



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO
EN INGENIERÍA

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA SEGREGACIÓN
DE MEDIOS GRANULARES

Tesis que para optar por el grado de:

Maestro en Ingeniería

(Ingeniería Civil – Análisis y Diseño de Presas de Tierra)

Presenta:

JESÚS SÁNCHEZ GUZMÁN

Tutor:

DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD



México D.F., agosto de 2009



JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Efraín Ovando Shelley

Secretario: M. I. Jorge Efraín Castilla Camacho

Vocal: Dr. Gabriel Auvinet Guichard

1^{er} Suplente: Dr. Rigoberto Rivera Constantino

2^o Suplente: M. I. Roberto Magaña del Toro

Lugar donde se realizó la tesis

Instituto de Ingeniería, UNAM

TUTOR DE TESIS

GABRIEL AUVINET GUICHARD

FIRMA

Agradecimientos

Al Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería de la UNAM, Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología e Instituto de Ingeniería de la UNAM; por contribuir al desarrollo de la ingeniería mexicana.

Al Dr. Gabriel Auvinet Guichard por su valiosa orientación en todo el desarrollo de esta investigación.

A los miembros del jurado por sus comentarios para mejorar el presente documento.

Dedicatoria

En el día ocho Venado del año doce Caña (1011 d. C.) en el señorío de *Yuku Tnoo* (actual Tilantongo, Nochixtlán, Oax.) nació el conquistador y unificador de la Mixteca. Se llamó *Ihà Nacuaa Tiyusi Ñaña* (Ocho Venado Garra de Jaguar) y es considerado el personaje más importante de Mesoamérica en su época.

Dedico respetuosamente este trabajo a este gran guerrero de *Ñuu Savi* (Mixteca) en conmemoración al primer milenio de su natalicio.



Imagen original: Códice Nutall. Museo Británico, Londres, UK.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	JUSTIFICACIÓN.....	1
1.2	OBJETIVOS.....	1
1.3	ALCANCES.....	2
CAPÍTULO 2	ANTECEDENTES.....	3
2.1	ACERCA DE LOS MATERIALES GRANULARES.....	3
2.2	PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LOS MATERIALES GRANULARES.....	4
2.2.1	Tamaño de partículas.....	4
2.2.2	Distribución y densidad de probabilidad granulométrica.....	5
2.2.3	Forma de partículas.....	6
2.2.4	Porosidad.....	7
2.2.5	Porosidad generalizada.....	7
2.2.6	Distribución espacial de partículas.....	8
2.2.7	Relación de vacíos.....	9
2.2.8	Compacidad relativa.....	10
2.2.9	Estructura geométrica.....	10
2.3	SEGREGACIÓN.....	13
2.3.1	Importancia en geotecnia.....	13
2.3.2	Cohesión entre partículas.....	15
2.4	MECANISMOS DE SEGREGACIÓN.....	16
2.4.1	Mecanismo de segregación geométrico.....	16
2.4.2	Mecanismo de convección.....	16
2.4.3	Mecanismo de condensación.....	17
2.5	MODELOS DE ESTUDIO.....	19
2.5.1	Modelos de rotación de medios granulares.....	19
2.5.2	Segregación en flujos superficiales.....	21
2.5.3	Vibración.....	25
2.6	TÉCNICAS DE SIMULACIÓN.....	26
2.6.1	Simulaciones geométricas de Monte Carlo.....	26
2.6.2	Simulaciones dinámicas de partículas.....	27
2.6.3	Simulación “estática” de la formación de medios granulares.....	28
CAPÍTULO 3	SIMULACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE MEDIOS GRANULARES.....	29
3.1	ALGORITMOS DEL MODELO BIDIMENSIONAL.....	29
3.1.1	Formación de la estructura bidimensional.....	29
3.1.2	Selección de la granulometría.....	31
3.1.3	Densificación de la estructura.....	33
3.1.4	Región de análisis.....	34
3.1.5	Revisión de la granulometría.....	35
3.1.6	Porosidad.....	35
3.1.7	Función característica binaria.....	36
3.1.8	Concentración espacial de discos.....	37
3.1.9	Función de correlación espacial.....	38
3.1.10	Distancia entre centros de discos.....	40
3.1.11	Segregación forzada en estructuras bidimensionales.....	41

3.2	ALGORITMOS DEL MODELO TRIDIMENSIONAL	41
3.2.1	Formación de la estructura tridimensional	42
3.2.2	Selección de la granulometría	43
3.2.3	Densificación de la estructura	45
3.2.4	Región de análisis	46
3.2.5	Revisión de la granulometría	46
3.2.6	Porosidad	46
3.2.7	Concentración espacial de esferas	47
3.2.8	Función de correlación espacial	48
3.2.9	Distancia entre centros de esferas	48
3.2.10	Segregación forzada en estructuras tridimensionales	49
3.3	GRANULOMETRÍAS	49
3.3.1	Caso bidimensional	49
3.3.2	Caso tridimensional	52
3.4	PROPIEDADES DE LAS ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES SIMULADAS	55
3.4.1	Porosidad	55
3.4.2	Densidad de probabilidad granulométrica	55
3.4.3	Coefficientes granulométricos	56
3.5	PROPIEDADES DE LAS ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES SIMULADAS	57
3.5.1	Porosidad	57
3.5.2	Densidad de probabilidad granulométrica	58
3.5.3	Coefficientes granulométricos	58
CAPÍTULO 4 ESTUDIO DE LA SEGREGACIÓN POR SIMULACIÓN		61
4.1	SEGREGACIÓN OBSERVADA EN ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES	61
4.1.1	Discos uniformes	61
4.1.2	Discos de granulometría bimodal	62
4.1.3	Discos de granulometría continua	63
4.2	SEGREGACIÓN OBSERVADA EN ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES	63
4.2.1	Esferas uniformes	63
4.2.2	Esferas de granulometría bimodal	64
4.2.3	Esferas de granulometría continua	64
4.3	INFLUENCIA DE LA GRANULOMETRÍA SOBRE LA SEGREGACIÓN 2 D	65
4.3.1	Granulometrías de discos uniformes	65
4.3.2	Granulometrías bimodales	69
4.3.3	Granulometrías continuas	76
4.4	INFLUENCIA DE LA GRANULOMETRÍA SOBRE LA SEGREGACIÓN 3 D	80
4.4.1	Granulometrías de esferas uniformes	80
4.4.2	Granulometrías bimodales	83
4.4.3	Granulometrías continuas	87
4.5	ALGUNAS IMPLICACIONES PRÁCTICAS	91
CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES		93
BIBLIOGRAFÍA		95

A	ANEXOS.....	97
A. 1	TEORÍA DE LA PROBABILIDAD	97
A.1.1	Definiciones	97
A.1.2	Distribuciones y densidades de probabilidad.....	97
A.1.3	Campos aleatorios	98
A. 2	EJEMPLOS DE SIMULACIONES REALIZADAS	99
A. 3	PROGRAMAS PARA COMPUTADORA	112
A.3.1	Modelo Bidimensional.....	112
A.3.2	Modelo Tridimensional.....	113

INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Forma de las partículas	6
Figura 2.2. Arreglos regulares de discos de igual diámetro	11
Figura 2.3. Arreglos regulares de esferas de igual diámetro, vistas en planta	11
Figura 2.4. Esquema de un puente líquido entre dos esferas idénticas, Mitarai y Nori, 2006	15
Figura 2.5. Movimiento de convección en un medio granular.....	17
Figura 2.6. Regímenes de flujo en un recipiente rotativo a baja velocidad angular	20
Figura 2.7. Regímenes de flujo a gran velocidad angular en recipiente rotativo	21
Figura 2.8. Esquema de la segregación en un flujo sobre superficie inclinada.....	22
Figura 2.9. Segregación en la formación de un montículo.....	23
Figura 2.10. Vaciado de material granular en celda bidimensional	24
Figura 2.11. Concentración de partículas de una mezcla bimodal de acuerdo a la posición en el recipiente, Boutreux <i>et al</i> , 1999.....	24
Figura 2.12. Modelo de segregación horizontal, Rapaport, 2001.	25
Figura 2.13. Simulación de geométrica de estructuras granulares con el método de Monte Carlo	27
Figura 2.14. Idealización del contacto entre partículas.....	28
Figura 3.1. Recipiente bidimensional.....	30
Figura 3.2. Selección de apoyos.....	30
Figura 3.3. Densidad de probabilidad en área de una granulometría bimodal	32
Figura 3.4. Determinación del tamaño de partícula para granulometría continua	33
Figura 3.5. Superficie de una estructura 2 D con MS	34
Figura 3.6. Superficie de una estructura 2 D con MD.....	34
Figura 3.7. Criterio de selección de partículas.....	35
Figura 3.8. Ubicación de partículas en la distribución granulométrica.....	35
Figura 3.9. Estimación de áreas con la técnica de Monte Carlo	36
Figura 3.10. Relación de la variación de <i>NDI</i> con la segregación	38
Figura 3.11. Método de la trayectoria para obtener la función de autocorrelación.....	39
Figura 3.12. Recipiente tridimensional, curvatura exagerada.....	42
Figura 3.13. Limitación en la colocación de partículas, granulometría bimodal 3 D	43
Figura 3.14. Tamaño de partículas, granulometrías bimodales en área 2 D	51
Figura 3.15. Tamaño de partículas, granulometrías continuas en área 2 D	52
Figura 3.16. Tamaño de partículas, granulometrías bimodales en volumen 3 D.....	54
Figura 3.17. Tamaño de partículas, granulometrías continuas en volumen 3 D	54
Figura 3.18. Porosidad en estructuras bidimensionales	55
Figura 3.19. Ejemplos de distribución y densidades de probabilidad granulométrica en estructuras 2 D	56
Figura 3.20. Coeficientes granulométricos de las estructuras 2 D.....	57
Figura 3.21. Porosidad en estructuras tridimensionales.....	57
Figura 3.22. Ejemplos de distribución y densidades de probabilidad granulométrica en estructuras 3 D	58
Figura 3.23. Coeficientes granulométricos de las estructuras 3 D	59
Figura 4.1. Simulación bidimensional de granulometría uniforme.....	62
Figura 4.2. Acercamiento en simulación 2 D de granulometría bimodal.....	62
Figura 4.3. Acercamiento en simulación 2 D de granulometría continua.....	63
Figura 4.4. Configuración de medio granular uniforme 3 D en el fondo del recipiente	64

Figura 4.5. Estructuración espontánea en granulometría uniforme bidimensional	65
Figura 4.6. Concentración espacial de discos uniformes en sondeos verticales	66
Figura 4.7. Porosidad en sondeos rectos, granulometría bidimensional uniforme.....	67
Figura 4.8. Coeficiente de correlación de NDI entre estructuras de granulometría uniforme 2 D.....	67
Figura 4.9. Comportamiento de NDI en sondeos verticales, granulometría bimodal 2 D	69
Figura 4.10. Efecto de la proporción de partículas pequeñas sobre la segregación	70
Figura 4.11. Efecto de α sobre la variabilidad de NDI en granulometría bimodal 2 D	71
Figura 4.12. Segregación CV_{NDI} en estructuras de granulometría bimodal 2 D	71
Figura 4.13. Correlación cruzada de NDI en estructuras 2 D de granulometría bimodal $p_{2A}=0.5$, $\alpha=5$.	72
Figura 4.14. Densidades de probabilidad de T en granulometría bimodal 2 D	73
Figura 4.15. Densidades de probabilidad de T en granulometría bimodal 2 D	73
Figura 4.16. Segregación τ_{2T} en estructuras de granulometría bimodal 2 D	74
Figura 4.17. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.3$, $\alpha=15$	75
Figura 4.18. Ejemplo de NDI en granulometría continua 2 D con $Cu=3.5$	76
Figura 4.19. Segregación CV_{NDI} en granulometría continua 2 D	77
Figura 4.20. Ejemplos de densidades de probabilidad de T en granulometría continua 2 D	78
Figura 4.21. Segregación por fracción granulométrica en granulometría continua 2 D con $Cu=3.4$	79
Figura 4.22. Segregación de los discos más pequeños y más grandes en granulometría continua	79
Figura 4.23. Concentración media de partículas, granulometrías uniformes 3 D	81
Figura 4.24. Porosidad en planos de corte horizontales y verticales, esferas uniformes 3 D.....	81
Figura 4.25. Correlación cruzada de NEI en granulometría uniforme 3 D	82
Figura 4.26. Efecto de la proporción de partículas pequeñas sobre la segregación 3 D	83
Figura 4.27. Efecto de α sobre la variabilidad de NEI en granulometría bimodal 3 D.....	84
Figura 4.28. Segregación CV_{NEI} en estructuras de granulometría bimodal 3 D	85
Figura 4.29. Ejemplos de la densidad de probabilidad de T en granulometría bimodal 3 D	86
Figura 4.30. Efecto de paredes laterales sobre n y NEI , estructuras 3 D con $\lambda=1$, $\alpha=10$	88
Figura 4.31. Segregación CV_{NEI} en estructuras de granulometría continua 3 D.....	88
Figura 4.32. Densidades de probabilidad de T normalizada, granulometría continua 3 D	89
Figura 4.33. Segregación por fracción granulométrica en una granulometría continua 3 D.....	90
Figura 4.34. Segregación de las esferas más pequeñas y más grandes en granulometría continua	91
Figura A.1. Estructura granular de discos uniformes.....	100
Figura A.2. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.1$ y $\alpha=5$	101
Figura A.3. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.3$ y $\alpha=5$	102
Figura A.4. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.3$ y $\alpha=10$	103
Figura A.5. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.3$ y $\alpha=15$	104
Figura A.6. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.5$ y $\alpha=5$	105
Figura A.7. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.7$ y $\alpha=5$	106
Figura A.8. Estructura bidimensional, granulometría continua con $\lambda=1$ y $\alpha=10$	107
Figura A.9. Estructura 2 D de granulometría continua ($\lambda=1$, $\alpha=10$) con segregación forzada.....	108
Figura A.10. Estructura bimodal tridimensional con $p_{3V}=0.3$ y $\alpha=4$	109
Figura A.11. Estructura tridimensional de granulometría continua, vista en planta	110
Figura A.12. Estructura tridimensional de granulometría continua, vista en perspectiva.....	111

INDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Compacidades máximas y mínimas de algunos materiales	9
Tabla 2.2. Denominación de la compacidad relativa	10
Tabla 2.3. Criterio de segregación para el diseño de filtros y drenes granulares.....	14
Tabla 2.4. Efecto de la relación de diámetros, volúmenes y espesor del material granular sobre los mecanismos de segregación	18
Tabla 3.1. Datos de las estructuras bidimensionales.....	51
Tabla 3.2. Datos de las estructuras tridimensionales	53
Tabla 4.1. Características de las estructuras de granulometría uniforme 2 D	68
Tabla 4.2. Medidas descriptivas de CV_{NDI} en una granulometría bimodal 2 D.....	72
Tabla 4.3. Segregación por fracción granulométrica en granulometría continua 2 D.....	78
Tabla 4.4. Características de las estructuras de granulometría uniforme 3 D	82
Tabla 4.5. Segregación en estructuras de granulometría bimodal 3 D.....	86
Tabla 4.6. Segregación por fracción granulométrica en granulometría continua 3 D.....	90
Tabla A.1. Distribuciones de probabilidad y medidas descriptivas	98

RESUMEN

Se realiza un estudio de la segregación geométrica que se presenta con la formación de medios granulares. Se utiliza un modelo numérico para la simulación geométrica de la estructura granular. Las partículas se idealizan con círculos (modelo 2 D) y esferas (modelo 3 D). Tanto para la simulación como para el estudio de las estructuras granulares se hace un amplio uso de la teoría de probabilidad.

Se simulan materiales estrictamente uniformes, bimodales (dos tamaños) y de granulometría continua. Se consideran dos variables de medición de la segregación que permiten apreciar los efectos de las variables granulométricas. En estructuras uniformes se observa la presencia de una estructuración espontánea. En las bimodales y continuas la segregación depende principalmente de la relación entre el diámetro máximo y mínimo de las partículas.

Se concluye que la segregación es inherente, afecta principalmente a las partículas pequeñas y es más pronunciada en granulometrías bimodales tridimensionales. Se señalan algunas implicaciones prácticas que la segregación puede tener en los problemas de la geotecnia y otras disciplinas. Se plantean algunas perspectivas para ampliar el campo de estudio de estas investigaciones a los suelos granulares naturales.

Palabras clave: segregación inherente, simulación, estructuración espontánea, relación de diámetros, concentración espacial, distancia entre centros.

ABSTRACT

A study of the geometric segregation is carrying out, it is presented with the granular media formation. A numeric model is used for the geometric simulation of granular structure. The particles are idealized through circles (model 2 D) and spheres (model 3 D). For both the simulation and granular structures study the probability theory is widely used.

Strictly uniform materials, bimodals (two size of particle) and continuous grain size are simulated. Two variables of measurement that allow to appreciate the grain variable effects are considered. In uniform structures the presence of a spontaneous structuring is observed. In bimodals and continuous grain size, the segregation mainly depends of the maximum and minimum diameter of particle ratio.

The segregation is inherent, it affects mainly to small particles and the three-dimensional and bimodal grain sizes are most segregated, is concluded. Some practical implications that the segregation can have in geotechnical problems and other disciplines are remarked. In order to enlarge the scope of these investigations to natural granular soils, some perspectives are outlined.

Key words: inherent segregation, simulation, spontaneous structuring, diameter ratio, spatial concentration, dist among centers.

NOTACIÓN

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
2 D	Modelo o simulación bidimensional
3 D	Modelo o simulación tridimensional
α	Cociente o relación entre diámetro máximo y mínimo
λ	Coefficiente de distribución granulométrica
$\rho_{1,2}$	Coefficiente de correlación cruzada de <i>NDI</i> o <i>NEI</i> en diferentes estructuras de igual granulometría
C_c	Coefficiente de curvatura granulométrica
C_u	Coefficiente de uniformidad granulométrica
D	Diámetro de partícula
$D_{m\acute{a}x}$	Diámetro máximo de partícula en una granulometría
$D_{m\acute{i}n}$	Diámetro mínimo de partícula en una granulometría
h	Cambio de posición en el recipiente de simulación
MS	Método de formación suelto de estructuras
MD	Método de formación denso de estructuras

MODELO BIDIMENSIONAL

λ_L	Concentración de discos por unidad de longitud en sondeos rectos
ρ_{NDI}	Coefficiente de autocorrelación lineal de <i>NDI</i>
τ_{2T}	Promedio de las distancias mínimas normalizadas de todas las fracciones en que se divide una granulometría bidimensional
CV_{NDI}	Coefficiente de variación del número de discos intersecados por sondeos rectos en simulaciones bidimensionales
$E_{2A}\{D\}$	Valor esperado del diámetro de partícula en frecuencias de área
$E_{2D}\{D\}$	Esperanza en número del diámetro de los discos
$F_{2A}(d)$	Función de distribución granulométrica en frecuencias de área
$F_{2D}(d)$	Función de distribución granulométrica en frecuencias de número
$f_{2A}(d)$	Densidad de probabilidad granulométrica en frecuencias de área
$f_{2D}(d)$	Densidad de probabilidad granulométrica en frecuencias de número
$f_{2T}(t)$	Densidad de probabilidad de la distancia mínima entre centros de partículas de la misma fracción granulométrica
n	Porosidad bidimensional
n_L	Porosidad a lo largo de una línea o sondeo recto
<i>NDI</i>	Número de discos intersecados por un sondeo recto
p_{2A}	Probabilidad de ocurrencia en área de las partículas pequeñas en granulometría bimodal
p_{2D}	Probabilidad de ocurrencia en número de las partículas pequeñas en granulometría bimodal
q_{2A}	Probabilidad de ocurrencia en área de las partículas grandes en granulometría bimodal
q_{2D}	Probabilidad de ocurrencia en número de los discos grandes en granulometría bimodal
T_{2T}	Distancia mínima entre los centros de discos vecinos
\bar{T}_i	Distancia mínima media los entre centros de las partículas de la <i>i</i> – ésimas fracción granulométrica
x, z	Coordenadas cartesianas en el recipiente bidimensional

° ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

λ_A	Concentración de esferas por unidad de área en planos de corte
ρ_{NEI}	Coefficiente de autocorrelación lineal de NEI
τ_{3T}	Promedio de las distancias mínimas normalizadas de todas las fracciones en que se divide una granulometría tridimensional
CV_{NEI}	Coefficiente de variación del número de esferas intersecadas por cortes planos en simulaciones tridimensionales
$E_{3D}\{D\}$	Valor esperado del diámetro de partícula en frecuencias de número
$E_{3V}\{D\}$	Valor esperado del diámetro de partícula en frecuencias de volumen
$F_{3D}(d)$	Función de distribución granulométrica en número
$F_{3V}(d)$	Función de distribución granulométrica en volumen
$f_{3D}(d)$	Densidad de probabilidad granulométrica en número
$f_{3V}(d)$	Densidad de probabilidad granulométrica en volumen
$f_{3T}(t)$	Densidad de probabilidad de la distancia mínima entre centros de partículas de la misma fracción granulométrica
n	Porosidad tridimensional
n_A	Porosidad en un plano de corte
NEI	Número de esferas intersecadas por un plano de corte
p_{3D}	Probabilidad de ocurrencia en número de las partículas pequeñas en granulometría bimodal
p_{3V}	Probabilidad de ocurrencia en volumen de las partículas pequeñas en granulometría bimodal
q_{3D}	Probabilidad de ocurrencia en número de las esferas grandes en granulometría bimodal
q_{3V}	Probabilidad de ocurrencia en volumen de las esferas grandes en granulometría bimodal
T_{3T}	Distancia mínima entre los centros de esferas vecinos
\bar{T}_i	Distancia mínima media los entre centros de las partículas de la i – ésima fracción granulométrica
x, y, z	Coordenadas cartesianas en el recipiente tridimensional

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1 JUSTIFICACIÓN

Los materiales granulares se encuentran presentes en un sin número de procesos productivos, fenómenos de interés científico o técnico y en particular en la geotecnia. Además, por su especial comportamiento han sido motivo de estudio desde la antigüedad.

Entre la gran diversidad de fenómenos que se presentan en los medios granulares está la segregación, la cual modifica localmente las características del medio, al grado en que puede quedar fuera de las especificaciones requeridas para el cumplimiento satisfactorio de su función.

El tamaño, forma, densidad y rugosidad de la superficie de las partículas, entre otras, son considerados como las principales propiedades del material causantes de la segregación. Por otra parte, el manejo del material también tiene una influencia importante sobre el fenómeno.

A pesar de que en investigaciones recientes se han incorporado diversas herramientas de estudio, como conceptos de dinámica de fluidos, medio continuo, medio discreto, dinámica de partículas y consideraciones geométricas; este comportamiento es poco comprendido. El panorama de estudio es todavía muy amplio y complejo, principalmente porque la eliminación de cualquier simplificación requiere de un gran esfuerzo de cálculo y porque aún no se ha logrado establecer un concepto de referencia satisfactorio para describir la segregación.

1.2 OBJETIVOS

Estudiar la segregación geométrica de los medios granulares mediante la aplicación de un modelo de simulación de formación de estructuras por computadora en dos y tres dimensiones.

Mostrar que la segregación geométrica de los medios granulares es inherente o espontánea, ya que aparece desde la formación de éstos sin necesidad de someterlos a un manejo especial.

Observar la influencia de la granulometría por tipo de distribución granulométrica y por las diferencias entre los tamaños de las partículas. Para facilitar la comprensión del fenómeno se emplearán granulometrías de partículas idénticas, granulometrías bimodales y continuas, como primera aproximación a los materiales de interés en la geotecnia.

Describir la segregación geométrica mediante parámetros estadísticos y probabilistas aplicados a la concentración espacial de partículas y a la distancia entre centros de partículas similares, con la intención de no limitarse a las descripciones visuales subjetivas.

Estimar algunas propiedades geométricas de los materiales simulados para compararlos con los materiales naturales y evaluar algunas implicaciones de la segregación en la ingeniería geotécnica.

1.3 ALCANCES

Se realizan simulaciones bidimensionales y tridimensionales, donde las partículas se representan mediante círculos y esferas respectivamente, y las interacciones entre ellas son exclusivamente de carácter geométrico. Estas idealizaciones permiten eliminar el efecto de otras propiedades geométricas como la forma de las partículas y la rugosidad de su superficie.

Los tipos de granulometrías empleadas: uniformes, bimodales y continuas, así como la diferencia entre los diámetros de las partículas constituyen las principales variables que propician la segregación geométrica. Estas granulometrías, por una parte tratan de aproximarse a los materiales granulares de interés en geotecnia (arenas, gravas y enrocamientos) cuando son continuas; pero es importante analizar previamente granulometrías discontinuas que faciliten la interpretación de los resultados como lo son las bimodales y uniformes.

Se evalúan algunas propiedades y la segregación en las distintas estructuras simuladas aplicando un conjunto de algoritmos construidos para esta finalidad.

Finalmente se identifican los factores que favorecen la segregación espontánea o inherente, quedando fuera del alcance de esta investigación la agitación del material y la presencia de la fase líquida en el medio.

CAPÍTULO 2 ANTECEDENTES

2.1 ACERCA DE LOS MATERIALES GRANULARES

Un material granular es aquel que se encuentra constituido por granos o partículas independientes, semejantes y perfectamente identificables entre sí como elementos constitutivos del material. En conjunto, y pese a su aparente simplicidad, los materiales granulares tienen un comportamiento complejo.

Los materiales granulares pueden comportarse como un sólido, líquido o gas, aunque nunca tengan un comportamiento idéntico a ellos. Por ejemplo, adoptan la forma del recipiente que los contiene, como los líquidos, pero pueden adoptar una forma cualquiera cuando no se encuentran encerrados en un molde, como los sólidos. A partir de estos dos casos se ha mostrado experimentalmente que estos medios recuerdan sus estados pasados, presentando un efecto de memoria que queda grabado en su estructura.

