



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS  
NATURALES – PERFORACIÓN

MODELO DE PÉRDIDAS DE CIRCULACIÓN DE UN POZO EN UN YACIMIENTO  
FRACTURADO CONSIDERANDO INTERACCIÓN MATRIZ-FRACTURA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

DOLORES DE JESÚS LUNA BARRERA

TUTOR:  
Dr. ERICK EMANUEL LUNA ROJERO  
FACULTAD DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., OCTUBRE 2018.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Samaniego Verduzco Fernando

Secretario: Dr. Valdiviezo Mijangos Oscar Cerapio

Vocal: Dr. Luna Rojero Erick Emanuel

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Ramírez Jaramillo Edgar

2<sup>d o.</sup> Suplente: Ing. Cruz Espinoza Leonardo

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, Ciudad de México.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Luna Rojero Erick Emanuel

-----

**FIRMA**

## AGRADECIMIENTOS

**A Dios** por su compañía en esta travesía, por brindar la fuerza necesaria en los momentos difíciles y porque desistir jamás fue una opción. Él jamás me abandona. Muchas gracias.

**A mi madre**, Laura A. Barrera Carrillo por su amor, por procurar mi salud, por tus esfuerzos y sacrificios que has hecho en tu vida por nosotros, tus hijos; por alentar mis sueños y por demostrar que, sí tienes la actitud lo puedes lograr. Gracias mamá, te amo.

**A Raúl** Rentería Salazar (gordo) por tú cariño, por tú apoyo incondicional, por ser un segundo padre y estar siempre con nosotros. Gracias gordo, te quiero mucho.

**Mamá y Gordo**, ustedes son el pilar de la casa, a pesar de todos los acontecimientos que hemos vivido, aún seguimos de pie, juntos y unidos como familia.

**A mis hermanos**, Jorge, Adriana y Luis, por sus ocurrencias, por los memes diarios, por estar conmigo y por hacerme sentir en casa cuando estaba lejos. Porque sí uno falta, estaríamos incompletos. Somos un equipo en las buenas, en las malas y en las fiestas. Porque nuestro amor incondicional es fuerte y siempre encontramos el lado positivo a cada adversidad. Los amo.

**A mis consentidos sobrinos:** Monserrat, Alejandra, Kalem, Oliver, Henry y bebe. Porque sólo su presencia es motivo de alegría en la casa. Cada uno se distingue por su personalidad, por la forma de expresar su cariño y porque son unidos en sus travesuras. Este trabajo, es por ustedes, mis niños, para que logren sus sueños, sus viajes y sus aventuras. Recuerden que el límite, sólo está en tu mente. Los amo, porque son las personitas más lindas de mi mundo.

**A mi padre**, Luis F. Luna Santos, por tu cariño y por enseñarme ser responsable. No somos la persona más expresiva, pero te quiero mucho papá.

**A mi abuelita**, María del C. Santos, gracias por tu inmenso amor y cuidarme desde el día en que nací, por tu apoyo incondicional y por las bendiciones que siempre me das en cada llamada. Dios me dio la fortuna de tenerte aún con vida, a la abuelita más linda y amorosa del mundo. Te amo abue.

## AGRADECIMIENTOS

---

**A mi director de tesis, Dr. Erick E. Luna Rojero**, por su paciencia y dedicación para dirigirme en este trabajo de tesis, por su tiempo para revisar y corregir los avances, por compartir sus conocimientos y experiencias. Le agradezco su apoyo, su confianza y amistad. Mi respeto y admiración por su humildad.

**A mis sinodales**, por el tiempo que le dedicaron para revisar y enriquecer este trabajo, por compartir y explicar sus conocimientos. Su apoyo fue esencial para la culminación de este proyecto.

**Al Ing. Abel Hernández** por su autorización para asistir al propedéutico y conservar mi trabajo, por su confianza, apoyo y motivación para ingresar a la maestría. Muchas gracias.

**Al Ing. Rafael Zepeda**, le agradezco su apoyo en los trámites para ingresar a la maestría, su experiencia personal y motivación para lograr esta meta.

**Al M.I Alexis Cruz M.**, por tu alma aventurera, soñadora e ingeniosa. Gracias por la motivación e inspiración para emprender este camino, por compartir tu experiencia personal y conocimientos profesionales, por tus consejos y apoyo incondicional. Retrouvailles. No conoces a las personas por accidente. Siempre hay una razón, una lección o una bendición.

**A mi amiga Guadalupe Villarreal S.**, cuando te conocí sólo esperaba que fueras mi compañera de esta travesía, pero te convertiste en una mejor amiga. Esta experiencia fue una aventura inolvidable, compartimos momentos de decepción, de alegrías, tristezas y locuras, pero en todo momento estuvimos juntas y teniendo la misma suerte. Siempre recordaré nuestro primer viaje, los conciertos, lo divertido que es ir de compras contigo y las noches de películas. Te quiero manis, gracias por todo, sin ti no hubiera sido tan divertido estar aquí. No cualquiera me recibe y me llama por teléfono como tú lo haces. Eres genial.

**A mi roomie, Osvelia Campos M.**, es un placer haberte conocido. Gracias por alentarme para hacer ejercicio, aunque no hemos hecho en estos últimos meses; por compartir tus experiencias personales, tus conocimientos profesionales y auditar esta tesis. Como olvidar los domingos de serie, palomitas y arroz con leche; los cafés y cena de media noche; y las platicas extensas hasta la madrugada. En poco tiempo consolidamos nuestra amistad y deseo que sea para toda la vida. Laotong.

## AGRADECIMIENTOS

---

**A mis amigas: Mayra, Rita, Jessica y Dania**, gracias niñas por escucharme en las buenas y en las malas, por sus consejos en los momentos de tristezas y apoyo incondicional. Por la antigüedad de nuestra amistad, es para toda la vida. Las buenas amigas son como las estrellas, no siempre les ves, pero sabes que siempre están ahí.

**A Socorro Villa Olvera**, por tu apoyo incondicional en los momentos más difíciles y las reuniones en el café. No importa las circunstancias, eres parte de nuestra pequeña familia poco normal. Los amigos son esa familia que nosotros elegimos. Te quiero mucho.

**Al laboratorio de Ingeniería de Yacimientos**, Mary Reyes, Mireya, Janeetd Castañeda, Rogelio Magaña, Ángeles Romero, José y Betsy, les agradezco por la despedida, por los momentos en la hora del amigo, por la aventura de muestrear la Laguna, por sus conocimientos y confianza en los análisis, y por su amistad. Llegar al laboratorio, conocerlos y aprender de ustedes, ha sido una gran experiencia en mi vida, no me equivoque de carrera.

**A Kanutam:** Carlita, Vianey, Ruben, Saúl, Edgar y Tobit, más que compañeros de trabajo, se convirtieron en amigos, gracias por la oportunidad de trabajar con ustedes, por su paciencia, por sus consejos, por ser un excelente equipo de trabajo, por compartir sus conocimientos y experiencias profesionales, por apoyarme durante mi ausencia y por la despedida sorpresa. Equipo de diseño compartimos momentos divertidos, de regaños y monitoreos.

**Al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología (CONACyT)** por la oportunidad de superarme y el apoyo económico brindado para llevar a cabo mis estudios de posgrado.

**A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)**, por la oportunidad de estudiar el posgrado en sus aulas, por los conocimientos y experiencias adquiridas para mi formación profesional.

**"Lo que nos parecen pruebas amargas, son a menudo bendiciones disfrazadas".**

**Oscar Wilde.**

## Contenido

<i>AGRADECIMIENTOS</i> .....	<i>iii</i>
<i>RESUMEN</i> .....	<i>xiv</i>
<i>INTRODUCCIÓN</i> .....	<i>xv</i>
<i>CAPÍTULO 1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA</i> .....	<i>1</i>
1.1.- Hipótesis .....	2
1.2.- Objetivos .....	2
1.2.1.- Objetivo general .....	2
1.2.2.- Objetivos específicos .....	2
1.3.- Alcances .....	2
<i>CAPÍTULO 2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES</i> .....	<i>3</i>
2.1.- Descripción de un yacimiento naturalmente fracturado .....	3
2.1.1- Yacimiento .....	3
2.1.2.- Caracterización de los yacimientos .....	4
2.1.3.- Yacimiento naturalmente fracturado .....	4
2.1.4.- Clasificación de los yacimientos fracturados .....	5
2.1.5.- Interacción matriz-fractura .....	6
2.1.6.- Fractura .....	7
2.1.7.- Clasificación de las fracturas .....	8
2.1.8.- Morfología de la fractura .....	9
2.1.9.- Espaciamiento de las fracturas .....	11
2.2.- Propiedades físicas .....	11
2.2.1.- Porosidad .....	11
2.2.2.- Permeabilidad .....	13
2.2.3.- Presión y esfuerzos .....	15
2.3.- Problemáticas en un yacimiento fracturado .....	16
2.3.1.- Pérdidas de circulación .....	16
2.3.2.- Identificación de las pérdidas de lodo .....	18
2.3.3.- Tipos de pérdidas de circulación .....	19
<i>CAPÍTULO 3 MODELOS DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS</i> .....	<i>21</i>
<i>CAPÍTULO 4 MODELO ESTÁTICO</i> .....	<i>28</i>

## CONTENIDO

---

4.1.- Estructura estática del sistema de fracturas .....	28
4.2.- Posición general para el gasto y presión en cada segmento de fractura.....	31
4.3.- Ubicación de las fracturas respecto a cada bloque de matriz.....	33
4.4.- Abertura de fractura .....	35
4.5.- Cálculo de la porosidad total en la vecindad del pozo .....	35
4.5.1.- Porosidad de matriz.....	36
4.5.2.- Porosidad de fractura .....	36
<i>CAPÍTULO 5 FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO.....</i>	<i>38</i>
5.1.- Desarrollo del modelo de flujo para una sola fractura.....	38
5.1.1.- Cálculo del gasto de entrada en la fractura .....	44
5.1.2.- Cálculo del gasto de salida en la fractura .....	45
5.2.- Cálculo de la presión en la matriz para la fractura .....	46
<i>CAPÍTULO 6 MODELO DINÁMICO.....</i>	<i>48</i>
6.1.- Desarrollo del modelo en una red de fracturas .....	48
6.2.- Cálculo del gasto matriz-fractura .....	53
6.3.- Cálculo de la presión en la matriz.....	53
6.4.- Cálculo de la permeabilidad.....	54
6.5.- Método numérico para resolver el sistema $Ax = b$ .....	55
6.6.- Diagrama de flujo para el modelo en una red de fracturas .....	57
<i>CAPÍTULO 7 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS .....</i>	<i>60</i>
7.1.- Análisis de la permeabilidad total.....	60
7.1.1.- Análisis de la permeabilidad variando el número de fracturas.....	61
7.1.2.- Análisis de la permeabilidad con diferentes aberturas de fractura.....	66
7.1.3.- Análisis de la permeabilidad a diferente porosidad de la matriz .....	69
7.1.4.- Análisis de la permeabilidad efectiva variando el diferencial de la presión..	71
7.2.- Análisis del gasto .....	72
7.2.1.- Análisis de los gastos variando el diferencial de la presión $\Delta p$ .....	73
7.2.2.- Análisis del gasto variando la porosidad de la matriz .....	81
7.2.3.- Análisis del gasto con diferentes aberturas de fracturas .....	90
<i>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</i>	<i>99</i>
<i>NOMENCLATURA .....</i>	<i>103</i>

## CONTENIDO

---

<i>BIBLIOGRAFÍA</i> .....	106
<i>APÉNDICE</i> .....	112
A.1.- Balance del gasto en el diferencial de $z$ .....	112
A.2.- Evaluando el flujo que interacciona en la matriz, .....	113
A.3.- Evaluando la presión en el sistema.....	114
A.4.- Evaluando la ecuación de Hagen-Poiseuille .....	117
A.5.- Método numérico.....	122

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1.- Modelo del yacimiento naturalmente fracturado .....	1
Figura 2.1.- Yacimiento .....	3
Figura 2.2.- Roca naturalmente fracturada .....	5
Figura 2.3.- Clasificación de los yacimientos naturalmente fracturados.....	6
Figura 2.4.- Clasificación geométrica de poro .....	12
Figura 2.5.- Secciones de pérdidas de circulación .....	17
Figura 3.1.- Idealización de un medio poroso heterogéneo .....	21
Figura 3.2.- Diagrama de frecuencia y esquema de escalamiento del ancho, longitud, y espaciamiento de la fractura .....	23
Figura 4.1.- Geometría de la vecindad del pozo en una malla 2D.....	28
Figura 4.2.- Estructura de la malla en la vecindad del pozo en 2D .....	29
Figura 4.3.- Etiqueta de posición para cada segmento de fractura en una malla 2D .....	32
Figura 4.4.- Etiqueta de posición para cada bloque de matriz en una malla 2D.....	34
Figura 5.1.- Flujo a través de una fractura entre dos bloques de matriz porosa .....	38
Figura 5.2.- Balance del gasto en un diferencial de $z$ .....	39
Figura 5.3.- Parámetro de ajuste $\delta$ .....	42
Figura 6.1.- Balance del gasto entre cada nodo.....	48
Figura 6.2.- Presión en cada nodo central .....	49
Figura 6.3.- Condiciones de frontera en la malla.....	49
Figura 6.4.- Flujo de entrada y salida en cada fractura .....	50
Figura 6.5.- Simetría utilizada en el cálculo de la permeabilidad en dirección perpendicular al pozo .....	55
Figura 6.6.- Estructura de la matriz dispersa generada dentro del programa (vista parcial).....	56
Figura 6.7.- Diagrama de flujo .....	58
Figura 7.1.- Geometría del modelo estático de la vecindad del pozo para el análisis de la permeabilidad .....	61
Figura 7.2.- Análisis de la permeabilidad variando el número de fracturas verticales....	65
Figura 7.3.- Análisis de la permeabilidad variando el número de fracturas horizontales .....	66

## LISTA DE FIGURAS

Figura 7.4.- Análisis de la permeabilidad total a diferentes aberturas de fracturas .....	68
Figura 7.5.- Análisis de la permeabilidad total a diferentes porosidades de matriz .....	70
Figura 7.6.- Análisis de la permeabilidad total variando el diferencial de presión .....	72
Figura 7.7.- Análisis de la pérdida total versus tiempo a diferentes deltas de presión ...	74
Figura 7.8.- Análisis de la pérdida total en función del diferencial de presión .....	75
Figura 7.9.- Análisis del gasto perdido por absorción en la matriz con diferentes delta de presión .....	76
Figura 7.10.- Análisis del gasto perdido por absorción en la matriz en función del diferencial de presión.....	78
Figura 7.11.- Análisis del gasto perdido en la red de fracturas con diferentes deltas de presión.....	79
Figura 7.12.- Análisis del gasto perdido en la red de fracturas en función del diferencial de presión.....	80
Figura 7.13.- Análisis de la pérdida total con diferentes porosidades de matriz en función del tiempo.....	82
Figura 7.14.- Análisis de la pérdida total en función de la porosidad de la matriz.....	83
Figura 7.15.- Análisis del gasto perdido en la red de fracturas con diferentes porosidades de la matriz en función del tiempo.....	84
Figura 7.16.- Análisis del gasto perdido en la red de fracturas en función de la porosidad.....	86
Figura 7.17.- Análisis del gasto perdido por absorción en la matriz con diferentes porosidades de la matriz en función del tiempo.....	87
Figura 7.18.- Análisis del gasto perdido por absorción en la matriz en función de la porosidad.....	88
Figura 7.19.- Modelo dinámico en la vecindad de pozo para el análisis de la pérdida total del fluido .....	90
Figura 7.20.- Análisis de la pérdida total a diferentes aberturas de fracturas en función del tiempo.....	91
Figura 7.21.- Análisis de la pérdida total en función de la abertura de fractura.....	92
Figura 7.22.- Gasto perdido en la red de fracturas a diferentes aberturas de fracturas en función del tiempo.....	94

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 7.23.- Gasto perdido en la red de fracturas en función de la abertura de fractura .....	95
Figura 7.24.- Volumen acumulado perdido por absorción en la matriz a diferentes aberturas en función del tiempo .....	96
Figura 7.25.- Volumen acumulado perdido por absorción en la matriz en función de la abertura de fractura .....	98
Figura A.0.1 Balance del gasto en un diferencial de $z$ .....	112
Figura A.0.2.- Estructura de la matriz dispersa generada dentro del programa (vista parcial).....	123
Figura A.0.3.- Información solicitada en la subrutina MGMRES.....	124
Figura A.0.4.- Algoritmo GMRES reiniciado en sparse (paso de inicio) .....	125
Figura A.0.5.- Algoritmo de Gram Schmidt desarrollado en sparse .....	125
Figura A.0.6.- Código para las rotaciones de Givens en la subrutina MGMRES_ST ...	127

## LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1.- Clasificación de fracturas experimentales .....	8
Tabla 2.2.- Clasificación de fracturas que ocurrieron naturalmente .....	8
Tabla 7.1.- Datos de la vecindad del pozo en estudio.....	63
Tabla 7.2.- Resultados de la permeabilidad variando el número de fracturas verticales .....	64
Tabla 7.3.- Resultados de la permeabilidad variando el número de fracturas horizontales .....	65
Tabla 7.4.- Resultados de la permeabilidad variando la abertura de fractura ( <b><math>i_{max} = 16</math> y <math>j_{max} = 31</math></b> ) .....	67
Tabla 7.5.- Resultados de la permeabilidad variando la abertura de fractura ( <b><math>i_{max} = 30</math> y <math>j_{max} = 21</math></b> ) .....	68
Tabla 7.6.- Resultados de la permeabilidad con diferentes porosidades de matriz.....	70
Tabla 7.7.- Resultados de la permeabilidad variando el diferencial de presión.....	71
Tabla 7.8.- Constantes de ajuste para cada diferencial de presión de la pérdida total ..	74
Tabla 7.9.- Constantes de ajuste para cada diferencial de presión para el gasto perdido por absorción en la matriz.....	77
Tabla 7.10.- Constantes de ajuste para cada diferencial de presión en el gasto perdido en la red de fracturas.....	79
Tabla 7.11.- Resultados de la pérdida total, el gasto perdido en la red de fracturas y el gasto perdido por absorción en la matriz .....	81
Tabla 7.12.- Constantes de ajuste para cada porosidad de la matriz para la pérdida total.....	82
Tabla 7.13.- Constantes de ajuste y coeficiente de determinación para el gasto perdido en la red de fracturas.....	85
Tabla 7.14.- Constantes de ajuste para el gasto perdido por absorción en la matriz .....	87
Tabla 7.15.- Resultados de la porosidad y flujo con diferentes porosidades de matriz.....	89
Tabla 7.16.- Constantes de ajuste para la pérdida total cambiando la abertura de fractura .....	92

## LISTA DE TABLAS

---

Tabla 7.17.- Constantes de ajuste para el gasto perdido en la red de fracturas cambiando la abertura de fractura .....	95
Tabla 7.18.- Constantes de ajuste para el volumen acumulado perdido por absorción en la matriz cambiando la abertura de fractura .....	97

## RESUMEN

Aproximadamente el 70% de la producción mundial de petróleo proviene de campos convencionales maduros, en México más del 80% de la producción total se produce en estos campos (Franco, 2017). La mayoría de los yacimientos maduros mexicanos son naturalmente fracturados y actualmente tienen una presión más baja que la inicial, estas dos condiciones ocasionan graves problemas de pérdidas de circulación durante la perforación, además de pérdidas económicas y tiempos no productivos (TNP). En el periodo del 2008 al 2011, las operaciones de reparación de pozos en la zona marina, representaron en promedio el 52% de los TNP por problemas de inestabilidad del agujero y desabasto del fluido de control por la pérdida total de circulación (Cruz, 2013). En el 2009, con el objetivo de prevenir y reducir las pérdidas de circulación en el campo Cashiriari, Perú, se utilizó un software que predice el ancho de la fractura y estima la distribución del tamaño de las partículas del material de fortalecimiento del pozo (Barrett y cols, 2010).

Debido a la problemática de las pérdidas de fluido que ingresa en la matriz y a través de las fracturas, se desarrolla un modelo matemático que calcula las pérdidas de circulación de un fluido newtoniano en un yacimiento naturalmente fracturado de doble porosidad y permeabilidad con interacción matriz-fractura, durante la perforación de un pozo vertical, al cual se inyecta un fluido a una presión fija. El modelo desarrollado se programa en fortran y se realizan diferentes simulaciones para estimar la pérdida de circulación y la permeabilidad efectiva.

Se concluye, de las simulaciones numéricas, que la permeabilidad depende linealmente del número de fracturas (horizontales o verticales), el flujo en la red de fracturas se vuelve constante después de saturar la matriz, y el fluido newtoniano que se pierde por absorción en la matriz depende de la abertura de fractura que presente el yacimiento. Se propone una función general que cuantifica el gasto perdido por absorción en la matriz, el gasto perdido en la red de fracturas y la pérdida total del fluido, en función del tiempo y de la porosidad de la matriz, abertura de la fractura y el diferencial de presión.

## INTRODUCCIÓN

El petróleo, es la fuente de energía principal que se consume, aproximadamente el 70% de la producción mundial acumulada proviene de campos con grandes reservas (Franco, 2017). Para extraer estas reservas es necesario perforar pozos, por lo tanto, es trascendental estudiar los problemas que se presentan durante la perforación, tales como el atascamiento de las tuberías de perforación, colapso en el pozo, presencia de lutitas deleznable, domos salinos y pérdidas de circulación. Tan sólo en el Golfo de México, estos problemas representan el 44% del tiempo no productivo (Cook y cols, 2012) y estadísticas de API SURVEY muestran que entre el 19% y el 24% del costo total de los pozos se deben a pérdidas de circulación significativas (Ward, 2005). Este problema último se analiza en este trabajo de tesis, en particular cuando las pérdidas se deben a que el pozo atraviesa zonas de alto fracturamiento.

Las pérdidas de circulación se producen en zonas con alta permeabilidad, fracturadas, cavernosas ó despresurizadas. Las zonas despresurizadas o presiones subnormales se observan con frecuencia en los yacimientos maduros (Barriol y cols, 2006). Este tipo de yacimientos representan el 70% de la producción mundial de petróleo; son campos maduros los que tienen más de 30 años de explotación. En México, los campos maduros contribuyen con más del 80% de la producción total (Franco, 2017), se caracterizan por la problemática comúnmente encontrada de ser altamente fracturados y despresurizados, con invasión prematura de agua y de gas en algunas zonas del campo (Lozada, 2015), por lo que las pérdidas de circulación son importantes para su explotación.

Las soluciones para contrarrestar las pérdidas de circulación consisten en reducir la densidad del fluido, minimizar la tasa de circulación, incrementar la viscosidad del fluido, cementar, utilizar materiales de control de pérdidas (Alba Moscoso, 2017) y perforar bajo balance (Ghalambor y cols, 2014). Las propiedades reológicas de los lodos son importantes para predecir los aumentos de presión, minimizar el daño de la formación, minimizar la posibilidad de pérdida de circulación, controlar la erosión del pozo y

## INTRODUCCIÓN

---

optimizar los parámetros de perforación, tales como la velocidad de penetración y la limpieza del pozo (Williamson, 2013).

Para predecir las pérdidas de fluido durante la perforación se debe tener conocimiento de la presión de poro, la caracterización del yacimiento, la orientación y abertura de las fracturas, además de la interacción de la red de fracturas con los bloques de matriz. Para el transporte en fracturas, se han desarrollado modelos matemáticos que describen los fenómenos físicos y el mecanismo del flujo dentro de las fracturas, basados en modelos reológicos: Newtoniano, Plástico de Bingham y Ley de Potencia. Estos modelos, suponen que la abertura de la fractura es constante durante la pérdida de fluido (Ghalambor y cols, 2014).

En cuanto a la interacción entre las fracturas y la matriz, Berman (1953) presenta una solución para la caída de presión del flujo de Poiseuille en un canal rectangular con dos paredes igualmente porosas y permeables. Más tarde, Warren y Root (1963) desarrollan un modelo conceptual de doble porosidad heterogénea, para un medio poroso permeable con la finalidad de caracterizar el transporte de fluidos. Después, Nelson (1987) propuso un modelo conceptual ortogonal modificado, donde la distribución de frecuencia en las fracturas se calcula como una distribución de probabilidad log-normal, cambiando la abertura de fracturas. Con base en la solución de Berman, Karode (2001) presenta expresiones analíticas para la caída de presión en módulos de matrices de flujo cruzado.

A partir del concepto de doble porosidad, Sarda y cols (2002) presentan un modelo de red de fracturas compleja en 3D, que simula la interacción matriz-fractura con un número mínimo de bloques de matriz. Más adelante, Shen y cols (2008) exponen un estudio integrado de caracterización y modelado de fracturas en 3D del campo Cantarell, con el objetivo de identificar los tipos de fracturas, predecir su distribución en los yacimientos y determinar las propiedades hidráulicas de diferentes conjuntos de fracturas.

## INTRODUCCIÓN

---

Con la finalidad de cuantificar las pérdidas de fluido por absorción en la matriz, el gasto perdido en la red de fracturas, la pérdida total del fluido y la permeabilidad efectiva, en este trabajo se presenta un modelo matemático para un yacimiento naturalmente fracturado de doble porosidad y permeabilidad en dos dimensiones, considerando una malla con distribución ortogonal de las fracturas y ubicación de un pozo perforado verticalmente en el centro. El sistema de ecuaciones de flujo se resuelve por medio de un método iterativo, para un fluido newtoniano ubicado en las fracturas que interacciona con la matriz.

## CAPÍTULO 1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Considere un yacimiento fracturado de doble porosidad y permeabilidad. Durante la perforación de un pozo vertical, se inyecta un fluido a una presión fija y se quiere conocer la cantidad de fluido que se pierde en la matriz y las fracturas.

Por simplicidad se trabaja con un modelo 2D, donde la matriz tiene permeabilidad ( $k_m$ ) y porosidad ( $\phi_m$ ). Las fracturas tienen una abertura que obedece a una distribución de probabilidad log-normal y el fluido se considera newtoniano como primera aproximación. En el capítulo cuatro, modelo estático, se plantea el modelo conceptual para un medio poroso permeable donde se representa el comportamiento de flujo del sistema de fracturas mediante una malla definida por la geometría existente en la vecindad del pozo, donde la matriz y la distribución de las fracturas horizontales y verticales se ubican de acuerdo a las coordenadas definidas por los índices discretos ( $i, j$ ). La **Figura 1.1** esquematiza un yacimiento naturalmente fracturado; se selecciona un pozo para el estudio del modelo estático y dinámico, el cual se proyecta en una malla 2D con fracturas horizontales y verticales.

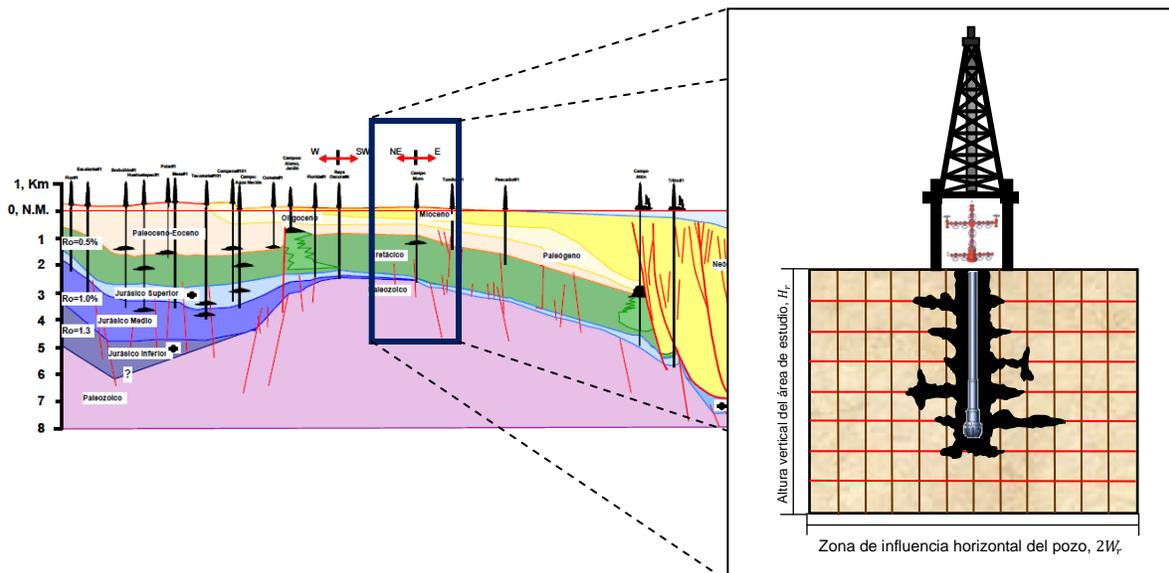


Figura 1.1.- Modelo del yacimiento naturalmente fracturado.

### 1.1.- Hipótesis

Es posible modelar las pérdidas de fluido en un yacimiento naturalmente fracturado, durante la perforación de un pozo vertical, utilizando las ecuaciones de transporte en las fracturas acopladas con las de la matriz.

### 1.2.- Objetivos

#### 1.2.1.- Objetivo general

Generar un modelo matemático para calcular las pérdidas de circulación de un fluido newtoniano en un yacimiento naturalmente fracturado, considerando interacción matriz-fractura.

#### 1.2.2.- Objetivos específicos

- Modelado de un flujo monofásico en una red de fracturas interaccionando con la matriz.
- Programación de un código numérico a partir del modelo desarrollado.
- Calibrar el modelo con un caso real.

### 1.3.- Alcances

- ❖ Planteamiento y solución del modelo matemático de un fluido monofásico, newtoniano con interacción matriz-fractura en una sola fractura.
- ❖ Planteamiento y solución del modelo matemático de un fluido monofásico, newtoniano con interacción matriz-fractura para una red de fracturas.
- ❖ Simulaciones numéricas para estimar las pérdidas de circulación.
- ❖ Calibración del modelo estático con datos reales de campo.

## CAPÍTULO 2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En este capítulo se describen los conceptos de yacimiento, fractura y propiedades petrofísicas con interacción matriz-fractura, la influencia de estos factores en las pérdidas de circulación y los problemas que se presentan en el momento de perforar un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado.

### 2.1.- Descripción de un yacimiento naturalmente fracturado

#### 2.1.1- Yacimiento

Un yacimiento es un sistema constituido por una roca madre, roca sello, trampa y contenido de fluidos, como se observa en la **Figura 2.1**. La roca madre se caracteriza por sus estratos porosos y permeables, donde se origina el hidrocarburo. La roca sello por su plasticidad, tiende a deformarse en lugar de fracturarse durante los movimientos de la corteza terrestre, el sello más importante es la lutita. Las trampas se clasifican en estructurales y estratigráficas, por su material impermeable tienen la función de contener los hidrocarburos. Los estratos porosos de un yacimiento están ocupados por agua e hidrocarburos. La mayoría de las acumulaciones de hidrocarburos del mundo ocurren en areniscas y rocas carbonatadas (Aguilera, 1995).

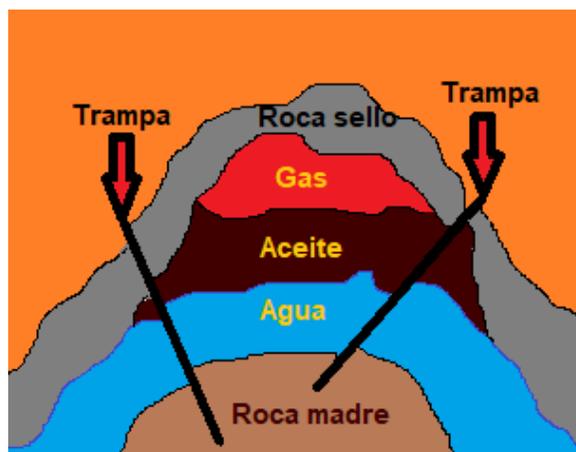


Figura 2.1.- Yacimiento

### 2.1.2.- Caracterización de los yacimientos

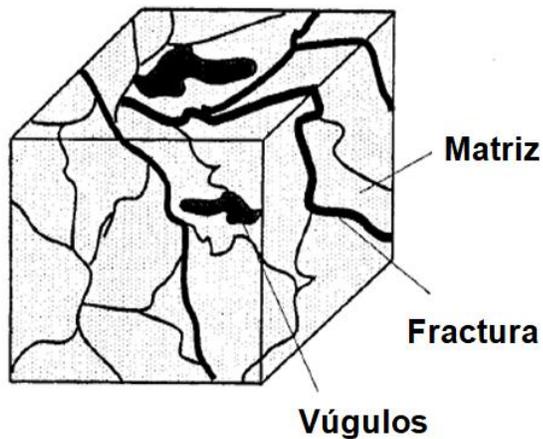
La optimización de la explotación de un yacimiento requiere una descripción completa de la formación (Cinco Ley, 1996). Aguilera (2003) recomienda que la clasificación y caracterización de un yacimiento, además de propiedades de fractura y matriz, se deben vincular con las disciplinas de geofísica, geología e ingeniería. Propone:

- Clasificar el yacimiento geológicamente teniendo en cuenta que las fracturas pueden ser tectónicas, regionales o contraccionales.
- Evaluar el sistema de poros.
- Cuantificar el coeficiente de almacenamiento de hidrocarburos de la matriz y las fracturas.
- Comprender la interacción matriz-fractura.

Desde un punto de vista de ingeniería, las evaluaciones y caracterización de los yacimientos naturalmente fracturados se basan en fuentes directas e indirectas de la información. Las fuentes directas de información son: núcleos, recortes de perforación de fondo de pozo, fotografías, y videos de la perforación. Las fuentes indirectas incluyen afloramientos, histórico de perforación, registros de pozos convencionales y especializados, información sísmica (preferentemente 3D), pruebas de pozo, y el histórico de producción (Aguilera, 2003).

### 2.1.3.- Yacimiento naturalmente fracturado

Un yacimiento naturalmente fracturado está constituido por fracturas naturales y una roca matriz, adicionalmente, en algunas ocasiones es posible encontrar vórgulos, como se muestra en la **Figura 2.2**. Las fracturas naturales pueden tener un efecto positivo o negativo en el flujo de fluido (Aguilera, 1995), éstas actúan como canales para producir altas tasas de flujo hacia los pozos. Los hidrocarburos se encuentran en las fracturas y en la matriz (Cinco Ley, 1996).



**Figura 2.2.- Roca naturalmente fracturada (Cinco Ley, 1996).**

Los yacimientos naturalmente fracturados se encuentran prácticamente en todo tipo de litologías, incluyendo areniscas, dolomitas, calizas, carbonatos, lutitas, anhidrita, y limolita (Aguilera, 1995). Por ejemplo, se localiza yacimientos fracturados de arenisca en el campo Spraberry, Estados Unidos, de carbonatos en los campos Ain Zala y Kirkuk, Irak, de roca caliza dolomía en el campo Akal y de areniscas en el campo Balam, México.

### **2.1.4.- Clasificación de los yacimientos fracturados**

Nelson (2001) clasifica los yacimientos fracturados con base en la contribución de la porosidad y permeabilidad del sistema de fractura-matriz, como se observa en la **Figura 2.3** y se describe a continuación:

- **Yacimientos tipo 1:** las fracturas proveen la porosidad y permeabilidad sin contribución de la matriz.
- **Yacimientos tipo 2:** la porosidad y permeabilidad en la matriz es baja, mientras que las fracturas proporcionan la permeabilidad esencial para la productividad.
- **Yacimientos tipo 3:** los hidrocarburos se almacenan en la matriz debido a su alta porosidad y baja permeabilidad; las fracturas en estos yacimientos proveen permeabilidad adicional.

## CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- **Yacimientos tipo M:** tienen alta porosidad y permeabilidad en la matriz.
- **Yacimientos tipo 4:** las fracturas actúan como barreras en el flujo del hidrocarburo.
- **Yacimientos tipo G:** ésta clasificación corresponde para los yacimientos fracturados, de gas no convencionales y gas condensado, que se aproximan a la clasificación de yacimientos tipo 2.

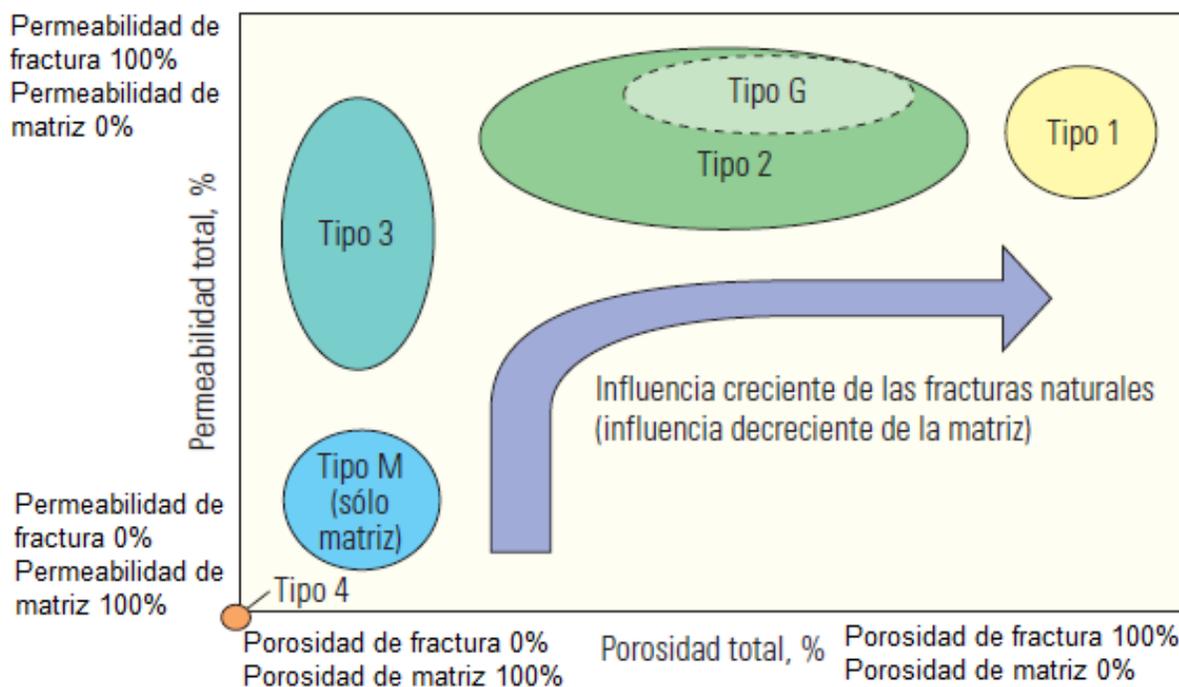


Figura 2.3.- Clasificación de los yacimientos naturalmente fracturados (Bratton y cols, 2006).

