



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

OBSERVACION DE SISTEMAS VIA  
MODOS DESLIZANTES DE ALTO ORDEN

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERIA

INGENIERIA ELECTRICA – CONTROL

P R E S E N T A :

JORGE ANGEL DAVILA MONTOYA



TUTOR:  
DR. LEONID FRIDMAN

2008

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. ALEXANDER POZNYAK  
Secretario: DR. JAIME ALBERTO MORENO PEREZ  
Vocal: DR. LEONID FRIDMAN  
1<sup>er</sup> Suplente: DR. LUIS AGUSTIN ALVAREZ ICAZA LONGORIA  
2<sup>do</sup> Suplente: DR. GERARDO RENE ESPINOZA PEREZ

Lugar o lugares en donde se realizó la tesis:

Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F. Facultad de Ingeniería.

**TUTOR DE TESIS:**

DR. LEONID FRIDMAN

---

**FIRMA**

## **Dedicatorias**

**A mi amada esposa**

**Lulú**

**A mis queridos padres**

**Ma. de los Ángeles y Jorge**

**A mi querida hermana**

**Alejandra**

## **Agradecimientos.**

Quiero agradecer a mi esposa por su amor, comprensión y apoyo. A mis padres y mi hermana por su incondicional apoyo a todos mis proyectos. A mis amigos por estar presentes en mi vida. Sin ustedes no hubiera podido llegar hasta aquí.

A la UNAM que me ha proporcionado una educación de primer nivel y que ha sido mi segundo hogar desde hace 16 años.

Al Doctor Fridman por su apoyo y su confianza, gracias por permitirme trabajar a su lado durante estos años.

A mis asesores, que conforman el jurado del examen de grado, por sus excelentes comentarios que me permitieron fortalecer el trabajo de Tesis.

Quiero agradecer también, por el apoyo que me brindaron, a la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, a la Subdirección de Operación Telefónica, al Departamento de Operación de la Red, al Programa de Apoyos para la Superación del Personal Académico (PASPA), a la Secretaría de Relaciones Exteriores, a la Universidad de Cagliari, Italia, al Instituto de Investigación en Comunicaciones y Cibernética de Nantes, Francia, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), a la gente del Programa de Posgrado en Ingeniería.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Motivación y estado del arte . . . . .	3
1.2. Objetivos del trabajo . . . . .	6
1.3. Contribuciones . . . . .	6
1.4. Estructura de la Tesis . . . . .	7
<b>2. Antecedentes</b>	<b>9</b>
2.1. Observabilidad de Sistemas Lineales . . . . .	9
2.1.1. Observabilidad . . . . .	9
2.1.2. Detectabilidad . . . . .	13
2.1.3. Observabilidad y detectabilidad fuertes . . . . .	14
2.1.4. Grado relativo y el subespacio $\mathcal{V}^*$ . . . . .	22
2.2. Modos Deslizantes Homogéneos . . . . .	26
2.2.1. Homogeneidad y convergencia en tiempo finito . . . . .	26
2.2.2. Diferenciador por Modos Deslizantes de Orden Superior . . . . .	28
<b>3. Observación de Sistemas LITED</b>	<b>33</b>
3.1. Estabilización del error de estimación . . . . .	34
3.2. Caso fuertemente observable . . . . .	40
3.2.1. Reconstrucción del estado en tiempo finito . . . . .	40
3.2.2. Reconstrucción de la entrada desconocida . . . . .	47
3.2.3. Ejemplo . . . . .	49
3.3. Caso fuertemente detectable . . . . .	55
3.3.1. Reconstrucción asintótica de los estados . . . . .	56
3.3.2. Reconstrucción de la entrada desconocida . . . . .	64
3.3.3. Ejemplo . . . . .	65
3.4. Observación de sistemas cuasilineales . . . . .	72
3.4.1. Reconstrucción en tiempo finito de estados . . . . .	72
3.4.2. Reconstrucción asintótica de estados . . . . .	73
<b>4. Observación de sistemas no lineales</b>	<b>77</b>
4.1. Descripción del problema . . . . .	77
4.2. Diseño del observador . . . . .	80
4.3. Ejemplo . . . . .	81

<b>5. Aplicaciones</b>	<b>85</b>
5.1. Observación de sistemas en forma de Cauchy . . . . .	85
5.2. Observación de Sistemas Mecánicos . . . . .	87
5.3. Identificación de fallas . . . . .	89
5.4. Identificación de parámetros . . . . .	90
5.4.1. Inyección equivalente de salida . . . . .	90
5.4.2. Parámetros invariantes en el tiempo . . . . .	91
5.4.3. Parámetros variantes en el tiempo . . . . .	94
5.5. Ejemplos . . . . .	98
5.5.1. Observación de sistemas mecánicos . . . . .	98
5.5.2. Identificación de fallas . . . . .	103
5.5.3. Identificación de parámetros invariantes en el tiempo . . .	107
5.5.4. Identificación de parámetros variantes en el tiempo . . . .	109
<b>6. Discusión de resultados y conclusiones</b>	<b>111</b>
6.1. Discusión de la labor realizada . . . . .	111
6.2. Conclusiones . . . . .	113

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación y estado del arte

Gran parte de los sistemas de control de la actualidad se encuentran basados en el llamado principio de retroalimentación (feedback), en el cual la variable a ser controlada es comparada con una señal de referencia y su discrepancia es usada para calcular la acción correctiva, llamada señal de control.

Para calcular la señal de control de un sistema retroalimentado, tomando como base el modelo de variables de estado, es necesario, en la mayoría de las ocasiones, conocer estas variables. Sin embargo, en la práctica esto no siempre es posible, entonces es necesario estimar las variables de estado no disponibles a través de las variables conocidas. La idea de utilizar un sistema dinámico para generar el valor de los estados fue propuesta en 1964 por Luenberger para sistemas lineales [1].

La observación de estados en presencia de entradas desconocidas es un problema muy importante en la teoría de control moderna (vea por ejemplo [2], [3]). A diferencia de los observadores clásicos, estos observadores son diseñados asumiendo normalmente que las salidas están disponibles para su medición; sin embargo, se asume que parte de las entradas son desconocidas. La falta de información en las entradas hace imposible el diseño de un observador convencional.

Las principales soluciones conocidas en el área requieren que las salidas estén directamente acopladas a las entradas desconocidas, es decir, que el conjunto de entradas desconocidas sea de grado relativo uno con respecto a las salidas (vea por ejemplo [4], [5], [6], [7]).

En sistemas mecánicos, es común que limitaciones de costo impidan contar con todas las variables físicas de los sistemas. En muchos casos las variables de desplazamiento se encuentran disponibles, mientras que las variables de velocidad no lo están. En estos casos con la finalidad de reconstruir el estado completo, es factible aplicar un diferenciador o bien un observador de estados para reconstruir la variable faltante.

La naturaleza no lineal de los sistemas mecánicos y en particular las dis-

continuidades provocadas por fenómenos como saturación, zonas muertas, fricción seca, etc. complican el trabajo de observación provocando, incluso, discontinuidades en la dinámica de los estados. Los observadores lineales no presentan un desempeño adecuado en estos casos, los observadores basados en el modelo dinámico se encuentran restringidos a una variedad de sistemas en los cuales el modelo matemático es totalmente conocido, es decir, son aplicables a los casos en los que no existe incertidumbre en el modelo o dinámicas no modeladas. Los observadores de alta ganancia [8] son imprecisos cuando se utiliza cualquier ganancia finita y en caso de que la ganancia tienda a infinito, presentan el llamado fenómeno de pico (peaking effect), que se refiere a que el valor máximo de salida durante el transitorio crece infinitamente conforme la ganancia tiende a infinito.

A pesar del amplio desarrollo de las técnicas de control robusto, el control por modos deslizantes (CMD) sigue siendo considerado como una herramienta clave para el manejo de incertidumbres, perturbaciones y dinámicas no modeladas. La idea principal de este tipo de controles (vea por ejemplo [9], [10]) consiste en llevar las trayectorias del sistema a una superficie de deslizamiento y, posteriormente, mantener la trayectoria dentro de la superficie mediante un control con alta frecuencia de conmutación (en teoría, frecuencia infinita).

La observación de estados basada en los modos-deslizantes de orden-superior ha sido exitosamente estudiada dentro de la teoría de Sistemas de Estructura Variable en años recientes (vea [9], [11], [10], [12], [13], [14], [15], [16]).

La observación basada en modos-deslizantes tiene atractivas características como:

- insensibilidad (más que robustez) con respecto a las entradas desconocidas;
- la posibilidad de utilizar la inyección equivalente de salida para obtener información adicional del sistema.

Análisis posteriores han mostrado que los observadores por modos deslizantes pueden ser utilizados para la detección de fallas [17], [18], [7]. Ésta es realizada utilizando la inyección equivalente de salida, mientras que la estimación de estados observables es realizada por observadores tradicionales (usualmente tipo Luenberger), mediante una compensación suave sin diferenciar. Lo anterior produce su principal limitante: la salida del sistema debe tener grado relativo uno con respecto a la entrada desconocida. Esta condición es fuertemente restrictiva para observadores de sistemas mecánicos [19], [20], [21], [22], [23].

La reconstrucción paso a paso del vector de estados mediante la técnica de modos deslizantes ha sido estudiada en [24], [25], [26]. Estos observadores están basados en una transformación del sistema a una forma triangular y la estimación sucesiva del vector de estados utilizando la inyección equivalente de salida. Condiciones suficientes para la observación de sistemas lineales invariantes en el tiempo en presencia de entradas desconocidas, fueron obtenidas en [26]. Los observadores antes mencionados garantizan *teóricamente* la convergencia en tiempo finito de todos los estados del sistema.

Desafortunadamente, los observadores paso a paso se encuentran basados en la aplicación de modos deslizantes convencionales, requiriendo filtración para obtener la inyección equivalente de salida en cada paso, dadas las imperfecciones de dispositivos analógicos o los efectos de discretización.

Con el objetivo de evitar el filtrado, han sido desarrollados recientemente los observadores jerárquicos [27]. Estos hacen uso del controlador continuo super-twisting (vea [28]). Una versión modificada de este controlador ha sido utilizada en el observador paso a paso de [26]. Desafortunadamente, estos observadores tampoco están libres de inconvenientes:

1. El algoritmo super-twisting proporciona la mejor exactitud posible para la estimación de las derivadas a cada realización ([29]). En particular, en presencia de mediciones discretas la exactitud es proporcional al paso de muestreo  $\tau$  en ausencia de ruido y proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud del ruido presente en la medición, considerando como despreciable el error de discretización. Los observadores paso a paso y los observadores jerárquicos usan la salida del algoritmo super-twisting como entrada contaminada con ruido para el siguiente paso. Como resultado, la exactitud del proceso de observación es de orden  $\tau^{\frac{1}{2r-1}}$ , en donde  $r$  es el índice de observabilidad del sistema. Implicando, por ejemplo, que si se requiere implementar un diferenciador de cuarto orden con una precisión de 0,1 y el valor absoluto de la quinta derivada, considerada desconocida, es menor a 1, es necesario en la práctica el inalcanzable paso de discretización de  $\tau = 10^{-8}$ .
2. De manera similar, en presencia de ruido de magnitud  $\varepsilon$  en la medición, la precisión de la estimación será proporcional a  $\varepsilon^{\frac{1}{2r}}$ , que requiere que el ruido de medición tenga una amplitud máxima de  $10^{-16}$  para la implementación del diferenciador de cuarto orden en las condiciones descritas.
3. Los observadores paso a paso desarrollados en [26], garantizan la convergencia en tiempo finito sólo para sistemas con estabilidad Entrada acotada - Estado acotado, quedando restringida la aplicación de estos observadores a la clase de sistemas para los cuales es conocida de antemano una cota superior de las condiciones iniciales. Además, estos observadores pueden ser aplicados a sistemas de grado relativo completo, i.e., que la suma de los grados relativos de las salidas con respecto a las entradas desconocidas es igual a la dimensión del sistema.

A la vez, el diferenciador por modos deslizantes de orden  $r$  (vea [30]) reduce el primer inconveniente proporcionando para la derivada de orden  $r$  una exactitud proporcional a  $\tau$ , y reduce el efecto de ruidos determinísticos proporcionando una exactitud del orden de  $\varepsilon^{\frac{1}{r+1}}$ . La aplicación del observador de orden  $r$  permite mejorar la precisión en ambos casos debido a que reduce el número de diferenciadores que es necesario aplicar. Desafortunadamente, su aplicación requiere que la derivada de orden  $(r + 1)$  se encuentre acotada. En la práctica,

esto implica que el diferenciador sólo puede proporcionar observación semiglobal de sistemas lineales.

La mejora en precisión, así como la posibilidad de utilizar la inyección de salida equivalente para la identificación paramétrica [22], [31], hacen de los modos deslizantes una buena herramienta para el desarrollo de observadores.

Durante las décadas de los 70's y 80's se realizaron investigaciones referentes al desacoplamiento de entradas, ejemplos de dichos trabajos son los presentados en [32], [33], [34], [35]. Dichas técnicas, se basaban en el concepto de espacio débilmente inobservable y en la posibilidad de encontrar una base para el mencionado espacio, en la cuál la salida se encuentra desacoplada de las entradas desconocidas.

El caso de observación de estados en sistemas no lineales con entradas desconocidas es un problema que continúa abierto. Se han hecho avances significativos, como los presentados en [36], [37], [38], sin embargo, los resultados encontrados hasta el momento resultan ser restrictivos.

## 1.2. Objetivos del trabajo

En este trabajo se planea aplicar la técnica de modos deslizantes de orden superior en conjunto con distintas herramientas matemáticas para realizar observación de estados.

Para el caso lineal es presentado un método basado en el uso de técnicas de desacoplamiento junto con modos deslizantes de orden superior para realizar la observación de estados. Modificando la técnica de reconstrucción del estado débilmente inobservable mostrada en [33], es encontrada una base del subespacio débilmente inobservable, a través de la cuál, es posible transformar el sistema a una forma normal, para la cuál es posible aplicar técnicas de modos deslizantes de orden superior para reconstruir los estados.

Los resultados serán extendidos para realizar observación de sistemas cuasi-lineales. Se propondrá también, una técnica de observación para sistemas no lineales, sustituyendo el manejo matricial realizado para sistemas lineales, con derivadas de Lie y derivadas parciales. Como un caso especial de los sistemas no lineales, se considerarán los sistemas mecánicos, para los cuales será posible modificar la técnica haciendo uso del controlador super-twisting.

La inyección de salida equivalente será utilizada para recuperar información del sistema y la entrada desconocida.

## 1.3. Contribuciones

Las principales contribuciones del trabajo se nombran a continuación:

- Son relacionados los conceptos de detectabilidad fuerte, fase no mínima y subespacio débilmente inobservable.

- Son desarrollados observadores para Sistema Lineales Invariantes en el Tiempo con Entradas Desconocidas Acotadas, requiriendo que sea satisfecha solamente la condición de observabilidad fuerte o detectabilidad fuerte.
- Las técnicas de desacoplamiento de entrada presentadas en [32], [33], son modificadas para encontrar una base del subespacio débilmente inobservable y llevar el sistema a una forma canónica propuesta.
- La aplicación de la técnica de modos deslizantes de orden superior [30] para resolver el problema de observación de sistemas con entradas desconocidas, garantizando la convergencia en tiempo finito del error de estimación.
- Generalización de la técnica de observación para sistemas cuasilineales.
- Diseño de un observador por modos deslizantes de orden superior para sistemas no lineales.
- Utilización de la inyección de salida equivalente (contraparte del control equivalente en el contexto de observación de estados) para realizar identificación paramétrica y su posible aplicación en esquemas de detección de fallas.

## 1.4. Estructura de la Tesis

En el capítulo 2, son descritos los antecedentes teóricos del trabajo. En la sección 2.1, son descritos los antecedentes de observación de sistemas lineales invariantes en el tiempo con y sin entradas desconocidas. A partir del concepto de grado relativo parcial descrito en la sección 2.1.4, es propuesta la selección de una base tal que hace posible transformar el estado en una forma canónica. En la sección 2.2, se presentan los conceptos básicos utilizados para el diseño de los observadores por modos deslizantes de orden superior.

Los observadores para sistemas lineales invariantes en el tiempo con entradas desconocidas son presentados en el capítulo 3. Las ideas presentadas en él son utilizadas para extender los resultados y proponer observadores para sistemas cuasilineales en la sección 3.4. A través del uso de una transformación y explotando la forma de Brunovsky se propone en el capítulo 4 un observador para sistemas no lineales .

El uso de la inyección equivalente de salida para realizar identificación paramétrica y detección de fallas, es presentado en el capítulo 5. Una descripción del trabajo científico realizado, que muestra la evolución del mismo durante el doctorado, además de las conclusiones finales, son presentadas en el capítulo 6



## Capítulo 2

# Antecedentes

### 2.1. Observabilidad de Sistemas Lineales

En esta sección son expuestos los conceptos de observabilidad, detectabilidad, observabilidad fuerte y detectabilidad fuerte. Así mismo, son definidos los subespacios de inobservabilidad e inobservabilidad débil. Utilizando como base los trabajos de desacoplamiento de entrada (como los expuestos en [32], [33]) y el concepto de grado relativo, se propone un método para la selección de una base para el subespacio débilmente inobservable.

Sea el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + E\zeta \quad (2.1)$$

$$y = Cx + Du + F\zeta \quad (2.2)$$

en donde  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  es la salida del sistema,  $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{m_0}$  es una entrada conocida (i.e., control) y  $\zeta \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$  es una entrada desconocida (puede estar compuesta de incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas, etc.).

En esta sección se proporcionan los conceptos de observabilidad, detectabilidad, observabilidad fuerte y detectabilidad fuerte, los mismos que son utilizados para la construcción de los observadores por modos deslizantes de orden superior.

#### 2.1.1. Observabilidad

Para el desarrollo de las secciones 2.1.1 y 2.1.2 considere que el sistema (2.1), (2.2) no tiene entrada desconocida, i.e.,  $\zeta = 0$ .

En forma general, la solución de la ecuación diferencial (2.1), para un estado inicial  $x_0$  y una señal de entrada  $u$ , se denotará como  $x_u(t, x_0)$ , y estará dada por

$$x_u(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (2.3)$$

El valor correspondiente de la salida (2.2) se encontrará dado por:

$$y_u(t, x_0) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (2.4)$$

A continuación se hará una descripción de las condiciones que nos permiten reconstruir el estado  $x$  para el caso cuando las entradas  $u$  y las salidas  $y$  son medibles.

**Definición 1** [39]. *Dos estados  $x_0$  y  $x_1$  se dicen indistinguibles en el intervalo  $[0, T]$  si para cualquier entrada  $u$  se tiene que  $y_{u(t, x_0)} = y_{u(t, x_1)}$  para  $0 \leq t \leq T$ .*

Dos estados  $x_1$  y  $x_2$  se dicen indistinguibles si para cualquier entrada  $u(t)$ , se tienen los mismos valores a la salida. En consecuencia, para que dos estados sean indistinguibles en el intervalo  $[0, T]$  se debe satisfacer la siguiente igualdad

$$Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) = Ce^{At}x_1 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

para todo  $0 \leq t \leq T$  y para cualquier entrada  $u(t)$ .

Cabe notar que los términos que dependen de la entrada se encuentran en ambos lados de la igualdad; por lo tanto, la entrada no tendrá ninguna relevancia para el estudio de la distinguibilidad. Si dos estados son distinguibles ante una entrada, entonces serán distinguibles ante cualquier entrada.

Se tiene entonces que dos estados  $x_0$  y  $x_1$  son indistinguibles si

$$Ce^{At}x_0 = Ce^{At}x_1, \quad (0 \leq t \leq T).$$

en consecuencia se tiene que dos estados son indistinguibles si la diferencia  $v := x_0 - x_1$  y cero son indistinguibles. Se tiene entonces, que  $Ce^{At}x_0 = Ce^{At}x_1$  si y solo si

$$Ce^{At}v = 0, \quad (0 \leq t \leq T).$$

La variable  $v$  puede ser considerada una variable de estado, por lo que la anterior expresión implica la necesidad de que todo estado sea distinguible del origen.

Expandiendo el término exponencial  $e^{At}$  por medio de una series de potencias se tiene

$$Ce^{At}v = C\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!}\right)v = 0, \quad (0 \leq t \leq T).$$

la anterior expresión puede escribirse como:

$$Ce^{At}v = \left[ 1, t, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}, \dots \right] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \end{bmatrix} v = 0.$$

Dado que el primer término varía con el tiempo y que la igualdad se deberá cumplir en el intervalo  $[0, T]$ , entonces es posible considerar  $T = 0$ . Se tiene entonces que los estados son indistinguibles sí y sólo si la ecuación:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \end{bmatrix} v = 0$$

tiene solución para alguna  $v \neq 0$ .

Por el teorema de Cayley-Hamilton, es posible considerar sólo los primeros  $n$  términos de esta expansión, por lo que los estados son indistinguibles sí y sólo si existe  $v \neq 0$  tal que

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} v = 0, \text{ ó bien, } \text{rango} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} < n. \quad (2.5)$$

Como consecuencia del desarrollo anterior, es posible decir que la indistinguibilidad de los estados  $x_0$  y  $x_1$  es independiente de  $T$ .

Al subespacio vectorial al que pertenecen todos los vectores  $v$ , para los que se satisface (2.5) se le denota como  $\langle \ker C|A \rangle$ , y es conocido como el subespacio inobservable del sistema (2.1), (2.2). Este subespacio está caracterizado como la intersección de los subespacios  $\ker CA^k$  para  $k = 0, \dots, n-1$ , esto es

$$\langle \ker C|A \rangle = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker CA^k$$

Es posible también probar que es el máximo subespacio invariante de  $A$  contenido en el kernel de  $C$ .

En términos de una relación entrada-salida, esta condición se puede escribir como:  $v \in \langle \ker C|A \rangle$  sí y sólo si

$$y_0(t, v) \equiv 0$$

en donde el subíndice 0 denota la entrada igual a cero.

**Definición 2** [39]. *El sistema (2.1), (2.2) es observable si cualquier par de estados es distinguible.*

Esta definición nos permite dar los siguientes resultados:

**Teorema 1** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *el sistema (2.1), (2.2) es observable,*

(ii) todo estado es distinguible del origen,

(iii)  $\langle \ker C|A \rangle = \{0\}$ ,

(iv)  $Ce^{At}v = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ )  $\Rightarrow v = 0$ ,

(v)  $\text{rango} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$

Dado que la observabilidad del sistema está determinada por el par de matrices  $(C, A)$  entonces es posible decir “ $(C, A)$  es observable” en vez de “el sistema (2.1), (2.2) es observable”.

En términos de la relación estados-salidas, un sistema observable se puede definir de la siguiente forma:

**Definición 3** *Se dice que el sistema (2.1), (2.2) es observable si para cualquier condición inicial  $x_0$ , la condición  $y(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  implica que  $x(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ , considerando  $u = 0$ .*

La definición anterior es una consecuencia del Teorema 1. Considere que el par  $(C, A)$  es observable y que existe un estado inicial  $x_1 \neq 0$  para el que la solución de la ecuación diferencial (2.1) está dada por  $x_u(t, x_1) \neq 0$ , mientras que se tiene en la ecuación (2.2)  $y_u(t, x_1) = 0$ . Aplique la definición de distinguibilidad y utilice la afirmación (iv) del Teorema 1, note que  $x_1$  y toda la trayectoria  $x(t, x_1)$  son indistinguibles del origen. Dado el resultado del teorema 1, se puede concluir que el par  $(C, A)$  es inobservable, lo cuál contradice la consideración original.

El caso contrario:  $y_u(t, x_1) = 0$  implica que  $x_u(t, x_1) = 0$ , para todo  $x_1 \in \mathcal{X}$ , entonces es posible ver que todos los estados son distinguibles del origen, por lo tanto el sistema es observable.

Considere que la afirmación (v) del Teorema 1 es satisfecha, considere que  $u = 0$ . En este caso las primeras  $n-1$  derivadas de la salida satisfacen la igualdad

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x \quad (2.6)$$

Dado que (v) se satisface, entonces (2.6) define un mapeo biyectivo entre los estados y un conjunto de salidas y sus respectivas derivadas. Por lo tanto  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

### 2.1.2. Detectabilidad

Considere el sistema (2.1), (2.2). Asuma que  $u = 0$  y que el sistema es inobservable (parcialmente observable [40]), es decir:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \mu < n.$$

Lo anterior implica que existe un conjunto de vectores  $\mathcal{N}$ , tal que todos los vector  $v_i \in \mathcal{N}$  no producen ningún efecto en la salida del sistema, es decir, la siguiente igualdad se cumple para ellos:

$$Ce^{At}v_i = 0$$

en donde  $v_i \neq 0$ .

Note también que dichos vectores satisfacen la igualdad

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} v_i = 0.$$

El conjunto  $\mathcal{N}$  es llamado el subespacio inobservable del sistema (2.1), (2.2), y puede ser caracterizado en términos del par  $(C, A)$  como:

$$\mathcal{N} = \langle \ker C | A \rangle = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker CA^k$$

Algunas propiedades que se pueden inferir de el subespacio  $\mathcal{N}$  son:

$$A\mathcal{N} \in \mathcal{N}, \quad C\mathcal{N} = 0. \quad (2.7)$$

El subespacio  $\mathcal{N}$  es un subespacio A-invariante [41].

Note que los estados pertenecientes a  $\mathcal{N}$  son indistinguibles del origen, por lo que dichos estados se dice que son inobservables.

Se propone la siguiente definición de detectabilidad [39]:

**Definición 4** *Se dice que el sistema (2.1), (2.2) es detectable si para cualquier condición inicial  $x_0$ , la condición  $y(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  implica que  $x(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .*

De la anterior definición se desprende que para determinar si un sistema que es parcialmente observable, es a su vez detectable será necesario determinar la estabilidad de los estados pertenecientes al subespacio  $\mathcal{N}$ , i.e., (considerando  $u=0$ ) que toda trayectoria que se inicie en  $v_i \in \mathcal{N}$ ,  $i = 1, \dots, n - \mu$ , tienda a cero para  $t \rightarrow \infty$ .

Para determinar la estabilidad de los estados pertenecientes a  $\mathcal{N}$  es posible utilizar la propiedad de invariancia del subespacio inobservable. Para ello escoja  $n - \mu$  vectores linealmente independientes  $v_i \in \mathcal{N}$  de tal forma que formen una base de  $\mathcal{N}$ . Así mismo escoja  $\mu$  vectores  $s_i$  linealmente independientes que pertenezcan al subespacio complemento de  $\mathcal{N}$  (i.e.,  $\bar{\mathcal{N}}$ ) de tal forma que formen una base de  $\bar{\mathcal{N}}$ . Una posible elección de los vectores  $s_i$  es tomar el transpuesto de los primeros  $\mu$  renglones linealmente independientes de la matriz de observabilidad  $[C^T (CA)^T \dots (CA^{n-1})^T]^T$ .

Con los vectores encontrados anteriormente es posible formar la matriz de transformación

$$T = [s_1 \dots s_\mu \ v_1 \dots v_{n-\mu}]^T. \quad (2.8)$$

**Lema 1** *Considere que la entrada conocida es igual a cero, i.e.,  $u = 0$ . El sistema (2.1), (2.2) es transformado por medio de la matriz de transformación  $T$  definida en (2.8) a la forma:*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{21} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

En donde:

$$Tx = \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{21} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix}.$$

Note que los estados pertenecientes al subespacio  $\mathcal{N}$  son proyectados en el vector  $x_{\bar{o}}$ . A la matriz  $A_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{n-\mu \times n-\mu}$  se le conoce como la restricción de  $A$  en el subespacio  $\mathcal{N}$  y se denota como  $A|_{\mathcal{N}}$ , vea [41]. Los valores propios de ésta matriz rigen el comportamiento de los estados pertenecientes a  $\mathcal{N}$ , por lo que si los eigenvalores de dicha matriz se encuentran en el semiplano izquierdo, entonces los estados pertenecientes a  $\mathcal{N}$  convergen a cero con  $t \rightarrow \infty$ . Entonces se dice que el sistema es detectable.

### 2.1.3. Observabilidad y detectabilidad fuertes

Considere el sistema (2.1), (2.2). Puesto que  $u(t)$  es conocido, y dado que en la sección 2.1.1 fue mostrado que su efecto es irrelevante para la distinguibilidad de estados, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que  $u(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  y que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = m.$$

En vez de escribir todo el sistema llamaremos  $\Sigma$  a la cuádrupla  $(A, C, E, F)$ . Nombrando  $\hat{\zeta}(s)$ ,  $\hat{y}(s)$  y  $\hat{x}(s)$  a las transformadas de Laplace de  $\zeta(t)$ ,  $y(t)$  y  $x(t)$  respectivamente, el sistema  $\Sigma$  es transformado a la forma

$$\begin{aligned} (sI - A)\hat{x}(s) - E\hat{\zeta}(s) &= x_0, \\ C\hat{x}(s) + F\hat{\zeta}(s) &= \hat{y}(s), \end{aligned}$$

El sistema transformado se puede escribir de forma equivalente como

$$P_{\Sigma}(s) \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{\zeta}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix}$$

en donde  $P_{\Sigma}(s)$  se define como

$$P_{\Sigma}(s) := \begin{pmatrix} sI - A & -E \\ C & F \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

La matriz  $P_{\Sigma}(s)$  es llamada matriz de Rosenbrock o matriz del sistema  $\Sigma$  [42].

**Definición 5** [42]. *La matriz de Rosenbrock de la cuádrupla  $(A, C, E, F)$  está dada por*

$$P_{\Sigma}(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -E \\ C & F \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

A los valores de  $s_0 \in \mathbb{C}$  tales que  $\text{rango } P_{\Sigma}(s_0) < n + m$  se les llama *ceros invariantes de la cuádrupla  $(A, C, E, F)$* .

La importancia de los ceros invariantes del sistema resulta más evidente si se considera que  $P_{\Sigma}(s)$  es invertible por la izquierda. Para este caso  $\text{rango } P_{\Sigma}(s) = n + m$  y todos los polinomios cero del sistema son iguales a cero.

Suponga que  $\lambda$  es un cero del sistema  $\Sigma$ . En este caso  $\text{rango } P_{\Sigma}(\lambda) < n + m$ . Por lo tanto existirá un vector  $[x_0^T \ \zeta_0^T]^T$  tal que

$$P_{\Sigma}(\lambda) \begin{bmatrix} x_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, si la entrada al sistema tiene la forma  $\zeta(t) = e^{\lambda t} \zeta_0$ , la función  $x(t) = e^{\lambda t} x_0$  satisface la ecuación diferencial para  $x$ . La salida correspondiente a esta entrada será igual a cero. En consecuencia, si el rango normal de  $P_{\Sigma}(s)$  es  $n + m$ , un cero del sistema será una frecuencia  $\lambda$  con la propiedad de que existe una función de entrada (i.e.,  $\zeta(t) := e^{\lambda t} \zeta_0$ ) y una condición inicial  $x_0$ , no necesariamente igual a cero, tal que la salida correspondiente del sistema es igual a cero ( $y_{\zeta}(t, x_0) = 0$ ).

**Lema 2** [42]. *Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Suponga que  $x_0 \in \mathcal{X}$  y  $\zeta_0 \in \mathcal{W}$  son tales que*

$$P_{\Sigma}(\lambda) \begin{bmatrix} x_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Sea  $\zeta(t) := e^{\lambda t} \zeta_0$ . Entonces la salida resultante del estado inicial  $x_0$  y la señal de entrada  $\zeta(t)$  es igual a cero, esto es,  $y_{\zeta}(t, x_0) = 0$  para toda  $t \geq 0$ .*

Es importante recordar que los ceros invariantes no son afectados por la aplicación de transformaciones no singulares sobre las matrices del sistema (2.1), (2.2). Como consecuencia de la propiedad anterior también se puede resaltar que los ceros invariantes no cambian cuando la salida del sistema es retroalimentada.

Las siguientes definiciones, fundamentales para el trabajo, pueden ser encontradas en [33], [35], [4], [34] y [39], entre otros.

**Definición 6** [39]. Un estado  $x_0 \in \mathcal{X}$  es llamado débilmente inobservable si existe una entrada  $\zeta(t)$  tal que la salida correspondiente del sistema  $y_\zeta(t, x_0) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Al conjunto de todos los puntos débilmente inobservables de  $\Sigma$  se le denota como  $\mathcal{V}^*(\Sigma)$  y se le llama el espacio de inobservabilidad débil de  $\Sigma$ .

**Lema 3** Sea  $x_0 \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$  y sea  $\zeta(t)$  una función de entrada tal que la salida satisface  $y_\zeta(t, x_0) = 0$  para toda  $t \geq 0$ . Entonces el estado asociado satisface  $x_\zeta(t, x_0) \in \mathcal{V}^*(\Sigma)$  para toda  $t \geq 0$ .

**Definición 7** [41]. Un conjunto  $\mathcal{V}$  es llamado  $(A, E)$ -invariante si

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} \oplus \mathcal{E},$$

en donde  $\mathcal{E}$  denota la imagen de  $E$ .

A partir de la definición 6 es posible decir que el subespacio de inobservabilidad débil satisface las siguientes relaciones

$$A\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* \oplus \mathcal{E}, \quad C\mathcal{V}^* \subset \mathcal{F}. \quad (2.12)$$

en donde  $\mathcal{F}$  es la imagen de  $F$ .

Note que las propiedades del subespacio inobservable dadas en (2.7) se ajustan a las propiedades en (2.12). Como consecuencia de este hecho, es posible afirmar que el subespacio inobservable del par  $(C, A)$  es un subconjunto contenido en el subespacio débilmente inobservable de la cuádrupla  $(A, C, E, F)$  (i.e.,  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}^*$ ).

Con la finalidad de explotar la propiedad de invariancia de los subespacios débilmente inobservable e inobservable, se introducen las siguientes notaciones.

Denote como  $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}}$  al subespacio complemento de  $\mathcal{N}$  dentro del subespacio  $\mathcal{V}^*$ , tal que

$$\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{V}^*.$$

Note que  $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}}$  pertenece al subespacio observable del par  $(C, A)$ , i.e.,  $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}} \subset \bar{\mathcal{N}}$ .

Sea  $\bar{\mathcal{V}}_{\bar{\mathcal{N}}}$  el subespacio complemento de  $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}}$  en  $\mathcal{X}$ , tal que  $\mathcal{X} = \mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}} \oplus \bar{\mathcal{V}}_{\bar{\mathcal{N}}}$ .

El siguiente resultado es aplicable a cualquier subespacio  $(A, E)$ -invariante de salida nula.

**Lema 4** Sea  $\mathcal{V}^*$  el subespacio débilmente inobservable de la cuádrupla  $(A, C, E, F)$ . Existe una matriz  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que

$$(A - EQ)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*, \quad (C - FQ)\mathcal{V}^* = \{0\}, \quad Q\bar{\mathcal{V}}_{\bar{\mathcal{N}}} = \{0\}.$$

*Prueba.* La siguiente igualdad es satisfecha por definición  $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}} \oplus \mathcal{N}$ .

Obviamente se cumple  $A\mathcal{N} \in \mathcal{N}$ ,  $A\mathcal{N} \in \mathcal{V}^*$  y  $C\mathcal{N} = \{0\}$ . El subespacio  $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}}$  satisface

$$A\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{V}^* + \mathcal{E}, \quad C\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}} \subset \mathcal{F}.$$

Sea  $\{v_{\mathcal{N}_1}, v_{\mathcal{N}_2}, \dots, v_{\mathcal{N}_\mu}\}$  una base del subespacio  $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}}$ . Existen  $w_i \in \mathcal{V}^*$  y  $\zeta_i \in \mathcal{W}$  tales que

$$Av_{\mathcal{N}_i} = w_i + E\zeta_i, \quad Cv_{\mathcal{N}_i} = F\zeta_i.$$

Es posible escoger una matriz  $Q_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que

$$Q_0 v_{\mathcal{N}_i} = \zeta_i.$$

Sea entonces  $Q$  la extensión de  $Q_0$  a  $\mathcal{X}$  de tal forma que  $Q\bar{\mathcal{V}}_{\mathcal{N}} = \{0\}$ . La construcción anteriormente mencionada para  $Q$  satisface la proposición del lema.

▫

En la sección 2.1.1 fue mostrado que el sistema (2.1), (2.2) es observable sí y sólo si para cualquier estado inicial  $x_0$ , considerando la entrada conocida igual a cero, satisface que  $y_0(t, x_0) = 0$  para todo  $t \geq 0$  sólo si  $x_0 = 0$ . Ahora el sistema (2.1), (2.2) será llamado fuertemente observable si se conserva la misma propiedad con cualquier entrada desconocida arbitraria.

**Definición 8** [4]. *Se dice que el sistema (2.1), (2.2) es fuertemente observable si para cada condición inicial  $x_0$  y para cada entrada  $\zeta(t)$ , la condición  $y(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  implica que  $x(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ .*

La definición 8 puede ser relacionada con los conceptos de cero invariante dado en la definición 5 y del subespacio de inobservabilidad débil dado en la definición 6.

**Teorema 2** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *El sistema (2.1), (2.2) es fuertemente observable,*
- (ii) *La cuádrupla  $(A, C, E, F)$  no tiene ceros invariantes,*
- (iii)  *$\mathcal{V}^*$  sólo contiene al vector cero, i.e.,  $\mathcal{V}^* = \{0\}$ .*

*Prueba.* Por definición las afirmaciones (i) y (iii) son equivalentes.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Considere que (ii) no se cumple, entonces existe una frecuencia  $\lambda$  tal que

$$P_{\Sigma}(\lambda) < n + \text{rango} \begin{bmatrix} -E \\ F \end{bmatrix}.$$

Aplicando el lema 2, la salida correspondiente a la entrada  $\zeta = \zeta_0 e^{\lambda t}$  y la condición inicial  $x(0) = x_0$  es cero. Dado que  $x_0 \neq 0$  entonces el sistema (2.1), (2.2) no es fuertemente observable. Por definición  $x_0 \in \mathcal{V}^*$  y en consecuencia  $\mathcal{V}^* \neq \{0\}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Considere que el sistema (2.1), (2.2) no es fuertemente observable, por definición  $\mathcal{V}^* \neq \{0\}$ . De acuerdo al Lema 4 es posible escoger una matriz  $Q$  tal que  $(A - EQ)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$ . Sea  $\lambda$  un valor propio de la restricción de la matriz  $A - EQ$  al subespacio  $\mathcal{V}^*$  y sea  $x_0$  el correspondiente vector propio. Considere  $\zeta = Qx_0$ , entonces se cumple la igualdad

$$P_{\Sigma}(\lambda) \begin{bmatrix} x_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia  $\text{rango } P_{\Sigma}(\lambda) < n + \text{rango } \begin{bmatrix} -E \\ F \end{bmatrix}$ , lo cual contradice (ii). Por lo tanto está probado (i)  $\Leftrightarrow$  (ii).

