



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

## Diseño Óptimo para un Chasis Tubular

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ING. DANY GODÍNEZ REVELES

TUTOR:  
DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS

Ciudad Universitaria, CD. MX. Diciembre 2018

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Borja Ramírez Vicente  
Secretario: Dr. Ascanio Gasca Gabriel  
Vocal: Dr. Velázquez Villegas Fernando  
1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Cuenca Jiménez Francisco  
2<sup>d o</sup>. Suplente: Dr. Yáñez Valdez Ricardo

Ciudad Universitaria. Universidad Nacional Autónoma de México

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Velázquez Villegas Fernando

-----  
**FIRMA**

## **Agradecimientos**

Mi más sincero agradecimiento a mi madre, mis hermanos, a mi sobrina Daniela y a todos aquellos que contribuyeron de alguna u otra forma generando un impacto positivo en mi desarrollo profesional.

Agradecimiento especial a la DGAPA-UNAM por el apoyo recibido para el desarrollo de este trabajo a través del proyecto PAPIIT IN113315.

<b>RESUMEN</b>	<b>3</b>
<b>ANTECEDENTES</b>	<b>4</b>
<b>DEFINICIÓN DEL PROBLEMA</b>	<b>5</b>
LOCALIZACIÓN DE ÁREAS DE OPORTUNIDAD	5
<b>JUSTIFICACIÓN</b>	<b>5</b>
<b>OBJETIVO</b>	<b>6</b>
OBJETIVOS PARTICULARES	6
<b>1 CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN. REQUERIMIENTOS Y ESPECIFICACIONES</b>	<b>7</b>
1.1 CASO DE ESTUDIO	7
1.2 REQUERIMIENTOS DE REGLAMENTO	7
<b>2 CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO. FEM Y OPTIMIZACIÓN</b>	<b>9</b>
2.1 ANÁLISIS POR ELEMENTO FINITO	9
2.2 MÉTODO DE ELEMENTO FINITO	9
2.2.1 LEY DE HOOKE	9
2.2.2 GEOMETRÍAS	10
2.2.3 ELEMENTO FINITO	11
2.3 FORMULACIÓN GENERAL DE OPTIMIZACIÓN	11
2.4 OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA	12
2.4.1 OPTIMIZACIÓN DE TAMAÑO ( <i>SIZE OPTIMIZATION</i> )	13
2.4.2 OPTIMIZACIÓN BASADA EN GRADIENTES	14
2.4.3 DESCENSO DE GRADIENTE	14
<b>3 CAPÍTULO 3. DESARROLLO. MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN</b>	<b>15</b>
3.1 OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA	15
3.1.1 CAD Y PRE PROCESAMIENTO	15
3.1.2 MALLADO	16
3.1.3 CASOS DE CARGA	17
3.1.3.1 Torsión	18

3.1.3.2	Flexión Vertical	19
3.1.3.3	Flexión Lateral	20
3.1.3.4	Aceleración y frenado	20
3.1.3.5	Rebote	21
3.1.4	CONDICIONES DE FRONTERA	22
3.1.5	OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA	23
<b>3.2</b>	<b>SIZE OPTIMIZATION</b>	<b>25</b>
3.2.1	MÉTODO <i>SIZE OPTIMIZATION</i>	25
3.2.2	PREPROCESAMIENTO Y MALLADO	26
3.2.3	CASOS DE CARGA Y SOLVER	27
<b>4</b>	<b>CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>28</b>
<b>4.1</b>	<b>OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA</b>	<b>28</b>
<b>4.2</b>	<b>OPTIMIZACIÓN DE TAMAÑO</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>REFERENCIAS</b>	<b>35</b>
<b>7</b>	<b>ANEXO A. MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO</b>	<b>37</b>
7.1.1	FUNCIÓN DE FORMA	37
7.1.2	COORDENADAS GLOBALES, LOCALES Y NATURALES	39
7.1.3	MÉTODO DE ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA	40
<b>7.2</b>	<b>1D TRUSS</b>	<b>41</b>
<b>7.3</b>	<b>1D BEAM</b>	<b>43</b>
<b>7.4</b>	<b>ELEMENTOS DE 4 NODOS</b>	<b>45</b>

## Resumen

La presente tesis propone el diseño de un chasis tipo tubular a partir de métodos de optimización topológica y de tamaño buscando la máxima rigidez en comparación con modelos de características similares. Se parte de un modelo inicial formado por superficies las cuales forman la silueta general del vehículo. Este modelo de superficies es mallado haciendo uso de elementos finitos en 2D y se le aplican casos de carga definidos para las solicitaciones requeridas durante el funcionamiento del vehículo; los casos de carga torsión, flexión, aceleración, frenado, bump y aceleración lateral son simplificaciones del comportamiento que tendría el vehículo.

Por medio del análisis por elementos finitos se utiliza el método de optimización topológica; en el cual se requieren funciones objetivo, de respuesta y de restricción. Dichas funciones permiten determinar las trayectorias que deberá seguir el material para dar forma a los tubos que finalmente forman el diseño óptimo, estas trayectorias están representadas en esta etapa por elementos de la malla los cuales a su vez representan la distribución de densidades; correspondientes para cada elemento bajo las condiciones de carga dadas.

Dado que se requiere conocer las dimensiones de los tubos que se asignarán a las trayectorias de material obtenidas previamente. El siguiente paso es la utilización del método de optimización de tamaño con el cual se determinan espesores y diámetros de los tubos que conforman el diseño óptimo. Para este método de optimización se tienen restricciones de desplazamiento aplicadas en un punto de interés; correspondiente a un nodo localizado en la suspensión frontal lado izquierdo. Ese nodo se utilizará para determinar la rigidez torsional con un valor objetivo propuesto superior a modelos de características similares. Como resultado de esta optimización se obtienen espesores y diámetros los cuales son utilizados como referencia para asignar dimensiones de tubería disponible en el mercado.

Finalmente, con el diseño óptimo del chasis se evalúa la rigidez torsional del modelo a través del análisis por elemento finito y se compara con modelos similares.

## Antecedentes

El automóvil a lo largo de la historia ha sido un factor para el desarrollo de las sociedades en el mundo, impulsando el comercio a través del transporte de mercancías a mercados que en primera instancia eran lejanos, desarrollo de carreteras y sucesivamente diferentes elementos han sido generados a partir de los vehículos. Dada su importancia a través del tiempo han venido a ser eficientes en todo sentido y funcionales para cualquiera que sea su quehacer. El desarrollo de la industria automotriz ha implicado que el comportamiento de estos vehículos sea predicho antes de su fabricación para garantizar su desempeño sin incurrir en los altos costos de manufactura o corrección de no conformidades. El Método de Elemento Finito y software computacional han permitido prever el comportamiento de los vehículos en condiciones cercanas a la realidad sin tener un modelo físico, reduciendo costos y tiempo en las etapas de diseño.

Existen diferentes competencias interuniversitarias referentes a diseño y construcción de vehículos eléctricos y a gasolina en las cuales se desarrollan vehículos con chasis tubulares y diferentes requerimientos especificados en cada uno de los reglamentos de las competencias como, por ejemplo: Formula SAE que es una competencia en la cual el objetivo es diseñar un vehículo monoplaza que cumpla con altas prestaciones en el rango amateur. Shell Eco-Marathon para vehículos eléctricos y enfocado en el rendimiento de las baterías no tanto en velocidad. Baja SAE para vehículos con desempeño todo terreno con motores de combustión interna y la competencia Electrathon para vehículos eléctricos donde se busca dar la mayor cantidad de vueltas en una hora con una determinada cantidad de baterías. En este tipo de competencias es importante el máximo aprovechamiento de los recursos para lo cual diferentes métodos de optimización se pueden llegar a implementar para reducir consumos de energía, aumentar desempeño o disminuir pesos etc.

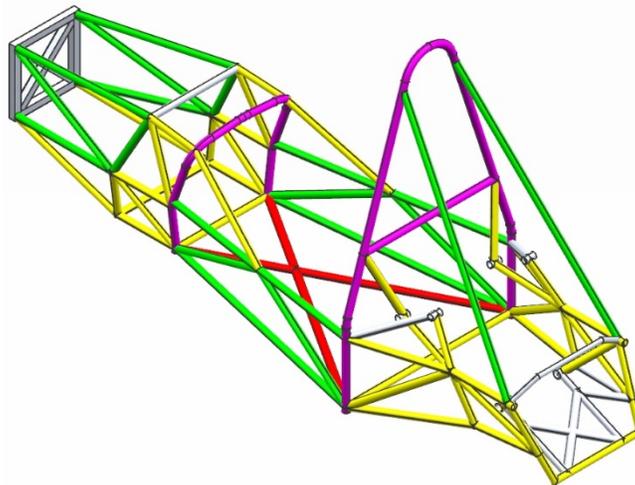


Imagen 1 Formula SAE UNAM 2017

## **Definición del problema**

La reducción de costos en la industria automotriz, así como las mudas o pérdidas durante los procesos es un tema recurrente en esa y otras industrias. Existen diferentes herramientas en la manufactura esbelta o “Lean manufacturing” para conseguir tales objetivos a lo largo del proceso de productivo. Aunque reducir las mermas tiene un impacto positivo en los costos y tiempos de producción siempre resulta ideal considerar las “mudas” desde las etapas de diseño. Los métodos de optimización aplicados a los modelos durante la etapa de diseño y análisis de comportamiento mecánico, han permitido obtener diseños con la funcionalidad optima requerida y cantidad de material requerido. Esto permite que se tenga una reducción de costos al disminuir el material utilizado asegurando el desempeño.

### **Localización de áreas de oportunidad**

Se han encontrado diferentes trabajos referentes a el uso de métodos de optimización en muchos tipos de diseños y en diferentes áreas, entre ellos el área automotriz que echa mano de estos métodos para obtener componentes para vehículos comerciales, de competencia o proyectos universitarios. En este sentido es importante considerar los proyectos referentes a optimización de chasis debido a que constituye la parte fundamental de un vehículo y un diseño adecuado repercute positivamente en el comportamiento dinámico del vehículo y en las evaluaciones de seguridad en caso de impacto.

En el Instituto Tecnológico de la India se ha trabajado con optimización topológica en chasis para vehículos de proyectos universitarios [1] en este informe el autor reporta la creación de un modelo a partir de componentes solidos que dan forma a la silueta del chasis, se aplican requerimientos de carga particulares para dicho modelo. Al aplicar optimización topológica tiene como resultado un diseño optimo representado por trayectorias de material que a su vez representan la densidad del material en esas regiones. Con estos resultados el autor ofrece conclusiones y comentarios. En este punto del informe, se identifica que aún no sería posible determinar las dimensiones de la tubería que da forma al chasis; es decir que las secciones transversales se desconocen siendo las trayectorias del material lo que da forma a la silueta del chasis.

Otros métodos de optimización pueden ser utilizado para conocer las áreas transversales de los tubos a utilizar [2] como el método de optimización evolutiva; en el cual se agrega o remueve material conforme a los requerimientos para el modelo y como resultado se tiene dimensiones para las secciones transversales para los tubos que conforman el chasis.

## **Justificación**

Durante el desarrollo de un proyecto resulta de utilidad considerar todos y cada uno de los detalles e inconvenientes que se tendrán a lo largo de las etapas de diseño, manufactura y mantenimiento debido a que se ahorra dinero y se evitan actividades que no necesariamente agregan valor al producto.

Cuando se realiza la propuesta de diseño para proyectos de competencias interuniversitarias es común partir de un boceto inicial siguiendo siluetas de modelos de características similares, esto sirve para ir definiendo el modelo conforme a dimensiones y requerimientos de reglamento. Aunque esto es una práctica común en las etapas iniciales de diseño, no se tiene la certeza que el modelo tenga características de comportamiento mecánico conforme a las solicitaciones bajo las cuales operara, es por esto que se tiene la necesidad de obtener un modelo a partir del boceto de la silueta inicial del vehículo a la cual aplicando métodos de optimización topológica y de tamaño se puede obtener la distribución de la tubería que da forma a el chasis, así como las dimensiones de las secciones transversales. Este proceso evita las suposiciones en el diseño y brinda certeza de que el modelo que se obtiene trabajara de manera adecuada conforme a las necesidades de operación.

## **Objetivo**

Diseñar un chasis tubular a través de la aplicación de métodos de optimización topológica y de tamaño en condiciones de carga definidas, buscando maximizar la rigidez estructural.

### **Objetivos particulares**

1. Aumentar la rigidez torsional del modelo en 10% respecto a diseños similares
2. Disminuir el peso del vehículo en 5% respecto a modelos similares

# 1 Capítulo 1. Introducción. Requerimientos y Especificaciones

## 1.1 Caso de estudio

El proyecto propone la generación de un diseño óptimo de un chasis tubular con comportamiento mecánico conforme a casos de carga definidos; los cuales son una simplificación de las cargas que intervienen cuando el vehículo está en operación. Este chasis es obtenido a partir de un modelo formado por superficies que dan forma a la silueta del vehículo y que es genérica para la competencia Electrátón o cualquier otra competencia que requiera modelos de similares características. Se dice que es un modelo genérico debido a que no tiene distribuciones de tubería ni características particulares; únicamente está creado utilizando dimensiones exteriores de lo que sería el chasis. Con casos de carga requeridos se utiliza el método de optimización topológica para obtener la geometría que dará forma a la solución conceptual de la estructura del chasis. Posteriormente en la optimización de tamaño se realiza un proceso de adecuación considerando materiales y dimensiones comerciales.

