



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS DINÁMICO DE SISTEMAS EN EL
DOMINIO TIEMPO-FRECUENCIA**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL – INGENIERÍA SÍSMICA
P R E S E N T A :

FRANCISCO CASTELLANOS LEÓN

TUTOR:

DR. MARIO G. ORDAZ SCHROEDER

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Francisco José Sánchez Sesma

Secretario: Dr. David Murià Vila

Vocal: Dr. Mario G. Ordaz Schroeder

1^{er} Suplente: Dr. Alberto Contreras Cristán

2^o Suplente: Dr. Boris Escalante Ramírez

Lugar donde se realizó la tesis:

México D.F.

TUTOR DE TESIS:

MARIO G. ORDAZ SCHROEDER

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento por su total apoyo al Dr. Mario Ordaz Schroeder, quien dirigió el presente trabajo.

Al comité tutorial de la tesis: Dr. Francisco José Sánchez Sesma, Dr. David Murià Vila, Dr. Boris Escalante Ramírez y al Dr. Alberto Contreras Cristán, quienes revisaron y enriquecieron con sus comentarios el contenido de esta tesis.

También agradezco a la Dra. Lucía Medina por su asesoría en el desarrollo de los algoritmos para el cálculo de la transformada ondícula continua.

Agradezco al Instituto Politécnico Nacional (IPN) por haberme apoyado para la realización de mis estudios de doctorado mediante el otorgamiento de licencia con goce de sueldo a través del COTEPABE y mediante una beca de exclusividad COFAA, así como también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme otorgado una beca de estudio.

ÍNDICE

RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO 1	
Función de transferencia obtenida a partir de la transformada de Fourier	3
CAPÍTULO 2	
Selección de la transformada	5
- Criterios para seleccionar la transformada	6
Transformada ondícula continua	7
Restricciones de la función ondícula	7
Función ondícula propuesta	8
- Escalamiento y traslación	9
- Resolución tiempo-frecuencia	10
Transformada ondícula continua de señales diversas	11
- Ejemplos analíticos	11
- Ejemplos numéricos	11
CAPÍTULO 3	
Transformada ondícula continua de la derivada de una función	23
- Reconstrucción de la primera derivada	24
- Reconstrucción de la segunda derivada	25
Solución de la ecuación diferencial de movimiento	27
Función de transferencia obtenida mediante la TOC	33
Aplicaciones	37
- Estimación de propiedades dinámicas	38
- Identificación de la fluencia de un oscilador bilineal	41
CONCLUSIONES	50
BIBLIOGRAFÍA	52

RESUMEN

Utilizando la transformada de ondícula continua, se desarrolla un análisis que describe las propiedades dinámicas de una estructura mediante una función de transferencia definida en el dominio tiempo-frecuencia. La función de transferencia obtenida permite el cálculo de la respuesta de un oscilador lineal a partir de la transformada ondícula de la excitación. Dicha respuesta presenta subestimación en caso de que exista resonancia, la cual disminuye conforme la ondícula base tiende a ser como la base de la transformada de Fourier. También se presenta la identificación de las propiedades dinámicas de un oscilador lineal. El valor calculado de dichas propiedades fluctúa en el tiempo, a pesar de que el oscilador estudiado es lineal. La media de las propiedades estimadas es similar a las correspondientes del oscilador empleado. Además se presenta la identificación de la fluencia de un oscilador bilineal. El procedimiento demuestra una alta sensibilidad para detectar la fluencia aún cuando la variación de la rigidez posterior a la fluencia es del 5%, así como también en el caso de que un oscilador, con 50% de la resistencia correspondiente a uno lineal, presente demandas de ductilidad del orden de 1.8. Los resultados de trabajos previos se basan en el análisis de la señal de respuesta de los osciladores, dentro de la cual se encuentran tanto las características de la excitación como del oscilador. Los resultados aquí presentados son obtenidos a partir del cociente de las transformadas inversas de ondícula continua de la excitación y de la respuesta del oscilador, el cual se asocia únicamente a las propiedades del oscilador.

INTRODUCCIÓN

El análisis dinámico de las estructuras en el dominio de la frecuencia permite estudiar sus respuestas ante excitaciones desde un punto de vista distinto al obtenido mediante el análisis en el dominio del tiempo.

La transformada de Fourier (TF) es la herramienta que generalmente se ha empleado para realizar el análisis en el dominio de la frecuencia mediante la cual se traduce la excitación y la respuesta de la estructura a la amplitud que presentan las armónicas de distintas frecuencias y ángulos de fase. Sin embargo, esta transformada no toma en cuenta variaciones locales de la señal, sino que calcula las amplitudes de las armónicas de los promedios obtenidos a partir de la duración total de la señal.

Si se desea un análisis estructural en el dominio de la frecuencia que tome en cuenta las variaciones en el tiempo de frecuencia, amplitud y fase que se originan a lo largo de la señal, es necesario definir dicho análisis mediante otros métodos.

Las transformaciones al dominio tiempo-frecuencia complementan aún más la información obtenida de los análisis realizados en el dominio tiempo y en el dominio frecuencia. De ellas se destacan la transformada de Fourier mediante ventanas (TFV), la distribución Wigner-Ville (DWV), además de las transformadas de Gabor (TG), ondícula (TO) y de Hilbert-Huang (THH).

Hasta ahora, las conclusiones de los análisis en el dominio tiempo-frecuencia son obtenidas a partir del análisis de las señales de respuesta de la estructura, donde están presentes tanto las características de la estructura como de la excitación. En el caso del análisis mediante la TF, esta desventaja se elimina mediante el cálculo de funciones de transferencia que describen únicamente las propiedades dinámicas de la estructura en el dominio de la frecuencia.

El objetivo del presente trabajo es el desarrollo de un análisis que permita una descripción de las propiedades dinámicas de la estructura similar a la obtenida mediante la función de transferencia definida a partir de la TF, pero en el dominio tiempo-frecuencia. Como una primera aproximación, se propone la solución del caso lineal, a pesar de que un análisis que localiza en el tiempo las variaciones de las propiedades dinámicas de la estructura resulta idóneo para el análisis no lineal. Una solución más adecuada para el caso no lineal se propondrá en trabajos futuros.

En el capítulo 1 se destacan las propiedades de la TF que permiten definir la función de transferencia correspondiente, con el fin de identificarlas e incluirlas en la función a definir en el dominio tiempo-frecuencia.

La selección de la transformada ondícula continua (TOC) como herramienta para transformar las señales en el dominio tiempo-frecuencia es justificada en el capítulo 2. Además se propone la ondícula a emplear como función base, considerando las restricciones para su definición propias de la teoría de la TOC, e incluyendo las obtenidas en el capítulo 1 que permitan definir la función de transferencia deseada en el dominio tiempo-frecuencia. Se presentan las TOC de diversas señales, calculadas con la ondícula propuesta, que permiten estudiar su nivel de resolución así como las características de su transformada inversa de ondícula continua (TIOC). La definición de la función de transferencia en el dominio tiempo-frecuencia se presenta en el capítulo 3. Algunas aplicaciones de dicha función mediante el uso de cocientes de la TIOC de la respuesta del oscilador y de la TIOC de la excitación son mostradas, así como sus correspondientes ejemplos.

Posteriormente se presentan las conclusiones de este trabajo.

CAPÍTULO 1

La definición de la función de transferencia de un oscilador resulta de la solución de la ecuación diferencial de movimiento mediante la transformada de Fourier (TF) y relaciona la TF de la respuesta de la estructura con la TF de la excitación. La función de transferencia así definida resulta independiente del tiempo y describe las propiedades de la estructura en el dominio de la frecuencia.

El objetivo del presente capítulo es resaltar las características de esta función, para identificarlas y posteriormente emplearlas en la definición de una función de transferencia en el dominio tiempo-frecuencia.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA OBTENIDA A PARTIR DE LA TF

Si se considera un sistema lineal amortiguado de un grado de libertad, excitado en su base, cuyo movimiento se encuentra descrito por

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\Omega\dot{x}(t) + \Omega^2x(t) = -\ddot{x}_g(t) \quad (1.1)$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento sufrido por el sistema, ξ representa su porcentaje de amortiguamiento crítico, y Ω su frecuencia radial de vibración. $\ddot{x}_g(t)$ representa la excitación. Al aplicar la TF a (1.1), es posible demostrar que se obtiene

$$-\omega^2\hat{x}(\omega) + 2\xi\Omega i\omega\hat{x}(\omega) + \Omega^2\hat{x}(\omega) = -\hat{\ddot{x}}_g(\omega) \quad (1.2)$$

donde $\hat{}$ indica la TF e i representa la unidad imaginaria. Despejando la relación entre la TF de la respuesta $\hat{x}(\omega)$ y la TF de la excitación $\hat{\ddot{x}}_g(\omega)$, resulta la función de transferencia $\hat{H}(\omega)$ asociada al desplazamiento del sistema

$$\hat{H}(\omega) = \frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{\ddot{x}}_g(\omega)} = \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2 - 2\xi\Omega i\omega} \quad (1.3)$$

Se observa en la expresión anterior que la función de transferencia depende únicamente de las propiedades dinámicas del sistema en el dominio de la frecuencia. El procedimiento anterior se puede generalizar para determinar la función de transferencia asociada a cualquier respuesta de interés. A continuación se estudian las propiedades de la TF que permiten definir la función de transferencia (1.3) con las características mencionadas.

La transformada inversa de Fourier (TIF) de una función $f(t)$ es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.4)$$

Entonces la n -ésima derivada con respecto a t de esta expresión resulta ser

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \frac{d^n (e^{i\omega t})}{dt^n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^n \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (1.5)$$

Al comparar (1.5) con la TIF de la n -ésima derivada de $f(t)$,

$$g(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.6)$$

es posible establecer que la TF de la n -ésima derivada de $f(t)$, es el producto de la TF de $f(t)$ por una variable dependiente de la frecuencia e independiente del tiempo,

$$\hat{g}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) \quad (1.7)$$

Se puede demostrar que la independencia del tiempo de la función de transferencia mostrada en (1.3), es consecuencia de (1.7); y ésta a su vez, es resultado de que la función base empleada en la TF, $e^{i\omega t}$, tiene la propiedad que su n -ésima derivada es la propia función base multiplicada por una variable independiente del tiempo y dependiente de la frecuencia, es decir,

$$\frac{d^n(e^{i\omega t})}{dt^n} = (i\omega)^n e^{i\omega t} \quad (1.8)$$

Por lo que la expresión anterior es un requisito que debe de cumplir la función base empleada para transformar al dominio tiempo-frecuencia, de manera que permita obtener una función de transferencia asociada únicamente a las propiedades dinámicas del oscilador e independiente del tiempo.

CAPÍTULO 2

La selección de la transformada ondícula continua (TOC), para emplearla en la definición de la función de transferencia propuesta, es justificada en este capítulo. Una vez seleccionada la transformada, se define la ondícula a emplear que cumpla con las condiciones establecidas en el capítulo 1 para obtener la función de transferencia deseada en el dominio tiempo-frecuencia, además de cumplir con las condiciones propias de la TOC. Finalmente se presentan las TOC de algunas señales que permiten estimar el nivel de resolución obtenido al emplear como base la ondícula propuesta.

SELECCIÓN DE LA TRANSFORMADA

Existen varias transformadas que permiten la representación de las señales en el dominio tiempo-frecuencia, entre las más destacadas se encuentran la transformada de Fourier mediante ventanas (TFV), la distribución Wigner-Ville (DWV), las transformadas de Gabor (TG), ondícula (TO) y Hilbert-Huang (THH).

La transformada de Fourier mediante ventanas (TFV) es la evolución de la TF que permite la obtención de distribuciones en tiempo-frecuencia. Genera espectros que evolucionan en el tiempo al analizar ventanas de la señal mediante la TF. Su principal desventaja son los niveles fijos de resolución en frecuencia y en tiempo durante el proceso, los cuales dependen del tamaño de ventana empleado (Goswami y Chan, 1999).

La distribución Wigner-Ville (DWV) fue propuesta en 1948 por Ville, con el objetivo de definir una densidad de energía en el dominio tiempo-frecuencia, empleando el mismo planteamiento matemático utilizado en 1932 por Wigner en el campo de la mecánica cuántica (Hubbard, 1998). El cálculo de esta distribución es obtenida a partir del producto de secciones de la misma señal, por lo tanto no es lineal. Mayor información sobre esta distribución se puede encontrar en Cohen (1995).

La transformada de Gabor (TG) es similar a la TFV pero considera una senoide modulada por una función gaussiana. Tiene una mejor concentración de energía que la TFV (Goswami y Chan, 1999).

La transformada ondícula (TO) analiza la señal mediante ventanas que cambian de tamaño según la escala (o frecuencia) estudiada. Ésto le permite tener una resolución variable, más adecuada para la representación de los detalles asociados a cada frecuencia. La transformada ondícula puede ser continua (TOC) o discreta (TOD), dependiendo si las variables de traslación (tiempo) y escala (frecuencia) son continuas o discretas. La TOC fue inicialmente propuesta por Morlet (Grossman y Morlet, 1984), la cual no es ortogonal ni independiente, como algunas de las transformadas mencionadas. Si la función base cumple con la condición de admisibilidad, es posible reconstruir la señal original mediante la transformada inversa de ondícula continua (TIOC). La TOD es derivada a partir de la TOC, aprovechando diversas teorías en distintos campos del conocimiento que no estaban relacionadas, y finalmente unificadas en la teoría de la multiresolución desarrollada por Mallat (1989) y Meyer (1992). La TOD es mucho más eficiente que la TOC en cuanto al tiempo de cómputo y compresión de la información, debido principalmente a la ortogonalidad e independencia de las ondículas empleadas.

La transformada Hilbert-Huang (THH) fue propuesta por Huang *et al.* (1998), la cual obtiene funciones de modo intrínseco (FMI) mediante el método de descomposición modal empírico. La transformada de Hilbert es entonces aplicada a estas FMI, a partir de la cual es posible estimar amplitudes y frecuencias instantáneas, éstas últimas calculadas como la derivada de la fase de la transformada.

Diversos trabajos han comparado los resultados obtenidos al emplear las transformadas mencionadas en el análisis de sistemas dinámicos. El mejor desempeño en el análisis de

señales mediante la TO que empleando la TFV ha sido comprobado por diversos trabajos, entre los más recientes se encuentra el elaborado por Zhu y Kim (2006). Zou y Chen (2004) identifican la rigidez y la presencia de fracturas en un rotor, bajo distintas condiciones del sistema, mediante la DWV y la TOC. Los resultados muestran que la TOC es más sensible que la DWV en la identificación. Neild *et al.* (2003) comparan diversas transformadas tiempo-frecuencia para el análisis dinámico de estructuras no-lineales. Las transformadas empleadas son la TFV, DWV, una versión de la DWV que emplea ventanas, el modelo de autoregresión mediante ventanas, y la TOC. La selección de la forma y el tamaño de la ventana de las distintas transformadas empleadas influye en los resultados. En el caso de la TOC, el tipo de ventana empleada influye en la ondícula que analiza las señales. Se encuentran resultados similares en las transformadas estudiadas, excepto por el modelo de autoregresión en donde se obtiene mayor ruido que en los demás casos. Hammond y White (1996) comparan los resultados obtenidos de analizar la vibración de una viga en cantilever mediante la TG, la DWV y algunas variaciones de ésta última. Los resultados muestran que el costo de obtener una mejor resolución mediante la DWV es la interferencia. Además presenta el espectro evolutivo que emplea una función de transferencia que varía en el tiempo y es calculado mediante la DWV, pero que sólo se utiliza en señales estocásticas. El concepto de espectro evolutivo ha sido aplicado empleando la TO, la THH y la TFV (Liang *et al.*, 2007; Spanos y Failla, 2004; Ching y Glaser, 2003). Guo *et al.* (2008) comparan los resultados de analizar mediante la TOD y la THH señales de fuerzas de fricción. Los autores reportan un mejor desempeño en la descripción de la fricción por parte de la THH. Yan y Miyamoto (2006) obtienen mejores resultados empleando la TOC que la THH al identificar los parámetros modales de estructuras. La identificación de parámetros dinámicos de un sistema mecánico no lineal mediante la TOC es mejor que al emplear la transformada de Hilbert, según los resultados obtenidos por Tjahjowidodo *et al.* (2007).

Las conclusiones presentadas en los trabajos anteriores se basan en el análisis de la señal de la respuesta de los sistemas en estudio, donde se encuentran inmersas tanto las características del sistema, como de la excitación. En este trabajo se propone la estimación de una función de transferencia en el dominio tiempo-frecuencia que permita aislar las propiedades dinámicas del sistema para su estudio.

Criterios para seleccionar la transformada

La expresión (1.8), condición que debe cumplir la función base de la transformada a emplear para definir una función de transferencia independiente del tiempo y relacionada a las propiedades dinámicas de la estructura, permite descartar varias transformadas al dominio tiempo-frecuencia como candidatas a cumplir dicha expresión.

A pesar de que la transformada Hilbert-Huang es capaz de analizar sistemas no lineales en el dominio tiempo-frecuencia, se descarta su empleo para definir la función de transferencia buscada ya que no cumple con la condición (1.8). Lo anterior debido a que la base empleada en esta transformación es generada a partir de la señal a estudiar mediante la descomposición modal empírica, y por lo tanto no resulta evidente que se pueda restringir a casos que cumplan con (1.8).

La transformada de Gabor utiliza como base una senoide modulada por una función gaussiana, lo cual ocasiona que la derivada en (1.8) sea multiplicada por t , y por lo tanto el múltiplo ya no es independiente del tiempo t .

La distribución Wigner-Ville (DWV) se calcula mediante

$$WV_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{b}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{b}{2}\right)} e^{i\omega b} db \quad (2.1)$$

Se puede considerar que la base empleada en la transformación anterior es una senoide modulada por una versión trasladada de la función a transformar. Ya que la base depende de la función estudiada, en principio se tendría que restringir el análisis de la DWV a señales que cumplan con (1.8). Lo anterior no permite generalizar el procedimiento propuesto, por lo cual se descarta la DWV para emplearla en este trabajo.

De lo anterior, las posibilidades se reducen a la transformada ondícula (TO) y la transformada de Fourier mediante ventanas (TFV). La TO, en general, presenta un mejor desempeño que la TFV ya que emplea una resolución variable en tiempo y en frecuencia que permite una mejor descripción de la señal en estudio. Por lo que se elige la TO para la definición de una función de transferencia en el dominio tiempo-frecuencia, similar a la obtenida mediante la TF. La TO presenta dos opciones: la transformada ondícula continua (TOC) y la discreta (TOD). La TOD es más eficiente que la TOC debido a que emplea bases ortogonales e independientes, lo cual permite desarrollar algoritmos de cálculo más rápidos y representaciones de las señales con menor cantidad de coeficientes. Sin embargo, dichas bases son definidas considerando un mayor número de restricciones que las empleadas para la TOC. En este trabajo se selecciona la TOC por la similitud que guarda con la teoría de la TF, además que su marco teórico no presenta tantas restricciones, como la TOD, para definir las funciones que sirvan como base para realizar la transformación, lo cual facilita la búsqueda de ondículas que cumplan con (1.8).

TRANSFORMADA ONDÍCULA CONTINUA

La TOC se define como

$$x^w(b,a) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\psi}_{b,a}^w(t) dt \quad (2.2)$$

donde

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \text{ para } a>0, b \in R \quad (2.3)$$

y la transformada inversa de ondícula continua (TIOC) resulta

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{a^2} da \int_{-\infty}^w x \psi_{b,a}(t) db \quad (2.4)$$

donde

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2.5)$$

es conocida como condición de admisibilidad, requerimiento indispensable para asegurar la reconstrucción de la señal.

La transformación anterior se define como TOC debido a que los valores que toman los parámetros de traslación b y de escalamiento a son continuos. Las expresiones anteriores fueron desarrolladas por Morlet (Grossman y Morlet, 1984) quien planteó un análisis mediante una función base que permitiera localización tanto en el tiempo como en la frecuencia de las características de la señal en estudio. Esta función, denominada ondícula, se dilata y traslada para generar una familia de funciones mediante las cuales se analiza la señal en estudio y obtiene transformaciones en el dominio tiempo-frecuencia.

RESTRICCIONES DE LA FUNCIÓN ONDÍCULA

Las restricciones principales para la ondícula a emplear como base en la TOC son

$$\frac{d^n(\psi(t))}{dt^n} = \alpha^n \psi(t) \quad (2.6)$$

donde α^n es una variable independiente de t , asociada a la n -ésima derivada y

$$\hat{\psi}(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.7)$$

La ecuación (2.6) se relaciona a la definición de una función de transferencia con las propiedades deseadas (obtenida de la expresión 1.8) y la (2.7), que implica una media igual a cero de la función ondícula, asegura que la condición de admisibilidad (2.5) sea finita.

FUNCIÓN ONDÍCULA PROPUESTA

Una búsqueda en la literatura (Por ejemplo, ver Le y Argoul, 2004; Kim y Melhem, 2004) demuestra que no existen ondículas que cumplan con (2.6) y (2.7), por lo que es necesario proponer una nueva ondícula con dichas características.

Al resolver la ecuación diferencial (2.6) se tiene que la ondícula debe cumplir con la forma

$$\psi(t) = Ae^{Ct} \quad (2.8)$$

donde A y C son coeficientes independientes del tiempo. La selección de C estará en función de que (2.8) cumpla con (2.7).

1) Si C es real, (2.8) genera una curva cuyo decaimiento exponencial depende del valor de C . Este caso no es una alternativa viable para considerarlo como una ondícula, debido a que no oscila y por lo tanto no cumple con la condición (2.7).

2) Si C es imaginaria, es posible expresar (2.8) como

$$\psi(t) = Ae^{\pm iCt} = A\{\cos(Ct) \pm isen(Ct)\} \quad (2.9)$$

la cual puede cumplir con (2.7) pero resulta ser una variación de la TFV, heredando parte de sus limitaciones.

3) Si $C = k_1 \pm ik_2$ es compleja, la expresión (2.8) se define mediante

$$\psi(t) = Ae^{(k_1 \pm ik_2)t} = Ae^{k_1 t} \{\cos(k_2 t) \pm isen(k_2 t)\} \quad (2.10)$$

Es posible demostrar que esta función no cumple con (2.7), por lo que se propone emplear una combinación de (2.9) y (2.10), obteniendo

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{ik_2 t} & [I, D] \\ e^{-k_1(t-I) + ik_2 t} & [Ik_4, I] \\ e^{k_1(t-D) + ik_2 t} & [D, Dk_4] \end{cases} \quad (2.11)$$

donde $k_1 < 0$ indica la razón de la caída exponencial, k_2 es la frecuencia radial, $D = -I > 0$ son los límites donde se define la función únicamente por una senoide, y los límites del soporte compacto de la ondícula se definen como múltiplos ($k_4 > 1$) de I y D . La figura 2.1 muestra la función propuesta. Se puede demostrar que la media de la expresión (2.11) es igual a cero, es decir, cumple con la condición de admisibilidad (2.5) cuando

$$\int_{Ik_4}^{Dk_4} \psi(t) dt = \frac{2}{k_1^2 + k_2^2} \left\{ k_1 \left[\frac{k_1}{k_2} \sin(Dk_2) - \cos(Dk_2) \right] + e^{Dk_1(k_4-1)} \left[k_1 \cos(Dk_2 k_4) + k_2 \sin(Dk_2 k_4) \right] \right\} = 0 \quad (2.12)$$

Ya que la ondícula (2.11) cumple con las restricciones (2.6) y (2.7), se empleará para la estimación de la función de transferencia en el dominio tiempo-frecuencia.

