



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**CONTROL DESCENTRALIZADO ADAPTABLE DE  
SISTEMAS LAGRANGIANOS CON INTERCONEXIÓN  
ESTRUCTURADA**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL**

P R E S E N T A :

**JUAN FRANCISCO FLORES RESÉNDIZ**

**TUTOR:  
DR. YU TANG XU**

2008



## **Jurado:**

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Secretario: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

Vocal: Dr. Yu Tang Xu

1er Suplente: Dr. Leonid Fridman

2do Suplente: Dr. Arteaga Pérez Marco

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Ingeniería

### **TUTOR DE TESIS**

Dr. Yu Tang Xu

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Motivación . . . . .	6
1.2. Estado del arte . . . . .	8
1.3. Control centralizado y control descentralizado . . . . .	9
1.4. Resumen del trabajo . . . . .	10
<b>2. Preliminares matemáticos</b>	<b>12</b>
2.1. Sistemas Lagrangianos . . . . .	12
2.1.1. Variables generalizadas y energía . . . . .	12
2.1.2. Elementos mecánicos . . . . .	14
2.1.3. Lagrangiano del sistema . . . . .	17
2.1.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	17
2.1.5. Estructura general y propiedades . . . . .	17
2.2. Estabilidad de Lyapunov . . . . .	18
2.2.1. Definiciones . . . . .	19
2.2.2. Condiciones de estabilidad . . . . .	20
2.2.3. Lema de Barbalat . . . . .	22
<b>3. Diseño del esquema de control</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción . . . . .	23
3.2. Objetivo de control . . . . .	23

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	4
3.3. Control de sistemas desacoplados . . . . .	24
3.3.1. Ley de control con parámetros conocidos . . . . .	25
3.3.2. Ley de control con parámetros desconocidos . . . . .	27
3.4. Control centralizado de sistemas interconectados . . . . .	29
3.4.1. Ley de control con parámetros conocidos . . . . .	30
3.4.2. Ley de control con parámetros desconocidos . . . . .	32
3.5. Control descentralizado de sistemas interconectados . . . . .	35
<b>4. Simulaciones y resultados</b>	<b>39</b>
4.1. Descripción del sistema . . . . .	39
4.2. Definición de las señales de referencia . . . . .	40
4.3. Consideraciones adicionales . . . . .	43
4.4. Resultados de simulaciones . . . . .	44
<b>5. Conclusiones</b>	<b>52</b>
<b>A. Modelo de los sistemas usados en las simulaciones</b>	<b>55</b>

# Índice de figuras

2.1. Masa en movimiento rotatorio . . . . .	15
2.2. Resorte rotatorio lineal . . . . .	15
2.3. Amortiguador rotatorio lineal . . . . .	16
4.1. Sistema de robots coordinados . . . . .	40
4.2. Robots coordinados y trayectoria deseada . . . . .	41
4.3. Esquema simplificado para ilustrar la cinemática inversa . . . . .	42
4.4. señales de referencia y obtenidas . . . . .	45
4.5. Señales de error . . . . .	46
4.6. Señales de control obtenidas en cada uno de los eslabones . . . . .	47
4.7. Estimación de los parámetros $\Theta$ . . . . .	48
4.8. Estimación de los parámetros $c_{ij}$ . . . . .	49
4.9. Evolución en el tiempo del vector de compensación $D_i$ . . . . .	50
4.10. Trayectoria seguida por el centro de masa de la barra en el plano vertical . . . . .	51

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Cuando un sistema se conoce plenamente y existe un modelo matemático exacto bajo cualquier circunstancia, es posible obtener un comportamiento controlado de una manera eficaz; sin embargo, aunque es posible obtener un modelo acorde con la estructura del sistema, la determinación de los parámetros del mismo puede ser una tarea compleja o en algunos casos prácticamente imposible. Más aún, si se consideran sistemas cuyos parámetros varían con el tiempo (incluso si variaran muy lento) debido a múltiples factores como fricción, temperatura, entre otros, en algún momento el modelo dejaría de representar de manera adecuada al sistema real provocando así un funcionamiento diferente al originalmente deseado, para cualquier sistema de control.

Por otro lado, existen en ingeniería una gran variedad de sistemas los cuales se encuentran bajo la influencia de otros sistemas, ya sea por que desarrollan una función en conjunto y existe entre ellos una interacción necesaria o debido a una acción indeseada que ejerce uno sobre otro. En la mayoría de estos casos, dichas interacciones representan una dificultad adicional para el diseño de un sistema de control efectivo.

Los dos aspectos mencionados anteriormente conducen por una parte al desarrollo de sistemas de control adaptable, en donde un controlador actualiza de manera continua, mediante estimación, el valor numérico de los parámetros involucrados en el modelo matemático del sistema. Por otra parte,

el problema de las interacciones entre sistemas es abordado mediante el diseño de sistemas de control descentralizado en donde se diseña un controlador para cada sistema de manera independiente, siendo necesario utilizar únicamente información relativa al sistema en cuestión.

Una clase de sistemas muy conocida es la de los llamados sistemas lagrangianos, la cual cuenta con una estructura bien determinada y con propiedades bien definidas. Además, en aplicaciones de ingeniería existe gran variedad de sistemas que cuentan con esta estructura. Un ejemplo de sistemas lagrangianos que en los últimos años han sido objeto de gran estudio son los brazos robóticos. Estos sistemas pueden presentar grandes dificultades para la determinación numérica de sus parámetros, lo que los convierte en candidatos a ser controlados mediante un esquema de control adaptable. Además, los brazos robóticos, pueden formar parte de sistemas aún más complejos, los cuales se conocen como arreglos robóticos y cuyo objetivo es realizar una tarea en común. En estos casos, los robots deben de trabajar de manera coordinada, cada uno siguiendo la referencia que le sea asignada y tratando de no influenciar el desempeño de los demás robots.

En sistemas de robots coordinados, existe una clara interacción entre éstos, los cuales pueden ser considerados como subsistemas. Esta interconexión puede ser representada matemáticamente de diversas maneras, siendo la consideración más simple el tomar la interconexión como una perturbación externa y entonces la estrategia utilizada para descentralizar el control consiste en diseñar un esquema lo suficientemente robusto para conservar la estabilidad ante estos términos. La principal desventaja de este tipo de enfoque radica en la pérdida de estabilidad en presencia de interconexiones fuertes.

Existe otra consideración muy común para controlar este tipo de sistemas y se basa en considerar la interconexión como un término adicional y desconocido, pero se asume que es un término acotado. Este tipo de control es efectivo ya que se pueden lograr resultados muy buenos resultados, pero se puede considerar ineficiente ya que depende de la correcta selección de la magnitud máxima considerada para representar la interconexión. Si en algún instante la magnitud de este término es mayor que la cota tomada en cuenta para el diseño del control, la estabilidad del sistema no está garantizada, además de que en ciertos casos, las señales de control resultantes tendrán magnitudes mayores a las requeridas ya que posiblemente la propia interconexión proporcione ventajas para la conservación de la estabilidad. Dado lo anterior, el sistema de control puede considerarse

de nuevo ineficiente.

## 1.2. Estado del arte

En sistemas de gran escala, el diseño de sistemas de control, así como la implementación de estos esquemas puede simplificarse de manera considerable dividiendo el sistema original en subsistemas, los cuales pueden ser considerados como independientes con un término de interconexión con los otros subsistemas. Una vez dividido el sistema, es posible diseñar un control local para cada uno de los subsistemas, utilizando información proveniente solo del subsistema en cuestión. En general, estos controladores locales son diseñados con base en el tipo de interconexión que se tenga con los otros subsistemas y de la información disponible en cada caso.

Existen diseños basados en la dominancia de la convergencia local con respecto al término de interconexión, [5], [8], en donde se propone un diseño MRAC (Model Reference Adaptive Control) para sistemas lineales con términos de interconexión lineales. Como es lógico suponer, este tipo de esquemas puede tolerar únicamente interconexiones débiles. Esta condición es eliminada en [4], en donde interconexiones arbitrariamente fuertes pueden ser compensadas, incluso aquellas las cuales pueden ser acotadas por polinomios de orden superior. Sin embargo, a pesar de poder manejar cualquier interconexión, en la mayoría de los casos anteriores se logra únicamente seguimiento práctico, es decir, el error en seguimiento es finalmente acotado y en donde la cota final para el error depende de algunos parámetros de diseño.

De lo anterior, es necesario plantear tanto para fines teóricos como prácticos si es posible obtener seguimiento asintótico de trayectorias, principalmente para poder garantizar el correcto funcionamiento del sistema global bajo perturbaciones adicionales a la interconexión, lo cual es logrado en [7], [11], [12]. Esto último es logrado limitando el tipo de interconexiones a aquellas que son linealmente parametrizables. En [11], se propone un diseño MRAC para sistemas lineales con retroalimentación de estado, con lo cual se logra un seguimiento asintótico con respecto a un modelo de referencia. De manera independiente, este mismo resultado se obtiene en [12]. Una generalización de estos resultados para control centralizado no lineal en [7], [9], [10], donde se considera un reto mayor al problema de control descentralizado adaptable con retroalimentación de salida

para seguimiento asintótico de una clase de sistemas no lineales.

Recientemente, la clase de sistemas lagrangianos ha recibido gran atención, principalmente porque aporta una solución práctica a problemas importantes en ingeniería civil, ingeniería aeroespacial y sistemas de potencia, [2], [3], [14], [21]. Existen además ciertos esquemas de control basados en el uso de técnicas de backstepping.

En este trabajo, se pretende proponer un esquema de control descentralizado adaptable, para sistemas lagrangianos, en el cual se considere la información relativa a la estructura, primeramente del sistema, así como de la estructura de la interconexión entre subsistemas.

Dado que el diseño del control adaptable se basa en la estimación de parámetros e igualación de modelo, los términos de interconexión a considerar son aquellos que es posible parametrizar de manera lineal.

Para poder diseñar al mismo tiempo un control descentralizado, se asume que cualquier subsistema tiene acceso a las señales de referencia de todos los demás sistemas, así como al estado local, únicamente.

El sistema de control que se pretende desarrollar se considera descentralizado ya que la información acerca de las señales de referencia de cada subsistema, conocida por todos los subsistemas, es muy fácil de intercambiar, ya que no proviene de una medición y en algunos casos es posible hacer este intercambio de información fuera de línea, es decir que, incluso antes de que el sistema se encuentre operando, esta información puede estar perfectamente definida.

### 1.3. Control centralizado y control descentralizado

Tanto el control centralizado como el control descentralizado presentan ciertas ventajas y desventajas, y la elección del tipo de control adecuado depende en gran medida del sistema que se quiera controlar. Por una parte, cuando se tiene un control centralizado, se tiene la certeza de contar con la totalidad de la información, con lo cual, el controlador puede ser diseñado sin restricciones en cuanto a las señales necesarias. Si el sistema a controlar tiene un alto grado de complejidad, el controlador resultante puede ser igualmente complejo y la estabilidad puede ser difícil de alcanzar.

Cuando se habla de un control descentralizado, generalmente se asocia con restricciones en el

diseño del controlador; sin embargo, aún cuando estas restricciones existen, los beneficios proporcionados por este enfoque en el diseño son suficientes para optar por un control descentralizado.

