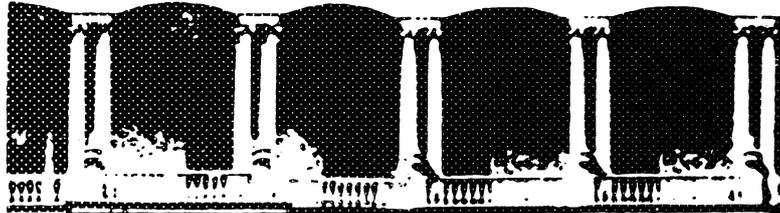




FACULTAD DE INGENIERIA

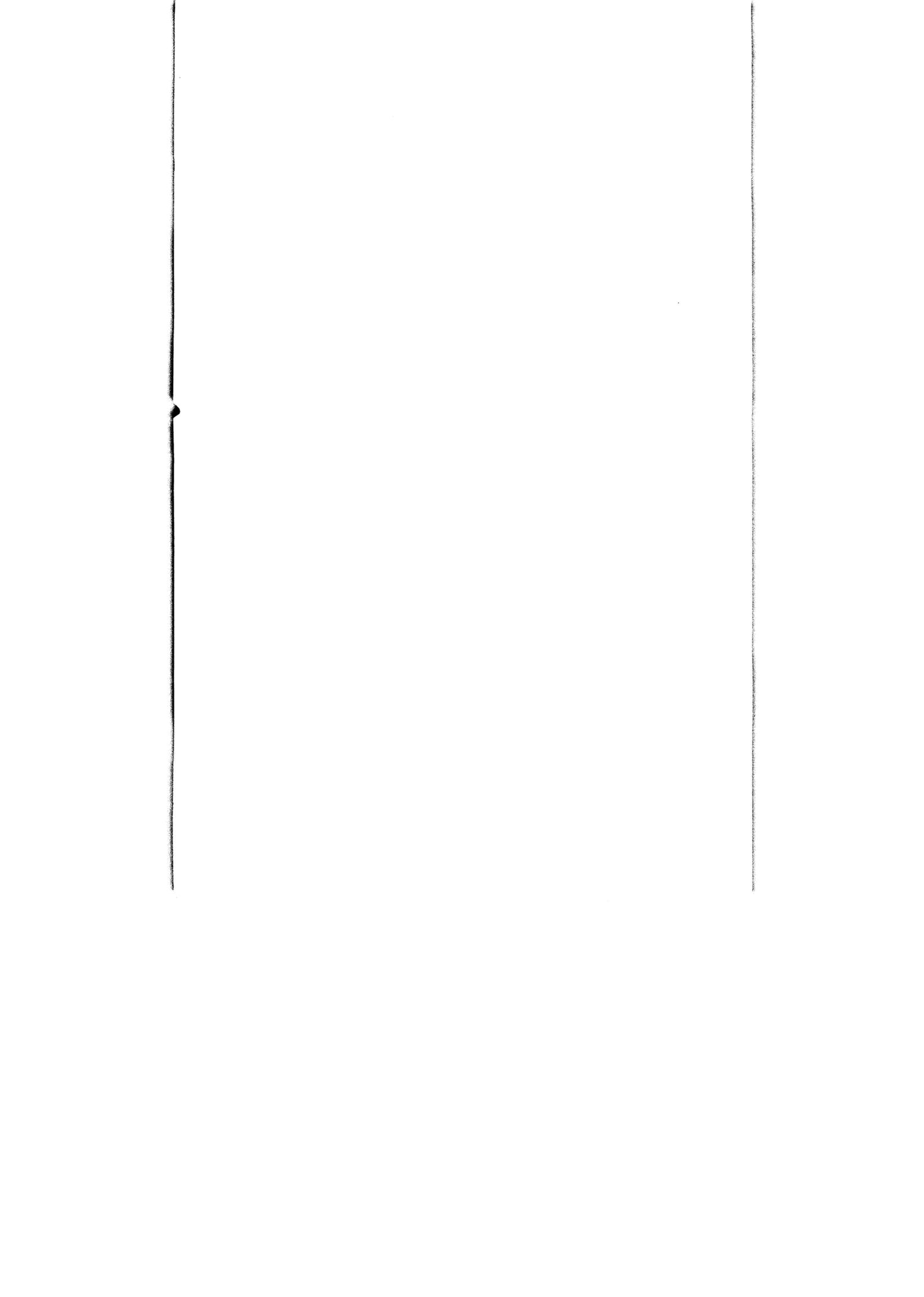
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



WILBERT ARCILA RODRIGUEZ  
J. LINO VIDAL MACEDO

**APUNTES DE  
ANÁLISIS  
DE CIRCUITOS  
ELECTRICOS**

(SEGUNDA PARTE)





**FACULTAD DE INGENIERIA**

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**WILBERT ARCILA RODRIGUEZ  
J. LINO VIDAL MECEDO**

**APUNTES DE  
ANALISIS  
DE CIRCUITOS  
ELECTRICOS**

**(SEGUNDA PARTE)**

**DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA DE CONTROL**

**APUNTES DE ANALISIS  
DE CIRCUITOS ELECTRICOS (SEGUNDA PARTE)**

**Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,  
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.**

**DERECHOS RESERVADOS © 1985, respecto a la primera edición en español  
por la FACULTA DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
Ciudad Universitaria, México 20, D.F.**

**Impreso en México**

**Printed in Mexico**

## P R O L O G O

Análisis de Circuitos Eléctricos se imparte en el sexto semestre, a los alumnos de las carreras de Ingeniero Mecánico Electricista e Ingeniero en Computación.

La asignatura tiene como antecedentes la denominada Dinámica de Sistemas Físicos. Ambas materias ofrecen los conocimientos básicos de la ingeniería eléctrica; por ello Análisis de Circuitos Eléctricos es, a su vez, antecedentes de varias asignaturas sobre temas más específicos, como Máquinas Eléctricas, Transformadores y Motores de Inducción, Sistemas Eléctricos de Potencia, Comunicaciones y Control Analógico.

La obra se divide en dos partes, ésta es la segunda. En la primera, se incluyen dos unidades del programa de la asignatura, más dos apéndices.

La segunda parte comprende las cuatro unidades restantes y un apéndice. En la unidad tres se estudian los circuitos de dos puertos, y consta de tres módulos. La unidad cuatro, con dos módulos, presenta los circuitos en resonancia y circuitos equivalentes del transformador.

La unidad cinco está dedicada al estudio de la serie de Fourier, tanto en su forma trigonométrica, como en la exponencial; consta de tres módulos.

Por último, la unidad seis se ocupa del análisis de la transformada de Fourier y algunas de sus aplicaciones; consta de tres módulos.

El apéndice C ofrece una breve revisión de las principales fórmulas de integración incluyendo algunos ejemplos resueltos; tiene el propósito de cubrir las posibles deficiencias en ese aspecto.

El pasante de Ingeniería Mecánica y Eléctrica José Lino Vidal Macedo, colaboró como coautor de esta obra, como parte de su trabajo de tesis, bajo mi dirección.

Manifestamos nuestro agradecimiento por la activa participación del Lic. Rafael Hernández Lemus, quien no sólo se concretó a darnos asesoría pedagógica para la elaboración del material, sino que de hecho se incorporó al equipo de trabajo; no dudamos en afirmar que esto contribuyó de manera muy importante a mejorar la calidad del material, tanto en su contenido como en la presentación del mismo.

Agradecemos también la intervención de la Maestra Ma. Teresa Quintanilla Martínez, por la supervisión de los trabajos de mecanografía, dibujo y composición, así como por la coordinación general de la edición, cuyos resultados están a la vista.

Por otro lado, estamos conscientes de que a pesar del esfuerzo que representaron las revisiones al manuscrito y a los originales, se podrán encontrar errores u omisiones, razón por la cual ofrecemos nuestras disculpas y nos ponemos a las órdenes de los lectores a fin de recibir comentarios y sugerencias que serán de gran utilidad, en una segunda edición corregida.

Hacemos póstumo homenaje a la memoria del Ingeniero Odón de Buen Lozano, brillante profesional e inolvidable maestro y amigo, quien fue el principal promotor del conjunto de acciones de apoyo a los alumnos, del cual esta obra forma parte.

WILBERT ARCILA RODRIGUEZ.

## CONTENIDO

PROLOGO. . . . .	I
INSTRUCCIONES PARA EL MANEJO DEL TEXTO . . . . .	IX
UNIDAD III. BIPUERTOS. . . . .	349
OBJETIVO GENERAL. . . . .	349
INTRODUCCION. . . . .	349
MODULO 10 EL BIPUERTO Y SUS PARAMETROS . . . . .	350
CUADRO SINOPTICO. . . . .	350
OBJETIVOS ESPECÍFICOS. . . . .	350
10.1 CONCEPTO DE BIPUERTO . . . . .	351
10.2 PARÁMETROS DE IMPEDANCIA . . . . .	352
10.3 PARÁMETROS DE ADMITANCIA . . . . .	360
10.4 PARÁMETROS HIBRIDOS. . . . .	366
10.5 PARÁMETROS DE TRANSMISION. . . . .	373
10.6 RELACIÓN ENTRE PARÁMETROS. . . . .	381
CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN . . . . .	386
MODULO 11 BIPUERTO CONECTADO A UN GENERADOR Y A UNA CARGA. . . . .	393
CUADRO SINOPTICO . . . . .	393
OBJETIVOS ESPECÍFICOS. . . . .	393
11.1 IMPEDANCIA DE ENTRADA A PARTIR DEL MO- DELO DE PARAMETROS DE IMPEDANCIA . . . . .	394
11.2 IMPEDANCIA DE SALIDA DEL MODELO DE PARAMETROS DE IMPEDANCIA. . . . .	395
11.3 GANANCIA DE VOLTAJE Y DE CORRIENTE A PARTIR DEL MODELO DE PARAMETROS DE IMPEDANCIA. . . . .	397
11.4 IMPEDANCIA DE ENTRADA A PARTIR DEL MODELO DE PARAMETROS HIBRIDOS. . . . .	400

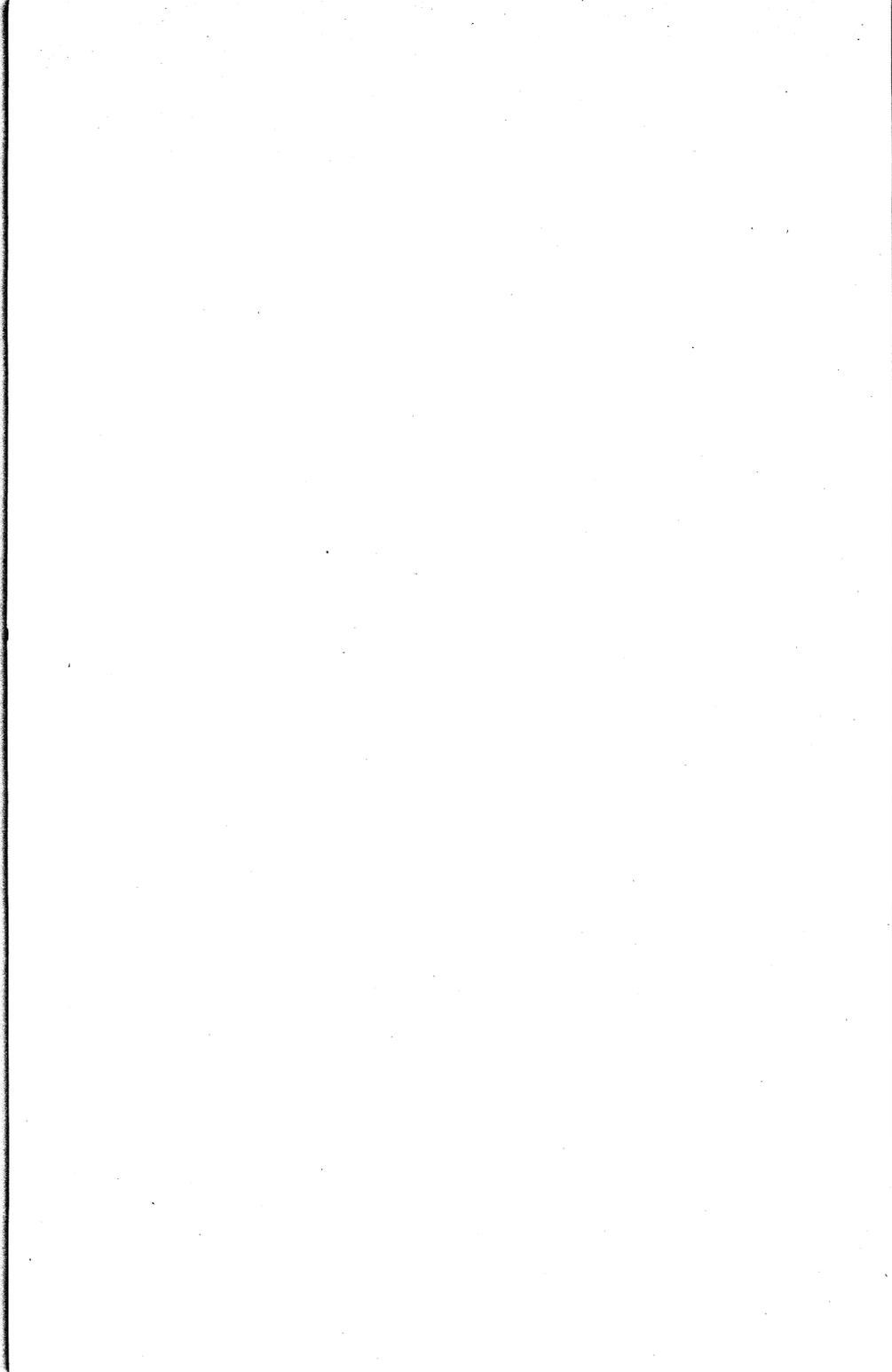
IV

11.5	IMPEDANCIA DE SALIDA PARA EL MODELO DE PARAMETROS HIBRIDOS. . . . .	402
11.6	GANANCIA DE VOLTAJE Y CORRIENTE PARA EL MODELO DE PARAMETROS HIBRIDOS. . . . .	403
	CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION . . . . .	406
<b>MODULO 12</b>	<b>INTERCONEXIONES ENTRE BIPUERTOS. . . . .</b>	<b>409</b>
	CUADRO SINOPTICO. . . . .	409
	OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	409
12.1	CONEXION EN SERIE. . . . .	410
12.2	CONEXION EN PARALELO . . . . .	414
12.3	CONEXION EN CASCADA. . . . .	418
	CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION . . . . .	422
	<b>BIBLIOGRAFIA. . . . .</b>	<b>427</b>
<b>UNIDAD IV</b>	<b>CIRCUITOS RESONANTES Y CIRCUITOS EQUIVALENTES DEL TRANSFORMADOR . . . . .</b>	<b>429</b>
	OBJETIVO GENERAL. . . . .	429
	INTRODUCCION. . . . .	429
<b>MODULO 13</b>	<b>CIRCUITOS RESONANTES. . . . .</b>	<b>430</b>
	CUADRO SINOPTICO. . . . .	430
	OBJETIVOS ESPECIFICOS. . . . .	430
13.1	CIRCUITO RLC RESONANTE EN PARALELO . . . . .	431
13.2	DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS . . . . .	436
13.3	FACTOR DE CALIDAD, ANCHO DE BANDA Y FRECUENCIA DE CORTE. . . . .	439
13.4	CIRCUITO RLC RESONANTE EN SERIE. . . . .	444
13.5	CIRCUITO RESONANTE CON PERDIDAS EN EL INDUCTOR. . . . .	449
	CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION . . . . .	456

<b>MODULO 14</b>	<b>MODELO LINEAL DEL TRANSFORMADOR. . . . .</b>	<b>461</b>
	CUADRO SINOPTICO. . . . .	461
	OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	461
14.1	FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL MODELO LINEAL DE UN TRANSFORMADOR. . . . .	462
14.2	TRANSFORMADOR IDEAL . . . . .	467
14.3	CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MODELO LINEAL DE UN TRANSFORMADOR . . . . .	471
14.4	FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRANSFORMADOR . . . . .	475
	CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. . . . .	482
	<b>BIBLIOGRAFIA. . . . .</b>	<b>485</b>
<b>UNIDAD V</b>	<b>LA SERIE DE FOURIER . . . . .</b>	<b>487</b>
	OBJETIVO GENERAL. . . . .	487
	INTRODUCCION. . . . .	487
<b>MODULO 15</b>	<b>FORMA TRIGONOMETRICA DE LA SERIE DE FOURIER. . . . .</b>	<b>488</b>
	CUADRO SINOPTICO. . . . .	488
	OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	488
15.1	SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER . . . . .	489
15.2	EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER . . . . .	491
15.3	FORMA EQUIVALENTE DE LA SERIE TRIGONO- METRICA Y ESPECTRO DISCRETO DE FRE- CUENCIA. . . . .	497
15.4	RESPUESTA PERMANENTE DE CIRCUITOS LINEA LES A FUNCIONES EXCITATRICES PERIODICAS	504
	CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. . . . .	508

MODULO 16	SIMETRIA DE LAS FUNCIONES PERIODICAS. . .	513
	CUADRO SINOPTICO. . . . .	513
	OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	513
	16.1 SIMETRIA PAR E IMPAR. . . . .	514
	16.2 SIMETRIA DE MEDIA ONDA. . . . .	521
	16.3 SIMETRIA DE CUARTO DE ONDA PAR E IMPAR. . . . .	526
	CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. . . . .	531
MODULO 17	FORMA EXPONENCIAL DE LA SERIE DE FOURIER. . . . .	537
	CUADRO SINOPTICO. . . . .	537
	OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	537
	17.1 SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER. . . . .	538
	17.2 EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER. . . . .	539
	17.3 ESPECTRO DISCRETO DE FRECUENCIA DE LA SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER. . . . .	543
	CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. . . . .	552
	BIBLIOGRAFIA. . . . .	558
UNIDAD VI	LA TRANSFORMADA DE FOURIER. . . . .	559
	OBJETIVO GENERAL. . . . .	559
	INTRODUCCION. . . . .	559
MODULO 18	CONCEPTOS BASICOS SOBRE LA TRANSFORMADA DE FOURIER. . . . .	560
	CUADRO SINOPTICO. . . . .	560
	OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	560
	18.1 DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER. . . . .	561
	18.2 CONDICION DE EXISTENCIA. . . . .	567
	18.3 PROPIEDADES. . . . .	570
	18.4 ESPECTRO DE ENERGIA. . . . .	583
	CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. . . . .	590

MODULO 19 TRANSFORMADAS DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES. . . . .	595
CUADRO SINOPTICO . . . . .	595
OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	595
19.1 LA FUNCION IMPULSO. . . . .	596
19.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCION IMPULSO. . . . .	601
19.3 TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCION EXPONENCIAL COMPLEJA. . . . .	604
19.4 TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES PERIODICAS. . . . .	606
19.5 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCION CONSTANTE. . . . .	610
19.6 TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCION ESCALON. . . . .	612
CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. . . . .	617
 MODULO 20 ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER. . . . .	 621
CUADRO SINOPTICO. . . . .	621
OBJETIVOS ESPECIFICOS . . . . .	621
20.1 CONVOLUCION Y RESPUESTA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO. . . . .	622
20.2 FUNCION DE TRANSFERENCIA Y RESPUESTA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA. . . . .	630
20.3 FILTRO IDEAL DE BAJA FRECUENCIA . . . . .	634
20.4 TEORIA DEL MUESTREO. . . . .	636
20.5 TEOREMA DE MUESTRAS UNIFORMES . . . . .	639
CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. . . . .	640
 BIBLIOGRAFIA. . . . .	 643
 APENDICE C . . . . .	 645
SOLUCION A LOS CUESTIONARIOS DE AUTOEVALUACION. . . . .	651
INDICE ANALITICO. . . . .	669



## INSTRUCCIONES PARA EL MANEJO DEL TEXTO

## ESTRUCTURA DEL LIBRO

El texto ha sido concebido de tal forma que por sí solo proporcione los elementos básicos para un aprendizaje adecuado a aquellos estudiantes que no tengan la oportunidad de asistir regularmente a clases.

La lectura de esta sección le ayudará a obtener mejores resultados y evitar problemas en el estudio.

La obra se divide en dos partes constituidas por grandes bloques de contenido, denominadas UNIDADES TEMATICAS

Cada Unidad Temática tiene un OBJETIVO GENERAL de aprendizaje, que se debe alcanzar con el estudio de la Unidad completa. Incluye además una INTRODUCCION que sintetiza su contenido y utilidad, finalmente en cada Unidad aparece una bibliografía de obras consultadas, y de volúmenes que pueden auxiliar para profundizar en el tema.

Todas las Unidades están formadas por bloques de contenido más pequeño, llamados MODULOS.

Cada módulo aborda un tema específico. Abarca elementos didácticos y actividades de aprendizaje que lo conforman como bloque de aprendizaje independiente.

Al inicio del Módulo se presenta un CUADRO SINOPTICO que proporciona una idea general de su contenido. También aparecen los OBJETIVOS ESPECIFICOS del Módulo, que le indican lo que se espera de usted al finalizar su estudio.

Se ha pretendido desarrollar el contenido de cada Módulo en una forma clara y sencilla, además se ha incluido la solución detallada de los ejemplos allí presentados.

Como una manera de destacar las ideas, conceptos o experiencias más importantes en el desarrollo de cada Módulo, se incorporan los llamados INDICADORES ESPECIFICOS, que aparecen en el margen derecho de las páginas y llaman la atención sobre algún aspecto trascendente, al tiempo que facilitan su posterior localización.

Al final de cada Módulo se encuentra un CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION. Este le indicará su grado de avance en el aprendizaje, es decir, le señalará en qué medida se lograron los objetivos específicos de aprendizaje del Módulo. Las respuestas a los cuestionarios de autoevaluación se encuentran al final de la Unidad VI.

Antes de comenzar la Unidad I se localiza una sección denominada REQUISITOS. En ella se le indican los conocimientos que debe poseer para el mejor aprovechamiento del texto.

## RECOMENDACIONES PARA EL USO DEL TEXTO

Para facilitar su estudio, y lograr los objetivos de aprendizaje establecidos en el texto, es necesario que usted atienda la serie de indicaciones que a continuación enumeramos:

## LEA ATENTAMENTE LOS OBJETIVOS.

- 1) Leer atentamente los objetivos, tanto generales como específicos de cada Unidad y Módulos, le dará una idea precisa de lo que se pretende lograr con el estudio de cada Módulo y de cada Unidad.

El conocimiento de los objetivos de aprendizaje le ayudará a ubicar el alcance de su estudio y a evaluar por usted mismo el nivel de su aprendizaje.

También es recomendable que lea la Introducción a la Unidad y que observe con atención los cuadros sinópticos con los que se inicia cada Módulo. Son de gran ayuda cuando se recurre a ellos una vez finalizado el estudio del Módulo, ya que presentan una síntesis que puede ser confrontada con la visión global que obtuvo del tema.

## ESTUDIE LOS MÓDULOS SECUENCIALMENTE

Comience el estudio con el Módulo I y continúe con el siguiente sólo hasta que lo haya dominado. Efectúe el estudio observando cuidadosamente el desarrollo del contenido, y preste especial atención a la forma en que se solucionan los problemas de los ejemplos. Posteriormente trate de resolverlos sin recurrir al texto.

Es probable que usted ya conozca el contenido de uno o más Módulos. En tal sentido, sería aconsejable que diera un repaso para comprobar su nivel de dominio del tema en cuestión. Para esto último le ayudará el cuestionario de autoevaluación.

## RESUELVAN EL CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACIÓN

Una vez efectuado el estudio del Módulo proceda a contestar el cuestionario de autoevaluación.

Dicho cuestionario sirve para retroalimentar su estudio y le permite ejercitar lo aprendido.

Es un elemento de enorme importancia en el texto, a través del cual podrá darse cuenta del grado de avance en su aprendizaje y tener la oportunidad de retroalimentar aquellos aspectos en los que no se haya logrado el aprendizaje deseado.

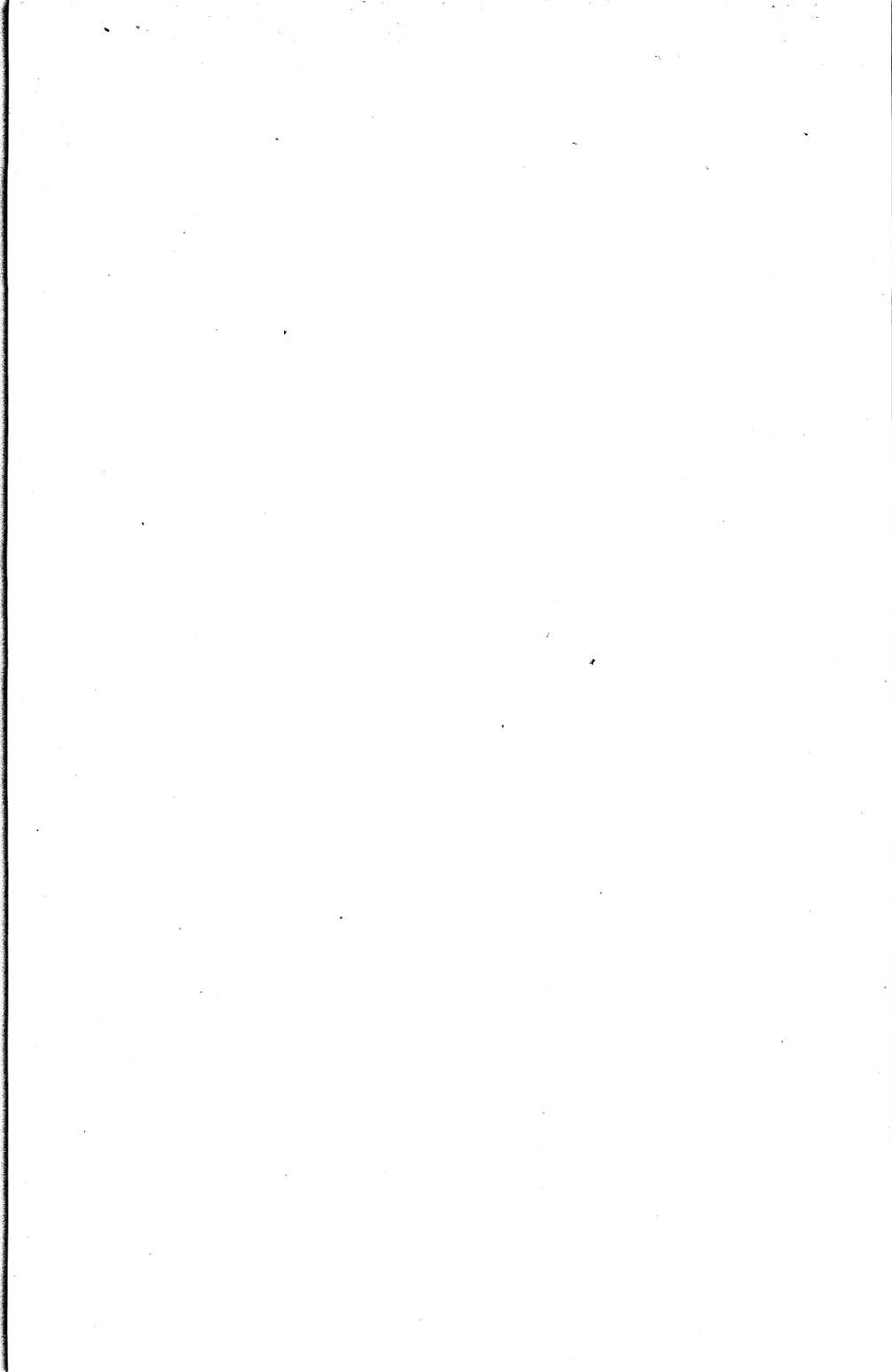
Responda sólo lo que se le pide en el cuestionario, y verifique sus respuestas únicamente después de haber contestado al menos la sección en la que se encuentre.

En caso de que tenga dificultades para contestar, o sus respuestas hayan sido erróneas, estudie nuevamente el Módulo o la parte del Módulo correspondiente y vuelva otra vez a contestar el cuestionario.

#### ANOTE SUS DUDAS Y DESPUES CONSULTE A SU ASESOR

Si durante el estudio de un Módulo se le presenta alguna duda, trate de resolverla con la ayuda de un compañero, o bien recurriendo a la bibliografía que aparece al final de la Unidad correspondiente. En el caso de que esto no resulte satisfactorio, recurra a su asesor; seguramente él le resolverá su duda; pero es importante que acuda a él sólo hasta haber agotado otros recursos disponibles. De esa manera evitará lo más posible la dependencia del profesor.

No olvide que todos y cada uno de los elementos didácticos del texto tienen como finalidad optimizar su aprendizaje. Por ello, es muy importante que siga las recomendaciones que le hacemos. De hacerlo, los resultados serán muy satisfactorios.



## UNIDAD III BIPUERTOS

### OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de la unidad, el alumno:

Caracterizará a los bipuertos mediante sistemas de ecuaciones que tienen como variables a las corrientes y voltajes de los puertos, y como coeficientes de estas variables están los parámetros de impedancia, de admitancia, híbridos o de transmisión.

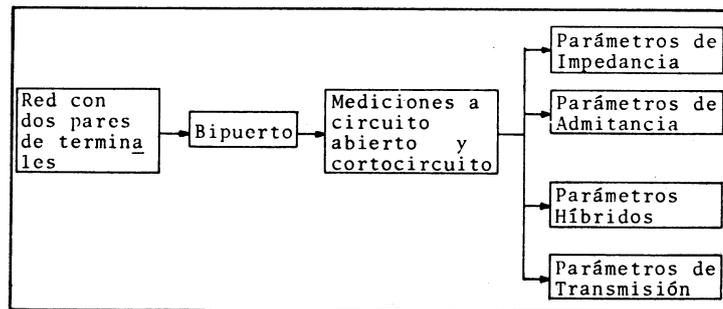
### INTRODUCCION

Un par de terminales al que se puede conectar una fuente de excitación o una impedancia de carga, se denomina puerto. Cuando un circuito tiene dos pares de terminales se denomina circuito de dos puertos o simplemente bipuerto.

Los métodos de análisis de bipuertos se desarrollan a partir de las variables externas de la red, esto es, de aquellas variables que pueden medirse en los dos puertos; no toman en cuenta las variables interiores de la red.

## MÓDULO 10. EL BIPUERTO Y SUS PARÁMETROS

## CUADRO SINOPTICO



## Objetivos específicos

## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Explicará las condiciones que debe satisfacer una red para que sea considerada como bipuerto.
2. Identificará los diferentes tipos de parámetros que caracterizan a un bipuerto general.
3. Calculará los parámetros de impedancia, de admitancia, híbridos y de transmisión a partir de un bipuerto dado.
4. Calculará los parámetros de impedancia, de admitancia, híbridos o de transmisión a partir de las expresiones que los relacionan entre sí.

## 10.1 CONCEPTO DE BIPUERTO

Consideremos a la red con dos pares de terminales que se muestra en la figura 10.1, como una caja cerrada. Generalmente a las terminales 1 y 1' se les conoce como puerto de entrada, y a las terminales 2 y 2' como puerto de salida.

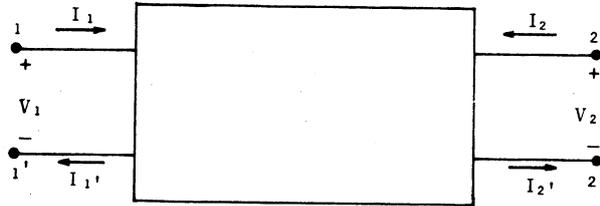


Figura 10.1 Bipuerto.

La red contenida en la caja se denominará bipuerto si cumple con las siguientes condiciones: Características de un bipuerto

1. La corriente que entra por una terminal de un puerto debe ser igual a la corriente que sale por la otra terminal de ese mismo puerto.

Por ejemplo, si conectamos una fuente de voltaje a través de las terminales 1 y 1' de la red, la fuente generará la corriente  $I_1$  hacia la red por la terminal 1 y saldrá la corriente  $I_1'$  por la terminal 1'. Entonces la corriente  $I_1$  necesariamente tiene que ser igual a la corriente  $I_1'$ . En consecuencia:

$$I_1 = I_1' \quad (10.1)$$

Bajo esta condición el par de terminales 1 y 1' se dice que constituye un puerto.

Análogamente para el puerto 2 y 2' se tiene que:

$$I_2 = I_2' \quad (10.2)$$

2. La red no debe contener en su interior fuentes independientes aunque puede contener fuentes dependientes.

3. Las fuentes y las cargas deben estar conectadas entre las dos terminales de un puerto. Por ejemplo, no se deberá conectar un dispositivo entre las terminales 1 y 2 o 1' y 2' de la red.

Es importante observar en la figura 10.1, que las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  fluyen hacia la red por las terminales 1 y 2 respectivamente. Los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  tienen polaridad positiva en las terminales 1 y 2 respectivamente. Estos sentidos de referencia para las corrientes y voltajes son convencionales y son los que adoptaremos en los cálculos a través de esta unidad.

La teoría de bipuertos destaca las relaciones entre las corrientes y voltajes en las terminales de la red y no toma en cuenta a las corrientes y voltajes en el interior de la red.

En un bipuerto se tienen cuatro variables importantes: los dos voltajes  $V_1$  y  $V_2$  y las dos corrientes  $I_1$  e  $I_2$  en los puertos de la red. Por tanto, para caracterizar al bipuerto se necesita relacionar las cuatro variables por medio de ecuaciones. Sin embargo, cuando dos de las cuatro variables se escogen como variables independientes, las otras dos pueden expresarse como variables dependientes por medio de ecuaciones independientes.

## 10.2 PARAMETROS DE IMPEDANCIA

En la obtención de los parámetros de impedancia se escoge a  $V_1$  y  $V_2$  como variables dependientes y a  $I_1$  e  $I_2$  como variables independientes.

Consideremos el circuito de dos puertos de la figura 10.2, para definir los parámetros de impedancia y un modelo de bipuerto en términos de estos parámetros.

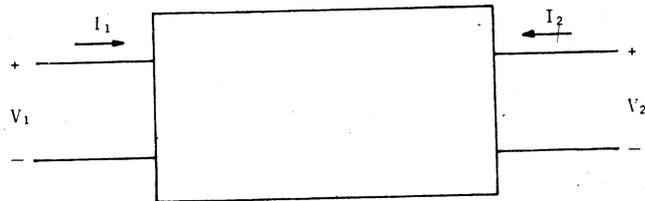


Figura 10.2 Circuito de dos puertos.

Tomando como base que el bipuerto es una red lineal, calcularemos los voltajes  $V_1$  y  $V_2$ , usando el principio de superposición.

El voltaje  $V_1$  está formado por dos componentes, una debida a la corriente  $I_1$  y otra a  $I_2$ . Es decir:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (10.3)$$

Ecua-  
ciones del  
bipuerto en tér-  
minos de los pa-  
rámetros de im-  
pedancia

Los coeficientes de  $I_1$  y de  $I_2$  en esta ecuación deben tener unidades de impedancia, por ello usamos para indicarlos la letra  $Z$ .

De manera similar podemos calcular el voltaje  $V_2$ , obteniendo

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \quad (10.4)$$

Las ecuaciones (10.3) y (10.4) forman un sistema de ecuaciones que expresa a los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  (variables dependientes) en términos de las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  (variables independientes). Como se mencionó anteriormente, estas ecuaciones no toman en cuenta las variables internas del bipuerto.

El modelo de bipuerto con los parámetros  $Z$  de las ecuaciones (10.3) y (10.4) se muestra en la figura 10.3, Obsérvese que el modelo incluye dos fuentes de voltaje, controladas por corriente.

Modelo del bi-  
puerto con pa-  
rámetros de im-  
pedancia

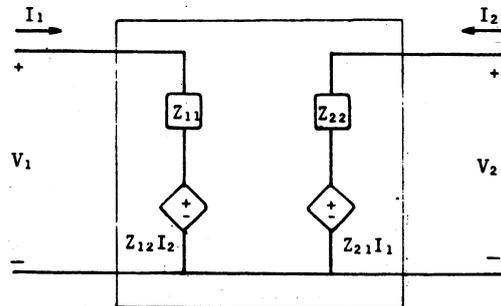


Figura 10.3 Modelo de parámetros de Impedancia

Los parámetros  $Z$  pueden determinarse experimentalmente midiendo los voltajes y corrientes, en pruebas de circuito abierto, en los dos pares de terminales del bipuerto de la figura 10.2

Si conectamos una fuente de corriente  $I_1$  al puerto de entrada de la red y al puerto de salida lo dejamos en circuito abierto (figura 10.4), la corriente  $I_2$  es igual a cero y las ecuaciones (10.3) y (10.4) se reducen a:

$$\begin{array}{l} V_1 = Z_{11} I_1 \\ V_2 = Z_{21} I_1 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} I_2 = 0 \end{array} \quad (10.5)$$

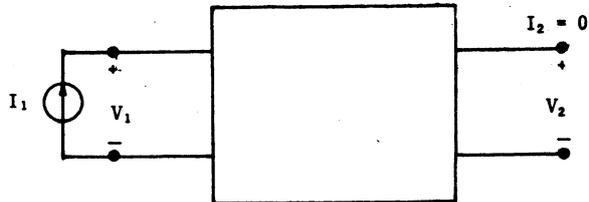


Figura 10.4 Conexión para determinar  $Z_{11}$  y  $Z_{21}$

Similarmente, si el puerto de entrada se deja en circuito abierto y se conecta una fuente de corriente  $I_2$  al puerto de salida (figura 10.5), las ecuaciones (10.3) y (10.4) se reducen a:

$$\begin{array}{l} V_1 = Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{22} I_2 \end{array} \Bigg| \begin{array}{l} I_1 = 0 \end{array} \quad (10.6)$$

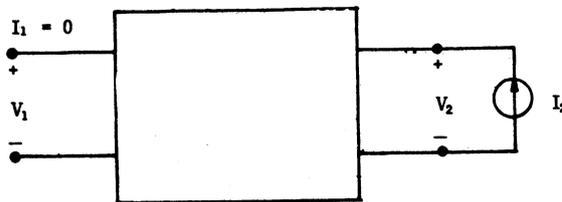


Figura 10.5 Conexión para determinar  $Z_{12}$  y  $Z_{22}$ .

Despejando los respectivos parámetros Z en las expresiones (10.5) y (10.6) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \\ Z_{21} &= \frac{V_2}{I_1} \end{aligned} \right|_{I_2 = 0} \quad \left. \begin{aligned} Z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \\ Z_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \end{aligned} \right|_{I_1 = 0}$$

(10.7) Expresiones para el cálculo de los parámetros de impedancia

Como cada parámetro Z es una impedancia que se obtiene de jando en circuito abierto a uno de los puertos, los parámetros Z se llaman *parámetros de impedancia a circuito abierto*. A continuación se dan los nombres específicos para cada uno de estos parámetros:

- Z<sub>11</sub> : Impedancia de entrada a circuito abierto.
- Z<sub>21</sub> : Impedancia de transferencia directa a circuito abierto.
- Z<sub>12</sub> : Impedancia de transferencia inversa a circuito abierto.
- Z<sub>22</sub> : Impedancia de salida a circuito abierto.

Nomenclatura e interpretación de los parámetros de impedancia

Escribiendo las ecuaciones (10.3) y (10.4) en forma matricial tenemos:

$$V = ZI \quad (10.8)$$

donde la matriz:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

(10.9) Matriz de impedancia de circuito abierto

se llama matriz de impedancia a circuito abierto del bipuerto.

Se dice que un bipuerto es *recíproco*, si la excitación y la respuesta forzada no varían al intercambiar los puertos de excitación y de respuesta. Bipuerto recíproco

La condición para que un bipuerto sea recíproco es que las impedancias de transferencia sean iguales, esto es:

$$Z_{21} = Z_{12} \quad (10.10)$$

## Ejemplo 10.1

Para el bipuerto mostrado en la figura 10.6:

- Determine los parámetros de impedancia,
- establezca las ecuaciones del bipuerto en términos de los parámetros de impedancia,
- dibuje el modelo equivalente en términos de los parámetros de impedancia.

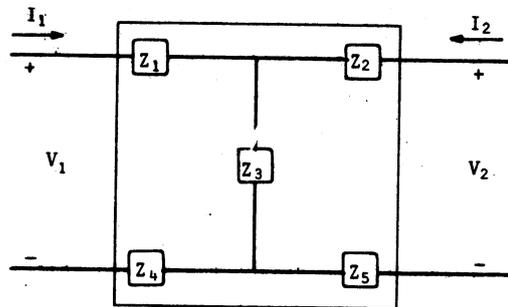


Figura 10.6

## Solución

- Para obtener los parámetros  $Z_{11}$  y  $Z_{21}$  conectamos una fuente de corriente  $I_1$  al puerto de entrada y dejamos en circuito abierto al puerto de salida como se muestra en la figura 10.7. Así, basándonos en este figura y en las expresiones (10.5), obtenemos:

$$V_1 = I_1(Z_1 + Z_3 + Z_4)$$

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2 = 0} = Z_1 + Z_3 + Z_4$$

$$V_2 = I_1(Z_3)$$

$$\therefore Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2 = 0} = Z_3$$

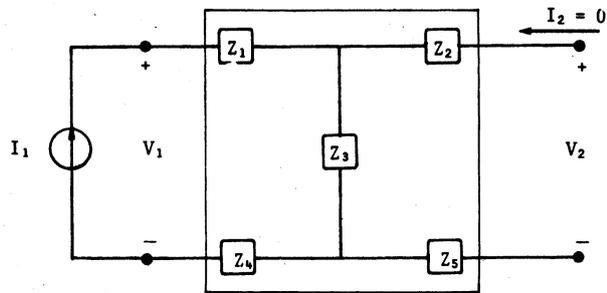


Figura 10.7

Para obtener los parámetros  $Z_{12}$  y  $Z_{22}$  conectamos al puerto de salida una fuente de corriente y dejamos en circuito abierto al puerto de entrada como se muestra en la figura 10.8. Luego, de esta figura y de las expresiones (10.6) obtenemos los parámetros:

$$V_1 = I_2(Z_3)$$

$$\therefore Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1 = 0} = Z_3$$

$$V_2 = I_2(Z_2 + Z_3 + Z_5)$$

$$\therefore Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1 = 0} = Z_2 + Z_3 + Z_5$$

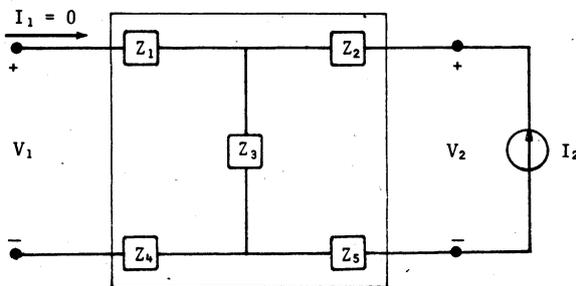


Figura 10.8

- b) Las ecuaciones que caracterizan al bipuerto se forman con los parámetros de impedancia calculados en el inciso anterior, tenemos entonces:

$$V_1 = (Z_1 + Z_3 + Z_4)I_1 + (Z_3)I_2$$

$$V_2 = (Z_3)I_1 + (Z_2 + Z_3 + Z_5)I_2$$

$$\text{o} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 + Z_4 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 + Z_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- c) El modelo equivalente del bipuerto (figura 10.9) se obtiene a partir de las ecuaciones del inciso anterior y de la figura 10.3.

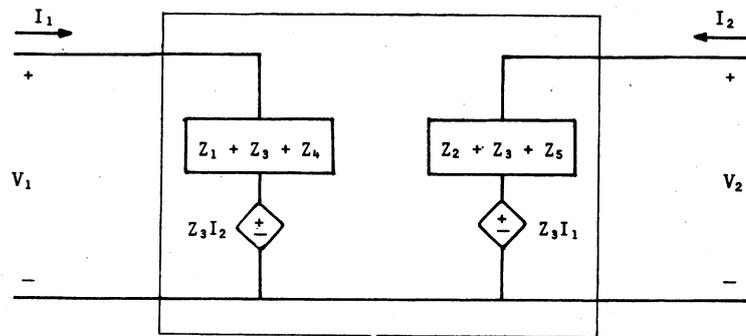


Figura 10.9

#### Ejemplo 10.2

Dados los siguientes voltajes y corrientes determinados en pruebas de circuito abierto para un bipuerto:

$$\begin{array}{l|l} V_1 = 200 \text{ V} & V_1 = 60 \text{ V} \\ V_2 = 150 \text{ V} & V_2 = 100 \text{ V} \\ I_1 = 25 \text{ A} & I_2 = 10 \text{ A} \\ \hline & I_2 = 0 & I_1 = 0 \end{array}$$

- a) Determine los parámetros de impedancia,
- b) establezca las ecuaciones del bipuerto en términos de los parámetros de impedancia,
- c) dibuje el modelo equivalente en términos de los parámetros de impedancia.

**Solución**

- a) De las expresiones (10.7) que definen a los parámetros de impedancia, obtenemos:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2 = 0} = \frac{200}{25} = 8 \, \Omega$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2 = 0} = \frac{150}{25} = 6 \, \Omega$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1 = 0} = \frac{60}{10} = 6 \, \Omega$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1 = 0} = \frac{100}{10} = 10 \, \Omega$$

- b) Las ecuaciones que representan al bipuerto son:

$$V_1 = 8I_1 + 6I_2$$

$$V_2 = 6I_1 + 10I_2$$

o

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- c) El modelo de parámetros de impedancia se muestra en la figura 10.10.

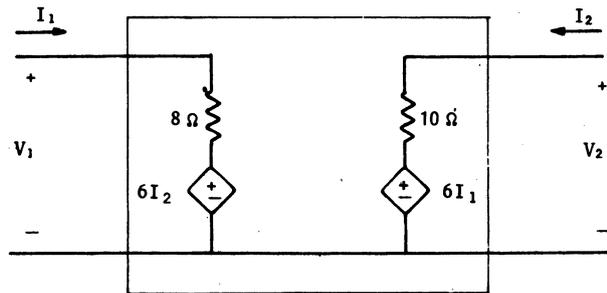


Figura 10.10

### 10.3 PARAMETROS DE ADMITANCIA

Para obtener los parámetros de admitancia, las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  se toman como variables dependientes y los voltajes  $V_1$  y  $V_2$  como variables independientes.

Considerando el bipuerto de la figura 10.11, definiremos los parámetros de admitancia y un bipuerto equivalente general, en términos de estos parámetros.

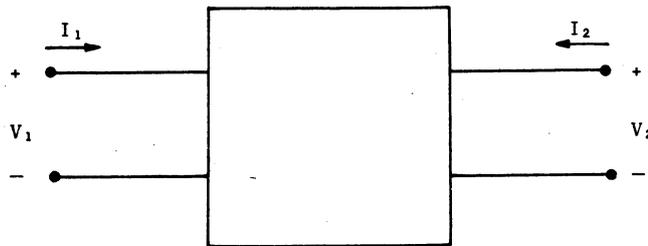


Figura 10.11 Circuito de dos puertos

Como en la obtención de los parámetros de impedancia, aquí también haremos uso del principio de superposición. Las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  tienen, cada una de ellas, dos componentes; una es debida al voltaje  $V_1$  y la otra a  $V_2$ , así, obtenemos:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \quad (10.11) \quad \text{Ecuaciones del bipoerto con los parámetros de admitancia}$$

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \quad (10.12)$$

Estas ecuaciones expresan a  $I_1$  e  $I_2$  en términos de las variables independientes  $V_1$  y  $V_2$ .

El modelo de bipoerto con parámetros de admitancia descrito por las ecuaciones (10.11) y (10.12) se muestra en la figura 10.12. Observe que el modelo incluye dos fuentes de corriente controladas por voltaje.

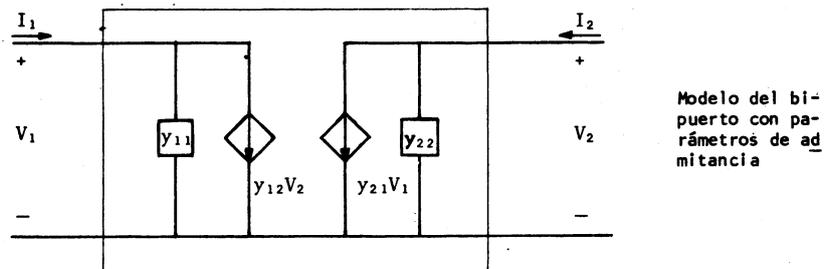


Figura 10.12 Modelo de parámetros de admitancia

Los parámetros de admitancia pueden determinarse experimentalmente midiendo los voltajes y corrientes, en pruebas de cortocircuito, en los dos pares de terminales del bipoerto de la figura 10.11.

Por tanto, si conectamos una fuente de voltaje  $V_1$  al puerto de entrada de la red y al puerto de salida lo dejamos en cortocircuito (vea la figura 10.13), el voltaje  $V_2$  es igual a cero y las ecuaciones (10.11) y (10.12) se reducen a:

$$\begin{array}{l} I_1 = y_{11} V_1 \\ I_2 = y_{21} V_1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \\ V_2 = 0 \end{array} \right. \quad (10.13)$$

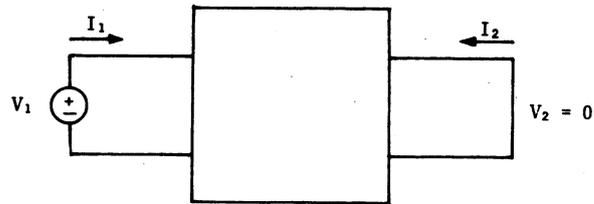


Figura 10.13 Conexión para determinar  $y_{11}$  y  $y_{21}$

Análogamente, si al puerto de salida se le conecta una fuente de voltaje  $V_2$  y el puerto de entrada se deja en cortocircuito (figura 10.14), las ecuaciones (10.11) y (10.12) se reducen a:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{12} V_2 \\ I_2 &= y_{22} V_2 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{array}{l} V_1 = 0 \end{array} \right. \quad (10.14)$$

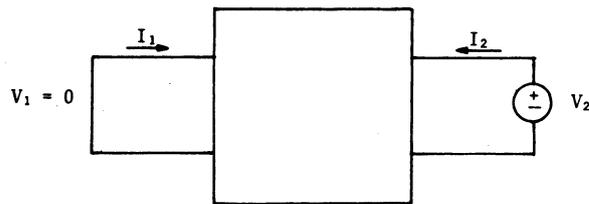


Figura 10.14 Conexión para obtener los parámetros  $y_{12}$  y  $y_{22}$

Si despejamos los respectivos parámetros en las expresiones (10.13) y (10.14) obtenemos:

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \quad \left| \quad \begin{array}{l} V_2 = 0 \end{array} \right. & y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} V_1 = 0 \end{array} \right. \\ y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \quad \left| \quad \begin{array}{l} V_2 = 0 \end{array} \right. & y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} V_1 = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Expresiones para el cálculo de los parámetros de admitancia

Puesto que cada parámetro "y" es una admitancia que se obtiene dejando en cortocircuito a cada uno de los puertos, estos parámetros se llaman *parámetros de admitancia en cortocircuito*.

Los nombres específicos para cada uno de estos parámetros son:

- $y_{11}$  : admitancia de entrada en cortocircuito,  
 $y_{21}$  : admitancia de transferencia directa en cortocircuito,  
 $y_{12}$  : admitancia de transferencia inversa en cortocircuito,  
 $y_{22}$  : admitancia de salida en cortocircuito.

Nomenclatura e interpretación de los parámetros de admitancia

Las ecuaciones (10.11) y (10.12) pueden escribirse en la forma:

$$I = YV \quad (10.16)$$

donde la matriz:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (10.17) \quad \text{Matriz de admitancia en cortocircuito}$$

se denomina *matriz de admitancia en cortocircuito* del bipuerto.

Como una admitancia es el inverso de la impedancia tenemos la relación siguiente entre las matrices  $Y$  y  $Z$ .

$$Y = Z^{-1}$$

La condición para que el bipuerto sea recíproco es que:

$$Y_{12} = Y_{21} \quad (10.18)$$

### Ejemplo 10.3

Para el circuito resistivo de dos puertos representado en la figura 10.15:

- Determine los parámetros de admitancia,
- establezca las ecuaciones de bipuerto en términos de los parámetros de admitancia,
- dibuje el modelo equivalente del bipuerto en términos de los parámetros de admitancia.

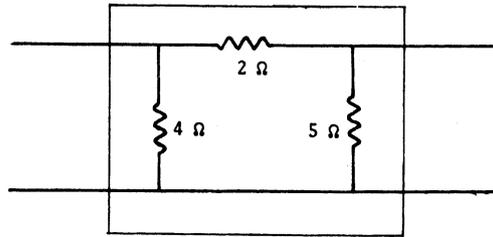


Figura 10.15

## Solución

- a) Para determinar los parámetros  $y_{11}$  y  $y_{21}$  se conecta una fuente de voltaje  $V_1$  al puerto de entrada y se deja en cortocircuito al puerto de salida, como se muestra en la figura 10.16, de la cual obtenemos:

$$I_1 = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) V_1$$

$$I_1 = \frac{3}{4} V_1 \quad (a)$$

a su vez, de la ecuación (a) se tiene:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{3}{4} \text{ u}$$

Cabe hacer notar que no tomamos en cuenta a la resistencia de  $5 \Omega$ , ya que está en paralelo con un cortocircuito. Observando la figura 10.16, puede concluirse que las resistencias de  $2 \Omega$  y  $4 \Omega$  quedan en paralelo con la fuente  $V_1$  y que la corriente  $I_2$  es la que circula por la resistencia de  $2 \Omega$ .