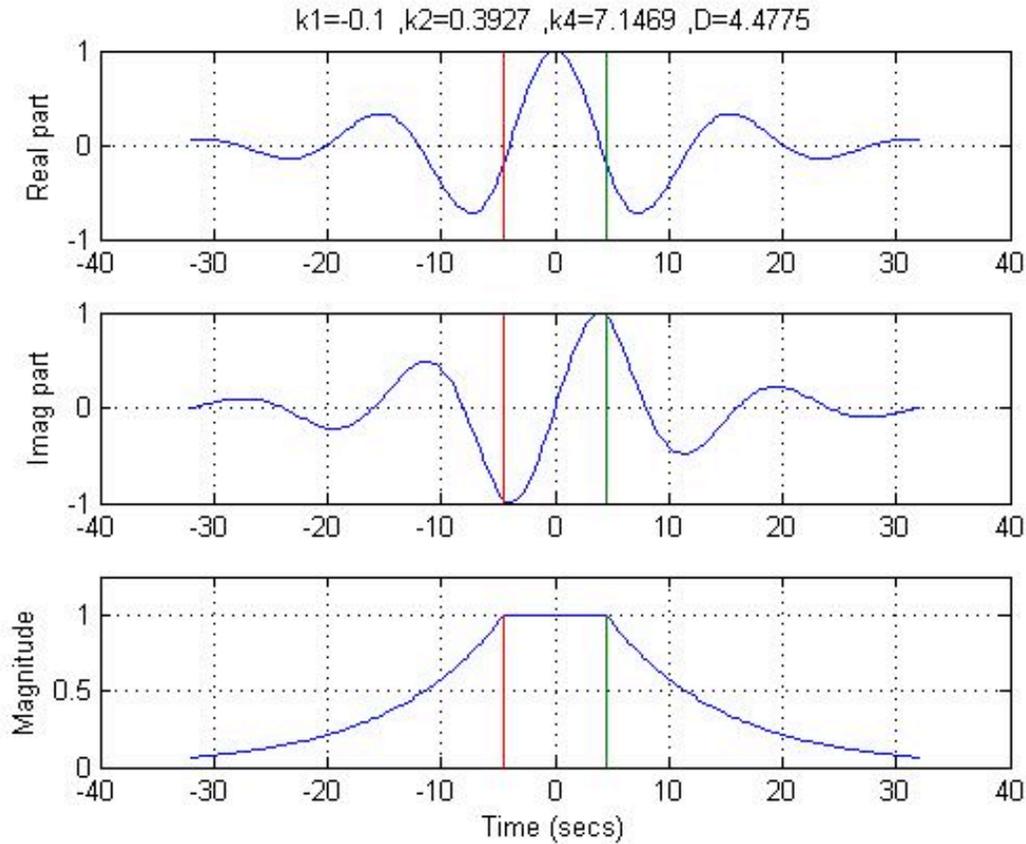


Figura 2.1 Función ondícula propuesta (2.11) estimada para los parámetros indicados y empleando 4 ciclos (Ver tabla 2.1). Las líneas verticales indican los límites I y D .

Escalamiento y traslación

El principio fundamental que origina el concepto de la TO es la posibilidad de escalar y trasladar en el tiempo a la ondícula. Lo anterior se consigue mediante un cambio de variable que involucre tanto la traslación como el escalamiento. Entonces la ondícula (2.11) se define como

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \begin{cases} e^{ik_2\left(\frac{t-b}{a}\right)} & [a|I+b, |a|D+b] \\ e^{-k_1\left(\frac{t-b}{|a|}-I\right)+ik_2\left(\frac{t-b}{a}\right)} & [|a|k_4I+b, |a|I+b] \\ e^{k_1\left(\frac{t-b}{|a|}-D\right)+ik_2\left(\frac{t-b}{a}\right)} & [|a|D+b, |a|k_4D+b] \end{cases} \quad (2.13)$$

En la expresión anterior se observa que el cambio de variable también afecta los límites de manera que la función conserve la continuidad de la función original.

La expresión (2.13) emplea el valor absoluto de a debido a la utilización de escalas negativas para reconstruir la señal. Lo anterior con el fin de evitar el uso de la transformada de Hilbert de la señal en estudio, como lo empleó Morlet (Grossman y Morlet, 1984). Ésto genera modificaciones en las expresiones (2.3) y (2.4), resultando

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \text{ para } a,b \in R \quad (2.14)$$

y la TIOC

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} da \int_{-\infty}^{\infty} x \psi_{b,a}(t) db \quad (2.15)$$

donde las diferencias, respecto a las originalmente propuestas por Morlet, son el uso del valor absoluto de a en la norma $1/\sqrt{|a|}$ en (2.14) y los límites empleados en la integral asociada a las escalas en (2.15).

Por otro lado, al considerar los límites de la función escalada y trasladada (2.13), se definen los límites de las integrales empleadas en la TOC (2.2) y la TIOC (2.15), quedando

$$x(b,a) = \int_{|a|k_4 I+b}^w x(t) \bar{\psi}_{b,a}(t) dt + \int_{|a|I+b}^{|a|D+b} x(t) \bar{\psi}_{b,a}(t) dt + \int_{|a|D+b}^{|a|k_4 D+b} x(t) \bar{\psi}_{b,a}(t) dt \quad (2.16)$$

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4 D}^{t-|a|D} x(b,a) \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|D}^w x(b,a) \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4 I} x(b,a) \psi_{b,a}(t) db \right\} \quad (2.17)$$

donde $[-a_0, a_0]$ representa el intervalo de escalas que permite igualar las energías de la señal reconstruída y la original. Dicha energía es estimada como la suma del cuadrado de las amplitudes de la señal.

Resolución tiempo-frecuencia

La resolución en tiempo y en frecuencia es variable en la TOC. Sin embargo, la relación entre la resolución en tiempo y la resolución en frecuencia se modifica al cambiar el soporte compacto de la ondícula. Entre más se incremente la duración de una ondícula, la resolución en frecuencia mejorará con una consecuente disminución de la resolución en tiempo, y viceversa.

Al emplear la expresión (2.12) es posible definir la ondícula con distintos soportes compactos que cumplan con (2.7). La tabla 2.1 muestra diversas combinaciones de los parámetros de la ondícula (2.11), donde la duración se modifica al variar el número de ciclos presentes en la ondícula manteniendo una frecuencia radial k_2 constante en dichas combinaciones.

No. ciclos	k_1	k_4	D
2	-0.258	2.993	5.346
4	-0.100	7.147	4.477
6	-0.063	11.310	4.244
8	-0.046	15.476	4.135
10	-0.036	19.644	4.073
12	-0.030	23.812	4.032
24	0.000	1.000	192.000

Tabla 2.1 Parámetros de la ondícula (2.11) que cumplen la condición de admisibilidad (2.5) con distintas duraciones. La duración se varía al modificar el número de ciclos presentes en la ondícula y manteniendo la frecuencia constante ($k_2=\pi/8$)

TOC DE SEÑALES DIVERSAS

El marco teórico de la TOC permite una solución analítica de la transformación de señales al dominio tiempo-frecuencia. A continuación se presentan algunos ejemplos analíticos y numéricos, así como la representación gráfica de sus TOC y la reconstrucción de dichas señales mediante la TIOC.

Ejemplos analíticos

- TOC de una delta de Dirac

La primera señal propuesta es una delta de Dirac,

$$f_1(t) = K\delta(t - t_1) \quad (2.18)$$

donde K es una constante, y t_1 es el tiempo de ocurrencia de la delta de Dirac. Los coeficientes correspondientes a la TOC según (2.16), empleando la ondícula (2.11), están dados por

$$f_1^w(b, a) = \begin{cases} Ke^{-k_1\left(\frac{t_1-b}{|a|}-I\right)-ik_2\left(\frac{t_1-b}{a}\right)} & |a|Ik_4 + b < t_1 < |a|I + b \\ Ke^{-ik_2\left(\frac{t_1-b}{a}\right)} & |a|I + b \leq t_1 \leq |a|D + b \\ Ke^{k_1\left(\frac{t_1-b}{|a|}-D\right)-ik_2\left(\frac{t_1-b}{a}\right)} & |a|D + b < t_1 < |a|Dk_4 + b \end{cases} \quad (2.19)$$

los cuales representan la propia ondícula, pero amplificada por K .

- TOC de una senoide

Si ahora se estudia una señal representada por una senoide definida por

$$f_2(t) = e^{i\omega t} \quad (2.20)$$

aplicando la TOC dada por (2.16) y suponiendo que la ondícula está dada por (2.11) se obtiene que

$$f_2^w(b, a) = \frac{2ae^{ib\omega}}{\sqrt{|a|}[k_1^2 + (k_2 - a\omega)^2]} [k_1^2 \sin(D(k_2 - |a|\omega)) - (k_2 - a\omega) \cdot \\ \bullet \left\{ \operatorname{sgn}(a)k_1 \cos(D(k_2 - |a|\omega)) + e^{Dk_1(k_4-1)} \left\{ -\operatorname{sgn}(a)k_1 \cos(Dk_4(k_2 - |a|\omega)) - \right. \right. \\ \left. \left. -(k_2 - a\omega) \sin(Dk_4(k_2 - |a|\omega)) \right\} \right\}] \quad (2.21)$$

Para localizar el máximo de la expresión anterior es necesario derivar con respecto a a . Sin embargo, por inspección es posible estimar que el máximo se encuentra cuando $k_2/a = \omega$, definiendo esta expresión la relación entre la escala a y la frecuencia ω (Yan y Miyamoto, 2006).

Los resultados analíticos de ambas señales demuestran la capacidad, por lo menos teórica, de identificar una señal que se encuentra bien localizada en la frecuencia (senoide) y en el tiempo (delta de Dirac). A continuación se presentan los resultados de ejemplos numéricos de la TOC de algunas señales, incluyendo las anteriormente descritas de manera analítica.

Ejemplos numéricos

La traslación de la ondícula al principio y al final de la señal afecta el cálculo de los coeficientes de la TOC, ya que parte de la ondícula se encuentra más allá de los límites de la señal. Este fenómeno produce resultados distintos a los esperados en los extremos de la señal. Una forma de disminuirlo, resulta de calcular la TOC a una versión extendida de la señal obtenida al

aumentarle en sus extremos el reflejo de la misma señal, o el negativo de él, dependiendo si la señal es par o impar, respectivamente (Kijewski y Kareem, 2003). La señal modificada $s_m(t)$ se obtiene, a partir de una señal $s(t)$ con duración $[0, t_f]$ similar a una función par, mediante

$$\begin{aligned} s_m(t) &= s(-t) & -2t_f \leq t < 0 \\ s_m(t) &= s(t) & 0 \leq t \leq t_f \\ s_m(t) &= s(2t_f - t + \Delta t) & t_f < t \leq 2t_f \end{aligned}$$

donde Δt representa el intervalo de muestreo de la señal. En caso de que la señal $s(t)$ sea una función impar,

$$\begin{aligned} s_m(t) &= -s(-t) & -2t_f \leq t < 0 \\ s_m(t) &= s(t) & 0 \leq t \leq t_f \\ s_m(t) &= -s(2t_f - t + \Delta t) & t_f < t \leq 2t_f \end{aligned}$$

La TOC, representada mediante el módulo de sus coeficientes en las figuras correspondientes, es calculada mediante una ondícula definida por 12 ciclos, a excepción del caso de la delta de Kronecker donde se utiliza una ondícula de 2 ciclos debido a la mejor resolución en tiempo obtenida y de los sismos donde se emplea una ondícula definida por 4 ciclos (ver tabla 2.1). El intervalo de muestreo de las señales empleadas en los ejemplos es de 0.01 s. La reconstrucción de la señal, calculada mediante (2.17), se realiza al seleccionar un rango de frecuencias que permita igualar la energía de la señal reconstruída con la energía de la señal original. Energía estimada como la suma del cuadrado de la señal. Las gráficas que muestran las señales reconstruídas contienen también la suma acumulada del cuadrado de la señal, como comparativo de la energía de la señal original y de la reconstruída.

- TOC de una delta de Kronecker

Las características de la delta de Dirac no permiten su representación numérica, por lo que en este caso se compararán los resultados analíticos con los numéricos obtenidos de calcular la TOC a una delta de Kronecker. La parte inferior de la figura 2.2 muestra la delta de Kronecker definida por

$$f_3(t) = K\delta_K(t - t_1)$$

donde

$$\delta_K(m) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

K es una constante ($K=5$, en este caso), y $t_1=1.25$ s es su tiempo de ocurrencia. Los coeficientes de la TOC (Figura 2.2) representan la delta de Kronecker como una perturbación en altas frecuencias. En la figura 2.3 se observa la señal reconstruída, la cual resulta ser la ondícula empleada en la TOC, coherente con la TOC teórica obtenida en (2.19). En dicha figura se observa que la energía de la señal reconstruída resulta ser menor que la energía de la original, tal vez debido a la necesidad de frecuencias más altas que las empleadas en el cálculo de la TOC de la delta. Sin embargo la frecuencia más alta se encuentra limitada por el intervalo de muestreo en el tiempo de la señal, de manera similar a como ocurre en la TF discreta.

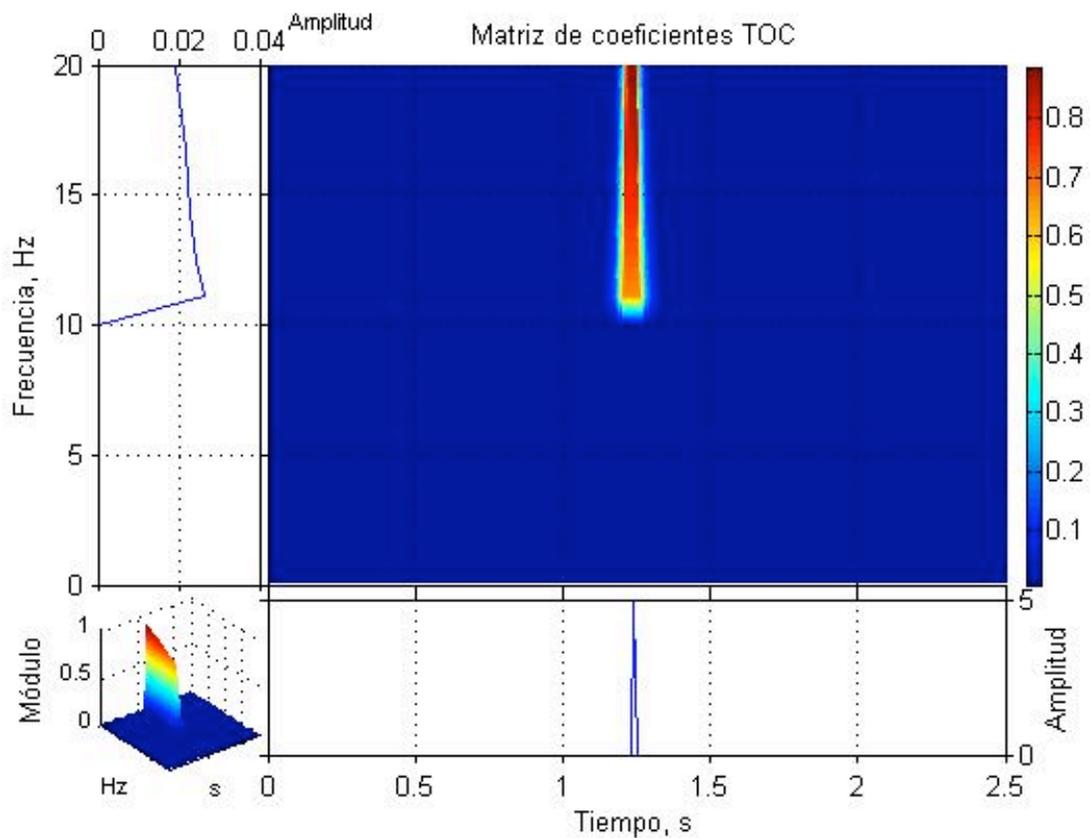


Figura 2.2 Delta de Kronecker (inf. der.) y su TOC (sup. der.) obtenida con una ondícula definida por 2 ciclos. Se muestra la media del módulo de la TOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TOC (inf. izq.)

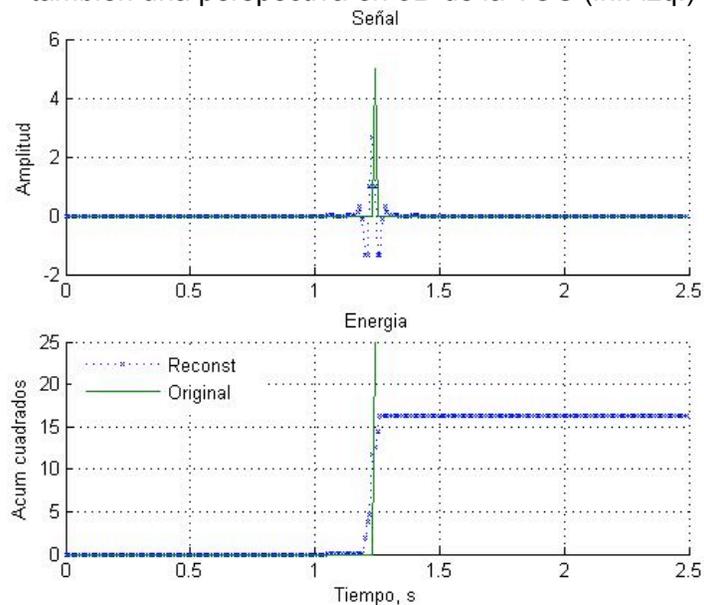


Figura 2.3 Delta de Kronecker original y reconstruida (superior), y sus energías (inferior)

- TOC de una senoide

La senoide propuesta se define por

$$f_4(t) = \text{sen}(\omega t)$$

donde $\omega=8\pi$ rad es la frecuencia radial de la senoide, la cual se muestra en la parte inferior de la figura 2.4. La TOC se muestra en la misma figura. Se observa la buena localización de la frecuencia de la senoide analizada, y que se conserva durante la duración de la señal. En la figura 2.5 se observa la señal reconstruída, que coincide con la original.

- TOC de dos senoides

Se propone una señal compuesta por dos senoides descritas por

$$f_5(t) = \begin{cases} \text{sen}(\omega_1 t) & 0 < t < 2.5s \\ \text{sen}(\omega_2 t) & 2.5 < t < 5.0s \end{cases}$$

donde $\omega_1=8\pi$ rad y $\omega_2=16\pi$ rad. La señal y la TOC correspondiente se muestran en la figura 2.6. Se detecta el tiempo en que ocurre el cambio de frecuencia, así como se identifica las dos frecuencias empleadas. La figura 2.7 muestra la señal reconstruída. La aproximación de la reconstrucción es muy similar a la obtenida cuando se considera una sola senoide.

- TOC de una senoide con variación lineal de frecuencia (chirp)

Se analiza una senoide que barre de manera lineal desde una frecuencia inicial de 2 Hz hasta una final de 9 Hz, según se muestra en la figura 2.8. La señal se define por

$$f_6(t) = \cos\left(\frac{\mu}{2}t^2 + \omega_0 t\right)$$

donde

$$\mu = \frac{\omega_f - \omega_0}{t_f}$$

$\omega_f=18\pi$ rad representa la frecuencia presente en el tiempo $t_f=10$ s y $\omega_0=4\pi$ rad define la frecuencia de la señal en $t_0=0$ s. Los coeficientes de la TOC identifican la variación de la frecuencia que se encuentra en la señal (figura 2.8). La señal reconstruída se muestra en la figura 2.9. La aproximación de la reconstrucción presenta variaciones de amplitud de la señal, lo cual se atribuye a que el soporte compacto de la ondícula empleada (12 ciclos), no logra detallar adecuadamente la señal. Lo anterior se afirma ya que al comparar estos resultados con los obtenidos al emplear un soporte compacto menor (4 ciclos), resulta una reconstrucción más fiel a la señal original (figura 2.11), a pesar de que la TOC correspondiente a la ondícula de 4 ciclos no genera coeficientes de similar amplitud a lo largo de las frecuencias identificadas (figura 2.10), como se obtiene en el caso de la ondícula con 12 ciclos (figura 2.9).

- TOC de un sismo (terreno blando)

Se presenta en la figura 2.12, la TOC del sismo del 19 de septiembre de 1985 ($M_S=8.1$) y registrado en la estación ubicada en terreno blando (SCT1) de la ciudad de México, dirección este-oeste. Este movimiento contiene energía principalmente en bajas frecuencias (alrededor de 0.5 Hz), concentrada de los 40-70 s. La señal reconstruída se presenta en la figura 2.13.

- TOC de un sismo (terreno firme)

Se analiza el sismo del 30 de septiembre de 1999 ($M_S=7.5$) con epicentro en las costas de Oaxaca, México y registrado en la estación ubicada en terreno firme (OXIG) de la ciudad de Oaxaca. La dirección considerada es la este-oeste. En la figura 2.14 se observa que la TOC de

este movimiento contiene una concentración de energía durante su fase intensa (aproximadamente en el intervalo de tiempo de 12 a 33 s), distribuída a lo largo del eje de la frecuencia, predominando dicha concentración en el intervalo de 1.25 a 2.1 Hz. La reconstrucción de la señal es similar a su original (figura 2.15).

La resolución de los ejemplos anteriores es parecida a la obtenida cuando la TOC emplea como base la ondícula de Morlet (Ver Huang *et al.*, 1998; Goswami y Chan, 1999), pero la ondícula aquí propuesta tiene la ventaja que promete definir una función de transferencia en el dominio tiempo-frecuencia y asociada únicamente a las propiedades de la estructura.

