



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Análisis de Cocción por el
Método de Diferencias Finitas**

TESINA

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Mauricio Tonatiuh Hernández Mena

DIRECTOR DE TESINA

Dr. Luis Cervantes Marcelino



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Agradecimientos

Antes que nada, lo primero es agradecer, y agradezco la vida que me ha brindado la oportunidad de compartir quien hasta el día de hoy he sido con todos ustedes. Desde que nací he conocido bastantes personas que han influido en mi formación como individuo, ciudadano, futuro profesionista y sobre todo como humano.

Quiero agradecer a la UNAM por brindarme la oportunidad de formarme en una de las mejores universidades de excelencia y prestigio; también por tener la dicha de aprender de profesores con amplia experiencia y gran conocimiento, pero que sobre todo independientemente de la enseñanza académica comparten y contagian la pasión por el conocimiento, ciencia e ingeniería.

Agradezco al Dr. Luis Cervantes que con excelencia me asesoró a lo largo de varios meses de trabajo y me permitió lograr la tesina que presento. También a los integrantes de mi jurado que contribuyeron a mi formación integral en distintas asignaturas muy valiosas a lo largo de la carrera.

Agradezco a mis padres por el apoyo incondicional, y a mi abuelo José Luis de manera muy especial por haberme apoyado también en mis estudios.

Por último y no menos importante, agradezco a mis amigos Imanol, Pablo y Nathan que me han acompañado a lo largo de este camino y contribuido con muy valiosas observaciones.

Prólogo

De manera cotidiana usamos artículos que en su fabricación han sido sometidos a un proceso de horneado. El horneado es una etapa crucial en varios de ellos, por lo que para obtener la calidad requerida se debe tener cuidado y acatar las condiciones de temperatura que se requieran para así obtener un producto con las cualidades deseadas.

El conocimiento que se adquiere al estudiar ingeniería mecánica permite comprender de manera analítica el entorno que nos rodea, en el cual se suscitan distintos fenómenos físicos que son parte de nuestros días. De tal manera que al entenderlos es posible mejorarlos analizando los resultados que obtenemos de métodos analíticos, numéricos o experimentales.

El aplicar el método numérico de diferencias finitas (MDF) a un proceso de horneado de alimentos permite relacionar los resultados del MDF con los resultados experimentales de pruebas de horneado. Se pretende elaborar una metodología para pronosticar futuros procesos de horneado que aún no se han realizado; esto con el objetivo de prever los tiempos más convenientes para minimizar el uso de materia prima, energía y, por lo tanto, minimizar costos.

La metodología elaborada consiste en recopilar las propiedades térmicas del alimento en estudio, nutrir al MDF con las mismas y determinar el menor número de nodos necesarios para converger a un resultado cercano a la realidad.

Índice

Agradecimientos	ii
Prólogo.....	iii
Índice	iv
Símbolos	vi
Introducción	7
Objetivos	7
Tipos de pan	7
Tipos de hornos	8
Mecanismos de transferencia de calor	9
Transferencia de calor	9
Conducción	10
Convección.....	10
Radiación	11
1 Ecuaciones y método de solución.....	12
1.1 Ecuaciones de transferencia de calor	12
1.2 Números adimensionales y correlaciones	13
1.2.1 Número de Rayleigh.....	13
1.2.2 Correlación número de Nusselt “ <i>Nu</i> ”.....	15
1.2.3 Cálculo coeficiente convectivo “ <i>h</i> ”.....	15
1.2.4 Número de Fourier “ <i>Fo</i> ”.....	16
1.3 Método de solución	16
2 Condiciones de operación y consideraciones realizadas	19
2.1 Horneado de bolillo	20
2.1.1 Pasos de horneado	20
2.1.2 Consideraciones.....	20
2.1.3 Tiempo de horneado	22
2.2 Freído de filete de pescado	23
2.2.1 Consideraciones.....	23
2.2.2 Propiedades del filete de pescado	23
3 Validación numérica.....	25

3.1	Estudio de malla	25
4	Resultados	30
4.1	Caso de horneado de bolillo	30
4.2	Caso freído de filete de pescado	34
5	Conclusiones	37
	Trabajo a futuro.....	38
	Bibliografía	39
Apéndice 1	Diagrama de la metodología	41
Apéndice 2	Diagrama horno XAVC-06FS-GPR	42
Apéndice 3	REGRESIÓN POLINÓMICA DE TABLA A.4	44
Apéndice 4	Aplicación del MDF a bandeja sin perforaciones	45

Símbolos

C_p	calor específico a presión constante, J/kg • K
$ Fo $	número de Fourier
$ g $	aceleración gravitacional, m/s ²
$ h $	coeficiente convectivo de transferencia de calor, W/m ²
$ k $	conductividad térmica, W/m • K
$ L $	longitud característica, m
$ Nu $	número de Nusselt
$ Pr $	número de Prandt
$ Q' $	energía de transferencia por unidad de área, J/m ²
$ \dot{q} $	tasa de generación de energía por unidad de volumen, W/m ³
$ Ra $	número de Rayleigh
$ T $	temperatura, K
$ t $	tiempo, s
$ x, y, z $	coordenadas rectangulares, m
$ \Delta T $	diferencia de temperatura

Letras griegas

$ \alpha $	difusividad térmica, m ² /s
$ \beta $	coeficiente volumétrico de expansión térmica, K ⁻¹
$ \nu $	viscosidad cinemática, m ² /s
$ \rho $	densidad de masa, kg/m ³
$ \infty $	condiciones de flujo libre

Subíndices

$ m, n, o $	ubicación de nodo coordenadas, m[x], n[y], o[z]
$ s $	ubicación sobre la superficie
$ cs $	ubicación al centro del sistema
$ cv $	ubicación en la longitud media de la corteza vertical
$ ch $	ubicación en la longitud media de la corteza horizontal
$ cb $	ubicación al centro del bolillo
$ cf $	ubicación al centro del pescado
$ h $	ubicación al interior de la cámara de cocción del horno

Superíndices

$ p, p+1 $	orden de iteración
------------	--------------------

Superguión

--	condiciones promedio en la superficie; tiempo promedio
----	--

Introducción

El cocido de alimentos ha estado presente en la humanidad desde el descubrimiento del fuego. En la actualidad contamos con distintas fuentes de calor para preparar los alimentos, ya sea a nivel residencial o industrial. De igual manera, el conocimiento ha ido evolucionando y el entendimiento de nuestro entorno nos ha permitido mejorar en cierta parte nuestra calidad de vida.

La simulación numérica de los fenómenos físicos ha permitido mejorar el aprovechamiento de los recursos, y acorde a la aplicación que nosotros requiramos, la metodología a crear dependerá de lo que estemos buscando.

Desde el horneado de bolillo hasta la preparación de filetes de pescado se aplicará una metodología que permita determinar las condiciones finales de los productos. Se decide escoger el bolillo por la versatilidad de su uso, su presencia en la cultura mexicana y su aparente simpleza como producto final.

La metodología consta de la investigación tanto teórica como empírica del proceso de horneado del bolillo, las propiedades físicas del bolillo y posteriormente su relación con la ecuación general de transferencia de calor por conducción. La aplicación del método de diferencias finitas permite la obtención de los resultados que en conjunto con la resolución a distintos mallados permitirá la validación para replicar la metodología¹ para un filete de pescado, todo esto contemplando de manera natural el estado transitorio que se presenta en el proceso de horneado o cocción.

Objetivos

Aplicar un método que permita emplear las propiedades físicas del bolillo para estimar de manera precisa la temperatura durante la preparación y su condición final.

Dar validez a la metodología empleada y utilizarla para analizar la cocción en un filete de pescado como situación de alcance.

Tipos de pan

Antes de conocer la clasificación del pan es necesario definirlo; si bien su definición es simple su proceso de elaboración está lejos de serlo.

Se conoce como pan al producto resultante de la cocción de una masa obtenida por la mezcla de harina de trigo, sal comestible y agua potable, fermentada por adición de levaduras activas. Cuando se emplean harinas de otros cereales el pan se designa con el apelativo correspondiente [1].

¹ Véase apéndice 1 para visualizar diagrama de metodología.

Es importante saber qué tipo de pan se horneará, ya que no todos los panes son exactamente iguales, a continuación, tenemos los diferentes tipos de pan con sus características distintivas².

1. Pan blanco/dulce³/leudado – Compuesto por harinas de trigo, es el más conocido y habitual. Encontramos en este tipo el pan de barra, el artesanal o rústico, la baguette, telera y bolillo.
2. Pan integral – Es elaborado con harinas integrales y más enriquecido con vitaminas y minerales que el pan blanco.
3. Pan con salvado – Elaborado con harina refinada a la que se le añade fragmento de salvado.
4. Pan no leudado – Realizado con ingredientes habituales, pero sin levadura. Es una masa más compacta.
5. Pan de centeno – Más compacto que el de trigo derivado de menor contenido de gluten.
6. Pan de maíz – Elaborado con harina de maíz sin gluten.
7. Pan de avena – Nutritivo y energético rico en proteínas, vitaminas del grupo B y minerales.
8. Pan de espelta – De moda en la panadería ecológica. Es rico en fósforo, magnesio y calcio.
9. Pan de molde o caja – Elaborado con harina de trigo enriquecida a veces con leche. Se hornea en moldes lo que le da su forma rectangular peculiar.
10. Pan tostado o biscote – Pan de molde o caja sometido tras rebanar a un proceso de tostado.
11. Pan sin sal – Compuesto por ingredientes habituales, pero sin sal.

Independientemente del tipo de pan, hay dos grandes rubros que determinan su estado como producto terminado, por un lado, tenemos los ingredientes (harina, agua, levadura, sal, agentes condicionantes, ácido ascórbico, azúcar, aceite vegetal, fórmula láctea o leche e inhibidores de moho) y los distintos procesos requeridos para la transformación de los ingredientes a producto terminado como: mezclado, fermentación, amasado, crecimiento, horneado, enfriamiento y rebanado y empaquetamiento en caso de ser requerido [2].

El horneado puede arruinar hasta la masa mejor preparada por lo que el horno es una pieza fundamental para el éxito del producto. Si bien existe una infinidad de modelos de hornos y marcas en el mercado, no es necesario conocerlos pues éstos se pueden agrupar en sus distintos tipos.

Tipos de hornos

Antes de mencionar los tipos de horno es necesario definirlo. Tenemos que se entiende por horno a [3]:

1. m. “Construcción de piedra o ladrillo para caldear, en general abovedada y provista de respiradero o chimenea y de una o varias bocas por donde se introduce lo que se trata de someter a la acción del fuego.”

2. m. “Aparato metálico cerrado, en cuyo interior se asan, cuecen, calientan o gratinan los alimentos.”

²Características extraídas de bibliografía [26].

³ Pan dulce es distinto a pan de dulce (pan de azúcar), la diferencia radica en la forma en la que se elabora su presentación final.

3. m. *“Aparato que sirve para trabajar y transformar con ayuda del calor las sustancias.”*

Los distintos tipos de hornos pueden ser de leña, gas, eléctrico, solar, microondas, inducción y resistencia. Acorde a la aplicación requerida se realiza la elección del tipo más conveniente para el producto y su manipulación, en nuestro caso para un horneado de pan, específicamente bolillo, el horno a gas es el que fue usado en la prueba experimental acorde al informe de cocción⁴ y se empleó una receta empírica para el horneado [4].

Es de suma importancia conocer las características del horno escogido, los rangos de temperatura alcanzables al momento de efectuar el horneado son limitados por las especificaciones técnicas del equipo junto con las funciones y sensores incluidos. El horno XAVC-06FS-GPR-AL⁵ fue usado en la prueba experimental [5] cuyos datos son utilizados para alimentar el modelo numérico, su rango de temperatura en la cámara de cocción ronda desde los 30°C hasta los 260°C [6].

Con el progreso tecnológico se mejoran las cualidades y funciones de los hornos, en la actualidad existen sondas de temperatura a corazón que permiten conocer la temperatura al centro del producto, desafortunadamente al introducir la sonda, tras retirarla se observará la formación de una cavidad que visualmente puede ser desagradable por algunos consumidores, por lo que no todos los procesos de horneado podrán gozar del beneficio del uso de la sonda.

Si bien sabemos que la medición de la temperatura corresponde a una medida indirecta y los hornos de la actualidad la llevan a cabo, puede ser posible que a futuro se desarrolle maquinaria más compleja que permita evaluar las propiedades térmicas de nuestro producto conforme evoluciona el tiempo; con el objetivo en mente de mejorar la precisión en los tiempos de horneado sin intervención drástica del usuario. Hoy en día existen modos de horneado en los equipos industriales, que por secreto comercial su metodología es confidencial, y podría no ser tan descabellada la idea de contemplar las propiedades físicas de nuestro producto a hornear en modos de cocción predefinidos desde su diseño y fabricación que contemplen los distintos mecanismos de transferencia de calor que rigen la cocción y horneado.

Mecanismos de transferencia de calor

Transferencia de calor

“Se puede entender como transferencia de calor a la energía en tránsito debida por la existencia de un gradiente de temperaturas, si bien es una definición simple y general, es suficiente para responder la pregunta “¿qué es la transferencia de calor?” [7]

Conociendo que la existencia de la transferencia de calor es debida siempre a un gradiente de temperatura, ésta puede presentarse entre cuerpos o inclusive dentro de uno mismo. Los mecanismos

⁴ En su momento se escogió este horno para querer evaluar las condiciones finales del horneado de bolillo [5]

⁵ Véase su plano e imagen en el apéndice 2.

por los cuales se puede presentar son conducción, convección natural, convección forzada y radiación. A continuación, definiremos cada uno de dichos mecanismos.

Conducción

“La conducción es la transferencia de energía de las partículas más energéticas a las menos energéticas de una sustancia debido a las interacciones entre las mismas.” [8]

“Las temperaturas más altas se asocian con las energías moleculares más altas y, cuando las moléculas vecinas chocan, como lo hacen constantemente, debe ocurrir una transferencia de energía de las moléculas más energéticas a las menos energéticas. En presencia de un gradiente de temperatura, la transferencia de energía por conducción debe ocurrir entonces en la dirección de la temperatura decreciente.” [8]

Si bien la definición puede ser extensa podemos concluir que la **conducción** es la transferencia de energía de moléculas de un mayor estado energético a las de menor estado energético. Su estado energético se manifiesta de manera macroscópica en la temperatura, por lo que a mayor energía presente en las moléculas mayor será su temperatura; debido a esto el gradiente de temperatura en dirección decreciente existente coincide con la transferencia de calor por conducción.