Al igual que un líquido, los medios granulares pueden fluir por una tubería, pero la presión interna del medio granular no puede expresarse como presión hidrostática. Si la concentración de granos es baja con alta energía cinética, el comportamiento se asemeja al de un gas, con la diferencia que este último es altamente disipativo.

Otra característica de los medios granulares secos es que presentan de manera más o menos generalizada, una resistencia a la mezcla homogénea de sus partículas. Si dos materiales granulares con diferente tamaño de grano, densidad, forma, coeficiente de restitución elástico o coeficiente de fricción, están mezclados y se les aplica cualquier tipo de energía, presentan tendencia a desmezclarse. El medio granular se autoorganiza hasta que reconstituye localmente las agrupaciones de partículas idénticas entre ellas, a este fenómeno se le conoce como segregación.

Las características antes mencionadas, así como el papel que desempeñan en distintos procesos productivos, han hecho necesario el estudio del comportamiento de los materiales granulares, pues están presentes en los problemas de la minería, agricultura, ingeniería civil, ingeniería química, industria farmacéutica y geología, por mencionar los más importantes.

Los primeros estudios sobre los medios granulares se remontan a los antiguos griegos. Más adelante Coulomb en 1773, Faraday en 1831 y Reynolds en 1885, estudiaron algunas propiedades como la dilatancia (capacidad de expandirse) y la fricción entre los granos. Coulomb descubrió que la resistencia a lo largo de una superficie de falla dentro de un material granular es función de la carga normal.

Debido a que la mayoría de la industria maneja materiales granulares de algún tipo y a que alrededor del 10% del consumo de energía mundial se debe al transporte o procesamiento de estos medios, a finales del siglo XX se comenzó a estudiar de manera seria su comportamiento físico a fin de reemplazar las recomendaciones empíricas con las que se contaba. Los estudios se han extendido a diversas aplicaciones que se rigen por el comportamiento colectivo de millones de partículas sólidas.

Actualmente, los problemas relacionados con el transporte y almacenamiento de los materiales granulares causan serias pérdidas a las industrias a falta de tecnología para manipular y controlar estos materiales.

Existen diversos problemas potencialmente dañinos que surgen durante el diseño, producción y vaciado de medios granulares utilizados en la ingeniería civil. Uno de ellos, de gran importancia es la segregación, que como se ha dicho, consiste en la concentración de partículas de una misma característica en ciertas regiones del medio.

En la ingeniería civil los materiales granulares como enrocamientos, gravas y arenas, están presentes tanto como materiales de apoyo de las estructuras, elementos constitutivos estructurales o como almacenamiento de líquidos (acuíferos por ejemplo). De aquí se desprende que los materiales granulares son altamente aprovechables y por lo tanto, el estudio de su naturaleza es muy valioso.

2.2 PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LOS MATERIALES GRANULARES

Pese a que en el interior de la estructura de un medio granular coexiste una gran diversidad en tamaños y formas de los sólidos y vacíos, también aparece una regularidad que permite describir la estructura mediante parámetros y funciones sencillas (Auvinet, 1986).

Tradicionalmente, parámetros como el tamaño y forma de los granos, porosidad, relación de vacíos, compacidad relativa y distribución granulométrica, han sido empleados para caracterizar las estructuras de los suelos granulares. A continuación se abordan algunos conceptos que pueden ser de utilidad para caracterizar un material granular en el contexto del fenómeno de la segregación geométrica.

2.2.1 Tamaño de partículas

Asignar una dimensión única a una partícula no es sencillo, dada la irregularidad natural de las formas geométricas de los granos, tampoco se tiene un método de aceptación general para definir dicho tamaño. Entre los procedimientos más comunes que se han sugerido, están los que asignan un diámetro o tamaño único, el cual resulta útil para diversos fines prácticos.

Un primer método consiste en un análisis mecánico haciendo pasar el material por un juego de tamices ordenados de diferentes dimensiones, de forma rectangular o circular. A cada partícula se le asigna el tamaño comprendido entre la dimensión de la malla más grande en la que se quedó retenida y el tamaño de la malla menor por la que logró pasar. Este método es ampliamente utilizado para la clasificación de suelos.

Por otra parte, el tamaño de una partícula de forma cualquiera puede representarse por el diámetro de una esfera cuyo volumen sea igual al de la partícula. Este método es conocido como método de la esfera equivalente. También se acepta el tamaño obtenido de la igualdad de superficies.

Otras alternativas consisten en: medir las dimensiones en tres direcciones ortogonales entre sí y tomar alguna medida de tendencia central, tomar la esperanza de la dimensión en una dirección aleatoria que pase por el centro de gravedad, calcular un diámetro efectivo a partir de la aplicación de la ley de Stokes, entre otros.

De todo esto, un aspecto destacable es que el significado del tamaño de la partícula depende de la dimensión que se mide y de la forma de la medición. En aquellos casos en los que las partículas se

acercan a una forma equidimensional, como en gravas y arenas, la medida única no está muy alejada de la realidad; pero en partículas donde predomina significativamente una dimensión, el concepto proporciona poca información.

2.2.2 Distribución y densidad de probabilidad granulométrica

Después de haber determinado, de acuerdo a alguno de los criterios anteriores, el tamaño de las partículas de una muestra representativa del medio, es posible establecer una función $F_{3V}(d)$ definida como la proporción en peso o volumen, aceptando un peso volumétrico constante, de partículas con diámetro menor o igual que d (Auvinet, 1986). Esta función es monótonamente no decreciente y alcanza el valor máximo de 100% para diámetros iguales o superiores al de la partícula más grande de la muestra.

Es posible dar una interpretación probabilista simple a la función de distribución granulométrica $F_{3V}(d)$, ya que representa la probabilidad de que un punto tomado al azar dentro de los granos pertenezca a una partícula de diámetro menor o igual que d . La derivada, $f_{3V}(d)$ de la distribución granulométrica respecto al diámetro, se conoce como densidad en el volumen de los diámetros de partícula y es una función tal que:

$f_{3V}(d)\Delta d$ Proporción, en peso o volumen, de partículas con diámetro comprendido entre d y $d+\Delta d$

La forma de la curva granulométrica representativa de $F_{3V}(d)$ se describe comúnmente mediante dos coeficientes: el coeficiente de uniformidad, que representa la uniformidad de los tamaños de partícula y el coeficiente de curvatura que ayuda a definir la graduación.

El coeficiente de uniformidad se define como:

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} \quad (2.1)$$

donde

D_{60} : Tamaño tal que, en peso (o volumen), 60% de las partículas tienen un tamaño igual o menor

D_{10} : Tamaño tal que, en peso (o volumen), 10% de las partículas tienen un tamaño igual o menor (también llamado diámetro efectivo)

En realidad, C_u es un coeficiente de no-uniformidad, puesto que es menor cuanto más uniformidad existe en el material. Los suelos con C_u menor de tres se consideran muy uniformes, de 3 a 5 se consideran de uniformidad media, y si $C_u > 5$ se clasifican generalmente como no uniformes; las arenas naturales rara vez presentan coeficientes de uniformidad menores de dos.

El coeficiente de curvatura está dado por:

$$C_c = \frac{D_{30}^2}{D_{60}D_{10}} \quad (2.2)$$

donde

D_{30} : Tamaño tal que, en peso (o volumen), 30% de las partículas tengan un tamaño igual o menor

Sobre los valores de este coeficiente se puede comentar que varían entre uno y tres en suelos bien graduados, con amplio intervalo de tamaño de partículas y cantidades apreciables en los tamaños intermedios.

El estudio de una estructura granular resulta más cómodo sobre frecuencias en número, de manera que es necesario transformar la distribución en volumen a una distribución en términos de número de partículas. Se define como distribución granulométrica en número $F_{3D}(d)$ a la proporción, en número, de partículas con diámetro menor o igual que d . Derivando esta función respecto al diámetro se obtiene la densidad en número $f_{3D}(d)$ cuya definición es análoga a la densidad en volumen.

Además, a lo largo del desarrollo de este documento se acepta la hipótesis de peso volumétrico constante; asimismo, se considera que todos los medios granulares estudiados se encuentran completamente secos.

2.2.3 Forma de partículas

En vista de que el tamaño de las partículas no puede expresarse por un número único, puede resultar de utilidad hacer referencia a la forma. De manera común se utilizan términos cualitativos como: redondeada, sub-redondeada, sub-angulosa, angulosa; para indicar la agudeza de los bordes de la partícula. El alargamiento preferencial puede estimarse si se asignan medidas en tres dimensiones ortogonales: largo, ancho y espesor; esto permite establecer criterios cuantitativos de comparación dimensional, clasificando la forma como equidimensional, forma aplanada o alargada.

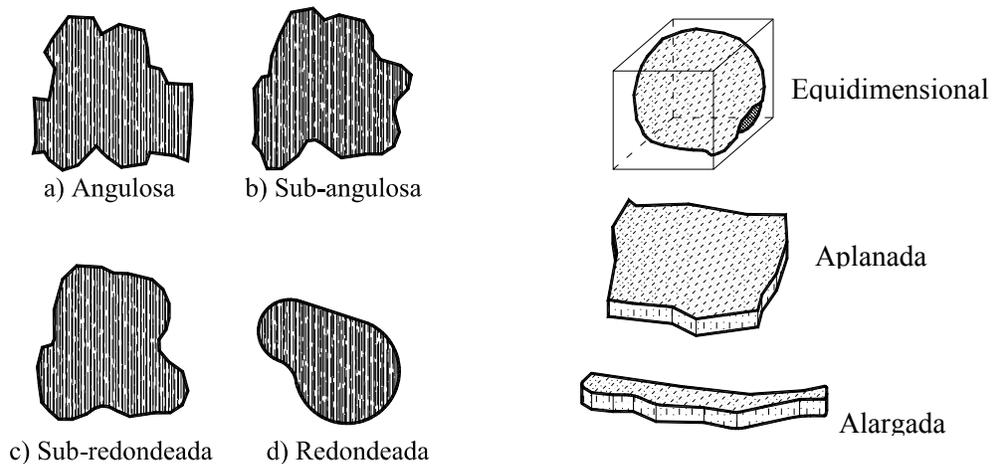


Figura 2.1. Forma de las partículas

Diversos investigadores han formulado relaciones para obtener el grado de esfericidad, aplanamiento y alargamiento, basándose en las dimensiones ya citadas. Los métodos consisten en igualar la superficie o el volumen de la partícula con una forma geométrica sencilla y de esta última obtener las dimensiones de referencia.

2.2.4 Porosidad

Entre los parámetros que se utilizan para representar las proporciones de vacíos y sólidos en un medio particulado, se encuentra la porosidad. Se entiende por porosidad la relación entre el volumen de vacíos y el volumen total del material.

Sea V_T el volumen total de la muestra y V_S el volumen de la fase sólida contenida en ella, entonces el volumen de vacíos ocupados o no por un líquido es $V_V = V_T - V_S$ y la porosidad n está dada por:

$$n = \frac{V_V}{V_T} = \frac{V_T - V_S}{V_T} \quad (2.3)$$

Esta propiedad índice es muy sensible cuando el tamaño de las partículas se acerca al volumen total de la muestra, puesto que la porosidad puede acercarse a los valores extremos: cero si existen únicamente sólidos y uno cuando solo existe vacío. Por lo tanto, es necesario estudiar un volumen suficientemente grande de material para que la porosidad se considere constante y sea representativa del medio.

En ocasiones se prefiere utilizar la compacidad, que es el complemento a la unidad de la porosidad e indica el grado de acomodo de las partículas.

2.2.5 Porosidad generalizada

En el estudio de la estructura granular es interesante generalizar la porosidad al caso de la intersección del medio por un plano o sondeo recto, prestando atención a la porosidad de las partículas mayores de un cierto tamaño y considerando como parte de los vacíos a las partículas pequeñas.

Los primeros resultados de interés que se han obtenido de la generalización, es que en un medio homogéneo e isótropo, la porosidad tridimensional (n) es igual a la porosidad obtenida de un corte plano (n_A) o sondeo recto (n_L). A esto se le conoce como *Principio de Delesse* y también es válido para la relación de vacíos.

$$n = n_A = n_L \quad (2.4)$$

Inclusive en medios anisótropos, la porosidad en un plano o a lo largo de un sondeo puede ser altamente variable de un plano o sondeo a otro, pero el valor esperado de la porosidad de estos lugares geométricos seleccionados al azar, coincide con la porosidad tridimensional.

La porosidad y distribución granulométrica generalizada pueden representarse por medio de una sola función $G_3(d)$, igual a la proporción del volumen total de una muestra, que está ocupada por partículas de diámetro menor o igual que d o por vacíos (Auvinet, 1986). Si $d=0$, $G_3(d)$ corresponde a la porosidad del material y para valores superiores de d , la función se interpreta como la porosidad de las partículas mayores que d .

En mezclas bimodales (solo dos tamaños de partículas) es posible estimar la proporción Z_1 y Z_2 de partículas de cada clase que minimizan la porosidad del conjunto. Sin embargo, la presencia de las partículas pequeñas hace que las grandes se separen e incrementen su porosidad, y la presencia de las grandes da lugar a un efecto de pared que incrementa la porosidad de las pequeñas.

$$\text{Proporción de partículas pequeñas} \quad Z_1 = \frac{1}{1 + n_0} \quad (2.5)$$

$$\text{Proporción de partículas grandes} \quad Z_2 = 1 - Z_1 = \frac{n_0}{1 + n_0} \quad (2.6)$$

Donde n_0 es la porosidad por separado de los componentes de la mezcla

Los dos efectos mencionados pueden despreciarse sólo si $D_{m\acute{a}x} \gg D_{m\acute{i}n}$. De acuerdo con la fórmula de Caquot (Auvinet, 1986) la porosidad mínima de la mezcla está dada por la porosidad por separado de cada uno de los componentes ($n_0=0.44$) y por los tamaños de partículas.

$$n = n_0 - n_0(1 - n_0) \left(\frac{1 - \frac{D_{m\acute{i}n}}{D_{m\acute{a}x}}}{1 + \frac{D_{m\acute{i}n}}{D_{m\acute{a}x}}} \right)^2 \quad (2.7)$$

Las consideraciones anteriores pueden generalizarse a mezclas de N componentes con la finalidad de densificar las estructuras granulares. Se ha mostrado, sin embargo, que dependiendo de la relación de diámetros, las mezclas de dos componentes pueden ser más densas que las de tres, al igual que las de N componentes más densas que las de $N+1$. Por lo tanto, no es posible proponer una granulometría continua que minimice la porosidad.

2.2.6 Distribución espacial de partículas

Los arreglos entre partículas en el interior de un medio granular pueden describirse introduciendo una función aleatoria $N_V(V)$ igual al número de partículas contenidas en un volumen cualquiera V . La intensidad de esta función, igual número de partículas por unidad de volumen (λ_V) en medios homogéneos de partículas aproximadamente esféricas es:

$$\lambda_V = \frac{1 - n}{E_{3D} \left\{ \frac{\pi}{6} D^3 \right\}} \quad (2.8)$$

Donde: n es la porosidad del material

$E_{3D} \left\{ \frac{\pi}{6} D^3 \right\}$ es la esperanza matemática (en número) del volumen de una partícula

Se pueden introducir funciones aleatorias que representan el número de partículas por unidad de área (λ_A) o de longitud (λ_L) en cortes planos y sondeos rectos. Si se toma en cuenta que la probabilidad de que una partícula sea intersecada es proporcional a su diámetro es posible mostrar que las concentraciones de partículas están dadas por las ecuaciones 2.9 y 2.10 para un plano y un sondeo recto respectivamente (Auvinet, 1986).

$$\lambda_A = \lambda_V E_{3D} \{D\} \quad (2.9)$$

$$\lambda_L = \lambda_V E_{3D} \left\{ \frac{\pi}{4} D^2 \right\} \quad (2.10)$$

Al área y diámetros de los sólidos contenidos en los planos y sondeos de corte se les llama áreas y diámetros aparentes. De la misma forma se asigna el mismo calificativo a las propiedades geométricas del medio estimadas en los cortes mencionados.

2.2.7 Relación de vacíos

En lugar de la porosidad, en geotecnia es común recurrir a otra propiedad índice llamada índice de poros o relación de vacíos, que se define como el cociente del volumen de vacíos entre el volumen de los sólidos contenidos en la muestra:

$$e = \frac{V_V}{V_S} = \frac{V_T - V_S}{V_S} \quad (2.11)$$

La relación que existe entre la porosidad y la relación de vacíos es:

$$e = \frac{n}{1-n} \quad \text{o} \quad n = \frac{e}{1+e} \quad (2.12)$$

Los valores de la relación de vacíos pueden variar de cero (presencia solamente de sólidos) a infinito (presencia solamente de vacío). Esta variable es por tanto muy inestable a pequeña escala.

Asimismo, cuando el volumen de la muestra tomado para estimar esta propiedad sea del orden del volumen de los poros más grandes, el valor esperado de la relación de vacíos medida en esta muestra presenta un sesgo respecto a la relación de vacíos real de la masa granular y se tiende a sobrestimar este parámetro (Auvinet, 1986).

A manera de ejemplo, en la tabla 2.1 se muestran algunos valores de porosidad y relación de vacíos para un grupo de materiales ideales y otros materiales comunes en mecánica de suelos.

Tabla 2.1. Compacidades máximas y mínimas de algunos materiales

Material	Porosidad (%)		Relación de vacíos	
	$n_{m\acute{a}x}$	$n_{m\acute{i}n}$	$e_{m\acute{a}x}$	$e_{m\acute{i}n}$
Discos uniformes	21.5	9.3	0.27	0.1
Esferas uniformes	47.6	26	0.92	0.35
Arena Ottawa normalizada	44	33	0.80	0.50
Arena limpia uniforme	50	29	1.00	0.40
Limo inorgánico	52	29	1.10	0.40
Arena limosa	47	23	0.90	0.30
Arena fina a gruesa	49	17	0.95	0.20
Arena micácea	55	29	1.20	0.40
Arena limosa y grava	46	12	0.85	0.14

2.2.8 Compacidad relativa

La compacidad relativa es una propiedad índice empírica introducida por Terzaghi, que indica el grado de compactación de un material respecto a sus valores extremos posibles. Se calcula a partir de la relación de vacíos de la siguiente manera:

$$C_r(\%) = \frac{e_{m\acute{a}x} - e}{e_{m\acute{a}x} - e_{m\grave{i}n}} \times 100 \quad (2.13)$$

Donde:

- $e_{m\acute{a}x}$ Relación de vacíos correspondiente al estado más suelto del suelo
- $e_{m\grave{i}n}$ Relación de vacíos correspondiente al estado más compacto del suelo
- e Relación de vacíos de la muestra en estado natural

Cuanto más uniforme es un material, más angulosas y pequeñas sean las partículas, y menor energía se invierta en el proceso de formación, se tiene una mayor posibilidad de formar una agrupación floja de partículas (la compacidad es mínima). La compacidad máxima se obtiene en materiales bien graduados (con una amplia gama de tamaños) porque las partículas pequeñas pueden rellenar los huecos entre las grandes.

De acuerdo a la compacidad relativa, se tiene una denominación convencional acerca del estado estructural de los suelos granulares, la cual se muestra en la tabla 2.2.

Tabla 2.2. Denominación de la compacidad relativa

Compacidad relativa (%)	Denominación
0 – 15	Muy suelta
15 – 35	Suelta
35 – 65	Media
65 – 85	Compacta
85 – 100	Muy compacta

2.2.9 Estructura geométrica

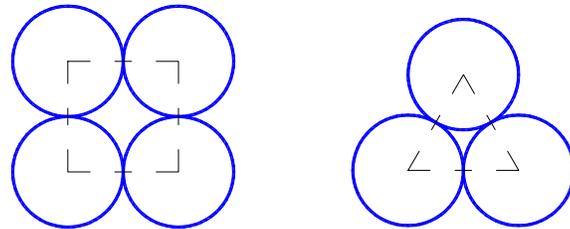
La representación de la estructura de los medios granulares puede convertirse en una tarea muy difícil dependiendo de la naturaleza del material y el grado de aproximación deseado. Con frecuencia los estudios realizados se apoyan en importantes simplificaciones, como la idealización de las partículas mediante círculos o esferas para estudiar la geometría de la estructura.

Algunos casos sencillos que se refieren a los arreglos formados por círculos y esferas se exponen en los siguientes dos incisos. Los estudios reportados en la literatura muestran que su simplicidad no los limita para obtener resultados de importancia para las diversas áreas del conocimiento que involucran medios particulados.

a. Arreglos regulares

En el estudio de las estructuras granulares es de gran importancia partir de los arreglos regulares de partículas idealizadas del mismo tamaño. La determinación del estado de compacidad de arreglos de círculos o esferas como los mostrados en la tabla 2.1 es una de los primeros resultados derivados del estudio de la geometría de los arreglos regulares.

Bidimensionalmente, los arreglos de discos de igual diámetro cuyos centros se disponen en una malla cuadrada y triangular equilátera son los más elementales (figura 2.2). Las porosidades correspondientes son de 21.5 y 9.3% respectivamente.



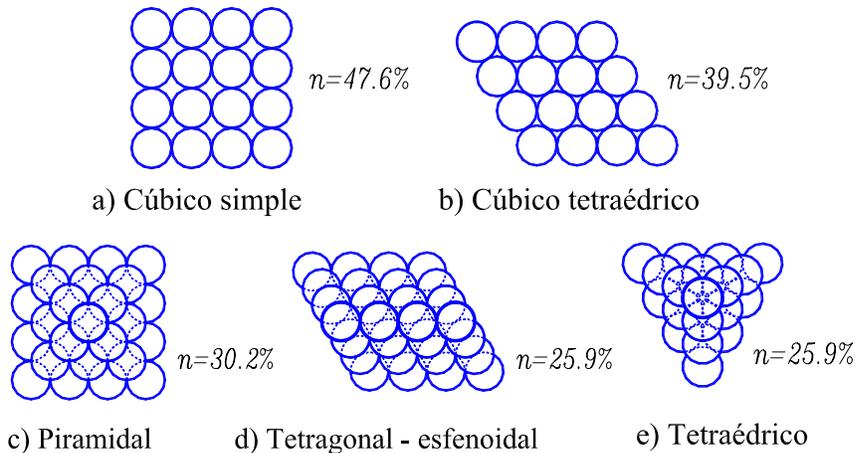
b) Malla cuadrada

a) Malla triangular

Figura 2.2. Arreglos regulares de discos de igual diámetro

Tridimensionalmente, las esferas del mismo tamaño pueden organizarse de cinco formas básicas: arreglo cúbico simple, cúbico – tetraédrico, piramidal, tetragonal esfenoïdal y tetraédrico. En el mismo orden, los arreglos son cada vez menos porosos y el número de coordinación (número de esferas con las que se tiene contacto) es monótonamente mayor.

Se define célula unitaria como la porción más pequeña del arreglo que contenga un volumen de sólidos igual al de una esfera y dé una idea completa de la forma en la que se constituye dicho arreglo. Para mayor facilidad, los puntos de referencia son los centros de las esferas.



a) Cúbico simple

b) Cúbico tetraédrico

c) Piramidal

d) Tetragonal - esfenoïdal

e) Tetraédrico

Figura 2.3. Arreglos regulares de esferas de igual diámetro, vistas en planta

Cuando los centros de las esferas forman un cubo se trata de un arreglo cúbico simple. En él, los contactos entre esferas se ubican solamente en tres direcciones mutuamente perpendiculares. Cada esfera está en contacto con seis más, cuatro de ellas en el mismo plano y las otras dos en planos adyacentes.

Las esferas del arreglo cúbico tetraédrico o simplemente escalonado se tocan con seis del mismo plano y con dos ubicadas en planos adyacentes. Esta disposición se caracteriza porque los centros de la esfera de referencia y de las dos de los planos adyacentes se alinean sobre una recta perpendicular a los planos mencionados. Este arreglo y el anterior son estáticamente inestables.

Cada esfera del arreglo piramidal se toca con otras cuatro en el mismo plano, descansa en el hueco formado por cuatro esferas del plano inferior y cuatro más del plano superior se apoyan sobre ella, así que el número de coordinación es doce.

El arreglo tetragonal – esfenoidal o doblemente escalonado es similar al cúbico tetraédrico, ya que cada esfera tiene seis contactos en el mismo plano, pero con la diferencia de que la esfera de referencia descansa en la depresión formada por dos de sus compañeras del plano adyacente inferior, al igual que dos más del plano superior lo hacen sobre ésta, por lo tanto el número de coordinación es diez.

Finalmente, en el arreglo tetraédrico una esfera cualquiera se toca con seis compañeras en el mismo plano como en el arreglo cúbico tetraédrico, pero descansa sobre tres y da soporte a tres más, su número de coordinación también es doce.

Entre las principales limitaciones que presentan los arreglos regulares está la baja probabilidad de presentarse en la naturaleza, aún si se consideran mezclas de dos o más componentes.

b. Arreglos estocásticos Poissonianos

Esta alternativa teórica consiste en suponer que los centros de gravedad de las partículas se distribuyen al azar en el espacio de acuerdo con un proceso aleatorio de Poisson (Auvinet, 1986). Rápidamente surge el inconveniente de que la presencia del centro de una partícula condiciona a que otro no pueda ubicarse a una distancia menor o igual al radio de la primera partícula. En consecuencia, las posiciones de los centros de dos partículas no son estrictamente independientes entre sí aún en medios homogéneos.

La distribución Poissoniana es razonablemente aceptable, a pesar de la restricción mencionada, en casos como los siguientes:

- Cuando se considere una mezcla homogénea de suelo fino con una proporción baja de material granular.
- Cuando dentro de una masa granular homogénea se considere únicamente una fracción granulométrica que represente una proporción baja del total, por ejemplo, tomar en cuenta las partículas mayores que cierta dimensión.

