



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN SISTEMA DE ESFERAS
CONCÉNTRICAS CON ROTACIÓN

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
FRANCISCO JAVIER LIRA RANGEL

TUTOR PRINCIPAL
RUBÉN ÁVILA, RODRÍGUEZ. CIA, DEPARTAMENTO DE
TERMOFLUIDOS

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO 2018

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Cervantes de Gortari Jaime G.

Secretario: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier

Vocal: Dr. Ávila Rodríguez Rubén

1er. Suplente: Dr. Naude de la Llave Jorge L.

2do. Suplente: Dr. Vicente y Rodríguez William

Lugar donde se realizó la tesis: CIUDAD DE MÉXICO

TUTOR DE TESIS:

RUBÉN ÁVILA, RODRÍGUEZ

FIRMA

Índice general

1	Introducción	1
1.1	Motivación	1
1.2	Estado del Arte	2
1.2.1	Simulaciones de convección sin rotación	2
1.2.2	Simulaciones de convección con rotación	6
1.2.3	Dínamos Numéricos	8
1.2.4	Estudios con mallas alternativas	8
1.3	Objetivos	10
2	Modelo Físico	11
2.1	Estructura general de la Tierra	11
2.1.1	Corteza	12
2.1.2	Manto	12
2.1.3	Núcleo	12
2.2	Convección del manto	13
2.2.1	Modelo de capas a 660 km (Modelo I)	14
2.2.2	Modelo de convección completa del manto (Modelo II)	14
2.2.3	Modelo de convección con rotación a gran escala (Modelo III)	15
2.3	Modelo propuesto	16
3	Modelo Matemático	19
3.1	Flujo incompresible	19
3.2	Convección natural	20
3.3	Ecuación de continuidad	20
3.4	Ecuación de cantidad de movimiento	21
3.5	Ecuación de la energía	22
3.6	Ecuación de difusión de calor	23
3.7	Parámetros adimensionales	23
3.7.1	Número de Grashof	23
3.7.2	Número de Rayleigh	24
3.7.3	Número de Prandtl	24
3.7.4	Número de Nusselt	24

4		25
4	Algoritmo Numérico	25
4.1	Método de residuos pesados (ponderados)	25
4.2	Método de Galerkin	26
4.3	Puntos Gauss-Lobatto-Legendre	27
4.4	Cuadratura Gauss-Lobatto-Legendre	27
4.5	Método de la esfera cúbica	28
4.6	Generación de la malla	29
5	Resultados	33
5.1	Validación	33
5.2	Rango de validez	39
5.3	Sistema Conjugado	43
6	Conclusiones	57
6.1	Conclusiones	57
6.2	Trabajo futuro	58
	Apéndices	59
	Apéndice A Difusión de calor en estado transitorio	61
	Apéndice B Ecuaciones adimensionales	69
	B.1 Ecuación de continuidad	69
	B.2 Ecuación de cantidad de movimiento	70
	B.3 Ecuación de la energía	75
	Apéndice C Transformación del vector gravedad a coordenadas cartesianas.	77
	Apéndice D Calculo del número de Nusselt.	79

Nomenclatura

α	Difusividad térmica $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$.
$\bar{N}u$	Nusselt promedio en el tiempo.
β	Expansión volumétrica termal $\left[\frac{1}{\text{K}}\right]$.
τ_{ij}	Tensor de esfuerzos viscosos [Pa].
\vec{g}	Vector gravedad $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$.
\vec{F}	Vector fuerza [N].
\vec{g}_e	Vector gravedad en coordenadas cartesianas.
\vec{g}_s	Vector gravedad en coordenadas esféricas.
\vec{v}	Vector velocidad $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.
$\frac{d()}{dt}$	Derivada material.
$\Delta\rho$	Incremento de densidad.
ΔT	Incremento de temperatura.
\dot{E}	Flujo de energía [W].
\dot{m}	Flujo de masa $\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]$.
\dot{Q}	Flujo de calor [W].
\dot{W}	Flujo de trabajo [W].
η	Relación de aspecto en un ánulo.
η	Relación de aspecto.
$\frac{\partial}{\partial t}$	Variación respecto al tiempo.
\int_{SC}	Integral en la superficie de control.

\int_{VC}	Integral en el volumen de control.
μ	Viscosidad dinámica $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}}\right]$.
∇	Vector nabla.
ν	Viscosidad cinemática $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$.
Ω	Vector de rotaciones $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$.
ρ	Densidad $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$.
ρ_∞	Densidad del fluido quieto.
A	Área $[\text{m}^2]$.
c_v	Calor específico a volumen constante $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right]$.
C_g	Constante gravitacional $\left[\frac{\text{m}^{n+1}}{\text{s}^2}\right]$.
dV	Diferencial de volumen $[\text{m}^3]$.
e	Energía total por unidad de masa $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$.
f_r	Componente radial del vector gravedad.
k	Conductividad térmica $\left[\frac{\text{W}}{\text{m K}}\right]$.
p	Presión [Pa].
r_{e_s}	Radio externo de un ánulo en el sistema [m].
r_e	Radio externo [m].
r_i	Radio interno [m].
r_s	Radio total del sistema [m].
T	Temperatura [K].
T_∞	Temperatura del fluido quieto.
u	Energía interna por unidad de masa $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

El presente estudio sobre la convección en anulos esféricos concéntricos está motivado por las características geofísicas de planetas con estructuras como la terrestre. En ellos actúan una gran variedad de fenómenos como: la fuerza de Coriolis, fuerza centrífuga, rotación diferencial, rotación de cuerpo rígido, campos de gravedad y magnéticos entre otros. Aunado a lo anterior la estructura compleja de estos cuerpos favorece que las propiedades físicas de sus fluidos presenten viscosidades en un espectro muy amplio, desde bajas hasta muy altas. En consecuencia, los factores descritos presentan un valor numérico muy alto en sus parámetros, lo que sugieren la presencia de un estado turbulento, por ello las simulaciones computacionales resultan el mejor camino para estudiar este tipo de fenómenos.

A pesar de que en la literatura se encuentran muchos estudios sobre ánuos esféricos, la gran mayoría enfoca sus resoluciones en alguna capa en particular de la estructura interna de la Tierra, esto se debe a que el método preferido para abordar el problema es uno meramente espectral, lo que dificulta introducir diferentes propiedades en un dominio.

En el caso concreto de la Tierra, las propiedades de los fluidos internos son muy heterogéneas. En el núcleo externo la viscosidad tiene valores de 0.1 - 1.0 mientras que en el manto se presenta una viscosidad casi infinita la cual depende de la temperatura, de igual modo los parámetros de cada capa que compone al planeta son muy dispares, por ejemplo los reportados por Futterer en el manto los números Ra y Ta son $> 10^{29}$ y 10^{30} respectivamente, y para el manto de 10^6 - 10^8 y $\ll 1$.

El comportamiento de los planetas está estrechamente ligado con los procesos térmicos que tienen lugar en su interior de los mismos. En particular las características térmicas y los materiales internos que se pueden comportar como fluidos son los responsables de la mayor parte de los fenómenos internos y externos que suceden en los

planetas.

Por ejemplo, el calor proveniente del interior de la Tierra produce fenómenos que ocurren sobre la superficie terrestre: la formación de montañas, la tectónica de placas, la generación de magma, entre otras, se pueden vincular con los procesos de transporte de energía que se llevan a cabo en el interior de ella.

Por otro lado, los fenómenos que se presentan en el interior de la Tierra se asocia a los movimientos de material interno causados por la diferencia de temperaturas entre el núcleo y la corteza. A este tipo de movimientos se les conoce como procesos convectivos y son de suma importancia, ya que con ellos se pueden explicar los procesos de deformación de la corteza, tales como la formación de islas y montañas, la actividad volcánica e incluso el campo magnético terrestre.

Por las razones antes mencionadas, es evidente la importancia que presenta el conocer y comprender las características del flujo de calor en el interior de los planetas junto con los patrones de flujo que se presentan en las capas (núcleo externo, océano, atmósfera) de fluido que constituyen nuestro planeta. Estas cuestiones son la motivación del presente trabajo.

En lo que resta del capítulo se describen las líneas de investigación que se han desarrollado en torno a la simulación de la transferencia de calor en el interior de planetas.

1.2 Estado del Arte

En la siguiente sección se abordan algunas de investigaciones que se han llevado a cabo para simular la transferencia de calor por convección en el interior de los planetas. Estos estudios se dividen en tres disciplinas principales; simulaciones sin rotación, simulaciones con rotación y dinamos numéricos.

1.2.1 Simulaciones de convección sin rotación

Frédéric Deschamps (2010) usa un modelo paramétrico de la convección y reporta los efectos que tiene la relación de aspecto en la transferencia de calor en el interior de un anulo esférico, el cual esta sujeto a calentamiento en la frontera interna y un enfriamiento en la frontera externa. Las simulaciones que realizan muestran los patrones de temperatura en el anulo para diferentes números de Rayleigh¹ Ra y razones de aspecto² $\eta = f$ Deschamps et al. (2010). Ver figura 1.1.

¹El número de Rayleigh es una medida del balance entre las fuerzas que impulsan la convección (diferencia de densidad) y las fuerzas que se le oponen (fricción viscosa y la difusión térmica).

²Se define a la relación de aspecto como la razón del radio interno sobre el radio externo $\eta = \frac{r_e}{r_i}$

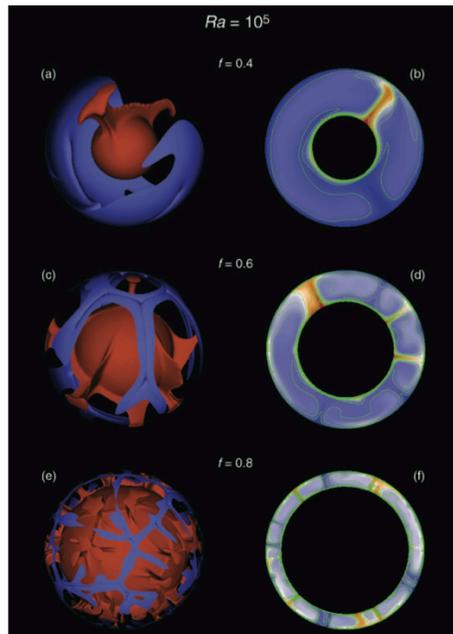


Figura 1.1: Efecto de la relación de radios $f = \frac{r_i}{r_e}$ cuando el número de Rayleigh es $Ra = 10^5$; a) $f = 0.4$, b) $f = 0.6$ y c) $f = 0.8$. La columna izquierda muestra isosuperficies de temperatura adimensional a) Azul: $T = 0.005$, rojo: $T = 0.010$, b) Azul: $T = 0.017$, rojo: $T = 0.55$ y c) Azul: $T = 0.55$, rojo: $T = 0.60$. La columna derecha muestra la distribución de temperatura adimensional en cortes ecuatoriales, Deschamps et al. (2010).

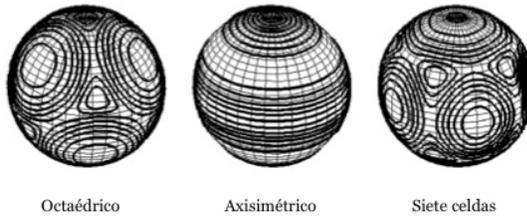


Figura 1.2: Patrones convectivos en el experimento GeoFlow según Feudel, Feudel et al. (2011).

Para predecir los resultados del experimento GeoFlow en la estación espacial internacional Feudel (2011) lleva a cabo simulaciones para dos esferas concéntricas con un radio exterior dos veces mayor al interno y un campo de fuerza dependiente del radio proporcional a r^{-5} . Los resultados de su trabajo reportan tres patrones estables de flujo para el estado estacionario; axisimétrico, octaédrico y siete celdas. También señala que al incrementar el número de Rayleigh la dinámica se vuelve dependiente del tiempo, Feudel et al. (2011). Ver figura 1.2.

Posteriormente Frédéric Deschamps (2012) publica un artículo en el que realizaron simulaciones de convección en un anulo esférico con fuentes de calor volumétricas en el interior de las esferas. A diferencia de su artículo anterior, Deschamps et al. (2010) el flujo de calor es igual a cero en la frontera interior, la temperatura en la frontera exterior es constante e incluye un término fuente homogéneo en el interior. Sus resultados muestran la evolución de la temperatura en el estado de cuasi equilibrio. Deschamps et al. (2012). Ver figura 1.3.

En el trabajo publicado por Avila et al. (2013) se realiza un estudio comparativo de los efectos que tiene la relación de aspecto sobre el número de Rayleigh crítico. Efectúan una serie de simulaciones para campos de gravedad radial de la forma r^{-n} , donde la distribución de temperatura es generada por un término fuente o una diferencia de temperaturas impuesta en la esfera exterior e inferior. En el artículo reportan los números de Rayleigh críticos para las diferentes simulaciones y los comparan con los números obtenidos mediante un análisis de estabilidad, Avila et al. (2013).

Este trabajo se toma como referencia para comparar los números de Rayleigh críticos.

Con objeto de estudiar las modificaciones que se presentan en el flujo convectivo cuando el sistema tiene múltiples capas de fluido confinado en esferas concéntricas Gulberg and Feldman (2015) realiza simulaciones para sistemas que van de 1 a 5 capas, en configuraciones equidistantes. En este estudio se considera una gravedad de laboratorio, esto es cuando la componente de la gravedad sólo actúa en una de las direcciones del sistema x_3 . Los resultados de Gulberg coinciden con la teoría desarrollada por Scanlan et al. (1970), la cual explica que el movimiento del fluido dentro de las esferas se

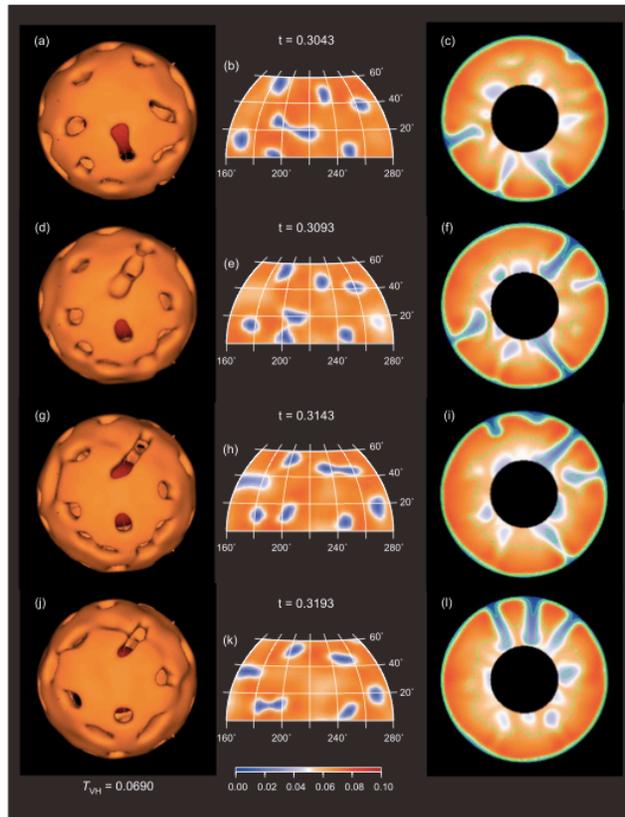


Figura 1.3: Evolución de la temperatura en el tiempo cuando $Ra_{VH} = 1.7 * 10^6$ y relación de radios $f = 0.4$, donde Ra_{VH} es el número de Rayleigh-Roberts definido por $Ra_{VH} = \frac{1+f+f^2}{3} \frac{\beta \rho^2 g H D^5}{\eta k \alpha}$ y H es la razón de calentamiento interno. Columna izquierda: isosuperficies de temperatura adimensional $T = 0.06897$. Columna central: distribución de temperatura en latitud de 10° a 60° y de 160° a 280° en longitud. Columna derecha: cortes polares de la distribución de temperatura. Secuencia durante el cuasi equilibrio. Deschamps et al. (2012).

comporta de manera peculiar y forma patrones en forma de banana que a medida que se incrementa el número de Rayleigh el movimiento del fluido modifica el patrón de temperatura de tal forma que el calor del centro del sistema se transporta a la parte media y superior del anulo.

Cabe mencionar que las simulaciones e investigaciones numéricas con gravedad radial hasta ahora reportadas en la literatura se han realizado considerando el núcleo externo o el manto exclusivamente. Hasta el momento no se han reportado problemas que combinen el caso de convección - difusión - convección, que en este trabajo de tesis se presenta.

Es importante resaltar que las simulaciones con gravedad radial mencionadas se realizan sólo en un anulo esférico, donde la diferencia de temperaturas, entre la frontera interna y externa del anulo es invariante en el tiempo por lo que el número de Rayleigh se mantiene constante en toda la simulación. En el presente trabajo, al tomar en cuenta más de dos anulos esféricos en donde una de las fronteras presenta una temperatura que varía con el tiempo trae como consecuencia que los números de Rayleigh, en el fluido de la capa interna y en el fluido de la capa externa sean función del tiempo.

1.2.2 Simulaciones de convección con rotación

Para hacer un análisis detallado de la física terrestre y representar a los planetas en un modelo más próximo a la realidad se han hecho simulaciones en las cuales se incorpora la rotación.

En un artículo publicado por Aurnou y Olson (2001) simulan la generación de viento zonal³ en esferas concéntricas con rotación donde la gravedad varía linealmente con el radio. El modelo numérico se basa en una convección térmica que depende del tiempo, un fluido tipo Boussinesq que rota en condiciones de frontera de no deslizamiento para un caso y libre de esfuerzo para el segundo. Las simulaciones presentan un comportamiento del viento zonal que se propaga en dirección Este en la región ecuatorial y en dirección Oeste en latitudes mayores. Según Aurnou y Olson (2011) el comportamiento del fluido se asemeja a la dinámica de la atmósfera de planetas como Júpiter y Saturno, los cuales tienen flujos con velocidades altas en la región ecuatorial originados por convección profunda Aurnou and Olson (2001). Ver figura 1.4

Los movimientos que se presentan en un espacio anular con números de Taylor moderados a altos son distribuciones en formas de columnas paralelas al eje de rotación que se alejan del eje y a medida que las fronteras del espacio anular obligan a converger a estas columnas presentan un movimiento que las hace viajar en sentido horario o anti horario dependiendo de la distancia que se hayan separado del cilindro tangente al radio interno; si convergen afuera del cilindro tangente el movimiento es en sentido de la rotación de lo contrario si las columnas convergen en el interior del cilindro los

³El viento zonal (ZW) se refiere a la parte axisimétrica de la velocidad azimutal.

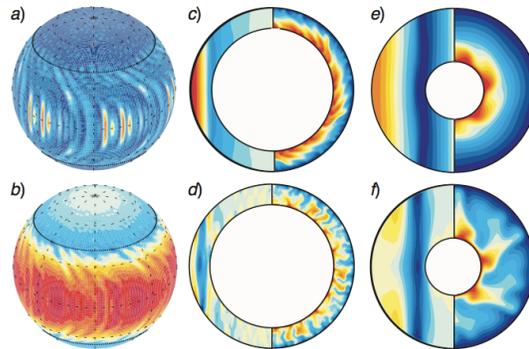


Figura 1.4: Patrones de viento zonal encontrados por Aurnou and Olson (2001).

movimientos son contrarios a la rotación, Hart et al. (1986).

Evonuk and Glatzmaier (2006), realizan simulaciones en dos dimensiones en el plano ecuatorial, tomando en cuenta flujo incompresible, para mostrar los efectos del tamaño del núcleo en el flujo convectivo en planetas gigantes. Sus resultados muestran que a una velocidad de rotación alta las simulaciones con presencia y ausencia del núcleo son equivalentes, en cambio cuando es baja, el patrón de flujo es completamente distinto.

Se han publicado artículos en los que se estudia el experimento GeoFlow⁴, el más detallado de ellos es el publicado por Futterer (2007), en donde enfatiza la diferencia entre sistemas con rotación y los que no la presentan. Entre sus resultados compara los patrones de flujo convectivo en estado estacionario y calcula sus números de Taylor asociados con la rotación, Futterer et al. (2008).

Moghadam y Rahimi (2009) simulan la transferencia de calor en un sistema en el que la esfera interna presenta una rotación que depende del tiempo y la esfera externa rota a una velocidad constante. Concluyen que flujos resultantes presentan un retardo en la transferencia de calor debido a las velocidades angulares de las dos esferas Moghadam and Rahimi (2008).

La última línea de investigación, como se muestra a continuación, se refiere a los dinamos numéricos que estudian el campo magnético que genera el movimiento convectivo del material que conforma al núcleo externo.

⁴Experimento que trata de replicar las condiciones de gravedad autoinducida (al igual que los planetas) en un fluido confinado entre esferas concéntricas.

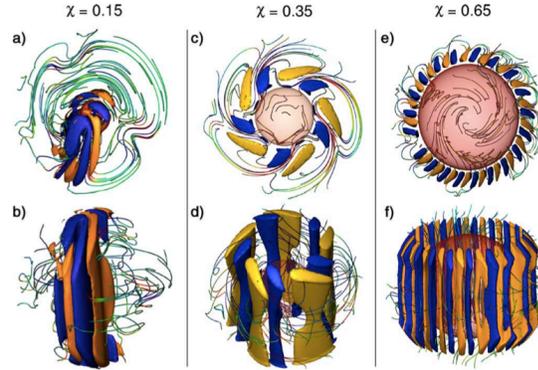


Figura 1.5: Patrones de flujo convectivo, vorticidad y campo magnético analizados por Heimpel. Muestra las isosuperficies de la vorticidad y las líneas de campo magnético para diferentes relaciones de aspecto $\chi = \frac{r_i}{r_o}$. Heimpel et al. (2005).

