



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

ANÁLISIS FÍSICO DE UN SISTEMA WEC Y DISEÑO DE UN CONTROLADOR  
PREDICTIVO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
IVÁN DE JESUS OSIO CHAVEZ

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. PAUL ROLANDO, MAYA, ORTIZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, CD. MX., JULIO DE 2018

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

Secretario: Dr. Benítez Pérez Héctor

Vocal: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Alvarez Icaza Longoria Luis A.

2<sup>do.</sup> Suplente: M.I. Carmona Paredes Germán Jorge

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM, México, CD. MX.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

  
-----  
**FIRMA**

## **Agradecimientos**

A mi familia por su constante apoyo, en especial a Flor Bautista por acompañarme en los momentos buenos y malos.

Al Dr. Paul Rolando Maya Ortiz por darme la oportunidad de trabajar en su grupo y apoyarme en mi desarrollo profesional.

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico suministrado durante mis estudios.

# Índice general

<b>Análisis Físico de un sistema WEC y Diseño de un Controlador Predictivo</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Motivación . . . . .	5
1.1.1. Potencial de la energía marina . . . . .	6
1.1.2. Principales características de sistemas WEC . . . . .	7
1.2. Convertidor hiperbárico de energía de las olas . . . . .	10
1.3. Objetivo . . . . .	11
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	12
1.5. Estado del arte . . . . .	13
1.6. Hipótesis . . . . .	15
1.7. Metodología . . . . .	15
1.8. Contribución de la tesis . . . . .	15
1.9. Organización del trabajo . . . . .	16
<b>2. Modelo matemático del convertidor hiperbárico</b>	<b>17</b>
2.1. Modelo del flotador . . . . .	17
2.2. Ley de conservación de la masa . . . . .	20
2.3. Ley del gas ideal . . . . .	22
2.4. Inyector: ley de conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	24
2.4.1. Inyector: coeficiente de descarga $\phi_D$ y características . . . . .	26
2.5. Modelo dinámico representativo a la etapa de acondicionamiento . . . . .	28
<b>3. Diseño del controlador</b>	<b>31</b>
3.1. Enfoque en línea basado en la función de costo min-max . . . . .	32
3.2. Manejo de la función de costo para la obtención del MPC sin restricciones . . . . .	33
3.2.1. Formulación LMI . . . . .	34
3.3. MPC con restricciones . . . . .	36

3.4. Factibilidad . . . . .	38
3.5. Estabilidad . . . . .	39
3.6. Formulación fuera de línea basada en la función de costo min-max . . . . .	40
<b>4. Implementación</b>	<b>47</b>
4.1. Restricciones y cálculo del conjunto de leyes de control . . . . .	47
4.2. Simulación en línea . . . . .	48
4.3. Simulación fuera de línea . . . . .	50
<b>5. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>A. Herramientas Convexas</b>	<b>55</b>
A.0.1. Teoría de conjuntos convexos y LMI . . . . .	55
A.0.2. Sistemas con descripción politópica (modelos con incertidumbres) . .	60
A.0.3. Programación Lineal . . . . .	64
<b>B. Parámetros y sistemas lineales</b>	<b>67</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Cuando se desea analizar la utilización de la energía de las olas del mar, es necesario preguntarse: *¿por qué es importante comenzar a utilizar este recurso?*. Las razones, de hecho, se comparten con otras fuentes de energía renovable, tales como la solar, eólica, geotérmica y otras formas de energía oceánica (corrientes, sistemas térmicos y de salinidad). La respuesta clave a esta cuestión es que el uso de las fuentes de energía renovables ayuda a superar los problemas ambientales de actualidad, sin dejar de lado que puede ayudar a reducir el agotamiento inmediato de los combustibles fósiles. Los problemas ambientales se relacionan con la contaminación, que a su vez se encuentra relacionada con la utilización de combustibles fósiles para la producción de energía, que traen los efectos negativos sobre el cambio climático [6]. El agotamiento de los combustibles fósiles ya se destacó en las publicaciones de la década de 1950 [7], por éstas y otras razones el nivel de consumo de energía, que se basa mayoritariamente en combustibles fósiles, no podrá continuar a menos que se desarrollen fuentes alternativas que exploten otro tipo de recursos.

El amplio uso de la energía eléctrica producida a través de la energía de las olas del mar, puede ser un gran logro con respecto al uso de energías *renovables*. Los dispositivos tecnológicos que tienen como función la extracción de esta energía son conocidos como *convertidores de energía de las olas* (En sus siglas en inglés *Wave Energy Converters*, WEC). Al margen de que los WECs puedan ser particularmente interesantes para el entorno académico, el estudio de los mismos conlleva varios beneficios significativos para la sociedad, tales como:

1. Es una fuente de energía sustentable e ilimitada, además puede contribuir significativamente a la red eléctrica, reforzando a las energías renovables que se encuentran en uso actualmente, esto es muy beneficioso si se incrementa la cantidad de energías renova-

bles disponibles, se incrementa la disponibilidad de combustibles fósiles y se reduce la necesidad de los mismos.

- II. La electricidad producida por la energía de las olas puede hacer que más países sean autosuficientes energéticamente.
- III. La extracción de la energía de las olas del mar no requiere de una gran extensión en tierra y mar (es decir, los WEC son poco invasivos) y no tienen un impacto visual significativo.

Como la demanda energética en el mundo se encuentra en constante aumento, mientras que las reservas de combustibles fósiles son ya limitadas, la energía de las olas del mar debe tomarse en cuenta en el uso de las energías renovables en todo el mundo: el respaldo lógico de esta idea proviene de la innovación exitosa del producto. Por ejemplo, hay tres ideas claves que en general se deben tomar en cuenta. El producto tiene que ser técnicamente factible, económicamente viable y deseable para el usuario. En otras palabras se requiere que la tecnología sea fácilmente replicable, que sea barata con respecto a las energías convencionales de actualidad y que sea de utilidad para la sociedad.

Actualmente hay una gran demanda de energías renovables. Esto se puede corroborar en el incremento anual de capital, en la inversión global en energía renovable, tales como viento y solar [1,2]. Una gran cantidad de tecnologías de extracción de energía marina ya han sido desarrolladas e implementadas en algunos países en los últimos 25 años, los cuales reconocen sus beneficios y su gran potencial, esto se comprueba en una lista de desarrolladores en EMEC de las tecnologías actuales que ya son más de 256 [3].

### **1.1.1. Potencial de la energía marina**

Al considerar la energía de las olas como fuente de producción de electricidad, es relevante observar las estimaciones de cuán grande es el potencial de utilización. Las olas viajan a grandes distancias con muy poca pérdida de energía (siempre que las olas estén en aguas profundas). Además de las mareas, los otros tipos de olas profundas no tienen en la práctica ningún potencial de utilización. Cuando se consideran los estados del mar (caracterizados por parámetros de onda estadísticos que cubren períodos de ondas aproximadamente de 1000 muestras) estos son más constantes que el campo de viento que genera las olas y se puede observar experimentalmente que las olas de la superficie del océano tienen períodos de onda en el rango de 0.5-30 [s].

El flujo de energía de las olas (potencia) muestra una variación significativa en el tiempo y

el espacio. Puede variar desde unos pocos watts hasta megawatts por metro de superficie de mar en condiciones extremas (tormentas). Las primeras estimaciones de la potencia de onda global disponible indican un potencial del recurso teórico bruto de aproximadamente 3.7 [TW], de los cuales 3 [TW] son netos, es decir, esta reducción se debe a las áreas donde la cobertura de hielo es un problema para la puesta en marcha de estas tecnologías [4]. De la Figura 1.1 se puede verificar que México tiene zonas que van desde los 5 hasta los

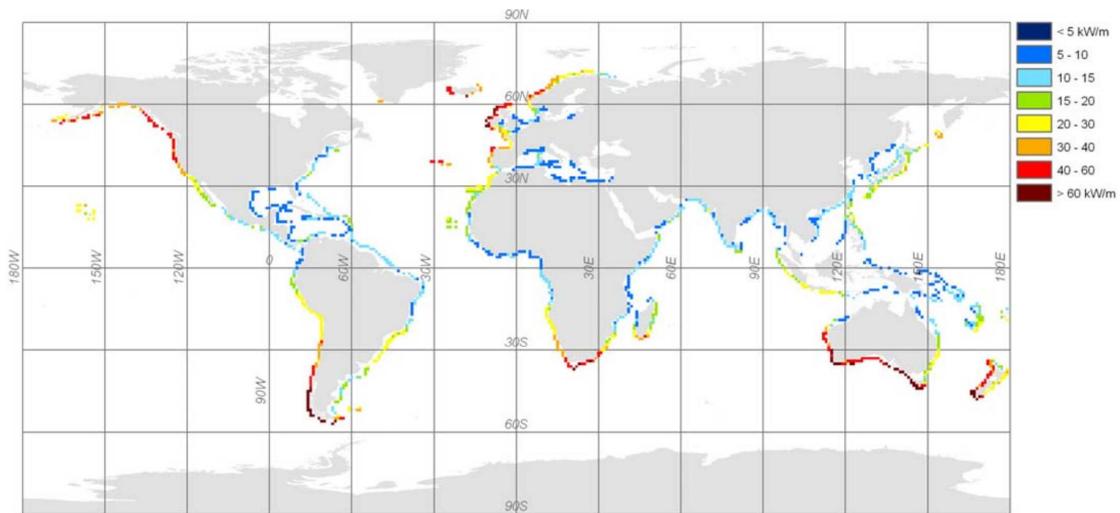


Figura 1.1: Potencia costera teórica neta anual en todo el mundo (excluidas las contribuciones donde  $P \leq 5$  [kW/m] y áreas potencialmente cubiertas de hielo [4].

30 [kW/m] y con esta disponibilidad del recurso energético fácilmente se podría llevar a cabo proyectos en el contexto de la microgeneración (hasta 100[kW]) aunque normalmente se desean dispositivos del rango de MW para ser rentables.

### 1.1.2. Principales características de sistemas WEC

Los sistemas WECs son máquinas que explotan el potencial de las olas oceánicas para convertirla en una forma utilizable de energía, tal como la electricidad.

Cuando el mecanismo de captura de energía se basa en el movimiento de un cuerpo en respuesta a la interacción con las olas del mar, como es el caso de algunos puntos de absorción y atenuación, las máquinas eléctricas rotativas convencionales no son directamente compatibles, por tal motivo un convertidor hidráulico es a menudo la solución elegida para interconectar la energía de las olas con el generador eléctrico, ya que son adecuados para absorber energía cuando se trata de grandes fuerzas a bajas frecuencias.

En la Figura 1.2 se representa un esquema de las diferentes formas de toma de fuerza hidráulica para la conversión de energía de las olas.

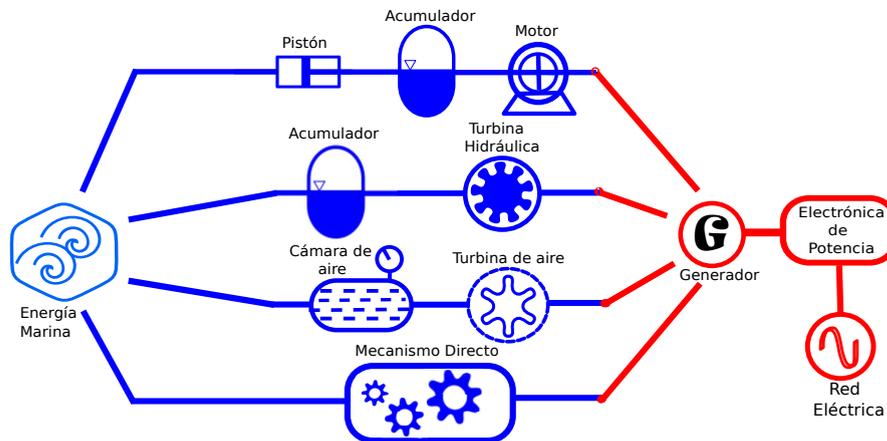


Figura 1.2: Mecanismos que muestran las principales formas de conversión de energía de olas

De manera general un WEC se puede describir como un cilindro hidráulico que se mueve hacia arriba y hacia abajo con respecto a un actuador (flotador), que fuerza al fluido a moverse a través de colectores hidráulicos que controlan la cantidad y la velocidad del fluido para mover un motor hidráulico, que a su vez acciona el generador eléctrico. Los colectores hidráulicos comúnmente son acumuladores que se agregan al sistema para suavizar el suministro del fluido a alta presión, al proporcionar o acumular energía hidráulica cuando sea necesario.

Muchos problemas surgen cuando se elige un sistema de toma de fuerza hidráulico para la conversión de energía de las olas. Debido a la variabilidad del recurso energético, los sistemas hidráulicos a menudo incluyen varios acumuladores que pueden almacenar las cargas absorbidas y suavizar la conversión. Otro caso a tratar es la protección del sistema en caso de condiciones extremas, donde el actuador hidráulico excede su recorrido de diseño y daña al sistema, una solución es incluir un límite mecánico en la carrera o usar un pistón hidráulico radial.

Las siguientes funciones [5], son aspectos esenciales que el WEC debe cumplir para mostrar precisamente el potencial que tiene el uso de esta tecnología:

- I. **Supervivencia:** Un WEC requiere de un sistema de atraque, que preferentemente sea un sistema pasivo (hidráulico), que pueda efectivamente reducir cargas extremas. Con pasivo nos referimos a que el mecanismo pueda ser activado automáticamente sin requerir interacción externa, por ejemplo electricidad.
- II. **Fiabilidad:** El sistema WEC debe ser de fácil acceso e inspección de todas las partes que lo componen, así como de poder llevar al WEC a zona segura en caso de una carga

extrema (tormentas o huracanes).

- III. **Índice de potencia total:** El WEC debe consistir de una tecnología de absorción eficiente de energía marina, tiene que producir potencia eléctrica suficientemente *suave* y reducir al mínimo las pérdidas. De otra manera, mucha energía se perdería en el proceso de conversión.
- IV. **Escalabilidad:** Un WEC necesita ser un dispositivo escalable en potencia, para ser económicamente viable, normalmente se diseñan para ser dispositivos que soporten arriba de 5 MW.
- v. **Beneficios ambientales:** Se espera que un WEC sea un sistema de energía sustentable, ya que se desea tener un gran beneficio del ambiente reduciendo al mínimo el impacto ambiental.

Para cumplir de manera satisfactoria los puntos anteriores, se propone trabajar con el convertidor de energía de olas que se muestra en la Figura 1.3, reportado en [14], que representa una idea general del proceso a tratar en este trabajo. En general un sistema WEC está compuesto en cuatro etapas: primero, hay un subsistema conocido como de toma de fuerza que es de naturaleza mecánico, este dispositivo se encarga de capturar el movimiento de las olas y traducirlo en un flujo de agua, el segundo subsistema está compuesto por dispositivos hidráulicos y neumáticos y tiene como principal función el acondicionamiento de la señal de flujo y proporcionar un chorro de agua coherente, el tercer subsistema se compone de una turbina que dirige la energía y la convierte en energía mecánica y el cuarto es una máquina eléctrica, con sus respectivos componentes de acción y control que convierten la energía mecánica rotatoria en energía eléctrica lista para ser entregada a la red. El convertidor an-

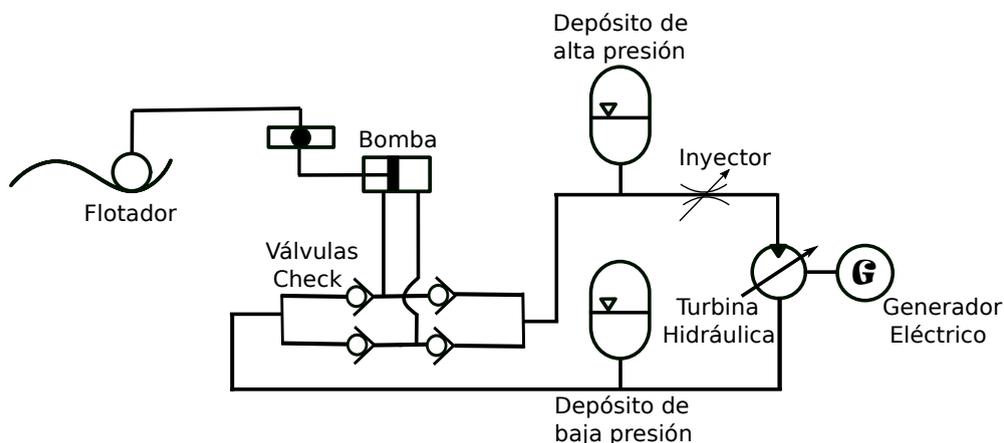


Figura 1.3: Esquema general de un convertidor de energía de las olas

terior cumple con la característica de *supervivencia* al estar en bahía y no dentro del mar (el sistema de amarre se encuentra en tierra), se puede extraer el flotador en caso de una carga extrema, mediante el uso de una grúa hidráulica, se verifica la *fiabilidad* al tener acceso fácil a todas las partes que lo conforman, la condición del índice de potencia referente a la *suavidad* se cumple en el sentido de contar con un arreglo de válvulas que aprovechan el movimiento bidireccional de la bomba hidráulica para convertirlo en un flujo de una sola dirección, además se tiene un tanque presurizado diseñado para evitar los tiempos muertos de la bomba de desplazamiento positivo y mantener una velocidad del fluido lo más constante posible, también las pérdidas de energía se minimizan por medio del tanque ya que sirve de acumulador y proveedor de la energía de las olas, también es un dispositivo escalable y el impacto ambiental es mínimo por las dimensiones de la planta al ser poco invasivo en el ambiente marino.

## 1.2. Convertidor hiperbárico de energía de las olas

En esta tesis se elige trabajar con un convertidor hiperbárico de energía de las olas (Figura 1.4), este se encuentra compuesto principalmente por los siguientes elementos:

1. **Flotador:** Es el elemento sobre el cual se obtiene mediante un diagrama de cuerpo libre (suma de fuerzas actuantes sobre el flotador) el modelo de la ola.
2. **Bomba de desplazamiento positivo:** Se encarga de bombear el fluido dentro de un circuito cerrado de agua dulce, también es el dispositivo que transforma la energía mecánica producida por la ola en energía hidráulica.
3. **Arreglo de válvulas Check:** Este arreglo tiene como principal función producir una señal pulsante, rectificando los dos semiciclos proporcionados por la bomba en ambas direcciones del movimiento del pistón, se puede entender mediante una analogía eléctrica haciendo referencia al puente de diodos de onda completa.
4. **Cámara hiperbárica:** Este dispositivo se encarga de mantener presurizada la columna de agua dentro del tanque esto para mantener una presión alta del fluido, además, previene efectos hidráulicos como el golpe de ariete.
5. **Tanque presurizado:** Su función principal es contener dos fluidos, uno en estado gaseoso y otro en estado líquido esto con el objetivo de almacenar y proporcionar energía hidráulica cuando se requiera.

6. **Inyector:** Es el componente que se encarga de regular la velocidad de salida del fluido a la turbina pelton, proporcionando un chorro *coherente* y de alta presión.
7. **Turbina Pelton:** Convierte la energía cinética del chorro de agua en un movimiento rotacional.
8. **Generador Eléctrico:** Convierte el movimiento rotacional de la turbina Pelton en energía eléctrica
9. **Deposito y tubería de recirculación:** El agua que posee baja energía cinética después de chocar contra la turbina pelton es redireccionada por gravedad hacia un depósito de baja presión, para así poder reiniciar el proceso y ser bombeada de nuevo por el circuito hidráulico.