Recordando que la función aleatoria $N_V(V)$ es el número de partículas contenidas dentro de una muestra de masa granular de volumen V . La probabilidad de que $N_V(V)$ sea igual a un cierto valor k queda determinada por la distribución de probabilidad de Poisson (ec. 2.14).

$$P_{N_V(V)}(k) = P[N_V(V) = k] = \frac{(\lambda_V V)^k \exp(-\lambda_V V)}{k!} \quad (2.14)$$

De igual forma en un plano de intersección o en un medio bidimensional de área A :

$$P_{N_A(A)}(k) = P[N_A(A) = k] = \frac{(\lambda_A A)^k \exp(-\lambda_A A)}{k!} \quad (2.15)$$

Donde k es un entero positivo y λ_A se determina con la ecuación (2.9) para el plano de corte en un medio tridimensional o con una ecuación similar a la (2.8) en un medio bidimensional.

Dentro de los límites de validez de las ecuaciones (2.14) y (2.15) es posible obtener la densidad de probabilidad de la distancia T entre el centro de una partícula y el de la más cercana, para toda la granulometría o para una fracción de ella.

De acuerdo al proceso Poisson, la distancia T antes de encontrar el primer centro de una esfera tiene una densidad de probabilidad exponencial. La probabilidad de que en el intervalo $(0, t)$ no se presente ocurrencia alguna es (Auvinet, 1986):

$$P[T \leq t] = 1 - P\left[N_v\left(\frac{4}{3}\pi t^3\right) = 0\right] = 1 - \exp\left(-\lambda_v * \frac{4}{3}\pi t^3\right) \quad (2.16)$$

La densidad de probabilidad se encuentra por derivación de la ecuación anterior.

$$f_{3T}(t) = 4\pi\lambda_v t^2 \exp\left(-\lambda_v \frac{4}{3}\pi t^3\right) \quad (2.17)$$

De manera análoga, la distancia entre el centro de un círculo y el del más cercano en un medio bidimensional o en un plano de intersección tiene la siguiente densidad de probabilidad:

$$f_{2T}(t) = 2\pi\lambda_A t \exp(-\lambda_A \pi t^2) \quad (2.18)$$

2.3 SEGREGACIÓN

El término segregación significa “apartar” o “separar” a alguien de un grupo o una cosa de otra. En los medios granulares, es la separación de los constituyentes de la mezcla en grupos de partículas con características similares.

La mezcla y segregación de materiales granulares es de suma importancia en la práctica de diversas áreas del conocimiento. La falta de conceptos y ecuaciones constitutivas para predecir la magnitud de la segregación es el obstáculo más relevante para conseguir un acercamiento al fenómeno.

2.3.1 Importancia en geotecnia

Entre las estructuras de tierra donde se considera que la segregación no se puede pasar desapercibida, se encuentran los terraplenes, filtros, drenes y mezclas para pavimentos. Los efectos de la segregación son generalmente nocivos en estructuras construidas, pero pueden ser benéficos en la selección de materiales.

En la práctica mexicana común de construcción de presas se preferían grandes fragmentos de roca echados en el talud desde alturas entre 10 y 20 m; esto ocasiona la separación de los componentes de la mezcla, ocasionando una masa en estado suelto y altamente compresible.

Con el tiempo, las reglas fueron modificadas a granulometrías menos gruesas y más uniformes, con una aceptación de finos entre el 5% y 15% en peso. Se recomendó minimizar la altura desde la que se vacían los materiales, utilizar cajas distribuidoras en los camiones de transporte y reacomodar con motoconformadora.

Marsal, 1977, encontró que la deformabilidad de los enrocamientos se minimiza agregando entre un 30 y un 40% de arena. La resistencia al corte del enrocamiento mejora al agregar del 30 al 50% de arena; en cambio, agregar limos es nocivo para la mezcla.

En el diseño de filtros y drenes de suelos, para contrarrestar la segregación se prefieren materiales de granulometría continua y relativamente uniforme. Denotando como D a los diámetros del material del filtro y con d a los del suelo base (suelo protegido), el criterio para evitar huecos en la distribución granulométrica del Departamento de Agricultura de los Estados Unidos es que $D_{60}/D_0 < 5$. Además, se recomienda respetar la condición $D_{15} < 4$ a $5*d_{85}$, por ser una regla que experimentalmente ha sido satisfactoria para evitar el transporte de partículas del suelo base a través del material filtrante.

También se recomiendan materiales con $C_U < 6$ con un rango estrecho de tamaños de partículas y nunca con $C_U > 20$. Regularmente, por seguridad de las estructuras hidráulicas, el espesor de los filtros y drenes se incrementa para compensar la segregación y contaminación con material fino durante el vaciado del material y la construcción, lo que favorecería la erosión interna.

Entre los criterios de diseño de filtros y drenes del departamento citado, se considera que el rango de tamaños es más importante que un tamaño en particular, así que se especifican valores deseables para la relación entre D_{90} y D_{10} para reducir la segregación durante la construcción. Sherard *et al.*, 1984 (a) y (b), señalan que el tamaño de los agregados de partículas pequeñas está gobernado por la presencia de las partículas grandes, como el D_{90} . Esta segregación se incrementa rápidamente durante la construcción con el incremento del tamaño mencionado, de manera que para filtros que protegen arcillas se recomienda que no más del 60% en peso sea más grueso que la malla N° 4 (4.76mm) y el tamaño máximo no mayor a 50mm.

Tabla 2.3. Criterio de segregación para el diseño de filtros y drenes granulares

Categoría del suelo base	Si D_{10} es:	Entonces el máximo D_{90} es:
	(mm)	(mm)
Todas las categorías	< 0.5	20
	(0.5 – 1.0)	25
	(1.0 – 2.0)	30
	(2.0 – 5.0)	40
	(5.0 – 10.0)	50
	> 10.0	60

Fuente: USDA, 1994. National Engineering Handbook

Otro caso típico es el de la construcción de concretos y pavimentos, donde la concentración de partículas de tamaños semejantes puede ocasionar diferencias importantes en la resistencia, deformabilidad y vida útil de la estructura. Por ejemplo, las zonas segregadas son de menor peso volumétrico, ocasionan superficies más irregulares y se favorece el desprendimiento de partículas o la contaminación con materiales no deseables.

Generalmente, después de especificar una granulometría continua y uniforme, las recomendaciones están orientadas en mayor parte al manejo del material como: en lo posible manejar por separado materiales de granulometría aproximadamente uniforme, no formar pilas grandes por cuya superficie se separan las partículas grandes, llenar los camiones de transporte con varias descargas, no descargar material pendiente abajo, entre otras.

Los concretos y asfaltos tienen la ventaja de que el fluido intersticial, las fibras y polímeros añadidos limitan el movimiento relativo entre partículas haciendo menos intensa la segregación. A esto se debe

que se presta mayor atención al mezclado, transporte y vaciado de los materiales para eliminar la segregación. James y Scherocman, 2006, consideran que algunas recomendaciones como las del párrafo anterior son suficientes para eliminar los problemas que la segregación ocasiona a los pavimentos.

2.3.2 Cohesión entre partículas

Entre las fuerzas interparticulares que con frecuencia tienen una repercusión en la segregación de un suelo granular están aquellas que tienen su origen en la adhesión de las superficies de los granos, fuerzas de atracción de Van der Waals o fuerzas intersticiales que introducen los líquidos contenidos en los poros. La cohesión entre granos es el mayor efecto que se introduce a un medio granular húmedo, a menos que el medio esté completamente saturado.

La cohesión en un medio granular húmedo depende de la tensión superficial y de la capilaridad. Para saber si estas fuerzas son de importancia es necesario compararlas con la fuerza de gravedad, calculando la altura capilar del agua que iguala al diámetro de los poros bajo la acción de la gravedad terrestre (3.9 mm). Las fuerzas capilares son dominantes para partículas mucho menores que este valor.

En principio, las fuerzas de cohesión pueden incorporarse en los modelos que consideran la dinámica de las partículas. En realidad, para agregar las fuerzas capilares, es necesario aceptar que el movimiento de las partículas está sujeto a fuerzas resistentes de viscosidad y que existen múltiples interacciones posibles, no necesariamente iguales en todas las partículas. Por ejemplo, la fuerza cohesiva en un puente líquido entre dos partículas esféricas de igual tamaño está dada por la ecuación 2.19.

$$F = 2\pi r_2 \gamma + \pi r_2^2 \gamma \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \quad (2.19)$$

Donde: γ es la tensión superficial entre aire y líquido

r_1 es el radio del menisco formado

r_2 la mitad del ancho del cuello del menisco

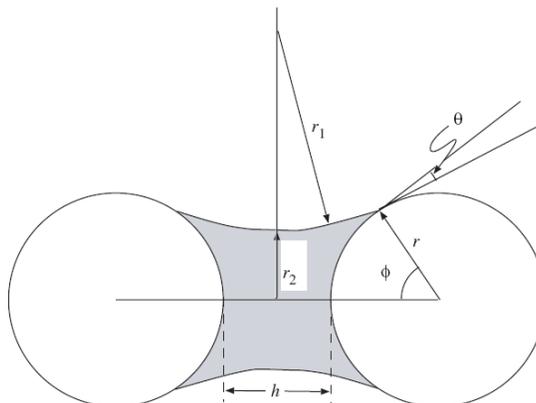


Figura 2.4. Esquema de un puente líquido entre dos esferas idénticas, Mitarai y Nori, 2006

Una consideración adicional es la rugosidad de la superficie de las partículas. Si las superficies son perfectamente lisas, la adhesión entre superficies disminuye porque existe lubricación.

2.4 MECANISMOS DE SEGREGACIÓN

Al margen de las técnicas de manipulación de los materiales, los factores más influyentes en la segregación son el tamaño, la forma y la densidad de las partículas. Las partículas grandes y las finas tienden a separarse cuando están mezcladas, dando lugar a una segregación por tamaño. Las partículas con densidad alta están menos afectadas al caer por la resistencia del aire o del medio en el que se mueven, que las de baja densidad. La forma de la partícula y la rugosidad de su superficie es otro factor determinante en la agrupación de partículas.

Se denomina mecanismo de segregación al proceso regular por el cual las partículas de una mezcla granular se separan para formar grupos. El tipo de mecanismo depende de la característica distintiva entre partículas y de las interacciones entre ellas.

2.4.1 Mecanismo de segregación geométrico

Consiste en un efecto geométrico local de llenado de vacíos observado en la colocación de materiales, en donde las partículas se mueven hacia niveles más bajos de energía potencial. Considera materiales formados por partículas de diferentes tamaños.

El resultado final es la acumulación de las partículas pequeñas en la parte baja del medio granular y en los intersticios de las partículas grandes. Con alguna ligera perturbación posterior a la colocación, la percolación de granos se activa únicamente para aquellos con tamaño comparable con el de los poros de la zona del medio donde se encuentren.

La segregación se acentúa más a mayor diferencia entre los tamaños de las partículas y también es conocido como mecanismo de percolación por la explicación antes dada.

2.4.2 Mecanismo de convección

Cuando se vibra verticalmente un contenedor relleno con un medio granular, obedeciendo a las aceleraciones máximas aplicadas al medio granular, pueden ocurrir diferentes fenómenos: la formación de un talud en la superficie, convección y segregación.

La energía de una excitación mecánica con aceleraciones máximas apenas superiores a la aceleración de la gravedad terrestre, y para ciertos valores de frecuencia y amplitud de la vibración, se forma una pendiente asimétrica en la superficie del material. Las partículas ascienden por una pared y descienden por la pendiente del talud, que es generalmente menor que el ángulo de reposo del material.

Si las aceleraciones máximas son significativamente mayores a la gravedad pueden aparecer estructuras superficiales o el movimiento de convección de todo el medio granular. Éste consiste en un movimiento cíclico en el cual las partículas comienzan a descender por las paredes del recipiente y a ascender por el centro del contenedor.

El mecanismo de convección requiere de un espesor h_T mínimo para que se presente. Aunque no se ha alcanzado un acuerdo a cerca del origen del movimiento convectivo se han planteado algunas explicaciones.

Se cree que el origen se debe principalmente al efecto de las paredes verticales del recipiente (Zuriguél, 2003). Cuando las partículas se despegan del fondo del recipiente se genera una estructura bastante

empaquetada por la presencia de canales de esfuerzos, lo que origina un alto coeficiente de fricción contra las paredes (por el efecto de arco inducido por el movimiento ascendente). En cambio, cuando el movimiento es hacia abajo, el empaquetamiento se hace menos denso y la fuerza de rozamiento es menor. La fuerza resultante en el ciclo es hacia abajo (en la cercanía de las paredes) y por lo tanto las partículas tienen un desplazamiento neto en esa dirección. El flujo se completa cuando las partículas que han descendido por las paredes se desplazan hacia el centro, por donde ascienden hacia la superficie.

Un medio granular que se encuentra en convección experimentará en sus partículas un movimiento acorde al movimiento convectivo, pero las partículas de mayor tamaño tendrán dificultades para descender, debido a las consideraciones geométricas mencionadas en el mecanismo de percolación. Por lo tanto, las partículas tan grandes como el espesor de la corriente no podrán seguir el movimiento y una vez alcanzada la superficie, permanecerán en ese lugar dando origen a la segregación. En otras circunstancias, si el espesor de la corriente es mucho mayor al tamaño máximo de partículas, todo el medio se mantiene en movimiento sin segregación evidente.

Imágenes de resonancia magnética han mostrado que el tamaño de la corriente descendente es independiente del espesor del medio granular h_T , sin embargo, éste sí tiene influencia en la intensidad y eficiencia de la corriente. Además, si se incrementa la proporción de partículas grandes, se aumenta el tamaño de la corriente descendente y es posible reducir la segregación.

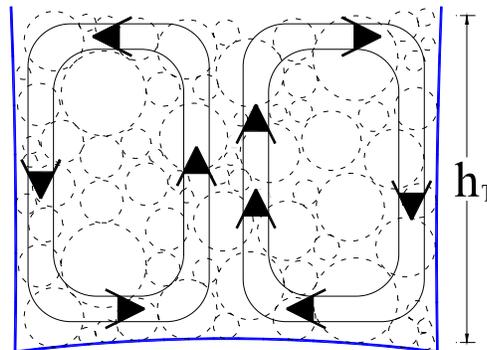


Figura 2.5. Movimiento de convección en un medio granular

La convección en sentido contrario puede producirse modificando la forma de las paredes del recipiente o incrementando la energía suministrada, de modo que el movimiento cíclico se da en sentido contrario, pero puede aparecer un estado caótico entre los estados de convección debido a los movimientos aleatorios de las partículas.

Frecuentemente se denomina a este mecanismo de segregación “*efecto de la nuez de Brasil*” (BNE), por la segregación observada en los botes de semillas comerciales. La nuez de Brasil es una semilla grande que después de su transporte, mezclada con otras semillas comestibles, aparece siempre en la superficie de los recipientes.

2.4.3 Mecanismo de condensación

En los mecanismos anteriores se apreció principalmente el efecto del tamaño de las partículas, pero de acuerdo a la energía del medio se vio que dichos mecanismos se modifican drásticamente. Desde el punto de vista de la energía cinética de las partículas es posible apreciar otro mecanismo de segregación sencillo llamado de condensación (Schröter *et al*, 2006).

Se considera ahora un recipiente que aloja un medio granular constituido por partículas del mismo tamaño pero de diferente densidad. Entonces resulta fácil comprender que las partículas más pesadas viajan a la parte baja del contenedor, expulsan a las más livianas y las obligan a tomar posiciones de mayor elevación.

Este comportamiento puede explicarse mediante la teoría cinética, ya que es adecuada para describir los medios granulares donde prevalecen las colisiones entre partículas. Basándose en dicha teoría se define una temperatura granular como el promedio de la energía cinética de los movimientos aleatorios de las partículas.

En un medio de partículas idénticas, se acepta la hipótesis que la temperatura granular es homogénea en todo el medio y se postula que existe una temperatura crítica a partir de la cual todas las partículas se encuentran fluidizadas. Para temperaturas menores que la crítica, las partículas permanecen en reposo. Ahora, considerando una mezcla bimodal y una temperatura crítica para partículas pesadas (T_L) y otra para partículas livianas (T_S), las partículas que se condensan son las de menor temperatura, dando origen a la segregación.

Las ecuaciones constitutivas para describir la segregación en mezclas de partículas de igual tamaño y diferente densidad ya han sido establecidas de manera aceptable; en cambio, un sistema de partículas de igual densidad y diferente tamaño es más complejo de caracterizar. Sólo puede decirse que de acuerdo a la teoría cinética, las partículas pequeñas viajan a las regiones de alta temperatura (mayor energía cinética), la superficie del medio, contrario a las predicciones de la percolación. Este es el “efecto inverso de la nuez de Brasil” (RBNE).

En todos estos mecanismos se consideró que el medio granular se constituye únicamente de sólidos y vacíos y que las fuerzas interparticulares están presentes exclusivamente en los contactos de una con otra. Estas hipótesis son aceptables en materiales secos y de tamaño mayor a 100 μm . Sin embargo, las partículas menores de 5 μm son típicamente cohesivas y su estudio requiere de la intervención de las fuerzas interparticulares.

A manera de resumen, en la tabla 2.4 se muestran algunos efectos de las propiedades de los medios granulares en los mecanismos de segregación abordados.

Tabla 2.4. Efecto de la relación de diámetros, volúmenes y espesor del material granular sobre los mecanismos de segregación

Mecanismo	Efecto	Incremento $D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$	Incremento $V_{m\acute{a}x}/V_{m\acute{i}n}$	Incremento h_T
Relleno de huecos	*BNE	+	-	Sin efecto
Convección	*BNE	+	-	-
	Mezclado	-	+	-
Condensación	*BNE	-	-	Sin efecto
	**RBNE	+	+	Sin efecto

Fuente: Schröter M. *et al.*, 2006

*Efecto de la nuez de Brasil

**Efecto inverso de la nuez de Brasil

2.5 MODELOS DE ESTUDIO

El estudio de la estructura de los medios granulares puede realizarse mediante diversas técnicas experimentales, de laboratorio o de campo, y teóricas. Los estudios experimentales, permiten utilizar materiales en el estado físico que interesa en el problema, conservando muchos de sus atributos; pero tienen la desventaja de ser laboriosos y de alcance limitado, además de que no es posible controlar todas las fuentes de variación en el estudio.

Por su parte, los modelos teóricos flexibilizan los estudios debido a que permiten abordar el problema desde distintos puntos de vista. Por ejemplo, el fenómeno de la segregación puede atacarse considerando partículas de diferente tamaño pero de igual densidad, igual tamaño con diferente densidad, partículas casi perfectamente elásticas, etc., incorporando diversos conceptos teóricos ya mencionados. Para esto es necesario idealizar las partículas mediante formas geométricas regulares como círculos o esferas, lo cual, en conjunto con la baja entropía (alto orden en el arreglo) puede ser poco representativo de la realidad.

Los modelos existentes son relativamente pocos y esencialmente simples, que permiten obtener predicciones cuantitativas sobre la magnitud de la segregación para casos limitados. De manera generalizada, el estado del conocimiento de la segregación permite abordar al fenómeno principalmente de manera cualitativa.

En seguida se presentan los modelos de segregación más empleados para representar el manejo del material. Las metodologías más utilizadas son: transporte, vaciado del material, vibración o agitación del medio. Se enfocan principalmente a mezclas de dos componentes (bimodales o binarias).

2.5.1 Modelos de rotación de medios granulares

Se refiere al estudio en la sección transversal de un sistema prototipo de mezclado que consiste en un cilindro rotativo parcialmente lleno, de sección circular o no, que permite definir el flujo granular según la velocidad angular del contenedor (Ottino y Khakhar, 2000). Si la velocidad de rotación es baja, el flujo granular experimenta deslizamientos planos intermitentes (régimen de avalanchas), al incrementar la velocidad de giro el medio granular alcanza un flujo establecido con una delgada cascada en la superficie libre del medio.

Mientras los efectos inerciales sean pequeños, la superficie libre es aproximadamente plana; pero a grandes velocidades los efectos de inercia son importantes y las partículas son parcial o completamente transportadas. En este momento se alcanza la velocidad crítica de centrifugación (régimen de cataratas).

Los estudios expuestos se refieren a contenedores físicos y virtuales de sección circular. La forma del contenedor cobra importancia sólo si las velocidades de rotación dan lugar a deslizamientos continuos del medio granular. Un recipiente de forma irregular introduce un comportamiento caótico en el proceso de mezclado o segregación.

En los modelos físicos la intensidad de la segregación se evalúa a partir de inspecciones visuales y análisis de imágenes.

a. Régimen de deslizamiento superficial

Una hipótesis importante en estos modelos es la aceptación que el material está conformado por una capa superficial que fluye como avalancha y el resto permanece como cuerpo sólido. En este régimen de avalancha, el movimiento en conjunto puede describirse mediante un modelo geométrico; cada avalancha se representa con una cuña de geometría definida (figura 2.6.a), la cual se desliza hacia abajo hasta formar un cuerpo geoméricamente parecido.

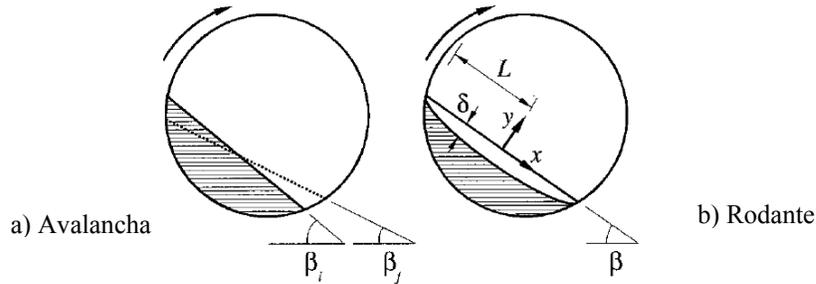


Figura 2.6. Regímenes de flujo en un recipiente rotativo a baja velocidad angular

El ángulo de la superficie libre (β) crece desde un ángulo de pre – deslizamiento (β_i), hasta que se presenta un deslizamiento (β_f) definiendo las cuñas del material que se desplaza. El movimiento puede descomponerse en un componente geométrico (solamente el traslado de las cuñas) y un componente dinámico (reacomodo del material dentro de la cuña), pero se considera que las partículas no pueden salir de las cuñas, en la medida que una se desvanece, la otra se constituye.

El resultado después de cada deslizamiento es una reorganización de los granos como consecuencia de la capacidad de las partículas grandes para rodar por encima de las pequeñas o las ligeras sobre las pesadas y la segregación es medida con el coeficiente de variación del número de partículas contenidas en un espacio constante.

De manera generalizada, la forma transversal del contenedor tiene poca influencia sobre el resultado final, dada la continua repetición del mismo movimiento del material granular. La segregación que se provoca por los deslizamientos es abordada con mayor comodidad mediante modelos conocidos como de flujos superficiales.

b. Régimen rodante

Se presenta al incrementar la velocidad angular respecto al régimen anterior y es necesario involucrar ecuaciones de procesos de transporte para describir el movimiento. Las ecuaciones constitutivas incluyen la energía cinética y los cambios ocasionados a la fluctuación de la velocidad de las partículas (temperatura granular). Como se mencionó en la sección anterior, también es necesario involucrar las ecuaciones de momentum.

En este caso se requiere tomar en cuenta las diferencias en la velocidad de las partículas acorde con la posición que ocupan dentro del contenedor. Se acepta que un balance macroscópico del momentum es suficiente, es decir, se admite una velocidad media para los grupos de partículas de la capa deslizante (frontera con el recipiente y superficie libre, figura 2.6.b) y otra para el conjunto que permanece sin cambios importantes entre las posiciones de las partículas.

También es importante considerar las fuerzas de fricción que aparecen en la interacción del contenedor con la capa deslizante y de ésta con el bloque fijo. Esto restringe significativamente el flujo y puede utilizarse para evitar la segregación que acompaña el mezclado.

c. *Régimen continuo*

Para estudiar este caso, se parte del estudio de un conjunto de partículas en forma de gota localizado en la parte superior de la capa deslizante que trata de escapar de ella. Entonces, estas partículas experimentan un giro como cuerpo sólido, caen nuevamente al estrato y el proceso se repite de manera continua (figura 2.7a).

Este régimen es útil en el mezclado de materiales que inicialmente se encuentran completamente separados. Por medio del análisis de imágenes se ha visto que la segregación inicialmente impuesta decrece exponencialmente con el tiempo hacia una condición de equilibrio, pero este régimen es menos eficiente que el de desplazamientos intermitentes si de mezclar materiales se trata.

Más aún, en un régimen de centrifugación, las partículas conservan sus posiciones relativas de unas con otras y en consecuencia sería inútil el tratar de eliminar la segregación inicial en este caso.

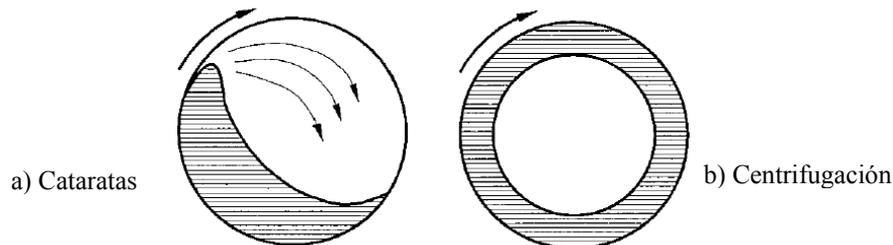


Figura 2.7. Regímenes de flujo a gran velocidad angular en recipiente rotativo

En otro tipo de experimentos se emplea una mayor cantidad de partículas de modo que el recipiente quede prácticamente lleno, con la finalidad de apreciar las concentraciones de partículas de diferentes densidades. El resultado más sobresaliente es la segregación radial o axial con una concentración de las partículas más pesadas en el centro del recipiente, o en pequeñas islas donde se concentra la mayor presión.

2.5.2 Segregación en flujos superficiales

En diversos tipos de procesos productivos, el transporte de los materiales se realiza en canales inclinados o en flujos libres verticales. Por esta razón, gran parte de las investigaciones básicas se han realizado en este tipo de flujos, pues pueden aplicarse a sistemas de flujo en superficie libre como vaciado y apilamiento de materiales. Durante esta manipulación, las partículas viajan a lo largo de una superficie experimentando mezcla y segregación dependiendo de sus características.

a. *Flujos sobre planos inclinados*

Este tipo de modelo consiste principalmente en un canal inclinado sobre el cual se vierte un material para provocar un flujo continuo a lo largo del plano inclinado. La importancia de estos modelos radica en el transporte de materiales.

