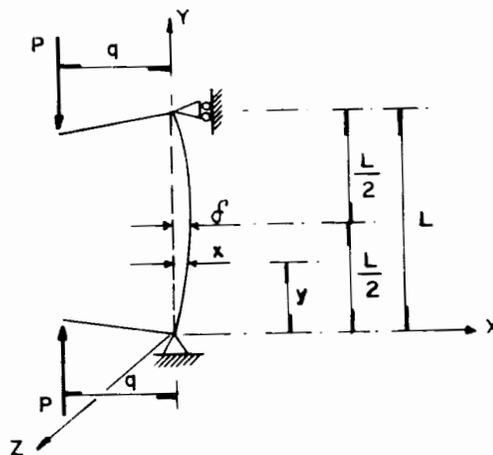


FIG. 5.4. COLUMNA CON CARGA EXCENTRICA

Por efecto de la carga excéntrica P , se genera en la columna un estado de flexo-compresión, para el cual el esfuerzo máximo de compresión, como quedó establecido por la ecuación (1.23) en el capítulo I, tiene el siguiente valor:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{kL}{2} \text{-----} (5.1)$$

en donde A es el área de la sección transversal de la columna; S , es el módulo de sección de la sección transversal de la columna con respecto al eje de flexión (en este caso el eje Z) y que se puede determinar como $S = I/c$, siendo " I " el momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto al eje de flexión (eje Z) y " c ", la distancia de la fibra más alejada en compresión al eje centroidal de flexión (eje Z).

En la expresión (5.1), recordaremos por el capítulo I que:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \text{-----} (5.2)$$

y

$$L = Kl \text{-----} (5.3)$$

donde " l " es la longitud real entre apoyos; K , el factor de longitud efectiva de pandeo definido en el capítulo I, y L la longitud efectiva de la columna.

Sustituyendo en la igualdad (5.1) a la constante k por su valor dado en la ecuación (5.2) se obtiene:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \text{-----} (5.4)$$

multiplicando y dividiendo el argumento de la secante en la ecuación (5.4) por π se tiene:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{\pi L}{2 \pi} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

o sea

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{PL^2}{\pi^2 EI}}$$

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{\pi^2 EI/L^2}} \text{-----} (5.5)$$

el término $\pi^2 EI/L^2$ que aparece en el radical de la ecuación (5.5) es el valor de la carga axial crítica de la columna como quedó establecido en el capítulo I, esto es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{-----} (5.6)$$

si reemplazamos en (5.5) dicho término por P_{cr} , nos queda que:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \text{-----} (5.7)$$

En la tabla 5.1. y en la gráfica de la figura 5.5 se puede observar que para valores de P menores que la mitad de P_{cr} , esto es, para $P \leq 0.5 P_{cr}$, se tiene:

$$\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \doteq \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \text{-----} (5.8)$$

$\frac{P}{P_{cr}}$	$\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$	$\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$
0.0	1.00	1.00
0.1	1.14	1.11
0.2	1.31	1.25
0.3	1.53	1.43
0.4	1.83	1.67
0.5	2.25	2.00
0.6	2.88	2.50
0.7	3.94	3.33
0.8	6.06	5.00
0.9	12.42	10.00
1.0	∞	∞

**TABLA 5.1 VARIACION DE CADA MIEMBRO DE LA ECUACION (5.8)
EN FUNCION DE P/P_{cr}**

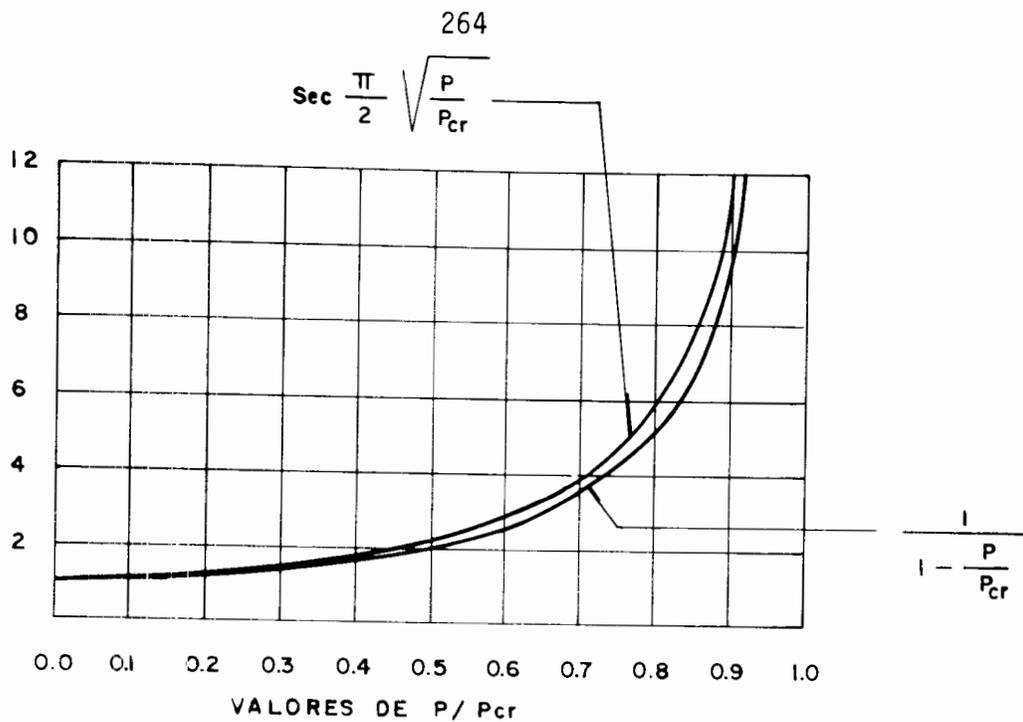


FIG. 5.5 VARIACION DE CADA MIEMBRO DE LA ECUACION (5.8) EN FUNCION DE P/P_{cr}

Puesto que exigiremos que la carga actuante P , no sobrepase la mitad de P_{cr} -- (en el capítulo I establecimos para columnas esbeltas de acero que $P \leq \{12/23\} P_{cr}$) podemos admitir la aproximación que se expresa en la igualdad (5.8) y hacer la sustitución en la ecuación (5.7), con lo cual tenemos:

$$f_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Pq}{S} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \text{-----} (5.9)$$

Como vemos en esta igualdad (5.9), el esfuerzo máximo de compresión en la columna, debido al estado de flexocompresión que genera la carga excéntrica, P , es igual al esfuerzo de compresión pura P/A debido a la carga axial P , más el esfuerzo de compresión Pq/S debido a la flexión originada por el momento Pq que se produce por la excentricidad de la carga P , afectado del factor $1/(1-P/P_{cr})$ que siempre es mayor que 1.0, ya que $P < P_{cr}$, que incrementa el esfuerzo de flexión Pq/S en la medida que corresponde al efecto de segundo orden. Debe recordarse que el efecto de la carga excéntrica P , de excentricidad q , es equivalente a la suma de los efectos de una carga axial de valor P , más un momento flexionante de valor Pq .

Al esfuerzo actuante de compresión pura lo designamos con f_a , y al esfuerzo actuante de compresión debido al momento flexionante de primer orden con f_b , esto es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{A} &= f_a \\ \frac{Pq}{S} &= f_b \end{aligned} \right\} \text{----- (5.10)}$$

haciendo en la ecuación (5.9) las sustituciones correspondientes por los valores indicados en las igualdades (5.10) queda:

$$f_{\text{máx}} = f_a + f_b \left(\frac{1}{1-P/P_{\text{cr}}} \right) \text{----- (5.11)}$$

Dividamos ahora los dos miembros de la igualdad (5.11) entre $f_{\text{máx}}$:

$$\frac{f_a}{f_{\text{máx}}} + \frac{f_b \left(\frac{1}{1-P/P_{\text{cr}}} \right)}{f_{\text{máx}}} = 1 \text{----- (5.12)}$$

Como hemos considerado que el área de la sección transversal es constante, las cargas axiales P y P_{cr} son directamente proporcionales al esfuerzo actuante de compresión pura y al esfuerzo crítico de Euler, f_a y f_{cr} , respectivamente, por lo que:

$$\frac{P}{P_{\text{cr}}} = \frac{f_a}{f_{\text{cr}}} \text{----- (5.13)}$$

Sustituyendo en la ecuación (5.12) la relación P/P_{cr} por su valor dado en la ecuación (5.13), resulta:

$$\frac{f_a}{f_{\text{máx}}} + \frac{f_b \left(\frac{1}{1-f_a/f_{\text{cr}}} \right)}{f_{\text{máx}}} = 1.0 \text{----- (5.14)}$$

El esfuerzo máximo de compresión pura en la columna, es el esfuerzo último de compresión uniforme que la pieza puede resistir; del mismo modo, el esfuerzo máximo de compresión debido a flexión en la columna, es el esfuerzo último que la pieza resiste bajo este efecto. Al primero lo representamos con f_{uc} y al segundo con f_{ub} ; entonces, reemplazando en la igualdad (5.14) los denominadores que representan los esfuerzos máximos, $f_{m\acute{a}x}$, por f_{uc} y f_{ub} tenemos:

$$\frac{f_a}{f_{uc}} + \frac{f_b \left(\frac{1}{1 - f_a/f_{cr}} \right)}{f_{ub}} = 1.0 \quad \text{-----} \quad (5.15)$$

Esta igualdad expresa que en las condiciones de resistencia última de una columna esbelta de material elástico lineal, sujeta a un estado de flexocompresión, la suma de las relaciones de esfuerzo de compresión uniforme actuante, entre el esfuerzo último de compresión uniforme, más el esfuerzo de compresión debido a flexión actuante, tanto de primero como de segundo orden, entre el esfuerzo último de compresión por flexión, debe ser igual a uno.

A la igualdad (5.15) la designamos como "Fórmula de Interacción" para elementos estructurales elásticos esbeltos sujetos a flexocompresión, en condiciones límites de esfuerzo.

En condiciones de servicio, los esfuerzos últimos f_{uc} y f_{ub} deberán sustituirse por los esfuerzos admisibles de compresión pura, F_a , y de compresión por flexión, F_b . El esfuerzo crítico de Euler, f_{cr} , deberá reducirse con el factor de seguridad correspondiente a piezas estructurales esbeltas de comportamiento elástico, sometidas a carga axial de compresión; el valor reducido de f_{cr} se representa con F'_e , y se conoce como "Esfuerzo de Euler", esto es:

$$F'_e = \frac{f_{cr}}{FS} \quad \text{-----} \quad (5.16)$$

De esta manera la fórmula de interacción (5.15), toma la siguiente forma:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b \left(\frac{1}{1 - f_a/F'_e} \right)}{F_b} = 1.0 \quad \text{-----} \quad (5.17)$$

que es la "Fórmula de Interacción" para columnas esbeltas de material elástico lineal a flexocompresión en un plano.

Esta "Fórmula" expresa que la suma de las relaciones de esfuerzos: de compresión actuante pura, entre el esfuerzo de compresión uniforme permisible, más compresión por flexión actuante, de primero y segundo orden, entre flexión admisible, debe ser igual a la unidad.

El factor de seguridad FS que se requiere para definir el "esfuerzo de Euler" - en la igualdad (5.16), así como los esfuerzos admisibles a compresión pura F_a - y a compresión por flexión F_b , se determina según la naturaleza de cada material elástico, como se verá después al plantear las fórmulas de interacción específicas para columnas esbeltas de acero y de madera a flexocompresión en un plano, los cuales estableceremos partiendo de la "Fórmula General" (5.17).

V.1.3.- Fórmula de Interacción de columnas esbeltas sujetas a flexocompresión biaxial.

Para el caso de columnas esbeltas elásticas, sujetas a un estado de flexocompresión doble, es decir, con respecto a los dos ejes principales de la sección -- transversal, un proceso similar al que se ha seguido para llegar a la fórmula - (5.17) conduce a la siguiente igualdad:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx} \left(\frac{1}{1-f_a/F'_{ex}} \right)}{F_{bx}} + \frac{f_{bz} \left(\frac{1}{1-f_a/F'_{ez}} \right)}{F_{bz}} = 1.0 \text{ -----(5.18)}$$

Esta igualdad es conocida como "Fórmula de Interacción de columnas a flexocompresión biaxial" para condiciones de servicio.

Esta fórmula expresa que en una columna esbelta de material elástico lineal, en equilibrio externo e interno, sujeta a un estado de flexocompresión con respecto a los dos ejes X, Z de la sección transversal, la suma de las relaciones de esfuerzos de compresión pura actuante, entre compresión uniforme permisible; -- más compresión por flexión actuante de primero y segundo orden, entre compresión

si3n permisible por flexi3n con respecto al eje X de la secci3n transversal de la columna; m3s la misma relaci3n conceptual de esfuerzos, con respecto al eje Z de la misma secci3n transversal, debe ser igual a la unidad.

La flexocompresi3n biaxial en una columna, se puede considerar como resultado de la aplicaci3n de una fuerza vertical P, exc3ntrica con respecto a ambos ejes X, Z de la secci3n transversal.

Pongamos por ejemplo el caso de una columna de secci3n rectangular, cuyo eje longitudinal hacemos coincidir con el eje Y, y los ejes principales de la secci3n transversal con los ejes X y Z (ver figura 5.6).

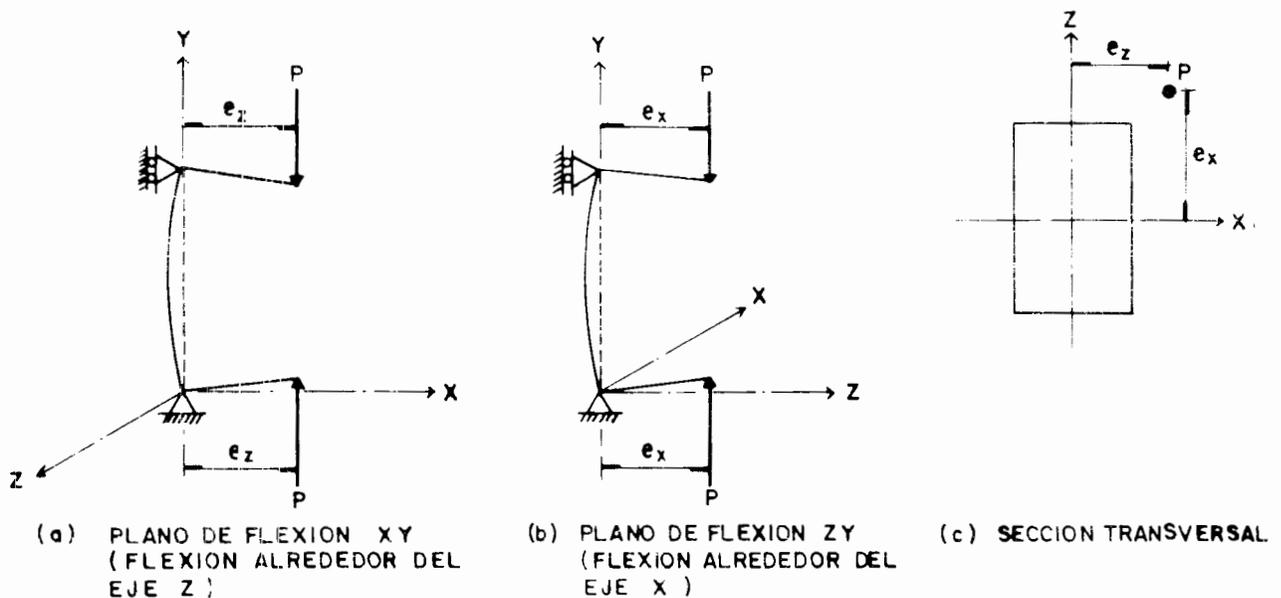


FIG. 5.6 - COLUMNA ESBELTA EN UN ESTADO DE FLEXOCOMPRESION EN DOS PLANOS

En la figura 5.6.a se muestra la el3stica de la columna en el plano de flexi3n XY, que se genera por efecto de la excentricidad de la carga P, paralela al eje X, a la que se designa como e_z ; en este caso el eje de flexi3n es el Z. En la figura 5.6.b se observa la el3stica de la columna en el plano de flexi3n YZ, entonces el eje de flexi3n es el X. Dicha flexi3n se origina como resultado de la excentricidad de la carga P, paralela al eje Z que denotamos con e_x . En la figura 5.6.c se ilustra la secci3n transversal de la columna y la posici3n de la carga P.

Las condiciones de apoyo de la columna en el plano XY pueden ser diferentes a las del plano YZ, además el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje Z puede ser distinto al correspondiente al eje X. Por tales motivos, en las columnas en flexocompresión doble habrá que calcular en general, separadamente, los términos f_{bx} , F_{bx} y F'_{ex} de los términos f_{bz} , F_{bz} y F'_{ez} , para sustituir en la fórmula de interacción biaxial.

V.2.- DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS DE ACERO SUJETAS A FLEXOCOMPRESION.

En el caso de columnas de acero sometidas a flexocompresión biaxial, las normas de diversos reglamentos se basan en la revisión de esfuerzos mediante la fórmula general de interacción (5.18) de tal manera que la suma de las relaciones de esfuerzos de compresión axial entre compresión axial admisible; más compresión por flexión de primero y segundo orden, entre compresión permisible por flexión respecto a cada uno de los ejes principales de la sección transversal no exceda la unidad, de modo que:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} \left(\frac{1}{1-f_a/F'_{ex}} \right) + \frac{f_{bz}}{F_{bz}} \left(\frac{1}{1-f_a/F'_{ez}} \right) \leq 1.0 \quad \text{-----}(5.19)$$

En esta expresión, los términos

$$y \left. \begin{array}{l} \frac{1}{1-f_a/F'_{ex}} \\ \frac{1}{1-f_a/F'_{ez}} \end{array} \right\} \text{-----} (5.20)$$

son factores de amplificación que toman en cuenta el efecto de segundo orden - como fue descrito en la sección V.1.2., y sólo son válidos para todos los casos de columnas en cuyos extremos se tienen momentos flexionantes del mismo valor y signo contrario que le producen curvatura simple y no existe carga transversal entre los apoyos. Sin embargo, este factor es demasiado conservador para aquellos casos en que los momentos en los extremos son de diferente valor y pro

ducen curvatura coble en las columnas. Esto se corrige aplicando a los factores de amplificación un coeficiente de reducción, C_{mx} y C_{mz} respectivamente, que -- están en función de la variación de los momentos flexionantes a lo largo de la columna, de los desplazamientos relativos transversales entre los extremos y de la presencia de cargas laterales entre apoyos en cada plano de flexión.

V.2.1.- Dimensionamiento conforme a las normas de AISC.

Las normas del AISC (ref. 5.1.) especifican que una columna sujeta a flexocompresión biaxial en la que el esfuerzo actuante a compresión pura sea mayor que el 15% del esfuerzo axial admisible ($f_a > 0.15 F_a$), se debe diseñar de tal manera que cumpla con la siguiente fórmula de interacción:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{\left(1 - \frac{f_a}{F_{ex}}\right) F_{bx}} + \frac{C_{mz} f_{bz}}{\left(1 - \frac{f_a}{F_{ez}}\right) F_{bz}} \leq 1.0 \text{ -----(5.21)}$$

en la que debe siempre observarse que:

$$f_{bx} < F_{bx} \quad \text{y}$$

$$f_{bz} < F_{bz}$$

La forma de obtener cada uno de los parámetros que intervienen en la fórmula - (5.21) se detallará en la sección V.2.1.a. Por otro lado, en algunos casos es posible que, dependiendo de la relación de esbeltez en el plano de flexión, - los esfuerzos combinados calculados en uno o en ambos extremos de la columna - puedan exceder los correspondientes esfuerzos que se producen en cualquier sección intermedia donde existe desplazamiento lateral originado por los momentos en los extremos (efecto de segundo orden).

Por lo tanto, adicionalmente a la revisión con la fórmula (5.21) se deberá diseñar para satisfacer la siguiente limitación, en los extremos de la columna:

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{bz}}{F_{bz}} \leq 1.0 \text{ ----- (5.22)}$$

En la ecuación (5.22) se han omitido los factores de amplificación $C_{mx}/(1-f_a/F'_{ex})$ y $C_{mz}/(1-f_a/F'_{ez})$ ya que en los extremos de la columna no existe incremento de excentricidad de la carga por efectos de segundo orden y el esfuerzo admisible de compresión axial, F_a , se ha sustituido por $0.6F_y$ debido a que en algunos casos, es posible que rija en el diseño la fluencia del acero sobre la estabilidad de la columna. Este caso se presenta generalmente en columnas flexionadas en curvatura doble cuando la relación del menor al mayor de los momentos en los extremos excede de 0.5.

En las fórmulas (5.21) y (5.22), el término f_b con subíndices X y Z se define como el esfuerzo actuante de flexión, calculado en la sección transversal, respecto a sus ejes principales X y Z.

En ausencia de carga transversal entre los puntos de apoyo, el diseño deberá hacerse revisando las fórmulas (5.21) y (5.22) en las que f_b se determina con el mayor de los momentos que actúan en uno de los apoyos (ver tabla T.5.1.).

Cuando existe carga transversal entre los apoyos, el diseño deberá hacerse para satisfacer las fórmulas (5.21) y (5.22) con las siguientes observaciones: a) en la revisión de la fórmula (5.21), el esfuerzo f_b deberá calcularse con el mayor de los momentos que se presente entre los apoyos, con esta condición se evita la posibilidad de falla por pandeo, y b) en la revisión de la fórmula (5.22) el esfuerzo f_b deberá calcularse con el mayor de los momentos que están actuando en uno de los dos extremos apoyados (ver tabla T.5.1.).

Cuando el esfuerzo actuante de compresión axial, f_a , no excede del 15% del esfuerzo axial admisible ($f_a \leq 0.15 F_a$), la influencia del factor de amplificación $C_m/(1-f_a/F'_e)$ es generalmente tan pequeña que puede ser despreciada; así, la fórmula de interacción (5.21) se puede reducir a:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{bz}}{F_{bz}} \leq 1.0 \text{ ----- (5.23)}$$

V.2.1.a. Determinación de las variables que intervienen en las fórmulas (5.21), (5.22) y (5.23).