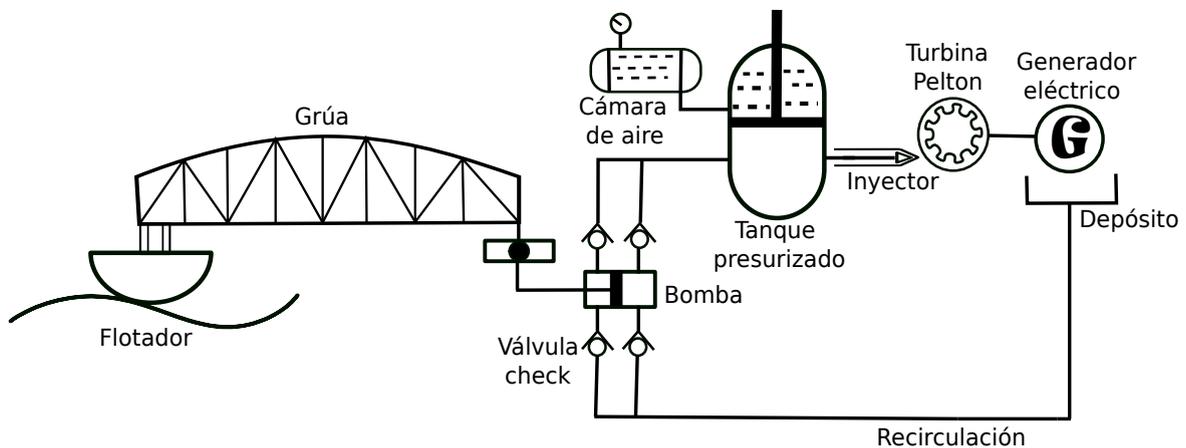


Figura 1.4: Esquema de un convertidor hiperbárico de energía de las olas

*En este trabajo de tesis solo se usa el modelo dinámico que representa la etapa de acondicionamiento del flujo de agua en dispositivos WECs del tipo hiperbárico y se omite la sección de conversión a energía eléctrica, es decir, el análisis se hace con el modelo del tanque presurizado, que va desde el flujo de entrada hasta el flujo de salida del inyector, el diagrama del sistema a tratar se observa en la Figura 1.5.*

### 1.3. Objetivo

El análisis y control de dispositivos WEC se puede dividir en general en tres secciones: la sección de toma de fuerza (flotador), la sección de acondicionamiento (elementos hidroneumáticos y mecánicos) y la etapa de conversión de energía mecánica a eléctrica.

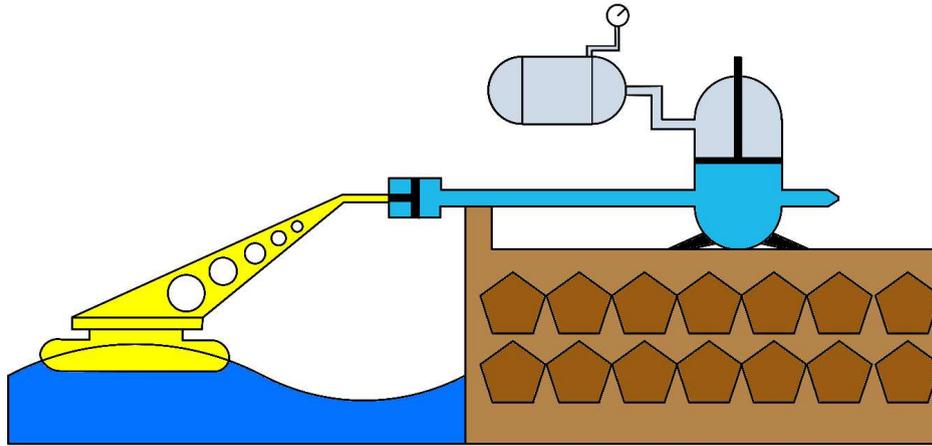


Figura 1.5: Sistema WEC que va desde el flujo de entrada al tanque presurizado hasta el flujo de salida del inyector

El objetivo de esta tesis será analizar el modelo dinámico que caracteriza el comportamiento de la etapa de acondicionamiento del flujo de agua bombeado por el flotador de un *convertidor de energía de las olas* y regular tanto la presión como la velocidad del chorro de agua incidente a una turbina hidráulica suponiendo un flujo proporcionado por tres flotadores.

## 1.4. Planteamiento del problema

El problema y la complejidad del diseño de controladores para dispositivos WECs radican por un lado en el conocimiento de un modelo de ola (de acuerdo a los estados del mar en cierta locación marítima) y por otro lado en la estimación de la fuerza de difracción (ola incidente).

Aunque las olas del océano son *teóricamente bien entendidas* y extensivamente descritas en la literatura, en la práctica el fenómeno oscilatorio es muy difícil de describir, reproducir y predecir, esto por la variabilidad y la gran cantidad de parámetros que pueden influir en el comportamiento de las olas, la Figura 1.6 muestra los diferentes parámetros a tener en cuenta para la descripción física del modelo de ola. De esta manera es necesario plantear estrategias de control para el problema de regulación de las variables dinámicas (mecánicas, hidráulicas y neumáticas) que determinan el subsistema de acondicionamiento de la señal de flujo. Con lo anterior en esta tesis se plantea la siguiente *problemática*.

*Dado un sistema hidroneumático representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias posiblemente no lineales, el cual se encuentra completamente caracterizado con excepción del modelo de ola del cual se tiene información limitada, proponer e implementar*

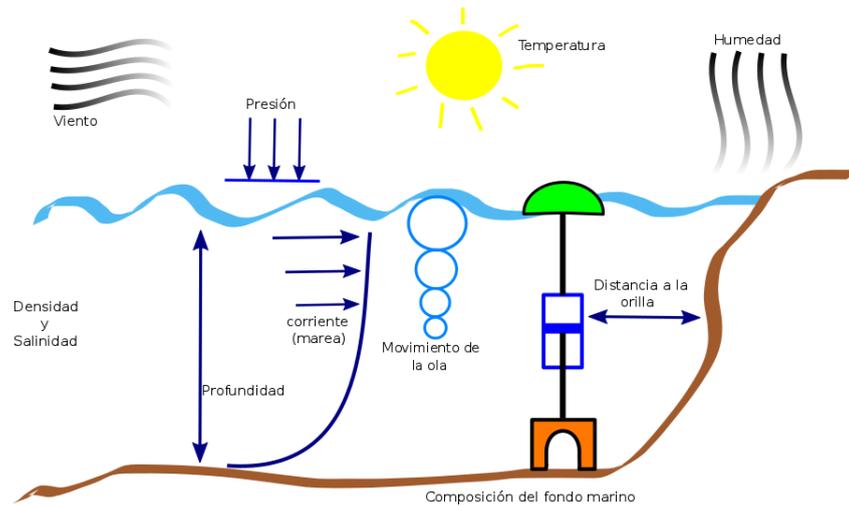


Figura 1.6: Principales parámetros a tener en cuenta en el modelado de las olas oceánicas

una ley de control que permita regular el estado del sistema *al menos cerca de sus valores nominales*, además se supone lo siguiente:

1. No se toma en cuenta el problema de máxima extracción de energía (flotador), sino el de regulación de las variables dinámicas que representan los dispositivos de acondicionamiento del flujo proporcionado por el flotador.
2. El flujo proporcionado por el flotador es una señal de amplitud y frecuencia acotadas, y contiene la información del comportamiento dinámico de un conjunto de flotadores representados por modelos lineales en sincronía, en donde la ola incidente es irregular.
3. Todo el estado está disponible para medición.
4. Se conocen todos los parámetros.

## 1.5. Estado del arte

En muchas regiones del mundo se han llevado estudios locales de energía de las olas cómo se ve en [8] y en [9] donde se muestra una estimación de como este recurso puede ser utilizado. La manera de utilizarlo consiste principalmente en elegir la tecnología adecuada. La primera patente para un convertidor de energía de las olas data del año 1799, en tiempos moderno no fue hasta la crisis energética de principios de los años setenta que el campo había renovado el interés, impulsado en gran medida por un artículo de Stephen Salter en la revista científica Nature en 1974 [10]. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos de investigación muy importantes, las actividades se redujeron nuevamente durante los años ochenta y comienzos

de los noventa. Hacia el final del milenio pasado las actividades volvieron a aumentar su velocidad, y ahora en varios países del mundo sobre todo en los países costeros de Europa se ha puesto una vez más en marcha el desarrollo y el estudio de las energías marinas renovables, incluida la energía de las olas. Los desarrollos de tecnología WEC se han caracterizado por el hecho de haber un gran número de ideas y conceptos de cómo usar esta energía por ejemplo *EquiMar* fue un proyecto de investigación [13], que involucro a unos 60 científicos, desarrolladores, ingenieros y conservacionistas de 11 países europeos para encontrar formas de medir y comparar las decenas de dispositivos de energía mareomotriz.

Existe una gran variedad de tecnologías WEC y aún están apareciendo más, en [11] [12] se propone una categorización de las diferentes tecnologías, entre los dispositivos más estudiados se encuentran el PowerBuoy [17], AquaBuoy [18], WaveBob [19], SEAREV [20], Archimides WAVE Swing [21] y pelamis [22].

En esta tesis se trabajara con un convertidor hiperbárico de energía de las olas donde la tecnología WEC a tratar es presentada en [14–16].

La mayoría de las estrategias de control que se han propuesto en la literatura científica se han centrado en el control de la etapa de toma de fuerza (control del movimiento vertical del flotador), esto con el objetivo de la máxima extracción de energía [23–32].

En el caso de la etapa de acondicionamiento, tanto el modelado como el control han sido menos estudiados. En [33] se muestra el modelo de un acumulador hidráulico conectado a un dispositivo de punto absorbente y en [34] se le añade un segundo acumulador, en [35] se aplican controladores PID para manipular las válvulas en los acumuladores de [34], también en [36] se muestra un dispositivo hidráulico para convertidores de energía de las olas tipo pelamis.

La idea de esta tesis es desarrollar una estrategia de control para regular las variables dinámicas de la etapa de acondicionamiento en convertidores de energía de las olas del tipo hiperbárico.

El control propuesto para mantener la velocidad y la presión del fluido hacia la turbina hidráulica lo más constante posible al menos en un intervalo acotado de frecuencias de las olas, es el control por modelo predictivo (usaremos sus siglas en inglés para referirnos a esta ideología de control, Model Predictive Control, MPC). El control a implementar fue propuesto por primera vez en [40] usando el caso de horizonte cero. Quizá el problema de esta formulación en la práctica, es el alto costo computacional, por este motivo se ha buscado la manera de reducir el esfuerzo computacional [41]. Este enfoque explota herramientas matemáticas tales como las desigualdades matriciales lineales y las bondades de los conjuntos convexos. Algunas mejoras al controlador se proponen en [42] tales como el uso de un modelo

nominal como principal modelo de apoyo para el diseño y los demás modelos lineales como secundarios que representan las aristas restantes de la cobertura convexa, otras variantes de dicho controlador se muestra en [43] donde se explota el caso de horizonte variante para la formulación del controlador.

## 1.6. Hipótesis

Ya que la suma de todos los flujos individuales que proporcionan un conjunto de flotadores (basados en la teoría lineal de olas) por medio de un movimiento oscilatorio de amplitud pequeña, puede ser representado por una sola señal de flujo de entrada a un tanque presurizado, entonces, existe la manera de representar matemáticamente un convertidor hiperbárico de energía de las olas que dependa del flujo total y que no necesariamente tome en cuenta el modelo del flotador de manera directa. De esta manera, se supone factible implementar un controlador robusto que permita regular los estados de la planta en vista de un conocimiento limitado del flujo total.

## 1.7. Metodología

La metodología a seguir se enumera a continuación:

1. Se modela y analiza un convertidor hiperbárico de energía de las olas con el fin de entender el proceso de extracción y acondicionamiento de la energía.
2. Se busca una propuesta de control que permita mantener los valores nominales del convertidor hiperbárico (presión y velocidad) cuando exista un cambio temporal en el valor del flujo total de entrada al tanque.
3. Se implementa el controlador propuesto mediante simulación numérica.

## 1.8. Contribución de la tesis

La contribución de este trabajo de tesis se encuentra en el modelado y control de la etapa de acondicionamiento de la señal de flujo en WECs del tipo hiperbárico y se puede resumir en los siguientes puntos.

1. Se propone un modelo alternativo de un convertidor hiperbárico de energía de las olas que toma en cuenta la variación temporal de la presión en la cámara hiperbárica de tal

manera que se consigue evitar el uso redundante de la ecuación diferencial que representa la dinámica de la altura de la columna de agua en el tanque.

2. El modelo propuesto toma en cuenta la aproximación de Bernoulli para justificar la ecuación puntual que se obtiene a través del principio de conservación de la cantidad de movimiento para la representación matemática de la velocidad del flujo a la salida del inyector, visto cómo un modelo dinámico de la velocidad en donde se considera un término de fricción para una región pequeña del desplazamiento de un inyector de aguja.
3. La aplicación de un controlador por modelo predictivo basado en la función de costo min-max con caso particular horizonte cero para sistemas con descripción politópica. Dicho controlador permite tratar el flujo de entrada como una incertidumbre dinámica, además de incluir en el diseño saturación de la señal de control y cotas de sobrepaso máximo en los estados del sistema.

## 1.9. Organización del trabajo

El trabajo expuesto en esta tesis queda organizado en cuatro partes principales y se enumeran de la siguiente manera

- a.- Obtención del modelo matemático de la etapa de acondicionamiento de la señal de flujo de un convertidor hiperbárico de energía de las olas.
- b.- Diseño de un controlador predictivo robusto.
- c.- Implementación del controlador mediante simulación.
- d.- Conclusiones y trabajo futuro.

# Capítulo 2

## Modelo matemático del convertidor hiperbárico

Para la obtención del modelo matemático del sistema hidroneumático se toma en cuenta las siguientes suposiciones:

- Fluido en estado líquido incompresible.
- Régimen laminar.
- Análisis Euleriano, es decir, haciendo uso del concepto de volumen de control.
- Flujo unidimensional.
- Proceso politrópico de expansión y contracción de un gas termodinámico.

Se divide el análisis del WEC en cuatro partes principales. En la primera parte se especifica la naturaleza del flujo de entrada al tanque (modelo lineal de ola). En la segunda parte se describe la sección del tanque que contiene el líquido (agua) visto como un volumen de control. La tercera parte describe la sección del tanque que contiene el gas (aire) visto como un gas en un proceso politrópico (proceso en expansión y contracción) y finalmente la cuarta parte en la cual se modela la sección de tubería que va desde el flujo de salida del tanque presurizado hasta la salida del inyector.

### 2.1. Modelo del flotador

En esencia, el algoritmo para construir un modelo de ola se basa en la segunda ley de movimiento de Newton, la cual establece que la fuerza inercial se equilibra con todas las

fuerzas que actúan sobre el flotador. Esta afirmación está expresada como

$$m\ddot{x}(t) = F_e(t) + F_r(t) + F_{hs}(t) + F_f(t) \quad (2.1)$$

donde  $m$  representa la masa del flotador y  $\ddot{x}$  su aceleración. Los términos del lado derecho de esta ecuación corresponden a:

- Fuerza de excitación o fuerza de difracción:  $F_e$
- Fuerza hidrostática:  $F_{hs} = kx$
- Fuerza de fricción:  $F_f = b\dot{x}$
- Fuerza de radiación:  $F_r$

La fuerza de excitación  $F_e$  es el resultado de la presión ejercida sobre la superficie mojada del cuerpo debido a la acción de las ondas entrantes. El enfoque más popular para calcular esta fuerza se basa en la teoría de ondas lineales, en la que se supone que el cuerpo es estacionario y el área de la superficie mojada es constante e igual al valor en condiciones inalteradas, esta suposición solo es válida para amplitudes de onda pequeña, que es una suposición fundamental de la teoría lineal. Por lo tanto, bajo supuestos lineales, es necesario modelar el comportamiento aleatorio del estado del mar para estimar la fuerza de excitación (fuerza de difracción). El enfoque más común consiste en utilizar la teoría de ondas Airy, una teoría lineal para la propagación de ondas en la superficie de un flujo potencial y arriba de un fondo horizontal. La fuerza de excitación, se puede reproducir entonces para un registro de onda con duración  $T$  como la suma de un número grande (teóricamente infinito)  $N$ , de componentes armónicos de onda (una serie de Fourier), que es el método de superposición de onda y se representa como

$$F_e(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(2\pi f_i t + \alpha_i) \quad (2.2)$$

donde,  $t$  es el tiempo,  $a_i$  y  $\alpha_i$  la amplitud y la fase de cada frecuencia respectivamente, y  $f_i = i/T$ . Las fases  $\alpha_i$  son aleatorias y están distribuidas entre 0 y  $2\pi$ .

Como solo un conjunto finito de frecuencias  $f_i$  deben representar la fuerza de excitación (esto por motivos de simulación numérica), mientras que en realidad todas las frecuencias están presentes en el mar, es conveniente dejar que el intervalo de frecuencias  $\Delta f \rightarrow 0$ . La fuerza hidrostática  $F_{hs} = kx$  se presenta cuando un cuerpo está parcial o completamente sumergido en un líquido, este experimentará una fuerza ascendente (flotabilidad) igual al peso del líquido desplazado, lo que se conoce como el principio de Arquímedes. La fuerza

hidrostática resulta de la diferencia entre esta fuerza hacia arriba y el peso del cuerpo. En consecuencia, la variación de la sumersión del flotador debido a su movimiento oscilatorio bajo una distribución de presión hidrostática provoca un cambio en la flotabilidad (igual al cambio de peso del fluido desplazado) y por lo tanto una variación en la fuerza hidrostática. Una suposición fundamental de la teoría lineal es que los movimientos corporales resultantes son de pequeña amplitud, lo que normalmente se ajusta al comportamiento de los WEC durante el régimen operativo, de hecho, el movimiento de los WEC tiende a ser de pequeña amplitud porque de lo contrario los efectos viscosos disipativos serían dominantes en la dinámica del dispositivo, lo que en última instancia limitaría el movimiento y reduciría la eficacia del dispositivo. Por lo tanto, la fuerza hidrostática  $F_{hs}$ , se implementa comúnmente en modelos de onda simplemente como una función proporcional al desplazamiento del cuerpo, donde el coeficiente de proporcionalidad se conoce como el coeficiente hidrostático, es decir,

$$F_{hs}(t) = kx$$

donde  $k$  es el coeficiente hidrostático y  $x$  es considerado el movimiento en dirección del grado de libertad. Por ejemplo, en el caso de un cuerpo que se mueve bajo oscilaciones de pequeña amplitud, la variación de la fuerza de flotación puede ser simplemente dada por

$$F_{hs}(t) = \rho g A x$$

donde  $\rho$  denota la densidad del agua,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $A$  el área de la sección transversal del cuerpo en condiciones inalteradas y  $x$  su desplazamiento vertical.

La variación del volumen de agua desplazada por el cuerpo oscilante es igual a la variación de su volumen sumergido, dado por  $Ax$ . La suposición de un área de sección transversal constante a lo largo del eje vertical solo es válida para movimientos de pequeña amplitud. Dependiendo de la geometría del cuerpo, esta simplificación (basada en la teoría de ondas lineales) no es válida para movimientos de gran amplitud donde, en general, la variación del área de la sección transversal es más notable, por lo que se requiere un enfoque no lineal para evaluar con precisión la fuerza hidrostática.

Finalmente la fuerza de fricción  $F_r$  es debida a las pérdidas por fricción en forma de ondas radiadas por el flotador, por simplicidad, frecuentemente se desprecia la fuerza de radiación  $F_r$  cuando se desea aproximar a un modelo lineal. La fuerza de fricción  $F_f$  se usa para el caso de olas de pequeña amplitud y esta se puede caracterizar como una fricción viscosa.

De esta manera para una descripción simplista, tanto de la elevación de la superficie de la onda como la frecuencia de la misma, se debe considerar una fuerza de excitación senoidal promedio con amplitud y frecuencia constantes. De esta manera el modelo de ola para el caso

particular de pequeña amplitud queda representado en la ecuación (2.3) y una representación del diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura 2.1.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = a_0\cos(2\pi f_i t). \quad (2.3)$$

El método más común para la obtención del modelo de ola no implica el cálculo directo de

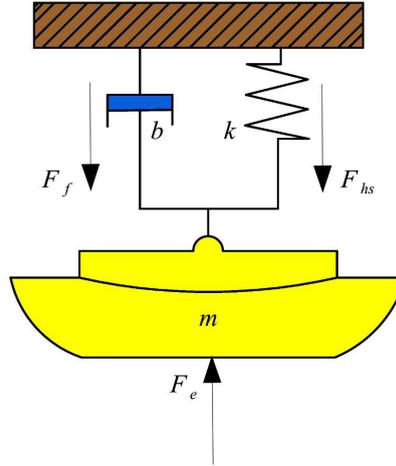


Figura 2.1: Modelo del flotador, representado como un modelo tradicional masa-resorte-amortiguador

los parámetros, sino que se derivan los datos hidrodinámicos dependientes de la frecuencia, que se obtienen mediante códigos de radiación/difracción, normalmente en 3D (tales como ANSYS Aqwa [44], WAMIT [45], Moses [46] o el código abierto de Nemoh [47]) generalmente utilizado para modelar WECs.