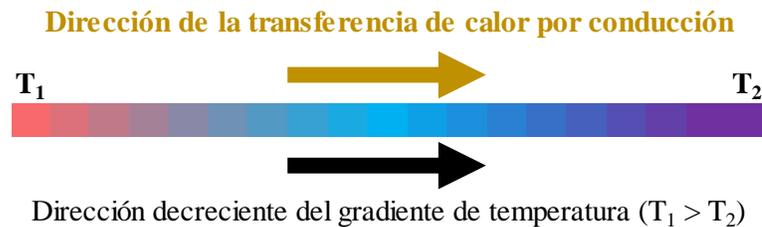


Figura 1 Direcciones del gradiente de temperatura y transferencia de calor por conducción.

Convección

“El modo de transferencia de calor por convección se compone de dos mecanismos. Además de la transferencia de energía debida al movimiento molecular aleatorio (conducción), la energía también se transfiere mediante el movimiento global, o macroscópico del fluido.” [8]

“El movimiento del fluido se asocia con el hecho de que, en cualquier instante, grandes números de moléculas se mueven de forma colectiva o como agregados. Tal movimiento, en presencia de un gradiente de temperatura, contribuye a la transferencia de calor.” [8]

“La transferencia de calor por convección se clasifica de acuerdo con la naturaleza del flujo. Hablamos de convección forzada cuando el flujo es causado por medios externos, como un ventilador, una bomba o vientos atmosféricos. En cambio, en la convección libre (o natural) el flujo es inducido por fuerzas de empuje que surgen a partir de diferencias de densidad ocasionadas por variaciones de temperatura en el fluido.” [8]

Como en el caso de la conducción para la **convección** hay un gradiente de temperatura en un fluido, la densidad cambia en función de la temperatura y dicho cambio ocasiona movimientos macroscópicos del fluido que detonan la transferencia de calor, a esto se le conoce como **convección**

natural. Si se inducen los movimientos del fluido se llamará *convección forzada*. Es importante recordar que los movimientos aleatorios moleculares (conducción) inician la convección natural en la interfase (sólido/líquido, sólido/gas o líquido/gas), es aquí donde sucede el primer intercambio energético.

Radiación

“La radiación térmica es la energía emitida por la materia que se encuentra a una temperatura finita, se puede atribuir a cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas constitutivos. La energía del campo de radiación es transportada por ondas electromagnéticas o alternativamente, fotones.” [8]

A diferencia de los mecanismos previos, la *radiación térmica* no depende de un medio para propagarse, aunque sí pueda verse afectado por el mismo. Se presenta por la existencia de una temperatura definida y al existir movimiento molecular se generan cambios electrónicos a nivel atómico que generan la radiación térmica.

La radiación térmica pertenece al espectro electromagnético comprendido entre 10^{-1} y 10^2 μm [7] y la longitud de onda emitida depende del nivel energético molecular (o temperatura). A una temperatura de cero absoluto la mecánica clásica supone movimiento molecular nulo, por lo que no habría radiación emitida.

Finalmente recapitulando, el bolillo será nuestro objeto de análisis y la conducción será el mecanismo de transferencia de calor que se considerará; se desprecia la radiación por el rango de temperatura alcanzable. La convección como mecanismo de transferencia de calor se descartará por la condición de no deslizamiento en la interfase, además de que el término “convección” en este tipo de horno se refiere a la forma en la que el aire en la cámara de cocción es homogenizado, para nuestro caso se idealizará una cámara de cocción homogénea.

1 Ecuaciones y método de solución

Recordando los objetivos planteados, se tiene inicialmente el caso del horneado de un bolillo y posteriormente el análisis de freído de un filete de pescado; que si bien se encuentran en medios distintos (uno aire y otro aceite), la metodología para estimar el resultado final del producto será la misma.

La manera de abordar el problema es con la ecuación general de calor en coordenadas cartesianas que relaciona la ley de Fourier en las tres direcciones.

Existe también la importancia de ciertos números adimensionales que permiten simplificar la ecuación general de calor y calcular el coeficiente de convección⁶ que nos servirá más adelante como un indicador para determinar la conclusión del método.

El bolillo crudo se encuentra a una temperatura inicial y tras definir las condiciones de horneado en el horno, se introduce el bolillo de tal manera que inicia la interacción por contacto entre las fronteras del bolillo con el aire de la cámara de cocción y la bandeja de aluminio.

Aunque se indica que el horno es de convección, esto hace referencia la manera en la que el aire en la cámara de cocción es calentado, es decir, cómo se homogeniza la cámara de cocción, por ejemplo, si tuviera ventiladores sería convección forzada. Mencionado lo anterior, y contemplando la condición de no deslizamiento en la interfase bolillo-aire y bandeja-aire, la conducción se presentará como mecanismo de transferencia de calor lo que permitirá prescindir del término convectivo únicamente en la simplificación para la obtención de la ecuación (3).

1.1 Ecuaciones de transferencia de calor

Se parte con la ecuación general de calor en coordenadas cartesianas [7, p. 72]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

se supone conductividad térmica constante y que no existe generación de calor en el sistema por lo que nos queda:

$$\frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

⁶ Este coeficiente hace referencia al movimiento de fluido debido al ΔT en la interfase bolillo-aire.

Empleando la correlación de difusividad térmica⁷ “ α ” y conservando el término temporal debido a que estamos en estado transitorio:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3)$$

1.2 Números adimensionales y correlaciones

El comportamiento de los resultados de la solución numérica está determinado por el número adimensional “Fo”, por lo que es importante definirlo y considerarlo para nuestro estudio. Por otro lado, los números de Rayleigh y Nusselt nos permitirán efectuar un cálculo del coeficiente convectivo “h” que si bien aun prescindiendo de la convección como mecanismo de transferencia de calor, de manera inicial sabemos que existe una diferencia de temperatura en la interfase lo que conlleva a la existencia de la convección, su bajo valor confirmará que el prescindir del término convectivo no es influyente.

1.2.1 Número de Rayleigh

Dado que existe una diferencia de temperatura entre la corteza del sistema y el aire de la cámara de cocción, se presentarán movimientos convectivos. El flujo en las cortezas verticales y superiores puede ser laminar o turbulento y la transición de régimen depende de la magnitud relativa de las fuerzas de empuje y viscosa en el fluido, esta relación (de fuerzas) define el valor del Rayleigh. Y resulta que al relacionar las fuerzas de empuje y viscosa; a mayor fuerza de empuje prolifera la convección como mecanismo de transferencia de calor mientras que a mayor fuerza viscosa predomina la conducción, por lo que el número de Rayleigh es un número adimensional que asocia el mecanismo de transferencia de calor presente.

Una vez identificado el régimen que se presente, el Rayleigh nos servirá para obtener el coeficiente de convección “h”, no sin antes llevar a cabo la obtención del número adimensional “Nu” mediante la correlación apropiada.

Conforme evoluciona el tiempo en cada paso de horneado el gradiente de temperatura disminuirá; es decir, la diferencia entre el aire de la cámara de cocción y la corteza del sistema será cada vez menor. Empleando el nodo más frío de las cortezas (el de en medio) nos aproximará al valor más alto de Rayleigh.

⁷ $\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \left[\frac{m^2}{s} \right]$ [7, p. 68]

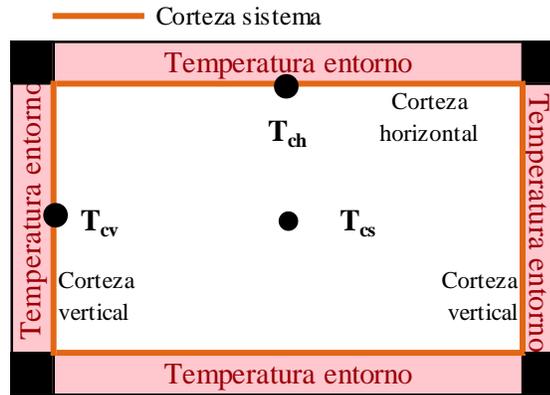


Figura 2 Ubicación de los nodos medios de las cortezas.

Para el cálculo del número de Rayleigh tenemos [7, p. 571]:

$$Ra_{L_{m,n}} [1] = \frac{g \left[\frac{m}{s^2} \right] \beta \left[\frac{1}{K} \right] (\Delta T [K]) L [m]^3}{\nu \left[\frac{m^2}{s} \right] \alpha \left[\frac{m^2}{s} \right]} \quad (4)$$

$\beta \equiv$ Coeficiente volumétrico de expansión térmica $\left[\frac{1}{K} \right]$

$\nu \equiv$ Viscosidad cinemática $\left[\frac{m^2}{s} \right]$

$\alpha \equiv$ Difusividad térmica $\left[\frac{m^2}{s} \right]$

$g = 9.78 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

$L \equiv$ Longitud característica⁸

$$\Delta T = T_{\infty} - T_{m,n}$$

Para ser calculados β , ν , α se debe emplear la temperatura promedio $(T_s + T_{\infty})/2$ [7]

Para el cálculo de “ ν ” y “ α ” se emplean las expresiones correspondientes presentes en la figura 28, que ejemplifican una línea de tendencia polinómica de grado 4 de los puntos de la tabla presentada en el apéndice 3. Esto se realiza con el objetivo de evaluar las propiedades en función de la temperatura de la iteración en cuestión, dado que la tabla originalmente no presenta la resolución suficiente para conocer con exactitud las propiedades a temperaturas distintas que las que ya incluye de manera inicial.

⁸ Se presentan dos posibles casos para el bolillo, su corteza superior se debe emplear como longitud característica su área superior dividido por el perímetro que define el área, mientras que para su corteza lateral al ser verticales se emplea la longitud característica de su altura para el cálculo del número de Rayleigh individualmente.

1.2.2 Correlación número de Nusselt “ Nu ”

El número de Nusselt es un número adimensional que relaciona la transferencia de calor por convección y conducción, para un valor de Nusselt menor o igual a uno significa que el fenómeno por conducción es el que predomina; si es mayor que uno la convección predomina.

El número de Nusselt nos permitirá calcular el coeficiente convectivo “ h ” y se debe contemplar que para su cálculo en una placa vertical y horizontal son distintas las expresiones, las cortezas laterales y superior del bolillo asemejan a placas verticales y placa horizontal, respectivamente.

En condiciones iniciales y sobre el nodo T_{cl} (véase figura 2) se evalúa el comportamiento del número de Rayleigh vertical, este inicia desde un valor del orden de $1E+5$. Acorde a la bibliografía se obtienen resultados ligeramente más precisos empleando la expresión (5) (solo si el número de Rayleigh se conserva por debajo de $10E+9$ lo cual al evaluar en cada iteración se cumple) [7, p. 571].

$$\overline{Nu}_L = 0.68 + \frac{0.670Ra_L^{\frac{1}{4}}}{\left[1 + (0.492/Pr)^{\frac{9}{16}}\right]^{4/9}} \quad (5)$$

Se contempla la expresión (5) por no inducirse movimiento de flujo alguno.⁹

Para la corteza superior el Rayleigh se evalúa en T_{cs} (véase figura 2) y comienza en un valor de orden $1E+4$; el valor se encuentra muy por debajo del valor crítico ($1E+9$) por lo que el régimen se confirma como laminar para el resto del proceso [8, p. 491].

1.2.3 Cálculo coeficiente convectivo “ h ”

Independientemente de la corteza, la expresión que nos relaciona el número de Nusselt con el coeficiente convectivo será la que se muestra [7, p. 571]:

$$\overline{Nu}_L [W/(m^2 K)] = \frac{\bar{h} \left[\frac{W}{m^2 K} \right] L [m]}{k [W/mK]} \quad (6)$$

Tras despejar a “ h ” nos queda:

$$\bar{h} \left[\frac{W}{m^2 K} \right] = \frac{k [W/mK] \overline{Nu}_L [W/(m^2 K)]}{L [m]} \quad (7)$$

⁹ El número de Prandtl es constante para los rangos de temperatura presentes en el horneado, en el apéndice 3 se muestra su gráfica. Esto se traduce en un valor constante para el cálculo de la ecuación (5).

1.2.4 Número de Fourier “Fo”

El número de Fourier es un número adimensional que relaciona la difusividad térmica, el tiempo y la longitud. Para nuestro caso empleando su forma en diferencias finitas caracterizará nuestro análisis de conducción transitoria que contemplando la difusividad “ α ” y la distancia entre nodos nos ayuda a definir como es la transferencia de calor entre nodos; todo esto mientras se resuelve el modelo matemático para cada incremento de tiempo (Δt) hasta completar la duración total del proceso, su expresión es [7]:

$$Fo \equiv \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta L)^2} \quad (8)$$

1.3 Método de solución

El método de diferencias finitas es un método numérico que permite calcular la solución a una ecuación diferencial. Se efectúa la aproximación a las derivadas mediante el uso de ecuaciones algebraicas. Se realiza la discretización del dominio del cálculo en elementos diferenciales (Δx , Δy , Δz , ΔT y Δt), la intersección de los segmentos diferenciales son los nodos y un número finito de nodos aproximarán el comportamiento general del fenómeno físico definido por la ecuación (3).

Para aplicar el método de diferencias finitas se define la región de influencia de nuestro nodo de interés m, n, o (T_{cs}) la cual corresponde al cubo unitario de color azul acorde a la figura 3. Se desarrolla de manera general en tres dimensiones y se reducirá a dos dimensiones para nuestro caso de aplicación.