1.2.3 Dínamos Numéricos

Se han publicado diversos artículos en los que se recrea numéricamente el efecto dínamo que describe la distribución de velocidades, calor y campo magnético. A continuación se hace un breve repaso de algunos de ellos.

Heimpel (2005) estudia el efecto que tiene el tamaño del núcleo interno en la formación del campo magnético. En su trabajo muestra los patrones de temperatura, velocidad angular y campo magnético y cómo se relacionan entre sí. Resalta una clara relación entre la cantidad de celdas convectivas y los campos magnéticos auto sostenibles con forma de dipolo, Heimpel et al. (2005). Ver figura 1.5.

Simitiev y Busse (2005) analizan la relación existente entre el número de Prandtl y la estructura del campo magnético, así como los efectos del número de Rayleigh sobre las celdas convectivas y en consecuencia el efecto dínamo. En este artículo muestran que los números de Prandtl elevados y próximos a la unidad generan un dínamo comparable al geodínamo terrestre, por otro lado, distingue dos patrones de convección: rollos que se propagan en la dirección azimutal y celdas que se distribuyen en la zona ecuatorial, Simitiev and Busse (2005). Ver figura 1.6.

1.2.4 Estudios con mallas alternativas

El estudio de la convección es un problema no lineal, la mejor manera para estudiar los movimientos provocados por ella son los modelos computacionales. Como se mencionó en el estado del arte, muchas de las investigaciones resuelven las ecuaciones de la dinámica de fluidos con un enfoque espectral donde generalmente se utilizan armónicos esféricos como funciones de expansión. Esto implica algunas limitantes: la dificultad para implementar efectos como variación de viscosidad y complicaciones para realizar

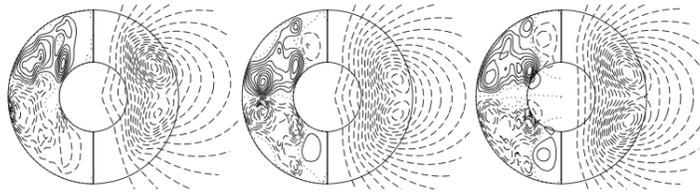


Figura 1.6: Patrones de campo magnético dipolar analizados por Simitev and Busse (2005).

computo en paralelo ya que las funciones base no son locales, Hernlund and Tackley (2003).

La ventaja de implementar un algoritmo como el de la esfera cubada radica en poder resolver las ecuaciones de la dinámica de fluidos de un dominio esférico en un dominio cartesiano, que a su vez permite adoptar esquemas como el de elementos finitos, diferencias finitas o elementos espectrales así como implementar efectos variables en densidad o propiedades del dominio.

El mayor impedimento para resolver el problema de convección, en un sistema de coordenadas esféricas es el denominado "de los polos", el cual se refiere a dos dificultades a la hora de realizar los cálculos numéricos. La primera surge por la singularidad de los polos para las coordenadas polares 0 y π existe un par infinito de valores para la coordenada azimutal, y la segunda es la convergencia de la solución en coordenadas muy próximas a los polos producido por el espaciado de la malla en la dirección polar es mayor en el ecuador y menor en los polos, lo que ocasiona que la condición de Courant-Friederichs-Lewy (CFL) sea más estricta cuando las divisiones de la malla son pequeñas, Kameyama et al. (2008).

En trabajos como los de Yoshida and Kageyama (2004) y Kameyama et al. (2008) se utiliza una malla denominada Yin-Yang, la cual consta de dos mallas iguales que cubren tres cuartos del dominio en la dirección azimutal y dos cuartos en la polar, esto es $(\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, -3\pi/4 \leq \phi \leq 3\pi/4)$, que son ensambladas para formar una geometría esférica. La complicación resultante son los bordes que se superponen lo cual introduce la necesidad de calcular los puntos definitivos con una interpolación sólo en los bordes que superponen. Esta superposición disminuye la eficiencia del código numérico. Por otro lado, la ventaja de usar la malla es que permite calcular la solución directamente en los polos, Yoshida and Kageyama (2004).

En las tres líneas de investigación que se describieron, los estudios se centran en el núcleo líquido de planetas terrestres o se abordan por separado las distintas capas que los conforman. En el presente trabajo de tesis se estudian, de una forma simplificada, las distintas capas que conforman a los planetas terrestres. En particular, se estudian la repercusión del movimiento convectivo en el flujo de calor en los fluidos confinados en primer y último anillo del sistema.

1.3 Objetivos

- Estudiar la transferencia de calor por convección en un sistema de esferas concéntricas en presencia de gravedad radial de la forma $g_e = C_g r$.
- Estudiar los efectos que tiene el movimiento del fluido confinado en el núcleo interno y el manto, sobre el fluido que se encuentra entre la corteza y la capa exterior.
- Calcular el flujo de calor en el sistema de esferas concéntricas.
- Incluir rotación al sistema.

Capítulo 2

Modelo Físico

En la siguiente sección se describe el modelo de capas en el interior de la Tierra y las características principales que presentan, así como el modelo simplificado que se estudia para resolver la transferencia de calor y el flujo convectivo.

En particular para este trabajo se simula la convección en la capa correspondiente al núcleo externo y una capa posterior que puede representar la capa oceánica o atmosférica o una sección adicional del manto que se puede comportar como un fluido.

2.1 Estructura general de la Tierra

Consta de tres capas distintas: la corteza, manto y núcleo. Estas se subdividen en zonas de acuerdo a sus propiedades físicas. Se diferencian con base en la naturaleza (líquido o sólido) y la resistencia promedio del material.

Considerando la descripción de la estructura interna de la Tierra, discutida por Jordan (1979), la litosfera es una capa rígida que constituye una barrera mecánica en toda la superficie de la Tierra en forma de grandes placas rígidas. Por debajo de ella, se encuentra la astenosfera correspondiente al manto superior, el cual se comporta como un fluido viscoso. Inmediatamente después se encuentra la mesosfera o manto inferior que presenta movimientos convectivos gracias a la transferencia de calor que tiene en con el núcleo.

Las profundidades a las que se encuentran cada uno de estas zonas son las siguientes: corteza de 10 a 70 km, manto superior 670 km, manto inferior 2886 km.

De acuerdo a la información sísmica, Stevenson (1981), el núcleo tiene un radio de 3480 km, se divide en dos partes: externa en forma líquida que comprende de los 1220 km hasta la división con el manto, y una interna sólida que está sometida a grandes presiones.

En cuanto a las propiedades físicas del núcleo la parte externa las presiones pueden llegar a 1.36 Mbar con densidades de entre 5.57 a 9.9 gramos por centímetro cúbico y en la parte interna 3.64 Mbar con una densidad de 13 gramos por centímetro cúbico.

2.1.1 Corteza

Es la capa externa relativamente delgada, comprende dos tipos: la corteza continental y la corteza oceánica. La corteza primera tiene aproximadamente 7 km de espesor, compuesta de rocas ígneas con una densidad promedio de 3.0 gramos por centímetro cúbico. En contraste la corteza continental tiene de 35 a 45 km de espesor con una densidad promedio de 2.7 gramos por centímetro cúbico, Tarbuck et al. (2010).

2.1.2 Manto

El manto representa más del 82 % del volumen de la Tierra, consiste en un anillo esférico de roca sólida se extiende a una profundidad de 2900 km y a su vez se divide en dos; el manto superior que comprende la frontera corteza-manto hasta una profundidad de 660 km, desde los 660 hasta 2900 km de profundidad se encuentra el manto inferior que a causa del incremento de presión y temperatura puede fluir, Tarbuck et al. (2010).

2.1.3 Núcleo

La composición del núcleo se describe como una aleación de hierro-níquel con pequeñas cantidades de otros elementos y una densidad aproximada de 11 gramos por centímetro cúbico. Esta dividido en dos regiones: el núcleo externo formado por una capa líquida de 2270 km de espesor en donde a causa del movimiento del hierro metálico, el campo magnético de la Tierra es generado. Finalmente, se encuentra el núcleo interno delimitado por una esfera de 1216 km de radio, Tarbuck et al. (2010).

Para poder representar la estructura interna de la Tierra en la simulación se requiere de la relación de aspecto de cada una de las capas, definida como la razón del radio interno al radio externo $\eta = \frac{r_i}{r_e}$. De acuerdo con las características descritas, el cuadro 2.1 presenta las relaciones de aspecto de las capas de la Tierra.

	Núcleo		Manto		Corteza
	Interno	Externo	Interior	Superior	Continental
η	0	0.35	0.61	0.90	0.98

Tabla 2.1: Relación de aspecto de cada una de las capas de la Tierra.

El anillo formado por la corteza es muy delgado, lo que dificulta su visualización. Por tal motivo en se modificó la relación de aspecto para la corteza y el manto como se

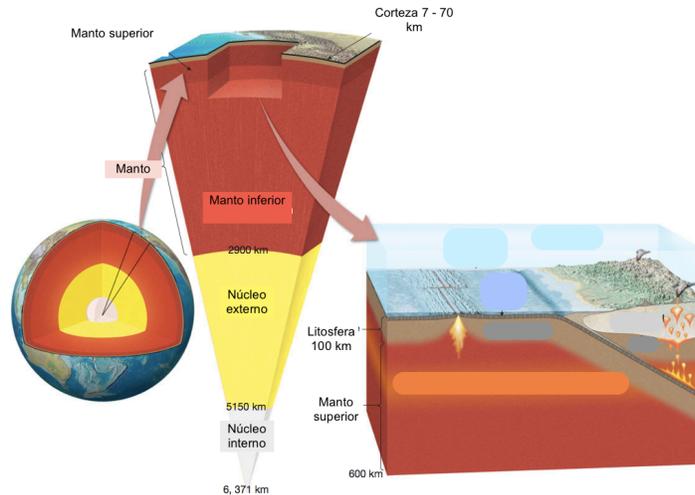


Figura 2.1: Estructura interna de la Tierra, Tarbuck et al. (2010).

muestra en el modelo propuesto.

2.2 Convección del manto

Los cambios en la morfología de la Tierra a lo largo del tiempo implica que el manto se comporta como un fluido Newtoniano cuando es sometido a esfuerzos cortantes en un periodo de millones de años, Jacobs Jacobs (1956). Para que estos movimientos puedan ocurrir es necesario que el transporte de calor sea por convección y no sólo por conducción y radiación. El mecanismo de la convección se presenta cuando el gradiente de temperatura excede el gradiente de temperatura adiabático en tal medida que la diferencia de temperatura necesaria para conducir las corrientes convectivas sean capaces de mantenerse a sí mismas a pesar de la tendencia al equilibrio del proceso de conducción.

De acuerdo con la información geológica los movimientos de las placas tectónicas se calculan en 100cm/año y el núcleo líquido se estima en 1cm/s, esta última es una condición necesaria para la formación del campo magnético. De acuerdo con los estudios de Bullard (1948) el calor que desprende el núcleo si presentara un gradiente adiabático es mayor del que puede ser transportado por conducción en el manto, lo que implica que si en el núcleo ocurre convección de igual forma se esperaría en el manto.

Algunos investigadores como Hills (1947), Meinesz (1948) han recurrido a la convección para explicar algunas de sus hipótesis como la distribución de los continentes, océanos y material rocoso. Otro estudio que ilustra la convección en una escala global es el realizado por Prey (1922), en el cual tomó valores de la altura en las tierras

cercanas al océano, y en sus profundidades del océano como referencia el nivel del mar (contando este valor como negativo) y los expresó en forma de una serie de armónicos esféricos. El resultado de este estudio permite observar que los términos dominantes son los de grado $n = 1$ seguidos de términos $n = 3, 4, 5$ lo que permite explicar la concentración de los continentes en un hemisferio. Si comparamos estos resultados con los patrones convectivos que se obtienen en un ánulo esférico al incrementar su relación de aspecto, como los trabajos realizados por Chandrasekar Chandrasekhar (1961) podemos encontrar una explicación del por qué los continentes han cambiado y se han repositionado a lo largo de la historia de la Tierra a medida del crecimiento gradual de su núcleo.

El manto consiste casi en su totalidad de roca sólida, a pesar de ello es suficientemente caliente para presentar características de un flujo convectivo de baja velocidad el cual se produce por la combinación de tres procesos térmicos:

1. Calentamiento desde la frontera interior (manto-núcleo).
2. Calentamiento en el interior producido por isótopos radioactivos.
3. Enfriamiento desde la superficie exterior del planeta.

En este trabajo se logran la primera y tercera condición imponiendo una temperatura más grande que la temperatura externa para todos los casos. La segunda condición no se aborda, pero dadas las características de la malla y el método numérico se podría introducir un término fuente localizado.

Tomando en cuenta los procesos térmicos descritos se presentan tres modelos de convección. Los primeros dos se centran en la convección del manto y omiten el efecto dínamo causante del campo magnético, en contraste, el tercer modelo incorpora el efecto dínamo que trata de explicar los patrones del campo magnético.

2.2.1 Modelo de capas a 660 km (Modelo I)

Este modelo sostiene que existen dos zonas de convección (ver figura 2.2a.), la primera se extiende desde la corteza hasta una profundidad de 660 kilómetros, en ella el material interno se mueve a mayor velocidad. La segunda zona de convección la conforma el manto inferior en donde el movimiento es de menor velocidad que en la primera, Tarbuck et al. (2010).

2.2.2 Modelo de convección completa del manto (Modelo II)

El segundo modelo explica que la convección se efectúa en la totalidad del manto Tarbuck et al. (2010); el material más frío situado en la frontera exterior se mueve hacia la frontera núcleo-manto, por otro lado, el material que se encuentra en la frontera in-

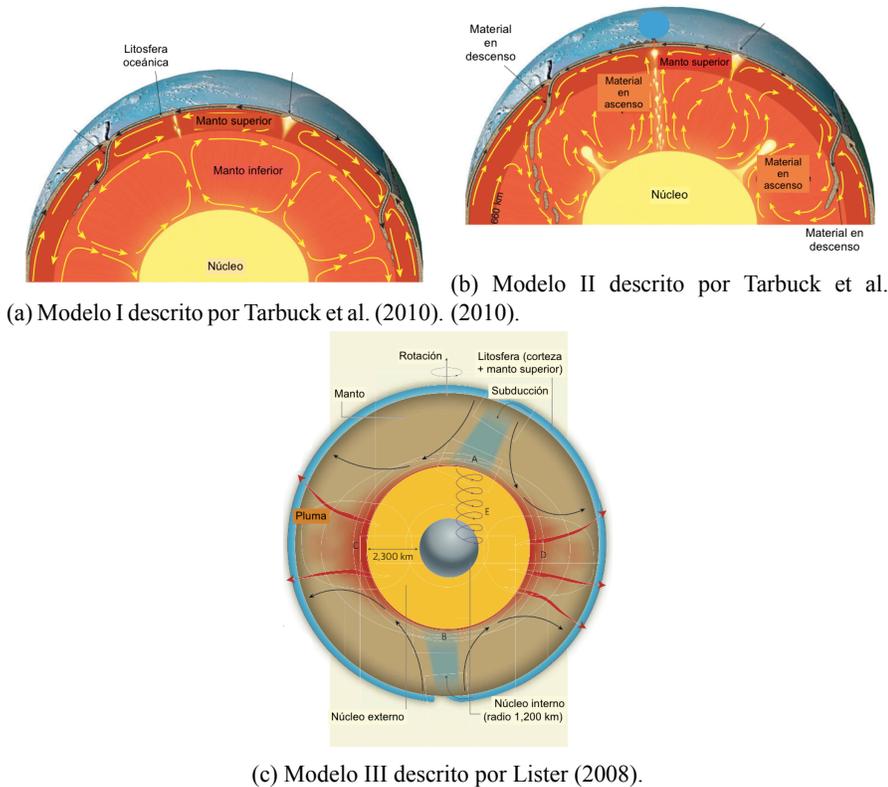


Figura 2.2: Modelos de Convección en el manto

terior asciende a la superficie en forma de plumas mantélicas¹. El modelo se ilustra en la figura 2.2b.

2.2.3 Modelo de convección con rotación a gran escala (Modelo III)

Por último Lister propone un modelo que incluye la rotación, sugiere que la convección en el interior de la Tierra tiene dos zonas convectivas. La capa exterior (el manto), donde el fluido de baja velocidad se enfría al estar en contacto con la frontera exterior (corteza, atmósfera u océano) y en la frontera interna gana calor al estar en contacto con el núcleo externo. A esta capa le sigue una región líquida comprendida por el núcleo externo donde a consecuencia de las altas temperaturas el flujo convectivo tiene mayor velocidad. Al sumar la rotación se genera un efecto en las corrientes convectivas del núcleo externo, el cual provoca que el patrón de flujo sean columnas helicoidales

¹Las plumas mantélicas son rocas solidas en contacto con el núcleo que disminuyen su densidad debido a la temperatura. Estas rocas fluyen hacia el límite entre el manto y la corteza donde, por la poca presión, se pueden fundir y acumular.

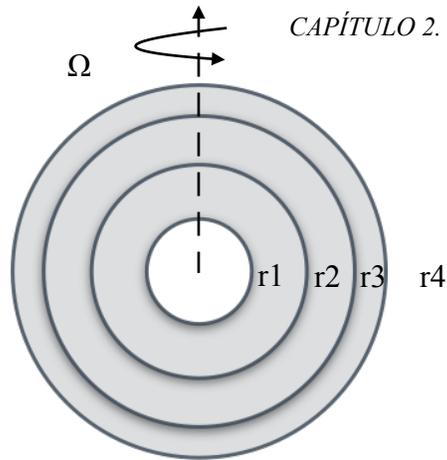


Figura 2.3: Modelo propuesto.

alineadas paralelamente al eje de rotación y tangentes al núcleo interno, de tal manera que si el fluido es conductor eléctrico se presenta un campo magnético Lister (2008).

Según lo anterior el manto presenta movimiento convectivo que en comparación con el del núcleo externo es de menor velocidad, es por ello que en este trabajo se considera como un sólido la parte correspondiente al manto. Para incluir las características restantes descritas en los tres modelos anteriores en la sección 2.3 se describe el modelo que se estudia en el presente trabajo.

2.3 Modelo propuesto

Se plantea reproducir el modelo de capas de los planetas terrestres, en específico, la estructura de la Tierra bajo las siguientes consideraciones: los planetas son esferas, cada capa que conforma su estructura es un ánulo esférico concéntrico con difusividad térmica α constante en todo el sistema, las fronteras de los ámulos con fluido son rígidas, la fuerza de gravedad está dirigida hacia el centro de las esferas y varía según el radio. Además el sistema se encuentra rotando a una velocidad constante Ω .

Como muestra la figura 2.3 el modelo consta de tres ámulos esféricos con diferentes relaciones de aspecto que se presentan en el cuadro 2.2. Los ámulos formados por los radios r_1-r_2 y r_3-r_4 contienen un fluido y el ánulo intermedio se considera como sólido conductor.

Ánulo	1	2	3
η	0.35	0.675	0.8

Tabla 2.2: Relaciones de aspecto para el modelo propuesto.

Las condiciones de frontera térmicas son las siguientes: la interior del primer ánulo esférico y la exterior del último ánulo se mantienen a una temperatura constante, la temperatura de la superficie interior T_1 es superior a la de la superficie exterior T_2 , ver figura 2.3. Para las condiciones de frontera de los fluidos se tiene el no deslizamiento en las superficies internas y externas del ánulo interior y exterior.

Capítulo 3

Modelo Matemático

Para todo fenómeno físico existe una ecuación matemática que representa el comportamiento del fenómeno en estudio. En este trabajo se considera un modelo que implica dos capas de fluidos, una confinada en el ánulo esférico interno y la segunda en el ánulo esférico externo, y cuatro capas intermedias en fase sólida. Es por ello que en el siguiente capítulo se presentan las ecuaciones que rigen el comportamiento tanto de la parte sólida como de la parte del fluido.

En las siguientes páginas se presentan las ecuaciones de la dinámica de los fluidos y algunos parámetros adimensionales representativos del modelo físico presentado en el capítulo anterior.

3.1 Flujo incompresible

La densidad en un fluido (líquidos y gases) es una función de la temperatura y la presión, por lo que alteraciones en estas dos variables causa que la densidad cambie, dificultando el desarrollo matemático.

Para poder simplificar la solución de las ecuaciones de dinámica de los fluidos se requiere hacer una serie de suposiciones, entre ellas, se asume que el flujo es incompresible. Esto significa que la densidad es constante en todo el fluido sin importar las variaciones de temperatura y presión que se susciten.

En particular, para los líquidos esta consideración es válida ya que la densidad varía muy poco respecto a la temperatura y se requieren de presiones muy altas para que la densidad pueda variar.

Esta consideración se traduce en ecuaciones más sencillas de resolver.

3.2 Convección natural

La convección es una forma de transferencia de calor entre un fluido en movimiento y una superficie, en particular la convección natural se presenta cuando el movimiento del fluido es producido por una corriente convectiva que, como en el interior de los planetas, se puede generar cuando un fluido sin movimiento esta sujeto a una fuerza de cuerpo y presenta un gradiente de densidad, que disminuye en la dirección de la fuerza de cuerpo. Cuando se conjuntan estas características se produce una fuerza de flotación que genera un movimiento en el interior del fluido que se conoce como corriente convectiva.

Como se introdujo en el párrafo anterior se requiere de dos características para generar un flujo convectivo: el gradiente de densidad y una fuerza de cuerpo. Para el caso de este trabajo el gradiente de densidad lo genera un gradiente de temperatura (entre la superficie interior y la superficie exterior a menor temperatura) y la fuerza de cuerpo es generada por un campo gravitacional.

Una de las características fundamentales para que se presente un flujo convectivo es que la densidad pueda variar en el interior del fluido, es por ello que para acoplar la convección natural con el flujo incompresible se toma en cuenta la aproximación de *Boussinesq*. La cual considera la variación de la densidad por efecto de la temperatura únicamente en los términos de la fuerza de cuerpo.

