



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
DE SISTEMAS – TRANSPORTE

ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS VIALES URBANOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
GLORIA ELENA LONDOÑO MEJÍA

TUTOR PRINCIPAL
ANGÉLICA DEL ROCÍO LOZANO CUEVAS, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COMITÉ TUTOR
LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD
NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
RICARDO ACEVES GARCÍA, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO
LILIANA LUCÍA LYONS BARRERA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
VÍCTOR MANUEL CANTILLO MAZA, UNIVERSIDAD DEL NORTE (COLOMBIA)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., MARZO 2019

JURADO ASIGNADO:

Presidente: RICARDO ACEVES GARCÍA
Secretario: LUIS AGUSTÍN ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA
Vocal: ANGÉLICA DEL ROCÍO LOZANO CUEVAS
1^{er}. Suplente: LILIANA LUCÍA LYONS BARRERA
2^{do}. Suplente: VÍCTOR MANUEL CANTILLO MAZA

Lugar donde se realizó la tesis: POSGRADO DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

DRA. ANGÉLICA DEL ROCÍO LOZANO CUEVAS

FIRMA

ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS VIALES URBANOS

GLORIA ELENA LONDOÑO MEJÍA

glondonom@iingen.unam.mx

goyitalm@gmail.com

gloria.londono@uacm.edu.mx

TUTORA: DRA. ANGÉLICA LOZANO CUEVAS

GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA DE TRANSPORTE Y
LOGÍSTICA

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

alozanoc@iingen.unam.mx

AGRADECIMIENTOS

A México que sí proporciona los medios para garantizar educación de alta calidad y gratuita.

A ésta gran casa de estudios, la Universidad Nacional Autónoma de México, que generosamente abre las puertas del conocimiento y ofrece las condiciones idóneas para la formación académica y científica.

Al Instituto de Ingeniería que me otorgó beca y los medios para realizar mis estudios de doctorado.

A mi comité tutorial, Doctores Angélica Lozano Cuevas, Luis Álvarez-Icaza Longoria y Ricardo Aceves García, por su dedicación, motivación y enriquecedora labor de tutoría, fundamental para la realización de mi tesis doctoral. Además, por su comprensión, apoyo y amistad.

A mis sinodales, Doctores Liliana Lyons Barrera y Víctor Cantillo Maza por sus revisiones y aportaciones en el documento de tesis.

Al Dr. Eugenio López Ortega, Presidente de SACC Posgrado en Ingeniería en Sistemas, cuya gestión fue determinante para la culminación del trámite.

Al Dr. Gabriel Ascanio Gasca y su grupo de trabajo de la Coordinación del Posgrado de Ingeniería por su diligente intervención para facilitar la presentación del examen de grado.

A la Dra. Angélica Lozano Cuevas por darme un espacio en su Laboratorio de Transportes y Sistemas Territoriales e integrarme a su Grupo de Investigación en Ingeniería, Transporte y Logística, donde se construye el conocimiento en la ingeniería de sistemas de transporte, con rigor, disciplina, amistad y sana convivencia. También por su continua tutoría, motivación y guía en el desarrollo de mi tesis doctoral.

A mi hija Diana por su ayuda incondicional en la edición de la tesis y a mi hija Carolina por su apoyo permanente, ambas llenan mi vida con su amor.

A mi familia que me animó para culminar este camino de preparación científica.

“En cada caso, y probablemente en todos los casos, la creatividad es la acumulación lógica, sistemática y paulatina de hechos” (Irving Stone, en “La agonía del éxtasis)

“Nunca he sentido de un modo vívido lo que se llama inspiración, en cambio he sentido el lento descubrimiento de un tema” (Jorge Luis Borges)

SIGLAS Y ABREVIATURAS

- ADT: Asignación Dinámica del Tráfico
- ADT-BL: Asignación dinámica de tráfico como programación matemática binivel
- ADT-NDP: Asignación dinámica de tráfico como programación matemática binivel combinado con el Problema de diseño de redes, por sus siglas en inglés (network design problem) ADT-UE: Asignación Dinámica del Tráfico de equilibrio del usuario, por sus siglas en inglés (User Equilibrium)
- ALDF: Asamblea Legislativa del Distrito Federal
- ATIS: Sistema avanzado de información al viajero, por sus siglas en inglés (Advanced Traveller Information System)
- ATMS: Sistema avanzado de operación de tráfico, por sus siglas en inglés (Advanced Traffic Management System)
- BDA: Algoritmo binivel descendente, BDA, por sus siglas en inglés (Bilevel Descent Algorithm).
- BL: Binivel, por sus siglas en inglés (Bilevel)
- BL-DUE: Problema de asignación de equilibrio dinámico binivel, por sus siglas en inglés (Bilevel Dynamic User Equilibrium)
- BL-FQ-TDUE-D: Problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario, dependiente tanto del tiempo, el flujo y las filas de vehículos, determinístico binivel, por sus siglas en inglés (bilevel- flow- queue-time dependent user equilibrium-deterministic)
- BLP: Problema de optimización binivel por sus siglas en inglés (Bilevel Problem)
- BL-TDTAP: Problema de Asignación de Tráfico Dependiente del Tiempo Binivel, por sus siglas en inglés (Bilevel time dependent traffic assignment problem), en el contexto de esta tesis, también depende de la congestión, con el enfoque económico de optimalidad para el usuario (o equilibrio del usuario, UE), que sustenta el primer principio de equilibrio de Wardrop (1952)
- BP: Programa matemático de optimización binivel, por sus siglas en inglés (Bilevel Program)
- BPR: Bureau of Public Roads
- BRT: Transporte rápido (o exclusivo) de bus, por sus siglas en inglés (Bus Rapid Transit)
- CG: Generación de columnas, por sus siglas en inglés (column generation)
- CNDP-UE: Problema de diseño de redes continuo de equilibrio del usuario, por sus siglas en inglés (Continuous Network Design Problem-User Equilibrium)
- CORSIM: CORridor SIMulation software
- CTM: Modelo de celdas de transmisión, por sus siglas en inglés (Cell Transmission Model)
- CU: Ciudad Universitaria, Coyoacán, México D.F.
- DNDP: Problema de diseño de red dinámica, por sus siglas en inglés (Dynamic Network Design Problem)
- DNL: Modelo dinámico de carga de viajes en la red vial, por sus siglas en inglés (dynamic network load)

DNL-LWR: Modelo dinámico de carga de viajes en la red vial que usa el modelo de ondas cinemáticas continuo LWR de Lighthill y Whitham (1955); y Richards (1956)., por sus siglas en inglés (dynamic network load- Lighthill, Whitham y Richards)

DNL-WLM adaptado: Modelo dinámico de carga de viajes en la red vial- Modelo de arco completo, por sus siglas en inglés (dynamic network load- whole link model)

DNL-WLM-FQ adaptado: Modelo de propagación dinámico de carga de viajes en la red vial, de arco completo, dependiente del flujo y la fila, por sus siglas en inglés (dynamic network load- whole link model- flow-queue), adaptado de Carey et al. (2014).

DQM: Modelo de filas dinámico, por sus siglas en inglés (Dynamic Queuing Model)

DQTM: Modelo de transmisión de fila dinámico (Dynamic Queuing Transmission Model)

DSD: Descomposición simple desagregada, por sus siglas en inglés (Disaggregate Simplicial decomposition method de Larsson y Patriksson (1992)

DSO: Sistema óptimo dinámico, por sus siglas en inglés (Dynamic System Optimal)

DUE: Problema de asignación de equilibrio del usuario dinámico, por sus siglas en inglés (Dynamic user equilibrium)

DUE-D; Asignación de equilibrio dinámico determinístico, DUE-D, por sus siglas en inglés (Dynamic User Equilibrium Deterministic)

DUE-S: Asignación de equilibrio del usuario estocástico, por sus siglas en inglés (Dynamic User Equilibrium Stochastic)

DUE-SRDTC: problema matemático de selección simultánea de tiempo de salida y ruta de equilibrio del usuario dinámico, por sus siglas en inglés (Dynamic User Equilibrium- simultaneous route and departure time choice)

DUO-SRDTC: problema matemático de selección simultánea de tiempo de salida y ruta usuario-óptimo dinámico, por sus siglas en inglés (dynamic user optimal- simultaneous route-and-departure choice)

FHWA: Federal Highway Administration

FIFO: disciplina de una fila, es decir, el primero que entra es el primero que sale, por sus siglas en inglés (First In, First Out).

FQ-LTTF: Función de tiempo de viaje en el arco que crece con el flujo, la cola y el tiempo de congestión, por sus siglas en inglés (flow-queue-link travel time function)

FQ-TDUE-D: Problema determinístico de asignación de tráfico de equilibrio del usuario, dependiente tanto del tiempo, el flujo y las filas de vehículos

FW: Frank-Wolfe

GDF: Gobierno del Distrito Federal

GLTM: Modelo de transmisión de arco general, por sus siglas en inglés (General Link Transmission Model)

GPS: Global Positioning System

Ibid.: íbidem, ‘en el mismo lugar’, que se utiliza en publicaciones para indicar que una cita o referencia aparece en la misma obra que se ha citado anteriormente

ITS: Sistemas inteligentes de transporte, por sus siglas en inglés (Intelligent Transportation Systems)

IV: Inecuaciones variacionales

KKT: condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (también conocidas como las condiciones KKT o Kuhn-Tucker)

KWM: Modelo de ondas cinemáticas, por sus siglas en inglés (Kinematic wave model)

LQM: modelo de fila de arco, por sus siglas en inglés, (Link Queue Model)

LTM: Modelo de arcos de transmisión, por sus siglas en inglés (Link Transmission Model)

LTTF: Función de tiempo de viaje en el arco, por sus siglas en inglés (link travel time function)

LWR: Identifica los autores que desarrollaron el modelo de ondas cinemáticas continuo, estos son Lighthill y Whitham (1955); y Richards (1956).

MFD: Diagrama fundamental macroscópico, por sus siglas en inglés (Macroscopic Fundamental Diagram)

MIT: Massachusetts Institute of Technology

M-N: Modelo de Merchant y Nemhauser

MPEC: Programa matemático con restricciones de equilibrio, por sus siglas en inglés (mathematical program with equilibrium constraints)

NDP: Problema de diseño de redes, por sus siglas en inglés (network design problem)

NDP-BL: Problemas de diseño de redes formulados como problemas binivel

OBE: algoritmo basado en el origen, por sus siglas en inglés (Origin-based algorithm), para asignación de tráfico en equilibrio

O-D: los orígenes y destinos (O-D) de las zonas que componen la región de estudio

OPTIMA: (Optimal Path Travel Information for Mobility Actions)

PAM: Método de Análisis Paramétrico, por sus siglas en inglés (Parametric Analysis Method)

PM: Programación matemática

PM-BL: Programación Matemática Binivel, por sus siglas en inglés (Bilevel)

PQM: Modelo de fila puntual, por sus siglas en inglés (Point-Queue Model)

PTV: Planung Transport Verkehr AG

QADT: Modelos de asignación quasi-dinámicos

qIV: Inecuaciones quasi-variacionales

SO: Sistema Optimal, por sus siglas en inglés (System Optimal), correspondiente al segundo principio de Wardrop (1952)

SO-D: Sistema óptimo determinístico, por sus siglas en inglés (System Optimal-Deterministic)

SO-S: Sistema óptimo estocástico, por sus siglas en inglés (System Optimal-Deterministic)

TAP: Problema de asignación de tráfico, por sus siglas en inglés (Traffic assignment problem)

TAPAS: traffic assignment by paired alternative segments algorithm

TAP-BL: Problema de asignación de tráfico binivel, por sus siglas en inglés (Traffic Assignment Problem Bilevel)

TAP-UE: Problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario, por sus siglas en inglés (Traffic Assignment Problem-User Equilibrium)

TAP-BL-UE: Problema de asignación de tráfico binivel de equilibrio del usuario, por sus siglas en inglés (Traffic Assignment Problem-Bilevel-User Equilibrium)

TDEU-D: Problema determinístico de asignación de tráfico de equilibrio del usuario, dependiente del tiempo y el flujo

TDTAP: Problema de asignación de tráfico dependiente del tiempo, por sus siglas en inglés (time dependent traffic assignment problem)

TMCT: Centros de Gestión de Tráfico, por sus siglas en inglés (Traffic Management Centers, TMC)

TRB: Oficina de Investigación de Transporte de Estados Unidos de América, por sus siglas en inglés (Transportation Research Board)

TrEPS: Traffic Estimation and Prediction Systems

TRL: Laboratorio de Investigación de Transporte (Inglaterra), por sus siglas en inglés (Transport Research Laboratory)

U.S.A.: Estados Unidos de América, por sus siglas en inglés (United State of America)

UE: Equilibrio del usuario, por sus siglas en inglés (User Equilibrium), correspondiente al primer principio de Wardrop (1952)

UE-D: Asignación de tráfico de equilibrio del usuario determinístico, por sus siglas en inglés (User equilibrium-deterministic)

UE-S: Equilibrio del usuario estocástico, por sus siglas en inglés (User Equilibrium-Deterministic)

UNAM: Universidad Nacional Autónoma de México

UTPS: Modelo general de planeación, por sus siglas en inglés (Urban Transportation Planning Systems)

VKT: Vehículo-Km recorrido (VKT)

VM: Modelo de Vickrey

VMRC: Vehículos de motor registrados en circulación

VOT: Valor de tiempo, por sus siglas en inglés (Value of time)

WLM: Modelo de propagación de arco completo, por sus siglas en inglés (whole link model)

WLM-FQ adaptado: Modelo de arco completo, dependiente del flujo y la fila, por sus siglas en inglés (-whole link model- flow-queue), adaptado de Carey et al. (2014)

ZMVM: Zona Metropolitana del Valle de México

ÍNDICE

SIGLAS Y ABREVIATURAS	i
ÍNDICE	v
Índice de Cuadros	vii
Índice de Figuras	viii
Índice de gráficas.....	x
Índice de ilustraciones	xi
INTRODUCCIÓN.....	1
1 MARCO GENERAL Y ESTADO DEL ARTE	6
1.1. La planeación del sistema de transporte con el modelo general de transporte	7
1.2. El problema de asignación de tráfico.....	9
1.3. Asignación de tráfico de equilibrio del usuario dinámica, DUE (por sus siglas en inglés Dynamic User Equilibrium)	13
1.4. Modelos de asignación de tráfico dinámica en macro, micro y meso-simulación	21
1.5. Modelos DUE con base en la teoría de juegos	24
1.6. Asignación dinámica de tráfico como programación matemática binivel, ADT-BL.....	26
1.7. Aplicación de la asignación de tráfico binivel de equilibrio del usuario en problemas de diseño de redes binivel.....	31
1.8. Modelos de propagación de flujo y modelos de tiempo de viaje.....	34
1.9. Enfoques de solución del problema de diseño de redes y asignación de tráfico de equilibrio del usuario binivel, sin variabilidad del tiempo	38
1.10. Enfoques de solución del problema de equilibrio del usuario binivel con variabilidad en el tiempo ..	40
1.11. Alcances	45
2 MODELACIÓN DE LA ASIGNACIÓN DE TRÁFICO DEPENDIENTE DEL TIEMPO PARA REDES URBANAS CONGESTIONADAS EN EQUILIBRIO.....	46
2.1. Revisión de la naturaleza matemática y el realismo de los modelos de ADT	46
2.2. Propuesta del modelo de asignación de tráfico dependiente del tiempo de arco completo (DUE-WLM) <i>adaptado</i>	50
2.3. Relación entre las variables macroscópicas dinámicas del arco del DUE-WLM	53
2.4. Tipo de red objetivo.....	56

3 ASIGNACIÓN DE TRÁFICO DEPENDIENTE DEL TIEMPO CON FILAS FÍSICAS Y RESTRICCIONES DE EQUILIBRIO PARA REDES URBANAS CONGESTIONADAS.....	60
3.1 La propagación del flujo y la modelación de la fila en arcos viales	61
3.2 La selección de la ruta, demoras y filas largas	63
3.3 Problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario dependiente del tiempo, la fila y el flujo (FQ-TDUE-D).....	63
3.4 Formulación del modelo general BL-FQ-TDUE-D.....	65
3.5 Formulación del BL-FQ-TDUE-D como un problema de operación y diseño de redes.....	67
3.6 Función de tiempo de viaje para el problema TDUE-D	68
3.7 Red vial experimental.....	70
4 MODELO DE PROPAGACIÓN DEL FLUJO EN LA RED DEPENDIENTE DEL TIEMPO.....	74
4.1 Modelo de arco completo, DNL-WLM	75
4.2 Modelo general de arco completo en tiempo discreto WLM ampliado en Carey et al. (2014) y <i>WLM adaptado</i>	75
4.3 Caso de estudio con el modelo WLM-FQ <i>adaptado</i> (propuesto) del WLM ampliado en Carey et al. (2014)	83
4.4 Propagación de flujo con el <i>WLM-FQ adaptado</i> (propuesta). Ejemplo numérico	93
4.5 Algoritmo DNL y WLM-FQ adaptado de Carey et al. (2014)	94
5 PROGRAMA MATEMÁTICO DE OPTIMIZACIÓN BINIVEL DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO DE EQUILIBRIO DEL USUARIO.....	96
5.1 Propuesta para modelar propagación del flujo y filas en TDEU-D	97
5.2 Solución del BL-FQ-TDUE-D	101
6 CONCLUSIONES.....	108
APÉNDICE A. ESTUDIO DE RUTAS EN LA ZONA SUR DE LA ZONA METROPOLITANA DE MÉXICO	117
Introducción.....	117
Estudio de tiempo de recorrido de rutas en la zona sur de la Ciudad de México	118
Caso de estudio: Análisis de rutas en la zona sur de la Delegación Coyoacán.....	121
Análisis comparativo de las rutas aforadas.....	142
Referencias	150

APÉNDICE B. SOLUCIÓN AL PROGRAMA MATEMÁTICO DE BECKMANN CON FUNCIONES DE TIEMPO DE VIAJE PARA ARTERIAS URBANAS DE ACCESO CONTROLADO Y SEMAFORIZADAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO DE CONGESTIÓN Y EL FLUJO EN EL ARCO: CASO DE ESTUDIO	151
Introducción.....	151
1. Problema determinístico de asignación de equilibrio del usuario para dos tipos de arco	152
2. Funciones de tiempo de viaje y demora dependientes del volumen de tránsito y el tiempo de congestión	154
3. Formulación del problema UE-D para varios tipos de función de tiempo de viaje	157
4. Revisión analítica para garantía de cumplimiento de las propiedades del problema UE-D	165
5. Solución al problema UE-D con el algoritmo de F-W en una red real del D.F. de México	168
6. Resultados	170
7. Conclusiones	185
APÉNDICE C. SOLUCIÓN AL PROGRAMA MATEMÁTICO DE BECKMANN CON FUNCIONES DE TIEMPO DE VIAJE PARA ARTERIAS URBANAS DE ACCESO CONTROLADO Y SEMAFORIZADAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO DE CONGESTIÓN, EL FLUJO EN EL ARCO Y LA COLA.....	194
REFERENCIAS	210

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1. Decisiones en el proceso de la planeación del transporte, con el modelo general del transporte y en particular con el proceso de asignación de tráfico (adaptado de Farahani et al., 2013).....	9
Cuadro 2. Algunos métodos de asignación de tráfico (otros pueden ser consultados en Ortúzar y Willumsen, 2011).....	11
Cuadro 3. Métodos para resolver el EU-D y el EU-S desarrollados en los últimos años	13
Cuadro 4. Definición de variables del modelo BL-TDUE-D	66
Cuadro 5. Definición de variables del modelo de arco completo WLM ampliado y adaptado de Carey et al. (2014)	76
Cuadro 6. Propagación de flujo en el arco 77, con el WLM-FQ adaptado de Carey et al., (2014) con LTF de (Akcelik, 2003).....	93
Cuadro 7. Definición de términos, variables y funciones del programa BL-FQ-TDUE-D	99
Cuadro 8. Resumen de resultados de movilidad entre rutas equiparables, con origen en la Central Camionera del Sur y Ciudad Universitaria.	143
Cuadro 9. Parámetros representativos para la función de congestión de Akcelik (1991).....	157

Cuadro 10. Características y parámetros para funciones de tiempo de viaje en el arco, en una red en Ciudad de México, con dos rutas: Revolución y Segundo Piso Periférico	170
Cuadro 11. Resumen de resultados de los tres procesos de carga en la Red vial Revolución-S. P. Periférico en Ciudad de México	174
Cuadro 12. Resumen de resultados del estudio de recorrido en la Red vial Revolución-S. P. Periférico en Ciudad de México	180
Cuadro 13. Comparación de resultados de la solución analítica de la red de la Figura 24, con el algoritmo de FW y, el estudio de recorrido en la Red vial Revolución-S. P. Periférico real en Ciudad de México	180

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Relación típica velocidad-flujo y tiempo-flujo.....	10
Figura 2. Volúmenes de propagación en un arco (i, j) o (l, h)	50
Figura 3. Descripción esquemática de las variables dinámicas del arco	51
Figura 4. Componentes de la red vial dinámica. Caso de la Figura 3 ampliado a tres arcos consecutivos.....	52
Figura 5. Función tiempo de viaje en el arco respecto al volumen de tránsito x_a	53
Figura 6. Relación funcional entre las variables macroscópicas dinámicas de una red vial.....	54
Figura 7. Representación de una ruta compuesta por varios arcos y nodos; cada nodo recibe y entrega el flujo como se detalla mediante las variables dinámicas de la Figura 3.....	55
Figura 8. Representación de la relación analítica entre el flujo de entrada al arco (uak) y el tiempo más corto de propagación a su destino s o al nodo j más cercano a s $(\pi js(t + \tau a))$. Adaptado de la formulación de Ban et al., (2008)	56
Figura 9. Componentes del modelo BL-FQ-TDUE-D.	68
Figura 10. Red con las vías que conforman dos rutas arteriales: “Revolución” (LS) y “Segundo Piso Periférico” (LA).....	71
Figura 11. Funciones de tiempo de viaje para un arco vial de tipo acceso controlado (Segundo Piso Periférico), respecto a la razón tiempo de viaje dependiente del flujo a tiempo de viaje a flujo libre (ordenadas) contra flujo a capacidad (X) (abscisas).....	72
Figura 12. Funciones de tiempo de viaje para un arco de tipo arteria vial semaforizada (Revolución), respecto a la razón tiempo de viaje dependiente del flujo a tiempo de viaje a flujo libre (ordenadas) contra flujo a capacidad (X) (abscisas).....	73
Figura 13. Función de tiempo de viaje de Akcelik (1991) sin fila inicial y (Akcelik, 2003) con fila inicial, para un arco de arteria vial semaforizada (Revolución), respecto a la razón tiempo de viaje dependiente del flujo a tiempo de viaje a flujo libre (ordenadas) contra flujo a capacidad (X) (abscisas)	73
Figura 14. Diagrama de propagación en el arco	81
Figura 15. Diagrama de combinaciones posibles de propagación del flujo respecto de la capacidad del arco y su vecindad corriente abajo.	82

Figura 16. Función flujo-densidad en un arco de acceso controlado (Segundo piso-Periférico) de 3105.63 m, un carril y 2000 veh/h/carril de capacidad.....	90
Figura 17. Relación flujo-cola en un arco de acceso controlado (Segundo piso-Periférico) de 3105.63 m, un carril y 2000 veh/h/carril de capacidad.....	91
Figura 18. Relación flujo-densidad en un arco de acceso controlado (Segundo piso-Periférico) de 3105.63 m, tres carriles y 6000 veh/h de capacidad.....	91
Figura 19. Relación cola a razón volumen/capacidad <i>en</i> un arco de acceso controlado (Segundo piso-Periférico) de 3105.63 m, tres carriles y 6000 veh/h de capacidad.....	92
Figura 20. Red vial arterial experimental en la ZAMV. Detalle del arco 77.....	92
Figura 21. Flujo entrante y saliente acumulado en el arco 77 en el intervalo de caga k.....	94
Figura 22. Estructura general del algoritmo de solución propuesto para el problema propuesto BL-FQ-TDUE-D.....	105
Figura 23. Funciones de tiempo de viaje en un arco semaforizado, creciente y continuidad a tramos.....	166
Figura 24. Modelo de red con las rutas “Revolución” (LS) y “Segundo Piso Periférico” (LA).....	169
Figura 25. Flujo estimado de la sub-red de la Ciudad de México, mediante el Proceso 1 usando funciones combinadas de Webster y BPR, y una demanda de 11,500 viajes/h.....	172
Figura 26. Flujo estimado de la sub-red de la Ciudad de México, mediante el Proceso 2 usando funciones combinadas de Webster y Akcelik, con demanda de 11,500 viajes/h.....	172
Figura 27. Flujo estimado de la sub-red de la Ciudad de México, mediante el Proceso 3 usando la función BPR, con 11,500 viajes/h.....	173
Figura 28. Tiempo de viaje de la ruta semaforizada, Revolución (LS), en la red (Figura 24) cargada con varias demandas (O-D) en pc/h y tiempo de sobreflujo $T=5$ min, aplicando el proceso 2.....	174
Figura 29. Tiempo de viaje de la ruta de acceso controlado, Segundo Piso Periférico (LA), en la red (Figura 24) cargada con varias demandas (O-D) en pc/h y tiempo de sobreflujo $T=5$ min, aplicando el proceso 2.....	175
Figura 30. Ruta recorrida en la vía Revolución en agosto 29 de 2012, 8:51 pm.....	176
Figura 31. Ruta recorrida en la vía S.P. Periférico en septiembre 3 de 2012, 5:53 pm.....	177
Figura 32. Ruta recorrida en la vía S.P. Periférico en noviembre 22 de 2013, 9:01 am.....	178
Figura 33. Ruta recorrida en la vía Revolución en noviembre 21 de 2013, 9:24 am.....	179
Figura 34. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 10000 pc/h con $T=5$ min, cargada con proceso 2.....	181
Figura 35. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 9500 pc/h con $T=5$ min, cargada con proceso 2.....	182
Figura 36. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 9000 pc/h con $T=5$ min, cargada con proceso 2.....	182
Figura 37. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 8500 pc/h con $T=5$ min, cargada con proceso 2.....	183
Figura 38. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 8000 pc/h con $T=5$ min, cargada con proceso 2.....	183

Figura 39. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 6000 pc/h con T= 5 min, cargada con proceso 2.....	184
Figura 40. Diagrama espacio-tiempo de la vía Revolución entre San Antonio y Glorieta de San Jerónimo..	184
Figura 41. Diagrama espacio-tiempo S. P. Periférico entre San Antonio y Glorieta de San Jerónimo.	185

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Perfil de velocidades respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU.	125
Gráfica 2. Perfil de demoras respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU.	126
Gráfica 3. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	128
Gráfica 4. Perfil de demoras respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	129
Gráfica 5. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	131
Gráfica 6. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	132
Gráfica 7. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	134
Gráfica 8. Perfil de demoras respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	134
Gráfica 9. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Eje 10 sur-Edf. Principal de Ingeniería en CU. Agosto 5 2013, 6:40 a.m.	137
Gráfica 10. Perfil de demoras respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Eje 10 sur-Edf. Principal de Ingeniería en CU.....	137
Gráfica 11. Perfil de velocidad Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU. Agosto 6 2013, 6:34 a.m.	140

Gráfica 12. Perfil de demoras. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU. Agosto 6 2013, 6:34 a.m.	140
Gráfica 13. Perfil de datos de demora de dos recorridos en la ruta Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU, en vacaciones escolares de verano y el inicio de clases en la UNAM.	145
Gráfica 14. Perfil de datos de demora de dos recorridos en la ruta Calzada Taxqueña Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Eje 10 sur-Copilco-Cerro del Agua-Edf. Principal de Ingeniería en CU, en vacaciones escolares de verano y el inicio de clases en la UNAM.	146
Gráfica 15. Gráfica de tiempo y demora de viaje de rutas entre la Central Camionera Sur (Taxqueña) y Ciudad Universitaria, en diferentes períodos del año.	146
Gráfica 16. Velocidad media de recorrido de rutas equiparables entre la Central Camionera del Sur (Taxqueña) y Ciudad Universitaria en diferentes períodos del año (km/h).	147
Gráfica 17. Tiempo y demoras de viaje de rutas equiparables entre la Central Camionera del Sur (Taxqueña) y Ciudad Universitaria en diferentes períodos del año.	148
Gráfica 18. Proporción de demora respecto al tiempo de viaje de rutas equiparables entre la Central Camionera del Sur (Taxqueña) y Ciudad Universitaria en diferentes períodos del año.	149

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Zona de estudio. Delegación Coyoacán, zona sur, sector centro-sur del Distrito Federal de México.	121
Ilustración 2. Red vial y conectividad en la zona sur de la Delegación Coyocán.	122
Ilustración 3. Rutas entre Calzada Taxqueña con Eje 2 Oriente (Escuela Naval Militar) y Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria.	123
Ilustración 4. Recorrido Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU.	124
Ilustración 5. Mapa del ritmo en calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU.	126
Ilustración 6. Recorrido y perfil de velocidad de la ruta Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- M. A. de Quevedo- División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Cerro del Agua-Circuito Escolar - Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	127
Ilustración 7. Mapa del ritmo en Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua- Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	129

Ilustración 8. Recorrido Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	131
Ilustración 9. Mapa del ritmo en Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	132
Ilustración 10. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	133
Ilustración 11. Mapa del ritmo en Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	135
Ilustración 12. Recorrido y perfil de velocidad de la ruta Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	136
Ilustración 13. Mapa del ritmo Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.	138
Ilustración 14. Recorrido y perfil de velocidad de la ruta Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU.	139
Ilustración 15. Mapa del ritmo en Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU.	141
Ilustración 16. Detalle de formación de colas mediante el indicador temporal de ritmo (min/km) en varios recorridos de la Central Camionera del Sur en Taxqueña a Ciudad Universitaria, en el acceso por Cerro del Agua a Ciudad Universitaria.	144

RESUMEN

Con el objetivo de abonar en el estudio, análisis y estimación de patrones de viaje en una red vial principal de una ciudad con congestión recurrente durante períodos de más de una hora, como información necesaria en la evaluación de estrategias de administración de tráfico en tiempo real; y con el fin de optimizar la infraestructura del transporte, reducir los costos y demoras de viaje, garantizar calidad y confianza a los usuarios del transporte; esta tesis abona en el análisis dinámico de sistemas viales urbanos, mediante un modelos de asignación de tráfico dependiente del tiempo que se adapte mejor a la realidad. Éstos se fundamentan en programas matemáticos binivel de investigación de operaciones aplicados a la optimización de redes de tráfico de vehículos personales y su propagación espacio-temporal con enfoque determinístico, expresados mediante desigualdades variacionales. Se establece una estrategia de diseño de un modelo de asignación de tráfico dependiente del tiempo, como una combinación de un problema de diseño de redes y otro de asignación dinámica de tráfico. Entonces se formula el programa matemático de asignación de tráfico dependiente del tiempo, el flujo y la fila, como un problema de optimización binivel. El problema superior se formula como un problema de diseño de red para resolver las filas en los arcos que componen las rutas usadas por los viajeros, el cual minimiza el tiempo total en la red y tiene restricciones de tamaño de fila. El problema inferior es un problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario determinístico dependiente del tiempo, que se compone de dos subproblemas: el primero es un problema de carga de demanda de viajes a la red, formulado como un problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario, que resuelve el patrón de rutas; el segundo es el problema de propagación de flujo en los arcos de las rutas elegidas por los viajeros, que estima la variabilidad del flujo en el tiempo. El problema de propagación del flujo se formula como un problema de arco completo adaptado con condiciones límite. La función objetivo del problema inferior se formula con una función de tiempo de viaje en el arco dependiente del tiempo, del flujo y la cola, continua a tramos, no decreciente con características apropiadas para los programas matemáticos y para estimar los tiempos de viaje en una red con arcos de acceso controlado y semaforizados. Se formula un algoritmo heurístico anidado con base en otros ya probados en la literatura, para resolver el problema de diseño de red, el problema de equilibrio del usuario estático y el problema de propagación de arcos de transmisión del modelo de arco completo. Se revisa el desempeño de varias funciones de tiempo de viaje en un programa matemático de asignación de tráfico de equilibrio del usuario estático, y se prueba en una parte de la red vial de la Zona Metropolitana del Valle de México. Se concluye que el programa matemático de asignación de tráfico binivel dependiente del tiempo, el flujo y la fila ofrece una estructura más robusta para ser aplicado en redes viales urbanas congestionadas; sin embargo, su aplicación y prueba en una red real se deja para una investigación futura.

ABSTRACT

With the objective of contributing to the study, analysis and estimation of travel patterns within a main road network of a city with recurrent congestion periods of more than one hour; to provide essential information for the evaluation of strategies for real time traffic administration, and to optimize transportation infrastructure, minimize cost and travel delay, and to guarantee quality and reliability to the travelers, this thesis contributes to the dynamic analysis of urban road systems by means of time-dependent traffic assignment models which better adapt to reality. These models are based on bilevel mathematical programs, in the context of operations research, applied to the optimization of personal vehicle traffic networks and their spatiotemporal propagation with a deterministic approach, expressed by means of variational inequalities. A design strategy is established for a time-dependent traffic assignment model, as a combination of a network design problem and a dynamic traffic assignment problem. Then, the mathematical program of time, flow and queue dependent traffic assignment is formulated as a bilevel optimization problem. The superior problem is formulated as a network design problem to solve the queues on the links that compose the routes used by the travelers, minimizing the total time on the network with queue size restrictions. The inferior problem is a deterministic and time-dependent user equilibrium traffic assignment problem composed of two subproblems: the first one is a dynamic network load problem of travel demand to the network, formulated as a user equilibrium traffic assignment problem, which solves the routes pattern; the second is the flow propagation problem on the links of the routes choice by the travelers, which estimates the variability of the flow over time. The flow propagation problem is formulated as a whole-link problem, adapted with limit conditions. The objective function of the inferior problem is formulated with a piecewise continuous and non-decreasing, time, flow and queue-dependent link travel time function, with appropriate characteristics for the mathematical programs and for estimating the travel times within a network with signalized and limited access links. A nested heuristic algorithm, based on others already proven in the literature, is formulated for the solution of the network design problem, the static user equilibrium problem and the link transmission propagation problem of the whole link model. The performance of various travel time functions is evaluated in a mathematical program of the static user equilibrium traffic assignment and is tested on a section of the road network of the Metropolitan area of the Valley of Mexico. It is concluded that the mathematical program of the time, flow and queue dependent bilevel traffic assignment offers a more robust structure to be applied to congested urban road networks; nevertheless, its testing and application on a real network is a promising subject for future research.

INTRODUCCIÓN

Los modelos de asignación dinámica de tráfico son recursos metodológicos para el estudio, análisis, evaluación y predicción del tránsito en las rutas y arcos viales que componen los sistemas de transporte. La planeación de la infraestructura de transporte aplica el modelo general de transporte, en particular el submodelo de asignación de viajes, para revisar la funcionalidad de proyectos que mejoren las condiciones de conectividad entre los orígenes y destinos en una ciudad, el tiempo de viaje, las demoras producidas por la congestión y el comportamiento de la red vial en general. En la operación del transporte se definen las reglas de circulación del tránsito, de forma segura y eficiente. Adicionalmente, mediante los sistemas inteligentes de transporte es posible administrar, orientar y guiar a usuarios del transporte particular, público y de carga, mediante información en tiempo real, para que las decisiones de viaje conviertan las redes viales en sistemas efectivos y de buen desempeño.

El transporte es una actividad terciaria de la economía, derivada de la necesidad humana de abastecerse, crecer, desarrollarse en diversas áreas personales, grupales, comunales y organizacionales. La demanda se presenta de forma espacial y temporal y se estima con dificultad en forma aproximada (Ortúzar y Willumsen, 2011). La oferta es más predecible pues se mantiene de forma relativa, ya sea por la escasa construcción de nuevas estructuras, cambios temporales de su intervención, eventos planeados, imprevistos o incidentes. La demanda y oferta de transporte se comportan como cualquier transacción de bienes y servicio, en condición de competencia “perfecta”, de cierto modo, y convergen a un punto de equilibrio propio de las condiciones internas y externas al sistema de transporte (Sheffi, 1985; Ortúzar y Willumsen, 2011). En la realidad el sistema de transporte es un mercado con fuertes externalidades, por lo cual no se cumple el postulado de “competencia perfecta”. El resultado de los flujos en equilibrio varía con el período, día, hora o fracción en razón al cambio en los tiempos de viaje en la red (Mahmassani et al., 2013). Por lo tanto, si en un mercado de competencia de bienes y servicios, en el equilibrio se define el precio de los bienes intercambiados y su correspondiente flujo en el mercado, de forma similar, en el sistema de transporte, el equilibrio de la demanda de viajes con la oferta produce los tiempos, costos de viaje y los flujos en los arcos de la red (Wardrop, 1952). Como en la economía, el punto de equilibrio no se puede alcanzar en la práctica porque los tiempos de viaje son el resultado de las decisiones de los viajeros que tratan de adaptarse a la oferta, sin embargo, en los itinerarios de viaje de los usuarios regulares en días y horarios típicos, como los días de actividad laboral y escolar en las horas pico, se da un equilibrio espacial y temporal adaptado a las condiciones internas y externas del mercado de transporte (Ortúzar y Willumsen, 2011). En el sistema de transporte el equilibrio se presenta en varios niveles. Uno es el equilibrio de la red vial que se da cuando los viajeros representados mediante la matriz de viajes, evalúan las rutas que minimizan su costo o tiempo de viaje, de forma iterativa, hasta encontrar un esquema relativamente estable. Otro es el equilibrio de una red multimodal en el que la interacción de viajeros con los modos y rutas en la red de vías y de transporte, se adaptan y equilibran, de manera más compleja por la diversidad de actores y decisores que intervienen (Ibid).

En esta investigación se aborda el equilibrio de la red vial para los viajes en vehículos con dependencia del tiempo. Las complejidades relacionadas con el transporte colectivo y el transporte de carga, propias de una red multimodal, escapan del alcance de la tesis. Para efectos de inclusión de los viajes de éstos últimos, en aplicaciones prácticas se realizan estrategias como precargar la red con el transporte público y de carga (demanda fija); para vehículos pesados que van de travesía se asume el tratamiento de vehículos equivalentes a automóviles (denominados vehículos personales).

El problema que aborda esta investigación se justifica en la necesidad que tienen los planificadores y operadores de las redes viales urbanas congestionadas de estimar y evaluar las estrategias de administración de tráfico en tiempo real que les permita optimizar la infraestructura del transporte, reducir los costos y demoras de viaje, para garantizar calidad y confianza a los usuarios del transporte. Esto demanda la disponibilidad de aptos recursos de análisis, como modelos que describan el comportamiento de la dinámica de la corriente vehicular y algoritmos de solución para predecir o estimar sus componentes. Aunque la investigación científica ha abordado este problema mediante la asignación dinámica de tráfico (ADT), esta tesis muestra que se requieren nuevas formulaciones matemáticas que: i) describan el comportamiento del conductor al seleccionar su ruta en las redes viales urbanas con congestión persistente; ii) incluyan funciones de tiempo de viaje con variables que mejor describan las demoras en la red y la formación de filas; iii) permitan estrategias analíticas que tengan en cuenta el tamaño de la fila en las selección de las rutas; iv) los anteriores argumentos al interior de un sistema dependiente del tiempo.

El objetivo general de la investigación es modelar la asignación de tráfico vehicular dependiente del tiempo en redes viales primarias urbanas, que presentan períodos extensos de tráfico congestionado, tal como en la Zona Metropolitana del valle de México (ZMVM), con el enfoque analítico, mediante programación matemática y considerando el equilibrio del usuario. Este objetivo se compone de tres partes:

1. Analizar la dinámica del tránsito en sistemas viales urbanos, mediante el estudio de su naturaleza, la revisión de las propuestas científicas vigentes y el análisis de las características del tráfico en redes viales grandes (como la red de la Zona Metropolitana del valle de México, ZMVM);
2. Formular un modelo de asignación de tráfico dependiente del tiempo, cuya entrada sea el patrón de viaje origen-destino (el cual puede ser obtenido mediante un procedimiento complementario a partir de información en tiempo real y en un período de tiempo, ya sea en hora pico u otra hora), para asignar el tráfico a una red vial urbana en la que hay arcos (o vías) de diferentes características físicas y operativas (y por lo tanto diversas funciones de viaje) y, cuya salida sean las características macroscópicas del tráfico (volumen, velocidad y densidad) por arco en cada período preestablecido; y
3. Proponer un algoritmo para dar una solución numérica a problemas propios de la dinámica del tráfico cuando se carga una red vial urbana como la de la ZMVM.

Los objetivos específicos de la tesis son los siguientes:

- i) Caracterizar la naturaleza de la dinámica del tráfico en el sistema vial urbano, identificar las variables que participan, valorar su relevancia en el patrón de viaje y hacer propuestas para relacionarlas analíticamente en forma de problemas matemáticos.
- ii) Revisar las propuestas científicas para el análisis dinámico del tránsito en una red urbana.
- iii) Abordar desde un enfoque analítico, el problema de la propagación del tráfico en una red real urbana.
- iv) Incorporar al problema de asignación de tráfico una función de tiempo de viaje que represente el comportamiento del tráfico en vías primarias, tal como las vías de acceso controlado y las arterias viales semaforizadas.
- v) Identificar y aplicar métodos para el análisis del tráfico en una red congestionada, mediante estudios de campo y el desarrollo de algoritmos de asignación de tráfico.
- vi) Diseñar un modelo de asignación de viajes dependiente del tiempo, para analizar redes congestionadas mediante un modelo matemático de optimización de redes viales.

La metodología se basa en los métodos matemáticos de investigación de operaciones aplicados a la modelación y solución de problemas de asignación de tráfico y su propagación espacio-temporal, que describen la selección de las rutas en una red vial de una ciudad, mediante programas de optimización binivel, con el enfoque del equilibrio del usuario, que sustenta el primer principio de Wardrop (1952), todo ello referido como BL-TDTAP por sus siglas en inglés (Bilevel time dependent traffic assignment problem).

En ésta investigación se presentan los siguientes alcances:

1. Se modela y formula el problema determinístico de asignación de tráfico de equilibrio del usuario, dependiente tanto del tiempo, del flujo y de las filas de vehículos, como un programa matemático de optimización binivel, que se identifica como BL-FQ-TDUE-D, por sus siglas en inglés (Bilevel-flow-queue- time dependent user equilibrium-deterministic); que es un tipo de modelo ADT.
2. Se establece una novedosa estrategia para la formulación del problema BL-FQ-TDUE-D mediante la combinación de varios subproblemas matemáticos, tal como un modelo de diseño de red, NDP, por sus siglas en inglés (Network Design Problem) y un modelo de asignación de tráfico de equilibrio del usuario determinístico, UE-D, por sus siglas en inglés (User Equilibrium-Deterministic), que se formula como un programa matemático en el que se adapta además una función de tiempo de viaje que crece con el flujo, la fila y el tiempo de congestión, FQ-LTTF, por sus siglas en inglés (Flow-Queue-Link Travel Time Function), estudiada y probada en teoría de flujo de tráfico.
3. Los subproblemas mencionados anteriormente, al interior de un modelo dinámico de carga de viajes en la red, DNL, por sus siglas en inglés (Dynamic Network load), que describe analíticamente la propagación del flujo dependiente del tiempo; entonces se formula el modelo de

- arco completo, DNL-WLM-FQ *adaptado*, por sus siglas en inglés (Whole Link Model-flow-queue) y se resuelve mediante un algoritmo heurístico. Se presenta un caso de estudio.
4. Se diseña un algoritmo heurístico para la solución del problema BL-FQ-TDUE-D, con base en otros algoritmos de programación no lineal aunque no programa ni se aplica en un caso real.
 5. El algoritmo heurístico se compone de otro algoritmo que resuelve el problema de asignación de equilibrio del usuario determinístico estático, UE-D. Se diseña, programa y prueba en una sección de red de la ZMVM, en la que se han hecho experimentos con varias funciones de tiempo de viaje para arcos que representan vías de acceso controlado y vías arterias semaforizadas, y se revisan las propiedades matemáticas del programa de optimización formulado (BL-FQ-TDUE-D).
 6. Se presentan casos de estudio con información real, que sustentan la formulación del problema BL-FQ-TDUE-D
 7. Se programa el algoritmo de Frank-Wolfe del problema matemático de asignación de equilibrio del usuario dependiente del tiempo de sobreflujo, la fila y el flujo (FQ-TDUE-D), con varias funciones de tiempo de viaje y la función de tiempo de viaje FQ-LTTF; este se resuelve de forma implícita; al final se presenta un caso de estudio en una sección de la red vial de Ciudad de México, con arcos de acceso controlado y semaforizado, en el que se analiza los resultados mediante comparaciones y mediciones de campo.

El contenido de la tesis se presenta como sigue:

- El capítulo 1 explica el marco general de los modelos dinámicos de asignación de tráfico (Asignación Dinámica del Tráfico, ADT) formulados como un programa matemático binivel. Éste se compone de otros subproblemas de optimización de redes que se conjuntan en esta investigación para desarrollar un modelo BL-TDTAP. El estado del arte presentado está constituido por los siguientes temas: la planeación del transporte y los procesos de equilibrio entre la demanda y la oferta, la asignación de tráfico estática y dinámica, la asignación de tráfico como juegos, la asignación de tráfico dinámica binivel y algoritmos solución, los programas de asignación de tráfico de equilibrio del usuario en diseño de redes y enfoques de solución, el modelo de propagación de flujo y el tiempo de viaje en los arcos de redes viales congestionadas. En particular, se investiga sobre el tratamiento de la variabilidad del flujo en la red respecto del tiempo.
- En el capítulo 2 se analiza el problema ADT abordado en esta investigación, los avances en su formulación, solución, resultados en redes viales reales. Se resaltan los nichos de oportunidad que motivan esta investigación y su justificación. Se explica la estructura del modelo ADT adaptado, en el que se especifican las variables dinámicas y las relaciones analíticas que describen la propagación del flujo en la red. También se describe la red para ser analizada con el problema de asignación de tráfico dependiente del tiempo, por sus siglas en inglés (Time Dependent Traffic Assignment Problem, TDTAP). Luego se integran los aspectos teóricos y prácticos, que fundamentan el enunciado de la hipótesis, el objetivo de la tesis, y se establece el alcance.

- En el capítulo 3 se explica el significado del comportamiento del usuario en la selección de ruta, demora, y fila, que se propone en esta investigación, con lo cual se formulan: i) el problema de asignación de tráfico dependiente del tiempo (TDTAP), cuya estructura matemática considera la fila en los arcos; y ii) el problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario, dependiente tanto del tiempo, del flujo y de las filas de vehículos, determinístico binivel, por sus siglas en inglés (Bilevel-Flow- Queue-Time Dependent User Equilibrium-Deterministic, BL-FQ-TDUE-D). Se analizan funciones de tiempo de viaje para varios tipos de arco que se usan en programas de asignación de tráfico y cuyas propiedades matemáticas son adecuadas para el programa de optimización formulado.
- En el capítulo 4 se formula el modelo de carga dependiente del tiempo, macroscópico, DNL-WLM-FQ *adaptado*, por sus siglas en inglés (Dynamic Network Load- Whole Link Model- Flow-Queue), con base en la función de tiempo de viaje dependiente del flujo, el tiempo de sobreflujo y la fila, FQ-LTTF. Este modelo permite predecir la evolución del tráfico en la red con base en la selección de la ruta del modelo de asignación dinámica de equilibrio del usuario, DUE (Dynamic User Equilibrium), obteniendo indicadores de desempeño como: los flujos de salida, longitud de filas, y tiempo de viaje para flujos de entrada al arco o a la ruta. Se analizan las propiedades del modelo DNL-WLM-FQ *adaptado*, las condiciones límite y la capacidad de propagar el flujo en el arco. Al final se describe el algoritmo para el problema DNL-WLM-FQ *adaptado*.
- En el capítulo 5 se formula el programa matemático BL-FQ-TDUE-D y se diseña un algoritmo para la solución su, considerando las condiciones de regularidad de primer orden.
- Se presentan las conclusiones, recomendaciones y retos que lleven a enriquecer el ámbito de la modelación de asignación de tráfico dependiente del tiempo.
- En los apéndices se presentan casos de estudio con el análisis de tiempos de viaje en rutas y arcos en tramo de red vial de la ZMVM, a partir de datos reales y la solución del programa matemático de asignación del equilibrio del usuario. También se explica la deducción de funciones matemáticas del algoritmo de Frank-Wolfe para varias funciones de tiempo de viaje en arcos de acceso controlado y semaforizados.

1 MARCO GENERAL Y ESTADO DEL ARTE

El ámbito de la programación matemática utilizado en el proceso de asignación de tráfico dependiente del tiempo (TDTAP) está compuesto de problemas de optimización de redes de tráfico con el enfoque de equilibrio, que modela el primer principio de Wardrop (1952) para los viajeros particulares (UE), ampliamente estudiados por científicos y especialistas. Es por esto que se presentan y explican los avances y propuestas de algunos de los problemas más relevantes que hicieron parte de la investigación de esta tesis y llevaron a la formulación del modelo BL-TDTAP, por sus siglas en inglés (Bilevel time dependent traffic assignment problem). La vasta literatura que cubre el estado del arte de los problemas de redes que se constituyen como submodelos del presentado en la tesis, se explica, sin ser exhaustiva, mediante la evolución de las propuestas, enfoques de modelación, solución y aplicación, y se enfatiza en aquéllos que son referencia principal en el modelo propuesto.

La Asignación Dinámica de Tráfico (ADT) es un proceso que permite seleccionar rutas de viajes entre pares origen-destino (O-D), considerando la variación temporal y espacial de los flujos y tiempos de recorrido en los arcos usados en la red por viajeros que aún no llegan a sus destinos, y aplicando reglas claras de equilibrio o de comportamiento en la red. Un modelo ADT genera un patrón o regla de viaje, que satisface alguna definición de selección dinámica de viaje en intervalos largos o cortos de tiempo. El patrón de viaje puede ayudar a estimar tiempos de viaje de la demanda, para ser divulgada mediante sistemas de información que trabajen en tiempo real o a establecer estrategias de control de tráfico que mejoren la condición de la red vial (Jang et al., 2005).

El problema de ADT ha generado varios modelos analíticos y procesos metodológicos característicos; los principales son los siguientes:

- La asignación de viajes a la red a partir de información de demanda fija o variable entre pares O-D, la cual depende de un proceso de selección de ruta, una regla de comportamiento o de la estabilidad o el equilibrio.
- La carga de viajes a las rutas seleccionadas con dependencia del tiempo (carga dinámica de tráfico o Dynamic network loading, DNL).
- El establecimiento de un proceso de propagación de los flujos en la red en un horizonte temporal.
- Los modelos de demora dependientes del flujo y de otras variables que influyen en el tiempo de recorrido de los arcos (LTTF) y las rutas usadas.
- Las reglas de operación que garantizan las condiciones de disciplina de fila, esto es, el primer vehículo en la fila es el primero en salir, FIFO, por sus siglas en inglés (First In, First Out).
- En algunos casos, se diseña un modelo de selección de la hora de salida o del itinerario del viaje.

Este capítulo se presenta procediendo desde las referencias más generales a las particulares. Se parte desde el modelo general de planeación de transporte, UTPS, por sus siglas en inglés (Urban Transportation Planning Systems), y el marco central del modelo de asignación de tráfico con equilibrio del usuario con enfoque estático

y su aplicación en el ámbito de las decisiones de la infraestructura de transporte. Luego se introducen los modelos de asignación dinámica de tráfico generales, sus características, particularidades y convergencia con sus correspondientes modelos estáticos. El marco principal de la investigación son los programas matemáticos binivel, PM-BL, por sus siglas en inglés (Bilevel), que formulan el modelo de asignación de tráfico dependiente del tiempo (BL-TDTAP), a partir del ámbito de la teoría de juegos. Entonces se presenta el estado del arte de aquéllos relacionados con el enfoque adoptado en este estudio. En este mismo marco se encuentran los problemas de diseño de redes de equilibrio (NDP), los cuales son descritos y explicados, pues son la base de la modelación del BL-TDTAP. Se abordan las referencias más importantes que tratan la propagación del flujo en redes viales dependientes del tiempo y las funciones de tiempo de viaje en el arco para redes congestionadas (FQ-LTTF). Después se presentan los enfoques de solución de los problemas de NDP-BL y asignación de equilibrio del usuario binivel sin variabilidad del tiempo. Particularmente se describen los algoritmos que resuelven problemas de asignación de equilibrio del usuario dependiente del tiempo binivel. Finalmente se explican los alcances de ésta investigación.

1.1. La planeación del sistema de transporte con el modelo general de transporte

El modelo general de transporte es una herramienta metodológica de gran utilidad en la planeación del sistema de transporte; en particular en el estudio, análisis, diagnóstico de escenarios de infraestructuras de transporte, revisión de estrategias de operación, seguimiento del sistema de transporte y sus componentes (Ortúzar y Willumsen, 2008). El proceso de planeación con el modelo general de transporte es ampliamente explicado en Ortúzar y Willumsen (2011).

El modelo general de transporte se compone de dos etapas básicas. En la primera se estima la demanda de viajes entre pares de zonas o puntos de origen (O) y destino (D), definidos en una estructura espacial que divide la región de estudio y, otra topológica que describe analíticamente la red de transporte. Dicha red se compone de conjuntos de nodos (N) y arcos (A), los cuales mediante bases de topología permiten expresar analíticamente la red de tránsito y transporte (Sheffi, 1985; Bell e Iida, 1997). La demanda de viajes entre los pares O-D se estima mediante tres modelos (que forman parte del Modelo de los Cuatro Pasos): 1) el modelo de generación y atracción de viajes, el cual define la cantidad de viajes que se producen en cada zona (T_i) y los viajes que atrae cada zona (T_j), por día (laboral, sábado o domingo) o por período (matutino o vespertino) o por hora (pico de la mañana, pico de la tarde u hora valle); 2) el modelo de distribución de viajes, el cual define una matriz de viajes entre todos los pares O-D (T_{ij}), por día o por período; 3) el modelo de reparto modal (a pie, bicicleta, auto, bus, metrobús, metro, tren suburbano, trolebús, taxi, etc) que estima la cantidad de viajes en los modos de transporte disponibles entre cada par O-D (T_{ijm}), por día o período u hora. Con estos tres modelos se obtiene la demanda de viajes distribuida en el espacio, el tiempo y en los modos de viaje. La segunda parte del modelo general de transporte, es el paso 4) que corresponde al modelo de asignación de viajes, el cual se ejecuta con base en el resultado de la demanda y la descripción analítica de la red de transporte, para estimar los flujos de viajes en las rutas (T_{ijmr}) y los arcos (v_a), sean vías o líneas de transporte de pasajeros, así como las rutas de

viaje, los tiempos y los costos de los itinerarios (t_{ij}) y de la red completa. Adicionalmente, si se conoce la capacidad de los arcos y sus características, se puede hallar la relación volumen a capacidad y la velocidad, y se pueden detectar puntos o segmentos potenciales de congestión (Ortúzar y Willumsen, 2008; Oppenheim, 1995).

El proceso de planeación con el uso del modelo general de transporte se alimenta con información base actual o pronosticada, evalúa estructuras espaciales y topológicas de sistemas reales o hipotéticos y entrega información valiosa que simula el patrón de transporte e información complementaria (Meyer y Miller, 2001).

La planeación del transporte se realiza para apoyar a los responsables y grupos que deciden la estructura, el diseño, la operación y la evaluación de los sistemas de transporte. Tales decisiones pueden ser estratégicas, tácticas, operativas (Farahani et al., 2013) o de evaluación y seguimiento. Las decisiones estratégicas tienen un alcance de largo plazo, definen la estructura del sistema y los componentes de las redes de transporte y tránsito. Las decisiones tácticas se dan en términos de mediano plazo, usan recursos de optimización para hacer un mejor aprovechamiento de la infraestructura existente y definen acciones que proporcionan indicadores de desempeño más eficientes y confiables. Las decisiones operativas son de corto plazo, usan recursos flexibles y ágiles que establezcan recomendaciones oportunas, efectivas y prácticas. Las decisiones de evaluación y seguimiento se realizan de manera periódica; usan mecanismos de respuesta rápida para capturar información y relacionarla con las bases históricas a fin de retroalimentar la planeación de mayor alcance.

En cualquier marco de decisiones, los resultados buscados en los modelos de asignación de tráfico dependientes del tiempo tienen utilidad; sin embargo, sus características y propiedades definen su eficiencia y aplicabilidad en redes reales, como se explica posteriormente. Algunos ejemplos son presentados en el Cuadro 1 (adaptado de Farahani et al., 2013).

Esta investigación se enfoca en los problemas de asignación de tráfico, TAP, por sus siglas en inglés (Traffic Assignment Problem), con aplicaciones en la planeación, operación y evaluación de los sistemas de transporte en un ámbito de análisis macroscópico. A continuación, se presenta la introducción de los aspectos relevantes de la modelación y solución de los programas matemáticos de asignación de tráfico, que hacen parte de los métodos que guiaron la formulación del BL-TDTAP.

Cuadro 1. Decisiones en el proceso de la planeación del transporte, con el modelo general del transporte y en particular con el proceso de asignación de tráfico (adaptado de Farahani et al., 2013)

Decisiones estratégicas	Diseño y construcción de nueva infraestructura vial: vías troncales, arterias y colectoras, intercambiadores viales, túneles, red de vías de cuota. Aumento de capacidad, carriles, etc. Diseño y construcción de nueva infraestructura y líneas de transporte colectivo: una vía férrea, una línea de metro, un corredor BRT, un nuevo centro de integración modal, etc.
Decisiones tácticas	Definición de ejes viales, aumento de la capacidad mediante el cambio de operación de una vía en un solo sentido de circulación (vías reversibles), implementación de controles de tráfico o semáforos en cruces, operación de un carril “solo bus” o para vehículos de alta ocupación, incremento de la frecuencia de una línea de transporte colectivo, establecimiento del cobro para enfrentar la congestión, diseño de restricciones para la circulación de vehículos pesados en vías y horarios, etc.
Decisiones operativas	Establecimiento de programas de semáforo, regulación de segmentos y/o cruces viales en horarios pico, desvíos por marchas, atención de accidentes o eventualidades, programación de obras en la vía o mantenimiento de rieles u otra infraestructura de transporte, etc.
Decisiones evaluativas	Formulación de planes de estaciones de aforo permanentes o periódicos, atención de accidentes, operativos por programas educativos o de seguridad, etc.

El ámbito de investigación de esta tesis es el problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario de Wardrop (1952), dependiente del tiempo, para viajes vehiculares que usan la red primaria para un solo itinerario entre el origen y el destino. Las particularidades de la operación de una red multimodal, propias de viajes en transporte colectivo o carga, no se consideran aquí. La influencia en el volumen de tránsito de buses y camiones, se trata mediante factores de equivalencia a vehículos personales (vehículos equivalentes). Otras aplicaciones utilizan procesos de precarga y luego asignan los viajes de vehículos equivalentes; otras dejan el uso de un carril para el transporte público y los viajes de distribución de mercancías y, el resto de los carriles se utilizan para la asignación de viajes de vehículos equivalentes.

1.2. El problema de asignación de tráfico

El proceso de asignación de tráfico (otras veces referido como asignación de viajes), se fundamenta en un modelo de selección de ruta de un viajero “racional”, o sea aquel que escoge la ruta que ofrece el menor costo percibido, cuando se carga una matriz de viajes origen-destino O-D a una red vial (Ortúzar y Willumsen, 2008). Algunos de los factores que influyen en la decisión del viajero son:

- El tiempo del viaje.
- La distancia.
- El costo monetario (relacionado con combustibles, cuotas, etc.)
- La congestión y las filas.
- El tipo de confluencias o maniobras que se ejecutan.

- El tipo o clase de vía.
- El paisaje.
- La señalización.
- Las obras en la vía.
- La confiabilidad del tiempo de viaje.
- Los hábitos del viajero

En el modelo suele usarse el *costo generalizado de viaje*, el cual no incluye todos estos factores (Ortúzar y Willumsen, 2011, pag. 354). Por lo tanto, en la modelación son inevitables las aproximaciones. En la práctica sólo se consideran dos factores: el tiempo y costo monetario; algunas veces el costo monetario es expresado en un valor proporcional a la distancia de viaje (Ortúzar y Willumsen, 2008).

Los modelos de asignación que consideran congestión usan relaciones funcionales flujo-tiempo de viaje que dependen de las características del arco, tal como, el tiempo a flujo libre (t_{0a}), la capacidad (x_{max} o Q_a) y el flujo en la ruta (h_a) o en el arco (x_a) (véase la Figura 1). Dichas funciones deben tener características apropiadas para el modelo (Ortúzar y Willumsen, 2011). La Figura 1 muestra formas típicas de la disminución de la velocidad respecto del flujo (izquierda); entonces el tiempo de viaje en el arco (t_a) (derecha) se incrementa cuando el flujo que circula está cerca de la capacidad del arco (asociado al diagrama fundamental de Greenshields) (Roess et al., 2011). El incremento del tiempo de viaje en el arco depende del aumento del flujo, con un comportamiento acelerado cerca de la capacidad (Akcelik, 1991). Las formas funcionales del tiempo de viaje en el arco que incluyen variables adicionales al flujo son motivo de esta investigación y son explicadas más adelante (capítulo 3).

Un resumen de los principales métodos de asignación de tráfico estáticos se presenta en el *Cuadro 2*. Una clasificación más amplia se puede encontrar en Ortúzar y Willumsen (2011).

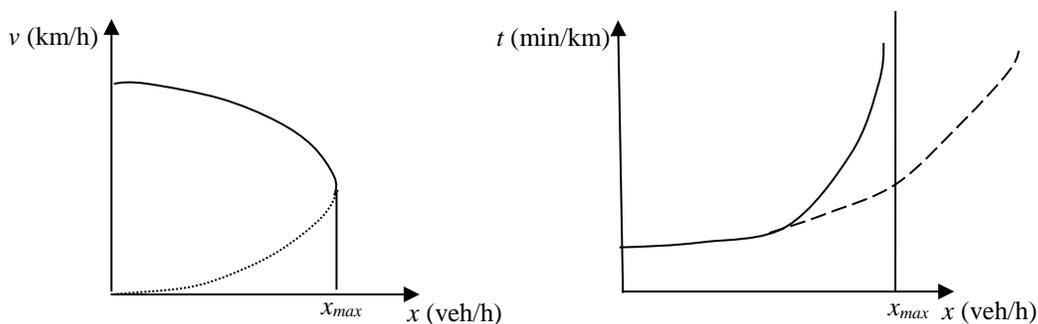


Figura 1. Relación típica velocidad-flujo y tiempo-flujo.
Fuente: Ortúzar y Willumsen (2008, página 351)

Cuadro 2. Algunos métodos de asignación de tráfico (otros pueden ser consultados en Ortúzar y Willumsen, 2011).

Método	Descripción	Tipo de problema	Características	Solución matemática o algoritmos	Referencias
Asignación “Todo o nada” o de ruta mínima	Se cargan todos los viajes en un par O-D a la ruta de mínimo costo.	Determinístico Estocástico	La función objetivo no tiene efectos de comportamiento del viajero por la congestión	Dijkstra, Floyd y Moore Burrell (1968); STOCH (Dial, 1971)	Ortúzar y Willumsen (2011); Patriksson (1994b); Oppenheim (1995); Sheffi (1985).
Asignación de equilibrio	Asume que el costo o tiempo de viaje en un arco, depende generalmente del volumen que por él circula.	Determinístico: Se asume que los viajeros tienen información perfecta del estado de la red; también que los usuarios perciben de igual forma los costos de viaje. Se identifican dos tipos: Equilibrio del usuario (UE-D) y equilibrio del sistema (SO-D) Estocástico: Asume que los viajeros no tienen la misma percepción del costo de viaje. Se identifica dos tipos: Equilibrio estocástico del usuario (UE-S) y equilibrio estocástico del sistema (SO-S)	Se aplican a redes congestionadas. UE-D: <i>Bajo condiciones de equilibrio de tráfico en redes congestionadas, ningún viajero puede reducir su costo de ruta por un cambio unilateral (Wardrop, 1952).</i> SO-D: <i>Bajo un equilibrio del sistema, las condiciones de tráfico deben ser dadas en redes congestionadas, de tal manera que el promedio (o total) de costo de viaje es minimizado (Wardrop, 1952).</i>	- Métodos de aproximación lineal, como el algoritmo de Frank-Wolfe (1956) (FW). - Métodos de asignación basados en la ruta (Métodos de descomposición). - Métodos de asignación basados en el origen (Origin-based algorithm, OBE). - Métodos de descenso (Ortúzar y Willumsen, 2011). Se formulan los costos en escenarios probabilísticos	Sheffi (1985); Patriksson y Marcotte (2006); Ortúzar y Willumsen (2011); Larsson y Patriksson (1992); Patriksson (1994b); Jayakrishnan et al. (1994b); Bar-Gera (2002, 2010); Dial (2006); Slavin et al. (2010); Gentile, et al. (2007)

El problema determinístico de equilibrio del usuario, UE-D, por sus siglas en inglés (User Equilibrium-Deterministic), enunciado por el primer principio de Wardrop fue matemáticamente formulado por Beckmann et al. (1956), como un problema convexo con una función objetivo para demanda fija y variable, sujeto a restricciones lineales y de no negatividad para flujos en la red (Sheffi, 1984). Dichos autores mostraron que el mínimo costo de la red se alcanza cuando los costos marginales en las rutas O-D usadas son iguales y mínimos, referido como SO, por sus siglas en inglés (System Optimal). Además, ellos demostraron que las condiciones de optimalidad aplicadas a un problema de optimización formulado apropiadamente, de la forma de Kuhn-Tucker (1951), coinciden con el principio de equilibrio del usuario de Wardrop, esto es “ningún usuario racional unilateralmente hará un cambio de ruta, ya que su costo o tiempo de viaje es mínimo” (Boyce et al., 2004). Posteriormente, Jorgensen (1963) propuso una formulación de optimización con condiciones de equilibrio de la red, demanda fija y funciones de costo de arco separables¹ (Boyce et al., 2004). Desde entonces ha sido ampliamente estudiado por la comunidad científica. Las siguientes referencias explican en forma extensa el problema de asignación de equilibrio del usuario, sus formas analíticas, propiedades, enfoques de solución y aplicaciones en redes viales: Sheffi (1984); Marcotte y Patriksson (2007); Patriksson (1994b, 2015).

En caso de aplicar la asignación de equilibrio del usuario estático a redes grandes que involucran miles de arcos, con cientos de miles de rutas entre posiblemente millones de pares de O-D, se hace necesario la aplicación de algoritmos derivados del campo de la investigación de operaciones. Existen paquetes computacionales comerciales que permiten realizar procesos de modelación de transporte en redes grandes, que asumen el equilibrio del usuario (Meyer y Miller, 2001). Algunos softwares conocidos son TransCAD, EMME/2 o 3, VISUM, CUBE/VOYAGER (Correa y Stier-Moses, 2010; Vanasse Hangen Brustlin, Inc., 2007).

Durante los últimos años, algunas investigaciones han desarrollado métodos más rápidos para obtener el resultado de la asignación de equilibrio del usuario. Diversos algoritmos se han propuesto para su solución, en los que se busca eficiencia, rapidez y reparto equitativo del flujo en las rutas (referido como proporcionalidad). Algunos métodos requieren una solución inicial, por ejemplo, mediante el método de Frank-Wolfe, y luego con algoritmos matemáticos se obtiene el equilibrio (Slavin et al., 2010). El *Cuadro 3* relaciona los más destacados.

Florian y Morosan (2014) revisan los dos algoritmos basados en FW en el problema TAP-UE, los comparan con TAPAS, y afirman que son equiparables en precisión, unicidad y proporcionalidad, aplicados a problemas en redes de equilibrio estático multiclase.

¹ Los costos se dicen separables cuando se acepta que el tiempo de viaje se explica más por el flujo que recorre el arco, por las características de la vía (se asumen tramos largos), y no tanto por la demora en las intersecciones de prioridad o rotondas, o las características de otros arcos (Ortúzar y Willumsen, 2011).

Cuadro 3. Métodos para resolver el EU-D y el EU-S desarrollados en los últimos años

Método	Nombre del estudio	Referencia
Algoritmo B	A path-based user-equilibrium traffic assignment algorithm that obviates path storage and enumeration.	Dial (2006)
TAPAS	Traffic assignment by paired alternative segments (TAPAS).	Bar-Gera (2010)
LUCE	Linear user cost equilibrium: the new algorithm for traffic assignment in VISUM.	Gentile (2007)
Frank-Wolfe conjugado, CFW	A conjugate direction Frank-Wolfe method for nonconvex problems. (algoritmo de convergencia rápida del FW)	Daneva y Lindberg (2003a), citado por Mitradjieva y Lindberg (2013)
Frank-Wolfe biconjugado, BFW	The Stiff Is Moving—Conjugate Direction Frank-Wolfe Methods with Applications to Traffic Assignment. (algoritmo de convergencia rápida del FW)	Mitradjieva y Lindberg, (2013)

Ortúzar y Willumsen (2011) afirman que la investigación continúa buscando algoritmos que integren los métodos proporcionales en el enfoque estocástico con la modelación de selección discreta. El problema se agrupa en tres partes: a) ¿cómo identificar un conjunto claro de rutas razonables y eficientes que pudieran ser consideradas por los viajeros cuando hacen sus selecciones?; b) ¿cómo estimar los parámetros de los modelos de selección de ruta?; y c) ¿cómo integrar más eficientemente los mecanismos de selección con un marco de asignación de equilibrio? Uno de los principales problemas es la dificultad de disponer de buena información, en particular de selecciones de preferencias reveladas. Un análisis más amplio es presentado por Ortúzar y Willumsen (2011).

Jafari et al. (2017), Xu et al. (2018), Xie y Xie (2016) y Borchers et al. (2015) compendian los enfoques de modelación y los métodos de solución emergentes, los cuales se agrupan en tres, según sean basados en: el arco, la ruta y las ramas o el origen.

1.3. Asignación de tráfico de equilibrio del usuario dinámica, DUE (por sus siglas en inglés Dynamic User Equilibrium)

Los métodos de asignación de equilibrio del usuario determinístico (UE-D) y estocástico (UE-S) estáticos estiman los flujos de vehículos que circulan por la red, pero no representan la dimensión del tiempo. Estos procedimientos asumen que cada vehículo cumple su viaje en el período de la asignación; el proceso asigna

todo el flujo, en el mismo período de tiempo a todos los arcos de la ruta seleccionada. Esta situación no es real, ya que cada vehículo viaja a través del tiempo, desde su origen a su destino (Meyer y Miller, 2001). No obstante, los modelos de asignación de tráfico estáticos entregan información valiosa, son ampliamente usados en el análisis de grandes redes, pues su complejidad computacional es razonable comparada con los de los dinámicos. En la literatura se encuentran algoritmos de solución en el enfoque estático, sin embargo, se investiga su realismo, por ejemplo, respecto a la proporcionalidad del volumen en las rutas usadas, los tiempos de viaje y el período de asignación, pero son un referente fundamental para el problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario dinámico (DUE) (Bliemer et al., 2014).

La asignación dinámica de tráfico (ADT) (conocida también como DNL) en redes de tráfico dependientes del tiempo se modela de forma determinística y estocástica, por lo tanto, incluye a los modelos de asignación de equilibrio del usuario dinámico determinístico, DUE-D, por sus siglas en inglés (Dynamic User Equilibrium Deterministic), y los modelos de asignación de equilibrio del usuario estocástico, DUE-S, por sus siglas en inglés (Dynamic User Equilibrium Stochastic).

La ADT tuvo sus comienzos a finales de los 70's resultado de una combinación de diversos campos de investigación como son: el desarrollo de sistemas, el avance en las teorías matemáticas y de optimización, y, el desarrollo en la tecnología de las computadoras; pero proliferó en los 90's con el mayor potencial de los sistemas de cómputo y el vertiginoso avance de la tecnología de los sistemas, equipos de captura, transmisión de información y control de tránsito, también llamados "sistemas inteligentes de transporte", ITS, por sus siglas en inglés (Intelligent Transportation Systems), a fin de integrarlas a las labores de planificación, operación y control de la infraestructura de transporte. Long et al. (2015) presentan una revisión amplia y completa del problema ADT, y los modelos de propagación de flujo; dichos autores profundizan en las formulaciones con enfoques determinístico y estocástico, basadas en el arco y en la ruta.

Los modelos ADT son formulaciones matemáticas que se resuelven para estimar patrones de flujo en una red vial y el cambio del flujo en los arcos que componen las vías, en períodos de tiempo, ya sea día a día, durante el día, hora o fracción. En la arena de la investigación de la dinámica de las redes de circulación vehicular se distinguen dos enfoques: la simulación y el analítico (Peeta y Ziliaskopoulos, 2001).

- **Los enfoques de simulación** están compuestos de un conjunto de reglas, con frecuencia sobre un entorno macro, meso y microscópico, en términos de la información y su grado de resolución (Barceló, 2010) (esto se amplía más adelante). La simulación es un recurso para modelar las operaciones de sistemas dinámicos de tránsito (Bourghout, 2004). Además, ayuda a analizar las causas y alternativas de solución de problemas de tránsito, tal como la congestión y la seguridad. Los modelos de simulación microscópicos permiten una representación detallada de los procesos de tránsito, cualidad que facilita la evaluación de complicadas estructuras viales y dispositivos inteligentes de transporte, que con frecuencia hacen parte de complejos sistemas de gestión de tránsito, seguridad e información. En cambio, los modelos macro y mesoscópicos

buscan la dinámica del tránsito en menor detalle, pero son más rápidos al ser aplicados y calibrados en el análisis de redes reales. Éstos son más útiles en la modelación de redes grandes mientras los microscópicos son usados en el estudio de áreas pequeñas. Ni (2006) define la simulación como “un proceso de generación de una versión electrónica del mundo real para muchos propósitos, en los que se incluye: i) una herramienta para aprender y entender el mundo físico y sus fenómenos; ii) un ambiente libre de riesgo para experimentar y hacer pruebas; iii) una manera de prever resultados posibles; iv) un recurso de decisión para mostrar efectos que pueden visualizarse.” No obstante, los modelos de simulación de ADT surgen ante la dificultad de representar adecuadamente las relaciones teóricas del tráfico y producir formulaciones matemáticas bien comportadas (Peeta y Ziliaskopoulos, 2001). En general, los modelos de simulación ADT realizan procesos aproximados de asignación de equilibrio del usuario y equilibrio del sistema u óptimo del sistema, sin embargo, no hay garantía de convergencia o de equilibrio. Bliemer et al. (2004) dicen que los modelos de simulación, tal como en Ben-Akiva et al. (1994) y Mahmassani et al. (1993) (Peeta y Ziliaskopoulos, 2001), han mostrado la capacidad para hacer asignación dinámica de tráfico en redes grandes, ya que aprovechan características de las redes de transporte y realizan aproximaciones que exigen menos tiempo de cómputo; sin embargo, son menos precisos en la representación de la dinámica del tráfico (Yperman y Tampère, 2006). Adicionalmente, ofrecen un ambiente más flexible, pues se acercan más a la realidad con relación a la recreación de la propagación del flujo (tal como control de formación de filas y de tránsito); el análisis de tránsito multiclase realizado mediante microsimuladores es relativamente más fácil. Sin embargo, Li et al. (2000) mencionan que estos modelos son heurísticos, su convergencia no puede ser garantizada y son muy rígidos para obtener cualquier acercamiento a los problemas de asignación dinámica de tráfico. Adicionalmente el tiempo de cómputo y los requerimientos de memoria son proporcionales al tamaño de la demanda de viajes y pueden ser no propios para redes que cubran grandes áreas con muchos viajes (Bliemer et al., 2004). En el siguiente apartado se presenta un compendio de los aportes más relevantes.

- **Los enfoques analíticos** expresan la selección de la ruta y la propagación del tránsito mediante un conjunto de ecuaciones matemáticas, generalmente sobre un marco macroscópico. Los modelos analíticos ADT se formulan como problemas de programación matemática, problemas de control óptimo, problemas de complementariedad, problemas de inecuaciones variacionales (IV) o quasi variacionales (qIV), y problemas de punto fijo (Ran y Boyce, 1996; Bliemer y Bovy, 2003; Bliemer et al., 2014). Se destacan los aportes de Janson (1991 b), Smith (1993), Friesz et al. (1993); Ran y Boyce (1996); Wie et al. (1995); Lo et al. (1996); Heydecker y Varlander (1999); Friesz et al. (2001); Friesz y Mookherjee (2006); Friesz et al. (2011); Zhong et al. (2011); Wu et al. (1998); Wu et al. (1998a); Wu et al. (1998b); Xu et al. (1998); Xu et al. (1999). La ventaja de estos modelos es que las propiedades de la solución y los algoritmos de convergencia pueden ser buscados o resueltos, mediante algunos algoritmos y métodos matemáticos ya disponibles en la literatura. Otra ventaja es que la solución al problema en esencia no conlleva más tiempo de cómputo ni demanda mayor memoria cuando aumenta la demanda de viajes, ya que puede formularse en un marco macroscópico. Esto significa que puede aplicarse al análisis de grandes redes. No obstante, muchos

modelos analíticos fallan en la solución de problemas ADT en redes grandes, debido a su complejidad computacional, y entonces sólo son aplicables a redes medianas o pequeñas. Esto ocurre en los modelos propuestos, por ejemplo, por Astarita (1996) y Xu et al. (1999) (citados en Bliemer et al., 2004).

Los autores que formulan analíticamente el problema de asignación dinámica de tráfico en una red urbana y plantean una solución, en un marco de optimización en equilibrio del usuario de Wardrop (1952), pero en un escenario dinámico, comienzan con el planteamiento del problema en tiempo continuo, pero Jang et al. (2005) comenta que lo resuelven como un problema de variable en tiempo discreto, ya que el período de análisis es mediante pequeños intervalos de tiempo. Otra razón es el carácter discreto del volumen de tránsito al propagarse por la red. Algunos de los modelos entregan resultados de patrones de viaje en la red poco realistas, “pequeños paquetes” de tránsito no divisibles, en algunas ocasiones con valores no enteros, ya que cada “paquete” es tratado como un intervalo más que como un “bloque” de tránsito (Ibid). Jang et al. (2005) presentan un modelo de asignación dinámica de tráfico en términos de variables de tránsito en tiempo discreto mediante inecuaciones variacionales basado en la ruta.

Los modelos analíticos ADT se formulan como:

- Modelos con funciones de viaje con base en el arco.
- Modelos de celdas de transmisión y/o arcos de transmisión.
- Modelos con base en el arco, derivados de relaciones simplificadas de seguimiento de vehículos (teoría microscópica del tránsito).
- Modelos formulados con base en la ruta.
- Modelos que convergen hacia estados de equilibrio como los de equilibrio del usuario (DUE) ó del sistema óptimo (DSO), ó los de “punto fijo” que buscan establecer una condición de orden “equivalente” al equilibrio (aplicación del Teorema de Punto Fijo).

Algunas propiedades de los modelos de asignación de tráfico dinámicos están descritas en Ortúzar y Willumsen (2011) para garantizar una correcta propagación de los flujos en la red: flujos no negativos, conservación del flujo, propagación bajo la regla FIFO, tiempo de viaje mínimo, tiempo requerido para la disipación de filas, restricción de capacidad y causalidad (Heydecker y Addison, 2005; citados en Ortúzar y Willumsen, 2011). Mun (2007) y Carey et al. (2003) refieren tales propiedades a modelos de desempeño del tráfico, para el primer autor, y funciones de tiempo de viaje en el arco, para los últimos, útiles en modelos ADT. Iryo (2013) revisa y discute la existencia, unicidad, estabilidad y robustez de las metodologías que resuelven problemas de ADT.

El principio del equilibrio del usuario de Wardrop de selección de ruta ampliado a los problemas de DUE, se expresa así en Ortúzar y Willumsen (2011):

“Bajo condiciones de equilibrio en redes congestionadas con variación del tráfico en el tiempo, en cada instante, los costos de los viajeros en las rutas usadas son iguales y menores a las rutas no usadas”.

En problemas de planificación de transporte regional es aceptable usar la asignación estática, que con una apropiada validación de la red puede dar resultados útiles. Pero muchas otras aplicaciones como: sistemas de control en tiempo real, que trabajan con ITS; modelación de emisiones; modelación de operación de tráfico; etc., al ser modeladas con el enfoque estático, no entregan resultados suficientemente exactos. En estos casos, se requiere disponer de un procedimiento dinámico, que represente el comportamiento de la selección de la ruta y los resultados del desempeño de la red (congestión, velocidades, etc), así como los movimientos de los vehículos a lo largo de sus rutas, a medida que avanza el tiempo. En cada tiempo t de la simulación, un vehículo i tendrá una ubicación x_{it} , una velocidad v_{it} , etc. Lo anterior pertenece a procesos de microsimulación con asignación dinámica (Meyer y Miller, 2001).

Los modelos de asignación dinámica pueden ser probabilísticos en términos de simulación de la selección de la ruta del usuario y/o, en la determinación del tiempo de viaje del vehículo en un arco dado, o pueden ser determinísticos. Se pueden resolver bajo un patrón de tráfico en equilibrio o, simplemente entregar un resultado único a partir de una distribución de posibles patrones de flujo, a la vez que pueden ser planteados en varios niveles de agregación espacio temporal (Meyer y Miller, 2001).

Especialmente, los procesos de asignación dinámica modelan flujos agregados en redes construidas en un nivel de resolución similar al que se usa con los modelos UE-D estáticos, para estimar los movimientos de los vehículos en la red. Los modelos dependientes del tiempo (que se conciben en períodos de tiempo corto) tratan el flujo que se presenta en períodos típicos de 15 minutos, para simular los movimientos de cada vehículo segundo a segundo o fracción (Meyer y Miller, 2001).

Una de las maneras de validar la precisión de los procesos de asignación es comparar los volúmenes estimados, con aforos tomados en puntos clave de la red. Los puntos clave son seleccionados mediante el uso de líneas de pantalla (o puntos obligados de paso entre zonas), que dividen corredores de viaje entre segmentos, que podrían ser cruzados por esos viajes. El planificador puede luego comparar los volúmenes obtenidos de los aforos actualizados, con los volúmenes estimados para determinar el nivel al cual el modelo replica los volúmenes de viaje estimados (Meyer y Miller, 2001).

Equilibrio de Beckmann (1956) dinámico. Las redes de transporte dinámicas con el enfoque de equilibrio fueron pensadas desde los 50's, cuando Beckmann y McGuire y Wisten las publicaron en su libro “Studies in the Economics of Transportation” en 1956, al tiempo que presentaron el programa matemático de optimización que transforma los principios de equilibrio del usuario y el sistema óptimo (también conocido como equilibrio social), propuestos por Wardrop en 1952, en el contexto de ciertas funciones de costo del arco crecientes con

respecto al flujo en el arco. Los autores mencionados incluyen en la conclusión lo siguiente (Boyce et al., 2005: página 8):

*“algunos problemas no resueltos: ... la notación del equilibrio estático del flujo en la red podría estar pensada de forma limitada... mientras el mecanismo del equilibrio se aplica con cargas (viajes O-D) durante períodos relativamente cortos, de forma similar podría verse un modelo ampliado que contribuya a una mejor comprensión del mismo patrón temporal...
...no es difícil, escribir formalmente las condiciones de equilibrio adicionando subíndices de tiempo...
... para un modelo dinámico, esto simplemente hace el análisis más complicado sin mucha explicación de qué es nuevo. La comprensión de los aspectos dinámicos del tráfico depende realmente de entender la manera de sustituir la demanda en el tiempo”*

Aunque Beckmann et al. (1956) no formularon los modelos de redes de tráfico dinámicas, ellos manifestaron su importancia (Boyce et al., 2005).

Boyce et al. (2005) hacen referencia a Yagar (1971), Hurdle (1974) y Merchant y Nemhauser (1978 a, b) como los primeros en presentar modelos dinámicos con flujos explícitos. Muchos trabajos de investigación se desarrollan con base en los trabajos de Merchant y Nemhauser (1978 a, b) pues fueron pioneros en considerar la selección de rutas dinámicas en redes generales. Estos mismos autores estudiaron sistemas dinámicos de redes optimizadas con un solo destino, aunque en sus trabajos no citan a Beckmann et al. (1956), sí hacen referencia a los trabajos publicados por Dafermos y Sparrow (1969). Mahmassani y Herman (1984), quienes sí citan a Beckmann et al. (1956) y se fundamentan en el trabajo de Hendrickson y Kocur (1981), generalizan el modelo de asignación de tráfico en la situación en la cual un usuario puede adaptarse a la congestión anticipando su salida y cambiando la ruta.

Posteriormente, Carey (1987), con referencia en los trabajos de Beckmann et al. (1956), presenta un programa matemático convexo de una red de tráfico optimizada como un sistema dinámico que podría manejar múltiples destinos y múltiples usuarios cotidianos (Boyce et al., 2005).

Más sobre la clasificación de modelos ADT y sus propiedades de selección de viajes se puede consultar en la revisión presentada por Szeto y Wang (2012).

Modelos ADT-DUE-DSO según su resolución y temporalidad. A continuación, se presenta el estado del arte de la investigación de los modelos ADT, de acuerdo con el detalle de la información entregada y su enfoque de temporalidad:

- *Asignación de tráfico de equilibrio DUE-DOS o asignación dinámica de tráfico (ADT).* Su objetivo es formulado para la selección de hora de salida, ruta o ambas, con demanda fija o elástica en el contexto

analítico y de simulación. En este grupo se incluyen investigaciones que modelan la fila y la propagación del flujo corriente arriba de una vialidad o arco de red. A continuación, se mencionan publicaciones recientes que ofrecen un completo estado del arte.