Con la optimización topológica se busca eliminar material del modelo que no es necesario para el comportamiento de la estructura en los casos de carga utilizados que para este proyecto se proponen seis casos de carga [3] Las etapas para el diseño geométrico de la estructura se describen en seguida:

1. Modelo de líneas: a través de la utilización de líneas se crea la silueta general del diseño inicial.
2. Formar superficies: utilizando estas líneas se crean componentes denominados superficies.
3. Mallado: el modelo formado por superficies se divide en pequeños elementos finitos.
4. Optimización Topológica: se elimina el material que no es necesario bajo los casos de carga requeridos.
5. Diseño de modelo trayectorias: utilizando las trayectorias de la densidad del material que se obtiene como resultado de la optimización se trazan líneas que dan forma al chasis.
6. Diámetros y espesor: utilizando optimización de tamaño se asignan valores a la sección transversal de los tubos que dan forma al diseño final.
7. Análisis de modelo: se analiza el modelo óptimo bajo los casos de carga propuestos para comprobar el comportamiento requerido.

El presente trabajo se desarrolla siguiendo el proceso siguiente:

- a) Antecedentes: Recopilación y análisis de información
- b) Planteamiento del problema
- c) Desarrollo: proceso de diseño
- d) Resultados y conclusiones

## 1.2 Requerimientos de reglamento

El reglamento de Electrátón 2016 [4] vigente durante el desarrollo de este proyecto especifica dimensiones máximas y mínimas para los vehículos. En este proyecto se utilizan las dimensiones

mínimas requeridas en dicho reglamento con lo cual se tendría un modelo con las características necesarias para la competencia.

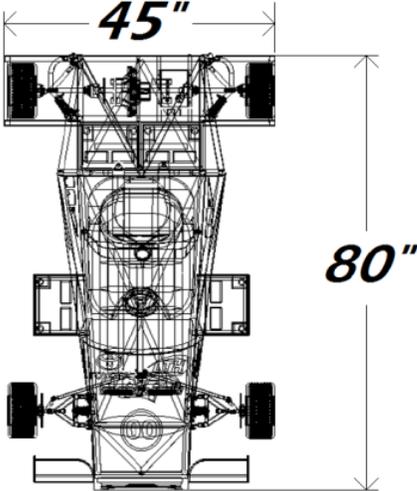


Imagen 2 Vista Superior. Dimensiones mínimas. [4]

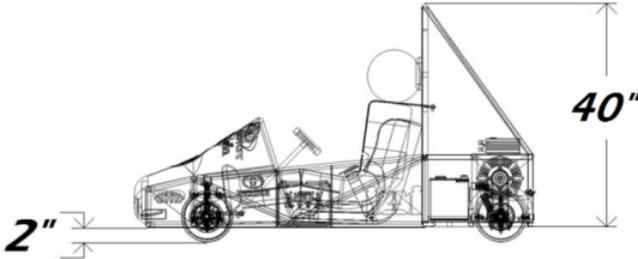


Imagen 3 Vista Lateral. Dimensiones mínimas modelo inicial [4]

## 2 Capítulo 2. Marco Teórico. FEM y Optimización

En este capítulo se abordan fundamentos del método de elemento finito y metodologías de optimización con la intención de brindar un marco teórico de las metodologías utilizadas para desarrollar este proyecto.

### 2.1 Análisis por Elemento Finito

El método de Elemento Finito es ampliamente utilizado para predecir el comportamiento de prácticamente cualquier producto en fase de diseño. Las etapas del análisis se muestran en la figura siguiente:

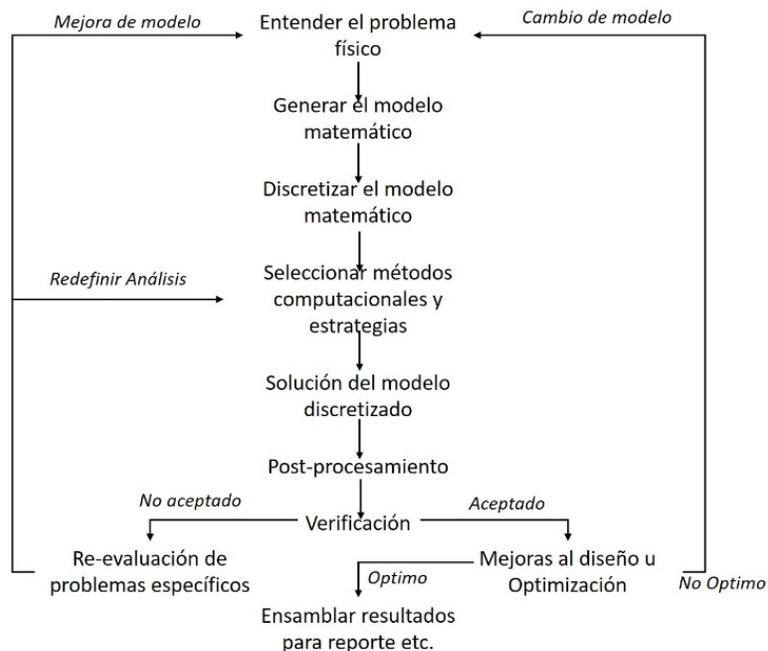


Figura 1 Etapas consecutivas del Análisis de Elemento Finito [5].

### 2.2 Método de Elemento Finito

El método de elemento finito ofrece soluciones aproximadas debido a que es una simplificación de problemas que no pudieran resolverse de forma sencilla. Esto se logra discretizando el dominio de diseño en pequeños elementos finitos los cuales se analizan individualmente y posteriormente se tiene una solución general que corresponde a todo el dominio.

#### 2.2.1 Ley de Hooke

A partir de esta ley para sólidos elásticos se tiene el moldeo “lineal elástico isotrópico” en el cual se sabe que en cualquier dirección del cuerpo habrá una deformación que es directamente proporcional al esfuerzo aplicado sin importar la dirección de aplicación de la carga y sin rebasar la zona elástica en el diagrama esfuerzo-deformación del material correspondiente. El comportamiento mecánico de un material isotrópico puede ser descrito por la ley generalizada de Hooke [5].

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

Donde:

$\nu$  = relación de *poission*

$\varepsilon$  = deformación

$E$  = *módulo de Young*

La ley de Hooke es necesaria para conocer el comportamiento mecánico de los sólidos analizados, que para el caso de la formulación anterior será necesario tener en cuenta el coeficiente de Poisson y el módulo de Young del material. Para conocer la matriz de deformación se hace uso de los desplazamientos de los nodos de cada elemento para XYZ a través de la derivada parcial con respecto del punto inicial; es decir el gradiente del nodo de interés. La expresión para esfuerzo plano en 2D sería la siguiente [5]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1\nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Las deformaciones están dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

En el Anexo A se aborda ampliamente el método de elemento finito.

### 2.2.2 Geometrías

En el método por elementos finitos se utilizan formas geométricas de cuadrados o rectángulos formados por 4 y 3 nodos respectivamente, y debido a las geometrías del dominio de diseño, estos elementos finitos tendrán variaciones en la proporcionalidad de sus dimensiones ya sea que algunos lados de la figura sean más grandes o más pequeños; la proporcionalidad es un parámetro a controlar el software y se aborda en secciones posteriores.

Para este proyecto se utilizan geometrías que son discretizadas en elementos finitos los cuales tienen características particulares conforme al tipo de elemento que son. Los elementos 2D son utilizados en las geometrías de superficies debido a que se considera un solo plano con sección transversal constante y con lo cual en la dirección perpendicular se asume que no ocurren esfuerzos. Entre los tipos de elementos se tiene elementos triangulares o "trías", elementos cuadrados o "Quads" formados por 4 nodos.

Los elementos 1D son utilizados como simplificaciones de geometrías que tienen secciones transversales constantes y longitudinalmente dimensiones mucho mayores, las solicitaciones para este tipo de elementos pueden ser a tensión-compresión o a tensión-compresión-flexión.

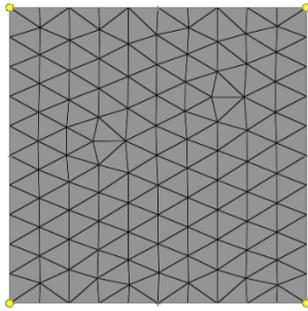


Imagen 5 Elementos Trías

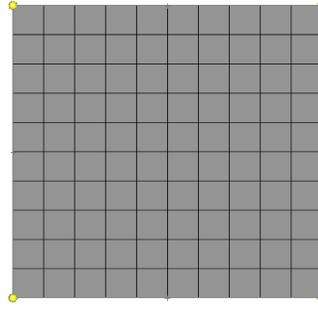


Imagen 4 Elementos Quads

### 2.2.3 Elemento finito

Ahora que se tienen los elementos finitos formados por nodos ya sea cuadrados o rectángulos, estaremos interesados en conocer el comportamiento de estos elementos y es aquí donde los nodos que se tiene son de utilidad debido a que se asume que dichos nodos tendrán diferentes grados de libertad; es decir, el nodo podrá desplazarse en dirección X, Y ó Z y así respectivamente para cada nodo que forma parte de nuestra malla. Se puede decir que una malla es el conjunto de elementos en los cuales está discretizado el dominio de diseño, una malla regular tiene elementos definidos y en una irregular los elementos son de diferentes tamaños. Sabiendo que el nodo podrá tener grados de libertad en cualquier dirección debido al funcionamiento u operación del dominio de análisis, podemos deducir que un dato que se podrá obtener son desplazamientos.

Con los datos de desplazamiento de los nodos ahora ya se puede plantear que es lo que se requiere conocer en el dominio de análisis; es decir, se tendrá que plantear la ecuación que modele el fenómeno de interés, por ejemplo, si se requiere conocer esfuerzo plano podría utilizarse la ley de Hooke tal como se plantea en la sección 2.2.1.

Con la solución general del modelo podemos aplicar las condiciones de frontera. Cuando se habla de condiciones de frontera se hace referencia a las restricciones, no se puede aplicar carga y restricción en un mismo punto. Ahora se tendrá una solución particular para el modelo de análisis.

En el Anexo A se detalla el modelo para un elemento finito en 1D.

## 2.3 Formulación General de Optimización

La optimización puede ser definida como el proceso automático para hacer un sistema o componente tan funcional y bueno como sea posible basado en una función objetivo y sujeto a ciertas restricciones [6].

Los componentes para la formulación de problemas optimización se describen a continuación:

- a. Función Objetivo ( $f$ ): es la función que representa el dominio que se optimiza, el resultado que se obtiene de  $f$  representa que tan bueno es el diseño ya sea que se maximice o minimice la función.

- b. Variable de diseño ( $x$ ): es una función o un vector que describe el diseño y que va cambiando durante la optimización, puede representar alguna característica del modelo como material, geometría, densidad, sección transversal, espesor.
- c. Variable de estado ( $y$ ): es una función que representa la respuesta de la estructura, la respuesta puede ser desplazamiento, esfuerzo, deformación o fuerza.

La formulación general para un problema de optimización es [7], [8]:

$$(\mathbb{S}\mathbb{O}) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } f(x,y) \text{ con respecto a "x" y "y"} \\ \text{Sujeto a } \left\{ \begin{array}{l} \text{restricciones de comportamiento en y} \\ \text{restricciones de diseño en x} \\ \text{restricciones de equilibrio} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Las funciones de restricción son límites máximos y mínimos dentro de las funciones de respuesta involucradas en el sistema pudiendo ser limitados a porcentajes, rango de frecuencias, desplazamientos o masa determinada. Como variable de diseño se nombra a los elementos propósito de la optimización; es decir cambiar tamaño de secciones, distribución de material o cambios de geometría entre otros.

## 2.4 Optimización Topológica

El algoritmo SIMP (*Solid Isotropic Material Penalization*) [8] es ampliamente utilizado por software comercial. El método emplea una variable de diseño por cada elemento finito en el cual esta discretizado el modelo y este se conoce como el dominio de diseño, dicha *variable de diseño* es un elemento llamado de "densidad artificial"  $\rho_e$  que tiene un rango de valores entre 0 y 1. Esta pseudo-densidad se encuentra multiplicando a él volumen de cada elemento finito lo que es igual a generar un nuevo volumen. Por lo tanto, el volumen de todo el dominio está dado por la siguiente ecuación:

$$V = \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \tag{1}$$

Donde

N: número de elementos finitos

$\rho_e$ : pseudo densidad

V: volumen resultante

$v_e$  = volumen del elemento

El factor de penalización " $p$ " incrementa a partir de 1 y es el encargado de generar el diseño "blanco-negro" es decir de 0 y 1, las densidades intermedias no son de importancia dado que se busca la distribución optima de material. Dicha densidad multiplica al módulo de Young del material para obtener un módulo de Young artificial para cada elemento.

$$E_e = \rho_e^p E_e^0 \quad (2)$$

Donde

$E_e^0$ : módulo de Young

$\rho_e^p$ : densidad

$E_e$ : módulo de Young artificial

El método de SIMP está descrito por la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & c(\rho_e) = \{F\}^T(u) \\ \text{Sujeto a:} \quad & \left[ \sum_{e=1}^N \rho_e^p K_e \right] \{u\} = \{F\} \\ & \sum_{e=1}^N V_e \rho_e \leq \bar{V}_T \end{aligned} \quad (3)$$

Donde

$$\begin{aligned} 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 & \quad e = 1, 2, 3, \dots, N \\ p = 1, 2, \dots, N & \quad p_{max}: p_{min} > 3 \end{aligned}$$

Este método es aplicado en este proyecto al dominio inicial de diseño que ha sido creado utilizando superficies como ya se ha mencionado, y con esto se determina el material que es necesario para los casos de carga utilizados; es decir se obtiene el diseño óptimo mostrado como trayectorias de elementos finitos que representan el material que da forma al diseño óptimo.