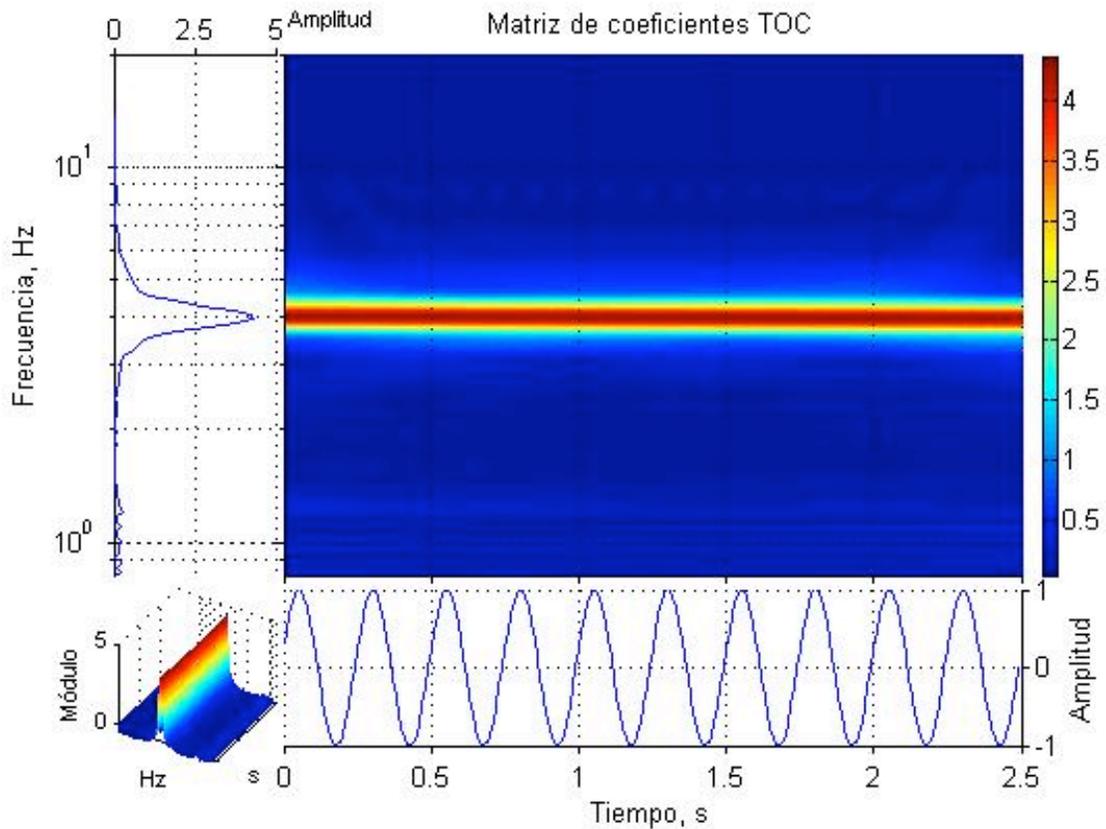


Figura 2.4 Senoide de 4 Hz (inf. der.) y su TOC (sup. der.) obtenida con una ondícula definida por 12 ciclos. Se muestra la media del módulo de la TOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TOC (inf. izq.)

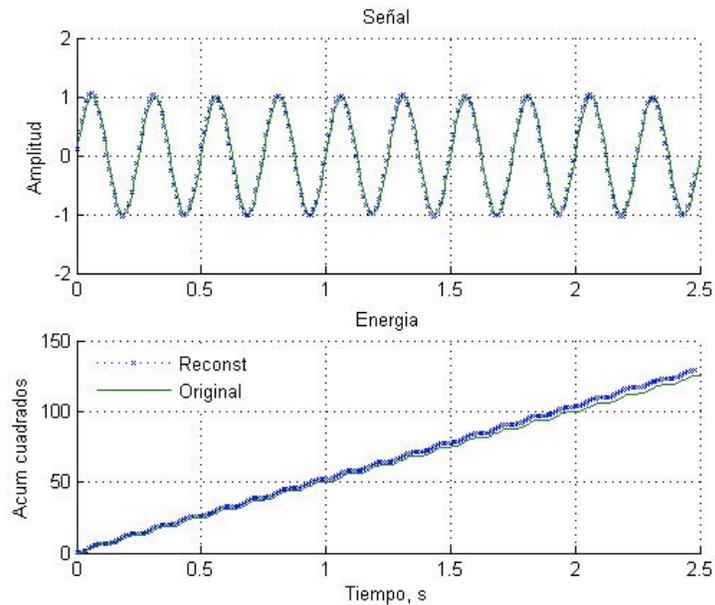


Figura 2.5 Senoide de 4 Hz original y reconstruída (superior), junto a sus energías (inferior)

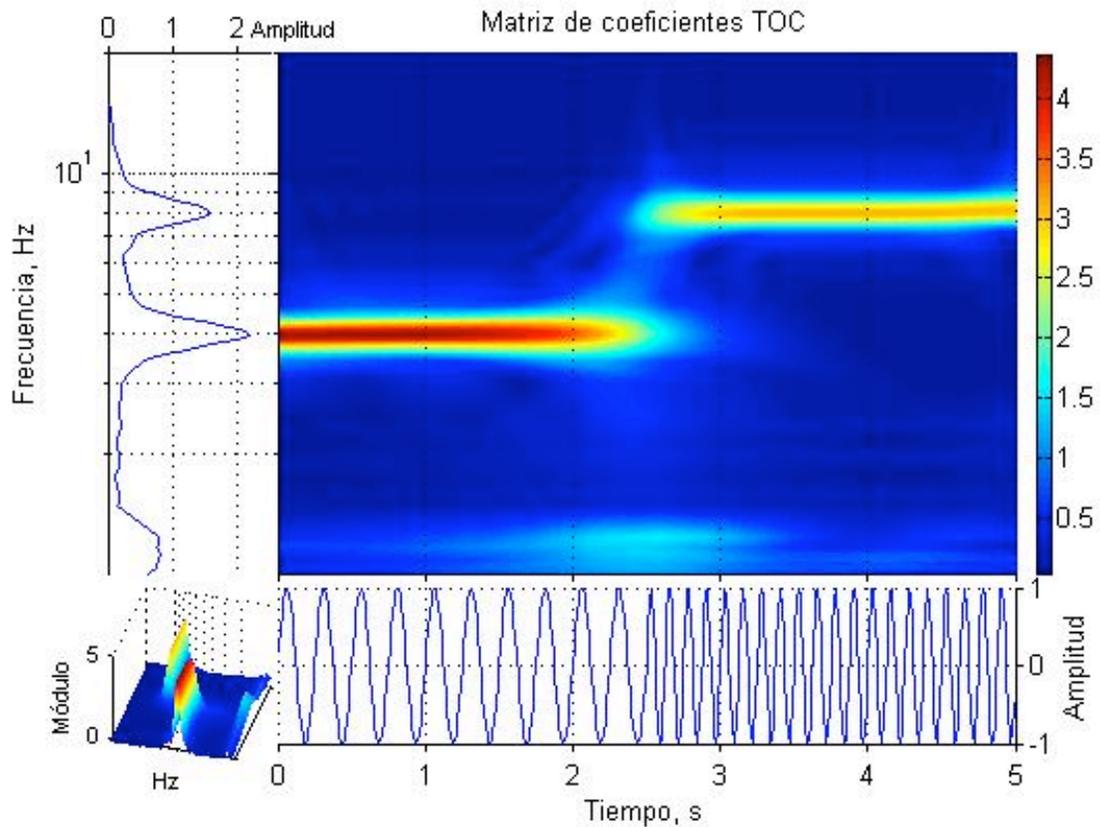


Figura 2.6 Senoides de 4 y 8 Hz, (inf. der.) y su TOC (sup. der.) obtenida con una ondícula de 12 ciclos. Se muestra la media del módulo de la TOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TOC (inf. izq.)

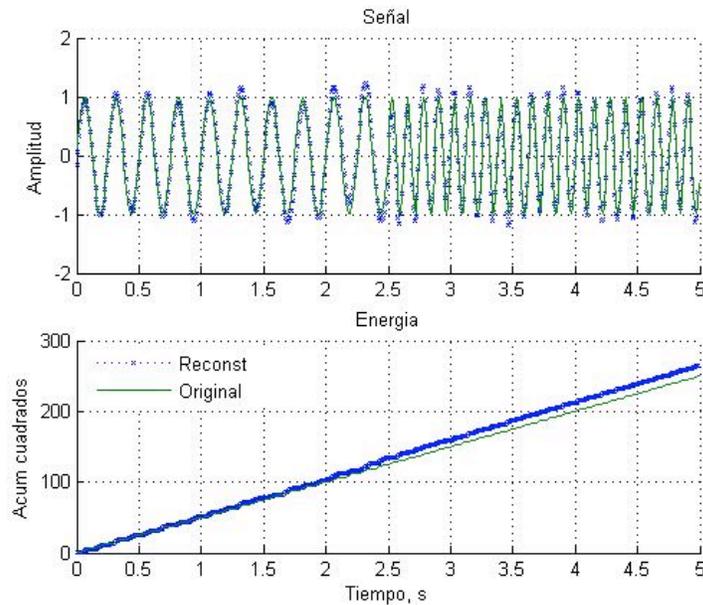


Figura 2.7 Senoides de 4 y 8 Hz, original y reconstruida (superior), con sus energías (inferior)

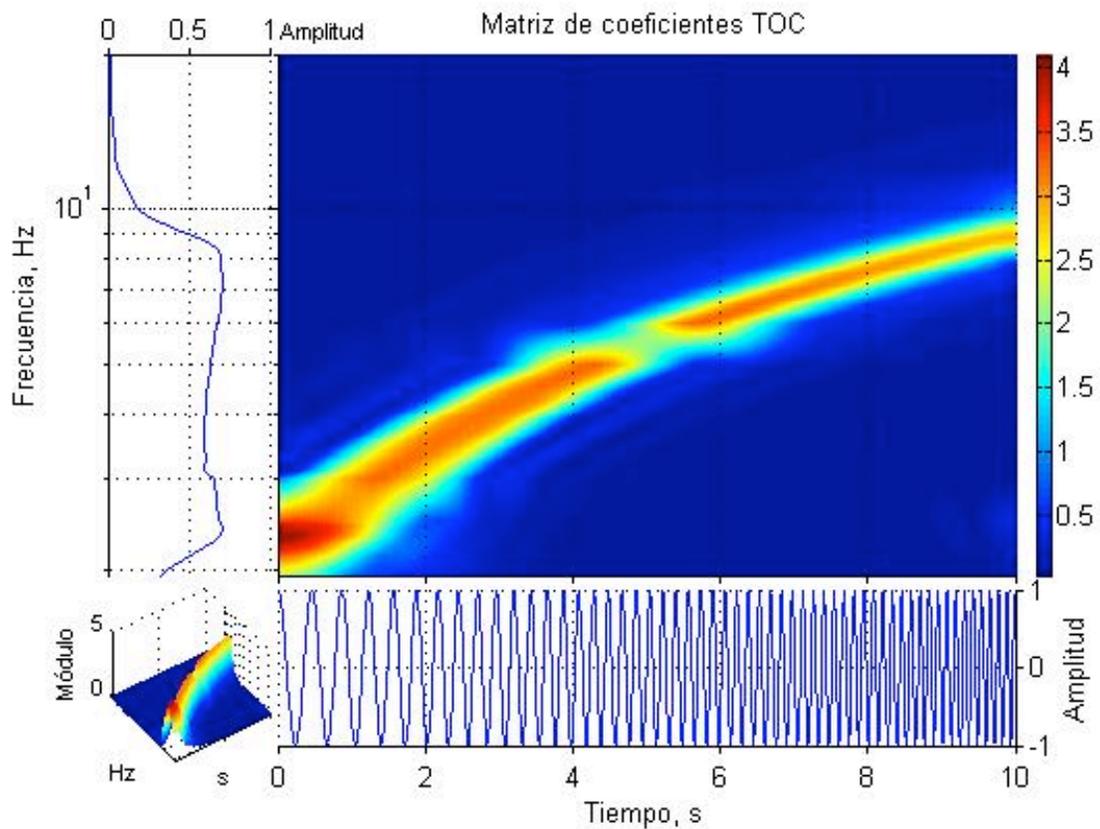


Figura 2.8 Senoide con variación lineal de frecuencia (2-9 Hz, inf. der.) y su TOC (sup. der.) obtenida con una ondícula definida por 12 ciclos. Se muestra la media del módulo de la TOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TOC (inf. izq.)

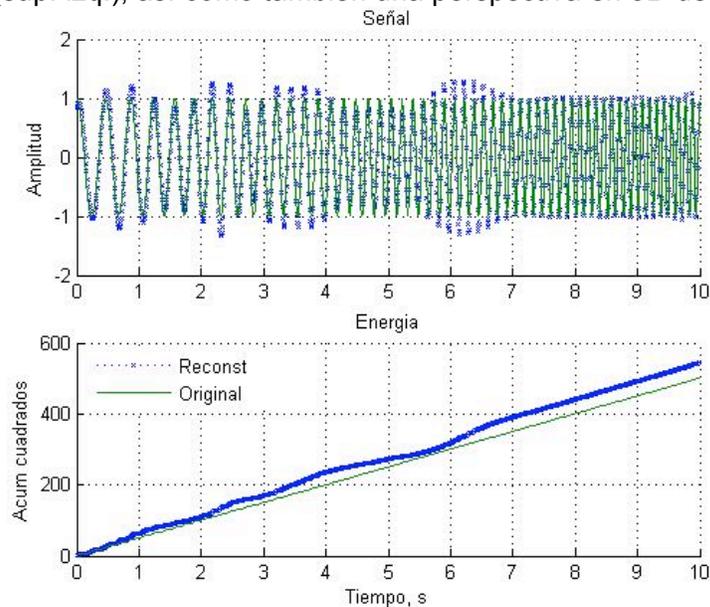


Figura 2.9 Senoide con variación lineal de frecuencia (2-9 Hz) original y reconstruída (superior), con sus energías (inferior)

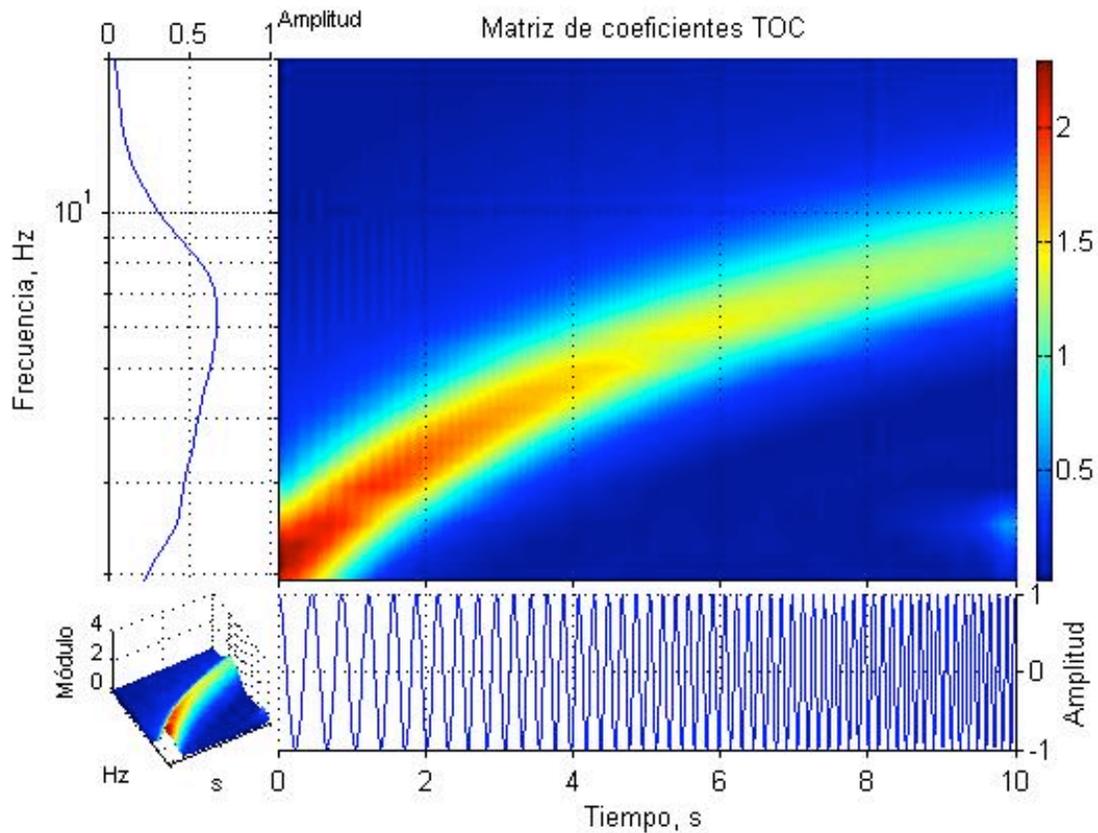


figura 2.10 Senoide con variación lineal de frecuencia (2-9 Hz, inf. der.) y su TOC (sup. der.) obtenida con una ondícula definida por 4 ciclos. Se muestra la media del módulo de la TOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TOC (inf. izq.)

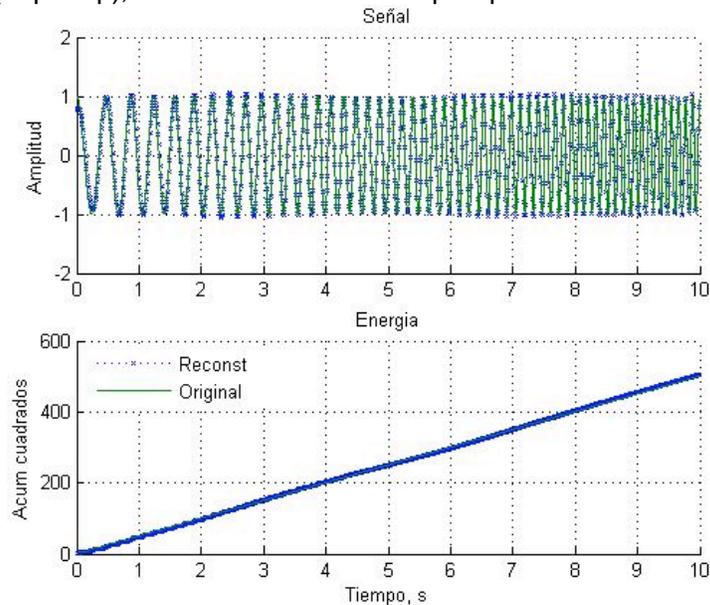


Figura 2.11 Senoide con variación lineal de frecuencia (2-9 Hz) original y reconstruída (superior), con sus energías (inferior)

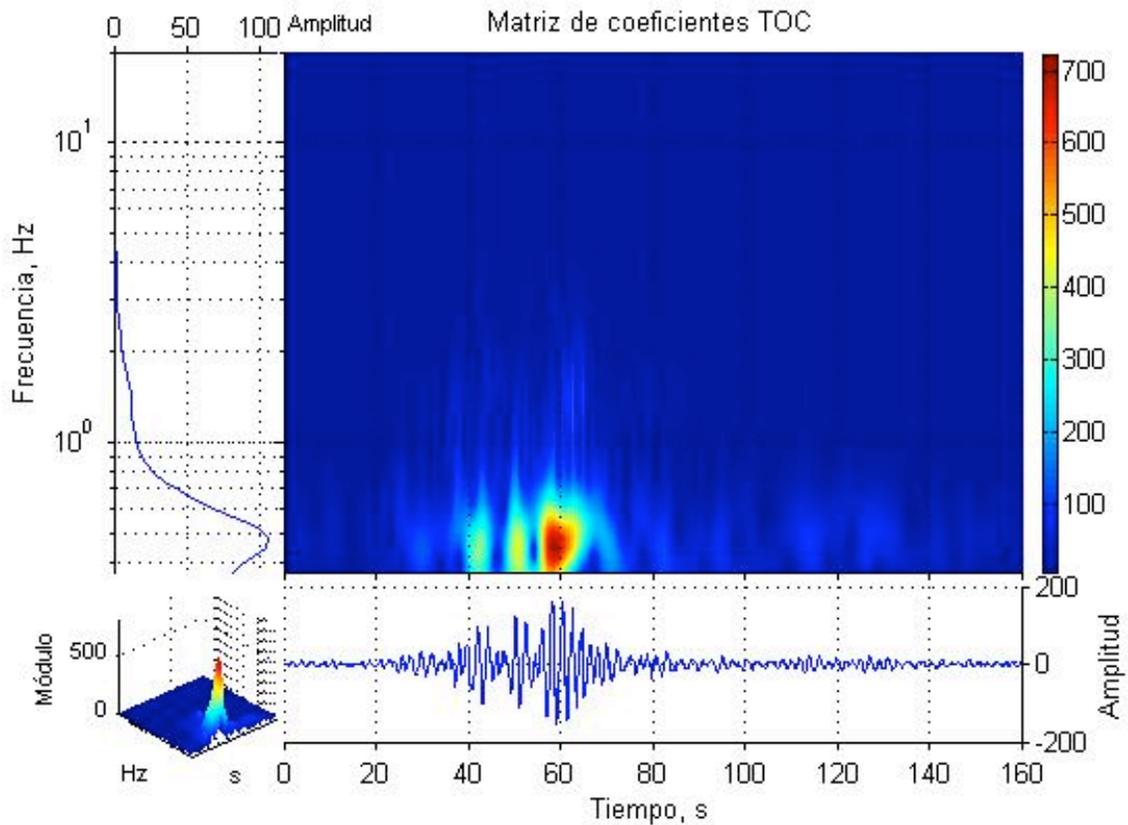


Figura 2.12 TOC de la aceleración del sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT1, dirección EO (sup. der.) con una ondícula de 12 ciclos. En la gráfica inferior derecha se muestra el registro de aceleración, la media del módulo de la TOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TOC (inf. izq.)

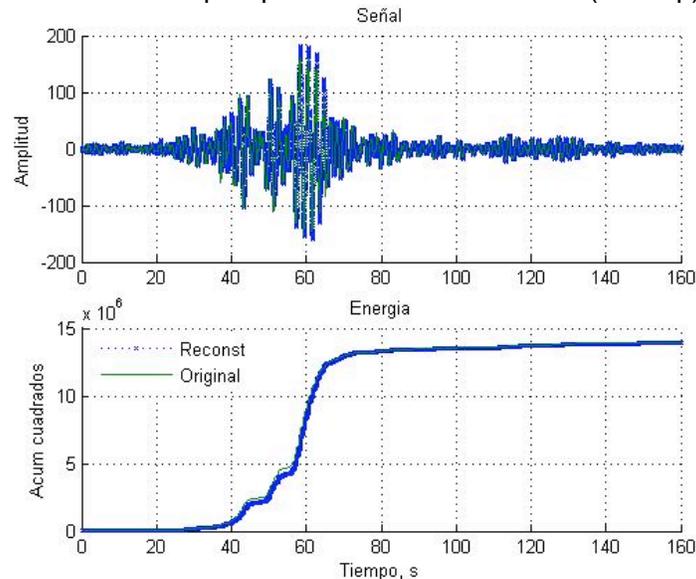


Figura 2.13a Aceleración del sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT1, dirección EO, original y reconstruida (superior), con sus energías (inferior)

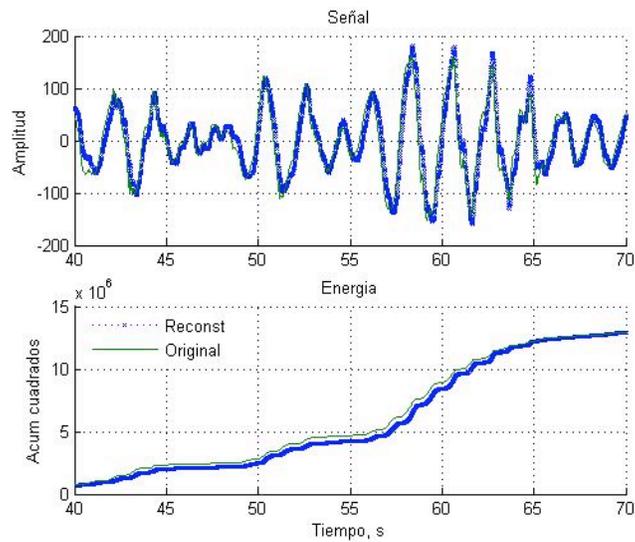


Figura 2.13b Acercamiento del registro del sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT1, dirección EO, original y reconstruida (superior), con sus energías (inferior). Se observa que la señal reconstruida es similar a la original.