De lo anterior, tenemos que:

$$I_2 = - \frac{V_1}{2} \quad (b)$$

de donde:

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = - \frac{1}{2} \text{ u}$$

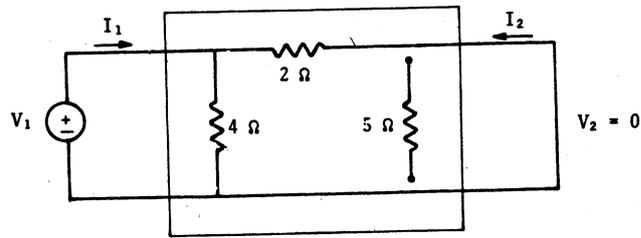


Figura 10.16 Conexiones para determinar  $Y_{11}$  y  $Y_{21}$

Para determinar los parámetros  $Y_{12}$  y  $Y_{22}$  el puerto de entrada se pone en cortocircuito y se conecta una fuente de voltaje  $V_2$  al puerto de salida como se muestra en la figura 10.17.

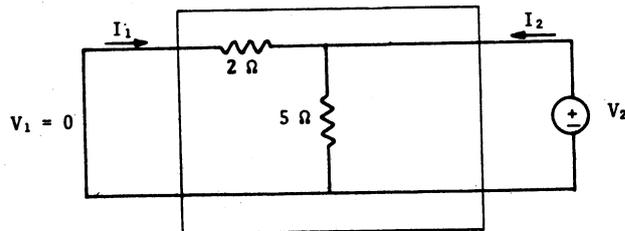


Figura 10.17 Conexiones para determinar  $Y_{12}$  y  $Y_{22}$

De esta figura obtenemos:

$$I_2 = \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) V_2$$

$$I_2 = \frac{7}{10} V_2 \quad (c)$$

de la ecuación (c) se obtiene el parámetro:

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1 = 0} = \frac{7}{10} \text{ u}$$

La corriente  $I_1$  que se obtiene de la figura 10.17 es:

$$I_1 = -\frac{V_2}{2} \quad (d)$$

de donde:

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} = -\frac{1}{2} \text{ u}$$

b) Las ecuaciones del bipuerto tienen como coeficientes los parámetros de admitancia y son:

$$I_1 = \frac{3}{4} V_1 - \frac{1}{2} V_2$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} V_1 + \frac{7}{10} V_2$$

c) El modelo de bipuerto que se obtiene de las ecuaciones del inciso anterior, se muestra en la figura 10.18.

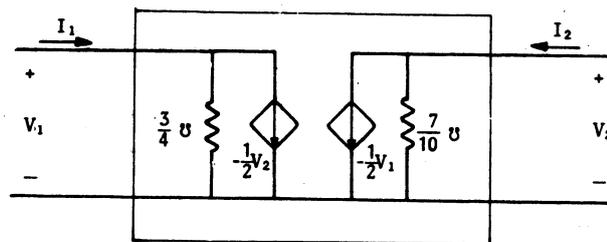


Figura 10.18

#### Ejemplo 10.4

Una fuente de voltaje de 40 V se conecta al puerto de entrada y una carga resistiva se conecta al puerto de salida del modelo de bipuerto del ejemplo 10.3, tal como se muestra en la figura 10.19.

- Determine la corriente de la carga resistiva,
- calcule la potencia consumida por la carga resistiva,
- determine la corriente suministrada por la fuente de 40 V.

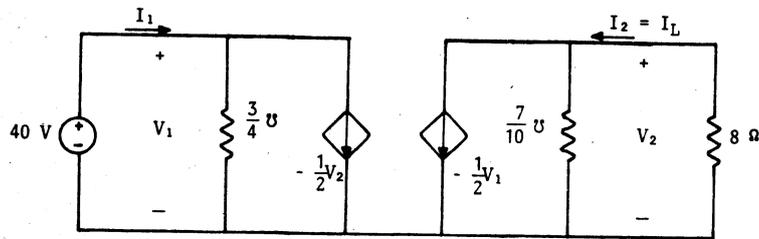


Figura 10.19

## Solución

- a) Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff al nodo superior del puerto de salida, de la figura 10.19, obtenemos:

$$-\frac{1}{2} V_1 = \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{8}\right) V_2$$

$$-\frac{1}{2} V_1 = \frac{33}{40} V_2$$

sustituyendo el valor de  $V_1$ , obtenemos  $V_2$ :

$$-\frac{1}{2} (40) = \frac{33}{40} V_2$$

$$V_2 = -24 \text{ V}$$

Aplicando la ley de Ohm a la carga resistiva de  $8 \Omega$ :

$$I_L = -\frac{24}{8} \text{ A}$$

$$I_L = 3 \text{ A}$$

- b) La potencia consumida por la carga resistiva es:

$$P_L = I_L^2 R_L$$

$$P_L = (3)^2 8$$

$$P_L = 72 \text{ W}$$

c) Aplicando la ley de corrientes al nodo superior del puerto de entrada obtenemos:

$$I_1 = \frac{3}{4} V_1 - \frac{1}{2} V_2$$

sustituyendo los valores respectivos de  $V_1$  y  $V_2$  determinar  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{3}{4} (40) - \frac{1}{2} (-24)$$

$$I_1 = 42 \text{ A}$$

#### 10.4 PARAMETROS HIBRIDOS

Los parámetros híbridos son generalmente utilizados en circuitos electrónicos porque son fáciles de medir. El modelo de bipuerto con parámetros híbridos se muestra en la figura 10.20

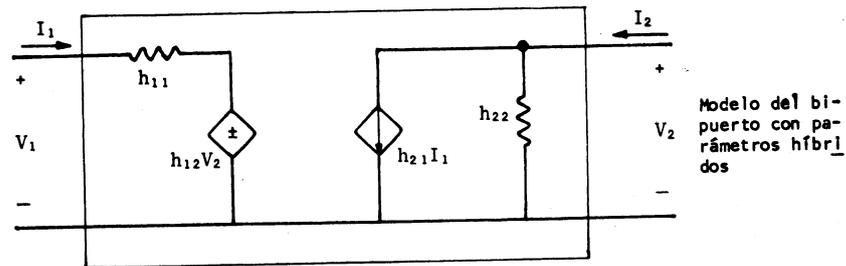


Figura 10.20 Modelo de bipuerto en términos de los parámetros híbridos

Observe que este modelo incluye una fuente de voltaje controlada por voltaje y una fuente de corriente controlada por corriente.

La ecuación de malla para el puerto de entrada es:

$$V_1 - h_{12} V_2 = h_{11} I_1 \quad (10.19)$$

La ecuación de nodo para el puerto de salida es:

$$I_2 - h_{21} I_1 = h_{22} V_2 \quad (10.20)$$

Despejando las variables  $V_1$  e  $I_2$ , respectivamente en las ecuaciones (10.19) y (10.20) tenemos:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned} \quad (10.21)$$

Ecuaciones del bipuerto en términos de parámetros híbridos

Las ecuaciones (10.21) expresan a  $V_1$  e  $I_2$ , variables dependientes, en términos de  $I_1$  y  $V_2$ , variables independientes.

Los parámetros híbridos pueden determinarse experimentalmente midiendo las corrientes y voltajes, en pruebas de cortocircuito y circuito abierto, en el bipuerto general de la figura 10.1.

Consecuentemente, si conectamos una fuente de corriente  $I_1$  en el puerto de entrada y al puerto de salida lo ponemos en cortocircuito (figura 10.21), el voltaje  $V_2$  es igual a cero y las ecuaciones (10.21) se reducen a:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 \\ I_2 &= h_{21} I_1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right| V_2 = 0 \quad (10.22)$$

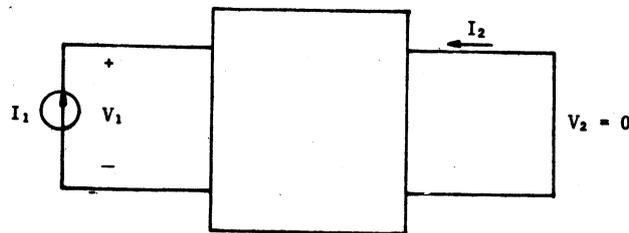


Figura 10.21 Conexiones para definir los parámetros  $h_{11}$  y  $h_{21}$

Conectando una fuente de voltaje  $V_2$  al puerto de salida y dejando en circuito abierto al puerto de entrada (figura 10.22), las ecuaciones (10.22) toman la forma:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{22} V_2 \quad \Big|_{I_1 = 0} \end{aligned} \quad (10.23)$$

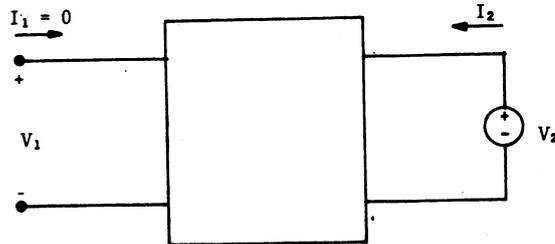


Figura 10.22 Conexiones para determinar  $h_{12}$  y  $h_{22}$

Despejando los respectivos parámetros "h" en las ecuaciones (10.22) y (10.23) obtenemos:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{V_1}{I_1} \quad \Big|_{V_2 = 0} & h_{12} &= \frac{V_1}{V_2} \quad \Big|_{I_1 = 0} \\ h_{21} &= \frac{I_2}{I_1} \quad \Big|_{V_2 = 0} & h_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \quad \Big|_{I_1 = 0} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Expresiones para el cálculo de los parámetros de impedancia

Como en los parámetros "h" se incluyen unos adimensionales, otros de impedancia y de admitancia, se les llama *parámetros híbridos*. Los nombres específicos para ellos son los siguientes:

Nomenclatura e interpretación de los parámetros híbridos

- $h_{11}$  : impedancia de entrada a cortocircuito,
- $h_{21}$  : ganancia directa de corriente a cortocircuito,
- $h_{12}$  : ganancia inversa de voltaje a circuito abierto,
- $h_{22}$  : admitancia de salida a circuito abierto.

Las ecuaciones (10.21) pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

donde la matriz  $H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$  (10.26) Matriz de parámetros híbridos inversa

se denomina *matriz de parámetros híbridos*.

La condición para que el bipuerto sea recíproco es que:

$$h_{21} = -h_{12} \quad (10.27)$$

#### Ejemplo 10.5

Para el circuito de dos puertos mostrado en la figura 10.23:

- Determine los parámetros híbridos,
- establezca las ecuaciones descriptivas del bipuerto en términos de los parámetros híbridos.

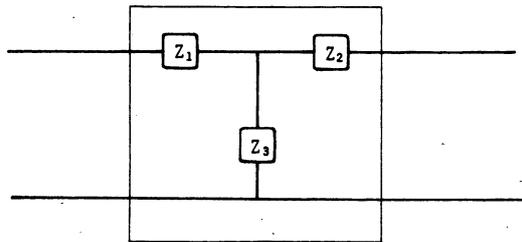


Figura 10.23

#### Solución

- Conectando una fuente de corriente  $I_1$  en el bipuerto de entrada y dejando en cortocircuito al puerto de salida como se muestra en la figura 10.24, obtenemos la relación:

$$V_1 = \left( \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + Z_1 \right) I_1$$

de donde:

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2=0} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + Z_1$$

De la misma figura 10.24 obtenemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{Z_2} V \\ &= -\frac{1}{Z_2} \frac{I_1}{\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_2}} \end{aligned}$$

$$I_2 = -\frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} I_1$$

de donde:

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2=0} = -\frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

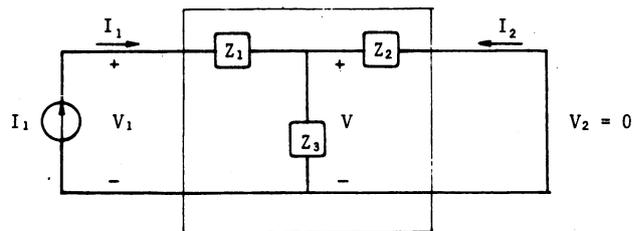


Figura 10.24

Si conectamos una fuente de voltaje  $V_2$  a las terminales de salida y dejamos en circuito abierto a las terminales de entrada como se muestra en la figura 10.25, obtenemos las relaciones:

$$V_2 = (Z_2 + Z_3) I_2 \quad (a)$$

$$V_1 = Z_3 I_2 \quad (b)$$

Dividiendo (b) entre (a) nos da:

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

De la ecuación (a) se obtiene el parámetro:

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{Z_2 + Z_3} \text{ u}$$

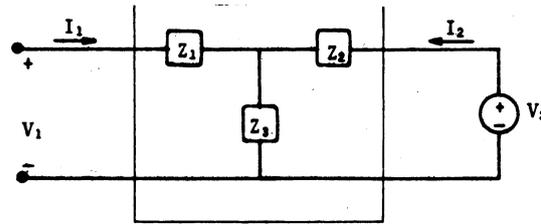


Figura 10.25

b) Las ecuaciones descriptivas del bipuerto son:

$$V_1 = \left( \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + Z_1 \right) I_1 + \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} V_2$$

$$I_2 = - \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} I_1 + \frac{1}{Z_2 + Z_3} V_2$$

El inverso de la matriz H define otro conjunto de parámetros híbridos, en los que las variables independientes son  $V_1$  e  $I_2$ , y las dependientes son  $I_1$  y  $V_2$ . Esto es:

$$H^{-1} = G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (10.28) \quad \text{Matriz de parámetros híbridos Inversa}$$

La ecuación matricial que caracteriza al bipuerto, usando este conjunto de parámetros es:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (10.29) \quad \text{Ecuación matricial del bipuerto en términos de la matriz híbrida Inversa}$$

### 10.5 PARAMETROS DE TRANSMISION

En la obtención de los parámetros de transmisión considere a  $V_1$  e  $I_1$  como variables dependientes y a  $V_2$  y  $-I_2$  como variables independientes.

La razón por la cual tomaremos como variable independiente a  $-I_2$  en vez de  $I_2$ , es que el uso más importante de este conjunto de parámetros está en el estudio de bipuertos conectados en cascada (vea la figura 10.26)

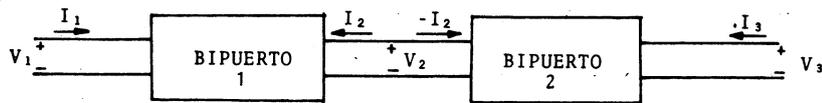


Figura 10.26 Bipuertos conectados en cascada

Como se ve en la figura 10.26, al adoptar como variable de salida del bipuerto 1 a la corriente  $-I_2$ , se tiene la ventaja que esta corriente es la misma que entra al bipuerto 2.

Con base en lo anterior, los sentidos de referencia que adoptaremos se muestran en la figura 10.27.

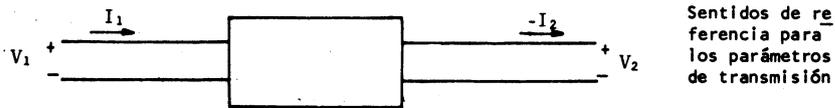


Figura 10.27 Bipuerto para obtener los parámetros de transmisión

Las ecuaciones que describen al bipuerto de la figura 10.27 son:

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

Ecuaciones del bipuerto en términos de los parámetros de transmisión  
(10.30)

Cada uno de los coeficientes de  $V_2$  y  $-I_2$  en las ecuaciones (10.30) puede determinarse experimentalmente midiendo los voltajes y corrientes, en pruebas de circuito abierto y cortocircuito, en los dos pares de terminales del bipuerto general de la figura 10.27.

Así, conectando una fuente de voltaje  $V_1$  al puerto de entrada y dejando el puerto de salida en circuito abierto (figura 10.28), obtenemos el parámetro:

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2 = 0} \quad (10.31)$$

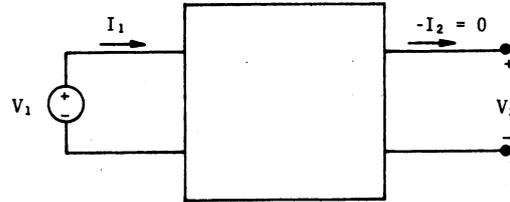


Figura 10.28 Conexiones para determinar el parámetro A

Conectando una fuente de corriente  $I_1$  al puerto de entrada y dejando en circuito abierto al puerto de salida como se muestra en la figura 10.29, obtenemos:

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2 = 0} \quad (10.32)$$

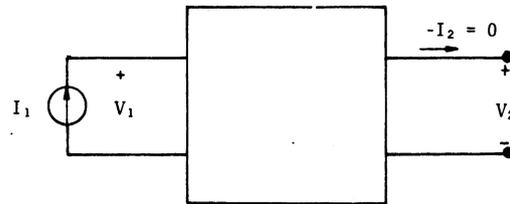


Figura 10.29 Conexión para determinar el parámetro C

Conectando una fuente de voltaje  $V_1$  al puerto de entrada y poniendo en cortocircuito el puerto de salida como se muestra en la figura 10.30, obtenemos el parámetro:

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2 = 0} \quad (10.33)$$

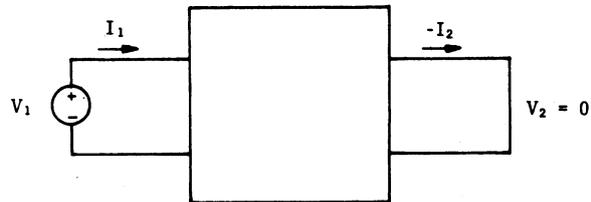


Figura 10.30 Conexiones para determinar el parámetro B

Si conectamos una fuente de corriente  $I_1$  al puerto de entrada y ponemos en cortocircuito el par de terminales de salida (figura 10.31), determinaremos el parámetro:

$$D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2 = 0} \quad (10.34)$$

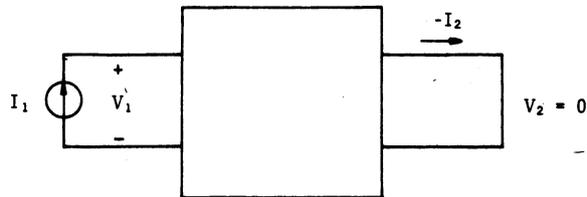


Figura 10.31 Conexiones para determinar el parámetro D

En resumen, las expresiones para el cálculo de los parámetros de transmisión son:

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2 = 0} \quad (10.31)$$

Expresiones para el cálculo de los parámetros de transmisión

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2 = 0} \quad (10.32)$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2 = 0} \quad (10.33)$$

$$D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2 = 0} \quad (10.34)$$

Los siguientes nombres y símbolos se utilizan para describir a los parámetros de transmisión de las ecuaciones (10.31) a la (10.34):

- A: ganancia inversa de voltaje a circuito abierto.
- B: impedancia de transferencia a cortocircuito.
- C: admitancia de transferencia a circuito abierto.
- D: ganancia inversa de corriente a cortocircuito.

Nomenclatura e interpretación de los parámetros de transmisión

Las ecuaciones (10.30) pueden escribirse en la forma:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (10.36)$$

Matriz de parámetros de transmisión

se denomina *matriz de parámetros de transmisión*.

En este caso la condición para que el bipuerto sea recíproco es que el determinante de la matriz T sea unitario, es decir:

$$\Delta_T = AD - CB = 1 \quad (10.37)$$

## Ejemplo 10.6

Para el circuito de dos puertos representado en la figura 10.32:

- Determine los parámetros de transmisión,
- establezca las ecuaciones que describen al bipuerto en términos de los parámetros de transmisión.

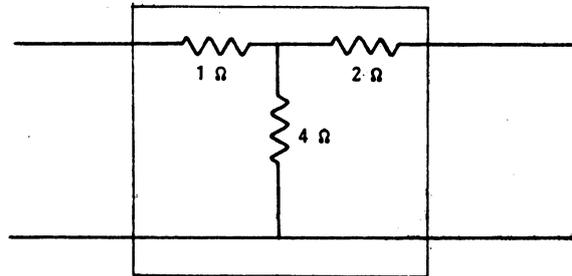


Figura 10.32

## Solución

- De la figura 10.33 obtenemos la relación:

$$V_2 = \frac{4}{4+1} V_1$$

$$V_2 = \frac{4}{5} V_1$$

de la cual:

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{5}{4}$$

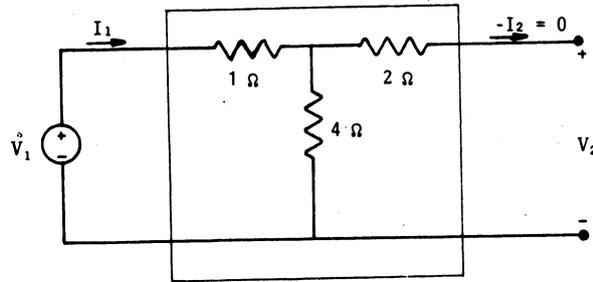


Figura 10.33

De la figura 10.34 se obtiene la relación:

$$V_2 = 4 I_1$$

que nos da el parámetro:

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2 = 0} = \frac{1}{4} \text{ u}$$

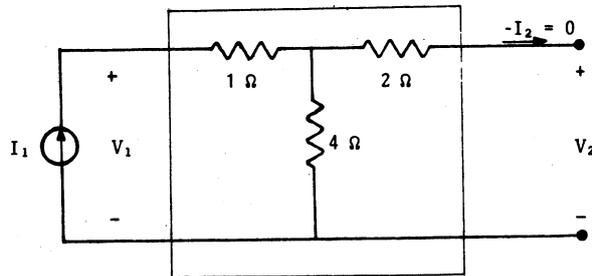


Figura 10.34

A partir de la figura 10.35, por división de la corriente  $I_1$  en las resistencias de 2 y 4  $\Omega$  se obtienen las expresiones:

$$V_1 = \left( 1 + \frac{2 \times 4}{2 + 4} \right) I_1$$

$$V_1 = \frac{7}{3} I_1 \quad (a)$$

$$-I_2 = \frac{4}{4+2}(I_1)$$

$$-I_2 = \frac{2}{3} I_1$$

o

$$I_1 = \frac{3}{2} (-I_2) \quad (b)$$

sustituyendo (b) en (a) se obtiene:

$$V_1 = \frac{7}{3} \left( \frac{3}{2} \right) (-I_2)$$

$$V_1 = \frac{7}{2} (-I_2)_2$$

de la cual:

$$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} = \frac{7}{2} \Omega$$

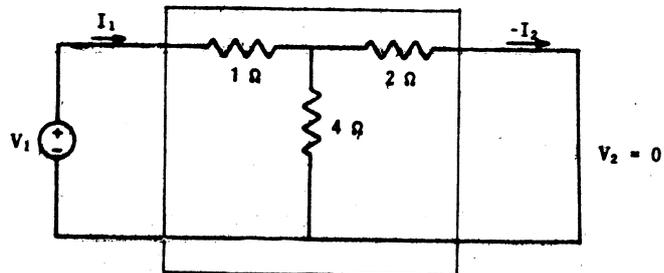


Figura 10.35

De la expresión (b) obtenemos:

$$D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} = \frac{3}{2}$$

b) Las ecuaciones que describen al bipuerto son:

$$V_1 = \frac{5}{4} V_2 + \frac{7}{2} (-I_2)$$

$$I_1 = \frac{1}{4} V_2 + \frac{3}{2} (-I_2)$$

6

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Si ahora, refiriéndonos nuevamente al bipuerto de la figura 10.27, tomamos como variables independientes las del puerto de entrada, esto es  $V_1$  e  $I_1$ , y como variables dependientes las del puerto de salida, o sea  $V_2$  y  $-I_2$ , podremos definir otro conjunto de parámetros llamados de *transmisión inversa*.

La ecuación matricial del bipuerto, en este caso, queda:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (10.38)$$

Ecuación matricial del bipuerto en términos de los parámetros de transmisión inversa

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

donde  $T'$  se obtiene invirtiendo la matriz de transmisión, es decir:

$$T' = T^{-1}$$

Matriz de parámetros de transmisión inversa

A la matriz  $T'$  se le conoce como *matriz de parámetros de transmisión inversa*.

## 10.6 RELACION ENTRE PARAMETROS

Los parámetros de impedancia, de inductancia, híbridos y de transmisión pueden expresarse unos en función de otros. Lo cual se logra relacionando sus respectivas ecuaciones que los definen.

A continuación, expresaremos los parámetros de admitancia en función de los parámetros de impedancia. Para este propósito escribimos nuevamente las ecuaciones que definen a los parámetros de impedancia:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (10.40)$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \quad (10.41)$$

Resolviendo para  $I_1$  el sistema de ecuaciones (10.40) y (10.41), tenemos:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} \\ V_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{Z_{22}}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} V_1 + \frac{-Z_{12}}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} V_2$$

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} V_1 + \frac{-Z_{12}}{\Delta_Z} V_2 \quad (10.42)$$

Por otra parte, las ecuaciones que definen a los parámetros de impedancia son:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \quad (10.43)$$

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \quad (10.44)$$

Entonces, igualando la ecuación (10.42) con la ecuación (10.43) obtenemos:

$$y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta_Z} \quad (10.45)$$

$$y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta_Z} \quad (10.46)$$

Resolviendo para  $I_2$  en el sistema de ecuaciones (10.40) y (10.41), como se hizo para  $I_1$ , e igualando la expresión obtenida para  $I_2$  con la ecuación (10.44) obtenemos:<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Para obtener los parámetros "y" mediante las expresiones (10.45) a la (10.48) es necesario que  $\Delta_Z$  sea diferente de cero.

$$y_{21} = - \frac{Z_{21}}{\Delta_Z} \quad (10.47)$$

$$y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta_Z} \quad (10.48)$$

De un modo similar se pueden expresar los parámetros "Z" en función de los parámetros "y", o en función de otros parámetros. Es posible obtener una relación entre los diferentes parámetros que hemos considerado. En la tabla 10.1, presentamos una colección de las equivalencias entre los parámetros de impedancia, de admitancia, híbridos y de transmisión. Los grupos (matrices) de parámetros localizados en un mismo renglón son iguales entre sí.

	Z	Y	T	T'	H	G
Z	$Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{Y_{22}}{\Delta_y} \quad \frac{-Y_{12}}{\Delta_y}$ $\frac{-Y_{21}}{\Delta_y} \quad \frac{Y_{11}}{\Delta_y}$	$\frac{A}{C} \quad \frac{\Delta_T}{C}$ $\frac{1}{C} \quad \frac{D}{C}$	$\frac{-D'}{C'} \quad \frac{-1}{C'}$ $\frac{-\Delta_{T'}}{C'} \quad \frac{-A'}{C'}$	$\frac{\Delta_H}{h_{22}} \quad \frac{h_{12}}{h_{22}}$ $\frac{h_{21}}{h_{22}} \quad \frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}} \quad \frac{-g_{12}}{g_{11}}$ $\frac{g_{21}}{g_{11}} \quad \frac{\Delta_G}{g_{11}}$
Y	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z} \quad \frac{-Z_{12}}{\Delta_Z}$ $\frac{-Z_{21}}{\Delta_Z} \quad \frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$y_{11} \quad y_{12}$ $y_{21} \quad y_{22}$	$\frac{D}{B} \quad \frac{-\Delta_T}{B}$ $\frac{-1}{B} \quad \frac{A}{B}$	$\frac{-A'}{B'} \quad \frac{1}{B'}$ $\frac{\Delta_{T'}}{B'} \quad \frac{-D'}{B'}$	$\frac{1}{h_{11}} \quad \frac{-h_{12}}{h_{11}}$ $\frac{h_{21}}{h_{11}} \quad \frac{\Delta_H}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_G}{g_{22}} \quad \frac{g_{12}}{g_{22}}$ $\frac{-g_{21}}{g_{22}} \quad \frac{1}{g_{22}}$
T	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{\Delta_Z}{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{-1}{Y_{21}}$ $\frac{-\Delta_y}{Y_{21}} \quad \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$A \quad B$ $C \quad D$	$\frac{D'}{\Delta_{T'}} \quad \frac{-B'}{\Delta_{T'}}$ $\frac{-C'}{\Delta_{T'}} \quad \frac{A'}{\Delta_{T'}}$	$\frac{-\Delta_H}{h_{21}} \quad \frac{-h_{11}}{h_{21}}$ $\frac{h_{22}}{h_{21}} \quad \frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}} \quad \frac{g_{22}}{g_{21}}$ $\frac{g_{11}}{g_{21}} \quad \frac{\Delta_G}{g_{21}}$
T'	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}} \quad \frac{-\Delta_Z}{Z_{12}}$ $\frac{-1}{Z_{12}} \quad \frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{12}} \quad \frac{1}{Y_{12}}$ $\frac{\Delta_y}{Y_{12}} \quad \frac{-Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T} \quad \frac{-B}{\Delta_T}$ $\frac{-C}{\Delta_T} \quad \frac{A}{\Delta_T}$	$A' \quad B'$ $C' \quad D'$	$\frac{1}{h_{12}} \quad \frac{-h_{11}}{h_{12}}$ $\frac{-h_{22}}{h_{12}} \quad \frac{\Delta_H}{h_{12}}$	$\frac{-\Delta_G}{g_{12}} \quad \frac{g_{22}}{g_{12}}$ $\frac{g_{11}}{g_{12}} \quad \frac{-1}{g_{12}}$
H	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $\frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{\Delta_y}{Y_{11}}$	$\frac{B}{D} \quad \frac{\Delta_T}{D}$ $\frac{-1}{D} \quad \frac{C}{D}$	$\frac{-B'}{A'} \quad \frac{1}{A'}$ $\frac{-\Delta_{T'}}{A'} \quad \frac{-C'}{A'}$	$h_{11} \quad h_{12}$ $h_{21} \quad h_{22}$	$\frac{g_{22}}{\Delta_G} \quad \frac{-g_{12}}{\Delta_G}$ $\frac{-g_{21}}{\Delta_G} \quad \frac{g_{11}}{\Delta_G}$
G	$\frac{1}{Z_{11}} \quad \frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}} \quad \frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{Y_{22}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ $\frac{-Y_{21}}{Y_{22}} \quad \frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{C}{A} \quad \frac{-\Delta_T}{A}$ $\frac{1}{A} \quad \frac{B}{A}$	$\frac{-C'}{D'} \quad \frac{-1}{D'}$ $\frac{\Delta_{T'}}{D'} \quad \frac{-B'}{D'}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_H} \quad \frac{-h_{12}}{\Delta_H}$ $\frac{-h_{21}}{\Delta_H} \quad \frac{h_{11}}{\Delta_H}$	$g_{11} \quad g_{12}$ $g_{21} \quad g_{22}$

Tabla 10.1 Relaciones entre las matrices de bipuertos

## Ejemplo 10.7

Dada la siguiente matriz de parámetros de impedancia:

$$Z = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Determine la matriz de parámetros de admitancia Y.
- Determine la matriz de parámetros híbridos H.
- Determine la matriz de parámetros de transmisión T.

## Solución

- a) El determinante de la matriz Z es:

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta Z = 12 - 4$$

$$\Delta Z = 8$$

De acuerdo al segundo renglón de la tabla 10.1, la matriz de parámetros "y" está dada por:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

- b) Según el quinto renglón de la tabla 10.1, la matriz de parámetros "h" se obtiene a partir de:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{4} & \frac{2}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

- c) Del tercer renglón de la tabla 10.1, obtenemos la matriz de parámetros de transmisión:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{8}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix}$$

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. A continuación aparece una serie de afirmaciones. Marque con una cruz los paréntesis colocados a la derecha si tales afirmaciones son ciertas o falsas, según sea el caso.

- |  | cierto | falso |
|--|--------|-------|
| a) Un puerto es un par de terminales a las cuales se les puede conectar una fuente o una carga   | ( )    | ( )   |
| b) Cuando por una terminal entra una corriente y por la otra sale esa misma corriente, estas terminales constituyen un puerto.                               | ( )    | ( )   |
| c) Dos voltajes y dos corrientes en los dos pares de terminales de la red son las cuatro variables importantes de un bipuerto                                | ( )    | ( )   |
| d) Por convención se ha establecido que en un bipuerto, las corrientes salen por las terminales superiores y entran por las terminales inferiores de la red. | ( )    | ( )   |
| e) Los bipuertos contienen en su interior fuentes independientes de voltaje.   | ( )    | ( )   |
| f) Los bipuertos contienen en su interior fuentes dependientes de corriente.   | ( )    | ( )   |
| g) Los parámetros de un bipuerto general pueden determinarse haciendo pruebas de cortocircuito en los dos pares de terminales.                               | ( )    | ( )   |
| h) Los parámetros de un bipuerto se relacionan entre sí a través de las ecuaciones del bipuerto.   | ( )    | ( )   |

II. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Para el bipuerto representado en la figura 10.36:

- Determine los parámetros de impedancia,
- establezca las ecuaciones que describen al bipuerto,
- dibuje el modelo equivalente en términos de los parámetros de impedancia,
- determine si el bipuerto es recíproco.

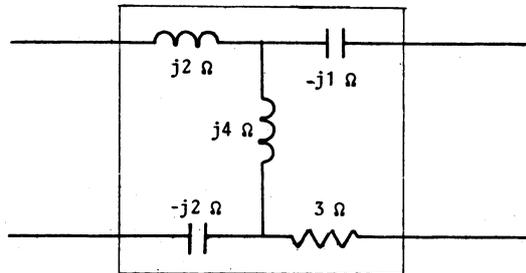


Figura 10.36

a)

$$Z_{11} = \text{_____ } \Omega$$

$$Z_{12} = \text{_____ } \Omega$$

$$Z_{21} = \text{_____ } \Omega$$

$$Z_{22} = \text{_____ } \Omega$$

b)

c)

d)

2. Dadas las siguientes corrientes y voltajes determinados en pruebas de cortocircuito para un bipuerto.

$$\begin{array}{l|l} I_1 = 25 \text{ A} & I_1 = 40 \text{ A} \\ I_2 = 10 \text{ A} & I_2 = 20 \text{ A} \\ V_1 = 50 \text{ V} & V_2 = 30 \text{ V} \end{array} \quad \begin{array}{l} V_2 = 0 \\ V_1 = 0 \end{array}$$

- a) Determine los parámetros de admitancia,  
 b) establezca las ecuaciones del bipuerto en términos de los parámetros de admitancia,  
 c) dibuje el modelo equivalente del bipuerto en términos de los parámetros de admitancia.

a)

$$\begin{array}{l} Y_{11} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ S} \\ Y_{12} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ S} \\ Y_{21} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ S} \\ Y_{22} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ S} \end{array}$$

b)

c)

3. Considerando el circuito de dos puertos de la figura 10.37:

- determine los parámetros híbridos,
- establezca las ecuaciones del bipuerto en términos de los parámetros híbridos,
- dibuje el bipuerto equivalente en términos de los parámetros híbridos,
- determine si el bipuerto es recíproco.

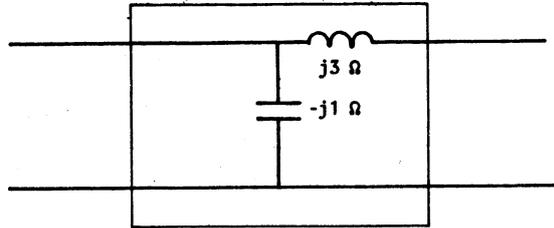


Figura 10.37

a)

$$h_{11} = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$$

$$h_{12} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h_{21} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h_{22} = \underline{\hspace{2cm}} \text{U}$$

b)

c)

d)

4. Para el bipuerto de la figura 10.38:

- a) Determine los parámetros de transmisión,  
 b) establezca las ecuaciones que describen al bipuerto en términos de los parámetros de transmisión.

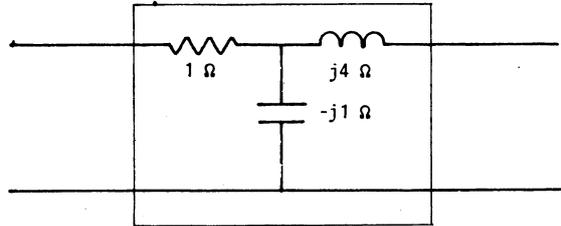


Figura 10.38

a)

$$\begin{aligned}
 A &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 B &= \underline{\hspace{2cm}} \Omega \\
 C &= \underline{\hspace{2cm}} \mathcal{U} \\
 D &= \underline{\hspace{2cm}}
 \end{aligned}$$

b)

5. Dada la siguiente matriz de parámetros de admitancia:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

determine:

- a) La matriz de parámetros de impedancia,
- b) la matriz de parámetros de transmisión,
- c) la matriz de parámetros híbridos.

a)

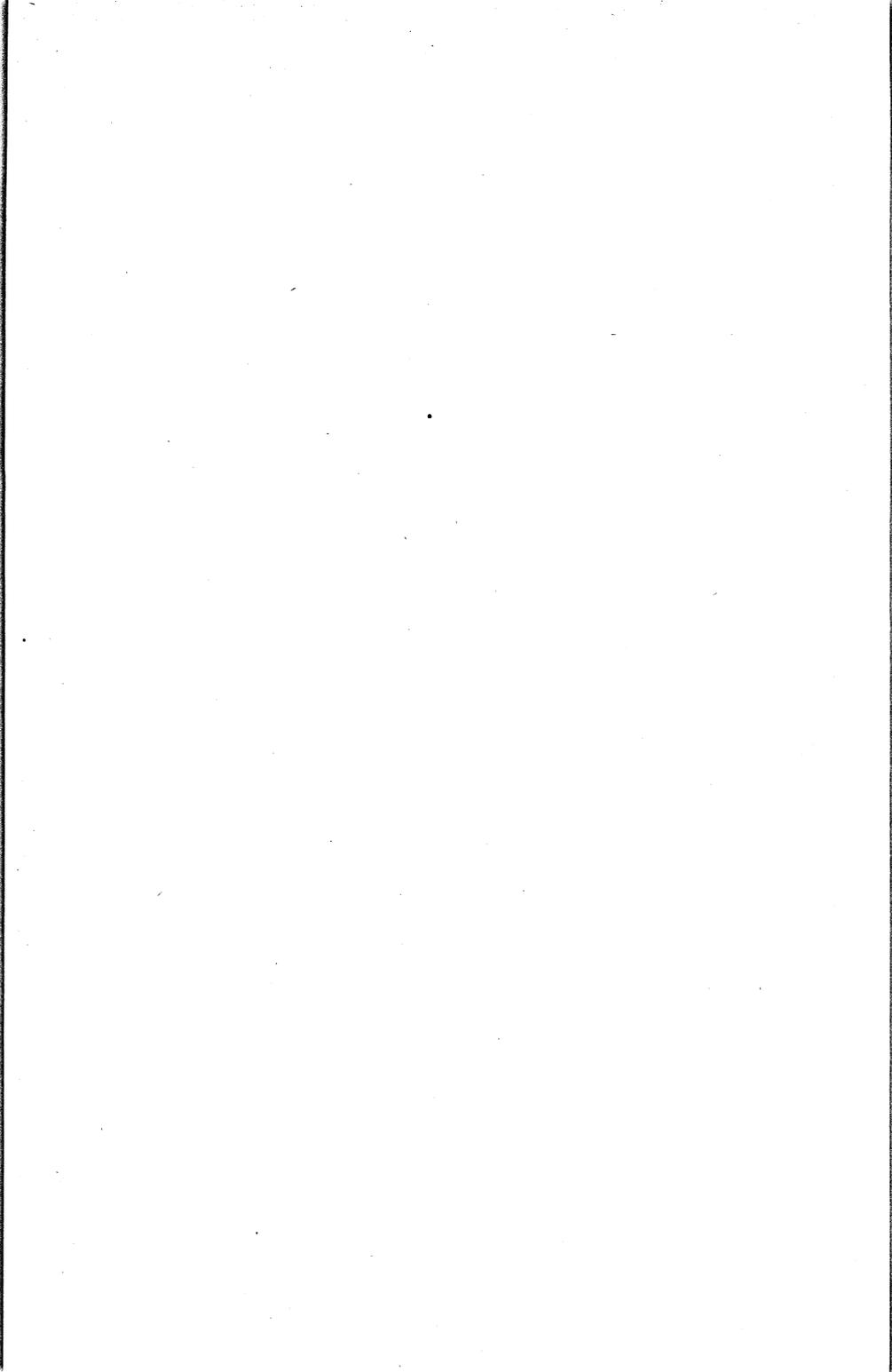
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} =$$

b)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} =$$

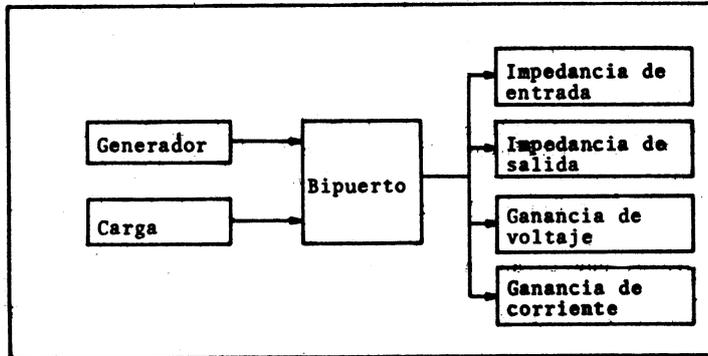
c)

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} =$$



MODULO 11: BIPUERTO CONECTADO A UN GENERADOR Y A UNA CARGA

CUADRO SINOPTICO



OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar este módulo, el alumno:

1. Determinará las impedancias de entrada y de salida de un bipuerto, en términos de los parámetros de impedancia o híbridos.
2. Determinará las ganancias de voltaje y de corriente de un bipuerto, en términos de los parámetros de impedancia o híbridos.

### 11.1 IMPEDANCIA DE ENTRADA A PARTIR DEL MODELO DE PARÁMETROS DE IMPEDANCIA

La impedancia de entrada de un bipuerto conectado a una fuente de excitación en el puerto de entrada y a una impedancia de carga en el puerto de salida, puede determinarse en términos de la impedancia de carga y de los parámetros del bipuerto.

Para obtener la expresión de la impedancia de entrada se escriben las ecuaciones para cada puerto y después de combinarlas entre sí se sustituyen en la siguiente ecuación, que define a la impedancia de entrada:

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} \quad (11.1)$$

De acuerdo al modelo equivalente mostrado en la figura 11.1, la ecuación del puerto de entrada es:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (11.2)$$

Para el puerto de salida obtenemos las ecuaciones:

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \quad (11.3)$$

y

$$V_2 = -Z_L I_2 \quad (11.4)$$

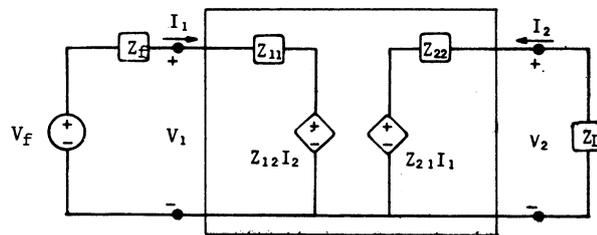


Figura 11.1 Bipuerto en términos de parámetros "Z". con fuente de excitación e impedancia de carga

Igualando la ecuación (11.3), con la ecuación (11.4), obtenemos:

$$Z_{21} I_1 + (Z_{22} + Z_L) I_2 = 0$$

$$I_2 = - \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} I_1 \quad (11.5)$$

sustituyendo la ecuación (11.5) en la ecuación (11.2), se obtiene la relación:

$$V_1 = \left( Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \right) I_1 \quad (11.6)$$

Comparando la ecuación (11.6), con la ecuación (11.1) obtenemos la expresión:

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \quad (11.7)$$

Impedancia de entrada en términos de parámetros de impedancia

que es la impedancia de entrada de un bipuerto.

Como puede observarse en la ecuación (11.7), la impedancia de entrada del bipuerto depende de los parámetros de impedancia y de la impedancia de carga.

## 11.2 IMPEDANCIA DE SALIDA DEL MODELO DE PARAMETROS DE IMPEDANCIA

La impedancia de salida de un bipuerto se define como el cociente del voltaje de salida  $V_2$  entre la corriente de salida  $I_2$ , con el voltaje de la fuente puesto a cero; es decir:

$$Z_s = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_f = 0} \quad (11.8)$$

Para obtener la expresión de la impedancia de salida se escriben las ecuaciones para cada uno de los puertos, y después de hacer algunas combinaciones entre ellas se sustituyen en la ecuación (11.8) que define a la impedancia de salida.

De acuerdo a la figura 11.2, donde el voltaje de la fuente vale cero; pero el valor de la impedancia de la fuente se conserva, las ecuaciones para el puerto de entrada son:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (11.9)$$

y

$$V_1 = - Z_f I_1 \quad (11.10)$$

Igualando la ecuación (11.9) con la ecuación (11.10) tenemos:

$$(Z_{11} + Z_f)I_1 + Z_{12} I_2 = 0$$

$$I_1 = - \frac{Z_{12}}{Z_{11} + Z_f} I_2 \quad (11.11)$$

La ecuación para el puerto de salida es:

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \quad (11.12)$$

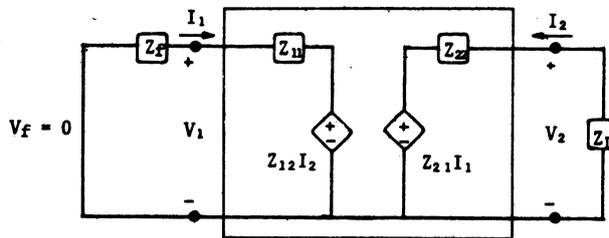


Figura 11.2 Modelo de parámetros Z con el voltaje de fuente  $V_f$  igual a cero.

sustituyendo la ecuación (11.11) en la ecuación (11.12) obtenemos:

$$V_2 = \left( Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_f} \right) I_2 \quad (11.13)$$

Relacionando la ecuación (11.8) con la ecuación (11.13) obtenemos la expresión:

$$Z_s = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_f = 0} = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_f} \quad (11.14)$$

Impedancia de salida en términos de parámetros de impedancia

que es la impedancia de salida del bipuerto.

Como puede observarse en la ecuación (11.14) la impedancia de salida del bipuerto depende tanto de los parámetros de impedancia como de la impedancia de la fuente de voltaje.

En el caso especial de que la impedancia de la fuente de voltaje valga cero, la ecuación (11.14) toma la forma:

$$Z_s = \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}{Z_{11}}$$

$$\boxed{Z_s = \frac{\Delta Z}{Z_{11}}} \quad \text{para} \quad Z_f = 0 \quad (11.15)$$

### 11.3 GANANCIA DE VOLTAJE Y DE CORRIENTE A PARTIR DEL MODELO DE PARAMETROS DE IMPEDANCIA

La ganancia de voltaje  $A_v$  se define como el cociente de  $V_2$  entre  $V_1$ ; es decir:

$$A_v = \frac{V_2}{V_1} \quad (11.16)$$

A continuación determinaremos la expresión de ganancia de voltaje para el bipuerto de la figura 11.1. Así, resolviendo para  $I_2$ , en las ecuaciones (11.2) y (11.3) obtenemos:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 \\ Z_{21} & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Z_{11} V_2 - Z_{21} V_1}{\Delta Z} \quad (11.17)$$

Por otra parte, de la ecuación (11.4) despejamos  $I_2$ :

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_L} \quad (11.18)$$

Igualando la ecuación (11.17) con la ecuación (11.18) obtenemos:

$$-\frac{V_2}{Z_L} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} V_2 - \frac{Z_{21}}{\Delta Z} V_1$$

$$\frac{Z_{21}}{\Delta Z} V_1 = \left( \frac{Z_{11}}{\Delta Z} + \frac{1}{Z_L} \right) V_2 \quad (11.19)$$

Comparando la ecuación (11.19) con la ecuación (11.16) obtenemos la expresión para la ganancia de voltaje:

$$A_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_{21} Z_L}{Z_{11} Z_L + \Delta_Z} \quad (11.20)$$

Ganancia de voltaje en términos de parámetros de impedancia

Obsérvese en la ecuación (11.20) que la ganancia de voltaje depende de la impedancia de carga  $Z_L$ , además de los parámetros, "Z".

La ganancia de corriente  $A_i$  se define como el cociente de  $I_2$  entre  $I_1$ ; esto es:

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} \quad (11.21)$$

Determinaremos ahora la ganancia de corriente para el bipuerto de la figura 11.1. Por lo tanto, comparando la ecuación (11.5) con la ecuación (11.21) obtenemos la expresión de ganancia de corriente del bipuerto:

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} = - \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \quad (11.22)$$

Ganancia de corriente en términos de parámetros de impedancia

Note en la ecuación (11.22) que la ganancia de corriente depende de la impedancia de carga  $Z_L$ .

#### Ejemplo 11.1

Para el bipuerto mostrado en la figura 11.3, determine, en términos de los parámetros de impedancia:

- La impedancia de entrada,
- la impedancia de salida,
- la ganancia de voltaje,
- la ganancia de corriente.

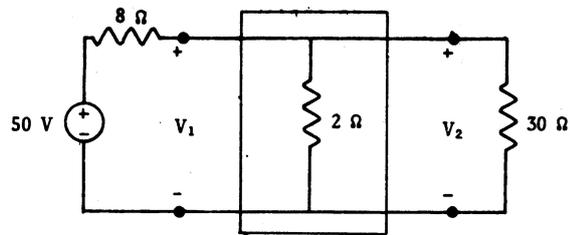


Figura 11.3

Solución

a) Los parámetros de impedancia del bipuerto son:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 2 \, \Omega \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = 2 \, \Omega$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 2 \, \Omega \quad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = 2 \, \Omega$$

en consecuencia la impedancia de entrada esta dada por:

$$Z_e = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

$$= 2 - \frac{2(2)}{2 + 30}$$

$$Z_e = 1.8 \, \Omega$$

b) La impedancia de salida es:

$$Z_s = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_f}$$

$$= 2 - \frac{2(2)}{2 + 8}$$

$$Z_s = 1.6 \, \Omega$$

- c) La ganancia de voltaje se obtiene de la siguiente manera:

$$A_v = \frac{Z_{21} Z_L}{Z_{11} Z_L + Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}$$

$$= \frac{2(30)}{2(30) + 2(2) - 2(2)}$$

$$A_v = 1$$

- d) La ganancia de corriente está dada por:

$$A_i = - \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$$

$$= - \frac{2}{2 + 30}$$

$$A_i = - 0.06$$

el signo negativo indica que una de las corrientes,  $I_1$  ó  $I_2$  circula en sentido opuesto al que se había establecido.

#### 11.4 IMPEDANCIA DE ENTRADA A PARTIR DEL MODELO DE PARÁMETROS HÍBRIDOS

Consideremos ahora al modelo de parámetros híbridos, conectados a una fuente de voltaje y a una impedancia de carga en los puertos de entrada y salida respectivamente representado en la figura 11.4. Para este modelo determinaremos a continuación la expresión de la impedancia de entrada.

La ecuación para el puerto de entrada es:

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \quad (11.23)$$

Para el puerto de salida se obtienen las ecuaciones:

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \quad (11.24)$$

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_L} \quad (11.25)$$

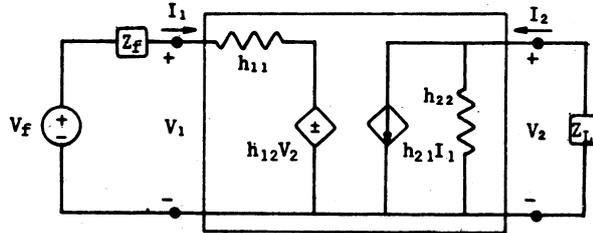


Figura 11.4 Modelo de parámetros híbridos conectado a una fuente de voltaje y a una impedancia de carga.

sustituyendo la ecuación (11.24) en la ecuación (11.25) obtenemos:

$$V_2 = -\frac{h_{21} Z_L}{h_{22} Z_L + 1} I_1 \quad (11.26)$$

relacionando la ecuación (11.26) con la ecuación (11.23) se obtiene la expresión:

$$V_1 = \left( h_{11} - \frac{h_{12} h_{21} Z_L}{h_{22} Z_L + 1} \right) I_1 \quad (11.27)$$

finalmente, de acuerdo con las ecuaciones (11.1) y (11.27) obtenemos la relación:

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = h_{11} - \frac{h_{12} h_{21} Z_L}{h_{22} Z_L + 1} \quad (11.28)$$

Impedancia de entrada en términos de parámetros híbridos

La ecuación (11.28) es la impedancia de entrada para el modelo de parámetros híbridos de la figura 11.4.

### 11.5 IMPEDANCIA DE SALIDA PARA EL MODELO DE PARAMETROS HIBRIDOS

Para determinar la impedancia de salida escribiremos las ecuaciones de los dos puertos del circuito equivalente de la figura 11.5, donde el voltaje de la fuente ha sido puesto a cero. Así, para el puerto de entrada se obtienen las ecuaciones:

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \quad (11.29)$$

y

$$V_1 = -Z_f I_1 \quad (11.30)$$

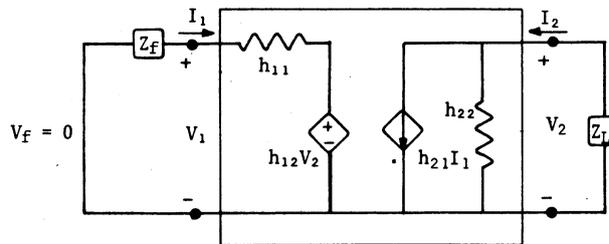


Figura 11.5 Modelo de parámetros híbridos con el voltaje  $V_f$  puesto a cero.

Relacionando las ecuaciones (11.29) y (11.30) obtenemos:

$$h_{11} I_1 + h_{12} V_2 = -Z_f I_1$$

o

$$I_1 = -\frac{h_{12}}{h_{11} + Z_f} V_2 \quad (11.31)$$

La ecuación para el puerto de salida es:

$$I_2 - h_{21} I_1 = h_{22} V_2 \quad (11.32)$$

sustituyendo la ecuación (11.31) en la ecuación (11.32), se obtiene la expresión:

$$V_2 \left( h_{22} - \frac{h_{12} h_{21}}{h_{11} + Z_f} \right) = I_2 \quad (11.33)$$

Así, de la ecuación (11.8) y la ecuación (11.33) obtenemos las siguientes expresiones, para la impedancia de salida del modelo de parámetros híbridos:

$$Z_s = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{V_f = 0} = \frac{1}{h_{22} - \frac{h_{12} h_{21}}{h_{11} + Z_f}} \quad (11.34)$$

$$Z_s = \frac{h_{11} Z_f}{h_{11} h_{22} + h_{22} Z_f - h_{12} h_{21}} \quad (11.35)$$

Impedancia de salida en términos de parámetros híbridos

Obsérvese en estas expresiones, que la impedancia de salida del modelo de parámetros híbridos, depende de la impedancia de la fuente de excitación.