Cuando un sistema complejo se divide en subsistemas, éstos serán menos complejos, lo que implica tener leyes de control menos complejas que para el caso de control centralizado. Un punto muy importante en el diseño de sistemas control descentralizado es que la estabilidad del sistema global es mostrada con base en la estabilidad de cada uno de los subsistemas, lo que en general es más sencillo que demostrar estabilidad global.

Suponiendo el caso de que un sistema complejo sufriera alguna falla en cierta parte de su estructura, su estabilidad no está asegurada. Mientras eso ocurre para un sistema centralizado, cuando el sistema se divide en subsistemas, es posible asegurar que si un subsistema pierde estabilidad, los demás subsistemas pueden mantenerse por lo menos estables. Lo anterior es una gran ventaja, ya que el sistema puede tolerar mayor número de perturbaciones o incertidumbres no modeladas.

Una ventaja adicional es la modularización del sistema, es decir, al estar segmentado en varios subsistemas, el sistema puede ser fácilmente ampliado o reducido, agregando o quitando módulos de manera más sencilla y sin modificar las condiciones de estabilidad del resto del sistema.

## 1.4. Resumen del trabajo

En este trabajo, se presenta como principal aportación, el desarrollo de una ley de control descentralizado adaptable para sistemas lagrangianos interconectados, partiendo intuitivamente desde un caso particular, un conjunto sistemas desacoplados, en donde es necesario únicamente un control adaptable. Posteriormente se diseña un control suponiendo que existe intercambio libre de información entre subsistemas, es decir, un control centralizado y finalmente se diseña un control descentralizado, para el caso más general.

Con el objetivo de verificar el correcto funcionamiento de la ley de control descentralizado diseñada, se presenta como ejemplo específico, el caso de un sistema conformado por dos robots planares, cada uno con dos grados de libertad (DOF)<sup>1</sup>, realizando una tarea en conjunto, mover en el plano un objeto sujeto a ambos robots mediante un conector rotatorio.

---

<sup>1</sup>Por sus siglas en inglés *Degree Of Freedom*

En el Capítulo 2, se resumen aspectos matemáticos importantes acerca de los sistemas lagrangianos y acerca de la estabilidad de los sistemas, desde la formulación de las ecuaciones de Euler-Lagrange hasta las propiedades estructurales más importantes de este tipo de sistemas, así como las condiciones suficientes para asegurar la estabilidad en un sistema y el tipo de estabilidad a que se refiere.

En el Capítulo 3 se diseña, formalmente, la ley de control. Se detalla el procedimiento seguido en el diseño y se verifica el seguimiento asintótico del sistema global mediante funciones de Lyapunov.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados de simulaciones realizadas para un caso en específico de sistemas interconectados. Se muestran los principales resultados y gráficas relevantes para la evaluación del control diseñado.

Finalmente, en el último capítulo se concluye acerca del diseño realizado y de los resultados obtenidos en su aplicación a un sistema en particular.

Adicionalmente, se analiza un tipo de interconexión comúnmente utilizada en modelos de robots interconectados en el Apéndice A.

## Capítulo 2

# Preliminares matemáticos

### 2.1. Sistemas Lagrangianos

#### 2.1.1. Variables generalizadas y energía

Para modelar matemáticamente un sistema físico mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, es necesario considerar dicho sistema como un manipulador de energía. Para representar un sistema físico es necesario escoger dos variables cuyo producto sea igual a la potencia proporcionada al sistema. Además, una de estas variables generalizadas es de tipo extensiva y la otra es de tipo intensiva, llamadas de esfuerzo ( $e$ ) y de flujo ( $f$ ), respectivamente. Así, la energía ( $E$ ) del sistema en un intervalo de tiempo 0 a  $t_1$

$$E(t_1) = \int_0^{t_1} e f dt \quad (2.1)$$

Adicionalmente, en un sistema puede existir almacenamiento de energía, siendo posible almacenar esfuerzo o flujo de acuerdo con alguna de las siguientes expresiones,

$$e_a = \int_0^t e dt \quad f_a = \int_0^t f dt \quad (2.2)$$

las cuales, al ser combinadas con la expresión (2.1) permiten calcular la energía acumulada en el sistema como

$$E_a = \int_0^{e_a} f de_a = \int_0^{f_a} e df_a. \quad (2.3)$$

Para tratar al sistema como un manipulador de energía cada elemento de éste debe ser clasificado de acuerdo a su manejo de energía como fuente, almacenador o disipador. Una fuente proporciona energía al sistema en forma de esfuerzo o de flujo. De la misma forma, un elemento puede almacenar flujo o esfuerzo. Finalmente, se definen los elementos disipadores como elementos que absorben potencia.

Partiendo de las ecuaciones (2.3), la energía almacenada en un almacenador de flujo  $U$  se define como

$$U = \int_0^{f_a} e df_a. \quad (2.4)$$

De la misma forma, se puede definir la energía complementaria o coenergía  $U^*$

$$U^* = \int_0^e f_a de. \quad (2.5)$$

Asimismo, para un almacenador de esfuerzo, se redefine la energía almacenada como

$$T = \int_0^{e_a} f de_a \quad (2.6)$$

y la energía complementaria o co-energía es

$$T^* = \int_0^f e_a df. \quad (2.7)$$

De la misma manera en que el producto de las variables generalizadas seleccionadas representa la energía que se suministra al sistema, para un elemento disipador este mismo producto representa la energía disipada, en este caso se tiene

$$ef = \int_0^f e df + \int_0^e f de = G + J, \quad (2.8)$$

en donde la expresión que define a  $G$  es conocida como función de contenido y  $J$  como función de co-contenido. Comúnmente, la energía almacenada en un almacenador de flujo es llamada energía (co-energía) cinética y la que se almacena como esfuerzo es conocida como energía (co-energía) potencial.

### 2.1.2. Elementos mecánicos

Para el caso específico de robots manipuladores interconectados, los elementos de interés son mecánicos, siendo los más comunes los elementos rotatorios. Considerando esto, un conjunto de variables generalizadas son, la velocidad angular como variable de esfuerzo y el momento (torque) como variable de flujo.

Para el caso de una masa en rotación, como la mostrada en la Figura 2.1, de acuerdo con la segunda ley de Newton, en forma angular, el momento  $h$ , se relaciona con la velocidad angular  $\omega$  mediante la relación

$$h = I\omega \quad (2.9)$$

donde  $I$ , es el momento de inercia de la masa con respecto a su eje de rotación. Se conoce que  $\tau = \frac{dh}{dt}$ , por lo que se identifica la masa como un elemento almacenador de flujo.

Así, la energía y co-energía almacenadas son iguales

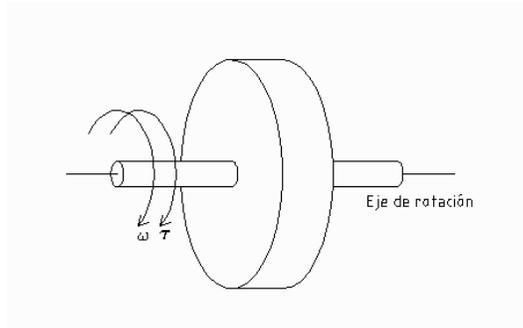


Figura 2.1: Masa en movimiento rotatorio

$$U = U^* = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (2.10)$$

Tomando ahora el caso de un resorte sometido a una torsión, como se muestra en la Figura 2.2. Si el resorte es lineal, se comporta de acuerdo con

$$\tau = k\theta \quad (2.11)$$

donde  $k$  es una constante.

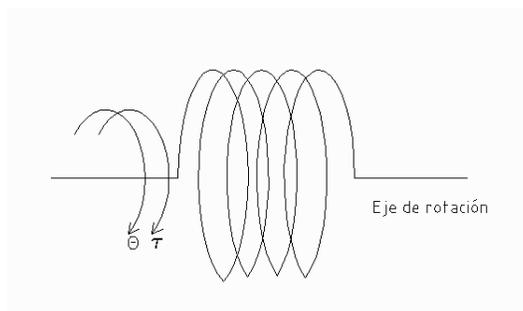


Figura 2.2: Resorte rotatorio lineal

Dado que  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , el resorte se identifica como un almacenador de esfuerzo y su energía y co-energía potencial son iguales

$$T = T^* = \frac{1}{2}k\theta^2. \quad (2.12)$$

Finalmente, para el caso de un amortiguador sometido a torsión, como el mostrado en la Figura 2.3, se tiene la relación

$$\tau = b\omega \quad (2.13)$$

donde  $b$  es una constante. Aplicando las definiciones de la sección anterior, se tiene que las funciones de contenido y co-contenido son iguales

$$G = J = \frac{1}{2}b\omega^2 \quad (2.14)$$

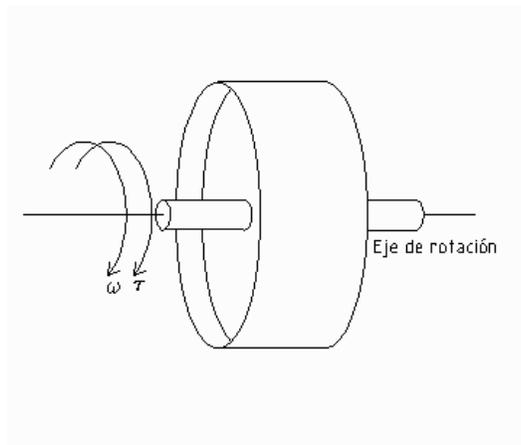


Figura 2.3: Amortiguador rotatorio lineal

### 2.1.3. Lagrangiano del sistema

El lagrangiano de un sistema es una función escalar de las variables generalizadas, que se define como la diferencia entre la co-energía cinética y la energía potencial

$$L(q, \dot{q}) = U^*(\dot{q}) - T(q) \quad (2.15)$$

en donde  $q$  y  $\dot{q}$  son las variables generalizadas y su derivada con respecto al tiempo, respectivamente.

Para un robot manipulador, la energía cinética total del sistema está dada como la suma de la energía cinética de cada uno de los elementos. Mientras que la energía potencial es consecuencia de la aceleración de la gravedad.

### 2.1.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se forman de acuerdo con lo siguiente

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}} = f_0 \quad (2.16)$$

donde  $L$  es el lagrangiano del sistema y  $f_0$  se conoce como vector de fuerzas generalizadas. Es importante mencionar que una fuerza se considera generalizada únicamente para las variables generalizadas que afecta de forma inmediata.

Como es claro, se tendrán tantas ecuaciones como variables generalizadas, por lo que se acostumbra el manejo de expresiones matriciales.

### 2.1.5. Estructura general y propiedades

Los sistemas robóticos modelados a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange reciben el nombre de lagrangianos y tienen, en general, la siguiente estructura

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$  se conoce como matriz de inercia,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in R^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in R^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales.  $\mathbf{q}(t)$  y  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  son los vectores de posición y velocidad, respectivamente.

A continuación, se presentan las principales propiedades del modelo (2.17), algunas de las cuales se pueden deducir gracias a las características físicas de los robots, mientras que otras se deducen de la forma en que se obtiene el modelo, detalles en [19].

- La matriz  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  es una matriz simétrica y positiva definida. Esta propiedad se conoce dada la naturaleza de la energía cinética de un robot, que únicamente es cero cuando el robot está en reposo, de lo contrario es mayor que cero. Esta matriz está acotada por  $M_m \mathbf{I} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq M_M \mathbf{I}$ , con constantes  $M_m, M_M > 0$ .
- La matriz  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es una matriz antisimétrica en todo instante  $t$ .
- La matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  satisface  $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k \|\dot{\mathbf{q}}\|$ , con  $k > 0$  constante.
- El vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  se puede acotar por  $\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| < \sigma$ , con  $\sigma > 0$ .