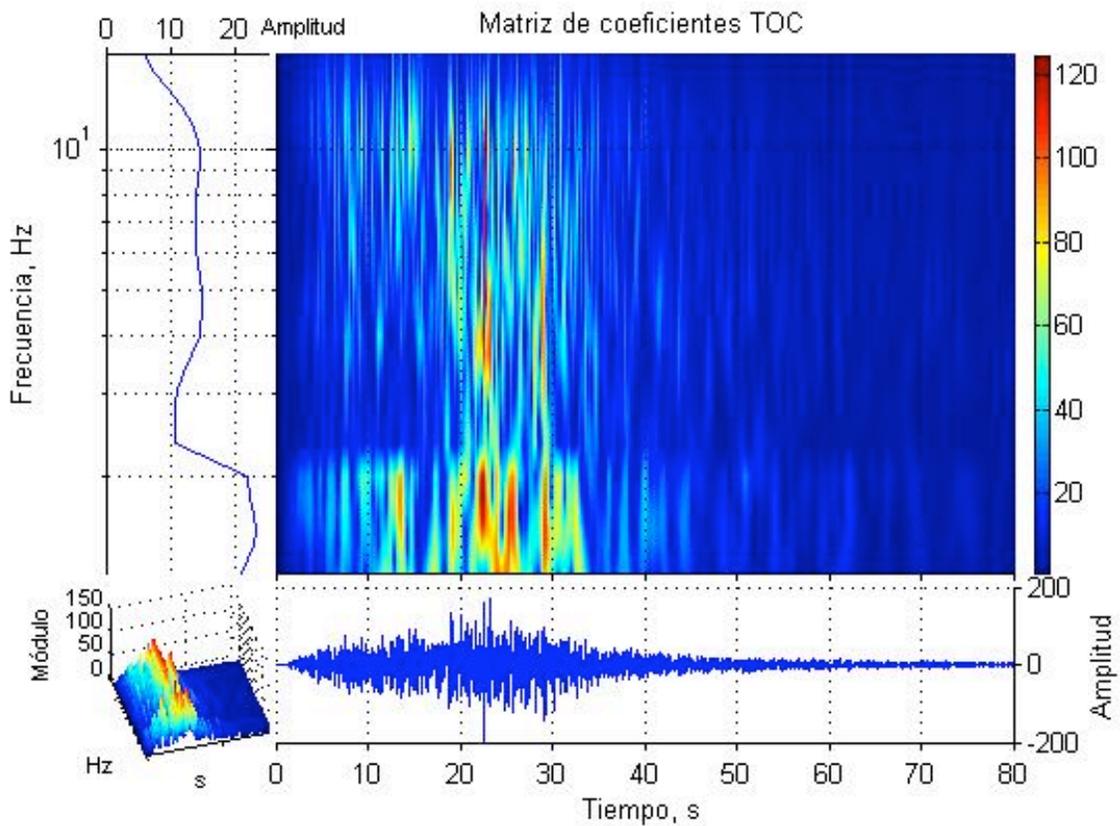


Figura 2.14 TOC de la aceleración del sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO (sup. der.) con una ondícula de 12 ciclos. En la gráfica inferior derecha se muestra el registro de aceleración, la media del módulo de la TOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TOC (inf. izq.)

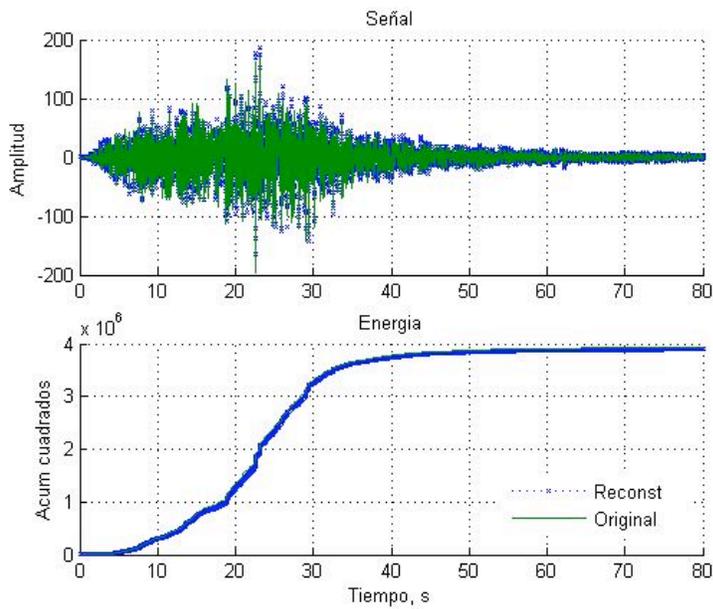


Figura 2.15a Aceleración del sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO, original y reconstruída (superior), con sus energías (inferior)

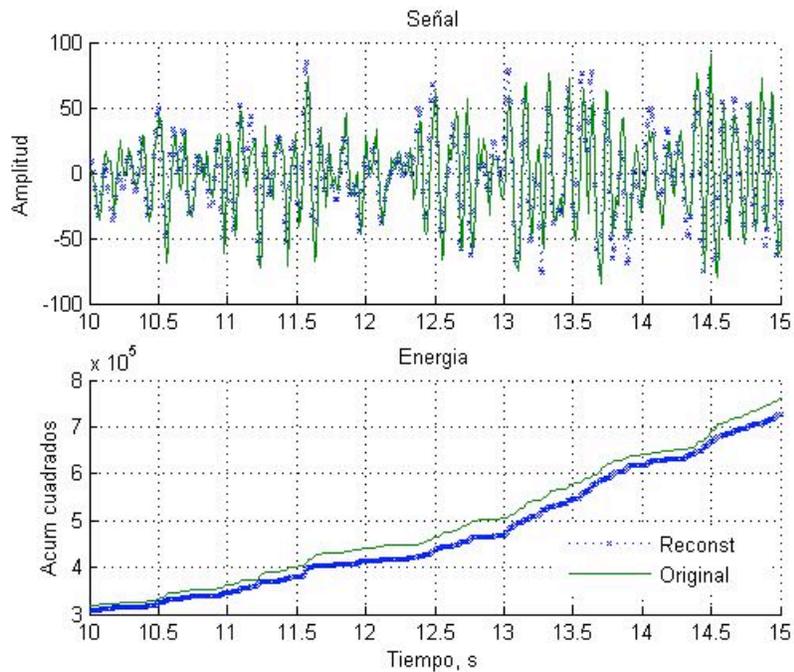


Figura 2.15b Acercamiento del registro del sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO, original y reconstruída (superior), con sus energías (inferior). Se observa que la señal reconstruída es similar a la original.

CAPÍTULO 3

En este capítulo se define la función de transferencia en el dominio tiempo-frecuencia, asociada a las propiedades dinámicas del oscilador en estudio. Esta función de transferencia se obtiene a partir de la solución mediante la transformada ondícula continua (TOC) de la ecuación diferencial de movimiento de un oscilador amortiguado lineal de un grado de libertad (1GL). Las características de esta función dependen de dicha solución, y ésta última a su vez, está influida por la relación que guardan la TOC de una función y la TOC de sus derivadas, la cual se desarrolla en este capítulo. Finalmente, se muestran algunas aplicaciones de esta función de transferencia para el estudio de osciladores de 1GL.

TOC DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La transformada inversa de ondícula continua (TIOC) de una función $x(t)$, considerando como base la ondícula (2.11), está dada por

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \psi_{b,a}(t) db \right\} \quad (2.17)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al realizado para obtener la equivalencia entre los coeficientes de las transformadas de Fourier (TF) de la función y su derivada (1.7), se calcula la derivada con respecto a t de la expresión (2.17). Debido a la presencia de la variable independiente t en los límites de la integral, es necesario recurrir a la regla de Leibniz para el cálculo de la derivada de (2.17), la cual se define como

$$\frac{d}{dt} \int_{\beta_o(t)}^{\beta_u(t)} W(t,b) db = \int_{\beta_o(t)}^{\beta_u(t)} \frac{\partial W}{\partial t} db + W(t,\beta_u) \frac{d\beta_u}{dt} - W(t,\beta_o) \frac{d\beta_o}{dt} \quad (3.1)$$

por lo que la primera derivada de (2.17) resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = & \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \alpha_D \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) \alpha_C \psi_{b,a}(t) db + \right. \\ & \left. + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \alpha_I \psi_{b,a}(t) db + x(t-|a|k_4I, a) \psi_{t-|a|k_4I, a}(t) - x(t-|a|k_4D, a) \psi_{t-|a|k_4D, a}(t) \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

donde α se define según

$$\alpha(b,a) = \begin{cases} \alpha_I(a) = \frac{-k_1}{|a|} + \frac{ik_2}{a} & \text{si } b \in [t-|a|I, t-|a|k_4I] \\ \alpha_C(a) = \frac{ik_2}{a} & \text{si } b \in [t-|a|D, t-|a|I] \\ \alpha_D(a) = \frac{k_1}{|a|} + \frac{ik_2}{a} & \text{si } b \in [t-|a|k_4D, t-|a|D] \end{cases} \quad (3.3)$$

Los dos últimos términos de la expresión (3.2) se relacionan a los valores de la función $x(b,a) \psi_{b,a}(t)$ evaluada en las traslaciones $b=t-|a|k_4D$ y $b=t-|a|k_4I$ que corresponden a los extremos de la ventana que influye en el valor de la derivada evaluada en t . La contribución de estos términos se espera sea pequeña debido a que el valor de la ondícula en dichos puntos es próximo a cero.

Reconstrucción de la primera derivada

Para establecer la equivalencia de la TOC de la primera derivada de la función y la TOC de la función se proponen dos opciones:

La primera considera únicamente los términos asociados a las integrales de la expresión (3.2), es decir, la primera derivada se aproxima mediante

$$\dot{x}(t) \approx \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \alpha_D \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) \alpha_C \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \alpha_I \psi_{b,a}(t) db \right\} \quad (3.4)$$

Al comparar la expresión anterior con la TIOC de la n -ésima derivada de $x(t)$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|k_4I} \frac{d^n x}{dt^n} \psi_{b,a}(t) db \quad (3.5)$$

para el caso en que $n=1$, entonces se puede deducir que la relación entre los coeficientes de las TOC de la función y su primera derivada resulta ser

$$\frac{\dot{x}(b,a)}{x(b,a)} = \begin{cases} \alpha_D & si & b \in [t-|a|k_4D, t-|a|D] \\ \alpha_C & si & b \in [t-|a|D, t-|a|I] \\ \alpha_I & si & b \in [t-|a|I, t-|a|k_4I] \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $\dot{x}(b,a) = \frac{dx}{dt}(b,a)$ son los coeficientes de la TOC de la primera derivada.

Como segunda opción se pueden considerar todos los términos de la expresión (3.2). Para lograr lo anterior se aprovecha la propiedad de la función delta de Dirac,

$$W(\beta) = \int_d^e W(b) \delta(b-\beta) db \quad si \quad d < \beta < e \quad (3.7)$$

y ya que los dos últimos términos de (3.2) son valores de la función $x(b,a) \psi_{b,a}(t)$ evaluada en las traslaciones $b=t-|a|k_4D$ y $b=t-|a|k_4I$, entonces dichos términos se pueden definir según (3.7) como

$$x(t-|a|k_4I, a) \psi_{t-|a|k_4I, a}(t) = \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \psi_{b,a}(t) \delta\{b-(t-|a|k_4I)\} db \quad (3.8)$$

$$x(t-|a|k_4D, a) \psi_{t-|a|k_4D, a}(t) = \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \psi_{b,a}(t) \delta\{b-(t-|a|k_4D)\} db$$

Sustituyendo (3.8) en (3.2), se tiene

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \alpha_D \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) \alpha_C \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \alpha_I \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \psi_{b,a}(t) \delta\{b-(t-|a|k_4I)\} db - \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \psi_{b,a}(t) \delta\{b-(t-|a|k_4D)\} db \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \psi_{b,a}(t) \delta\{b - (t - |a|k_4D)\} db \Big\} \\
\dot{x}(t) = & \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) (\alpha_D - \delta\{b - (t - |a|k_4D)\}) \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) \alpha_C \psi_{b,a}(t) db + \right. \\
& \left. + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) (\alpha_I + \delta\{b - (t - |a|k_4I)\}) \psi_{b,a}(t) db \right\} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

De donde se deduce que la relacion entre los coeficientes de las TOC de la función y su primera derivada, se definen como

$$\frac{\dot{x}(b,a)}{x(b,a)} = \begin{cases} \alpha_D - \delta\{b - (t - |a|k_4D)\} & b \in [t - |a|k_4D, t - |a|D] \\ \alpha_C & b \in [t - |a|D, t - |a|I] \\ \alpha_I + \delta\{b - (t - |a|k_4I)\} & b \in [t - |a|I, t - |a|k_4I] \end{cases} \quad (3.10)$$

Se puede demostrar numéricamente que se obtiene una buena aproximación al reconstruir la derivada empleando los coeficientes definidos por (3.6), pero en caso sea necesario, ésta puede tomar en cuenta los términos despreciados en la aproximación mediante (3.10).

Reconstrucción de la segunda derivada

Para obtener la segunda derivada, se vuelve a aplicar la regla de Leibniz (3.1) a la expresión (3.2)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} = & \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \alpha_D^2 \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) \alpha_C^2 \psi_{b,a}(t) db + \right. \\
& + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \alpha_I^2 \psi_{b,a}(t) db + \\
& + \alpha_D \left\{ x(t - |a|D, a) \psi_{t-|a|D,a}(t) - x(t - |a|k_4D, a) \psi_{t-|a|k_4D,a}(t) \right\} + \\
& + \alpha_C \left\{ x(t - |a|I, a) \psi_{t-|a|I,a}(t) - x(t - |a|D, a) \psi_{t-|a|D,a}(t) \right\} + \\
& \left. + \alpha_I \left\{ -x(t - |a|I, a) \psi_{t-|a|I,a}(t) + x(t - |a|k_4I, a) \psi_{t-|a|k_4I,a}(t) \right\} \right\} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

donde α se define según (3.3). Existen tres términos de la expresión anterior evaluados en cuatro traslaciones ($b=t-|a|I$, $b=t-|a|D$, $b=t-|a|k_4I$ y $b=t-|a|k_4D$). Se espera que las primeras dos traslaciones tengan un mayor impacto que las últimas dos debido a que los valores de la ondícula en sus extremos es próximo a cero.

De lo anterior, se proponen tres opciones para reconstruir la segunda derivada:

La primera opción considera únicamente las integrales que intervienen en la expresión (3.11), es decir,

$$\ddot{x}(t) \approx \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) \alpha_D^2 \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) \alpha_C^2 \psi_{b,a}(t) db + \right.$$

$$+ \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \alpha_I^2 \psi_{b,a}(t) db \} \quad (3.12)$$

Por lo que la relación entre los coeficientes de las TOC de la función y su segunda derivada se define como

$$\frac{\ddot{x}(b,a)}{x(b,a)} = \begin{cases} \alpha_D^2 & si & b \in [t-|a|k_4D, t-|a|D] \\ \alpha_C^2 & si & b \in [t-|a|D, t-|a|I] \\ \alpha_I^2 & si & b \in [t-|a|I, t-|a|k_4I] \end{cases} \quad (3.13)$$

donde $\ddot{x}(b,a) = \frac{d^2x}{dt^2}(b,a)$ representa los coeficientes de la TOC de la segunda derivada. Se puede demostrar que procediendo de una manera análoga a la primera derivada, el resto de los términos no considerados en (3.12) pueden incluirse dentro de la integral aprovechando la propiedad (3.7) de la delta de Dirac, obteniéndose

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = & \frac{1}{C_{\psi-a_0}} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) (\alpha_D^2 + \alpha_D \delta\{b-(t-|a|D)\} - \alpha_D \delta\{b-(t-|a|k_4D)\}) \psi_{b,a}(t) db + \right. \\ & + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) (\alpha_C^2 - \alpha_C \delta\{b-(t-|a|D)\} + \alpha_C \delta\{b-(t-|a|I)\}) \psi_{b,a}(t) db + \\ & \left. + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) (\alpha_I^2 - \alpha_I \delta\{b-(t-|a|I)\} + \alpha_I \delta\{b-(t-|a|k_4I)\}) \psi_{b,a}(t) db \right\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

Considerando la expresión anterior, la relación entre los coeficientes de las TOC de la función y su segunda derivada resulta ser

$$\frac{\ddot{x}(b,a)}{x(b,a)} = \begin{cases} \alpha_D^2 + \alpha_D \delta\{b-(t-|a|D)\} - \alpha_D \delta\{b-(t-|a|k_4D)\} & b \in [t-|a|k_4D, t-|a|D] \\ \alpha_C^2 - \alpha_C \delta\{b-(t-|a|D)\} + \alpha_C \delta\{b-(t-|a|I)\} & b \in [t-|a|D, t-|a|I] \\ \alpha_I^2 - \alpha_I \delta\{b-(t-|a|I)\} + \alpha_I \delta\{b-(t-|a|k_4I)\} & b \in [t-|a|I, t-|a|k_4I] \end{cases} \quad (3.15)$$

La tercera opción propuesta para la reconstrucción de la segunda derivada consiste en despreciar los términos asociados a las deltas de Dirac evaluadas en los extremos de la ventana que define a la ondícula, es decir, las correspondientes a las traslaciones $b=t-|a|k_4I$ y $b=t-|a|k_4D$. Por lo que la aproximación de la segunda derivada se define como

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) \approx & \frac{1}{C_{\psi-a_0}} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x(b,a) (\alpha_D^2 + \alpha_D \delta\{b-(t-|a|D)\}) \psi_{b,a}(t) db + \right. \\ & + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x(b,a) (\alpha_C^2 - \alpha_C \delta\{b-(t-|a|D)\} + \alpha_C \delta\{b-(t-|a|I)\}) \psi_{b,a}(t) db + \\ & \left. + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x(b,a) (\alpha_I^2 - \alpha_I \delta\{b-(t-|a|I)\}) \psi_{b,a}(t) db \right\} \quad (3.16) \end{aligned}$$

Quedando la relación entre los coeficientes determinada por

$$\frac{{}^w\ddot{x}(b,a)}{{}^w x(b,a)} = \begin{cases} \alpha_D^2 + \alpha_D \delta \{b - (t - |a|D)\} & b \in [t - |a|k_4D, t - |a|D] \\ \alpha_C^2 - \alpha_C \delta \{b - (t - |a|D)\} + \alpha_C \delta \{b - (t - |a|I)\} & b \in [t - |a|D, t - |a|I] \\ \alpha_I^2 - \alpha_I \delta \{b - (t - |a|I)\} & b \in [t - |a|I, t - |a|k_4I] \end{cases} \quad (3.17)$$

La contribución de los términos considerados en (3.13) aproxima de manera adecuada la segunda derivada, según se ha comprobado numéricamente. Pero si es necesario, es posible tomar en cuenta los términos despreciados mediante las expresiones (3.15) ó (3.17), aunque se espera que la contribución de los términos evaluados en los extremos de la ventana de la ondícula ($b=t-|a|k_4I$ y $b=t-|a|k_4D$) sea pequeña, debido a que el valor de la ondícula en dichos puntos es cercano a cero.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO

La ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado lineal de 1GL se define por

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\Omega\dot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = -\ddot{x}_g(t) \quad (3.18)$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento sufrido por el oscilador, ξ representa su porcentaje de amortiguamiento crítico, y Ω su frecuencia radial de vibración. $\ddot{x}_g(t)$ representa la excitación.