3.3 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad representa el principio de conservación de masa. Este principio describe que la variación de masa en el tiempo es igual a la masa que entra en un sistema menos la masa que sale de dicho sistema.

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i \vec{v}_i)_s - \sum_i (\rho_i A_i \vec{v}_i)_e = 0 \quad (3.1)$$

que en su forma vectorial se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.2)$$

si tomamos en cuenta que el fluido es incompresible, la variación de la densidad respecto al tiempo y la posición es cero, por lo que (3.2) se simplifica a:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.3)$$

3.4 Ecuación de cantidad de movimiento

La ecuación de cantidad de movimiento de un fluido describe que la variación de la cantidad de movimiento $m \cdot \vec{v}$ es igual a la suma de fuerzas que actúan sobre el fluido y en forma integral se escribe:

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \vec{v} \rho dV \right) + \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_s - \sum_i (\dot{m}_i \vec{v}_i)_e \quad (3.4)$$

en forma vectorial:

$$\sum \vec{F} = \left[\vec{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) + \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right] dV \quad (3.5)$$

El término entre paréntesis es la ecuación de continuidad por lo que el lado derecho de la igualdad se simplifica a $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$, donde $\frac{d}{dt}$ es la derivada material definida como $\frac{d()}{dt} = \frac{\partial ()}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla ()$.

En este trabajo solo se consideran las fuerzas de superficie (viscosas y presión), las fuerzas de gravedad, la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga. Si se toman en cuenta las fuerzas mencionadas la ecuación (3.5) se escribe:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (3.6)$$

Adicionalmente, el fluido en estudio es un fluido Newtoniano y la ecuación de cantidad de movimiento se transforma a:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (3.7)$$

Para introducir la convección a la ecuación de cantidad de movimiento se tiene que considerar la variación de la densidad respecto a la temperatura en el término gravitacional. Si en la ecuación de cantidad de movimiento se escribe en el término gravitacional la densidad ρ más un incremento $\Delta\rho$:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = (\rho + \Delta\rho) \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (3.8)$$

Para relacionar la variación de la densidad con la temperatura se recurre al coeficiente de expansión volumétrica termal β definido como:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho - \rho_\infty}{T - T_\infty} \quad (3.9)$$

De donde se despeja la variación de la densidad $\Delta\rho = -\beta\rho(T - T_\infty)$ y se sustituye en (3.8). Como resultado se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento considerando la convección.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho [1 - \beta(T - T_\infty)] \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (3.10)$$

En el presente trabajo se simula en coordenadas cartesianas por lo que la fuerza de gravedad para el sistema esférico \vec{g}_s se transforma, mediante la matriz de transformación, a su equivalente en un sistema cartesiano \vec{g}_c , Dumas (1991). Ver apéndice C.

$$\vec{g}_c = \frac{-f_r}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} (x_1, x_2, x_3) \quad (3.11)$$

También se toma en cuenta que la componente f_r varía según el radio por lo que se puede escribir como:

$$\vec{g}_c = \frac{-C_g}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} (x_1, x_2, x_3) \quad (3.12)$$

Donde C_g es una constate gravitacional con unidades $\frac{m^{n+1}}{s^2}$ y n es un número entero.

La ecuación (3.10) puede ser simplificada gracias a que la velocidad angular sólo tiene una componente en la dirección x_3 Ver apéndice B, de este modo la ecuación de cantidad de movimiento es:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P_d + \mu \nabla^2 \vec{v} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} + \rho \beta (T_\infty - T) \vec{g} \quad (3.13)$$

3.5 Ecuación de la energía

La ecuación de la energía se basa en la primera ley de la termodinámica, la cual postula que la variación de la energía total de un sistema es igual al flujo de calor menos el flujo de trabajo, esto es $\dot{Q} - \dot{W} = \dot{E}$ y en su forma integral:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.14)$$

que en su forma vectorial se escribe:

$$\rho \frac{de}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\vec{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \quad (3.15)$$

el trabajo de las fuerzas viscosas es equivalente a $\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \equiv \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) + \Phi$, donde Φ es la función de disipación viscosa. Sustituyendo esta consideración en la ecuación (3.15):

$$\rho \frac{de}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla p + p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) + \Phi \quad (3.16)$$

Al utilizar las fuerzas viscosas de la ecuación de cantidad de movimiento y sustituir la energía total $e = u + \frac{1}{2}\vec{v}_i^2 + g_i x_i$ en la ecuación anterior, tanto la energía cinética como la energía potencial se cancelan y se obtiene:

$$\rho \frac{du}{dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (3.17)$$

Si $du \approx c_v dT$ la ecuación de la energía se convierte en:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \quad (3.18)$$

Para finalizar en este trabajo la disipación de las fuerzas viscosas es despreciable y la densidad es constante, lo que implica que la divergencia de la velocidad es igual a cero $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. De igual modo, el calor específico c_v y la conductividad térmica k son constantes y la ecuación (3.18) se simplifica a:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T \quad (3.19)$$

3.6 Ecuación de difusión de calor

Al ser un sólido, el ánulo central del modelo propuesto no presenta movimiento y la única ecuación que se resuelve es la de la energía. Como la velocidad en la parte sólida es igual a cero, la densidad es constante y la función de disipación viscosa es despreciable la ecuación de la energía se reduce a:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (3.20)$$

Para el caso de difusión de calor el ánulo esférico interior y exterior no presentan movimiento (velocidad igual a cero) por lo que la única ecuación que se resuelve es la ecuación (3.20). Para fines de comparación la ecuación (3.20) se resuelve de forma analítica en el apéndice A.

3.7 Parámetros adimensionales

Cuando las ecuaciones de la dinámica de los fluidos se transforman a su forma adimensional se encuentran números adimensionales que para el caso del presente trabajo son los siguientes.

3.7.1 Número de Grashof

El número de Grashof es la razón de las fuerzas de flotación a las fuerzas viscosas e indica la transición a flujo turbulento.

$$Gr = \frac{gL^3 \beta \Delta T}{\nu^2} \quad (3.21)$$

3.7.2 Número de Rayleigh

El número de Rayleigh es un indicador muy importante para la transferencia de calor por convección, cuando este parámetro se encuentra por encima de un valor crítico la transferencia de calor por convección domina el fenómeno, en caso contrario la transferencia de calor es dominada por la difusión.

$$Ra = \frac{gL^3\beta\Delta T}{\nu\alpha} \quad (3.22)$$

donde g es la gravedad (en este estudio $g = g_s(r_e) = C_g r_e^n$), L es una longitud característica, que de ahora en adelante se define como la diferencia entre radio externo y radio interno de los ánuos con fluidos. $L = d = r_e - r_i$ y ΔT es la diferencia de temperaturas de la superficie interior y la superficie exterior de los ánuos con fluidos $\Delta T = T_{r_i} - T_{r_e}$, ver apéndice B en donde se desarrolla de manera detallada. Considerando estos aspectos los números de Grashof y Rayleigh son respectivamente:

$$Gr = \frac{\beta d^3 \Delta T C_g}{\nu^2 r_e^n} \quad (3.23)$$

$$Ra = \frac{\beta d^3 \Delta T C_g}{\nu \alpha r_e^n} \quad (3.24)$$

donde C_g es la contante gravitacional, β es la constante de expansión volumétrica termal, d es la diferencia entre radio externo y radio interno de los ánuos con fluidos $d = r_e - r_i$. T_{r_i} es la temperatura de la superficie interior de los ánuos con fluidos, T_{r_e} es la temperatura de la superficie exterior de los ánuos con fluidos y α es la difusividad térmica .

3.7.3 Número de Prandtl

El número de Prandtl es la medida de la efectividad de la difusión de la cantidad de movimiento sobre la difusión de calor que tiene un fluido, esto es:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.25)$$

3.7.4 Número de Nusselt

Se define al número de Nusselt como el flujo de calor relativo al flujo de calor por conducción cuando el fluido carece de movimientos convectivos. Este número es la razón del flujo de calor por unidad de area debido a la convección entre el flujo de calor debido a la conducción bajo las mismas condiciones.

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (3.26)$$

Capítulo 4

Algoritmo Numérico

Las ecuaciones planteadas para este trabajo se resuelven con el método de los elementos espectrales. Este método parte del método de los residuos pesados y se basa en construir la solución de una ecuación diferencial de una serie de aproximaciones locales. Fragmenta un dominio en subdominios (elementos) simples y utiliza interpolaciones para encontrar la solución aproximada.

En general el método de los residuos pesados emplea funciones de expansión como base para una serie truncada de la solución de la ecuación diferencial parcial a resolver. Para asegurar que la solución aproximada satisface la ecuación diferencial se utilizan funciones de prueba para minimizar el residual (residuo) que se forma cuando la solución aproximada es sustituida en la ecuación diferencial parcial. La combinación de las expansiones y las funciones de prueba le da nombre a diferentes métodos.

Una ventaja del método es que permite incrementar el orden de los polinomios de interpolación mientras el número de elementos se mantiene constante. Otro punto importante es que se puede aplicar en geometrias complejas y permite implementar el algoritmo de la esfera cubada para generar una malla computacional esférica.

4.1 Método de residuos pesados (ponderados)

Parte de una ecuación diferencial escrita como:

$$\mathbb{L}(u) = 0 \quad (4.1)$$

y se asume que la solución $u(x, t)$ puede ser representada por su forma aproximada:

$$u^\delta(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{i=1}^N u_i(t) \Phi_i(x) \quad (4.2)$$

donde $\Phi_i(x)$ son funciones analíticas de prueba (expansión), $u_i(t)$ son coeficientes indeterminados y $u_0(x, t)$ se selecciona para satisfacer las condiciones iniciales y de frontera. Al sustituir la solución aproximada en la ecuación diferencial se genera un residual (error):

$$\mathbb{L}(u^\delta) = R(u^\delta) \quad (4.3)$$

el objetivo es que el residual (error) sea lo más próximo a cero y se define el producto interno entre dos funciones como

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (4.4)$$

Para asegurar que el residual sea cero N debe tender a infinito y se impone la condición del producto interno del residual R respecto a la función de peso $v_j(x)$

$$(v_j(x), R) = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.5)$$

El método de los residuos pesados no determina la forma de las funciones de peso a usar, es por ello que dependiendo de la función que se utilice el método cambia de nombre. En el cuadro 4.1 se hace un resumen de algunas de las funciones de peso y el nombre que toma el método.

Función de peso	Tipo de método
$v_j(x) = \delta(x - x_j)$	Colocación
$v_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{dentro } \Omega^j \\ 0 & \text{fuera } \Omega^j \end{cases}$	Volumenes finitos
$v_j(x) = \frac{\partial R}{\partial u_j}$	Mínimos cuadrados
$v_j(x) = x^j$	Momentos
$v_j(x) = \Phi_j$	Galerkin
$v_j(x) = \Psi_j (\neq \Phi_j)$	Petrov-Galerkin

Tabla 4.1: Resumen de métodos según la función de peso.

4.2 Método de Galerkin

Para este trabajo se utiliza el método de Galerkin, también conocido como Bubnov-Galerkin descrito en Karniadakis and Sherwin (1999), en el cual las funciones de peso son iguales a las funciones de prueba $v_j = \Phi_j$ y el producto interno del residual respecto a la función de peso es

$$(v_j(x) = \Phi_j(x), R) = \int_{\Omega} \Phi_j(x)R(x)dx = 0 \quad (4.6)$$

Dentro del método existen dos aproximaciones para resolver la ecuación diferencial; 1) dividir el dominio Ω en subdominios elementales Ω_e mientras el orden del polinomio de las funciones de expansión se mantiene constante, también conocido como aproximación tipo h , y 2) aumentar el orden del polinomio de las funciones de expansión

en un sólo dominio, conocido como aproximación tipo p . Cuando se combina las dos aproximaciones se dice que es un método de elementos espectrales hp y es el método que se utiliza en el presente trabajo.

Si en cada dominio elemental Ω_e se considera un elemento estándar Ω_{st} en el cual las coordenadas locales tienen rangos de $-1 < \xi_1, \xi_2, \xi_3 < 1$ se pueden expresar las coordenadas globales en términos de las coordenadas locales gracias la transformación $x = \chi^e(\xi)$. De igual forma se pueden expresar las funciones de expansión globales $\Phi_i(x)$ en términos de las expansiones locales $\phi_p(\xi)$.

Recordando que la solución aproximada u^δ se expresa en términos de las funciones de expansión globales, también se puede expresar en términos de las expansiones locales del siguiente modo

$$u^\delta(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \Phi(x)u_i = \sum_{e=1}^{N_{el}} \sum_{p=0}^P \phi_p^e(\xi)u_p^e \quad (4.7)$$

debido que hay más coeficiente de expansiones locales que coeficientes de expansiones globales se utilizan restricciones extra para igualar su número.

4.3 Puntos Gauss-Lobatto-Legendre

En este trabajo las funciones de expansión ϕ_p son el polinomio de Lagrange a través (evaluados) de los ceros del polinomio Gauss-Lobatto-Legendre lo que resulta en expansiones locales de la forma:

$$\phi_p(\xi) = \frac{(\xi - 1)(\xi + 1)L'_P(\xi)}{P(P + 1)L_P(\xi_P)(\xi - \xi_p)} \quad (4.8)$$

4.4 Cuadratura Gauss-Lobatto-Legendre

Según la restricción del producto punto se tienen que evaluar integrales de la forma $\int_{-1}^1 u(\xi)d\xi$. Esto se logra integrando numéricamente usando la cuadratura Gaussiana que representa al integrando como un polinomio de Lagrange

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{Q-1} u(\xi_i)h_i(\xi) + \varepsilon(u) \quad (4.9)$$

donde Q es el numero de puntos, ξ_i es la abscisa en el intervalo $[-1,1]$, h_i es el polinomio de Lagrange y $\varepsilon(u)$ es el error de aproximación. Si se sustituye en la integral se obtiene la forma general de la cuadratura Gaussiana:

$$\int_{-1}^1 u(\xi)d\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} w_i u(\xi_i) + R(u) \quad (4.10)$$

En este trabajo se utiliza la cuadratura Gauss-Lobatto-Legendre que define las abscisas y los pesos como

$$\xi_i = \begin{cases} -1 & i = 0 \\ \xi_{i-1, Q-2}^{0,1} & i = 1, \dots, Q-2 \\ 1 & i = Q-1 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$w_i^{0,0} = \frac{2}{Q(Q-1)[L_{Q-1}(\xi_i)]^2} \quad i = 0, \dots, Q-1 \quad (4.12)$$

$$R(u) = 0 \quad \text{si } u(\xi) \in \mathcal{P}_{2Q-3}([-1, 1]) \quad (4.13)$$

4.5 Método de la esfera cúbica

El método de la esfera cúbica esta basado en la descomposición de la esfera en seis regiones idénticas obtenidas proyectando los lados de un cubo circunscrito en una esfera, de aristas $2a$ a la superficie de la misma. Con este método cualquier punto que se encuentre en las caras del cubo puede proyectarse a la superficie de la esfera y viceversa, Ronchi et al. (1996).

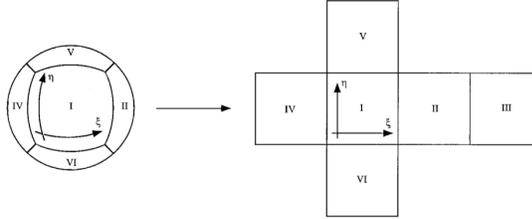


Figura 4.1: Transformación de la esfera cúbica, Ronchi et al. (1996).

Si cada cara del cubo tiene coordenadas locales (x, y) se pueden proyectar a la superficie de la esfera y después, por semejanza de triángulos, obtener las coordenadas en el sistema de referencia absoluto X, Y, Z mediante las transformaciones del cuadro 4.2, Nair et al. (2005):

Para este trabajo la malla computacional es de suma importancia ya que dependiendo del numero de elementos, la cantidad de puntos en cada elemento y la disposición de los puntos en los elementos se puede o no tener resultados confiables de la convección en el método numérico. Por esta razón en este trabajo se asegura que el método numérico cuente con los datos suficientes para resolver las ecuaciones de la transferencia de calor y la dinámica de los fluidos.

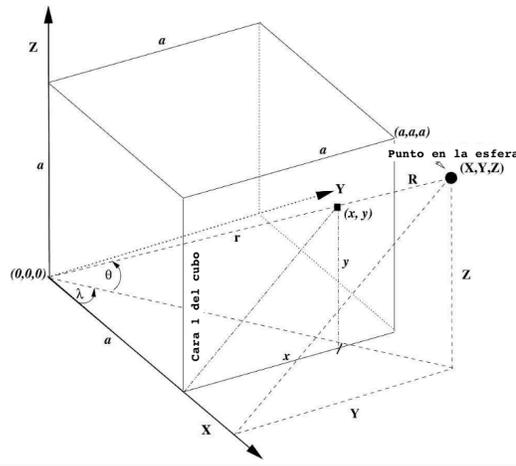


Figura 4.2: Sistema coordenado local (x, y) y absoluto (X, Y, Z) para la cara I, Nair et al. (2005).

Cara	X, Y, Z	x, y
I	$\frac{R}{r}(a, x, y)$	$a \left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X} \right)$
II	$\frac{R}{r}(-x, a, y)$	$a \left(\frac{-X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right)$
III	$\frac{R}{r}(-a, -x, y)$	$a \left(\frac{Y}{X}, \frac{-Z}{X} \right)$
IV	$\frac{R}{r}(x, -a, y)$	$a \left(\frac{-X}{Y}, \frac{-Z}{Y} \right)$
V	$\frac{R}{r}(-y, x, a)$	$a \left(\frac{Y}{Z}, \frac{-X}{Z} \right)$
VI	$\frac{R}{r}(y, x, -a)$	$a \left(\frac{-Y}{Z}, \frac{-X}{Z} \right)$
$R = a\sqrt{3}$ (radio de la esfera)		
$r = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$		

Tabla 4.2: Transformaciones entre coordenadas locales y coordenadas absolutas para el método de esfera cúbica.

4.6 Generación de la malla

Para generar la malla computacional se parte de los ánuos esféricos definidos en el capítulo 2. Se utiliza el radio interno y externo de cada uno de los ánuos para definir una serie de cubos internos, con incrementos equidistantes entre caras. En las caras de estos cubos se define una malla local con incrementos constantes en x, y . Posteriormente se utilizan las transformaciones del cuadro 4.2 para las seis caras de cada uno de los cubos.

Para cada ánuo al conjunto de puntos formado por las proyecciones de cada cara se le denomina de ahora en adelante Macro elemento, figura 4.3.

Una vez conformados los macro elementos se procede a dividir cada uno de ellos en $15 \times 15 \times 2$ elementos locales, 15 elementos en la dirección azimutal, 15 elementos en

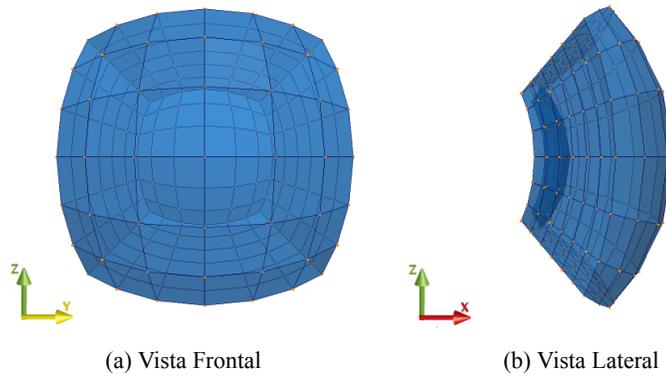


Figura 4.3: Malla del Macro elemento correspondiente a las caras I del primer ánulo.

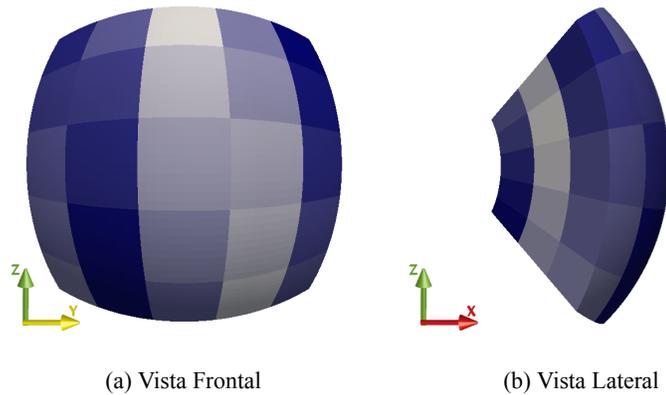


Figura 4.4: Ejemplo de la división del macro elemento correspondiente a las caras I del primer ánulo en $5 \times 5 \times 3$ elementos, 5 elementos en la dirección azimutal, 5 elementos en la dirección polar y 3 elementos en la dirección radial.

la dirección polar y 2 elementos en la dirección radial. Por motivos de visualización se presentan las imágenes de una división en $5 \times 5 \times 3$ de un macro elemento en la figura 4.4

Para finalizar en cada elemento local se introducen los puntos Gauss-Lobatto-Legendre con ayuda de la transformación $x = \chi^e(\xi)$, figura 4.5. Se utiliza un polinomio de grado 5 para cada una de las tres direcciones lo que genera un total de 125 puntos por elemento local.

En resumen la malla computacional consta de 8,100 elementos con 125 puntos cada uno. En la figura 4.6 se muestra el resultado final de la malla.