Hasta aquí hemos desarrollado expresiones para las impedancias de entrada y salida de un bipuerto. En caso de requerirse expresiones para admitancias, el desarrollo para su obtención es muy similar al usado para obtener las de impedancia. Recuerde que la admitancia es el inverso de la impedancia; esto es, la admitancia de entrada queda determinada por la expresión:

$$Y_e = \frac{I_1}{V_1} \quad (11.36)$$

y la admitancia de salida por:

$$Y_s = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_f = 0} \quad (11.37)$$

#### 11.6 GANANCIA DE VOLTAJE Y DE CORRIENTE PARA EL MODELO DE PARAMETROS HIBRIDOS

La ganancia de voltaje  $A_v$  para el bipuerto de la figura 11.4 se obtiene dividiendo la ecuación (11.26) entre la ecuación (11.27). Así pues, tenemos la relación:

$$A_v = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-\frac{h_{21} Z_L}{h_{22} Z_L + 1} I_1}{\left(h_{11} - \frac{h_{12} h_{21} Z_L}{h_{22} Z_L + 1}\right) I_1}$$

$$A_v = \frac{-h_{21} Z_L}{h_{11}(h_{22} Z_L + 1) - h_{12} h_{21} Z_L} \quad (11.38)$$

Ganancia de voltaje en términos de parámetros híbridos

Es importante observar en la ecuación (11.36) que la ganancia de voltaje depende también de la impedancia de carga  $Z_L$ .

La ganancia de corriente para el modelo de parámetros híbridos de la figura 11.4 se obtiene relacionando las ecuaciones (11.25) y (11.26). Así, obtenemos la expresión:

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{h_{22} Z_L + 1} \quad (11.39)$$

Ganancia de corriente en términos de parámetros híbridos

que es la ganancia de corriente.

Nótese en la ecuación (11.39) que la ganancia de corriente depende tanto de los parámetros híbridos como de la impedancia de la carga conectada en el puerto de salida.

### Ejemplo 11.2

Considere el bipuerto de la figura 11.6 y determine:

- La impedancia de entrada,
- la impedancia de salida,
- la ganancia de voltaje,
- la ganancia de corriente.

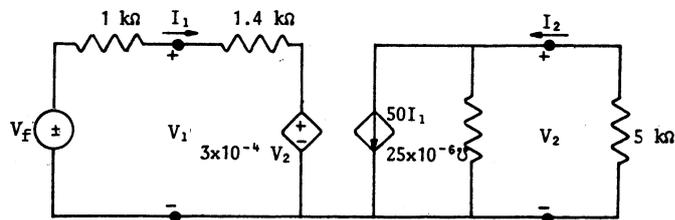


Figura 11.6

### Solución

- Para el puerto de entrada se obtiene la ecuación:

$$V_1 = 1400 I_1 + 3 \times 10^{-4} V_2 \quad (a)$$

para el puerto de salida se obtienen las ecuaciones:

$$I_2 = 50 I_1 + 25 \times 10^{-6} V_2 \quad (b)$$

$$I_2 = - \frac{V_2}{5000} \quad (c)$$

igualando las ecuaciones (b) y (c) obtenemos:

$$V_2 = - \frac{50}{25 \times 10^{-6} + \frac{1}{5000}} I_1$$

o

$$V_2 = - 2.2 \times 10^5 I_1 \quad (d)$$

sustituyendo la ecuación (d) en la ecuación (a) obtenemos:

$$V_1 = 1334 I_1 \quad (e)$$

de donde:

$$Z_e = \frac{V_1}{I_1} = 1334 \Omega$$

b) Para el puerto de entrada se obtiene la ecuación:

$$V_1 = - 1000 I_1 \quad (f)$$

igualando las ecuaciones (a) y (f) obtenemos:

$$I_1 = - 1.25 \times 10^{-7} V_2 \quad (g)$$

luego, sustituyendo la ecuación (g) en la ecuación (b) se obtiene:

$$I_2 = 1.87 \times 10^{-5} V_2$$

de donde:

$$Z_s = \frac{V_2}{I_2} = 53.5 \text{ K}\Omega$$

c) Dividiendo la ecuación (d) entre la ecuación (e), obtenemos:

$$A_v = \frac{V_2}{V_1} = - 164.9$$

el signo negativo indica que uno de los voltajes,  $V_1$  ó  $V_2$ , tiene polaridad contraria a la supuesta (en este caso  $V_2$  es negativo).

d) Dividiendo la ecuación (c) entre la ecuación (d), se obtiene:

$$A_i = \frac{I_2}{I_1} = 44$$

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Considerando el bipuerto de la figura 11.7, determine:

- La impedancia de entrada,
- la impedancia de salida,
- la ganancia de voltaje,
- la ganancia de corriente.

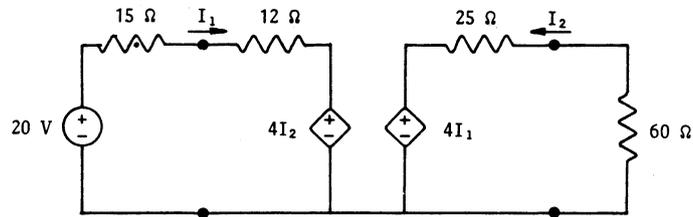


Figura 11.7

- $Z_e = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$
- $Z_s = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$
- $A_v = \underline{\hspace{2cm}}$
- $A_i = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Una fuente de voltaje de 5 mV y una carga resistiva de 8 k $\Omega$  se conectan respectivamente a los puertos de entrada y salida de un bipuerto cuyos parámetros híbridos son:

$$\begin{aligned} h_{11} &= 200 \text{ k}\Omega & h_{12} &= 0.003 \\ h_{21} &= 35 & h_{22} &= 20 \times 10^{-7} \text{ u} \end{aligned}$$

determine:

- La impedancia de entrada,
- la impedancia de salida,
- la ganancia de voltaje,
- la ganancia de corriente.

determine:

- $Z_e = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$
- $Z_s = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$
- $A_v = \underline{\hspace{2cm}}$
- $A_i = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Dado el bipuerto de la figura 11.8, determine:

- La impedancia de entrada,
- la impedancia de salida,
- la ganancia de voltaje,
- la ganancia de corriente.

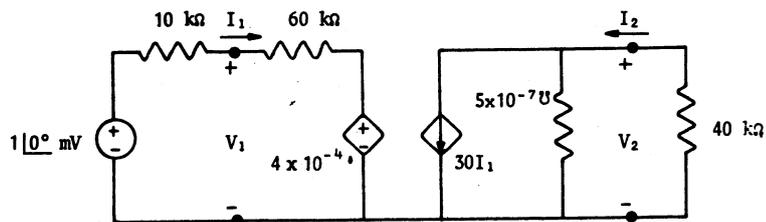


Figura 11.8

- $Z_e = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$
- $Z_s = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$
- $A_v = \underline{\hspace{2cm}}$
- $A_i = \underline{\hspace{2cm}}$

4. Si al modelo de parámetros de admitancia se le conecta una fuente de excitación y una impedancia de carga, como se muestra en la figura 11.9, desarrolle:
- La expresión de la admitancia de entrada,
  - la expresión de la admitancia de salida.

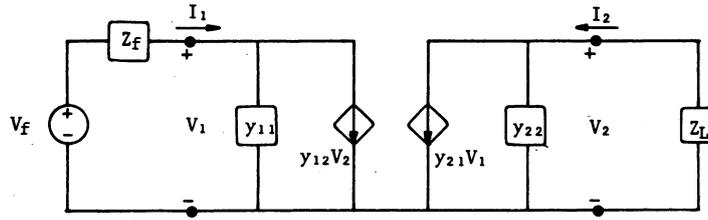
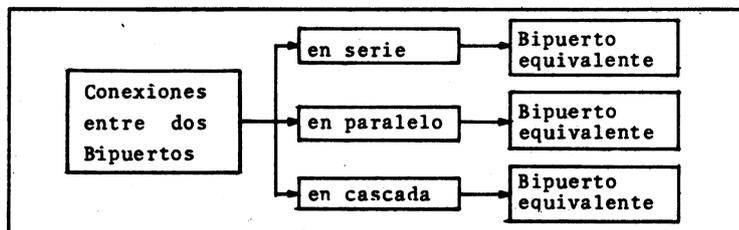


Figura 11.9

- $Y_e =$
  - $Y_s =$
5. Para el bipuerto del problema anterior, determine
- La expresión de la ganancia de voltaje,
  - la expresión de la ganancia de corriente.
- $A_v =$
  - $A_i =$

## MÓDULO 12. INTERCONEXIONES ENTRE BIPUERTOS

CUADRO SINOPTICO



## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar este módulo, el alumno:

1. Identificará el tipo de conexión que existe entre dos bipuertos.
2. Determinará los parámetros equivalentes de dos bipuertos conectados en serie, paralelo o en cascada.
3. Obtendrá la matriz del bipuerto equivalente de dos bipuertos conectados en serie, en paralelo o en cascada.

## 12.1 CONEXION EN SERIE

Consideremos los dos bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  interconectados tal como se muestra en la figura 12.1. La corriente  $I_{1a}$  que entra por la terminal 1a de  $N_a$  es igual a la corriente  $I_{1b}$  que entra por la terminal 1b de  $N_b$ . Análogamente la corriente  $I_{2a}$  que entra por la terminal 2a de  $N_a$  es igual a la corriente  $I_{2b}$  que entra por la terminal 2b de  $N_b$ . Es decir:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.1)$$

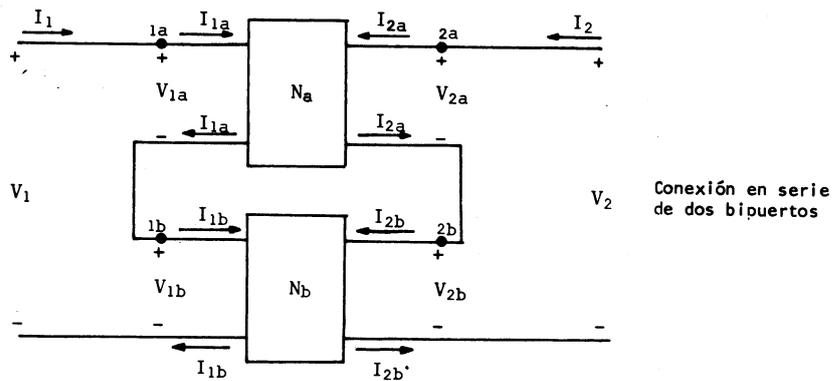


Figura 12.1 Interconexión en serie de dos bipuertos

En la figura 12.1, puede observarse que los voltajes de los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  están relacionados de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

Cuando dos bipuertos Na y Nb se interconectan como se muestra en la figura 12.1, de forma tal que sus voltajes y corrientes satisfacen las ecuaciones (12.1) y (12.2), se dice que esos bipuertos están conectados en serie.

Ahora bien, expresando los bipuertos Na y Nb en términos de sus parámetros de impedancia tenemos para Na:

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11a} & Z_{12a} \\ Z_{21a} & Z_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

y para Nb:

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11b} & Z_{12b} \\ Z_{21b} & Z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (12.3) y (12.4) en la ecuación (12.2), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11a} & Z_{12a} \\ Z_{21a} & Z_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11b} & Z_{12b} \\ Z_{21b} & Z_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.5)$$

La relación de las corrientes de la ecuación (12.5) con las corrientes de la ecuación (12.1), proporciona una nueva ecuación:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} Z_{11a} & Z_{12a} \\ Z_{21a} & Z_{22a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11b} & Z_{12b} \\ Z_{21b} & Z_{22b} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

De la ecuación (12.6) se establece la relación:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11a} & Z_{12a} \\ Z_{21a} & Z_{22a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11b} & Z_{12b} \\ Z_{21b} & Z_{22b} \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

Matriz de parámetros para la conexión en serie de dos bipuertos

la cual implica que cuando dos bipuertos se conectan en serie, pueden ser sustituidos por uno equivalente cuya matriz de parámetros de impedancia sea igual a la suma de las matrices de parámetros de impedancia de esos dos bipuertos.

#### Ejemplo 12.1

Para los dos bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  conectados en serie como se muestra en la figura 12.2, determine:

- La matriz de parámetros de impedancia de ambos bipuertos,
- la matriz de parámetros de impedancia del bipuerto equivalente.

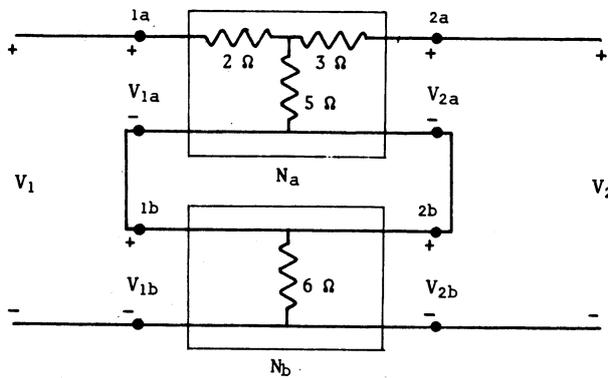


Figura 12.2

## Solución

- a) Los parámetros de impedancia del bipuerto Na se obtienen de la manera siguiente:

$$Z_{11a} = \left. \frac{V_{1a}}{I_{1a}} \right|_{I_{2a} = 0} = 7 \Omega$$

$$Z_{21a} = \left. \frac{V_{2a}}{I_{1a}} \right|_{I_{2a} = 0} = 5 \Omega$$

$$Z_{12a} = \left. \frac{V_{1a}}{I_{2a}} \right|_{I_{1a} = 0} = 5 \Omega$$

$$Z_{22a} = \left. \frac{V_{2a}}{I_{2a}} \right|_{I_{1a} = 0} = 8 \Omega$$

Así, obtenemos la matriz:

$$\begin{bmatrix} Z_{11a} & Z_{12a} \\ Z_{21a} & Z_{22a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Para el bipuerto Nb se obtiene la matriz:

$$\begin{bmatrix} Z_{11b} & Z_{12b} \\ Z_{21b} & Z_{22b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

- b) La matriz de parámetros de impedancia del bipuerto equivalente se obtiene sumando las matrices obtenidas en el inciso anterior:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

## 12.2 CONEXION EN PARALELO

Quando los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  se interconectan como se muestra en la figura 12.3, en donde los voltajes y corrientes están descritos respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

y

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

se dice que  $N_a$  y  $N_b$  están conectados en paralelo.

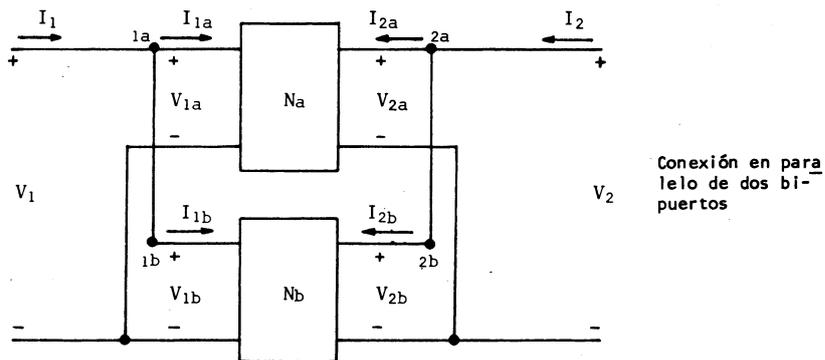


Figura 12.3 Conexión en paralelo de dos bipuertos

Especificando a los bipuertos Na y Nb por sus parámetros de admitancia tenemos para Na:

$$\begin{bmatrix} I_{1a} \\ I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

y para Nb:

$$\begin{bmatrix} I_{1b} \\ I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

En consecuencia, sustituyendo las ecuaciones (12.10) y (12.11) en la ecuación (12.9), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ V_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b} \\ V_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.12)$$

Relacionando los voltajes de la ecuación (12.12) con los voltajes de la ecuación (12.8), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

De la ecuación (12.13) establecemos la relación:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix}$$

Matriz de parámetros de conexión en paralelo de dos bipuertos

(12.14)

La expresión (12.14) establece que dos bipuertos conectados en paralelo pueden reemplazarse por un bipuerto cuya matriz de parámetros de admitancia está dada por la suma de las matrices de parámetros de admitancia de los dos bipuertos.

### Ejemplo 12.2

Considerando los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  conectados en paralelo como se muestra en la figura 12.4, determine:

- La matriz de parámetros de admitancia de los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$ ,
- la matriz de parámetros de admitancia del bipuerto equivalente.

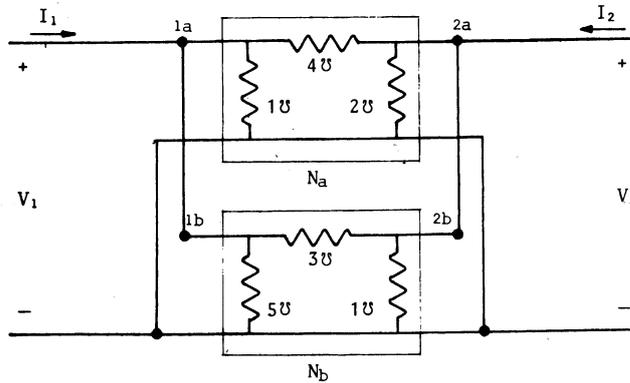


Figura 12.4

Solución:

- a) Los parámetros de admitancia de los bipuertos Na y Nb se obtienen de la siguiente manera:

$$Y_{11a} = \left. \frac{I_{1a}}{V_{1a}} \right|_{V_{2a} = 0} = 5 \text{ S}$$

$$Y_{21a} = \left. \frac{I_{2a}}{V_{1a}} \right|_{V_{2a} = 0} = -4 \text{ S}$$

$$Y_{12a} = \left. \frac{I_{2a}}{V_{2a}} \right|_{V_{1a} = 0} = -4 \text{ S}$$

$$Y_{22a} = \left. \frac{I_{2a}}{V_{2a}} \right|_{V_{1a} = 0} = 6 \text{ S}$$

en consecuencia tenemos la matriz:

$$\begin{bmatrix} Y_{11a} & Y_{12a} \\ Y_{21a} & Y_{22a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Para el bipuerto Nb se obtiene la matriz:

$$\begin{bmatrix} Y_{11b} & Y_{12b} \\ Y_{21b} & Y_{22b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- b) La matriz de parámetros de admitancia del bipuerto equivalente está dada por:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}$$

### 12.3 CONEXION EN CASCADA

Consideremos la interconexión de los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  tal como se muestra en la figura 12.5. Ahora estos bipuertos están conectados en cascada y sus voltajes y corrientes satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} \quad (12.15)$$

$$\begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

$$\text{y} \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

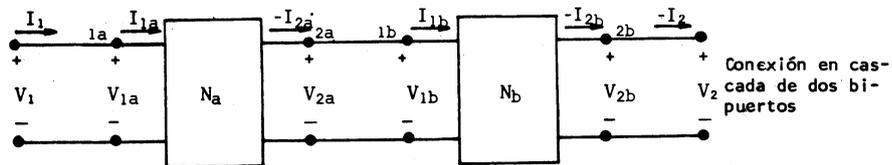


Figura 12.5 Conexión en cascada de dos bipuertos

Ahora expresaremos a los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  en términos de los parámetros de transmisión. Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

y

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

En consecuencia, sustituyendo la ecuación (12.18) en la ecuación (12.15), obtenemos:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

Relacionando la ecuación (12.16) con la ecuación (12.20), se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} \quad (12.21)$$

Sustituyendo la ecuación (12.19) en la ecuación (12.21), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

De la ecuación (12.22) se establece la relación:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

Matriz de parámetros de conexión en cascada de dos bipuertos

la cual implica que cuando dos bipuertos se conectan en cascada pueden ser sustituidos por un bipuerto cuya matriz de parámetros de transmisión sea igual al producto de las matrices de parámetros de transmisión de los dos bipuertos. Es importante resaltar el hecho de que el producto de las matrices debe efectuarse en el orden en que se conectan los bipuertos.

### Ejemplo 12.3

Para los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  conectados en cascada como se muestra en la figura 12.6, determine:

- Los parámetros de transmisión de los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$ ,
- la matriz de parámetros de transmisión del bipuerto equivalente.

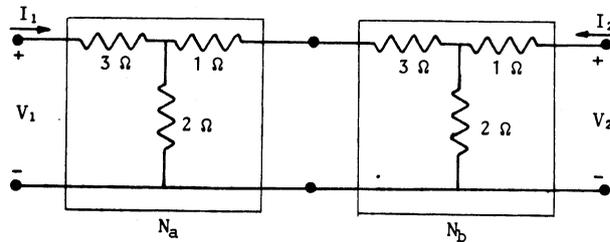


Figura 12.6

## Solución

- a) Los parámetros del bipuerto  $N_a$  se obtienen a continuación:

$$A_a = \left. \frac{V_{1a}}{V_{2a}} \right|_{I_{2a} = 0} = \frac{5}{2}$$

$$C_a = \left. \frac{I_{1a}}{V_{2a}} \right|_{I_{2a} = 0} = \frac{1}{2}$$

$$B_a = \left. \frac{V_{1a}}{I_{2a}} \right|_{V_{2a} = 0} = -\frac{11}{2} \Omega$$

$$D_a = \left. \frac{I_{1a}}{I_{2a}} \right|_{V_{2a} = 0} = -\frac{3}{2}$$

como el bipuerto  $N_a$  es igual al bipuerto  $N_b$  tenemos que:

$$\begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- b) La matriz de parámetros de transmisión para el bipuerto equivalente está dada por:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{4} & -\frac{22}{4} \\ \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

- I. A continuación aparece una serie de afirmaciones, marque con una cruz en los paréntesis colocados a la derecha si tales afirmaciones son ciertas o falsas.
- |  | cierto | falso |
|--|--------|-------|
| a) Los parámetros de admitancia son los adecuados para representar dos bipuertos conectados en serie                               | ( )    | ( )   |
| b) Dos bipuertos conectados en serie pueden representarse por un bipuerto equivalente utilizando parámetros de impedancia.         | ( )    | ( )   |
| c) Los parámetros de transmisión se utilizan para representar dos bipuertos conectados en cascada.                                 | ( )    | ( )   |
| d) Cuando se tienen dos bipuertos conectados en paralelo existe el mismo voltaje en ambos puertos de entrada de los dos bipuertos. | ( )    | ( )   |
| e) Cuando se tienen dos bipuertos conectados en serie circula la misma corriente en los puertos de salida de esos dos bipuertos.   | ( )    | ( )   |
- II. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.
1. Considerando los dos bipuertos interconectados Na y Nb que se muestran en la figura 12.7, determine la matriz de parámetros para el bipuerto equivalente de Na y Nb.

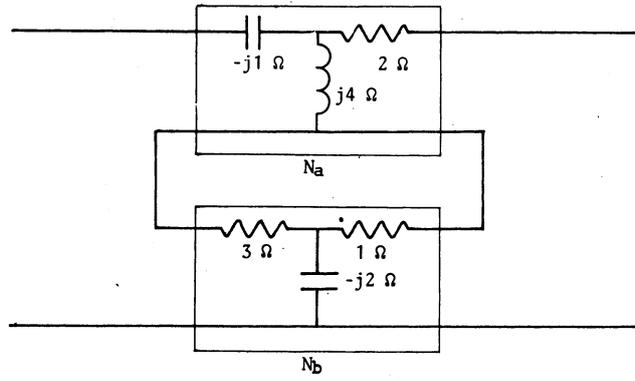


Figura 12.7

Matriz de parámetros para el bipuerto equivalente

$$\begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} \\ \phantom{0} & \phantom{0} \end{bmatrix}$$

2. Dados los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  conectados tal como se muestra en la figura 12.8, obtenga la matriz de parámetros del bipuerto equivalente.

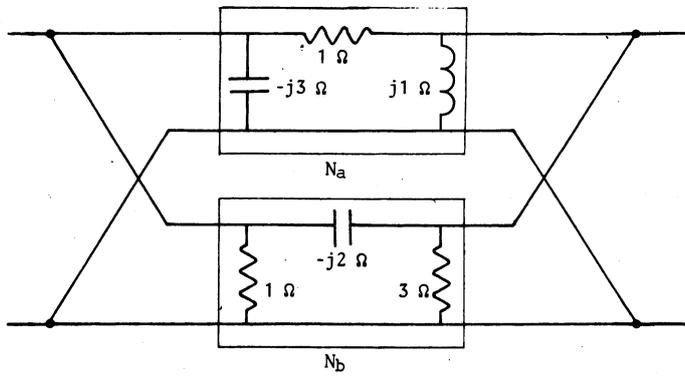


Figura 12.8

Matriz de parámetros del bipuerto equivalente:

$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

3. Para los bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  conectados como se muestra en la figura 12.9, determine la matriz de parámetros para el bipuerto equivalente.

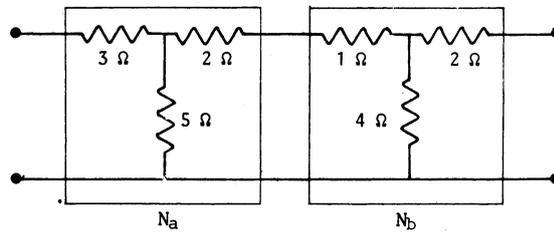


Figura 12.9

Matriz de parámetros del bipuerto equivalente:

$$\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

4. Si se tienen dos bipuertos  $N_a$  y  $N_b$  caracterizados por las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} Z_{11a} & Z_{12a} \\ Z_{21a} & Z_{22a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11b} & Z_{12b} \\ Z_{21b} & Z_{22b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

determine:

- a) Los parámetros de admitancia de los bipuertos Na y Nb,  
 b) la matriz de parámetros de admitancia del bipuerto equivalente cuando Na y Nb se conectan en paralelo.

a)  $Y_{11a} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ } \Omega$        $Y_{11b} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ } \Omega$   
 $Y_{12a} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ } \Omega$        $Y_{12b} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ } \Omega$   
 $Y_{21a} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ } \Omega$        $Y_{21b} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ } \Omega$   
 $Y_{22a} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ } \Omega$        $Y_{22b} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ } \Omega$

b)

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} =$$

5. Considerando las matrices de parámetros de impedancia de los bipuertos Na y Nb del problema anterior, obtenga:

- a) Los parámetros de transmisión de los bipuertos Na y Nb,

b) la matriz de parámetros de transmisión del bipuerto equivalente cuando  $N_a$  y  $N_b$  se conectan en cascada.

a)  $A_a = \underline{\hspace{2cm}}$                        $A_b = \underline{\hspace{2cm}}$   
 $B_a = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$                        $B_b = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$   
 $C_a = \underline{\hspace{2cm}} \mathcal{U}$                        $C_b = \underline{\hspace{2cm}} \mathcal{U}$   
 $D_a = \underline{\hspace{2cm}}$                                $D_b = \underline{\hspace{2cm}}$

b)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} =$$

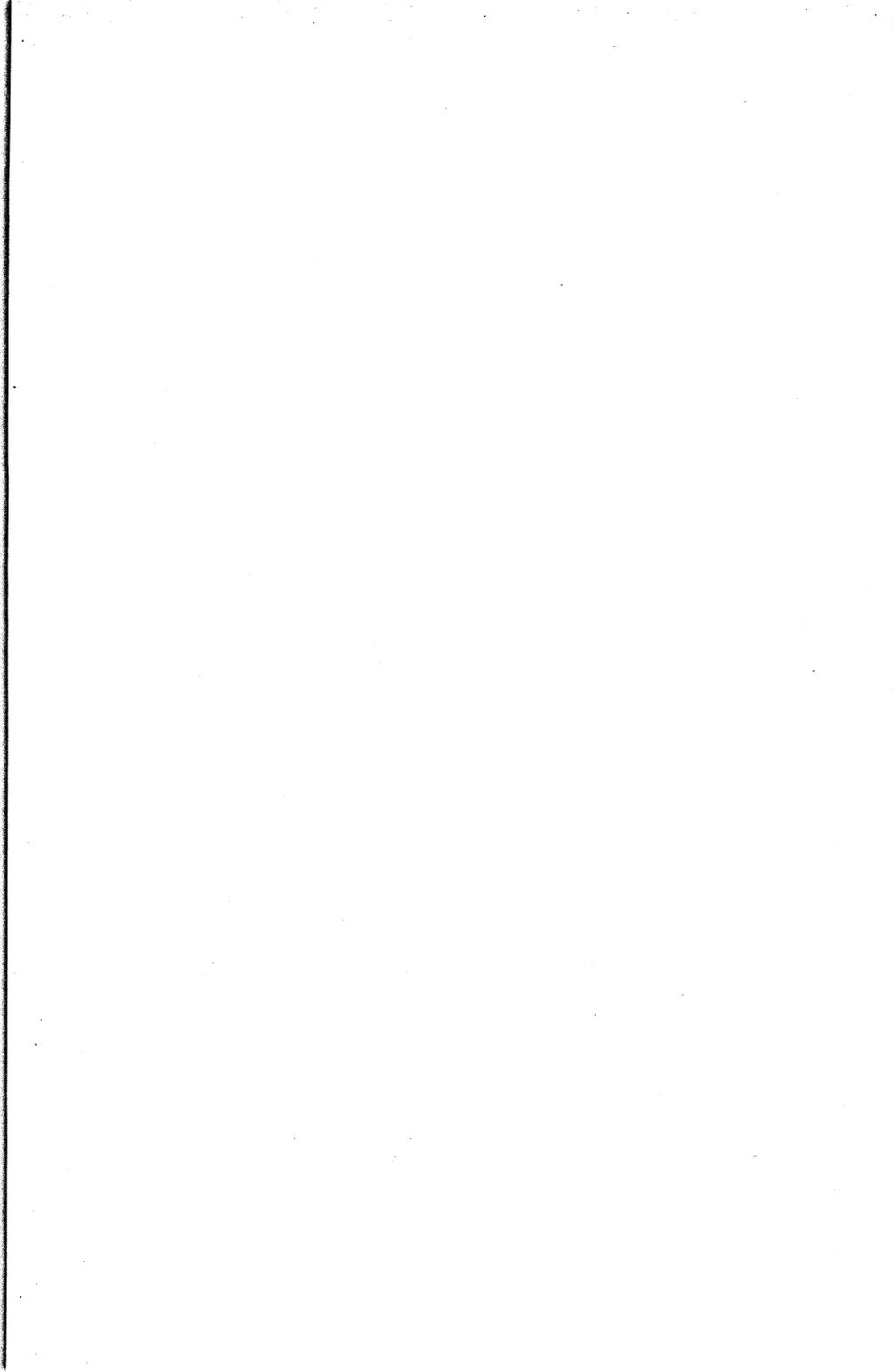
## BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAFIA BASICA

1. BALABANIAN, N; SESHU, S.  
Linear Network Analysis.  
John Wiley, Nueva York, 1964.
2. BALABANIAN, N; BICKART, THEODORE  
Electrical Network Theory.  
John Wiley, Nueva York, 1969.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

3. DESOER, CHARLES; KUH, ERNEST S.  
Basic Circuit Theory.  
McGraw - Hill, Nueva York, 1969.
4. HAYT, WILLIAM H.; KEMMERLY, JACK E.  
Análisis de Circuitos en Ingeniería.  
McGraw - Hill, México, 1980.
5. HUBERT, CHARLES I.  
Electric Circuits AC/DC, An Integrated Approach.  
McGraw - Hill, Nueva York, 1982



## UNIDAD IV    CIRCUITOS RESONANTES Y CIRCUITOS EQUIVALENTES DEL TRANSFORMADOR

### OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de la Unidad, el alumno:

Analizará los circuitos RLC resonantes en serie y en paralelo, y los circuitos equivalentes del transformador.

### INTRODUCCION

Mediante el análisis senoidal es posible obtener la respuesta de un circuito en función de la frecuencia angular  $\omega$ ; esto resulta de utilidad debido a que los circuitos se comportan en forma diferente bajo distintos rangos de frecuencia.

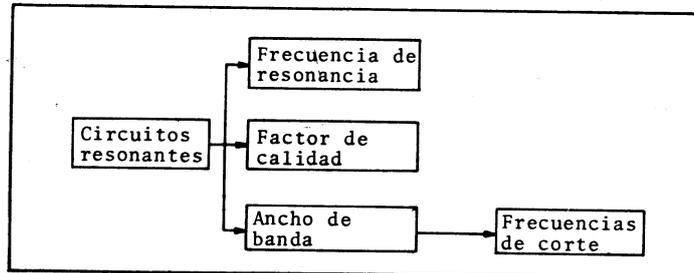
Uno de los fenómenos que se presentan en los circuitos al variar la frecuencia, es la resonancia.

La resonancia puede describirse, en términos generales, como la condición que existe cuando la respuesta del circuito en función de la frecuencia, tiene máxima amplitud.

Esa característica puede aprovecharse para el diseño de circuitos que permitan o rechacen el paso de señales dentro de determinado rango de frecuencias.

## MODULO 13. CIRCUITOS RESONANTES

CUADRO SINOPTICO



## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Determinará la frecuencia de resonancia, el factor de calidad, el ancho de banda y las frecuencias de corte de un circuito resonante.
2. Expresará, a través de un diagrama de polos y ceros, el comportamiento de un circuito resonante.
3. Aproximará un circuito real con pérdidas en el inductor, mediante un circuito ideal RLC en paralelo.

## 13.1 CIRCUITO RLC RESONANTE EN PARALELO

Para un circuito eléctrico, en estado permanente senoidal, que contenga por lo menos un capacitor y un inductor, la resonancia se define como la condición que existe cuando la impedancia de entrada del circuito es resistiva.

Resonancia

De acuerdo con la definición de resonancia, el circuito RLC en paralelo representado en la figura 13.1, está en resonancia cuando la frecuencia de la fuente de excitación toma un valor tal que hace que la impedancia de entrada sea únicamente la resistencia del circuito.

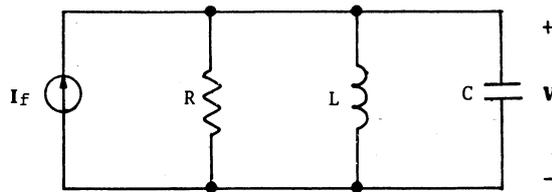


Figura 13.1 Circuito RLC en paralelo

La impedancia de entrada del circuito de la figura 13.1, está dada por:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \quad (13.1)$$

Por definición, la resonancia se obtiene cuando la parte imaginaria de la impedancia es cero; por consiguiente, de la ecuación (13.1), tenemos:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad (13.2)$$

en otras palabras, la impedancia del circuito equivale a la resistencia; así la ecuación (13.1) se reduce a:

$$Z(\omega) = R \quad (13.3)$$

Despejando la frecuencia angular en la ecuación (13.2), obtenemos:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13.4) \quad \text{Frecuencia de resonancia}$$

La expresión (13.4) se utiliza para determinar la frecuencia de la fuente de excitación a la cual ocurre la resonancia para una combinación específica de inductancia y capacitancia. A  $\omega_0$  se le llama frecuencia resonante.

Consideremos ahora los voltajes y corrientes del circuito de la figura 13.1, de acuerdo a la ley de corrientes de Kirchhoff tenemos:

$$I_f = I_R + I_L + I_C \quad (13.5)$$

Por otra parte las corrientes del resistor, inductor y capacitor son respectivamente:

$$I_R = \frac{1}{R} V$$

$$I_L = \frac{1}{j\omega L} V$$

$$I_C = j\omega C V$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (13.5), obtenemos:

$$I_f = \frac{1}{R} V + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) V$$

pero en resonancia:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

por consiguiente:

$$I_L + I_C = 0$$

y se obtiene que:

$$I_f = \frac{1}{R} V$$

$$I_f = I_R$$

Así, la corriente en la resistencia es igual a la de la fuente. El diagrama fasorial de los voltajes y corrientes se muestra en la figura 13.2.

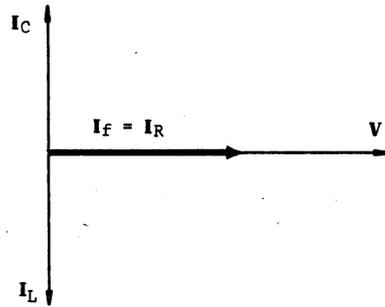


Figura 13.2 Diagrama fasorial del circuito RLC resonante en paralelo

#### Ejemplo 13.1

Dado el circuito RLC en paralelo de la figura 13.3, determine:

- a) la frecuencia de resonancia  $\omega_0$ ,  
 b) los voltajes y corrientes cuando R es de  $1 \Omega$ ,  
 c) los voltajes y corrientes cuando R vale  $10 \Omega$ .

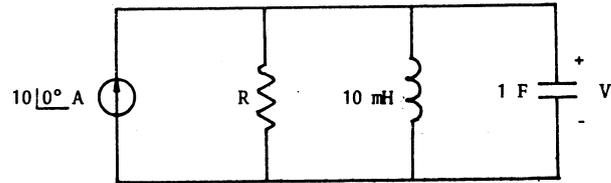


Figura 13.3

## Solución

- a) La frecuencia resonante está dada por:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10^{-2} (1)}} \\ \omega_0 &= 10 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

- b) El voltaje del circuito en resonancia es:

$$\begin{aligned}V &= I_f R \\ &= 10 \angle 0^\circ (1) \\ V &= 10 \angle 0^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

las corrientes del inductor y capacitor son respectivamente:

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{V}{j\omega L} \\ &= \frac{10|0^\circ}{j(10)(10^{-2})} \end{aligned}$$

$$I_L = 100|-90^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} I_C &= j\omega C V \\ &= j(10)(1)(10|0^\circ) \end{aligned}$$

$$I_C = 100|90^\circ \text{ A}$$

c) Cuando la resistencia es de  $10 \Omega$ , el voltaje del circuito resonante es:

$$\begin{aligned} V &= I_f R \\ &= 10|0^\circ (10) \end{aligned}$$

$$V = 100|0^\circ \text{ V}$$

las corrientes del inductor, capacitor y resistor son:

$$\begin{aligned} I_L &= \frac{V}{j\omega L} \\ &= \frac{100|0^\circ}{j(10)(10^{-2})} \end{aligned}$$

$$I_L = 1000|-90^\circ \text{ A}$$

$$\begin{aligned} I_C &= j\omega C V \\ &= j(10)(1)(100|0^\circ) \end{aligned}$$

$$I_C = 1000|90^\circ \text{ A}$$

$$I_R = I_f = 10|0^\circ \text{ A}$$

Es importante observar el efecto en el circuito resonante al aumentar la resistencia. Se puede considerar que una enorme corriente de 1000 A fluye a través de la malla formada por el inductor y el capacitor; y una corriente de 10 A pasa por el resistor. Debido a estas grandes corrientes se requiere precaución cuando se miden voltajes y corrientes en un circuito resonante.

### 13.2 DIAGRAMA DE POLOS Y CEROS

La impedancia del circuito RLC en paralelo de la ecuación (13.1), se puede expresar en función de la variable compleja "s" de la siguiente manera:

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC}$$

para expresar esta impedancia como un cociente de dos polinomios se multiplica por  $\frac{s}{C}$ , tanto el numerador como el denominador, y se obtiene:

$$\tilde{Z}(s) = \frac{\frac{1}{C} s}{s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}} \quad (13.6)$$

mediante la ecuación cuadrática general las raíces del denominador pueden expresarse como:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (13.7)$$

Las raíces  $s_1$  y  $s_2$  pueden ser reales o complejas conjugadas. Para el caso en que  $\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 \geq \frac{1}{LC}$ ,  $s_1$  y  $s_2$  están en el eje real negativo como se muestra en la figura 13.4.

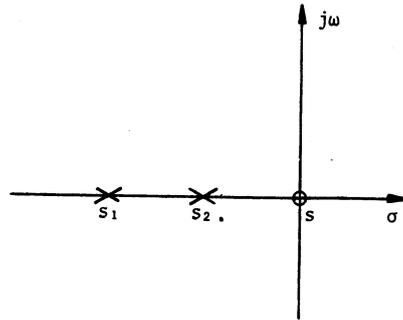


Figura 13.4 Polos reales  $s_1$  y  $s_2$

Las raíces  $s_1$  y  $s_2$  del denominador de la ecuación 13.6 se llaman *polos*, y la raíz del numerador es conocida como *cero*. En un plano complejo, los polos se representan con una cruz, y los ceros con un círculo; observe la figura 13.4. Polos y ceros

Cuando  $(\frac{1}{2RC})^2 < \frac{1}{LC}$ , el radicando de la expresión (13.7) es negativo, y por lo tanto las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son complejas conjugadas. Ahora, si al término  $\frac{1}{2RC}$  lo definimos como *coeficiente de amortiguamiento*, y lo denotamos como:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

Coeficiente de amortiguamiento

la expresión (13.7) puede escribirse de la siguiente manera:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{LC}}$$

Pero dado que el radicando  $(\alpha^2 - \frac{1}{LC})$  es negativo, podemos intercambiar el orden de sus términos multiplicando por  $-1$ , es decir:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{(-1) \left( \frac{1}{LC} - \alpha^2 \right)}$$

De esta forma, al ser las raíces  $s_1$  y  $s_2$  complejas conjugadas, se introduce la unidad imaginaria  $j$ , por lo que la expresión anterior queda como:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$$

Ahora bien, dado que  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

y si definimos las *frecuencias naturales* como:

$$\omega_{d1} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Frecuencias naturales

y

$$\omega_{d2} = -\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

tenemos que:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

El diagrama de polos y ceros se muestra en la figura 13.5. La distancia de un polo al origen del plano  $s$  está dada por:

$$\omega_0^2 = \alpha^2 + \omega_d^2$$

cuando  $\alpha$  aumenta, los polos se mueven a la izquierda a lo largo de la trayectoria  $\omega_0$  hasta que se sitúan en el eje real para  $\alpha = \omega_0$ .

Así, dada la configuración de polos y ceros la frecuencia resonante se puede obtener gráficamente como sigue: se traza un arco que pase por uno de los polos tomando como centro el origen; la intersección de este arco con la parte positiva del eje  $j\omega$  sitúa el punto  $s = j\omega_0$ . Puede observarse que  $\omega_0$  es un poco mayor que  $\omega_d$ .

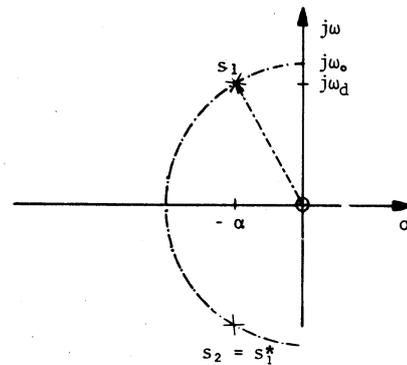


Figura 13.5 Polos complejos conjugados

### 13.3 FACTOR DE CALIDAD, ANCHO DE BANDA Y FRECUENCIA DE CORTE

En el apartado 13.1, se dijo que la impedancia de entrada del circuito RLC en paralelo era:

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

y que la magnitud de esta impedancia se puede obtener determinando la magnitud del denominador; esto es:

$$|Z(\omega)| = \frac{1}{|Y(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

La gráfica de esta expresión se muestra en la figura 13.6:

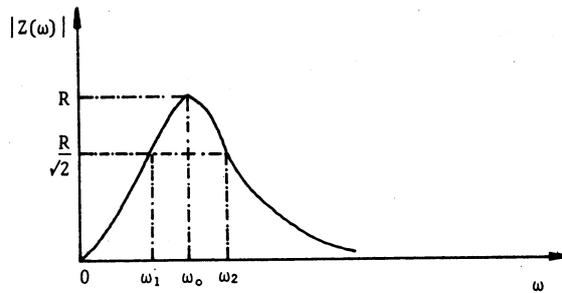


Figura 13.6 Gráfica de  $|Z(\omega)|$  contra  $\omega$

El rango de frecuencia dentro del cual la magnitud de la impedancia es  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  veces el valor máximo de resonancia se llama *ancho de banda*. De acuerdo a la figura 13.6 el ancho de banda es:

Ancho de banda

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (13.8)$$

Las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  de los extremos del ancho de banda se llaman *frecuencias de corte*; también se denominan *frecuencias de media potencia* porque se consume la mitad de potencia con respecto a la potencia consumida a la frecuencia de resonancia.

Frecuencia de corte

Ahora bien, volviendo a la expresión de la impedancia:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

e introduciendo los factores  $\frac{\omega_0}{\omega}$  y  $\frac{R}{R}$  en el término imaginario se obtiene:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \frac{1}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \omega_0 RC - \frac{\omega_0}{\omega} \frac{R}{\omega_0 L} \right)}$$

Ahora bien, el *factor de calidad* se define como:

$$Q = \omega_0 RC \quad (13.9)$$

Factor de calidad en circuito resonante en paralelo

y de la ecuación (13.2) se obtiene la siguiente expresión:

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$$

lo que permite expresar el factor de calidad como:

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (13.10)$$

Así la magnitud de la impedancia del circuito en paralelo se expresa como:

$$|Z(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}} \quad (13.11)$$

En esta expresión notamos nuevamente que la magnitud de la impedancia en resonancia es R, y observamos que una impedancia de magnitud  $\frac{R}{\sqrt{2}}$  sólo puede presentarse cuando se escoge una frecuencia de tal forma que parte imaginaria de la expresión (13.11) tenga como magnitud la unidad. Así:

$$Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$$

entonces tomando  $\omega_1$  para el valor negativo de 1 y  $\omega_2$  para el valor positivo de 1 tenemos:

$$Q \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -1$$

y

$$Q \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = 1$$

Resolviendo para  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , obtenemos las frecuencias de corte:

$$\omega_1 = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q} \right)^2} - \frac{1}{2Q} \right] \quad (13.12)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q} \right)^2} + \frac{1}{2Q} \right] \quad (13.13)$$

La diferencia entre las expresiones (13.13) y (13.12) proporciona el ancho de banda en términos de la frecuencia resonante y el factor de calidad:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (13.14)$$

En esta expresión se observa que cuando el factor de calidad aumenta, el ancho de banda disminuye, y los circuitos que tienen un ancho de banda pequeño tienen una mayor selectividad de frecuencias. Así pues, el factor de calidad determina la forma de la curva de impedancia del circuito; para valores grandes de  $Q$  se tiene una curva relativamente angosta, y para valores pequeños de  $Q$  la curva de impedancia tiene una forma aplanada.

#### Ejemplo 13.2

Dado un circuito RLC en paralelo cuyos parámetros son:

$$R = 50 \, \Omega$$

$$L = 10 \, \text{mH}$$

$$C = 100 \, \mu\text{F}$$

obtenga:

- a) la frecuencia de resonancia,
- b) el factor de calidad,
- c) las frecuencias de corte,
- d) el ancho de banda,
- e) la curva de impedancia.

Solución

- a) La frecuencia de resonancia es:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 10^{-4}}} \\ \omega_0 &= 1000 \, \text{rad/s} \end{aligned}$$

b) El factor de calidad es:

$$\begin{aligned} Q &= \omega_0 RC \\ &= 1000(50)10^{-4} \\ Q &= 5 \end{aligned}$$

c) Las frecuencias de corte se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - \frac{1}{2Q} \right] \\ &= 1000 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \times 5}\right)^2} - \frac{1}{2 \times 5} \right] \end{aligned}$$

$$\omega_1 = 904 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} + \frac{1}{2Q} \right] \\ &= 1000 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \times 5}\right)^2} + \frac{1}{2 \times 5} \right] \end{aligned}$$

$$\omega_2 = 1104 \text{ rad/s}$$

d) El ancho de banda está dado por:

$$\begin{aligned} B &= \omega_2 - \omega_1 \\ &= 1104 - 904 \\ B &= 200 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

e) La curva de impedancia se muestra en la figura 13.7.

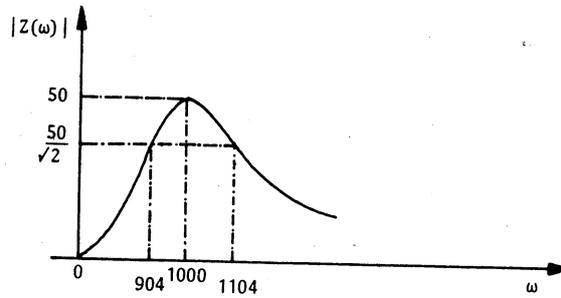


Figura 13.7

## 13.4 CIRCUITO RLC RESONANTE EN SERIE

Debido a la similitud que existe en el análisis del circuito RLC resonante en paralelo y el circuito RLC resonante en serie, solamente, resumiremos las conclusiones más importantes de este último. Así pues, consideremos el circuito en serie que se muestra en la figura 13.8.

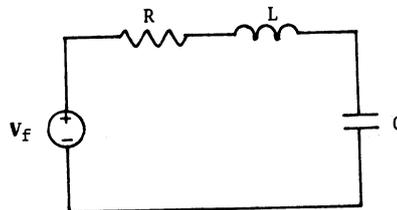


Figura 13.8 Circuito RLC en serie

La admitancia de entrada está dada por:

$$Y(\omega) = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

igualando a cero la parte imaginaria se obtiene la frecuencia de resonancia:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

que es la misma frecuencia resonante del circuito en paralelo.

En consecuencia, cuando el circuito en serie está en resonancia la admitancia es:

$$Y(\omega_0) = \frac{1}{R}$$

El factor de calidad del circuito RLC en serie se obtiene de manera similar a la usada en el circuito paralelo, resultando:

$$Q_s = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

Factor de calidad en circuito resonante en serie

La magnitud de la admitancia del circuito en serie es:

$$|Y(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Esta magnitud, a la frecuencia resonante  $\omega_0$ , vale  $\frac{1}{R}$ .  
Observe la figura 13.9

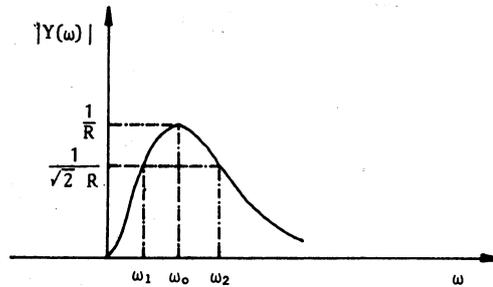


Figura 13.9 Gráfica de  $|Y(\omega)|$  contra  $\omega$

Las frecuencias de corte están dadas por:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_s}\right)^2} \pm \frac{1}{2Q_s} \right]$$

y el ancho de banda es:

$$B_s = \omega_2 - \omega_1$$

$$B_s = \frac{\omega_0}{Q_s}$$

En la tabla 13.1 se reúnen los resultados importantes del circuito en paralelo y del circuito en serie.

CIRCUITO EN PARALELO		CIRCUITO EN SERIE	
Impedancia en términos de los parámetros	$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$	$Y(\omega) = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$	Admitancia en términos de los parámetros
Frecuencia de resonancia	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Frecuencia de resonancia
Función de transferencia	$Z(S) = \frac{1}{C} \frac{S}{(S+S_1)(S+S_2)}$	$Y(S) = \frac{1}{L} \frac{1}{(S+S_1)(S+S_2)}$	Función de transferencia
Polos	$S_{1,2} = \frac{-1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{2RC}^2 - \frac{1}{LC}}$ $S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$	$S_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R}{2L}^2 - \frac{1}{LC}}$ $S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$	Polos
Coefficiente de amortiguamiento	$\alpha = \frac{1}{2RC}$	$\alpha = \frac{R}{2L}$	Coefficiente de amortiguamiento
Frecuencias naturales	$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$	Frecuencias naturales
Factor de Calidad	$Q = \omega_0 RC$ $Q = \frac{R}{\omega_0 L}$	$Q_S = \frac{\omega_0 L}{R}$ $Q_S = \frac{1}{\omega_0 RC}$	Factor de Calidad
Frecuencias de corte	$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{2Q}^2 \pm \frac{1}{2Q} \right]$	$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[ 1 + \frac{1}{Q_S}^2 \pm \frac{1}{2Q_S} \right]$	Frecuencias de corte
Ancho de banda	$\beta = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$	$\beta_S = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_S}$	Ancho de banda
Impedancia en términos de la frecuencia de resonancia	$Z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}$	$Y(\omega) = \frac{1}{R \left[ 1 + jQ_S \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}$	Admitancia en términos de la frecuencia de resonancia

Tabla 13.1 Expresiones importantes de los circuitos resonantes RLC en paralelo y en serie

## Ejemplo 13.3

Para el circuito RLC en serie que se representa en la figura 13.10, determine:

- la frecuencia de resonancia,
- el factor de calidad,
- las frecuencias de corte,
- el ancho de banda.

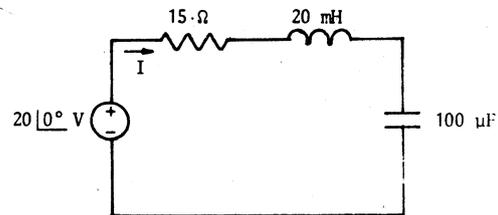


Figura 13.10

## Solución

- a) La frecuencia resonante es:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2 \times 10^{-2})(10^{-4})}} \\ \omega_0 &= 707 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

b) El factor de calidad está dado por:

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{\omega_0 L}{R} \\ &= \frac{707 (2 \times 10^{-2})}{15} \\ Q_s &= 0.95 \end{aligned}$$

c) Las frecuencias de corte son:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_s}\right)^2} - \frac{1}{2Q_s} \right] \\ &= 707 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \times 0.95}\right)^2} - \frac{1}{2 \times 0.95} \right] \\ \omega_1 &= 431 \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= \omega_0 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_s}\right)^2} + \frac{1}{2Q_s} \right] \\ &= 707 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \times 0.95}\right)^2} + \frac{1}{2 \times 0.95} \right] \\ \omega_2 &= 1166 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

d) El ancho de banda se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} B_s &= \omega_2 - \omega_1 \\ &= 1166 - 431 \\ B_s &= 735 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

## 13.5 CIRCUITO RESONANTE CON PERDIDAS EN EL INDUCTOR

Consideremos el circuito de la figura 13.11, que representa la combinación en paralelo de un inductor y un capacitor. El inductor está representado por la inductancia  $L$  y la resistencia  $R_1$  que representa las pérdidas del mismo.