Aplicando la TOC a la expresión anterior, se tiene

$${}^w\ddot{x}(b,a) + 2\xi\Omega {}^w\dot{x}(b,a) + \Omega^2 {}^w x(b,a) = -{}^w\ddot{x}_g(b,a) \quad (3.19)$$

Por otro lado, la TIOC de la excitación se calcula mediante

$$\ddot{x}_g(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|k_4I} {}^w\ddot{x}_g(b,a) \psi_{b,a}(t) db =$$

sustituyendo la TOC de la excitación según (3.19) en la expresión anterior,

$$= \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|k_4I} -\left\{ {}^w\ddot{x}(b,a) + 2\xi\Omega {}^w\dot{x}(b,a) + \Omega^2 {}^w x(b,a) \right\} \psi_{b,a}(t) db =$$

expandiendo la integral a los intervalos de traslaciones en los cuales se encuentra definida (ver la expresión 2.17),

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} -\left\{ {}^w\ddot{x} + 2\xi\Omega {}^w\dot{x} + \Omega^2 {}^w x \right\} \psi_{b,a}(t) db + \right. \\ &+ \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} -\left\{ {}^w\ddot{x} + 2\xi\Omega {}^w\dot{x} + \Omega^2 {}^w x \right\} \psi_{b,a}(t) db + \left. \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} -\left\{ {}^w\ddot{x} + 2\xi\Omega {}^w\dot{x} + \Omega^2 {}^w x \right\} \psi_{b,a}(t) db \right\} = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} -\left\{ \alpha_D'' + 2\xi\Omega\alpha_D' + \Omega^2 \right\} {}^w x \psi_{b,a}(t) db + \right. \\ &+ \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} -\left\{ \alpha_C'' + 2\xi\Omega\alpha_C' + \Omega^2 \right\} {}^w x \psi_{b,a}(t) db + \left. \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} -\left\{ \alpha_I'' + 2\xi\Omega\alpha_I' + \Omega^2 \right\} {}^w x \psi_{b,a}(t) db \right\} \quad (3.20) \end{aligned}$$

La ecuación (3.20) nos muestra la relación existente entre ${}^w\ddot{x}$ y ${}^w\ddot{x}_g$, donde α'' y α' se refieren a la aproximación empleada para estimar las relaciones de la TOC de la función con la TOC de su segunda derivada (ya sea 3.13, 3.15 ó 3.17) y la TOC de su primera derivada (3.6 ó 3.10), respectivamente. En los ejemplos presentados en este trabajo la segunda y primera derivadas

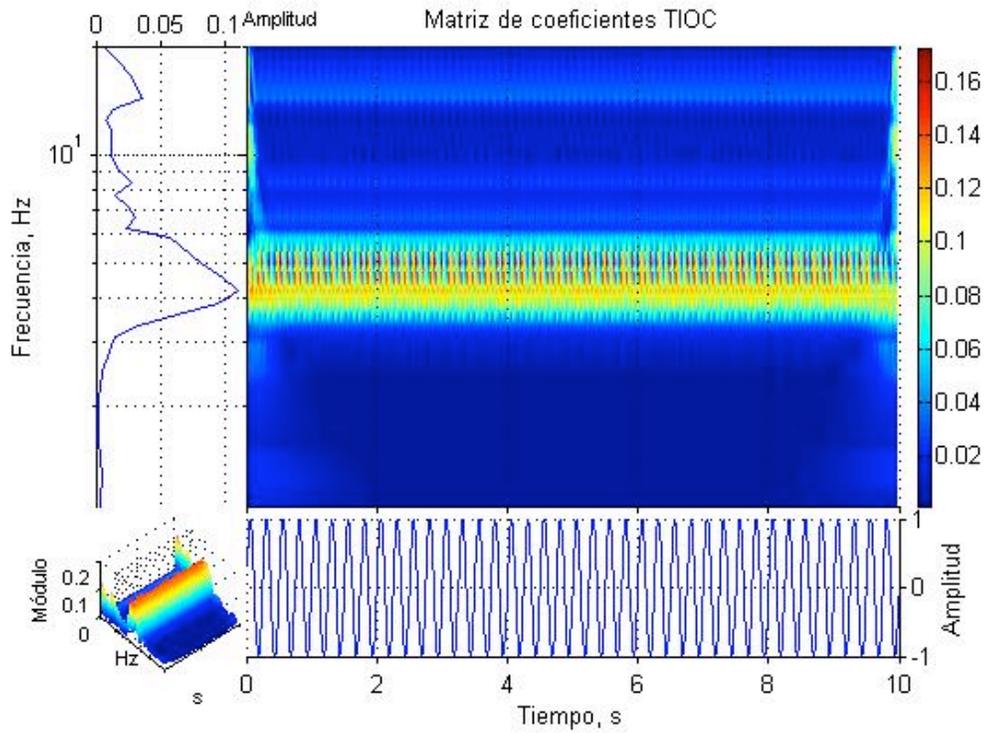


Figura 3.1 Módulo de los coeficientes correspondientes a la TIOC (sup.der.) de la excitación senoidal de 4 Hz y amplitud unitaria (inf. der.), obtenida a partir de la TOC de la respuesta de un oscilador 4 Hz, $\xi=5\%$ (expresión 3.20). Se muestra la media del módulo de la TIOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TIOC (inf. izq.)

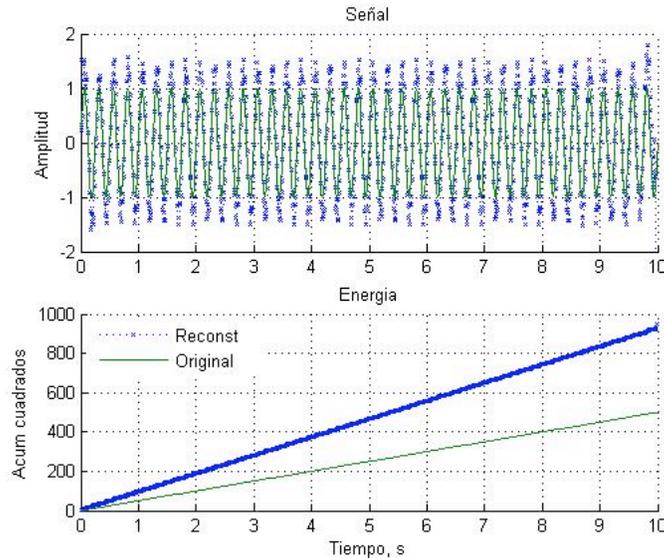


Figura 3.2 Excitación senoidal de 4 Hz, amplitud unitaria reconstruída según (3.20) a partir de la TOC de la respuesta de un oscilador de 4 Hz, $\xi=5\%$. En la gráfica inferior se muestra la suma acumulada del cuadrado de la señal.

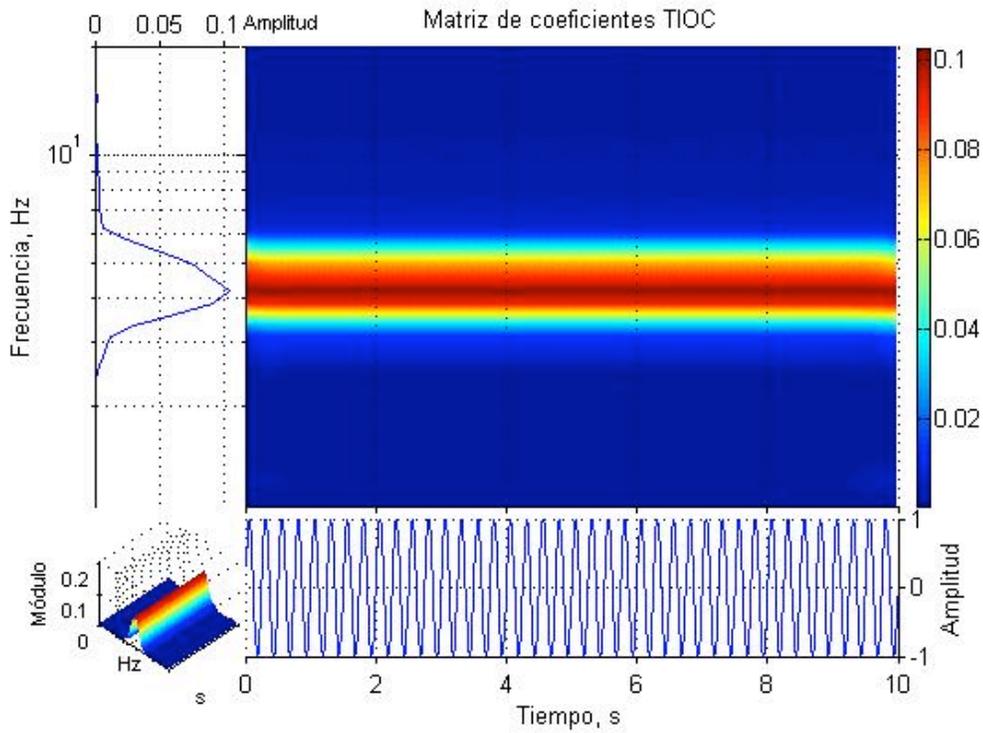


Figura 3.3 Módulo de los coeficientes correspondientes a la TIOC (sup. der.) de la excitación senoidal de 4 Hz y amplitud unitaria (inf. der.), obtenida a partir de la TOC de la respuesta de un oscilador 8 Hz, $\xi=5\%$ (expresión 3.20). Se muestra la media del módulo de la TIOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TIOC (inf. izq.)

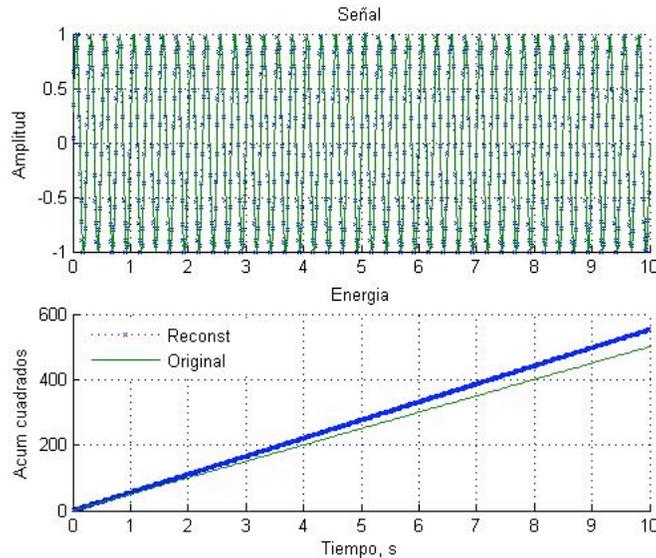


Figura 3.4 Excitación senoidal de 4 Hz, amplitud unitaria reconstruída según (3.20) a partir de la TOC de la respuesta de un oscilador de 8 Hz, $\xi=5\%$. En la gráfica inferior se muestra la suma acumulada del cuadrado de la señal.

se aproximan mediante (3.13) y (3.6). Se verifica la expresión (3.20) al estimar la excitación a partir de la respuesta de un oscilador. La TOC se calcula empleando una ondícula consistente de 4 ciclos (ver tabla 2.1). Los resultados se muestran en las figuras 3.1 - 3.4 donde la excitación es una senoide con amplitud unitaria de frecuencia $\omega/2\pi=4$ Hz, y la respuesta estacionaria x_e , calculada mediante (Clough y Penzien, 1993)

$$x_e(t) = \frac{1}{\Omega^2} \left\{ \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right\} \left\{ (1-r^2) \sin \omega t - 2\xi r \cos \omega t \right\} \quad (3.21)$$

donde $r = \frac{\omega}{\Omega}$. La respuesta es calculada para dos osciladores, el primero con frecuencia natural de $\Omega/2\pi=4$ Hz, y el otro con $\Omega/2\pi=8$ Hz. Ambos con porcentaje de amortiguamiento crítico $\xi=5\%$. La resonancia genera una sobreestimación de la excitación así calculada, como se observa en la figura 3.2. Dicha sobreestimación es ocasionada por la contribución de energía presente en frecuencias distintas a 4 Hz (figura 3.1), ya que se ha comprobado que al emplear un menor intervalo de frecuencias para la reconstrucción, (2,6) Hz, se obtiene la amplitud unitaria de la excitación senoidal empleada. En el caso del oscilador de 8 Hz, la estimación de la excitación es similar a la original (figuras 3.3 - 3.4).

Ahora, igualando (3.20) con la TIOC de la excitación se tiene,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_g &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db \right\} = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} -\{\alpha_D'' + 2\xi\Omega\alpha_D' + \Omega^2\} x \psi_{b,a}(t) db + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} -\{\alpha_C'' + 2\xi\Omega\alpha_C' + \Omega^2\} x \psi_{b,a}(t) db + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} -\{\alpha_I'' + 2\xi\Omega\alpha_I' + \Omega^2\} x \psi_{b,a}(t) db \right\} \quad (3.22) \end{aligned}$$

Si se supone que

$$\begin{aligned} \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db &= \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} -\{\alpha_D'' + 2\xi\Omega\alpha_D' + \Omega^2\} x \psi_{b,a}(t) db \\ \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db &= \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} -\{\alpha_C'' + 2\xi\Omega\alpha_C' + \Omega^2\} x \psi_{b,a}(t) db \\ \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db &= \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} -\{\alpha_I'' + 2\xi\Omega\alpha_I' + \Omega^2\} x \psi_{b,a}(t) db \end{aligned} \quad (3.23)$$

Despejando se tiene

$$\begin{aligned} \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x \psi_{b,a}(t) db &= \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} \frac{-\ddot{x}_g}{\alpha_D'' + 2\xi\Omega\alpha_D' + \Omega^2} \psi_{b,a} db \\ \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x \psi_{b,a}(t) db &= \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} \frac{-\ddot{x}_g}{\alpha_C'' + 2\xi\Omega\alpha_C' + \Omega^2} \psi_{b,a} db \end{aligned} \quad (3.24a)$$

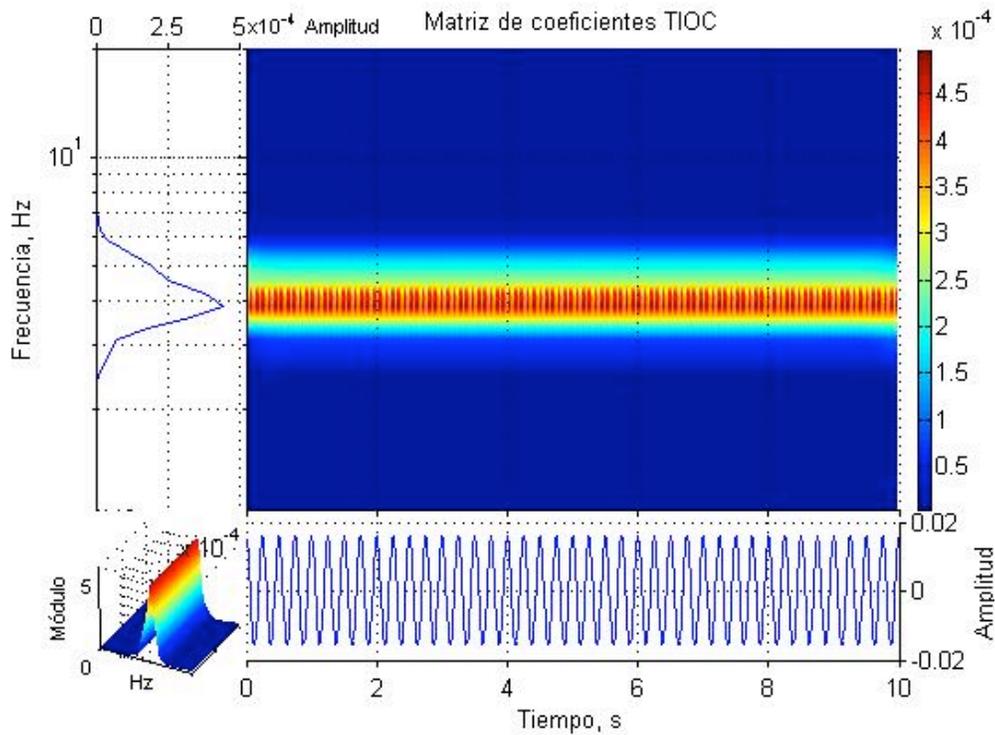


Figura 3.5 Módulo de la TIOC (sup.der.) de la respuesta de un oscilador 4 Hz, $\xi=5\%$ (inf. der.), obtenida a partir de la TOC de una senoide de 4 Hz y amplitud unitaria empleada como excitación (expresión 3.25). Se muestra la media del módulo de la TIOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TIOC (inf. izq.)

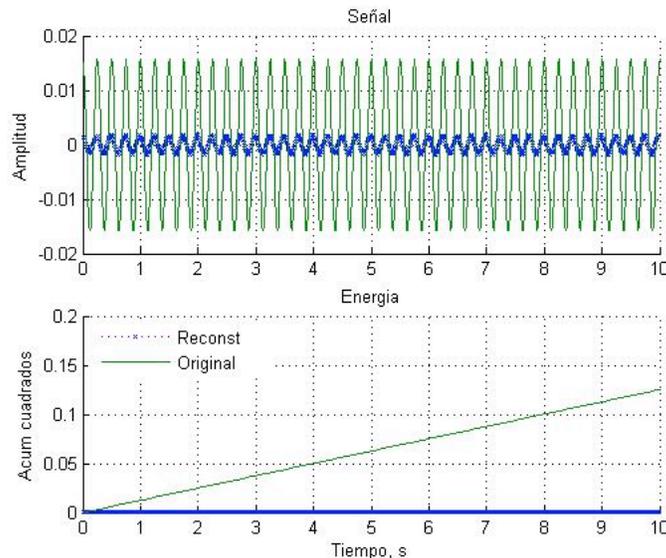


Figura 3.6 Respuesta de un oscilador 4 Hz, $\xi=5\%$ ante una excitación senoidal de 4 Hz y amplitud unitaria. Reconstruida según (3.25) a partir de la TOC de la excitación. Se compara con la respuesta obtenida mediante (3.21) (línea continua). En la gráfica inferior se muestra la suma acumulada del cuadrado de la señal.

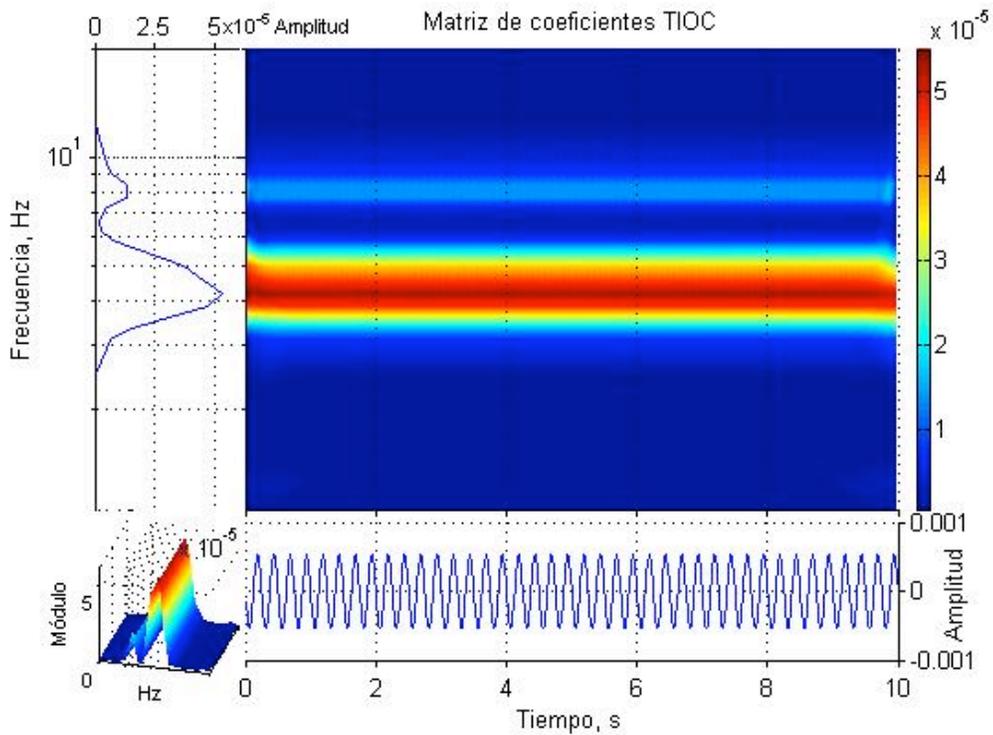


Figura 3.7 Módulo de la TIOC (sup.der.) de la respuesta de un oscilador 8 Hz, $\xi=5\%$ (inf. der.), obtenida a partir de la TOC de una senoide de 4 Hz y amplitud unitaria empleada como excitación (expresión 3.25). Se muestra la media del módulo de la TIOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TIOC (inf. izq.)

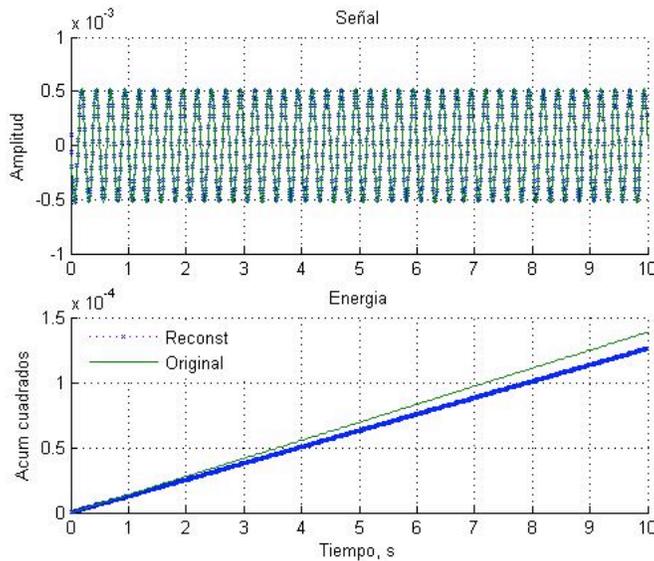


Figura 3.8 Respuesta de un oscilador 8 Hz, $\xi=5\%$ ante una excitación senoidal de 4 Hz y amplitud unitaria. Reconstruida según (3.25) a partir de la TOC de la excitación. Se compara con la respuesta obtenida mediante (3.21) (línea continua). En la gráfica inferior se muestra la suma acumulada del cuadrado de la señal

$$\int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x \psi_{b,a}^w(t) db = \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} \frac{-\ddot{x}_g^w}{\alpha_I'' + 2\xi\Omega\alpha_I' + \Omega^2} \psi_{b,a} db \quad (3.24b)$$

Entonces la suma de los términos del lado izquierdo y la suma de los del lado derecho de (3.24) tienen que ser iguales, por lo que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} \frac{-\ddot{x}_g^w}{\alpha_D'' + 2\xi\Omega\alpha_D' + \Omega^2} \psi_{b,a} db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} \frac{-\ddot{x}_g^w}{\alpha_C'' + 2\xi\Omega\alpha_C' + \Omega^2} \psi_{b,a} db + \right. \\ & \quad \left. + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} \frac{-\ddot{x}_g^w}{\alpha_I'' + 2\xi\Omega\alpha_I' + \Omega^2} \psi_{b,a} db \right\} = \\ & = \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \left\{ \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x \psi_{b,a}^w(t) db + \int_{t-|a|D}^{t-|a|I} x \psi_{b,a}^w(t) db + \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x \psi_{b,a}^w(t) db \right\} = \\ & = x(t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

La suposición (3.23) se comprueba mediante la evaluación de la expresión (3.25), al calcular la respuesta de un oscilador lineal a partir de la TOC de una excitación dada. Se emplea la misma senoide y osciladores del ejemplo anterior. La ondícula empleada como base para la TOC contiene 4 ciclos (ver tabla 2.1). En las figuras 3.5 - 3.8 se muestran los resultados obtenidos. Se observa una subestimación de la respuesta del oscilador de 4 Hz. La subestimación está relacionada al efecto de resonancia (la senoide empleada como excitación tiene una frecuencia de 4 Hz). La respuesta del oscilador de 8 Hz es similar a la obtenida mediante (3.21).

Una posible razón de este fenómeno es el uso de pocos valores de frecuencias empleados en el cálculo de la TOC y de la TIOC. En las figuras 3.9 - 3.10 se muestra la reconstrucción de las respuestas anteriores empleando un mayor número de frecuencias (174) a las inicialmente empleadas (51). No se observa una mejoría importante al emplear un mayor número de frecuencias, por lo que se descarta esta explicación.

El uso de otras aproximaciones para el cálculo de las derivadas tampoco resuelve la subestimación.

Se ha demostrado que la subestimación disminuye conforme la base empleada tiende a una senoide y se incrementa su soporte compacto, es decir, la subestimación disminuye conforme la ondícula tiende a la base utilizada en la TF, según se observa en las figuras 3.11 - 3.12 donde se calcula la respuesta del oscilador de 4 Hz sujeto a la misma excitación utilizada, pero empleando una ondícula senoidal con soporte compacto conteniendo 24 ciclos (ver tabla 2.1).