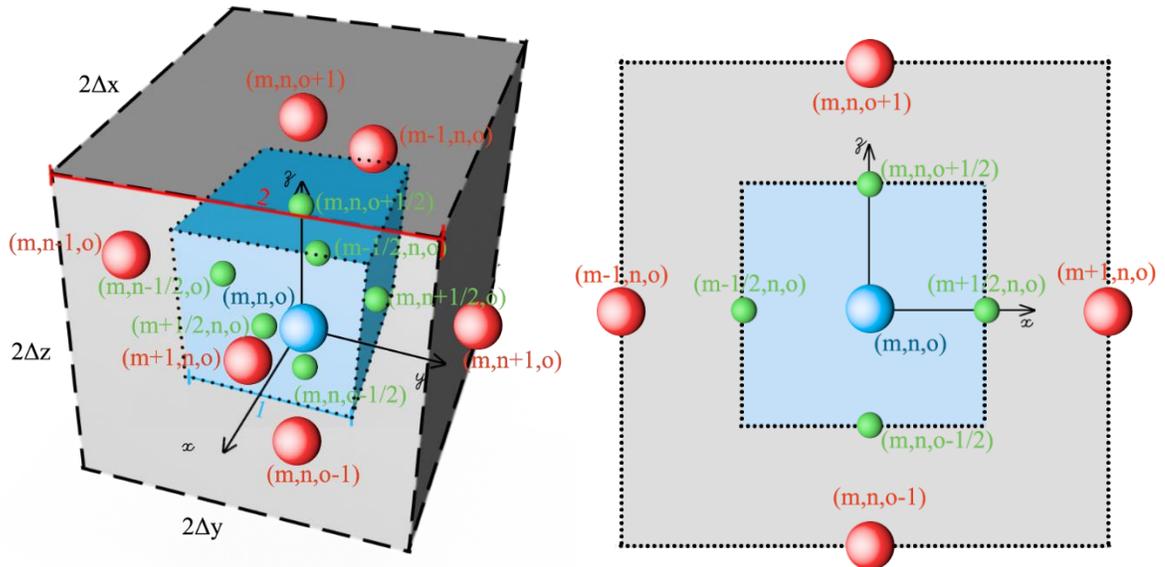


Figura 3 Representación de nodos con región de influencia para el nodo (m, n, o) vista en 3D y en el plano xz .

Para proceder a resolver la ecuación (3) se utiliza la aproximación de diferencia progresiva para las derivada respecto al tiempo, la cual relaciona dos temperaturas del nodo m,n,o con una Δt que separa dichas condiciones, por lo que tenemos:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{m,n,o} = \frac{T_{m,n,o}^{p+1} - T_{m,n,o}^p}{\Delta t} \quad (9)$$

donde

$$t[s] = p[1]\Delta t[s]; p[1] \equiv \text{paso de iteración}$$

Para las derivadas espaciales se aproxima mediante la diferencia central entre nodos adyacentes y la longitud de los elementos diferenciales Δx , Δy y Δz según sea el caso, por lo que tenemos:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n,o}^p \approx \frac{T_{m+1,n,o}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta x} \quad (10) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n,o}^p \approx \frac{T_{m,n,o}^p - T_{m-1,n,o}^p}{\Delta x} \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n+\frac{1}{2},o}^p \approx \frac{T_{m,n+1,o}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta y} \quad (12) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n-\frac{1}{2},o}^p \approx \frac{T_{m,n,o}^p - T_{m,n-1,o}^p}{\Delta y} \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{m,n,o+\frac{1}{2}}^p \approx \frac{T_{m,n,o+1}^p - T_{m,n,o}^p}{\Delta z} \quad (14) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{m,n,o-\frac{1}{2}}^p \approx \frac{T_{m,n,o}^p - T_{m,n,o-1}^p}{\Delta z} \quad (15)$$

Sustituyendo desde la ecuación (9) hasta la ecuación (15) en (3) se tiene:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n,o}^{p+1} - T_{m,n,o}^p}{\Delta t} \approx \frac{T_{m+1,n,o}^p + T_{m-1,n,o}^p - 2T_{m,n,o}^p}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1,o}^p + T_{m,n-1,o}^p - 2T_{m,n,o}^p}{\Delta y^2} + \frac{T_{m,n,o+1}^p + T_{m,n,o-1}^p - 2T_{m,n,o}^p}{\Delta z^2} \quad (16)$$

Se realiza la consideración que $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ y se despeja $T_{m,n,o}^{p+1}$ para emplear el método explícito

$$T_{m,n,o}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} [T_{m+1,n,o}^p + T_{m-1,n,o}^p + T_{m,n+1,o}^p + T_{m,n-1,o}^p + T_{m,n,o+1}^p + T_{m,n,o-1}^p - 6T_{m,n,o}^p] \quad (17)$$

se sustituye la forma en diferencias finitas del número de Fourier $Fo = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$ [7, p. 303].

$$T_{m,n,o}^{p+1} = Fo [T_{m+1,n,o}^p + T_{m-1,n,o}^p + T_{m,n+1,o}^p + T_{m,n-1,o}^p + T_{m,n,o+1}^p + T_{m,n,o-1}^p] + [1 - 6Fo] T_{m,n,o}^p \quad (18)$$

Aplicando el *criterio de estabilidad*¹⁰ para la ecuación (18) se debe cumplir que:

$$1 - 6Fo \geq 0 \therefore Fo \leq \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

Simplificando la ecuación (18) para aplicar a nuestro caso se tiene la ecuación:

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo[T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p] + [1 - 4Fo]T_{m,n}^p \quad (19)$$

Con su correspondiente criterio de estabilidad que usaremos por trabajar en un plano como veremos en el capítulo 2

$$1 - 4Fo \geq 0 \therefore Fo \leq \frac{1}{4} \quad (20)$$

¹⁰ Se debe cumplir que el coeficiente del nodo de interés en el tiempo anterior siempre es mayor o igual a cero [7, p. 303]. Al hablar de estabilidad se pretende que los resultados converjan en lugar de divergir arrojando resultados descabellados, por ejemplo, temperaturas mucho mayores a las condiciones de frontera o menores a la temperatura inicial del bolillo.

2 Condiciones de operación y consideraciones realizadas

Durante la prueba experimental se presenta la transferencia de calor en tres dimensiones, por simplicidad se trabaja en el plano. Se ubicó al centro geométrico por ser la zona donde presentará mayor tiempo de cocción; también la temperatura que sea lograda en el nodo central determina si es producto terminado o no, y sobre todo en qué condiciones finales se presentará.



Figura 4 Dramatización de aplicación del plano bisector en el bolillo y pescado, esta figura es únicamente ilustrativa y tiene como objetivo facilitar la abstracción del plano aplicado al sistema.

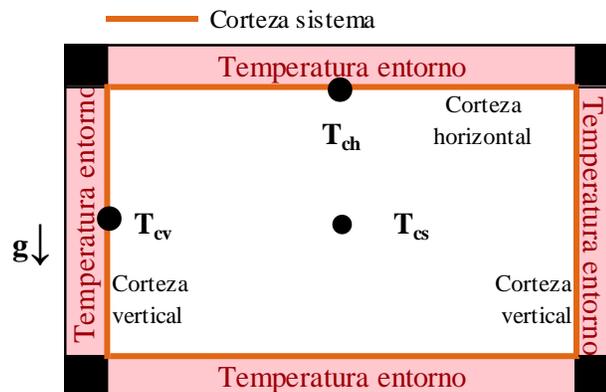


Figura 5 Ubicación de nodos de estudio en el plano del sistema y dirección de la aceleración gravitacional (g).

Tras ser definido el plano en el cual se va a realizar el análisis numérico, se ubican los nodos de estudio: nodo del centro del sistema (cs), nodo corteza vertical (cv) y horizontal (ch). El nodo central define la cocción mientras que los nodos en la corteza permiten el cálculo del coeficiente convectivo “ h ” y número de Rayleigh para el horneado de bolillo, véase figura 5.

Es retomada la ecuación (19), y se resuelve de manera explícita conociendo las condiciones iniciales de temperatura y con un incremento de tiempo definido por el criterio de estabilidad¹¹ $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{4\alpha}$.

¹¹ Se evalúa la forma en diferencias finitas de la expresión (8) en la expresión (20) y se despeja Δt .

2.1 Horneado de bolillo

Recordando la importancia del proceso de horneado es importante conocer que durante la prueba experimental se aplicó una receta que consiste en cuatro pasos de horneado, cada uno con condiciones de temperatura y/o duraciones de tiempo distintas. A continuación, se mostrarán los pasos de horneado, es importante mencionar que los pasos uno, dos y tres son constantes y fijos.

2.1.1 Pasos de horneado

Basándome en el informe empírico de cocción realizado en el horno de modelo XAVC-06FS-GPR-AL es posible extraer de manera simple los cuatro pasos utilizados en el proceso de horneado del bolillo [5].



Figura 6 Pasos empleados para el horneado de bolillos [5].

Tabla 1 Pasos de horneado para bolillo.

Paso	Tiempo		Temperatura de horneado [°C]	Temperatura inicial ¹² bandeja y masa [°C] (t=0s)
1	0-60[s]	0-1[min]	210	35°C
2	60-120[s]	1-2[min]	170	
3	120-720[s]	2-12[min]	175	
4	720-1020[s]	12-17[min]	180	

2.1.2 Consideraciones

Es importante tener claro que se busca un equilibrio entre practicidad del método y resultados veraces, de igual manera el modo de llegar al resultado debe ser más ágil que las pruebas de horneado. Para esto, la realización de consideraciones es indispensable para la obtención de resultados congruentes por lo que se contempla lo siguiente:

- La interferencia entre bolos de masa no se tomará en cuenta.
- Las reacciones químicas en el bolillo no modificarán las propiedades térmicas.
- Las curvas de enfriamiento y calentamiento del horno se desprecian, se contempla que en la cámara de cocción el aire se encuentra a una temperatura homogénea acorde al paso de horneado de manera inmediata y en condiciones casi-estáticas.
- Se considera fenómeno de convección natural debido al ΔT en la interfase bolillo-aire.

¹² La temperatura inicial se obtiene al usar el valor medio del rango de temperatura en el que concluye la fermentación [4].

- La humedad relativa en el paso de horneado uno y cuatro no influyen para la transferencia de calor.
- Se realiza un análisis bidimensional por simplicidad, aunque en la vida real sea tridimensional.
- La forma geométrica del bolillo se contempla como un prisma rectangular de dimensiones definidas, pasos de horneado uno y dos conservan dimensiones iniciales, pasos tres y cuatro contemplan las dimensiones finales del producto.
- El calor que recibe el bolillo proviene de sus fronteras con la bandeja y el aire del horno.
- Cuando la temperatura al centro del bolillo llega a los 98°C se considera cocción completa [2].
- La temperatura de la bandeja se considera prácticamente igual al aire de la cámara de cocción por su geometría (véase más adelante) y difusividad térmica.¹³
- La radiación térmica es despreciada por el rango de temperatura del horneado.¹⁴

Propiedades de la bandeja

Acorde a planos del fabricante es mencionado que es empleado una aleación de aluminio 6061. Sus dimensiones son 600x400x11mm, y tiene un patrón de perforaciones realizadas de diámetro 2mm con una separación horizontal y vertical medido desde el centro de la perforación de 3.5 y 3.0mm, respectivamente [9].

Debido al patrón de perforaciones se tiene una disminución en su área de hasta casi un 85% por lo que aunado a su espesor se considera despreciable, y por lo tanto se asume que llega a la misma temperatura que la cámara de cocción.

Propiedades de la masa de pan

La temperatura de la masa oscila desde 35~180°C, el valor de la difusividad térmica para la masa del bolillo se consideró contemplando su densidad promedio (233.73[kg/m³], conductividad térmica (k=0.093[W/mK] y su $c_p=1500$ [J/kgK] para obtener un valor de $\alpha=2.7E-7$ [m²/s]) [10].

Si bien después de ser calculada la difusividad térmica es importante conocer que tanto puede llegar a variar contemplando que se considerará como constante, observando el comportamiento en la gráfica de la figura 7, se observa una ligera variación en su difusividad térmica cuando no se supera los 180°C en su frontera. Si bien la evolución es para la masa de dona, es importante recordar que tanto el bolillo como la dona pertenecen al mismo tipo de pan blanco, dulce o leudado.

¹³ En el apéndice 4 se muestra la aplicación del MDF en 2D que refleja la evolución térmica de una bandeja de mismas dimensiones, pero sin perforaciones de manera demostrativa.

¹⁴ La radiación térmica tiene influencia en evaporación cuando se logran temperaturas de 703[K] [27].

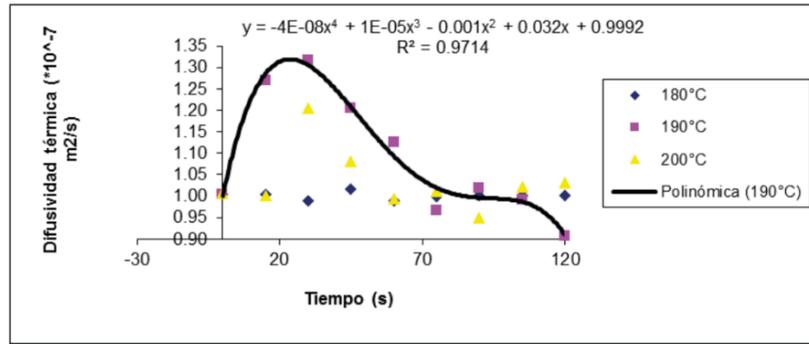


Figura 7¹⁵ Evolución de la difusividad térmica en masa de dona [11].

Basándome en la gráfica de la figura 8 aunado con la ecuación de difusividad térmica [7, p. 68] y en conjunto con las consideraciones realizadas se determina una difusividad térmica constante para nuestro caso de estudio, esta aseveración es válida al tener temperaturas semejantes entre nuestro proceso de horneado y el freído de masa de dona. Es confirmado en la fuente [11] que se puede considerar como constante la conductividad térmica.

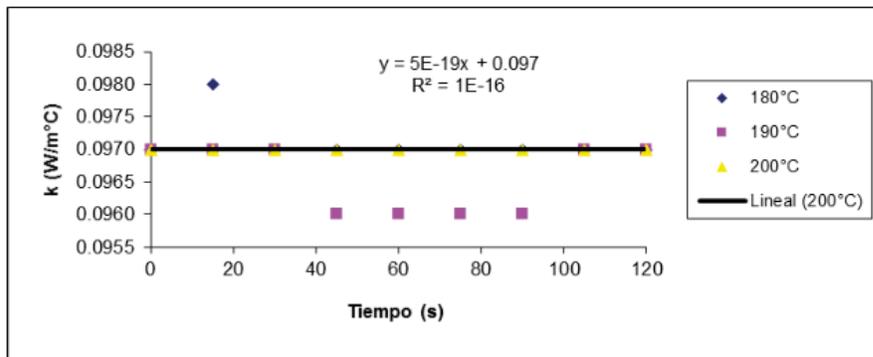


Figura 8 Evolución de la conductividad térmica en masa de dona [11].

2.1.3 Tiempo de horneado

El tiempo de horneado tiene una estrecha relación con la temperatura que se requiere obtener al centro del bolillo para completar la cocción. Se tiene conocimiento de informes de consumo energético (de panaderías) y se ha constatado que la tendencia apunta a que 14-15 minutos es el tiempo de horneado completo [12] [13] [14].

Por otro lado, en lugar de definir el tiempo, es mencionado en hojas de información que la cocción completa es cuando el centro del pan alcanza 98°C [2], y es aquí donde pasa a ser que la evolución de la temperatura central define el tiempo de horneado y cocción completa, en lugar del tiempo como se menciona en el párrafo anterior.