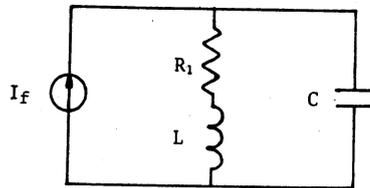


Figura 13.11 Circuito con pérdidas en el inductor

La admitancia del circuito está dada por:

$$Y(\omega) = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + j\omega C$$

Multiplicando el numerador y el denominador del primer término por el conjugado del denominador, se obtiene:

$$Y(\omega) = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C$$

factorizando:

$$Y(\omega) = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

Para que el circuito esté en resonancia, la parte imaginaria de la admitancia debe valer cero; esto es:

$$\omega C - \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

Resolviendo para  $\omega$  obtenemos la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  del circuito:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2}$$

Frecuencia de resonancia para un circuito con pérdidas

Observe que la frecuencia de resonancia no es  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ , pues aparece el término  $\left(\frac{R_1}{L}\right)^2$ .

La figura 13.2 muestra una gráfica aproximada de la impedancia, donde se observa que en el circuito con pérdidas en el inductor la amplitud máxima de  $|Z(\omega)|$  no ocurre a la frecuencia de resonancia como en el circuito RLC en paralelo.

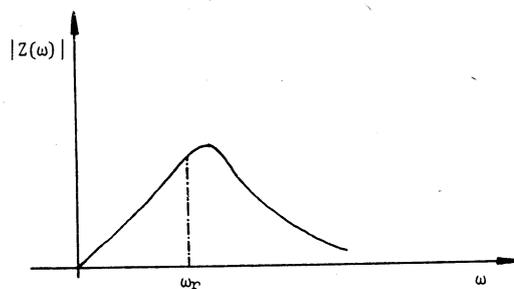


Figura 13.12 Bosquejo de  $|Z(\omega)|$  para el circuito con pérdidas

De hecho no existe una expresión conveniente para el valor máximo de  $|Z(\omega)|$  ni para el ancho de banda. Para analizar este circuito con pérdidas se encuentra su equivalente aproximado<sup>9</sup> con el circuito ideal RLC en paralelo (vea la figura 13.13). Este circuito equivalente es válido solamente para valores del factor de calidad del inductor  $Q_L$  mayores que 10, donde  $Q_L$  está dado por:

<sup>9</sup> Clarke K.K. y Hess D.T. Cap. 2. Aquí se desarrolla con detalle este circuito equivalente.

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R_1} \quad (13.15) \quad \text{Factor de calidad del inductor}$$

La resistencia  $R_e$  del circuito equivalente está dada por:

$$R_e = Q_L^2 R_1 \quad (13.16) \quad \text{Resistencia del circuito ideal equivalente}$$

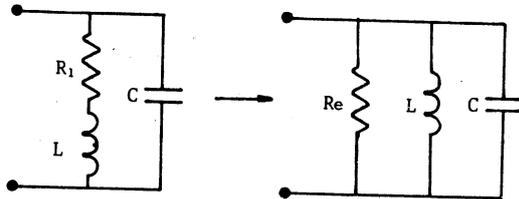


Figura 13.13 Circuitos resonantes equivalentes para valores altos del factor de calidad.

Para transformar el circuito real con pérdidas en el inductor, en el circuito ideal RLC en paralelo, es necesario que  $Q_L$  sea mayor que 10.

Cuando esto sucede,  $Q_L$  es igual al factor de calidad del circuito ideal RLC en paralelo, es decir:

$$Q_L = Q$$

Factor de calidad del circuito resonante real

o bien:

$$\frac{\omega_0 L}{R_1} = \frac{R_e}{\omega_0 L}$$

si existe otra resistencia en el circuito, como se muestra en la figura 13.14,  $R_e$  debe combinarse para determinar el factor de calidad del circuito equivalente RLC en paralelo; entonces  $Q_L \neq Q$ . En este caso:

$$Q = \omega_0 R'_e C$$

$$Q = \frac{R'_e}{\omega_0 L}$$

donde:

$$R'_e = R_e || R_2$$

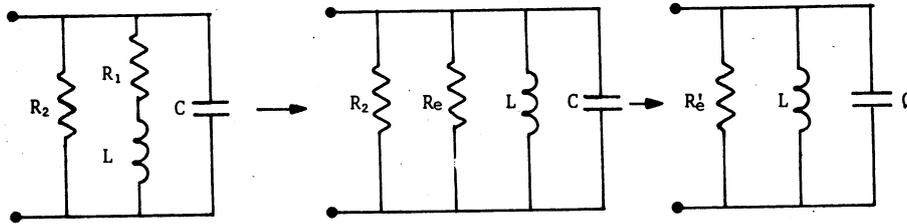


Figura 13.14 Circuitos equivalentes para un determinado rango de frecuencias cuando se tienen factores de calidad altos.

Por otra parte, cuando  $Q_L$  es mayor que 10, la gráfica de  $|Z(\omega)|$  puede considerarse simétrica con respecto a  $\omega_0$ , por lo que para el cálculo de las frecuencias de corte, en vez de usar las ecuaciones (13.12) y (13.13), pueden usarse las que se obtendrán a continuación:

Por la simetría de la curva arriba mencionada puede afirmarse que:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{B}{2}$$

sustituyendo en esta expresión la ecuación (13.14), se obtiene:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q}$$

o bien:

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \quad (13.17)$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q} \quad (13.18)$$

## Ejemplo 13.4

Un circuito que consiste en un capacitor de  $1 \mu\text{F}$  y un inductor cuya inductancia y resistencia son de  $10 \text{ mH}$  y  $4 \Omega$ , respectivamente, se conecta a una fuente ideal como se muestra en la figura 13.15. Para este circuito determine:

- el circuito equivalente RLC en paralelo,
- el factor de calidad del circuito equivalente,
- el ancho de banda del circuito equivalente,
- las frecuencias de corte del circuito equivalente.

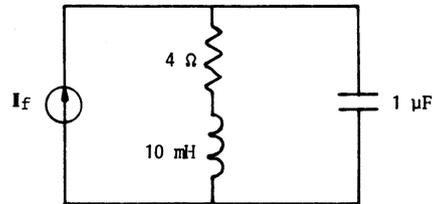


Figura 13.15

## Solución

- La frecuencia de resonancia aproximada del circuito es:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 10^{-6}}} \\ \omega_0 &= 10^4 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

el factor de calidad es:

$$\begin{aligned}
 Q_L &= \frac{\omega_0 L}{R_1} \\
 &= \frac{10^4 \cdot 10^{-2}}{4} \\
 Q_L &= 25
 \end{aligned}$$

por consiguiente la resistencia equivalente es:

$$\begin{aligned}
 R_e &= R_1 Q_L^2 \\
 &= 4(25)^2 \\
 R_e &= 2500 \Omega
 \end{aligned}$$

El circuito equivalente RLC se muestra en la figura 13.16.

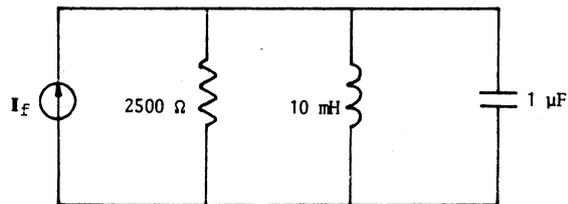


Figura 13.16

b) El factor de calidad del circuito equivalente es:

$$\begin{aligned}
 Q &= \omega_0 R_e C \\
 &= 10000(2500)(10^{-6}) \\
 Q &= 25
 \end{aligned}$$

observe que:

$$Q = Q_L$$

c) El ancho de banda es:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\omega_0}{Q} \\ &= \frac{10^4}{25} \\ B &= 400 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

d) Las frecuencias de corte se obtienen usando las expresiones (13.17) y (13.18):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \\ &= 10^4 - \frac{10^4}{2(25)} \\ \omega_1 &= 9800 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q} \\ &= 10^4 + \frac{10^4}{2(25)} \\ \omega_2 &= 10200 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. A continuación aparece una serie de afirmaciones, mar que con una cruz en los paréntesis colocados a la de recha si tales afirmaciones son ciertas o falsas.

- |   | Cierto | Falso |
|---|--------|-------|
| a) En un circuito RLC resonante en paralelo, el voltaje está en fase con la corriente de excitación.  | ( )    | ( )   |
| b) En un circuito RLC resonante en paralelo, las corrientes del capacitor e inductor son iguales en magnitud y fase.                                      | ( )    | ( )   |
| c) El valor de la frecuencia de resonancia depende exclusivamente de la inductancia y de la capacitancia.   | ( )    | ( )   |
| d) El ancho de banda es un rango de frecuencias que tiene como valores extremos a las frecuencias de corte.   | ( )    | ( )   |
| e) El factor de calidad es directamente proporcional al ancho de banda.   | ( )    | ( )   |
| f) Un circuito ideal RLC en paralelo puede aproximarse a un circuito real con pérdidas en el inductor, cuando el factor de calidad $Q_L$ es menor que 10. | ( )    | ( )   |

II. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Considerando el circuito de la figura 13.17, obtenga:

- La frecuencia de resonancia,
- la corriente a la frecuencia de resonancia,
- el factor de calidad,
- el ancho de banda.

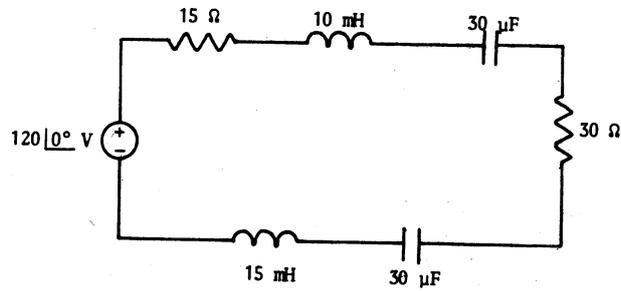


Figura 13.17

- $\omega_0 = \underline{\hspace{2cm}}$  rad/s
- $I = \underline{\hspace{2cm}}$  mA
- $Q_s = \underline{\hspace{2cm}}$
- $B_s = \underline{\hspace{2cm}}$  rad/s

2. Dado un circuito en paralelo descrito por los elementos:

$$R = 100 \Omega$$

$$L = 5 \text{ mH}$$

$$C = 50 \mu\text{F}$$

determine:

- a) la frecuencia de resonancia,
- b) el factor de calidad,
- c) el ancho de banda,
- d) las frecuencias de corte.

a)  $\omega_0 =$  \_\_\_\_\_ rad/s

b)  $Q =$  \_\_\_\_\_

c)  $B =$  \_\_\_\_\_ rad/s

d)  $\omega_1 =$  \_\_\_\_\_ rad/s

$\omega_2 =$  \_\_\_\_\_ rad/s

3. Obtenga las frecuencias de corte de un circuito RLC en serie que tiene una frecuencia de resonancia de 400 rad/s, un ancho de banda de 100 rad/s, y un factor de calidad de 25.

$\omega_1 =$  \_\_\_\_\_ rad/s

$\omega_2 =$  \_\_\_\_\_ rad/s

4. Considerando el circuito que se muestra en la figura 13.18, determine:

- a) la frecuencia de resonancia,
- b) el ancho de banda,
- c) las frecuencias de corte.

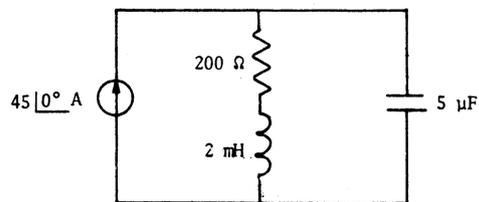


Figura 13.18

- a)  $\omega_0 =$  \_\_\_\_\_ rad/s  
 b)  $B =$  \_\_\_\_\_ rad/s  
 c)  $\omega_1 =$  \_\_\_\_\_ rad/s  
      $\omega_2 =$  \_\_\_\_\_ rad/s

5. Si el circuito que se muestra en la figura 13.19 tiene un ancho de banda de  $5 \times 10^5$  rad/s, y la magnitud de su impedancia es de  $1000 \Omega$  a la frecuencia resonante de  $10^7$  rad/s, determine:

- a) el valor de  $R_1$ ,  
 b) el valor de  $L$ ,  
 c) el valor de  $C$ .

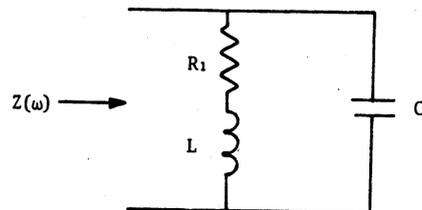


Figura 13.19

- a)  $R_1 =$  \_\_\_\_\_  $\Omega$   
 b)  $L =$  \_\_\_\_\_  $\mu\text{H}$   
 c)  $C =$  \_\_\_\_\_  $\text{pF}$

6. Un inductor real se representa por una inductancia de  $10 \text{ mH}$  en serie con una resistencia de  $1 \Omega$ , mientras que un capacitor se aproxima por una capacitancia de  $3 \mu\text{F}$  en paralelo con una resistencia de  $4 \Omega$ . Si los dos elementos reales se conectan en paralelo, determine:

- a) el factor de calidad del circuito,  
 b) el ancho de banda,  
 c) las frecuencias de corte.

a)  $Q =$  \_\_\_\_\_

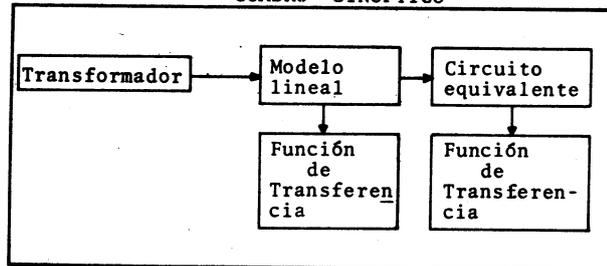
b)  $B =$  \_\_\_\_\_ rad/s

c)  $\omega_1 =$  \_\_\_\_\_ rad/s

$\omega_2 =$  \_\_\_\_\_ rad/s

## MÓDULO 14. MODELO LINEAL DEL TRANSFORMADOR

CUADRO SINOPTICO



## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Obtendrá un circuito equivalente del modelo lineal del transformador.
2. Determinará la función de transferencia del modelo lineal del transformador.
3. Determinará la función de transferencia del circuito equivalente del modelo lineal del transformador.

#### 14.1 FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL MODELO LINEAL DE UN TRANSFORMADOR

El circuito mostrado en la figura 14.1 representa a un transformador sin pérdidas en los devanados primario y secundario, cuyas inductancias son  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente.

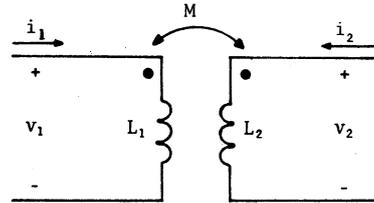


Figura 14.1 Transformador de dos devanados

Este transformador puede describirse en términos de las ecuaciones:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (14.1)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (14.2)$$

donde la inductancia mutua  $M$  está relacionada con el coeficiente de acoplamiento  $k$ <sup>10</sup> por la expresión:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (14.3)$$

Si la corriente  $i_2$  sale, en vez de entrar, por la terminal punteada, los voltajes producidos por la inductancia mutua son negativos y las ecuaciones (14.1) y (14.2) toman la forma:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (14.4)$$

$$v_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (14.5)$$

<sup>10</sup> HUBERT, Ch. I. Electric Circuits AC/DC, McGraw Hill, 1982. El coeficiente de acoplamiento  $k$  depende de las características físicas del transformador.

Conectando una fuente de excitación al primario y una resistencia de carga al secundario se obtiene el circuito de la figura 14.2

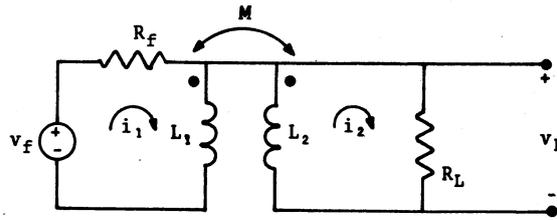


Figura 14.2 Transformador con fuente de excitación y resistencia de carga

Ahora obtendremos la función de transferencia  $\frac{V_L}{V_f}$ <sup>11</sup> de este circuito. Para ello consideramos las corrientes de malla  $I_1$  e  $I_2$ . Así, para la malla del primario se obtiene la ecuación:

$$R_f i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = V_f$$

y para la malla del secundario se obtiene:

$$-M \frac{di_1}{dt} + R_L i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0$$

Aplicando la transformada de Laplace en estas dos últimas ecuaciones y agrupando términos, quedan de la siguiente manera:

$$(R_f + L_1 s) I_1 - M s I_2 = V_f \quad (14.6)$$

$$M s I_1 + (R_L + L_2 s) I_2 = 0 \quad (14.7)$$

<sup>11</sup> La función de transferencia se define como el cociente de las transformadas de Laplace de la salida entre la entrada.

Resolviendo las ecuaciones (14.6) y (14.7) para  $I_2$ , tenemos:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_f + L_1 s & V_f \\ -Ms & 0 \\ R_f + L_1 s & -Ms \\ -Ms & R_L + L_2 s \end{vmatrix}}$$

calculando los determinantes y factorizando se obtiene:

$$I_2 = \frac{Ms V_f}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (R_f L_2 + R_L L_1)s + R_f R_L} \quad (14.8)$$

Por otra parte el voltaje en la resistencia de carga está dado por:

$$V_L = R_L I_2 \quad (14.9)$$

sustituyendo la ecuación (14.8) en la ecuación (14.9), se obtiene:

$$V_L = \frac{R_L Ms V_f}{(L_1 L_2 - M^2)s^2 + (R_f L_2 + R_L L_1)s + R_f R_L}$$

Pasando  $V_f$  al primer miembro y dividiendo entre  $L_1 L_2 - M^2$  se obtiene la función de transferencia:

$$\frac{V_L}{V_f} = \frac{\frac{R_L M}{L_1 L_2 - M^2} s}{s^2 + \frac{R_f L_2 + R_L L_1}{L_1 L_2 - M^2} s + \frac{R_f R_L}{L_1 L_2 - M^2}} \quad (14.10)$$

Función de transferencia del modelo lineal de un transformador

Observe que esta función de transferencia es semejante a la impedancia  $Z(s)$  del circuito RLC en paralelo con un cero y dos polos vista en el apartado 13.12. Sin embargo, la función de transferencia del transformador siempre tendrá sus polos situados en la parte negativa del eje real, mientras que los polos de la impedancia del circuito RLC pueden ser reales o complejos conjugados.

## Ejemplo 14.1

Para el circuito representado en la figura 14.3:

- determine la función de transferencia,
- dibuje el diagrama de polos y ceros.

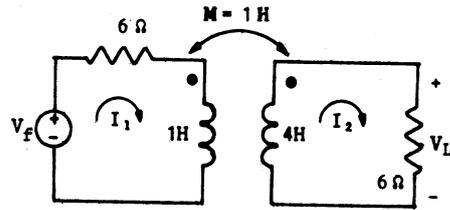


Figura 14.3

## Solución

- Las ecuaciones de malla del circuito son:

$$\begin{aligned}(6 + s)I_1 - sI_2 &= V_f \\ -sI_1 + (6 + 4s)I_2 &= 0\end{aligned}$$

resolviendo para  $I_2$  se obtiene:

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 6 + s & V_f \\ -s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 + s & -s \\ -s & 6 + 4s \end{vmatrix}} \\ &= \frac{sV_f}{(6 + s)(6 + 4s) - s^2} \\ I_2 &= \frac{\frac{1}{3} sV_f}{s^2 + 10s + 12} \quad (a)\end{aligned}$$

Del circuito obtenemos el voltaje:

$$V_L = 6 I_2 \quad (b)$$

sustituyendo la ecuación (a) en la ecuación (b), se obtiene:

$$V_L = \frac{6 \frac{1}{3} sV_f}{s^2 + 10s + 12}$$

de donde se obtiene la función de transferencia:

$$\frac{V_L}{V_f} = \frac{2s}{s^2 + 10s + 12} \quad (c)$$

b) Para dibujar el diagrama de polos y ceros, primero se obtienen las raíces del denominador de la ecuación (c), las cuales están dadas por:

$$s_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(12)}}{2}$$

$$s_{1,2} = -5 \pm 3.6$$

por consiguiente obtenemos las raíces:

$$s_1 = -1.4$$

$$y \quad s_2 = -8.6$$

La configuración de polos y ceros se muestra en la figura 14.4.

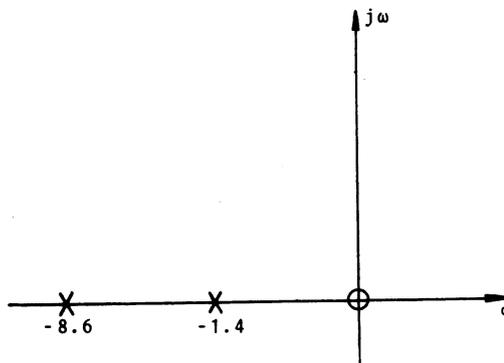


Figura 14.4

## 14.2 EL TRANSFORMADOR IDEAL

En la siguiente figura se muestra un transformador ideal.

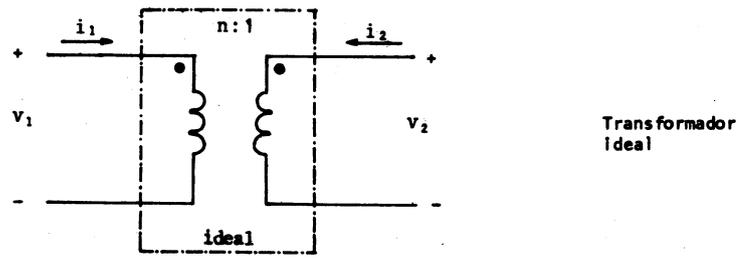


Figura 14.5 Transformador ideal

Este transformador está descrito por las ecuaciones:

$$\frac{v_1}{v_2} = n \quad (14.11)$$

$$-\frac{i_2}{i_1} = n \quad (14.12)$$

donde  $n$  es una constante relacionada con el número de vueltas  $N_1$  del primario y  $N_2$  del secundario, por la expresión:

$$n = \frac{N_1}{N_2} \quad (14.13)$$

Consideremos ahora el transformador ideal con una resistencia de carga conectada al secundario, tal como se muestra en la figura 14.6

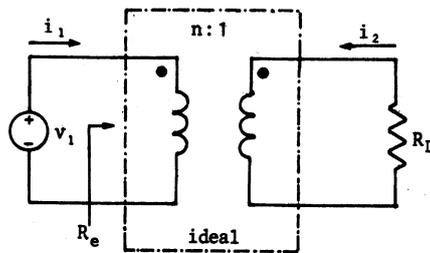


Figura 14.6 Transformador ideal con resistencia de carga.

La resistencia de entrada  $R_e$  esta dada por:

$$R_e = \frac{v_1}{i_1} \quad (14.14)$$

Por otra parte, despejando  $v_1$  de la ecuación (14.11) e  $i_1$  de la ecuación (14.12), se obtiene:

$$v_1 = nv_2 \quad (14.15)$$

$$i_1 = \frac{-i_2}{n} \quad (14.16)$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (14.14), se obtiene:

$$R_e = n^2 \frac{v_2}{-i_2} \quad (14.17)$$

pero:

$$\frac{v_2}{-i_2} = R_L$$

Por consiguiente la ecuación (14.17) se reduce a:

$$R_e = n^2 R_L \quad (14.18) \quad \text{Resistencia reflejada}$$

donde  $R_e$  es llamada *resistencia de carga reflejada* y constituye la resistencia del secundario referida al primario.

A partir de esta última expresión, se puede concluir que en un transformador ideal, cuando se tiene como referencia las terminales del primario, la resistencia de carga del secundario es multiplicada por el cuadrado de la relación de vueltas.

La figura 14.7, muestra el circuito equivalente del transformador, con referencia al primario, y la resistencia de carga reflejada.

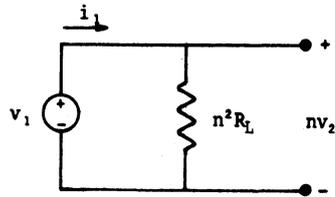


Figura 14.7 Circuito equivalente del transformador ideal con la resistencia de carga referida al primario.

#### Ejemplo 14.2

Dado el circuito de la figura 14.8, determine:

- la relación de vueltas del primario al secundario para una máxima transferencia de potencia,
- la corriente en el primario,
- la corriente en el secundario.
- el voltaje en las terminales del secundario.

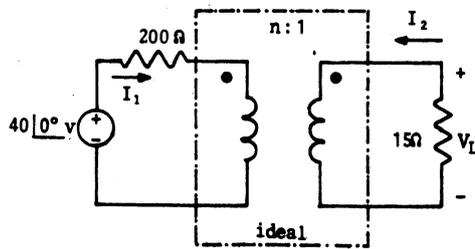


Figura 14.8

## Solución

- a) Para que haya máxima transferencia de potencia, la resistencia de la fuente de excitación debe ser igual a la resistencia de carga referida al primario. Por consiguiente, de la expresión:

$$R_f = R_e = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L$$

obtenemos la relación de vueltas:

$$n = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{R_f}{R_L}}$$

$$= \sqrt{\frac{200}{15}}$$

$$n = 3.65$$

- b) La corriente del primario se obtiene considerando la resistencia de carga referida al primario:

$$I_1 = \frac{V_f}{R_f + R_e}$$

$$= \frac{40 \angle 0^\circ}{200 + 200}$$

$$I_1 = 0.1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

- c) La corriente en el secundario se obtiene de la relación:

$$I_2 = -\frac{N_1}{N_2} I_1$$

$$= 3.65(0.1 \angle 0^\circ)$$

$$I_2 = -0.365 \angle 0^\circ \text{ A}$$

- d) El voltaje en las terminales del secundario es:

$$V_2 = -R_L I_2$$

$$= -15(-0.365 \angle 0^\circ)$$

$$V_2 = 5.475 \text{ V}$$

### 14.3 CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MODELO LINEAL DE UN TRANSFORMADOR

Enseguida se desarrollará un circuito equivalente del modelo lineal del transformador mostrado en la figura 14.1, que cumple las ecuaciones (14.1) y (14.2).

En la figura 14.9, se muestra un circuito con un transformador ideal en el que se postula:

$$n = k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (14.19)$$

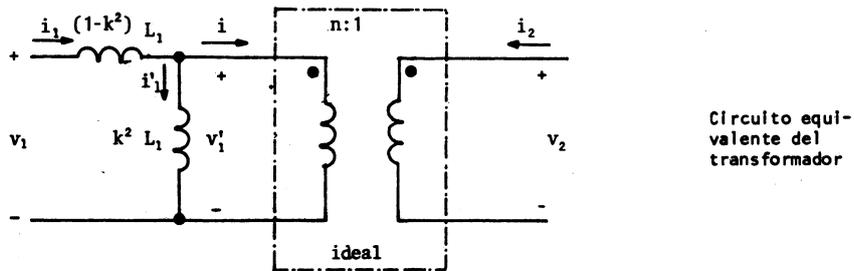


Figura 14.9 Circuito equivalente del transformador

Como se demostrará a continuación, este circuito es equivalente al mostrado en la figura 14.1.

Las ecuaciones (14.1) y (14.2) pueden ser expresadas en el dominio de la variable  $s$ , tomando la transformada de Laplace, de la siguiente manera:

$$V_1 = sL_1 I_1 + sM I_2 \quad (14.20)$$

$$V_2 = sM I_1 + sL_2 I_2 \quad (14.21)$$

Si se considera al transformador como un bipuerto, sus parámetros de impedancia en circuito abierto pueden obtenerse de las ecuaciones (14.20) y (14.21), según se vio en el módulo 10 de esta obra, quedando como se indica a continuación:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2 = 0} = sL_1 \quad (14.22)$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1 = 0} = sM \quad (14.23)$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2 = 0} = sM \quad (14.24)$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1 = 0} = sL_2 \quad (14.25)$$

Demostraremos ahora que el circuito de la figura 14.9, tiene parámetros de impedancia en circuito abierto iguales a los de las expresiones (14.22), (14.23), (14.24) y (14.25).

Se calculará primero  $Z_{11}$ , del circuito de la figura 14.9. Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al primario del circuito, se obtiene la siguiente ecuación en el dominio de  $s$ :

$$V_1 = (1 - k^2)L_1 s I_1 + V_1' \quad (14.26)$$

Por otra parte:

$$V_1' = k^2 L_1 s I_1'$$

$$V_1' = k^2 L_1 s (I_1 - I) \quad (14.27)$$

La corriente  $I$ , que entra al primario del transformador ideal, puede expresarse así:

$$I = -\frac{I_2}{n}$$

por lo que la ecuación (14.27) queda:

$$V_1' = k^2 L_1 s \left( I_1 + \frac{I_2}{n} \right) \quad (14.28)$$

sustituyendo la ecuación (14.28) en (14.26):

$$V_1 = (1 - k^2)L_1s I_1 + k^2L_1s(I_1 + \frac{I_2}{n})$$

Para calcular  $Z_{11}$  se deberá hacer  $I_2 = 0$ , con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} V_1 &= (1 - k^2)L_1s I_1 + k^2L_1s I_1 \\ &= (1 - k^2 + k^2)L_1s I_1 \\ V_1 &= L_1s I_1 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = L_1s$$

que coincide con la expresión (14.22).

Ahora se calculará el parámetro  $Z_{22}$  de la expresión (14.25). Para ello, aplicando la expresión (14.11) al transformador ideal de la figura 14.9, se obtiene la siguiente ecuación en el dominio de  $s$ :

$$\frac{V_1}{V_2} = n$$

o bien:

$$V_2 = \frac{V_1}{n} \quad (14.29)$$

Sustituyendo la ecuación (14.28) en (14.29) se tiene:

$$V_2 = \frac{k^2 L_1s}{n} (I_1 + \frac{I_2}{n}) \quad (14.30)$$

por otro lado, de la ecuación (14.3) puede despejarse  $k$ :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (14.31)$$

Ahora, elevando al cuadrado esta ecuación y sustituyéndola en (14.30):

$$V_2 = \frac{M^2 L_1 s}{n L_1 L_2} \left( I_1 + \frac{I_2}{n} \right)$$

$$V_2 = \frac{M^2 s}{n L_2} \left( I_1 + \frac{I_2}{n} \right) \quad (14.32)$$

Según la expresión (14.25), para calcular  $Z_{22}$  se deberá hacer  $I_1 = 0$ , por lo tanto:

$$V_2 = \frac{M^2 s}{n^2 L_2} I_2 \quad (14.33)$$

por otro lado, sustituyendo la ecuación (14.31) en (14.19),  $n$  queda como:

$$n = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

$$n = \frac{M}{L_2} \quad (14.34)$$

Ahora, si se eleva al cuadrado esta última expresión y se sustituye en (14.33), se obtiene:

$$V_2 = \frac{M^2 s}{\frac{M^2}{L_2^2} L_2} I_2$$

$$V_2 = s L_2 I_2$$

Por lo tanto:

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = s L_2$$

que también coincide con la expresión (14.25).

Finalmente, calcularemos  $Z_{21}$  haciendo uso de la expresión (14.24).

Por el teorema de reciprocidad se puede afirmar que el circuito de la figura 14.9 es recíproco y, por lo tanto,  $Z_{21} = Z_{12}$ .

<sup>12</sup> En la referencia 2 de la bibliografía de esta Unidad se enuncia y demuestra el teorema de reciprocidad.

Considerando que  $I_2 = 0$  en la ecuación (14.32), se obtiene:

$$V_2 = \frac{M^2 s}{n L_2} I_1 \quad (14.35)$$

sustituyendo ahora (14.34) en (14.35) se llega a:

$$V_2 = \frac{M^2 s}{L_2} \frac{1}{L_2} I_1$$

$$V_2 = M s I_1$$

de donde se obtiene:

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = M s$$

que coincide con la expresión (14.24), terminando así la demostración de la equivalencia del circuito de la figura 14.9 con el de la figura 14.1.

#### 14.4 FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL CIRCUITO EQUIVALENTE DEL TRANSFORMADOR

Si conectamos una fuente de excitación y una resistencia de carga al circuito equivalente del transformador obtenido en el inciso anterior, se tiene el circuito mostrado en la figura 14.10, donde las inductancias  $L_a$  y  $L_b$  están definidas por:

$$L_a = (1 - k^2)L_1 \quad (14.36)$$

$$L_b = k^2 L_1 \quad (14.37)$$

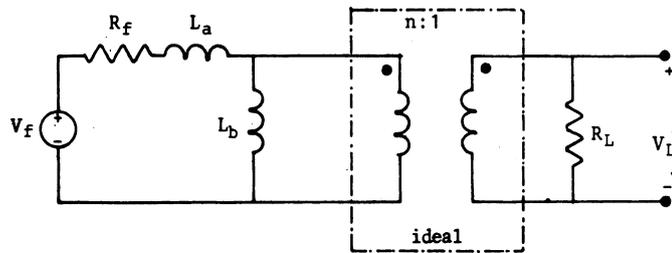


Figura 14.10 Circuito equivalente del transformador conectado a una fuente de excitación y a una resistencia de carga

Refiriendo la resistencia de carga  $R_L$  al lado del primario se obtiene el circuito de la figura 14.11, donde  $R_b$  está definida por:

$$R_b = n^2 R_L \quad (14.38)$$

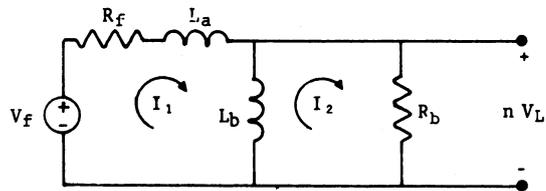


Figura 14.11 Circuito equivalente del transformador con la resistencia de carga referida al primario

A continuación obtendremos la función de transferencia del circuito de la figura 14.11. Para las corrientes de malla indicadas obtenemos las ecuaciones:

$$(R_f + L_a s + L_b s) I_1 - L_b s I_2 = V_f$$

$$- L_b s I_1 + (R_b + L_b s) I_2 = 0$$

De estas ecuaciones obtenemos  $I_2$  de la siguiente manera:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_f + L_a s + L_b s & V_f \\ -L_b s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_f + L_a s + L_b s & -L_b s \\ -L_b s & R_b + L_b s \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{L_b s V_f}{(R_f + L_a s + L_b s)(R_b + L_b s) - L_b^2 s^2}$$

multiplicando y factorizando se obtiene:.

$$I_2 = \frac{L_b s V_f}{L_a L_b s^2 + [R_b(L_a + L_b) + R_f L_b] s + R_f R_b}$$

y dividiendo entre  $L_a L_b$  se obtiene:

$$I_2 = \frac{\frac{1}{L_a} s V_f}{s^2 + \left( \frac{R_f + R_b}{L_a} + \frac{R_b}{L_b} \right) s + \frac{R_f R_b}{L_a L_b}} \quad (14.39)$$

Ahora bien, el voltaje en la resistencia de carga es:

$$\begin{aligned} nV_L &= R_b I_2 \\ &= n^2 R_L I_2 \end{aligned}$$

de donde:

$$V_L = n R_L I_2 \quad (14.40)$$

Sustituyendo la ecuación (14.39) en la ecuación (14.40), se obtiene la función de transferencia del circuito equivalente del transformador:

$$V_L = n R_L \left[ \frac{\frac{1}{L_a} s V_f}{s^2 + \left( \frac{R_f + R_b}{L_a} + \frac{R_b}{L_b} \right) s + \frac{R_f R_b}{L_a L_b}} \right]$$

por lo tanto:

$$\frac{V_L}{V_f} = \frac{\frac{n R_L}{L_a} s}{s^2 + \left( \frac{R_f + R_b}{L_a} + \frac{R_b}{L_b} \right) s + \frac{R_f R_b}{L_a L_b}} \quad (14.41)$$

Función de  
transferencia  
del circuito  
equivalente

### Ejemplo 14.3

Dado el transformador conectado a una fuente de excitación y a una resistencia de carga, mostrado en la figura 14.12, determine:

- el circuito equivalente,
- la función de transferencia del circuito equivalente:

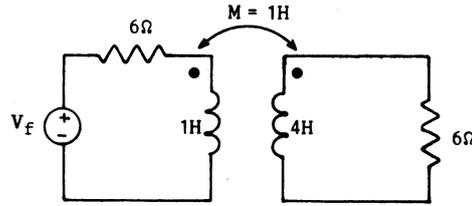


Figura 14.12

### Solución

- La constante \$k\$ para el circuito equivalente está dada por:

$$\begin{aligned} k &= \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 \times 4}} \\ k &= 0.5 \end{aligned}$$

por consiguiente las inductancias  $L_a$  y  $L_b$  son:

$$\begin{aligned} L_a &= (1 - k^2)L_1 \\ &= (1 - 0.5^2)1 \end{aligned}$$

$$L_a = 0.75 \text{ H}$$

$$\begin{aligned} L_b &= k^2 L_1 \\ &= 0.5^2(1) \end{aligned}$$

$$L_b = 0.25 \text{ H}$$

la constante  $n$  está dada por:

$$\begin{aligned} n &= k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \\ &= 0.5\sqrt{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$n = 0.25$$

El circuito equivalente que resulta se muestra en la figura 14.13.

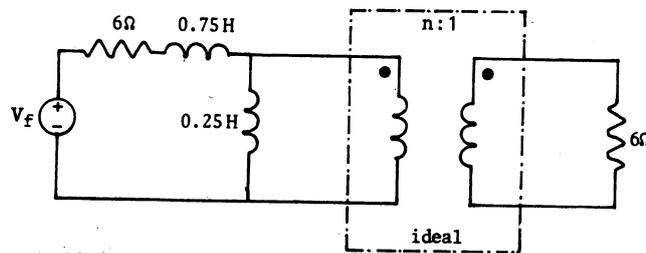


Figura 14.13

- b) Para obtener la función de transferencia referimos la resistencia de carga al lado primario, como se muestra en la figura 14.14.

$$\begin{aligned} R_b &= n^2 R_L \\ &= 0.25^2(6) \end{aligned}$$

$$R_b = 0.375 \Omega$$

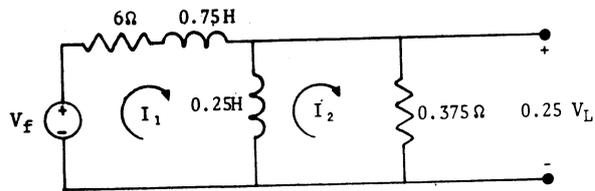


Figura 14.14

La primera ecuación de malla del circuito de la figura 14.14 está dada por:

$$(6 + 0.75 s + 0.25 s) I_1 - 0.25 s I_2 = V_f$$

$$(6 + s) I_1 - 0.25 s I_2 = V_f$$

y la segunda ecuación de malla es:

$$- 0.25 s I_1 + (0.375 + 0.25 s) I_2 = 0$$

resolviendo para  $I_2$  se obtiene:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 + s & V_f \\ - 0.25 s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 + s & - 0.25 s \\ - 0.25 s & 0.375 + 0.25 s \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = \frac{0.25 s V_f}{(6 + s)(0.375 + 0.25 s) - 0.062 s^2}$$

reduciendo los factores se obtiene:

$$I_2 = \frac{0.25 s V_f}{0.187 s^2 + 1.87 s + 2.25}$$

dividiendo entre 0.187 se obtiene:

$$I_2 = \frac{1.33 s V_f}{s^2 + 10 s + 12} \quad (a)$$

pero el voltaje en la resistencia de carga referida al primario es:

$$0.25 V_L = R_b I_2 = 0.25^2 R_L I_2$$

o

$$V_L = 1.5 I_2 \quad (b)$$

Sustituyendo la ecuación (a) en la ecuación (b) se determina la función de transferencia:

$$\frac{V_L}{V_f} = \frac{2 s}{s^2 + 10 s + 12}$$

observe que esta misma función de transferencia se obtuvo en el ejemplo 14.1 utilizando el modelo lineal del transformador.

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Para el transformador mostrado en la figura 14.15, con:

$$L_1 = 4 \text{ H}$$

$$L_2 = 3 \text{ H}$$

$$M = 2 \text{ H}$$

determine  $v_2$ , cuando:

a)  $i_1 = 5 \cos 6t \text{ A}$ ,  $i_2 = 0$

b)  $i_1 = 0$ ,  $i_2 = 3 \cos 6t \text{ A}$

c)  $i_1 = 5 \cos 6t \text{ A}$ ,  $i_2 = 3 \cos 6t \text{ A}$

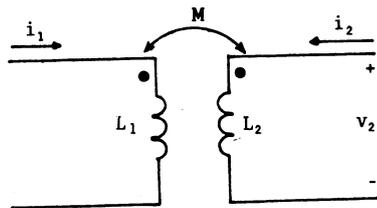


Figura 14.15

- a)  $v_2 =$  \_\_\_\_\_ V
- b)  $v_2 =$  \_\_\_\_\_ V
- c)  $v_2 =$  \_\_\_\_\_ V

2. Dado el circuito de la figura 14.16, determine:

- a) la función de transferencia  $\frac{V_L}{V_f}$ ,  
 b) dibuje el diagrama de polos y ceros.

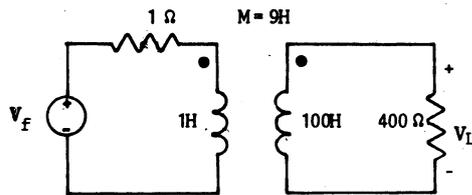


Figura 14.16

a)  $\frac{V_L}{V_f} = \underline{\hspace{2cm}}$

b)

3. Un transformador ideal se emplea para acoplar una resistencia de carga de  $50 \Omega$  a una fuente de excitación cuya impedancia es  $400 \angle 0^\circ \Omega$ . Si el devanado conectado a la fuente de excitación tiene 100 vueltas, determine el número de vueltas del secundario de manera que se transfiera una potencia máxima a la resistencia de carga:

$N_2 = \underline{\hspace{2cm}}$  vueltas

4. Un transformador ideal tiene la relación de vueltas 50/20. Determine la resistencia de entrada en las terminales del primario si una resistencia de  $6 \Omega$  se conecta al secundario de 20 vueltas.

$R = \underline{\hspace{2cm}}$   $\Omega$

5. Para el circuito mostrado en la figura 14.17:

- obtenga el circuito equivalente,
- determine la función de transferencia,
- dibuje el diagrama de polos y ceros.

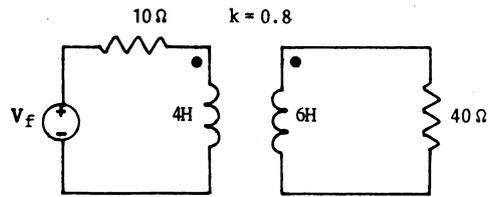


Figura 14.17

a)

b)

c)

## BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAFIA BASICA

1. CLARKE, KENNETH K; Y HESS, DONALD T.  
Communication Circuits: Analysis and Design  
Addison Wesley, E.U.A. 1971.
2. DESOER, CH. A.; KUH, E.S.  
Basic Circuit Theory.  
McGraw - Hill. Nueva York, 1969
3. HAYT, W.H.; KEMMERLY, J.E.  
Análisis de Circuitos en Ingeniería  
McGraw - Hill. México, 1980.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

4. HUBERT, CHARLES I.  
Electric Circuits AC/DC, An Integrated Approach.  
McGraw - Hill. Nueva York, 1982.
5. SKILLING, HUGH H.  
Circuitos en Ingeniería Eléctrica.  
CECSA, México, 1967.



## UNIDAD V LA SERIE DE FOURIER

### OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de esta unidad, el alumno:

Obtendrá la serie de Fourier para cualquier función periódica que satisfaga las condiciones de existencia. Determinará también la respuesta permanente de circuitos con funciones excitatrices periódicas utilizando la serie de Fourier.

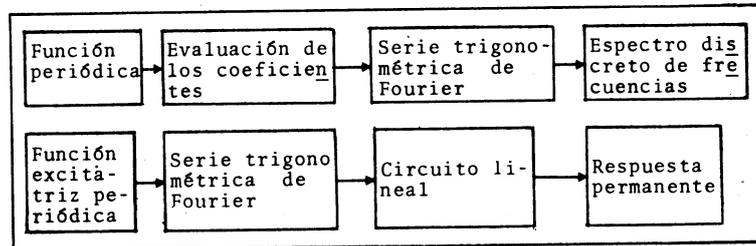
### INTRODUCCION

Las funciones senoidales desempeñan un papel muy importante en el análisis de sistemas lineales; así, se vio en la Unidad 1 que la respuesta permanente de un circuito lineal, a excitaciones senoidales, se determina fácilmente utilizando los conceptos de fasor e impedancia.

Sin embargo, ahora trataremos otro aspecto importante de las senoides. La mayoría de las funciones periódicas pueden expresarse como una suma de funciones senoidales de diferente frecuencia. Por lo tanto, podemos analizar cualquier función periódica en términos de sus componentes senoidales, y por superposición podemos determinar la respuesta de circuitos lineales a excitaciones periódicas generales, en términos de las respuestas parciales a cada una de las diferentes componentes de frecuencia de la excitación.

## MÓDULO 15. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LA SERIE DE FOURIER

## CUADRO SINOPTICO



## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Describirá las características de las funciones periódicas.
2. Calculará los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier.
3. Determinará la serie trigonométrica de Fourier de algunas funciones periódicas.
4. Graficará el espectro discreto de frecuencia de una función periódica.
5. Obtendrá la respuesta permanente de circuitos a los cuales se le han aplicado funciones excitatrices periódicas.

## 15.1 SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER

Una función que se repite idénticamente cada cierto intervalo de tiempo se conoce como función periódica. La figura 15.1 representa una función periódica que se repite cada 4 segundos; en otras palabras su período es de 4 segundos.

En general, una función periódica  $f(t)$  se define matemáticamente por la relación:

$$f(t) = f(t + nT)$$

en la cual  $T$  es el período y  $n$  un número natural.

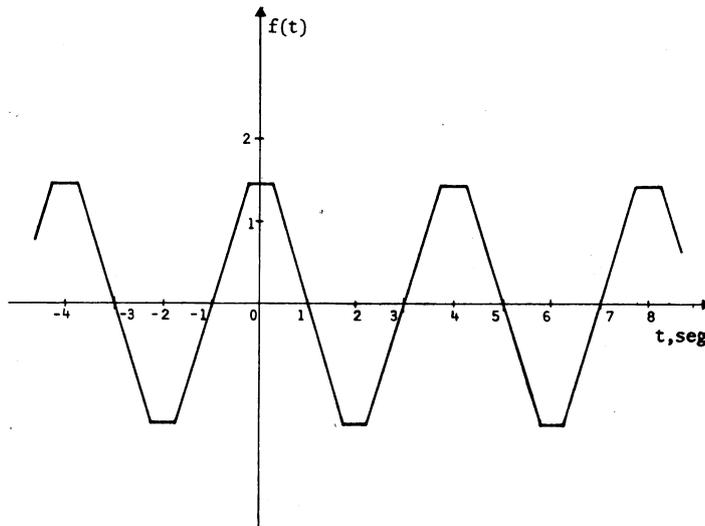


Figura 15.1 Función periódica

Si una función periódica  $f(t)$  satisface las siguientes condiciones:

1. El valor de la integral  $\int_{t_0}^{t_0 + T} |f(t)| dt$  es finito para cualquier  $t_0$ .
2. Tiene un número finito de discontinuidades en un período.
3. Tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.

Condiciones de existencia de la serie de Fourier

Entonces puede ser representada por la suma de funciones seno y coseno:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2 \omega_0 t + \dots \\ \dots + b_1 \text{ sen } \omega_0 t + b_2 \text{ sen } 2 \omega_0 t + \dots$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos (n\omega_0 t) + b_n \text{ sen}(n\omega_0 t) \right]$$

Forma trigonométrica de la serie de Fourier

(15.1)

donde:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ es la frecuencia fundamental de la función } f(t), \text{ y}$$

$a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son constantes que dependen de la función periódica  $f(t)$ .

La expresión 15.1, es la forma trigonométrica de la serie de Fourier para la función periódica  $f(t)$ . Los términos coseno y seno con coeficientes  $a_1$  y  $b_1$  constituyen la *componente fundamental* y tienen la misma frecuencia que  $f(t)$ ; los términos con coeficientes  $a_2$  y  $b_2$  dan origen a la *componente de segunda armónica*, con frecuencia igual al doble de la fundamental; los términos con coeficientes  $a_3$  y  $b_3$  forman la *tercera armónica* y así sucesivamente.

Componentes armónicas

## 15.2 EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE TRIGONOMETRICA DE FOURIER

Antes de calcular las constantes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  de la serie trigonométrica, se presentarán algunas propiedades de las funciones seno y coseno conocidas como *propiedades de ortogonalidad* de esas funciones. En las expresiones que veremos a continuación utilizaremos límites de integración desde 0 a T, pero cualquier intervalo que constituya un periodo completo es correcto.

Propiedades de ortogonalidad

Puesto que el valor promedio de una función senoidal durante un periodo es cero, tenemos:

$$\int_0^T \text{sen } n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (15.2)$$

$$\int_0^T \text{cos } n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (15.3)$$

A través del cálculo integral se pueden demostrar las siguientes igualdades:

$$\int_0^T \text{cos } k\omega_0 t \cdot \text{sen } n\omega_0 t \, dt = 0 \quad (15.4)$$

$$\int_0^T \text{sen } k\omega_0 t \cdot \text{sen } n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \frac{T}{2} & k = n \neq 0 \end{cases} \quad (15.5)$$

$$(15.5.a)$$

$$\int_0^T \text{cos } k\omega_0 t \cdot \text{cos } n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \frac{T}{2} & k = n \neq 0 \end{cases} \quad (15.6)$$

$$(15.6.a)$$

Ahora calcularemos las constantes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$ . Empecemos con  $a_0$ . Integrando los dos miembros de la serie de Fourier, ecuación (15.1), en un período completo, obtenemos:

$$\int_0^T f(t) dt = a_0 \int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos n\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin n\omega_0 t dt \quad (15.7)$$

Pero cada una de las integrales dentro de las sumatorias tiene la forma de las ecuaciones (15.2) y (15.3), por lo que la ecuación (15.7), se reduce a:

$$\int_0^T f(t) dt = a_0 T$$

o

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

(15.8) *Componente de corriente directa*

La constante  $a_0$  de la ecuación (15.8) es el valor promedio de  $f(t)$  durante un período y se le conoce como la *componente de corriente directa de  $f(t)$* .

Obtendremos ahora una expresión general para evaluar los coeficientes de los términos en coseno. Consideremos entonces el coeficiente  $a_k$ ; es decir, el coeficiente de  $\cos k\omega_0 t$ , donde  $k = 1, 2, \dots$ . Así, multiplicando los dos miembros de la ecuación (15.1) por  $\cos k\omega_0 t$ , e integrando en un período se obtiene:

$$\int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t dt = a_0 \int_0^T \cos k\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \cos k\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt \quad (15.9)$$

Observe en esta última expresión que, de acuerdo con las ecuaciones (15.3), (15.4) y (15.6.a), el único término diferente de cero es el segundo, cuando  $n = k$ . Por lo tanto, la ecuación (15.9) se reduce a:

$$\int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t \, dt = a_k \frac{T}{2} \quad \text{para } n = k$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \quad (15.10)$$

Puesto que la relación (15.10) se obtuvo para  $n = k$ , la podemos expresar como:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (15.11) \quad \begin{array}{l} \text{Coeficiente de} \\ \text{los términos en} \\ \text{coseno} \end{array}$$

Análogamente obtendremos el coeficiente  $b_k$  multiplicando los dos miembros de la ecuación (15.1) por  $\sin k\omega_0 t$  e integrando en un período. Así, tenemos:

$$\int_0^T f(t) \sin k\omega_0 t \, dt = a_0 \int_0^T \sin k\omega_0 t \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \sin k\omega_0 t \cos n\omega_0 t \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin k\omega_0 t \sin n\omega_0 t \, dt \quad (15.12)$$

Según las ecuaciones (15.2), (15.4) y (15.5.a), el tercer término del segundo miembro de la ecuación (15.12) es el único diferente de cero cuando  $n = k$ , por lo cual la ecuación (15.12) se reduce a:

$$\int_0^T f(t) \sin k\omega_0 t \, dt = b_k \frac{T}{2} \quad \text{para } n = k$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \quad (15.13)$$

como la ecuación (15.13) se determinó para  $n = k$ , establecemos entonces la relación:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \quad (15.14) \quad \begin{array}{l} \text{Coeficiente de} \\ \text{los términos en} \\ \text{seno} \end{array}$$

Las ecuaciones (15.8), (15.11) y (15.14) nos permiten obtener el valor de  $a_0$  y todos los valores de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de la serie trigonométrica de Fourier, de la ecuación (15.1).

#### Ejemplo 15.1

Para la función periódica representada en la figura 15.2, determine la serie trigonométrica de Fourier.

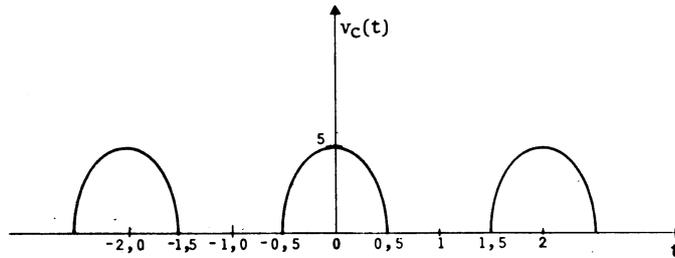


Figura 15.2

#### Solución

De la figura 15.2 observamos que el período es:

$$T = 2$$

por lo tanto, la frecuencia fundamental es:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2}$$

$$\omega_0 = \pi$$

La función  $v(t)$  es un coseno rectificado de amplitud 5 y frecuencia fundamental  $\pi$ . Por consiguiente la expresión analítica para la función  $v(t)$  en el período  $[-0.5, 1.5]$  es:

$$v(t) = \begin{cases} 5 \cos \pi t & -0.5 < t < 0.5 \\ 0 & 0.5 < t < 1.5 \end{cases}$$

Primero calcularemos la componente  $a_0$ .