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA OBTENIDA MEDIANTE LA TOC

En principio, la función de transferencia H se define como la relación entre la TOC de alguna respuesta del oscilador y la TOC de la excitación,

$$H = \frac{x^w}{\ddot{x}_g^w} \quad (3.26)$$

En esta expresión se supone a la respuesta como el desplazamiento del oscilador. Sustituyendo (3.26) en (3.25),

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|k_4I} x(b,a) \psi_{b,a}^w(t) db = \frac{1}{C_\psi} \int_{-a_0}^{a_0} \frac{1}{a^2} da \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|k_4I} H(b,a) \ddot{x}_g^w(b,a) \psi_{b,a}^w(t) db \quad (3.27)$$

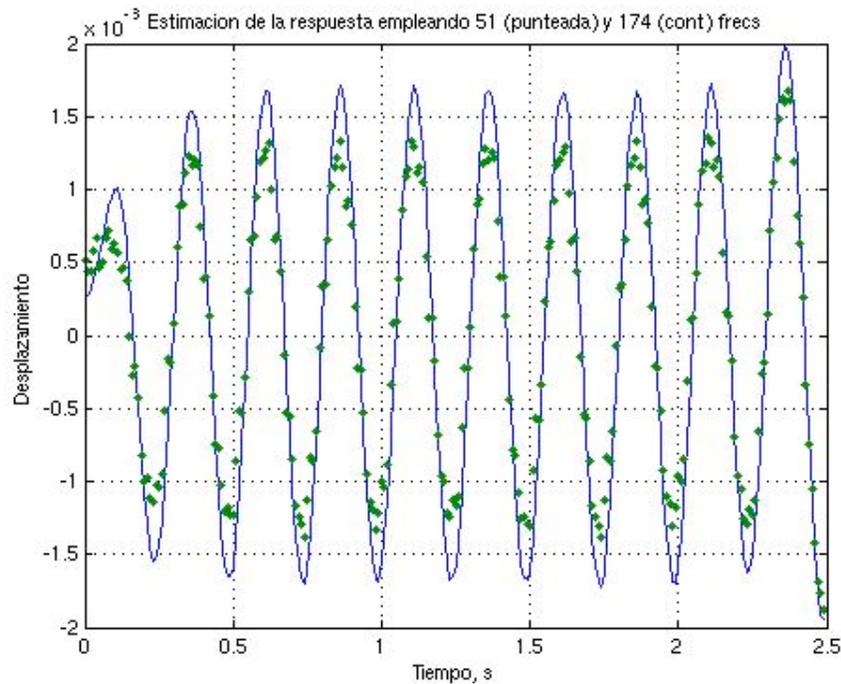


Figura 3.9 Comparación de la reconstrucción según (3.25) de la respuesta de un oscilador de 4 Hz, $\xi=5\%$ ante una excitación senoidal de 4 Hz y amplitud unitaria. La línea punteada emplea 51 frecuencias para generar la TOC, mientras que la línea continua usa 174.

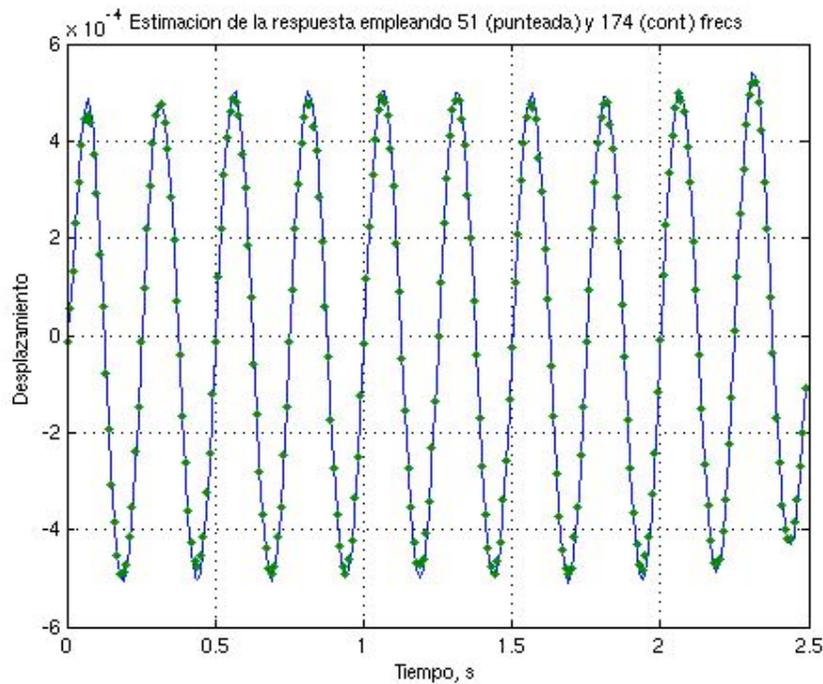


Figura 3.10 Comparación de la reconstrucción según (3.25) de la respuesta de un oscilador 8 Hz, $\xi=5\%$ ante una excitación senoidal de 4 Hz y amplitud unitaria. La línea punteada emplea 51 frecuencias para generar la TOC, mientras que la línea continua usa 174.

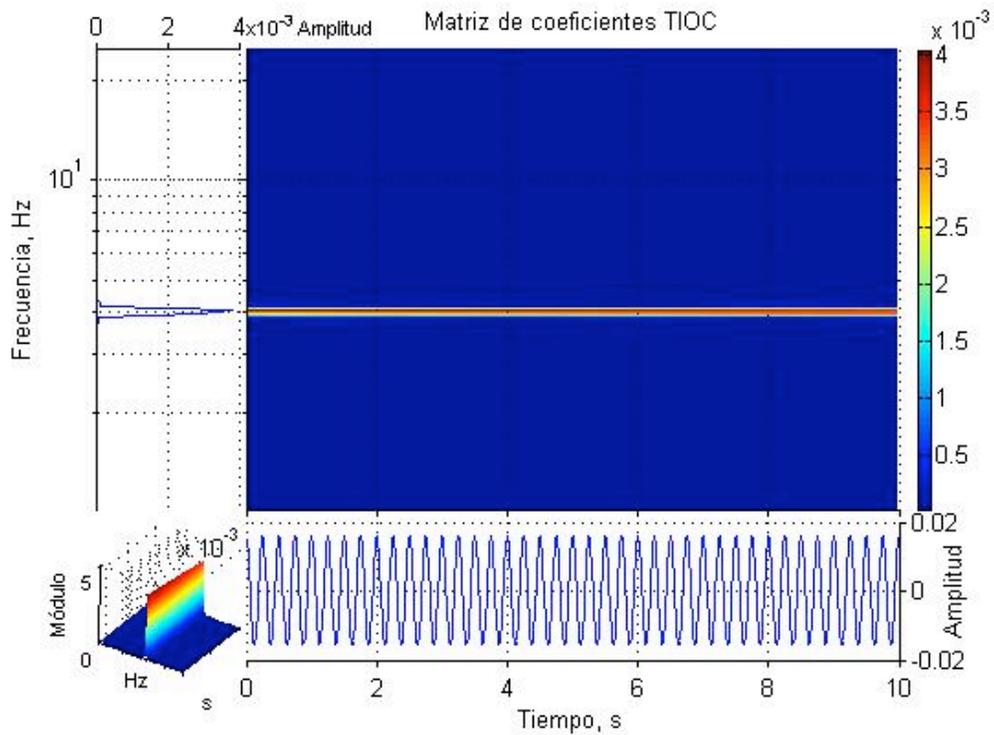


Figura 3.11 Módulo de la TIOC (sup.der.) de la respuesta de un oscilador 4 Hz, $\xi=5\%$ (inf. der.), obtenida a partir de la TOC de una senoide de 4 Hz y amplitud unitaria empleada como excitación (expresión 3.25). TOC obtenida con una ondícula senoidal de soporte compacto de 24 ciclos. Se muestra la media del módulo de la TIOC en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de la TIOC (inf. izq.)

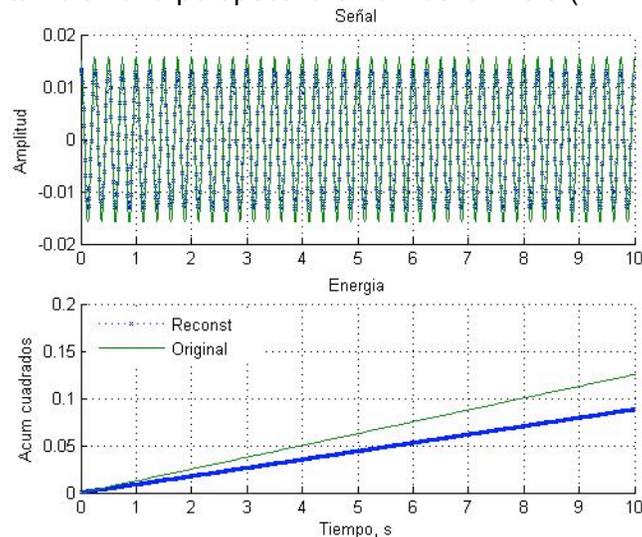


Figura 3.12 Respuesta de un oscilador 4 Hz, $\xi=5\%$ ante una excitación senoidal de 4 Hz y amplitud unitaria. Reconstruida según (3.25) a partir de la TOC de la excitación. Se compara con la respuesta obtenida mediante (3.21) (línea continua). TOC calculada con una ondícula senoidal de soporte compacto de 24 ciclos. En la gráfica inferior se muestra la suma acumulada del cuadrado de la señal

se deduce que la función de transferencia H , asociada a la ecuación (3.18) que relaciona la TOC del desplazamiento del oscilador y la TOC de la excitación se define como

$$H(b,a) = \begin{cases} H_D(a) = \frac{-1}{\alpha_D'' + 2\xi\Omega\alpha_D' + \Omega^2} & b \in [t - |a|k_4D, t - |a|D] \\ H_C(a) = \frac{-1}{\alpha_C'' + 2\xi\Omega\alpha_C' + \Omega^2} & b \in [t - |a|D, t - |a|I] \\ H_I(a) = \frac{-1}{\alpha_I'' + 2\xi\Omega\alpha_I' + \Omega^2} & b \in [t - |a|I, t - |a|k_4I] \end{cases} \quad (3.28)$$

Como se mencionó, es posible definir una función de transferencia para cualquier respuesta de interés. Por ejemplo, se puede demostrar que la función de transferencia H^A que relaciona la TOC de la aceleración absoluta y la TOC de la excitación se define como

$$H^A(b,a) = \begin{cases} H^A_D(a) = \frac{2\xi\Omega\alpha_D + \Omega^2}{\alpha_D'' + 2\xi\Omega\alpha_D' + \Omega^2} & b \in [t - |a|k_4D, t - |a|D] \\ H^A_C(a) = \frac{2\xi\Omega\alpha_C + \Omega^2}{\alpha_C'' + 2\xi\Omega\alpha_C' + \Omega^2} & b \in [t - |a|D, t - |a|I] \\ H^A_I(a) = \frac{2\xi\Omega\alpha_I + \Omega^2}{\alpha_I'' + 2\xi\Omega\alpha_I' + \Omega^2} & b \in [t - |a|I, t - |a|k_4I] \end{cases} \quad (3.29)$$

Por otro lado, sustituyendo (3.28) en (3.24) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x \psi_{b,a} db &= \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} H_D(a) \ddot{x}_g \psi_{b,a} db = H_D(a) \int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db \\ \int_{t-|a|I}^{t-|a|D} x \psi_{b,a} db &= \int_{t-|a|I}^{t-|a|D} H_C(a) \ddot{x}_g \psi_{b,a} db = H_C(a) \int_{t-|a|I}^{t-|a|D} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db \\ \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} x \psi_{b,a} db &= \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} H_I(a) \ddot{x}_g \psi_{b,a} db = H_I(a) \int_{t-|a|I}^{t-|a|k_4I} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db \end{aligned} \quad (3.30)$$

Despejando

$$\begin{aligned} H_D(a) &= \frac{\int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} x \psi_{b,a} db}{\int_{t-|a|k_4D}^{t-|a|D} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db} \\ H_C(a) &= \frac{\int_{t-|a|I}^{t-|a|D} x \psi_{b,a} db}{\int_{t-|a|I}^{t-|a|D} \ddot{x}_g \psi_{b,a} db} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$H_I(a) = \frac{\int_{t-|a|k_4I}^{t-|a|k_4I+w} x \psi_{b,a} db}{\int_{t-|a|I}^{t-|a|I+w} \tilde{x}_g \psi_{b,a} db}$$

Las expresiones anteriores relacionan la función de transferencia y cocientes estimados a partir de integrales que forman parte del cálculo de las TIOC (2.17) tanto de la respuesta como de la excitación.

APLICACIONES

En la práctica, los cocientes espectrales, obtenidos de la TF de alguna respuesta de la estructura en estudio y la TF de la excitación, han sido empleados como un método no paramétrico para el análisis de sus propiedades dinámicas. A continuación se proponen algunas aplicaciones de cocientes obtenidos a partir de la TOC, cuyo empleo se justifica mediante la función de transferencia y los cocientes mostrados en (3.31). La mayoría de los registros obtenidos de edificios instrumentados miden aceleraciones absolutas. Para evitar mayor preprocesamiento de los datos, se empleará en las siguientes aplicaciones la función de transferencia que considera como respuesta la aceleración absoluta del sistema (3.29). Por otro lado, en los cálculos subsecuentes se considera que las TOC de la primera y la segunda derivadas se aproximan mediante

$$\alpha' = \frac{\dot{\tilde{x}}(b,a)}{x(b,a)} = \begin{cases} \alpha_D' = \alpha_D & b \in [t-|a|k_4D, t-|a|D] \\ \alpha_C' = \alpha_C & b \in [t-|a|D, t-|a|I] \\ \alpha_I' = \alpha_I & b \in [t-|a|I, t-|a|k_4I] \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\alpha'' = \frac{\ddot{\tilde{x}}(b,a)}{x(b,a)} = \begin{cases} \alpha_D'' = \alpha_D^2 & b \in [t-|a|k_4D, t-|a|D] \\ \alpha_C'' = \alpha_C^2 & b \in [t-|a|D, t-|a|I] \\ \alpha_I'' = \alpha_I^2 & b \in [t-|a|I, t-|a|k_4I] \end{cases} \quad (3.13)$$

donde

$$\alpha(b,a) = \begin{cases} \alpha_I(a) = \frac{-k_1}{|a|} + \frac{ik_2}{a} & \text{si } b \in [t-|a|I, t-|a|k_4I] \\ \alpha_C(a) = \frac{ik_2}{a} & \text{si } b \in [t-|a|D, t-|a|I] \\ \alpha_D(a) = \frac{k_1}{|a|} + \frac{ik_2}{a} & \text{si } b \in [t-|a|k_4D, t-|a|D] \end{cases} \quad (3.3)$$

Para suavizar los cocientes espectrales, su cálculo se realiza mediante (Claerbout y Formel, 1996)

$$CE = \frac{\tilde{x}^A * \text{conj} \left(\tilde{x}_g^w \right)}{\tilde{x}_g^w * \text{conj} \left(\tilde{x}_g^w \right)}$$

donde $\text{conj}()$ representa el conjugado de la variable. Las TOC son calculadas empleando una ondícula definida por 4 ciclos.

Estimación de propiedades dinámicas

Se espera que el máximo de la función de transferencia (3.29) coincida con la frecuencia natural de vibración del oscilador, es decir,

$$\Omega(b_n) = \frac{k_2}{a_{\max}(b_n)} \quad (3.32)$$

donde, para una traslación b_n dada, $a_{\max}(b_n)$ es la escala donde se encuentra la amplitud máxima de la función de transferencia (3.29). Si se considera únicamente el intervalo de traslaciones $[t-|a|D, t-|a|I]$ de dicha función, y se sustituye (3.32) se tiene

$$H^A_C = \frac{2\xi - i}{2\xi} \quad (3.33)$$

y ya que para las estructuras comúnmente estudiadas $\xi \ll 1$, su magnitud puede aproximarse como

$$|H^A_C| \approx \frac{1}{2\xi} \quad (3.34)$$

Ahora, si se adecúa la expresión (3.31) para las aceleraciones absolutas y se considera solamente el intervalo de traslaciones $[t-|a|D, t-|a|I]$, al igualar con (3.34) se obtiene

$$|H^A_C| = \frac{\int_{t-|a_{\max}|D}^{t-|a_{\max}|I} \ddot{x}^A \psi_{b, a_{\max}} db}{\int_{t-|a_{\max}|D}^{t-|a_{\max}|I} \ddot{x}_g \psi_{b, a_{\max}} db} \approx \frac{1}{2\xi(t)} \quad (3.35)$$

expresión empleada para identificar el porcentaje de amortiguamiento crítico del sistema $\xi(t)$ asociado a la ventana $[t-|a_{\max}|D, t-|a_{\max}|I]$.

Se estiman las propiedades dinámicas (expresiones 3.32 y 3.35) de un oscilador lineal de 2 Hz y 5% de amortiguamiento crítico, sujeto al sismo del 19 de septiembre de 1985, dirección este-oeste, registrado en terreno blando de la ciudad de México (ver figura 2.12). La estimación se muestra en la figura 3.13, y el cociente calculado a partir de (3.35), utilizando una ondícula de 4 ciclos, se observa en la figura 3.14. Dicho cociente presenta mucho ruido, lo que tiene por consecuencia una alta variabilidad en las propiedades estimadas. Los promedios así obtenidos de la frecuencia natural de vibración y del amortiguamiento son 3.4 Hz y 15.8%, respectivamente.

Resultados similares se obtienen al incrementar la participación del intervalo central $[t-|a|D, t-|a|I]$ mediante el empleo de ondículas definidas por una senoide sin decaimiento exponencial durante todo su soporte compacto. No se observa tampoco una disminución del ruido al emplear la ondícula senoidal de 24 ciclos, definida en la tabla 2.1, que cuenta con un mayor soporte compacto en comparación a las ondículas anteriormente empleadas.

Ya que los términos que participan en el cociente de la expresión (3.35) son integrales que forman parte del cálculo de sus respectivas TIOC, entonces con el propósito de estabilizar el cociente, éste se calcula a partir de coeficientes relacionados a las TIOC,

$$x(t_m, a_n) = \frac{1}{C_\psi} \frac{1}{a_n^2} \Delta a \sum_{b_j = t_m - |a_n| k_4 D}^{t_m - |a_n| k_4 I} x(b_j, a_n) \psi_{b_j, a_n}(t_m) \Delta b \quad (3.36)$$

Esta última expresión puede ser considerada la versión discreta de (2.17), excepto por la suma con respecto a las escalas que no se considera en (3.36). Los cocientes así calculados a partir de las TIOC

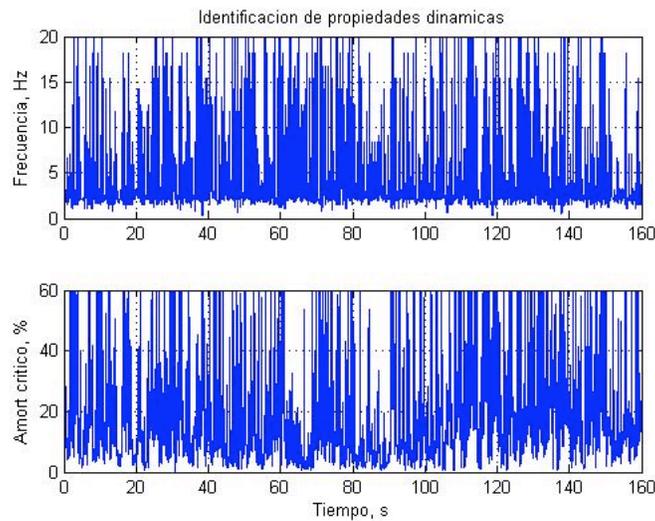


Figura 3.13 Frecuencia natural de vibración y porcentaje de amortiguamiento crítico estimado a partir de (3.35) para un oscilador lineal de 2 Hz, $\xi=5\%$ sujeto al sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT, dirección EO (figura 2.12)

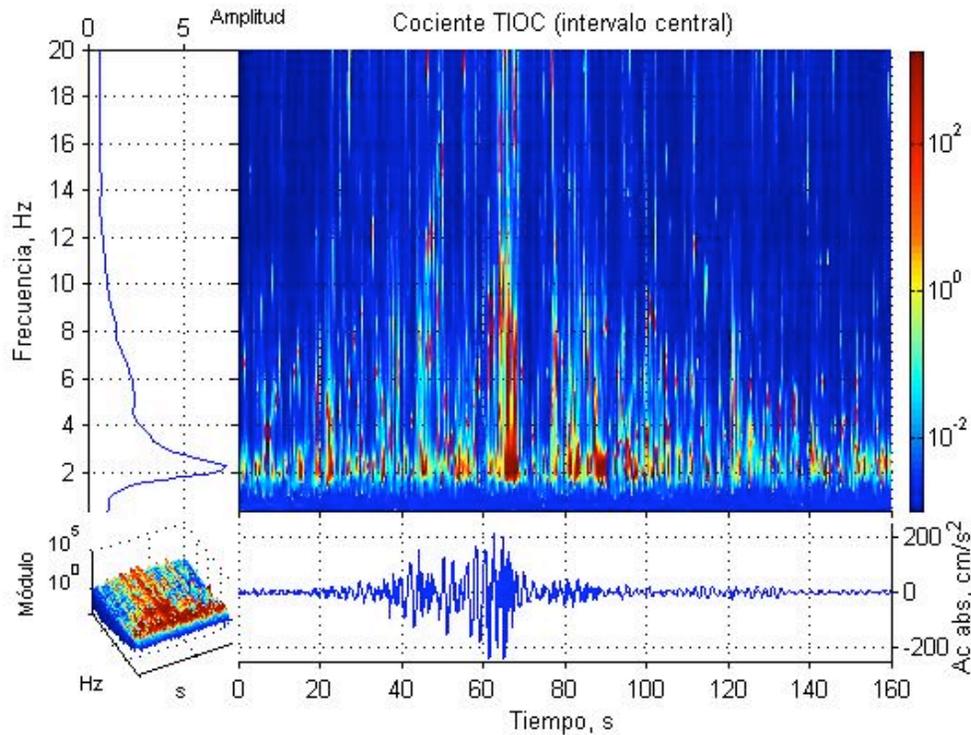


Figura 3.14 Cociente (sup.der.), calculado a partir de (3.35), de la aceleración absoluta de un oscilador lineal de 2 Hz, $\xi=5\%$ y del sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT, dirección EO. En la gráfica inferior derecha se muestra la aceleración absoluta del oscilador, la media del módulo del cociente en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D del cociente (inf. izq.)