1.- Esfuerzo actuante de compresión pura, f_a , en kg/cm^2 .

FAC. DE INGENIERIA
DOCUMENTACION

$$f_a = \frac{P}{A}$$

en donde P es la carga axial actuante en condiciones de servicio, y A el área de la sección transversal.

2.- Esfuerzos actuantes por flexión f_{bx} , f_{bz} , en kg/cm^2 .

$$f_{bx} = \frac{M_x}{S_x}, \quad f_{bz} = \frac{M_z}{S_z}$$

en que M_x , M_z , S_x y S_z son los momentos flexionantes y módulos de sección de la sección transversal respecto a sus ejes principales X y Z respectivamente. Para calcular los esfuerzos f_{bx} y f_{bz} es necesario tomar en consideración la ausencia o presencia de carga transversal entre los apoyos como se explicó en la sección V.2.1 y en la tabla T.5.1.

3.- Esfuerzo admisible por compresión axial, F_a , en kg/cm^2 .

Este es el esfuerzo de compresión axial que debe ser admitido como si solamente existiera dicho esfuerzo. Para su cálculo se deben consultar las recomendaciones del AISC que se estudiaron en la sección I.4 del capítulo I.

4.- Esfuerzos permisibles por flexión, F_{bx} , F_{bz} , en kg/cm^2 .

Los esfuerzos F_{bx} y F_{bz} son los esfuerzos de compresión permisible cuando la flexión ocurre alrededor de los ejes X y Z respectivamente. Estos esfuerzos deben ser calculados como si solamente existiera dicho efecto. Para conocer a detalle los valores permisibles se sugiere consultar el apéndice E.

5.- Esfuerzo de Euler reducido: F'_{ex} , F'_{ez} , en kg/cm^2 .

$$F'_e = \frac{f_{cr}}{FS}$$

donde f_{cr} es el esfuerzo crítico de pandeo que vale, conforme a la ecuación (1.42) del capítulo I, $f_{cr} = \pi^2 E / (KL/r)^2$ y el factor de seguridad recomendado por el AISC es $FS = 23/12$; por lo tanto:

$$F'_e = \frac{12 \pi^2 E}{23(KL/r)^2}$$

Así, cuando la flexión ocurre alrededor de los ejes X y Z:

$$F'_{ex} = \frac{12 \pi^2 E}{23(KL/r_x)^2}$$

$$F'_{ez} = \frac{12 \pi^2 E}{23(KL/r_z)^2}$$

en que E es el módulo de elasticidad del acero en Kg/cm^2 , K es el coeficiente de longitud efectiva de pandeo como se definió en el capítulo I; L es la longitud real no arriostrada en el plano de flexión considerado y r_x y r_z son el radio de giro de la sección transversal respecto a los ejes X y Z.

Cuando un elemento estructural esté sometido a flexocompresión bajo cargas debidas a viento o sismo, actuando solos o en combinación con las cargas muertas y vivas de servicio permanentes, los esfuerzos permisibles F_a , F_{bx} , F_{bz} y $0.6F_y$, así como los esfuerzos de Euler F'_{ex} y F'_{ez} podrán incrementarse en un 33% siempre que la sección requerida bajo estas condiciones no sea menor que la requerida para la combinación de cargas muertas, vivas e impacto (en caso de que éste exista) calculadas sin el incremento del 33% en los esfuerzos admisibles.

6.- Coeficiente de reducción C_{mx} , C_{mz} (adimensional).

El coeficiente C_m para cada plano de flexión depende de las siguientes condiciones: del efecto de los momentos en los extremos de la columna así como de la forma de la curvatura del eje de la columna (simple o doble) - originada por éstos, del desplazamiento lateral relativo entre los dos ex-

tremos de la columna y de la ausencia o presencia de cargas transversales - entre los puntos de apoyo en el plano de flexión considerado.

6a.) Para elementos en flexocompresión que formen parte de marcos restringidos - contra desplazamientos laterales en su plano de tal manera que no exista la posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus extremos y sin estar sujetos a cargas transversales entre sus apoyos en el plano de flexión (fig. 5.7):

$$C_m = 0.6 - 0.4 \frac{M_1}{M_2}, \text{ pero no menos de } 0.4$$

donde M_1/M_2 es la relación del menor al mayor de los momentos en los extremos del elemento en el plano de flexión bajo consideración. La relación -- M_1/M_2 es de signo positivo cuando el miembro se deforma en curvatura doble, y negativo cuando el miembro se deforma en curvatura simple. (fig. 5.7.a.- y 5.7.b.)

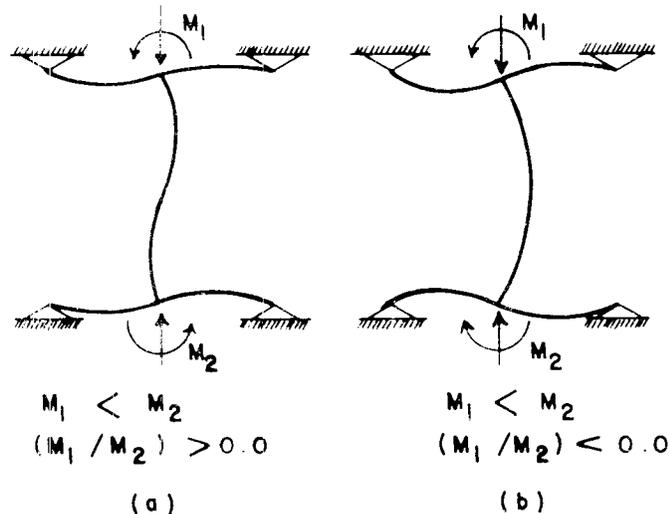


FIG. 5.7.- CONVENCION DE SIGNOS DE M_1/M_2 PARA CALCULAR $C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2) \geq 0.4$ EN COLUMNAS SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL RELATIVO ENTRE SUS EXTREMOS.

- 6b.) Para elementos en flexocompresión en marcos no restringidos contra desplazamientos laterales en su plano (fig. 5.8): $C_m = 0.85$

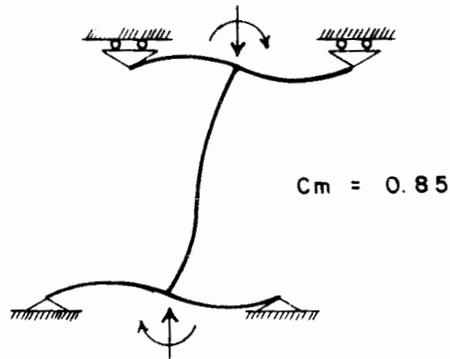


FIG. 5.8.- COLUMNA CON DESPLAZAMIENTO LATERAL RELATIVO ENTRE SUS EXTREMOS.

- 6c.) Para elementos en flexocompresión en marcos restringidos contra desplazamientos laterales en su plano de tal manera que no exista la posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus extremos y sujetos a cargas transversales entre sus apoyos, los siguientes valores aproximados de C_m pueden utilizarse (fig. 5.9):

Para elementos en los cuales el momento máximo se presenta en uno o en los dos de los extremos ----- $C_m = 0.85$

Para elementos en los cuales el momento máximo se presenta en cualquier sección localizada entre los extremos ----- $C_m = 1.0$

En forma alternativa el valor de C_m en el plano en consideración, puede determinarse mediante la ecuación siguiente:

$$C_m = 1 + \Psi \frac{f_a}{F_e}$$

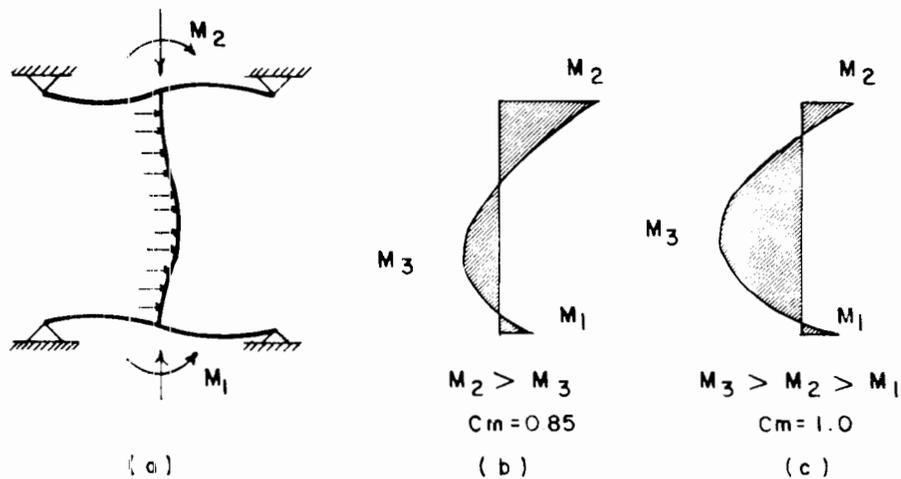


FIG. 5.9— COLUMNA SIN DESPLAZAMIENTO LATERAL RELATIVO ENTRE SUS EXTREMOS Y CON CARGA TRANSVERSAL.

en donde Ψ es un valor que depende del tipo de carga transversal y del tipo de apoyo en los extremos de la columna. En la tabla T.5.2 se muestran diferentes valores de Ψ cuando los apoyos son articulaciones o empotramientos perfectos.

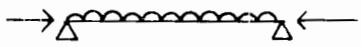
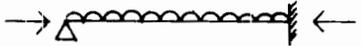
En el caso en que el momento máximo se presenta en uno o en los dos extremos de la columna, el valor de C_m resulta ligeramente menor que la unidad (en este caso se recomienda $C_m = 0.85$). Sin embargo, cuando el momento máximo ocurre en alguna sección cercana al centro del claro, el valor de Ψ se determina con la siguiente expresión:

$$\Psi = \frac{\pi^2 \delta_0 EI}{M_0 L^2} - 1$$

donde δ_0 es la máxima deflexión debida a la carga transversal y M_0 es el máximo momento flexionante ocasionado por la carga transversal y que se presenta entre los apoyos de la columna.

TABLA T.5.1 - RESUMEN DE DISEÑO POR FLEXOCOMPRESIÓN DE ELEMENTOS DE ACERO, CONFORME A NORMAS DEL AIS C						
CONDICION DE CARGA AXIAL	CASO	DIAGRAMA DE MOMENTOS	CONDICIONES DE FLEXION	Cm.	f _b	FORMULAS QUE SE DEBEN SATISFACER
f _a > 0.15 F _a	(1)		M ₂ > M ₁ (M ₁ /M ₂) → (+)	0.6 - 0.4 (M ₁ /M ₂) ≥ 0.4	M ₂ /S	(5.21) Y (5.22)
	(2)		M ₂ > M ₁ (M ₁ /M ₂) → (-)	0.6 - 0.4 (M ₁ /M ₂) ≥ 0.4	M ₂ /S	(5.21) Y (5.22)
	(3)		M ₂ > M ₁	0.85	M ₂ /S	(5.21) Y (5.22)
	(4)		M ₂ > M ₁ M ₂ > M ₃	0.85 ó [1 + Ψ f _a /F _e]	M ₂ /S M ₃ /S	(5.22) (5.21)
f _a ≤ 0.15 F _a	CUALQUIER CASO (1) a (4)	—	—	—	M _{max} /S	(5.23)

TABLA T. 5.2

C A S O	Ψ
	0 . 0
	-0 . 4
	-0 . 4
	-0 . 2
	-0 . 3
	-0 . 2

Cuando se tiene un elemento bajo flexocompresión en un sólo plano, en las fórmulas (5.21), (5.22) y (5.23) se puede omitir uno de los dos términos correspondientes a los efectos de flexión respecto al eje X o Z según sea el caso, de modo que en el plano de flexión cuando $f_a > 0.15 F_a$, se debe diseñar para satisfacer las siguientes fórmulas (5.24) y (5.25):

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_e}\right) F_b} \leq 1.0 \text{----- (5.24), en lugar de la fórmula (5.21)}$$

en que $f_b < F_b$

y

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0 \text{----- (5.25), en lugar de la fórmula (5.22)}$$

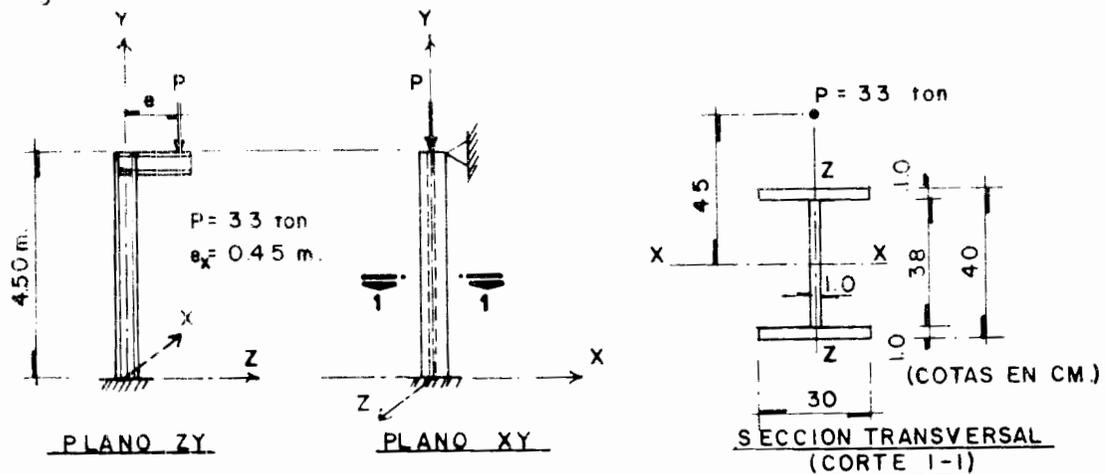
En el caso de que $f_a \leq 0.15 F_a$:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0 \text{ ----- (5.26), en lugar de la fórmula (5.23)}$$

En las fórmulas (5.24), (5.25) y (5.26), las variables f_a , f_b , F_a , F_b , F'_e y C_m pueden determinarse en el plano de flexión conforme a la sección V.2.1.a, incisos 1 a 6.

V.2.2.- Ejemplos

Ejemplo 5.1.- Se tiene una columna de acero A-36 de 4.50 m de altura, que en el plano ZY está empotrada en la base y libre en el extremo superior, y en el plano XY está empotrada en la base y articulada en su extremo superior. Revisar si la sección I propuesta es adecuada para soportar en condiciones de servicio una carga de 33 ton. aplicada a 0.45 m del eje X. Considerar para el acero A-36 que $F_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$ y $E = 2.039 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$.



Solución:

Elementos mecánicos.-

$P = 33 \text{ ton.}$

$$M_x = P e_x = 33 (0.45) = 14.85 \text{ ton-m (constante)}$$

$$M_z = P e_z = 33 (0) = 0.0 \text{ ton-m}$$

Por ser flexocompresión en el plano ZY se aplican las fórmulas (5.24), (5.25) ó (5.26) según corresponda al caso.

Propiedades geométricas de la sección.

$$A = 30 \times 1.0 \times 2 + 38 \times 1.0 = 98 \text{ cm}^2$$

$$I_x = \frac{30 (40)^3}{12} - \frac{(30-1) (38)^3}{12} = 27393 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{1.0(30)^3}{12} \times 2 + \frac{38(1)^3}{12} = 4503 \text{ cm}^4$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{27393}{98}} = 16.7 \text{ cm}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{4503}{98}} = 6.8 \text{ cm}$$

$$S_x = \frac{I_x}{C_x} = \frac{27393}{20} = 1370 \text{ cm}^3$$

$$S_z = \frac{I_z}{C_z} = \frac{4503}{15} = 300 \text{ cm}^3$$

En el mismo orden de la sección V.2.1.a.:

1.- f_a :

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{33000}{98} = 337 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

2.- f_{bx} , f_{bz} :

$$f_{bx} = \frac{M_x}{S_x} = \frac{14.85 \times 10^5}{1370} = 1084 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} < 0.6F_y = 0.6 \times 2530 = 1518 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{bz} = 0.0$$

3.- F_a :

Relación de esbeltez: en el plano ZY, por estar en cantilever $K_x = 2.1$

y en el plano XY, $K_z = 0.8$ (ver tabla en la sección I.4)

$$\frac{K_x L}{r_x} = \frac{2.1 \times 450}{16.7} = 56.6$$

$$\frac{K_z L}{r_z} = \frac{0.8 \times 450}{6.8} = 52.9$$

por lo tanto, para pandeo por carga axial rige $K_x L/r_x = 56.6$ y es menor que $C_c = \sqrt{2\pi^2 E/F_y}$ cuyo valor para el acero A-36 es $C_c = 126.1$, lo que indica que su comportamiento se encuentra en el rango inelástico y el esfuerzo F_a se determina con la ecuación (1.55) en la que el factor de seguridad es:

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}$$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(56.6)}{8(126.1)} - \frac{(56.6)^3}{8(126.1)^3} = 1.824$$

$$F_a = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2 C_c^2} \right] \frac{F_y}{FS_2}$$

$$F_a = \left[1 - \frac{(56.6)^2}{2(126.1)^2} \right] \frac{2530}{1.824} = 1247 \text{ kg/cm}^2$$

4.- F_{bx} , F_{bz} :

Como sólo hay flexión alrededor del eje X no es necesario calcular F_{bz} . Para una sección I, el esfuerzo F_{bx} se determina conforme al apéndice E o al capítulo III de este libro (sección III.2.1); así, el esfuerzo permisible máximo a flexión debe ser el mayor de los valores dados por las ecuaciones (3.9), (3.10) ó (3.11) según sea el caso, pero sin que exceda $0.6 F_y$.

Por la ecuación (3.9):

$$F_b = \frac{0.6(0.69)E C_b}{Ld/bt}$$

en donde d es el peralte total de la sección, b y t son el ancho y el espesor del patín en compresión y

$$C_b = 1.75 + 1.05 (M_1/M_2) + 0.3 (M_1/M_2)^2 \leq 2.3$$

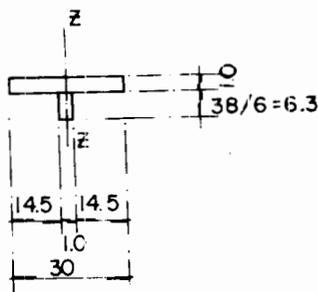
$$\frac{M_1}{M_2} = - \frac{14.85}{14.85} = -1 \text{ (curvatura simple)}$$

$$C_b = 1.75 + 1.05 (-1) + 0.3 (-1)^2 = 1.0 < 2.3$$

por tanto

$$F_b = \frac{0.6(0.69) (2.039 \times 10^6)(1.0)}{450(40)/(30)(1.0)} = 1407 \text{ kg/cm}^2 < 0.6 F_y = 1518 \text{ kg/cm}^2$$

Relación de esbeltez L/r_T :



$$I_T = \frac{1.0 (30)^3}{12} + \frac{6.3 (1)^3}{12} = 2250 \text{ cm}^4$$

$$A_T = 30 \times 1 + 6.3 \times 1 = 36.3 \text{ cm}^2$$

$$r_T = \sqrt{\frac{I_T}{A_T}} = \sqrt{\frac{2250}{36.3}} = 7.87 \text{ cm}$$

$$\frac{L}{r_T} = \frac{450}{7.87} = 57.2$$

Coficiente de columna C'_c

$$C'_c = \sqrt{\frac{(35.86)(10^6) C_b}{F_y}}$$

$$C'_c = \sqrt{\frac{35.86(10^6)(1)}{2530}} = 119.05$$

$$\frac{L}{r_T} < C'_c \therefore \text{pandeo inelástico}$$

mediante la ecuación (3.11):

$$F_b = \left[\frac{2}{3} - \frac{F_y (L/r_T)^2}{(107.6) (10^6) C_b} \right] F_y$$

$$F_b = \left[\frac{2}{3} - \frac{2530 (57.2)^2}{(107.6) (10^6) (1)} \right] 2530 = 1492 \text{ kg/cm}^2 < 0.6 F_y = 1518 \text{ kg/cm}^2$$

de la ecuación (3.9) y (3.11) rige el mayor de los valores obtenidos para F_b , por lo tanto, el esfuerzo máximo permisible por flexión respecto al eje X es: -
 $F_{bx} = 1492 \text{ kg/cm}^2 < 0.6 F_y$

5.- F'_{ex} :

$$F'_{ex} = \frac{12 \pi^2 E}{23 (KL/r_x)^2}$$

$$F'_{ex} = \frac{12 \pi^2 \times 2.039 \times 10^6}{23 (56.6)^2} = 3277 \text{ kg/cm}^2$$

6.- C_{mx} :

En el plano ZY no hay restricciones contra desplazamientos laterales; por lo tanto:

$$C_{mx} = 0.85$$

Revisión de esfuerzos:

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{337}{1247} = 0.27 > 0.15$$

revisión de la fórmula (5.21):

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_{ex}}\right) F_{bx}} + \frac{C_{mz} f_{bz}}{\left(1 - \frac{f_a}{F'_{ez}}\right) F_{bz}} \leq 1.0$$

$$\frac{337}{1247} + \frac{0.85 \times 1084}{\left(1 - \frac{337}{3277}\right) 1492} + 0 = 0.96 < 1.0$$

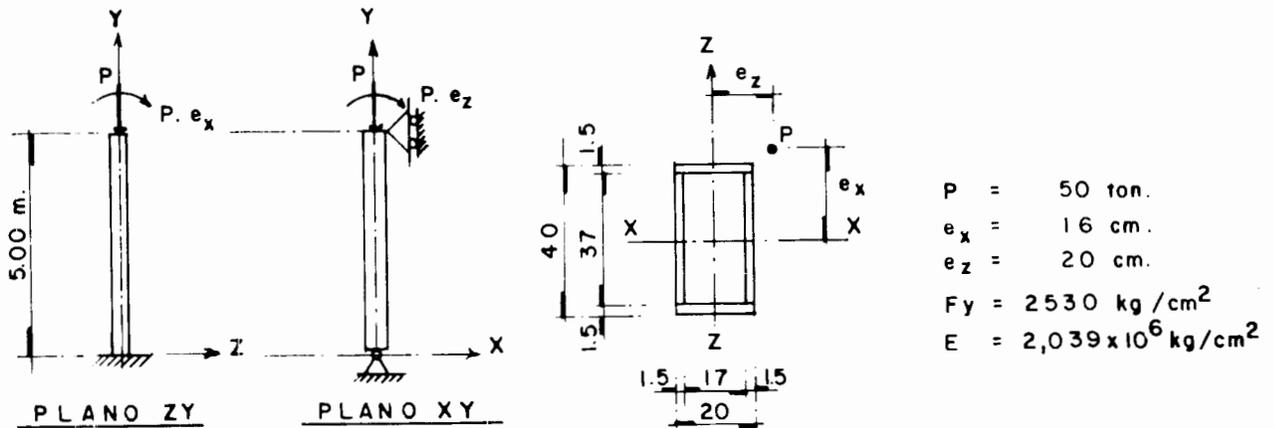
revisión de la fórmula (5.22):

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{bz}}{F_{bz}} \leq 1.0$$

$$\frac{337}{1518} + \frac{1084}{1492} + 0 = 0.95 < 1.0$$

por lo tanto la sección I propuesta es adecuada.