Si se supone un conjunto de  $n$  flotadores (Figura 2.2) cuyas bombas hidráulicas se encuentran conectadas por un solo nodo ó sección de tubería, el flujo total  $q_i(t)$  queda representado con la ecuación

$$q_i(t) = A\dot{x}_1 + A\dot{x}_2 + \dots + A\dot{x}_n \quad (2.4)$$

donde  $A$  es el área transversal de la sección de tubería y es la misma para los  $n$  flotadores,  $\dot{x}_1$  se puede obtener de  $m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + kx_1 = a_0\cos(2\pi f_i t + \alpha_1)$ ,  $\dot{x}_2$  se puede obtener de  $m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + kx_2 = a_0\cos(2\pi f_i t + \alpha_2)$  y de esta manera hasta  $\dot{x}_n$ .

## 2.2. Ley de conservación de la masa

En esta sección se aplica el principio de conservación de la masa al tanque presurizado, ilustrado en la Figura 2.3.

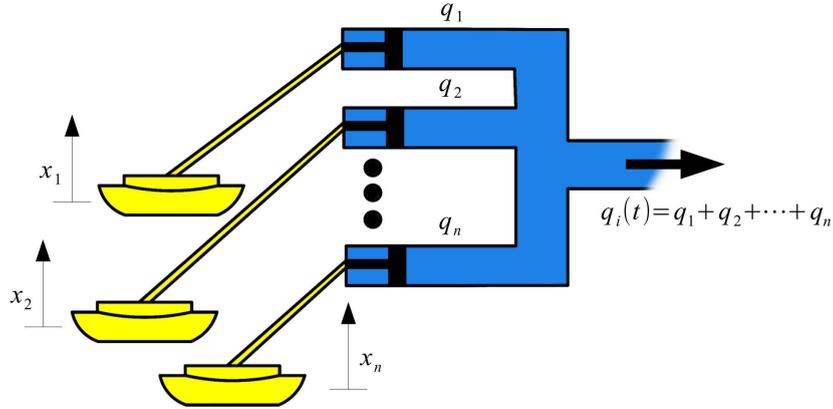


Figura 2.2: Conjunto de flotadores, cuyo movimiento vertical produce un flujo neto

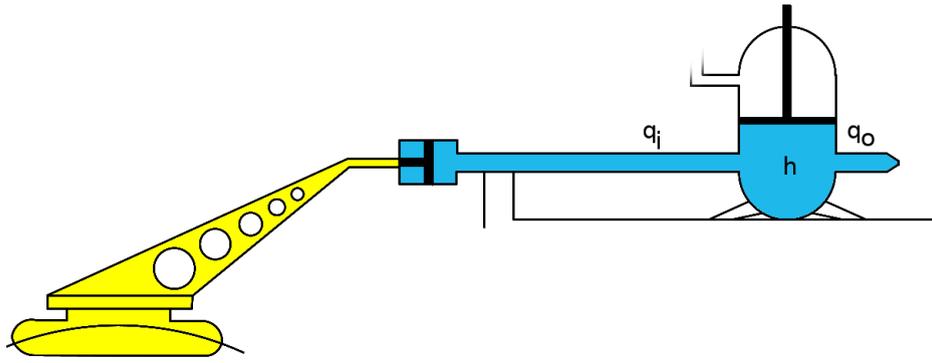


Figura 2.3: Sección del WEC, donde aplica la ley de conservación de la masa

La tasa de variación de la masa en el volumen de control se representa matemáticamente con la ecuación

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{VC} = \sum_e \dot{m}_e - \sum_s \dot{m}_s \quad (2.5)$$

Esta ecuación nos indica que la velocidad de variación de la masa contenida en el volumen de control ( $\frac{dm}{dt}$ ) es el caudal neto de entrada a través de la frontera del volumen de control ( $\sum_e \dot{m}_e - \sum_s \dot{m}_s$ , sumatoria de flujos másicos de entrada menos flujos másicos a la salida del volumen de control).

Las siguientes relaciones son verdaderas

$$\dot{m}_s = \rho A_p v$$

$$\dot{m}_e = \rho q_i$$

$$\dot{m} = \rho \dot{V}$$

donde  $\bar{v}$  es la velocidad promedio definida como  $v = \frac{\int_0^\infty v dA_p}{\int_0^\infty dA_p}$ ,  $A_p$  el área transversal de tubería,  $q_i$  el caudal de entrada,  $\rho$  la densidad del agua,  $\dot{V}$  es el volumen que ocupa el agua

en el tanque. Si el tanque es un cilindro toma la siguiente forma

$$\dot{m} = \rho A_T \dot{h}$$

donde  $A_T$  es el área transversal del tanque y  $h$  la altura de la columna de agua. Sustituyendo las relaciones anteriores en (2.5) se llega a

$$\dot{h} = \frac{q_i}{A_T} - \frac{A_p}{A_T} v \quad (2.6)$$

### 2.3. Ley del gas ideal

La Figura 2.4 representa la parte del WEC que se analiza en esta sección. El estado

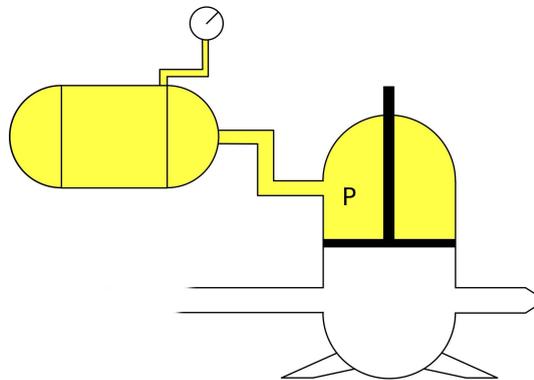


Figura 2.4: Sección del WEC, donde se modela un gas en expansión y contracción

termodinámico de una cierta sustancia o sistema está determinado por su presión  $P$ , su volumen  $V$ , su temperatura  $T$  y su masa  $m$  (o el número de partículas que lo constituye). Estas magnitudes se denominan en termodinámica variables de estado y en general no varían de forma independiente, a la relación matemática entre ellas se le denomina ecuación de estado por ejemplo  $V = f(P, T, m)$ . Un gas encerrado en un émbolo de modo que podemos variar  $P$ ,  $V$  y  $T$ , se representa con la ecuación de estado conocida como ecuación del gas ideal

$$PV = nRT \quad (2.7)$$

donde  $n$  es el número de moles de sustancia ( $m = nM$ , donde  $M$  es la masa molecular) y  $R$  es una constante de proporcionalidad igual para todos los gases,  $R = 8,314[jmol^{-1}K^{-1}]$ .

En el proceso de expansión y compresión de un gas ideal se lleva al sistema de un estado 1 a

otro 2 siguiendo una trayectoria definida. Se puede usar la primera ley de la termodinámica para expresar este fenómeno

$$dU = dQ - dW \quad (2.8)$$

donde  $U$  es la energía interna,  $Q$  es energía en forma de calor,  $W$  es el trabajo neto.

En un proceso adiabático de un gas ideal no hay transferencia de calor entre el sistema y el exterior entonces la segunda ley de la termodinámica para este proceso es de la forma

$$dU = -dW \quad (2.9)$$

Como la variación de trabajo  $dW$  en un gas ideal queda determinado como  $dW = PdV$  y la variación de energía interna  $dU = nC_v dT$  donde  $C_v$  es la capacidad térmica específica a volumen constante, se obtiene

$$nC_v dT = -PdV \quad (2.10)$$

Y por ser un gas ideal debe cumplir que  $P = nRT/V$ , sustituyendo esta relación en (2.10) llegamos a que

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_v} \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.11)$$

Y conociendo que  $C_p - C_v = R$  y definiendo  $\gamma = C_p/C_v$  obtenemos

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.12)$$

La solución de esta ecuación diferencial se obtiene integrando, esto es,

$$TV^{(\gamma-1)} = PV^\gamma = cte \quad (2.13)$$

donde a  $\gamma$  se le conoce como índice politrópico.

Ya que  $PV^\gamma$  es siempre igual a una constante entonces la variación en el tiempo de esta ecuación de estado debe cumplir con

$$\dot{P}V^\gamma + P\gamma V^{\gamma-1}\dot{V} = 0 \quad (2.14)$$

Y además se puede obtener  $\dot{P}$  como

$$\dot{P} = -\frac{P\gamma V^{\gamma-1}\dot{V}}{V^\gamma} = -\frac{\gamma P\dot{V}}{V} \quad (2.15)$$

De la ecuación de continuidad (2.6) sabemos que el volumen del gas varía inversamente a la variación del volumen del agua en el tanque, es decir,  $\dot{V} = -A_T \dot{h} = -(q_i - A_p \bar{v})$ , de esta manera usando (2.6) y (2.13) se obtiene finalmente

$$\dot{P} = \frac{\gamma}{cte^{1/\gamma}} P^{(1+1/\gamma)} (q_i - A_p \bar{v}). \quad (2.16)$$

## 2.4. Inyector: ley de conservación de la cantidad de movimiento

Un inyector realiza dos principales tareas: la primera tiene que ver con la boquilla del inyector, esta convierte la energía potencial del agua, en energía cinética (chorro de alta velocidad) y en segundo lugar, el inyector regula el caudal a través de una aguja incorporada que es accionada por un servomotor, Figura 2.5.

Recordando que aunque los sistemas hidroneumáticos son comunmente descritos mediante

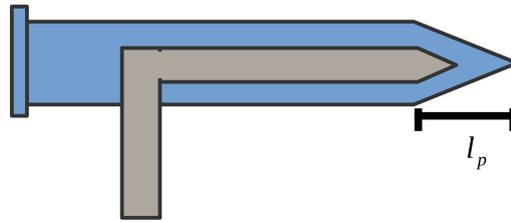


Figura 2.5: Sección del WEC, donde se modela el flujo de salida del inyector

el uso de modelos matematicos que hacen uso de ecuaciones diferenciales parciales, solo se desea llegar a un modelo de orden reducido para fines de esta tesis, una idealización importante que se debe hacer en esta sección es considerar que la velocidad del flujo de salida del tanque, es la misma que la velocidad del flujo de salida del inyector, suponiendo que la aguja y la boquilla se encuentran muy cerca de la sección de salida del flujo del tanque.

La ley de conservación de la cantidad de movimiento nos permite representar matemáticamente la conversión de energía potencial del agua, en energía cinética

$$\frac{d(mv)}{dt} = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2.17)$$

Es posible obtener un modelo reducido de la velocidad de salida sustituyendo en (2.17)  $F = PA_p$  y  $m = \rho l_p A_p$  donde  $l_p$  es una longitud de tubería y  $A_p$  es el área trasversal de la misma

$$\dot{v} = \frac{1}{(\rho l_p)} \left( \sum_{i=1}^n P_i \right) \quad (2.18)$$

donde las  $P_i$  pueden ser debidas a

- a) Presión inicial y final en el volumen de control ( $P_1, P_2$ )
- b) Presión debido a una máquina hidráulica

- c) Presión proporcionada por el gradiente de presión (una columna de líquido)
- d) Pérdidas de carga por fricción tanto en tuberías, codos, uniones, estrechamientos y válvulas.

Por simplicidad no se modelan las pérdidas por fricción en la tubería, pero si se modelan las pérdidas proporcionadas por el inyector (válvula de aguja) de la turbina Pelton. Ya que la presión a la entrada del volumen de control es  $P_1 = P + \rho gh$  y  $P_2 = P_{fr}$  la ecuación (2.18) queda de la siguiente forma

$$\dot{v} = \frac{1}{(\rho l_p)}(P + \rho gh - P_{fr}) \quad (2.19)$$

Pero sabemos que

$$A_T h = V_T - V = V_T - \left(\frac{cte}{P}\right)^{1/\gamma}$$

y de esta manera llegamos

$$\dot{v} = \frac{P}{\rho l_p} + \frac{gV_T}{l_p A_T} - \frac{g}{l_p A_T} \left(\frac{cte}{P}\right)^{1/\gamma} - \frac{P_{fr}}{\rho l_p} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.18) solo representa la dinamica de la velocidad de manera puntual ya que no se define de manera correcta el volumen de control. Para justificar el uso de (2.18), se aplica la ecuación de Bernoulli en el volumen de control representado por los puntos 1 al 2 de la Figura 2.6

$$P_1 \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2 + P_{fr} \quad (2.21)$$

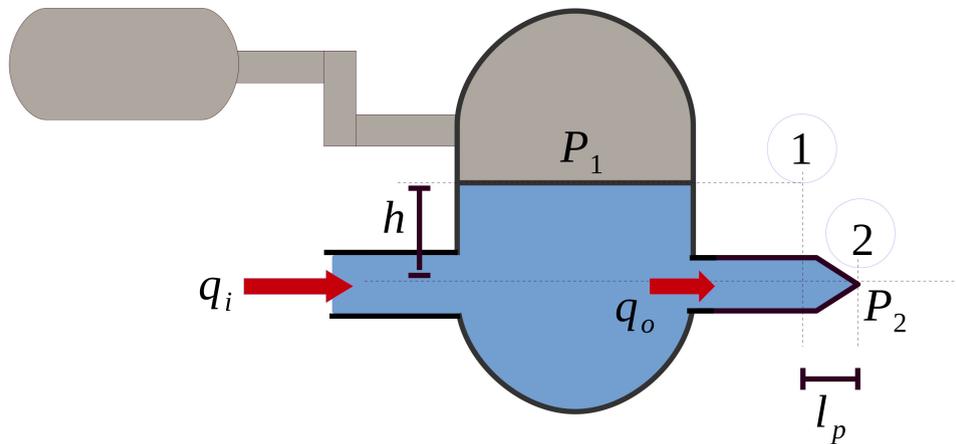


Figura 2.6: Volumen de control de 1 a 2, en donde se puede aplicar el teorema de Bernoulli

Para la sección 2:

$$P_2 = 0, \quad h_2 = 0$$

Por lo tanto

$$P_1 \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + P_{fr} \quad (2.22)$$

multiplicando en ambos miembros de la ecuación (2.22) por  $1/\rho l_c$  y separando los terminos correspondientes a las velocidades se llega

$$\frac{1}{2} \frac{v_2^2 - v_1^2}{l_p} = \frac{1}{\rho l_p} (P_1 - \rho g h_1 - P_{fr}) \quad (2.23)$$

si  $\dot{v} := \frac{1}{2} \frac{v_2^2 - v_1^2}{l_p}$ , es decir, se define una aceleración promedio entre la velocidad del flujo de salida del tanque y la velocidad del flujo de salida del inyector determinada por el cambio de energía cinética, se llega a una expresión equivalente a (2.18)

$$\dot{v} = \frac{1}{\rho l_p} (P_1 - \rho g h_1 - P_{fr}). \quad (2.24)$$

#### 2.4.1. Inyector: coeficiente de descarga $\phi_D$ y características

Una de las tareas principales de un inyector en dispositivos WEC es regular el caudal y se realiza ajustando la carrera de la aguja  $x$  en la boquilla (Figura 2.7) [48]. Para calcular

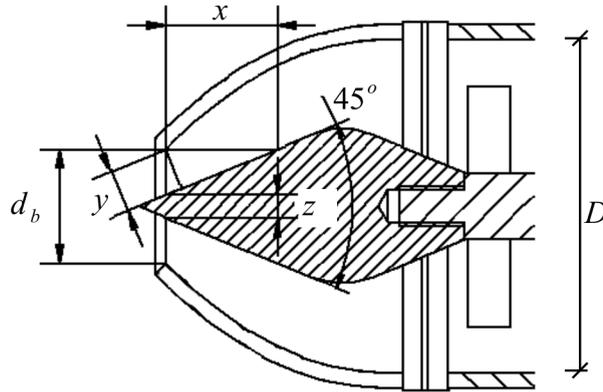


Figura 2.7: Inyector: la velocidad del fluido se regula ajustando la posición  $x$  de la aguja en la boquilla

las pérdidas por fricción  $P_{fr}$  se usa

$$P_{fr} = \phi_D \frac{v^2}{2g} \quad (2.25)$$

donde  $\phi_D$  es el llamado coeficiente de descarga que depende del área efectiva de la contracción del inyector. La apertura se definirá con la variable  $x$ , la sección de paso del fluido está dada

por (2.26).

$$S = \pi \left( \frac{d_b + z}{2} \right) y \quad (2.26)$$

De acuerdo a la Figura 2.7 se cumple

$$y = x \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$z = d_b - 2y \cos(\alpha)$$

donde  $\alpha$  vale la mitad del ángulo del punzón,  $\alpha = 22,5^\circ$ , reemplazando estas relaciones en (2.26) se tiene

$$S = \pi x \operatorname{sen}(\alpha) (d_b - x \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)) \quad (2.27)$$

Normalmente se calculan las pérdidas de carga que produce la geometría completa del inyector (pérdidas de Hazen y Williams) debidas al roce del fluido con la tubería y las pérdidas menores por ejemplo en codos, pero en este trabajo solo se tomará en cuenta una pérdida equivalente generada por el desplazamiento del punzón.

Para calcular el coeficiente de pérdidas ( $\phi_D$ ) se debe obtener experimentalmente la gráfica característica usando diferentes valores de contracción ( $d/D$ ), con estos valores se puede encontrar una relación polinomial, por ejemplo, un polinomio de orden 2

$$\phi_D = -a_1(d/D)^2 - a_2(d/D) + a_3 \quad (2.28)$$

donde  $d$  es el diámetro a la salida de la reducción y  $D$  diámetro a la entrada de la reducción. Ya que la sección de salida no es circular se aproxima a un diámetro equivalente como

$$\pi (d_{eq}/2)^2 = S$$

y despejando el diámetro equivalente  $d_{eq}$

$$d_{eq} = 2\sqrt{S/\pi}$$

Si el coeficiente de pérdidas se aproxima por una recta con pendiente  $k$ , entonces

$$P_{fr} = -k(d_{eq}/D) \frac{v^2}{2g} \quad (2.29)$$

$$d_{eq} = 2\sqrt{x \operatorname{sen}(\alpha) (d_b - x \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha))}$$

### Efecto del número de Reynolds

Apesar de que las ecuaciones anteriores describen bastante bien la operación de una turbina Pelton, en la operación real se presenta una diferencia que se encuentra arriba de 5% en la característica del inyector entre el modelo de la turbina y el prototipo físico [49]. Por esta razón, el llamado efecto de cabeza debe interpretarse como un efecto de número de Reynolds. El análisis realizado por Zhang (2003) en [50] lo confirma experimentalmente mediante mediciones, haciendo uso de anemometría láser Doppler (LDA).

## 2.5. Modelo dinámico representativo a la etapa de acondicionamiento

De las leyes físicas expuestas en las secciones anteriores que representan el comportamiento dinámico de la planta a tratar se puede concluir el siguiente modelo

$$\begin{aligned}
 \dot{P} &= \frac{\gamma}{cte^{1/\gamma}} P^{(1+1/\gamma)} (q_i - A_p v) \\
 \dot{v} &= \frac{P}{\rho l_p} + \frac{g V_T}{l_p A_T} - \frac{g}{l_p A_T} \left( \frac{cte}{P} \right)^{1/\gamma} - \frac{P_{fr}}{\rho l_p} \\
 P_{fr} &= -k (d_{eq}/D) \frac{v^2}{2g} \\
 d_{eq} &= 2\sqrt{x \operatorname{sen}(\alpha) (d_b - x \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha))}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

en donde  $q_i$  se obtiene con

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + kx_1 &= a_0 \cos(2\pi f_i t + \alpha_1) \\
 m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + kx_2 &= a_0 \cos(2\pi f_i t + \alpha_2) \\
 m\ddot{x}_3 + b\dot{x}_3 + kx_3 &= a_0 \cos(2\pi f_i t + \alpha_3)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$q_i(t) = A\dot{x}_1 + A\dot{x}_2 + A\dot{x}_3$$

que es la suma del flujo bombeado por 3 flotadores. Notemos que el modelo (2.30) no toma en cuenta explícitamente la ecuación de continuidad ( $\dot{h} = \frac{q_i}{A_T} - \frac{A_p}{A_T} \bar{v}$ ). La razón está en que esta ecuación ofrece información redundante al sistema ya que en esencia es la misma que la ecuación que describe la dinámica de la presión en el tanque (el uso de esta ecuación se encuentra implícita en la dinámica de  $P$ ).