### 2.1.5.- Interacción matriz-fractura

La interacción matriz-fractura es la transferencia de los fluidos o energía que se produce en la roca del yacimiento, desde las fracturas hacia la matriz, o viceversa. Para que el flujo de fluido a través del medio poroso se lleve a cabo, debe haber una buena comunicación entre la permeabilidad de la matriz y la permeabilidad de la fractura, obteniendo una alta producción de hidrocarburos. En cambio, si no están conectados, aunque la permeabilidad en la fractura sea buena y la mayor parte del fluido se

## **CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES**

---

encuentre en la matriz, el flujo de fluido hacia el pozo será restringido o nulo, proporcionando una permeabilidad no efectiva. Los núcleos ayudan a determinar el tipo de interacción que puede darse entre la matriz y la fractura. En ellos se observa si hay vórgulos, fracturas abiertas, fracturas con o sin mineralización secundaria.

### **2.1.6.- Fractura**

Nelson (2001), define que una fractura de yacimiento como una discontinuidad plana macroscópica de origen natural en la roca debido a la deformación o diagénesis física. Las fracturas naturales, que ocurren en diferentes orientaciones, horizontal, vertical e inclinada (Majidi, et al., 2010), pueden tener un efecto positivo o negativo en el flujo de fluido. Si el efecto de las fracturas sobre el flujo de fluido es despreciable, el yacimiento se puede tratar como un yacimiento "homogéneo", desde una perspectiva de ingeniería geológica (Aguilera, 2003).

Para los yacimientos donde las fracturas tienen un efecto positivo o negativo en el flujo de fluido, se deben tener conocimientos de la magnitud y dirección de los esfuerzos principales in situ; azimut, buzamiento, espaciado y abertura de fractura, porosidad de la matriz y fractura, permeabilidad de la matriz y fractura, saturación del agua de la matriz y fractura; con estos datos se realiza el cálculo de distribución de los hidrocarburos en el lugar, entre la matriz y las fracturas, y la capacidad de flujo del pozo (Aguilera, 2003).

Un pozo puede ser interceptado por una o varias fracturas, su trayectoria puede pasar a través de un plano de fractura inclinado. Para una fractura vertical o inclinada, el flujo no será radialmente simétrico. La distribución de asimetría, depende de la densidad relativa del fluido desplazado (lodo) y de desplazamiento (fluido de formación) (Majidi y cols, 2010).

### 2.1.7.- Clasificación de las fracturas

Las fracturas naturales pueden clasificarse de acuerdo a sus esfuerzos principales (ver la **Tabla 2.1**) y su origen geológico (ver la **Tabla 2.2**). Al clasificar las fracturas se determinan: magnitud y dirección in-situ de los esfuerzos principales, azimut, inclinación, espaciado y abertura de fracturas.

Las fracturas clasificadas por sus esfuerzos principales, que forman ángulos consistentes durante pruebas de compresión, extensión y tracción en el laboratorio son: fracturas de corte, se forman cuando los tres esfuerzos principales son compresivos (positivos); fracturas de extensión, tienen un sentido de desplazamiento perpendicular y alejado del plano de fractura, también se forman cuando los tres esfuerzos principales son compresivos (Nelson, 2001); y fracturas de tensión, necesita que uno de los tres esfuerzos principales sea negativo (tracción) (Aguilera, 1995).

**Tabla 2.1.- Clasificación de fracturas experimentales (Nelson, 2001).**

1.- Fracturas de corte
2.- Fracturas de extensión
3.- Fracturas de tensión

**Tabla 2.2.- Clasificación de fracturas que ocurrieron naturalmente (Nelson, 2001).**

1. Fracturas tectónicas (debido a las fuerzas de superficie)
2. Fracturas regionales (debido a las fuerzas de superficie)
3. Fracturas contraccionales (debido a las fuerzas del cuerpo)
4. Fracturas relacionadas con la superficie (debido a las fuerzas del cuerpo)

Nelson (2001) clasifica las fracturas naturales con base en el origen de sus fuerzas causales y la geometría del sistema de fracturas. Las fracturas tectónicas, se originan por un evento tectónico, desarrolladas por la aplicación de fuerzas a la superficie o externas y, pueden estar relacionadas con los pliegues o fallas. Las fracturas regionales, se generan en grandes áreas de la corteza terrestre con poco cambio en la

## **CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES**

---

orientación, no hay evidencia de desplazamiento a través del plano de fractura, y son perpendiculares a las superficies principales del estrato (Aguilera, 1995). Éstas fracturas tienden a seguir un patrón ortogonal.

Las fracturas contraccionales, se forman por fuerzas internas al cuerpo; pueden presentarse en todo el yacimiento independientemente del mecanismo de entrapamiento; son importantes en la producción de hidrocarburos y gas. Son el resultado de la desecación, sinéresis, gradientes térmicos, y cambios de fase mineral. Cada uno de éstos puede ser o bien una fractura de tracción o de extensión, asociada con una reducción del volumen de la masa general en toda la roca (Nelson, 2001).

Las fracturas relacionadas a la superficie, se desarrollan como resultado de la aplicación de fuerzas del cuerpo; incluyendo las fracturas desarrolladas durante la descarga, la intemperie, y la creación de superficies libres o límites no compatibles (Nelson, 2001).

### **2.1.8.- Morfología de la fractura**

La morfología se puede observar en los núcleos, en el afloramiento y por deducción en los registros de pozos; es un factor importante para determinar la porosidad y permeabilidad de la fractura. Existen cuatro tipos básicos de morfología del plano de fractura natural:

1. Fracturas abiertas
2. Fracturas deformadas
  - a. Fracturas llenas de gotitas
  - b. Fracturas de fricción
3. Fracturas llenas de mineral
4. Vúgulos

## CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

---

**Fracturas abiertas:** son conductos abiertos al flujo de fluido; se caracterizan por su deficiencia de material diagenético que llene el espacio entre las paredes de la fractura. Las fracturas abiertas aumentan la permeabilidad del yacimiento paralelamente al plano de fractura. Debido a que una fractura tiene una dimensión solamente de la anchura de un poro, tendrá poco o ningún efecto en el flujo de fluido perpendicular al plano de fractura (Nelson, 2001). Durante las operaciones de disparos en condiciones de sobrebalance y cementación, las fracturas naturales abiertas pueden producir problemas de pérdida de circulación, altos costos de fluidos de perforación y la pérdida total del pozo (Bratton y cols, 2006).

**Fracturas deformadas:** son el resultado de la alteración física mediante movimientos de corte tectónicos, posteriores al abrirse inicialmente. Por la fuerte anisotropía que se crea dentro del yacimiento, se subdivide en fracturas llenas de gotitas y fracturas de fricción (Nelson, 2001).

Las fracturas llenas de gotitas son fáciles de observar en el núcleo o afloramiento, porque el material de la gotita suele ser más resistente a la intemperie y la abrasión que la roca no fracturada. Las fracturas de fricción son una superficie pulida que resulta del deslizamiento friccional a lo largo de una fractura o plano de falla (Nelson, 2001).

**Fracturas llenas de minerales:** son aquellas que se han llenado por mineralización secundaria o diagenética; este material de cementación secundario es cuarzo, carbonato o ambos. Pueden estar completas o parcialmente mineralizadas. Su efecto sobre la permeabilidad depende del grado en que están llenadas del material. Las fracturas completamente mineralizadas son una barrera de permeabilidad, caso contrario, para las fracturas parcialmente mineralizadas donde la permeabilidad aumenta en el yacimiento. Las fracturas mineralizadas ocurren frecuentemente en arenisca, lutitas y caliza (Nelson, 2001).

**Vúgulos:** pueden proporcionar porosidades y permeabilidades significativas. Debido a la forma esférica de las cavidades de este tipo de fracturas, probablemente, no se

## **CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES**

---

cierran a medida que el yacimiento se agota. Los vórgulos son importantes en los yacimientos carbonatados más grandes del mundo, tales como el campo Asmari del Medio Oriente (Nelson, 2001).

### **2.1.9.- Espaciamiento de las fracturas**

Es la distancia media entre las fracturas regularmente espaciadas, medidas perpendicularmente a un conjunto paralelo de fracturas de una orientación dada. El espaciamiento de las fracturas se puede observar y calcular en un núcleo o afloramiento siempre que el área de muestreo o el volumen sea grande (Nelson, 2001).

### **2.2.- Propiedades físicas**

Las propiedades petrofísicas como la permeabilidad de la matriz, permeabilidad de fractura, porosidad de la matriz y porosidad de fractura son importantes para el cálculo de la capacidad de flujo en el yacimiento. A continuación se explica cada parámetro.

#### **2.2.1.- Porosidad**

La porosidad ( $\phi$ ) es el porcentaje de un volumen vacío dividido por el volumen total de la roca, o bien:

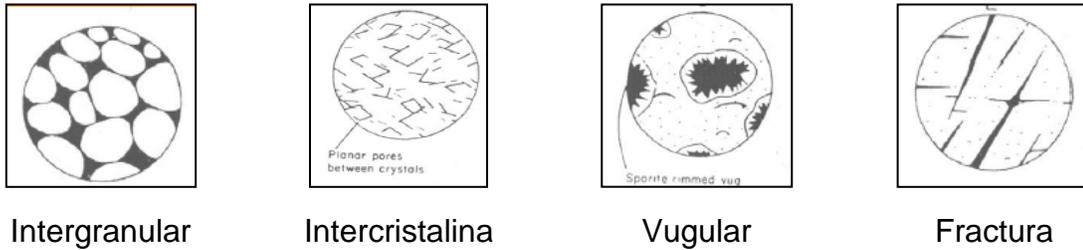
$$\phi = \frac{\text{Volumen vacío}}{\text{Volumen total}} \times 100 \text{ , } \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\text{Volumen vacío} = \text{Volumen total} - \text{Volumen de la esfera} \text{ . } \dots\dots\dots (2.2)$$

Las clases de porosidad se definen, primero, por la geometría de los poros, y segundo, por el tamaño de los poros. Las características generales que se incluyen en la geometría son las siguientes, poro intergranular, intercrystalina, vórgulos y fractura

**CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES**

(Figura 2.4). La combinación de cualquiera de ellas puede dar origen a un comportamiento dual e incluso multi-porosidad (Aguilera, 2003).



**Figura 2.4.- Clasificación geométrica de poro.**

La porosidad puede clasificarse como porosidad de la matriz y porosidad de fractura.

**Porosidad de la matriz:** son todos los huecos dentro de una roca distintos de los que se encuentran dentro de las fracturas (Nelson, 2001). La porosidad de matriz incluye vacíos de diversa porosidad, de origen vugular, intergranular, intercristalina. El valor de la porosidad primaria depende de muchos factores, incluyendo su disposición, distribución, cementación y el grado de interconexión entre los huecos (Aguilera, 1995).

La porosidad de la matriz se calcula con la relación siguiente:

$$\phi_m = \left( \frac{V_p}{V_t} \right) \times 100 \quad , \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

donde  $\phi_m$  es la porosidad de la matriz,  $V_p$  es el volumen poroso (distintos de las fracturas) y  $V_t$  es el volumen total. La porosidad primaria efectiva es la relación entre el espacio vacío interconectado y el volumen mayor de la roca (Aguilera, 1995).

**Porosidad de fractura ( $\phi_f$ ):** son aperturas en la roca, producto del fallamiento estructural de las rocas del yacimiento, debido a una fuerza de tensión originada por actividades tectónicas. Según Escobar (2012) las porosidades de fractura normalmente no superan el 1% en carbonatos, sin embargo, Morales y cols. (2006) reportan porosidades de fractura en yacimientos mexicanos que alcanzan más del 9%.

## CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

---

Relación básica usada para calcular la porosidad de la fractura:

$$\phi_f = \left( \frac{e}{D + e} \right) \times 100 \quad , \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

donde  $\phi_f$  es la porosidad de fractura,  $e$  es el ancho efectivo promedio de las fracturas y  $D$  es el espacio promedio entre las fracturas paralelas (Aguilera, 1995).

La porosidad de la fractura es un número difícil de calcular. Las estimaciones se pueden hacer por (Nelson, 2001):

- 1.- Análisis de núcleo
- 2.- Relación  $k_f / \phi_f$
- 3.- Determinaciones de campo (afloramientos)
- 4.- Registros
- 5.- Pruebas de pozos múltiples

Estos métodos por sí solos proporcionan porosidades de fractura diferentes, pero en conjunto, utilizando los datos disponibles para el cálculo de la porosidad, se puede determinar un rango de valores posibles en el yacimiento.

### 2.2.2.- Permeabilidad

La permeabilidad del medio poroso es una medida de la capacidad del medio para permitir el flujo de fluidos. Los yacimientos pueden tener permeabilidad de matriz y de fractura (Aguilera, 1995).

**Permeabilidad de matriz:** puede evaluarse con el uso de la Ley de Darcy:

$$u = - \frac{k \, dp}{\mu \, dl} \quad , \quad \dots \dots \dots (2.5)$$

## CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

---

donde  $u$  es la velocidad de flujo aparente o velocidad Darcy,  $k$  es la permeabilidad de la roca,  $\mu$  es la viscosidad dinámica y  $dp/dl$  es el gradiente en la dirección del flujo.

La Ley de Darcy se aplica bajo las condiciones siguientes: (1) flujo estable, (2) flujo horizontal y lineal, (3) flujo laminar, (4) condiciones isotérmicas, (5) viscosidad constante y (6) espacio de poro 100% saturado con un fluido (Aguilera,1995).

Para el caso de flujo lineal, el fluido es incompresible y la permeabilidad puede calcularse a partir de la ecuación:

$$k = u \frac{\mu L}{\Delta p} = \frac{q \mu L}{A \Delta p} \quad , \quad \dots \dots \dots (2.6)$$

donde  $q$  es el gasto,  $L$  es la longitud,  $A$  es el área y  $\Delta p$  es el diferencial de presión.

Dado que la unidad Darcy es demasiado grande para la mayoría de los casos, la permeabilidad se expresa generalmente como una milésima de Darcy o un milidarcy (mD) (Aguilera, 1995).

La Ley de Darcy, en unidades de campo se expresa como:

$$q = \frac{0.001127 k A \Delta p}{\mu L} \quad , \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

donde  $q$  es el gasto [ $b/d$ ],  $k$  es la permeabilidad [ $mD$ ],  $A$  es el área [ $ft^2$ ],  $\Delta p$  es el diferencial de presión [ $psi$ ],  $\mu$  es la viscosidad dinámica [ $cp$ ] y  $L$  es la longitud [ $ft$ ].

**Permeabilidad de fractura:** La presencia de fracturas no cementadas abiertas aumenta la permeabilidad de una roca. Es posible estimar la permeabilidad de la fractura y las tasas de flujo a través de las fracturas abiertas (Aguilera, 1995).

### 2.2.3.- Presión y esfuerzos

Los problemas de pegaduras por presión diferencial, pérdidas de circulación, colapsos de tuberías de revestimiento y derrumbes de formación, son causados por la deficiente predicción de la presión de formación.

**Esfuerzo de sobrecarga:** es el peso de la columna de rocas superpuesta más los fluidos contenidos en el espacio poroso, que soporta una formación a una profundidad determinada. Para los cálculos generales, se supone que el gradiente de esfuerzo de sobrecarga es 1.0 psi/ft con una densidad de 19.23 lb/gal [ $2.3 \text{ gr/cm}^3$ ] (Adams y Charrier, 1985).

**Esfuerzo matriz:** es el esfuerzo generado por el contacto grano a grano de la matriz de roca, el cual está en función de la sobrecarga a la profundidad de interés (Adams y Charrier, 1985).

**Presión de poro:** es la presión natural, originada por los procesos geológicos de depositación y compactación, a la que se encuentran sometidos los fluidos (aceite, gas o salmuera) en los espacios de los poros de la matriz (Adams y Charrier, 1985). Cuando la presión de poro de la formación es aproximadamente igual a la presión hidrostática teórica para la profundidad vertical dada, se dice que la presión de la formación es normal. La presión de poro normal para un área dada, se expresa en términos del gradiente hidrostático (Bourgoyne y cols, 1991). El gradiente de presión del fluido de formación normal es 0.465 psi/ft (Adams y Charrier, 1985). Las presiones pueden ser normales, anormales (altas) o subnormales (bajas).

**Presión subnormal:** son las presiones inferiores a lo normal; pueden ser el resultado de factores geológicos o tectónicos o del agotamiento de la presión en los intervalos de producción (Adams y Charrier, 1985).

## CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

---

**Presiones anormales:** es cualquier geopresión que es diferente de la tendencia normal establecida para el área y profundidad dada (Adams y Charrier, 1985). Se han identificado mecanismos que tienden a causar este tipo de presiones. Estos mecanismos se pueden clasificar como efectos de compactación, diagenéticos, de densidad diferencial y de migración de fluidos (Bourgoyne y cols, 1991).

### 2.3.- Problemáticas en un yacimiento fracturado

#### 2.3.1.- Pérdidas de circulación

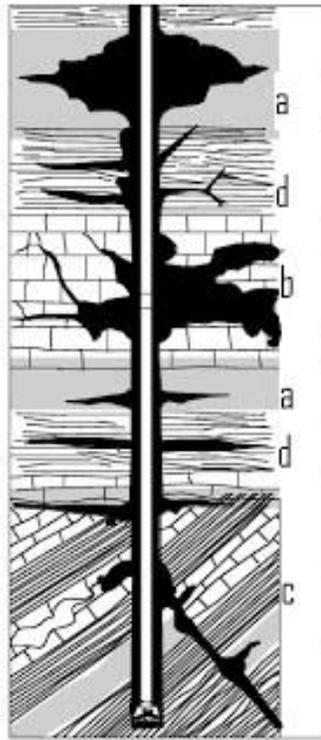
El fenómeno de pérdidas de circulación ocurre cuando el fluido o lodo de perforación fluye parcial o completamente desde el espacio anular hacia la formación, a través de zonas cavernosas, fracturadas y/o altamente porosas y permeables (Beda y cols, 2001). La pérdida de lodo es uno de los problemas más graves durante la perforación y puede presentarse en formaciones intensamente fracturadas, fractura aislada de extensión limitada, formaciones de lutitas no fracturadas (donde las pérdidas de lodo se atribuyen a la deformación de la pared del pozo) (Lavrov y cols, 2004), una estimación incorrecta de presiones anulares y la reología del fluido de perforación (Onyla, 1994). En este último caso, se necesita una comprensión clara de la mecánica de la pérdida de lodo y el efecto globo (ballooning), con el fin de reconocer estos fenómenos a partir de datos de perforación en tiempo real (Cook y cols, 2012).

Además, de las pérdidas de lodo por fracturas naturales, Dyke (1995) menciona una serie de factores que influyen en los niveles de lodo y gastos durante la perforación. Estos factores son pérdidas de fondo de pozo, a través de la permeabilidad de la matriz y en fracturas inducidas, cambio en la tasa de circulación, en la litología del fondo del pozo, en la retención de recortes y en la tasa de penetración.

En la **Figura 2.5** se observan las zonas de pérdidas de circulación en diferentes secciones. La sección *a* representa formaciones no consolidadas permeables; la *b*

## CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

formaciones angulares y cavernosas; la *c* fracturas naturales; y la *d* fracturas inducidas (Aguilera, 1995). A continuación se presenta una descripción breve de cada sección.



**Figura 2.5.- Secciones de pérdidas de circulación (Aguilera, 1995).**

**Sección a:** Formación no consolidada que debe tener al menos 14 Darcys de permeabilidad para admitir la entrada de lodo, sin embargo, la admisión depende de la abertura de los poros y el tamaño de la partícula del lodo (Aguilera, 1995).

**Sección b:** Las formaciones vugulares y cavernosas se pueden predecir por correlación con los pozos cercanos (Aguilera, 1995).

**Sección c:** Las fracturas naturales tienen un patrón preexistente de frecuencia y ancho (Adachi y cols, 2004), pueden ser abiertas para presiones mayores aun cierto nivel, lo que permite la entrada del lodo (Aguilera, 1995). Los valores de abertura de fractura que contribuyen en las pérdidas de lodo oscilan entre 0.2 y 1 mm, para aberturas mayores de 1 mm se produce una pérdida total de circulación (Carugo y cols, 2000).

## **CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES**

---

**Sección d:** Fracturas inducidas mecánicamente resultantes de presiones muy altas impuestas a la formación, también dan lugar a fuertes pérdidas de circulación (Aguilera, 1995).

Los problemas que causan las pérdidas de circulación son:

- Altos costos de perforación
- Daño a la formación
- Tiempo no productivo
- Atascamiento de la sarta de perforación.
- Pérdida total del pozo

Para prevenir las pérdidas de circulación se debe tener una comprensión clara sobre la geología y el histórico de producción del yacimiento, la localización y la abertura de las fracturas, y con ello lograr un diseño apropiado del fluido de perforación y la ubicación de los intervalos de perforación (Adachi y cols, 2004). Por medio de modelos matemáticos se puede describir la geometría y la conductividad de las fracturas (Lavrov y cols, 2004).

### **2.3.2.- Identificación de las pérdidas de lodo**

La industria petrolera ha experimentado dificultades económicas debido a las grandes pérdidas de fluido al perforar formaciones fracturadas (Majidi y cols, 2008). Un gran volumen de pérdidas de lodo es un indicador de permeabilidad de fracturas naturales (Dyke, 1995). Las pérdidas a través de los poros comienzan lento y aumentan gradualmente con el tiempo, mientras que las pérdidas en las fracturas naturales muestran un aumento inicial rápido de la tasa de pérdida, seguida de una disminución gradual con el tiempo (Beda y cols, 2000).

Las técnicas más utilizadas para detectar las pérdidas de lodo consisten en el seguimiento del nivel de lodo en los tanques con acústica, sensores flotantes y/o medidores de flujo electromagnéticos más precisos, que miden la velocidad de flujo de retorno de lodo con una exactitud de alrededor de +/- 15-20 l/min. Es necesario

## CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

---

considerar que el nivel del tanque también puede estar afectado por pérdidas de lodo de superficie, agregando aditivos al agua o el lodo, el llenado y vaciado de las líneas de superficie (Beda y Carugo, 2001).

### 2.3.3.- Tipos de pérdidas de circulación

Beda y Carugo (2001) realizan la clasificación siguiente de las pérdidas de lodo, basado en la severidad y tipo:

#### **Severidad**

- *Pérdidas por filtración.* Cuando las pérdidas de lodo es de aproximadamente 3 a 30 l/min.
- *Pérdidas parciales.* Cuando la severidad de las pérdidas de lodo es de 30 a 150 l/min. Estas son frecuentes en formaciones altamente permeables, en fracturas naturales pequeñas o en las fracturas inducidas.
- *Pérdidas severas.* Cuando las pérdidas de lodo son de 150 a 1,500 l/min. Normalmente se producen en grandes fracturas naturales o en formaciones cavernosas.
- *Pérdidas masivas o completas.* Cuando las pérdidas de lodo son mayores a 1,500 l/min (Beda y Carugo, 2001). Son inevitables debido a vórgulos o cavernas, la perforación puede continuar sin señal de herramientas direccionales hasta que la barrena pasa a través de la zona de pérdida; se aconseja este tipo de operación sólo si las pérdidas son aceptables en el fondo sin dañar el yacimiento, el medio ambiente y si hay suficiente lodo de perforación (Ghalambor y cols., 2014).

#### **Tipo**

##### **Por pérdidas naturales**

- *Pérdidas a través de los poros/matriz.* Este tipo de pérdida se produce en presencia de arenas gruesas y grava altamente permeables (principalmente en la superficie o formaciones no consolidadas), en yacimientos maduros (Beda y Carugo, 2001) y cuando la densidad del lodo estático o dinámico es mayor que la

## CAPÍTULO 2.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

---

presión del fluido de la formación (Ghalambor y cols., 2014); es decir, cuando los poros son tres veces más grandes que el tamaño de partícula del lodo (Beda y Carugo, 2001).

- *Formaciones que contienen fracturas naturales permeables.* Se encuentran en la mayoría de las formaciones y su abertura de fractura puede variar de algunas micras a 3/5 mm (Beda y Carugo, 2001). Sin embargo, causan pérdidas de fluido significativas al atravesarlas el pozo durante la perforación, debido a su gran extensión y la existencia de una red de fracturas (Ghalambor y cols, 2004).
- *Formaciones cavernosas.* Durante períodos de tiempo geológicos, calizas, dolomías y sales pueden experimentar disolución por el agua subterránea. Esto puede conducir a la creación de fracturas y cavernas que varían desde centímetros hasta el tamaño de un túnel (Beda y Carugo, 2001).

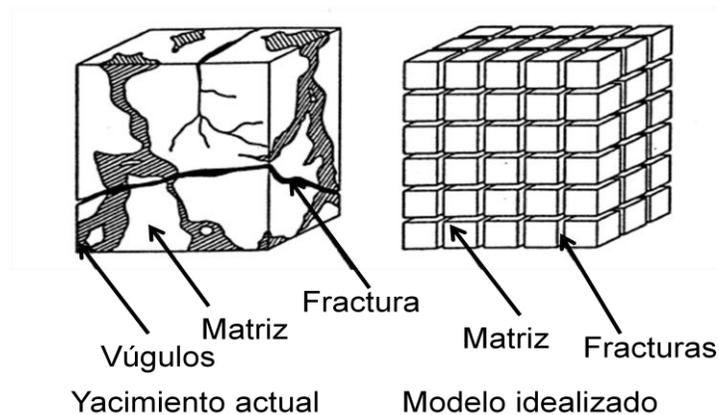
### Por pérdidas inducidas

- Las pérdidas en las fracturas inducidas se producen cuando la densidad de circulación equivalente (DCE) excede el gradiente de fractura causando que la formación se rompa. Las fracturas inducidas también pueden estar relacionadas con el embolamiento de la barrena de perforación, generando aumentos repentinos de DCE, debidos a una mala limpieza del pozo.

### CAPÍTULO 3 MODELOS DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

Los yacimientos naturalmente fracturados de doble porosidad y permeabilidad frecuentemente se caracterizan mediante un modelo matemático, con una distribución ortogonal de fracturas. Para conocer el comportamiento de flujo, en una primera aproximación, se utiliza la Ley de Darcy, tanto en la matriz porosa como en el sistema de fracturas.

Warren y Root (1963) desarrollan un modelo conceptual de doble porosidad heterogéneo para un medio poroso permeable, con la finalidad de caracterizar el transporte de fluidos. Superponen dos medios idealizados, donde la matriz está constituida por paralelepípedos rectangulares idénticos, separados por una red ortogonal continua de fracturas orientadas paralelamente, uniformemente espaciadas y de anchura constante, como se observa en la **Figura 3.1**.



**Figura 3.1.- Idealización de un medio poroso heterogéneo (Warren y Root, 1963).**

El modelo simula el comportamiento de una formación de doble porosidad, durante el flujo de una sola fase que ocurre sólo en la red de fracturas y la matriz solo contribuye significativamente al volumen de poros, bajo condiciones de flujo pseudoestacionario. Se obtiene una solución asintótica, aplicando la ecuación de continuidad y la transformada de Laplace, por lo tanto, la caída de presión adimensional es  $\psi_2^*(1, \tau)$ ,

$$\psi_2^*(1, \tau) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K_o(\sqrt{sf(s)})}{s\sqrt{sf(s)}K_i(\sqrt{sf(s)})} \right] , \dots\dots\dots (3.1)$$

donde  $K$  es el grado de anisotropía,  $f(s)$  es igual a,

$$f(s) = \frac{\omega(1 - \omega)S + \lambda}{(1 - \omega)S + \lambda} . \dots\dots\dots (3.2)$$

El parámetro  $\omega$ , representa una medida de la capacidad de almacenamiento de fluidos de la porosidad de fractura y,  $\lambda$ , relacionada con la heterogeneidad que está presente en el sistema, se definen como (Warren y Root, 1963):

$$\omega = \frac{\phi_2 c_2}{(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2)} , \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\lambda = \alpha \frac{k_1}{k_2} r_w^2 , \dots\dots\dots (3.4)$$

donde el parámetro  $\alpha$ , factor de forma, refleja la geometría de los elementos de matriz y controla el flujo entre las dos regiones porosas.

Nelson (1987) con base en el modelo de Warren y Root, propuso un modelo conceptual ortogonal modificado. El mallado ortogonal se altera cambiando los anchos de fractura (incluyendo la reducción de ancho a cero o incluso por debajo de valores equivalentes a la permeabilidad de la matriz para simular barreras de permeabilidad), de tal manera que se modelen variaciones geológicas en frecuencias azimutales, espaciamiento de fracturas, capas de roca/fractura de varios espesores, y varias escalas de desarrollo de bloques.

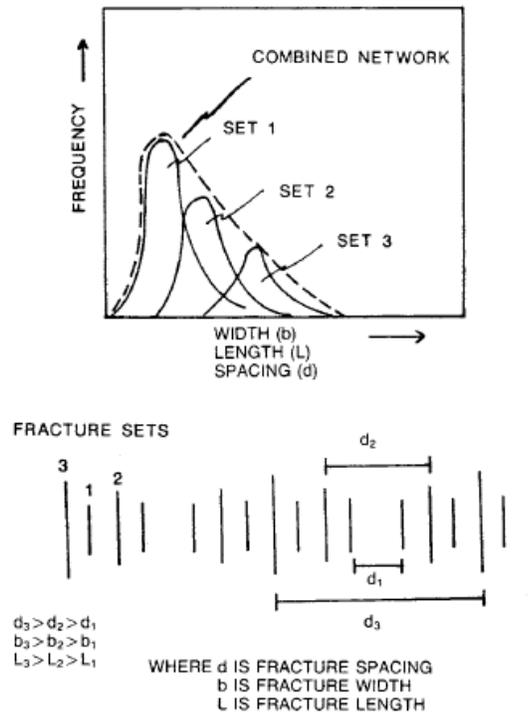
Los sistemas de fracturas complejas se componen de conjuntos de fracturas con azimut, anchura ( $b$ ), espaciado ( $d$ ) y longitud ( $L$ ). El azimut depende del origen y el estado de esfuerzo de la fractura. El ancho de fractura ( $b$ ), longitud ( $L$ ), y espaciamiento ( $d$ ) son función de la litología en las que se formaron las fracturas. Un yacimiento naturalmente fracturado contendrá fracturas desde pequeñas grietas finas

### CAPÍTULO 3.- MODELOS DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

de 1 a 2 cm en longitud, a grandes fracturas de cientos de metros de largo (Nelson, 1987).

Si las fracturas más pequeñas presentan las mismas orientaciones que las fracturas más grandes, tienden a ser más estrechas, más cortas y más estrechamente espaciadas. Existe una continuidad de tamaños anidados en sistema de fracturas naturales, y  $b$  [m],  $L$  [m] y  $d$  [m] de distintos conjuntos de tamaños varían de manera regular. Este desarrollo reducido de fracturas probablemente refleja una continuidad del esfuerzo deformacional dividido en fracturas en varias escalas (Nelson, 1987).

Los diagramas de frecuencia de las características individuales en cada escala, se combinan y se obtiene una distribución log-normal característicamente asimétrica (**Figura 3.2**). La asimetría y desviación estándar hace que la media aritmética, armónica y geométrica de la población de fracturas sea útil para describir las propiedades del yacimiento (Nelson, 1987).



**Figura 3.2.- Diagrama de frecuencia y esquema de escalamiento del ancho, longitud, y espaciamiento de la fractura (Nelson, 1987).**

En la parte superior de la **Figura 3.2**, se muestra el diagrama de frecuencia combinado hipotéticamente para tres conjuntos de fracturas; en la parte inferior se observa el esquema del concepto de escalamiento del ancho de la fractura ( $b$ ), longitud ( $L$ ) y espaciamiento ( $d$ ).

La media característica del conjunto menos frecuente (conjunto 3) es representativa del flujo en el yacimiento a corto plazo (la permeabilidad de la fractura es función del ancho del conjunto 3), mientras que la frecuencia del conjunto 1 (conjunto 1) representa el almacenamiento del yacimiento y el drene (la porosidad de fractura es una función del ancho del conjunto 1) (Nelson, 1987).

Berman (1953) presenta una solución para la caída de presión del flujo de Poiseuille en un canal rectangular con dos paredes igualmente porosas y permeables. La distancia entre las paredes es  $2h$  y la longitud del canal es  $L$ . El eje  $y$  es perpendicular a las paredes del canal y el eje  $x$  se encuentra en un plano paralelo a las paredes del canal.

Para las ecuaciones de flujo, se consideran las condiciones siguientes: el flujo es bidimensional, se encuentra en estado de equilibrio, el flujo es laminar e incompresible, no hay fuerzas externas que actúan sobre el fluido y la velocidad del fluido que sale de las paredes del canal es independiente de la posición. Berman (1953) observa el comportamiento del efecto de la porosidad en las paredes por medio del método de perturbaciones, usando como parámetro de perturbación el número de Reynolds, esta solución es válida para valores suficientemente pequeños de este parámetro.

La caída de presión en la dirección principal del flujo en forma adimensional se expresa por medio de la ecuación 3.5:

$$\frac{p(0, \lambda) - p(x, \lambda)}{\frac{1}{2} p \bar{u}^2(0)} = \left( \frac{24}{N_{Re}} - \frac{648}{35} \frac{R}{N_{Re}} \right) \times \left( 1 - \frac{2R}{N_{Re}} \frac{x}{h} \right) \left( \frac{x}{h} \right), \quad \dots \dots \dots (3.5)$$

### CAPÍTULO 3.- MODELOS DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

donde  $p(x, \lambda)$  es la presión en el canal en el punto  $(x, \lambda)$ ,  $\bar{u}(x)$  es la componente  $x$  de la velocidad promedio en la sección transversal del canal en la posición  $x$  a lo largo del canal;  $R$  es el número de Reynolds para el flujo a través de la pared del canal,  $N_{Re}$  es el número de Reynolds para el flujo que entra en el canal (Berman, 1953). Se definen las ecuaciones siguientes:

$$R = hv_w/\nu \quad , \quad \dots \dots \dots (3.6)$$

$$N_{Re} = 4h\bar{u}(0)/\nu \quad , \quad \dots \dots \dots (3.7)$$

donde  $h$  es el valor medio de la distancia entre las paredes,  $v_w$  es la velocidad del fluido que sale de las paredes del canal y  $\nu$  es la viscosidad cinemática ( $\mu/\rho$ ). El rango de valores permisibles para  $(x/h)$ , de la ecuación 3.5 propuesta por Berman (1953), es

$$0 \leq x/h \leq N_{Re}/4R \quad . \quad \dots \dots \dots (3.8)$$

Karode (2001), con base en la solución de Berman sin asumir que la velocidad del fluido que sale de las paredes del canal es independiente de la posición, presenta expresiones analíticas para la caída de presión como una función de la permeabilidad de la pared, la dimensión del canal, la posición axial y las propiedades del fluido. Estas expresiones se pueden utilizar para rutinas numéricas de referencia, para el flujo de fluido del modelo de matrices semipermeables y para estimaciones de la caída de presión en módulos de matrices de flujo cruzado.

Desarrolla un modelo de flujo de abertura rectangular con anchura ( $W$ ) y altura de la abertura ( $2h$ ), con paredes impermeables, denotando la coordenada  $z$  la dirección del flujo de fluido, bajo las siguientes condiciones de frontera: cuando  $z$  es igual a 0 indica la entrada a la abertura y cuando  $z = L$  denota la salida de la abertura (Karode, 2001).

El gasto a través de la abertura está relacionada con el gradiente de presión de abertura por

$$q = \frac{2h^3W}{3\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) , \dots\dots\dots (3.9)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido. Esta ecuación se deriva de las ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad. Para una pared o cara permeable de la fractura, la tasa de flujo volumétrico ( $q$ ) cambia a lo largo de la longitud del canal, debido a la filtración a través de las caras de la fractura (Karode, 2001).

La solución de la ecuación 3.9 para las caras permeables de la fractura, sigue un procedimiento similar al de flujo en una tubería (sección transversal constante) de Hagen-Poiseuille que es evaluada en un diferencial de  $z$  y se aplica para secciones infinitesimales de cono, suponiendo que dentro de este pequeño volumen de control, la sección transversal es constante, e integrando el resultado a lo largo de la longitud axial del cono se estima la caída de presión total.

Para el caso de la velocidad constante en las caras de la fractura, la caída de presión global de la fractura se puede calcular como:

$$p_i - p_o = \Delta p = \frac{3\mu}{2h^3W} q_i L \left( 1 - \frac{2v_w WL}{2q_i} \right) = (\Delta p)_{v_w=0} \left( 1 - \frac{f}{2} \right) , \dots\dots\dots (3.10)$$

donde  $p_i$  es la presión de entrada del fluido,  $p_o$  es la presión de salida del fluido,  $\Delta p$  es la caída de presión en cualquier posición  $z$  a lo largo de la abertura,  $h$  es la altura media de la abertura,  $q_i$  es el gasto de entrada,  $L$  es la longitud de la abertura,  $v_w$  es la velocidad en la cara de la fractura o velocidad de pared,  $(\Delta p)_{v_w=0}$  es la caída de presión para una fractura con paredes impermeables y  $f$  es la recuperación fraccionada del permeado (flujo permeado total / flujo de entrada).

Para el caso de una fractura con una permeabilidad de pared constante, la velocidad de pared es proporcional a la diferencia de presión entre la matriz y la fractura; por lo tanto la ecuación de caída de presión es:

$$p_i - p = \Delta p = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \frac{\mu}{h^3 W} \frac{q_i}{\lambda} (e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}) + (p_i - p_m) \left( 1 - \frac{e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}}{2} \right) , \dots\dots\dots (3.11)$$

donde  $p$  es la presión,  $z$  es una coordenada axial en la dirección del flujo de fluido,  $p_m$  es la presión del bloque de matriz y  $\lambda$  es una constante definida como:

$$\lambda = + \sqrt{\frac{3\mu k}{h^3}} , \dots\dots\dots (3.12)$$

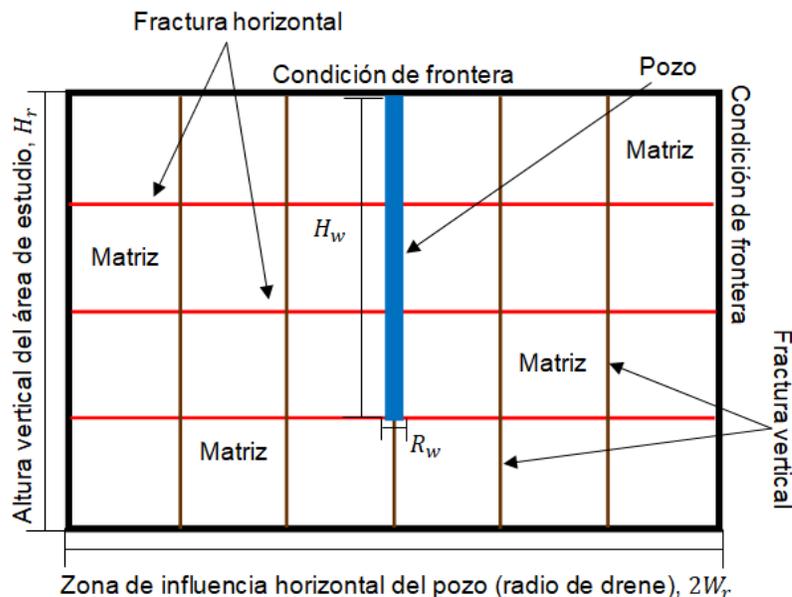
donde  $k$  es la permeabilidad de la matriz que rodea a la fractura. La expresión para la permeabilidad de pared constante es más exacto que la solución de Berman (Karode, 2001).