Ejemplo 5.2.- Revisar si la sección cajón de acero A-36 de la columna mostrada en la figura, es adecuada para soportar las cargas que están actuando en ella.



Solución:

Elementos mecánicos en el extremo superior:

$$P = 50\,000 \text{ kg}$$

$$M_x = P e_x = 50\,000 \times 16 = 8 \times 10^5 \text{ kg cm}$$

$$M_z = P e_z = 50\,000 \times 20 = 10 \times 10^5 \text{ kg cm}$$

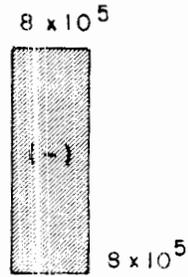
Elementos mecánicos en el extremo inferior:

$$P = 50\,000 \text{ kg}$$

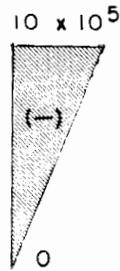
$$M_x = 8 \times 10^5 \text{ kg cm}$$

$$M_z = 0.0 \text{ kg cm (por ser articulación)}$$

Diagrama de momentos:



a) M_x (Kg cm) PLANO ZY



b) M_z (Kg cm) PLANO XY

Propiedades geométricas de la sección.

$$A = 20 \times 40 + 17 \times 37 = 171 \text{ cm}^2$$

$$I_x = \frac{20(40)^3}{12} + \frac{17(37)^3}{12} = 34908 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{40(20)^3}{12} + \frac{37(17)^3}{12} = 11518 \text{ cm}^4$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{34908}{171}} = 14.3 \text{ cm}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{11518}{171}} = 8.2 \text{ cm}$$

$$S_x = \frac{I_x}{C_x} = \frac{34908}{20} = 1745 \text{ cm}^3$$

$$S_z = \frac{I_z}{C_z} = \frac{11518}{10} = 1152 \text{ cm}^3$$

1.- Obtención de f_a

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{50\,000}{171} = 292 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

2.- Cálculo de f_{bx} y f_{bz}

La sección crítica (ver diagramas de momentos) es en el extremo superior, por tanto:

$$f_{bx} = \frac{M_x}{S_x} = \frac{8 \times 10^5}{1745} = 458 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{bz} = \frac{M_z}{S_z} = \frac{10 \times 10^5}{1152} = 868 \text{ kg/cm}^2$$

3.- Esfuerzo admisible F_a

En el plano ZY: $K_x = 2.1$

$$\frac{K_x L}{r_x} = \frac{2.1 \times 500}{14.3} = 73.4$$

En el plano XY: $K_z = 1.0$

$$\frac{K_z L}{r_z} = \frac{1.0 \times 500}{8.2} = 61.0$$

para determinar F_a rige la relación de esbeltez en el plano ZY por ser la de mayor valor; comparando con C_c cuyo valor para el acero A-36 es $C_c = 126.1$ concluimos que su comportamiento es en el rango inelástico, ya que $K_x L/r_x < C_c$. Por lo tanto, conforme a la sección 1.4 del capítulo I:

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(KL/r)}{8C_c} - \frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}$$

$$FS_2 = \frac{5}{3} + \frac{3(73.4)}{8(126.1)} - \frac{(73.4)^3}{8(126.1)^3} = 1.86$$

$$F_a = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2C_c^2} \right] \frac{F_y}{FS_2}$$

$$F_a = \left[1 - \frac{(73.4)^2}{2(126.1)^2} \right] \frac{2530}{1.86} = 1130 \text{ kg/cm}^2$$

4.- Esfuerzos admisibles por flexión F_{bx} y F_{bz} :
Conforme al apéndice E, para una sección cajón:

$$F_{bx} = F_{bz} = 0.6 F_y$$

$$F_{bx} = F_{bz} = 0.6 \times 2530 = 1518 \text{ kg/cm}^2$$

5.- Esfuerzo de Euler F'_{ex} , F'_{ez} :

$$F'_{ex} = \frac{12 \pi^2 E}{23(K_x L/r_x)^2}$$

$$F'_{ex} = \frac{12 \pi^2 \times 2.039 \times 10^6}{23(73.4)^2} = 1949 \text{ kg/cm}^2$$

$$F'_{ez} = \frac{12 \pi^2 E}{23(K_z L/r_z)^2}$$

$$F'_{ez} = \frac{12 \pi^2 \times 2.039 \times 10^6}{23(61.0)^2} = 2822 \text{ kg/cm}^2$$

6.- C_{mx} , C_{mz} :

En el plano ZY por no existir elementos que impidan el desplazamiento relativo entre los extremos:

$$C_{mx} = 0.85$$

En el plano XY, no hay desplazamiento lateral relativo entre los extremos y el diagrama de momentos produce deformación en curvatura simple; por lo tanto, --
(ver caso 2 de la tabla T.5.1):

$$C_{mz} = 0.6 - 0.4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) = 0.4$$

en que

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{0}{10 \times 10^5} = 0$$

∴

$$C_{mz} = 0.6$$

Revisión de esfuerzos f_a/F_a

$$\frac{f_a}{F_a} = \frac{292}{1130} = 0.258 > 0.15 \therefore \text{revisaremos con las fórmulas (5.21) y (5.22):}$$

por la fórmula (5.21):

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx} f_{bx}}{\left(1 - \frac{f_a}{F_{ex}}\right) F_{bx}} + \frac{C_{mz} f_{bz}}{\left(1 - \frac{f_a}{F_{ez}}\right) F_{bz}} \leq 1.0$$

$$0.258 + \frac{0.85 \times 458}{\left(1 - \frac{292}{1949}\right) 1518} + \frac{0.6 \times 868}{\left(1 - \frac{292}{2822}\right) 1518} =$$

$$0.258 + 0.302 + 0.383 = 0.943 < 1.0$$

por la fórmula (5.22):

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{bz}}{F_{bz}} \leq 1.0$$

$$\frac{292}{1518} + \frac{458}{1518} + \frac{868}{1518} =$$

$$0.192 + 0.302 + 0.572 = 1.066 > 1.0$$

como no se cumple la fórmula (5.22) podemos concluir que rige la falla por fluencia en los apoyos y por lo tanto habrá que proponer una sección transversal de mayores dimensiones. Sin embargo, como el exceso de la suma de relaciones de esfuerzo, con respecto a la unidad es sólo de 6.6%, puede admitirse la sección propuesta.

V.3.- DIMENSIONAMIENTO Y REVISION DE COLUMNAS DE MADERA SUJETAS A FLEXOCOMPRESION.

V.3.1.- Introducción.

En el estudio de columnas de madera de sección transversal maciza cuadrada o rectangular bajo flexocompresión paralela a las fibras, el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (ver. ref. 5.2.) parte de la ecuación (5.17) y aplica sus recomendaciones al diseño por flexocompresión en un sólo plano de simetría de columnas rectangulares.

La flexocompresión biaxial no está suficientemente estudiada por el RCDF por lo que se recomienda evitar el efecto simultáneo de flexión en los planos de simetría. Para esto, el mismo reglamento sugiere arriostrar a la columna o usar diafragmas que impidan su deformación en uno de los planos, (ver. ref. 5.2).

V.3.2.- Fórmula de interacción.

Partamos de la fórmula de interacción (5.17) para el diseño de una columna en flexocompresión en un plano, bajo la acción de carga vertical excéntrica y carga horizontal como se muestra en la figura (5.10).

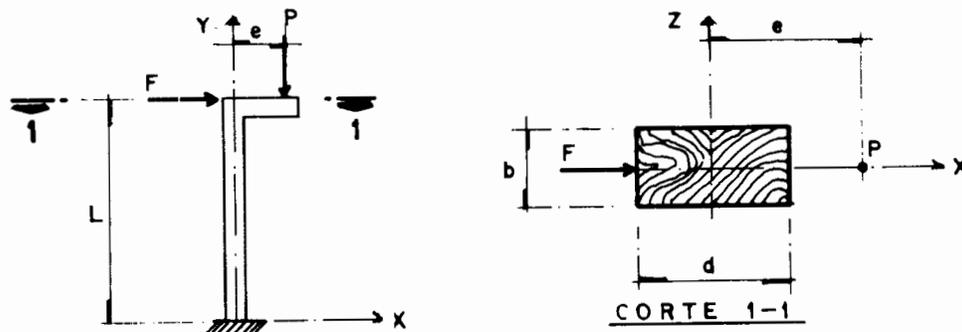


FIG. 5.10 - FUERZAS ACTUANTES EN UNA COLUMNA DE MADERA .

En la fórmula (5.17) se debe satisfacer que:

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \left(\frac{1}{1-f_a/F'_e} \right) \leq 1.0 \text{ -----(5.27)}$$

en donde los términos f_a y F_a fueron definidos en el capítulo I en el tema relativo a columnas de madera bajo carga axial. Recordemos que

$$f_a = \frac{P}{A_n}$$

en donde A_n es el área neta de la sección transversal que vale $A_n = b_n d_n$, siendo b_n y d_n las dimensiones netas de la sección que se obtienen reduciendo 1 cm a cada lado de la sección nominal.

Así, de la figura 5.10:

$$b_n = b - 1 \text{ (cm)}$$

$$d_n = d - 1 \text{ (cm)}$$

F_a es el esfuerzo permisible en compresión paralela a las fibras, que se definió en el tema relativo a columnas de madera bajo compresión axial del capítulo I en el que $F_a = f_{cd}$.

El término:

$$f_b \left(\frac{1}{1-f_a/F'_e} \right)$$

es el producto del esfuerzo actuante de flexión, f_b , por el factor de amplificación $1/(1-f_a/F'_e)$. En el caso de las columnas de madera de sección rectangular dicho producto se expresa como M_T/S , o sea:

$$f_b \left(\frac{1}{1-f_a/F'_e} \right) = \frac{M_T}{S} \text{ -----(5.28)}$$

siendo

$$M_T = M + \beta M_e \text{ -----(5.29)}$$

donde

M = momento flexionante máximo debido a cargas transversales al eje longitudinal de la columna.

β = factor de amplificación debido a efectos de segundo orden.

M_e = momento flexionante debido a la excentricidad de la carga.

$$M_e = P.e \text{ -----(5.30)}$$

sustituyendo M_e en la ecuación (5.29), por su valor dado en la ecuación (5.30):

$$M_T = M + \beta Pe \text{ -----(5.31)}$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación (5.31) entre el módulo de sección, S :

$$\frac{M_T}{S} = \frac{M}{S} + \frac{\beta Pe}{S} \text{ -----(5.32)}$$

en el caso mostrado en la figura (5.10), la flexión ocurre alrededor del eje Z por lo que S vale, aplicando las dimensiones netas:

$$S = \frac{I}{c}$$

$$I = \frac{b_n d_n^3}{12}$$

$$c = \frac{d_n}{2}$$

por lo tanto

$$S = \frac{b_n d_n^3}{12(d_n/2)}$$

$$S = \frac{b_n d_n^2}{6} \text{-----}(5.33)$$

sustituyendo S en el segundo término del segundo miembro de la ecuación (5.32), por el valor dado en la ecuación (5.33):

$$\frac{M_T}{S} = \frac{M}{S} + \frac{6Pe}{b_n d_n^2}$$

como $b_n d_n = A_n$ nos queda

$$\frac{M_T}{S} = \frac{M}{S} + \frac{P}{A_n} \cdot \frac{6\beta e}{d_n} \text{-----}(5.34)$$

en la ecuación (5.34), d_n es la dimensión neta de la sección transversal en dirección de la excentricidad e, por lo que la designaremos como d_e , por lo que:

$$d_n = d_e$$

con lo cual obtenemos

$$\frac{M_T}{S} = \frac{M}{S} + \frac{P}{A_n} \cdot \frac{6\beta e}{d_e} \text{-----}(5.35)$$

Sustituyendo en la igualdad (5.28) al cociente de M_T/S por el valor dado - - - en la ecuación (5.35) nos queda:

$$f_b \left(\frac{1}{1 - f_a/F'_e} \right) = \frac{M}{S} + \frac{P}{A_n} \cdot \frac{6\beta e}{d_e} \text{----}(5.36)$$

Por otro lado, el término F_b de la fórmula de interacción (5.27), correspondiente al esfuerzo admisible por flexión, en el caso de columnas de madera se expresa como:

$$F_b = f_{bd} \cdot C_f \text{-----}(5.37)$$

además

$$F_a = f_{cd} \text{ -----(5.38)}$$

llevando a la fórmula (5.27) los valores de los términos dados en las igualdades (5.36), (5.37) y (5.38) obtenemos:

$$\frac{f_a}{f_{cd}} + \frac{\frac{M}{S} + \frac{P}{A_n} \cdot \frac{6\beta e}{d}}{f_{bd} \cdot C_f} \leq 1.0 \text{ -----(5.39)}$$

A la expresión (5.39) se le conoce como "fórmula de interacción para columnas de madera de sección maciza, cuadrada o rectangular, sujeta a flexocompresión paralela a las fibras en un sólo plano".

V.3.3.- Identificación de los términos que intervienen en la fórmula de interacción.

En la fórmula (5.39) se tiene:

f_a = esfuerzo actuante de compresión axial $f_a = P/A_n$

f_{cd} = esfuerzo de compresión axial permisible, paralela a las fibras, obtenido como si sólo actuara dicho esfuerzo, conforme a la sección I.4 del capítulo I.

M = momento flexionante máximo debido a cargas transversales al eje longitudinal de la columna.

S = Módulo de sección de la sección transversal en el plano de flexión.

$$S = \frac{b_n d_n^2}{6}$$

en que b_n y d_n son las dimensiones de la sección transversal perpendicular y paralela, respectivamente, al plano de flexión.

P = fuerza normal de compresión paralela a las fibras.

A_n = área neta de la sección transversal de la columna $A_n = b_n \cdot d_n$

e = excentricidad de la fuerza normal, medida desde el eje centroidal de la columna hasta la línea de acción de la carga. El RCDF (ref. 5.2) recomienda que esta excentricidad no se tome menor que el 10% de la dimensión de la sección transversal paralela al plano de flexión considerado; es decir, $e_{\min} = 0.1 b$ ó $e_{\min} = 0.1 d$

Si M y e son nulos, la columna ha de diseñarse por flexocompresión simple considerando la excentricidad mínima en cada plano de simetría de la sección transversal.

d_e = dimensión de la sección transversal en dirección de la excentricidad e .

β = factor de amplificación que toma en cuenta los efectos de esbeltez al incrementar el momento P_e causado por la carga vertical. En la referencia 5.3, se obtiene un valor $\beta = 1.25$ para una columna esbelta doblemente articulada que se deforma con curvatura simple; para columnas con otras condiciones de apoyo en los extremos, el criterio puede aplicarse si se usa la longitud efectiva de pandeo de la columna que en el capítulo I se definió como KL . Así:

$$\beta = 1.0 \text{ cuando } \frac{KL}{b_n} \leq C_c$$

$$\beta = 1.25 \text{ cuando } \frac{KL}{b_n} > C_c$$

$$\text{donde } C_c = \sqrt{0.3E/f_{cp}}$$

K = coeficiente de longitud efectiva de pandeo que depende de las condiciones de apoyo de los extremos de la columna y cuyos valores se definieron en el capítulo I, (ver fig. 1.21),

L = longitud entre apoyos que evitan el pandeo.

KL/b_n = relación máxima de esbeltez.

E = módulo de elasticidad de la madera.

f_{cp} = esfuerzo permisible en compresión axial paralela a las fibras. Su valor se definió en la tabla T.1 del capítulo I.

$f_{bd} C_f$ = esfuerzo admisible en flexión sin carga axial.

C_f = factor de tamaño asociado a la resistencia de elementos a flexión. En la referencia 5.3 se han hecho estudios experimentales que demuestran que la resistencia relativa en flexión decrece al aumentar el peralte. Esta disminución es importante a partir de peraltes del orden de 30 cm. El RCDF recomienda:

$$\text{cuando } d_n > 30 \text{ cm, } C_f = 0.81 \frac{d_n^2 + 922}{d_n^2 + 568} ; d_n \text{ en cm.}$$

$$\text{cuando } d_n \leq 30 \text{ cm, } C_f = 1.0$$

d_n = dimensión de la sección transversal paralela al plano de flexión.

Obtención de f_{bd} :

$$\text{cuando } C_s \leq 10$$

$$f_{bd} = f_{bp} \text{ ----- (a)}$$

$$\text{cuando } 10 < C_s \leq C_k$$

$$f_{bd} = f_{bp} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{C_s}{C_k} \right)^4 \right] \text{ ----- (b)}$$

$$\text{cuando } C_k < C_s \leq 50$$

$$f_{bd} = \frac{0.40E}{C_s^2} \text{ ----- (c)}$$

en las expresiones anteriores

$$C_s = 1.4 \sqrt{\frac{d_n L}{b_n^2}} \text{-----(d)}$$

$$C_k = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{E}{f_{bp}}} \text{-----(e)}$$

f_{bp} = esfuerzo permisible en flexión en elementos sin posibilidades de que se presente pandeo lateral.
(ver tabla T.5.3.).

Los factores C_s y C_k toman en cuenta el efecto de pandeo lateral del elemento (ref. 5.3). En la expresión para valuar C_s , b_n y d_n son las dimensiones de la sección transversal - perpendicular y paralela, respectivamente, al plano de flexión; L es la longitud entre apoyos que evitan el pandeo lateral.

TABLA T. 5. 3 ESFUERZOS PERMISIBLES EN FLEXION EN ELEMENTOS SIN PANDEO LATERAL CONFORME A LA NORMA DGN C 18 - 19 4 6	
CLASE DE MADERA	f_{bp} (kg / cm ²)
SELECTA	80
PRIMERA	60
SEGUNDA	30
TERCERA	20

Variación de f_{bd} en función de C_s .-

Analizando los valores límites de las fórmulas (a), (b) y (c) para obtener el valor de f_{bd} tenemos:

a) cuando $C_s = 10$:

Por la fórmula (a):

$$f_{bd} = f_{bp}$$

Por la fórmula (b):

$$f_{bd} = f_{bp} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{C_s}{C_k} \right)^4 \right]$$

para obtener el valor de C_k consideraremos un valor mínimo de $E = 30\,000 \text{ Kg/cm}^2$ para madera de primera en la que $f_{bp} = 60 \text{ Kg/cm}^2$; así, con la fórmula (e):

$$C_k = \sqrt{\frac{3}{5} \frac{E}{f_{bp}}}$$

$$C_k = \sqrt{\frac{3(30\,000)}{5(60)}} = 17.32$$

por tanto, por la fórmula (b) cuando $C_s = 10$ y $C_k = 17.32$:

$$f_{bd} = f_{bp} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{10}{17.32} \right)^4 \right]$$

$$f_{bd} = 0.963 f_{bp}$$

Estos valores se han graficado en la figura 5.10¹ y se observa que cuando $C_s = 10$ existe una discontinuidad y un pequeño salto en la gráfica, pues por un lado - se obtiene por la fórmula (a) que el valor de f_{bd} es igual a f_{bp} y, para ese mismo valor de C_s pero por la fórmula (b), el valor de f_{bd} es igual a $0.963 f_{bp}$.

b) Cuando $C_s = C_k$

Si $C_s = C_k$, por la fórmula (b):

$$f_{bd} = f_{bp} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{C_s}{C_k} \right)^4 \right]$$

reduciendo y ordenando:

$$f_{bd} = \frac{2}{3} f_{bp}$$

Por la fórmula (c):

$$f_{bd} = \frac{0.4E}{C_s^2}$$

en la que se puede considerar que $C_s^2 = C_k^2$, o sea, por la fórmula (e)

$$C_s^2 = \frac{3}{5} \frac{E}{f_{bp}}$$

llevando este valor a la fórmula (c):

$$f_{bd} = \frac{0.4 E}{\frac{3}{5} \frac{E}{f_{bp}}}$$

reduciendo:

$$f_{bd} = \frac{2}{3} f_{bp}$$

Se observa que el valor de f_{bd} obtenido por las fórmulas (b) y (c) cuando $C_s = C_k$ es $f_{bd} = 2f_{bp}/3$ y que la discontinuidad de la curva del esfuerzo admisible por flexión pura en ese punto sólo es angular (ver fig. 5.10¹)