#### 2.4.1 Optimización de Tamaño (*Size Optimization*)

La optimización de tamaño también está basada en la formulación general de optimización. Hace uso de una función objetivo la cual se busca maximizar o minimizar y también son requeridas funciones de restricción que funcionan como parámetros a los cuales les corresponde valores límite máximos y mínimos.

Este tipo de optimización es utilizada generalmente para encontrar dimensiones de tubos o espesores. Para este trabajo este método es utilizado precisamente para encontrar el espesor de los tubos que dan forma al diseño óptimo. Se utilizan funciones de restricción que involucran la masa y restricciones de desplazamiento. Utilizando la configuración general para problemas de optimización se parte de una configuración inicial y se llega a una solución final buscando mínimos locales en cada iteración hasta encontrar un mínimo global. En la sección 4.1 del capítulo cuatro se aborda de manera particular para este proyecto.

### 2.4.2 Optimización basada en Gradientes

OptiStruct el solver de HyperWorks utiliza un proceso iterativo para resolver los problemas de optimización [6] y durante este proceso los cambios más significativos ocurren en los primeros pasos de la optimización. El software utiliza también un análisis de sensibilidad que está definido como la derivada parcial de la función de restricción respecto de las variables de diseño, el diseño se va actualizando utilizando la información del análisis sensibilidad. El análisis de sensibilidad se puede obtener aplicando tres métodos; criterio de optimalidad, método doble (dual) y método primario de direcciones factibles. El método de optimalidad es usado por lo regular en optimizaciones topológicas utilizando como función objetivo “minimizar compliance” lo cual implica maximizar la rigidez reduciendo desplazamientos y como restricciones utiliza volumen. El método dual y primario son utilizados dependiendo la cantidad de restricciones y variables de diseño que se tengan, cuando hay un mayor número de variables de diseño se utiliza el método dual. El método primario se utiliza si se tuvieran menor cantidad de variables de diseño, pero mayor cantidad de restricciones siendo más común su utilización en optimizaciones de tamaño y de forma. El software hace la selección automática.

### 2.4.3 Descenso de gradiente

Como se mencionó en la sección anterior; el software utiliza gradientes para llegar a una solución final. El método de descenso de gradientes es utilizado para encontrar un mínimo de una función valiéndose del valor del gradiente. El proceso de iteración parte de un valor inicial  $x_0$  evaluando la función de interés que para este proyecto hablamos de la función objetivo de la optimización, también se evalúa el gradiente de la función objetivo respecto a la variable de diseño para determinar el punto siguiente a avanzar, se utiliza la dirección negativa del gradiente como se muestra en la ec. 4 y se va repitiendo cíclicamente hasta encontrar un valor mínimo de la función.

$$x_{1,k+1} = x_{1+k} - \alpha_{1,k} \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

(4)

Donde  
 $\alpha_{1,k}$  = paso

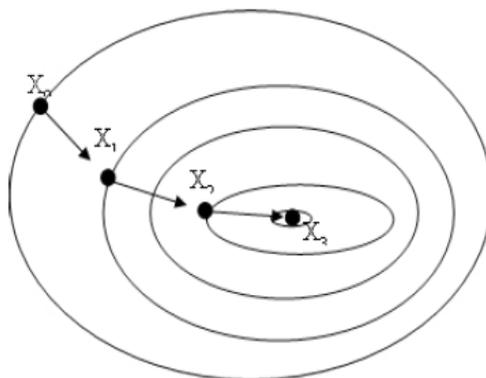


Imagen 6 Descenso de gradiente [6]

### 3 Capítulo 3. Desarrollo. Métodos de Optimización

#### 3.1 Optimización Topológica

El análisis de sensibilidad es importante cuando se realizan optimizaciones ya que determina el comportamiento adecuado de la función; es decir si hay cambios importantes en el resultado de la derivada parcial de la función de restricción con respecto a las variables de diseño se ajusta la función. Los análisis de sensibilidad se llevan a cabo por métodos numéricos que son aproximados y por métodos analíticos que son exactos. Los semi-analíticos son la combinación de ambos analíticos y numéricos. Los análisis de sensibilidad numéricos son muy imprecisos, pero son fáciles de implementar [7]. A lo largo de este capítulo se abordan las etapas que se llevan a cabo para obtener el diseño óptimo del chasis; describiendo las características necesarias para cada etapa.

##### 3.1.1 CAD y Pre procesamiento

El diseño inicial toma en consideración el reglamento de la competencia Electratrón 2016 aún vigente en 2018; el cual propone una estructura con características homogéneas en muchos diseños de diferentes competencias universitarias. Las dimensiones propuestas para el modelo se muestran en la imagen siguiente y corresponden a las dimensiones mínimas propuestas en el reglamento para la competencia. En el reglamento de la competencia Electratrón se especifican límites máximos y mínimos como restricción para longitudes del modelo.

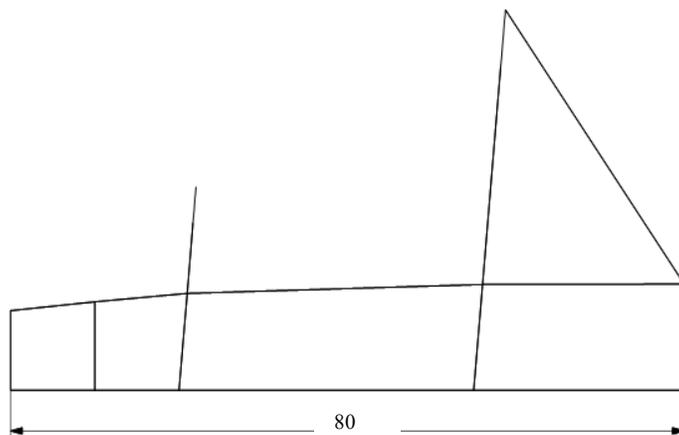


Imagen 7 Vista Lateral. Largo

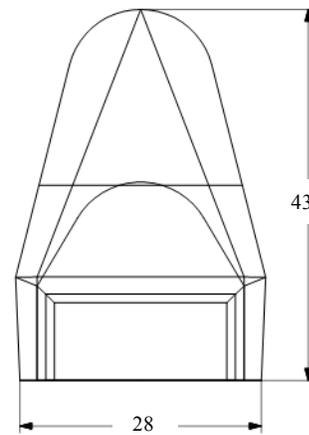


Imagen 8 Vista frontal. Alto y ancho

### 3.1.2 Mallado

El proceso de mallado resulta ser de vital importancia en el desarrollo del proyecto. El modelo inicial; el cual está formado por líneas es utilizado para formar superficies a través del software; dichas superficies representan el material que da forma a la silueta del vehículo, se podría decir que se tiene un chasis formado por estas superficies que representan "láminas ". Dado que se requiere discretizar el modelo para estar en condiciones de analizar el modelo completo, se discretiza el modelo en elementos pequeños que pueden ser analizados por separado para posteriormente encontrar una solución general. Estos elementos en los cuales se discretiza el modelo se les llama elementos finitos y a este proceso se le conoce como proceso de *mallado*.

El mallado del modelo de superficies implica dividir el modelo en elementos pequeños formados por nodos, que para este caso particular se han utilizado elementos "quads" o cuadrados. Cada nodo que forma el elemento finito influye proporcionalmente en el resultado final; con lo cual se debe asegurar que los elementos tengan figura regular en la medida de lo posible para conservar el patrón de nodos y no afectar de manera negativa los resultados. Para verificar que tan adecuados son los elementos en dimensiones se lleva a cabo un análisis de sensibilidad a la malla; bajo un caso de carga, que está definido como la aplicación de una carga en un punto de interés en el modelo, se revisan los resultados obtenidos y se realiza un proceso iterativo hasta que no haya variaciones significativas en los resultados, esto implica que los cambios se vayan dando de manera progresiva de elemento a elemento.

La proporcionalidad de los elementos también es un parámetro a considerar debido a que se requiere asegurar que se tiene una malla de calidad lo cual implica que se encuentren los elementos dentro de los límites aceptables y para casos prácticos es revisada utilizando herramientas en el software denominadas de calidad. Los parámetros a revisar son [6]:

- Warpage: es un parámetro utilizado para confirmar que el elemento es plano y es aplicable para elementos tipo "quads" o cuadrados. Con una línea diagonal en los elementos quad se utilizan dos vectores normales en cada elemento tria formado por dicha diagonal, el ángulo formado por ambos vectores no debe ser mayor a 10 grados.
- Aspect ratio: este es un parámetro de relación de dimensiones entre dos bordes; el valor ideal es uno, aunque es aceptable un valor menor a 5.
- Skew: también es un parámetro de proporciones y considera el ángulo que se forma entre dos líneas que cruzan de lado a lado respectivamente de cada borde del cuadrado, el valor aceptable será menor a  $45^\circ$  cuando se realice la resta de  $90^\circ$  menos el ángulo formado en el cruce de las dos líneas. Funciona de la misma forma para elementos trias.
- Jacobiano: El parámetro medido es el determinante de la matriz jacobiana de cada elemento que va de 0 a 1. Esta matriz "traduce" de un sistema de coordenadas global a otro de coordenadas paramétricas es decir que se mapea el elemento actual de la malla conforme a un elemento ideal; respectivamente para cada forma del elemento que se esté considerando. El valor del jacobiano que se considera aceptable es superior a 0.6

Se tiene el modelo inicial; el cual da forma a la silueta general del modelo utilizando superficies.

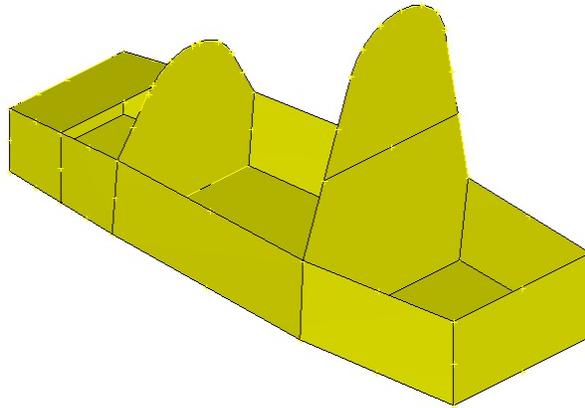


Imagen 9 Modelo de superficies

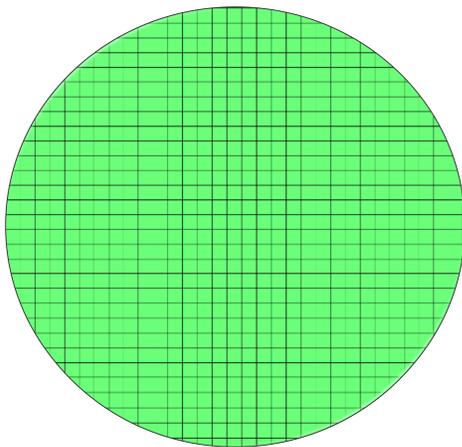


Imagen 10 Vista de Malla, elementos Quads

Tipo de geometría	Tamaño elemento (mm)	Orden	Tipo de elemento	Jacobian min
Shell	5	Primer	Quads	0.7

### 3.1.3 Casos de Carga

Se han considerado diferentes casos de carga que emulan el comportamiento que tiene el chasis durante las competencias, estos casos de carga son simplificaciones del comportamiento del vehículo cuando está en funcionamiento. Dichas simplificaciones son suposiciones de las fuerzas que influyen en la estructura del vehículo y también de puntos que trabajan como restricciones o puntos con grados de libertad restringidos. Los casos de carga están acotados de manera individual únicamente para enunciación en este texto, pero se pueden llegar a presentar al mismo tiempo durante la operación del vehículo.

Para este proyecto se consideran materiales dentro del rango elástico lineal y el análisis llevado a cabo considera los efectos dinámicos de los casos de carga a través de la utilización de “fuerzas  $g$ ”. Este tipo de fuerzas en realidad son los efectos de las masas del vehículo aceleradas. Una fuerza  $g$  corresponde a la fuerza de gravedad de la tierra, a una fuerza de  $2g$  podemos decir que la fuerza que un conductor experimenta es dos veces su peso. Para efectos prácticos se tiene la masa del chasis tomando en cuenta los elementos que irán montados además del peso del conductor,

estará multiplicando a un valor determinado de *fuerza g*. Las cargas utilizadas en los casos de carga [3] se han obtenido de pruebas en vehículos y están reportadas en literatura.

### 3.1.3.1 Torsión

Este tipo de caso de carga resulta ser el más importante dado que el chasis la mayor parte del tiempo trabaja bajo esta condición; por ejemplo, cuando pasa por desniveles en la carretera como puede ser un bache o que una rueda caiga del pavimento, y por la distribución de pesos de los elementos del vehículo o la distribución de fuerzas cuando el vehículo va en curvas; la maniobrabilidad se ve involucrada.