‡

**Ejemplo:** El siguiente ejemplo nos permitirá ilustrar la diferencia entre el problema clásico de reconstrucción de estados y el problema de reconstrucción de estados en presencia de entradas desconocidas. Considere el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo con entradas desconocidas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta; \quad y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Considere, en primera instancia, que la entrada desconocida es igual a cero (i.e.,  $\zeta = 0$ ). Utilizando la definición 4, es fácil notar que si  $y = 0$  entonces  $x = 0$  y que la relación inversa también se cumple, entonces,  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Como un segundo paso, considere que  $\zeta \neq 0$ . Entonces es posible notar que  $y = 0 \not\Rightarrow x_2 = 0$ , por lo que la ausencia de información en la salida del sistema, no implica que el estado sea igual a cero. Entonces, en este ejemplo, aún cuando los estados pueden ser observados en ausencia de la entrada desconocida, en presencia de la entrada desconocida no pueden ser reconstruidos solamente con la información de la salida.

Siguiendo la misma idea de distinguibilidad de estados, es posible definir un sistema fuertemente detectable de la siguiente forma:

**Definición 9** [4]. *El sistema es fuertemente detectable si para toda  $\zeta(t)$  y  $x(0)$  se tiene que  $y(t) = 0$  ( $\forall t \geq 0$ ) implica  $x \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .*

De manera similar a lo realizado en el caso detectable, la propiedad de detectabilidad fuerte está relacionada con la convergencia a cero de las trayectorias de los estados pertenecientes a  $\mathcal{V}^*$ .

Considere que los vectores  $v_i$  forman una base de  $\mathcal{V}^*$  y los vectores  $w_i$  forman una base de su complemento  $\bar{\mathcal{V}}$ . Sean  $V$  y  $W$  las matrices cuyas columnas están formadas por los elementos  $v_i$  y  $w_i$  respectivamente.

Forme la matriz de transformación

$$T = \begin{bmatrix} W^T \\ V^T \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Sea  $Q$  una matriz elegida para satisfacer el Lema 4. Considerando la entrada conocida igual a cero  $u = 0$ , el sistema (2.1), (2.2), puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_Q x + E \bar{\zeta} \\ y &= C_Q x + F \bar{\zeta} \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde  $A_Q = (A - EQ)$ ,  $C_Q = (C - FQ)$ ,  $\bar{\zeta} = \zeta + Qx$ .

**Lema 5** La transformación  $Tx$  con  $T$  diseñada de acuerdo a (2.13), transforma el sistema (2.14) a la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_{\bar{s}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ A_{s\bar{s}} & A_{\bar{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_{\bar{s}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_s \\ E_{\bar{s}} \end{bmatrix} \bar{\zeta}, \\ y &= [C_s \ 0] \begin{bmatrix} x_s \\ x_{\bar{s}} \end{bmatrix} + F\bar{\zeta} \end{aligned} \quad (2.15)$$

en donde

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ A_{s\bar{s}} & A_{\bar{s}} \end{bmatrix} &= TA_QT^{-1}, \quad \begin{bmatrix} E_s \\ E_{\bar{s}} \end{bmatrix} = TE, \\ \begin{bmatrix} x_s \\ x_{\bar{s}} \end{bmatrix} &= Tx, \quad [C_s \ 0] = C_QT^{-1} \end{aligned}$$

*Prueba.* Considere:

$$TT^T = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}, \quad (TT^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} & \bar{\Gamma}_{12} \\ \bar{\Gamma}_{21} & \bar{\Gamma}_{22} \end{bmatrix}$$

Dado que  $V^TW = 0$  y que las igualdades del Lema 4 son satisfechas, entonces:

$$\Gamma_{11}\bar{\Gamma}_{11} = I, \quad \Gamma_{22}\bar{\Gamma}_{22} = I, \quad \Gamma_{11}\bar{\Gamma}_{12} = 0, \quad \Gamma_{22}\bar{\Gamma}_{21} = 0,$$

por lo tanto  $W\bar{\Gamma}_{12} \in \ker W^T = \mathcal{V}^*$  y  $V\bar{\Gamma}_{21} \in \ker V^T$ . La matriz inversa de  $T$  puede definirse como:

$$T^{-1} = T^T(TT^T)^{-1}$$

Ahora pruebe que la matriz  $TA_QT^{-1}$  toma la forma dada en (2.15). Calcule:

$$TA_QT^{-1} = \begin{bmatrix} W^T A_Q W \bar{\Gamma}_{11} & W^T A_Q V \bar{\Gamma}_{22} \\ V^T A_Q W \bar{\Gamma}_{11} & V^T A_Q V \bar{\Gamma}_{22} \end{bmatrix}$$

Por la propiedad de invariancia del subespacio débilmente inobservable se tiene que  $A_QV \in \mathcal{V}^*$ . Por otro lado, dado que las columnas de  $W$  forman una base del subespacio  $\bar{\mathcal{V}}$ , se tiene que  $\ker W^T = \mathcal{V}^*$ , y en consecuencia  $W^T A_QV = 0$ . Esto prueba la forma descrita para  $TA_QT^{-1}$ .

Verifique ahora la forma descrita para  $C_QT^{-1}$

$$C_QT^{-1} = C_QT^T(TT^T)^{-1} = C_Q [W \ V] \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} & \bar{\Gamma}_{12} \\ \bar{\Gamma}_{21} & \bar{\Gamma}_{22} \end{bmatrix} = [C_QW \ C_QV] \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} & \bar{\Gamma}_{12} \\ \bar{\Gamma}_{21} & \bar{\Gamma}_{22} \end{bmatrix}$$

Dado que las columnas de  $V$  forman una base de  $\mathcal{V}^*$  y, como resultado de la aplicación del Lema 4 se tiene que  $C_QV = 0$ . Continuando el cálculo:

$$C_QT^{-1} = [C_QW\bar{\Gamma}_{11} \ C_QW\bar{\Gamma}_{12}].$$

Como se mencionó anteriormente  $W\bar{\Gamma}_{12} \in \mathcal{V}^*$ , por lo que aplicando nuevamente el Lema 4 se tiene que  $C_QW\bar{\Gamma}_{12} = 0$ . Con lo anterior, la forma descrita en (2.15) queda probada.

‡

Es posible relacionar la definición 9 con la definición de subespacio débilmente inobservable y el concepto de ceros invariantes mediante el siguiente teorema:

**Teorema 3** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *El sistema (2.1), (2.2) es fuertemente detectable.*
- (ii) *La cuádrupla  $(A, C, E, F)$  es de fase mínima (los ceros invariantes de la cuádrupla  $(A, C, E, F)$  satisfacen  $\text{Re } s < 0$ ).*
- (iii) *Las trayectorias pertenecientes al subespacio débilmente inobservable  $\mathcal{V}^*$  convergen a cero.*

*Prueba.* Por definición las afirmaciones (i) y (iii) son equivalentes, por lo que bastará probar su equivalencia con la afirmación (ii).

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Si el sistema es fuertemente observable, entonces los valores propios de  $A_Q|_{\mathcal{V}^*}$  deberán ser estables, i.e., los valores propios de la matriz  $A_{\bar{s}}$  deben tener parte real estrictamente negativa.

El subsistema  $(A_s, C_s, E_s, F)$  es fuertemente observable, por lo que la matriz de Rosenbrock asociada a dicho subsistema:

$$P_{FO}(s) = \begin{bmatrix} sI - A_s & -E_s \\ C_s & F \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

es de rango completo para cualquier valor de  $s$ .

Considere  $\dim \mathcal{V}^* = n_{\mathcal{V}}$  y en consecuencia  $\dim \bar{\mathcal{V}} = n - n_{\mathcal{V}}$ .

Forme la matriz de Rosenbrock para el sistema transformado (2.15):

$$P_{FD}(s) = \begin{bmatrix} sI - A_s & 0 & -E_s \\ -A_{s\bar{s}} & sI - A_{\bar{s}} & -E_{\bar{s}} \\ C_s & 0 & F \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz  $P_{FD}(s)$  puede ser expresado como:

$$\text{rango } P_{FD}(s) = \text{rango} \begin{bmatrix} sI - A_s & -E_s & 0 \\ C_s & F & 0 \\ -A_{s\bar{s}} & -E_{\bar{s}} & sI - A_{\bar{s}} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

El bloque formado por las submatrices  $sI - A_s, -E_s, C_s, F$  coincide con la forma  $P_{FO}(s)$ , por lo que  $\text{rango } P_{FO}(s) = n - n_{\mathcal{V}}$ , en consecuencia los ceros invariantes de la cuádrupla  $(A_Q, C_Q, E, F)$  están dados por los valores de  $s$  tales que  $sI - A_{\bar{s}}$  tenga rango menor a  $n_{\mathcal{V}}$ . Note que dichos valores coinciden con los valores propios de  $A_Q|_{\mathcal{V}^*}$ , por lo que (i) implica (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Considere que el sistema es fuertemente detectable pero no satisface la afirmación (ii). Entonces existe al menos un valor  $\lambda > 0$  tal que

$\text{rango } P_{FD}(\lambda) < n$ . Entonces existe un valor de  $x_0$  diferente de cero y una entrada  $\zeta = \zeta_0 e^{\lambda t}$  tal que  $P_{FD}(\lambda) \begin{bmatrix} x_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} = 0$ . Dicha condición inicial tendría la forma  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{0\bar{s}} \end{bmatrix}$  para (2.15). La evolución de dicho estado estará regida por los valores propios de la matriz  $A_{\bar{s}}$ . Dado que  $\lambda > 0$  es un valor propio de la matriz  $A_{\bar{s}}$ , entonces el estado asociado a dicha condición inicial satisface  $x_{\mathcal{V}} \rightarrow 0$ , y dado el lema 3, entonces  $y = 0 \forall t \geq 0 \not\Rightarrow x \rightarrow 0$ , lo cual contradice la definición de detectabilidad fuerte. En consecuencia queda probado que (i)  $\Leftrightarrow$  (ii).

□

Es posible obtener otra propiedad muy importante de la matriz de Rosenbrock  $P_{FD}(s)$  y esta es que si el sistema (2.1), (2.2) es fuertemente detectable, entonces  $\text{rango} \begin{bmatrix} -E_s \\ F \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} -E \\ F \end{bmatrix} = m$ .

A continuación se presenta un algoritmo descrito en [33] que permite encontrar el subespacio  $\mathcal{V}^*$ .

El algoritmo establece lo siguiente:

**Algoritmo de Molinari [33].** PASO 0: Haga  $i = 0$  y  $M_0 = 0$  (una matriz de dimensión nula).

PASO 1: Evalúe

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} M_i E & M_i A \\ F & C \end{bmatrix},$$

determine alguna matriz no singular  $T_i$  tal que  $\Gamma_i$  sea reducida a

$$T_i \Gamma_i = \begin{bmatrix} G_{i+1} & H_{i+1} \\ 0 & M_{i+1} \end{bmatrix},$$

en donde  $G_{i+1}$  tiene rango renglón completo.

PASO 2: Haga  $i = i + 1$  y regrese al Paso 1.

OBSERVACION: El algoritmo termina cuando  $\text{rango } M_i = \text{rango } M_{i+1}$ . La matriz  $M_i$ , para la cual se satisface la anterior igualdad, se le denota como " $M_n$ ".

Como resultado del algoritmo se expone el siguiente Teorema:

**Teorema 4** *El algoritmo de Molinari establece que  $\ker M_n = \mathcal{V}^*$ .*

Para cada matriz  $M_i$  es posible calcular el subespacio  $\mathcal{V}_i$  como  $\ker M_i = \mathcal{V}_i$ . Cada subespacio  $\mathcal{V}_i$  satisface las siguientes propiedades anidadas:

**Lema 6** [35].

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{X}, \quad \mathcal{V}_{i+1} \subset \mathcal{V}_i, \quad \mathcal{V}_i \subset \mathcal{V}^*$$

Por lo tanto, para todo entero mayor a  $n$ , se tiene que

$$\ker M_n = \ker M_{n+1} = \ker M_{n+2} = \dots = \mathcal{V}^*$$

Es posible afirmar, que para un sistema fuertemente observable (i.e.,  $\mathcal{V}^* = \{0\}$ ), el algoritmo de Molinari establece una relación, entre los estados del sistema y las derivadas de la salida del sistema, del tipo

$$\Theta_n \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix} = M_n x \quad (2.18)$$

En donde  $\Theta_k$  es una matriz de dimensiones adecuadas. La relación (2.18) al igual que la (2.6) establecen una relación biyectiva entre los estados del sistema y una combinación lineal de las salidas del sistema y sus derivadas, por lo que la existencia del mapeo biyectivo implica que  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Para el caso general, de acuerdo a la definición del subespacio débilmente inobservable, se satisface:

$$M_k \mathcal{V}^* = \{0\}.$$

Por lo tanto, todos los estados  $v_i \in \mathcal{V}^*$ , no necesariamente iguales a cero (i.e., siempre que  $\text{rango } M_k < n$ ), producirán que la salida del sistema satisfaga  $y(t) = 0$ .

#### 2.1.4. Grado relativo y el subespacio $\mathcal{V}^*$

El grado relativo es un concepto utilizado para el diseño de modos deslizantes. Debido a que el subespacio débilmente inobservable es una pieza fundamental en el estudio de sistemas con entradas desconocidas, resulta necesario introducir un método para encontrar el subespacio  $\mathcal{V}^*$  haciendo uso del concepto de grado relativo parcial dado a continuación:

**Definición 10** Considere la cuádrupla  $(A, C, E, F)$ . Se define como vector de **grados relativos parciales** de la salida  $y(t)$  con respecto a la entrada desconocida  $\zeta(t)$ , al vector  $(r_1, \dots, r_p)$  compuesto por los enteros  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Cada grado relativo parcial  $r_i$  satisface los siguientes requerimientos:

- $r_i = 0$ , si  $f_i \neq 0$ , en donde  $f_i$  denota al  $i$ ésimo renglón de la matriz  $F$ ;
- Si  $f_i = 0$ , entonces  $r_i$  es el entero que satisface

$$\begin{aligned} c_i A^j E = 0, \quad j = 0, \dots, r_i - 2, \quad c_i A^{r_i - 1} E \neq 0, \\ r_i \leq n - 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

en donde  $c_i$  denota al  $i$ ésimo renglón de la matriz  $C$ ;

- Finalmente  $r_i = \infty$ , si  $f_i = 0$  y  $c_i A^j E = 0$  para todo  $j = 0, \dots, n - 1$ .

De acuerdo a la definición 10 de grado relativo parcial, las salidas del sistema (2.1), (2.2) podrían separarse en tres tipos: las que tienen grado relativo parcial igual a cero, las que tienen grado relativo parcial igual a infinito y aquellas que tienen un grado relativo parcial finito diferente de cero.

Considere el sistema (2.1), (2.2). Seleccione la matriz  $F^\perp$  de la siguiente forma

$$F^\perp = \begin{bmatrix} F_\perp^1 \\ F_\perp^2 \end{bmatrix},$$

de tal forma que  $F_\perp^1 \in \mathbb{R}^{p_1 \times p}$ ,  $F_\perp^2 \in \mathbb{R}^{p_2 \times p}$ , y

$$\begin{aligned} F_\perp^1 F &= 0, \text{ y } F_\perp^1 C A^i E = 0, \forall i = 0, \dots, n-1, \\ F_\perp^2 F &= 0, \text{ y } F_\perp^2 C A^{j-1} E \neq 0, \text{ para algún } 0 \leq j < n, \\ \text{rango} \begin{bmatrix} F_\perp^1 \\ F_\perp^2 \end{bmatrix} &= p - p_3, \text{ y } \text{rango} F = p_3. \end{aligned}$$

Escoja una matriz  $F^{\perp\perp}$ , y aplique la siguiente transformación de salida

$$\begin{bmatrix} F^\perp \\ F^{\perp\perp} \end{bmatrix} y(t),$$

en donde  $F^{\perp\perp} \in \mathbb{R}^{p_3 \times p}$ . La salida transformada toma la forma:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \zeta, \quad (2.20)$$

en donde  $y_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$ ,  $y_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$  y  $y_3 \in \mathbb{R}^{p_3}$ , y  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  cumplen que  $p_1 + p_2 + p_3 = p$  y que  $\text{rango} F_3 = \text{rango} F = p_3$ .

Es posible reconstruir el subespacio débilmente observable del sistema (2.1), (2.2), utilizando la anterior transformación de las salidas.

Para el siguiente procedimiento considere la salida transformada del sistema (3.2) y la ecuación (2.1).

Obtenga las matrices

$$U_{1i}^T = [c_{1i}^T (c_{1i}A)^T \dots (c_{1i}A^{n_{1i}-1})^T]$$

en donde  $c_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, p_1$  es el  $i$ ésimo renglón de la matriz  $C_1$ , y el entero  $n_{1i}$  está definido como

$$n_{1i} = \text{rango} [c_{1i}^T (c_{1i}A)^T \dots (c_{1i}A^{n-1})^T]^T.$$

Cada matriz  $U_{1i}$  corresponde a la matriz de observabilidad del par  $(c_{1i}, A)$ .

Defina la matriz extendida  $U_{1\text{extended}}$  y calcule el entero  $n_{o1}$  como

$$U_{1\text{extended}} = [U_{11}^T \dots U_{1p_1}^T]^T, n_{o1} = \text{rango}(U_{1\text{extended}}). \quad (2.21)$$

Forme la matriz  $U_{y_1} \in \mathbb{R}^{n_{y_1} \times n}$  con los primeros  $n_{o1}$  renglones linealmente independientes de la matriz  $U_{1\text{extended}}$ . La matriz  $U_{y_1}$  será llamada la matriz de observabilidad reducida del par  $(C_1, A)$ .

Para el caso en que  $n_{o1} = n$  entonces  $\ker U_{y_1} = \{0\}$  y por tanto todo el espacio de estados podría ser reconstruido a partir de la salida  $y_1$ , en consecuencia  $\mathcal{V}^* = \{0\}$ .

Cuando  $n_{o1} < n$  es necesario verificar la información de las siguientes salidas. Calcule el vector de grados relativos parciales del sistema (2.1), (3.2). Considere que cada entero  $r_i$  representa el grado relativo parcial de cada salida  $y_{2i}$  con respecto al vector de entradas desconocidas  $\zeta$ , en donde  $y_{2i}$  corresponde al  $i$ ésimo renglón del vector  $y_2$ .

Siguiendo la definición de grado relativo parcial, para cada renglón de la matriz  $C_2$  obtenga

$$U_{2i}^T = [c_{2i}^T (c_{2i}A)^T \cdots (c_{2i}A^{r_i-1})^T],$$

en donde  $c_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, p_2$  representa al  $i$ ésimo renglón de la matriz  $C_2$ , y  $r_i$  es el correspondiente grado relativo parcial de la salida  $y_{2i}$  con respecto al vector de entradas desconocidas  $\zeta$ .

Defina la matriz extendida  $U_{2\text{extended}}$  y calcule el entero  $n_{o2}$  como

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\text{extended}} &= [\bar{v}_1^T \cdots \bar{v}_{p_2}^T]^T, \\ U_{2\text{extended}} &= [\tilde{U}_{21}^T \cdots \tilde{U}_{2p_2}^T]^T, \\ n_{o2} &= \text{rango}(U_{2\text{extended}}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Forme la matriz  $U_2 \in \mathbb{R}^{n_{o2} \times n}$  de rango renglón completo, seleccionando los primeros  $n_{o2}$  renglones linealmente independientes de la matriz  $U_{2\text{extended}}$ .

En este punto es necesario verificar si la condición  $\text{rango}[U_1^T \ U_2^T]^T = n$  se cumple. Si dicha condición se cumple, entonces  $\ker [U_1^T \ U_2^T] = \{0\}$ , todo el espacio de estados puede ser reconstruido a partir de las salidas  $y_1$  y  $y_2$ , y en consecuencia  $\mathcal{V}^* = \{0\}$ . Note que  $[U_1^T \ U_2^T]x$  relaciona un conjunto de derivadas de las salidas  $y_1$  y  $y_2$  con los estados del sistema de manera independiente a las entradas desconocidas, de tal forma que si la condición se cumple, entonces la definición 8 es satisfecha.

Si se cumple que  $\text{rango}[U_1^T \ U_2^T]^T < n$  entonces forme la matriz

$$U_r = \begin{bmatrix} c_{2_1}A^{r_1-1} \\ c_{2_2}A^{r_2-1} \\ \vdots \\ c_{2_{p_2}}A^{r_{p_2}-1} \end{bmatrix},$$

Calcule las matrices  $M_{i+1}$  como

$$M_{i+1} = \begin{bmatrix} M_i E \\ U_r E \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} M_i A \\ U_r A \\ C_3 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

en donde  $M_0 = 0_{0 \times 0}$ . Calcule las matrices  $M_{i+1}$  hasta que se satisfaga la condición:

$$\text{rango}[U_1^T \ U_2^T \ M_{i+1}^T]^T = \text{rango}[U_1^T \ U_2^T \ M_i^T]^T. \quad (2.24)$$

Sea  $l$  el número de matrices  $M_i$  calculadas menos uno.

**Teorema 5** Si las matrices  $U_1$ ,  $U_2$  y  $M_l$  son calculadas por el método descrito, entonces tiene:

$$\ker \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ M_l \end{bmatrix} = \mathcal{V}^*.$$

*Prueba.* Las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\begin{bmatrix} y_{1i} \\ \dot{y}_{1i} \\ \vdots \\ y_{1i}^{(n_{1i}-1)} \end{bmatrix} = U_{1i}x, \quad \begin{bmatrix} y_{2j} \\ \dot{y}_{2j} \\ \vdots \\ y_{2j}^{(r_j-1)} \end{bmatrix} = U_{2j}x \quad (2.25)$$

en donde  $i = 1, \dots, p_1$ ,  $j = 1, \dots, p_2$ . De forma similar que para las matrices  $U_{1i}$  y  $U_{2j}$  se definieron las matrices extendidas  $U_{1_{extended}}$  y  $U_{2_{extended}}$  forme con los elementos correspondientes los vectores  $Y_{1_{extended}}$  y  $Y_{2_{extended}}$  de tal forma que

$$Y_{1_{extended}} = U_{1_{extended}}x, \quad Y_{2_{extended}} = U_{2_{extended}}x.$$

Forme los vectores  $Y_1$  y  $Y_2$  seleccionando los renglones correspondientes de  $Y_{1_{extended}}$  y  $Y_{2_{extended}}$  de tal forma que las siguientes igualdades se satisfagan:

$$Y_1 = U_1x, \quad Y_2 = U_2x.$$

Defina el vector

$$Y_R = \begin{bmatrix} y_{21}^{(r_1)} \\ y_{22}^{(r_2)} \\ \vdots \\ y_{2p_2}^{(r_{p_2})} \end{bmatrix}.$$

Haga el vector  $\rho_0 = 0_{0 \times 0}$  y defina de forma recursiva:

$$\rho_{i+1} = \begin{bmatrix} M_i E \\ U_r E \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} \dot{\rho}_i \\ Y_R \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Note que la siguiente igualdad se satisface para cada iteración:

$$\begin{bmatrix} M_i E \\ U_r E \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} \dot{\rho}_i \\ Y_R \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_i E \\ U_r E \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} M_i A \\ U_r A \\ C_3 \end{bmatrix} x.$$

Para cada iteración note que el vector  $\rho_i$  está formado por una combinación lineal de derivadas de  $Y_R$  y  $y_3$ . Después de  $l$  iteraciones la siguiente igualdad es satisfecha:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \rho_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ M_l \end{bmatrix} x \quad (2.26)$$

De forma equivalente al **algoritmo de Molinari** (presentado en la sección 2.1.3), el algoritmo presentado aquí define una representación inversa entre salidas y estados (idea utilizada para la solución de inversión de sistemas [32]), para la cual la entrada es una combinación lineal de varias derivadas del vector de salidas y la salida es un conjunto de estados encontrados independientemente de la entrada desconocida.

Al analizar la relación (2.26), por un lado si se tiene  $x = 0 \forall t \geq 0$ , entonces haciendo  $F_3 \zeta = 0 \forall t \geq 0$  se tiene que  $y = 0 \forall t \geq 0$ .

Por otro lado, si  $y = 0 \forall t \geq 0$  entonces el lado izquierdo de la ecuación (2.26) es igual a cero y la igualdad es satisfecha para todo  $x \in \ker [U_1^T \ U_2^T \ M_l^T]^T$ . Por definición los estados  $x \neq 0$  para los que se satisface  $y = 0$  pertenecen al espacio débilmente inobservable. Para verificar la anterior afirmación analicemos el caso fuertemente observable. Asuma que el sistema es fuertemente observable, entonces  $\mathcal{V}^* = 0$  y por definición  $y = 0 \forall t \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 \forall t \geq 0$ . Lo anterior implica que existe una relación biyectiva entre los estados y una combinación lineal de las salidas y sus derivadas, y que dicha relación está dada por (2.26), por tanto

$$\text{rango} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ M_l \end{bmatrix} = n.$$

‡

## 2.2. Modos Deslizantes Homogéneos de Orden Arbitrario

En esta sección son expuestos los conceptos de homogeneidad y modos deslizantes de orden superior.

El concepto de homogeneidad es utilizado para probar la convergencia en tiempo finito de los algoritmos por modos deslizantes de orden superior. Las pruebas de convergencia de dichos algoritmos se encuentran desarrolladas para pequeñas regiones y, es utilizando el concepto de homogeneidad, que la convergencia es expandida mas allá de esas pequeñas regiones.

El algoritmo de diferenciación por medio de modos deslizantes de orden superior es introducido en esta sección. La pruebas de convergencia en tiempo finito para el caso ideal, así mismo la estimación de las regiones de convergencia para los casos discreto y con ruido son proporcionadas. Debido a que el diferenciador por modos deslizantes de orden superior será utilizado a lo largo del desarrollo del trabajo de Tesis, se considera de gran importancia su estudio.

### 2.2.1. Homogeneidad y convergencia en tiempo finito

La propiedad de homogeneidad es utilizada para el diseño de algoritmos de control por modos deslizantes. A continuación se dan a conocer algunos conceptos importantes.

Una inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$  es llamada una inclusión diferencial en el sentido de Filippov, si el conjunto de vectores  $F(x)$  no es vacío, es cerrado, convexo, localmente acotado y super-semicontinuo [43]. La anterior condición se puede interpretar en el sentido de que la distancia máxima entre los puntos de  $F(x)$  con respecto al conjunto  $F(y)$  se desvanece cuando  $x \rightarrow y$  [44]. Las soluciones de la inclusión, son funciones del tiempo absolutamente continuas que satisfacen la inclusión diferencial casi en cualquier lugar (almost everywhere). Dichas soluciones, siempre estarán definidas y satisfacen las condiciones normales para la solución de una ecuación diferencial excepto la de unicidad.

Considere el conjunto de coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $r = (r_1, \dots, r_n)$  una n-tupla de números reales positivos.

**Definición 11** [45]. *La familia de dilataciones de un solo parámetro  $\delta_\varepsilon^r$ ,  $\varepsilon > 0$  (asociada a  $r$ ), se define como*

$$\delta_\varepsilon^r(x) = (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0.$$

Los números  $r_i$  son llamados los pesos de las coordenadas.

**Definición 12** [44]. *Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (respectivamente, un conjunto de campos vectoriales  $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , o un campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) es llamada homogénea de grado  $q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) con la dilatación  $\delta_\varepsilon^r : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n)$ , si para toda  $\varepsilon > 0$  la siguiente identidad es satisfecha  $f(x) = \varepsilon^{-q} f(\delta_\varepsilon x)$  (respectivamente,  $F(x) = \varepsilon^{-q} \delta_\varepsilon^{-1} [F(\delta_\varepsilon x)]$ , o  $f(x) = \varepsilon^{-q} \delta_\varepsilon^{-1} [f(\delta_\varepsilon x)]$ ).*

Note que la homogeneidad de un campo vectorial  $f(x)$  (un conjunto de campos vectoriales  $F(x)$ ) puede ser definida de forma equivalente como la propiedad de invariancia de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  (inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$ ) con respecto a la transformación combinada de tiempo y coordenadas  $G_\varepsilon : (t, x) \mapsto (\varepsilon^p t, \delta_\varepsilon(x))$ .

Un conjunto  $D$  es llamado de contracción si  $\delta_\kappa D \subset D$  para todo  $\kappa < 1$ .

Considere las siguientes propiedades:

1. Una inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$  (ecuación  $\dot{x} = f(x)$ ) es llamada global y uniformemente estable (converge en tiempo finito a 0), si es estable en sentido de Lyapunov y para todo  $R > 0$  existe  $T > 0$ , tal que cualquier trayectoria comenzando dentro del disco  $\|x\| < R$  converge a cero en un tiempo  $T$ .
2. Una inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$  (ecuación  $\dot{x} = f(x)$ ) es llamada global uniforme y asintóticamente estable (convergente a 0), si es Lyapunov estable y para cualquier  $R > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$  se cumple que, cualquier trayectoria comenzando dentro del disco  $\|x\| < R$ , entra al disco  $\|x\| < \varepsilon$  en un tiempo  $T$  para permanecer ahí por siempre.
3. Una inclusión diferencial homogénea  $\dot{x} \in F(x)$  (ecuación  $\dot{x} = f(x)$ ) es llamada contractiva si existen dos conjuntos compactos  $D_1, D_2$  y  $T > 0$

tales que  $D_2$  está contenido en el interior de  $D_1$  y contiene al origen,  $D_1$  es de contracción, y todas las trayectorias comenzando en  $t = 0$  dentro de  $D_1$ , son localizadas en  $D_2$  al instante  $T$ .

**Teorema 6** [44]. *Sea  $\dot{x} \in F(x)$  una inclusión diferencial en el sentido de Filippov y además considere que es una inclusión homogénea con un grado negativo de homogeneidad  $-p$ . Entonces las propiedades 1, 2 y 3 son equivalentes.*

El anterior teorema es considerado como un punto de partida para el diseño de algoritmos con convergencia en tiempo finito.

### 2.2.2. Diferenciador por Modos Deslizantes de Orden Superior

En esta sección se presentan los fundamentos del diferenciador robusto basado en modos deslizantes de orden superior [30], debido a que su estructura será utilizada para el diseño de observadores.

El diferenciador por Modos Deslizantes de orden  $n$  de una señal  $f_0(t)$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= v_0 = z_1 - \lambda_0 |z_0 - f_0(t)|^{\frac{n}{n+1}} \text{sign}(z_0 - f_0(t)), \\
 \dot{z}_1 &= v_1 = z_2 - \lambda_1 |z_1 - v_0|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(z_1 - v_0), \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_i &= v_i = z_{i+1} - \lambda_i |z_i - v_{i-1}|^{\frac{n-i}{n-i+1}} \text{sign}(z_i - v_{i-1}), \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{n-1} &= v_{n-1} = z_n - \lambda_{n-1} |z_{n-1} - v_{n-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{n-1} - v_{n-2}), \\
 \dot{z}_n &= -\lambda_n \text{sign}(z_n - v_{n-1})
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

para constantes  $\lambda_i$  seleccionadas en orden recursivo de acuerdo a [30]. Considerando las condiciones iniciales del diferenciador iguales a cero y que existe cierta constante  $\Gamma$  tal que  $|f_0^{(n)}| \leq \Gamma$ , las siguientes igualdades son satisfechas en ausencia de ruidos en la medición de  $f_0(t)$  y después de un proceso transitorio de tiempo finito:

$$|z_i - f_0^{(i)}(t)| = 0 \quad i = 0, \dots, n \tag{2.28}$$

Considere que la señal  $f_0(t)$  es medida junto a una perturbación  $\xi(t)$  de amplitud máxima  $\varepsilon$ . Defina las variables  $\sigma_0 = z_0 - f_0(t)$ ,  $\sigma_1 = z_1 - \dot{f}_0(t)$ , ...,  $\sigma_n = z_n - f_0^{(n)}(t)$ . Entonces toda solución de (2.27) satisface la siguiente

inclusión diferencial

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_0 &= \sigma_1 - \lambda_0 |\sigma_0 + \xi(t)|^{\frac{n}{n+1}} \operatorname{sign}(\sigma_0 + \xi(t)), \\
\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 - \lambda_1 |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{\frac{n-1}{n}} \operatorname{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0), \\
&\vdots \\
\dot{\sigma}_i &= \sigma_{i+1} - \lambda_i |\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}|^{\frac{n-i}{n-i+1}} \operatorname{sign}(\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}), \\
&\vdots \\
\dot{\sigma}_{n-1} &= \sigma_n - \lambda_{n-1} |\sigma_{n-1} - \dot{\sigma}_{n-2}|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(\sigma_{n-1} - \dot{\sigma}_{n-2}), \\
\dot{\sigma}_n &\in -\lambda_n \operatorname{sign}(\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}) + [-\Gamma \Gamma]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Es importante resaltar que la inclusión (2.29) no contiene información acerca de la señal original  $f_0(t)$ .

El sistema (2.29) es homogéneo en ausencia de la perturbación (i.e.,  $\xi(t) = 0$ ), sus trayectorias no varían de acuerdo a la transformación:

$$G_\eta : (t, \sigma_i, \varepsilon) \mapsto (\eta t, \eta^{n-i+1} \sigma_i, \eta^{n+1} \varepsilon) \tag{2.30}$$

Es necesario definir las principales propiedades de la inclusión diferencial (2.29) que son satisfechas con una selección adecuada de  $\lambda_i$ .

**Lema 7** [30]. *Considere que  $\xi_\delta(t)$  (la función  $\xi(t)$  considerada solamente en un intervalo de tiempo  $\delta$ ) satisface que la integral  $\int |\xi_\delta(t)| dt$ , en un intervalo de tiempo  $\delta$ , es menor que cierto valor fijo  $K > 0$ . Entonces para cualquier  $0 < S_i < S'_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , cada trayectoria de (2.29) que comienza dentro de la región  $|\sigma_i| < S_i$  no deja la región  $|\sigma_i| < S'_i$  durante este intervalo de tiempo, para  $\delta$  suficientemente pequeño.*

*Prueba.* Note que  $-\dot{\sigma}_0$  juega el papel del ruido  $\xi(t)$  para el sistema formado por las últimas  $n - 1$  ecuaciones en (2.29). Con  $n = 0$ , (2.29) queda reducida a  $\dot{\sigma}_0 \in -\lambda_0 \operatorname{sign}(\sigma_0 + \xi(t)) + [-\Gamma \Gamma]$ . Se tiene que para  $n = 0$ ,  $\lambda_0 > \Gamma$  el lema 7, es obviamente satisfecho. El Lema es probado utilizando inducción matemática. Considere que se cumple para un sistema de orden  $n - 1$  con la selección de parámetros  $\bar{\lambda}_i$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ . Es posible probar que las afirmaciones del lema se cumplen para la inclusión diferencial (2.29) de orden  $n$ , con  $\lambda_0$  suficientemente grande y  $\lambda_i = \bar{\lambda}_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Seleccione los valores  $S_{M_i}$ , tales que  $S_i < S'_i < S_{M_i}$ ,  $i = 0, \dots, n$  (la selección de los valores  $S_{M_i}$  nos permiten suponer que las trayectorias entran a una región mayor a  $S_i$ ). Entonces

$$\begin{aligned}
|\dot{\sigma}_0| &\leq \lambda_0 (|\xi(t)| + |\sigma_0|)^{n/(n+1)} + |\sigma_1| \\
&\leq \lambda_0 |\xi(t)|^{n/(n+1)} + \lambda_0 S_{M_0}^{n/(n+1)} + S_{M_1}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder para integración se tiene

$$\int |\dot{\sigma}_0| dt \leq \lambda_0 \delta^{1/(n+1)} \left( \int |\xi(t)| dt \right)^{n/(n+1)} + \delta \left( \lambda_0 S_{M_0}^{n/(n+1)} + S_{M_1} \right)$$

Entonces  $|\sigma_0| \leq S'_0$  se satisface para  $\delta$  pequeña. Por otro lado  $\dot{\sigma}_0$  es una perturbación para el sistema de orden  $n - 1$  en (2.29) y satisface las condiciones del Lema, entonces dada la suposición de que se cumple de forma inductiva, se tiene que  $|\sigma_i| \leq S'_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  con  $\delta$  suficientemente pequeña.

‡

**Lema 8** [30]. *Si para algún  $S_i < S'_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $\xi(t) = 0$  y  $T > 0$  cualquier trayectoria de (2.29) comenzando en una región  $|\sigma_0| < S'_0$  entra en un tiempo  $T$  a la región  $|\sigma_i| < S_i$  y se mantiene ahí por siempre, entonces el sistema (2.29) es estable en tiempo finito con  $\xi(t) = 0$ .*

*Prueba.* El lema 8 es una consecuencia de la homogeneidad del diferenciador (la invariancia del (2.29) con respecto a la transformación (2.30)). Dada la propiedad de homogeneidad y la existencia de un mapeo contractivo, entonces la afirmación 3 del teorema 6 es satisfecha.