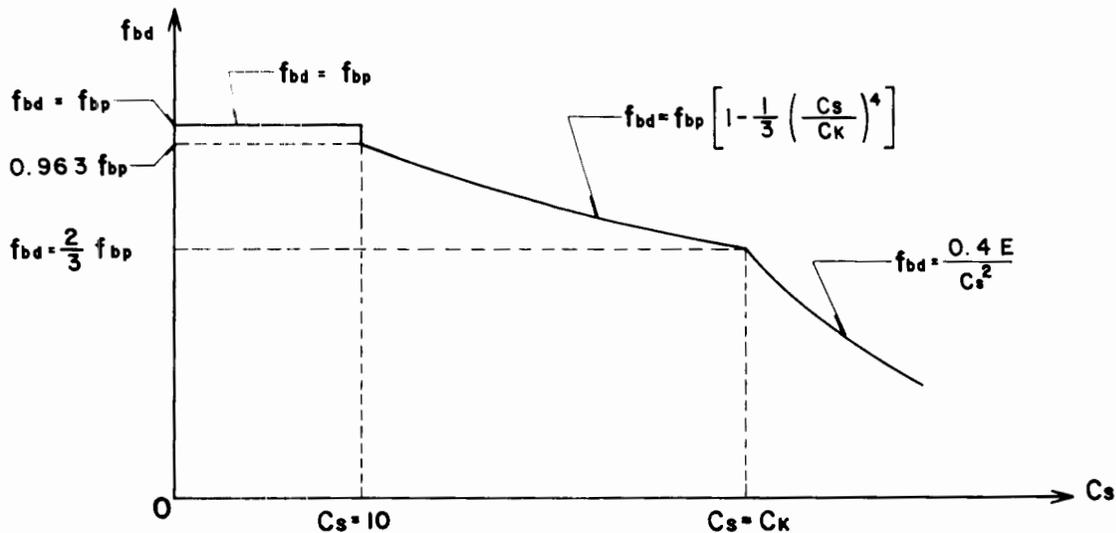
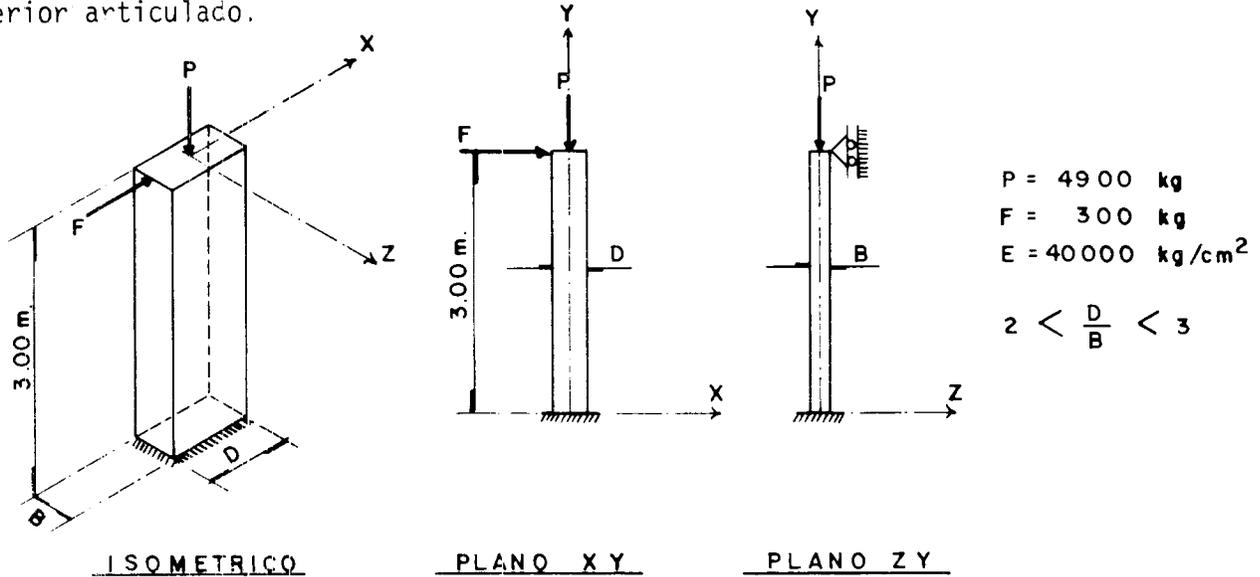


FIG. 5-10¹.—VARIACION DE f_{bd} EN FUNCION DE C_s

V.3.4.- Ejemplos.

Ejemplo 5.3.- Diseñar la columna de madera de primera, mostrada en la figura, - considerando que la flexocompresión es paralela a las fibras. En el plano XY la columna está en cantilever y en el plano ZY la base está empotrada y el extremo superior articulado.



$$\begin{aligned}
 P &= 4900 \text{ kg} \\
 F &= 300 \text{ kg} \\
 E &= 40000 \text{ kg/cm}^2
 \end{aligned}$$

$$2 < \frac{D}{B} < 3$$

Solución:

Elementos mecánicos en la sección crítica.

La sección crítica será la base de la columna por estar en el plano XY en cantilever y bajo una carga transversal.

$$P = 4900 \text{ kg}$$

$$M = 300 \times 300 = 90\,000 \text{ kg cm}$$

Se propone una sección de $D = 35 \text{ cm}$ y $B = 15 \text{ cm}$

$$\frac{D}{B} = \frac{35}{15} = 2.33$$

Dimensiones netas y propiedades:

$$b_n = 15 - 1 = 14 \text{ cm}$$

$$d_n = 35 - 1 = 34 \text{ cm}$$

$$A_n = 14 \times 34 = 476 \text{ cm}^2$$

Obtención de f_a :

$$f_a = \frac{P}{A_n} = \frac{4900}{476} = 10.3 \text{ kg/cm}^2$$

Cálculo de f_{cd} :

conforme al capítulo I

en el plano XY:

$$K = 2.0 \text{ (ver figura 1.21)}$$

$$L = 300 \text{ cm}$$

la dimensión paralela al plano de flexión por pandeo es

$$d_n = 34 \text{ cm}$$

$$\frac{KL}{d_n} = \frac{2 \times 300}{34} = 17.6$$

en el plano ZY:

$$K = 0.8 \text{ (ver figura 1.21)}$$

$$L = 300 \text{ cm}$$

la dimensión paralela al plano de flexión por pandeo es

$$b_n = 14 \text{ cm}$$

$$\frac{KL}{b_n} = \frac{0.8 \times 300}{14} = 17.1$$

la mayor relación de esbeltez se presenta en el plano XY y vale $KL/d_n = 17.6$.

Comparando con el coeficiente de columna C_c (ecuación 1.59)

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3 E}{f_{cp}}}$$

donde f_{cp} para madera de primera es $f_{cp} = 50 \text{ kg/cm}^2$ (consultar la tabla T.1).

$$C_c = \sqrt{\frac{0.3 \times 40\,000}{50}} = 15.5$$

$\frac{KL}{d_n} = 17.6 > C_c = 15.5 \therefore$ el pandeo es elástico, por lo que, por la ecuación -

(1.58):

$$f_{cd} = \frac{0.3 E}{(KL/d_n)^2}$$

$$f_{cd} = \frac{0.3 \times 40\,000}{(17.6)^2} = 38.7 \text{ kg/cm}^2$$

Cálculo del módulo de sección en el plano de flexión, S:

$$S = \frac{b_n d_n^2}{6}$$

$$S = \frac{14(34)^2}{6} = 2697 \text{ cm}^3$$

Cálculo de la excentricidad, e:

Como la carga vertical es axial, se tomará la excentricidad mínima paralela al plano de flexión, así

$$e = 0.1 d_n = 0.1 \times 34 = 3.4 \text{ cm}$$

Obtención del término d_e :

$$d_e = d_n = 34 \text{ cm}$$

Obtención de β :

Como la relación máxima de esbeltez es mayor que C_c y el pandeo es en el rango elástico:

$$\beta = 1.25$$

Determinación de C_f :

ya que $d_n > 30 \text{ cm}$

$$C_f = 0.81 \frac{d_n^2 + 922}{d_n^2 + 568}$$

$$C_f = (0.81) \frac{(34)^2 + 922}{(34)^2 + 568} = 0.976$$

Cálculo de f_{bd} :

$$C_s = 1.4 \sqrt{\frac{d_n L}{b_n^2}}$$

$$C_s = 1.4 \sqrt{\frac{34 \times 300}{14^2}} = 10.1$$

$$C_k = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{E}{f_{bp}}}$$

en que $f_{bp} = 60 \text{ kg/cm}^2$ (ver tabla T.5.3)

$$C_k = \sqrt{\frac{3}{5} \times \frac{40\,000}{60}} = 20$$

como $10 < C_s < C_k$

$$f_{bd} = f_{bp} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{C_s}{C_k} \right)^4 \right]$$

$$f_{bd} = 60 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{10.1}{20} \right)^4 \right] = 58.7 \text{ kg/cm}^2$$

Revisión de la resistencia mediante la fórmula de interacción (5.39):

$$\frac{f_a}{f_{cd}} + \frac{\frac{M}{S} + \frac{P}{A_n} \cdot \frac{6 \cdot 3e}{d}}{f_{bd} \cdot C_f} \leq 1.0$$

$$\frac{10.3}{38.7} + \frac{\frac{90\,000}{2697} + \frac{4900}{476} \times \frac{6 \times 1.25 \times 3.4}{34}}{58.7 \times 0.976} =$$

$$0.266 + 0.717 = 0.983 < 1.0$$

Se puede concluir por lo tanto, que la sección propuesta de 35 x 15 cm es adecuada.

V.4.- DIMENSIONAMIENTO Y REVISIÓN DE COLUMNAS DE CONCRETO REFORZADO SUJETAS A FLEXOCOMPRESIÓN.

V.4.1.- Comportamiento de columnas esbeltas y efecto en el diagrama de interacción.

En el capítulo IV estudiamos el comportamiento de columnas cortas de concreto reforzado sometidas a flexocompresión, en las que las deformaciones del eje longitudinal de la columna por efecto de los momentos flexionantes aplicados en los extremos, son despreciables y, por lo tanto, no intervienen en la evaluación de la resistencia.

En la figura 5.11.a se muestra una columna de este tipo y en la figura 5.11.c, con línea continua, su correspondiente diagrama de interacción. Si se hace variar la carga de compresión partiendo de un valor nulo, y manteniendo constante su excentricidad, el momento flexionante varía en proporción directa a la variación de P ya que se mantiene lineal la relación $M = Pe$, hasta alcanzar la resistencia del material en la intersección de la recta OA con el diagrama de interacción.

Ahora bien, si en una columna esbelta como la mostrada en la figura 5.11.b, se incrementa gradualmente la carga con una excentricidad inicial e , la combinación de P y M queda representada por la curva OB hasta alcanzar su resistencia en la intersección de la curva OB con el diagrama de interacción. Esa variación no lineal se debe a que al incrementar el valor de la carga P se produce una deformación, δ , del eje longitudinal de la columna, la que a su vez aumenta la distancia de la línea de acción de P al eje de la columna. La diferencia de abscisas entre la curva OB y la recta OA para un valor determinado de P , representa el incremento de momento flexionante $P\delta$. Puede observarse que, por efectos de esbeltez, el momento flexionante amplificado producido por la deformación adicional, δ , reduce la capacidad de carga vertical P , en relación a una columna corta; sin embargo, la falla se presenta por aplastamiento del material después de que se ha deformado la columna.

Cuando una columna es sumamente esbelta, es posible que su falla sea por inestabilidad sin que se alcance la rotura del material. La falla en este caso ocurre por pandeo súbito y la variación de P y M queda representada por la curva OC de la figura 5.11.c. El punto C no ha alcanzado al diagrama de interacción ya que antes de que se produzca el aplastamiento del material, la columna se ha pandeado.

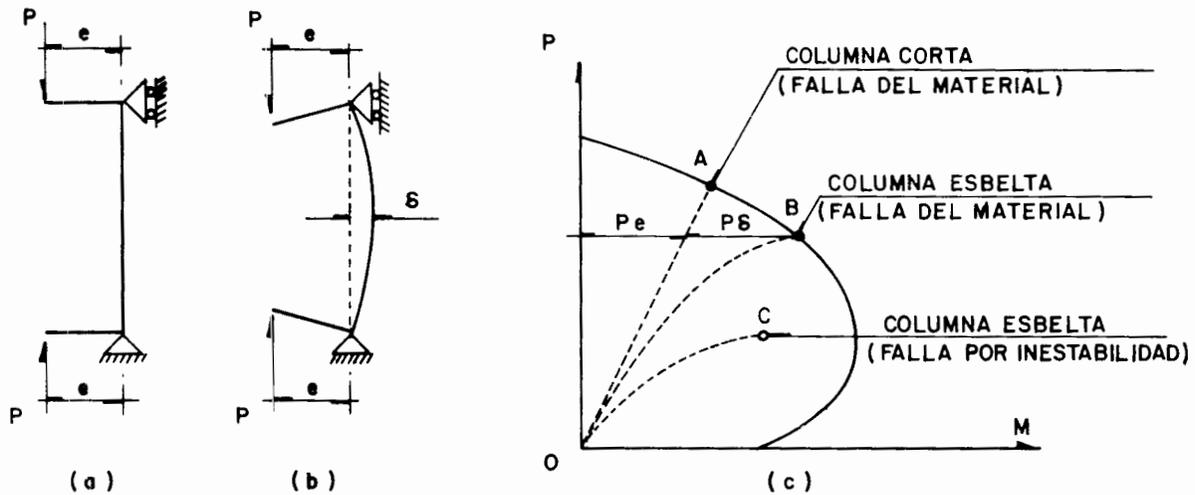


FIG. 5.11.- DIFERENCIA EN EL COMPORTAMIENTO A FLEXOCOMPRESION ENTRE COLUMNAS CORTAS Y ESBELTAS HASTA LA FALLA.

V.4.2.- Métodos de dimensionamiento.

Para el dimensionamiento de estos elementos, el criterio más riguroso consiste en determinar las deflexiones adicionales y los momentos de segundo orden que, sumados a los del análisis de primer orden, dan los momentos de diseño. El análisis de segundo orden se puede hacer por aproximaciones sucesivas, debido a - que los momentos adicionales producen deflexiones adicionales a las provocadas por los momentos de primer orden. Estas deflexiones adicionales incrementan nuevamente los momentos, los que a su vez vuelven a generar un incremento en la deflexión, y así sucesivamente hasta que los incrementos entre dos etapas consecutivas sean muy pequeños en comparación con los momentos totales.

Este procedimiento por su naturaleza es sumamente laborioso y sólo se recomienda en estructuras que tengan reducciones importantes de su resistencia por efectos de esbeltez.

En estructuras comunes suele recurrirse a métodos de dimensionamiento simplificados que dan resultados con suficiente aproximación respecto al método exacto. Existen dos métodos simplificados más comunes que son:

a) Método de amplificación de momentos.

Este método consiste en obtener los valores últimos de P y M de un análisis de primer orden y diseñar la sección de la columna para que resista el mismo valor

de P_u y un momento último amplificado $\delta_o M_u$, en donde δ_o es el factor de amplificación mayor que la unidad. En la figura 5.12 se muestra el diagrama de interacción correspondiente a este concepto. La columna esbelta así diseñada tendría la resistencia definida por el punto 2 del diagrama de interacción mostrado con línea continua. Si la columna fuera corta, se diseñaría para resistir los valores últimos de P y M obtenidos del análisis de primer orden y su resistencia estaría representada por el punto 1 localizado sobre el diagrama de interacción - puntuado.

Este método simplificado de amplificación de momentos es el que prescriben los reglamentos RCDF (ref. 5.7) y el ACI (ref. 5.8).

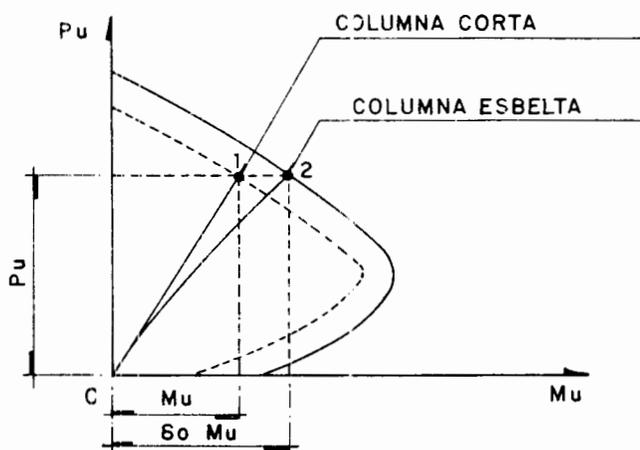


FIG. 5.12.- EFECTO DE ESBELTEZ POR EL METODO DE AMPLIFICACION DE MOMENTOS.

b) Método del momento complementario.

Este método consiste en obtener los valores de P y M de un análisis de primer orden. Conocidos P y M se determina el valor de la excentricidad $e_1 = M/P$. Para considerar el efecto de esbeltez, a la excentricidad e_1 se le suma una excentricidad adicional e_2 cuyo valor depende de: las condiciones de apoyo en los extremos de la columna, de la relación de esbeltez, de la relación de momentos flexionantes de primer orden en los extremos de la columna y de la forma de la curvatura de la columna en el plano de flexión considerado. La excentricidad adicional e_2 es independiente del valor de P, por lo que el momento flexionante de diseño varía en proporción directa a la variación de P. Este concepto de amplificación por efectos de esbeltez se muestra en la figura 5.13 en la -- que los puntos 1 y 2 representan la resistencia requerida por una columna corta y esbelta respectivamente. La recta O2 muestra la variación de M en función de P.

La columna esbelta se diseña con los elementos mecánicos últimos P_u y $M_u = P_u (e_1 + e_2)$

En este método del momento complementario se basan los reglamentos de la Comisión Federal de Electricidad (ref. 5.9) y del Comité Europeo del Concreto (ref. 5.10).

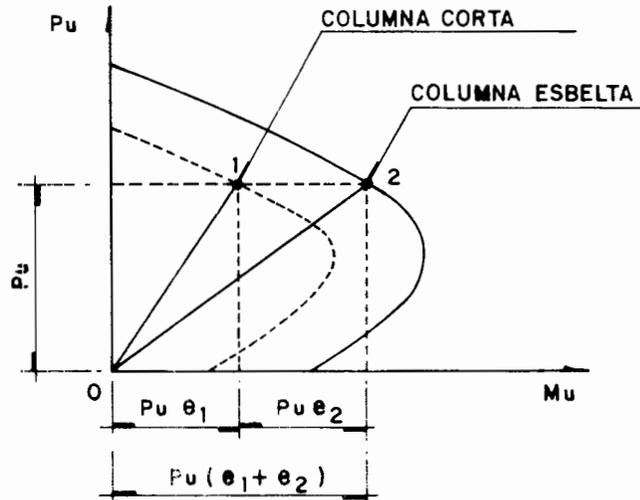


FIG.5.13.- EFECTO DE ESBELTEZ POR EL METODO DEL MOMENTO COMPLEMENTARIO.

V.4.2.a.- Dimensionamiento conforme a las normas del ACI.

El reglamento de construcciones del ACI para tomar en cuenta los efectos de esbeltez en el diseño por flexocompresión, recomienda el análisis exacto de segundo orden del marco o de la estructura que se trate, como fue descrito en la sección V.4.2. Por otro lado, en lugar de este análisis de segundo orden, recomienda el uso de un método simplificado basado en el método de amplificación de momentos, que es el que describiremos a continuación.

Este método parte de considerar un incremento de los momentos flexionantes en las columnas, de tal manera que un elemento sujeto a flexocompresión debe diseñarse para que resista una carga axial última P_u , obtenida mediante un análisis de primer orden del marco o estructura, y un momento último amplificado $M_o = \delta_o M_u$, en donde δ_o es un factor de amplificación mayor que la unidad. Este factor δ_o parte de la consideración de amplificación de los esfuerzos de flexión expresada en la igualdad (5.9) y que vale $\delta_o = 1/(1-P/P_{cr})$. Este valor fue deducido para el caso de una columna deformada en curvatura simple y sin desplazamiento lateral entre los apoyos.

Sin embargo, el reglamento del ACI considera que el factor de incremento δ_o tiene diferentes valores cuando se trata de columnas que forman parte de marcos que pueden estar sujetos o no a desplazamientos laterales entre sus extremos dependiendo del tipo de carga y de la presencia o ausencia de elementos que contraventeen a la estructura contra desplazamientos en su plano.

De esta manera, el reglamento ACI especifica que el momento último amplificado para diseño vale

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_s M_{2s} \text{-----}(5.40)$$

en donde δ_b es el factor de amplificación de momento para marcos contraventeados contra desplazamientos laterales o para marcos no contraventeados sujetos a -- cargas que no produzcan desplazamiento lateral en su plano, tales como las cargas gravitacionales simétricas actuando en un marco simétrico en geometría y rigideces; δ_s es el factor de amplificación de momento producido por cargas que generen desplazamientos en un marco no contraventeado; M_{2b} es el valor del mayor momento último en los extremos de la columna cuando éste se determina en marcos contraventeados o en marcos no contraventeados que no sufren desplazamiento por efecto de la carga; M_{2s} es el valor del mayor de los momentos últimos en los extremos de la columna en marcos no contraventeados y sólo cuando se obtienen desplazamientos laterales en su plano.

En todos los casos M_{2b} y M_{2s} se obtienen de un análisis común de marco elástico o análisis de primer orden. En el caso de marcos no contraventeados, sujetos simultáneamente a cargas que no producen desplazamientos laterales en su plano y a cargas que si producen tales desplazamientos, la obtención de los momentos M_{2b} y M_{2s} podrá hacerse mediante análisis separados de la estructura.

Para evaluar δ_b y δ_s se dan las siguientes expresiones basadas en el valor -- $1/(1-P/P_{cr})$ que se obtuvo en la igualdad (5.8):

a) Para marcos no contraventeados contra desplazamiento lateral :

$$\delta_b = \frac{C_m}{1 - \left(\frac{P_u}{\phi P_c} \right)} \geq 1.0 \text{-----}(5.41)$$

y

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\phi \sum P_c}} \geq 1.0 \text{ -----(5.42)}$$

b) Para marcos contraventeados contra desplazamiento lateral:

δ_b se determina con la misma igualdad (5.41)

y

$$\delta_s = 1.0 \text{ -----(5.43)}$$

Debe observarse que la fórmula (5.41) considera la estabilidad individual de una columna que forma parte de un entrepiso, en tanto que, la fórmula (5.42), toma en cuenta la estabilidad de toda la planta de columnas en un entrepiso mediante el valor promedio de δ_s basado en el empleo de $\sum P_u / \sum P_c$ en que $\sum P_u$ y $\sum P_c$ son las sumas de P_u y de P_c para todas las columnas en un entrepiso. Para calcular $\sum P_u$ de un entrepiso, se deberá hacer el análisis de primer orden de todos los marcos de la estructura y obtener con ello el valor de P_u de cada columna en todos los entrepisos, de este modo se puede determinar $\sum P_u$ para cada entrepiso. Para calcular $\sum P_c$ se deberá obtener el valor de P_c de cada columna que forme parte del entrepiso.