## CAPÍTULO 4 MODELO ESTÁTICO

En este trabajo, el modelo estático del pozo y su vecindad se basa en la propuesta conceptual de doble porosidad de Warren y Root (1963) para un medio poroso permeable fracturado en dos dimensiones. Para representar el comportamiento de flujo en una red de fracturas naturales que interaccionan con la matriz y las propiedades físicas del yacimiento, se construye una malla 2D definida por la geometría de la vecindad del pozo, con una distribución ortogonal de las fracturas y la ubicación del pozo en su centro.

### 4.1.- Estructura estática del sistema de fracturas

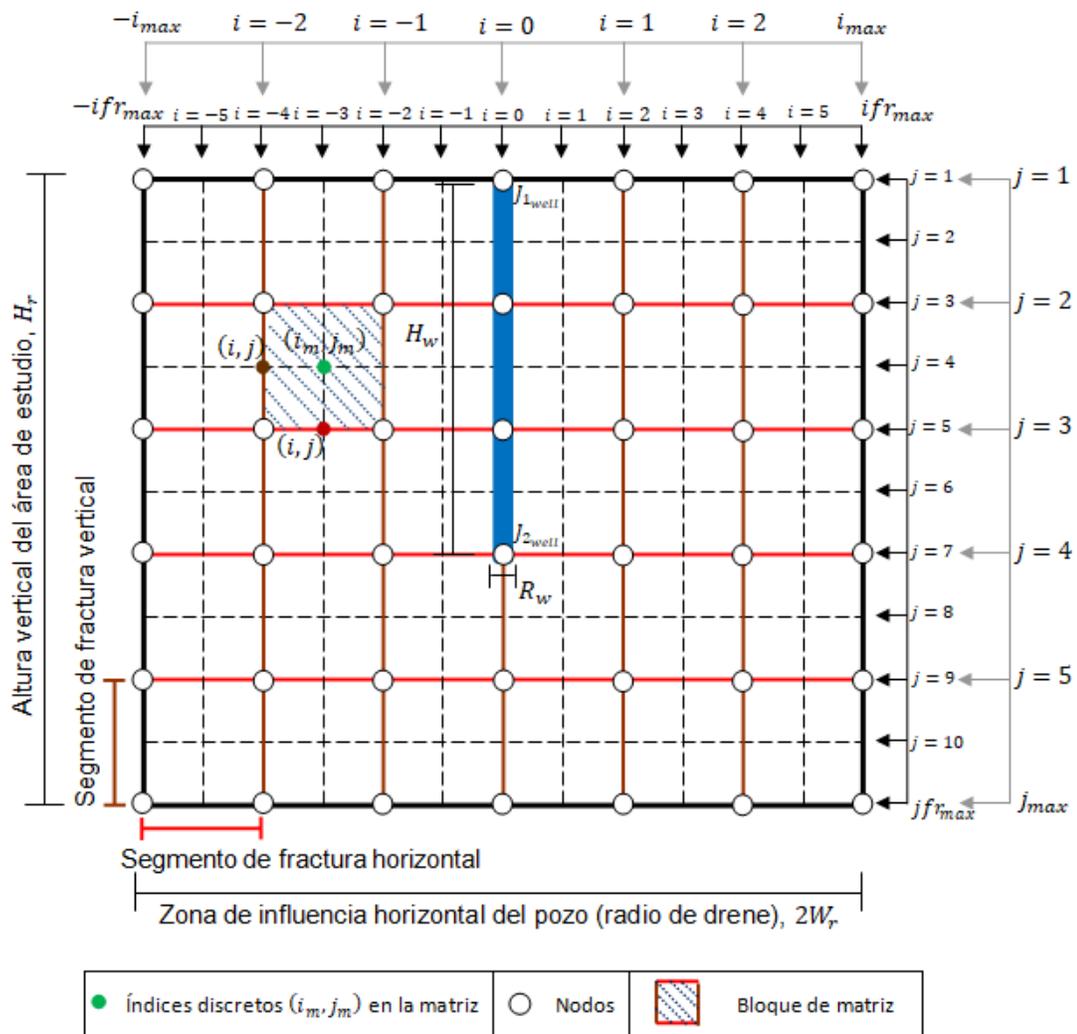
El contorno de la malla está delimitado por  $H_r$ , que es la altura vertical del área de estudio, y por  $2W_r$  (ver la **Figura 4.1**), que es la zona de influencia horizontal del pozo (radio de drene), las fracturas se distribuyen tanto horizontal (rojo) como verticalmente (café) y se ubican por medio de índices discretos  $(i, j)$ , (ver la **Figura 4.2**). En el centro de la malla se coloca un pozo vertical (azul) con intervalo disparado  $H_w$  y radio  $R_w$ .



**Figura 4.1.- Geometría de la vecindad del pozo en una malla 2D.**

## CAPÍTULO 4.- MODELO ESTÁTICO

El arreglo propuesto está compuesto por nodos, segmentos de fracturas y bloques de matrices. Un nodo es el punto de intersección de dos fracturas perpendiculares. En cada nodo es posible asociar un gasto de entrada o salida y una presión de entrada o salida. Un segmento de fractura es la línea recta comprendida entre dos nodos y se etiqueta con índices discretos  $(i, j)$ . En la **Figura 4.2** se observa que los índices discretos  $(i, j)$  del segmento de las fracturas horizontales siempre serán impares y los índices discretos  $(i, j)$  para el segmento de las fracturas verticales serán pares. Los bloques de matrices se etiquetan con índices  $(i_m, j_m)$ , donde  $i_m$  siempre será impar y  $j_m$  par. El pozo se encuentra ubicado en  $i = 0$  entre las etiquetas en el índice  $j$ ,  $J_{1well}$  que indica el inicio del intervalo disparado y  $J_{2well}$  que señala el final.



**Figura 4.2.- Estructura de la malla en la vecindad del pozo en 2D.**

## CAPÍTULO 4.- MODELO ESTÁTICO

Para el cálculo del número de segmentos de una fractura, que contiene la vecindad del pozo, se utilizan las formulas siguientes:

$$N_{fH} = 2 * i_{Max} \quad , \quad \dots \dots \dots (4.1)$$

$$N_{fV} = j_{Max} - 1 \quad , \quad \dots \dots \dots (4.2)$$

donde  $N_{fH}$  es el número de segmentos de una fractura horizontal,  $N_{fV}$  es el número de segmentos de una fractura vertical,  $i_{Max}$  es el tamaño máximo de la malla en nodos horizontales y  $j_{Max}$  es el tamaño máximo de la malla en nodos verticales.

En la construcción de la malla se crean subdivisiones (ver la **Figura 4.2**) de acuerdo a los índices discretos  $(i, j)$ , con la finalidad de identificar la ubicación del segmento de la fractura y/o matriz, el número total de subdivisiones se obtiene con las fórmulas siguientes:

$$ifr_{Max} = 4 * i_{Max} + 1 \quad , \quad \dots \dots \dots (4.3)$$

$$jfr_{Max} = 2 * j_{Max} - 1 \quad , \quad \dots \dots \dots (4.4)$$

donde  $ifr_{Max}$  es el número total de subdivisiones en  $i$  y,  $jfr_{Max}$  es el número total de subdivisiones en  $j$ .

Entre las fracturas horizontales y fracturas verticales, se forman bloques de matriz. Las fórmulas generales para el número total de matrices (bloques), segmentos de fracturas horizontales y segmentos de fracturas verticales que se encuentran en la malla propuesta son:

$$N_{tm} = \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} \right) * (j_{Max} - 1) \quad , \quad \dots \dots \dots (4.5)$$

$$N_{tfV} = \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 1 \right) * \left( \frac{jfr_{Max} - 1}{2} \right) \quad , \quad \dots \dots \dots (4.6)$$

$$N_{tfH} = \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} \right) * \left( \frac{jfr_{Max} - 1}{2} - 1 \right) \quad , \quad \dots \dots \dots (4.7)$$

## CAPÍTULO 4.- MODELO ESTÁTICO

donde  $N_{tfH}$  es el número total de segmentos de fracturas horizontales,  $N_{tfV}$  es el número total de segmentos de fracturas verticales y  $N_{tm}$  es el número total de los bloques de matriz en la red de fracturas.

### 4.2.- Posición general para el gasto y presión en cada segmento de fractura

A cada segmento de fractura se le asocia, además de la posición, un gasto y una presión de entrada, y un gasto y presión de salida. Nótese que el gasto de entrada y salida pueden ser diferentes dependiendo si hay transferencia de masa entre fractura y matriz.

Los índices  $(i, j)$ , para un segmento de fractura vertical están dados por las  $i \in \mathbb{Z}$  (enteros positivos y negativos) pares, en el intervalo cerrado:

$$\left[ -\left(\frac{if r_{Max} - 1}{2} - 2\right), \left(\frac{if r_{Max} - 1}{2} - 2\right) \right] , \dots \dots \dots (4.8)$$

y las  $j \in \mathbb{Z}$  pares, en el intervalo cerrado:

$$[2, j f r_{Max} - 3] . \dots \dots \dots (4.9)$$

Con la finalidad de identificar y etiquetar los gastos y presiones de entrada y salida en cada segmento de fractura, se utilizó un mapeo que ordena en un sólo vector a dichas variables (ver la **Figura 4.3**). Para los gastos de entrada y salida se usaron las expresiones siguientes:

$$q_{iV(i,j)} \Rightarrow q_{iV} \left( \left[ \frac{j-2}{2} * \left( \frac{if r_{Max} - 1}{2} - 1 \right) \right] + \left[ \frac{if r_{Max} - 1}{2} - 2 \right] + 1 \right) , \dots \dots \dots (4.10)$$

$$q_{oV(i,j)} \Rightarrow q_{oV} \left( N_{tfV} + N_{tfH} + \left[ \frac{j-2}{2} * \left( \frac{if r_{Max} - 1}{2} - 1 \right) \right] + \left[ \frac{if r_{Max} - 1}{2} - 2 \right] + 1 \right) , \dots \dots \dots (4.11)$$

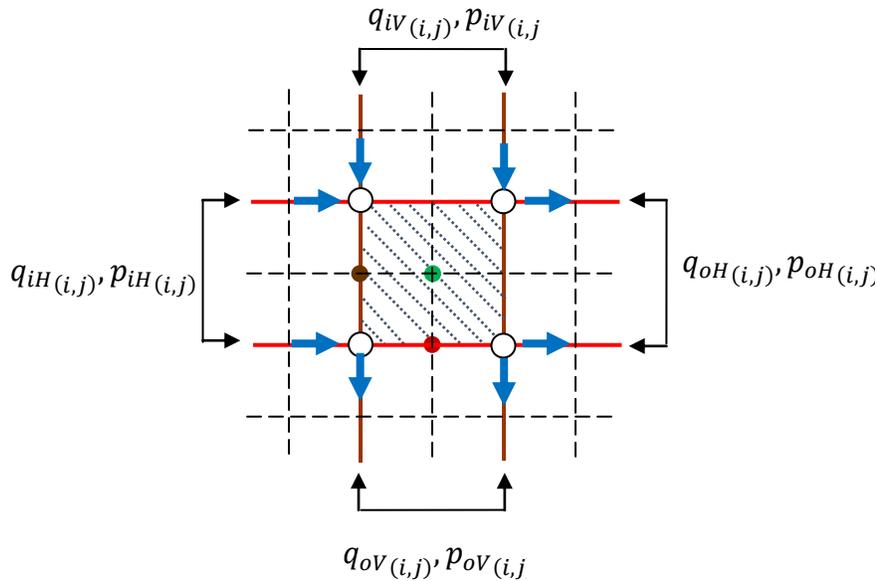
respectivamente. Por otro lado, para las presiones de salida y entrada en el segmento de la fractura vertical se tiene:

## CAPÍTULO 4.- MODELO ESTÁTICO

$$p_{iV(i,j)} \Rightarrow p_{iV} \left( (2*N_{tFV}) + (2*N_{tFH}) + \left[ \frac{j-2}{2} * \left( \frac{iFr_{Max}-1}{2} - 1 \right) \right] + \left[ \frac{i + \frac{iFr_{Max}-1}{2} - 2}{2} \right] + 1 \right), \dots \dots (4.12)$$

$$p_{oV(i,j)} \Rightarrow p_{oV} \left( (3*N_{tFV}) + (3*N_{tFH}) + \left[ \frac{j-2}{2} * \left( \frac{iFr_{Max}-1}{2} - 1 \right) \right] + \left[ \frac{i + \frac{iFr_{Max}-1}{2} - 2}{2} \right] + 1 \right), \dots \dots (4.13)$$

donde  $q_{iV}$  es el gasto de entrada en el segmento de la fractura vertical,  $q_{oV}$  es el gasto de salida en el segmento de la fractura vertical,  $p_{iV}$  es la presión de entrada en el segmento de la fractura vertical,  $p_{oV}$  es la presión de salida en el segmento de la fractura vertical.



**Figura 4.3.- Etiqueta de posición para cada segmento de fractura en una malla 2D.**

Para una fractura horizontal los índices discretos  $(i, j)$ , están dados por las  $i \in \mathbb{Z}$  (enteros positivos y negativos) impares, en el intervalo cerrado:

$$\left[ - \left( \frac{iFr_{Max} - 1}{2} - 1 \right), \left( \frac{iFr_{Max} - 1}{2} - 1 \right) \right], \dots \dots \dots (4.14)$$

y las  $j \in \mathbb{Z}$  impares, en el intervalo cerrado:

$$[3, jFr_{Max} - 2] \dots \dots \dots (4.15)$$

Al igual como se realizó en las fracturas verticales, con el objetivo de identificar y etiquetar los gastos y presiones de entrada y salida en cada segmento de fractura

## CAPÍTULO 4.- MODELO ESTÁTICO

horizontal, se utilizó un mapeo que ordena en un solo vector a dichas variables (ver la **Figura 4.3**). Para los gastos de entrada y salida se usaron las expresiones siguientes:

$$q_{iH}(i,j) \Rightarrow q_{iH} \left( N_{tfV} + \left[ \frac{j-3}{2} * \left( \frac{ifr_{Max}-1}{2} \right) \right] + \left[ \frac{i + \frac{ifr_{Max}-1}{2} - 1}{2} \right] + 1 \right) , \dots \dots \dots (4.16)$$

$$q_{oH}(i,j) \Rightarrow q_{oH} \left( (2 * N_{tfV}) + N_{tfH} + \left[ \frac{j-3}{2} * \left( \frac{ifr_{Max}-1}{2} \right) \right] + \left[ \frac{i + \frac{ifr_{Max}-1}{2} - 1}{2} \right] + 1 \right) , \dots \dots (4.17)$$

respectivamente. Para las presiones en el segmento de la fractura horizontal:

$$p_{iH}(i,j) \Rightarrow p_{iH} \left( (3 * N_{tfV}) + (2 * N_{tfH}) + \left[ \frac{j-3}{2} * \left( \frac{ifr_{Max}-1}{2} \right) \right] + \left[ \frac{i + \frac{ifr_{Max}-1}{2} - 1}{2} \right] + 1 \right) , \dots \dots (4.18)$$

$$p_{oH}(i,j) \Rightarrow p_{oH} \left( (4 * N_{tfV}) + (3 * N_{tfH}) + \left[ \frac{j-3}{2} * \left( \frac{ifr_{Max}-1}{2} \right) \right] + \left[ \frac{i + \frac{ifr_{Max}-1}{2} - 1}{2} \right] + 1 \right) , \dots \dots (4.19)$$

donde  $q_{iH}$  es el gasto de entrada en el segmento de la fractura horizontal,  $q_{oH}$  es el gasto de salida en el segmento de la fractura horizontal,  $p_{iH}$  es la presión de entrada en el segmento de la fractura horizontal,  $p_{oH}$  es la presión de salida en el segmento de la fractura horizontal.

### 4.3.- Ubicación de las fracturas respecto a cada bloque de matriz

La matriz es el área contenida entre dos fracturas paralelas horizontales y dos fracturas paralelas verticales, el gasto o la presión entre fractura y matriz están relacionadas por las ecuaciones de balance y conservación, por lo que se requieren etiquetas que indiquen que segmento de fractura está relacionada con un bloque de matriz en particular. A cada bloque de matriz se le asocian los índices discretos  $(i_m, j_m)$ , donde  $i_m \in \mathbb{Z}$  es impar dentro del intervalo:

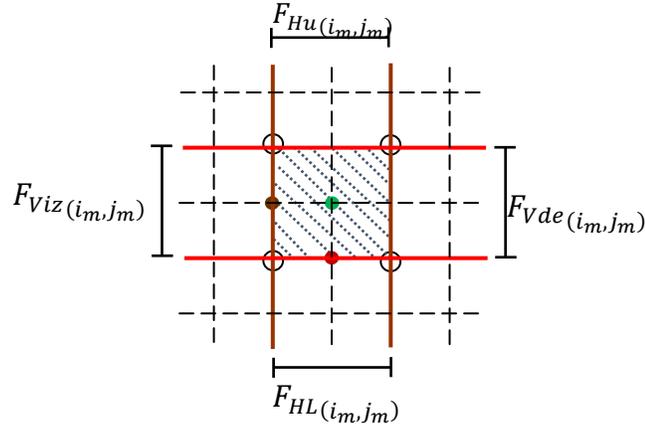
$$\left[ - \left( \frac{ifr_{Max}-1}{2} \right) + 1, \left( \frac{ifr_{Max}-1}{2} \right) - 1 \right] , \dots \dots \dots (4.20)$$

y  $j_m \in \mathbb{Z}$  es par dentro del intervalo:

$$[2, jfr_{Max} - 1] . \dots \dots \dots (4.21)$$

## CAPÍTULO 4.- MODELO ESTÁTICO

Para los balances de cantidad de masa y momento entre matriz y fractura, se requiere asociar a cada bloque de matriz sus correspondientes segmentos de fracturas vertical derecha e izquierda y horizontal superior e inferior, como se observa en la **Figura 4.4**.



**Figura 4.4.- Etiqueta de posición para cada bloque de matriz en una malla 2D.**

La etiqueta en forma vectorial del segmento de las fracturas vertical derecha e izquierda asociadas a la matriz con índices  $(i_m, j_m)$  son las siguientes:

$$F_{Vde(i_m, j_m)} \Rightarrow F_{vde} \left( \left[ \left( \frac{j_m - 2}{2} \right) * \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 1 \right) \right] + \left[ \left( \frac{i_m + 1 + \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 2 \right)}{2} \right) + 1 \right] \right), \dots \dots (4.22)$$

$$F_{Viz(i_m, j_m)} \Rightarrow F_{viz} \left( \left[ \left( \frac{j_m - 2}{2} \right) * \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 1 \right) \right] + \left[ (i_m - 1) + \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 2 \right) + 1 \right] \right), \dots \dots (4.23)$$

Mientras que para el segmento de fracturas horizontales superior e inferior son:

$$F_{Hu(i_m, j_m)} \Rightarrow F_{Hu} \left( \left[ \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 1 \right) * \left( \frac{jfr_{Max} - 1}{2} \right) \right] + \left[ \left( \frac{j_m - 1 - 3}{2} \right) * \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} \right) \right] + \left[ \frac{i_m + \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 1 \right)}{2} \right] \right), (4.24)$$

$$F_{HL(i_m, j_m)} \Rightarrow F_{HL} \left( \left[ \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 1 \right) * \left( \frac{jfr_{Max} - 1}{2} \right) \right] + \left[ \left( \frac{j_m + 1 - 3}{2} \right) * \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} \right) \right] + \left[ \frac{i_m + \left( \frac{ifr_{Max} - 1}{2} - 1 \right)}{2} \right] + 1 \right), (4.25)$$

donde  $F_{Vde}$  es la etiqueta del segmento de la fractura vertical derecha,  $F_{Viz}$  es la etiqueta del segmento de la fractura vertical izquierda,  $F_{Hu}$  es la etiqueta del segmento de la fractura horizontal superior y  $F_{HL}$  es la etiqueta del segmento de la fractura horizontal inferior.

**4.4.- Abertura de fractura**

La apertura de la fractura es la distancia perpendicular entre los planos de dos fracturas (Marrett y Peacock, 1999). Con los datos obtenidos de los estudios como la tomografía de rayos x de núcleos, análisis con el microscopio electrónico de barrido, las láminas delgadas y los afloramientos, se han realizados mediciones donde se observa que la distribución de frecuencia de la apertura de fracturas, en muchas ocasiones se comporta como una distribución de probabilidad log-normal.

Para el cálculo de la distribución normal, primero se estandariza la población aleatoria, utilizando el algoritmo de Box-Muller (1958), que consiste en generar números aleatorios independientes de la distribución normal ( $X$ ). Dadas dos variables aleatorias ( $U_1, U_2$ ) independientes en el intervalo (0,1), se obtiene la variable aleatoria:

$$X = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2) \quad \dots \dots \dots (4.26)$$

A partir de desviaciones normales aleatorias independientes, se pueden calcular la distribución normal comprendida entre la media ( $\bar{d}$ ) igual a cero y la desviación estándar ( $\sigma_d$ ) igual a uno (Devore, 2005):

$$d_i = \bar{d} + \sigma_d X \quad , \quad \dots \dots \dots (4.27)$$

donde  $d_i$  es la apertura de la fractura  $i$ -ésima y  $X$  es la variable aleatoria de la distribución normal estándar determinada por el método de Box-Muller.

**4.5.- Cálculo de la porosidad total en la vecindad del pozo**

La porosidad es la relación entre el volumen poroso y el volumen total de la roca.

$$\phi_t = \frac{\sum V_p}{V_t} \quad , \quad \dots \dots \dots (4.28)$$

donde  $\phi_t$  es la porosidad total,  $V_p$  es el volumen poroso y  $V_t$  es el volumen total.

## CAPÍTULO 4.- MODELO ESTÁTICO

---

Para un sistema matriz-fractura, el volumen poroso, es la sumatoria del volumen poroso en las fracturas ( $V_{pf}$ ) y el volumen poroso en la matriz ( $V_{pm}$ ).

$$\phi_t = \frac{V_{pf}}{V_t} + \frac{V_{pm}}{V_t} , \dots\dots\dots (4.29)$$

la porosidad total en la vecindad del pozo ( $\phi_t$ ) es,

$$\phi_t = \phi_f + \phi_m , \dots\dots\dots (4.30)$$

donde  $\phi_f$  es la porosidad de fractura y  $\phi_m$  es la porosidad matriz.

### 4.5.1.- Porosidad de matriz

El volumen poroso libre en la matriz se calcula de la manera siguiente,

$$\frac{V_{pm}}{V_p} = \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{V_t} , \dots\dots\dots (4.31)$$

$$\frac{V_{pm}}{V_t} = \frac{\phi_1 V_t + \phi_2 V_{t_2} + \dots + \phi_n V_{t_n}}{V_t} , \dots\dots\dots (4.32)$$

si el volumen total  $V_t = A_t W$ , donde  $A_t$  es el área total y  $W$  el ancho, sustituyendo el volumen total en la ecuación 4.32, la ecuación queda como:

$$\frac{V_{pm}}{V_t} = \frac{\phi_1 A_{t_1} W + \phi_2 A_{t_2} W + \dots + \phi_n A_{t_n} W}{A_t W} , \dots\dots\dots (4.33)$$

eliminando términos, se obtiene una ecuación general para la porosidad de la matriz,

$$\phi_m = \frac{V_{pm}}{V_t} = \frac{\phi_1 A_{t_1} + \phi_2 A_{t_2} + \dots + \phi_n A_{t_n}}{A_t} . \dots\dots\dots (4.34)$$

### 4.5.2.- Porosidad de fractura

La porosidad de la fractura se calcula:

## CAPÍTULO 4.- MODELO ESTÁTICO

---

$$\phi_f = \frac{V_{pf}}{V_t} , \dots\dots\dots (4.35)$$

donde  $\phi_f$  es la porosidad de fractura,  $V_{pf}$  es el volumen poroso en la fractura y  $V_t$  es el volumen total. Se define el volumen  $V_t = A_t * W$ , donde  $A_t$  es el área total y  $W$  el ancho; sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\phi_f = \frac{WA_f}{WA_t} , \dots\dots\dots (4.36)$$

eliminando términos semejantes:

$$\phi_f = \frac{A_f}{A_t} . \dots\dots\dots (4.37)$$

Se define  $A_f$ , área de las fracturas y  $A_t$ , área total, como:

$$A_f = \sum_{i=1}^{N_f} d_i L_{fi} , \dots\dots\dots (4.38)$$

$$A_t = 2W_r H_r , \dots\dots\dots (4.39)$$

donde  $d_i$  es la abertura de la fractura,  $L_{fi}$  es la longitud de la fractura,  $W_r$ , es la zona de influencia horizontal del pozo o radio de drene y  $H_r$  es el espesor (altura vertical) del área de estudio; sustituyendo en la ecuación 4.37, la porosidad de fractura es:

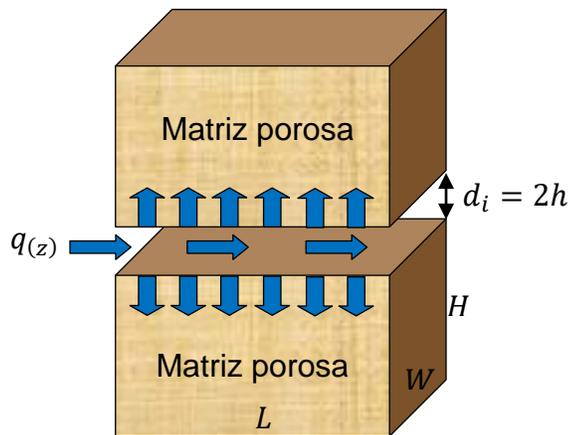
$$\phi_f = \frac{\sum_{i=1}^{N_{frac}} d_i L_{fi}}{2W_r H_r} . \dots\dots\dots (4.40)$$

## CAPÍTULO 5 FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

En este capítulo se presenta el planteamiento del modelo matemático para el flujo de un fluido monofásico Newtoniano, en una fractura que interactúa con la matriz, se toman como base las expresiones analíticas propuestas por Karode (2001), para el flujo laminar en canales con paredes porosas.

### 5.1.- Desarrollo del modelo de flujo para una sola fractura

Se considera una fractura entre dos bloques de matriz porosa, con geometría de prisma rectangular, idénticas y paralelas, de dimensiones  $L \times W \times H$ , separadas por una distancia de abertura de fractura  $d_i = 2h$ , donde la coordenada  $z$  es paralela a la fractura, como se muestra en la **Figura 5.1**.



**Figura 5.1.- Flujo a través de una fractura entre dos bloques de matriz porosa.**

Cuando las paredes o caras de la fractura son impermeables la relación entre el gasto y el gradiente de presión es:

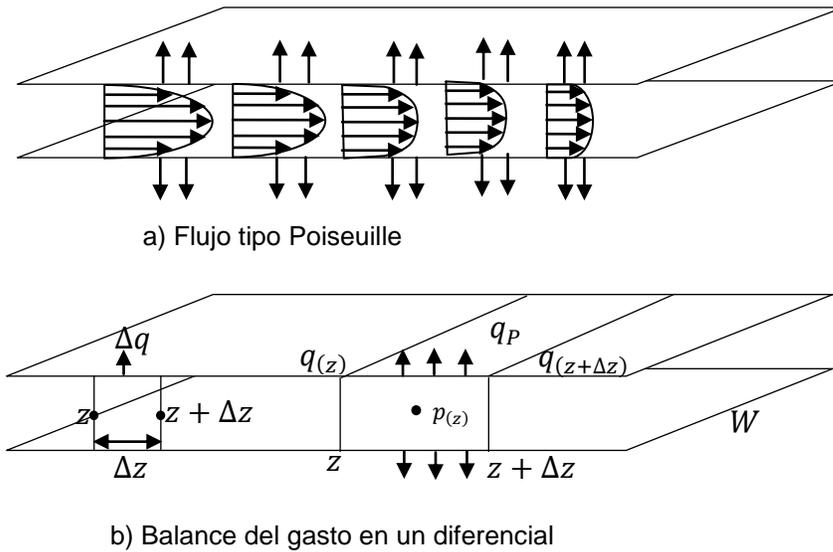
$$q = -\frac{2 h^3 W}{3 \mu} \frac{\partial p}{\partial z} , \dots \dots \dots (5.1)$$

donde  $q$  es el gasto a través de la fractura,  $p$  es la presión y  $\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido. Si las caras de la fractura son impermeables,  $q$  es independiente de  $z$  y el gradiente de presión es constante. La expresión anterior se deduce de las ecuaciones

## CAPÍTULO 5.- FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad, suponiendo que el gradiente de presión se presenta en la dirección  $z$  y el único componente no cero de la velocidad también es en  $z$ , esta solución se conoce como la ecuación de Hagen-Poiseuille (Karode, 2001).

Por otro lado, para paredes permeables el flujo volumétrico ( $q$ ) cambia a lo largo de la longitud del canal, debido a la permeación o filtrado a través de las paredes. Realizando un balance del gasto en un diferencial de  $z$  (ver el **apéndice A.1**) con base en la **Figura 5.2**.



**Figura 5.2.- Balance del gasto en un diferencial de  $z$ .**

En la **Figura 5.2b** se observa que  $q(z)$ , es el flujo de entrada, el cual cambia con un diferencial de  $z$  ( $\Delta z$ ),  $q_p$  es el flujo de entrada/salida que interacciona con la matriz y  $q(z+\Delta z)$  es el flujo de salida. Del balance del gasto en un diferencial de  $z$ , a partir de la ecuación 5.1, se obtiene:

$$\frac{dq}{dz} = -\frac{2h^3W}{3\mu} \frac{d^2p}{dz^2} = -2v_{exit}W \quad \dots \dots \dots (5.2)$$

Sí  $v_{exit} > 0$ , se dice que hay pérdidas de la fractura hacia la matriz, en caso contrario  $v_{exit} < 0$  entra fluido de la matriz a la fractura.

## CAPÍTULO 5.- FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

La ecuación 5.2 es igual a la ecuación 2 presentada por Karode (2001), donde  $v_w$  es la velocidad del fluido que entra a las dos caras porosas de la fractura.

$$\frac{dq}{dz} = \frac{2h^3W}{3\mu} \left( -\frac{d^2p}{dz^2} \right) = -2v_w W \quad (2)$$

Expresando el cambio diferencial en la caída de presión en una sección  $dz$  infinitesimal de la fractura debido a las pérdidas de fluido a través de las caras permeables, se obtiene el sistema siguiente:

$$\frac{d^2p}{dz^2} = \frac{3\mu}{h^3} v_{exit} \quad \dots \dots \dots (5.3)$$

Para evaluar la velocidad del fluido que interacciona en la matriz se utiliza la ley de Darcy para medios porosos, la velocidad de un fluido es proporcional al gradiente de presión e inversamente proporcional a la viscosidad dinámica del fluido:

$$u_r = -\frac{k\phi}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad \dots \dots \dots (5.4)$$

donde  $u_r$  es la velocidad real Darcy,  $k$  es la permeabilidad,  $\phi$  es la porosidad del medio y  $\frac{\partial p}{\partial x}$  es el gradiente de presión. Si el flujo volumétrico es  $q = u_r A_r$ , sustituyendo en la ecuación 5.4,

$$q_P = -\frac{k\phi A_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad \dots \dots \dots (5.5)$$

donde  $q_P$  es el flujo de entrada/salida que interacciona con la matriz,  $A_r$  es el área efectiva y se define para una matriz porosa como  $A_r = \Delta z * W$ , sustituyendo en la ecuación 5.5, el flujo que interacciona con la matriz es la ecuación siguiente:

$$q_P = -\frac{k\phi \Delta z W}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad . \quad \dots \dots \dots (5.6)$$

La entrada/salida del flujo en la matriz depende de la presión en la fractura.

## CAPÍTULO 5.- FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

Con base en la **Figura 5.2b** se observa que una fractura tiene dos bloques de matriz vecinas, es decir, una matriz porosa superior y otra inferior, entonces el diferencial de flujo que interacciona en el medio poroso,  $\Delta q_P$ , es igual a:

$$\Delta q_P = - \left( \frac{k\phi\Delta zW}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_u - \left( \frac{k\phi\Delta zW}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_L, \dots \dots \dots (5.7)$$

donde el subíndice  $u$  hace referencia a la matriz porosa superior y el subíndice  $L$  se refiere a la matriz porosa inferior. Sí  $\Delta zW$  del término derecho de la ecuación divide al término izquierdo de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{\Delta q_P}{\Delta zW} = - \left( \frac{k\phi}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_u - \left( \frac{k\phi}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_L \dots \dots \dots (5.8)$$

En la ecuación se observa que el diferencial de flujo se encuentra dividido en una sección del área efectiva de la matriz, por lo tanto, el diferencial de velocidad del fluido que interacciona en la matriz,  $\Delta v_{exit}$  es:

$$\frac{\Delta q_P}{\Delta zW} = \Delta v_{exit} \dots \dots \dots (5.9)$$

Sí  $\Delta v_{exit}$  es el resultado de la sumatoria de la velocidad del fluido que entra en la matriz superior y en la matriz inferior, el diferencial de velocidad del fluido total es:

$$\Delta v_{exit_t} = \frac{\Delta q_P}{\Delta zW} = \Delta v_{exit_u} + \Delta v_{exit_L} \dots \dots \dots (5.10)$$

Karode (2001) define a la velocidad de pared o velocidad en la cara de la fractura  $v_w$  como proporcional a  $k_m(p - p_m)$ ; donde  $k_m$  es la permeabilidad de la matriz,  $p_m$  es el promedio de la presión de la matriz, es decir que  $(p - p_m)$  es la diferencia de la presión entre la matriz y la fractura. Las soluciones para predecir la velocidad en la cara de la fractura propuesta por Karode (2001) concuerdan con la solución de Berman (1953) para las ecuaciones de Navier-Stokes de dos dimensiones.

Entonces la ecuación 5.10 se sustituye en la ecuación 5.8, obteniéndose:

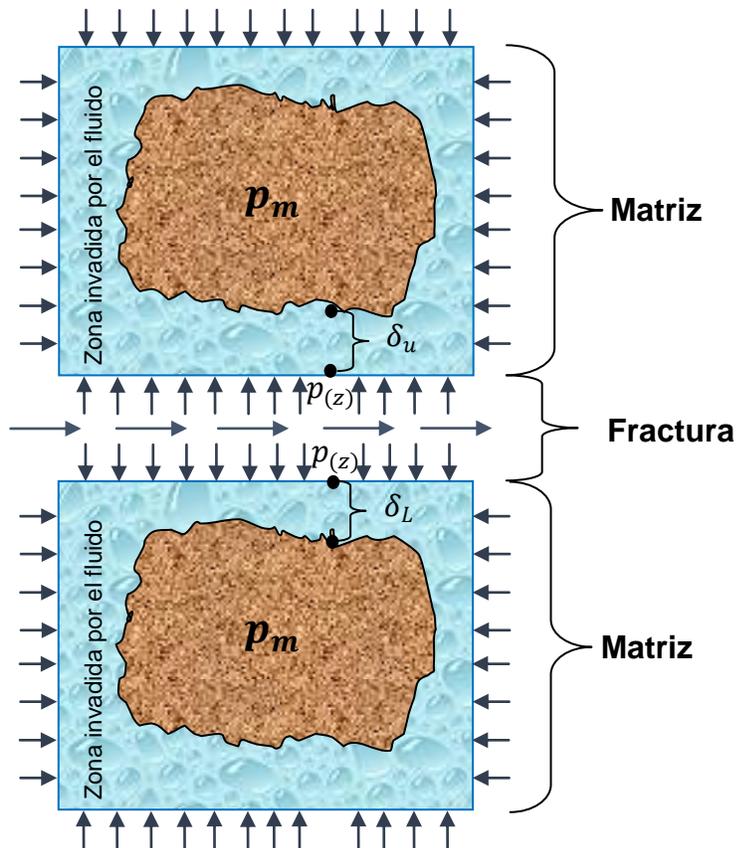
$$\Delta v_{exit_t} = - \frac{k_u\phi_u}{\mu_u} \frac{\Delta p_u}{\delta_u} - \frac{k_L\phi_L}{\mu_L} \frac{\Delta p_L}{\delta_L}, \dots \dots \dots (5.11)$$

## CAPÍTULO 5.- FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

donde  $\delta_u$  y  $\delta_L$  es una constante de proporcionalidad, que representa a la distancia que el fluido proveniente de la fractura ingresa en la matriz, cuando la presión de fractura es mayor que la presión de matriz; como se observa en la **Figura 5.3**.  $\Delta p$  es el diferencial de presión entre la fractura y la matriz porosa en cada  $z$ , es decir  $\Delta p = (p_m - p_{(z)})$ , sustituyendo en la ecuación 5.11, el diferencial de velocidad del fluido total queda:

$$\Delta v_{exit_t} = -\frac{k_u \phi_u p_{m_u} - p_{(z)}}{\mu_u \delta_u} - \frac{k_L \phi_L p_{m_L} - p_{(z)}}{\mu_L \delta_L} , \dots \dots \dots (5.12)$$

donde  $p_{m_u}$  es la presión de matriz superior,  $p_{m_L}$  es la presión de matriz inferior,  $p_{(z)}$  es la presión del fluido en cada  $z$ .



