

CAPÍTULO 8

VISCOELASTICIDAD LINEAL

8.1 CONCEPTOS BÁSICOS

En los capítulos 6 y 7 de este texto, se ha presentado el comportamiento idealizado de sólidos y fluidos, los cuales se conceptualizaron como sólidos elásticos o de Hooke (figura 8.1a) y fluidos viscosos o newtonianos (figura 8.1b). En unos se consideró que la deformación es recuperable y sólo depende de la carga y no del tiempo (característica fundamental de un material elástico) $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$; asimismo, se definió que la deformación era muy pequeña (infinitesimal) y, por tanto, el fenómeno se caracterizaba como lineal (con todas las ventajas que esto tiene). Por su parte, los fluidos se han definido como medios continuos que se deforman mientras exista sollicitación y la velocidad de deformación dependerá de la carga aplicada $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\sigma)$. Sin embargo, el comportamiento real de cualquier medio continuo es de la forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, t)$. Esto significa que todos los materiales (medios continuos), independientemente que sean clasificados como sólidos o fluidos, presentarán fluencia; esto es, deformación en el tiempo dependiendo esto solo del tiempo de referencia.

El concepto anterior dio lugar al término Reología¹, que fue introducido por Eugene Bingham en 1929, y corresponde con la parte de la teoría de la mecánica de medios continuos orientada al estudio de los medios que fluyen. Marcus Reiner² (1886-1976) cofundador de la Sociedad Reológica y junto con Bingham, uno de los que acuñó el término e inició la disciplina en los años treinta del siglo pasado, al explicar la razón por la que acuñó el número adimensional conocido como de Débora (utilizado en reología para caracterizar la fluidez de los materiales) $De = t_r/t_0$ (donde t_r es el tiempo de relajación y t_0 , el tiempo de exposición),

¹ Del griego *ρειν* que significa fluir.

² *Physics Today*, enero de 1964.

se refieren a la profeta del antiguo testamento de nombre Débora, la cual menciona “*Las montañas fluirán ante el señor*” (Jueces 5.5).

Este concepto en el siglo VI a. C. fue retomado por el filósofo Heráclito de Efeso, quien menciona que “todo en el mundo fluye”; es entonces que con estos dos enunciados se puede concluir que todo fluirá, aún las montañas, todo depende de los tiempos de observación (todas las sustancias pueden fluir, solo habrá que esperar el tiempo adecuado). Por tanto, que la diferencia entre sólido y fluido estará dada por la magnitud del número de Débora (figura 8.1). Esto es, si el tiempo de relajación t_r es mucho menor que el de observación t_o , entonces se considera que el material fluye; por otra parte si $t_r \gg t_o$, se considera que se trata de un sólido.

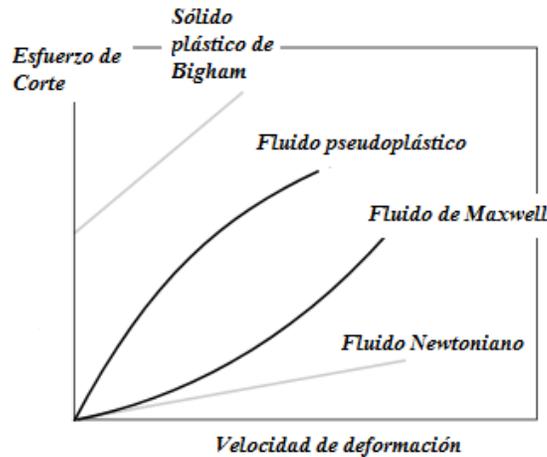


FIGURA 8.1 COMPORTAMIENTOS CARACTERÍSTICOS DE DIVERSOS MEDIOS IDEALIZADOS

Desde la perspectiva de la ingeniería, el tiempo de observación representa *al de servicio*, para así definir De y describir el comportamiento. Para considerar un medio como sólido de Hooke, es necesario que éste tenga un tiempo de relajación muy grande o tiempos de servicio muy reducidos. Particularmente, considerando De se tiene que si $De \ll 1$ el comportamiento se describe como viscoso; si $De \approx 1$ el comportamiento se describe como viscoelástico y si $De \gg 1$, éste será elástico (figura 8.2). Este tipo de comportamientos se relacionan comúnmente con plásticos; los tiempos de relajación de algunos son, por ejemplo, PEBD-6s, PE-1s, PVC-30s, PET-2s.

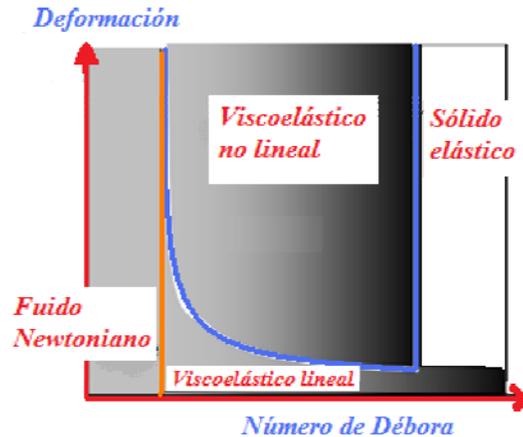


FIGURA 8.2 EFECTO DEL NÚMERO DE DÉBORA

Con base en lo expuesto, se idealiza un tercer tipo de medios continuos (diferentes de fluidos y sólidos) para los cuales $De \approx 1$, entonces existen materiales cuyo comportamiento es un híbrido de un sólido elástico y de un fluido newtoniano. A estos se les denomina como viscoelásticos, de acuerdo con sus características y aspecto físico se pueden tratar de fluidos no newtonianos; en este caso se encuentran materiales como la miel, la sangre o el chapopote, los cuales además de disipar energía tiene la capacidad de almacenarla. Por otra parte, se pueden agrupar los sólidos inelásticos, en los que la deformación es función de la sollicitación y del tiempo. En estos puede presentarse un retardo de la deformación con relación a la sollicitación (sólido de Kelvin) o presentar una deformación instantánea y, posteriormente, al continuar aplicada la carga tendrán una componente de deformación en función del tiempo. Por ejemplo, los metales a elevada temperatura ($\theta \geq 0.7\theta_f$ °K), los plásticos y aún los cerámicos se caracterizan por presentar una deformación elástica instantánea que es proporcional a la sollicitación (esfuerzo) aplicada; sin embargo, éstos presentan una componente de deformación permanente, tal como un fluido newtoniano, la cual es función del tiempo de aplicación de la carga. A dicho comportamiento se le identifica como *Creep* o fluencia lenta. Es necesario recordar en este punto que cuando se define el comportamiento idealizado de un sólido de Hooke se considera que la deformación es función de la sollicitación $\varepsilon = f(\sigma)$ y que no depende del tiempo $\varepsilon \neq f(t)$. Por otra parte, se considera que el sólido durante su deformación almacena energía, pero que no la disipa, con esta observación, si se toma una masa y se suspende ésta de un resorte para después

desplazarla en dirección de la gravedad y soltarla posteriormente, de no existir una componente de disipación el sistema masa-resorte continuará oscilando mientras que no exista alguna fuerza que influya en este desplazamiento; sin embargo, se observa que el movimiento tiende a ser amortiguado. Por consecuencia, se puede suponer que la descripción de sólido elástico es ideal y que los sólidos en términos generales presentan un comportamiento elastoviscoso.

Como ya ha sido mencionado para los fluidos, se define un comportamiento lineal de la forma $\dot{\epsilon} = f(\tau)$, describiéndose a un fluido como aquel medio que no soporta esfuerzos cortantes, ni aún los producidos por su propio peso. Al comportamiento de la forma $\sigma'_{ij} = C_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}$ (donde σ'_{ij} representa las componentes viscosas del esfuerzo) se describe como newtoniano; por otra parte, fluidos como la miel, las escorias metálicas a temperaturas superiores a las de fusión, el vidrio fundido o el chapopote presentan comportamientos que no corresponden con el descrito para un medio newtoniano, por lo que éstos se describen como fluidos no newtonianos o también como comportamientos viscoelásticos.

De todo lo antes mencionado, se concluye la existencia de medios con comportamientos híbridos con una correspondencia tanto a fluidos como sólidos, por tanto, es necesario generar ecuaciones constitutivas para éstos.

Para reconocer la génesis en el estudio de los medios viscoelásticos, se debe retroceder al siglo XVII con los trabajos de Hooke (1678) e Issac Newton (1687), que describen conceptos que dieron inicio a la mecánica de los fluidos. Conceptos que en el siglo XIX fueron continuados con los trabajos de J. C. Maxwell (1867), W. Weber, Boltzman, y W. Thomson (Lord Kelvin, 1962), quienes realizaron diversos experimentos que permitieron visualizar tipos de comportamientos que iban más allá de lo previsto para sólidos de Hooke y fluidos newtonianos; los que ahora se definen como viscoelásticos. Fue hasta las primeras décadas del siglo XX en que Eugene Bingham introdujo el término en colaboración con Marcus Reiner.