A continuación veremos el significado y la forma de evaluar cada uno de los términos de las fórmulas (5.41) y (5.42).

Factor de reducción de resistencia ϕ .

La resistencia de diseño proporcionada por un elemento sujeto a flexocompresión debe determinarse como la resistencia nominal calculada de acuerdo con las hipótesis que señala el ACI multiplicada por un factor de reducción de resistencia ϕ .

En elementos con refuerzo transversal en
 espiral que confine el núcleo de concreto ----- $\phi = 0.75$
 En otros elementos reforzados ----- $\phi = 0.70$

Carga crítica de Euler P_c .-

$$P_c = \frac{\tau^2 EI}{(K\ell_u)^2} \text{-----}(5.44)$$

en donde K es el factor de longitud efectiva de pandeo que deberá calcularse mediante el nomograma de la figura 1.15.a del capítulo I para determinar δ_b y con el nomograma de la figura 1.15.b. para calcular δ_s .

ℓ_u es la longitud no apoyada de una columna y que debe considerarse como la distancia libre entre losas de entrepisos, vigas u otros elementos que proporcionen un apoyo lateral.

El producto EI es la rigidez a la flexión de elementos de comportamiento lineal con módulo de elasticidad constante. Como el comportamiento de elementos de concreto reforzado no es lineal, el ACI recomienda los siguientes valores aproximados para el cálculo de EI:

$$EI = \frac{(E_c I_g / 5) + E_s I_{se}}{1 + \beta_d} \text{-----}(5.45)$$

o conservadoramente

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d} \text{-----}(5.46)$$

En estas ecuaciones E_c es el módulo de elasticidad del concreto que se puede evaluar como

$$E_c = 0.14 \sqrt{f'_c} \gamma^3$$

en donde γ es el peso volumétrico del concreto en Kg/m^3 . Para valores comunes de $\gamma = 2250 \text{ Kg/m}^3$, $E_c \doteq 15\,000 \sqrt{f'_c}$.

E_s es el módulo de elasticidad del acero que se puede considerar como - - - -
 $E_s = 2.039 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

I_g es el momento de inercia de la sección transversal total del concreto con respecto al eje de flexión, sin tomar en consideración el acero de refuerzo. I_{se} es el momento de inercia del refuerzo respecto al eje de flexión de la sección transversal del elemento.

β_d es un término que toma en cuenta que la rigidez del elemento se ve reducida - bajo la acción de cargas permanentes de larga duración que producen flujo plástico del concreto y fluencia prematura del acero. β_d se calcula como la relación - entre los valores absolutos del momento máximo debido a la carga muerta M_{CM} y el momento máximo debido a la carga total, M_{CT} . El valor de β_d siempre es positivo; así $\beta_d = M_{CM}/M_{CT}$

La ecuación (5.46) puede utilizarse con mayor facilidad que la fórmula (5.45) ya que en ésta última se requiere del conocimiento previo del acero de refuerzo; - por otro lado, para cantidades de área de acero de refuerzo A_s , en relación al - área de concreto de la sección transversal total A_g , no muy altos - - - - - ($0.01 A_g \leq A_s \leq 0.02 A_g$) se puede utilizar con bastante aproximación la fórmula (5.46); en cambio, si $0.02 A_g < A_s \leq 0.08 A_g$ se recomienda el uso de la fórmula (5.45).

Obsérvese que el mismo ACI especifica que no se use una cantidad de acero menor que $0.01 A_g$ ni mayor que $0.08 A_g$. El primer requisito, llamado de refuerzo mínimo ($A_s \geq 0.01 A_g$), tiene por objeto reducir los efectos de flujo plástico y contracción del concreto bajo esfuerzos de compresión de larga duración, ya que se ha demostrado que estos efectos tienden a transmitir la carga del concreto al refuerzo y, en consecuencia, a incrementar el esfuerzo en el acero de refuerzo. El requisito de que $A_s \leq 0.08 A_g$, llamado también de refuerzo máximo, se considera como un máximo práctico para el refuerzo en términos de economía y facilidad de colocación del concreto, especialmente cuando es posible que existan traslapes - de varillas.

Obtención del coeficiente C_m .-

C_m es un coeficiente que, como en el caso de columnas de acero vistas en la sección V.2.1., toma en cuenta el efecto de la forma de la curvatura del eje lon-gitudinal de la columna y el efecto del desplazamiento lateral relativo entre -

los apoyos. El reglamento del ACI especifica los siguientes criterios para su evaluación:

a) Para elementos que forman parte de marcos contraventeados que no tienen posibilidad de desplazamiento lateral relativo y sin cargas transversales entre los apoyos:

$$C_m = 0.5 + 0.4 \left(\frac{M_{1b}}{M_{2b}} \right) \text{ pero no menor que } 0.4 \text{ -----(5.47)}$$

b) Para elementos con posibilidad de desplazamiento lateral relativo o con cargas transversales entre sus apoyos:

$$C_m = 1.0 \text{ -----(5.48)}$$

En la ecuación (5.47) M_{1b}/M_{2b} es la relación del menor al mayor de los momentos últimos en los extremos de la columna. Esta relación es de signo positivo si el elemento está flexionado en curvatura simple y negativo si está flexionado con curvatura doble. M_{1b} y M_{2b} se obtienen de un análisis de primer orden del marco o estructura bajo cargas que no producen desplazamiento lateral. Si el resultado del análisis demuestra que los momentos M_{1b} y M_{2b} son nulos, la relación M_{1b}/M_{2b} debe tomarse igual a 1.0.

Excentricidad mínima.-

Cuando el resultado del análisis de primer orden de un marco contraventeado contra desplazamientos laterales o de un marco no contraventeado pero bajo cargas que no produzcan desplazamiento lateral en su plano, muestra que no existen momentos en arcos extremos de la columna, o que la excentricidad calculada como $e = M_{2b}/P_u$ es menor que $e_{mín} = (1.5 + 0.03 h)$ en centímetros, M_{2b} en la ecuación (5.40) debe calcularse como $P_u \cdot e_{mín}$, alrededor de cada eje de la sección transversal por separado, esto significa que la excentricidad mínima no debe aplicarse alrededor de los dos ejes en forma simultánea. En la expresión de $e_{mín}$, el término h es la dimensión de la sección transversal paralela al plano de flexión considerado.

Análogamente, si el resultado del análisis de un marco no contraventeado sujeto

a desplazamientos laterales en su plano, muestra que el momento M_{2s} es nulo o menor que $P_u \cdot e_{mín}$ el valor de M_{2s} en la ecuación (5.40) deberá tomarse como $M_{2s} = P_u \cdot e_{mín}$, en que $e_{mín} = (1.5 + 0.03 h)$ en centímetros, alrededor de cada eje principal por separado.

Consideración de los efectos de esbeltez.-

La amplificación de momentos por efectos de esbeltez puede ser despreciada cuando el valor de la relación de esbeltez de la columna Kl_u/r cumpla con las limitaciones siguientes:

a) En marcos contraventeados contra desplazamientos laterales:

$$\frac{Kl_u}{r} \leq 34 - 12 \frac{M_{1b}}{M_{2b}} \text{-----(5.49)}$$

b) En marcos no contraventeados

$$\frac{Kl_u}{r} \leq 22 \text{-----(5.50)}$$

En las igualdades (5.49) y (5.50), el término r es el radio de giro de la sección transversal que, para secciones rectangulares, se puede calcular como 0.30 veces la dimensión de la sección transversal en la dirección bajo consideración y como 0.25 veces el diámetro en secciones circulares. Para otras formas geométricas de la sección transversal, r se puede calcular a partir de la sección total del concreto con la expresión $r = \sqrt{I/A}$

Cuando la relación de esbeltez Kl_u/r de cualquier columna sea mayor que 100, deberá buscarse el momento amplificado mediante un análisis de segundo orden.

AMPLIFICACION DE MOMENTOS EN ELEMENTOS ESBELTOS DE CONCRETO REFORZADO SUJETOS A FLEXOCOMPRESION BIAxIAL.

El reglamento de construcciones del ACI especifica que cuando un elemento está sujeto a flexocompresión biaxial, la amplificación de momentos deberá hacerse -

alrededor de cada eje principal de la sección transversal. Los factores de amplificación δ_b y δ_s se deberán calcular considerando las condiciones específicas de cada plano de flexión; así, para cada plano deberá obtenerse un valor por separado de K, ℓ_u, r, C_m, EI y P_c .

El diseño de la sección deberá hacerse para que ésta sea capaz de resistir la combinación de la carga axial última P_u , y de dos momentos últimos amplificados por efectos de esbeltez alrededor de los dos ejes principales de la sección transversal.

V.4.2.b.- Amplificación de momentos por el método del Momento complementario.

El manual de Diseño de Obras Civiles de la CFE (ref. 5.9) aplica este método basado en los estudios de Broms y Viest (ref. 5.11, 5.12 y 5.13) para tener en cuenta los efectos de esbeltez en el diseño de columnas de concreto reforzado.

Mediante este método, una columna deberá diseñarse para resistir la acción simultánea de una carga última P_u obtenida de un análisis de primer orden y un momento último amplificado $M_{u \text{ máx}}$ que vale

$$M_{u \text{ máx}} = M_{u1} + \Delta M_u \text{ -----(5.51)}$$

en que M_{u1} es el mayor de los momentos últimos actuando en uno de los extremos de la columna y ΔM_u es el incremento de momento último, cuyo valor depende de las restricciones en los extremos de la columna y de la relación entre la longitud efectiva de pandeo, h' , y la dimensión de la sección transversal en dirección de la excentricidad.

El valor del incremento de momento se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\Delta M_u = \left(\frac{1-\rho}{3\rho} t + 2 \text{ cm} \right) P_u \text{ -----(5.52)}$$

en que P_u es la carga axial última y

$$\rho = 1.2 - 0.025 \left(\frac{h'}{t} + 5 \frac{e_1}{e_2} \right) \leq 1.0 \text{ ----(5.53)}$$

donde e_1 y e_2 son las excentricidades de la carga en los extremos de la columna, siendo e_1 la menor de ellas en valor absoluto. La relación e_1/e_2 se toma con signo positivo cuando el eje longitudinal de la columna se deforma en curvatura simple y con signo negativo cuando es en curvatura doble. Si la columna está sujeta a flexocompresión y a carga transversal aplicada entre sus apoyos en el plano de flexión, la relación e_1/e_2 se tomará igual a la unidad.

La longitud efectiva de pandeo h' es igual a:

$$h' = Kh$$

en que K es el factor de longitud efectiva de pandeo y h es la longitud libre de la columna entre sus apoyos, trabes o sistema de piso que restrinja los extremos. El factor K puede ser determinado en función de la rigidez relativa de las columnas y de las trabes conforme se estudió en los nomogramas de Jackson y Moreland en el capítulo I.

t es la dimensión de la sección transversal en dirección de la excentricidad - cuando se trata de columnas rectangulares; en secciones no rectangulares se puede usar $r\sqrt{12}$ en lugar de t , siendo r el radio de giro de la sección en la dirección de la flexión.

La expresión (5.52) es válida para valores de h'/t mayores que 11.

En el caso de que

$$h'/t \leq 11$$

se pueden usar las siguientes expresiones simplificadas:

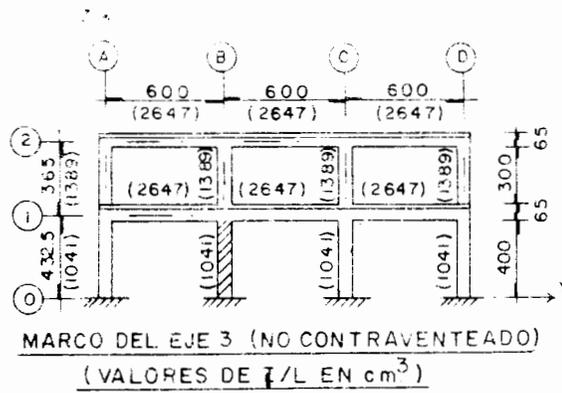
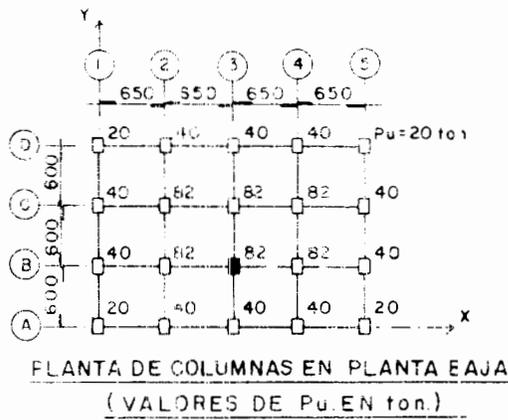
a) para columnas de sección rectangular

$$\Delta M_u = \left(\frac{t}{12} + 2 \text{ cm} \right) P_u \text{ ----- (5.54)}$$

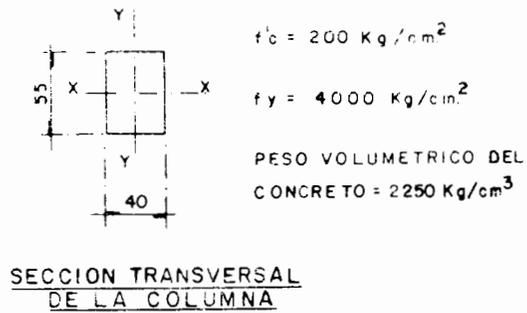
b) para columnas de sección circular:

$$\Delta M_u = \left(0.11r \sqrt{12} + 2 \text{ cm} \right) P_u \text{ ----- (5.55)}$$

Ejemplo 5.4.- Obtener, por las normas del ACI, los momentos últimos amplificados por efectos de esbeltez de la columna ubicada en la intersección de los ejes B y 3 correspondiente a la planta baja de la estructura mostrada en la figura. Se dan como datos los valores de la rigidez relativa, I/L , tanto de las columnas como de las trabes del marco del eje 3, así como los valores de la carga última, P_u , de cada columna de la planta baja y los momentos últimos obtenidos del análisis de primer orden bajo diferentes condiciones de carga (carga muerta, carga viva y sismo) de la columna citada.



ELEMENTOS MECANICOS ULTIMOS EN LA COLUMNA DE PLANTA BAJA UBICADA EN LA INTERSECCION DE LOS EJES B Y 3				
CONDICION DE CARGA	EXTREMO SUPERIOR		EXTREMO INFERIOR	
	P_u (ton.)	M_u (ton.m.)	P_u (ton.)	M_u (ton.m.)
CARGA MUERTA	63.0	4.0	63.0	2.0
CARGA VIVA	19.0	1.2	19.0	0.6
SISMO	0.0	18.0	0.0	22.0
TOTAL	82.0	23.2	82.0	24.6



Solución.-

Análisis en la dirección del eje y (Plano del marco YZ):

Por tratarse de un marco no contraventeado, revisaremos si la relación $K\ell_u/r$ - cumple con la limitación dada por la expresión (5.50):

Obtención de K:

Para determinar el valor de K recordaremos por la ecuación (1.41) del capítulo I de este texto que:

$$\psi = \frac{\Sigma(I_c/L_c)}{\Sigma(I_b/L_b)}$$

así, en el extremo superior de la columna:

$$\psi = \frac{1389+1041}{2647+2647} = 0.46$$

y en el extremo inferior

$$\psi = \frac{1041}{\infty} = 0.0$$

en este caso se considera que $\Sigma(I_b/L_b) \rightarrow \infty$ debido a que la base de la columna - está empotrada y por lo tanto, la rigidez de piso es mucho mayor que la rigidez de la columna. Con $\psi = 0.46$ y $\psi = 0$, en la fig. 1.15.b. del capítulo I se obtiene:

$$K = 1.09$$

radio de giro:

$$r = 0.30 \times 55 = 16.5 \text{ cm}$$

relación de esbeltez:

$$\frac{K\ell_u}{r} = \frac{1.09 \times 400}{16.5} = 26.4 > 22 \text{ (conforme a la igualdad 5.50)}.$$

Por lo tanto, es necesario considerar el incremento de momento por efecto de --

esbeltez.

Obtención del momento último amplificado:

por la fórmula (5.40):

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_s M_{2s}$$

en la que, según fue definido y haciendo referencia a la tabla de elementos mecánicos últimos:

$$M_{2b} = 2.0 + 0.6 = 2.6 \text{ ton}\cdot\text{m} \text{ (carga muerta + carga viva)}$$

considerando la excentricidad mínima:

$$e_{\text{mín}} = 1.5 + 0.03h = 1.5 + 0.03 \times 55 = 3.15 \text{ cm}$$

$$\frac{M_{2b}}{P_u} = \frac{2.6}{32} = 0.08125 \text{ m} = 8.125 \text{ cm} > e_{\text{mín}} \therefore M_{2b} = 2.6 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

$$M_{2s} = 22.0 \text{ ton}\cdot\text{m} \text{ (debido a carga lateral de sismo)}$$

$$e_{\text{mín}} = 1.5 + 0.03h = 3.15 \text{ cm}$$

$$\frac{M_{2s}}{P_u} = \frac{22.0}{82} = 0.268 \text{ m} = 26.8 \text{ cm} > e_{\text{mín}} \therefore$$

$$M_{2s} = 22.0 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Obtención de δ_b :

Para fines de aplicación de la fórmula (5.40), calcularemos δ_b con la fórmula (5.41) para marcos no contraventeados:

$$\delta_b = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{\phi P_c}} \geq 1.0$$

Factor de reducción de resistencia ϕ :

Supondremos que el núcleo de concreto de la sección de la columna no está confinado con refuerzo transversal en espiral, por lo tanto:

$$\phi = 0.70$$

Coeficiente C_m :

por la expresión (5.48) para elementos con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos:

$$C_m = 1.0$$

Carga crítica de Euler P_c :

Por la ecuación (5.44):

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(K \ell_u)^2}$$

en donde K , para el cálculo de δ_b , se deberá obtener mediante el nomograma de la fig. 1.15.a del capítulo I; así, con los valores obtenidos de $\psi = 0.46$ y $\psi = 0.0$ en los extremos superior e inferior respectivamente, se tiene $K = 0.585$; ℓ_u es igual a 400 cm, y para calcular EI usaremos la fórmula simplificada (5.46) para la cual:

$$E_c = 15\,000 \sqrt{f'_c}$$

$$E_c = 15\,000 \sqrt{200} = 212132 \text{ Kg/cm}^2$$

en la dirección del eje y (plano YZ):

$$I_g = \frac{40 (55)^3}{12} = 554583 \text{ cm}^4$$

y

$$\beta_d = \frac{M_{CM}}{M_{CT}} = \frac{2.0}{24.6} = 0.081$$

los valores de M_{CM} y M_{CT} fueron tomados de la tabla de elementos mecánicos últimos, correspondientes al extremo inferior de la columna.

Sustituyendo los valores de E_c , I_g y β_d en la fórmula (5.46):

$$EI = \frac{E_c I_g / 2.5}{1 + \beta_d}$$

$$EI = \frac{212132 \times 554583/2.5}{1 + 0.081} = 4.353 \times 10^{10} \text{ Kg cm}^2$$

Sustituyendo en la ecuación (5.44):

$$P_C = \frac{\pi^2 \times 4.353 \times 10^{10}}{(0.585 \times 400)^2} = 7846.15 \times 10^3 \text{ kg} = 7846.15 \text{ ton}$$

Sustituyendo C_m , ϕ y P_C en la fórmula (5.41) por sus valores obtenidos, tenemos:

$$\delta_b = \frac{1}{1 - \frac{82}{0.7 \times 7846.15}} = 1.015$$

Obtención de δ_s :

por la fórmula (5.42), para marcos no contraventeados:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\phi \sum P_C}} \geq 1.0$$

en la que $\sum P_u$ se obtiene sumando los valores de P_u de cada columna de la planta baja, así:

$$\sum P_u = 20 \times 4 + 40 \times 10 + 82 \times 6 = 972 \text{ ton}$$

Como en el caso anterior consideraremos que $\phi = 0.70$.

Obtención de $\sum P_C$ de las columnas de planta baja en dirección del eje Y:

Como pretendemos determinar δ_s , el valor de P_C de cada columna se calculará considerando el factor de longitud efectiva, K , obtenido mediante el nomograma de la fig. 1.15.b para marcos no contraventeados.

Columnas de los ejes B y C:

$$\text{en el extremo superior } \psi = \frac{1389 + 1041}{2647 + 2647} = 0.46$$

$$\text{en el extremo inferior } \psi = \frac{1041}{\infty} = 0.0$$

$$K = 1.09$$

Columnas de los ejes A y D:

$$\text{en el extremo superior } \psi = \frac{1389 + 1041}{2647} = 0.92$$

$$\text{en el extremo inferior } \psi = \frac{1041}{\infty} = 0.0$$

$$K = 1.15$$

Obtención de $P_c = \pi^2 EI / (Kl_u)^2$ de cada columna:

Por tener la misma sección transversal de las columnas en todos los ejes y estar construidas con el mismo concreto, se mantienen constantes los valores de E_c , I_g y, suponiendo que β_d puede conservar el mismo valor ya obtenido, cada columna tendrá un valor del producto $EI = 4.353 \times 10^{10} \text{ Kg cm}^2$

Columnas de los ejes B y C:

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 4.353 \times 10^{10}}{(1.09 \times 400)^2} = 2260.04 \times 10^3 \text{ Kg} = 2260.04 \text{ ton}$$

Columnas de los ejes A y D:

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 4.353 \times 10^{10}}{(1.15 \times 400)^2} = 2030.4 \times 10^3 \text{ Kg} = 2030.4 \text{ ton}$$

$$\Sigma P_c = (2260.04 \times 2) + (2030.4 \times 2) = 8580.9 \text{ ton}$$

Sustituyendo ΣP_u , ϕ y ΣP_c en la fórmula (5.42) por sus valores:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{972}{0.70 \times 8580.9}} = 1.193 > 1.0$$

Finalmente, sustituyendo δ_b , M_{2b} , δ_s y M_{2s} en la fórmula (5.40) por sus valores obtenidos, tenemos que el momento último amplificado para diseño es:

$$M_c = \delta_b M_{2b} + \delta_s M_{2s}$$

$$M_c = (1.015 \times 2.6) + (1.193 \times 22) = 28.885 \text{ ton m,}$$

y los valores de los elementos mecánicos últimos para determinar el área de re fuerzo de la columna serán:

$$P_u = 82.0 \text{ ton y } M_u = 28.885 \text{ ton m.}$$

V.5.- MUROS SOMETIDOS A COMPRESION Y A FLEXOCOMPRESION

V.5.1.- Generalidades

Los muros son los elementos estructurales más empleados en las construcciones hechas por el hombre. Las solicitaciones a que se ven sometidos con mayor frecuencia son:

Cargas verticales.