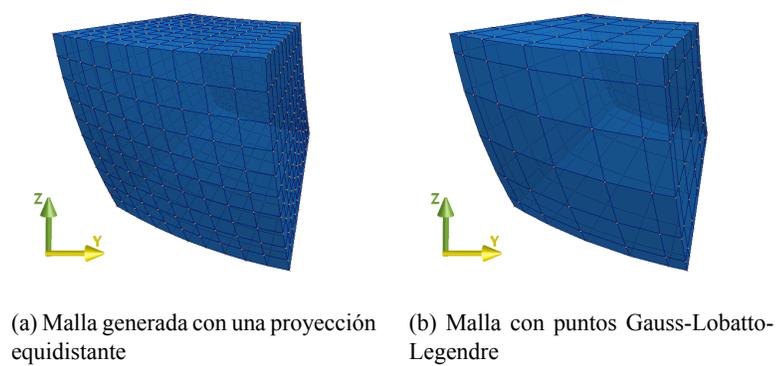


Figura 4.5: Mapeo de los puntos Gauss-Lobatto-Legendre en uno de los elementos locales (vista frontal).

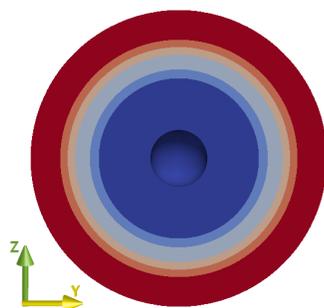


Figura 4.6: Corte meridional de la malla computacional.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Validación

En esta sección se comparan los resultados obtenidos con la formulación descrita en los capítulos anteriores con los trabajos de Thamire and Wright (1998) y Bercovici et al. (1989). En el sistema de tres ámulos son eliminadas las fronteras intermedias para que se comporte como un sólo, ver figura 5.1

La primera simulación se enfoca en la convección de un ánulo esférico en presencia de gravedad laboratorio (dirección negativa del eje z) y aire como fluido de trabajo. Los resultados concuerdan con los reportados por Thamire and Wright (1998) en donde la evolución de las celdas convectivas oscila entre arreglos de 2 a 3 células hasta ordenamientos unicelulares (5.2) y el número de Nusselt interno es menor en polo norte y mayor en el polo sur, por otro lado el Nusselt externo se comporta de manera inversa, mayor en el polo norte y menor en el polo sur, Figura 5.3.

Resumen de parámetros de simulación				
Pr	Ra	Ta	\vec{g}_z	η
0.7	5000	0	cte	0.714

La publicación de Bercovici et al. (1989) estudia la convección sin rotación en una cavidad esférica, con relación de aspecto $\eta = 0.55$, la cual aloja un fluido con número de Prandtl infinito sujeto a una fuerza de gravedad constante, además se calienta desde el interior y sus fronteras son libres de esfuerzo y tienen temperaturas constantes. Sus experimentos muestran que para números de Rayleigh $Ra = 2000, 3500$ y 7000 , los patrones de flujo son tridimensionales con dos tipos de flujo dominantes y llegan a un estado estacionario. Los flujos dominantes se presentan en forma de seis plumas convectivas cilíndricas ubicadas en las caras de un cubo imaginario colocado en la mitad del sistema (solución cúbica), la segunda forma son 4 plumas convectivas ubicadas en las aristas de un tetraedro (solución tetraédrica), ver figura 5.4.

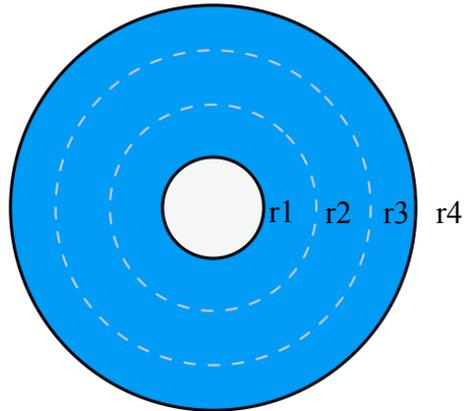


Figura 5.1: Modelo de la malla para las simulaciones de un sólo ánulo.

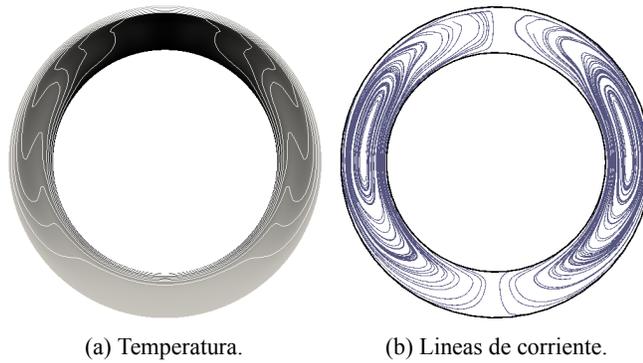


Figura 5.2: Patrones de flujo convectivo, distribución de temperaturas (izquierda) y patrones de flujo unicelular (derecha). Temperatura en escala de grises, el color negro corresponde a zonas calientes.

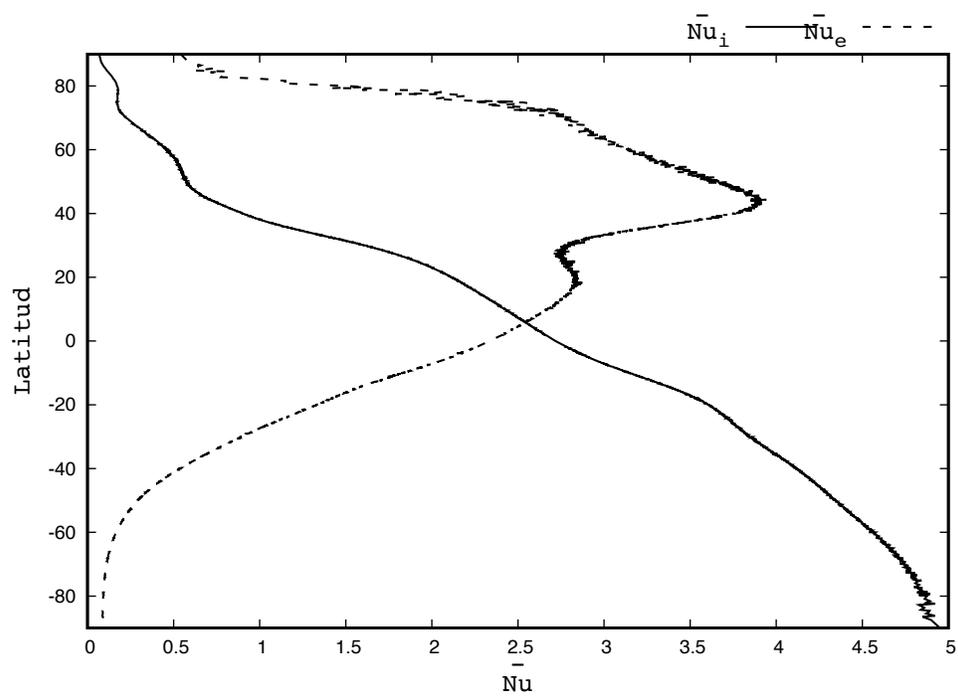


Figura 5.3: Comportamiento de Nusselt en la frontera interior y exterior del anillo cuando se presentan los patrones unicelulares.

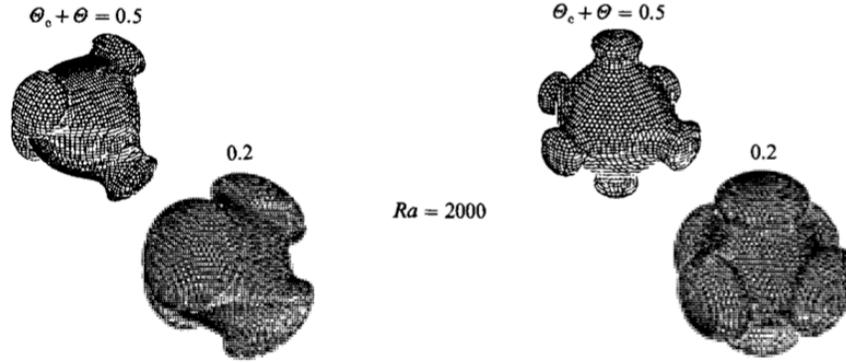


Figura 5.4: Tipos de flujo convectivo para $Ra = 2000$. Superficies de temperatura $\Theta = 0.2$ y $\Theta = 0.5$ (solución tetraédrica izquierda y solución cúbica derecha).

En esta simulación se toma los tres ángeles como si fueran uno y se considera una viscosidad suficientemente elevada $\mu = 10^{10}$ para aproximar un número de Prandtl infinito y como condición inicial la distribución de temperatura del estado difusivo junto con un campo de velocidades igual a cero. A diferencia de los experimentos de Bercovici et al. (1989) esta simulación considera condiciones de no deslizamiento para el fluido, lo que repercute directamente en el número de Nusselt ya que números elevados de Nu son provocados por la ausencia de la capa límite viscosa Yadav et al. (2015).

Resumen de parámetros de simulación				
Pr	Ra	Ta	\vec{g}_r	η
1×10^{10}	2000	0	cte	0.55

En los resultados se aprecia que el número de Nusselt llega a un estado estacionario, ver figura 5.5 y que el patrón de flujo es una solución cubica, figura 5.6. A diferencia del valor del número de Nusselt $\bar{Nu} = 2.2507$ reportado por Bercovici et al. (1989), en este trabajo es de 1.1792 por tener fronteras con condición de no deslizamiento Julien et al. (1996). El comportamiento parabólico en los primeros instantes del \bar{Nu}_e es provocado por el primer ascenso de fluido caliente, con zonas cilíndricas de mayor diámetro, después la cercanía con las fronteras frías provocan la disminución del radio de las zonas ascendentes.

El patrón convectivo presenta seis plumas de forma cilíndrica en las caras de un cubo imaginario en el interior del sistema, en estas regiones el fluido caliente asciende a la superficie externa. Las zonas de flujo descendente rodean a las plumas convectivas y transportan al fluido frío de vuelta a la superficie interior, ver figura 5.7. Este patrón de flujo y temperatura presenta simetría en el plano ecuatorial y meridional como lo muestran los cortes 5.7a y 5.7b

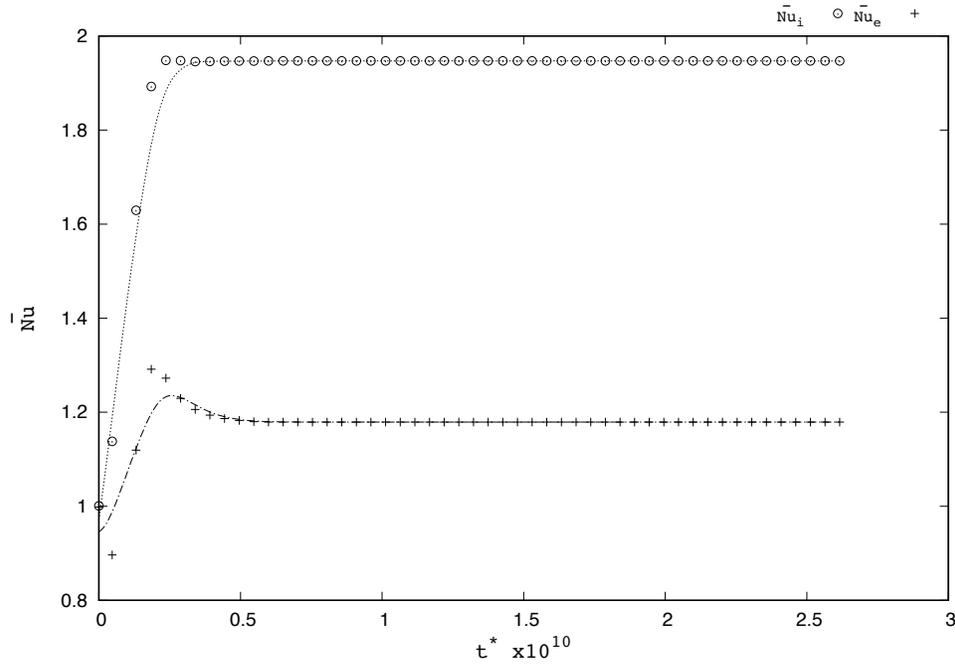


Figura 5.5: Números de Nusselt promedio en la superficie interna \bar{Nu}_i y superficie externa \bar{Nu}_e para $Ra = 2000$ junto con su respectiva interpolación por MLS en línea punteada. Se aprecia el incremento hasta llegar a estado estacionario.

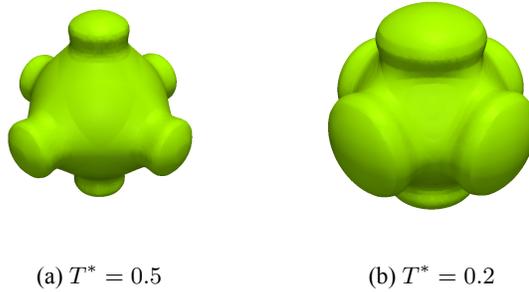


Figura 5.6: Superficies de temperatura para el caso de $Ra = 2000$.

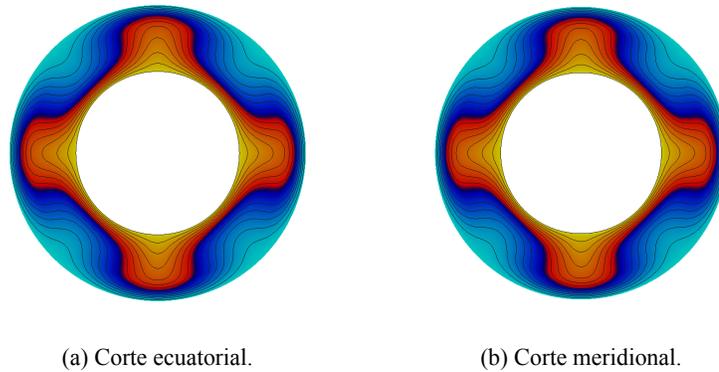


Figura 5.7: Corte meridional y ecuatorial que muestran la simetría de la distribución de temperatura T^* para el caso $Ra = 2000$. Zonas calientes en color amarillo y zonas frías en color azul.

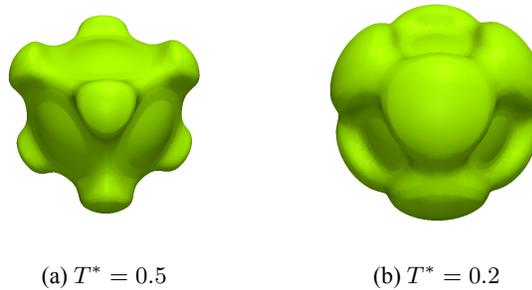


Figura 5.8: Superficies de temperatura para el caso de $Ra = 2000$ después de haber cambiado la dirección del flujo de la solución cúbica con $Ra = 2000$.

Al igual que Bercovici et al. (1989) se estudia la solución para el cambio en la dirección del flujo. Para esta simulación se cambia el signo de las componentes de la velocidad y temperatura de la solución cúbica para establecerlas como condiciones iniciales. El resultado es un cambio en el patrón convectivo a uno totalmente cúbico, parecido al estado “meta estable” reportado por Bercovici et al. (1989), que ubica las zonas de ascenso en los vértices de un cubo y las zonas de descenso en las caras del mismo, figura 5.8. Al igual que la solución cúbica, la totalmente cúbica presenta simetría en los planos ecuatorial y meridional, figura 5.9. En contraste con el estudio antes mencionado los resultados muestran una solución estable que llega a un estado estacionario con la distribución totalmente cúbica.

Si se comparan los números de Nusselt promedio en la superficie interna y externa con los obtenidos en la simulación anterior (solución cúbica), es evidente notar que al interior del sistema disminuye de 1.947 a un valor de 1.524 y al exterior aumenta de

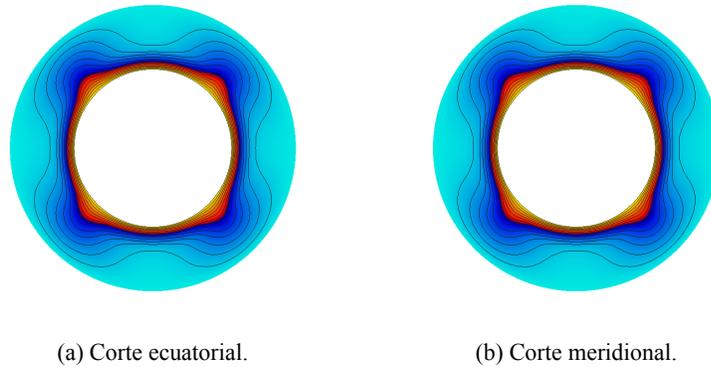


Figura 5.9: Corte meridional y ecuatorial que muestran la distribución de temperatura T^* después de cambiar el signo de la velocidad y temperatura de la solución cúbica $Ra = 2000$. Zonas calientes en color amarillo y zonas frías en color azul.

1.1792 a 1.975. Lo que concuerda con el comportamiento reportado por Bercovici et al. (1989). En la figura 5.10 se muestran los $\bar{N}u$ del caso de cambio de dirección del flujo.

5.2 Rango de validez

En la sección anterior se verificó que la malla y el algoritmo numérico funcionan correctamente al reproducir resultados que coinciden con la literatura disponible. Ahora se analizan numéricamente el rango de validez del código en una serie de simulaciones para dos relaciones de aspecto $\eta = 0.35$ y $\eta = 0.8$. En esta, las condiciones de frontera para el fluido son de no deslizamiento, mientras que para la temperatura se imponen temperaturas constantes en la superficie externa e interna (la interna siendo mayor), por otro lado la gravedad del sistema en la componente radial actúa hacia el centro del sistema y varía linealmente con el radio de la esfera ($g_s = C_g r$).

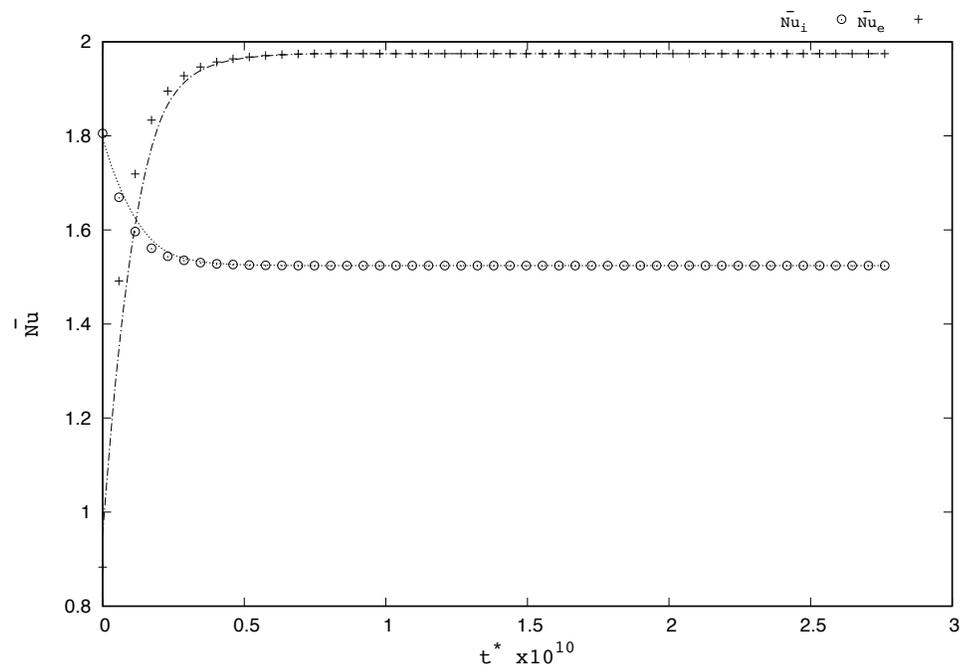


Figura 5.10: Números de Nusselt promedio en la superficie interna \bar{Nu}_i y superficie externa \bar{Nu}_e para el caso de cambio de dirección en el flujo con $Ra = 2000$ junto con su respectiva interpolación por MLS en línea punteada.

Resumen de casos simulados					
Ra	Pr	$\eta = 0.35$		$\eta = 0.8$	
		Nu_i	Nu_e	Nu_i	Nu_e
2000	1	1.00	1.00	1.00	1.00
5000	1	1.00	1.00	1.00	1.00
10000	1	1.00	1.00	2.14	2.06
20000	1	1.82	1.23	2.41	1.96
50000	1	2.46	1.51	-	-
2000	50	1.00	1.00	1.00	1.00
5000	50	1.00	1.00	1.90	1.82
10000	50	1.73	1.27	2.32	2.15
20000	50	2.20	1.52	2.66	2.30
50000	50	2.78	1.74	2.93	2.23
100000	50	3.23	1.90	-	-

De igual forma se estudia el rango de validez cuando al sistema se le agrega rotación en el eje vertical. A continuación se elabora un estudio con el fin de comparar la transferencia de calor para cada relación de aspecto cuando se fija la el número de Raleygh a un valor constante. Posteriormente estos resultados se utilizan para comparar con el problema de convección-difusión-convección conjugada.