**Figura 5.3.- Parámetro de ajuste  $\delta$ .**

Evaluando el flujo de entrada/salida que interacciona con la matriz en todo el yacimiento, se utiliza la ecuación siguiente:

$$q_P = \int \Delta v_{exit_t} dA , \dots \dots \dots (5.13)$$

## CAPÍTULO 5.- FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

sustituyendo  $\Delta v_{exit_t}$  de la ecuación 5.12 y definiendo  $dA = dydz$ , la ecuación anterior es:

$$q_P = - \left[ \int_0^W \int_0^z \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p_{(z)}) dydz + \int_0^W \int_0^z \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p_{(z)}) dydz \right], \quad (5.14)$$

resolviendo la doble integral y agrupando términos semejantes (ver el **apéndice A.2**), la solución para el flujo que interacciona con la matriz es:

$$q_P = \frac{W^2}{2} \left\{ - \left[ \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p_{(z)}) + \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p_{(z)}) \right] \right\}, \quad \dots \dots \dots (5.15)$$

despejando el término entre corchetes:

$$\frac{2q_P}{W^2} = - \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p_{(z)}) - \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p_{(z)}) \quad , \quad \dots \dots \dots (5.16)$$

se define  $W^2$  como el área, por lo tanto:

$$\frac{2q_P}{W^2} = 2v_{exit} \quad , \quad \dots \dots \dots (5.17)$$

sustituyendo en la ecuación 5.16 y acomodando signos, la ecuación para la velocidad del fluido es:

$$2v_{exit} = \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{(z)} - p_{m_u}) + \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{(z)} - p_{m_L}) \quad . \quad \dots \dots \dots (5.18)$$

Si las variables  $k, \phi, \mu, \delta$  no cambian en las matrices, la ecuación 5.18 se puede escribir como:

$$2v_{exit} = \frac{k\phi}{\mu\delta} (2p_{(z)} - p_{m_u} - p_{m_L}) \quad , \quad \dots \dots \dots (5.19)$$

despejando  $v_{exit}$

$$v_{exit} = \frac{k\phi}{\mu\delta} \left[ \frac{2p_{(z)}}{2} - \left( \frac{p_{m_u} + p_{m_L}}{2} \right) \right] \quad , \quad \dots \dots \dots (5.20)$$

si el promedio de las presiones de matriz superior e inferior es igual a  $p_m$ ,

$$p_m = \frac{p_{m_u} + p_{m_L}}{2} \quad , \quad \dots \dots \dots (5.21)$$

La ecuación para la velocidad del fluido que entra en la matriz es:

$$v_{exit} = \frac{k\phi}{\mu\delta} (p_{(z)} - p_m) \quad , \quad \dots \dots \dots (5.22)$$

sustituyendo  $v_{exit}$  en la ecuación del sistema (5.3),

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = \frac{3\mu k\phi}{h^3 \mu\delta} (p_{(z)} - p_m) \quad , \quad \dots \dots \dots (5.23)$$

las condiciones de frontera para la presión son:

## CAPÍTULO 5.- FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

$$z = 0 \quad p = p_i , \dots \dots \dots (5.24)$$

$$z = L \quad p = p_o , \dots \dots \dots (5.25)$$

resolviendo la ecuación 5.23 con las condiciones de frontera (ver el **apéndice A.3**) se obtiene que la presión es:

$$p_{(z)} = p_m + (p_i - p_m)e^{z\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\frac{k\phi}{\mu\delta}}} + \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i)e^{L\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\frac{k\phi}{\mu\delta}}}}{\left( e^{-L\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\frac{k\phi}{\mu\delta}}} - e^{L\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \right)} \right) \left( e^{-z\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\frac{k\phi}{\mu\delta}}} - e^{z\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \right) . \quad (5.26)$$

### 5.1.1.- Cálculo del gasto de entrada en la fractura

Evaluando la ecuación de Hagen-Poiseuille, para conocer los gastos de entrada y salida en la fractura:

$$q = -\frac{2h^3W}{3\mu} \frac{dp}{dz} \dots \dots \dots (5.1)$$

y utilizando la solución de la ecuación 5.26, la presión se deriva con respecto a  $dz$ , obteniendo el resultado del gradiente de presión (ver procedimiento en el **apéndice A.4**).

$$\frac{dp}{dz} = \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m)e^{z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i)e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{\left( e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right)} \right) \left( e^{z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + e^{-z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right) \right] \right\} , \quad (5.27)$$

el resultado de la derivada de  $\frac{dp}{dz}$ , se sustituye en la ecuación de Hagen-Poiseuille:

$$q_{(z)} = \frac{-2h^3W}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m)e^{z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i)e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{\left( e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right)} \right) \left( e^{z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + e^{-z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right) \right] \right\} , \quad (5.28)$$

## CAPÍTULO 5.- FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

se evalúa la ecuación del gasto bajo las condiciones de frontera siguientes:

$$q(z = 0) = q_i \quad , \quad \dots \dots \dots (5.29)$$

$$q(z = L) = q_o \quad , \quad \dots \dots \dots (5.30)$$

Aplicando la condición de frontera (5.29) en la ecuación 5.28, se obtiene la ecuación del gasto de entrada del fluido en una fractura (ver la solución en el **apéndice A.4**).

$$q_i = -\frac{2h^3}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) + \left[ (p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}) \left( \frac{1}{\sinh\left(L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}\right)} \right) \right] \right\}, \quad (5.31)$$

se define las variables siguientes:

$$A_1 = \frac{2h^3}{3\mu} \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \quad , \quad \dots \dots \dots (5.32)$$

$$B_1 = e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \quad , \quad \dots \dots \dots (5.33)$$

$$D_1 = \frac{1}{\sinh\left(L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}\right)} \quad , \quad \dots \dots \dots (5.34)$$

$$a_1 = A_1(B_1 D_1 - 1) \quad , \quad \dots \dots \dots (5.35)$$

$$b_1 = A_1 D_1 \quad , \quad \dots \dots \dots (5.36)$$

$$c_1 = A_1(1 + D_1 - B_1 D_1) \quad . \quad \dots \dots \dots (5.37)$$

Utilizando las variables definidas en el gasto de entrada del fluido en una fractura, la ecuación simplificada queda como:

$$q_i = p_i a_1 - p_o b_1 + p_m c_1 \quad . \quad \dots \dots \dots (5.38)$$

### 5.1.2.- Cálculo del gasto de salida en la fractura

Para conocer  $q_o$ , el gasto de salida en una fractura se aplica la condición de frontera cuando  $z = L$  en la ecuación 5.28, el desarrollo de la ecuación se puede ver en el **apéndice A.4**, la ecuación del gasto de salida para un modelo 2D es,

$$q_o = \frac{q'_o}{W} = -\frac{2h^3}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + \left[ (p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}) \frac{\cosh\left(L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}\right)}{\sinh\left(L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}\right)} \right] \right\}, \quad (5.39)$$

para simplificar la ecuación se utilizaron las expresiones 5.32, 5.33 y se definen las variables siguientes:

$$C_1 = \frac{\cosh\left(L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}\right)}{\sinh\left(L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}\right)}, \quad \dots\dots\dots (5.40)$$

$$d_1 = A_1 B_1 (C_1 - 1), \quad \dots\dots\dots (5.41)$$

$$f_1 = A_1 C_1, \quad \dots\dots\dots (5.42)$$

$$g_1 = A_1 (B_1 + C_1 - B_1 C_1), \quad \dots\dots\dots (5.43)$$

o bien

$$q_o = p_i d_1 - p_o f_1 + p_m g_1 \quad \dots\dots\dots (5.44)$$

**5.2.- Cálculo de la presión en la matriz para la fractura**

Para obtener la presión en la matriz se utiliza la ecuación de estado de la ley de los gases reales, lo anterior considerando que las variaciones de presión durante todo el proceso son mucho menores que la presión misma, y el comportamiento de los flujos de masa es similar (lo anterior implica que el valor de Z es constante en una pequeña región del diagrama P-T):

$$p_m V = nRTZ, \quad \dots\dots\dots (5.45)$$

donde  $n$ , es el numero de moles,  $V$  es el volumen,  $R$  es la constante de proporcionalidad,  $T$  es la temperatura de la formación y  $Z$ , el factor de compresibilidad. Se deriva la ecuación con respecto al tiempo,

## CAPÍTULO 5.- FUNDAMENTOS DEL MODELO DINÁMICO

---

$$V \frac{dp_m}{dt} = RTZ \frac{dn}{dt} , \dots\dots\dots (5.46)$$

se define que  $n$  es igual a,

$$n = \frac{m}{w} , \dots\dots\dots (5.47)$$

$m$  es la masa,  $w$  es el peso molecular, sustituyendo  $n$  en la ecuación 5.46

$$V \frac{dp_m}{dt} = \frac{RTZ}{w} \frac{dm}{dt} , \dots\dots\dots (5.48)$$

si la derivada de la masa con respecto al tiempo, es igual al flujo másico,  $\dot{m}$

$$V \frac{dp_m}{dt} = \frac{RTZ}{w} \dot{m} , \dots\dots\dots (5.49)$$

donde  $\dot{m}$  es proporcional a la densidad,  $\rho$ , por el caudal. Es decir  $\dot{m} = \rho \cdot q$  sustituyendo  $\dot{m}$  en la ecuación 5.49:

$$V \frac{dp_m}{dt} = \frac{RTZ\rho}{Vw} q , \dots\dots\dots (5.50)$$

despejando la derivada de presión de matriz con respecto al tiempo,

$$\frac{dp_m}{dt} = \frac{RTZ\rho}{Vw} q(t) , \dots\dots\dots (5.51)$$

se define una constante  $\beta$

$$\beta = \frac{RTZ\rho}{Vw} , \dots\dots\dots (5.52)$$

sustituyendo la constante  $\beta$  en la ecuación 5.51, se simplifica la ecuación,

$$\frac{dp_m}{dt} = \beta q(t) , \dots\dots\dots (5.53)$$

donde  $q$  es igual a  $q_m$  el gasto de la matriz, que es la suma de la diferencia de los gastos de entrada y salida de las fracturas de su alrededor.

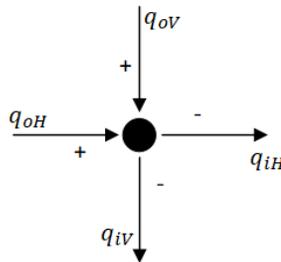
## CAPÍTULO 6 MODELO DINÁMICO

En este capítulo se extrapola el modelo de una sola fractura a una red de ellas, para ello se utilizan conceptos de continuidad y conservación en los nodos que unen las fracturas. Se obtiene un sistema de ecuaciones que se resuelve para cada paso de tiempo.

### 6.1.- Desarrollo del modelo en una red de fracturas

Para resolver el sistema de fracturas, se considera que en cada nodo, o cruce entre fracturas, la masa se conserva, es decir, la suma de los gastos que entran o salen de cada nodo es cero, la expresión siguiente cumple con lo antes mencionado y se observa en la **Figura 6.1**.

$$q_{oH} + q_{oV} - q_{iH} - q_{iV} = 0 \quad \dots\dots\dots (6.1)$$



**Figura 6.1.- Balance del gasto entre cada nodo**

Adicionalmente, se considera que la presión en cada nodo es una función continua, por lo tanto, las presiones de las fracturas en el punto de cruce son iguales como se observa en la **Figura 6.2**, es decir:

$$p_{oV} = p_{iV} \quad \dots\dots\dots (6.2)$$

$$p_{oV} = p_{iH} \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

$$p_{oV} = p_{oH} \quad \dots\dots\dots (6.4)$$

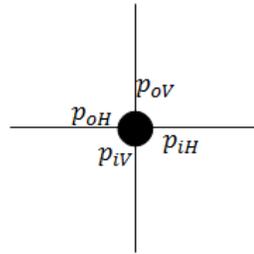


Figura 6.2.- Presión en cada nodo central.

Las condiciones de frontera en el sistema de fracturas son iguales a la presión del yacimiento,  $p_r$ , como se observa en la **Figura 6.3** y para cada frontera le corresponde una expresión.

$$p_{iH} = p_r , \dots\dots\dots (6.5)$$

$$p_{oH} = p_r , \dots\dots\dots (6.6)$$

$$p_{iV} = p_r , \dots\dots\dots (6.7)$$

$$p_{oV} = p_r , \dots\dots\dots (6.8)$$

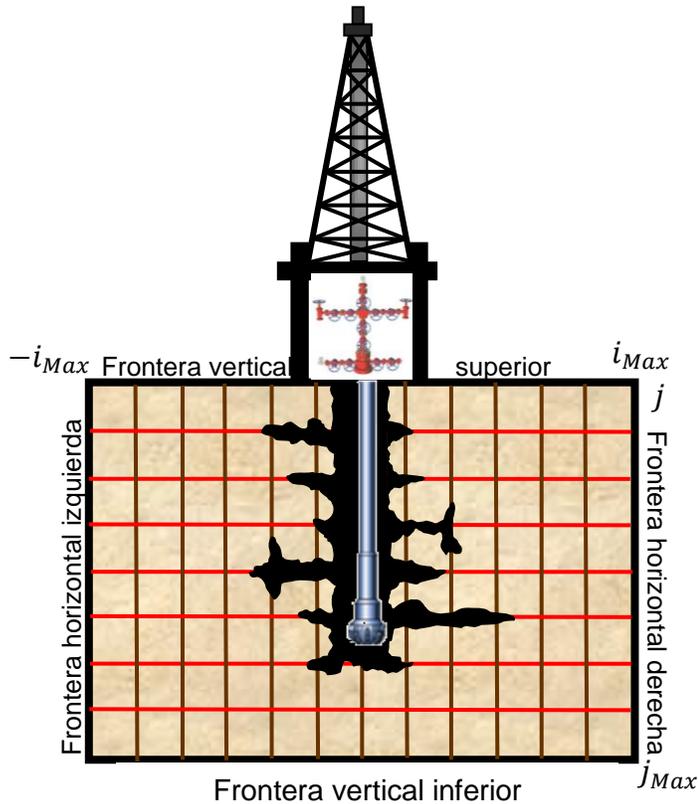


Figura 6.3.- Condiciones de frontera en la malla.

## CAPÍTULO 6.- MODELO DINÁMICO

donde  $p_{iH}$ , es la presión de entrada en la frontera horizontal izquierda,  $p_{oH}$  es la presión de salida en la frontera horizontal derecha,  $p_{iV}$  es la presión de entrada en la frontera vertical superior y  $p_{oV}$  es la condición para la presión de salida en la frontera vertical inferior.

Para conocer los flujos de entrada y salida en cada fractura comprendida entre dos nodos como se observa en la **Figura 6.4**, se utilizan las ecuaciones que se obtuvieron en el capítulo 5.

$$q_i = p_i a_1 - p_o b_1 + p_m c_1 \quad , \quad \dots \dots \dots (5.38)$$

$$q_o = p_i d_1 - p_o f_1 + p_m g_1 \quad . \quad \dots \dots \dots (5.44)$$



**Figura 6.4.- Flujo de entrada y salida en cada fractura.**

Las expresiones 5.38 y 5.44 son las ecuaciones simplificadas para  $q_i$  gasto de entrada y  $q_o$  gasto de salida del fluido en cada fractura, las cuales fueron obtenidas por la combinación de las ecuaciones de Hagen Poiseuille y Karode para el modelo propuesto en este trabajo.

La ecuación de Poiseuille - Karode para el gasto de entrada en la fractura es:

$$q_{iH} = p_i a_1 - p_o b_1 + p_m c_1 \quad , \quad \dots \dots \dots (6.9)$$

se despeja el término de  $p_m$ , presión de matriz y se representa como el promedio de las presiones de matriz superior e inferior, la ecuación 6.9 se convierte en:

$$-q_{iH(i,j)} + p_{i(i,j)} a_1 - p_{o(i,j)} b_1 = - \left( \frac{p_{m,(i,j-1)} + p_{m,(i,j+1)}}{2} \right) c_1 \quad , \quad \dots \dots \dots (6.10)$$

a la ecuación 6.10 se le agrega entre corchetes su etiqueta de posición correspondiente obtenida en el capítulo 4, finalmente la ecuación de Poiseuille - Karode para el gasto de entrada en la fractura horizontal es:

## CAPÍTULO 6.- MODELO DINÁMICO

$$-q_{iH}\{q_{iH(i,j)}\} + p_{iH}\{p_{iH(i,j)}\} * a_1 - p_{oH}\{p_{oH(i,j)}\} * b_1 = -\left(\frac{p_m\{F_{Hu(im,jm)}\}}{2} + \frac{p_m\{F_{HL(im,jm)}\}}{2}\right) * c_1 \quad , \quad (6.11)$$

donde la etiqueta de posición del gasto de entrada en la fractura horizontal  $\{q_{iH(i,j)}\}$  es la expresión 4.16, la etiqueta de posición de la presión de entrada  $\{p_{iH(i,j)}\}$  es la expresión 4.18, la etiqueta de posición de la presión de salida  $\{p_{oH(i,j)}\}$  es la expresión 4.19 y las etiquetas de posición de la presión de la matriz superior  $\{F_{Hu(im,jm)}\}$  e inferior  $\{F_{HL(im,jm)}\}$  son las expresiones 4.24 y 4.25 respectivamente.

La ecuación de Poiseuille - Karode para el gasto de salida en la fractura es:

$$q_{oH} = p_i d_1 - p_o f_1 + p_m g_1 \quad , \quad \dots \dots \dots (6.12)$$

despejando  $p_m$  y representándolo como el promedio de las presiones de matriz superior e inferior, la ecuación queda:

$$-q_{oH(i,j)} + p_{i(i,j)} d_1 - p_{o(i,j)} f_1 = -\left(\frac{p_{m,(i,j-1)} + p_{m,(i,j+1)}}{2}\right) g_1 \quad . \quad \dots \dots \dots (6.13)$$

La ecuación de Poiseuille - Karode con su etiqueta de posición correspondiente entre corchetes para el gasto de salida en la fractura horizontal es:

$$-q_{oH}\{q_{oH(i,j)}\} + p_{iH}\{p_{iH(i,j)}\} * d_1 - p_{oH}\{p_{oH(i,j)}\} * f_1 = -\left(\frac{p_m\{F_{Hu(im,jm)}\}}{2} + \frac{p_m\{F_{HL(im,jm)}\}}{2}\right) * g_1 \quad , \quad (6.14)$$

donde la etiqueta de posición del gasto de salida  $\{q_{oH(i,j)}\}$  es la expresión 4.17.

Por otro lado, se despeja  $p_m$  en la ecuación 5.38 y se expresa como el promedio de las presiones de las matrices, con la finalidad obtener la ecuación de Poiseuille - Karode para una fractura vertical.

$$-q_{iV(i,j)} + p_{i(i,j)} a_1 - p_{o(i,j)} b_1 = -\left(\frac{p_{m,(i-1,j)} + p_{m,(i+1,j)}}{2}\right) c_1 \quad . \quad \dots \dots \dots (6.15)$$

## CAPÍTULO 6.- MODELO DINÁMICO

La ecuación general del gasto de entrada en la fractura vertical es la combinación de la ecuación de Poiseuille - Karode con su etiqueta de posición correspondiente entre corchetes es:

$$-q_{iV\{q_{iV(i,j)}\}} + p_{iV\{p_{iV(i,j)}\}} * a_1 - p_{oV\{p_{oV(i,j)}\}} * b_1 = - \left( \frac{p_{m\{F_{Viz(im,jm)}\}}}{2} + \frac{p_{m\{F_{Vde(im,jm)}\}}}{2} \right) * c_1 , \quad (6.16)$$

donde la etiqueta de posición del gasto de entrada en la fractura vertical  $\{q_{iV(i,j)}\}$  es la expresión 4.10, la etiqueta de posición de la presión de entrada en la fractura vertical  $\{p_{iV(i,j)}\}$  es la expresión 4.12, la etiqueta de posición de la presión de salida de la fractura vertical  $\{p_{oV(i,j)}\}$  es la expresión 4.13 y las etiquetas de posición de la presión de la matriz para una fractura vertical  $\{F_{Viz(im,jm)}\}$ ,  $\{F_{Vde(im,jm)}\}$  le corresponde las expresiones 4.23 y 4.22.

La ecuación de Poiseuille -Karode para el gasto de salida en la fractura vertical

$$q_{oV} = p_i d_1 - p_o f_1 + p_m g_1 , \quad \dots \dots \dots (6.17)$$

el término de la presión de matriz se despeja y se expresa como el promedio de las presiones de las matrices, convirtiendo la ecuación 6.17 en :

$$-q_{oV(i,j)} + p_{i(i,j)} d_1 - p_{o(i,j)} f_1 = - \left( \frac{p_{m,(i-1,j)} + p_{m,(i+1,j)}}{2} \right) g_1 . \quad \dots \dots \dots (6.18)$$

Finalmente, se obtiene la ecuación general del gasto de salida en la fractura vertical combinando Poiseuille - Karode con su etiqueta de posición correspondiente entre corchetes:

$$-q_{oV\{q_{oV(i,j)}\}} + p_{iV\{p_{iV(i,j)}\}} * d_1 - p_{oV\{p_{oV(i,j)}\}} * f_1 = - \left( \frac{p_{m\{F_{Viz(im,jm)}\}}}{2} + \frac{p_{m\{F_{Vde(im,jm)}\}}}{2} \right) * g_1 , \quad (6.19)$$

donde la etiqueta de posición del gasto de salida en la fractura vertical  $\{q_{oV(i,j)}\}$  es la expresión 4.11.

**6.2.- Cálculo del gasto matriz-fractura**

Si se conoce la etiqueta de posición del bloque matriz, se conocen las etiquetas de posición de las fracturas que le corresponden. A cada fractura se le calcula el flujo perdido que interacciona con la matriz  $q_p$ , que es la diferencia del gasto de entrada y el gasto de salida.

$$q_p = q_i - q_o \quad , \quad \dots \dots \dots (6.20)$$

entonces la ecuación para el cálculo del gasto de la matriz,  $q_m$ , es,

$$q_m = q_{PF_{Vde}} + q_{PF_{Viz}} + q_{PF_{Hu}} + q_{PF_{HL}} \quad , \quad \dots \dots \dots (6.21)$$

donde  $q_{PF_{Vde}}$  es el gasto perdido en la fractura vertical derecha,  $q_{PF_{Viz}}$  es el gasto perdido en la fractura vertical izquierda,  $q_{PF_{Hu}}$  es el gasto perdido en la fractura horizontal superior y  $q_{PF_{HL}}$  es el gasto perdido en la fractura horizontal inferior.

El gasto perdido en la red de fracturas, es la diferencia del gasto de inyección y el gasto total acumulado perdido por absorción en la matriz.

$$q_{pf} = q_{iny} - q_m \quad , \quad \dots \dots \dots (6.22)$$

donde  $q_{pf}$  es el gasto perdido en la red de fracturas y  $q_{iny}$ , es el gasto de inyección.

**6.3.- Cálculo de la presión en la matriz**

Por otro lado, la ecuación simplificada para la presión en la matriz (ecuación 5.53) se resuelve utilizando diferencias finitas en el tiempo:

$$\frac{p_{m,k+1} - p_{m,k}}{\Delta t} = \beta q_{m,k+1} \quad , \quad \dots \dots \dots (6.23)$$

de donde se obtiene la ecuación general para la presión de matriz,  $p_{m,k+1}$

$$p_{m,k+1} = \beta q_{m,k+1} \Delta t + p_{m,k} \quad . \quad \dots \dots \dots (6.24)$$

**6.4.- Cálculo de la permeabilidad**

Para calcular la permeabilidad efectiva en el área de estudio, en dirección perpendicular al pozo, se utiliza la Ley de Darcy

$$u = -\frac{k \Delta p}{\mu L} , \dots\dots\dots (6.25)$$

donde  $u$  es la velocidad Darcy,  $k$  es la permeabilidad,  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $\Delta p$  es el diferencial de presión,  $L$  es la longitud, y adicionalmente, se supone que la zona de disparo del pozo abarca desde la parte superior a la inferior del área de estudio.

Si la velocidad es directamente proporcional al flujo volumétrico e inversamente proporcional al área, sustituyendo en la ecuación 6.25, se obtiene:

$$\frac{q}{A} = -\frac{k \Delta p}{\mu L} , \dots\dots\dots (6.26)$$

donde  $A$  es el área de la vecindad del pozo, para el modelo propuesto en este trabajo, el área es igual a  $A = 2H_r W$ , el flujo volumetrico ( $q$ ), representa el gasto de inyección  $q_{iny}$ , como se observa en la **Figura 6.5**. Sustituyendo en la ecuación 6.26 se obtiene la ecuación siguiente:

$$\frac{q_{iny}}{2H_r W} = -\frac{k \Delta p}{\mu L} , \dots\dots\dots (6.27)$$

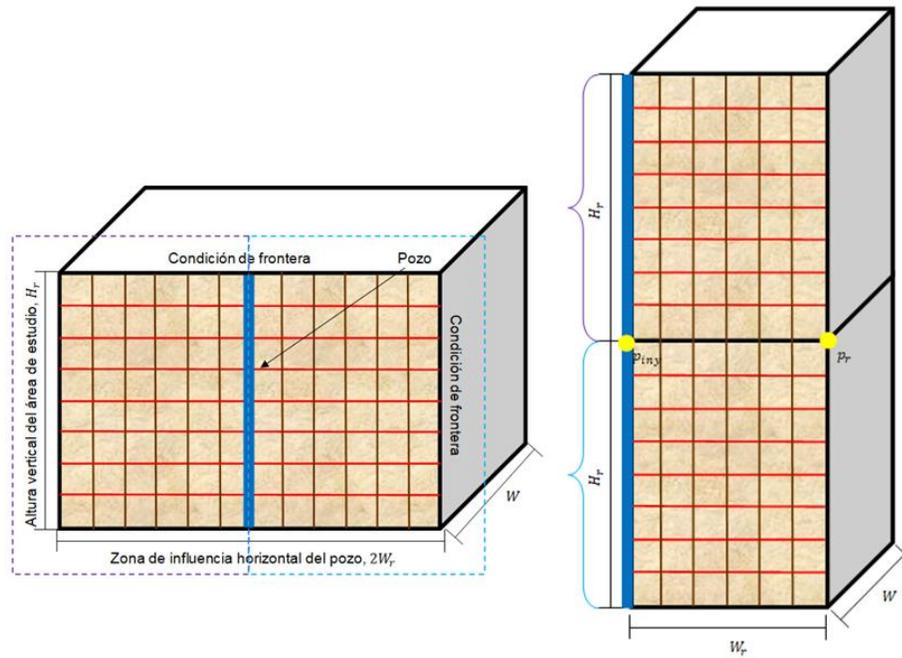
donde  $L$  es definida como  $W_r$  para el modelo, que es la zona de influencia horizontal del pozo (radio de drene), despejando la permeabilidad en la ecuación 6.27 se obtiene la ecuación de la permeabilidad en tres dimensiones:

$$k = -\frac{\mu q_{iny} W_r}{2H_r W \Delta p} , \dots\dots\dots (6.28)$$

si el cambio de presión se define como  $\Delta p = (p_{iny} - p_r)$  y si un pseudo gasto de inyección en 2D se representa por  $q'_{iny} = \frac{q_{iny}}{W}$ , finalmente la ecuación para la permeabilidad total de la vecindad del pozo en dos dimensiones es la siguiente:

$$k = -\frac{\mu q'_{iny} W_r}{2H_r (p_{iny} - p_r)} , \dots\dots\dots (6.29)$$

donde  $p_{iny}$  es la presión de inyección y  $p_r$  es la presión del yacimiento.



**Figura 6.5.- Simetría utilizada en el cálculo de la permeabilidad en dirección perpendicular al pozo.**

### 6.5.- Método numérico para resolver el sistema $Ax = b$

Para un modelo de red de fracturas se tiene un sistema lineal de ecuaciones con  $n$  incógnitas como el que se presenta:

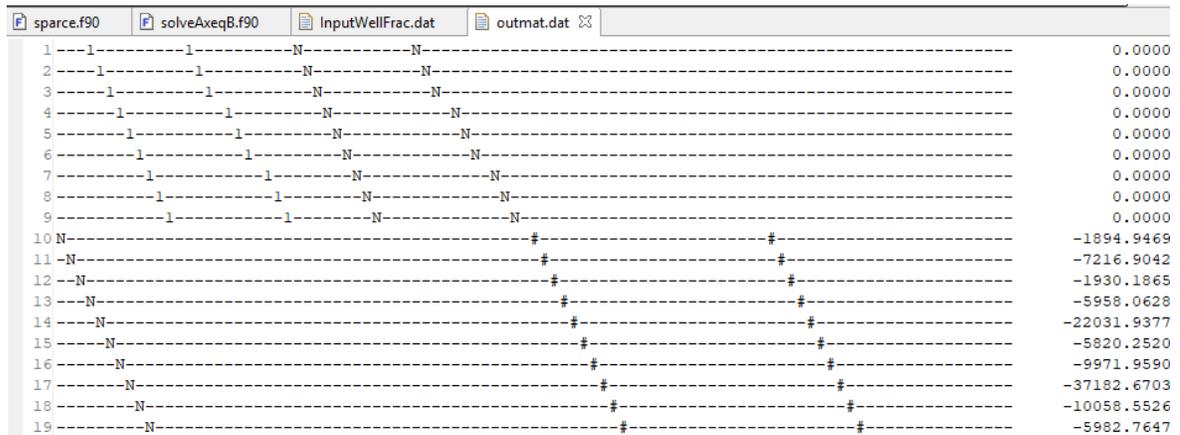
$$\begin{aligned}
 q_{iV} + q_{iH} - q_{oV} - q_{oH} &= 0 \\
 -q_{iV} + p_{iV}a_1 - p_{oV}b_1 &= -p_m c_1 \\
 -q_{oH} + p_{iH}d_1 - p_{oH}f_1 &= -p_m g_1 \\
 -p_{iH} + p_{oV} &= 0 \\
 -p_{iV} + p_{oV} &= 0 \\
 p_{oV} - p_{oH} &= 0 \\
 -q_{oV} + p_{iV}d_1 - p_{oV}f_1 &= -p_m g_1 \\
 p_{iV} &= p_r \\
 p_{iH} &= p_r \\
 -q_{iH} + p_{iH}a_1 - p_{oH}b_1 &= -p_m c_1 \\
 p_{oV} &= p_r \\
 p_{oH} &= p_r \\
 p_{oV} &= p_{iny}
 \end{aligned}$$

## CAPÍTULO 6.- MODELO DINÁMICO

y se puede escribir en forma matricial como  $Ax = b$ , donde  $A = (a_{ij})$  es la matriz de los coeficientes (etiquetas de posición del gasto y la presión),  $x$  es el vector de  $n$  incógnitas ( $q_{iV}, q_{iH}, q_{oV}, q_{oH}, p_{iV}, p_{iH}, p_{oV}, p_{oH}$ ) y  $b$  es el vector de los términos independientes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Combinando las etiquetas de posición del gasto y la presión con las ecuaciones de Poiseuille-Karode, se genera una matriz cuadrada, dispersa y no singular, donde el sistema de ecuaciones solo admite una única solución (ver la **Figura 6.5**). Con la finalidad de reducir el tiempo de cálculo y almacenamiento de datos (Soto y cols, 2013), el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$  se resuelve utilizando la subrutina MGMRES\_ST, en donde sólo se almacenan las entradas de la matriz A distintas de cero (Burkardt y Ju, 2007).



**Figura 6.6.- Estructura de la matriz dispersa generada dentro del programa (vista parcial).**

Esta subrutina aplica el método iterativo GMRES (Residual Mínimo Generalizado) reiniciado, para una matriz dispersa. La convergencia consiste en guardar los vectores propios aproximados de la matriz A, correspondientes a los valores propios más pequeños en magnitud y sumarlos al nuevo subespacio Krylov  $K_k(r_0)$  que se genera (Ayachour, 2003). El algoritmo está preconditionado por el residuo que se genera en el subespacio. El algoritmo GMRES reiniciado se describe como:

## CAPÍTULO 6.- MODELO DINÁMICO

---

**Paso 1: Inicio:** Se propone una solución inicial  $x_0$  y calcule un vector residual  $r_0 = b - Ax_0$  y un vector unitario  $v_1 = r_0/|r_0|$ .

**Paso 2: Iterar:** Para  $i_k = 1, \dots, nmat - 1$ , construir una base ortogonal  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  para  $K_k(r_0)$  utilizando el algoritmo modificado de Gram-Schmidt (Fuente O'connor, 1998), para encontrar el vector el  $v_k$ .

**Paso 3: Resolver** el problema de mínimos cuadrados utilizando las rotaciones de Givens para matrices dispersas.

**Paso 4: Solución aproximada**  $x_k$

$$x_k = x_0 + v_k(|r_0|z^{(k)})$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se utilizó una estación de trabajo de 24 procesadores con 48 Gb de RAM. El código numérico se programó en Fortran. La simulación se realizó en una vecindad de pozo, para diversas combinaciones de fracturas verticales y horizontales. Los tiempos de ejecución, para 200 pasos en el tiempo, tardaron más de 12 horas. La salida se visualizó en el software VisIt con licencia GNU.

### 6.6.- Diagrama de flujo para el modelo en una red de fracturas

Para resolver las ecuaciones planteadas en las secciones anteriores se utiliza un método explícito en el tiempo. En el diagrama de flujo (ver la **Figura 6.7**) se muestra el algoritmo utilizado para resolver el sistema de ecuaciones.

**Datos de entrada:** Al inicio del programa se pide la altura y radio de la zona de disparo del pozo, la presión de inyección, la viscosidad dinámica del fluido, la presión y temperatura del yacimiento, la altura y radio de drene del área de estudio, la porosidad y la permeabilidad de la matriz.

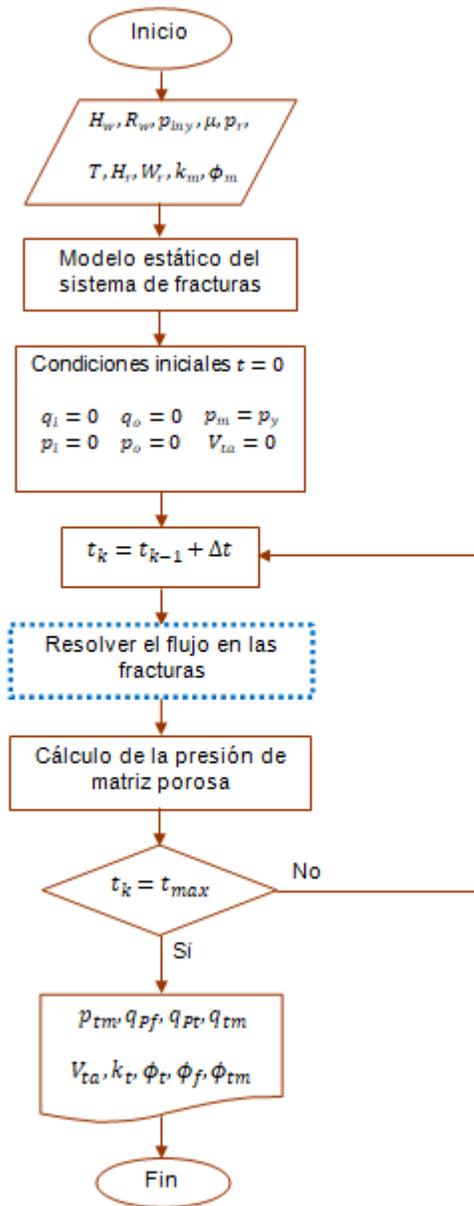


Figura 6.7.- Diagrama de flujo.

**Modelo estático del sistema de fracturas:** Se define el tamaño de la malla, se asignan las etiquetas de posición para la matriz y las fracturas horizontales y verticales; se calcula la abertura de fractura y la porosidad total. Se crea un archivo en .plt del modelo estático para visualizar la malla en el software VisIt.

## CAPÍTULO 6.- MODELO DINÁMICO

---

**Condiciones iniciales:** Se establecen las condiciones de gasto de entrada y salida, la presión de entrada y de salida y el volumen total acumulado igual a cero. La presión de la matriz es igual a la presión de yacimiento en un tiempo igual a cero.

**Flujo en las fracturas:** En esta etapa del proceso se resuelve la matriz  $Ax = B$ , donde se calculan los gastos de entrada y de salida con las ecuaciones de Poiseuille - Karode en combinación con las etiquetas de posición correspondiente, se calcula la permeabilidad con la Ley de Darcy y se crea el modelo dinámico de la vecindad de pozo.

**Cálculo de la presión de la matriz porosa:** Se calcula la presión promedio en los bloques de la matriz, el gasto total perdido por absorción en la matriz, el gasto que se pierde en la red de fracturas y el volumen total acumulable.

**Datos de salida:** Se imprimen los resultados de los cálculos realizados en el tiempo,  $p_{tm}$  es la presión promedio en los bloques de la matriz en  $[Pa]$ ,  $q_{pf}$  es el gasto perdido en la red de fracturas en  $[m^2/s]$ ,  $q_{pt}$  es la pérdida total en  $[m^2/s]$ ,  $q_{tm}$  es el gasto perdido por absorción en la matriz en  $[m^2/s]$ ,  $V_{ta}$  es el volumen total acumulable en  $[m^2]$ ,  $k_t$  es la permeabilidad total en  $[m^2]$ ,  $\phi_t$  es la porosidad total,  $\phi_f$  es la porosidad de fractura y  $\phi_{tm}$  es la porosidad total de la matriz.

## CAPÍTULO 7 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo, se presentan y analizan los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas con un modelo numérico desarrollado. Se calcula la permeabilidad efectiva, el pseudo gasto perdido por absorción en la matriz, el pseudo gasto perdido en la red de fracturas y la pérdida total del fluido en la vecindad de pozo, considerando un yacimiento naturalmente fracturado de doble porosidad y permeabilidad. Para el ajuste del modelo se utilizó información del campo Akal (Tellez, 2014; Lozada y cols.,2014).

### 7.1.- Análisis de la permeabilidad total

Para analizar la capacidad del medio poroso que permite el flujo de un fluido newtoniano se estudiaron tres variables: desplazamiento variando el número de fracturas horizontales y verticales, la interacción del fluido proveniente de las diferentes aberturas de fracturas hacia la matriz y la comunicación entre la permeabilidad en la fractura y en la matriz con diferentes porosidades de matriz. Asimismo, se observó si la permeabilidad es afectada por el diferencial de presión.

La permeabilidad total se evaluó en una red de fracturas 2D en dirección perpendicular a la vecindad del pozo, utilizando la Ley de Darcy en medios porosos, ecuación 7.1:

$$k_T = - \frac{\mu q'_{iny} W_r}{2H_r(p_{iny} - p_r)} \dots \dots \dots (7.1)$$

En la **Figura 7.1** se muestra la geometría del modelo estático con ubicación de un pozo vertical en el centro, interceptando fracturas horizontales y verticales. Para los cálculos de la permeabilidad efectiva, la altura vertical del pozo abarca desde la parte superior del área de estudio hasta la parte inferior. Las dimensiones de la red estocástica de fracturas son 100 m x 100 m. La malla se compone de nodos horizontales  $i_{Max}$  y nodos verticales  $j_{Max}$ .