Para esta primera parte del análisis y con el fin de facilitar el estudio del comportamiento viscoelástico se considerará una condición uniaxial y se definirá la analogía para un sólido (resorte) y un fluido (amortiguamiento viscoso), tal como se presenta en las figuras 8.3 y 8.4.

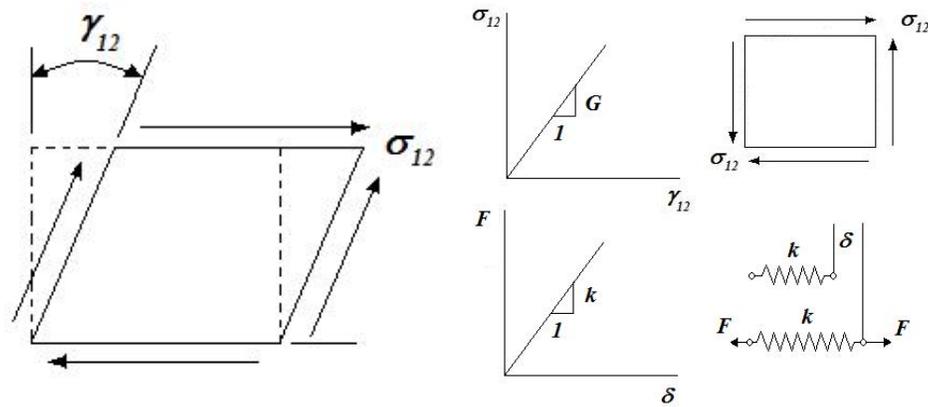


FIGURA 8.3 UN SÓLIDO DE HOOKE AL APLICARLE UNA CARGA PRESENTA UNA DEFORMACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A ÉSTA. EL MEDIO ALMACENA ENERGÍA

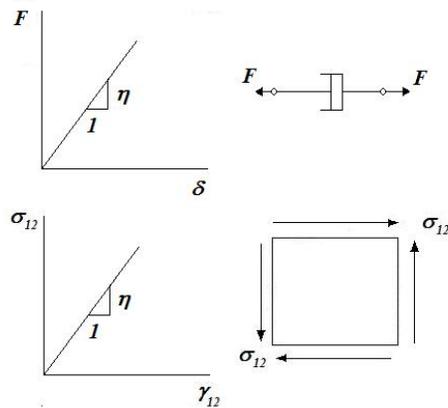


FIGURA 8.4 ANALOGÍA PARA UN FLUIDO NEWTONIANO, AL APLICARLE UNA CARGA PRESENTA UNA RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA CARGA APLICADA. EL MEDIO DISIPA ENERGÍA

8.2 COMPORTAMIENTO CARACTERÍSTICO DE LOS FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Los materiales viscoelásticos pueden presentar diversos comportamientos:

Si la sollicitación (esfuerzo) es constante, entonces el material se deforma de manera lineal con el tiempo (creep) o si la deformación es constante la sollicitación se reduce con el tiempo (relajación), esto corresponde con el denominado como modelo de Maxwell, el cual esquemáticamente se representa como un amortiguador y resorte conectados en serie (figura 8.5).

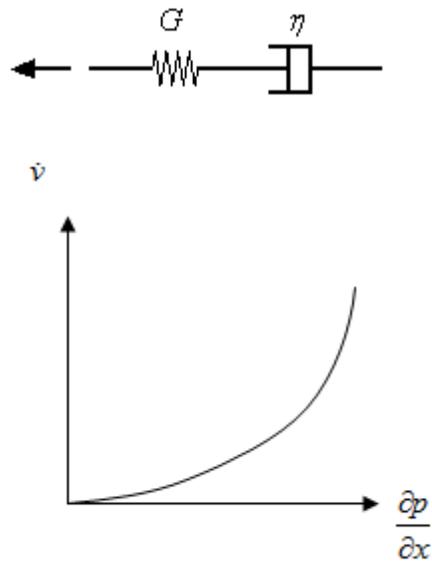


FIGURA 8.5 UN FLUIDO DE MAXWELL SE CARACTERIZA POR NO PRESENTAR UNA RESPUESTA LINEAL CON LOS ESFUERZOS A CORTE, DE TAL FORMA QUE SU COMPORTAMIENTO ES NO LINEAL. ÉSTE MODELO SE APLICA PARA DESCRIBIR EL COMPORTAMIENTO DE LOS FLUIDOS NO LINEALES

$$\dot{\gamma} \propto \frac{\partial p}{\partial x}$$

Los fluidos no newtonianos almacenan energía elástica, entonces existe un tiempo de relajación.

Otro modelo básico es el de Kelvin (figura 8.6), el cual representa un sólido en el que se presenta retardo en la respuesta tanto en la carga como la descarga, de tal forma que $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, t)$.

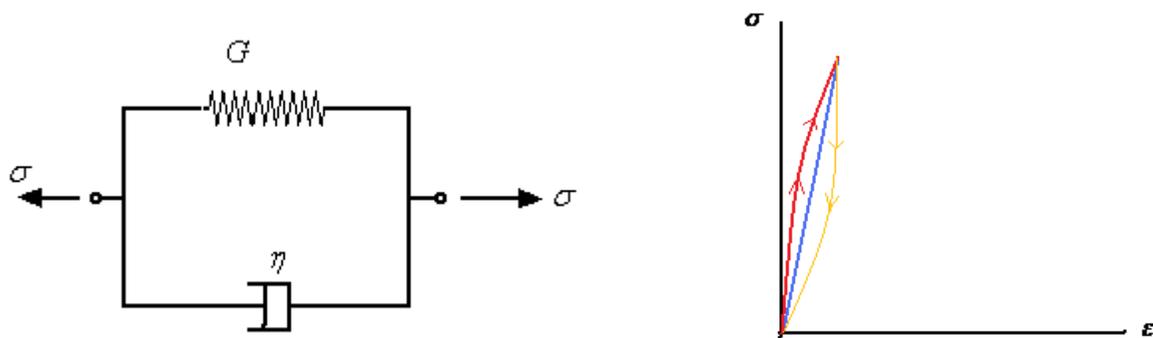


FIGURA 8.6 MODELO DE KELVIN

8.3 TEORÍA UNIAXIAL

Fluido lineal viscoelástico (Fluido de Maxwell)

Un fluido lineal de Maxwell es definido por las ecuaciones constitutivas:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}^{VE}$$

donde $(-p\delta_{ij})$ es la presión isotrópica; ésta es indeterminada considerando incompresibilidad del fluido, σ_{ij}^{VE} representa la componente de esfuerzo relacionado con el comportamiento viscoelástico del fluido no newtoniano.

Analizando el fenómeno de forma uniaxial, la deformación en el fluido de Maxwell (figura 8.5) está dada por la suma de la deformación del resorte ε_E (componente elástica del sistema) más la deformación del amortiguamiento viscoso ε_V (componente viscosa).

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_V$$

Por consecuencia, la rapidez de deformación $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$, se describe por:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_V \quad (8.1)$$

Considerando que la componente elástica es lineal, se tiene que:

$$\varepsilon_E = \frac{\sigma}{G} \quad (8.2)$$

En consecuencia $\Rightarrow \dot{\varepsilon}_E = \frac{\dot{\sigma}}{G}$, donde G representa la constante elástica (módulo de rigidez a corte). Por su parte, el amortiguamiento viscoso (componente viscosa del comportamiento) se expresa como (la relación esfuerzo a velocidad de deformación es lineal):

$$\dot{\varepsilon}_V = \frac{\sigma}{\eta} \quad (8.3)$$

donde η representa la viscosidad.

Sustituyendo las ecuaciones 8.2 y 8.3 en 8.1, se tiene la ecuación uniaxial constitutiva para un solo elemento de Maxwell

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Reordenando y haciendo un cambio de variable

$$\eta \dot{\varepsilon} = \frac{\eta}{G} \dot{\sigma} + \sigma$$

$$\lambda = \frac{\eta}{G}$$

$$\eta \dot{\varepsilon} = \lambda \dot{\sigma} + \sigma \quad (8.4)$$

$$\eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \lambda \frac{d\sigma}{dt} + \sigma \quad (8.5)$$

La ecuación 8.4 representa una relación de la forma $\varepsilon = f(\sigma, \dot{\sigma})$ o, de otra manera, $\varepsilon = g(\sigma, t)$.