‡

**Lema 9** [30]. *Para cada conjunto de números  $S_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ , existen números  $\Sigma_i > s_i$ ,  $k_i > 0$  y  $T > 0$ ,  $\varepsilon_M$  tales que para cualquier  $\xi(t) \in [-\varepsilon \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \leq \varepsilon_M$ , cualquier trayectoria de (2.29) que comienza dentro de la región  $|\sigma_i| < S_i$ , entra dentro de un tiempo  $T$ , y sin dejar la región  $|\sigma_i| \leq \Sigma_i$ , a la región  $|\sigma_i| \leq k_i \varepsilon^{n-i+1}$  y se mantiene dentro por siempre.*

*Prueba.* Al igual que el Lema 7, este lema será probado utilizando inducción matemática. Con  $n = 0$  la inclusión (2.29) satisface de manera trivial el lema con  $\lambda_0 > \Gamma$ . Nuevamente asuma que el lema se satisface para el sistema de orden  $n - 1$  con las ganancias  $\bar{\lambda}_i$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ . Pruebe ahora que el lema es satisfecho también por el sistema de orden  $n$  con  $\lambda_0$  suficientemente grande y las ganancias  $\lambda_i = \bar{\lambda}_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Considere el caso en el que  $\varepsilon_M = 0$ , es decir  $\xi = 0$ . Escoja una región más grande  $|\sigma_i| < S'_i$ ,  $S_i < S'_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  y sean  $\Sigma_i > S'_i$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ , algunas cotas superiores elegidas de acuerdo al Lema 9 para (2.29) y esa región. De la ecuación (2.31) es posible ver que eligiendo una constante  $q > 1$  y con  $\lambda_0$  suficientemente grande las trayectorias entran a la región  $|\sigma_0| \leq (q\Sigma_1/\lambda_0)^{(n+1)/n}$  en un tiempo arbitrariamente pequeño. Durante ese tiempo  $\dot{\sigma}_0$  no cambia de signo. Por lo tanto,  $\int |\dot{\sigma}_0| dt \leq S'_0$  para  $\lambda_0$  suficientemente grande. Entonces la perturbación  $-\dot{\sigma}_0$  que entra al sistema (2.29) satisface el Lema 7 y en consecuencia las desigualdades  $|\sigma_i| \leq S'_i$  son satisfechas para  $i \geq 1$ . Es posible ver de la primera ecuación en (2.29) que a partir de ese momento se cumple que  $|\dot{\sigma}_0| \leq 3\Sigma_1$  con una elección adecuada de  $q$ .

Diferenciado la primera ecuación de (2.29) con  $\xi(t) = 0$  se tiene

$$\ddot{\sigma}_0 = -\lambda_0 |\sigma_0|^{-1/(n+1)} \dot{\sigma}_0 + \dot{\sigma}_1,$$

en donde de acuerdo a la inclusión (2.29) la siguiente desigualdad se satisface  $|\dot{\sigma}_1| \leq 4\lambda_1 \Sigma_1 + \Sigma_2$ . Entonces, con  $\lambda_0$  suficientemente grande y dentro de un intervalo de tiempo arbitrariamente pequeño la siguiente desigualdad es satisfecha

$|\dot{\sigma}_0| \leq \lambda_0^{-1}(4\lambda_1\Sigma_1 + \Sigma_2)(q\Sigma_1/\lambda_0)^{1/n}$ . Note que el lado derecho puede hacerse arbitrariamente pequeño mediante la selección de  $\lambda_0$ . Dado que es supuesto que se cumple para un sistema de orden  $n - 1$ , y de acuerdo al Lema 8, el Lema 9 es probado para  $\varepsilon_M = 0$ .

Considere ahora  $\varepsilon_M > 0$ , como resultado de la continua dependencia de las soluciones de una inclusión diferencial a su lado derecho [43] con  $\varepsilon_M$  suficientemente pequeño las trayectorias se concentran en una pequeña vecindad del origen. Las propiedades de la convergencia en dicha vecindad se deben a la homogeneidad del sistema.

□

**Teorema 7** [30] *Considere la existencia de un ruido determinístico en la medición de  $f_0(t)$  de tal forma que  $|f(t) - f_0(t)| \leq \varepsilon$ . Entonces las siguientes igualdades son satisfechas en tiempo finito para ciertas constantes  $\mu_i$  dependientes únicamente de los parámetros del diferenciador (2.28):*

$$|z_i - f_0^{(i)}(t)| \leq \mu_i \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)} \quad i = 0, \dots, n \quad (2.32)$$

*Prueba.* Escriba la ecuación diferencial en forma de la inclusión (2.29), exprese el ruido determinístico como la función  $\xi(t)$  de amplitud máxima  $\varepsilon$ . El resto de la prueba de convergencia es consecuencia del Lema 9.

□

Considere el caso en el que existe muestreo discreto. Para este caso  $z_0 - f(t)$  representan los puntos  $z_0(t_j) - f(t_j)$  para  $t_j \leq t < t_{j+1}$ ,  $t_{j+1} - t_j = \tau > 0$ .

**Teorema 8** [30] *Sea  $\tau > 0$  un intervalo de muestreo constante. En ausencia de ruidos, las siguientes igualdades son satisfechas en tiempo finito para ciertas constantes  $\mu_i$  dependientes únicamente de los parámetros del diferenciador*

$$|z_i - f_0^{(i)}(t)| \leq \mu_i \tau^{n-i+1} \quad i = 0, \dots, n \quad (2.33)$$

*Prueba.* Considere la ecuación diferencial

$$\dot{\sigma}_0 = -\lambda_0 |\sigma_0(t_j)|^{n/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0(t)) + \sigma_1$$

en vez de la primera ecuación de 2.29. El sistema resultante de sustituir la anterior ecuación es:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_0 &= -\lambda_0 |\sigma_0(t_j)|^{n/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0(t)) + \sigma_1, \\ \dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 - \lambda_1 |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{\frac{n-1}{n}} \text{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0), \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_i &= \sigma_{i+1} - \lambda_i |\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}|^{\frac{n-i}{n-i+1}} \text{sign}(\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}), \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_{n-1} &= \sigma_n - \lambda_{n-1} |\sigma_{n-1} - \dot{\sigma}_{n-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_{n-1} - \dot{\sigma}_{n-2}), \\ \dot{\sigma}_n &\in -\lambda_n \text{sign}(\sigma_n - \dot{\sigma}_{n-1}) + [-\Gamma \Gamma] \end{aligned} \quad (2.34)$$

La inclusión (2.34) es invariante con respecto a la transformación:

$$(t, \tau, \sigma_i) \mapsto (\eta t, \eta \tau, \eta^{n-i+1} \sigma_i).$$

Por otro lado, la inclusión (2.34) puede ser escrita en la forma (2.29) en donde  $|\xi(t)| \leq \varepsilon$  deberá ser seleccionada para cada región de  $\sigma_0$  cuando  $\tau$  es suficientemente pequeña. Aplicando sucesivamente el Lema 9 y dado que el sistema es homogéneo entonces la prueba se lleva a cabo de la misma forma que en el teorema 7.

‡

En particular, el error de la  $n$ -ésima derivada es proporcional a  $\tau$ .

## Capítulo 3

# Observación de Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo con Entradas Desconocidas

En esta sección son diseñados observadores para sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo con Entradas Desconocidas (LITED). El diseño del observador está dividido en tres pasos. Primero, el sistema es transformado para separar los estados no afectados por las entradas desconocidas (si los hubiese) del resto de estados afectados por las mismas. Como segundo paso, utilizando el hecho de que la entrada desconocidas es asumida acotada, es aplicado un observador tipo Luenberger para garantizar que el error de estimación se encuentre en una región acotada cercana al origen. Finalmente, y de acuerdo a si el sistema es fuertemente observable o fuertemente detectable, es diseñado un esquema basado en modos deslizantes de orden superior que garantiza la convergencia a cero del error de estimación en tiempo finito para el caso ideal.

Considere un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo con Entradas Desconocidas (SLITED)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu(t) + E\zeta(t), \\ y &= Cx + Du(t) + F\zeta(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

en donde  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  son los estados del sistema,  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas,  $u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{q_0}$  es el vector de entradas de control,  $\zeta(t) \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq p$ , es el vector de entradas desconocidas (perturbaciones), las matrices  $A, B, C, D, E, F$  son conocidas y tienen dimensiones adecuadas. Las soluciones de las ecuaciones serán interpretadas en el sentido de Filippov [43] para permitir el uso de señales discontinuas en controles y observadores. Note que las soluciones en el sentido de Filippov coinciden con las soluciones usuales cuando el

lado derecho de las ecuaciones es continuo. También se asume que todas las entradas permiten la existencia de soluciones y su extensión a lo largo de todo el semieje  $t \geq 0$ .

Sin pérdida de generalidad se considera que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = m.$$

El objetivo es diseñar un observador que garantice la estimación exacta (preferiblemente en tiempo finito) de los estados y la entrada desconocida.

La siguiente notación será utilizada a lo largo del capítulo. Sea  $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$  una matriz. Si  $\text{rango } G = n$ , entonces se define la pseudoinversa derecha de  $G$  a la matriz dada por  $G^+ = G^T(GG^T)^{-1}$ . Si  $\text{rango } G = m$ , entonces se define la pseudoinversa izquierda de  $G$  a la matriz  $G^+ = (G^T G)^{-1} G^T$ . Para una matriz  $J \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n \geq m$ , con  $\text{rango } J = r$ , es posible seleccionar una de las matrices  $J^\perp \in \mathbb{R}^{n-r \times n}$ , tal que  $\text{rango } J^\perp = n - r$  y  $J^\perp J = 0$ .  $J^{\perp\perp} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  corresponde a una de las posibles matrices tales que  $\text{rango } J^{\perp\perp} = r$  y  $J^\perp (J^{\perp\perp})^T = 0$ . Obviamente

$$\text{rango} \begin{bmatrix} J^\perp \\ J^{\perp\perp} \end{bmatrix} = n.$$

**Suposición 1** Las entradas desconocidas del vector  $\zeta(t)$  son funciones acotadas y medibles en el sentido de Lebesgue, i.e.,  $\|\zeta(t)\| \leq \zeta^+$ .

### 3.1. Estabilización del error de estimación

Considere que alguna de las siguientes suposiciones se cumple:

**Suposición 2** El sistema (3.1) es fuertemente observable.

**Suposición 3** El sistema (3.1) es fuertemente detectable.

Para realizar la reconstrucción de estados es necesario descomponer las salidas del sistema de acuerdo al concepto de grado relativo parcial dado en la sección 2.1.4.

Seleccione la matriz  $F^\perp$  de la siguiente forma

$$F^\perp = \begin{bmatrix} F_\perp^1 \\ F_\perp^2 \end{bmatrix},$$

de tal forma que  $F_\perp^1 \in \mathbb{R}^{p_1 \times p}$ ,  $F_\perp^2 \in \mathbb{R}^{p_2 \times p}$ , y

$$\begin{aligned} F_\perp^1 F &= 0, \text{ y } F_\perp^1 C A^i E = 0, \forall i = 0, \dots, n-1, \\ F_\perp^2 F &= 0, \text{ y } F_\perp^2 C A^{j-1} E \neq 0, \text{ para algún } 0 \leq j < n, \\ \text{rango} \begin{bmatrix} F_\perp^1 \\ F_\perp^2 \end{bmatrix} &= p - p_3, \text{ y } \text{rango } F = p_3. \end{aligned}$$

Escoja una matriz  $F^{\perp\perp}$ , y aplique la siguiente transformación de salida

$$\begin{bmatrix} F^{\perp} \\ F^{\perp\perp} \end{bmatrix} y(t),$$

en donde  $F^{\perp\perp} \in \mathbb{R}^{p_3 \times p}$ . La salida transformada toma la forma:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \zeta, \quad (3.2)$$

Note que  $\text{rango } F_3 = \text{rango } F = p_3$ .

Defina como  $n_{y_1}$  al rango de la matriz de observabilidad del par  $(C_1, A)$  (vea [41]). Forme la matriz  $U_{y_1} \in \mathbb{R}^{n_{y_1} \times n}$  seleccionando los primeros  $n_{y_1}$  renglones linealmente independientes de la matriz de observabilidad. La matriz  $U_{y_1}$  corresponde a la matriz de observabilidad de orden reducido del par  $(C_1, A)$ .

Es claro que el subespacio observable del par  $(C_1, A)$  no es afectado por la entrada desconocida. A continuación se buscará una matriz de transformación (2.8) para posteriormente llevar al sistema a la forma descrita en (2.9).

Escoja una de las matrices  $\bar{U}_{y_1} \in \mathbb{R}^{(n-n_{y_1}) \times n}$  tal que

$$U_{y_1} \bar{U}_{y_1}^T = 0, \quad \text{rango } [U_{y_1}^T \ \bar{U}_{y_1}^T]^T = n.$$

Note que las columnas de  $\bar{U}_{y_1}$  forman una base del subespacio observable del par  $(C_1, A)$ . Defina la matriz de transformación

$$T_y = \begin{bmatrix} U_{y_1} \\ \bar{U}_{y_1} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Reescribiendo el sistema (3.1) con las salidas transformadas, éste toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + E\zeta \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \zeta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Teorema 9** Sea  $T_y$  definida de acuerdo a (3.3). La transformación de estados  $\xi = T_y x$  lleva el sistema (3.4) a la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u + \bar{E}\zeta \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} u + \tilde{F}\zeta \quad (3.6)$$

en donde  $\bar{E} = [0 \ E_2^T]^T$ ,  $\tilde{F} = [0 \ 0 \ F_3^T]^T$ ,  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_{y_1}}$ ,  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{(n-n_{y_1})}$ .

**Proof.** La matriz  $U_{y_1}$  está formada por los renglones linealmente independientes de la matriz de observabilidad del par  $(C_1, A)$ . De acuerdo a [41] el subespacio inobservable de este par está dado por

$$\mathcal{N}_1 = \bigcap_{i=1}^n \ker(C_1 A^{i-1}) = \ker U_{y_1}. \quad (3.7)$$

Es conocido ([41]) que  $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{X}$  satisface  $A\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_1$ , esto es, el subespacio  $\mathcal{N}_1$  es  $A$ -invariante.

La inversa de la matriz  $T_y$  puede ser escrita como

$$T_y^{-1} = [U_{y_1}^+ \quad \bar{U}_{y_1}^+],$$

en donde  $U_{y_1}^+ \in \mathbb{R}^{n \times n_{y_1}}$ ,  $\bar{U}_{y_1}^+ \in \mathbb{R}^{n \times (n - n_{y_1})}$ .

Aplica la transformación  $T_y$  a cada matriz del sistema (3.4):

$$T_y A T_y^{-1} = \begin{bmatrix} U_{y_1} A U_{y_1}^+ & U_{y_1} A \bar{U}_{y_1}^+ \\ \bar{U}_{y_1} A U_{y_1}^+ & \bar{U}_{y_1} A \bar{U}_{y_1}^+ \end{bmatrix}.$$

Por definición  $A \bar{U}_{y_1}^+ \in \mathcal{N}_1$ , entonces es claro a partir de (3.7) que

$$U_{y_1} A \bar{U}_{y_1}^+ = 0_{n_{y_1} \times (n - n_{y_1})}.$$

La matriz transformada  $T_y B$  está compuesta por las submatrices  $B_1 = U_{y_1} B$  y  $B_2 = \bar{U}_{y_1} B$ ,

$$T_y B = \begin{bmatrix} U_{y_1} B \\ \bar{U}_{y_1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

La matriz transformada  $E$  toma la forma

$$T_y E = \begin{bmatrix} U_{y_1} \\ \bar{U}_{y_1} \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} U_{y_1} E \\ E_2 \end{bmatrix}.$$

A partir de la transformación de salidas (3.2), y de la forma en la cuál es formada la matriz  $U_{y_1}$ , se cumple que  $U_{y_1} E = 0$ .

Al aplicar la transformación a la matriz  $C$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} T_y^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 U_{y_1}^+ & C_1 \bar{U}_{y_1}^+ \\ C_2 U_{y_1}^+ & C_2 \bar{U}_{y_1}^+ \\ C_3 U_{y_1}^+ & C_3 \bar{U}_{y_1}^+ \end{bmatrix}.$$

Es claro a partir de las definiciones de  $U_{y_1}^+$  y  $\bar{U}_{y_1}^+$  que  $C_1$  y  $C_2$  satisfacen que

$$C_1 \bar{U}_{y_1}^+ = 0_{p_1 \times (n - n_{y_1})}, \quad C_2 U_{y_1}^+ = 0_{p_2 \times n_{y_1}}.$$

Las matrices restantes están dadas por

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_1 U_{y_1}^+ \in \mathbb{R}^{p_1 \times n_{y_1}}, & C_{22} &= C_2 \bar{U}_{y_1}^+ \in \mathbb{R}^{p_2 \times (n - n_{y_1})}, \\ C_{31} &= C_3 U_{y_1}^+ \in \mathbb{R}^{p_3 \times n_{y_1}}, & C_{32} &= C_3 \bar{U}_{y_1}^+ \in \mathbb{R}^{p_3 \times (n - n_{y_1})}. \end{aligned}$$

Las matrices  $D_1, D_2, D_3$  y  $F_3$  tienen la misma forma dada en (3.4), entonces el teorema queda probado. ■

**Corolario 1** *El subsistema de (3.5), (3.6) que representa la dinámica de  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_{y_1}}$*

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= A_{11}\xi_1 + B_1u, \\ y_1 &= C_{11}\xi_1 + D_1u,\end{aligned}\tag{3.8}$$

*es observable.*

**Proof.** El rango de la matriz de observabilidad del par  $(C_1, A)$  es  $n_{y_1}$ , dicho rango es invariante ante transformaciones de similitud aplicadas al sistema. La matriz de observabilidad de el par  $(C_1T_y^{-1}, T_yAT_y^{-1})$  está dada por

$$\begin{bmatrix} C_1T_y^{-1} \\ C_1T_y^{-1}(T_yAT_y^{-1}) \\ C_1T_y^{-1}(T_yAT_y^{-1})^2 \\ \vdots \\ C_1T_y^{-1}(T_yAT_y^{-1})^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Es conocido que  $C_1\bar{U}_{y_1}^+ = 0$  y  $C_1U_{y_1}^+ = C_{11}$ , entonces

$$\begin{bmatrix} C_1T_y^{-1} \\ C_1T_y^{-1}(T_yAT_y^{-1}) \\ C_1T_y^{-1}(T_yAT_y^{-1})^2 \\ \vdots \\ C_1T_y^{-1}(T_yAT_y^{-1})^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{11}A_{11} & 0 \\ C_{11}A_{11}^2 & 0 \\ \vdots & \\ C_{11}A_{11}^{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando en cuenta que el rango de la matriz de observabilidad del par  $(C_1, A)$  es  $n_{y_1}$ , es posible obtener

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{11}A_{11} & 0 \\ C_{11}A_{11}^2 & 0 \\ \vdots & \\ C_{11}A_{11}^{n-1} & 0 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{11}A_{11} \\ C_{11}A_{11}^2 \\ \vdots \\ C_{11}A_{11}^{n-1} \end{bmatrix} = n_{y_1}.$$

Es importante resaltar que por definición el rango de la anterior matriz es igual al rango de la matriz de orden reducido, por lo tanto

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{11}A_{11} \\ C_{11}A_{11}^2 \\ \vdots \\ C_{11}A_{11}^{n_{y_1}-1} \end{bmatrix} = n_{y_1}.$$

La última matriz presentada es justamente la matriz de observabilidad del par  $(C_{11}, A_{11})$ , correspondiente al sistema reducido (3.8). Dado que, la matriz tiene

rango igual a  $n_{y_1}$ , entonces es posible concluir que el subsistema (3.8) es observable. ■

Los valores propios de la matriz  $A$  de (3.1) corresponden a la unión del conjunto de valores propios de las matrices transformadas  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  de (3.5).

Seleccione una matriz de ganancias para el observador de Luenberger del sistema (3.5), (3.6):

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & L_{23} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p},$$

en donde  $L_{11} \in \mathbb{R}^{n_{y_1} \times p_1}$ ,  $L_{22} \in \mathbb{R}^{(n-n_{y_1}) \times p_2}$ ,  $L_{23} \in \mathbb{R}^{(n-n_{y_1}) \times p_3}$ , son seleccionadas de tal forma que las matrices  $A_{11} - L_{11}C_{11}$ ,  $A_{22} - L_{22}C_{22} - L_{23}C_{32}$  sean Hurwitz. La matriz de ganancias  $L$  existe dado que el sistema satisface alguna de las proposiciones 2 ó 3. El observador lineal tipo Luenberger toma la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ &+ \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & L_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - \hat{y}_1 \\ y_2 - \hat{y}_2 \\ y_3 - \hat{y}_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

en donde  $\hat{y}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  es la estimación de salida dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} u. \quad (3.10)$$

El correspondiente sistema del error está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_1 \\ \dot{\tilde{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{E}_2 \end{bmatrix} \zeta(t), \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \zeta(t), \quad (3.12)$$

en donde  $\tilde{e} = \xi - z$ ,  $\tilde{y} = y - \hat{y}$ , y las matrices  $\tilde{A}_{11}$ ,  $\tilde{A}_{21}$ ,  $\tilde{A}_{22}$ ,  $\tilde{E}_2$  están definidas como

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= A_{11} - L_{11}C_{11}, \quad \tilde{A}_{22} = A_{22} - L_{22}C_{22} - L_{23}C_{32}, \\ \tilde{A}_{21} &= A_{21} - L_{23}C_{31}, \quad \tilde{E}_2 = L_{23}F_3 + E_2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.11) y (3.12) pueden escribirse en forma compacta como

$$\dot{\tilde{e}} = \tilde{A}\tilde{e} + \tilde{E}\zeta(t), \quad (3.13)$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{e} + \tilde{F}\zeta(t). \quad (3.14)$$

**Lema 10** *Considere que el sistema (3.5), (3.6) satisface la suposición 1 y alguna de las suposiciones 2 o 3. El observador (3.9), (3.10) garantiza la convergencia del error de estimación (3.13), (3.14) a una región de orden  $O(\zeta^+)$  del origen.*

*Prueba.* Si la matriz  $\tilde{A}$  es Hurwitz, entonces también las matrices  $\tilde{A}_{11}$ ,  $\tilde{A}_{22}$  son Hurwitz.

Considere la siguiente función de Lyapunov para el sistema del error

$$V = \tilde{e}^T H \tilde{e},$$

en donde  $H$  es una matriz simétrica positiva definida. La matriz  $H$  es seleccionada como la solución de la ecuación de Lyapunov:

$$H\tilde{A} + \tilde{A}^T H = -I.$$

Aquí es considerado el hecho de que la matriz  $\tilde{A}$  es Hurwitz. Calcule la derivada

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \tilde{e}^T (H\tilde{A} + \tilde{A}^T H) \tilde{e} + (\tilde{e}^T H \tilde{E} \zeta(t) + \zeta^T(t) \tilde{E}^T H \tilde{e}) \\ \dot{V} &\leq -I \|\tilde{e}\|^2 + 2 \|\tilde{e}\| \|H\| \|\tilde{E}\| \|\zeta\|. \end{aligned}$$

$\dot{V}$  es negativa definida con  $\zeta(t) = 0$ . Por tanto, si  $\zeta$  satisface la suposición 1, se obtiene que el error de estimación  $\tilde{e}$  converge a una vecindad acotada del origen  $\tilde{e} = 0$  [45]. A partir de ese momento  $\dot{\tilde{e}}$  se mantiene uniformemente acotada.

Considere ahora el subsistema (3.8). La aplicación del observador (3.9), (3.10) produce el error de estimación

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}}_1 &= \tilde{A}_{11} \tilde{e}_1 \\ \tilde{y}_1 &= C_{11} \tilde{e}_1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dado que  $\tilde{A}_{11}$  es Hurwitz, la estimación del error  $\tilde{e}_1 = \xi_1 - z_1$  converge asintóticamente a cero.

‡

**Corolario 2** *El error de estimación correspondiente al subsistema (3.8) converge asintóticamente a cero independientemente de la entrada desconocida.*

**Observación 1** *Es importante hacer notar que la transformación del sistema (3.1) a la forma (3.5), (3.6) permite que al aplicar el observador tipo Luenberger (3.9), (3.10), el error de estimación de los estados  $\xi_1$  no sea afectado por la entrada desconocida.*

La idea que se manejará a continuación tiene su base en el algoritmo presentado en la sección 2.1.3 y los trabajos de [32], [33], [39]. Los siguientes razonamientos son tomados como la base del procedimiento:

1. Si el par  $(\tilde{C}, \tilde{A},)$  es observable, entonces existe un conjunto de salidas de tal forma que el estado puede ser representado como una combinación lineal de ellas y sus derivadas.
2. Si la cuádrupla  $(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{F})$  es fuertemente observable, es posible deducir de las definiciones 5 y 8, y como consecuencia del Lema 3, que existe un conjunto de salidas de tal forma que el estado pueda ser representado como una combinación lineal de dichas salidas y sus derivadas independientemente de las entradas desconocidas.

A continuación se buscará un conjunto de derivadas de las salidas  $y_1$  y  $y_2$  mediante el diferenciador por modos deslizantes de orden superior [30], dichas derivadas serán combinadas linealmente con la salida  $y_3$  y la resultante combinación será, a su vez, derivada para encontrar una relación entre salidas y estados de manera independiente a las entradas desconocidas.

La forma en que se realizará la combinación de las salidas varía de acuerdo a si el sistema 3.1 satisface las suposiciones 2 ó 3.

## 3.2. Caso fuertemente observable

Considere que el sistema (3.1) satisface la suposición 2.

### 3.2.1. Reconstrucción del estado en tiempo finito

Denote como

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \\ \tilde{C}_3 \end{bmatrix}.$$

A continuación se aplicará el procedimiento descrito en la sección 2.1.4 junto a una serie de diferenciadores (vea la sección 2.2.2) al sistema del error (3.13), (3.14) para recuperar los estados. Obtenga las matrices

$$U_{1i}^T = [ \tilde{c}_{1i}^T \ (\tilde{c}_{1i}\tilde{A})^T \ \dots \ (\tilde{c}_{1i}\tilde{A}^{n_{1i}-1})^T ]$$

en donde  $\tilde{c}_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, p_1$  es el  $i$ ésimo renglón de la matriz  $\tilde{C}_1$ , y  $n_{1i}$  es un entero definido como

$$n_{1i} = \text{rango} [ \tilde{c}_{1i}^T \ (\tilde{c}_{1i}\tilde{A})^T \ \dots \ (\tilde{c}_{1i}\tilde{A}^{n-1})^T ]^T.$$

Note que la matriz  $U_{1i}$  corresponde a la matriz de observabilidad del par  $(\tilde{c}_{1i}, \tilde{A})$ .

Obviamente, el error de estimación de la salida  $\tilde{y}_1$  es medible. Aplique el diferenciador por modos deslizantes de orden superior descrito en la sección 2.2.2 a cada componente del vector  $\tilde{y}_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i1} &= w_{i1}, \\ w_{i1} &= -\alpha_{n_{1i}} N_i^{1/n_{1i}} |v_{i1} - \tilde{y}_{1i}|^{(n_{1i}-1)/n_{1i}} \text{sign}(v_{i1} - \tilde{y}_{1i}) + v_{i2}, \\ \dot{v}_{i2} &= w_{i2}, \\ w_{i2} &= -\alpha_{(n_{1i}-1)} N_i^{1/(n_{1i}-1)} |v_{i2} - w_{i1}|^{(n_{1i}-2)/(n_{1i}-1)} \text{sign}(v_{i2} - w_{i1}) + v_{i3}, \\ &\vdots \\ \dot{v}_{i,n_{1i}-1} &= w_{i,n_{1i}-1}, \\ w_{i,n_{1i}-1} &= -\alpha_2 N_i^{1/2} |v_{i,n_{1i}-1} - w_{i,n_{1i}-2}|^{1/2} \text{sign}(v_{i,n_{1i}-1} - w_{i,n_{1i}-2}) + v_{in_{1i}}, \\ \dot{v}_{in_{1i}} &= -\alpha_1 N_i \text{sign}(v_{in_{1i}} - w_{i,n_{1i}-1}), \end{aligned} \tag{3.16}$$

en donde  $N_i > 0$  y las constantes  $\alpha_i$  son seleccionadas de forma recursiva para cada componente de acuerdo a [30]. En particular, una posible selección de las ganancias es  $\alpha_1 = 1,1$ ,  $\alpha_2 = 1,5$ ,  $\alpha_3 = 2$ ,  $\alpha_4 = 3$ ,  $\alpha_5 = 5$ ,  $\alpha_6 = 8$ , que es suficiente para  $n_{1i} \leq 6$ . Los componentes  $v_{ij}$  pueden ser concentrados en el vector:

$$\tilde{v}_i^T = [v_{i1}^T \ v_{i2}^T \ \cdots \ v_{in_{1i}}^T]^T.$$

Note que cada vector  $\tilde{v}_i$  satisface en tiempo finito la relación  $\tilde{v}_{ij} = \tilde{y}_i^{(j-1)}$ ,  $j = 1, \dots, n_{1i}$  y por tanto, para todo  $\tilde{v}_i$  y  $U_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, p_1$ , la igualdad  $\tilde{v}_i = U_{1i}\tilde{e}$  es satisfecha después de tiempo finito.

Forme las matrices  $U_{1\text{extended}}$  y  $v_{\text{extended}}$  como:

$$U_{1\text{extended}} = [U_{11}^T \ \cdots \ U_{1p_1}^T]^T,$$

$$v_{\text{extended}} = [\tilde{v}_1^T \ \cdots \ \tilde{v}_{p_1}^T]^T.$$

Resulta claro que  $\text{rango } U_{1\text{extended}} = n_{y_1}$ , entonces, construya la matriz  $U_1 \in \mathbb{R}^{n_{y_1} \times n}$  seleccionando los primeros  $n_{y_1}$  renglones linealmente independientes de  $U_{1\text{extended}}$  y el vector  $v$  formado por los correspondientes renglones del vector  $v_{\text{extended}}$ , de tal forma que la igualdad  $v = U_1\tilde{e}$  sea satisfecha en tiempo finito.

Obtenga el vector de grados relativos parciales para la cuádrupla  $(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{F})$ . Sea  $\tilde{r}_i$  el grado relativo particular de la salida  $\tilde{y}_{2i}$  con respecto al vector de entradas desconocidas, en donde  $\tilde{y}_{2i}$  es el  $i$ ésimo componente de la salida  $\tilde{y}_2$ .

Para cada renglón de la matriz  $\tilde{C}_2$  obtenga

$$\tilde{U}_{2i}^T = [\tilde{c}_{2i}^T \ (\tilde{c}_{2i}\tilde{A})^T \ \cdots \ (\tilde{c}_{2i}\tilde{A}^{\tilde{r}_i-1})^T],$$

en donde  $\tilde{c}_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, p_2$  es el  $i$ ésimo renglón de la matriz  $\tilde{C}_2$  y  $\tilde{r}_i$  es el correspondiente grado relativo parcial del  $i$ ésimo componente del error de estimación de salida  $\tilde{y}_2$  con respecto a las entradas desconocidas.

Note que

$$\tilde{y}_{2i}^{(j-1)} = \tilde{c}_{2i}\tilde{A}^{j-1}\tilde{e}, j = 1, \dots, \tilde{r}_i, \quad (3.17)$$

en donde  $\tilde{y}_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, p_2$  es el  $i$ ésimo renglón de  $\tilde{y}_2$ , y  $\tilde{y}_{2i}^{(k)}$  representa la  $k$ ésima derivada de  $\tilde{y}_{2i}$ .

Aplique el diferenciador por modos deslizantes de orden superior descrito en la sección 2.2.2 a cada componente del error de estimación de salida  $\tilde{y}_2$  como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}_{i1} &= \bar{w}_{i1}, \\ \bar{w}_{i1} &= -\alpha_{\tilde{r}_i}\bar{N}_i^{1/\tilde{r}_i}|\bar{v}_{i1} - \tilde{y}_{2i}|^{(\tilde{r}_i-1)/\tilde{r}_i} \text{sign}(\bar{v}_{i1} - \tilde{y}_{2i}) + \bar{v}_{i2}, \\ \dot{\tilde{v}}_{i2} &= \bar{w}_{i2}, \\ \bar{w}_{i2} &= -\alpha_{\tilde{r}_i-1}\bar{N}_i^{1/(\tilde{r}_i-1)}|\bar{v}_{i2} - \bar{w}_{i1}|^{(\tilde{r}_i-2)/(\tilde{r}_i-1)} \text{sign}(\bar{v}_{i2} - \bar{w}_{i1}) + \bar{v}_{i3}, \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{v}}_{i,\tilde{r}_i-1} &= \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-1}, \\ \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-1} &= -\alpha_2\bar{N}_i^{1/2}|\bar{v}_{i,\tilde{r}_i-1} - \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-2}|^{1/2} \text{sign}(\bar{v}_{i,\tilde{r}_i-1} - \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-2}) + \bar{v}_{i\tilde{r}_i}, \\ \dot{\tilde{v}}_{i\tilde{r}_i} &= -\alpha_1\bar{N}_i \text{sign}(\bar{v}_{i\tilde{r}_i} - \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-1}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

en donde  $\bar{v}_{i_j}$  y  $\bar{w}_{i_j}$  son componentes del vector  $\bar{v}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_i}$  y  $\bar{w}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_i-1}$  respectivamente. El parámetro  $\bar{N}_i$  es seleccionado suficientemente grande para cada componente del error de estimación de salida, en particular,  $\bar{N}_i > |d_i|\zeta^+$ , en donde  $d_i = \tilde{c}_{2_i}\tilde{A}^{\tilde{r}_i-1}\tilde{E}$ . Las constantes  $\alpha_i$  son seleccionadas iterativamente para todas las componentes de acuerdo a [30]. Las condiciones iniciales son consideradas igual a cero.

Para cada componente de  $\tilde{y}_2$  forme el vector

$$\bar{v}_i^T = [\bar{v}_{i_1}^T \ \bar{v}_{i_2}^T \ \cdots \ \bar{v}_{i_{\tilde{r}_i}}^T].$$

Note que el vector  $\bar{v}_i$  satisface en tiempo finito la relación  $\bar{v}_{i_j} = \tilde{y}_{2_i}^{(j-1)}$ ,  $j = 1, \dots, \tilde{r}_i$ .

Defina la matriz extendida  $U_{2\text{extended}}$ , el vector extendido  $\bar{v}_{\text{extended}}$ , y calcule el entero  $n_{o2}$  como

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\text{extended}} &= [\bar{v}_1^T \ \cdots \ \bar{v}_{p_2}^T]^T, \\ U_{2\text{extended}} &= [\tilde{U}_{21}^T \ \cdots \ \tilde{U}_{2p_2}^T]^T, \\ n_{o2} &= \text{rango}(U_{2\text{extended}}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Forme la matriz de rango renglón completo  $U_2 \in \mathbb{R}^{n_{o2} \times n}$  seleccionando los primeros  $n_{o2}$  renglones linealmente independientes de la matriz  $U_{2\text{extended}}$ , y seleccione los correspondientes renglones del vector  $\bar{v}_{\text{extended}}$  de tal forma que la igualdad  $\bar{v} = U_2\tilde{e}$  se satisfaga después de tiempo finito.

Las derivadas de orden  $\tilde{r}_i - 1$  de cada componente de  $\tilde{y}_2$  satisfacen las igualdades  $\tilde{y}_{2_j}^{(\tilde{r}_i-1)} = \tilde{c}_{2_j}\tilde{A}^{\tilde{r}_i-1}\tilde{e}$ ,  $j = 1, \dots, p_2$ . Defina las matrices

$$\bar{U}_r = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{2_1}\tilde{A}^{\tilde{r}_1-1} \\ \tilde{c}_{2_2}\tilde{A}^{\tilde{r}_2-1} \\ \vdots \\ \tilde{c}_{2_{p_2}}\tilde{A}^{\tilde{r}_{p_2}-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_r = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1_{\tilde{r}_1}} \\ \bar{v}_{2_{\tilde{r}_2}} \\ \vdots \\ \bar{v}_{p_2_{\tilde{r}_{p_2}}} \end{bmatrix}.$$

Considere  $\tilde{M}_0 = 0_{n \times n}$  y  $\rho_0 = 0_{n \times 1}$ . Calcule la matriz  $\tilde{M}_{i+1}$  y el vector  $\rho_{i+1}$  como:

$$\tilde{M}_{i+1} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_i\tilde{E} \\ \bar{U}_r\tilde{E} \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} \tilde{M}_i\tilde{A} \\ \bar{U}_r\tilde{A} \\ C_3 \end{bmatrix}, \quad \rho_{i+1} = \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \gamma_{i2} \\ \vdots \\ \gamma_{i\kappa_i} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

en donde  $\kappa_i$  corresponde al número de renglones de la matriz  $\tilde{M}_{i+1}$ . En donde  $\tilde{\rho}_{i_j}$  es el resultado de diferenciar el vector  $\tilde{\rho}_i$  definido como:

$$\tilde{\rho}_i = \begin{bmatrix} \tilde{M}_i\tilde{E} \\ \bar{U}_r\tilde{E} \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} \rho_i \\ \bar{v}_r \\ \int_0^t y_3(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

El cálculo de la derivada se realiza aplicando el diferenciador de primer orden a cada componente del vector  $\tilde{\rho}_i$  como:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_{ij} &= \alpha_2 \tilde{N}_i^{1/2} |\beta_{ij} - \tilde{\rho}_{ij}|^{1/2} \text{sign}(\beta_{ij} - \tilde{\rho}_{ij}) + \gamma_{ij} \\ \dot{\gamma}_{ij} &= \alpha_1 \tilde{N}_i \text{sign}(\gamma_{ij} - \beta_{ij})\end{aligned}\quad (3.21)$$

en donde  $\tilde{\rho}_{ij}$  es la  $j$ ésima componente del vector  $\tilde{\rho}_i$ ;  $\tilde{N}_i > \|\bar{D}_i\| \zeta^+$ , en donde  $\bar{D}_i$  es el  $i$ ésimo renglón de la matriz

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_i \tilde{E} \\ \tilde{U}_r \tilde{E} \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \tilde{A} \tilde{E}.$$

Note que la matriz  $\bar{D}$  es calculada para cada matriz  $\tilde{M}_i$  que se presentan a continuación.

El cálculo es realizado iterativamente hasta que la siguiente igualdad sea satisfecha:

$$\text{rango} [U_1^T \ U_2^T \ \tilde{M}_{i+1}^T]^T = \text{rango} [U_1^T \ U_2^T \ \tilde{M}_i^T]^T. \quad (3.22)$$

Nombre como  $l$  al número de matrices  $\tilde{M}_i$  calculadas menos uno.