Adicionalmente, una propiedad sumamente importante es que, mediante una correcta selección de parámetros, el modelo (2.17) puede expresarse como

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\Theta \quad (2.18)$$

donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  se conoce como el *regresor* y  $\Theta$  es un vector de parámetros.

## 2.2. Estabilidad de Lyapunov

En esta sección se presentan los conceptos principales necesarios para asegurar y evaluar la estabilidad de sistemas físicos. Asimismo se examinan conceptos como el acotamiento final, que permite obtener resultados prácticos y definir las condiciones de estabilidad en cada caso (ver [8]).

### 2.2.1. Definiciones

**Definición 1.** Considerando un sistema dinámico autónomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.19}$$

donde  $f : D \rightarrow R^n$  es un mapeo localmente Lipschitz de un dominio  $D \subset R^n$  a  $R^n$ . Suponiendo que  $\bar{x}$  es un punto de equilibrio del sistema, esto es  $f(\bar{x}) = 0$ .

El punto de equilibrio  $\bar{x}$  del sistema (2.19), es

- Estable si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0 \tag{2.20}$$

- Inestable si no es estable
- Asintóticamente estable si es estable y  $\delta$  puede ser seleccionada tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \rightarrow 0 \tag{2.21}$$

**Definición 2.** Considérese el sistema no autónomo

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.22}$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow R^n$  es continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  en  $[0, \infty) \times D$ , y  $D \subset R^n$  un dominio que contiene al origen.

Las soluciones de (2.22) son

- Uniformemente acotadas si existe una constante positiva  $c$ , independiente de  $t_0 > 0$ , y para cada  $a \in (0, c)$  existe  $\beta = \beta(a) > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \forall t \geq t_0 \quad (2.23)$$

- Global y uniformemente acotadas si (2.23) se satisface para valores de  $a$  arbitrariamente grandes.
- Final y uniformemente acotadas con una cota final  $b$ , si existen constantes positivas  $b$  y  $c$ , independientes de  $t_0 \geq 0$ , y para cada  $a \in (0, c)$  existe  $T = T(a, b) \geq 0$ , independiente de  $t_0$  tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T \quad (2.24)$$

- Global, uniforme y finalmente acotadas si (2.24) se satisface para valores de  $a$  arbitrariamente grandes.

Para el caso de sistemas autónomos, se puede eliminar la palabra “uniforme”, ya que la solución depende únicamente de  $t - t_0$ .

### 2.2.2. Condiciones de estabilidad

**Condición 1.** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de (2.19) y  $D \subset R^n$  un dominio que contiene al origen. Dada  $V : D \rightarrow R$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (2.25)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D \quad (2.26)$$

Entonces el punto  $x = 0$  es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D - \{0\} \quad (2.27)$$

entonces el punto  $x = 0$  es asintóticamente estable. La función escalar  $V(x)$  se conoce como función de Lyapunov.

**Condición 2.** Sea  $D \subset R^n$  un dominio que contiene al origen y sea  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow R$  una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (2.29)$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall x \in D$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones tipo  $K$  y  $W_3(x)$  es una función continua positiva definida. Sea  $r > 0$  tal que  $B_r \subset D$  y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (2.30)$$

entonces, existe una función  $\beta$  tipo  $KL$ , y para cada estado  $x(t_0)$  que satisface  $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , existe  $T \geq 0$ , que depende del estado  $x(t_0)$  y de  $\mu$  tal que las soluciones de (2.22) satisfacen

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (2.31)$$

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \forall t \geq t_0 + T \quad (2.32)$$

Más aún, si  $D = R^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase  $K_\infty$ , entonces (2.31) y (2.32) se cumplen para cualquier estado inicial  $x(t_0)$ , sin restricciones para la magnitud de  $\mu$ .

### 2.2.3. Lema de Barbalat

En ocasiones, mediante las funciones de Lyapunov es posible mostrar la estabilidad de un sistema; sin embargo, existen casos en donde no se puede asegurar la estabilidad asintótica de manera clara, por lo que se recurre al siguiente lema. **Lema de Barbalat**

Sea  $\phi : R \rightarrow R$ , una función uniformemente continua en  $[0, \infty)$ . Supóngase que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$  existe y es finito, entonces

$$\dot{\phi}(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty \tag{2.33}$$

## Capítulo 3

# Diseño del esquema de control

### 3.1. Introducción

En este capítulo, se diseña la ley de control para tres diferentes casos de sistemas lagrangianos interconectados, partiendo del caso más simple, es decir, cuando no existe término de interconexión y se cae en un caso de control puramente adaptable.

En un segundo caso, se diseña una ley de control considerando que cada subsistema tiene acceso a la información del estado de todos los demás subsistemas, es decir, un sistema de control centralizado.

Finalmente, se diseña una ley de control descentralizado, para lo cual se considera que cada subsistema tiene acceso únicamente a información local, así como a las señales de referencia del resto de ellos, lográndose así la descentralización del control.

### 3.2. Objetivo de control

Dada una trayectoria de referencia  $\mathbf{q}_{m_i}(t)$ , diferenciable al menos en dos ocasiones, diseñar una ley de control retroalimentado  $\mathbf{u}_i$  únicamente utilizando mediciones locales  $\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i$  para lograr el seguimiento asintótico de la referencia, para cada uno de los sistemas lagrangianos interconectados,

es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_{m_i}(t)\| \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

manteniendo al mismo tiempo la estabilidad interna del sistema global.

### 3.3. Control de sistemas desacoplados

Considérese un sistema formado por  $N$  subsistemas lagrangianos  $\Sigma_i$ , interconectados entre sí, para los cuales es necesario diseñar  $N$  controladores  $C_i$ . Cada subsistema tiene la forma

$$\Sigma_i : \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}(\mathbf{q}_i) + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}_i, \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es el término debido a la interconexión entre subsistemas. Partiendo del caso en que el término de interconexión es nulo, es decir, ( $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ ), cada uno de los subsistemas toma la forma

$$\Sigma_i : \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{u}_i. \quad (3.3)$$

En este caso, es claro que se tienen  $N$  subsistemas desacoplados. Con base en las propiedades estructurales de los sistemas lagrangianos, es posible escribir el modelo (3.3) parametrizado linealmente, como el producto de un vector de parámetros y una matriz que involucra señales del subsistema. Esto es

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i)\Theta_i. \quad (3.4)$$

Definiendo el error combinado  $\mathbf{s}_i$ , se logra con una sola misma variable contar con información del error en todas las variables del estado, es decir  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$ , ya que solo cuando todos los errores en estas variables son cero, el error combinado es nulo. Para esto se usan las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{m_i}, \\
\dot{\mathbf{q}}_{r_i} &= \dot{\mathbf{q}}_{m_i} - \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i, \\
\mathbf{s}_i &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

en donde  $\mathbf{q}_{m_i}$  es la señal de referencia para  $\mathbf{q}_i$  y  $\Lambda_i$  es una matriz de ganancia (proporcional), positiva definida. Combinando (3.4) y (3.5) de tal manera que se obtenga una parametrización lineal dependiente de la variable  $\mathbf{q}_{r_i}$ , es decir  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i$ , se tiene entonces

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i = \mathbf{u}_i, \tag{3.6}$$

agrupando los términos en  $\mathbf{s}_i$  en el miembro izquierdo de la expresión anterior, se aprecia que ésta representa la dinámica del error del sistema (3.3), ya que  $\mathbf{s}_i$  involucra errores en  $\mathbf{q}_i$  y  $\dot{\mathbf{q}}_i$

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i. \tag{3.7}$$

### 3.3.1. Ley de control con parámetros conocidos

Como se ha mencionado, este caso particular implica el diseño de controladores independientes para cada subsistema  $\Sigma_i$ . Además se parte de la suposición de un conocimiento exacto y total de cada uno de los subsistema, para diseñar una primera ley de control. Para ello, se propone, para cada uno de los subsistemas, una función candidata de Lyapunov muy sencilla, de tipo cuadrática como la siguiente

$$V_i(\mathbf{s}_i) = \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i. \tag{3.8}$$

Obteniendo la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov y con base en las

propiedades de la transposición de matrices , se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) &= \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{s}}_i \right), \\ &= \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{s}}_i + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Evaluando la ecuación anterior en la dinámica del sistema, (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) &= \mathbf{s}_i^T \left( \mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \Theta_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i \right) + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i, \\ &= \mathbf{s}_i^T \left( \mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \Theta_i \right) \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \right) \mathbf{s}_i.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Apoyándose en las propiedades de los sistemas lagrangianos, específicamente en la antisimetría de la matriz  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ , se sabe que la siguiente forma cuadrática será nula en todo instante  $t$ .

$$\mathbf{s}_i^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \right) \mathbf{s}_i = 0 \quad (3.11)$$

Así, la derivada de la función de Lyapunov (3.8) con respecto al tiempo es, simplemente

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_i^T \left( \mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \Theta_i \right) \mathbf{s}_i. \quad (3.12)$$

Para poder garantizar que la expresión anterior es negativa y con esto garantizar la estabilidad de cada subsistema, se elige una señal de control  $\mathbf{u}_i$  tal que anule el término correspondiente a la parametrización lineal  $\mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \Theta_i$ . Más aún, la misma señal de control  $\mathbf{u}_i$  puede ser seleccionada de forma que la derivada de (3.8) sea negativa en todo instante  $t$  y con esto se asegure

estabilidad asintótica de cada subsistema. Para ello, la señal  $\mathbf{u}_i$  se elige como

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i - \mathbf{K}_i\mathbf{s}_i, \quad (3.13)$$

con  $\mathbf{K}_i > 0$  es una matriz de ganancia (derivativa). Aplicando esta ley de control a (3.12), se obtiene como derivada de la función candidata de Lyapunov

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i < 0 \quad (3.14)$$

La expresión anterior, es negativa definida. Con esto se verifica que la selección de la señal  $\mathbf{u}_i$  en (3.13) asegura la estabilidad asintótica de cada uno de los subsistemas, desacoplados en este caso.

### 3.3.2. Ley de control con parámetros desconocidos

En la sección anterior, se diseñó una ley de control suponiendo que los parámetros del sistema se conocen de manera exacta, sin embargo en la mayoría de los casos no es así, por lo cual para el caso en que los parámetros se desconocen, se parte tomando como base la ley de control anteriormente diseñada (3.13), pero ahora con la forma

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\hat{\Theta}_i - \mathbf{K}_i\mathbf{s}_i, \quad (3.15)$$

donde  $\hat{\Theta}_i$  denota una estimación del vector de parámetros  $\Theta_i$ , y donde  $\tilde{\Theta}_i = \hat{\Theta}_i - \Theta_i$  representa el error entre el valor real del vector de parámetros y el vector estimado obtenido. Es posible reescribir la ley de control como

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\tilde{\Theta}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i - \mathbf{K}_i\mathbf{s}_i \quad (3.16)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (3.7) se obtiene la dinámica del error afectada por el error

de estimación del vector de parámetros

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i = -\mathbf{K}_i\mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\tilde{\Theta}_i. \quad (3.17)$$

Dado que es deseable que tanto el error en el estado así como el error de estimación de parámetros tienda a cero, para este caso se propone la siguiente función candidata de Lyapunov, dependiente de ambos errores

$$V_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i, \quad (3.18)$$

donde  $\Gamma_i$  es una matriz positiva definida.