Resumen de casos simulados $Pr = 1, \eta = .35$			
Ta	Ra	Nu_i	Nu_e
0	20000	1.82	1.23
50	20000	1.79	1.21
800	20000	1.00	1.00
0	50000	2.46	1.51
50	50000	2.47	1.49
800	50000	2.36	1.45
2000	50000	2.33	1.47

Resumen de casos simulados $Pr = 1, \eta = .80$			
Ta	Ra	Nu_i	Nu_e
0	10000	2.14	2.06
2000	10000	2.04	1.94
100000	10000	1.37	1.32
200000	10000	1.22	1.19
0	20000	2.41	1.96
2000	20000	2.36	1.94
100000	20000	1.80	1.67
200000	20000	1.55	1.48

Ta	Ra	Nu_i	Nu_e
0	20000	2.20	1.52
2000	20000	1.87	1.60
100000	20000	0.99	0.99
200000	20000	0.99	0.99
0	50000	2.78	2.74
2000	50000	2.49	1.81
100000	50000	1.65	1.56
200000	50000	1.19	1.21

Ta	Ra	Nu_i	Nu_e
0	20000	2.66	2.30
2000	20000	2.45	2.19
100000	20000	1.50	1.51
200000	20000	1.11	1.11
0	50000	2.93	2.23
2000	50000	—	—
100000	50000	2.61	2.74
200000	50000	—	—

Como se observa en las tablas resumen, cuando se introduce rotación al sistema la convección es amortiguada y los patrones convectivos son modificados a celdas en forma de banana que se alinean alrededor del eje de rotación, Figura 5.11. Si la rotación es lo suficientemente elevada estabiliza completamente los disparos convectivos y disminuye la transferencia de calor en el sistema como en los casos de $Pr = 50$ $Ra = 20,000$ y $\eta = 0.35$.

En las simulaciones con bajo número de Prandtl se encontró que los patrones convectivos dependen del tiempo (no estacionarios) lo que se refleja en distribuciones de temperatura, algunas veces caóticas, a diferencia de las simulaciones con un número de Prandtl alto, en las que los patrones convectivos son estacionarios y sus respectivas distribuciones tanto de temperatura como de flujo de calor son simétricas.

En la Figura 5.12 se grafica el número de Nusselt promedio en el tiempo para el caso de $Ra = 50,000$ cuando no hay rotación y cuando esta se incluye. En los casos en los que no hay rotación, los flujos de calor se concentran en zonas cilíndricas específicas que se distribuyen por el ánulo de manera uniforme, en cambio la presencia de la rotación obliga que la transferencia de calor disminuya en los polos y que las celdas de Busse que transportan la energía térmica hacia el exterior del ánulo giren de manera paralela al eje de rotación viajando por todo el sistema, dando lugar a una distribución más homogénea del calor en la zona ecuatorial.

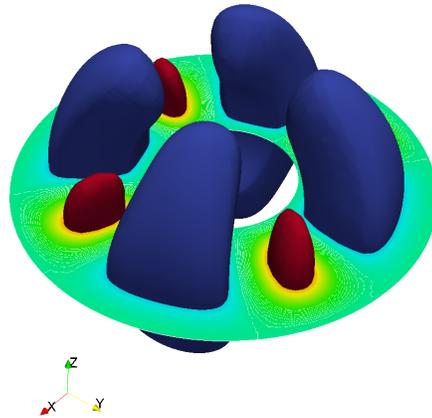


Figura 5.11: Celdas de banana para el caso de $Pr = 50$ $Ra = 50,000$ $Ta = 2,000$ y $\eta = 0.35$. Superficies de velocidad radial constante, en azul velocidades negativas y en rojo positivas.

5.3 Sistema Conjugado

En esta sección se aborda el problema de convección conjugada, esto es cuando el sistema se compone por dos ámulos de fluido, uno en el interior y otro en el exterior, que están separados por un ámulos intermedio sólido, Figura 5.14. En este caso, se fija una temperatura constante en los radios $T(r_1) = T_1$ y $T(r_4) = T_2$ donde la temperatura interna es mayor a la externa $T_1 > T_2$. Las condiciones de frontera para el fluido confinado entre los radios $r_1 - r_2$ y $r_3 - r_4$ son de no deslizamiento. El ámulos intermedio se considera un sólido conductor con conductividad constante. Se considera un problema de convección-conducción-convección conjugado ya que las temperaturas en los radios r_2 y r_3 no se fijan a un valor constante por lo que en la simulación estos valores se calculan según la convección en los ángulos con fluido. Los radios del sistema son: $r_1 = 0.21$ $r_2 = 0.6$ $r_3 = .8$ y $r_4 = 1$, en consecuencia las relaciones de aspecto para el primer, segundo y tercer ámulos son $\eta_1 = .35$ $\eta_2 = .75$ y $\eta_3 = .8$ respectivamente. En cuanto a las propiedades en los ámulos líquidos el fluido en el ámulos interno tiene un número de $Pr = 50$ y en el externo de $Pr = 1$.

Se realizaron tres simulaciones sin rotación en las cuales se incrementa el número de Rayleigh, en ellas se calcula el flujo de calor en los 4 radios frontera, se presentan los patrones de temperatura y líneas de corriente. En la siguiente tabla se hace un resumen de los casos simulados.

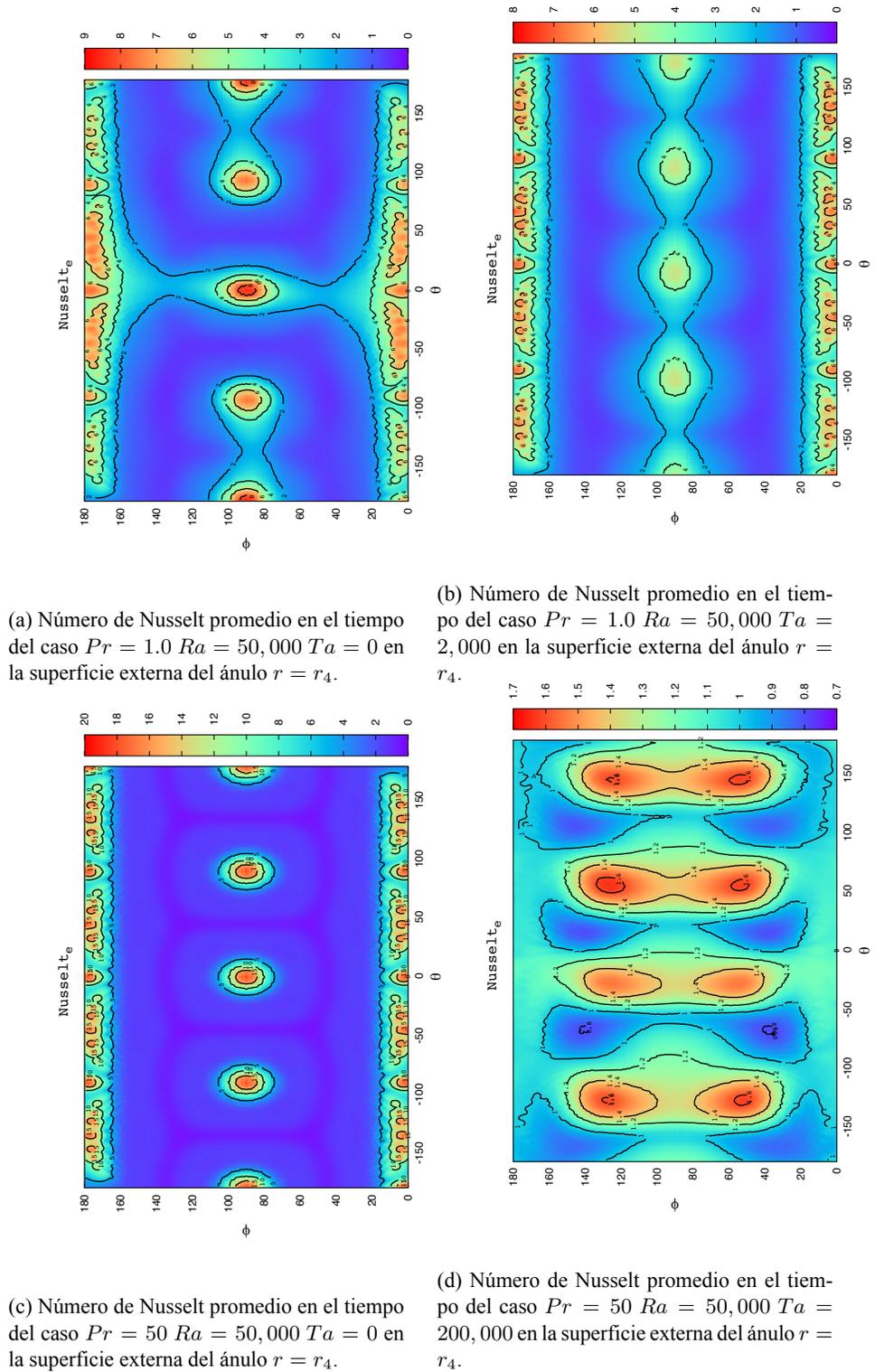
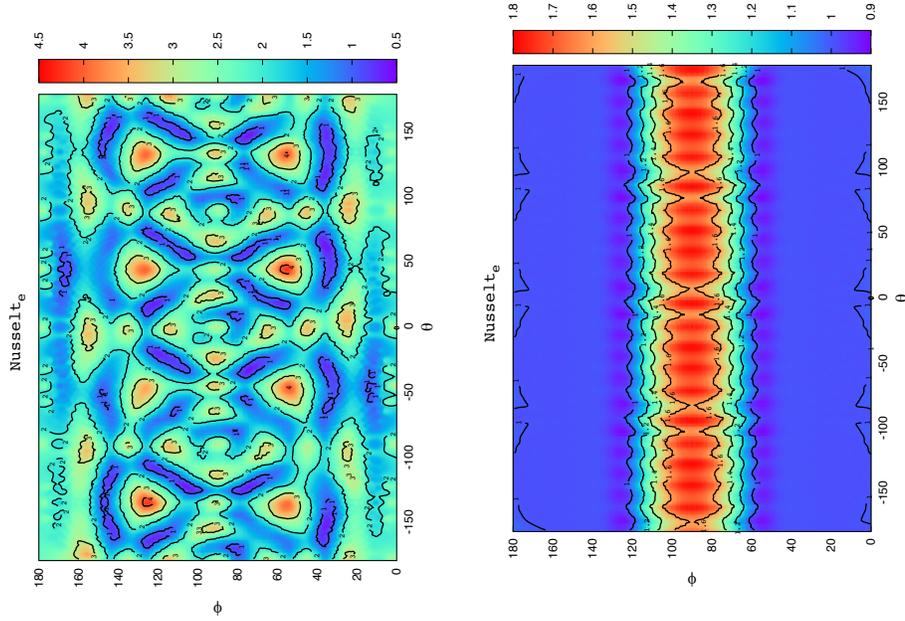
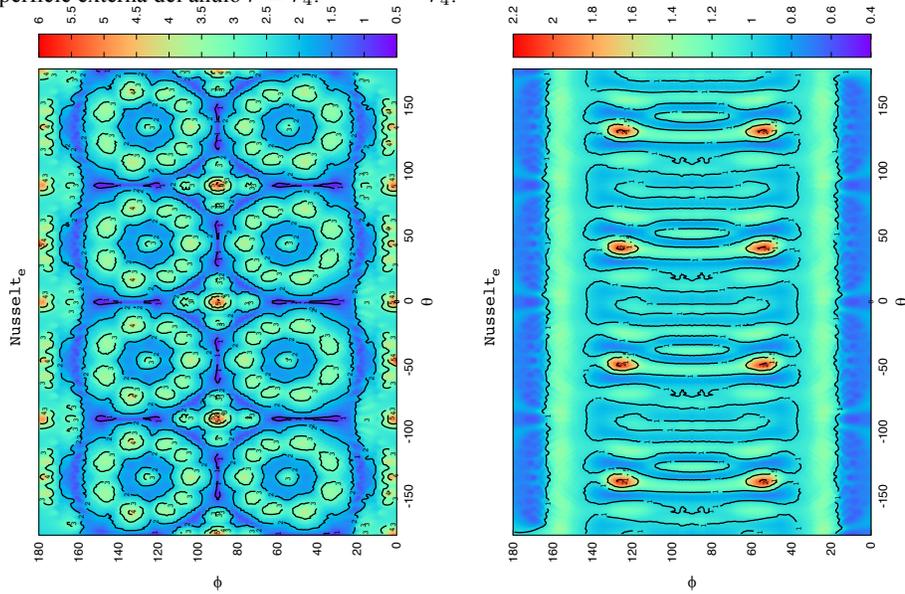


Figura 5.12: Número de Nusselt promedio en el tiempo para el sistema con relación de aspecto $\eta = 0.35$. Donde θ y ϕ son las coordenadas acimutal y polar respectivamente.



(a) Número de Nusselt promedio en el tiempo del caso $Pr = 1.0 Ra = 10,000 Ta = 0$ en la superficie externa del ánulo $r = r_4$.

(b) Número de Nusselt promedio en el tiempo del caso $Pr = 1.0 Ra = 10,000 Ta = 200,000$ en la superficie externa del ánulo $r = r_4$.



(c) Número de Nusselt promedio en el tiempo del caso $Pr = 50 Ra = 20,000 Ta = 0$ en la superficie externa del ánulo $r = r_4$.

(d) Número de Nusselt promedio en el tiempo del caso $Pr = 50 Ra = 20,000 Ta = 2,000$ en la superficie externa del ánulo $r = r_4$.

Figura 5.13: Número de Nusselt promedio en el tiempo para el sistema con relación de aspecto $\eta = 0.80$ Donde θ y ϕ son las coordenadas acimutal y polar respectivamente.

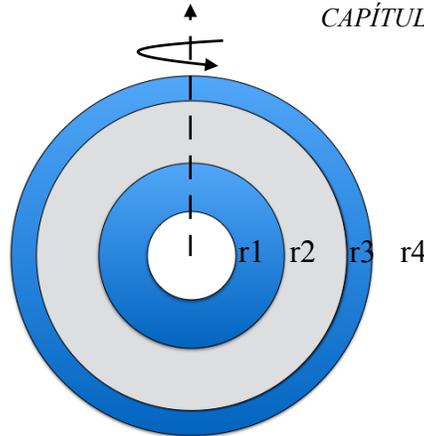


Figura 5.14: Esquema del sistema conjugado, los ámulos con fluido en el interior son de color azul y el intermedio considerado un sólido conductor.

Resumen de casos simulados					
		$\eta = 0.35$		$\eta = 0.8$	
Ra_1	Ra_2	Nu_{r_1}	Nu_{r_2}	Nu_{r_3}	Nu_{r_4}
12,600	11,400	1.86	1.19	1.02	0.99
23,200	23,200	2.30	1.44	1.04	0.98
52,800	49,500	2.60	1.96	1.07	0.96

El comportamiento de la transferencia de calor en el primer ámulo del sistema sin rotación en los números de $Ra_1 > 23,200$ es un poco más bajos que los que tendrían si fuera un sólo ámulo de fluido con temperaturas fijas en sus fronteras, por ejemplo de 1.27 a 1.19 en el radio r_2 cuando $Ra_1 = 12,600$. Sin embargo, en el ámulo externo la convección tiende a ser mucho menor si las comparamos con simulaciones de un único ámulo de fluido para números de Raleygh similares. La presencia del ámulo intermedio sólido disminuye los efectos de la convección en el segundo ámulo de fluido.

Para los números de $Ra_1 = 12,600$ y $Ra_1 = 23,200$ los patrones convectivos son de 8 celdas tanto en el ámulo interno como el externo. En cambio para $Ra_1 = 52,800$ hay 8 celdas en el interior y 24 en el exterior, Figura 5.15. La transferencia de calor en las fronteras se comporta con patrones similares para todos los casos, hay 4 zonas en la región ecuatorial y 1 zona en cada polo. Debido a la influencia que tiene la convección del ámulo interno sobre el externo, donde se presenta una replica con menor intensidad de la transferencia de calor, Figuras 5.16, 5.17 y 5.18.

Finalmente, se efectúan 3 simulaciones con rotación en las cuales se incrementa el número de Taylor y se estudia los efectos que tiene sobre la convección en los ámulos, se calcula el flujo de calor en los 4 radios frontera, se presentan los patrones de temperatura y velocidad radial. En la siguiente tabla se hace un resumen de los casos simulados, como referencia se calculan los números de Raleygh y Taylor para cada ámulo de fluido.

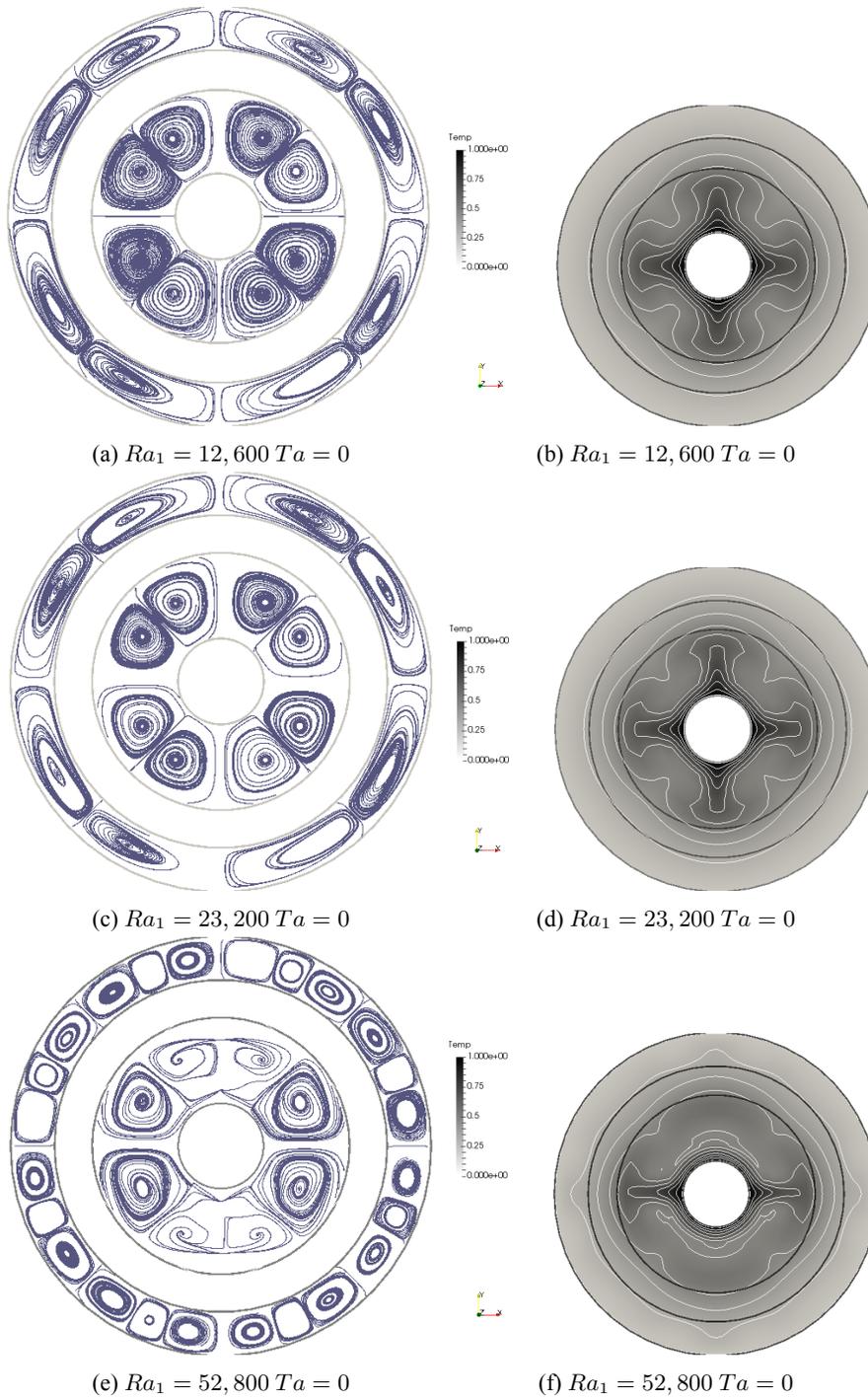


Figura 5.15: Patrones de temperatura (derecha) y líneas de corriente (izquierda) en el plano ecuatorial para el sistema conjugado sin presencia de rotación.

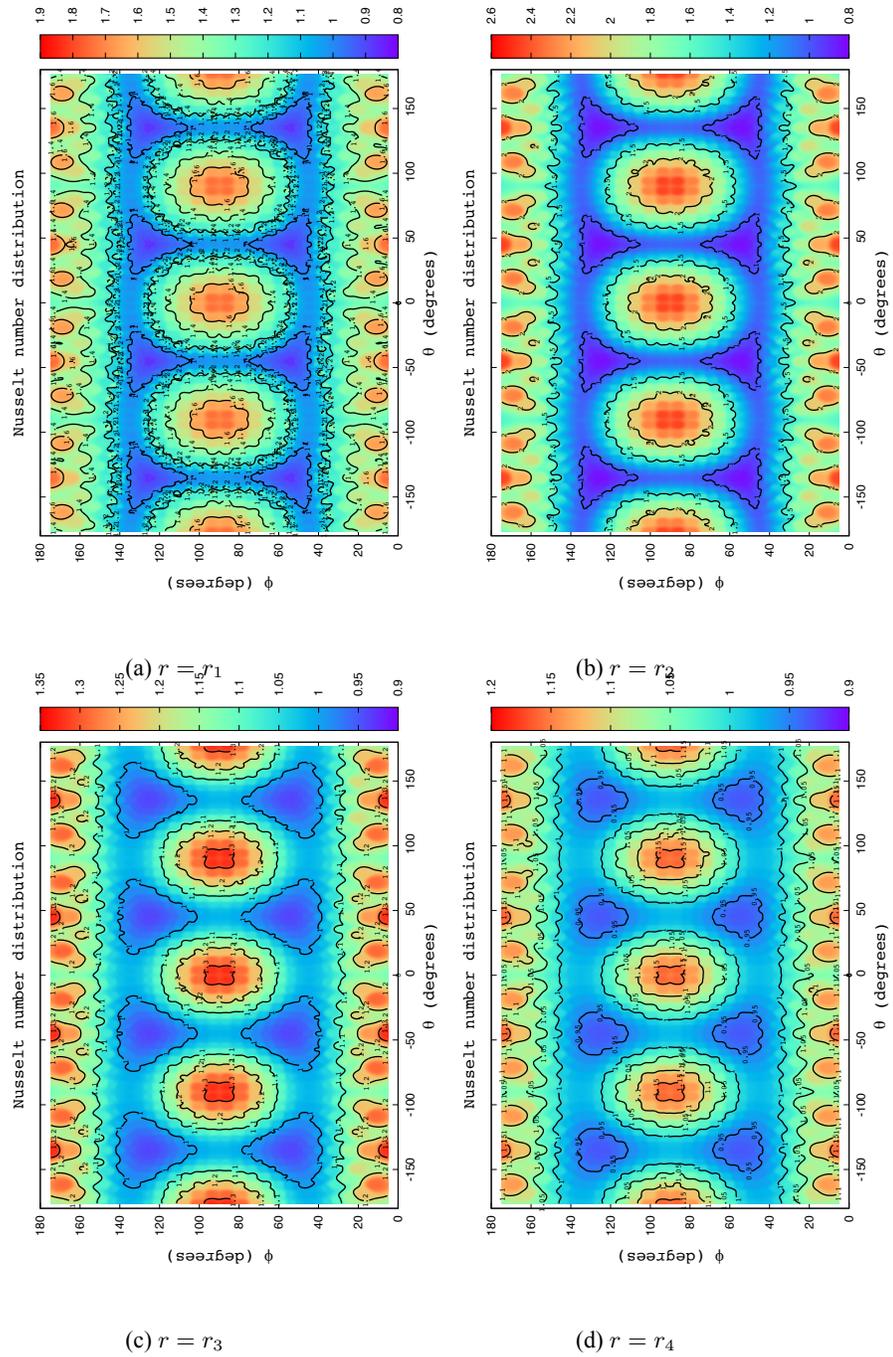


Figura 5.16: Número de Nusselt promedio en el tiempo \bar{Nu} para el sistema conjugado $Ra_1 = 12,600$. Donde θ y ϕ son las coordenadas acimutal y polar respectivamente.