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

sustituyendo el valor de  $T$  y la función  $v(t)$  se tiene:

$$a_0 = \frac{1}{2} \left[ \int_{-0.5}^{0.5} 5 \cos \pi t dt + \int_{0.5}^{1.5} (0) dt \right]$$

Resolviendo <sup>13</sup> las integrales se obtiene el valor de  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{5}{\pi}$$

Observe que se debe descomponer la integral en otras integrales, correspondiendo cada una de ellas a una de las funciones utilizadas para expresar  $v(t)$  en un período completo.

El coeficiente de un término coseno está dado por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos n\omega_0 t dt$$

sustituyendo el valor de  $T$ , de  $\omega_0$  y  $v(t)$  en esta última expresión, se tiene:

$$a_n = 5 \int_{-0.5}^{0.5} \cos \pi t \cos n\pi t dt$$

<sup>13</sup> En el apéndice C aparece una relación de las integrales más usuales.

Resolviendo la integral anterior se obtiene, para  $n = 1$ :

$$a_1 = \frac{5}{2}$$

y cuando  $n \neq 1$  se tiene la expresión:

$$a_n = \frac{10}{\pi} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{1 - n^2}$$

de donde obtenemos:

$$a_2 = \frac{10}{3\pi}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{10}{15\pi}$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = -\frac{10}{35\pi}$$

Los coeficientes  $b_n$  están dados por:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$$

$$b_n = \frac{5}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \cos \pi t \operatorname{sen} n t \, dt$$

Resolviendo esta integral, se tiene:

$$b_n = 0 \text{ para todo valor de } n$$

De acuerdo a la constante  $a_0$  y a los coeficientes  $a_n$  que hemos calculado, la serie de Fourier es:

$$v(t) = \frac{5}{\pi} + \frac{5}{2} \cos \pi t + \frac{10}{3\pi} \cos 2\pi t - \frac{10}{15\pi} \cos 4\pi t + \frac{10}{35\pi} \cos 6\pi t + \dots$$

### 15.3 FORMA EQUIVALENTE DE LA SERIE TRIGONOMETRICA Y ESPECTRO DISCRETO DE FRECUENCIA

La serie trigonométrica de Fourier (ecuación 15.1) puede ser expresada en una forma diferente cuya utilidad veremos enseguida.

Partiendo de la expresión (15.1):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right] \quad (15.1)$$

es posible relacionar los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  mediante un triángulo mostrado en la figura (15.3).

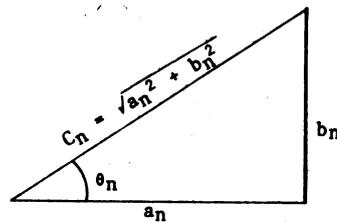


Figura 15.3

Entonces, podemos expresar la ecuación (15.1) de la siguiente manera:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \left[ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cdot \left[ \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_0 t) \right]$$

(15.15)

De la figura 15.3, observe que:

$$\cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad (15.16)$$

$$\operatorname{sen} \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad (15.17)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (15.18)$$

$$\theta_n = \operatorname{ang} \tan \frac{b_n}{a_n} \quad (15.19)$$

Sustituyendo ahora (15.16) y (15.17) en (15.15), se obtiene:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[ \cos \theta_n \cos(n\omega_0 t) + \operatorname{sen} \theta_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \right] \quad (15.20)$$

si se aplica la identidad trigonométrica:

$$\cos(A - B) = \cos B \cos A + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A$$

a la ecuación (15.20); ésta se reduce a:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad (15.21)$$

Esta última ecuación nos permite expresar una función periódica  $f(t)$  como un valor promedio ( $a_0$ ) más una suma de componentes armónicos cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental  $\omega_0$ .

La amplitud y el ángulo de fase de cada una de las componentes están dados por las ecuaciones (15.18) y (15.19), respectivamente.

Si el valor absoluto de  $C_n$  se grafica contra  $\omega$ , se obtendrá el llamado *espectro de frecuencias* de la función  $f(t)$ . Debido a que este espectro está formado por valores discretos de frecuencia de las componentes armónicas senoidales, también se le llama *espectro discreto de frecuencias*.<sup>14</sup>

Espectro discreto de frecuencia

Para obtener el espectro discreto de frecuencias, determine primero los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de la serie trigonométrica de Fourier. Luego, para cada valor de  $n$ , calcule su correspondiente valor  $C_n$ . Después grafique el valor absoluto de  $C_n$  contra el correspondiente valor  $n\omega_0$ .

<sup>14</sup>El término espectro de líneas es usado con frecuencia por algunos autores.

## Ejemplo 15.2

Para la señal representada en la figura 15.4:

- obtenga la serie trigonométrica de Fourier,
- dibuje el espectro discreto de líneas.

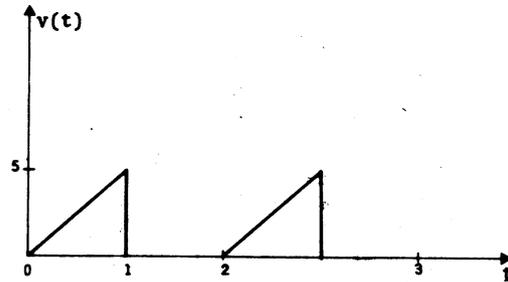


Figura 15.4

## Solución

- El período  $T$  y la frecuencia fundamental se obtienen de la figura 15.4, y son:

$$T = 2$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2}$$

$$\omega_0 = \pi$$

La expresión analítica, durante un período, para la señal es:

$$v(t) = \begin{cases} 5t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

La componente  $a_0$  y los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se obtienen de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{5}{2} \int_0^1 t \, dt$$

$$a_0 = \frac{5}{4}$$

Los coeficientes  $a_n$  están dados por:

$$a_n = 5 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt$$

integrando se obtiene:

$$a_n = \begin{cases} -\frac{10}{(n\pi)^2} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Los coeficientes  $b_n$  se obtienen a partir de:

$$b_n = 5 \int_0^1 t \sin n\pi t \, dt$$

integrando se tiene:

$$b_n = -\frac{5}{n\pi} \cos n\pi \quad n \neq 0$$

Note que los valores de  $\cos n\pi$  son alternadamente -1 y 1, por lo que esta expresión puede escribirse como:

$$b_n = -\frac{5}{n\pi} (-1)^n \quad n \neq 0$$

De los coeficientes que hemos calculado, obtenemos la serie de Fourier:

$$v(t) = \frac{5}{4} - \frac{10}{\pi^2} \cos \pi t - \frac{10}{(3\pi)^2} \cos 3\pi t - \frac{10}{(5\pi)^2} \cos 5\pi t - \dots \\ + \frac{5}{\pi} \sin \pi t - \frac{5}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{5}{3\pi} \sin 3\pi t \dots$$

- b) Las amplitudes de las armónicas pares vienen dadas directamente por los coeficientes  $b_n$ , puesto que no hay términos coseno pares. Las amplitudes de las armónicas impares se calculan utilizando la expresión:

$$|C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Así, tenemos que:

$$|C_1| = \sqrt{\left(\frac{10}{\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{5}{\pi}\right)^2} = 1.9$$

$$|C_2| = \frac{5}{\pi} = 0.8$$

$$|C_3| = \sqrt{\left(\frac{10}{9\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3\pi}\right)^2} = 0.5$$

El espectro discreto de líneas se muestra en la figura 15.5

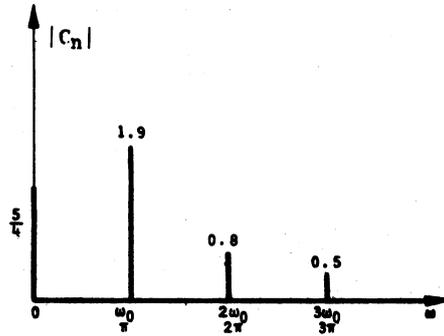


Figura 15.5

Ejemplo 15.3

Para la señal representada en la figura 15.6:

- determine su serie trigonométrica de Fourier,
- obtenga su espectro discreto de frecuencias.

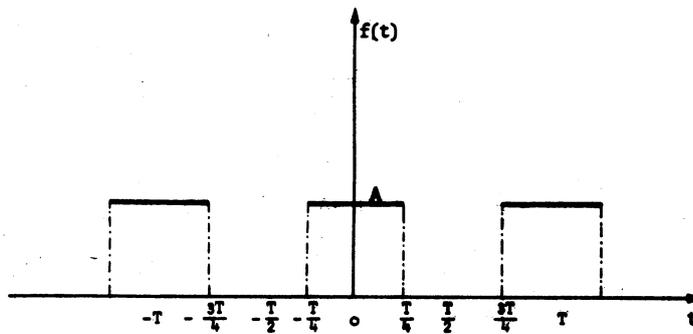


Figura 15.6

Solución

a) Para el intervalo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$  la función queda definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{T}{4} \\ A & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ 0 & \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Calculemos ahora los coeficientes de la serie:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A dt = \frac{A}{T} \left[ t \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{A}{T} \left( \frac{T}{4} + \frac{T}{4} \right) = \frac{A}{2}$$

$$a_0 = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \cos n\omega_0 t dt$$

$$a_n = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left[ \sin n\omega_0 t \right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$a_n = \frac{2A}{Tn\omega_0} \left[ \sin(n\omega_0 \frac{T}{4}) - \sin(-n\omega_0 \frac{T}{4}) \right]$$

como:

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

se tiene que:

$$a_n = \frac{2A}{Tn \frac{2\pi}{T}} \left[ 2 \sin n \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} \right]$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{2A}{n\pi} & \text{para } n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{2A}{n\pi} & \text{para } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

por otro lado:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \\
 &= \frac{-2A}{Tn\omega_0} \left[ \cos n\omega_0 t \right]_{-T/4}^{T/4} \\
 &= \frac{-2A}{Tn\omega_0} \left[ \cos \left( n\omega_0 \frac{T}{4} \right) - \cos \left( -n\omega_0 \frac{T}{4} \right) \right]
 \end{aligned}$$

como:

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

la expresión dentro de los paréntesis vale cero y:

$$b_n = 0 \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

De lo anterior se concluye que:

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left( \cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right)$$

- b) Debido a que los coeficientes de los términos en se no son cero, las amplitudes de las armónicas están dadas por los valores de los coeficientes  $a_n$ . Por lo tanto, el espectro de líneas de la señal dada se muestra en la figura 15.7

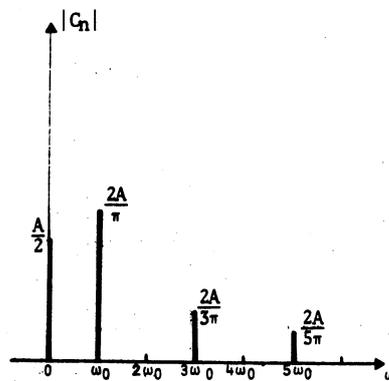


Figura 15.7

#### 15.4 RESPUESTA PERMANENTE DE CIRCUITOS LINEALES A FUNCIONES EXCITATRICES PERIODICAS

Por medio de la serie de Fourier puede expresarse una función periódica como una suma de funciones senoidales; por lo tanto, es posible aplicar una función periódica excitatriz a un circuito lineal y obtener la respuesta permanente.

La respuesta debida a cada una de las componentes senoidales se puede obtener empleando el método de fasores, visto en la primera unidad de esta obra. Así, empleando el principio de superposición, se obtendrá la respuesta total del circuito sumando las respuestas parciales.

##### Ejemplo 15.4

Determine la respuesta permanente del circuito representado en la figura 15.8 si se le aplica la función excitatriz periódica de la figura 15.9.

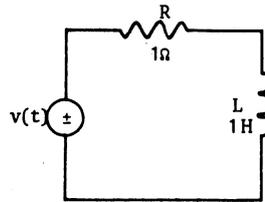


Figura 15.8

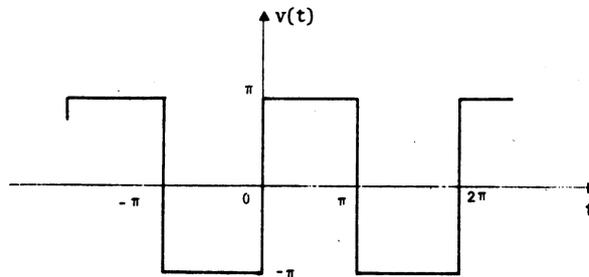


Figura 15.9

## Solución

Primero se determinará la serie de Fourier de la función periódica. Así, de la figura 15.9 se obtiene:

$$T = 2\pi$$

$$\text{y } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Para el período  $[-\pi, \pi]$  tenemos:

$$v(t) = \begin{cases} -\pi & -\pi < t < 0 \\ \pi & 0 < t < \pi \end{cases}$$

La constante  $a_0$  y los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se obtienen a continuación:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-\pi) dt + \int_0^{\pi} \pi dt \right]$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-\pi) \cos nt dt + \int_0^{\pi} \pi \cos nt dt \right]$$

$$= - \int_0^{\pi} \cos nt dt + \int_0^{\pi} \cos nt dt$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(t) \operatorname{sen} nt dt$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-\pi) \operatorname{sen} nt \, dt + \int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen} nt \, dt \right] \\
 &= \frac{1}{n} (2 - 2 \cos n\pi) \\
 b_n &= \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{si } n \text{ impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier para la función excitatriz es:

$$v(t) = 4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} nt$$

Hallaremos a continuación la respuesta del circuito utilizando la  $n$ -ésima armónica. Así, tenemos:

$$v_n(t) = \frac{4}{n} \operatorname{sen} nt$$

y el fasor correspondiente es:

$$V_n = \frac{4}{n} \angle -90^\circ$$

La impedancia del circuito a la frecuencia de la  $n$ -ésima armónica es:

$$Z_n = R + j\omega nL$$

$$Z_n = 1 + j(n)(1)$$

$$Z_n = \sqrt{1 + n^2} \angle \operatorname{ang} \operatorname{tg}(n)$$

por lo que la componente de corriente a la  $n$ -ésima armónica es:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{V_n}{Z_n} \\
 &= \frac{\frac{4}{n} \angle -90^\circ}{\sqrt{1 + n^2} \angle \operatorname{ang} \operatorname{tg}(n)} \\
 I_n &= \frac{4}{n\sqrt{1 + n^2}} \angle -90^\circ - \operatorname{ang} \operatorname{tg}(n)
 \end{aligned}$$

y en el dominio del tiempo tenemos:

$$i_n(t) = \frac{4}{n\sqrt{1+n^2}} \cos [nt - 90^\circ - \text{ang tg } (n)]$$

En consecuencia, la respuesta del circuito, expresada en su serie de Fourier, es:

$$i(t) = 4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+n^2}} \cos [nt - 90^\circ - \text{ang tg } (n)]$$

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. En cada una de las preguntas siguientes aparecen cuatro posibles respuestas. Sólo una de ellas es la correcta, indíquela colocando una cruz en el paréntesis correspondiente.

1. La expresión matemática que define a una función periódica es:

a.  $f(t) = f(t' + T)$  ( )

b.  $f(t) = f(t + t')$  ( )

c.  $f(t) = f(t + nT)$  ( )

d.  $f(t) = f(t + T)$  ( )

2. La frecuencia fundamental  $\omega_0$  está relacionada con el período T mediante la expresión:

a.  $\omega_0 = \frac{T}{2\pi}$  ( )

b.  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  ( )

c.  $\omega_0 = 2\pi T$  ( )

d.  $\omega_0 = 2\pi fT$  ( )

3. Una componente armónica está formada por:

a. un término coseno, ( )

b. un término seno,, ( )

c. un término constante, ( )

d. un término seno y un término coseno ( )

4. La frecuencia de la tercera componente armónica es:

a. dos veces la frecuencia fundamental ( )

b. tres veces la frecuencia fundamental ( )

c. seis veces la frecuencia fundamental ( )

d. un tercio de la frecuencia fundamental ( )

5. Una característica de la componente fundamental es que su período:
- a. es  $\frac{1}{2}$  del de la función periódica, ( )
  - b. igual al de la función periódica, ( )
  - c. dos veces el de la función periódica, ( )
  - d. cuatro veces el de la función periódica. ( )

II. A continuación se presenta un conjunto de problemas. Resuélvalos y escriba la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Para la señal de voltaje representada en la figura 15.10:
- a) determine la serie trigonométrica de Fourier,
  - b) dibuje el espectro discreto de frecuencia:

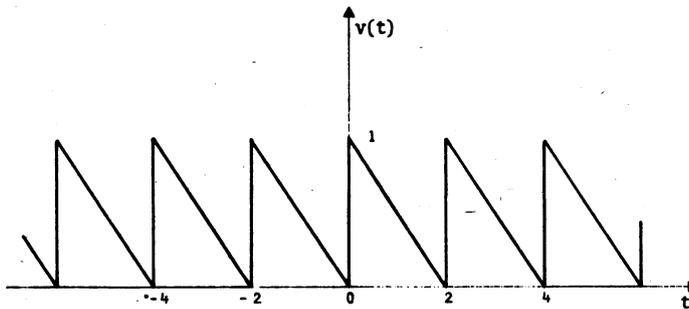


Figura 15.10

a)

b)

2. Determine la serie trigonométrica de Fourier para la señal de corriente mostrada en la figura 15.11.

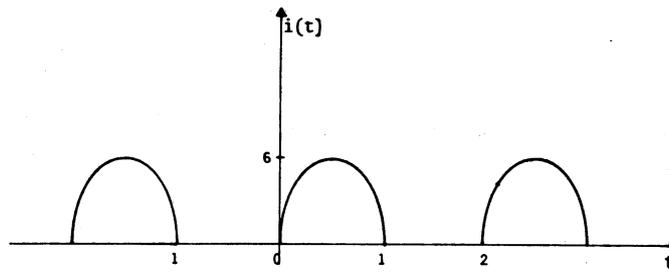


Figura 15.11

3. Si al circuito de la figura 15.12 se le aplica la señal de voltaje representada en la figura 15.13:
- trabajando en el dominio de la frecuencia, determine la corriente de estado permanente para la  $n$ -ésima componente armónica,
  - expresé la corriente  $i(t)$  como una serie trigonométrica de Fourier.

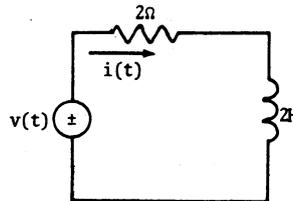


Figura 15.12

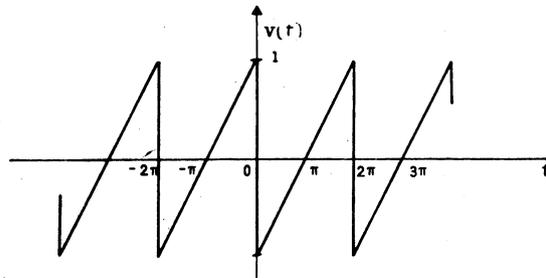


Figura 15.13

a)

b)

4. Exprese como una serie trigonométrica de Fourier el voltaje en estado permanente del circuito de la figura 15.14 al que le ha sido aplicada la señal de corriente mostrada en la figura 15.15.

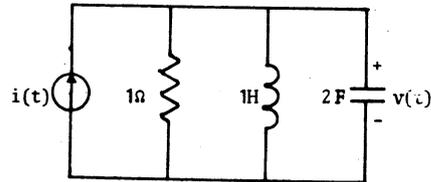


Figura 15.14

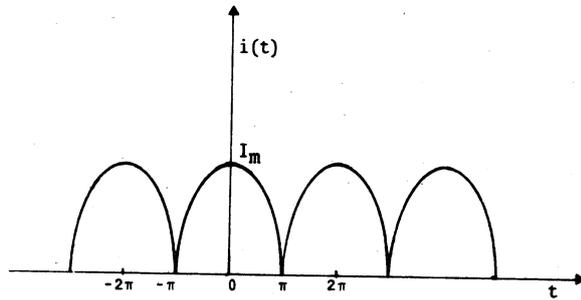
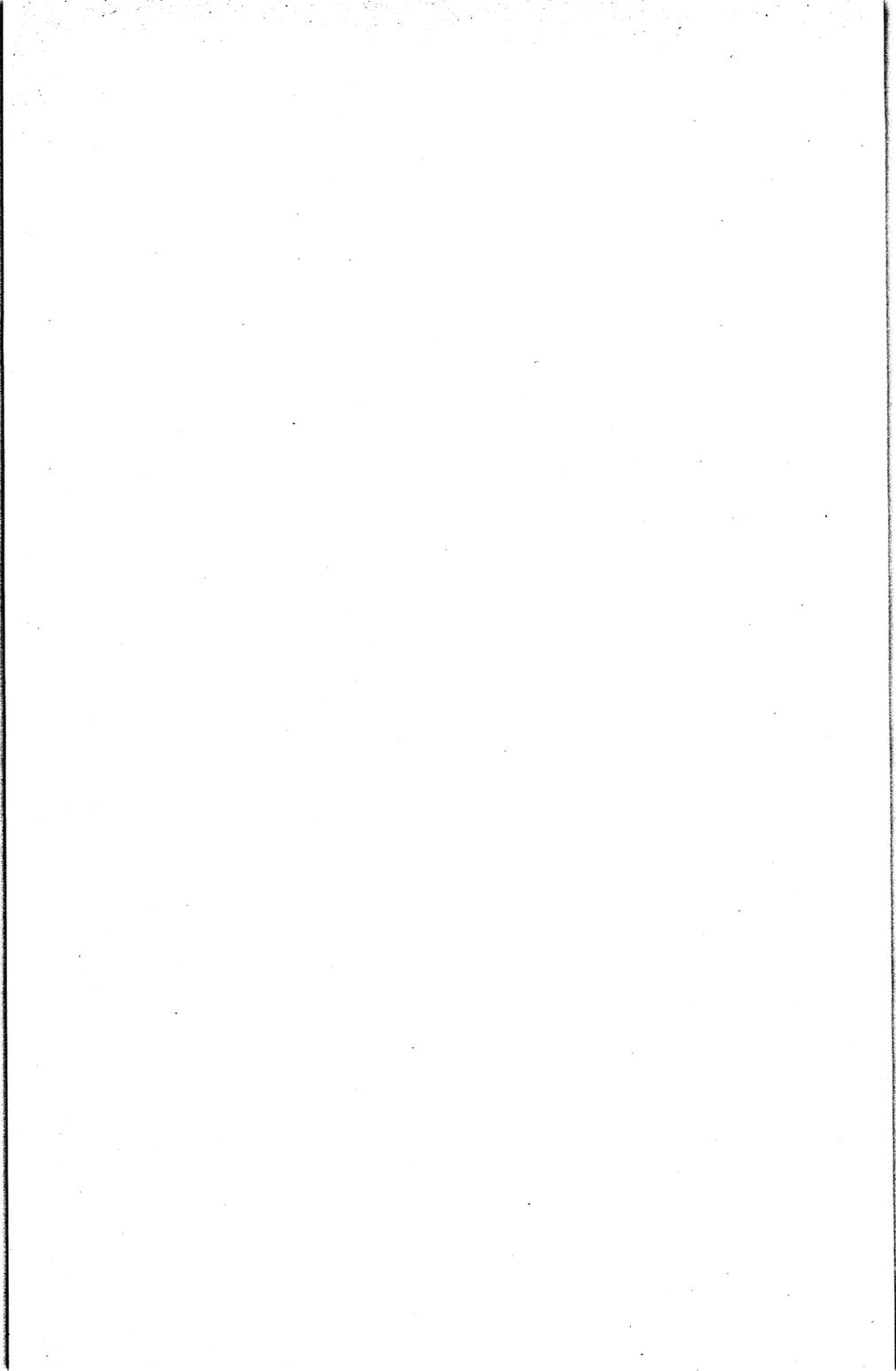
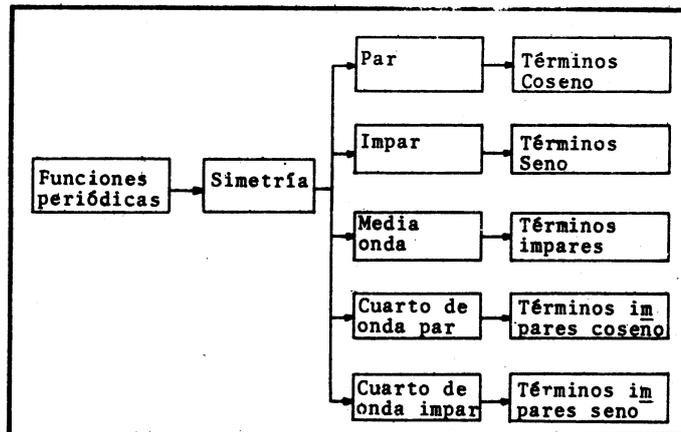


Figura 15.15



## MÓDULO 16. SIMETRÍA DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS

## CUADRO SINOPTICO



## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Identificará el tipo de simetría que tenga una función periódica dada.
2. Determinará el tipo de términos que tiene la serie de Fourier de una función dada, considerando sus condiciones de simetría.
3. Calculará los coeficientes de la serie de Fourier de una función dada, utilizando sus propiedades de simetría.

## 16.1 SIMETRÍA PAR E IMPAR

Consideremos ahora el tipo de simetría que puede tener una función periódica.

Se dice que una función  $f(t)$  tiene simetría par si:

Simetría par

$$f(t) = f(-t)$$

Funciones tales como  $t^2$ ,  $\cos t$  y una función constante tienen simetría par.

Las funciones que se muestran en las figuras 16.1 y 16.2 poseen simetría par. Este tipo de simetría se puede reconocer gráficamente pues existe simetría con respecto al eje  $f(t)$ . Si en la figura 16.1 se plegara la gráfica en el eje  $f(t)$ , las partes correspondientes al tiempo positivo y negativo coincidirían una sobre otra. Esto mismo se puede hacer con la función de la figura 16.2

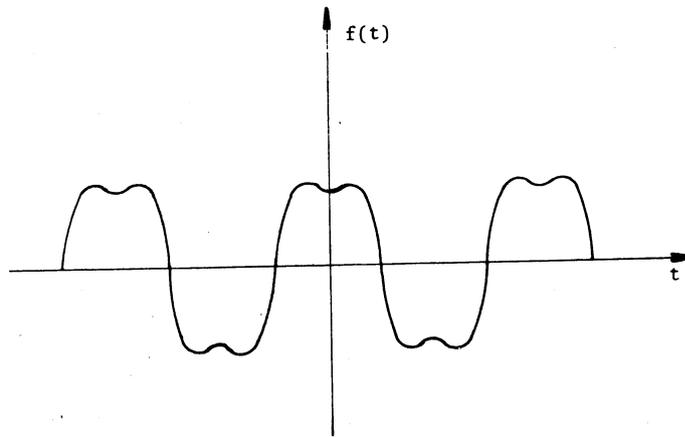


Figura 16.1 Función con simetría par

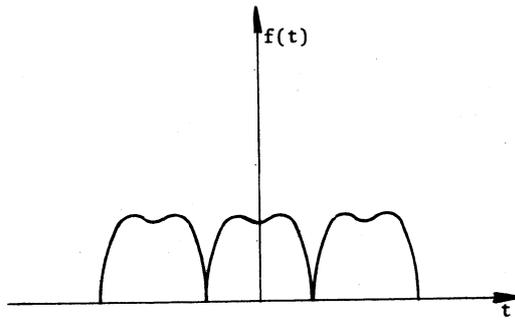


Figura 16.2 Función par

Otro tipo de simetría que presentan las funciones es la simetría impar.

Se dice que una función  $f(t)$  tiene simetría impar si: Simetría impar

$$f(t) = -f(-t)$$

La función representada en la figura 16.3 posee simetría impar.

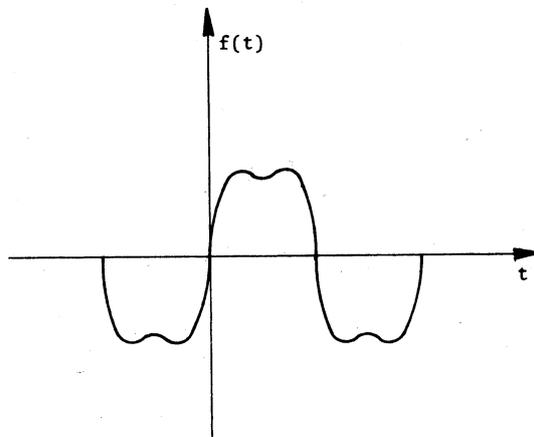


Figura 16.3 Función impar

Note que la gráfica de esta función impar ubicada en la parte negativa del eje  $t$  ( $-t$ ) tiene la misma forma que la ubicada en la parte positiva ( $t$ ), sólo que de manera invertida.

Este tipo de funciones se conocen como antisimétricas.

A continuación se presentan algunas propiedades de funciones que tienen simetría<sup>15</sup> par e impar:

1. El producto de dos funciones pares es una función par. Propiedades de las funciones con simetría par e impar
2. El producto de dos funciones impares es una función par.
3. El producto de una función par con una función impar da como resultado una función impar.
4. Si  $f(t)$  es función par en el intervalo  $[-a, a]$ , su integral se obtiene integrando en medio intervalo y multiplicando por 2; esto es:

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

5. Si  $f(t)$  es función impar en el intervalo  $[-a, a]$ , su integral vale cero; es decir:

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

6. Toda función puede expresarse como la suma de una función par y una función impar.

Cuando una función tiene simetría es posible saber, antes de realizar algún cálculo, qué términos contendrá la serie de Fourier; además, las expresiones de los coeficientes de esos términos pueden simplificarse.

Veamos ahora, como la simetría par afecta a los coeficientes de la serie de Fourier.

Si se tiene una función par  $f(t)$ , entonces los coeficientes  $b_n$  están dados por:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt$$

<sup>15</sup>En adelante se obviará el término simetría, para hablar simplemente de función par y función impar.

$$b_n = 0$$

donde el integrando  $f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t$  es una función impar (de acuerdo a la propiedad 3) y por consiguiente la integral vale cero (de acuerdo a la propiedad 5), lo cual significa que no se tienen términos seno en la serie de Fourier.

Con respecto a la expresión para los coeficientes  $a_n$ , se tiene:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

esta última expresión se obtiene en virtud de que el integrando  $f(t) \cos n\omega_0 t$  es una función par (propiedad 2), y por consiguiente se integra en medio período y se multiplica por 2 de acuerdo a la propiedad 4.

En consecuencia, la serie trigonométrica de Fourier de una función par contiene solamente términos coseno, y puede tener o no el término constante  $a_0$  lo cual depende del valor promedio de la función. Así, la expresión de la serie de Fourier para funciones pares es:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad (16.1)$$

Serie de Fourier para una función par

donde:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt \quad (16.2)$$

y

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (16.3)$$

Observe que en esta expresión se integra solamente en medio período.

Consideremos ahora los coeficientes para una función impar  $f(t)$ :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_0 = 0$$

Puesto que el valor promedio de una función impar es cero, entonces:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$a_n = 0$$

ya que el integrando es una función impar.

Los valores de  $b_n$  se obtienen integrando solamente en medio periodo:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sen n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sen n\omega_0 t dt$$

Por consiguiente, la serie de Fourier para una función impar  $f(t)$  no contiene el término constante  $a_0$  ni términos en coseno, es decir, sólo contiene elementos en seno. En consecuencia, la serie de Fourier para una función impar, está dada por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen n\omega_0 t$$

(16.4) Serie de Fourier para una función impar

donde:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sen n\omega_0 t dt$$

(16.5)

## Ejemplo 16.1

Determine, considerando su simetría, la serie de Fourier para la función representada en la figura 16.4.

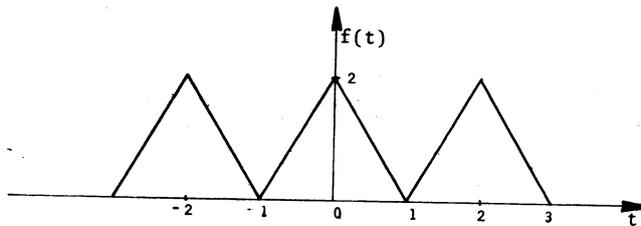


Figura 16.4

## Solución

La función tiene simetría par y su período y frecuencia fundamental son:

$$T = 2$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

la expresión analítica para la función en el intervalo  $-1 < t < 1$  es:

$$f(t) = \begin{cases} 2 + 2t & -1 < t < 0 \\ 2 - 2t & 0 < t < 1 \end{cases}$$

la constante  $a_0$  y el coeficiente  $a_n$  se obtienen de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^0 (2 + 2t) dt + \int_0^1 (2 - 2t) dt \right]$$

$$a_0 = 1$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$a_n = \frac{4}{2} \int_0^1 (2 - 2t) \cos n\pi t dt$$

realizando la integral se obtiene:

$$a_n = \begin{cases} \frac{8}{(n\pi)^2} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

en consecuencia la serie trigonométrica está dada por:

$$f(t) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{8}{9\pi^2} \cos 3\pi t + \frac{8}{25\pi^2} \cos 5\pi t + \dots$$

#### Ejemplo 16.2

Determine la serie trigonométrica de Fourier para la función representada en la figura 16.5. Considere la simetría de la función para obtener los coeficientes de la serie.

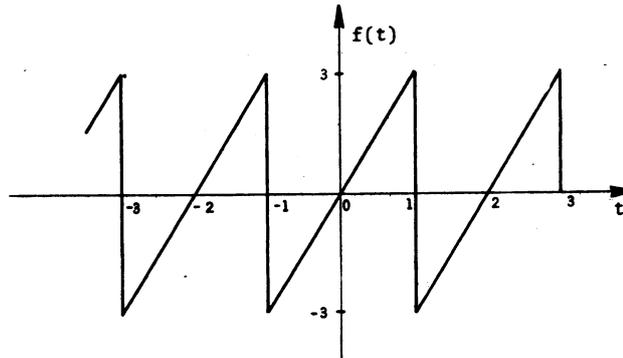


Figura 16.5

#### Solución

El período y la frecuencia fundamental para la función de la figura 16.5 son:

$$T = 2$$

$$\omega_0 = \pi$$

La función está definida, en el semiperíodo  $0 < t < 1$ , por:

$$f(t) = 3t \quad 0 < t < 1$$

Como la función tiene simetría impar sólo contendrá términos seno, y el coeficiente  $b_n$  se calculará integrando en un semiperíodo. Así, se tiene:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$$

$$b_n = \frac{4}{2} \int_0^1 3t \operatorname{sen} n\pi t \, dt$$

Integrando por partes se obtiene:

$$b_n = \frac{-6}{n\pi} \cos n\pi$$

o bien:

$$b_n = \frac{-6}{n\pi} (-1)^n$$

por consiguiente la serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{6}{\pi} \operatorname{sen} \pi t - \frac{6}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + \frac{6}{3\pi} \operatorname{sen} 3\pi t - \frac{6}{4\pi} \operatorname{sen} 4\pi t + \dots$$

## 16.2 SIMETRÍA DE MEDIA ONDA

Se dice que una función periódica  $f(t)$  con período  $T$ , tiene simetría de media onda si satisface la condición:

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (16.6) \quad \text{Simetría de media onda}$$

Exceptuando un cambio de signo cada semiciclo es igual que los semiciclos adyacentes.

En la figura 16.6 se muestra una función que tiene simetría de media onda. Observe que el semiciclo negativo de la función es el reflejo del semiciclo positivo adelantado medio período.

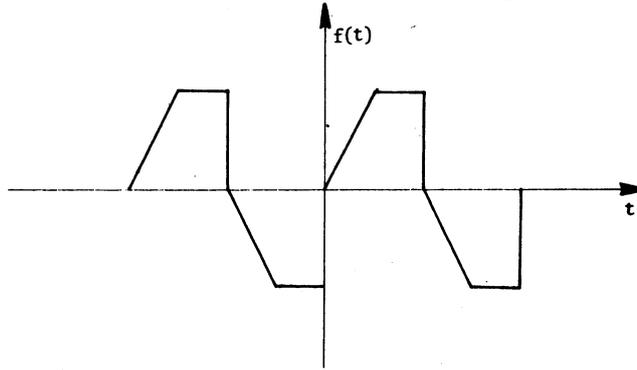


Figura 16.6 Gráfica de una función con simetría de media onda

Cuando una función periódica tiene únicamente simetría de media onda, su serie trigonométrica de Fourier contendrá solamente armónicas impares coseno y seno, como se demostrará a continuación.

Sea  $f(t)$  una función con simetría de media onda, es decir cumple con la condición (16.6). Determinaremos a continuación el coeficiente  $a_n$  partiendo de la expresión:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

descomponiendo esta expresión, tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

Efectuaremos ahora el cambio de variable  $t$  por  $t + \frac{T}{2}$ . Esto implica un cambio en los límites de integración, por lo tanto:

$$a_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos\left[n\omega_0 \left(t + \frac{T}{2}\right)\right] dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t + \frac{T}{2}\right) \left[ \cos(n\omega_0 t) \cos n\pi - \sin(n\omega_0 t) \sin n\pi \right] dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right\}$$

Debido a que  $\sin n\pi = 0$ , la expresión anterior se reduce a:

$$a_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} f\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos(n\omega_0 t) \cos n\pi dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right\}$$

de la expresión:

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (16.6)$$

tenemos:

$$a_n = \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} -f(t) \cos n\pi \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right\}$$

como  $\cos n\pi = (-1)^n$ , entonces:

$$a_n = (1 - (-1)^n) \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

por lo tanto:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

Efectuando un desarrollo similar para  $b_n$ , se obtiene:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

Entonces, la serie trigonométrica para una función con simetría de media onda tendrá la forma:

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad (16.7)$$

Serie de Fourier para una función con simetría de media onda

donde:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (16.8)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t dt \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (16.9)$$

Observe que los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se obtendrán integrando en la mitad del periodo y multiplicando por 2, además,  $a_0 = 0$ .

### Ejemplo 16.3

Determine la serie trigonométrica de Fourier para la función representada en la figura 16.7.

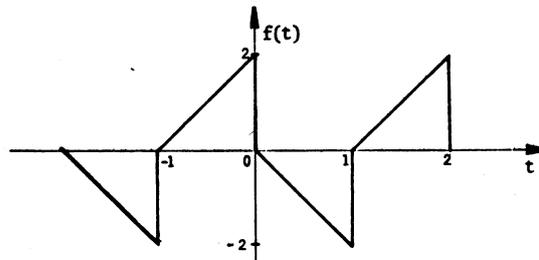


Figura 16.7

Solución

El periodo y la frecuencia fundamental son:

$$T = 2$$

$$\omega_0 = \pi$$

y la función está definida en el intervalo  $0 < t < 1$  por:

$$f(t) = -2t \quad 0 < t < 1$$

como la función tiene simetría de media onda, la serie trigonométrica estará formada solamente por armónicas im pares coseno y seno.

Los coeficientes se obtienen, para  $n$  impar, de la siguiente manera:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

$$a_n = -4 \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt$$

integrando por partes se obtiene:

$$a_n = \frac{8}{(n\pi)^2} \quad n \text{ impar}$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sen n\omega_0 t \, dt$$

$$b_n = -4 \int_0^1 t \sen n\pi t \, dt$$

Integrando por partes nuevamente se obtiene, para  $n$  impar:

$$b_n = \frac{4}{n\pi} \cos n\pi$$

o bien:

$$b_n = \frac{4(-1)^n}{n\pi}$$

así, la serie de Fourier está dada por:

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{8}{9\pi^2} \cos 3\pi t + \frac{8}{25\pi^2} \cos 5\pi t + \dots$$

$$- \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} \pi t - \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} 3\pi t - \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen} 5\pi t - \dots$$

### 16.3 SIMETRÍA DE CUARTO DE ONDA PAR E IMPAR

Si una función periódica  $f(t)$  tiene simetría de media onda y simetría par se dice que esa función  $f(t)$  tiene simetría de cuarto de onda par.

Simetría de  
cuarto de onda  
par

La figura 16.8 muestra una función  $f(t)$  que posee simetría de cuarto de onda par.

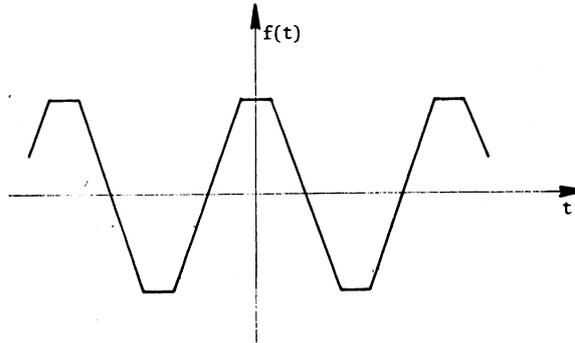


Figura 16.8 Gráfica de una función periódica con simetría de cuarto de onda par

La serie trigonométrica de Fourier para una función  $f(t)$  con simetría de cuarto de onda par contiene únicamente armónicas impares coseno. Esto es:

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \quad (16.10)$$

Serie de Fourier para una función con simetría de cuarto de onda par

donde:

$$a_n = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (16.11)$$

y se obtiene integrando en un cuarto de periodo.

Cuando una función periódica  $f(t)$  tiene a la vez simetría de media onda y simetría impar se dice que esa función  $f(t)$  tiene simetría de cuarto de onda impar.

Simetría de cuarto de onda impar

La figura 16.9 muestra una función periódica que tiene simetría de cuarto de onda impar.

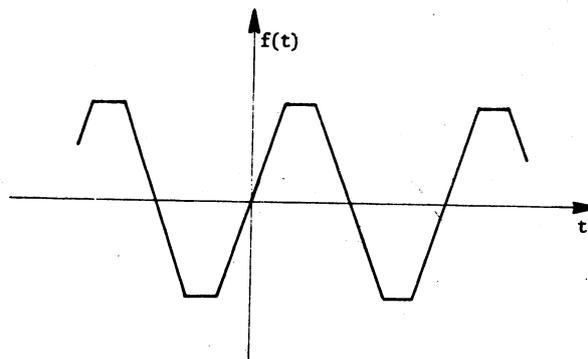


Figura 16.9 Gráfica de una función de cuarto de onda impar

La serie de Fourier para una función periódica  $f(t)$  que tenga simetría de cuarto de onda impar contendrá únicamente armónicas impares seno; esto es:

$$f(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (16.12)$$

Serie de Fourier para una función con simetría de cuarto de onda impar

donde:

$$b_n = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \quad n \text{ impar} \quad (16.13)$$

y se obtiene integrando solamente en un cuarto de período.

#### Ejemplo 16.4

Determine la serie trigonométrica de Fourier para la función periódica mostrada en la figura 16.10. Considere la simetría de la función para obtener los coeficientes de las armónicas.

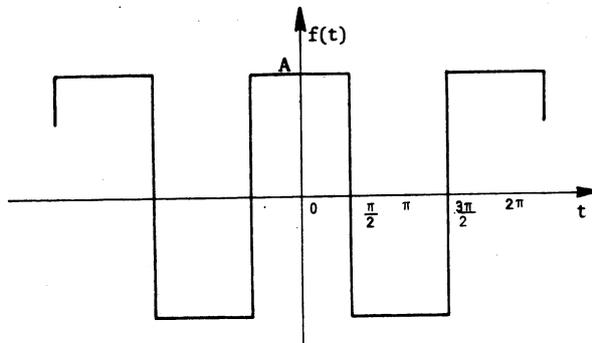


Figura 16.10

#### Solución

El período y la frecuencia fundamental son:

$$T = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

La expresión analítica de la función en el cuarto de período  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  es:

$$f(t) = A \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

De la figura 16.10 se observa que la función  $f(t)$  cumple con las condiciones de simetría de cuarto de onda par, por lo que su serie de Fourier contendrá sólo armónicas impares coseno; para obtener los coeficientes  $a_n$  se integrará en un cuarto de período. Así, tenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{8}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \cos nt \, dt \\ &= \frac{4A}{n\pi} \left[ \text{sen } nt \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ a_n &= \frac{4A}{n\pi} \text{sen } \frac{n\pi}{2} \quad n \text{ impar} \end{aligned}$$

En consecuencia, la serie de Fourier es:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \cos t - \frac{4A}{3\pi} \cos 3t + \frac{4A}{5\pi} \cos 5t - \dots$$

#### Ejemplo 16.5

Para la función mostrada en la figura 16.11, obtendrá la serie trigonométrica de Fourier. Considere la simetría de la función.

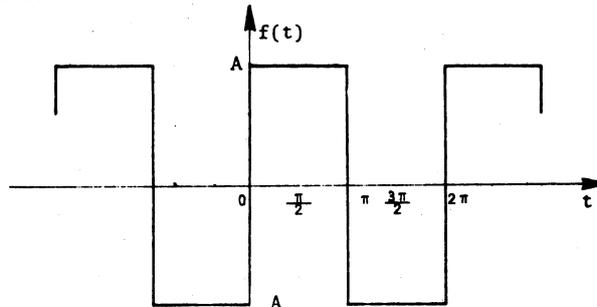


Figura 16.11

Solución

El período y la frecuencia son:

$$T = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

La función está definida en el intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  por:

$$f(t) = A \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

De la gráfica se observa que la función tiene simetría de cuarto de onda impar, la serie de Fourier tendrá solamente armónicas impares seno.

El coeficiente  $b_n$  se calcula integrando en un cuarto de período. Así, tenemos:

$$b_n = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{8}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} A \operatorname{sen} nt \, dt$$

$$= -\frac{4A}{n\pi} \left[ \cos \cdot n t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$b_n = \frac{4A}{n\pi} \quad n \text{ impar}$$

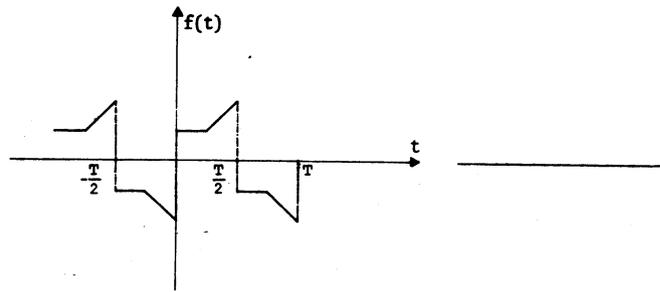
por consiguiente, obtenemos la serie:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \operatorname{sen} t + \frac{4A}{3\pi} \operatorname{sen} 3t + \frac{4A}{5\pi} \operatorname{sen} 5t + \dots$$

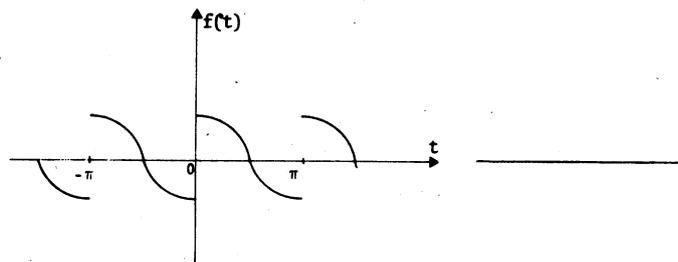
## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

- I. Indique si las gráficas de las funciones que se muestran a continuación, tienen simetría, señalándolo en el espacio indicado. En caso afirmativo, indique, además, el tipo de simetría que posee la función.

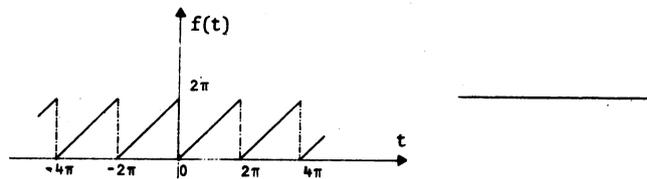
1).



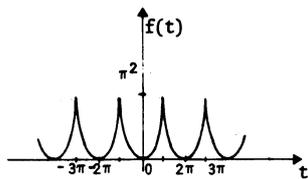
2).



3).

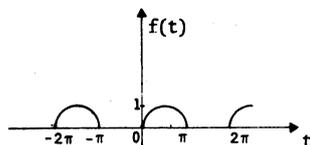


4).



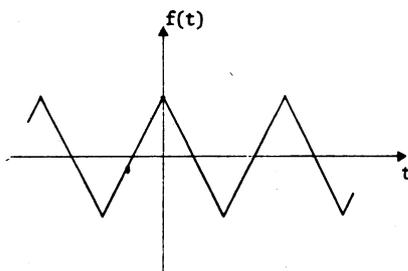
\_\_\_\_\_

5).



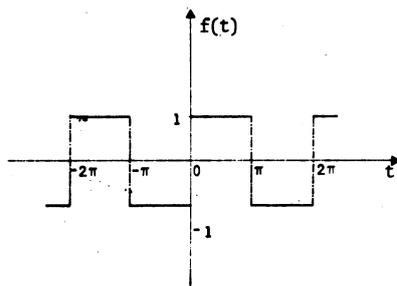
\_\_\_\_\_

6).



\_\_\_\_\_

7).



\_\_\_\_\_

- II. A continuación se presentan dos columnas. En la primera se hallan los distintos tipos de simetría de las funciones periódicas, mientras que en la segunda se encuentran los tipos de términos que tienen sus respectivas series de Fourier.

Coloque en los paréntesis que aparecen en la columna de la derecha, las letras localizadas en la columna de la izquierda, de tal manera que indique qué tipo de término corresponde a cada simetría.

TIPOS DE SIMETRÍA DE FUNCIONES PERIÓDICAS	TERMINOS DE LA SERIE DE FOURIER
a). Simetría par	1) impares seno ( )
b). Simetría impar	2) cosenos ( )
c). Simetría de media onda	3) pares seno y coseno ( )
d). Simetría de cuarto de onda par	4) senos ( )
e). Simetría de cuarto de onda impar	5) impares seno y coseno ( )
	6) impares coseno ( )

- III. A continuación se presentan algunos problemas. Resuélvalos y escriba la o las soluciones en el espacio indicado.

- 1 Determine la serie trigonométrica de Fourier para la señal de salida de un rectificador de onda completa, representada en la figura 16.12, considerando la simetría de la señal.

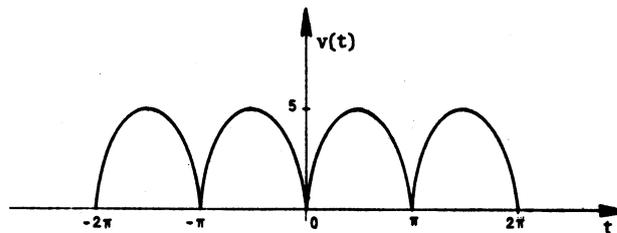


Figura 16.12

2. Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la señal mostrada en la figura 16.13, considerando su simetría.

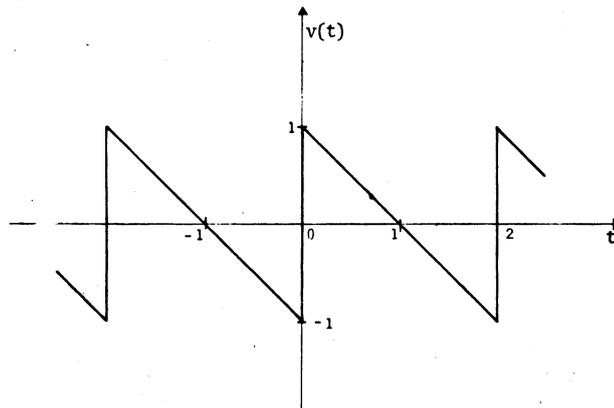


Figura 16.13

3. Dada la señal de la figura 16.14:
- Indique que tipo de simetría tiene.
  - Determine la serie trigonométrica de Fourier tomando en cuenta la simetría.

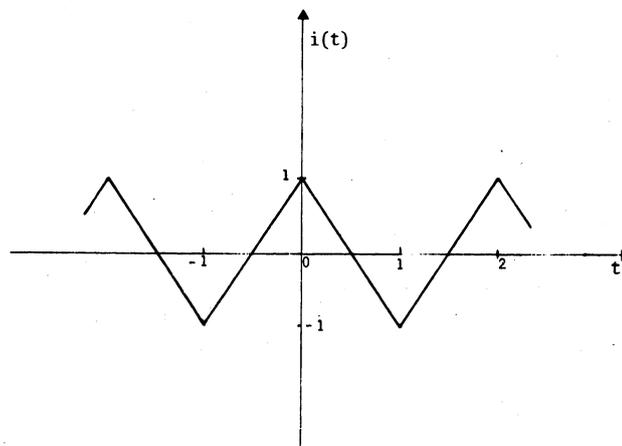


Figura 16.14

a)

b)

4. Para la señal de la figura 16.15:

a) Identifique el tipo de simetría.

b) Obtenga la serie trigonométrica de Fourier considerando la simetría de la señal.