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo y simplificando se tiene

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \dot{\tilde{\Theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i. \quad (3.19)$$

Evaluando la derivada anterior para la dinámica del sistema (3.17) y considerando de nueva cuenta la propiedad de antisimetría de la matriz  $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) &= \mathbf{s}_i^T \left( -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i \right) + \frac{1}{2}\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \dot{\tilde{\Theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i, \\ &= \mathbf{s}_i^T \left( -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i \right) + \dot{\tilde{\Theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i, \\ &= -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i + \dot{\tilde{\Theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De lo anterior, se distingue claramente que el primer término corresponde a la forma cuadrática negativa definida, útil para asegurar la estabilidad del subsistema y a partir de los dos últimos

términos se determina la ley de adaptación para  $\dot{\tilde{\Theta}}_i$ , necesaria para que dichos términos se anulen mutuamente, transponiendo el segundo término y factorizando

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \tilde{\Theta}_i \left[ \mathbf{Y}_i^T(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \mathbf{s}_i + \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right] \quad (3.21)$$

Para anular el término entre paréntesis, el valor de  $\dot{\tilde{\Theta}}_i$  debe de adaptarse en la siguiente forma

$$\dot{\tilde{\Theta}}_i = -\Gamma_i \mathbf{Y}_i^T(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \mathbf{s}_i \quad (3.22)$$

Con lo anterior, la derivada de la función candidata de Lyapunov es

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0 \quad (3.23)$$

Como se puede observar, la derivada  $\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i)$  es seminegativa definida, esto es debido a que  $\dot{V}_i(0, \tilde{\Theta}_i) = 0$ , independientemente del valor de  $\tilde{\Theta}_i$ . Debido a esto, solamente se puede asegurar estabilidad para el subsistema.

Para demostrar la estabilidad asintótica de cada subsistema es útil recurrir al lema de Barbalat. El resultado anterior es bien conocido [16], y fué desarrollado para el caso de sistemas lagrangianos. En este caso es muy útil ya que se considera un caso particular de sistemas interconectados.

### 3.4. Control centralizado de sistemas interconectados

En esta sección se diseña una ley de control centralizado adaptable para sistemas lagrangianos interconectados. Esta es una etapa intermedia, ya que aunque el control que se desea finalmente diseñar es descentralizado, en esta etapa sí existe un término de interconexión.

Esta ley de control se diseña suponiendo que cada controlador  $C_i$  tiene acceso no solo al estado correspondiente al subsistema  $\Sigma_i$ , sino a información del estado de cualquier otro subsistema.

Nuevamente, se parte de la forma general de los sistemas lagrangianos y de un término de interconexión, teniendo cada subsistema la forma

$$\Sigma_i : \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}(\mathbf{q}_i) + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}_i, \quad (3.24)$$

donde el término  $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  representa la interconexión existente entre subsistemas. Se considera que la función de interconexión tiene la forma  $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j)\mathbf{c}_{ij}$ , con  $\mathbf{c}_{ij}$  un vector de parámetros,  $\mathbf{c}_{ij} \in R^p$  y  $\mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j)$  es una matriz de señales,  $\mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \in R^{n \times p}$ , donde  $n$  es la dimensión de cada subsistema y  $p$  depende de la parametrización elegida. Considerando la interconexión en la dinámica del sistema

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i - \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (3.25)$$

Al igual que en el caso cuando no existe interconexión, se parte del desarrollo de una ley de control cuando el modelo es completamente conocido y posteriormente se diseña una ley de adaptación.

### 3.4.1. Ley de control con parámetros conocidos

Considerando el caso en el que todos los parámetros del sistema son conocidos, el seguimiento de trayectorias es logrado cuando el error combinado definido en (3.5) es cero. Así, se propone una función candidata de Lyapunov como función de  $\mathbf{s}_i$ , pero al existir interconexión entre subsistemas, es conveniente proponer una función que involucre al sistema completo

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{s}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i \quad (3.26)$$

Para conocer la ley de control que estabiliza el sistema, se obtiene la derivada con respecto al tiempo de la función candidata. Simplificando, mediante aplicación de las propiedades de los sistemas lagrangianos y evaluando la función candidata de Lyapunov en la dinámica del sistema, se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{s}}_i) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{s}}_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \left( \mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \Theta_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Nuevamente, es necesario utilizar las propiedades estructurales de los sistemas lagrangianos, específicamente la antisimetría de la matriz  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ . Seleccionando la señal de control

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \Theta_i + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (3.28)$$

o equivalentemente

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \Theta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \mathbf{c}_{ij}, \quad (3.29)$$

la derivada de la función candidata de Lyapunov se reduce de manera considerable, tomando finalmente la siguiente forma

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i < 0, \quad (3.30)$$

expresión la cual es negativa definida, para todo  $\mathbf{s}_i \neq 0$ . Lo anterior asegura la estabilidad asintótica de cada subsistema  $\Sigma_i$ .

### 3.4.2. Ley de control con parámetros desconocidos

De la misma manera que se procedió con subsistemas desacoplados, para diseñar una ley de control adaptable en este caso, los parámetros de la ley de control diseñada anteriormente se sustituyen por sus estimados, de tal modo que

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \hat{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \hat{\mathbf{c}}_{ij} \quad (3.31)$$

Donde  $\hat{\mathbf{c}}_{ij} \in R^p$ ,  $\mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \in R^{n \times p}$ . Esta ley de control, influye en la dinámica del error del sistema, teniéndose lo siguiente

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \quad (3.32)$$

Dado que ahora la dinámica del sistema está siendo afectada por otros dos errores de estimación y se pretende que todos estos errores desaparezcan, la función candidata de Lyapunov propuesta, es una función de todos los errores involucrados

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i, \tilde{\mathbf{c}}_{ij}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \right) \quad (3.33)$$

Derivando la función anterior con respecto al tiempo se obtiene,

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right). \quad (3.34)$$

Si se evalúa la expresión anterior a lo largo de la dinámica del error del sistema y se simplifica, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T & \left( -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \right) \\ & + \sum_{i=1}^N \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

A continuación, el primer factor se desarrolla, y se agrupan los términos convenientemente, como se muestra en la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N & \left( \mathbf{s}_i^T \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right) \\ & + \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \tilde{\mathbf{c}}_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

A partir de este punto, por simplificación en la notación, se asume que  $\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})$ ,  $\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j)$ . Reescribiendo la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N & \left( \mathbf{s}_i^T \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right) \\ & + \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{c}}_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Es claro que el primer término en la expresión anterior es un término negativo definido, favorable a la estabilidad del sistema; sin embargo, los dos sumandos restantes, al no poder garantizar que son menores a cero, necesitan ser anulados. Tomando el segundo sumando en (3.37)

$$\sum_{i=1}^N \tilde{\Theta}_i^T \left( \mathbf{Y}_i^T \mathbf{s}_i + \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right) = 0, \quad (3.38)$$

por lo que el término puede ser anulado mediante la conveniente selección de  $\dot{\tilde{\Theta}}_i$ . Por lo tanto, la

primer ley de adaptación para este caso está dada por

$$\dot{\Theta}_i = -\Gamma_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{s}_i. \quad (3.39)$$

Tomando ahora el tercer sumando en (3.37), igualando a cero para buscar su anulación

$$\sum_{i=1}^N \left( \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{c}}_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) = 0 \quad (3.40)$$

Para poder anular este término es importante notar que la variable  $s_i$  puede ser escrita dentro de la suma a la que multiplica, ya que no se ve afectada por el subíndice. Además, dado que la función de Lyapunov es una función escalar, el producto  $\mathbf{s}_i^T \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{c}}_{ij}$  es un escalar, por lo que al transponerlo, el resultado del producto no se ve alterado, así

$$\sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \mathbf{Q}_j^T \mathbf{s}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) = 0. \quad (3.41)$$

El siguiente paso consiste en agrupar ambos sumandos en una sola suma y factorizar teniendo como factor común  $\tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T$ , por lo que se puede escribir

$$\sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \left( \mathbf{Q}_j^T \mathbf{s}_i + \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \right) = 0. \quad (3.42)$$

Una vez que se ha llegado a la forma anterior, es sencillo elegir la ley de adaptación necesaria para anular este término. Por tanto, la ley de adaptación para  $\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij}$  es

$$\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} = -\Omega_i \mathbf{Q}_j^T \mathbf{s}_i \quad (3.43)$$

Si las leyes obtenidas en (3.39) y (3.43) se aplican, la derivada de (3.33), es finalmente

$$\dot{\mathbf{V}}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0, \quad (3.44)$$

que es un término negativo semidefinido. Por tanto, es necesario apoyarse nuevamente en el lema de Barbalat para demostrar la estabilidad asintótica de cada subsistema, ya que de lo contrario, la expresión anterior solamente asegura estabilidad.

### 3.5. Control descentralizado de sistemas interconectados

En esta sección, finalmente se diseña una ley de control descentralizado, tomando como base la ley de control diseñada en (3.31) en conjunto con (3.39) y (3.43). Sin embargo, es necesario evitar el intercambio de información entre subsistemas, ya que se pretende obtener una ley de control descentralizado. Para esto, tomando como base la definición del error dada en (3.5), es posible escribir  $\mathbf{q}_i = \tilde{\mathbf{q}}_i + \mathbf{q}_{m_i}$  y  $\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \dot{\mathbf{q}}_{m_i}$ , lo que significa que la información de cualquier sistema puede ser escrita en términos de su señal de referencia y de un error de seguimiento.

Dado lo anterior, se define el error  $\tilde{\mathbf{Q}}_j = \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_{m_j}$ , con  $\mathbf{Q}_{m_j} = \mathbf{Q}_j(q_{m_j}, \dot{\mathbf{q}}_{m_j})$ . Con base en esta definición, es posible escribir la ley de control (3.31) como

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i \hat{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{m_j} \hat{\mathbf{c}}_{ij} + \mathbf{D}_i, \quad (3.45)$$

donde el término correspondiente al error  $\tilde{\mathbf{Q}}_j$  entre los regresores, se sustituye por un vector, denotado por  $\mathbf{D}_i$ , que se diseña para compensar perturbaciones no modeladas en el sistema.