Independientemente del enfoque es requerido un tiempo para efectuar el método y de manera empírica se ha determinado por parte de maestros panaderos que el tiempo de cocción que puede

¹⁵ Es importante mencionar que las temperaturas corresponden a la temperatura del medio y no de la masa, es decir, las leyendas del figura 7 y figura 8 son las temperaturas a las que se mantuvo el aceite para el freído de la dona.

presentarse está en el rango de 13 a 18 minutos, y este tiempo definido es el que se usará en la simulación numérica [4].

En la realidad cuando se efectúa el horneado, la gran mayoría de las veces, por no decir que todas, el tiempo preciso es determinado por inspección visual donde el panadero analiza el color de la corteza del bolillo en tiempo real, por consiguiente, el temporizador puede ser incrementado de dos a tres minutos o de ser necesario parar antes de los 15. La variación de minutos está relacionada por las condiciones ambientales, eficiencia del horno y la manera en la que se introducen las bandejas, ya que sucede un enfriamiento del aire de la cámara mientras la puerta está abierta, inclusive una curva de calentamiento muy prolongada en hornos puede derivar a un tiempo empíricamente hablando incierto.

2.2 Freído de filete de pescado

Se decide desarrollar el caso del freído de filete de pescado para calcular un tiempo aproximado en lo que se tarda en alcanzar una temperatura específica que garantiza una cocción segura para consumo humano. De manera inicial los resultados de este caso pueden estimar un tiempo teórico en el que se alcanza la cocción segura y a su vez pueden tener un impacto en la toma de decisiones.

2.2.1 Consideraciones

Para el freído de pescado las consideraciones requeridas para la aplicación del método son similares a las descritas en la página 20, por lo que se modificarán acorde al caso actual.

- Se realiza un análisis bidimensional por simplicidad, aunque en la vida real sea tridimensional.
- La forma geométrica del pescado se contempla como un prisma rectangular de dimensiones definidas y constantes.
- El calor que recibe proviene de sus fronteras con el fluido (en nuestro caso aceite).
- Cuando la temperatura al centro del filete llega a 145°F (~62.8°C) se considera como freído completo y seguro para consumir [15], por lo tanto el único nodo de interés es T_{cs} (recordar figura 5).
- Al igual que en las consideraciones previas la radiación térmica es despreciada.
- Se contemplarán todos los casos a realizar para una profundidad general “L”.

2.2.2 Propiedades del filete de pescado

El pescado en cuestión es bacalao cuya difusividad térmica $\alpha=0.17e-6 [m^2/s]$, $\rho=1050[kg/m^3]$ y su conductividad térmica es $k=0.5[W/mK]$ [16, p. 230].

Las dimensiones para el caso original del filete son 2x1x6cm (ancho/alto/profundo) y se desarrollarán además dos casos con dimensiones distintas para comparar la diferencia en tiempo de cocción vs tamaño de filete, véase figura 10.

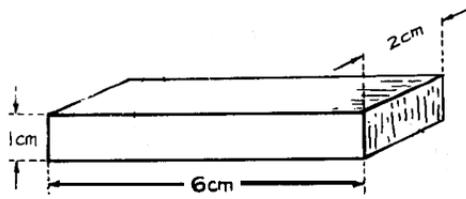


Figura 9 Representación geométrica del filete de bacalao [16].

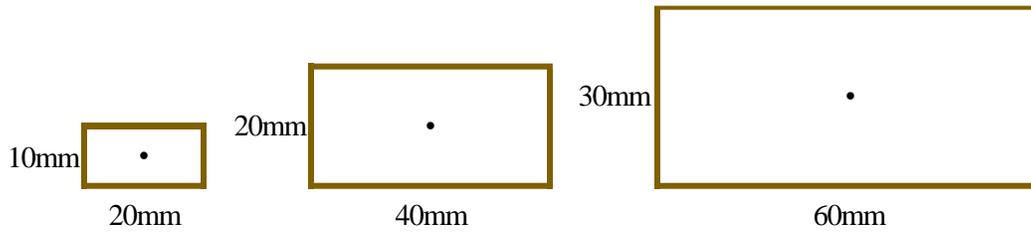


Figura 10 Representación de dimensiones distintas de filetes de pescado con su nodo de estudio al centro.

3 Validación numérica

3.1 Estudio de malla

Se realizan múltiples simulaciones con resoluciones distintas para el caso del bolillo, donde se observa la diferencia en tiempo en lograr la temperatura de cocción ideal de 98°C al centro del bolillo para el plano definido en el capítulo 2.

Se conserva un número de Fourier en la medida de lo posible similar para todos los mallados y se efectúan las correcciones de Δx apropiados acorde al tamaño de malla empleado. Se efectúa el cálculo con herramienta de cómputo para nueve mallados distintos.

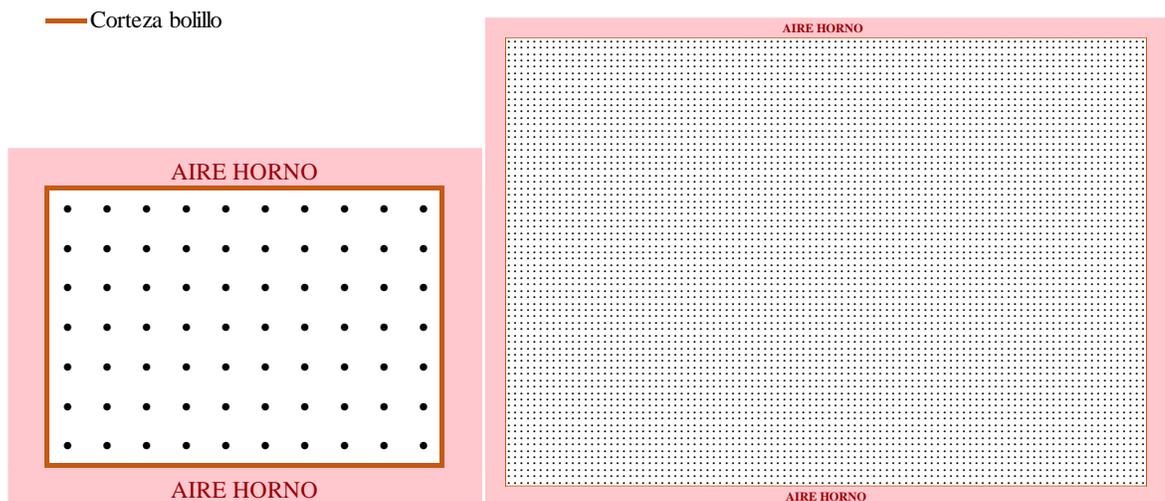


Figura 11 De izquierda a derecha, mallado de 70 nodos (7x10), mallado de 300 nodos (15x20).

En la tabla 2, se muestra el tiempo de cocción requerido en función del número de nodos presentes en la malla de la simulación numérica. La diferencia en tiempo entre mallados consecutivos tiende claramente a disminuir; de manera más explícita la tendencia a estabilizarse puede observarse en la gráfica de la figura 12 donde a partir del mallado 42x60 la diferencia es menor al 1.3% por lo que se puede utilizar de manera segura logrando prescindir de mallados más finos que demoran el tiempo de resolución de la simulación.

De igual manera a partir del mallado 42x60 en la figura 12 la diferencia no es apreciable, el resultado de tiempo se encuentra dentro del intervalo por lo que podemos decir que el resultado prácticamente no cambia conforme aumenta el mallado por lo que se vuelve independiente de esta malla y se puede utilizar el valor mínimo de elementos discretos para representar adecuadamente el fenómeno en estudio. Por ello, para los resultados a presentar me baso en los datos recabados en el mallado de 42x60 por mayor facilidad para el manejo de información y valores numéricos.

Tabla 2 Comparativa de tiempo de cocción requerido variando el número de nodos.

Mallado	Tiempo horneado bolillo		Diferencia respecto al mallado anterior	
	[s]	[min]	[%]	[s]
7x10	1320	22.00		
14x20	987	16.45	25.23	333
21x30	903	15.05	8.51	84
28x40	854	14.23	5.43	49
42x60	811	13.52	5.04	43
49x70	801	13.35	1.23	10
56x80	790	13.17	1.37	11
63x90	783	13.05	0.89	7
70x100	777	12.95	0.77	6

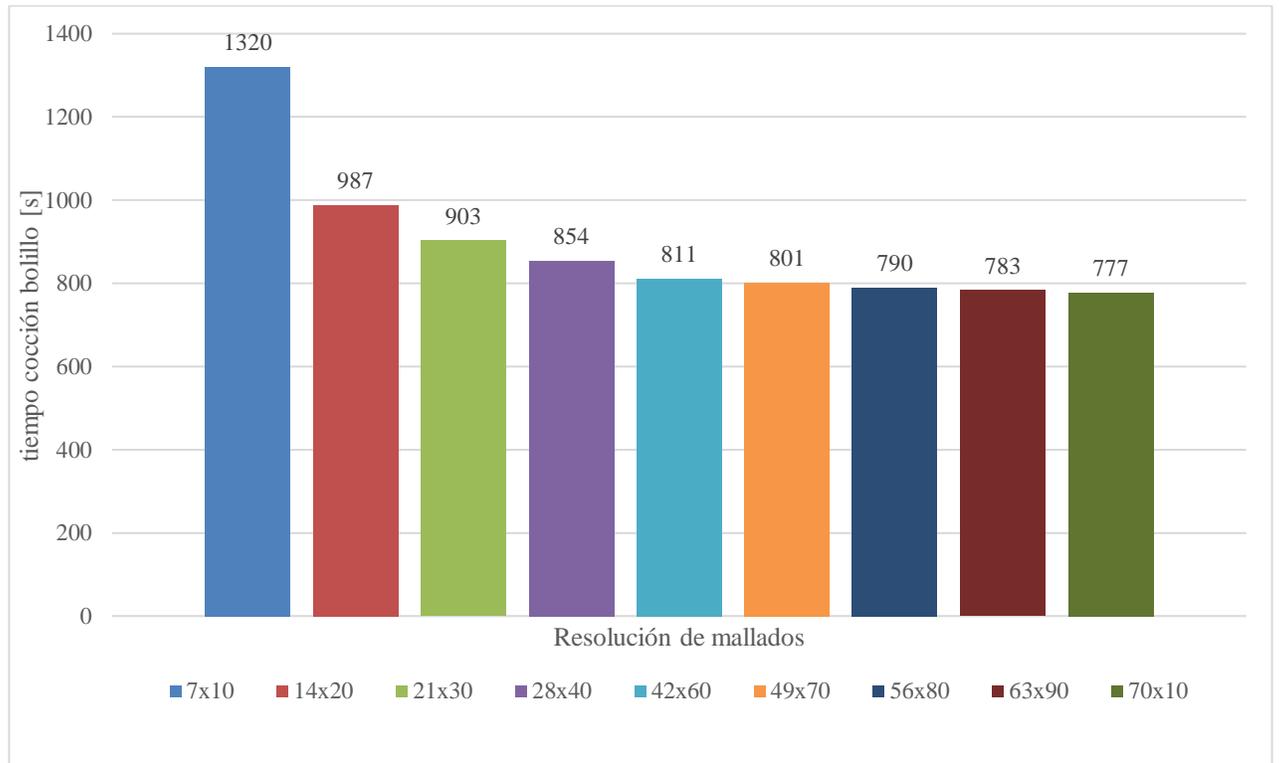


Figura 12 Tiempo de cocción de bolillo en función de la resolución de malla utilizada.

La comparativa de la evolución de la temperatura para los distintos mallados en la gráfica de la figura 13 permite observar las diferencias conforme el tiempo transcurre, a mayor resolución se observa una mayor curva al inicio. Al concluir el paso dos la curva cambia de manera notoria al iniciar el paso tres, esto es debido a que de manera súbita se contempló el cambio entre dimensiones iniciales y finales. El agregar una curva de crecimiento del bolillo supondría una transición más suave entre el paso dos y tres.

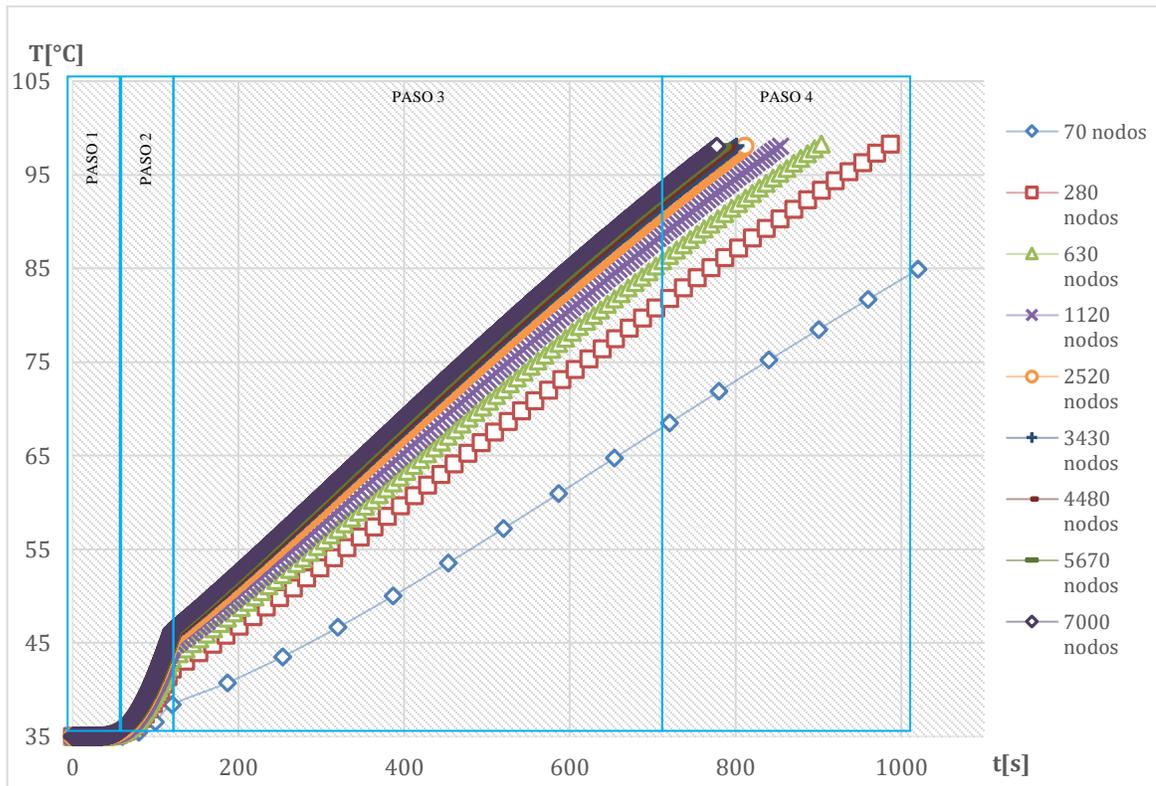


Figura 13 Evolución de temperatura del nodo T_{cs} (centro del bolillo) en función del número de nodos presentes en la malla. ¹⁶

Tras la realización de múltiples consideraciones y en conjunto con las condiciones de operación, se logró calcular un resultado cercano a la prueba experimental [5] que concuerda con múltiples fuentes empíricas [12] [13] [14] y una fuente teórica (98°C) [2]. Los resultados del estudio de malla validaron el método de manera satisfactoria, lo que confirma que puede emplearse para análisis posteriores.