**Lema 11** *Si la cuádrupla  $(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{F})$  es fuertemente observable, entonces*

$$\text{rango } \tilde{M}_l = n.$$

*Prueba.* De acuerdo con los resultados presentados en las secciones 2.1.4 y 2.2.2, es claro que la siguiente igualdad es satisfecha después de tiempo finito:

$$\rho_l = \tilde{M}_l \tilde{e}. \quad (3.23)$$

Note que el vector  $\rho_{l-1}$  está compuesto por combinaciones lineales de las salidas y sus derivadas.

Suponga que la cuádrupla  $(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{F})$  es fuertemente observable (aplicando la definición 8 esto implica que  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ) y que no existe un matriz  $M_i$  tal que la condición (3.22) sea satisfecha. Entonces

$$\text{rango} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ M_l \end{bmatrix} < n.$$

Es claro de (3.23) que existen valores de  $\tilde{e} \neq 0$  tales que  $\rho_l = 0$ . Dado que  $\rho_l$  está compuesta por una combinación lineal de salidas y sus derivadas, la igualdad  $y = 0 \ \forall t \geq 0$  implica que el lado izquierdo de la igualdad (3.23) es igual a cero para valores de  $\tilde{e} \neq 0$ . De acuerdo a las definiciones 5 y 8, es posible afirmar que el sistema  $\{\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{F}\}$  no es fuertemente observable, lo cual contradice la suposición inicial.

Por otro lado, suponga que existe una matriz  $\tilde{M}_l$  tal que se satisface la proposición del lema, en este caso las salidas y un conjunto de sus derivadas pueden ser representadas mediante una combinación lineal de los estados  $\tilde{e}$  independientemente de las entradas desconocidas. La invertibilidad izquierda de la matriz  $[U_1^T \ U_2^T \ M_l^T]^T$  nos permite también representar los estados mediante una combinación lineal de las salidas y sus derivadas. Como resultado  $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , entonces por definición la cuádrupla  $(\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{F})$  satisface la definición 8, y por tanto es fuertemente observable.

‡

Seleccione los primeros  $n - n_{y_1} - n_{o_2}$  renglones linealmente independientes de  $\tilde{M}_l$  para formar la matriz  $M_d$  tal que

$$\text{rango} [U_1^T \ U_2^T \ M_d^T]^T = n,$$

seleccione los correspondientes renglones de  $\rho_l$  para formar el vector  $\rho_d$ . Calcule la matriz  $M_n$  y el vector  $\rho_n$  como

$$M_n = \begin{bmatrix} U_2 \\ M_d \end{bmatrix}, \quad \rho_n = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \rho_d \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Es claro que la siguiente igualdad es satisfecha en tiempo finito:

$$\rho_n = M_n \tilde{e}.$$

El algoritmo de observación con convergencia del error a cero en tiempo finito está dado por

$$\hat{\xi} = z + \begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ \rho_n \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

**Teorema 10** *Considere que las suposiciones 1 y 2 son satisfechas. Los estados del sistema (3.5) son estimados de forma **exacta** y en **tiempo finito** por el observador (3.9), (3.10), (3.16), (3.18), (3.20), (3.21), (3.25).*

*Prueba.*

De acuerdo a los resultados de la sección 3.1 es posible garantizar que el error de estimación  $\tilde{e}$  se encuentra acotado dentro de una región de orden  $O(\zeta^+)$ .

Defina el error de estimación como  $e = \xi - \hat{\xi}$ , de la ecuación (3.25) se obtiene

$$e = \xi - z - \begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ \rho_n \end{bmatrix} = \tilde{e} - \begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ \rho_n \end{bmatrix}$$

Multiplique la última ecuación por la matriz  $\begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix}$ :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix} e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix} \tilde{e} - \begin{bmatrix} v \\ \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ \rho_n \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Pruebe ahora la convergencia de  $e_1$  a cero. Note que por definición  $U_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} = 0$ , en consecuencia  $e_1$  depende solamente de  $\tilde{e}_1$ .

Considere el diferenciador por modos deslizantes de orden superior (3.16). Pruebe que la igualdad  $v_{ij} = \tilde{y}_{1i}^{(j-1)}$  se satisface para  $j = 1, \dots, n_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, p_1$ .

Denote la superficie de deslizamiento como  $\sigma_{ij} = v_{ij} - (\tilde{y}_{1i})^{(j-1)}$  y obtenga

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{i1} &= -\alpha_{n_{1i}} N_i^{1/n_{1i}} |\sigma_{i1}|^{(n_{1i}-1)/n_{1i}} \text{sign}(\sigma_{i1}) + \sigma_{i2}, \\ \dot{\sigma}_{i2} &= -\alpha_{n_{1i}-1} N_i^{1/(n_{1i}-1)} |\sigma_{i2} - \dot{\sigma}_{i1}|^{(n_{1i}-2)/(n_{1i}-1)} \text{sign}(\sigma_{i2} - \dot{\sigma}_{i1}) + \sigma_{i3}, \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_{i, n_{1i}-1} &= -\alpha_2 N_i^{1/2} |\sigma_{i, n_{1i}-1} - \dot{\sigma}_{i, n_{1i}-2}|^{1/2} \text{sign}(\sigma_{i, n_{1i}-1} - \dot{\sigma}_{i, n_{1i}-2}) + \sigma_{i, n_{1i}}, \\ \dot{\sigma}_{i, n_{1i}} &= -\alpha_1 N_i \text{sign}(\sigma_{i, n_{1i}} - \dot{\sigma}_{i, n_{1i}-1}) - \tilde{y}_{1i}^{(n_{1i})}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Demuestre ahora que la dinámica de  $\sigma_{ij}$  es estable en tiempo finito. Dado que (3.15) es estable, a partir de cierto instante,  $\tilde{e}_i$  y  $\dot{\tilde{e}}_i$  se mantiene dentro de una región acotada de amplitud máxima  $N_i$ . La dinámica de (3.27) satisface la inclusión diferencial

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{i1} &= -\alpha_{n_{1i}} N_i^{1/n_{1i}} |\sigma_{i1}|^{(n_{1i}-1)/n_{1i}} \text{sign}(\sigma_{i1}) + \sigma_{i2}, \\ \dot{\sigma}_{i2} &= -\alpha_{n_{1i}-1} N_i^{1/(n_{1i}-1)} |\sigma_{i2} - \dot{\sigma}_{i1}|^{(n_{1i}-2)/(n_{1i}-1)} \text{sign}(\sigma_{i2} - \dot{\sigma}_{i1}) + \sigma_{i3}, \\ &\vdots \\ \dot{\sigma}_{i, (n_{1i}-1)} &= -\alpha_2 N_i^{1/2} |\sigma_{i, n_{1i}-1} - \dot{\sigma}_{i, n_{1i}-2}|^{1/2} \text{sign}(\sigma_{i, n_{1i}-1} - \dot{\sigma}_{i, n_{1i}-2}) + \sigma_{i, n_{1i}}, \\ \dot{\sigma}_{i, n_{1i}} &\in -\alpha_1 N_i \text{sign}(\sigma_{i, n_{1i}} - \dot{\sigma}_{i, n_{1i}-1}) + [-N_i \ N_i]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

El resto de la prueba está basada en el lema 9 presentado en la sección 2.2.2.

Entonces, existe un modo deslizante de orden superior  $\sigma_{i1} = \dots = \sigma_{i, n_{1i}} = 0$  y después de tiempo finito la siguiente igualdad es satisfecha

$$v_{ij} = \tilde{y}_{1i}^{(j-1)}, \quad j = 1, \dots, n_{1i}. \quad (3.29)$$

Las matrices  $U_{1i}$  pueden ser escritas como

$$U_{1i} = \begin{bmatrix} c_{11i} & 0 \\ c_{11i} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ c_{11i} \tilde{A}_{11}^{n_{1i}-1} & 0 \end{bmatrix},$$

y el producto  $U_{1i} \tilde{e}$  puede ser expresado como

$$U_{1i} \tilde{e} = \begin{bmatrix} c_{11i} \\ c_{11i} \tilde{A}_{11} \\ \vdots \\ c_{11i} \tilde{A}_{11}^{n_{1i}-1} \end{bmatrix} \tilde{e}_1.$$

Por otro lado, note que las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{1i} \\ \dot{\tilde{y}}_{1i} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{1i}^{(n_{1i}-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11i} \\ c_{11i}\tilde{A}_{11} \\ \vdots \\ c_{11i}\tilde{A}_{11}^{n_{1i}-1} \end{bmatrix} \tilde{e}_1, \quad (3.30)$$

en donde  $\tilde{y}_{1i}^{(n_{1i}-1)}$ ,  $i = 1, \dots, p_1$  denota la derivada de orden  $n_{1i} - 1$  de la  $i$ ésima componente del vector  $\tilde{y}_1$ .

El componente  $e_1$  del error de estimación es expresado como

$$e_1 = U_1 \tilde{e} - v. \quad (3.31)$$

La matriz  $U_1$  y el vector  $v$  están compuestos por renglones de las matrices extendidas  $\tilde{U}_{1extended}$  y  $v_{extended}$ . El resto de la prueba es consecuencia de las igualdades (3.29) y (3.30).

Analice ahora la componente  $e_2$  del error de estimación:

$$e_2 = M_n \tilde{e} - \rho_n$$

Substituyendo el valor de  $M_n$  y  $\rho_n$ , calculado de acuerdo a (3.24), en el lado derecho de la anterior ecuación se obtiene

$$e_2 = \begin{bmatrix} U_2 \\ M_d \end{bmatrix} \tilde{e} - \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \rho_d \end{bmatrix}$$

La convergencia a cero de  $e_2$  depende de la convergencia de  $\bar{v}$  a  $U_2 \tilde{e}$  y  $\rho_d$  a  $M_d \tilde{e}$ .

*Convergencia de  $\bar{v} \rightarrow U_2 \tilde{e}$ .* Considere la variable auxiliar  $\bar{e}_{2i} = \tilde{U}_{2i} \tilde{e}$ , construida para cada bloque de la matriz extendida  $U_{2extended}$ . La igualdad (3.17) es satisfecha para cada bloque, entonces el vector  $\bar{e}_{2i}$  puede ser representado por

$$\bar{e}_{2i}^T = \left[ \tilde{y}_{2i} \quad \dot{\tilde{y}}_{2i} \quad \cdots \quad \tilde{y}_{2i}^{(\tilde{r}_i-1)} \right].$$

Ahora es claro que el siguiente paso es probar que  $\bar{v} \rightarrow \bar{e}_{2i}$ .

Para cada  $\tilde{y}_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, p_2$  denote  $\sigma_{ij} = v_{ij} - (\tilde{y}_{2i})^{(j-1)}$  y obtenga similares ecuaciones para (3.27) y (3.28). Dado que  $|d_i| \zeta^+ > |y_{2i}^{(\tilde{r}_i)}|$  se cumple, entonces es posible seleccionar las ganancias  $\bar{N}_i$  suficientemente grandes de tal forma que la dinámica de  $\sigma_i$  es estable en tiempo finito.

La convergencia de la inclusión diferencial es nuevamente una consecuencia del lema 9, presentado en la sección 2.2.2.

Las igualdades  $\tilde{y}_{2i}^{(j-1)} = v_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, \tilde{r}_i$  son satisfechas en tiempo finito. Por lo tanto se garantiza la convergencia en tiempo finito de  $\bar{v}$  a  $\tilde{U}_{2i} \tilde{e}$ . El vector  $v$  y la matriz  $U_2$  son seleccionadas de  $\bar{v}_{extended}$  y  $U_{2extended}$ . Con una apropiada selección de  $v$  y  $U_2$ , la igualdad  $v = U_2 \tilde{e}$  es satisfecha en tiempo finito.

*Convergencia de  $\rho_d \rightarrow M_d \tilde{e}$ .* La aplicación del algoritmo (3.21) a las coordenadas  $\rho_i$  pueden verse como un caso particular de (3.18) con  $\tilde{r}_i = 2$ . Entonces la igualdad  $\gamma_i = \dot{\rho}_i$  es establecida en tiempo finito.

Está probado que  $v \rightarrow U_1 \tilde{e}_1$ ,  $\bar{v} \rightarrow U_2 \tilde{e}$ ,  $\rho_d \rightarrow M_d \tilde{e}$ . Entonces, la convergencia en tiempo finito de  $e_1$  y  $e_2$  es una consecuencia de la prueba anterior.

‡

**Observación 2** Obviamente el estado estimado  $\hat{x}$  puede ser obtenido mediante la relación  $\hat{x} = T_y^{-1}\hat{\zeta}$ .

### 3.2.2. Reconstrucción de la entrada desconocida

Considere que las siguientes suposiciones se cumplen.

**Suposición 4** La  $k$ -ésima derivada de la entrada desconocida  $\zeta_i^{(k)}(t)$  es una función acotada medible en el sentido de Lebesgue,  $|\zeta_i^{(k)}(t)| \leq \zeta_{1i}^+$ .

**Observación 3** La siguiente igualdad siempre es satisfecha:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{E}_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = m.$$

La anterior igualdad es probada de una forma sencilla a partir de que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = m$$

y debido a que las matrices  $\tilde{E}_2$  y  $F_3$  pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{E}_2 \\ 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\zeta} & 0 \\ 0 & F^{\perp} \\ 0 & F^{\perp\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix},$$

en donde  $\det(T_{\zeta}) \neq 0$ , por lo tanto,  $\text{rango} \begin{bmatrix} \tilde{E}_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = m$ .

Expresé

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ \rho_n \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

en donde  $\hat{e}_1 \in \mathbb{R}^{n_{y_1}}$  y  $\hat{e}_2 \in \mathbb{R}^{n-n_{y_1}}$ .

La entrada desconocida puede ser identificada por medio de la igualdad

$$\hat{\zeta} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_2 \\ F_3 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \dot{\hat{e}}_2 - [\tilde{A}_{21} \ \tilde{A}_{22}] \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{bmatrix} \\ \tilde{y}_3 - [C_{31} \ C_{32}] \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Los vectores  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  son conocidos. El valor de  $\dot{\hat{e}}_2$  puede ser calculado en dos diferentes formas.

El valor de  $\dot{\hat{e}}_2$  es calculado utilizando la igualdad

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{e}}_1 \\ \dot{\hat{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ M_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\rho}_n \end{bmatrix}.$$

El vector  $\dot{\hat{v}}$  y el vector  $\dot{\hat{\rho}}_n$  pueden ser calculados de dos distintas formas. Aún cuando el primer método no utiliza directamente la suposición 4, el uso de un filtro paso bajas requiere la existencia de cierta cota.

*Identificación de la entrada desconocida por medio de filtración.*

Considere el vector

$$\dot{\hat{v}}_i^T = \left[ v_{i_2} \ v_{i_3} \ \cdots \ v_{i_{n_{1_i}}} \ \dot{v}_{i_{n_{1_i}}} \right]. \quad (3.34)$$

El término  $\dot{v}_{i_{n_{1_i}}}$  es una componente de alta frecuencia evaluada en (3.18). Será necesario definir un estimado de la componente de alta frecuencia  $\dot{v}_{i_{n_{1_i}}}$  utilizando la técnica de control equivalente como

$$\tau \dot{\zeta} = \dot{v}_{i_{n_{1_i}}} - \zeta \quad (3.35)$$

Teóricamente, la señal  $\dot{v}_{i_{n_{1_i}}}$  conmuta a una frecuencia infinita cuando se ha alcanzado el modo deslizante. En la práctica, la frecuencia de conmutación es alta pero finita debido a restricciones computacionales. Entonces, la solución de (3.35) dependerá de la frecuencia a la que pueda conmutar el término  $\dot{v}_{i_{n_{1_i}}}$ , llame  $f_{sw}$  a dicha frecuencia. Está descrito en [9] que

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ f_{sw} \rightarrow \infty}} \zeta = \dot{v}_{i_{n_{1_i}}} \quad (3.36)$$

Aún más, con la frecuencia de conmutación  $f_{sw}$  suficientemente grande, se satisface que la estimación de la variable  $\dot{v}_{i_{n_{1_i}}}$  depende de la constante de tiempo  $\tau$ , satisfaciendo la siguiente igualdad

$$|\zeta - \dot{v}_{i_{n_{1_i}}}| \leq O(\tau) \quad (3.37)$$

lo que implica la existencia de una constante  $a > 0$  tal que después de un periodo transitorio, el error de estimación satisface la desigualdad

$$|\zeta - \dot{v}_{i_{n_{1_i}}}| \leq a\tau \quad (3.38)$$

Al aplicar un filtro paso bajas la componente de alta frecuencia es filtrada obteniendo un estimado de  $\dot{v}_{i_{n_{1_i}}}$  en  $\zeta$ .

Considere la última iteración aplicada para obtener  $M_n$ . Dado que  $\ddot{\hat{\rho}}_{ij}$  es un término de alta frecuencia, debe ser filtrado para obtener un valor estimado de  $\dot{\hat{\rho}}_{ij}$ , para formar la matriz  $\dot{\hat{\rho}}_n$ , por lo que es posible aplicar el mismo procedimiento descrito anteriormente.

*Identificación de la entrada desconocida mediante extensión del diferenciador por modos deslizantes de orden superior.*

El segundo método para obtener los estimados de  $\dot{\hat{v}}$  y  $\dot{\hat{\rho}}_n$  está basado en la extensión del diferenciador (3.16) de orden  $n_{1_i}$  a un orden  $n_{1_i} + k$  obteniendo

así las componentes:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{i,1} &= w_{i,1}, \\
w_{i,1} &= -\alpha_{r_i+k} M^{1/(r_i+k)} |v_{i,1} - \tilde{e}_y|^{(r_i+k-1)/(r_i+k)} \text{sign}(v_{i,1} - \tilde{e}_y) + v_{i,2}, \\
\dot{v}_{i,2} &= w_{i,2} \\
w_{i,2} &= -\alpha_{r_i+k-1} M^{1/(r_i+k-1)} |v_{i,2} - w_{i,1}|^{(r_i+k-2)/(r_i+k-1)} \text{sign}(v_{i,2} - w_{i,1}) + v_{i,3}, \\
&\vdots \\
\dot{v}_{i,r_i} &= w_{i,r_i}, \\
w_{i,r_i} &= -\alpha_{k+1} M^{1/(k+1)} |v_{i,r_i} - w_{i,r_i-1}|^{(k)/(k+1)} \text{sign}(v_{i,r_i} - w_{i,r_i-1}) + v_{r_i+1}, \\
&\vdots \\
\dot{v}_{i,r_i+k} &= -\alpha_1 M \text{sign}(v_{i,r_i+k} - w_{i,r_i+k-1}),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Defina el vector  $\dot{\tilde{v}}_i$  como

$$\dot{\tilde{v}}_i^T = \begin{bmatrix} v_{i2} & v_{i3} & \cdots & v_{i_{n_{1_i}+1}} \end{bmatrix}; \tag{3.40}$$

y defina el vector extendido  $\tilde{v}_{\text{extended}} = [\dot{\tilde{v}}_1^T \ \dots \ \dot{\tilde{v}}_{p_1}^T]^T$ . Seleccione los renglones de  $\tilde{v}_{\text{extended}}$  que fueron seleccionados para formar  $U_2$ , para formar ahora el vector  $\tilde{v}$ . Note que la siguiente igualdad se satisface  $\tilde{v} = U_2 \tilde{A} \tilde{e}_1$ .

Si la entrada desconocida satisface la suposición 4, entonces es posible extender el orden del diferenciador (3.21) al segundo orden:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}}_{ij} &= \beta_1 N_{\rho_{ij}}^{1/3} |\hat{\rho}_{ij} - \rho_{ij}|^{2/3} \text{sign}(\hat{\rho}_{ij} - \rho_{ij}) + \int \ddot{\hat{\rho}}_{ij} dt \\
\ddot{\hat{\rho}}_{ij} &= \beta_2 N_{\rho_{ij}}^{1/2} \left| \int \ddot{\hat{\rho}}_{ij} dt - \dot{\hat{\rho}}_{ij} \right|^{1/2} \text{sign} \left( \int \ddot{\hat{\rho}}_{ij} dt - \dot{\hat{\rho}}_{ij} \right) + \int \ddot{\ddot{\hat{\rho}}}_{ij} dt \\
\ddot{\ddot{\hat{\rho}}}_{ij} &= \beta_3 N_{\rho_{ij}} \text{sign} \left( \int \ddot{\ddot{\hat{\rho}}}_{ij} dt - \ddot{\hat{\rho}}_{ij} \right)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Los siguientes dos teoremas son obtenidos para la identificación de la entrada desconocida.

**Teorema 11** *Sea satisfecha la suposición 2. El valor **exacto** de la entrada desconocida  $\zeta$  del sistema (3.1) es estimada asintóticamente por el algoritmo (3.9), (3.10), (3.16), (3.18), (3.33), (3.34).*

**Teorema 12** *Sea satisfecha las suposiciones 2 y 4. La aplicación del algoritmo (3.9), (3.10), (3.16), (3.18), (3.33), (3.40), garantiza la identificación de la entrada desconocida en tiempo finito.*

### 3.2.3. Ejemplo

Considere el siguiente Sistema Lineal Invariante en el Tiempo con Entrada Desconocida:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + E\zeta(t), \\
y &= Cx + F\zeta(t).
\end{aligned}$$

En donde las matrices  $A, C, E, F$  toman la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que los valores propios de  $A$  son

$$\begin{aligned} &1,5000 + 0,8660i \\ &1,5000 - 0,8660i \\ &-0,1217 + 1,3066i \\ &-0,1217 - 1,3066i \\ &0,6217 + 0,4406i \\ &0,6217 - 0,4406i \end{aligned}$$

por lo que el sistema es inestable. El sistema no tiene ceros invariantes, por lo que satisface la suposición 2. El vector de entradas desconocidas satisface la suposición 1 y está dado por:

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) + 0,5\text{sen}(0,8t + 0,3) + 0,5 \\ \text{sen}(0,5 + 5\text{sen}(0,5t)) \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales del sistema son  $x_0 = [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ . Para realizar la transformación de las salidas se utiliza la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} F_{\perp}^1 \\ F_{\perp}^2 \\ F_{\perp\perp\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación  $T_y$  definida de acuerdo a (3.3) está dada por:

$$T_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema en la forma (3.5), (3.6) toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{11} \\ \dot{\xi}_{12} \\ \dot{\xi}_{21} \\ \dot{\xi}_{22} \\ \dot{\xi}_{23} \\ \dot{\xi}_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \xi_{23} \\ \xi_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \zeta$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \xi_{23} \\ \xi_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \zeta$$

La ganancia del observador tipo Luenberger (3.9) está dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 442 & 0 \\ 0 & 136 & 0 \\ 0 & 567 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz  $\tilde{A}$  están dados por  $-1, -2, -3, -4, -5, -6$ . El error de estimación (3.13) se muestra en la Figura 3.1, note que el error de estimación se encuentra acotado.

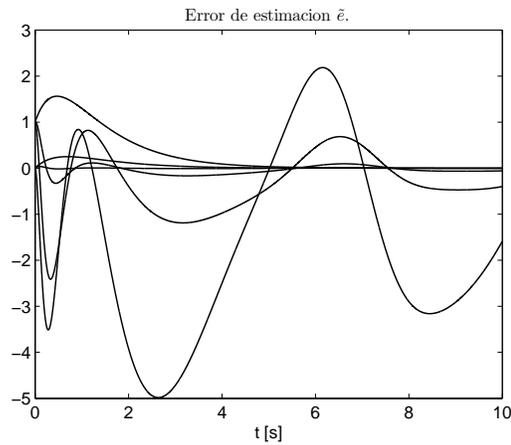


Figura 3.1: Error de estimación  $\tilde{e}$  acotado.

Considerando el estimado de las salidas como (3.10) es posible definir los errores de estimación de salida como  $\tilde{y}_1 = y_1 - \hat{y}_1$ ,  $\tilde{y}_2 = y_2 - \hat{y}_2$  y  $\tilde{y}_3 = y_3 - \hat{y}_3$ . El grado relativo parcial de la salida  $\tilde{y}_2$  con respecto a la entrada desconocida está dado por  $\tilde{r}_1 = 3$ . Aplicando diferenciador por modos deslizantes de orden superior a las salidas  $\tilde{y}_1$  y  $\tilde{y}_2$  como:

$$\begin{aligned}\dot{v}_{1,1} &= w_{1,1}, \\ w_{1,1} &= -\alpha_2 \bar{N}_1^{1/2} |v_{1,1} - \tilde{y}_1|^{1/2} \text{sign}(v_{1,1} - \tilde{y}_1) + v_{1,2}, \\ \dot{v}_{1,2} &= -\alpha_1 \bar{N}_1 \text{sign}(v_{1,2} - w_{1,1}), \\ \dot{\bar{v}}_{1,1} &= \bar{w}_{1,1}, \\ \bar{w}_{1,1} &= -\alpha_3 \bar{N}_1^{1/3} |\bar{v}_{1,1} - \tilde{y}_2|^{2/3} \text{sign}(\bar{v}_{1,1} - \tilde{y}_2) + \bar{v}_{1,2}, \\ \dot{\bar{v}}_{1,2} &= \bar{w}_{1,2}, \\ \bar{w}_{1,2} &= -\alpha_2 \bar{N}_1^{1/2} |\bar{v}_{1,2} - \bar{w}_{1,1}|^{1/2} \text{sign}(\bar{v}_{1,2} - \bar{w}_{1,1}) + \bar{v}_{1,3}, \\ \dot{\bar{v}}_{1,3} &= -\alpha_1 \bar{N}_1 \text{sign}(\bar{v}_{1,3} - \bar{w}_{1,2}),\end{aligned}$$

Calculando el vector  $\tilde{\rho}_1$  y  $\rho_1$  toman la forma:

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_{1,3} \\ \int_0^t y_3 dt \end{bmatrix}, \quad \rho_1 = \gamma_1,$$

en donde  $\gamma_1$  es resultado de aplicar el diferenciador de primer orden a la variable  $\tilde{\rho}_1$  como:

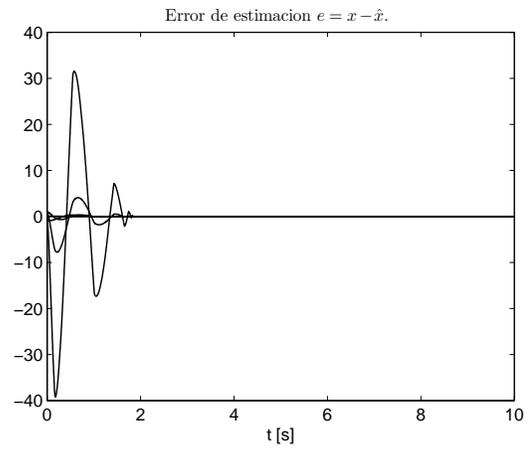
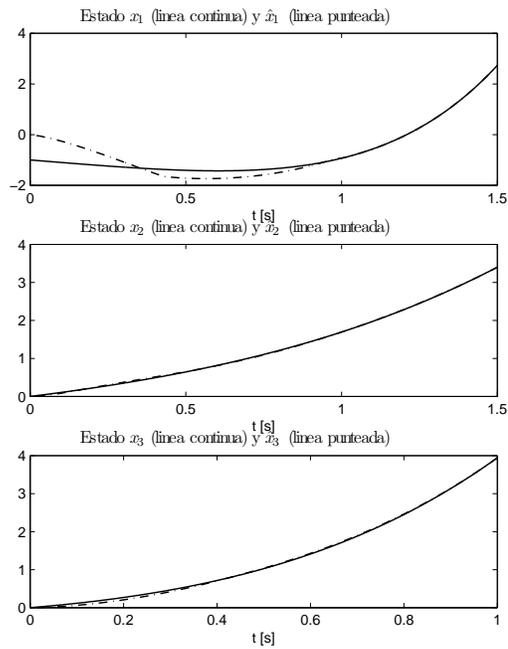
$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1 &= \alpha_2 \bar{N}_1^{1/2} |\beta_1 - \tilde{\rho}_1|^{1/2} \text{sign}(\beta_1 - \tilde{\rho}_1) + \gamma_1 \\ \dot{\gamma}_1 &= \alpha_1 \bar{N}_1 \text{sign}(\gamma_1 - \beta_1)\end{aligned}$$

Finalmente la matriz  $M_n$  y el vector  $\rho_n$ , definidos en (3.24), están dados por:

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 225 & 1 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -4267 & -40 & 450 & 2 \end{bmatrix}, \quad \rho_n = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1,1} \\ \bar{v}_{1,2} \\ \bar{v}_{1,3} \\ \rho_1 \end{bmatrix}$$

Considere las condiciones iniciales para el observador como  $\hat{x}_0 = 0$ . Los errores de estimación  $e = x - \hat{x}$  son presentados en la figura 3.2. Note la convergencia en tiempo finito de los errores de estimación independientemente de la entrada desconocida. La convergencia de la estimación de los estados  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  se muestra en la Figura 3.3. La convergencia de los estados  $x_4$ ,  $x_5$  y  $x_6$  se muestra en la Figura 3.4, note la convergencia de las estimaciones a los valores reales aún cuando las señales son inestables.

La identificación de la entrada desconocida se realizará mediante la extensión del diferenciador por modos deslizantes de orden superior. Para obtener el valor de  $\hat{e}_2$  requerido en (3.33) es necesario aplicar los siguientes diferenciadores

Figura 3.2: Convergencia en tiempo finito de los errores de estimación  $e$ .Figura 3.3: Convergencia de la estimación de los estados  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .

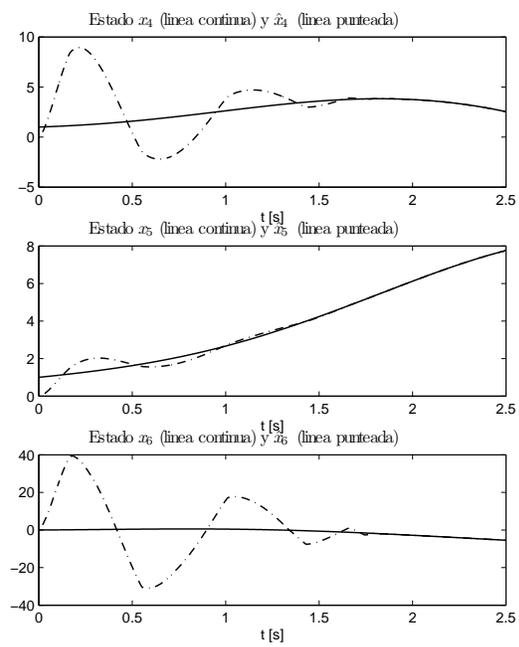


Figura 3.4: Convergencia de la estimación de los estados  $x_4$ ,  $x_5$  y  $x_6$ .

extendidos un orden a las señales  $\tilde{y}_2$  y  $\tilde{\rho}_1$ :

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{v}}_{1,1} &= \bar{w}_{1,1}, \\
\bar{w}_{1,1} &= -\alpha_4 \bar{N}_1^{1/4} |\bar{v}_{1,1} - \tilde{y}_2|^{3/4} \text{sign}(\bar{v}_{1,1} - \tilde{y}_2) + \bar{v}_{1,2}, \\
\dot{\bar{v}}_{1,2} &= \bar{w}_{1,2}, \\
\bar{w}_{1,2} &= -\alpha_3 \bar{N}_1^{1/3} |\bar{v}_{1,2} - \bar{w}_{1,1}|^{2/3} \text{sign}(\bar{v}_{1,2} - \bar{w}_{1,1}) + \bar{v}_{1,3}, \\
\dot{\bar{v}}_{1,3} &= \bar{w}_{1,3}, \\
\bar{w}_{1,3} &= -\alpha_2 \bar{N}_1^{1/2} |\bar{v}_{1,3} - \bar{w}_{1,2}|^{1/2} \text{sign}(\bar{v}_{1,3} - \bar{w}_{1,2}) + \bar{v}_{1,4}, \\
\dot{\bar{v}}_{1,4} &= -\alpha_1 \bar{N}_1 \text{sign}(\bar{v}_{1,4} - \bar{w}_{1,3}), \\
\dot{\hat{\rho}}_1 &= \beta_1 N_{\rho_1}^{1/3} |\hat{\rho}_1 - \rho_1|^{2/3} \text{sign}(\hat{\rho}_1 - \rho_1) + \int \ddot{\hat{\rho}}_1 dt \\
\ddot{\hat{\rho}}_1 &= \beta_2 N_{\rho_1}^{1/2} \left| \int \ddot{\hat{\rho}}_1 dt - \dot{\hat{\rho}}_1 \right|^{1/2} \text{sign} \left( \int \ddot{\hat{\rho}}_1 dt - \dot{\hat{\rho}}_1 \right) + \int \dddot{\hat{\rho}}_1 dt \\
\dddot{\hat{\rho}}_1 &= \beta_3 N_{\rho_1} \text{sign} \left( \int \ddot{\hat{\rho}}_1 dt - \dot{\hat{\rho}}_1 \right)
\end{aligned}$$

La convergencia a cero del error de estimación de los estados se muestra en la Figura 3.5. Note que la extensión del orden de los diferenciadores no afecta la convergencia en tiempo finito de los estados. La estimación de la entrada desconocida se muestra en la Figura 3.6, es importante resaltar que la identificación se lleva a cabo en tiempo finito.

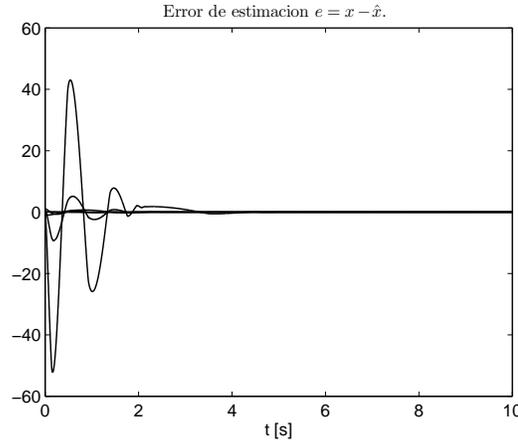


Figura 3.5: Convergencia en tiempo finito de los errores de estimación  $e$  con el método de extensión de los diferenciadores.

### 3.3. Caso fuertemente detectable

Considere que el sistema (3.1) satisface la suposición 3.

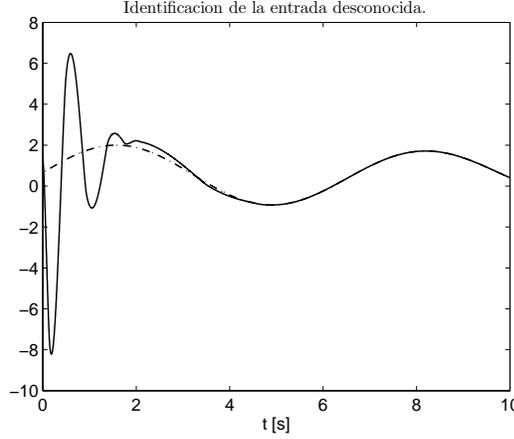


Figura 3.6: Identificación en tiempo finito de la entrada desconocida, (valor real-línea punteada, valor estimado-línea continua).

### 3.3.1. Reconstrucción asintótica de los estados

A continuación se buscará la matriz  $Q$  presentada en el Lema 4 y la matriz de transformación  $T$  dada en (2.13), tal que al representar el sistema del error (3.13), (3.14) en la forma (2.14) y aplicar la transformación (2.13), sea llevado a la forma descrita en el teorema 5.

Para ello, será necesario conocer los subespacios  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{V}^*$ ,  $\mathcal{V}_{\bar{\mathcal{N}}}$  de la representación (3.13), (3.14) e introducir una serie de definiciones que se derivan de la división de las salidas mostrada en la representación (3.14).

Llame  $\mathcal{N}_1$  al subespacio inobservable del par  $(\tilde{C}_1, \tilde{A})$ . Nombre como  $\bar{\mathcal{N}}_1$  al complemento de este subespacio (el subespacio observable del par  $(\tilde{C}_1, \tilde{A})$ ). Es claro que  $\mathcal{N}_1 \supseteq \mathcal{V}^* \supseteq \mathcal{N}$  y  $\mathcal{N}_1 \oplus \bar{\mathcal{N}}_1 = \mathcal{X}$ .

Sea  $\tilde{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, p_2$  el grado relativo parcial de  $\tilde{c}_{2_i}$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{F}$ , en donde  $\tilde{c}_{2_i}$  corresponde al  $i$ ésimo renglón de la matriz  $\tilde{C}_2$ .

**Definición 13** *Defina como el subespacio diferencialmente inobservable de la tripleta  $\{\tilde{C}_2, \tilde{A}, \tilde{E}\}$  como el conjunto*

$$\mathcal{R}_2 = \bigcap_{i=0}^{\tilde{r}_1-1} \ker \left( \tilde{c}_{2_1} \tilde{A}^i \right) \cap \bigcap_{i=0}^{\tilde{r}_2-1} \ker \left( \tilde{c}_{2_2} \tilde{A}^i \right) \cap \dots \cap \bigcap_{i=0}^{\tilde{r}_{p_2}-1} \ker \left( \tilde{c}_{2_{p_2}} \tilde{A}^i \right).$$

Nombre al subespacio complementario de  $\mathcal{R}_2$  como  $\bar{\mathcal{R}}_2$  (el subespacio diferencialmente observable de  $\{\tilde{C}_2, \tilde{A}, \tilde{E}\}$ ). Obviamente  $\mathcal{R}_2 \oplus \bar{\mathcal{R}}_2 = \mathcal{X}$ .

Defina el subespacio  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$  y su complemento  $\bar{\mathcal{M}}$  como el par de subespacios que satisfacen

$$\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{M} = \mathcal{V}^*, \bar{\mathcal{M}} \cap \bar{\mathcal{N}}_1 = \{0\}, \bar{\mathcal{M}} \cap \bar{\mathcal{R}}_2 = \{0\}, \bar{\mathcal{M}} \cap \mathcal{N} = \{0\}.$$

La anterior definición de subespacios nos permite representar el dominio de  $x$  (i.e.,  $\mathcal{X}$ ) como una suma de particiones del espacio de estados

$$\tilde{\mathcal{N}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{R}}_2 \oplus \tilde{\mathcal{M}} \oplus \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{N}}} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{X}$$

Note además que  $\mathcal{N}_1 = \tilde{\mathcal{R}}_2 \oplus \tilde{\mathcal{M}} \oplus \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{N}}} \oplus \mathcal{N}$ ,  $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}_{\tilde{\mathcal{N}}} \oplus \mathcal{N}$ . La correspondiente propiedad de invariancia de los anteriores subespacios junto con una apropiada selección de bases puede ser aplicada al sistema (3.11), (3.14) para llevarlo a una representación canónica. A continuación se propone una forma para calcular las citadas bases.