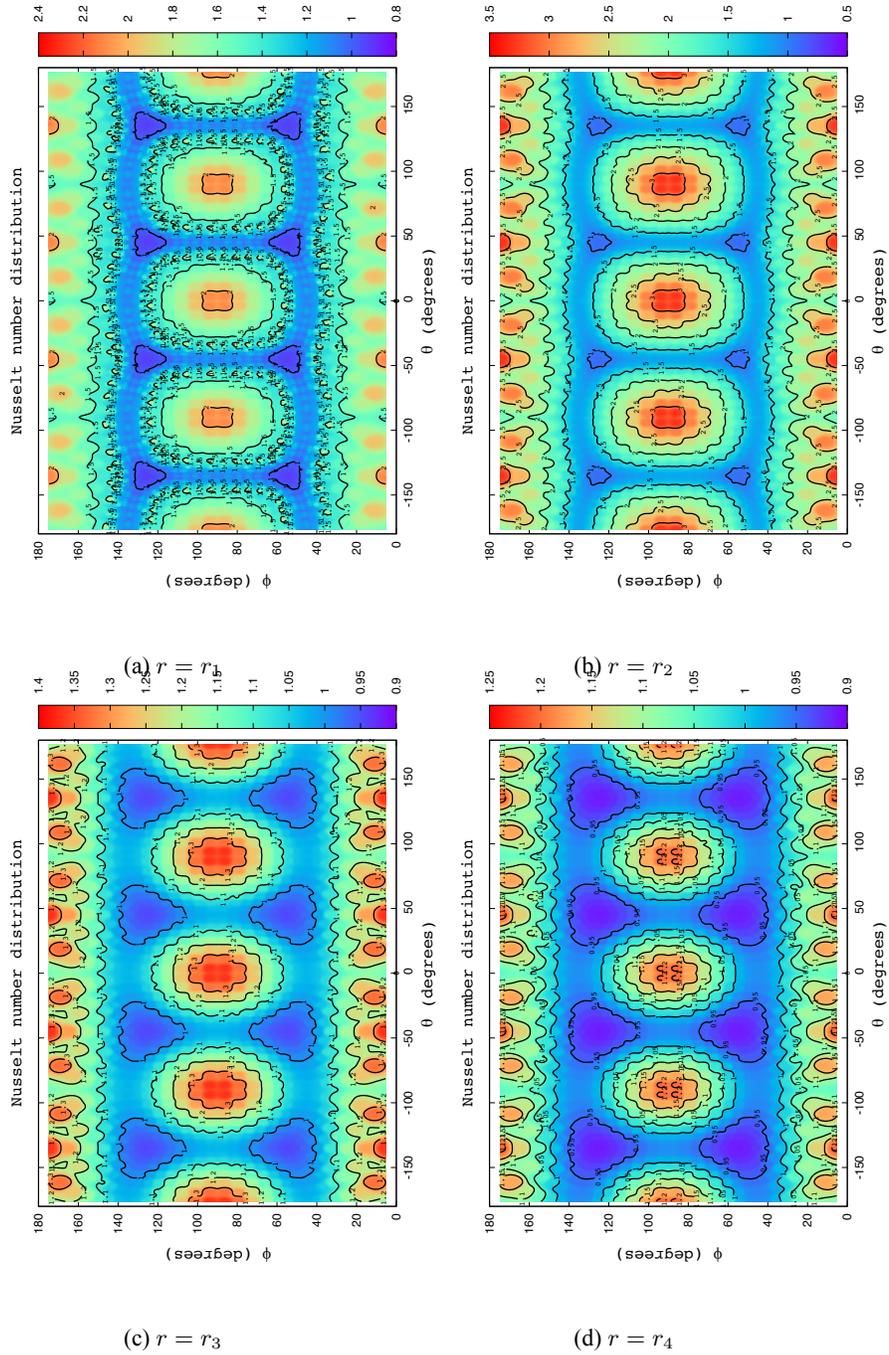


Figura 5.17: Número de Nusselt promedio en el tiempo \bar{Nu} para el sistema conjugado $Ra_1 = 23,200$. Donde θ y ϕ son las coordenadas acimutal y polar respectivamente.

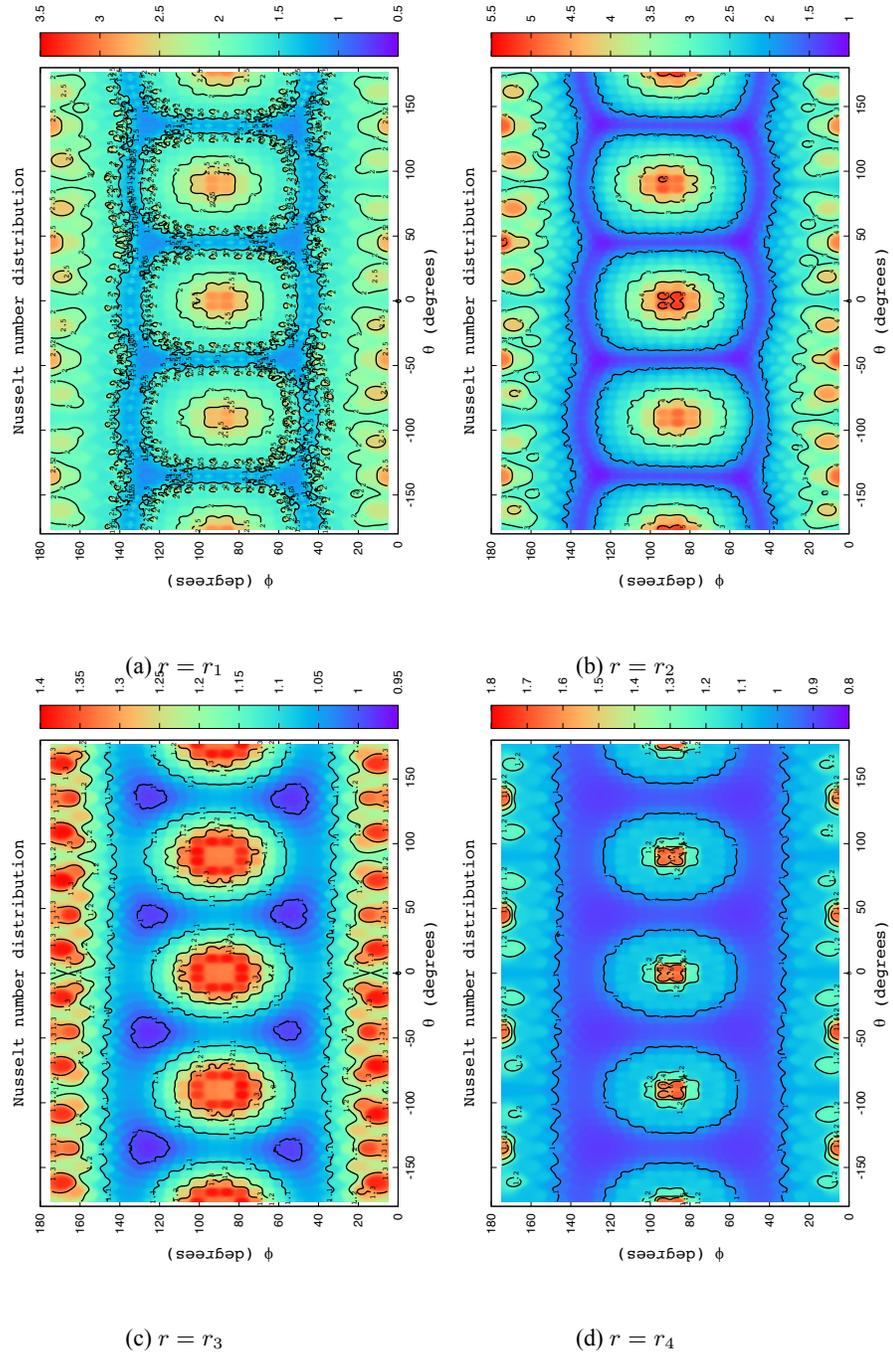


Figura 5.18: Número de Nusselt promedio en el tiempo \bar{Nu} para el sistema conjugado $Ra_1 = 53,800$. Donde θ y ϕ son las coordenadas acimutal y polar respectivamente.

Resumen de casos simulados							
Ra_1	Ta_1	Ra_2	Ta_2	$\eta = 0.35$		$\eta = 0.8$	
				Nu_{r_1}	Nu_{r_2}	Nu_{r_3}	Nu_{r_4}
54,800	0.5	49,500	86.0	2.60	2.00	1.07	0.96
54,800	50	49,500	8,600	2.54	2.20	1.07	0.96
54,800	5,000	49,500	860,000	2.02	1.57	1.05	0.97

La transferencia de calor en el sistema con rotación disminuye en el ánulo interno pero la división sólida transfiere calor por conducción al segundo ánulo el cual mantiene un estado similar al de conducción. Cabe resaltar que debido a la diferencia del número de Prandtl en los ánuos con fluido, los números de Taylor se elevan en la región externa, esto produce que las condiciones en el ánulo externo sean similares al estado conductivo. Por otro lado, como las temperaturas en las dos fronteras intermedias fluctúan en el tiempo la transferencia de calor en dichas superficies no es homogénea. Cuando la rotación del sistema es suficientemente alta en el ánulo interno la transferencia de calor se concentra en la zona ecuatorial y en algunos puntos de manera irregular, en el ánulo externo, Figuras 5.20, 5.21 y 5.22.

Al graficar la velocidad radial en el sistema podemos observar que sólo el ánulo interno presenta movimientos convectivos de gran magnitud, en contraste el externo solamente (movimientos asociados con la velocidad radial) cuando los valores de rotación son pequeños. Por otro lado, los patrones de temperatura en el ánulo interno son caóticos en rotaciones bajas pero en las altas adquiere forma de hélice. En lo que respecta al ánulo externo, a rotaciones altas, se observan patrones de temperatura similares al caso difusivo, Figura 5.19.

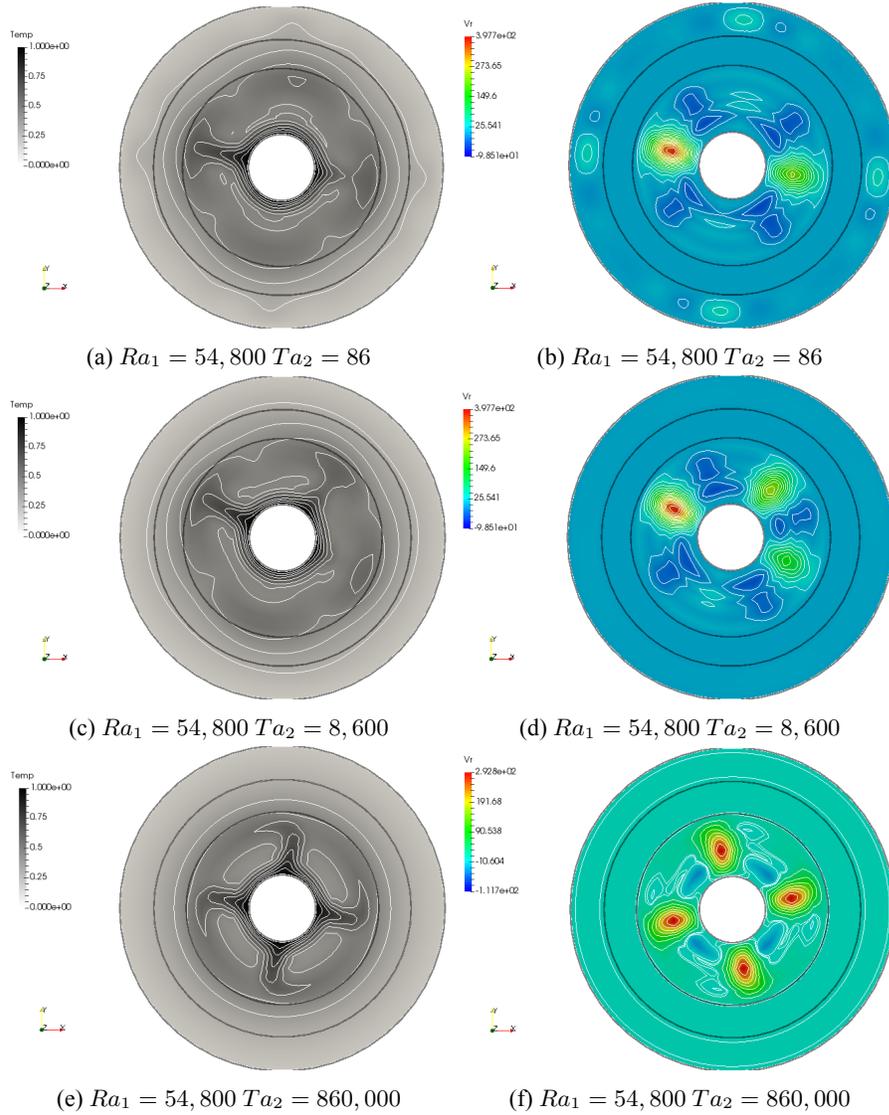


Figura 5.19: Patrones de temperatura (izquierda) y velocidad radial (derecha) en el plano ecuatorial para el sistema conjugado.

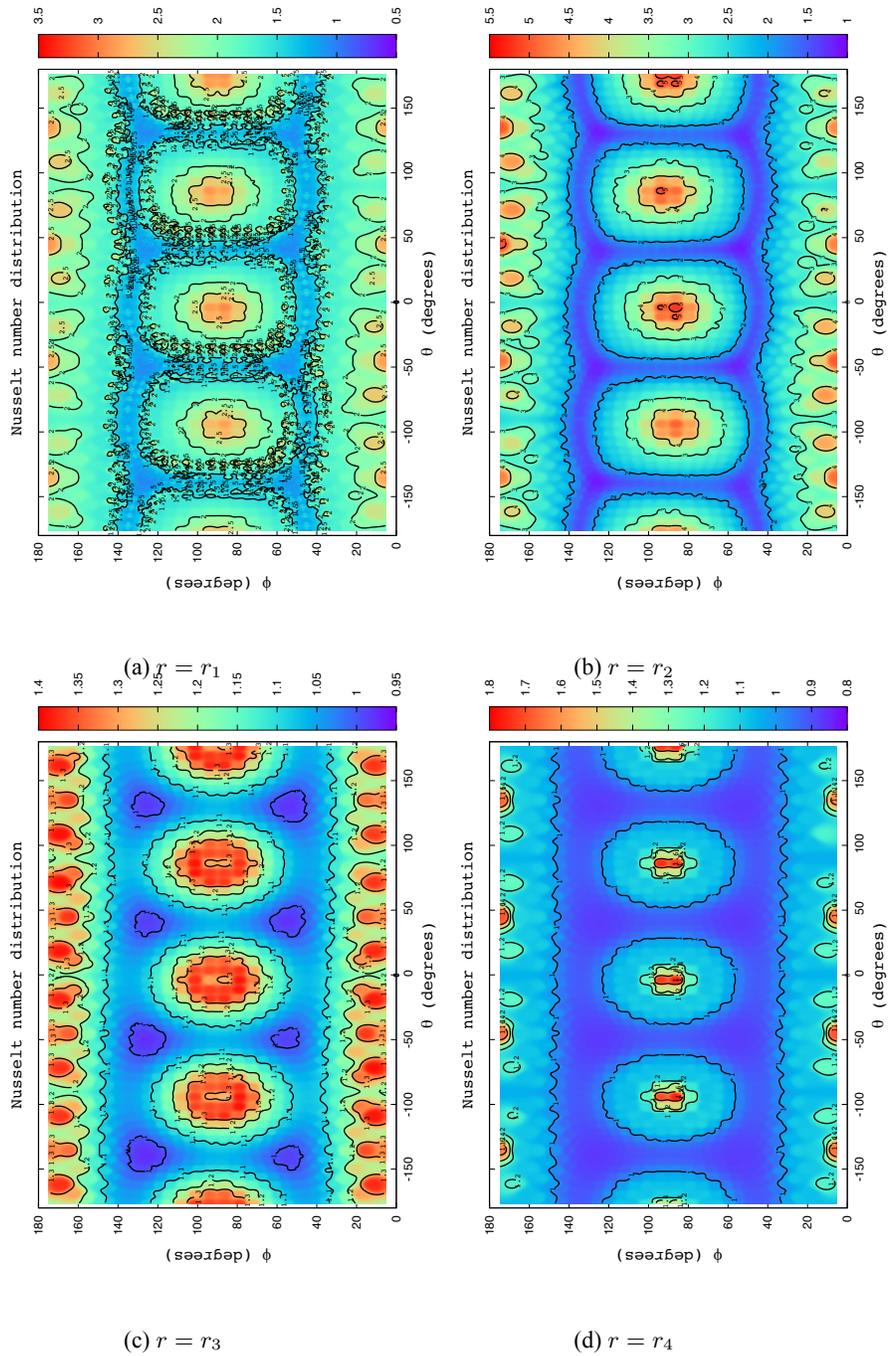


Figura 5.20: Número de Nusselt promedio en el tiempo \bar{Nu} para el sistema conjugado $Ra_1 = 54, 800$ $Ta_2 = 86$. Donde θ y ϕ son las coordenadas acimutal y polar respectivamente.

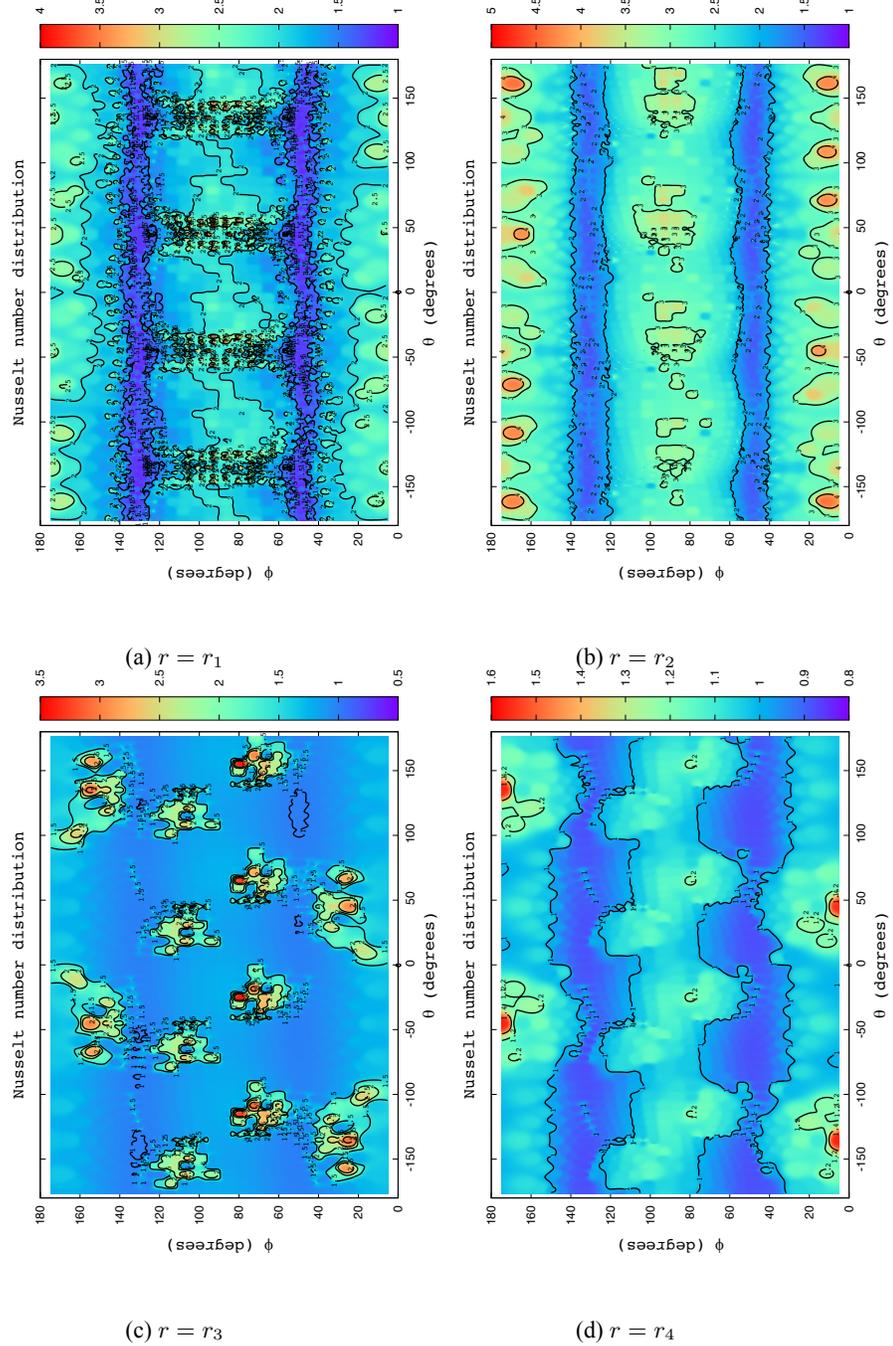


Figura 5.21: Número de Nusselt promedio en el tiempo \bar{Nu} para el sistema conjugado $Ra_1 = 54,800$ $Ta_2 = 8,600$. Donde θ y ϕ son las coordenadas acimutal y polar respectivamente.