- Long et al. (2016) reformulan un problema matemático de selección simultánea de tiempo de salida y ruta usuario-óptimo dinámico, DUO-SRDTC, por sus siglas en inglés (Dynamic User Optimal-Simultaneous Route-and-Departure Choice), como un sistema de ecuaciones no lineales, mediante IV (véase en Friesz et al., 1993; Szeto y Lo, 2004; Mun, 2011; Han et al., 2013; Han et al., 2013 b, c), con base en el costo generalizado de viaje O-D. La solución se realiza con el método descendente, tal como el Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno y el algoritmo de Frank-Wolfe (Bazaraa et al., 2006).
- Ngoduy et al. (2016) formulan un modelo DNL para evitar filas densificantes y reducir o eliminar la congestión, mediante un conjunto de restricciones lineales, con base en el modelo de ondas cinemáticas, KWM, por sus siglas en inglés (Kinematic Wave Model), desarrollado por Lighthill y Whitham (1955) y Richards (1956), autores identificados con la sigla LWR. La propagación se modela combinando el modelo de arcos de transmisión, LTM, por sus siglas en inglés (Link Transmission Model) con el modelo de celdas de transmisión, CTM, por sus siglas en inglés (Cell Transmission Model), desarrollado por Daganzo (1994, 1995a). Lo y Szeto (2002) desarrollan un modelo tipo CTM, el cual nombran modelo de transmisión de doble régimen; en este último el objetivo es dar seguimiento a la longitud de la fila en el espacio y el tiempo.
- Han et al. (2015) formulan un modelo matemático de optimización binivel para el control de señales de semáforo en una red de tráfico; el problema inferior es un problema matemático de selección simultánea de tiempo de salida y ruta de equilibrio del usuario dinámico, DUE-SRDTC, por sus siglas en inglés (Dynamic User Equilibrium- simultaneous route and departure time choice) (Friesz et al., 1993), con un subproblema DNL embebido, que modela las filas densificantes con base en el modelo LWR; ellos formulan el problema como de IV diferencial y desarrollan un algoritmo de punto fijo, entre otros procesos heurísticos.
- Gentile (2015) propone el modelo de transmisión de arco general, GLTM, por sus siglas en inglés (General Link Transmission Model) (Gentile, 2010b) para simular el tráfico en una red urbana, mediante un modelo de flujo macroscópico, con dos nuevos modelos que amplían el modelo KWM y el diagrama fundamental no lineal, dentro de un ADT-DUE (Bellei et al., 2005; Gentile et al., 2005; Gentile et al, 2007); Gentile usa un método de gradiente proyectado para resolver los modelos propuestos y el equilibrio dinámico.
- Yildirimoglu y Geroliminis (2014) incorporan el enfoque del diagrama fundamental macroscópico, MFD, por sus siglas en inglés (Macroscopic Fundamental Diagram) a un ADT; establecen condiciones de equilibrio dinámico; desarrollan una región basada en un modelo de selección de ruta para integrarla a una red de escala grande, la cual modelan con el MFD múltiple para regiones diferentes.

- *Modelos de asignación quasi-dinámicos (QADT)*. Los TAP con restricciones de capacidad con filas residuales son referidos como QADT (Bliemer et al., 2014). Este enfoque se apoya en la teoría de flujo de tráfico para estimar el tiempo de viaje en las rutas óptimas (Nakayama y Connors, 2013) y definir la dinámica del flujo en la red, que sean consistentes con la teoría de filas, en vez de utilizar funciones de tiempo de viaje dependientes del tiempo. Parten del supuesto de que el flujo y el tiempo de viaje en el arco vial dependen de la fila vertical² y la propagación de las ondas de tráfico (Bliemer et al., 2012, 2014). Varias investigaciones se basan en el TAP estático restringido a la capacidad para estimar, por ejemplo, el flujo de salida del arco. Bliemer et al. (2014), Nakayama y Connors (2013) y Bliemer et al. (2012) presentan el estado del arte y explican el enfoque quasi-dinámico. En el capítulo 3 se describen algunos QADT por incluir modelos de fila en el cálculo del tiempo de los arcos y la rutas.

- *Problema de asignación de tráfico dependiente del tiempo*. Es una forma más general de ADT o TDTAP que incorpora la variable de tiempo en intervalos menores a una hora (Nakayama y Connors, 2013) o períodos grandes tal como períodos diarios (Friesz et al., 2001). Los resultados pueden ofrecer una resolución intermedia entre un problema TAP estático aplicado en períodos de tiempo discreto y modelos ADT continuos. El modelo se resuelve en tiempo discreto; algunos autores refieren la asignación de tráfico instantánea (Ran y Boyce, 1996); otros a redes en un marco de horizonte de tiempo continuo (Peeta y Mahmassani, 1995). Otras referencias son: Ziliaskopoulos (2000), Lam y Yin (2001), Peeta y Ziliaskopoulos (2001), Chabini (1998), Huang y Lam (2002).

El problema DUE estocástico (DUE-S) ha sido desarrollado por investigadores, los cuales amplían el primer principio de Wardrop (Smith, 1993; Heydecker y Addison, 1996) al caso dinámico DUE, donde los costos percibidos por los usuarios son modelados como variables aleatorias. Bellei et al. (2005) formulan el DUE-S estocástico como un problema de optimización de punto fijo en términos de la tasa de flujo y el costo (tiempo de viaje y costo generalizado) del arco, modelados como una función continua que depende del tiempo, cuyo desempeño temporal se actualiza en forma continua en un período de evaluación dentro de un día. Los modelos de desempeño de arco macroscópicos están fundamentados en el paradigma de fluidos, relacionados con modelos hidrodinámicos, donde los vehículos se representan como partículas de un fluido compresible (Gentile, 2005). La formulación ADT-DUE-S se realiza para redes congestionadas donde se modela la selección de ruta como una probabilidad, y se presenta un algoritmo solución deducido de una función Logit, como una versión dinámica del algoritmo de Dial (1971). Otros trabajos complementarios permitieron desarrollar ampliamente este enfoque y producir el programa de pronóstico de tráfico en tiempo real OPTIMA, (Optimal Path Travel Information for Mobility Actions) entre otros se menciona a Gentile et al. (2005); Gentile et al. (2007); Gentile, 2010; Gentile y Meschini (2011); PTV Group (2012).

² Algunos modelos de filas usan el concepto de fila vertical o fila residual, que asumen la formación tipo “pila” de los vehículos antes del cuello de botella, acceso a una intersección o salida de un arco, lo cual permite que más vehículos circulen por el arco, y por lo tanto no ocupan espacio (Bliemer et al., 2014).

La selección de ruta en los modelos ADT se clasifica en: Modelos DUE reactivos y DUE predictivos (Han et al., 2015). La diferencia se da en la temporalidad de la decisión, es decir, en los DUE reactivos, los viajeros eligen las rutas que minimizan el costo en función del tiempo de viaje instantáneo; mientras en los DUE predictivos, los viajeros eligen las rutas que minimizan el costo de viaje actual o real del período simulado (Yildirimoglu y Geroliminis, 2014).

1.4. Modelos de asignación de tráfico dinámica en macro, micro y meso-simulación

Los modelos de ADT que representan el mecanismo de carga de la red, una vez que se realiza la selección de ruta, son abordados con programas de macro, meso y microsimulación; estos últimos gozan de mayor popularidad por la recreación del movimiento de cada vehículo que transita en la red.

- Los modelos ADT de **microsimulación** se basan en los modelos de flujo de tráfico de seguimiento vehicular, aceptación de brechas, cambio de carril, selección de carril, entre otros, y en un proceso de selección de ruta, en muchos de ellos desarrollado mediante procesos iterativos de simulación. El fundamento de los microsimuladores de tráfico, con aplicaciones de ADT, se encuentra ampliamente explicado en Barceló (2010). A continuación, se listan y describen brevemente los más reconocidos y en las referencias se informa el sitio web con información disponible de cada programa:

- CORSIM (CORridor SIMulation software)
- INTEGRATION (Van Aerde, M. 1994)
- AIMSUN2 (Barceló et al., 1994, Barceló, 2010)
- VISSIM (Barceló, 2010)
- PARAMICS (Barceló, 2010)
- DRACULA: A microscopic, day-to-day dynamic framework for modelling traffic networks (Liu et al., 1999, Barceló, 2010)
- MITSIM (Yang y Koutsopoulos, 1996)
- CUBE AVENUE DTA
- DynusT
- Dynameq (por INRO)³
- DynaTAIWAN⁴

³ Florian et al. (2008) presentan un modelo ADT de simulación de tráfico con base en las investigaciones de Mahut et al. (2004), Astarita et al. (2001) y Mahut (2000), enfocado a la microsimulación, ya que realiza la simulación de eventos discretos y de movimientos de vehículos individuales, con la intención de obtener resultados más precisos y menor esfuerzo de cómputo (Barceló, 2010).

⁴ Es un modelo de simulación basado en el vehículo, incluye auto, bus, motocicleta y camión. Los vehículos se mueven en el arco por medio de relaciones de flujo macroscópico (Modelo de Greenshields) donde la velocidad de cada tipo de vehículo es ajustada. En las intersecciones se realiza un proceso de transferencia controlado por varios factores: tasa de flujo de saturación, capacidad posible y tiempo de verde posible. En flujos discontinuos se establecen procesos de derecho de paso de acuerdo con la estrategia de control prevaleciente (Hu et al., 2006).

- Otros autores describen modelos de simulación que cargan los viajes de un modelo ADT en redes de mayor tamaño, respecto de los microsimuladores, cuyo enfoque es **mesoscópico**, los cuales son menos precisos en la representación del comportamiento del tráfico y demandan menos sobrecarga de cómputo. El objetivo es obtener la representación del tráfico con el seguimiento del fenómeno de la congestión. Algunos de los siguientes programas de simulación de tráfico dinámicos, con enfoque mesoscópico, son relacionados principalmente por Florian et al. (2008) y Barceló (2010), entre otros (en las referencias se informa el sitio web con información disponible de cada programa):
 - CONTRAM (CONTinuos TRaffic Assignment Model) (Leonard et al., 1989). Desarrollado por el TRL, por sus siglas en inglés (Transport Research Laboratory). Combina una forma de simulación microscópica de cantidad de tráfico llamado ‘paquetes’ mediante una analogía con redes de comunicaciones, con un modelo macroscópico de tráfico dependiente del tiempo. Incluye la estimación de la matriz dinámica y facilidades para modelar ITS (Taylor, 2003).
 - DYNASMART (Jayakrishnan et al., 1994; Mahmassani, 2001) (University of Texas de Austin). “DYNASMART-X es un programa de simulación de Sistemas de Predicción y Estimación de Tráfico en tiempo real (Traffic Estimation and Prediction Systems Programm, TrEPS) para soporte efectivo de los Sistemas avanzados de operación de tráfico, ATMS, por sus siglas en inglés (Advanced Traffic Management System) y, Sistemas avanzados de información al viajero, ATIS, por sus siglas en inglés (Advanced Traveller Information System). DYNASMART-P es un programa de análisis de redes dinámicas y una herramienta de evaluación concebida y desarrollada en la University of Texas en Austin.
 - DynaMIT (Ben-Akiva et al., 1997, 2001, 2002) (<http://web.mit.edu/> Massachusetts Institute of Technology). DynaMIT es un sistema de cómputo en tiempo de real que estima el tráfico, predice y genera información al viajero y guía de ruta. Es un soporte para la operación de ATIS y ATMS en Centros de Gestión de Tráfico (Traffic Management Centers, TMC). Es patrocinado por la Administración de Carreteras Federales de Estados Unidos de América, FHWA, por sus siglas en inglés (Federal Highway Administration) con Oak Ridge National Laboratories (ORNL) como el operador del programa. DynaMIT es el resultado de aproximadamente 10 años de investigación intensa y desarrollo en el Intelligent Transportation Systems Program del MIT (Massachusetts Institute of Technology). Para mayor profundización se referencia la tesis MIT 2002 de Srinivasan Sundaram, tutorada por Moshe Ben-Akiva y Haris N. Koutsopoulos (Barceló, 2010).
 - TRANSIMS basado en la teoría de autómatas celulares (Nagel y Schreckenberg, 1992) fue desarrollado por Los Alamos National Laboratories en Estados Unidos de América.
 - METACOR (Diakaki y Papageorgiou, 1996)
 - MEZZO (Burghout, 2004; Burghout et al. 2005) (citado por Barceló, 2010)

- METROPOLIS. Modular system for dynamic traffic simulation, de Palma et al. (2005). Propone un ambiente interactivo que simula el tráfico de automóviles en áreas urbanas grandes. El corazón del sistema es un simulador dinámico en el que se integra la salida de viajeros cotidianos y comportamientos de selección de ruta sobre redes grandes; se asume que los viajeros minimizan una función de costo de viaje generalizado, la cual depende del tiempo de viaje y la demora del itinerario.
- Traffic Estimation and Prediction Systems (TrEPS).
Es un proyecto de investigación de asignación dinámica de tráfico patrocinado por el Departamento de Transporte de Estados Unidos de América de la Federal Highway Administration, FHWA). Comprende el TrEPS y TrEPS-P. Se basa principalmente en DynaMIT y DYNASMART.
- DTASQ, después Dynameq. (Barceló, 2010) (Mahut, 2000; Florian et al., 2001, 2002; Mahut et al., 2003 a, b, 2004).

La Oficina de Investigación de Transporte, TRB, por sus siglas en inglés (Transportation Research Board) realiza dos publicaciones en las que explican ampliamente los fundamentos, aplicación, calibración y validación de los modelos y programas de simulación, propuestos y ofrecidos por muchos de los investigadores antes mencionados y otros; esto puede encontrarse en Sloboden et al. (2012) y Chiu et al. (2011).

- Los siguientes se clasifican como **macrosimuladores** (en las referencias se informa el sitio web con información disponible de cada programa):
 - METANET (Messmer, A. y Papageorgiou, M., 1990; Messmer, 2000a) (citado en Barceló, 2010)
 - OPTIMA (Optimal Path Travel Information for Mobility Actions) es un modelo de carga de red dinámico macroscópico desarrollado por un grupo de investigadores italianos y alemanes. Este programa se ha desarrollado y comercializado recientemente por SISTeMA. El programa recibe información de sensores cada cinco minutos, vehículos flotantes y de transporte público. Un centro de procesamiento distribuye órdenes a centros de control y servicios de información o por internet para los viajeros. Esto se hace por estimación previa de patrones de tráfico diario mediante el uso de un modelo de asignación dinámica macroscópica dentro del día (within-day macroscopic Dynamic Assignment, Bellei et al., 2005) en equilibrio. El sistema usa estimaciones de corto tiempo de la evolución del tráfico y el tiempo de viaje con DNL macroscópico, secuencial, en horizonte de tiempo (sequential, rolling horizon, macroscopic Dynamic Network Loading models).
 - INDY DTA software es un modelo de carga dinámica multiclase analítico con propagación de flujo y formación de fila dinámica (Bliemer et al, 2004; Bliemer, 2007).
 - MARPLE es un software de asignación de tráfico dinámico realizado en MATLAB (Bliemer y Taale, 2006; Meijdam et al., 2005).

- STAQ es un modelo estático (los autores lo denominan semi-dinámico) que analiza los efectos de la congestión en convergencia, filas y propagación del flujo (Brederode et al., 2018); hace parte del software OmniTRANS (programa de planeación de transporte multimodal y multitemporal).

1.5. Modelos DUE con base en la teoría de juegos

El campo de investigación de la modelación del problema asignación de tráfico formulado como programa matemático de optimización binivel (TAP-BL) está fundamentado en la teoría de juegos. En particular los problemas de asignación de tráfico de equilibrio del usuario aplicados a problemas de diseño de redes de transporte (NDP) se formulan como programas matemáticos de optimización cuyo juego es necesario identificar y aplicar en forma apropiada en el problema en cuestión. A continuación, se presenta el contexto general del problema DUE formulado en la teoría de juegos, el cual forma parte de los problemas de redes, como un problema particular de los problemas TAP-BL.

El problema de equilibrio de Wardrop (1952) puede ser representado mediante varios tipos de juegos, en los que se evalúan diversas estrategias, y en las que participan agentes, ya sean entidades encargadas de la gestión del transporte, públicas o privadas, así como usuarios o viajeros que toman decisiones, e imponen condiciones de viaje y desempeño de la red. Dada la complejidad del sistema de transporte, existe un abanico de situaciones que representan estrategias de planeación, operación y administración de la red de transporte. Algunas de éstas involucran la ampliación de vialidades existentes, la implementación de nuevas vías o la asignación de carriles para uso exclusivo del transporte público, sujetas a limitaciones presupuestales de inversión; otras pueden representar la definición de planes y tiempos de ciclos y señales de semáforos óptimos en una red semaforizada; incluso la aplicación de tasas impositivas para definir el precio de la congestión; la optimización de la capacidad de las vías para disminución de gases contaminantes y ruido, etc. El juego de la oferta y la demanda en una estrategia específica involucra los elementos propios de la red, las restricciones que imponen los participantes en el juego, la secuencia de las decisiones, la cooperación o no entre los jugadores, entre otros. Esto define la forma del juego y su formulación.

La teoría de juegos es un recurso estratégico para tratar con situaciones que involucran a varias entidades cuyas decisiones son influenciadas por aquellas decisiones que ellos esperan de otras entidades (Raouf y Raweshidy, 2010). Estos autores definen la teoría de juegos como el estudio de la forma como se resuelve la situación competitiva de las interacciones entre los *jugadores* o *agentes* involucrados en el juego, orientada por los objetivos (por ejemplo, estrategias de optimización de la red de tráfico) y preferencias de esos jugadores (dígase, comportamiento en la selección de ruta) y, en la estrategia de cada jugador. Una estrategia es la forma del juego que guía a un agente para tomar acciones, en respuesta a las correspondientes que tomó y espera tomarán los otros agentes.

En juegos no cooperativos se modelan políticas y preferencias de decisores en el campo del transporte, ya que enfrentan situaciones en las que se presentan múltiples participantes, cuyos objetivos totales o parciales

compiten. La formulación matemática de todos los juegos es similar a un problema de optimización que incluye más de un objetivo, ya sea explícita o implícitamente, y las variables decisión son compartidas por objetivos diferentes (Hollander y Prashker, 2006). Estos autores hacen una amplia revisión de la teoría de juegos no-cooperativos aplicada al análisis de transporte. Además, presentan una clasificación con dos enfoques, conceptual y aplicado, e identifican los jugadores, la estrategia y/o variables de decisión, los objetivos y forma del juego respecto de la realidad. Igualmente, resaltan la importancia de la aplicación de los problemas de programación binivel, en ese mismo campo, los cuales son juegos Stackelberg formulados como programas matemáticos con restricciones de equilibrio (MPEC), cuya estructura es familiar en Matemáticas.

Algunos investigadores de transporte aplican el equilibrio de Nash en el cual hay un conjunto de estrategias, cuya característica es que ningún jugador puede incrementar su beneficio por su cambio de estrategia, mientras los otros jugadores no cambien su estrategia (equivalente al equilibrio del usuario de Wardrop). El modelo de Wardrop fue tratado en Zuhovitskii et al. (1973) (Fisk, 1984), en el cual las condiciones de equilibrio Nash para un juego no-cooperativo de N-personas son equivalentes a aquellas de un juego de dos personas suma cero, en el que cada viajero es un jugador, el cual a su vez tiene una formulación mediante inecuaciones variacionales equivalente. Posteriormente Smith dedujo la formulación de Wardrop como deinecuaciones variacionales en 1979 (Ibid).

El *juego Stackelberg* (1952) es un problema de teoría de juegos matemáticamente idéntico al problema de programación binivel y se presenta de forma general en las ecuaciones (1.1) (Vicente y Calamai, 1994).

$$\begin{aligned} \min_x F(x, y) & \qquad \qquad \qquad (1.1) \\ \text{Sujeto a } g(x, y) & \leq 0, \\ y \in \arg \min \{f(x, y) : h(x, y) & \leq 0\}, \end{aligned}$$

y es un caso particular del problema de programación binivel, por la forma de minimizar la función de nivel superior. Vicente y Calamai (1994) citan a Savard (1989) para ampliar más este tipo de problemas de teoría de juegos. Además, describen las propiedades de los problemas de programación binivel mediante las condiciones de optimalidad, la complejidad y proponen algunos procesos de solución.

En el juego Stackelberg, un jugador (dígase el líder) sabe cómo los otros jugadores (el seguidor) van a responder a alguna decisión suya. Fisk (1984) cita un ejemplo de un problema de optimización de tiempos de señal de semáforo, donde el objetivo del operador de la red vial es minimizar la función objetivo de la red, sea el tiempo de viaje o el consumo de combustible, con viajes O-D fijos, pero los viajeros seleccionan rutas de la red con el equilibrio del usuario. Éste ha sido el fundamento de algunas investigaciones en el campo del control óptimo de señales de semáforo en redes viales y es formulado analíticamente como un problema de programación binivel, presentado en las ecuaciones (1.2).

$$\min_{s,f} P(s, f) = \sum_l f_l c_l(f, y) \quad (1.2)$$

Sujeto a:

$$z(f, y) = \min_f \sum_l \int_0^{f_l} c_l(x, y) dx$$

Donde y es un vector de variables de control; f es un vector de volúmenes de tráfico; l es un índice de los arcos; y c es el tiempo o costo de viaje en el arco. La función objetivo del operador de la red de semáforo (la autoridad) está en el nivel superior; el problema del seguidor está en el nivel inferior y corresponde al problema de asignación de tráfico (Hollander y Prashker, 2006).

Nie et al. (2006) presentan un amplio estado del arte sobre problemas de optimización dinámicos, formulados como juegos Stackelberg. Ellos formulan matemáticamente juegos Stackelberg con información retroalimentada (feedback) como programas binivel dinámicos en tiempo discreto y proponen estrategias de solución con múltiples jugadores para seguidores dependientes e independientes. También realizan algunos ejemplos que guían enfoques de solución de interés para la presente investigación. Además, su formulación es la base de la estructura matemática del programa formulado en esta tesis.

Hollander y Prashker, (2006) citan varios autores con trabajos sobre sistemas de transporte planteados en forma de juegos, por ejemplo: Programa suma cero, programa Stackelberg, programa Nash, entre otros. Algunos problemas son orientados a la planeación y operación de sistemas, entre otros, se plantean los siguientes:

- Selección de ruta y nivel de servicio o costo.
- Diseño de tiempo de semáforos y selección de ruta o viceversa.
- Selección de ruta en sistemas de vías con cobro.
- Diseño de redes con cobro.
- Cobro de pasaje y red de operación de transporte público de pasajeros.
- Varios parámetros de diseño de redes y selección de ruta.
- Políticas de estacionamiento, modo y destino.

1.6. Asignación dinámica de tráfico como programación matemática binivel, ADT-BL

Los problemas de programación binivel son problemas de optimización matemática donde el conjunto de todas las variables es dividido en dos vectores, por ejemplo: x y y ; donde x se selecciona como una solución óptima de un segundo problema de programación matemática parametrizado en y . Así, el problema de programación matemática binivel es jerárquico en el sentido que sus restricciones son definidas en parte mediante un segundo problema de optimización (Dempe, 2002). La formulación original apareció en 1973 en un artículo de Bracken y McGill (Vicente y Calamai, 1994), y desde 1980 se han realizado grandes esfuerzos para entender los conceptos fundamentales asociados con los programas binivel. Para profundizar en la programación binivel sin

variabilidad en el tiempo, se citan a: Vicente y Calamai (1994), Dempe y Zemkoho (2011, 2013), Dempe (2002), Bard (1998), Anandalingam y Friesz (1992), Migdalas et al. (1998), Dempe (2003), Migdalas y Pardalos (1996).

Un área de interés particular de los problemas de optimización binivel son los sistemas de transporte, en los que se han desarrollado varias aplicaciones, esto sin variabilidad del tiempo. A continuación, se listan algunos de los más abordados:

- Problemas de redes de transporte. Véase en: LeBlanc y Boyce (1986), Ben-Ayed et al. (1988, 1992), Marcotte (1986), Marcotte y Marquis (1992), Suh y Kim (1992), Constantin y Florian (1995), y otros; citados en Vicente y Calamai (1994).
- Problema de estimación de demanda en el ámbito del transporte. Véase en: Florian y Chen (1991, 1993, 1995), Tobin y Friesz (1986); citados en Vicente y Calamai (1994).
- Localización de servicios con competencia de precios de envíos en redes de transporte. Véase en: Miller et al. (1992); citados en Vicente y Calamai (1994).
- Problema de diseño óptimo para diseño de ingeniería. Véase en: Kocvara y Outrata (1992, 1993) entre otros; citados en Vicente y Calamai (1994).
- Manejo de la congestión. Véase en: Hearn y Ramana (1998), Larsson y Patriksson (1998); citados por Colson et al. (2007).
- Manejo del transporte de materiales peligrosos (Kara y Verter, 2004).
- Problemas de planeación de transporte y planeación del tráfico diversos con congestión (Patriksson y Rockafellar, 2002).

Algunos trabajos que tratan ampliamente los problemas de programación binivel aplicados a los sistemas de transporte en el contexto estático son los siguientes (Colson et al., 2007): Fisk (1984), Ben-Ayed (1990), Marcotte (1986), Marcotte y Marquis (1992) y Migdalas (1995).

Los problemas de ADT, continuos y discretos, adoptan el enfoque binivel (ADT-BL) para la formulación y solución de patrones dinámicos de viaje, tanto en el contexto analítico, de simulación y del modelo de celdas de transmisión (CTM) (Daganzo, 1994, 1995a). Lin (2011), Karoonsoontawong y Waller (2010) y Lin et al. (2011) formulan el problema de diseño de red dinámica, DNDP, por sus siglas en inglés (Dynamic Network Design Problem) continuo, con el modelo CTM como un programa matemático binivel. También presentan una revisión de los trabajos sobre NDP y ADT.

Farahani et al. (2013) hacen una amplia revisión de trabajos sobre diseño de redes relacionados con decisiones estratégicas y tácticas que consideran la topología de la red, con énfasis en redes de diseño de transporte, y presentan una breve lista de aquellos dependientes del tiempo. Estos últimos trabajos formulan un objetivo que

maximiza el problema del excedente del consumidor⁵ de viajes en el nivel superior, el problema DUE en el nivel inferior, con demanda elástica dependiente del tiempo, en los que se busca la expansión de la red con cuota (O'brien y Szeto, 2007; Lo y Szeto, 2009). Farahani et al. (2013) describen la estructura de los problemas binivel, de diseño de redes dependientes del tiempo, en un marco de decisiones secuencial dentro de un horizonte de planeación, por ejemplo $T = [1, \eta]$, el cual se adapta y presenta en las ecuaciones (1.3a) a (1.3d).

Problema superior:

$$\min_x F(x_1, \dots, x_\tau, \dots, x_\eta, y_1(x_1), \dots, y_\tau(x_\tau), \dots, y_\eta(x_\eta)) \quad (1.3a)$$

$$\text{s.t } G(x_1, \dots, x_\tau, \dots, x_\eta, y_1(x_1), \dots, y_\tau(x_\tau), \dots, y_\eta(x_\eta)) \leq 0 \quad (1.3b)$$

donde $y_t(x_t)$ es implícitamente determinado en el siguiente problema inferior:

$$\min_y f(x_1, \dots, x_\tau, \dots, x_\eta, y_1, \dots, y_\tau, \dots, y_\eta) \quad (1.3c)$$

$$\text{s.t } g(x_1, \dots, x_\tau, \dots, x_\eta, y_1, \dots, y_\tau, \dots, y_\eta) \leq 0 \quad (1.3d)$$

Donde F y x_τ son la función objetivo y las variables de decisión del problema superior, respectivamente; G es una función de las variables de decisión en la restricción del nivel superior; f y y_τ son la función objetivo y las variables de decisión del problema inferior y g es la función de las variables de decisión de la restricción del nivel inferior. $y_\tau(x_\tau)$ se denomina la función respuesta, la cual depende de la reacción del usuario en términos de un patrón de flujo para cada variable de diseño x_τ de la red. $y_\tau(x_\tau)$ es una función implícita, entonces se describe mediante el problema inferior. Adicionalmente, $x = [x_\tau]$ y $y = [y_\tau]$ son variables de decisión del problema de optimización de la red, las cuales se modelan en un horizonte de tiempo $[0, T]$.

Algunos problemas continuos ADT-BL se resuelven con un método de gradiente reducido generalizado y los discretos con ramificación y acotamiento (Farahani et al., 2013).

En la revisión de la literatura antes mencionada y en otros trabajos se observan algunos NDP formulados como problemas binivel (NDP-BL), orientados a decisiones operacionales dependientes del tiempo, por ejemplo los que incluyen en el nivel superior políticas de control de semáforos, aumento de capacidad, ubicación de puntos de cuota, entre otros, y en el nivel inferior se formula el problema de asignación de rutas dependiente del tiempo (Chen y Hu, 2009; Chen et al., 2004). Otros trabajos formulan problemas de diseño de la red binivel como un problema MPEC en el cual el problema inferior es DUE (Lin, 2011).

⁵ Corresponde al precio máximo que cierto viajero estaría dispuesto a pagar antes de dejar de usar una vía o un transporte (Oppenheim, 1995)

Chen y Ben-Akiva (1998) presentan una formulación binivel como un problema de equilibrio Stackelberg, en un juego no-cooperativo para el problema combinado de control-DUE, que halla la mejor estrategia de control basada en el tiempo de verde efectivo, expresado mediante las ecuaciones (1.4a) a (1.4d).

$$\min_g Z_g = \int_0^T \sum_n \sum_{r,s} \sum_k c_k^{rs}(\tau) h_{nk}^{rs*}(\tau) d\tau \quad (1.4a)$$

$$\text{s.t. } g_i^m(\tau) \in G \quad (1.4b)$$

$$\int_0^T \sum_n \sum_{r,s} \sum_k E_{nk}^{rs*}(\tau) [h_{nk}^{rs}(\tau) - h_{nk}^{rs*}(\tau)] d\tau \geq 0 ; \forall h_{nk}^{rs}(\tau) \in K \quad (1.4c)$$

Donde

$$E_{nk}^{rs}(\tau) = \left[h_{nk}^{rs}(\tau) - D_n^{rs}(\tau) P_{nk}^{rs}(\tau) \right] \frac{\partial c_k^{rs}(\tau)}{\partial h_{nk}^{rs}(\tau)} \quad (1.4d)$$

$P_{nk}^{rs}(\tau)$ = probabilidad de seleccionar la ruta k entre el par r-s por los usuarios de clase n que parten de r hacia s en el tiempo τ

$h_{nk}^{rs}(\tau)$ = flujo de usuarios de clase n en la ruta k que parten de r a s en el tiempo τ

$D_n^{rs}(\tau)$ = tasa de demanda de usuarios de clase n por el par r-s en el tiempo τ

$\frac{\partial c_k^{rs}(\tau)}{\partial h_{nk}^{rs}(\tau)}$ = costo marginal de la ruta con respecto al flujo de salida de la ruta del usuario clase n

$c_{nk}^{rs}(\tau)$ = costo del viaje actualizado en la ruta k entre el par r-s por los usuarios de clase n que parten de r hacia s en el tiempo τ

$g_i^m(\tau)$: tiempo de fase de verde efectivo m de la intersección i en el tiempo τ

G : conjunto de tiempos de verde factibles

K : Conjunto de rutas para todos los usuarios

En el problema de Chen y Ben-Akiva, (1998) la función objetivo minimiza la demora total de la red, sujeta a restricciones del tiempo de las fases del semáforo, del tamaño de ciclo y del mínimo tiempo de verde efectivo.

Joksimovic (2007) con fundamento en el modelo de Bliemer y Bovy (2003), formula el problema de diseño de cuota óptimo dinámico estocástico multiclase, como uno binivel y lo presenta como uno MPEC, donde las variables de diseño son cuotas por períodos de tiempo, arcos y clases de usuarios. El problema superior halla el precio y el inferior modela el DUE.

Jayakrishnan et al. (1995) formulan el problema DUE con relaciones de tráfico-flujo mediante el modelo de Greenshields (Diagrama fundamental), siendo el problema inferior la búsqueda de los flujos dependientes del tiempo.

Otros enfoques DUE-binivel se orientan a algoritmos de solución en dos niveles o anidados. Carey (2009) relaciona el contexto binivel con el enfoque de descomposición para la solución de problemas ADT, por la interacción entre el DUE y el DNL, y presenta un resumen del estado del arte.

Friesz et al. (1993), Wu et al. (1998), Zhu y Marcotte (2000), Rubio-Ardanaz et al. (2003), Lo (1999), Lo y Szeto (2002, 2004) abordan el enfoque de descomposición, en la cual se itera entre la asignación de ruta y la carga de la red dinámica hasta que se obtiene la convergencia (Carey, 2009).

Chen y Hsueh (1998) y Lam y Yin (2001) formulan un problema binivel en términos del tiempo en el arco, asumiendo que el flujo entra al arco en un tiempo t con un tiempo de viaje $s(t)$ y sale en un período de tiempo $t + s(t)$ (Carey, 2009).

Janson (1991b) y Janson y Robles (1993) formulan un problema binivel basado en el arco, como uno de optimización con variables enteras 0-1. Los intervalos son de 10 o 15 min, lo cual es grande si se considera que el tiempo de viaje en un arco puede ser mucho menor (Carey, 2009).

Yang et al. (2002) proponen un modelo de asignación de tráfico dinámico multiclase, el cual determina los flujos de tráfico dinámicos que resultan de diferentes estrategias provistas en el nivel superior (Carey, 2009).

El problema de ADT propuesto por Gentile et al. (2005) junto con el de Bellei et al. (2005) y otros, son el fundamento del programa de simulación macroscópica de ADT, conocido como PTV OPTIMA (Gentile y Meschini, 2011). El problema de Gentile et al. (2005) se asimila a uno binivel, donde el problema superior es un problema logit multinomial que determina flujos de los arcos, mediante funciones de tiempo y costo de viaje en el arco, que resultan del equilibrio de demanda y oferta, para patrones de tiempo de viaje dados, cuya función objetivo es la formulación del problema de asignación de tráfico. Mientras que el problema inferior es el problema de carga de la red dinámico lineal, que actualiza el patrón de tiempo de viaje para flujos de arco dados (Ibid) aproximado a uno continuo. Sin embargo, los autores lo resuelven como un problema de un nivel pues diseñan una función que integra ambos problemas en un solo algoritmo.

Lu (2013) y Lu et al, (2008, 2009) proponen un problema de optimización de redes combinado de optimización del valor del tiempo, VOT, por sus siglas en inglés (Value of Time) y DUE multiclase. En Lu et al. (2008) se formula como un problema DUE bicriterio que reconoce que grupos de viajeros valoran el tiempo diferente, por lo tanto la elección de ruta es diferente según cada grupo, donde se optimiza en forma combinada el tiempo de viaje y el valor del tiempo, ambos dependientes del tiempo (VOT). La solución se realiza con un algoritmo

basado en promedio sucesivos, que combina un algoritmo de costo generalizado mínimo dependiente del tiempo, con un simulador de tráfico (DYNASMART). Luego Lu (2013) extiende la solución del problema anterior, reformula el mismo problema como de inecuaciones variacionales infinito-dimensionales, cuyo problema inferior es DUE y el superior define el costo mínimo de tiempo (VOT) y los grupos de viajeros heterogéneos; y propone un algoritmo basado en Generación de Columnas, CG, por sus siglas en inglés, (Column Generation) o descomposición de Dantzing-Wolf.

Sin embargo, los problemas abordados con ADT-BL combinado con NDP son escasos. Wismans et al. (2014) presentan un NDP discreto con un enfoque multi-objetivo, para optimizar externalidades en un marco de manejo de tráfico dinámico. Han et al. (2015) presentan una formulación de juego Stackelberg diferencial como un programa matemático binivel y, lo resuelven como un MPEC; en el problema superior minimizan el costo total de la red, cuyas variables decisión son los intervalos de verde que varían en el tiempo; el problema de nivel inferior es un problema de selección simultánea del tiempo de salida y de la ruta con equilibrio del usuario (DUE-SRDTC), concebido como un modelo de señalización continuo (Han et al., 2014) para intersecciones semaforizadas, con un subproblema DNL-LWR embebido, el cual no depende de fases de señal distintas.

Dada la relevancia de la programación matemática binivel en el contexto de los problemas de diseño de redes de transporte, en los que se usa como problema inferior la función objetivo del problema de asignación de tráfico con equilibrio del usuario, algunos de ellos formulados como un problema MPEC y siendo éste tema central en el desarrollo del modelo ADT, y del modelo propuesto en esta tesis, se dedica el siguiente apartado a los fundamentos de programación binivel y sus aplicaciones en diseño de redes de transporte, campo de investigación de gran aplicación en la planeación y operación de sistemas de transporte.

1.7. Aplicación de la asignación de tráfico binivel de equilibrio del usuario en problemas de diseño de redes binivel

En esta sección se amplía el enfoque de los problemas asignación de tráfico y diseño de redes de transporte, sin variabilidad del tiempo, ámbito de aplicación e interés para la planeación, operación y evaluación de la infraestructura de transporte. Bajo condiciones matemáticas particulares los problemas de optimización binivel se estudian y resuelven transformándolos en MPEC (Nie et al., 2006), por lo tanto, se describen algunas aplicaciones MPEC que involucran el TAP-UE.

El Programa Matemático con Restricciones de Equilibrio (MPEC) es un programa binivel, donde el problema de nivel inferior es un TAP y se formula como uno de inecuaciones variacionales (IV) (Colson et al., 2007) reconocido como restricciones de equilibrio (Luo et al., 1996).

En la modelación de problemas de ingeniería con MPEC, el vector del primer nivel (o nivel superior) contiene las variables de diseño de un proceso de ingeniería, y el vector del segundo nivel (problema inferior) contiene

las variables de estado del sistema; cada inecuación interior corresponde a un problema de optimización y de equilibrio para un diseño admisible (Luo et al., 1996).

Fisk (1984) fue uno de los pioneros en presentar un modelo de optimización del control de señal de semáforo, problema representado por las ecuaciones (1.2).

Migdalas (1995) se apoya en los procesos de decisión jerárquicos de la planeación del transporte, en los cuales un organismo público en un nivel toma decisiones que buscan mejorar el desempeño de la red, mientras que, en otro nivel, los usuarios de la red deciden la ruta, el modo, el origen y el destino de sus viajes, etc. Así, la respuesta de los usuarios de la red puede predecirse, pero no ordenarse u obligarse. Por ejemplo, la entidad que hace la gestión de transporte elige los arcos que serán mejorados, pero los usuarios seleccionan las rutas que perciben como mejores. Otros ejemplos incluyen el precio para el transporte de carga, los tiempos de señal de semáforo y, la estimación de la demanda entre orígenes y destinos de una red basada en los aforos de tránsito en las vialidades, etc. Estos ejemplos se modelan como programas binivel. Si el líder controla las variables decisión $y \in Y$, el seguidor controla las variables decisión $x \in X$ y, las interacciones entre los dos niveles se modela con sus respectivas funciones de pérdida, $\phi(x, y)$ y $f(x, y)$, entonces el líder y el seguidor están en un juego duopolio Stackelberg. En éste, el líder primero elige $y \in Y$ para minimizar la pérdida de la función $\phi(x, y)$, mientras el seguidor reacciona a las decisiones del líder mediante una estrategia $x \in X$ que minimiza su función de pérdida $f(x, y)$, dentro de un completo conocimiento de las decisiones del líder. Entonces se considera el programa binivel expresado por las ecuaciones (1.5) y (1.6).

$$\text{Minimizar } \phi(x(y), y) \tag{1.5}$$

$$\text{Donde } x(y) = \underset{x \in X}{\operatorname{arg\,min}} f(x, y) \tag{1.6}$$

Migdalas (1995) enuncia que el equilibrio Stackelberg existe, si se asume que los conjuntos $X \subseteq \mathfrak{R}^n$ y $Y \subseteq \mathfrak{R}^m$ son convexos y compactos, que f y ϕ son continuas en $X \times Y$ y que la ecuación (1.6) tiene solución única $x(y) \in X$ para todo $y \in Y$.

Los problemas de las ecuaciones (1.5) y (1.6) constituyen el modelo binivel más general de planeación de tráfico, con variables y en el nivel superior, las cuales corresponden a las decisiones del planificador, y con variables de decisión x de nivel inferior, que entregan información al líder de predicciones de las reacciones de los usuarios con respecto a sus modos, rutas, destinos, etc. Migdalas (1995) presenta formulaciones binivel de diseño de redes, diseño de tiempos de semáforo y problemas de ajuste de la matriz origen-destino. En los tres casos, el problema de equilibrio del usuario de Wardrop en redes constituye el problema de nivel inferior.

Los problemas de diseño de redes de transporte están relacionados con la modificación de una infraestructura de transporte mediante la adición de nuevos arcos o la mejora de algunos existentes, con el fin de maximizar el bienestar social y/o minimizar los costos de diseño u otros. La versión continua surge cuando en un problema las variables de diseño son representadas por números reales (que representan la mejora en la capacidad) (Zhang y Gao, 2009). Los problemas de diseño de redes discretos buscan la ubicación óptima de nuevos arcos en la red (Zhang y Gao, 2009). El tercer tipo es el problema de diseño de red mixto, cuyo objetivo es encontrar la mejor opción entre el incremento de capacidad de los arcos y la ubicación de nuevos arcos a la red (Zhang y Gao, 2009). Generalmente, en los problemas de programación binivel, los analistas formulan el problema de asignación de equilibrio del usuario en el problema inferior. Tal es el caso tratado por Smith (1993), el cual formula dicho problema como uno de inecuaciones variacionales. Marcotte (1983) formula el problema de diseño de redes como un MPEC (Luo et al., 1996). El problema de diseño de redes continuo, formulado como un MPEC se expresa analíticamente en Luo et al. (1996), como sigue:

Sea $X \subseteq \mathfrak{R}^{|A|}$ el conjunto factible de mejora de la capacidad del arco x . El conjunto de flujos en el arco factibles, denotado por Y , compuesto por todos los vectores de flujo que son no negativos, y existen para cada par O-D $\forall (i, j) \in \Theta$ y cada ruta $p \in P_{ij}$, un flujo de ruta $h_p \geq 0$, tal que cumple con las ecuaciones (1.7).

$$\sum_{p \in P_{ij}} h_p = d_{ij}, \forall (i, j) \in \Theta \quad (1.7a)$$

$$f_a = \sum_{p \in P_{ij}} \delta_{ap} h_p, \forall a \in A \quad (1.7b)$$

Donde

$$\delta_{ap} = \begin{cases} 1 & \text{si la ruta } p \text{ usa el arco } a \\ 0 & \text{si la ruta } p \text{ no usa el arco } a \end{cases}$$

$\Theta \subseteq N \times N$ denota el subconjunto de pares O-D, de una red G con un conjunto de N de nodos y A de arcos;

$d \equiv (d_{ij})$ es un vector de demanda de tráfico para todos los pares (i, j) en Θ

$P \equiv \bigcup_{(i,j) \in \Theta} P_{ij}$ denota el conjunto de todas las rutas en la red que unen todos los pares O-D

Entonces el problema MPEC es formulado por Luo et al. (1996) como en las ecuaciones (1.8):

$$\text{Minimizar } \sum_{a \in A} C_a(x, f) + g(x) \quad (1.8a)$$

Sujeto a

$$x \in X, \quad (1.8b)$$

$$\text{y } f \text{ resuelve la IV } (c(x, \cdot), Y) \quad (1.8c)$$

donde

$c_a(x, f)$ es el costo unitario percibido de viaje en el arco a , expresado como una función f , siendo $f \equiv (f_a)$

el vector de flujo en el arco y x el vector de capacidad del arco a ; f_a es la variable de nivel inferior.

$C_a(x, f)$ es el costo de viaje total en el arco a ; una forma de esta función es $f_a c_a(x, f)$;

$g(x)$ representa el capital invertido y los costos de operación asociados con el vector x , donde $x \equiv (x_a)$ es el vector de capacidad del arco y x_a representa el incremento de capacidad en el arco $a \in A$; ésta es la variable de nivel superior;

$c(x, f)$ es la función vectorial valuada con componentes $c_a(x, f)$ para todo $a \in A$

Y es un poliedro limitado en $\mathfrak{R}^{|A|}$

Varios problemas de planeación y diseño en el área del transporte pueden ser formulados como un MPEC, entre éstos están:

- Problemas de diseño de redes de transporte continuo
- Problema de ajuste de demanda origen-destino
- Problema de planeación de transporte de pasajeros discreto
- Problema de localización de instalaciones

Este tema puede ser profundizado en los siguientes trabajos: Bard (1998); Colson et al. (2007); Brotcorne et al. (2008); Dempe y Zemkoho (2013), Farahani et al. (2013), Chen y Chen (2013), Wismans et al. (2014), Chiou (2015), Zhang et al. (2015) y Han et al. (2014, 2015). Ekström (2012) trata los enfoques para la solución de problemas de NDP-EU formulados como MPEC.

1.8. Modelos de propagación de flujo y modelos de tiempo de viaje

Los modelos de ADT incluyen un submodelo o proceso de carga dinámica de la red, DNL, en el que se utilizan formas analíticas o modelos de propagación que describen la dinámica del tráfico en la red. Long et al. (2011) hacen una revisión de la literatura, y redefinen las propiedades deseables de las funciones de tiempo de viaje: FIFO y causalidad. Mun (2007, 2001) explica los modelos de desempeño del tráfico para ADT que se ofrecen en la literatura y define las propiedades deseables.

Considerando el análisis macroscópico, en la literatura aparecen dos formulaciones básicas (Ban et al., 2012):

- Modelos de arco completo (WLM). Éstos conciben la propagación del tráfico mediante el cálculo de la tasa de flujo que entra, transita y sale del arco, en cada período evaluado (Heydecker y Addison, 1998, citados en Carey y McCartney, 2002). También son referidos como modelos de función de demora (Nie y Zhang, 2005a) pues usan una función de demora para calcular el flujo de salida del arco.
- Modelos de fila puntual, PQM, por sus siglas en inglés (Point-Queue Model) o fila vertical. Los modelos suponen que el flujo transita en el arco, y la congestión se representa por una fila puntual en la cabeza del arco, en cada período evaluado (Nie y Zhang, 2005 a, b). Li y Zhang (2015) presentan una revisión de la literatura y explican la dinámica de filas en redes con enfoque macroscópico. Jin (2015) relaciona los modelos de flujo de tráfico con modelos de filas porque describen la dinámica asociada con la formación y disipación de filas, tal como los modelos de celdas de transmisión (CTM), los modelos de arcos de

transmisión (LTM) y el modelo de fila de arco, LQM, por sus siglas en inglés (Link Queue Model) (cita a Jin, 2012b); y define una infraestructura puntual como un arco sin longitud pero con capacidad de almacenamiento; el autor también hace una revisión ampliada de los modelos de fila puntual. A continuación, se definen los modelos CTM, LTM y LQM los cuales son usados en la propagación del flujo por varios investigadores:

- Modelo de celdas de transmisión (cell transmission model, CTM) (Daganzo 1994, 1995a). En términos generales, este modelo divide el arco en secciones homogéneas, por donde fluye el tránsito, y se transmite de celda a celda con alguna regla de propagación.
- Modelo de arcos de transmisión (LTM) (Yperman, 2007; Gentile, 2010, 2015). La propagación del flujo en los arcos sigue un patrón continuo, fundamentado en el modelo de ondas cinemáticas (Lighthill y Whitham, 1955; Richards, 1956), suavizada mediante un diagrama triangular que tiene solo dos velocidades de onda densificante y disipante (Newell, 1993), y combinado con un modelo de nodo que se basa en teoría de filas en las intersecciones viales, para definir la transición y partición del flujo (Yperman, 2007).
- El modelo de fila de arco (LQM) (Jin, 2012b). Es un modelo de fila determinístico que considera que el tráfico en el arco es una fila; el estado de la fila es su densidad (número de vehículos por unidad de longitud) o el número de vehículos (por ejemplo, en un arco origen). La demanda (“máximo flujo enviante”) y la oferta (“máximo flujo recibiente”) de una fila son definidas mediante el diagrama fundamental del arco. El flujo de entrada y salida se calcula con funciones de flujo de intersección, que siguen reglas de convergencia y divergencia macroscópicas, las cuales se introducen en los modelos de ondas cinemáticas.

Estos modelos tienen diferentes presentaciones en el tratamiento continuo y discreto. Todos utilizan funciones de tiempo de viaje y/o funciones de costo para estimar el avance del tránsito.

Ban et al. (2012b) presentan una revisión de varios modelos de tiempo de demora y profundizan en el PQM. En problemas ADT formulados como modelos continuos de WLM y PQM, es usado ampliamente el LWR “traffic flow model” (Lighthill y Whitham, 1955; Richards, 1956), tal como en Kachani y Perakis (2009) y Perakis y Roels (2006), en los cuales se modela el tiempo de viaje del tráfico, que se comporta como un fluido y se tiene en cuenta el fenómeno de cuello de botella y onda densificante.

Respecto de los problemas de diseño y operación de redes, formulados como problemas de programación matemática binivel dinámicos con el enfoque CTM, una revisión del estado del arte es presentada en Karoonsoontawong (2010) y Lin (2011).

Friesz et al. (2013) se refieren a los modelos de flujo de tráfico dinámicos, los cuales definen los estados del tráfico dinámico en el arco. Estos autores hacen una revisión de la literatura del modelo LWR, pues desarrollan

un DUE hidrodinámico con base en esa función. También establecen la diferencia entre modelos de función de demora y modelos de función de flujo de salida, los cuales se describen como sigue:

- Modelos de función de demora: Son funciones de demora de viaje explícitas, que dependen de parámetros exógenos estimados y ajustados con información real; ejemplos se presentan en Friesz et al. (1993), Wu et al. (1998) y Xu et al. (1999).
- Modelos de función de flujo de salida: Se fundamentan en la modelación explícita de la dinámica de flujo subyacente mediante los modelos de Merchant y Nemhauser (M-N), CTM, y de Vickrey (VM) (Vickrey, 1969, citado por Friesz, et al., 2013).

Nie y Zhang (2005b) hacen un estudio comparativo de los modelos de arco macroscópicos usados en ADT, en el que describen las funciones de demora dependientes de flujo de tipo lineal, las funciones de flujo de salida de arco, el modelo de Merchant y Nemhauser, el modelo PQM y el modelo CTM.

Bliemer et al. (2014) y Bliemer (2007) explican con detalle enfoques de filas en modelos TAP, DUE y DNL. Bliemer (2007) desarrolla un modelo DNL en el cual toma en cuenta la formación de fila y ondas densificantes en una red multiclase con diferentes tipos de vehículo, que no depende de funciones de tiempo de viaje; el modelo utiliza funciones de fila y de flujo de salida que revisa el tiempo en retrospectiva.

Meng et al. (2005) en un NDP usan una función de costo de tiempo de viaje dependiente del flujo cuadrática basada en Florian y Chen (1995). Zhong et al. (2011), Friesz et al. (2011), Ban et al. (2008) y Joksimovic et al. (2005a), por ejemplo, en su caso numérico usan una función de tiempo de viaje dependiente del flujo lineal.

Algunas revisiones de formas funcionales de tiempo de viaje dependientes del flujo para arterias urbanas se encuentran en Dowling y Skabardonis (2008), Viti y Zuylen (2005), Roupail et al. (2001), entre otros. Un análisis comparativo se encuentra en Akgüngör et al. (2007) y Dowling (2005).

Carey y McCartney (2002), Carey (2004 a, b), Carey y Ge (2003), Carey et al. (2003), Carey y Ge (2004, 2005 a, b, 2007), hacen un amplio análisis de los WLM usados en ADT y tratan de forma específica las funciones de salida de flujo, estudian las propiedades de las funciones y su solución. Nie y Zhang (2005a), también estudian las funciones de demora del WLM de tipo lineal, lineal a tramos y una convexa limitada por las dos primeras, usadas en ADT, además revisan la propiedad FIFO, la precisión del modelo y la solución numérica. Mun (2007) y Han (2007) explican ampliamente estos submodelos de propagación de flujo y establecen diferencias.

En el problema de asignación de tráfico estático, varios estudios de gran aceptación han realizado aplicaciones con la función de tiempo de viaje de Akcelik. Véase a Akcelik (2003), Akcelik (1991, 1996); Akcelik y Roupail (1993); Akcelik et al. (1999); Akcelik y Associates (2002); Dowling y Alexiadis (1997), Dowling et al. (1998), Nakamura y Kockelman (2000), Singh (1999), Sinclair Knight Merz (1998), y Lam y Zhang (2000).

En el problema matemático FQ-TDUE-D, formulado en esta tesis, se utiliza la función de tiempo de viaje dependiente del flujo, la fila y el tiempo de sobreflujo de Akcelik (2003). También se define la función de tiempo de viaje para una red con arcos de acceso controlado y semaforizados (capítulo 3) que tiene en cuenta las demoras que se definen en seguida.

La función de demora para vías con intersecciones con semáforo, incluye cuatro tipos de demora (Roess et al. 2011):

- Demora uniforme: considera que el arribo de vehículos es uniforme, hay flujo estable y ninguna característica cíclica individual.
- Demora aleatoria: es una demora adicional a la uniforme, donde se asume que el flujo está distribuido aleatoriamente (usualmente en intersecciones aisladas).
- Demora por sobreflujo: es una demora adicional, la cual se da cuando la capacidad de una fase individual de un ciclo de semáforo o una serie de fases es más pequeña que la demanda por la tasa de arribo, en un período T .
- Demora por fila inicial: causada por los vehículos que no pasan en el intervalo de verde y deben esperar otro ciclo (HCM, 2010, 2000; Akcelik, 2003).

La demora por influencia del flujo en pelotón, y su distribución de llegada a la intersección, es introducida como un ajuste a la demora uniforme. Algunos modelos combinan en la misma función, la demora aleatoria y la demora por sobreflujo, denominándola demora por sobreflujo o incremental (Roess, 2011; HCM, 2010, 2000).

Boyce et al. (1997a, b) usan la función de Akcelik (1991) en arcos semaforizados y la función BPR para arcos no semaforizados, en un modelo de asignación dinámica de equilibrio del usuario, resuelto mediante un algoritmo de diagonalización en intervalos de tiempo discretos.

Otras investigaciones abordan el TAP-UE estático con restricción de capacidad ampliado para redes viales con filas residuales (Lam y Zhang, 2000); o la introducción de restricciones asociadas a los efectos de la fila, por ejemplo, en intersecciones semaforizadas (Larsson y Patriksson, 1999). Este tipo de problemas es diferente al abordado en esta tesis, tanto por el enfoque dependiente del tiempo como por la estructura analítica del modelo. Algunos autores asumen filas puntuales o verticales, otros representan la fila como un incremento de la demanda.

Lam et al. (1996) proponen un modelo de asignación de tráfico quasi-dinámico con filas dependientes del tiempo; se considera la fila como el exceso de demanda respecto de la capacidad y se disipa en el siguiente período; se reformula el problema de TAP-UE con una restricción de capacidad; además, la demora por fila residual y fila inicial entran como sumando en la función objetivo. Este problema es muy diferente a la

investigación que se presenta en esta tesis, pues el tiempo de viaje crece con la fila, y la selección de la ruta por el usuario depende de la fila, como se explica en el capítulo 3.

1.9. Enfoques de solución del problema de diseño de redes y asignación de tráfico de equilibrio del usuario binivel, sin variabilidad del tiempo

El ámbito de la programación binivel en los problemas de planeación de transporte y de diseño de redes (no dependientes del tiempo) es complejo y retador para la comunidad científica (Zhang et al., 2015). El apartado 1.6 contiene el estado del arte de los modelos ADT-BL; y el aparte 1.7 lo correspondiente a los problemas de diseño binivel (NDP-BL) y la aplicación de los Problema de asignación de tráfico binivel de equilibrio del usuario, por sus siglas en inglés (Traffic Assignment Problem-Bilevel-User Equilibrium) (TAP-BL-UE) sin variabilidad en el tiempo. La solución del BL-FQ-TDUE-D que se formula en esta tesis se fundamenta en otros, que a continuación se describen.

Marcotte (1986) reformula el BL-UE, para el problema de arco-separable, con restricciones de inecuaciones variacionales. Hace un amplio análisis de funciones para redes congestionadas y propone soluciones heurísticas para la solución de puntos factibles.

LeBlanc y Boyce (1986) formulan el problema de diseño de redes como uno de optimización binivel lineal, similar a Bard (1983b, citado por los autores), cuya función de tiempo de viaje en el arco es creciente no lineal a tramos; el programa es resuelto con la técnica de búsqueda bicriterio y Frank Wolfe en vez del algoritmo de Bard.

Migdalas (1995) presenta una revisión de las técnicas de solución y las clasifica en: métodos exactos, aproximaciones de un nivel (la heurística más usada es llamada “bloque descendente coordinado”), aproximaciones bicriterio, aproximaciones binivel lineales, y métodos de búsqueda local (búsqueda directa, función de penalidad y búsqueda descendente).

Bell e Iida (1997) explican varios métodos e investigaciones que proponen algoritmos para resolver el problema de diseño de redes, éstos se introducen a continuación:

- Heurístico (citan a Steenbrink, 1974, Allsop, 1974 y, Gartner, 1976). Algunos métodos iteran entre una solución del problema superior e inferior, en el que resuelven el problema superior (en problemas de diseño, oferta de transporte), mientras establecen como fijas las variables de nivel inferior (correspondientes a la demanda en dichos problemas de diseño); luego solucionan el problema inferior, dejando fijas las variables obtenidas en la última iteración que resolvió el nivel superior; y así sucesivamente. No obstante, en problemas de diseño, tal procedimiento más bien corresponde a un juego Cournot-Nash, más que a un juego Stackelberg. La solución para las dos clases de juegos no es la misma siempre (Bell e Iida, 1997, citan a Fisk, 1986). Además, aunque el problema superior y el inferior sean problemas de programación

convexos, el problema de diseño de redes puede no serlo, ya que puede haber varios mínimos locales. Marcotte (1981) demostró teóricamente que un problema de diseño-asignación resuelto de forma iterativa, no siempre produce una solución de diseño de una red óptima global (Tan et al., 1979, lo demostró gráficamente, citado por Bell e Iida, 1997).

- Óptimo, tal como el método Powell o Hooke-Jeeves (citan a Abdulaal y LeBlanc, 1979). El enfoque demanda alta capacidad de cómputo pues se requiere estar evaluando el problema de asignación de equilibrio del usuario (determinístico o estocástico). Además, la solución se dificulta dada la no convexidad del problema de diseño de red.
- Transformación del problema en uno de inecuaciones variacionales no lineales (citan a Tan et al., 1979). El método reformula el problema en forma de inecuaciones variacionales mediante el reemplazo del problema inferior (UE-D) por sus condiciones de optimalidad, para incorporarlas en el problema de oferta (problema superior) como restricción adicional. No obstante, la aplicación de métodos estándar no es práctica, dada la no convexidad de la región factible (pero pueden usarse métodos metaheurísticos u otros no convencionales).
- Análisis de sensibilidad, ya sean problemas de programación no lineal generales (citan a Fiacco, 1976), como para problemas de asignación de equilibrio del usuario determinístico (citan a Tobin y Friesz, 1988). Tobin y Friesz (1988) desarrollan un análisis de sensibilidad para flujos en redes de equilibrio y proponen una solución óptima que fundamenta una amplia gama de trabajos de investigación relacionados. El método se basa en la sensibilidad de las variables primal y dual del problema inferior (demanda) a perturbaciones de los parámetros de diseño. Al problema superior (oferta) se le adicionan restricciones, tales como las expresiones de sensibilidad o aproximaciones lineales del problema de demanda (inferior) en la solución actualizada, entonces el problema se convierte en uno de un solo nivel.

Adicional a la referencia de Bell e Iida (1997), se incluye en el análisis de sensibilidad a Suh y Kim (1992). Estos autores extienden la deducción de Tobin y Friesz (1988), pues lo aplican a la formulación de un programa no lineal del problema inferior, el cual se resuelve a partir del algoritmo de Frank-Wolfe. En este se asume que mediante este algoritmo se puede obtener un punto extremo del problema BLP. Estos autores logran obtener la información del gradiente del problema inferior respecto de la variable de nivel superior; luego resuelven el problema superior mediante un algoritmo de descenso; entonces diseñan el algoritmo binivel descendente, BDA, por sus siglas en inglés (Bilevel Descent Algorithm). Este procedimiento puede usarse para resolver el problema BL-FQ-TDUE-D.

- Metaheurísticas como algoritmos genéticos o recocido simulado (citan a Friesz et al. 1992, 1993). Estos métodos de búsqueda probabilísticos pueden ser apropiados para la obtención del óptimo global dadas las características de no convexidad.

Meng et al. (2001) revisan el estado del arte de los problemas de diseño de redes y los métodos solución. Ellos desarrollan un algoritmo para el problema de diseño de redes continuo de equilibrio del usuario, CNDP-UE,

por sus siglas en inglés (Continuous Network Design Problem-User Equilibrium), el cual reformulan como un problema diferenciable continuo equivalente de un solo nivel, mediante un recurso de función marginal. Las condiciones del problema inferior UE-D se representan mediante una restricción en términos de la función marginal. Los autores utilizan un método lagrangiano aumentado convergente para encontrar una solución exacta local para el CNDP. El subproblema en el algoritmo es resuelto con el método de combinaciones convexas, en el cual la dirección descendente puede ser obtenida mediante el método de asignación todo o nada.

Colson et al. (2005 a) hacen una revisión de los métodos de solución de los BLP. Respecto de los métodos descendentes asumen una solución del problema superior y calculan una solución óptima del problema inferior, como una función implícita de la variable de nivel superior. Entonces, dada una solución factible de la variable superior, encuentran una dirección descendente en la que decrece la función objetivo del problema superior. Luego calculan un nuevo punto que asegure un razonable decrecimiento del problema superior, sin perder la estructura del BLP. Los autores reflexionan sobre la disponibilidad del gradiente de la función objetivo del problema de nivel superior en un punto factible. Al respecto hay un desarrollo amplio en el análisis de sensibilidad de los problemas de BLP con restricciones de equilibrio en Tobin (1986); Tobin y Friesz (1988); Chung et al. (2014); Patriksson y Rockafellar (2002, 2003); Patriksson (2004); Suh y Kim (1992); Josefsson y Patriksson (2007). Bajo ciertas características de convexidad del BLP, se desarrollaron instancias en Savard y Gauvin (1994), así como en Falk y Liu (1995).

Patriksson y Rockafellar (2002, 2003), Marcotte y Patriksson (2007), Patriksson (2004); Suh y Kim (1992); Josefsson y Patriksson (2007), desarrollan el gradiente del problema de sensibilidad del problema de asignación de equilibrio del usuario y proponen algoritmos de solución heurística para soluciones locales. Ellos hacen pruebas en redes pequeñas.

Chiou (2015, 2014, 2011, 2007, 2005) desarrolla varios algoritmos de búsqueda descendente para resolver problemas binivel de diseño de redes. Farvaresh y Sepehri (2013) desarrollan un algoritmo de ramificación y acotamiento para resolver un problema BL-NDP discreto (citan a Floudas y Pardalos, 2009; Ibaraki, 1987), cuyo objetivo es minimizar el costo total de la red bajo presupuesto limitado, con el fin mejorar la capacidad de la red vial mediante la adición de arcos o segmentos. El problema inferior es un UE-D formulado con base en arco-nodo. En la etapa de ramificación se buscan soluciones factibles que definen una serie de subproblemas. En la etapa de acotamiento, se resuelve el problema de asignación de equilibrio definido en el nodo. Luego se revisa el criterio de optimalidad.

1.10. Enfoques de solución del problema de equilibrio del usuario binivel con variabilidad en el tiempo

Las referencias que abordan los problemas de asignación de tráfico UE-D, tipo optimización de diseño de redes (NDP) con variabilidad del tiempo, integrado en un problema de optimización binivel son escasas. Han et al. (2014) presentan un problema ADT-NDP continuo-dinámico para modelar los tiempos de señal de semáforo,

unido con un modelo LWR (citan a Han et al., 2013c). Luego Han et al. (2015) amplían la investigación y reformulan el problema como un juego dinámico Stackelberg, de optimización binivel, BL-ADT-NDP. El problema se analiza como un MPEC y se resuelve mediante tres metaheurísticas: recocido simulado, optimización de enjambre de partículas y particiones anidadas (nested partition). Como se menciona antes, el enfoque de modelación BL-ADT-NDP tratado por estos autores se diferencia del presentado en esta tesis, en el objetivo, la formulación, el tratamiento de la propagación y el enfoque de solución. Estos autores presentan una vasta revisión de la literatura en el marco de problemas de asignación dinámica de tráfico de equilibrio del usuario y NDP, en los que se diseñan y optimizan tiempos de señal de semáforo; también hacen un resumen de los enfoques de solución de esos problemas, los cuales distinguen entre métodos heurísticos y, exactos de control óptimo y programación matemática.

Lu (2013) cita someramente algunas investigaciones con enfoque en los métodos de solución. Anteriormente, Lu et al. (2008) realizaron un modelo de asignación de tráfico de equilibrio del usuario dinámico bicriterio y un algoritmo solución para evaluar estrategias de costo y tiempo de viaje dinámicas que usa un método de promedios sucesivos. El problema es formulado como uno de inecuaciones variacionales dependiente del tiempo infinito-dimensional, y resuelto mediante un enfoque heurístico basado en simulación que involucra, primero un algoritmo de ruta mínima de costo generalizado bicriterio dependiente del tiempo para obtener el conjunto extremo de rutas eficientes y los correspondientes puntos de quiebre que dividen el intervalo de valor del tiempo y definen las clases de usuarios; segundo un simulador de tráfico para describir la propagación del flujo de tráfico y determinar los costos de viaje experimentados en las rutas para algún patrón de flujo en esas rutas. Los autores usan una técnica de implementación basada en el vehículo que representa la propagación del flujo que se asigna a una ruta referencia y así evitan el almacenamiento del conjunto de rutas y las políticas de ruteo. Luego, Lu (2013) amplía el trabajo anterior y presenta un algoritmo de generación de columnas para el problema de equilibrio del usuario de costo generalizado dinámico multiclase. Este método se basa en la descomposición de Dantzig-Wolfe (Dantzig y Wolfe, 1960; Larsson y Patriksson, 1992; Patriksson, 1994b, citados por Lu, 2013), la cual resuelve el problema de equilibrio del usuario dinámico infinito-dimensional como una serie de subproblemas de equilibrio del usuario finito-dimensional y encuentra soluciones aproximadas progresivamente. El algoritmo incorpora primero, un esquema de generación de columnas paramétrico que divide el rango de la función de tiempo (VOT) y costos de viaje, en muchos sub-intervalos y en consecuencia determina las clases de usuarios múltiples y las correspondientes rutas más cortas de costo generalizado para cada clase de usuario (cita a Mahmassani et al., 2005); segundo, un método de dirección descendente factible para actualizar los flujos de las rutas multiclase; y tercero, un modelo de carga que obtiene la dinámica del tráfico y determina los tiempos de viaje en la ruta para cada patrón de viajes. El método es comparado con el propuesto en Lu et al. (2008).

Farahani et al. (2013) incluyen un amplio inventario de problemas de diseño de redes, buena parte estáticos, y pocos estudios de diseño de redes dependientes del tiempo; sólo citan a O'Brien y Szeto (2007). Estos últimos

formulan un problema de optimización binivel de expansión de la red y cobro de cuota, en el que utilizan un método de solución de gradiente reducido generalizado y de ramificación y acotamiento.

Algoritmos usados para resolver problemas de optimización binivel dependiente del tiempo

Lu (2013). El autor desarrolla un proceso heurístico que genera un subconjunto de rutas representativas con costo generalizado competitivo, e incrementa el conjunto de rutas apropiado (loop externo). En cada iteración k (definido un k_{max}), utiliza un Método de Análisis Paramétrico (PAM, por sus siglas en inglés, Parametric Analysis Method; cita a Mahmassani et al., 2005) para incrementar el subconjunto de rutas factibles. El PAM divide el rango del VOT (valor del tiempo) en muchos subintervalos, determina las correspondientes clases de usuarios múltiples y los árboles de menor costo generalizado para cada clase de usuario. El algoritmo termina si, ninguna ruta es encontrada para cualquier clase de usuario o se cumple algún criterio de convergencia. También, aplica un método de descenso de selección de ruta multiusuario para resolver el problema de equilibrio del usuario dinámico finito-dimensional en el conjunto de rutas actualizado, antes de retornar al paso de generación de columnas. Este método procede iterativamente y forma el loop interno (con un conteo de iteración l) en el marco de generación de columnas. Una vez definido el patrón de rutas y los flujos, utiliza un simulador mesoscópico de carga de red dinámico para determinar los tiempos de viaje experimentados en el patrón de flujos de ruta dependiente del tiempo, hallado en la ejecución del DUE; tal proceso corresponde a la propagación de flujo de tráfico y las interacciones espaciales y temporales. El simulador mesoscópico es el DYNASMART desarrollado por Jayakrishnan et al. (1994a). Así, el problema original de equilibrio del usuario dinámico infinito-dimensional se resuelve como una serie de subproblemas y progresivamente encuentra soluciones aproximadas. El PAM es un proceso que encuentra el conjunto de árboles de ruta predominantes no extremo, cada uno de los cuales minimiza la función de costo generalizado para un subintervalo particular del VOT⁶ (Mahmassani et al., 2005). Tal proceso se basa en minimizar la desutilidad del modelo de selección de ruta con funciones de desutilidad convexas; entonces todos los viajeros pueden elegir entre el conjunto de rutas predominantes no extremas, que corresponden a los puntos extremo en la frontera eficiente dentro del concepto espacio criterio, que para la citada investigación son el tiempo (multiplicado por un factor monetario) y el costo (cita a Dial, 1996, 1997; Marcotte y Zhu, 1997). Mahmassani et al. (2005) desarrolla un algoritmo para resolver el problema de ruta más corta dependiente del tiempo bicriterio, que busca minimizar dos atributos de una función lineal de costo generalizado de viaje; tal función depende del tiempo de viaje y el costo de la ruta de una red vial dependiente del tiempo; cada arco está asociado con esos dos atributos que varían con el tiempo: el tiempo de viaje y el costo. Entonces una ruta es eficiente (Pareto Óptimo o predominante) si no es posible encontrar rutas diferentes con tiempo de viaje y costo menores o iguales. Los autores proponen un método de dirección descendente de salto de ruta multiclase que elude la necesidad de calcular las derivadas parciales de primer orden con respecto al costo (pues el tiempo de viaje solo se obtiene después de correr el DYNASMART), para determinar óptimamente el tamaño del paso, mientras en la dimensión del tiempo mantiene mecanismos

⁶ El concepto de rutas eficientes extremas, que corresponden a puntos extremos de un poliedro (conjunto convexo) que contiene todos los puntos eficientes en el espacio criterio (Henig, 1985, citado por Mahmassani et al., 2005).

de búsqueda de direcciones factibles. Entonces, el algoritmo propuesto descompone el problema de minimización no lineal en muchos subproblemas (usuario, origen, destino, intervalo de tiempo) y resuelve cada uno de ellos mediante un ajuste variando el tiempo y los flujos multiclase O-D, entre rutas de costo no mínimas y rutas de costo generalizado mínimas.

Joksimovic et al. (2006a) formulan un problema de diseño de cobro de cuota óptima con enfoque en el comportamiento de viaje de usuarios heterogéneos para la selección de tiempo de salida y la ruta, en respuesta al precio de viaje. El modelo se basa en la teoría de maximización de la utilidad y se plantea como un problema de programación binivel, en cuyo nivel superior se resuelve el modelo de cobro en la red, y en el nivel inferior el modelo de asignación de tráfico dinámico, en el que los viajeros son simulados en una red de transporte en busca de un equilibrio dinámico estocástico que toma en cuenta el cobro en los arcos. El objetivo es determinar las cuotas óptimas que maximicen la función objetivo de la autoridad vial. Estas cuotas se distribuyen uniformemente en todos los períodos de tiempo. En Joksimovic et al. (2006b) se consideran otras distribuciones de cobro y diferentes objetivos políticos. El modelo de asignación de tráfico dinámico integra dos componentes: el primero es de la selección del tiempo de salida y la ruta simultáneamente, en el que los viajeros son modelados con el objetivo de maximizar la utilidad, ellos seleccionan la ruta y la salida que minimicen los costos generalizados, y produce los flujos de la ruta dinámicos; el segundo es un componente de carga dinámica que realiza la propagación de esos flujos de ruta en la red, lo cual produce nuevos tiempos de viaje y nuevas cuotas. La función de costo generalizado experimentado por cada clase de viajero en cada ruta O-D y el intervalo de salida se expresan como una combinación lineal del tiempo de viaje de la ruta, penalizaciones por demora por salida y arribo, y los costos de cuota en la ruta. Los tiempos de viaje y la cuota son los mismos para todos los viajeros. El concepto de clase de usuario se clasifica por viaje de negocio (alto VOT) o esparcimiento (bajo VOT). El primer modelo de selección simultánea de ruta y tiempo de salida corresponde al modelo logit multinomial que se resuelve como un problema de punto fijo, pues los costos generalizados de ruta producen flujos de ruta, los cuales afectan los tiempos de viaje y entonces los costos de viaje de ruta generalizados. La relación entre los flujos y los tiempos de viaje se da por el componente de carga de red dinámica o de propagación de flujo en la red. Este último simula los flujos de la ruta en la red, produciendo flujos, volúmenes y tiempo de viaje en el arco, cuyo proceso sigue un sistema de ecuaciones adaptado de Chabini (2001) y Bliemer y Bovy (2003) (citados por Joksimovic et al., 2006a), en el cual la ecuación de propagación del flujo es simplificada asumiendo que no hay subintervalos dentro de un intervalo de tiempo y que el tiempo de viaje es estacionario. Los autores observan que las ecuaciones son similares a las propuestas por Ran y Boyce (1996). Las ecuaciones de propagación del flujo determinan los indicadores dinámicos que describen la propagación de los flujos de entrada y salida del arco, y los relaciona en un intervalo de tiempo, a través de la ruta entre O-D. El problema es discreto en el tiempo y define el tiempo de salida del arco como el valor del intervalo de carga más el tiempo de viaje en el arco redondeado al entero más cercano (expresado en intervalos de tiempo). La solución del problema de diseño de cobro de cuota óptima usa una búsqueda de cuadrícula simple (simple grid search). Se define un conjunto de cuotas diferentes para las cuales se resuelve el modelo de asignación de tráfico dinámica. Los valores resultantes de las funciones objetivo se comparan y se selecciona la mejor. Para cada

iteración de cobro de cuota en el problema superior, se resuelve el modelo de equilibrio de tráfico dinámico. Se justifica el método sencillo pues el objetivo era observar el comportamiento de viaje de usuarios heterogéneos. Se establece un rango de cobro en el arco, límites máximo y mínimo, y se hace un proceso iterativo que define valores intermedios, en el loop exterior. En el proceso de asignación de tráfico dinámico se actualizan los flujos de las rutas mediante el método de promedios sucesivos. Luego se realiza el proceso de carga y propagación de tráfico y se revisa una función de convergencia del problema inferior. Se calcula la función que maximiza los ingresos del problema superior. Luego se revisa la convergencia del problema de cobro de cuota (nivel superior); si cumple, se detiene el proceso y se definen los cobros óptimos. Se analiza un caso de estudio de una pequeña red.

Chen y Hu (2012) formulan un problema de optimización binivel para resolver el problema combinado de control de señal de semáforo y selección de ruta, con el enfoque de equilibrio del usuario dinámico. El problema superior resuelve los parámetros de cada fase (o grupos de movimiento), tal como tamaño de ciclo, reparto del verde y desfase entre intersecciones, en caso de corredor vial coordinado (offsets). El objetivo del nivel superior es minimizar la demora de tráfico. El problema del nivel inferior resuelve los flujos del problema de equilibrio del usuario dependiente del tiempo en una red, mediante un modelo de simulación de asignación de tráfico dinámica llamado DynaTAIWAN. El conjunto de señales es ajustado mediante dos métodos: el modelo de Webster y el de Control de Señal Adaptable. La función objetivo del problema superior es minimizar la demora para cada intersección individual. El problema se aborda para dos estrategias de señalamiento: control de tiempo fijo y control de señal actuado. En la primera se considera la demora fija de Webster. En la segunda se trata de desarrollar un plan que se ajuste continuamente a la demanda de tráfico. Los autores presentan una amplia revisión de trabajos relacionados con enfoques de solución, clasificados en: modelos matemáticos, procesos heurísticos y modelos de programación binivel.

El algoritmo comienza con un patrón de flujos iniciales, para el cual se resuelve el problema superior, cuyo resultado es una política de control y un grupo de señales. Luego se aplica la simulación de asignación de tráfico dinámica con el DynaTAIWAN (microsimulación). Se halla el nuevo patrón de flujo de equilibrio del usuario dinámico y se revisa la regla de convergencia. Se repite el proceso iterativamente.

La solución del nivel inferior comienza con la definición de las rutas iniciales para cada intervalo de asignación perteneciente a un período de evaluación total. Luego se asignan los viajes O-D a las rutas dadas y se simula el patrón de flujos resultantes corriendo el Sim-DynaTAIWAN. Posteriormente, se calculan los tiempos de viaje en los arcos y el número de vehículos en cada arco. Luego, se corre un algoritmo de ruta mínima dependiente del tiempo para definir las rutas de tiempo de viaje menor, para cada par O-D, y se asignan los viajes del siguiente intervalo de tiempo. Se realiza la asignación Todo o Nada para las nuevas demandas, para cada clase de usuarios, usando las rutas más cortas. Se actualizan las rutas del equilibrio del usuario, mediante el Método de Promedio Sucesivos. Finalmente se aplica un criterio de convergencia, con base en la diferencia de los flujos en los arcos en las dos últimas iteraciones.

1.11. Alcances

La investigación se enfoca en los modelos BL-DUE- formulados analíticamente, mediante programas matemáticos de optimización, que responden al equilibrio del usuario de Wardrop, cuya propagación de flujo tiene en cuenta la congestión y la formación de filas en las vías de redes urbanas complejas. El tiempo se trata en forma discreta. El enfoque analítico es determinístico.

Otro tópico de interés son las funciones de tiempo de viaje que dependen del flujo en el arco y tienen en cuenta la congestión. También son de interés por su desempeño y realismo en el análisis de casos de estudio de redes urbanas reales. Además, la función objetivo de los problemas de asignación de tráfico con equilibrio del usuario se define mediante la función de tiempo de viaje en el arco y/o en la ruta y sus características, las cuales son determinantes para el método de solución.

Esta investigación inició con la aplicación de un modelo ADT macroscópico a una parte de la red de la ZMVM, propuesto por Ran y Boyce (1996) y Boyce et al. (2001). Tal propósito requirió un profundo análisis de las estrategias y formas de los modelos ADT macroscópicos, así como su solución. Se identificaron vacíos y falta de recursos metodológicos para resolver el problema en una red vial como la mencionada. Entonces se dedicaron esfuerzos para: modelar el problema ADT para redes urbanas congestionadas, diseñar un nuevo modelo de comportamiento en la selección de ruta por los viajeros en transporte privado, adaptar la forma analítica a la red objeto de estudio, proponer un nuevo programa de asignación de tráfico dependiente del tiempo, TDTAP, y enunciar el método de solución en la red objetivo. Para ello se realizaron experimentos de programas matemáticos clave, aplicados en una una parte de red de la ZMVM, con información de campo real, para revisar el desempeño del tránsito. Se analizaron casos de estudio de rutas de la red principal de la Ciudad de México, para calibrar las funciones de tiempo de viaje en los arcos, así como para validar las salidas de programas de cómputo desarrollados, como parte de esta investigación. Se programó el algoritmo de combinaciones convexas, para resolver los casos de estudio antes mencionados, solucionando el programa de asignación de equilibrio del usuario determinístico; esto se explica en los Apéndices A y B. Los casos de estudio son presentados en los artículos de investigación publicados en revistas científicas que se encuentran en las referencias de esta tesis. También se obtuvo la solución del algoritmo de combinaciones convexas, para los mismos casos de estudio, con una función de tiempo de viaje dependiente del flujo, del tiempo de sobreflujo y la fila, lo cual se muestra en el Apéndice C. Los resultados de la investigación son presentados en el capítulo 5.

2 MODELACIÓN DE LA ASIGNACIÓN DE TRÁFICO DEPENDIENTE DEL TIEMPO PARA REDES URBANAS CONGESTIONADAS EN EQUILIBRIO

Esta investigación inicialmente aborda la solución del programa matemático DUE de selección de ruta ideal de Ran y Boyce (1996) y Boyce et al. (2001), formulado con inecuaciones variacionales, aplicado a una red pequeña, cuyo algoritmo de solución se plantea como una combinación de técnicas de relajación y el método de Frank-Wolfe (FW). Los citados autores presentan el DUE como un problema no lineal de tiempo discreto (LeBlanc et al., 1992). Bajo relajación, reformulan el problema DUE como uno de control óptimo y proponen aplicar las técnicas de relajación y el FW para resolver el problema no lineal (LeBlanc et al., 1992; Ran y Boyce, 1996). En la relajación se actualiza iterativamente el tiempo de viaje en el arco; luego se soluciona el problema no lineal con el FW. El subproblema lineal se aborda, mediante la solución de una red espacio-temporal, que descompone el problema para cada O-D, y usa el algoritmo de ruta mínima (Ran y Boyce, 1996). Este enfoque evidencia problemas matemáticos, esfuerzo computacional grande, falta de realismo, corto alcance para abordar redes urbanas reales, entre otros aspectos (Boyce et al., 2001). Entonces, la investigación de esta tesis explora un nuevo enfoque de modelación que responda a una mejor abstracción de la ADT. Posteriormente, se profundiza en la naturaleza analítica del problema y su aplicación en una sección de red urbana como la de la ZMVM. Así se asumen nuevos retos en el proyecto de investigación que constituyen los objetivos específicos, y se aprovecha la oportunidad de aportar en la formulación del problema matemático TDTAP.

En este capítulo primero se reúnen los análisis, fortalezas, debilidades, avances y vacíos en la modelación, solución y aplicación de la ADT, con el enfoque de Ran y Boyce (1996), entre otros referenciados en el capítulo anterior, que muestran la necesidad de profundizar en los componentes del programa matemático, así como en su estructura y su realismo. Luego se presenta el modelo DUE-WLM adoptado en esta investigación, con fundamento en Ran y Boyce (1996), Carey (2001, 2009) y otros. Ésta es una propuesta que conceptualiza el comportamiento de selección de los viajeros, la propagación del flujo en la red vial, mediante su estructura metodológica, las variables dinámicas, y sus relaciones gráficas y analíticas. Después se define la red vial objetivo, similar a la Ciudad de México, cuyas características señalan la incorporación de variables esenciales y formas específicas de las funciones que integran el programa matemático de selección de ruta dependiente del tiempo. Al final se enfatiza en nichos de oportunidad para enriquecer el ámbito de los problemas TDTAP y la posibilidad de representarlos en redes urbanas congestionadas de ciudades grandes como la de la ZMVM.

2.1. Revisión de la naturaleza matemática y el realismo de los modelos de ADT

Se revisan los modelos de asignación dinámica de tráfico (ADT), con respecto a su naturaleza matemática, la dinámica del flujo y su aplicabilidad en redes viales. En lo siguiente se hace referencia a las líneas de trabajo de LeBlanc et al. (1992), Ran y Boyce (1996) y Boyce et al. (2001); también a las de Carey (2001) y Wie et al.

(2002); debido a su formalismo teórico y metodológico para expresar la selección de la ruta y la propagación del flujo con programas matemáticos, generalmente sobre un marco macroscópico y con tratamiento del flujo en el arco, tal como el modelo de arco completo (WLM).

Respecto de la formulación analítica del problema de ADT. Una parte significativa de los trabajos sobre ADT se orientan a procesos de optimización de redes viales formulados mediante inecuaciones variacionales (IV). En el enfoque analítico se distinguen tres líneas de investigación para formular y solucionar los problemas de ADT. A continuación, se hace un compendio de algunas características y limitaciones de esos trabajos.

Formulación como programación matemática (PM). Los modelos de programación matemática de ADT se formulan en tiempo continuo pero se transforman a problemas en tiempo discreto para su solución. Tienen una función objetivo que minimiza el tiempo o costo de viaje en la red vial y están sujetos a restricciones de conservación (de flujos de entrada, salida, llegada, etc), pero tienen algunas limitaciones técnicas inherentes, que algunas veces causan fallas para proveer una descripción apropiada de la dinámica y las interacciones del tráfico (Boyce et al., 2001). Algunas de éstas se relacionan con la naturaleza asimétrica (no separable, no monótona) de las funciones de costo de viaje que con frecuencia utilizan, la dependencia en el tiempo entre el volumen vehicular y el tiempo de viaje, o las soluciones eficientes en redes grandes en tiempo real, entre otros (Peeta y Ziliaskopoulos, 2001). Algunos autores representativos son Boyce et al. (2001), Merchant y Nemhauser (1978 a, b), Carey (1986, 1987, 1992), Janson (1991 a, b), Wu et al. (1998), Xu et al. (1999), Chabini (2001).

Teoría de control óptimo. La teoría de control óptimo por su naturaleza es un recurso muy apropiado para describir sistemas dinámicos y su aplicación en la modelación dinámica de tráfico es atractiva. Varios modelos propuestos usan el flujo de entrada como la variable de control, mientras que el flujo de salida se trata como una función del flujo en el arco. Aunque la formulación establece una relación explícita entre el flujo de salida y en el arco, en Boyce et al. (2001) se resaltan varios inconvenientes a saber, entre otros:

- Los modelos se formulan en tiempo continuo, pero se resuelven en tiempo discreto y, por lo tanto, pierden su significado de control original.
- La modelación inadecuada o poco realista de la congestión, así como de la garantía de la regla FIFO.
- Las funciones de flujo de salida podrían causar propagación de flujo instantáneo. La tasa de flujo de salida debe ser positiva para satisfacer la función de flujo de salida; si el flujo inicial es cero, esto causa propagación del flujo irreal.
- La falta de procesos de solución en redes reales.

Boyce et al. (2001) comentan que se han hecho contribuciones importantes, pero prefieren no insistir con este enfoque por las limitaciones que han sido demostradas. Adicionalmente, “la teoría de control óptimo sufre algunas dificultades para representar situaciones reales (Chen y Hsueh, 1998)”.

Formulación como problemas de inecuaciones variacionales (IV). Para enfrentar el inconveniente planteado antes, y otros que muestran los problemas ADT de control óptimo, se recurre a la reformulación de los PM como problemas de inecuaciones variacionales (Boyce et al., 2001). Éstos pueden ser considerados como una generalización de los problemas de optimización con restricciones, problemas de complementariedad y problemas de punto fijo. Por sus propiedades más generales y capacidades, las inecuaciones variacionales han ganado un creciente interés durante la última década. En el contexto de la modelación dinámica de redes, los problemas de las funciones de costo asimétricas y de asignación con restricciones de capacidad pueden ser acondicionados con el enfoque de IV asumiendo que se encuentran ciertas condiciones de monotonicidad y convexidad. Comparadas con la programación matemática y el control óptimo, las formulaciones IV representan un enfoque más atractivo para formular problemas de ADT. Sin embargo, el enfoque con IV es más demandante computacionalmente que el de PM, lo cual es una desventaja para aplicaciones en redes reales (Peeta y Ziliaskopoulos, 2001). Autores representativos son los siguientes: Friesz et al. (1993), Smith (1993), Wie et al. (1995), Boyce et al. (1997a, b), Lee (1996), Ran y Boyce (1996), Chen y Hsueh (1998), Chen (1999), Wie et al. (2002), Chen et al. (2002), Chen et al. (2003), Han y Heydecker (2006), Jang et al. (2005), Ban et al. (2005), Ban et al. (2008), Bliemer (2001, 2007), Bliemer et al. (2002), Bliemer y Bovy (2003), Bliemer et al. (2014); Bliemer y Raadsen (2017) proponen un modelo DNL quasivariacional para cargar una red.