Calcule las matrices

$$U_{1i}^T = [ \tilde{c}_{1i}^T (\tilde{c}_{1i}\tilde{A})^T \dots (\tilde{c}_{1i}\tilde{A}^{n_{1i}-1})^T ]$$

en donde  $\tilde{c}_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, p_1$  corresponde al  $i$ ésimo renglón de la matriz  $\tilde{C}_1$  y  $n_{1i}$  es un entero definido como

$$n_{1i} = \text{rango} [ \tilde{c}_{1i}^T (\tilde{c}_{1i}\tilde{A})^T \dots (\tilde{c}_{1i}\tilde{A}^{n-1})^T ]^T.$$

Es importante recordar que la matriz  $U_{1i}$  es la matriz de observabilidad del par  $(\tilde{c}_{1i}, \tilde{A})$ .

Es claro que la selección de las matrices  $U_{1i}$  nos permite escribir las igualdades:

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_{1i} \\ (\tilde{c}_{1i}\tilde{A}) \\ \vdots \\ (\tilde{c}_{1i}\tilde{A}^{n_{1i}-1}) \end{bmatrix} \tilde{e} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{1i} \\ \dot{\tilde{y}}_{1i} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{1i}^{(n_{1i}-1)} \end{bmatrix}$$

en donde  $\tilde{y}_{1i}$  corresponde al  $i$ ésimo renglón del vector de error de estimación de salida  $\tilde{y}_1$ . Es claro que el error de estimación de salida  $\tilde{y}_1$  es medible, por lo que es posible aplicar a cada componente de dicho vector el diferenciador por modos deslizantes de orden superior dado en la sección 2.2.2:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{i1} &= w_{i1} \\ w_{i1} &= -\alpha_{n_{1i}} N_i^{1/n_{1i}} |v_{i1} - \tilde{y}_{1i}|^{(n_{1i}-1)/n_{1i}} \text{sign}(v_{i1} - \tilde{y}_{1i}) + v_{i2}, \\ \dot{v}_{i2} &= w_{i2} \\ w_{i2} &= -\alpha_{(n_{1i}-1)} N_i^{1/(n_{1i}-1)} |v_{i2} - w_{i1}|^{(n_{1i}-2)/(n_{1i}-1)} \text{sign}(v_{i2} - w_{i1}) + v_{i3}, \\ &\vdots \\ \dot{v}_{i,n_{1i}-1} &= w_{i,n_{1i}-1} \\ w_{i,n_{1i}-1} &= -\alpha_2 N_i^{1/2} |v_{i,n_{1i}-1} - w_{i,n_{1i}-2}|^{1/2} \text{sign}(v_{i,n_{1i}-1} - w_{i,n_{1i}-2}) + v_{in_{1i}}, \\ \dot{v}_{in_{1i}} &= -\alpha_1 N_i \text{sign}(v_{in_{1i}} - w_{i,n_{1i}-1}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

en donde  $N_i > 0$  y las constantes  $\alpha_i$  son seleccionadas de forma recursiva de acuerdo a [30]. En particular, una posible elección de parámetros es  $\alpha_1 = 1, 1$ ,  $\alpha_2 = 1, 5$ ,  $\alpha_3 = 2$ ,  $\alpha_4 = 3$ ,  $\alpha_5 = 5$ ,  $\alpha_6 = 8$ , que es suficiente para  $n_{1i} \leq 6$ .

Los componentes  $v_{i_j}$ , calculados por medio del diferenciador, pueden ser concentrados en el vector

$$\tilde{v}_i^T = [v_{i_1}^T \ v_{i_2}^T \ \cdots \ v_{i_{n_{1i}}}^T].$$

Para toda  $\tilde{v}_i$  y  $U_{1i}$ ,  $i = 1, \dots, p_1$ , la igualdad  $\tilde{v}_i = U_{1i}\tilde{e}$  es satisfecha en tiempo finito.

Calcule las matrices extendidas  $U_{1\text{extended}}$  y  $v_{\text{extended}}$  como:

$$U_{1\text{extended}} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ \vdots \\ U_{1p_1} \end{bmatrix}, \quad v_{\text{extended}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_{p_1} \end{bmatrix}.$$

es claro que  $\text{rango} U_{1\text{extended}} = n_{y_1}$ . Construya entonces la matriz  $U_1 \in \mathbb{R}^{n_{y_1} \times n}$  seleccionando los primeros  $n_{y_1}$  renglones linealmente independientes de  $U_{1\text{extended}}$  y forme el vector  $v$  seleccionando los correspondientes renglones del vector  $v_{\text{extended}}$ , de tal forma que la igualdad  $v = U_1\tilde{e}$  sea satisfecha después de tiempo finito.

Note que la matriz  $U_1$  satisface  $\ker(U_1) = \mathcal{N}_1$ . Las  $n_{y_1}$  columnas que componen la matriz  $U_1^T$  forman una base del subespacio  $\bar{\mathcal{N}}_1$ .

Ahora es necesario encontrar una base para los subespacios  $\bar{\mathcal{R}}_2$  y  $\bar{\mathcal{M}}$ , así como la matriz  $Q$  tal que satisfaga el Lema 4. Una de las posibles formas está dada a continuación. Sea  $\tilde{r}_i$  el grado relativo parcial de la salida  $\tilde{y}_{2i}$  con respecto a la entrada desconocida para el sistema (3.13), (3.12), en donde  $\tilde{y}_{2i}$  corresponde al  $i$ ésimo componente de la salida  $\tilde{y}_2$ .

Para cada renglón de la matriz  $\tilde{C}_2$  obtenga

$$\bar{U}_{2i}^T = [\tilde{c}_{2i}^T \ (\tilde{c}_{2i}\tilde{A})^T \ \cdots \ (\tilde{c}_{2i}\tilde{A}^{\tilde{r}_i-1})^T],$$

en donde  $\tilde{c}_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, p_2$  corresponde al  $i$ ésimo renglón de la matriz  $\tilde{C}_2$ , y  $\tilde{r}_i$  es el correspondiente grado relativo parcial de la  $i$ ésima componente de la salida  $\tilde{y}_2$  con respecto a la entrada desconocida.

Defina la matriz extendida  $\bar{U}_{2\text{extended}}$  y calcule el entero  $\bar{n}_{y_2}$  como

$$\begin{aligned} \bar{U}_{2\text{extended}} &= [\bar{U}_{21}^T \ \bar{U}_{22}^T \ \cdots \ \bar{U}_{2p_2}^T], \\ \bar{n}_{y_2} &= \text{rango}(\bar{U}_{2\text{extended}}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Forme la matriz de rango renglón completo  $\bar{U}_2 \in \mathbb{R}^{\bar{n}_{y_2} \times n}$  seleccionando los primeros  $\bar{n}_{y_2}$  renglones linealmente independientes de la matriz  $\bar{U}_{2\text{extended}}$ .

La matriz  $\bar{U}_2$  satisface  $\ker(\bar{U}_2) = \mathcal{R}_2$ . Las columnas de la matriz  $\bar{U}_2^T$  forman una base del subespacio  $\bar{\mathcal{R}}_2$ .

Defina la matriz

$$\bar{U}_r = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{2_1}\tilde{A}^{\tilde{r}_1-1} \\ \tilde{c}_{2_2}\tilde{A}^{\tilde{r}_2-1} \\ \vdots \\ \tilde{c}_{2_{p_2}}\tilde{A}^{\tilde{r}_{p_2}-1} \end{bmatrix}.$$

Haga  $\bar{M}_0 = 0_{1 \times n}$ . Calcule las matrices  $\bar{M}_{i+1}$  como:

$$\bar{M}_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{M}_i \tilde{E} \\ \bar{U}_r \tilde{E} \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} \bar{M}_i \tilde{A} \\ \bar{U}_r \tilde{A} \\ \tilde{C}_3 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

El cálculo de las matrices deberá realizarse hasta que la siguiente igualdad sea satisfecha

$$\text{rango} \begin{bmatrix} U_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{M}_{i+1} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} U_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{M}_i \end{bmatrix}.$$

Sea el entero  $l$  igual al número de matrices  $\bar{M}_i$  calculadas. Defina  $n_{\mathcal{V}}$  como  $n_{\mathcal{V}} = n - \text{rango} [U_1^T \ \bar{U}_2^T \ \bar{M}_l^T]^T$ . El entero  $n_{\mathcal{V}}$  corresponde a la dimensión del subespacio débilmente inobservable. Seleccione los primeros  $n - n_{y1} - \bar{n}_{y2} - n_{\mathcal{V}}$  renglones linealmente independientes de la matriz  $\bar{M}_{l-1}$  para formar la matriz  $\bar{M}_{\text{reduced}}$  de tal forma que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} U_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{M}_{\text{reduced}} \end{bmatrix} = n - n_{\mathcal{V}}.$$

La matriz  $\bar{M}_{\text{reduced}}$  satisface  $\ker(\bar{M}_{\text{reduced}}) = \mathcal{M}$ . Las columnas de la matriz  $\bar{M}_{\text{reduced}}^T$  forman una base del subespacio  $\mathcal{M}$ .

Calcule la matriz  $\bar{M}_{\text{obs}}$  como

$$\bar{M}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{M}_{\text{reduced}} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 13** [4]. *El subespacio débilmente inobservable puede ser encontrado como*

$$\ker \begin{bmatrix} U_1 \\ \bar{M}_{\text{obs}} \end{bmatrix} = \mathcal{V}^*.$$

Defina el entero  $n_y$  como el rango de la matriz de observabilidad del par  $(\tilde{C}, \tilde{A})$ . Sea  $\mathcal{N}$  el subespacio inobservable del par  $(\tilde{C}, \tilde{A})$ .

Escoja  $n - n_y$  vectores linealmente independientes  $N_i \in \mathcal{N}$ , de tal forma que el conjunto de vectores  $\{N_1, \dots, N_{(n-n_y)}\}$  sea una base de  $\mathcal{N}$ . Obtenga la matriz  $N = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_{n-n_y}]$ . Escoja  $n - n_y - n_{\mathcal{V}}$  vectores linealmente independientes  $V_{\mathcal{N}_i} \in \mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ ,  $i = 1, \dots, n - n_y - n_{\mathcal{V}}$  tales que  $\{V_{\mathcal{N}_1}, \dots, V_{\mathcal{N}_{n-n_y-n_{\mathcal{V}}}}\}$  formen una base de  $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ . Calcule la matriz  $V_{\mathcal{N}} = [V_{\mathcal{N}_1} \ V_{\mathcal{N}_2} \ \dots \ V_{\mathcal{N}_{n-n_y-n_{\mathcal{V}}}}]$  y defina la matriz  $V_* \in \mathbb{R}^{n \times n_{\mathcal{V}}}$  como  $V_* = [V_{\mathcal{N}} \ N]$ . Note que las columnas de la matriz  $V_*$  forman una base del subespacio  $\mathcal{V}^*$ .

Seleccione una matriz  $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que las siguientes igualdades se cumplan

$$(\tilde{A} - \tilde{E}Q)V_{\mathcal{N}} = V_*\Xi, \quad (\tilde{C} - FQ)V_{\mathcal{N}} = 0, \quad Q \begin{bmatrix} U_1 \\ \bar{M}_{\text{obs}} \\ V_{\mathcal{N}}^T \end{bmatrix} = 0 \quad (3.45)$$

para alguna matriz  $\Xi \neq 0$ ,  $\Xi \in \mathbb{R}^{n\nu \times n\nu}$ . Note que la matriz  $Q$  elegida de esta forma satisface el Lema 4.

El sistema (3.13), (3.14) puede ser escrito en la forma (2.14) como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}} &= (\tilde{A} - \tilde{E}Q)\tilde{e} + \tilde{B}u + \tilde{E}(Q\tilde{e} + \zeta) \\ \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(t) \\ \tilde{y}_2(t) \\ \tilde{y}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \\ (\tilde{C}_3 - F_3Q) \end{bmatrix} \tilde{e} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} (Q\tilde{e} + \zeta) \end{aligned} \quad (3.46)$$

A partir de la representación (3.46) es posible llevar el sistema a la forma canónica dada en el Teorema 5.

Note que la matriz de transformación (2.13) puede obtenerse con la matriz  $[U_1^T \ \bar{U}_2^T \ \bar{M}_{obs}^T \ V_*^T]^T$ , sin embargo, es necesario llevar a una forma canónica la representación del subespacio  $\bar{\mathcal{R}}_2 \oplus \bar{\mathcal{M}}$ .

Obtenga el vector de grados relativos parciales para la salida  $\tilde{y}_{2i}$  del sistema (3.46).

Para cada renglón de la matriz  $\tilde{C}_2$  obtenga

$$\tilde{U}_{2i}^T = [\tilde{c}_{2i}^T \ (\tilde{c}_{2i}(\tilde{A} - \tilde{E}Q))^T \ \dots \ (\tilde{c}_{2i}(\tilde{A} - \tilde{E}Q)^{\tilde{r}_i-1})^T],$$

en donde  $\tilde{c}_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, p_2$  corresponde al  $i$ ésimo renglón de la matriz  $\tilde{C}_2$ , y  $\tilde{r}_i$  es el grado relativo parcial correspondiente a la  $i$ ésima componente del error de estimación de salida  $\tilde{y}_2$  con respecto a la entrada desconocida.

Note que las igualdades

$$\begin{bmatrix} \tilde{c}_{2i} \\ \tilde{c}_{2i}(\tilde{A} - \tilde{E}Q) \\ \vdots \\ \tilde{c}_{2i}(\tilde{A} - \tilde{E}Q)^{\tilde{r}_i-1} \end{bmatrix} \tilde{e} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{2i} \\ \dot{\tilde{y}}_{2i} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{2i}^{(\tilde{r}_i-1)} \end{bmatrix}$$

se satisfacen.

Aplique el diferenciador por modos deslizantes de orden superior presentado en la sección 2.2.2 a cada componente de  $\tilde{y}_2$  como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{v}}_{i1} &= \bar{w}_{i1} = -\alpha_{\tilde{r}_i} \bar{N}_i^{1/\tilde{r}_i} |\bar{v}_{i1} - \tilde{y}_{2i}|^{(\tilde{r}_i-1)/\tilde{r}_i} \times \\ &\quad \text{sign}(\bar{v}_{i1} - \tilde{y}_{2i}) + \bar{v}_{i2}, \\ \dot{\tilde{v}}_{i2} &= \bar{w}_{i2} = -\alpha_{\tilde{r}_i-1} \bar{N}_i^{1/(\tilde{r}_i-1)} |\bar{v}_{i2} - \bar{w}_{i1}|^{(\tilde{r}_i-2)/(\tilde{r}_i-1)} \times \\ &\quad \text{sign}(\bar{v}_{i2} - \bar{w}_{i1}) + \bar{v}_{i3}, \\ &\quad \vdots \\ \dot{\tilde{v}}_{i,\tilde{r}_i-1} &= \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-1} = -\alpha_2 \bar{N}_i^{1/2} |\bar{v}_{i,\tilde{r}_i-1} - \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-2}|^{1/2} \times \\ &\quad \text{sign}(\bar{v}_{i,\tilde{r}_i-1} - \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-2}) + \bar{v}_{i,\tilde{r}_i}, \\ \dot{\tilde{v}}_{i,\tilde{r}_i} &= -\alpha_1 \bar{N}_i \text{sign}(\bar{v}_{i,\tilde{r}_i} - \bar{w}_{i,\tilde{r}_i-1}), \end{aligned} \quad (3.47)$$

en donde  $\bar{v}_{i_j}$  y  $\bar{w}_{i_j}$  son las componentes de los vectores  $\bar{v}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_i}$  and  $\bar{w}_i \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_i-1}$  respectivamente. Los parámetros  $\bar{N}_i$  son seleccionados de tal forma que  $\bar{N}_i >$

$|d_i|\zeta^+$ , en donde  $d_i = \tilde{c}_{2i}\tilde{A}^{\tilde{r}_i-1}\tilde{E}$ . Las constantes  $\alpha_i$  son seleccionadas de forma recursiva de acuerdo a [30]. En particular, una posible selección es  $\alpha_1 = 1,1$ ,  $\alpha_2 = 1,5$ ,  $\alpha_3 = 2$ ,  $\alpha_4 = 3$ ,  $\alpha_5 = 5$ ,  $\alpha_6 = 8$ , para  $\tilde{r}_i \leq 6$ . Las condiciones iniciales se consideran igual a cero.

Por cada componente del vector  $\tilde{y}_2$  forme el vector

$$\bar{v}_i^T = [\bar{v}_{i1}^T \ \bar{v}_{i2}^T \ \cdots \ \bar{v}_{1,\tilde{r}_i}^T].$$

Las siguientes igualdades se satisfacen claramente después de un tiempo finito  $\bar{v}_i = \tilde{U}_{2i}\tilde{e}$ ,  $i = 1, \dots, p_2$ .

Defina las matrices extendidas  $U_{2\text{extended}}$ ,  $\bar{v}_{\text{extended}}$  y calcule el entero  $n_{y_2}$  como

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\text{extended}} &= [\bar{v}_1^T \ \bar{v}_2^T \ \cdots \ \bar{v}_{p_2}^T]^T \\ U_{2\text{extended}} &= [\tilde{U}_{21}^T \ \tilde{U}_{22}^T \ \cdots \ \tilde{U}_{2p_2}^T]^T, \\ n_{y_2} &= \text{rango}(U_{2\text{extended}}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Obtenga la matriz de rango renglón completo  $U_2 \in \mathbb{R}^{n_{y_2} \times n}$  formada por los primeros  $n_{y_2}$  renglones linealmente independientes de la matriz  $U_{2\text{extended}}$  y forme el vector  $\bar{v} \in \mathcal{R}^{n_{y_2}}$  seleccionando los correspondientes renglones del vector  $\bar{v}_{\text{extended}}$  de tal forma que la igualdad  $U_2\tilde{e} = \bar{v}$  se satisfaga después de tiempo finito.

Note que la matriz  $U_2$  satisface  $\ker(U_2) = \mathcal{R}_2$  para la representación (3.46). Las columnas de la matriz  $U_2^T$  forman una base del subespacio  $\bar{\mathcal{R}}_2$ .

Considere las derivadas de orden  $\tilde{r}_i - 1$  de cada componente de la salida  $\tilde{y}_2$ . La siguiente igualdad es satisfecha:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{21}^{\tilde{r}_1-1} \\ \tilde{y}_{22}^{\tilde{r}_2-1} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{2p_2}^{\tilde{r}_{p_2}-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{21}(\tilde{A} - \tilde{E}Q)^{\tilde{r}_1-1} \\ \tilde{c}_{22}(\tilde{A} - \tilde{E}Q)^{\tilde{r}_2-1} \\ \vdots \\ \tilde{c}_{2p_2}(\tilde{A} - \tilde{E}Q)^{\tilde{r}_{p_2}-1} \end{bmatrix} \tilde{e}.$$

Defina las matrices

$$U_r = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{21}(\tilde{A} - \tilde{E}Q)^{\tilde{r}_1-1} \\ \tilde{c}_{22}(\tilde{A} - \tilde{E}Q)^{\tilde{r}_2-1} \\ \vdots \\ \tilde{c}_{2p_2}(\tilde{A} - \tilde{E}Q)^{\tilde{r}_{p_2}-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_r = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1\tilde{r}_1} \\ \bar{v}_{2\tilde{r}_2} \\ \vdots \\ \bar{v}_{p_2\tilde{r}_{p_2}} \end{bmatrix}.$$

Haga  $M_0 = 0_{1 \times n}$  y  $\rho_0 = 0_{1 \times 1}$ . Defina el vector  $\tilde{\rho}_i$  como

$$\tilde{\rho}_i = \begin{bmatrix} M_i\tilde{E} \\ \bar{U}_r\tilde{E} \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} \rho_i \\ \bar{v}_r \\ \int_0^t y_3 dt \end{bmatrix}$$

Para cada componente de  $\tilde{\rho}_i$  calcule

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_{ij} &= \alpha_2 \tilde{N}_i^{1/2} |\beta_{ij} - \tilde{\rho}_{ij}|^{1/2} \text{sign}(\beta_{ij} - \tilde{\rho}_{ij}) + \gamma_{ij} \\ \dot{\gamma}_{ij} &= \alpha_1 \tilde{N}_i \text{sign}(\gamma_{ij} - \beta_{ij}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

en donde  $\tilde{\rho}_{i_j}$  corresponde al  $j$ ésimo renglón del vector  $\tilde{\rho}_i$ ,  $\tilde{N}_i > \|\bar{D}_i\|\zeta^+$ , en donde  $\bar{D}_i$  es el  $i$ ésimo renglón de la matriz

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} M_i \tilde{E} \\ \tilde{U}_r \tilde{E} \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp (\tilde{A} - \tilde{E}Q)\tilde{E}.$$

La matriz  $\bar{D}$  es calculada para cada  $M_i$  que aparece más adelante.

Calcule las matrices  $M_{i+1}$  y los vectores  $\rho_{i+1}$ :

$$M_{i+1} = \begin{bmatrix} M_i \tilde{E} \\ U_r \tilde{E} \\ F_3 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} M_i(\tilde{A} - \tilde{E}Q) \\ U_r(\tilde{A} - \tilde{E}Q) \\ \tilde{C}_3 \end{bmatrix}, \quad \rho_{i+1} = \begin{bmatrix} \gamma_{i1} \\ \gamma_{i2} \\ \vdots \\ \gamma_{i\kappa} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

En donde  $\kappa$  es el número de renglones de la matriz  $([(M_i \tilde{E})^T (U_r \tilde{E})^T F_3^T]^T)^\perp$ .

Las matrices son calculadas hasta que la igualdad

$$\text{rango} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ M_{i+1} \end{bmatrix} = n - n_{\mathcal{V}}.$$

es satisfecha. Sea  $\mu_y$  el número de matrices  $M_i$  calculadas. Seleccione los primeros  $n - \bar{n}_{y1} - \bar{n}_{y2} - n_{\mathcal{V}}$  renglones linealmente independientes de  $M_{i+1}$  y los correspondientes renglones de  $\rho_{i+1}$  para formar la matriz  $M_{\text{reduced}}$  y el vector  $\rho_{\text{reduced}}$  de tal forma que la siguiente igualdad se satisfaga:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ M_{\text{reduced}} \end{bmatrix} = n - n_{\mathcal{V}}, \quad M_{\text{reduced}}\tilde{e} = \rho_{\text{reduced}}.$$

Para reducir el número de matrices manejadas nombre como  $M_{y2}$  a la matriz  $M_{y2}^T = [U_2^T \ M_{\text{reduced}}^T]$  y forme el vector  $v_{y2}^T = [\bar{v}^T \ \rho_{\text{reduced}}^T]$ . Note que:

$$\ker U_1 = \mathcal{N}_1, \quad \ker \begin{bmatrix} U_1 \\ M_{y2} \end{bmatrix} = \mathcal{V}^*$$

A partir de las matrices encontradas anteriormente, es posible formar la matriz de transformación (2.13) como:

$$T_s = \begin{bmatrix} U_1 \\ M_{y2} \\ V_* \end{bmatrix}$$

Aplicando la transformación  $T_s \tilde{e}$  al sistema del error (3.46) se obtiene la

representación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_o \\ \dot{\tilde{e}}_s \\ \dot{\tilde{e}}_{\bar{s}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_o & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{os} & \tilde{A}_s & 0 \\ \tilde{A}_{o\bar{s}} & \tilde{A}_{s\bar{s}} & \tilde{A}_{\bar{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_o \\ \tilde{e}_s \\ \tilde{e}_{\bar{s}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{E}_s \\ \tilde{E}_{\bar{s}} \end{bmatrix} \bar{\zeta} \\ \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_o & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_s & 0 \\ \tilde{C}_{o\bar{s}} & \tilde{C}_{s\bar{s}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_o \\ \tilde{e}_s \\ \tilde{e}_{\bar{s}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{F}_3 \end{bmatrix} \bar{\zeta} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Una propiedad importante del sistema (3.51) es que  $\text{rango}[\tilde{E}_s^T \ \tilde{F}_3^T]^T = m$ , de otra forma el sistema (3.51) tiene un número infinito de ceros invariantes.

Dado que  $\text{rango}[\tilde{E}_s^T \ \tilde{F}_3^T]^T = m$  entonces existen las matrices  $T_{E1}$  y  $T_{E2}$  de tal forma que

$$T_{E1}\tilde{E}_s + T_{E2}\tilde{F}_3 = \tilde{E}_{\bar{s}}.$$

Defina la variable  $\chi$  cuya dinámica está dada por:

$$\dot{\chi} = [G_1 - G_2 - G_3] \begin{bmatrix} v \\ v_{y_2} \\ \chi + T_{E1}v_{y_2} \end{bmatrix} + T_{E2}\tilde{y}_3 \quad (3.52)$$

$$G_1 = [\tilde{A}_{o\bar{s}} \ \tilde{A}_{s\bar{s}} \ \tilde{A}_{\bar{s}}], \quad G_2 = T_{E1}[\tilde{A}_{os} \ \tilde{A}_s \ 0], \quad G_3 = T_{E2}[\tilde{C}_{o\bar{s}} \ \tilde{C}_{s\bar{s}} \ 0]. \quad (3.53)$$

El algoritmo de estimación del estado toma la forma

$$\hat{\xi} = z + T_s^{-1} \begin{bmatrix} v \\ v_{y_2} \\ \chi + T_{E1}v_{y_2} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

**Teorema 14** *Considere que las suposiciones 1 y 3 son satisfechas. El observador (3.9), (3.10), (3.42)-(3.47), (3.52)-(3.54) garantiza la estimación exacta de los estados del sistema (3.5) de forma asintótica.*

*Prueba.* Recuerde que el error de estimación del observador tipo Luenberger  $\tilde{e} = \xi - z$ . Defina el error de estimación de los estados  $\tilde{\xi}$  como  $\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}$ , de la ecuación (3.54) se tiene que

$$\xi - \hat{\xi} = \xi - z - T_s^{-1} \begin{bmatrix} v \\ v_{y_2} \\ \chi + T_{E1}v_{y_2} \end{bmatrix}$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $T_s$  se tiene:

$$T_s\tilde{\xi} = T_s\tilde{e} - \begin{bmatrix} v \\ v_{y_2} \\ \chi + T_{E1}v_{y_2} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (3.51) se tiene:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ M_{y_2} \\ V_* \end{bmatrix} \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_o \\ \tilde{e}_s \\ \tilde{e}_{\bar{s}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ v_{y_2} \\ \chi + T_{E1}v_{y_2} \end{bmatrix}$$

La convergencia de  $U_1\tilde{\xi}$  a cero depende de la convergencia de  $v$  a  $\tilde{e}_o$ . A su vez, la convergencia de  $M_{y_2}\tilde{\xi}$  a cero depende de la convergencia de  $v_{y_2}$  a  $\tilde{e}_s$  que descomponiendo ambos vectores implican la convergencia de  $\tilde{v}$  a  $M_2\tilde{e}$  y  $\rho_{reduced}$  a  $\tilde{M}_{reduced}\tilde{e}$ . Note que el subsistema:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \tilde{M}_{reduced} \end{bmatrix} \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \tilde{M}_{reduced} \end{bmatrix} \tilde{e} - \begin{bmatrix} v \\ \tilde{v} \\ \rho_{reduced} \end{bmatrix}$$

fue estudiado en la sección 3.2, por lo que la convergencia de  $U_1\tilde{\xi}$ ,  $U_2\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{M}_{reduced}\tilde{\xi}$  a cero en tiempo finito está garantizada.

Como resultado de la convergencia en tiempo finito de las componentes fuertemente observables, solo resta analizar la componente  $V_*\tilde{\xi}$ . Después de la convergencia de las componentes fuertemente observables, la dinámica de  $V_*\tilde{\xi}$  toma la forma:

$$V_*\dot{\tilde{\xi}} = \tilde{A}_s V_*\tilde{\xi}.$$

Como resultado del Teorema 3, entonces los valores propios de  $\tilde{A}_s$  corresponden a los valores de los ceros invariantes del sistema  $\{A, C, E, F\}$ , que debido a que el sistema satisface la suposición 3, entonces los valores propios de dicha matriz tienen parte real negativa. Por lo tanto  $V_*\tilde{\xi} \rightarrow 0$  asintóticamente.

La mezcla de coordenadas debida a la transformación  $T_s$  impiden garantizar convergencia en tiempo finito de los estados, por lo que solo se puede garantizar convergencia asintótica de  $\hat{\xi} \rightarrow \xi$ .

‡

### 3.3.2. Reconstrucción de la entrada desconocida

**Suposición 5** *Los valores propios de la matriz  $A|_{\mathcal{V}_{\bar{N}}}$  tienen parte real negativa.*

Considere el sistema del error en su forma canónica (3.51). Dado que  $\text{rango} [\tilde{E}_s^T \tilde{F}_3^T]^T = m$  es posible recuperar la entrada desconocida mediante la siguiente igualdad:

$$\hat{\zeta} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_s \\ \tilde{F}_3 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_s - \tilde{A}_{os}\tilde{e}_o - \tilde{A}_s\tilde{e}_s \\ \tilde{y}_3 - \tilde{C}_{os}\tilde{e}_o - \tilde{C}_{s\bar{s}}\tilde{e}_s \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Para identificar la entrada desconocida es necesario estimar el valor de la variable  $\dot{\tilde{e}}_s$ .

Note que la siguiente igualdad se satisface:

$$\dot{\tilde{e}}_s = M_{y_2}\dot{\tilde{e}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\rho}_{reduced} \end{bmatrix}$$

Note que la forma de obtener dichos vectores fue descrita en la sección 3.2.2.

**Teorema 15** *Sean satisfechas las suposiciones 3, 4 y 5. La aplicación del algoritmo (3.9), (3.10), (3.16), (3.18), (3.33), (3.40), (3.55) garantiza la identificación asintótica de la entrada desconocida.*

*Prueba.* De la misma forma que para el caso fuertemente observable la entrada desconocida es reconstruida mediante los teoremas antes mencionados; sin embargo, es necesario probar que:

$$\bar{\zeta} \rightarrow \zeta \text{ para } t \rightarrow \infty.$$

Por definición  $\bar{\zeta} = \zeta + Q\tilde{e}$ . Note que de acuerdo a la forma en que  $Q$  es seleccionada (vea el Lema 4 de la sección 2.1.3), entonces:

$$Q\tilde{e} \in \mathcal{V}_{\bar{N}}.$$

La dinámica de dichos estados estará regida por la restricción de la matriz  $A$  al mencionado subespacio (i.e.,  $A|_{\mathcal{V}_{\bar{N}}}$ ).

Dado que el sistema satisface la suposición 5 dichos valores son estrictamente estables y entonces  $Q\tilde{e} \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .

‡

### 3.3.3. Ejemplo

Considere el siguiente Sistema Lineal Invariante en el Tiempo con Entrada Desconocida:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + E\zeta(t), \\ y &= Cx + F\zeta(t). \end{aligned}$$

En donde las matrices  $A, C, E, F$  toman la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz  $A$ , están localizados en  $-3, 1, -2, -1, 0,2679, 3,7321, -2, -1$ , entonces, el sistema es inestable. El sistema tiene tres ceros invariantes localizados en  $-1, -2, -5$ , por lo que satisface la afirmación 3. El vector de entradas desconocidas satisface la afirmación 1 y está dado por:

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \text{sen}(t) + 0,5\text{sen}(0,8t + 0,3) + 0,5 \\ \text{sen}(0,5 + 5\text{sen}(0,5t)) \end{bmatrix}$$

Para realizar la transformación de las salidas se utiliza la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} F_{\perp}^1 \\ F_{\perp}^2 \\ F^{\perp\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación  $T_y$  definida de acuerdo a (3.3) está dada por:

$$T_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema en la forma (3.5), (3.6) toma la forma mostrada a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_{1_1} \\ \dot{\xi}_{1_2} \\ \dot{\xi}_{2_1} \\ \dot{\xi}_{2_2} \\ \dot{\xi}_{2_3} \\ \dot{\xi}_{2_4} \\ \dot{\xi}_{2_5} \\ \dot{\xi}_{2_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -5 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1_1} \\ \xi_{1_2} \\ \xi_{2_1} \\ \xi_{2_2} \\ \xi_{2_3} \\ \xi_{2_4} \\ \xi_{2_5} \\ \xi_{2_6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \zeta,$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1_1} \\ \xi_{1_2} \\ \xi_{2_1} \\ \xi_{2_2} \\ \xi_{2_3} \\ \xi_{2_4} \\ \xi_{2_5} \\ \xi_{2_6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \zeta.$$

La ganancia del observador tipo Luenberger (3.9) está dada por:

$$L = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 41 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz  $\tilde{A}$  están dados por  $-1, -2, -2, -3, -3, -4, -5, -6$ . El error de estimación (3.13) se muestra en la Figura 3.7. Aún cuando el sistema es inestable, el error de estimación se encuentra acotado.

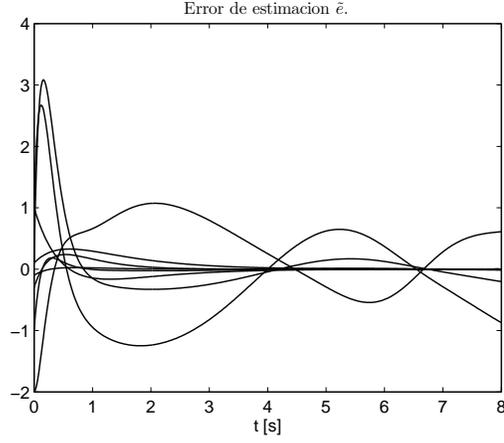


Figura 3.7: Error de estimación  $\tilde{e}$  acotado para el caso fuertemente detectable.

Las matrices necesarias para realizar la transformación del sistema están dadas por:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_{obs} = \bar{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 1 & 0 & -13 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V_{\mathcal{N}}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad V_{\mathcal{N}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz  $Q$ , es diseñada de acuerdo a (3.45), y toma la forma:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema en la forma (3.46) está dado por:

$$\dot{\tilde{e}} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -42 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -49 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \tilde{e} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\zeta}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{e} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{\zeta}$$

Para el sistema anterior, la matriz  $U_2$  está dada por:

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 1 & 0 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación (2.13) toma la forma:

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 1 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Debido a que los errores de estimación de la salida,  $\tilde{y}_1 = y_1 - \hat{y}_1$ ,  $\tilde{y}_2 = y_2 - \hat{y}_2$  y  $\tilde{y}_3 = y_3 - \hat{y}_3$  son medibles, y que el grado relativo parcial de la salida  $\tilde{y}_2$  con respecto a la entrada desconocida está dado por  $\tilde{r}_1 = 3$ , entonces, es posible aplicar diferenciadores por modos deslizantes de orden superior a las salidas  $\tilde{y}_1$

y  $\tilde{y}_2$  como:

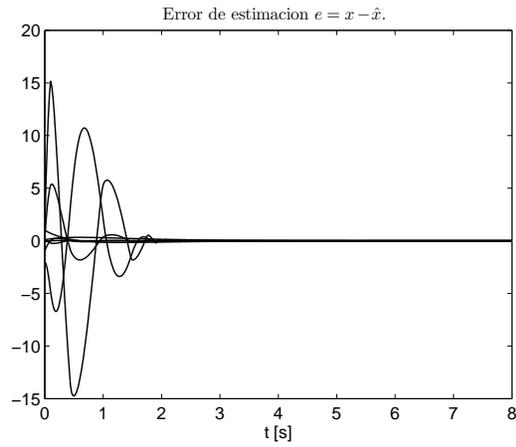
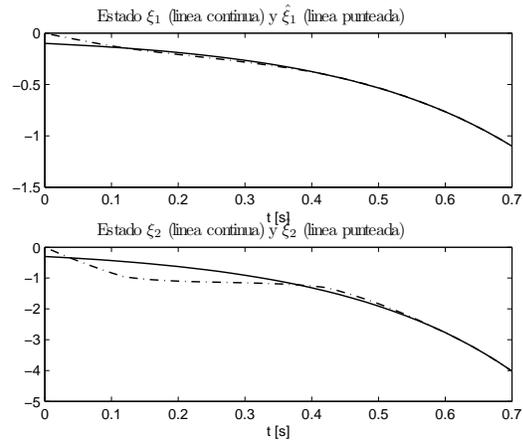
$$\begin{aligned}
\dot{v}_{1,1} &= w_{1,1}, \\
w_{1,1} &= -\alpha_2 N_i^{1/2} |v_{1,1} - \tilde{y}_1|^{1/2} \text{sign}(v_{1,1} - \tilde{y}_1) + v_{1,2}, \\
\dot{v}_{1,2} &= -\alpha_1 N_1 \text{sign}(v_{1,2} - w_{1,1}), \\
\dot{\bar{v}}_{1,1} &= \bar{w}_{1,1}, \\
\bar{w}_{1,1} &= -\alpha_3 \bar{N}_1^{1/3} |\bar{v}_{1,1} - \tilde{y}_2|^{2/3} \text{sign}(\bar{v}_{1,1} - \tilde{y}_2) + \bar{v}_{1,2}, \\
\dot{\bar{v}}_{1,2} &= \bar{w}_{1,2}, \\
\bar{w}_{1,2} &= -\alpha_2 \bar{N}_1^{1/2} |\bar{v}_{1,2} - \bar{w}_{1,1}|^{1/2} \text{sign}(\bar{v}_{1,2} - \bar{w}_{1,1}) + \bar{v}_{1,3}, \\
\dot{\bar{v}}_{1,3} &= -\alpha_1 \bar{N}_1 \text{sign}(\bar{v}_{1,3} - \bar{w}_{1,2}),
\end{aligned}$$

en donde  $N_1 = 1$ ,  $\bar{N}_1 = 3$  y los parámetros del diferenciador están dados por  $\alpha_1 = 1,1$ ,  $\alpha_2 = 1,5$  y  $\alpha_3 = 2$ . El observador (3.52), (3.54) toma la forma:

$$\dot{\chi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{449}{2} & -73 & -6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_{y2_1} \\ v_{y2_2} \\ v_{y2_3} \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{y}_3$$

$$\hat{\xi} = z + T_s^{-1} \begin{bmatrix} v \\ v_{y2} \\ \chi \end{bmatrix}$$

El error de estimación  $e = x - \hat{x}$ , es presentado en la Figura 3.8. Note que la convergencia en asintótica de los errores de estimación, es independientemente del valor de la entrada desconocida. De acuerdo a la forma normal presentada en (3.51), los estados son divididos en estados observables, estados fuertemente observables, que corresponden a los afectados por la entrada desconocida, y de estados fuertemente detectables, cuya convergencia depende de los ceros invariantes del sistema. La convergencia de los estados en la forma (3.51) puede apreciarse al analizar la convergencia de (3.54) a (3.5). En la Figura 3.9 se muestra la convergencia en tiempo finito de  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , que corresponden a los estados no afectados por la entrada desconocida. La convergencia, también en tiempo finito, de  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  y  $\xi_5$  se muestra en la Figura 3.10, estos estados corresponden a la parte del sistema que es afectada por la entrada desconocida. La convergencia de los estados  $\xi_6$ ,  $\xi_7$  y  $\xi_8$ , correspondientes a la parte fuertemente detectable del sistema, es mostrada en la Figura 3.11, es importante hacer notar que la convergencia asintótica de estos estados, está gobernada por los valores de los ceros invariantes. Note además, que las estimaciones convergen a los valores reales, aún cuando el sistema es inestable.