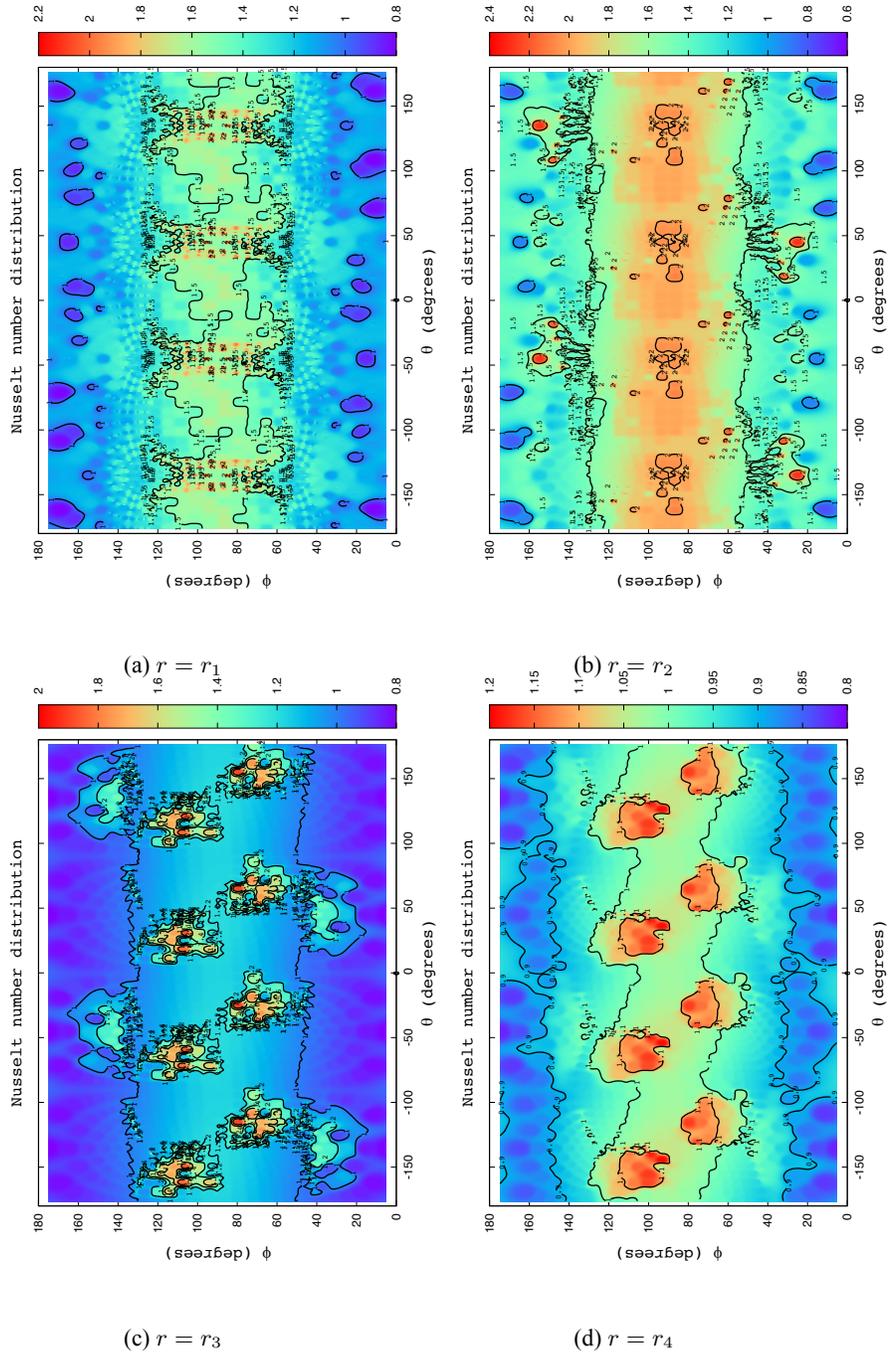


Figura 5.22: Número de Nusselt promedio en el tiempo \bar{Nu} para el sistema conjugado $Ra_1 = 54,800$ $Ta_2 = 860,000$. Donde θ y ϕ son las coordenadas acimutal y polar respectivamente.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Conclusiones

Se estudió la transferencia de calor por convección en un ánulo esférico en presencia de gravedad de laboratorio y se reprodujeron los resultados reportados en la literatura, se calculó el número de Nusselt en la superficie interior y exterior del sistema. Para los casos de convección en un sólo ánulo se comparó con la literatura disponible y se presentaron algunos resultados que coinciden con los que reportan diversos artículos, por ejemplo el estudio con gravedad radial constante y viscosidad infinita.

También se introdujo de manera satisfactoria rotación al sistema con gravedad radial con variación lineal y se encontraron los patrones de convección característicos del sistema, los cuales son celdas con forma de banana paralelas al eje de rotación que viajan por el sistema. También se calculó la distribución del número de Nusselt en la superficie externa e interna y se observó que la transferencia de calor se concentra en la zona ecuatorial.

Se estudió el caso de convección en dos ámulos concéntricos en presencia de gravedad radial de la forma $g = cr$. Se logró determinar los patrones de temperaturas y líneas de flujo asociados al sistema conjugado cuando no hay rotación. Adicionalmente se graficó la distribución del flujo de calor en las cuatro fronteras del sistema y se encontró que en ausencia de rotación las distribuciones de calor son similares tanto en el ánulo interno como en el externo.

Finalmente se añadió rotación al sistema conjugado estudiando así las velocidades radiales, patrones de temperatura y flujos de calor. Se encontró que en números de Taylor elevados el ánulo interno adquiere una distribución de temperaturas semejante a una hélice y en el externo distribuciones elípticas en el plano latitudinal.

6.2 Trabajo futuro

A pesar de que se logró determinar el flujo de calor y los patrones convectivos en el sistema conjugado convección-difusión-convección cuando se incorpora rotación los tiempos de cómputo que se requieren para concluir una simulación oscilan entre una semana hasta tres dependiendo del tamaño de la malla. Por esta razón un punto de oportunidad es implementar el cómputo en paralelo para resolver de manera rápida este tipo de problemas, dando oportunidad a que se incorporen condiciones más complejas para la simulación y de este modo representar mejor el comportamiento de un planeta.

Apéndices

Apéndice A

Difusión de calor en estado transitorio

En esta sección se resuelve por superposición la ecuación de difusión de calor para el caso unidimensional en estado transitorio sin generación de calor por términos fuente en coordenadas esféricas.

Como se muestran en la figura 2.3 el sistema esférico consiste en una región anular esférica con una distribución de temperatura inicial $F(r)$, la superficie de la esfera externa de radio r_o se encuentra a una temperatura T_o y la esfera interna de radio r_i a una temperatura T_i . Según estas condiciones no hay variación de la temperatura en la dirección polar \vec{e}_θ ni en la dirección acimutal \vec{e}_ϕ y el término fuente es igual a cero. En consecuencia la ecuación de transferencia de calor en coordenadas esféricas se reduce a:

$$\frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{k}{r^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + \frac{k}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \dot{q} = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Para resolver la ecuación A.2 por superposición se toma en cuenta que la función de temperatura es una suma de la temperatura en estado estacionario y en estado transitorio, en donde las condiciones de frontera no homogéneas corresponden al estado estacionario y las condiciones de frontera homogéneas, excepto para la distribución de temperatura inicial $F(r)$, al estado transitorio, Hahn and Ozisik (2012).

$$T(r, t) = T_{ET}(r, t) + T_{EE}(r)$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} T_{EE}(r_i) &= T_i & T_{ET}(r_i, t) &= 0 \\ T_{EE}(r_o) &= T_o & T_{ET}(r_o, t) &= 0 \end{aligned}$$

y condición inicial:

$$T_{ET}(r, t = 0) = F(r)$$

Para el estado estacionario la variación de la temperatura respecto al tiempo es igual a cero por lo que la temperatura es únicamente función de la posición y la ecuación A.1 se simplifica a:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT_{EE}(r)}{dr} \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

La única manera que la variación respecto al radio A.3 sea igual a cero es que el argumento sea una constante C_1 . Y al ordenar los términos:

$$\frac{dT_{EE}(r)}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$$

Volviendo a integrar:

$$\begin{aligned} \int dT_{EE}(r) &= \int \frac{C_1}{r^2} dr \\ T_{EE}(r) &= \frac{-C_1}{r} + C_2 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Al utilizar las condiciones de frontera del sistema:

$$T_{EE}(r_i) = T_i \quad T_i = \frac{-C_1}{r_i} + C_2 \quad (\text{A.5})$$

$$T_{EE}(r_o) = T_o \quad T_o = \frac{-C_1}{r_o} + C_2 \quad (\text{A.6})$$

Resolviendo las ecuaciones A.5 y A.6 para las constantes C_1 y C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{r_i r_o (T_o - T_i)}{r_o - r_i} \\ C_2 &= \frac{r_o (T_o - T_i)}{r_o - r_i} + T_i \end{aligned}$$

Al sustituir las dos constantes en la solución general A.4 y reordenar los términos se obtiene la temperatura en estado estacionario :

$$T_{EE}(r) = \frac{r_o (T_o - T_i)}{r_o - r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r} \right) + T_i \quad (\text{A.7})$$

Para el estado transitorio se hace el siguiente cambio de variable:

$$U(r, t) = rT_{ET}(r, t) \quad (\text{A.8})$$

y sus derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} &= r \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} + T_{ET}(r, t) \frac{\partial r}{\partial r} \\ &= r \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} + T_{ET}(r, t) \\ \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} &= r \frac{\partial^2 T_{ET}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} \\ &= r \frac{\partial^2 T_{ET}(r, t)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial r} \\ \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} &= r \frac{\partial T_{ET}(r, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

que en la ecuación A.2 se traduce en:

$$\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} = \frac{c_v \rho}{k} \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} \quad (\text{A.9})$$

Para resolver por separación de variables la nueva variable $U(r, t)$ se descompone en el producto de dos funciones:

$$U(r, t) = R(r)\Gamma(t)$$

con sus respectivas condiciones de frontera y condición inicial:

$$U(r_i, t) = R(r_i)\Gamma(t) = 0$$

$$U(r_o, t) = R(r_o)\Gamma(t) = 0$$

$$U(r, 0) = R(r)\Gamma(0) = rF(r) - rT_{EE} = G(r)$$

y al sustituir en A.9 se obtiene:

$$\Gamma(t) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha} R(r) \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t}$$

donde $\alpha = \frac{k}{c_v \rho}$ es la difusividad térmica. La ecuación anterior se reordena separando las variables y se iguala a la constante $-\lambda^2$

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} = \underbrace{-\lambda^2 = \frac{1}{\alpha \Gamma(t)} \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t}}_{\text{constante}} \quad (\text{A.10})$$

Tomando el lado derecho de la igualdad A.10 para integrarlo se obtiene la función $\Gamma(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha\Gamma(t)}\frac{\partial\Gamma(t)}{\partial t} &= -\lambda^2 \\ \int \frac{1}{\Gamma(t)}\partial\Gamma(t) &= \int -\alpha\lambda^2\partial t \\ \Gamma(t) &= C_1e^{-\alpha\lambda^2 t}\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Ahora se toma el lado izquierdo de la igualdad A.10, se reordena y se obtiene una ecuación diferencial cuya solución puede ser encontrada utilizando su polinomio característico.

$$\begin{aligned}\frac{1}{R(r)}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} &= -\lambda^2 \\ \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \lambda^2 R(r) &= 0\end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial anterior es:

$$R(r) = C_2 \sin \lambda r + C_3 \cos(\lambda r) \quad (\text{A.12})$$

Para encontrar las constantes C_1 y C_2 se utiliza la primer condición de frontera de $U(r, t)$:

$$R(r_i) = 0 \quad 0 = C_2 \sin(\lambda r_i) + C_3 \cos(\lambda r_i) \quad (\text{A.13})$$

resolviendo A.13 para la constante C_3 y sustituyendo en A.12:

$$\begin{aligned}C_3 &= -\frac{C_2 \sin(\lambda r_i)}{\cos(\lambda r_i)} \\ R(r) &= C_2 \sin(\lambda r) - \frac{C_2 \sin(\lambda r_i)}{\cos(\lambda r_i)} \cos(\lambda r)\end{aligned}$$

ordenando y usando la identidad de diferencia de ángulos:

$$\begin{aligned}R(r) &= \frac{C_2}{\cos(\lambda r_i)} (\sin(\lambda r) \cos(\lambda r_i) - \sin(\lambda r_i) \cos(\lambda r)) \\ R(r) &= C_4 \sin(\lambda(r - r_i))\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

donde C_4 es el cociente $\frac{C_2}{\cos(\lambda r_i)}$. Para encontrar los valores de λ se utiliza la segunda condición de frontera de $U(r, t)$:

$$R(r_o) = 0 \quad 0 = C_4 \sin(\lambda(r_o - r_i)) \quad (\text{A.15})$$

para asegurar que la igualdad A.15 se cumpla los valores del argumento de $\sin(\lambda(r_o - r_i))$ deben ser múltiplos de π como se muestra a continuación.

$$\lambda(r_o - r_i) = n\pi$$

Como es posible tener más de un valor de λ ahora se nombra con λ_n a sus distintos valores posibles y la función $R(r)$ se define como una suma infinita de todos los valores de λ_n

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{(r_o - r_i)}$$

$$R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_4 \sin(\lambda_n(r - r_i))$$

Ahora se multiplican las funciones $R(r)$ y $\Gamma(t)$ para encontrar la función $U(r, t)$ y el producto de las constantes C_1 y C_4 se nombra C_n

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (\text{A.16})$$

Para encontrar el valor de la constante C_n se utiliza la condición inicial $U(r, 0)$ y se multiplica por el operador $\int_{r=r_i}^{r_o} \sin(\lambda_m(r - r_i)) dr$ en ambos lados de la igualdad

$$U(r, 0) = G(r) \quad G(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n(r - r_i))$$

$$\int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_m(r - r_i)) dr = \int_{r=r_i}^{r_o} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda_n(r - r_i)) \sin(\lambda_m(r - r_i)) dr$$

y al usar la propiedad de las funciones ortogonales

$$\int_{x=a}^b w(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{cuando } n \neq m \\ \int_{x=a}^b w(x) [\phi_n(x)]^2 dx & \text{cuando } n = m \end{cases}$$

en el lado derecho de la igualdad y despejar para C_n

$$C_n = \frac{\int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_n(r - r_i)) dr}{\int_{r=r_i}^{r_o} \sin^2(\lambda_n(r - r_i)) dr}$$

que se simplifica resolviendo los dos integrales. Realizando la integral del denominador se obtiene:

$$C_n = \frac{\int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_n(r - r_i)) dr}{\frac{1}{4\lambda_n} \left[2\lambda_n(r - r_i) - \sin(2\lambda_n(r - r_i)) \right] \Big|_{r=r_i}^{r_o}}$$

$$C_n = \frac{\int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr}{\frac{1}{4\lambda_n} \left[\frac{2n\pi(r_o-r_i)}{(r_o-r_i)} - \sin\left(\frac{2n\pi(r_o-r_i)}{(r_o-r_i)}\right) \right]}$$

$$C_n = \frac{2}{r_o-r_i} \int_{r=r_i}^{r_o} G(r) \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr \quad (\text{A.17})$$

Al sustituir la función $G(r)$ en A.17 se obtienen las integrales A y B

$$C_n = \frac{2}{r_o-r_i} \int_{r=r_i}^{r_o} \left[\underbrace{rF(r)}_A - \underbrace{rT_{EE}}_B \right] \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr \quad (\text{A.18})$$

Como la distribución de temperatura inicial $F(r)$ puede ser una función arbitraria, solo la integral B se resuelve sustituyendo la temperatura en estado estacionario T_{EE}

$$\int_{r=r_i}^{r_o} r \left[\frac{r_o(T_o-T_i)}{r_o-r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r}\right) + T_i \right] \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr$$

ordenando y agrupando los términos comunes

$$\int_{r=r_i}^{r_o} \left[\frac{r_o(T_o-T_i)}{r_o-r_i} (r-r_i) + rT_i \right] \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr$$

$$\int_{r=r_i}^{r_o} \left[\underbrace{\left(\frac{r_o(T_o-T_i)}{r_o-r_i} + T_i \right)}_{B_1} r - \underbrace{\frac{r_i r_o(T_o-T_i)}{r_o-r_i}}_{B_2} \right] \sin(\lambda_n(r-r_i)) dr$$

integrando por partes B_1

$$B_1 = \left[\underbrace{\frac{r_o(T_o-T_i)}{r_o-r_i} + T_i}_C \left(\frac{-r}{\lambda_n} \cos(\lambda_n(r-r_i)) + \frac{1}{\lambda_n^2} \sin(\lambda_n(r-r_i)) \right) \right] \Big|_{r=r_i}^{r_o}$$

$$= C \left(\frac{-1}{\lambda_n} \left[r_o \cos\left(\frac{n\pi(r_o-r_i)}{(r_o-r_i)}\right) - r_i \cos\left(\frac{n\pi(r_i-r_i)}{(r_o-r_i)}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\sin\left(\frac{n\pi(r_o-r_i)}{(r_o-r_i)}\right) - \sin(\lambda_n(r_i-r_i)) \right] \right)$$

$$= C \left(\frac{-1}{\lambda_n} \left[r_o \cos(n\pi) - r_i \right] + \frac{1}{\lambda_n^2} \left[\sin(n\pi) \right] \right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n} \left[\frac{r_o(T_o-T_i)}{r_o-r_i} + T_i \right] \left(r_o \cos(n\pi) - r_i \right)$$

$$B_1 = \frac{-1}{\lambda_n} \left[\frac{r_o(T_o-T_i)}{r_o-r_i} + T_i \right] (r_o(-1)^n - r_i)$$

Al resolver la integral B_2

$$\begin{aligned}
B_2 &= - \left[\frac{r_i r_o (T_o - T_i)}{\lambda n (r_o - r_i)} \right] \cos(\lambda_n (r - r_i)) \Big|_{r=r_i}^{r_o} \\
&= - \left[\frac{(\cancel{r_o - r_i}) r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi (\cancel{r_o - r_i})} \right] \left(\cos \left(\frac{n\pi (\cancel{r_o - r_i})}{(\cancel{r_o - r_i})} \right) - \cos(\lambda_n (r_i - r_i)) \right) \\
&= - \left[\frac{r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi} \right] \left(\cos(n\pi) (-1)^n - 1 \right) \\
B_2 &= \left[\frac{-r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi} \right] ((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

Restando B_2 de B_1 y simplificando se obtiene la integral B

$$\begin{aligned}
B_1 - B_2 &= \frac{-(r_o (-1)^n - r_i)}{\lambda_n} \left[\frac{r_o (T_o - T_i)}{r_o - r_i} + T_i \right] - \left[\frac{-r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi} \right] ((-1)^n - 1) \\
&= \frac{-r_o^2 (-1)^n (T_o - T_i) (\cancel{r_o - r_i})}{n\pi (\cancel{r_o - r_i})} - \frac{r_o T_i (-1)^n (r_o - r_i)}{n\pi} + \frac{r_i r_o (T_o - T_i) (\cancel{r_o - r_i})}{n\pi (\cancel{r_o - r_i})} \\
&\quad + \frac{r_i T_i (r_o - r_i)}{n\pi} + \frac{r_i r_o (-1)^n (T_o - T_i)}{n\pi} - \frac{r_i r_o (T_o - T_i)}{n\pi} \\
&= \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_o (-1)^n (T_i - T_o) + T_i (r_i - r_o (-1)^n) \right) \\
&= \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_o T_i (-1)^n - r_o T_o (-1)^n + r_i T_i - r_o T_i (-1)^n \right) \\
B_1 - B_2 &= \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_i T_i - r_o T_o (-1)^n \right) \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Ahora se sustituye el resultado de la integral B en A.18

$$C_n = \frac{2}{r_o - r_i} \left[\int_{r=r_i}^{r_o} r F(r) dr - \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_i T_i - r_o T_o (-1)^n \right) \right] \tag{A.20}$$

Con la constante C_n determinada se sustituye en A.16 y se reorganiza

$$\begin{aligned}
 U(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{r_o - r_i} \left[\int_{r=r_i}^{r_o} r F(r) \, dr - \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_i T_i - r_o T_o (-1)^n \right) \right] \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \\
 &= \frac{2}{r_o - r_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_o - r_i)}{n\pi} \left(r_o T_o (-1)^n - r_i T_i \right) \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \\
 &\quad + \frac{2}{r_o - r_i} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \int_{r=r_i}^{r_o} r F(r) \, dr \\
 U(r,t) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \left[\frac{r_o T_o (-1)^n - r_i T_i}{n} \right] \\
 &\quad + \frac{2}{r_o - r_i} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \int_{r=r_i}^{r_o} r F(r) \, dr
 \end{aligned}$$