Formulación con programación matemática binivel (PM-BL). Los problemas de optimización binivel son problemas de optimización en varios niveles, ya que sus restricciones se establecen en partes, siendo alguna de ellas un problema de optimización paramétrica. En varios trabajos se busca la solución de modelos ADT reformulados como PM-BL, en los que se busca una estrategia de descomposición. Carey (2009, 2001) plantea un modelo ADT, cuyo problema superior es un modelo de red (DNL), y el inferior es un conjunto de submodelos de tiempo de viaje en el arco, uno por cada arco; y representa las variables de flujo dinámicas como arcos, en una red expandida en el tiempo y el espacio. LeBlanc et al. (1992) hacen tres formulaciones en uno, dos y tres niveles, donde combinan la selección de ruta, la hora de salida y el modo. Friesz et al. (1993) desarrollan una metaheurística en un marco del PM-BL para solucionar su modelo de ADT. Autores representativos de este enfoque son los siguientes: Janson (1991 a, b), Janson y Robles (1993, 1995), Jayakrishnan et al. (1995), Chen y Hsueh (1998), Wu et al. (1998), Lo (1999), Zhu y Marcotte (2000), Carey (2001, 2009), Rubio-Ardanaz et al. (2003), Lo y Szeto (2002, 2004).

Respecto a la solución y al realismo. La complejidad de los problemas de DUE ha llevado al uso de procesos de simulación para su solución. Varios autores hacen una crítica severa, pues se alejan de los supuestos de formulación. Como se explicó antes, no se modela la realidad del comportamiento de los usuarios ni la propagación del flujo en la red en forma real (Jang et al., 2005). Boyce et al. (2001) analizan la eficiencia computacional de los algoritmos que resuelven la ADT respecto al tamaño de la red. Hacen énfasis en la exploración de mejores técnicas para aplicarlos a redes reales grandes. También consideran que les hace falta información de flujos dependientes del tiempo.

Respecto de las funciones de tiempo de viaje en el arco y su enfoque temporal. Las funciones que describen la dinámica del tráfico en la red y la función de costo o tiempo de viaje en el arco, LTTF, por sus siglas en inglés (link travel time function), son usadas para integrarse a los modelos ADT; en varios de ellos estas funciones son determinantes para definir el algoritmo de solución, garantizar el buen desempeño del modelo y obtener resultados coherentes y realistas.

Boyce et al. (2001) presentan retos para la investigación sobre ADT respecto de la representación analítica del flujo y el tiempo de viaje en el arco. Algunas investigaciones usan la función BPR (Bureau of Public Roads, 1964) que no es aplicable a las redes de tráfico dependientes del tiempo (Mun, 2007). Ellos analizan la falta de asociación analítica entre los flujos no congestionados y el tránsito en fila, específicamente en la función de tiempo de viaje dinámica. Establecen la urgencia de formas funcionales de tiempo de viaje útiles en los problemas ADT.

Esto motiva el interés por abordar cuidadosamente las propiedades de las funciones de tráfico y las funciones apropiadas, tanto para incorporarlas a los modelos de ADT como para describir la dinámica del tráfico a lo largo de la red urbana. Aunque la investigación en la formulación y solución de los modelos ADT viene desarrollándose desde hace tres décadas, se reconoce un vacío en el avance del tratamiento analítico de la dinámica del flujo en la red, así como en la relación funcional entre las variables dinámicas, el comportamiento del volumen vehicular en el arco individual perteneciente a una ruta elegida por los viajeros y su propagación por la red (Londoño y Lozano, 2012).

Existe un consenso sobre las propiedades de las LTTF (funciones de tiempo de viaje en el arco) cuando se carga una red vial, tal como en una red estática en estado de equilibrio del usuario, UE, por sus siglas en inglés (User Equilibrium), cuyos resultados pueden acercarse a un comportamiento factible de los usuarios, en el que además se busca minimizar el costo. En contraste, en el ámbito de la modelación de la ADT se evidencia la necesidad de profundizar en las formas funcionales de las variables dinámicas, sus propiedades y su relación con las funciones de tiempo de viaje en el arco que dependen del número de vehículos (Ran y Boyce, 1996; Boyce et al., 2001).

En la literatura se encuentran algunos trabajos que analizan las características y propiedades de las funciones más usadas en las investigaciones mencionadas en el apartado anterior, en términos de su comportamiento y su adaptabilidad al incorporarlas en los modelos y las soluciones para casos de redes particulares. Los siguientes autores han publicado interesantes estudios: Ran et al. (1997), Carey (2004), Carey et al. (2003), Carey y McCartney (2002, 2004), Carey y Ge (2004, 2005 a, b, 2007), Nie y Zhang (2005 a, b), García et al. (2006), Shin et al. (2004).

Respecto de la propagación del tráfico en la red . Aunque la dinámica del tráfico en la formulación del problema de ADT representa un acercamiento a la realidad, todavía hay aspectos que se deben mejorar y otros que no se tienen en cuenta, como los siguientes:

- Algunos autores ignoran lo que pasa en las diferentes intersecciones de los arcos. En la formulación delegan ese aspecto en la función de tiempo de viaje, sobre la que aún hay mucho que investigar. Otros lo abordan desde la simulación.
- No hay claridad respecto de la salida de los viajes que llegan a su destino.
- La ecuación de propagación es confusa.
- Con frecuencia se representa la dinámica como paquetes de vehículos cuya propagación resulta poco realista o acaban siendo microscópicos.
- Se asume que todos los arcos tienen la misma función de costo o tiempo de viaje.

2.2. Propuesta del modelo de asignación de tráfico dependiente del tiempo de arco completo (DUE-WLM) adaptado

Las redes de transporte reales en contextos urbanos son complejas de modelar como programas matemáticos; también en el uso de recursos de solución disponibles, que exigen ciertas propiedades matemáticas de las funciones de desempeño del arco y la ruta, si se buscan soluciones exactas y estables (por ejemplo, en teoría de flujo de tráfico se acepta que las variables se mantengan por intervalos de 15 minutos) (Jin, 2008). Las funciones de desempeño del arco pudieran ser no monótonas o no separables, debido a las interacciones complicadas entre diferentes arcos, causadas por el tránsito convergente y divergente, las filas que densifican el tránsito corriente arriba (efecto onda densificante o “spillback”), y las intersecciones con y sin semáforo. A partir del modelo fundamental de Ran y Boyce (1996); Boyce et al. (2001), así como de Carey (2001) y Wie et al. (2002), los cuales tratan la dinámica del flujo en el arco como un modelo de arco completo (WLM), se analiza y presenta la naturaleza dinámica del problema DUE adoptado en esta investigación.

La descripción de la dinámica macroscópica del patrón de viajes en la red vial se fundamenta en la interpretación analítica de la propagación del tráfico y el comportamiento dinámico de la red. Las variables que describen la dinámica del volumen de tránsito en una red urbana, se representan en la Figura 3 para un arco, y en la Figura 4 para la vecindad del arco de la Figura 3, con un esquema que muestra las variables dinámicas de flujo, sus relaciones y la manera conceptual de calcularlas (Ampliado de Carey 2001 y 2009). Debajo de las figuras 3 y 4 se describen las variables dinámicas. *La propagación del tráfico* en el arco, que va de i a j o de l a h , en el intervalo de carga k de una matriz con viajes que van del origen r al destino s , q^{rs} , aparece con el volumen de entrada u_a^k , sigue con el volumen de ocupación del arco x_a^k y termina con el volumen de salida v_a^k (Figura 2).

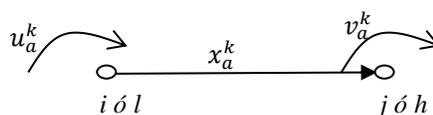
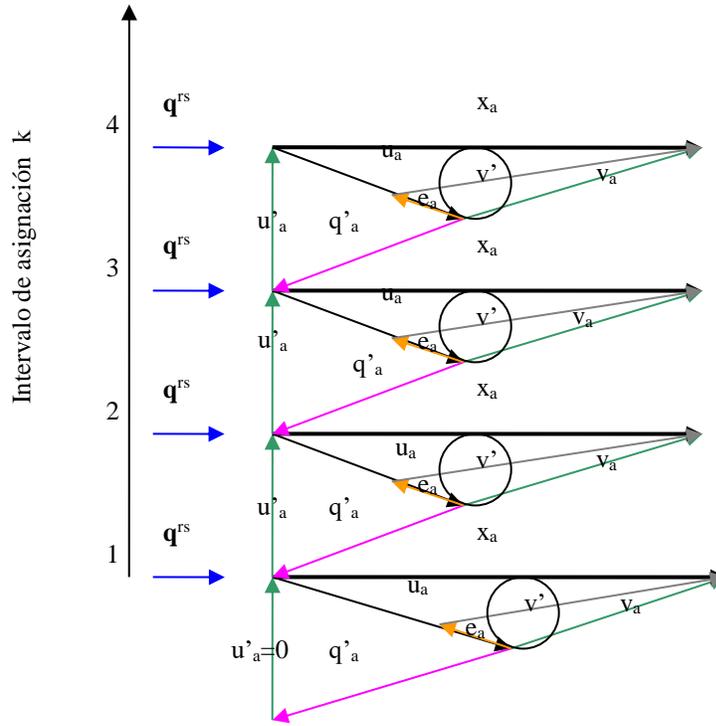


Figura 2. Volúmenes de propagación en un arco (i, j) o (l, h)



- \mathbf{q}^{rs} Matriz del patrón de viajes O-D con todos los pares rs
- \mathbf{q}'_a Es una porción de \mathbf{q}^{rs} que debería resultar del equilibrio dinámico del usuario (DUE) en el que se tiene en cuenta a $x_a(k-1)$
- u_a Es el volumen que entra en el arco a en el intervalo k, $u_a = u'_a + q'_a$
- u'_a Es el volumen proveniente de los arcos anteriores (x_{ant}), producto del proceso de propagación. Puede propagarse en el mismo intervalo, en cuyo caso $u'_a(k) = v_{ant}(k)$ o en el siguiente por lo que $u'_a(k) = v_{ant}(k-1)$
- e_a Es el volumen que llega a su destino y sale del arco a en el intervalo k. Puede ser valorado mediante ventanas de tiempo, cuyo rango sería el tiempo estimado de viaje al obtener el DUE al inicio del viaje y el máximo antes de llegar a la congestión
- v'_a Es el volumen de travesía (en tránsito). Sale del arco anterior y pasa al siguiente como parte del proceso de propagación. Es la variable que indaga la cantidad de volumen que el arco siguiente podría recibir (x_{sgt}). En cada asignación o intervalo, puede estimarse mediante un DUE, con lo cual se conocería la ruta. Luego con la velocidad (que puede conocerse por x_{sgt}) se puede estimar la longitud que podría recorrer en el intervalo k. Así se propagaría. En el siguiente intervalo de asignación se repetiría el proceso en el que se igualaría a $u'_a(k+1)$.
- x_a Es el volumen total en el arco en el intervalo k, $x_a = u_a - e_a + v'_a$
- v_a Es el volumen total que sale del arco en el intervalo k, $v_a = v'_a + e_a$

Figura 3. Descripción esquemática de las variables dinámicas del arco

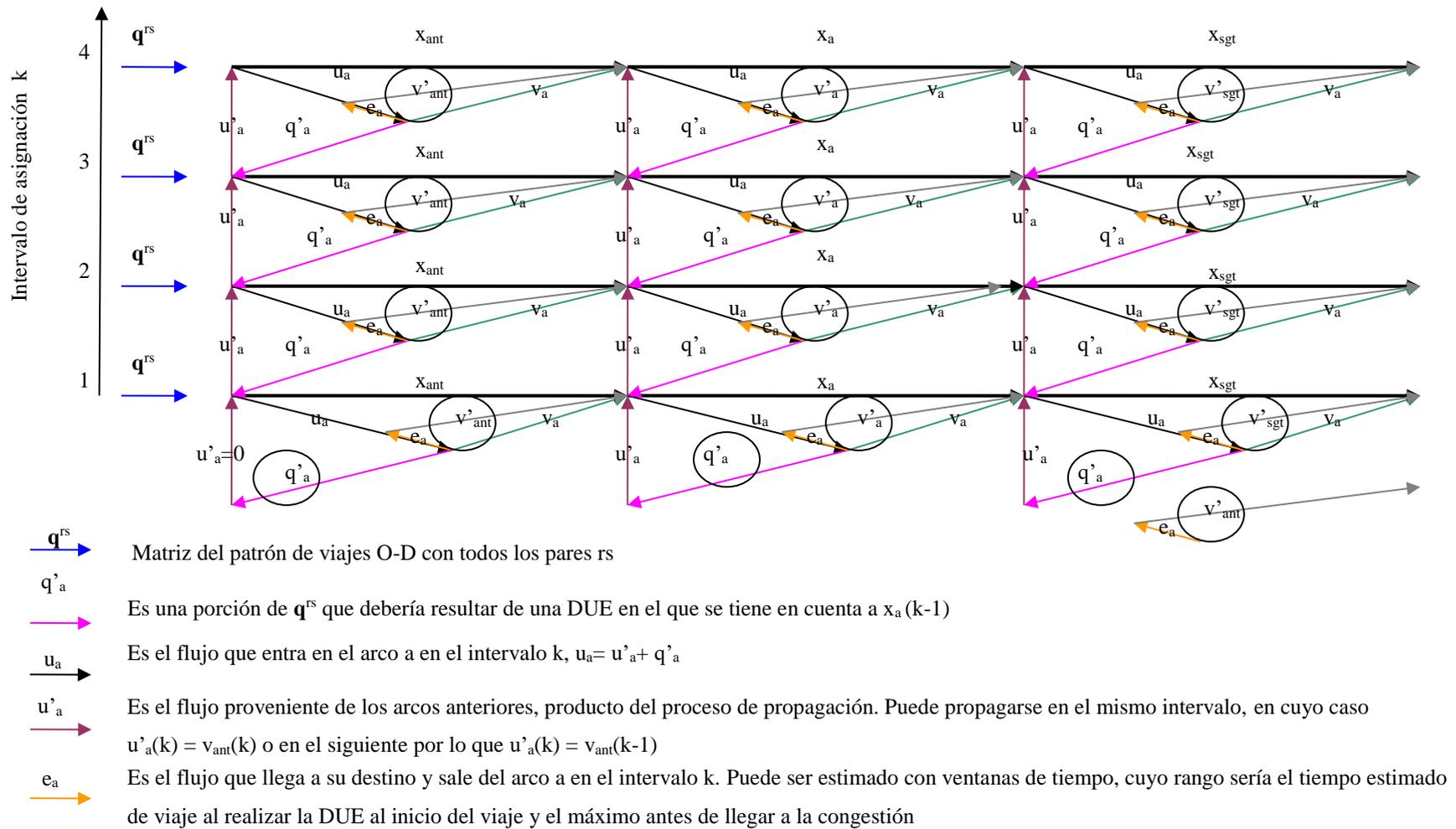


Figura 4. Componentes de la red vial dinámica. Caso de la Figura 3 ampliado a tres arcos consecutivos

2.3. Relación entre las variables macroscópicas dinámicas del arco del DUE-WLM

Para hallar las variables macroscópicas dinámicas del arco es necesario identificar la relación entre ellas y su variabilidad en el tiempo dentro del período de análisis.

El desempeño óptimo de la red vial depende de la mejor relación entre las características propias de su oferta (entre ellas la capacidad del arco), las cuales se mantienen fijas para efectos de análisis, y la demanda representada en la matriz origen-destino, q^{rs} , en cada intervalo de asignación k .

El costo total en la red es la suma del costo que le representa a cada viajero desplazarse para alcanzar su destino en todo el período de análisis. Éste puede calcularse mediante la suma del producto del volumen x_a^k , que pasa por cada arco, por el tiempo de viaje τ_a^k que le toma recorrerlo, en todos los arcos, en todo el período. La expresión analítica puede ser algo similar a la ecuación (2.1) (con fundamento en Boyce et al., 2001; Carey 2001, 2009).

$$C(t) = \sum_t \sum_a x_a^*(t) \tau_a(x_a^*(t)) \quad (2.1)$$

En diversos análisis macroscópicos es común utilizar funciones de tiempo de viaje en el arco que dependen del volumen actualizado, algunas con un comportamiento exponencial del tipo mostrado en la Figura 5.

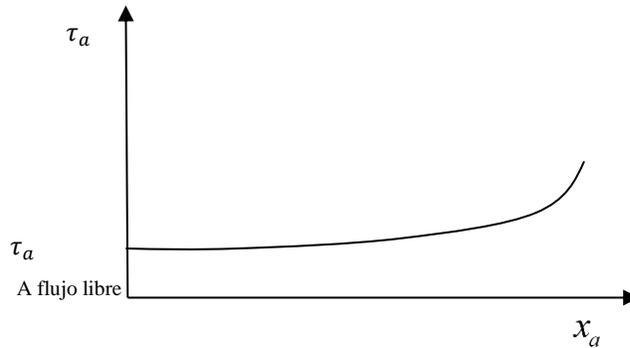


Figura 5. Función tiempo de viaje en el arco respecto al volumen de tránsito x_a

A medida que la red se carga con el tiempo, el volumen de ocupación en un arco (i,j) va aumentando, según la relación volumen y capacidad. Por lo tanto se supone que el tiempo de viaje aumenta respecto al tiempo de asignación, es decir, $\tau_a^k(x_a^k, t)$. De otra manera, el volumen de ocupación x_a^k aumenta con el tiempo de carga k de la red, por lo que $\tau_a^k(x_a^k(t))$. Todo esto mientras la red se carga en el horario de salida de los viajeros a sus actividades cotidianas.

La Figura 6 representa la relación funcional entre las variables de flujo dinámicas en el tiempo t . Se aclara que k depende del tiempo de propagación del flujo.

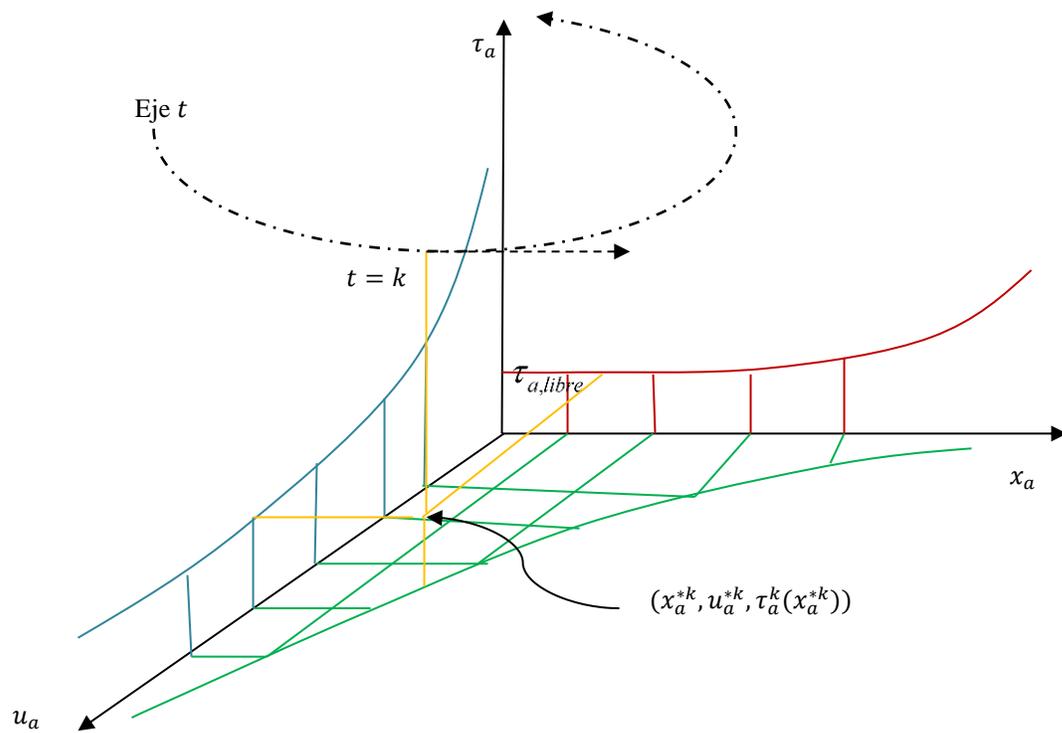


Figura 6. Relación funcional entre las variables macroscópicas dinámicas de una red vial.
Elaboración propia

Bajo este análisis, el cambio del tiempo de viaje en el arco τ_a respecto al tiempo es como se muestra en la ecuación (2.2), con fundamento en Han y Heydecker (2006);

$$\frac{d\tau_a}{dt} = \frac{d\tau_a}{dx_a} \frac{dx_a}{dt} \quad (2.2)$$

Donde las variables se han definido en la Figura 3.

Condición por balance de volumen en el nodo. La

Figura 7 representa varios arcos consecutivos de una ruta por la que se propaga el volumen de tráfico, y un nodo donde entran y salen varios arcos. Las variables dinámicas del nodo se definen en la Figura 3.

Si se hace un balance de volumen en el nodo i , nodo cola del arco a , y nodo j , nodo cabeza del arco a , resultarían las ecuaciones (2.3) y (2.4).

$$u_a(t) = q_a^{lsi}(t) + u'_a(t) \quad (2.3)$$

$$v_a(t) = v'_a(t) + e_a^{sj}(t) \quad (2.4)$$

Donde:

$q_a^{lsi}(t)$: es el balance en el nodo i del flujo que va desde el nodo l a s (destino) en le intervalo de carga t (ver Figura 8).

$e_a^{sj}(t)$: es el flujo que sale de j y llega a su destino s en el intervalo de carga t .

El balance de nodo se expresa mediante la ecuación (2.5).

$$\sum_{i \in A} u_a(t) = \sum_{i \in B} v_a(t) \quad (2.5)$$

Donde, A: conjunto de nodos cola y B: conjunto de nodos cabeza.

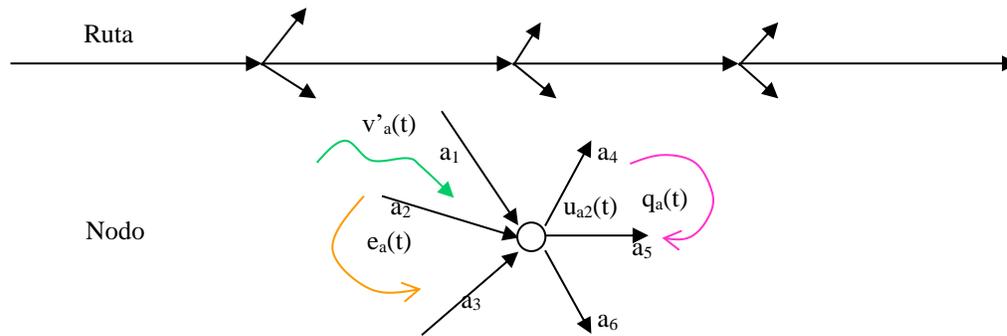


Figura 7. Representación de una ruta compuesta por varios arcos y nodos; cada nodo recibe y entrega el flujo como se detalla mediante las variables dinámicas de la Figura 3.

El balance en el arco se expresa mediante la ecuación (2.6) (Boyce et al., 2001):

$$x'(t) = u_a(t) - v_a(t) \Rightarrow x_a(t) - x_a(t - 1) = u_a(t) - v_a(t) \Rightarrow x_a(t) = u_a(t) - v_a(t) + x_a(t - 1) \quad (2.6)$$

Condición de conservación de flujo. Todo lo que entra se propaga en los arcos $\forall t$, lo cual se representa mediante la ecuación (2.7):

$$\sum_{i \in A} q_a^{is}(t) = \sum_{a \in M} u_a^{is}(t) \quad (2.7)$$

M: conjunto de arcos usados

A: conjunto de arcos

La condición de la regla FIFO se presenta en la ecuación (2.8) (Astarita, 1995):

$$\dot{\tau}(t) = \frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{u(t)}{v(t+\tau(t))} - 1, \forall a \quad (2.8)$$

Descripción analítica de la propagación del volumen en la red. El volumen se propaga por el paso de u_a^k a los arcos, con la ayuda de una expresión analítica que establece la forma de seleccionar la mejor ruta. Para esto se considera la ley de propagación de algunos autores como Ran y Boyce (1996) y Ban et al., (2008), expresada mediante la ecuación (2.9) e ilustrada en la Figura 8:

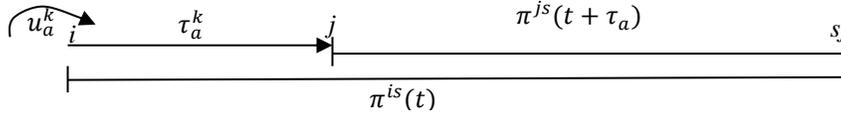


Figura 8. Representación de la relación analítica entre el flujo de entrada al arco (u_a^k) y el tiempo más corto de propagación a su destino s o al nodo j más cercano a s ($\pi^{js}(t + \tau_a)$). Adaptado de la formulación de Ban et al., (2008)

$$0 \leq u_a \perp \{\pi^{js}(t + \tau_a) + \tau_a(t) - \pi^{is}(t)\} \geq 0 \quad (2.9)$$

El símbolo “ \perp ” representa la relación perpendicular entre la inecuación izquierda del flujo de entrada y la inecuación de la derecha que define el tiempo más corto que lo acerca a su destino, $u \perp \pi \Leftrightarrow u^T \pi = 0$.

Así descrita la naturaleza dinámica del tránsito, las variables del modelo DUE y el tratamiento del tiempo aún requieren mayor profundidad para poder aplicar el modelo DUE-WLM a una red objetivo como la de la ZMVM.

Las formas funcionales del tiempo de viaje en el arco, variables en el tiempo, no incorporan las variables de flujo de entrada, flujo de salida ni de flujo en el arco. La propagación del flujo se realiza con programas de simulación, como se explicó antes. Entonces con fundamento en los retos para la investigación sobre ADT, ya expuestos (Boyce et al., 2001), se realiza una etapa experimental en la investigación que sirve de guía hacia un nuevo enfoque para abordar el modelo DUE-WLM.

2.4. Tipo de red objetivo

Esta investigación tiene como objetivo modelar la asignación de tráfico dependiente del tiempo en una red vial urbana congestionada real, tal como la red vial de la Ciudad de México, específicamente la red principal que da movilidad al transporte particular. Esto es retador en la concepción del comportamiento del usuario, la selección de la ruta, el tiempo de viaje en la ruta y los arcos, la propagación de los flujos, los efectos de la congestión, el tratamiento del tiempo; todo esto determinante en la formulación del problema y su aplicación en una sección de red.

En el capítulo anterior se citan aplicaciones de ADT en redes. Algunos artículos que modelan redes relativamente grandes, aplican ADT mediante el enfoque de simulación con programas de macro, meso y microsimulación. También se explica que algunos componentes del algoritmo son dados en preprocesos, los resultados son aproximados, hacen supuestos fuertes, algunos de ellos poco reales. Un análisis profundo lo realizan Peeta y Ziliaskopoulos (2001).

Características generales de redes grandes congestionadas

Ben-Akiva et al. (2012) se enfocan en la modelación de redes altamente congestionadas con DynaMIT-P, por sus siglas en inglés (Dynamic network assignment for the Management of Information to Travelers), que aborda la ADT con el enfoque de simulación (cita a Ben-Akiva et al., 1997, 2001, 2002) orientado a aplicaciones de planeación, en específico en un sector de la ciudad de Beijing. Ellos hacen una relación de las características de redes grandes altamente congestionadas:

- Miles de arcos direccionales
- Numerosos arcos relativamente cortos
- Intersecciones a nivel
- Intercambios viales a desnivel
- Vías a nivel y viaductos conectados por rampas de entrada y salida, algunas cercanas
- Congestión severa con filas y ondas densificantes (spillbacks) que se esparcen en la red
- Interferencias significativas por tráfico no motorizado en las intersecciones

La cantidad de viajes en la ciudad de Beijing, descrita como una megaciudad en el 2008 (Ibid), es similar a aquellos obtenidos por la Encuesta Origen Destino 2017 (EOD2017) de la Zona Metropolitana del Valle de México (ZMVM). Muchas ciudades exhiben estas mismas características y otras como:

- Proporción significativa de viajes cuyo tiempo de viaje rebasa una hora. En la ZMVM el 27% (EOD2017).
- Se presenta un período sostenido de inicio de viajes de 3 o 4 horas consecutivas, una de ellas la hora de máxima demanda (Ibid).
- Sectores extensos de la red vial presentan congestión severa durante varias horas alrededor de la hora de máxima demanda, matutina, medio día y vespertina, tal como en la ZMVM (Ibid).

Aunque Ben-Akiva et al. (2012) buscan adaptar el programa a los retos de la megaciudad, no abordan aspectos de comportamiento de la selección de ruta, lo cual sí se analiza en esta tesis. Otra diferencia entre Ben-Akiva et al. (2012) y la presente investigación es el enfoque analítico determinístico, que aquí se adopta para la formulación del problema de asignación de tráfico dependiente del tiempo, respecto del enfoque estocástico que dichos autores abordan.

Características respecto de la operación

Las redes grandes se componen de vías de acceso controlado, ya sea viaductos elevados o deprimidos, algunos de ellos con cobro de cuota. También vías arterias con intersecciones semaforizadas, o vías principales de paso preferencial al cruce de otras vías controladas con señal de ALTO o CEDA EL PASO.

Esta investigación analiza funciones de tiempo de viaje que representen los tipos de vías que conforman una red vial principal de una ciudad, que sirve a los viajes que conectan los orígenes y destinos de redes con vías de acceso controlado y vías arterias semaforizadas. Esto se explica en el siguiente capítulo. Algunos autores analizan redes con arcos de acceso controlado, arterias semaforizadas y vías no semaforizadas en aplicaciones ADT (Lee et al. 1997 y Boyce et al. 1997).

El modelo que se presenta en esta tesis amplía las investigaciones de Lee et al. (1997), Ran y Boyce (1996), Boyce et al. (1997a), Boyce et al. (1997b), Ran et al. (1997), así como los referenciados en la primera parte de este capítulo. Se introducen funciones de tiempo de viaje estudiadas y probadas por la comunidad científica y que son práctica en el diseño y operación de redes viales (HCM, 2010, Roess et al., 2011, Akcelik, 1991, 2003) También, se realiza un programa matemático de asignación de tráfico de equilibrio del usuario y se aplica en un sector de red de la ZMVM. Ésto se explica en el capítulo 3 y se amplía en el Apéndice B.

La planeación de la red vial

Modelos de asignación de tráfico estáticos son utilizados en actividades de planeación para evaluar cambios en la infraestructura vial principal. Sin embargo, se requieren recursos de modelación para decisiones tácticas, de operación y evaluación para revisar estrategias de manejo de la demanda, control de tráfico, carriles de alta ocupación, cobro en carriles exclusivos, que arrojen información de indicadores de tráfico variables en el tiempo, tal como, flujos, tiempos de viaje, longitud de filas, ocupación de las vías, propagación de la congestión (Ben-Akiva et al., 2012), como se explica en el capítulo anterior. Aún hay retos que atender en la investigación de modelos ADT relacionados con la eficiencia computacional y el realismo para estimar los efectos de la congestión, como las filas y las ondas densificantes. Algunos programas de simulación ADT presentan situaciones poco realistas como “gridlocks” cuando ciertas particularidades de las redes grandes no son bien representadas (Ibid).

La falta de recursos metodológicos para la planeación de la infraestructura vial es evidente en redes grandes como la de la ZMVM.

Análisis del comportamiento del viajero y justificación

Esta tesis se fundamenta en el comportamiento de la selección de ruta de los viajeros de vehículos particular (y equivalentes), los cuales cumplen el primer principio de Wardrop (1952), conocido como equilibrio del usuario, explicado en el capítulo 1, cuya proporción es alta en el tránsito vial y sus efectos en los indicadores de desempeño son determinantes. Hay necesidad de contar con recursos metodológicos de asignación de tráfico dependiente del tiempo, que entregue información valiosa para la toma de decisiones de operadores de tránsito e información a los viajeros.

En principio se trabaja en el algoritmo de propagación en la red basado en la Figura 3 y la Figura 4, sobre un tramo de red vial de la ZMVM, a partir del modelo básico de Ran y Boyce (1996) y Carey (2001, 2009), con el recurso metodológico de la red espacio-temporal, dentro de un algoritmo anidado. La metodología implica el desarrollo de varios subprocesos. Un componente fundamental es el subproceso de asignación de tráfico de equilibrio del usuario (UE-D). Éste se define mediante el programa matemático de Beckmann et al. (1956), que se ejecuta de forma implícita mediante el algoritmo de Frank-Wolf. La red está compuesta por vialidades de acceso controlado y arterias semaforizadas. Para esto se hicieron experimentos con varias funciones de tiempo de viaje que incorporan demoras fija e incremental. Los análisis y resultados pueden revisarse en Londoño y Lozano (2012). Entre las conclusiones surge la necesidad de profundizar en las variables que definen el tiempo de viaje, las propiedades matemáticas, el realismo, entre otros aspectos relacionados con el modelo de propagación del flujo en la red.

Los retos en la investigación de ADT expuestos en este capítulo son la base para profundizar en otras estrategias de modelación, en la estimación de los tiempos de viaje en los arcos y en los procesos de propagación. A partir de estudios de campo, el cálculo de indicadores de desempeño de ruta, la realización de experimentos con modelos UE-D, se identifican aspectos y factores claves que guían la formulación de una nueva forma de modelar el TDTAP. Esto se explica en el siguiente capítulo.

3 ASIGNACIÓN DE TRÁFICO DEPENDIENTE DEL TIEMPO CON FILAS FÍSICAS Y RESTRICCIONES DE EQUILIBRIO PARA REDES URBANAS CONGESTIONADAS

La investigación sobre los problemas de asignación de tráfico dinámicos, ADT, que consideran el efecto del control con semáforo, en especial en período pico, ha despertado gran interés en la comunidad de estudiosos y expertos en modelación de redes, durante las últimas décadas (Ozan et al., 2014); como se explicó antes, este proceso conjunta la interacción y solución de dos problemas básicos: la selección de ruta en una red vial y la carga de los flujos resultantes que define la propagación del tráfico en arcos y rutas. El control de semáforo involucra demora, fila, emisiones, consumo de combustible y flujo (Ibid, citan a Akcelik, 1981). El enfoque de la presente investigación sobre TDTAP se fundamenta en la extensión del problema TAP-UE (Beckmann et al., 1956) dinámico que, por la resolución de la información de tráfico que es variable en el tiempo, se denomina dependiente del tiempo, y tiene en cuenta las características de los arcos que inciden en el tiempo de viaje y la selección de ruta de los viajeros.

En el capítulo anterior se revisan estrategias de modelación relacionadas con la selección de la ruta en el modelo ADT, así como factores y variables que inciden en la dinámica del flujo y la propagación en la red. Con fundamento en las debilidades y vacíos en el tratamiento analítico integral de la propagación del flujo, las filas y el comportamiento del viajero en la selección de la ruta, señaladas en el capítulo anterior, se formula otra estrategia de análisis entre éstas. Entonces se amplía la propuesta del modelo DUE-WLM, presentado en el capítulo anterior y se transforma en uno más completo, en el que se busca realismo, mediante una estructura matemática que represente el proceso jerárquico de decisión de los viajeros en vehículo privado, con funciones de viaje cuyas características se ajusten a las vías principales de las redes viales urbanas y se conjunten en un programa matemático en forma implícita.

Aunque la investigación en la formulación y solución de los modelos ADT se desarrolla hace tres décadas, aún es un tema desafiante para la comunidad investigadora el tratamiento analítico de la dinámica del flujo en la red, así como la relación funcional entre las variables dinámicas, el comportamiento del volumen vehicular en el arco individual perteneciente a una ruta elegida por los viajeros y su propagación por la red. Adicionalmente, “debido a las complejidades que surgen de la dinámica de tráfico en tiempo real y las características del sistema, las formas funcionales analíticas que reproduzcan el comportamiento real de tráfico prácticamente no existen, debido a las funciones objetivo que se usan y/o a las restricciones” (Peeta y Zhou, 2006).

Existe un consenso sobre las propiedades de las funciones de tiempo de viaje en el arco (LTTF) cuando se carga de viajes una red vial dependiente del tiempo, tal como en una red estática en estado de equilibrio del usuario (UE), cuyos resultados pueden acercarse a un comportamiento factible de los viajeros, en el que además se

busca: i) minimizar el costo; ii) cumplir la regla FIFO (first-in-first-out), que implica que los vehículos que entran primero salen primero; y iii) cumplir con la causalidad, que significa que la velocidad y el tiempo de viaje de un vehículo en un arco son solo afectados por la velocidad de los vehículos que los anteceden (Long et al., 2011) . Por lo tanto, es deseable que la LTTF dinámica satisfaga el efecto de la congestión con criterio de UE, FIFO y causalidad, a fin de obtener soluciones acordes con la realidad en los modelos ADT (Ibid). En contraste, en el ámbito de la modelación ADT se evidencia la necesidad de profundizar en las formas funcionales de las variables dinámicas, sus propiedades y su relación con las LTTF que dependen del número de vehículos (Ortúzar y Willumsen, 2011).

El estudio de la dinámica de circulación vehicular en la red, en este aparte, se trata macroscópicamente con el enfoque analítico. En el desarrollo de la investigación se profundiza en el análisis de TDTAP en redes urbanas en las que se presentan características diferentes en los arcos, ya sean vías de acceso controlado o vías arterias semaforizadas, en las cuales los viajes se desempeñan sensiblemente diferentes. A partir de observaciones de campo y la realización de experimentos en una sección de la red de arterias de la ZMVM, se propone una estrategia matemática para integrar el proceso de propagación del flujo y la formación de filas, producidas por la densificación del flujo, en redes congestionadas (Londono y Lozano, 2014a; en caso de estudio en Apéndice A).

En el contenido del presente capítulo se conceptualiza el modelo ADT que incorpora la variable fila, en un programa matemático de optimización binivel, que combina un modelo de diseño de red, un modelo de asignación de tráfico de equilibrio del usuario determinístico y una función de tiempo de viaje que crece con el flujo, la cola y el tiempo de congestión; todo esto al interior de un modelo de carga que tiene en cuenta la propagación del flujo dependiente del tiempo, el cual se identifica como BL-TDUE-D. Primero se amplía la revisión de la literatura sobre estrategias ADT, DUE o TDTAP, cuya estructura matemática considera la fila en los arcos. Segundo, se explica el concepto de comportamiento en la selección de ruta, la demora y la fila, que se propone en esta investigación. Con lo anterior, se presenta: el fundamento, el enunciado y la estrategia del modelo de asignación de tráfico de equilibrio del usuario dependiente del tiempo, la fila y el flujo, determinístico binivel, BL-FQ-TDUE-D, objetivo principal de esta tesis. Tercero se expone una formulación general del modelo; y otra específica en su forma NDP. Al final se presenta una parte de red de la ZMVM, en la que se han hecho experimentos con el modelo UE-D estático; y se propone el uso de funciones de tiempo de viaje en el arco; y se describen las variables que definen dicho tiempo de viaje, que se adaptan a redes urbanas congestionadas, cuyas propiedades matemáticas son adecuadas para el programa de optimización formulado.

3.1 La propagación del flujo y la modelación de la fila en arcos viales

Es vasta la literatura sobre modelación, solución y pruebas de problemas ADT en redes, sin embargo, hay pocos que profundizan en las relaciones analíticas de la propagación y las funciones de tiempo de viaje en el arco (Bliemer, 2007; Bliemer et al., 2014). Gran parte de los procesos DNL son rutinas de simulación, con

subprocesos analíticos en el arco y/o en las rutas, como los softwares que se mencionaron antes (Capítulo 1). A continuación, se explican los más actuales en el contexto de los factores que definen el tiempo de viaje en el arco.

Bliemer (2007) presenta un modelo ADT multiclase, que relaciona analíticamente la dinámica de la fila y el proceso de onda densificante (en inglés referido como *spillback*), sin usar funciones de tiempo de viaje. El modelo DNL utiliza un WLM, que combina un modelo de arco y un modelo de nodo. El autor primero calcula flujos de entrada, la fila y, el potencial flujo de salida. Segundo determina el flujo de salida que depende de un modelo de nodo. Luego hace un proceso regresivo para calcular los tiempos de viaje en el arco. El modelo de arco describe la propagación del flujo en el arco, toma en cuenta diferentes velocidades para diferentes tipos de vehículo y una dinámica de fila horizontal. Entonces calcula medidas de arco como: flujo de entrada, fila de entrada, longitud de fila y tiempo de viaje del arco en retrospectiva. Este modelo evoluciona en conjunto con otras investigaciones, tales como Bliemer y Bovy (2003), Joksimovic et al. (2005a), Joksimovic y Bliemer (2005b), Bliemer (2007), Brederode et al. (2010, 2016, 2018), Bliemer et al. (2012, 2014), Bliemer y Raadsen, (2017).

El modelo DNL fundamentado en un modelo simplificado KWM de Newell (1993, 1998), conocido como LTM, es desarrollado en Yperman et al. (2006), Gentile et al. (2006) y Gentile (2010, 2015), con similitudes con el CTM. También incorpora elementos de teoría de flujo de tráfico para calcular la demora en intersecciones urbanas (Yperman, 2006); en intersecciones semaforizadas usa el modelo de demora de Webster (1958), en el cual considera la demoras uniforme y la demora aleatoria; en intersecciones no semaforizadas estima la demora con base en la teoría de aceptación de brechas (Taylor et al., 1996) y la capacidad, deducido de la misma teoría, por el modelo propuesto por Drew (1968), Buckley (1962) y Harders (1968) (citados en Yperman, 2006). Un resumen más amplio se encuentra en Londono y Lozano (2014a). Carey et al. (2014), Jin (2015), Bliemer y Raadsen (2018), profundizan en el enfoque analítico del DNL, el primero con WLM; los últimos con PQM y LTM. Raovic et al. (2017) se refiere a éstos como modelos de filas dinámicos (DQM).

Los investigadores han desarrollado programas de cómputo con complejos métodos de ADT y DNL, que simulan el movimiento de los flujos en la red, fundamentados en procesos analíticos combinados con simuladores que se ocupan de llevar el flujo por los arcos a los destinos. Algunos definen estados de los flujos mediante formas funcionales basadas en el diagrama fundamental, combinados con el modelo WLM o PQM, para considerar estados congestionados y procesos de densificación corriente arriba. Otros usan modelos de fila de procesos determinísticos o estocásticos.

Esta investigación propone un acercamiento de DUE con UE-D mediante una función de tiempo de viaje que integra las variables tiempo de congestión, fila y cantidad de flujo; dicha función tiene buenas propiedades matemáticas para realizar el subproceso de UE-D en intervalos de carga de la red. A continuación, se explica

la relación entre la selección de ruta, la función de tiempo de viaje y la forma como la variable fila entraría en la dinámica de propagación.

3.2 La selección de la ruta, demoras y filas largas

Los sistemas de vías urbanas están compuestos por tramos viales unidos por intersecciones, topológicamente expresados como arcos y nodos. Los viajes, realizados por viajeros cotidianos, son cargados a la red mediante modelos de asignación de tráfico. Los usuarios regulares conocen las rutas y las seleccionan de acuerdo con su experiencia. Actualmente existen comunidades de usuarios viales en redes que comparten información sobre el estado de la red (Waze, Google Maps, TomTom Traffic Index, etc), es decir tramos congestionados, cuellos de botella, filas, demoras, que pueden persuadir cambios de ruta.

Esta investigación realizó el seguimiento de varias rutas que prestan servicio entre pares origen destino (O-D) en varios días y años. Se capturaron las características de cada arco e intersección. Se realizaron estudios de tiempo de recorrido mediante el método del vehículo flotante, dotado de GPS, con la técnica del vehículo máximo (Manual of Transportation Engineering Studies, Schroeder et al., 2010), durante períodos pico. Esta información se procesó y se obtuvieron valiosos resultados, que muestran relaciones del comportamiento del flujo, día a día, la presencia de filas y filas móviles; además se midieron las demoras y se obtuvo un indicador que define la magnitud de la longitud media de la fila (Londono y Lozano, 2014a, 2016; ver en caso de estudio en Apéndice A).

Entonces se propone incorporar al problema TDTAP, la función de tiempo de viaje que incluye las demoras fija e incremental; esta última combina la demora aleatoria y de sobreflujo. Para esto se trabaja con la LTTF presentada por Akcelik (2003), apropiada para los arcos urbanos, semaforizados o no. Esta función está fundamentada en sistemas de fila, que depende del flujo que circula por el arco, el componente de fila inicial, el tiempo de sobreflujo, y que tiene propiedades matemáticas que cumplen los requisitos para la optimización del programa matemático de asignación de tráfico en redes con equilibrio del usuario de Wardrop.

Lo anterior se justifica porque varias prácticas de ADT y DUE suponen que la demora en el arco solo depende del flujo en el arco. Ortúzar y Willumsen (2011) afirman que esta suposición no es realista en redes congestionadas.

3.3 Problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario dependiente del tiempo, la fila y el flujo (FQ-TDUE-D)

A continuación, se presenta la hipótesis del modelo propuesto en esta investigación, como una extensión de los problemas ADT fundamentales antes explicados. Se considera que cada viajero selecciona la ruta más corta bajo condiciones prevalecientes, que de acuerdo al primer principio de Wardrop (1952), ningún viajero puede mejorarla por un cambio de ruta (UE-D). Se asume que las características de la red vial y la demanda entre los

pares O-D son conocidas. La matriz de viajes O-D es asignada en períodos de tiempo constantes, menores a una hora. Se supone que los arcos no están vacíos al comienzo de cada período, pues es posible que se encuentre flujo remanente del período anterior.

En ciudades congestionadas se presentan filas en muchos arcos de arterias, semaforizadas o no, así como en vías de acceso controlado. Los viajeros cotidianos conocen bien sus rutas, pero si tuvieran información de los flujos y las filas en la red vial, podrían ser disuadidos para un cambio de ruta. Otros usuarios podrían optar por cambiar de ruta debido a la presencia de filas que excedan cierta porción de longitud de los arcos. En varias ciudades de países en desarrollo, las filas obstruyen las intersecciones, ya sea por falta de educación vial o de disponibilidad de tecnologías para el control de filas (colas). La longitud de la fila debe ser tomada en cuenta y limitada para el manejo del tránsito.

El problema FQ-TDUE-D es tratado mediante una estrategia que busca optimizar el tiempo de viaje en la red en la asignación del tráfico, tomando en cuenta la longitud de arco ocupada por la fila. Posteriormente es propagado el flujo en la red.

Enunciado del problema de asignación de tráfico dependiente del tiempo y de la fila

En congruencia con la teoría de comportamiento, para la selección de ruta de viajeros cotidianos en ciudades, se realiza conforme al primer principio de Wardrop (1952), en el modelo de asignación de equilibrio del usuario, el cual aplica en un mercado de competencia perfecta en el que se supone que los viajeros tienen información de las condiciones de la red, y donde ningún viajero puede mejorar su itinerario y por ende su tiempo de viaje por un cambio unilateral de ruta.

Si dicho mercado se optimiza considerando la variable tiempo en la red, se modela dependiente del volumen de tránsito, esta investigación agrega que:

ese tiempo de viaje es sensible al tamaño de la fila en cada arco o a su afectación espacial (por la fila) y, por lo tanto, la asignación de equilibrio del usuario puede modelarse como un problema de optimización restringido a la demanda de viajes y a la oferta, en términos de la fila posible, además de que es sensiblemente variable respecto al tiempo en el período de análisis.

Estrategia de asignación del tráfico dependiente del tiempo

La definición anterior corresponde a un juego no cooperativo, entre una entidad superior que desea observar el patrón de viaje que resulta al anticiparse a la reacción de los viajeros e impone acciones o reglas, y en un nivel inferior donde están los viajeros que con base en dichas acciones seleccionan la mejor estrategia de viaje con algún criterio de optimalidad. Entonces se formula el problema BL-FQ-TDUE-D como un problema de optimización binivel, BLP por sus siglas en inglés (Bilevel Problem), cuya función objetivo busca minimizar el tiempo de recorrido total en la red, el cual depende tanto del volumen como de la longitud de la fila vehicular

en el arco, cuando se asigna una matriz de viajes O-D a una red vial con el criterio del equilibrio del usuario, cuya función de tiempo de viaje también depende del volumen y la longitud de la fila en el arco.

Lo anterior contribuye a solventar uno de los vacíos en los modelos de ADT, referidos en Ortúzar y Willumsen (2011), entre otros. Estos autores hacen un análisis sobre la necesidad de mejorar los modelos de demora en la selección de ruta y la asignación de rutas dinámicas. Ellos explican la necesidad de considerar la naturaleza de las filas en las intersecciones y sus efectos en la propagación del flujo. Además, consideran la modelación del cambio de la fila en el tiempo, algunas veces al alza (creciente o densificante) y otras a la baja (decreciente o disipante). También consideran la presencia de filas al inicio del período de interés.

3.4 Formulación del modelo general BL-FQ-TDUE-D

El problema BL-FQ-TDUE-D propuesto se formula como un juego no cooperativo de Stackelberg y se clasifica como un programa matemático binivel con posición optimista (Dempe, 2002, Dempe y Zemkoho, 2011, Dempe et al., 2012) con restricciones, cuyas condiciones necesarias de primer orden, sus respectivas condiciones de regularidad y condiciones suficientes, facilitan expresarlo como un problema matemático con restricciones de equilibrio (MPEC) (Luo et al., 1996). Además, el problema binivel se plantea con restricciones de propagación del tráfico asignado y es un subproblema de carga dinámica de los problemas de ADT.

En esta sección se explica el BL-FQ-TDEU-D, propuesto en su forma general, como un problema de optimización de diseño y operación de redes de tránsito, cuyo problema inferior corresponde al problema de asignación de equilibrio del usuario, y entonces es un MPEC. El Cuadro 4 define las variables y términos del modelo.

La formulación del BL-FQ-TDUE-D se basa en los avances de una amplia investigación sobre modelación de asignación de tráfico aplicado al diseño de redes urbanas. Perteneció a la clase de problemas de diseño operativo de redes de tráfico, donde las variables de diseño se determinan para todos los períodos, para rutas y arcos. Con fundamento en Migdalas (1995), Patriksson y Rockafellar (2002) y Brotcorne et al. (2008), a continuación, se detallan las características del BL-FQ-TDUE-D (Londono y Lozano, 2014b):

- Se formula como un problema matemático de optimización binivel con restricciones de flujo en equilibrio del usuario y ocupación de fila en el arco.
- Es un modelo de asignación que se formula con variables discretas, con base en el arco, pero se resuelve en función del equilibrio del tiempo de viaje en las rutas entre los mismos pares O-D.
- La solución de este tipo de modelos determina de forma implícita la selección de la ruta y el flujo de tráfico, para dos tipos de arcos con características específicas; éstos son: arcos de acceso controlado y arcos semaforizados, pues describen topológicamente las vías que componen una red vial urbana principal.

- Las variables dependientes del tiempo, en la solución del modelo producen indicadores que representan valores promedio en el arco.
- Las funciones de tiempo de viaje en el arco se definen analíticamente dependiendo del tipo de vía ζ y las características del control de tráfico, el flujo entrante al inicio del tiempo τ , $v(\tau)$, y el tamaño de la fila al inicio del período de tiempo de sobreflujo T_f , $q(\tau)$
- El tiempo total T es dividido en κ sub-intervalos de tiempo de longitud $\Delta_\tau = T/\kappa$
- $\theta_a^k(\tau)$ es el tiempo de viaje en el arco a en la ruta k al inicio del tiempo τ
- $t_a^{\zeta k}[\theta(\tau)]$ es la función de tiempo de viaje y demora en el arco a en la ruta k en $\theta_a^k(\tau)$

Cuadro 4. Definición de variables del modelo BL-TDUE-D

N conjunto de nodos	A conjunto de arcos
R conjunto de nodos origen, $R \subseteq N$	S conjunto de nodos destino, $S \subseteq N$
K conjunto de rutas que conectan todos los pares $r-s$, entre los O-D	M_{rs} matriz origen-destino O-D (demanda)
x variable de decisión del nivel superior	y variable de decisión del nivel inferior
T tiempo total en que se realiza la carga de la red	κ subperíodos de carga de la red
τ subperíodo de carga, $\tau \in T, [0, 1, 2, \dots, \tau, \dots, \eta]$	$h_k(\tau)$ flujo en la ruta k en el tiempo τ
$v_a(\tau)$ flujo en el arco a o flujo que llega al arco a , con semáforo, en el tiempo τ	$o_a(\tau)$ flujo que sale del arco a en el tiempo τ
$m_l(\tau)$ viajes en la ruta l^{rs} que conectan el par $r-s$; $l^{rs} \in K$	$q_a(\tau)$ tamaño de la fila media en el arco a en el tiempo τ ; $q_{a\tau}^{low}$ (límite inferior de la fila) y $q_{a\tau}^{high}$ (límite superior de la fila)
$t_a^\zeta(q_a(\tau), v_a(\tau))$ función de tiempo de viaje en el arco a tipo ζ ; en notación simplificada es $t_{a\tau}^\zeta$	$t_{a\tau}^{\zeta,0} = t_a^\zeta(0,0)$ tiempo de viaje en el arco a tipo ζ ; si $x_{a\tau} = 0$ y $q_{a\tau} = 0$, $t_a^0 = L_a/s_{af}$
s_{af} velocidad a flujo libre en el arco a	L_a longitud del arco a
$d_a^1(\tau)$ demora media uniforme para el flujo entrante en el arco a , semaforizado (s/vehículo)	$d_a^2(\tau)$ demora incremental para el flujo entrante en el arco a en una vía semaforizada o en una vía de acceso controlado (s/vehículo)
$C_a(\tau)$ tamaño de ciclo de la intersección semaforizada cuyo arco es a (segundos)	g_a intervalo de verde efectivo del arco a , semaforizado (segundos)
Q_a capacidad del arco a , si es semaforizado, $Q_a = S_a(g_a/C_a)$, (vehículos/hora)	S_a tasa de flujo de saturación en el arco a (vehículos/hora-verde)
$X_a(\tau)$ razón volumen a capacidad, $X_a(\tau) = v_a/Q_a$	T_f período de sobreflujo
β factor de fila disuasoria	Ω conjunto de soluciones óptimas (Patriksson, 1994b)
A_a parámetro del arco a de Akcelik (2003, 1991), según sus características	δ_{kat}^{rs} indicador de incidencia ruta-arco
$\delta_a^l = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } a \text{ pertenece a la ruta } l \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$	$\Psi_a(v_{a\tau}(\tau), q_{a\tau}(t_{a\tau}))$ función de costo por efecto de la ocupación del arco, similar a un "impuesto"

El BL-FQ-TDUE-D es expresado en su forma general mediante las ecuaciones (3.1) (Patriksson, 1994b), cuyo problema superior busca el costo mínimo de la red restringido en términos de la fila en el arco, para hallar el vector de filas en los arcos que componen la rutas k , para cada período de carga τ , y, el problema inferior es el

problema de asignación de equilibrio del usuario, UE-D, formulado como un MPEC el cual determina los flujos en los arcos que componen las rutas k elegidas por los viajero entre los pares r-s (Londono y Lozano, 2014b;), (adaptado de Migdalas, 1995).

$$\underbrace{\min}_x F(x_{a\tau}^k, y_{a\tau}^k) \quad \forall \tau \in T, k \in K, rs \quad (3.1a)$$

$$0 \leq x_\tau \leq x_{max} \quad \forall a \in A \quad (3.1b)$$

s.t.

$$f(y_\tau^*(x'_\tau))(y - y_\tau^*(x'_\tau)) \geq 0 \quad (3.1c)$$

$$y_\tau^{rs} = \sum_{a \in K^{rs}} \delta_{ak}^{rs} h_{k\tau}^{rs} \quad (3.1d)$$

Donde las variables se han definido en el *Cuadro 4*. En este caso $x_{a\tau}^k$ es la variable decisión del problema superior (por ejemplo la fila del arco a de la ruta k en el período de carga τ); $y_{a\tau}^k$ es la variable decisión del problema inferior (por ejemplo el flujo en el arco a de la ruta k en el período de carga τ); y_τ^* es el valor óptimo de la variable decisión del problema inferior (por ejemplo el flujo para un valor de la fila en el período de carga τ); $h_{k\tau}^{rs}$ es el flujo en la ruta k , entre el origen r y el destino s , en el período de tiempo τ ; y_τ^{rs} es la demanda de viajes entre el origen r y el destino s en el período de carga τ ; y δ_{ak}^{rs} es el indicador de incidencia arco-ruta.

3.5 Formulación del BL-FQ-TDUE-D como un problema de operación y diseño de redes

Patriksson y Rockafellar (2002) presentan una formulación para manejar el tráfico como un problema de estrategia operativa de la red, similar a un problema de diseño de redes (NDP) enfocado a problemas de equilibrio del tráfico, modelado como un MPEC. El problema (3.1a-3.1d) se formula con base en el análisis de Patriksson y Rockafellar (2002), pero como un juego estratégico que permite estimar el tamaño de fila en el arco, parametrizando los patrones de flujo en la red. Entonces, fundamentado en la forma básica del problema de diseño de redes de Migdalas (1995), el problema de nivel superior busca minimizar el costo total de la red, cuya función objetivo se formula en función del flujo en el arco y la fila en el arco, y el problema inferior en la forma del problema de Beckmann, como se muestra en las ecuaciones (3.2) (Londono y Lozano, 2014b).

$$\underbrace{\min}_q \sum_{a \in A} t_{a\tau} [v_a(\tau), q_a(\tau)] v_{a\tau}(t_{a\tau}) + \sum_{a \in A} \beta \Psi_a [v_a(\tau), q_{a\tau}(t_{a\tau})] \quad [tiempo, s], \forall \tau \in T \quad (3.2a)$$

$$s.a. \quad 0 \leq q'_{a\tau} \leq q'_{a\tau max} \quad \forall a \in A \quad (3.2b)$$

$$\underbrace{\min}_v z(\theta, v^*, q)_\tau = \sum_a \int_0^{\hat{v}_a(\theta)} t(w, q) dw \quad \forall \tau \in T \quad (3.2c)$$

s.a.

$$\sum_k h_{k\tau}^{rs} = m_{rs} \quad \forall r, s, \tau \in T \quad (3.2d)$$

$$v_{a\tau} = \sum_k \sum_r \sum_s h_k^{rs}(\theta(\tau)) \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a, \tau \quad (3.2e)$$

Donde:

Las variables se han definido en el *Cuadro 4*.

w representa una variable de flujo (v).

La estrategia de abordar problemas ADT combinados con problemas de diseño de redes es poco explorada. Wismans et al. (2014) presentan un NDP discreto con un enfoque multiobjetivo, para optimizar externalidades en el manejo de tráfico dinámico. Sin embargo, la estrategia formulada en esta investigación es diferente.

Como se mencionó antes, Han et al. (2015) presentan un problema ADT-BL formulado como un juego Stackelberg diferencial (capítulo 1), que, aunque coincide con el aquí propuesto en la forma básica, difiere en los objetivos y la forma de los subproblemas superior e inferior.

En el diagrama de la Figura 9 se describen los componentes principales del modelo BL-FQ-TDUE-D y sus relaciones

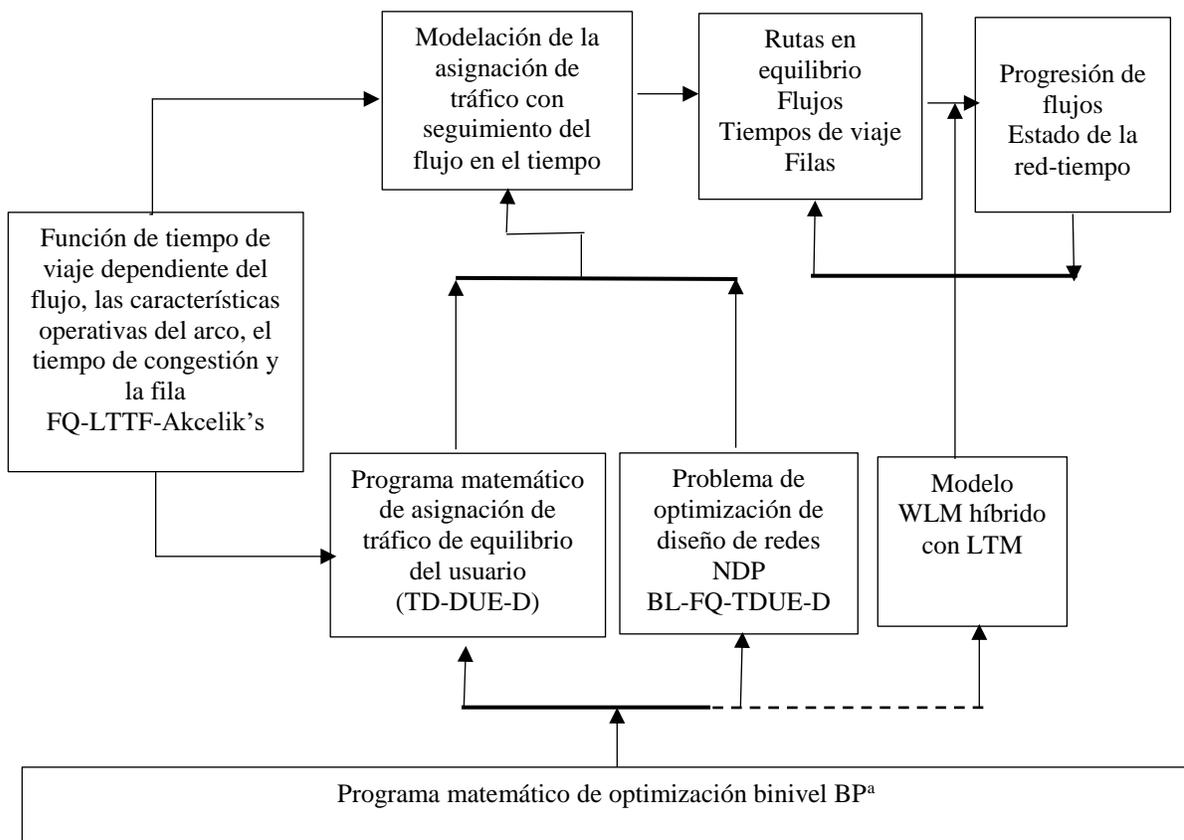


Figura 9. Componentes del modelo BL-FQ-TDUE-D.

^a Por sus siglas en inglés (Bilevel Program). Elaboración propia

3.6 Función de tiempo de viaje para el problema TDUE-D

Algunos autores, fundamentados en las propiedades de los modelos de ADT, limitan el uso de funciones de tiempo de viaje dependientes del volumen de tránsito, las cuales son ampliamente aceptadas para resolver

modelos de asignación de tráfico estático. Este tema debe ser estudiado, ya que una de aquellas propiedades es que el resultado de los patrones de ADT en el intervalo horario debe ser igual al producido por la asignación de tráfico estático (Carey et al., 2003; Long et al., 2011). Es por ello que se incluye en la presente investigación, el estudio de funciones de tiempo de viaje apropiadas para la asignación de tráfico en redes urbanas. Algunas investigaciones sí las usan en soluciones de modelos ADT, tal como en Ran et al. (1997) con enfoque matemático diferente al propuesto en esta tesis, lo cual se explica en el capítulo 2.

La función de tiempo de viaje en el arco o en la ruta es materia de investigación y experimentación, ya que define las características del problema, las propiedades matemáticas, el método de solución, el realismo de un caso de estudio o una solución numérica. Algunas investigaciones abordan modelos que requieren tiempos de viaje en el arco discretos, cuya fuente de información son los mismos usuarios que pertenecen a redes sociales y tienen equipos que comparten información en tiempo real como ATIS y ATMS. Otros, valoran el tiempo de viaje en el arco mediante funciones continuas a tramos, endógena o exógenamente.

La estimación de los flujos de entrada y los flujos de salida de los modelos de propagación o carga dinámica, explicados antes, se hace a partir de modelos de demora y tiempo de viaje en los arcos fundamentados en la teoría de flujo de tráfico. Existe amplia bibliografía que describe el proceso de deducción apoyado en la teoría de filas de espera (Taylor et al., 1996, Kimber y Hollis, 1979, Daganzo y Daganzo, 1997). Otros modelos de demora se deducen de procesos de regresión a partir de observaciones (Mun, 2007, Carey y Ge 2005 b, Ran et al., 1997, Ran y Boyce, 1996).

En esta investigación se propone incorporar al problema de UE-D, la función de tiempo de viaje con la demora fija, la demora incremental (combina la demora aleatoria y de sobreflujo) y la demora debida a la fila inicial. Se asume que la demora en el arco depende del tipo de control, del flujo en el arco (arcos separables) y la fila inicial, por lo que se utiliza la función de tiempo de viaje presentada por Akcelik (2003), cuya demora de sobreflujo tiene en cuenta la fila inicial durante el tiempo de sobreflujo, apropiada para arcos urbanos semaforizados o no.

Akcelik (2003) propone la función de tiempo de viaje que combina el tiempo de viaje a flujo libre y el tiempo de sobreflujo (FQ-LTTF), incluida la fila inicial, aplicable a cualquier tipo de vía. Ésta se muestra en las ecuaciones (3.3, 3.4 y 3.5):

$$t_a^{\zeta}(X_a, q_a) = t_a^0 + 0.25T_f \left\{ z_a + \left[z_a^2 + \frac{8A_a X_a}{(Q_a T_f)} + 16A_a q_a / (Q_a T_f)^2 \right]^{0.5} \right\}; \quad [h / veh] \quad (3.3)$$

Con:

$$z_a = X_a - 1 + [2q_a / (Q_a T_f)] \quad (3.4)$$

$$X_a = x_a / Q_a \quad (3.5)$$

Donde: x_a es el flujo en el arco a ; q_a es la fila inicial; t_a^0 es el tiempo de viaje a flujo libre; Q_a es la capacidad del arco a ; T_f es el período de congestión (h); A_a es el parámetro de demora del arco a (Akcelik, 2003; 1991).

En lo que sigue, se utiliza una función de tiempo de viaje, a tramos, que suma el tiempo de viaje a flujo libre y el componente de demora uniforme de Webster, $d_a^{1\zeta}$ (en s/veh), la cual se vuelve constante cuando x/Q es uno. Cuando el flujo se aproxima a la capacidad, la demora uniforme se convierte en una constante, entonces el tiempo de viaje se incrementa con la demora por sobreflujo, $d_a^{2\zeta}$ (Londoño y Lozano, 2012). En este artículo se propone que $d_a^{2\zeta}$ sea el segundo sumando de la ecuación (3.3). La función general de tiempo de viaje para vías semaforizadas o no, es como se presenta en las ecuaciones (3.6) y (3.7) (Londoño y Lozano, 2012).

$$t_a^\zeta(x) = t_a^0 + \phi d_a^{1\zeta} + d_a^{2\zeta} \quad [\text{s/veh}] \quad (3.6)$$

$$\text{Donde: } \phi = \begin{cases} 1 & \text{si es arco semaforizado (LS)} \\ 0 & \text{si es arco de acceso controlado (LA)} \end{cases} \quad (3.7)$$

Se propone una función de tiempo de viaje en el arco de una red vial urbana, la cual se muestra en la ecuación (3.8).

$$t_a^\zeta(X_a, q_a) = t_a^0 + \varphi \left(\frac{C_a}{2} \right) * \left\{ \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right)^2 / 1 - \left[\min(1, X_a) * \frac{g_a}{C_a} \right] \right\} \\ + 0.25T_f \left[z_a + \left(z_a^2 + 8A_a X_a / (Q_a T_f) + 16A_a q_a / (Q_a T_f)^2 \right)^{0.5} \right] \\ \forall X_a \in [(0 \leq X < 1) \cup (X > 1)] \quad (3.8)$$

C_a : ciclo de semáforo en el arco a (s)

g_a : intervalo de verde efectivo de semáforo en el arco a (s)

3.7 Red vial experimental

Se presenta en la Figura 10 una sección de la red primaria de la ZMVM, localizada al sur-occidente, donde se realizaron los estudios de recorrido para capturar información de tiempo de viaje, demora y presencia de fila. Esta información se comparó con la estimada para un caso de estudio con el modelo EU-D, en la red de la Figura 10, donde se usaron funciones de tiempo de viaje en el arco que aparecen en la literatura, ya referenciadas antes. Para este caso de estudio, el análisis de funciones de tiempo de viaje para redes congestionadas, sin fila inicial, en específico en la red de la Figura 10 se amplía en (Londoño y Lozano, 2012).

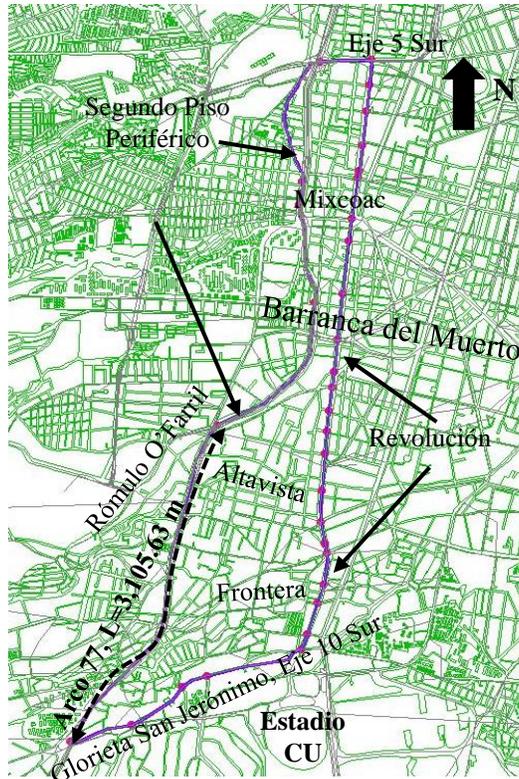


Figura 10. Red con las vías que conforman dos rutas arteriales: “Revolución” (LS) y “Segundo Piso Periférico” (LA).
Elaboración (Londoño y Lozano, 2012)

La ecuación (3.8) es calibrada y evaluada para los arcos de una red vial de dos arterias en la ZMVM (Figura 10). La Figura 11, la Figura 12 y la Figura 13 muestran formas funcionales del tiempo de viaje en uno de los arcos que conforman las rutas de la red estudiada, las cuales fueron calibradas y comparadas con información real. El tiempo de viaje fue calculado con varias funciones de tiempo de viaje conocidas (Londoño y Lozano, 2012); luego fueron obtenidas: la relación entre el grado de saturación (X), y la razón entre el tiempo de viaje dependiente del flujo-sobreflujo-cola y el tiempo de viaje a flujo libre. La Figura 11 compara tales relaciones para una vía de acceso controlado (parte del Segundo Piso Periférico); la Figura 12 y la Figura 13 muestran las mismas relaciones para un tramo que es parte de una importante de una arteria semaforizada (Revolución).

Sendas gráficas presentan el aporte en el tiempo de viaje debido a la presencia de fila inicial, antes de la saturación ($X \leq 1$), el cual crece considerablemente en congestión ($X > 1$), lo cual se presenta en la realidad.

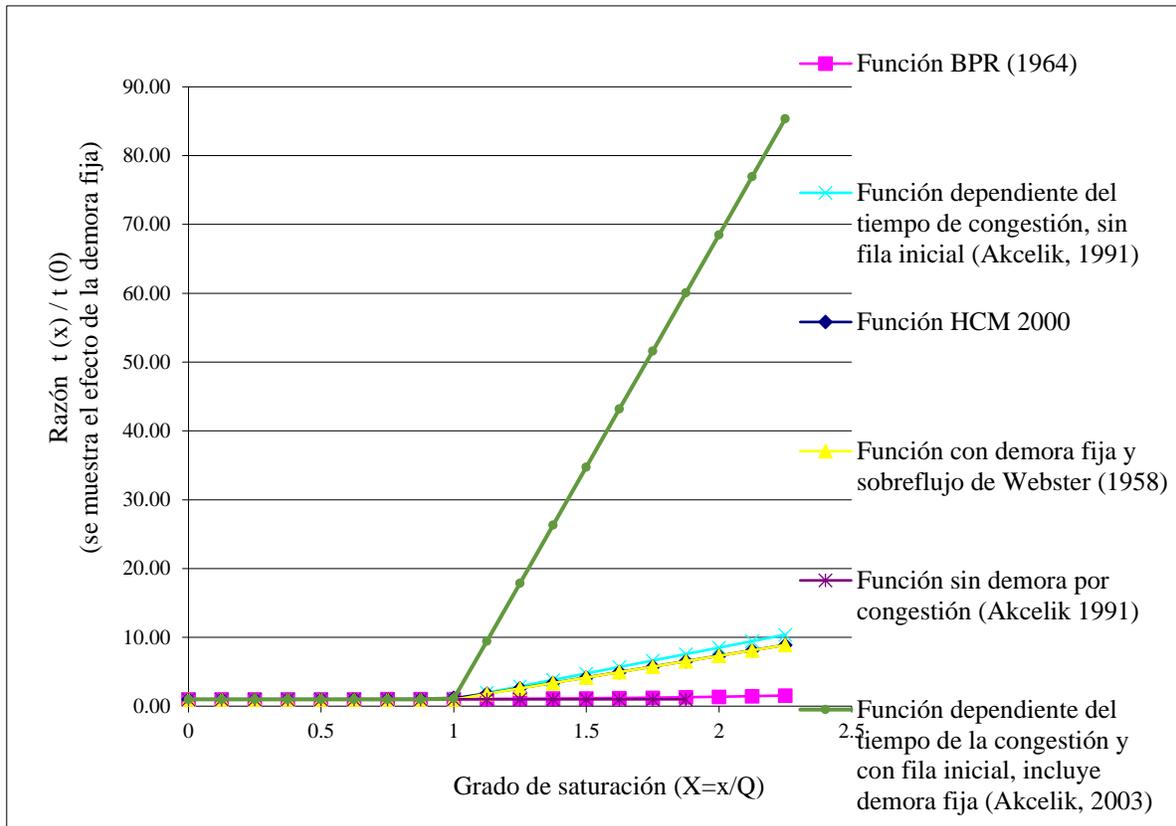


Figura 11. Funciones de tiempo de viaje para un arco vial de tipo acceso controlado (Segundo Piso de Periférico), respecto a la razón tiempo de viaje dependiente del flujo a tiempo de viaje a flujo libre (ordenadas) contra flujo a capacidad (X) (abscisas)

Presentado el modelo general y la formulación BL-FQ-TDUE-D propuesto en esta tesis, así como la forma funcional para tratar el tiempo de viaje en los arcos de una red congestionada con filas, en el capítulo siguiente se profundiza en el modelo de propagación adoptado para el problema DNL. Se revisa analíticamente la incorporación del FQ-LTTF de Akcelik (2003) en el WLM adaptado, propuesto. Luego se realiza un ejercicio de propagación en el arco de la Figura 11.

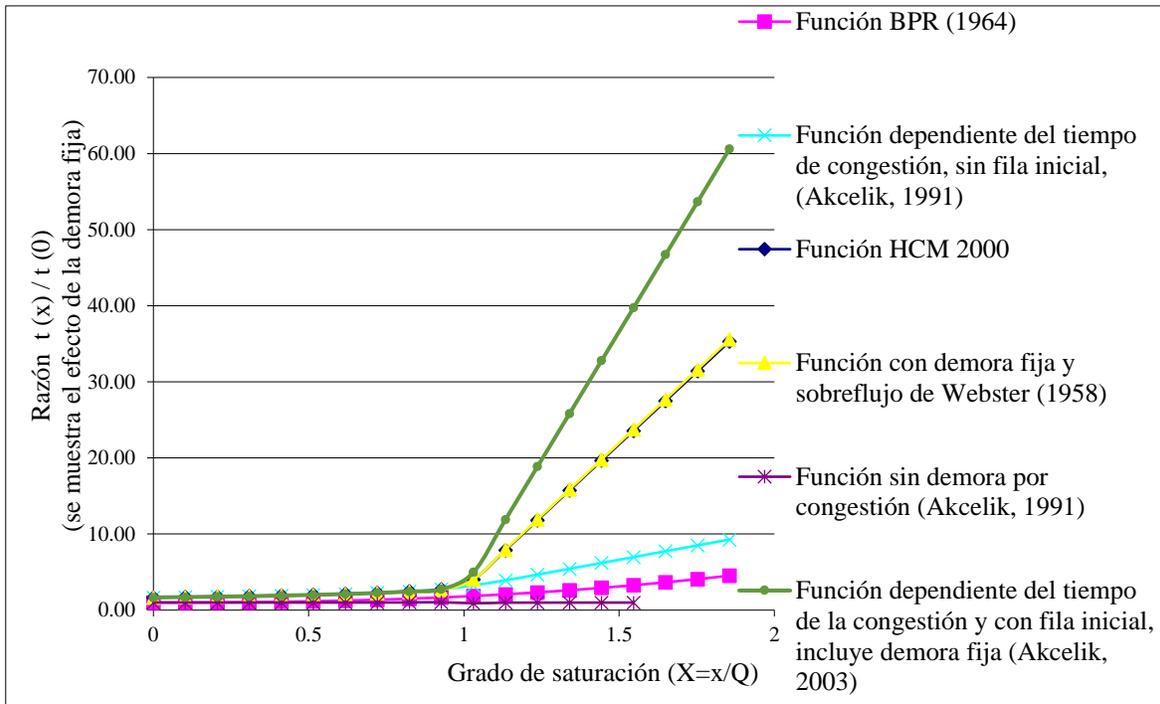


Figura 12. Funciones de tiempo de viaje para un arco de tipo arteria vial semaforizada (Revolución), respecto a la razón tiempo de viaje dependiente del flujo a tiempo de viaje a flujo libre (ordenadas) contra flujo a capacidad (X) (abscisas).

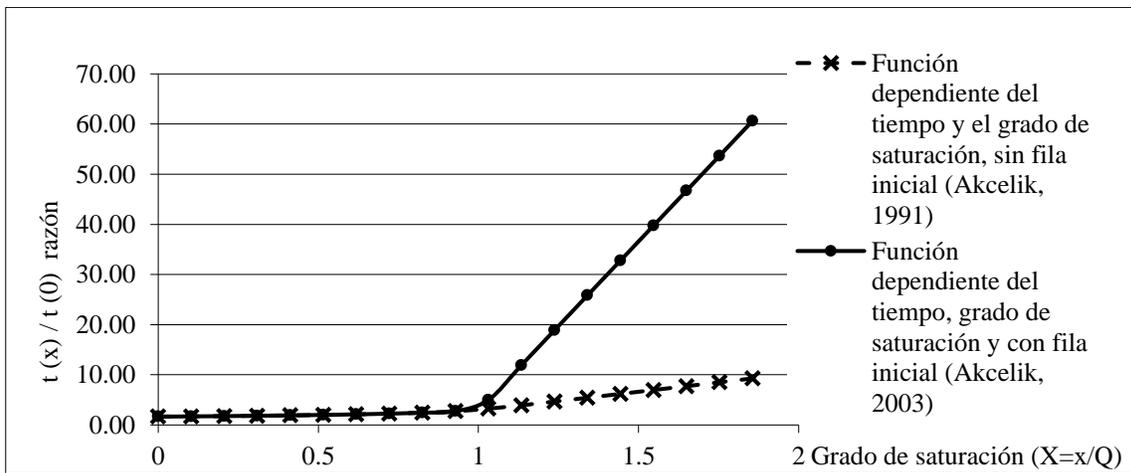


Figura 13. Función de tiempo de viaje de Akcelik (1991) sin fila inicial y (Akcelik, 2003) con fila inicial, para un arco de arteria vial semaforizada (Revolución), respecto a la razón tiempo de viaje dependiente del flujo a tiempo de viaje a flujo libre (ordenadas) contra flujo a capacidad (X) (abscisas).

4 MODELO DE PROPAGACIÓN DEL FLUJO EN LA RED DEPENDIENTE DEL TIEMPO

En este capítulo se presenta el modelo de carga dependiente del tiempo, macroscópico, que utiliza la función de tiempo de viaje en el arco. Éste predice la evolución del tráfico en la red en las rutas elegidas por los viajeros en el modelo DUE, considerando indicadores de desempeño tales como: flujos de salida, longitud de filas, y tiempo de viaje para flujos de entrada al arco o a la ruta (Ban et al., 2012a).

El modelo de arco completo propuesto, identificado como *WLM adaptado*, se basa en la función de tiempo de viaje en el arco de Carey et al. (2014), pero se modifica para aprovechar fortalezas del modelo de transmisión de arco (LTM) (Raovic et al., 2017; Bliemer y Raadsen, 2018). Los modelos de propagación WLM o modelos de tiempo de viaje “de arco completo” como función de ocupación del arco, son explicados y estudiados en Carey et al. (2014, 2017), Carey y Ge (2005 a, b), Mun (2007); también son referidos como modelos de flujo de tráfico en el arco (Nie y Zhan, 2005 a, b; Zhang y Nie, 2005), ya sea modelos de demora o modelos de flujo de salida. Los modelos de transmisión de arco (LTM) consideran el arco como una unidad y propagan el flujo mediante un mecanismo de flujo saliente y flujo entrante. Las intersecciones también son unidades que reparten el flujo a los arcos que las componen (Yperman, 2007; Raovic et al., 2017).

Los modelos de propagación de flujo se introducen en el apartado 1.8 de esta tesis. El modelo WLM define el tiempo de viaje en el arco, y luego en la ruta, en cada intervalo de asignación de viajes a la red vial. Otros enfoques deducen ese tiempo de viaje a partir de curvas de flujo entrante o saliente acumulados, los cuales son generados por métodos DNL (Long et al., 2011).

Las propiedades deseables que se revisan en los procesos de propagación son: First-in-first-out (FIFO), causalidad y reducción a un modelo estático (Long et al., 2011; Mun, 2007; Carey y McCartney, 2002), como fue mencionado en el capítulo 3.

Esta investigación desarrolla un modelo de propagación dinámico de carga de viajes en la red vial, de arco completo, dependiente del flujo y la fila (DNL-WLM-FQ) *adaptado*, determinístico, en tiempo discreto, con base en la función de tiempo de viaje dependiente del flujo, el tiempo de sobreflujo y la fila. Se analizan las propiedades, condiciones límite y capacidad de propagar el flujo en el arco.

Este capítulo primero amplía el marco general del modelo WLM en los procesos DNL, marca diferencias con respecto a LTM y PQM, y retoma las propiedades de los modelos de propagación.

Como fundamento del modelo de propagación propuesto, en la segunda parte del capítulo se explica el modelo WLM ampliado en Carey et al. (2014). En la tercera parte se detalla el modelo de arco completo, dependiente del flujo y la fila, WLM-FQ adaptado, por sus siglas en inglés (whole link model- flow-queue), adaptado en esta tesis de Carey et al. (2014), y se adicionan condiciones límite. Finalmente se presenta el caso de estudio, se revisan las propiedades matemáticas y las características de propagación, y se presenta un ejemplo numérico. Al final se describe el algoritmo para resolver el problema dinámico de carga de viajes en la red vial- modelo de arco completo, DNL-WLM adaptado, por sus siglas en inglés (dynamic network load- whole link model).

4.1 Modelo de arco completo, DNL-WLM

El modelo de arco completo (WLM) define analíticamente la propagación del flujo en el modelo dinámico de carga de viajes (DNL), que forma parte del problema de asignación de equilibrio del usuario dinámico (DUE). Este modelo se fundamenta en las investigaciones de Friesz et al. (1993), Ran y Boyce (1996), Ran et al. (1997), Wu et al. (1998), Zhu y Marcotte (2000), Carey y McCartney (2002), Carey y Ge (2004, 2005 a, b), Astarita (2002), Nie y Zhang (2005 a, b), Zhang y Nie (2005), Mun (2007, 2009), Carey et al. (2014, 2017). Raovic et al. (2017) refieren a los WLM como modelos de tiempo de viaje; proponen un modelo de transmisión de fila dinámico (DQTM) y presentan una tabla comparativa de los modelos de propagación que ofrece la literatura, respecto de la capacidad de representar formación de filas, ondas densificantes y diferentes clases de vehículos.

Tanto en el enfoque de WLM como en los de PQM y LTM, la propagación del flujo se estructura expandiendo la red en el tiempo y el espacio. El modelo analítico define al arco en dos partes (o tramos) según estados del tráfico: en movimiento o estático. El más cercano a la cola del arco se define como el tramo fluido (running segment, en Adamo et al., 1999a) o hipocrítico (LTM, en Gentile, 2010b) o estado 1 (en Yperman, 2007), o arco viaje (en Carey et al., 2014); y la parte más cercana a la cabeza del arco se define como la densa o con fila (queuing segment, en Adamo et al., 1999a) o hipercrítica (LTM, en Gentile, 2010b) o estado 2 (en Yperman, 2007), o arco fila (en Carey et al., 2014).

Propiedades de los modelos de tiempo de viaje en el arco en procesos DNL

Además de las definidas en el capítulo 3, i) FIFO y ii) causalidad, Carey et al. (2003) adiciona iii) reducción a un modelo estático, que significa que la función de tiempo de viaje en el arco debe reducir el modelo a una versión estática, cuando los flujos de tráfico son constantes en el tiempo.

4.2 Modelo general de arco completo en tiempo discreto WLM ampliado en Carey et al. (2014) y WLM adaptado

En el capítulo 3 se presenta el modelo general ADT y las variables dependientes del tiempo (Figura 3 y Figura 4). A continuación, se explica el modelo de propagación de flujo con base en el arco WLM. La presente investigación se fundamenta en el enfoque analítico de Carey et al. (2014), por la evaluación de las propiedades del modelo de propagación (ya mencionadas antes), con base en la revisión de las deficiencias presentadas en

investigaciones a la fecha, con el propósito de resolverlas; además, se consideran funciones de tiempo de viaje no lineales, las cuales pueden dar resultados más reales del proceso DNL.

El Cuadro 5 define la terminología usada en las formulaciones del presente capítulo.