Cargas horizontales (fuerza cortante): en su plano o perpendicularmente a su plano y

Flexiones: en su plano o perpendicularmente a su plano.

Las cargas verticales son producidas, en general, por cargas gravitacionales transmitidas al muro a través de sistemas de piso o techo, además de las debidas a su peso propio.

La transmisión excéntrica de las cargas verticales puede producir flexión y cortante en el plano del muro o en un plano diferente. Sin embargo, la principal fuente de flexiones y cortantes, tanto en el plano del muro, como en planos normales a éste es la aplicación de cargas laterales debidas a empuje de tierras o líquidos, empuje de viento, o efectos sísmicos.

La mayor eficiencia de los muros como elementos estructurales sometidos a cargas laterales se logra para solicitaciones en su plano; en muchas construcciones se emplean combinaciones de muros orientados en dos direcciones ortogonales para lograr que siempre haya muros capaces de tomar las cargas laterales de la manera más eficiente, puesto que los muros son mucho más rígidos en su plano que en dirección perpendicular a éste y las fuerzas son absorbidas por los elementos más rígidos de cada dirección.

En el caso de muros de retención o bardas aisladas la flexión producida por cargas laterales debe ser absorbida por el muro flexionado alrededor de su eje de menor momento de inercia, lo que en ocasiones obliga a reforzarlo como se indica más adelante.

Dependiendo del tipo y de la intensidad de las cargas a que estarán sometidos, podrá seleccionarse el material para fabricar los muros, los refuerzos que deben usarse y la forma en que deben apoyarse para que sean capaces de resistir dichas cargas.

Los materiales más comúnmente empleados son:

- a) Piedras naturales, juntas con mortero.
- b) Piedras artificiales, como bloques de cemento-arena huecos o macizos, tabicón, adobe, tabiques macizos o huecos, etc., junteados con mortero.
- c) Concreto simple o reforzado, colado en sitio o prefabricado.

Los morteros empleados para juntar las piedras artificiales o naturales pueden ser de cal-arena-agua, de cal-cemento-arena-agua o de cemento-arena-agua variando tanto las proporciones como los espesores de las juntas, lo que produce muros de muy distintas características para los cuales es complicada la determinación de su resistencia. Las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, relativas al Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería (ref. 5.14), dan recomendaciones para el control de calidad de los distintos materiales que pueden usarse y para la determinación de la resistencia. El mortero a base de cal-arena-agua no es recomendable en elementos que tengan función estructural debido a su baja resistencia y poca durabilidad.

Los muros fabricados a base de piedras naturales o artificiales, sin refuerzo, conocidos más comúnmente como muros de mampostería, fallan de manera súbita (o frágil) cuando las cargas exceden a su resistencia, sin dar en general previo aviso de la proximidad de la falla y produciéndose en muchas ocasiones el colapso total de la estructura. Este tipo de falla es indeseable, y para evitarla se adicionan a los muros distintos tipos de refuerzo, que sirven como elementos de confinamiento y reducen la posibilidad de fallas frágiles y colapsos totales.

Los elementos de refuerzo más comunes son: castillos, columnas o contrafuertes,

dalas o vigas y diagonales de contraventeo, con diversas dimensiones y espaciamientos (fig. 5.14). En las mismas Normas Complementarias antes mencionadas se hacen recomendaciones al respecto.

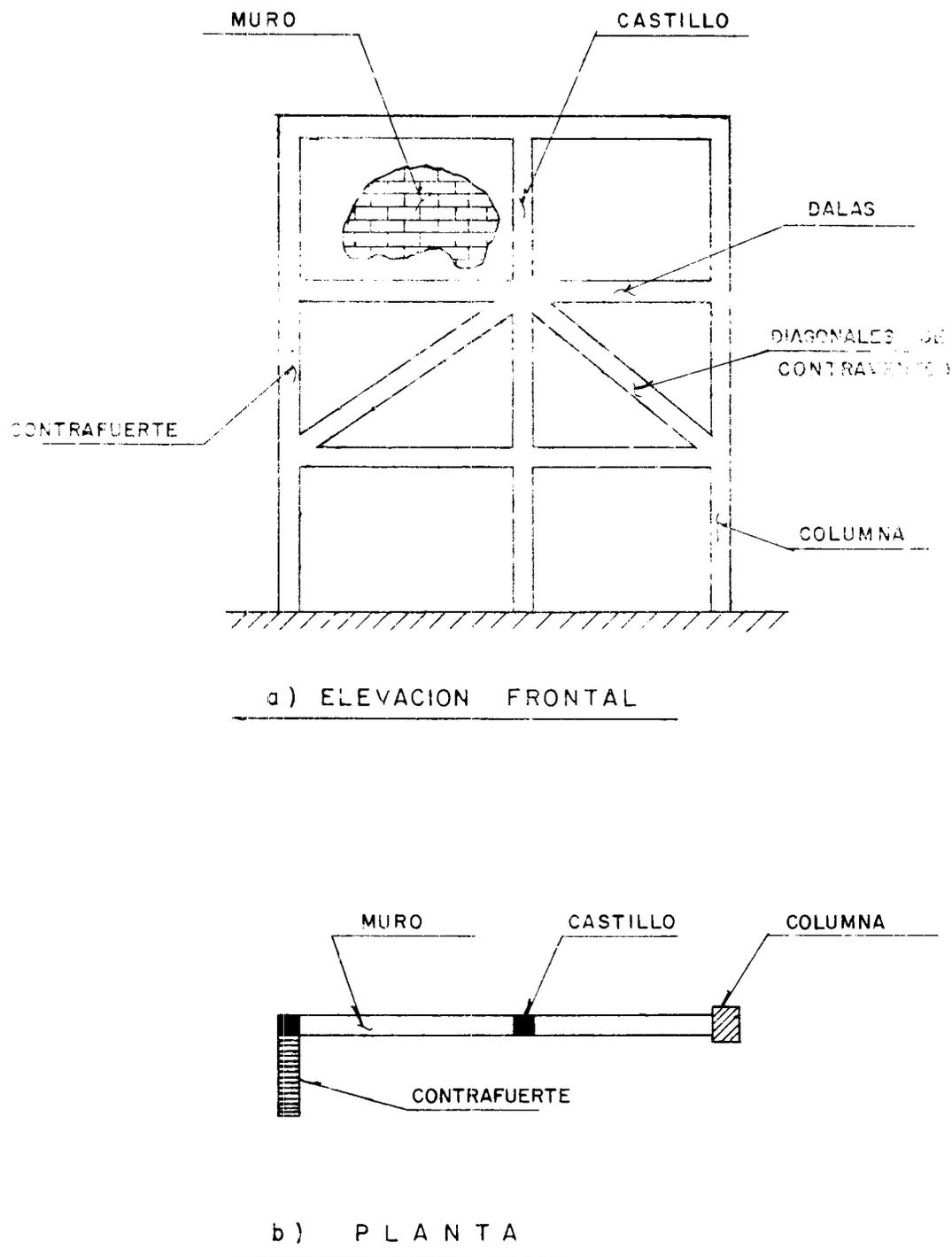


FIG. 5.14.- ELEMENTOS DE REFUERZO DE MURCS DE MAMPOSTERIA.

La forma de apoyo de los muros dependerá de las condiciones del terreno en que vayan a desplantarse y de la estructuración general que se tenga.

En suelos rocosos o muy firmes pueden desplantarse directamente o sobre un ligero ensanchamiento de la base; sin embargo, si hay flexiones importantes en dirección normal al muro será necesaria una ampliación importante de la base o el uso de zapatas corridas bajo el muro para garantizar la seguridad contra volteo.

En suelos menos firmes se requiere en general ensanchamientos en la base o zapatas corridas bajo el muro para transmitir las cargas adecuadamente.

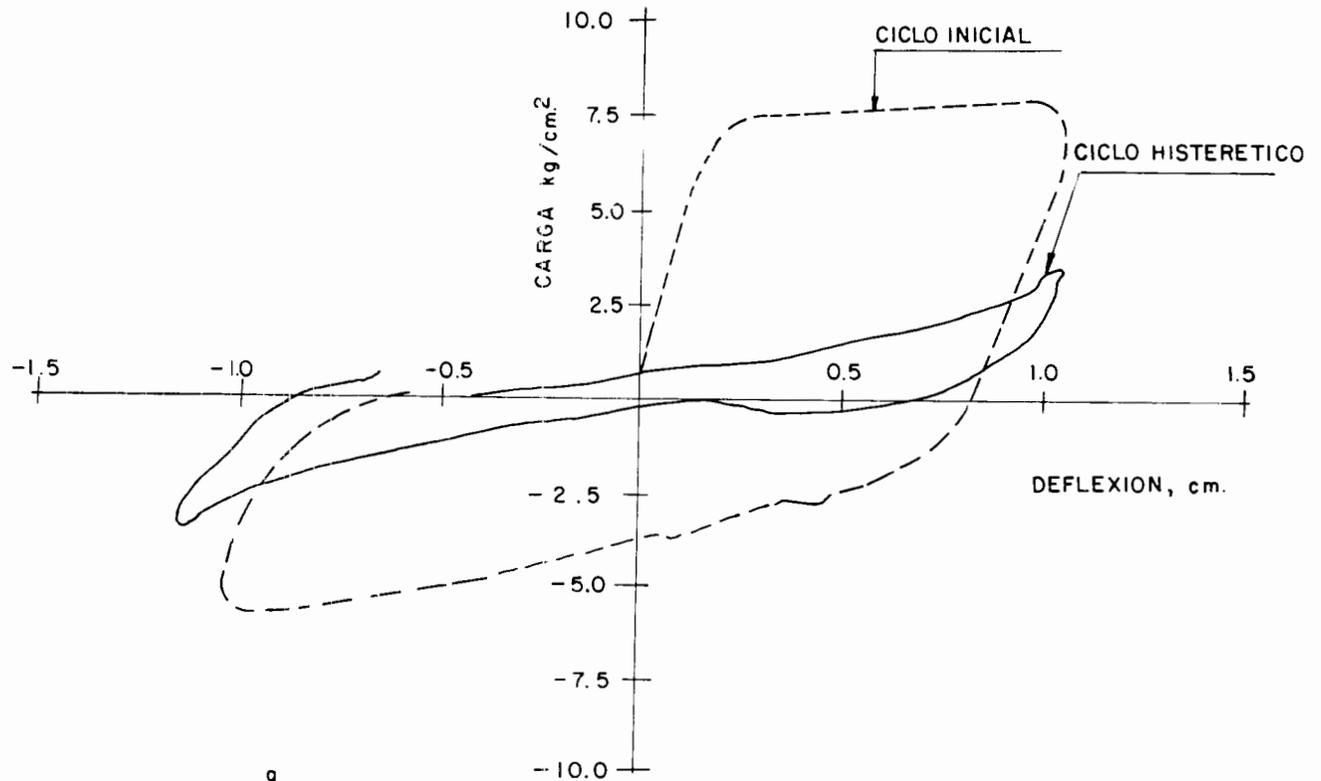
Si el suelo es muy blando, como el de algunas zonas de la Ciudad de México, y las cargas son elevadas, puede ser necesario el uso de pilas o pilotes para soportar adecuadamente al muro.

El soporte lateral de los muros puede hacerse con muros perpendiculares o con refuerzo a base de columnas, castillos o contrafuertes.

V.5.2.- Resistencia de muros de mampostería.-

De acuerdo con las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal para el Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería, (ref. 5.14), la resistencia a cargas verticales y laterales puede determinarse por un método simplificado o por un método detallado.

En ensayos de laboratorio de muros de mampostería sometidos a una combinación de compresión y carga lateral alternante en su plano (flexo-compresión) se ha visto que la resistencia y rigidez del muro se deterioran rápidamente, dando valores muy inferiores a los correspondientes a carga aplicada monotónicamente, sin alternación, (fig. 5.15). La mampostería sin refuerzo es poco eficiente para resistir cargas de flexocompresión; es recomendable reforzarla con elementos de concreto armado para mejorar su comportamiento ante esta sollicitación, principalmente aumentando su capacidad de deformarse lateralmente (ductilidad).



15 a) MURO SIN CARGA VERTICAL

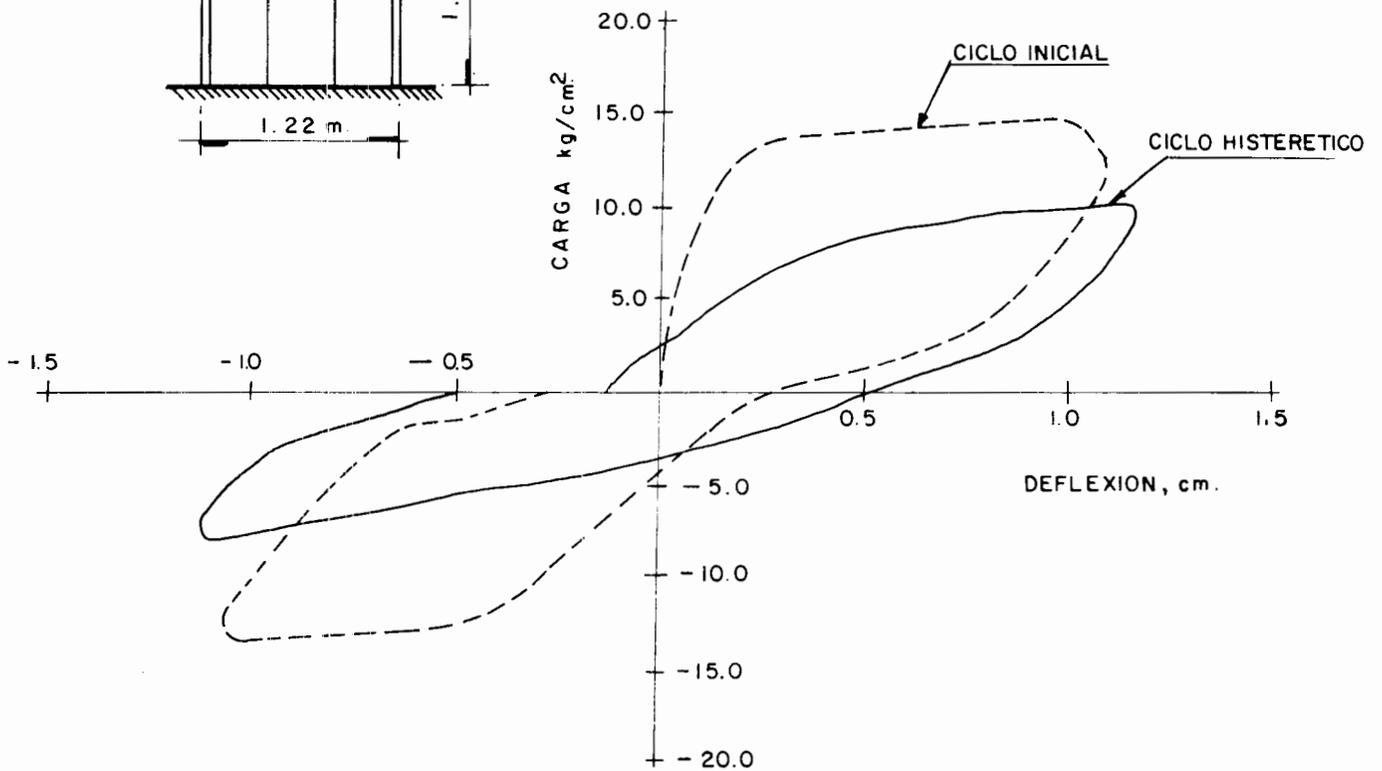
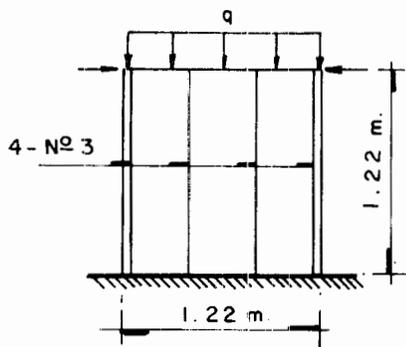
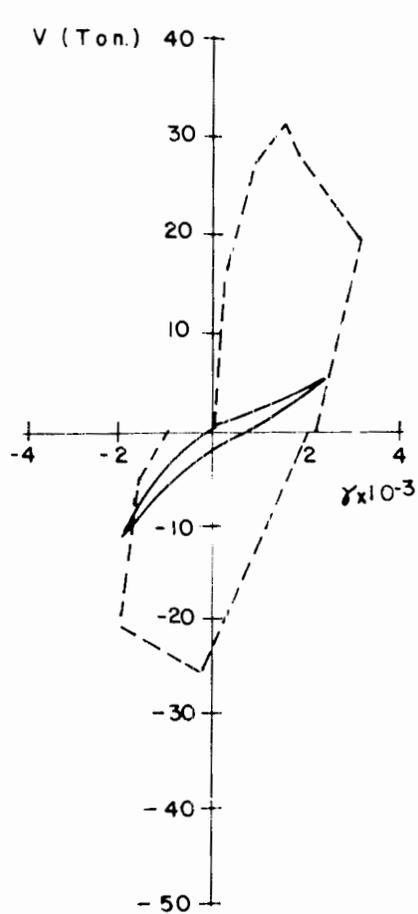
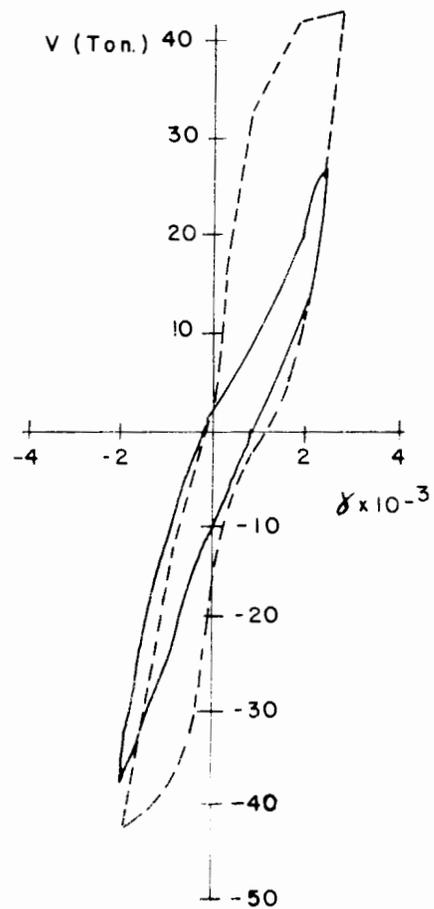
15 b) MURO CON CARGA VERTICAL, $q = 8.8 \text{ kg/cm}^2$

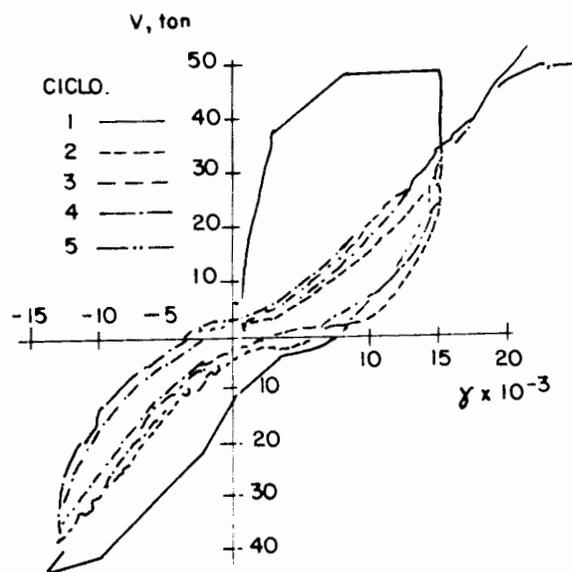
Fig. 5.15 COMPORTAMIENTO HISTERETICO DE MUROS DE TABIQUE CON FALLA POR FLEXION



1) SIN CARGA VERTICAL

2) CARGA VERTICAL (ESFUERZO DE COMPRESION 4.5 kg/cm²)

15 C) COMPORTAMIENTO HISTERETICO DE MUROS DE TABIQUE CON REFUERZO INTERIOR. FALLA POR CORTANTE.



15 d) COMPORTAMIENTO HISTERETICO DE MURO DE TABIQUE CON MARCOS.

Para poder emplear el método simplificado hay que cumplir una serie de requisitos relativos a la calidad de los tabiques o bloques y de los morteros con que se deben juntar, así como otros relativos a la geometría de los muros, restricción de deformaciones, excentricidad de las cargas y refuerzos de confinamiento o interior, como sigue:

- a) Los materiales satisfacen los requisitos de las normas oficiales.
- b) Las deformaciones de los extremos superior e inferior del muro en la dirección normal a su plano están restringidos por el sistema de piso o por otro elemento.
- c) No hay excentricidades importantes (mayores que $t/6$) en la carga axial aplicada.
- d) La relación altura a espesor del muro no excede de 20.
- e) Los muros están reforzados para cumplir con los requisitos que se establecen para muros confinados o muros reforzados interiormente en las mismas normas del RCDF.