Imagen 11 Vehículo a torsión [13].

Para esta condición se simplifica el modelo a la aplicación de tres restricciones y una fuerza. Se restringe los nodos de la suspensión trasera y solo los nodos de un lado de la suspensión delantera ya en el otro nodo de esa suspensión delantera se aplica una fuerza en dirección  $-Z$  con lo cual se genera el par torsional requerido para este caso de carga. La carga aplicada es 1750 N equivalente al peso de vehículo multiplicado por la gravedad aplicada en dirección  $-Z$ , el peso considerando conductor y elementos diferentes como motor y transmisión. En el nodo de la suspensión delantera izquierda el chasis estará sostenido en la suspensión trasera de ambos lados y delantera del lado derecho con 3 grados de libertad (gdl) disponibles correspondientes a las 3 rotaciones.

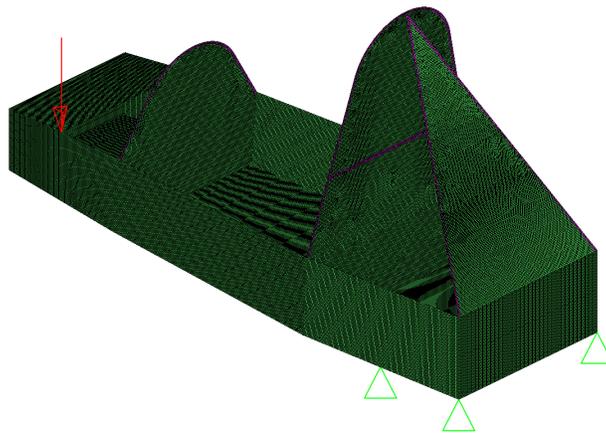


Imagen 12 Modelo mallado en caso de carga a Torsión. Apoyos en los puntos de la suspensión.

### 3.1.3.2 Flexión Vertical

Este caso de carga se utiliza como simplificación del comportamiento del chasis con los elementos que agregan peso, esto cuando al pasar por un desnivel donde dos ruedas de uno de los ejes se mantienen en la pista y el otro no, también por el hecho de tener como puntos de apoyo las ruedas delanteras y traseras la estructura estará a flexión. Se considera el chasis como una viga simplemente apoyada y esos apoyos están en los puntos de apoyo de la suspensión en la parte trasera del vehículo. La magnitud de los desplazamientos y la deformación que experimenta el chasis depende de las aceleraciones verticales que experimente durante su funcionamiento y traslado [3]. La carga aplicada es de 1750 N correspondiente a la masa total del chasis con elementos multiplicado por la gravedad y está aplicada en dos nodos en la parte frontal del modelo de superficies. Las restricciones están en los nodos de los puntos de apoyo de la suspensión trasera al chasis y tienen 3 gdl restringidos correspondientes a los desplazamientos.



Imagen 13 vehículo con falla a flexión [14]

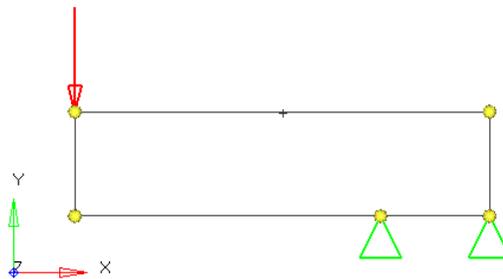


Imagen 14 Viga a flexión con dos puntos correspondientes a la suspensión trasera.

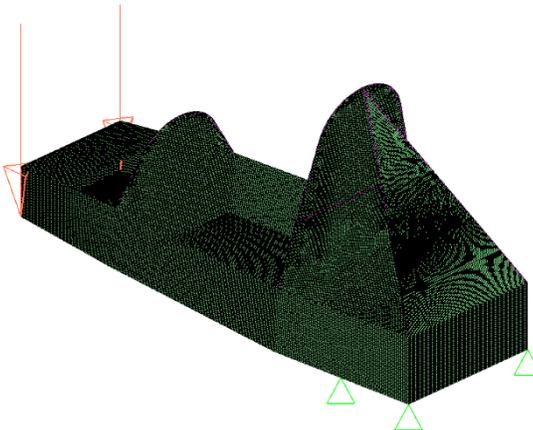


Imagen 15 Modelo mallado en caso de carga a Flexión vertical

### 3.1.3.3 Flexión Lateral

Este caso de carga representa el comportamiento del vehículo cuando se presentan fuerzas laterales causadas por el curqueo. Consideramos la carga como 1.5g se restringe los nodos de la suspensión delantera y trasera. La carga aplicada es de 2649 N.

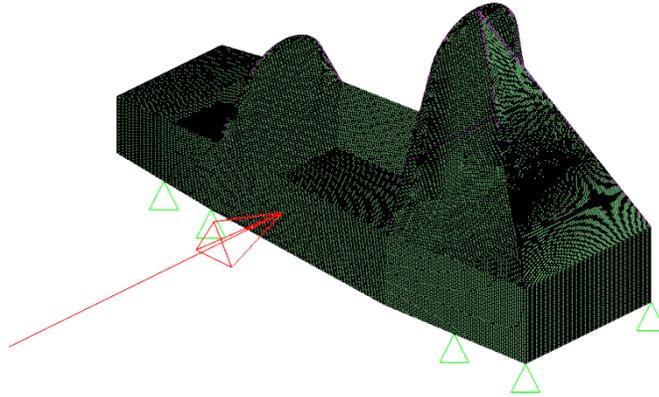


Imagen 16 Modelo mallado en caso de carga a Flexión Lateral

### 3.1.3.4 Aceleración y frenado

Cuando el vehículo acelera hay efecto de los pesos acelerados con lo cual se considera este caso de carga y ocurre lo mismo cuando el vehículo frena, para ambos casos de carga se considera la misma *fuerza g* de 1.5g [3], la carga es de 2649 N aplicada en sentido contrario del movimiento por efectos de la inercia. Las cargas son aplicadas en puntos sobre el chasis considerando la perspectiva de la vista frontal del modelo para simular dicho efecto de la inercia.

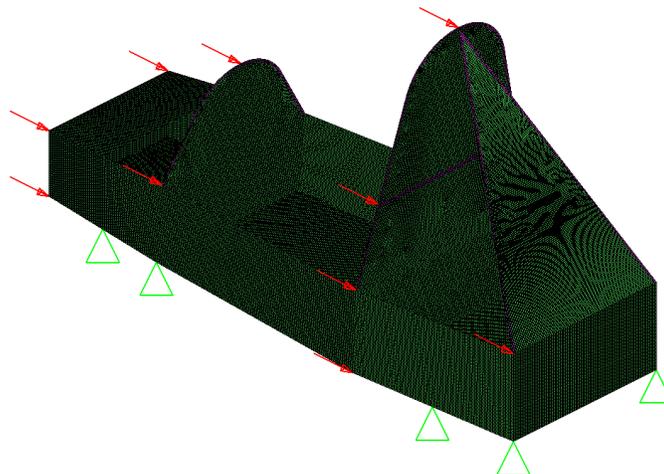
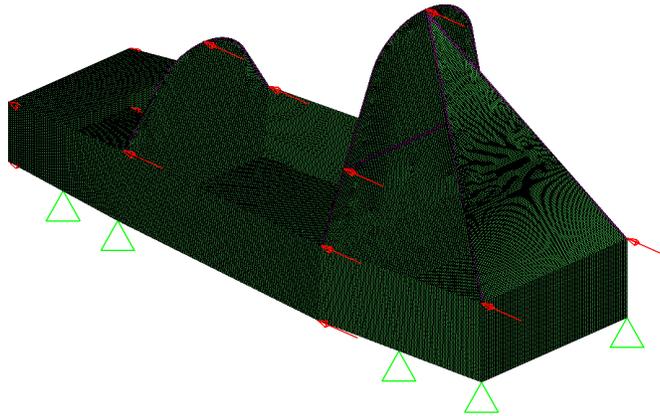


Imagen 17 Modelo mallado en caso de carga Aceleración, cargas representadas por flechas, los triángulos representan los puntos restringidos.



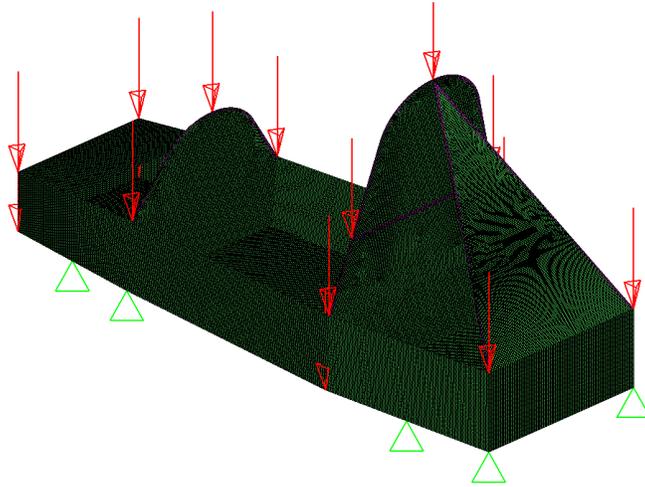
**Imagen 18** Caso de carg Frenado, flechas representan las cargas aplicadas y los triángulos los puntos restringidos.

### **3.1.3.5 Rebote**

Este caso de carga simplifica el comportamiento del chasis a lo largo de la carrera y su comportamiento ante las imperfecciones del camino principalmente desniveles. Las restricciones están en las cuatro ruedas y tienen disponibles 3 gdl correspondientes a las rotaciones, la carga utilizada equivale a 3.5g.



**Imagen 19** Camino con ondulaciones generadoras del efecto rebote en el vehículo [15].



**Imagen 20 Modelo mallado con cargas representadas por flechas aplicadas en puntos de interés, los triángulos representan los puntos restringido. Caso de carga Rebote.**

### 3.1.4 Condiciones de Frontera

Las condiciones de frontera para el modelo se resumen en los siguientes apartados. Para todos los casos de carga descritos anteriormente se considera el peso del motor y el peso del conductor. Se tiene una distribución en la parte trasera superior a la delantera, la tabla de masas es la siguiente:

Tabla 2 Masas del prototipo	
Componente	Masa [kg]
Chasis	30
Motor	15
Transmisión	15
Conductor	75
Llantas, suspensión, dirección	20
Otros (asiento, dirección, volante, pedales, cinturones de seguridad)	15
<b>Total</b>	<b>170</b>

La tabla siguiente muestra las cargas utilizadas, los valores representan las *fuerzas g* utilizadas para cada caso de carga [3].

Tabla 3 Casos de carga	
Torsión	1.5g
Flexión	1.5g
Lateral	1.5g
Aceleración	3.5g
Frenado	3.5g
Rebote	3.5g

### 3.1.5 Optimización topológica

El método de optimización topológica requiere de dos funciones, una de ellas denominada función objetivo y otra función de restricción. Adicional a estas funciones es necesario tener una variable de diseño; el cual es un parámetro que va cambiando en cada iteración para cada elemento, debido a que es el parámetro de interés; para este método la variable de diseño es la densidad.

El modelo inicial con la silueta del vehículo tiene secciones geométricas que se deben conservar por cuestiones de seguridad del conductor; por lo tanto, cuando se tiene el modelo mallado se determina que secciones se deben conservar y cuales no; esto quiere decir que las secciones que se deben conservar no serán optimizadas y las que no sea imperativo conservarlas serán las que optimicen, a estas secciones se les conoce como dominio de diseño y dominio de no diseño. Para el diseño propuesto el dominio de no diseño serán las barras denominadas “rollbar”.

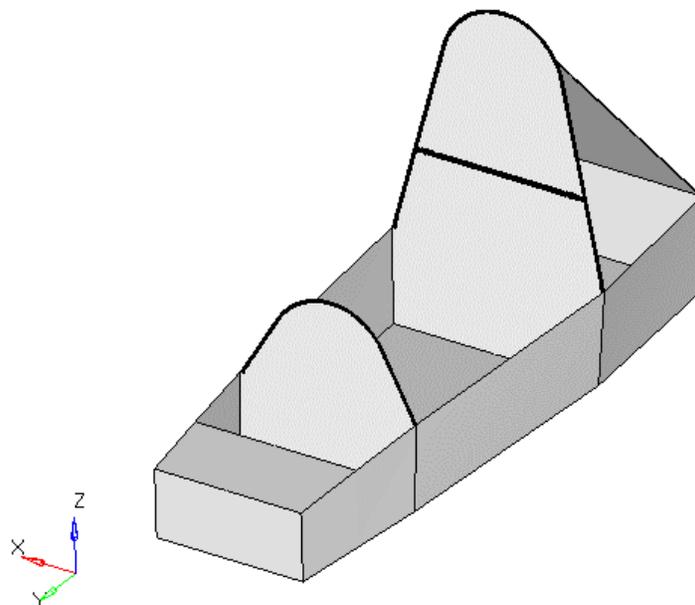


Imagen 21 Área de no diseño en tono mas oscuro, área de diseño en color gris.