La distribución de temperaturas para cada mallado se muestra en la figura 14 y figura 15, por fila se muestran las resoluciones y por columna el estado final de cada paso de horneado. Si bien la duración de tiempo en el paso final de horneado es distinta para cada mallado, la duración de los primeros 3 pasos de horneado es siempre la misma. De manera inicial se observa una diferencia visual en los primeros cinco mallados mostrados, pero a partir del quinto mallado 42×60 (2520 nodos) la diferencia en el tiempo final además de visual de la distribución térmica deja de ser apreciable.

¹⁶ Recordando la tabla 1, cada paso de horneado se desarrolla en un intervalo de tiempo definido y temperaturas distintas entre sí como condiciones de frontera.

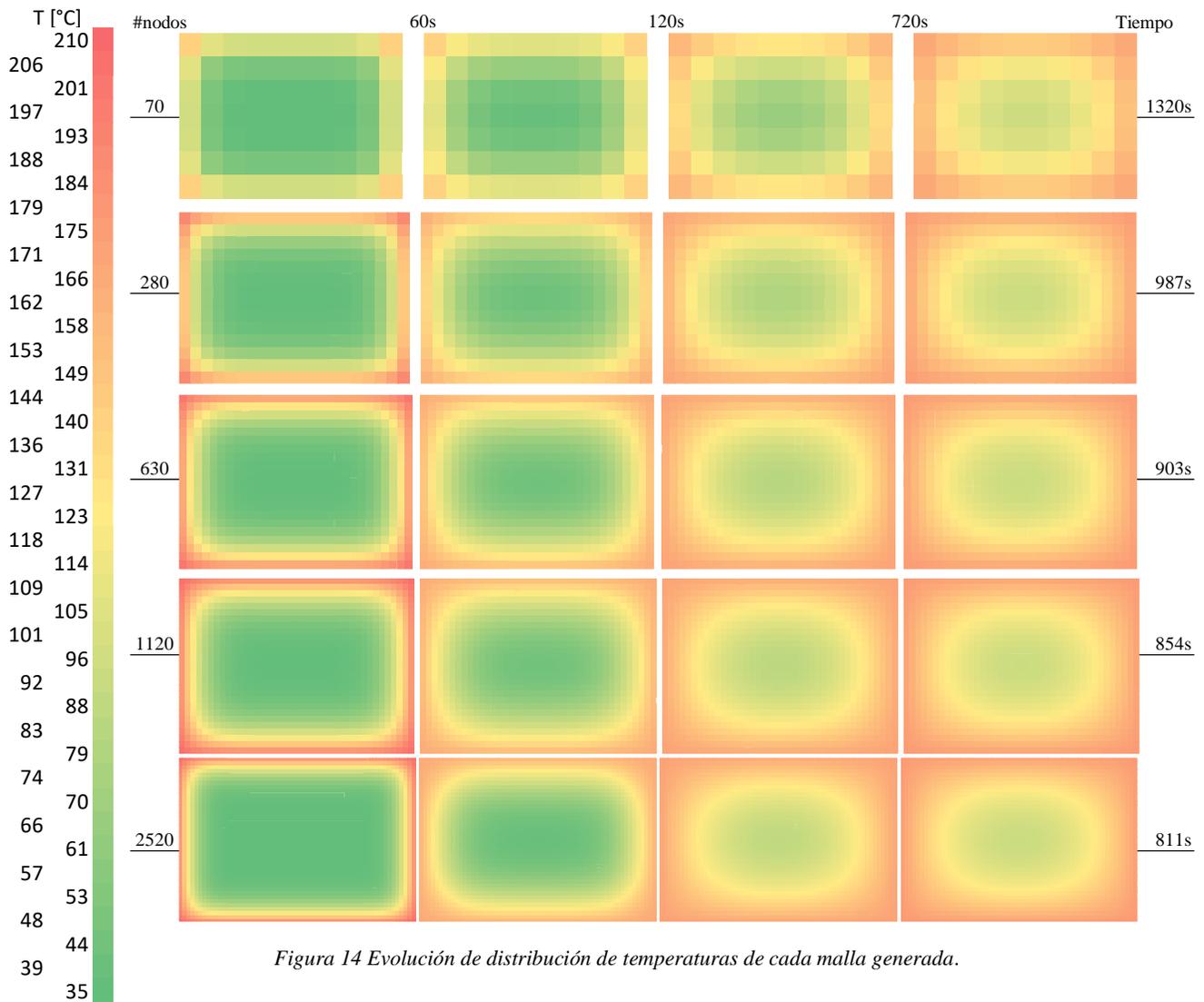


Figura 14 Evolución de distribución de temperaturas de cada malla generada.

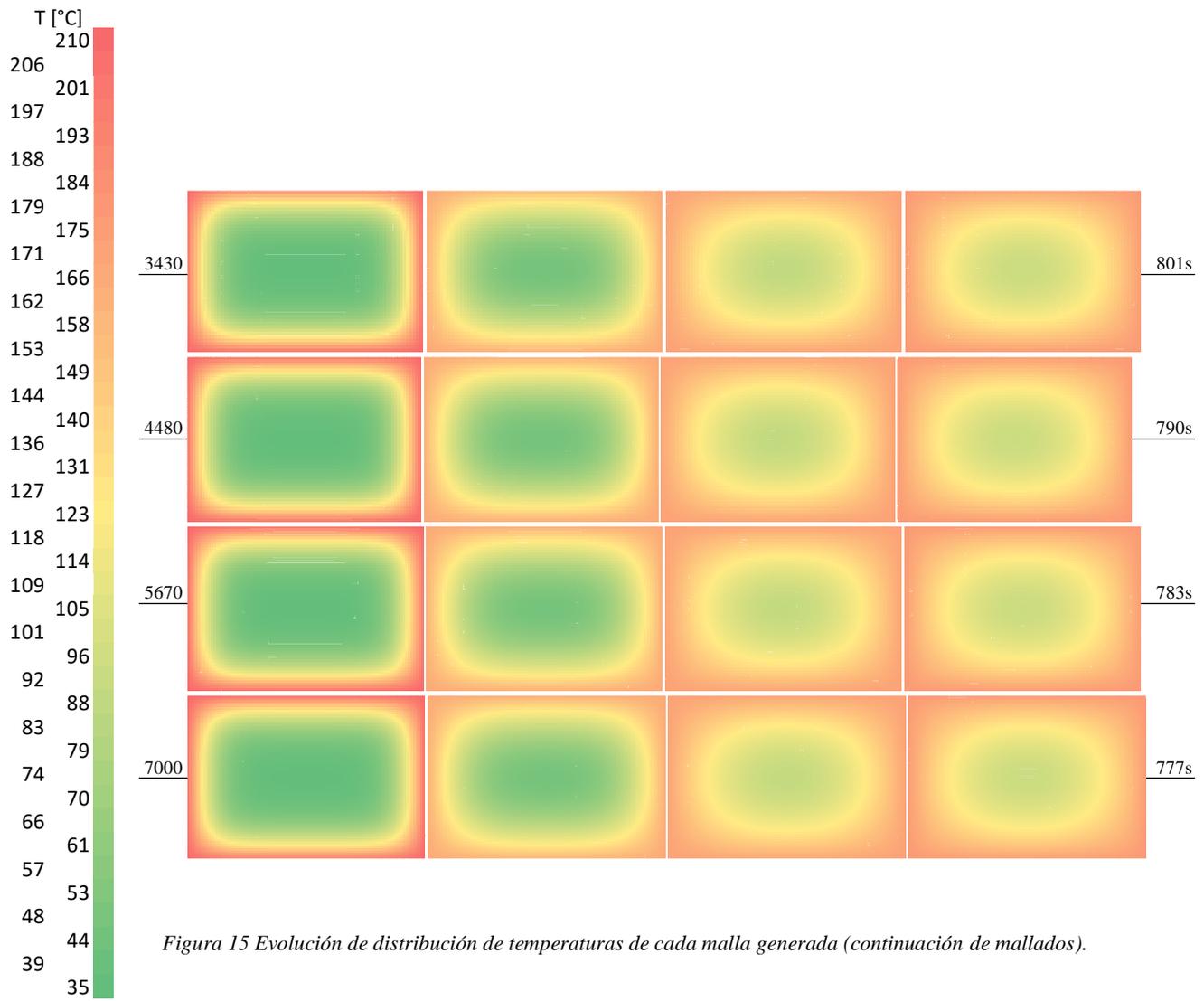


Figura 15 Evolución de distribución de temperaturas de cada malla generada (continuación de mallados).

4 Resultados

4.1 Caso de horneado de bolillo

Si bien no se simula el flujo de gas caliente, recordemos que se consideró como un medio homogéneo casi-estático donde la conducción en la interfase es el mecanismo de transferencia de calor presente. Y debido a la existencia de diferencia de temperatura en la interfase bolillo-aire se pueden generar pequeñas corrientes convectivas. Un indicador directo de este tipo de corrientes es el coeficiente convectivo por lo que su obtención y valor confirmará el régimen en el que suscita la convección.

Empleando la expresión (7) y relacionándola con la expresiones (5), se calcula el coeficiente “ h ”. En la gráfica de la figura 16 se presenta el comportamiento. La notoria discontinuidad en el intervalo 0-200s es debido a la no consideración de la curva de calentamiento/enfriamiento del horno y al cambio súbito de dimensiones en el bolillo.

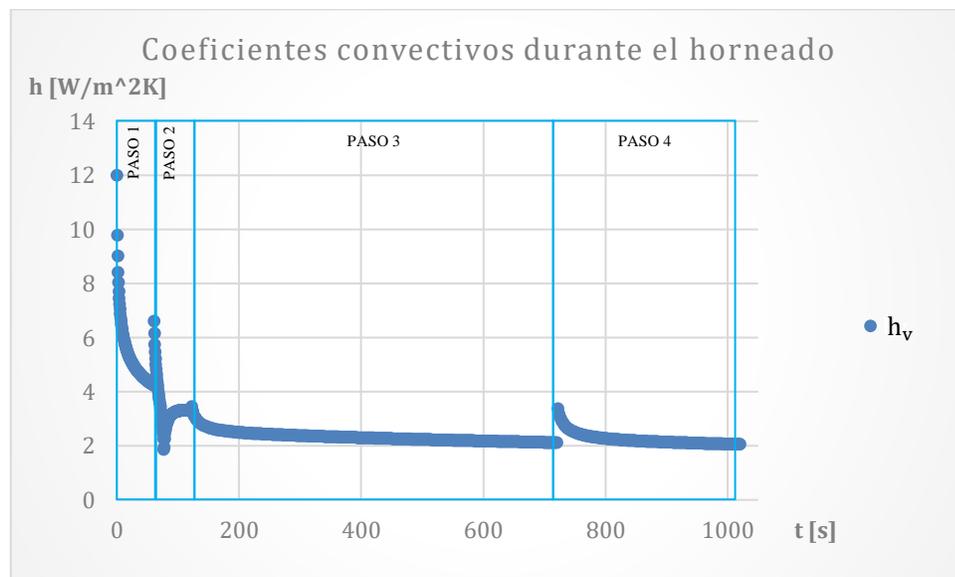


Figura 16 Evolución de coeficiente convectivo de la zona lateral. Se prescinde de la corteza horizontal por su bajo valor de Rayleigh al ser calculado.

La ubicación de h_v se encuentra sobre el nodo T_{cv} .

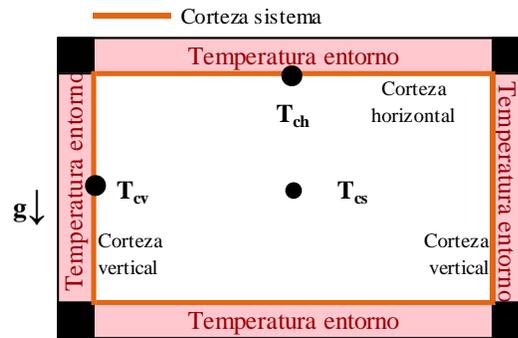


Figura 17 Ubicación de nodos de estudio.

La tabla 3 nos da referencia para distintas situaciones que pueden suscitarse y sobre todo confirma el fenómeno de convección libre. Como era de esperar, la evolución del coeficiente de convección muestra que la convección libre está apenas presente.

Tabla 3 Valores típicos del coeficiente de calor convectivo [8].

Proceso	h (W/m ² K)
Convección Libre:	
Gases	2-25
Líquidos	50-1000
Convección forzada:	
Gases	25-250
Líquidos	100-20,000
Convección con cambio de fase:	
Evaporación o condensación	2500-100,000

Para el número de Rayleigh observamos un comportamiento similar al coeficiente convectivo, de manera inicial un alto valor nos indica que la convección se presentó de manera puntual y notoria, conforme el tiempo evoluciona se observa una gran disminución en su valor lo que nos dice que el mecanismo de transferencia de calor por conducción es la que empieza a predominar cuando la temperatura de la corteza tiende a la temperatura de la cámara de cocción.