Cuadro 5. Definición de variables del modelo de arco completo WLM ampliado y adaptado de Carey et al. (2014)

N conjunto de nodos	A conjunto de arcos
R conjunto de nodos origen, $R \subseteq N$	S conjunto de nodos destino, $S \subseteq N$
P conjunto de rutas que conectan todos los pares $r-s$, entre los O-D	M_{rs} matriz origen-destino O-D (demanda)
$x(k)$ tasa de ocupación del arco	$\tau(k)$ tiempo de viaje en el arco como función de ocupación $x(k)$, en el intervalo k
T tiempo total en que se realiza la carga de la red	κ subperíodos de carga de la red de tamaño Δ
k intervalo de tiempo discreto, $k \in T, [0, 1, 2, \dots, k', \dots, \kappa]$; también es el tiempo del reloj en el instante que finaliza el intervalo k (Carey et al., 2014)	$h_p(k)$ flujo en la ruta p en el tiempo k
$u(k)$ flujo en el arco a o flujo que llega al arco a , con semáforo, en el tiempo k	$v_a(k)$ flujo que sale del arco a en el tiempo k
$m_l(k)$ viajes en la ruta l^{rs} que conecta el par $r-s$; $l^{rs} \in P$	$q_a(k)$ tamaño de la fila media en el arco a en el tiempo k ; q_{ak}^{low} (límite inferior de la fila) y q_{ak}^{high} (límite superior de la fila)
$f(x)k = t_a^\zeta(q_a(k), x(k))$ función de tiempo de viaje en el arco a tipo ζ ; en notación simplificada es t_{ak}^ζ ; es el inverso de la velocidad media espacial \bar{v}	$t_{ak}^{\zeta,0} = t_a^\zeta(0,0)$ tiempo de viaje en el arco a tipo ζ ; si $x_{ak} = 0$ y $q_{ak} = 0$, $t_a^0 = L_a/s_{af}$
s_{af} velocidad a flujo libre en el arco a	L_a longitud del arco a
$d_a^1(k)$ demora media uniforme para el flujo entrante en el arco a , semaforizado (s/vehículo)	$d_a^2(k)$ demora incremental para el flujo entrante en el arco a en una vía semaforizada o en una vía de acceso controlado (s/vehículo)
w_a densidad vehicular en el arco a	$\rho_a(k)$ función flujo-densidad (vehículos que ocupan el arco en el intervalo k entre el tiempo de viaje en el mismo arco a)
Q_a capacidad del arco a , si es semaforizado, $Q_a = S_a(g_a/C_a)$, (vehículos/hora)	\bar{v} velocidad media espacial
$X_a(k)$ razón volumen a capacidad, $X_a(k) = x_a/Q_a$	T_f período de sobreflujo
S_a tasa de flujo de saturación en el arco a (vehículos/hora-verde)	g_a intervalo de verde efectivo del arco a , semaforizado (segundos)
A_a parámetro del arco a de Akcelik (2003, 1991), según sus características	δ_{pak}^{rs} indicador de incidencia ruta-arco
$\delta_a^l = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } a \text{ pertenece a la ruta } l \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$	$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si es arco semaforizado(LS)} \\ 0 & \text{si es arco de acceso limitado(LA)} \end{cases}$

A continuación esta investigación formula el *WLM adaptado*; sea $k=1, 2, 3, \dots, \kappa$ intervalos, cada uno de tamaño Δ , tal que el tiempo al final del lapso k , es Δk ; k también es el tiempo del reloj en el instante que finaliza el intervalo k (Carey et al., 2014).

En el problema DNL se carga la red vial en un rango de tiempo $[0, T]$; se realiza la propagación del flujo en las rutas, compuestas por sus respectivos arcos cada k ; para esto se divide en $\kappa = T/\Delta$ intervalos de igual tamaño.

Las variables dependientes del tiempo en el *WLM adaptado* son las siguientes: $u(k)$ el flujo entrante, $v(k)$ el flujo saliente y $x(k)$ la ocupación del arco, en el intervalo k . El tiempo de viaje en el arco como función de la ocupación del arco en el intervalo k (Daganzo, 1995 b; Carey y Ge, 2003; Carey et al., 2014), equivale al tiempo que transcurre entre la entrada y salida del flujo en el intervalo k , y se expresa analíticamente en la ecuación (4.1).

$$\tau(k) = k + f(x(k)) \quad (4.1)$$

Siendo $f(x(k))$ la función de tiempo de viaje en el arco dependiente de la ocupación en un intervalo k ; es el tiempo de viaje del flujo entrante al arco, $u(k)$, en el tiempo de reloj k .

$\tau(k)$ es el tiempo de reloj en que el flujo sale del arco, $v(k)$, en el intervalo k . Se deduce a partir de los flujos entrante y saliente en el intervalo de carga k , entendido como el acumulado desde 0.

La conservación del flujo en el arco (Carey et al., 2014) es expresada en la ecuación (4.2) y la ecuación (4.3), similar a la ecuación (2.6) del modelo general DUE-WLM presentado en el capítulo 2.

$$x(k + 1) = x(k) + u(k) - v(k) \quad (4.2)$$

$$x'(k) = u(k) - v(k) \quad (4.3)$$

El flujo saliente en el intervalo k del modelo general es (Carey et al., 2014) representado en la ecuación (4.4).

$$v(k) = \int_{\tau^{-1}(k-1)}^{\tau^{-1}(k)} u(k) dk \quad (4.4)$$

Donde $\tau^{-1}(k - 1)$ es el tiempo de entrada del flujo que sale del arco en $\tau^{-1}(k)$, es decir el tiempo de propagación del flujo inicial y final en k en ese arco.

La condición FIFO es representada como sigue:

- Si $\tau^{-1}(k) > \tau^{-1}(k-1)$; y $\delta k = \tau^{-1}(k) - \tau^{-1}(k-1) \rightarrow 0$; produce una condición equivalente a FIFO, si $f(x(k))$ es diferenciable (Astarita, 1996; Friesz et al., 1993; Carey et al., 2014), entonces se expresa en forma continua en la ecuación (4.5):

$$[df(x(k))/dk] > -1 \quad (4.5)$$

La condición FIFO se cumple si $f(x(k))$ es no decreciente y $\tau(k)$ crece con k ; es decir si y solo si se cumple la ecuación (4.6):

$$[d\tau(k)/dk] > 0; \quad (4.6)$$

Entonces, si y solo si se establece la ecuación (4.7):

$$[1 + f'(x(k))x'(k)] > 0; \quad (4.7)$$

también, si y solo si se cumple la ecuación (4.8):

$$f'(x(k)) > -1/x'(k) \text{ si } x'(k) \text{ es positiva} \quad (4.8)$$

y además se cumple la ecuación (4.9)

$$f'(x(k)) < -1/x'(k) \text{ si } x'(k) \text{ es negativa} \quad (4.9)$$

Donde $f'(x(k))$ es la derivada con respecto a $x(k)$. Sin embargo $x(k)$ es una variable objetivo del problema DNL.

- $U(k)$ es el flujo entrante y $V(k)$ el flujo saliente, ambos acumulados al final de k , si en $k=0$ el arco está vacío (Carey, 2004; Zhang y Nie, 2005; Carey et al., 2014), la condición FIFO se cumple si y solo si:
 $U(k) = V(k + f(x(k))); \text{ y } U'(k) > 0, V'(k + f(x(k))) > 0$

El modelo DNL consiste en resolver las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.4) secuencialmente. En general se asume conocido $u(k)$, por lo tanto se debe resolver $\tau(k)$ o $v(k + \tau(k))$ (luego se proponen condiciones límite para el flujo entrante). En redes reales pueden presentarse varios estados del flujo en un mismo intervalo de tiempo. También hay variación de las condiciones límite de la propagación, de acuerdo con la vecindad del arco. No es posible resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de forma explícita, sin embargo, es necesario establecer relaciones analíticas de las variables dinámicas bajo condiciones espaciales y temporales, para hallar una solución.

Para la formulación del modelo WLM ampliado en Carey et al. (2014), se establecen supuestos que se fundamentan en la teoría de flujo de tráfico e investigaciones profundas sobre DNL, WLM, PQM, LWR y LTM, mismos adoptados por el *WLM adaptado* (modelo propuesto). A continuación, se mencionan dichos supuestos:

- En el caso estático o estado estable, considerando el tiempo constante, en un tramo vial, se cumple la ecuación fundamental del tránsito $w = x/\bar{v}$; donde x es el flujo y \bar{v} es la velocidad media espacial y w la densidad u ocupación del arco (Carey y Ge, 2005b). Entonces se tiene la ecuación (4.10), donde $f(x)$ es la función de tiempo de viaje dependiente del flujo, cuyo inverso es la velocidad del flujo.

$$w = xf(x) \tag{4.10}$$

- En Carey y Ge (2005a) se muestra que existe una relación convergente de la función de tiempo de viaje, de forma lineal y cuadrática, revisadas en el modelo de arco completo, con el modelo LWR. Los autores hacen un análisis de los flujos de entrada, flujos de salida y tiempo de viaje dependiente del tiempo para un arco completo y para un arco dividido en segmentos de tamaño muy pequeños. En forma gráfica demuestran la afinidad entre el enfoque discreto, en el tiempo y el espacio, del modelo WLM cuando se compara con el enfoque continuo del modelo LWR.
- Para funciones de tiempo de viaje no lineales, no decrecientes, diferenciables continuas con respecto a la ocupación, su gradiente es limitado por arriba por un valor fijo, es decir que limita la tasa de entrada a la capacidad (Q^{max}) del arco (Xu et al., 1999), tal que se cumple la ecuación (4.15) (Carey y Ge, 2005b), o a un valor de la capacidad más un valor positivo (η) (Zhu y Marcotte, 2000), como se muestra en la ecuación (4.16) (Carey y Ge, 2005b).

$$f'(x) < 1/Q^{max} \tag{4.15}$$

$$f'(x) < 1/(Q^{max} + \eta) \tag{4.16}$$

Carey et al. (2014) explican que el modelo original (4.1), (4.2) y (4.4) requiere ser ampliado para resolver algunas deficiencias que presentan las funciones no lineales, entre otras: i) el flujo saliente puede violar la condición FIFO; ii) el flujo saliente puede exceder la capacidad de salida del arco; iii) el flujo entrante puede exceder la capacidad de entrada al arco; y iv) la ocupancia, $w(k)$, puede exceder la capacidad de ocupación del arco, en el lapso k .

Modelo WLM ampliado en Carey et al. (2014), para cumplir la condición FIFO y respetar el límite de capacidad de salida del flujo

Los autores, para la conservación del flujo presentan las ecuaciones de la (4.17) a la (4.20) y las ecuaciones (4.1) y (4.2).

$$\tau'(k) = \tau'(k - 1) + u(k)/v'(k) \quad (4.17)$$

$$v(k) = \int_{\tau'^{-1}(k-1)}^{\tau'^{-1}(k)} u(k) dk \quad (4.18)$$

$$v'(k) = Q_{max}^{salida} \text{ si } \tau(x(k)) \leq \tau'(k - 1) \text{ (implica flujo en descarga)} \quad (4.19)$$

$$v'(k) = \min\{Q_{max}^{salida}, u(k)/[\tau(x(k)) - \tau'(k - 1)]\} \text{ si } \tau(x(k)) > \tau'(k - 1) \quad (4.20)$$

Carey et al. (2014) señalan que las ecuaciones (4.17), (4.19) y (4.20) representan una versión ampliada del modelo original WLM, pues remedia problemas de rebase de flujos entrantes respecto de flujos que se encuentran en períodos anteriores, y asegura que $\tau(k) > \tau(k - 1)$, tal que los flujos de salida no sean negativos; también aseguran que el flujo de salida no rebase la capacidad de salida del arco.

Carey et al. (2014) presentan el algoritmo de propagación DNL, del WLM ampliado, al que nombra como Algoritmo 1, fundamento del WLM *adaptado* (propuesto):

Algoritmo 1 : Se establece para calcular el $\tau'(k)$ y el flujo saliente de WLM ampliado en Carey et al. (2014) para un arco.

Se calcula $v'(k)$ para cada k de (4.19) y (4.20), pues $\tau'(k - 1)$ se conoce de la iteración anterior y $\tau(x(k))$ de (4.1), para calcular $\tau'(k)$ de (4.17). Después se actualiza la ocupación $x(k + 1)$ mediante (4.2) y (4.18). Luego se regresa a resolver (4.19), (4.20) y (4.17), y se repiten los cálculos secuencialmente para todos los k , hasta cubrir todo T.

La Figura 14 ilustra la relación típica entre las variables de propagación de flujo y las funciones de flujo entrante y flujo saliente, acumulados en un arco a .

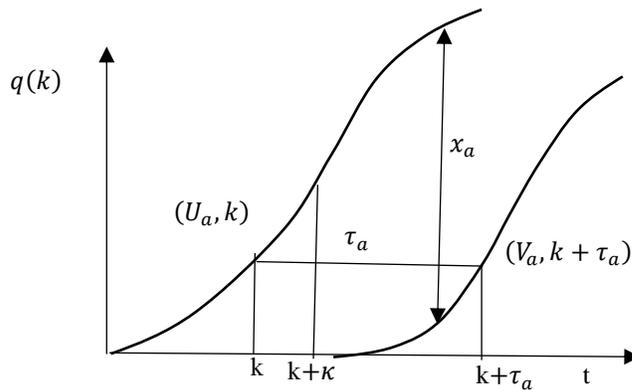


Figura 14. Diagrama de propagación en el arco
Fuente: Ran y Boyce (1996)

Carey et al. (2014) completan el modelo, con la red espacial en la que cada arco se representa en forma expandida, por un arco viaje y un arco fila. Entonces se trabaja con una red espacial de arcos espaciales conectados con nodos espaciales, evaluada en cada lapso de tiempo k . Es decir, se introduce un arco fila a la salida de un arco, virtual, de capacidad ilimitada, para almacenar la fila que no puede pasar al siguiente arco, cuando se rebasa la capacidad del flujo entrante en el arco corriente abajo. Los nodos espaciales ligan los arcos fila, corriente arriba, con arcos viaje del arco corriente abajo. Algunos intervalos pueden tener una fila de vehículos, o no. Los autores redefinen el modelo en términos de los arcos viaje y arcos fila, establecen límites para el flujo entrante, el flujo saliente y la ocupación. Esta última formulación de los autores, difiere de la propuesta en el WLM *adaptado* en esta tesis.

A continuación, se explica el WLM *adaptado* de Carey et al. (2014) propuesto en esta investigación

Condiciones límite del modelo WLM adaptado, propuesto

Se establecen las condiciones límite, de los arcos, para flujo entrante, flujo saliente y ocupación, mediante el *Diagrama de un arco espacial en una vecindad de un nodo espacial de una ruta*, presentado en la Figura 15. Se propone adaptar el modelo WLM ampliado de Carey et al. (2014), con valores límite que adicionen realismo a la propagación del flujo. Estas condiciones límite se explican con el diagrama de la Figura 15, y con la siguiente simbología:

Estados de ocupación de un arco

- Flujo en el arco debajo de la capacidad $x < Q_{\text{máx}}$
- Flujo en el arco a capacidad, $Q_{\text{máx}}$
- Fila móvil superior a la capacidad en el arco, limitada por la ocupación máxima,

Simbología



$$q \leq K_{max}$$

El diagrama de la Figura 15 está relacionado con la Figura 3 y la Figura 4. En la primera se establecen los tres estados de flujo siguientes, con las combinaciones posibles de flujo entre dos arcos vecinos, enviante (corriente arriba) y receptor (corriente abajo): 1) Relaciona tres posibles estados de flujo del arco enviante con una primera condición del arco receptor; 2) relaciona tres posibles estados del arco enviante con una segunda condición del arco receptor y; 3) relaciona tres posibles estados del arco enviante con la última condición de flujo del arco receptor. Es decir, se presentan tres posibles estados de flujo del arco en la vecindad de dos arcos secuenciales, con el fin de establecer condiciones límite.

Combinaciones posibles de propagación del flujo en el arco respecto de la capacidad del arco y su vecindad corriente abajo, formulación:

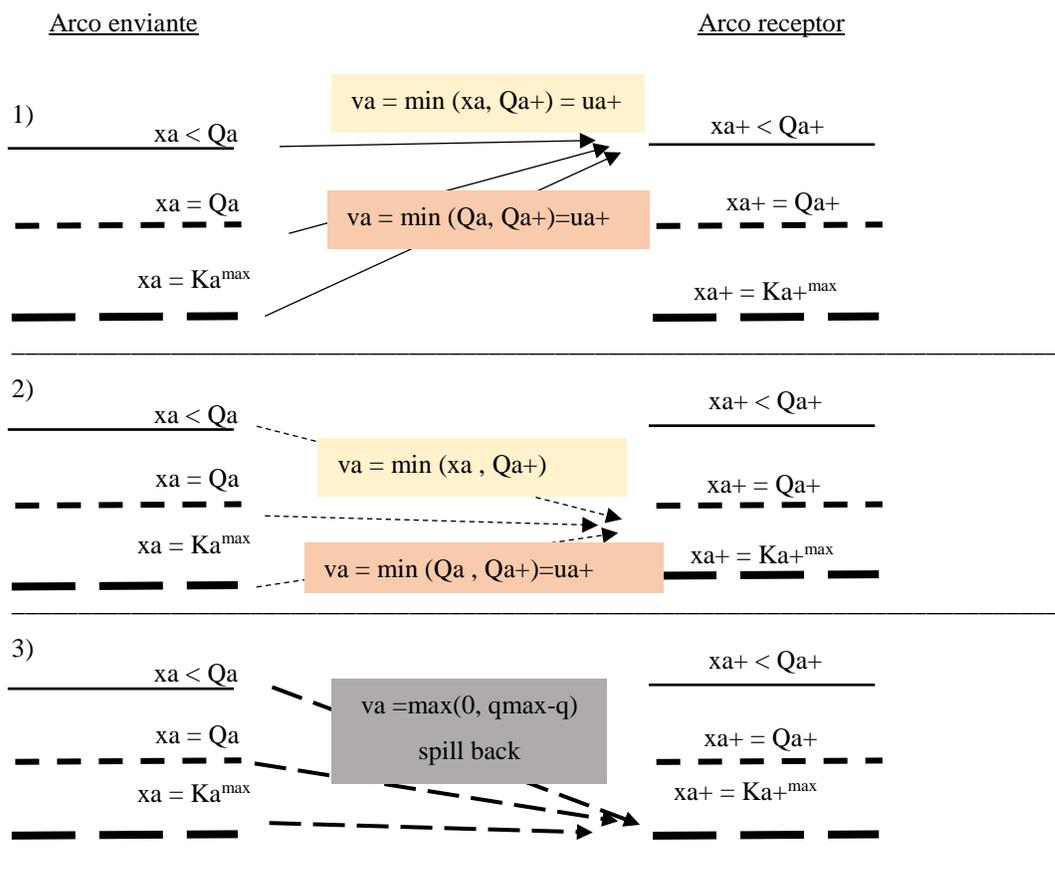


Figura 15. Diagrama de combinaciones posibles de propagación del flujo respecto de la capacidad del arco y su vecindad corriente abajo.

Elaboración propia

El modelo de nodo de Yperman (2007) tiene en cuenta la capacidad del arco corriente arriba (enviante) y la del arco corriente abajo (receptor). Define tipos de nodo y modela la proporción del flujo entrante y saliente. Esta investigación adopta algunos modelos de nodo de Yperman (2007), en un caso de estudio, en el *WLM adaptado* propuesto.

En cada intervalo de carga se resuelve la propagación del flujo y se calculan las variables dinámicas, el estado del flujo y la fila para cada arco de las rutas usadas.

El proceso DNL consiste en cargar la red con el flujo de entrada en cada ruta espacial y momento k , respetando la conservación del flujo para cada arco, nodo y/o intersección de arcos, así como el modelo de propagación a través del arco. En el modelo ADT-DUE se realiza un proceso similar, pero se equilibran los tiempos de las rutas usadas, asociadas a cada par O-D, sin que sea menor que los tiempos o costos de las no usadas entre esos pares O-D. La solución del ADT-DEU se alcanza mediante la resolución consecutiva del DNL, por medio del ajuste de los flujos entrantes a las rutas espaciales en cada intervalo k . Generalmente se usan algoritmos anidados en dos niveles.

4.3 Caso de estudio con el modelo WLM-FQ *adaptado* (propuesto) del WLM ampliado en Carey et al. (2014)

Se presenta el modelo de arco completo dependiente del flujo y la fila *WLM-FQ adaptado*, en un caso de estudio para un arco de acceso controlado. Primero se hace un análisis de las características de la función de tiempo de viaje dependiente del tiempo, que se propone usar en esta tesis, ecuación (3.8). Se revisan las propiedades del modelo de propagación y las condiciones matemáticas, consideradas bien comportadas, para la función de tiempo de viaje del caso de estudio, tal como lo explican Carey y Ge (2005b). Luego se establece la función convergente que relaciona el flujo y la densidad (Ibid). Finalmente se aplica a un ejemplo de propagación de flujo adaptado de Carey et al. (2014).

Sea el modelo DUE-WLM, presentado en el capítulo 2, en la ecuación (2.6) $x'(k) = u_a(k) - v_a(k)$; la cual es igual a las ecuaciones (4.2) y (4.3).

Se asume un estado estable, con el flujo entrante y la tasa de viaje constantes, entonces el flujo entrante se expresa como lo muestran las ecuaciones de la (4.21) a la (4.24):

$$u = x/f(x) \tag{4.21}$$

$$u_a = x_a/t_a^\zeta \tag{4.22}$$

$$\text{Con } t_a^\zeta(x) = t_a^0 + \phi d_a^{1^\zeta} + d_a^{2^\zeta} \quad [\text{s/veh}] \tag{4.23}$$

$$\text{Donde: } \phi = \begin{cases} 1 & \text{si es arco semaforizado(LS)} \\ 0 & \text{si es arco de acceso limitado(LA)} \end{cases} \quad (4.24)$$

Ejemplo para arcos de acceso controlado (limitado) (sin control, por ejemplo de semáforos)

A partir de las ecuaciones (4.3), (4.4) y (4.5), se formula la ecuación (4.25) que expresa la función de tiempo de viaje para arcos de vías de acceso controlado:

$$t_a^{\zeta}(X_a, q_a) = t_a^0 + 900\Delta k \left\{ z_a + \left[z_a^2 + \left(\frac{8A_a X_a}{(Q_a \Delta k)} \right) + \left(16A_a q_a / (Q_a \Delta k)^2 \right) \right]^{1/2} \right\}; \forall X_a \geq 0 \quad (4.25)$$

Sean las variables dinámicas ya definidas atrás y $t_a^{\zeta}(X_a(k), q_a(k))$ el tiempo de viaje en el arco para los vehículos que se encuentran en el arco en el tiempo k , donde $t_a^{\zeta}(X_a(k), q_a(k))$ es una función no decreciente.

Revisión de propiedad FIFO (Proposición 1 de Carey et al. 2014; teorema 3.1 de Xu et al. 1999):

En esta sección se revisa la función de tiempo de viaje, de la ecuación (4.25), en el modelo de propagación WLM *adaptado* de Carey et al. (2014). Para esto se aplica el procedimiento de la proposición 1 de los mismos autores, para revisar la propiedad FIFO, entre otras que se explica en el apartado anterior (4.2) y se aplica al caso de estudio, cuyo desarrollo se presenta a continuación:

- El tráfico entrante en el arco a en k , debería salir en un tiempo tal que se cumpla la ecuación (4.1), para este caso dicho tiempo se expresa en la ecuación (4.26):

$$\tau_a(k) = k + t_a^{AC}(X_a(k), q_a(k)), \quad (4.26)$$

entonces se cumple la condición FIFO si y solo si $\tau_a(k)$, de la ecuación (4.26), cuando se reemplaza con la ecuación (4.25), crece con k ;

por ejemplo, si y solo si se cumple la ecuación (4.27), tal como se explica en la ecuación (4.6), del apartado anterior:

$$\frac{d\tau_a(k)}{dt} > 0 \quad (4.27)$$

que para el caso de estudio se realiza a continuación.

- Revisión de la condición FIFO de la ecuación (4.26), cuando se reemplaza la ecuación (4.25). Con base en el procedimiento de Carey et al. (2014), proposición 1, se aplica (4.27), como sigue:

Entonces FIFO se cumple si y solo si se cumplen las ecuaciones (4.28) a (4.34).

$$\{1 + [dt_a^{AC}(X_a(k), q_a(k))/dx_a](dx_a/dk)\} > 0 \quad (4.28)$$

$$\{[dt_a^{AC}(X_a(k), q_a(k))/dx_a](dx_a/dk)\} > -1 \quad (4.29)$$

$$t_a^{AC}(X_a(k), q_a(k)) = t_a^0 + 900\Delta k \left\{ z_a(k) + \left[z_a^2(k) + \left(\frac{8A_a X_a(k)}{(Q_a \Delta k)} \right) + \left(16A_a q_a(k)/(Q_a \Delta k)^2 \right) \right]^{1/2} \right\};$$

$$\forall X_a \geq 0 \text{ y/o } q_a \geq 0 \quad (4.30)$$

$$\text{Con } z_a(k) = (x_a(k)/Q) - 1 + (2q_a/(Q_a \Delta k)) \quad (4.31)$$

$$\text{Si } q_a \geq 0 \text{ y/o } X_a \geq 0 \Rightarrow t_a^{AC}(X_a, q_a) > 0; \quad (4.32)$$

$$\text{y } [dt_a^{AC}(X_a, q_a)/dx_a] > 0 \quad (4.33)$$

$$[dt_a^{AC}(X_a, q_a)/dx_a] = 900\Delta k/Q \left\{ 1 + \frac{\left[z_a(k) + \left(\frac{4A_a}{(Q_a \Delta k)} \right) \right]}{\left[z_a^2(k) + \left(\frac{8A_a X_a(k)}{(Q_a \Delta k)} \right) + \left(\frac{16A_a q_a}{(Q_a \Delta k)^2} \right) \right]^{1/2}} \right\} > 0; \text{ se cumple} \quad (4.34)$$

Este resultado también indica que la función de tiempo de viaje, ecuación (4.26) es convexa.

Revisión de la función tiempo de viaje (ecuación 4.25), respecto de sus características matemáticas para ser aplicadas al modelo DEU-WLM adaptado, con base en las proposiciones de Carey y Ge (2005 b):

Como se explica en el apartado 4.2, Carey y Ge (2005 b) analizan condiciones matemáticas de la función de tiempo de viaje en el arco, que garanticen las propiedades presentadas al inicio del capítulo, tal como FIFO. En su artículo, toman la referencia de Xu et al. (1999) los que asumen que la ecuación (4.26) sea positiva, no decreciente, diferenciable continua y que su gradiente tenga un límite superior, ecuación (4.15) (Teorema 3.1 de Xu et al., 1999). También citan a Zhu y Marcotte (2000) que investigan condiciones suficientes para asegurar la regla FIFO en funciones no lineales, es decir, que la función de tiempo de viaje también sea positiva, no decreciente, diferenciable continua, pero su gradiente tenga un límite superior menor al de Xu et al. (1999), ecuación (4.16), lo cual es más exigente (Teorema 5.2 de Zhu y Marcotte, 2000). Muchas funciones de modelos ADT de la literatura científica no cumplen tales condiciones. Entonces Carey y Ge (2005 b) presentan condiciones matemáticas alternativas que indican que funciones de tiempo de viaje no lineales, transformadas en funciones flujo-densidad, presenta buenas características para DNL, esto se explica en el siguiente apartado. Carey y Ge (2005 b) proponen revisar la segunda derivada de la función tiempo de viaje respecto al flujo, para

garantizar convexidad y FIFO, entre otras propiedades de funciones bien comportadas, para reemplazar la condición de gradiente de Xu et al. (1999), y Zhu y Marcotte (2000), la cual generalmente no es cumplida por funciones no lineales. Esto se presenta en las ecuaciones (4.35) y (4.36):

$$\frac{dt_a^2(X_a, q_a)}{dx_a^2} \geq 0 \quad (4.35)$$

$$\frac{dt_a^2(X_a, q_a)}{dx_a^2} = \frac{900\Delta k}{Q^2 \left(z_a^2(k) + \left(\frac{8A_a X_a(k)}{Q_a \Delta k} \right) + \left(\frac{16A_a q_a}{(Q_a \Delta k)^2} \right) \right)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{(z + (4A/Q\Delta k))(z + (4A/\Delta k))}{\left(z_a^2(k) + \left(\frac{8A_a X_a(k)}{Q_a \Delta k} \right) + \left(\frac{16A_a q_a}{(Q_a \Delta k)^2} \right) \right)} \right\} \geq 0 \quad (4.36)$$

- Revisión de la regla FIFO de gradiente de Xu et al. (1999). Como se explica antes, Xu et al. (1999) dicen que la función de tiempo de viaje, debe ser convexa, diferenciable continua, incremental y que su gradiente tenga límite superior, ecuación (4.15). La última condición es muy fuerte y solo se cumple en funciones lineales, las cuales no son reales. A continuación, se revisa en el ejemplo, la ecuación (4.26), en las ecuaciones (4.37) y (4.38).

$$\left[dt_a^{AC}(X_a(k), q_a(k)) / dx_a \right] < \frac{1}{Q}; \quad \forall x \geq 0; \quad (4.37)$$

Un análisis matemático de la ecuación (4.37), en la que se asume, $B=Q$ (Xu et al., 1999), para todo $x < Q$ y $q=0$, da como resultado la ecuación (4.38):

$$900\Delta k/Q \left\{ 1 + \underbrace{\left[z_a(k) + \left(\frac{4A_a}{(Q_a \Delta k)} \right) \right] * \left[z_a^2(k) + \left(\frac{8A_a X_a(k)}{Q_a \Delta k} \right) + \left(\frac{16A_a q_a}{(Q_a \Delta k)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}_{\mathfrak{R}^+ \text{ y } < 1} \right\} < \frac{1}{Q}; \quad \forall x \geq 0 \quad (4.38)$$

Se revisa la desigualdad y se observa que no se cumple con la condición de gradiente de Xu et al. (1999). El segundo sumando de los términos del corchete es un número real positivo menor que 1. El inverso de Q, que es la capacidad de un arco, es un número menor que 1. Por lo tanto, el término izquierdo de la desigualdad es un número mayor que uno.

Sin embargo, la función de tiempo de viaje, de la ecuación (4.26), presenta buenas propiedades para ser aplicada a casos reales de DNL; también presenta buenas características matemáticas para el modelo de propagación de WLM, con fundamento en los análisis de Carey y Ge (2005 b) y Carey et al. (2014).

La condición de gradiente no se cumple, como era de esperarse. Este resultado ratifica el análisis para funciones no lineales de Carey y Ge (2005b), las cuales no cumplen esta condición. Ellos concluyen que, aunque las funciones de tiempo de viaje usadas en la literatura cumplan la condición de convexidad, no cumplen la condición de gradiente limitado para todo x . Los autores prueban lo mismo para funciones de tiempo de viaje transformadas en funciones velocidad-densidad o flujo-densidad, comúnmente usadas en enfoques continuos, lo cual se revisa para el caso de estudio en el siguiente apartado. Los autores mencionados encuentran que el flujo entrante no excede la capacidad del flujo, de la función de tiempo de viaje asociada a la función flujo densidad. Entonces, ellos recomiendan incorporar el concepto de “fila vertical”, antes del arco en cuestión, con capacidad de salida equivalente a la capacidad del flujo entrante; otros investigadores han adoptado este modelo combinando el tiempo de viaje en el arco con el modelo de fila vertical (Adamo et al., 1999a, también citados por Carey y Ge, 2005b).

El modelo WLM-FQ *adaptado* (propuesto) modela la congestión, la ocupación y la fila, por lo tanto la propagación de la fila corriente arriba. La condición de gradiente se resuelve estableciendo condiciones límite en la función de tiempo de viaje, como parámetros de entrada en el modelo.

Condiciones límite para el flujo entrante y el flujo saliente de la función WLM-FQ del modelo *adaptado*

Para revisar las propiedades de la función de tiempo de viaje de la ecuación (4.26), $\tau(k)$, en el WLM adaptado de Carey et al. (2014), ya que la prueba de gradiente no se cumple, Carey y Ge (2005 b) recomiendan otros recursos metodológicos, por ejemplo el análisis de una función transformada desde la función de tiempo de viaje en el arco en la función de flujo-densidad. A continuación, se analiza el desempeño de esta función, y se establecen límites.

El modelo aquí propuesto introduce límites en el rango de x en la función de tiempo de viaje y la función flujo-densidad de cada arco, necesarios para que no exceda la capacidad de los flujos entrantes y salientes. Entonces el modelo se resuelve estableciendo la función de tiempo de viaje en el arco y un rango para x , donde la función existe para ser aplicado en la DNL de una red real.

Las formulaciones de propagación y sus límites son representadas en el diagrama de estados de flujo de la Figura 15. El flujo se propaga restringiendo el acceso y salida de los flujos a la capacidad del arco y la fila máximos.

En un ejemplo numérico de una red real, cada arco tiene una capacidad Q y una fila máxima la cual se expresa en la ecuación (4.39), siendo e_v el espaciamiento vehicular (por ejemplo $e_v = 7 m$).

$$q_a^{max} = L_a/e_v \quad (4.39)$$

De acuerdo con los análisis del modelo WLM de Carey y Ge (2005 a, b) y Carey et al. (2014), ya explicados en el apartado 4.2, se deduce la función de flujo-densidad equivalente a la función de tiempo de viaje, con la función de tiempo de viaje de un arco de acceso controlado, para continuar con el caso de estudio; esto se muestra en las ecuaciones (4.40), (4.41) y (4.42) (ver definición de variables en el cuadro 5).

La ecuación (4.40) se deduce a partir de la ecuación fundamental del tránsito.

$$w_a = x_a * \left\{ t_a^0 + 0.25T_f \left[z_a + \left(z_a^2 + 8A_a X_a / (Q_a T_f) + 16A_a q_a / (Q_a T_f)^2 \right)^{0.5} \right] \right\} / L_a \quad (4.40)$$

Definido el tiempo de viaje en el arco, en este caso de acceso controlado (AC) como en la ecuación (4.41):

$$t_a^z(X_a, q_a) = t_a^0 + 0.25\Delta k \left\{ z_a + \left[z_a^2 + \left(\frac{8A_a X_a}{(Q_a \Delta k)} \right) + \left(16A_a q_a / (Q_a \Delta k)^2 \right) \right]^{1/2} \right\}; \forall X_a \geq 0 \quad (4.41)$$

$$\text{Donde: } z_a = (x_a/Q) - 1 + \left(2q_a / (Q_a \Delta k) \right) \quad (4.42)$$

De acuerdo con la ecuación (4.40) se redefine la función flujo-densidad en el arco $\rho_a(k)$, como se muestra en las ecuaciones (4.43) y (4.44). En este caso $x_a(k)$ son los vehículos en el arco en el tiempo k , los cuales resultan de multiplicar la densidad por la longitud del arco y dividir por el tiempo de viaje (o multiplicar por la velocidad), y entonces se expresa en la ecuación (4.43) por unidad de longitud; aquí Carey y Ge (2005 b) asumen condiciones estables de tiempo, es decir flujo, densidad y volumen en el arco constantes a lo largo de arco; además asumen que si $\tau(k) = k + f(x(k))$ varía sobre el tiempo, debe aplicar para flujo constante sobre el tiempo, como un caso particular:

$$\rho_a(k) = x_a(k) / \left\{ t_a^0 + 0.25\Delta k \left\{ z_a(k) + \left[z_a^2(k) + \left(\frac{8A_a X_a(k)}{(Q_a \Delta k)} \right) + \left(16A_a q_a / (Q_a \Delta k)^2 \right) \right]^{1/2} \right\} \right\} \quad (4.43)$$

$$z_a(k) = (x_a(k)/Q) - 1 + \left(2q_a / (Q_a \Delta k) \right) \quad (4.44)$$

El análisis de $\rho_a(k)$ también ayuda a encontrar condiciones límite de flujo de entrada bajo una función de tiempo de viaje dada. Por ejemplo, los flujos que exceden la capacidad no son factibles en la función flujo densidad.

El comportamiento de la función flujo-densidad, ecuación (4.43), $\rho_a(k)$, aplicada a un arco de acceso controlado real (arco 77), de la red de la Figura 10 y la Figura 20, se presenta en la Figura 16 y la Figura 17 (para un solo carril). La Figura 16 presenta la relación de la función flujo-densidad respecto de la relación flujo a capacidad, X , con un comportamiento continuo en un rango de 0 a 1.586, bien definida. Sus características matemáticas la hacen apta para aplicar al modelo DNL-WLM en dicho rango, el cual se constituye como un límite propio de ese arco. Además, su comportamiento puede ser convergente con el modelo LWR, como lo analizan Carey y Ge (2005 b). La Figura 17 muestra la relación del tamaño de la fila respecto del flujo que circula en el arco; se observa un comportamiento creciente respecto al flujo; también se observa la posibilidad de definir condiciones límite, las cuales pueden ser definidas como atributos de cada arco.

La Figura 18 y Figura 19 representan el desempeño de la función flujo-densidad, aplicada a un arco de acceso controlado de tres carriles. La Figura 18 presenta el desempeño de la función flujo- densidad, $\rho_a(k)$, respecto de la densidad. Su comportamiento es continuo en un rango bien definido de densidad, el cual puede establecer límites, para ser aplicado en un DNL; también pueden definirse los atributos del arco para ser usados en el análisis de un caso real.

El arco 77 es un tramo de un viaducto elevado (Segundo Piso de Periférico) (Figura 19). Se calculan las variables: relación volumen/capacidad (X) (ecuación 3.5), y tiempo de viaje $t_a^s(X_a, q_a)$ (ecuación 4.25), para un T de 0.25 h. La fila excedente, como se propone en Akcelik (1980, 2011), es la función transición para fila de sobreflujo media, la cual se obtiene por el autor usando la técnica de transformación coordinada para la expresión de fila (estado estable) de Miller (1963, 1968, citado por el autor), en su versión original. Ésta es mostrada en de la ecuación (4.44) a la (4.47):

$$N_0 = 0.25QT \left[z + \sqrt{z^2 + (12(X - X_0)/QT)} \right]; \text{ para } x > x_0 \quad (4.45)$$

$$N_0 = 0 \text{ para } X \leq X_0 \quad (4.46)$$

Donde: X_0 es el grado de saturación debajo del cual la fila de sobreflujo es aproximadamente cero.

$$X_0 = 0.67 + Sg/600 \quad (4.47)$$

Siendo: S la tasa de flujo de saturación, g el tiempo de verde efectivo, $z = X - 1$, $X = x/Q$, x es el flujo en el arco, Q la capacidad, T el tiempo de sobreflujo.

Otra expresión simplificada que presenta el mismo autor es la mostrada en la ecuación (4.48).

$$N_0 = 0.25QT \left[z + \sqrt{z^2 + (4X/QT)} \right] \quad (4.48)$$

La fila excedente para cada X se adopta de la ecuación (4.49), para ser consistente con la FQ-LTTF de Akcelik (2003) (ecuación 4.25), en la que se asume $X_0 = 0$:

$$N_0 = 0.25QT \left[z + \sqrt{z^2 + (8mX/QT)} \right] \quad (4.49)$$

Donde m es un parámetro del arco definido por Akcelik (1991). Para el ejemplo del arco 77, $m=0.1$, a partir de la misma referencia.

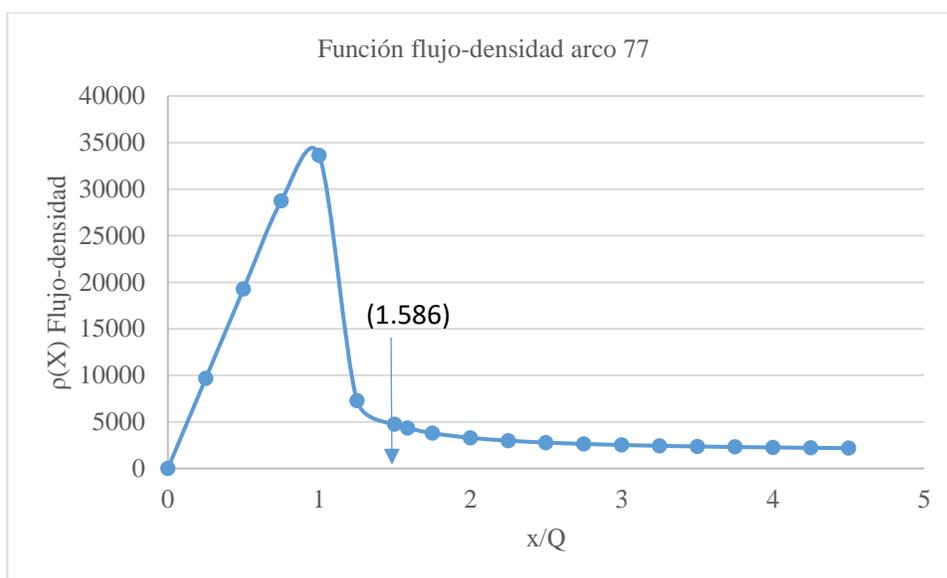


Figura 16. Función flujo-densidad en un arco de acceso controlado (Segundo piso-Periférico) de 3105.63 m, un carril y 2000 veh/h/carril de capacidad.

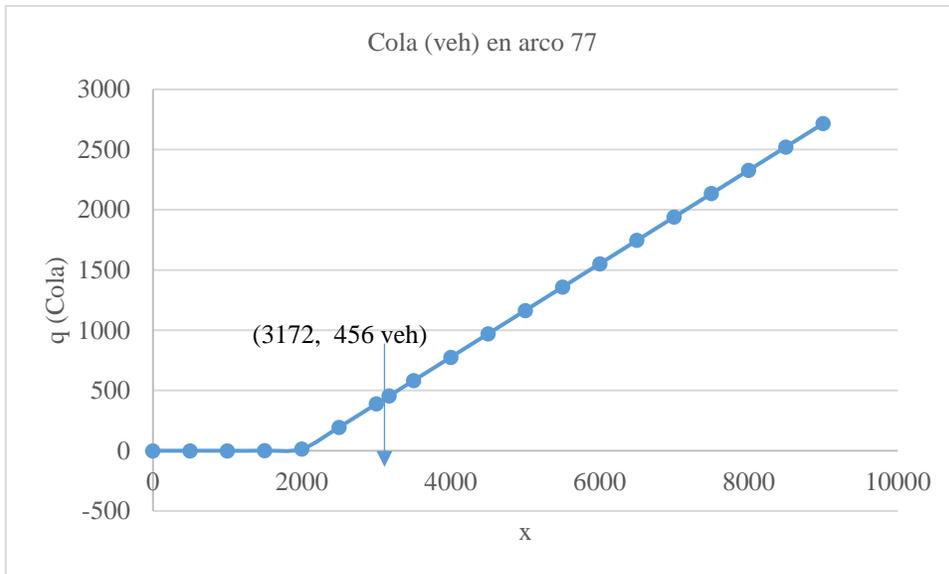


Figura 17. Relación flujo-cola en un arco de acceso controlado (Segundo piso-Periférico) de 3105.63 m, un carril y 2000 veh/h/carril de capacidad.

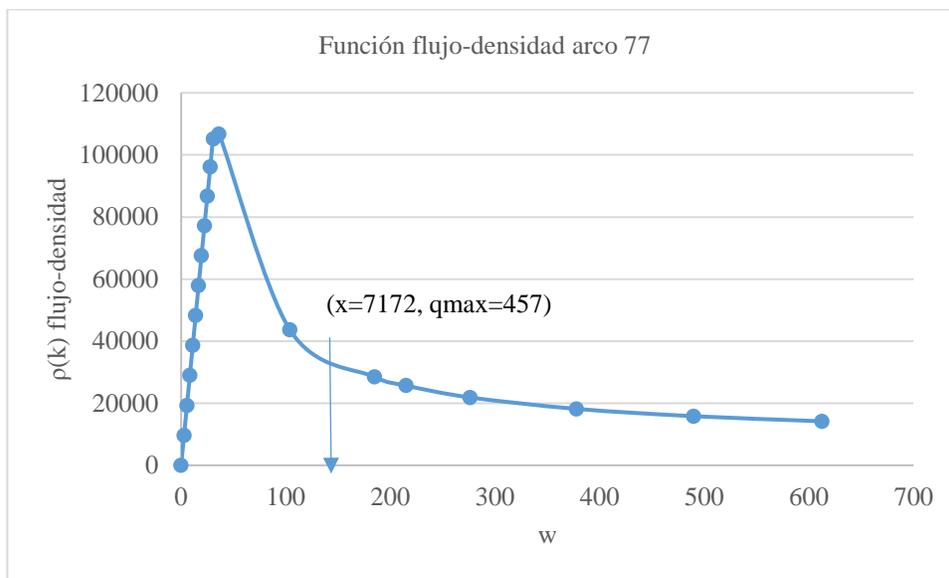


Figura 18. Relación flujo-densidad en un arco de acceso controlado (Segundo piso-Periférico) de 3105.63 m, tres carriles y 6000 veh/h de capacidad.

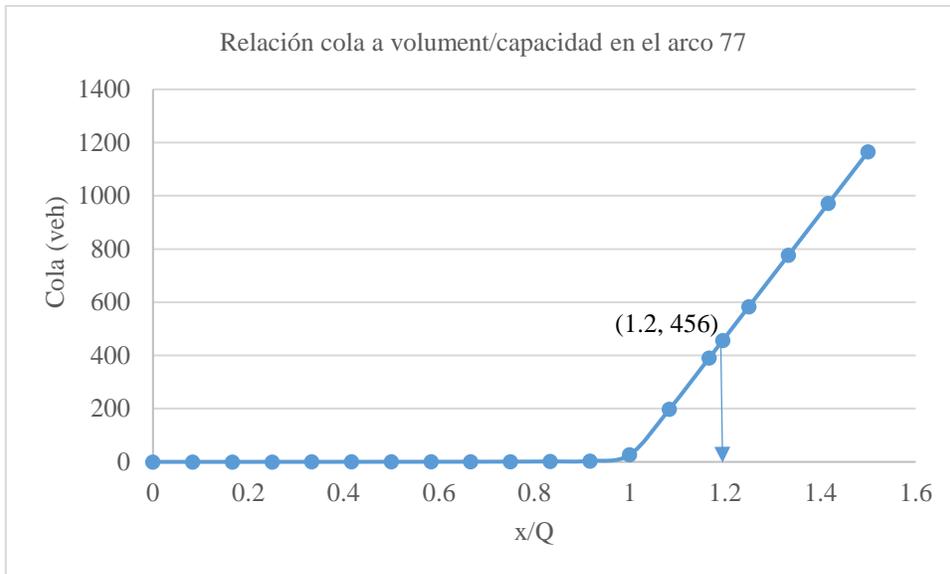


Figura 19. Relación cola a razón volumen/capacidad en un arco de acceso controlado (Segundo piso-Periférico) de 3105.63 m, tres carriles y 6000 veh/h de capacidad.

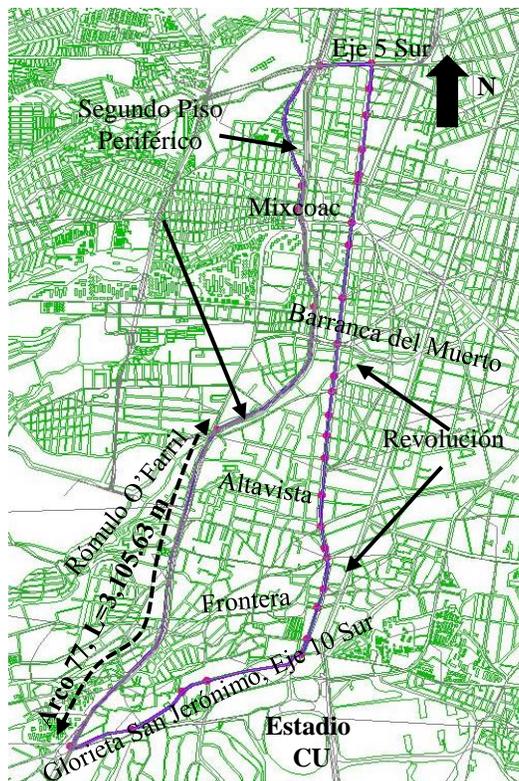


Figura 20. Red vial arterial experimental en la ZAMV. Detalle del arco 77.
Elaboración propia

4.4 Propagación de flujo con el WLM-FQ adaptado (propuesta). Ejemplo numérico

Aplicar el WLM-FQ requiere definir el tamaño del intervalo de carga Δ con respecto al tiempo de viaje a flujo libre mínimo de todos los arcos que componen una red vial, tal que, el intervalo de carga sea menor que el tiempo de viaje a flujo libre del arco más corto, esto es representado en la ecuación (4.50).

$$\Delta \leq t_a^{\zeta}(0) \quad (4.50)$$

Entonces se aplica el WLM-FQ al arco 77 descrito antes, con tres carriles y capacidad de 2000 veh/h/carril. Se define $\Delta = 3$ min, $T=0.25$, número de vehículos máximo en el arco $q_{max} = L_a/L_v$, siendo L_a la longitud del arco y L_v la longitud media vehicular (7 m). El Cuadro 6 y la Figura 21 representan los resultados del algoritmo de propagación de flujo en el arco 77 con el WLM-FQ adaptado propuesto.

El análisis de la función de tiempo de viaje dependiente del flujo, la fila y el tiempo de sobreflujo, no lineal, en el modelo DNL-WLM-FQ adaptado de Carey et al. (2014), en el caso de estudio para un arco de acceso controlado de una red real, muestra que tiene buenas propiedades de propagación, causalidad respecto del flujo y buenas características matemáticas para ser usado en el programa matemático BL-FQ-TDUE-D; esto último se explica en el siguiente capítulo.

Cuadro 6. Propagación de flujo en el arco 77, con el WLM-FQ adaptado de Carey et al., (2014) con LITF de (Akcelik, 2003)

k	Intervalo unitario para ($\Delta=3$ min)	Demanda	u(k) (WLM)	x (k)	v (x)	t(x)	τ (x) (unidades de Δ)	U (k)	V(k)
1		0	0	0	0	0	1	0	0
2		200	200	0	0	3.105	2.035	200	0
3		200	200	200	200	3.111	3.037	400	200
4		200	200	200	200	3.111	4.037	599	400
5		200	200	200	200	3.111	5.037	799	599
6		300	300	200	200	3.111	6.037	1099	799
7		300	300	300	300	3.373	7.124	1399	1099
8		300	300	300	300	3.373	8.124	1699	1399
9		300	300	300	300	3.373	9.124	1999	1699
10		300	300	300	300	3.373	10.124	2299	1999
11		0	0	300	300	3.73	11.124	2299	2299
12		0	0	0	0	0	12.124	2299	2299

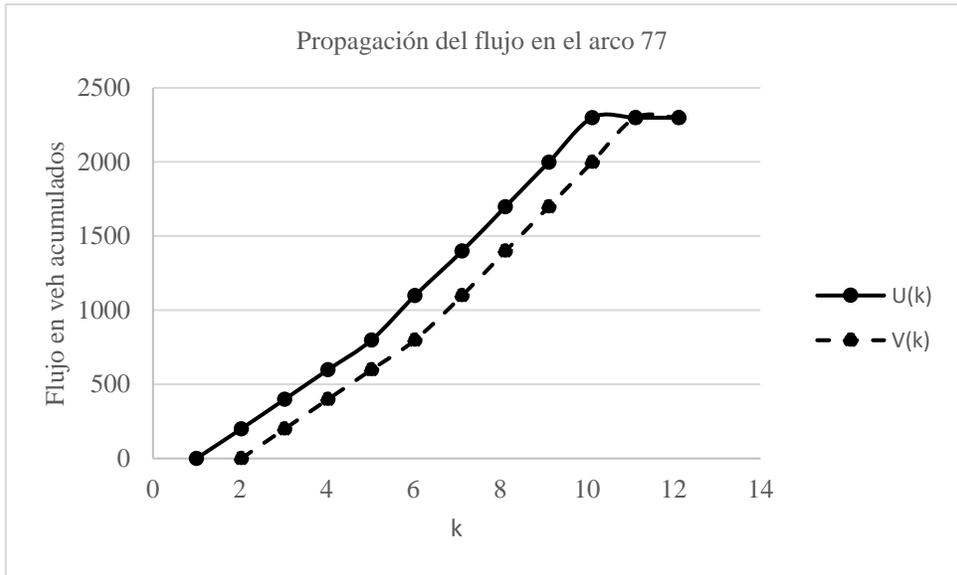


Figura 21. Flujo entrante y saliente acumulado en el arco 77 en el intervalo de carga k.

El desempeño de la solución del modelo DNL-WLM-FQ adaptado de Carey et al. (2014), aplicado en un arco real, cuyos resultados se detallan en el Cuadro 6, muestran cifras coherentes con la realidad. También la Figura 21 produce un comportamiento típico de la propagación del flujo, tal como se explica en la Figura 14.

Los análisis del modelo DNL-WLM-FQ adaptado de Carey et al. (2014), en especial por el uso de la función FQ-LTTF basada en Akcelik (2003), abona en el estudio de modelos de arco completo de Carey et al. (2005 b) y de otros investigadores que los autores citan en su artículo, los cuales se referenciaron al inicio de este capítulo.

4.5 Algoritmo DNL y WLM-FQ adaptado de Carey et al. (2014)

El proceso de carga de una red vial, DNL, en el modelo de FQ-TDUE-D propuesto en esta tesis, mediante el modelo de arco completo, WLM-FQ adaptado de Carey et al. (2014), con el uso de la función FQ-LTTF adoptada de Akcelik (2003) y propuesta en esta tesis en la ecuación 3.8, se presenta a continuación. Éste se desarrolla con fundamento en Carey y Ge (2005 b) y Carey et al. (2014).

1 Definición de variables dependientes del tiempo:

2 Conjunto de pares $N=1, 2, \dots, n$

3 $P_m^{OD} = 0, 1, \dots, m$

4 Conjunto de períodos de carga $k=0, 1, 2, \dots, \kappa$

5 Conjunto de arcos $A=1, 2, \dots, a$

6 $u(0) = 0$

7 $x(0) = 0$

8 $v(0) = 0$
9 $q(0) = 0$
10 Fin
11 Para cada período de carga
12 $K=1$
13 Para cada par O-D se resuelve UE-D, para una solución inicial
14 $OD=1$
15 Para cada árbol de solución
16 Conjunto P^{OD}
17 Para cada ruta P^{OD} se resuelve WLM-FQ adaptado
18 Calcular $u(k), v(k), x(k), \tau(k)$ en el primer arco
19 Propagar secuencialmente hasta llegar al destino
20 Se obtiene el flujo en la ruta y el tiempo de viaje en cada arco y la ruta
21 Fin
22 Siguiete ruta
23 Revisar si todas las rutas realizaron el proceso WLM-FQ adaptado; No: siguiete ruta
24 Si
25 Fin
26 Revisar norma de convergencia EU-D
27 No
28 Resolver el UE-D con los τ_a^p y reasignar; regresar al WLM-FQ adaptado
29 Si
30 Fin
31 Revisar si $K = \kappa$
32 No
33 Siguiete k
34 Si
35 Fin
36 Sumar $U(k), V(k)$ y definir el $\tau(k)$ en cada intervalo k
37 Hallar el tiempo h_m^{OD} y el flujo F_m^{OD} en cada ruta en cada carga k

En el siguiente capítulo se analizan y discuten los resultados del modelo de propagación DNL-WLM adaptado y se fundamenta la propuesta del problema BL-FQ-TDUE-D.

5 PROGRAMA MATEMÁTICO DE OPTIMIZACIÓN BINIVEL DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO DE EQUILIBRIO DEL USUARIO

El modelo DNL es un proceso metodológico que determina la asignación del flujo y su propagación en un intervalo de tiempo, embebido en un problema TAP. Analíticamente se expresa como la función inversa del proceso de asignación, ya que halla los tiempos de los arcos (y las rutas) al paso de los flujos en cada intervalo evaluado (de carga). El problema se presenta de forma analítica, sin embargo, no puede resolverse de forma explícita. Entonces se recurre a un proceso metodológico heurístico, que combina el cálculo de flujos entrantes y salientes, en cada arco, luego los propaga bajo condiciones límite; esto es equivalente a rutinas de cómputo que iteran hasta encontrar algún criterio de convergencia con los tiempos de viaje de la asignación de equilibrio del usuario, en muchos casos. Los algoritmos iterativos que se usan en aplicaciones del modelo DNL se introducen en el apartado 1.6; una explicación más extensa se encuentra en el capítulo 4.

Se presenta el programa matemático del FQ-TDEU-D en tiempo discreto; que se compone del problema FQ-TDEU-D y del WLM *adaptado*. En la literatura se encuentran varios algoritmos heurísticos que pueden programarse para su solución y aplicación en una red real. Esto se explica en el capítulo 1.

En la hipótesis (capítulo 3) se expresa que una red congestionada puede modelarse como un proceso de equilibrio que depende del tiempo de viaje, los flujos en la red vial, la ocupación espacial por las filas y su propagación, dadas las restricciones de capacidad y longitud de los arcos. Este capítulo presenta la formulación del programa matemático que expresa el comportamiento del viajero en esta red.

El programa matemático FQ-TDEU-D reúne las revisiones y análisis de los problemas ADT, NDP, BL-DEU-D y LTTF explicados en los capítulos anteriores, y presenta un problema que optimiza el tiempo de viaje de los usuarios que seleccionan las rutas en la red urbana congestionada dependiente del tiempo.

La combinación de la LTTF deducida en las bases de teoría de flujo de tráfico, expresada por Akcelik (2003), con los NDP como estrategia metodológica para tratar la propagación de las filas en cada intervalo de tiempo, en un BL-DEU-D o ADT, se presenta en una estructura analítica propia de la teoría de juegos en un marco de optimización.

En este capítulo inicialmente se ofrece un análisis del modelo DNL-WLM propuesto en el capítulo anterior y discute la necesidad de una estrategia de modelación extendida. Luego se presenta la forma específica del problema matemático BL-FQ-TDUE-D; primero se explica el programa de nivel inferior, después el programa superior. Se analizan las características del programa matemático. Mediante un diagrama se explica el proceso de solución, y finalmente se presenta el algoritmo solución.

5.1 Propuesta para modelar propagación del flujo y filas en TDEU-D

Los modelos de propagación estiman la progresión del flujo en los arcos que componen las rutas elegidas por los viajeros al emprender su viaje, como se explicó en el capítulo anterior. El proceso informa los tiempos de viaje en cada arco, para cada intervalo de evaluación. Para cumplir con la propiedad: reducir el modelo dinámico a un estático, los tiempos de las rutas deben ser iguales a los de un proceso UE-D (estático). Entonces los tiempos de viaje entre cada par O-D son los mismos en una red evaluada con el modelo general de transporte urbano.

Sin embargo, esta tesis enuncia en el capítulo 3, el problema de asignación de tráfico dependiente del tiempo de sobreflujo, el flujo y la fila. Se afirma que el tiempo de viaje es sensible al flujo y al tamaño de la fila en el arco. Esto puede cumplirse en los viajes no cotidianos, por ejemplo. También, para los viajeros que se vean disuadidos a cambiar su itinerario de viaje cuando las filas, producto de la densificación muestren tramos bloqueados.

El tratamiento de la fila en procesos de optimización es de interés en la comunidad científica y experta, como se explicó en el capítulo 3. Las nuevas tecnologías de información guían a los viajeros en las rutas mejores con información actualizada. El equilibrio del usuario es un concepto económico que puede ser aplicado en estados de competencia diferente; por ejemplo, en competencia del flujo y el espacio ocupado por la cola.

En el modelo WLM-FQ *adaptado*, explicado en el capítulo 4, se muestra que el arco está limitado a la capacidad de flujo y de fila. Un modelo alternativo, de optimización del flujo en redes viales urbanas congestionadas, se presenta en esta tesis (con base en el problema BL-TDEU-D, ecuaciones (3.1)), en su forma específica como el BL-FQ-TDUE-D (ecuaciones (3.2)) y se analiza su potencialidad para entregar patrones de viaje. Se asume que la rutina de propagación sería más eficiente que otras pues, se espera que el problema del nivel superior resuelva la fila en un rango inferior al tamaño máximo de aquella posible en cada arco.

La aplicación de los métodos de ADT, en particular el proceso DNL, que involucra la propagación de los flujos, es retador por el tamaño de la red. Es posible que un proceso de optimización más robusto mejore el desempeño de los algoritmos solución de ADT, mediante el BL-FQ-TDUE-D propuesto. La convergencia entre los procesos DNL y DEU es un problema que demanda la atención de los investigadores. Una forma de abordarlo es la estrategia de modelación propuesta. La optimización de la elección de las rutas de viaje en un BL-DEU, como uno de NDP, busca una alternativa analítica y metodológica diferente, a las abordadas en la literatura.

Varios modelos de propagación estiman los efectos de las filas y ondas de densificación del flujo de diversas formas analíticas, como se explica en los apartados 1.7 y 3.1. El BL-FQ-TDUE-D aunque no es un problema

de diseño de red, estratégicamente sí lo es, pues el juego de restringir el tamaño de la fila es parte del objetivo de minimizar el tiempo de viaje en la red.

Además, la tesis desarrolla un acercamiento de los modelos ADT con funciones de tiempo de viaje que incluyan variables apropiadas para redes urbanas congestionadas. La inclusión de la fila inicial en el arco afecta el tiempo de viaje y la elección de las rutas mínimas, antes de propagar el flujo en la red; de esta forma en el algoritmo iterativo, la convergencia entre DEU y DNL se espera se logre en menos tiempo.

La estructura BL-DUE permite estimar las filas remanentes óptimas de acuerdo con la condición de ocupación de la red vial. Esto afianza la robustez del programa matemático propuesto.

Programa BL-FQ-TDUE-D: Programas inferior y superior

En el *Cuadro 7* se definen las funciones, los términos y las variables del programa BL-FQ-TDUE-D y demás que aparecen en este capítulo.

Programa inferior del BL-FQ-TDUE-D

En las ecuaciones (5.1) se presenta el programa inferior del BL-FQ-TDUE-D, que fue explicado en el Capítulo 3, cuya estructura matemática es similar al problema de asignación de tráfico (TAP) (Sheffi, 1985; Patriksson, 1994 b), en este caso dependiente del flujo, la fila y variable en el tiempo:

$$\underbrace{\min}_v z(\theta, v^*, q)_\tau = \sum_a \int_0^{v_a(\theta)} t(w, q) dw \quad \forall \tau \in T \quad (5.1a)$$

s.a.

$$\sum_k h_{k\tau}^{rs} = m_{rs} \quad \forall r, s, \tau \in T \quad (5.1b)$$

$$v_{a\tau} = \sum_k \sum_r \sum_s h_k^{rs}(\theta(\tau)) \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a, \tau \quad (5.1c)$$

Donde:

Las variables se han definido en el *Cuadro 7*.

w representa una variable de flujo (v).

Cuadro 7. Definición de términos, variables y funciones del programa BL-FQ-TDUE-D

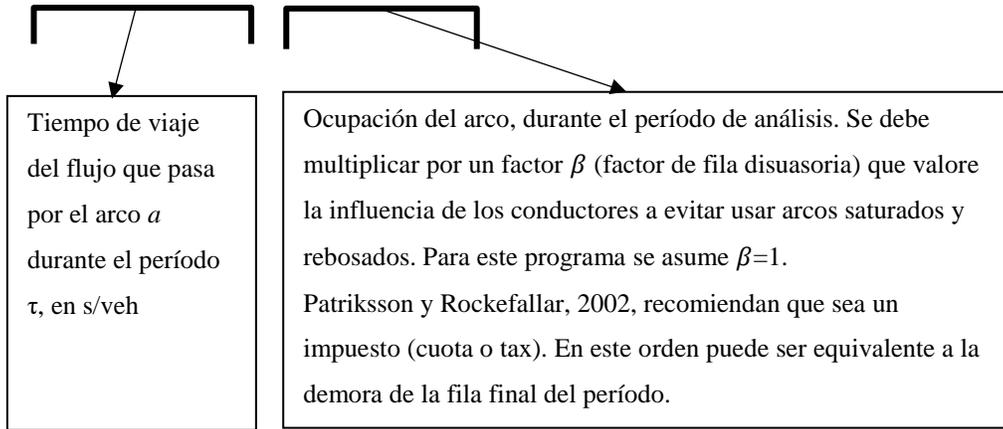
N conjunto de nodos	A conjunto de arcos
R conjunto de nodos origen, $R \subseteq N$	S conjunto de nodos destino, $S \subseteq N$
K conjunto de rutas que conectan todos los pares r - s , entre los O-D	M_{rs} matriz origen-destino O-D (demanda)
y variable de decisión del nivel superior	x variable de decisión del nivel inferior
T tiempo total en que se realiza la carga de la red	κ subperíodos de carga de la red
τ subperíodo de carga, $\tau \in T, [0, 1, 2, \dots, \tau, \dots, \eta]$	$h_k(\tau)$ flujo en la ruta k en el tiempo τ
$v_a(\tau)$ flujo en el arco a o flujo que llega al arco a , con semáforo, en el tiempo τ	$o_a(\tau)$ flujo que sale del arco a en el tiempo τ
$\theta_a^k(\tau)$ es el tiempo de viaje en el arco a en la ruta k al inicio del tiempo τ	$\psi_a(x_a(\tau), y_a(\tau))$: función de costo por efecto de la ocupación del arco, similar a un “impuesto”, en este caso se define como la demora por fila residual
$m_l(\tau)$ viajes en la ruta l^{rs} que conecta el par r - s ; $l^{rs} \in K$	$q_a(\tau)$ tamaño de la fila media en el arco a en el tiempo τ ; $q_{a\tau}^{low}$ o y'_{amin} (límite inferior de la fila) y $q_{a\tau}^{high}$ o y'_{amax} (límite superior de la fila)
$t_a^\zeta(q_a(\tau), v_a(\tau))$ función de tiempo de viaje en el arco a tipo ζ ; en notación simplificada es $t_{a\tau}^\zeta$	$t_{a\tau}^{\zeta,0} = t_a^\zeta(0,0)$ tiempo de viaje en el arco a tipo ζ ; si $x_{a\tau} = 0$ y $q_{a\tau} = 0$, $t_a^0 = L_a/s_{af}$
s_{af} velocidad a flujo libre en el arco a	L_a longitud del arco a
$d_a^1(\tau)$ demora media uniforme para el flujo entrante en el arco a , semaforizado (s/vehículo)	$d_a^2(\tau)$ demora incremental para el flujo entrante en el arco a en una vía semaforizada o en una vía de acceso controlado (s/vehículo)
$C_a(\tau)$ tamaño de ciclo de la intersección semaforizada cuyo arco es a (segundos)	g_a intervalo de verde efectivo del arco a , semaforizado (segundos)
Q_a capacidad del arco a , si es semaforizado, $Q_a = S_a(g_a/C_a)$, (vehículos/hora)	S_a tasa de flujo de saturación en el arco a (vehículos/hora-verde)
$X_a(\tau)$ razón volumen a capacidad, $X_a(\tau) = v_a/Q_a$	T_f período de sobreflujo
β factor de fila disuasoria	Ω conjunto de soluciones óptimas (Patriksson, 1994b)
A_a parámetro del arco a de Akcelik (2003, 1991), según sus características	$\delta_{ka\tau}^{rs}$ indicador de incidencia ruta-arco
$\delta_a^l = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } a \text{ pertenece a la ruta } l \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$	

Programa matemático superior del BL-FQ-TDUE-D

Se fundamenta en el problema de diseño de redes de Migdalas (1995), aplicado a la función de tiempo de viaje propuesta en Londoño y Lozano (2012, 2014b), con las (ecuaciones 3.2), que introduce la LTTF de Akcelik (2003) (ecuación 3.3.).

Así, el programa matemático superior del BL-FQ-TDUE-D se presenta en las ecuaciones (5.2) y se explica cada una de las dos funciones que la componen en el recuadro debajo de la llave:

$$\min_y \sum_{\tau} \sum_a x_a \{ t_a(x_a(\tau), y_a(\tau)) + \psi_a(x_a(\tau), y_a(\tau)) \}; [s/veh] * [h*veh/h] = [s] \quad (5.2a)$$



s.a.

$$y'_{amin} \leq y'_a \leq y'_{a max}, \forall a \in A \quad (5.2b)$$

(representa los límites superior e inferior de la proporción de ocupación por la fila, en términos de la longitud de cada arco)

En las ecuaciones (5.3 y 5.4) se presenta la función de demora con fila residual (Akcelik, 2003).

Fila residual:

$$\psi_a(y_a)_r = \min\{0, y_a(\tau) + (x_a - Q)T_f\} \quad \text{en [veh]} \quad (5.3)$$

Demora por fila residual:

$$\psi_a(x_a(\tau), y_a(\tau)) = \frac{\min\{0, [y_a + (x_a - Q)T_f]\}}{Q} \quad \text{en [h]} \quad (5.4)$$

Entonces el programa matemático BL-FQ-TDUE-D se presenta en forma completa con base en los arcos, aquéllos que componen las rutas (k) elegidas por los viajeros que viajan entre rs , siendo el problema inferior un problema de inecuaciones variacionales, el que se muestra en las ecuaciones (5.5 y 5.6).

$$\min_q \sum_{a \in K} v_{a\tau}^k(q_{a\tau}) t_{a\tau}[v_{a\tau}^k(q_{a\tau}), q_{a\tau}] + v_{a\tau}^k(q_{a\tau}) \frac{\min\{0, [q_{a\tau} + (v_{a\tau} - Q_a)\tau]\}}{Q},$$

$$\forall \tau \in T, \forall k \in K \text{ entre } rs \quad (5.5a)$$

Sujeto a:

$$0 \leq [q_{a\tau} + (q_{a\tau} - Q_a)\tau] \leq L_a \quad \forall a \in A \quad (5.5b)$$

$$f[v_{a\tau}^{*k}(q_{a\tau})][v_{a\tau}(q_{a\tau}) - v_{a\tau}^{*k}(q_{a\tau})] \geq 0 \quad \forall \tau \in T, \forall a \in A \quad (5.5c)$$

$$v_{a\tau} = \sum_{a \in K^{rs}} \delta_{ak}^{rs} h_{k\tau}^{rs} \quad \forall \tau \in T, \forall a \in K^{rs} \quad (5.5d)$$

Donde: δ_{ak}^{rs} es un indicador de incidencia ruta-arco; $v_{a\tau}$ es vector de flujos de los arcos que componen las rutas k que conectan el origen-destino rs en la carga de viajes τ , elegidas por los viajeros; $h_{k\tau}^{rs}$ son los flujos en las rutas k que conectan rs usadas en τ , y $q_{a\tau}$ es el vector de filas residuales en la carga de viajes τ , de las rutas que minimizan el costo del sistema vial.

Donde la función de tiempo de viaje en el arco se expresa en forma reducida en la ecuación (5.6):

$$t_{a\tau}[v_{a\tau}^k(q_{a\tau}), q_{a\tau}] = t_a^\zeta(X_a, q_a) \quad (5.6)$$

La función de tiempo de viaje dependiente del flujo, el tiempo de sobreflujo y la fila, especifica la forma de la ecuación (5.6), en la ecuación (5.7):

$$t_a^\zeta(X_a, q_a) = t_a^0 + \phi\left(\frac{C_a}{2}\right) * \left\{ \left(1 - g_a/C_a\right)^2 / 1 - \left[\min(1, X_a) * g_a/C_a\right] \right\} \quad (5.7a)$$

$$+ 0.25T_f \left[z_a + \left(z_a^2 + 8A_a X_a / (Q_a T_f) + 16A_a q_a / (Q_a T_f)^2 \right)^{0.5} \right]$$

$$\forall X_a \in [(0 \leq X < 1) \cup (X \geq 1)]$$

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si es arco semaforizado (LS)} \\ 0 & \text{si es arco de acceso limitado (LA)} \end{cases}$$

$$z_a = X_a - 1 + [2q_a / (QT_f)] \quad (5.7b)$$

Donde las variables se definen en el Cuadro 7.

La función (5.5a) es no negativa, diferenciable continua, crece con la demora, si crece el flujo crece la fila; se asume un intervalo de carga con demanda fija.

La solución del problema BL-FQ-TDUE-D que se propone, se fundamenta en el desarrollo metodológico que se describen en los apartados 1.9 y 1.10.

5.2 Solución del BL-FQ-TDUE-D

Los modelos de asignación de tráfico de tráfico binivel, su formulación y métodos de solución son retadores para la comunidad científica. Es un campo de exploración y desarrollo tanto en la optimización de redes como

en la planeación y operación del sistema de tráfico. Son escasas las publicaciones que abordan este tipo de problemas y complejos los métodos de solución, como se explica en los apartes anteriores.

Con fundamento en los avances del estudio de problemas de asignación de tráfico estáticos y dependientes del tiempo, así como los problemas de diseño de redes sin variabilidad en el tiempo tipo MPEC, descritos en los apartados 1.9 y 1.10, se diseña la estrategia de solución del problema BL-FQ-TDEU-D, la cual se explica a continuación.

De acuerdo con Luo et al. (1996), el problema de las ecuaciones (5.5) es un MPEC de la forma de problemas de diseño de redes continuos (NDP), tal como en las ecuaciones (1.7) y (1.8), cuya función objetivo del problema superior representa la combinación de costos del sistema y costo de diseño. En el problema que se modela en esta tesis este costo es la demora residual; mientras que el problema inferior corresponde al problema de asignación de equilibrio, en este caso óptimo para el usuario. Las variables de diseño, en este caso operativo, son las filas en los arcos, que pueden interpretarse como un costo adicional (o impuesto) (ver Luo et al., 1996, páginas 22-24). La función de tiempo de viaje incremental garantiza que el problema inferior, formulado con base en el arco, defina un subconjunto solución convexo (Colson et al., 2005a).

La forma KKT (condiciones de Karush-Kuhn-Tucker o Kuhn-Tucker) del MPEC y el enunciado del teorema que transforma la formulación, con base en supuestos requeridos, para búsqueda de soluciones óptimas (local) (Luo et al., 1996), se describe a continuación:

- La función $c(q, x)$ de las ecuaciones (5.6) o $c_a(x, f)$ es creciente en el problema de las ecuaciones (1.8)
- El conjunto solución para el conjunto de restricciones activas del problema de inecuaciones variacionales $(c(q, \cdot), Y)$ es convexa en (1.8)
- La función objetivo de nivel superior $C_a(x, f)$, $f_a c_a(x, f)$, también es creciente, en la solución local; o $v_a(q_a) t_a [v_a(q_a), q_a]$ en las ecuaciones (5.5)
- Sea $(x, f) \in S$ una solución conocida u óptimo local en las ecuaciones (1.8) o $(q, x) \in S$
 - o Si S es cerrado, entonces hay una región factible Θ (teorema 1.3.4 de Luo et al., 1996).
- El problema de las ecuaciones (1.8) es equivalente al problema de minimización expresado por las ecuaciones (5.8).

$$\min z(x, f) \tag{5.8a}$$

$$s. a. (x, f) \in S, \tag{5.8b}$$

$$Z(x, f) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla_f g_i(x, f) = 0 \tag{5.8c}$$

Donde:

$\lambda \in \mathfrak{R}_+^l$ son multiplicadores, que satisfacen las siguientes condiciones KKT para el problema de inecuaciones variacionales $(c(x, \cdot), Y)$ en el vector $x \in C(x, f)$, como se muestra en la ecuación (5.9):

$$(x, f) + \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla_f g_i(x, f) = 0; \lambda \geq 0; g_i(x, f) \leq 0; \lambda_i g_i(x, f) = 0; \forall i = 1, \dots, l \quad (5.9)$$

Con $I(x, f) \equiv \{i: g_i(x, f) = 0\}$ siendo el conjunto de restricciones activas en el par $(x, f) \in Gr(C)$ (Gr: curva o superficie); $Gr(C)$ o función que representa el conjunto de restricciones del problema superior y que son soluciones del problema inferior, las cuales dependen de x .

Siguiendo a Migdalas (1995), en las ecuaciones (5.2), para una misma $y_a(\tau)$, en un mismo τ , se asume que la función $t_a(x_a(\tau), y_a(\tau))$ es continua diferenciable, positiva y estrictamente incremental monótona para todo $x_a(\tau) \geq 0$. Entonces, el problema de segundo nivel expresado por las ecuaciones (5.1a-5.1c) tiene solución óptima única (a partir del teorema 2.5 de Migdalas, 1995).

Si la función $t_a(x_a(\tau), y_a(\tau))$, para un mismo τ , es positiva, incremental y diferenciable continua, entonces $x_a\{t_a(x_a(\tau), y_a(\tau))\}$ es convexa; y si $\{\psi_a(x_a(\tau), y_a(\tau))\}$ es lineal o convexa, el problema expresado por las ecuaciones (5.2a -5.2b) es un problema de programación convexo (a partir del teorema 2.6 de Migdalas, 1995), referido a un problema de diseño de redes sistema óptimo.

Sin embargo, se discute la convexidad de $\{\psi_a(x_a(\tau), y_a(\tau))\}$ desde el punto de vista práctico, en particular, la solución de problemas de redes basado en la ruta, no es única (Migdalas, 1995; Patriksson, 2004).

Por otro lado, condiciones de optimalidad de primer orden del problema de nivel inferior (KKT) (Bard y Falk, 1982, citado por Migdalas, 1995) se usan para reformular el problema BLP como un programa de un solo nivel equivalente. Asumiendo la función de separabilidad, se utiliza el algoritmo de ramificación y acotamiento para encontrar un óptimo global.

El problema BLP reformulado para un programa de nivel único se obtiene reemplazando el programa de nivel inferior con sus condiciones de optimalidad mediante el problema de inecuaciones variacionales de primer orden (Marcotte, 1983 citado por Migdalas, 1995), expresado por las ecuaciones (5.10).

$$\min_{y \in Y, x \in X} \varphi(x, y) \quad (5.10a)$$

Sujeto a:

$$\nabla_x f(x, y)^T (x - x^q) \leq 0, \forall x^q \in X \quad (5.10b)$$

Siendo x^q las soluciones en los puntos extremos del politopo de flujos.

Migdalas (1995) revisa los métodos de solución para el problema de diseño óptimo de la red para el usuario, ya que es el que mejor representa la realidad. Se refiere a los métodos de búsqueda local como aquéllos que respetan el criterio del equilibrio del usuario. Sin embargo, la revisión de optimalidad es complicada, incluso en casos lineales; no hay garantía de la calidad del punto producido.

La técnica de búsqueda local con el método de búsqueda descendente está diseñada para calcular puntos estacionarios (óptimos locales) en el problema BLP, mediante la búsqueda a lo largo de direcciones descendentes respecto de la función objetivo del problema superior. Su aplicación en problemas de redes de tráfico se complica, pues, aunque la solución del problema inferior es única en los arcos, no lo es en términos de las rutas. Migdalas (1995) describe el algoritmo de dirección descendente binivel, el cual consta de dos pasos básicos: i) encontrar una dirección descendente; ii) calcular el tamaño del paso óptimo. Cada evaluación del problema superior requiere la solución del problema de UE; el cálculo del tamaño del paso es lo más complicado del algoritmo.

La Figura 22 indica la secuencia de los métodos básicos y sus referencias, del algoritmo solución BL-FQ-TDUE-D. Esta figura menciona algoritmos que se describen en las siguientes referencias:

- Larsson y Patriksson 1992, Método de descomposición simplicial desagregada, que resuelve TAP, como un esquema de generación de columnas (También en Larsson et al., 1996).
- Brotcorne et al. (2008) y Marcotte y Patriksson (2007), se refieren al problema de las ecuaciones (1.8) para proponer una solución heurística que halle un punto óptimo local. El problema de las ecuaciones (5.5) que guarda la estructura del problema de las ecuaciones (1.8), y da forma al problema BL-FQ-TDUE-D, se transforma en formas relajadas para buscar los flujos con las filas de longitud límite; esta idea la adopta Marcotte (1986) de Abdulaal y Leblanc (1979) (citados por Brotcorne et al., 2008). La solución local se mejora con algoritmos de sensibilidad para el problema UE-D (Patriksson, 2004; Marcotte y Patriksson, 2007).

Para ahondar en los métodos para búsqueda de soluciones aproximadas heurísticas, ver Marcotte y Patriksson (2007), Patriksson, (2004), Colson et al. (2005 a, b) y Bard (1998).

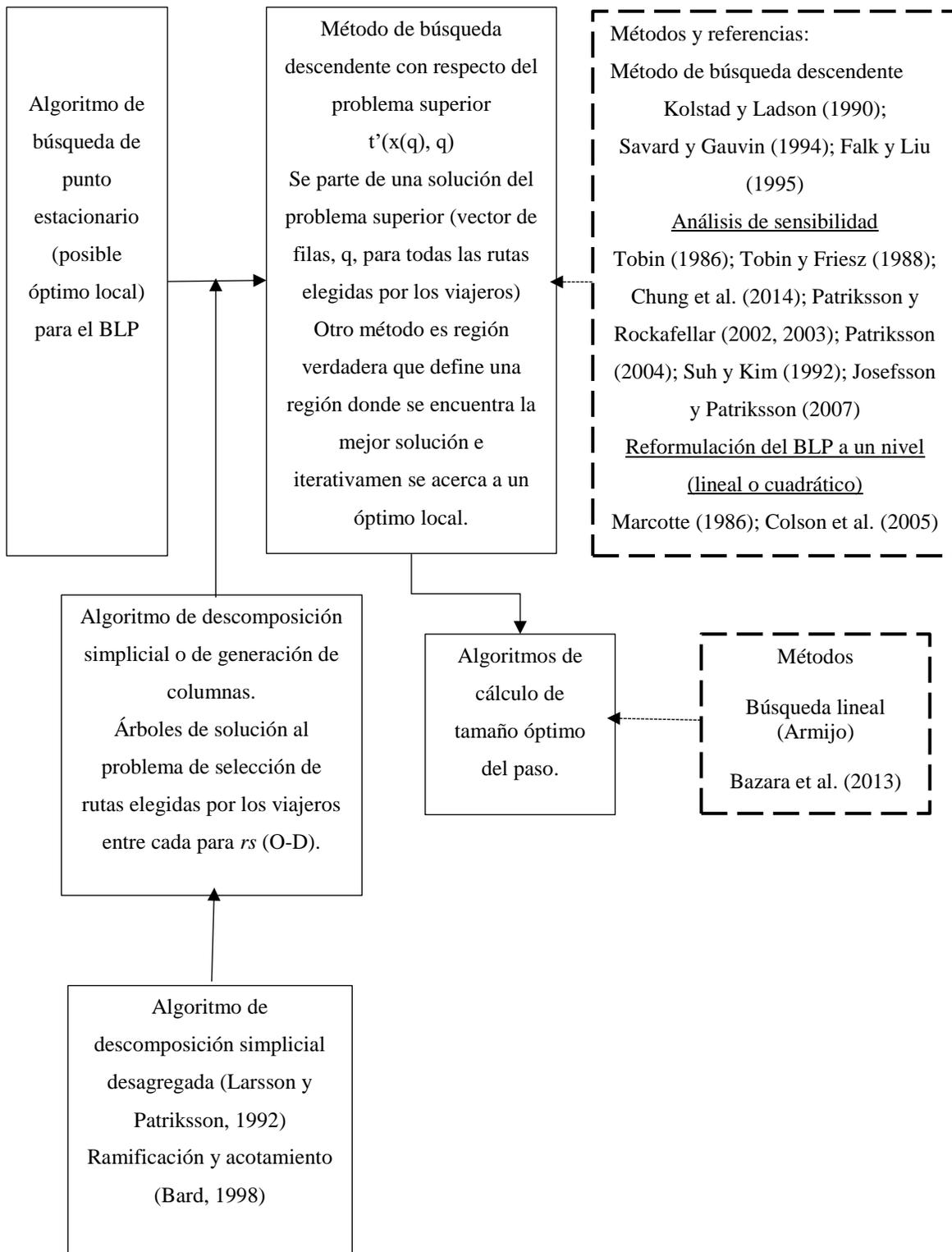


Figura 22. Estructura general del algoritmo de solución propuesto para el problema propuesto BL-FQ-TDUE-D

Dadas las características del problema binivel, una alternativa es aplicar un algoritmo iterativo como el propuesto por Allsop (1974) y Gartner (1976, ambos citados por Bell e Iida, 1997), como sigue:

Se propone aplicar un método para hallar una solución de equilibrio del usuario, luego buscar la solución de la fila por un método aproximado. Diseñar el algoritmo con el método de sensibilidad para hallar el cambio en los flujos por unidad de vehículo de fila en cada arco.

Para hallar el tamaño de la fila en los arcos de un sistema de equilibrio del usuario, se formula y resuelve un problema de control de fila que no rebase la longitud del arco estático. Éste se modela como un problema de diseño de redes. A continuación, se describen los dos algoritmos principales:

- Algoritmo de diseño iterativo.

Establece los flujos v como fijos y halla los valores de las variables de diseño para cada arco:

$$\nabla F(v) = 0^T$$

- Algoritmo de sensibilidad

Aplica la regla de la cadena para hallar el diferencial de la función del problema superior respecto del vector flujos dependientes de la fila, en equilibrio del usuario, $dF(\cdot)/dv$

Finalmente se describen los pasos del algoritmo iterativo que resuelve el problema BL-FQ-TDUE-D, que reúne los subprocesos de carga de la red dinámico (solución del programa de UE-D), el subproceso de propagación de flujo (descritos al final del capítulo 4) y el algoritmo de descenso que resuelve la variable de diseño fila del problema superior.

Algoritmo que resuelve el problema BL-FQ-TDUE-D

Sea τ el tiempo en el sistema de tráfico vehicular, se define con el algoritmo DNL.

Para cada carga de la red:

Entradas: Matriz de viaje O-D, con todos los viajes entre rs ; flujos actuales en los arcos y filas si las hay.

Iteración 1 (Loop exterior)

Hallar una solución inicial DNL:

Subproceso 1:

Algoritmo de Generación de Columnas (DSD, Descomposición simple desagregada, por sus siglas en inglés (Disaggregate Simplicial decomposition method), de Larsson y Patriksson (1992) y FW con aproximación lineal conjugada/biconjugada o TAPAS.

Se obtiene el conjunto de rutas elegidas por los viajeros y los flujos en los arcos. Resolver el problema UE-D.

Subproceso 2:

Algoritmo de propagación WLM *adaptado*.

Se obtiene el tiempo en las rutas, los flujos y las filas.

Revisar criterio de convergencia: Si no, regresar al subproceso 1; si sí, ir al algoritmo de descenso.

Algoritmo de descenso (Loop interno):

Subproceso 3:

Encontrar el gradiente del problema inferior con respecto a los flujos.

Solucionar el problema BLP con el algoritmo de sensibilidad.

Se obtiene un nuevo conjunto solución del problema de diseño (problema superior) de las filas

Iteración 2

Regresar al subproceso 1 con las nuevas filas y resolver el problema UE-D.

El algoritmo termina cuando se han cargado todos los viajes de todos los intervalos k . Se realizan las iteraciones hasta alcanzar una mínima diferencia del conjunto solución (x, y) o un límite máximo de iteraciones (Lu, 2013).

Criterio de convergencia: Comparar la solución de las dos últimas iteraciones en cada intervalo de carga k . Los tiempos de viaje del conjunto de rutas usadas del subproceso 2 deben ser similares al conjunto de rutas usadas y sus tiempos que resultan del subproceso 1, resuelto con las filas obtenidas en el subproceso 3; primer criterio de convergencia. El segundo criterio busca que las diferencias de los flujos de los arcos del problema EU-D, así como de las filas en cada intervalo k , sean mínimas.

Los pasos del algoritmo se encuentran descritos detalladamente en las referencias mencionadas antes. El algoritmo puede ser programado y aplicado a una red como la descrita en esta tesis.

6 CONCLUSIONES

La modelación de asignación de tráfico para la planeación de las redes viales es un tema vigente en la comunidad investigadora, de analistas y expertos en tránsito, como recurso metodológico en la toma de decisiones. Durante los últimos años han surgido nuevas propuestas de análisis y se han desarrollado programas de cómputo que buscan representar de forma más real, el proceso de selección de rutas por la actividad cotidiana de los viajeros.