De la función objetivo depende el tipo de análisis a realizar, esta función es la respuesta que será minimizada o maximizada durante las iteraciones. Para este trabajo se utiliza la función objetivo denominada “*weighted compliance*”, es utilizada para “*minimizar*” las deformaciones en la estructura por medio de los desplazamientos en los nodos de cada elementos y que a su vez son consecuencia de la aplicación de cargas y condiciones de frontera de los casos de carga dados. Se hace uso de esta función objetivo debido a que al minimizar los desplazamiento se incrementa la rigidez; y con esto podemos asegurar que el diseño que se obtenga será el que tiene la rigidez requerida para soportar las cargas aplicadas [9].

*Weighted Compliance* está definido como “deformación balanceada” y es un método utilizado para considerar múltiples casos de carga en la optimización. El método se encarga de realizar una combinación de los resultados individuales de cada caso de carga y dar como resultado una solución general para todos los casos, es decir; la respuesta es la suma ponderada del *compliance* individual de cada elemento en cada subcaso [10].

El modelo de superficies mallado tiene un espesor de malla de 25.4 mm propuesto como espesor de la placa a optimizar, con lo cual la masa inicial en el modelo es de 282.2 kg. La función de restricción se denomina “*volume fraction*” para la cual se determina que el 10% del volumen inicial corresponde a una masa objetivo de alrededor de 30 kg equivalente a la masa de modelos de similares características.

Además, se consideran parámetros de simetría, lo cual implica que transversalmente se tiene la misma topología a lo largo del vehículo, es decir que se tienen las mismas líneas del lado izquierdo que del derecho tal como se muestra en la siguiente imagen.

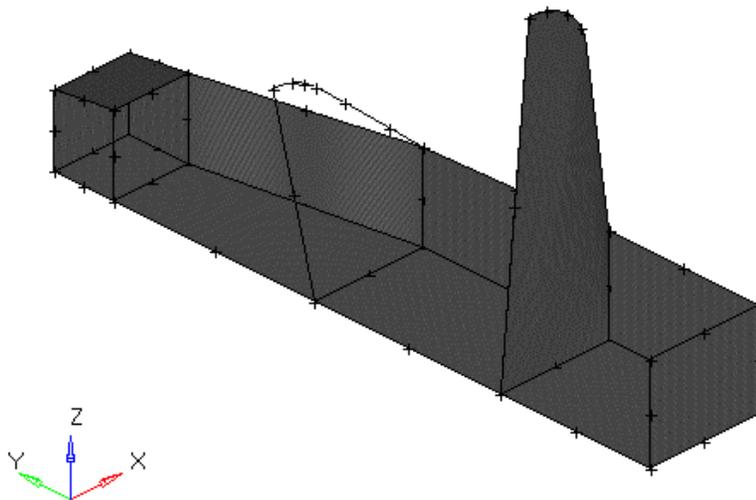


Imagen 22 Simetría de la malla del modelo, lado izquierdo igual que el lado derecho.

La función objetivo se describe a continuación:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar: } \quad C_w &= \sum w_i C_i = \frac{1}{2} \sum w_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{f}_i \\
 \text{Sujeto a: } \quad &\left\{ \begin{aligned} \{F\} &= \left[ \sum_{e=1}^N \rho_e^p K_e \right] \{u\} \\ \text{restricción } \quad &\sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V \end{aligned} \right. \quad (5) \\
 \text{para } e = 1, 2, 3, \dots, N \quad &0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1 \quad p_{max}: p_{min} > 3
 \end{aligned}$$

Donde

$C_w$ : compliance global

$w_i$ : factor de peso

$C_i$ : incremento compliance

$\mathbf{u}_i^T$ : matriz de desplazamientos

$\mathbf{f}_i$ : fuerza aplicada

$p$ : factor de penalización

## 3.2 Size Optimization

### 3.2.1 Método Size Optimization

Este método de optimización es importante debido a que los resultados que se obtenga serán las dimensiones de las secciones transversales de los tubos que dan forma al diseño óptimo del chasis. El modelo óptimo hasta este punto está formado por líneas que representan las trayectorias de material requerido para los casos de carga requeridos, con esto podemos decir que se tiene la configuración de los tubos, pero se requiere conocer las secciones transversales de esos tubos. En la optimización de tamaño se busca encontrar las dimensiones de dichas secciones transversales; siendo radio exterior, interior y espesor respectivamente para cada tipo de tubo las dimensiones de interés.

La función utilizada para tal fin es la siguiente [7] .

$$\begin{aligned}
 \min f(A_1, A_2, A_3, A_4) \\
 &= \rho L t [\pi(r_1 - r_{int})_1^2 + \pi(r_1 - r_{int})_2^2 + \pi(r_1 - r_{int})_3^2 \\
 &\quad + \pi(r_1 - r_{int})_4^2] \\
 \text{Sujeto a: } \quad &\left\{ \begin{aligned} u_{\text{nodo } 6776} &\leq 2.129 \text{ mm} \\ 7 \leq r_{int} &\leq 18 \text{ mm} \quad r_{int\text{inicial}} = 10 \text{ mm} \\ 10 \leq r_{ext} &\leq 19.05 \text{ mm} \quad r_{ext\text{inicial}} = 12 \text{ mm} \end{aligned} \right. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Las variables de diseño son los radios interno y externo para cada conjunto de tubos y en los cuales se proponen valores iniciales como suposición del resultado esperado, el modelo se ha

seccionado en conjuntos de tubos considerando los volúmenes de la cabina del conductor, tren motriz y frontal. Como respuesta se tiene masa y desplazamiento. La masa es la función objetivo la cual se busca minimizar, el desplazamiento será la función de restricción con un valor máximo de 2.129 mm en el nodo 6776 el cual se utiliza para medir la rigidez de la estructura utilizando el caso de carga de torsión. La masa se ha definido como la función objetivo debido a que se busca reducir la mayor cantidad de masa que no sea requerida para los casos de carga aplicados, las variables de diseño son los radios interno y externo; estos tendrán variaciones dentro de un rango establecido para llegar a la minimización de la función objetivo. El desplazamiento como función de restricción se ha establecido a partir de un valor de rigidez torsional objetivo, en el apartado 4.3 se detalla ese procedimiento.

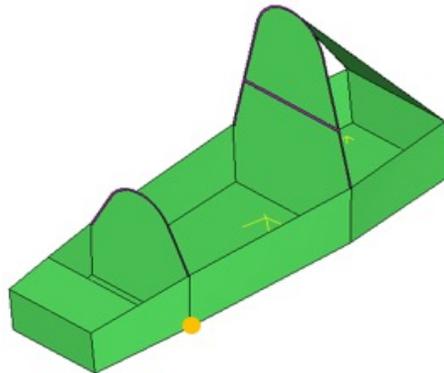


Imagen 23 Nodo 6776, de interés para caso de rigidez a la torsión

### 3.2.2 Preprocesamiento y Mallado

El modelo de líneas proyectado a partir del resultado de la optimización topológica es el modelo de entrada para realizar la optimización de tamaño o denominada en el software “*size optimization*” en la cual se busca determinar los diámetros y espesores apropiados para la tubería que conforma la estructura del chasis. Para tal fin el modelo se ha mallado utilizando elementos 1D y se ha agrupado en cuatro conjuntos conforme a las diferentes áreas de servicio del chasis, de esta forma se determina el tipo de tubo más adecuado en cuanto a diámetro y espesor para las solicitaciones en las diferentes áreas del chasis. El grupo 1 es para el Roll bar color rojo, en el grupo 2 está la cabina de color verde, la parte frontal es el grupo 3 de color azul y de color amarillo el grupo 4.

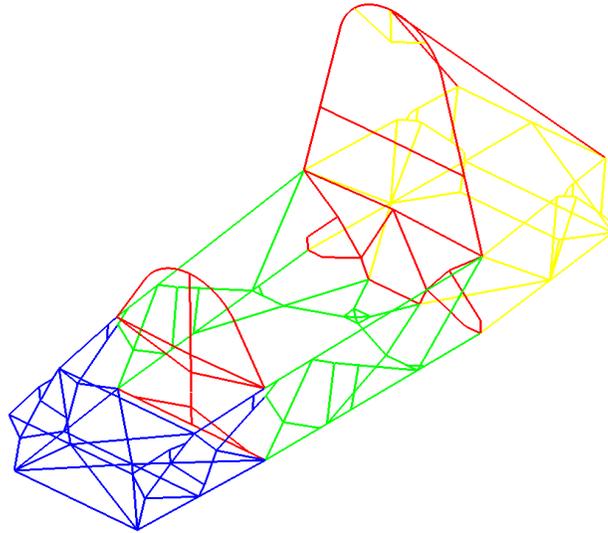


Imagen 24 Chasis dividido en grupos

### 3.2.3 Casos de Carga y Solver

Los casos de carga utilizados son los mismos que se han utilizado para la optimización topológica: Torsión, Flexión, Lateral, Aceleración, Frenado, Rebote. El objetivo de la optimización es *minimizar masa* y como restricción se ha determinado un *desplazamiento* en el nodo donde se encuentra proyectada la suspensión frontal izquierda, en este nodo se ha de realizar el test de rigidez a la torsión para el cual se requiere que tres ruedas estén fijas y una cuarta rueda tenga una carga aplicada en dirección  $-Y$ . El desplazamiento máximo permitido en el nodo es de 2.129 mm para una rigidez a la torsión objetivo de 4500 N-m/grad, este valor se ha propuesto debido a que es un valor superior a los reportados en diferentes proyectos de características similares donde la rigidez a la torsión es 3500 N-m/grad [11]. Este valor asegura que en dado caso que los valores obtenidos para las secciones transversales de la tubería no sean cercanos a la tubería comercial; se puedan utilizar valores cercanos que no repercutan en la rigidez torsional final de la estructura.

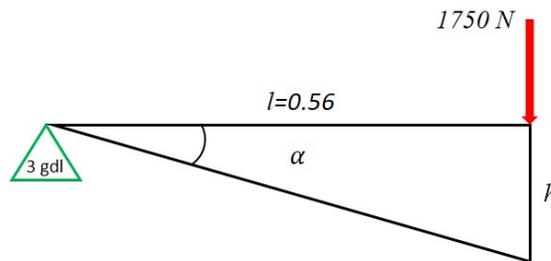


Imagen 25 Desplazamiento de chasis a torsión

$$k = \frac{T * l}{\text{grados}}$$

(7)

$$h = 0.56 * \tan^{-1} \left( \frac{1750 * 0.56}{4000} \right) = 2.129 \text{ mm}$$

Los límites de las variables de diseño son para el radio interior del tubo  $8 \leq R_{int} \leq 17$  y para el radio exterior  $10 \leq R_{ext} \leq 19$ , se agrega una sección transversal para efectos del software y únicamente como referencia de existencia de material de 12.7 mm radio exterior y 5 mm de radio interior y un peso de 49.95 kg. Estos valores son estimaciones de las dimensiones que podrían tener los tubos en el chasis y son de utilidad dado que al estar más próximos de los valores que arrojaría la optimización el tiempo que tomaría llegar a una solución se reduce considerablemente.

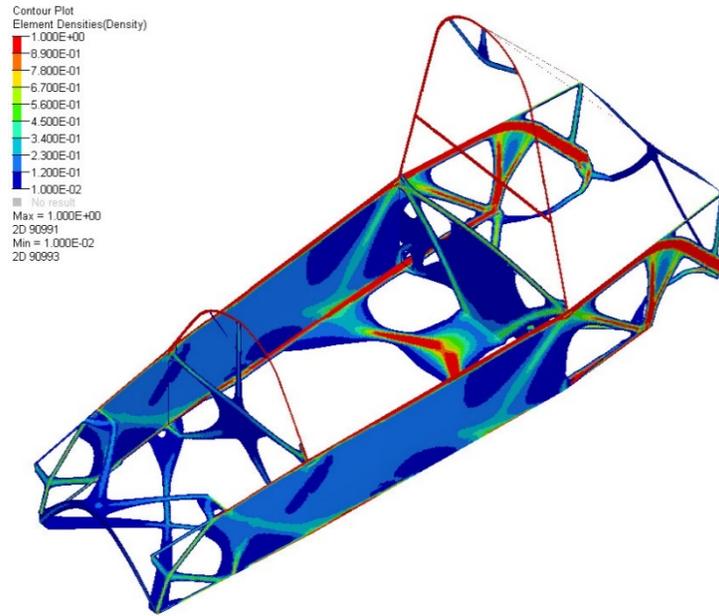
## 4 Capítulo 4. Análisis de Resultados

### 4.1 Optimización Topológica

El modelo obtenido posterior a la aplicación del método de optimización topológica se dice que es hasta este punto del proyecto; el modelo óptimo. Dicho modelo está formado por elementos finitos que representan las trayectorias que habría de seguir el material que dará forma al chasis. Las imágenes siguientes muestran el [1] formado por elementos finitos del lado izquierdo, del lado derecho el modelo representado por densidad de material. La densidad ha sido la variable de diseño en la optimización topológica, el color rojo representa las zonas de mayor densidad.