Ya que en esta tesis se propone el diseño de un controlador lineal MPC robusto frente a incertidumbres paramétricas se hará uso de un sistema lineal con representación politópica (en el anexo A se puede encontrar una definición de esta clase de sistemas) para la síntesis del controlador, para esto se requiere proporcionar los puntos de operación del WEC ( $\bar{x} = [\bar{P} \quad \bar{v}]^T$  y  $\bar{u} = x$ ) y de esta manera linealizar el sistema (2.30). Así, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= A_i x + B_i u \\
 y &= C_i x + D_i u
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde

$$A_i = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})}; \quad B_i = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})}; \quad C_i = \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})}; \quad D_i = \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}, \bar{u})}$$

$$\begin{aligned}
A_i &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\gamma}{cte^{1/\gamma}}(1 + 1/\gamma)P^{1/\gamma}(q_i - A_p v) & -\frac{A_p \gamma}{cte^{1/\gamma}}P^{(1+1/\gamma)} \\ \frac{1}{\rho l_p} - \frac{g(cte^{1/\gamma})}{\gamma A_T l_p P^{(1+1/\gamma)}} & -\frac{2k}{\rho l_p D g} \sqrt{x \sin(\alpha)(d_b - x \sin(\alpha) \cos(\alpha))} \end{array} v \right]_{(\bar{x}, \bar{u})} \\
B_i &= \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{k}{2\rho l_p D g} \frac{d_b \sin(\alpha) - 2x \sin^2(\alpha) \cos(\alpha)}{\sqrt{x \sin(\alpha)(d_b - x \sin(\alpha) \cos(\alpha))}} \end{array} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})} \\
C_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
D_i &= 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Los valores numéricos de los parámetros se muestran en el Apéndice B.



# Capítulo 3

## Diseño del controlador

Una vez que se ha presentado la descripción del sistema, en este capítulo se muestra el controlador diseñado mediante la técnica MPC. Para empezar, recordemos que el sistema es descrito por (3.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_1^{(1+1/\gamma)} q_i - a_2 x_2 x_1^{(1+1/\gamma)} \\ \dot{x}_2 &= a_3 x_1 - a_4 \left(\frac{a_5}{x_1}\right)^{1/\gamma} + a_6 - b_1 \sqrt{b_2 u (b_3 - b_4 u)} x_2^2\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x_1$  es la presión,  $x_2$  la velocidad del flujo a la salida del inyector,  $u$  la señal de control (movimiento lineal de la aguja del inyector),  $q_i$  una señal acotada y variante en el tiempo y  $a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_4$  parámetros conocidos. El objetivo entonces, será llevar tanto la presión como la velocidad a sus valores nominales, es decir

$$x_1 \rightarrow x_{1d}$$

$$x_2 \rightarrow x_{2d}$$

donde  $x_{1d}$  y  $x_{2d}$  son los valores deseados, además, se cuenta con información limitada de la variación de  $q_i$ .

Para la aplicación de esta ley de control se requiere satisfacer las siguientes condiciones

1.  $q_i$  se toma como un parámetro de la matriz jacobiana (2.33) que varía lentamente y dentro de un intervalo pequeño, además se conocen las cotas tanto inferior como superior del intervalo.
2. Se cuenta con todas las mediciones del estado.
3. Se conoce una región del espacio de estados cercana al punto de operación que contiene las posibles trayectorias al momento de aplicar el controlador al sistema.

Se debe notar que el diseño del control toma en cuenta la linealización (2.33) porque ésta logra incluir la señal de flujo  $q_i$  dentro del jacobiano lo que permite suponer a  $q_i$  como un parámetro variante en el tiempo y de esta manera lograr aplicar un controlador que permita cumplir el objetivo.

El control se diseña mediante la técnica de control predictivo, esta técnica busca minimizar una función lineal la cual debe satisfacer un conjunto de desigualdades matriciales lineales, i.e.,

$$\min_x c^T x \quad s.t. \quad F(x) > 0 \quad (3.2)$$

donde  $F(x) > 0$  representa las restricciones en forma de desigualdades matriciales lineales y  $c^T x$  la función objetivo. La solución de (3.2) es un problema referente a la programación lineal (LP), también conocido como problema de optimización convexa.

### 3.1. Enfoque en línea basado en la función de costo min-max

Para la formulación del controlador MPC basado en la función de costo min-max [40], se considere el siguiente índice de rendimiento cuadrático:

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [\|x(k+i|k)\|_W^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2] \quad (3.3)$$

donde  $W > 0$ ,  $R > 0$  son matrices de peso simétricas. La meta será resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{u(k+i|k), i \geq 0} \max_{[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) \quad (3.4)$$

$$s.t. \quad -\bar{u} \leq u(k+i) \leq \bar{u}, \quad -\bar{\psi} \leq \Psi x(k+i+1) \leq \bar{\psi}, \quad (3.5)$$

$$x(k+i+1|k) = A(k+i)x(k+i|k) + B(k+i)u(k+i|k), \quad x(k|k) = x(k). \quad (3.6)$$

El problema (3.4-3.6) es un problema de optimización "min-max". La operación "max", es hallar  $[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega$  para el cual se tiene el valor más grande de  $J_\infty(k)$  (o el peor valor de  $J_\infty(k)$ ). Después este peor valor es minimizado, encontrando los movimientos de control  $u(k+i|k)$  operación "min". Si se encuentra la optimización del horizonte finito, en lugar de la del horizonte infinito, entonces este problema de optimización min-max es convexo (i.e., existe una única solución óptima), pero esta es computacionalmente intratable (i.e., no se puede garantizar encontrar la solución óptima en tiempo finito)

## 3.2. Manejo de la función de costo para la obtención del MPC sin restricciones

Para simplificar la solución de (3.4), (3.5) y (3.6), se realiza un procedimiento al estilo Lyapunov con lo que se derivará una cota superior de la función de costo, y entonces se minimizará esta cota superior adoptando la ley de control

$$u(k+i | k) = Fx(k+i | k), \quad i \geq 0. \quad (3.7)$$

Para definir esta cota superior, primero definimos la función cuadrática

$$V(x) = x^T P x, \quad P > 0 \quad (3.8)$$

y se impone la restricción

$$V(x(k+i+1 | k)) - V(x(k+i | k)) \leq -[\|x(k+i | k)\|_W^2 + \|u(k+i | k)\|_R^2] \quad (3.9)$$

Por el bien del acotamiento de la función de costo se tienen que satisfacer  $x(\infty | k) = 0$  y  $V(x(\infty | k)) = 0$  y sumando (3.9) desde  $i = 0$  hasta  $i = \infty$ , conseguimos

$$\max_{[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k) \leq V(x(k | k))$$

donde  $V(x(k | k))$  proporciona una cota superior a la función de costo.

En vista de lo anterior redefinimos el algoritmo MPC como: hallar (3.7) en cada instante de tiempo  $k$  para minimizar  $V(x(k | k))$ , pero únicamente la señal de control  $u(k | k) = Fx(k | k)$  es implementada y en el siguiente instante de tiempo  $k+1$ ,  $x(k+1)$  es medido y la optimización se repite calculando  $F$ .

Ahora se describe el procedimiento para obtener un algoritmo explícito para la solución de este problema. Defina un escalar  $\gamma > 0$ , tal que

$$V(x(k | k)) \leq \gamma. \quad (3.10)$$

Con esto la minimización del  $\max_{[A(k+i)|B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J_\infty(k)$  es aproximada por la minimización de  $\gamma$  que satisfaga (3.10).

Con lo anterior, se obtuvieron tres restricciones (3.7), (3.9), (3.10). Estas tres restricciones pueden redefinirse en el contexto de LMIs.

### 3.2.1. Formulación LMI

Definimos la matriz  $Q = \gamma P^{-1}$  y usando (3.10) se tiene

$$\begin{aligned} -x^T(k | k)\gamma Q^{-1}x(k | k) &\geq -\gamma \\ \gamma - x^T(k | k)\gamma Q^{-1}x(k | k) &\geq 0 \\ 1 - x^T(k | k)Q^{-1}x(k | k) &\geq 0 \end{aligned}$$

Se puede aplicar el complemento de Schur (Apéndice A) a esta última desigualdad donde

$$\begin{aligned} Q_s &= 1 \\ S^T &= x(k | k) \\ S &= x^T(k | k) \\ R^{-1} &= Q^{-1} \rightarrow R = Q \end{aligned}$$

Se llega a

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(k | k) \\ x(k | k) & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (3.11)$$

Sustituimos (3.6) y (3.7) en (3.9) para obtener

$$\begin{aligned} x^T(k+i | k)[A(k+i) + B(k+i)F]^T P[A(k+i) + B(k+i)F]x(k+i | k) - x^T(k+i | k)Px(k+i | k) \leq \\ -x^T(k+i | k)Wx(k+i | k) - x^T(k+i | k)F^T R F x(k+i | k) \end{aligned}$$

Factorizando  $x^T(k+i | k)$  por la izquierda y  $x(k+i | k)$  por la derecha

$$x^T(k+i | k)\{[A(k+i) + B(k+i)F]^T P[A(k+i) + B(k+i)F] - P + W + F^T R F\}x(k+i | k) \leq 0$$

Esta última ecuación es equivalente a

$$[A(k+i) + B(k+i)F]^T P[A(k+i) + B(k+i)F] - P + W + F^T R F \leq 0 \quad (3.12)$$

A continuación definimos la variable  $F = YQ^{-1}$  y sustituimos  $P = \gamma Q^{-1}$  y  $F = YQ^{-1}$  en (3.12) para obtener

$$[A(k+i) + B(k+i)YQ^{-1}]^T \gamma Q^{-1} [A(k+i) + B(k+i)YQ^{-1}] - \gamma Q^{-1} + W + (YQ^{-1})^T R Y Q^{-1} \leq 0 \quad (3.13)$$

premultiplicamos y posmultiplicamos a (3.13) por  $Q$

$$Q[A(k+i) + B(k+i)YQ^{-1}]^T \gamma Q^{-1} [A(k+i) + B(k+i)YQ^{-1}]Q - Q\gamma + QWQ + Y^T R Y \leq 0 \quad (3.14)$$

Ahora multiplicamos por (-1) a ambos lados de la desigualdad y dividamos por  $\frac{1}{\gamma}$

$$-Q[A(k+i) + B(k+i)YQ^{-1}]^T Q^{-1} [A(k+i) + B(k+i)YQ^{-1}]Q + Q - \frac{1}{\gamma}QWQ - \frac{1}{\gamma}Y^T R Y \geq 0 \quad (3.15)$$

fijémonos en los primeros dos términos de la desigualdad (3.15), se puede usar el complemento de Schur para obtener

$$\begin{bmatrix} Q & (AQ + BY)^T \\ (AQ + BY) & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (3.16)$$

y para ser congruentes los últimos dos términos de (3.15) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q \frac{1}{\gamma} W Q + Y^T \frac{1}{\gamma} R Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q \frac{1}{\gamma} W^{\frac{1}{2}T} W^{\frac{1}{2}} Q + Y^T \frac{1}{\gamma} R^{\frac{1}{2}T} R^{\frac{1}{2}} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q^T W^{\frac{1}{2}T} & Y^T R^{\frac{1}{2}T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W^{\frac{1}{2}} Q & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

de esta manera (3.15) es equivalente a la suma algebraica de (3.16) y (3.17)

$$\begin{bmatrix} Q & (AQ + BY)^T \\ (AQ + BY) & Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q^T W^{\frac{1}{2}T} & Y^T R^{\frac{1}{2}T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W^{\frac{1}{2}} Q & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

se puede notar que (3.18) tiene la forma para poder aplicar el complemento de Schur una vez más, con lo que se llega a la siguiente LMI

$$\begin{bmatrix} Q & (AQ + BY)^T & Q^T W^{\frac{1}{2}T} & Y^T R^{\frac{1}{2}T} \\ (AQ + BY) & Q & 0 & 0 \\ W^{\frac{1}{2}} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.19)$$

luego usando sistemas con descripción politópica se tienen  $l$  desigualdades matriciales lineales

$$\begin{bmatrix} Q & (A_l Q + BY)^T & Q^T W^{\frac{1}{2}T} & Y^T R^{\frac{1}{2}T} \\ (A_l Q + BY) & Q & 0 & 0 \\ W^{\frac{1}{2}} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad l \in \{1, \dots, L\}. \quad (3.20)$$

Finalmente el problema de optimización se consigue resolviendo

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \begin{bmatrix} 1 & x^T(k | k) \\ x(k | k) & Q \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} Q & (A_l Q + BY)^T & Q^T W^{\frac{1}{2}T} & Y^T R^{\frac{1}{2}T} \\ (A_l Q + BY) & Q & 0 & 0 \\ W^{\frac{1}{2}} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

El regulador cuadrático lineal en tiempo discreto sin restricciones se consigue cuando  $l = 1$  [40].

### 3.3. MPC con restricciones

Para imponer las restricciones al esfuerzo de control, primero se considera la noción de elipsoide invariante (conjunto invariante positivo con una restricción geométrica). Si consideramos las variables anteriores  $\gamma$ ,  $Q$ ,  $P$ ,  $F$ , y  $Y$ , entonces definimos el conjunto elipsoidal para todas las  $P(k)$  y  $Q^{-1}(k)$  como

$$\epsilon = \{z \mid z^T Q^{-1} z \leq 1\} = \{z \mid z^T P z \leq \gamma\} \quad (3.22)$$

Si  $P$  y  $Q$  satisfacen las LMIs (3.20) y (3.11) entonces  $\epsilon$  es un conjunto elipsoidal invariante, i.e.,

$$x(k \mid k) \in \epsilon \Rightarrow x(k+i \mid k) \in \epsilon, \forall i \geq 1.$$

Regresando a nuestro objetivo, considere las restricciones a la entrada  $-\bar{u} \leq u(k+i \mid k) \leq \bar{u}$ , y tomando en cuenta que  $\epsilon$  es un elipsoide invariante, consideremos el  $j$ -ésimo elemento de  $u$ , denotando  $\xi_j$  como el  $j$ -ésimo renglón de la matriz identidad de orden  $m$ , podemos hacer la siguiente deducción

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} |\xi_j u(k+i \mid k)|^2 &= \max_{i \geq 0} |\xi_j Y Q^{-1} x(k+i \mid k)|^2 \\ &\leq \max_{z \in \epsilon} |\xi_j Y Q^{-1} z|^2 \leq \max_{z \in \epsilon} \|\xi_j Y Q^{-1/2}\|_2^2 \|Q^{-1/2} z\|_2^2 \\ &\leq \max_{z \in \epsilon} \|\xi_j Y Q^{-1/2}\|_2^2 = (Y Q^{-1} Y^T)_{jj} \end{aligned}$$

donde  $(*)_{jj}$  es el  $j$ -ésimo elemento diagonal de la matriz cuadrada y  $\|*\|_2$  es la norma 2. Usando el complemento de Schur, si existe una matriz simétrica  $Z$  tal que

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} > 0, \quad Z_{jj} \leq \bar{u}_j^2, \quad j \in \{1, \dots, m\} \quad (3.23)$$

entonces  $|u_j(k+i \mid k)| \leq \bar{u}_j, j \in \{1, \dots, m\}$ . La ecuación (3.23) es una condición suficiente (no necesaria) para satisfacer la restricción de la entrada.

Ahora consideremos las restricciones en el estado,  $-\bar{\psi} \leq \Psi x(k+i+1) \leq \bar{\psi}$ , con  $\epsilon$  un elipsoide invariante, y denotemos  $\xi_s$  como la  $s$ -ésimo renglón de la matriz identidad de orden

$q$ , y hacemos la siguiente deducción:

$$\begin{aligned}
\max_{i \geq 0} | \xi_s x(k+i | k) | &= \max_{i \geq 0} | \xi_s [A(k+i) + B(k+i)F] x(k+i) | k | \\
&= \max_{i \geq 0} | \xi_s [A(k+i) + B(k+i)F] Q^{1/2} Q^{-1/2} x(k+i) | k | \\
&\leq \max_{i \geq 0} \| \xi_s [A(k+i) + B(k+i)F] Q^{1/2} \| \| Q^{-1/2} x(k+i) | k \| \\
&\leq \max_{i \geq 0} \| \xi_s [A(k+i) + B(k+i)F] Q^{1/2} \|
\end{aligned}$$

Así se puede usar el complemento de Schur si existe una matriz simétrica  $\Gamma$  tal que

$$\begin{bmatrix} Q & [\Psi[A(k+i)Q + B(k+i)Y]]^T \\ \Psi[A(k+i)Q + B(k+i)Y] & \Gamma \end{bmatrix} > 0, \Gamma_{ss} \leq \bar{\psi}_s^2, s \in \{1, \dots, q\} \quad (3.24)$$

entonces  $| \xi_s x(k+i | k) | \leq \bar{\psi}_s, s \in \{1, \dots, q\}$ . Y para sistemas con descripción politópica (3.24) se convierte en

$$\begin{bmatrix} Q & [\Psi[A_l Q + B_l Y]]^T \\ \Psi[A_l Q + B_l Y] & \Gamma \end{bmatrix} > 0, \Gamma_{ss} \leq \bar{\psi}_s^2, s \in \{1, \dots, q\}, l \in \{1, \dots, L\} \quad (3.25)$$

De esta manera el problema (3.4)-(3.6) se puede aproximar a resolver el siguiente programa lineal [40],

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma, \quad (3.26)$$

$$s.t. \quad \begin{bmatrix} 1 & x^T(k | k) \\ x(k | k) & Q \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} Q & (A_l Q + B_l Y)^T & Q^T W^{\frac{1}{2}T} & Y^T R^{\frac{1}{2}T} \\ (A_l Q + B_l Y) & Q & 0 & 0 \\ W^{\frac{1}{2}} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} > 0, Z_{jj} \leq \bar{u}_j^2, j \in \{1, \dots, m\}$$

$$\begin{bmatrix} Q & [\Psi[A_l Q + B_l Y]]^T \\ \Psi[A_l Q + B_l Y] & \Gamma \end{bmatrix} > 0, \Gamma_{ss} \leq \bar{\psi}_s^2, s \in \{1, \dots, q\}, l \in \{1, \dots, L\}$$

### 3.4. Factibilidad

Con las deducciones anteriores se muestra la siguiente propiedad del control predictivo [41].

**Lema:** (*Factibilidad*) *Cualquier solución factible en la optimización (3.26) en el instante de tiempo  $k$  es también factible para todo instante de tiempo  $t > k$ . Así si el problema de optimización (3.26) es factible en el tiempo  $k$ , entonces es factible para todo instante de tiempo  $t > k$ .*

**Demostración:** Supongamos que (3.26) es factible en el tiempo  $k$ . La única LMI en (3.26) que depende explícitamente del estado medido  $x(k | k) = x(k)$  del sistema es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(k | k) \\ x(k | k) & Q \end{bmatrix} > 0.$$

De esta manera para demostrar el Lema, solo necesitamos demostrar que esta LMI es factible para toda medición futura del estado  $x(k + i | k + i) = x(k + i)$ . En la discusión anterior hemos mostrado que, cuando (3.11) y (3.20) son satisfechas,

$$x(k + i | k)^T Q^{-1} x(k + i | k) < 1, \quad i \geq 1.$$

Considere el estado medido en  $k + 1$ , entonces hay un  $[A | B] \in \Omega$  tal que

$$x(k + 1 | k + 1) = x(k + 1) = (A + BF)x(k | k) \tag{3.27}$$

la ecuación (3.27) difiere de (3.28)

$$x(k + 1 | k) = x(k + 1) = (A + BF)x(k | k) \tag{3.28}$$

en que,  $x(k + 1 | k)$  es incierto mientras  $x(k + i | k + i)$  es determinístico y medido. Aparentemente,  $x(k + 1 | k)^T Q^{-1} x(k + 1 | k) < 1, \quad i \geq 1$  debe llevar a

$$x(k + 1 | k + 1)^T Q^{-1} x(k + 1 | k + 1) < 1, \quad i \geq 1.$$

Así, la solución factible del problema de optimización en el instante de tiempo  $k$  es también factible en el instante  $k + 1$ . Por lo tanto la optimización (3.26) es factible en el tiempo  $k + 1$ . El resultado se consigue análogamente, para  $k + 2, k + 3, \dots$ , como se obtuvo para  $k + 1$ .  $\square$

### 3.5. Estabilidad

**Teorema:** (*Estabilidad*) Suponga que la optimización en (3.26) es factible en el tiempo  $k = 0$ . Entonces tomando el horizonte cero, la implementación de  $u(k) = F(k)x(k) = Y(k)Q^{-1}x(k)$ , el sistema en lazo cerrado es robusto y exponencialmente estable [41].