V.5.2.a.- Resistencia a cargas verticales

Si se cumplen los requisitos antes mencionados, la resistencia a carga vertical de un muro está dada por la expresión siguiente:

$$P_R = F_R F_E f_m^* A_T \text{ -----(5.56)}$$

donde:

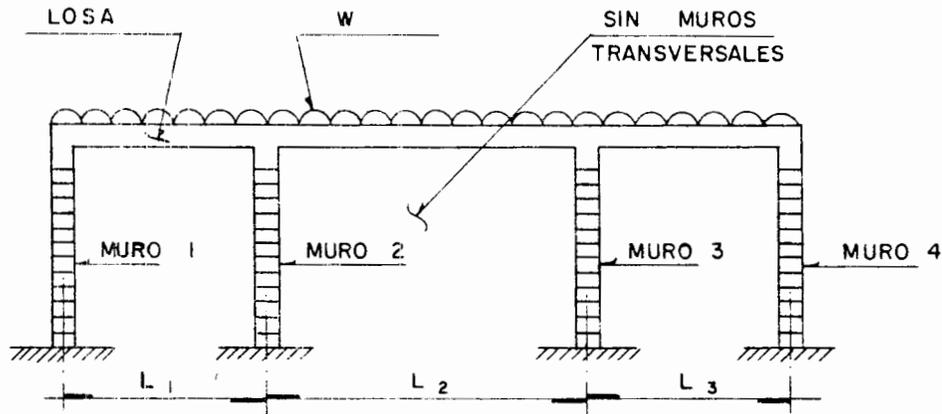
A_T es el área transversal bruta del muro: longitud por espesor.

f_m^* es la resistencia nominal en compresión de la mampostería, que se determinará con base en el inciso 2.4.1. de las Normas (para tabiques de barro recocido puede suponerse $f_m^* = 15 \text{ Kg/cm}^2$).

F_R es un factor de reducción de resistencia, que se tomará como 0.6 y que trata de tomar en cuenta la dispersión en los resultados obtenidos al aplicar la fórmula.

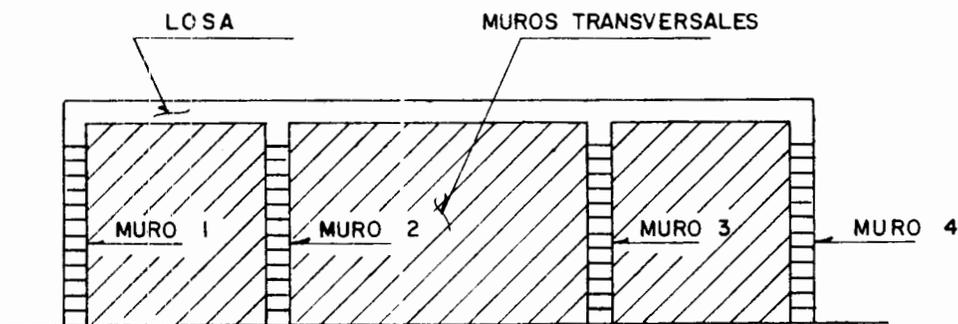
F_E es un factor reductivo por excentricidad y esbeltez, que se tomará como 0.7 para muros interiores que soporten claros que no difieran en más de 50 por

ciento y como 0.6 para muros extremos o con claros asimétricos y para casos en que la relación de cargas vivas a cargas muertas de diseño excede de uno. Para muros que estén ligados a muros transversales con una separación no mayor de 3m los valores de F_E se tomarán como 0.8 y 0.7, respectivamente, --- (fig. 5.16).



CASO 1.— SIN MUROS TRANSVERSALES :

- a) si $L_1 > 0.5 L_2$
 $L_3 > 0.5 L_2$
 $\omega_{\text{viva}}/\omega_{\text{muerta}} < 1.0$ } $F_E = 0.7$ para muros 2 y 3
 $F_E = 0.6$ para muros 1 y 4
- b) si $L_1 < 0.5 L_2$
 $L_3 < 0.5 L_2$
 $\delta \omega_{\text{viva}}/\omega_{\text{muerta}} > 1.0$ } $F_E = 0.6$ para todos los muros.



CASO 2.— CON MUROS TRANSVERSALES :

- c) Si existen muros transversales a cada 3 m. o menos. } $F_E = 0.8$ para muros 2 y 3
 $F_E = 0.7$ para muros 1 y 4

FIG. 5.16.- VALORES DEL FACTOR REDUCTIVO POR EXCENTRICIDAD Y ESBELTEZ, F_E .

De acuerdo con la expresión (5.56) la mínima capacidad de carga de un muro de tabique rojo de 12 cm de espesor, confinado, es de :

$$P_R = 0.6 \times 0.6 \times 15 \times 12 \times 100 = 6480 \text{ Kg/m} = 6.5 \text{ Ton/m}$$

La carga resistente así calculada se comparará con la carga vertical total actuante obtenida considerando los factores de carga especificados por el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, en su Título IV, (ref. 5.15).

V.5.2.b.- Resistencia a cargas laterales

La resistencia a cargas laterales de un muro deberá revisarse para el efecto de la fuerza cortante, del momento flexionante en su plano y eventualmente también de momentos flexionantes debidos a empujes normales en su plano.

Para fines de diseño por cargas laterales se distinguen los siguientes tipos de muros, de acuerdo con su estructuración:

a) Muros-diafragma o muros de rigidez.- Estos son los que se encuentran totalmente rodeados por las vigas y columnas de un marco estructural y su función es rigidizarlo para el efecto de fuerzas laterales. Las columnas y vigas, en una zona igual a una cuarta parte de su longitud libre medida a partir de cada esquina, deberán ser capaces de resistir, cada una, una fuerza cortante igual a la cuarta parte de la que actúa sobre el tablero. Esto se debe a que la rigidez del tablero se incrementará en forma notable por la presencia del muro, lo que modifica radicalmente la forma en que trabaja el marco, pues ya no puede deformarse en flexión debido a que el muro se lo impide.

b) Muros confinados. Estos son los que están reforzados con castillos y dadas que cumplen con los requisitos indicados en la ref. 5.14.

c) Muros reforzados interiormente. Estos son muros reforzados con mallas o barras corrugadas de acero, horizontales y verticales, colocadas en los huecos de las piezas, en ductos o en las juntas. Para que un muro pueda considerarse como reforzado deberán cumplirse los requisitos mínimos indicados por las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño de Estructuras de Mampostería, -- (ref. 5.14).

d) Muros no reforzados. Se consideran como muros no reforzados aquellos que no tengan el refuerzo necesario para ser incluidos en alguna de las tres categorías anteriores.

La determinación de la fuerza cortante que puede resistir la mampostería en su plano se basa en el esfuerzo cortante medio de diseño, v^* , el cual se tomará de la tabla T.5.4.

TABLA T.5.4.- ESFUERZO CORTANTE NOMINAL PARA ALGUNOS TIPOS DE MAMPOSTERIA, SOBRE AREA BRUTA.

Pieza	Tipo de Mortero (3)	v^* , (1) en Kg/cm ²
Tabique de barro recocido	I	3.5
	II y III	3
Tabicón de concreto ($f_p^* > 80$ Kg/cm ²)	I	3
	II y III	2
Tabique hueco de barro (2)	I	3
	II y III	2
Bloque de concreto tipo pesado	I	3.5
	II y III	2.5

(1) Las piezas huecas deberán cumplir con los requisitos fijados en 2.1 de las Normas. Cuando el valor de la tabla sea mayor que $0.8\sqrt{f_m^*}$ se tomará este último valor como v^* .

(2) Tabique de barro con perforaciones verticales pero con relación de áreas neta a bruta no menor de 0.45.

(3) Los tipos de mortero I, II y III tienen resistencias de compresión de 125, 75 y 40 Kg/cm² respectivamente, (ver ref. 5.14)

Para materiales no cubiertos en la tabla mencionada, la resistencia a cargas laterales se fijará con base en resultados de ensayos a satisfacción del Departamento del Distrito Federal.

De acuerdo con el método simplificado del Reglamento del D.F., la fuerza cortante resistente de diseño se calculará con la expresión:

$$V_R = F_R (0.7 v^* A_T) \text{-----} (5.57)$$

En que A_T es el área transversal bruta del muro, F_R se tomará como 0.6 y v^* es el esfuerzo cortante nominal de la mampostería. Para muros confinados de acuerdo con b) se tomará el valor de v^* de la tabla T.5.4. Para muros con refuerzo interior que cumpla con los requisitos de c) se tomará v^* igual a 1.5 veces el valor consignado en la tabla.

Aplicando la fórmula (5.57) a un muro de tabique rojo recocido de 12 cm de espesor, confinado, se encuentra que la mínima resistencia al corte en el plano del muro es:

$$V_R = 0.6 (0.7 \times 3 \times 12 \times 100) = 1512 \text{ Kg/m} = 1.5 \text{ Ton/m}$$

Esta resistencia se debe comparar con la carga lateral actuante obtenida de acuerdo con la ref. 5.15. Cuando no se cumplan los requisitos para aplicar el método simplificado, o se desee obtener valores de la resistencia de muros tanto verticales como laterales con mayor precisión se deberá usar el método detallado propuesto en la ref. 5.14.

Los efectos de la flexión en el plano del muro, se toman usualmente con refuerzos de concreto armado colocados en los extremos y en puntos intermedios (columnas o castillos y dalas), considerando que la mampostería trabaja únicamente a esfuerzos cortantes producidos por las cargas laterales, como si fuera el alma de una viga y absorbiendo los efectos de la flexión con las columnas, -- (fig. 5.17.a). También se suelen idealizar en ocasiones como una armadura vertical en que las columnas de confinamiento en los extremos del muro funcionan como cuerdas, las dalas funcionan como montantes y el muro funciona como una diagonal de compresión equivalente, (fig. 5.17.b).

En ambos casos se tiene una interacción entre la mampostería y los elementos de confinamiento, dalas y castillos, que hay que tomar en cuenta para reforzar estos últimos adecuadamente, sobre todo en las esquinas del muro, donde se presen

tan fuerzas de compresión sobre el muro, que producen cortantes elevadas en las dalas y castillos, además de fuerzas axiales en ellos, (fig. 5.17 detalle 1).

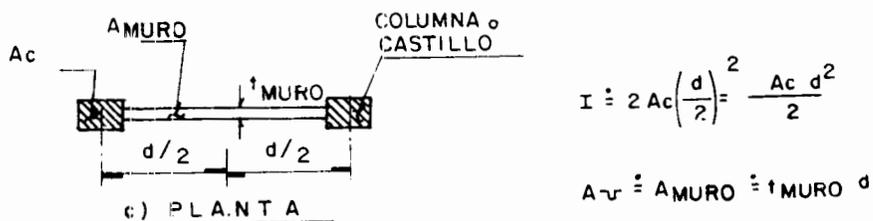
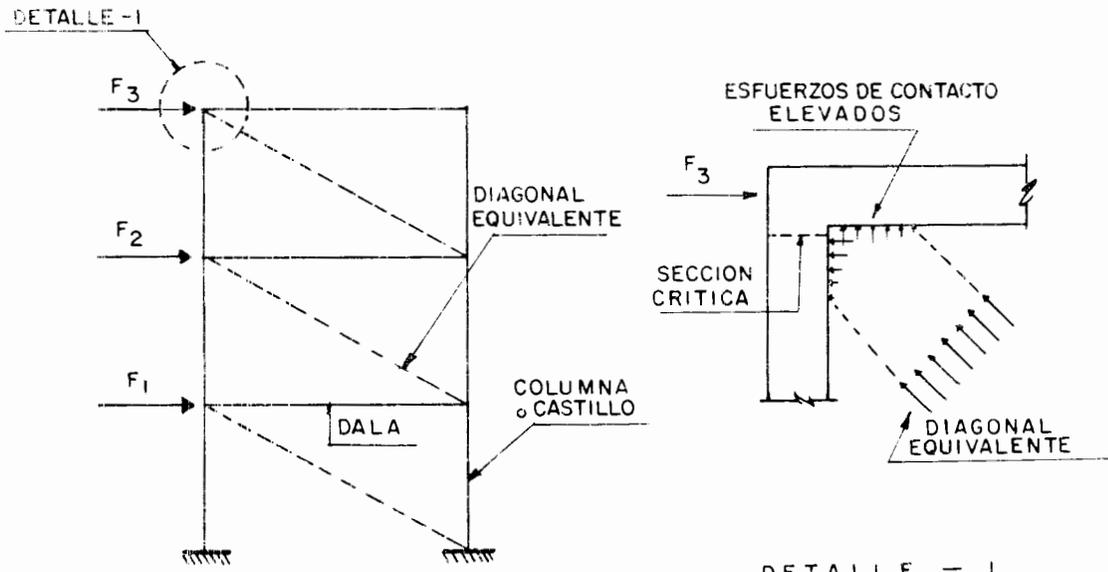
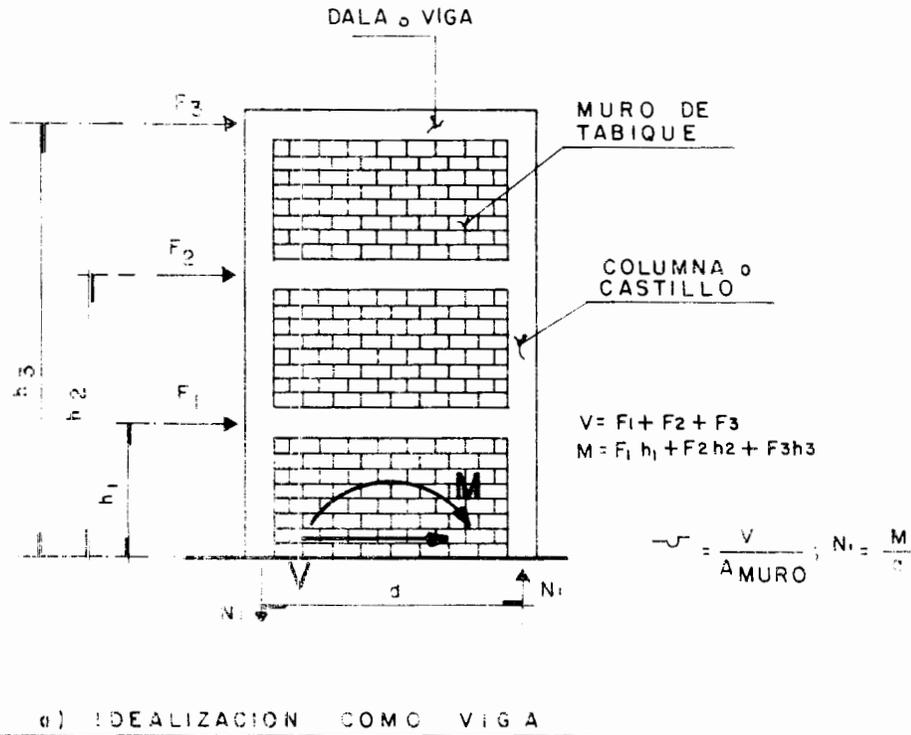


Fig. 5.17 - MURO DE MAMFOSTERIA CON ELEMENTOS DE CONFINAMIENTO

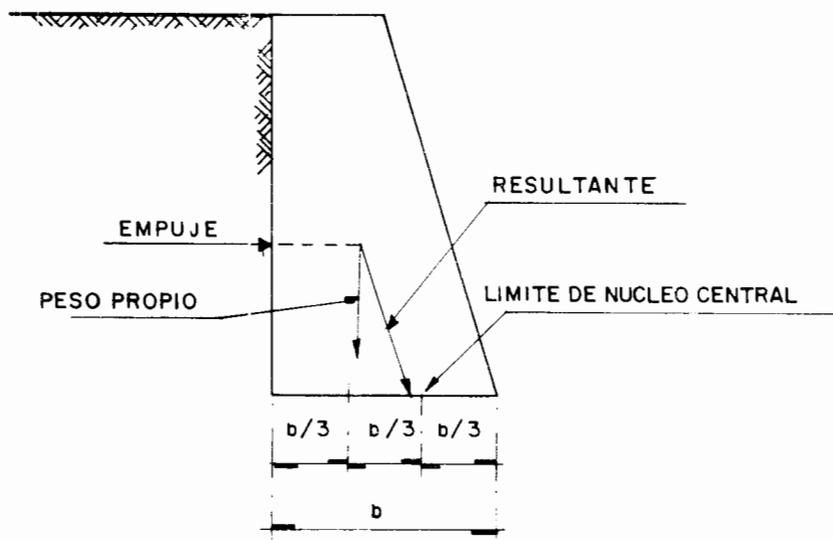
La fuerza axial en las columnas por efecto del momento de volteo puede calcularse aproximadamente dividiendo el par entre la distancia a centros de columnas extremas. A estas fuerzas se adicionarán las que les correspondan a las columnas por efecto de cargas verticales, que dependerán de la forma en que se haya construido la estructura. Si las columnas, dadas y sistemas de piso se colaron primeramente y los muros se adicionaron al final, la mayor parte de la carga vertical será absorbida por las columnas. Si se levantaron primero los muros y las columnas, dadas y sistema de piso se colaron empleando el muro como parte de la cimbra, empezará éste a absorber carga vertical de inmediato, tomando la columna una menor parte de la carga total. En el primer caso se considera que los muros son únicamente "de rigidez"; en el segundo, los muros son "de carga y rigidez".

Si los muros son esbeltos, esto es, si la relación de su altura total entre el ancho es mayor de dos o tres, es probable que las fuerzas axiales producidas por el momento de volteo sean mayores que las debidas a carga vertical en cuyo caso, una columna trabajará a compresión y la otra a tensión.

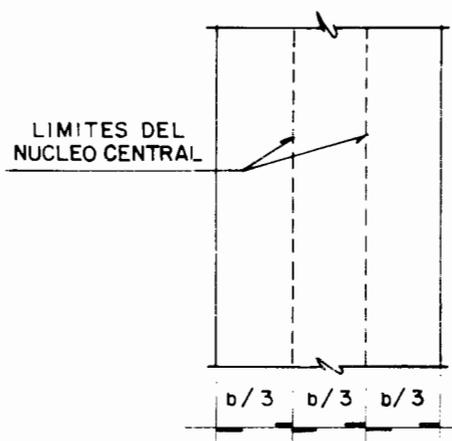
Hay algunos casos en que los muros de mampostería deben resistir flexocompresión normal a su plano; aquí se busca, mediante incrementos en el espesor del muro, o mediante la adición de refuerzos a base de columnas o contrafuertes, absorber los efectos de la flexión.

Por ejemplo, en el caso de muros de retención de mampostería, en el que la carga lateral es perpendicular al plano del muro, se fija el espesor de éste en la base, de tal forma que la resultante de cargas verticales y horizontales quede dentro del núcleo central, esto es, que la excentricidad de la componente vertical no sea mayor de $1/6$ del espesor de la base, para que no haya esfuerzos de tensión en ningún punto del muro, (fig. 5.18). Pueden usarse alternativamente refuerzos en forma de columna o contrafuerte para absorber el esfuerzo de la flexión.

En el caso de una barda de mampostería aislada, sujeta a efectos de viento o sismo que le producen también flexión en dirección perpendicular a su plano, la resistencia se logra, como se indicó antes, empleando columnas o contrafuertes, debiendo revisar con especial cuidado el diseño de la cimentación para evitar que el muro se voltee, (fig. 5.19).



a) ELEVACION



b) PLANTA DE LA BASE

Fig. 5.18 - MURO DE MAMPOSTERIA SOMETIDO A FUERZA LATERAL NORMAL A SU PLANO.

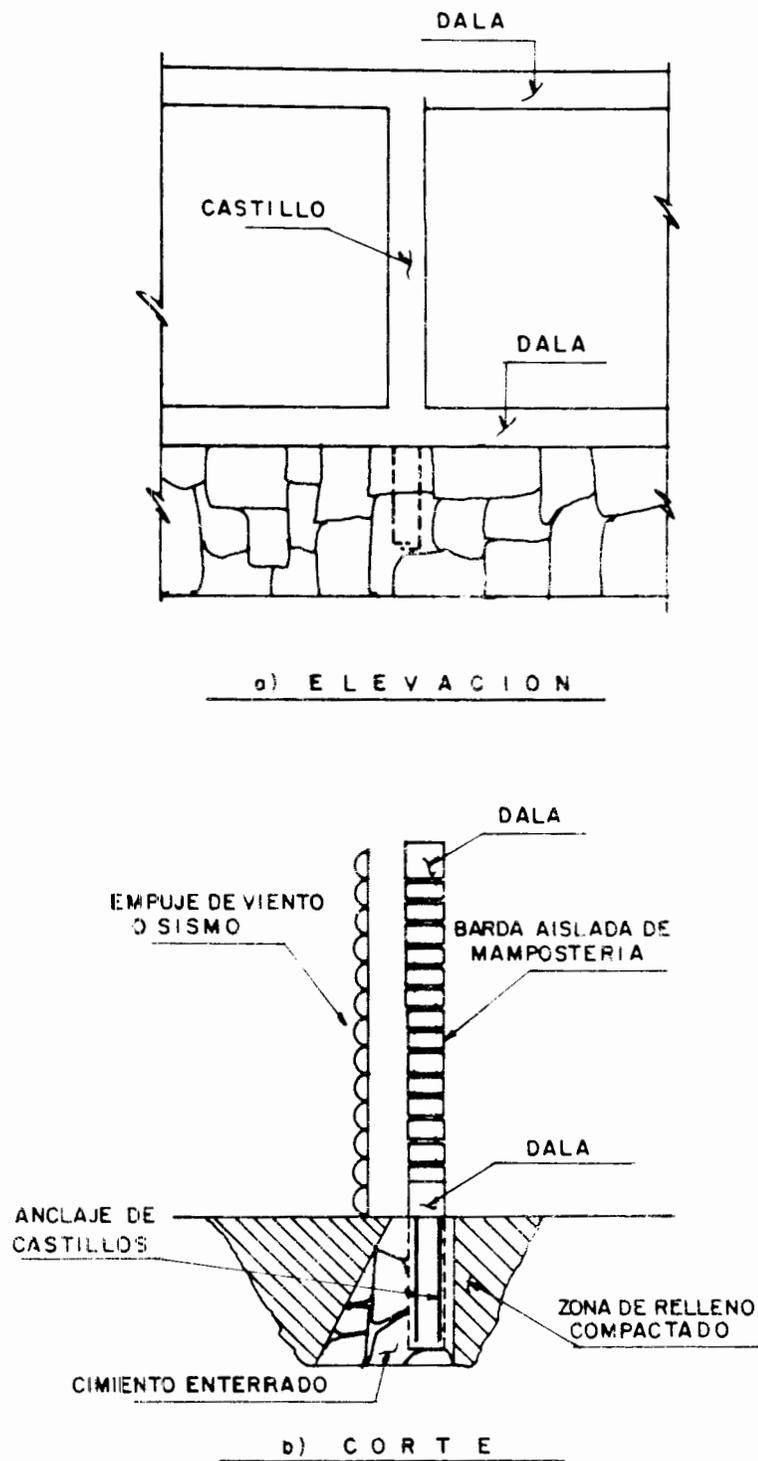


Fig. 5.19 - BARRA AISLADA DE MAMPOSTERIA SOMETIDA A FUERZAS HORIZONTALES

V.5.3.- Resistencia de muros de concreto reforzado.