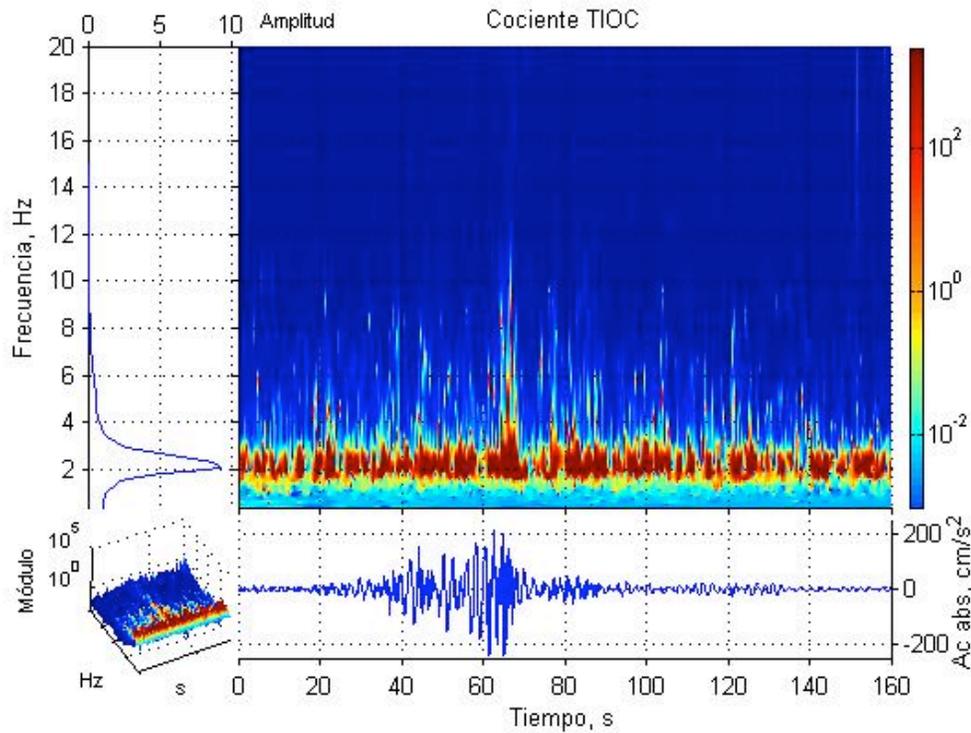


Figura 3.15 Cociente de las TIOC (sup.der.) de la aceleración absoluta de un oscilador lineal de 2 Hz, $\xi=5\%$ y del sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT, dirección EO. En la gráfica inferior derecha se muestra la aceleración absoluta del oscilador, la media del módulo del cociente en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D del cociente (inf. izq.)

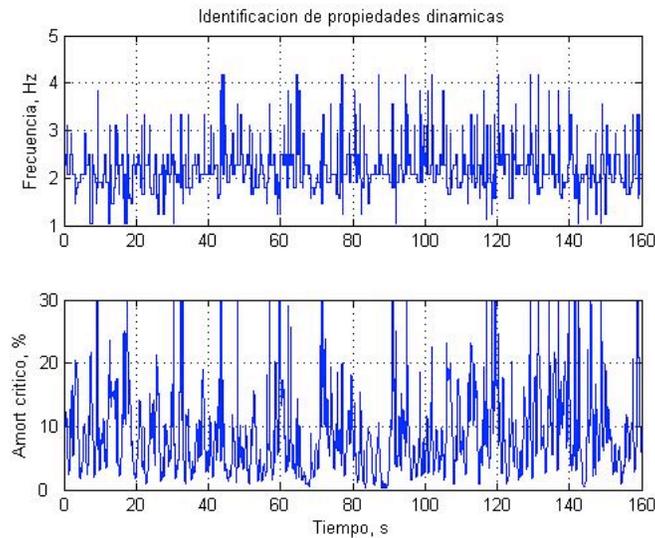


Figura 3.16 Frecuencia natural de vibración y porcentaje de amortiguamiento crítico estimado para un oscilador lineal de 2 Hz, $\xi=5\%$ sujeto al sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT, dirección EO (figura 2.12)

$$|H^A_c| \approx \left| \frac{\ddot{x}^A(t,a)}{\ddot{x}_g(t,a)} \right| \approx \frac{1}{2\xi(t)}$$

presentan menos ruido que los obtenidos a partir de (3.35), según se observa en la figura 3.15. Las propiedades dinámicas estimadas resultan más estables (figura 3.16). El promedio de las frecuencias naturales de vibración y del porcentaje de amortiguamiento crítico obtenidos son 2.1 Hz y 8.6%, respectivamente. A pesar de lo anterior, la estimación de la frecuencia natural sigue variando en el tiempo de manera considerable, a pesar que su promedio es similar al valor original. La estimación del amortiguamiento no es confiable, ya que presenta una variabilidad similar a la de la frecuencia, pero su promedio se aleja más del amortiguamiento original.

Se encuentran resultados similares para un oscilador de 4 Hz y 5% de amortiguamiento crítico, pero sujeto a un movimiento de terreno firme (30 de septiembre de 1999, dirección este-oeste, ciudad de Oaxaca. Ver figura 2.14). El promedio de la frecuencia resulta igual al del oscilador, mientras que el promedio del amortiguamiento se aleja un poco del original (6.7%). Estos resultados se muestran en la figura 3.17, obtenidos a partir del cociente de las TIOC correspondiente (figura 3.18).

Identificación de la fluencia de un oscilador bilineal

Los cocientes calculados a partir de la TIOC también han sido empleados para identificar el tiempo en que un oscilador con degradación bilineal de rigidez fluye.

El movimiento de dicho oscilador está definido por

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\Omega\dot{x}(t) + r(x,t) = -\ddot{x}_g(t) \quad (3.37)$$

donde

$$r(x,t) = \begin{cases} \Omega^2 \{x(t) - x_p(t)\} & \text{si } |r(x,t)| \leq r_y \\ \Omega_y^2 \{x(t) - x_p(t)\} & \text{si } |r(x,t)| > r_y \end{cases} \quad (3.38)$$

r_y es un umbral a partir del cual la resistencia por deformación que opone el oscilador $r(x,t)$ se modifica debido a pérdida de rigidez, lo cual cambia la frecuencia del oscilador cuando fluye (Ω_y). $x_p(t)$ es el desplazamiento permanente del oscilador causado por su incursión en la fluencia. El resto de los parámetros son los mismos que en la expresión lineal (3.18).

La fluencia se alcanza cuando la fuerza ejercida sobre el oscilador excede la resistencia del mismo. La resistencia (r_y) está dada como un porcentaje (R) de la resistencia máxima alcanzada por un oscilador lineal (r_o) con la misma frecuencia y porcentaje de amortiguamiento crítico, es decir, $r_y = Rr_o$. En todos los casos bilineales a continuación presentados se considera una $R=50\%$. La rigidez posterior a la fluencia es lineal y definida como un porcentaje de la rigidez inicial (β). Suponiendo que la masa del oscilador se mantiene constante, β relaciona las frecuencias post-fluencia e inicial según $\Omega_y^2 = \beta\Omega^2$. Se emplean dos excitaciones: un movimiento de terreno blando (figura 2.12) y otro de terreno firme (figura 2.14). La demanda de ductilidad se utiliza como un indicador del daño ocasionado en el oscilador por el movimiento sísmico, definida como la relación entre el absoluto del máximo desplazamiento y el desplazamiento de fluencia. Dicha ductilidad es calculada a partir de la historia de desplazamientos presentados por el oscilador durante el movimiento sísmico.

Para el terreno blando, se emplea un oscilador de 2 Hz, $\xi=5\%$ y $\beta=0\%$. La demanda de ductilidad obtenida para este caso resulta de 5.36. El cociente de las TIOC de la aceleración absoluta del oscilador y de la excitación se muestra en la figura 3.19. En la gráfica inferior se muestra la fluencia del oscilador indicada por los valores distintos de cero. Se observa que la presencia de energía distribuida a lo largo del eje de la frecuencia está asociada a la fluencia

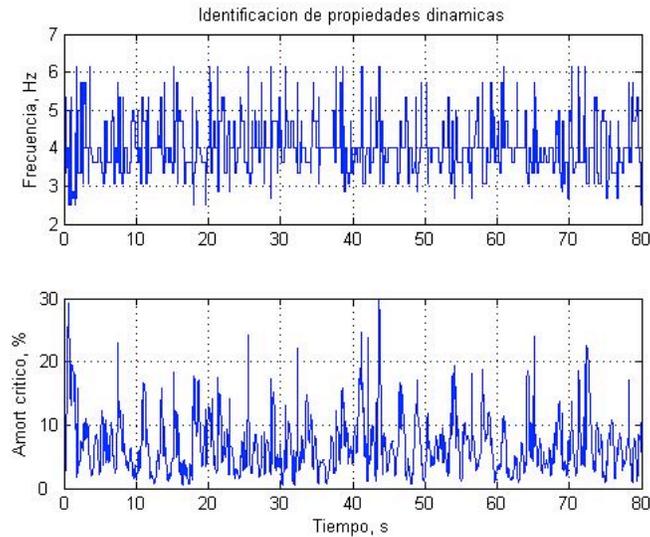


Figura 3.17 Frecuencia natural de vibración y porcentaje de amortiguamiento crítico estimado para un oscilador de 4 Hz, $\xi=5\%$ sujeto al sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO (figura 2.14).

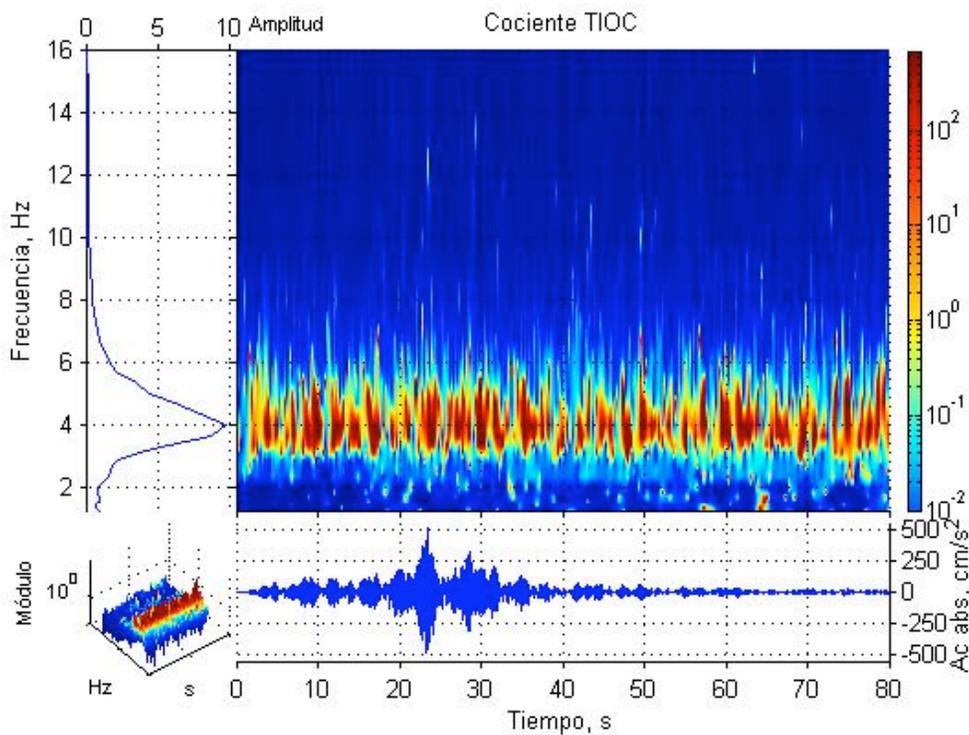


Figura 3.18 Cociente de las TIOC (sup.der.) de la aceleración absoluta de un oscilador lineal de 4 Hz, $\xi=5\%$ y del sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO. En la gráfica inferior derecha se muestra la aceleración absoluta del oscilador, la media del módulo del cociente en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de dicho cociente (inf. izq.)

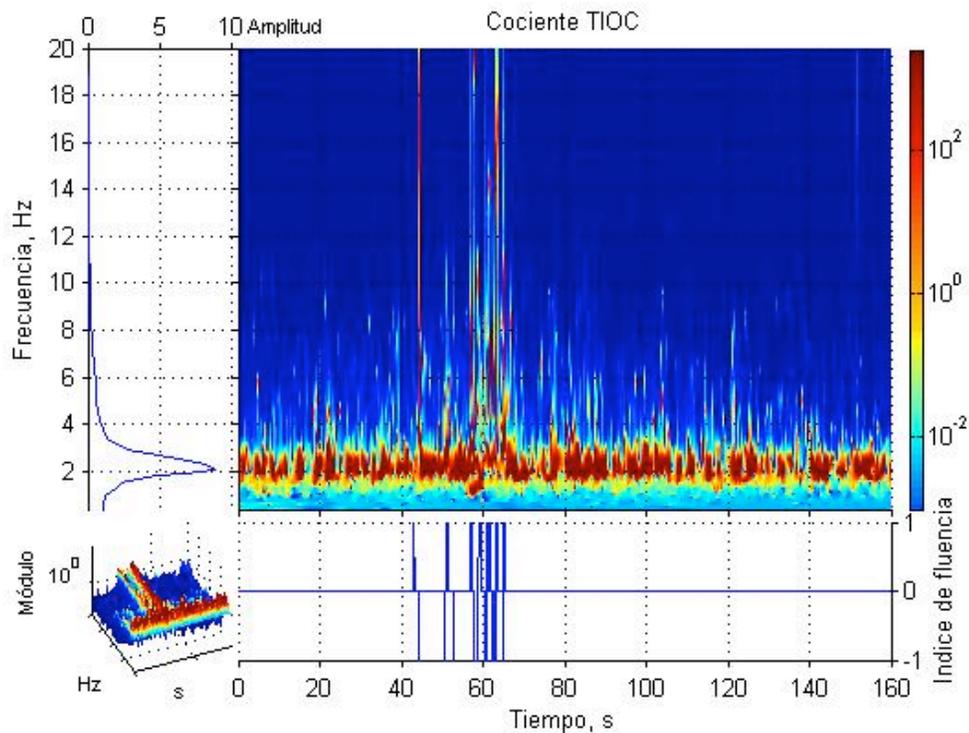


Figura 3.19 Cociente de las TIOC (sup.der.) de la aceleración absoluta de un oscilador no lineal (2 Hz, $\xi=5\%$, $R=50\%$, $\beta=0\%$) y del sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT, dirección EO. En la gráfica inferior derecha se muestra el tiempo de fluencia del oscilador cuando las amplitudes son distintas de cero, la media del módulo del cociente en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D del cociente (inf. izq.)

del oscilador, ya que corresponde al tiempo en que el oscilador presenta fluencia, además de que dicha energía no se observa en el cociente correspondiente al oscilador lineal de misma frecuencia y amortiguamiento (figura 3.15).

En la figura 3.20 se muestra la sensibilidad del procedimiento para detectar el tiempo de fluencia en osciladores con distintas rigideces posteriores a la fluencia. Se observa que entre mayor sea el cambio de rigidez al fluir el oscilador, la perturbación en los cocientes se presenta en altas frecuencias. Lo anterior es más notable en las primeras fluencias (a los 43 s y a los 50 s, aproximadamente) de los osciladores estudiados en dicha figura, ya que conforme aumenta β , las correspondientes perturbaciones en los cocientes se concentran en bajas frecuencias. También se observa que conforme aumenta β es más difícil detectar la fluencia, ya que el módulo de las perturbaciones en los cocientes disminuye. Lo anterior se observa en la figura 3.21 donde se muestra el promedio de los módulos de dichos cocientes a lo largo del intervalo de frecuencias (10,20) Hz. Esta pérdida de sensibilidad parece estar relacionada con la ductilidad demandada al oscilador ya que al disminuir β , disminuye la ductilidad (figura 3.22), así como también disminuye la magnitud de las perturbaciones asociadas a la fluencia (figura 3.21). Es necesario estudiar más a fondo este fenómeno en futuros trabajos para confirmar esta conclusión.

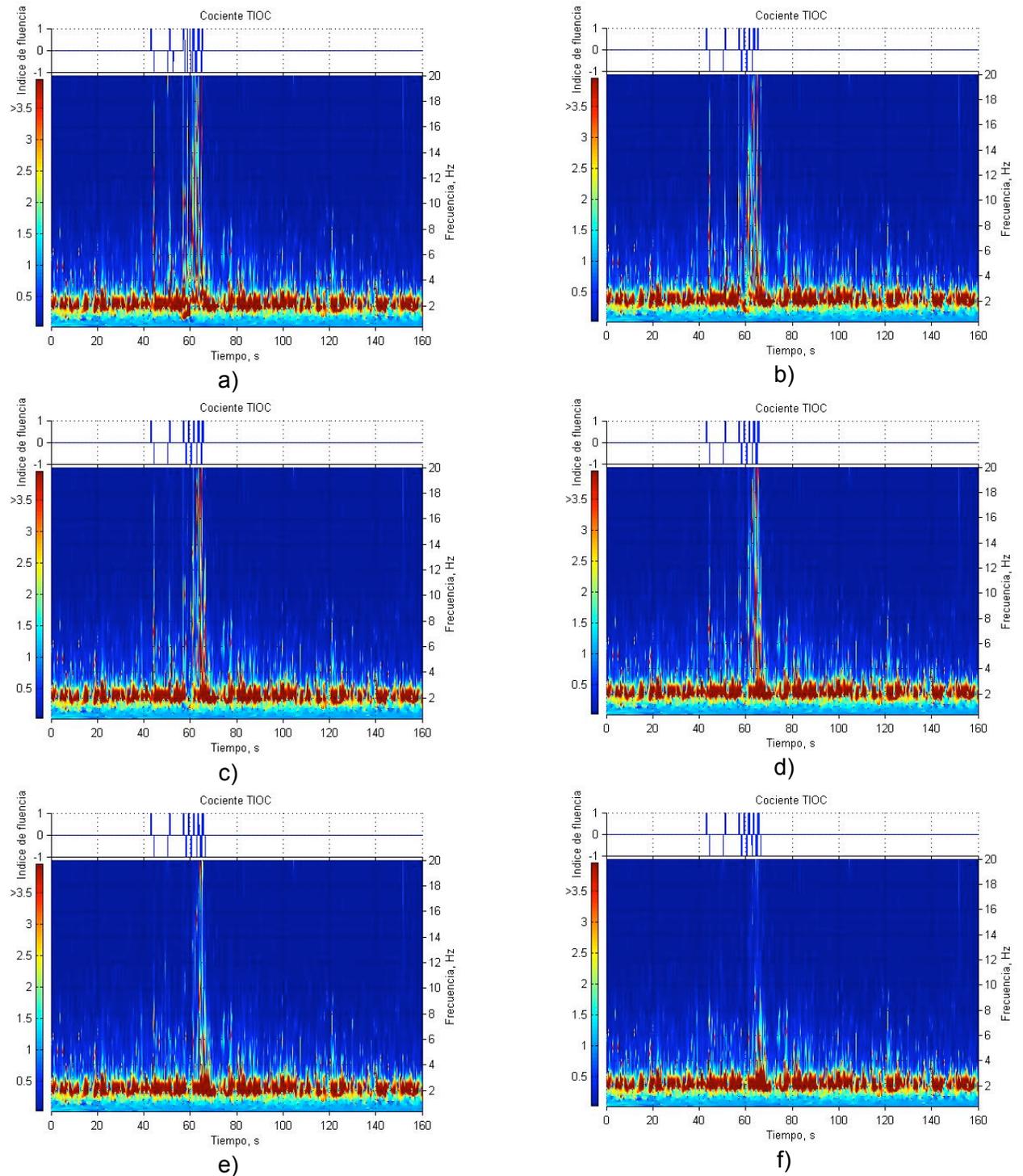
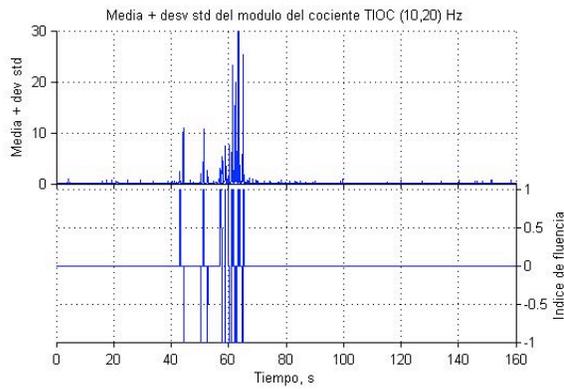
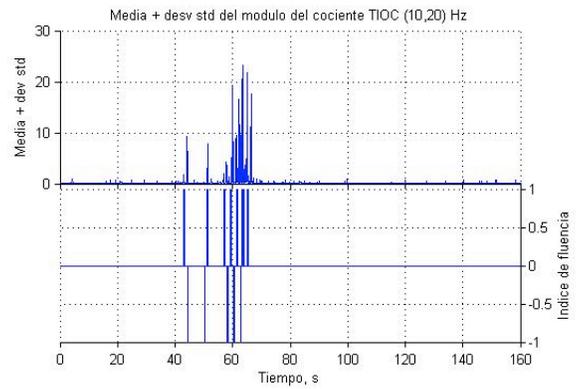


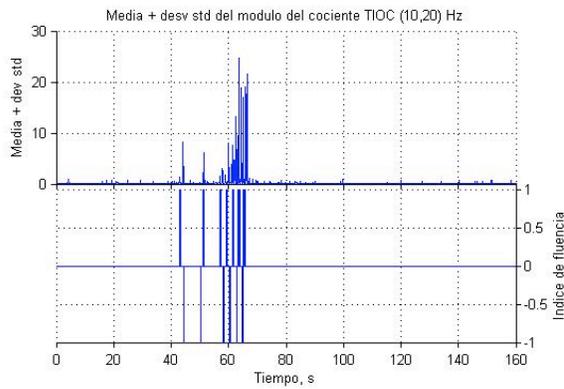
Figura 3.20 Cociente de las TIOC de la aceleración absoluta de varios osciladores no lineales (2 Hz, $\xi=5\%$, $R=50\%$) con distintas rigideces post-fluencia: a) $\beta=0\%$, b) $\beta=25\%$, c) $\beta=45\%$, d) $\beta=65\%$, e) $\beta=85\%$, f) $\beta=95\%$ y del sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT, dirección EO. En la gráficas superiores se muestra el tiempo de fluencia de los osciladores cuando las amplitudes son distintas de cero



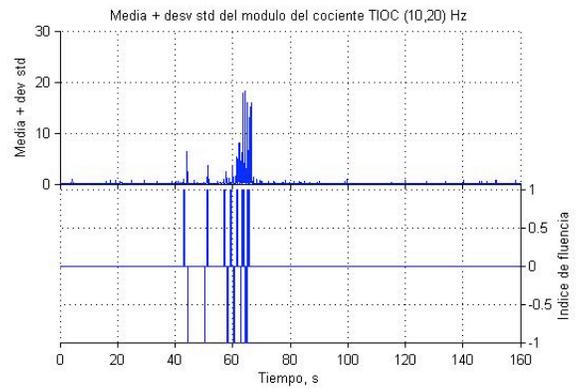
a)