Considerando esta nueva ley de control, la dinámica del error del sistema es

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{m_j} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} + \mathbf{D}_i. \quad (3.46)$$

Para diseñar el vector de compensación  $\mathbf{D}_i$ , se propone la misma función candidata de Lyapunov (3.33)

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i, \tilde{\mathbf{c}}_{ij}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \right) \quad (3.47)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación anterior, se tiene

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{s}}_i + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \quad (3.48)$$

Evaluando la expresión anterior a lo largo de la dinámica del error se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{s}_i^T \left( -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{m_j} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} + \mathbf{D}_i \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \quad (3.49) \end{aligned}$$

Simplificando y factorizando de manera conveniente

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \left( -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \left( \mathbf{s}_i^T \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right) \right. \\ \left. + \left( \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{m_j} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_i^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \right. \\ \left. + \left( \mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i - \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} \right) \right) \quad (3.50) \end{aligned}$$

En la expresión anterior, se identifica inmediatamente que el segundo y tercer términos son exactamente iguales a los tratados en la sección anterior, por lo que las leyes de adaptación (3.39) y (3.43) siguen siendo válidas y entonces, dichos términos se anulan, resultando

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \left( -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \left( \mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i - \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} \right) \right) \quad (3.51)$$

En este punto del desarrollo es posible proponer diferentes tipos de estructuras para el vector  $\mathbf{D}_i$ ,

sin embargo, por simplicidad, se elige

$$\mathbf{D}_i = -\gamma_i \mathbf{s}_i. \quad (3.52)$$

Sustituyendo en la ecuación simplificada (3.51), desarrollando el producto y tomando únicamente el segundo sumando, se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \left( -\gamma_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} \right) \quad (3.53)$$

Manipulando el término anterior con el objetivo de obtener información acerca de su magnitud y de su signo, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left( -\gamma_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} \right) &= \leq \sum_{i=1}^N \left( -\gamma_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i \right) + \sum_{i=1}^N \|\mathbf{s}_i\| \sum_{j=1, j \neq i}^N \|\mathbf{c}_{ij}\| l_j \|\mathbf{s}_j\| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left( -\gamma_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i \right) + \sum_{i=1}^N \left( (N-1) l_j \|\mathbf{c}_{ij}\| \|\mathbf{s}_i\|^2 \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N \left( \gamma_i - (N-1) l_j \|\mathbf{c}_{ij}\| \right) \|\mathbf{s}_i\|^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

En el procedimiento anterior, la primera y segunda desigualdad se derivan del hecho de que  $\mathbf{Q}_j$  cumple con la desigualdad de Lipschitz. Si se selecciona el factor  $\gamma_i$  de tal forma que cumpla

$$\gamma_i \geq (N-1) l_j \|\mathbf{c}_{ij}\| \quad (3.55)$$

se puede asegurar que el término (3.53) es negativo, por lo que se concluye que

$$\dot{\mathbf{V}} \leq - \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \quad (3.56)$$

Finalmente, tomando de nueva cuenta el Lema de Barbalat, se asegura la estabilidad asintótica del origen en la ecuación de la dinámica del error, lo que implica seguimiento asintótico para cada uno de los  $N$  subsistemas interconectados.

## Capítulo 4

# Simulaciones y resultados

### 4.1. Descripción del sistema

Con el objetivo de verificar la efectividad de la ley de control descentralizado adaptable diseñada en el capítulo anterior, se propone un sistema de brazos robóticos los cuales se interconectan entre sí para manipular de manera conjunta un objeto en común. En este sistema, cada uno de los subsistemas tienen una estructura lagrangiana totalmente actuada y existe entre ellos un término adicional de interconexión, por lo cual, cumple con las condiciones necesarias para aplicar una ley de control descentralizado adaptable como la diseñada anteriormente.

Se ha elegido un sistema conformado por dos brazos robóticos planares, cada uno de los cuales cuenta con dos grados de libertad, y adicionalmente cuenta en el extremo del segundo eslabón, con un efector final que consiste en un conector de revolución, mediante el cual ambos robots se conectan con un elemento en común, en este caso, una barra rígida la cual se considera de un material homogéneo como se muestra en la Figura 4.1. En este caso, específicamente, el objetivo es realizar una tarea en conjunto mediante una operación descentralizada. Dicha tarea consiste en mover el centro de gravedad del objeto en común (barra) de acuerdo con una señal de referencia en un plano vertical.

Como se ha mencionado con anterioridad, cada uno de los robots interconectados es totalmente

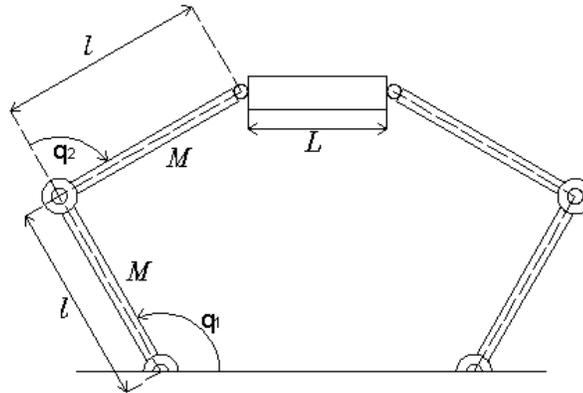


Figura 4.1: Sistema de robots coordinados

actuado y son similares entre sí. Es importante hacer notar que como parte del objetivo, la barra debe de ser manipulada conservando su horizontalidad.

## 4.2. Definición de las señales de referencia

Las señales de referencia, como se ha señalado, están contenidas en un plano vertical. Siendo por simplicidad elegidas como una trayectoria circular, situada de tal manera que el sistema tenga la simetría mostrada en la Figura 4.2.

A partir de la figura, es posible expresar la trayectoria, de manera matemática como

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \quad (4.1)$$

donde  $x_c$  y  $y_c$ , son la abcisa y la ordenada del centro de la circunferencia, respectivamente y  $r$  es el radio de la misma. Expresando la trayectoria del centro de masa del objeto en común, como una ecuación parametrizada en tiempo, se tiene

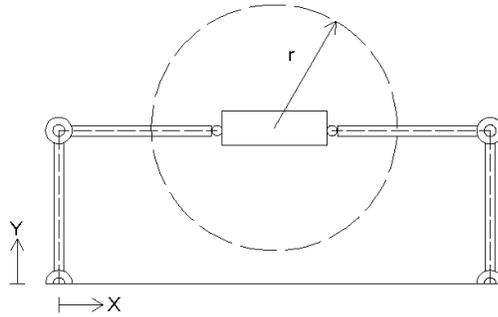


Figura 4.2: Robots coordinados y trayectoria deseada

$$x = r \cos(\omega t) + x_c \quad (4.2)$$

$$y = r \sin(\omega t) + y_c \quad (4.3)$$

Sin embargo, la trayectoria deseada del centro de masa de la barra difiere de la trayectoria de cada uno de los extremos del robot. Dadas las dimensiones de la Figura 4.2, la trayectoria deseada para cada robot es

$$x = r \cos(\omega t) + x_c - \frac{L}{2} \quad (4.4)$$

$$y = r \sin(\omega t) + y_c \quad (4.5)$$

Es claro que la trayectoria definida en (4.2) solo se modifica en la coordenada en el eje  $x$ , debido a la forma del objeto a manipular. También es importante mencionar que debido a la simetría del sistema, ambos robots tienen trayectorias muy similares.

Para definir las trayectorias en forma conveniente, es necesario utilizar la cinemática inversa

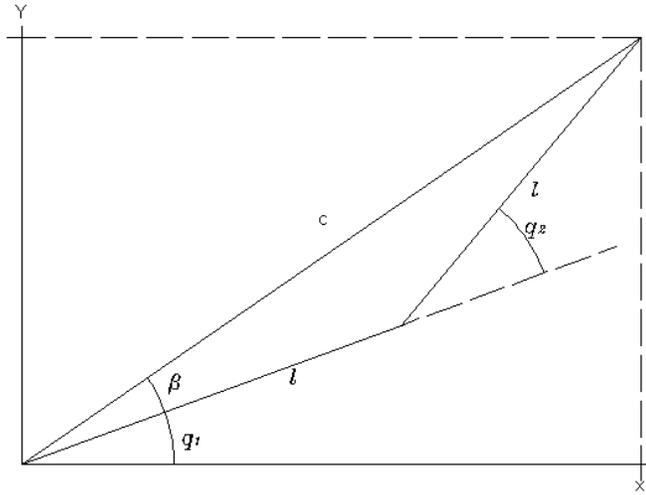


Figura 4.3: Esquema simplificado para ilustrar la cinemática inversa

de cada uno de los robots involucrados. Para este caso, todos los robots cuentan con la misma estructura y es necesario únicamente un análisis.

A partir de la Figura 4.3, se tiene que  $c^2 = x^2 + y^2$ . Mediante la ley de los cosenos se sabe que

$$c^2 = 2\ell^2 - 2\ell^2 \cos(\pi - q_2) = 2\ell^2 + 2\ell^2 \cos(q_2) \quad (4.6)$$

Despejando el  $\cos(q_2)$ ,

$$\cos(q_2) = \frac{c^2 - 2\ell^2}{2\ell^2} \triangleq E \quad (4.7)$$

y en vez de calcular  $q_2$  mediante la función  $\cos^{-1}$ , se hace

$$\sin(q_2) = \pm \sqrt{1 - E^2}. \quad (4.8)$$

Entonces, es posible determinar  $q_2$  de manera unívoca como

$$q_2 = \text{atan}(E, \pm \sqrt{1 - E^2}) \quad (4.9)$$

donde  $\text{atan}(a, b)$ , es el arco tangente que se define para todo  $(x, y) \neq 0$  como

$$\cos \theta = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \sin \theta = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.10)$$

Aplicando nuevamente la ley de los cosenos, Figura 4.3

$$\ell^2 = c^2 + \ell^2 - 2c\ell \cos \beta \quad (4.11)$$

Despejando el valor de  $\cos \beta$ ,

$$\cos \beta = \frac{c}{2\ell} = \bar{E} \quad (4.12)$$

nuevamente se ocupa la función  $\text{atan}(a, b)$  para determinar el ángulo

$$q_1 = \text{atan}(x, y) - \text{atan}(\bar{E} - \pm \sqrt{1 - \bar{E}^2}) \quad (4.13)$$

Una vez que se han obtenido los valores de los ángulos  $q_1$  y  $q_2$  para todo instante  $t$ , lo más simple y conveniente es filtrar cada una de éstas señales, para obtener las referencias tanto en velocidad como en aceleración, de manera que sean suaves.

### 4.3. Consideraciones adicionales

Claramente, el sistema para el cual se desarrollan las simulaciones numéricas es simétrico, lo que implica que las trayectorias de referencia para ambos robots son sumamente similares, simplemente, para el caso del segundo brazo robótico, las direcciones difieren en la coordenada horizontal.

El filtrado realizado para la generación de las trayectorias de referencia, se hizo únicamente mediante un filtro simple de primer orden, esto para asegurar que las condiciones iniciales, para

velocidad y aceleración fueran casi nulas.

#### 4.4. Resultados de simulaciones

En las Figuras 4.4 a 4.10, se muestran las señales más relevantes en los resultados obtenidos de la simulación del sistema de robots coordinados. Como se ilustra de manera clara en la figura 4.4, las condiciones iniciales de los robots no están sobre las trayectorias deseadas, lo cual implica que en el tiempo inicial, existe un error de posición. También es claro que este error inicial disminuye de manera asintótica, lo cual concuerda de manera correcta con los resultados obtenidos en el capítulo anterior. El tiempo requerido para que el error se redujera casi totalmente (mas del 95 %) es menor a un segundo, lo cual verifica el correcto funcionamiento del control y se atribuye a las leyes de adaptación aplicadas durante la simulación y como resultado del diseño realizado.

Como también es claro, en la Figura 4.6, las señales de control requeridas para lograr y mantener el seguimiento asintótico tienen un periodo transitorio muy pequeño. Durante este periodo de tiempo, la señal tiene magnitud grande; sin embargo, a partir de que el sistema alcanza su referencia, se mantienen magnitudes muy pequeñas. Esto se debe a que el control necesario se basa en la estimación de parámetros de la interconexión y por lo tanto la señal de control en ningún momento es excesiva.