Las propiedades de las partículas como forma, tamaño y densidad han sido las vías de análisis más estudiadas del desmezclado, tanto en modelos físicos como en simulaciones por computadora. En estas últimas, se han planteado ecuaciones de transporte en base a la teoría cinética y a la mecánica estadística para partículas casi perfectamente elásticas con geometrías sencillas (esferas). Se han incluido también, correcciones empíricas para el rozamiento entre partículas.

Savage y Lun, 1988, fueron de los primeros en proponer un modelo físico (de bolas de poliestireno) para segregación causada por diferentes tamaños en este tipo de flujos, de donde se obtuvo un descenso de las partículas pequeñas por su caída en los huecos formados por las partículas grandes (mecanismo geométrico de segregación), confirmándose la suposición estadística que se realizó sobre la existencia predominante de pequeños vacíos en ciertas regiones.

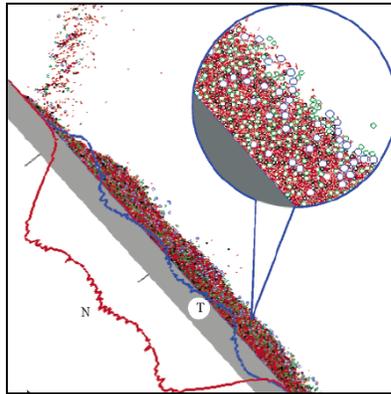


Figura 2.8. Esquema de la segregación en un flujo sobre superficie inclinada

La intensidad de la segregación por tamaño y los patrones geométricos de concentración de partículas en los que se alcanza el equilibrio, se deben a la difusión de energía a cargo de las colisiones entre partículas. No obstante, no ha sido posible relacionar rigurosamente la velocidad de separación de partículas o la magnitud de la segregación con las propiedades de las partículas.

Las imágenes y la distancia del centro de gravedad de las partículas a la superficie libre son las formas en que con mayor frecuencia se cuantifica la magnitud de la segregación en este tipo de modelos.

No se puede dejar de lado el caso en el que la proporción de sólidos es muy pequeña respecto a la mezcla sólido - vacío. El mecanismo de segregación no es gobernado por el proceso geométrico, sino que el comportamiento de la mezcla es semejante al de un gas ideal con una concentración de partículas pequeñas en la superficie.

En el flujo de partículas, de tamaño y forma idénticos con diferente densidad, a lo largo de una superficie inclinada y bajo la acción exclusivamente del campo gravitacional, las partículas más pesadas son las que se mueven a las posiciones más bajas (mecanismo de condensación).

Sin embargo, bajo un régimen de operación muy elevado, las fuerzas gravitatorias pierden presencia y el proceso puede invertirse como consecuencia de un alto gradiente de temperatura (cambio en la energía cinética media de una partícula).

Además, desde el punto de vista físico, en el flujo existen simultáneamente la mezcla y la segregación donde no se tiene un equilibrio en las velocidades de las partículas y por lo tanto se tiene una difusión del movimiento. La difusión de un flujo depende de tres variables independientes: la presión de difusión (debida a gradientes de presión), temperatura de difusión (debida a gradientes de temperatura)

y la difusión ordinaria (debida a gradientes de concentración del número de partículas). Para detalles sobre las ecuaciones que caracterizan el flujo ver Khakhar *et al.*, 1999.

Las ecuaciones de flujo muestran que las diferencias entre las masas de las partículas favorecen la segregación si existen gradientes de temperatura o presión. Sin embargo, los gradientes de concentración propician el mezclado, puesto que el flujo reduce esta concentración. Además, considerando la diferencia de masas, las ecuaciones evidencian el movimiento de las partículas más pesadas hacia las regiones de mayor presión (presión de difusión) y de baja temperatura. En estas condiciones, la segregación es independiente del tamaño de las partículas.

b. Formación de montículos

Una de las maneras más sencillas de observar la segregación por tamaño consiste en vaciar en forma intermitente, desde un punto fijo, una mezcla de granos de dos tamaños distintos para formar un montículo (figura 2.9, partículas grandes en color claro y partículas pequeñas en oscuro). Durante la formación de éste se distinguen dos fases del medio granular, la primera comprende al grupo de partículas que ya forman parte del montículo (fase estática), y la segunda se refiere a la delgada capa de partículas que ruedan hacia abajo y hacia fuera del montículo en busca de una posición de equilibrio (Carson *et al.*, 1986).

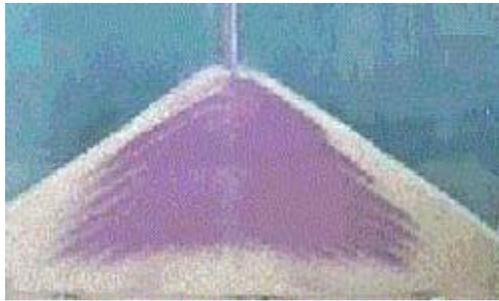


Figura 2.9. Segregación en la formación de un montículo

De las partículas en movimiento, las pequeñas tienen más posibilidades de quedar atrapadas en las irregularidades de la superficie del montículo, razón por la cual alcanzan el reposo a una distancia corta del punto de vaciado. Esto provoca un incremento en la pendiente del montículo y obliga a las partículas grandes a rodar hacia posiciones más alejadas.

Eventualmente, las colisiones entre partículas ocasionan que algunas partículas grandes también se detengan cerca del punto de vaciado y que algunas de las pequeñas sean arrastradas por la corriente a distancias mayores, pero dentro de la fase en movimiento se va experimentando una percolación de partículas pequeñas y por lo tanto aparece una estratificación.

c. Llenado de recipientes (silos)

Continuando con los mismos principios del modelo anterior, se ha observado por interés práctico, el comportamiento de los medios granulares en el llenado de silos. El nuevo dispositivo consiste en restringir lateralmente el movimiento de las partículas imponiendo dos barreras verticales como se aprecia en la figura 2.10 (Boutreux *et al.*, 1999).

El vaciado del material se hace en una esquina de la celda a una velocidad constante $w = dh / dt$, al mismo tiempo, la superficie de la pila se eleva uniformemente. Las descargas de material son intermitentes hasta llenar el recipiente bajo el punto de vaciado.

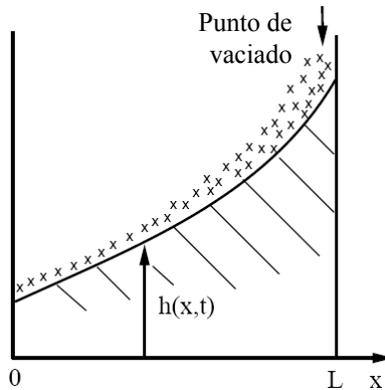


Figura 2.10. Vaciado de material granular en celda bidimensional

Involucrando las condiciones de frontera y las colisiones entre las partículas, es posible establecer expresiones para estimar las proporciones de volumen de cada clase de partículas $\phi_a(x)$ que entran en reposo dentro del recipiente.

Estas ecuaciones muestran que la segregación aparece cuando los granos en movimiento se detienen, e indican que los más pequeños se detienen con mayor facilidad, ya que su proporción decrece en el material móvil al alejarse del punto de vaciado. Por su parte, los granos de mayor tamaño alcanzan la fase estática hasta el fondo del talud. Este comportamiento señala que los granos pequeños se concentran en la parte superior del talud ($x \rightarrow L$) y los grandes en la parte baja ($x \rightarrow 0$), lógicamente el medio granular presenta una estructura segregada.

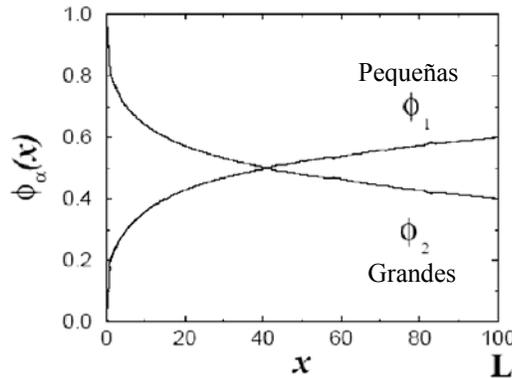


Figura 2.11. Concentración de partículas de una mezcla bimodal de acuerdo a la posición en el recipiente, Boutreux *et al*, 1999.

El modelo utilizado se puede extender para predecir la segregación de materiales de granulometría continua, donde la concentración de las partículas de diferente tamaño varía gradualmente en el contenedor.

Por otra parte, Koeppel *et al*, 1998, propusieron un modelo físico tridimensional equivalente al descrito en párrafos anteriores que consiste en una caja rectangular estrecha. Sus estudios evidenciaron una

dependencia de la segregación tanto de la velocidad con que se vierte el material, como del ancho del recipiente que lo almacena.

La estratificación (separación de partículas) que aparece conforme se vierte la mezcla, decrece bruscamente después de una velocidad crítica de vaciado (1 g/s, sólo válida para los materiales utilizados en el experimento). Y la velocidad crítica, a su vez, es función del ancho de la caja (a mayor espacio transversal mayor velocidad crítica).

2.5.3 Vibración

Los modelos físicos y virtuales de vibración vertical son de los más comunes en las investigaciones del comportamiento de las mezclas granulares, Bizon *et al.*, 1998, Navakas, 2006, Schröter *et al.*, 2006, Zuriguel, 2003, son algunos ejemplos. Estos modelos se caracterizan por tener una mayor complejidad que los modelos anteriores, por lo que únicamente se describen sus características generales.

En estos modelos se suministra la energía al recipiente por medio de una vibración sinusoidal, donde se controla la frecuencia de las vibraciones y la aceleración inducida normalizada respecto a la gravedad terrestre. Las interacciones entre partículas se basan en la teoría cinética, suponiendo que los granos son esféricos y ligeramente blandos, los choques interparticulares se simplifican con la asignación de coeficientes de restitución y de fricción.

Las vibraciones se aplican después de establecer una configuración aleatoria inicial de la estructura granular, estas perturbaciones mecánicas se suspenden después de alcanzar una configuración estable en el material. Durante este desarrollo se toman imágenes o se toman los datos correspondientes para su posterior análisis.

Posteriormente, el estudio de la segregación se lleva a cabo por medio del análisis de fotografías tomadas, si el modelo es físico; o por el rastreo de la elevación de las partículas grandes y pequeñas en simulaciones virtuales.

De estos modelos se ha obtenido como resultado que la segregación depende de un conjunto de propiedades del material: densidad, módulo de elasticidad, coeficiente de fricción dinámico, relación de Poisson; efectos que no son claramente apreciables con los otros modelos presentados.

En otra variante de los modelos de vibración se busca provocar flujos horizontales de los constituyentes de las mezclas de acuerdo al tamaño de las partículas. Particularmente, el modelo virtual de Rapaport, 2001, está provisto de una sierra en la parte inferior del contenedor, construida con círculos de gran tamaño, con el objeto de asegurarse de que los bordes de los dientes sean razonablemente rectos.

El material granular empleado consistió de un 15% de partículas grandes y el resto pequeñas (dos clases de partículas) con la misma densidad, repartidas al azar en un contenedor rectangular de ancho mucho mayor que su altura.

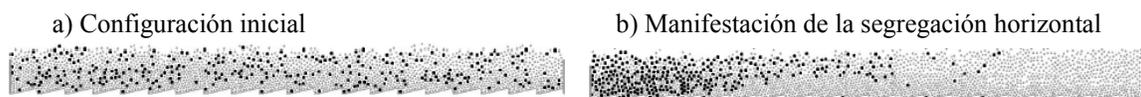


Figura 2.12. Modelo de segregación horizontal, Rapaport, 2001.

Los estudios permitieron observar que las capas superior e inferior de una mezcla granular son capaces de moverse horizontalmente en direcciones opuestas. Asimismo, revelaron que la velocidad de los movimientos depende del espesor del estrato de material granular y lo más sorprendente es que los flujos en dirección opuesta existen simultáneamente a diferentes niveles del medio.

Con el modelo propuesto fue posible determinar que el grado de segregación, expresado como la posición del centro de masa de la partícula en función del tiempo, depende de la relación de tamaños de partículas y del tamaño de los dientes de la sierra. Se observó también, que a mayor cantidad de dientes de la sierra, la segregación se da en sentido opuesto y es menos evidente.

Para ampliar los estudios el mismo autor construyó un modelo tridimensional mediante un contenedor de base circular (vista en planta), en la que se colocaron ranuras concéntricas para producir un perfil radial semejante al que se presenta en dos dimensiones. Las interacciones entre las partículas y la base fueron manejadas como una extensión del modelo anterior.

A pesar de que en el análisis tridimensional se realizaron simplificaciones adicionales, se observó que el fenómeno no es sensible a los detalles del modelo, pero la aplicación está limitada por el gran esfuerzo de cómputo requerido para grandes cantidades de partículas. El resultado fue una migración de las partículas grandes hacia la periferia del recipiente cilíndrico, mientras que las pequeñas lo hacen hacia el centro (segregación radial).

2.6 TÉCNICAS DE SIMULACIÓN

En el estudio de la segregación, el uso de las simulaciones por computadora ha jugado un papel fundamental como complemento y extensión de los modelos físicos como los que se describieron brevemente en la sección 2.5. Los modelos virtuales tienen la ventaja de ser más versátiles que los modelos físicos y se apoyan principalmente en dos técnicas: simulaciones geométricas y simulaciones dinámicas de partículas.

2.6.1 Simulaciones geométricas de Monte Carlo

Las simulaciones de Monte Carlo son utilizadas para obtener el equilibrio en una mezcla de partículas rígidas y elásticas sujetas a un campo gravitacional. Su aplicación es adecuada cuando es aceptable suponer que todas las partículas del medio se mueven aproximadamente a la misma velocidad y se ajusta a la simulación del flujo de partículas en caída libre.

Inicialmente, las partículas se distribuyen al azar dentro de un contenedor bastante amplio y con una configuración inestable, posteriormente son desplazadas mediante movimientos aleatorios individuales (figura 2.13). Se verifica que cada desplazamiento no ocasione traslape con otras partículas, en seguida se calcula una probabilidad $p = [1 \text{ ó } 2]$ de acuerdo al cambio en la componente vertical del desplazamiento, el desplazamiento es válido cuando $p \leq 1$. Esta probabilidad es máxima si el desplazamiento es hacia arriba, por lo tanto no es aceptable.

Además, se acepta el intercambio de posiciones entre pares de partículas con la restricción de que no se genere un traslape con otros granos. El intercambio de posiciones ofrece la ventaja de alcanzar el equilibrio del sistema con mayor rapidez cuando la proporción del volumen de sólidos es baja.

En términos físicos, los movimientos aceptables son los que producen un decremento en la energía potencial del sistema (Khakhar *et al.*, 1999). La temperatura granular se desvanece gradualmente hasta que todas las partículas se encuentran en reposo, dando fin a la simulación.

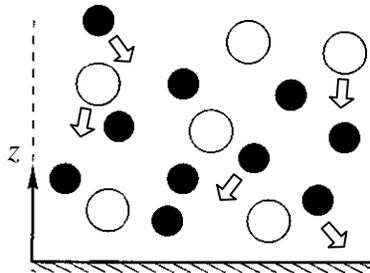


Figura 2.13. Simulación geométrica de estructuras granulares con el método de Monte Carlo

2.6.2 Simulaciones dinámicas de partículas

La dinámica de partículas o método de elementos discretos (MED) está basado en la metodología de la dinámica molecular usada en el estudio de líquidos y gases. El MED fue inicialmente desarrollado por Cundall en 1971 para modelar masas de rocas constituidas por partículas rígidas que interactúan entre sí por medio de sus contactos superficiales.

Este acercamiento es indudablemente más realista que el método de Monte Carlo y el más sobresaliente para el estudio de los medios granulares. Sin embargo, demanda parámetros mecánicos de interacción entre partículas y gran disponibilidad de recursos de cómputo para rastrear el movimiento individual de los granos así como sus colisiones.

Las simplificaciones geométricas en cuanto a la forma de las partículas, comúnmente polígonos, círculos y esferas, pueden reducir los esfuerzos de cálculo significativamente. No obstante, se deben considerar las desventajas que estas idealizaciones causan. Por ejemplo, la forma circular facilita un excesivo movimiento de los granos y el uso de polígonos requiere demasiado esfuerzo de cálculo para monitorear las posibles superficies de contacto.

El movimiento del material granular frecuentemente es causado por agitación vertical y horizontal de frecuencia controlada. Entonces, el flujo del medio se determina a partir del cálculo de las trayectorias de cada partícula, esto conduce a adoptar diferentes condiciones para modelar las trayectorias: partículas rígidas de baja densidad en flujo rápido o régimen inercial, o partículas blandas de alta densidad en flujo lento o cuasi-estático.

En régimen inercial, las trayectorias se encuentran aplicando reglas de conservación lineal y angular del momentum después de cada colisión. Las reglas de colisión, en general incorporan inelasticidad a través de un coeficiente de fricción para la componente tangencial del impacto y un coeficiente de restitución para impacto normal.

Por otra parte, el régimen cuasi – estático se describe mediante los últimos impactos entre partículas, las trayectorias se obtienen explícitamente por solución de las ecuaciones de movimiento de Newton (momentum lineal y angular) para todas las partículas. El estado del medio se actualiza en intervalos de tiempo discretos.

La precisión en simulaciones con partículas blandas depende en mayor grado de las fuerzas de contacto, las cuales actúan en dirección normal y tangencial a la superficie del contacto. Es usual idealizar el contacto interparticular mediante un modelo reológico visco – elástico (figura 2.14).

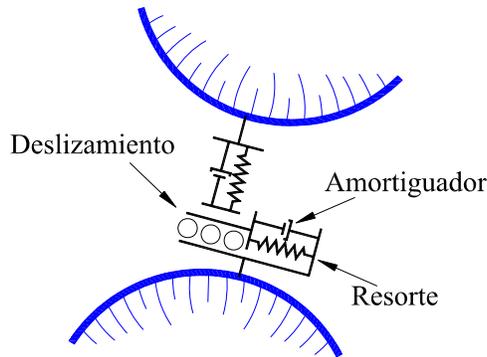


Figura 2.14. Idealización del contacto entre partículas

Este tipo de técnicas permiten relacionar la segregación con los parámetros del material como: el coeficiente de fricción dinámico, relación de Poisson, módulo de elasticidad, tamaño y densidad. La aplicación no queda limitada a partículas individuales sino a grupos de ellas. Jensen *et al.*, 1999, consideraron un medio de grumos constituidos por grupos de partículas elementales (esferas).

Además, es posible dar seguimiento al movimiento de las partículas por medio de la representación gráfica de los campos de velocidad. Navakas, 2006, observó un patrón de movimiento semejante a un vórtice a lo largo del perímetro del recipiente (de sección cuadrada) y caracterizó la segregación en base a los cambios en la posición vertical de las partículas de diferente tamaño.

2.6.3 Simulación “estática” de la formación de medios granulares

Ante la complejidad de los modelos físicos y numéricos examinados en los incisos anteriores es conveniente prestar atención a modelos más sencillos pero también representativos de las propiedades estructurales de los medios granulares.

Se trata de modelos numéricos, que sin describir la compleja interacción dinámica que se presenta generalmente en la formación de medios granulares, permiten obtener estructuras que también tienen un alto grado de realismo cuando se comparan con los medios granulares reales (Auvinet, 1972).

Las simulaciones consisten en la formación de medios granulares partícula por partícula, como se podría proceder manualmente colocando una partícula a la vez en un recipiente. En adelante, se utilizará precisamente este modelo que genera arreglos de discos o esferas de diferentes tamaños, cuyas características se exponen en el Capítulo 3 de este trabajo.

CAPÍTULO 3 SIMULACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE MEDIOS GRANULARES

En este capítulo se describe el modelo que se utiliza (Auvinet, 1972) para la simulación estática de la formación de medios granulares, así como el conjunto de algoritmos empleados para el estudio de los medios granulares construidos. Se especifican las granulometrías que se utilizarán en los estudios y se presentan algunas propiedades de interés de las estructuras simuladas.

Los algoritmos de simulación y la mayoría de los orientados a estudiar las estructuras fueron desarrollados por el autor mencionado. Parte de este trabajo consistió en llevar a cabo su implementación en el lenguaje de programación de MATLAB aumentando así en forma considerable el campo de estudio y se elaboraron algunos otros para complementar los estudios.

Con la ayuda de estos algoritmos y mediante la aplicación de la teoría de la probabilidad, se han formulado distribuciones granulométricas con frecuencias en volumen y número (Auvinet, 1972, Auvinet 1986; Roy y Auvinet, 2004), para estudiar algunas propiedades geométricas e índice de los materiales granulares. Entre estas propiedades se pueden mencionar: las granulometrías aparentes obtenidas en cortes planos y sondeos rectos, tamaño de muestra representativo, distribución espacial de partículas, porosidad (unidimensional, bidimensional y tridimensional), distancia entre centros de partículas, número y repartición de contactos, distribución de probabilidad del tamaño de poros, así como el efecto de las fronteras sobre estas propiedades. Con argumentos como estos y por la sencillez que el modelo presenta, se justifica su aplicación al estudio de la segregación geométrica.

3.1 ALGORITMOS DEL MODELO BIDIMENSIONAL

3.1.1 Formación de la estructura bidimensional

En diversos estudios es conveniente analizar los problemas en un espacio plano para facilitar la comprensión de los fenómenos que se presentan, antes de estudiar el tema de interés en el espacio tridimensional. El algoritmo de formación de la estructura granular bidimensional (Auvinet, 1972), implementado en lenguaje de programación de MATLAB, es el que se indica a continuación (Programa DISCOS.m):

- El punto de partida consiste en definir un recipiente delimitado por tres círculos secantes de gran diámetro respecto al tamaño de las partículas, dos círculos representan las paredes verticales y el tercero el fondo del recipiente (fig. 3.1). Aproximadamente, las dimensiones del recipiente son de 2 unidades de ancho, por 2.5 unidades de alto.
- Se leen los datos del número de partículas de la simulación, tamaño máximo y mínimo de partícula, tipo de granulometría y coeficiente de distribución granulométrica (véase sección 3.3).
- Con la ayuda de un generador de números aleatorios (comando “rand” de MATLAB) se obtiene un número aleatorio con distribución uniforme entre cero y uno, a partir del cual se

elige un radio del disco dentro de la distribución granulométrica del material que se desea simular.

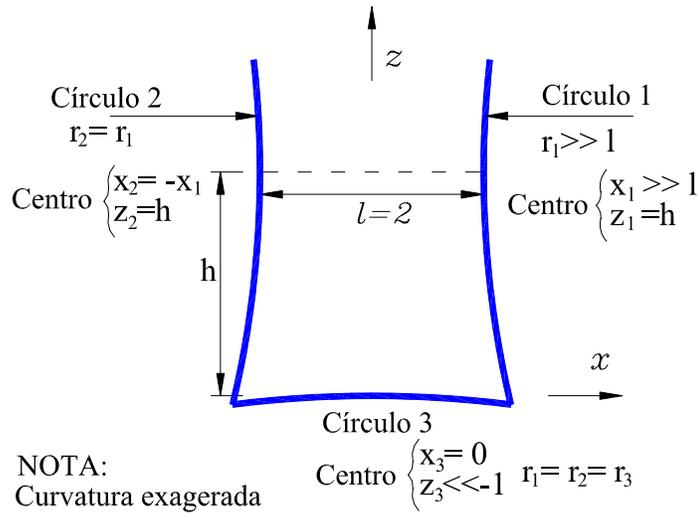


Figura 3.1. Recipiente bidimensional

- En seguida se genera un eje de caída (posición en dirección x) ubicado al azar dentro del recipiente (Función EJEC.m). Para esto, el intervalo de generación de números aleatorios $[0, 1]$ se ajusta al ancho del recipiente.
- Se busca el primer disco (posiblemente el fondo del recipiente) con el que el disco generado entra en contacto. Los discos candidatos son aquellos que son intersecados por el eje de caída, entonces, por inspección se acepta como primer círculo de apoyo el de mayor elevación (Función EJEC.m).
- Se requiere de un segundo círculo (en su caso, el fondo o las paredes laterales del recipiente) que proporcione el segundo punto de apoyo necesario para el equilibrio del disco creado. La búsqueda de éste se inicia por los círculos de mayor elevación, revisando que el nuevo disco no pase en el espacio libre entre los discos de apoyo (figura 3.2), de lo contrario es necesario revisar otro disco hasta encontrar un apoyo adecuado. A continuación se determinan las coordenadas del centro del nuevo disco y se calculan las coordenadas de los puntos de contacto.

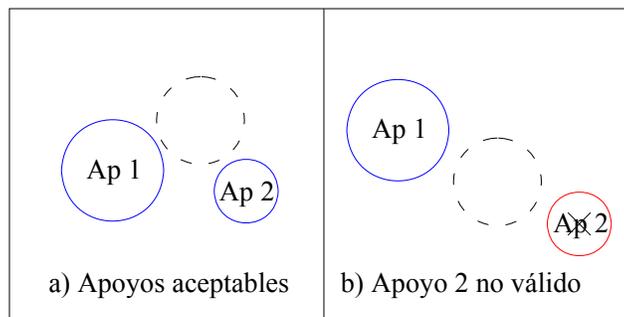


Figura 3.2. Selección de apoyos

- El siguiente paso es verificar el equilibrio estático del nuevo disco, para lo cual, se verifica que su centro de masa esté dentro de la zona de sustentación (limitada por los puntos de apoyo). De no cumplirse la condición, el segundo círculo queda descartado como apoyo y se busca otro.
- Se examina que el disco generado no interseque a otros, incluyendo el fondo y paredes del recipiente. Si al menos se presenta una intersección, se investiga que otro disco es capaz de aportar el segundo apoyo. Puede suceder que no exista un segundo disco de apoyo, por lo que será necesario cambiar el eje de caída y obtener sus correspondientes discos de apoyo.
- Cumplidas todas las condiciones, se acepta la posición del disco generado como definitiva y éste pasa a formar parte de la estructura.
- Se contabiliza un contacto más a cada disco de apoyo y dos al nuevo disco. Para tener una mayor eficiencia en la ejecución del programa, se ordenan los discos de la simulación de acuerdo a la elevación de su centro, de menor a mayor.
- Se repiten los pasos anteriores hasta llenar el recipiente al nivel prefijado o alcanzar el número de partículas establecido para la simulación. Es necesario realizar una estimación previa acerca del número necesario de partículas para llenar el recipiente.