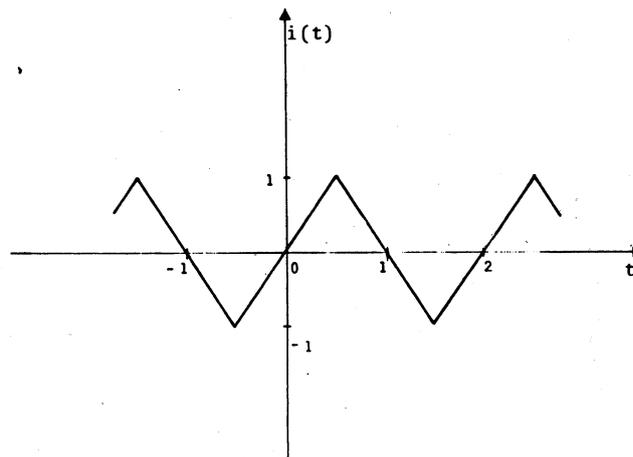
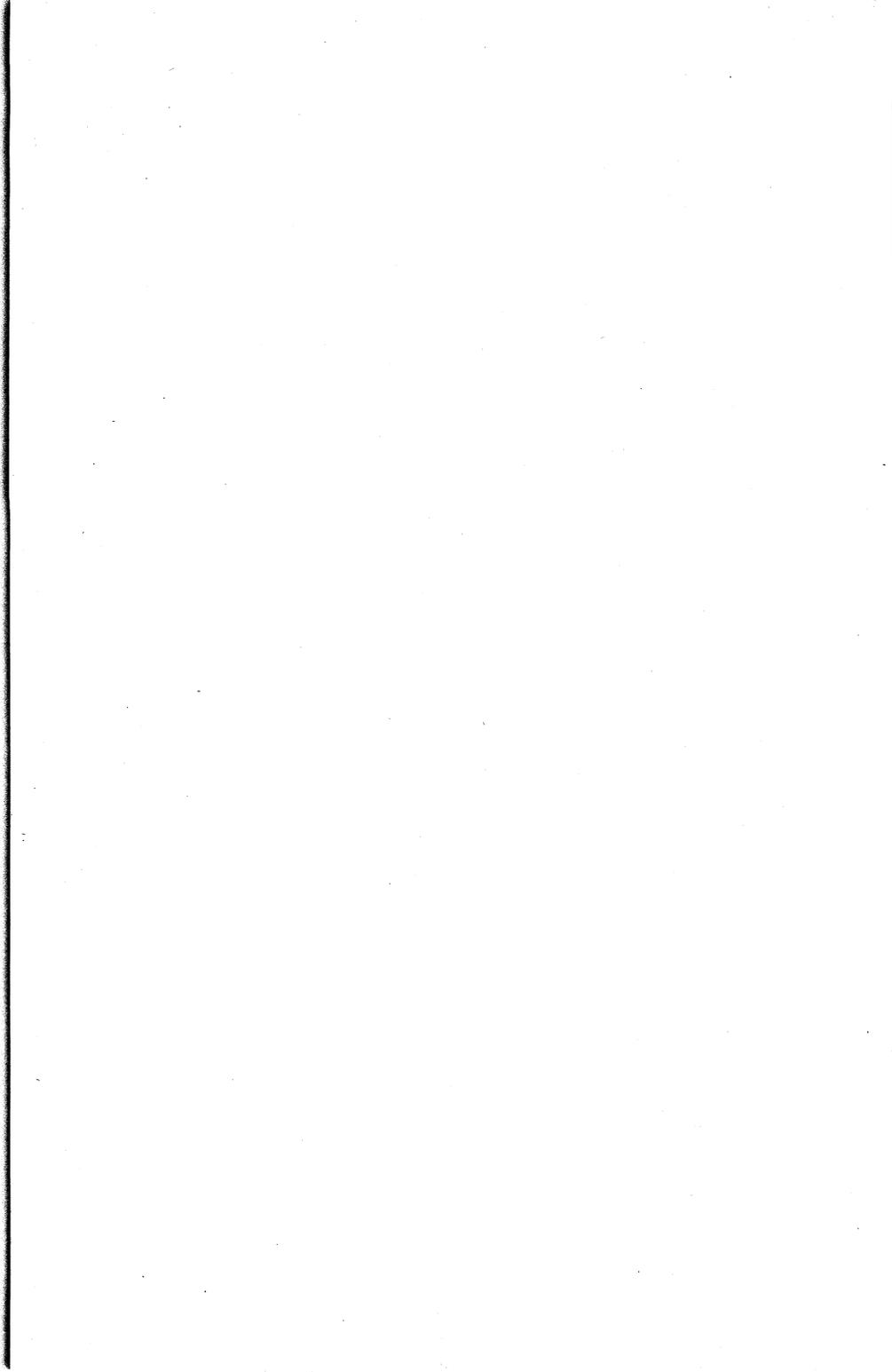


Figura 16.15

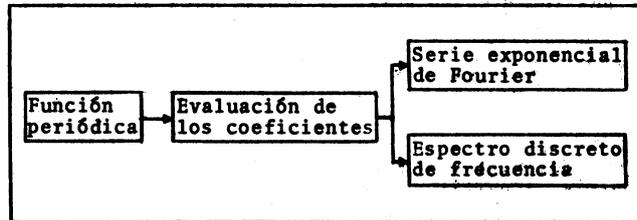
a)

b)



## MODULO 17. FORMA EXPONENCIAL DE LA SERIE DE FOURIER

## CUADRO SINOPTICO



## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Determinará la serie exponencial de Fourier para una función periódica dada.
2. Graficará el espectro discreto de frecuencia de la función periódica, a partir de las amplitudes de los coeficientes de la serie exponencial de Fourier.

## 17.1 SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

En los módulos 15 y 16 se expresó la serie de Fourier de una función periódica, usando términos seno y coseno. Sin embargo, resulta conveniente escribirla en forma exponencial, pues así se obtiene más fácilmente y se expresa de manera más breve. Por otra parte, la serie de Fourier en forma exponencial sirve de base para obtener la Integral de Fourier, que se estudiará en la siguiente unidad.

Así pues, partiendo de la serie trigonométrica de Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad (17.1)$$

Los términos  $\cos n\omega_0 t$  y  $\operatorname{sen} n\omega_0 t$  pueden ser expresados en forma compleja, a partir de la identidad de Euler, de la siguiente manera:<sup>16</sup>

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \quad (17.2)$$

$$\operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \quad (17.3)$$

Si sustituimos las relaciones (17.2) y (17.3) en la expresión (17.1) obtenemos:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \frac{b_n}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right]$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

(17.4)

si para la expresión (17.4) definimos:

$$c_0 = a_0 \quad (17.5)$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad (17.6)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \quad (17.7)$$

<sup>16</sup> Ver identidad de Euler en el apéndice A de la primera parte de esta obra.

entonces esa expresión se reduce a:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \right)$$

o

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \quad (17.8)$$

incorporando el término constante  $c_0$  en la primera sumatoria, y por lo tanto variando sus límites de  $n = 0$  a  $\infty$ , se tiene:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \quad (17.9)$$

ahora, cambiando el signo de  $n$  en la segunda sumatoria, lo que implica modificar sus límites (ahora de  $-1$  a  $-\infty$ ) se obtiene la siguiente expresión:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (17.10)$$

estas dos sumatorias pueden expresarse en una sola con límites de  $-\infty$  a  $\infty$ . Así:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (17.11) \quad \text{Serie exponencial de Fourier}$$

la expresión (17.11) es la *forma exponencial de la serie de Fourier*.

## 17.2 EVALUACION DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Obtendremos ahora una forma directa para determinar los coeficientes  $c_n$  de la serie exponencial de Fourier. Estos coeficientes  $c_n$  serán evaluados tomando como base los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de la serie trigonométrica.

Los coeficientes de la serie tronométrica están dados por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (17.12)$$

y

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (17.13)$$

Por otra parte, en el apartado anterior habíamos definido la expresión:

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad (17.6)$$

ahora bien, si sustituimos las expresiones (17.12) y (17.13) en la expresión (17.6), se obtiene:

$$c_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \right]$$

aplicando las propiedades del cálculo integral se reduce a:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) dt \quad (17.14)$$

pero:

$$\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t = e^{-jn\omega_0 t} \quad (17.15)$$

por lo tanto, sustituyendo la expresión (17.15) en la expresión (17.14), se obtiene:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (17.16) \quad \begin{array}{l} \text{Coeficiente de} \\ \text{la serie expo-} \\ \text{nencial} \end{array}$$

la expresión (17.16) nos permite evaluar los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de la ecuación (17.11).

Observe que la integral de la expresión (17.16) está multiplicada por el factor  $\frac{1}{T}$ ; mientras que las integrales para  $a_n$  y  $b_n$  están multiplicadas por el factor  $\frac{2}{T}$ .

## Ejemplo 17.1

Determine la serie exponencial de Fourier para la función periódica mostrada en la figura 17.1.

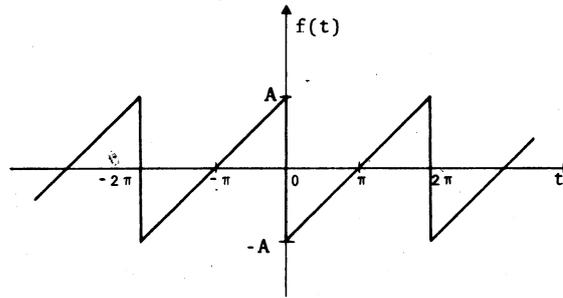


Figura 17.1

## Solución

El período y la frecuencia de la función periódica son:

$$T = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

la función está definida por la expresión:

$$f(t) = \frac{A}{\pi} t = A$$

donde el coeficiente  $\frac{A}{\pi}$ , que es la pendiente de la recta, se obtiene a partir de:

$$\frac{A - (-A)}{2\pi - 0} = \frac{2A}{2\pi} = \frac{A}{\pi}$$

Los coeficientes  $c_n$  se obtienen de la siguiente manera:

El término  $c_0$  está dado por:

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

sustituyendo el valor de la función e integrando se obtiene:

$$c_0 = \frac{A}{2\pi^2} \left( \frac{4\pi^2}{2} \right) - \frac{A}{2\pi} 2\pi$$

$$c_0 = 0$$

Para  $n \neq 0$ , los coeficientes  $c_n$  están dados por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

sustituyendo el valor de  $f(t)$  y factorizando se tiene:

$$c_n = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) e^{-jnt} dt$$

integrando por partes resulta:

$$c_n = j \frac{A}{n\pi} \quad n \neq 0$$

así la serie exponencial de Fourier está dada por:

$$f(t) = j \frac{A}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{jnt}$$

o por:

$$f(t) = \dots - j \frac{A}{2\pi} e^{-j2t} - j \frac{A}{\pi} e^{-jt} + j \frac{A}{\pi} e^{jt} + \frac{A}{2\pi} e^{j2t} + \dots$$

### 17.3 ESPECTRO DISCRETO DE FRECUENCIA DE LA SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Hemos obtenido la expresión de la serie exponencial de Fourier y la expresión para calcular los coeficientes  $c_n$  de esta serie; es decir, hemos determinado las expresiones:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (17.11)$$

y

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (17.16)$$

Observe que en la ecuación (17.11)  $n$  toma valores negativos; lo que da origen a frecuencias negativas. La existencia de estas frecuencias se debe a que las funciones coseno y seno han sido expresadas por una pareja de funciones exponenciales complejas.

Los coeficientes  $c_n$  de la ecuación (17.16) son generalmente complejos y pueden expresarse en la forma:

$$c_n = |c_n| e^{-j\phi_n} \quad (17.17)$$

donde:

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (17.18)$$

y

$$\phi_n = \text{ang} \tan \frac{-b_n}{a_n} \quad (17.19)$$

Por otra parte, anteriormente al obtener el espectro de frecuencia para la serie trigonométrica vimos que la amplitud  $|C_n|$  en términos de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ , era:

$$|C_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (15.18)$$

entonces, relacionando la ecuación (17.18) con la ecuación (15.18), obtendremos:

$$|C_n| = \frac{1}{2} |C_n| \quad (17.20)$$

o

$$\boxed{2|C_n| = |C_n|} \quad (17.21)$$

La ecuación (17.21) nos indica que debemos multiplicar la amplitud  $|C_n|$  de los coeficientes de la serie exponencial, por el factor 2 para que las amplitudes tanto de la serie exponencial como de la serie trigonométrica sean equivalentes. La presencia de los factores 2 y  $\frac{1}{2}$  en las ecuaciones (17.20) y (17.21) se debe a que las integrales para obtener los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  tienen un factor de  $\frac{2}{T}$  mientras que la integral del coeficiente  $C_n$  tiene el factor  $\frac{1}{T}$ . En consecuencia, el espectro discreto de frecuencia de la serie exponencial tiene una amplitud que es un medio del espectro discreto de frecuencia de la serie trigonométrica.

Espectro discreto en la serie exponencial

### Ejemplo 17.2

Dada la función de la figura 17.2:

- Determine la serie exponencial de Fourier.
- Dibuje el espectro discreto de frecuencia.

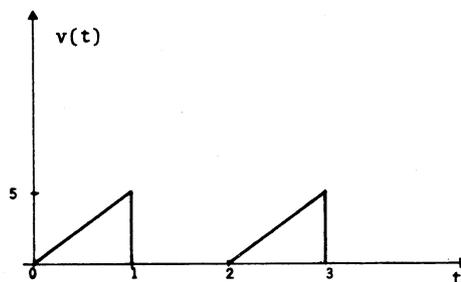


Figura 17.2

## Solución

- a) El período y la frecuencia fundamental que se obtienen de la figura 17.2 son:

$$T = 2$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

la función está definida por:

$$v(t) = \begin{cases} 5t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

la componente  $c_0$  a frecuencia cero se obtiene de:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 5t dt$$

$$= \frac{5}{2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

$$c_0 = \frac{5}{4}$$

Los coeficientes  $c_n$  se obtienen como sigue:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 5t e^{-jn\pi t} dt$$

$$c_n = \frac{5}{2} \int_0^1 t e^{-jn\pi t} dt$$

integrando por partes:

$$u = t$$

$$du = dt$$

$$dv = e^{-jn\pi t} dt$$

$$v = \frac{1}{-jn\pi} e^{-jn\pi t}$$

$$c_n = \frac{5}{2} \left[ t \frac{e^{-jn\pi t}}{-jn\pi} - \int \frac{1}{-jn\pi} e^{-jn\pi t} dt \right]_0^1$$

$$c_n = \frac{5}{2} \left[ (1) \frac{e^{-jn\pi}}{-jn\pi} - \frac{1}{(-jn\pi)^2} \left[ e^{-jn\pi t} \right]_0^1 \right]$$

$$c_n = \frac{5}{2} \left[ \frac{e^{-jn\pi}}{-jn\pi} - \frac{1}{(-jn\pi)^2} (e^{-jn\pi} - 1) \right]$$

puesto que:

$$e^{\pm jn\pi t} = \cos n\pi \pm j \operatorname{sen} n\pi = \begin{cases} +1 & n \text{ par} \\ -1 & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} j \frac{5}{2n\pi} & n \text{ par} \\ \frac{5}{(n\pi)^2} - j \frac{5}{2n\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

consecuentemente se tiene:

para  $n = 1$ :

$$c_1 = \frac{5}{\pi^2} - j \frac{5}{2\pi}$$

para  $n = 2$ :

$$c_2 = j \frac{5}{4\pi}$$

para  $n = -1$ :

$$c_{-1} = \frac{5}{\pi^2} + j \frac{5}{2\pi}$$

para  $n = -2$ :

$$c_{-2} = -j \frac{5}{4\pi}$$

para  $n = 3$ :

$$c_3 = \frac{5}{9\pi^2} - j \frac{5}{6\pi}$$

para  $n = -3$ :

$$c_{-3} = \frac{5}{9\pi^2} + j \frac{5}{6\pi}$$

así, la serie exponencial de Fourier toma la forma:

$$f(t) = \dots - j \frac{5}{4\pi} e^{j2\pi t} + \left( \frac{5}{\pi^2} + j \frac{5}{2\pi} \right) e^{-j\pi t} + \frac{5}{4} + \\ + \left( \frac{5}{\pi^2} - j \frac{5}{2\pi} \right) e^{j\pi t} + j \frac{5}{4\pi} e^{j2\pi t} + \dots$$

- b) Como los coeficientes  $c_n$  son complejos, sus magnitudes para  $n$  positivas serán las siguientes:

$$|c_1| = \sqrt{\left(\frac{5}{\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2\pi}\right)^2} = 0.94$$

$$|c_2| = \sqrt{\left(\frac{5}{4\pi}\right)^2} = \frac{5}{4\pi} = 0.39$$

$$|c_3| = \sqrt{\left(\frac{5}{9\pi}\right)^2 + \left(\frac{5}{6\pi}\right)^2} = 0.27$$

el espectro de frecuencia, para valores positivos de  $n$  se muestra en la figura 17.3.

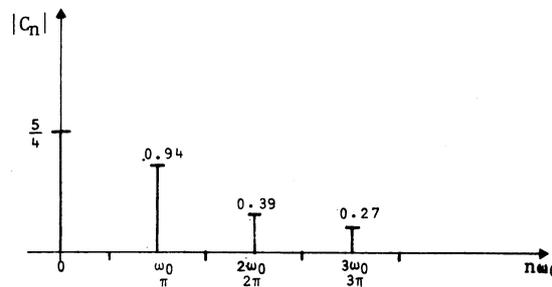


Figura 17.3

## Ejemplo 17.3.

Obtenga el espectro discreto de frecuencia para el tren de pulsos rectangulares de la figura 17.4.

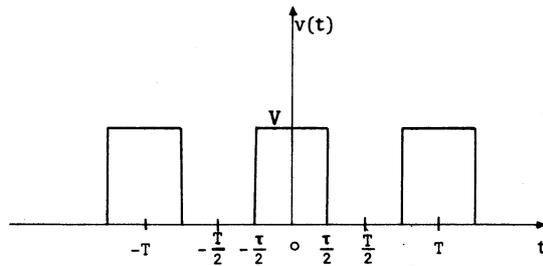


Figura 17.4

## Solución

La expresión para  $v(t)$  en el período  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$  es:

$$v(t) = V \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$$

los coeficientes  $c_n$  se obtienen a continuación:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{V}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{V}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} \left[ e^{-jn\omega_0 t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{V}{T} \frac{1}{-jn\omega_0} \left( e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right) \\ c_n &= \frac{V}{T} \frac{1}{jn\omega_0} \left( e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right) \end{aligned}$$

multiplicando numerador y denominador por  $\frac{\tau}{2}$  :

$$c_n = \frac{V_T}{T} \frac{1}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} \frac{1}{j2} \left( e^{jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right)$$

$$c_n = \frac{V_T}{T} \frac{\text{sen } n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}}$$

haciendo  $x = n\omega_0 \frac{\tau}{2}$  se obtiene:

$$c_n = \frac{V_T}{T} \frac{\text{sen } x}{x}$$

el término  $\frac{\text{sen } x}{x}$  es muy utilizado en teoría de comunicaciones y se le llama función sinc (x); es decir:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \quad (17.22) \quad \text{Función sinc (x)}$$

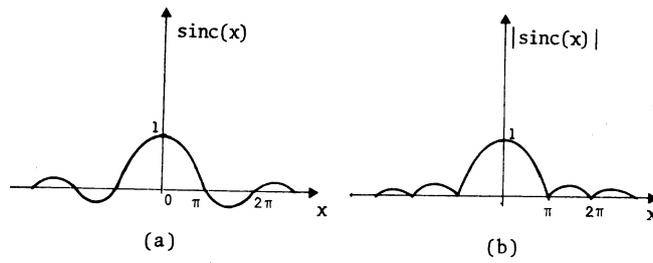
la función sinc (x) vale cero siempre que x es múltiplo entero de  $\pi$ ; es decir:

$$\text{sinc}(m\pi) = 0 \quad \text{cuando } m = 1, 2, 3, \dots$$

si x vale cero, la función sinc (x) toma el valor de la unidad; esto es:

$$\text{sinc}(0) = 1$$

La figura 17.5.a., muestra la gráfica de la función sinc (x) y la figura 17.5.b., la del valor absoluto de la función sinc (x). Este valor absoluto de sinc (x) se usará frecuentemente en lo que resta de esta obra.



(a) Función sinc (x) .

(b) Valor absoluto de la función sinc (x) .

Figura 17.5

Volviendo a nuestro ejemplo, si consideramos los valores numéricos:

$$\tau = \frac{1}{20} \quad \text{y} \quad T = \frac{1}{4}$$

entonces:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 8\pi$$

y tendremos que:

$$\text{sinc} \left( n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) = \frac{\text{sen } n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} = \frac{\text{sen } \frac{n\pi}{5}}{\frac{n\pi}{5}} = 0$$

para  $n = 5, 10, 15, \dots$

es decir, la función sinc ( $\omega$ ) vale cero para:

$$\omega = n\omega_0 = 5\omega_0, \quad 10\omega_0, \quad 15\omega_0, \quad \dots$$

$$\omega = 40\pi, \quad 80\pi, \quad 120\pi, \quad \dots$$

y es diferente de cero para:

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, \dots$$

para  $n = 0$ :

$$\left| \text{sinc} \left( n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) \right| = 1$$

y tenemos que:

$$|c_n| = \frac{V\tau}{T} \left| \text{sinc} \left( n\omega_0 \frac{\tau}{2} \right) \right| = \frac{V\tau}{T} = c_0$$

los demas valores para los cuales  $|C_n|$  es diferente de ce ro, se calculan por medio de la siguiente expresi3n:

$$|c_n| = \frac{V\tau}{T} \left| \frac{\text{sen } n\omega_0 \frac{\tau}{2}}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right| = \frac{V\tau}{T} \left| \frac{\text{sen } \frac{n\pi}{5}}{n \frac{\pi}{5}} \right|$$

El espectro discreto de frecuencia, para valores positivos de  $n$ ; se muestra en la figura 17.6.

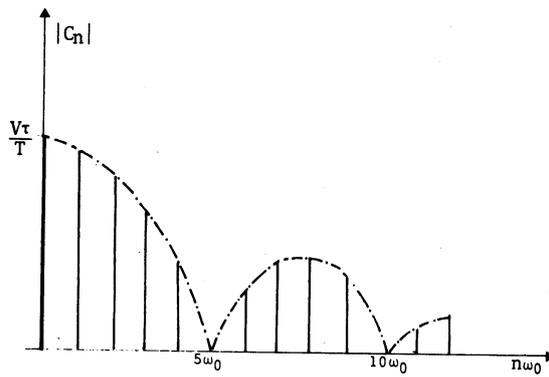


Figura 17.6 Espectro discreto de frecuencia de un tren de pulsos

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. A continuación aparecen unas proposiciones, seguidas de cuatro opciones. Sólo una de ellas hace verdadera la proposición; indíquela colocando una cruz en el paréntesis correspondiente.

1. La serie exponencial de Fourier se expresa mediante la relación:

$$a) f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad ( )$$

$$b) f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad ( )$$

$$c) f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_0 t} \quad ( )$$

$$d) f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_0 t} \quad ( )$$

2. Los coeficientes  $c_n$  de la serie exponencial de Fourier están dados por:

$$a) c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad ( )$$

$$b) c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \quad ( )$$

$$c) c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad ( )$$

$$d) c_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \quad ( )$$

3. La magnitud de los coeficientes  $c_n$  está relacionada con los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  por:

a)  $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ( )

b)  $|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ( )

c)  $|c_n| = 2 \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ( )

d)  $|c_n| = \sqrt{(a_n + b_n)^2}$  ( )

4. La función sinc (x) vale la unidad cuando:

a)  $x = \frac{\pi}{2}$  ( )

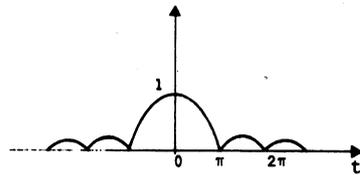
b)  $x = 1$  ( )

c)  $x = 0$  ( )

d)  $x = n\pi$  ( )

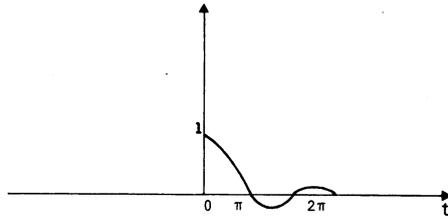
5. La gráfica de la función sinc (t) es:

a) ( )



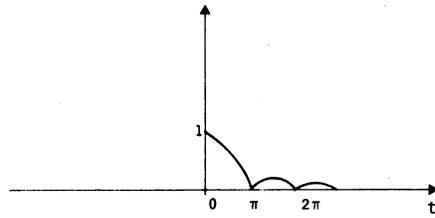
b)

( )



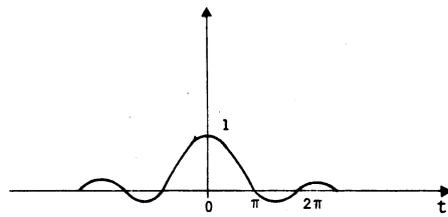
c)

( )



d)

( )



II. A continuación se presentan algunos problemas. Resuélvalos y escriba la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Dada la señal de la figura 17.7.:

- a) Determine la serie exponencial de Fourier,
- b) dibuje el espectro de frecuencia.

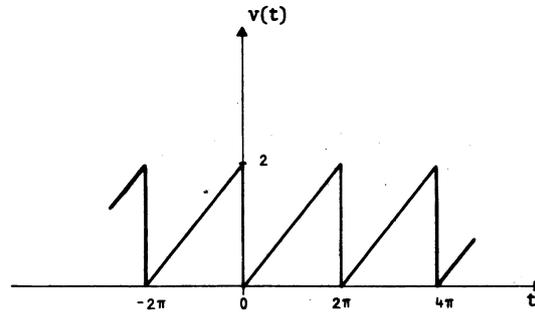


Figura 17.7

a)

b)

2. Obtenga la serie exponencial de Fourier para:

- a) La señal mostrada en la figura 17.8.
- b) La señal mostrada en la figura 17.9.

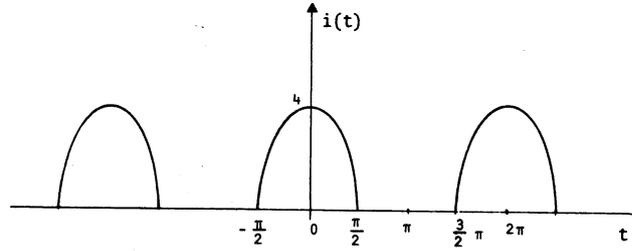


Figura 17.8

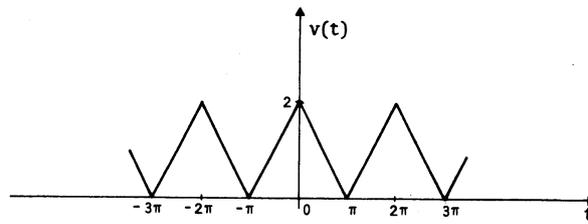


Figura 17.9

a)

b)

3. Dibuje el espectro de frecuencia para la señal de voltaje mostrada en la figura 17.10.

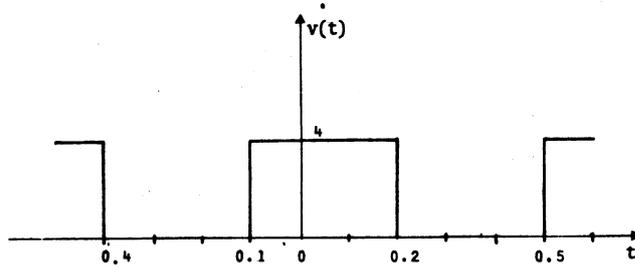


Figura 17.10

## BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAFIA BASICA

1. CHENG, DAVID K  
Analysis of Linear Systems.  
Addison Wesley, U.S.A., 1959.
2. GEREZ G., VICTOR; CZITROM DE G. V  
Circuitos y sistemas electromecánicos, Tomo I  
Representaciones y Servicios de Ingeniería.  
1974.
3. HAYT, WILLIAM H.; KEMMERLY, JACK E  
Análisis de circuitos en ingeniería.  
McGraw - Hill. México, 1980
4. HSU, HWEI P  
Análisis de Fourier.  
Fondo Educativo Interamericano, S. A.  
Bogotá, 1973.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

5. PAPPOULIS ATHANASIOS  
The Fourier Integral and its Applications.  
McGraw - Hill. Nueva York, 1962.

## UNIDAD VI. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

### OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el estudio de la unidad, el alumno:

Determinará la transformada de Fourier de las funciones más conocidas y la utilizará para analizar sistemas lineales.

### INTRODUCCION

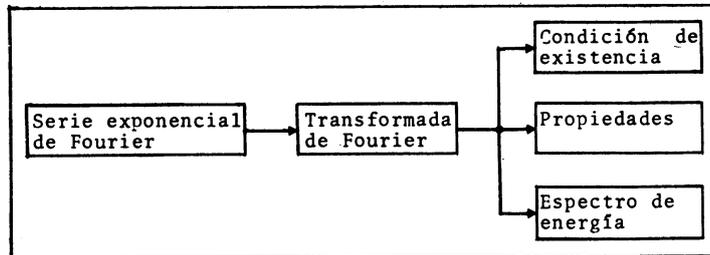
En la unidad anterior consideramos la representación en serie de Fourier de las funciones periódicas. Sin embargo existen otras funciones que no son periódicas tales como un pulso rectangular o un escalón unitario. Ese tipo de funciones puede tratarse mediante la transformada de Fourier.

En esta unidad se desarrolla la transformada de Fourier a partir de la serie exponencial, haciendo una generalización a las funciones no periódicas.

Se presentan también algunas de las aplicaciones de la transformada de Fourier, en la solución de sistemas lineales y en teoría de comunicaciones.

MODULO 18. CONCEPTOS BASICOS SOBRE LA TRANSFORMADA  
DE FOURIER

CUADRO SINOPTICO



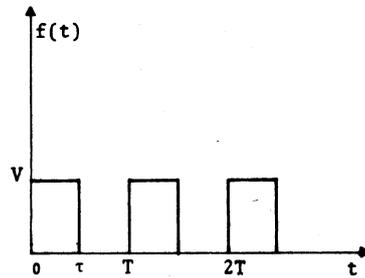
## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Explicará el procedimiento para obtener la transformada de Fourier a partir de la serie exponencial.
2. Obtendrá la transformada de Fourier de una función dada, usando la definición.
3. Aplicará las propiedades de la transformada de Fourier para la obtención de transformadas de funciones dadas.
4. Describirá la interpretación física de la transformada de Fourier en términos del contenido de energía asociada con una señal.

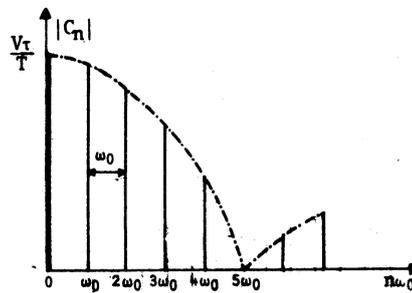
## 18.1 DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier se obtendrá generalizando a funciones no periódicas, la serie exponencial. Ilustraremos este procedimiento para el caso del tren de pulsos que se muestra en la figura 18.1.a. El espectro de frecuencias de este tren de pulsos se muestra en la figura 18.1.b.



(a)

Figura 18.1.a Tren de pulsos



(b)

Figura 18.1.b Espectro discreto de frecuencia

En este espectro discreto cada línea representa la amplitud de una componente de frecuencia, y la distancia entre las líneas es la frecuencia fundamental  $\omega_0$ .

Quando el período  $T$  aumenta, la frecuencia  $\omega_0$  disminuye y por lo tanto, se tiene un mayor número de componentes de frecuencia en un intervalo; observe las figuras 18.2.a, y 18.2.b.

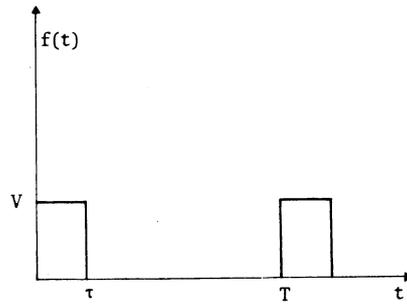


Figura 18.2.a Tren de pulsos con el período  $T$  aumentado

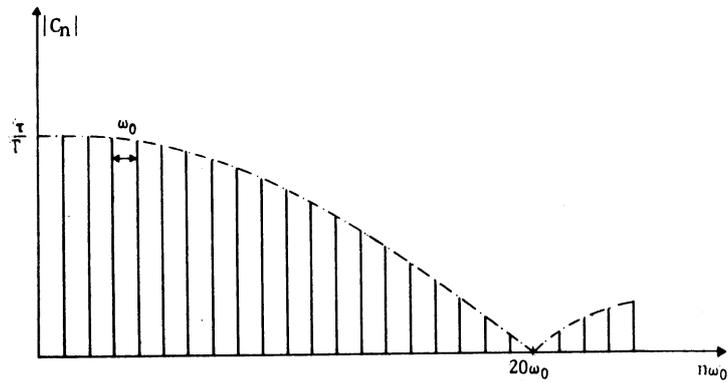


Figura 18.2.b Espectro de frecuencia

Por otra parte, se observa que disminuye la amplitud de la envolvente, sin cambiar de forma.

En el límite, cuando  $T$  aumenta infinitamente,  $\omega_0$  tiende a cero y se tendrán intervalos de frecuencia infinitesimales, lo que implica que el espectro discreto tiende a ser contnuo.

En la figura 18.2.a, se puede observar que cuando  $T$  tiende al infinito queda un solo pulso rectangular que no se repite. Así pues, la función  $f(t)$  deja de ser periódica y el tren de pulsos se reduce a un pulso único; además, el espectro discreto se convierte en un espectro continuo de frecuencia.

Analizaremos el resultado de la aplicación de este procedimiento en la serie exponencial de Fourier.

Sea  $f(t)$  una función periódica cuya expresión en serie exponencial de Fourier es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (18.1)$$

en donde:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (18.2)$$

si sustituimos la expresión (18.2) en la expresión (18.1) obtenemos:

$$f(t) = \frac{1}{T} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t}$$

puesto que  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , entonces:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \omega_0 \quad (18.3)$$

Como  $f(t)$  dejará de ser periódica se harán algunos cambios de notación. Cuando  $T$  tiende a infinito  $\omega_0$  tiende a cero y  $n\omega_0$  tiende a la variable continua  $\omega$ ; esto es, para un espectro continuo  $n\omega_0$  ( $\omega$ ) puede tomar cualquier valor real. Debido a que  $T \rightarrow \infty$  se harán las siguientes modificaciones:

cualquier frecuencia  $n\omega_0 \rightarrow \omega$   
 distancia entre componentes  $\omega_0 \rightarrow \Delta\omega$

por otra parte, el período  $T$  puede ser expresado como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

En consecuencia, la ecuación (18.3) toma la forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \Delta\omega \quad (18.4)$$

en virtud de que  $T$  tiende al infinito:

$$\Delta\omega \rightarrow d\omega$$

además, la variable discreta  $n\omega_0$  se ha convertido en la variable continua  $\omega$ , la sumatoria deberá transformarse en una integral.

Por lo tanto, la ecuación (18.4) se transforma en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega$$

si llamamos  $F(\omega)$  a la expresión dentro de los paréntesis cuadrados, se obtienen las expresiones:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Transformada de Fourier} \quad (18.5)$$

y

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Transformada inversa de Fourier} \quad (18.6)$$

Las expresiones de  $F(\omega)$  y  $f(t)$  dadas por las ecuaciones (18.5) y (18.6) se llaman *par de transformadas de Fourier*;  $F(\omega)$  es la *transformada de Fourier de  $f(t)$* ; y  $f(t)$  es la *transformada inversa de Fourier de  $F(\omega)$* . Sus relaciones se escriben en la forma:

$$F(\omega) = \mathcal{F} [ f(t) ] \quad (18.7)$$

y

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} [ F(\omega) ] \quad (18.8)$$

La transformada de Fourier de la ecuación (18.7) transforma una función de  $t$ , en el dominio del tiempo, a una función de  $\omega$ , en el dominio de la frecuencia. La transformada inversa de Fourier de la ecuación (18.8) hace lo contrario.

En general  $F(\omega)$  es una función compleja de  $\omega$  y se puede escribir en las siguientes formas:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \angle \theta(\omega) \quad \text{Magnitud y ángulo de fase}$$

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad \text{Parte real y parte imaginaria}$$

en donde  $|F(\omega)|$  es la magnitud,  $\theta(\omega)$  es el ángulo de fase,  $R(\omega)$  y  $X(\omega)$  son las partes real e imaginaria, respectivamente.

## Ejemplo 18.1

Determine la transformada de Fourier del pulso rectangular mostrado en la figura 18.3.

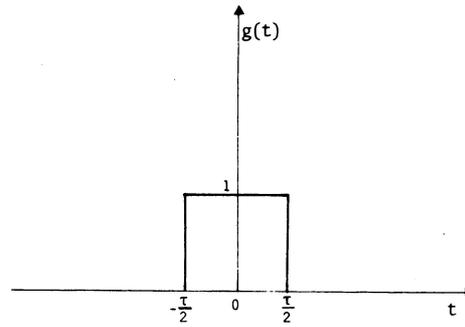


Figura 18.3

## Solución

El pulso rectangular está definido por:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

por consiguiente, la transformada de Fourier del pulso es, de acuerdo con la ecuación (18.5):

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \mathcal{F} [g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-j\omega} \left[ e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= \frac{1}{j\omega} \left( e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega\tau}{2} \\
 G(\omega) &= \tau \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}
 \end{aligned}$$

En la figura 18.4 se muestra la gráfica de la magnitud de  $G(\omega)$  contra la frecuencia  $\omega$ .

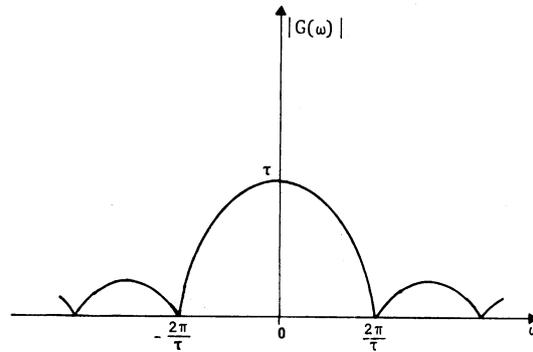


Figura 18.4

## 18.2 CONDICION DE EXISTENCIA

Enunciaremos a continuación una condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier.

Si para una función  $f(t)$  se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

(18.9) Condición suficiente de existencia

entonces existe su transformada de Fourier:

$$\mathcal{F} [ f(t) ] = F(\omega)$$

Dicha condición establece que la integral del valor absoluto de la función, debe ser finita para que exista su transformada de Fourier. Sin embargo, si esa condición no se cumpliera, nada se podría concluir respecto a la existencia de la transformada. Por ejemplo, las funciones impulso y escalón no satisfacen tal condición y sin embargo sí tienen transformada de Fourier. Esto es, se trata de una condición suficiente, pero no necesaria.

#### Ejemplo 18.2

Determine la transformada de Fourier de la función mostrada en la figura 18.5.

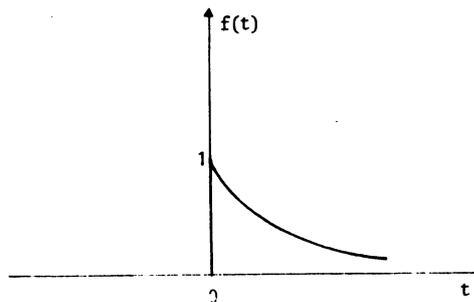


Figura 18.5

#### Solución

La función está definida por:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{donde } \alpha < 0$$

La transformada de Fourier se obtiene por la definición (18.5), de la siguiente manera:

$$F(\omega) = \mathcal{F} [ f(t) ] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha + j\omega} \left[ e^{-(\alpha + j\omega)t} \right]_0^{\infty}$$

(a)

$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad (b)$$

Obsérvese que si  $\alpha < 0$ , entonces la función  $f(t)$  crece infinitamente y la condición de la ecuación (18.9) no se cumple. Así, para  $\alpha < 0$  el límite superior de la expresión (a) tiende a infinito y la transformada de Fourier no existe.

La magnitud de  $F(\omega)$ , de la expresión (b), está dada por:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \quad (c)$$

para:

$$\omega = 0 \quad |F(\omega)| = \frac{1}{\alpha}$$

cuando:

$$\omega \rightarrow \pm \infty \quad |F(\omega)| \rightarrow 0$$

La ecuación (c) está graficada en la figura 18.6.

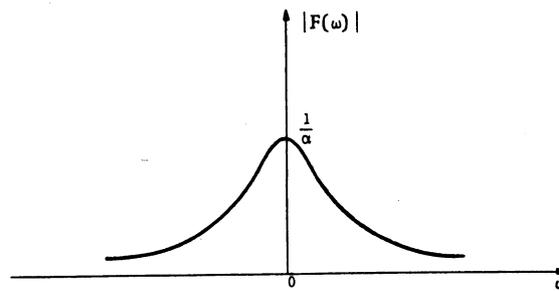


Figura 18.6

### 18.3 PROPIEDADES

A continuación consideremos varias de las propiedades matemáticas de la transformada de Fourier.

#### 1) Linealidad

Si:

$$\mathcal{F} [ f_1(t) ] = F_1(\omega)$$

$$\mathcal{F} [ f_2(t) ] = F_2(\omega)$$

y  $a_1, a_2$  son constantes, entonces:

$$\mathcal{F} [ a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) ] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \quad \text{Propiedad de linealidad}$$

(18.10)

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{F}\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

Puede observarse que en esta propiedad de linealidad, las funciones  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  se transforman independientemente y luego se suman las transformadas.

## 2) Escalamiento

Si  $a$  es una constante y  $f(t)$  tiene la transformada de Fourier  $F(\omega)$ , entonces:

$$\mathcal{F}\left[f(at)\right] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (18.11) \quad \begin{array}{l} \text{Propiedad de} \\ \text{descollamien} \\ \text{to} \end{array}$$

Demostración:

La transformada de Fourier de la función está dada por:

$$\mathcal{F}\left[f(at)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

haciendo el cambio de variable  $at = x$ , tenemos para  $a > 0$ :

$$\mathcal{F}\left[f(at)\right] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)x} dx$$

por lo tanto:

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

para  $a < 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{-a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)x} dx \\ &= \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

La función  $f(at)$  representa a la función  $f(t)$  contraída o expandida en la escala de tiempo por el factor  $a$ . Similarmen-  
te la función  $F\left(\frac{\omega}{a}\right)$  representa a la función  $F(\omega)$  ex-  
pandida o contraída en la escala de frecuencia por el mis-  
mo factor  $a$ . Por consiguiente, la propiedad de escala-  
miento establece que la contracción en el dominio del  
tiempo equivale a la expansión en el dominio de la fre-  
cuencia; o bien, que una expansión en el dominio del tiem-  
po corresponde a una contracción en el dominio de la fre-  
cuencia. Esto depende del valor que tenga la constante  $a$ .  
Dicha propiedad de escalamiento se ilustra en las gráfi-  
cas de la figura 18.7.

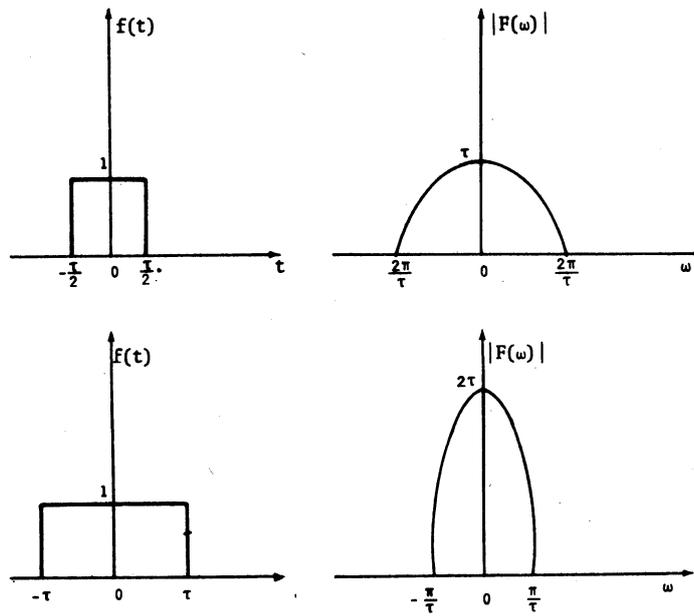


Figura 18.7 Propiedad de escalamiento de la transformada de Fourier

### 3) Desplazamiento en el tiempo

Si la transformada de  $f(t)$  es  $F(\omega)$  y  $t_0$  es una constante, entonces:

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

(18.12) Propiedad de desplazamiento en el tiempo

Demostración:

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

haciendo el cambio de variable:

$$t - t_0 = x$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(t_0 + x)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Tal propiedad indica que si se desplaza la función  $f(t)$  en una cantidad  $t_0$ , no habrá cambio en la magnitud de  $F(\omega)$ , puesto que:

$$|e^{-j\omega t_0}| = 1$$

sin embargo, el ángulo de fase de la transformada de Fourier cambia en proporción directa a  $\omega$ , con una constante de proporcionalidad igual a  $t_0$ ; es decir, cuanto mayor sea el desplazamiento, mayor será el cambio en el ángulo de fase.

#### 4) Desplazamiento en la frecuencia

Si  $\omega_0$  es una constante y  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $f(t)$ , entonces:

$$\mathcal{F}[f(t) e^{+j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

(18.13) Propiedad de desplazamiento en la frecuencia

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(t) e^{j\omega_0 t}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) e^{j\omega_0 t}\right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{F}\left[f(t) e^{j\omega_0 t}\right] = F(\omega - \omega_0)$$

De acuerdo con esta propiedad de desplazamiento en la frecuencia, la multiplicación de la función  $f(t)$  por  $e^{j\omega_0 t}$  equivale a desplazar a la transformada de Fourier en una cantidad  $\omega_0$ .

#### 5) Modulación de amplitud

Si  $f(t)$  tiene la transformada de Fourier  $F(\omega)$  entonces:

$$\mathcal{F}\left[f(t) \cos \omega_0 t\right] = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) \quad \begin{array}{l} \text{Propiedad de mo} \\ \text{dulación de am-} \\ \text{plitud} \end{array} \quad (18.14)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\left[f(t) \cos \omega_0 t\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt$$

puesto que:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt\end{aligned}$$

por lo que:

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$$

De acuerdo con esta propiedad, multiplicar la función  $f(t)$  por  $\cos \omega_0 t$ , equivale a separar la transformada de Fourier  $F(\omega)$  en dos partes iguales a la transformada original, pero con un medio de la amplitud. Las dos partes se desplazan en el eje  $\omega$  en las cantidades  $\pm \omega_0$ .

### Ejemplo 18.3

Determine la transformada de Fourier para la función  $\cos \omega_0 t$  con una duración de  $\tau$  segundos, mostrada en la figura 18.8.

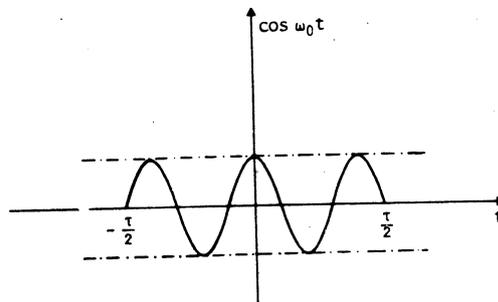


Figura 18.8

## Solución

La función coseno de duración  $\tau$  segundos se puede expresar como una función modulada por un pulso; es decir:

$$f(t) = g(t) \cos \omega_0 t$$

donde:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

La transformada de este pulso, se determinó en el ejemplo 18.1, y es:

$$\mathcal{F}[g(t)] = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\tau}{2} \omega \quad (a)$$

entonces combinando la ecuación (18.14) con la expresión (a) se obtiene:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[g(t) \cos \omega_0 t] = \frac{\tau}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\tau}{2} (\omega - \omega_0)}{\frac{\tau}{2} (\omega - \omega_0)} + \frac{\tau}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\tau}{2} (\omega + \omega_0)}{\frac{\tau}{2} (\omega + \omega_0)}$$

La magnitud de esa transformada de Fourier se muestra en la figura 18.9. Observe que los valores máximos de  $F(\omega)$  son  $\frac{\tau}{2}$  y no  $\tau$  como en el pulso original.

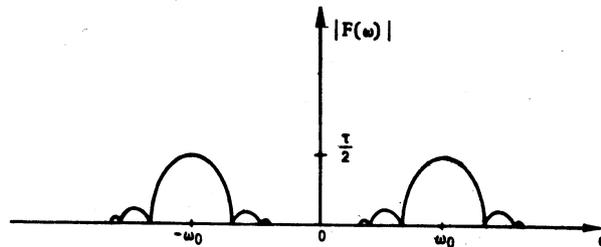


Figura 18.9

## 6) Derivación

Si  $f(t)$  tiene la transformada de Fourier  $F(\omega)$  entonces la transformada de Fourier de la derivada  $\frac{df(t)}{dt}$  es:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega) \quad (18.15) \quad \text{Propiedad de derivación}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt$$

integrando por partes:

$$u = e^{-j\omega t}$$

$$du = -j\omega e^{-j\omega t} dt$$

$$dv = \frac{df(t)}{dt} dt$$

$$v = \frac{df(t)}{dt}$$

se tiene:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

si  $f(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \pm \infty$  se obtiene:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

por lo tanto:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega)$$

Esta propiedad no garantiza la existencia de la derivada, sólo establece que al derivar la función  $f(t)$ , se multiplica por  $j\omega$  la transformada de Fourier de  $f(t)$ .

#### 7) Simetría

Si  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de la función  $f(t)$ , entonces:

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (18.16) \text{ Propiedad de simetría}$$

Demostración:

De la definición de la transformada inversa se tiene:

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

cambiando  $t$  por  $-t$  obtenemos:

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

e intercambiando  $t$  y  $\omega$  se obtiene:

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt$$

por lo tanto:

$$2\pi f(-\omega) = \mathcal{F}[F(t)]$$

La expresión (18.16) es la propiedad de simetría de la transformada de Fourier. Obsérvese que al intercambiar  $\omega$  y  $t$  la función de  $\omega$  se ve afectada por el factor  $2\pi$ .

## Ejemplo 18.4

Obtenga la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \frac{2}{t} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2}$$

la cual se representa en la figura 18.10.

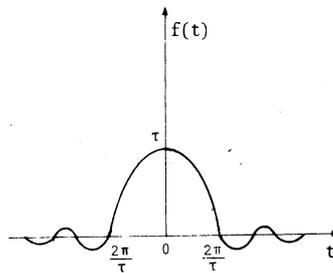


Figura 18.10

## Solución

De la transformada de Fourier del pulso del ejemplo 18.1, se tiene:

$$\mathcal{F}[g(t)] = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega t}{2}$$

y de la propiedad de simetría, obtenemos:

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{t} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2}\right] = 2\pi g(-\omega)$$

de la cual se establece:

$$g(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ahora, como  $g(\omega)$  es par, entonces:

$$g(-\omega) = g(\omega)$$

así, tenemos:

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{2}{t} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2}\right] = 2\pi g(\omega)$$

La transformada de Fourier de  $f(t)$  se muestra en la figura 18.11.

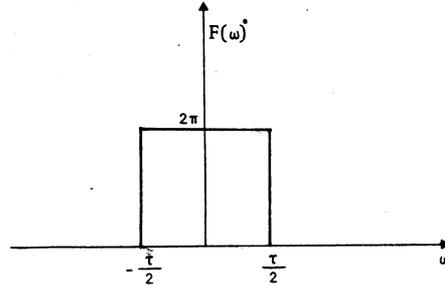


Figura 18.11

### 8) Integración

Si  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $f(t)$  y se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0 \quad (18.17)$$

o en forma equivalente:

$$F(\omega) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (18.18)$$

entonces:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(y) dy\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (18.19) \quad \text{Propiedad de Integración}$$

Demostración:

Consideremos la función:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f(y) dy$$

al derivar se obtiene:

$$x'(t) = f(t)$$

y aplicando el teorema de derivación, se tiene:

$$\mathcal{F}[x'(t)] = j\omega \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

de donde:

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

o

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(y) dy\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

La expresión (18.19) establece la propiedad de integración y es válida si se cumple la expresión (18.18) y  $\omega \neq 0$ .

#### 9) Cambio de signo

Si  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $f(t)$  entonces:

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega) \quad (18.20) \quad \text{Propiedad de cambio de signo}$$

Demostración:

La transformada de Fourier de  $f(-t)$  está dada por:

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt$$

sustituyendo  $-t = y$  en el segundo miembro:

$$\mathcal{F}[f(-t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{j\omega y} dy$$

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j(-\omega)y} dy$$

sustituyendo  $y$  por  $t$  en el segundo miembro:

$$\mathcal{F}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(-\omega)t} dt$$

por lo tanto:

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$$

#### 18.4 ESPECTRO DE ENERGIA

Consideremos ahora algunas características de la transformada de Fourier y trataremos de darle una interpretación física en términos de la energía asociada con una señal.

Así, empleando la identidad de Euler, escribiremos la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t] dt \end{aligned}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt \quad (18.21)$$

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (18.22)$$

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (18.23)$$

de las expresiones anteriores obtendremos las relaciones:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \quad (18.24)$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt \quad (18.25)$$

la magnitud y la fase de la transformada son:

$$|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \quad (18.26)$$

$$\theta(\omega) = \operatorname{ang} \tan \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad (18.27)$$

En las relaciones (18.24) a la (18.27) si se reemplaza  $\omega$  por  $-\omega$  se puede establecer que  $R(\omega)$  y  $|F(\omega)|$  son funciones pares, mientras que  $X(\omega)$  y  $\theta(\omega)$  son funciones impares.

Si  $f(t)$  es una función par, entonces el integrando de la ecuación (18.25) es una función impar y los límites simétricos dan origen a que  $X(\omega)$  sea cero; por lo tanto, la transformada de Fourier es solamente  $R(\omega)$ , siendo ésta real y par; y la función del ángulo de fase  $\theta(\omega)$ , es cero.

Si  $f(t)$  es una función impar, entonces  $R(\omega)$  es cero y la transformada de Fourier es  $jX(\omega)$  siendo ésta impar e imaginaria;  $\theta(\omega)$  vale  $\pm \frac{\pi}{2}$

Al reemplazar  $\omega$  por  $-\omega$  en la ecuación (18.21) se obtiene el conjugado:

$$F(-\omega) = R(\omega) - jX(\omega)$$

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

luego podemos obtener el producto:

$$\begin{aligned} F(\omega)F(-\omega) &= F(\omega)F^*(\omega) \\ &= R^2(\omega) + X^2(\omega) \\ F(\omega)F(-\omega) &= |F(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (18.28)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta esas características de la transformada de Fourier, consideremos una interpretación.