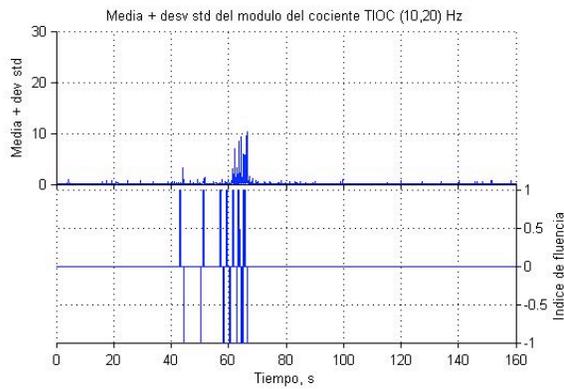
b)



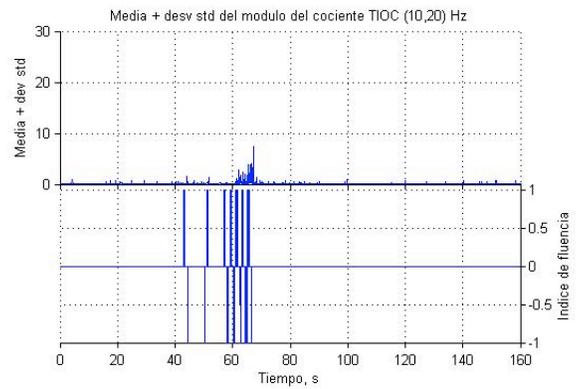
c)



d)



e)



f)

Figura 3.21 Media + desviación estándar del módulo del cociente de las TIOC de la aceleración absoluta de varios osciladores no lineales (2 Hz, $\xi=5\%$, $R=50\%$) con distintas rigideces post-fluencia: a) $\beta=0\%$, b) $\beta=25\%$, c) $\beta=45\%$, d) $\beta=65\%$, e) $\beta=85\%$, f) $\beta=95\%$ y del sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT, dirección EO. En las gráficas inferiores se muestra el tiempo de fluencia de los osciladores cuando las amplitudes son distintas de cero

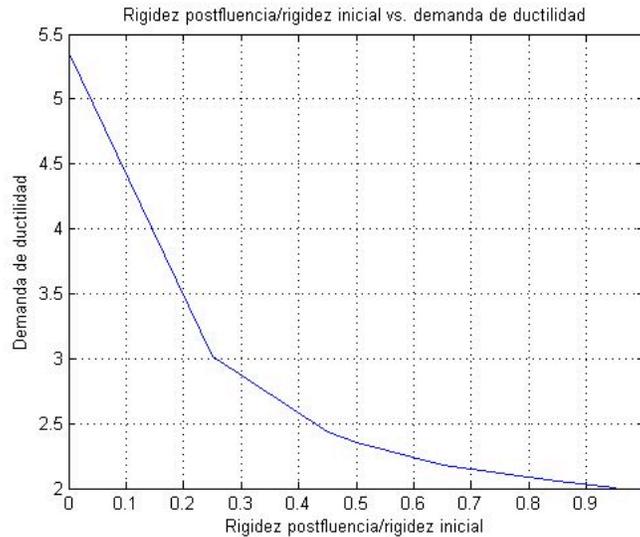


Figura 3.22 Variación de la demanda de ductilidad de varios osciladores no lineales (2 Hz, $\xi=5\%$, $R=50\%$) con distintas rigideces post-fluencia sujetos al sismo del 19/09/1985 registrado en la estación SCT, dirección EO

Para el caso del terreno firme, no es posible identificar la fluencia a partir del cociente obtenido de las TIOC de la aceleración absoluta del oscilador (8 Hz, $\xi=5\%$ y $\beta=0\%$) y de la excitación correspondiente (figura 3.23). Lo anterior como consecuencia del menor nivel de ductilidad demandada (de 1.81 para este caso) en comparación con la ductilidad de los osciladores sujetos al movimiento de terreno blando. Dicho cociente (figura 3.23) es muy similar al obtenido en el caso lineal (figura 3.24). Por lo que para la identificación de la fluencia del oscilador es necesario contrastar el caso lineal y el no lineal mediante el cociente de las TIOC de sus respectivas respuestas. Este cociente permite identificar la fluencia del oscilador (figura 3.25), así como también se relaciona, por lo menos en teoría, únicamente a las propiedades del oscilador, es decir, si se considera a los cocientes lineal H_L y no lineal H_N definidos por (3.26), entonces su relación $H_{L/N}$ queda como

$$H_{L/N} = \frac{H_L}{H_N} = \frac{\frac{x_L}{\ddot{x}_g}}{\frac{x_N}{\ddot{x}_g}} = \frac{x_L}{x_N} \quad (3.39)$$

Es importante notar que, según la expresión anterior, este cociente puede calcularse a partir de cocientes H_L y H_N provenientes de distintas excitaciones. La sensibilidad de este cociente para detectar la fluencia del oscilador con cambios menos bruscos de rigidez posterior a la fluencia se muestra al calcular el cociente espectral definido por la expresión anterior para un oscilador de 8 Hz, $\xi=5\%$ y $\beta=95\%$ sujeto al movimiento de terreno firme. La ductilidad demandada es de 2.04. La figura 3.26 muestra la identificación de la fluencia del oscilador mediante dicho cociente. Los cocientes de las TIOC de la aceleración absoluta y de la excitación detectan con cierta claridad la fluencia cuando la demanda de ductilidad es mayor a 2.4, según los ejemplos mostrados. Sin embargo para niveles menores de ductilidad (ceranos a 2 o menores), se

pueden identificar mediante cocientes de las TIOC de la aceleración absoluta de un oscilador lineal y la aceleración absoluta del oscilador bilineal. En casos prácticos, el denominador de este cociente, correspondiente a la respuesta lineal, se puede estimar a partir de registros cuya intensidad sea lo suficientemente baja que permita suponer una respuesta del oscilador en el rango lineal, ó mediante la función de transferencia (3.29) en caso se pueda estimar de manera adecuada la respuesta de la estructura, mediante sus parámetros dinámicos, ante la misma excitación que en el caso no lineal. Es necesario estudiar los alcances de este cociente en estudios posteriores.

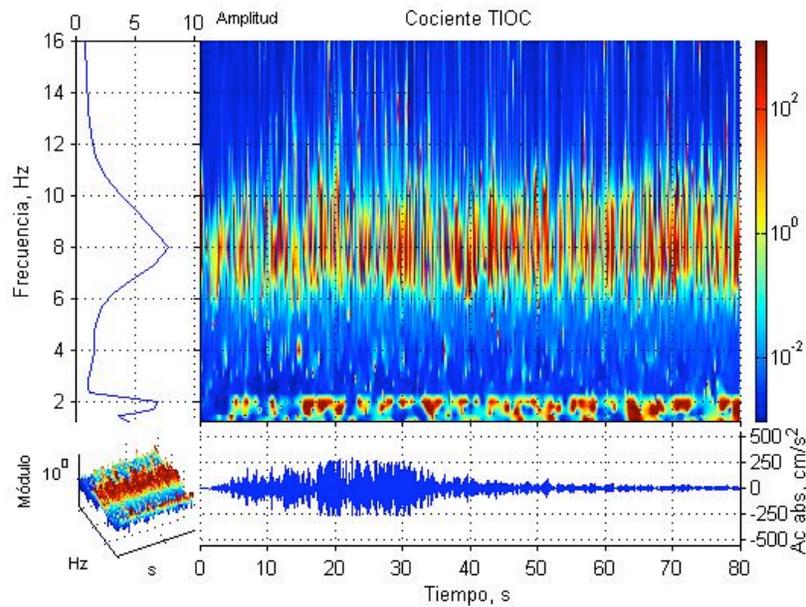


Figura 3.23 Cociente de las TIOC (sup.der.) de la aceleración absoluta de un oscilador no lineal (8 Hz, $\xi=5\%$, $R=50\%$, $\beta=0\%$) y del sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO. En la gráfica inferior derecha se muestra la aceleración absoluta del oscilador, la media del módulo del cociente en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D del cociente (inf. izq.)

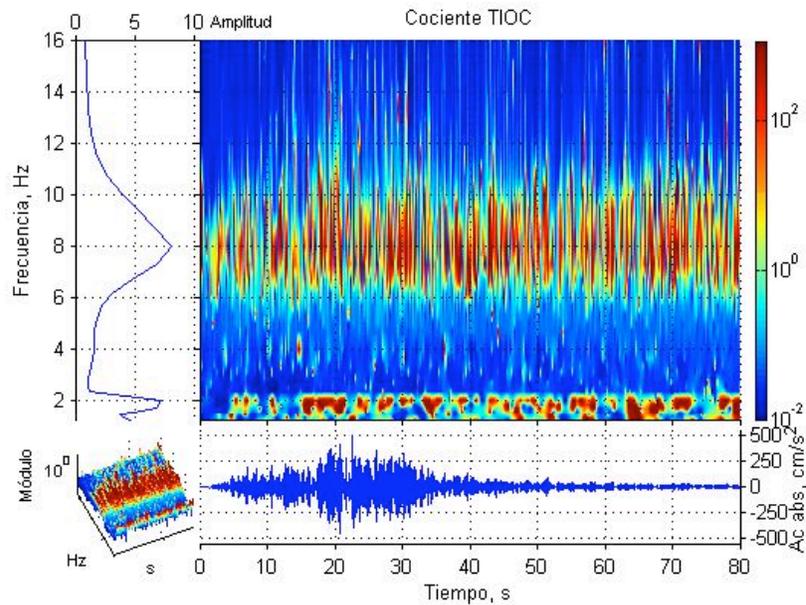


Figura 3.24 Cociente de las TIOC (sup.der.) de la aceleración absoluta de un oscilador lineal de 8 Hz, $\xi=5\%$ y del sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO. En la gráfica inferior derecha se muestra la aceleración absoluta del oscilador, la media del módulo del cociente en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D de dicho cociente (inf. izq.)

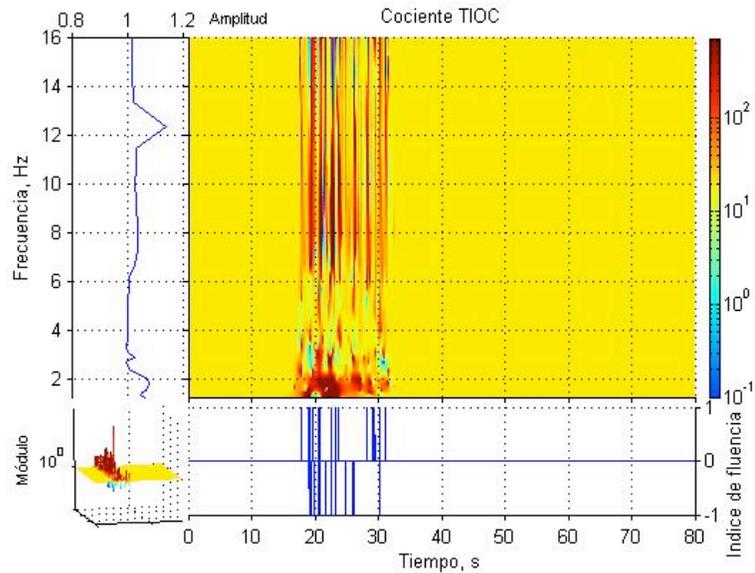


Figura 3.25 Cociente de las TIOC (sup.der.) de las aceleraciones absolutas de un oscilador lineal de 8 Hz, $\xi_r=5\%$, y de un oscilador no lineal 8 Hz, $\xi=5\%$, $R=50\%$, $\beta=0\%$. Ambas respuestas ocasionadas por el sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO. En la gráfica inferior derecha se muestra el tiempo de fluencia del oscilador cuando las amplitudes son distintas de cero, la media del módulo del cociente en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D del cociente (inf. izq.)

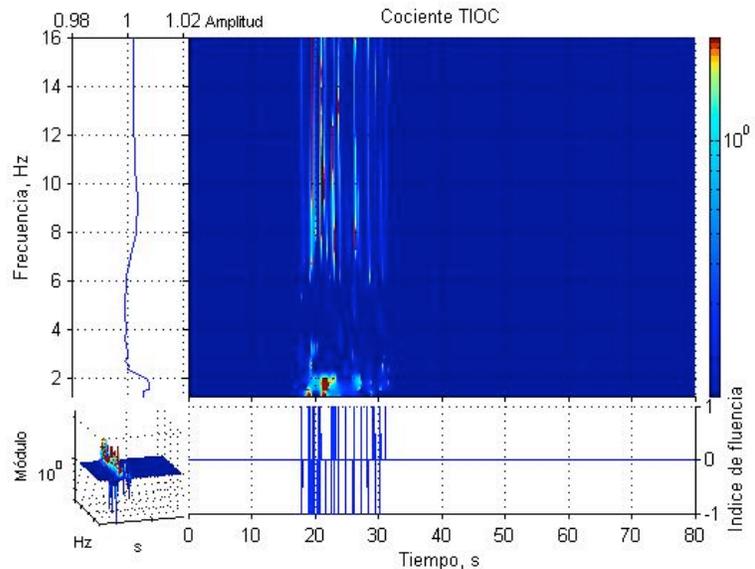


Figura 3.26 Cociente de las TIOC (sup.der.) de las aceleraciones absolutas de un oscilador lineal de 8 Hz, $\xi=5\%$, y de un oscilador no lineal 8 Hz, $\xi=5\%$, $R=50\%$, $\beta=95\%$. Ambas respuestas ocasionadas por el sismo del 30/09/1999 registrado en la estación OXIG, dirección EO. En la gráfica inferior derecha se muestra el tiempo de fluencia del oscilador cuando las amplitudes son distintas de cero, la media del módulo del cociente en la frecuencia (sup. izq.), así como también una perspectiva en 3D del cociente (inf. izq.)

CONCLUSIONES

La ecuación diferencial de movimiento de un oscilador lineal amortiguado de un grado de libertad ha sido resuelta mediante la transformada ondícula continua (TOC), de manera que dicha solución define una función de transferencia en el dominio tiempo-frecuencia, ésta última asociada únicamente a las propiedades dinámicas del oscilador. Para obtener esta función de transferencia ha sido necesario definir una nueva ondícula. La solución obtenida presenta subestimaciones en la magnitud de la respuesta del oscilador en caso de que se encuentre en resonancia o próximo a ella, las cuales disminuyen conforme la ondícula tiende a ser senoidal y de soporte compacto infinito, tal como la base de la transformada de Fourier.

Los cocientes de las transformadas inversas de ondícula continua (CTIOC) de la aceleración absoluta y de la aceleración del terreno se han utilizado para identificar las propiedades dinámicas de osciladores lineales, cuyo fundamento teórico se basa en la función de transferencia obtenida. Los cocientes que emplean el intervalo central de la transformada inversa de ondícula continua (TIOC), donde la ondícula se define por una senoide, presentan ruido, el cual no permite una identificación adecuada de las propiedades dinámicas de osciladores lineales. El ruido en los cocientes disminuye al utilizar la TIOC de las señales, lo cual ha permitido una mejor identificación de las propiedades. Sin embargo, las propiedades dinámicas identificadas de osciladores lineales presentan una indeseable variabilidad en el tiempo, a pesar de que los promedios de las frecuencias naturales de vibración obtenidos coinciden con la frecuencia natural de vibración del oscilador lineal empleado. El promedio de los porcentajes de amortiguamiento crítico identificados difiere del amortiguamiento del oscilador lineal (diferencias entre 30% y 70% del valor teórico), además de que la confiabilidad en su cálculo disminuye en caso de que exista resonancia, debido a que su estimación está basada en la magnitud de los CTIOC.

Los resultados anteriores sugieren que la estimación de la respuesta de un oscilador lineal mediante la transformada de Fourier es equivalente a la estimación, mediante la TOC, de la respuesta de un oscilador con parámetros dinámicos variables en el tiempo, cuya media es igual a los del oscilador lineal y con una desviación estándar que se incrementa conforme se disminuye el soporte compacto de la ondícula utilizada en la TOC.

Por otro lado, los CTIOC han permitido identificar la fluencia de un oscilador bilineal. En caso de que la ductilidad demandada al oscilador sea mayor de 2.4, el CTIOC de la aceleración absoluta del oscilador y de la aceleración del terreno permite identificar el tiempo en que ocurre la fluencia. En caso de que dicha demanda de ductilidad sea próxima o menor a 2, aún es posible identificar la fluencia a partir del cálculo del CTIOC de la aceleración absoluta del oscilador lineal y de la aceleración absoluta del oscilador no lineal. Por lo que en este caso se requiere adicionalmente calcular la respuesta del oscilador lineal ante la excitación propuesta para poder detectar la fluencia. Teóricamente es posible emplear el CTIOC de la respuesta lineal a una excitación distinta que la empleada para el cálculo del CTIOC de la respuesta no lineal, con el fin de que ambos cocientes sean empleados en la identificación de la fluencia del oscilador producida por demandas de ductilidad menores a 2. Técnicamente también es posible estimar la respuesta lineal de la estructura a partir de la función de transferencia obtenida, en caso de que la estructura se pueda caracterizar adecuadamente mediante sus parámetros dinámicos. Estas posibilidades es necesario estudiarlas con mayor detalle en futuros trabajos.

Los resultados obtenidos muestran que el contenido de frecuencias de la excitación no afecta la identificación de la fluencia.

Se hace notar que el análisis dinámico de los osciladores presentados en este trabajo, se realizan a partir del estudio de CTIOC de señales de respuesta (entrada) y de excitación (salida), los cuales están asociados únicamente a las propiedades dinámicas de los osciladores.

A diferencia de trabajos previos (por ejemplo, los citados en la introducción), en los cuales los análisis se realizan a partir del estudio de las transformadas ondícula de señales de salida donde se encuentran inmersas tanto las características de la señal de entrada como del sistema.

Exsten diversos planes para complementar este trabajo, entre los cuales se encuentra estudiar la relación entre la magnitud que presentan los CTIOC que identifican la fluencia con el nivel de ductilidad demandada al oscilador. También se considera proponer una solución adecuada al caso no lineal desde su origen, mediante el desarrollo de una función de transferencia que varía en el tiempo. Por otro lado, la extensión de esta propuesta a la transformada ondícula discreta se estudiará con el objetivo de aprovechar todas las ventajas que presenta dicha transformada.

BIBLIOGRAFÍA

- Boggess A, Narcowich F J (2001) A first course in wavelets with Fourier Analysis. Prentice Hall.
- Ching J, Glaser SD (2003) Tracking rapidly changing dynamical systems using a non-parametric statistical method based on wavelets. Earthquake Engineering & Structural Dynamics. Vol 32. No 15. Pags 2377-2406.
- Claerbout J, Formel S (1996) Image estimation by example: Geophysical sounding image construction, multidimensional autoregression. Stanford University. <http://sepwww.stanford.edu/ftp/prof/>
- Clough R W, Penzien J (1993) Dynamics of structures. McGraw-Hill. 2ª edición.
- Cohen A, Kovacevic J (1996) Wavelets: The mathematical background. Proceedings IEEE. Vol 84. No 4. Pags 514-522.
- Cohen A, Ryan R D (1995) Wavelets and multiscale signal processing. Applied mathematics and mathematical computation. Chapman and Hall.
- Cohen L (1995) Time-frequency analysis. Prentice Hall.
- DEGTRA A4 (2005) Programa de cómputo desarrollado por M Ordaz y C Montoya Dulché. Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Goswami J, Chan A K (1999) Fundamentals of wavelets: theory, algorithms and applications. Wiley Ed.
- Grossman A, Morlet J (1984) Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. Journal of Mathematical Analysis, SIAM. Vol 15. No 4. Pags 723-736.
- Guo K, Zhang X, Li H, Meng G (2008) Application of EMD method to friction signal processing. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol 22. No 1. Pags 248-259.
- Hammond J K, White P R (1996) The analysis of the non-stationary signals using time-frequency methods. Journal of Sound and Vibration. Vol 190. No 3. Pags 419-447.
- Huang N E, Shen Z, Long S R, Wu M C, Shih H H, Zheng Q, Yen N C, Tung C C, Liu H H (1998) The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. Proceedings of the Royal Society of London, A. Vol 454. Pags 903-995.
- Hubbard B B (1998) The world according to wavelets: The story of a mathematical technique in the making. A K Peter Wellesley, MA.
- Kijewski T, Kareem A (2003) Wavelet transforms for system identification in civil engineering. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. Vol 18. No 5. Pags 339-355.
- Kim H, Melhem H (2004) Damage detection of structures by wavelet analysis. Engineering Structures. Vol 26. Pags 347-362.
- Le T-P, Argoul P (2004) Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response. Journal of Sound and Vibration. Vol 277. No 1-2. Pags 73-100.
- Liang J, Chauduri S R, Shinozuka M (2007) Simulation of Nonstationary Stochastic Processes by Spectral Representation. Journal of Engineering Mechanics. Vol 133. No 6. Pags 616-627.
- Mallat S (1989) Multiresolution approximation and wavelets. Transactions of the American Mathematical Society. Vol 315. Pags 69-88.
- Meyer Y (1992) Wavelets and operators. Cambridge University.
- Neild S A, McFadden P D, Williams M S (2003) A review of time-frequency methods for structural vibration analysis. Engineering Structures. Vol 25. No 6. Pags 713-728.

- Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica (2000) Base mexicana de datos de sismos fuertes. Vol 2. Editado por la Universidad de Colima.
- Spanos P D, Failla G (2004) Evolutionary Spectra Estimation Using Wavelets. Journal of Engineering Mechanics. Vol 130. No 8. Pags 952-960.
- Spiegel M R, Abellanas L (1991) Formulas y tablas de matemática aplicada. McGraw-Hill Ed.
- Strang G (1980) Linear algebra and its applications. Academic Press Inc. 2nd ed.
- Strang G, Nguyen T (1997) Wavelets and filter banks. Wellesley-Cambridge Press.
- Tjahjowidodo T, Al-Bender F, Van Brussel H (2007) Experimental dynamic identification of backlash using skeleton methods. Mechanical Systems and Signal Processing. Vol 21. No 2. Pags 959-972.
- Walnut D F (2002) An introduction to wavelet analysis. Birkhäuser Ed.
- Yan B, Miyamoto A (2006) A comparative study of modal parameter identification based on wavelet and Hilbert-Huang transforms. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. Vol 21. No 1. Pags 9-23.
- Zhu X, Kim J (2006) Application of analytic wavelet transform to analysis of highly impulsive noises. Journal of Sound and Vibration. Vol 294. No 4-5. Pags 841-855.
- Zou J, Chen J (2004) A comparative study on time-frequency feature of cracked rotor by Wigner-Ville distribution and wavelet transform. Journal of Sound and Vibration. Vol 276. No 1-2. Pags 1-11.