**Demostración:** Use  $*$  para denotar la solución óptima. Para proveer estabilidad asintótica, debemos establecer que  $\gamma^*(k)$  es estrictamente decreciente con la evolución de  $k$ .

Permítanos suponer que el problema (3.26) es factible en el tiempo  $k = 0$ . El lema de factibilidad nos asegura la factibilidad de (3.26) en todo  $k > 0$ . En cada tiempo  $k$ , el problema (3.26) es convexo y, por lo tanto tiene un único mínimo.

Luego la ecuación (3.9) se satisface y podemos escribir,

$$x^*(k+1 | k)^T P^*(k) x^*(k+1 | k) \leq x^*(k | k)^T P^*(k) x^*(k | k) - [\|x(k)\|_W^2 + \|u^*(k)\|_R^2]. \quad (3.29)$$

Luego  $x^*(k+1 | k)$  es la predicción del estado, mientras que  $x(k+1 | k+1)$  es el estado medido, entonces (3.29) debe llevar a

$$x(k+1 | k+1)^T P^*(k) x(k+1 | k+1) \leq x(k | k)^T P^*(k) x(k | k) - [\|x(k)\|_W^2 + \|u^*(k)\|_R^2]. \quad (3.30)$$

Note ahora que

$$\begin{aligned} x(k+1 | k+1)^T P(k+1) x(k+1 | k+1) &\leq \gamma(k+1) \\ x(k | k)^T P^*(k) x(k | k) &\leq \gamma^*(k). \end{aligned}$$

De acuerdo a (3.30), en el tiempo  $k+1$ , es factible si elegimos  $\gamma(k+1) = \gamma^*(k) - [\|x(k)\|_W^2 + \|u^*(k)\|_R^2]$ . Pero esta  $\gamma(k+1)$  no es necesariamente óptima en el tiempo  $k+1$ . Luego,

$$\gamma^*(k+1) \leq \gamma(k+1), \quad (3.31)$$

y

$$\gamma^*(k+1) - \gamma^*(k) \leq -[\|x(k)\|_W^2 + \|u^*(k)\|_R^2] \leq -\lambda_{\min}(W) \|x(k)\|^2. \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) muestra que  $\gamma^*(k)$  es estrictamente decreciente con la evolución de  $k$  y, por lo tanto, puede servir como función de Lyapunov. Por lo tanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$  es concluido.  $\square$

### 3.6. Formulación fuera de línea basada en la función de costo min-max

Presentaremos la formulación fuera de línea del MPC basada sobre la noción del *elipsoide invariante asintóticamente estable*. Fuera de línea significa que todas las optimizaciones se calcularán previamente a la implementación del controlador. Una serie de leyes de control serán optimizadas fuera de línea, cada una correspondiente a la región elipsoidal de atracción. Cuando el algoritmo es implementado en línea, uno solo necesita encontrar el elipsoide en el que el estado actual se halla, y elegir la ley de control correspondiente al elipsoide.

**Definición:** Considere un sistema dinámico en tiempo discreto  $x(k+1) = f(x(k))$  y un conjunto  $\epsilon = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T Q^{-1} x \leq 1\}$ . Si

$$x(k_1) \in \epsilon \Rightarrow x(k) \in \epsilon, \quad \forall k \geq k_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0,$$

Entonces  $\epsilon$  se dice ser un *elipsoide invariante asintóticamente estable*.

Ya que resolviendo (3.26) para obtener  $\{F, Q\}$ , el elipsoide  $\epsilon$  correspondiente a  $Q$  es un elipsoide invariante asintóticamente estable. Si optimizamos una serie de elipsoides  $\epsilon$  fuera de línea, es decir, encontramos las  $F$  correspondientes a cada  $\epsilon$ , entonces en línea, podemos elegir la  $F$  correspondiente a cada  $\epsilon$  en el cual el estado se halla. Supongamos que hemos elegido un número suficientemente grande de elipsoides, entonces podemos hacer una aproximación fuera de línea del algoritmo en línea [41].

#### Algoritmo:

Paso 1. Fuera de línea, elija valores para  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ . Sustituya  $x(k \mid k)$  en (3.11) por  $x_i$ , y resuelva (3.26) para obtener las correspondientes matrices  $\{Q_i, Y_i\}$ , el elipsoide  $\epsilon_i \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T Q_i^{-1} x \leq 1\}$  y ganancias de retroalimentación  $F_i = Y_i Q_i^{-1}$ . Note que los  $x_i$  deben ser elegidos tal que  $\epsilon \subset \epsilon_{j-1}$ ,  $\forall j \in \{2, \dots, N\}$ . Para cada  $i \neq N$ , cheque si la siguiente condición es satisfecha:

$$Q_i^{-1} - (A_l + B_l F_{i+1})^T Q_i^{-1} (A_l + B_l F_{i+1}) > 0, \quad l \in \{1, \dots, L\}. \quad (3.33)$$

Paso 2. En línea, en cada instante de tiempo  $k$  adoptar la ley de retroalimentación de estados:

$$u(k) = F(k)x(k) = \begin{cases} F(\alpha_i(k))x(k), & \text{si } x(k) \in \epsilon_i, x(k) \notin \epsilon_{i+1}, i \neq N, \\ F_N x(k), & \text{si } x(k) \in \epsilon_N \end{cases} \quad (3.34)$$

donde  $F(\alpha_i(k)) = \alpha_i(k)F_i + (1 - \alpha_i(k))F_{i+1}$ , y

- i) Si (3.33) se satisface, entonces  $0 < \alpha_i(k) \leq 1$ ,  $x(k)^T[\alpha_i(k)Q^{-1} + (1 - \alpha_i(k))Q_{i+1}^{-1}]x(k) = 1$   
 ii) Si (3.33) no se satisface, entonces  $\alpha_i(k) = 1$ .

El cálculo de la ecuación  $x(k)^T[\alpha_i(k)Q^{-1} + (1 - \alpha_i(k))Q_{i+1}^{-1}]x(k) - 1 = 0$  representa un problema de búsqueda de raíces, el algoritmo propuesto en esta tesis para el cálculo aproximado de las raíces  $\alpha_i$  es el conocido como *algoritmo de bisección*, también se le conoce como método de búsqueda binaria o método de Bolzano y se basa en el teorema del valor intermedio.

**Teorema:** (*valor intermedio*) Si  $f \in C[a, b]$  y  $K$  es un número cualquiera entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = K$ .

**Corolario:** Si  $f \in C[a, b]$  asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo  $[\alpha, \beta]$ , es decir,  $f(\alpha)f(\beta) < 0$ , entonces el intervalo contendrá al menos una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ ; en otras palabras, habrá al menos un número  $p \in (\alpha, \beta)$  tal que  $f(p) = 0$ .

Supongamos que tenemos una función continua  $f$  definida en el intervalo  $[a, b]$  con  $f(a)$  y  $f(b)$  de signos distintos. Entonces por el corolario del teorema del valor intermedio existe  $p$ ,  $a < p < b$ , tal que  $f(p) = 0$ , aunque el procedimiento sirve para el caso en el que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos y hay más de una raíz en el intervalo  $[a, b]$ , por simplicidad se supondrá que la raíz en este intervalo es única.

El método requiere dividir repetidamente a la mitad los subintervalos de  $[a, b]$  y en cada paso localizar la mitad que contiene a  $p$ . Para empezar, tomemos  $a_1 = a$  y  $b_1 = b$  y  $p_1$  el punto medio de  $[a, b]$ , esto es  $p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ . Si  $f(p_1) = 0$  entonces  $p = p_1$  sino, entonces  $f(p_1)$  tiene el mismo signo que  $f(a_1)$  o  $f(b_1)$ . Si  $f(p_1)$  y  $f(a_1)$  tienen el mismo signo, entonces  $p \in (p_1, b_1)$  y tomamos  $a_2 = p_1$  y  $b_2 = b_1$ . Si  $f(p_1)$  y  $f(b_1)$  son del mismo signo, entonces  $p \in (a_1, p_1)$  y tomamos  $a_2 = a_1$  y  $b_2 = p_1$ . Ahora reapplicamos el proceso al intervalo  $[a_2, b_2]$  y así hasta que se encuentra  $f(p) = 0$  o el  $i$ -ésimo intervalo  $[a_i, b_i]$  es más pequeño que una tolerancia  $TOL$  prefijada o hasta que se cumpla alguna otra condición de paro.

El procedimiento de paro más común es el de dar un número máximo de iteraciones  $N_0$ , cuando usamos un ordenador para generar las aproximaciones conviene añadir una condición que imponga un máximo al número de iteraciones realizadas, así se elimina la posibilidad de poner a la máquina en un ciclo infinito, una posibilidad que puede surgir cuando la sucesión diverge (y también cuando el programa está codificado incorrectamente). Esto se hace fácilmente dando una cota final  $N_0$  y requiriendo que el procedimiento termine si se supera esa cota. A continuación se muestra el algoritmo.

### Algoritmo de bisección:

Para encontrar una solución de  $f(x) = 0$  dada la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  donde  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signo opuestos:

*Entrada:* extremos  $a$  y  $b$ ; tolerancia  $TOL$ ; número máximo de iteraciones  $N_0$ .

*Salida:* solución aproximada  $p$  ó mensaje de fracaso.

Paso 1. tomar  $i = 1$ ;

Paso 2. mientras que  $i \leq N_0$  seguir pasos 3 – 6;

Paso 3. tomar  $p = a + \frac{b-a}{2}$  (calcular  $p_i$ );

Paso 4. si  $f(p) = 0$  ó  $\frac{b-a}{2} < TOL$  entonces SALIDA ( $p$ );  
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR;

Paso 5. tomar  $i = i + 1$

Paso 6. si  $f(a)f(p) > 0$  entonces tomar  $a = p$ , sino, tomar  $b = p$  calcular  $a_i, b_i$ ;

Paso 7. SALIDA El método fracasó después de  $N_0$  iteraciones (tomar el último valor como una aproximación), PARAR.

Del algoritmo en línea, sabemos que la ley de control óptima y su correspondiente elipsoide invariante asintóticamente estable dependen del estado.

Aunque la ley de control se puede aplicar a todos los estados dentro del elipsoide esta no es óptima, de esta manera sacrificamos algo de optimalidad usando la descripción fuera de línea, mientras que reducimos significativamente el costo computacional.

En la Figura 3.1 se muestra el algoritmo fuera de línea representado mediante un diagrama de flujo para un mejor entendimiento y en la Figura 3.2 se representa un esquema de una posible trayectoria en el espacio de estados e incluye una representación gráfica de los elipsoides invariantes. En el algoritmo, hallamos que la selección de  $x_i$  es en gran medida arbitraria, sin embargo, en general podemos seleccionar una  $x^{max}$  tan lejos como sea posible de  $x = 0$ , entonces, podemos seleccionar  $x_i = \beta_i x^{max}$  con  $\beta_1 = 1, 1 > \beta_2 > \dots > \beta_N > 0$ .

Para demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado al aplicar dicho algoritmo se invoca el siguiente teorema [41].

**Teorema:** (Estabilidad) Suponga  $x(0) \in \epsilon_{x,1}$ , entonces el algoritmo 1. estabiliza el sistema en lazo cerrado asintóticamente. Más aún, si (3.33) se satisface para todo  $i \neq N$ , entonces la ley de control (3.34), en el algoritmo 1, es una función continua del estado del sistema  $x$ .

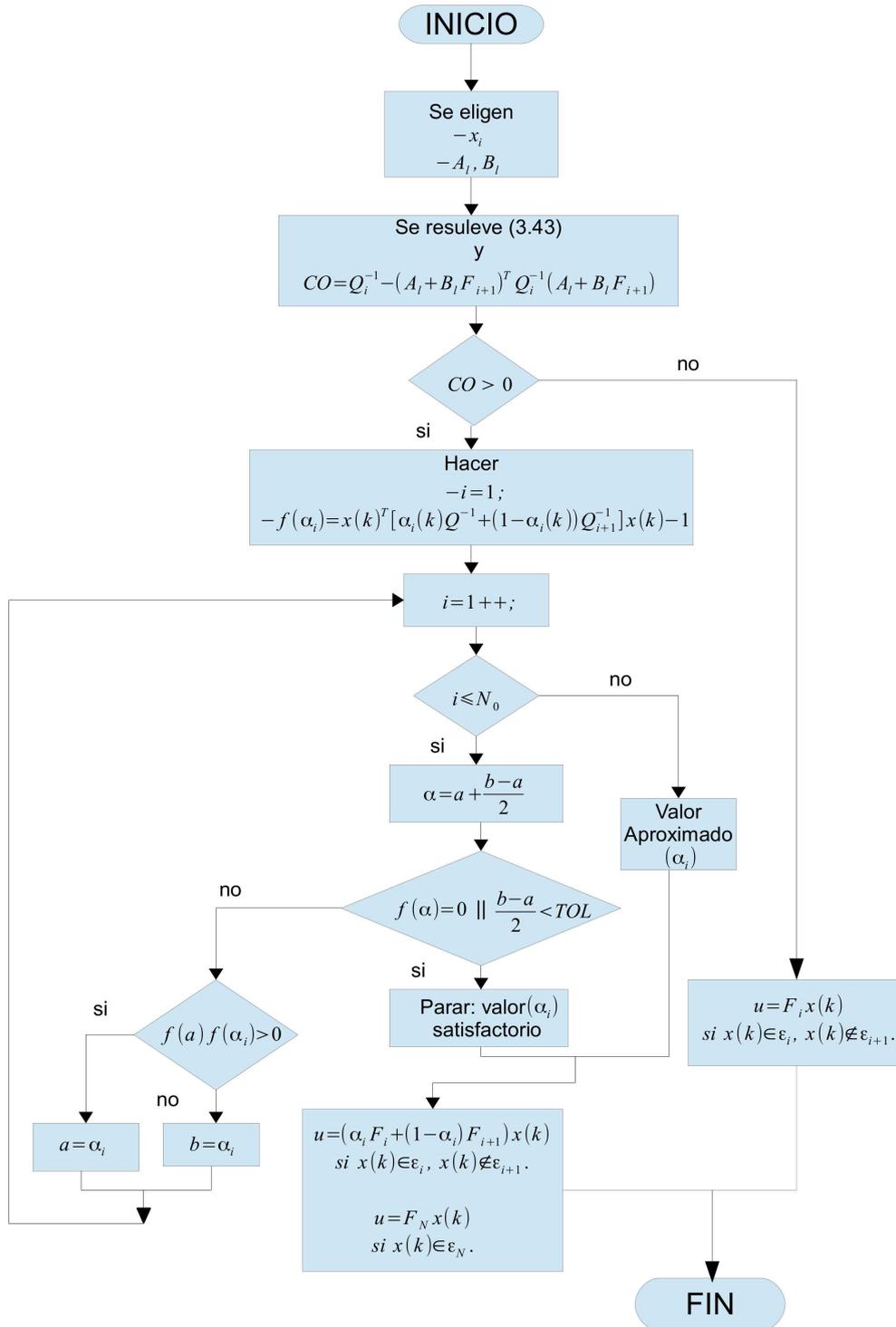


Figura 3.1: Diagrama de flujo del algoritmo para el MPC fuera de línea

**Demostración:** Consideremos el caso donde (3.33) se satisface para todo  $i \neq N$ . Los otros

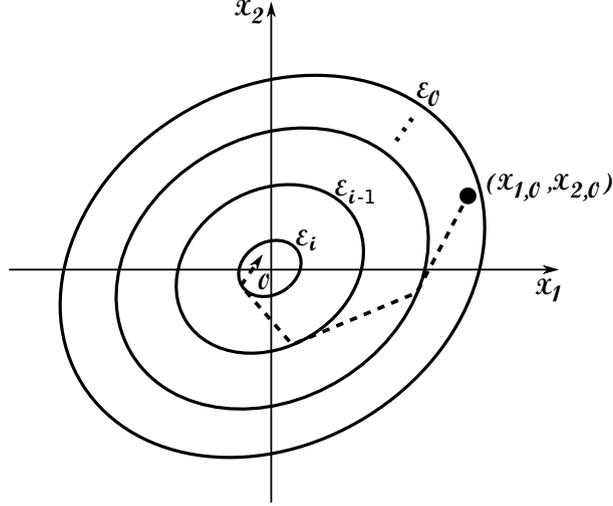


Figura 3.2: Gráfica en el espacio de estados de una posible trayectoria al aplicar el MPC con la formulación fuera de línea para  $i$  elipsoides.

casos son más simples.

El sistema en lazo cerrado está dado por

$$x(k+1) = \begin{cases} (A(k) + B(k)F(\alpha_i(k)))x(k), & \text{si } x(k) \in \epsilon_i, x(k) \notin \epsilon_{i+1}, i \neq N, \\ (A(k) + B(k)F_N)x(k), & \text{si } x(k) \in \epsilon_N \end{cases} \quad (3.35)$$

Para  $x(k) \in \epsilon_i \setminus \epsilon_{i+1}$ , denote

$$\begin{aligned} Q(\alpha_i(k))^{-1} &= \alpha_i(k)Q_i^{-1} + (1 - \alpha_i(k))Q_{i+1}^{-1} \\ X(\alpha_i(k)) &= \alpha_i(k)X_i + (1 - \alpha_i(k))X_{i+1}, \quad X \in \{Z, \Gamma\}. \end{aligned}$$

Cuando (3.33) es satisfecha, consideramos el procedimiento para obtener  $\{Q_i, Y_i\}$ , con esto se muestra que

$$Q_i^{-1} - (A_l + B_l F(\alpha_i(k)))^T Q_i^{-1} (A_l + B_l F(\alpha_i(k))) > 0, \quad l \in \{1, \dots, L\}. \quad (3.36)$$

Más aún, si tanto  $\{Y_i, Q_i, Z_i, \Gamma_i\}$  y  $\{Y_{i+1}, Q_{i+1}, Z_{i+1}, \Gamma_{i+1}\}$  (3.23) y (3.25), entonces

$$\begin{bmatrix} Q(\alpha_i(k))^{-1} & F(\alpha_i(k))^T \\ F(\alpha_i(k)) & Z(\alpha_i(k)) \end{bmatrix} > 0, \quad Z(\alpha_i(k))_{jj} \leq \bar{u}_j^2, \quad j \in \{1, \dots, m\} \quad (3.37)$$

$$\begin{bmatrix} Q(\alpha_i(k))^{-1} & [\Psi[A_l Q + B_l F(\alpha_i(k))]]^T \\ \Psi[A_l Q + B_l F(\alpha_i(k))] & \Gamma(\alpha_i(k)) \end{bmatrix} > 0, \quad \Gamma(\alpha_i(k))_{ss} \leq \bar{\psi}_s^2, \quad s \in \{1, \dots, q\}, \quad l \in \{1, \dots, L\} \quad (3.38)$$

Las ecuaciones (3.36)-(3.38) indican que  $u(k) = F(\alpha_i(k))x(k)$  mantendrá al estado dentro de  $\epsilon_i$  y lo llevará hacia  $\epsilon_{i+1}$ , satisfaciendo las restricciones. Finalmente el estado convergerá

al origen usando  $u(k) = F_N x(k)$ .