Para poder visualizar la estructura obtenida se dibujan las partículas de la simulación, así como el recipiente que las contiene (funciones PARTICULA.m y DIBUJO.m).

3.1.2 Selección de la granulometría

En la simulación de medios granulares se consideran estructuras con distribución de probabilidad granulométrica uniforme, bimodal (dos tamaños) o densidad de probabilidad lineal continua (en área de partículas), lo cual se especifica en los datos de entrada que el programa DISCOS.m solicita. Más adelante, al momento de determinar el tamaño de la partícula se recurre a alguno de los dos casos siguientes.

a. *Granulometría bimodal*

La distribución de probabilidad que representa la granulometría bimodal en área de partículas (figura 3.3) es:

$$P_{2A}(d) = p_{2A} \left(\frac{D_{máx} - d}{D_{máx} - D_{mín}} \right) q_{2A} \left(\frac{d - D_{mín}}{D_{máx} - D_{mín}} \right) \quad \text{para } d = \{D_{mín}, D_{máx}\} \quad (3.1)$$

Donde p_{2A} es la probabilidad de que un punto tomado al azar dentro de los sólidos se ubique dentro de una partícula de $D_{mín}$, y $q_{2A} = (1 - p_{2A})$ la probabilidad de que corresponda a una partícula grande.

Para formar muestras de una granulometría particular se requiere transformar las probabilidades en área a frecuencias de número, mediante la ponderación por un término inversamente proporcional al área de las partículas.

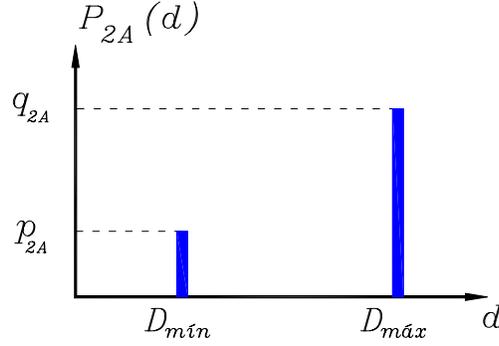


Figura 3.3. Distribución de probabilidad en área de una granulometría bimodal

Entonces, la probabilidad de ocurrencia en número p_{2D} , de las partículas del diámetro menor está dada por la ecuación 3.2.

$$p_{2D} = \frac{P_{2A}}{D_{mín}^2 E_{2A} \left\{ \frac{1}{D^2} \right\}} \quad (3.2)$$

Donde:

$$E_{2A} \left\{ \frac{1}{D^2} \right\} = \frac{p_{2A}}{D_{mín}^2} + \frac{(1-p_{2A})}{D_{máx}^2} \quad (3.3)$$

La probabilidad en número de las partículas pequeñas es solicitada por la función DOSRADIOS.m, que arroja el tamaño de un disco. Se elige un número aleatorio en el intervalo $[0, 1]$ y se compara con el valor de p_{2D} predefinido (inciso 3.3.1). Cuando el número aleatorio es mayor que el valor que toma esta variable se asigna el diámetro máximo a la partícula, si es menor se asigna el diámetro pequeño y en seguida se continúa con la simulación.

b. Granulometría continua

Auvinet, 1986, consideró materiales con una densidad de probabilidad granulométrica en área de tipo lineal (ver definición de distribución y densidad de probabilidad granulométrica en el inciso 2.2.2), con la finalidad de obtener estructuras de mayor interés práctico, es por eso que en este trabajo se incluyen algunas granulometrías de este tipo. El procedimiento para obtener el diámetro de una partícula es el que se describe a continuación y se encuentra programado en la función TRAPECIAL.m.

La densidad de probabilidad granulométrica lineal en área es de la forma:

$$f_{2A}(d) = ad + b; \text{ para } D_{mín} < d < D_{máx} \quad (3.4)$$

Donde a, b son los parámetros de la densidad de probabilidad granulométrica

Considerando que el área bajo la curva $f_{2A}(d)$ en el intervalo de interés es unitaria, dichos parámetros pueden reducirse a uno solo ($\lambda \in [0, 2]$) evaluando $f_{2A}(d)$ en $D_{mín}$ y $D_{máx}$. En términos de este coeficiente de distribución granulométrica λ , la ecuación anterior queda expresada como:

$$f_{2A}(d) = \frac{2(1-\lambda)}{(D_{m\acute{a}x} - D_{m\acute{i}n})^2} d + \frac{\lambda(D_{m\acute{a}x} - D_{m\acute{i}n}) - 2D_{m\acute{i}n}(1-\lambda)}{(D_{m\acute{a}x} - D_{m\acute{i}n})^2} \quad (3.5)$$

Para elegir un tamaño de partícula a partir de la generación de un número aleatorio es necesario transformar la densidad de probabilidad en área a número, ponderando la primera por un término inversamente proporcional al área del disco (ecuación 3.6). Entonces, el número aleatorio N , con distribución uniforme entre cero y uno, se iguala a la función de distribución de los diámetros en frecuencias de número de partículas $N = F_{2D}(d)$ (figura 3.4) de donde finalmente se obtiene el diámetro de la partícula por el método de Newton – Raphson.

$$F_{2D}(d) = N = \int_{D_{m\acute{i}n}}^d \frac{ad+b}{d^2 E_{2A} \left\{ \frac{1}{D^2} \right\}} dd = \frac{a}{\gamma} \ln \left(\frac{d}{D_{m\acute{i}n}} \right) - \frac{b}{\gamma} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D_{m\acute{i}n}} \right) \quad (3.6)$$

$$\text{Donde: } \gamma = E_{2A} \left\{ \frac{1}{D^2} \right\} = \int_{D_{m\acute{i}n}}^{D_{m\acute{a}x}} \frac{ad+b}{d^2} dd = a \ln \left(\frac{D_{m\acute{a}x}}{D_{m\acute{i}n}} \right) - b \left(\frac{1}{D_{m\acute{a}x}} - \frac{1}{D_{m\acute{i}n}} \right) \quad (3.7)$$

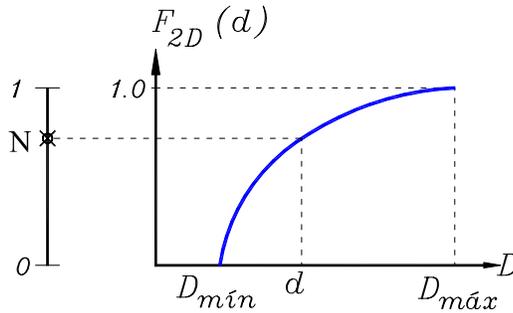


Figura 3.4. Determinación del tamaño de partícula para granulometría continua

3.1.3 Densificación de la estructura

Con la finalidad de controlar en cierta medida la porosidad de los medios granulares simulados se han propuesto dos métodos de colocación de las partículas. En el primer caso, o método de colocación suelto (MS), las partículas se colocan a partir de un eje de caída ubicado al azar y un primer disco de apoyo como se describió anteriormente (función EJEC.m).

Por la forma de la superficie del medio que se genera, como la que se muestra en la figura 3.5, puede decirse que se permite una formación de pilas triangulares o montículos, por cuya superficie es difícil colocar las partículas grandes, ya que físicamente rodarían hacia una posición más baja. Se nota también que las partículas en dichos montículos únicamente cumplen con el equilibrio local, pero no cumplirían con un equilibrio mecánico global.

En un segundo método llamado denso (MD), se generan veinte ejes de caída con su respectivo primer disco de apoyo, de ellos se elige el disco de apoyo de menor elevación (función EJESC.m). Se pretende que este método represente un vaciado uniformemente repartido como el que se aprecia en la figura 3.6 y se obtengan estructuras menos porosas, además de una organización distinta de las partículas.

El programa de simulación se apoya en una estas funciones (según sea el caso) para determinar la posible ubicación del disco en el medio granular y continuar con la simulación.

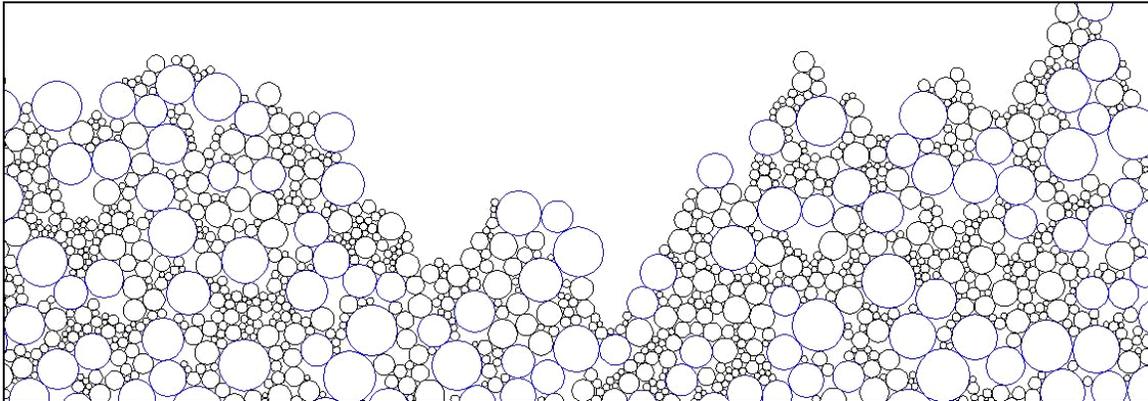


Figura 3.5. Superficie de una estructura 2 D con MS

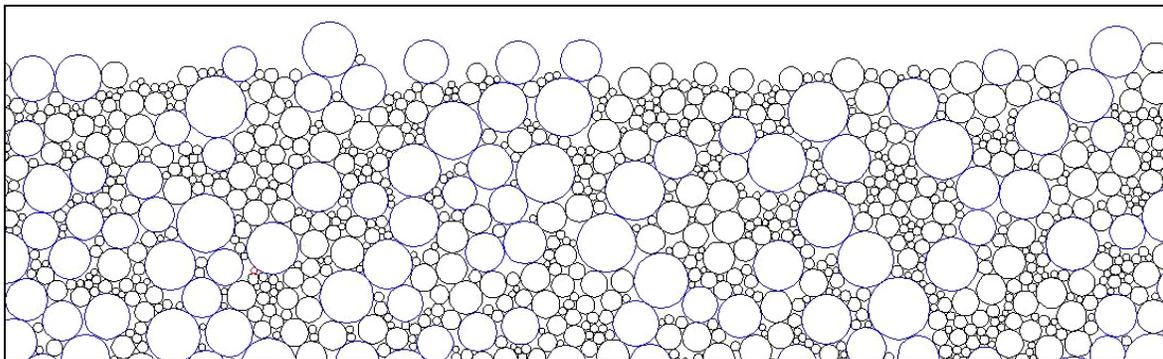


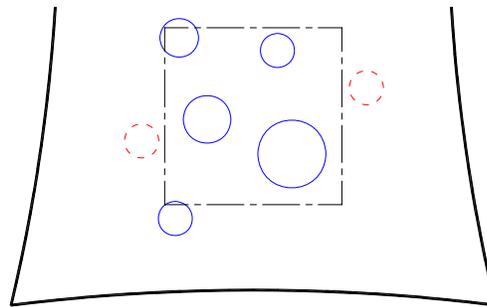
Figura 3.6. Superficie de una estructura 2 D con MD

Tomando en cuenta que el método denso representa en forma más satisfactoria la estructura de los medios granulares, en las simulaciones que se presentan en este trabajo se utiliza sistemáticamente este método de colocación.

3.1.4 Regiones de análisis

Las desviaciones inducidas en la granulometría y la porosidad por los efectos de las paredes laterales y del fondo, son aminoradas si se elige una región representativa del material centrada en el recipiente (Roy y Auvinet, 2004), para esto se cuenta con la función MATCENT.m que selecciona las partículas que están contenidas total o parcialmente dentro de un cuadro centrado en el recipiente, el cual tiene dimensiones unitarias. El criterio de selección de partículas se ilustra en la figura 3.7.

Algunas otras funciones tienen límites diferentes de acuerdo a la zona de exploración y dependiendo del objetivo de cada una de ellas. Sobre las muestras obtenidas es posible realizar los análisis de los que se obtendrán los parámetros característicos del material, siempre que se tenga un número significativo de partículas.



- Partícula tomada en cuenta
- Partícula descartada

Figura 3.7. Criterio de selección de partículas

3.1.5 Revisión de la granulometría

En este modelo bidimensional se desarrollaron funciones para obtener la granulometría, en frecuencias de área o número (funciones GRANAREA.m y GRANUMERO.m respectivamente), de las simulaciones realizadas. Estas funciones requieren de una matriz de partículas, que puede ser la del cuadro central, la simulación completa u otra región de interés particular.

El procedimiento consiste en dividir la granulometría en 100 clases o intervalos y cada disco se contabiliza en aquella clase que representa el tamiz más grande donde quedaría retenido. Los programas antes mencionados realizan esta operación mediante la comparación de tamaños como se aprecia en la figura 3.8.

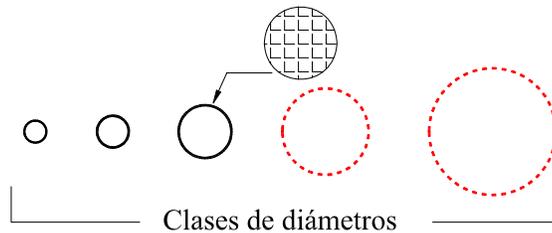


Figura 3.8. Ubicación de partículas en la distribución granulométrica

Después de haber obtenido la densidad o la distribución granulométrica de la simulación, es posible calcular los coeficientes (de uniformidad y de curvatura) que caracterizan la granulometría empleando las ecuaciones 2.1 y 2.2. De este modo, se tiene una idea sobre el tipo de material que se ha obtenido de acuerdo a la clasificación tradicional de suelos.

Cabe destacar que, para que los coeficientes sean equivalentes a los que se obtienen de las pruebas de laboratorio convencionales, la determinación debe realizarse sobre las granulometrías en frecuencias de área (considerando que la estructura es bidimensional) aplicando la función COEFICIENTES.m.

3.1.6 Porosidad

Para estimar la porosidad dentro de una región determinada en el recipiente, se tiene la dificultad de que algunas partículas son cortadas por los límites de dicha región y sería muy laborioso cuantificar el

espacio que ocupan dentro de ella; entonces, en lugar de medir las superficies se recurre a una técnica de estimación basada en el método de Monte Carlo.

Supóngase que se desea obtener la superficie de un subespacio dentro de una región. La técnica de Monte Carlo consiste en generar una gran cantidad de puntos repartidos al azar dentro de la región, de los cuales, una cierta cantidad de puntos estarán dentro del subespacio de interés y el resto fuera (figura 3.9). El área del subespacio puede aproximarse mediante la proporción de puntos ubicados dentro y los puntos ubicados fuera de él.

$$n = \frac{\text{núm. de puntos en los vacíos}}{\text{núm. total de puntos}} \quad (3.8)$$

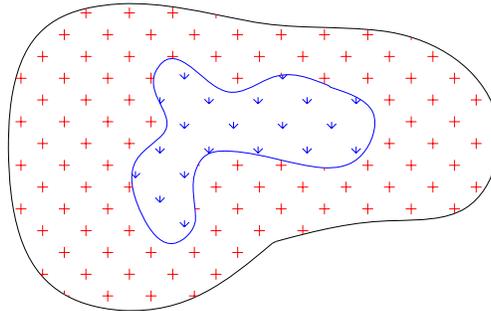


Figura 3.9. Estimación de áreas con la técnica de Monte Carlo

Este razonamiento se aplica en la estimación de la porosidad (función PORO.m) de una estructura, contabilizando los puntos que se ubican dentro de las partículas y los que caen en los espacios vacíos. En esta estimación es importante seleccionar una zona de la estructura granular donde no se tengan influencias de las fronteras.

3.1.7 Función característica binaria

De acuerdo con Auvinet, 1986, la función característica binaria K de Matheron, representa la distribución aleatoria de sólidos y vacíos en el espacio. En cada punto X seleccionado al azar dentro de la masa granular, la función se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K(X) &= 1 && \text{si } X \text{ pertenece a los poros} \\ K(X) &= 0 && \text{si } X \text{ es parte de los sólidos} \end{aligned}$$

El carácter aleatorio de sus valores, le permite a la función ser considerada como un proceso estocástico espacial y una realización del proceso queda representada por una muestra del material granular.

Al admitir que el medio es estadísticamente homogéneo y tomar al azar un punto X dentro de él se tiene:

$$P[K(X) = 1] = n \quad (3.9)$$

$$P[K(X) = 0] = 1 - n \quad (3.10)$$

Donde n es la porosidad del medio

Además, esta función característica es de tipo Bernoulli, por lo tanto:

$$E\{K(X)\} = n \quad (3.11)$$

$$\text{var}[K(X)] = n(1-n) \quad (3.12)$$

La función POROBIN.m está elaborada para evaluar la función característica binaria a lo largo de un conjunto de trayectorias rectas horizontales y verticales cercanas a las fronteras del medio granular. La porosidad obtenida en cada trayectoria es de gran ayuda en la descripción de la forma en que se organizan las partículas del medio.

3.1.8 Concentración espacial de discos

Para describir la organización de las partículas dentro de un material granular y con ello la segregación, es útil definir una variable que proporcione información acerca del número de partículas contenidas en determinado espacio.

Por sencillez y tomando en cuenta las formas de evaluar la segregación en otros trabajos, se consideró adecuado cuantificar el número de partículas que son intersecadas por sondeos rectos (verticales y horizontales) ubicados en diferentes posiciones del medio, definiéndose a NDI como la variable aleatoria que representa el número de discos cortados por los sondeos de dos unidades de longitud (concentración espacial de discos).

Auvinet, 1986, mostró que al introducir una función aleatoria $N_L(L)$ igual al número de partículas intersecadas por un sondeo recto de longitud L , si el medio es homogéneo, isótropo y está formado por partículas circulares, el valor esperado de la función (cuando $L=2$, $N_L(L=2) = NDI$) es:

$$E_D\{NDI\} = L \lambda_L = 2 \frac{1-n}{E_D\{D\}} \quad (3.13)$$

Donde $L=2$ es la longitud de la línea de corte, λ_L el número de discos por unidad de longitud y $E_D\{D\}$ la esperanza en número del diámetro cortado por el sondeo (ecuación 3.14).

$$E_D\{D\} = \frac{E_{2D}\left\{\frac{\pi}{4} D^2\right\}}{E_{2D}\{D\}} \quad (3.14)$$

Cuando dentro de los sondeos las partículas se encuentran ubicadas al azar, las observaciones de NDI son cercanas a su media (y a su esperanza, si se tiene una muestra grande de partículas); pero si en un sondeo predominan las partículas grandes, NDI toma un valor por debajo de la media, esto indica que las partículas grandes se encuentran relativamente juntas o agrupadas (figura 3.10). Por lo tanto, a mayores diferencias de NDI con su media, se incrementa su coeficiente de variación y éste puede asociarse con la presencia de segregación. Un razonamiento similar es aplicable a las partículas chicas.

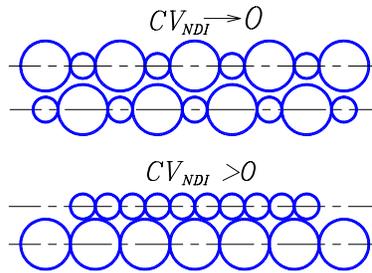


Figura 3.10. Relación de la variación de NDI con la segregación

La función `HOMOGENEIDAD.m` se encarga de contabilizar el número de discos intersecados por un conjunto de rectas horizontales y verticales de dos unidades de longitud, uniformemente repartidas en el recipiente. Los sondeos horizontales abarcan la totalidad del ancho del contenedor y los verticales se desarrollan entre la elevación cero y dos.

Para cada estructura granular se obtiene un vector de los valores que toma NDI en mil sondeos horizontales y otro vector en los sondeos verticales. La secuencia de cálculo es la siguiente:

- Se inicia con el conteo de partículas en sondeos horizontales desde la posición $z=0$.
- Manteniendo fija la posición del sondeo se revisa en la matriz de simulación, una a una, las partículas cuyo centro se ubique a una distancia (vertical al sondeo) inferior a su radio. De ser cierta la condición, se contabiliza una partícula más para NDI a esta elevación, en caso contrario se revisa el siguiente disco.
- Cuando las partículas quedan fuera del alcance del sondeo se realiza un pequeño incremento ($\Delta z = 0.002$) para aumentar la elevación del sondeo y se lleva a cabo una nueva búsqueda de partículas intersecadas.
- Los pasos anteriores se repiten hasta que el sondeo horizontal alcanza la elevación de dos unidades y obtener una señal completa de NDI .
- Se calcula la media, desviación estándar y coeficiente de variación del conjunto de valores obtenidos.
- El conteo de partículas en sondeos verticales se lleva a cabo en forma análoga de la posición $x = -1$ a $x=1$ y se calcula la media, desviación estándar y coeficiente de variación de estos datos, los cuales se utilizarán en el estudio de la segregación.

3.1.9 Función de correlación espacial

Por el carácter aleatorio de los valores de NDI en cada posición X , de un sondeo ubicado al azar dentro del recipiente, la variable puede ser considerada como un proceso estocástico espacial unidimensional y una realización del proceso queda representada por una señal obtenida de una estructura particular.

Interesa evaluar la dependencia de los valores de NDI de un sondeo a otro dentro de la misma estructura, y la dependencia entre NDI de una simulación con otra con la misma granulometría (dos

procesos diferentes). Esta información la proporcionan el coeficiente de autocorrelación (ρ_{NDI}) y el de correlación cruzada ($\rho_{1,2}$ para indicar que se obtiene de diferentes simulaciones).

El procedimiento para calcular el coeficiente de autocorrelación se presenta a continuación. La secuencia de cálculo es la misma para obtener el coeficiente de correlación cruzada y conviene tener presente los conceptos del anexo A.1.3.

En medios anisótropos, es aceptable suponer que el medio es estacionario en el sentido amplio a lo largo de una dirección, por lo que la función de autocorrelación depende de la distancia vectorial (h) entre los puntos de interés y se calcula con el estimador de la ecuación 3.15.

$$R(h) = \frac{1}{L-h} \int_h^L NDI(X) NDI(X+h) dX \quad (3.15)$$

Donde L es la longitud de la línea a lo largo de la cual se evalúa $NDI(X)$ y h es la separación entre sondeos o el desfase de la realización consigo misma (fig. 3.11).

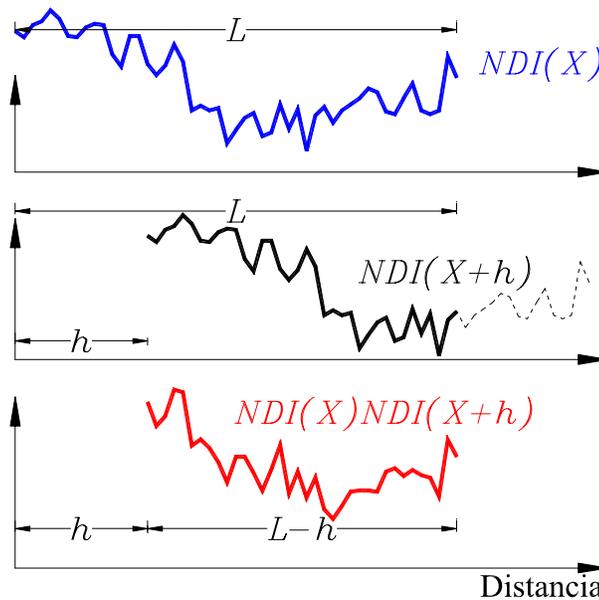


Figura 3.11. Método de la trayectoria para obtener la función de autocorrelación

Al centrar y estandarizar el momento así obtenido se obtiene el coeficiente de autocorrelación lineal comprendido siempre en el intervalo $[-1,+1]$.

$$\rho_{NDI}(h) = \frac{R(h) - \mu_{NDI(X)} \mu_{NDI(X+h)}}{\sigma_{NDI(X)} \sigma_{NDI(X+h)}} \quad (3.16)$$

Con este planteamiento, la función CORRELNDI.m obtiene la función de autocorrelación espacial de NDI , de acuerdo a la siguiente secuencia:

- La función necesita ser provista de dos series de valores de NDI obtenidas con la función HOMOGENEIDAD.m. Por ejemplo, se toman las observaciones en sondeos horizontales.

- La primera señal (o señal fija) se conserva tal cual durante el proceso de cálculo, únicamente se calcula su media y varianza.
- Por su parte, la segunda se desplaza una cantidad ($\Delta h=0.002$), dejando vacío *NDI* en las posiciones iniciales y cortando la señal a la distancia $x=L$ (figura 3.11). También se calcula su media y varianza.
- Se multiplican los valores de la señal fija por los de la desplazada, se obtiene la suma, se multiplica por el incremento en Δh (de igual magnitud que la separación entre sondeos) y se divide por la longitud de traslape, para obtener el estimador de la autocorrelación (ecuación 3.15).
- Se aplica la ecuación (3.16) para calcular el coeficiente de autocorrelación espacial o correlación cruzada correspondiente al desplazamiento acumulado h .
- Se realiza un incremento en el desplazamiento en la segunda señal y se repiten los dos pasos anteriores tantas veces como sea conveniente para definir la tendencia del coeficiente de autocorrelación en función de h .
- Este procedimiento se ejecuta nuevamente para las señales de *NDI* obtenidas de sondeos verticales.