Al dividir $U(r, t)$ entre el radio se obtiene la temperatura en estado transitorio T_{ET} . Finalmente se suman las temperaturas T_{EE} y T_{ET} para obtener la función de la temperatura para el sistema:

$$\begin{aligned}
 T(r,t) &= \frac{r_o(T_o - T_i)}{r_o - r_i} \left(1 - \frac{r_i}{r} \right) + T_i + \frac{2}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \left[\frac{r_o T_o (-1)^n - r_i T_i}{n} \right] \\
 &\quad + \frac{2}{r(r_o - r_i)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n(r - r_i)) e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \int_{r=r_i}^{r_o} r F(r) \, dr \quad (\text{A.21})
 \end{aligned}$$

Apéndice B

Ecuaciones adimensionales

En la siguiente sección se adimensionalizan las ecuaciones del capítulo 3.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho [1 - \beta (T - T_\infty)] \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} - 2\rho \vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T$$

Se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} v_i^* &= \frac{d}{\nu} v_i & x_i^* &= \frac{x_i}{d} \\ t^* &= \frac{\nu}{d^2} t & T^* &= \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \end{aligned}$$

donde d es la diferencia de radios en el espacio anular con fluido $d = r_e - r_i$. Al diferenciar las variables dimensionales en términos de los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \partial v_i &= \frac{\nu}{d} \partial v_i^* & \partial x_i &= d \partial x_i^* \\ \partial t &= \frac{d^2}{\nu} \partial t^* & \partial T &= \Delta T \partial T^* \end{aligned}$$

B.1 Ecuación de continuidad

Al desarrollar la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{B.1})$$

sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{d^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{d^2} \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{d^2} \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} &= 0 \\
\frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} &= 0 \\
\nabla^* \cdot \vec{v}^* &= 0
\end{aligned} \tag{B.2}$$

B.2 Ecuación de cantidad de movimiento

Al escribir la ecuación de cantidad de movimiento en sus tres direcciones se tiene:

\vec{i}_1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= g_1 - \beta (T - T_\infty) g_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\
&+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \\
&- 2(\omega_2 v_3 - \omega_3 v_2) \\
&- \left(-(\omega_2^2 + \omega_3^2) x_1 + \omega_1 \omega_2 x_2 + \omega_1 \omega_3 x_3 \right)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

\vec{i}_2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} &= g_2 - \beta (T - T_\infty) g_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\
&+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \\
&- 2(\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3) \\
&- \left(\omega_1 \omega_2 x_1 - (\omega_1^2 + \omega_3^2) x_2 + \omega_2 \omega_3 x_3 \right)
\end{aligned} \tag{B.4}$$

\vec{i}_3 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= g_3 - \beta (T - T_\infty) g_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \\
&+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) \\
&- 2(\omega_1 v_2 - \omega_2 v_1) \\
&- \left(\omega_1 \omega_3 x_1 + \omega_2 \omega_3 x_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_3 \right)
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales: \vec{i}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{d^3} \left(\frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} \right) &= g_1 - \beta \Delta T g_1 T^* - \frac{1}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1^*} \\ &+ \frac{\nu^2}{d^3} \left(\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \\ &- \frac{2\nu}{d} (\omega_2 v_3^* - \omega_3 v_2^*) \\ &- d \left(-(\omega_2^2 + \omega_3^2) x_1^* + \omega_1 \omega_2 x_2^* + \omega_1 \omega_3 x_3^* \right) \end{aligned}$$

\vec{i}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{d^3} \left(\frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*} \right) &= g_2 - \beta \Delta T g_2 T^* - \frac{1}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2^*} \\ &+ \frac{\nu^2}{d^3} \left(\frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \\ &- \frac{2\nu}{d} (\omega_3 v_1^* - \omega_1 v_3^*) \\ &- d \left(\omega_1 \omega_2 x_1^* - (\omega_1^2 + \omega_3^2) x_2^* + \omega_2 \omega_3 x_3^* \right) \end{aligned}$$

\vec{i}_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{d^3} \left(\frac{\partial v_3^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} \right) &= g_3 - \beta \Delta T g_3 T^* - \frac{1}{d\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3^*} \\ &+ \frac{\nu^2}{d^3} \left(\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \\ &- \frac{2\nu}{d} (\omega_1 v_2^* - \omega_2 v_1^*) \\ &- d \left(\omega_1 \omega_3 x_1^* + \omega_2 \omega_3 x_2^* - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_3^* \right) \end{aligned}$$

Dividiendo entre $\frac{\nu^2}{d^3}$ en cada una de las direcciones: \vec{i}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3}{\nu^2} g_1 - \frac{d^3 \beta \Delta T g_1 T^*}{\nu^2} - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_1^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &- \frac{2d^2}{\nu} (\omega_2 v_3^* - \omega_3 v_2^*) \\ &- \frac{d^4}{\nu^2} \left(-(\omega_2^2 + \omega_3^2) x_1^* + \omega_1 \omega_2 x_2^* + \omega_1 \omega_3 x_3^* \right) \end{aligned}$$

\vec{i}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3}{\nu^2} g_2 - \frac{d^3 \beta \Delta T g_2}{\nu^2} T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_2^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &- \frac{2d^2}{\nu} (\omega_3 v_1^* - \omega_1 v_3^*) \\ &- \frac{d^4}{\nu^2} (\omega_1 \omega_2 x_1^* - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_2^* + \omega_2 \omega_3 x_3^*) \end{aligned}$$

 \vec{i}_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3}{\nu^2} g_3 - \frac{d^3 \beta \Delta T g_3}{\nu^2} T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_3^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &- \frac{2d^2}{\nu} (\omega_1 v_2^* - \omega_2 v_1^*) \\ &- \frac{d^4}{\nu^2} (\omega_1 \omega_3 x_1^* + \omega_2 \omega_3 x_2^* - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_3^*) \end{aligned}$$

También se puede definir la gravedad adimensional si se divide entre la gravedad en coordenadas esféricas evaluada en el radio más externo del sistema; esto es $g_i^* = \frac{g_i}{g_s(r_e) = \frac{c_g}{r_e^2}}$, que al sustituir en las tres direcciones: \vec{i}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_1^* - \frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_1^* T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_1^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &- \frac{2d^2}{\nu} (\omega_2 v_3^* - \omega_3 v_2^*) \\ &- \frac{d^4}{\nu^2} (-(\omega_2^2 + \omega_3^2) x_1^* + \omega_1 \omega_2 x_2^* + \omega_1 \omega_3 x_3^*) \end{aligned}$$

 \vec{i}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_2^* - \frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_2^* T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_2^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &- \frac{2d^2}{\nu} (\omega_3 v_1^* - \omega_1 v_3^*) \\ &- \frac{d^4}{\nu^2} (\omega_1 \omega_2 x_1^* - (\omega_1^2 + \omega_3^2) x_2^* + \omega_2 \omega_3 x_3^*) \end{aligned}$$

\vec{i}_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_3^* - \frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_3^* T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_3^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &- \underbrace{\frac{2d^2 \omega_1}{\nu}}_{\sqrt{Ta}} v_2^* + \frac{2d^2 \omega_2}{\nu} v_1^* \\ &- \frac{d^4}{\nu^2} (\omega_1 \omega_3 x_1^* + \omega_2 \omega_3 x_2^* - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_3^*) \end{aligned}$$

Como en el sistema de este trabajo el vector de rotación Ω sólo tiene la componente ω_3 diferente de cero, se pueden simplificar las ecuaciones: \vec{i}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} &= \underbrace{\frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_1^*}_{Ga} - \underbrace{\frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_1^* T^*}_{Gr} - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_1^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &+ \underbrace{\frac{2d^2 \omega_3}{\nu}}_{\sqrt{Ta}} v_2^* \\ &+ \underbrace{\frac{d^4 \omega_3^2}{\nu^2}}_{\frac{Ta}{4}} x_1^* \end{aligned}$$

 \vec{i}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_2^* - \frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_2^* T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_2^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &- \frac{2d^2 \omega_3}{\nu} v_1^* \\ &+ \frac{d^4 \omega_3^2}{\nu^2} x_2^* \end{aligned}$$

 \vec{i}_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_3^* - \frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_3^* T^* - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial p}{\partial x_3^*} \\ &+ \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_3^{*2}} \end{aligned}$$

De la dirección \vec{i}_1 se pueden observar tres números adimensionales; el número de Galileo Ga , el número de Grashof Gr y el número de Taylor Ta . Una última simplificación se realiza en las direcciones \vec{i}_1 e \vec{i}_2 , al tomar en cuenta los términos de la fuerza centrífuga como un gradiente $\omega_3^2 x_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\omega_3^2 x_1^2}{2} \right)$ y $\omega_3^2 x_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\omega_3^2 x_2^2}{2} \right)$ respectivamente. De este modo y con ayuda del producto punto se introducen los términos de la fuerza centrífuga al gradiente de presión $\nabla P = \nabla p - \nabla \frac{\omega_3 \vec{r} \cdot \vec{r}}{2} = \nabla \left(p - \frac{\omega_3^2 \vec{r} \cdot \vec{r}}{2} \right)$ donde \vec{r} es el vector de posición: \vec{i}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_1^* - \frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_1^* T^* \\ &\quad - \underbrace{\frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial}{\partial x_1^*} \left(p - \frac{\omega_3^2 \vec{r} \cdot \vec{r}}{2} \right)}_{\frac{\partial P}{\partial x_1^*}} \\ &\quad + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &\quad + \frac{2d^2 \omega_3}{\nu} v_2^* \end{aligned}$$

\vec{i}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_2^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_2^* - \frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_2^* T^* \\ &\quad - \underbrace{\frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial}{\partial x_2^*} \left(p - \frac{\omega_3^2 \vec{r} \cdot \vec{r}}{2} \right)}_{\frac{\partial P}{\partial x_2^*}} \\ &\quad + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_2^*}{\partial x_3^{*2}} \\ &\quad - \frac{2d^2 \omega_3}{\nu} v_1^* \end{aligned}$$

\vec{i}_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} &= \frac{d^3 g_s(r_e)}{\nu^2} g_3^* - \frac{d^3 \beta \Delta T g_s(r_e)}{\nu^2} g_3^* T^* \\ &\quad - \underbrace{\frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial}{\partial x_3^*} \left(p - \frac{\omega_3^2 \vec{r} \cdot \vec{r}}{2} \right)}_{\frac{\partial P}{\partial x_3^*}} \\ &\quad + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial x_3^{*2}} \end{aligned}$$

Si definimos una presión y una velocidad angular adimensional como $P^* = \frac{d^2 P}{\rho \nu^2}$ y $\Omega^* = \frac{\Omega d^2}{\nu}$ respectivamente la ecuación de cantidad de movimiento se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{d\vec{v}^*}{dt} = Ga\vec{g}^* + Gr\vec{g}^*T^* - \nabla^* P^* + \nabla^{*2}\vec{v}^* - 2\vec{\Omega}^* \times \vec{v}^* \quad (\text{B.6})$$

El término que acompaña al número de Galileo se puede eliminar si consideramos a la presión como la suma de la presión dinámica más la estática $P = P_d + P_e$ y utilizando el caso en el que no hay movimiento obtenemos $Ga\vec{g}^* - \nabla^* P_e^* = 0$ que al sustituir en la ecuación anterior resulta en:

$$\frac{d\vec{v}^*}{dt} = +Gr\vec{g}^*T^* - \nabla^* P_d^* + \nabla^{*2}\vec{v}^* - 2\vec{\Omega}^* \times \vec{v}^* \quad (\text{B.7})$$

B.3 Ecuación de la energía

Al desarrollar la ecuación de la energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) \quad (\text{B.8})$$

sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\nu \Delta T}{d^2} \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} \right) &= \\ \frac{\alpha \Delta T}{d^2} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} \right) & \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

dividiendo entre $\frac{\nu \Delta T}{d^2}$ resulta el número de Prandtl en el lado derecho:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} = \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} \right) \quad (\text{B.10})$$

en su forma compacta se escribe:

$$\frac{dT^*}{dt^*} = \frac{1}{Pr} \nabla^{*2} T^* \quad (\text{B.11})$$

Apéndice C

Transformación del vector gravedad a coordenadas cartesianas.

En este capítulo se transforma a coordenadas cartesianas la fuerza de gravedad para del sistema esférico (r distancia radial, θ ángulo polar y ϕ ángulo azimutal) \vec{g}_s , mediante la matriz de transformación M , a su equivalente en un sistema cartesiano \vec{g}_c , Dumas (1991).

$$\vec{g}_c = M\vec{g}_s \quad (C.1)$$

$$\vec{g}_c = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \phi f_r \\ -\sin \theta \sin \phi f_r \\ -\cos \theta f_r \end{bmatrix}$$

Al relacionar las funciones trigonométricas con las coordenadas cartesianas \vec{g}_c resulta de la siguiente forma:

$$\vec{g}_c = \frac{-f_r}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} (x_1, x_2, x_3) \quad (C.2)$$

En este trabajo se toman en cuenta que la componente f_r varía según el radio por lo que se puede escribir como:

$$\vec{g}_c = \frac{-C_g r^n}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}} (x_1, x_2, x_3) \quad (C.3)$$

Donde C_g es una constante gravitacional con unidades $\frac{m^{n+1}}{s^2}$ y n es un número entero.

Si tomamos en cuenta que $(x_1, x_2, x_3)^{\frac{1}{2}}$ es la magnitud del vector de posición \vec{r} , se puede escribir de forma compacta:

$$\vec{g}_c = -C_g r^{n-1} (x_1, x_2, x_3) \quad (C.4)$$

Apéndice D

Calculo del número de Nusselt.

En este capítulo se calcula el número de Nusselt para el caso de conducción de calor en un ánulo esférico. En la definición del número de Nusselt $Nu = \frac{hL}{k}$ se encuentra el coeficiente de convección al igualar el flujo de calor convectivo con el flujo de calor por conducción, esto es:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = h \Delta T \quad (D.1)$$

$$h = -k \frac{\partial T}{\partial r} \frac{1}{\Delta T} \quad (D.2)$$

Con la distribución de temperatura T_{EE} calculada en el apéndice A se calcula la derivada respecto al radio:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{r_o(T_o - T_i)r_i}{(r_o - r_i)r^2} \quad (D.3)$$

Ahora se sustituye el coeficiente de convección en la definición de número de Nusselt:

$$Nu = \frac{-kr_o(T_o - T_i)r_iL}{k(r_o - r_i)r^2\Delta T} \quad (D.4)$$

Si se considera a L como la diferencia entre el radio externo y el interno $L = (r_o - r_i)$ y a ΔT como la diferencia entre la temperatura interna y externa $\Delta T = (T_i - T_o)$:

$$Nu = \frac{-r_o(T_o - T_i)r_i\cancel{(r_o - r_i)}}{\cancel{(r_o - r_i)}r^2(T_i - T_o)} \quad (D.5)$$

$$Nu = \frac{r_o\cancel{(T_i - T_o)}r_i}{r^2\cancel{(T_i - T_o)}} \quad (D.6)$$

$$Nu = \frac{r_or_i}{r^2} \quad (D.7)$$

Ahora se evalúa el número de Nusselt interno $Nu_i = Nu(r_i)$ y externo $Nu_e = Nu(r_o)$ y se toma en cuenta la definición de relación de aspecto $\eta = \frac{r_i}{r_o}$ y por convención multiplicamos por el inverso para asegurar que en conducción el número de Nusselt es igual a la unidad.

$$Nu_i = \frac{r_o}{r_i} = \frac{1}{\eta} = 1 \quad (D.8)$$

$$Nu_e = \frac{r_i}{r_o} = \eta \frac{1}{\eta} = 1 \quad (D.9)$$

Para los casos convectivos el Nusselt se calcula de la siguiente manera:

$$Nu_i = -\eta \frac{dT}{dr} \quad (D.10)$$

$$Nu_e = -\frac{1}{\eta} \frac{dT}{dr} \quad (D.11)$$

Bibliografía

- Aurnou, J. M. and Olson, P. L. (2001). Strong zonal winds from thermal convection in a rotating spherical shell. *Geophysical Research Letters*, 28(13):2557–2559.
- Avila, R., Cabello-González, A., and Ramos, E. (2013). A linear stability analysis of thermal convection in spherical shells with variable radial gravity based on the tau-chebyshev method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 44(0):495 – 508.
- Bercovici, D., Schubert, G., Glatzmaier, G. A., and Zebib, A. (1989). Three-dimensional thermal convection in a spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics*, 206:75 – 104.
- Bullard, E. (1948). The secular change in the earth’s magnetic field. *Geophysical Supplements to the Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 5(7):248–257.
- Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hidromagnetic Stability*. Numerical mathematics and scientific computation. Dover Publications.
- Deschamps, F., Tackley, P. J., and Nakagawa, T. (2010). Temperature and heat flux scalings for isoviscous thermal convection in spherical geometry. *Geophysical Journal International*, 182(1):137–154.
- Deschamps, F., Yao, C., Tackley, P. J., and Sanchez-Valle, C. (2012). High rayleigh number thermal convection in volumetrically heated spherical shells. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 117(E9).
- Dumas, G. (1991). *Study of spherical Couette flow via 3-D spectral simulations: large and narrow gap glows*. PhD thesis, California Institute of Technology.
- Evonuk, M. and Glatzmaier, G. A. (2006). A 2d study of the effects of the size of a solid core on the equatorial flow in giant planets. *Icarus*, 181(2):458 – 464.
- Feudel, F., Bergemann, K., Tuckerman, L. S., Egbers, C., Futterer, B., Gellert, M., and Hollerbach, R. (2011). Convection patterns in a spherical fluid shell. *Phys. Rev. E*, 83:046304.
- Futterer, B., Gellert, M., von Larcher, T., and Egbers, C. (2008). Thermal convection in rotating spherical shells: An experimental and numerical approach within geoflow. *Acta Astronautica*, 62(4–5):300 – 307.

- Gulberg, Y. and Feldman, Y. (2015). On laminar natural convection inside multi-layered spherical shells. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 91:908 – 921.
- Hahn, D. and Ozisik, N. (2012). *Heat Conduction*. Wiley.
- Hart, J. E., Glatzmaier, G. A., and Toomre, J. (1986). Space-laboratory and numerical simulations of thermal convection in a rotating hemispherical shell with radial gravity. *Journal of Fluid Mechanics*, 173:519–544.
- Heimpel, M., Aurnou, J., Al-Shamali, F., and Perez, N. G. (2005). A numerical study of dynamo action as a function of spherical shell geometry. *Earth and Planetary Science Letters*, 236(1–2):542 – 557.
- Hernlund, J. and Tackley, P. (2003). Three-dimensional spherical shell convection at infinite prandtl number using the cubed sphere method. pages 931 – 933.
- Hills (1947). *The formation of the continents by convection*. Arnold London.
- Jacobs, J. A. (1956). *The Earth's Interior*, pages 364–406. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Jordan, T. H. (1979). Structural geology of the earth's interior. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 79:4192–200.
- Julien, K., Legg, S., McWilliams, J., and Werne, J. (1996). Hard turbulence in rotating rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. E*, 53:R5557–R5560.
- Kameyama, M., Kageyama, A., and Sato, T. (2008). Multigrid-based simulation code for mantle convection in spherical shell using yin–yang grid. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 171(1):19 – 32.
- Karniadakis, G. and Sherwin, S. (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Numerical mathematics and scientific computation. Oxford University Press.
- Lister, J. (2008). Earth science: Structuring the inner core. *Nature*, 454(7205):701 – 702.
- Meinesz, V. (1948). *Gravity Expeditions at Sea Vol. 4*. Delftsche Uitgevers Maatschappij.
- Moghadam, A. J. and Rahimi, A. B. (2008). A numerical study of flow and heat transfer between two rotating spheres with time-dependent angular velocities. *Journal of Heat Transfer*, 130(7):071703–071703.
- Nair, R. D., Thomas, S. J., and Loft, R. D. (2005). A discontinuous galerkin transport scheme on the cubed sphere. *Monthly Weather Review*, 133:814 – 828.
- Prey (1922). *Darstellung der Höhen-und Tiefenverhältnisse der Erde durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 16. Ordnung*. Abh. Kgl. Ges. Wiss Göttingen.

- Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. (1996). The cubed sphere: A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 124(1):93 – 114.
- Scanlan, J., Bishop, E., and Powe, R. (1970). Natural convection heat transfer between concentric spheres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 13(12):1857 – 1872.
- Simitev and Busse (2005). Prandtl number dependence of convection driven dynamos in rotating spherical fluid shells. *Journal of Fluid Mechanics*, 532:365 – 388.
- Stevenson, D. J. (1981). Models of the earth's core. *Science*, 214(4521):611–619.
- Tarback, E., Lutgens, F., and Tasa, D. (2010). *Earth Science*. Prentice Hall.
- Thamire, C. and Wright, N. T. (1998). Multiple and unsteady solutions for buoyancy driven flows in spherical annuli. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(24):4121 – 4138.
- Yadav, R., Gastine, T., Christensen, U., Duarte, L., and Reiners, A. (2015). Effect of shear and magnetic field on the heat-transfer efficiency of convection in rotating spherical shells. *Geophysical Journal International*, 204(2):1120.
- Yoshida, M. and Kageyama, A. (2004). Application of the yin-yang grid to a thermal convection of a boussinesq fluid with infinite prandtl number in a three-dimensional spherical shell. *Geophysical Research Letters*, 31(12).