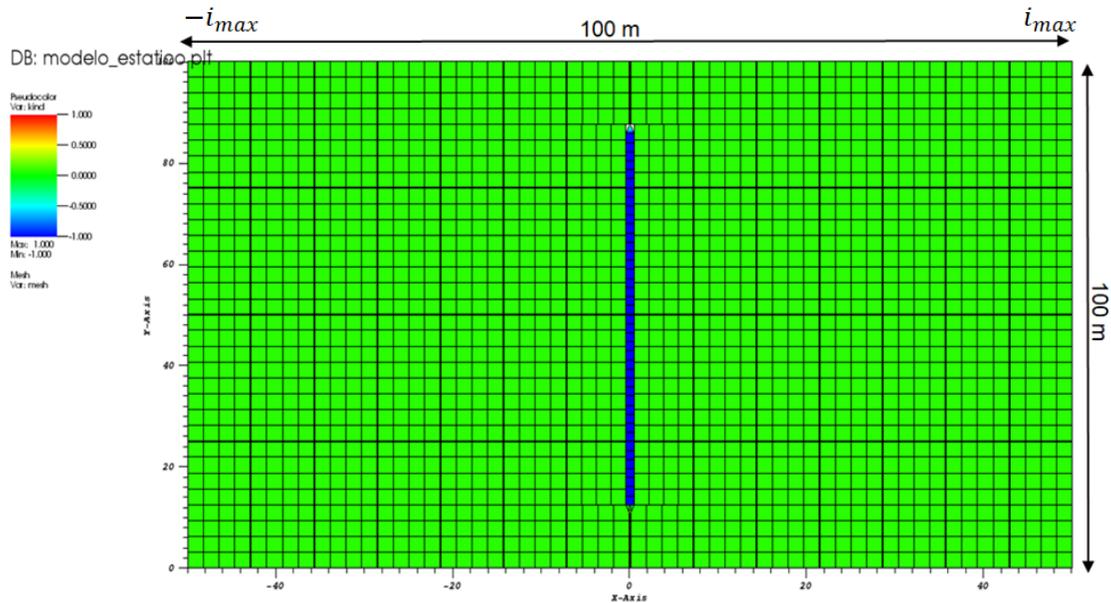


Figura 7.1.- Geometría del modelo estático de la vecindad del pozo para el análisis de la permeabilidad.

### 7.1.1.- Análisis de la permeabilidad variando el número de fracturas

Se analiza el comportamiento de la permeabilidad efectiva en un sistema de doble porosidad y permeabilidad en 2D, dependiendo de sus propiedades geométricas, condiciones de flujo y propiedades de la matriz. Con este objetivo se realizaron simulaciones cambiando el número de fracturas, porosidad de matriz, abertura de fractura y el diferencial de presión.

Para estudiar el comportamiento dinámico y su dependencia con los parámetros del sistema de doble porosidad en 2D se realiza los pasos siguientes:

1. Se define el número de fracturas orientadas horizontal o verticalmente para cada escenario.
2. Los datos de entrada del modelo se establecen con base en la información de la vecindad del pozo en estudio.
3. El modelo propuesto se simula hasta un tiempo  $t_{max}$ .

## **CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS**

---

4. El programa arroja los resultados de cada escenario.
5. Los resultados son graficados y analizados con la finalidad de encontrar correlaciones.

A continuación, se presenta el comportamiento de la permeabilidad para diferentes números de fracturas, horizontales y verticales, donde se observa el comportamiento para un pozo perforado verticalmente.

En el estudio de la permeabilidad para diferentes números de fracturas verticales, se consideran cuatro casos de red de fracturas con dimensiones de 100 m x 100 m, abertura de fractura de 0.35 mm y desviación estándar de 0.000001 mm. El tamaño de la malla del primer escenario es de 20 nodos horizontales x 21 nodos verticales, que forman un total de 780 segmentos de fracturas verticales, 760 segmentos de fracturas horizontales y 800 bloques de matriz. En el segundo caso, la malla está compuesta por 30 nodos horizontales x 21 nodos verticales, conteniendo 1,180 segmentos de fracturas verticales, 1,140 segmentos de fracturas horizontales y 1,200 bloques de matriz. En el tercero se propone una malla de 40 nodos horizontales x 21 nodos verticales, con alrededor de 1,580 segmentos de fracturas verticales, 1,520 segmentos de fracturas horizontales y 1,600 bloques de matriz. El último escenario tiene una malla de 50 nodos horizontales, mismo número de nodos verticales que los casos anteriores, con 1,980 segmentos de fracturas verticales, 1,900 segmentos de fracturas horizontales y 2,000 bloques de matriz.

En el análisis de la permeabilidad para diferentes números de fracturas horizontales, se proponen cuatro escenarios de red de fracturas con dimensiones de 100 m x 100 m, abertura de fractura de 0.35 mm y desviación estándar de 0.000001 mm. El tamaño de la primera malla es de 30 nodos horizontales x 11 nodos verticales, que forman un total de 590 segmentos de fracturas verticales, 540 segmentos de fracturas horizontales y 600 bloques de matriz. En el segundo escenario, la malla está compuesta por 30 nodos horizontales x 21 nodos verticales, conteniendo 1,180 segmentos de fracturas verticales, 1,140 segmentos de fracturas horizontales y 1,200 bloques de matriz. En el

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

tercer caso se propone una malla de 30 nodos horizontales x 31 nodos verticales, con alrededor de 1,770 segmentos de fracturas verticales, 1,740 segmentos de fracturas horizontales y 1,800 bloques de matriz. En el cuarto escenario se tiene una malla de 30 nodos horizontales x 41 nodos verticales, con 2,360 segmentos de fracturas verticales, 2,340 segmentos de fracturas horizontales y 2,400 bloques de matriz.

La información técnica de la vecindad del pozo utilizada para ambos estudios de la permeabilidad se encuentra en la **Tabla 7.1**.

<b>Datos de formación</b>	Espesor de la formación ( $H_r$ )	100 m
	Radio de drene ( $W_r$ )	50 m
	Porosidad de la matriz ( $\phi_m$ )	7.0 %
	Permeabilidad de la matriz ( $k_m$ )	$5 \text{ mD} \sim (5 \times 10^{-15} \text{ m}^2)$
<b>Datos del pozo</b>	Longitud del intervalo disparado ( $H_w$ )	30 m
	Radio del pozo ( $R_w$ )	0.08 m
<b>Datos del yacimiento</b>	Presión de yacimiento ( $p_r$ )	14,709,975 Pa
	Temperatura de yacimiento	383.15 K
<b>Fluido de perforación</b>	Tipo de fluido	Fluido newtoniano
	Viscosidad	0.001 [Pa · s]
	Densidad	1,030 kg/m <sup>3</sup>

Se evalúa la permeabilidad con diferentes números de fracturas verticales utilizando los datos de entrada en el modelo estático: la vecindad del pozo contiene 21 fracturas horizontales variando el número de fracturas verticales 20, 30, 40 y 50, para cada escenario propuesto. La etiqueta de posición de inicio ( $J_{1_{well}}$ ) del pozo es 4 y la etiqueta de posición final ( $J_{2_{well}}$ ) es 38, para todos los escenarios antes mencionados.

Para el comportamiento de la permeabilidad con diferentes números de fracturas horizontales, la vecindad de pozo contiene 30 fracturas verticales variando el número de fracturas horizontales (11, 21, 31 y 41); la etiqueta de posición de inicio ( $J_{1_{well}}$ ) es

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

igual a 4, la etiqueta de posición final ( $J_{2_{well}}$ ), depende del tamaño de los nodos verticales que se le asigne a la malla, por lo tanto, para el escenario con 11 fracturas horizontales le corresponde la etiqueta de posición final ( $J_{2_{well}}$ ) igual a 18, para 21 fracturas horizontales  $J_{2_{well}}$  es igual a 38, para el escenario con 31 fracturas horizontales la etiqueta de posición  $J_{2_{well}}$  es igual a 58 y finalmente para 41 fracturas horizontales su etiqueta  $J_{2_{well}}$  es 78.

En el modelo dinámico se utiliza un diferencial de presión de 85.264 MPa y el parámetro de ajuste ( $\delta$ ) de la fractura hacia la matriz es de 0.01 m.

Los resultados de la permeabilidad y porosidad calculados con diferentes números de fracturas verticales, se muestran en la **Tabla 7.2**, mientras que, para las fracturas horizontales se observan en la **Tabla 7.3**.

<b>Tabla 7.2.- Resultados de la permeabilidad variando el número de fracturas verticales</b>						
$i_{max}$	$j_{max}$	<i>Abertura de fractura</i> [mm]	$k_t$ [Darcy]	$\phi_f$ [%]	$\phi_m$ [%]	$\phi_t$ [%]
20	21	0.35	8.5704	0.021398	6.8556	6.8770
30	21	0.35	9.6550	0.028406	6.712885	6.741291
40	21	0.35	10.5949	0.035413	6.570085	6.605498
50	21	0.35	11.4091	0.042416	6.427285	6.469701

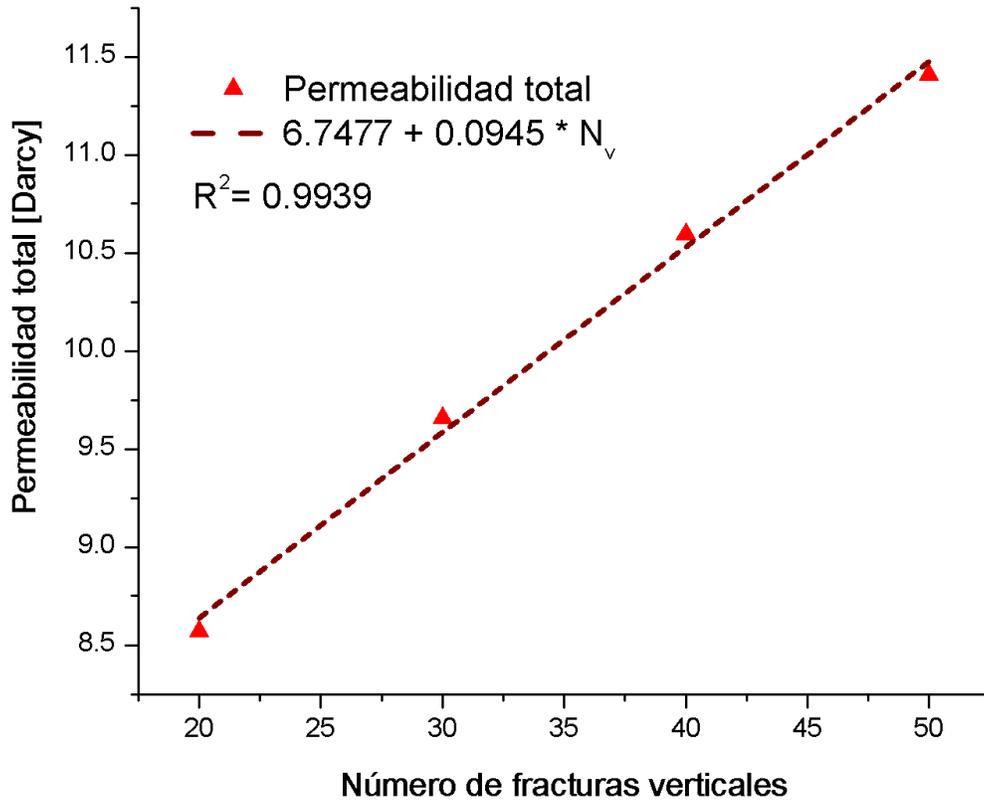
Los resultados graficados se presentan en la **Figura 7.2** para las fracturas verticales y en la **Figura 7.3** para las fracturas horizontales. En ambos casos del estudio de la permeabilidad con diferentes números de fracturas, horizontales y verticales, se observa un comportamiento lineal, por lo tanto, la permeabilidad depende linealmente del número de fracturas. Adicionalmente, se concluye que la dependencia de la

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

permeabilidad es mayor al número de fracturas horizontales (por un factor de 3) que al de las fracturas verticales.

<b>Tabla 7.3.- Resultados de la permeabilidad variando el número de fracturas horizontales</b>						
$i_{max}$	$j_{max}$	<i>Abertura de fractura</i> [mm]	$k_t$ [Darcy]	$\phi_f$ [%]	$\phi_m$ [%]	$\phi_t$ [%]
30	11	0.35	5.9121	0.024934	6.646931	6.6718
30	21	0.35	9.6550	0.028406	6.712885	6.7412
30	31	0.35	12.8426	0.031898	6.778745	6.8106
30	41	0.35	15.7692	0.035393	6.844583	6.8799

### Análisis de la permeabilidad variando el número de fracturas verticales



**Figura 7.2.- Análisis de la permeabilidad variando el número de fracturas verticales.**

### Análisis de la permeabilidad variando el número de fracturas horizontales

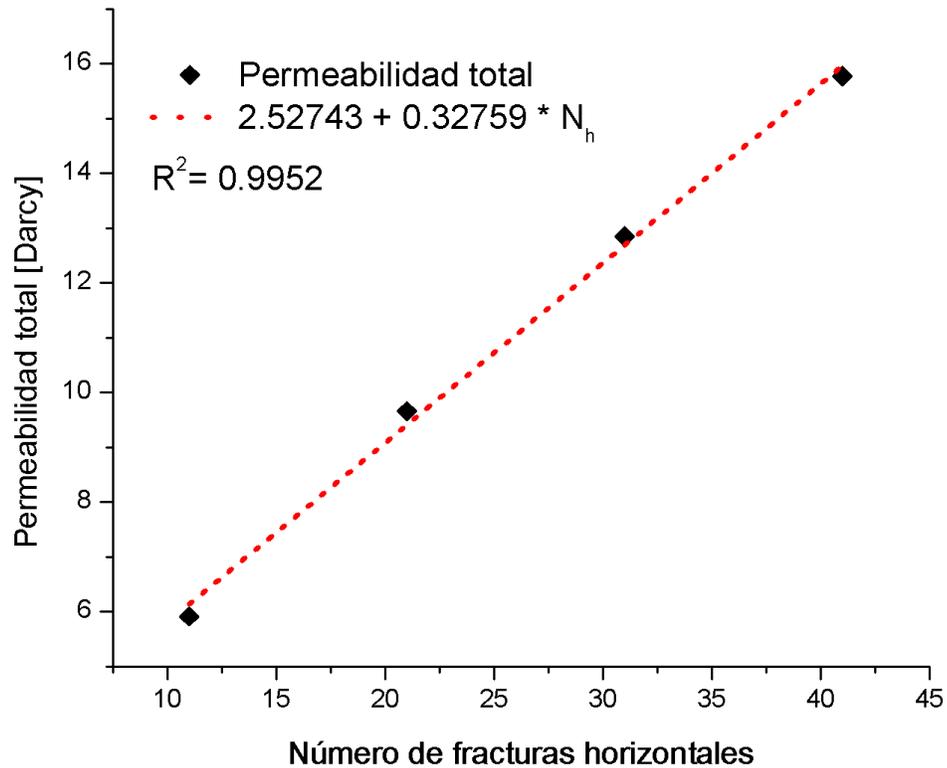


Figura 7.3.- Análisis de la permeabilidad variando el número de fracturas horizontales.

#### 7.1.2.- Análisis de la permeabilidad con diferentes aberturas de fractura

Se generan dos redes de fractura para el análisis del comportamiento de la permeabilidad a diferentes aberturas de fractura. La primera red de fracturas tiene dimensiones de 100 m x 100 m, con 16 fracturas verticales y 31 fracturas horizontales; la permeabilidad se analiza con un pozo vertical de 0.08 m de radio y 15 m de longitud de intervalo disparado, con etiqueta de posición de inicio igual a 4 y final igual a 58. La segunda red de fracturas tiene las mismas dimensiones con 30 fracturas verticales y 21 fracturas horizontales, con un pozo vertical ubicado en el centro de la malla de radio 0.08 m y longitud de 15 m, las etiquetas de posición que le corresponden son: inicio igual a 4 y final igual a 38.

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Las dos redes de fracturas tienen las propiedades físicas siguientes: desviación estándar de 0.000001 mm, porosidad de la matriz de 8%, permeabilidad de la matriz de 5 mD, presión de yacimiento ( $p_r$ ) de 10.375 MPa, temperatura de yacimiento de 371.12 K, diferencial de presión de  $7 \times 10^6$  Pa, parámetro de ajuste ( $\delta$ ) de la fractura hacia la matriz de 0.01 m, viscosidad del fluido newtoniano de 0.001 [Pa · s] y densidad del fluido de 1,030 kg/m<sup>3</sup>.

El modelo se simuló a un tiempo máximo ( $t_k$ ) de 30 s, para abertura de fracturas igual a 0.3, 0.35, 0.37, 0.40, 0.60 y 0.75 mm, para las dos redes de fractura. Los resultados arrojados por el programa, para el análisis de la permeabilidad en dos redes de fracturas diferentes variando solo la abertura de fractura, se presentan en la **Tabla 7.4** y **Tabla 7.5**.

<b>Tabla 7.4.- Resultados de la permeabilidad variando la abertura de fractura (<math>i_{max} = 16</math> y <math>j_{max} = 31</math>).</b>						
$i_{max}$	$j_{max}$	<i>Abertura de fractura</i> [mm]	$k_t$ [Darcy]	$\phi_f$ [%]	$\phi_m$ [%]	$\phi_t$ [%]
16	31	0.30	3.80827	0.018933	7.9778	7.996791
16	31	0.35	5.11066	0.022091	7.9778	7.9999
16	31	0.37	5.7041	0.023352	7.9778	8.0012
16	31	0.40	6.69953	0.025245	7.9778	8.0031
16	31	0.60	17.1873	0.037870	7.9778	8.0157
16	31	0.75	31.1603	0.047333	7.9778	8.0251

En la **Figura 7.4** se grafica la permeabilidad versus abertura de fractura para las dos redes de fracturas. Se propone el modelo siguiente, donde la permeabilidad total es proporcional al cuadrado de la abertura de fractura ( $d_i^2$ ), como consecuencia de la ley cúbica, presenta un comportamiento parabólico que obedece a una función cuadrática:

$$k_t = k_m + b * d_i^2 \quad \dots \dots \dots (7.2)$$

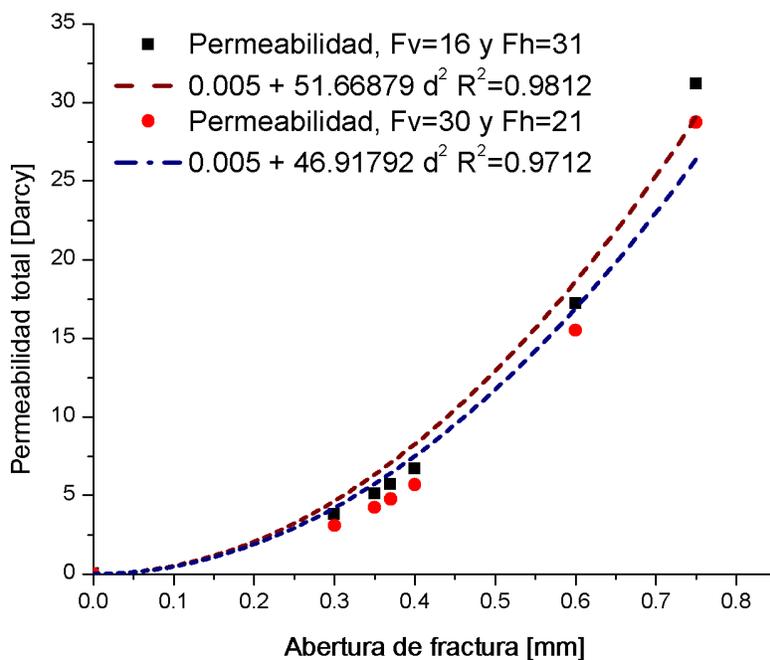
## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

**Tabla 7.5.- Resultados de la permeabilidad variando la abertura de fractura ( $i_{max} = 21$  y  $j_{max} = 21$ ).**

$i_{max}$	$j_{max}$	<i>Abertura de fractura</i> [mm]	$k_t$ [Darcy]	$\phi_f$ [%]	$\phi_m$ [%]	$\phi_t$ [%]
30	21	0.30	3.07411	0.024347	7.6718	7.6962
30	21	0.35	4.22538	0.028406	7.6718	7.7002
30	21	0.37	4.76956	0.03002	7.6718	7.7018
30	21	0.40	5.66596	0.032463	7.6718	7.7043
30	21	0.60	15.4985	0.048693	7.6718	7.7205
30	21	0.75	28.7362	0.060872	7.6718	7.7327

Con la función (7.2) se propone que en el límite, cuando la abertura de fractura ( $d_i$ ) tiende a 0, la permeabilidad total  $k_t$  debe ser igual a la permeabilidad de la matriz ( $k_m$ ), donde  $b$  es una constantes de ajuste.

Análisis de la permeabilidad a diferentes aberturas de fracturas



**Figura 7.4.- Análisis de la permeabilidad total a diferentes aberturas de fracturas.**

### 7.1.3.- Análisis de la permeabilidad a diferente porosidad de la matriz

Se realiza un análisis de la permeabilidad efectiva en dirección perpendicular, utilizando la ley de Darcy para medios porosos, considerando diferentes relaciones del espacio vacío interconectado y el volumen de la formación, con la finalidad de conocer la interacción del fluido newtoniano proveniente de las fracturas que ingresa en los bloques de matriz.

Primero se define una red de fracturas 2D con dimensiones de 100 m x 100 m, abertura de fractura de 0.37 mm y desviación estándar de 0.000001 mm. El tamaño de la malla es de 30 nodos horizontales x 21 nodos verticales, que forman un total de: 1,180 segmentos de fracturas verticales, 1,140 segmentos de fracturas horizontales y 1,200 bloques de matriz.

La permeabilidad se evalúa con un pozo vertical, de 0.08 m de radio ( $R_w$ ), en el centro de la malla, que abarca la altura vertical del área de estudio. La vecindad del pozo contiene 30 fracturas verticales y 21 fracturas horizontales, con etiqueta de posición de inicio igual a 4 y final igual a 38.

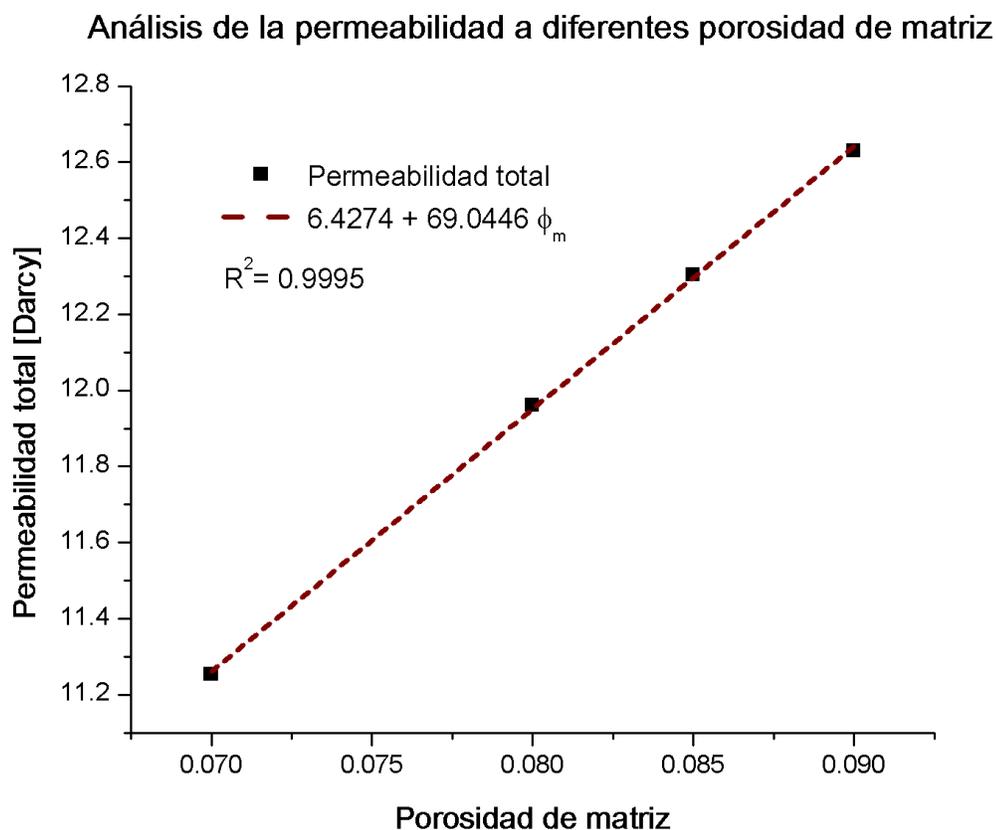
Se proponen cuatro escenarios para el análisis de la permeabilidad, variando la porosidad de la matriz a 7%, 8%, 8.5% y 9%. Las propiedades físicas para todos los escenarios son: permeabilidad de la matriz de 5 mD, presión de yacimiento ( $p_r$ ) de 14.710 MPa, temperatura de yacimiento de 383.15 K, diferencial de presión de 85.264 MPa, parámetro de ajuste ( $\delta$ ) de la fractura hacia la matriz de 0.01 m, viscosidad del fluido newtoniano de 0.001 [Pa · s] y densidad del fluido de 1,030 kg/m<sup>3</sup>.

Los resultados de la permeabilidad efectiva con diferentes porosidades de matriz se muestran en la **Tabla 7.6**.

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

$i_{max}$	$j_{max}$	Porosidad matriz [%]	$k_t$ [Darcy]	$\phi_f$ [%]	$\phi_m$ [%]	$\phi_t$ [%]
30	21	7.0	11.2534	0.030029	6.712885	6.742914
30	21	8.0	11.9612	0.030030	7.671868	7.701899
30	21	8.5	12.3044	0.030028	8.151360	8.181389
30	21	9.0	12.6302	0.030029	8.630852	8.660881

La representación gráfica de la permeabilidad para diferentes porosidades de matriz se observa en la **Figura 7.5**, para este cálculo se tomó el primer dato de la permeabilidad que arrojó el programa, ya que es el más importante para este análisis, antes de que la matriz se sature por el fluido. Se observa en la gráfica que la permeabilidad efectiva es proporcional a la porosidad de la matriz.



**Figura 7.5.- Análisis de la permeabilidad total a diferentes porosidades de matriz.**

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

### 7.1.4.- Análisis de la permeabilidad efectiva variando el diferencial de la presión

Se estudia una red de fracturas conectadas con dimensiones de 100 m x 100 m. La malla contiene 16 fracturas verticales y 31 fracturas horizontales con abertura de fractura de 0.37 mm y desviación estándar de 0.000001 mm. En el centro de la malla se ubica un pozo vertical de radio ( $R_w$ ) de 0.08 m y longitud de 15 m, con su etiqueta de posición de inicio ( $J_{1Well}$ ) igual a 4 y final ( $J_{2Well}$ ) igual a 58.

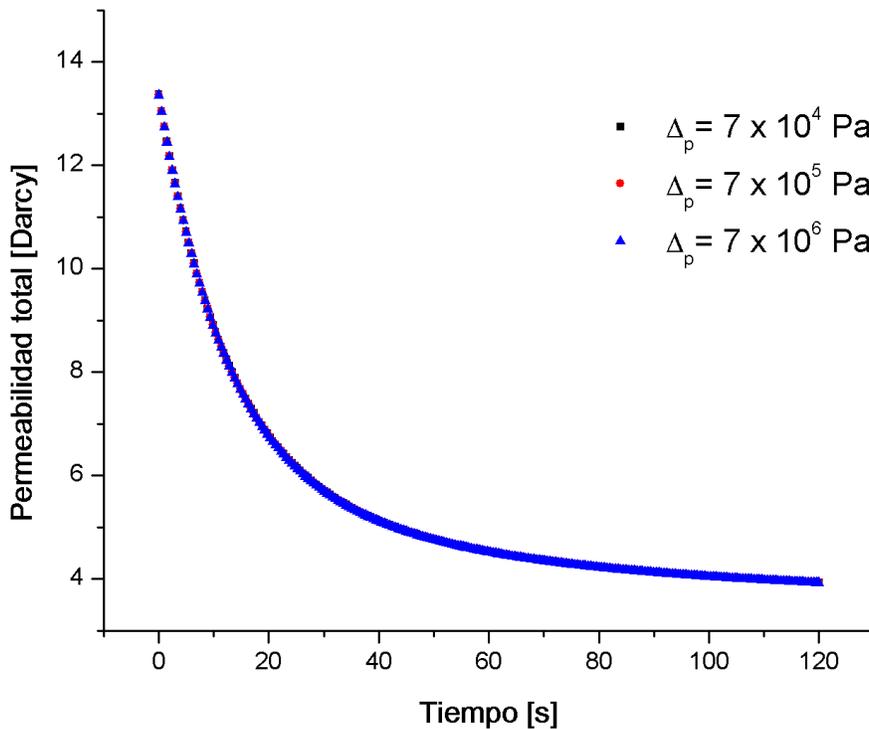
Las propiedades físicas son: permeabilidad de la matriz de 5 mD, porosidad de la matriz de 8%, presión de yacimiento ( $p_r$ ) de 10.375 MPa, temperatura de yacimiento de 371.12 K, parámetro de ajuste ( $\delta$ ) de 0.01 m, viscosidad del fluido newtoniano de 0.001 [Pa · s] y densidad del fluido de 1,030 kg/m<sup>3</sup>.

En el modelo numérico propuesto en la tesis, se varía el diferencial de presión a  $7 \times 10^4$  Pa,  $7 \times 10^5$  Pa,  $7 \times 10^6$  Pa, simulando a un tiempo máximo ( $t_k$ ) de 120 s y  $k_{max}$  de 244. En la **Tabla 7.7** se muestran los datos obtenidos de la permeabilidad total con diferentes deltas de presión, dichos resultados son graficados y representados por medio de símbolos como se analiza en la **Figura 7.6**, observando que la permeabilidad disminuye gradualmente hasta ser constante en el tiempo e independientemente del diferencial de presión, esto se debe a que la permeabilidad es una propiedad intensiva.

**Tabla 7.7.- Resultados de la permeabilidad variando el diferencial de presión.**

$i_{max}$	$j_{max}$	Diferencial de presión [Pa]	$k_t$ [Darcy]
16	31	70,000	3.9355
16	31	700,000	3.9331
16	31	7,000,000	3.9226

**Análisis de la permeabilidad variando el diferencial de presión**



**Figura 7.6.- Análisis de la permeabilidad total variando el diferencial de presión.**

**7.2.- Análisis del gasto**

Uno de los principales problemas en perforación es la pérdida de circulación, ocasionando altos costos en el diseño del fluido. Para mejorar el entendimiento del problema se requiere un cálculo preciso del pseudo gasto perdido por absorción en la matriz ( $q_{tm}$ ), el pseudo gasto perdido en la red de fracturas ( $q_{pf}$ ) y la pérdida total del fluido ( $q_{pt}$ ); así como, el perfil de flujo en función del diferencial de presión, la porosidad de la matriz y la abertura de fractura. Para los cálculos de flujo se utilizan las ecuaciones siguientes:

Globalmente:

$$q_{pt} = q_{pf} + q_{tm} \quad \dots \dots \dots (7.3)$$

En cada bloque de matriz el gasto total es la suma de los gastos en cada cara:

$$q_{tm} = q_{PFVde} + q_{PFViz} + q_{PFHu} + q_{PFHL} \quad \dots \dots \dots (7.4)$$

**7.2.1.- Análisis de los gastos variando el diferencial de la presión ( $\Delta p$ )**

Se presentan dos enfoques para el estudio del flujo, el primero es en función del tiempo y el segundo en función del diferencial de presión. Para este estudio se genera un modelo estocástico con una red de fracturas 2D, con dimensiones ( $H_r \times 2W_r$ ) de 100 m x 100 m. La malla contiene 16 fracturas verticales y 31 fracturas horizontales con abertura de fractura de 0.37 mm y desviación estándar de 0.000001mm. En el centro de la malla se ubica un pozo perforado verticalmente de radio ( $R_w$ ) de 0.08 m y longitud del intervalo disparado ( $H_w$ ) de 15 m, su etiqueta de posición de inicio igual a 26 y final igual a 36.

Las propiedades físicas son: permeabilidad de la matriz de 5 mD, porosidad de la matriz de 8%, presión de yacimiento ( $p_r$ ) de 10.375 MPa, temperatura de yacimiento de 371.12 K, parámetro de ajuste ( $\delta$ ) de 0.01 m, viscosidad del fluido newtoniano de 0.001 [Pa · s] y densidad del fluido de 1,030 kg/m<sup>3</sup>. El modelo fue simulado a un diferencial de tiempo ( $dt$ ) de 0.5 s, para cada delta de presión de  $7 \times 10^4$  Pa,  $7 \times 10^6$  Pa,  $35 \times 10^6$  Pa,  $65 \times 10^6$  Pa y  $89.59 \times 10^6$  Pa.

En la **Figura 7.7** se muestra un gráfico de símbolos de la pérdida total para cada diferencial de presión, utilizando una escala logarítmica base 10, donde se visualiza un decremento de la pérdida total del fluido newtoniano respecto al tiempo. Para observar su comportamiento se realizó un ajuste polinomial, obteniendo una función de cuarto grado, el cual se representa por medio de una línea. La función es:

$$q_{Pt} = 10^{a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4} , \dots \dots \dots (7.5)$$

donde  $q_{Pt}$  es la pérdida total,  $a_0, a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  son constantes de ajuste y  $t$  es la variable de tiempo.

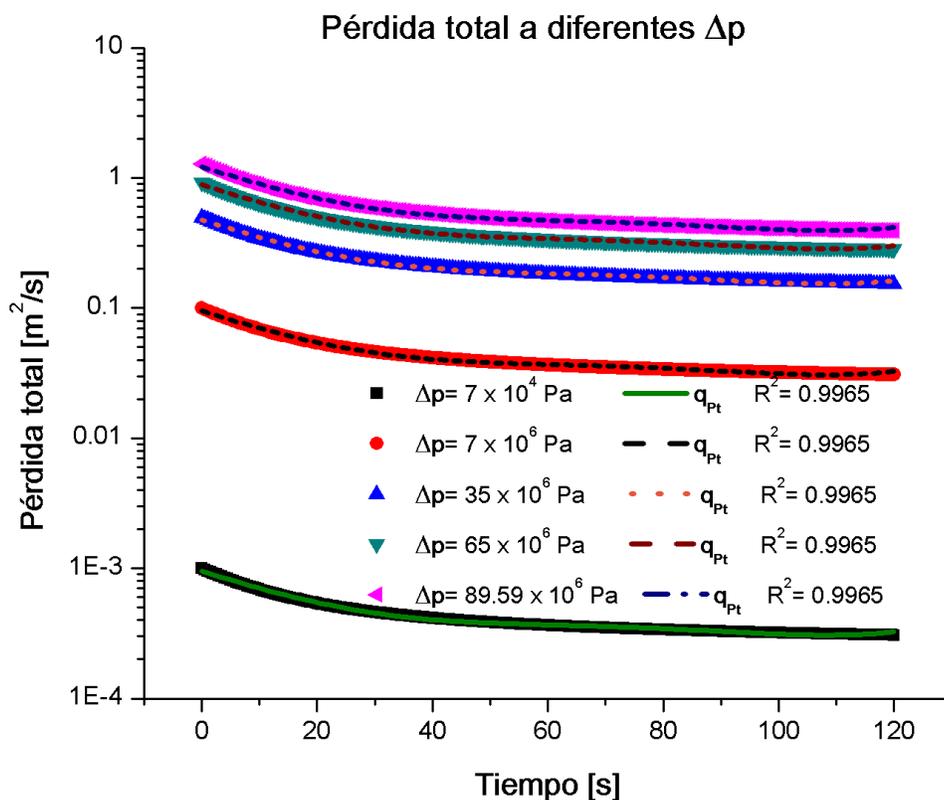


Figura 7.7.- Análisis de la pérdida total versus tiempo a diferentes deltas de presión.

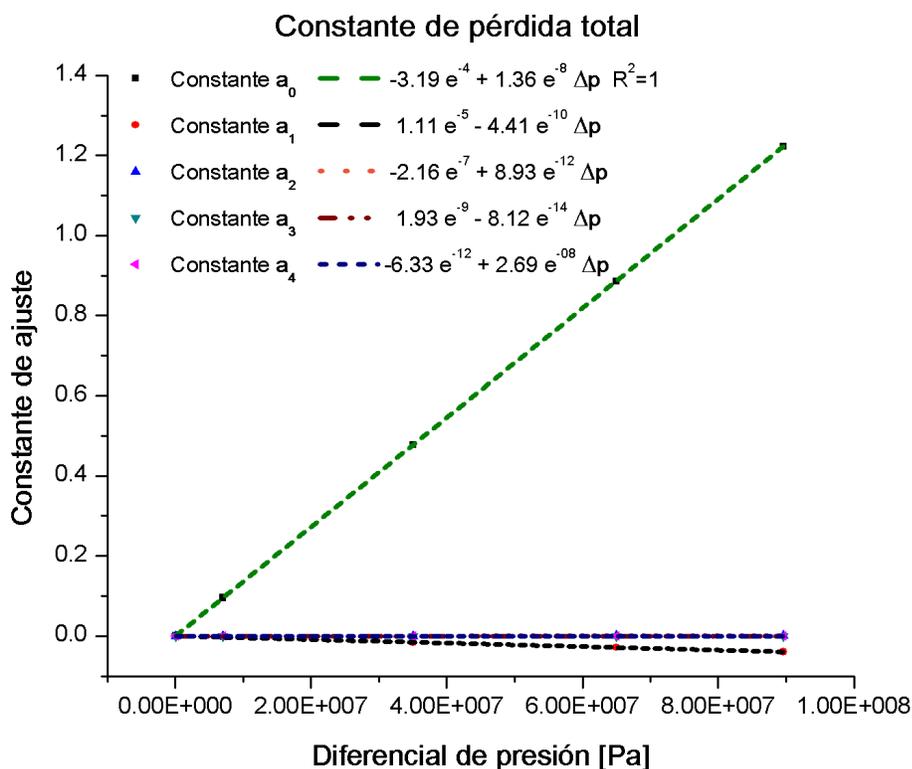
En la **Tabla 7.8** se muestran los valores de las constantes de ajuste y el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) para cada función de la pérdida total del fluido.

**Tabla 7.8.- Constantes de ajuste para cada diferencial de presión de la pérdida total.**

Constante	$\Delta p$ [Pa]				
	$7 \times 10^4$	$7 \times 10^6$	$35 \times 10^6$	$65 \times 10^6$	$89.59 \times 10^6$
$a_0$	$9.5509 \times 10^{-4}$	0.0955	0.4769	0.8862	1.2232
$a_1$	$-3.0851 \times 10^{-5}$	-0.0031	-0.0154	-0.0286	-0.0395
$a_2$	$6.2460 \times 10^{-7}$	$6.2423 \times 10^{-5}$	$3.1197 \times 10^{-4}$	$5.7981 \times 10^{-4}$	$8.0025 \times 10^{-4}$
$a_3$	$-5.6823 \times 10^{-9}$	$-5.6789 \times 10^{-7}$	$-2.8384 \times 10^{-6}$	$-5.2751 \times 10^{-6}$	$-7.2805 \times 10^{-6}$
$a_4$	$1.8794 \times 10^{-11}$	$1.8782 \times 10^{-9}$	$9.3881 \times 10^{-9}$	$1.7447 \times 10^{-8}$	$2.4079 \times 10^{-8}$
$R^2$	0.9965	0.9965	0.9965	0.9965	0.9965

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

El primer enfoque representa la pérdida total del fluido en función del tiempo (ver la **Figura 7.7**). En el segundo enfoque, se gráfica el valor de las constantes de ajuste (ver la **Tabla 7.8**) de la función obtenida respecto al diferencial de presión, como se observa en la **Figura 7.8**.