Primer experimento con el elemento de Maxwell

Para resolver el sistema planteado en la ecuación 8.1, se puede considerar que en $t = 0$ se

aplica una carga σ_0 constante $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} = 0$

$$\therefore \sigma_0 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma_0}{\eta} = 0$$

La solución de la ecuación diferencial es

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \varepsilon_0 \quad (8.6)$$

La constante de integración ε_0 para una deformación inicial instantánea es $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{G}$

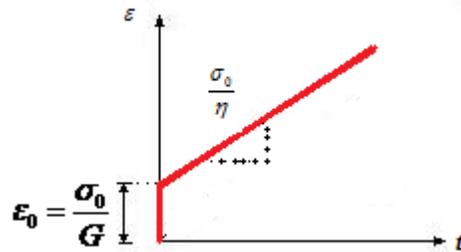


FIGURA 8.7 RELACIÓN DEFORMACIÓN-TIEMPO PARA UNA SOLICITACIÓN CONSTANTE. FLUIDO DE MAXWELL

De la ecuación 8.6 queda

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{G}{\eta}t + 1 = J \quad (8.7)$$

donde J representa la función de demanda en fluencia lenta (Creep) para el elemento lineal de Maxwell.

Segundo experimento de Maxwell. Experimento de relajación de esfuerzos

A un sistema cuyo comportamiento se representa a través del modelo uniaxial de Maxwell se le aplica una deformación inicial ε_0 para $t=0$ la cual se mantiene, la incógnita ahora está dada por $\sigma = h(t)$:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0; \text{ ya que } \varepsilon = \text{cte}$$

de la ecuación diferencial 8.4 se tiene que

$$\sigma + \lambda \frac{d\sigma}{dt} = 0$$

La solución de esta ecuación es

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right)$$

La constante de integración σ_0 para un esfuerzo inicial instantáneo es

$$\sigma_0 = G\varepsilon_0$$

$$\sigma = G\varepsilon_0 \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) \quad (8.8)$$

$$\varphi(t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = G \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) = \frac{\eta}{\lambda} \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) \quad (8.9)$$

donde λ representa el tiempo de relajación y $\varphi(t)$ es la función de relajación de esfuerzos, veáse la figura 8.8. Por otra parte, si la rigidez elástica del sistema representada a través de G es muy elevada ($G \rightarrow \infty$), entonces el elemento no se comporta elásticamente y es puramente viscoso.

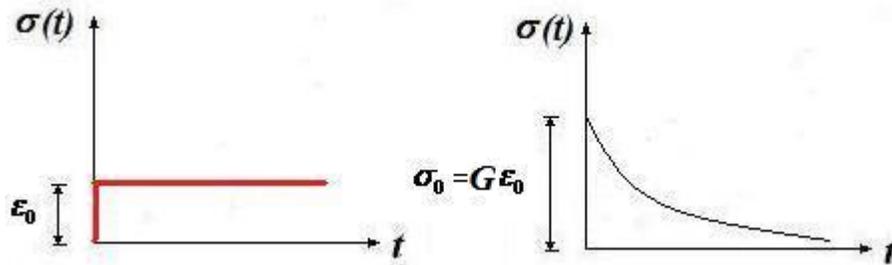
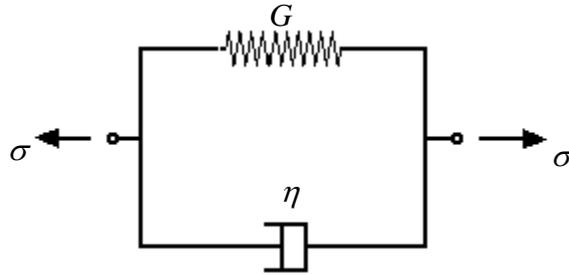


FIGURA 8.8 RELAJACIÓN DE ESFUERZOS AL APLICAR UNA DEFORMACIÓN CONSTANTE

Algunos ejemplos de materiales que se comportan elásticamente bajo cargas moderadas a temperaturas mucho menores de la de fusión son el acero, cobre y sus aleaciones, aluminio y sus aleaciones, y en general la gran mayoría de los metales, así como algunos plásticos como el acrílico y biomateriales como el hueso cortical (es conveniente recordar el número de Débora y los conceptos que de éste se derivan). Por otra parte, una gran cantidad de polímeros presentan flujo viscoso, sin embargo, éstos son muy interesantes porque pueden presentar un comportamiento elástico, plástico o mixto. Por ejemplo, el propio metilmetacrilato puede modelarse como sólido elástico, pero al elevar su temperatura se comporta como un flujo viscoso.

Modelo de Kelvin

El modelo de Kelvin (figura 8.9) permite describir el comportamiento de un sólido inelástico. En éste la deformación es función de la sollicitación y del tiempo, el elemento viscoso produce un retardo en la deformación (ésta no será instantánea, como se presume en un sólido de Hooke, figura 8.1).

**FIGURA 8.9** MODELO DE KELVIN

En este caso, se tiene que las deformaciones del elemento elástico y de la componente viscosa serán iguales; $\varepsilon_V = \varepsilon_E = \varepsilon$, situación equivalente para la velocidad de deformación $\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon}_V = \dot{\varepsilon}_E$, por consecuencia, $\varepsilon_E = \frac{\sigma}{G}$; $\dot{\varepsilon}_V = \frac{\sigma}{\eta}$. Por su parte, la carga se distribuye entre resorte y amortiguamiento viscoso por lo que $\sigma = \sigma_E + \sigma_V$, entonces, sustituyendo se tiene que:

$$\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (8.10)$$

O, de otra forma,

$$\sigma = G\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (8.11)$$

La solución de la ecuación diferencial antes planteada, partiendo de que $\sigma = 0$ para $t \leq 0$, $\sigma = \sigma_0 = \text{cte}$ para $t > 0$ está dada por:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \quad (8.12)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (8.13)$$

La solución antes expuesta, representa que la deformación tiene un tiempo de retardo con relación a la aplicación de la sollicitación, tanto al momento de carga como de descarga del elemento, figura 8.10.

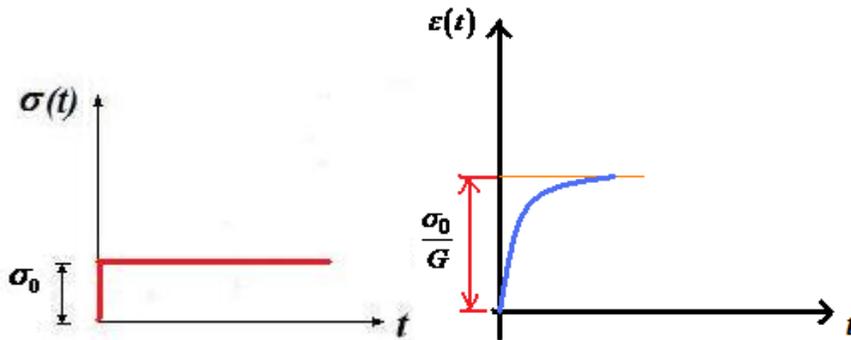


FIGURA 8.10 RESPUESTA DE LA DEFORMACIÓN AL APLICAR UNA SOLICITACIÓN CONSTANTE A UN MATERIAL QUE SE COMPORTA DE ACUERDO CON EL MODELO DE KELVIN

8.4 MODELOS COMPUESTOS

Modelos de 3 elementos

Los modelos simples, tanto de Kelvin como de Maxwell, no son suficientes en la mayoría de los casos prácticos para representar con precisión el comportamiento real de sólidos o fluidos, razón por la que se han propuesto modelos un poco más complejos, tal es el caso del sólido lineal estándar (figura 8.11).

La deformación total ε está dada por la suma de la deformación del elemento de Kelvin y del resorte con constante G_1 , esto es

$$\varepsilon = \varepsilon_{E_1} + \varepsilon_K$$

donde

$$\varepsilon_{E_1} = \frac{\sigma}{G_1} \quad \text{y} \quad \varepsilon_K = \frac{\sigma}{\left(G_2 + \eta_2 \frac{\partial}{\partial t} \right)}$$

por lo que la ecuación diferencial es de la forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G_1} + \frac{\sigma}{\left(G_2 + \eta_2 \frac{\partial}{\partial t}\right)} = \frac{\sigma \left[(G_2 + G_1) + \eta_2 \frac{\partial}{\partial t} \right]}{G_1 G_2 + G_1 \eta_2 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow G_1 \eta_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + G_1 G_2 \varepsilon = \sigma (G_2 + G_1) + \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (8.14)$$

La ecuación 8.7 se expresa entonces como:

$$a_1 \dot{\varepsilon} + a_2 \varepsilon = b_2 \sigma + b_1 \dot{\sigma} \quad (8.15)$$

Es conveniente mencionar que la ecuación constitutiva del sólido elástico de tres elementos se puede describir también como un elemento de Maxwell colocado en paralelo con un resorte (figura 8.12).