Figura 3.8: Convergencia asintótica a cero del error de estimación  $e$ .Figura 3.9: Convergencia en tiempo finito de la estimación de los estados  $\xi_1$  y  $\xi_2$ .

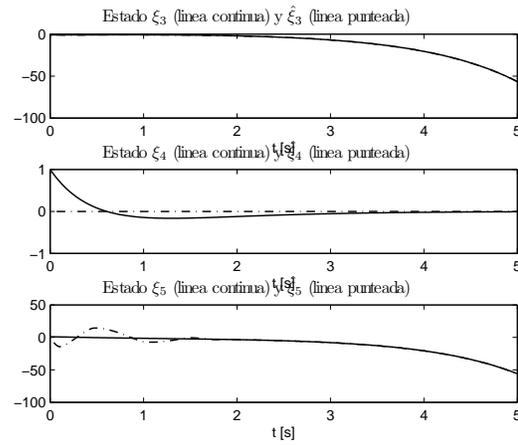


Figura 3.10: Convergencia en tiempo finito de la estimación de los estados  $\xi_3$ ,  $\xi_4$  y  $\xi_5$ .

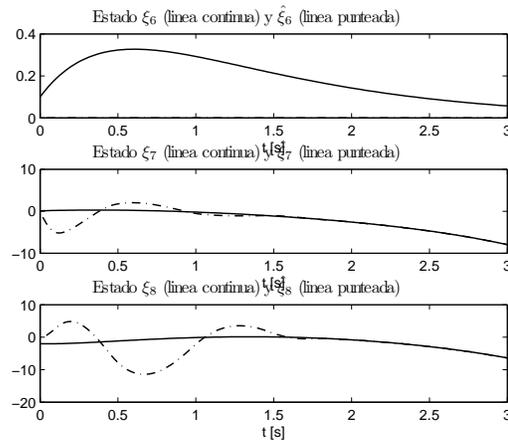


Figura 3.11: Convergencia asintótica de la estimación de los estados  $\xi_6$ ,  $\xi_7$  y  $\xi_8$ .

### 3.4. Observación de sistemas cuasilineales

El observador de sistemas lineales con entradas desconocidas presentado en el capítulo 3, puede ser aplicado para resolver el problema de estimación de estados en sistemas cuasilineales.

Considere el siguiente sistema cuasilineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + D\gamma(t, x), \quad D \neq 0 \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (3.56)$$

en donde  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$ ,  $y \in \mathbb{R}$  son los estados del sistema, el vector de entradas conocidas y la salida del sistema respectivamente,  $\gamma(\cdot)$  es una función escalar definida como  $\gamma(t, x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  tienen dimensiones adecuadas y son consideradas como conocidas. Con el objetivo de tener la posibilidad de observar sistemas con discontinuidades se considera en el sentido de Filippov [43] la solución de las ecuaciones y su existencia para todo  $t \geq 0$ .

Defina para esta clase de sistemas el grado relativo como el entero  $r$  tal que

$$CA^j D = 0, \quad j = 0, \dots, r-2, \quad CA^{r-1} D \neq 0.$$

Si la no linealidad  $\gamma(\cdot)$  es considerada una entrada desconocida, entonces es posible aplicar los resultados mostrados en el capítulo 3. Suponga que la no linealidad  $\gamma(\cdot)$  satisface la siguiente suposición.

**Suposición 6** *La función escalar  $\gamma(t, x)$  es una función acotada y medible en el sentido de Lebesgue para todo  $t$  y toda  $x \in \mathcal{X}$ ,  $|\gamma(t, x)| \leq \gamma^+$ .*

#### 3.4.1. Reconstrucción en tiempo finito de estados

**Suposición 7** *El sistema (3.56) tiene grado relativo  $n$  con respecto a la entrada desconocida.*

Construya la matriz  $U$  como

$$U = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

El observador tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu \\ z_y &= Cz, \quad \tilde{y} = y - z_y \\ \hat{x} &= z + U^{-1}v \end{aligned} \quad (3.58)$$

en donde  $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$  es un vector cuyos componentes están calculados por medio del diferenciador por modos deslizantes de orden superior descrito en

la sección 2.2.2 como:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_1 &= w_1, \\
w_1 &= -\alpha_n N^{1/n} |v_1 - \tilde{y}|^{(n-1)/n} \text{sign}(v_1 - \tilde{y}) + v_2, \\
\dot{v}_2 &= w_2, \\
w_2 &= -\alpha_{(n-1)} N^{1/(n-1)} |v_2 - w_1|^{(n-2)/(n-1)} \text{sign}(v_2 - w_1) + v_3, \\
&\vdots \\
\dot{v}_{n-1} &= w_{n-1}, \\
w_{n-1} &= -\alpha_2 N^{1/2} |v_{n-1} - w_{n-2}|^{1/2} \text{sign}(v_{n-1} - w_{n-2}) + v_n, \\
\dot{v}_n &= -\alpha_1 N \text{sign}(v_n - w_{n-1}),
\end{aligned} \tag{3.59}$$

en donde la constante  $N$  satisface la desigualdad  $N > |CA^{n-1}D|\gamma^+$  y las constantes  $\alpha_i$  son diseñadas de acuerdo a lo mostrado en la sección 2.2.2.

**Teorema 16** *Asuma que el sistema (3.56) satisface las suposiciones 6 y 7. Los estados del sistema son reconstruidos en tiempo finito mediante la aplicación del observador (3.57), (3.58), (3.59).*

*Prueba.* Asuma que  $\gamma(\cdot)$  es una entrada desconocida. Note que si el sistema (3.56) tiene grado relativo  $n$  entonces satisface la suposición 2, y por tanto el observador (3.57), (3.58), (3.59) es un caso particular del observador dado en la sección 3.2 cuando sólo está presente la salida  $y_2$  y además se cumple que  $\text{rango } U_2 = n$ .

□

### 3.4.2. Reconstrucción asintótica de estados

Considere que el grado relativo del sistema (3.56) es  $r < n$ . Asuma que la siguiente suposición se cumple:

**Suposición 8** *Los ceros invariantes del cuádruple  $\{A, D, C, 0\}$  tienen parte real estrictamente negativa, i.e.,  $\text{Re}(s_0) < 0$ .*

Construya la matriz  $U$  como

$$U = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix}, \tag{3.60}$$

calcule la matriz  $U^\perp$ .

El observador toma la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= Az + Bu \\
z_y &= Cz, \quad \tilde{y} = y - z_y \\
\begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U \\ U^\perp \end{bmatrix} z, \quad \begin{bmatrix} U \\ U^\perp \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} U \\ U^\perp \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad B_{\bar{o}} = U^\perp B \\
\dot{\hat{\xi}}_2 &= [A_{o\bar{o}} \ A_{\bar{o}}] \begin{bmatrix} U\hat{x} \\ \hat{\xi}_2 \end{bmatrix} + B_{\bar{o}}u \\
\hat{x} &= z + \begin{bmatrix} U \\ U^\perp \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ \hat{\xi}_2 - \bar{z}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

en donde  $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T$  es un vector cuyos componentes están calculados por medio del diferenciador por modos deslizantes de orden superior, descrito en la sección 2.2.2 y aplicado como es descrito en la ecuación (3.59). La constante  $N$  satisface la desigualdad  $N > |CA^{r-1}D|\gamma^+$  y las constantes  $\alpha_i$  son diseñadas de acuerdo a lo mostrado en la sección 2.2.2. Las condiciones iniciales del observador se asumen igual a cero.

**Teorema 17** *Asuma que el sistema (3.56) satisface las suposiciones 6 y 8. Los estados del sistema son reconstruidos asintóticamente mediante la aplicación del observador (3.60), (3.61), (3.59).*

*Prueba.* Asuma que  $\gamma(\cdot)$  es una entrada desconocida. Considere la dinámica del error  $\tilde{e} = x - z$  dada por

$$\dot{\tilde{e}} = A\tilde{e} + D\gamma(t, x)$$

Aplique la transformación  $\bar{e} = \begin{bmatrix} U \\ U^\perp \end{bmatrix} \tilde{e}$ , la dinámica toma la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}_1 \\ \dot{\bar{e}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_o \\ 0 \end{bmatrix} \gamma(t, x).$$

Por definición, la siguiente igualdad se satisface:

$$\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \\ \vdots \\ \tilde{y}^{(r-1)} \end{bmatrix} = U\tilde{e}.$$

En consecuencia la igualdad  $v = U\tilde{e}$  se cumple después de tiempo finito. Defina las variables  $\begin{bmatrix} U \\ U^\perp \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ . Al descomponer la transformación sobre la dinámica del error se tiene:

$$\begin{bmatrix} U \\ U^\perp \end{bmatrix} \tilde{e} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix}.$$

Manipule algebraicamente la ecuación anterior para obtener:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U\tilde{e} + \bar{z}_1 \\ U^\perp\tilde{e} + \bar{z}_2 \end{bmatrix}.$$

Como se ha mostrado, por definición la igualdad  $U\tilde{e} = v$  es satisfecha después de tiempo finito, por tanto se tiene que la igualdad  $\xi_1 = \hat{\xi}_1$  es satisfecha después de tiempo finito.

Al aplicar la transformación de estados  $\begin{bmatrix} U \\ U^\perp \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$ , la dinámica del estado  $\xi_2$  toma la forma:

$$\dot{\xi}_2 = [A_{o\bar{o}} \ A_{\bar{o}}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + B_{\bar{o}}u.$$

Como se explicó  $U\hat{x} = \xi_1$  después de tiempo finito. Por tanto, una vez que  $\xi_1 - \hat{\xi}_1 = 0$ , la dinámica del error  $e_2 = \xi_2 - \hat{\xi}_2$  toma la forma

$$\dot{e}_2 = A_{\bar{o}}e_2.$$

Si la matriz  $A_{\bar{o}}$  es estable, entonces el error de estimación convergerá a cero asintóticamente. Note que el problema es un caso particular del caso fuertemente detectable presentado en la sección 3.3, entonces los ceros invariantes del sistema (3.56) coinciden con los valores propios de  $A_{\bar{o}}$ , dado que el sistema satisface la suposición 8, entonces los valores propios de dicha matriz son estables.

La convergencia asintótica es producto de la mezcla de las coordenadas.

‡



## Capítulo 4

# Observación de sistemas no lineales

El problema de observación de sistemas no lineales con entradas desconocidas, es un problema que sigue abierto. Los esquemas existentes permiten la observación de cierta clase de sistemas. Las condiciones para el diseño de observadores en sistemas lineales con entradas desconocidas, son propuestas en [36], en donde se construye un algoritmo de observación por medio de compensación de alta ganancia. Otras técnicas de diseño han sido exploradas, como las presentadas en [46] para caso SISO por medio del concepto de pasividad.

En este capítulo, los resultados de observación para sistemas lineales con entradas desconocidas, son extendidos para diseñar un esquema de observación para sistemas no lineales. La aplicación del esquema a un circuito caótico ilustra su efectividad.

### 4.1. Descripción del problema

Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)w \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

en donde

$$w = \text{col}(w_1, w_2, \dots, w_m), \quad y = \text{col}(y_1, y_2, \dots, y_p),$$

y en donde

$$g(x) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad \dots \quad g_m(x)], \quad h(x) = \text{col}(h_1(x), h_2(x), \dots, h_p(x)).$$

Introduzca la noción de grado relativo bien definido:

**Definición 14** *Un sistema multivariable (4.1) se dice que tiene un vector de grado relativo bien definido  $\{r_1, r_2, \dots, r_p\}$  en un punto  $x_0$  si:*

■

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

para toda  $1 \leq j \leq m$ , para toda  $k < r_i - 1$ , para toda  $0 \leq i \leq p$  y para toda  $x$  en una vecindad de  $x_0$ .

■ La siguiente condición se cumple:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p-1} h_p(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_p-1} h_p(x) \end{bmatrix} = p$$

De acuerdo a la anterior definición es posible establecer el tipo de sistemas con los cuales trataremos.

**Suposición 9** El sistema (4.1) tiene un vector de grados relativos parciales  $\{r_1 \ r_2 \ r_p\}$  en una región  $\mathcal{X}$ , tales que

$$r_1 + r_2 + \dots + r_p = n.$$

**Suposición 10** La distribución  $\Gamma = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$  es involutiva.

Para cada salida defina

$$\begin{aligned} \phi_1^i(x) &= h_i(x) \\ \phi_2^i(x) &= L_f h_i(x) \\ &\vdots \\ \phi_{r_i}^i(x) &= L_f^{r_i-1} h_i(x). \end{aligned}$$

en donde  $1 \leq i \leq p$ . Es posible definir la transformación:

$$\Phi(x) = \text{col} (\phi_1^1(x), \dots, \phi_{r_1}^1(x), \dots, \phi_1^p(x), \dots, \phi_{r_p}^p(x)).$$

Por definición, el jacobiano de la transformación  $\Phi(x)$  es no singular en una región  $\mathcal{X}$ , por lo que dentro de esa región es posible escribir la dinámica de las variables transformadas  $\xi = \Phi(x)$  como:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} \\
\dot{\xi}_{12} &= \xi_{13} \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{1_{n1}} &= G_1(t, \xi, u) \\
\dot{\xi}_{21} &= \xi_{22} \\
\dot{\xi}_{22} &= \xi_{23} \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{2_{n2}} &= G_2(t, \xi, u) \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{p1} &= \xi_{p2} \\
\dot{\xi}_{p2} &= \xi_{p3} \\
&\vdots \\
\dot{\xi}_{p_{np}} &= G_p(t, \xi, u) \\
y &= \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{p1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

En donde  $G_i(t, \xi, u) = L_f^{r_i} h_i(x)|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} + L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x)|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} w$  y cada función  $G_i(\cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada tal que:

$$|G_i(t, \xi, u)| < \gamma_i^+.$$

A su vez cada función  $G_i(t, \xi, u)$  puede ser escrita de la siguiente forma:

$$G_i(t, \xi, u) = F_i(t, \xi, u) + \Delta F_i(t, \xi, u) + \zeta_i(t) \tag{4.3}$$

en donde  $F_i(\cdot)$  es una función no lineal conocida (i.e.,  $F_i(t, \xi, u) = L_f^{r_i} h_i(x)|_{x=\Phi^{-1}(\xi)}$ ),  $\Delta F_i(\cdot)$  es una función no lineal que representa las incertidumbres paramétricas y  $\zeta(\cdot)$  es una perturbación o entrada desconocida (i.e.,  $L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x)|_{x=\Phi^{-1}(\xi)} w = \Delta F_i(t, \xi, u) + \zeta_i(t)$ ).

## 4.2. Diseño del observador

El sistema (4.3) puede ser dividido en  $p$  sistemas en bloques de Brunovsky de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\xi}}_{i_1} &= \xi_{i_2} \\
 \dot{\hat{\xi}}_{i_2} &= \xi_{i_3} \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{\xi}}_{i_{n_i}} &= F_i(t, \xi, u) + \Delta F_i(t, \xi, u) + \zeta_i(t) \\
 y_i &= \xi_{i_1}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Obviamente  $i = 1, \dots, p$ . Considere la siguiente suposición.

**Suposición 11** Considere que cada función  $G_i(t, \xi, u)$  del sistema (4.3) es una función acotada y medible en el sentido de Lebesgue (i.e.,  $|G_i(t, \xi, u)| < \gamma_i^+$ ).

Es posible diseñar un observador por modos deslizantes de orden superior para el sistema (4.4) como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\xi}}_{i_1} &= \hat{\xi}_{i_2} + \alpha_{n_i} N_i^{1/n_i} |\xi_{i_1} - \hat{\xi}_{i_1}|^{(n_i-1)/n_i} \text{sign}(\xi_{i_1} - \hat{\xi}_{i_1}) \\
 \dot{\hat{\xi}}_{i_2} &= \hat{\xi}_{i_3} + \alpha_{n_i-1} N_i^{1/(n_i-1)} |\hat{\xi}_{i_2} - \dot{\hat{\xi}}_{i_1}|^{(n_i-2)/(n_i-1)} \text{sign}(\hat{\xi}_{i_2} - \dot{\hat{\xi}}_{i_1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{\xi}}_{i_{n_i-1}} &= \hat{\xi}_{i_{n_i}} + \alpha_2 N_i^{1/2} |\hat{\xi}_{i_{n_i-1}} - \dot{\hat{\xi}}_{i_{n_i-2}}|^{1/2} \text{sign}(\hat{\xi}_{i_{n_i-1}} - \dot{\hat{\xi}}_{i_{n_i-2}}) \\
 \dot{\hat{\xi}}_{i_{n_i}} &= F_i(t, \hat{\xi}, u) + \alpha_1 N_i \text{sign}(\hat{\xi}_{i_{n_i}} - \dot{\hat{\xi}}_{i_{n_i-1}})
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

en donde  $N_i$  es un entero diseñado para cada bloque de Brunovsky que satisface  $N_i > 2\gamma_i^+$  y las constantes  $\alpha_i$  son seleccionadas de acuerdo a lo descrito en la sección 2.2.2. El resultado puede ser expresado de la siguiente forma:

**Teorema 18** Considere que se cumple la suposición 11. Los estados del sistema (4.3) pueden ser recuperados en tiempo finito por medio de observadores (4.3) diseñados para cada bloque.

*Prueba.* Defina el error de estimación de los estados como  $\sigma_{i_{j-1}} = \xi_{i_j} - \hat{\xi}_{i_j}$  para toda  $j = 1, \dots, n_i$  y  $i = 1, \dots, p$ . La dinámica del error de estimación estará descrita por la ecuación:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{i_0} &= \sigma_{i_1} - \alpha_{n_i} N_i^{1/n_i} |\sigma_{i_0}|^{(n_i-1)/n_i} \text{sign}(\sigma_{i_0}) \\
 \dot{\sigma}_{i_1} &= \sigma_{i_2} - \alpha_{n_i-1} N_i^{1/(n_i-1)} |\sigma_{i_1} - \dot{\sigma}_{i_0}|^{(n_i-2)/(n_i-1)} \text{sign}(\sigma_{i_1} - \dot{\sigma}_{i_0}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\sigma}_{i_{n_i-2}} &= \sigma_{i_{n_i-1}} - \alpha_2 N_i^{1/2} |\sigma_{i_{n_i-2}} - \dot{\sigma}_{i_{n_i-3}}|^{1/2} \text{sign}(\sigma_{i_{n_i-2}} - \dot{\sigma}_{i_{n_i-3}}) \\
 \dot{\sigma}_{i_{n_i-1}} &= G_i(t, \xi, u) - F_i(t, \hat{\xi}, u) - \alpha_1 N_i \text{sign}(\sigma_{i_{n_i-1}} - \dot{\sigma}_{i_{n_i-2}})
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Debido a que la suposición 11 es satisfecha, entonces las soluciones de la ecuación (4.6) satisfacen la siguiente inclusión diferencial:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{i_0} &= \sigma_{i_1} - \alpha_{i_{ni}} N_i^{1/ni} |\sigma_{i_0}|^{(ni-1)/ni} \text{sign}(\sigma_{i_0}) \\
 \dot{\sigma}_{i_1} &= \sigma_{i_2} - \alpha_{i_{ni-1}} N_i^{1/(ni-1)} |\sigma_{i_1} - \dot{\sigma}_{i_0}|^{(ni-2)/(ni-1)} \text{sign}(\sigma_{i_1} - \dot{\sigma}_{i_0}) \\
 &\vdots \\
 \dot{\sigma}_{i_{ni-2}} &= \sigma_{i_{ni-1}} - \alpha_2 N_i^{1/2} |\sigma_{i_{ni-2}} - \dot{\sigma}_{i_{ni-3}}|^{1/2} \text{sign}(\sigma_{i_{ni-2}} - \dot{\sigma}_{i_{ni-3}}) \\
 \dot{\sigma}_{i_{ni-1}} &\in [-2\gamma_i^+ \quad 2\gamma_i^+] - \alpha_1 N_i \text{sign}(\sigma_{i_{ni-1}} - \dot{\sigma}_{i_{ni-2}})
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Note que la inclusión (4.7) tiene la forma descrita en (2.29) por lo que la convergencia a cero del error de estimación es una consecuencia del Lema 9 en la sección 2.2.2.

□

### 4.3. Ejemplo

Dada su robustez y simplicidad para generar señales caóticas, el circuito de Chua (vea la Figura 4.1) es muy usado en trabajos relacionados con la sincronización de sistemas caóticos y en sistemas de comunicación no-coherente.

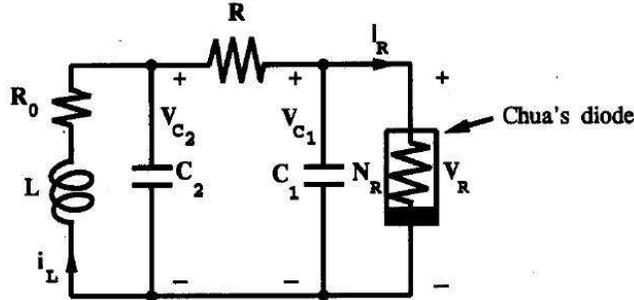


Figura 4.1: Circuito de Chua.

En el entorno de sistemas caóticos, el circuito de Chua es utilizado como el transmisor. Una señal  $u(t)$  (i.e., la señal de información), es usada como la entrada del circuito de Chua desde el extremo del transmisor. La señal  $y(t)$ , salida del transmisor, es enviada mediante un canal público hacia el receptor. Éste utiliza la salida  $y(t)$  como una señal a la cuál debe ser sincronizado y recuperar la señal de información  $u(t)$ . El proceso de sincronización puede verse como el problema de observación de un sistema, del cual solamente se conoce la salida.

La señal de entrada  $u(t)$  deberá ser cuidadosamente seleccionada de tal forma que garantice que la naturaleza caótica del circuito de Chua se conserve.

Para este ejemplo se utilizará la dinámica del circuito de Chua, con una no linealidad cúbica, como el transmisor. El circuito de Chua está dado por la ecuación:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -acx_1 + ax_2 - ax_1^3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -bx_2 \\ y &= x_3\end{aligned}\tag{4.8}$$

Los parámetros usados en la simulación fueron seleccionados como  $a = 10$ ,  $b = 16$  y  $c = -0,143$ , mismos que garantizan el comportamiento caótico del circuito de Chua [47]. Los valores iniciales del transmisor son fijados como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

El comportamiento caótico descrito por los estados del circuito de Chua utilizando estos parámetros puede verse en la Figura 4.2.

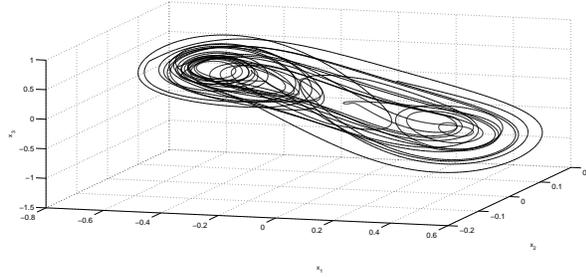


Figura 4.2: Comportamiento caótico del circuito de Chua

El sistema (4.9) tiene grado relativo  $n$ . Calculando la transformación de estados:

$$\xi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ -bx_2 \\ b(x_2 - x_1 - x_3) \end{bmatrix},$$

la suposición 9 es satisfecha.

En su nueva representación de estados, el transmisor puede ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -abc & (a-b-ac) & -(ac+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\Delta F(t, \xi) + \zeta(t))\tag{4.9}$$

entonces, las funciones  $\Delta F(t, \xi)$  y  $\zeta(t)$ , están dadas por

$$\Delta F(t, \xi) = \left[ ab \left( -\frac{1}{b}\xi_2 - \xi_1 - \frac{1}{b}\xi_3 \right)^3 \right], \quad \zeta(t) = -bu(t)$$

El observador del sistema (4.9), diseñado de acuerdo a (4.3), se encuentra dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_1 &= \hat{\xi}_2 + \alpha_3 N^{1/3} |\xi_1 - \hat{\xi}_1|^{2/3} \text{sign}(\xi_1 - \hat{\xi}_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 &= \hat{\xi}_3 + \alpha_2 N^{1/2} |\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1|^{1/2} \text{sign}(\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_3 &= [-abc\hat{\xi}_1 + (a-b-ac)\hat{\xi}_2 - (ac+1)\hat{\xi}_3] + \alpha_1 N \text{sign}(\hat{\xi}_3 - \hat{\xi}_2) \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned} N &= 28,12, \\ \alpha_1 &= 1,1, \\ \alpha_2 &= 1,5, \\ \alpha_3 &= 2 \end{aligned}$$

La transformación inversa se encuentra definida como:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(\xi) = \begin{bmatrix} -\xi_1 - \frac{\xi_2}{b} - \frac{\xi_3}{b} \\ -\frac{\xi_2}{b} \\ \xi_1 \end{bmatrix}$$

La convergencia a cero en tiempo finito del error de estimación de los estados se muestra en la figura 4.3. La convergencia de cada estimado de los estados a su valor real se muestra en la figura

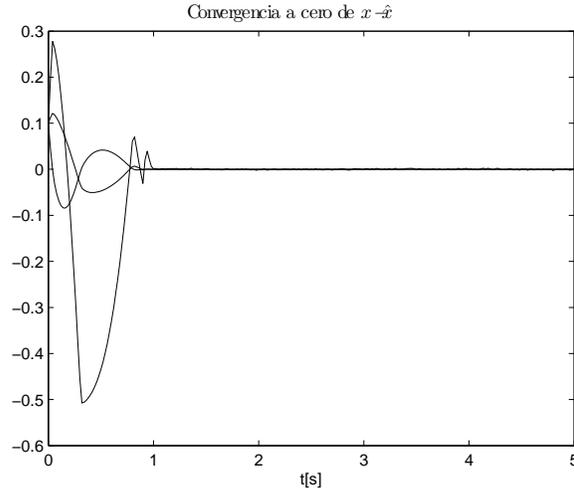


Figura 4.3: Convergencia a cero en tiempo finito del error de estimación  $x - \hat{x}$

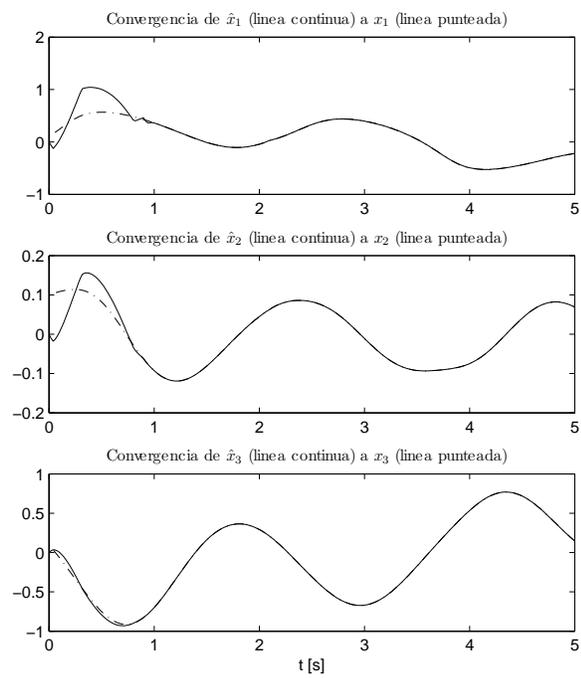


Figura 4.4: Convergencia de las estimaciones a los valores reales de los estados

## Capítulo 5

# Aplicaciones

### 5.1. Observación de sistemas en forma de Cauchy

Describamos la clase de sistemas para los que se ilustra la aplicación de los observadores por modos deslizantes de orden superior.

Sea un sistema cuya ecuación diferencial está dada por:

$$F(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0.$$

A continuación introducimos una importante definición utilizada para la aplicación de los observadores:

**Definición 15** [48] *Se dice que la ecuación diferencial*

$$F(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n)}) = 0, \tag{5.1}$$

*puede representarse en forma de Cauchy si es algebraicamente equivalente a*

$$q^{(n)} = G(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n-1)}) \tag{5.2}$$

Sea un sistema con ecuación diferencial (5.1) que puede ser representado en forma de Cauchy, con variable medida  $q$ . Defina las variables de estado

$$x_1 = q, x_2 = \dot{q}, x_3 = \ddot{q}, \dots, x_n = q^{(n)}.$$

Utilizando las variables de estado antes mencionadas, la ecuación (5.2) puede ser llevada a la siguiente representación:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = G(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{5.3}$$
$$y = x_1$$

Es posible asumir que las variables del sistema se encuentran restringidas por limitaciones físicas, entonces, es posible encontrar una cota máxima para la función  $G(\cdot)$  tal que:

$$|G(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| < \gamma^+.$$

Existen dos distintas formas para aplicar el observador a este sistema, una de ellas se basa en la suposición de que la función  $G(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una entrada desconocida; en la segunda se asume que dicha función es, al menos, parcialmente conocida. A continuación se describen ambos procedimientos.

**Sistema cuasilineal** Escriba el sistema en forma de un sistema cuasilineal como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + DG(t, x), \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (5.4)$$

en donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$  y  $G(\cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  y en donde las matrices  $A$ ,  $C$  y  $D$  tienen las dimensiones adecuadas y toman la siguiente forma particular:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]$$

Note que el esquema de observación en tiempo finito para sistemas cuasilineales visto en la sección 3.4.1. Note que la aplicación de dicho esquema es transparente, por lo que se ilustra en los siguientes ejemplos.

**Sistema no lineal perturbado** Asuma que la función  $G(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  puede escribirse de la siguiente forma:

$$G(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + \Delta F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + \zeta(t) \quad (5.5)$$

en donde  $\Delta F(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un término que concentra las incertidumbres paramétricas del sistema y  $\zeta(t)$  puede considerarse como una perturbación o entrada desconocida.

**Suposición 12** Considere que la función  $G(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  del sistema (5.3) es una función acotada y medible en el sentido de Lebesgue (i.e.,  $|G(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| < \gamma^+$ ).

Note que el observador para el sistema en forma de Cauchy es un caso particular del presentado en la sección 4.2.

El observador para el sistema no lineal perturbado toma la forma:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \alpha_n N^{1/n} |y - \hat{y}|^{(n-1)/n} \text{sign}(y - \hat{y}) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \alpha_{n-1} N^{1/(n-1)} |\hat{x}_2 - \hat{x}_1|^{(n-2)/(n-1)} \text{sign}(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + \alpha_2 N^{1/2} |\hat{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-2}|^{1/2} \text{sign}(\hat{x}_{n-1} - \hat{x}_{n-2}) \\ \dot{\hat{x}}_n = F(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + \alpha_1 N \text{sign}(\hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}) \\ \hat{y} = \hat{x}_1 \end{cases} \quad (5.6)$$

en donde  $N$  es un entero que satisface  $N > 2\gamma^+$  y las constantes  $\alpha_i$  son seleccionadas de acuerdo a lo descrito en la sección 2.2.2.

El resultado puede ser expresado de la siguiente forma:

**Teorema 19** *Considere que se cumple la suposición 12. Los estados del sistema (5.3) pueden ser recuperados en tiempo finito por medio del observador (5.6).*

*Prueba.* El teorema es un caso particular del sistema descrito en el Teorema 18 de la sección 4.2.

□

## 5.2. Observación de Sistemas Mecánicos

Considere el modelo escalar general de un sistema mecánico de segundo orden, de la forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + P(\dot{q}) + G(q) + \Delta(t, q, \dot{q}) = \tau \quad (5.7)$$

En donde el término  $M(q)$  corresponde a la inercia del sistema,  $C(q, \dot{q})$  corresponde al término de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $P(\dot{q})$  es el término de fricción de Coulomb dado por  $P(\dot{q}) = P_0 \text{sign}(\dot{q})$ ,  $G(q)$  es el término de fuerza gravitacional,  $\Delta(t, q, \dot{q})$  es un término que conjunta incertidumbres y perturbaciones, y  $\tau$  es el torque producido por los actuadores. Note que el término  $M(q)$ , en un sistema mecánico, siempre existe y es positivo, por lo que su inversa  $M(q)^{-1}$  existe.

Introduciendo las variables  $x_1 = q$ ,  $x_2 = \dot{q}$ ,  $u = \tau$ , el modelo (5.7) puede ser escrito en el espacio de estados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(t, x_1, x_2, u) + \xi(t, x_1, x_2), \quad u = U(t, x_1, x_2), \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (5.8)$$

en donde  $f(t, x_1, x_2, u) = -M^{-1}(x_1)[C(x_1, x_2)x_2 + G(x_1) - u]$  y  $\xi(t, x_1, x_2) = -M^{-1}(x_1)(P(x_2) + \Delta(t, x_1, x_2))$ .

Considere que los estados  $x_1$ ,  $x_2$ , las perturbaciones  $\xi$  y las entradas del sistema  $u$  están acotados; que las aceleraciones ( $\dot{x}_2$ ) del sistema mecánico están acotadas; que el sistema (5.8) es entrada acotada - estado acotado, BIBS estable

[49] (por sus siglas en inglés Boundary Input Boundary State); asuma también que el sistema (5.8) tiene una solución única en el sentido de Filippov [43].

El esquema de observación para sistemas no lineales presentado en la sección anterior, puede ser aplicado directamente para la solución de este problema, sin embargo, a continuación se presenta un diseño especial presentado por primera vez en [21] y que corresponde a un caso particular del esquema de observación desarrollado en este trabajo.

Se propone el siguiente observador basado en el algoritmo super-twisting:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + z_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + z_2\end{aligned}\quad (5.9)$$

En donde  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  son las estimaciones de los estados,  $z_1$  y  $z_2$  son los factores de corrección tomados del algoritmo super-twisting y dados por las formulas

$$\begin{cases} z_1 = \lambda |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ z_2 = \alpha \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1). \end{cases}\quad (5.10)$$

Asuma que los estados del sistema se encuentran acotados, entonces es posible garantizar la existencia de una constante  $f^+$  tal que

$$|f(t, x_1, x_2, U(t, x_1, x_2)) - f(t, x_1, \hat{x}_2, U(t, x_1, x_2)) + \xi(t, x_1, x_2)| \leq f^+ \quad (5.11)$$

para cualquier valor posible de  $t, x_1, x_2$  y  $|\hat{x}_2| \leq 2 \sup x_2$ . La anterior suposición puede cumplirse, por ejemplo, si el sistema es entrada-estado acotado y tanto la señal de control  $u$  como las perturbaciones son acotadas. En algunos casos, la constante  $f^+$  puede conocerse a partir de alguna razón física, como por ejemplo, si es conocida a priori la máxima aceleración posible del sistema.

Sean  $\alpha$  y  $\lambda$  tales que satisfagan las ecuaciones:

$$\lambda > \sqrt{\frac{\alpha > f^+}{\frac{2}{\alpha - f^+} \frac{(\alpha + f^+)(1+q)}{(1-q)}}}\quad (5.12)$$

en donde  $q$  es alguna constante tal que  $0 < q < 1$ .

Haciendo  $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$  y  $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$  se pueden escribir las ecuaciones de los errores de estimación:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 - \lambda |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= g(t, x_1, x_2, \hat{x}_2, u) - \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1)\end{aligned}\quad (5.13)$$

En donde  $g(t, x_1, x_2, \hat{x}_2, u) = f(t, x_1, x_2, u) - f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + \xi(t, x_1, x_2)$ .

A partir del planteamiento anterior se puede proponer un teorema:

**Teorema 20** [21] *El observador (5.9), (5.10) para el sistema (5.8) asegura la convergencia en tiempo finito de las estimaciones de los estados a los valores reales de éstos, i.e.  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ .*

La prueba de este teorema se omite por brevedad, pero puede ser consultada en [21].

### 5.3. Identificación de fallas

Considere el sistema lineal (3.1), asuma que la entrada desconocida representa una falla en el sistema. Considere el siguiente sistema lineal sujeto a fallas en actuadores y sensores:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + E_a \zeta_a \\ y &= Cx + Du + F_s \zeta_s\end{aligned}\quad (5.14)$$

en donde  $x \in \mathbb{R}^n$  son los estados del sistema,  $y \in \mathbb{R}^p$  son las salidas del sistema,  $u \in \mathbb{R}^{q_0}$  son las entradas de control,  $\zeta_a \in \mathbb{R}^{m_a}$  son las fallas en los actuadores,  $\zeta_s \in \mathbb{R}^{m_s}$  son las fallas en los sensores. Sea  $m = m_a + m_s$  y  $m \leq p$ .