3.1.10 Distancia mínima entre centros de discos

La variable aleatoria T definida en el inciso 2.2.9.b, medida en diferentes fracciones granulométricas es otra herramienta para el estudio de la segregación, que puede llevarse a cabo por comparación entre la densidad de probabilidad teórica y la observada de la variable, o por medio de la distancia mínima media \bar{T}_{2T} . El segundo caso es más práctico para observar la tendencia de las partículas del mismo tamaño a agruparse.

De acuerdo al siguiente procedimiento, la función DCERCANA.m fue elaborada para evaluar la distancia entre el centro de una partícula y el centro de la partícula más cercana, ambas de la misma fracción granulométrica.

- La granulometría se divide en $D_{mín}$ y $D_{máx}$ si es de tipo bimodal, o en diez intervalos complementarios de $D_{mín} - D_{10}$ a $D_{90} - D_{máx}$ si la granulometría es continua. Los límites de los intervalos se determinan en frecuencias de área y a cada clase así determinada se le llama fracción granulométrica.
- Se seleccionan las partículas de una fracción granulométrica (se inicia con las partículas pequeñas) siempre y cuando la elevación de su centro sea inferior a $z=2$.
- La concentración espacial por unidad de área de las partículas seleccionadas se conoce fácilmente al dividir el número de ellas entre el área considerada del recipiente, ecuación 3.17.

$$\lambda_A = \frac{N}{A_T} \quad (3.17)$$

Siendo N el número de partículas seleccionadas
 A_T el área considerada del recipiente

- Para cada una de las partículas elegidas se calcula la distancia con el resto de sus compañeras en búsqueda del valor mínimo $T_{2T} = t$, que es el dato de interés.
- Se obtiene la media \bar{T}_{2T} y desviación estándar S_{2T} de la muestra de distancias mínimas observadas, luego se normalizan dividiendo por la esperanza (en área) del diámetro de la fracción granulométrica estudiada.
- La esperanza $E_{2T}\{T\}$ y desviación estándar σ_{2T} teóricas se obtienen por integración numérica aplicando la definición probabilista de estas medidas descriptivas. La densidad de probabilidad de T fue presentada en el Capítulo 2.
- A continuación se construye el histograma de los valores observados de la variable T_{2T} y la densidad de probabilidad Poissoniana. La comparación gráfica de ambos resultados es de utilidad para juzgar la validez de la distribución espacial aleatoria de las partículas.
- Los pasos anteriores se repiten para todas las fracciones en las que se haya dividido la granulometría.

3.1.11 Segregación forzada en estructuras bidimensionales

Es interesante complementar los resultados de la segregación ocasionada por el modelo de simulación con un estado inducido de segregación. Este estado se logra con algunas modificaciones sencillas al algoritmo de formación de las estructuras.

De una simulación cualquiera construida con el programa DISCOS.m se toman los tamaños de todas las partículas que la conforman. Se ordenan de menor a mayor (de D_{\min} a D_{\max}) y se da inicio a la colocación individual de cada uno de los discos. La única diferencia con el algoritmo original es que el tamaño de las partículas está predeterminado, en lugar de obtenerlo de manera aleatoria de una función o densidad de probabilidad granulométrica.

La nueva estructura se conforma por partículas cada vez más grandes, al aumentar la elevación dentro del recipiente, formando grupos de partículas de igual tamaño o similar. Al programa que realiza estas actividades se le llamó RECOL.m.

3.2 ALGORITMOS DEL MODELO TRIDIMENSIONAL

Por ser de mayor interés, el modelo fue extendido para generar estructuras granulares en tres dimensiones. Se tiene un programa principal para formar la estructura y otro con funciones complementarias para realizar los análisis.

3.2.1 Formación de la estructura tridimensional

Auvinet, 1972, desarrolló el algoritmo de formación de la estructura en tres dimensiones, el cual es análogo al de discos y es el que se describe a continuación (programa ESFERAS.m).

- Se define un recipiente delimitado por cinco esferas secantes con diámetros varios órdenes de magnitud mayores a los de las partículas de la estructura. Cuatro representan las paredes (fronteras verticales del recipiente) y la otra el fondo (frontera inferior) como lo muestra la figura 3.12. Las dimensiones del recipiente de simulación son aproximadamente 2*2*2.5 (largo*ancho*altura).

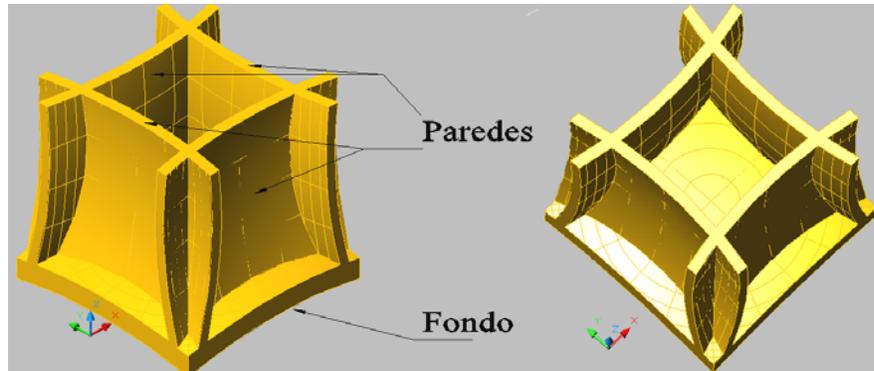


Figura 3.12. Recipiente tridimensional, curvatura exagerada

- Se leen los parámetros para llevar a cabo la simulación de la estructura como: el número de partículas, tamaños extremos de la granulometría, tipo de granulometría, coeficiente de distribución granulométrica y el método de colocación.
- Elegida la distribución granulométrica, se escoge un tamaño al azar dentro de ella (inciso 3.2.2).
- Se obtiene un eje de caída ubicado aleatoriamente en la sección transversal del recipiente (plano x, y).
- El eje de caída es representado por una franja vertical que interseca un grupo de partículas previamente colocadas y al fondo del recipiente. De éstas, se adopta la de mayor elevación como la partícula que puede proporcionar el primer punto de apoyo.
- En seguida, se busca una segunda esfera de apoyo. Si se trata del fondo o las paredes del recipiente, únicamente se examina que no se vuelva a elegir la primera esfera. Cuando la esfera forma parte de la estructura granular, por conveniencia se revisa que la primera esfera de apoyo no sea demasiado elevada respecto a la segunda.
- La tercera esfera de apoyo se obtiene de las partículas de la simulación que no han sido descartadas como apoyos, en forma análoga a la segunda esfera elegida previamente. También se evalúa que la nueva esfera no pase por el espacio libre entre parejas de esferas de apoyo.
- Se calculan las coordenadas del centro de la nueva esfera y en su caso se rechaza si la elevación es mayor a 2.5. Posteriormente se determinan las coordenadas de los puntos de contacto, las cuales son útiles para explorar si la vertical del centro de gravedad de la nueva

esfera cruza el área de sustentación (condición de equilibrio estático). Si no existe equilibrio, la esfera se rechaza y se busca una nueva posición.

- Puede ser útil tener presente que: las paredes laterales del recipiente son parte del hemisferio inferior de las esferas que lo conforman, con esto las partículas de la simulación tienden a separarse de ellas. Por otra parte, puede presentarse la situación en la que una partícula pequeña pase por el hueco formado entre tres esferas en contacto (figura 3.13) y al no encontrar los puntos de contacto la nueva esfera sea rechazada.

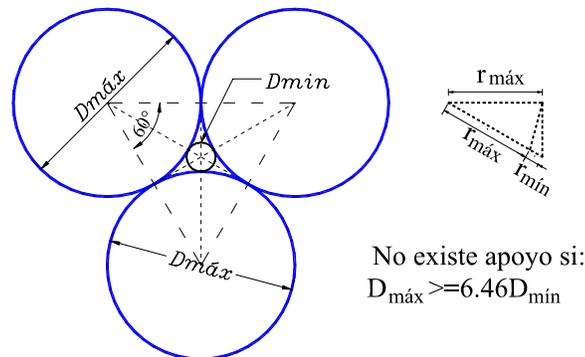


Figura 3.13. Limitación en la colocación de partículas, granulometría bimodal 3 D

- Se revisa que la nueva esfera no se traslape con las esferas ya generadas o con el recipiente. De cumplirse esta condición, la nueva esfera se acepta como parte de la estructura, en caso contrario se buscarán otras esferas de apoyo u otra posición.
- Las esferas se ordenan de acuerdo a la elevación de su centro y eventualmente se registran el número de contactos en las esferas de apoyo y en la partícula creada. Esto ha sido de utilidad en otros estudios y en la depuración del programa.
- Los pasos anteriores se repiten hasta generar el número de esferas indicado o llenar el recipiente a la elevación predeterminada.

La visualización de la estructura granular creada se lleva a cabo mediante la función CAJA.m, elaborada para graficar las aristas de un paralelepípedo que representa aproximadamente el recipiente. Es preferible no trazar las esferas que representan el contenedor porque evitan la visualización del medio. En seguida, la función GRANO.m grafica una por una, las partículas que integran la simulación.

3.2.2 Selección de la granulometría

Con la finalidad de construir estructuras análogas en dos y tres dimensiones, nuevamente se definieron funciones que permitieran obtener granulometrías con distribución de probabilidad uniforme (esferas iguales) y bimodal (dos tamaños de partículas), y con densidad de probabilidad lineal continua (en volumen).

a. Granulometría bimodal

Para granulometrías discretas, la función DOSRADIOS.m elaborada en los algoritmos bidimensionales continúa siendo válida, pero es necesario establecer formalmente este tipo de granulometría.

Se define la distribución de probabilidad granulométrica $P_{3V}(d)$ (en volumen de partículas) como la proporción del volumen total de sólidos, que representan las partículas de cada tamaño:

$$P_{3V}(d) = p_{3V} \left(\frac{D_{máx} - d}{D_{máx} - D_{mín}} \right) q_{3V} \left(\frac{d - D_{mín}}{D_{máx} - D_{mín}} \right) \quad \text{para } d = \{D_{mín}, D_{máx}\} \quad (3.18)$$

Donde p_{3V} es la proporción, en volumen, de partículas pequeñas
 $q_{3V} = 1 - p_{3V}$ es la proporción, en volumen, de partículas grandes

Pero para poder escoger un tamaño de partícula a partir de un número aleatorio, es necesario transformar esta distribución a una distribución en número de partículas, ponderando las proporciones en volumen por un término inversamente proporcional al volumen de una partícula (o al cubo del diámetro, ecuación 3.19).

$$P_{3D} = \frac{P_{3V}}{D_{mín}^3 E_{3V} \left\{ \frac{1}{D^3} \right\}} \quad (3.19)$$

Que es el dato requerido por el programa de cómputo.

Siendo:

$$E_{3V} \left\{ \frac{1}{D^3} \right\} = \frac{p_{3V}}{D_{mín}^3} + \frac{(1 - p_{3V})}{D_{máx}^3} \quad (3.20)$$

La proporción en número de las partículas grandes es:

$$q_{3D} = 1 - P_{3D} \quad (3.21)$$

Y la distribución de probabilidad en número tiene la misma forma que la ecuación 3.18 pero en frecuencias de número de partículas.

b. Granulometría continua

En el caso de considerar una densidad de probabilidad granulométrica continua lineal en frecuencias de volumen de sólidos, la expresión es:

$$f_{3V}(d) = ad + b; \quad \text{para } D_{mín} < d < D_{máx} \quad (3.22)$$

Después se obtiene la densidad de probabilidad en número, ponderando las frecuencias en volumen por un término en proporción inversa al volumen de una partícula. Para obtener la distribución de

probabilidad (en número) se integra desde el diámetro mínimo de la granulometría hasta el diámetro de partícula que se seleccionará (ecuación 3.23). Esta función se iguala a un número N elegido al azar de distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$, de donde es posible obtener la expresión que determina el tamaño de partícula (ecuación 3.24), la cual se resuelve por la fórmula general.

$$F_{3D}\{d\} = \int_{D_{\min}}^d \frac{a d + b}{\gamma d^3} dd = \frac{a}{\gamma D_{\min}} + \frac{b}{2\gamma D_{\min}^2} - \frac{a}{\gamma d} - \frac{b}{2\gamma d^2} \quad (3.23)$$

$$d = \frac{-\frac{a}{\gamma} - \sqrt{\left(\frac{a}{\gamma}\right)^2 - (N - \delta) \frac{2b}{\gamma}}}{2(N - \delta)} \quad (3.24)$$

Donde:

$$\delta = \frac{a}{\gamma D_{\min}} + \frac{b}{2\gamma D_{\min}^2} \quad (3.25)$$

$$\gamma = E_{3V}\left\{\frac{1}{D^3}\right\} = a\left(\frac{1}{D_{\min}} - \frac{1}{D_{\max}}\right) + b\left(\frac{1}{2D_{\min}^2} - \frac{1}{2D_{\max}^2}\right) \quad (3.26)$$

Y a, b son los parámetros de la densidad de probabilidad granulométrica (ecuación 3.22), reemplazables por el parámetro único λ (llamado coeficiente de distribución granulométrica) como lo muestran las ecuaciones 3.27 y 3.28.

$$a = \frac{2(1 - \lambda)}{(D_{\max} - D_{\min})^2} \quad (3.27) \quad \& \quad b = \frac{\lambda(D_{\max} - D_{\min}) + 2D_{\min}(\lambda - 1)}{(D_{\max} - D_{\min})^2} \quad (3.28)$$

Proporcionando el diámetro máximo y mínimo, así como el coeficiente de distribución granulométrica, la función TRAPECIALTD.m aplica estas expresiones para obtener el tamaño de una partícula cuando el programa de simulación lo requiere.

3.2.3 Densificación de la estructura

En analogía con el modelo bidimensional se plantearon dos métodos de colocación de partículas. En el primero de ellos, la posición de una partícula se obtiene tal como se describió en el inciso 3.2.1 y representa un material en estado suelto. Una característica importante es la formación de pilas cónicas en la parte superior de la estructura, donde se dificulta colocar partículas adicionales.

El caso alternativo consiste en generar cincuenta posiciones aleatorias para cada partícula y adoptar la de menor elevación. En el proceso de formación, el llenado del recipiente es más uniforme que con el método anterior, es más satisfactorio para representar el equilibrio global de la estructura y se logra una reducción en la porosidad.

Por tanto, las estructuras granulares utilizadas en el presente trabajo serán construidas de manera sistemática con el método denso. Éste se encuentra programado en la función EJESC.m, que se encarga

de obtener el primer apoyo (elegido del conjunto de posiciones) cada que el programa de simulación lo requiere.

3.2.4 Regiones de análisis

Ya se ha comentado que las propiedades representativas del medio, como la porosidad y la granulometría, se deben obtener en un lugar donde las perturbaciones de frontera no tengan efecto, el centro del recipiente. Para esto es necesario seleccionar las esferas que están total o parcialmente dentro de un prisma rectangular centrado en el recipiente (función MATCENTTD.m).

También puede ser de interés seleccionar las partículas que están en contacto con el fondo del recipiente, sabiendo que es la frontera que más influye en el medio granular (Roy y Auvinet, 2004). Esta tarea la realiza la función MATFONDOTD.m. En otros casos es aceptable, o es de interés, considerar por completo el medio granular.

3.2.5 Revisión de la granulometría

En el espacio tridimensional, la granulometría puede obtenerse desde tres puntos de vista: en frecuencias de número, en superficie y en volumen de esferas. Los algoritmos elaborados para obtener las curvas granulométricas en cada contexto se caracterizan porque:

- En número de partículas, la probabilidad asociada a una partícula de tamaño cualquiera es constante (función GRANUMEROTD.m).
- En superficie de partículas, la probabilidad asociada a una partícula es proporcional a su superficie (función GRANAREATD.m).
- En volumen de partículas, la probabilidad asociada a una partícula es proporcional a su volumen (función GRANVOLTD.m).

Estos algoritmos son de utilidad para revisar que la granulometría de una estructura simulada corresponde con la granulometría teórica con la que se construye.

Los coeficientes de uniformidad y curvatura de la distribución granulométrica, se obtienen fácilmente a partir de cualquiera de las tres funciones anteriores, aplicando las expresiones vistas en el capítulo 2 (función COEFICIENTESTD.m). De las tres posibilidades, sobresalen los cálculos en términos de volumen, ya que son equivalentes a las pruebas convencionales de análisis granulométrico en laboratorio, con la aceptación de un peso volumétrico constante del material.

3.2.6 Porosidad

En la estimación de la porosidad en tres dimensiones (función POROTD.m) se aplica el mismo criterio que se presentó en el inciso 3.1.6 del modelo bidimensional (ecuación 3.8). Nuevamente se restringe la generación de puntos aleatorios a una región centrada en el recipiente.

Una buena aproximación de la porosidad se consigue a medida que se utilice una mayor cantidad de puntos aleatorios. Es posible calcular la precisión con la que se aproxima la porosidad real mediante la desviación estándar (s) del estimador de la ecuación 3.8, que es:

$$s = \frac{\sqrt{n(1-n)}}{\sqrt{Np}} \quad (3.29)$$

Donde n es la porosidad y Np el número de puntos aleatorios generados para su estimación.

Si se considera una porosidad aproximada del 40% en un medio granular tridimensional y se utilizan 10 000 puntos, la desviación estándar de la estimación es del orden del 0.5%, resultado que se considera aceptable para caracterizar las estructuras granulares de este estudio.

Por otro lado, la porosidad en planos de corte es de gran utilidad para describir la variación espacial de esta propiedad, particularmente cerca de las fronteras. La función POROBINTD.m fue elaborada para evaluar la porosidad a lo largo de planos paralelos a las paredes y fondo del recipiente recurriendo a la función característica binaria descrita anteriormente.

3.2.7 Concentración espacial de esferas

La concentración espacial de esferas se refiere al número de esferas intersecadas (NEI) por cortes planos de cuatro unidades de superficie. De acuerdo a un planteamiento similar al expuesto en el modelo bidimensional, la segregación puede evaluarse a través de su coeficiente de variación de esta variable.

En la función HOMOGENEIDADTD.m se contabiliza NEI en mil planos horizontales con diferentes elevaciones en z y en mil planos verticales paralelos en la dirección x , asumiendo que puede existir anisotropía entre la dirección vertical y la horizontal.

La aplicación de esta función requiere de la existencia de una matriz de simulación de donde se obtienen dos señales, una de los valores de NEI en cortes horizontales y otra en cortes verticales. También se calcula la media, desviación estándar y coeficiente de variación de cada señal.

Teóricamente, es posible definir una función aleatoria que represente el número de partículas esféricas intersecadas por un plano de área A . De donde, el valor esperado (Auvinet, 1986) puede escribirse:

$$E\{NEI\} = A\lambda_A = 4(1-n) \frac{E_{3D}\{D\}}{E_{3D}\left\{\frac{\pi}{6}D^3\right\}} \quad (3.30)$$

Donde: λ_A es el número de esferas por unidad de área
 n es la porosidad en el plano de corte
 $E_{3D}\{D\}$ es la esperanza en número del diámetro de las partículas
 $E_{3D}\left\{\frac{\pi}{6}D^3\right\}$ es la esperanza del volumen de las partículas

Para una estructura de granulometría conocida y después de estimar la porosidad representativa del medio, la ecuación 3.30 se puede utilizar para validar el buen funcionamiento de la función HOMOGENEIDADTD.m.

3.2.8 Función de correlación espacial

La función de autocorrelación de *NEI* es de utilidad para observar los arreglos de partículas que se forman en el medio y la correlación cruzada permite averiguar que realmente las simulaciones tengan un carácter aleatorio de una simulación a otra (con granulometrías iguales).

La metodología esencialmente es la misma que se expuso en la sección 3.1.9 y se encuentra incorporada en la función *CORRELNEI.m* elaborada en *MATLAB*. Los resultados que se obtienen son los valores del coeficiente de autocorrelación o correlación cruzada como función de la separación (*h*) entre planos de corte.

3.2.9 Distancia mínima entre centros de esferas

Continuando con los mismos análisis planteados para el caso bidimensional, se pretende medir la tendencia a agruparse de las partículas de cierto tamaño, mediante la distancia mínima T_{3T} entre los centros de esferas vecinas de igual tamaño o similar.

Para esto, en las granulometrías bimodales se analizan por separado las partículas de $D_{mín}$ y las de $D_{máx}$. O bien, una granulometría continua se divide sistemáticamente en diez clases, en términos de volumen de partículas, de modo que las partículas de cada una de ellas representa el 10% del volumen total de sólidos.

- Después fraccionar la granulometría, la función *DCERCANATD.m* inicia el proceso de cálculo seleccionando las partículas de una fracción granulométrica (se inicia con las partículas más pequeñas).
- Se calcula la concentración de partículas λ_v como el número de partículas elegidas entre el volumen del recipiente ($2*2*2=8$ unidades cúbicas).
- Para una partícula, se calculan las distancias de su centro al centro de todas las demás y de esta muestra se conserva la distancia mínima $T_{3T} = t$. Este paso se repite para cada una de las partículas de la fracción granulométrica para obtener un conjunto de distancias mínimas.
- Se obtienen las medidas descriptivas: media \bar{T}_{3T} y desviación estándar S_{3T} . Adicionalmente se obtiene un histograma de los valores observados.
- Mediante la densidad de probabilidad teórica se obtiene la esperanza $E_{3T}\{T\}$ y desviación estándar σ_{3T} , respecto a los cuales puede evaluarse la aceptación de la hipótesis Poissoniana del conjunto de partículas en estudio.
- La secuencia se repite hasta estudiar todas las fracciones granulométricas del medio.

Para hacer referencia al tamaño de las partículas, las distancias medias obtenidas se normalizan respecto a la esperanza del diámetro de las partículas de cada fracción granulométrica. La esperanza del diámetro de una partícula esférica en una granulometría lineal continua en volumen es:

$$E_{3v}\{D\} = \int_{D_1}^{D_2} d * f_{3v}(d) dd = \frac{2(1-\lambda)(D_2^3 - D_1^3)}{3(D_2 - D_1)^2} + \frac{\lambda(D_2 + D_1) - 2D_1}{2(D_2 - D_1)^2} (D_2^2 - D_1^2) \quad (3.31)$$

Donde D_2 y D_1 son el tamaño máximo y mínimo de la fracción granulométrica considerada y λ el coeficiente de distribución granulométrica.

3.2.10 Segregación forzada en estructuras tridimensionales

En búsqueda de obtener estructuras con segregación geométrica controlada, se realizó una modificación al modelo de simulación para colocar las partículas de una estructura por orden ascendente de tamaños, en el fondo del recipiente las más pequeñas y en la superficie las grandes.

El programa RECOLTD.m toma los datos del tamaño de las partículas de una simulación, los ordena de menor a mayor, lee el tamaño de la esfera y aplica el mismo procedimiento de colocación descrito en el inciso 3.2.1. La nueva estructura se analiza con las mismas funciones complementarias.

3.3 GRANULOMETRÍAS

Tomando en cuenta las limitaciones del programa de simulación en cuanto al número de partículas es necesario acotar el campo de estudio, limitando los intervalos de variación de las variables granulométricas (se considera un número de partículas de 20 000 y 30 000 para las estructuras granulares bidimensionales y tridimensionales respectivamente). Estas variables son: la proporción de partículas pequeñas o el coeficiente de distribución granulométrica (según si la granulometría es bimodal o continua), diámetro mínimo de partícula y el diámetro máximo de partícula.

En granulometrías bimodales, las proporciones de las partículas pequeñas (en área y en volumen) consideradas son: p_{2A} o $p_{3V} \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$. Por otro lado, los coeficientes de distribución granulométrica $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ en granulometrías continuas.

Con estos parámetros es posible calcular los diámetros mínimo y máximo de los discos y esferas, pero antes es conveniente definir una variable auxiliar que los relaciona:

$$\alpha = \frac{D_{máx}}{D_{mín}} \in [1, 15] \quad (3.32)$$

3.3.1 Caso bidimensional

Se sabe que el área del recipiente es aproximadamente de 5 unidades cuadradas, el número de partículas es 20 000 y la porosidad de una estructura granular plana puede considerarse *a priori* como un 20%. Entonces, de acuerdo a la distribución espacial de partículas (inciso 2.2.6) el número de discos contenidos en determinada área en medios homogéneos puede escribirse como:

$$N_A(A = A_{recip}) = \frac{(1-n)A_{recip}}{E_{2D}\{A\}} = \frac{(1-n)A_{recip}}{\frac{\pi}{4}E_{2D}\{D^2\}} \quad (3.33)$$

Sustituyendo datos y resolviendo para la esperanza del cuadrado del diámetro:

$$E_{2D}\{D^2\} = \frac{4(1-0.2)5}{20000\pi} = 2.546 \times 10^{-4} \text{ unidades cuadradas}$$

Por otra parte, se establece (de acuerdo a la teoría de la probabilidad) la esperanza del cuadrado del diámetro en cada tipo de granulometría, para obtener el diámetro mínimo y máximo de partículas, con la previa transformación de las probabilidades en área a número (inciso 3.1.2).