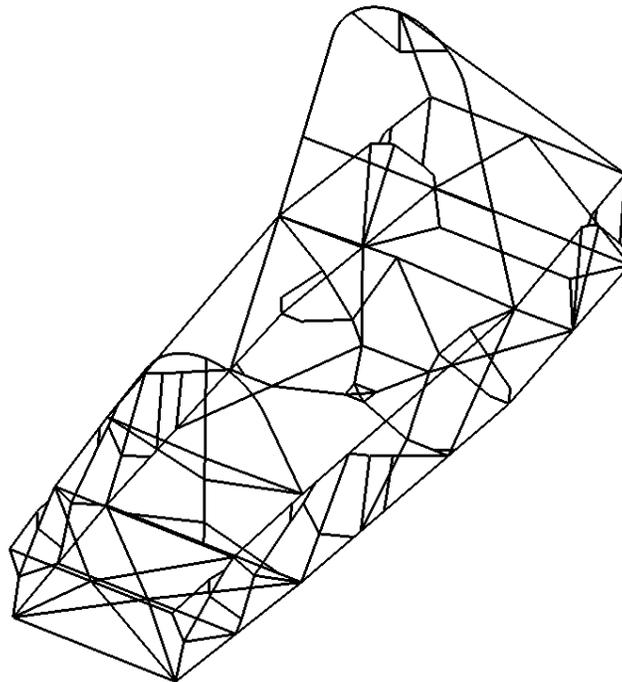


Imagen 26 Trayectorias obtenidas representadas por elementos finitos de la malla.



**Imagen 27 Modelo obtenido por Optimización Topológica. Distribución de densidades en color rojo.**

Las trayectorias de los elementos son utilizadas para proyectar las líneas que dan forma al chasis.



**Imagen 28 Chasis formado por proyección de líneas a partir del modelo optimo obtenido.**

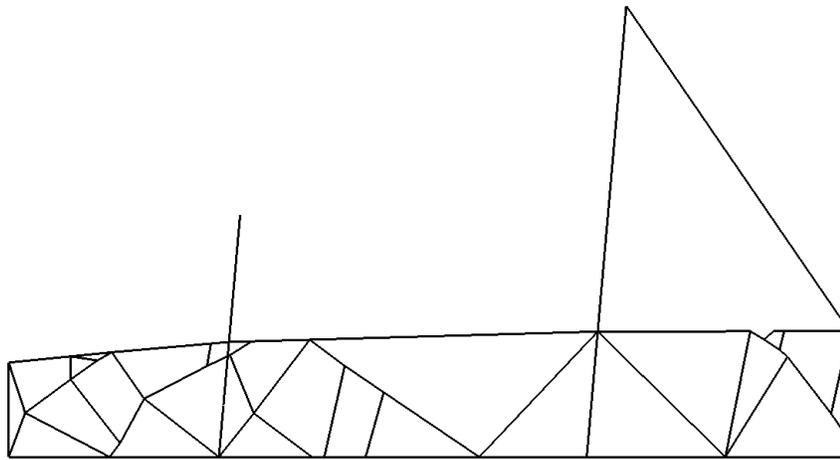


Imagen 29 Chasis formado por proyección de líneas, vista lateral.

## 4.2 Optimización de tamaño

Los resultados arrojados después de la optimización son radios internos, externos y la masa total que para el modelo son los siguientes:

La masa total final del modelo óptimo es 32.10 kg se tiene una reducción de 35.75% respecto al modelo inicial propuesto, la restricción de desplazamiento máximo se cumple en 2.11 mm y los radios obtenidos para las secciones transversales de los tubos se expresan como diámetros en la tabla siguiente:

Tipo de Optimización	Objetivo y restricción	Sección	D int (mm)	D ext (mm)	Espesor (mm)
Size	Masa y desplazamiento	Roll bar	28,7	31,4	1,35
		Cabina	21,72	29,28	3,78
		Frontal	28,86	33,44	2,29
		Trasero	19,648	31,32	5,836

Los diámetros obtenidos para los tubos que conforman los cuatro grupos de tubos; cumplen con las solicitudes para los casos de carga requeridos. La rigidez torsional para estas dimensiones es de 4582.18 N-m/deg y desplazamiento máximo de 2.074 mm; aunque se había considerado una rigidez inicial de 4500 N-m/deg la rigidez obtenida es superior a la buscada con lo cual los resultados obtenidos cumplen con las solicitudes. Para que el chasis esté en condiciones de manufactura; es decir que se cumpla con las dimensiones para las secciones transversales, se buscan valores de dimensiones comerciales próximas a las obtenidas con la optimización [12].

Tabla 5 Diámetros comerciales propuestos					
Tipo de Optimización	Objetivo y restricción	Sección	D int (mm)	D ext (mm)	Espesor (mm)
Size	Masa y desplazamiento	Roll bar	23,62	25,4	0,89
		Cabina	22,22	28,58	3,18
		Frontal	22,1	25,4	1,65
		Trasero	19,05	31,75	6,35

Ahora el peso del modelo es 29.69 kg y la rigidez torsional es de 4167.15 N-m/deg con un desplazamiento máximo en el nodo de interés de 2.248 mm. Hubo una reducción de 2.41 kg con lo cual se tiene una estructura con un valor de rigidez torsional muy favorable y más ligera. Se entiende que el valor de la rigidez haya disminuido 9% respecto al valor obtenido con las dimensiones de sección transversal arrojadas por la optimización, esto debido a que al asignar medidas comerciales se dan variaciones en las secciones transversales lo cual impacta en la masa total y la rigidez torsional de la estructura.

Node ID	Node Coordinates	Contour(Displacement)	Load Case
6776	-277.894 2851.08 -2.24821	-2.248E+00	Subcase 1 (Case_Torsion) - Static Analysis

Imagen 30 Desplazamiento en el nodo 6776 con diámetros comerciales

## 5 Conclusiones

Hasta este punto del proyecto se ha obtenido una geometría a partir de la distribución topológica de material por medio del método de optimización topológica y se ha asignado tubería con dimensiones comerciales a las trayectorias obtenidas durante la optimización de tamaño. Estos tubos conforman el chasis que se plantea como objetivo inicial de este trabajo.

El comportamiento del modelo se ha evaluado bajo las mismas condiciones de carga con las que se ha optimizado. La rigidez torsional es el parámetro que se ha definido para comparar diferentes diseños de vehículos en similares condiciones debido a que un comportamiento deseable en este caso de carga brinda un comportamiento adecuado conforme a las solicitaciones para los demás casos de carga.

Se han reportado en el capítulo anterior resultados superiores a lo requerido en vehículos de similares contextos con lo cual se puede concluir que el diseño obtenido es satisfactorio al cumplir con la rigidez objetivo superior y conservar un peso menor, con lo cual los métodos de optimización topológica y de tamaño son adecuados para generar diseños de utilidad en diferentes competencias, pero no limitado a este campo dado que al tener la posibilidad de reducir volumen, masa, sección transversal etc. prácticamente cualquier pieza puede ser objeto de optimización en función de mejorar su comportamiento particular o general en un dado sistema.

La tabla siguiente muestra los datos obtenidos respecto a la masa y rigidez a la torsión del diseño óptimo obtenido y los datos de chasis de dimensiones similares resultado de diseños propuestos únicamente como la distribución de tubos que dan forma la silueta del modelo.

Tabla 6 Comparación de Rigidez torsional y peso						
Modelo	Masa (kg)	Rigidez a la Torsión (N-m/deg)	Ancho (mm)	Largo (mm)	Alto (mm)	Metros lineales de tubería (m)
Chasis Formula SAE	33	3248	683.6	2292.72	1028.02	44.206
Chasis Obtenido	29,69	4167,15	736.6	2032	1092	38.510

En la imagen 31 se muestra el chasis formado por superficies y en la imagen 32 se muestra el diseño óptimo como resultado de la aplicación de métodos de optimización.

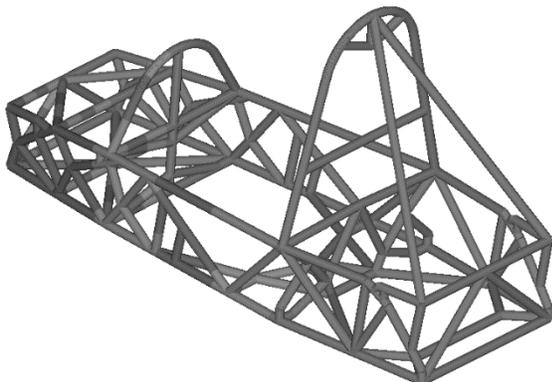


Imagen 31 Diseño óptimo final.

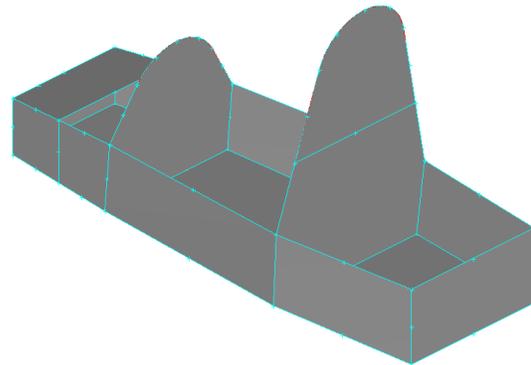


Imagen 32 Silueta de Chasis formado por superficies.

El comportamiento de la estructura en torsión se muestra en la siguiente gráfica de rigidez torsional para un 100% de carga equivalente a 1750 N y 80, 90, 110 y 120% respectivamente.

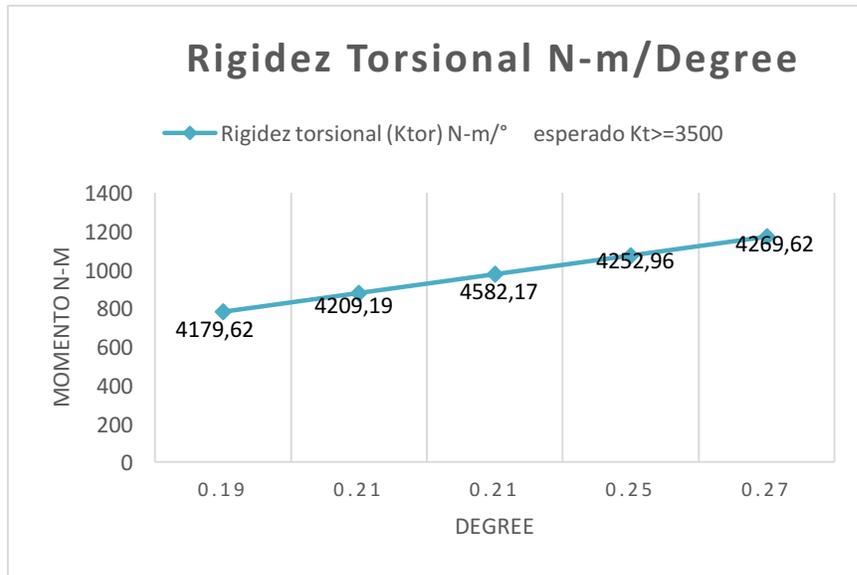


Imagen 33 Rigidez Torsional

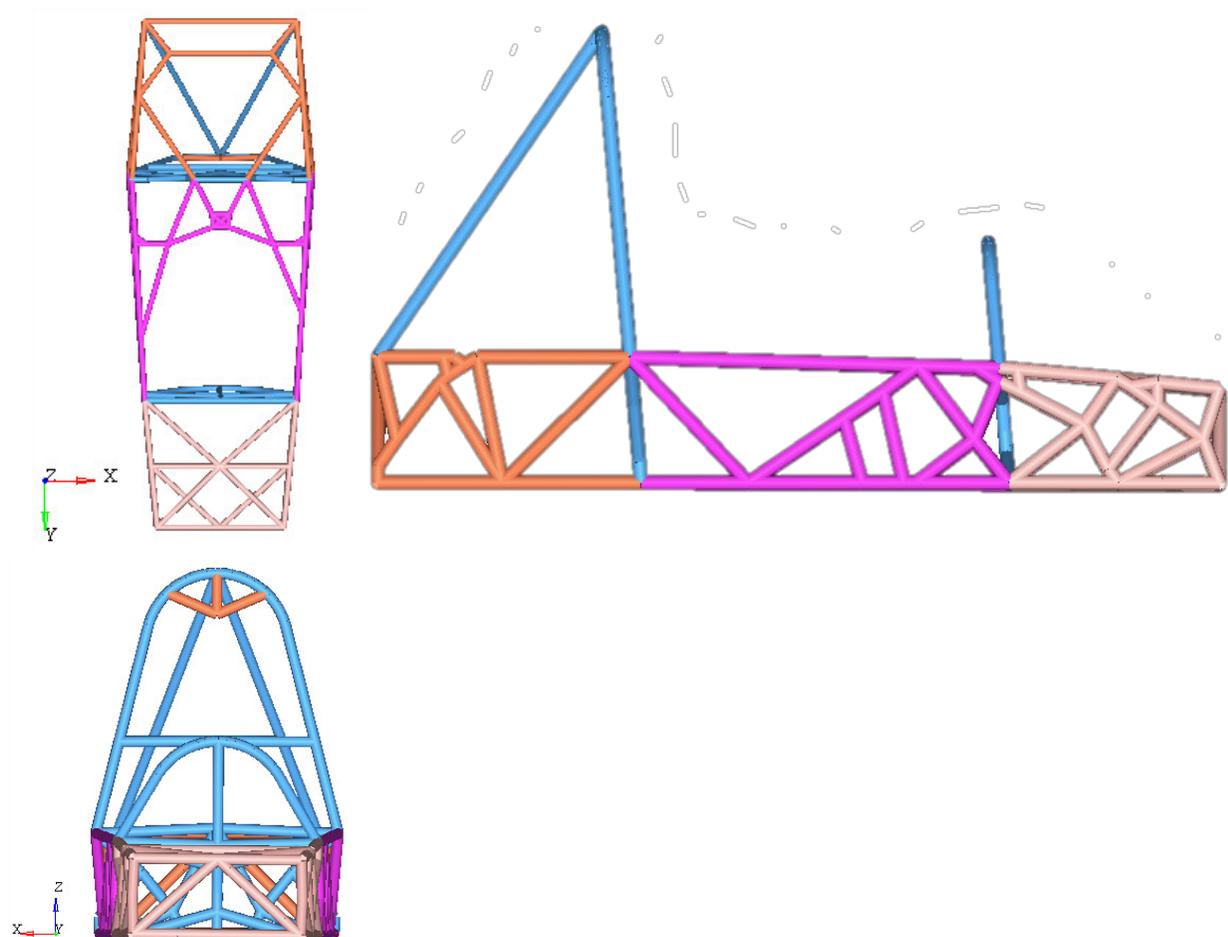


Imagen 34 Diseño optimo de chasis

Como áreas de oportunidad adicionales a este trabajo, sería importante considerar para la optimización los efectos de la suspensión en el chasis visto desde las frecuencias de operación y sus efectos en la estructura, esto llevaría a tener que realizar una optimización utilizando los modos de vibración de las partes que conformen el modelo.