Se deben aplicar las recomendaciones de las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, (ref. 5.7), que siguen:

V.5.3.a.- Muros sujetos a cargas verticales axiales o excéntricas.

Estos muros deben dimensionarse por flexocompresión como si fueran columnas teniendo en cuenta las siguientes disposiciones complementarias:

En tableros cuyos bordes verticales posean suficiente restricción, la longitud efectiva de pandeo H' se calculará como sigue:

$$H' = H, \quad \text{si } H/L \leq 0.35$$

$$H' = (1.3 - 0.85 H/L) H, \quad \text{si } 0.35 < H/L < 0.8$$

$$H' = L/2, \quad \text{si } H/L \geq 0.8$$

donde H es la altura del muro y L la longitud horizontal del tablero. Aquí se entiende por tablero una porción de muro limitada por elementos estructurales verticales, o todo el muro si no hay dichos elementos o sólo los hay en los bordes del muro. Se considera suficiente restricción lateral la presencia de elementos estructurales ligados al tablero en sus bordes verticales, siempre que su dimensión perpendicular al plano del muro no sea menor que 2.5 veces el espesor del mismo.

En muros de uno o varios tableros cuyos bordes no tienen suficiente restricción, H' se tomará igual a H si H/L es menor o igual que 0.35, e igual a $0.215 \left(\frac{H}{L} + 4.3 \right) H \leq 2H$ si H/L es mayor que 0.35. Aquí L es la longitud horizontal del muro.

Toda sección sujeta a flexocompresión se dimensionará para la combinación más-desfavorable de carga axial y momento, incluyendo los efectos de esbeltez. El dimensionamiento puede hacerse a partir de las hipótesis generales del artículo

2.1.1 de las Normas o bien con diagramas de interacción contruidos de acuerdo - con ellas. El factor de resistencia, F_R , se aplicará a la resistencia a carga - axial y a la resistencia a flexión.

Si las cargas son concentradas, se tomará como ancho efectivo una longitud igual a la de contacto más cuatro veces el espesor del muro, pero no mayor que la distancia centro a centro entre cargas.

V.5.3.b.- Muros sujetos a fuerzas horizontales en su plano.-

En muros con relación L/t no mayor de 90, cuyos bordes posean suficiente res- - tricción lateral, no sujetos a cargas verticales de consideración y cuya prin- cipal función sea resistir fuerzas horizontales en su plano, los efectos de la flexión y de la fuerza cortante se tomarán en cuenta con las disposiciones que se citan más adelante. Aquí L es la longitud horizontal del muro,

Para valores de L/t mayores de 90, así como en muros con bordes que carezcan -- de suficiente restricción, deberá reducirse la capacidad del muro para resistir fuerza horizontal tomando en cuenta la posibilidad de pandeo. En muros donde a- demás actúan cargas verticales de consideración, la relación L/t deberá limitar se a 40 y se aplicará lo dispuesto anteriormente para cargas verticales, - -- (ver V.5.3.a.).

V.5.3.c.- Resistencia a flexión de muros.

La resistencia de muros a flexión en su plano puede calcularse con la fórmula- $M_R = F_R A_s f_y z$ si la cuantía A_s/td es menor o igual a 0.008. Aquí t es el espe- sor del muro y d su peralte efectivo en la dirección de la flexión. El brazo z se obtendrá con el criterio siguiente:

$$\begin{aligned} z &= 0.8L, & \text{si } \frac{H}{L} &\geq 1.0 \\ z &= (0.4 + 0.4 \frac{H}{L}) L, & \text{si } 0.5 < \frac{H}{L} < 1.0 \\ z &= 1.2 H, & \text{si } \frac{H}{L} &\leq 0.5 \end{aligned}$$

donde H es la altura total del muro y L su longitud.

V.5.3.d.- Fuerza cortante en muros.-

La fuerza cortante, V_{cR} , que toma el concreto en muros sujetos a fuerzas horizontales en su plano se determinará con el criterio siguiente:

Si en la sección considerada la relación $M_u/V_u L$ es menor o igual que 1.0, se aplicará la expresión:

$$V_{cR} = 0.85 F_R \sqrt{f_c^*} tL \text{ -----(5.58)}$$

Si $M_u/V_u L$ es mayor o igual que 1.5 se aplicarán las expresiones (2.16) ó (2.17) de las Normas, en las que b se sustituirá por el espesor del muro, t ; el peralte efectivo, d , se determinará con base en el ancho de distribución del refuerzo - definido más adelante, y la cuantía será

$$p = \frac{A_s}{td}$$

donde A_s es el área de acero de tensión por flexión, calculada según se indicó antes.

Para valores de $M_u/V_u L$ comprendidos entre 1.0 y 1.5 puede interpolarse linealmente.

Cuando la fuerza cortante de diseño, V_u , es mayor que V_{cR} , se requiere refuerzo por cortante. Dicho refuerzo constará de dos capas de barras horizontales y verticales, cada una próxima a cada cara del muro, a menos que el espesor de éste no exceda de 20 cm, en cuyo caso puede colocarse una sola capa a medio espesor. Las barras verticales deben estar ancladas de modo que en la sección de desplante del muro sean capaces de desarrollar su esfuerzo de fluencia.

La cuantía de refuerzo horizontal, p_h , no será menor que

$$p_h \geq \frac{V_u - V_{cR}}{F_R f_y dt} \text{ -----(5.59)}$$

ni que la necesaria por cambios volumétricos de acuerdo con las Normas. El es

espaciamiento del refuerzo horizontal, s_h , no será mayor que el especificado en las Normas, ni que $L/5$.

Limitación para V_u : En ningún caso se admitirá que V_u sea mayor que $2F_R L t \sqrt{f_c^*}$.

La cuantía de refuerzo vertical, ρ_v , no será menor que

$$\rho_v \geq 0.0025 + 0.5 \left(2.5 - \frac{H}{L} \right) (\rho_h - 0.0025) \text{ -----(5.60)}$$

ni que la necesaria por cambios volumétricos según las Normas; sin embargo, no necesita ser mayor que ρ_h . El espaciamiento del refuerzo vertical, s_v , no será mayor que el prescrito en las Normas.

En las fórmulas (5.59) y (5.60):

$$\rho_h = \frac{A_{vh}}{s_h t}$$

$$\rho_v = \frac{A_{vv}}{s_v t}$$

A_{vh} área de refuerzo horizontal comprendida en una distancia s_h

A_{vv} área de refuerzo vertical comprendida en una distancia s_v

H altura total del muro

L longitud horizontal del muro

Refuerzo mínimo: En muros se suministrará refuerzo vertical y horizontal que en cada dirección cumpla con los requisitos de las Normas para refuerzo por cambios volumétricos.

V.5.3.e.- Disposiciones sobre el refuerzo

En muros con relación H/L no mayor que 1.2, el refuerzo para flexión que se calcula en la sección de momento máximo según se indicó, se prolongará recto y sin reducción en toda la altura del muro, distribuido uniformemente en un an--

cho igual a $0.2L - 0.1H$, medido desde el borde a tensión del muro, pero no mayor que $0.4H$.

Si la relación H/L es mayor que 1.2, el refuerzo por flexión en la porción del muro situada arriba del nivel $1.2L$ se puede hacer variar de acuerdo con el diagrama de momentos, respetando las disposiciones del inciso 3.1 de las Normas. - Abajo del nivel mencionado se aplicará lo especificado en el párrafo anterior.

El refuerzo por fuerza cortante horizontal que actúa en el plano del muro deberá cumplir con los requisitos fijados en V.5.3.d.

El refuerzo cuyo trabajo a compresión sea necesario para lograr la resistencia requerida debe restringirse contra el pandeo con estribos o grapas que cumplan con las disposiciones del artículo 4.2.2. de las Normas.

V.5.3.f.- Aberturas.-

Se proporcionará refuerzo en la periferia de toda abertura en cantidad suficiente para resistir las tensiones que puedan presentarse. Como mínimo deberán colocarse dos barras del No. 4, o su equivalente, a lo largo de cada lado de la abertura. Estas barras se prolongarán una distancia igual a su longitud de desarrollo, L_d , desde las esquinas de la abertura.

La presencia de aberturas debe tomarse en cuenta en todo cálculo de rigideces y resistencias.

APENDICE E

ESFUERZOS PERMISIBLES POR FLEXION EN ELEMENTOS DE ACERO, CONFORME A LAS NORMAS DEL AISC.

En este apéndice se señalan los lineamientos del AISC (ref. 5.1) para determinar el esfuerzo permisible por flexión en elementos de acero. Todos los párrafos que a continuación veremos son una traducción de las citadas normas y las fórmulas - que en ellos aparecen han sido trasladadas al sistema centímetros-kilogramos-segundos (CKS). Por otro lado, la numeración de los párrafos y de las expresiones, corresponde a la señalada por el mismo reglamento.

1.5.1.4. Flexión.

1.5.1.4.1.- La tensión y compresión en fibras extremas de perfiles "compactos" - laminados en caliente o compuestos "compactos" (excepto vigas híbridas y elementos de acero A-514) simétricos alrededor de, y cargados en el plano de sus ejes de menor momento de inercia y que cumplen con los requerimientos de esta sección:

$$F_b = 0.66 F_y$$

Para que sea incluido en esta sección un perfil deberá satisfacer los siguientes requerimientos:

- 1.- Los patines deberán estar conectados en forma continua al alma o almas.
- 2.- La relación ancho-espesor de los elementos proyectados no atiesados del patín en compresión, según se define en la sección 1.9.1.1, no deberá exceder $545/\sqrt{F_y}$.
- 3.- La relación ancho-espesor de los elementos atiesados del patín en compresión, según se define en la sección 1.9.2.1, no deberá exceder $1593/\sqrt{F_y}$.
- 4.- La relación peralte-espesor del alma o almas no deberá exceder el valor dado por la fórmula (1.5.4a) o (1.5-4b), según sea el caso:

$$\frac{d}{t} = \frac{5365}{\sqrt{F_y}} \left(1 - 3.74 \frac{f_a}{F_y} \right) \text{ cuando } f_a/F_y \leq 0.16 \quad (1.5-4a)$$

$$\frac{d}{t} = \frac{2.55}{\sqrt{F_y}} \quad \text{cuando } f_a/F_y > 0.16 \quad (1.5-4b)$$

- 5.- La longitud no apoyada lateralmente del patín en compresión de elementos cuya sección transversal no sea circular o cajón, no deberá exceder el valor:

$$\frac{637 b_f}{\sqrt{F_y}} \quad \text{ni} \quad \frac{1'406,000}{(d/A_f) F_y}$$

- 6.- La longitud no soportada lateralmente del patín en compresión de una sección cajón rectangular cuya altura no es mayor de 6 veces el ancho y cuyo espesor del patín no es mayor de 2 veces el espesor del alma no deberá exceder el -- valor:

$$\left(1950 + 1200 \frac{M_1}{M_2} \right) \frac{70.3 b}{F_y}$$

salvo que no tenga que ser inferior a 84370 (b/F_y).

- 7.- La relación diámetro-espesor de las secciones circulares huecas no deberá -- exceder los 232000/F_y.
 Excepto para vigas híbridas y elementos de acero A-514, las trabes y vigas -- (incluyendo elementos diseñados con base en acción compuesta) que cumplen -- con los requerimientos de los subpárrafos del 1 al 7 anteriores, y que son -- continuas sobre apoyos o que son unidas rígidamente a las columnas mediante remaches, pernos de alta resistencia o soldadura, pueden ser dimensionadas -- para 9/10 de los momentos negativos producidos por la carga gravitacional -- los cuales son máximos en los puntos de apoyo, a condición de que, para tales elementos, el momento positivo máximo sea incrementado en 1/10 de los momen-- tos negativos promedio. Esta reducción no deberá aplicarse a momentos produ-- cidos por carga sobre cantilevers. Si el momento negativo está soportado por una columna rígidamente conectada a la trabe o viga, la reducción del 1/10 -- podrá usarse dimensionando la columna para la combinación de carga axial y -- momento flexionante, siempre y cuando el esfuerzo f_a, debido a cualquier car-- ga axial concurrente sobre el elemento, no exceda 0.15 F_a.

1.5.1.4.2.- Elementos (excepto vigas híbridas y elementos de acero A-514) que satisfacen los requerimientos de la sección 1.5.1.4.1. excepto que $b_f/2t_f$ excede $545/\sqrt{F_y}$ pero que sea inferior a $796/\sqrt{F_y}$ pueden diseñarse con base en un esfuerzo permisible de flexión:

$$F_b = F_y \left[0.79 - \frac{1}{4192.5} \left(\frac{b_f}{2t_f} \right) \sqrt{F_y} \right] \quad (1.5-5a)$$

1.5.1.4.3.- La tensión y compresión en fibras extremas de elementos de forma I y H doblemente simétricos que satisfacen los requerimientos de la sección 1.5.1.4.1. subpárrafos 1 y 2, flexionados alrededor de sus ejes de menor inercia (excepto elementos de acero A-514); varillas sólidas redondas y cuadradas; secciones sólidas rectangulares flexionadas alrededor de sus ejes de menor inercia:

$$F_b = 0.75 F_y$$

Elementos de forma I y H doblemente simétricos flexionados alrededor de sus ejes de menor inercia (excepto vigas y elementos híbridos de acero A-514) que satisfacen los requerimientos de la sección 1.5.1.4.1, subpárrafo 1, excepto en los casos en que $b_f/2t_f$ excede $545/\sqrt{F_y}$ pero es inferior a $796/\sqrt{F_y}$, los cuales -- pueden diseñarse con base en un esfuerzo permisible de flexión:

$$F_b = F_y \left[1.075 - \frac{1}{1677} \left(\frac{b_f}{2t_f} \right) \sqrt{F_y} \right] \quad (1.5-5b)$$

Los elementos de secciones tubulares rectangulares que cumplen con los requerimientos de la sección 1.5.1.4.1, subpárrafos 1, 3 y 4 y flexionados alrededor de sus ejes de menor inercia pueden ser diseñados tomando como base un esfuerzo permisible de flexión:

$$F_b = 0.66 F_y$$

1.5.1.4.4.- La tensión y compresión en las fibras extremas de elementos de sección tipo cajón cuyo patín en compresión o relación ancho-espesor del alma no satisface los requerimientos de la sección 1.5.1.4.1, pero que cumple con los requerimientos de la sección 1.9:

$$F_b = 0.60 F_y$$

El pandeo lateral torsional no necesita ser investigado para vigas formadas por una sección cajón cuya altura sea inferior a 6 veces su ancho. Los requerimientos de apoyo lateral para secciones cajón con relaciones mayores de altura-ancho deberán determinarse mediante un análisis especial.

1.5.1.4.5.- En fibras extremas de elementos flexionados no contemplados en las secciones 1.5.1.4.1, 1.5.1.4.2, 1.5.1.4.3 ó 1.5.1.4.4.:

1.- Tensión:

$$F_b = 0.60 F_y$$

2.- Compresión:

a.- Para elementos que cumplen con los requerimientos de la sección 1.9.1.2, - que tengan un eje de simetría en, y cargado en el plano de su alma, y compresión en fibras extremas de secciones canal flexionadas alrededor de su eje de mayor inercia:

El mayor de los valores calculados por las fórmulas (1.5-6a) ó (1.5-6b) y (1.5-7) según el caso (ver nota 1) (a menos que se justifique un valor más alto con base en un análisis más preciso, (ver nota 2), pero no superior a $0.60F_y$ (ver nota 3).

$$\text{Cuando } \sqrt{\frac{7.17 \times 10^6 C_b}{F_y}} \leq \frac{\ell}{r_T} \leq \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 C_b}{F_y}}$$

$$F_b = \left[\frac{2}{3} - \frac{F_y (\ell/r_T)^2}{107.6 \times 10^6 C_b} \right] F_y \quad (1.5-6a)$$

$$\text{Cuando } \frac{\ell}{r_T} \geq \sqrt{\frac{35.86 \times 10^6 C_b}{F_y}}$$

$$F_b = \frac{11.95 \times 10^6 C_b}{(\ell/r_T)^2} \quad (1.5-6b)$$

0, cuando el patín en compresión es sólido y con sección transversal aproximadamente rectangular y su área no es menor que la correspondiente al patín en tensión:

$$F_b = \frac{843700 C_b}{\ell d / A_f} \quad (1.5-7)$$

En las fórmulas anteriores:

ℓ = distancia entre secciones transversales restringidas contra torsión o desplazamiento lateral del patín en compresión, en centímetros.

Para cantilevers restringidos contra torsión únicamente en el apoyo, ℓ puede considerarse conservadoramente como la longitud real.

r_T = radio de giro de una sección que comprende el patín comprimido más 1/3 del área del alma bajo compresión, tomado alrededor de un eje en el plano del alma, en centímetros.

A_f = área del patín en compresión, en cm^2 .

$C_b = 1.75 + 1.05 (M_1 / M_2) + 0.3 (M_1 / M_2)^2$, pero no más de 2.3 (ver nota 4), en donde M_1 es el momento flexionante más pequeño y M_2 el momento flexionante más grande en los extremos de la longitud arriostrada respecto al eje de flexión. M_1 / M_2 , la relación de los momentos extremos, es positiva cuando M_1 y M_2 tienen el mismo signo (flexión de curvatura doble) y negativa al tener signos opuestos (flexión de curvatura simple). Cuando el momento flexionante en cualquier punto comprendido en un tramo no arriostrado es mayor que el momento en ambos extremos de este tramo, el valor de C_b deberá tomarse como la unidad. Al calcular F_{bx} y F_{by} para usarse en la fórmula (1.6-1a), C_b puede obtenerse mediante la fórmula dada arriba para marcos sujetos a traslación lateral, debiéndose tomar como la unidad para marcos restringidos contra traslación lateral. Para vigas en cantilever, C_b puede tomarse conservadoramente como la unidad.

Para vigas híbridas de alma llena, F_y para las fórmulas (1.5-6a) y (1.5-6b) es el esfuerzo de fluencia del patín en compresión. La fórmula (1.5-7) no deberá usarse para vigas híbridas.

Notas:

- 1.- Sólo la fórmula (1.5-7) es aplicable a las secciones canal.
 - 2.- Consúltese la sección de comentarios 1.5.1.4.5, para procedimientos alternos.
 - 3.- Consúltese la sección 1.10 para mayores limitaciones en esfuerzo de patines de vigas de alma llena.
 - 4.- C_b puede considerarse conservadoramente como la unidad.
- b.- Para elementos que cumplen con los requerimientos de la sección 1.9.1.2, pero que no están incluidos en el subpárrafo 2a de esta sección:

$$F_b = 0.60 F_y$$

con la condición de que las secciones flexionadas alrededor de su eje de mayor inercia estén restringidas lateralmente en la zona de esfuerzo de - compresión a intervalos no superiores a $637b_f / \sqrt{F_y}$.

REFERENCIAS.

- 5.1.- Manual of Steel Construction, 8a. edición, publicado por American Institute of Steel Construction, Inc., Chicago, Illinois, 1980.
- 5.2.- "Diseño y Construcción de Estructuras de Madera", Normas Técnicas Complementarias de Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, publicación 404 del Instituto de Ingeniería de la UNAM, 1977.
- 5.3.- Gurfinkel G, "Wood Engineering". Southern Forest Products Association, -- Nueva Orleans, Luisiana, 1973.
- 5.4.- Norma oficial de calidad para tablas y tablonés de ocote, DGN, C18-1946.
- 5.5.- González Cuevas O., Robles, F.V.F., Casillas G. de L., Díaz de C., R. "Aspectos fundamentales del concreto reforzado", primera edición, Editorial LIMUSA, S.A., México, D.F., 1974.
- 5.6.- Park, R., y Paulay, T., "Estructuras de concreto reforzado", primera edición. Ed. LIMUSA, S.A., México, D.F., 1983.
- 5.7.- "Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto", Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, publicación 401 del Instituto de Ingeniería de la UNAM, México, D.F., - 1977.
- 5.8.- Comité ACI 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete", - publicado por el "American Concrete Institute" (ACI 318-71), Detroit, 1971.
- 5.9.- Robles, F., "Manual de Diseño de Obras Civiles", Sección H: Concreto Reforzado, Comisión Federal de Electricidad, México, D.F., 1970.
- 5.10.- "Propuesta de Recomendaciones Internacionales CEB-FIP para el Cálculo y la Ejecución de Obras de Hormigón", 1970.

- 5.11.-B.B. Broms e I.M. Viest, "Ultimate Strength Analysis of Long Restrained Reinforced Concrete Columns", University of Illinois, Informe No. 119,- mayo 1967.
- 5.12.-B.B. Broms e I.M. Viest, "Ultimate Strength Analysis of Long Hinged -- Reinforced Concrete Columns", Proc. American Society of Civil Engineers, Structural Division, ST 1, Vol. 84, Publicación 1510, enero 1958.
- 5.13.-B.B. Broms e I.M. Viest, "Ultimate Strength Analysis of Long Restrained Reinforced Concrete Columns", Proc. American Society of Civil Engineers, Structural Division, ST3, Vol. 84, Publicación 1635, mayo 1958 .
- 5.14.-"Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería", Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Publicación 403 del Instituto de Ingeniería de la UNAM, 1977.
- 5.15.-Requisitos de Seguridad y Servicio para las Estructuras, Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, publicación No. 400 del Instituto de Ingeniería de la UNAM, 1977.