- Granulometría bimodal

La proporción en número de partículas pequeñas es entonces:

$$p_{2D} = \frac{\alpha p_{2A}}{(\alpha^2 - 1)p_{2A} + 1} \quad (3.34)$$

Nótese que para una proporción fija de área de partículas de D_{min} , para cada valor de α se tiene un valor de p_{2D} distinto, y además diferente de p_{2A} , sólo serán iguales cuando $\alpha=1$.

$$E_{2D}\{D^2\} = p_{2D} D_{min}^2 + (1 - p_{2D}) D_{max}^2 \quad (3.35)$$

$$D_{min} = \sqrt{\frac{E_{2D}\{D^2\}}{p_{2D} + (1 - p_{2D})\alpha^2}} \quad (3.36)$$

- Granulometría continua:

Transformación de área a número:

$$E_{2D}\{D^2\} = \int_{D_{min}}^{D_{max}} d^2 f_{2D}(d) dd = \int_{D_{min}}^{D_{max}} d^2 \frac{ad + b}{d^2 E_{2A}\left\{\frac{1}{D^2}\right\}} dd = \frac{1}{E_{2A}\left\{\frac{1}{D^2}\right\}} \quad (3.37)$$

Donde $E_{2A}\left\{\frac{1}{D^2}\right\}$ se determina con la ecuación 3.7

$$D_{min} = \sqrt{E_{2D}\{D^2\} \frac{2\alpha(1-\lambda) + \lambda(\alpha^2 - 1) - 2(\alpha - 1)}{\alpha(\alpha - 1)^2}} \quad (3.38)$$

En ambos tipos de granulometría, el diámetro máximo de partículas se calcula con la ecuación 3.32.

La tabla 3.1 concentra los parámetros de las granulometrías consideradas y las figuras 3.14 y 3.15 muestran los diámetros mínimos obtenidos en cada caso.

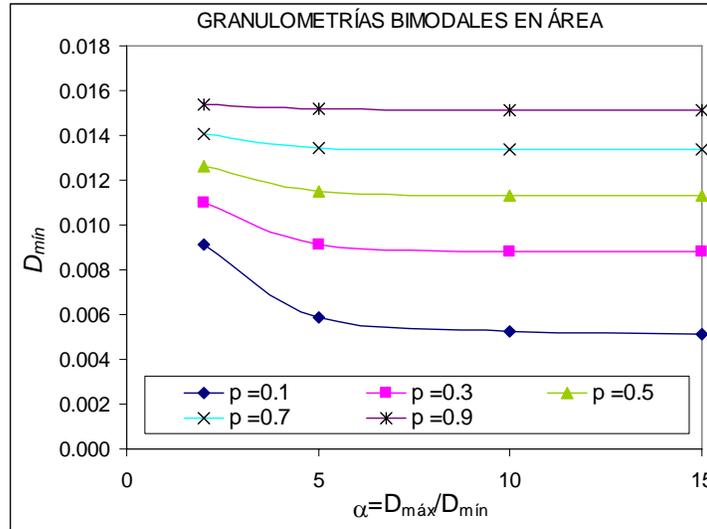


Figura 3.14. Tamaño de partículas, granulometrías bimodales en área 2 D

La figura 3.14 y tabla correspondiente indican que la información relevante se obtiene cuando $0.1 \leq p_{2A} \leq 0.7$. Las estructuras fuera de este intervalo tienden a ser uniformes y solo en casos excepcionales serán consideradas en los estudios.

Tabla 3.1. Datos de las estructuras bidimensionales

GRANULOMETRÍA BIMODAL					GRANULOMETRÍA CONTINUA			
α	p_{2A}	p_{2D}	D_{min}	$D_{máx}$	α	λ	D_{min}	$D_{máx}$
1	1	1	0.016	0.016	1	0, 1 y 2	0.0160	0.0160
2	0.1	0.308	0.009	0.018	2	0	0.0099	0.0198
5	0.1	0.735	0.006	0.029	5	0	0.0051	0.0254
10	0.1	0.917	0.005	0.053	10	0	0.0030	0.0297
15	0.1	0.962	0.005	0.077	15	0	0.0021	0.0322
2	0.3	0.632	0.011	0.022	2	1	0.0113	0.0226
5	0.3	0.915	0.009	0.046	5	1	0.0071	0.0357
10	0.3	0.977	0.009	0.088	10	1	0.0050	0.0505
15	0.3	0.990	0.009	0.132	15	1	0.0041	0.0618
2	0.5	0.800	0.013	0.025	2	2	0.0125	0.0250
5	0.5	0.962	0.012	0.058	5	2	0.0087	0.0436
10	0.5	0.990	0.011	0.113	10	2	0.0065	0.0649
15	0.5	0.996	0.011	0.170	15	2	0.0054	0.0813
2	0.7	0.903	0.014	0.028				
5	0.7	0.983	0.013	0.067				
10	0.7	0.996	0.013	0.134				
15	0.7	0.998	0.013	0.200				
2	0.9	0.973	0.015	0.031				
5	0.9	0.996	0.015	0.076				
10	0.9	0.999	0.015	0.151				
15	0.9	0.9995	0.015	0.227				

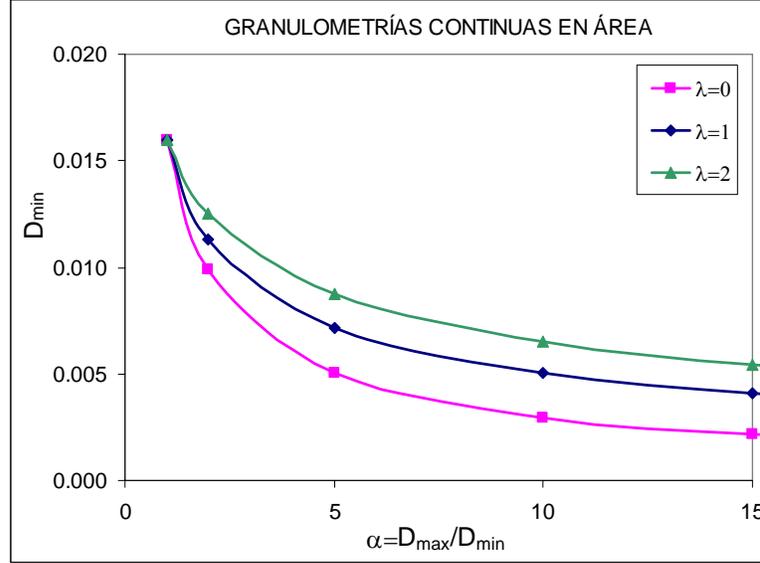


Figura 3.15. Tamaño de partículas, granulometrías continuas en área 2 D

3.3.2 Caso tridimensional

Dado que el recipiente de simulación es de aproximadamente 10 unidades cúbicas, que la porosidad de un medio tridimensional puede estimarse en un 40% y que el número de partículas considerado es igual a 30 000, la esperanza del diámetro al cubo de las partículas esféricas se obtiene de la ecuación 2.8.

$$E_{3D}\{D^3\} = \frac{6(1-n)V_{recip}}{\pi N^\circ \text{partículas}} = 3.82 \times 10^{-4} \quad \text{unidades cúbicas}$$

Con estos datos y con la aplicación de la definición probabilista de esperanza en cada tipo de granulometría se pueden calcular los tamaños mínimo y máximo de las partículas en términos de las variables granulométricas.

- Granulometría bimodal

Se transforma la proporción en volumen de las partículas pequeñas a una proporción en número de partículas:

$$p_{3D} = \frac{p_{3V}}{D_{min}^3 E_{3V}\left\{\frac{1}{D^3}\right\}} = \frac{\alpha^3 p_{3V}}{(\alpha^3 - 1)p_{3V} + 1} \quad (3.39)$$

La esperanza de interés es:

$$E_{3D}\{D^3\} = p_{3D} D_{min}^3 + (1 - p_{3D}) D_{máx}^3 \quad (3.40)$$

De acuerdo a las dos ecuaciones anteriores el diámetro mínimo de las esferas es:

$$D_{min} = \sqrt[3]{\frac{E_{3D}\{D^3\}}{p_{3D} + (1 - p_{3D})\alpha^3}} \quad (3.41)$$

Y el diámetro máximo se despeja de la ecuación 3.32.

- Granulometría continua

La esperanza (en número de partículas) del cubo del diámetro es:

$$E_{3D}\{D^3\} = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} d^3 \frac{ad+b}{d^3 E_{3V}\left\{\frac{1}{D^3}\right\}} dd = \frac{1}{E_{3V}\left\{\frac{1}{D^3}\right\}} \quad (3.42)$$

Donde $E_{3V}\left\{\frac{1}{D^3}\right\}$ es la de la ecuación 3.26

Resolviendo la ecuación 3.42 para D_{\min} :

$$D_{\min} = \sqrt[3]{E_{3D}\{D^3\} \frac{\lambda(\alpha-1)+2}{\alpha^2}} \quad (3.43)$$

Y finalmente $D_{\max} = \alpha D_{\min}$.

Numéricamente, las características granulométricas para las estructuras tridimensionales se resumen en la tabla 3.2, y en las figuras 3.16 y 3.17 se muestran gráficamente los diámetros mínimos calculados.

Tabla 3.2. Datos de las estructuras tridimensionales

GRANULOMETRÍA BIMODAL					GRANULOMETRÍA CONTINUA			
α	p_{3V}	p_{3D}	D_{\min}	D_{\max}	α	λ	D_{\min}	D_{\max}
1	1	1	0.0726	0.0726	1	0, 1 Y 2	0.0726	0.0726
2	0.1	0.471	0.043	0.087	2	0	0.046	0.091
3	0.1	0.750	0.037	0.111	4	0	0.029	0.115
4	0.1	0.877	0.035	0.141	10	0	0.016	0.156
					15	0	0.012	0.179
2	0.3	0.774	0.053	0.106	2	1	0.052	0.105
3	0.3	0.920	0.050	0.150	4	1	0.039	0.156
4	0.3	0.965	0.049	0.197	10	1	0.028	0.276
					15	1	0.024	0.358
2	0.5	0.889	0.060	0.120	2	2	0.058	0.115
3	0.5	0.964	0.058	0.175	4	2	0.046	0.183
4	0.5	0.985	0.058	0.232	10	2	0.034	0.337
					*12	2	0.032	0.380
2	0.7	0.949	0.066	0.131				
3	0.7	0.984	0.065	0.194				
4	0.7	0.993	0.065	0.258				
2	0.9	0.986	0.070	0.141				
3	0.9	0.996	0.070	0.210				
4	0.9	0.998	0.070	0.280				

*Se obtuvo el tamaño máximo aceptable por representatividad de la muestra.

El campo de estudio en las granulometrías bimodales tridimensionales se redujo por encontrarse limitaciones en la formación de las estructuras bimodales como la que se mostró en la figura 3.13. Además, cuando las estructuras son prácticamente de un solo tamaño de partículas ($p_{3V}=0.9$) no se justifica utilizarlas en los estudios posteriores.

En granulometrías continuas, cuando el diámetro máximo es 15 veces mayor al mínimo y el coeficiente de distribución granulométrica es igual a dos, las partículas resultaron demasiado grandes y ocasionarían problemas de representatividad, por lo tanto el valor de alfa se limitó a 12.

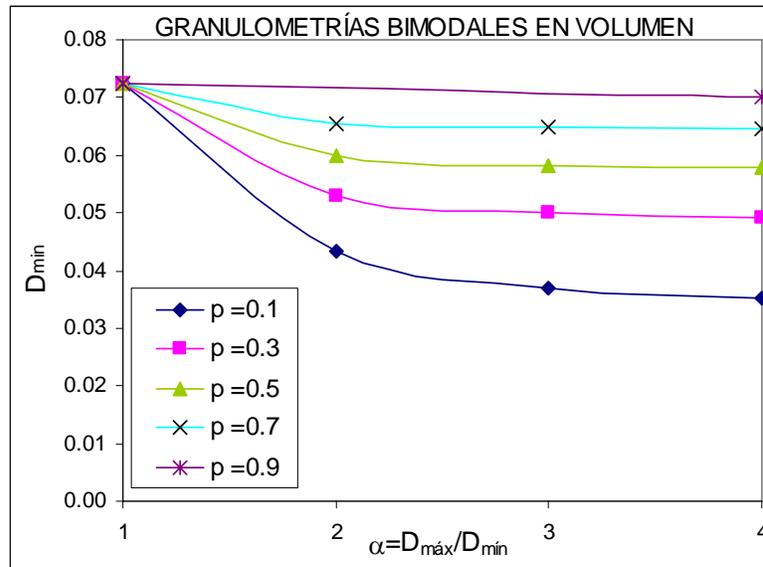


Figura 3.16. Tamaño de partículas, granulometrías bimodales en volumen 3 D

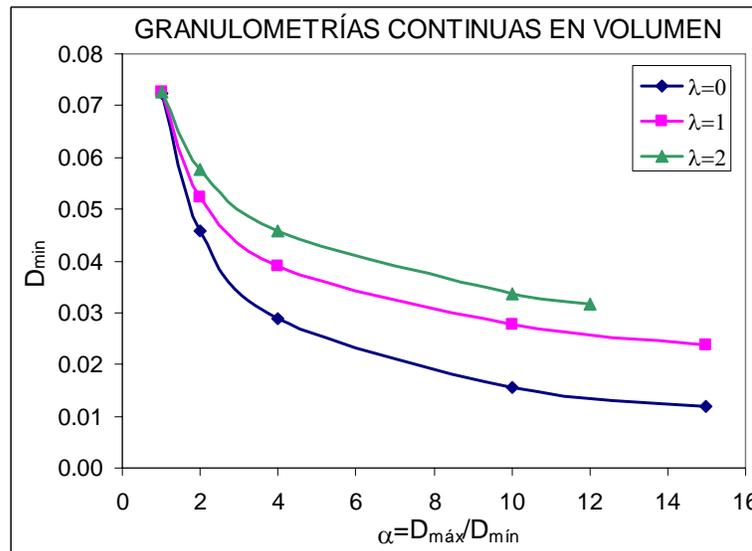


Figura 3.17. Tamaño de partículas, granulometrías continuas en volumen 3 D

Finalmente, se puede comentar que para futuras investigaciones es necesario hacer algunas modificaciones al algoritmo de formación y tomar en cuenta un número mayor de partículas para que el campo de estudio pueda extenderse a mayores valores de la relación de tamaños $\alpha = D_{\max}/D_{\min}$. Con la

mayor disponibilidad de recursos de cómputo (uso de supercomputadoras) se mejorarán los estudios como ya se han mejorado.

3.4 PROPIEDADES DE LAS ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES SIMULADAS

En esta sección se presentan las porosidades y granulometrías obtenidas en las simulaciones realizadas con la finalidad de relacionarlas con los materiales granulares naturales. Se destaca que la granulometría tiene una gran influencia sobre la porosidad del medio.

3.4.1 Porosidad

Puede considerarse que la porosidad bidimensional estimada con el método de Monte Carlo es la más apropiada para caracterizar la proporción de sólidos y vacíos en las estructuras granulares. El promedio general de la porosidad de todas las simulaciones bidimensionales fue de 16.2% sin involucrar las granulometrías de discos uniformes (porque se verá que son significativamente distintas). La desviación estándar de esta propiedad fue de 1.6%.

Llama la atención que en general, la reducción de la porosidad (figura 3.18) se debe en gran medida a la no uniformidad granulométrica a excepción de las estructuras de discos uniformes. En éstas últimas se obtuvo una porosidad muy baja y cercana a la porosidad que caracteriza a los arreglos regulares triangulares.

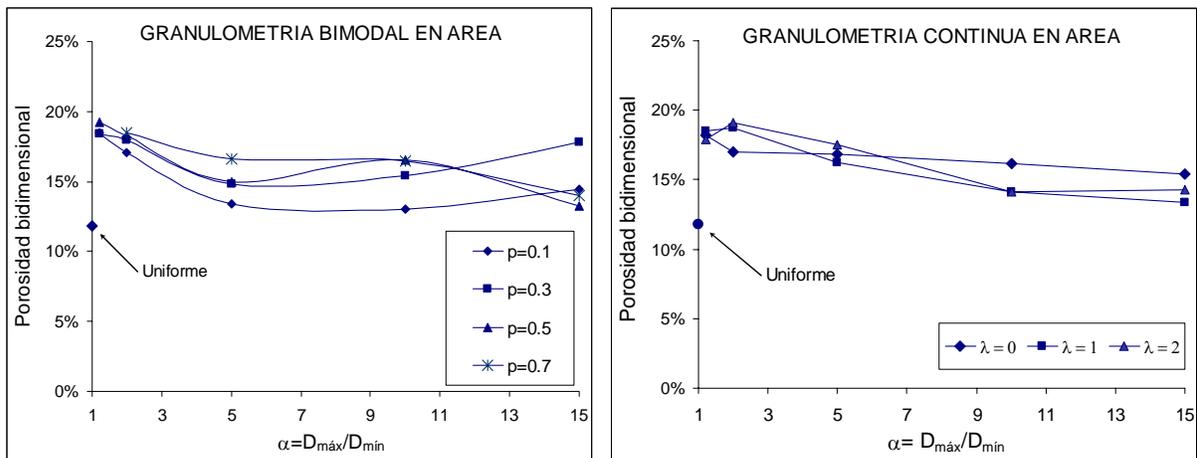


Figura 3.18. Porosidad en estructuras bidimensionales

Se puede decir que la porosidad se reduce debido al efecto geométrico de relleno de huecos.

3.4.2 Densidad de probabilidad granulométrica

Después de simulada cada estructura, se revisaba que la densidad de probabilidad granulométrica obtenida correspondiera a la teórica. En todos los casos fueron consideradas poco más de 4 000 partículas (las ubicadas en el centro del recipiente) con lo que se cumple con la representatividad del medio. Los resultados fueron aceptables, con irregularidades propias del carácter aleatorio de las simulaciones.

La figura 3.19 muestra ejemplos de las comparaciones entre la granulometría teórica y observada en las simulaciones de granulometrías bidimensionales. Se presenta un ejemplo de granulometría bimodal y un ejemplo de cada coeficiente de distribución granulométrica en las granulometrías continuas.

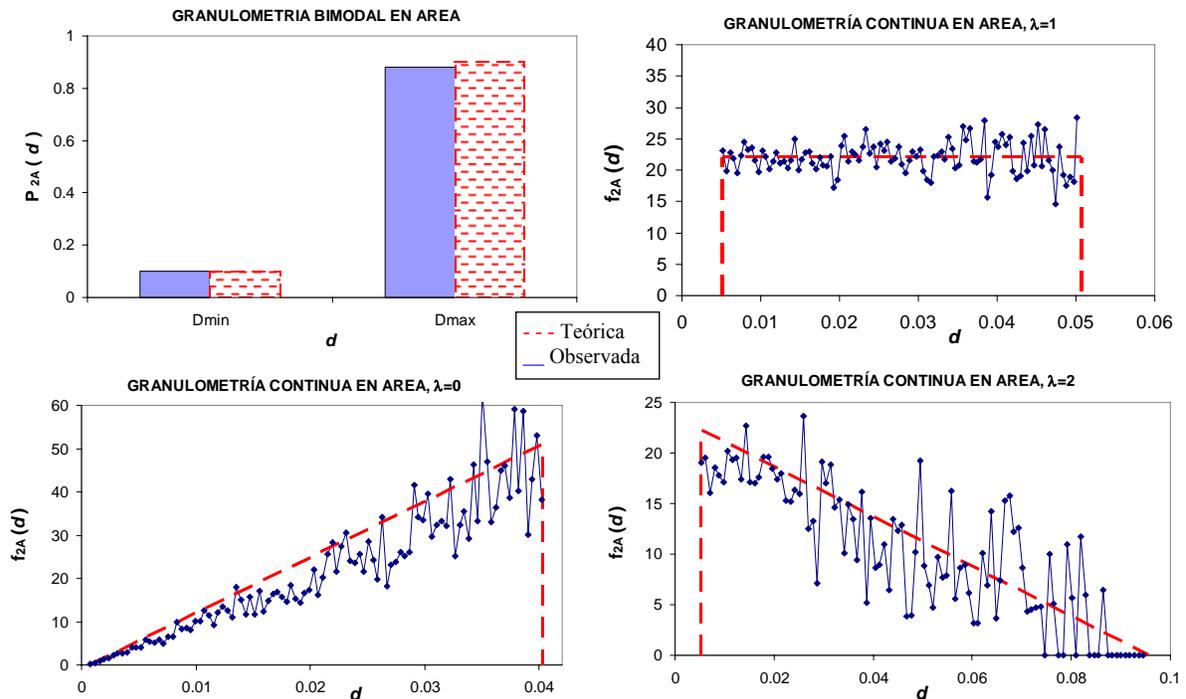


Figura 3.19. Ejemplos de distribución y densidades de probabilidad granulométrica en estructuras 2 D

Esta comparación granulométrica es suficiente para aceptar las granulometrías bimodales. Sin embargo, en granulometrías continuas, es útil obtener además los coeficientes granulométricos.

3.4.3 Coeficientes granulométricos

Las estructuras de granulometría continua presentaron coeficientes $C_c \in [1, 1.45]$ y $C_u \in [1, 3.9]$. Ambos coeficientes aumentan en proporción directa a la relación de diámetros y alrededor de $\alpha=5$ el coeficiente $C_u \geq 2$, lo que significa que se entra al dominio de los materiales naturales, las arenas más uniformes.

De acuerdo a los coeficientes de uniformidad obtenidos, las granulometrías con coeficiente de distribución granulométrica $\lambda=0$ son las más uniformes. En la figura 3.19 puede observarse que las frecuencias en área de las partículas cercanas a D_{min} son bajas, en consecuencia D_{10} es más cercano a D_{60} y por lo tanto, el coeficiente de uniformidad es menor en comparación a las granulometrías con $\lambda=1$ y $\lambda=2$.

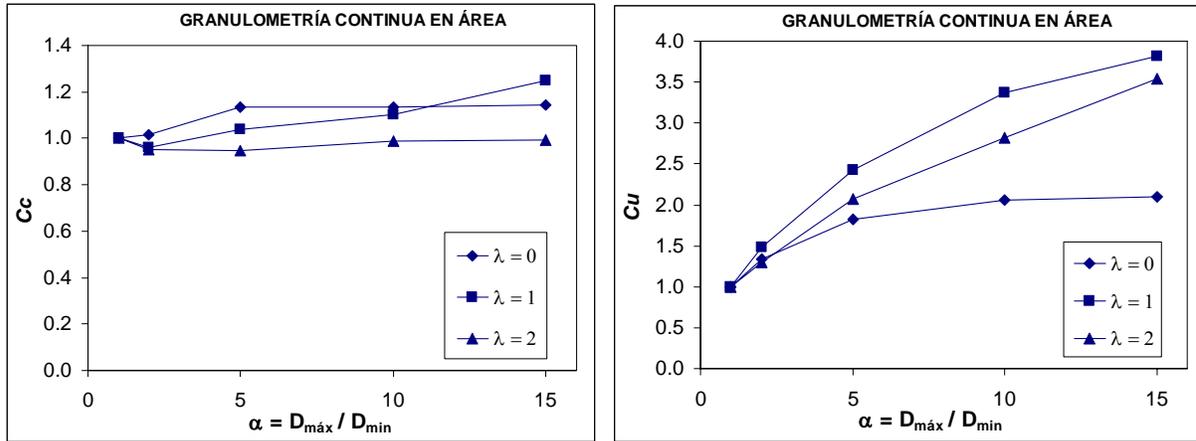


Figura 3.20. Coeficientes granulométricos obtenidos en estructuras 2 D

De acuerdo a la clasificación SUCS de la mecánica de suelos, cuando $2 < C_u < 5$ el material se considera uniforme. Por lo tanto, con el presente trabajo sólo se alcanzan a representar los suelos naturales más uniformes.

3.5 PROPIEDADES DE LAS ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES SIMULADAS

3.5.1 Porosidad

La porosidad tridimensional estimada con el método de Monte Carlo fue en promedio del 36% y con desviación estándar de 3%. En la figura 3.21 es notable la dependencia que guarda la porosidad respecto a las variables granulométricas, en especial con la relación de diámetros $\alpha = D_{\max}/D_{\min}$, además que las granulometrías bimodales se densifican con mayor rapidez que las continuas cuando $p_{3V} = 0.3$ ó 0.5.

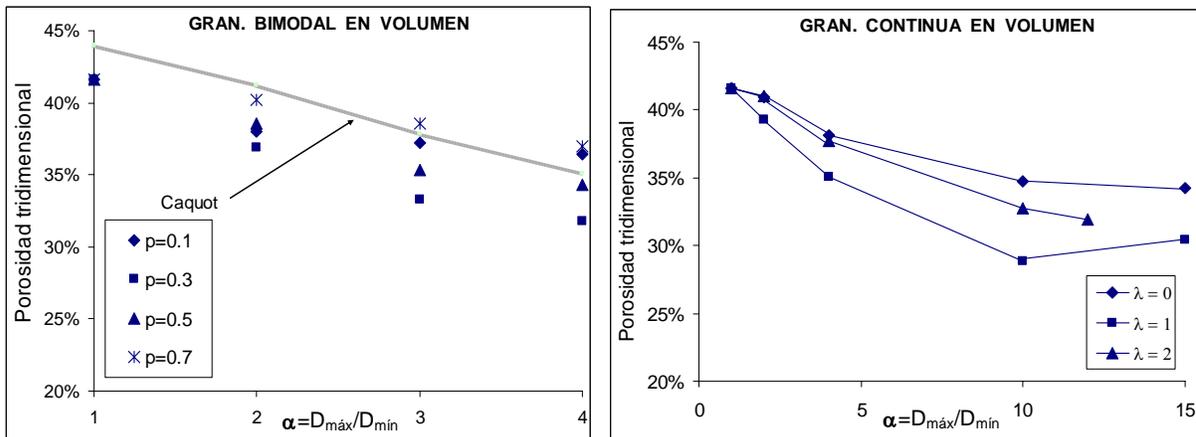


Figura 3.21. Porosidad en estructuras tridimensionales

La línea de Caquot es una estimación de la porosidad tridimensional mínima para mezclas bimodales, se observa que la estimación es buena pero se requieren mayores diferencias entre los tamaños de las partículas para mejorar la aproximación.

3.5.2 Densidad de probabilidad granulométrica

La densidad de probabilidad granulométrica de cada simulación se obtuvo de una muestra de partículas centrada en el recipiente, 4500 aproximadamente. El objetivo es verificar que el modelo de simulación reproduce la granulometría teórica de acuerdo a los parámetros que la definen.

La revisión se llevó a cabo por comparación de las densidades de probabilidad en forma gráfica (figura 3.22). Se muestra un ejemplo de granulometría bimodal y un ejemplo de cada coeficiente de distribución granulométrica en granulometrías continuas, todos ellos en frecuencias de volumen de partículas.