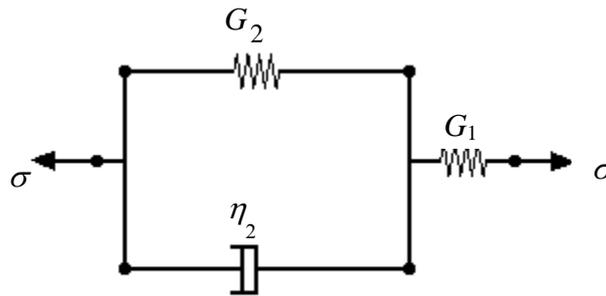


FIGURA 8.11 SÓLIDO LINEAL ESTÁNDAR

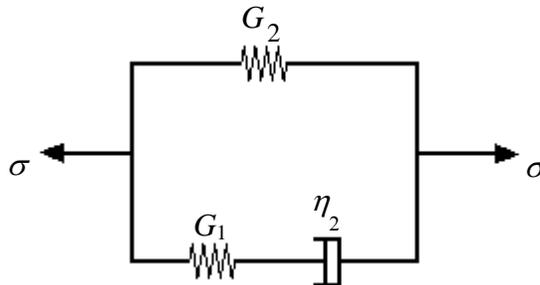


FIGURA 8.12 SÓLIDO LINEAL ESTÁNDAR ESTRUCTURADO A TRAVÉS DE LA CONJUNCIÓN DE UN ELEMENTO DE MAXWELL EN PARALELO CON UN RESORTE

Para el caso presentado en la figura 8.12 se tiene que:

$$\varepsilon_{R_1} = \varepsilon_M = \varepsilon ; \sigma = \sigma_{R_1} + \sigma_M$$

$$\sigma_{R_1} = G_1 \varepsilon ; \varepsilon_M = \varepsilon_{R_2} + \varepsilon_V \Rightarrow \dot{\varepsilon}_M = \dot{\varepsilon}_{R_2} + \dot{\varepsilon}_V \quad \varepsilon_{R_2} = \frac{\sigma_M}{G_2}$$

$$\sigma_M = \eta_2 \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial t} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_M}{G_2} + \frac{\sigma_M}{\eta_2} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2} \right) \sigma_M$$

$$\therefore \sigma = G_1 \varepsilon + \frac{1}{\left(\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2} \right)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \sigma \left(\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2} \right) = G_1 \left(\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2} \right) \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{1}{G_2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta_2} = \frac{G_1}{G_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{G_1}{\eta_2} \varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

De lo antes expuesto, se tiene que el modelo representado en la figura 8.13 tiene una ecuación diferencial como la mostrada en la expresión 8.16, con lo que se comprueba la equivalencia con el sólido elástico de tres elementos.

$$\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta \varepsilon = \phi \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varphi \sigma \quad (8.16)$$

El modelo viscoso de tres elementos se presenta como se muestra en la figura 8.14: un Kelvin más un elemento viscoso, con éste se describe el comportamiento de un fluido viscoso no lineal, su representación equivalente es la de un Maxwell que tiene en paralelo un elemento viscoso (figura 8.15).

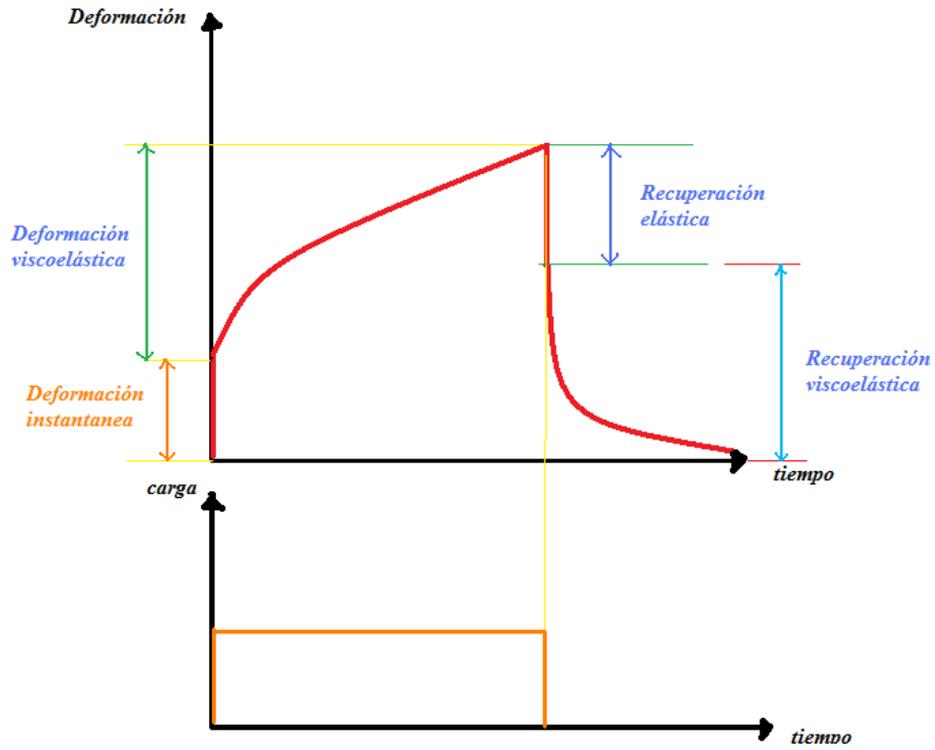


FIGURA 8.13 COMPORTAMIENTO DE UN SÓLIDO LINEAL ESTÁNDAR (SÓLIDO ELÁSTICO DE TRES ELEMENTOS). ESTE TIPO DE COMPORTAMIENTO ES CARACTERÍSTICO DE POLÍMEROS (PLÁSTICOS), TAL COMO EL POLIMETILMETACRILATO

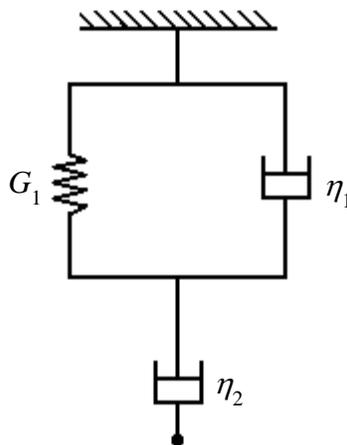


FIGURA 8.14 MODELO VISCOZO DE TRES ELEMENTOS

La ecuación diferencial que representa este sistema está dada por la ecuación 8.17. Para su desarrollo es necesario considerar que:

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_{\eta_2} \quad ; \quad \sigma = \sigma_K = \sigma_{\eta_2}$$

$$\sigma_{\eta_2} = \eta_2 \frac{\partial \varepsilon_{\eta_2}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\eta_2} = \frac{\sigma}{\eta_2} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\sigma = \sigma_{G_1} + \sigma_{\eta_1} = G_1 \varepsilon_K + \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_K}{\partial t} = \left(G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_K$$

$$\therefore \quad \varepsilon_K = \frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{\sigma}{\eta_2} \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\therefore \quad G_1 \eta_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = (\eta_1 + \eta_2) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G_1 \sigma \quad (8.17)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = b_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + b_2 \sigma \quad (8.18)$$

Por otra parte, en la figura 8.15 se presenta un modelo alternativo que permite describir un comportamiento viscoelástico mediante tres elementos.

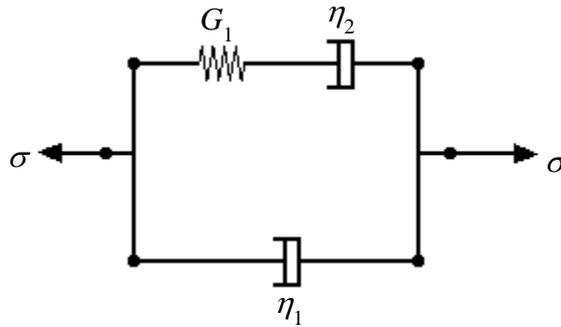


FIGURA 8.15 FORMA ALTERNATIVA PARA REPRESENTAR UN SISTEMA VISCOZO DE TRES ELEMENTOS

Modelo de cuatro elementos

Otro modelo compuesto es el de cuatro parámetros, el cual representa la combinación de un modelo de Kelvin con uno de Maxwell (figura 8.16), éste puede describir el comportamiento de los diversos sistemas viscoelásticos básicos, la ecuación diferencial que describe su comportamiento está dada por la ecuación 8.19. Este sistema incorpora los diferentes comportamientos viscoelásticos, ya que presenta una respuesta elástica inmediata debido al elemento G_2 , flujo viscoso (relajación de esfuerzos) por efecto del elemento viscoso η_2 y un retardo en la respuesta elástica por efecto del elemento de Kelvin que se encuentra en serie (G_1, η_1).