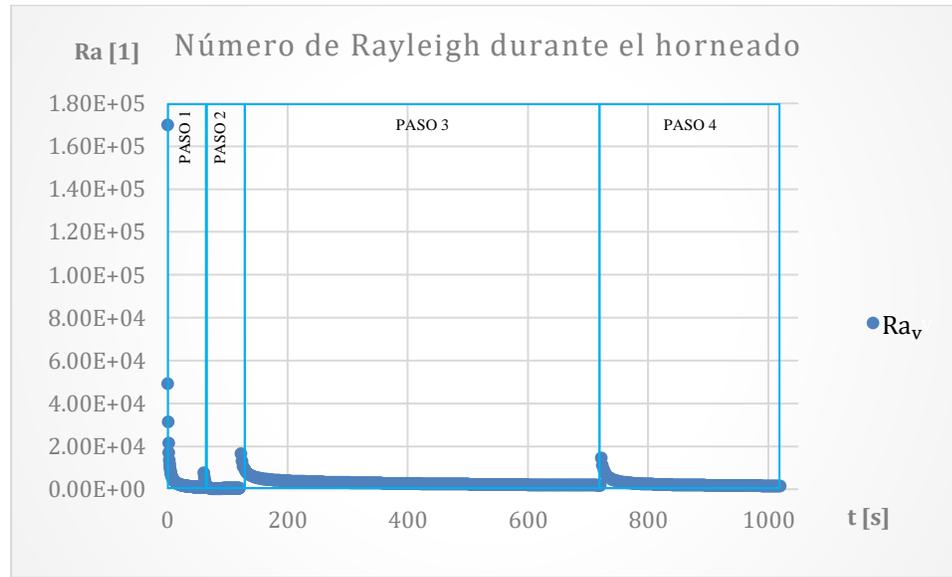


Figura 18 Evolución de número de Rayleigh durante el horneado.

Si bien existe un ΔT en la interfase bolillo-aire, al concluir cada paso de horneado tiende a disminuir la diferencia, esto significa la disminución del número de Rayleigh. Al continuar con el siguiente paso, el ΔT en la interfase se incrementa ocasionando que el valor inicial del Rayleigh para dicho paso vuelva a incrementar, esto es visible en la gráfica de la figura 18.

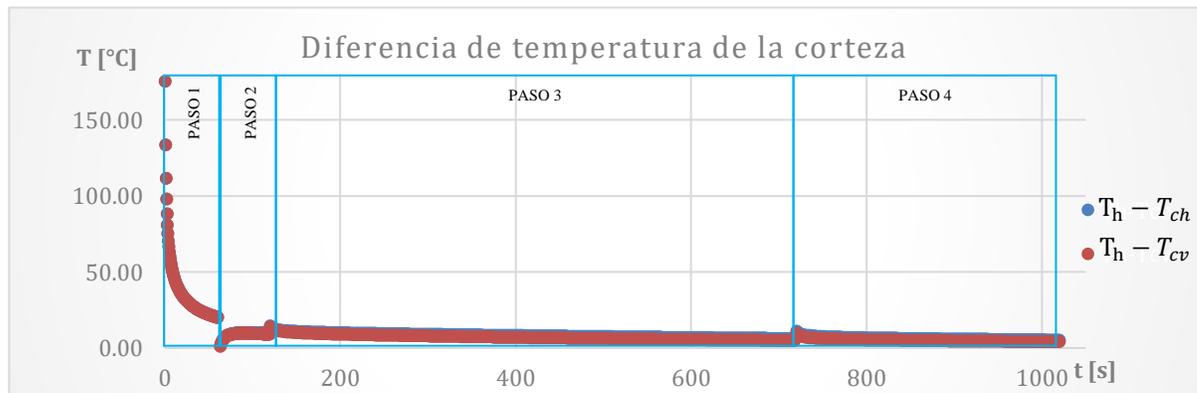


Figura 19 En azul, la diferencia de temperatura de la cámara de cocción y el centro de la corteza superior; en rojo, la diferencia con el centro de la corteza lateral.

En la figura 19 se ha graficado el comportamiento de la temperatura de los nodos definidos en la figura 5, en orden prioritario, T_{cb} , T_{cv} y T_{ch} . Se decide graficar las temperaturas de la corteza ya que justo por la temperatura que alcance será el color que tendrá finalmente [17].

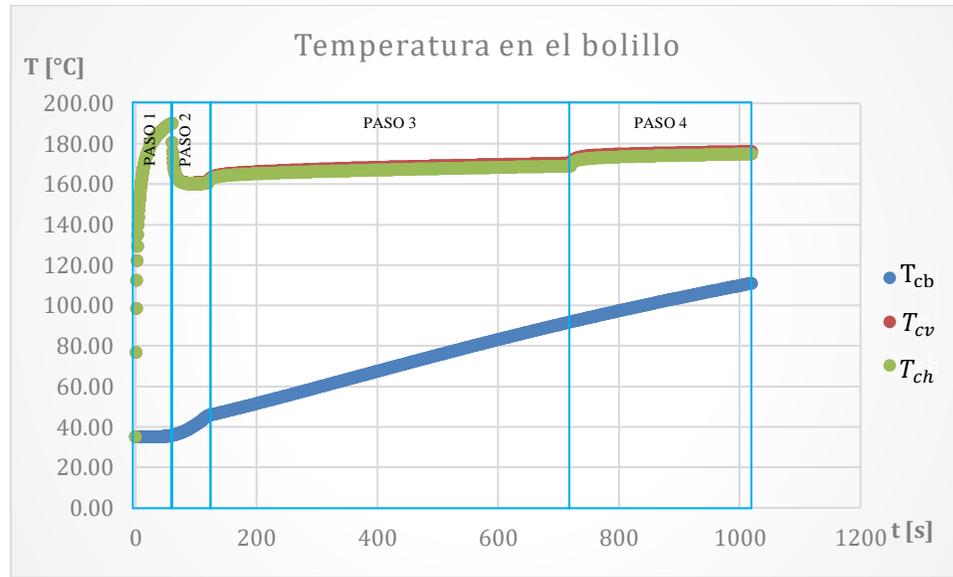


Figura 20 Perfiles de tiempo-temperatura obtenidos durante la simulación numérica del horneado del bolillo.

Comparando la evolución de las gráficas de la figura 20 y figura 21 se observa un comportamiento completamente semejante. Para el centro se observa un comportamiento lineal, y para la corteza un comportamiento logarítmico lo que demuestra una evolución térmica completamente similar a la vista en la realidad. Es importante mencionar que para la cocción que muestra el figura 21 se siguió por completo otra receta de cocción, se decide comparar para notar la similitud del comportamiento de las curvas.

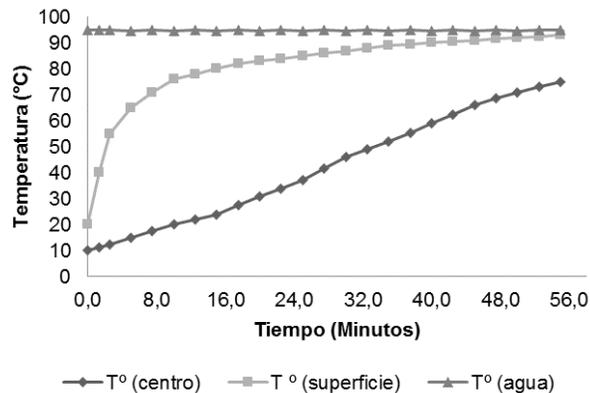


Figura 21 Perfiles de tiempo-temperatura obtenidos durante la cocción de bollo [18]

Para la elaboración de la gráfica de la figura 21 se contempla que: “Para la puesta en marcha del procedimiento se utilizaron termopares tipo J para determinar el historial de tiempo-temperatura de las muestras de bollo. Se midió la temperatura inicial del producto, y un termopar se colocó en el baño de agua caliente para medir a temperatura durante el proceso. Se fijaron otros termopares en el centro geométrico de las muestras cilíndricas y debajo de la superficie a una profundidad máxima de 0.5mm” [18].

Por último, la distribución de temperaturas al cumplir la cocción al transcurrir 811s donde se confirma que la temperatura al centro geométrico es de 98°C.

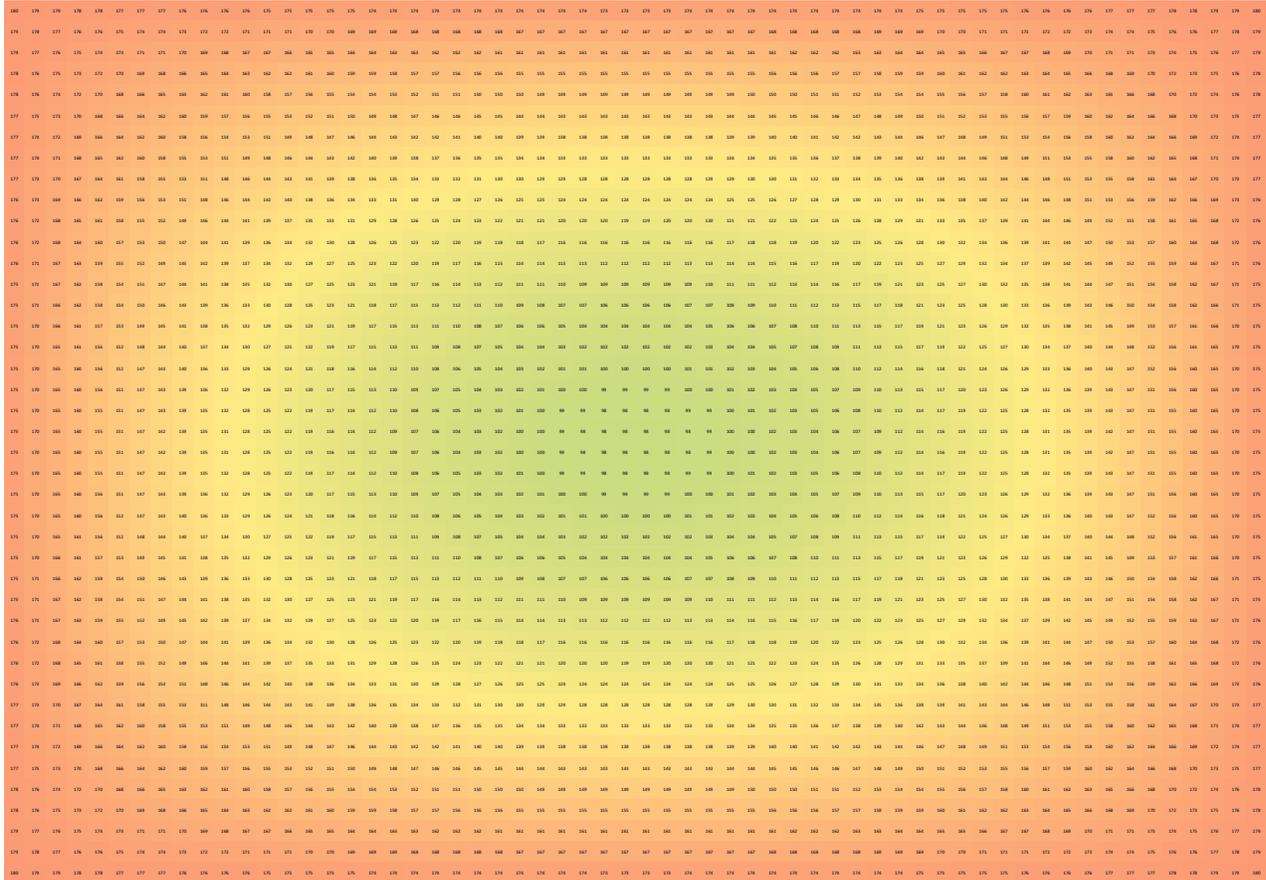


Figura 22 Distribución de temperaturas al finalizar la cocción del bolillo.

4.2 Caso freído de filete de pescado

Para el caso de freído de pescado se replica el método de solución, a diferencia que se definen las variables en cuestión como lo son la difusividad térmica “ α ”, temperaturas en la frontera, temperatura objetivo (~62.8°C) y el mallado en la sección transversal del pescado. Para el caso original (dimensiones 10x20mm) se aplicó una malla de 21x42 (882 nodos) para conservar la proporción en la geometría del filete mientras el mallado es aplicado.

Recordando la figura 5 ubicación de nodos de estudio en el plano del sistema y dirección de la aceleración gravitacional (g). La evolución en el nodo de interés para el pescado es mostrada en la gráfica de la figura 23, considerando que T_{cf} se encuentra en la ubicación T_{cs} .

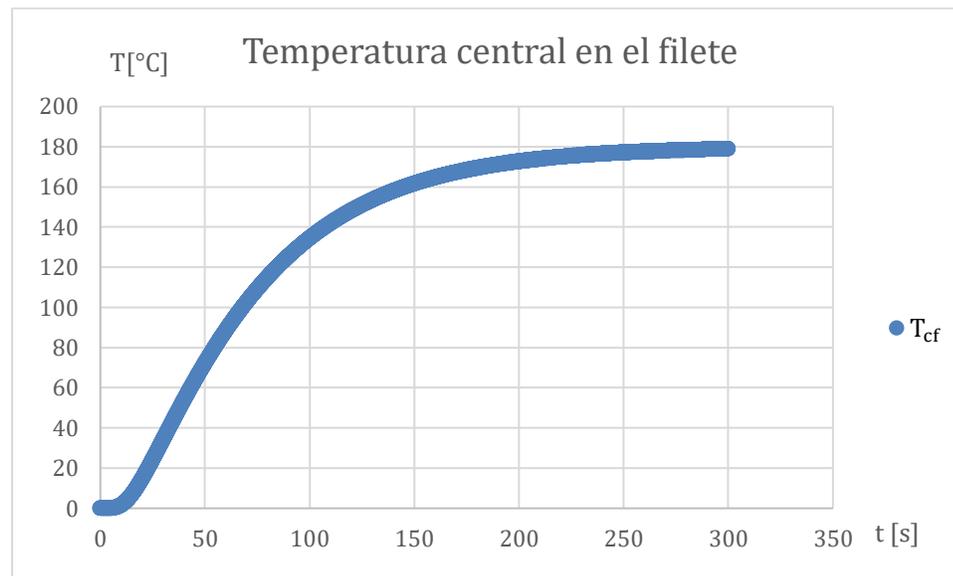


Figura 23 Evolución térmica en el filete de bacalao.

En la gráfica de la figura 24 se puede observar la relación que existe entre incrementar las dimensiones iniciales y el tiempo en lograr la cocción segura¹⁷ para consumo humano. De manera simple se observa que, al ir duplicando las dimensiones, el tiempo se incrementa proporcionalmente. La cocción segura puede brindar una tranquilidad para el consumidor o productor por lo que se ha decidido graficar los tiempos acordes a distintas dimensiones del filete.



Figura 24 Tiempo en lograr cocción segura en filete de bacalao según su tamaño.

¹⁷ Cocción segura significa que la temperatura al centro del filete alcanza al menos 62.8°C y por lo tanto se cataloga como un producto seguro para consumo humano.