## 6 Referencias

- [1] D. Goundla, «Optimization of Formula SAE Car Chassis,» Indian Institute of Technology, Kharagpur, 2015.
- [2] A. S. Reynoso, «Desarrollo de una Herramienta para Optimización Estructural Aplicadas al Chasis de un Vehículo,» Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2015.
- [3] R. P. Singh, «Structural performance analysis of Formula SAE car,» *Journal Mekanikal N° 31*, pp. 46-31, 2010.
- [4] Reglamento Campeonato Electratón, Ciudad de México : Industria Nacional de Autopartes, 2016.
- [5] B. J. M. Donald, *Practical Stress Analysis with Finite Elements*, Dublin: Glasnevin Publishing, 2011.
- [6] M. Goelke, *Practical Aspects of Structural Optimization a Study Guide*, Altair University, 20115.
- [7] A. K. Peter W. Christensen, *An Introduction to Structural Optimization*, Sweden: Springer, 2009.
- [8] O. M. Querin, *Topology Design Methods for Structural Optimization*, London: Academic Press, 2017.
- [9] M. P. & S. O. Bendsoe, *Topology Optimization Theory, Methods and Aplications*, Berlin: Springer, 2003.
- [10] A. B. Badiru, *Additive Manufacturing Handbook*, Boca Raton: CRC Press, 2017.
- [11] A. P. Estruch, *Vehículo de competicion formula SAE: Diseño y optimización del chasis*, Alcoy: Universidad Politécnica de Valencia, 2016.
- [12] «OnlineMetals,» OnlineMetals, [En línea]. Available: <http://www.onlinemetals.com>. [Último acceso: 14 Mayo 2018].
- [13] 1. valvulas, «16 valvulas,» [En línea]. Available: <https://www.16valvulas.com.ar>. [Último acceso: 26 10 2018].
- [14] «Carshowroom,» [En línea]. Available: <https://www.carshowroom.com.au>. [Último acceso: 26 10 2018].

[15] «Pxhere,» [En línea]. Available: <https://pxhere.com/en/photo/1157391>. [Último acceso: 28 10 2018].

## 7 Anexo A. Método del Elemento Finito

El método del elemento finito esta descrito detalladamente a lo largo de este anexo.

### 7.1.1 Función de Forma

Las funciones de forma [5] son esenciales para el método de elemento finito; se encargan de describir el comportamiento de cada uno de los elementos que en que está dividido el diseño; es decir cada elemento tiene su función de forma; con lo cual, si se tiene un elemento formado por dos nodos, las coordenadas serán diferentes para cada nodo haciendo única la función de forma en cada respectivo elemento. Suponiendo que se tiene una viga empotrada con una carga axial como se muestra en la figura y se divide en tres elementos y cuatro nodos; la gráfica describe la distribución de desplazamientos a lo largo de la viga que se puede aproximar mediante una combinación de funciones lineales.

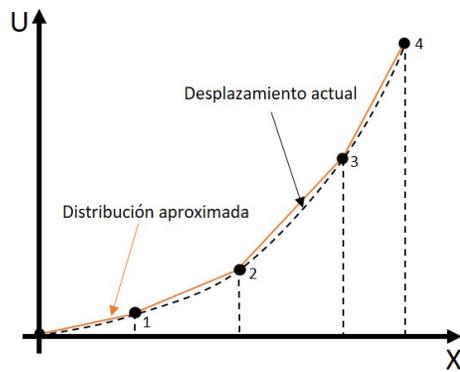


Imagen 35 Distribución de desplazamiento [5]



Imagen 36 Viga en 1D

La distribución del desplazamiento a lo largo del elemento puede ser interpolado utilizando una función lineal:

$$u_e = c_1 + c_2 X \quad (8)$$

Donde  $X$  son las coordenadas globales y  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Dado que dos nodos forman el elemento tendremos nodo "i" y nodo "j" entonces:

$$U_i = c_1 + c_2 X_i \quad (9)$$

$$U_j = c_1 + c_2 X_j \quad (10)$$

Despejando  $c_1$  y  $c_2$

$$c_1 = \frac{U_i X_j - U_j X_i}{X_j - X_i} \quad (11)$$

$$c_2 = \frac{U_j - U_i}{X_j - X_i} \quad (12)$$

Tenemos un elemento y dos nodos

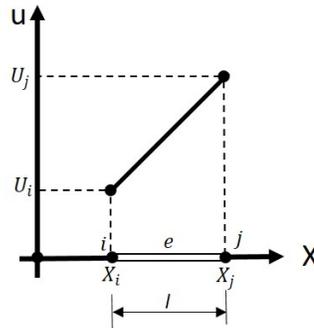


Imagen 37 Elemento 1D

Sustituimos en ec.1

$$u_e = \frac{U_i X_j - U_j X_i}{X_j - X_i} + \left( \frac{U_j - U_i}{X_j - X_i} \right) X \quad (13)$$

Agrupando términos iguales:

$$u_e = \left( \frac{X_j - X}{X_j - X_i} \right) U_i + \left( \frac{X - X_i}{X_j - X_i} \right) U_j \quad (14)$$

A partir de aquí definimos las funciones de forma  $S_i$  y  $S_j$

$$S_i = \frac{X_j - X}{X_j - X_i} = \frac{X_j - X}{l} \quad (15)$$

$$S_j = \frac{X - X_i}{X_j - X_i} = \frac{X - X_i}{l} \quad (16)$$

Donde  $l$  es la longitud del elemento. Entonces podemos escribir las funciones de forma como:

$$u_e = S_i U_i + S_j U_j \quad (17)$$

$$u_e = [S_i \ S_j] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Estas funciones de forma tendrán valores de 1 cuando se evalúan su propio nodo y de cero cuando en el nodo adyacente.

$$S_i|_{X=X_i} = \frac{X_j - X_i}{l} = 1 \quad \text{y} \quad S_j|_{X=X_i} = \frac{X_i - X_i}{l} = 0 \quad (19)$$

$$S_j|_{X=X_j} = \frac{X_j - X_j}{l} = 0 \quad \text{y} \quad S_i|_{X=X_j} = \frac{X_j - X_j}{l} = 1 \quad (20)$$

Y otra propiedad es que la suma de  $S_i$  y  $S_j$  es 1

$$S_i + S_j = \frac{X_j - X}{X_j - X_i} + \frac{X - X_i}{X_j - X_i} = 1 \quad (21)$$

Y la suma de la derivada de la función es cero.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{X_j - X}{X_j - X_i} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{X - X_i}{X_j - X_i} \right) = \frac{-1}{X_j - X_i} + \frac{1}{X_j - X_i} = 0 \quad (22)$$

### 7.1.2 Coordenadas Globales, Locales y Naturales

Se utilizan sistemas de coordenadas para representar los nodos del elemento. Las soluciones se representan en coordenadas globales, pero también se utilizan coordenadas locales o naturales ubicando los nodos de cada elemento para después transformar a coordenadas globales [5].

En coordenadas locales tenemos que la relación de locales con globales es  $X = X_i + x$

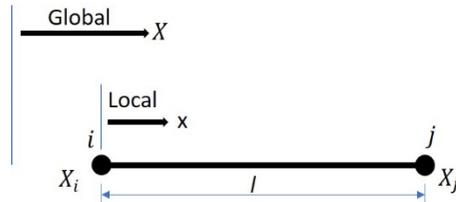


Imagen 38 Coordenadas Globales

Sustituyendo en las funciones de forma tenemos que:

$$S_i = \frac{X_j - X}{X_j - X_i} = \frac{X_j - (X_i + x)}{l} = 1 - \frac{x}{l} \quad (23)$$

$$S_j = \frac{X - X_i}{X_j - X_i} = \frac{(X_i + x) - X_i}{l} = \frac{x}{l} \quad (24)$$

Donde x puede ser cero o 1. Las coordenadas naturales son adimensionales; se establece el origen en el punto medio del elemento los límites de integración de -1 y 1 en el método de mínima energía potencial

$$\xi = \frac{2x}{l} - 1 \quad (25)$$

Donde x es la coordenada local, entonces tenemos que la coordenada del nodo "i" es -1 y de "j" es +1

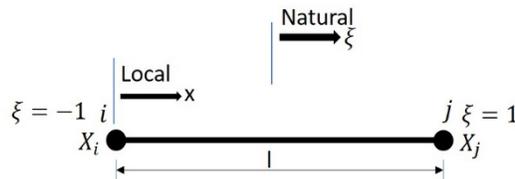


Imagen 39 Coordenadas Naturales

Despejando "x" de ec.18 y sustituyendo en 16 y 17 respectivamente tenemos que

$$S_i = \frac{1}{2}(1 - \xi) \text{ y } S_j = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (26)$$

Retomando ec.10

$$u_e = \frac{1}{2}(1 - \xi)U_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)U_j \quad (27)$$

Donde  $\xi = -1, u = U_i$  y  $\xi = 1, u = U_j$

Utilizando las mismas funciones de forma  $S_i$  y  $S_j$  para coordenadas locales y globales

$$X = S_i X_i + S_j X_j = \frac{1}{2}(1 - \xi)X_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)X_j \quad (28)$$

$$x = S_i x_i + S_j x_j = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_j \quad (29)$$

### 7.1.3 Método de Energía Potencial mínima

Considerando geometrías complejas utilizamos derivadas parciales de segundo orden con las cuales es más conveniente utilizar el método de energía potencial. La energía potencial total  $\Pi$  es la suma de la energía de deformación y la suma del trabajo realizado por fuerzas externas [5].

$$\Pi = \text{energía de deformación} + \text{trabajo externo} \quad (30)$$

Para un material elástico lineal la energía de deformación por unidad de volumen  $\frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}$  y para un cuerpo la energía total de deformación es:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV \quad (31)$$

El trabajo realizado por fuerzas externas, una combinación de fuerzas de cuerpo, cargas de superficie y puntuales está dada por:

$$\text{External work} = - \int_V \{u\}^T \{f^B\} dV - \int_S \{u\}^T \{f^S\} dS - \sum_i \{U_i\}^T \{f^i\} \quad (32)$$

Con lo cual la energía potencial para un cuerpo elástico es:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \int_V \{u\}^T \{f^B\} dV - \int_S \{u\}^T \{f^S\} dS - \sum_i \{U_i\}^T \{f^i\} \quad (33)$$

El signo negativo indica que cada esfuerzo realiza un trabajo negativo al regresar de la posición carga a la posición inicial y la estructura se considera en equilibrio cuando la energía potencia es mínima.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = 0 \quad (34)$$

Las funciones de forma sirven para conocer los desplazamientos en los nodos.

$$\{u\}_m = [S]_m \{U\} \quad (35)$$

Donde S es la función de forma para un elemento y U es el vector de desplazamientos nodales para un vector.