**Figura 7.8.- Análisis de la pérdida total en función del diferencial de presión.**

Con base en la información presentada en la **Figura 7.8**, se definen las constantes siguientes:

$$a_{0P} = -3.19123 \times 10^{-4} + 1.36499 \times 10^{-8} * \Delta p$$

$$a_{1P} = 1.10967 \times 10^{-5} - 4.41042 \times 10^{-10} * \Delta p$$

$$a_{2P} = -2.16305 \times 10^{-7} + 8.92995 \times 10^{-12} * \Delta p$$

$$a_{3P} = 1.93215 \times 10^{-9} - 8.12427 \times 10^{-14} * \Delta p$$

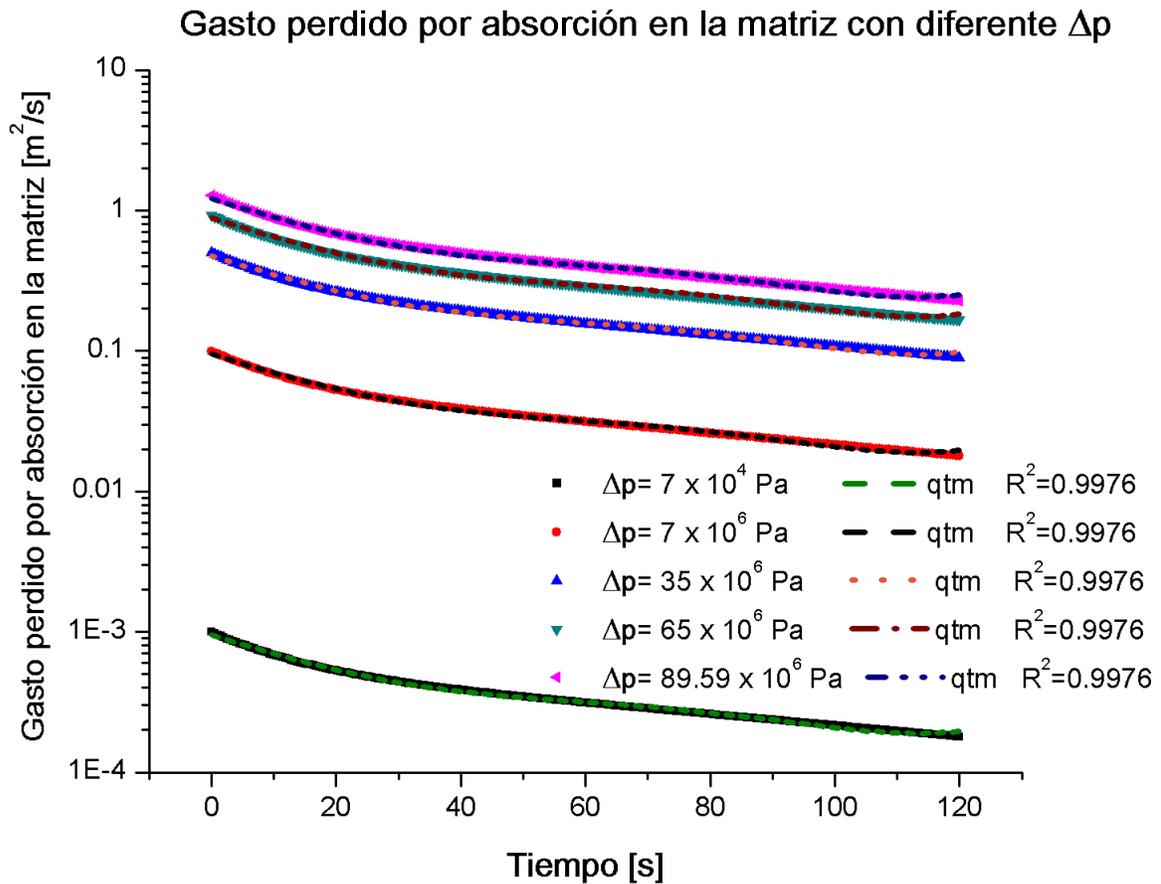
$$a_{4P} = -6.33537 \times 10^{-12} + 2.68708 \times 10^{-16} * \Delta p$$

y se deduce una función general de cuarto orden, para calcular el flujo de la pérdida total para un diferencial de presión dado.

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

$$q_{PT} = 10^{a_{0P} + a_{1P}t + a_{2P}t^2 + a_{3P}t^3 + a_{4P}t^4} \dots \dots \dots (7.6)$$

Se realizan dos análisis para el pseudo gasto perdido por absorción en la matriz. En el primer análisis, la pérdida de fluido por absorción en la matriz, comienza a un alto gasto y disminuye gradualmente, asimismo es proporcional al diferencial de presión respecto al tiempo. En la **Figura 7.9**, el pseudo gasto perdido por absorción en la matriz es representado por medio de símbolos y el comportamiento polinomial de cuarto orden se representa por medio de una línea. En la **Tabla 7.9** se muestran los valores de las constantes de ajuste y el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), para cada función del pseudo gasto perdido por absorción en la matriz.



**Figura 7.9.- Análisis del gasto perdido por absorción en la matriz con diferentes delta de presión.**

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

**Tabla 7.9.- Constantes de ajuste para cada diferencial de presión para el gasto perdido por absorción en la matriz.**

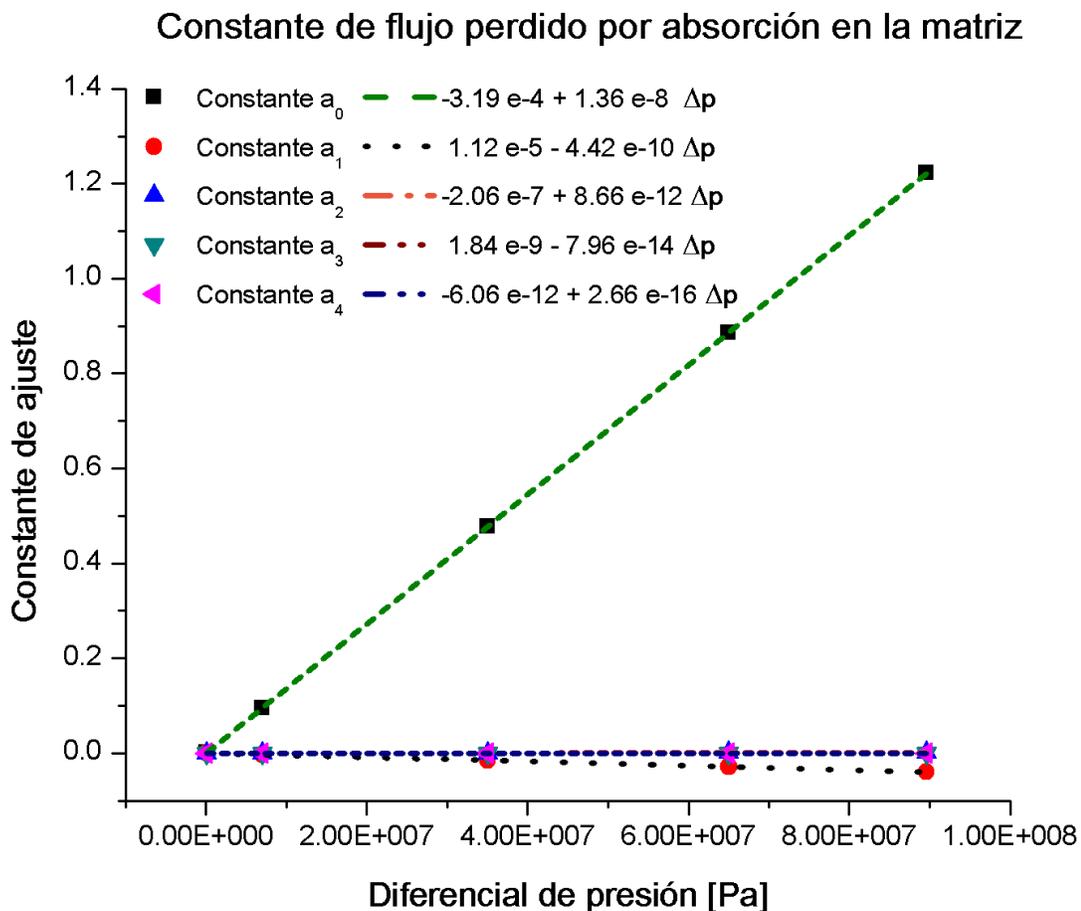
Constante	$\Delta p$ [Pa]				
	$7 \times 10^4$	$7 \times 10^6$	$35 \times 10^6$	$65 \times 10^6$	$89.59 \times 10^6$
$a_0$	$9.5439 \times 10^{-4}$	0.0954	0.4765	0.8856	1.2224
$a_1$	$-3.0954 \times 10^{-5}$	-0.0031	-0.0154	-0.0287	-0.0397
$a_2$	$6.0589 \times 10^{-7}$	$6.0554 \times 10^{-5}$	$3.0263 \times 10^{-4}$	$5.6244 \times 10^{-4}$	$7.7627 \times 10^{-4}$
$a_3$	$-5.5677 \times 10^{-9}$	$-5.5645 \times 10^{-7}$	$-2.7812 \times 10^{-6}$	$-5.1688 \times 10^{-6}$	$-7.1333 \times 10^{-6}$
$a_4$	$1.8583 \times 10^{-11}$	$1.8572 \times 10^{-9}$	$9.2827 \times 10^{-9}$	$1.7252 \times 10^{-8}$	$2.3808 \times 10^{-8}$
$R^2$	0.9976	0.9976	0.9976	0.9976	0.9976

En el segundo análisis, se gráfica la tendencia lineal de las constantes del ajuste polinomial (ver la **Tabla 7.9**) respecto al diferencial de presión (ver la **Figura 7.10**), obteniendo una función general de cuarto orden, para estimar el gasto perdido por absorción en la matriz para un diferencial de presión dado. La función general es:

$$q_{tm} = 10^{a_{0m} + a_{1m}t + a_{2m}t^2 + a_{3m}t^3 + a_{4m}t^4} , \dots \dots \dots (7.7)$$

se define las constantes lineales del flujo absorbido en la matriz para un diferencial de presión:

$$\begin{aligned} a_{0m} &= -3.18697 \times 10^{-4} + 1.36399 \times 10^{-8} * \Delta p \\ a_{1m} &= 1.12563 \times 10^{-5} - 4.42528 \times 10^{-10} * \Delta p \\ a_{2m} &= -2.06253 \times 10^{-7} + 8.66232 \times 10^{-12} * \Delta p \\ a_{3m} &= 1.83631 \times 10^{-9} - 7.96018 \times 10^{-14} * \Delta p \\ a_{4m} &= -6.06382 \times 10^{-12} + 2.6568 \times 10^{-16} * \Delta p \end{aligned}$$



**Figura 7.10.- Análisis del gasto perdido por absorción en la matriz en función del diferencial de presión.**

En la **Figura 7.11**, el pseudo gasto perdido en la red de fracturas comienza lento y aumenta gradualmente con el tiempo, asimismo, es proporcional al diferencial de presión; se realiza un ajuste polinomial de tercer orden, observando un comportamiento exponencial.

Gasto perdido en la red de fracturas con diferentes  $\Delta p$

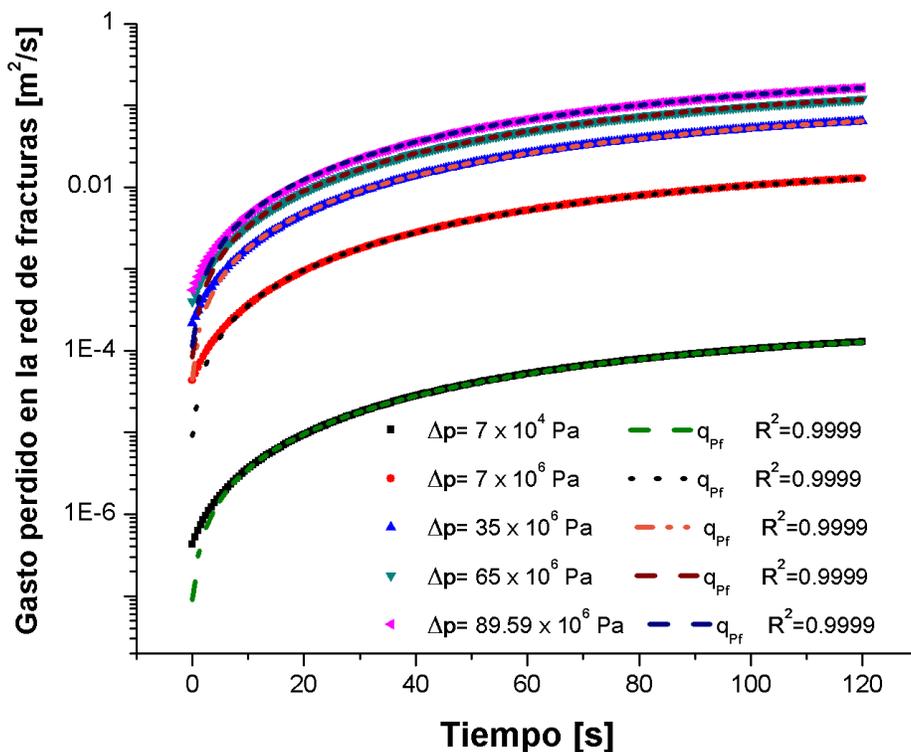


Figura 7.11.- Análisis del gasto perdido en la red de fracturas con diferentes deltas de presión.

Los datos de las constantes de ajuste y el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), de cada función para el gasto perdido en la red de fracturas, se presentan en la **Tabla 7.10**.

Tabla 7.10.- Constantes de ajuste para cada diferencial de presión en el gasto perdido en la red de fracturas.					
Constante	$\Delta p [Pa]$				
	$7 \times 10^4$	$7 \times 10^6$	$35 \times 10^6$	$65 \times 10^6$	$89.59 \times 10^6$
<b>a</b>	$8.9722 \times 10^{-8}$	$9.0994 \times 10^{-6}$	$4.4962 \times 10^{-5}$	$8.3423 \times 10^{-5}$	$1.1286 \times 10^{-4}$
<b>b</b>	$2.0730 \times 10^{-7}$	$2.0623 \times 10^{-5}$	$1.0349 \times 10^{-4}$	$1.9198 \times 10^{-4}$	$2.6672 \times 10^{-4}$
<b>c</b>	$1.4800 \times 10^{-8}$	$1.4796 \times 10^{-6}$	$7.3934 \times 10^{-6}$	$1.3741 \times 5$	$1.8965 \times 10^{-5}$
<b>d</b>	$-6.389 \times 10^{-11}$	$-6.3846 \times 10^{-9}$	$-3.1914 \times 10^{-8}$	$-5.9310 \times 10^{-8}$	$-8.1921 \times 10^{-8}$
<b>R<sup>2</sup></b>	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Se grafican los resultados de la **Tabla 7.10** (ver la **Figura 7.12**), para obtener una función general para el análisis del gasto perdido en la red de fracturas a un diferencial de presión dado.

$$q_{pf} = 10^{a_f + b_f t + c_f t^2 + d_f t^3} \quad \dots \dots \dots (7.8)$$

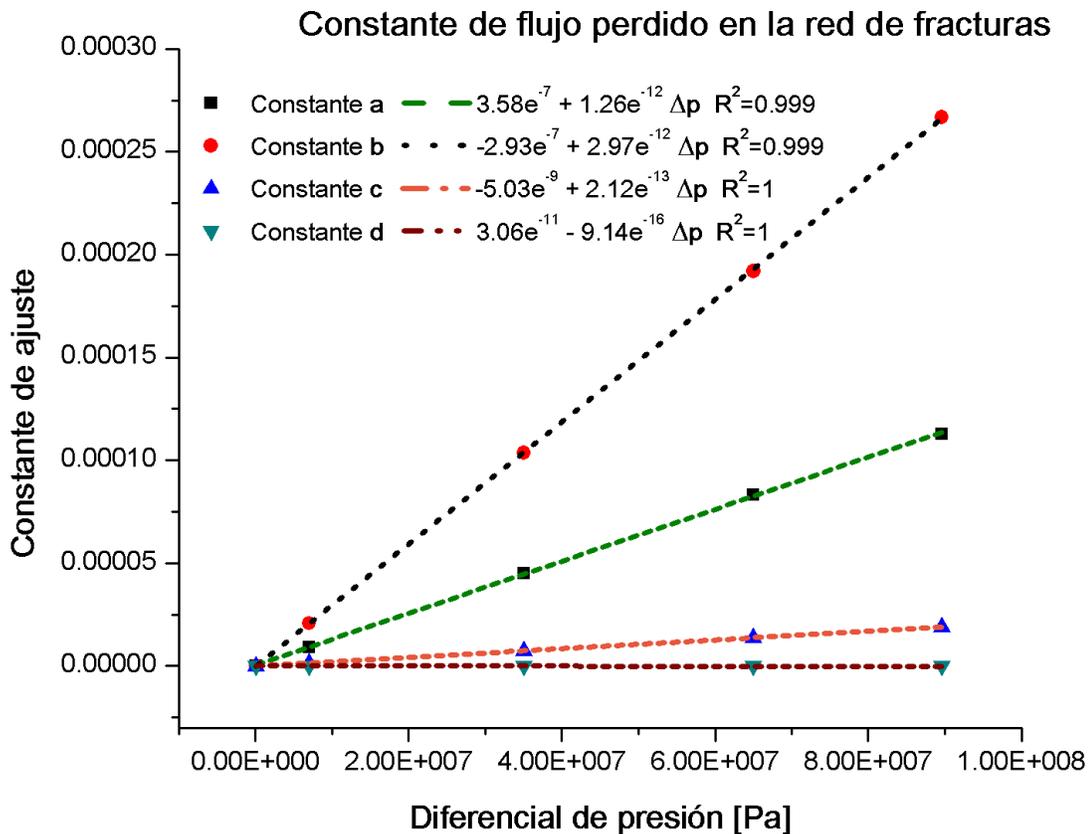
Se definen las constantes lineales del flujo en la red de fracturas

$$a_f = 3.58368 \times 10^{-7} + 1.26431 \times 10^{-12} * \Delta p$$

$$b_f = -2.92824 \times 10^{-7} + 2.97207 \times 10^{-12} * \Delta p$$

$$c_f = -5.03085 \times 10^{-9} + 2.11629 \times 10^{-13} * \Delta p$$

$$d_f = 3.06736 \times 10^{-11} - 9.14002 \times 10^{-16} * \Delta p$$



**Figura 7.12.- Análisis del gasto perdido en la red de fracturas en función del diferencial de presión.**

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En la **Tabla 7.11**, se muestran los resultados obtenidos del estudio del pseudo gasto perdido por absorción en la matriz, el pseudo gasto perdido en la red de fractura y la pérdida total para cada diferencial de presión.

<b>Tabla 7.11.- Resultados de la pérdida total, el gasto perdido en la red de fracturas y el gasto perdido por absorción en la matriz.</b>					
$t_{max}$	$k_{max}$	$\Delta p$ [Pa]	Pérdida total [ $m^2/s$ ]	$q_{Pf}$ [ $m^2/s$ ]	$q_{tm}$ [ $m^2/s$ ]
120	244	$7 \times 10^4$	$3.07443 \times 10^{-4}$	$1.28398 \times 10^{-4}$	$1.7905 \times 10^{-4}$
120	244	$7 \times 10^6$	0.03073	0.01283	0.0179
120	244	$35 \times 10^6$	0.15355	0.06414	0.08941
120	244	$65 \times 10^6$	0.2853	0.11916	0.16614
120	244	$89.59 \times 10^6$	0.39363	0.16457	0.22906

### 7.2.2.- Análisis del gasto variando la porosidad de la matriz

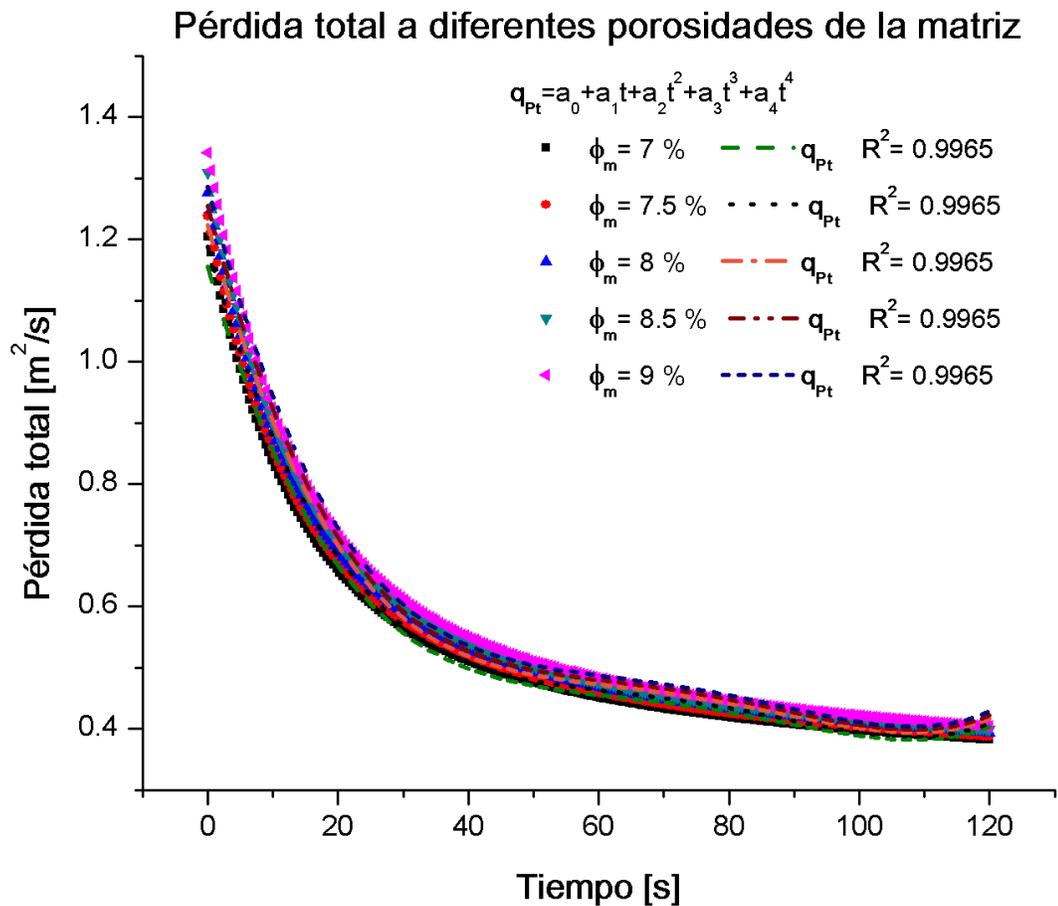
En el análisis del flujo, en función del tiempo y la porosidad de la matriz, se utiliza la información del caso anterior (dimensiones de la malla y el pozo, la orientación, número y abertura de fractura y, las propiedades físicas) a excepción del diferencial de presión, que es igual a  $89.59 MPa$ . El modelo se simula con un diferencial de tiempo ( $dt$ ) de  $0.5 s$ , variando las porosidades de la matriz a 7, 7.5, 8, 8.5 y 9%.

La pérdida total del fluido newtoniano es proporcional a la porosidad de la matriz, su comportamiento inicial es alto y disminuye gradualmente hasta saturar la matriz, observando una tendencia constante en el tiempo e igual para cada porosidad (**Figura 7.13**).

Los valores de las constantes de ajuste y el coeficiente de determinación, de la función polinomial de cuarto orden, obtenida del comportamiento de flujo se visualizan en la **Tabla 7.12**.

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Constante	$\phi_m$ [%]				
	7	7.5	8	8.5	9
$a_0$	1.15479	1.1873	1.22327	1.25446	1.28603
$a_1$	-0.03681	-0.03812	-0.03952	-0.04077	-0.04207
$a_2$	$7.454 \times 10^{-4}$	$7.719 \times 10^{-4}$	$8.003 \times 10^{-4}$	$8.253 \times 10^{-4}$	$8.5181 \times 10^{-4}$
$a_3$	$-6.784 \times 10^{-6}$	$-7.025 \times 10^{-6}$	$-7.2805 \times 10^{-6}$	$-7.507 \times 10^{-6}$	$-7.7467 \times 10^{-6}$
$a_4$	$2.245 \times 10^{-8}$	$2.324 \times 10^{-8}$	$2.4079 \times 10^{-8}$	$2.482 \times 10^{-8}$	$2.5611 \times 10^{-8}$
$R^2$	0.9965	0.9965	0.9965	0.9965	0.9965



**Figura 7.13.- Análisis de la pérdida total con diferentes porosidades de matriz en función del tiempo.**

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Se grafican las constante de ajuste (**Tabla 7.12**) versus la porosidad de la matriz, para obtener una función general de la pérdida total del fluido en función de la porosidad de la matriz y el tiempo, como se muestra en la **Figura 7.14**. La función de flujo para la pérdida total del fluido newtoniano es:

$$q_{Pt} = a_{0P} + a_{1P}t + a_{2P}t^2 + a_{3P}t^3 + a_{4P}t^4 \quad \dots \dots \dots (7.9)$$

Se definen las constante de flujo para la pérdida total en función de la porosidad de la matriz:

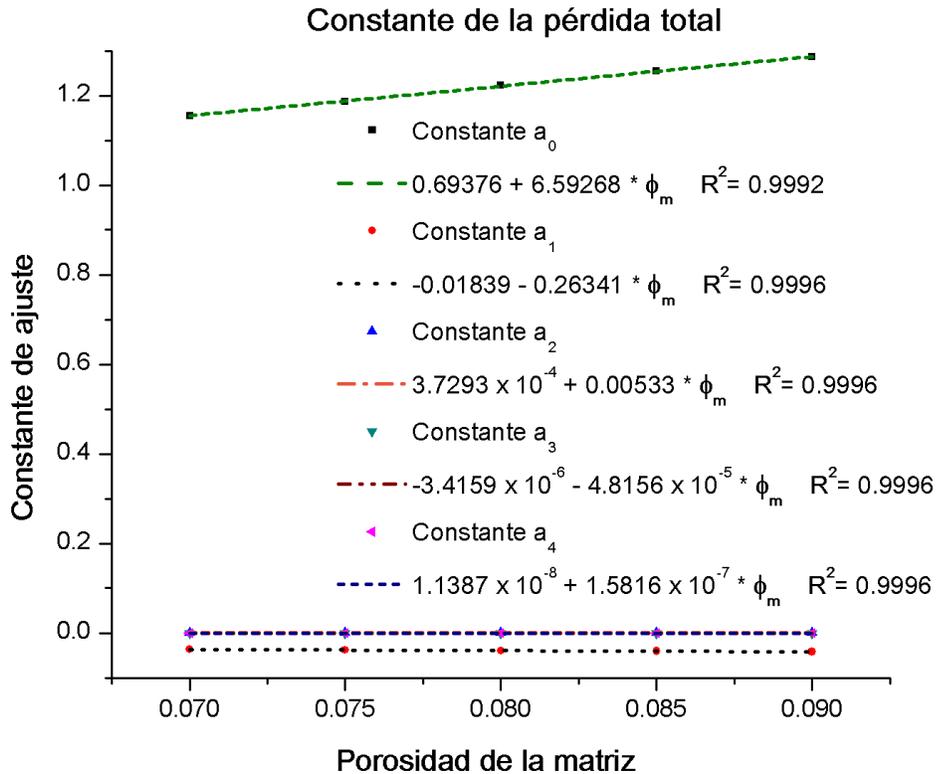
$$a_{0P} = 0.69376 \times 10^{-4} + 6.59268 * \phi_m$$

$$a_{1P} = -0.01839 - 0.26341 * \phi_m$$

$$a_{2P} = 3.72925 \times 10^{-4} + 0.00533 * \phi_m$$

$$a_{3P} = -3.4159 \times 10^{-6} - 4.8156 \times 10^{-5} * \phi_m$$

$$a_{4P} = 1.1387 \times 10^{-8} + 1.5816 \times 10^{-7} * \phi_m$$

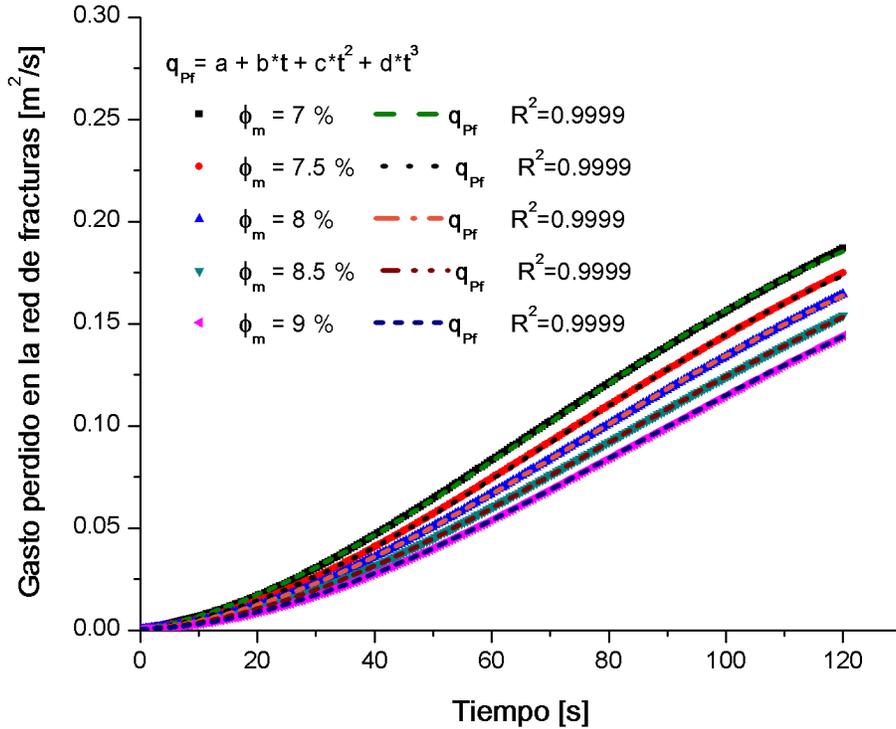


**Figura 7.14.- Análisis de la pérdida total en función de la porosidad de la matriz.**

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Para una fractura con abertura de 0.37 mm y porosidades de la matriz de 7 %,7.5%, 8%, 8.5% y 9%, el pseudo gasto perdido en la red de fracturas aumenta respecto al tiempo, siendo mayor el flujo a una porosidad menor, este comportamiento obedece a una función cúbica, como se observa en la **Figura 7.15**.

Gasto perdido en la red de fracturas a diferentes porosidades de la matriz



**Figura 7.15.- Análisis del gasto perdido en la red de fracturas con diferentes porosidades de la matriz en función del tiempo.**

En la **Tabla 7.13**, se muestran los datos de las constantes y coeficiente de determinación para cada porosidad de la función:

$$q_{Pf} = a + bt + ct^2 + dt^3 \quad \dots \dots \dots (7.10)$$

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

**Tabla 7.13.- Constantes de ajuste y coeficiente de determinación para el gasto perdido en la red de fracturas.**

Constante	$\phi_m$ [%]				
	7	7.5	8	8.5	9
$a_0$	$-2.9434 \times 10^{-4}$	$-7.1739 \times 10^{-5}$	$1.1286 \times 10^{-4}$	$2.7464 \times 10^{-4}$	$4.0072 \times 10^{-4}$
$b$	$5.2185 \times 10^{-4}$	$3.7539 \times 10^{-4}$	$2.6672 \times 10^{-4}$	$1.7521 \times 10^{-4}$	$1.0676 \times 10^{-4}$
$c$	$2.2185 \times 10^{-5}$	$1.9612 \times 10^{-5}$	$1.8965 \times 10^{-5}$	$1.8071 \times 10^{-5}$	$1.7101 \times 10^{-5}$
$d$	$-9.6204 \times 10^{-8}$	$-8.8958 \times 10^{-8}$	$-8.1921 \times 10^{-8}$	$-7.4275 \times 10^{-8}$	$-6.7017 \times 10^{-8}$
$R^2$	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

La constante a incrementa proporcionalmente a la porosidad, sin embargo la constante b decrece al aumentar la porosidad de la matriz, las constante c y d son muy pequeñas y mantienen una tendencial lineal (ver la **Figura 7.16**). La función general obtenida para el gasto perdido en la red de fracturas es:

$$q_{Pf} = a_f + b_f t + c_f t^2 + d_f t^3 \quad \dots \dots \dots (7.11)$$

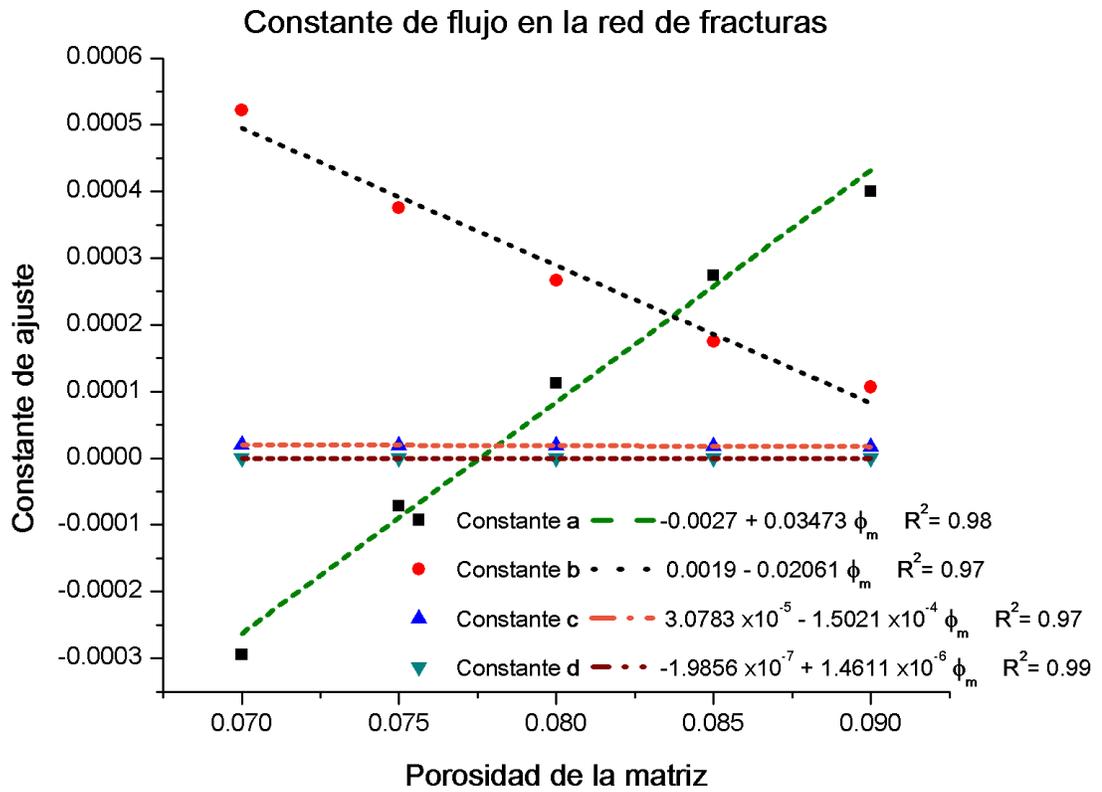
Las constante de flujo en la red de fracturas de la función general (7.11) son las siguientes:

$$a_f = -0.00269 + 0.03473 * \phi_m$$

$$b_f = 0.00194 - 0.02061 * \phi_m$$

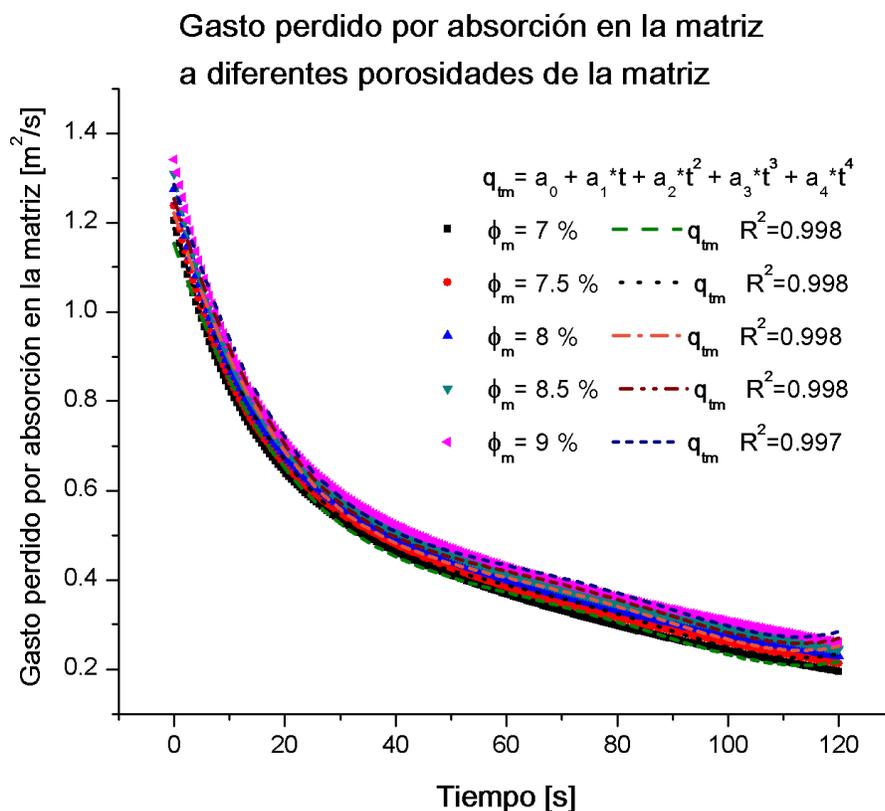
$$c_f = 3.07832 \times 10^{-5} - 1.50206 \times 10^{-4} * \phi_m$$

$$d_f = -1.98563 \times 10^{-7} + 1.4611 \times 10^{-6} * \phi_m$$



**Figura 7.16.- Análisis del gasto perdido en la red de fracturas en función de la porosidad.**

En la **Figura 7.17**, se presenta inicialmente un alto flujo perdido por absorción en la matriz, el cual tiende a disminuir a un tiempo estimado y es proporcional a la porosidad de la matriz dada, al igual que en los análisis de flujo antes mencionados, el pseudo gasto perdido por absorción en la matriz tiene un comportamiento de polinomial de cuarto grado, cuyas constantes de ajuste y coeficiente de determinación de la función se muestran en la **Tabla 7.14**.