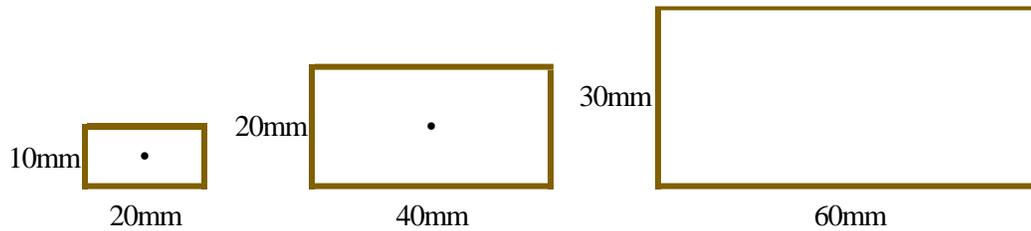


Figura 25 Representación de dimensiones del filete con su nodo de estudio al centro.

Si bien el incrementar el tamaño del filete (como se muestra en la figura 25) puede parecer tentador es necesario considerar la cantidad de energía que se incrementará al momento de modificar las dimensiones. La tabla 4 compara la energía total requerida para cada tamaño de filete y el tiempo necesario para completar el proceso.

Tabla 4 Comparativa energética para la cocción de distintos tamaños de filetes de pescado.¹⁸

Tamaño Filete (espesorXanchura)	Tiempo de Cocción		Q'_{proceso}
	[s]	[min]	
[mm]	[s]	[min]	[W/m ²]
10x20	44.8	-	0.006289
20x40	179	3min 0s	0.025128
30x60	403	6min 43s	0.056484

¹⁸ La energía de transferencia por unidad de área se calcula empleando la ley de Fourier $q_x = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$ [7, p. 59], el tiempo de cocción, la temperatura final y el área del plano aplicado al filete de pescado.

5 Conclusiones

La teoría en panadería afirma que a los 98°C se logra una cocción completa [2], las recetas empíricas afirman que el horneado dura de 13 a 18 minutos [14] [12] [13] [5]. El resultado del MDF muestra que a los 13 minutos con 31 segundos se ha logrado la temperatura de cocción (98°C), el resultado está dentro del intervalo con una tendencia al límite de los 13 minutos que se puede atribuir a la idealización del problema, contemplando menos idealizaciones podría incrementar este tiempo estimado de horneado.

El método presentó una independencia entre los resultados y la malla. El mallado mínimo requerido para obtener resultados numéricos precisos fue de 2520 nodos y el método utilizado fue capaz de representar adecuadamente el proceso de horneado del bolillo. Acorde al fenómeno en estudio se puede replicar el método presentado para determinar el mallado mínimo sin prescindir de precisión, por ejemplo, para mejorar el diseño de disipadores térmicos se puede calcular la distribución de temperaturas a lo largo de un circuito eléctrico.

Para el caso del freído de filetes de pescado, los resultados abren la puerta a realizar estimaciones del tiempo requerido en lograr una cocción segura para el consumidor, este tiempo también se puede relacionar con consumos energéticos en función del tamaño del filete. De manera secundaria y teniendo como prioridad la cocción segura se puede obtener la proyección de costos para distintos tamaños de filetes que pueden ser influyentes en la toma de decisiones a niveles de producción. Si bien se aplicó el método a un filete de pescado, es posible ajustar las propiedades para evaluar otro tipo de carne, por ejemplo, pollo o cerdo. Por último, se concluye que energéticamente existe una relación directamente proporcional entre la dimensión del filete y la energía requerida para completar la cocción.

Trabajo a futuro

A futuro el método puede contemplar curvas de enfriamiento y calentamiento del horno, curvas de crecimiento del alimento y propiedades térmicas en función de las condiciones de la iteración previa. Aunque es importante recordar que, a mayor número de variables a considerar, mayor tiempo de desarrollo se requiere para recabar datos experimentales y el método en lugar de ser práctico puede dejar de serlo.

Actualmente el método de diferencias finitas puede aplicarse en otros casos donde se puede requerir conocer el gradiente de temperatura. Por ejemplo, en la actualidad se ha estudiado el uso de concreto con geo polímeros con inserciones de materiales termorreguladores que plantean disminuir el gradiente de temperatura a lo largo del espesor del muro. El estudio de un caso unidimensional simplifica la aplicación del MDF y puede arrojar resultados de una manera relativamente rápida [19] que permiten comparar las ventajas de esta tecnología.

La aplicación de métodos numéricos para mejorar el diseño de hornos es una realidad, y en conjunto con pruebas de horneado da la posibilidad de mejorar el diseño de hornos actuales. Sin duda alguna se requiere de un proceso a cargo de integrantes de múltiples disciplinas donde se debe documentar y medir en la medida de lo posible la mayor cantidad de variables en las pruebas de horneado. Esto con el objetivo de alimentar con más información a los modelos matemáticos que posteriormente se resolverán con métodos numéricos para su posterior interpretación [20].

Bibliografía

- [1] Real Sugar Lollipop, «Real Sugar Lollipop,» Real Sugar Lollipop, 23 Noviembre 2013. [En línea]. Available: <https://realsugarlollipop.wordpress.com/2013/11/23/clasificacion-y-composicion-del-pan/>. [Último acceso: 7 Mayo 2019].
- [2] Baking Industry Research Trust, «Breadmaking 1 - The Science of Breadmaking Information Sheet,» 2011.
- [3] Real Academia Española, «Diccionario de la lengua española,» 2017. [En línea]. Available: <http://dle.rae.es/>.
- [4] EUROPAN SA DE CV, «PROCESO DE PRODUCTO BASE CONGELADO,» Ciudad de México, 2015.
- [5] EUROPAN SA DE CV, «Informe_1_Cocción_XAVC_050416,» Ciudad de México, 2016.
- [6] Holton, «Holton,» 4 diciembre 2018. [En línea]. Available: <https://www.holton.mx/producto/unox/horno-a-gas-bakertop-mind-maps-unox-modelo-xavc-06fs-gpr-al/>.
- [7] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman y A. S. Lavine, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, United States of America: John Wiley & Sons, 2006.
- [8] F. P. Incropera y D. P., Fundamentos de transferencia de calor, México: Prentice Hall, 1999.
- [9] Changshun Bakeware Technology (Shanghai) Corp., «Perforated Tray 6040cm,» Shangai, 2018.
- [10] C. Rask, «Thermal Properties of Dough and Bakery Products: A Review of Published Data,» *Journal of Food Engineering*, n° 9, pp. 167-193, 1989.
- [11] G.-D. J.C, «Evaluación de las propiedades físicas de la masa de las donas durante la fritura profunda a diferentes temperaturas – Análisis crítico,» *UGCiencia*, pp. 87-95, 2014.
- [12] EUROPAN SA DE CV, «Esp_La_Concha_CONSUMO_GAS_020516,» Ciudad de México, 2016.
- [13] EUROPAN SA DE CV, «Esp_La_Concha_CONSUMO_GAS_29,30,10516,» Ciudad de México, 2016.
- [14] EUROPAN SA DE CV, «Esp_La_Concha_CONSUMO_GAS_280416,» Ciudad de México, 2016.
- [15] Foodsafety.gov, «Safe Minimum Cooking Temperatures Charts,» 12 Abril 2019. [En línea]. Available: <https://www.foodsafety.gov/food-safety-charts/safe-minimum-cooking-temperature>. [Último acceso: 20 Agosto 2019].

-
- [16] O. Levenspiel, FLUJO DE FLUIDOS E INTERCAMBIO DE CALOR, España: Reverté, 1993.
- [17] Baking Industry Research Trust, «Breadmaking 3 - The Science of Breadmaking Information Sheet,» 2011.
- [18] D. F. Tirado Armesto, J. D. Torres González, D. Acevedo Correa, K. P. Barrios Tano y P. Margarita Montero, «COMPOSICIÓN, PROPIEDADES TERMOFÍSICAS Y DIFUSIVIDAD TÉRMICA DE BOLLO COCIDO,» *Revista Politécnica ISSN 1900-2351 (Impreso), ISSN 2256-5353 (En línea)*, pp. 79-86, 2016.
- [19] S. P. C. S.-B. A. S. T. Q. B. M. C. J. F. R. A.-L. K. Vinh Duy, «Thermal performance and numerical simulation of geopolymer concrete containing different types of thermoregulating materials for passive building applications,» Halden, 2018.
- [20] L. S. J. R. Uros Kokolj, «The Validation of Numerical Methodology for Oven Design Optimization Using Numerical Simulations and Baking Experiments,» 2017.
- [21] MatWeb, «MatWeb Material Property Data,» 8 Marzo 2019. [En línea]. Available: <http://www.matweb.com>.
- [22] K. M. Machado-Velasco y J. F. Vélez-Ruiz, «Estudio de propiedades físicas de alimentos mexicanos durante la congelación y el almacenamiento congelado,» *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, pp. 41-54, 2008.
- [23] UNOX, «MOD:XFT115,» 2015.
- [24] Discovery Channel, «Proceso de fabricación de ladrillo,» 2013.
- [25] ANSI, *Food Equipment Materials*, 1997.
- [26] M. B. Alfonso, «Bekia Salud,» Bekia Salud, [En línea]. Available: <https://www.bekiasalud.com/articulos/tipos-pan-beneficios-aportan/>. [Último acceso: 7 Mayo 2019].
- [27] L. C. Bin Fang y L. W. Guangze Li, «Multi-component droplet evaporation model incorporating the effects of non-ideality and thermal radiation,» *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 136, pp. 962-971, Junio 2019.

Apéndice 1 Diagrama de la metodología

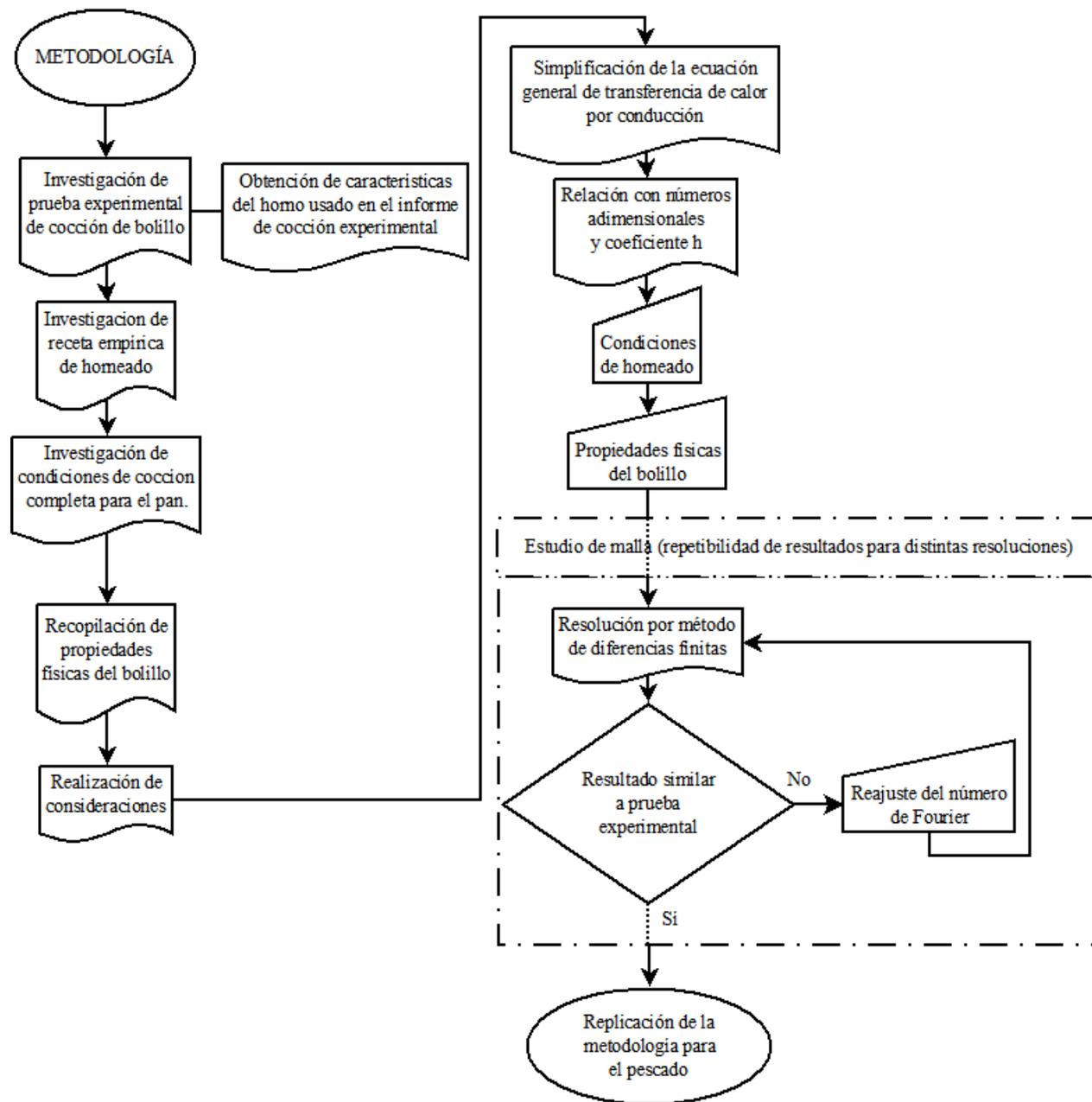


Figura 26 Breve esbozo de la metodología.