Considere las siguientes dos regiones:

$$\begin{aligned} R_{i-1} &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T Q_{i-1} x \leq 1, \ x^T Q_i^{-1} x > 1\}, \\ R_i &= \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T Q_i^{-1} x \leq 1, \ x^T Q_{i+1}^{-1} x > 1\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Primeramente, con  $R_i$ , la solución de  $x^T(\alpha_i Q_i^{-1} + (1 - \alpha_i) Q_{i+1}^{-1})x = 1$  es

$$\alpha_i = \frac{1 - x^T Q_{i+1}^{-1} x}{x^T (Q_i^{-1} - Q_{i+1}^{-1}) x}.$$

Por lo tanto, con  $R_i$ ,  $\alpha_i$  es una función continua de  $x$ , y también  $F(\alpha_i)$ . El mismo argumento se mantiene para la región  $R_{i-1}$ , donde  $\alpha_{i-1} = (1 - x^T Q_i^{-1} x) / (x^T (Q_{i-1}^{-1} - Q_i^{-1}) x)$ . En segundo lugar, cuando  $x \in R_i$ ,  $x^T Q_i^{-1} x \rightarrow 1 \Rightarrow \alpha_i \rightarrow 1$ . Tal que en el límite entre  $R_i$  y  $R_{i-1}$ ,

$$\lim_{\alpha_{i-1} \rightarrow 0} F(\alpha_{i-1}) = \lim_{\alpha_i \rightarrow 1} F(\alpha_i) = F_i,$$

que establece la continuidad de  $F(k)$  en (3.34) entre el límite de  $R_i$  y  $R_{i-1}$ .

Con esto, se puede concluir que  $F(k)$  es una función continua de  $x$ . □



# Capítulo 4

## Implementación

### 4.1. Restricciones y cálculo del conjunto de leyes de control

Para calcular el conjunto de leyes de control del algoritmo formulado para una aplicación fuera de línea, esto por razones de cálculo y eficiencia computacional, el proceso a seguir se muestra a continuación (la elección de los valores numéricos se muestra en el Apéndice B).

1. Se realiza el diseño usando un tiempo de muestreo de  $T = 0,1[s]$ .
2. Se elige un conjunto de posibles sistemas lineales.
3. Se define las restricciones para el control y el estado.
4. Se eligen los puntos  $x_i$  tal que  $\epsilon \subset \epsilon_{j-1} \quad \forall j \in \{2, \dots, N\}$ .
5. Se eligen las matrices de ganancias de control ( $W$  y  $R$ ) mediante prueba y error.
6. Se resuelve el programa lineal (3.26) usando paquetes de software libre para la solución de LMIs.
7. Con los datos anteriores se verifica la siguiente expresión

$$Q_i^{-1} - (A_l + B_l F_{i+1})^T Q_i^{-1} (A_l + B_l F_{i+1}) > 0, \quad l \in \{1, \dots, 5\} \quad (4.1)$$

Por lo tanto se adopta la formulación fuera de línea para la ley de control MPC que utiliza el algoritmo de bisección para el calculo final de la señal de control.

8. Se realiza el diseño usando una variable intermedia  $u_c = b_1 \sqrt{b_2 u (b_3 - b_4 u)}$  en (3.1).

9. Una vez obtenida  $u_c$  se consigue la señal de control  $u$  aplicada al sistema invirtiendo la función  $f(u) = b_1\sqrt{b_2u(b_3 - b_4u)}$ .

La Figura 4.1 muestra un diagrama esquemático del sistema en lazo cerrado y el controlador aplicado.

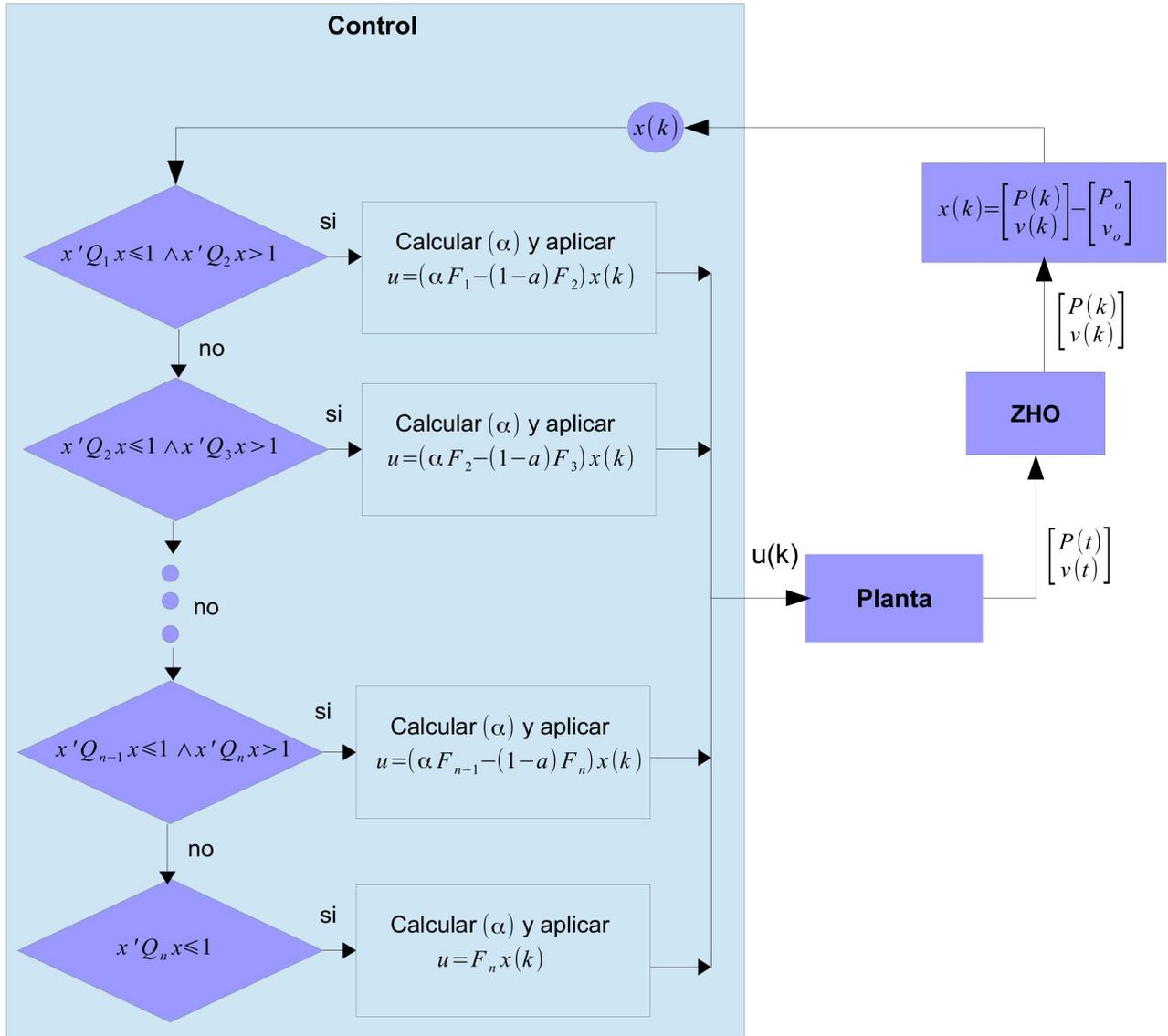


Figura 4.1: Sistema en lazo cerrado

## 4.2. Simulación en línea

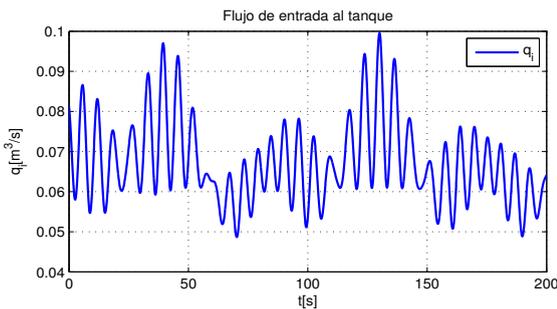
Para la simulación numérica del MPC en línea se usan los mismos parámetros que la formulación fuera de línea (Apéndice B) con la excepción de las matrices  $W$  y  $R$ , los valores

se eligen a prueba y error

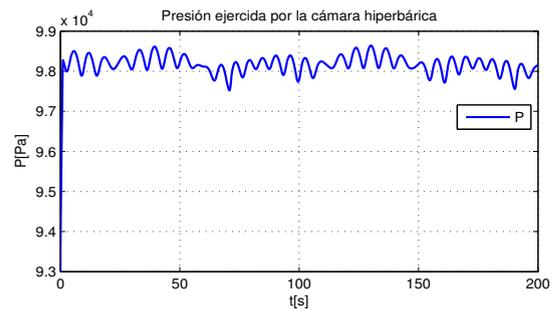
$$W = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad R = 11.$$

El experimento mediante simulación numérica se plantea de la siguiente forma: **dada la condición inicial** ( $P(0) = 93000(Pa), v(0) = 0(m/s)$ ), **la simulación se lleva a cabo usando un flujo neto de entrada al tanque que representa la suma de tres flujos individuales proporcionados por tres flotadores y una ola irregular, pese a la variación de dicho flujo se desea conseguir que el sistema opere cerca de los valores nominales.**

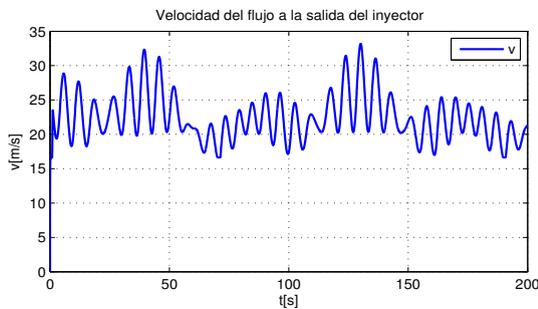
La Figura 4.2(a) muestra el flujo de entrada al tanque que tiene una variación de hasta  $0.032(m^3/s)$  del valor nominal de diseño  $0.062(m^3/s)$ . Las Figuras 4.2(b) y 4.2(c) muestran la Presión y la velocidad respectivamente, aunque la respuesta en el tiempo de estas variables no convergen a un valor fijo la señal de control calculada Figura 4.2(d), mantiene los valores alrededor del punto de operación deseado.



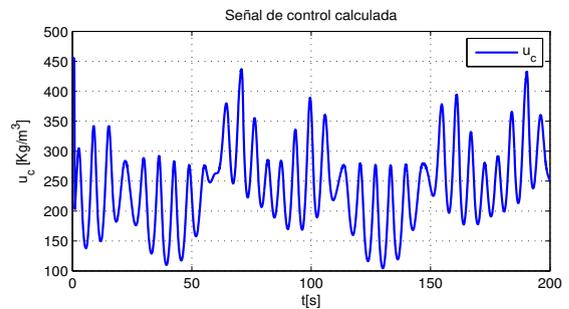
(a) Flujo de entrada al tanque con una variación de hasta  $0.038 (m^3/s)$  del valor nominal  $0.062(m^3/s)$ .



(b) Presión del gas en el tanque presurizado.



(c) Velocidad del chorro de agua a la salida del inyector de la turbina hidráulica.



(d) Señal de control calculada que representa un coeficiente de pérdidas.

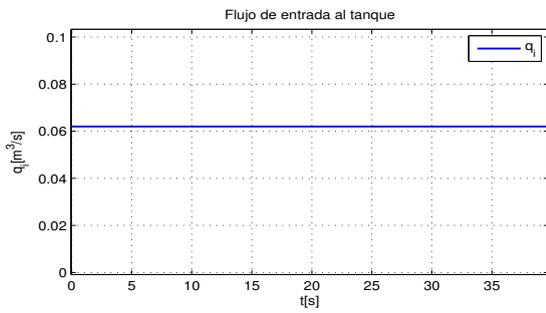
Figura 4.2: Gráficas que muestran el resultado de la simulación numérica aplicando el controlador MPC en línea.

### 4.3. Simulación fuera de línea

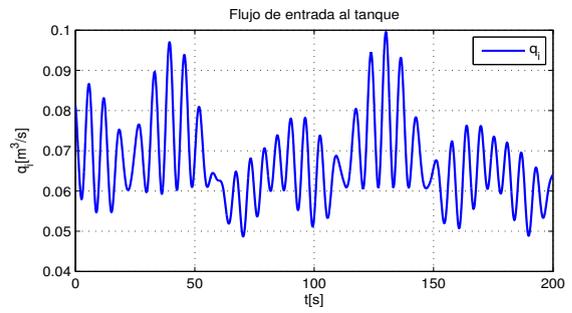
El experimento numérico para llevar a cabo la simulación fuera de línea resulta ser mucho más interesante que la solución en línea, ya que la solución fuera de línea muestra de manera más clara el funcionamiento del controlador, el experimento mediante simulación se plantea de la siguiente forma: **dada cualquier condición inicial que se encuentre dentro de la región en el espacio de estados definida mediante el diseño de seis elipsoides (Apendice B), se realizan dos simulaciones; la primera usando un flujo de entrada al tanque constante y la segunda utilizando el flujo proporcionado por tres flotadores y una ola irregular.**

La primera columna de gráficas de la Figura 4.3 muestra la simulación obtenida al proporcionar un flujo de entrada constante al tanque y la segunda columna de gráficas el resultado de la simulación a un flujo de entrada variable, de la imagen se pueden destacar la Figura 4.3(g) y la Figura 4.3(h), en donde se muestran las dos trayectorias en el espacio de estados y sus correspondientes elipsoides, en la Figura 4.4(a) y 4.4(b) se muestra un acercamiento de las mismas, en donde, la primera muestra como la trayectoria en el espacio de estados converge al origen y en la segunda solo podemos garantizar que mientras la variación del flujo no saque a la trayectoria de la región de diseño (elipsoides) el controlador seguirá tratando de llevar a la trayectoria al origen.

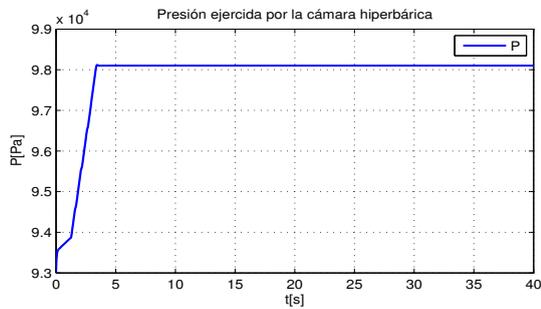
Las Figuras 4.3(c) y 4.3(d), muestran la solución al algoritmo de bisección para un flujo constante y uno variante respectivamente y por último las Figuras 4.3(e) y 4.3(f) muestran las señales de control calculadas.



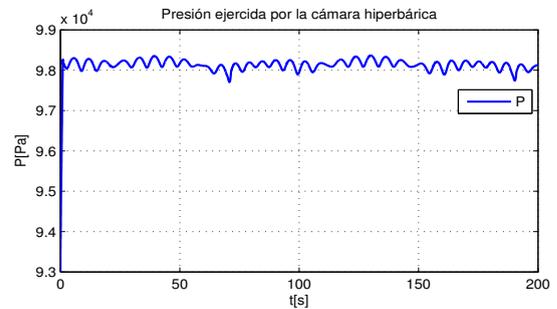
(a) Flujo de entrada al tanque constante



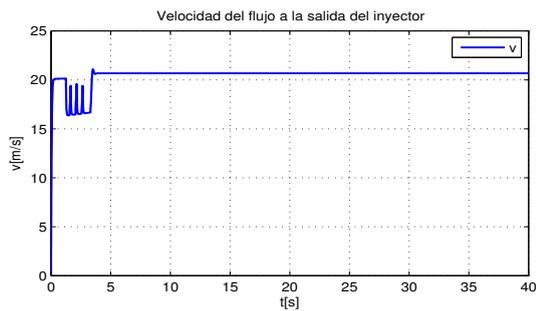
(b) Flujo de entrada al tanque variable



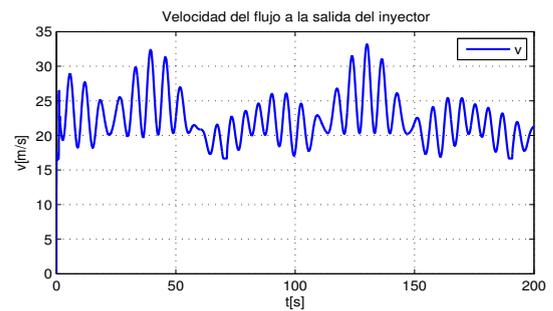
(c) Presión resultante a un flujo constante



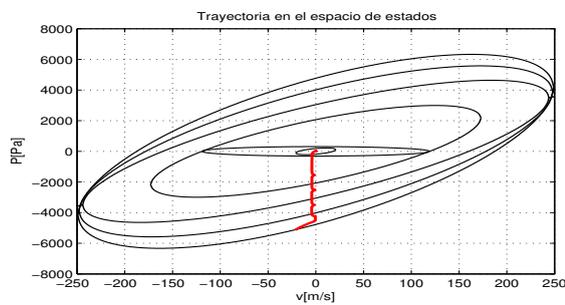
(d) presión resultante a un flujo variable



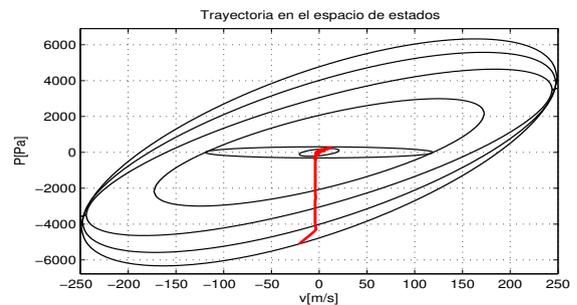
(e) Velocidad resultante a un flujo constante



(f) Velocidad resultante a un flujo variable

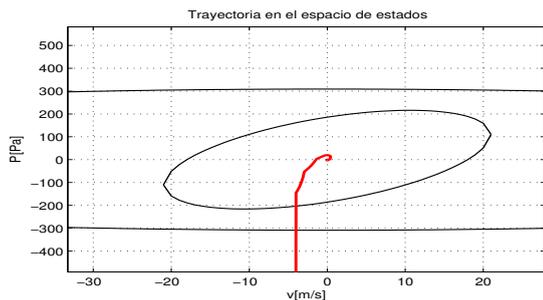


(g) En rojo se muestra la trayectoria resultante en el espacio de estados y en negro los seis elipsoides propuestos para un flujo constante

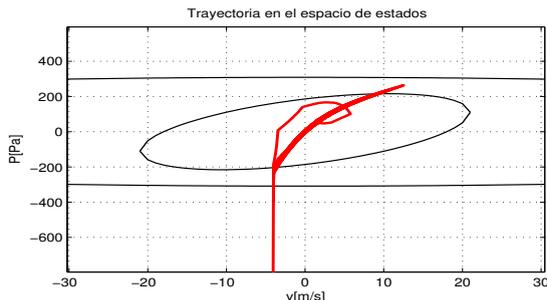


(h) En rojo se muestra la trayectoria resultante en el espacio de estados y en negro los seis elipsoides propuestos para un flujo variable

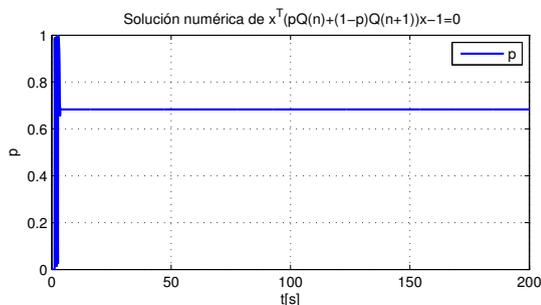
Figura 4.3: Gráficas que muestran el resultado de la simulación numérica aplicando el controlador MPC fuera de línea.



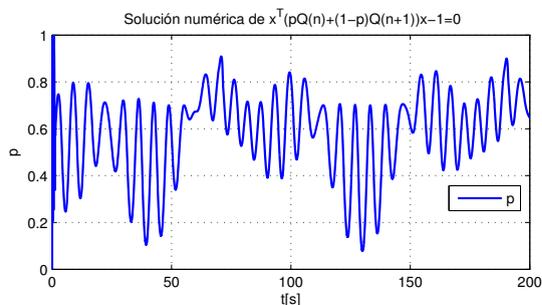
(a) Trayectoria en el espacio de estados ampliada en el origen, a un flujo constante.