## 7.2 1D Truss

Tenemos elementos tipo Truss. Un elemento formado por dos nodos i-j en coordenadas naturales. Las funciones de forma [5] como en la ec.19

$$S_i = \frac{1}{2}(1 - \xi) \text{ y } S_j = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

El desplazamiento a lo largo del elemento se interpola utilizando una función lineal:

$$u_e = c_1 + c_2 X$$

Sustituimos las funciones de forma de ec.19 en ec.1 y tenemos las ec.10 y ec.11

$$u_e = S_i U_i + S_j U_j$$

$$u_e = [S_i \ S_j] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

La deformación axial está dada por:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{36}$$

Aplicando regla de cadena:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi} \tag{37}$$

Sustituyendo la ecuación 11 tenemos:

$$\varepsilon = \frac{2}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi} \tag{38}$$

Desarrollando

$$\varepsilon = \frac{2}{l} \left[ \frac{dS_i}{d\xi} \quad \frac{dS_j}{d\xi} \right] \{U\} = \frac{2}{l} \left[ \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \right] \{U\} = \left[ \frac{-1}{l} \quad \frac{1}{l} \right] \{U\} = \frac{1}{l} [-1 \quad 1] \{U\} \tag{39}$$

Entonces

$$\varepsilon = \frac{1}{l} [-1 \quad 1] \{U\} \tag{40}$$

La relación entre deformación y desplazamiento se expresa como:

$$B = \frac{1}{l} [-1 \quad 1] \tag{41}$$

Entonces la deformación:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\} \tag{42}$$

Utilizando la ley de Hooke tenemos que el esfuerzo:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad (43)$$

Donde  $[D]$  es la matriz de elasticidad y dado que estamos trabajando en 1D tenemos:

$$[\sigma] = E[\varepsilon] \quad (44)$$

Donde  $E$  es el módulo de Young. Ahora sustituyendo la ec. 35 y ec. 37 en ec. 36 tenemos

$$[\sigma] = E[B]\{U\} \quad (45)$$

$A_E$  es el área de la sección transversal,  $f^B$  fuerza de cuerpo y  $f^S$  fuerzas de superficie. Ahora sustituyendo en la ecuación de energía potencial.

$$\Pi = \sum_m \frac{1}{2} \int_m \{\sigma\}_m^T \{\varepsilon\}_m dx - \sum_m \int_m \{u\}_m^T \{f^B\}_m A dx - \sum_m \int_m \{u\}_m^T \{f^S\}_m A dx - \sum_i \{U\}_m^T \{f^i\} \quad (46)$$

Para 1D queda de la siguiente forma en coordenadas naturales

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_m \frac{1}{2} \{U\}^T \left( E_m A_m \frac{l_m}{2} \int_{-1}^1 [B^T B] d\xi \right) \{U\} - \sum_m \{U\}^T \left( A_m \frac{l_m}{2} f_m^B \int_{-1}^1 S^T d\xi \right) \\ - \sum_m \{U\}^T \left( \frac{l_m}{2} f_m^S \int_{-1}^1 S^T d\xi \right) - \sum_i \{U\}^T \{f^i\} \end{aligned} \quad (47)$$

La forma general de la energía potencial

$$\Pi = \sum_m \frac{1}{2} \{U\}^T [K]_m \{U\} - \sum_m \{U\}^T \{f^B\}_m - \sum_m \{U\}^T \{f^S\}_m - \sum_i \{U\}_i^T \{f^i\} \quad (48)$$

Igualando la ec. 40 con la ec. 41 podemos obtener la matriz de rigidez para cada elemento.

$$[K]^m = \frac{E_m A_m l_m}{2} \int_{-1}^1 [B^T B] d\xi \quad (49)$$

Sustituyendo  $[B]$  en ec. 42

$$[K]^m = \frac{E_m A_m l_m}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

A cada elemento le corresponde una matriz de rigidez con lo cual se tendrá que realizar una matriz general ensamblando cada una de las matrices de rigidez de cada elemento. La fuerza de cuerpo es:

$$\{f^B\}_m = A_m \frac{l_m}{2} f_m^B \int_{-1}^1 S^T d\xi = \frac{1}{2} A_m l_m f_m^B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

En la ec. 44 se considera la sección transversal y longitud para obtener el volumen; y este multiplica la fuerza de cuerpo que representa la fuerza total actuando en el cuerpo y el  $\frac{1}{2}$  indica que está distribuida a lo largo de los dos nodos que forman el elemento. La fuerza de superficie está dada por:

$$\{f^S\}_m = \frac{l_m}{2} f_m^S \int_{-1}^1 S^T d\xi = \frac{1}{2} l_m f_m^S \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Y se sabe que la fuerza:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (53)$$

Con la cual obtienen los desplazamientos en los nodos y se obtienen esfuerzos y deformaciones.

### 7.3 1D Beam

En este tipo de estructuras se considera la flexión. Partimos considerando el mismo elemento de la sección anterior pero ahora tiene dos grados de libertad; hay desplazamiento en el eje "y" y rotación en el plano "x-y". El vector de desplazamiento [5] es:

$$u_m = f\{v_i \theta_i v_j \theta_j\}^T \quad (54)$$

las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) \\ S_j &= \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) \\ S_{i\theta} &= \frac{l_e}{8}(1 - \xi)^2(\xi + 1) \\ S_{j\theta} &= \frac{l_e}{8}(1 + \xi)^2(\xi - 1) \end{aligned} \quad (55)$$

Y de la ec. 18 sabemos que  $\xi = \frac{2x}{l} - 1$ . La deflexión del elemento es:

$$v_m = [S_i \ S_{i\theta} \ S_j \ S_{j\theta}] \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (56)$$

Utilizando la regla de la cadena

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{l_e}{2} \frac{dv}{dx} \quad (57)$$

Reorganizando

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{l_e} \frac{dv}{d\xi} \quad (58)$$

Derivando con respecto a x

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{l_e} \left[ \frac{d^2S_i}{d\xi^2} \frac{d^2S_{i\theta}}{d\xi^2} \frac{d^2S_j}{d\xi^2} \frac{d^2S_{j\theta}}{d\xi^2} \right] \{U\} = [B]\{U\} \quad (59)$$

Donde:

$$[B] = \frac{1}{l_e} \left[ \frac{6\xi}{l_e} (3\xi - 1) \quad \frac{-6\xi}{l_e} (3\xi + 1) \right] \quad (60)$$

La energía de deformación es:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (61)$$

Y sustituyendo 53 y 52 en 54

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \{U\}^T [B]^T [D] [B] \{U\} dx \quad (62)$$

Donde  $[D] = EI$  y la energía potencial para Beam está dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L f^d v dx - \sum_m f^i v_i - \sum_n M_n v'_n \quad (63)$$

Donde  $f^d$  es la carga distribuida por unidad de longitud,  $f^i$  es una carga aplicada en  $i$ ,  $M_n$  es el momento de cargas aplicadas en el punto  $n$ ,  $v'_n$  es la inclinación en la viga en el punto  $n$ . Sustituyendo 55 en 56.

$$[K]_m = \int_0^L [B]^T [D] [B] dx \quad (64)$$

Sustituyendo  $[B]$  en 57 tenemos que:

$$[K]_m = \frac{EI}{l_e} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6 & 2l_e \\ -12 & -6l_e & 12 & -6 \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

El vector de carga se forma:

$$\int_0^L f^d v dx = \left( \frac{f^d l_e}{2} \int_{-1}^1 [S] d\xi \right) \{U\} = \{f\}^d \{U\} \quad (66)$$

Donde

$$\{f^d\} = \left\{ \frac{f^d l_e}{2} \quad \frac{f^d l_e^2}{12} \quad \frac{f^d l_e}{2} \quad \frac{-f^d l_e^2}{12} \right\}^T \quad (67)$$

El momento flexionante en el elemento es:

$$\begin{aligned}
 M_m &= EI \left( \frac{d^2 v_m}{dx^2} \right)^2 = EI \left[ \frac{d^2 S_i}{dx^2} \frac{d^2 S_{i\theta}}{dx^2} \frac{d^2 S_j}{dx^2} \frac{d^2 S_{j\theta}}{dx^2} \right] \{U\}_m \\
 &= \frac{EI}{l_e^2} (6\xi v_i + (3\xi - 1)l_e \theta_i - 6\xi v_j + (3\xi + 1)l_e \theta_j)
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

El esfuerzo cortante está dado por:

$$\begin{aligned}
 V_m &= -EI \left( \frac{d^3 v_m}{dx^3} \right) = EI \left[ \frac{d^3 S_i}{dx^3} \frac{d^3 S_{i\theta}}{dx^3} \frac{d^3 S_j}{dx^3} \frac{d^3 S_{j\theta}}{dx^3} \right] \{U\}_m \\
 &= \frac{6EI}{l^3} (2v_i + l_e \theta_i - 2v_j + l_e \theta_j)
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

#### 7.4 Elementos de 4 nodos

Los nodos son numerados como i, j, k, l en coordenadas locales y los nodos tienen dos grados de libertad como desplazamientos en "x" y "y" [5].

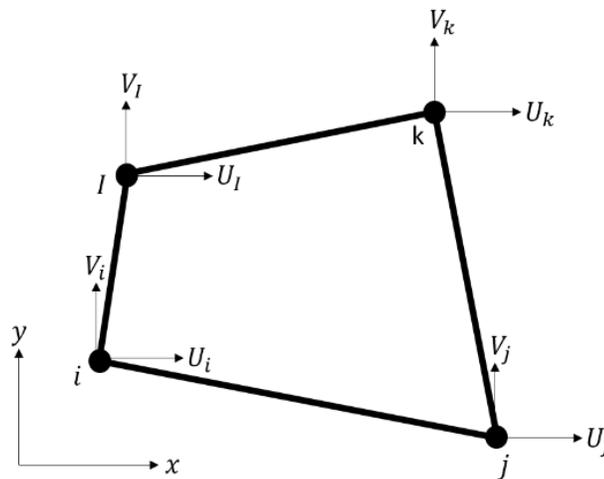


Imagen 40 Elemento cuadrilátero de 4 nodos en coordenadas locales

En coordenadas naturales tenemos

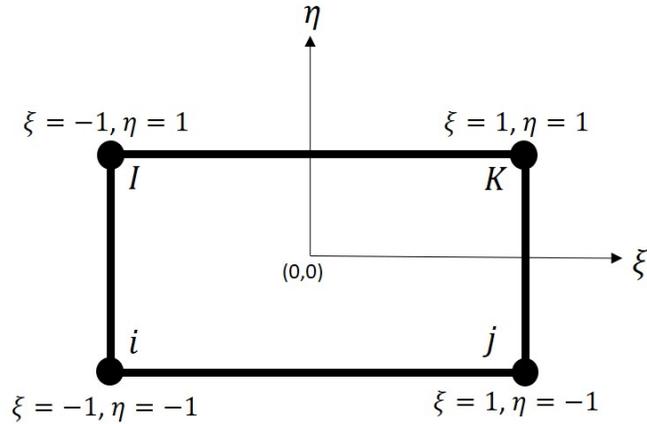


Imagen 41 Elemento cuadrilátero 4 nodos coordenadas naturales

las funciones de forma son

$$S_i = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$S_j = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$S_k = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

(70)

$$S_l = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

El desplazamiento en términos de la función de forma

$$u = S_i U_i + S_j U_j + S_k U_k + S_l U_l$$

$$v = S_i V_i + S_j V_j + S_k V_k + S_l V_l$$

(71)

En forma matricial  $\{u\} = [S]\{U\}$  donde:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_i & 0 & S_j & 0 & S_k & 0 & S_l & 0 \\ 0 & S_i & 0 & S_j & 0 & S_k & 0 & S_l \end{bmatrix}$$

(72)

Entonces

$$x = S_i x_i + S_j x_j + S_k x_k + S_l x_l$$

$$y = S_i y_i + S_j y_j + S_k y_k + S_l y_l$$

(73)

Se establece una relación que permite la derivada de la función  $f = f(x, y)$  respecto "x" y "y" y expresarlas en términos de la derivada de la función con respecto de  $\xi$  y  $\eta$ . Utilizando la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (74)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (75)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Invirtiendo 68

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (76)$$

La matriz de rigidez para el elemento de cuatro nodos se obtiene derivando la energía de deformación en el cuerpo

$$\Lambda = \int_V \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \sum_e t_e \int_e \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dA \quad (77)$$

Donde  $t_e$  es el espesor para cada elemento. La relación de desplazamiento de la deformación para cada elemento es:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}^T \quad (78)$$

Y si tenemos que  $f = u$  de la ec. 69 tenemos que

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (79)$$

Y si de igual forma  $f = v$  tenemos:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (80)$$

Con lo cual estas dos ecuaciones forman:

$$\{\varepsilon\} = [A] \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\}^T \quad (81)$$

Donde la matriz A es:

$$A = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & v & -J_{21} \end{bmatrix} \quad (82)$$

Y de las ecuaciones de interpolación sabemos que:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\}^T = [G]\{U\} \quad (83)$$

Y la matriz [G] es:

$$[G] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (84)$$

Juntando la ec. 77 y la 76 tenemos:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \text{ y donde } [B] = [A][G] \quad (85)$$

De esta forma la deformación para elementos de cuatro nodos esta expresado en términos de los desplazamientos nodales. A y G son funciones de las funciones de forma. Por lo tanto, el esfuerzo es:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{U\} = [D][A][G]\{U\} \quad (86)$$

Y sabemos que D es la matriz de esfuerzo plano o deformación plana. La ecuación de energía 70 se puede escribir asi:

$$\Lambda = \sum_e \frac{1}{2} \{U\}^T \left[ t_e \iint_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta \right] \{U\} = \sum_e t_e \frac{1}{2} \{U\}^T [K^e] \{U\} \quad (87)$$

Y la matriz de rigidez para elementos de cuatro nodos es de 8x8 y está dada por:

$$[K^e] = t_e \iint_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta \quad (88)$$

Y el vector de fuerzas de cuerpo

$$\{f_e^B\} = t_e \left[ \iint_{-1}^1 [S]^T \det[J] d\xi d\eta \right] \begin{Bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \end{Bmatrix} \quad (89)$$

Y las fuerzas de superficie

$$\{f_e^S\} = \frac{t_e l_{j-k}}{2} [0 \ 0 \ f_x^S \ f_y^S \ f_x^S \ f_y^S \ 0 \ 0]^T \quad (90)$$

Donde  $l_{j-k}$  es la longitud del borde j-k