Las estrategias de planeación de transporte se orientan mediante la aplicación de soluciones evaluadas con el modelo de planeación de transporte, pues facilita el análisis de los flujos que surgen por la elección de rutas de los viajeros que, en su actividad cotidiana, buscan las mejores opciones de viaje. La comunidad de expertos en planeación de sistemas de transporte reconoce las ventajas de la asignación de tráfico, en especial aquéllos modelos que tienen en cuenta el primero y segundo principio de Wardrop (1952), ya que tienen en cuenta los efectos de la congestión. Los resultados de los procesos relacionados con la solución del modelo, por ejemplo, la asignación de tráfico a la red vial, guían las decisiones de los responsables de la planeación del transporte y establecen acciones en diversas jerarquías, tales como:

- Decisiones estratégicas que implican cambios en la infraestructura vial. Por ejemplo:
 - o Definición de la red de acceso controlado que facilita la movilidad entre municipios o viajes largos. En este tipo de vialidades se debe analizar el efecto de variables que inciden en el tiempo de viaje, tal como las filas en los segmentos viales y ramales de conexión con otras arterias viales, para que no se obstruya la conectividad con las vías arterias y las vías de acceso controlado, por donde se realizan los viajes más largos, ambas con alto volumen vehicular. Por ello el diseño debe prever los problemas derivados de la congestión, ya sea con elementos físicos o tecnologías de control.
 - o Definición de la red arterial o vías primarias que facilitan la movilidad de viajes de mediana longitud y conectan los viajeros a la red local de sus destinos. Poseen controles viales, tal como semáforos, señales de ALTO o CEDA EL PASO, donde se presentan filas que pueden obstruir la accesibilidad a usos de suelo de vital importancia, relacionados por ejemplo con salud, educación, o apoyo de emergencias. Es necesario simular escenarios de intervención ante la formación de filas, que afecten la circulación y accesibilidad de los vehículos de emergencia.
- Decisiones tácticas que requieren el estudio del tráfico, los tiempos de viaje y el mejor uso de la red vial, mediante el manejo de vías reversibles, el uso exclusivo de carriles para priorizar o segregar un modo de transporte, o la restricción del uso a vehículos con solo el conductor.
- Decisiones operativas relacionadas con el diseño de controles viales como, semáforos, indicaciones de tiempo de señal, ocupación de la fila, etc.

El modelo general de planeación y en específico, los modelos de asignación, evaluados en forma estática y dinámica, son recursos metodológicos que entregan información valiosa en la carga de viajes a la red vial estudiada para guiar las decisiones antes mencionadas. Entre esta información, se encuentra la siguiente:

- Patrones de viaje para diversos escenarios de planeación de las rutas elegidas por los viajeros con alguna estrategia de optimización, por ejemplo, mínimo tiempo de viaje para el usuario, o mínimo tiempo en el sistema vial.
- Tiempo de viaje en las rutas usadas y en la red vial.
- Flujos en las rutas y los segmentos viales que conforman la red.
- Relación flujo a capacidad.
- Tramos congestionados.

Los planificadores y expertos en análisis de redes acuden a programas de cómputo para resolver el modelo general de transporte, que obtiene las características de la demanda de viajes entre los orígenes y destinos del sistema en estudio y, el patrón de flujo en la red vial, además de información complementaria que ayuda a entender el desempeño en la zona estudiada. La función de impedancia o disuasoria para el viajero, entre los orígenes y destinos, que se utiliza con frecuencia en tales programas, depende del tiempo de viaje, el costo o una combinación de ambas variables. Una de las funciones más utilizadas es la función BPR (1964) que define el tiempo de viaje en el arco, y depende de la relación flujo a capacidad. Sin embargo, como se explica en el aparte 1.2, hay otros factores que influyen en la decisión del viajero para elegir la ruta. Esta investigación busca formas funcionales que representen mejor la realidad.

También existen patrones de viaje de usuarios no cotidianos que deben modelarse y analizarse en el contexto de las nuevas tecnologías de información y comunicación al viajero, sistemas cooperativos (V2I/V2V, vehículo-infraestructura, vehículo-vehículo; Zheng et al., 2016), cuyas decisiones pueden ser influenciadas por factores no incluidos en los programas comerciales de modelación de transporte.

La programación matemática binivel ha despertado gran interés en la comunidad de investigadores, no solo como un reto en el campo de la investigación de operaciones, sino por su potencial para modelar problemas de juegos, por ejemplo, entre operadores de la red vial y los usuarios de la red. Ambos actores buscan minimizar sus costos, ya sea monetarios, de tiempo, u otros relacionados con la contaminación u otras externalidades de los sistemas de transporte. Profundizar en la programación amplía el ámbito de entendimiento para la formulación y solución de problemas de diseño de redes, diseño de estrategias de operación del tránsito, inversión para mejorar la capacidad de la red vial, cobro de cuota, entre otros, que se dan en la planeación de la red vial. Además, permite la solución de problemas de redes robustas con potencial de evaluar patrones de viaje en redes grandes.

Esta tesis presenta el problema de minimización del tiempo en la red dependiente del flujo, la fila de vehículos y el tiempo de congestión (BL-FQ-TDUE-D), como un juego entre una entidad superior que controla la ocupación vial de la fila y los usuarios que eligen la mejor estrategia de viaje, con dependencia del tiempo. Tal estrategia se formula como un problema de diseño de redes, cuya variable de diseño es el tamaño de la fila. Entonces el problema BL-FQ-TDUE-D se formula como un juego Stackelberg (1952) (Patriksson y Rockafellar, 2002), que se adapta al problema de programación binivel de redes, ampliamente explicado por Vicente y Calamai (1994).

Los problemas de diseño de redes de equilibrio son problemas de programación binivel reformulados como problemas matemáticos con restricciones de equilibrio (MPEC), cuya solución en redes de tránsito constituye una rama de gran interés en la investigación de operaciones, la programación de algoritmos y la producción de software. Es un tema actual que requiere profundización y desarrollo para resolver problemas en redes viales grandes.

Hay un amplio desarrollo en los problemas de redes de transporte, abordados desde la optimización binivel sin variabilidad en el tiempo, y la investigación no está agotada. Esta investigación hace una aportación al respecto. Sin embargo, la optimización binivel en problemas de redes de asignación dinámica es un campo de investigación emergente. También representa un recurso metodológico robusto para abordar problemas complejos en el análisis y diseño de redes de tráfico.

Los métodos de ADT incluyen los relacionados con los problemas de TAP estáticos, pues la solución del primero debe ser congruente con el segundo. Por ello son tema de estudio y aplicación en la presente investigación. Sin embargo, es necesario profundizar en las investigaciones emergentes de los problemas EU-D y EU-S estáticos que considera filas, como en Bliemer et al. (2014) y otros; también en las nuevas versiones del algoritmo Frank-Wolfe conjugado y biconjugado que agilizan la convergencia del TAP-UE (Mitradjieva y Lindberg, 2013).

La formulación de problemas ADT desde el enfoque analítico, en esta investigación con el modelo propuesto para el problema BL-FQ-TDUE-D, busca enriquecer el estudio de los patrones de viaje dependientes del tiempo en redes grandes. El modelo se formula para introducir la función de tiempo de viaje como una función continua a tramos creciente. Se busca la solución de los patrones de viaje en forma determinística y dependiente del tiempo, menor a una hora, en un período de tiempo congestionado. Se asume que el tiempo de viaje en el arco aumenta con el crecimiento del flujo, de la fila y del tiempo de congestión, pues en redes urbanas éstas son características de ejes viales semaforizados y de las vías de acceso controlado. El modelo propuesto tiene en cuenta la propagación de las filas en el espacio y el tiempo, y a la vez su influencia en el tiempo de viaje entre pares O-D. Entonces los flujos, los tiempos en los arcos y rutas se buscan de forma implícita. La estructura matemática es un juego Stackelberg, expresado como un problema de optimización binivel, que combina el

problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario dependiente del tiempo, el problema de diseño de redes, conjuntamente transformado en un programa matemático de restricciones de equilibrio, el cual tiene embebido un problema de carga dinámica discreto. Tales características son escasas en la literatura y representan una aportación al estudio de los problemas de redes tráfico dependientes del tiempo.

En el contexto de los problemas de carga de viajes vehiculares (vehículos equivalentes) dependientes del tiempo (DNL), se propone la combinación de una estrategia matemática de propagación y análisis de la fila, u ondas densificantes o disipantes, con funciones de tiempo de viaje en el arco o funciones de salida de arco. Este problema se recrea en los softwares de simulación bajo supuestos fuertes, en muchos casos no reales. Sin embargo, en el enfoque analítico, sigue estudiándose para mejorar la eficiencia de la solución de los patrones de viaje en redes grandes. Esta tesis presenta la introducción de la función de tiempo de viaje dependiente del flujo, la fila y el tiempo de congestión, al problema DUE, en busca de realismo en el comportamiento del tráfico y la estimación de tiempos de viaje entre los orígenes y destinos dependientes del tiempo, consecuente con la estructura matemática y los subproblemas que la conforman.

El problema DNL no se soluciona de forma implícita en el problema ADT, por eso en el enfoque analítico es común encontrar procesos de solución de naturaleza anidada. Los investigadores han formulado la propagación como un subproblema que interactúa con el problema de asignación de tráfico. Los resultados se obtienen de rutinas de cómputo que van llevando la carga de viajes en la red desde los orígenes a los destinos cada intervalo de tiempo. Luego determinan el tiempo que fue necesario para el arribo de los flujos a sus destinos. Los más exitosos dan seguimiento a los vehículos individuales, pero su alcance es de pequeñas redes. Otros usan segmentos con características específicas que calculan flujos entrantes y salientes, con reglas básicas de simulación y fuertes supuestos para atender las características de propagación de los DNL. En esta tesis se discute la resolución (Barceló, 2010, explicado en 1.3) en términos de los parámetros que describen la propagación del flujo en la red vial y la forma cómo se traslada en los arcos y rutas que usan los viajeros. Se han logrado formular problemas DNL con base en el diagrama fundamental; sin embargo, hoy se discute el realismo de las corrientes de flujo en la zona congestionada, también llamada zona de flujo inestable. Esta tesis adopta el modelo de arco completo, para formular la propagación del flujo en la red. El análisis es un enfoque macrocópico que considera la forma de propagación del flujo con la función de tiempo de viaje en el arco dependiente de la fila, el flujo y el tiempo de congestión, y la relación flujo-densidad que resulta. Una problemática de los problemas ADT es la concordancia entre las variables que se solucionan en el problema de redes de asignación y el problema de propagación de flujo. La formulación del modelo del problema BL-FQ-TDUE-D pretende mejorar tal concordancia, por la naturaleza como se determina la fila en el tiempo y el espacio.

La formulación de problemas ADT mediante programación matemática binivel, aunque tuvo sus inicios a finales de los 80's y proliferó en los 90's, continúa siendo un recurso metodológico para el planteamiento,

solución y aplicación de problemas ADT. La solución en casos reales es un reto para estudiosos y expertos en problemas de optimización de redes de tráfico. Esta tesis explora técnicas alternativas, para aplicarlas a redes urbanas con problemas complejos. Éstos se refieren a los múltiples factores que participan, como: a) el crecimiento de los viajes, por ejemplo, frente a cambios en la oferta de tránsito, cuyos efectos no atienden la demanda de dichos viajes; y b) la vulnerabilidad de la red por la ocurrencia de accidentes, eventos sociales o políticos, que causan disminución de rutas disponibles para la conexión entre orígenes y destinos, congestión, demoras, así como consecuencias en la contaminación, mayor consumo de energéticos y mayor costo en el uso de la red vial.

Las investigaciones científicas adoptan la programación matemática binivel estática y dinámica, para abordar dichos problemas, tal como el diseño de redes de transporte. Esta tesis se apoya en la programación matemática binivel para relacionar dos variables que afectan el tiempo de viaje: el flujo y la formación de filas; éstas se incorporan al problema de optimización binivel de asignación de tráfico dependiente del tiempo, y se ofrece un nuevo marco metodológico para dar respuesta al patrón de viajes en la red vial dependiente del tiempo.

El problema BL-FQ-TDUE-D y su solución se desarrollan como recurso de análisis para el proceso de planeación y administración del sistema vial urbano. Éstos sirven para evaluar proyectos de estratégicos, tácticos y operativos y sus efectos a fin de disminuir los problemas de demoras, congestión, obstrucción de tramos viales e intersecciones.

Los viajeros de la ZMVM experimentan períodos congestionados por más de una hora, con frecuencia de tres o más. Así que el modelo propuesto es aplicable a una red de este tipo.

Los procesos de estimación de patrones de viaje con los modelos de asignación de tráfico estáticos, asumen que todos los viajes se resuelven en una hora; éstos cargan la matriz de hora de máxima demanda para encontrar los flujos en la red, los tiempos de viaje en las rutas y en los arcos. Tal proceso puede ser válido en evaluación de escenarios de planeación, con base en supuestos poco reales. Para atender este problema, esta tesis toma en consideración el modelo de asignación de tráfico, la variabilidad de los flujos en la red con dependencia del tiempo, y la introducción de la variable de tiempo de congestión (T).

Es necesario enriquecer los procesos de planeación de transporte con recursos metodológicos que ayuden en el estudio del desempeño de los viajes y los flujos en la red, con el enfoque estático y dependiente del tiempo. También, revisar el comportamiento de los viajeros en situaciones complejas como a las que se enfrenta en períodos de máxima demanda y en eventualidades y obstrucciones de amplios sectores de red. Esto justifica la necesidad de seguir investigando en el desarrollo de modelos de asignación de tráfico dependientes del tiempo, con el fin de mejorar su realismo, eficiencia, rapidez y confiabilidad.

Los problemas de asignación de tráfico que consideran filas, en el ámbito estático y dinámico, se han estudiado por décadas, con diversos enfoques, y continúan despertando el interés de científicos y analistas. En esta investigación se abordan entre otros: las filas desde las observaciones de campo, el tiempo de viaje en los arcos y las rutas, las funciones de tiempo de viaje, los modelos de propagación de flujo en problemas de carga dinámica, los problemas de asignación de tráfico estáticos y dependientes del tiempo. Se presenta un caso de estudio para el que se determina la magnitud de los tiempos de viaje en los arcos y las rutas, las demoras y las filas, en tramos arteriales y de acceso controlado. Se analizan funciones de tiempo de viaje dependientes del flujo que se usan en redes congestionadas, y se comparan con la solución del problema de asignación de tráfico estático. Lo anterior, por ser parte del problema de asignación de tráfico dinámico y de su método de solución. Además, para aportar en cubrir vacíos que aún existen en el análisis de flujo en redes, comentados en esta tesis.

La investigación formula el problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario, combinando las siguientes funciones de tiempo de viaje, expresadas como componente de demora del viaje: i) BPR; ii) demora fija de Webster; y iii) demora de sobreflujo de Akcelik (1991), adicionadas al tiempo de viaje a flujo libre, todas basadas en el arco, las cuales fueron integradas en una función de tiempo de viaje continua a tramos práctica, definida para arcos de acceso controlado y semaforizados mediante una variable 1-0 (Londoño y Lozano, 2012). Esta función fue introducida en el problema de Beckmann y el problema fue resuelto con el algoritmo de combinaciones convexas (Frank-Wolfe) (Sheffi, 1985). El algoritmo fue aplicado a una parte de la red de la ZMVM, y se encontró que la función de sobreflujo de Akcelik, sumada con el tiempo de viaje a flujo libre y la demora de control de Webster generan resultados más reales, comparados con el tiempo de viaje estimado con la función BPR que es la más usada en los artículos de investigación. También se hicieron comparaciones con otras funciones como se muestra en el apéndice B.

Las funciones de tiempo de viaje basadas en el arco fueron estudiadas y analizadas para revisar su realismo y adaptabilidad en el programa matemático de Beckmann (Londoño y Lozano, 2011), y su aplicación en una red urbana congestionada. Los resultados muestran que la función BPR sobre estima el tiempo de viaje en el arco; además tiene dos parámetros de calibración, lo que la hace más compleja que la propuesta en esta tesis.

Lo anterior motivó profundizar en las investigaciones de Akcelik sobre la estimación de tiempo de viaje en los arcos. Este autor ha hecho estudios exhaustivos sobre las relaciones entre los parámetros macroscópicos del tráfico, estos es velocidad-flujo-densidad, en vías de acceso controlado y vías controladas por semáforo o señales de prioridad, con funciones de tiempo de viaje que mejor las representa en condición de flujo estable y congestionado (Akcelik, 2003).

En esta tesis, se realiza un análisis de los modelos de propagación, que son el corazón del modelo de carga dependiente del tiempo, los cuales se formulan analíticamente, pero, en muchos casos, se resuelven con rutinas de cómputo que llevan los flujos por los arcos hasta su destino; luego acumulan los flujos en los arcos y los

tiempos recorridos con el fin de estimar los tiempos de las rutas o los tiempos de salida de los viajes entre los orígenes y los destinos. Este problema sigue estudiándose para mejorar su desempeño en redes grandes, lograr la concordancia con los tiempos de viaje de rutas en equilibrio del modelo de asignación de tráfico, y el cumplimiento de las propiedades FIFO y causalidad. Los modelos continuos se basan en la condición de continuidad del flujo, apropiada para segmentos de autopista, pero no para redes urbanas.

Las principales contribuciones de la tesis son las siguientes:

1. Un aporte relevante de esta tesis es la formulación del problema de asignación de tráfico dependiente del tiempo mediante una estrategia de diseño de red, como un juego no cooperativo entre una entidad superior que desea observar el patrón de viaje que resulta al anticiparse a la reacción de los viajeros e impone acciones o reglas, y un nivel inferior donde están los viajeros que con base en dichas acciones seleccionan la mejor estrategia de viaje con algún criterio de optimalidad. El problema BL-FQ-TDUE-D es propuesto y formulado como un problema de optimización binivel (BLP) cuya función objetivo busca minimizar el tiempo de recorrido total en la red, el cual depende tanto del volumen como de la longitud de la fila vehicular en el arco, cuando se asigna una matriz de viajes O-D a una red vial con el criterio del equilibrio del usuario, cuya función de tiempo de viaje, también depende del volumen y la longitud de la fila en el arco.
2. Esta investigación propone dos recursos metodológicos que pueden acoplarse en un modelo de asignación dependiente del tiempo dentro de un algoritmo propuesto en la literatura, tipo anidado, el cual puede ser aplicado a una red real. En el desarrollo del modelo de asignación de tráfico dependiente del tiempo BL-FQ-TDUE-D se integran, el problema de asignación dependiente del tiempo y el problema de carga de viajes a la red vial, en un programa matemático más robusto, que representa analíticamente los supuestos establecidos y fundamentados en los hallazgos de la presente investigación, explicados con detalle en el capítulo 3.
3. Otra aportación de esta tesis es la introducción de la función de tiempo de viaje dependiente de la fila inicial y el tiempo de sobreflujo de Akcelik (2003) en el problema BL-FQ-TDUE-D, adaptándola a la estructura matemática y a las condiciones reales que requiere una red vial urbana. Después de un profundo análisis y trabajo práctico se elige la función de tiempo de viaje que estima el tiempo de viaje dependiente del tiempo de sobreflujo con fila inicial de Akcelik (2003), adaptada mediante la función de tiempo de viaje que adiciona la demora de control fijo y el tiempo de viaje a flujo libre, definida a tramos, y tiene características que se acomodan al programa matemático de optimización binivel.
4. Se presenta el modelo de propagación de flujo de arco completo adaptado de Carey et al. (2014); éste modelo de propagación de arco completo, resulta de una ampliación de otro formulado diez años atrás; por lo tanto se profundiza en la formulación matemática y el algoritmo solución, adaptado al problema FQ-TDUE-D, formulado en esta tesis. Se establecen condiciones límite y se revisan características del comportamiento de la función de tiempo de viaje para un arco de acceso controlado, como ejemplo

del modelo *WLM-FQ-adaptado*, desarrollado en el capítulo 4. Los resultados entregan un comportamiento acorde con otros de la literatura.

5. También se desarrolla un algoritmo de carga dependiente del tiempo, que interactúa con el algoritmo solución del problema de asignación de equilibrio del usuario. Se analizan las características matemáticas de la función de tiempo de viaje dependiente del flujo, el tiempo de congestión y la fila, en el modelo de arco completo adaptado de Carey et al. (2014), y su desempeño en un caso de estudio de un arco real. Se comprueban buenas características matemáticas y relaciones de los parámetros de flujo-densidad consecuentes con el modelo original y con la realidad.

Otras aportaciones son:

6. Se presenta el estado del arte actualizado del modelo de asignación de tráfico, con el enfoque del equilibrio del usuario de Wardrop (1952), para viajes en vehículo particular, estático y dinámico (o dependiente del tiempo), como problema matemático de optimización binivel BL-DUE-D, en el contexto matemático de la teoría de juegos, así como los subproblemas que lo componen: diseño de redes viales, carga de redes dinámicas y propagación de tráfico.
7. Se profundiza en el estado del arte y el estado de la práctica de la función de tiempo de viaje en el arco vial, para la formulación del problema asignación de tráfico de equilibrio del usuario dependiente del tiempo determinístico, TDUE-D, y en particular en la solución del problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario estático, UE-D, por ser parte del algoritmo solución de TDUE-D.
8. Se amplía el enfoque analítico del problema de asignación de tráfico dinámico, como programa matemático de optimización, dependiente del tiempo, con propiedades matemáticas que se adapten para ser aplicados en redes reales de ciudades congestionadas.
9. Se programa el algoritmo de Frank-Wolfe para resolver el programa de asignación de equilibrio del usuario determinístico en un tramo de la red de la ZMVX, con la función de tiempo de viaje continua a tramos para arcos de acceso controlado y arcos arteriales semaforizados, en forma implícita. La función de tiempo de viaje utiliza la demora uniforme de Wardrop, la demora de sobreflujo de Wardrop, la demora de pendiente del tiempo de congestión y del sobreflujo de Akcelik (1991), y la función de tiempo de viaje BPR. Se revisa el desempeño del programa matemático resuelto con el algoritmo de Frank-Wolfe, se comparan los resultados de cada función y con información real.
10. El algoritmo de Frank-Wolfe se programó para resolver el programa de equilibrio del usuario determinístico en el mismo tramo de red de la ZMVM, con la función de tiempo de viaje de continua a tramos para arcos de acceso controlado y arcos arteriales semaforizados, en forma implícita, esta vez, con los componentes de demora de Wardrop y la función de tiempo de viaje dependiente del tiempo, el flujo y la fila inicial. Las funciones que hacen parte del algoritmo se deducen en el apéndice C y se comparan con las que no tienen en cuenta la fila inicial. Sin embargo, el desempeño del algoritmo se analiza en una investigación futura.

Futuras líneas de investigación:

1. La solución de programas matemáticos de asignación de tráfico binivel dinámicos son un tema de desarrollo teórico y aplicado, de gran potencial en la planeación de los sistemas de transporte en redes urbanas congestionadas.
2. Los modelos de propagación de flujo en procesos de carga de redes dependientes del tiempo, con enfoque macroscópico, requieren programas matemáticos más robustos, que representen mejor la realidad y puedan incorporarse a los programas de asignación dinámica de tráfico con algoritmos de solución implícitos.
3. El campo de aplicación de los programas matemáticos de optimización de redes con el problema de asignación de tráfico dinámico en redes reales aborda casos simples y pequeños. El enfoque analítico puede abordar mayor alcance en redes urbanas grandes, pero aún es un tema emergente.
4. Esta investigación continúa en el futuro con la aplicación del algoritmo solución del problema de asignación de tráfico de equilibrio del usuario binivel dependiente del tiempo, del sobreflujo y la fila, en una red real, para evaluar su desempeño frente a otros que se presentan en la literatura, así como a los indicadores de tráfico reales.
5. La solución de los problemas de diseño de redes es tema pendiente para la comunidad científica pues los casos aplicados requieren más realismo.
6. La función de tiempo de viaje dependiente del flujo, la fila y el tiempo de sobreflujo debe ser probada en la aplicación del problema de asignación de tráfico estático en redes viales congestionadas, para ser evaluado su desempeño con otros programas de gran aplicación práctica.

APÉNDICE A. ESTUDIO DE RUTAS EN LA ZONA SUR DE LA ZONA METROPOLITANA DE MÉXICO

Introducción

El tiempo de viaje y la demora son dos medidas sensibles a los usuarios del tránsito y de particular interés para los analistas y planificadores. La velocidad de recorrido está directamente relacionada con el tiempo de viaje y la demora y se usa para evaluar la red de transporte, la red vial y el tránsito. El tiempo de viaje es el parámetro usado para calcular la velocidad de recorrido de un segmento, tramo vial o ruta. A su vez, la velocidad de recorrido corresponde a la velocidad media espacial.

Se presenta la metodología para el estudio de los tiempos de recorrido, demoras, ocupación de filas de rutas por vías de acceso controlado y arterias, de la red principal en el sector sur de la Ciudad de México, municipio de Coyoacán. La información se analiza para deducir aspectos de comportamiento de los viajeros; también para el cálculo de indicadores de circulación, los cuales sirven para calibrar y validar las salidas del algoritmo de combinaciones convexas diseñado en la realización de esta tesis.

Otros estudios de tiempo de recorrido se hacen en otras rutas de los municipios de Álvaro Obregón, Benito Juárez. La información y el análisis sirven para realizar ejercicios de asignación de viajes con el algoritmo de combinaciones convexas de Frank Wolfe, programado por esta autora, que soluciona el problema de asignación de tráfico estático, para una red de arcos de acceso controlado y de una arteria semaforizada, con varias funciones de tiempo de viaje, aplicada en la Ciudad de México (Londono y Lozano, 2012).

Los resultados de estos estudios son fundamento de las hipótesis y deducciones esta tesis. Algunos de los artículos de investigación, presentados en el Apéndice B, explican el soporte científico de los análisis y resultados de los casos de estudio que se presentan a continuación.

Primero se presenta la metodología para el estudio de recorrido y demoras. Luego se presentan seis aforos en rutas en el municipio de Coyoacán y se analizan tres casos de estudio de ocupación de filas en varios períodos de tiempo.

Estudio de tiempo de recorrido de rutas en la zona sur de la Ciudad de México

Objetivo: Realizar un estudio de tiempo de recorrido y demoras en las rutas “razonables”⁷ entre pares de origen-destino, en diferentes períodos del año y del día, con el fin de observar patrones de comportamiento del tránsito, calcular medidas de tránsito, identificar cuellos de botella, colas, entre otros.

En un estudio de tiempo de viaje se mide el tiempo que toma atravesar la sección de ruta o vía de interés. La velocidad media de viaje resulta de dividir la longitud del tramo vial entre el tiempo de recorrido medio.

La información recogida en un estudio de tiempo de recorrido y demoras sirve para otros objetivos específicos, tales como (Schroeder et al., 2010):

- Determinar la eficiencia de una ruta con respecto a su capacidad para movilizar tráfico, en comparación con otras rutas, referenciado en valores límite o estándares o índices de congestión.
- Medidas de funcionamiento
- Información básica para análisis de capacidad de vías
- Identificación de sitios de embotellamiento mediante la demora
- Evaluación de la eficiencia de acciones o proyectos de mejora en una vialidad
- Información básica para modelos de planificación de transporte, modelos de asignación de tráfico y modelos de selección de ruta.
- Información básica para la evaluación económica de alternativas
- Información para la elaboración de mapas de isócronas o de movimiento expresado en curvas de nivel
- Información básica para estudios de tendencias de eficiencia y nivel de servicio respecto al tiempo
- Calibración y validación de modelos de simulación.

Método: Vehículo de prueba.

El método se realiza con un vehículo que recorre el tramo de vía de interés y recoge la siguiente información:

- Tiempo de viaje
- Tiempo en marcha o movimiento
- Tipo, ubicación, duración y causa de la demora de tránsito
- Distancia viajada
- Velocidad media espacial

⁷ “Una ruta es eficiente (razonable) si todo arco tiene su nodo inicial más cerca al origen que su nodo final” (segunda definición de Dial para modelos de asignación logit (Leurent, 2005))

El estudio de tiempo de viaje generalmente se realiza en las horas pico, sin embargo fuera de horario pico puede obtenerse la velocidad bajo condiciones prevalecientes y la velocidad de operación de la ruta de acuerdo con sus características geométricas, de control y de condición de superficie de rodadura.

El método del vehículo de prueba es de gran aplicación para el estudio de tiempo de recorrido y demora en arterias primarias y semaforizadas. Se recomienda realizarla en tramos de más de 1 milla.

Técnica de recolección de información: Se usa la técnica de vehículo máximo. En ésta el conductor del vehículo de prueba maneja a la máxima velocidad permitida a menos que las condiciones de seguridad y del tránsito lo obliguen a disminuirla.

Equipo: Se usa equipo de captura automática con Sistema de Posicionamiento Global (GPS), integrado a un teléfono SAMSUNG Galaxy Ace GT-S5830M, el cual mediante la aplicación My Tracks Copyright 2009 Google Inc. Versión 2.0 libre para Android guarda información del viaje. Esta aplicación graba el recorrido GPS, por la captura de las coordenadas geográficas y el tiempo. My Tracks provee una interface que permite acceder y actualizar la información del recorrido, ya que guarda la información en cuatro tipos de archivo: .cvs, .kml, .gpx, .tcx, los cuales puede ser abiertos y editados. Además entrega estadísticas del recorrido y presenta el gráfico del perfil de elevación y la velocidad en toda la longitud de la ruta.

El Manual of Transportation Engineering Studies, 2nd Edition. Institute of Transportation Engineers. Bastian J. Schroeder, Daniel J. Findley, Joseph E. Hummer, Robert S. Foyle. Publication No. TB-012A, 1000/AGSBH/1110 First Printing. Washington DC 20006, U.S.A. 2010, especifica la utilización del GPS y las aplicaciones que recuperan la información de recorridos y entregan medidas para los estudios de recorrido y demoras.

Se presentan tres casos de estudio de rutas entre orígenes y destinos en la zona sur del Distrito Federal (Hoy Ciudad de México) de México. En cada uno se analiza la información del recorrido a partir de los archivos GPS-My Tracks. Se trabaja con los archivos .kml mostrados mediante Google Earth. También se editan los archivos .cvs y se convierten en archivos Excel. Estos datos son de gran utilidad para calcular los siguientes indicadores:

- Velocidad (km/h)
- Identificación de tramos con velocidad menor de 10 km/h, la cual se usó como criterio de demora de tránsito.
- Cálculo de la demora en función del tiempo y total.

La información se toma en el segundo semestre de los años 2012 y 2013.

Se clasifica la información geoespacial para visualizarla en el recurso versión 3 del Interfaz de Programación de Aplicaciones (Application Programming Interface, API) de JavaScript de Google Maps, el cual también permite personalizarla de acuerdo con el interés del usuario. Con el uso *The Chrome Developer Tools* (*DevTools*) se produce un mapa de *ritmo de viaje* mediante un “heatmap” o mapa de calor. Los recursos para desarrolladores de Chrome facilitan la realización de aplicaciones utilizando las últimas tecnologías (<https://developers.google.com/chrome/?hl=es>, consulta en línea agosto 11 de 2013).

El mapa de calor es una representación gráfica de valores ligados a puntos geográficos, ordenados en una matriz que se diferencian mediante una escala degradada de colores. Este recurso de presentación es similar a los mapas temáticos. El término “mapa de calor” fue creado y registrado como marca por Cormac Kinney en 1991.

En cada caso se produce:

- Un mapa de las rutas de interés entre cada par O-D.
- Las estadísticas entregadas por My Tracks complementadas con las de demora deducidas por esta autora.
- El recorrido desplegado en Google Earth con la gráfica de velocidades dependiente de la distancia.
- Un gráfico de velocidad dependiente del tiempo de recorrido
- Un gráfico de la demora dependiente del tiempo de recorrido
- Un mapa de calor que representa el indicador ritmo, expresado en [min/km], se calcula como el inverso de la velocidad, para enseñar la calidad del movimiento en el recorrido, mediante una matriz de código definida por esta autora, cuyo color lo degrada de acuerdo a valores máximos y mínimos el recurso API de Google Maps [versión 3 del API de JavaScript DevTools](#), así:

Rango de velocidad (km/h)	Calidad de movimiento Ritmo (min/km)	Rango de velocidad (km/h)	Calidad de movimiento Ritmo (min/km)
0 a 10	6.00	> 25 a 30	2.00
> 10 a 15	4.00	> 30 a 40	1.50
> 15 a 20	3.00	> 40 a 50	1.20
> 20 a 25	2.40	> 50	1.00

El mapa de calor de DevTools permite tener una visión espacio-temporal del recorrido de una ruta, una forma de recobrar en una imagen la dinámica del movimiento en el día y hora de captura. Además, permite identificar información detallada, tal como:

- Los tramos que ofrecen eficiente movilidad.
- Los tramos con demora, la cual se establece en registros de velocidad menores a 10 km/h.
- La afectación de sitios, longitudes o tramos con filas.
- Embotellamientos, sitios de congestión y la afectación.

Caso de estudio: Análisis de rutas en la zona sur de la Delegación Coyoacán

Origen: Calzada Taxqueña con Eje 2 Oriente (Escuela Naval Militar)

Destino: Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, Circuito Escolar, Ciudad Universitaria

Objetivo específico: Realizar un estudio de tiempo de recorrido y demoras en dos rutas alternativas, equiparables por sus características, en diferentes períodos del año, en la hora pico de la mañana, con el fin de observar patrones de comportamiento del tránsito en la temporada escolar y en vacaciones escolares, calcular medidas de tránsito, observar el servicio de traslado, identificar cuellos de botella, colas, afectaciones, y hacer comparaciones entre ellas.

El caso se desarrolla en la zona sur de la delegación Coyoacán como se muestra en la Ilustración 1.



Ilustración 1. Zona de estudio. Delegación Coyoacán, zona sur, sector centro-sur del Distrito Federal de México.

Fuente: Google Earth.

La red vial ofrece conexión entre el origen y destino (O-D) con pocas alternativas razonables, por la presencia de una importante vía arteria que comunica la Ciudad de México de norte a sur, la cual debe ser cruzada a desnivel para conectar el origen y destino de la ruta que se estudia, mediante rutas que van del extremo oriental al occidental del municipio de Coyoacán, como se muestra en la Ilustración 2. Por lo tanto, las alternativas de conexión de la red vial principal tienen un paso obligado sobre una vía arteria principal llamada Calzada de Tlalpan. Es por ello que la vía arteria que ofrece movilidad para conectar este par origen-destino es la Calzada Taxqueña (Eje 9 Sur), pues las otras alternativas, División del Norte y Circuito Interior Río Churubusco exceden en longitud y sirven a otra gran cantidad de viajes, siendo altamente demandas. Es por ello que se analiza la conexión por Calzada Taxqueña con continuidad por Miguel Ángel de Quevedo, con posibilidad de tomar dos

rutas en el cruce con División del Norte, ya sea, por M. A. de Quevedo (Eje 9 Sur) o por Eje 10 Sur, como se muestra en la Ilustración 2.

Se realizan seis aforos de recorrido y demora por dos rutas arterias principales en el municipio de Coyoacán en períodos de tiempo diferentes, de acuerdo con las actividades de la población, esto es: vacaciones de escolares con actividad laboral y bajo tráfico; para compararlas con períodos de actividades escolares y laborales, con alto tráfico. Los estudios se hacen en el segundo semestre de los años 2012 y 2013, período de inicio del ciclo escolar en gran cantidad entidades educativas, las actividad económica, social y cultural es intensa en la Ciudad de México.

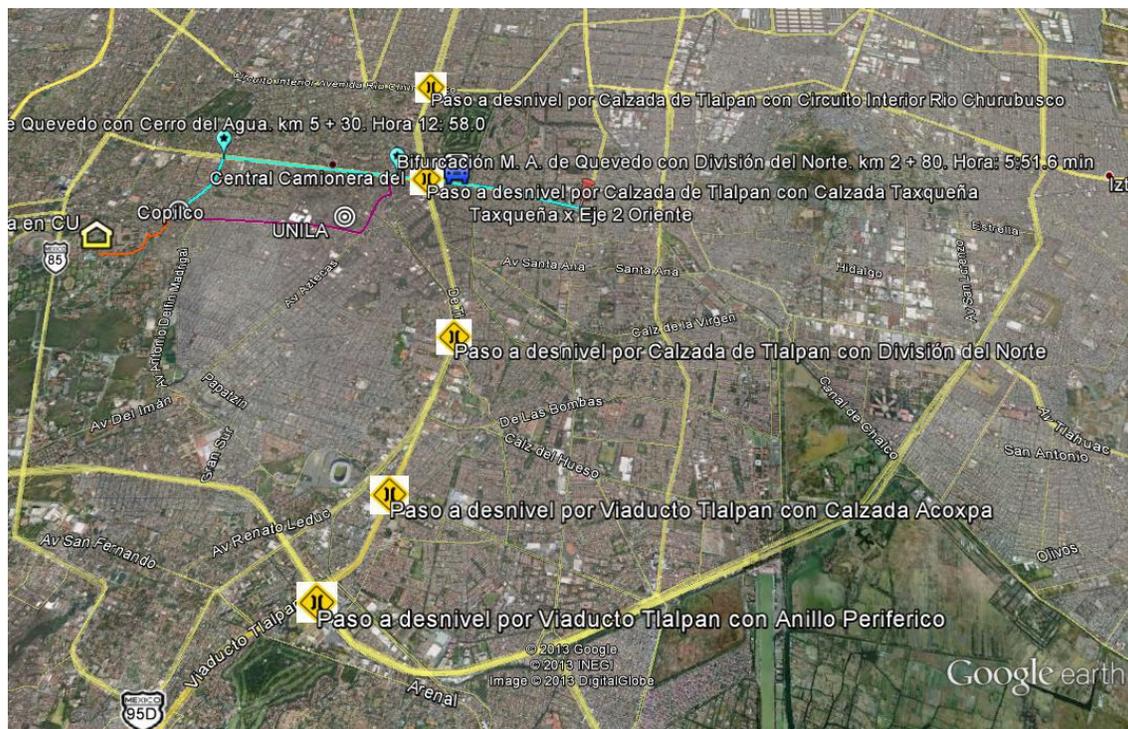


Ilustración 2. Red vial y conectividad en la zona sur de la Delegación Coyoacán.
Elaboración propia en Google Earth



Ilustración 3. Rutas entre Calzada Taxqueña con Eje 2 Oriente (Escuela Naval Militar) y Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria.

Fuente: Elaboración propia en Google Earth

A continuación, se presentan para cada uno de los seis recorridos, los resultados del aforo con las estadísticas entregadas por la aplicación de My Tracks, las gráficas de los perfiles de velocidad y demoras, y el mapa de calor del ritmo de viaje.

1. La Ilustración 4 muestra el recorrido de tiempo de recorrido y demora en Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU. Julio 30 2013, 6:35 a.m. Modo auto. Bajo tránsito. Vacaciones escolares.

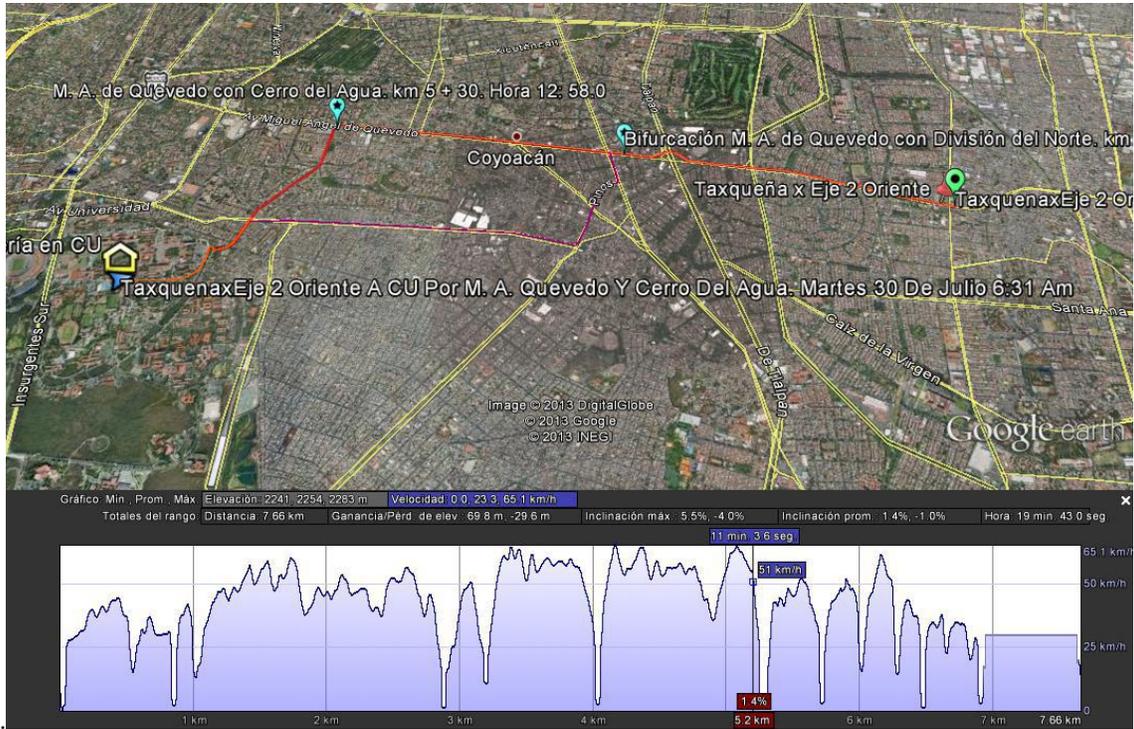


Ilustración 4. Recorrido Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Julio 30 2013, modo auto, bajo tránsito, buen estado del tiempo, 6:35 a.m. con GPS My Tracks y mostrados en Google Earth

Estadísticas Calzada Taxqueña con Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU. Datos originales tomados por My Tracks en Julio 30 2013, modo auto, bajo tránsito, buen estado del tiempo, 6:35 a.m.

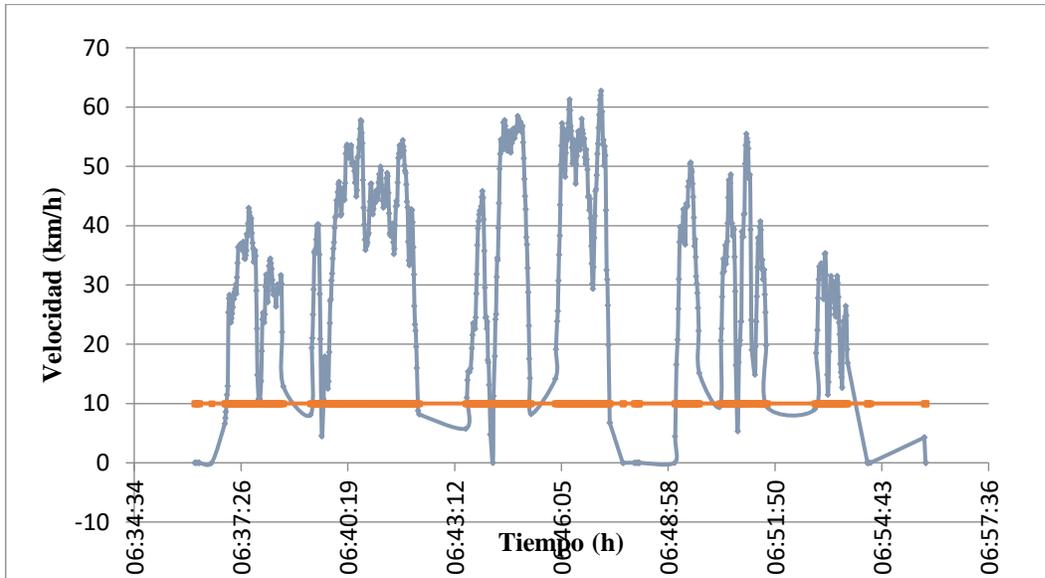
Creado por My Tracks en Android.

Nombre: Taxqueña x Eje 2 Oriente A CU Por M. A. Quevedo Y Cerro Del Agua. Martes 30 De Julio 6:31 Am	
Tipo de actividad: Viaje cotidiano a CU. Transito bajo. Buen clima.	
Descripción: Vacaciones escolares	
Distancia total: 7.68 km (4.8 mi). Tiempo total: 20:07. Tiempo en movimiento: 12:28. Velocidad promedio: 22.89 km/h (14.2 mi/h). Velocidad promedio de movimiento: 36.94 km/h (23.0 mi/h). Velocidad máx.: 62.74 km/h (39.0 mi/h). Ritmo promedio: 2.62 min/km (4.2 min/mi). Ritmo promedio de movimiento: 1.62 min/km (2.6 min/mi).	Ritmo más rápido: 0.96 min/km (1.5 min/mi). Elevación máx.: 2264 m (7429 pies). Elevación mín.: 2230 m (7317 pies). Altitud: 95 m (310 pies). Pendiente máx.: 7 %. Pendiente mín.: -6 %. Registrado: 30/07/2013 6:35 a.m.

A partir de la tabla de coordenadas de la ruta tomados por el GPS, transferidos en archivo Excel, se construye la Gráfica 1 con el perfil de velocidades, la Gráfica 2 con el perfil de demoras, la Ilustración 5 con el mapa temático del ritmo de viaje y los siguientes indicadores de demora:

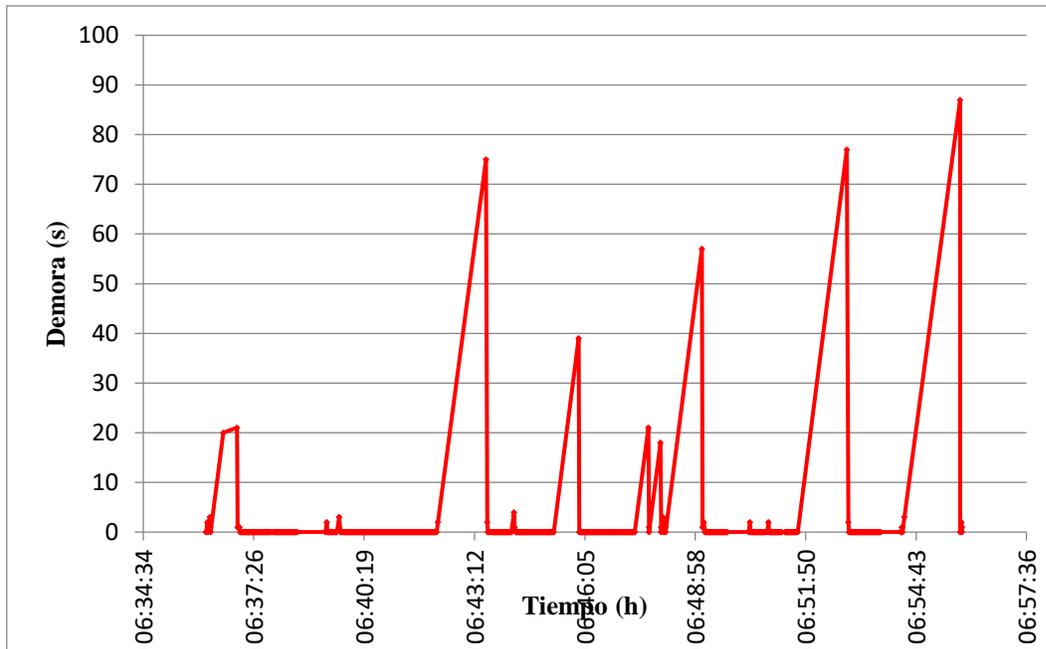
Demora total de viaje ($v < 10$ km/h) [min]: 7.77

% del tiempo total de viaje con $v < 10$ km/h:
39.39%



Gráfica 1. Perfil de velocidades respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU. Julio 30 2013, 6:35 a.m. Modo auto. Bajo tránsito. GPS MyTracks. Elaboración propia

La velocidad se observa relativamente alta en la mayoría de los intervalos. En cortos períodos se observa caer a menos de 10km/h.



Gráfica 2. Perfil de demoras respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU. Julio 30 2013, 6:35 a.m. Modo auto, bajo tránsito. GPS MyTracks. Elaboración propia.

Las magnitudes de las demoras no son altas, la amplitud es relativamente corta, se presenta en los semáforos y algunos topes de Cerro del Agua.

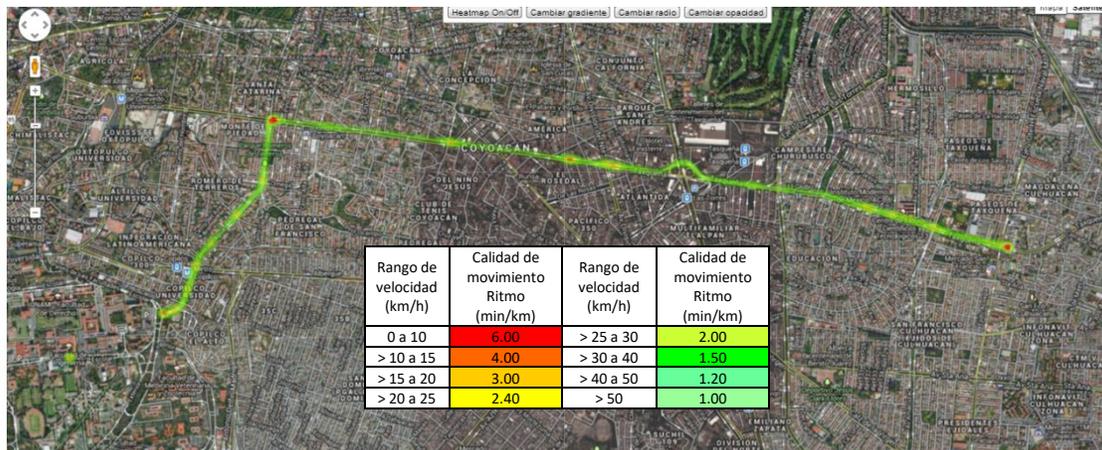


Ilustración 5. Mapa del ritmo en calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Julio 30 2013. Modo auto, bajo tránsito, buen estado del tiempo, 6:35 a.m. con GPS MyTracks; modificado de uno creado por Ing. Lino Wchima, en [Versión 3 del API de JavaScript de Google Maps](https://developers.google.com/maps/documentation/javascript/examples/layer-heatmap?hl=es), con datos propios aplicados en un ejemplo tomado de <https://developers.google.com/maps/documentation/javascript/examples/layer-heatmap?hl=es>, consulta en línea julio 30 de 2013

La vía Miguel A. de Quevedo es una arteria principal semaforizada, de buenas especificaciones geométricas y buena carpeta de rodadura, ofrece una velocidad de circulación relativamente alta en casi todo el tramo, sin

embargo la velocidad media está cerca de 23 km/h, y solo presenta pequeñas demoras en los semáforos y topes ubicados en Cerro del Agua. Este resultado está en correspondencia con el período de vacaciones escolares.

2. La Ilustración 6 muestra el recorrido de la ruta Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- M. A. de Quevedo- División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Cerro del Agua-Circuito Escolar - Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Julio 31 de 2013, 6:31 am. Modo auto, bajo tránsito, buen estado del tiempo, vacaciones escolares.

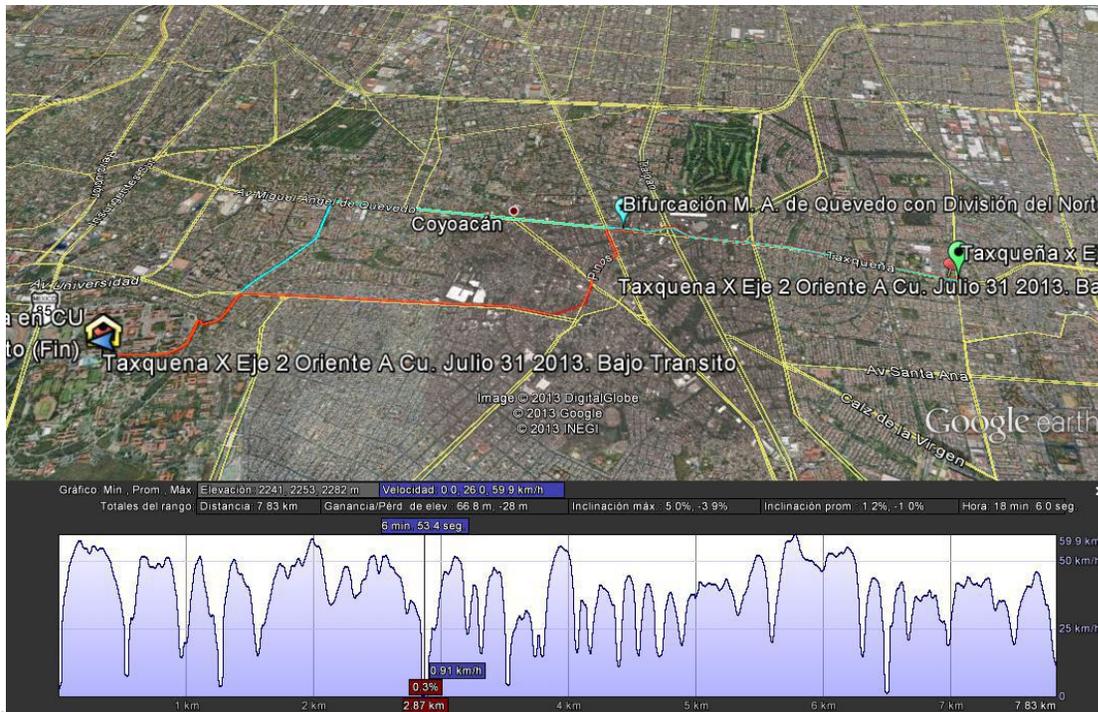


Ilustración 6. Recorrido y perfil de velocidad de la ruta Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Cerro del Agua-Circuito Escolar - Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Julio 31 de 2013, modo auto, bajo, tránsito, buen estado del tiempo, 6:31 am en Google Earth

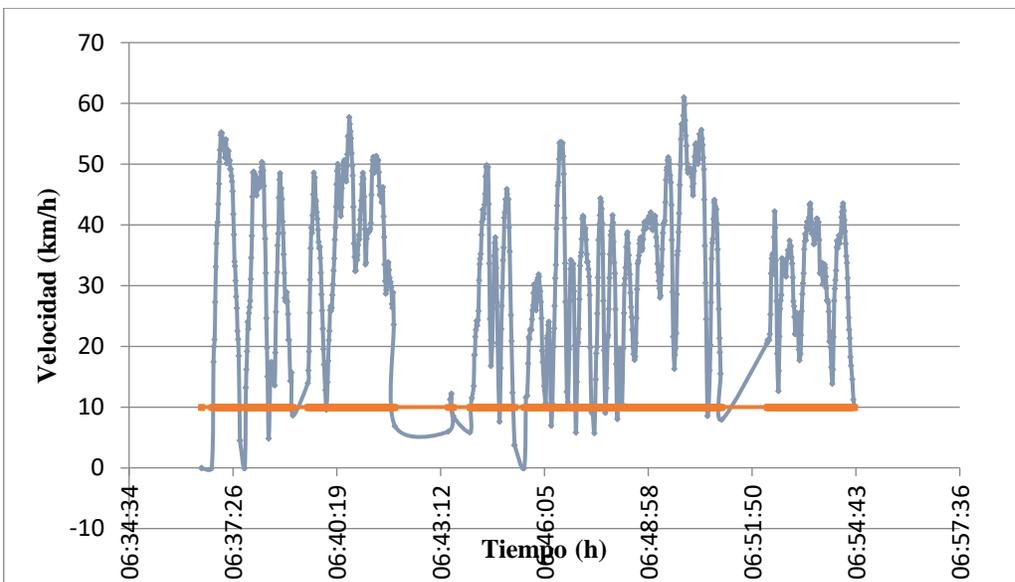
Estadísticas: Recorrido y perfil de velocidad de la ruta Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Cerro del Agua-Circuito Escolar - Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Datos originales tomados por My Tracks en Julio 31 de 2013, modo auto, bajo, tránsito, buen estado del tiempo, 6:36 am.

Creado por My Tracks en Android.

Nombre: Taxqueña X Eje 2 Oriente A Cu por Eje 10 Sur. Julio 31 2013. Bajo Transito	
Tipo de actividad: -	
Descripción: - Vacaciones escolares	
Distancia total: 7.84 km (4.9 mi).	Ritmo más rápido: 0.98 min/km (1.6 min/mi).
Tiempo total: 18:26.	Elevación máx.: 2272 m (7456 pies).
Tiempo en movimiento: 14:01.	Elevación mín.: 2221 m (7287 pies).
Velocidad promedio: 25.50 km/h (15.8 mi/h).	Altitud: 101 m (332 pies).
Velocidad promedio de movimiento: 33.56 km/h (20.9 mi/h).	Pendiente máx.: 8 %.
Velocidad máx.: 60.97 km/h (37.9 mi/h).	Pendiente mín.: -8 %.
Ritmo promedio: 2.35 min/km (3.8 min/mi).	Registrado: 31/07/2013 6:36 a.m
Ritmo promedio de movimiento: 1.79 min/km (2.9 min/mi)	

A partir de la tabla de coordenadas de la ruta tomados por el GPS, transferidos en archivo Excel, se construye la Gráfica 3 con el perfil de velocidades, la Gráfica 4 con el perfil de demoras, la Ilustración 7 con el mapa temático del ritmo de viaje y los siguientes indicadores de demora:

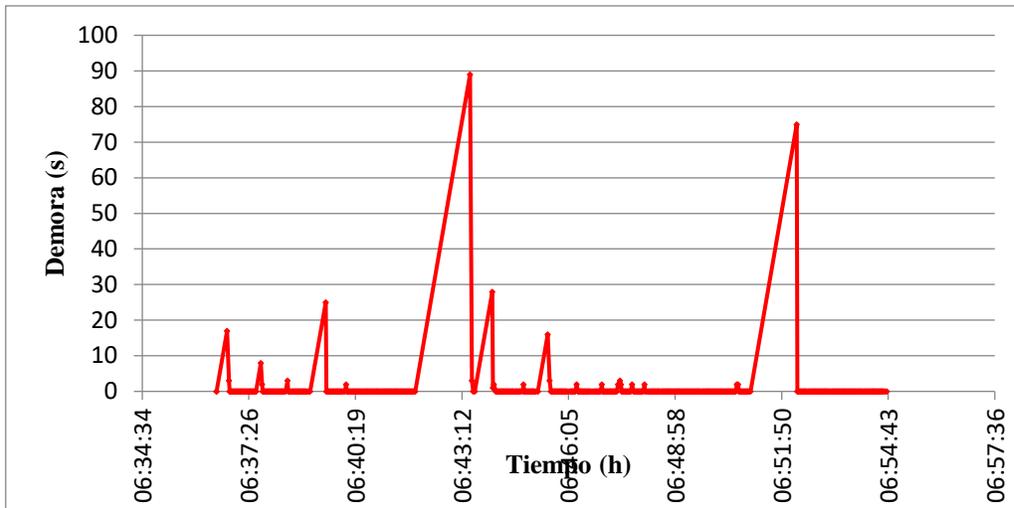
Demora total de viaje (v<10 km/h) [min]: 4.97	% del tiempo total de viaje con v<10 km/h: 27.41%
---	---



Gráfica 3. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua- Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

Modo auto. Bajo tránsito. Julio 31 2013, 6:36 a.m. GPS MyTracks. Elaboración propia.

Se mantiene la velocidad por encima de la media casi todo el tiempo de recorrido y cae a menos de 10 Km/h en cortos intervalos.



Gráfica 4. Perfil de demoras respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua- Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

Modo auto. Bajo tránsito. Julio 31 2013, 6:36 a.m. GPS MyTracks. Elaboración propia.

Se presentan demoras puntuales moderadas y en cortos intervalos de tiempo y poca amplitud.

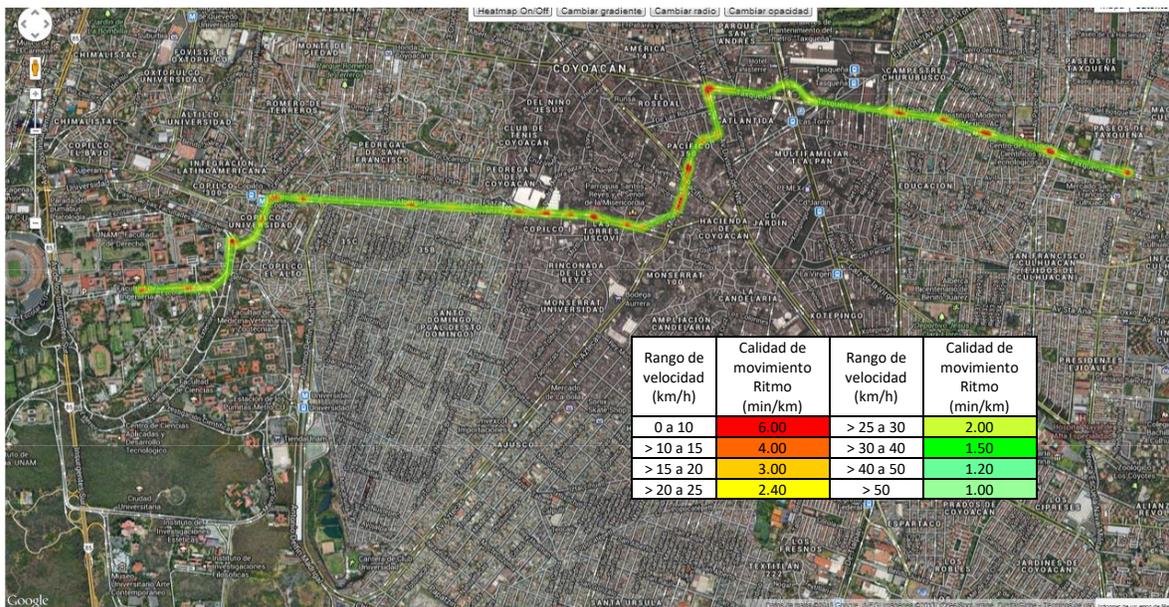


Ilustración 7. Mapa del ritmo en Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente- Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua- Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Julio 31 2013. Modo auto, bajo tránsito, buen estado del tiempo, 6:36 a.m. con GPS MyTracks; modificado de uno creado por Ing. Lino Wchima, en Versión 3 del API de JavaScript de Google Maps, con datos propios aplicados en un ejemplo tomado de <https://developers.google.com/maps/documentation/javascript/examples/layer-heatmap?hl=es>, consulta en línea julio 30 de 2013

La ruta ofrece buena velocidad en muchos de sus tramos, aunque está compuesta por vías semaforizadas. El tramo correspondiente al Eje 10 Sur tiene varios topes. Las demoras aparecen justamente en los mencionados dispositivos de control.

3. La Ilustración 8 muestra la ruta desde Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 22 de 2012 6:38 am. Inicio de temporada escolar, alta congestión, buen estado del tiempo, modo auto.

Estadísticas Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 22 de 2012 6:38 am. Inicio de temporada laboral y escolar, alta congestión, buen estado del tiempo, modo auto.

La información se extrajo del registro de un recorrido mayor, por lo tanto solo se calculan los correspondientes al tramo de interés. A partir de la tabla de coordenadas de la ruta tomados por el GPS, transferidos en archivo Excel, se construye la Gráfica 5 con el perfil de velocidades, la Gráfica 6 con el perfil de demoras, la Ilustración 9 con el mapa temático del ritmo de viaje y los siguientes indicadores de demora:

Distancia total: 6.43km	Tiempo de viaje [min]: 37.12	% del tiempo total de viaje con v<10 km/h: 56.2%
Velocidad promedio: 22.89 km/h	Demora total de viaje (v<10 km/h) [min]: 20.87	

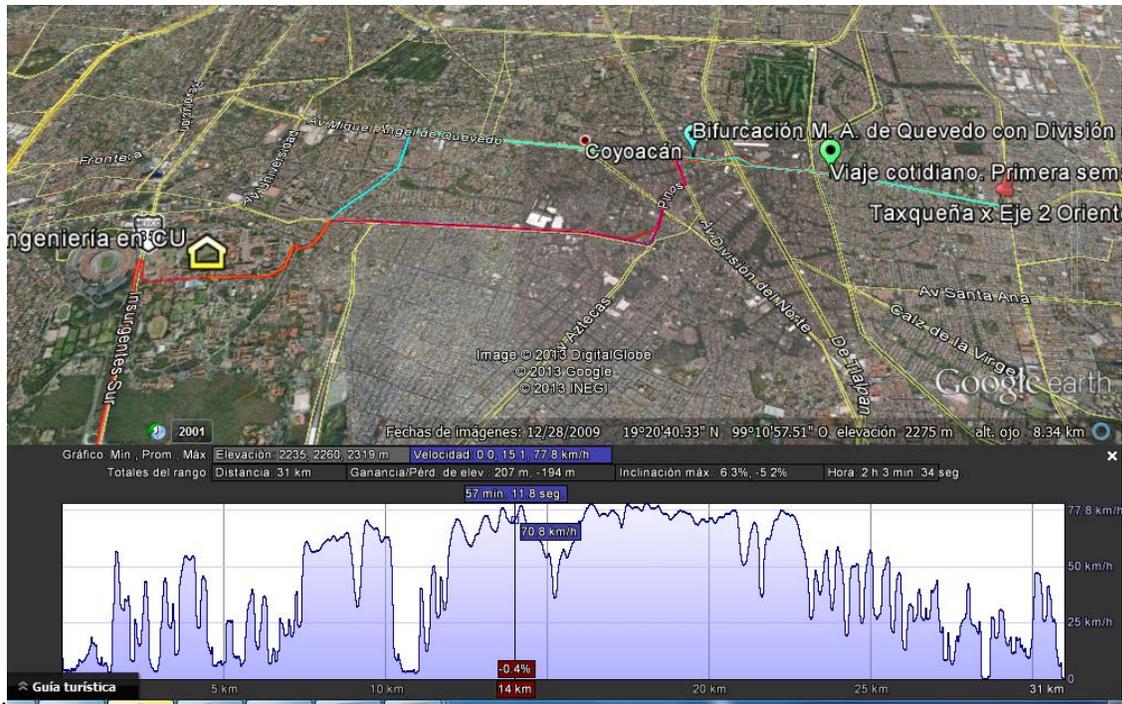
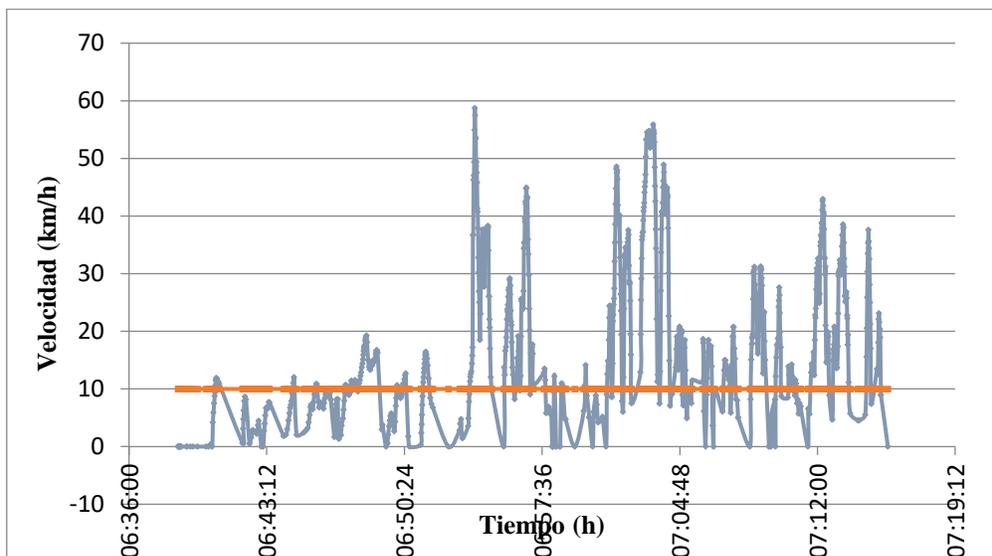


Ilustración 8. Recorrido Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

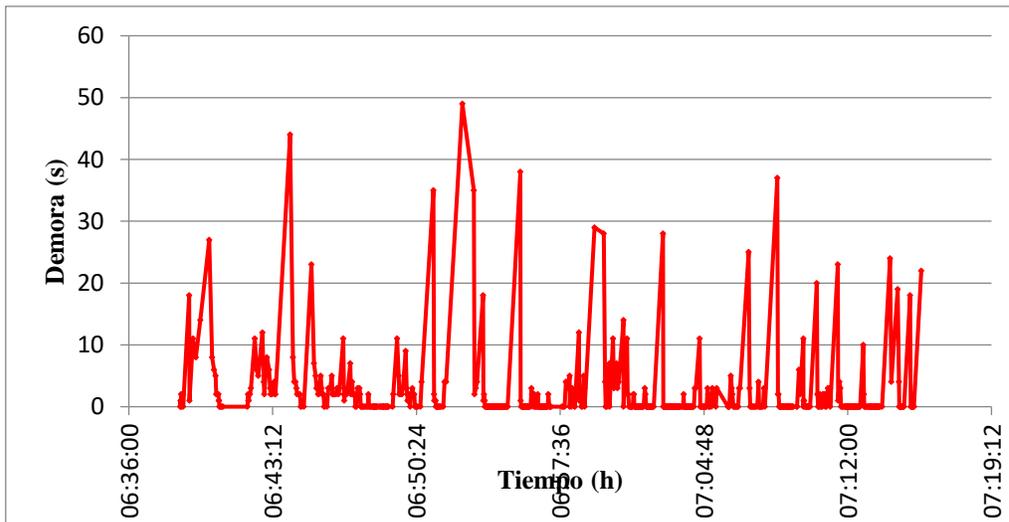
Elaboración propia con datos originales tomados en Agosto 22 de 2012, inicio de temporada laboral y escolar, alta congestión, buen estado del tiempo, 6:38 am, y mostrados en Google Earth



Gráfica 5. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 22 de 2012, 6:38. My Tracks. Elaboración propia.

El perfil de velocidad está debajo de 10 km/h en muchos intervalos de tiempo del recorrido.

Más de la mitad del tiempo de viaje la velocidad es menor a 10 km/h y se considera tiempo de demora.



Gráfica 6. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 22 de 2012 6:38 am. GPS My Tracks. Elaboración propia.

El perfil de demora se mantiene en todo el avance, lo que denota mal nivel de servicio del movimiento.

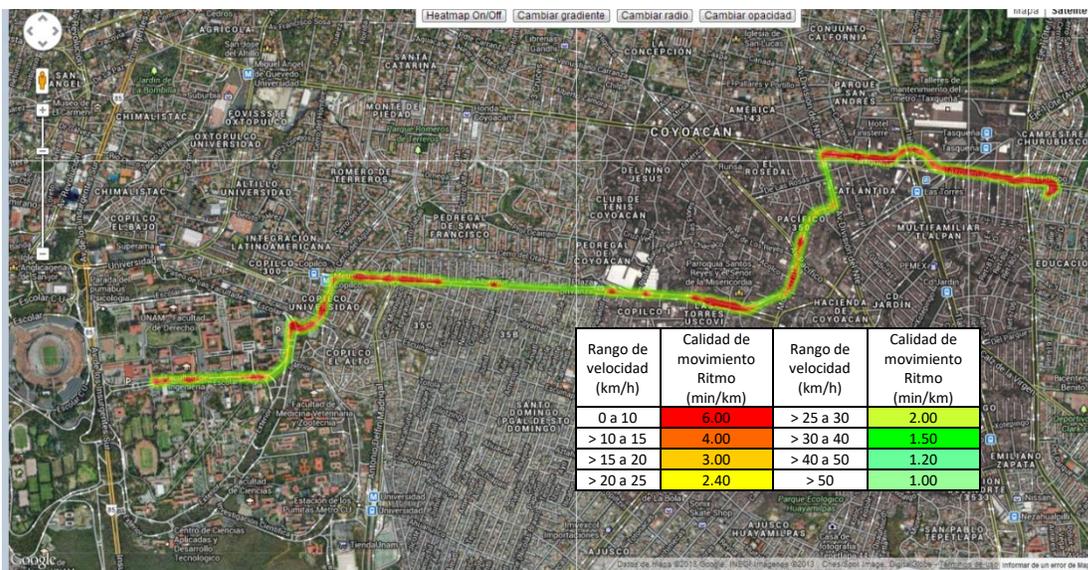


Ilustración 9. Mapa del ritmo en Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Agosto 22 de 2012, inicio de temporada laboral y escolar, alta congestión, buen estado del tiempo, 6:38 am, con GPS MyTracks; modificado de uno creado por Ing.

Lino Wchima, en Versión 3 del API de JavaScript de Google Maps, con datos propios aplicados en un ejemplo tomado de <https://developers.google.com/maps/documentation/javascript/examples/layer-heatmap?hl=es>, consulta en línea julio 30 de 2013

El mapa muestra los tramos de colas en longitud considerable, cortos tramos con velocidad moderada, embotellamientos en semáforos y accesos a escuelas que afectan la movilidad. El recorrido se da en bajo nivel de servicio.

4. La Ilustración 9 muestra la ruta de Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 27 de 2012 6:35 am. Segunda semana de temporada escolar, alta congestión, buen estado del tiempo, modo auto.

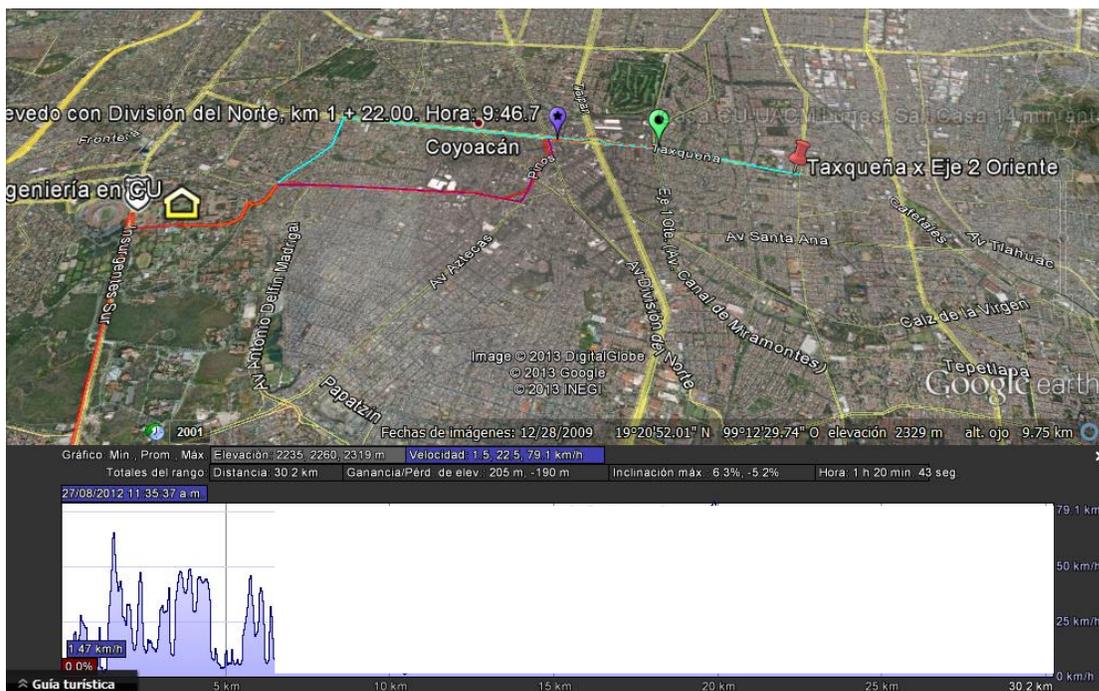


Ilustración 10. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

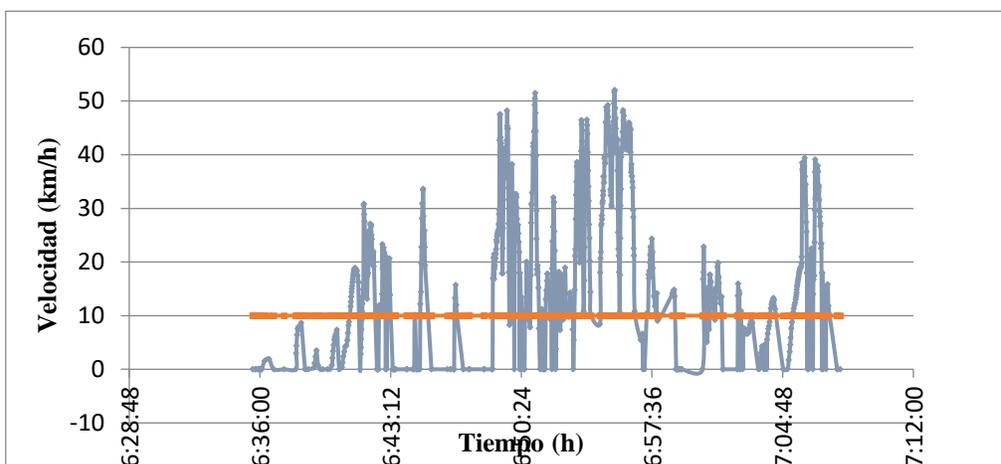
Elaboración propia con datos originales tomados en Agosto 27 de 2012, modo auto, temporada de actividad escolar y laboral, alta congestión, buen estado del tiempo, 6:35 a.m. con GPS My Tracks y mostrados en Google Earth.

Estadísticas del recorrido Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 27 de 2012 6:35 am. Tomados con GPS My Tracks.

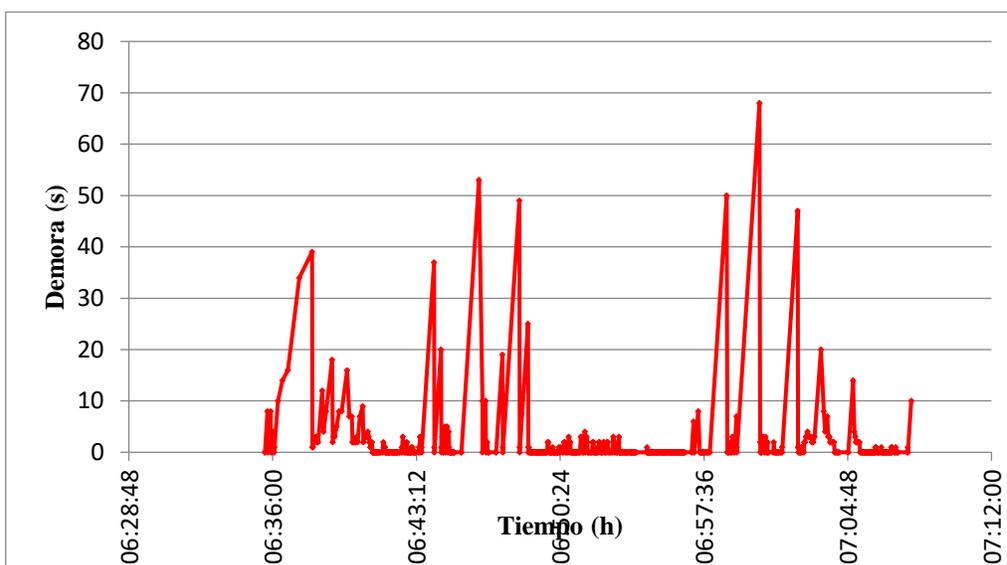
Como en la medición anterior, la información se extrae del registro de un recorrido mayor, por lo tanto solo se calculan los correspondientes al tramo de interés. A partir de la tabla de coordenadas de la ruta tomados por el GPS, transferidos en archivo Excel, se construye la Gráfica 7 con el perfil de velocidades, la Gráfica 8 con el

perfil de demoras, la Ilustración 11 con el mapa temático del ritmo de viaje y los siguientes indicadores de demora:

Distancia total: 6.26 km	Tiempo de viaje [min]: 32.37	% del tiempo total de viaje con v<10 km/h: 53.4%
Velocidad promedio: 11.60 km/h	Demora total de viaje (v<10 km/h) [min]: 17.28	



Gráfica 7. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 27 de 2012 6:35 am. GPS My Tracks. Elaboración propia.



Gráfica 8. Perfil de demoras respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 27 de 2012 6:35 am. GPS My Tracks. Elaboración propia.

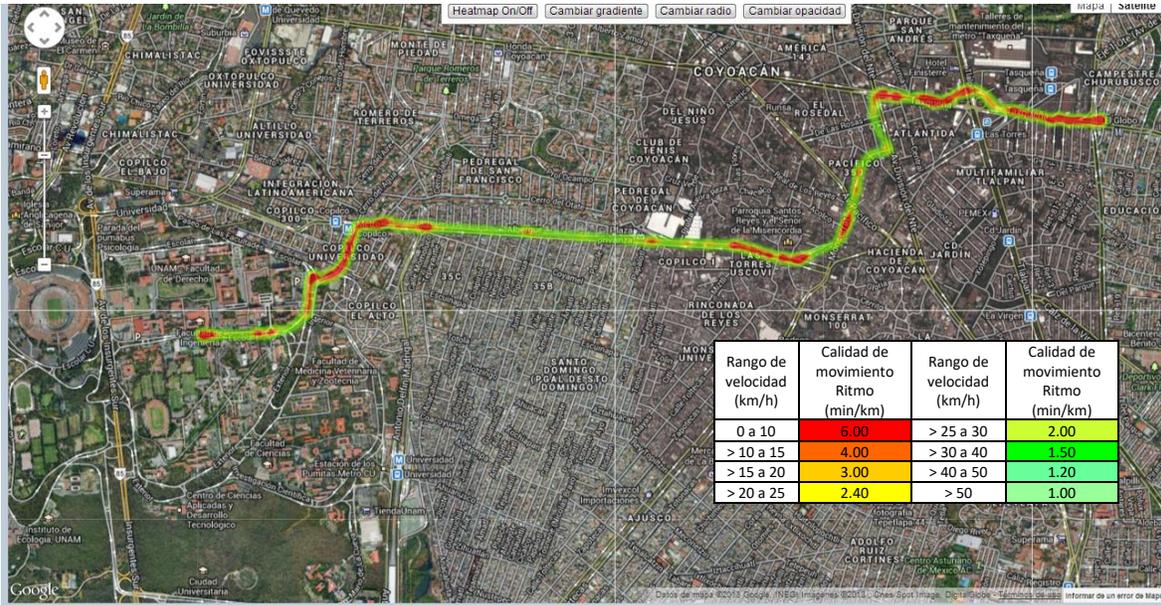


Ilustración 11. Mapa del ritmo en Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Agosto 27 de 2012, modo auto, temporada de actividad escolar y laboral, alta congestión, buen estado del tiempo, 6:35 a.m. con GPS My Tracks; modificado de uno creado por Ing. Lino Wchima, en Versión 3 del API de JavaScript de Google Maps, con datos propios aplicados en un ejemplo tomado de <https://developers.google.com/maps/documentation/javascript/examples/layer-heatmap?hl=es>, consulta en línea julio 30 de 2013

El perfil de velocidad es frecuente por debajo de 10 km/h, con mínimos intervalos de velocidad hasta de 50 km/h.

El perfil de demora es frecuente en intervalos largos del recorrido

El recorrido presenta colas largas en tres sitios: el tramo de Taxqueña entre Canal de Miramontes y División del Norte; el tramo en Eje 10 Sur con Torre, cerca de la Universidad Latina; y tramo de Eje 10 Sur entre Delfin Madrigal-Cerro del Agua-Circuito Escolar.

Esta situación es recurrente en todo el período escolar. La ruta de lunes a viernes en la hora pico de la mañana ofrece bajo nivel de servicio.

5. La Ilustración 12 muestra la ruta de Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 5 de 2013 6:40 am. Inicio de temporada escolar en la UNAM, Ciudad Universitaria.

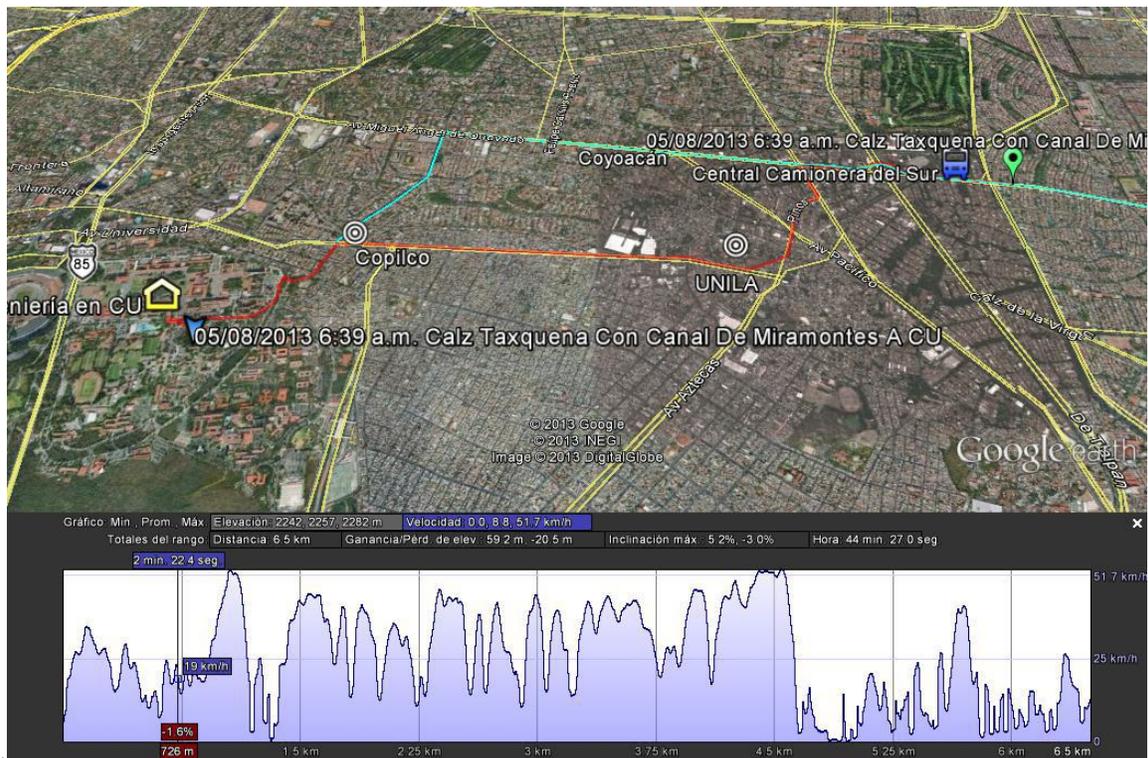


Ilustración 12. Recorrido y perfil de velocidad de la ruta Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Agosto 5 de 2013, modo auto, inicio de clases en la UNAM, alta congestión, buen estado del tiempo, 6:40 a.m. con GPS My Tracks y mostrados en Google Earth

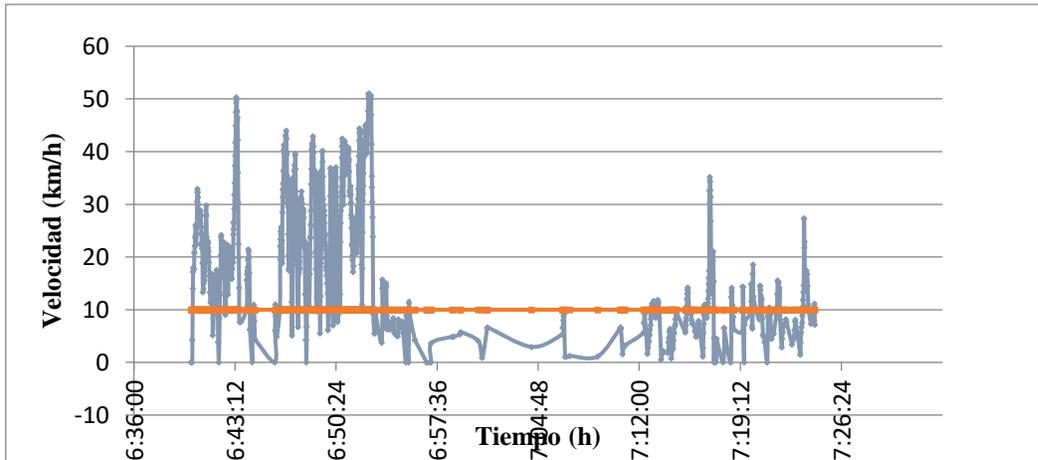
Estadísticas del recorrido calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU. Agosto 5 de 2013 6:40 am

Creado por My Tracks en Android.