Defina

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_a \\ \zeta_s \end{bmatrix}.\quad (5.15)$$

Es posible reescribir el sistema en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + E\zeta \\ y &= Cx + Du + F\zeta\end{aligned}$$

La anterior, es la forma general (3.1), considerada en el capítulo 3, ahora las matrices  $E$  y  $F$  son definidas como

$$E = [E_a \ 0_{p \times (m-m_a)}], \quad F = [0_{p \times (m-m_s)} \ F_s].\quad (5.16)$$

La condición  $\text{rango} [E^T \ F^T]^T = m$  es satisfecha por definición. Aún más, por definición  $E$  y  $F$  son linealmente independientes, por lo que las fallas pueden ser reconstruidas de forma independiente utilizando las siguientes relaciones:

$$\hat{\zeta}_a = \tilde{E}_s^+ [\dot{\tilde{e}}_s - \tilde{A}_{os} \tilde{e}_o - \tilde{A}_s \tilde{e}_s],\quad (5.17)$$

$$\hat{\zeta}_s = \tilde{F}_3^+ [\tilde{y}_3 - \tilde{C}_{os} \tilde{e}_o - \tilde{C}_{s\bar{s}} \tilde{e}_s].\quad (5.18)$$

**Suposición 13** *Los valores propios de la matriz  $A|_{\mathcal{V}_N}$  tienen parte real negativa.*

**Teorema 21** *Sea el sistema con fallas (5.14), considere que la suposición 13 es satisfecha. Las relaciones (5.18), (5.17) garantizan la reconstrucción en tiempo finito (asintótica) del vector de fallas (5.15) para sistemas fuertemente observables (fuertemente detectables).*

**Corolario 3** *Si el sistema (5.14) satisface la suposición 2, entonces el algoritmo (5.18) garantiza la reconstrucción en tiempo finito (asintótica) de las fallas en sensores en sistemas fuertemente observables (fuertemente detectables).*

Note que tanto el Teorema 21 como el Corolario 3 son consecuencia de la identificación de la entrada desconocida desarrollada en la sección 3.3.2.

**Observación 4** *La técnica aquí presentada no es en sí misma a una estructura de detección de fallas, sin embargo, podría ser aplicada en conjunto con las herramientas clásicas para formar un esquema de detección e identificación de la falla.*

## 5.4. Identificación de parámetros

Considere el sistema no lineal descrito en (4.3) en el que las funciones  $G_i(\cdot)$  pueden ser expresada por (4.3), y asuma que no existen perturbaciones externas, i.e.,  $\zeta_i(t) = 0$ . Las matrices extendidas  $G(\cdot)$  y  $F(\cdot)$  pueden escribirse como:

$$G(t, x, u) = \begin{bmatrix} G_1(t, x, u) \\ \vdots \\ G_p(t, x, u) \end{bmatrix}, \quad F(t, x, u) = \begin{bmatrix} F_1(t, x, u) \\ \vdots \\ F_p(t, x, u) \end{bmatrix}$$

Introduzca la notación en forma de regresor [50], la función  $G(\cdot)$  puede ser descrita de una manera distinta

$$G(t, x, u) = \theta(t)\varphi(t, x, u).$$

En donde  $\varphi(t, x, u)$  es un vector de funciones no lineales conocidas y  $\theta(t) \in \mathbb{R}^{p \times l}$  es una matriz de parámetros que puede expresarse para cada  $G_i(\cdot)$  como:

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_p(t) \end{bmatrix}.$$

Asuma que solo se conocen valores nominales de los parámetros, sea  $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{p \times l}$  la matriz de valores nominales formada por

$$\bar{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(t) \\ \vdots \\ \bar{\theta}_p(t) \end{bmatrix}.$$

Entonces la función  $F(\cdot)$  y las incertidumbres  $\Delta F(\cdot)$  pueden ser escritas como:

$$F(t, x, u) = \bar{\theta}(t)\varphi(t, x, u), \quad \Delta F(t, x, u) = [\theta(t) - \bar{\theta}(t)] \varphi(t, x, u).$$

### 5.4.1. Inyección equivalente de salida

Aplique el observador por modos deslizantes de orden superior (4.3) a cada bloque de Brunovsky descrito en el capítulo 4. El error de estimación toma la forma mostrada en (4.6). Como resultado de la convergencia en tiempo finito, después de un tiempo  $t \geq t_0$  en donde  $t_0$  es el mayor tiempo de convergencia de los observadores (4.3), el error de estimación de cada bloque toma la forma:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{i_0} = \sigma_{i_1} - \alpha_n N_i^{1/n} |\sigma_{i_0}|^{(ni-1)/ni} \text{sign}(\sigma_{i_0}) \\ \dot{\sigma}_{i_1} = \sigma_{i_2} - \alpha_{n-1} N_i^{1/(ni-1)} |\sigma_{i_1} - \dot{\sigma}_{i_0}|^{(ni-2)/(ni-1)} \text{sign}(\sigma_{i_1} - \dot{\sigma}_{i_0}) \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_{i_{ni-2}} = \sigma_{i_{ni-1}} - \alpha_2 N_i^{1/2} |\sigma_{i_{ni-2}} - \dot{\sigma}_{i_{ni-3}}|^{1/2} \text{sign}(\sigma_{i_{ni-2}} - \dot{\sigma}_{i_{ni-3}}) \\ \dot{\sigma}_{i_{ni-1}} = \Delta F_i(t, x) - \alpha_1 N_i \text{sign}(\sigma_{i_{ni-1}} - \dot{\sigma}_{i_{ni-2}}) \end{cases} \quad (5.19)$$

En consecuencia se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\sigma}_{1_{n_1-1}} = \Delta F_1(t, x) - \alpha_1 N_1 \text{sign}(\sigma_{1_{n_1-1}} - \dot{\sigma}_{1_{n_1-2}}), \\ &\vdots \\ 0 &= \dot{\sigma}_{p_{n_p-1}} = \Delta F_p(t, x) - \alpha_1 N_p \text{sign}(\sigma_{p_{n_p-1}} - \dot{\sigma}_{p_{n_p-2}}). \end{aligned}$$

Defina la inyección equivalente de salida como el vector

$$z_{eq} = \begin{bmatrix} \alpha_1 N_1 \text{sign}(\sigma_{1_{n_1-1}} - \dot{\sigma}_{1_{n_1-2}}), \\ \vdots \\ \alpha_1 N_p \text{sign}(\sigma_{p_{n_p-1}} - \dot{\sigma}_{p_{n_p-2}}). \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Teóricamente, la inyección equivalente de salida es el resultado de una frecuencia de conmutación infinita de los términos discontinuos  $\alpha_1 N_i \text{sign}(\sigma_{i_{n_i-1}} - \dot{\sigma}_{i_{n_i-2}})$ . Sin embargo, la realización del observador produce que los términos discontinuos conmuten a una alta frecuencia, no infinita, haciendo necesaria la utilización de un filtro. Para eliminar las componentes de alta frecuencia se utilizará el siguiente filtro:

$$\tau \bar{z}_{eq}(t) = -\bar{z}_{eq}(t) + z_{eq}(t)$$

en donde  $\tau = \text{diag}\{\tau_1, \dots, \tau_p\}$  y cada elemento satisface  $\tau_i \in \mathbb{R}$  y  $\delta \ll \tau \ll 1$  y  $\delta$  es el tiempo de muestreo.

Como resultado del proceso de filtrado, la inyección equivalente de salida puede ser expresada como:

$$z_{eq}(t) = \bar{z}_{eq}(t) + \varepsilon(t) \quad (5.21)$$

en donde  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^p$  es la diferencia causada por la filtración y  $\bar{z}_{eq}(t)$  es la versión filtrada de  $z_{eq}(t)$ .

Sin embargo, está probado en [51] y [52] que

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \delta/\tau \rightarrow 0}} \bar{z}_{eq}(\tau, \delta) = z_{eq}(t),$$

entonces es posible asumir que la inyección equivalente de salida es igual a la salida del filtro.

### 5.4.2. Parámetros invariantes en el tiempo

Considere el caso en el que los parámetros son invariantes en el tiempo, i.e.,  $\theta(t) = \theta$ . Para obtener los valores reales de los parámetros  $\theta$  puede proponerse un algoritmo de regresión lineal.

Utilice la notación de regresor para  $\Delta F$ , entonces la inyección equivalente de salida toma la forma:

$$z_{eq} = (\theta - \bar{\theta})\varphi(t, x, u) = \begin{bmatrix} \alpha_1 N_1 \text{sign}(\sigma_{1_{n_1-1}} - \dot{\sigma}_{1_{n_1-2}}) \\ \vdots \\ \alpha_1 N_p \text{sign}(\sigma_{p_{n_p-1}} - \dot{\sigma}_{p_{n_p-2}}) \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Los términos  $\alpha_1 N_i \text{sign}(\sigma_{s_{ni-1}} - \dot{\sigma}_{i_{ni-2}})$  son conocidos, y para todo  $t \geq t_0$  se cumple que  $\varphi(t, \hat{x}, u) = \varphi(t, x, u)$ . La ecuación (5.22) representa un modelo de regresión lineal en donde el vector de parámetros a ser identificado es  $(\theta - \bar{\theta})$ . El problema ahora es diseñar algoritmos que permitan identificar el vector de parámetros reales del sistema (5.3) a partir del conocimiento de la salida del mismo  $x_1$  y el conocimiento del modelo nominal  $\bar{\theta}$  y  $\varphi(t, x, u)$ .

El algoritmo recursivo de mínimos cuadrados, LSM por sus siglas en inglés (vea por ejemplo [50]), es aplicado para la identificación de sistemas dinámicos, para ello utiliza una discretización del vector de regresión  $\varphi(t, x, u)$  junto con la derivada de los estados para obtener un modelo de regresión lineal. Sin embargo, es posible obtener el modelo de regresión lineal (vea [50]) directamente de (5.22).

Defina  $\Delta_\theta = \theta - \bar{\theta}$ , multiplique (5.22) por  $\varphi^T(t, x, u)$  (para reducir la notación la función  $\varphi(t, x, u)$  será llamada  $\varphi(t)$ ). Introduciendo la variable auxiliar de integración  $\sigma$  se tiene:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma = \Delta_\theta \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \quad (5.23)$$

De la anterior ecuación los parámetros pueden ser recuperados por medio de la relación:

$$\hat{\Delta}_\theta = \left[ \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right] \left[ \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right]^{-1} \quad (5.24)$$

en donde  $\hat{\Delta}_\theta$  es la estimación de  $\Delta_\theta$ . Para cualquier matriz cuadrada las siguientes igualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(t) \Gamma(t) &= I, \\ \Gamma^{-1}(t) \dot{\Gamma}(t) + \dot{\Gamma}^{-1}(t) \Gamma(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Defina  $\Gamma(t) = \left[ \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right]^{-1}$ . Utilizando (5.25) es posible reescribir (5.24) como:

$$\dot{\hat{\Delta}}_\theta = \left[ \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right] \dot{\Gamma}(t) + \bar{z}_{eq}(t) \varphi^T(t) \Gamma(t). \quad (5.26)$$

Usando (5.23) se obtiene:

$$\dot{\hat{\Delta}}_\theta = \hat{\Delta}_\theta \Gamma^{-1}(t) \dot{\Gamma}(t) + \bar{z}_{eq}(t) \varphi^T(t) \Gamma(t).$$

A continuación se presenta una expresión dinámica para calcular  $\Delta_\theta$ :

$$\dot{\hat{\Delta}}_\theta = \left[ -\hat{\Delta}_\theta \varphi(t) + \bar{z}_{eq}(t) \right] \varphi^T(t) \Gamma(t). \quad (5.27)$$

De la misma forma se obtiene una expresión dinámica para calcular  $\Gamma$ :

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t) \varphi(t) \varphi^T(t) \Gamma(t). \quad (5.28)$$

Los valores promedio de la inyección equivalente de salida real  $z_{eq}(t)$ , sin filtrado, satisfacen la igualdad

$$\int_0^t z_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma = \Delta_\theta \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma$$

entonces

$$\Delta_\theta = \left[ \int_0^t z_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right] \Gamma(t).$$

Substituyendo la ecuación (5.21), Los valores reales de los parámetros  $\Delta_\theta$  satisfacen

$$\Delta_\theta = \left[ \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma + \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right] \Gamma(t). \quad (5.29)$$

Considere  $\bar{z}_{eq}(t) = \widehat{\Delta}_\theta \varphi(t)$ . En este caso la ecuación (5.29) toma la forma

$$\Delta_\theta = \left[ \widehat{\Delta}_\theta \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma + \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right] \Gamma(t),$$

esto puede ser expresado como

$$\Delta_\theta = \widehat{\Delta}_\theta + \left[ \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right] \Gamma(t). \quad (5.30)$$

De la ecuación (5.30) es posible dar las condiciones para la convergencia del algoritmo

$$\sup \|t\Gamma(t)\| < \infty, \quad (5.31)$$

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \right\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (5.32)$$

La condición (5.31) necesita que la matriz  $\Gamma^{-1}(t) = \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma$  sea no-singular. Para evitar esta restricción es posible introducir un término  $\rho I$  tal que  $0 < \rho \ll 1$  en donde  $I$  es la matriz unitaria, entonces  $\Gamma^{-1}(t)$  se puede redefinir como

$$\Gamma^{-1}(t) = \int_0^t (\varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma) + \rho I$$

Para este caso  $\Gamma^{-1}(t)$  siempre será no singular.

Note que la introducción de  $\rho I$  es equivalente a fijar las condiciones iniciales de (5.28), como

$$\Gamma(0) = \rho^{-1} I, \quad 0 < \rho \text{-suficientemente pequeña}$$

La introducción del término  $\rho$  garantiza que se cumpla la condición  $\sup \|t\Gamma(t)\| < \infty$  pero no garantiza la convergencia de los valores estimados de los parámetros a los valores reales. La convergencia de los valores estimados a los reales depende de la *condición de excitación persistente* (vea por ejemplo [50])

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma) > 0.$$

La condición (5.32) hace referencia al proceso de filtrado, y nos da la calidad de convergencia de la identificación. De tal forma, tan rápido como el término

$\frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi(\sigma)^T d\sigma$  converge a cero, los parámetros estimados van a converger a los valores reales. Los resultados anteriores pueden ser sintetizados en el Teorema 22.

**Teorema 22** *El algoritmo (5.27), (5.28) garantiza la convergencia de  $\widehat{\Delta}_\theta \rightarrow \Delta_\theta$  bajo las condiciones (5.31), (5.32).*

**Observación 5** *El efecto del ruido en las mediciones puede ser fácilmente visto de (5.32):*

$$\frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon(\sigma) \varphi^T(\sigma) d\sigma \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Aquí  $\varepsilon(t)$  está dado por (5.21) e incluye los efectos de error causados por ruidos de observación (si los hay), errores por la realización de la inyección equivalente de salida, etc. Es posible ver que si  $\varepsilon(t)$  y  $\varphi(t)$  no están correlacionados y “en promedio” igual a cero, i.e.,

$$\frac{1}{t} \int_0^t \varepsilon(\sigma) d\sigma \rightarrow 0, \quad \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\sigma) d\sigma \rightarrow 0$$

entonces el efecto del ruido se desvanece.

### 5.4.3. Parámetros variantes en el tiempo

Considere el caso cuando  $\theta(t) \in \mathbb{R}^n$  es un vector de parámetros variantes en el tiempo. Para este caso, una versión continua del algoritmo de mínimos cuadrados es combinada con un factor matricial de olvido [53] para garantizar la identificación de los parámetros. La inyección equivalente de salida está dada por

$$z_{eq} = (\theta(t) - \bar{\theta}(t)) \varphi(t, x, u) = \begin{bmatrix} \alpha_1 N_1 \text{sign}(\sigma_{1n_1-1} - \dot{\sigma}_{1n_1-2}) \\ \vdots \\ \alpha_1 N_p \text{sign}(\sigma_{pn_p-1} - \dot{\sigma}_{pn_p-2}) \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Sea  $R = R^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  el factor de olvido matricial, tal que satisface las siguientes condiciones:

- $|\lambda_{\min}(R)| > 0$ ,
- $\|R\| = \varrho < 1$ .

Defina  $\vartheta(t) = \theta(t) - \bar{\theta}(t)$  como el vector de parámetros a ser identificado. Multiplique ambos lados de (5.33) por  $\varphi(t)^T R^{t-\sigma}$  al buscar su promedio en el tiempo se tiene:

$$\frac{1}{t} \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma = \frac{1}{t} \int_0^t \vartheta(\sigma) \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma$$

Considerando que  $\vartheta(t)$  es un parámetro que varía lentamente en el tiempo ( $\|\dot{\vartheta}(t)\| \leq \delta$ ) es posible definir su estimado de la siguiente forma

$$\hat{\vartheta}(t) := \left( \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma \right) \Gamma(t) \quad (5.34)$$

en donde

$$\Gamma(t) := \left[ \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma \right]^{-1}$$

Note que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|R\|^t \rightarrow 0$ . Entonces, el factor de olvido es seleccionado para asignar un peso a los valores de  $\varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma)$ , enfatizando los valores actuales y haciendo menos importantes los valores pasados, garantizando que el algoritmo de estimación y los parámetros a identificar varíen en la misma proporción.

Defina  $\Theta(t)$  y  $\Gamma(t)^{-1}$  como

$$\Theta(t) := \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma, \quad (5.35)$$

$$\Gamma(t)^{-1} := \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma + \rho I \quad (5.36)$$

Multiplicando (5.33) por  $\varphi^T(t)$  e introduciendo el factor de olvido matricial

$$\hat{\vartheta}(t) \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma = \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma$$

usando (5.35), (5.36) es posible escribir

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}(t) \Gamma^{-1}(t) &= \Theta(t), \\ \dot{\hat{\vartheta}}(t) &= \Theta(t) \dot{\Gamma}(t), \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\dot{\hat{\vartheta}}(t) = \Theta(t) \dot{\Gamma}(t) + \dot{\Theta}(t) \Gamma(t), \quad (5.38)$$

La ecuación (5.35) puede ser escrita en una forma dinámica como:

$$\dot{\Theta}(t) = \bar{z}_{eq}(t) \varphi^T(t) + \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) \left( \frac{d}{dt} R^{t-\sigma} \right) d\sigma. \quad (5.39)$$

Por definición

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R^{t-\sigma} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [R^{t+\Delta t-\sigma} - R^{t-\sigma}], \\ \frac{d}{dt} R^{t-\sigma} &= R^{t-\sigma} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [R^{\Delta t} - I] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Introduzca la matriz  $T$  como la matriz modal de  $R$  (sus columnas son los vectores propios de  $R$ ), tal que

$$\bar{R} = T^{-1} R T = \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{r}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{r}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{r}_n \end{bmatrix}$$

entonces, la ecuación (5.40) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} R^{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} T T^{-1} R^{\Delta t} T T^{-1}, \\
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} R^{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} T \begin{bmatrix} \bar{r}_1^{\Delta t} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{r}_2^{\Delta t} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{r}_{n-1}^{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{r}_n^{\Delta t} \end{bmatrix} T^{-1}, \\
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} R^{\Delta t} &= T \left( I + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \bar{r}_1^{\Delta t} - 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{r}_n^{\Delta t} - 1 \end{bmatrix} \right) T^{-1}, \\
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} R^{\Delta t} &= T \left( I + \begin{bmatrix} \ln \bar{r}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ln \bar{r}_n \end{bmatrix} \right) T^{-1} \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Usando (5.41) es posible definir  $\ln R$  como

$$\ln R = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [R^{\Delta t} - I] = T^{-1} \begin{bmatrix} \ln \bar{r}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ln \bar{r}_n \end{bmatrix} T$$

En consecuencia, la ecuación (5.40) toma la forma

$$\frac{d}{dt} R^{t-\sigma} = R^{t-\sigma} \ln R. \tag{5.42}$$

Substituyendo (5.42) en (5.39) se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}(t) &= \bar{z}_{eq}(t) \varphi^T(t) + \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} \ln R d\sigma, \\
\dot{\Theta}(t) &= \bar{z}_{eq}(t) \varphi^T(t) + \ln R \int_0^t \bar{z}_{eq}(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma, \\
\dot{\Theta}(t) &= \bar{z}_{eq}(t) \varphi^T(t) + (\ln R) \Theta(t). \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Del (5.36) se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}^{-1}(t) &= \varphi(t) \varphi^T(t) + \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) \left( \frac{d}{dt} R^{t-\sigma} \right) d\sigma, \\
\dot{\Gamma}^{-1}(t) &= \varphi(t) \varphi^T(t) + \ln R \int_0^t \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma, \\
\dot{\Gamma}^{-1}(t) &= \varphi(t) \varphi^T(t) + (\ln R) \Gamma^{-1}(t). \tag{5.44}
\end{aligned}$$

Usando (5.44) y (5.25) es posible escribir

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}(t)\Gamma^{-1}(t) + \Gamma(t) (\varphi(t)\varphi^T(t) + \Gamma^{-1}(t) \ln R) &= 0, \\ \dot{\Gamma}(t) &= -\Gamma(t) (\varphi(t)\varphi^T(t) + \Gamma^{-1}(t) \ln R) \Gamma(t), \\ \dot{\Gamma}(t) &= -(\Gamma(t)\varphi(t)\varphi^T(t) + \ln R) \Gamma(t).\end{aligned}\quad (5.45)$$

Si se utiliza (5.43) y (5.45), la ecuación (5.38) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\vartheta}}(t) &= -\Theta(t) (\Gamma(t)\varphi(t)\varphi^T(t) + \ln R) \Gamma(t) + (\bar{z}_{eq}(t)\varphi^T(t) + \Theta(t) \ln R) \Gamma(t), \\ \dot{\hat{\vartheta}}(t) &= -\Theta(t)\Gamma(t)\varphi(t)\varphi^T(t)\Gamma(t) + \bar{z}_{eq}(t)\varphi^T(t)\Gamma(t).\end{aligned}$$

De (5.37) es posible escribir

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\vartheta}}(t) &= -\hat{\vartheta}(t)\varphi(t)\varphi^T(t)\Gamma(t) + \bar{z}_{eq}(t)\varphi^T(t)\Gamma(t), \\ \dot{\hat{\vartheta}}(t) &= (\bar{z}_{eq}(t) - \hat{\vartheta}(t)\varphi(t)) \varphi^T(t)\Gamma(t).\end{aligned}\quad (5.46)$$

**Teorema 23** *El algoritmo (5.45), (5.46) garantiza la siguiente cota para el error de estimación de los parámetros:*

$$\|\Delta\vartheta(t)\|^2 \leq nm_2 \frac{(1 - \alpha^t)^2}{(\ln \alpha)^2} \left( \frac{\delta\sqrt{m_2}}{|\ln \alpha|} + \epsilon^+ \right)^2 \|\Gamma(t)\|^2 \quad (5.47)$$

en donde  $\Delta\vartheta = \hat{\vartheta} - \vartheta$ , si se considera que las siguientes condiciones son satisfechas:

- $\|\dot{\hat{\vartheta}}(t)\| \leq \delta$
- $\|R\| = \alpha < 1$
- $\|\varphi(t)\varphi^T(t)\| = \varphi^T(t)\varphi(t) = \|\varphi(t)\|^2 \leq m_2$
- En (5.21)  $\|\varepsilon(t)\| \leq \epsilon^+$

*Prueba.* Combine (5.21) en (5.34), se tiene

$$\begin{aligned}\Delta\vartheta(t) &= \left[ \int_0^t \vartheta(\sigma)\varphi(\sigma)\varphi^T(\sigma)R^{t-\sigma}d\sigma + \int_0^t \varepsilon(\sigma)\varphi^T(\sigma)R^{t-\sigma}d\sigma \right] \Gamma(t) - \vartheta(t) \\ \Delta\vartheta(t) &= \left[ \int_0^t (\vartheta(t) - \vartheta(\sigma))\varphi(\sigma)\varphi^T(\sigma)R^{t-\sigma}d\sigma + \int_0^t \varepsilon(\sigma)\varphi^T(\sigma)R^{t-\sigma}d\sigma \right] \Gamma_t, \\ M(t) &:= \left[ \int_0^t (\vartheta(t) - \vartheta(\sigma))\varphi(\sigma)\varphi^T(\sigma)R^{t-\sigma}d\sigma + \int_0^t \varepsilon(\sigma)\varphi^T(\sigma)R^{t-\sigma}d\sigma \right] \Gamma_t, \\ M(t) &= M_1(t) + M_2(t),\end{aligned}$$

en donde

$$M_1(t) := \left[ \int_0^t (\vartheta(t) - \vartheta(\sigma))\varphi(\sigma)\varphi^T(\sigma)R^{t-\sigma}d\sigma \right] \Gamma(t) \quad (5.48)$$

$$M_2(t) := \left[ \int_0^t \varepsilon(\sigma)\varphi^T(\sigma)R^{t-\sigma}d\sigma \right] \Gamma(t), \quad (5.49)$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\Delta\vartheta(t)\|^2 &= \text{tr}\{\Delta\vartheta(t)\Delta\vartheta^T(t)\} = \text{tr}\{M(t)M^T(t)\} \leq n\|M(t)\|^2 \\ \|\Delta\vartheta(t)\|^2 &\leq n(\|M_1(t)\| + \|M_2(t)\|)^2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Es necesario obtener cotas superiores para  $\|M_1(t)\|$  y  $\|M_2(t)\|$ . Para la norma de  $M_1(t)$  se tiene

$$\begin{aligned} \|M_1(t)\| &= \left\| \left[ \int_{\sigma=0}^t \left( \int_{s=t}^{\sigma} \dot{\vartheta}(s) ds \right) \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma \right] \Gamma(t) \right\| \\ &= \left\| \left[ \int_{s=0}^t \dot{\vartheta}(s) \left( \int_{\sigma=0}^s \varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma) R^{t-\sigma} d\sigma \right) ds \right] \Gamma(t) \right\| \\ &\leq \|\Gamma(t)\| \int_{s=0}^t \|\dot{\vartheta}(s)\| \left( \int_{\sigma=0}^s \|\varphi(\sigma) \varphi^T(\sigma)\| R^{t-\sigma} d\sigma \right) ds \\ &\leq \|\Gamma(t)\| \delta m_2 \int_{s=0}^t \int_{\sigma=0}^s \alpha^{t-\sigma} d\sigma ds = \delta m_2 \int_{s=0}^t \alpha^{t-s} \int_{\sigma=0}^s \alpha^{s-\sigma} d\sigma ds \\ &\leq \|\Gamma(t)\| \delta m_2 \int_{s=0}^t \alpha^{t-s} \frac{1-\alpha^s}{|\ln \alpha|} ds = \frac{\delta m_2}{|\ln \alpha|} \left[ \int_0^t \alpha^{t-s} ds - t\alpha^t \right] \\ \|M_1(t)\| &\leq \|\Gamma(t)\| \frac{\delta m_2}{(\ln \alpha)^2} (1 - \alpha^t) \end{aligned} \quad (5.51)$$

La norma de  $M_2(t)$  puede ser expresada como

$$\|M_2(t)\| \leq \|\Gamma(t)\| \int_0^t \|\varepsilon(\sigma)\| \|\varphi(\sigma)\| \|R^{t-\sigma}\| d\sigma$$

Asuma que  $\varepsilon(t)$  y  $\varphi(t)$  satisfacen las suposiciones dadas en el Teorema 23, la última ecuación toma la forma

$$\|M_2(t)\| \leq \|\Gamma(t)\| \varepsilon^+ \sqrt{m_2} \int_0^t \alpha^{t-\sigma} d\sigma = \|\Gamma(t)\| \varepsilon^+ \sqrt{m_2} \frac{1-\alpha^t}{|\ln \alpha|} \quad (5.52)$$

Substituyendo (5.51) y (5.52) en (5.50), implica la existencia de la cota superior para  $\|M(t)\|$  y, finalmente, se puede concluir (5.47).

‡

**Observación 6** *Los valores reales de los parámetros pueden ser calculados fácilmente  $\hat{\vartheta}(t)$  como  $\theta(t) = \hat{\vartheta}(t) + \bar{\theta}(t)$ .*

## 5.5. Ejemplos

### 5.5.1. Observación de sistemas mecánicos

Para ilustrar el comportamiento del observador de sistemas mecánicos, es propuesto un sistema electromecánico con zona muerta (backlash). A continuación se presenta una versión resumida de los resultados publicados en [54].

El dispositivo experimental, que consta de dos motores acoplados mediante engranes, se muestra en la Figura 5.1. El problema que se quiere ilustrar con el sistema diseñado es el fenómeno de zona muerta o backlash, y que se encuentra provocado por la existencia de espacios en las zonas de acoplamiento de los engranajes entre la sección del motor y la de la carga. Este fenómeno es reproducido en el dispositivo experimental mostrado la Figura 5.2.

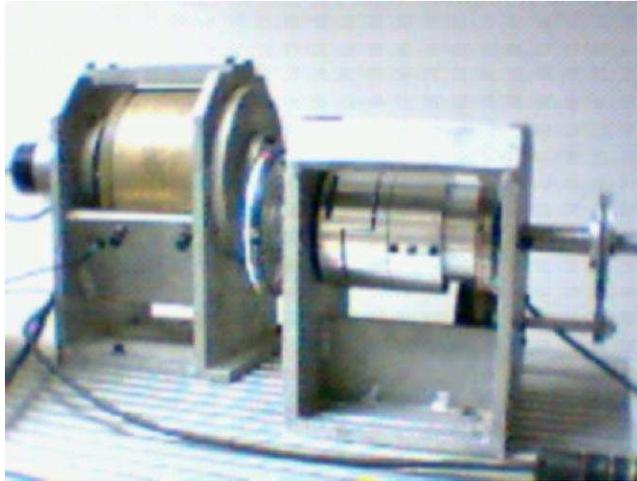


Figura 5.1: Dispositivo experimental.

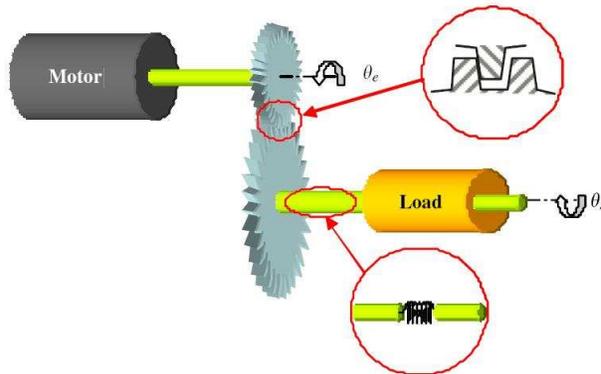


Figura 5.2: Acoplamiento de los engranes.

Despreciando el efecto de la fricción estática, el modelo del dispositivo experimental, incluyendo el fenómeno de backlash se describe a continuación:

$$\begin{aligned} J_e \ddot{\theta}_e + f_e \dot{\theta}_e + C &= u, \\ J_s \ddot{\theta}_s + f_s \dot{\theta}_s &= N_0 C, \end{aligned} \quad (5.53)$$

donde  $J_s, J_e, f_s, f_e$  son respectivamente inercias y fricciones viscosas de las partes del reductor y del motor, cuyos valores fueron identificados previamente mediante experimentación. Las variables  $\ddot{\theta}_s, \ddot{\theta}_e, \dot{\theta}_s, \dot{\theta}_e$ , son respectivamente, las aceleraciones y las velocidades del reductor y el motor, las cuales pueden ser obtenidas mediante derivación de las posiciones  $\theta_s$  y  $\theta_e$ . El torque de entrada está dado por  $u$ , el torque transmitido vía la zona muerta está dado por  $C$  y  $N_0$  representa la constante de reducción.

La zona muerta es modelada utilizando una función sigmoide, y es descrita por la siguiente ecuación:

$$C = K \left( z - 4j_0 \frac{1 - e^{-\gamma z}}{1 + e^{-\gamma z}} \right) \quad (5.54)$$

donde  $C$  es la aproximación del torque transmitido,  $z = \theta_e - N_0\theta_s$  define la diferencia entre la entrada y la salida del reductor,  $K$  es el parámetro de rigidez,  $j_0$  es la amplitud de la zona muerta y  $\gamma$  es la constante que representa la pendiente decreciente de la zona muerta y que es identificada en [55].

Introduciendo las variables de estado  $x_{1e} = \theta_e$ ,  $x_{1s} = \theta_s$ ,  $x_{2e} = \dot{\theta}_e$ ,  $x_{2s} = \dot{\theta}_s$ , el modelo puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1e} &= x_{2e}, \\ \dot{x}_{2e} &= -\frac{f_e}{J_e}x_{2e} + \frac{u}{J_e} - \frac{C}{J_e}, \\ \dot{x}_{1s} &= x_{2s}, \\ \dot{x}_{2s} &= -\frac{f_s}{J_s}x_{2s} + \frac{N_0C}{J_s}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

El observador propuesto para el sistema está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{1e} &= \hat{x}_{2e} + z_{1e}, \\ \dot{\hat{x}}_{2e} &= -\frac{f_e}{J_e}\hat{x}_{2e} + \frac{u}{J_e} + z_{2e}, \\ \dot{\hat{x}}_{1s} &= \hat{x}_{2s} + z_{1s}, \\ \dot{\hat{x}}_{2s} &= -\frac{f_s}{J_s}\hat{x}_{2s} + z_{2e}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

donde  $\hat{x}_{1e}, \hat{x}_{2e}, \hat{x}_{1s}, \hat{x}_{2s}$  son las estimaciones y  $z_{1e}, z_{2e}, z_{1s}, z_{2s}$  son los factores de corrección dados por:

$$\begin{aligned} z_{1e} &= \lambda_1|x_{1e} - \hat{x}_{1e}|^{1/2} \text{sign}(x_{1e} - \hat{x}_{1e}), \\ z_{2e} &= \alpha_1 \text{sign}(x_{1e} - \hat{x}_{1e}), \\ z_{1s} &= \lambda_2|x_{1s} - \hat{x}_{1s}|^{1/2} \text{sign}(x_{1s} - \hat{x}_{1s}), \\ z_{2s} &= \alpha_2 \text{sign}(x_{1s} - \hat{x}_{1s}), \end{aligned} \quad (5.57)$$

**Resultados de simulación.** Considere los parámetros del sistema:

$$\begin{aligned} J_s &= 7, & f_s &= 16, & N_0 &= 5, \\ J_m &= 0,05, & f_m &= 0,15, & \gamma &= 20, \\ K &= 1, \end{aligned}$$

Los parámetros del observador están dados por  $\alpha_1 = 1,8$ ,  $\alpha_2 = 0,08$ ,  $\lambda_1 = 0,005$ ,  $\lambda_2 = 0,004$ . Considere la señal de entrada (control) mostrada en la Figura

5.3, la convergencia de la estimación de  $\theta_e$  y  $\dot{\theta}_e$ , se muestran en la Figura 5.4. La convergencia de las estimaciones a los valores reales de las señales  $\theta_s$  y  $\dot{\theta}_s$  se muestran en la Figura 5.5. Utilizando la técnica de identificación de la entrada desconocida, es posible reconstruir el torque transmitido por la zona muerta C y la característica entrada-salida del backlash, la cuál es ilustrada mediante la gráfica de  $\theta_e$  contra  $\theta_s$ , el resultado de la identificación es mostrado en la Figura 5.6.

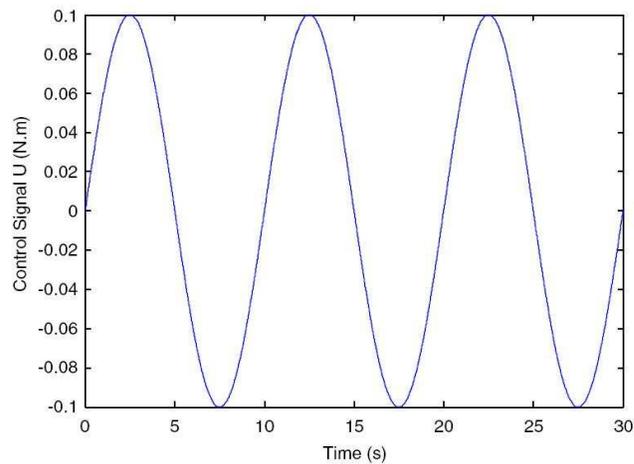


Figura 5.3: Señal de entrada.

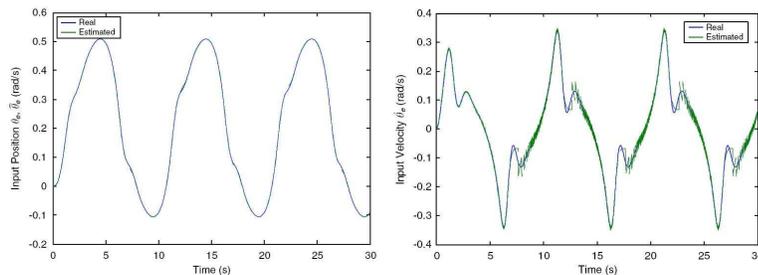


Figura 5.4: Estimaciones del desplazamiento  $\theta_e$  y la velocidad angular  $\dot{\theta}_e$  obtenidos en simulación.

**Resultados experimentales.** Para la fase experimental se utilizó el dispositivo experimental antes descrito. Se consideraron como valores nominales los mismos parámetros del sistema utilizados en la fase de simulación, y el observador fue diseñado utilizando los parámetros  $\alpha_1 = 0,15$ ,  $\alpha_2 = 0,025$ ,  $\lambda_1 = 0,01$ ,  $\lambda_2 = 0,004$ . Al igual que en la fase de simulación, considere la señal de entrada mostrada en la Figura 5.3. La convergencia de la estimación de  $\theta_e$  y  $\dot{\theta}_e$ ,

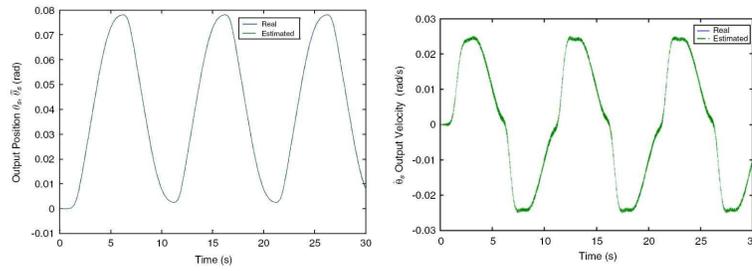


Figura 5.5: Estimaciones del desplazamiento  $\theta_s$  y la velocidad angular  $\dot{\theta}_s$  obtenidos en simulación.