En cuanto a la estimación de parámetros, se tienen dos circunstancias diferentes. En primer lugar, los parámetros estimados  $\Theta$ , tienen un acotamiento y convergencia a ciertos valores, los cuales, aún cuando no son los valores reales implicados en el modelo, permiten la igualación del modelo necesaria para calcular la ley de control. En segundo plano, los parámetros  $\mathbf{c}_{ij}$ , presentan únicamente acotamiento, lo cual podría representar una desventaja, ya que en el caso de interconexiones aún más fuertes o con una estructura diferente no es posible descartar el caso de una divergencia de parámetros, lo que provocaría pérdida de estabilidad de los subsistemas.

En la Figura 4.9, se presenta la evolución del vector de compensación  $\mathbf{D}_i$ . Como es evidente, mientras existe un error en el seguimiento de la trayectoria, este vector es diferente de cero y proporciona la señal de control adicional para que el error disminuya. Una vez que el error tiende a desaparecer, el vector  $\mathbf{D}_i$  deja de contribuir a la señal de control.

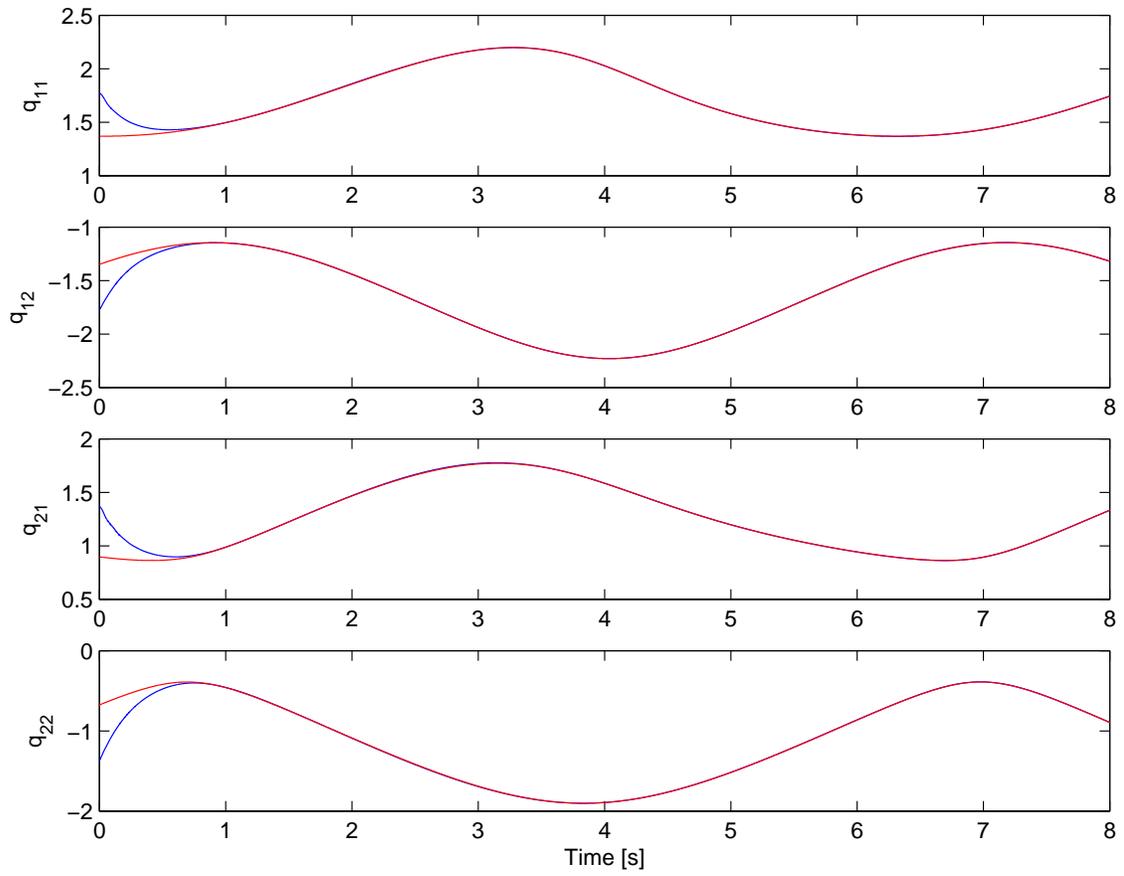


Figura 4.4: señales de referencia y obtenidas

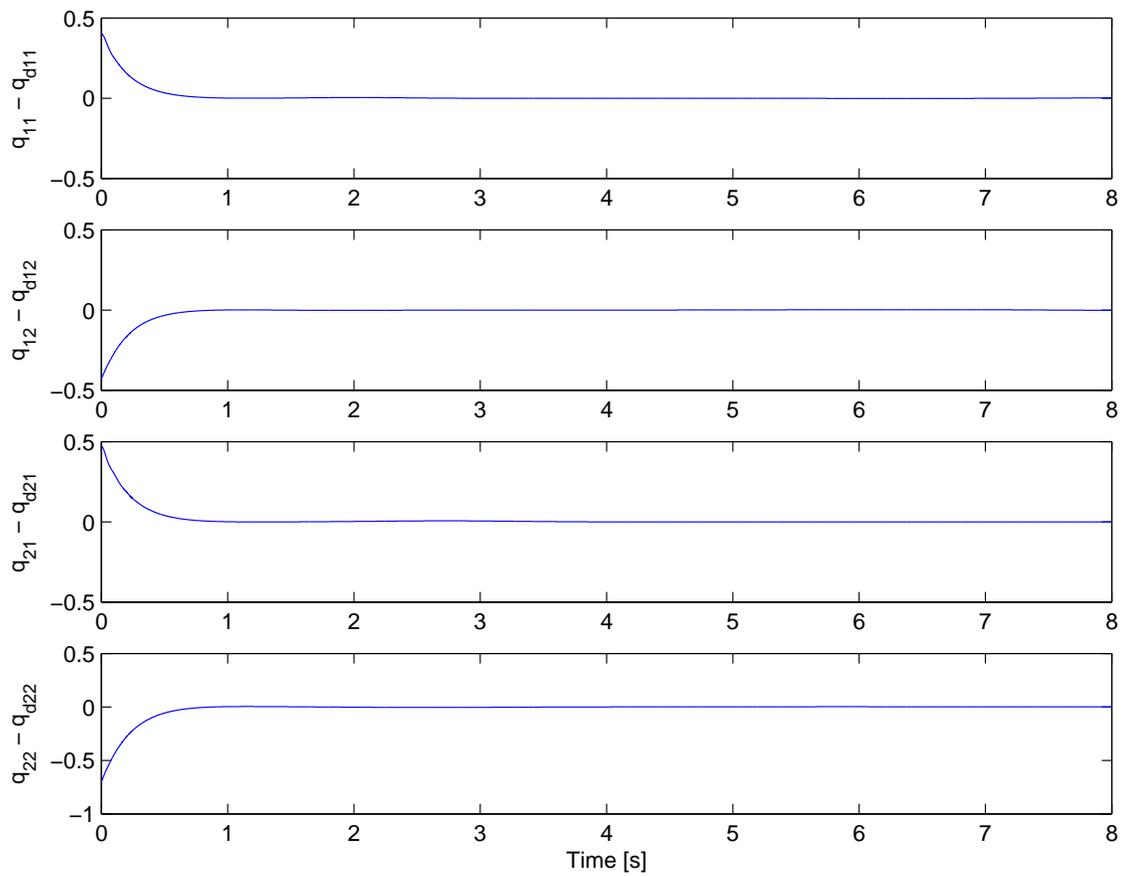


Figura 4.5: Señales de error

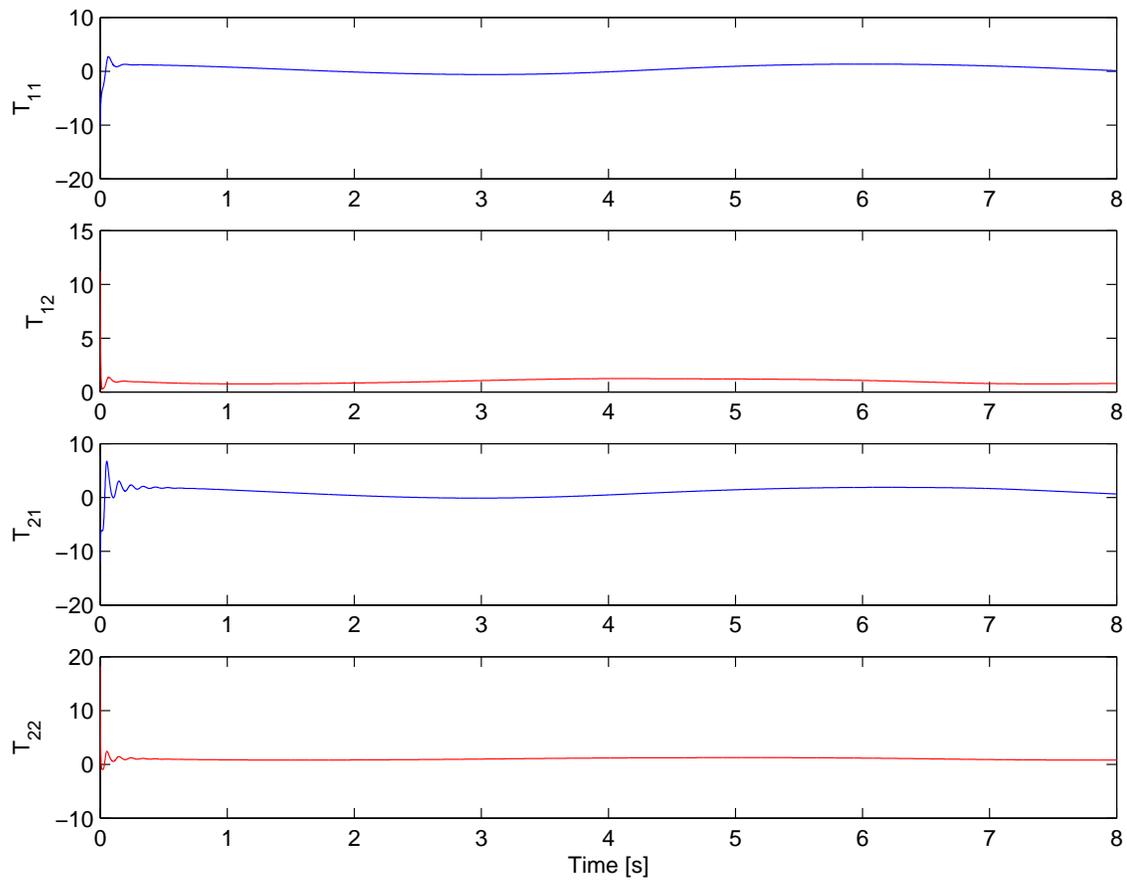


Figura 4.6: Señales de control obtenidas en cada uno de los eslabones

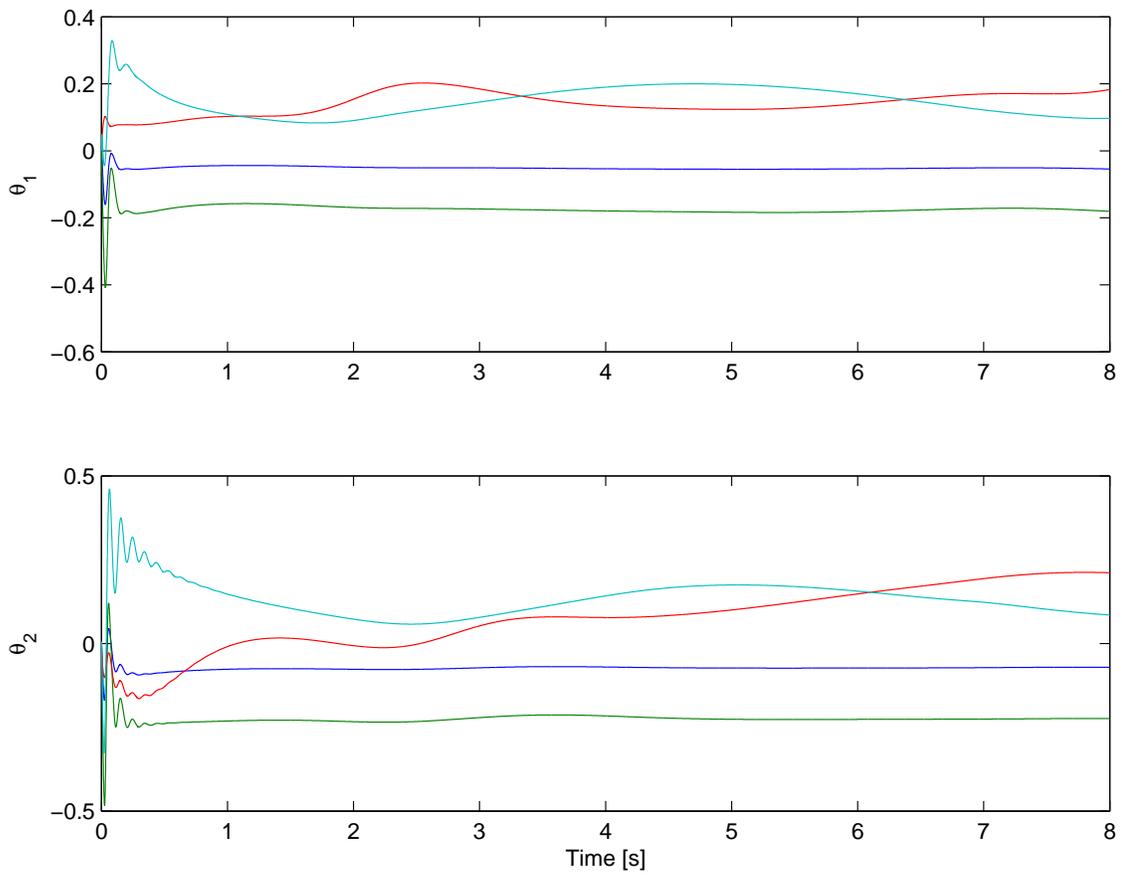
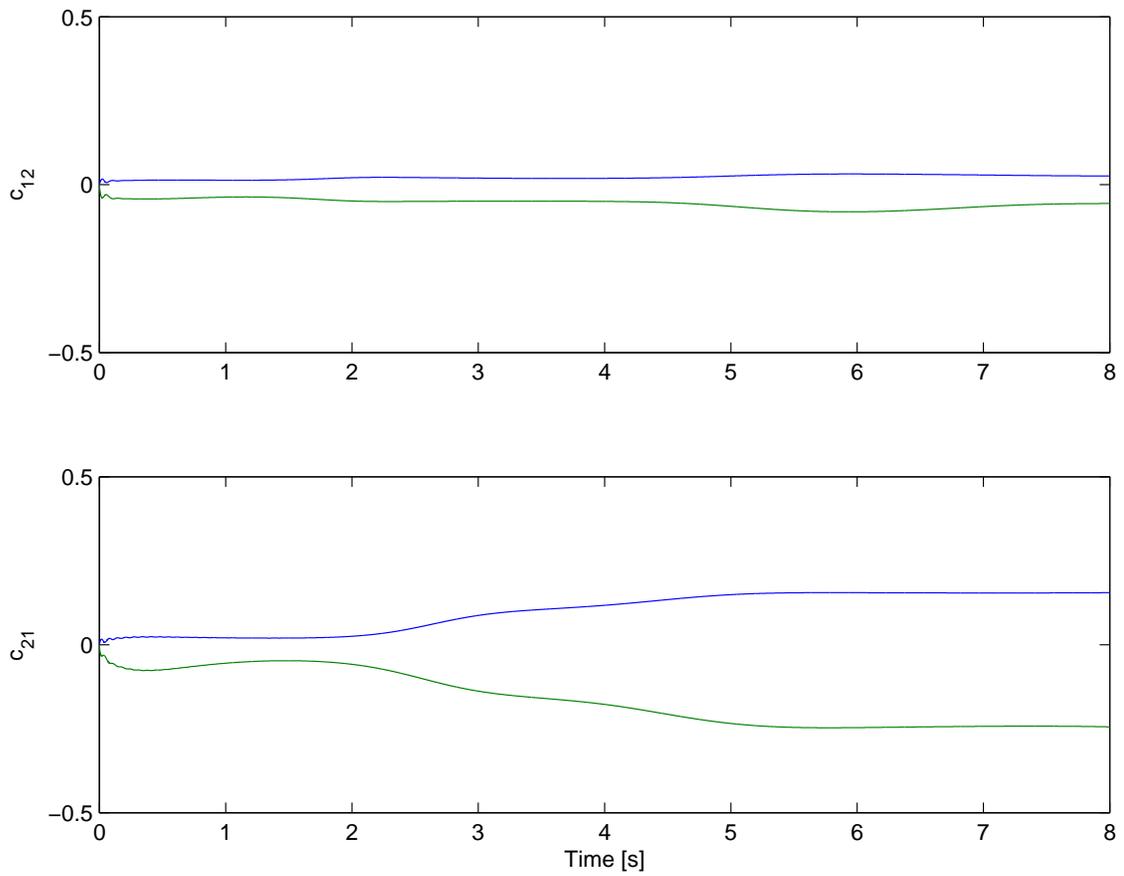
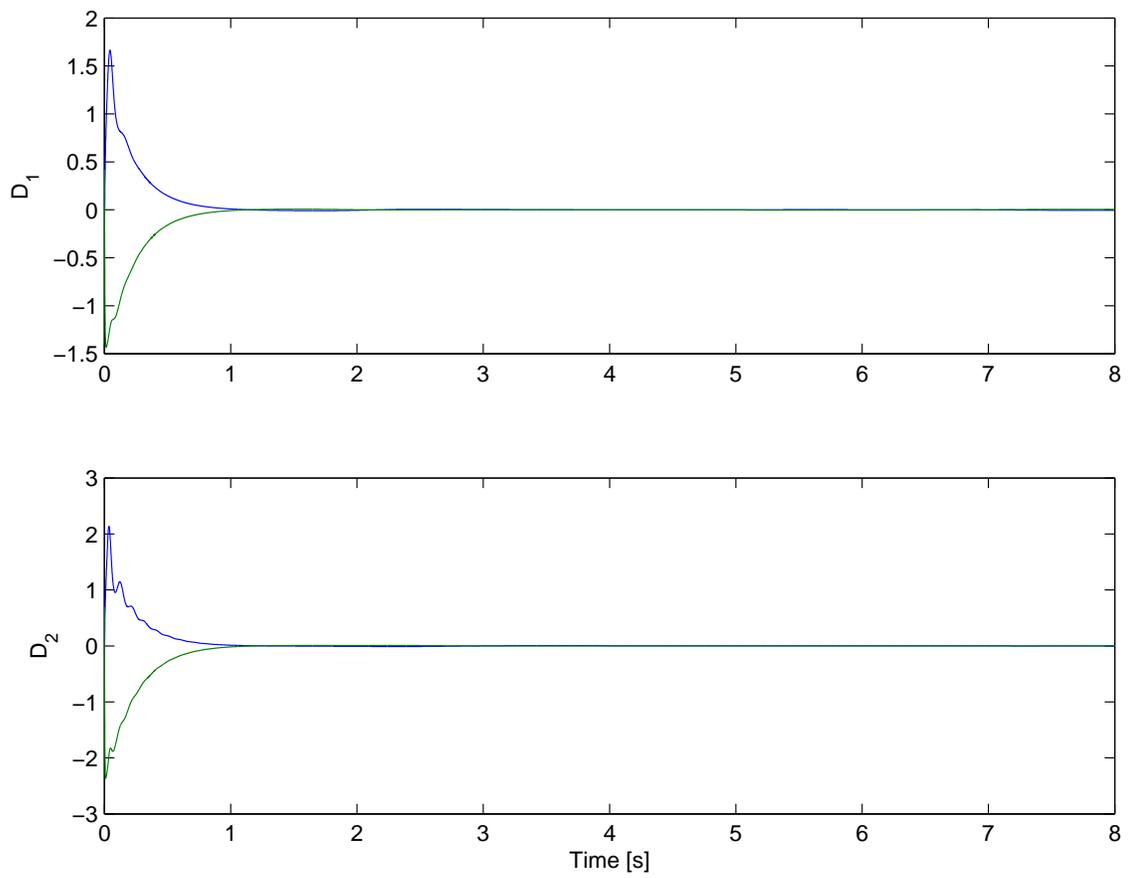


Figura 4.7: Estimación de los parámetros  $\Theta$

Figura 4.8: Estimación de los parámetros  $c_{ij}$

Figura 4.9: Evolución en el tiempo del vector de compensación  $D_i$

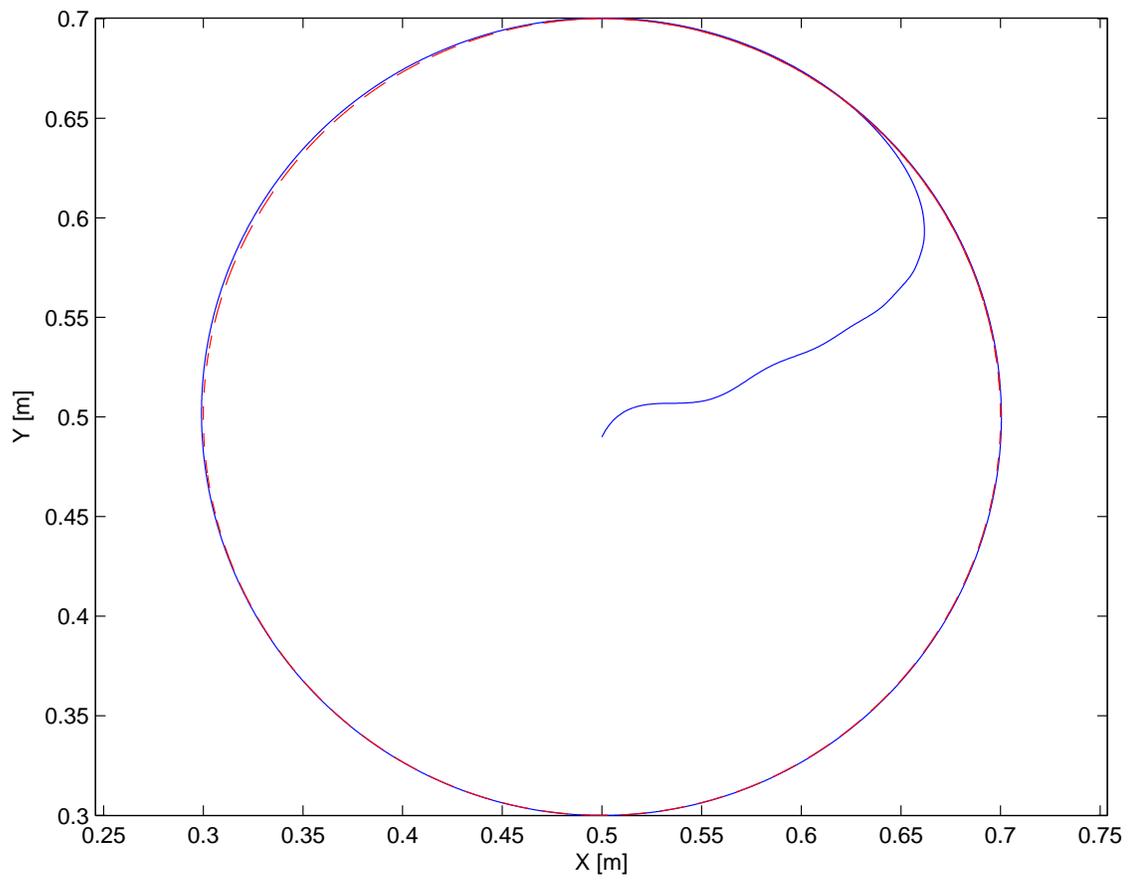


Figura 4.10: Trayectoria seguida por el centro de masa de la barra en el plano vertical

## Capítulo 5

# Conclusiones

En el presente trabajo se propone un esquema de control descentralizado adaptable para sistemas lagrangianos, utilizando información estructural de la interconexión. Lo anterior con el objeto de realizar seguimiento asintótico de trayectorias.