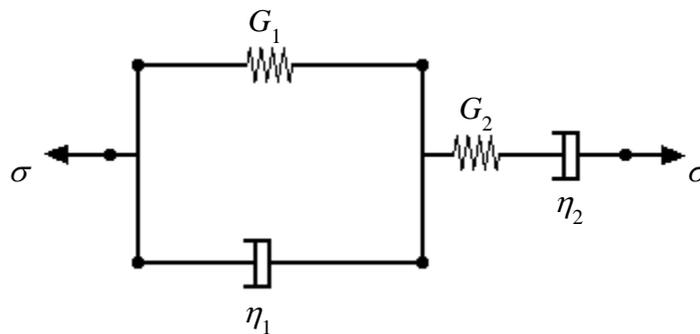


FIGURA 8.16 MODELO VISCOELÁSTICO DE CUATRO ELEMENTOS

En este caso se tiene que:

$$\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_M$$

$$\varepsilon_K = \varepsilon_{G_1} = \varepsilon_{\eta_1}$$

$$\sigma = \sigma_K = \sigma_M$$

$$\sigma_{G_1} + \sigma_{\eta_1} = \sigma$$

$$\sigma_{G_1} = G_1 \varepsilon_{G_1} = G_1 \varepsilon_K$$

$$\sigma_{\eta_1} = \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_{\eta_1}}{\partial t} = \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_K}{\partial t}$$

$$G_1 \varepsilon_K + \eta_1 \frac{\partial \varepsilon_K}{\partial t} = \sigma = \left(G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_K$$

$$\therefore \varepsilon_K = \frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\varepsilon_M = \varepsilon_{G_2} + \varepsilon_{\eta_2}$$

$$\sigma_{G_2} = \sigma_{\eta_2} = \sigma$$

$$\varepsilon_{G_2} = \frac{\sigma}{G_2}$$

$$\sigma = \eta_2 \frac{\partial \varepsilon_{\eta_2}}{\partial t} \Rightarrow \varepsilon_{\eta_2} = \frac{\sigma}{\eta_2 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\varepsilon_M = \frac{\sigma}{G_2} + \frac{\sigma}{\eta_2 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \left[\frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{\partial}{\partial t}} \right] + \left[\frac{\sigma}{G_2} + \frac{\sigma}{\eta_2 \frac{\partial}{\partial t}} \right]$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{G_2 \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G_1 G_2 \sigma + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + G_1 \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G_2 \eta_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}}{G_1 G_2 \eta_2 \frac{\partial}{\partial t} + G_2 \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}} \quad (8.19)$$

De lo antes expuesto, la ecuación diferencial que describe el fenómeno es de la forma

$$G_1 G_2 \eta_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + G_2 \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = G_1 G_2 \sigma + G_2 \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + G_1 \eta_2 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + G_2 \eta_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad a_2 \ddot{\varepsilon} + a_1 \dot{\varepsilon} = b_0 \sigma + b_1 \dot{\sigma} + b_2 \ddot{\sigma} \quad (8.20)$$

8.5 MODELOS GENERALIZADOS

Modelo generalizado de Kelvin

En la mayoría de las ocasiones, el empleo de un solo elemento de Kelvin o de Maxwell, no es suficiente para modelar el comportamiento de un material, es por consecuencia que se definen los modelos generalizados (figuras 8.17 y 8.18).

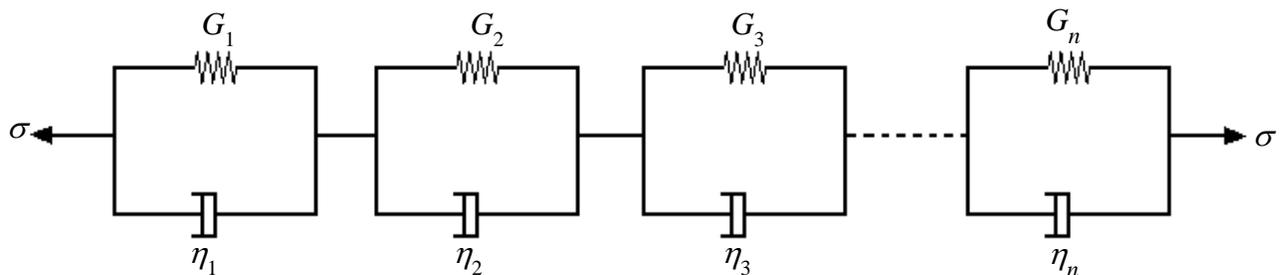


FIGURA 8.17 MODELO GENERALIZADO DE KELVIN

En el caso del modelo generalizado de Kelvin se tiene que la deformación total ε está dada por la suma de cada uno de los elementos individuales, entonces se tiene que

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$

por otra parte, la ecuación 8.10 se expresa como

$$\sigma = \left(G + \eta \frac{d}{dt} \right) \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{G_1 + \eta_1 \frac{d}{dt}} + \frac{\sigma}{G_2 + \eta_2 \frac{d}{dt}} + \frac{\sigma}{G_3 + \eta_3 \frac{d}{dt}} + \dots + \frac{\sigma}{G_n + \eta_n \frac{d}{dt}} \quad (8.21)$$

de la cual se desarrolla una ecuación diferencial de la forma:

$$a_n \frac{\partial^n \varepsilon}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \varepsilon}{\partial t^{n-1}} + a_{n-2} \frac{\partial^{n-2} \varepsilon}{\partial t^{n-2}} + \dots + a_0 \varepsilon = b_m \frac{\partial^m \sigma}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \sigma}{\partial t^{m-1}} + b_{m-2} \frac{\partial^{m-2} \sigma}{\partial t^{m-2}} + \dots + b_0 \sigma \quad (8.22)$$

Ecuación que en forma compacta se expresa como

$$\{A\} \varepsilon = \{B\} \sigma \quad (8.23)$$

donde los operadores $\{A\}$ y $\{B\}$ están definidos por:

$$A = \sum_{i=0}^n a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \quad B = \sum_{i=0}^m b_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}. \quad (8.24)$$

$$\sum_{i=0}^n a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \varepsilon = \sum_{i=0}^m b_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \sigma$$

Modelo generalizado de Maxwell

Por su parte, en el modelo generalizado de Maxwell (figura 8.18), la sollicitación total σ se divide en los n elementos de éste, de tal forma que $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i$; por otra parte, considerando la ecuación diferencial para el modelo básico de Maxwell:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta} = \left(\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \right) \sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta}}$$

Se tiene que:

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{G_2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_2}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{G_3} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_3}} + \dots + \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{G_n} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_n}} \quad (8.25)$$

Ecuación que se expresa como:

$$\begin{aligned} \phi_n \frac{\partial^n \varepsilon}{\partial t^n} + \phi_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \varepsilon}{\partial t^{n-1}} + \phi_{n-2} \frac{\partial^{n-2} \varepsilon}{\partial t^{n-2}} + \dots + \phi_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \\ \zeta_m \frac{\partial^m \sigma}{\partial t^m} + \zeta_{m-1} \frac{\partial^{m-1} \sigma}{\partial t^{m-1}} + \zeta_{m-2} \frac{\partial^{m-2} \sigma}{\partial t^{m-2}} + \dots + \zeta_0 \sigma \end{aligned} \quad (8.26)$$

o de manera compacta como $\{\Phi\} \varepsilon = \{\Psi\} \sigma$, donde los operadores se describen como

$$\{\Phi\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^i}{\partial t^i}, \quad \{\Psi\} = \sum_{i=0}^m \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^n \frac{\partial^i}{\partial t^i} \varepsilon = \sum_{i=0}^m \frac{\partial^i}{\partial t^i} \sigma \quad (8.27)$$

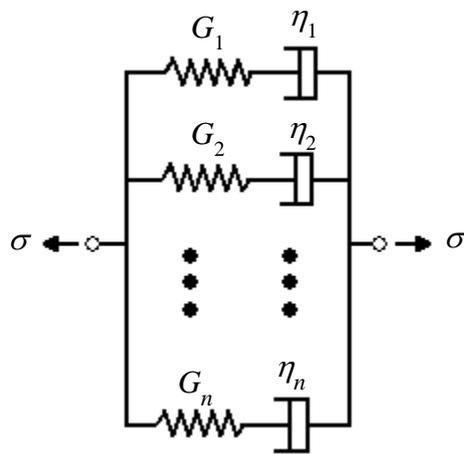


FIGURA 8.18 MODELO GENERALIZADO DE MAXWELL

8.6 FLUENCIA Y RELAJACIÓN DE ESFUERZOS

Los experimentos de flujo (fluencia) y relajación de esfuerzos ya fueron explicados anteriormente, cuando se presentaron los modelos simples de Maxwell y de Kelvin; de este último se tiene que si $\sigma = \sigma_0$ para $t \geq 0$ y partiendo de que

$$\sigma = \sigma_V + \sigma_E \Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}t} \right) \quad (8.28)$$

por lo tanto, si la sollicitación es de la forma $\sigma = \sigma(t)$ o si en su defecto la carga

$$\sigma = 0 \quad \forall t < t_0; \quad \sigma = \sigma_0 f(t)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} \right) f(t-t_0)$$

De la ecuación 8.11 se tiene que la deformación se puede expresar en la forma

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 U(t) J(t)$$

donde el término $J(t)$ se denomina función de flujo

$$J(t) = \frac{1}{G} \left(1 - e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} \right) \quad (8.29)$$

y $u(t)$ puede ser una función escalón.