Nombre: 05/08/2013 6:39 a.m. Calz Taxquena Con Canal De Miramontes A CU	
Tipo de actividad: Primer día de clases en Unam CU.	
Descripción: Recorrido con transito bajo, excepto en Eje 10 Sur con Cerro del Agua.	
Distancia total: 6.53 km (4.1 mi).	Ritmo más rápido: 1.18 min/km (1.9 min/mi).
Tiempo total: 44:58.	Elevación máx.: 2286 m (7500 pies).
Tiempo en movimiento: 20:59.	Elevación mín.: 2234 m (7331 pies).
Velocidad promedio: 8.72 km/h (5.4 mi/h).	Altitud: 256 m (840 pies).
Velocidad promedio de movimiento: 18.68 km/h (11.6 mi/h).	Pendiente máx.: 7 %.
Velocidad máx.: 51.06 km/h (31.7 mi/h).	Pendiente mín.: -7 %.
Ritmo promedio: 6.88 min/km (11.1 min/mi).	Registrado: 05/08/2013 6:39 a.m.
Ritmo promedio de movimiento: 3.21 min/km (5.2 min/mi).	

A partir de la tabla de coordenadas de la ruta tomados por el GPS, transferidos en archivo Excel, se construye la Gráfica 9 con el perfil de velocidades, la Gráfica 10 con el perfil de demoras, la Ilustración 13 con el mapa temático del ritmo de viaje y los siguientes indicadores de demora:

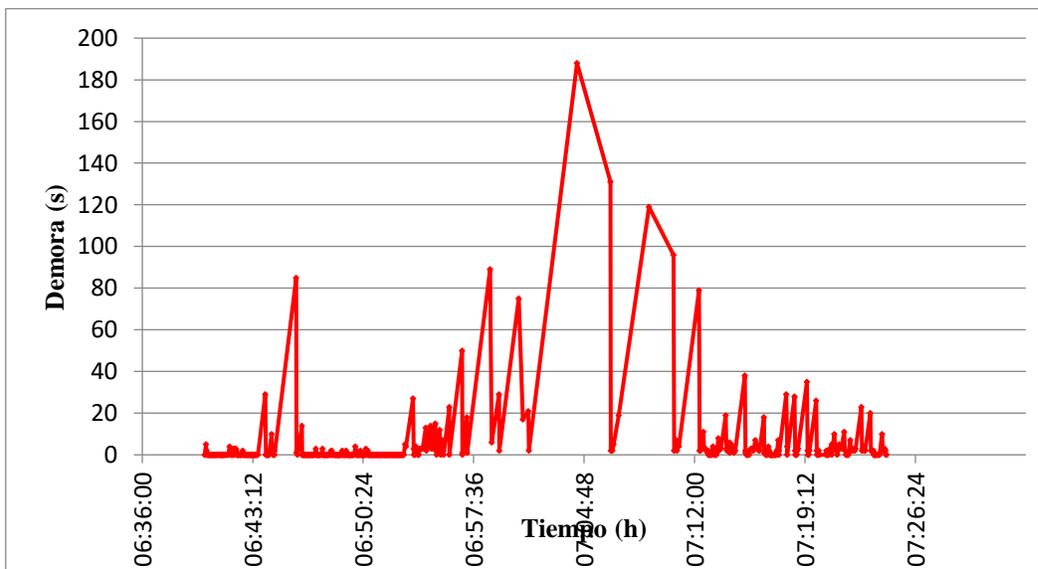
Demora total de viaje (v<10 km/h) [min]: 31.98	Proporción de viaje con demora (v<10 km/h): 71.95%
--	--



Gráfica 9. Perfil de velocidad respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Eje 10 sur-Edf. Principal de Ingeniería en CU. Agosto 5 2013, 6:40 a.m.

Modo auto. GPS MyTracks. Elaboración propia.

El perfil de velocidad en la primera parte del recorrido tiene frecuencia relativamente alta, sin embargo 72% del viaje, la velocidad es menor a 10 km/h.



Gráfica 10. Perfil de demoras respecto del tiempo de avance. Calzada Taxqueña Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Eje 10 sur-Edf. Principal de Ingeniería en CU. Agosto 5 2013, 6:40 a.m. Modo auto. GPS MyTracks. Elaboración propia

El perfil de demora revela altas demoras en intervalos grandes de tiempo, lo que representa baja calidad de movimiento.

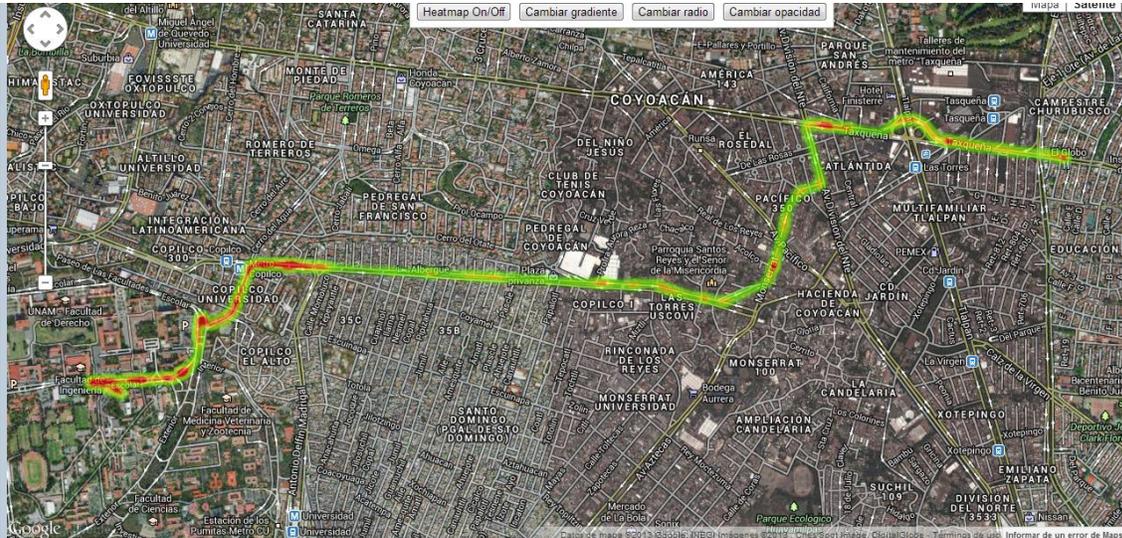


Ilustración 13. Mapa del ritmo Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10 Sur-Copilco-Cerro del Agua-Edificio Principal de la Facultad de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Agosto 5 de 2013, modo auto, inicio de clases en la UNAM, alta congestión en el acceso a CU, buen estado del tiempo, 6:40 a.m. con GPS My Tracks; modificado de uno creado por Ing. Lino Wchima, en [Versión 3 del API de JavaScript de Google Maps](https://developers.google.com/maps/documentation/javascript/examples/layer-heatmap?hl=es), con datos propios aplicados en un ejemplo tomado de <https://developers.google.com/maps/documentation/javascript/examples/layer-heatmap?hl=es>, consulta en línea agosto 5 de 2013.

El recorrido se realizó el día de inicio de clases en la UNAM, cuando aún no ingresan los escolares de la educación básica. La mayor parte del viaje el tránsito era bajo. Solo se presenta alta congestión en el acceso a CU. Esta situación se repite cada año, ya que hay viajeros de nuevo ingreso no familiarizados con la ruta.

El mapa revela la buena movilidad ofrecida desde el origen hasta el Eje 10 Sur con Delfín Madrigal. Se presenta una altísima demora a partir de este último punto hasta el destino final, a pesar de la ayuda de banderilleros que agilizaban el tránsito en el ingreso por Cerro del Agua.

Es interesante poder capturar la relación tiempo con tamaño de colas mediante el mapa de calor.

6. La Ilustración 14 muestra la ruta de Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU. Agosto 6 de 2013, 6:34 a.m. Modo auto. Bajo tránsito.

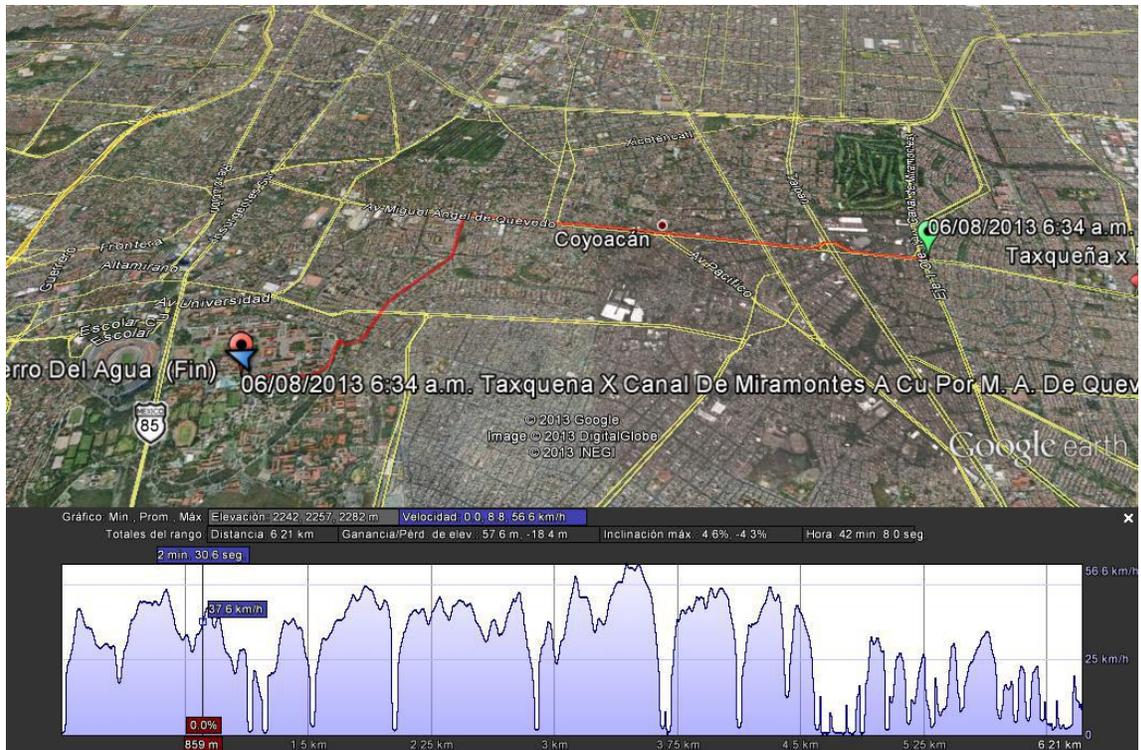


Ilustración 14. Recorrido y perfil de velocidad de la ruta Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU. Agosto 6 de 2013, 6:34 a.m. Modo auto. Bajo tránsito. Elaboración propia con datos originales tomados en Agosto 6 de 2013, modo auto, segundo día del período de inicio de clases en la UNAM, buen estado del tiempo, 6:34 a.m. con GPS My Tracks y mostrados en Google Earth.

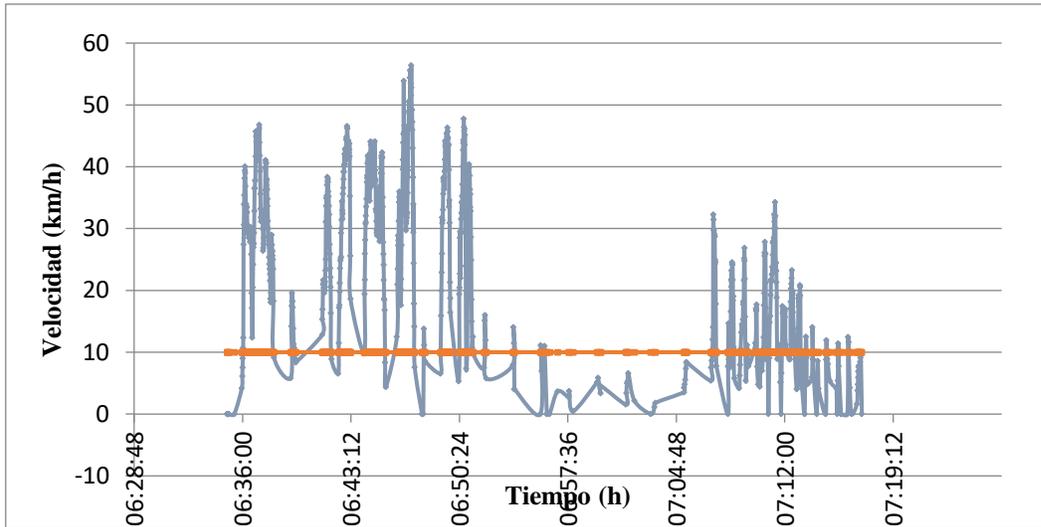
Estadísticas del recorrido Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU. Agosto 6 de 2013, 6:34 a.m. Modo auto. Bajo tránsito.

Creado por My Tracks en Android.

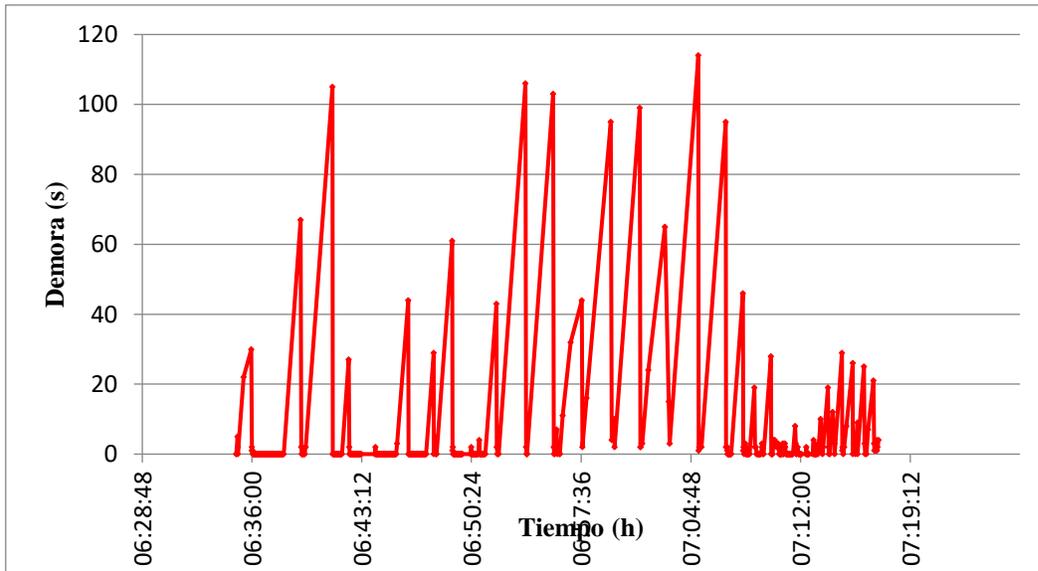
Nombre: 06/08/2013 6:34 a.m. Taxqueña X Canal De Miramontes A Cu Por M. A. De Quevedo Y Cerro Del Agua	
Tipo de actividad: Recorrido en segundo día inicio de clases. Bajo tránsito.	
Descripción: Alta congestión al acceso a la Unam. Banderilleros agilizan el tránsito en el acceso por Cerro del Agua. Buen estado del tiempo	
Distancia total: 6.25 km (3.9 mi).	Ritmo más rápido: 1.06 min/km (1.7 min/mi).
Tiempo total: 42:19.	Elevación máx.: 2278 m (7473 pies).
Tiempo en movimiento: 15:57.	Elevación mín.: 2232 m (7323 pies).
Velocidad promedio: 8.86 km/h (5.5 mi/h).	Altitud: 200 m (657 pies).
Velocidad promedio de movimiento: 23.50 km/h (14.6 mi/h).	Pendiente máx.: 6 %.
Velocidad máx.: 56.41 km/h (35.1 mi/h).	Pendiente mín.: -6 %.
Ritmo promedio: 6.77 min/km (10.9 min/mi).	Registrado: 06/08/2013 6:34 a.m.
Ritmo promedio de movimiento: 2.55 min/km (4.1 min/mi).	

A partir de la tabla de coordenadas de la ruta tomados por el GPS, transferidos en archivo Excel, se construye la Gráfica 11 con el perfil de velocidades, la Gráfica 12 con el perfil de demoras, la Ilustración 15 con el mapa temático del ritmo de viaje y los siguientes indicadores de demora:

Demora total de viaje ($v < 10$ km/h) [min]: 29.22	Proporción de tiempo de viaje en demora ($v < 10$ km/h): 69.32%
---	--



Gráfica 11. Perfil de velocidad Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU. Agosto 6 2013, 6:34 a.m. Modo auto. GPS MyTracks. Elaboración propia



Gráfica 12. Perfil de demoras. Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU. Agosto 6 2013, 6:34 a.m. Modo auto. GPS MyTracks. Elaboración propia.

El perfil de velocidad muestra frecuencias relativamente altas en los primeros 15 minutos de viaje. Luego un intervalo amplio con velocidad de menos de 10 km/h. En la última parte del viaje se aumenta un poco el movimiento pero con velocidades bajas. El perfil de velocidad muestra demoras sostenidas y regulares por la presencia de semáforos, los cuales tienen una demora fija. El tramo de Cerro del Agua antes de cruzar Eje 10 Sur presenta demoras altas en intervalos frecuentes, por la regulación con semáforos y topes. Además, se forma una cola lenta por la convergencia de flujos que ingresan por vías locales, muchos de ellos desviados para adelantarse a la cabeza de la fila, ocasionando mayores interacciones entre los vehículos y por lo tanto mayor demora. Esto da como resultado un 70% del viaje en demora.

Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU. Agosto 6 de 2013, 6:34 a.m. Modo auto. Bajo tránsito.

El mapa hace una precisa recreación de la movilidad en la ruta. Las filas por Cerro del Agua antes y después del Eje 10 Sur son muy lentas por el desorden en la integración de los flujos, no se respeta el derecho de paso, se obstruyen los cruces viales, sumado a la falta de fluidez en el Circuito Escolar al interior de la UNAM.

La movilidad en el acceso a CU es pobre y desencadena problemas graves de seguridad, congestión, contaminación, cansancio y frustración. A pesar de la ayuda de banderilleros dentro de la UNAM, el tránsito se torna muy lento y se producen demoras altas.

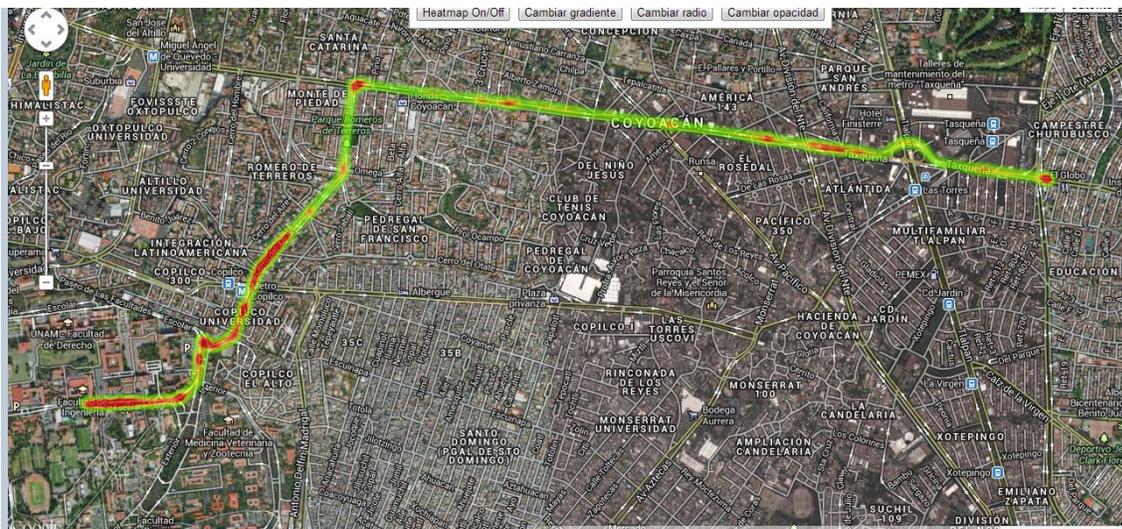


Ilustración 15. Mapa del ritmo en Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edificio Principal de Ingeniería en CU.

Elaboración propia con datos originales tomados en Agosto 6 de 2013, modo auto, segundo día de inicio de clases en la UNAM, alta congestión en el acceso a CU, buen estado del tiempo, 6:34 a.m. con GPS My Tracks; modificado de uno creado por Ing. Lino Wchima, en Versión 3 del API de JavaScript de Google Maps, con datos propios aplicados en un ejemplo tomado de <https://developers.google.com/maps/documentation/javascript/examples/layer-heatmap?hl=es>, consulta en línea agosto 6 de 2013.

El mapa permite registrar el tamaño de la fila en los sitios de demora de acuerdo con la hora de viaje.

Análisis comparativo de las rutas aforadas

A continuación, se presenta el Cuadro 8 con un resumen comparativo de resultados de los seis aforos con el fin de analizar los cambios de las alternativas de ruta en función del tiempo, con varios enfoques:

- Cambios en períodos de actividad normal escolar y laboral, vacaciones escolares de verano y eventual, ésta última en el caso del inicio de clases en CU.
- Nivel de movilidad en términos del indicador ritmo en dos alternativas equiparables.
- Localización de embotellamientos, colas, afectaciones y longitud de filas.
- Demoras en reguladores de velocidad y control semáforizado.

El cuadro muestra el criterio equiparable de las rutas descritas en los apartes 1 y 2, 3 y 4, 5 y 6, antes, en términos de longitud, tiempo de viaje y velocidad media de recorrido. Es por ello que los indicadores de demora, proporción de viaje en demora permiten contrastar su eficiencia. Así mismo, la variación del indicador ritmo en el espacio y el tiempo se convierte en una medida de efectividad del sistema vial en la zona de estudio.

Cuadro 8. Resumen de resultados de movilidad entre rutas equiparables, con origen en la Central Camionera del Sur y Ciudad Universitaria.
Elaboración propia a partir del registro de datos con GPS-My Tracks.

Rutas	Itinerario	Modo	Longitud (km)	Tiempo de viaje (min)	Velocidad promedio (km/h)	Demora [min] (v<10 km/h)	Proporcion de viaje en demora	Hora	Fecha	Tránsito	Clima
1	1. Calz. Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-Cerro del Agua-Edificio principal de la Facultad de Ingeniería,	Auto	7.68	19.72	22.89	7.77	39.39%	06:35:00 a.m.	30/07/2013	Bajo	Bueno
2	2. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10-Copilco-Cerro del Agua-Edificio de la Facultad de Ingeniería	Auto	7.84	18.12	25.50	4.97	27.41%	06:36:00 a.m.	31/07/2013	Bajo	Bueno
3	3. Calz. Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10-Copilco-Cerro del Agua-Edificio principal de la Facultad de Ingeniería, modo auto, tercer	Auto	6.43	37.12	10.39	20.87	56.22%	06:38:00 a.m.	22/08/2012	Congestionado	Bueno
4	4. Calz. Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10-Copilco-Cerro del Agua-Edificio principal de la Facultad de Ingeniería, modo auto, período	Auto	6.26	32.37	11.60	17.28	53.40%	06:35:00 a.m.	27/08/2012	Congestionado	Bueno
5	5. Calzada Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-División del Norte-Pinos-Monserrat-Eje 10-Copilco-Cerro del Agua-Edificio de la Facultad de Ingeniería CU, modo auto, día de inicio de clases en	Auto	6.53	44.45	8.72	31.98	71.95%	06:39:00 a.m.	05/08/2013	Bajo tránsito pero en el acceso por Cerro del Agua a la UNAM congestionado	Bueno
6	6. Calz. Taxqueña x Eje 2 Oriente-Calzada Taxqueña-M. A. de Quevedo-Cerro del Agua-Edificio principal de la Facultad de Ingeniería, modo auto, segundo día de clases en Ciudad	Auto	6.25	42.15	8.86	29.22	69.32%	06:35:00 a.m.	06/08/2013	Bajo tránsito pero en el acceso por Cerro del Agua a la UNAM	Bueno

Los mapas de la Ilustración 16 muestran el detalle de la movilidad, mediante el indicador ritmo de viaje, en el acceso por Cerro del Agua en CU en diferentes períodos del año.

Se puede hacer diversos análisis, sin embargo, la intención es demostrar la potencialidad del recurso gráfico con el indicador ritmo de viaje.

Se destacan las siguientes observaciones particulares:

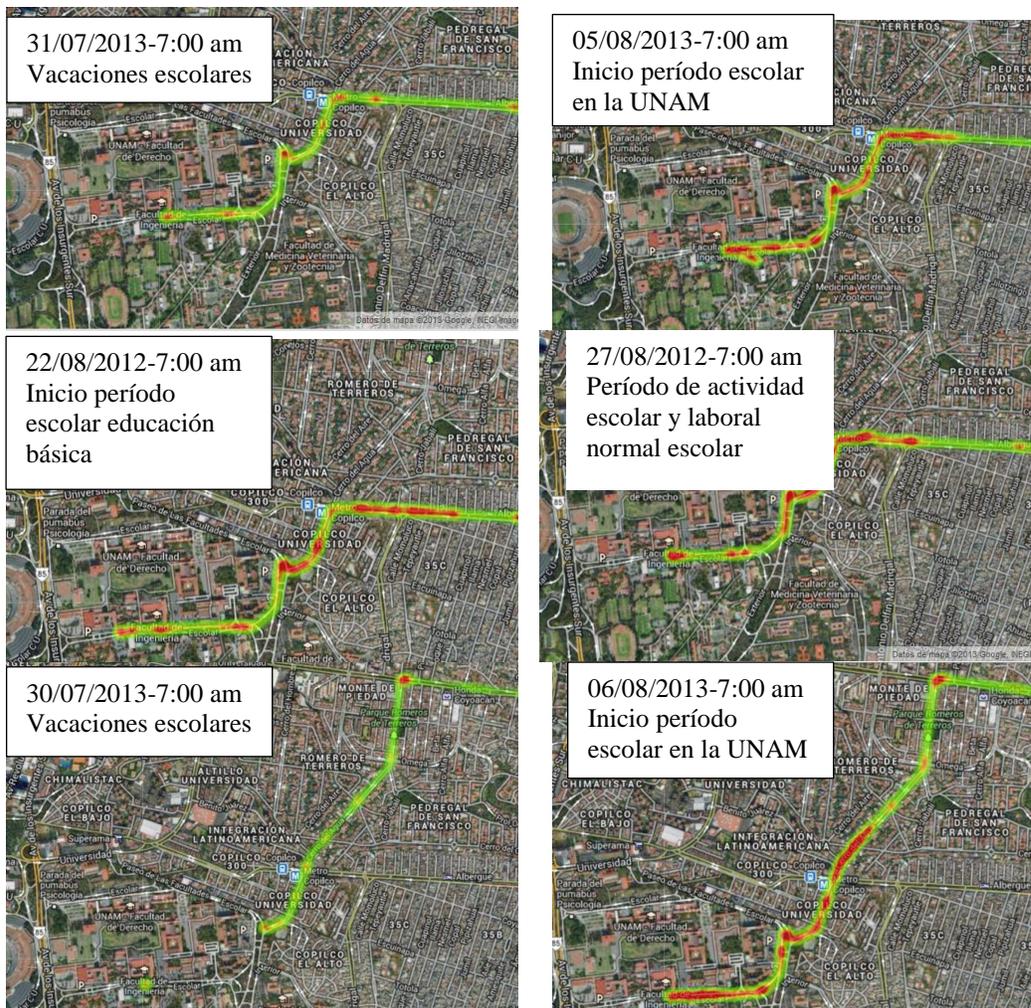
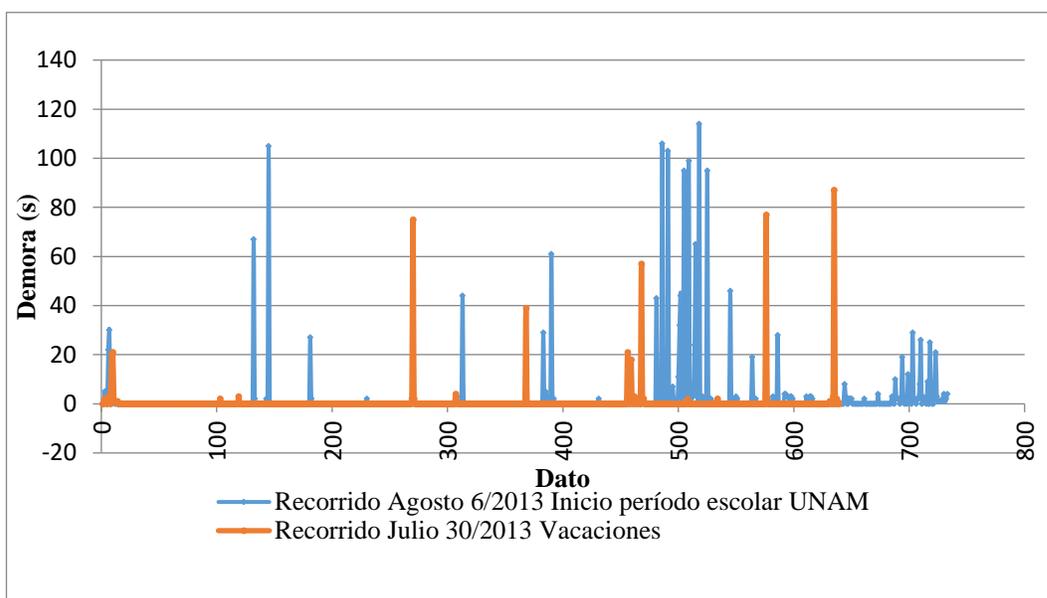


Ilustración 16. Detalle de formación de colas mediante el indicador temporal de ritmo (min/km) en varios recorridos de la Central Camionera del Sur en Taxqueña a Ciudad Universitaria, en el acceso por Cerro del Agua a Ciudad Universitaria.

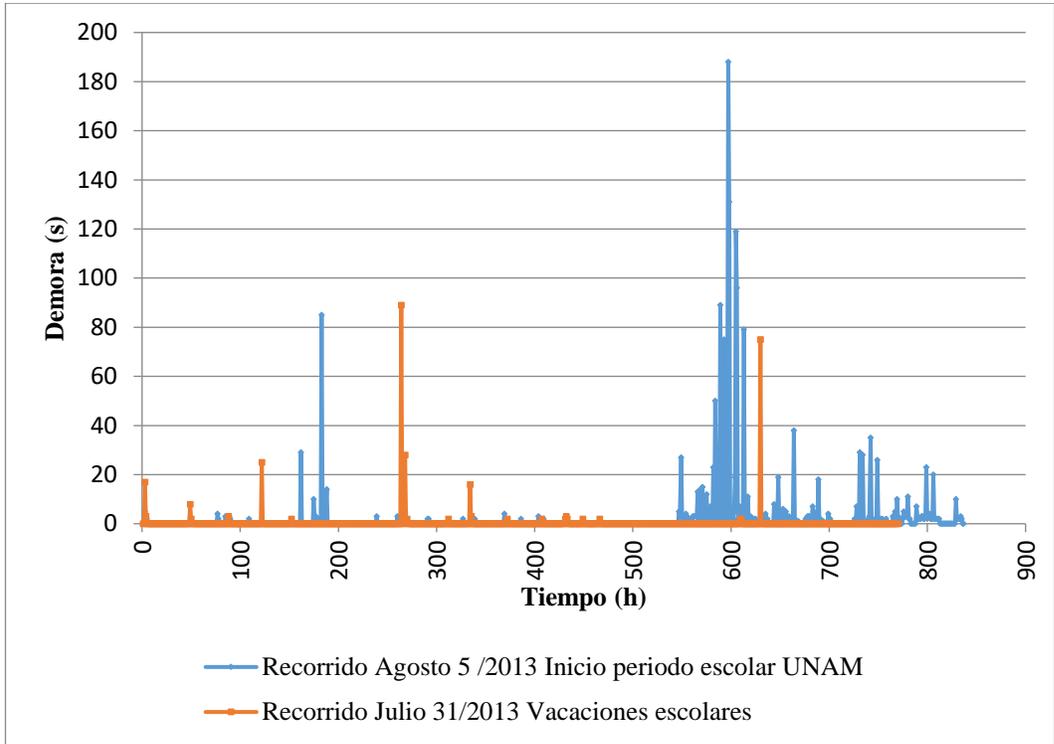
Elaboración propia

- La movilidad en la hora pico de la mañana en cercanías al acceso por Cerro del Agua presenta graves demoras, alta congestión, alto riesgo de accidentes, etc.
- Los conductores, personal académico y estudiantes padecen frustración, cansancio e incomodidad con efectos nocivos para su rendimiento escolar.
- Es un sitio de altos niveles de emisión de partículas, gases contaminantes y consumo de combustibles.
- La comunidad que ingresa a pie o bicicleta, está expuesta en un largo recorrido, dada la congestión y longitud de filas, al ruido, la inhalación de gases tóxicos y partículas finas, entre otras consecuencias de la contaminación. Además, compite por el espacio de circulación, sujeto a alto riesgo de ser atropellado, en una lucha desigual.
- En el inicio de clases, el 5 y 6 de agosto de 2013, en la hora pico de la mañana, la UNAM realizó un operativo para agilizar el tránsito con banderilleros, no obstante, persisten las colas lentas en el Circuito Escolar.

A continuación, se presentan la Gráfica 13 y la Gráfica 14 de frecuencia comparativos del cálculo de la demora para cada ruta en dos períodos extremos: el evento de inicio de clases en Ciudad Universitaria y el período de vacaciones escolares de verano. El eje de las abscisas corresponde a la diferencia de registro de cada registro y se distingue por número de dato. Dichos datos están relacionados con la hora, sin embargo, como los viajes tienen diferentes horarios, interesa mostrar la diferencia del perfil de demora de una misma ruta, en cada período, con el fin de contrastar dos situaciones extremas. Esto permite conocer las potencialidades y limitaciones de la ruta.

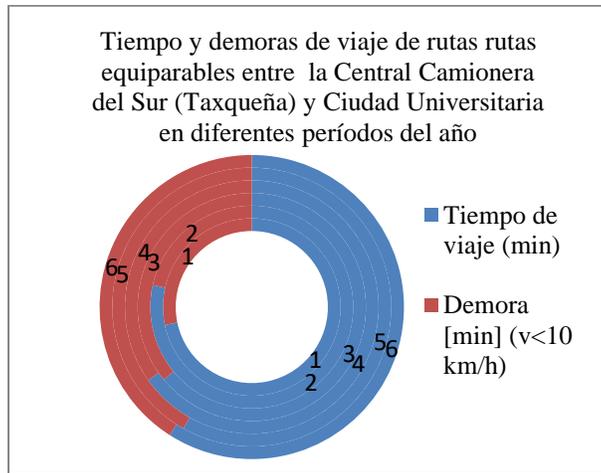


Gráfica 13. Perfil de datos de demora de dos recorridos en la ruta Calzada Taxqueña x Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- Cerro del Agua- Edf. Principal de Ingeniería en CU, en vacaciones escolares de verano y el inicio de clases en la UNAM.
Elaboración propia a partir de registros GPS con My Tracks.

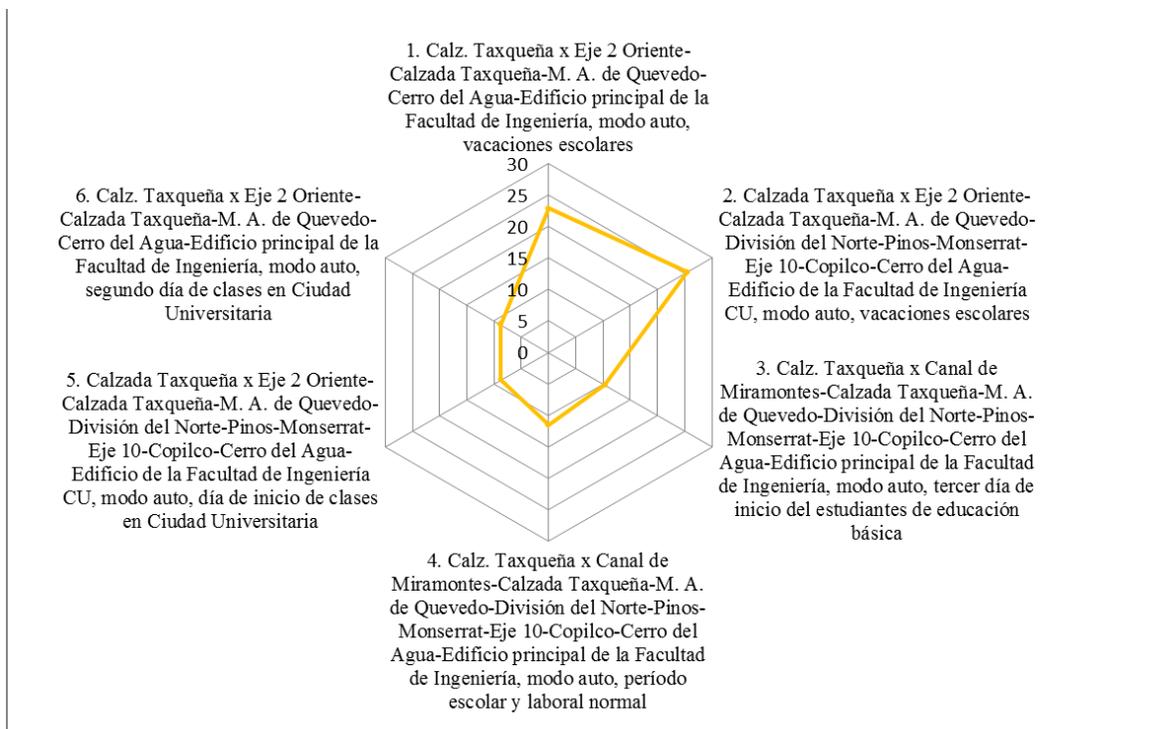


Gráfica 14. Perfil de datos de demora de dos recorridos en la ruta Calzada Taxqueña Canal de Miramontes-Calzada Taxqueña- M. A. de Quevedo- División del Norte-Eje 10 sur-Copilco-Cerro del Agua-Edf. Principal de Ingeniería en CU, en vacaciones escolares de verano y el inicio de clases en la UNAM. Elaboración propia a partir de registros GPS con My Tracks.

La Gráfica 15 hace un contraste entre tiempo de viaje y demora de los seis recorridos aforados (ver consecutivo de rutas en el Cuadro 8).



Gráfica 15. Gráfica de tiempo y demora de viaje de rutas entre la Central Camionera Sur (Taxqueña) y Ciudad Universitaria, en diferentes períodos del año. Elaboración propia a partir de registros GPS con My Tracks

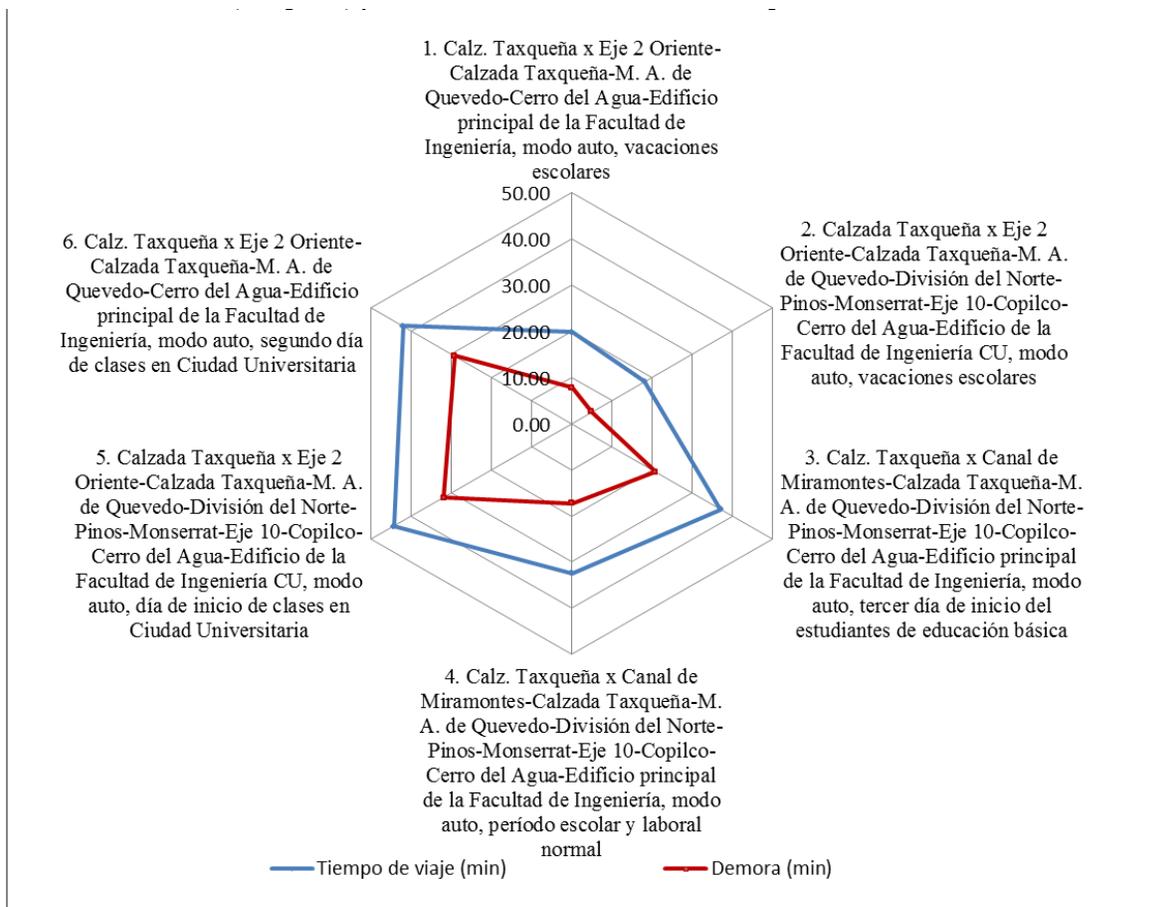


Gráfica 16. Velocidad media de recorrido de rutas equiparables entre la Central Camionera del Sur (Taxqueña) y Ciudad Universitaria en diferentes períodos del año (km/h).
Elaboración propia a partir de registros GPS con My Tracks.

La velocidad media de recorrido es un indicador de movilidad sensible para el usuario, usado en los estudios de emisión de partículas, gases contaminantes, ruido, etc. Para el caso de estudio se presenta en la Gráfica 16.

Obsérvese los puntos en la Gráfica 16 del recorrido 1 y 2, dos rutas diferentes que unen un mismo origen y destino, en el mismo período de actividad, vacaciones escolares, bajo tránsito, ambas ofrecen una velocidad media muy cercana, aproximadamente 25 km/h. Así mismo, la velocidad media de los recorridos 5 y 6 realizada al inicio de clases en Ciudad Universitaria, con alta congestión en cercanías del acceso por Cerro del Agua-Copilco, y el resto del viaje con bajo tránsito; sendas rutas registran una velocidad media similar, cercana a los 8.8 km/h. Este resultado valida su comparación en términos de comportamiento, competencia y movilidad, conforme al primer principio de Wardrop (1952) o la teoría de comportamiento de equilibrio en la selección ruta óptima para el usuario.

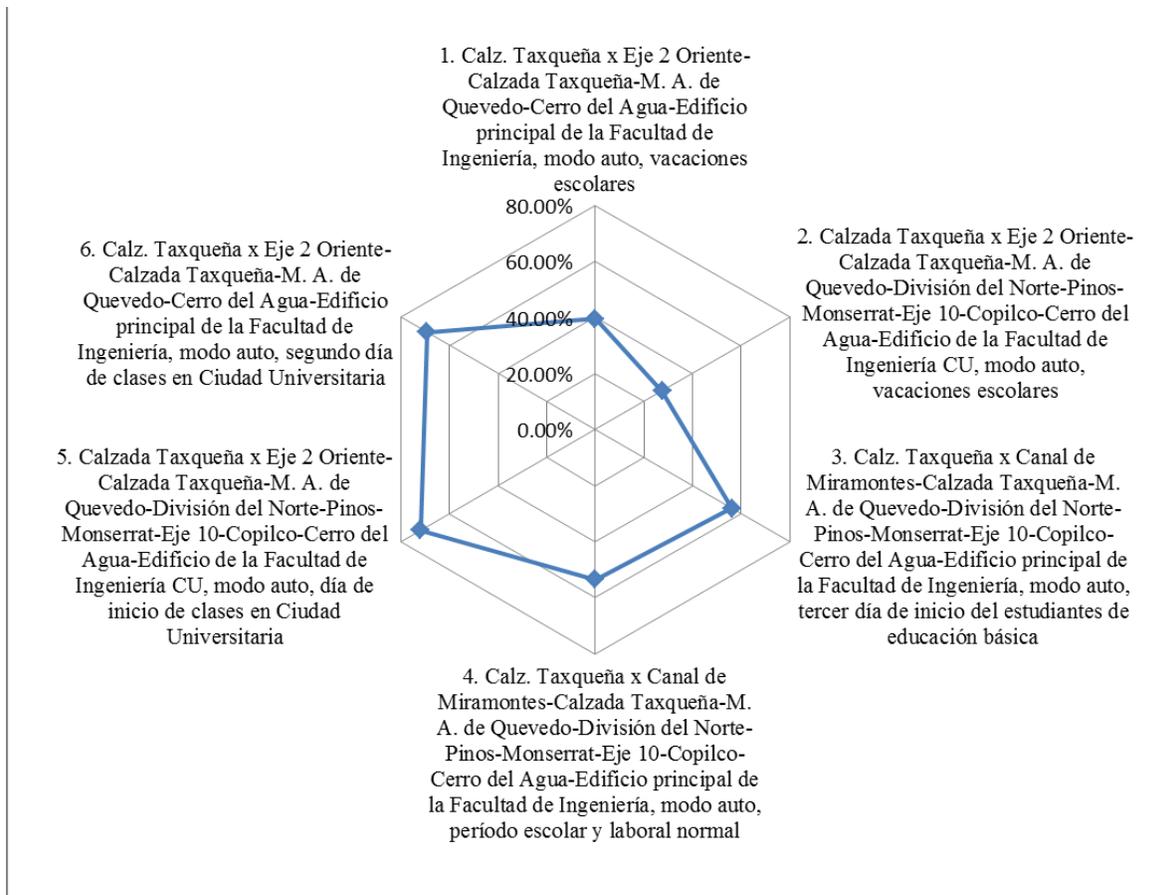
Los recorridos 3 y 4 se realizan en la misma ruta en dos situaciones de contraste. La primera en un evento extremo como el tercer día de inicio de clases de todos los escolares incluidos los de la educación básica y los trabajadores en su actividad laboral normal, fin de vacaciones de verano. El segundo se toma posteriormente, cuando la actividad escolar y laboral se normaliza. En ambos casos se presenta alta congestión, pero el recorrido 3 ofrece una velocidad mínima de 10.4 km/h y, el 4 una velocidad de recorrido de 11.6 km/h, mayor en 1 km/h.



Gráfica 17. Tiempo y demoras de viaje de rutas equiparables entre la Central Camionera del Sur (Taxqueña) y Ciudad Universitaria en diferentes períodos del año. Elaboración propia a partir de registros GPS con My Tracks.

En cualquier caso estas cifras representan para los usuarios un viaje de bajo nivel de servicio, con graves consecuencias en la salud de los conductores, viajero, consumo excesivo de hidrocarburos, efectos nocivos en el medio ambiente, etc.

En la Gráfica 17 se muestra el comparativo de los tiempos y demoras de cada ruta; en todos los recorridos se conserva la relativa cercanía entre el indicador de demora y el tiempo total de viaje. Esto reafirma la importancia en el análisis de rutas de dicha medida de desempeño y su impacto en el nivel de servicio de las rutas de transporte.



Gráfica 18. Proporción de demora respecto al tiempo de viaje de rutas equiparables entre la Central Camionera del Sur (Taxqueña) y Ciudad Universitaria en diferentes periodos del año.
Elaboración propia a partir de registros GPS con My Tracks.

Finalmente, en la Gráfica 18 se revela la alta proporción que representa la demora respecto del tiempo de viaje total. También indica valores extremos en situaciones cotidianas y eventuales. Por ejemplo, el viaje el día de inicio de clases en la UNAM representa una operación del tránsito cuidadosa y extrema, pues la proporción de demora respecto al tiempo de viaje representa el máximo valor, para sendas rutas alternativas entre el origen-destino en cuestión, un alto valor aproximado al 70%!!! Este evento anual, muy localizado en el espacio y el tiempo, amerita una acción planificada de la Secretaría de Seguridad Pública, con un operativo coordinado con las autoridades de la UNAM, que ordene la circulación fuera y dentro de Ciudad Universitaria, en todas las entradas y vialidades que sirven de acceso a éste importante centro educativo.

Un segundo ejemplo es la competencia que ofrecen las rutas 1 y 2, cuyos indicadores de movilidad permiten medir el desempeño con tránsito bajo, por lo tanto identificar los valores máximos de oferta de ambas rutas en consideración a sus características geométricas, de superficie y de regulación del tránsito. Gracias al indicador demora, proporción de demora respecto al tiempo de viaje y el ritmo valorado en el espacio y el tiempo es posible considerar como mejor alternativa la ruta 2. A pesar de ser más sinuosa, ofrecer condiciones geométricas

de menor especificación, como mayor pendiente en tramos largos y mayores curvas, su condición de superficie peor, regulación de velocidad con topes, controles semáforizados, etc. No obstante, aunque las colas se presentan, la sección vial da la posibilidad presentarse es menor y el ritmo mejor en más tramos que la ruta 1.

Un tercer ejemplo es la comparación de indicadores de desempeño de las rutas 3 y 4. El registro se hace en una misma ruta en el período de actividad en que todos los escolares, trabajadores y la dinámica económica normal de la ciudad. Por lo tanto, son medidas de desempeño que se mantienen durante la mayor cantidad del año, fundamentales para la ejecución de otros estudios básicos para la planeación de la actividad del transporte. En este caso la ruta ofrece una proporción de demora cotidiana un poco mayor del 50% respecto del tiempo de viaje. Un problema de alta congestión, demora y afectación por cola diario en la hora pico de la mañana, en el acceso a Ciudad Universitaria por Cerro del Agua con las consecuencias ya mencionadas, lo cual afecta a la comunidad del sector, a la propia de CU y a todos los viajeros obligados a transitar por dicha zona.

En resumen, los indicadores ritmo de viaje evaluado en el tiempo y el espacio, así como la demora, las filas y la proporción de viaje en demora son un recurso de análisis de eficiencia de rutas en un sistema de transporte, que aportan mayor sensibilidad y detalle en procesos de decisión.

Este caso de estudio motiva la formulación de una hipótesis y el desarrollo de la línea de investigación que comienza en esta tesis.

Referencias

Google Earth

Kinney, C., 1991, quoted by http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_map

Leurent, F., 2005. "Contributions to the logit assignment model". *Transportation Research Record*, 1493, pp.207-212.

Londono, G. & Lozano, A. (2012). "Suitable cost functions for signalized arterials and freeways, in the user equilibrium assignment problem". *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 54, pp. 1176 -1185.

Schroeder, B. J., Findley, D. J., Hummer, J. E. & Foyle, R. S. (2010). *Manual of Transportation Engineering Studies* (2nd Edition). Institute of Transportation Engineers. Publication No. TB-012A, 1000/AGSBH/1110 First Printing. Washington DC 20006, U.S.A..

Wardrop, J.G. (1952). "Some theoretical aspects of road traffic research". In *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, London, Part II (1), 325-378.

APÉNDICE B. SOLUCIÓN AL PROGRAMA MATEMÁTICO DE BECKMANN CON FUNCIONES DE TIEMPO DE VIAJE PARA ARTERIAS URBANAS DE ACCESO CONTROLADO Y SEMAFORIZADAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO DE CONGESTIÓN Y EL FLUJO EN EL ARCO: CASO DE ESTUDIO

Introducción

Actualmente, la planeación y evaluación de proyectos de transporte se apoyan en indicadores de desempeño del sistema, tal como tiempo de viaje en los arcos y rutas, así como en el volumen de tráfico (Afandizadeh *et al.*, 2012). Algunos de estos indicadores están relacionados con niveles de congestión, costos de viaje o cantidad de partículas y gases contaminantes. El estudio macroscópico del sistema de transporte mediante modelos determinísticos de asignación de tráfico con equilibrio del usuario (UE-D) que usan funciones de tiempo en el arco dependientes del flujo estima los volúmenes en las rutas que ofrecen el mínimo tiempo de viaje en la red y en las rutas usadas. Tales funciones son apropiadas si incorporan los parámetros y variables que representan la demora de viaje, en términos de los componentes físicos y operacionales que dependen de las características del arco, con el fin de obtener buenas predicciones de costos de viaje, flujos vehiculares y emisiones. Algunos investigadores han estudiado la sensibilidad del tiempo de viaje en el arco, los parámetros del flujo, los tiempos de señal de semáforo y el grado de saturación (Roess *et al.*, 2004; Qi *et al.*, 2011).

En el capítulo 1 se explica el problema de UE-D, formulado por Beckmann *et al.* (1956), el cual permite encontrar flujos en los arcos de las rutas escogidas por los usuarios, cuando a una red se le carga tasas de viaje O-D, integrándolo con funciones de tiempo de viaje en el arco (Sheffi, 1984). Existe una gran cantidad de investigaciones que solucionan el problema UE-D con la función BPR (función propuesta por U.S. Bureau of Public Roads), debido a su simplicidad y apropiadas propiedades matemáticas (Kuang *et al.*, 2011 y otros).

En este apéndice se deduce la solución al problema de Beckmann *et al.* (1956) para una red vial urbana con dos tipos arcos principales, por ejemplo, vías de acceso controlado y arterias semaforizadas. El problema UE-D se resuelve mediante el algoritmo de Frank-Wolfe (FW) (Sheffi, 1984) con la combinación de funciones dependientes del flujo y del tiempo de congestión, el cual bajo condiciones de convexidad asegura una solución única (Ibid). El contenido de este apéndice es una extensión del artículo de investigación Londono y Lozano (2012).

Yang *et al.* (2011) presenta un estudio de funciones de impedancia para redes de transporte urbano, para vialidades continuas y discontinuas, pero son diferentes a las usadas en esta investigación. Además, aunque

ellos probaron sus funciones en los modelos de asignación de tráfico, no lo hicieron analíticamente. Otros investigadores reconocen la necesidad de proponer funciones de tiempo de viaje del arco más reales y la dificultad para obtenerlas. Gastaldi y Rossi (2011) estiman el tiempo de viaje en el arco mediante la captura de información de campo a través de dispositivos de semáforo y detección vehicular, experimentando con un simulador de conducción; esas funciones fueron comparadas con información de tiempo de viaje estimada mediante detectores en la vía.

El apéndice presenta primero la formulación del programa UE-D para dos tipos de arco simultáneamente. Se formula el programa de Beckmann et al. (1956) para varias combinaciones de funciones de tiempo de viaje apropiadas para vías arterias urbanas. Después presenta la solución de expresiones matemáticas requeridas en el algoritmo de FW para luego ejecutarlas en un programa de cómputo, realizado por GiiTRAL de la UNAM. La solución se aplica a un caso de estudio en una una parte de red de la ZMVM. Se presenta un cuadro de resultados y los análisis del caso de estudio, los cuales se validan mediante estudios de tiempo de recorrido y demoras; la información de campo también sirve para calibrar las funciones de tiempo de viaje.

1. Problema determinístico de asignación de equilibrio del usuario para dos tipos de arco

El problema UE-D estima los flujos en cada arco, tal que cada usuario minimiza su costo de acuerdo con las condiciones del tráfico. Se asume que los viajeros tienen información perfecta acerca de las condiciones de todas las rutas posibles y desean minimizar el tiempo de viaje o el costo. En la solución de equilibrio del usuario, todas las rutas ofrecen el mismo tiempo de viaje y ningún viajero podrá mejorarlo por un cambio unilateral de ruta (Wardrop, 1952, citado por Sheffi, 1984).

El problema fue matemáticamente formulado por Beckmann et al. (1956) como un problema convexo con una función objetivo para demanda fija y variable, sujeto a restricciones lineales y variables no negativas (Sheffi, 1984). Luego, Jorgensen (1963) propuso una formulación de optimización con restricciones de equilibrio de red, con demanda fija y con funciones de costo de arco separables (citado por Boyce et al., 2004).

Se presenta la formulación del problema de Beckmann et al. (1956) introduciendo un superíndice ζ para denotar el tipo de arco. Además, se introducen las variables que definen las funciones de tiempo de viaje de dos tipos de arco: semaforizados (LS) y de acceso controlado (LA).

Sea la red dirigida $G = (N, A)$ (N : conjunto de nodos y A : conjunto de arcos) y $C \subseteq N \times N$ un conjunto de costos y tiempos de viaje entre pares de orígenes y destinos (O-D). Para cada arco $l^{mn} \in K$ y l es una ruta entre un par origen m y destino n , f_l^{mn} es el flujo en la ruta; una tasa de flujo q_l es asignada a la red para cada par O-D. El problema UE-D es encontrar el flujo en el arco o ruta que satisfaga el criterio de equilibrio del usuario (UE), el cual es alcanzado cuando todos los pares O-D han sido asignados a todas las rutas apropiadamente

(Sheffi, 1984). Este patrón de flujo puede ser obtenido solucionando el programa matemático (B.1) a (B.4), conocido como la transformación de Beckmann, formulado para arcos separables, es decir aquellos cuyo flujo en el arco solo depende del tiempo de viaje en ese arco, y no en otro arco (Seffi, 1984).

Nomenclatura

$G = (N, A)$ red dirigida; N conjunto de nodos; A conjunto de arcos

R conjunto de nodos origen, $R \subseteq N$

S conjunto de nodos destino, $S \subseteq N$

K conjunto de rutas que conectan los pares O-D o r-s

x_a flujo en el arco a o tasa de llegada en el acceso de un arco semaforizado

$t_a^\zeta(\cdot)$ función de tiempo de viaje en el arco a

q_l viajes en la ruta l^{mn} que conectan el par $m-n$ y $l^{mn} \in K$

$t_a^{0,\zeta}(\cdot) = t_a^\zeta(0)$ tiempo de viaje a flujo libre en el arco a con $x_a = 0$, de tipo ζ ; y $t_a^0 = L_a/v_{af}$

L_a longitud del arco a

v_{af} velocidad límite en el arco a

d_a^1 componente de demora uniforme del flujo que entra en el arco a , s/veh

d_a^2 componente de demora de sobreflujo del flujo que entra al arco a , s/veh

Q_a capacidad del acceso a la intersección $Q_a = S_a(g_a/C_a)$ o capacidad del arco a , veh/h

C_a tiempo de ciclo, s; g_a : tiempo de verde, s

S_a flujo de saturación en la salida del arco, veh/h-verde

X_a razón volumen a capacidad, v_a/Q_a , o grado de saturación x_a/Q_a

T_f período de análisis o tiempo de sobreflujo

A_a parámetro de Akcelik del arco a

α_a y β_a parámetros de la función BPR

u_n^{rs} mínimo tiempo de viaje de la ruta que conecta el par $r-s$ en la n^{th} iteración del algoritmo FW

$\delta_{a,\zeta,k}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } a \text{ es tipo } \zeta \text{ en la ruta } l \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$

ζ define el tipo de arco $\begin{cases} \text{LA} & \text{si el arco es de tipo acceso controlado} \\ \text{LS} & \text{si el arco es de tipo semaforizado} \end{cases}$

Entonces la transformación de Beckmann se presenta, así:

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a^\zeta(w) dw \quad (\text{B.1})$$

Sujeto a:

$$\sum_k f_k^l = q_l, \forall l \quad (\text{B.2})$$

$$f_k^l \geq 0, \quad \forall l, k \quad (\text{B.3})$$

$$x_a = \sum_k f_k^l \delta_{a,k}^l, \quad \forall a \in A \quad (\text{B.4})$$

$f = (x_a)_{A \in A}$ es un vector no negativo que describe la tasa de flujo en el arco a . Las funciones de costo o tiempo de viaje $t_a^\zeta(\cdot)$ de cada arco a tipo ζ , expresa el tiempo requerido para atravesar el arco a con un flujo x_a por hora. Esta función de costo debe ser no negativa y no decreciente (Sheffi, 1984). La función objetivo $z(\mathbf{x})$ es la suma de las integrales de las funciones de costo de los arcos en la red $t_a^\zeta(\cdot)$.

El algoritmo de FW resuelve el problema UE-D cuando la función objetivo (B.1) es estrictamente convexa se describe más adelante.

2. Funciones de tiempo de viaje y demora dependientes del volumen de tránsito y el tiempo de congestión

El tiempo de viaje total para atravesar un elemento de la red está directamente relacionado con el volumen de tránsito que circula por dicho elemento. Como el volumen se incrementa, la demora y el tiempo de viaje aumenta. La tasa de incremento en el tiempo de viaje se acelera cuando el volumen se aproxima a la capacidad del elemento.

El movimiento de tránsito a lo largo de un arco en una red consiste de dos componentes principales. El primero es el tiempo de crucero, con movimiento continuo, excepto por los efectos de fricción causados por maniobras de estacionamiento, etc. El segundo es el componente de demora, el cual puede darse por varias circunstancias: el cruce de peatones, paradas de bus, y ramales o vías de integración. Los puntos de interrupción de la corriente son manejados usando los métodos para el análisis de intersecciones y teoría de filas. Lo que también es necesario para muchos planificadores de transporte y analistas de tránsito, particularmente para áreas urbanas u otros lugares donde se espera congestión, es una expresión que relacione los dos componentes simultáneamente. Una “función de congestión” (o relación flujo-velocidad, X_a) es usada para describir las relaciones entre flujo en el arco y velocidad o tiempo de viaje en un arco de red o sección de red que contenga un conjunto de elementos de red (Roess et al., 2004).

Una red vial principal urbana incluye corredores arteriales compuestos por arcos semaforizados y vías de acceso controlado. La operación de las arterias semaforizadas, usualmente se hace mediante programas coordinados de dos fases, los cuales pueden ser analizados macroscópicamente mediante funciones de tiempo de viaje dependientes del volumen de tránsito que incluyan al menos la demora fija y la demora por sobreflujo en períodos sostenidos en la hora de congestión.

A continuación, se describen algunas funciones de tiempo de viaje que se consideran apropiadas para procesos de asignación de tráfico dependientes del flujo, los cuales se usan para desarrollar algunos casos de estudio en ésta investigación, útiles para estimar tiempos de viaje en vías semaforizadas, y otras para vías de acceso controlado. Más adelante se presenta un caso de estudio en el que se hace una asignación de tráfico con equilibrio del usuario de Wardrop (1956) implícitamente. Las funciones de tiempo de viaje dependientes del flujo que se analizan y combinan en el siguiente aparte, son apropiadas para cargar viajes en vías de acceso controlado y arterias semaforizadas. Seguidamente se definen las funciones de tiempo de viaje que se analizan en el caso de estudio, con base en la función BPR (1964), Webster (1958, citado por Roess et al., 2004) y Akcelik (1991).

Función BPR

La función BPR fue propuesta por U.S. Bureau of Public Roads (1964). Ha sido ampliamente usada en problemas de AEU en redes urbanas. Esta función es continua, incremental, diferenciable y tiene una forma parabólica. Se compone de dos sumandos: el tiempo de viaje a flujo libre y, otro término que es un factor del primero, que crece con el incremento de la relación flujo a capacidad (x/Q). Esta función no incluye la demora por semáforos. La función BPR es presentada en la ecuación (B.5) (Sheffi, 1984).

$$t_a(x_a)_{BPR} = t_a^0 \left(1 + \alpha_a \left(\frac{x_a}{Q_a} \right)^{\beta_a} \right) \quad (B.5)$$

Con dimensiones: [s/veh]

La función BPR es simple y tiene un buen desempeño en procesos de carga de redes. Por eso es muy usada en modelos de planeación de transporte.

Función de demora de Webster

La función de demora aplicada a cualquier tipo de vía que tiene intersecciones incluye tres tipos de demora (Roess et al. 2004):

- Demora uniforme: en una intersección con semáforo, esta demora considera el arribo de vehículos uniforme, flujo estable y ninguna característica cíclica individual.
- Demora aleatoria: es una demora adicional a la uniforme, donde se asume que el flujo está distribuido aleatoriamente; usualmente se da en intersecciones aisladas.

- Demora por sobreflujo: es una demora adicional, la cual se da cuando la capacidad de una fase individual de un ciclo de semáforo o una serie de fases es más pequeña que la demanda por la tasa de arribo.

La demora por influencia de flujo en pelotón es introducida como un ajuste a la demora uniforme. En muchos modelos actuales combinan la demora aleatoria y la demora por sobreflujo en la misma función, y se refiere como demora por sobreflujo.

Analíticamente, la función de demora de en arterias semaforizadas se expresa, con base en Webster (1958), como: la suma del tiempo de viaje a flujo libre, t_a^0 , más el componente de demora uniforme de Webster, d_a^1 , en s/veh, la cual se vuelve constante cuando x/Q es uno. Cuando el flujo se aproxima a la capacidad, la demora uniforme se convierte en una constante, entonces el tiempo de viaje se incrementa con la demora por sobreflujo, d_a^2 ; así, con base en la demora de sobreflujo de Webster, la función de demora completa, la cual se llamará función de demora de Webster, se expresa en la ecuación (B.6); el componente de demora uniforme d_a^1 en la ecuación (B.7) y la demora de sobreflujo en la ecuación (B.8); estos se sustituyen en el ecuación (B.6) para obtener la función de tiempo de viaje de demora de Webster, de la ecuación (B.9), que se utiliza en el presente caso de estudio:

$$t_a(x) = t_a^0 + d_a^1 + d_a^2 \quad (\text{B.6})$$

Con dimensiones: [s/veh]

$$d_{aWebster}^1 = \left(\frac{C_a}{2}\right) * \left\{ \frac{\left(1 - g_a/C_a\right)^2}{1 - \left[\min(1, X_a) * g_a/C_a\right]} \right\} \quad (\text{B.7})$$

Dimensiones: [s/veh]

$$d_a^2 = \frac{T}{2} [1 - X] \quad (\text{B.8})$$

Con dimensiones: [s/veh]

$$t_a(x)_{Webster} = t_a^0 + 0.5C_a \left[1 - g_a/C_a\right] + \frac{T_f}{2} [X_a - 1] \quad (\text{B.9})$$

Función de demora de Akcelik

La función de Akcelik (1991) usada en el presente caso de estudio, se compone del tiempo de viaje a flujo libre, el cual se incrementa con el componente de demora uniforme de Webster, d_a^1 , por la acción del semáforo, más

la demora producida por un tiempo de sobreflujo, d_a^2 , ahora de Akcelik (1991), cuando la relación flujo a capacidad supera la unidad. Esta función se muestra en la ecuación (B.10) (Akçelik, 1991):

$$t_a(x)_{Akcelik} = t_a^0 + d_a^1 + \frac{1}{4} T_f \left\{ (X_a - 1) + \sqrt{(X_a - 1)^2 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} X_a} \right\} \quad (B.10)$$

Con dimensiones [s/veh-km] (esta dimensión se transforma en s/veh en el caso de estudio presentado más adelante)

Cuadro 9. Parámetros representativos para la función de congestión de Akcelik (1991)

Clase de vía	Descripción	t_0 (min/ km)	C (veh/h/carril)	A	t_m/t_0 *
1	Autopista	0.5	2000	0.1	1.587
2	Arteria (flujo continuo)	0.6	1800	0.2	1.754
3	Arteria (flujo discontinuo)	0.75	1200	0.4	2.041
4	Secundaria (flujo discontinuo)	1.0	900	0.8	2.272
5	Secundaria (alta fricción)	1.5	600	1.6	2.439

* Es la razón del tiempo de viaje en el arco t_m para $x=1$ respecto de tiempo de viaje a flujo libre t_0 . Indica el tiempo de viaje adicional y la demora en el arco cuando está saturado. Puede ser tomado como una medida de congestión en esa clase de vía

3. Formulación del problema UE-D para varios tipos de función de tiempo de viaje

En este aparte se presentan tres formulaciones del problema UE-D (B.1) a (B.4) aplicado a una red con arcos arteriales semaforizados (LS) y vías arterias de acceso controlado (LA). La función de tiempo de viaje del arco $t_a^z(\cdot)$ para estos dos tipos de arco en cada formulación serán algunas combinaciones de: BPR, Webster y Akcelik, definidas en el aparte anterior en la ecuaciones (B.5), (B.7), (B.8), (B.9) y (B.10); en las cuales se busca buenas propiedades matemáticas: no decrecientes, no negativas y continuas a tramos.

Se definen tres procesos diferentes mediante programas matemáticos de optimización. Para cada proceso se formula la función objetivo $z(x)$ y las expresiones analíticas de las ecuaciones (B.11) y (B.12), para programar el algoritmo de FW (Sheffi, 1984):

- El subproblema de $\min z \left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]_{0 \leq \lambda \leq 1}$ (B.11)

- La solución del paso para la búsqueda del mínimo con $\frac{dz \left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{d\lambda}$ o $\frac{dz(\lambda)}{d\lambda}$ (B.12)

Para garantizar las condiciones de unicidad en la solución, posteriormente se hace una revisión analítica de las características de las funciones y se establecen valores límite.

La función general de tiempo de viaje para los dos tipos de arco se presenta en la ecuación (B.13) y (B.14):

$$t_a^{\zeta}(x) = t_a^0 + \phi d_a^{1\zeta} + d_a^{2\zeta} \quad (\text{B.13})$$

Donde:

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si es arco semaforizado (LS)} \\ 0 & \text{si es arco de acceso limitado (LA)} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

3.1 Proceso 1: Programa UE-D con función Webster para LS y BPR para LA

Con base en las ecuaciones (B.13) y (B.14) se define la función de tiempo de viaje en la ecuación (B.15):

$$t_a^{\zeta}(x) = t_a^0 + \phi d_a^1 + d_{a\text{Webster}}^{2\text{LS}} + d_{a\text{BPR}}^{2\text{LA}} \quad (\text{B.15})$$

Se sustituye (B.5) y (B.9) y se obtiene la función de tiempo de viaje, para el programa UE-D con función Webster para LS y BPR para LA, en la ecuación (B.16), que se define continua a tramos:

$$t_a = t_a^0 + \phi \left(\frac{C_a}{2} \right)^* \left\{ \frac{\left(1 - g_a / C_a \right)^2}{1 - \left[\min(1, X_a) * g_a / C_a \right]} \right\} + \phi \frac{T_f}{2} [X_a - 1] + (1 - \phi) t_a^0 \left(\alpha_a \left(\frac{x_a^n}{Q_a} \right)^{\beta_a} \right),$$

$$\forall X_a \in [(0 < X_a < 1) \cup (X_a \geq 1)] \quad (\text{B.16})$$

La función objetivo del programa de Beckmann (ecuaciones B.1 a B.4), aplicado al programa UE-D con función Webster para LS y BPR para LA, se deduce al sustituir la ecuación (B.16), y se presenta en la ecuación (B.17)

$$z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_{0a} dx + \frac{C}{2} \int_0^{x_a} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{g}{C} \right)^2}{\left[1 - \left(\min(1, X) \right) \left(\frac{g}{C} \right) \right]} \right\} dx + \phi 0.5 T_f \int_0^{x_a} (X - 1) dx + (1 - \phi) \alpha_a \int_0^{x_a} t_a^0 \left(\frac{x_a^n}{Q_a} \right)^{\beta_a} dx,$$

$$\forall X_a \in [(0 < X_a < 1) \cup (X_a \geq 1)] \quad (\text{B.17})$$

Cuya solución se muestra en las ecuaciones (B.18) y (B.19), definida a tramos:

$$z(x) = \sum_a \left\{ \left[t_{0a} x \right] - \phi \left[\frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right)^2 \frac{Q_a C_a}{g_a} \ln \left| 1 - \left(\frac{g_a x}{Q_a C_a} \right) \right| \right] + (1 - \phi) \alpha_a \frac{t_{0a} x^{\beta_a + 1}}{(\beta_a + 1) Q_a^{\beta_a}} \right\}_0^{x_a},$$

$$\forall X_a \in [0 < X_a < I] \quad (\text{B.18})$$

$$z(x) = \sum_a \left[t_{0a} x + \frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right) x + 0.5 T_f \left(\frac{x^2}{2 Q_a} - x \right) + (1 - \phi) \alpha_a \frac{t_{0a} x^{\beta_a + 1}}{(\beta_a + 1) Q_a^{\beta_a}} \right]_0^{x_a}, \quad \forall X_a \geq I \quad (\text{B.19})$$

Se sustituye los límites de la integral en las ecuaciones (B.18) y (B.19) y se expresa en las ecuaciones (B.20) y (B.21):

$$z(x) = \sum_a \left\{ \left[t_{0a} x_a \right] - \phi \left[\frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right)^2 \frac{Q_a C_a}{g_a} \ln \left| 1 - \left(\frac{g_a x_a}{Q_a C_a} \right) \right| \right] + (1 - \phi) \alpha_a \frac{t_{0a} x_a^{\beta_a + 1}}{(\beta_a + 1) Q_a^{\beta_a}} \right\},$$

$$\forall X_a \in [0 < X_a < I] \quad (\text{B.20})$$

$$z(x) = \sum_a \left[t_{0a} x_a + \phi \frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right) x_a + 0.5 \phi T_f \left(\frac{x_a^2}{2 Q_a} - x_a \right) + (1 - \phi) \alpha_a \frac{t_{0a} x_a^{\beta_a + 1}}{(\beta_a + 1) Q_a^{\beta_a}} \right], \quad \forall X_a \geq I, \quad (\text{B.21})$$

El subproblema de $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]$, de la ecuación (B.11) en el algoritmo de Frank Wolfe, se sustituye por las ecuaciones (B.20) y (B.21) y se expresa en las ecuaciones (B.22) y (B.23):

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] = \left\{ \begin{array}{l} \left[t_{0a} (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)) \right] - \phi \left[\frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right)^2 \frac{Q_a C_a}{g_a} \ln \left| 1 - \left(\frac{g_a (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))}{Q_a C_a} \right) \right| \right] \\ + (1 - \phi) \alpha_a \frac{t_{0a} (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))^{\beta_a + 1}}{(\beta_a + 1) Q_a^{\beta_a}} \end{array} \right\},$$

$$\forall X_a \in [0 < X_a < I], \quad (\text{B.22})$$

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] = \left\{ \begin{array}{l} t_{0a} (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)) + \phi \frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right) (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)) \\ + 0.5 \phi T_f \left(\frac{(x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))^2}{2 Q_a} - (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)) \right) \\ + (1 - \phi) \alpha_a \frac{t_{0a} (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))^{\beta_a + 1}}{(\beta_a + 1) Q_a^{\beta_a}} \end{array} \right\}, \quad \forall X_a \geq I \quad (\text{B.23})$$

Además, la solución del paso para la búsqueda del mínimo, ecuación (B.12), se busca mediante la derivada de la función auxiliar de $z\left[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)\right]$, respecto a λ , que aplicado al programa UE-D con función Webster para LS y BPR para LA, se muestra en las ecuaciones (B.24) a (B.27):

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} \left[t_{0a}(y_a^n - x_a^n) \right] - \varphi \left[\frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right)^2 \frac{Q_a C_a}{g_a} \left(\frac{-\frac{g_a}{Q_a C_a} (y_a^n - x_a^n)}{1 - \frac{g_a}{Q_a C_a} (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))} \right) \right] \\ + (1 - \varphi) \frac{\alpha_a t_{0a} (y_a^n - x_a^n) [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]^{\beta_a}}{Q_a^{\beta_a}} \end{array} \right\} = 0, \quad \forall X_a \in [0 < X_a < 1], \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = (y_a^n - x_a^n) \left\{ \begin{array}{l} \left[t_{0a} \right] + \varphi \left[\frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{g_a}{Q_a C_a} (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))} \right) \right] \\ + (1 - \varphi) \frac{\alpha_a t_{0a} [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]^{\beta_a}}{Q_a^{\beta_a}} \end{array} \right\} = 0$$

$$\forall X_a \in 0 < \left(\frac{x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)}{Q_a} \right) < 1 \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = \left\{ \begin{array}{l} t_{0a}(y_a^n - x_a^n) + \varphi \frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right) (y_a^n - x_a^n) - 0.5\varphi T_f (y_a^n - x_a^n) \\ + 0.5\varphi T_f \left(\frac{(y_a^n - x_a^n)(x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))}{Q_a} \right) + (1 - \varphi) \frac{\alpha_a t_{0a} (y_a^n - x_a^n) [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]^{\beta_a}}{Q_a^{\beta_a}} \end{array} \right\},$$

$$\forall \left(\frac{x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)}{Q_a} \right) \geq 1 \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = (y_a^n - x_a^n) \left\{ \begin{array}{l} t_{0a} + \varphi \frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right) - 0.5\varphi T_f + 0.5\varphi T_f \left(\frac{(x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))}{Q_a} \right) \\ + (1 - \varphi) \frac{\alpha_a t_{0a} [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]^{\beta_a}}{Q_a^{\beta_a}} \end{array} \right\} = 0,$$

$$\forall \left(\frac{x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)}{Q_a} \right) \geq 1, \quad (\text{B.27})$$

La solución de λ se halla cuando esta derivada se iguala a cero y se determina con un algoritmo de aproximaciones sucesivas, por ejemplo el de bisección.

3.2 Proceso 2: Programa UE-D con función Akcelik para LS y LA

Se define la función de tiempo de viaje general en la ecuación (B.28), en la que se sustituye la ecuación (B.10):

$$t_a^c(x) = t_a^0 + \varphi d_{aWebster}^{1LS} + d_{aAkcelik}^{2LS-LA} \quad (B.28)$$

Entonces la función de tiempo de viaje del programa UE-D con función Akcelik para LS y LA, se expresa en la ecuación (B.29), la cual se define a tramos:

$$t_a(X_a) = t_a^0 + \phi \left(\frac{C_a}{2} \right) * \left\{ \frac{\left(1 - g_a / C_a \right)^2}{1 - \left[\min(1, X_a) * g_a / C_a \right]} \right\} + \frac{1}{4} T_f L_a \left\{ (X_a - 1) + \sqrt{(X_a - 1)^2 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} X_a} \right\},$$

$$\forall X_a \in [(0 < X_a < 1) \cup (x \geq 1)], \quad (B.29)$$

Sustituyendo (B.29) en el programa (B.1) a (B.4), la función de costo del programa UE-D con función Akcelik para LS y LA, se presenta en la ecuación (B.30):

$$z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} \left\{ t_a^0 + \phi \left(\frac{C_a}{2} \right) * \left\{ \frac{\left(1 - g_a / C_a \right)^2}{1 - \left[\min(1, X_a) * g_a / C_a \right]} \right\} + \frac{1}{4} T_f L_a \left\{ (X_a - 1) + \sqrt{(X_a - 1)^2 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} X_a} \right\} \right\} dw$$

$$\forall X_a \in [(0 < X_a < 1) \cup (x \geq 1)] \quad (B.30)$$

La solución del programa UE-D con función Akcelik para LS y LA, en el programa (B.1) y (B.4), con la ecuación (B.30), se construye tomando los dos primeros sumandos de (B.18) y (B.19), y el desarrollo del último término, por su extensión, se explica en el anexo, y se presenta a tramos en las ecuaciones (B.31) y (B.32):

$$z(x) = \sum_a \left\{ [t_{0a} x_a] - \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right)^2 \frac{QC}{g} \ln \left| 1 - \left(\frac{gx}{QC} \right) \right| \right] \right\}_0^{x_a}, \quad 0 \leq X < 1 \quad (B.31)$$

$$z(x) = \left. \begin{aligned} & t_{0a}x + \frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C}\right)x + 0.25T_f L_a \left(\frac{x^2}{2Q_a} - x\right) + \\ & \frac{0.25T_f L_a Q_a}{2} \left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right)\right) \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right)\right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right) \right]^{0.5} \\ & + \frac{0.25T_f L_a Q_a}{2} \left\{ \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right) \right\} \ln \left\{ \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right)\right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right) \right]^{0.5} + \left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right)\right) \right\} + C \end{aligned} \right|_0^{x_a} \quad X \geq 1 \quad (\text{B.32})$$

Para reducir la expresión se definen las siguientes constantes, en las ecuaciones (B.33), (B.34) y (B.35):

$$r = \frac{0.25T_f L_a Q_a}{2} \quad (\text{B.33})$$

$$s = \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right) \quad (\text{B.34})$$

$$a^2 = \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f}\right) \quad (\text{B.35})$$

Se sustituye los límites de la integral y resultan las ecuaciones (B.36) y (B.37):

$$z(x) = \sum_a \left\{ [t_{0a}x_a] - \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C}\right)^2 \frac{QC}{g} \ln \left| 1 - \left(\frac{gx_a}{QC}\right) \right| \right] \right\}, \quad \forall X \in (0 \leq X < 1) \quad (\text{B.36})$$

$$z(x) = \sum_a \left\{ \begin{aligned} & [t_{0a}x_a] + \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C}\right)x_a \right] + 0.25T_f L_a x \left(\frac{x_a}{2Q_a} - 1\right) + r \left(\frac{x_a}{Q_a} - s\right) \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} - s\right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\ & + ra^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} - s\right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{x_a}{Q_a} - s\right) \right\} + rs - ra^2 \ln \{1 - s\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.37})$$

, $\forall X \geq 1$

El subproblema de $\min z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]$ en el algoritmo del Frank Wolfe, al sustituirse por las ecuaciones

(B.36) y (B.37), se convierte en las ecuaciones (B.38) y (B.39):

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] = \sum_a \left\{ \left[t_{0a}(x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)) \right] - \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right)^2 \frac{QC}{g} \ln \left| 1 - \left(\frac{x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)}{QC} \right) \right| \right] \right\},$$

$$\forall X \in (0 \leq X < 1) \quad (\text{B.36})$$

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] = \sum_a \left\{ \begin{aligned} & \left[t_{0a}(x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)) \right] + \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right) (x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)) \right] \\ & + 0.25 T_f L_a [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{2Q_a} - 1 \right) \\ & + r \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\ & + ra^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \right\} + rs - ra^2 \ln \{1 - s\} \\ & + \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{Q_a} - s \right) \end{aligned} \right\}$$

$$, \forall X \geq 1, \quad (\text{B.39})$$

Además, la solución del paso para la búsqueda del mínimo se busca mediante la derivada de la función auxiliar de $z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]$ respecto a λ , y se muestra en forma resumida en las ecuaciones (B.40) a (B.43) (en el anexo se hace el desarrollo completo) :

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = \sum_a \left\{ \left[t_{0a}(y_a^n - x_a^n) \right] - \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right)^2 \frac{QC}{g} \left(\frac{-\frac{g}{QC}(y_a^n - x_a^n)}{1 - \frac{g}{QC}(x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))} \right) \right] \right\} = 0, \forall X \in (0 \leq X < 1)$$

$$(\text{B.40})$$

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = \sum_a \left\{ \left[t_{0a}(y_a^n - x_a^n) \right] + \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right)^2 \left(\frac{(y_a^n - x_a^n)}{1 - \frac{g}{QC}(x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))} \right) \right] \right\} = 0, \forall X \in (0 \leq X < 1)$$

$$(\text{B.41})$$

$$\frac{dz(\lambda)}{d\lambda} = \sum_a (y_a^n - x_a^n) \left\{ t_{0a} + \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{g}{QC}(x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n))} \right) \right] \right\} = 0, \forall X \in (0 \leq X < 1)$$

$$(\text{B.42})$$

$$\frac{dz[\lambda]}{d\lambda} = \sum_a (y_a^n - x_a^n) \left\{ \begin{aligned} & \left[t_{0a} + \frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right) + 0.25 T_f L_a \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - 1 \right) \right] \\ & + \frac{2r}{Q_a} \left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - s_a \right)^2 + a_a^2 \right]^{0.5} \end{aligned} \right\} = 0, \forall X \geq 1 \quad (\text{B.43})$$

Como se mencionó en el proceso uno, la solución de λ se halla cuando esta derivada se iguala a cero y se determina con el algoritmo de bisección.

3.3 Proceso 3: Programa UE-D con función BPR para todos los arcos

Función de tiempo de viaje del arco general para la función BPR, de la ecuación (B.5), aplicada en todos los arcos se presenta en la ecuación (B.44):

$$t_a(x_a) = t_{0a} \left[1 + \alpha \left(\frac{x_a}{Q_a} \right)^\beta \right] \quad (\text{B.44})$$

El costo de la red, $z(x)$, se estima mediante la función de tiempo de arco BPR (Bureau of Public Roads, 1964), y se expresa en la ecuación (B.45):

$$z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_{0a} \left[1 + \alpha \left(\frac{x_a}{Q_a} \right)^\beta \right] dx \quad (\text{B.45})$$

La solución de la ecuación (D.45) se presenta en las ecuaciones (B.46) y (B.47)

$$z(x) = \sum_a t_{0a} x_a + \frac{t_{0a} \alpha x_a^{\beta+1}}{(\beta+1) Q_a^\beta} \Bigg|_0^{x_a} \quad (\text{B.46})$$

$$z(x) = \sum_a t_{0a} x_a + \frac{t_{0a} \alpha x_a^{\beta+1}}{(\beta+1) Q_a^\beta} \quad (\text{B.47})$$

El subproblema de $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]$ en el algoritmo del Frank Wolfe, al sustituirse por la ecuación (B.47), se presenta en la ecuación (B.48):

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] = \sum_{x_a} t_{0a} [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] + \frac{t_{0a} \alpha [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]^{\beta+1}}{(\beta+1) Q_a^\beta} \quad (\text{B.48})$$

Además, la solución del paso para la búsqueda del mínimo se busca mediante la derivada de la función auxiliar de $z[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]$ respecto a λ , lo cual se expresa en las ecuaciones (B.49) y (B.50):

$$\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} = \sum_{x_a} t_{0a} (y_a^n - x_a^n) + \frac{t_{0a} \alpha [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]^\beta (y_a^n - x_a^n)}{Q_a^\beta} = 0 \quad (\text{B.49})$$

$$\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} = \sum_{x_a} t_{0a} (y_a^n - x_a^n) \left\{ I + \frac{\alpha [x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]^\beta}{Q_a^\beta} \right\} = 0 \quad (\text{B.50})$$

Como en los procesos anteriores, la solución de λ se halla cuando esta derivada se iguala a cero y se determina con el algoritmo de bisección.