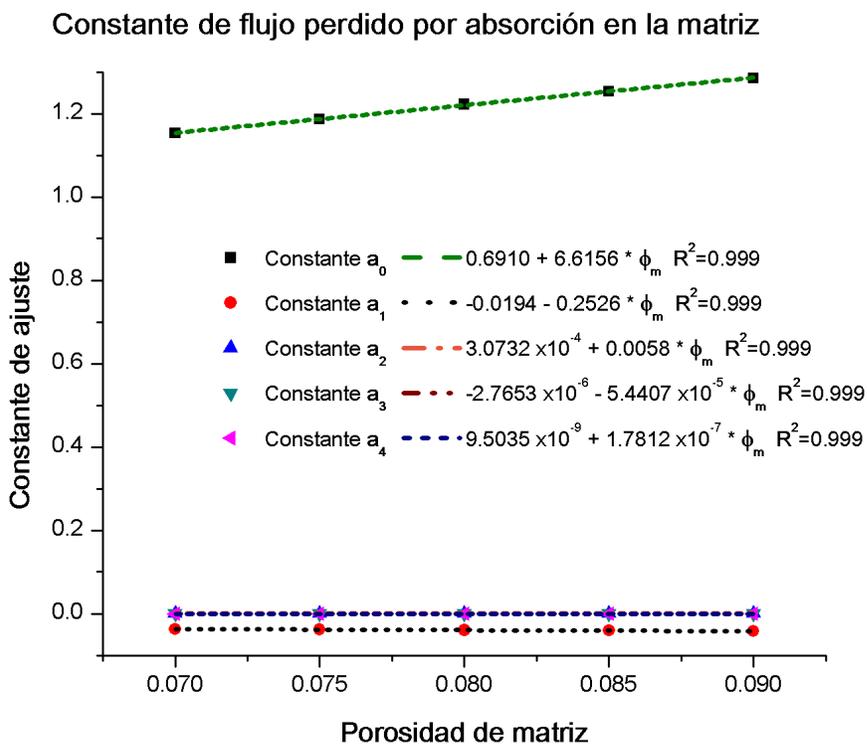
**Figura 7.17.- Análisis del gasto perdido por absorción en la matriz con diferentes porosidades de la matriz en función del tiempo.**

**Tabla 7.14.- Constantes de ajuste para el gasto perdido por absorción en la matriz.**

Constante	$\phi_m$ [%]				
	7	7.5	8	8.5	9
$a_0$	1.15363	1.18629	1.22238	1.25367	1.28533
$a_1$	-0.03708	-0.03831	-0.03966	-0.04086	-0.04213
$a_2$	$7.1597 \times 10^{-4}$	$7.4536 \times 10^{-4}$	$7.76266 \times 10^{-4}$	$8.03961 \times 10^{-4}$	$8.32785 \times 10^{-4}$
$a_3$	$-6.5666 \times 10^{-6}$	$-6.8454 \times 10^{-6}$	$-7.1333 \times 10^{-6}$	$-7.3894 \times 10^{-6}$	$-7.6548 \times 10^{-6}$
$a_4$	$2.19435 \times 10^{-8}$	$2.2864 \times 10^{-8}$	$2.3808 \times 10^{-8}$	$2.4642 \times 10^{-8}$	$2.5507 \times 10^{-8}$
$R^2$	0.9978	0.9977	0.9976	0.9975	0.9975

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Con los datos de las constantes de ajuste de la función de cuarto orden, se grafican respecto a la porosidad de la matriz, obteniendo una función general para evaluar el gasto perdido por absorción en la matriz en función del tiempo y la porosidad matriz (ver la **Figura 7.18**).



**Figura 7.18.- Análisis del gasto perdido por absorción en la matriz en función de la porosidad.**

La función general para el gasto perdido por absorción en la matriz es:

$$q_{tm} = a_{0m} + a_{1m}t + a_{2m}t^2 + a_{3m}t^3 + a_{4m}t^4 \quad , \quad \dots \dots \dots (7.12)$$

se definen las constante de la función general (7.12):

$$a_{0m} = 0.69101 + 6.61562 * \phi_m$$

$$a_{1m} = -0.0194 - 0.25262 * \phi_m$$

$$a_{2m} = 3.07318 \times 10^{-4} + 0.00584 * \phi_m$$

$$a_{3m} = -2.76534 \times 10^{-6} - 5.4407 \times 10^{-5} * \phi_m$$

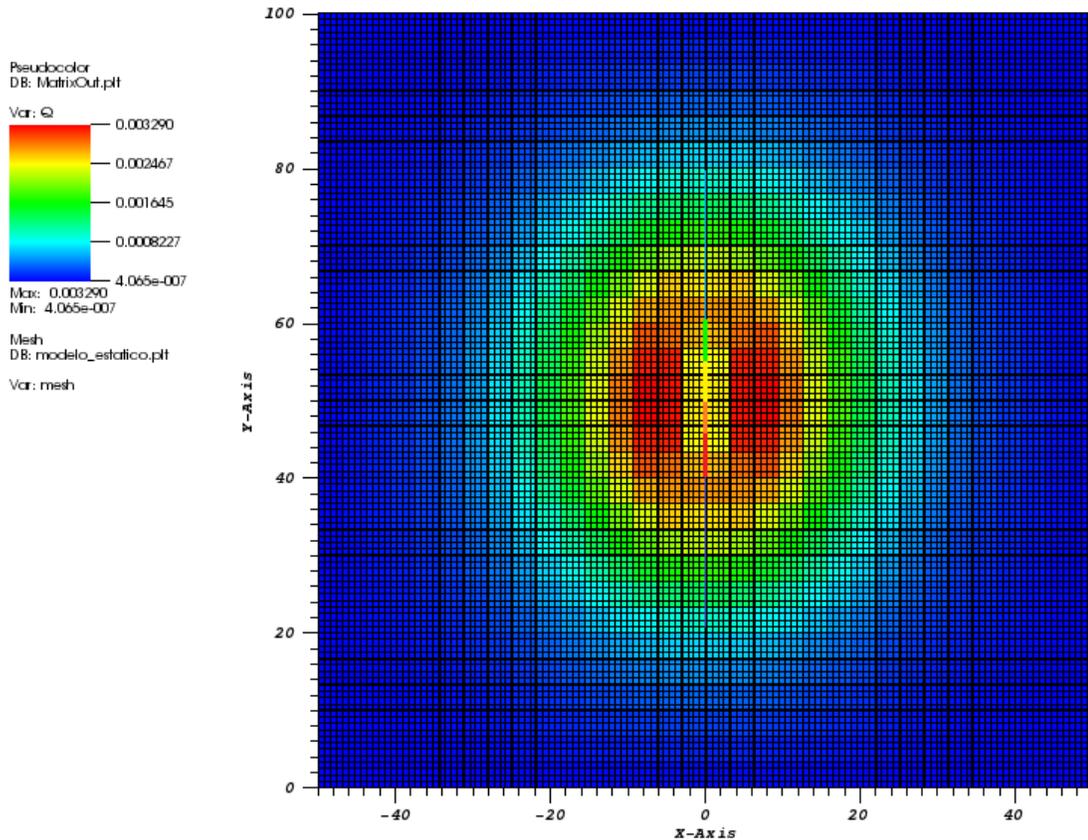
$$a_{4m} = 9.50355 \times 10^{-9} + 1.78118 \times 10^{-7} * \phi_m$$

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En la **Tabla 7.15** se muestran los resultados del flujo perdido en la red de fractura, el pseudo gasto perdido por absorción en la matriz y la pérdida total del fluido newtoniano para una abertura de fractura de 0.37mm y, la porosidad de fractura, de la matriz y total para cada porosidad de matriz dada.

$\phi_m$ [%]	<i>Pérdida total</i> [ $m^2/s$ ]	$q_{Pf}$ [ $m^2/s$ ]	$q_{tm}$ [ $m^2/s$ ]	$\phi_f$ [%]	$\phi_m$ [%]	$\phi_t$ [%]
7.0	0.382	0.18678	0.19522	0.02360	6.979568	7.00317
7.5	0.38729	0.17484	0.21245	0.02360	7.478109	7.50172
8.0	0.39363	0.16457	0.22906	0.02360	7.976649	8.00025
8.5	0.39871	0.15385	0.24486	0.02360	8.475190	8.49879
9	0.40381	0.14413	0.25968	0.02360	8.973731	8.99734

En la **Figura 7.19** se muestra en el modelo dinámico, el comportamiento de la pérdida total del fluido para la vecindad de pozo y la red de fracturas propuestas para este análisis. En el centro de la malla se ubica el pozo y se observa la pérdida del fluido gradual entre las fracturas, horizontales y verticales, y los bloques de matriz.



**Figura 7.19.- Modelo dinámico en la vecindad de pozo para el análisis de la pérdida total del fluido.**

**7.2.3.- Análisis del gasto con diferentes aberturas de fracturas**

Para el cálculo de la pérdida del fluido con diferentes aberturas de fracturas, se analizan cuatro casos en una red de fracturas 2D, con dimensiones  $(H_r \times 2W_r)$  de 100 m x 100m. La malla contiene 16 fracturas verticales y 31 fracturas horizontales, con desviación estándar de 0.000001mm. En el centro de la malla se ubica un pozo perforado verticalmente de radio  $(R_w)$  de 0.08 m y longitud del intervalo disparado  $(H_w)$  de 15 m, su etiqueta de posición de inicio igual a 26 y final igual a 36, para todos los escenarios propuestos.

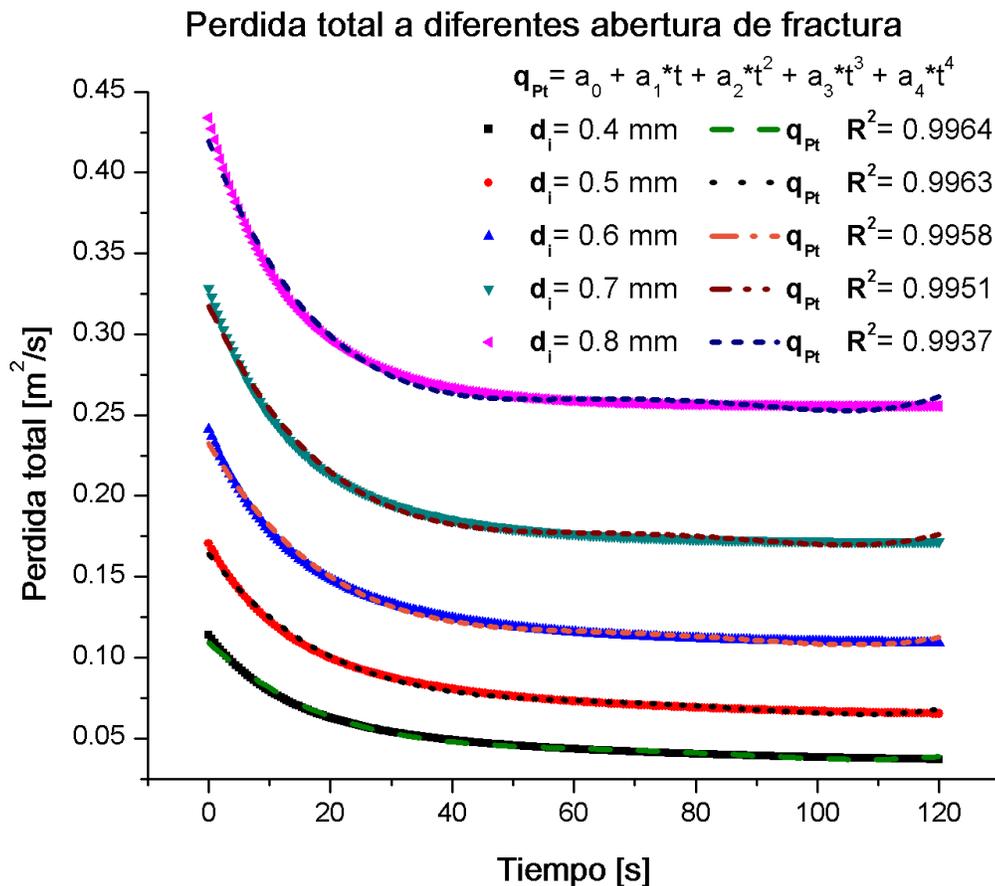
Las propiedades físicas utilizadas en cada escenario son: permeabilidad de la matriz de 5 mD, porosidad de la matriz de 8%, diferencial de presión de  $7 \times 10^6 Pa$ , presión de

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

yacimiento ( $p_r$ ) de 10.375 MPa, temperatura de yacimiento de 371.12 K, parámetro de ajuste ( $\delta$ ) de 0.01 m, viscosidad del fluido newtoniano de 0.001 [Pa · s] y densidad del fluido de 1,030 kg/m<sup>3</sup>. El modelo se simula con un diferencial de tiempo ( $dt$ ) de 0.5 s, para las diferentes aberturas igual a: 0.4, 0.5, 0.6, 0.7 y 0.8 mm.

En la **Figura 7.20**, se observa la gráfica de la pérdida total a diferentes aberturas de fracturas a un tiempo máximo de 120 s, la curva obedece a una función polinomial de cuarto orden (ecuación 7.13). Se concluye que la pérdida total disminuye gradualmente con el tiempo, a mayor abertura de fractura mayor será el flujo volumétrico perdido total.

$$q_{Pt} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 \quad \dots \dots \dots (7.13)$$



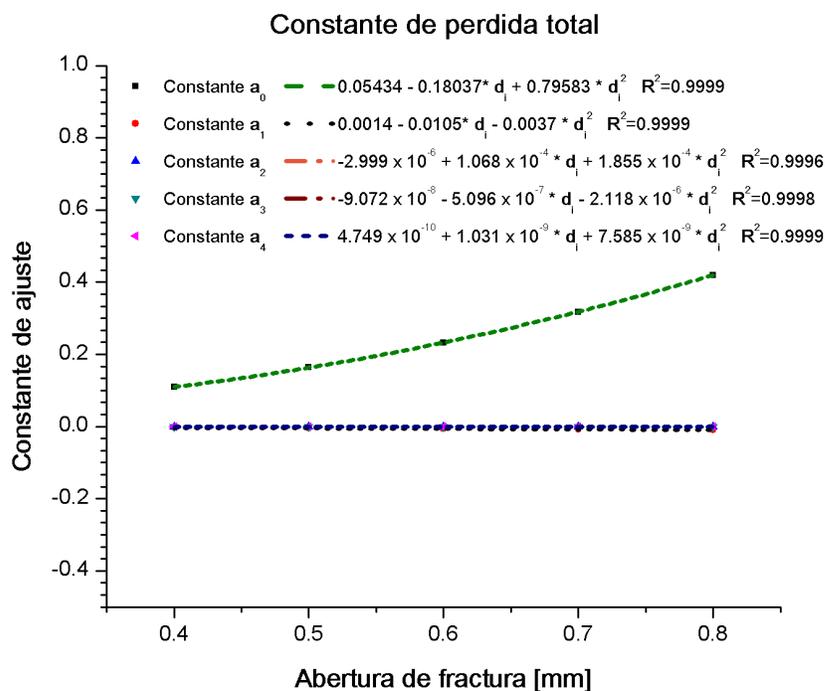
**Figura 7.20.- Análisis de la pérdida total a diferentes aberturas de fracturas en función del tiempo.**

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En la **Tabla 7.16**, se muestran los valores de las constantes de la función de cuarto orden y su coeficiente de determinación para cada abertura de fractura, éstos datos son graficados (ver la **Figura 7.21**) con respecto a la abertura de fractura, cada curva se ajusta a una función cuadrática.

**Tabla 7.16.- Constantes de ajuste para la pérdida total cambiando la abertura de fractura.**

Constante	$d_i$ [mm]				
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$a_0$	0.10913	0.16393	0.2325	0.31736	0.41973
$a_1$	-0.00344	-0.00477	-0.00625	-0.00784	-0.00937
$a_2$	$6.965 \times 10^{-5}$	$9.6417 \times 10^{-5}$	$1.2749 \times 10^{-4}$	$1.6335 \times 10^{-4}$	$2.0081 \times 10^{-4}$
$a_3$	$-6.3397 \times 10^{-7}$	$-8.7551 \times 10^{-7}$	$-1.1551 \times 10^{-6}$	$-1.4904 \times 10^{-6}$	$-1.8524 \times 10^{-6}$
$a_4$	$2.0984 \times 10^{-9}$	$2.8964 \times 10^{-9}$	$3.8106 \times 10^{-9}$	$4.9216 \times 10^{-9}$	$6.1523 \times 10^{-9}$
$R^2$	0.9964	0.9963	0.9959	0.9951	0.9937



**Figura 7.21.- Análisis de la pérdida total en función de la abertura de fractura.**

## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

---

La función cuadrática obtenida para cada constante de ajuste se sustituye en la ecuación 7.13, obteniendo una función general para el cálculo de la pérdida total en función de la abertura de fractura y el tiempo.

$$q_{Pt} = a_{0P} + a_{1P}t + a_{2P}t^2 + a_{3P}t^3 + a_{4P}t^4 \quad , \quad \dots \dots \dots (7.14)$$

se definen las constante de la ecuación 7.14 en función de la abertura de fractura:

$$a_{0P} = 0.05434 - 0.18037 * d_i + 0.79583 * d_i^2$$

$$a_{1P} = 0.00137 - 0.01049 * d_i - 0.03710 * d_i^2$$

$$a_{2P} = -2.9988 \times 10^{-6} + 1.06798 \times 10^{-4} * d_i + 1.8553 \times 10^{-4} * d_i^2$$

$$a_{3P} = -9.07189 \times 10^{-8} - 5.0963 \times 10^{-7} * d_i - 2.1183 \times 10^{-6} * d_i^2$$

$$a_{4P} = 4.7499 \times 10^{-10} + 1.0309 \times 10^{-9} * d_i + 7.5851 \times 10^{-9} * d_i^2$$

El pseudo gasto perdido en la red de fracturas se visualiza a un tiempo máximo de 120 s, se observa que cada curva tiene el mismo comportamiento polinomial de cuarto orden (ver la **Figura 7.22**). Se analiza que el pseudo gasto perdido en una abertura de fractura aumenta gradualmente hasta tener una tendencia constante en el tiempo.

Gasto perdido en la red de fracturas a diferente abertura de fractura

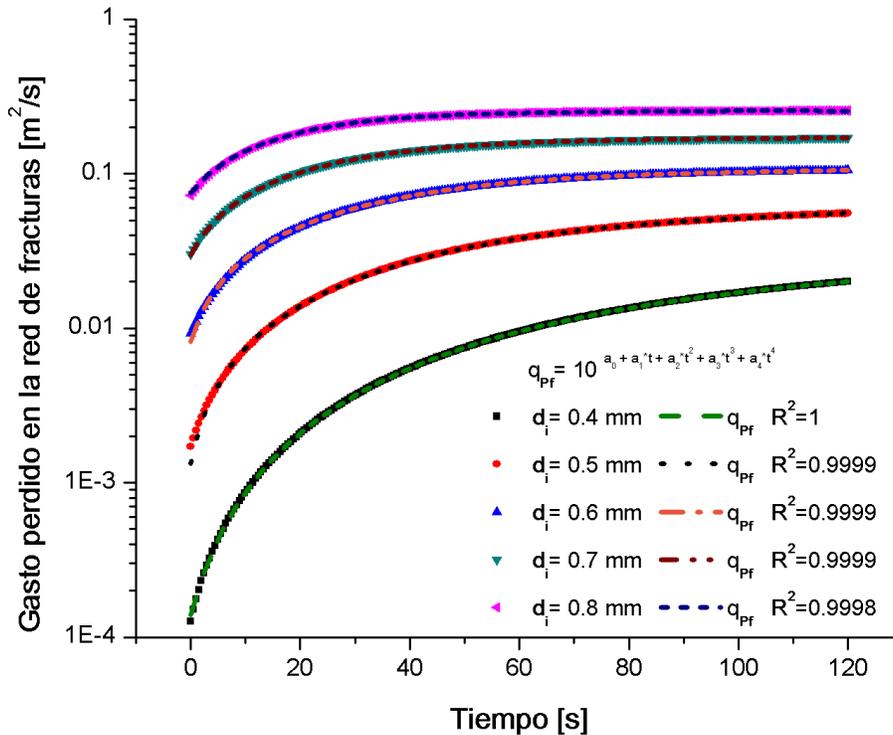


Figura 7.22.- Gasto perdido en la red de fracturas a diferentes aberturas de fracturas en función del tiempo.

En la **Tabla 7.17**, se muestran las constantes de ajuste para el pseudo gasto perdido en la red de fracturas y en la **Figura 7.23**, se observa la función cuadrática para cada constante de ajuste del gasto perdido en la red de fracturas. Con la función obtenida de cada constante para la abertura de fractura, se genera una función general exponencial de cuarto orden para el gasto perdido en la red de fracturas:

$$q_{Pf} = 10^{a_{0f} + a_{1f}t + a_{2f}t^2 + a_{3f}t^3 + a_{4f}t^4} \dots \dots \dots (7.15)$$

La función cuadrática que le corresponde a las constantes de ajuste de la ecuación 7.15 son las siguientes:

$$a_{0f} = 0.16332 - 0.69361 * d_i + 0.72513 * d_i^2$$

$$a_{1f} = 0.00588 - 0.03197 * d_i + 0.04305 * d_i^2$$

$$a_{2f} = -2.4987 \times 10^{-4} + 0.00112 * d_i - 0.00122 * d_i^2$$

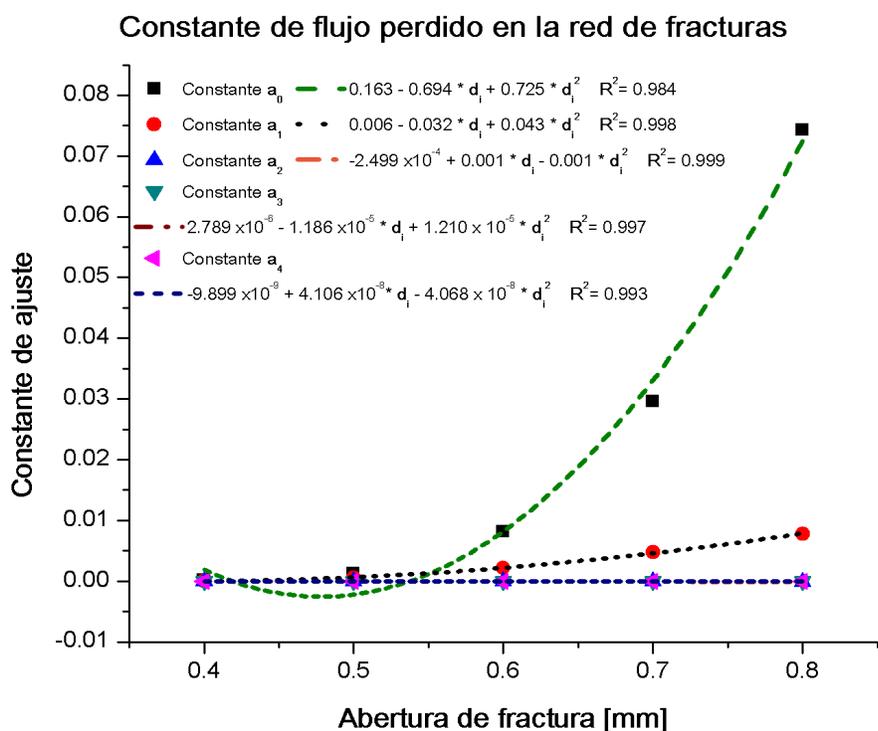
## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

$$a_{3f} = 2.7897 \times 10^{-6} - 1.1858 \times 10^{-5} * d_i + 1.21047 \times 10^{-5} * d_i^2$$

$$a_{4f} = -9.89938 \times 10^{-9} + 4.10551 \times 10^{-8} * d_i - 4.06765 \times 10^{-8} * d_i^2$$

**Tabla 7.17.- Constantes de ajuste para el gasto perdido en la red de fracturas cambiando la abertura de fractura.**

Constante	$d_i$ [mm]				
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$a_0$	$1.3939 \times 10^{-4}$	0.00132	0.0082	0.02959	0.07428
$a_1$	$4.2246 \times 10^{-5}$	$5.6799 \times 10^{-4}$	0.00216	0.00476	0.0078
$a_2$	$3.2631 \times 10^{-6}$	$4.7792 \times 10^{-6}$	$-1.5168 \times 10^{-5}$	$-6.5038 \times 10^{-5}$	$-1.3407 \times 10^{-4}$
$a_3$	$-2.693 \times 10^{-8}$	$-8.7195 \times 10^{-8}$	$1.4391 \times 10^{-8}$	$4.1806 \times 10^{-7}$	$1.0541 \times 10^{-6}$
$a_4$	$6.9372 \times 10^{-11}$	$3.2822 \times 10^{-10}$	$1.5263 \times 10^{-10}$	$-1.0449 \times 10^{-9}$	$-3.1225 \times 10^{-9}$
$R^2$	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999



**Figura 7.23.- Gasto perdido en la red de fracturas en función de la abertura de fractura.**



## CAPÍTULO 7.- ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En la **Tabla 7.18**, se muestran las constantes de ajuste para el volumen acumulado en la matriz para la abertura de fractura correspondiente. Estos valores se grafican con respecto a la abertura de fractura (ver la **Figura 7.25**), con la finalidad de obtener una ecuación general, para el cálculo del volumen acumulado perdido por absorción en la matriz, en función del tiempo y la abertura de fractura:

$$V_{Pm} = 10^{a_{0V} + a_{1V}t + a_{2V}t^2 + a_{3V}t^3 + a_{4V}t^4} \dots \dots \dots (7.16)$$

La función cuadrática que le corresponde a las constantes de ajuste de la ecuación 7.16 son las siguientes:

$$a_{0V} = 0.26121 - 0.98948 * d_i + 1.18641 * d_i^2$$

$$a_{1V} = -0.17121 + 0.74989 * d_i - 0.21361 * d_i^2$$

$$a_{2V} = 0.00116 - 0.0023 * d_i - 0.0077 * d_i^2$$

$$a_{3V} = 1.02792 \times 10^{-5} - 6.20162 \times 10^{-5} * d_i + 1.36513 \times 10^{-4} * d_i^2$$

$$a_{4V} = -7.39576 \times 10^{-8} + 3.51268 \times 10^{-7} * d_i - 5.60299 \times 10^{-7} * d_i^2$$

**Tabla 7.18.- Constantes de ajuste para el volumen acumulado perdido por absorción en la matriz cambiando la abertura de fractura.**

Constante	$d_i$ [mm]				
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$a_0$	0.05325	0.06765	0.09292	0.14765	0.23036
$a_1$	0.09638	0.14661	0.20214	0.25236	0.29029
$a_2$	-0.00106	-0.0018	-0.00299	-0.00435	-0.00555
$a_3$	$7.8305 \times 10^{-6}$	$1.24228 \times 10^{-5}$	$2.20496 \times 10^{-5}$	$3.49551 \times 10^{-5}$	$4.74639 \times 10^{-5}$
$a_4$	$-2.4493 \times 10^{-8}$	$-3.5888 \times 10^{-8}$	$-6.4070 \times 10^{-8}$	$-1.0624 \times 10^{-7}$	$-1.4986 \times 10^{-7}$
$R^2$	0.9999	0.9999	0.9998	0.9995	0.9985

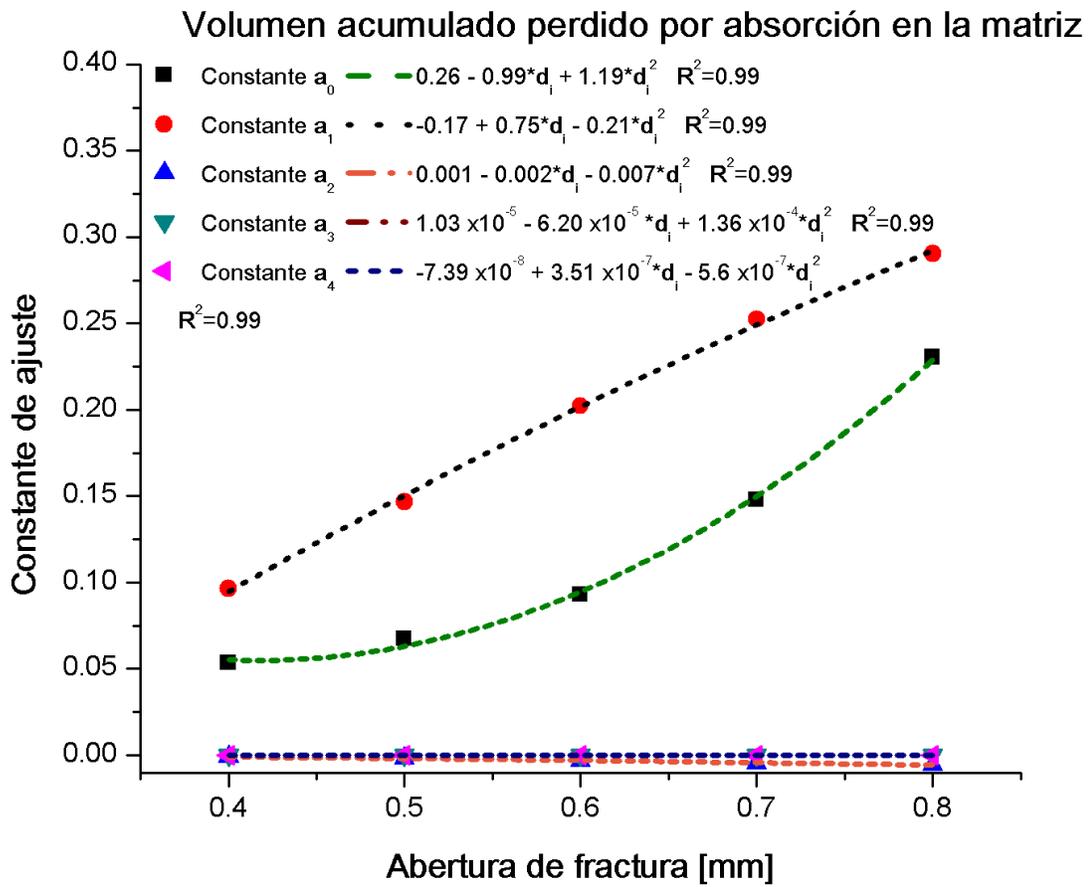


Figura 7.25.- Volumen acumulado perdido por absorción en la matriz en función de la abertura de fractura.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se presenta un modelo matemático que cuantifica las pérdidas de circulación a través de la matriz, en la red de fracturas y la pérdida total del fluido, así como la permeabilidad efectiva para un yacimiento naturalmente fracturado con interacción matriz-fractura.

Con base en los resultados de esta tesis, se pueden establecer las conclusiones siguientes:

1. Fue posible modelar en 2D la pérdida de fluido durante la perforación de un pozo vertical en un yacimiento naturalmente fracturado, combinando las ecuaciones de flujo de Hagen-Poiseuille y Karode en una red de fracturas interactuando con la matriz.
2. Para una fractura única en un medio poroso se plantea una solución del modelo matemático para un fluido newtoniano, con base en la combinación de las ecuaciones de flujo Poiseuille-Karode calculando los gastos y presiones de entrada y salida, asimismo se utiliza una ecuación de estado para calcular la presión en la matriz. A partir de este resultado se construye un modelo para una red de fracturas que se resuelve mediante un método iterativo programado en Fortran. Con éste último se pudo calcular las pérdidas de fluido por absorción en la matriz, en la red de fracturas y la pérdida total del fluido. Así como la permeabilidad efectiva del medio.
3. Con los resultados obtenidos del cálculo de la permeabilidad, se concluye que la permeabilidad depende linealmente del número de fracturas (horizontales o verticales), siendo mayor su dependencia en las fracturas horizontales por un factor de 3.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

4. La permeabilidad efectiva es proporcional a una función cuadrática de la abertura media de fracturas.
5. La permeabilidad es una función lineal de la porosidad de la matriz.
6. Se observó que la permeabilidad es independiente del diferencial de presión entre el fondo del pozo y el yacimiento.
7. La pérdida total del fluido disminuye gradualmente en el tiempo hasta alcanzar un valor asintótico, esto se debe porque parte del flujo es absorbido por la matriz, y al saturarse la matriz porosa el flujo se vuelve constante. Se presentan una función general para la pérdida total del fluido en función de la porosidad de la matriz, el diferencial de presión y la abertura de fractura para un tiempo estimado.
8. El fluido newtoniano que se pierde en la matriz, dependerá de la abertura de fractura que presente el yacimiento. Para una abertura de fractura dada, el gasto perdido por absorción en la matriz tiene un comportamiento proporcional al diferencial de presión y a la porosidad de la matriz.
9. Se concluye que el fluido newtoniano, que circula en las fracturas naturales permeables para cualquier abertura de fractura, es absorbido con mayor rapidez en la matriz hasta alcanzar el límite de saturación y luego presentar una tendencia constante de flujo en el tiempo.
10. Se pudo formular una función general para el cálculo de la pérdida de fluido por absorción en la matriz, en función del tiempo y el diferencial de presión, la porosidad de la matriz y la abertura de fractura.
11. El gasto perdido en la red de fracturas presenta un comportamiento proporcional al diferencial de presión en el tiempo, no obstante, para una menor porosidad, el

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

flujo perdido en las fracturas es mayor. Mientras que, para una abertura de fractura, el fluido perdido en las fracturas se vuelve constante en el tiempo y es proporcional a la abertura de fractura.

12. El modelo propuesto se puede utilizar para fracturas naturales o inducidas de cualquier litología a excepción de las lutitas, porque la ecuación de Hagen-Poiseuille ya no aplicaría.
13. El modelo matemático se programó en Fortran, utilizando una estación de trabajo de 24 procesadores con 48 Gb de RAM, la simulación numérica para una vecindad de pozo con diversas combinaciones de fracturas horizontales y verticales, de aberturas de fracturas y de porosidades de la matriz, los tiempos de ejecución para 244 pasos en el tiempo, tardaron más de 20 horas.
14. El sistema lineal de ecuaciones, genera una matriz cuadrada, dispersa y no singular, donde sólo admite una única solución, y se resuelve utilizando un método explícito en el tiempo.
15. Para la solución del sistema se utilizó la subrutina MGMRES\_ST, que aplica el método iterativo GMRES (Residual Mínimo Generalizado) reiniciado para una matriz dispersa, el cual construye una base ortogonal con el algoritmo modificado de Gram-Schmidt y resuelve el problema de mínimos cuadrados utilizando las rotaciones de Givens, para dar una solución aproximada. El algoritmo de solución para el sistema lineal está preconditionado por el residual de  $1 \times 10^{-12}$ .
16. Las condiciones de frontera en el sistema de fracturas son iguales a la presión del yacimiento, sobre el dominio  $[i, j] \in \mathbb{Z}$  pares para las fracturas verticales y el dominio  $[i, j] \in \mathbb{Z}$  impares para las fracturas horizontales.

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

---

17. Las condiciones iniciales en el sistema de fracturas con interacción en la matriz son igual a cero para el gasto de entrada y de salida, para la presión de entrada y salida y para el volumen total acumulable. Para la presión de la matriz, se establece que es igual a la presión del yacimiento en un tiempo igual a cero.

### **RECOMENDACIONES**

A continuación, se presentan puntos específicos de interés que podrían realizarse en un trabajo subsecuente:

- a) Desarrollar el modelo matemático utilizando un modelo reológico para un fluido no newtoniano.
- b) Generalizar el modelo a tres dimensiones.
- c) Proponer una solución para cuantificar las pérdidas de circulación en lutitas.
- d) Incluir información de porosidad, permeabilidad y abertura de fractura de registro de pozos en la generación de la red fracturas y sus características.

## NOMENCLATURA

$A$  = área

$A_r$  = área efectiva

$b$  = ancho de fractura

$d$  = espaciamiento de la fractura

$d_i$  = abertura de la fractura  $i$ -ésima

$\bar{d}$  = media

$D$  = espacio promedio entre las fracturas paralelas

$e$  = ancho efectivo promedio de las fracturas

$f$  = recuperación fraccionada del permeado

$F$  = etiqueta del segmento de fractura

$h$  = altura media de la fractura

$H_r$  = espesor de la formación [ $m$ ]

$H_w$  = intervalo disparado [ $m$ ]

$i$  = coordenada equivalente del eje  $x$

$ifr_{Max}$  = número total de subdivisiones en el eje  $i$

$i_{Max}$  = tamaño máximo de la malla en nodos horizontales [*adimensional*]

$j$  = coordenada equivalente del eje  $y$

$jfr_{Max}$  = número total de subdivisiones en el eje  $j$

$j_{Max}$  = tamaño máximo de la malla en nodos verticales [*adimensional*]

$J_{1_{well}}$  = inicio de la zona de disparo en la malla

$J_{2_{well}}$  = final de la zona de disparo en la malla

$k$  = permeabilidad [ $m^2$ ]

$K$  = grado de anisotropía

$L$  = longitud

$m$  = masa

$\dot{m}$  = flujo másico

$n$  = número de moles

$N$  = número de segmentos

$N_{Re}$  = número de Reynolds

## NOMENCLATURA

---

$p$  = presión [ $Pa$ ]

$p_{tm}$  = presión promedio en los bloques de la matriz [ $Pa$ ],

$q$  = gasto

$q_{iny}$  = pseudo gasto de inyección [ $m^2/s$ ]

$q_p$  = flujo de entrada/salida que interacciona con la matriz [ $m^2/s$ ]

$q_{pf}$  = pseudo gasto perdido en la red de fracturas [ $m^2/s$ ]

$q_{pt}$  = pérdida total del fluido [ $m^2/s$ ]

$q_{tm}$  = pseudo gasto perdido por adsorción en la matriz [ $m^2/s$ ]

$q_{P_{FVde}}$  = gasto perdido en la fractura vertical derecha

$q_{P_{Fviz}}$  = gasto perdido en la fractura vertical izquierda

$q_{P_{FHu}}$  = gasto perdido en la fractura horizontal superior

$q_{P_{FHL}}$  = gasto perdido en la fractura horizontal inferior.