Para un modelo generalizado se expresa como

$$J(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{G_i} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) \quad (8.30)$$

Si el número de unidades de Kelvin se incrementa indefinidamente, entonces,

$$J(t) = \int_0^{\infty} J(\lambda) \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) d\lambda \quad (8.31)$$

la función $J(\lambda)$ se describe como la distribución de tiempos de retardo o espectro de retardo.

Para el caso de un Maxwell se tiene que

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 [f(t)] + \eta\varepsilon_0 \delta(t)$$

en el caso de que la excitación se aplique para $t = 0$, entonces se tiene que

$$\sigma = G\varepsilon_0 \exp\left(\frac{-t}{\lambda}\right) U(t); \quad \lambda = \frac{\eta}{G}$$

De otra forma, se expresa también

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \frac{\delta(t)}{G} + \sigma_0 \frac{U(t)}{\eta}$$

donde $\delta(t)$ es la función de Dirac (función pulso) y

$$\delta(t-t_0) = \frac{dU(t-t_0)}{dt}$$

de tal forma que

$$\delta(t-t_0) = 0 \quad \forall t \neq t_1$$

y la integral

$$\int_{t_0}^{t_1^+} \delta(t-t_0) dt = 1,$$

Entonces, se tiene que

$$\int_{-\infty}^t f(t^*) \delta(t^*-t_0) dt^* = f(t_0) U(t-t_0) \quad \text{para } t > t_0,$$

para cualquier función continua $f(t)$.

De lo antes expuesto la función de relajación de Maxwell es

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\lambda}} [U(t)] \quad (8.32)$$

Por su parte, para Kelvin la función de relajación se expresa

$$\sigma(t) = G\varepsilon_0 [U(t)] + \eta \dot{\varepsilon}_0 [\delta(t)] \quad (8.33)$$

La fluencia en un modelo cualquiera bajo una carga $\sigma = \sigma_0 [U(t)]$ puede ser escrita como $\varepsilon(t) = f(t) \sigma_0$, donde $f(t)$ es la función de flujo. Entonces, para un modelo generalizado de Kelvin, la función tiene la forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^n J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) (U(t)) \quad (8.34)$$

Por su parte, para cualquier modelo sujeto a $\varepsilon = \varepsilon_0 [U(t)]$, los esfuerzos se expresan como

$$\sigma(t) = G(t) \varepsilon_0$$

donde $G(t)$ se describe como función de relajación.

8.7 INTEGRALES HEREDITARIAS

Como ya se mencionó en los párrafos anteriores, la respuesta al flujo para cualquier modelo que es sometido a $\sigma = \sigma_0 U(t)$ será de la forma $\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0$, donde $J(t)$ es la función de flujo; entonces, para un modelo generalizado de Kelvin se tiene

$$J(t) = \sum_{i=1}^n J_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right) U(t)$$

donde $J_i = \frac{1}{G_i}$ se describe como la complianza (este término no existe en el castellano y representa el barbarismo de la palabra inglesa compliance) o resiliencia. Lo mismo se puede aplicar para un modelo de Kelvin. Para los términos desarrollados en el presente capítulo se ha considerado que el comportamiento es lineal por lo que el principio de superposición es aplicable, esto representa que el efecto total está dado por la suma de las causas, las cuales se han aplicado a tiempos diferentes (figura 8.15); en ésta se observa que a diferentes tiempos se aplican diferentes sollicitaciones, por lo que la respuesta será de la forma

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \Psi(t) + \sigma_1 \Psi(t-t_1) + \sigma_2 \Psi(t-t_2) + \dots + \sigma_i \Psi(t-t_i)$$

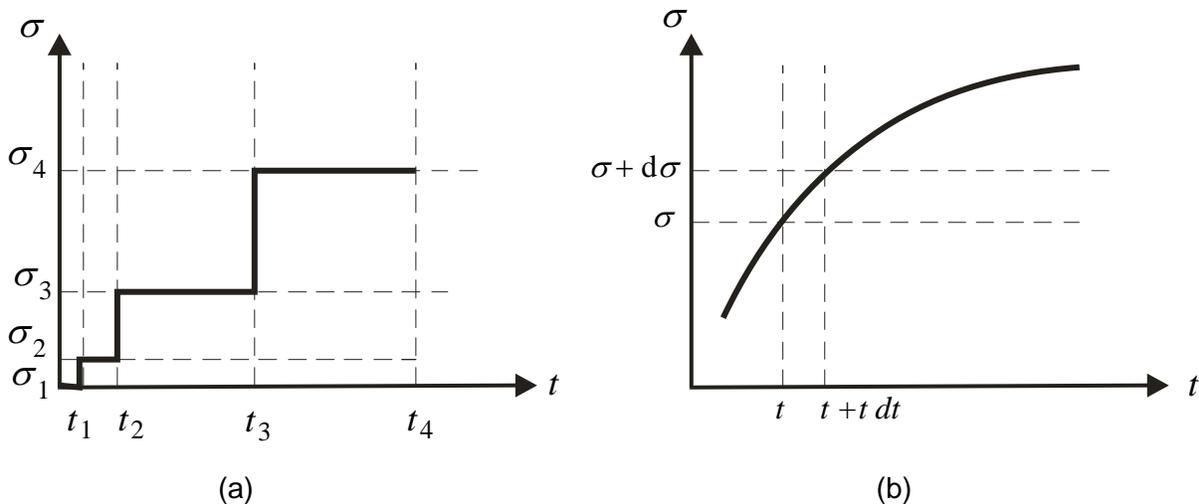
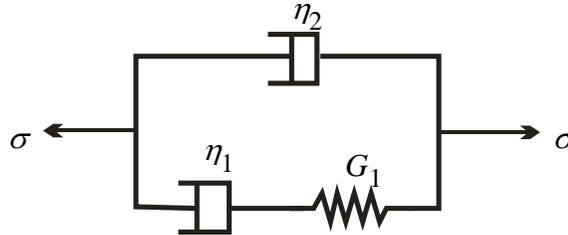


FIGURA 8.15 (a) A DIFERENTES TIEMPOS SE APLICAN (EN FORMA DISCRETA) INCREMENTOS EN LA SOLICITACIÓN. **(b)** LA FUNCIÓN DE ESFUERZOS ES UNA FUNCIÓN CONTINUA CON EL TIEMPO

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Desarrolle la ecuación diferencial que describe el comportamiento del siguiente sólido:



SOLUCIÓN

De los elementos con la constante elástica G_1 y el elemento viscoso η_1 (modelo de Maxwell)

$$\sigma = \sigma_E = \sigma_V ; \varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_V \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_V$$

$$\sigma_E = G_1 \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{G_1}$$

$$\sigma_V = \eta_1 \dot{\varepsilon} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta_1}$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{1}{G_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta_1} = \sigma \left(\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \right)$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\left(\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \right)}$$

Considerando el elemento de Maxwell con el elemento viscoso η_2

$$\varepsilon = \varepsilon_M = \varepsilon_V$$

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_V$$

$$\sigma_M = \frac{\dot{\varepsilon}}{\left(\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \right)}$$

$$\sigma_V = \eta_2 \dot{\varepsilon}$$

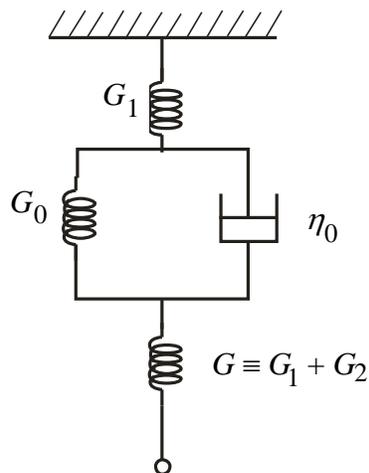
$$\Rightarrow \sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\left(\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1} \right)} + \eta_2 \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon} + \frac{\eta_2}{G_1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}{\frac{1}{G_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\eta_1}}$$

$$\therefore \frac{1}{G_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma}{\eta_1} = \frac{\eta_2}{G_1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

Esta ecuación diferencial es de la forma:

$$a_1 \dot{\sigma} + a_2 \sigma = b_1 \ddot{\varepsilon} + b_2 \dot{\varepsilon}$$

2. Un sólido viscoelástico es modelado mediante un arreglo de cuatro elementos de resorte y amortiguador, como el que se muestra en la siguiente figura.