Supongamos que  $f(t)$  es el voltaje a través de una resistencia de  $1 \Omega$ , entonces  $f^2(t)$  es la potencia instantánea de esta resistencia. Al integrar la potencia se obtiene la energía total entregada por  $f(t)$  a la resistencia de  $1 \Omega$ :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (18.29) \quad \begin{array}{l} \text{Contenido de} \\ \text{energía de una} \\ \text{señal} \end{array}$$

descomponiendo  $f^2(t)$  en  $f(t)f(t)$  y utilizando la ecuación fundamental de la transformada inversa:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

intercambiando el orden de  $f(t)$ ,  $F(\omega)$ ,  $d\omega$  y  $dt$ :

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

y como la integral dentro del paréntesis es  $F(-\omega)$ , es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = F(-\omega)$$

entonces:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F(-\omega) d\omega \quad (18.30)$$

sustituyendo la ecuación (18.28) en la (18.30) se obtiene:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (18.31)$$

igualando las ecuaciones (18.29) y (18.31) se tiene:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (18.32) \quad \text{Teorema de Parseval}$$

la ecuación (18.32) se conoce como el *teorema de Parseval*.

El teorema, junto con la ecuación (18.29), establecen que la energía asociada con  $f(t)$  se puede obtener integrando en el dominio del tiempo o integrando en el dominio de la frecuencia.

El teorema de Parseval nos conduce a un mejor entendimiento de la transformada de Fourier. Consideremos un voltaje  $f(t)$  con la transformada de Fourier  $F(\omega)$  y la energía en la resistencia de  $1\Omega$ .

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (18.33)$$

pero como  $|F(\omega)|$  es una función par, tenemos:

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (18.34)$$

La figura 18.12 muestra una representación de  $|F(\omega)|^2$  en función de  $\omega$ . Si dividimos la escala de frecuencia en pequeños incrementos  $d\omega$ , la ecuación (18.34) establece que el área diferencial bajo la curva  $|F(\omega)|^2$  con un ancho  $d\omega$  es igual a  $|F(\omega)|^2 d\omega$ . El área aparece sombreada en la gráfica.

La suma de dichas áreas cuando  $\omega$  varía desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$  es la energía total de  $f(t)$  en la resistencia de  $1\Omega$ . Así  $|F(\omega)|^2$  es la densidad de energía o energía por ancho de banda de  $f(t)$  en Joules/(rad/s), ya que al integrar en un intervalo de frecuencia se calcula una parte de la energía total comprendida en el intervalo dado.

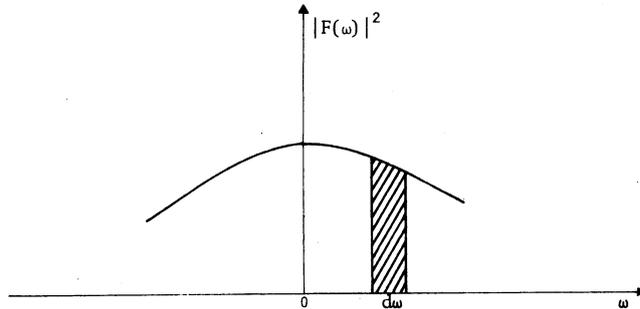


Figura 18.12 Densidad de energía o energía por ancho de banda.

#### Ejemplo 18.5

Si el voltaje exponencial:

$$v(t) = 4e^{-3t} u(t)$$

se aplica a la entrada de un filtro pasabanda ideal cuyas frecuencias de corte son  $\omega_1 = 2\pi$ ,  $\omega_2 = 4\pi$ , determine:

- la energía total en la resistencia de  $1\Omega$  para el voltaje de entrada,
- la energía en el voltaje de salida del filtro.

Solución

a) La transformada de Fourier del voltaje de entrada es:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-3t} u(t) dt \\
 &= 4 \int_0^{\infty} e^{-(3 + j\omega)t} dt
 \end{aligned}$$

$$F(\omega) = \frac{4}{3 + j\omega}$$

y la energía total de este voltaje es:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\
 &= \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{9 + \omega^2} \\
 &= \frac{16}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{9 + \omega^2} \\
 &= \frac{16}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{ang} \tan \frac{\omega}{3} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{16}{3\pi} (\operatorname{ang} \tan \infty - \operatorname{ang} \tan 0) \\
 &= \frac{16}{3\pi} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right)
 \end{aligned}$$

$$E_1 = 2.6 \text{ J}$$

- b) La energía en el voltaje de salida es la parte de energía de  $v(t)$  que se encuentra en las componentes de frecuencia comprendidas en los intervalos:

$$2\pi < \omega < 4\pi \quad \text{y} \quad -4\pi < \omega < -2\pi$$

por consiguiente tenemos:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-4\pi}^{-2\pi} \frac{16 \, d\omega}{9 + \omega^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{16 \, d\omega}{9 + \omega^2} \\ &= \frac{8}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{ang} \tan \frac{\omega}{3} \right]_{-4\pi}^{-2\pi} + \frac{8}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{ang} \tan \frac{\omega}{3} \right]_{2\pi}^{4\pi} \\ &= \frac{8}{3\pi} \left[ \operatorname{ang} \tan \frac{-2\pi}{3} - \operatorname{ang} \tan \frac{-4\pi}{3} + \operatorname{ang} \tan \frac{4\pi}{3} - \operatorname{ang} \tan \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= \frac{8}{3\pi} (0.42) \\ E_2 &= 0.36 \text{ J} \end{aligned}$$

## CUESTINARIO DE AUTOEVALUACION

1. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Para la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & |t| < \pi \\ 0 & |t| > \pi \end{cases}$$

a) determine la transformada de Fourier  $F(\omega)$ ,

b) calcule el valor de  $F(\omega)$  cuando  $\omega = 2$ .

a)  $F(\omega) =$  \_\_\_\_\_

b)  $F(2) =$  \_\_\_\_\_

2. Determine la transformada de Fourier  $F(\omega)$  para la funcción representada en la figura 18.13.

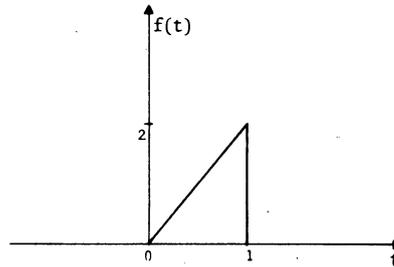


Figura 18.13

$F(\omega) =$  \_\_\_\_\_

3. Dada la siguiente transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 0.5 \\ 0 & |\omega| > 0.5 \end{cases}$$

- a) obtenga la transformada inversa  $f(t)$ ,  
 b) determine el valor de  $f(t)$  cuando  $t = 0$ .

a)  $f(t) =$  \_\_\_\_\_

b)  $f(0) =$  \_\_\_\_\_

4. Obtenga la transformada de Fourier para la función mostrada en la figura 18.14.

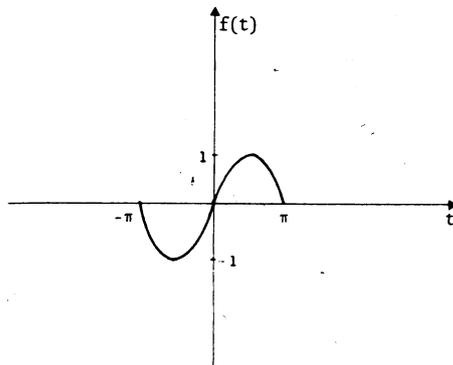


Figura 18.14

$F(\omega) =$  \_\_\_\_\_

5. Para la siguiente función:

$$f(t) = 5e^{-3|t|}$$

- determine la transformada de Fourier  $F(\omega)$ ,
- calcule el valor de  $F(\omega)$  cuando  $\omega = 0$ ,
- obtenga el valor de  $R(\omega)$  cuando  $\omega = 2$ ,
- calcule el valor de  $X(\omega)$  cuando  $\omega = 1$ .

a)  $F(\omega) =$  \_\_\_\_\_

b)  $F(0) =$  \_\_\_\_\_

c)  $R(2) =$  \_\_\_\_\_

d)  $X(1) =$  \_\_\_\_\_

6. Para la función representada en la figura 18.15, determine la transformada de Fourier.

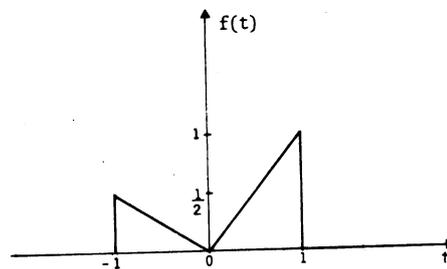


Figura 18.15

$F(\omega) =$  \_\_\_\_\_

7. Dada la siguiente función exponencial:

$$f(t) = 10 e^{-5t}$$

- a) determine  $F(\omega)$ ,  
 b) obtenga  $F(\omega)$  cuando  $\omega = 0$ ,  
 c) calcule  $R(\omega)$  cuando  $\omega = 2$ ,  
 d) obtenga  $X(\omega)$  cuando  $\omega = 1$ .

a)  $F(\omega) =$  \_\_\_\_\_

b)  $F(0) =$  \_\_\_\_\_

c)  $R(2) =$  \_\_\_\_\_

d)  $X(1) =$  \_\_\_\_\_

8. Para la función representada en la figura 18.16, determine la transformada de Fourier.

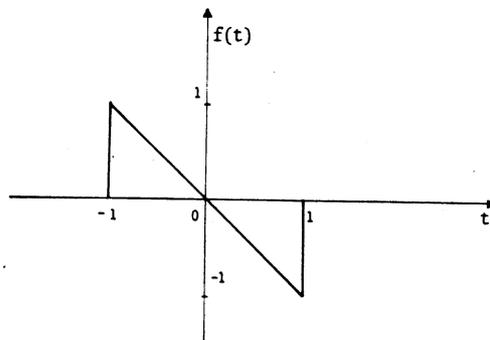


Figura 18.16

$F(\omega) =$  \_\_\_\_\_

9. Determine la energía en la resistencia de  $1\Omega$  asociada con el voltaje:

$$v(t) = e^{-t}$$

en los siguientes intervalos:

- a)  $-1 < \omega < 1$
- b)  $-3 < \omega < 3$
- c)  $-5 < \omega < 5$

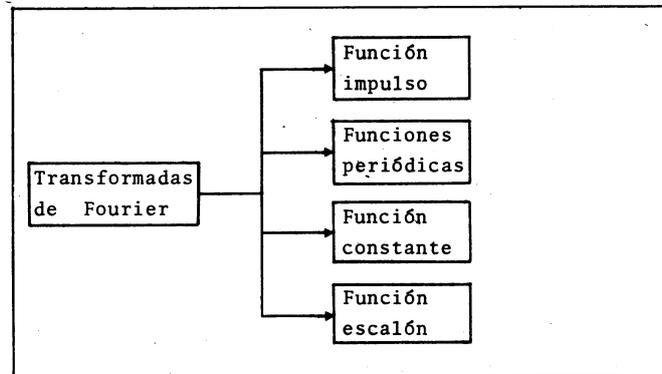
a)  $E =$  \_\_\_\_\_ J

b)  $E =$  \_\_\_\_\_ J

c)  $E =$  \_\_\_\_\_ J

## MODULO 19. TRANSFORMADAS DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES

## CUADRO SINOPTICO



## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Describirá las características de la función impulso.
2. Obtendrá la transformada de Fourier de la función impulso.
3. Determinará la transformada de Fourier de funciones periódicas.
4. Obtendrá la transformada de Fourier de la función escalón.
5. Determinará la transformada de Fourier de una función constante.

## 19.1 LA FUNCION IMPULSO

La función impulso unitario se define como una función que es cero cuando su argumento  $(t - t_0)$  es diferente de cero; es infinita cuando su argumento es cero y su área vale la unidad. Lo anterior se expresa matemáticamente como:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases} \quad (19.1)$$

Función impulso unitario

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (19.2)$$

La función impulso unitario definida por las ecuaciones (19.1) y (19.2) se muestra en la figura 19.1

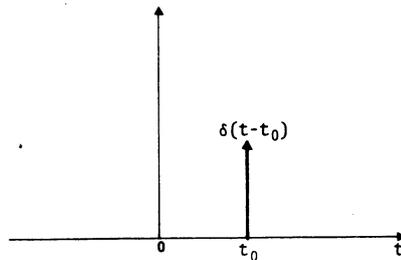


Figura 19.1 Función impulso unitario desplazado el tiempo  $t_0$

Observe que el impulso está desplazado respecto al origen en el tiempo  $t_0$ .

De acuerdo con el valor especificado por la ecuación (19.1) los límites de la integral de la ecuación (19.2), pueden representarse por  $t_{0-}$  y  $t_{0+}$ , los cuales son valores que están muy cercanos a  $t_0$ , y entonces la ecuación (19.2) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (19.3)$$

Cuando el impulso unitario se presenta en  $t$  igual a cero; esto es, en el origen, las ecuaciones que lo definen son:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (19.4)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (19.5)$$

o

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (19.6)$$

La función impulso definida por las expresiones (19.4) y (19.5) se muestra en la figura 19.2.

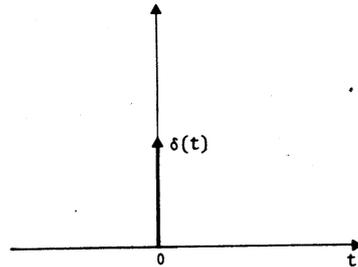


Figura 19.2 Función impulso unitario situada en el origen

Otra manera de interpretar a la función impulso se basa en obtenerla a partir de un pulso, con área unitaria, cuya du ración se hace tender a cero.

Consideremos el pulso de la figura 19.3.

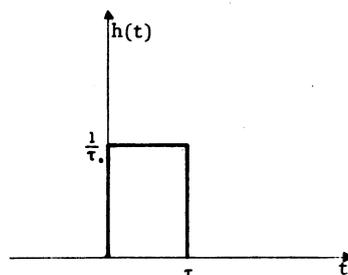


Figura 19.3 Pulso de área unitaria

El pulso tiene duración  $\tau$  y amplitud  $\frac{1}{\tau}$ , en consecuencia el área encerrada por el pulso es unitaria. La función se expresa matemáticamente como sigue:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & 0 > t > \tau \end{cases}$$

ahora, si hacemos que  $\tau$  tome un valor más pequeño, es decir, que disminuya la duración del pulso, entonces la amplitud crecerá necesariamente.

Si hacemos que  $\tau$  tienda a cero, tendremos que la amplitud crecerá indefinidamente; por lo tanto, en el límite, la función es un impulso unitario, esto es:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} h(t)$$

existe otra manera de concebir a la función impulso unitario, que es definiéndola como la derivada del escalón unitario  $u(t)$ . Es decir, si:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

entonces:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

ahora bien, si una función impulso unitario se multiplica por una constante, las expresiones (19.1) y (19.4) no se ven afectadas porque el valor del impulso continúa siendo cero cuando el argumento es diferente de cero. Sin embargo, en las expresiones (19.2) y (19.5) el área es igual al valor de la constante; esta área se llama *intensidad o peso del impulso*. Así por ejemplo, el impulso  $3\delta(t)$  tiene una intensidad de 3 y el impulso  $-2\delta(t)$ , una intensidad de -2.

En la figura 19.4 se representan varios impulsos con diferentes intensidades.

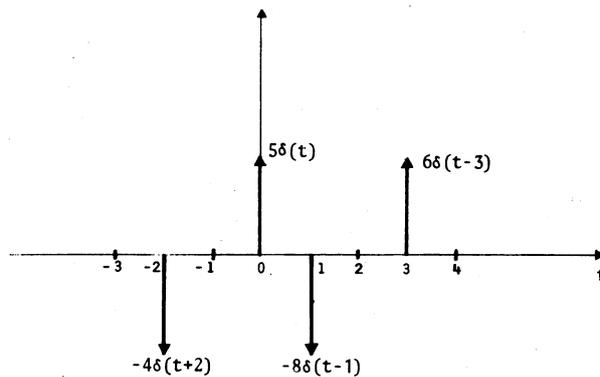


Figura 19.4 Impulsos con intensidades diferentes

Observe que las diferentes intensidades de los impulsos se indican a la misma escala; esto se debe a que cada impulso tiene magnitud infinita. Los impulsos positivos se dibujan hacia arriba del eje t y los impulsos negativos se dibujan hacia abajo.

Cuando el impulso unitario se multiplica por una función del tiempo, la intensidad del impulso es igual al valor de la función en el instante en el que el argumento del impulso es cero y se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (19.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (19.8)$$

#### Ejemplo 19.1

Determine la intensidad de los siguientes impulsos:

- a)  $f_1(t) = 2 e^{-t} \delta(t)$
- b)  $f_2(t) = \cos t \delta(t)$
- c)  $f_3(t) = 5 t \delta(t - 2)$

#### Solución

- a) La intensidad de  $f_1(t)$  está dada por la ecuación (19.7), es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2 e^{-t} \delta(t) dt = 2 e^0 = 2$$

por lo tanto, el valor de la intensidad del impulso es 2.

- b) En tal caso la intensidad está dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t \delta(t) dt = \cos 0 = 1$$

el valor de la intensidad es 1.

- c) Ahora la intensidad está dada por la ecuación (19.8), es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 5t \delta(t - 2) dt = 5(2) = 10$$

por lo tanto, la intensidad del impulso es 10.

## 19.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCION IMPULSO

Ahora determinaremos la transformada de Fourier del impulso unitario, es decir, obtendremos una descripción en el dominio de la frecuencia para esta función. Así, aplicando la definición de transformada de Fourier al impulso  $\delta(t)$ :

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t) dt$$

de acuerdo a la expresión (19.7) resulta que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(t)] &= f(0) \\ &= e^{-j\omega(0)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta(t)] = 1}$$

(19.9) Transformada del impulso

así la transformada de Fourier del impulso unitario  $\delta(t)$  es la unidad. El impulso unitario y la magnitud de su transformada de Fourier se muestran en las figuras 19.5.a y 19.5.b, respectivamente.

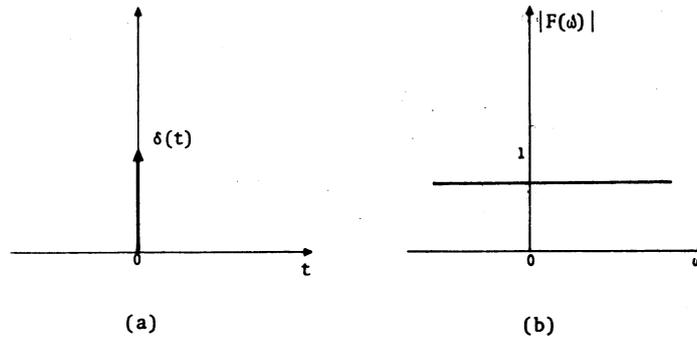


Figura 19.5 a) Función impulso  $\delta(t)$   
b) Su espectro de frecuencia

Observe que la función impulso tiene un espectro uniforme para todas las frecuencias.

La transformada inversa de Fourier de 1 es  $\delta(t)$ ; esto es:

$$\mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t)$$

Por consiguiente, en términos de la integral de la transformada inversa de Fourier tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$

y haciendo el cambio  $y = t$  y  $\omega = x$  se obtiene:

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jxy} dx \quad (19.10)$$

La ecuación (19.10) es una expresión representativa de la función impulso que nos será de gran utilidad para obtener las transformadas de Fourier de otras funciones singulares.

Continuando con la función impulso, obtendremos ahora la transformada de Fourier del impulso  $\delta(t - t_0)$  desplazado  $t_0$  segundos tal como se muestra en la figura 19.6.

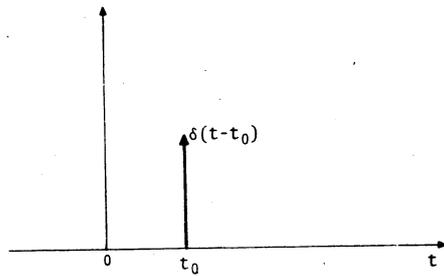


Figura 19.6 Impulso desplazado

Así:

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(t - t_0) dt$$

pero de acuerdo con la expresión (19.8) del impulso, se obtiene:

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t} \Big|_{t=t_0}$$

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \quad (19.11)$$

La expresión (19.11) también puede calcularse usando la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

La magnitud  $|F(\omega)|$  del impulso desplazado, está dada por:

$$|F(\omega)| = |e^{-j\omega t_0}| = \sqrt{(\cos \omega t_0)^2 + (\sin \omega t_0)^2} = 1$$

observe que el espectro del impulso desplazado es igual al impulso en el origen, que se muestra en la figura 19.5.b.

### 19.3 TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCION EXPONENCIAL COMPLEJA

Consideremos ahora una función  $f(t)$  que tiene la siguiente transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) \quad (19.12)$$

esta transformada de Fourier es un impulso en el dominio de la frecuencia, desplazado la cantidad  $\omega_0$ . En términos de la definición de la transformada inversa de Fourier, se tiene para la expresión (19.12):

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1} [ F(\omega) ] \\ &= \mathcal{F}^{-1} [ \delta(\omega - \omega_0) ] \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega \end{aligned}$$

De acuerdo a la propiedad (19.8) del impulso obtenemos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \Big|_{\omega = \omega_0} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (19.13)$$

Luego, relacionando las expresiones (19.12) y (19.13), se establece la transformada:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \right] &= \delta(\omega - \omega_0) \\ \circ \\ \mathcal{F} \left[ e^{j\omega_0 t} \right] &= 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (19.14)$$

utilizando el signo negativo para la función exponencial se tiene:

$$\mathcal{F} [ e^{-j\omega_0 t} ] = 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \quad (19.15) \quad \begin{array}{l} \text{Transformada de} \\ \text{la exponencial} \\ \text{compleja} \end{array}$$

Esta transformada también puede obtenerse utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, demostradas en el módulo 18.

Como puede observarse en las expresiones (19.14) y (19.15), la transformada de Fourier de la función exponencial compleja es un impulso desplazado  $\pm \omega_0$  y cuya intensidad es  $2\pi$ .

#### Ejemplo 19.2

Determine la transformada de Fourier de la función  $\cos \omega_0 t$ , la cual se representa en la figura 19.7.

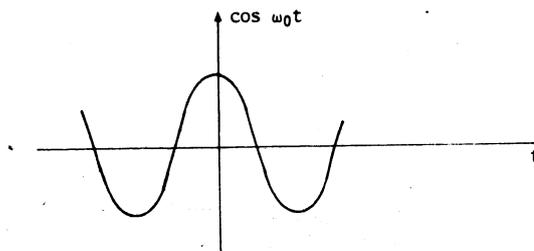


Figura 19.7

#### Solución

Utilizando la identidad de Euler tenemos:

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

y de la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier:

$$a_1 \mathcal{F} [ f_1(t) ] + a_2 \mathcal{F} [ f_2(t) ] = \mathcal{F} [ a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) ]$$

se obtiene la transformada:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2} [2\pi \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} [2\pi \delta(\omega + \omega_0)]\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)}$$

Transformada  
del coseno

Esto indica que la descripción en el dominio de la frecuencia de la función  $\cos \omega_0 t$ , es un par de impulsos localizados en  $\pm \omega_0$ , tal como se muestra en la figura 19.8.

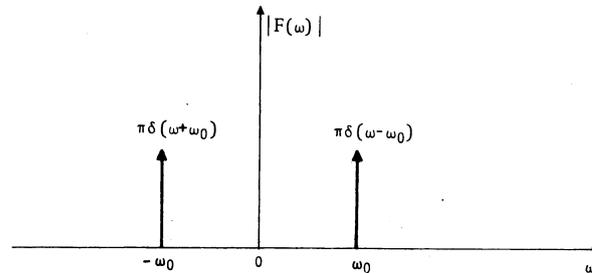


Figura 19.8

#### 19.4 TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES PERIÓDICAS

Ahora determinaremos la transformada de Fourier de una función periódica cualquiera. Consideremos entonces la función periódica  $f(t)$  con período  $T$ , la cual puede representarse por una serie exponencial de Fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (19.16)$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (19.17)$$

y

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (19.18)$$

Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de una suma es la suma de las transformadas de los sumandos y que  $c_n$  no es función del tiempo aplicamos la transformada a la función periódica de la ecuación (19.16):

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}\right]$$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_0 t}]$$

\* sustituyendo la transformada de Fourier de  $e^{jn\omega_0 t}$  dada por la expresión (19.14) obtenemos:

$$\mathcal{F}[f(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

(19.19) Transformada de una función periódica

La expresión (19.19) implica que la transformada de Fourier de la función periódica  $f(t)$  es un espectro discreto que consiste en impulsos localizados sobre el eje  $\omega$ , para  $\omega = n\omega_0$ , donde  $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . La intensidad de cada impulso es  $2\pi$  veces el valor del coeficiente correspondiente  $c_n$  de la expansión en serie exponencial de Fourier para la función  $f(t)$ .

Ahora bien, si la expresión (19.19) para la transformada de Fourier de  $f(t)$  es válida, entonces la transformada inversa de Fourier del segundo miembro deber ser la función  $f(t)$ . Que se puede demostrar de la siguiente manera:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \right] d\omega$$

Puesto que el término exponencial no contiene el índice  $n$  de la suma, se pueden intercambiar la integral y la suma.

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega - n\omega_0) d\omega$$

como  $c_n$  no depende de  $\omega$ , se considera constante. Entonces, utilizando la propiedad del impulso de la ecuación (19.8), obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left[ e^{j\omega t} \Big|_{\omega = n\omega_0} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$$

en consecuencia, se obtuvo la misma expresión de la ecuación (19.16) que es la serie exponencial de Fourier de la función  $f(t)$ , y la existencia de la transformada de Fourier de una función periódica queda establecida.

#### Ejemplo 19.3

Obtenga la transformada de Fourier de la función periódica que se muestra en la figura 19.9.

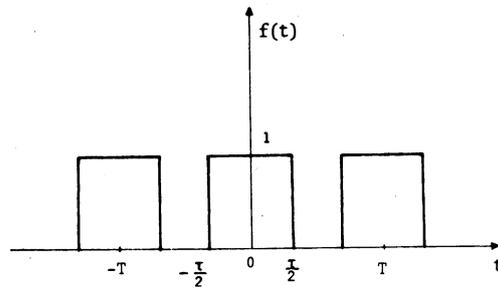


Figura 19.9

Solución

Los coeficientes  $c_n$  están dados por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$c_n = \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc} \left( \frac{n\omega_0 \tau}{2} \right)$$

luego sustituimos  $c_n$  en la expresión (19.19) para obtener:

$$\mathcal{F} [ f(t) ] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc} \left( \frac{n\omega_0 \tau}{2} \right) \tau(\omega - \omega_0)$$

Transformada de un tren de pulsos

dicha expresión indica que la transformada de Fourier del tren de pulsos consiste en impulsos cuyas intensidades están dadas por  $\frac{2\pi\tau}{T} \operatorname{sinc} \left( \frac{n\omega_0 \tau}{2} \right)$ . La figura 19.10 muestra el espectro de frecuencia del tren de pulsos de la figura 19.9. Observe que la intensidad de los pulsos está determinada por la función:

$$\operatorname{sinc} \left( \frac{n\omega_0 \tau}{2} \right)$$

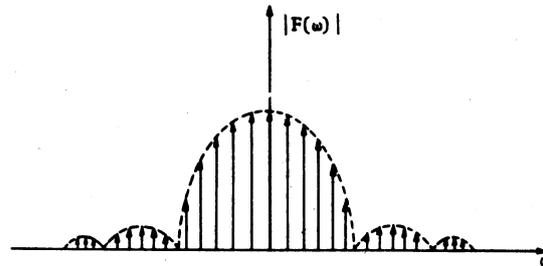


Figura 19.10

## 19.5 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCION CONSTANTE

En este apartado obtendremos la transformada de Fourier de la función constante:

$$f(t) = K$$

En la figura 19.11 se muestra una gráfica de dicha función constante:

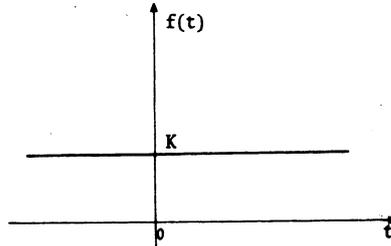


Figura 19.11 Función constante

Observe que tal función no cumple la condición de existencia de la transformada de Fourier, establecida en la ecuación (18.9) del módulo 18. Sin embargo, obtendremos su transformada de Fourier, lo que verifica que la condición antes mencionada es suficiente pero no necesaria.

Partiendo de la definición de la transformada, se tiene:

$$\mathcal{F}[K] = \int_{-\infty}^{\infty} K e^{-j\omega t} dt$$

haremos a continuación algunas modificaciones en esta ecuación para llevarla a una expresión equivalente

Multiplicando y dividiendo por  $2\pi$ , tenemos:

$$\mathcal{F}[K] = 2\pi K \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega)t} dt \quad (19.20)$$

ahora, haciendo  $y = -\omega$  y  $x = t$  en la ecuación (19.10), se tiene:

$$\delta(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(-\omega)t} dt \quad (19.21)$$

sustituyendo la ecuación (19.21) en la (19.20), se tiene:

$$\mathcal{F}[K] = 2\pi K \delta(-\omega)$$

ya que la función impulso es par, es decir,  $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$ , la transformada de Fourier de la función constante  $K$  es:

$$\mathcal{F}[K] = 2\pi K \delta(\omega) \quad (19.22) \quad \text{Transformada de una constante}$$

la expresión (19.22) indica que el espectro de frecuencia de la constante  $K$  consiste en un impulso situado en  $\omega = 0$  tal como se muestra en la figura 19.12. La intensidad del impulso es  $2\pi K$ .

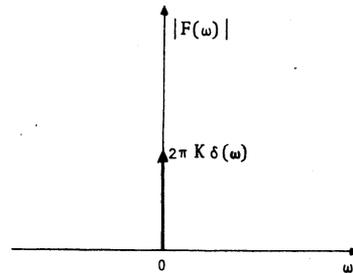


Figura 19.12 Espectro de la función constante

Otra manera de obtener la transformada de Fourier de la función constante  $K$  es la siguiente:

si en la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

hacemos  $\omega_0 = 0$ , entonces se obtiene:

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\omega) \quad (19.23)$$

y multiplicando por  $K$  ambos miembros se obtiene la transformada de la constante  $K$ :

$$\mathcal{F}[K] = 2\pi K \delta(\omega) \quad (19.22)$$

## 19.6 TRANSFORMADA DE LA FUNCION ESCALON

Antes de obtener la transformada de la función escalón obtendremos la de otra función muy relacionada que es la llamada función *signum*, que se define como sigue:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

la gráfica de esta función se muestra en la figura 19.13:

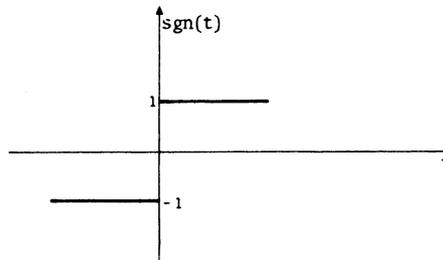


Figura 19.13 Función signum

Obtendremos la transformada de la función:

$$f(t) = \text{sgn}(t)$$

para ello, observe que:

$$\frac{d}{dt} f(t) = 2 \delta(t) \quad (19.24)$$

ahora, recuerde que la propiedad de la derivada, que se vió en el módulo anterior, establece:

$$\mathcal{F} \left[ \frac{d}{dt} f(t) \right] = j\omega \mathcal{F} [f(t)] \quad (18.15)$$

por otro lado, si asumimos:

$$\mathcal{F} [f(t)] = \mathcal{F} [\text{sgn}(t)] = F(\omega)$$

tendremos:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = j\omega F(\omega) \quad (19.25)$$

y sustituyendo la ecuación (19.24) en la (19.25):

$$\mathcal{F}\left[2 \delta(t)\right] = j\omega F(\omega)$$

de la ecuación (19.9), se obtiene:

$$\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] = 1 \quad (19.9)$$

entonces:

$$2\mathcal{F}\left[\delta(t)\right] = 2 = j\omega F(\omega)$$

por lo tanto:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left[\text{sgn}(t)\right] = \frac{2}{j\omega}$$

(19.26) Transformada de la función signum

esta es la transformada de Fourier de la función signum y su espectro de frecuencia se muestra en la figura 19.14.

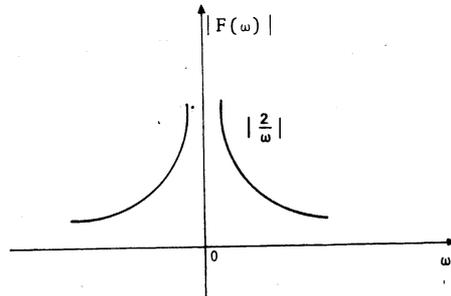


Figura 19.14 Espectro de frecuencia de la función signum

Ahora obtendremos la transformada de la función escalón unitario, utilizando para ello el resultado expresado en la ecuación (19.26).

Sea la función escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (19.27)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 19.15.

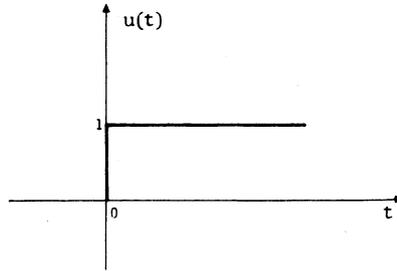


Figura 19.15 Función escalón unitario

Podemos expresar dicha función como sigue:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad (19.28)$$

ahora, tomando la transformada de Fourier en ambos lados de tal ecuación y aplicando la propiedad de linealidad, se tiene:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[1] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] \quad (19.29)$$

sustituyendo en la expresión (19.29) las ecuaciones (19.22) y (19.26), se obtiene:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{2} 2\pi \delta(\omega) + \frac{1}{2} \frac{2}{j\omega}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[u(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

Transformada de  
(19.30) un escalón uni-  
tario

por lo tanto, el espectro de la función escalón unitario se muestra en la figura 19.16.

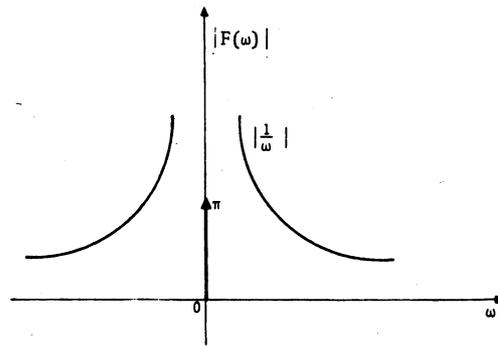


Figura 19.16 Espectro del escalón unitario

Observe que ese espectro es la suma del espectro de la función  $\text{sgn}(t)$ , más un impulso, en el origen, con intensidad  $\pi$ .

La tabla 19.1 presenta las funciones, las transformadas de Fourier y los espectros de frecuencia correspondientes, desarrolladas a través de este módulo.

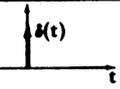
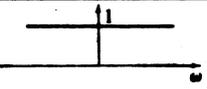
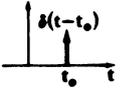
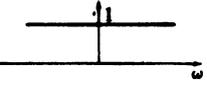
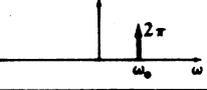
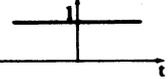
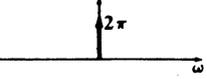
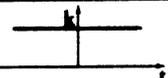
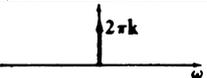
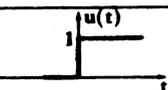
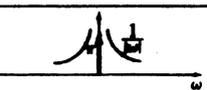
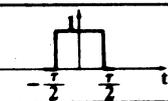
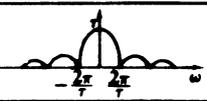
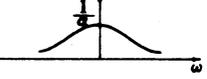
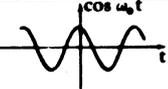
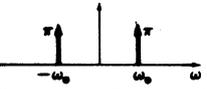
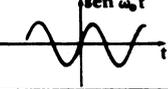
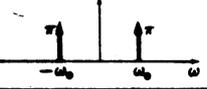
	$f(t)$	$F(\omega)$	$ F(\omega) $
IMPULSO UNITARIO		1	
IMPULSO UNITARIO DESPLAZADO		$e^{-j\omega t_0}$	
EXPONENCIAL COMPLEJA		$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	
CONSTANTE UNITARIA		$2\pi \delta(\omega)$	
CONSTANTE		$2\pi K\delta(\omega)$	
ESCALON UNITARIO		$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
PULSO UNITARIO		$\tau \frac{\text{sen } \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$	
EXPONENCIAL		$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	
COSENO		$\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)$	
SENO		$j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$	

Tabla 19.1 Algunas funciones en el tiempo, sus transformadas de Fourier y espectros de frecuencia

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Calcule la intensidad de las siguientes funciones impulso:

a)  $2 \operatorname{sen} \pi t \delta(t - 0.25)$

b)  $5 \cos (\pi t + 3\pi) \delta(t - 1)$

a) \_\_\_\_\_

b) \_\_\_\_\_

2. Evalúe las siguientes integrales:

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} 10 \operatorname{sen} \pi t \delta(t - 0.5) dt$

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} 5 e^{-3t^2} \delta(t) dt$

a) \_\_\_\_\_

b) \_\_\_\_\_

3. Determine las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

a)  $2 - 5\delta(t)$

b)  $3u(t - 2)$

c)  $-\delta(t + 1) + 4\delta(t - 5)$

a) \_\_\_\_\_

b) \_\_\_\_\_

c) \_\_\_\_\_

4. Obtenga la función en el tiempo para las siguientes transformadas de Fourier:

a)  $\frac{10}{5 + j\omega}$

b)  $10\delta(\omega - 3) + 10\delta(\omega + 3)$

a) \_\_\_\_\_

b) \_\_\_\_\_

5. Determine la transformada de Fourier para la función  $f(t) = \text{sen } \omega_0 t$

$$F(\omega) = \underline{\hspace{4cm}}$$

6. Obtenga las transformadas de Fourier para las siguientes funciones:

a)  $10 \text{ sen } 5t$

b)  $10 \cos(5t + \frac{\pi}{3})$

a)  $\underline{\hspace{4cm}}$

b)  $\underline{\hspace{4cm}}$

7. Determine la transformada de Fourier  $F(\omega)$ , de la función periódica que se muestra en la figura 19.17.

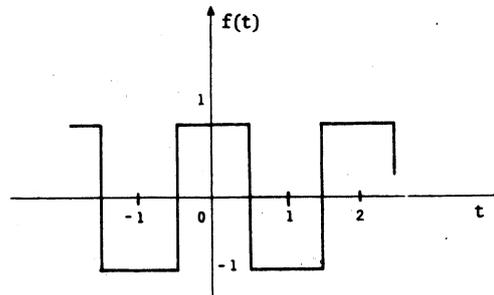


Figura 19.17

$$F(\omega) = \underline{\hspace{4cm}}$$

8. Obtenga la transformada de Fourier del tren de impulsos  $\delta_T(t)$  definido por:

$$\delta_T(t) = \dots + \delta(t + T) + \delta(t) + \delta(t - T) + \dots$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$F(\omega) = \underline{\hspace{10cm}}$$

9. Determine la transformada de Fourier de la función que se muestra en la figura 19.18.

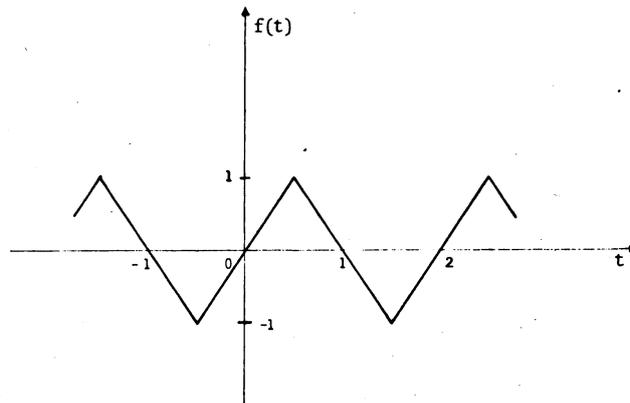
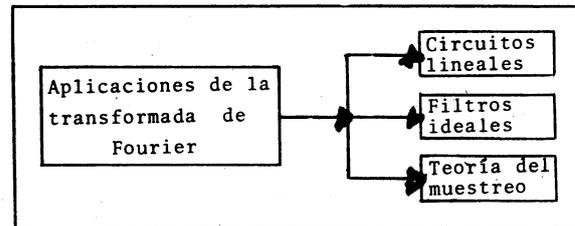


Figura 19.18

$$F(\omega) = \underline{\hspace{10cm}}$$

## MODULO 20. ALGUNAS APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

## CUADRO SINOPTICO



## OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al finalizar el estudio de este módulo, el alumno:

1. Determinará la respuesta de un circuito lineal utilizando el teorema de la convolución.
2. Obtendrá la respuesta en el dominio del tiempo de un circuito, tomando la transformada inversa de Fourier de la respuesta en el dominio de la frecuencia.
3. Identificará la función de transferencia y el espectro de frecuencia de un filtro ideal, de frecuencias bajas.
4. Explicará el teorema de las muestras uniformes.

## 20.1 CONVOLUCION Y RESPUESTA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Consideremos un circuito eléctrico con condiciones iniciales nulas al cual se le aplica una función excitatriz  $x(t)$ ; en consecuencia, en este circuito se produce la respuesta  $y(t)$ . Lo anterior se ilustra en un diagrama de bloque en la figura 20.1.

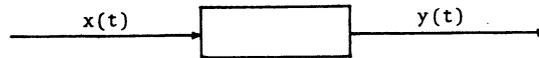


Figura 20.1 Diagrama de bloque

Considere ahora que al circuito se le aplica, en  $t = 0$ , un impulso  $\delta(t)$  como excitación; como respuesta se obtendrá la función  $h(t)$ , conocida como respuesta al impulso. Observe la figura 20.2.

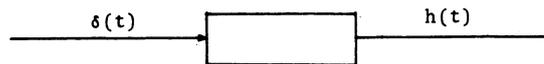


Figura 20.2 Diagrama de bloque

Si el impulso se aplica en  $t = \lambda$  en vez de  $t = 0$ , el único cambio será un retraso en la salida; por consiguiente, la respuesta se convierte en  $h(t - \lambda)$ .

Supongamos ahora que el impulso tiene una intensidad numéricamente igual al valor de  $x(t)$  cuando  $t = \lambda$ . Este valor  $x(\lambda)$  es una constante que produce un cambio proporcional en la respuesta del circuito lineal. Por consiguiente, si la entrada se cambia a  $x(\lambda) \delta(t - \lambda)$ , entonces la respuesta se convierte en  $x(\lambda) h(t - \lambda)$ , como se muestra en la figura 20.3.



Figura 20.3 Diagrama de bloque

Si se suma ahora la entrada  $x(\lambda) \delta(t - \lambda)$  para todos los valores posibles de  $\lambda$ , y si el resultado se considera como una función excitatriz para el circuito, debido a la linealidad del mismo, la respuesta será igual a la suma de las respuestas parciales. Dichas respuestas resultan de todos los valores posibles de  $\lambda$ .

Debido a que  $\lambda$  es una variable continua, las sumas a las que nos referimos arriba, son de hecho integrales. Observe la figura 20.4.

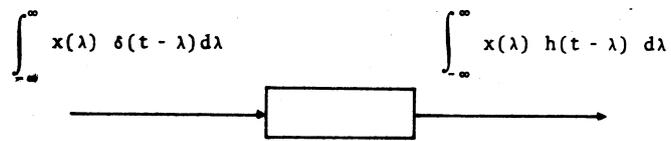


Figura 20.4 Diagrama de bloque

Evaluaremos ahora la integral de entrada al circuito (véase la figura 20.4). Para ello utilizaremos la propiedad del impulso dada por la ecuación (19.8) del módulo anterior, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (19.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = x(\lambda) \Big|_{\lambda = t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = x(t)$$

por lo tanto, la función de entrada al circuito es  $x(t)$ . Así, si se conoce la función de entrada  $x(t)$  de un circuito, la salida estará dada por la siguiente expresión:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

(20.1) Integral de convolución

tal expresión es conocida como la *integral de convolución*, o simplemente *convolución*, y es una operación definida entre las funciones  $x(t)$  y  $h(t)$ .

De esa manera, queda establecido que la salida de un circuito está dada por la convolución de la función de entrada con la respuesta al impulso.

La operación de convolución entre dos funciones se expresa de la siguiente manera:

$$g(t) = x(t) * h(t)$$

La operación de convolución cumple, entre otras cosas con las siguientes propiedades:<sup>17</sup> Propiedades de la convolución

#### Asociatividad

Sean  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  y  $f_3(t)$ , funciones del tiempo, entonces:

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

(20.2)

#### Commutatividad

Sean  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , funciones del tiempo, entonces:

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (20.3)$$

#### Elemento idéntico

Sea  $f(t)$  una función del tiempo y  $\delta(t)$  la función impulso unitario, entonces:

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (20.4)$$

<sup>17</sup> La demostración de estas propiedades puede consultarse en Hsu, Hwei P., pp 88 - 90.

## Ejemplo 20.1

Evalúe gráficamente la convolución de las funciones mostradas en la figura 20.5.

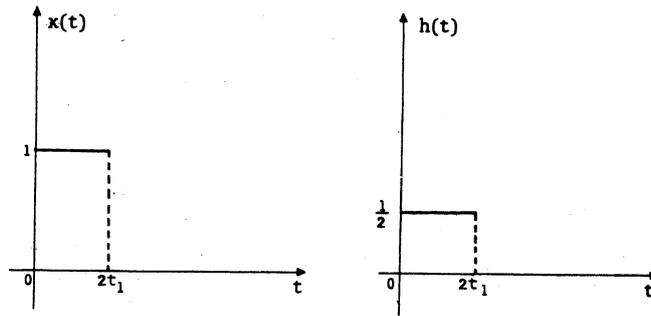


Figura 20.5

Se pretende obtener una gráfica que muestre la convolución de las funciones  $x(t)$  y  $h(t)$ . Así:

$$g(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

Note que la convolución es el área bajo la curva del producto de las dos funciones, donde  $h(\lambda)$  es desplazada de  $-\infty$  a  $\infty$ . Asignemos a  $t$  el valor  $-t_1$ ; entonces la función  $h(-t_1 - \lambda)$  quedará como se muestra en la figura 20.6.

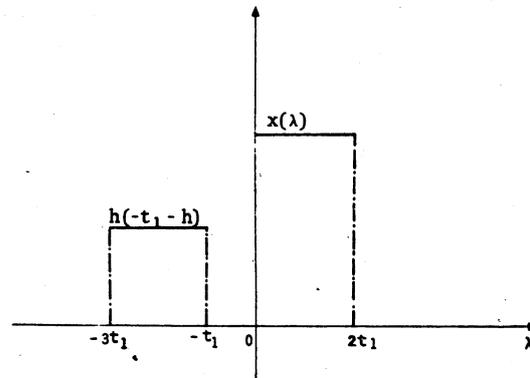


Figura 20.6

Observe que en esta posición de  $h(\lambda)$ , no hay área común con  $x(\lambda)$ , por lo que  $g(t)$  es cero.

Esa situación se puede generalizar para los valores de  $t$  comprendidos desde  $-\infty$  hasta cero.

Por lo tanto, la gráfica de  $g(t) = x(t) * h(t)$  de  $-\infty$  a cero, queda como se muestra en la figura 20.7.

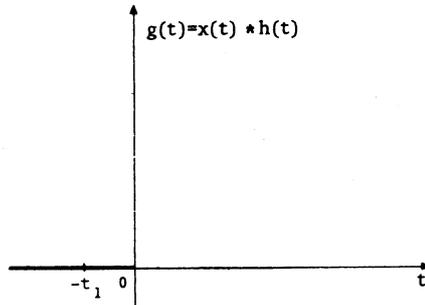


Figura 20.7

Ahora determinaremos la convolución de 0 a  $\infty$ . Asignemos a  $t$  el valor de  $t_1$ ; entonces la posición de las funciones queda como se muestra en la figura 20.8.

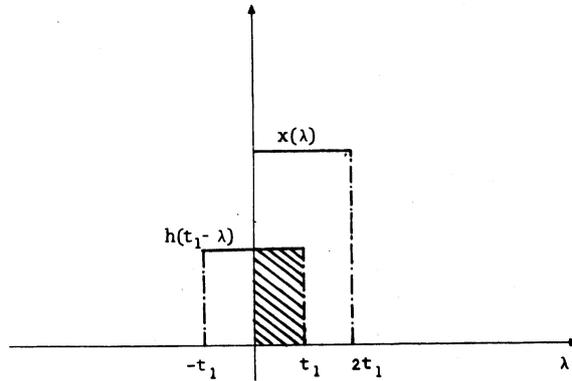


Figura 20.8

Observe que el área que aparece sombreada en la figura anterior es común a las dos curvas, por lo que su magnitud es el valor de  $g(t)$  para  $t = t_1$ .

Para los valores de  $t$  entre 0 y  $t_1$ , el valor de  $g(t)$  (área bajo la curva) crece linealmente. Así la gráfica para  $g(t)$  de  $-\infty$  a  $t_1$ , es como se muestra en la figura 20.9.

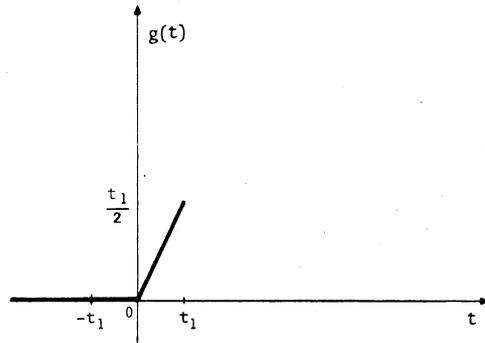


Figura 20.9

Ahora, cuando  $t$  toma el valor de  $2t_1$ , las funciones quedan como se muestra en la figura 20.10.

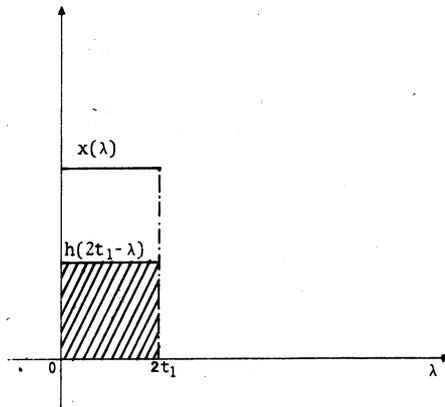


Figura 20.10

El valor de  $g(t)$  en  $2t_1$  es  $t_1$ , por lo tanto, su gráfica es la siguiente:

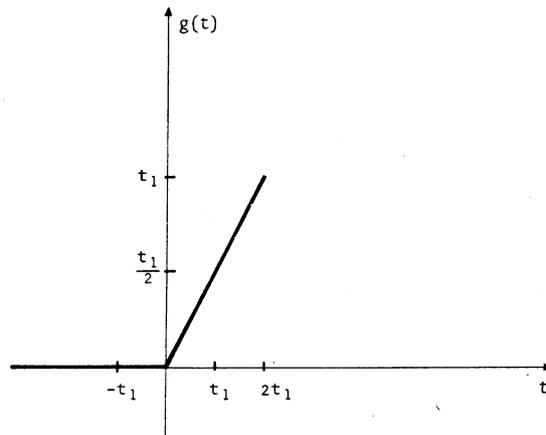


Figura 20.11

Para  $t = 3t_1$ , la posición de las funciones se muestran en la figura 20.12.

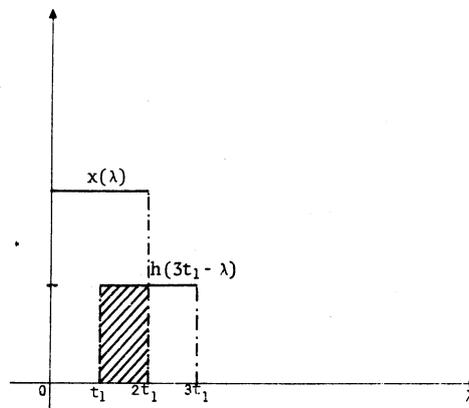


Figura 20.12

Cuando  $t = 4t_1$ , la posición de las funciones es como se muestra en la figura 20.13.

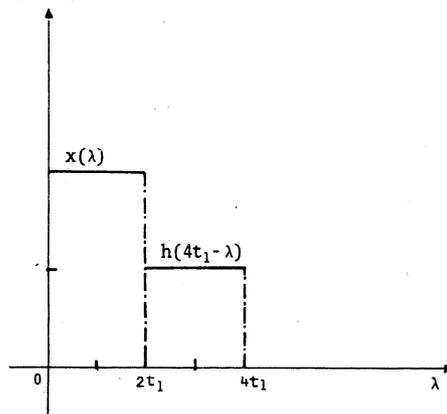


Figura 20.13

Observe en la secuencia de las figuras 20.12 y 20.13 que  $g(t)$  decrece linealmente desde  $2t_1$ , en donde vale  $t_1$ , hasta  $4t_1$ , donde vale cero.

Para valores mayores de  $4t_1$ , el valor de  $g(t)$  es cero ya que nuevamente las funciones no tendrán área en común.

Finalmente la gráfica de  $g(t) = x(t) * h(t)$  de  $-\infty$  a  $\infty$ , queda como se muestra en la figura 20.14.

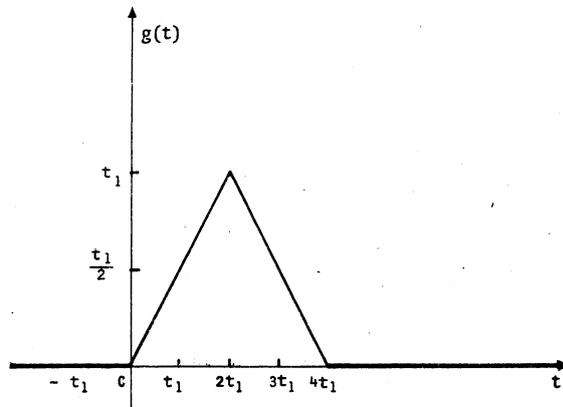


Figura 20.14

## 20.2 FUNCION DE TRANSFERENCIA Y RESPUESTA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

En el apartado anterior el problema de determinar el voltaje de salida de un circuito en términos del voltaje de entrada y la respuesta impulso, se resolvió utilizando la integral de convolución, y trabajando en el dominio del tiempo. Ahora haremos una descripción en el dominio de la frecuencia del voltaje de salida, del voltaje de entrada y la respuesta impulso.