4. Revisión analítica para garantía de cumplimiento de las propiedades del problema UE-D

La solución del problema (B.1) y (B.4) requiere que $z(x)$ sea creciente, convexa y continua. Para esto se analiza la función objetivo de los procesos antes presentados y se presentan valores límite. Además, en el proceso del paso para la búsqueda del mínimo, se debe cumplir que $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces el tiempo de congestión T debe limitarse a ciertos valores. A continuación, se presenta el análisis matemático.

En general, la función $z(x)$ se define en forma continua como una función $g(x)$ que depende del flujo en el arco (x) , la relación volumen a capacidad (X) , el tiempo de la congestión y otros parámetros que son características del arco.

En dos de los casos (Proceso 1 y Proceso 2) antes presentados $z(x)$ se define creciente y continua a tramos, es decir antes de la congestión si $X < I$, $g_1(X)$, y en la congestión cuando $X \geq I$, $g_2(X)$, dado que la función de tiempo de viaje en el arco $f(X)$ también lo es. Esto se representa en la Figura 23:

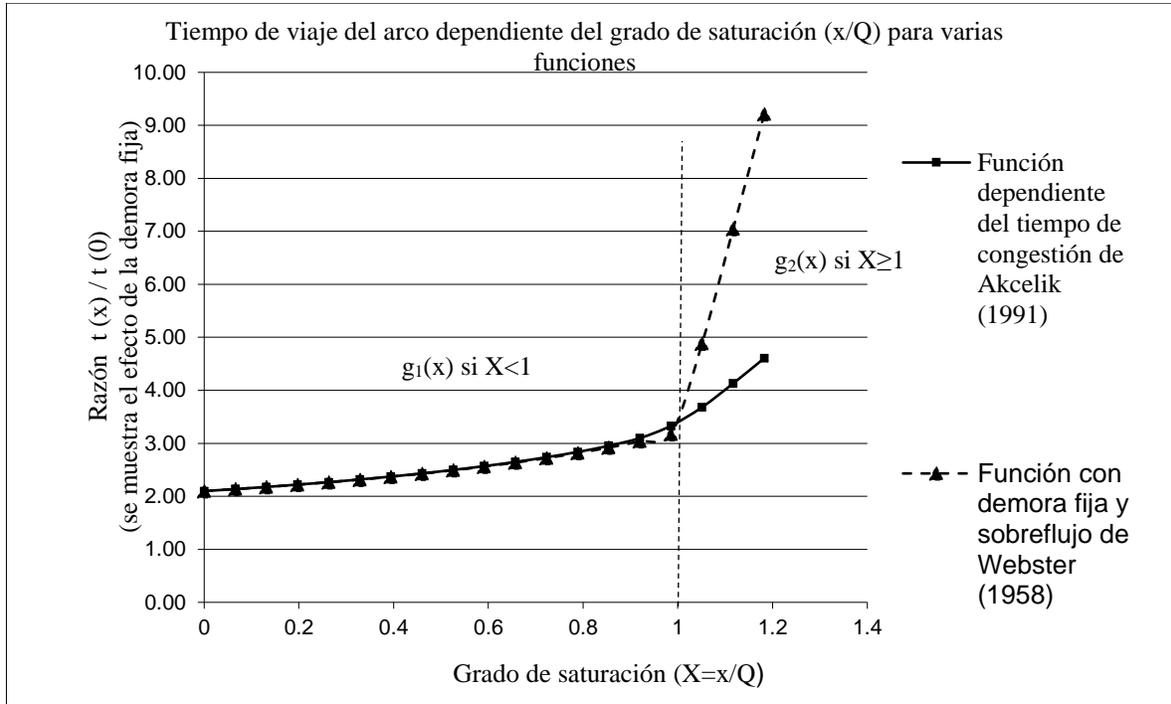


Figura 23. Funciones de tiempo de viaje en un arco semaforizado, creciente y continuidad a tramos

Entonces la función objetivo del problema (B.1) a (B.4) representaría un contorno convexo que contiene a $g(X) = g_1(X) + g_2(X)$, al cual se le busca el mínimo.

4.1 Problema de Beckmann en el Proceso 1: Programa UE-D con función Webster para LS y BPR para LA

Se analizan las funciones de costo expresadas en las ecuaciones (B.20) y (B.21) así:

$$z(x) = \sum_a \left\{ t_{0a} x_a - \phi \left[\frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right)^2 \frac{Q_a C_a}{g_a} \ln \left| 1 - \left(\frac{g_a x_a}{Q_a C_a} \right) \right| \right] + (1 - \phi) \alpha_a \frac{t_{0a} x_a^{\beta_a + 1}}{(\beta_a + 1) Q_a^{\beta_a}} \right\}, \forall X_a \in [0 < X_a < 1] \quad (B.20)$$

Si $0 \leq \frac{x}{Q} < 1$, el logaritmo natural del segundo sumando es negativo, por lo tanto el segundo sumando se vuelve positivo. Como el primero y el tercer sumando son positivos, $z(X)$ es positiva y creciente.

En el caso de la función de la ecuación (B.21) debe analizarse para el caso de arcos semaforizados:

$$z(x) = \sum_a t_{0a} x_a + \phi \frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a} \right) x_a + 0.5 \phi T_f \left(\frac{x_a^2}{2Q_a} - x_a \right) + (1 - \phi) \alpha_a \frac{t_{0a} x_a^{\beta_a + 1}}{(\beta_a + 1) Q_a^{\beta_a}}, \forall X_a \geq 1 \quad (B.21)$$

Si $1 \leq \frac{x}{Q} < 2$, entonces $\left(\frac{x}{2Q} - 1\right) < 0$. Para que $z(X)$ sea positiva y creciente, se establecen las desigualdades

(B.51) a (B.56):

$$\left\{ \frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a}\right) x_a + 0.5T_f \left(\frac{x_a^2}{2Q_a} - x_a\right) \right\} > 0 \quad (\text{B.51})$$

$$\frac{C_a}{2} \left(1 - \frac{g_a}{C_a}\right) x_a > 0.5T_f \left(\frac{x_a^2}{2Q_a} - x_a\right) \quad (\text{B.52})$$

$$C_a \left(1 - \frac{g_a}{C_a}\right) > T_f \left(\frac{x_a}{2Q_a} - 1\right) \quad (\text{B.53})$$

Para $\frac{x}{Q} = 1$:

$$C_a \left(1 - \frac{g_a}{C_a}\right) + T_f \left(\frac{1}{2} - 1\right) > 0 \quad (\text{B.54})$$

$$C_a \left(1 - \frac{g_a}{C_a}\right) > \frac{T_f}{2} \quad (\text{B.55})$$

$$2C_a \left(1 - \frac{g_a}{C_a}\right) > T_f \quad (\text{B.56})$$

Para arcos no semaforizados, el primero y cuarto sumando de (B.21) siempre serán positivos y crecientes.

4.2 Problema de Beckmann aplicado al Proceso 2: Programa UE-D con función Akcelik para LS y LA

Ahora se analizan las propiedades matemáticas de las funciones de las ecuaciones (B.36) y (B.37):

$$z(x) = \sum_a \left\{ [t_{0a} x_a] - \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C}\right)^2 \frac{QC}{g} \ln \left| 1 - \left(\frac{g x_a}{QC}\right) \right| \right] \right\}, \forall X \in (0 \leq X < 1) \quad (\text{B.36})$$

En la función de la ecuación (B.36) el logaritmo natural es negativo, por lo tanto el segundo sumando es positivo y la función es positiva y creciente.

En la función de la ecuación (B.37):

$$z(x) = \sum_a \left\{ \begin{aligned} & \left[t_{0a} x_a \right] + \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right) x_a \right] + r \left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right)^2 + r \left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\ & + r a^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right) \right\} - r + r s - r a^2 \ln \{ 1 - s \} \end{aligned} \right\}, \quad \forall x \geq 1 \quad (\text{B.37})$$

Se debe cumplir la desigualdad (B.57) y por lo tanto la desigualdad (B.58):

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right) x_a \right] + r \left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right)^2 + r \left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\ & + r a^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right) \right\} - r + r s - r a^2 \ln \{ 1 - s \} \end{aligned} \right\} > 0 \quad (\text{B.57})$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{C}{2} \left(1 - \frac{g}{C} \right) x_a \right] + r \left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right)^2 + r \left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\ & + r a^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{x_a}{Q_a} - s \right) \right\} + r s - r a^2 \ln \{ 1 - s \} \end{aligned} \right\} > r \quad (\text{B.58})$$

5. Solución al problema UE-D con el algoritmo de F-W en una red real del D.F. de México

Se presenta una subred de la Ciudad de México con un origen y un destino, compuesta por dos rutas arteriales. Una ruta corresponde a un corredor arterial semaforizado con planes de semáforo coordinados, llamado “Revolución”. El otro es una vía de acceso controlado (tipo autopista urbana) llamado “Segundo Piso Periférico”. Ambas tienen una longitud aproximada de 7.30 km. La Figura 24 presenta el mapa de la red utilizada y el Cuadro 10 detalla las características de los arcos que componen cada corredor vial.

Descripción de la red del caso de estudio:

- Red con 32 arcos, 32 nodos, un origen, un destino y dos rutas.
- Atributos de arco: longitud, número de carriles de circulación, ancho de carril, sentido de circulación, volumen aforado, velocidad a flujo libre.
- Atributos de intersecciones: faseamiento, número de carriles por maniobra, volumen aforado por maniobra, tipo de control, duración del ciclo, tiempo verde efectivo, flujo de saturación, tasa de llegada, flujo de saturación, grado de saturación, demora fija.
- Matriz O-D conocida, fija o variable en el tiempo.

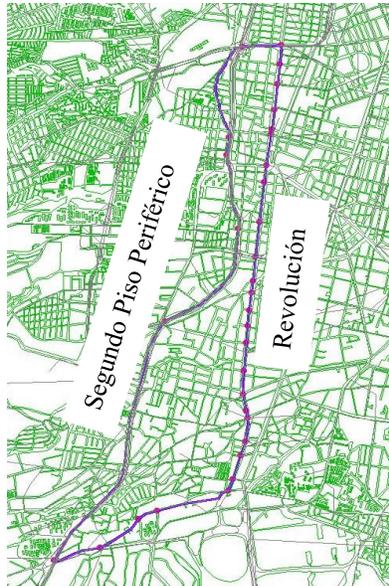


Figura 24. Modelo de red con las rutas “Revolución” (LS) y “Segundo Piso Periférico” (LA).
Elaboración propia con TransCAD

El caso de estudio de la subred de la Ciudad de México se realiza con el equipo de trabajo del Laboratorio de Transporte y Sistemas Territoriales del Instituto de Ingeniería de la UNAM, en una plataforma SIG-T TransCAD®, de la cual se captura la red, construida por esta autora y, posteriormente se representa los resultados del algoritmo de FW programado en C# (González, 2012).

Esta red es utilizada para observar el comportamiento de los resultados provenientes de los procesos de carga 1, 2 y 3 de viajes a la red de la Figura 24, en el problema UE-D. Cada proceso asigna la demanda entre O-D con el uso de funciones de tiempo de viaje y el algoritmo de FW explicados en el aparte 3. Los resultados son comparados y analizados. A continuación, se describen con mayor detalle los componentes de las funciones de tiempo de viaje en cada proceso de carga, en las ecuaciones (B.59), (B.60) y (B.61)

Cuadro 10. Características y parámetros para funciones de tiempo de viaje en el arco, en una red en Ciudad de México, con dos rutas: Revolución y Segundo Piso Periférico

Nombre de corredor	Nombre de la calle	Nº Arco	Tiempo de verde efectivo (s)	Ciclo (s)	Tasa de flujo de saturación (pc/h/c)	Capacidad (pc/h/c)	Número de carriles	Capacidad total (veh/h/c)	Velocidad máxima (km/h)	ta (0) (s / m de arco)	Longitud del arco (m)	ta (0) arco (h)	Alfa (α)	Beta (β)	A
Revolución	Andrea de Castañeda	29	60,31	120,44	1900	951	8	7611	60	0,06	227,67	0,0037945000	0,550	2,000	0,75
	Rembrandt	57	64,84	120	1900	1027	8	8213	60	0,06	226,84	0,0037806667	0,550	2,000	0,75
	Antonio Van Dick	31	64,84	120	1900	1027	8	8213	60	0,06	306,46	0,0051076667	0,550	2,300	0,75
	Mixcoac (2 sem) 58 y 60	60	69,77	120	1900	1105	5	5523	60	0,06	280,98	0,0046830000	0,600	2,400	0,75
	2 Molinos	59	55,12	120	1900	873	6	5236	60	0,06	361,57	0,0060261667	0,400	2,500	0,75
	Castañeda	62	64	120	1900	1013	4	4053	60	0,06	199,77	0,0033295000	0,600	2,350	0,75
	Merced Gómez	61	79,52	120	1900	1259	4	5036	60	0,06	463,25	0,0077208333	0,420	2,600	0,75
	3 Barranca del Mue	40	54,66	120	1900	865	4	3462	60	0,06	402,26	0,0067043333	0,420	2,000	0,75
	Macedonio Alcalá	41	70,21	120	1900	1112	4	4447	60	0,06	283,11	0,0047185000	0,590	2,300	0,75
	Corregidora	63	84,97	120	1900	1345	4	5381	60	0,06	131,75	0,0021958333	0,900	3,000	0,75
	Sofía	42	77,46	120	1900	1226	4	4906	60	0,06	212,05	0,0035341667	0,800	2,300	0,75
	R. Boker	64	62,06	120	1900	983	4	3930	60	0,06	180,14	0,0030023333	0,750	2,000	0,75
	Tlacopac	65	76,57	120	1900	1212	4	4849	60	0,06	196,04	0,0032673333	0,800	2,400	0,75
	María Luisa	66	76,19	120	1900	1206	4	4825	60	0,06	323,82	0,0053970000	0,600	2,300	0,75
	Desierto de los Leones	67	104,65	120	1900	1657	4	6628	60	0,06	269,95	0,0044991667	0,400	4,800	0,75
	Altavista	45	63,97	120	1900	1013	4	4051	60	0,06	194,89	0,0032481667	0,700	2,150	0,75
	4 Madero	78	61,06	120	1900	967	4	3867	60	0,06	84,14	0,0014023333	0,950	2,000	0,75
	Dr Gálvez	46	72,29	120	1900	1145	4	4578	60	0,06	281,4	0,0046900000	0,600	2,300	0,75
	Rey Cuauhtémoc	68	74,7	120	1900	1183	4	4731	60	0,06	168,87	0,0028145000	0,850	2,350	0,75
	Altamirano	48	59,69	120	1900	945	4	3780	60	0,06	283,9	0,0047316667	0,600	1,900	0,75
	Eje 10 Sur	49	52,21	120	1900	827	4	3307	60	0,06	142,43	0,0023738333	0,700	1,800	0,75
Rio Magdalenaxlg	50	87	120	1900	1378	5	6888	60	0,06	832,11	0,0138685000	0,250	3,300	0,75	
Rio MagdalenaxF	69	87	120	1900	1378	5	6888	60	0,06	235,44	0,0039240000	0,700	3,000	0,75	
S Jerónimo	70	87	120	1900	1378	5	6888	60	0,06	544,65	0,0090775000	0,350	3,000	0,75	
5 G. San Jerónimo	71	44,73	120	1900	708	5	3541	60	0,06	533,87	0,0088978333	0,320	2,000	0,75	
Suma Revolución											7367,36	0,1227893333			
Segundo Piso Periférico	San Antonio 2º Pi	1			2000	2000	3	6000	60	0,06	436,6	0,0072766667	0,040	3,000	0,1
		74			2000	2000	2	4000	60	0,06	1188,13	0,0198021667	0,035	3,400	0,1
		73			2000	2000	3	6000	60	0,06	201,27	0,0033545000	0,040	3,000	0,1
		75			2000	2000	3	6000	60	0,06	878,91	0,0146485000	0,040	3,000	0,1
		76			2000	2000	3	6000	60	0,06	1464,02	0,0244003333	0,040	3,000	0,1
	77			2000	2000	3	6000	60	0,06	3104,63	0,0517438333	0,040	3,000	0,1	
Suma 2º Piso											7273,56	0,1212260000			

$$\text{Proceso de carga 1: } t(x_a) = t_{ff-LS} + d_a^1 \text{-LS-Webster} + d_a^2 \text{-LS-Webster} + d_a^2 \text{-LA-BPR} \quad (\text{Aparte 3.1}) \quad (\text{B.59})$$

$$\text{Proceso de carga 2: } t(x_a) = t_{ff} + d_a^1 \text{-LS-Webster} + d_a^2 \text{-LS-Akcelik} + d_a^2 \text{-LA-Akcelik} \quad (\text{Aparte 3.2}) \quad (\text{B.60})$$

$$\text{Proceso de carga 3: } t(x_a) = f_{BPR} \quad (\text{Apartado 3.3}) \quad (\text{B.61})$$

Los resultados calculados con el algoritmo de FW son confrontados con indicadores de tiempo de recorrido y ritmo de viaje, mediante el uso de una metodología que usa información de recorrido de cada vialidad con GPS (Londoño y Lozano, 2014 a) con el fin de verificar su realismo.

6. Resultados

El algoritmo fue corrido para varias demandas O-D y tiempo de congestión. Se presentan los productos más relevantes.

Los resultados muestran que las funciones dependientes del flujo son crecientes, continuas a tramos y apropiadas para la solución de UE-D con el algoritmo de FW.

Algunos resultados de los procesos de carga 1 y 2 son mostrados en la red de la Figura 25 y Figura 26, con una demanda de 11,500 viajes/h y un tiempo de sobreflujo de 15 minutos. El proceso 3 fue realizado con el fin de

hacer comparaciones, ya que es la función más usada por estudiosos y prácticos de transporte, y los resultados se muestran en la Figura 27. Para ello, los parámetros de la función BPR, α y β , fueron calibrados para que coincidieran las tres funciones usadas.

El alcance de la prueba es evaluar el desempeño del algoritmo mediante el uso de funciones combinadas, lo cual se ha logrado satisfactoriamente. Además, hacer el análisis comparativo de los indicadores de tiempo de ruta y costo de la red.

El menor costo en la red es obtenido con el uso de la función única BPR (1964), pues esta función ignora las demoras fijas y de sobreflujo ocasionadas por los semáforos. Las funciones mixtas de los procesos 1 y 2 son pueden ser más realistas ya que permiten considerar demoras fijas y de sobreflujo ocasionadas por semáforos.

En el Cuadro 11 se resumen los resultados para varios indicadores.

Para observar la variabilidad en el comportamiento del modelo de asignación UE-D, en la red de la Figura 24, se realizó el proceso de carga 2 para demandas O-D entre 6000 y 10000 vehículos personales por hora. La función de tiempo de viaje del proceso de carga 2 parece ser más real, dado que incluye variables más sensibles y acorde con la operación de los arcos. Los resultados se muestran mediante diagramas espacio-tiempo en la Figura 28 y la Figura 29. Las líneas presentan la variación del tiempo de viaje a lo largo de la longitud de cada ruta. Los segmentos entre marcadores describen el tiempo de viaje de cada arco que compone la ruta. Obsérvese el efecto de la demora fija y la demora de sobreflujo en las intersecciones semaforizadas a lo largo de la ruta Revolución (LS), las cuales se representan en cada marcador de la línea. En la ruta Segundo Piso Periférico (LA), el efecto de la demora de sobreflujo se ve en un cuello de botella que se forma, antes del kilómetro 2, sitio donde se unen el lazo de San Antonio y la vía de cuota. En este sitio se pasa de un arco de dos carriles a otro de tres carriles.

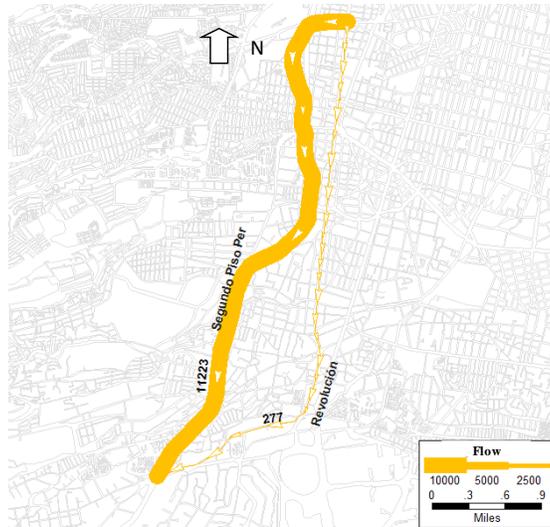


Figura 25. Flujo estimado de la sub-red de la Ciudad de México, mediante el Proceso 1 usando funciones combinadas de Webster y BPR, y una demanda de 11,500 viajes/h.

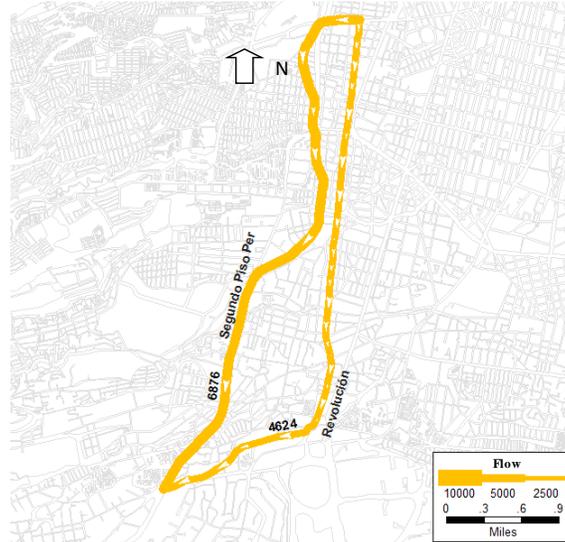


Figura 26. Flujo estimado de la sub-red de la Ciudad de México, mediante el Proceso 2 usando funciones combinadas de Webster y Akcelik, con demanda de 11,500 viajes/h.

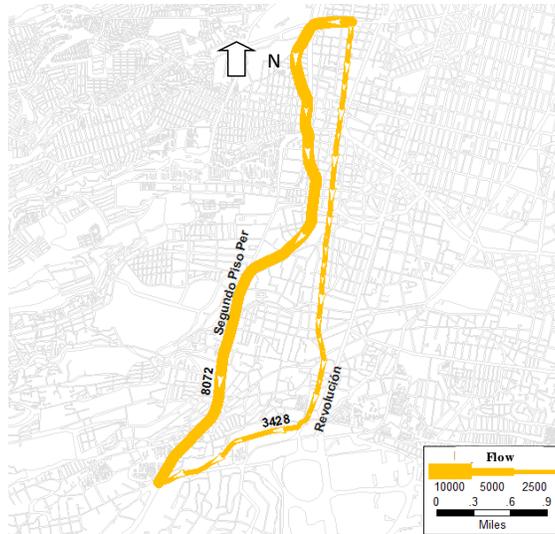


Figura 27. Flujo estimado de la sub-red de la Ciudad de México, mediante el Proceso 3 usando la función BPR, con 11,500 viajes/h.

Cuadro 11. Resumen de resultados de los tres procesos de carga en la Red vial Revolución-S. P. Periférico en Ciudad de México

Función de tiempo de viaje	Costo de la red $z(x_a)$ (h)	Flujo en la ruta semaforizada, Revolución (LS) (veh/h)	Flujo en la ruta de acceso limitado, S. P. Periférico (LA) (veh/h)	Tiempo en la arteria semaforizada, Revolución (LS) (h)	Tiempo la ruta de acceso controlado, S. P. Periférico (LA) (h)
1: $t(x_a) = t_{ff}$ + d_a^1 -LS-Webster + d_a^2 -LS-Webster + d_a^2 -LA-BPR	1648	277	11223	0.205278 (12.32 min)	0.205275 (12.32 min)
2: $t(x_a) = t_{ff}$ + d_a^1 -LS-Webster + d_a^2 -LS-Akcelik-SC + d_a^2 -LA-Akcelik	2697	4624	6876	0.544863 (32.69 min)	0.543624 (32.62 min)
3: $t(x_a) = f_{BPR}$	1491	3428	8072	0.151746 (9.10 min)	0.151729 (9.10 min)

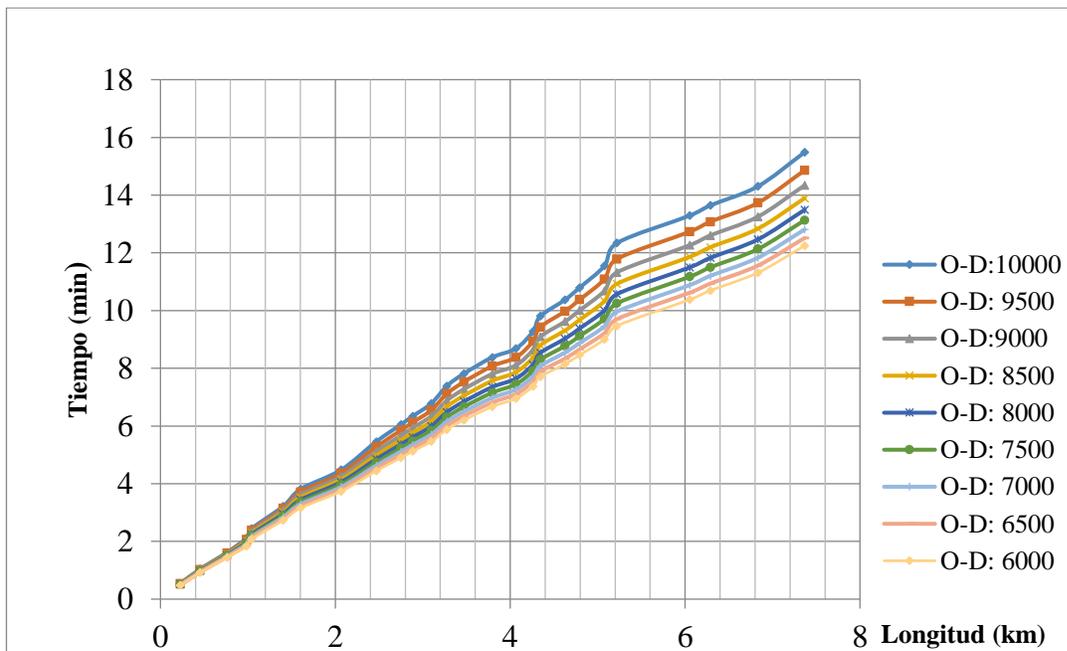


Figura 28. Tiempo de viaje de la ruta semaforizada, Revolución (LS), en la red (Figura 24) cargada con varias demandas (O-D) en pc/h y tiempo de sobreflujo $T = 5$ min, aplicando el proceso 2

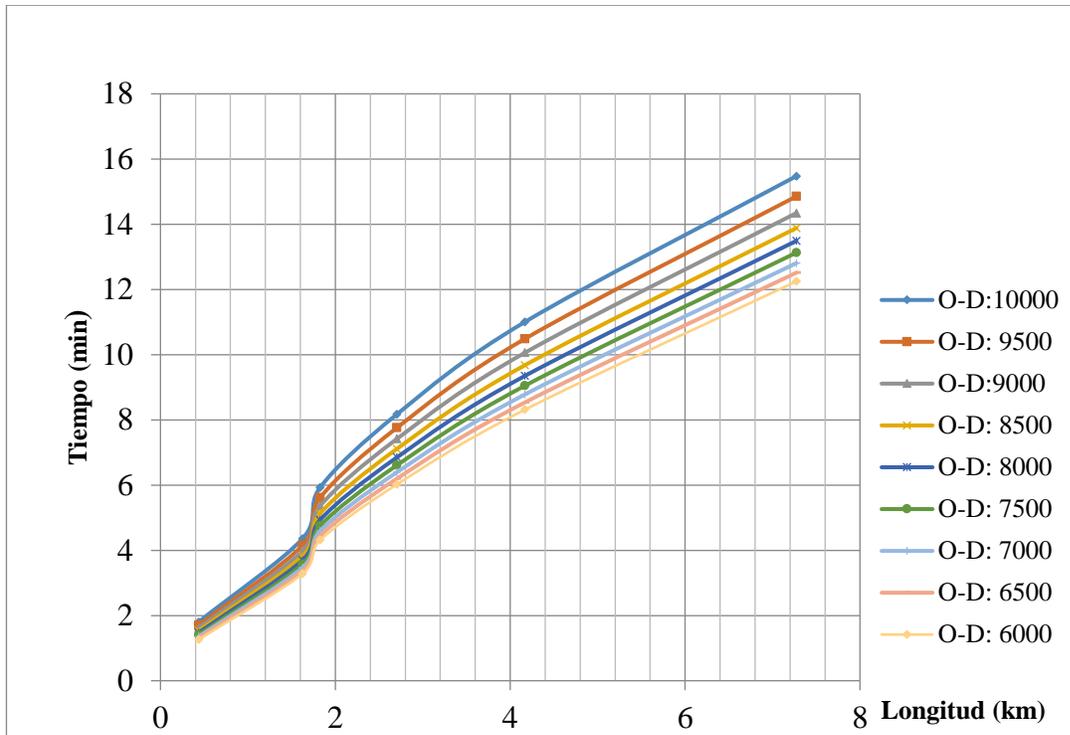


Figura 29. Tiempo de viaje de la ruta de acceso controlado, Segundo Piso Periférico (LA), en la red (Figura 24) cargada con varias demandas (O-D) en pc/h y tiempo de sobreflujo $T=5$ min, aplicando el proceso 2.

Los resultados de este modelo pueden validarse con la metodología presentada en el Apéndice D, complementado con aforos vehiculares o información observada de la condición del tránsito.

Se ha recogido información de estudios de tiempo de recorrido y demora, durante los dos últimos años para validar los resultados de la investigación. A continuación, se presentan los resultados e imágenes de estudios de tiempo de recorrido con GPS-My Tracks, en el Cuadro 12, la Figura 30, la Figura 31, la Figura 32, la Figura 33, usando una metodología propuesta por Londoño, G. y Lozano, A. (2014a).

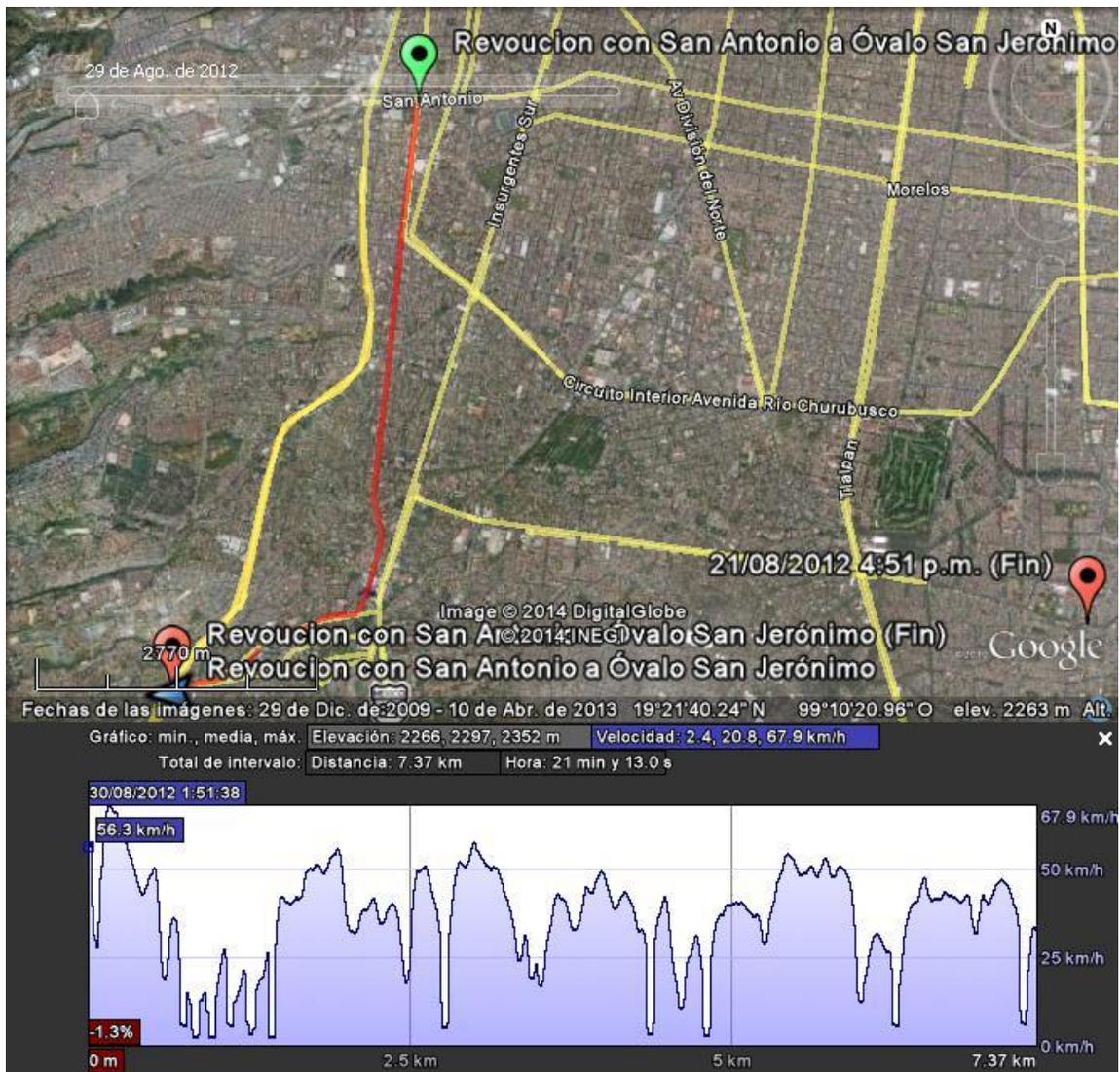


Figura 30. Ruta recorrida en la vía Revolución en agosto 29 de 2012, 8:51 pm.
 Datos propios con GPS-MyTracks desplegado en Google Earth.

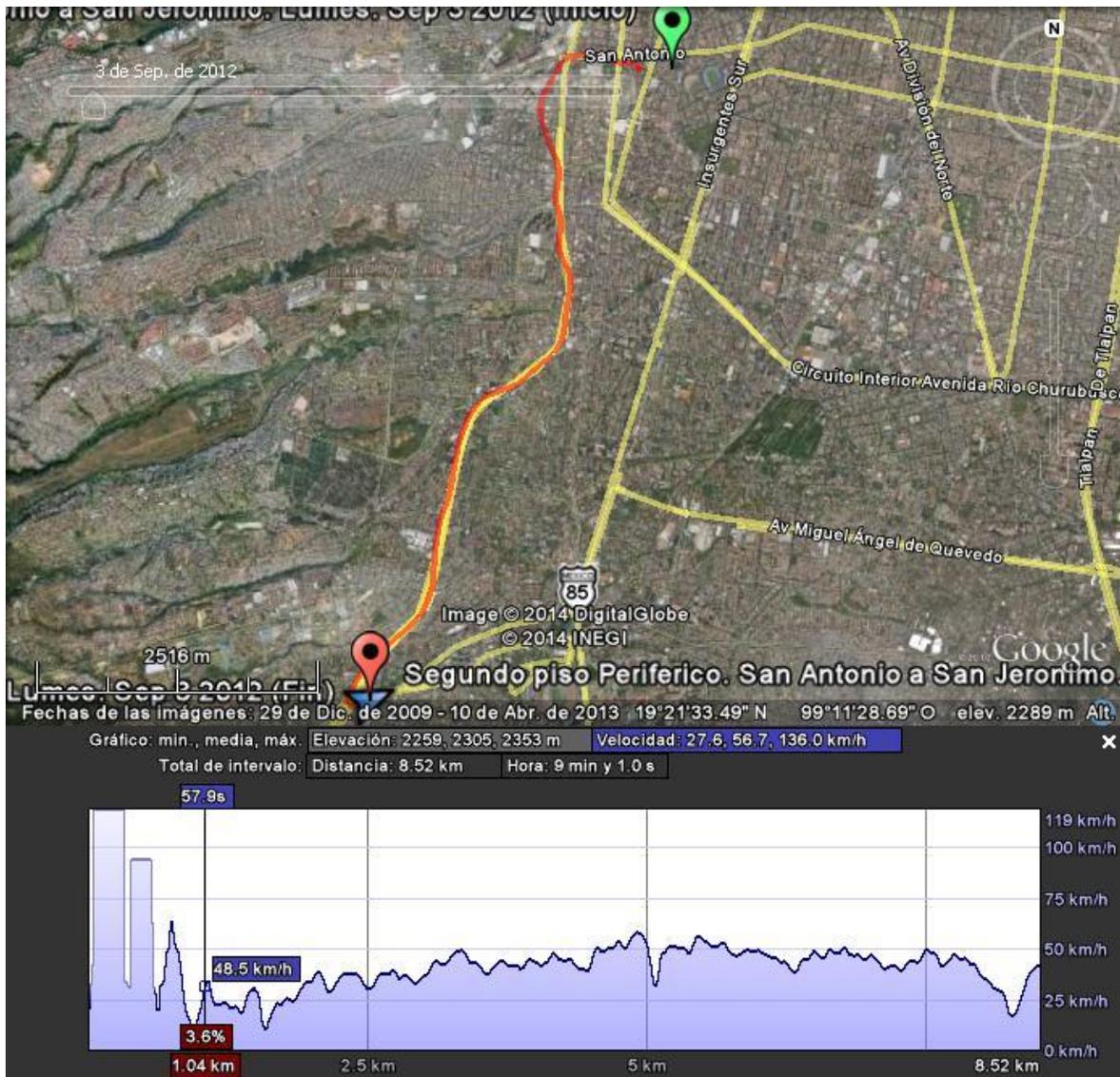


Figura 31. Ruta recorrida en la vía S.P. Periférico en septiembre 3 de 2012, 5:53 pm.
Datos propios con GPS-MyTracks desplegado en Google Earth.

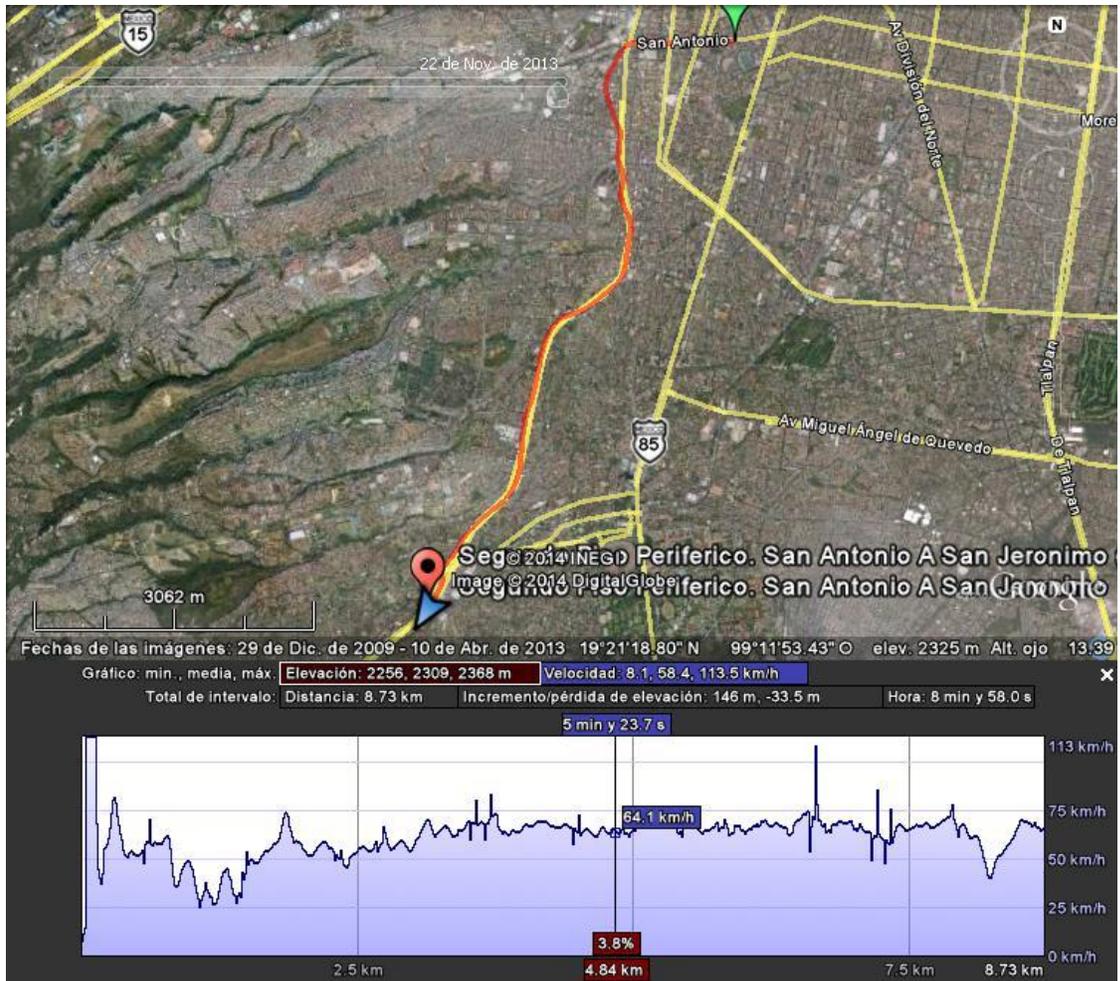


Figura 32. Ruta recorrida en la vía S.P. Periférico en noviembre 22 de 2013, 9:01 am.
Datos propios con GPS-MyTracks desplegado en Google Earth.

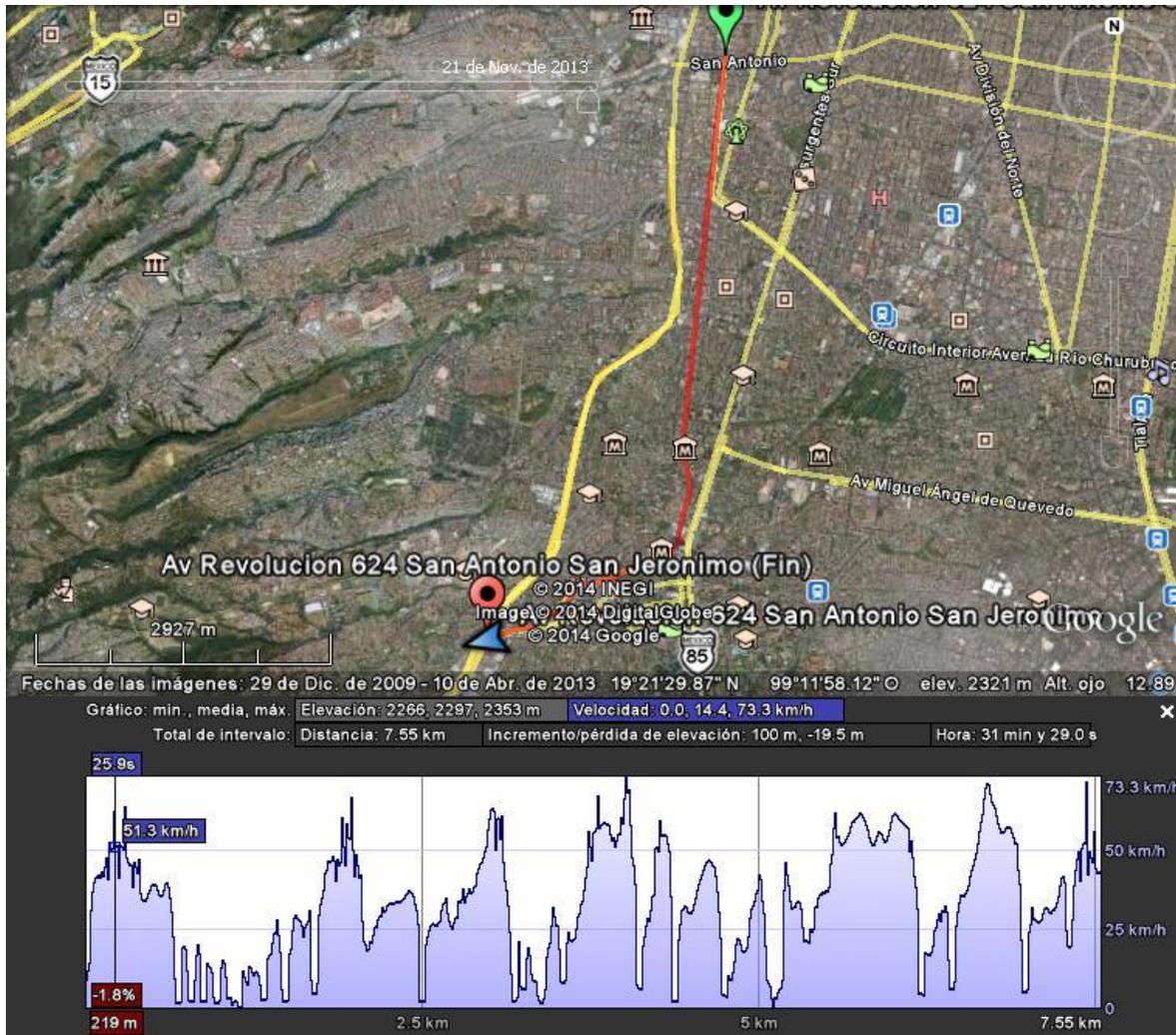


Figura 33. Ruta recorrida en la vía Revolución en noviembre 21 de 2013, 9:24 am.
 Datos propios con GPS-MyTracks desplegado en Google Earth.

Cuadro 12. Resumen de resultados del estudio de recorrido en la Red vial Revolución-S. P. Periférico en Ciudad de México

Corredor	Proceso_LL_GPS-My Tracks (Londoño y Lozano, 2014)				
	Revolución	S. P. Periférico	Revolución	S. P. Periférico	S. P. Periférico
Fecha	29/08/2012	03/09/2012	21/11/2013	22/11/2013	21/11/2013
Hora	08:51 p.m.	05:53 p.m.	09:24 a.m.	09:01:28 a.m.	10:29 a.m.
Longitud (km)	7.26	7.58	7.52	7.93	7.92
Tiempo de recorrido (min)	21.08	8.25	31.15	8.05	8.67
Demora total (min)	5.48	0.00	16.02	0.00	0.20
Velocidad de recorrido (km/h)	20.65	55.10	14.48	59.12	54.82
Tiempo de marcha (min)	15.60	8.25	15.13	8.05	8.47
Velocidad de marcha (km/h)	27.91	55.10	29.81	59.12	56.11
Notas	Congestión	Flujo rápido	Congestión	Flujo rápido	Flujo rápido
	escasas filas remanentes		Sin eventos	Sin eventos	

Los resultados del tiempo de recorrido, que se presentan en el Cuadro 12, se compadecen con la condición del tránsito observado. Los colores de las celdas ayudan a visualizar la calidad de la movilidad, esto es: verde (flujo rápido), amarillo (flujo moderado con filas escasas) y anaranjado (flujo lento).

En el Cuadro 13 se comparan los resultados del tiempo de recorrido obtenidos de la solución del programa matemático mediante el algoritmo de FW, mostrados en el Cuadro 11, y los obtenidos del estudio de recorrido real con GPS-MyTracks del Cuadro 12.

Cuadro 13. Comparación de resultados de la solución analítica de la red de la Figura 24, con el algoritmo de FW y, el estudio de recorrido en la Red vial Revolución-S. P. Periférico real en Ciudad de México

Corredor	Solución F-W (Londoño y Lozano, 2012)			Proceso_LL_GPS-My Tracks (Londoño y Lozano, 2014)				
	Proceso	Revol (min)	Perif (min)	Revolución	S. P. Periférico	Revolución	S. P. Periférico	S. P. Periférico
Fecha				29/08/2012	03/09/2012	21/11/2013	22/11/2013	21/11/2013
Hora				08:51 p.m.	05:53 p.m.	09:24 a.m.	09:01:28 a.m.	10:29 a.m.
Longitud (km)		7.37	7.27	7.26	7.58	7.52	7.93	7.92
Tiempo de recorrido (min)	Webs+BPR	12.31668	12.3165	21.08	8.25	31.15	8.05	8.67
Tiempo de recorrido (min)	Webs+Akelik	32.69178	32.61744					
Tiempo de recorrido (min)	BPR	9.10476	9.10374					
Demora total (min)				5.48	0.00	16.02	0.00	0.20
Velocidad de recorrido (km/h)				20.65	55.10	14.48	59.12	54.82
Tiempo de marcha (min)				15.60	8.25	15.13	8.05	8.47
Velocidad de marcha (km/h)				27.91	55.10	29.81	59.12	56.11

Se aclara que los tiempos de recorrido están relacionados con el volumen de tránsito y la densidad del flujo, los cuales no se aforaron al momento de realizar los recorridos, sin embargo, el propósito es verificar el realismo del modelo y su solución, en condición de tráfico similar, ya sea flujo rápido, moderado o congestionado, lo cual puede deducirse de la relación volumen a capacidad (V/C) cualitativamente presentada en la Figura 25 la Figura 26, la Figura 27, con color más intenso (tránsito cercano a la congestión). Entonces, en el Cuadro 13

puede observarse que el tiempo de recorrido de la vía Revolución obtenido mediante el proceso de carga 2 con el algoritmo de FW tiene un valor aproximado al medido con el estudio de recorrido con GPS-MyTracks y la condición de tráfico similar, el 21 de noviembre de 2014 (ver celdas de color anaranjado). No se puede comparar los resultados del tiempo de recorrido para el S.P. de Periférico, ya que el calculado con el algoritmo de FW indica tráfico cercano a la congestión, y el estudio de recorrido real se hizo en condición de flujo rápido. No obstante, podría afirmarse que el proceso de carga 2, con la función de tiempo de viaje propuesta si es más real que la del proceso 3 y 1. Otros estudios de recorrido complementados con mediciones de volumen de tránsito puede hacer para estimar la precisión del modelo en el proceso 2, pero esto sería otro tema de estudio futuro.

Finalmente, en la Figura 34, Figura 35, Figura 36, Figura 37, Figura 38, Figura 39, Figura 40, Figura 41 se muestra un diagrama espacio-tiempo de ambas rutas para varias demandas, cargadas en la red de la Figura 24 con el proceso 2. El tiempo de recorrido de cada ruta es el mismo entre el par O-D, como lo garantiza el modelo UE-D. Sin embargo, hay variabilidad en tramos intermedios de ambos corredores viales, debido a las diferentes características de los arcos semaforizados y de acceso controlado.

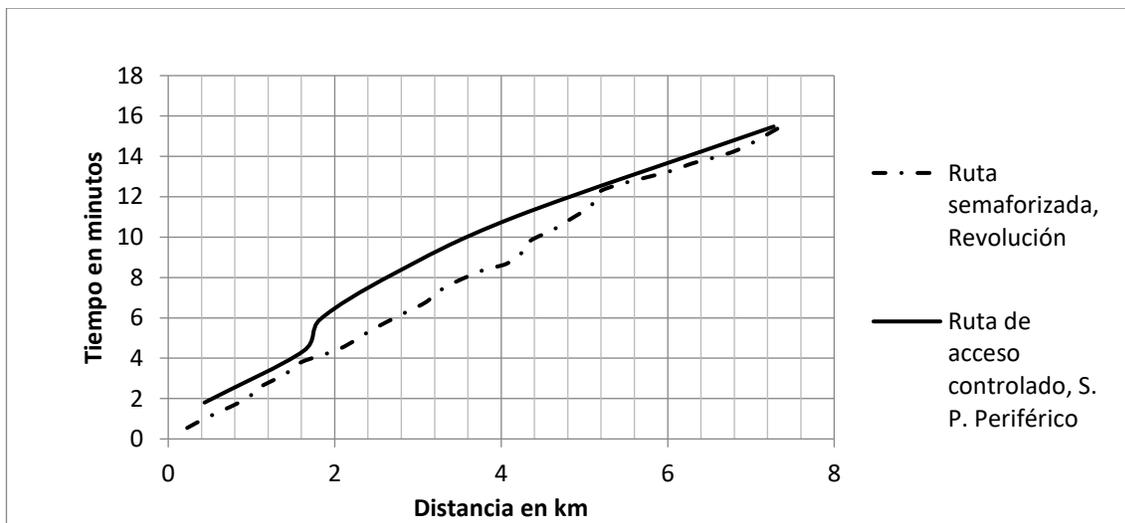


Figura 34. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 10000 pc/h con $T=5$ min, cargada con proceso 2.

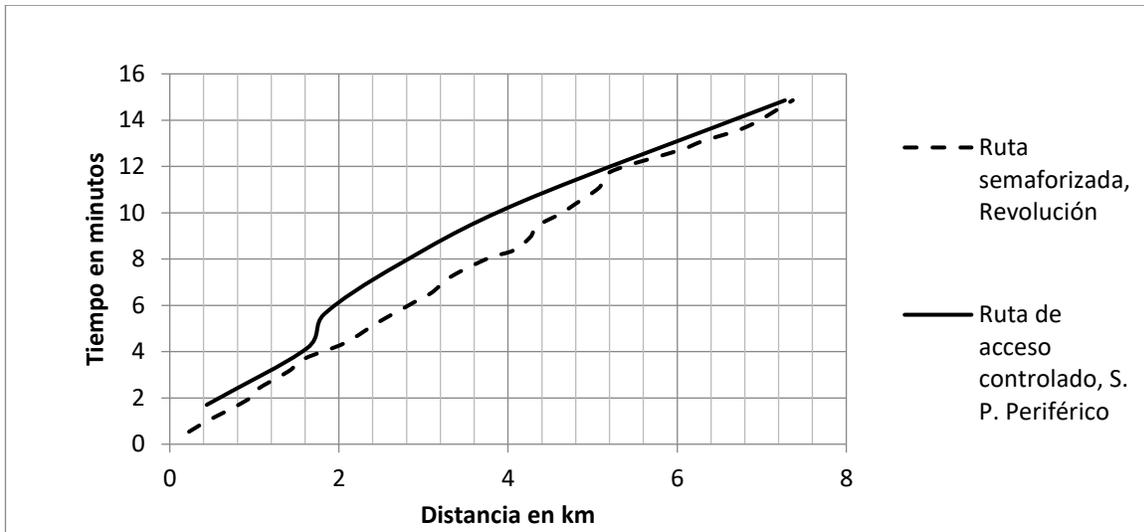


Figura 35. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 9500 pc/h con T= 5 min, cargada con proceso 2.

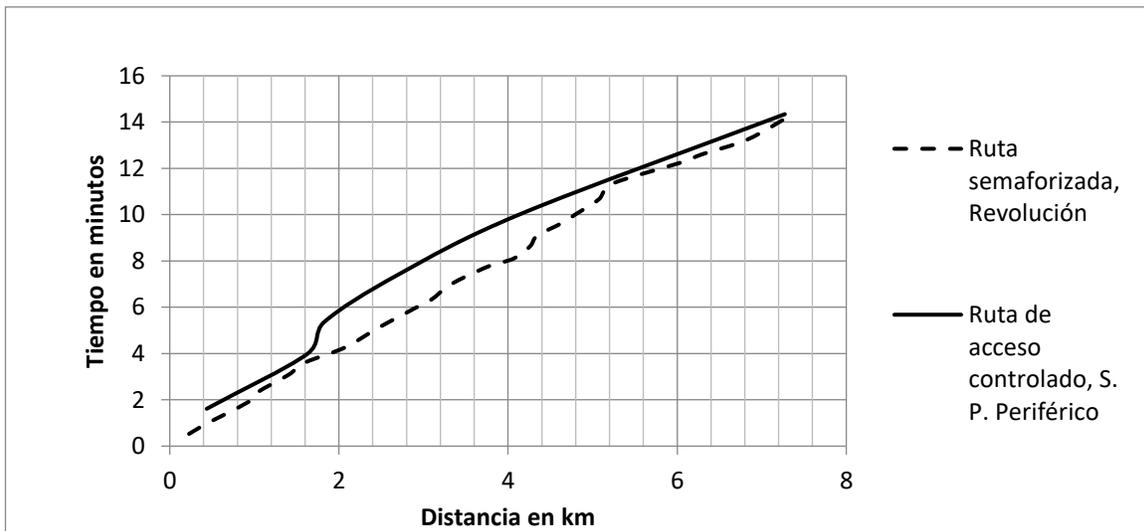


Figura 36. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 9000 pc/h con T= 5 min, cargada con proceso 2.

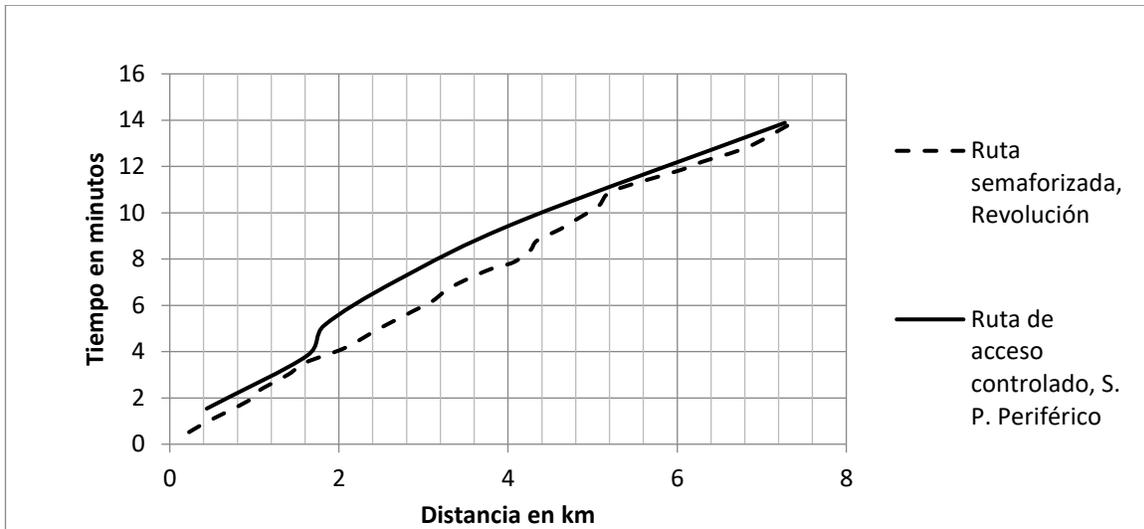


Figura 37. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 8500 pc/h con $T = 5$ min, cargada con proceso 2.

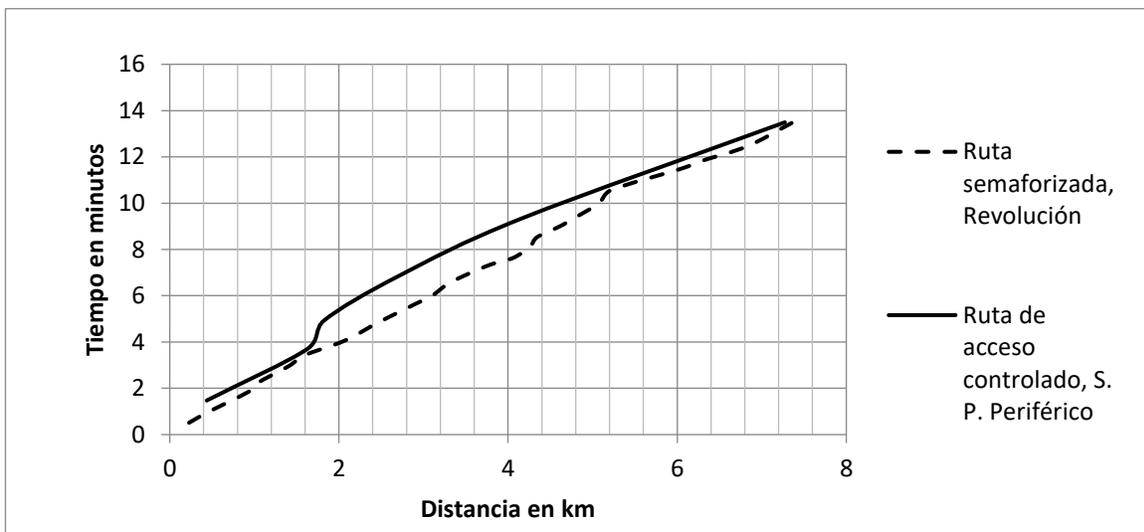


Figura 38. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 8000 pc/h con $T = 5$ min, cargada con proceso 2.

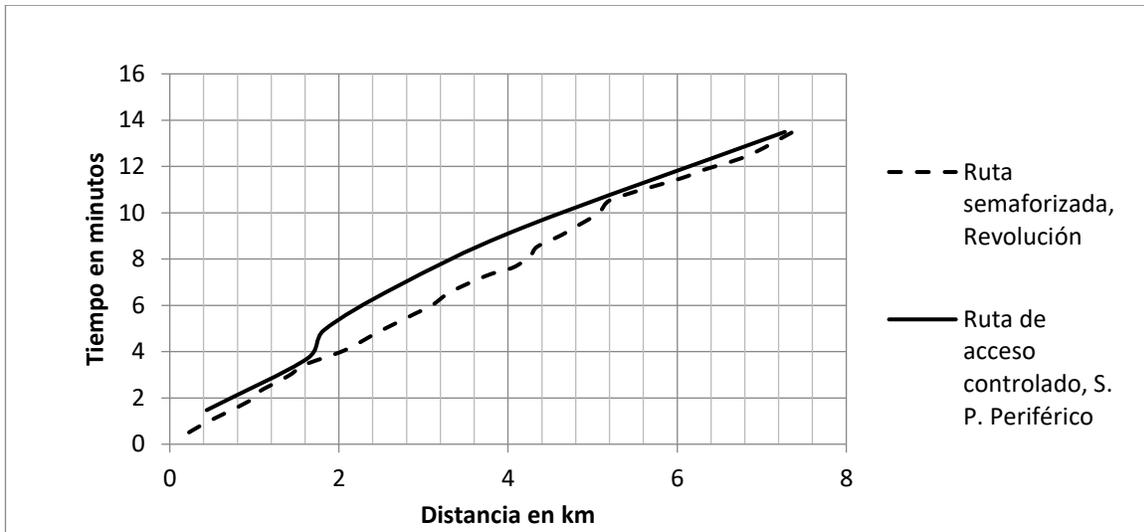


Figura 39. Tiempo de ambas rutas de la red (Figura 24), con demanda O-D de 6000 pc/h con T= 5 min, cargada con proceso 2.

A continuación, se presenta algunos diagramas espacio-tiempo obtenidos del análisis de coordenadas geográficas, capturadas en los estudios de recorrido de sendos corredores viales con GPS-MyTracks. Estos gráficos son un recurso complementario de verificación del algoritmo F-W y de la función usada en el proceso de carga 2.

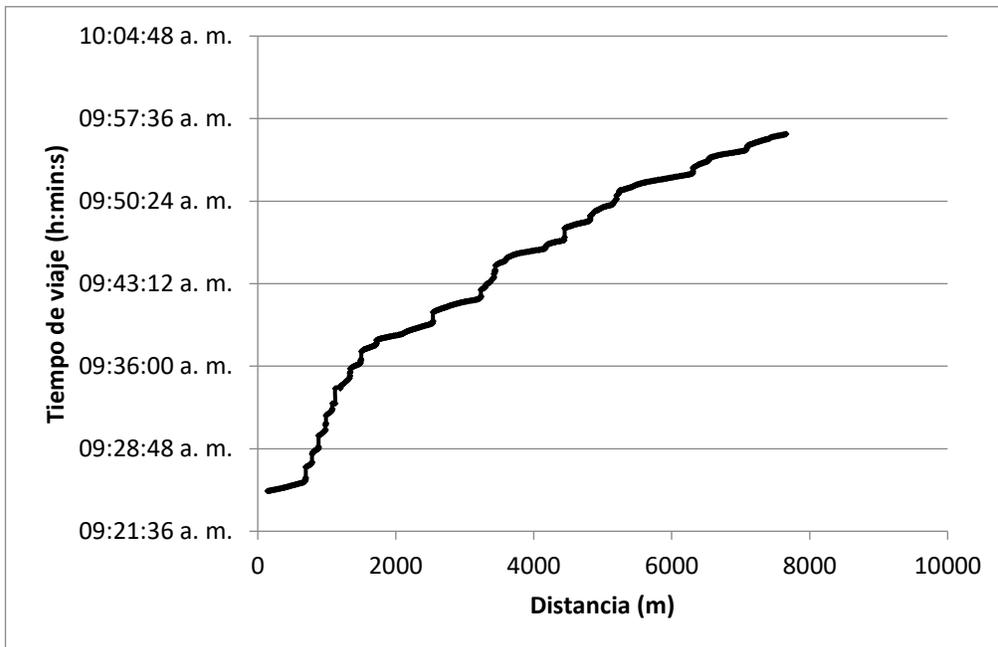


Figura 40. Diagrama espacio-tiempo de la vía Revolución entre San Antonio y Glorieta de San Jerónimo. Noviembre 21 de 2013, 9:24 a.m. Datos y elaboración propia

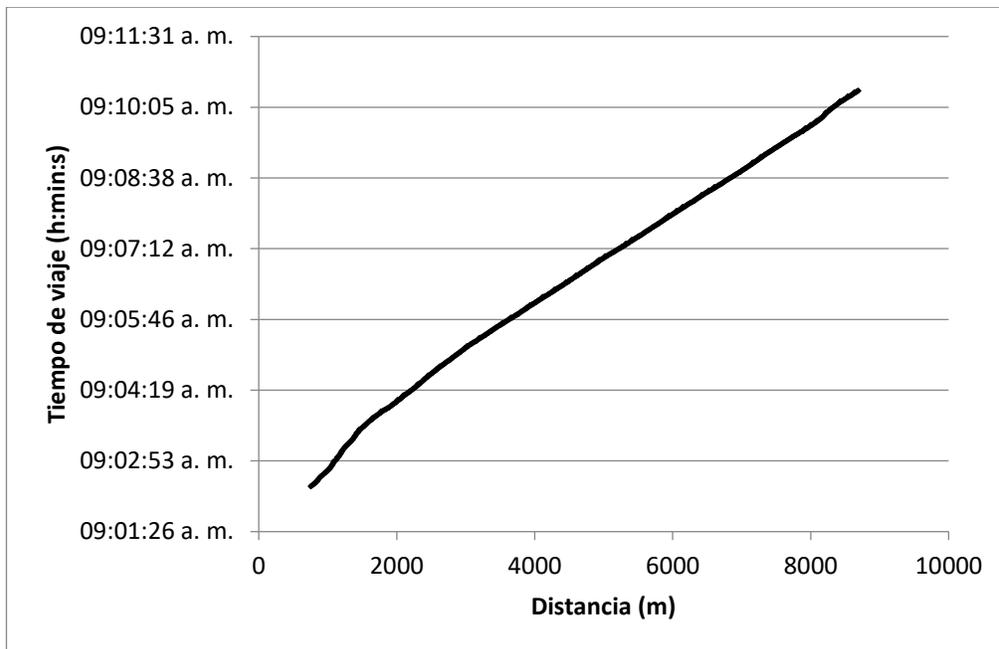


Figura 41. Diagrama espacio-tiempo S. P. Periférico entre San Antonio y Glorieta de San Jerónimo. Noviembre 22 de 2013, 9:01 a.m. Datos y elaboración propia

El análisis de sensibilidad de los patrones de viaje resultantes del modelo UE-D, cargado con los procesos 1, 2 y 3 en la red de la Figura 24, muestran la presencia de cuellos de botella y demoras en nodos, las cuales pueden causar efectos y complejidades de la operación vial, como colas, con consecuencias adicionales en el tránsito, cuyo cálculo rebasa el alcance del enfoque macroscópico mediante éste modelo de asignación. En el capítulo siguiente se abordará este problema.

7. Conclusiones

En este apéndice se proponen funciones de tiempo de viaje combinadas, con funciones de costo que introducen funciones de tiempo de viaje en el arco que incluyen demoras que dependen del número de vehículos en el arco, así como demora uniforme por control semafórico y demora por sobreflujo, para vías reguladas con semáforos. Estas funciones también son dependientes del tiempo que se mantiene la congestión y tienen características matemáticas apropiadas para realizar evaluaciones macroscópicas de patrones de tráfico, con enfoque analítico. Entonces se formula el problema de asignación de equilibrio del usuario determinístico y se deducen las expresiones analíticas necesarias para solucionarlo mediante el algoritmo de Frank-Wolfe. Se realiza un análisis matemático de su desempeño y se encuentra límites en sus parámetros.

Las funciones basadas en la teoría de flujo de tráfico permiten obtener estimaciones realistas y admiten cambios en las características de los arcos. Su uso es común en análisis microscópicos. No obstante, incorporarlas a un análisis macroscópico, así sea estático, constituye un recurso poderoso para actividades de planeación de

transporte y es un aporte en el campo de la investigación de asignación de viajes en redes urbanas. No obstante, es posible obtener información espacial y temporal de cada ruta.

Los resultados obtenidos en el caso de estudio, en una red real, muestran que el algoritmo se adapta a la incorporación de funciones de costo combinadas, con el cual se obtiene una solución única.

Las funciones de tiempo de viaje usadas en el proceso 2, el cual considera la función de tiempo de viaje a flujo libre más la demora de sobreflujo dependiente del tiempo propuesta por Akcelik, tanto para arcos de acceso controlado como los semaforizados, y adiciona la demora uniforme de Webster, para los últimos, presentaron características adecuadas y muestra un buen desempeño de la solución del problema de asignación de tráfico con el algoritmo FW. Además producen estimaciones de tiempo de viaje más reales, tal como se verifica mediante los estudios de recorrido reales mediante GPS-Mytracks y un proceso metodológico que usa las coordenadas geográficas.

Las funciones de costo y las necesarias para realizar el algoritmo FW, se definen continuas a tramos y se especifican el uso de sus parámetros. Esto representa un aporte para los desarrolladores de software de planeación de transporte.

Los diagramas espacio-tiempo con los tiempos de viaje y demoras a lo largo de la longitud de las rutas, estimado mediante el modelo UE-D, puede ser comparado con los obtenidos mediante la metodología presentada en el caso de estudio del capítulo 1. Tal información es valiosa para calibrar y validar parámetros de las funciones de tiempo de viaje en los arcos y del modelo propuesto.

Referencias

- Afandizadeh, S.a, Kalantari, N.a, Rezaeestakhrue, H. 2012. "A partial linearization method for multi-objective continuous network design problem with environmental considerations". *International Journal of Environmental Research*, Volume 6, Issue 2, Pages 381-390
- Akçelik, R. 2003. *Speed-flow models for uninterrupted traffic facilities*. In Technical Report, Akcelik and Associates Pty
- Akçelik, R. 2000. *Travel time functions for transport planning purposes: Davidson's function, its time-dependent form and an alternative travel time function*. In Akcelik & Associates Pty Ltd. *Australian Road Research* 21 (3), 1991, pp. 49-59, reprint with minor revisions, Greythorn Victoria, Australia, 2000, pp. 1 - 13.
- Boyce, D. E., Mahmassani, H. S., Nagurney, A. 2005. "A retrospective on Beckmann". *McGuire and Winsten's Studies in the Economics of Transportation*. RSAI 2005. In Blackwell Publishing, Malden, USA, 2004, pp. 86-103.
- Frank, M. y Wolfe, P. 1956. "An algorithm for quadratic programming". *Naval Research Logistics Quarterly*, 3, 1956, pp. 95-110.

- Gastaldi, M. and Rossi, R. 2011. "A methodology for calibrating road link travel time functions using data from driving simulator experiments". *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. Volume 20, 2011, Pages 656-665
- González, H. 2012. *Implementación de un algoritmo para la asignación de tráfico vehicular*. Tesis de Licenciatura en Ingeniería en Computación. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Kuang, A., Huang, Z., Kuang, Q. 2011. "Evaluation method for travel time reliability of road network with stochastic demand". *Xinan Jiaotong Daxue Xuebao/Journal of Southwest Jiaotong University* Volume 46, Issue 5, October 2011, Pages 861-867
- Qi, H., Wang, D., Bie, Y., Song, X. 2011. "Travel time function for basic link considering signal control in network traffic model". *Journal of Southeast University*. Volume 27, Issue 3, September 2011, Pages 305-310
- Roess, R. P., Prassas, E. S., McShane, W. R. 2004. *Traffic Engineering*. Third Edition, Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey, 2004.
- Sheffi Y. 1984. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.
- Wardrop, J.G. 1952. "Some theoretical aspects of road traffic research". In *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, London, Part II (1), 1952, pp. 325-378.
- Yang, C., Wang, C., Chen, D.-D. 2011. "A new type of impedance functions for traffic assignment" (Conference Paper). *Proceedings of the 11th International Conference of Chinese Transportation Professionals: Towards Sustainable Transportation Systems*, ICCTP 2011; Nanjing; 14 August 2011 through 17 August 2011; Code 86701. 2011, Pages 796-803

Anexo. Deducción de formulaciones para el algoritmo Frank-Wolfe, del programa matemático de asignación de tráfico determinístico, con función de tiempo de viaje dependiente del tiempo de sobreflujo de Akcelik (1991)

Si el costo de la red, $z(x)$, se estima mediante la función de tiempo de arco de Akcelik 1991, para arcos no semaforizados, la función de tiempo de viaje en el arco se presenta en la ecuación (B.62) y la función de costo de la red en la ecuación (B.63):

$$f(x) = t_{0a} + 0.25T_f \left\{ (X - I) + \left[(X - I)^2 + \left(\frac{8AX}{Q_a T_f} \right)^{0.5} \right] \right\}; \left[\frac{s}{km} \right] \quad (B.62)$$

$$z(x) = \int_0^{x_a} \left\{ t_{0a} + 0.25T_f \left\{ (X - I) + \left[(X - I)^2 + \left(\frac{8AX}{Q_a T_f} \right)^{0.5} \right] \right\} \right\} dx \quad (B.63)$$

Para resolver la integral hay que aplicar propiedades:

$$z(x) = \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} (X-1) dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[(X-1)^2 + \left(\frac{8AX}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5} dx \quad (\text{B.64})$$

Mediante sustitución de $X = \frac{x}{Q}$, queda:

$$z(x) = \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right) dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} dx \quad (\text{B.65})$$

Los dos primeros sumandos se resuelven en forma simple. El tercer sumando necesita la siguiente integral:

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left[u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right] \quad (\text{Cálculo mediante transformación trigonométrica, Leithol})$$

Para adaptar la función de costo se hace una transformación del tercer sumando:

$$\left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} = \left[\frac{x^2}{Q^2} - \frac{2x}{Q} + 1 + \frac{8Ax}{Q^2 T_f} \right]^{0.5} \quad (\text{B.66})$$

$$\left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} = \left[\frac{x^2}{Q^2} - \frac{2x}{Q} \left(1 - \frac{4A}{QT_f} \right) + 1 \right]^{0.5} \quad (\text{B.67})$$

$$\left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} = \left[\left[\frac{x}{Q} - \left(1 - \frac{4A}{QT_f} \right) \right]^2 - \left(1 - \frac{4A}{QT_f} \right)^2 + 1 \right]^{0.5} \quad (\text{B.68})$$

$$\left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} = \left[\left[\frac{x}{Q} - \left(1 - \frac{4A}{QT_f} \right) \right]^2 + 1 - 1 + \frac{8A}{QT_f} - \frac{16A^2}{Q^2 T_f^2} \right]^{0.5} \quad (\text{B.69})$$

$$\boxed{\left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} = \left[\left[\frac{x}{Q} - \left(1 - \frac{4A}{QT_f} \right) \right]^2 + \frac{4A}{QT_f} \left(2 - \frac{4A}{QT_f} \right) \right]^{0.5}} \quad (\text{B.70})$$

Ahora se define a:

$$u^2 = \left[\frac{x}{Q} - \left(1 - \frac{4A}{QT_f} \right) \right]^2 \quad \text{y} \quad a^2 = \frac{4A}{QT_f} \left(2 - \frac{4A}{QT_f} \right) \quad (\text{B.71})$$

$$du = \frac{1}{Q} dx \quad (\text{B.72})$$

Entonces:

$$\int_0^{x_a} \left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} dx = \frac{1}{Q_a} \int_0^{x_a} \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5} dx \quad (\text{B.73})$$

$$\int_0^{x_a} \left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} dx = \frac{Q_a}{2} \left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right) \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5} + \frac{4A}{2Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \ln \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right] + \left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right) \Bigg\} + C \quad (\text{B.74})$$

Obtenida la solución del tercer sumando, se presenta la solución de la función de costo de la red, cuya función de tiempo de arco se expresa como la propuesta por Akcelik (1991)

$$z(x) = \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right) dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{8Ax}{Q_a^2 T_f} \right) \right]^{0.5} dx \quad (\text{B.75})$$

$$z(x) = \left. \begin{aligned} & t_{0a} x + \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right) \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5} \\ & + \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left\{ \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right\} \ln \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right] + \left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right) \Bigg\} + C \end{aligned} \right]_0^{x_a} \quad (\text{B.76})$$

Se sustituye los límites de la integral y resulta:

$$\begin{aligned} z(x) = & t_{0a} x + \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right) \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5} \\ & + \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left\{ \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right\} \ln \left[\left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right] + \left(\frac{x}{Q_a} - \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right) - \frac{0.25T_f Q_a}{2} \\ & - \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left(\frac{4A}{Q_a T_f} - 1 \right) \left[\left(\frac{4A}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5} \\ & - \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left\{ \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right\} \ln \left[\left(\frac{4A}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right] + \left(\frac{4A}{Q_a T_f} - 1 \right) \Bigg\} \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

Para reducir la expresión se definen las siguientes constantes:

$$r = \frac{0.25T_f Q_a}{2}; s = \left(1 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right); \quad (\text{B.78})$$

Además:

$$a^2 = \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \quad (\text{B.79})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z(x) &= t_{0a}x + r \left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + r \left(\frac{x}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{x}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + ra^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{x}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{x}{Q_a} - s \right) \right\} - r \\ &\quad - r(-s) \left[(-s)^2 + a^2 \right]^{0.5} - ra^2 \ln \left\{ \left[(-s)^2 + a^2 \right]^{0.5} + (-s) \right\} \\ z(x) &= t_{0a}x + r \left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + r \left(\frac{x}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{x}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + ra^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{x}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{x}{Q_a} - s \right) \right\} - r \\ &\quad + rs \left[s^2 + a^2 \right]^{0.5} - ra^2 \ln \left\{ \left[s^2 + a^2 \right]^{0.5} - s \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

Pero:

$$\left[s^2 + a^2 \right]^{0.5} = \left[\left(\frac{4A}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{4A}{Q_a T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5} \quad (\text{B.81})$$

$$\left[s^2 + a^2 \right]^{0.5} = \left[1 - \frac{8A}{Q_a T_f} + \frac{16A^2}{Q_a^2 T_f^2} + \frac{8A}{Q_a T_f} - \frac{16A^2}{Q_a^2 T_f^2} \right]^{0.5} = 1 \quad (\text{B.82})$$

Entonces:

$$\boxed{z(x) = t_{0a}x + r \left(\frac{x}{Q_a} - 1 \right)^2 + r \left(\frac{x}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{x}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + ra^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{x}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{x}{Q_a} - s \right) \right\} - r + rs - ra^2 \ln \{1 - s\}} \quad (\text{B.83})$$

Si el costo de la red, $z(x)$, se estima mediante la función de tiempo de arco de Akcelik 1991, para arcos no semaforizados, entonces el subproblema en el algoritmo del Frank Wolfe requiere:

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \lambda \leq 1} z \left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right] &= t_{0a} \left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right] + r \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - 1 \right)^2 + \\ &\quad r \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\ &\quad + ra^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - s \right) \right\} - r + rs - ra^2 \ln \{1 - s\} \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

Para encontrar el mínimo se deriva de la función auxiliar de $z \left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]$ respecto a λ :

$$\begin{aligned}
\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} &= t_{0a}(y_a^n - x_a^n) + 2r \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - I}{Q_a} \right) \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \\
&+ r \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) \left\langle \left(\frac{I}{2} \right) \frac{2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right)}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\rangle + r \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\
&+ ra^2 \left\langle \frac{\left(\frac{I}{2} \right) 2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) \frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} + \frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a}}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a}} \right. \\
&\left. \frac{y_a^n - x_a^n}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)} \right\rangle
\end{aligned} \tag{B.85}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} &= t_{0a}(y_a^n - x_a^n) + 2r \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - I}{Q_a} \right) \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \\
&+ r \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) \left\langle \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \right\rangle + r \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\
&+ ra^2 \left\langle \frac{\left\{ \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) \frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right\} + \left\{ \frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \right\}}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\rangle
\end{aligned} \tag{B.86}$$

$$\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} = r \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{t_{0a} Q_a}{r} + 2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} - 1 \right) + \frac{\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right) \\ & + \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\ & + a^2 \left\{ \frac{\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) + \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right) \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.87})$$

$$\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} = r \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{t_{0a} Q_a}{r} + 2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} - 1 \right) + \frac{\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right) \\ & + \left\{ \frac{a^2}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.88})$$

$$\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} = r \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{t_{0a} Q_a}{r} + 2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + (a^2)}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right) \\ & + \left\{ \frac{a^2}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.89})$$

$$\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} = r \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{t_{0a} Q_a}{r} + 2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} - 1 \right) \right) \\ & + \frac{2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + 2(a^2)}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.90})$$

$$\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} = r \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{t_{0a} Q_a}{r} \right) + 2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - I}{Q_a} \right) \\ + 2 \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right] \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\ + \frac{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}}{\left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \end{array} \right\} \quad (\text{B.91})$$

$$\boxed{\frac{dz[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)]}{d\lambda} = r \left(\frac{y_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{t_{0a} Q_a}{r} \right) + 2 \left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - I}{Q_a} \right) \\ + 2 \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(y_a^n - x_a^n)] - s}{Q_a} \right)^2 + a^2 \right] \end{array} \right\} = 0} \quad (\text{B.92})$$

APÉNDICE C. SOLUCIÓN AL PROGRAMA MATEMÁTICO DE BECKMANN CON FUNCIONES DE TIEMPO DE VIAJE PARA ARTERIAS URBANAS DE ACCESO CONTROLADO Y SEMAFORIZADAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO DE CONGESTIÓN, EL FLUJO EN EL ARCO Y LA COLA

Si el costo de la red, $z(x)$, se estima mediante la función de tiempo de arco de sobreflujo dependiente de: el tiempo, el flujo y cola inicial, Akcelik 2003, para todo arco de una red urbana:

$$f(x) = t_{0a} + 0.25T_f \left\{ z_a + \left[z_a^2 + 8A_a X_a / (Q_a T_f) + 16A_a y_a / (Q_a T_f)^2 \right]^{0.5} \right\}; [h/v e h]$$

Pero:

$$z_a = X_a - 1 + \left[2y_a / (Q_a T_f) \right] \quad y \quad X_a = x_a / Q_a$$

Se sustituye z y se aplican propiedades de la integral:

$$f(x) = t_{0a} + 0.25T_f \left\{ \left[X_a - 1 + \left(2y_a / (Q_a T_f) \right) \right] + \left[\left[X_a - 1 + \left(2y_a / (Q_a T_f) \right) \right]^2 + 8A_a X_a / (Q_a T_f) + 16A_a y_a / (Q_a T_f)^2 \right]^{0.5} \right\}$$

$$z(x) = \int_0^{x_a} \left\{ t_{0a} + 0.25T_f \left[X_a - 1 + \left(2y_a / (Q_a T_f) \right) \right] + 0.25T_f \left[\left[X_a - 1 + \left(2y_a / (Q_a T_f) \right) \right]^2 + 8A_a X_a / (Q_a T_f) + 16A_a y_a / (Q_a T_f)^2 \right]^{0.5} \right\} dx$$

$$z(x) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{x_a} t_{0a} dx \\ + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \left(2y_a / (Q_a T_f) \right) \right] dx \\ + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left[X_a - 1 + \left(2y_a / (Q_a T_f) \right) \right]^2 + 8A_a X_a / (Q_a T_f) + 16A_a y_a / (Q_a T_f)^2 \right]^{0.5} dx \end{array} \right\}$$

Los dos primeros sumandos se resuelven en forma simple. El tercer sumando se debe transformar para usar la siguiente forma integral:

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left[u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right] \quad (\text{Cálculo mediante transformación trigonométrica, Leithol})$$

Leithol)

$$z(x) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{x_a} t_{0a} dx \\ + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \\ + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a^2 + 2X_a \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{8A_a X_a}{Q_a T_f} + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} \right]^{0.5} dx \end{array} \right\}$$

$$z(x) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{x_a} t_{0a} dx \\ + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \\ + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a^2 + 2X_a \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} \right]^{0.5} dx \end{array} \right\}$$

Se completa el cuadrado sumando y restando $\left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2$:

$$z(x) = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{x_a} t_{0a} dx \\ + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \\ + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a^2 + 2X_a \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 - \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} \right]^{0.5} dx \end{array} \right\}$$

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right)^2 - \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 \right]^{0.5} dx \right. \\ \left. + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} \right\}$$

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right)^2 \right]^{0.5} dx \right. \\ \left. - \left(\left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + 2 \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \left(\frac{4A_a}{Q_a T_f} \right) + \left(\frac{4A_a}{Q_a T_f} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} \right\}$$

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right)^2 \right]^{0.5} dx \right. \\ \left. - \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 - 2 \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \left(\frac{4A_a}{Q_a T_f} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{4A_a}{Q_a T_f} \right)^2 + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right)^2 + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} \right\}$$

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right)^2 - 2 \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \left(\frac{4A_a}{Q_a T_f} \right) - \left(\frac{4A_a}{Q_a T_f} \right)^2 + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} \right] dx \right\}^{0.5}$$

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right)^2 - \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} + \frac{8A_a}{Q_a T_f} - \left(\frac{4A_a}{Q_a T_f} \right)^2 + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} \right] dx \right\}^{0.5}$$

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right)^2 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} - \left(\frac{4A_a}{Q_a T_f} \right)^2 \right] dx \right\}^{0.5}$$

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right)^2 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right) \right] dx \right\}^{0.5}$$

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} 0a \, dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a - 1 \right) + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} \right) \right]^2 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5} dx \right\}$$

Ahora se transforma la siguiente ecuación:

$$\left[\left(X_a - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right]^2 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right) \right]^{0.5}$$

el tercer sumando de la integral de la

función objetivo es similar a la función sin cola,

Se hace un cambio de variable:

$$u = \left(X_a - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a), \text{ éste es similar al definido en la función de cola, excepto por}$$

$$u = \left(X_a - 1 + \frac{4A_a}{Q_a T_f} + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right) \text{ y } a^2 = \frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right) \text{ que es igual al definido en la función sin}$$

$$\text{fila, } a^2 = \frac{4A}{Q T_f} \left(2 - \frac{4A}{Q T_f} \right)$$

$$\text{Pero: } X_a = \frac{x_a}{Q_a}$$

$$u = \left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right),$$

$$du = \frac{1}{Q_a} dx$$

Entonces:

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[X_a - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\left(X_a - 1 \right) + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} + \frac{4A_a}{Q_a T_f} \right) \right]^2 + \left[\frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right) \right] \right\}^{0.5} dx$$

Se sustituye u y a en el tercer sumando:

$$z(x) = \left\{ \int_0^{x_a} t_{0a} dx + 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\frac{x_a}{Q_a} - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx \right. \\ \left. + 0.25T_f Q_a \int_0^{x_a} [u^2 + a^2]^{0.5} du \right\}$$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left[u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right]$$

Solución:

Primer sumando: $\int_0^{x_a} t_{0a} dx = t_{0a} x_a \Big|_0^{x_a} = t_{0a} x_a$

Segundo

sumando:

$$0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\frac{x_a}{Q_a} - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right] dx = 0.25T_f \int_0^{x_a} \left[\frac{x_a^2}{2Q_a} - x_a + \frac{2y_a x_a}{Q_a T_f} \right]_0^{x_a} = 0.25T_f x_a \left[\left(\frac{X_a}{2} \right) - 1 + \frac{2y_a}{Q_a T_f} \right]$$

$$z(x) = \left\{ t_{0a} x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{X_a}{2} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \right. \\ \left. + 0.25T_f Q_a \left[\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left\{ u + \sqrt{u^2 + a^2} \right\} \right]_0^{x_a} \right\}$$

Se sustituye a u : $u = \left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)$

$$z(x) = \left. \begin{aligned} & t_{0a}x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ & + 0.25T_f Q_a \left\{ \frac{\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 + a^2} \right\} \\ & + 0.25T_f Q_a \left[\frac{a^2}{2} \ln \left\{ \left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right) + \sqrt{\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 + a^2} \right\} \right]_0^{x_a} \end{aligned} \right\}^{x_a}_0$$

$$z(x) = \left. \begin{aligned} & t_{0a}x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ & + 0.25T_f Q_a \left[\frac{\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)}{2} \sqrt{\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 + a^2} \right] \\ & + 0.25T_f Q_a \frac{a^2}{2} \ln \left\{ \left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right) + \sqrt{\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 + a^2} \right\} \\ & - 0.25T_f Q_a \left[\frac{\left((-1) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)}{2} \sqrt{\left((-1) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 + a^2} \right] \\ & - 0.25T_f Q_a \frac{a^2}{2} \ln \left\{ \left((-1) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right) + \sqrt{\left((-1) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 + a^2} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$z(x) = \left\{ \begin{aligned} & t_{0a}x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ & + \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left[\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right) \sqrt{\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 + a^2} \right] \\ & + \frac{0.25T_f Q_a}{2} a^2 \ln \left\{ \left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right) + \sqrt{\left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 + a^2} \right\} \\ & - \frac{0.25T_f Q_a}{2} \left[\left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) - 1 \right) \sqrt{\left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) - 1 \right)^2 + a^2} \right] \\ & - \frac{0.25T_f Q_a}{2} a^2 \ln \left\{ \left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) - 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) - 1 \right)^2 + a^2} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Si $u = \left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)$ y $a^2 = \frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right)$; además se retoma a

$$r = \frac{0.25T_f Q_a}{2} \text{ y se define } k = \left[\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) - 1 \right]$$

Sustituyendo:

$$z(x) = \left\{ \begin{aligned} & t_{0a}x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ & + r \left[u \sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln \left\{ u + \sqrt{u^2 + a^2} \right\} \right] \\ & - r \left[k \sqrt{k^2 + a^2} + a^2 \ln \left\{ k + \sqrt{k^2 + a^2} \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$a^2 = \frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right)$$

$$k^2 = \left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) - 1 \right)^2 = \left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right)^2 - 2 \left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right) + 1$$

$$k^2 = \left(\frac{4}{(Q_a T_f)^2} (y_a^2 + 4A_a y_a + 4A_a^2) \right) - 2 \left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right) + 1$$

$$k^2 + a^2 = \left(\frac{4}{(Q_a T_f)^2} (y_a^2 + 4A_a y_a + 4A_a^2) \right) - 2 \left(\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right) + 1 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right)$$

$$k^2 + a^2 = \frac{4y_a^2}{(Q_a T_f)^2} + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} + \frac{16A_a^2}{(Q_a T_f)^2} - \frac{4y_a}{(Q_a T_f)} - \frac{8A_a}{(Q_a T_f)} + 1 + \frac{8A_a}{Q_a T_f} - \frac{16A_a^2}{(Q_a T_f)^2}$$

$$k^2 + a^2 = \frac{4y_a^2}{(Q_a T_f)^2} + \frac{16A_a y_a}{(Q_a T_f)^2} - \frac{4y_a}{(Q_a T_f)} + 1 = \frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) + 1$$

Obtenida la solución del tercer sumando, se presenta la solución de la función de costo de la red, cuya función de tiempo de arco se expresa como la propuesta por Akcelik (2003)

$$z(x) = \left\{ t_{0a} x_a + 0.25 T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] + r \left[u \sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln \left\{ u + \sqrt{u^2 + a^2} \right\} \right] \right. \\ \left. - r \left[k \sqrt{\left[\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right]^2 + 1} + a^2 \ln \left\{ k + \sqrt{\left[\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right]^2 + 1} \right\} \right] \right\}$$

constante

Si el costo de la red, $z(x)$, se estima mediante la función de tiempo de arco de Akcelik 1991, para arcos no semaforizados, entonces el subproblema en el algoritmo del Frank Wolfe requiere:

$$u = \left(\left(\frac{x_a}{Q_a} - 1 \right) + \frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) \right); a^2 = \frac{8A_a}{Q_a T_f} \left(1 - \frac{2A_a}{Q_a T_f} \right); r = \frac{0.25 T_f Q_a}{2};$$

$$k = \left[\frac{2}{Q_a T_f} (y_a + 2A_a) - 1 \right]; u = \left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right)$$

Función de costo de la red con cola:

$$z(x) = \left\{ \begin{array}{l} t_{0a}x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ + r \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right) \sqrt{\left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right)^2 + a^2} + a^2 \ln \left\{ \left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right) + \sqrt{\left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right)^2 + a^2} \right\} \right] \\ - r \left[k \sqrt{\left[\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right]^2 + 1} + a^2 \ln \left\{ k + \sqrt{\left[\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right]^2 + 1} \right\} \right] \end{array} \right\}$$

$$\text{Sea } \sqrt{\left[\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right]^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right)^2};$$

$$\text{si } p = \left(\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right)^2$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right)^2} = \sqrt{1 + p}$$

$$z(x) = \left\{ \begin{array}{l} t_{0a}x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ + r \left[u \sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln \left\{ u + \sqrt{u^2 + a^2} \right\} \right] \\ - r \left[k \sqrt{\left[\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right]^2 + 1} + a^2 \ln \left\{ k + \sqrt{\left[\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) \right]^2 + 1} \right\} \right] \end{array} \right\}$$

$$z(x) = \left\{ \begin{array}{l} t_{0a}x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ + r \left[u \sqrt{u^2 + a^2} + a^2 \ln \left\{ u + \sqrt{u^2 + a^2} \right\} \right] \\ - r \left[k \sqrt{1 + p} + a^2 \ln \left\{ k + \sqrt{1 + p} \right\} \right] \end{array} \right\}$$

Función de costo de la red sin cola:

$$z(x) = \left\{ \begin{array}{l} t_{0a}x + 0.25T_f x \left(\frac{x}{2Q_a} - 1 \right) + r \left(\frac{x}{Q_a} - s \right) \left[\left(\frac{x}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{-0.5} \\ + ra^2 \ln \left\{ \left[\left(\frac{x}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{-0.5} + \left(\frac{x}{Q_a} - s \right) \right\} + rs - ra^2 \ln \{1 - s\} \end{array} \right\}$$

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z \left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right] = \left\{ \begin{array}{l} t_{0a}x_a + 0.25T_f x_a \left[\frac{x_a}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ + r \left[\left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right) \sqrt{\left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right)^2 + a^2} \right] \\ + r \left[a^2 \ln \left\{ \left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right) + \sqrt{\left(\frac{x_a}{Q_a} + k \right)^2 + a^2} \right\} \right] \\ - r \left[k \sqrt{\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) + 1} \right] \\ - r \left[a^2 \ln \left\{ k + \sqrt{\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) + 1} \right\} \right] \end{array} \right\}$$

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)] = \left\{ \begin{aligned} & t_{0a} [x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)] \\ & + 0.25T_f [x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)] \left[\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{2Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right] \\ & + r \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{Q_a} + k \right) \sqrt{\left(\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2} \right] \\ & + r \left[a^2 \ln \left\{ \left(\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{Q_a} + k \right) + \sqrt{\left(\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2} \right\} \right] \\ & - r \left[k \sqrt{\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) + 1} \right] \\ & - r \left[a^2 \ln \left\{ k + \sqrt{\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) + 1} \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} z[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)] = \left\{ \begin{aligned} & t_{0a} [x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)] + \frac{0.25T_f}{2Q_a} [x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]^2 \\ & + 0.25T_f \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) [x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)] \\ & + r \left[\left(\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{Q_a} + k \right) \sqrt{\left(\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2} \right] \\ & + r a^2 \ln \left\{ \left(\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{Q_a} + k \right) + \sqrt{\left(\frac{[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2} \right\} \\ & - r \left[k \sqrt{\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) + 1} \right] \\ & - r \left[a^2 \ln \left\{ k + \sqrt{\frac{4y_a}{(Q_a T_f)} \left(\frac{(y_a + 4A_a)}{(Q_a T_f)} - 1 \right) + 1} \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

Para encontrar el mínimo se deriva de la función auxiliar de $z[x_a^n + \lambda(w_a^n - x_a^n)]$ respecto a λ :

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& t_0 a \left(w_a^n - x_a^n \right) + \frac{0.25 T_f}{2 Q_a} \left\{ 2 \left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right] \left(w_a^n - x_a^n \right) \right\} + 0.25 T_f \left(\frac{2 y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \left(w_a^n - x_a^n \right) \\
& + r \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right) \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right) \left(\frac{w_a^n - x_a^n}{Q_a} \right)}{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\} \\
& + r \left(\frac{w_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} \\
& \frac{dz \left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{d\lambda} = \left\{ \begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right) \left(\frac{w_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left(\frac{w_a^n - x_a^n}{Q_a} \right)}{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right. \\
& \left. + r a^2 \frac{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}}{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda \left(w_a^n - x_a^n \right) \right]}{Q_a} + k \right)} \right\}
\end{aligned} \right.
\end{aligned}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dz \left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{d\lambda} = + r \left(\frac{w_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left\{ \left[\frac{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right)^2}{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right) + k} \right]^{0.5} + \left[\frac{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right)^2}{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right) + k} + a^2 \right]^{0.5} \right\} \\
& + r a^2 \left(\frac{w_a^n - x_a^n}{Q_a} \right) \left\{ \frac{\left[\frac{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right)^2}{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right) + k} \right]^{0.5} + \left[\frac{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right)^2}{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right) + k} + a^2 \right]^{0.5}}{\left[\frac{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right)^2}{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right) + k} \right]^{0.5} + \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right) + k} \right\} \\
& + t_0 a (w_a^n - x_a^n) + 0.25 T_f (w_a^n - x_a^n) \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{dz \left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{d\lambda} = \left\{ \begin{aligned} & t_{0a} (w_a^n - x_a^n) + 0.25 T_f (w_a^n - x_a^n) \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right) \\ & + r \frac{(w_a^n - x_a^n)}{Q_a \left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \left\{ 2 \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right\} \\ & + r a^2 \frac{(w_a^n - x_a^n)}{Q_a \left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \left[\frac{\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right) + \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}}{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5} + \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dz \left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{d\lambda} = \left\{ \begin{aligned} & t_{0a} (w_a^n - x_a^n) + 0.25 T_f (w_a^n - x_a^n) \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right) \\ & + r \frac{(w_a^n - x_a^n)}{Q_a \left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \left\{ 2 \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + 2a^2 \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dz \left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{d\lambda} = \left\{ \begin{aligned} & (w_a^n - x_a^n) \left[t_{0a} + 0.25 T_f \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right) \right] \\ & + r \frac{(w_a^n - x_a^n)}{Q_a \left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \left\{ 2 \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + 2a^2 \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dz \left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{d\lambda} = (w_a^n - x_a^n) \left\{ t_{0a} + 0.25T_f \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right) + \frac{2r}{Q_a} \frac{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]}{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\}$$

Subproblema, función con cola:

$$\frac{dz \left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{d\lambda} = (w_a^n - x_a^n) \left\{ t_{0a} + 0.25T_f \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + \left(\frac{2y_a}{Q_a T_f} - 1 \right) \right) + \frac{2r}{Q_a} \frac{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}}{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (w_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} + k \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\} = 0$$

Subproblema, función sin cola:

$$\frac{dz \left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{d\lambda} = (y_a^n - x_a^n) \left\{ t_{0a} + 0.25T_f \left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} \right) - 0.25T_f + \frac{2r}{Q_a} \frac{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}}{\left[\left(\frac{\left[x_a^n + \lambda (y_a^n - x_a^n) \right]}{Q_a} - s \right)^2 + a^2 \right]^{0.5}} \right\} = 0$$

REFERENCIAS

- Abdulaal M. y LeBlanc, L. J. (1979) "Methods for combining modal split and equilibrium assignment models", *Transp Sci* Vol. 13, pp. 292–314.
- Adamo, V., Astarita, V., Florian, M., Mahut, M., y Wu, J. H. (1999a) "Modelling the Spill-Back of Congestion in Link Based Dynamic Network Loading Models: A Simulation Model with Application", *14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Jerusalem, July 1999. Elsevier, pp. 555-573.
- AIMSUN2 (Barceló et al., 1994) (<http://tss-bcn.com>) (Transport Simulation Systems). Disponible en (www.aimsun.com) (Barceló, 2010).
- Akcelik y Associates (2002). *aaSIDRA User Guide*. Akcelik and Associates Pty Ltd, Melbourne, Australia.
- Akçelik, R. (1980). *Time-Dependent Expressions for Delay, Stop Rate and Queue Length at Traffic Signals*. Internal Report AIR 367–1. Australian Road Research Board, Vermont South, Australia.
- Akçelik, R. (1981). *Traffic Signals: Capacity and Timing Analysis*. Research Report ARR No. 123. ARRB Transport Research Ltd, Vermont South, Australia. (6th reprint: 1995).
- Akcelik, R., 1988. "The highway capacity manual delay formula for signalized intersections". *ITE journal*, 58(3), pp.23-27.
- Akçelik, R. (1991), "Travel time functions for transport planning purposes: Davidson's function, its time-dependent form and an alternative travel time function", *Australian Road Research*, Vol. 21 No. 3, pp. 49–59.
- Akçelik, R. (1996) "Relating flow, density, speed and travel time models for uninterrupted and interrupted traffic", *Traffic Engineering and Control*, Vol. 37 No. 9, pp. 511-516.
- Akçelik, R. (2003) "Speed-flow and bunching relationships for uninterrupted flows". In *Proceeding of 25th Conference of Australian Institute of Transportation Research (CAITR)*.
- Akcelik, R. (2011), "An Assessment of the Highway Capacity Manual 2010 roundabout capacity model", *TRB International Roundabout Conference*, Transportation Research Board, Carmel, Indiana, USA, pp. 1–22.
- Akçelik, R. y Roupail, N.M. (1993), "Estimation of delays at traffic signals for variable demand conditions", *Transportation Research Part B*, Vol. 27 No. 2, pp. 109–131.

Akçelik, R., Roper, R. Y Besley, M. (1999) *Fundamental Relationships for Freeway Traffic Flows*. Research Report ARR 341. ARRB Transport Research Ltd, Vermont South, Australia.

Akgüngör, A.P. y Bullen, A.G.R. (2007), “A new delay parameter for variable traffic flows at signalized intersections”. *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, 31(1), pp.61-70.

Allsop, R. E. (1974). “Some possibilities for using traffic control to influence trip distribution and route choice”. *Proc. 6th Int. Symp. on Transp. and Traffic Theory.*, (ed. D. J. Buckley), Elsevier, N. Y. pp. 345-373.

Anandalingam, G. y Friesz, T. L. (1992) “Hierarchical optimization: an introduction”. *Annals of Operations Research*, 34, pp. 1–11.

Astarita, V. 1995. “Flow propagation description in dynamic network loading models”. Y. J. Stephanedes, F. Filippi, eds. Proc. IV Internat. Conf. Appl. Adv. Tech. Transportation Engrg. (AATT). *ASCE*, 599–603.

Astarita, V. (1996), “A continuous time link model for dynamic network loading based on travel time function”, en Lesort, J.-B. (Ed.), *13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp. 79–103.

Astarita, V. (2002), “Node and Link Models for Network Traffic Flow Simulation”, *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 35, pp. 643–565.

Astarita, V., Er-Rafia, K., Florian, M., Mahut, M. y Velan, S. (2001) “Comparison of three methods for dynamic network Loading”, *Transportation Research Record* 1771, 179–190.

Balakrishna, R., Koutsopoulos, H., Ben-Akiva, M., 2006. “Simultaneous Off-line Demand and Supply Calibration of Dynamic Traffic Assignment Systems”. *Transportation Research Board 85th Annual Meeting Compendium of Papers*. Washington, DC, January 22–26.

Ban, J.X., Liu, H.X. y Ran, B. (2005), “A link based quasi-variational inequality model for dynamic user equilibria, towards real time traffic operations”, *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC*, Vol. 2005, pp. 191–196.

Ban, X. (Jeff), Liu, H.X., Ferris, M.C. y Ran, B. (2008), “A link-node complementarity model and solution algorithm for dynamic user equilibria with exact flow propagations”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 42 No. 9, pp. 823–842.

Ban, X. (Jeff), Pang, J.S., Liu, H.X. y Ma, R. (2012a), “Continuous-time point-queue models in dynamic network loading”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 46 No. 3, pp. 360–380.

- Ban, X. (Jeff), Pang, J.S., Liu, H.X. y Ma, R. (2012b), “Modeling and solving continuous-time instantaneous dynamic user equilibria: A differential complementarity systems approach”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 46 No. 3, pp. 389–408.
- Barceló, J. (2010) *Fundamentals of traffic simulation* (Vol. 145, p. 439). New York: Springer.
- J. Barceló, J.L. Ferrer, and R. Grau, (1994) “AIMSUN2 and the GETRAM Simulation Environment”, Internal Report, Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad Politécnica de Catalunya.
- Bard J. (1983b) “An efficient point algorithm for a linear two-stage optimization problem”, *Operations Res.* 31, pp. 670- 684.
- Bard J. y Falk J. (1982) “An explicit solution to the multi-level programming problem”, *Computers and Operations Res.* 9, pp. 77-100.
- Bard, J. F. (1998) *Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bar-Gera, H. (2002), “Origin-based algorithm for the traffic assignment problem”, *Transportation Science*, Vol. 36 No. 4, pp. 398–417.
- Bar-Gera, H. (2010), “Traffic assignment by paired alternative segments”, *Transportation Research Part B*, Elsevier Ltd, Vol. 44 No. 8–9, pp. 1022–1046.
- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., y Shetty, C. M., (2006) *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 3a ed. New York, John Wiley and Sons.
- Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. y Shetty, C.M. (2006) *Nonlinear programming: theory and algorithms*. 3a ed. Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons.
- Beckmann, M. (1952), “A continuous model of transportation”. *Econometrica*, Vol. 20 No. 4, pp. 643–660.
- Beckmann, M. J., McGuire, C. B. y Winsten, C. B. (1956) *Studies in the economics of transportation, with an Introduction by T. C. Koopmans*. Yale University Press, New Haven; published as RM-1488, Rand Corporation, Santa Monica, CA, 1955.
- Bell, M.G. e Iida, Y. (1997) *Transportation network analysis*. Chichester, England, John Wiley & Sons.
- Bellei, G., Gentile, G. y Papola, N. (2005), “A within-day dynamic traffic assignment model for urban road networks”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39 No. 1, pp. 1–29.

- Ben-Akiva, M., Bierlaire, M., Bottom, J., Koutsopoulos, H.N. y Mishalani, R.G. (1997) “Development of a route guidance generation system for real-time Application”, In: *Proceedings of the 8th International Federation of Automatic Control Symposium on Transportation Systems*. Chania, Greece.
- Ben-Akiva, M., Bierlaire, M., Koutsopoulos, H. y Mishalani, R. (1998) “DynaMIT: A Simulation-Based System for Traffic Prediction and Guidance Generation”, *TRISTAN III*. San Juan, Porto Rico, June 17–23.
- Ben-Akiva, M., Bierlaire, M., Burton, D., Koutsopoulos, H.N., Mishalani, R., 2001. “Network state estimation and prediction for real-time transportation management applications”. *Networks and Spatial Economics* 1 (3/4), 291–318.
- Ben-Akiva, M., Bierlaire, M., Koutsopoulos, H.N. y Mishalani, R. (2002) “Real-time simulation of traffic demand-supply interactions within DynaMIT. In: Gendreau, M., Marcotte, P. (Eds.), *Transportation and Network Analysis: Current Trends: Miscellanea in Honor of Michael Florian*. Kluwer Academic Publishers, pp. 19–36.
- Ben-Akiva, M.E., Gao, S., Wei, Z. and Wen, Y., 2012. “A dynamic traffic assignment model for highly congested urban networks”. *Transportation research part C: emerging technologies*, 24, pp.62-82.
- Ben-Akiva, M., Koutsopoulos, H.N. y Mukundan, A. (1994), “A dynamic traffic model system for ATMS/ATIS operations”, *I V H S Journal*, Taylor & Francis, Vol. 2 No. 1, pp. 87–90.
- Ben-Ayed, O. (1990). “A bilevel linear programming model applied to Tunisian interregional high way network design problem”, *Revue Tunesienne d’Economie et de Gestion*, V, 234–277.
- Ben-Ayed, O. y Blair, C.E., (1990). “Computational difficulties of bilevel linear programming”. *Operations Research*, 38(3), pp.556-560.
- Ben-Ayed, O., Blair, C.E., Boyce, D.E. y LeBlanc, L.J., (1992). “Construction of a real-world bilevel linear programming model of the highway network design problem”. *Annals of Operations Research*, 34(1), pp.219-254.
- Ben-Ayed, O., Boyce, D.E. y Blair III, C.E., (1988). “A general bilevel linear programming formulation of the network design problem”, *Transportation Research Part B: Methodological*, 22(4), pp.311-318.
- Bliemer, M. (2007) “Dynamic queuing and spillback in analytical multiclass dynamic network loading model”, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, (2029), pp.14-21.

- Bliemer, M. C. J. y Taale, H. (2006) “Route generation and dynamic traffic assignment for large networks”, *Proceedings of the 1ST International Symposium on Dynamic Traffic Assignment*. Leeds, UK.
- Bliemer, M. C. J., Brederode, L. J. N., Wismans, L. J. J. y Smits, E. S. (2012), *Quasi-dynamic network loading: adding queuing and spillback to static traffic assignment*. ITLS working paper, no. ITLS-WP-12-03, Institute of Transport and Logistics Studies (ITLS), Sydney.
- Bliemer, M. C. J., Versteegt, H. H., y Castenmiller, R. J. (2004) “INDY: A New Analytical Multiclass Dynamic Traffic Assignment Model”, *Proceedings of the TRISTAN V conference*, Guadeloupe.
- Bliemer, M.C. y Raadsen, M.P., (2018). “Continuous-time general link transmission model with simplified fanning, Part I: Theory and link model formulation”, *Transportation Research Part B: Methodological*.
- Bliemer, M.C.J. y Bovy, P.H.L. (2003), “Quasi-variational inequality formulation of the multiclass dynamic traffic assignment problem”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 37 No. 6, pp. 501–519.
- Bliemer, M.C.J. y Raadsen, M.P.H. (2017), *Static traffic assignment with residual queues and spillback*, *Proceedings of the 17th Swiss Transport Research Conference*, disponible en: http://www.strc.ch/2017/Bliemer_Raadsen.pdf.
- Bliemer, M.C.J., (2001). *Analytical dynamic traffic assignment with interaction user-classes: theoretical advances and applications using a variational inequality approach*. Ph.D. thesis, Delft University of Technology, The Netherlands.
- Bliemer, M.C.J., Castenmiller, R.J. y Bovy, P.H.L. (2002), “Analytical multiclass dynamic traffic assignment using a dynamic network loading procedure”, *Proceedings of the 9th Meeting of the EURO Working Group on Transportation*, Bari, disponible en: <https://doi.org/10.1109/CLEO.2002.1033388>.
- Bliemer, M.C.J., Raadsen, M.P.H., Smits, E.S., Zhou, B. y Bell, M.G.H. (2014), “Quasi-dynamic traffic assignment with residual point queues incorporating a first order node model”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 68, pp. 363–384.
- Borchers, M., Breeuwsma, P., Kern, W., Slootbeek, J., Still, G. y Tibben, W., (2015). “Traffic user equilibrium and proportionality”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 79, pp. 149-160.
- Boyce, D.E., Lee, D., Janson, B.N. y Berka, S. (1997a), *Dynamic User-Optimal Route Choice Modeling of a Large-Scale Traffic Network*, Technical Report number 58, National Institute of Statistical Sciences. www.niss.org

- Boyce, D.E., Lee, D.H. y Janson, B.N. (1997b), *Variational inequality model of ideal dynamic user-optimal route choice*, Technical Report Number 59, National Institute of Statistical Sciences. www.niss.org
- Boyce, D.E., Lee, D.-H. y Ran, B. (2001), “Analytical models of the dynamic traffic assignment problem”, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 1 No. 3, pp. 377–390.
- Boyce, D.E., Mahmassani, H.S. y Nagurney, A. (2005), “A retrospective on Beckmann, McGuire and Winsten’s Studies in the Economics of Transportation”, *Papers in Regional Science*, Vol. 84 No. 1, pp. 85–103.
- Brederode, L. J. N., Bliemer, M. C. J. y Wismans, L. J. J. (2010), “STAQ: Static Traffic Assignment with Queuing.”, en *Proceedings of the European Transport Conference*. Glasgow.
- Brederode, L. J. N., Heijnickx, M. y Koopal, R. (2016), “Quasi Dynamic Assignment on the Large Scale Congested Network of Noord-Brabant”, en *European Transport Conference 2016 Association for European Transport (AET)*.
- Brederode, L., Pel, A., Wismans, L., de Romph, E. y Hoogendoorn; S. (2018) “Static Traffic Assignment with Queuing: model properties and applications”, *Transportmetrica A: Transport Science*, pp. 1-36.
- Brotcorne, L., Marcotte, P. y Savard, G. (2008), “Bilevel Programming: The Montreal School”, *INFOR: Information Systems and Operational Research*, Vol. 46 No. 4, pp. 231–246.
- Buckley, D. J. (1962). “Road Traffic Headway Distribution”. *Proceedings, 1st ARRB Conf.*, Vol. 1 No. 1, pp. 153-186.
- Bureau of Public Roads (1964) *Traffic Assignment Manual*. Washington, DC: U.S. Dept. of Commerce, Urban Planning Division.
- Burghout, W. (2004), *Hybrid microscopic-mesoscopic traffic simulation, Doctoral Dissertation*, Royal Institute of Technology, disponible en:<https://doi.org/10.3141/1934-23>.
- Burghout, W., Koutsopoulos, H. y Andreasson, I. (2005) “Hybrid mesoscopic-microscopic traffic simulation” *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*. No. 1934, pp 218-225.
- Burrell, J. E. (1968). “Multipath Route Assignment and Its Applications to Capacity Restraint”. *Proceedings, 4th International Symposium on the Theory of Road Traffic Flow*, Karlsruhe, West Germany.
- Carey M. (1986) “A Constraint Qualification for a Dynamic Traffic Assignment Model”, en: *Transportation Science* 20, pp. 55-88.

- Carey, M. (1987) "Optimal Time-Varying Flows on Congested Networks", *Operations Research*, 35, 58-69.
- Carey, M. (1992), "Nonconvexity of the dynamic traffic assignment problem", *Transportation Research Part B*, Vol. 26B No. 2, pp. 127–133.
- Carey, M. (1999) *A Framework for System Optimal Dynamic Traffic Assignment*, Research Report, Faculty of Business and Management, University of Ulster, Northern Ireland.
- Carey, M. (2001), "Dynamic Traffic Assignment with More Flexible Modelling within Links", *Networks and Spatial Economics*, Vol. 1 No. 1955, pp. 349–375.
- Carey, M. y Ge, Y.E. (2004), "Efficient discretization for link travel time models". *Networks and Spatial Economics*, 4(3), pp.269-290.
- Carey, M. y Ge, Y.E. (2005a), "Convergence of a Discretized Travel-Time Model", *Transportation Science*, Vol. 39, No. 1, pp. 25–38.
- Carey, M. y Ge, Y.E. (2005b), "Alternative Conditions for a Well-Behaved Travel Time Model", *Transportation Science*, Vol. 39 No. 3, pp. 417–428.
- Carey, M. y Ge, Y.E., (2003). "Comparing whole-link travel time models". *Transportation Research Part B: Methodological*, 37(10), pp.905-926.
- Carey, M. y Ge, Y.E., (2007). "Retaining desirable properties in discretising a travel-time model". *Transportation Research Part B: Methodological*, 41(5), pp.540-553.
- Carey, M. y McCartney, M. (2002), "Behaviour of a whole-link travel time model used in dynamic traffic assignment", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 36 No. 1, pp. 83–95.
- Carey, M. y McCartney, M. (2004), "An exit-flow model used in dynamic traffic assignment", *Computers and Operations Research*, Vol. 31 No. 10, pp. 1583–1602.
- Carey, M., (2004a). "Link travel times I: desirable properties". *Networks and Spatial Economics*, 4(3), pp.257-268.
- Carey, M., (2004b). "Link travel times II: properties derived from traffic-flow models". *Networks and Spatial Economics*, 4(4), pp.379-402.
- Carey, M., (2009). "A framework for user equilibrium dynamic traffic assignment". *Journal of the Operational Research Society*, 60(3), pp.395-410.

- Carey, M., Ge, Y.E. y McCartney, M. (2003), “A Whole-Link Travel-Time Model with Desirable Properties”, *Transportation Science*, Vol. 37 No. 1, pp. 83–96.
- Carey, M., Humphreys, P., Mchugh, M. y Mcivor, R. (2017), “Travel-Time Models With and Without Homogeneity Over Time”, *Transportation Science*, Vol. 51 No. 3, pp. 882–892.
- Carey, M., Humphreys, P., McHugh, M., McIvor, R. (2014). “Ex- tending travel-time based models for dynamic network loading and assignment, to achieve adherence to first- in-first-out and link capacities”, *Transportation Research Part B: Methodological* 65, pp. 90–104.
- Chabini, I. (1998), “Discrete Dynamic Shortest Path Problems In Transportation Applications: Complexity And Algorithms With Optimal Run Time”, *Transportation Research Records*, Vol. 1645, pp. 170–175.
- Chabini, I. (2001) “Analytical Dynamic Network Loading Problem: Formulation, Solution Algorithms, and Computer Implementations”, *Transportation Research Record*, Vol. 1771 No. 1, pp. 191–200.
- Chen, A., Yang, H., Lo, H.K., Tang, W.H. (2002) “Capacity reliability of a road network: an assessment methodology and numerical results”, *Transportation Research Part B* 36, 225–252.
- Chen, H. K. (1999) *Dynamic Travel Choice Models: A variational inequality approach*. New York, Springer.
- Chen, H.K. y Hsueh, C.F., (1998). “A model and an algorithm for the dynamic user-optimal route choice problema”. *Transportation Research Part B: Methodological*, 32(3), pp.219-234.
- Chen, H.K., Chou, C.Y. y Lai, C.T., (2004). “A bilevel dynamic signal timing optimization problem”. In *Networking, Sensing and Control, 2004 IEEE International Conference on* (Vol. 2, pp. 856-861). IEEE.
- Chen, H.K., Lui, S.H. y Chang, C.W. (2003), “A Dynamic Side-Constrained User Equilibrium Problem”, *Cooperative Transportation Dynamics*, Vol. 2, p. 2.1-2.34.
- Chen, L.W. y Hu, T.Y., (2012). “Flow Equilibrium Under Dynamic Traffic Assignment and Signal Control— An Illustration of Pretimed and Actuated Signal Control Policies”. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 13(3), p.1266.
- Chen, O. y Ben-Akiva, M., (1998). “Game-theoretic formulations of interaction between dynamic traffic control and dynamic traffic assignment”. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, (1617), pp.179-188.
- Chen, O.J., (1998). *Integration of dynamic traffic control and assignment* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).

- Chen, Q. y Chen, H. (2013) “Solution Algorithm for a New Bi-Level Discrete Network Design Problem”, *Promet-Traffic & Transportation*, Vol. 25, No. 6, pp. 513-524.
- Chiou, S.W. (2005). “Bilevel programming for the continuous transport network design problem”, *Transportation Research Part B* Vol. 39, pp. 361-383.
- Chiou, S.W. (2007) “A descent framework for linked signal system with network flows”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 194, pp. 441-452.
- Chiou, S.-W. (2011), “A novel algorithm for area traffic capacity control with elastic travel demands”, *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier Inc., Vol. 35 No. 2, pp. 650–666.
- Chiou, S.W. (2014). “Optimal signal-setting for road network with maximum capacity”, *Information Sciences* Vol. 273, pp. 287-303.
- Chiou, S.W. (2015) “A bi-level decision support system for uncertain network design with equilibrium flow”, *Decision Support Systems*, 69, pp. 50-58.
- Chiu, Y. Ch., Bottom, J., Mahut, M., Paz, A., Waller, T., Hicks, J. (2011) *Dynamic Traffic Assignment. A Premier*. June 2011, Transportation Research Board of National Academies. Transportation Network Modeling Committee. Transportation Research Circular Number E-C153.
- Chung, B., Cho, H.J., Friesz, T.L., Huang, H. y Yao, T., (2014). “Sensitivity analysis of user equilibrium flows revisited”, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 14 No. 2, pp.183-207.
- Colson, B., Marcotte, P. y Savard, G. (2005a), “A trust-region method for nonlinear bilevel programming: Algorithm and computational experience”, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 30 No. 3, pp. 211–227.
- Colson, B., Marcotte, P. y Savard, G. (2005b), “Bilevel programming: A survey”, *4or*, Vol. 3 No. 2, pp. 87–107.
- Colson, B., Marcotte, P. y Savard, G. (2007), “An overview of bilevel optimization”, *Annals of Operations Research*, Vol. 153 No. 1, pp. 235–256.
- Constantin, I., y Florian, M., (1995). “Optimizing frequencies in a transit network: a nonlinear bi-level programming approach”. *International Transactions in Operational Research*, 2, pp. 149–164.
- CONTRAM (CONTinuous TRaffic Assignment Model) (Leonard et al., 1989) (www.contram.com). Desarrollado por el TRL, por sus siglas en inglés (Transport Research Laboratory) (Crowthorne, Essex) y Mott

MacDonald. Disponible en (www.qub.ac.uk/research-centres, Queen's University Belfast, consulta en línea septiembre 13 de 2013.

CORSIM (CORridor SIMulation software). Disponible en (http://www.fhwa-tsis.com/corsim_page.htm)

CUBE AVENUE DTA (www.citilabs.com)

Dafermos, S. C., Sparrow, F. T. (1969) "The traffic assignment problem for a general network", *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 73B: 91–118.

Daganzo, C. F. (1995a) "The cell transmission model, part II: Network traffic", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 29 No. 2, pp. 79–93.

Daganzo, C. F. (1995b) "Properties of link travel time functions under dynamic loads", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 29 No. 2, pp.95-98.

Daganzo, C.F. (1994), "The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory", *Transportation Research Part B: Methodological*, Pergamon, Vol. 28 No. 4, pp. 269–287.

Daneva, M. y Per Olov Lindberg. "A conjugate direction Frank-Wolfe method with applications to the traffic assignment problem." *Operations Research Proceedings 2002*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. 133-138.

Dantzig G. B. y Wolfe P. (1960) "The decomposition algorithm for linear programming", *Operations Research*, Vol. 8, pp. 101-111.

De Palma, A., Kilani, M. and Lindsey, R., 2005. Congestion pricing on a road network: A study using the dynamic equilibrium simulator METROPOLIS. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 39(7-9), pp.588-611.

Dempe, S. (2002) *Foundations of bilevel Programming. Nonconvex optimization and its applications*. Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Dempe, S. (2003), "Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints", *Optimization*, Vol. 52 No. 3, pp. 333–359.

Dempe, S. y Zemkoho, A.B. (2011), "The Generalized Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification and Optimality Conditions for Bilevel Programs", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 148 No. 1, pp. 46–68.

Dempe, S. y Zemkoho, A.B. (2013), “The bilevel programming problem: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions”, *Mathematical Programming, Series A*, Vol. 138 No. 1–2, pp. 447–473.

Dempe, S., Mordukhovich, B.S. y Zemkoho, A.B. (2012), “Sensitivity Analysis for Two-Level Value Functions with Applications to Bilevel Programming”, *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 22 No. 4, pp. 1309–1343.

Diakaki, C. y Papageorgiou, M. (1996) *Integrated modeling and control of corridor traffic networks using METACOR modeling tool*. Internal report 1996–1997, Dynamic Systems and Simulation Laboratory, Technical University of Crete, Chania, Greece

Dial, R. B. (1971). “A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Algorithm Which Obviates Path Enumeration”. *Transportation Research* 5(2), pp. 83-111.

Dial, R. B. (1996). “Bicriterion traffic assignment: basic theory and elementary algorithms”, *Transportation Science* 30 (2), pp. “93–110.

Dial, R.B. (2006), “A path-based user-equilibrium traffic assignment algorithm that obviates path storage and enumeration”, *Transportation Research Part B*, Vol. 40 No. 10, pp. 917–936.

Dial, R.B., (1997) “Bicriterion traffic assignment: efficient algorithms plus examples“, *Transportation Research Part B* 31 (5), 357– 379.

Dowling Associates, Inc. (2005). Arterial Speed Study. Prepared for: Southern California Association of Governments y Dowling Associates, Inc. Transportation Engineering Planning Research Education, California, USA.

Dowling, R.G. y Alexiadis, V. (1997) “A blueprint for applying EMM2 to ramp metering analyses”. Paper submitted for presentation at *12th Annual International User’s Group Conference*, San Francisco, October 22-24, 1997.

Dowling, R.G. y Skabardonis, A. (2008), “Urban Arterial Speed–Flow Equations for Travel Demand Models”. En *Transportation Research Board Conference Proceedings* (Vol. 2, No. 42) pp. 109-113.

Dowling, R.G., Singh, R. Y Cheng, W.W.K. (1998), “The accuracy and performance of improved speed-flow curves. Technical Note. *Road and Transport Research* 7 (2), pp. 36-51.

DRACULA: A microscopic, day-to-day dynamic framework for modelling traffic networks (Liu et al., 1999) (Barceló, 2010). Disponible en (<http://its.leeds.ac.uk/software/dracula/>)

Drew, D.R. (1968). *Traffic Flow Theory and Control*. New York, McGraw-Hill.

DynaMIT. Disponible en (www.qub.ac.uk/research-centres, Queen's University Belfast, consulta en línea septiembre 13 de 2013)

DYNASMART-P. Disponible en (www.qub.ac.uk/research-centres, Queen's University Belfast, consulta en línea septiembre 13 de 2013.)

DYNASMART-X. Disponible en (www.qub.ac.uk/research-centres, Queen's University Belfast, consulta en línea septiembre 13 de 2013.)

DynusT. Disponible en <http://dynust.net/index.php>. Septiembre 20 de 2011

Ekström, J. (2012) *Optimization approaches for design of congestion pricing schemes* (Doctoral dissertation, Linköping University Electronic Press).

Esteva Medina, J.A. (1998), "Diagnóstico y mantenimiento de la red vial primaria de la ciudad de México".

Falk, J. E. y Liu, J. (1995). "On bilevel programming, part I: general nonlinear cases", *Mathematical Programming*, Vol. 70, pp. 47–72.

Farahani, R.Z., Miandoabchi, E., Szeto, W.Y. y Rashidi, H. (2013), "A review of urban transportation network design problems", *European Journal of Operational Research*, Vol. 229 No. 2, pp. 281–302.

Farvaresh, H. y Sepehri, M.M. (2013), *A Branch and Bound Algorithm for Bi-level Discrete Network Design Problem, Networks and Spatial Economics*, Vol. 13, disponible en:<https://doi.org/10.1007/s11067-012-9173-3>.

Fiacco, A. V. (1976). "Sensitivity Analysis for Nonlinear Programming Using Penalty Methods", *Math. Programming* Vol. 10, pp. 287-311.

Fisk, C.S. (1984), "Game theory and transportation systems modelling", *Transportation Research Part B*, Vol. 18B No. 4/5, pp. 301–313.

Fisk, C.S. (1986) "A conceptual framework for optimal transportation systems planning with integrated supply and demand models", *Transportation Science* Vol. 20, pp. 37-47.

Florian, M y Chen, Y., (1991). "A Bilevel Programming Approach to Estimating O-D Matrix by Traffic counts". *Publication CRT-750, Université de Montreal, Montreal, Canada* (1991).

Florian, M. y Chen, Y., (1993). *A coordinate descent method for bilevel O-D matrix estimation problem*. Technical Report CRT-807, Centre de Recherche sur les Transports.

Florian, M. y Morosan, C.D. (2014), “On uniqueness and proportionality in multi-class equilibrium assignment”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 70, pp. 173–185.

Florian, M., Mahut, M. y Tremblay, N. (2008) “Application of a simulation-based dynamic traffic Assignment model”, *European Journal of Operational Research* 189, 1381–1392.

Florian, M., y Chen, Y., (1995). “A coordinate descent method for the bi-level o-d matrix adjustment problem”. *International Transactions in Operational Research* 2, pp. 165–179.

Floudas, C. A. y Pardalos, P. M. (2009) *Encyclopedia of optimization*. 2a ed. New York, Springer.

Friesz, T. L., Cho, H. J., Mehta, N. J., Tobin, R. L., Anadalingam, G., (1992). “A simulated annealing approach to the network design problem with variational inequality constraints”, *Transportation Science* Vol. 26, pp. 18–26.

Friesz, T.L. y Mookherjee, R. (2006), “Solving the dynamic network user equilibrium problem with state-dependent time shifts”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 40 No. 3, pp. 207–229.

Friesz, T.L., Bernstein, D., Smith, T.E., Tobin, R.L. y Wie, B.W. (1993), “A Variational Inequality Formulation of the Dynamic Network User Equilibrium Problem”, *Operations Research*, Vol. 41 No. 1, pp. 179–191.

Friesz, T.L., Bernstein, D., Suo, Z. y Tobin, R.L. (2001), “Dynamic Network User Equilibrium with State-Dependent Time Lags”, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 1 No. 3–4, pp. 319–347.

Friesz, T.L., Han, K., Neto, P.A., Meimand, A. y Yao, T. (2013), “Dynamic user equilibrium based on a hydrodynamic model”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 47, pp. 102–126.

Friesz, T.L., Kim, T., Kwon, C. y Rigdon, M.A. (2011), “Approximate network loading and dual-time-scale dynamic user equilibrium”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 45 No. 1, pp. 176–207.

García-Ródenas, R., López-García, M.L., Niño-Arbelaiz, A. y Verastegui-Rayo, D. (2006), “A continuous whole-link travel time model with occupancy constraint”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 175 No. 3, pp. 1455–1471.

Gartner, N. H. (1976). “Area traffic control and network equilibrium”, en: *Proceedings of the International Symposium on Traffic Equilibrium Methods*, Montreal, 1974. Springer, Berlin, pp. 247-297.

Ge, Y.E. y Carey, M. (2004), “Travel time computation of link and path flows and first-in-first-out”, en *Proceedings of the 4th International Conference on Traffic and Transportation Studies* (pp. 2-4).

Gentile G., Noekel K. (2009) “Linear User Cost Equilibrium: the new algorithm for traffic assignment in VISUM”, In *Proceedings of European Transport Conference 2009*, Leeuwenhorst Conference Centre, The Netherlands.

Gentile, G, Nöckel, K., Meschini, L. (2006) “Time and Space Discretization in Dynamic Traffic Assignment Models”, en *DTA 2006: First International Symposium on Dynamic Traffic Assignment*, Institute for Transport Studies (Ed.). (2006), Engineering and Physical Sciences Research Council.

Gentile, G. (2010b) “The General Link Transmission Model for Dynamic Network Loading and a comparison with the DUE algorithm”, en *New developments in transport planning: advances in Dynamic Traffic Assignment (selected papers from the DTA 2008 Conference, Leuven)*, ed.s L.G.H. Immers, C.M.J. Tampere, F. Viti, Transport Economics, Management and Policy Series, Edward Elgar Publishing, MA, USA, pp. 153-178.

Gentile, G. (2015), “Using the general link transmission model in a dynamic traffic assignment to simulate congestion on urban networks”, *Transportation Research Procedia*, Elsevier B.V., Vol. 5, pp. 66–81.

Gentile, G. y Meschini, L. (2011), “Using dynamic assignment models for real-time traffic forecast on large urban networks”, *Proceedings of the 2nd International Conference on Models and Technologies for Intelligent Transportation Systems*, Leuven, Belgium, pp. 1–4.

Gentile, G., Meschini, L. y Papola, N. (2005), “Macroscopic arc performance models with capacity constraints for within-day dynamic traffic assignment”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39 No. 4, pp. 319–338.

Gentile, G., Meschini, L. y Papola, N. (2007), “Spillback congestion in dynamic traffic assignment: A macroscopic flow model with time-varying bottlenecks”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 41 No. 10, pp. 1114–1138.

Han, K., (2013). *An analytical approach to sustainable transportation network design*. Ph.D. dissertation, Pennsylvania State University.

- Han, K., Friesz, T.L. y Yao, T., (2013). “Existence of simultaneous route and departure choice dynamic user equilibrium”. *Transportation Research Part B: Methodological*, 53, pp.17-30.
- Han, K., Friesz, T.L. y Yao, T. (2013b), “A partial differential equation formulation of Vickrey’s bottleneck model, part II: Numerical analysis and computation”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 49, pp. 55–74.
- Han, K., Piccoli, B., Gayah, V., Friesz, T.L., Yao, T., (2013c). On the continuum approximation of the on-and-off signal control on dynamic traffic networks. *Transportation Research Board 93rd Annual Meeting*, Washington, DC..
- Han, K., Gayah, V.V., Piccoli, B., Friesz, T.L. y Yao, T., (2014). “On the continuum approximation of the on-and-off signal control on dynamic traffic networks”. *Transportation Research Part B: Methodological*, 61, pp.73-97.
- Han, K., Sun, Y., Liu, H., Friesz, T.L. y Yao, T. (2015), “A bi-level model of dynamic traffic signal control with continuum approximation”, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, Vol. 55, pp. 409–431.
- Han, K., Sun, Y., Liu, H., Friesz, T.L. y Yao, T., (2015). “A bi-level model of dynamic traffic signal control with continuum approximation”. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 55, pp.409-431.
- Han, S. (2007), “A route-based solution algorithm for dynamic user equilibrium assignments”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 41 No. 10, pp. 1094–1113.
- Han, S. y Heydecker, B.G. (2006), “Consistent objectives and solution of dynamic user equilibrium models”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 40 No. 1, pp. 16–34.
- Harders, J. (1968). *Die Leistungsfähigkeit Nicht Signal geregelter Städtischer Verkehrsknoten (The Capacity of Unsignalized Urban Intersections)*. Schriftenreihe Strassenbau und Strassenverkehrstechnik, Vol. 76.
- Hearn, D.W. y Ramana, M.V., (1998). “Solving congestion toll pricing models”. In *Equilibrium and advanced transportation modelling*, pp. 109-124. Springer, Boston, MA.
- Hendrickson, C., Kocur, G. (1981) “Schedule delay and departure time decisions in a deterministic model”, *Transportation Science* 15: 62–77.
- Heydecker, B. G., Addison J. D. (1996), “An exact expression of dynamic traffic equilibrium”. J.-B. Lesort, ed. *Transportation and Traffic Theory*. Pergamon, Oxford, U.K., 359–383.

Heydecker, B. y Verlander, N. (1999), "Calculation of Dynamic Traffic Equilibrium Assignments", *European Transport Conference, Cambridge*, Vol. 434.

Heydecker, B.G. y Addison, J. D. (1998) "Analysis of Traffic Models for Dynamic Equilibrium Traffic Assignment". En: *Transportation Networks: Recent Methodological Advances* (ed MGH Bell). Pergamon, Oxford, 35-49.

Heydecker, B.G. y Addison, J.D. (2005), "Analysis of Dynamic Traffic Equilibrium with Departure Time Choice", *Transportation Science*, Vol. 39 No. 1, pp. 39–57.

Hollander, Y. y Prashker, J.N. (2006), "The applicability of non-cooperative game theory in transport analysis", *Transportation*, Vol. 33 No. 5, pp. 481–496.

Hu, T. Y., Chen, L. W., Hung, P. H., Huang, Y. K. y Chiang, M. L. (2006) "A simulation-based dynamic traffic assignment model with consideration of mixed traffic flows," in *Proc. 13th World Congr. Intell. Transp. Syst.*, London, U.K., pp. 1483–1488.

Huang, H.J. y Lam, W.H.K. (2002), "Modeling and solving the dynamic user equilibrium route and departure time choice problem in network with queues", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 36 No. 3, pp. 253–273.

Hurdle, V.R. (1974) "The Effect of Queuing on Traffic Assignment in a Simple Road Network", *Proceedings of 6th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, 519-540.

Ibaraki, T. (1987) "Enumerative approaches to combinatorial optimization". *Ann Oper Res*, Vol. 10 No. 11, pp. v-vii.

Institute for Transport Studies (Ed.). (2006), *DTA 2006: First International Symposium on Dynamic Traffic Assignment*, Engineering and Physical Sciences Research Council.

INTEGRATION (Van Aerde, M. 1994). Disponible en ([www.http://filebox.vt.edu/users/hrakha/software.htm](http://filebox.vt.edu/users/hrakha/software.htm))

Iryo, T. (2013), "Properties of dynamic user equilibrium solution: Existence, uniqueness, stability, and robust solution methodology", *Transportmetrica B: Transport Dynamics*, Vol. 1 No. 1, pp. 52–67.

Jafari, E., Pandey, V. y Boyles, S.D., (2017). "A decomposition approach to the static traffic assignment problem", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 105, pp. 270-296.

- Jang, W., Ran, B. y Choi, K. (2005), “A discrete time dynamic flow model and a formulation and solution method for dynamic route choice”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39 No. 7, pp. 593–620.
- Janson, B. N. (1991a). “Dynamic traffic assignment for urban road networks”, *Transportation Research Part B*, Vol. 25 No. 2–3, pp. 143–161.
- Janson, B. N. (1991b). “Convergent algorithm for dynamic traffic assignment”. *Transportation Research Record*, 1328, pp. 69-80.
- Janson, B. N. y Robles, J. (1993). “Dynamic traffic assignment with arrival time costs”. En *Transportation and Traffic Theory (C. Daganzo, editor), Proc 12th Int. Symp on Trans. and Traffic Theory*, Berkeley, CA, pp. 127-146, Elsevier, New York, N.Y.
- Janson, B.N. y Robles, J. (1995). “Quasi-Continuous Dynamic Traffic Assignment Model”, *Transportation Research Record* 1493, pp. 199-206.
- Jayakrishnan, R., Mahmassani, H. S. y Hu, T. Y. (1994a) “An evaluation tool for advanced traffic information and management systems in urban networks”, *Transportation Research* 2C (3), 129-147.
- Jayakrishnan, R., Tsai, W. T., Prashker, J. N. y Rajadhyaksha, S. (1994b). “A faster path-based algorithm for traffic assignment”, Paper presented at the 73rd Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington, DC.
- Jayakrishnan, R., Tsai, W.K. and Chen, A., (1995). “A dynamic traffic assignment model with traffic-flow relationships”. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 3(1), pp.51-72.
- Jin, W.L. (2008), “On the stability of user equilibria in static transportation networks”, *Transportmetrica*, Vol. 4 No. 1, pp. 1–17.
- Jin, W.L. (2012), “A kinematic wave theory of multi-commodity network traffic flow”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 46 No. 8, pp. 1000–1022.
- Jin, W. L. 2012b. A link queue model of network traffic flow. arxiv:arXiv preprint 1209.2361
- Jin, W.L. (2015), “Point queue models: A unified approach”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 77, pp. 1–16.

Joksimovic, D, Bliemer, MCJ y Bovy, PHL (2006a). Dynamic optimal toll design problem: travel behavior analysis including departure time choice and heterogeneous users. In R Kitamura (Ed.), *Proceedings 11th IATBR conference, The expanding sphere of travel behavior research* (pp. 1-17). Kyoto: Kyoto University.

Joksimovic, D. y Bliemer, M., (2006b). Different policy objectives of the road authority in the optimal toll design problem. In *Proceedings of the 11th International Conference on Travel Behavior Research, Kyoto, Japan*.

Joksimovic, D., (2007). *Dynamic bi-level optimal toll design approach for dynamic traffic networks* (Vol. 2007). Netherlands TRAIL Research School.

Joksimovic, D., Bliemer, M. y Bovy, P. (2005), “Dynamic road pricing optimization with heterogeneous users”, *45th Congress of the European Regional Science Association: “Land Use and Water Management in a Sustainable Network Society”*, 23-27 August 2005, Amsterdam, The Netherlands.

Joksimovic, D., Bliemer, M.C., Bovy, P.H. y Verwater-Lukszo, Z., (2005). “March. Dynamic road pricing for optimizing network performance with heterogeneous users”. In *Networking, Sensing and Control, 2005. Proceedings. 2005 IEEE* (pp. 407-412). IEEE.

Jorgensen, N.O. (1963). *Some Aspects of the Urban Traffic Assignment Problem*. ITTE Graduate Report #1963:9, M.S. thesis, Civil Engineering, University of California, Berkeley.

Josefsson, M. y Patriksson, M. (2007), “Sensitivity analysis of separable traffic equilibrium equilibria with application to bilevel optimization in network design”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 41 No. 1, pp. 4–31.

Kachani, S. y Perakis, G. (2009), “A dynamic travel time model for spillback”, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 9 No. 4, pp. 595–618.

Kara, B.Y. y Verter, V., (2004). “Designing a road network for hazardous materials transportation”. *Transportation Science*, 38(2), pp.188-196.

Karoonsoontawong, A. and Waller, S.T., (2010). “Integrated network capacity expansion and traffic signal optimization problem: robust bi-level dynamic formulation”. *Networks and Spatial Economics*, 10(4), pp.525-550.

Kočvara, M. y Outrata, J.V., (1992), “A nondifferentiable approach to the solution of optimum design problems with variational inequalities”. En *System modelling and optimization* (pp. 364-373). Springer, Berlin, Heidelberg.

- Kočvara, M. y Outrata, J.V., (1993). *A numerical solution of two select shape optimization problems*. Technical Report DFG (German Scientific Foundation) Research Report 464. University of Bayreuth.
- Kolstad, C. D. y Lasdon, L. S., (1990) “Derivative evaluation and computational experience with large bilevel mathematical programs”, *Journal of Optimization Theory and Applications* Vol. 65, pp. 485-499.
- Kuhn HW, Tucker AW (1951) “Nonlinear programming”. En: Neyman J (ed) *Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*. University of California Press, Berkeley, California.
- Lam, W.H., Lo, H.P. y Zhang, N., (1996). “A quasi-dynamic traffic assignment model with time-dependent queues”. *HKIE transactions*, Vol. 3 No. 2, pp.7-14.
- Lam, W.H.K. y Yin, Y. (2001), “An activity-based time-dependent traffic assignment model”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 35 No. 6, pp. 549–574.
- Lam, W.H.K. y Zhang, Y. (2000), “Capacity-constrained traffic assignment in networks with residual queues”, *Journal of Transportation Engineering*, Vol. 126 No. 2, pp. 121– 128.
- Larsson, T. y Patriksson, M. (1992). “Simplicial decomposition with disaggregated representation for the traffic assignment problem”. *Transportation Science*, 26(1), pp.4-17.
- Larsson, T. y Patriksson, M., (1998). “Side constrained traffic equilibrium models—traffic management through link tolls”. In P. Marcotte, S. Nguyen (Eds.), *Equilibrium and advanced transportation modelling* (pp. 125-151). Dordrecht: Kluwer Academic. Springer, Boston, MA.
- Larsson, T., M. Patriksson y Strömberg, A.-B. (1996). “Conditional subgradient optimization—Theory and applications”. *Eur. J. Oper. Res.* Vol. 88, pp. 382–403.
- LeBlanc, L. J. y Boyce, D. E., (1986). “A Bilevel Programming Algorithm for Exact Solution of the Network Design Problem with User Optimal Flows”. *Transportation Research*, vol. 20B, pp. 259-265.
- LeBlanc, L. J., Ran, B. y Boyce, D. E. (1992) “Dynamic travel choice models for urban transportation networks”, en *Systems, Man and Cybernetics, 1992., IEEE International Conference on* (pp. 225-231). IEEE.
- Lee, D.-H. (1996). *Formulation and Solution of a Dynamic User-Optimal Route Choice Model on a Large-Scale Traffic Network*. Ph.D. Thesis in Civil Engineering. Chicago, University of Illinois.

- Lee, D. H., Boyce, D. E. y Janson, B. 1997. Formulation and solution of a dynamic user-optimal route choice model on a large-scale traffic network. Technical Report Number 57. National Institute of Statistical Sciences. 19 T. W. Alexander Drive. Research Triangle Park, NC 27709-4006. Febrero, 1997. www.niss.org
- Leonard, P. R., Grower, P. y Taylor, N. B. (1989) *CONTRAM: Structure of the Model*, TRRL Research Report 178, United Kingdom
- Li, J. y Zhang, H.M. (2015), “A generalized queuing model and its solution properties”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 79, pp. 78–92.
- Li, J., Fujiwara, O. y Kawakami, S. (2000), “A reactive dynamic user equilibrium model in network with queues”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Pergamon, Vol. 34 No. 8, pp. 605–624.
- Lighthill, M. J. y Whitham, G. B. (1955) “A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads”, *Proceedings of the Royal Society of London A*, 229, 317-345.
- Lin, D.Y., (2011). “A dual variable approximation-based descent method for a bi-level continuous dynamic network design problem”. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 26(8), pp.581-594.
- Lin, D.Y., Karoonsoontawong, A. y Waller, S.T., (2011). “A Dantzig-Wolfe decomposition based heuristic scheme for bi-level dynamic network design problem”. *Networks and Spatial Economics*, 11(1), pp.101-126.
- Liu, R., Van Vliet, D. and Watling, D., 1999. DRACULA: a microscopic, day-to-day dynamic framework for modelling traffic networks. *submitted to Transportation Research A, available from www.its.leeds.ac.uk*.
- Lo, H.K. y Szeto, W.Y. (2002), “A cell-based variational inequality formulation of the dynamic user optimal assignment problem”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 36 No. 5, pp. 421–443.
- Lo, H.K. y Szeto, W.Y., (2004). “Modeling advanced traveler information services: static versus dynamic paradigms”. *Transportation Research Part B: Methodological*, 38(6), pp.495-515.
- Lo, H.K. y Szeto, W.Y., (2009). “Time-dependent transport network design under cost-recovery”. *Transportation Research Part B: Methodological*, 43(1), pp.142-158.
- Lo, H.K., (1999). “A dynamic traffic assignment formulation that encapsulates the cell-transmission model”. In *14th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* Transportation Research Institute.
- Lo, H.K., Lin, W., Liao, L.C., Chang, E. y Tsao, J. (1996), “A Comparison Of Traffic Models: Part 1, Framework”, *California Partners for Advanced Transit and Highways (PATH)*, pp. 1–50.

- Londono, G. y Lozano, A. (2014a), “Dissuasive Queues in the Time Dependent Traffic Assignment Problem”, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, Elsevier B.V., Vol. 162, pp. 378–387.
- Londono, G. y Lozano, A. (2014b), “A bilevel optimization program with equilibrium constraints for an Urban network dependent on time”, *Transportation Research Procedia*, Elsevier B.V., Vol. 3 No. July, pp. 905–914.
- Londono, G. y Lozano, A. (2016) “Flow-Queue-Time Dependent Traffic Modeling for Urban Networks”, *XIX Pan-American Conference of Traffic, Transportation Engineering and Logistics 2016*, Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), septiembre de 2016, Ciudad de México (en prensa).
- Londoño, G. y Lozano, A. (2011), “Combinación de funciones de tiempo de viaje para asignación de tráfico con equilibrio del usuario: hacia la obtención de patrones de viaje más reales”, *Taller Latino Iberoamericano de Investigación de Operaciones*, Acapulco, Guerrero, México, pp. 1–15.
- Londoño, G. y Lozano, A. (2012), “Suitable cost functions for signalized arterials and freeways, in the user equilibrium assignment problem”, *Procedia -Social and Behavioral Sciences*, Vol. 54, pp. 1176–1185.
- Long, J., Gao, Z. y Szeto, W.Y. (2011), “Discretised link travel time models based on cumulative flows: Formulations and properties”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 45 No. 1, pp. 232–254.
- Long, J., Szeto, W.Y., Gao, Z., Huang, H.J. y Shi, Q. (2016), “The nonlinear equation system approach to solving dynamic user optimal simultaneous route and departure time choice problems”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 83, pp. 179–206.
- Long, J., Szeto, W.Y., Huang, H.J. y Gao, Z. (2015), “An intersection-movement-based stochastic dynamic user optimal route choice model for assessing network performance”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 74, pp. 182–217.
- Lu, C. C., (2013). “A Column Generation-based Algorithm for Multi-Class Dynamic User Equilibrium Problem”. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 10, pp.676-695.
- Lu, C.-C., Mahmassani, H. S., Zhou, X. (2008) “A bi-criterion dynamic user equilibrium traffic assignment model and solution algorithm for evaluating dynamic road pricing strategies”, *Transportation Research Part C*, 16(4), pp. 371-389.

Lu, C.C., Mahmassani, H.S. y Zhou, X., (2008). “A bi-criterion dynamic user equilibrium traffic assignment model and solution algorithm for evaluating dynamic road pricing strategies”. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 16(4), pp.371-389.

Lu, C.C., Mahmassani, H.S. y Zhou, X., (2009). “Equivalent gap function-based reformulation and solution algorithm for the dynamic user equilibrium problem”. *Transportation Research Part B: Methodological*, 43(3), pp.345-364.

Luo, Z.Q., Pang, J.S. y Ralph, D. (1996) *Mathematical programs with equilibrium constraints*. Cambridge University Press.

Mahmassani, H. S., Peeta, S., Hu T. y Ziliaskopoulos, A. (1993) “Dynamic traffic assignment with multiple user classes for real-time ATIS/ATMS applications”, *Proc. of the ATMS Conf. on Management of Large Urban Traffic Systems*, St. Petersburg, Florida.

Mahmassani, H. S., Zhou, X., Lu, C.-C. (2005) “Toll pricing and heterogeneous users: approximation algorithms for finding bi-criterion time-dependent efficient paths in large-scale traffic networks”, *Transportation Research Record*, 1923, pp. 28-36.

Mahmassani, H., Hou, T. y Saberi, M. (2013), “Connecting Networkwide Travel Time Reliability and the Network Fundamental Diagram of Traffic Flow”, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, Vol. 2391 No. 1, pp. 80–91.

Mahmassani, H.S. (2001) “Dynamic network traffic assignment and simulation methodology for advanced system management Applications”, *Networks and Spatial Economics* 1 (3/4), 267–292.

Mahmassani, H.S. y Herman, R. (1984) “Dynamic User Equilibrium Departure Time and Route Choice on Idealized Traffic Arterials”. *Transportation Science*, 18, 362-384.

Mahut, M. (2000) *Discrete flow model for dynamic network loading*. Ph.D. Thesis, Département d’informatique et de recherche opérationnelle”, Université de Montréal. Published by the Center for Research on Transportation (CRT), University of Montreal.

Mahut, M., Florian, M., Tremblay, N., Campbell, M., Patman, Z. y McDaniel, Z. (2004) “Calibration and application of a simulation-based dynamic traffic assignment model”, *Transportation Research Record* 1876, 101–111.

Marcotte, P, y Marquis, G., (1992). “Efficient implementation of heuristics for the continuous network design problem”, *Annals of Operations Research* 34, pp. 163-176

Marcotte, P. (1981). "An analysis of heuristics for the continuous network design problem", Hurdle, V. F. et al. (eds.), *Proceedings of the 8th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, University of Toronto Press, Toronto, 27–34.

Marcotte, P. y Patriksson, M. (2007), "Traffic Equilibrium", en Barnhart, C. y Laporte, G. (Eds.), *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 14, Elsevier, pp. 623–713.

Marcotte, P. y Zhu, D. L., (1997). "Equilibria with infinitely many differential classes of customers", en: Pang, J.-S., Ferris, M. (Eds.), *Complementarity and Variational Problems. State of the Art, Proceedings of the 13th International Conference on Complementarity Problems*. SIAM, Philadelphia, pp. 234–258.

Marcotte, P., (1983). "Network optimization with continuous control parameters". *Transportation Science*, Vol. 17 No. 2, 181-197.

Marcotte, P., (1986). "Network design problem with congestion effects: A case of bilevel programming". *Mathematical programming*, 34(2), pp.142-162.

Meijdam, J., Roest, M., Taale, H., Van der Glas, M., Volwerk, W., y Dijkshoorn, J. (2005). *Running a Traffic Model on a Linux Cluster Using MATLAB's Distributed Computing Toolbox*. Q Delft & VORtech.

Meng, Q., Yang, H. y Liu, G. (2005), "A Trust Region Method for the Transportation Network Optimization Problems with User Equilibrium Constraints", *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, Vol. 6, pp. 1455–1470.

Meng, Q., Yang, H., Bell, M.G.H., (2001). "An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem", *Transportation Research Part B* Vol. 35, pp. 83–105.

Meng, Yang y Bell 2001. An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem

Merchant, D.K. y Nemhauser, G.L. (1978a) "A Model and an Algorithm for the Dynamic Traffic Assignment Problems. *Transportation Science*, 12, 183-199.

Merchant, D.K. y Nemhauser, G.L. (1978b) "Optimality Conditions for a Dynamic Traffic Assignment Model". *Transportation Science*, 12, 200-207.

Messmer, A., (2000a). *METANET a simulation program for motorway networks (Documentation)*. Dynamic Systems and Simulation Laboratory, Technical University of Crete, Chania, Greece.

- Messmer, A., Papageorgiou, M. (1990) “METANET: a macroscopic simulation program for motorway networks”, *Traffic Eng Control*, 31: 466–470.
- Meyer, M. D., y Miller, E. J. (2001) *Urban transportation planning*. USA, McGraw-Hill.
- Migdalas, A. (1995), “Bilevel Programming in Traffic Planning: Models, Methods and Challenge”, *Journal of Global Optimization*, Vol. 7 No. 4, pp. 381–405.
- Migdalas, A. y Pardalos, P.M. (1996) “Hierarchical and bilevel programming”. *Journal of Global Optimization*, 8(3), pp.209-215.
- Migdalas, A., Pardalos, P.M. y Värbrand, P. (eds) (1998) *Multilevel optimization: algorithms and applications* (Vol. 20). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Miller, A. J. (1963). “Settings for fixed-cycle signals”, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 14, No. 4, pp. 373-386.
- Miller, A. J. (1968). “The capacity of signalized intersection in Australia”. *Australian Road Research Board*, Bulletin No.3, Melbourne, March 1968.
- Miller, T., Friesz, T.L. y Tobin, R.L., (1992). Heuristic algorithms for delivered price spatially competitive network facility location problems. *Annals of Operations Research*, Vol. 34 No. 1, pp. 177-202.
- Mitradjieva, M. y Lindberg, P.O. (2013), “The Stiff Is Moving—Conjugate Direction Frank-Wolfe Methods with Applications to Traffic Assignment*”, *Transportation Science*, Vol. 47 No. 2, pp. 280–293.
- MITSIM (Yang y Koutsopoulos, 1996). Disponible en (<http://web.mit.edu/its/products.html>)
- Mun, J. S. (2001) A divided linear travel time model for dynamic assignment. Paper presented at the 9th World Conference on Transport Research, Seoul, Korea, 22–27 July 2001.
- Mun, J.S. (2007), “Traffic performance models for dynamic traffic assignment: An assessment of existing models”, *Transport Reviews: A Transnational Transdisciplinary Journal*, Vol. 27 No. 2, pp. 231–249.
- Mun, J.S. (2009), “Some features of non-linear travel time models for dynamic traffic assignment”, *Transportation Planning and Technology*, Vol. 32 No. 3, pp. 261–288.
- Mun, J.S. (2011), “A solution algorithm for a dynamic deterministic user equilibrium assignment model with departure time choice”, *Transportation Planning and Technology*, Vol. 34 No. 5, pp. 443–466.

- Nagel, K. y M. Schreckenberg (1992) "A cellular automaton model for freeway traffic", *J. Phys. I France* 2 (12): 2221-2229.
- Nakamura, K. y Kockelman, K.M. (2000), "Congestion pricing and roadspace rationing: an application to the San Francisco Bay Bridge corridor. Paper submitted to Transportation Research Board.
- Nakayama, S. y Connors, R. (2013), "A quasi-dynamic assignment model that guarantees unique network equilibrium", *Transportmetrica A: Transport Science*, Vol. 10 No. 7, pp. 669–692.
- Nash, J. F. (1951) "Noncooperative games", *Annals Math* 45, pp. 286-295.
- Newell, G.F. (1993), "A simplified theory of kinematic waves in highway traffic, part I: general theory", *Transportation Research Part B*, Vol. 27B No. 4, pp. 281–287.
- Newell, G.F. (1998) "A moving bottleneck". *Transportation Research Part B: Methodological* Vol. 32 No. 8, pp. 531-537.
- Ngoduy, D., Hoang, N.H., Vu, H.L. y Watling, D. (2016), "Optimal queue placement in dynamic system optimum solutions for single origin-destination traffic networks", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 92, pp. 148–169.
- Ni, D. (2006), "A framework for new generation transportation simulation", en Perrone, L.F., Wieland, F.P., Liu, J., Lawson, B.G., Nicol, D.M. y Fujimoto, R.M. (Eds.), *Proceedings of the 2006 Winter Simulation Conference*, IEEE, pp. 1508–1514.
- Nie, P., Chen, L. y Fukushima, M., (2006). "Dynamic programming approach to discrete time dynamic feedback Stackelberg games with independent and dependent followers", *European Journal of Operational Research* 169, pp. 310–328.
- Nie, X. y Zhang, H.M. (2005a), "Delay-function-based link models: Their properties and computational issues", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 39 No. 8, pp. 729–751.
- Nie, X. y Zhang, H.M. (2005b), "A comparative study of some macroscopic link models used in dynamic traffic assignment", *Networks and Spatial Economics*, Vol. 5 No. 1, pp. 89–115.
- O'Brien, L. y Szeto, W. Y., (2007). "The discrete network design problem over time". *HKIE Transactions* Vol. 14 No. 4, pp. 47-55.
- O'brien, L. y Yuen, S.W., (2007). "The discrete network design problem over time". *HKIE Transactions*, 14(4), pp.47-55.

PARAMICS. Disponible en (<http://www.quadstone.com>) (Barceló, 2010)

Oppenheim, N. (1995) *Urban Travel Demand Modeling: From Individual Choices to General Equilibrium*. John Wiley and Sons.

OPTIMA (Optimal Path Travel Information for Mobility Actions). Disponible en (www.worldhighways.com), consulta en línea septiembre 13 de 2013)

Ortúzar, J. de D. y Willumsen, L. (2008). *Modelos de transporte*. PubliCan, Ediciones Universidad de Cantabria.

Ortúzar, J. de D. y Willumsen, L.G. (2011) *Modelling Transport*, 4a ed. Hoboken, John Wiley & Sons, Ltd.

Ozan, C., Ceylan, H. y Haldenbilen, S. (2014), “Solving Network Design Problem with Dynamic Network Loading Profiles Using Modified Reinforcement Learning Method”, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, Elsevier B.V., Vol. 111, pp. 38–47.

Patriksson, M. (1994b, 2015) *The traffic assignment problem: models and methods*. Mineola, New York, Courier Dover Publications.

Patriksson, M. y Rockafellar, R.T., (2002). “A mathematical model and descent algorithm for bilevel traffic management”. *Transportation Science*, Vol. 36 No. 3, pp.271-291.

Patriksson, M. y Rockafellar, R.T., (2003). “Sensitivity analysis of variational inequalities over aggregated polyhedra, with application to traffic equilibria”, *Transportation Science*, Vol. 37, pp. 56–68.

Patriksson, M., (2004). “Sensitivity analysis of traffic equilibria”, *Transportation Science*, Vol. 37, pp. 258–281.

Peeta, S. y Mahmassani, H.S. (1995), “System optimal and user equilibrium time-dependent traffic assignment in congested networks”, *Annals of Operations Research*, Vol. 60 No. 1, pp. 81–113.

Peeta, S. y Zhou, C. (2006), “Stochastic quasi-gradient algorithm for the off-line stochastic dynamic traffic assignment problem”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 40 No. 3, pp. 179–206.

Peeta, S. y Ziliaskopoulos, A.K. (2001), “Foundations of Dynamic Traffic Assignment: The Past, the Present and the Future”, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 1 No. 3, pp. 233–265.

Perakis, G. y Roels, G. (2006), “An Analytical Model for Traffic Delays and the Dynamic User Equilibrium Problem”, *Oper. Res.*, Vol. 54 No. 6, pp. 1151–1171.

PTV Group (2012): Grundlagenhandbuch PTV Visum 12.5.

Ran B., Roupail N. M., Tarko A., Boyce D. E. (1997), "Toward a class of link travel time functions for dynamic assignment models on signalized networks", *Transportation Research B*, Vol. 31, No. 4, 277-290.

Ran, B. y Boyce, D. (1996) *Modeling Dynamic Transportation Networks. An Intelligent Transportation System Oriented Approach*, second revised ed. Springer-Verlag, Heidelberg.

Ran, B., Hall, R.W. y Boyce, D.E. (1996), "A link-based variational inequality model for dynamic departure time/route choice", *Transportation Research Part B*:, Vol. 30 No. 1, pp. 31–46.

Raouf, O. y Al-Raweshidy, H. (2010), "Theory of Games: An Introduction", en Huang, Q. (Ed.), *Game Theory*, IntechOpen, pp. 1–13.

Raovic, N., Nielsen, O.A. y Prato, C.G. (2017), "Dynamic queuing transmission model for dynamic network loading", *Transport*, Vol. 32 No. 2, pp. 146–159.

Richards, P.I. (1956), "Shock Waves on the Highway", *Operations Research*, Vol. 4 No. 1, pp. 42–51.

Roess, R. P., Prassas, E. S. y McShane, W. R. (2011) *Traffic Engineering*. 4a Ed. Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, Pearson.

Roupail, N. A. Tarko, J. Li, 2001. Traffic flows at signalized intersections, Chap. 9. In Gartner, N. H., Messer, C. J., & Rathi, A. K. Traffic Flow Theory: A State-of-the-Art Report. AHB45 Committee on Traffic Flow Theory and Characteristics. *Transportation Research Board, National Academy of Sciences*. <http://www.tft.pdx.edu/docs/revised_monograph_2001.pdf>(accessed 4.02. 2013). (Consulta en línea, noviembre 16 de 2018 en http://www.academia.edu/25432198/Traffic_Flow_Theory_A_State_of_the_Art_Report)

Rubio-Ardanaz, J.M., Wu, J.H. y Florian, M., (2003). "Two improved numerical algorithms for the continuous dynamic network loading problema". *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 37 No. 2, pp.171-190.

Savard, G. y Gauvin, J. (1994). "The steepest descent direction for the nonlinear bilevel programming problem", *Operations Research Letters*, Vol. 15, pp. 265–272.

Savard, G. (1989) *Contributions à la programmation mathématique à deux niveaux*. PhD thesis, École Polytechnique, Université de Montréal.

Schroeder, B.J., Cunningham, C.M., Findley, D.J., Hummer, J.E. y Foyle, R.S., (2010). *Manual of transportation engineering studies*. 2a Ed. U.S.A., Institute of Transportation Engineers.

Sheffi, Y. (1985) *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.

Shin, S., Noh, H.S. y Kim, K.H. (2004), “Computational Results and Verifications of an Analytical Dynamic User-optimal Traffic Assignment Model”, *서울도시연구*, Vol. 5 No. 4, pp. 29–42.

Sinclair Knight Merz (1998). *Review and Update of the Speed/Flow Curves and Road Link Types in the Melbourne Strategic Highway Model*. Final report to Department of Infrastructure. Melbourne, Victoria, Australia.

Singh, R. (1999). “Improved speed-flow relationships: application to transportation planning models”, paper presented at the *7th TRB Conference on Application of Transportation Planning Methods*, Boston, MA, March 1999.

Slavin, H., Ricotta, P., Brandon, J., Rabinowicz, A. y Sundaram, S. (2010), “A New Traffic Assignment Method for Small and Medium Communities”, *12th National Conference on Transportation Planning for Small and Medium-Sized Communities*, Williamsburg VA, United States, pp. 1–11.

Sloboden, J., Lewis, J., Alexiadis, V., Chiu, Y. Ch., Nava, E (2012) *Traffic Analysis Toolbox Volume XIV: Guidebook on the utilization of Dynamic Traffic Assignment in Modeling*. Publication No. FHWA-HOP-13-015. November 2012. U.S. Department of Transportation. Federal Highway Administration.

Smith, M.J. (1993), “A new dynamic traffic model and the existence and calculation of dynamic user equilibria on congested capacity-constrained road networks”, *Transportation Research Part B*, Vol. 27 No. 1, pp. 49–63.

STAQ es parte del software OmniTRANS (programa de planeación de transporte multimodal y multitemporal). Disponible en <http://archieff.dat.nl/en/products/omnitrans/> (consulta en línea octubre 23 de 2018)

Stackelberg, H.V. (1952), *The Theory of the Market Economy*, translated by AT Peacock, London, William Hodge & Co.

Steenbrink, A., (1974). "Transport network optimization in the Dutch integral transportation study", *Transportation Research* 8B, pp. 11–27.

Suh, S. y Kim, T. J., (1992). "Solving nonlinear bilevel programming models of the equilibrium network design problem: a comparative review". *Annals of Operations Research* 34, pp. 203-218.

Sundaram, S. (2002) *Development of a Dynamic Traffic Assignment System for Short-Term Planning Applications*. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Szeto, W.Y. y Lo, H.K. (2004), "A cell-based simultaneous route and departure time choice model with elastic demand", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 38 No. 7, pp. 593–612.

Szeto, W.Y., Wong, S. C., (2012) "Dynamic traffic assignment: model classifications and recent advances in travel choice principles", *Central European Journal of Engineering* 2(1), 1–18.

Tan, H., Gershwin, S., y Athans, M., (1979), *Hybrid optimization in urban traffic networks*. MIT Report Dot-TSC-RSPA-79-7.

Taylor, M. A. P., Young, W., Bonsall, P. W. (1996) *Understanding Traffic Systems: data, analysis and presentation*. Avebury Technical, University Press, Cambridge, Great Britain.

Taylor, N.B. (2003) "The CONTRAM dynamic traffic assignment model", *Networks and Spatial Economics* 3 (3), 297–322.

Tobin R. L. (1986). "Sensitivity Analysis for Variational Inequalities", *J. Optimi. Theoir Appl.* Vol. 48 No. 1, pp. 191-204.

Tobin, R. L., y Friesz, T. L., (1988), "Sensitivity analysis for equilibrium network flows", *Transportation Science*, Vol. 22, pp. 242-250.

Tobin, R. y Friesz, T., (1986). "Spatial competition facility location models: definition, formulation and solution approach". *Annals of Operations Research* 6, pp. 49-74.

Traffic Estimation and Prediction Systems (TrEPS). Disponible en (www.qub.ac.uk/research-centres, Queen's University Belfast, consulta en línea septiembre 13 de 2013)

Transportation Research Board (2000) *Highway Capacity Manual*. Washington, DC.

- Van Aerde, M. (1994) *INTEGRATION: A Model for Simulating Integrated Traffic Networks*. User's Guide for Model Version 1.5g. M. Van Aerde and Associates, Ltd. and Transportation Systems Research Group, Queen's University, Kingston, Canada. Disponible [www.http://filebox.vt.edu/users/hrakha/software.htm](http://filebox.vt.edu/users/hrakha/software.htm)
- Vanasse Hangen Brustlin, Inc. (2007) *State of the Art in Equilibrium Traffic Assignment*. Metropolitan Washington Council of Governments, National Capital Region Transportation Planning Board.
- Vicente, L.N. y Calamai, P.H. (1994), "Bilevel and multilevel programming: A bibliography review" *Journal of Global optimization*, 5(3), pp.291-306.
- Vickrey, W.S. (1969) "Congestion theory and transport investment", *The American Economic Review*, Vol. 59 No. 2, pp. 251–261.
- VISSIM. Disponible en (<http://www.ptv.de>) (Barceló, 2010)
- Viti, F. y van Zuylen, H.J. (2005) "Modeling Overflow Queues at Signalized Arterial Corridors and with Responsive Control", En Proceedings of the 84th TRB Meeting (pp. 11-15).
- Wardrop, J.G. (1952), "Some theoretical aspects of road traffic research", *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Vol. Part II No. 1, pp. 325–378.
- Webster, F.V. (1958), *Traffic signal settings*. RRL Technical Paper No. 39, HMSO, London.
- Wie, B.W., Tobin, R.L. y Carey, M. (2002), "The existence, uniqueness and computation of an arc-based dynamic network user equilibrium formulation", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 36 No. 10, pp. 897–918.
- Wie, B.W., Tobin, R.L., Bernstein, D. y Friesz, T.L. (1995b). "A comparison of system optimum and user equilibrium traffic assignments with schedule delays". *Transportation Research*, 3C, 389-411.
- Wie, B.W., Tobin, R.L., Friesz, T.L. y Bernstein, D. (1995a) "A discrete time, nested cost operator approach to the dynamic network user equilibrium problem". *Transportation Science*, 29, 79-92.
- Wismans, L., van Berkum, E. y Bliemer, M., (2014). "Handling multiple objectives in optimization of externalities as objectives for dynamic traffic management". *EJTIR*, 14(2), pp.159-177.
- Wu, J.H., Chen, Y. y Florian, M. (1998), "The Continuous Dynamic Network Loading Problem: A Mathematical Formulation and Solution Method", *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 32 No. 3, pp. 173–187.

- Wu, J.H., Florian, M., Xu, Y.W., Rubio-Ardanaz, J.M. (1998a) “A projection algorithm for the dynamic network equilibrium problem”. En *Proceedings of 1998 International Conference on Traffic and Transportation Studies*, American Society of Civil Engineers, Beijing, pp. 379–390.
- Wu, J.H., Florian, M., Rubio-Ardanaz, J.M. (1998b). “The continuous dynamic network loading problem: recent computational results”, presentado en TRISTAN III, San Juan, Porto Rico.
- Xie, J. y Xie, C., (2016). “New insights and improvements of using paired alternative segments for traffic assignment”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 93, pp. 406-424.
- Xu, S., Jiang, W., Deng, X. y Shou, Y., (2018). “A modified Physarum-inspired model for the user equilibrium traffic assignment problem”. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 55, pp. 340-353.
- Xu, Y.W., Wu, J.H., Florian, M. (1998). “An efficient algorithm for the continuous network loading problem: a DYNALOAD implementation”. En: *Transportation Networks: Recent Methodological Advances*. Elsevier Science Ltd., Amsterdam, pp. 51–66.
- Xu, Y.W., Wu, J.H., Florian, M., Marcotte, P. y Zhu, D.L. (1999), “Advances in the Continuous Dynamic Network Loading Problem”, *Transportation Science*, Vol. 33 No. 4, pp. 341–353.
- Yagar, S. (1971) “Dynamic Traffic Assignment by Individual Path Minimisation and Queuing”. *Transportation Research*, 5, 179-196.
- Yang, F., Liu, H., He, R., Ban, X. y Ran, B., (2003). “Bilevel formulation for optimal traffic-information dissemination”. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, (1836), pp.21-28.
- Yang, Q. y Koutsopoulos, H.N. (1996) “A microscopic traffic simulator for evaluation of dynamic traffic management systems”, *Transportation Research 4C*, 113-129.
- Yildirimoglu, M. y Geroliminis, N. (2014), “Approximating dynamic equilibrium conditions with macroscopic fundamental diagrams”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 70, pp. 186–200.
- Yperman, I. (2007), *The Link Transmission Model for dynamic network loading*, *Doctoral Dissertation*, Katholieke Universiteit Leuven, disponible en: <http://ideas.repec.org/p/ner/leuven/urnhdl1979-946.html>.
- Yperman, I. y Tampère, C. M. J. (2006) “Multi-Commodity Dynamic Network Loading with Kinematic Waves and Intersection Delays”, en *DTA 2006: First International Symposium on Dynamic Traffic*

Assignment, Institute for Transport Studies (Ed.). (2006), Engineering and Physical Sciences Research Council. Disponible en <https://www.mech.kuleuven.be/cib/verkeer/dwn/pub/P2006C.pdf>.

Yperman, I., Logghe, S., Tampere, C.M.J., Immers, L.H., (2006). “The multi-commodity link transmission model for dynamic network loading”, en: *Proceedings of the 85th Annual Meeting of the TRB*, Washington, DC.

Zhang, H. y Gao, Z. (2009) “Bilevel programming model and solution method for mixed transportation network design problem”, *Journal of Systems Science and Complexity*, Vol. 22 No. 3, pp. 446-459.

Zhang, H.M. y Nie, X. (2005), “Some consistency conditions for dynamic traffic assignment problems”, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 5 No. 1, pp. 71–87.

Zhang, X., Rey, D. y Waller, S.T. (2015) “Bi-Level Program of Transportation Network Design Problem Accounting for Equity and Exact Solution Methodology”, *Journal of Traffic and Logistics Engineering*, Vol. 3 No. 2, pp. 94-101.

Zheng, X., Chen, W., Wang, P., Shen, D., Chen, S., Wang, X., Zhang, Q. y Yang, L. (2016). “Big data for social transportation”, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Vol. 17 No. 3, pp.620-630.

Zhong, R.X., Sumalee, A., Friesz, T.L. y Lam, W.H.K. (2011), “Dynamic user equilibrium with side constraints for a traffic network: Theoretical development and numerical solution algorithm”, *Transportation Research Part B: Methodological*, Elsevier Ltd, Vol. 45 No. 7, pp. 1035–1061.

Zhu, D. y Marcotte, P., (2000). “On the existence of solutions to the dynamic user equilibrium problema”. *Transportation Science*, 34(4), pp.402-414.

Ziliaskopoulos, A.K. (2000), “A Linear Programming Model for the Single Destination System Optimum Dynamic Traffic Assignment Problem”, *Transportation Science*, Vol. 34, pp. 37–49.

Zukhovitshii, S., Poliak, R. y Primak, M. (1973) “Concave multiperson games: numerical methods” *Maketon*, pp. 11-30.