- a) Establecer la ecuación diferencial para este modelo.

- b) A partir de ella plantear la ecuación diferencial para una prueba de fluencia; resolverla y trazar una gráfica de deformación vs. tiempo.
- c) Plantear y resolver la ecuación diferencial para una prueba de relajamiento: resolverla y trazar gráfica esfuerzo vs. deformación.
- d) Discutir las ventajas y desventajas de este modelo.

SOLUCIÓN

- a) El sistema que se propuso en este problema equivale a uno de solo tres elementos, como se ve en la figura anterior, y a partir de ella se establecen las siguientes expresiones:

$$\varepsilon = \varepsilon_R + \varepsilon_K \quad (1)$$

$$\sigma_R = \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{y} \quad \varepsilon_R = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = G_1 \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{G_1}$$

$$\sigma_2 = G_2 \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{G_2}$$

$$\varepsilon_R = \frac{\sigma}{G_1} + \frac{\sigma}{G_2} = \frac{\sigma G_2 + \sigma G_1}{G_1 G_2} = \frac{\sigma (G_1 + G_2)}{G_1 G_2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \frac{G_1 G_2 \varepsilon_R}{G_1 + G_2}$$

Del elemento formado por componentes cuya constante elástica es G_0 y el elemento viscoso es η_0 (elemento de Kelvin)

$$\varepsilon_K = \varepsilon_E = \varepsilon_V$$

$$\sigma_K = \sigma_E + \sigma_V$$

$$\sigma_E = G_0 \varepsilon$$

$$\sigma_V = \eta_0 \dot{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \sigma_K = G_0 \varepsilon + \eta_0 \dot{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\left(G_0 + \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} \right)}$$

Sustituyendo en la ecuación 1

$$\varepsilon = \varepsilon_R + \varepsilon_K = \frac{\sigma(G_1 + G_2)}{G_1 G_2} + \frac{\sigma}{G_0 + \eta_0 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\varepsilon = \frac{G_0 \sigma (G_1 + G_2) + \eta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} (G_1 + G_2) + G_1 G_2 \sigma}{G_1 G_2 G_0 + G_1 G_2 \eta_0 \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\therefore G_1 G_2 G_0 + G_1 G_2 \eta_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = G_0 \sigma (G_1 + G_2) + \eta_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} (G_1 + G_2) + G_1 G_2 \sigma \quad (2)$$

Esta ecuación diferencial es de la forma:

$$a_1 \dot{\varepsilon} + a_2 \varepsilon = b_1 \dot{\sigma} + b_2 \sigma$$

b) Para una prueba de fluencia,

$$\sigma \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sigma_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación 2 se puede desarrollar como:

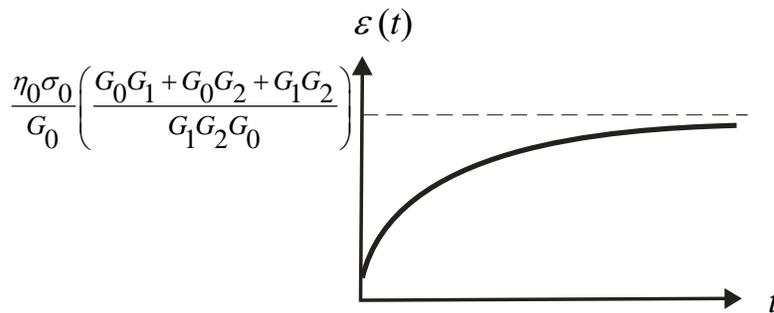
$$\dot{\varepsilon} + \frac{G_0}{\eta_0} \varepsilon = \sigma_0 \left(\frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2} + \frac{1}{G_0} \right)$$

$$\dot{\varepsilon} + \frac{G_0}{\eta_0} \varepsilon = \sigma_0 \left(\frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{G_1 G_2 G_0} \right) \quad (3)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 3

$$\varepsilon(t) = \frac{\eta_0 \sigma_0}{G_0} \left(\frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{G_1 G_2 G_0} \right) \left(1 - e^{-\left(\frac{G_0}{\eta_0}\right)t} \right)$$

Graficando este resultado se consigue lo siguiente:



- c) Para una prueba de relajación hay que imponer la condición de que la deformación se mantiene constante. Por lo tanto, la ecuación diferencial que se obtiene de la ecuación 2 es:

$$\dot{\sigma} + \left(\frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{\eta_0 (G_1 + G_2)} \right) \sigma = \left(\frac{G_1 G_2 G_0}{\eta_0 (G_1 + G_2)} \right) \varepsilon_0 \quad (4)$$

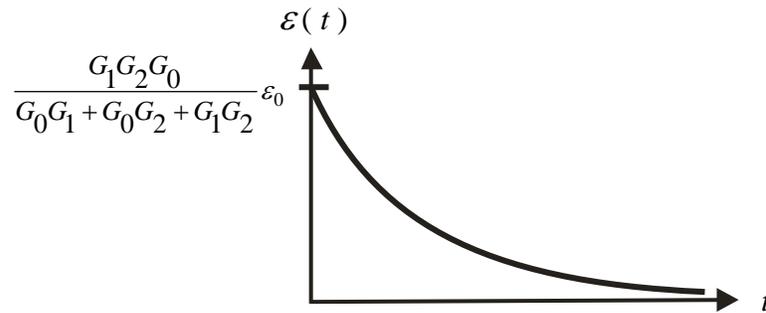
En donde las constantes a y b están representadas por:

$$a = \frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{\eta_0 (G_1 + G_2)} ; \quad b = \frac{G_1 G_2 G_0}{\eta_0 (G_1 + G_2)}$$

Resolviendo la ecuación diferencial 4 se obtiene:

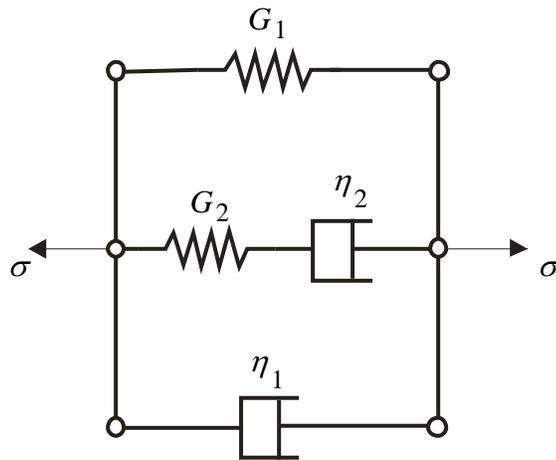
$$\sigma(t) = \frac{G_1 G_2 G_0 \varepsilon_0}{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2} \left[1 - e^{-\left(\frac{G_0 G_1 + G_0 G_2 + G_1 G_2}{\eta_0 (G_1 + G_2)}\right)t} \right]$$

Ahora se dibuja una gráfica de Esfuerzos vs. Tiempo, a partir del resultado anterior.



- d) Al observar los resultados gráficos obtenidos, se puede concluir que este modelo falla en predecir adecuadamente la fluencia primaria y la fluencia secundaria, pues no exhibe la respuesta elasto-plástica ni la pendiente no nula en la fase secundaria. No obstante, sí predice cualitativamente una fluencia primaria.

La gráfica de relajación sí predice una curva cualitativamente correcta para esta prueba.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Considerando el modelo de la siguiente figura como un caso generalizado del modelo de Maxwell, determine su ecuación esfuerzo-deformación.