El esquema diseñado incluye, para cada subsistema, dos leyes de adaptación, en combinación con información local del estado y con las señales de referencia del resto de los subsistemas. Dichas señales de referencia se asumen conocidas para todos los subsistemas. Para poder asegurar el seguimiento asintótico, se consideran únicamente términos de interconexión que sean linealmente parametrizables, al igual que los subsistemas a controlar. Se considera el caso de  $N$  sistemas lagrangianos del mismo orden interconectados. Además, se diseña un vector adicional, con el objetivo de rechazar perturbaciones externas no modeladas.

El diseño obtenido es verificado vía simulación numérica en un sistema simple de dos robots planares, cada uno con dos grados de libertad, sujetando una barra rígida en posición horizontal. La estructura del término de interconexión que se considera involucra el Jacobiano de cada uno de los robots. Esta interconexión es comunmente utilizada para la verificación de este tipo de control, además de que cumple con la estructura propuesta.

Las características principales de los resultados de las simulaciones realizadas se resumen a continuación:

- El sistema, efectivamente, presenta seguimiento asintótico para la trayectoria y las condiciones iniciales especificadas.
- Dada la naturaleza adaptable del control, el sistema es robusto ante perturbaciones mecánicas externas, por ejemplo, cambios bruscos en la masa del objeto que se está sujetando.
- Como un beneficio adicional de las leyes de adaptación diseñadas, el sistema se mantiene robusto frente a incertidumbres paramétricas presentadas en las masas de cada uno de los eslabones de los robots, no así para incertidumbres en la geometría del sistema.
- La estimación de parámetros realizada presenta acotamiento de los mismos, y en el mejor de los casos se logra la convergencia a valores determinados. Estos valores no son necesariamente los valores originales del sistema, pero sí permiten la igualación de modelo necesaria para la eliminación de la señal de error.
- Las señales de control necesarias para tener seguimiento, en estado estable, son en general de magnitud reducida como consecuencia de la estimación de parámetros de la interconexión.

Es importante resaltar que para obtener un buen desempeño del sistema no es necesario un ajuste exhaustivo de parámetros de diseño, aunque con la correcta selección de los mismos; las características mencionadas anteriormente pueden hacerse más evidentes, o por el contrario verse disminuídas.

Como trabajo futuro en la actual línea de investigación, con el objetivo de generalizar el diseño de controladores descentralizados adaptables, se distinguen básicamente los siguientes puntos

- Plantear la posibilidad de hacer seguimiento asintótico para trayectorias con mayor grado de complejidad.
- Extender la clase de sistemas no lineales para los cuales sea posible diseñar este tipo de sistemas de control.
- Estudiar la interacción entre sistemas interconectados, para proponer una clase de interconexiones más general que las manejadas en este trabajo.
- En la medida de lo posible, mejorar la estimación de parámetros a convergencia a valores determinados, con el objetivo de prevenir posibles casos de inestabilidad.

También como trabajo a futuro dentro de la misma clase de sistemas, un caso interesante es la interconexión de sistemas lagrangianos de diferente orden.

En general, los resultados obtenidos, tanto en el diseño como en la simulación, verifican la efectividad y robustez del sistema, en los aspectos ya especificados. Como se ha mencionado, no es necesario un ajuste exhaustivo de la ley de control para lograr los resultados presentados. El objetivo de tener una ley de control descentralizado adaptable se ha cumplido de manera satisfactoria. Para el caso específico del sistema de robots, aún cuando no en todos los casos existe una convergencia de los parámetros estimados, se observa un desempeño adecuado en todo el espacio de trabajo de los mismos, asegurando el seguimiento asintótico y acotamiento de parámetros estimados. Lo anterior es resultado, nuevamente, de la elección de los parámetros de diseño.

## Apéndice A

# Modelo de los sistemas usados en las simulaciones

De acuerdo con la Figura 4.1, cada uno de los subsistemas es un robot planar de dos grados de libertad, que al ser conectado con otro subsistema similar en la forma mostrada, adquiere un tercer grado de libertad *virtual*; sin embargo, al considerarse como independiente, para cada uno de los robots se tiene

$$M(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1\ell^2 + \frac{4}{3}m_2\ell^2c_2 & \frac{1}{3}m_2\ell^2 + \frac{1}{2}m_2\ell^2c_2 \\ \frac{1}{3}m_2\ell^2 + \frac{1}{2}m_2\ell^2c_2 & \frac{1}{3}m_2\ell^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_2\ell^2s_2\dot{q}_2 & -\frac{1}{2}m_2\ell^2s_2\dot{q}_1 - \frac{1}{2}m_2\ell^2s_2\dot{q}_2 \\ \frac{1}{2}m_2\ell^2s_2\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1g_0\ell c_1 + m_2g_0\ell c_1 + \frac{1}{2}m_2g_0\ell c_{12} \\ \frac{1}{2}m_2g_0\ell c_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

donde  $m_i$  es la masa en kilogramos del  $i$ -ésimo eslabón ,  $\ell$  es la longitud en metros de cada uno de

los eslabones,  $g_0$  es la aceleración de la gravedad. En este caso, se consideró que todos los eslabones tienen la misma longitud. Además, las señales dependientes del vector  $q$  son

$$c_i = \cos(q_i) \quad (\text{A.4})$$

$$s_i = \sin(q_i) \quad (\text{A.5})$$

$$c_{ij} = \cos(q_i + q_j) \quad (\text{A.6})$$

$$s_{ij} = \sin(q_i + q_j) \quad (\text{A.7})$$

En las simulaciones desarrolladas, es de suma importancia la estructura utilizada como término de interconexión. Una de las posibles formas para modelar dicho término es utilizando el *Jacobiano*  $J$  del robot, en la forma  $Z_i = J_j^T f$ . El Jacobiano está dado por

$$J = \begin{bmatrix} -\ell s_1 - \ell s_{12} & -\ell s_{12} \\ \ell c_1 + \ell c_{12} & \ell c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

en donde  $J \in R^{6 \times n}$ , y  $f \in R^6$  es un vector constante desconocido. Así, el término de interconexión puede ser expresado como una estructura linealmente parametrizable afectado por un término de perturbación.

$$Z_i = \begin{bmatrix} -(s_1 + s_{12}) & c_1 + c_{12} \\ -s_{12} & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell f_1 \\ \ell f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_6 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Tomando el primer término, la interconexión es representada por,

$$Z_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{j=N} Q_j(q_j, \dot{q}_j) c_{ij} \quad (\text{A.10})$$

Con el objeto de facilitar la realización de las simulaciones se considera, además de que todos los

eslabones tienen la misma longitud, también tienen la misma masa. Adicionalmente, en el vector constante  $f$  se consideran todos sus elementos de igual magnitud.

El vector  $f$  adquiere entonces la forma

$$f = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_0 \\ f_0 \\ f_0 \\ f_0 \\ f_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Los valores utilizados son:  $m_i = 0.25[Kg]$  para la masa,  $\ell = 0.5[m]$  para los eslabones y  $f_0 = 1$ ,  $f_0 \in R$ . La aceleración de la gravedad  $g_0 = 9.8062[m/s^2]$ .

# Bibliografía

- [1] G. Feng and Y. A. Jiang, "Variable structure based decentralized adaptive control". *IEEE Proc. D Contr. Theory Appl.*, Vol. 142, pp. 439-443, 1995.
- [2] L. C. Fu, "Robust adaptive decentralized control of robot manipulators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, pp. 106-110, 1992.
- [3] D. T. Gavel and T. C. Hsia, "Decentralized adaptive control of robot manipulators" *Proc. IEEE Int. Confr. Robotics Automation*, pp. 1230-1235, 1986.
- [4] D. T. Gavel and D. D. Siljak, "Decentralized adaptive control: structural conditions for stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 413-426, 1989.
- [5] P. A. Ioannou, "Decentralized adaptive control on interconnected systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, pp. 291-298, 1986.
- [6] J. H. Jean, L. C. Fu, "An adaptive control scheme for coordinated multimanipulator system," *IEEE Trans. Robotics Autom.*, Vol. 9, pp. 226-231, 1993.
- [7] Z.-P. Jiang, "Decentralized and adaptive nonlinear tracking of large-scale systems via output feedback", *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL. 45, NO. 11, 2000.
- [8] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems* (3rd Ed.), Prentice-Hall, 2002.
- [9] M. Krstic and P. V. Kokotovic, "Adaptive nonlinear output-feedback schemes with Marino-Tomei controller," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, pp.274280, 1996.

- [10] R. Marino and P. Tomei, "Global adaptive output-feedback control of nonlinear systems, Part I: Linear parametrization, Part II: Nonlinear parametrization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, pp. 1748, 1993.
- [11] B. M. Mirkin, "A new decentralized model reference adaptive control scheme for large scale systems", *Proc. 4th. IFAC Int. Symp. Adaptive Systems Control Signal Processing*, Grenoble, France, pp. 645650, 1992.
- [12] K. S. Narendra and N. O. Olgac, "Exact output tracking in decentralized adaptive control systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 47, NO. 2, 2002.
- [13] R. Ortega, "An energy amplification condition for decentralized adaptive stabilization," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 41, pp. 285-288, 1996.
- [14] H. Seraji, "Decentralized adaptive control of manipulators: Theory, simulation and experimentation", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, VOL. 5, NO. 2, 1989.
- [15] J. Spooner and K. Passino, "Adaptive control of a class of decentralized Nonlinear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL. 41, NO. 2, 1996.
- [16] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [17] L. Shi and S. K. Singh, "Decentralized adaptive controller design for large-scale systems with higher order interconnections," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, pp. 1106-1118, 1992.
- [18] D. D. Siljak, *Decentralized Control of Complex Systems*, San Diego: Academic Press, 1991.
- [19] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [20] Y. Tang and M. Tomizuka, *Decentralized robust control for a class of nonlinear systems*, Proceeding of the American Control Conference, 1997.
- [21] Y. Tang, M. Tomizuka, G. Guerrero and G. Montemayor, *Decentralized robust control of mechanical systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, VOL. 45, NO. 4, 2000.