$R_w$  = Radio de la zona de disparo del pozo [ $m$ ]

$R$  = Constante de proporcionalidad [ $Pa\ m^3/mol^\circ K$ ]

$t_k$  = diferentes tiempos

$T$  = Temperatura del yacimiento [ $^\circ K$ ]

$u$  = velocidad Darcy

$u_r$  = velocidad real Darcy

$\bar{u}$  = velocidad promedio

$U_1$  = variable aleatoria

$U_2$  = variable aleatoria

$v_{exit}$  = velocidad del fluido que interacciona en la matriz

$v_w$  = velocidad en la cara de la fractura

$V$  = volumen

$V_{ta}$  = volumen total acumulable [ $m^2$ ]

$w$  = peso molecular [ $kg/mol$ ]

$W$  = ancho

$W_r$  = radio de drene [ $m$ ]

$X$  = variable aleatoria independiente de la distribución normal

$Z$  = Factor de compresibilidad

## NOMENCLATURA

---

$\alpha$  = factor de forma

$\beta$  = constante definida

$\Delta p$  = caída de presión

$\Delta q_p$  = diferencial de flujo que interacciona en el medio poroso

$\Delta z$  = diferencial de  $z$

$\delta$  = distancia del fluido proveniente de la fractura que ingresa a la matriz [ $m$ ]

$\phi$  = porosidad [%]

$\mu$  = viscosidad dinámica del fluido [ $Pa \cdot s$ ]

$\sigma_d$  = desviación estándar

$\rho$  = densidad [ $kg/m^3$ ]

$\omega$  = medida de la capacidad de almacenamiento de fluidos de la porosidad de fractura

$\nu$  = viscosidad cinemática

### SUBÍNDICES

$de$  = derecha

$f$  = fractura

$H$  = horizontal

$i$  = entrada

$iz$  = izquierda

$L$  = inferior

$p$  = poroso

$P$  = pérdida

$m$  = matriz

$o$  = salida

$r$  = yacimiento

$t$  = total

$u$  = superior

$V$  = vertical

$w$  = zona de disparo del pozo

## BIBLIOGRAFÍA

- Adachi, J., Bailey, L., Houwen, O., y Meeten, G. 2004. Depleted Zone Drilling: Reducing Mud Losses Into Fractures. Artículo IADC/SPE 87224 presentado en el *IADC/Society of Petroleum Engineers*, Dallas, Texas, USA, 1-11. Marzo.
- Adams, N. y Charrier T. 1985. *Drilling Engineering: A complete well planning approach*. Tulsa, Oklahoma. Pennwell Books Corp
- Aguilera, R. 2003. Geologic and Engineering Aspects of Naturally Fractured Reservoirs. *CSEG RECORDER*, Calgary, Canada, 44-49, Febrero.
- Aguilera, R. 1995. *Naturally Fractured Reservoirs*. Segunda edición. Tulsa, Oklahoma. PennWell Books.
- Alba Moscoso, E. 2017. Problemas en la perforación. Tercer Simposio petrolero-Energético universitario SPEU-III/2017. Santa Cruz, Bolivia. Octubre.
- Ayachour, E. 2003. A fast implementation for GMRES method. *Journal of Computational an Applied Mathematics* (159), 269-283.
- Barrett, S., J.P., C., Manescu, G., Vasquez, G., y Growcock, F. 2010. Wellbore Strengthening- Where Field Application Meets Theory. Artículo SPE 139167 presentado en el *Society of Petroleum Engineers*, Lima, Perú, 1-12. Diciembre.
- Barriol, Y., Bartman, B., Corbiell, R., y Laidlaw, J. 2006. Las presiones de las operaciones de perforación y producción. *Oilfield Review*, 26-47. Enero
- Beda, G., y Carugo, C. 2001. Use of Mud Microloss Analysis While Drilling to Improve the Formation Evaluation in Fractured Reservoir. Artículo SPE 71737

## BIBLIOGRAFÍA

---

presentado en el *Society of Petroleum Engineers*, New Orleans, Louisiana 1-13, Septiembre.

Berman, A. S. 1953. Laminar Flow in Channels with Porous Walls. *Journal of applied physics* , Vol. 24 No. 9, 1232-1235, Septiembre.

Bourgoyne, A.; Millheim, K.; Chenevert, M. y Young, F.S. 1991. *Applied Drilling Engineering*. Segunda edición. Richardson, TX. Society of Petroleum Engineers. ISBN 1-55563-001-4.

Box, G., y Muller, M. E. 1958. A note on the generation of random normal deviates. *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol 29. No. 2, 610-611. Enero.

Bratton, T., Canh, D. V., Gillespie, P., Hunt, D. Moontaron, B, Nelson, R. y Schoderbek, D. 2006. La naturaleza de los yacimientos naturalmente fracturados. *Oilfield Review* , 4-25.

Burkardt John, J. L. 2007. Método iterativo MGMRES ST. Julio

Cao Abad, R. 2002. *Introducción a la simulación y a la teoría de colas*. España: NETBIBLO,S.L. 71-72.

Cinco Ley, H. 1996. Well-Test Analysis for Naturally Fractured Reservoirs. Artículo SPE 31162 presentado en el *Society of Petroleum Engineers*, D. F. México, 51-54, Enero.

Cook, J., Growcock, F., Guo, Q., y Hodder, M. 2012. Estabilización del pozo para prevenir pérdidas de circulación. *Oilfield Review*, Vol. 23, No. 4, 26-35.

Cruz Maldonado, A. 2013. Diseño y desarrollo de un fluido de control base agua de mar de baja densidad con capacidad para inhibir arcillas altamente reactivas y gases

## BIBLIOGRAFÍA

---

- ácidos divalentes. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México. México, DF.
- Devore, J. L. 2005. *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. México: Thomson.160-242
- Dyke, C.G.; Wu, B. y Milton-Taylor, D. 1995. Advances in characterizing natural-fracture permeability from mud-log data. Artículo SPE 25022 presentado en el *Society of Petroleum Engineers*, 160-166, January.
- Escobar M, F. H. 2012. *Fundamentos de Ingeniería de Yacimientos*. Colombia: Universidad Surcolombiana.
- Franco H., G. 2017. Opportunities in Mexican mature fields. *Offshore Engineer*, 58-59, Diciembre. <https://www.oedigital.com/drilling/item/16850-opportunities-in-mexican-mature-fields>
- Fuente O'Connor, J. L. 1998. *Técnicas de cálculo para sistemas de ecuaciones, programación lineal y programación entera*. Segunda edición. Barcelona, España. Reverté, S.A.
- Ghalambor, A., Salehi, S., y Shahri, M. P. 2014. Integrated workflow for lost circulation prediction. Artículo SPE 168123 presentado en el *Society of Petroleum Engineers* , 1-10. Febrero.
- Karode, S. K. 2001. Laminar flow in channels with porous walls, revisited. *Journal of Membrane Science*, Ottawa, Canada, 237-241, Junio.
- Lavrov, A., y Tronvoll, J. 2004. Modeling Mud Loss in Fractured Formations. Artículo SPE 88700 presentado en el *Society of Petroleum Engineers* , 1-10.Octubre.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Lavrov, A. 2016. *Lost circulation: Mechanisms and solutions*. 1era Edición. Oxford Gulf Pressional Publishing
- Lozada Aguilar, M. Á. 2015. El futuro de los campos maduros en México: Un reto y una oportunidad. (presentado el 26 de Marzo de 2015). <https://es.slideshare.net/AcademiaDeIngenieriaMx/el-futuro-de-los-campos-maduros-en-mxico-un-reto-y-una-oportunidad> (acceso 30 de Marzo de 2018)
- Lozada, M. Á.;Torres, M. y Luna, G. 2014. Campo Akal, estrategias para minimizar el factor de recuperación aprovechando el efecto drene gravitacional en la explotación del campo. *Ingeniería petrolera*. Vol. 54 No. 6. 314-332. Junio.
- Majidi, R., Miska, S., Yu, M., y L.G., T. 2008. Modeling of Drilling Fluid Losses in Naturally Fractured Formations. Artículo SPE 114630 presentado en el *Society of Petroleum Engineers*, Colorado, USA, 1-11.Septiembre.
- Majidi, R., Miska, S., Yu, M., L.G, T., y J., Z. 2010. Quantitative Analysis of Mud Losses in Naturally Fractured Reservoirs: The effect of Rheology. Artículo SPE 114130 presentado en el *Society of Petroleum Engineers Drilling & Completion*, 509-517.
- Marrett, R., y Peacock, D. C. 1999. Strain and stress. *Journal of Structural Geology*. No. 21, 1057-1063.
- Millo S., R., Pérez V., I. C., Antón V., J., y Rama H., T. 2015. Matrices dispersas en Java para el procesamiento de grandes volúmenes de datos. *ResearchGate*, 1-8. Noviembre
- Miranda-Martínez, M., Oleschko, K. y Parrot.J-F. 2006. Porosidad de los yacimientos naturalmente fracturados: una clasificación fractal. *Revista Mexicana de Ciencias Geológicas*, Vol. 23, No. 2, 199-214.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Moore, P. 1986. *Drilling practices manual*. Segunda edición. Tulsa, Oklahoma. PennWellBooks.
- Morales J., Caycedo F. y Forero G. 2006. Porosity partition in Akal field: from thin section petrography to the simulation Grid. Artículo presentado en el *Society of Petrophysicists and Well Log Analysts*. Veracruz, México. 1-10. Junio.
- Nelson, R. A. 1987. Fractured reservoirs: Turning knowledge into practice. *Journal of petroleum technology* , 407-414.
- Nelson, R. A. 2001. *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoir*. Segunda edición. Houston, Tx: Gulf Professional Publishing.
- Onyla, E. 1994. Experimental Data Analysis of Lost Circulation Problems During Drilling With Oil-Based Mud. Artículo SPE 22581 presentado en el *Society of Petroleum Engineers Drilling & Completion*, 25-31. Marzo.
- Padilla Sixto, R., y Toledo Piña, R. 2013. Evaluación de yacimientos naturalmente fracturados y retos por resolver. *Ingeniería Petrolera*, Vol. 53, No. 3, 138-161.
- Sarda, S., y L. Jeannin, B. 2002. Hydraulic characterization of fractured reservoirs: Simulation on discrete fracture models. Artículo SPE 77300 presentado en el *Society Petroleum Engineers*, 154-162. Abril.
- Shen, F., Pino Villaviencio, A., Hernandez Garcia, J., y Vazquez Bustos, A. 2008. Characterization and modeling study of the carbonate-fracture reservoir in the Cantarell field, México. Artículo SPE 115907 presentado en el *Society of Petroleum Engineers*, 1-12.
- Soto M., J., Solarte M., G. R., y Muñoz G., L. E. 2013. Sparse Matrix description and application. *Scientia et Technica Año XVIII*, Vol. 18, No. 1, 171-177.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Tellez Gonzalez, R. 2014. Evaluación geologico-petrolera de yacimientos de aceite pesado, caso Sonda de Campeche. Tesis para obtener el título de Ingeniero Petrolero. Universidad Nacional Autónoma de México. México, DF.
- Verga, F., Carugo, C., Chelini, V., y Maglione, R. 2000. Detection and Characterization of Fractures in Naturally Fractured Reservoirs. Artículo SPE 63266 presentado en el *Society of Petroleum Engineers*, 1-8.
- Ward, C., y Willson, S. 2005. Wellbore Stability. Presentación AADE Houston chapter joint Committee Meeting, Mayo 18,2005
- Warren, J., y Root, P. 1963. The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 245-255.
- Williamson, D. 2013. Fundamentos de los fluidos de perforación. *Oilfield Review*, Vol. 25 No.1, 67-69.

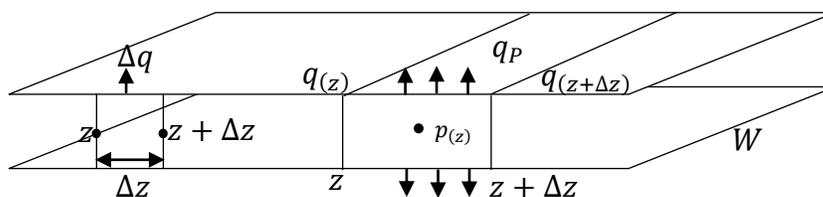
## APÉNDICE

### A.1.- Balance del gasto en el diferencial de $z$

Para paredes permeables el flujo volumétrico ( $q$ ) cambia a lo largo de la longitud del canal debido a la permeación ó filtrado a través de las paredes. Realizando un balance del gasto en un diferencial de  $z$  con base en la **Figura A.1**.

$$q = -\frac{2 h^3 W}{3 \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots \dots \dots (A.1.1)$$

La ecuación A.1.1 es igual a la ecuación 5.1, la cual se emplea en el balance de gasto en un diferencial de  $z$ ;



b) Balance del gasto en un diferencial

**Figura A.0.1 Balance del gasto en un diferencial de  $\square$**

el gasto que entra en  $z$

$$q(z) = -\frac{2 h^3 W}{3 \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_z \quad , \quad \dots \dots \dots (A.1.2)$$

el gasto que sale en  $z + \Delta z$  se expresa:

$$q(z + \Delta z) = -\frac{2 h^3 W}{3 \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z + \Delta z} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.1.3)$$

realizando el balance

$$\frac{q(z + \Delta z) - q(z)}{\Delta z} = -\frac{2 h^3 W}{3 \mu} \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z + \Delta z} - \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_z \right)}{\Delta z} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.1.4)$$

cuando  $\Delta z$  tiende a cero

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{q(z + \Delta z) - q(z)}{\Delta z} \right) = -\frac{2 h^3 W}{3 \mu} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{\left( \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z + \Delta z} - \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_z \right)}{\Delta z} \right) \quad . \quad \dots \dots \dots (A.1.5)$$

La diferencia del flujo con respecto a  $\Delta z$  es proporcional al gasto del fluido que entra en los dos bloques de matriz:

**APÉNDICE**

$$\frac{q_{(z+\Delta z)} - q_{(z)}}{\Delta z} = -\frac{2q_{exit}}{\Delta z} \quad \dots \dots \dots (A.1.6)$$

Sí el gasto volumétrico es:

$$q_{exit} = v_{exit}A \quad , \quad \dots \dots \dots (A.1.7)$$

donde  $v_{exit}$  es la velocidad del fluido que interacciona en la matriz y,  $A$  es el área de la matriz, se define como  $A = \Delta zW$ , al gasto del fluido que entra en la matriz es:

$$q_{exit} = v_{exit}\Delta zW \quad , \quad \dots \dots \dots (A.1.8)$$

sustituyendo la ecuación A.1.8 en la ecuación A.1.6:

$$\frac{q_{(z+\Delta z)} - q_{(z)}}{\Delta z} = -\frac{2v_{exit}\Delta zW}{\Delta z} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.1.9)$$

por lo tanto, el límite del gasto es:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \frac{q_{(z+\Delta z)} - q_{(z)}}{\Delta z} \right) = -\frac{2v_{exit}\Delta zW}{\Delta z} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.1.10)$$

donde el diferencial del flujo representa las pérdidas del fluido,  $\frac{dq}{dz} \sim \text{pérdidas}$ . En el término izquierdo de la ecuación A.1.5 puede expresarse,

$$\frac{dq}{dz} = -2v_{exit}W \quad . \quad \dots \dots \dots (A.1.11)$$

Sí  $v_{exit} > 0$ , se dice que hay pérdida de la fractura hacia la matriz, en caso contrario  $v_{exit} < 0$  entra fluido de la matriz a la fractura. La solución del limite de la presión del término derecho de la ecuación A.1.5 es

$$\frac{dq}{dz} = -\frac{2h^3W}{3\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad . \quad \dots \dots \dots (A.1.12)$$

Finalmente se obtiene la ecuación para el diferencial de flujo, que es igual a la ecuación 5.2.

$$\frac{dq}{dz} = -\frac{2h^3W}{3\mu} \frac{d^2p}{dz^2} = -2v_{exit}W \quad . \quad \dots \dots \dots (A.1.13)$$

**A.2.- Evaluando el flujo que interacciona en la matriz,  $q_P$**

Evaluando el flujo de entrada/salida con la matriz en todo el yacimiento, se utiliza la ecuación 5.13 que es igual a:

$$q_P = \int \Delta v_{exit_t} dA \quad . \quad \dots \dots \dots (A.2.1)$$

## APÉNDICE

Para el diferencial de velocidad del fluido total  $\Delta v_{exit_t}$ , definido por la ecuación 5.12,

$$\Delta v_{exit_t} = -\frac{k_u \phi_u}{\mu_u} \frac{p_{m_u} - p(z)}{\delta_u} - \frac{k_L \phi_L}{\mu_L} \frac{p_{m_L} - p(z)}{\delta_L}, \quad \dots \dots \dots (A.2.2)$$

se sustituye la ecuación A.2.2 en la ecuación A.2.1 y definiendo  $dA = dydz$ , la ecuación A.2.1 puede expresarse:

$$q_P = -\left[ \int_0^W \int_0^z \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p(z)) dydz + \int_0^W \int_0^z \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p(z)) dydz \right], \quad \dots \dots (A.2.3)$$

resolviendo la doble integral en  $dy$

$$q_P = -\left[ \int_0^W \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p(z)) \int_0^z dydz + \int_0^W \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p(z)) \int_0^z dydz \right], \quad \dots \dots (A.2.4)$$

$$q_P = -\left[ \int_0^W \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p(z)) z dz + \int_0^W \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p(z)) z dz \right], \quad \dots \dots (A.2.5)$$

se resuelve la integral en  $dz$

$$q_P = -\left[ \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p(z)) \int_0^W z dz + \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p(z)) \int_0^W z dz \right], \quad \dots \dots (A.2.6)$$

$$q_P = -\left[ \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p(z)) \left| \frac{z^2}{2} \right|_0^W + \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p(z)) \left| \frac{z^2}{2} \right|_0^W \right]. \quad \dots \dots (A.2.7)$$

La solución para la ecuación A.2.3 es:

$$q_P = -\left[ \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p(z)) \frac{W^2}{2} + \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p(z)) \frac{W^2}{2} \right], \quad \dots \dots (A.2.8)$$

agrupando términos semejantes, la siguiente ecuación coincide con la ecuación 5.15.

$$q_P = \frac{W^2}{2} \left\{ -\left[ \frac{k_u \phi_u}{\mu_u \delta_u} (p_{m_u} - p(z)) + \frac{k_L \phi_L}{\mu_L \delta_L} (p_{m_L} - p(z)) \right] \right\}. \quad \dots \dots (A.2.9)$$

### A.3.- Evaluando la presión en el sistema.

Para el sistema dado, ecuación 5.23 representado por la ecuación A.3.1.

$$\frac{d^2 p}{dz^2} = \frac{3\mu k\phi}{h^3 \mu\delta} (p(z) - p_m), \quad \dots \dots (A.3.1)$$

se evalúa la presión bajo las condiciones de frontera siguientes, que corresponden a las ecuaciones 5.24 y 5.25 presentadas en el capítulo de fundamentos del modelo dinámico:

## APÉNDICE

$$z = 0 \quad p = p_i \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.2)$$

$$z = L \quad p = p_o \quad . \quad \dots \dots \dots (A.3.3)$$

Se definen las variables para resolver la ecuación A.3.1

$$a = \frac{3\mu}{h^3} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.4)$$

$$b = \frac{k\phi}{\mu\delta} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.5)$$

$$p = p_{(z)} - p_m \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.6)$$

la solución para la ecuación de presión:

$$p = C_1 e^{z\sqrt{a}\sqrt{b}} + C_2 \exp(-z\sqrt{a}\sqrt{b}) \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.7)$$

sustituyendo A.3.6 en la ecuación A.3.7:

$$p_{(z)} - p_m = C_1 e^{z\sqrt{a}\sqrt{b}} + C_2 \exp(-z\sqrt{a}\sqrt{b}) \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.8)$$

utilizando la condición de frontera A.3.2 en la ecuación A.3.8, se obtiene:

$$p_i - p_m = C_1(1) + C_2(1) \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.9)$$

despejando la constante  $C_1$

$$p_i - p_m - C_2 = C_1 \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.10)$$

usando la condición de frontera A.3.3 en la ecuación A.3.8 y sustituyendo  $C_1$

$$p_o - p_m = (p_i - p_m - C_2) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}} + C_2 \exp(-L\sqrt{a}\sqrt{b}) \quad . \quad \dots \dots \dots (A.3.11)$$

despejando la constante  $C_2$

$$p_o - p_m - (p_i - p_m - C_2) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}} = C_2 \exp(-L\sqrt{a}\sqrt{b}) \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.12)$$

$$p_o - p_m - p_i e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}} + p_m e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}} = C_2 \exp(-L\sqrt{a}\sqrt{b}) - C_2 e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.13)$$

$$p_o - p_m - p_i e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}} + p_m e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}} = C_2 (e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}) \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.14)$$

$$p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}} = C_2 (e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}) \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.15)$$

$$C_2 = \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.16)$$

se sustituye la constante  $C_2$  en la ecuación A.3.10

$$C_1 = p_i - p_m - \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \quad , \quad \dots \dots \dots (A.3.17)$$

los valores de las constante  $C_1$  y  $C_2$  se sustituyen en la ecuación A.3.8

**APÉNDICE**

$$p_{(z)} - p_m = \left( p_i - p_m - \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \right) e^{z\sqrt{a}\sqrt{b}} + \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \right) \exp(-z\sqrt{a}\sqrt{b}) , \dots\dots\dots (A.3.18)$$

$$p_{(z)} - p_m = \left( p_i - p_m - \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \right) e^{z\sqrt{a}\sqrt{b}} + \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \right) e^{-z\sqrt{a}\sqrt{b}} , \dots\dots\dots (A.3.19)$$

se despeja la presión,  $p_{(z)}$

$$p_{(z)} = p_m + \left( p_i - p_m - \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \right) e^{z\sqrt{a}\sqrt{b}} + \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \right) e^{-z\sqrt{a}\sqrt{b}} , \dots\dots\dots (A.3.20)$$

se acomodan los términos

$$p_{(z)} = p_m + (p_i - p_m) e^{z\sqrt{a}\sqrt{b}} + \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}}}{(e^{-L\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{L\sqrt{a}\sqrt{b}})} \right) (e^{-z\sqrt{a}\sqrt{b}} - e^{z\sqrt{a}\sqrt{b}}) , \dots\dots (A.3.21)$$

sustituyendo las constantes a (A.3.4) y b (A.3.5) en la ecuación A.3.21 la ecuación para la presión es la siguiente:

$$p_{(z)} = p_m + (p_i - p_m) e^{z\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}} + \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}}}{\left( e^{-L\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}} - e^{L\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}} \right)} \right) \left( e^{-z\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}} - e^{z\sqrt{\frac{3\mu}{h^3}\sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}} \right) \dots\dots\dots (A.3.22)$$

la ecuación A.3.22 obtenida es igual a la ecuación 5.26.

**A.4.- Evaluando la ecuación de Hagen-Poiseuille**

Para conocer los gastos de entrada y salida en la fractura, se evalúa la ecuación de Hagen-Poiseuille:

$$q = -\frac{2h^3W}{3\mu} \frac{dp}{dz} , \dots\dots\dots (A.4.1)$$

utilizando la solución de la ecuación A.3.22 se sustituye en la derivada con respecto a z,

$$\frac{dp}{dz} = \frac{d}{dz} \left\{ p_m + (p_i - p_m) e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} + \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}}}{\left( e^{-L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} - e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} \right)} \right) \left( e^{-z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} - e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} \right) \right] \right\} , \dots (A.4.2)$$

se deriva la presión con respecto a dz

$$\frac{dp}{dz} = \frac{d(p_m)}{dz} + (p_i - p_m) \frac{d\left( e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} \right)}{dz} + \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}}}{\left( e^{-L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} - e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} \right)} \right) \left( \frac{d\left( e^{-z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} \right)}{dz} - \frac{d\left( e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \frac{k\phi}{\mu\delta}}} \right)}{dz} \right) \right] , \dots\dots\dots (A.4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} = & (p_i - p_m) e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \frac{d\left(z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right)}{dz} \\ & + \left\{ \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}}{\left(e^{-L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} - e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}}\right)} \left[ e^{-z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \frac{d\left(-z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right)}{dz} \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \frac{d\left(z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right)}{dz} \right] \right\}, \dots\dots\dots (A.4.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} = & (p_i - p_m) e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \frac{d\left(z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right)}{dz} \\ & + \left\{ \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}}{\left(e^{-L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} - e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}}\right)} \left[ -e^{-z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \left(\sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \left(\sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right) \right] \right\}, \dots\dots\dots (A.4.5) \end{aligned}$$

se reordenan los términos

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} = & (p_i - p_m) e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} \left(\sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right) \\ & - \left\{ \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}}{\left(e^{-L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}} - e^{L \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}}\right)} \left[ \left(\sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right) \left(e^{z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-z \sqrt{\frac{3\mu}{h^3} \sqrt{\frac{k\phi}{\mu\delta}}}\right] \right\}, \dots\dots\dots (A.4.6) \end{aligned}$$

**APÉNDICE**

Agrupando y eliminando términos semejantes, el resultado equivalente del gradiente de presión con respecto a z es igual a:

$$\frac{dp}{dz} = \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) e^{z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}} \right) \left( e^{z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + e^{-z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right) \right] \right\}, \dots \dots (A. 4.7)$$

la ecuación A.4.7 es igual a la ecuación 5.27.

El resultado de la deriva de  $\frac{dp}{dz}$ , se sustituye en la ecuación de Hagen-Poiseuille.

$$q(z) = \frac{-2h^3W}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) e^{z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}} \right) \left( e^{z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + e^{-z\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right) \right] \right\}, \dots \dots \dots (A. 4.8)$$

la ecuación A.4.8 es igual a la ecuación 5.28.

Se evalúa la ecuación del gasto bajo las condiciones de frontera siguientes:

$$q(z = 0) = q_i \dots \dots \dots (A. 4.9)$$

$$q(z = L) = q_o \dots \dots \dots (A. 4.10)$$

las ecuaciones A.4.9 y A.4.10 son iguales a las ecuaciones 5.29 y 5.30 respectivamente. Aplicando la condición de frontera (A.4.9) en la ecuación A.4.8, se obtiene que el gasto de entrada en 3D,  $q'_i$  es

$$q'_i = \frac{-2h^3W}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left[ (p_i - p_m) - 2 \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}} \right) \right], \dots \dots (A. 4.11)$$

aplicando la propiedad para función hiperbólica

$$q'_i = -\frac{2h^3W}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left[ (p_i - p_m) - 2 \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{-2 \left( \frac{e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{2} \right)} \right) \right], \dots (A.4.12)$$

las unidades de  $q'_i$  son  $\left[ \frac{m^3}{s} \right]$  para un modelo en 3D, pero en nuestro caso se está modelando una sola fractura en 2D, se requiere unidades de  $\left[ \frac{m^2}{s} \right]$ , por lo tanto el pseudo gasto de entrada,  $q_i$ , es,

$$q_i = \frac{q'_i}{W}, \dots (A.4.13)$$

utilizando la relación anterior en la ecuación A.4.12, obtenemos que el gasto de entrada es igual a,

$$q_i = -\frac{2h^3}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left[ (p_i - p_m) - 2 \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{-2 \sinh \left( L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right)} \right) \right]. \dots (A.4.14)$$

Se obtiene finalmente la ecuación del pseudo gasto de entrada del fluido en una fractura

$$q_i = -\frac{2h^3}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) + \left[ (p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}) \left( \frac{1}{\sinh \left( L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right)} \right) \right] \right\}, \dots (A.4.15)$$

la ecuación A.4.15 es igual a la ecuación 5.31.

Para conocer el gasto de salida en una fractura se aplica la condición de frontera cuando  $z = L$  en la ecuación A.4.8.

$$q(z = L) = q_o, \dots (A.4.10)$$

$$q'_o = \frac{-2h^3W}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}} \right) \left( e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right) \right] \right\}, \dots\dots (A.4.16)$$

aplicando la propiedad para la funciones hiperbólicas

$$q'_o = -\frac{2h^3W}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{-2 \left( \frac{e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} - e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{2} \right)} \right) 2 \left( \frac{e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + e^{-L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{2} \right) \right] \right\}, \dots\dots (A.4.17)$$

$$q'_o = -\frac{2h^3W}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right. \\ \left. - \left[ \left( \frac{p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}}}{-2 \sinh \left( L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right)} \right) 2 \cosh \left( L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \right] \right\}, \dots\dots (A.4.18)$$

$$q'_o = -\frac{2h^3W}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + \left[ \left( p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right) \frac{\cosh\left( L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right)}{\sinh\left( L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right)} \right] \right\}, \dots \dots (A. 4.19)$$

el pseudo gasto de salida del fluido en una sola fractura,  $q_o$  para un modelo 2D es,

$$q_o = \frac{q'_o}{W} = -\frac{2h^3}{3\mu} \left( \sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right) \left\{ (p_i - p_m) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} + \left[ \left( p_o - p_m + (p_m - p_i) e^{L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}}} \right) \frac{\cosh\left( L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right)}{\sinh\left( L\sqrt{\frac{3k\phi}{h^3\delta}} \right)} \right] \right\}, \dots \dots (A. 4.20)$$

la ecuación A.4.20 es igual a la ecuación 5.39.

### A.5.- Método numérico

A partir de una malla de diferencia finita en 2D, se obtiene el sistema lineal de ecuaciones con  $n$  incógnitas siguiente:

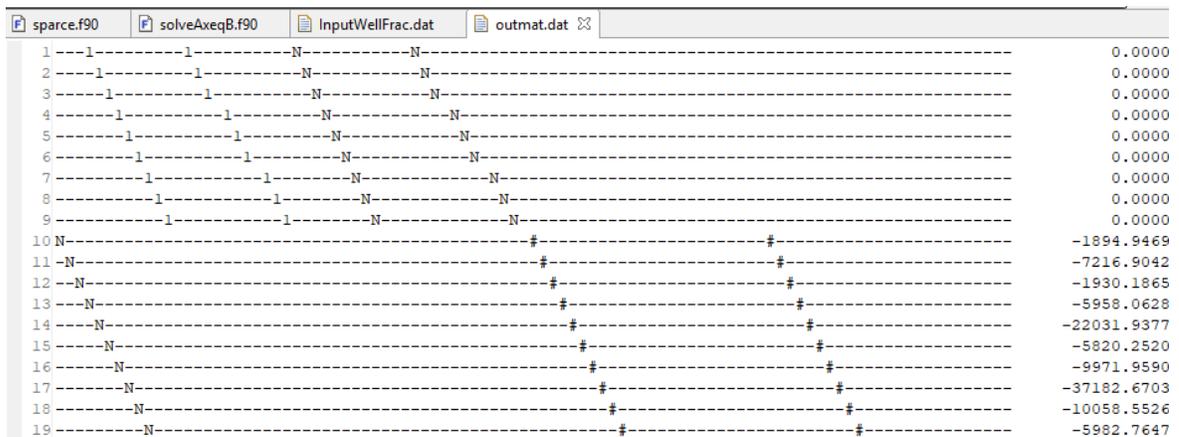
$$\begin{aligned} q_{iV} + q_{iH} - q_{oV} - q_{oH} &= 0 \\ -q_{iV} + p_{iV}a_1 - p_{oV}b_1 &= -p_m c_1 \\ -q_{oH} + p_{iH}d_1 - p_{oH}f_1 &= -p_m g_1 \\ -p_{iH} + p_{oV} &= 0 \\ -p_{iV} + p_{oV} &= 0 \\ p_{oV} - p_{oH} &= 0 \\ -q_{oV} + p_{iV}d_1 - p_{oV}f_1 &= -p_m g_1 \\ p_{iV} &= p_r \\ p_{iH} &= p_r \\ -q_{iH} + p_{iH}a_1 - p_{oH}b_1 &= -p_m c_1 \\ p_{oV} &= p_r \\ p_{oH} &= p_r \\ p_{oV} &= p_{iny} \end{aligned}$$

## APÉNDICE

y se puede escribir en forma matricial como  $Ax = b$ , donde  $A = (a_{ij})$  es la matriz de los coeficientes (etiquetas de posición del gasto y la presión),  $x$  es el vector de  $n$  incógnitas  $(q_{iV}, q_{iH}, q_{oV}, q_{oH}, p_{iV}, p_{iH}, p_{oV}, p_{oH})$  y  $b$  es el vector de los términos independientes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Dado que cada nodo de la malla se conecta con sus nodos adyacentes, se genera una matriz, en la cual existe valores nulos, tipo dispersa (**Figura A.2**). Las matrices dispersas permiten el procesamiento de grandes volúmenes de información de conjuntos de datos no densos (Millo y cols, 2015).



**Figura A.0.2.- Estructura de la matriz dispersa generada dentro del programa (vista parcial).**

Para reducir el tiempo de cálculo, así como el almacenamiento datos (Soto y cols, 2013), el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ , se resuelve iterativamente mediante la subrutina MGMRES\_ST que aplica el método GMRES (Residual Mínimo Generalizado) reiniciado a una matriz de formato triple dispersa (Burkardt y Ju, 2007). Donde la matriz  $A$  almacena sólo las entradas distintas a cero. Por ejemplo, el  $k$  –ésima no nulo, la entrada en la matriz es almacenada por:

$$A(k) = \text{valor de entrada},$$

## APÉNDICE

---

$A_i(k) = \text{fila de entrada},$

$A_j(k) = \text{columna de entrada}.$

En la **Figura A.3** se observa la información que solicita la subrutina `MGMRES_ST` para almacenar las entradas en la matriz. Donde  $n$  es el orden del sistema lineal;  $nz\_num$  es el número de valores de matriz distintos de cero;  $ia(nz\_num)$  y  $ja(nz\_num)$  son los índices (fila y columna) de los valores de la matriz;  $a(nz\_num)$  son los valores de la matriz;  $x(n)$ : en la entrada, es una aproximación a la solución y en salida, es una aproximación mejorada;  $rhs(n)$  es el lado derecho del sistema lineal  $b$ ;  $itr\_max$  es el número máximo (externo) de las iteraciones a tomar;  $mr$  es la cantidad máxima (internas) de iteraciones tomar  $0 < mr \leq n$ ;  $tol\_abs$  es la tolerancia absoluta aplicada al residual actual;  $tol\_rel$ , una tolerancia relativa que compara el residual actual al residual inicial. Para este trabajo la tolerancia relativa y absoluta es de  $1 \times 10^{-12}$ .

```
subroutine mgmres_st ( n, nz_num, ia, ja, a, x, rhs, itr_max, mr, tol_abs, &  
  tol_rel )
```

**Figura A.0.3.- Información solicitada en la subrutina MGMRES**

### **Método iterativo GMRES reiniciado:**

La convergencia en el algoritmo GMRES reiniciado, consiste en guardar los vectores propios aproximados de la matriz  $A$  correspondientes a los valores propios más pequeños en magnitud y sumarlos al nuevo subespacio Krylov  $K_k(r_0)$  que se genera (Ayachour, 2003).

**El algoritmo GMRES reiniciado se puede describir como:**

**Paso 1: Inicio:** Se propone una solución inicial  $x_0$  y calcule un vector residual  $r_0 = b - Ax_0$  y un vector unitario  $v_1 = r_0/|r_0|$  (**Figura A.4**).

**Paso 2: Iterar:** Para  $j = 1, \dots, k$ , construir una base ortogonal  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  para  $K_k(r_0)$  utilizando el algoritmo modificado de Gram-Schmidt (Fuente O'connor, 1998), para encontrar el vector el  $v_{j+1}$ .

$$h_{j+1,j} = |v_{j+1}|$$

$$v_{j+1} \leftarrow v_{j+1}/h_{j+1,j}$$

## APÉNDICE

Donde  $v_k$  denota la matriz  $n \times k$  cuyas columnas son los elementos de la base ortogonal  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  dado por el algoritmo modificado de Gram-Schmidt (**Figura A.5**)

```
sparse.f90 solveAxeqB.f90 InputWellFrac.dat outmat.dat outmat.f90 MatrixABWe
122  real ( kind = 8 ) y(1:mr+1)
123
124  itr_used = 0
125
126  if ( n < mr ) then
127    write ( *, '(a)' ) ' '
128    write ( *, '(a)' ) 'MGMRES_ST - Fatal error!'
129    write ( *, '(a)' ) ' N < MR.'
130    write ( *, '(a,i8)' ) ' N = ', n
131    write ( *, '(a,i8)' ) ' MR = ', mr
132    stop
133  end if
134
135  do itr = 1, itr_max
136
137    call ax_st ( n, nz_num, ia, ja, a, x, r )
138
139    r(1:n) = rhs(1:n) - r(1:n)
140
141    rho = sqrt ( dot_product ( r(1:n), r(1:n) ) )
142
143    if ( verbose ) then
144      ! write ( *, '(a,i8,a,g14.6)' ) ' ITR = ', itr, ' Residual = ', rho
145    end if
146
147    if ( itr == 1 ) then
148      rho_tol = rho * tol_rel
149    end if
150
```

**Figura A.0.4.- Algoritmo GMRES reiniciado en sparse (paso de inicio) (Burkardt y Ju, 2007).**

```
sparse.f90 solveAxeqB.f90 InputWellFrac.dat outmat.dat outmat.f90
151  v(1:n,1) = r(1:n) / rho
152
153  g(1) = rho
154  g(2:mr+1) = 0.0D+00
155
156  h(1:mr+1,1:mr) = 0.0D+00
157
158  do k = 1, mr
159
160    k_copy = k
161
162    call ax_st ( n, nz_num, ia, ja, a, v(1:n,k), v(1:n,k+1) )
163
164    av = sqrt ( dot_product ( v(1:n,k+1), v(1:n,k+1) ) )
165
166    do j = 1, k
167      h(j,k) = dot_product ( v(1:n,k+1), v(1:n,j) )
168      v(1:n,k+1) = v(1:n,k+1) - h(j,k) * v(1:n,j)
169    end do
170
171    h(k+1,k) = sqrt ( dot_product ( v(1:n,k+1), v(1:n,k+1) ) )
172
173    if ( av + delta * h(k+1,k) == av ) then
174
175      do j = 1, k
176        htmp = dot_product ( v(1:n,k+1), v(1:n,j) )
177        h(j,k) = h(j,k) + htmp
178        v(1:n,k+1) = v(1:n,k+1) - htmp * v(1:n,j)
179      end do
180
```

**Figura A.0.5.- Algoritmo de Gram Schmidt desarrollado en sparse.**



## APÉNDICE

```
sparce.f90 solveAxeqB.f90 InputWellFrac.dat outmat.dat outmat.f90
181     h(k+1,k) = sqrt ( dot_product ( v(1:n,k+1), v(1:n,k+1) ) )
182
183     end if
184
185     if ( h(k+1,k) /= 0.0D+00 ) then
186         v(1:n,k+1) = v(1:n,k+1) / h(k+1,k)
187     end if
188
189     if ( l < k ) then
190
191         y(1:k+1) = h(1:k+1,k)
192
193         do j = 1, k - 1
194             call mult_givens ( c(j), s(j), j, y(1:k+1) )
195         end do
196
197         h(1:k+1,k) = y(1:k+1)
198
199     end if
200
201     mu = sqrt ( h(k,k)**2 + h(k+1,k)**2 )
202     c(k) = h(k,k) / mu
203     s(k) = -h(k+1,k) / mu
204     h(k,k) = c(k) * h(k,k) - s(k) * h(k+1,k)
205     h(k+1,k) = 0.0D+00
206     call mult_givens ( c(k), s(k), k, g(1:k+1) )
207     rho = abs ( g(k+1) )
208
209     itr_used = itr_used + 1
```

Figura A.0.6.- Código para las rotaciones de Givens en la subrutina MGMRES\_ST (Burkardt y Ju, 2007).

**Paso 4:** Solución aproximada  $x_k$  y estimación de su normal residual  $\|r_k\|$ :

$$x_k = x_0 + V_k(|r_0|z^{(k)})$$

$$\|r_k\| = \|r_0\||\alpha|$$