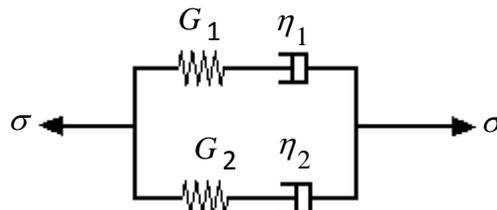


FIGURA 1

2. Para las siguientes analogías del comportamiento mecánico, determine usted la relación de deformación-tiempo.

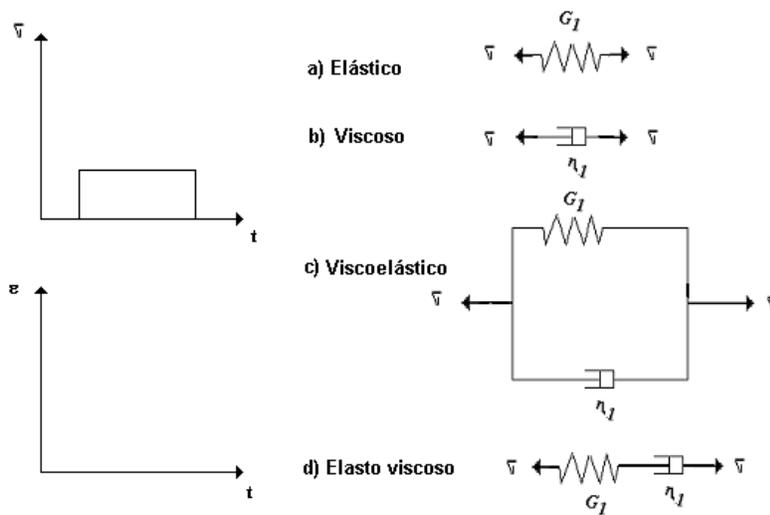


FIGURA 2

3. Indique el modelo mediante el cual se puede representar el comportamiento mecánico de las rocas.
4. Determine la función de relajación $\varphi(t)$ para un medio que se comporta según la analogía de la figura 3.

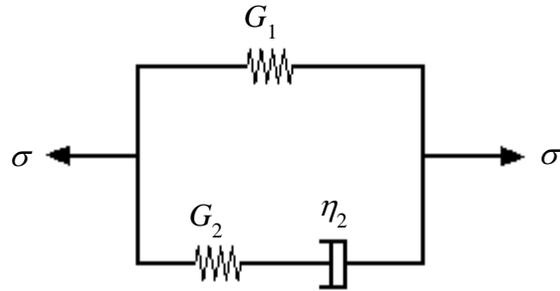
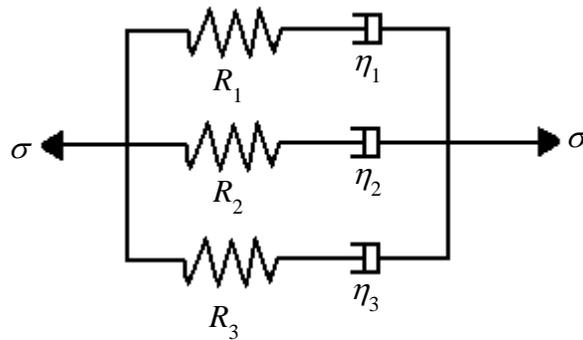


FIGURA 3

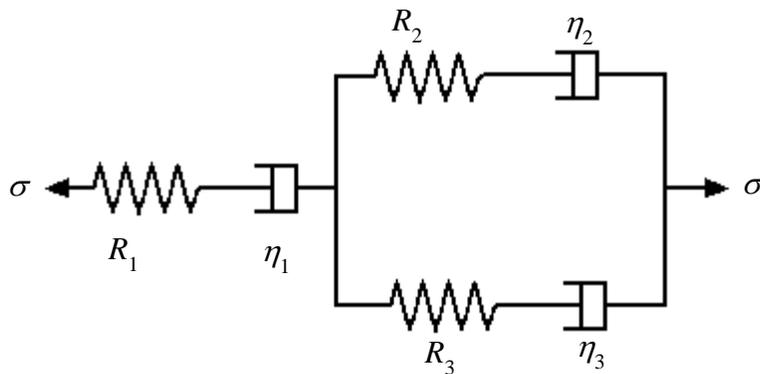
5. El comportamiento de un material se ha modelado de acuerdo con la siguiente figura.



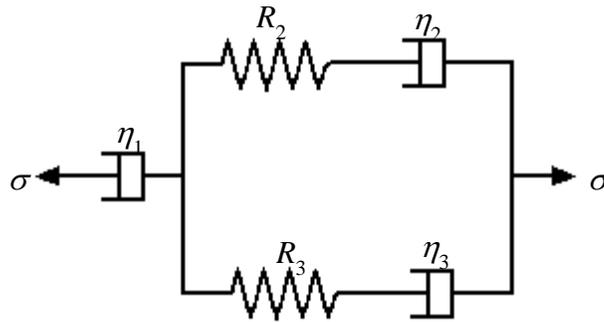
Desarrolle la ecuación $\sigma - \varepsilon$ que describe el modelo.

6. Para los modelos de Maxwell y Kelvin al aplicar una sollicitación σ_0 , ¿cuál será la respuesta del sistema?

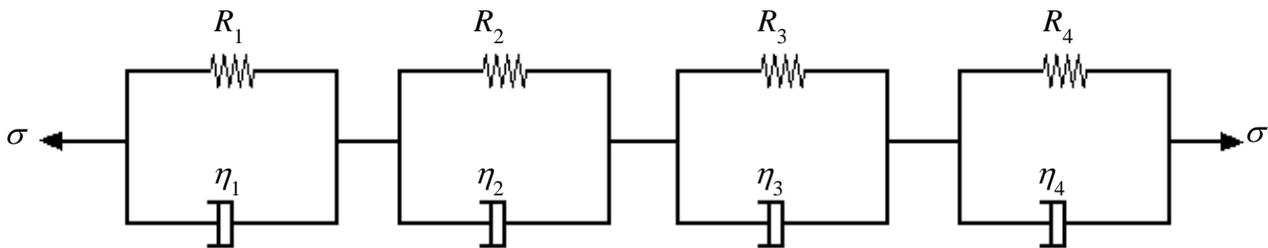
7. Desarrolle la ecuación que describa el siguiente modelo:



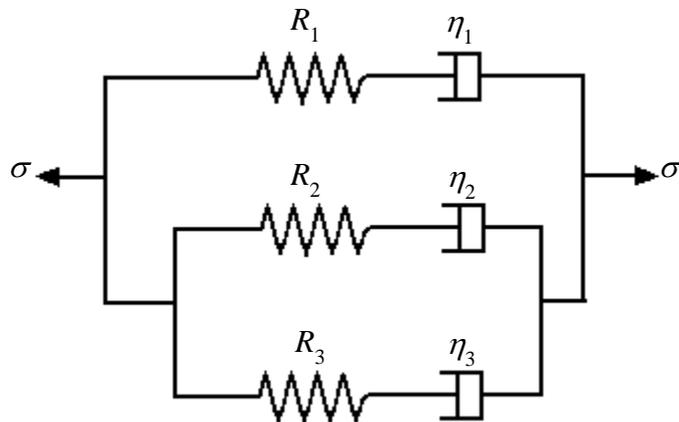
8. Desarrolle la ecuación que describa el siguiente modelo:



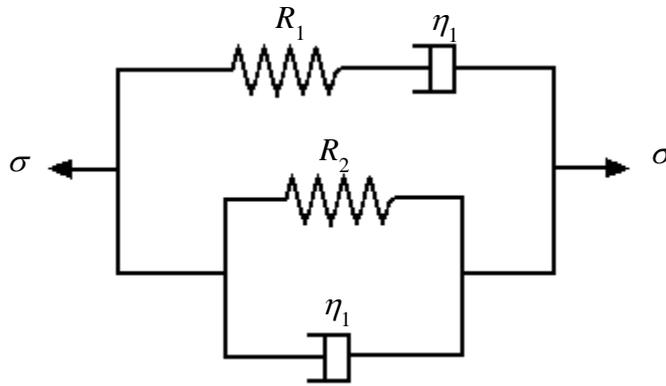
9. Desarrolle la ecuación que describa el siguiente modelo:



10. Determine la ecuación representativa del siguiente modelo:



11. Determine la ecuación representativa del siguiente modelo:



12. Considere un fluido lineal de Maxwell, el cual es sometido a sollicitaciones de corte dando lugar a $v_1 = kx_2$, $v_2 = v_3 = 0$

Con base en lo anterior, determine los componentes de corte.

13. Desarrolle un modelo que permita describir el comportamiento mecánico del hueso humano. Justifique su respuesta.

14. Desarrolle el modelo que permite describir el comportamiento mecánico del suelo arcilloso.

15. Un modelo de tres elementos de Kelvin-Voigt, como el que se muestra en la figura, falla en predecir correctamente una prueba de fluencia. Establezca las ecuaciones diferenciales, intégreelas y explique qué parte de la prueba de fluencia no aparece con este modelo.