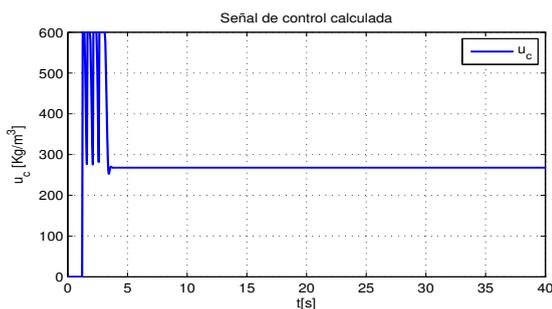
(b) Trayectoria en el espacio de estados ampliada en el origen, a un flujo variante



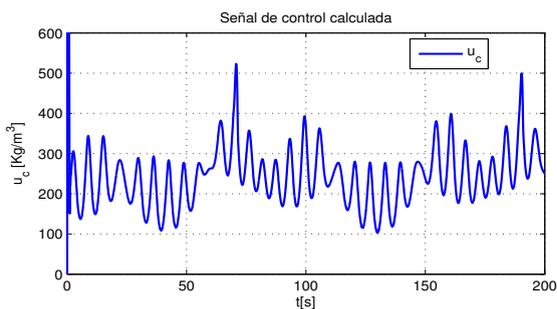
(c) Solución numérica  $p$  mediante el método de bisección usando un flujo constante



(d) Solución numérica  $p$  mediante el método de bisección usando un flujo variable



(e) Señal de control calculada para un flujo constante



(f) Señal de control calculada para un flujo variable

Figura 4.4: Gráficas que muestran el resultado de la simulación numérica aplicando el controlador MPC fuera de línea.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El problema de control en dispositivos WEC en la etapa de acondicionamiento (tanque presurizado) operando en condiciones de estado estacionario depende de las interacciones entre el flotador, bombas y rectificadores. En este caso solo se probó la estabilidad del sistema hidroneumático y del controlador en conjunto. Se demostró mediante simulación que la señal de flujo proporcionada por el flotador se puede considerar como un parámetro variante en el tiempo de un sistema lineal para el diseño del controlador. Esta variación le causó problemas al controlador cuando se aplicaba una señal de flujo con una amplitud relativamente grande, porque no se contaba con un modelo politópico que lograra representar al sistema no lineal en todo su dominio de operación, es decir, si se tomaba un conjunto de sistemas lineales (cobertura convexa) tomando en cuenta una variación de  $q_i$  amplia, se presentaban problemas de factibilidad en la solución del programa lineal, además, la región de atracción dada por los elipsoides se hizo tan grande como fue posible encontrar una solución factible a las restricciones convexas del problema de minimización.

A continuación se enumeran algunas conclusiones consecuentes

1. El modelo del convertidor hiperbárico propuesto en esta tesis, consigue evitar el uso redundante de la ecuación diferencial que representa la dinámica de la altura de la columna de agua en el tanque.
2. La solución al problema de control, usando la formulación MPC propuesta en esta tesis depende de la elección de la cobertura convexa, al usar tres sistemas lineales diferentes vistos como parámetros de sintonización se logró un mejor desempeño.
3. La aplicación del controlador resultó ser satisfactoria cuando se modelan pérdidas por fricción para una región pequeña de desplazamiento del inyector, no así para una región grande, este problema influye fuertemente en el diseño de los elipsoides.

4. La aplicación de un controlador por modelo predictivo basado en la función de costo min-max con caso particular horizonte cero para sistemas con descripción politópica, cumple con el objetivo de control si se supone una región de operación cercana a los valores nominales (variación de flujo pequeña), pero se logró operar alrededor de los valores nominales incluso ante una variación relativamente grande del flujo, esto debido a que el controlador siempre trataría de llevar tanto a la presión como a la velocidad tan cerca como pudiera al punto de operación mientras la trayectoria se mantuviera dentro de la región de atracción.
5. El controlador propuesto permitió tratar el flujo de entrada como una incertidumbre dinámica, además de incluir en el diseño una señal de control saturada y cotas de sobrepaso máximo en los estados del sistema.
6. El controlador no puede estabilizar al sistema cuando el flujo  $q_i$  saca la trayectoria en el espacio de estados de la región de diseño de los elipsoides.

Como trabajo futuro se desea tratar el problema de estabilización ampliando el modelo, es decir, tomando en cuenta la dinámica del flotador bajo un esquema de máxima extracción de energía. También se desea tratar el problema de modelado y control de la interacción entre varios flotadores y cómo la conmutación mediante válvulas de una sola vía influiría en el problema de regulación de la potencia mecánica proporcionada por el dispositivo WEC, con el fin de lograr incluir un generador eléctrico que no sea tan costoso de operar como es el caso del generador de inducción doblemente alimentado que normalmente se usa cuando la potencia mecánica proporcionada al eje de la máquina es irregular.

# Apéndice A

## Herramientas Convexas

### A.0.1. Teoría de conjuntos convexos y LMI

Primeramente necesitamos proporcionar ciertas bases y conceptos matemáticos involucrados en la teoría de la optimización [52] [57].

**Definición:** Un conjunto  $F$  es llamado convexo si para algún  $x_1, x_2 \in F$  y  $0 \leq \theta \leq 1$ , lo siguiente se mantiene

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in F$$

Geoméricamente, un conjunto es convexo si y solo si, un segmento de línea entre cualesquiera dos puntos en el conjunto se encuentra contenido dentro del mismo conjunto, como se muestra en la Figura A.1.

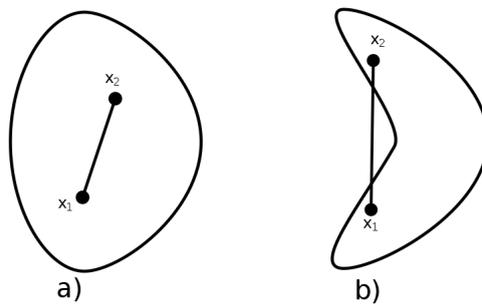


Figura A.1: a) conjunto convexo, b) conjunto no convexo.

**Definición:** Sea  $F \subset \mathbf{R}^n$ , entonces la intersección de todos los conjuntos convexos en  $\mathbf{R}^n$  que contienen a  $F$  es llamado la envolvente convexa de  $F$  y se denota como  $\mathbf{Co}(F)$ .

Claramente, la envolvente convexa de un conjunto es el más pequeño conjunto convexo que contiene a este conjunto Figura A.2.

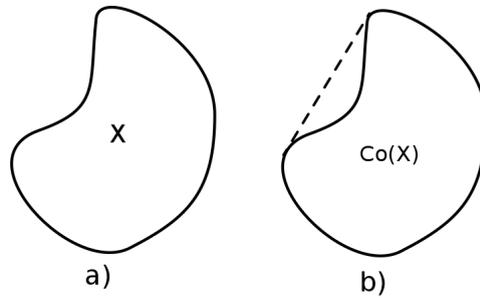


Figura A.2: a) conjunto sin tomar la envolvente convexa, b) se toma la envolvente convexa del mismo conjunto.

**Definición:** Una combinación convexa de puntos  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , es una combinación lineal si

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_m z_m$$

con

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1,$$

y

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

**Definición:** Sea  $F \subset \mathbf{R}^n$  y  $\epsilon > 0$ , denote

$$B_\epsilon(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}$$

Entonces,

- $x_0$  es llamado un punto interior de  $F$  si existe un escalar  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(x_0) \subset F$ .
- Se dice que  $F$  es un conjunto abierto si cada punto interno de  $F$  es un punto interior.
- $x_0$  es llamado un punto frontera de  $F$  si para cada escalar  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeño lo siguiente es satisfecho

$$B_\epsilon(x_0) \cap F \neq \begin{cases} \emptyset \\ B_\epsilon(x_0) \end{cases}$$

y el conjunto formado por todos los puntos frontera de  $F$  es llamado el conjunto frontera de  $F$ , denotado por  $F_B$ .

- $F$  es llamado cerrado si este contiene todos sus puntos frontera.
- $F$  es llamado acotado si existe un escalar  $\gamma > 0$  tal que  $B_\gamma(x_0) \supset F$ .
- $F$  es llamado un compacto si es tanto acotado como cerrado.
- Cuando  $F$  es convexo,  $x_0 \in F$  se dice ser un punto extremo de  $F$  si no hay dos puntos distintos  $x_1$  y  $x_2$  en  $F$  tal que  $x_0 = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$ , para alguna  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , y el conjunto formado por todos los puntos extremos de  $F$  es denotado por  $F_E$ .

El siguiente teorema nos habla de las propiedades de los conjuntos convexos y envolventes convexas.

**Teorema:** Sea  $F \subset \mathbf{R}^n$ . Entonces,

1.  $F$  es convexo si y solo si alguna combinación convexa de puntos de  $F$  esta otra vez en  $F$ .
2.  $\text{conv}(F)$  es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de  $F$ , en concreto esto es,

$$\text{conv}(F) = \left\{ z \mid z = \sum_{i=1}^m \alpha_i z_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \forall z_i \in F, i = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbf{N} \right\}$$

3.  $\text{conv}(F)$  es compacto si  $F$  es compacto.

La demostración del teorema anterior se puede encontrar en [52].

La siguiente propiedad de conjuntos convexos es importante.

**Teorema:** Un conjunto convexo compacto en  $\mathbf{R}^n$  es igual a la envolvente convexa formada por sus puntos extremos

## HIPERPLANOS, SEMIESPACIOS, POLIEDROS, POLITOPOS

**Definición:** Sea  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $a \neq 0$ . Entonces,

- Un conjunto de la forma  $H_p = \{x \mid a^T x = b, x \in \mathbf{R}^n\}$ , se le llama un hiperplano en  $\mathbf{R}^n$ .
- Un conjunto de la forma  $H_s = \{x \mid a^T x \leq b, x \in \mathbf{R}^n\}$ , se le llama un semiespacio en  $\mathbf{R}^n$ .
- En ambos casos  $a$  es llamado un vector normal.

**Definición:** El conjunto  $F \subset \mathbf{R}^n$  es llamado afín si existe un  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  y un espacio lineal  $F_0 \subset \mathbf{R}^n$  tal que

$$F = \{x \mid x = x_0 + z, \quad z \in F_0\}.$$

**Teorema:** Los Semiespacios son convexos, y los hiperplanos son afines y convexos.

**Definición:** Un poliedro en  $\mathbf{R}^n$  es la intersección de un número finito de semiplanos e hiperplanos en  $\mathbf{R}^n$ .

Por ejemplo

$$\Pi = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax = b, Gx < b\}$$

Un ejemplo gráfico se muestra en la Figura (A.3).

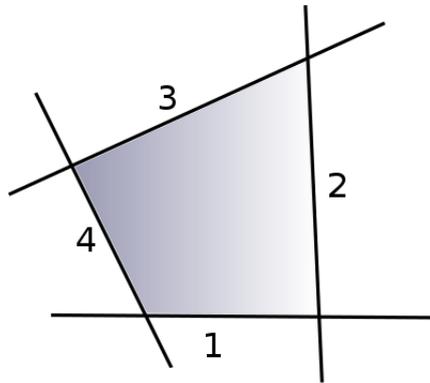


Figura A.3: Intersección de semiplanos e hiperplanos.

**Definición:** Un polígono  $P \subset \mathbf{R}^n$  es un conjunto, que es la envolvente convexa de un conjunto finito no vacío  $\{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset \mathbf{R}^n$ , esto es,  $P = \text{conv}\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ .

La Figura (A.4) es una ilustración de la definición anterior.

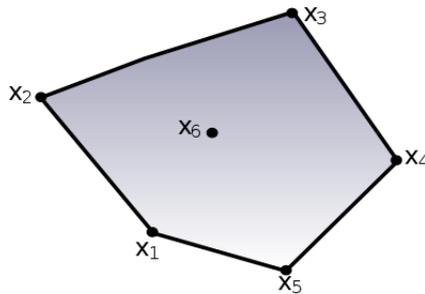


Figura A.4: Envolvente convexa del conjunto  $x = \{x_1, \dots, x_6\}$

Una desigualdad matricial lineal (usualmente se usa las siglas en ingles Linear Matrix Inequality "LMI") tiene la forma

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (\text{A.1})$$

donde  $x \in \mathbf{R}^m$  es la variable y las matrices  $F_i = F_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $i \in \{0, \dots, m\}$ , están dadas. Así,  $F(x)$  es una función afín en los elementos de  $x$ , el símbolo de desigualdad indica que  $F(x)$  es positiva definida, i.e.,  $uF(x)u > 0$ ,  $\forall u \in \mathbf{R}^n$  con  $u \neq 0$ .

Resulta ser que una propiedad de la LMI es que el conjunto  $\{x \mid F(x) > 0\}$  es convexo, es decir que  $F(x) > 0$  forma una restricción convexa sobre  $x$ .

**Demostración:** (convexidad de LMI) Sea  $x$  y  $y$  dos vectores tales que  $F(x) > 0$  y  $F(y) > 0$ , y sea  $\lambda \in (0, 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i) F_i \\ &= \lambda F_0 + (1 - \lambda) F_0 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m y_i F_i \\ &= \lambda F(x) + (1 - \lambda) F(y) > 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

□

Una propiedad muy útil es que múltiples LMI's  $F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0$  pueden ser expresadas en una sola LMI como  $\mathbf{diag}(F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0)$ .

Algunas desigualdades no lineales (convexas) pueden ser representadas mediante el complemento de Schur en una LMI.

**Complemento de Schur:** Para  $Q_s(x) = Q_s(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$  y  $S(x)$  las siguientes tres desigualdades son equivalentes:

$$\text{I. } \begin{bmatrix} Q_s(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0;$$

$$\text{II. } R(x) > 0, \quad Q_s(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0;$$

$$\text{III. } Q_s(x) > 0, \quad R(x) - S(x)^T Q_s(x)^{-1} S(x) > 0.$$

Una LMI  $F(x) > 0$ , se dice factible si se encuentra una  $x^{\text{factible}}$  tal que  $F(x^{\text{factible}}) > 0$  o en caso contrario se dice que la LMI no es factible. El problema de factibilidad de una LMI

se puede solucionar resolviendo un problema numérico conocido como el test de factibilidad estricta que consiste en lo siguiente.

Introduzca la variable auxiliar  $t \in \mathbf{R}$  y considere

$$F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \leq tI, \quad (\text{A.3})$$

Hallemos el valor ínfimo  $t_*$  de  $t$  sobre la restricción (A.9)

- Si  $t_*$  es negativo el problema original es estrictamente factible.
- Si  $t_*$  no es negativo el problema original no es estrictamente factible.

Para la solución numérica del problema general de minimizar una función objetivo sujeta a restricciones LMI, existen algoritmos eficientes computacionalmente basados en el método del punto interior, este algoritmo tiene una complejidad de tiempo-polinomial, esto es, el número  $N(\epsilon)$  de recursiones necesarias para calcular una solución  $\epsilon$ -exacta está acotada por  $N(\epsilon) \approx MN^3 \log(V/\epsilon)$ , donde  $M$  es la dimensión del renglón total del sistema LMI,  $N$  es el número total de variables de decisión escalares, y  $V$  es un factor de escala que depende de los datos. Este algoritmo eficiente es conocido como el algoritmo de proyección de Nesterov y Nemirovski [54, 55].

## A.0.2. Sistemas con descripción politópica (modelos con incertidumbres)

La noción de sistema dinámico incierto es central en la teoría de control robusto para el diseño de controladores, porque muchos sistemas físicos exhiben comportamientos complejos. A veces es necesario aproximar estos modelos por otros de relativa baja complejidad. Lo deseable sería que la brecha entre tales modelos y el sistema físico sea muy pequeña, otra causa por la que se usa este tipo de modelos es por el desconocimiento exacto de algunos componentes del sistema, o por la alteración de algún comportamiento debido a los cambios en las condiciones de operación (envejecimiento) y finalmente está el caso en donde las incertidumbres en los parámetros físicos son poco conocidos o varían en el tiempo. Note que las incertidumbres de un modelo deben ser distinguidas de *acciones exógenas* tales como disturbios o ruidos de medición.

El controlador propuesto en esta tesis se centra en un sistema que puede ser aproximado por modelos lineales que puedan poseer alguna incertidumbre, posiblemente no lineal y / o variable en el tiempo.

Al derivar dicho modelo nominal se deben recordar dos principios fundamentales.

- Las incertidumbres deberían ser pequeñas cuando se desea un alto rendimiento (equilibrio entre el rendimiento y la robustez). En otras palabras, el modelo lineal debe ser lo suficientemente preciso en el ancho de banda del controlador.
- Cuanta más información se tenga sobre la incertidumbre (fase, estructura, invariancia en el tiempo, etc.), mayor será el rendimiento alcanzable.

Hay dos clases de incertidumbres

- Incertidumbre dinámica, que consiste en componentes dinámicos que no se han tomado en cuenta en el modelo lineal así como de variaciones en el comportamiento dinámico durante la operación. Por ejemplo, variaciones lentas en el tiempo.
- Incertidumbres en los parámetros, que se deben a un conocimiento imperfecto de los valores físicos de los parámetros o a variaciones de estos parámetros durante el funcionamiento. Por ejemplo, rigidez y coeficientes de amortiguamiento.

En este trabajo se tomara en cuenta el efecto de la incertidumbre dinámica en el sistema. Las incertidumbres en un modelo generalmente es una combinación de incertidumbres dinámicas y paramétricas, y puede surgir en varios puntos diferentes en el lazo de control. Por ejemplo, puede haber incertidumbres dinámicas en actuadores e incertidumbres paramétricas sobre sensores. Una representación muy común de sistemas con incertidumbres son los modelos en espacio de estados. Esta representación es relevante para sistemas descritos por ecuaciones dinámicas con coeficientes inciertos o bien variantes en el tiempo, [56]. Una manera de tomar en cuenta las incertidumbres en el análisis de sistemas lineales es usando modelos con *descripción politópica*. En el sentido más estricto un sistema con descripción politópica nace del concepto de inclusión diferencial, esta es representada por (A.4)

$$\dot{x} \in F(x(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.4})$$

donde  $F$  es una función valuada sobre un conjunto  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ . A cualquier  $x : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$  que satisface (A.4) es llamada una *solución* o *trayectoria* de la inclusión diferencial, una manera de mostrar que cada trayectoria de la inclusión diferencial convergerá a cero como  $t \rightarrow \infty$  es usando el teorema de relajación, este teorema juega un rol muy importante en la teoría de ecuaciones diferenciales, y es concerniente a la relación entre el conjunto solución de dos problemas  $\dot{x} \in F(x(t))$  y  $\dot{x} \in \mathbf{Co}(F(x(t)))$ , donde  $\mathbf{Co}(\ast)$  es la cobertura o envolvente convexa.

En teoría de control, es normal tratar con problemas que involucren ecuaciones diferenciales

a fines,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

con un conjunto de control  $u \in U$ , un subconjunto compacto convexo de  $x \in \mathbf{R}^n$ , una condición inicial  $x(0) \in \mathbf{R}^n$  y un intervalo de tiempo  $[0, T]$ .

Ahora, consideremos el subconjunto alcanzable  $A_T$  en el tiempo  $T$ , es decir, la imagen de  $T$  de todas las soluciones emitidas desde  $t = 0$  y  $\xi_0$  usando todos los controles  $u(*)$ , medidos sobre  $[0, T]$ , tal que  $u(t) \in U$  sobre  $[0, T]$ .

El teorema de relajación se enuncia como sigue.

**Teorema:** (*Filippov-Wazewski*). Sea  $F$  en  $Q = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - \xi_0\| \leq b\}$  el cual es un subconjunto compacto de  $\mathbf{R}^n$ , y es lipschitz. Sea  $I = [-T, T]$  y sea  $x : I \rightarrow Q$  una solución a

$$\dot{x} \in \mathbf{Co}(F(x(t))), \quad x(0) = \xi_0 \quad (\text{A.5})$$

tal que, para  $t \in I$ ,  $\|x(t) - \xi_0\| < b$ . Entonces para cada  $\epsilon > 0$ , existe una solución  $I \rightarrow Q$  a

$$\dot{y}(t) \in F(y(t)), \quad y(0) = \xi_0 \quad (\text{A.6})$$

tal que para  $t \in I$ ,  $\|y(t) - x(t)\| \leq \epsilon$  [51].