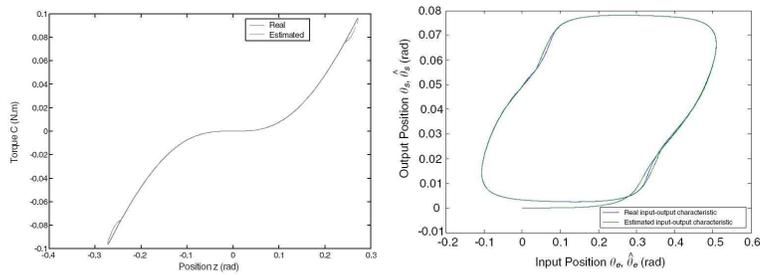


Figura 5.6: Estimación del torque transmitido por el término  $C$  y característica entrada-salida obtenidos en simulación.

se muestran en la Figura 5.7. La convergencia de las estimaciones a los valores reales de las señales  $\theta_s$  y  $\dot{\theta}_s$  se muestran en la Figura 5.8. La reconstrucción del torque transmitido por la zona muerta C y la característica entrada-salida del backlash son mostradas en la Figura 5.9

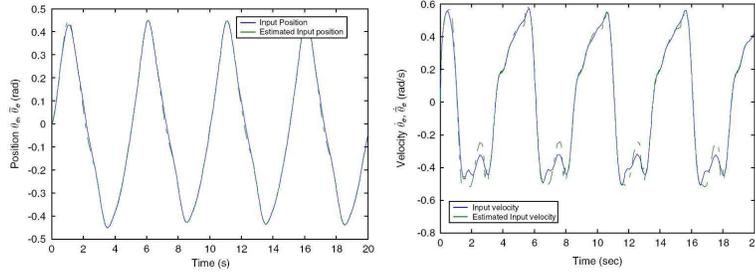


Figura 5.7: Estimaciones del desplazamiento  $\theta_e$  y la velocidad angular  $\dot{\theta}_e$  obtenidos experimentalmente.

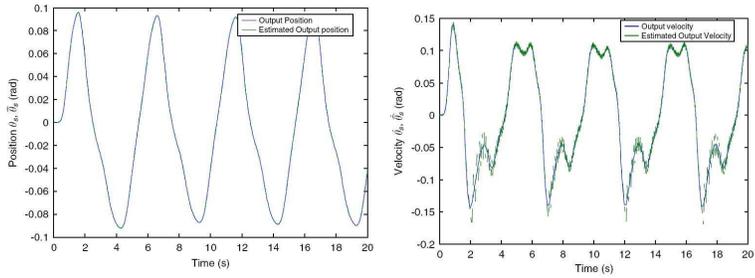


Figura 5.8: Estimaciones del desplazamiento  $\theta_s$  y la velocidad angular  $\dot{\theta}_s$  obtenidos experimentalmente.

### 5.5.2. Identificación de fallas

La efectividad del esquema de observación aplicado a la identificación de fallas es probada a través del modelo de una aeronave de despegue y aterrizaje vertical (VTOL por sus siglas en inglés). Dicho modelo es tomado de las referencias [7], [56]. Considere el sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + E\zeta \\ y &= Cx + F\zeta\end{aligned}$$

en donde  $\zeta = [\zeta_a^T \zeta_s^T]^T$  es un vector de fallas, y en el cual  $\zeta_a$  representa una falla en los actuadores y  $\zeta_s$  representa una falla en los sensores. Los valores de

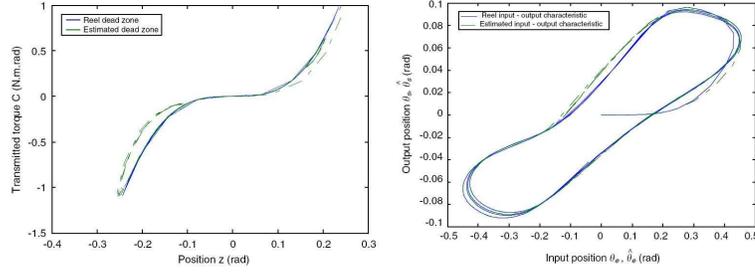


Figura 5.9: Estimación del torque transmitido por el término  $C$  y característica entrada-salida obtenidos experimentalmente.

las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $F$  están dados por

$$A = \begin{bmatrix} -9,9477 & -0,7476 & 0,2632 & 5,0337 \\ 52,1659 & 2,7452 & 5,5532 & -24,4221 \\ 26,0922 & 2,6361 & -4,1975 & -19,2774 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,4422 & 0,1761 \\ 3,5446 & -7,5922 \\ -5,5200 & 4,4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz  $A$  están localizados en  $-6,8271$ ,  $-1,0112 + 1,5146i$ ,  $-1,0112 - 1,5146i$ ,  $-2,5506$ . Note que el sistema es estable. El vector de grados relativos está dado por  $(2, 2, 0)$ .

Considere que la falla en los actuadores está dada por  $\zeta_a(t) = 0,5 \sin(2t) + 0,43$  y aparece en  $t = 7$ . Considere que la falla en los sensores es una señal cuadrada que aparece en  $t = 10$ .

Dado que la matriz  $A$  es estable, entonces es posible asumir que la ganancia del observador Luenberger es igual a cero.

En este caso, la matriz  $M_n$  está dada por

$$M_n = \begin{bmatrix} -9,9477 & -0,7476 & 0,2632 & 5,0337 \\ 52,1659 & 2,7452 & 5,5532 & -24,4221 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector  $\rho_1$  es calculado como

$$\rho_1 = F^\perp \tilde{e}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{e}_y$$

el vector  $\rho_2$  tiene la forma

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} F^\perp CE \\ F \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \tilde{e}_y \end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \tilde{e}_y \end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_y \\ \tilde{e}_y \end{bmatrix}$$

Obviamente, el valor de  $\tilde{y}$  es obtenido directamente como  $\tilde{y} = y - Cz$ , y dado que  $\zeta_a^{(1)} < \zeta_1^+$ , entonces el valor de  $\dot{\tilde{y}}$ , requerido para la reconstrucción de la señal de falla, es reconstruido mediante la aplicación del observador extendido (3.39) como:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{1_i} &= w_1 = -\alpha_3 N_i^{1/3} |v_1 - \tilde{e}_{y_i}|^{2/3} \text{sign}(v_1 - \tilde{e}_{y_i}) + v_2, \\ \dot{v}_{2_i} &= w_2 = -\alpha_2 N_i^{1/2} |v_2 - w_1|^{1/2} \text{sign}(v_2 - w_1) + v_3, \\ \dot{v}_{3_i} &= -\alpha_1 N_i \text{sign}(v_3 - w_2), \end{aligned}$$

en donde  $N_i$ ,  $i = 1, 2$  toman los valores  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 8,5$  y las ganancias del modo deslizante son elegidas como  $\alpha_1 = 1,1$ ,  $\alpha_2 = 1,5$ ,  $\alpha_3 = 2$ . La convergencia del error de estimación a cero en tiempo finito se presenta en la figura 5.10.

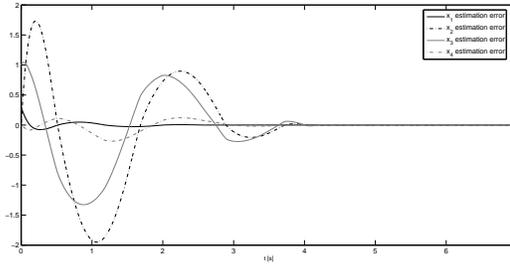


Figura 5.10: Error de estimación  $x - \hat{x}$ .

La estimación de los estados  $x_1, x_2$  se presenta en la Figura 5.11. La estimación de los estados  $x_3, x_4$  es presentada en la Figura 5.12.

Finalmente, la reconstrucción de las fallas es presentada en la Figura 5.13. Es importante hacer notar que la falla reconstruida en los sensores no es una señal continua.

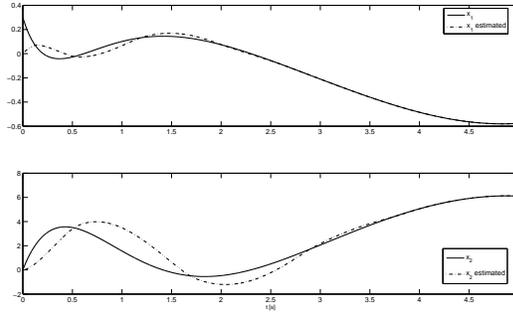


Figura 5.11: Convergencia de los estados  $x_1$  y  $x_2$ .

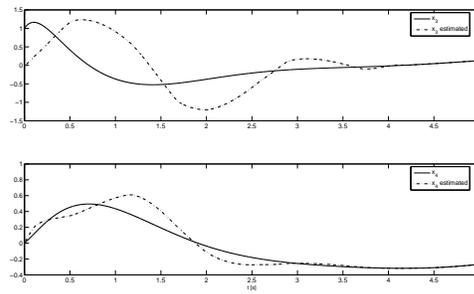


Figura 5.12: Convergencia de los estados  $x_3$  y  $x_4$ .

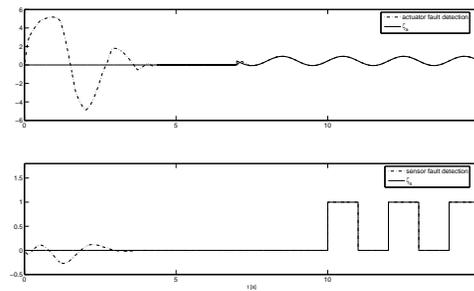


Figura 5.13: Reconstrucción de la falla en los actuadores (imagen superior).  
Reconstrucción de la falla en los sensores (imagen inferior).

### 5.5.3. Identificación de parámetros invariantes en el tiempo

Considere el modelo de un péndulo con fricción seca dado por la ecuación

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin \theta - \frac{V_s}{J} \dot{\theta} - \frac{P_s}{J} \text{sign}(\dot{\theta})$$

en donde la masa del péndulo es  $M = 1,1[Kg]$ , la fuerza de gravedad  $g = 9,815[m/s^2]$ ,  $L = 0,9[m]$  es el largo de la barra,  $J = ML^2 = 0,891[Kg * m^2]$  es la inercia de la barra,  $V_s = 0,18[Kg * m^2/s]$  es el coeficiente de fricción viscosa,  $P_s = 0,45[Kg * m^2/s^2]$  es el coeficiente de fricción de Coulomb. Considere que el ángulo  $\theta$  es medible. Introduciendo las variables de estado  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ , la representación del sistema en variables de estado está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin x_1 - \frac{V_s}{J}x_2 - \frac{P_s}{J} \text{sign}(x_2), \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

en donde los parámetros conocidos son  $a_1 = \frac{MgL}{2J} = 5,4528$ ,  $a_2 = \frac{V_s}{J} = 0,2020$ ,  $a_3 = \frac{P_s}{J} = 0,5051$ . Note que el sistema se encuentra en la forma (4.4) por lo que es posible aplicar directamente el observador (4.3) como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \alpha_2 |x - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{J}u - \bar{a}_1 \sin x_1 - \bar{a}_2 \hat{x}_2 - \bar{a}_3 \text{sign}(x_2) + \alpha_1 \text{sign}(\hat{x}_2 - \hat{x}_1), \\ \tilde{x}_1 &= y - \hat{x}_1 \end{aligned}$$

en donde  $\bar{a}_1 = 2, \bar{a}_2 = \bar{a}_3 = 0,1$  son los valores nominales de los parámetros desconocidos. Considere que el sistema tiene una señal de control generada por medio del controlador twisting

$$u = -30 \text{sign}(\theta - \theta_d) - 15 \text{sign}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d), \quad (5.58)$$

en donde la señal de referencia es  $\theta_d = 0,3 \sin(3t + \pi/4) + 0,3 \sin(1/2t + \pi)$ . Utilizando un tiempo de muestreo de  $\delta = 0,0001$  y las condiciones iniciales  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = x_2 = 0$ ,  $x_1 = 4$  el error de estimación de los estados se muestra en la Figura 5.14, en este caso las variables para la identificación son

$$\begin{aligned} z_{eq} &= \alpha_1 \text{sign} \tilde{x}_1 \\ \Delta_\theta &= [-a_1 + \bar{a}_1 \quad -a_2 + \bar{a}_2 \quad -a_3 + \bar{a}_3] \\ \Delta_\theta &= [-3,4528 \quad -0,1020 \quad -0,4051] \\ \varphi &= \begin{bmatrix} \sin x_1 \\ x_2 \\ \text{sign}(x_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando el algoritmo (5.27), la convergencia del estimado de los parámetros al valor real de los mismo es presentada en la Figura 5.15.

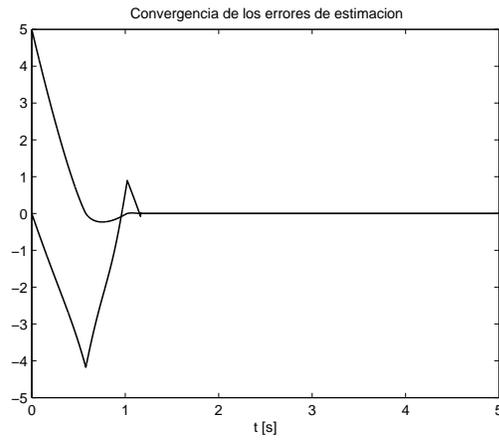


Figura 5.14: Error de estimación de los estados  $x_1, x_2$ .

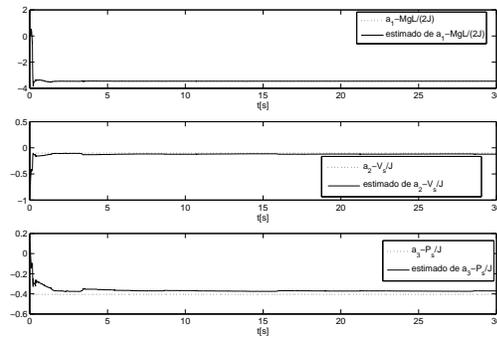


Figura 5.15: Identificación de parámetros invariantes en el tiempo.

#### 5.5.4. Identificación de parámetros variantes en el tiempo

Considere el siguiente modelo de un péndulo con amortiguamiento variante en el tiempo

$$\ddot{q} = \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin q - \frac{P_s}{J} \text{sign}(\dot{q}) - \left(0,5 + 0,6 \sin \frac{t}{7}\right) \dot{q} \quad (5.59)$$

en donde  $M = 1,1[Kg]$  es la masa del péndulo,  $g = 9,815[m/s^2]$  es la fuerza de gravedad,  $L = 0,9[m]$  es el largo del brazo,  $J = ML^2 = 0,891[Kg * m^2]$  es la inercia del péndulo,  $P_s = 0,45[Kg * m^2/s^2]$  es el coeficiente de fricción de Coulomb. Note que el coeficiente de fricción viscosa ahora es considerado como  $(0,5 + 0,6 \sin(\frac{t}{7}))$ . Considere que el sistema es controlado mediante el algoritmo twisting diseñado como

$$u = -30\text{sign}(\theta - \theta_d) - 15\text{sign}(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d), \quad (5.60)$$

en donde  $\theta_d = 0,3 \sin(3t + \pi/4) + 0,3 \sin(1/2t + \pi)$  es la señal de referencia. Introduciendo las variables de referencia  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ . El sistema (5.59) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin x_1 - \frac{P_s}{J} \text{sign}(x_2) - \left(0,5 + 0,6 \sin \frac{t}{7}\right) x_2, \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Considerando que los parámetros  $\frac{1}{J}$ ,  $\frac{MgL}{2J}$ ,  $\frac{P_s}{J}$  son totalmente conocidos. El observador toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \alpha_2 |\tilde{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\tilde{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin x_1 - \frac{P_s}{J} \text{sign}(\hat{x}_2) + \alpha_1 \text{sign}(\hat{x}_2 - \hat{x}_1), \\ \tilde{x}_1 &= y - \hat{x}_1 \end{aligned}$$

Note que en este caso es seleccionado el valor nominal  $\bar{\theta} = 0$ . Seleccionando los parámetros del observador como  $\alpha_1 = 2,2211$ ,  $\alpha_2 = 19,1819$  y considerando las condiciones iniciales para el sistema y el observador  $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = x_2 = 0$ ,  $x_1 = 4$ , la convergencia en tiempo finito del error de estimación de los estados se muestra en la Figura 5.16. La inyección equivalente de salida está dada por

$$z_{eq} = \alpha_1 \text{sign} \tilde{x}_1 = \left(0,5 + 0,6 \sin \frac{t}{7}\right) x_2$$

Aplicando el método (5.46), (5.45) con

$$\begin{aligned} z_{eq} &= \alpha_1 \text{sign} \tilde{x}_1, \\ \vartheta &= - \left(0,5 + 0,6 \sin \frac{t}{7}\right), \\ \varphi &= x_2 \end{aligned}$$

y considerando el factor de olvido  $R = 0,1$ . La identificación del parámetro variante en el tiempo es mostrada en la figura 5.17.

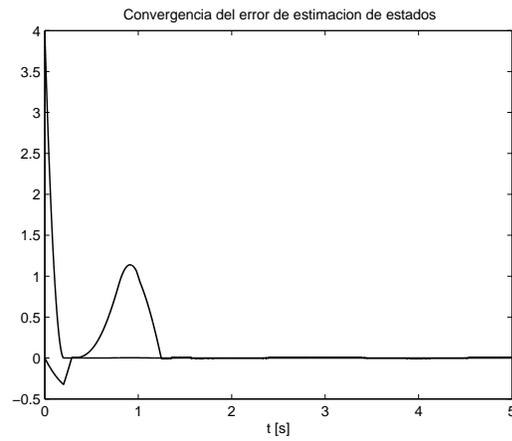
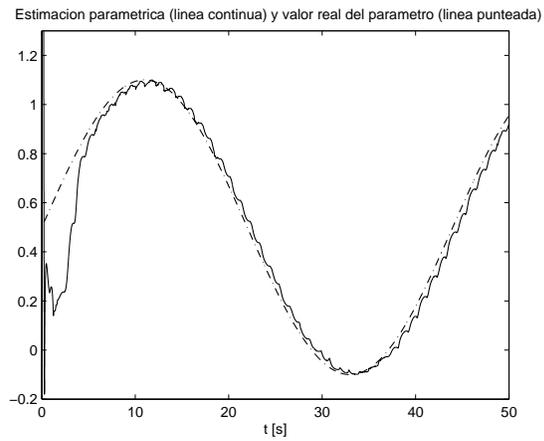
Figura 5.16: Error de estimación de los estados  $x_1$ ,  $x_2$ .

Figura 5.17: Identificación de un parámetro variante en el tiempo.

## Capítulo 6

# Discusión de resultados y conclusiones

### 6.1. Discusión de la labor realizada

En 2004, un observador por modos deslizantes de segundo orden [57] fue presentado en el 8th International Workshop on Variable Structure Systems, en Vilanova i la Geltrú, España y en el Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático [58]. En 2005, dicho resultado fue publicado en el IEEE Transaction on Automatic Control [21]. El artículo presentaba un observador de segundo orden para sistemas mecánicos que garantizaba la convergencia en tiempo finito del error de estimación a cero. Al momento de la realización del trabajo de tesis, este artículo cuenta con 56 citas, entre ellas, la mostrada en [23], hace una comparación de dicho algoritmo contra otros algoritmos de observación, concluyendo que nuestro algoritmo cuenta con una mayor exactitud y permite un diseño mas sencillo.

Una de las principales características del observador de segundo orden es su robustez ante incertidumbres paramétricas y que permite el uso de la propiedad de control equivalente. Haciendo uso de dicha propiedad, las perturbaciones o variaciones paramétricas pueden ser obtenidas directamente de la inyección de salida. Dicho resultado fue publicado en 2006 en el International Journal of Control [22]. En este artículo son presentados algoritmos de identificación en tiempo continuo que permiten recuperar los parámetros reales del sistema a partir de un vector de regresión formado por los estimados de los estados. Se realizó la presentación de los resultados en el 9th International Workshop on Variable Structure Systems en 2006 [59] y en el Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático [60]. Los resultados fueron considerados de fundamental importancia y publicados en un capítulo de un libro de la serie Lecture Notes in Control and Information Sciences [31] de Springer.

El observador de modos deslizantes de segundo orden y su algoritmo de identificación de perturbaciones fueron aplicados para identificar el fenómeno de

backlash o zona muerta, el resultado fue presentado en el 2006 American Control Conference [61] y, posteriormente, publicado en la revista Control Engineering Practice [54].

El algoritmo de identificación paramétrica fue aplicado para reconstruir el ángulo de deslizamiento de un neumático, la velocidad de giro del mismo y la deformación de la rueda. Para realizar las estimaciones fue diseñada una serie de observadores basados en modos deslizantes y aplicados a su control equivalente los algoritmos de identificación paramétrica. Los resultados fueron reportados en el 2006 American Control Conference [62].

Otra aplicación de los algoritmos de identificación paramétrica fue la de identificar la presión desarrollada por un semitrailer sobre sus neumáticos. Dicho trabajo tenía como objetivo determinar el momento en el que la velocidad y la maniobra del semitrailer provocaban que los neumáticos estuvieran expuestos a grandes presiones, pudiendo provocar esto la posible explosión del neumático. El resultado fue expuesto en el 9th International Workshop on Variable Structure Systems [63].

Una de las limitaciones del observador antes mencionado es que estaba restringida su aplicación para sistemas con grado relativo 2 y que presentaran estabilidad entrada estado [49]. Como una extensión del algoritmo de observación, se presenta un observador global para sistemas lineales, eliminando la limitante de grado relativo y extendiendo su aplicación en sistemas con entradas desconocidas. El trabajo fue presentado en el 9th International Workshop on Variable Structure Systems [64] y la 14th Mediterranean Conference on Control and Automation [65]. La posibilidad de identificar las entradas desconocidas fue presentada en el Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático 2006 [66] y en el 45th IEEE Conference on Decision and Control en 2006 [67]. El resultado principal en observación, así como el algoritmo de identificación de entradas desconocidas fueron publicados en la revista International Journal of System Science [68].

El algoritmo presentado en los trabajos mencionados anteriormente está basado en la aplicación del diferenciador por modos deslizantes de orden superior [30]. La extensión del método de observación y reconstrucción de la entrada desconocida para sistemas no lineales fue presentada en el Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático 2006 [69]. El problema de codificación de información en señales caóticas es estudiado desde el punto de vista de observación de sistemas con entradas desconocidas. Un sistema caótico es usado para codificar la señal y un esquema de demodulación es diseñado usando un observador por modos deslizantes de alto orden garantizando la sincronización en tiempo finito de los sistemas y la reconstrucción de la señal protegida. Las condiciones suficientes y necesarias para su aplicación son formuladas en términos del grado relativo.

Un observador por modos deslizantes de orden superior para sistemas lineales invariantes con entradas desconocidas, es presentado en [70]. El algoritmo presentado en esta conferencia proporciona convergencia del error a cero bajo las condiciones de observabilidad y detectabilidad fuertes. Un algoritmo de identificación de la entrada desconocida es desarrollado, las condiciones necesarias y

suficientes para la identificación de la entrada desconocida se encuentran dadas en este trabajo. La relevancia de los resultados hicieron posible que el trabajo fuera presentado como Conferencia Plenaria en el International Modeling and Simulation Multiconference 2007 [71].

La extensión del método de identificación de la entrada desconocida de tal forma que pueda ser utilizado para la identificación de fallas es presentado en [72].

Los resultados presentados en [70] y [72] se encuentran reportados en el capítulo del libro *Observation and Identification Via High-Order Sliding-Modes* [16]. En este capítulo, se presentan los resultados de reconstrucción de estados e identificación de entradas desconocidas en sistemas fuertemente observables.

La aplicación del método de reconstrucción de entradas desconocidas, combinada con la aplicación de los observadores para sistemas lineales con entradas desconocidas es presentada en [73], [74].

Realicé una estancia de investigación en Universidad de Cagliari, en Cagliari, Italia, del 2 de Noviembre al 1 de Diciembre de 2007, como resultado del trabajo realizado en la estancia, la técnica de observación es modificada para obtener convergencia en tiempo finito del error por medio de la compensación del mismo, mediante algoritmos de control por modos deslizantes de orden superior. Los resultados son presentados por primera vez en [75], el fundamento teórico será publicado en [76] y [77].

Así también, realicé una estancia en el Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes "IRCCyN", en Nantes, Francia, del 4 al 22 de diciembre de 2007 y del 6 al 21 de enero de 2008. Como resultado del trabajo realizado ahí, se prepara un draft que será sometido en fechas próximas. En dicho trabajo, se utiliza el esquema propuesto en el trabajo [76], pero se utiliza un nuevo método de compensación por modos deslizantes.

## 6.2. Conclusiones

Fue propuesta nueva metodología para el diseño de observadores basados en Modos-Deslizantes de Orden-Superior.

Con respecto a los algoritmos de observación para sistemas lineales con entradas desconocidas existentes, en este trabajo se presenta un observador para sistemas con entradas desconocidas acotadas y cuyo único requerimiento por parte del sistema es la condición de observabilidad o de detectabilidad fuerte. La técnica propuesta es extendida para sistemas cuasilineaes.

Introduciendo derivadas de Lie, es desarrollada una metodología para el diseño de observadores para sistemas no lineales, mostrando su efectividad en presencia de incertidumbres paramétricas y entradas desconocidas.

Se proponen algoritmos para la reconstrucción de la entrada desconocida y, a través del uso de la inyección equivalente de salida, son propuestos algoritmos de identificación paramétrica para parámetros variantes e invariantes en el tiempo. El algoritmo de identificación de la entrada desconocida es aplicado para la reconstrucción de fallas.

La efectividad de esta clase de observadores es mostrada mediante su aplicación en sistemas caóticos y sistemas mecánicos. La reconstrucción exacta de la entrada desconocida, hace de esta clase de observadores, ideales para su aplicación para la solución de problemas de control mediante compensación de perturbaciones.

El indeseable efecto de castañeteo (chattering) es reducido mediante la aplicación de los modos deslizantes de orden superior. La precisión de esta clase de observadores es la mejor obtenida hasta la fecha de realización de este trabajo.

# Bibliografía

- [1] D. G. Luenberger, "Observing the state of a linear system," *IEEE Trans. Mil. Electron.*, no. 8, pp. 74–80, 1964.
- [2] H. Nijmeijer and T. Fossen, *New Directions in Nonlinear Observer Design*. Springer Verlag, 1999.
- [3] T. Kailath, *Linear Systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1985.
- [4] M. Hautus, "Strong detectability and observers," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 50, pp. 353–368, 1983.
- [5] M. Hou and P. Muller, "Design of observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 6, pp. 871–875, June 1992.
- [6] J. Moreno, "Existence of unknown input observers and feedback passivity for linear systems," in *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida USA, 2001, pp. 3366–3371.
- [7] C. Tan and C. Edwards, "Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 13, no. 5, pp. 443–463, 2003.
- [8] A. Atassi and H. Khalil, "Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs," *Automatica*, vol. 39, pp. 183–191, 2000.
- [9] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. London: Taylor and Francis, 1999.
- [10] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding Mode Control*. London: Taylor and Francis, 1998.
- [11] B. Walcott and S. Zak, "State observation of nonlinear uncertain dynamical systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 32, no. 2, pp. 166–170, 1987.

- [12] J. Barbot, M. Djemai, and T. Boukhobza, "Sliding mode observers," in *Sliding Mode Control in Engineering*, ser. Control Engineering, W. Perruquetti and J. Barbot, Eds. New York: Marcel Dekker, 2002, pp. 103–130.
- [13] Y. Shtessel, I. Shkolnikov, and M. Brown, "An asymptotic second-order smooth sliding mode control," *Asian Journal of Control*, vol. 5, no. 4, pp. 498–504, 2003.
- [14] A. Poznyak, "Stochastic output noise effects in sliding mode estimations," *International Journal of Control*, vol. 76, pp. 986–999, 2003.
- [15] C. Edwards, S. Spurgeon, and C. P. Tan, "On development and applications of sliding mode observers," in *Variable Structure Systems: Towards 21st Century*, ser. Lecture Notes in Control and Information Science, X. Yu and J. Xu, Eds. Berlin, Germany: Springer Verlag, 2002, pp. 253–282.
- [16] L. Fridman, A. Levant, and J. Davila, "Observation and identification via high-order sliding modes," in *Modern Sliding Mode Control Theory: New Perspectives and Applications*, ser. Lecture Notes in Control and Information Science, G. Bartolini, L. Fridman, A. Pisano, and E. Usai, Eds. London: Springer Verlag, 2008, no. 375, pp. 293–319.
- [17] C. Edwards, S. Spurgeon, and R. Patton, "Sliding mode observers for fault detection and isolation," *Automatica*, vol. 36, no. 4, pp. 541–553, 2000.
- [18] Y. Xiong and M. Saif, "Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 46, no. 12, pp. 2012–2017, 2001.
- [19] J. Alvarez, Y. Orlov, and L. Acho, "An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a coulomb friction oscillator," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 122, pp. 687–690, 2000.
- [20] B. Xian, M. Queiroz, D. Dawson, and M. McIntyre, "A discontinuous output feedback controller and velocity observer for nonlinear mechanical systems," *Automatica*, vol. 40, no. 4, pp. 695–700, 2004.
- [21] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, "Second-order sliding-mode observer for mechanical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 50, no. 11, pp. 1785–1789, November 2005.
- [22] J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak, "Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes," *International Journal of Control*, vol. 79, no. 10, pp. 1251–1262, 2006.
- [23] Y. Su, P. Müller, and C. Zheng, "A simple nonlinear observer for a class of uncertain mechanical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 52, no. 7, pp. 1340–1345, July 2007.

- [24] H. Hashimoto, V. Utkin, J. X. Xu, H. Suzuki, and F. Harashima, "Vss observer for linear time varying system," in *Proceedings of IECON'90*, Pacific Grove CA, 1990, pp. 34–39.
- [25] T. Ahmed-Ali and F. Lamnabhi-Lagarrigue, "Sliding observer-controller design for uncertain triangular nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 6, pp. 1244–1249, 1999.
- [26] T. Floquet and J. Barbot, "A canonical form for the design of unknown input sliding mode observers," in *Advances in variable structure and sliding mode control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Science, C. Edwards, E. Fossas, and L. Fridman, Eds. Berlin: Springer Verlag, 2006, pp. 271–292.
- [27] F. Bejarano, A. Poznyak, and L. Fridman, "Observer for linear time invariant systems with unknown inputs based on the hierarchical super-twisting concept," in *2006 International Workshop on Variable Structure Systems - VSS'06*, Sardinia, Italy, 2006, pp. 208–213.
- [28] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," *International Journal of Control*, vol. 58, pp. 1247–1263, 1993.
- [29] —, "Robust exact differentiation via sliding mode technique," *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998.
- [30] —, "High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 9-10, pp. 924–941, 2003.
- [31] A. Poznyak, Y. Shtessel, L. Fridman, J. Davila, and J. Escobar, "Identification of dynamic systems parameters via sliding-mode technique," in *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Science, C. Edwards, E. Fossas, and L. Fridman, Eds. London: Springer Verlag, 2006, no. 334, pp. 313–347.
- [32] L. Silverman, "Inversion of multivariable linear systems," *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, vol. AC-14, no. 3, pp. 270–276, June 1969.
- [33] B. P. Molinari, "A strong controllability and observability in linear multivariable control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 21, no. 5, pp. 761–764, 1976.
- [34] M. L. J. Hautus and L. M. Silverman, "System structure and singular control," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 50, pp. 369–402, 1983.
- [35] B. P. Molinari, "Extended controllability and observability for linear system," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 21, no. 1, pp. 136–137, 1976.
- [36] J. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 6, pp. 875–880, June 1992.

- [37] E. Rocha-Cozatl and J. Moreno, "Dissipativity and design of unknown input observers for nonlinear systems," in *Proceedings of the 6th IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems*, Stuttgart, Germany, 2004, pp. 615–620.
- [38] X. Yan and C. Edwards, "Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using sliding mode observer," *Automatica*, vol. 43, no. 9, pp. 1605–1614, September 2007.
- [39] H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel, and M. Hautus, *Control theory for linear systems*. London, Great Britain: Springer-Verlag, 2001.
- [40] P. Albertos and A. Salas, *Multivariable Control Systems: An Engineering Approach*, ser. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. London: Springer, 2004.
- [41] W. M. Wonham, *Lineal multivariable control: A geometric approach*, 1st ed., ser. Lecture notes in economics and mathematical systems. New York: Springer-Verlag, 1974.
- [42] H. Rosenbrock, "The zeros of a system," *Int. J. Control*, vol. 18, pp. 297–299, 1973.
- [43] A. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [44] A. Levant, "Homogeneity approach to high-order sliding mode design," *Automatica*, vol. 41, no. 5, pp. 823–830, 2005.
- [45] A. Bacciotti and L. Rosier, *Liapunov functions and stability in control theory*, ser. Communications and Control Engineering. Berlin: Springer, 2001.
- [46] J. Moreno, "Unknown input observers for siso nonlinear systems," in *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, 2006, pp. 790–795.
- [47] A. Huang, L. Pivka, C. Wu, and M. Franz, "Chua's equation with cubic nonlinearity," *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. 6, pp. 2175–2222, 1996.
- [48] A. Poznyak, "Modelado matemático de los sistemas mecánicos, eléctricos y electromecánicos," 2008, disponible en versión preliminar. Pearson.
- [49] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. New Jersey:U.S.A.: Prentice Hall, 1996.
- [50] T. Soderstrom and P. Stoica, *System Identification*. Cambridge, Great Britain: Prentice Hall International, 1989.
- [51] V. Utkin, *Sliding modes in control and optimization*. Berlin, Germany: Springer Verlag, 1992.

- [52] L. Fridman, "The problem of chattering: an averaging approach," in *Variable Structure, Sliding Mode and Nonlinear Control*, ser. Lecture Notes in Control and Information Science, K. Young and U. Ozguner, Eds. London: Springer Verlag, 1999, no. 247, pp. 363–386.
- [53] A. Poznyak and J. Medel, "Matrix forgetting factor," *Int. Journal of Systems Science*, vol. 30, no. 2, pp. 165–174, 1999.
- [54] R. Merzouki, J. Davila, L. Fridman, and J. Cadiou, "Backlash phenomenon observation and identification in electromechanical systems," *Control Engineering Practice*, vol. 15, no. 4, pp. 447–457, 2007.
- [55] R. Merzouki, J. Cadiou, and N. M'Sirdi, "Compensation of friction and backlash effects in an electromechanical actuator," *Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 218, no. 12, pp. 75–84, 2004.
- [56] M. Saif and Y. A. Guan, "A new approach to robust fault detection and identification," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 3, pp. 685–695, 1993.
- [57] J. Davila and L. Fridman, "Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes," in *8th. International Workshop on Variable Structure Systems*, Vilanova, Spain, September 2004.
- [58] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, "Second order sliding mode observer for mechanical systems with coulomb friction," in *Memorias de Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático 2004*, México, D.F., 2004, pp. 232–237.
- [59] J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak, "Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes," in *2006 International Workshop on Variable Structure Systems - VSS'06*, Sardinia, Italy, 2006, pp. 232–237.
- [60] J. Davila and L. Fridman, "Observation and identification of second order mechanical systems via second order sliding modes," in *Memorias de Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático 2005*, Cuernavaca, Morelos, México, 2005.
- [61] R. Merzouki, J. Davila, J. Cadiou, and L. Fridman, "Backlash phenomenon observation and identification," in *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, Minneapolis, Minnesota USA, 2006, pp. 3322–3327.
- [62] N. M'sirdi, A. Rabhi, L. Fridman, J. Davila, and Y. Delanne, "Second order sliding mode observer for estimation of velocities, wheel sleep, radius and stiffness," in *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, Minneapolis, Minnesota USA, 2006, pp. 3316–3321.

- [63] M. Bouteldja, A. E. Hadri, J. Davila, J. Cadiou, and L. Fridman, "Observation and estimation of dynamics performance of heavy vehicle via second order sliding modes," in *IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, Alghero, Italy, 2006, pp. 280–285.
- [64] L. Fridman, A. Levant, and J. Davila, "High-order sliding-mode observer for linear systems with unknown inputs," in *2006 International Workshop on Variable Structure Systems - VSS'06*, Sardinia, Italy, 2006, pp. 202–207.
- [65] —, "High-order sliding-mode observer for linear systems with unknown inputs," in *Proceedings of the 14th Mediterranean Conference on Control and Automation, 2006.*, Digital object: 10.1109/MED.2006.328736, 2006, pp. 1–6.
- [66] —, "Observador global para sistemas lineales con entradas desconocidas via modos-deslizantes de alto-orden," in *Memorias de Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático 2006*, Ciudad Universitaria, México, D.F., 2006.
- [67] —, "High-order sliding-mode observation and identification for linear systems with unknown inputs," in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*, San Diego, CA, USA, 2006, pp. 5567–5572.
- [68] —, "Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes," *Int. J. System Science*, vol. 38, no. 10, pp. 773–791, 2007.
- [69] J. Davila, "Esquema de encriptamiento de información en señales caóticas basado en un observador por modos deslizantes de orden superior," in *Memorias de Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático 2006*, Ciudad Universitaria, México, D.F., 2006.
- [70] L. Fridman, A. Levant, and J. Davila, "High-order sliding-mode observation and fault detection via weakly unobservable subspace reconstruction," in *European Control Conference 2007*, Kos, Greece, 2007, pp. 5139–5146.
- [71] —, "High-order sliding-mode observation and identification for linear systems with unknown inputs," in *International Modeling and Simulation Multiconference 2007*, Buenos Aires, Argentina, 2007.
- [72] —, "High-order sliding-mode observation and fault detection," in *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, 2007, pp. 4317–4322.
- [73] L. Fridman, J. Davila, and A. Levant, "High-order sliding modes observation," in *10th International Workshop on Variable Structure Systems*, Antalya, Turkey, 2008, pp. 203 – 208.
- [74] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant, "High-order sliding observation and fault detection," in *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, Corsica, France, 2008, pp. 1699 – 1704.

- [75] J. Davila, L. Fridman, A. Pisano, and A. Usai, “Finite-time state observation for nonlinear systems with application to compressor surge detection: a high order sliding-mode approach,” in *10th International Workshop on Variable Structure Systems*, Antalya, Turkey, 2008, pp. 197 – 202.
- [76] —, “Finite-time state observation for nonlinear uncertain systems via higher order sliding modes,” 2008, accepted for publication on the *International Journal of Control*.
- [77] —, “Observation of a class of quasilinear systems by quasi-continuous high-order sliding modes,” 2008, accepted for presentation on the 47th IEEE Conference on Decision and Control.