Apéndice 2 Diagrama horno XAVC-06FS-GPR

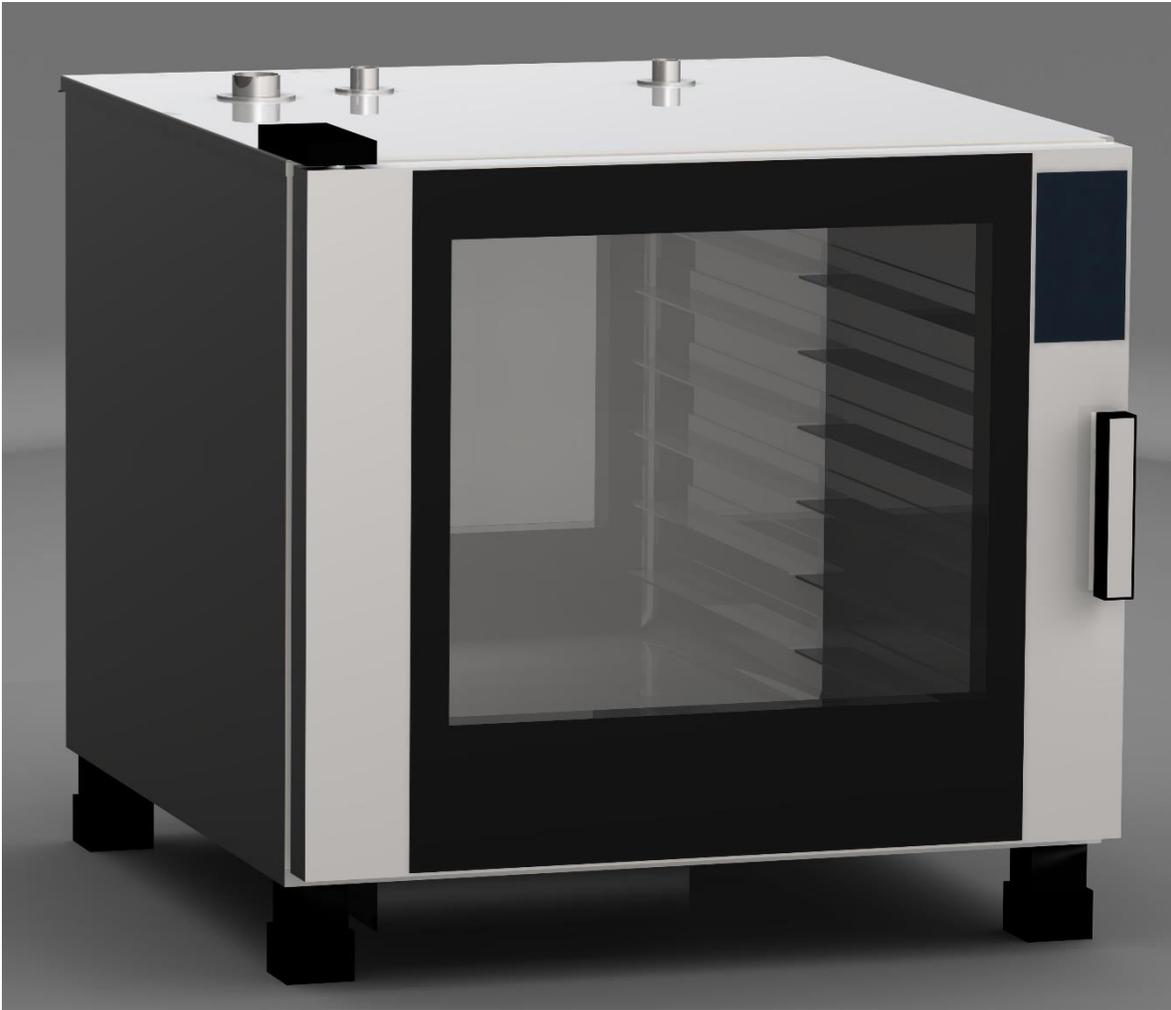
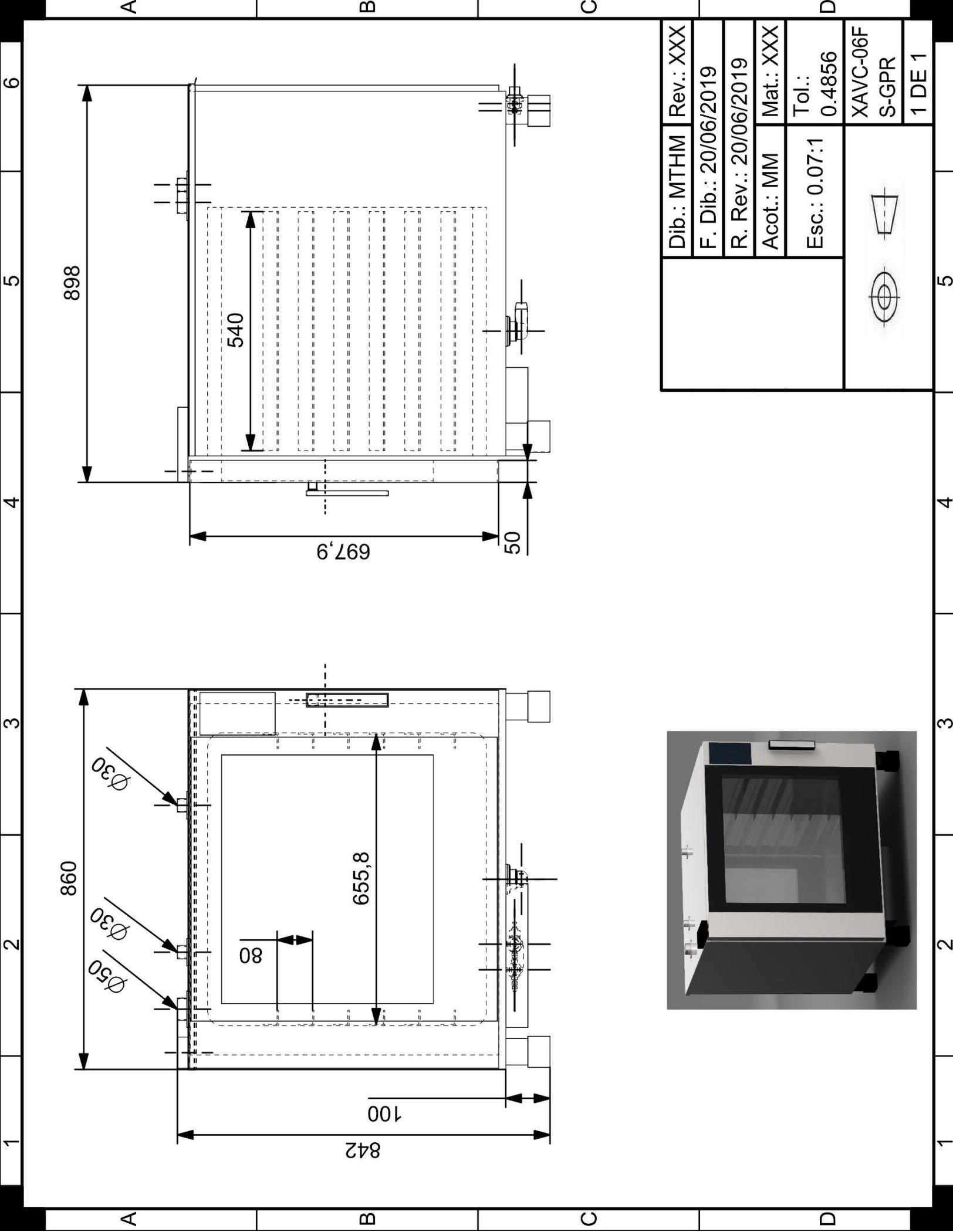


Figura 27 Renderizado del horno XAVC-06FS-GPR.



Dib.: MTHM	Rev.: XXX	
F. Dib.: 20/06/2019		
R. Rev.: 20/06/2019		
Acot.: MM	Mat.: XXX	
Esc.: 0.07:1		
		XAVC-06F
		S-GPR
1 DE 1		

Apéndice 3 REGRESIÓN POLINÓMICA DE TABLA A.4

Con las regresiones polinómicas se permitió calcular las propiedades del aire a la temperatura de cada iteración del método para las ecuaciones (4) y (7).

T[°C]	T[K]	$\nu \cdot 10E+6$ [m ² /s]	$k \cdot 10E+3$ [W/m-K]	$\alpha \cdot 10E+6$ [m ² /s]	β [K ⁻¹]	Pr
26.85	300	15.89	9.38	22.50	0.00333333	0.707
76.85	350	20.92	13.77	29.90	0.00285714	0.700
126.85	400	26.41	18.07	38.30	0.0025	0.690
176.85	450	32.39	22.24	47.20	0.00222222	0.686
226.85	500	38.79	26.26	56.70	0.002	0.684
276.85	550	45.57	30.13	66.70	0.00181818	0.683
326.85	600	52.69	33.83	76.90	0.00166667	0.685
376.85	650	60.21	37.35	87.30	0.00153846	0.690
426.85	700	68.10	40.69	98.00	0.00142857	0.695
476.85	750	76.37	43.86	109.00	0.00133333	0.702
526.85	800	84.93	46.85	120.00	0.00125	0.709
576.85	850	93.80	49.67	131.00	0.00117647	0.716
626.85	900	102.90	52.35	143.00	0.00111111	0.720
676.85	950	112.20	54.90	155.00	0.00105263	0.723
726.85	1000	121.90	57.34	168.00	0.001	0.726
826.85	1100	141.80	59.70	195.00	0.00090909	0.728

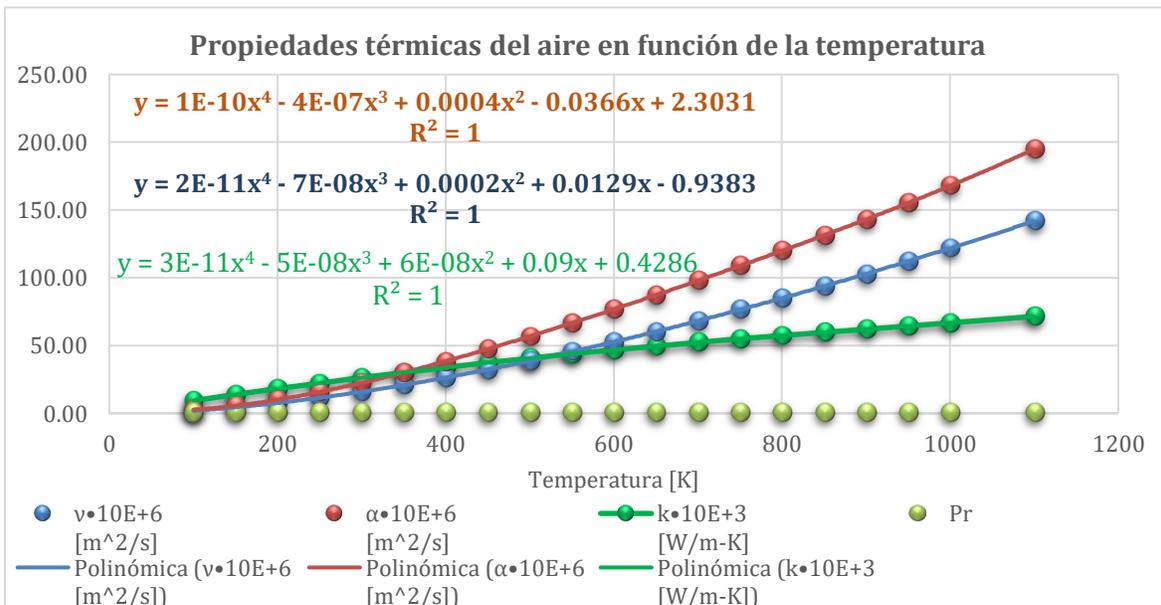


Figura 28 Regresión polinómica empleada para el cálculo de las propiedades del aire generada con los datos de la tabla [4, p. 941].

Apéndice 4 Aplicación del MDF a bandeja sin perforaciones

La difusividad térmica @ 25°C es $\alpha=69.0310e-6$ [m²/s] cuando su $c_p= 0.896$ J/g-°C ; $k= 167$ W/m-K y $\rho =2.70$ g/cc [21].

La evolución térmica de una bandeja de 600x400x11mm sin patrón de perforaciones con los mismos pasos de horneado como condiciones de frontera refleja ineficiencia al no contar con las perforaciones puesto que no logra la temperatura de la cámara de cocción de manera pronta.

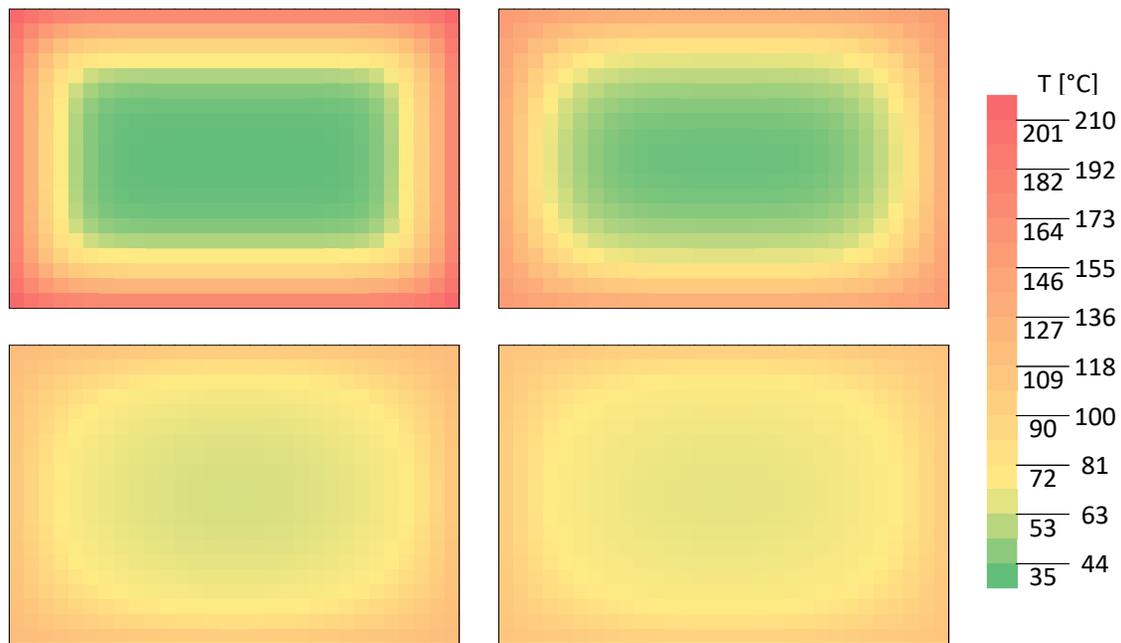


Figura 29 Evolución de la distribución térmica en una bandeja de aluminio dentro de un horno de convección natural.

De manera comparativa se muestra la distribución de temperatura en el caso de un horno con convección forzada.

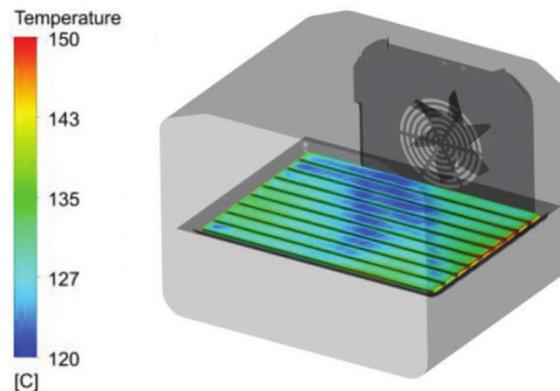


Figura 30 Distribución de temperatura obtenida con simulación numérica [20].