El teorema anterior consiste en asumir que  $F(x, t)$  es un conjunto convexo para cada  $x$  y  $t$ .

Con el fin de que la inclusión diferencial (versión relajada de (A.4)) dada por

$$\dot{x} \in \mathbf{Co}F(x(t), t), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.7})$$

garantice  $\mathbf{Co}F(x(t), t) \supseteq F(x(t), t)$ , en otras palabras que cada trayectoria de la inclusión diferencial (A.7) sea también una trayectoria relajada de (A.4).

La interpretación de una inclusión diferencial lineal (IDL) es equivalente, y está dada por

$$\dot{x} \in \Omega x, \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.8})$$

donde  $\Omega \subset \mathbf{R}^{n \times n}$ . La IDL (A.8) en el lenguaje de teoría de control se puede interpretar como una familia de sistemas lineales variantes en el tiempo con incertidumbres (el conjunto  $\Omega$  describe precisamente la incertidumbre en la matriz  $A(t)$ ) donde cada trayectoria de la IDL satisface

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.9})$$

para alguna  $A : \mathbf{R}_+ \rightarrow \Omega$ . Conversamente, para alguna  $A : \mathbf{R}_+ \rightarrow \Omega$ , la solución de (A.9) es una trayectoria de la IDL (A.8).

Ahora, si consideremos el siguiente sistema discreto con incertidumbres

$$x(k+1) = A(\delta(k))x(k) \quad (\text{A.10})$$

el sistema de coeficientes matriciales toma la forma de

$$A(\delta(k)) = A_0 + \Delta A(\delta(k))$$

donde  $A_0 \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es una matriz conocida, que representa la matriz del sistema nominal, mientras que

$$\Delta A(\delta(k)) = \delta_1(k)A_1 + \delta_2(k)A_2 + \cdots + \delta_k(k)A_k \quad (\text{A.11})$$

Es el sistema de perturbación matricial, donde

- $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , son matrices conocidas, que representan la dirección de la perturbación.
- $\delta_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , son funciones arbitrarias del tiempo, que representan la incertidumbre en los parámetros del sistema.
- $\delta(t) = [\delta_1(k) \ \delta_2(k) \ \cdots \ \delta_k(k)]^T$  es el vector de parámetros inciertos, que es frecuentemente asumido a estar dentro de un cierto conjunto compacto y convexo  $\Delta$ , esto es

$$\delta(k) \in \Delta \quad (\text{A.12})$$

En la aplicación práctica, frecuentemente dos tipos de conjuntos de perturbaciones paramétricas son usadas.

Una es el siguiente poliedro regular:

$$\Delta_I = \{\delta(k) \mid \delta_i(k) \in [\delta_i^-, \delta_i^+], \quad i = 1, 2, \dots, k\} \quad (\text{A.13})$$

Pero el tipo de perturbaciones paramétricas que nos interesa es el siguiente politópo

$$\Delta_p = \{\delta(k) \mid \sum_{i=1}^k \delta_i(k) = 1, \delta_i(k) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k\} \quad (\text{A.14})$$

El cual es un poliedro regular en  $\mathbf{R}^k$ , cuando se toma en cuenta esta clase de perturbaciones se le llama *sistema politópico*. Si consideramos el conjunto  $\Omega$  como un politópo (describimos a  $\Omega$  por una lista de vértices), podemos trabajar con la siguiente clase de sistemas discretos.

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad [A(k) \mid B(k)] \in \Omega \quad (\text{A.15})$$

donde  $u \in R^m$  es la entrada de control,  $x \in R^n$  es el estado. Las restricciones en la entrada y el estado son

$$-\bar{u} \leq u(k+i) \leq \bar{u}, \quad -\bar{\psi} \leq \Psi x(k+i+1) \leq \bar{\psi}, \quad \forall i \geq 0 \quad (\text{A.16})$$

donde  $\bar{u} := [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]^T$ ,  $\bar{u}_j > 0$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\bar{\psi} := [\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_q]^T$ ,  $\bar{\psi}_s > 0$ ,  $s \in \{1, \dots, q\}$ ,  $\Psi \in \mathbf{R}^{q \times n}$ .

Y supondremos que el par de matrices  $[A(k) \mid B(k)] \in \Omega$ , donde  $\Omega$  se define como el siguiente "politopo":

$$\Omega = \mathbf{Co}\{[A_1 \mid B_1], [A_2 \mid B_2], \dots, [A_L \mid B_L]\}, \quad \forall k \geq 0, \quad (\text{A.17})$$

i.e., existe  $L$  coeficientes no negativos  $w_l(k)$ ,  $l \in \{1, \dots, L\}$  tal que

$$\sum_{l=1}^L w_l(k) = 1, \quad [A(k) \mid B(k)] = \sum_{l=1}^L w_l(k) [A_l \mid B_l] \quad (\text{A.18})$$

donde  $[A_l \mid B_l]$  son llamados los vértices del politopo.

Se puede obtener un modelo con descripción politópica para sistemas no lineales bajo ciertas consideraciones, ya sea con un conjunto de datos en puntos de operación diferentes o en instantes de tiempo diferentes, ó tomando el jacobiano  $[\partial f / \partial x \quad \partial f / \partial u]$  del sistema no lineal discreto variante en el tiempo  $x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$ , y uno puede suponer que la matriz jacobiana se halla en el politopo  $\Omega$ .

### A.0.3. Programación Lineal

**Definición:** *Un problema de programación lineal es un problema de optimización tal que [53]*

1. *buscamos maximizar (o minimizar) una función lineal (función objetivo) de variables de decisión.*
2. *Las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de restricciones, estas deben ser desigualdades lineales o igualdades lineales.*

Antes de abordar la solución de un programa lineal se enuncian las siguientes definiciones.

**Definición:** *Una solución factible de un programa lineal es una solución que satisface todas las restricciones.*

**Definición:** *La región factible en un programa lineal es el conjunto de todas las posibles soluciones factibles.*

**Definición:** *Una solución óptima a un programa lineal es una solución dentro del conjunto factible con el valor más pequeño de la función objetivo.*

Es útil enunciar el siguiente teorema.

**Teorema:** *Sea  $X$  el conjunto de soluciones factibles del programa lineal tal que  $X \neq \emptyset$ . Entonces,  $X$  es un conjunto convexo.*

El teorema anterior de convexidad de un programa lineal muestra que todas las propiedades de los problemas convexos son aplicables al problema lineal, por lo tanto si se determina un mínimo local del (PL), entonces es mínimo global. Si  $X$  no fuera convexo, un mínimo local podría no ser global.

Ya que este es un problema de optimización convexa se puede resolver usando un algoritmo de convergencia polinomial, que se muestra en [57].

El problema general de la programación lineal se muestra en (3.2), donde la función  $c^T x$  es llamada la función objetivo y está definida de un dominio de  $\mathbf{R}^n$  sobre  $\mathbf{R}$ , y representa una descripción matemática del objetivo que se pretende alcanzar, el vector  $x$  es el vector de variables de decisión, de entre cuyos valores posibles se trata de elegir aquél que proporcione el valor óptimo de la función  $c^T x$ .

**Definición:** (*Conjunto de oportunidades*) es el conjunto de puntos  $X \subset \mathbf{R}^n$  que verifican todas y cada una de las restricciones y al mismo tiempo pertenecen al dominio de la función.

**Definición:** (*Máximo y mínimo*) Considere la función  $c^T : X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  y  $x^*$  un óptimo de dicha función, entonces se dice que dicho punto  $x^*$  es

a) **Máximo global único:**

$$\text{Si } x^* \text{ verifica } c^T x^* > c^T x, \quad \forall x \in X$$

b) **Mínimo global único:**

$$\text{Si } x^* \text{ verifica } c^T x^* < c^T x, \quad \forall x \in X$$

**Teorema:** (*Local-Global*) sea  $X \subset \mathbf{R}^n$  un conjunto convexo y no vacío, y sea  $c^T x : X \rightarrow \mathbf{R}$ . Consideremos el siguiente problema:

$$\text{mín } f(x)$$

$$\text{s.t. } x \in X$$

Si  $x^* \in X$  es un mínimo local del problema anterior, entonces: si  $f$  es una función convexa, entonces  $x^*$  es un mínimo global.



# Apéndice B

## Parámetros y sistemas lineales

La siguiente tabla muestra los valores de los parámetros físicos a usar.

Parametro	Valor
$\gamma$	1.4
$\rho$	1000[Kg/m <sup>3</sup> ]
$g$	9.81[m/s <sup>2</sup> ]
$V_T$	1.691[m <sup>3</sup> ]
$A_T$	0.5675[m <sup>2</sup> ]
$A_p$	0.003[m <sup>2</sup> ]
$l_p$	0.4[m]
$D$	0.03[m]
$m$	8×10 <sup>4</sup> [kg]
$k$	6.39×10 <sup>5</sup> [N/m]
$b$	2×10 <sup>4</sup> [Nm/s]

Se usa una ola irregular con periodo base  $T = 15[s]$ , donde la amplitud representa la máxima variación de la fuerza de difracción  $A_m = 2 \times 10^5[N]$  y un defasamiento para cada flotador de 120°.

Para los cálculos numéricos se elige el siguiente punto de operación

$$\bar{x}_1 = [\bar{P} \quad \bar{v}]^T = [98100 \quad 20,6667]^T$$

$$\bar{u}_1 = 267,805$$

Y los siguientes 3 posibles valores de flujos de entrada para obtener sus correspondientes sistemas lineales.

1. Para  $\bar{q}_{i1} = 0,061$
2. Para  $\bar{q}_{i2} = 0,05$
3. Para  $\bar{q}_{i3} = 0,04$

Dado que el controlador propuesto en esta tesis es de naturaleza discreta, se obtiene un equivalente discreto de los sistemas lineales con un periodo de muestreo  $T_s = 0,1[s]$ . Y supondremos que el par de matrices  $[Ad_i | Bd_i] \in \Omega$ , donde  $i = 1, \dots, 3$  y  $\Omega$  se define como el siguiente "politopo":

$$\Omega = \mathbf{Co}\{[Ad_1 | Bd_1], [Ad_2 | Bd_2], [Ad_3 | Bd_3]\} \quad (\text{B.1})$$

i.e., existe tres coeficientes no negativos  $w_i(k)$  tal que

$$\sum_{i=1}^3 w_i(k) = 1, \quad [A(k) | B(k)] = \sum_{i=1}^3 w_i(k)[Ad_i | Bd_i] \quad (\text{B.2})$$

donde  $[Ad_i | Bd_i]$  son los vértices del politopo.

Se elige los siguientes valores para definir seis elipsoides.

$$\begin{aligned} x_1 &= [5100 \quad 20,6667]^T \\ x_2 &= [4100 \quad 5,66]^T \\ x_3 &= [3100 \quad 3,66]^T \\ x_4 &= [2100 \quad 2,66]^T \\ x_5 &= [100 \quad 0,66]^T \\ x_6 &= [50 \quad 0,36]^T \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Se elige como restricciones de control

$$\begin{aligned} -450 &\leq u(k+i) \leq 450 \\ 98100 &\leq x_1 \leq 98100 \\ -20,6667 &\leq x_2 \leq 20,6667 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

y las matrices de ganancias de control como

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \\ R &= 0,1 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

# Bibliografía

- [1] SI OCEAN: *Wave and Tidal Energy Market Deployment Strategy for Europe*, p. 47 (2014).
- [2] COWI: *The Potential of Market Pull Instruments for Promoting Innovation in Environmental Characteristics*, pp. 1-110 (2009).
- [3] EMEC: *EMEC Webpage*. pp. 1-110 (2009). <http://www.emec.org.uk/marine-energy/wave-developers/>.
- [4] ASSESSING THE GLOBAL WAVE ENERGY POTENTIAL, ASME 2010 29th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE2010), vol. 3, 2010, Shanghai, China.
- [5] ARTHUR PECHER, JENS PETER KOFOED *Hanbook of Ocean Wave Energy*, Springer, Ocean Engineering and Oceanography, volumen 7, 2017.
- [6] IPCC: *Climate Change 2014: Synthesis Report. Contribution of Working Groups I, II and III to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Core Writing Team, R.K. Pachauri and L.A. Meyer (eds.)]. IPCC, Geneva, Switzerland, 151 pp (2014).
- [7] Hubbert, M.K.: *Nuclear Energy and the Fossil Fuels*, Publ. no. 95, Shell Development Company, Houston, Texas, June 1956. <http://www.hubbertype.com/hubbertype/1956/1956.pdf>
- [8] EPRI: *Mapping and Assessment of the United States Ocean Wave Energy Resource*, Report 1024637, Palo Alto, CA, USA (2011)
- [9] Kofoed, J.P.: *Ressourceopgørelse for bølgekraft i Danmark*, DCE Contract Reports, nr. 59, Aalborg Universitet, Aalborg (2009)
- [10] Salter, S.H.: *Wave power*, (1974)

- [11] Cruz, J.: *Ocean Waves Energy—Current Status and Future Perspectives*. Springer Series in Green Energy and Technology (2008). ISSN 1865-3529. ISBN 978-3-540-74894-6
- [12] [http://www.ocean-energy-systems.org/ocean\\_energy/waves/](http://www.ocean-energy-systems.org/ocean_energy/waves/). Accessed 08 March 2012
- [13] <http://www.equimar.org/>
- [14] Estefan, S. F., Costa, P. R., Ricarte, E. y Pinheiro, M. M. (2007), Wave energy hyperbaric device for electricity production, in International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vol. OMAE-2007, San Diego, USA.
- [15] Design Analyses Applied to a Hyperbaric Wave Energy Converter, Segen F. Estefen, Xavier Castello, Marcelo I. Lourenco and Renan M. Rossetto, Subsea Technology Laboratory, Coppe/UFRJ-Ocean Engineering Department Rio de Janeiro, Brazil.
- [16] Modelagem dinamica e otimizacao de sistemas de conversao de energia das ondas em energia electrica, Paula Bastos Garcia Rosa, Rio de Janeiro, junio de 2013.
- [17] Ocean Power Technologies Inc (2009) Making waves in power annual report of ocean power technology.
- [18] Weinstein A. Fredrikson G, Jane M et al (2003) AquaBuoy the offshore wave energy converter numerical modeling and optimization. OCEANS04 MTTIEEE TECHNOCEAN04 4:1854-1859.
- [19] Weber J, Costello R, Mouwen F et al (2010) Techno-economic WEC system optimisation- methodology applied to Wavebob system definition. In: 3rd international conference on ocean energy (ICOE).
- [20] Josset C, Babarit A, Clement AH (2007) A wave to wire model of the SEAREV wave energy converter. Proc Inst Mech ENg M 221:81-93.
- [21] De Sousa Prado MG, Gardner F, Damen M, Polinder H (2006) Modelling and test results of the Archimedes wave swing. Proc Inst Mech ENg A 220:855-868.
- [22] Pizer DJ, Retzler C, Henderson RM et al (2005) Pelamis WEC recent advances in the numerical and experimental modelling programme. In: Proceedings of 6th European wave tidal energy conference, pp 373-378.
- [23] Robust Control of Wave Energy Converters, Francesco Fusco and John V. Ringwood, IEE conference on control applications, October 2014

- [24] Budal K, Falnes J (1980) Interacting point absorbers with controlled motion. In: Count B (ed) Power from sea waves. Academic Press, London, pp 381-399.
- [25] Budal K (1981) Model experiment with a phase-controlled point absorber. In: Second international symposium on wave tidal energy, pp 191-206.
- [26] Korde U (2002) Latching control of deep water wave energy devices using an active reference. *Ocean Eng* 29:1343-1355.
- [27] Babarit A, Duclos G, Clement AH (2004) Latching control of power take off oscillator carried by a wave activated body. In: International workshop on water waves and floating bodies, Longyearbyen, Norway.
- [28] Bjartelarsson T, Falnes J (2006) Laboratory experiment on heaving body with hydraulic power take-off and latching control. *Ocean Eng* 33:847-877.
- [29] Salter SH (1980) Apparatus for extracting power from waves on water.
- [30] Korde UA (2000) Control system applications in wave energy conversion. In: OCEANS 2000 MTS/IEEE conference and exhibition conference proceedings, IEEE, Rhode Island, USA, pp 1817-1824.
- [31] Richter M (2011) Different model predictive control approaches for controlling point absorber wave energy converters. University Stuttgart.
- [32] Gieske P (2007) Model predictive control of a wave energy converter: Archimedes wave swing. Delft University of Technology, Delft.
- [33] Ricci P ,LopezJ, SantosM, Ruiz-MinguelaP, VillateJL, SalcedoF, etal. Control strategies for a wave energy converter connected to a hydraulic powertake-off. *IET Renew Power Gener* 2011.
- [34] Falnes J, Lillebekken PM. Budals latching-controlled-buoy type wave-power plant. In: 5th European wave energy conference, 2003.
- [35] Lopes MFP,Hals J,Gomes RPF,Moan T,Gato LMC,Falcão AF. Experimental and numerical investigation of non-predictive phase-control strategies for a point-absorbing wave energy converter. *Ocean Eng* 2009.
- [36] Henderson R.Design, simulation, and testing of a novel hydraulic power take-off system for the Pelamis wave energy converter. *Renew Energy*, 2006.

- [37] Controle de velocidade de uma turbina para um sistema de conversão de energia das ondas, Paula B., Fernando Lizarralde, Jose Paulo V. S.
- [38] efficiency optimization in a wave energy hyperbaric converter, Paula B. Jose P. V. S., Fernando Lizarralde, Segen F. Paulo R. International Conference on clean electrical power, june 2009.
- [39] On the sensitivity of optimal wave energy device geometry to the energy maximizing control system, Paula B. John Ringwood, IEEE transactions on sustainable energy, january 2015.
- [40] M.V. Kothare, V. Balakrishna, and M. Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32:1361-1379, 1996.
- [41] Z. Wan and M.V. Kothare. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities, *Automatica*, 39:837-846, 2003.
- [42] B. Ding, Y. Xi, M.T. Cychowski, and T. O'Mahony. Improving off-line approach to robust MPC based-on nominal performance cost. *Automatica*, 43:158-163, 2007
- [43] B. Ding, T. Zou. Varying-horizon off-line robust predictive control for time-varying uncertain systems. *Control Theory and Applications*, Chinese, 2006.
- [44] [www.ansys.com/Products/Other+Products/ANSYS+AQWA](http://www.ansys.com/Products/Other+Products/ANSYS+AQWA)
- [45] [www.wamit.com](http://www.wamit.com)
- [46] [www.ultramarine.com](http://www.ultramarine.com)
- [47] [www.lheea.ec-nantes.fr/cgi-bin/hgweb.cgi/nemoh](http://www.lheea.ec-nantes.fr/cgi-bin/hgweb.cgi/nemoh)
- [48] Pelton Turbines, Zh.Zhang, Springer, Switzerland, 2016
- [49] Keck, H., Vullioud, G., y Joye, P. (2000). Commissioning and operation experience with the worlds largest Pelton turbines Bieudron. Hydro Vision, Charlotte, USA.
- [50] Zhang, Zh. (2003). Theoretical and experimental investigations on the sources of the head effect in Pelton turbines. Sulzer Innotec report, Nr.: TB03-0160, Winterthur, Switzerland.
- [51] Differential Inclusions, Set-Valued Maps and Viability Theory, J.P. Aubin A. Cellina, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.

- [52] LMIs in Control Systems, Analysis, Design and Applications, Guang-Ren Duan, Hai-Hua Yu, CRC Press, 2013, pag 57-60
- [53] John J. Jarvis Mokhtar S. Bazaraa and Hanif D. Sherali. Linear Programming and Network Flows. John Wiley y Sons, second edition, 1990.
- [54] Nemirovski, A., and P. Gahinet, "The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities", Proc. Amer. Contr., 1994.
- [55] Nesterov, Yu, and A. Nemirovski, interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications, SIAM Books, Philadelphia. 1994.
- [56] LMI control toolbox user's guide, Pascal M. Gahinet and Arkadi Nemirovski, iee, 2014.
- [57] S. Boyd, L. El Ghaoui, E.Feron, y V.Balakrishnan. Linear matrix inequalities in systems and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.