Así el voltaje de salida expresado por la integral de convolución es:

$$v_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_e(t - z) h(z) dz$$

se le aplica la transformada de Fourier, y se obtiene:

$$\mathcal{F} \left[ v_s(t) \right] = V_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v_e(t - z) h(z) dz \right] dt$$

colocando el término  $e^{-j\omega t}$  dentro de la integral interior, e invirtiendo el orden de integración, tenemos:

$$V_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v_e(t - z) h(z) dt dz$$

sacando  $h(z)$  de la integral interior y haciendo el cambio de variable  $t - z = x$ ,  $V_s(\omega)$  queda:

$$V_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)} v_e(x) dx dz$$

$$V_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} v_e(x) dx dz$$

la integral interior es la transformada de Fourier de  $V_e(t)$  y podemos sacar esta transformada  $V_e(\omega)$  fuera de la integral:

$$V_s(\omega) = V_e(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) dz$$

la integral restante es la transformada de Fourier de la respuesta impulso, que se designará por  $H(\omega)$ . Por consiguiente, la salida del sistema en el dominio de la frecuencia es:

$$V_s(\omega) = V_e(\omega) H(\omega) \quad (20.5)$$

la función  $H(\omega)$  se denomina *función de transferencia* y es el cociente de la transformada de Fourier de la función respuesta  $V_s(\omega)$  entre la transformada de Fourier de la función de excitación  $V_e(\omega)$ , es decir: Función de transferencia

$$H(\omega) = \frac{V_s(\omega)}{V_e(\omega)}$$

del resultado de la ecuación (20.5) se establece que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es el producto de sus transformadas de Fourier; esto es:

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

Teorema de convolución  
(20.6)

dicha expresión es conocida como el *teorema de la convolución*.

En consecuencia, si se conocen las transformadas de Fourier de la función de excitación y la respuesta impulso, entonces la función respuesta se puede obtener como el producto de esas transformadas. El resultado es una descripción en el dominio de la frecuencia. Se puede obtener la descripción en el dominio del tiempo tomando la transformada inversa de Fourier. Así, el procedimiento de la convolución en el dominio del tiempo se ha convertido en la operación sencilla de multiplicación en el dominio de la frecuencia.

Como complemento a la expresión (20.6) se origina el *teorema de la multiplicación*, el cual establece que la multiplicación en el dominio del tiempo puede reemplazarse por la convolución en el dominio de la frecuencia; es decir:

$$\mathcal{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Teorema de la multiplicación  
(20.7)

## Ejemplo 20.2

Si al circuito de la figura se le aplica el voltaje  $v_e(t) = e^{-t} u(t)$ , determine:

- la función de transferencia  $H(\omega)$ ,
- la respuesta  $v_s(t)$ .

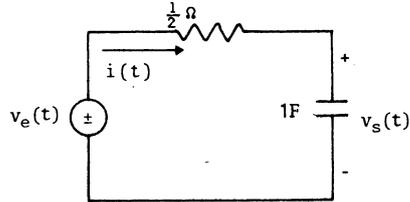


Figura 20.15

## Solución

- La función de transferencia se obtiene de la siguiente manera:

El voltaje de entrada en el dominio de la frecuencia está dado por la suma del voltaje en la resistencia  $V_R$  y el voltaje en el capacitor  $V_C$ :

$$\begin{aligned} V_e(\omega) &= V_R(\omega) + V_C(\omega) \\ &= \frac{1}{2} I + \frac{I}{j\omega} \\ V_e(\omega) &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{j\omega} \right) I \end{aligned} \quad (a)$$

por otra parte, el voltaje de salida es:

$$V_s(\omega) = V_C(\omega) = \frac{I}{j\omega}$$

de donde:

$$I = j\omega V_s(\omega) \quad (b)$$

sustituyendo la ecuación (b) en la (a) se obtiene:

$$V_e(\omega) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{j\omega} \right) j\omega V_s(\omega)$$

$$V_e(\omega) = \left( \frac{j\omega}{2} + 1 \right) V_s(\omega)$$

de donde:

$$\frac{V_s(\omega)}{V_e(\omega)} = H(\omega) = \frac{1}{\frac{j\omega}{2} + 1} = \frac{2}{j\omega + 2}$$

que es la función de transferencia del circuito.

- b) La transformada de Fourier del voltaje de entrada  $v_e(t)$  es:

$$V_e(\omega) = \mathcal{F}[v_e(t)] = \mathcal{F}[e^{-t} u(t)] = \frac{1}{1 + j\omega}$$

por otra parte, el voltaje de salida en el dominio de la frecuencia está dado por:

$$\begin{aligned} V_s(\omega) &= V_e(\omega) H(\omega) \\ &= \left( \frac{1}{1 + j\omega} \right) \left( \frac{2}{2 + j\omega} \right) \end{aligned}$$

descomponiendo en fracciones parciales:<sup>18</sup>

$$V_s(\omega) = \frac{2}{1 + j\omega} - \frac{2}{2 + j\omega}$$

la transformada inversa de Fourier de la expresión anterior se obtiene de la tabla 19.1 (función exponencial decreciente  $e^{-\alpha t}$ ) y da como resultado el voltaje de salida en el dominio del tiempo.

$$v_s(t) = 2e^{-t} u(t) - 2e^{-2t} u(t)$$

$$v_s(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$$

<sup>18</sup>La descomposición en fracciones parciales puede consultarse en las referencias 5, pp. 275 - 278 y 6, pp. 61 - 70.

## 20.3 FILTRO IDEAL DE BAJA FRECUENCIA

Básicamente un filtro transmite o deja pasar señales dentro de un rango de frecuencia, llamado *banda de paso*, y rechaza las componentes de frecuencia que se encuentran fuera de este rango.

El filtro ideal de frecuencias bajas <sup>19</sup> tiene una función de transferencia definida por:

Filtro ideal  
de frecuencias  
bajas

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (20.8)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia de corte.

El espectro de frecuencia de la función de transferencia del filtro ideal se obtiene a través de la magnitud de  $e^{-j\omega t_0}$ , la cual vale la unidad, y se muestra en la figura 20.16.

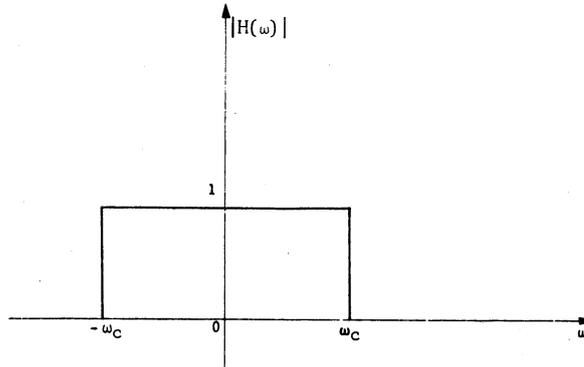


Figura 20.16 Espectro de frecuencia de un filtro ideal de baja frecuencia

<sup>19</sup> Este tipo de filtros es comúnmente conocido como *passa bajas*.

La respuesta impulso  $h(t)$  se puede determinar tomando la transformada inversa de Fourier para la expresión (20.8):

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\
 &= \frac{1}{j2\pi(t-t_0)} e^{j\omega(t-t_0)} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} \\
 h(t) &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen } \omega_c(t-t_0)}{\omega_c(t-t_0)} \quad (20.9)
 \end{aligned}$$

Esta es la respuesta al impulso correspondiente a un filtro ideal de baja frecuencia. Su gráfica se muestra en la figura 20.17.

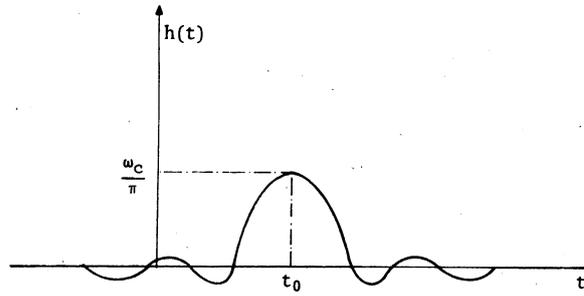


Figura 20.17 Respuesta impulso del filtro ideal de baja frecuencia.

Observe que existe respuesta antes de que se aplique el impulso, por lo que se dice que el sistema no es físicamente realizable, es decir, es ideal.

## 20.4 TEORIA DEL MUESTREO

Un muestreador ideal, consiste en un dispositivo que multiplica dos entradas para dar origen a una salida que es la señal muestreada  $f_s(t)$ . Observe la figura 20.18.

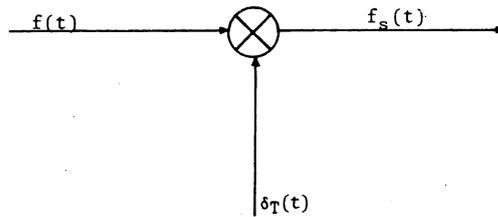


Figura 20.18 Muestreador ideal

Las entradas al multiplicador son la señal  $f(t)$  que va a ser muestreada y la señal muestreadora  $\delta_T(t)$  que es un tren de impulsos con período  $T$ ; es decir:

$$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

la expresión para la señal muestreada es:

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t) \delta_T(t) \\ &= f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ f_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (20.10)$$

la cual es una serie de impulsos cuyas intensidades están dadas por los valores de  $f(t)$  en los instantes de las muestras.

Ahora bien, la transformada de Fourier del tren de impulsos está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) \\ \mathcal{F}[\delta_T(t)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

El espectro de frecuencia de la señal muestreada se puede obtener a partir del teorema de multiplicación, expresión (20.7), de la siguiente manera:

$$F_s(\omega) = \mathcal{F} [ f_s(t) ] = \mathcal{F} [ f(t) \delta_T(t) ]$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [ F(\omega) * \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) ]$$

sustituyendo  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  :

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} [ F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega) ]$$

$$= \frac{1}{T} [ F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) ]$$

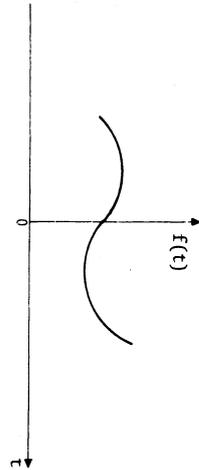
$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_0)$$

como  $f(t) * \delta(t) = f(t)$  y  $f(t) * \delta(-T) = f(t - T)$ , entonces:

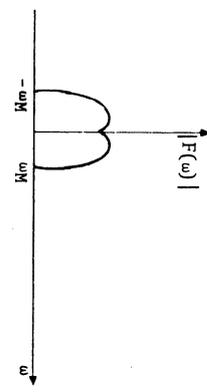
$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \quad (20.11)$$

esta expresión representa al espectro de frecuencia de la señal muestreada periódicamente, en intervalos de  $\omega_0$ , en el dominio de la frecuencia.

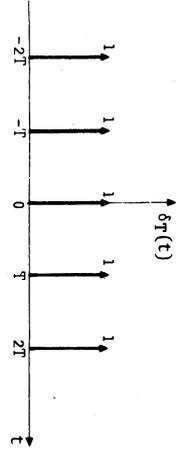
Las funciones y espectros utilizados en el procedimiento de las muestras se representan en la figura 20.19.



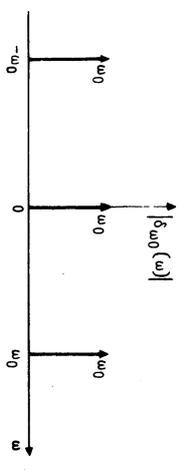
(a)



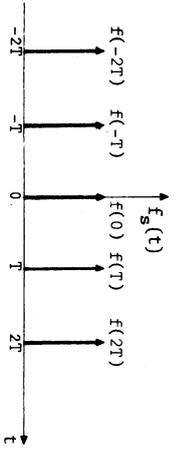
(b)



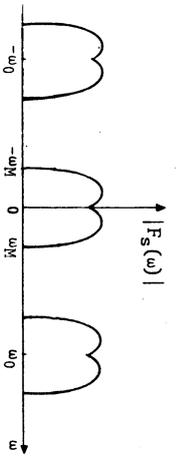
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 20.19 a) y b) Señal original y su espectro;  
 c) y d) Señal muestreadora y su espectro;  
 e) y f) Señal muestreada y su espectro.

La señal original  $f(t)$  (véase la figura 20.19.a) tiene un espectro de banda limitada (véase la figura 20.19.b); es decir, no tiene componentes de frecuencia arriba del valor  $\omega_M$ . El espectro de la función original  $F(\omega)$  se repite sin traslaparse siempre que  $\omega_0 > 2\omega_M$  o  $T < \frac{1}{2f_M}$ , donde  $f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$ .

Función de banda limitada

### 20.5 TEOREMA DE MUESTRAS UNIFORMES

El teorema de muestras uniformes establece que una señal de banda limitada, es decir, que no tiene componentes de frecuencia superiores a  $\omega_M$ , puede reconstruirse a partir de valores de la señal, llamadas muestras, tomadas en instantes separados entre sí una cantidad uniforme que debe ser menor o igual que  $1/(2f_M)$ .

Esto puede observarse en la figura 20.20.

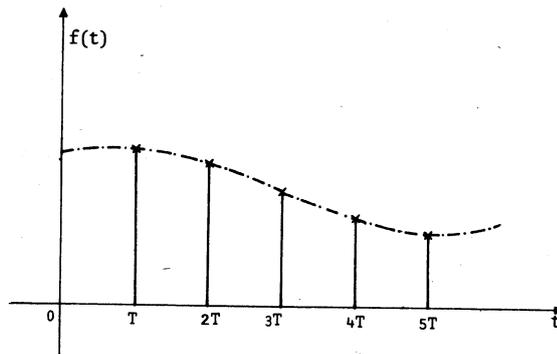


Figura 20.20 Reconstrucción de la señal  $f(t)$  a partir de las muestras

La demostración de este teorema puede consultarse en la referencia 4, páginas 151 - 153.

Este teorema tiene su principal aplicación en la teoría de comunicaciones. Es de gran utilidad en el multiplexaje en el tiempo.

## CUESTIONARIO DE AUTOEVALUACION

I. Resuelva los siguientes problemas y anote la o las soluciones en el espacio indicado.

1. Para la entrada  $v_e(t)$  y la respuesta impulso  $h(t)$  dadas en la figura 20.21:

- determine la salida  $v_s(t)$  por medio de la convolución.
- grafique la salida  $v_s(t)$ .

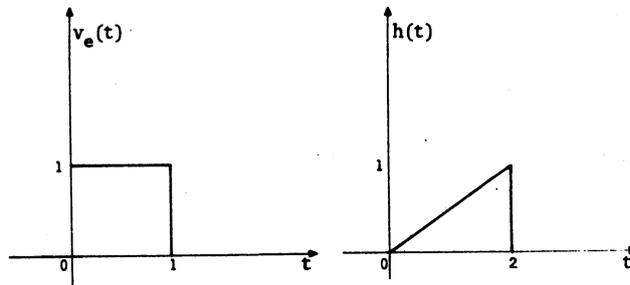


Figura 20.21

a)  $v_s(t) =$

b)

2. Un circuito tiene la respuesta impulso que se muestra en la figura 20.22. Si el voltaje de entrada es un escalón unitario:

- obtenga la respuesta del circuito, por convolución,
- grafique la respuesta obtenida.

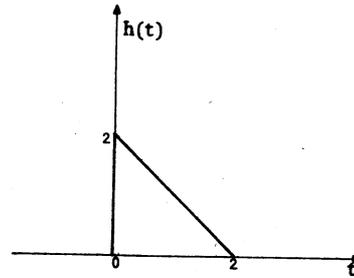


Figura 20.22

a)  $v_s(t) =$

b)

3. Para el circuito mostrado en la figura 20.23 determine:

a) la función de transferencia  $H(\omega)$ ,

b) la respuesta  $v_s(t)$ .

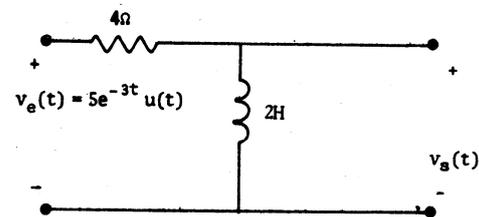


Figura 20.23

a)  $H(\omega) =$  \_\_\_\_\_

b)  $v_s(t) =$  \_\_\_\_\_

4. Considerando el circuito mostrado en la figura 20.24 obtenga:

- la función de transferencia  $H(\omega)$ ,
- la respuesta  $v_s(t)$ .

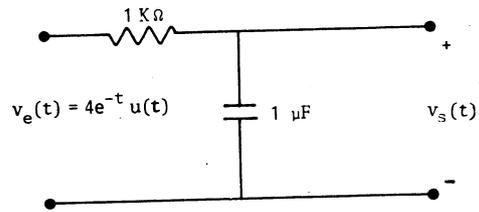


Figura 20.24

a)  $H(\omega) =$  \_\_\_\_\_

b)  $v_s(t) =$  \_\_\_\_\_

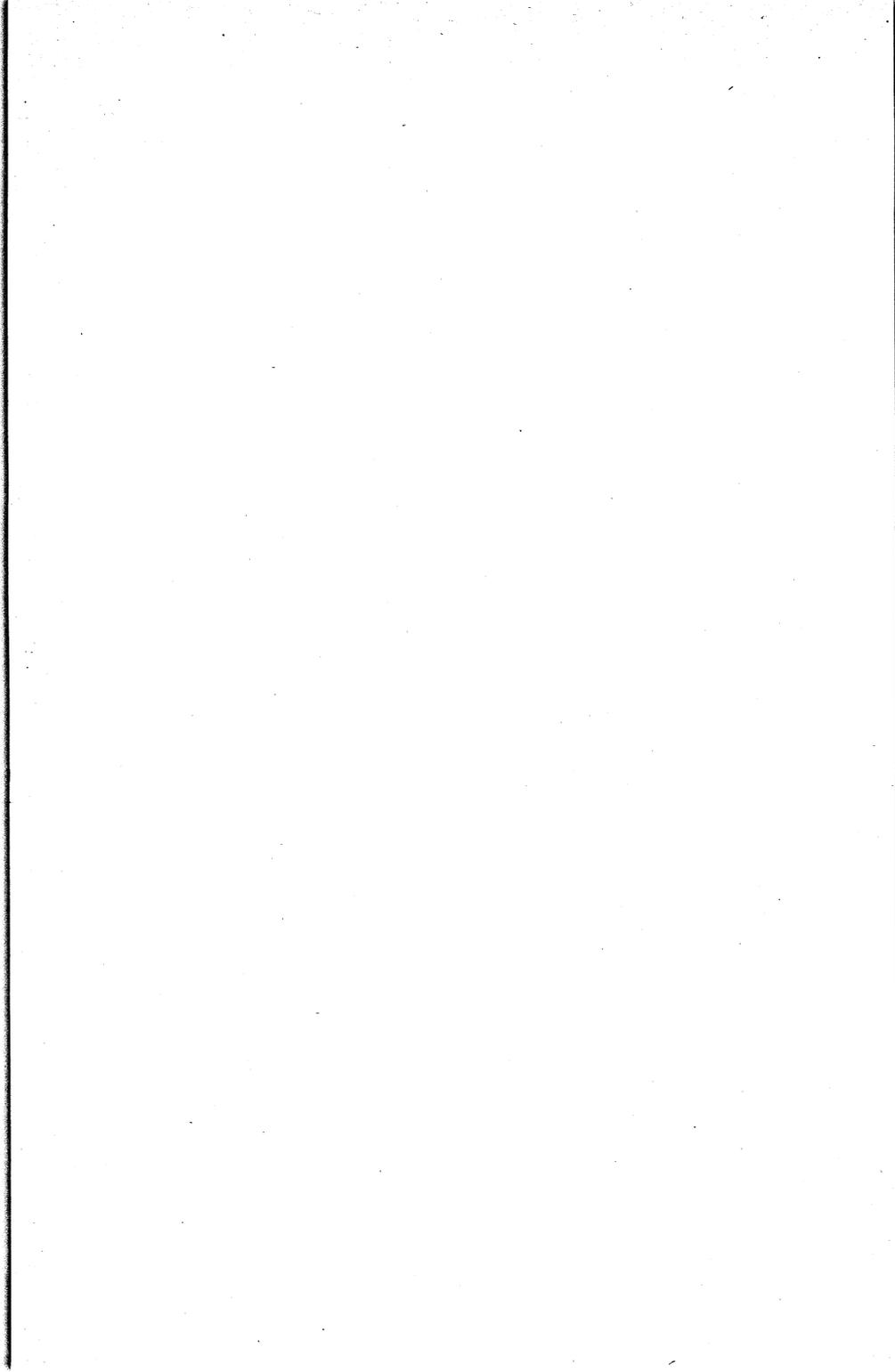
## BIBLIOGRAFIA

## BIBLIOGRAFIA BASICA

1. CHENG, DAVID K  
Analysis of Linear Systems.  
Addison Wesley, U.S.A., 1959.
2. GEREZ GREIZER, VICTOR; CZITRON DE G. V  
Circuitos y sistemas electromecánicos, Tomo I.  
Representaciones y Servicios de Ingeniería.  
1974.
3. HAYT, WILLIAM H.; KEMMERLY, JACK E  
Análisis de circuitos en ingeniería.  
McGraw - Hill. México, 1980.
4. HWEI P. HSU  
Análisis de Fourier.  
Fondo Educativo Interamericano, S.A.  
Bogotá, 1973.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

5. ANDRADE, ARNULFO, et. al.  
Apuntes de cálculo diferencial e integral.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.  
México, 1982.
6. GARCIA MARQUEZ, P.; Y DE LA LANZA ELTON, C  
Apuntes de ecuaciones diferenciales y en diferencias.  
Facultad de Ingeniería, UNAM.  
México, 1983.
7. PAPOULIS, ATHANASIOS  
The Fourier Integral and its Applications.  
McGraw - Hill. Nueva York, 1962.



## APÉNDICE C INTEGRALES

- I. INTEGRALES GENERALES
- II. INTEGRALES CON FUNCIONES TRIGONOMETRICAS
- III. INTEGRALES CON FUNCIONES EXPONENCIALES
- IV. INTEGRACION POR PARTES

Se presentan aquí las integrales de uso más frecuente en esta obra. Aparecen por grupos, y después de cada grupo se resuelven algunos ejemplos.

De requerirse mayores detalles sobre el particular, se sugiere consultar:

ANDRADE, Arnulfo, et al,  
APUNTES DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL  
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. 1982.

o bien cualquier otro texto de cálculo integral.

## I. INTEGRALES GENERALES

$$1. \int a dx = ax \quad ; \quad a = \text{constante}$$

$$2. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad ; \quad a = \text{constante}$$

$$3. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad ; \quad n \neq -1$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln x \quad ; \quad x > 0$$

$$5. \int (u \pm v \pm \omega \pm \dots) dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \int \omega dx \pm \dots$$

Ejemplo

$$\int_1^2 5 dx = 5x \Big|_1^2 = 5(2 - 1) = 5$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int_2^4 x^3 dx &= \left[ \frac{x^{3+1}}{3+1} \right]_2^4 = \frac{1}{4} x^4 \Big|_2^4 = \\ &= \frac{1}{4} (4^4 - 2^4) = 60 \end{aligned}$$

## II. INTEGRALES CON FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

$$6. \int \text{sen } x dx = -\text{cos } x$$

$$7. \int \text{cos } x dx = \text{sen } x$$

$$8. \int \text{tan } x dx = \ln \text{sec } x$$

$$9. \int \text{cot } x dx = \ln \text{sen } x$$

$$10. \int \text{sec } x dx = \ln(\text{sec } x + \text{tan } x)$$

11.  $\int \csc x \, dx = \ln \tan \frac{x}{2}$
12.  $\int \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
13.  $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
14.  $\int x \operatorname{sen} ax \, dx = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen} ax - \frac{x}{a} \cos ax$
15.  $\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \operatorname{sen} ax$
16.  $\int \operatorname{sen} ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \operatorname{sen}^2 ax$
17.  $\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}$
18.  $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$
19.  $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2}$

Ejemplo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \operatorname{sen} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2t \, dt &= -\frac{1}{2} \cos 2t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{1}{2} \cos \pi = -\frac{1}{2} (-1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^t \operatorname{sen} 2t \, dt &= \frac{e^t (\operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t)}{1^2 + 2^2} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{5} \left[ e^{2\pi} (\operatorname{sen} 2\pi - 2 \cos 2\pi) - e^0 (\operatorname{sen} 0 - 2 \cos 0) \right] = \\ &= \frac{2}{5} (1 - e^{2\pi}) \end{aligned}$$

## III. INTEGRALES CON FUNCIONES EXPONENCIALES

$$20. \int e^x dx = e^x$$

$$21. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$22. \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left( x - \frac{1}{a} \right)$$

Ejemplo

$$\int_0^1 e^{6t} dt = \left[ \frac{1}{6} e^{6t} \right]_0^1 = \frac{1}{6} (e^6 - e^0) = \frac{1}{6} (e^6 - 1)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \int_1^2 t e^{5t} dt &= \left[ \frac{e^{5t}}{5} \left( t - \frac{1}{5} \right) \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{5} e^{10} \left( 2 - \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} e^5 \left( 1 - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{9}{25} e^{10} - \frac{4}{25} e^5 \end{aligned}$$

## IV. INTEGRACION POR PARTES

$$23. \int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplo

$$\int_1^2 t e^{5t} dt$$

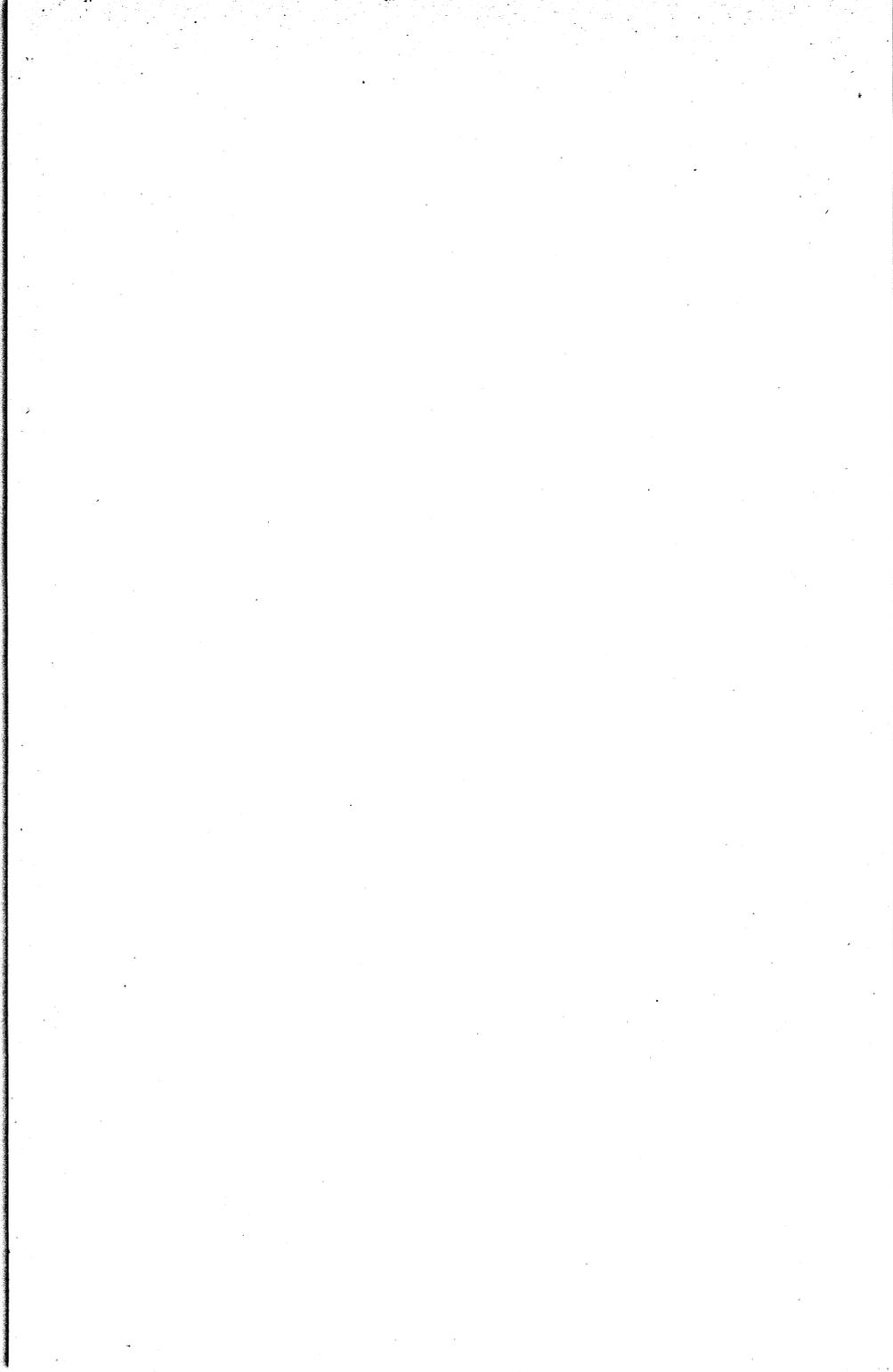
$$u = t$$

$$du = dt$$

$$dv = e^{5t} dt$$

$$v = \frac{1}{5} e^{5t}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 t e^{5t} dt &= \left[ \frac{1}{5} t e^{5t} - \int \frac{1}{5} e^{5t} dt \right]_1^2 \\ &= \left[ \frac{1}{5} t e^{5t} - \frac{1}{25} e^{5t} \right]_1^2 \\ &= \frac{e^{5t}}{5} \left( t - \frac{1}{5} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{5} e^{10} \left( 2 - \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} e^5 \left( 1 - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{9}{25} e^{10} - \frac{4}{25} e^5\end{aligned}$$



## SOLUCIONES A LOS CUESTIONARIOS DE AUTOEVALUACION

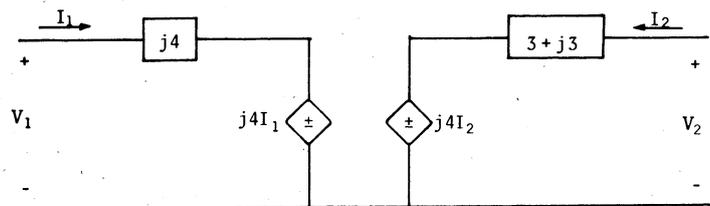
## MODULO 10

- I.
- a) cierto
  - b) cierto
  - c) cierto
  - d) falso
  - e) falso
  - f) cierto
  - g) cierto
  - h) cierto

## II.

- 1.
- a)  $Z_{11} = j4 \Omega$   
 $Z_{12} = j4 \Omega$   
 $Z_{21} = j4 \Omega$   
 $Z_{22} = 3 + j3 \Omega$
  - b)  $V_1 = j4I_1 + j4I_2$   
 $V_2 = j4I_1 + (3 + j3)I_2$

c)



d) El bipuerto es recíproco puesto que:

$$Z_{12} = Z_{21} = j4 \Omega$$

2. a)  $y_{11} = 0.5 \text{ S}$

$$y_{12} = 1.3 \text{ S}$$

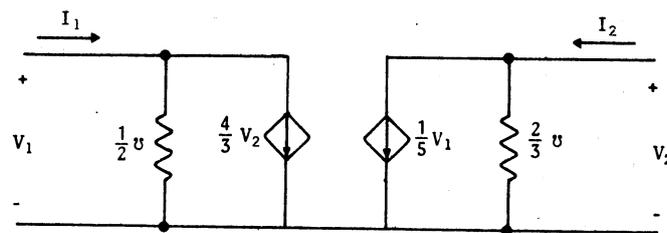
$$y_{21} = 0.2 \text{ S}$$

$$y_{22} = 0.6 \text{ S}$$

b)  $I_1 = 0.5V_1 + 1.3V_2$

$$I_2 = 0.2V_1 + 0.6V_2$$

c)



3. a)  $h_{11} = -j1.5 \Omega$

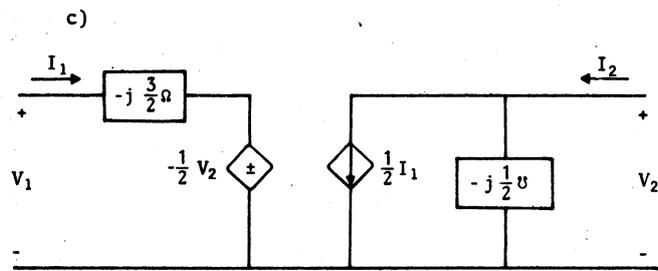
$$h_{12} = -0.5$$

$$h_{21} = 0.5$$

$$h_{22} = -j0.5 \text{ S}$$

b)  $V_1 = -j1.5I_1 - 0.5V_2$

$$-I_2 = 0.5I_1 - j0.5V_2$$



d) El bipuerto es recíproco ya que:

$$h_{21} = -h_{12} = \frac{1}{2}$$

4. a)  $A = 1 + j1$   
 $B = 3 - j4 \Omega$   
 $C = j1 \text{ u}$   
 $D = 3$

b)  $V_1 = (1 + j1)V_2 + (3 - j4)I_2$   
 $I_1 = j1V_2 + 3I_2$

5. a) 
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.08 \\ 0.08 & 0.29 \end{bmatrix}$$
- b) 
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 12 & 3.5 \end{bmatrix}$$
- c) 
$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.28 \\ -0.28 & 3.42 \end{bmatrix}$$

I.

1. a)  $Z_e = 11.81 \Omega$   
 b)  $Z_s = 24.4 \Omega$   
 c)  $A_v = 0.23$   
 d)  $A_i = 0.04$

2. a)  $Z_e = 1.9 \times 10^5 \Omega$   
 b)  $Z_s = 6.6 \times 10^5 \Omega$   
 c)  $A_v = -116.66$   
 d)  $A_i = 34.44$

3. a)  $Z_e = 5.9 \times 10^4 \Omega$   
 b)  $Z_s = 3 \times 10^6 \Omega$   
 c)  $A_v = -19.76$   
 d)  $A_i = 29.41$

4. a) 
$$Y_e = y_{11} - \frac{y_{12} y_{21}}{y_{22} + \frac{1}{Z_L}}$$
  
 b) 
$$Y_s = y_{22} - \frac{y_{12} y_{21}}{y_{11} + \frac{1}{Z_F}}$$

5. a) 
$$A_v = \frac{y_{21} \frac{1}{Z_L}}{y_{11} \frac{1}{Z_L} + \Delta y}$$
  
 b) 
$$A_i = - \frac{y_{21}}{y_{22} + \frac{1}{Z_L}}$$

## MODULO 12

- I.
- a) falso
  - b) cierto
  - c) cierto
  - d) cierto
  - e) cierto

II.

1. Matriz de parámetros del bipuerto equivalente:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + j1 & j2 \\ j2 & 3 + j2 \end{bmatrix}$$

2. Matriz de parámetros del bipuerto equivalente:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - j5 & -1 + j2 \\ -1 + j2 & 4 - j1 \end{bmatrix}$$

3. Matriz de parámetros del bipuerto equivalente:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.15 & 6.5 \\ 0.6 & 2.8 \end{bmatrix}$$

4. a)
- |                                   |                                  |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| $Y_{11a} = 0.2 \text{ } \Omega$   | $Y_{11b} = 0.2 \text{ } \Omega$  |
| $Y_{12a} = -0.02 \text{ } \Omega$ | $Y_{12b} = -0.1 \text{ } \Omega$ |
| $Y_{21a} = 0.02 \text{ } \Omega$  | $Y_{21b} = -0.1 \text{ } \Omega$ |
| $Y_{22a} = -0.02 \text{ } \Omega$ | $Y_{22b} = 0.3 \text{ } \Omega$  |

$$b) \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.12 \\ -0.12 & 0.42 \end{bmatrix}$$

$$5 \quad a) \quad \begin{array}{ll} A_a = 5 & A_b = 3 \\ B_a = 39 \, \Omega & B_b = 10 \, \Omega \\ C_a = 1 \, \mu & C_b = 0.5 \, \mu \\ D_a = 8 & D_b = 2 \end{array}$$

$$b) \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34.5 & 128 \\ 7 & 26 \end{bmatrix}$$

## MODULO 13

I.

1. (V)
2. (F)
3. (V)
4. (V)
5. (F)
6. (F)

## II.

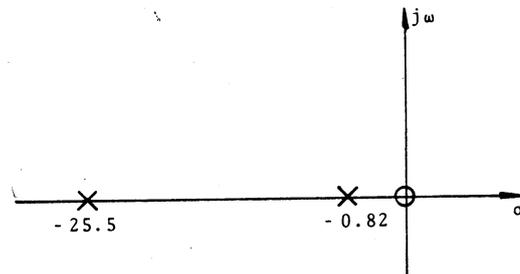
1.
  - a)  $\omega_0 = 2.6 \times 10^6 \text{ rad/s}$
  - b)  $I = 1.8 \angle 89^\circ \text{ mA}$
  - c)  $Q_S = 1444$
  - d)  $B_S = 1800 \text{ rad/s}$
  
2.
  - a)  $\omega_0 = 4 \times 10^6 \text{ rad/s}$
  - b)  $Q = 20\,000$
  - c)  $B = 200 \text{ rad/s}$
  - d)  $\omega_1 = 3\,999\,000 \text{ rad/s}$   
 $\omega_2 = 4\,010\,000 \text{ rad/s}$
  
3.  $\omega_1 = 3\,920 \text{ rad/s}$   
 $\omega_2 = 4\,080 \text{ rad/s}$
  
4.
  - a)  $\omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}$
  - b)  $B = 10^3 \text{ rad/s}$
  - c)  $\omega_1 = 9 \times 10^3 \text{ rad/s}$   
 $\omega_2 = 11 \times 10^3 \text{ rad/s}$
  
5.
  - a)  $R_1 = 2.5 \Omega$
  - b)  $L = 5 \mu\text{H}$
  - c)  $C = 2\,000 \text{ pF}$
  
6.
  - a)  $Q = 0.06$
  - b)  $B = 96\,225 \text{ rad/s}$
  - c)  $\omega_1 = 364 \text{ rad/s}$   
 $\omega_2 = 96\,359 \text{ rad/s}$

I.

1. a)  $v_2 = 60 \text{ sen } 6t \text{ V}$   
b)  $v_2 = 54 \text{ sen } 6t \text{ V}$   
c)  $v_2 = 114 \text{ sen } 6t \text{ V}$

2. a) 
$$\frac{V_L}{V_f} = \frac{189.5 s}{(s + 0.82)(s + 25.5)}$$

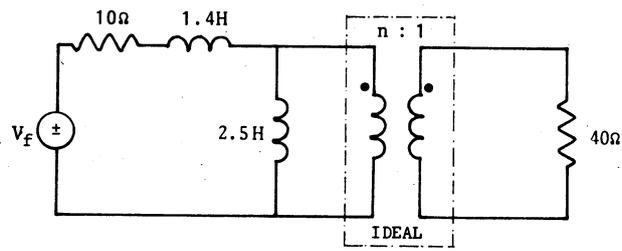
b)



3.  $N_2 = 35 \text{ vueltas}$

4.  $R = 37.5 \Omega$

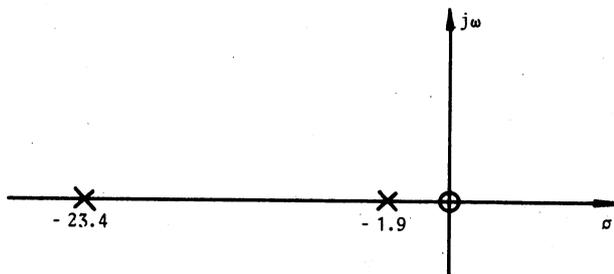
5. a)



b)

$$\frac{V_L}{V_f} = \frac{2.6\text{ s}}{s^2 + 25.4\text{ s} + 46.2}$$

c)



I.

1. (c)

2. (b)

3. (d)

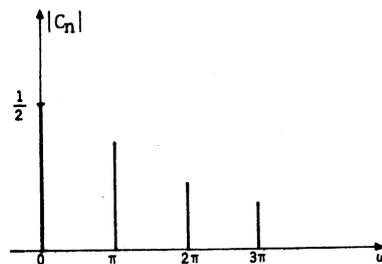
4. (b)

5. (b)

II.

1. a).  $v(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi t + \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + \frac{1}{3\pi} \operatorname{sen} 3\pi t + \dots$

b)



2.  $i(t) = \frac{3}{\pi} + 3 \operatorname{sen} \pi t - \frac{12}{3\pi} \cos 2\pi t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\pi t - \dots$

3. a)  $i_n(t) = \frac{1}{n\pi \sqrt{1+n^2}} \cos(nt + 90^\circ - \operatorname{ang} \tan n)$

b)  $i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi \sqrt{1+n^2}} \cos(nt + 90^\circ - \operatorname{ang} \tan n)$

4.  $v(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{1 + (4n - \frac{1}{2n})^2}}{1 - 4n^2} \cos \left[ 2nt + \operatorname{ang} \tan(4n - \frac{1}{2n}) \right]$

## MODULO 16

I.

1. Simetría de media onda
2. Simetría impar
3. No simétrica
4. Simetría par
5. No simétrica
6. Simetría de cuarto de onda par
7. Simetría de cuarto de onda impar

II.

1. (E)
2. (A)
3. ( )
4. (B)
5. (C)
6. (D)

III.

1.  $v(t) = \frac{10}{\pi} - \frac{20}{3\pi} \cos 2t - \frac{20}{15\pi} \cos 4t - \frac{20}{35\pi} \cos 6t - \dots$
2.  $v(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi t + \frac{2}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t + \frac{2}{3\pi} \operatorname{sen} 3\pi t + \dots$
3. a) Simetría de cuarto de onda par  
 b)  $i(t) = \frac{8}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{8}{9\pi^2} \cos 3\pi t + \frac{8}{25\pi^2} \cos 5\pi t + \dots$

4. a) Simetría de cuarto de onda impar

$$b) i(t) = \frac{8}{\pi^2} \operatorname{sen} \pi t - \frac{8}{9\pi^2} \operatorname{sen} 3 \pi t + \frac{8}{25\pi^2} \operatorname{sen} 5 \pi t - \dots$$

MODULO 17

I.

1. (a)

2. (c).

3. (b)

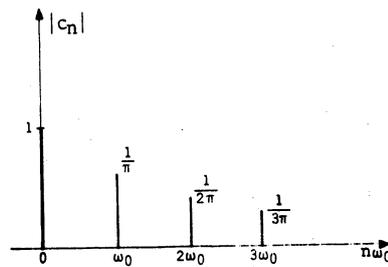
4. (c)

5. (d)

II.

1. a)  $v(t) = \dots -j \frac{1}{\pi} e^{-jt} - j \frac{1}{2\pi} e^{-j2t} + 1 + j \frac{1}{\pi} e^{jt} + j \frac{1}{2\pi} e^{j2t} + \dots$

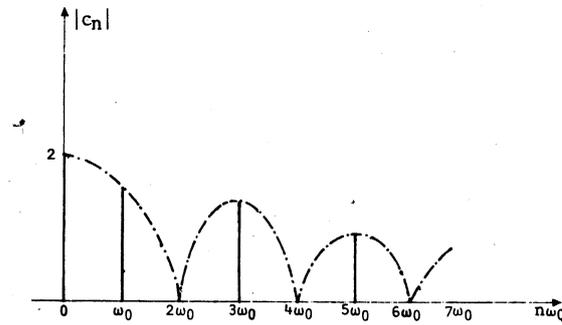
b)



$$2. \quad a) \quad i(t) = \dots - \frac{4}{15\pi} e^{-j4t} + \frac{4}{3\pi} e^{-j2t} + e^{-jt} + \frac{4}{\pi} + e^{jt} + \frac{4}{3\pi} e^{j2t} - \frac{4}{15\pi} e^{j4t} + \dots$$

$$b) \quad v(t) = \dots + \frac{4}{9\pi^2} e^{-j3t} + \frac{4}{\pi^2} e^{-jt} + 1 + \frac{4}{\pi^2} e^{jt} + \frac{4}{9\pi^2} e^{j3t} + \dots$$

3. a)



MODULO 18

I.

$$1. \quad a) \quad F(\omega) = \frac{2\omega \operatorname{sen} \pi\omega}{1 - \omega^2}$$

$$b) \quad F(2) = 0$$

$$2. \quad F(\omega) = -j2\omega$$

$$3. \quad a) \quad f(t) = -\frac{t}{\pi} \operatorname{sen} 0.5t$$

$$b) \quad f(0) = 0$$

4.  $F(\omega) = \frac{j2 \operatorname{sen} \pi \omega}{1 - \omega^2}$
5. a)  $F(\omega) = \frac{30}{9 + \omega^2}$   
b)  $F(0) = 3.33$   
c)  $R(2) = 2.30$   
d)  $X(1) = 0$
6.  $F(\omega) = -j0.5 \omega$
7. a)  $F(\omega) = \frac{10}{5 + j\omega}$   
b)  $F(0) = 2$   
c)  $R(2) = 1.72$   
d)  $X(1) = -0.38$
8.  $F(\omega) = -j2\omega e^{j\omega}$
9. a) 0.25 J  
b) 0.39 J  
c) 0.43 J

## MODULO 19

I.

1. a)  $1.41 \delta(t - 0.25)$   
b)  $5 \delta(t - 1)$
2. a) 10  
b) 5

3. a)  $4\pi \delta(\omega) - 5$

b)  $3\pi \delta(\omega) + \frac{3}{j\omega} e^{-j2\omega}$

c)  $4e^{-j5\omega} - e^{j\omega}$

4. a)  $10e^{-5t}$

b)  $\frac{1}{5\pi} e^{j3t} + \frac{1}{5\pi} e^{-j3t}$

5.  $j\pi \left[ \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) \right]$

6. a)  $j10\pi \left[ \delta(\omega + 5) - \delta(\omega - 5) \right]$

b)  $10\pi \left[ e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(\omega + 5) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(\omega - 5) \right]$

7. 
$$F(\omega) = \dots + \frac{4}{5} \delta(\omega - 5\pi) - \frac{4}{3} \delta(\omega - 3\pi) + 4 \delta(\omega - \pi) +$$

$$+ 4 \delta(\omega + \pi) - \frac{4}{3} \delta(\omega + 3\pi) + \frac{4}{5} \delta(\omega + 5\pi) - \dots$$

8. 
$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

9. 
$$F(\omega) = \dots + \frac{8}{25\pi} \delta(\omega - 5\pi) - \frac{8}{9\pi} \delta(\omega - 3\pi) + \frac{8}{\pi} \delta(\omega - \pi) +$$

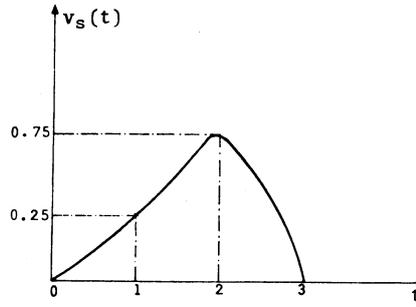
$$+ \frac{8}{\pi} \delta(\omega + \pi) - \frac{8}{9\pi} \delta(\omega + 3\pi) + \frac{8}{25\pi} \delta(\omega + 5\pi) - \dots$$

I.

1. a)

$$v_s(t) = \begin{cases} \int_{t-1}^t \frac{1}{2} z \, dz & 0 < t < 2 \\ \int_2^{t-1} \frac{1}{2} z \, dz & t > 2 \end{cases}$$

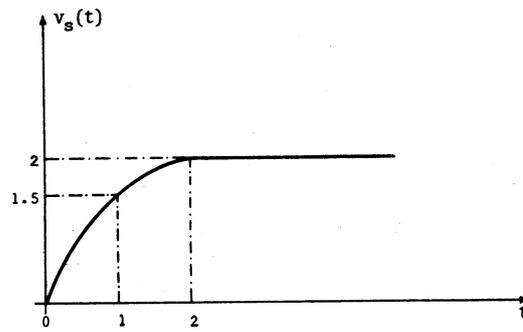
b)



2. a)

$$v_s(t) = \begin{cases} \int_0^t (-z + 2) \, dz & 0 < t < 2 \\ 2 & t > 2 \end{cases}$$

b)



3. a)  $H(\omega) = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}$

b)  $v_s(t) = 5(3e^{-3t} - 2e^{-2t}) u(t)$

4. a)  $H(\omega) = \frac{1}{1 + j10^{-3}\omega}$

b)  $v_s(t) = 4(e^{-t} - e^{-1000t}) u(t)$

## INDICE ANALITICO

- Admitancia:
- de entrada en cortocircuito, 363
  - de transferencia a circuito abierto, 363, 377
  - de transferencia directa en cortocircuito, 363
  - de transferencia inversa en cortocircuito, 363
  - de salida en cortocircuito, 363
  - de salida en circuito abierto, 370
- Ancho de banda, 439, 440, 445
- Armónicas:
- pares, 517
  - impares, 522, 527
- Bipuerto:
- concepto de, 351
  - recíproco, 355, 363
- Circuito abierto:
- admitancia de salida, 370
  - ganancia inversa de voltaje a, 370, 377
  - impedancia de entrada a, 355
- Circuito RLC:
- impedancia de entrada del, 431, 439
  - admitancia de entrada del, 444, 445
  - diagrama de polos y ceros del, 436, 437, 438
  - frecuencia y resonancia del, 432
  - resonante en paralelo, 431
  - resonante en serie, 444
  - resonante con pérdidas, 449, 450, 451
- Coefficientes:
- evaluación de, 492, 493
  - de la serie trigonométrica, 470
  - de la serie exponencial, 538, 539
- Componente fundamental, 490
- Componente de corriente directa, 490
- Convolución:
- integral de, 623
  - propiedad de asociatividad, 624
  - propiedad de conmutatividad, 624
- Cortocircuito:
- admitancia de entrada en, 363
  - admitancia de transferencia en, 363
  - admitancia de salida en, 363
  - ganancia de corriente en, 370, 377
  - impedancia de entrada en, 370
  - impedancia de transferencia en, 377
- Diagrama de polos y ceros, 436, 437, 438
- Espectro:
- continuo, 563, 609
  - de energía, 583
  - de frecuencia, 497, 498, 602
  - discreto, 497, 498, 563, 607
- Factor de calidad, 439, 440, 441, 445, 451

Filtro ideal, 587, 634

Frecuencia:

de corte, 439, 440, 441  
espectro continuo de, 563  
espectro discreto  
de, 497, 498  
natural, 438  
resonante, 432, 438, 444

Fourier:

serie trigonométrica de, 490  
serie exponencial de, 538  
definición de transformada de, 561  
par de transformadas de, 565

Fuentes:

de voltaje controladas por corriente, 353  
de voltaje controladas por voltaje, 368  
de corriente controladas por corriente, 368  
de corriente controladas por voltaje, 361

Función:

coseno, 576  
de transferencia, 462, 463  
escalón, 612  
impulso, 596  
seno, 580  
signum, 612

Función impulso:

intensidad de la, 596  
transformada de Fourier de la, 601

Función periódica:

condición de una, 489, 490  
definición de, 489  
transformada de Fourier de una, 606

Ganancia:

de corriente, 397, 398, 403, 404  
de voltaje, 397, 398, 403, 404  
directa de corriente en cortocircuito, 370  
inversa de voltaje a circuito abierto, 377  
inversa de corriente en cortocircuito, 377

Híbridos:

parámetros, 370  
modelo de bipuerto con parámetros, 368, 370

Impedancia:

parámetros de, 352, 353, 354, 355  
entrada de un bipuerto, 394, 399, 400  
de salida de un bipuerto, 396, 399, 402  
de salida a circuito abierto, 355  
reflejada, 468

Matriz:

de admitancias en cortocircuito, 363  
de impedancias a circuito abierto, 355  
de parámetros híbridos, 371  
de transmisión, 377

Parámetros:

de admitancia, 360, 361, 362  
de impedancia, 352, 353, 354, 355  
de transmisión, 373, 374, 375, 376, 377  
de transmisión inversa, 381  
híbridos, 368, 369, 370  
relación entre, 381, 382  
tabla de equivalencia entre, 383

Primario del transformador, 462, 463, 467

Propiedades:

de ortogonalidad, 491  
de la integral de convolución, 624  
de la transformada de Fourier, 565  
de simetría, 516

Puerto:

entrada, 351, 354  
salida, 351, 354

Relación:

de corrientes de un transformador ideal, 467  
de voltajes de un transformador ideal, 467  
de transformación, 467

Resonancia:

condición de, 431, 432  
en un circuito RLC en serie, 444, 445  
en un circuito RLC en paralelo, 431, 432

Secundario del transformador, 462, 463, 467

Serie:

trigonométrica de Fourier, 490  
exponencial de Fourier, 538

Simetría:

de funciones pares, 514  
de funciones impares, 514, 515  
de funciones de media onda, 521  
de funciones de un cuarto de onda, 526, 527  
propiedades de, 516

Superposición.

principio de, 353

Teorema de Parseval, 586

Transformada de Fourier:

ángulo de fase de la, 565  
de funciones periódicas, 606  
de la función escalón, 612  
de la función impulso, 601  
integrales de la, 565  
magnitud de la, 565  
propiedades, 570  
tabla de, 616

Transformador:

circuito equivalente del, 462  
ideal, 467  
modelo lineal del, 462, 463  
primario del, 462, 463, 467  
relación de corriente, 467  
relación de voltaje, 467  
secundario del, 462, 467

Impreso por la  
Coordinación de Servicios Generales  
a través de la Unidad de Difusión,  
Departamento de Impresión.  
El tiraje consta de 2,000 ejemplares  
y se terminó de imprimir  
en el mes de junio de 1990.