En la misma figura resaltan cambios bruscos en la densidad de probabilidad granulométrica observada en la muestra, ya que una sola partícula grande puede representar una proporción alta del volumen de los sólidos. De cualquier forma, los resultados fueron aceptables.

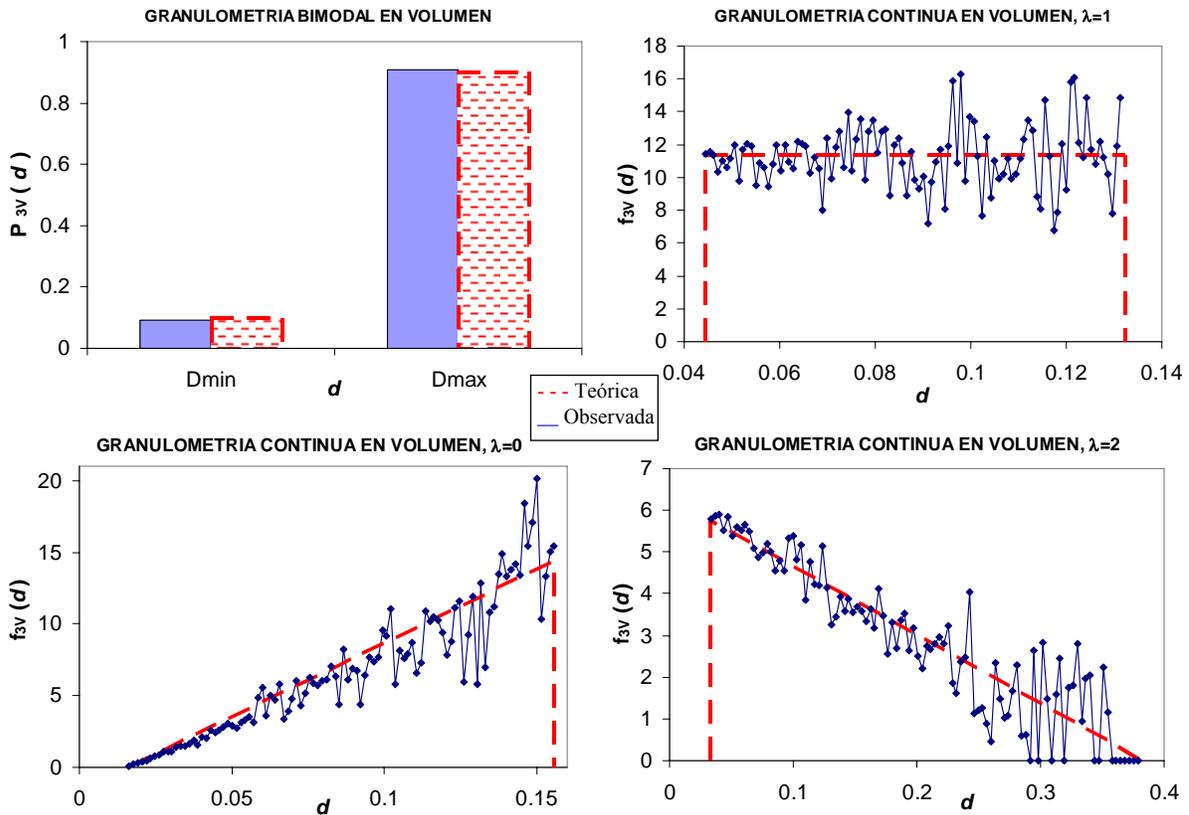


Figura 3.22. Ejemplos de distribución y densidades de probabilidad granulométrica en estructuras 3 D

3.5.3 Coeficientes granulométricos

Es importante conocer el tipo de materiales sobre los cuales se realizarán los análisis (granulometrías continuas) por medio de los coeficientes granulométricos, con la finalidad de ubicarlos en el SUCS. Los coeficientes de curvatura obtenidos se mantuvieron relativamente en un valor constante cercano a la unidad, tomando valores de 0.92 a 1.31 y se incrementaron ligeramente al mismo tiempo que la relación de tamaños. En algunos casos, con $\lambda=2$, el coeficiente de curvatura fue menor que la unidad

debido a la baja proporción de las partículas de tamaños mayores. En el resto de las simulaciones C_c indica que en la granulometría existen cantidades apreciables de los diversos tamaños de partículas.

Por otra parte los coeficientes de uniformidad tuvieron comportamientos distintos de acuerdo al coeficiente de distribución granulométrica, las densidades granulométricas con pendiente positiva ($\lambda=0$) son las más uniformes con un C_u que apenas alcanza 2.15 como máximo. Por su parte, las de coeficientes de distribución $\lambda=1$ y $\lambda=2$ son cada vez menos uniformes a medida que α se incrementa.

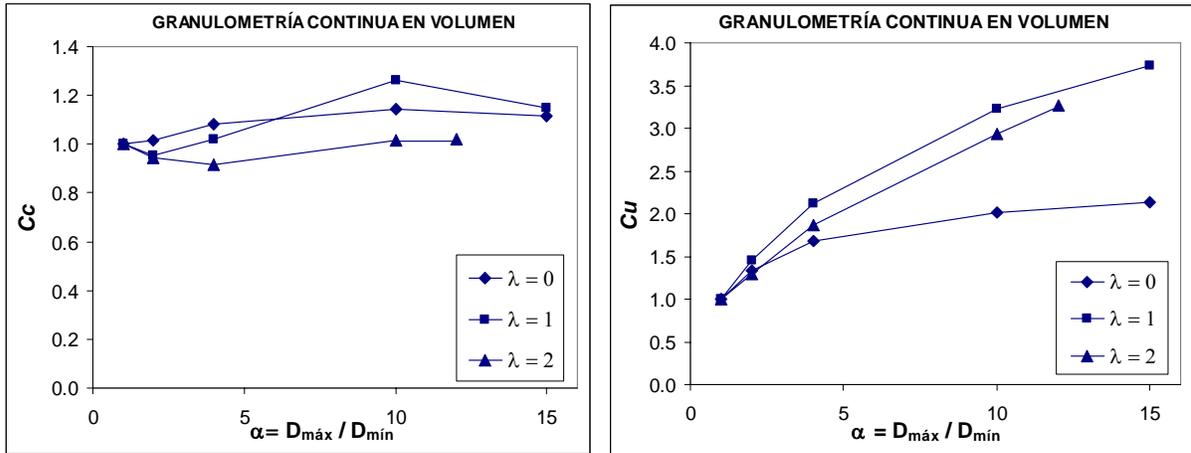


Figura 3.23. Coeficientes granulométricos obtenidos en estructuras 3 D

Se vislumbra con estos resultados, que el estudio de los materiales naturales se encuentra en sus primeras etapas. La sencillez de los modelos de simulación que aquí se emplean permiten involucrar un gran número de partículas, pero sólo suficiente para representar los suelos granulares más uniformes en la naturaleza.

CAPÍTULO 4 ESTUDIO DE LA SEGREGACIÓN POR SIMULACIÓN

En el presente capítulo se estudia la segregación geométrica que proviene directamente de la formación de las estructuras (segregación espontánea o inherente). Se inicia con algunos comentarios que se desprenden de la inspección visual de las simulaciones realizadas (véanse algunas imágenes de estructuras incluidas en el Anexo A.2).

También se presta atención a la segregación en el fondo de los recipientes, debida a que las partículas pequeñas tienden a ubicarse en la parte baja de las estructuras.

Se introducen distintas variables para caracterizar la segregación. Se estudia por separado las estructuras 2 D y 3 D para identificar los efectos de la granulometría.

4.1 SEGREGACIÓN OBSERVADA EN ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES

4.1.1 Discos uniformes

En estas estructuras no se puede hablar de segregación debido a que todas las partículas son idénticas, sin embargo, se observaron rasgos estructurales que merecen atención.

Por inspección visual de las estructuras simuladas se observó que se presenta una configuración específica de las partículas.

Las primeras partículas que se colocan adoptan una configuración regular. Al examinar pequeños grupos (tres partículas) se observa que sus centros forman triángulos equiláteros (véase inciso 2.2.9).

A mayor escala se aprecia también la formación de cuatro grupos triangulares de partículas. Estos grupos están separados entre sí por una pequeña discontinuidad donde localmente se incrementa la porosidad (figura 4.1). Dos de estos arreglos parten del fondo del recipiente, con un ancho de la base del triángulo ligeramente menor a la mitad del ancho del recipiente, uno del lado izquierdo y otro del lado derecho del centro. La altura que alcanzan estos dos triángulos es de aproximadamente 0.8 unidades.

Centrado horizontalmente, se ubica el vértice del tercer arreglo regular, el cual se hace cada vez más amplio con la elevación hasta las 0.8 unidades. Sobre este triángulo se apoya el último cuyo vértice superior se presenta a las 1.6 unidades aproximadamente.

A la aparición de estos arreglos regulares dentro de los medios granulares simulados, a pesar del carácter aleatorio de la colocación de partículas, se le llamará estructuración espontánea, que como se verá, está presente aún realizando simulaciones con diferentes granulometrías.

El resto de la estructura granular no tiene una organización claramente definida, en ocasiones se presentan pequeñas zonas con arreglos triangulares, o regiones donde aparentemente la forma de los poros es repetitiva, pero en cualquier caso, la descripción visual del medio resulta ambigua.

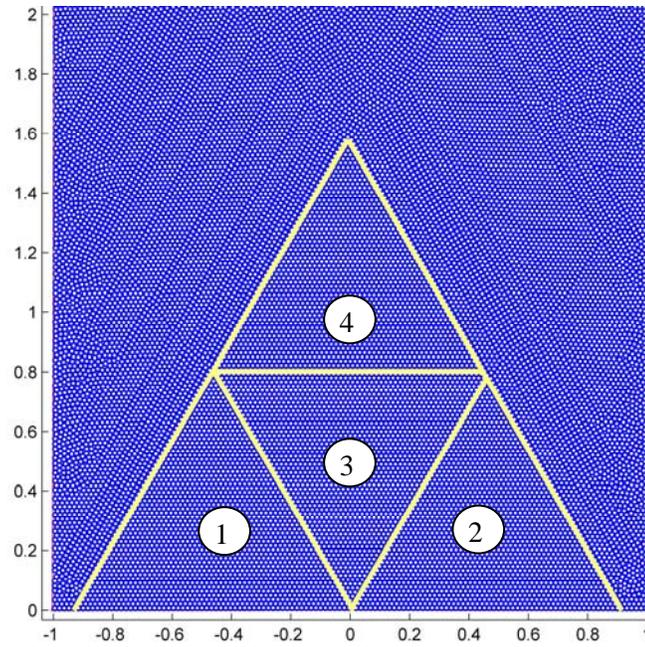


Figura 4.1. Simulación bidimensional de granulometría uniforme

La macroestructuración espontánea ilustrada en la figura 4.1 puede ser diferente para números diferentes de partículas y es obviamente sensible a la forma del recipiente. Sin embargo, para un mismo número de partículas y determinada forma del recipiente se observa la misma macroestructuración para distintas simulaciones.

4.1.2 Discos de granulometría bimodal

Los rasgos de las estructuras bimodales son más complejos. Se aprecia que en dirección horizontal (figura 4.2), la continuidad de los grupos de partículas de igual tamaño es más evidente que en dirección vertical, esta anisotropía se debe a que en la formación de las estructuras, la colocación de las partículas se hace sobre una superficie aproximadamente horizontal.

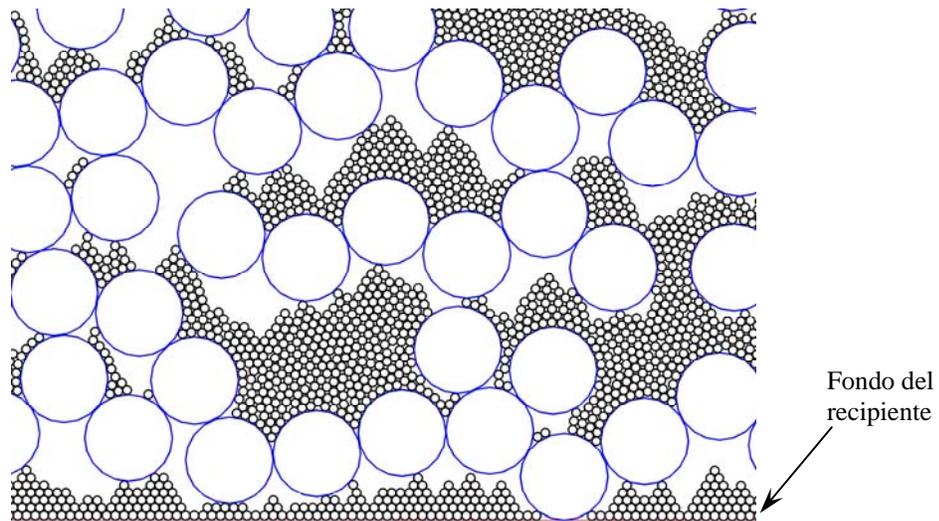


Figura 4.2. Acercamiento en simulación 2 D de granulometría bimodal

Las partículas pequeñas que se acumulan sobre la superficie de las partículas grandes tienden a formar una estructura con cierta regularidad con cadenas en forma de arco. Este es el mismo efecto que da origen a la estructuración espontánea en el fondo del recipiente. Además, las partículas pequeñas tienden a formar grupos en los espacios existentes entre partículas grandes (figura 4.2).

4.1.3 Discos de granulometría continua

En las granulometrías continuas puede notarse que las partículas pequeñas se alojan en los huecos que se forman entre las grandes. Las partículas pequeñas de tamaños semejantes tienden por tanto a agruparse.

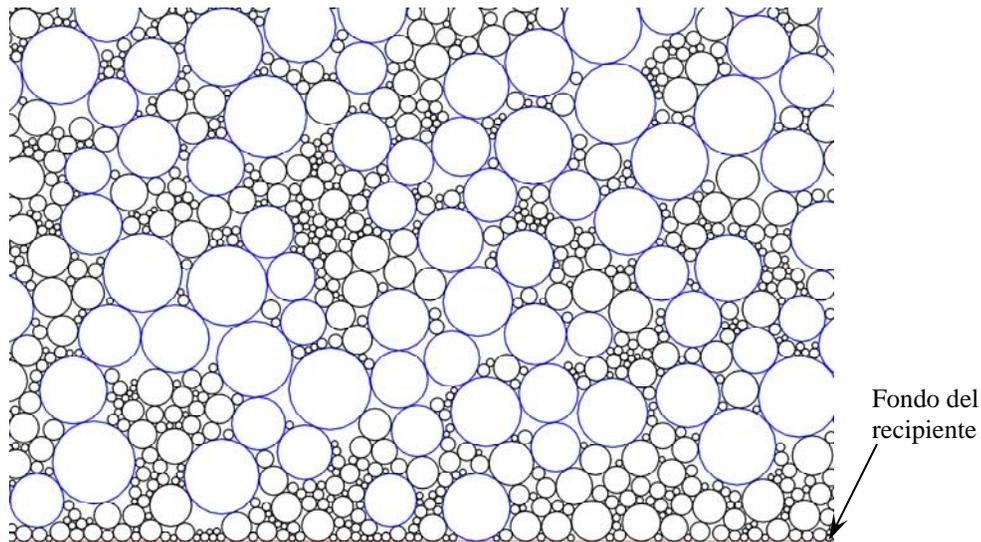


Figura 4.3. Acercamiento en simulación 2 D de granulometría continua

En forma visual se aprecia que existe una mayor segregación en la medida que la granulometría se hace menos uniforme (mayor relación $D_{\text{máx}}/D_{\text{mín}}$).

4.2 SEGREGACIÓN OBSERVADA EN ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

4.2.1 Esferas uniformes

La organización de las esferas uniformes presenta mayor desorden que en el caso de las estructuras de discos. Únicamente en las tres capas de partículas más cercanas al fondo del recipiente se aprecian arreglos regulares. En las esquinas del recipiente se forman arreglos de tipo piramidal (figura 4.4). Junto a las paredes y en ciertas zonas del recipiente se detectan arreglos de tipo tetraédrico. Las zonas que separan los grupos de arreglo regular presentan mayor porosidad. A mayores elevaciones no se aprecia una organización sistemática de los granos.

La estructuración espontánea encontrada en el fondo del recipiente es prácticamente la misma de una simulación a otra y se caracteriza por ser aproximadamente simétrica respecto a una de sus diagonales como puede notarse en la figura 4.4.

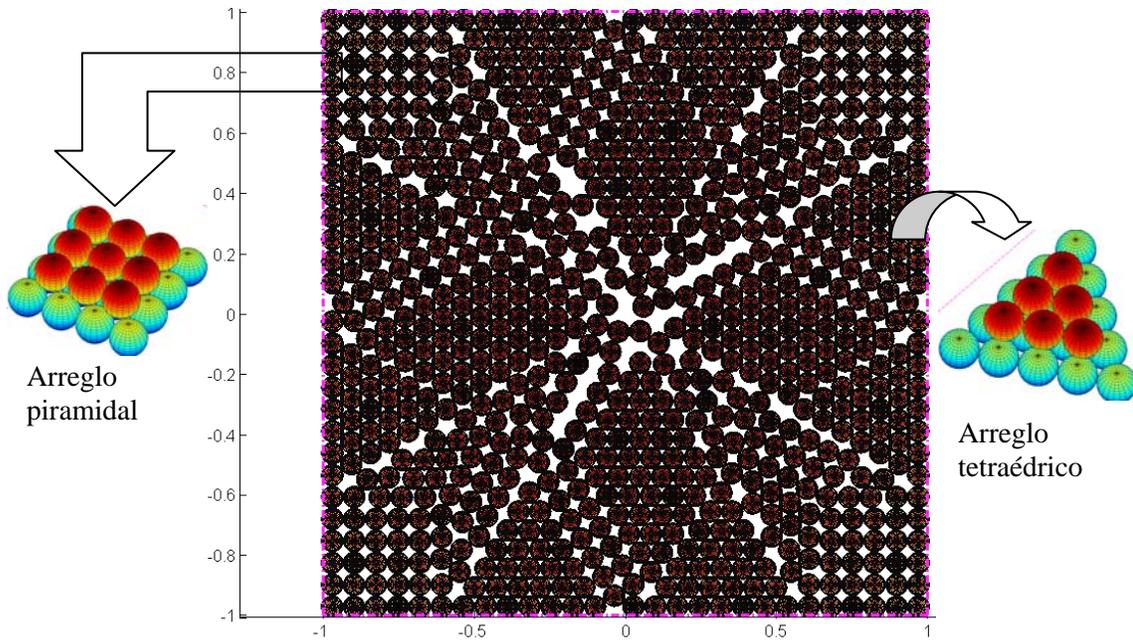


Figura 4.4. Configuración de medio granular uniforme 3 D en el fondo del recipiente

4.2.2 Esferas de granulometría bimodal

Es difícil apreciar en forma visual la segregación que puede existir en estructuras de granulometría bimodal. Se logra observar sin mayores dificultades las caras de las simulaciones (partículas junto a las paredes del recipiente), entre las que destaca la presencia de grupos de partículas pequeñas en el fondo del recipiente.

De acuerdo a la figura 3.13 es de esperarse que la segregación sea mucho más importante en mezclas bimodales con $D_{max}/D_{min} > 6$, donde las partículas pequeñas pueden pasar libremente (percolarse) entre las grandes, pero esto ha quedado fuera del alcance de esta investigación.

4.2.3 Esferas de granulometría continua

Entre los pocos aspectos que se pueden mencionar sobre la segregación observada en estructuras tridimensionales de granulometría continua, es que las partículas pequeñas son las que forman agregados con mayor facilidad y esta formación de grupos es más evidente cuando la granulometría es menos uniforme.

Es conveniente señalar que la gran diversidad de tamaños que convive en la estructura, ocasiona que los espacios entre tres partículas grandes en contacto sea mucho más reducido que en las granulometrías bimodales y no se presenta el problema del paso de las partículas pequeñas por dichos huecos. Esto explica que las granulometrías continuas sean afectadas en menor grado por la segregación.

Respecto a la segregación en el fondo del recipiente, debido a que los huecos entre partículas nunca se cierran aunque se toquen tres esferas y a que el método de colocación de partículas busca las posiciones más bajas, las partículas pequeñas son propensas a concentrarse en el fondo del recipiente.

4.3 INFLUENCIA DE LA GRANULOMETRÍA SOBRE LA SEGREGACIÓN 2 D

En esta sección se analiza la influencia de la granulometría sobre la segregación por tamaño en estructuras bidimensionales (2 D). Un primer punto es el estudio de la concentración espacial de las partículas en sondeos rectos, importante además, para conocer rasgos de la estructura del medio que pueden confundirse con la segregación. Por otro lado, la distancia mínima media entre centros de partículas es otra variable que se relaciona razonablemente con la segregación.

Se estudian las estructuras de discos uniformes, en seguida las granulometrías bimodales y finalmente las granulometrías continuas. Todas ellas se analizan con las dos variables de medición y en ocasiones se recurre a la porosidad para una mejor descripción del medio granular.

4.3.1 Granulometrías de discos uniformes

La variabilidad de la concentración espacial de discos (CV_{NDI} , inciso 3.1.8) es la más adecuada para describir la estructuración espontánea que se presenta. La definición de segregación indicada en el Capítulo 2 no puede aplicarse dado que todas las partículas son idénticas.

a. Concentración espacial de discos

Se realizaron quince simulaciones de estructuras con la misma granulometría. La distribución espacial de las partículas resultó similar en cada una de las simulaciones.

En cada estructura se evaluó la variable NDI (número de discos intersecados) en sondeos rectos horizontales espaciados a cada 0.002 unidades. Además se calculó el valor esperado de NDI utilizando la expresión 3.13 y la porosidad estimada con el método de Monte Carlo. Al graficar esta variable contra la elevación, se observa que algunos de los sondeos cruzan por la zona de traslape entre dos cadenas horizontales de partículas con arreglos triangulares (véase figura 4.5 derecha).

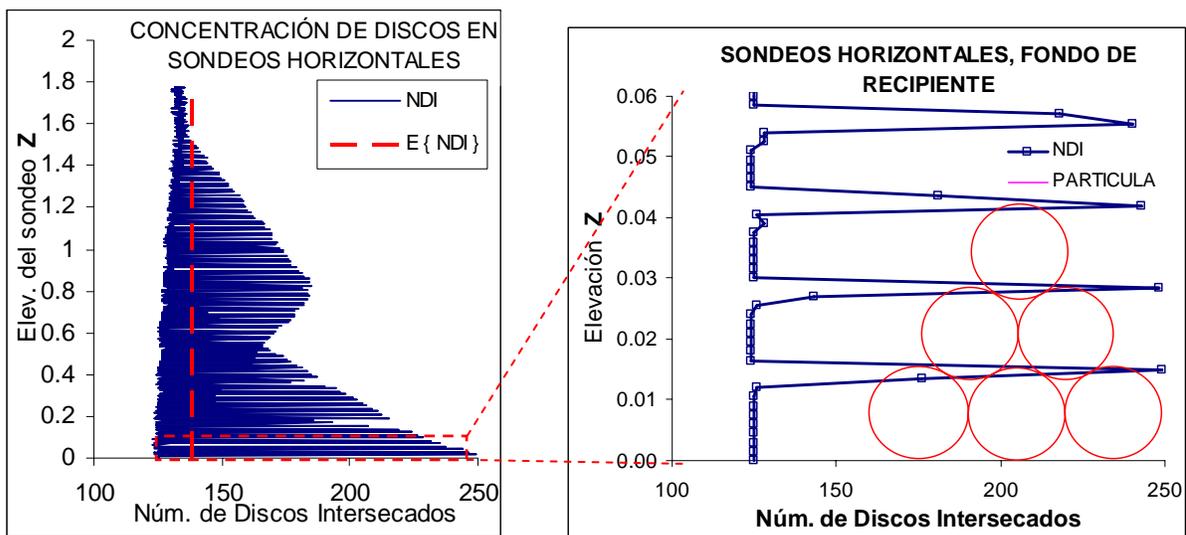


Figura 4.5. Estructuración espontánea en granulometría uniforme bidimensional

En la situación mencionada, *NDI* se incrementa bruscamente a casi el doble del valor esperado en las cercanías del fondo del contenedor. Este incremento se debe a la estructuración espontánea.

En los sondeos que salen de la zona de traslape, *NDI* toma un valor constante inferior al valor esperado. Esta secuencia se repite con el incremento de la elevación. Sin embargo, los picos son cada vez más pequeños a causa de la reducción del ancho de los arreglos triangulares 1 y 2 de la figura 4.1, pero al mismo tiempo, el crecimiento del arreglo 3 se refleja en el aumento de los picos de *NDI* entre la elevación 0.6 y 0.8. A mayores elevaciones la estructura espontánea decrece hasta desaparecer por completo.

La parte superior del recipiente presenta una mayor entropía (mayor desorden) en la concentración de partículas en sondeos horizontales, razón por la cual *NDI* presenta menor variabilidad. En esta zona, los valores de *NDI* son menores que su esperanza porque la porosidad es mayor que la que se empleó en el cálculo de $E\{NDI\}$.

Por otra parte, los valores de *NDI* en los sondeos verticales son mucho menos variables; los valores locales muy bajos se deben a la influencia de las paredes del recipiente, donde existen espacios inaccesibles a las partículas. Además, las paredes son parte del hemisferio inferior de una circunferencia y las partículas tienden a despegarse de ellas.

También se observa un valor bajo de *NDI* en el eje de simetría del modelo. Esto se debe a la forma del recipiente que favorece la formación de una zona de mayor porosidad en el eje vertical (figura 4.6). El sondeo vertical que pasa por el centro del recipiente esquematizado en la figura 4.6 derecha, sólo cruza partículas de cadenas horizontales alternadas, porque existe un pequeño espacio entre las partículas vecinas en dirección horizontal. No existe continuidad en las cadenas horizontales de partículas a causa de la curvatura del fondo del recipiente.

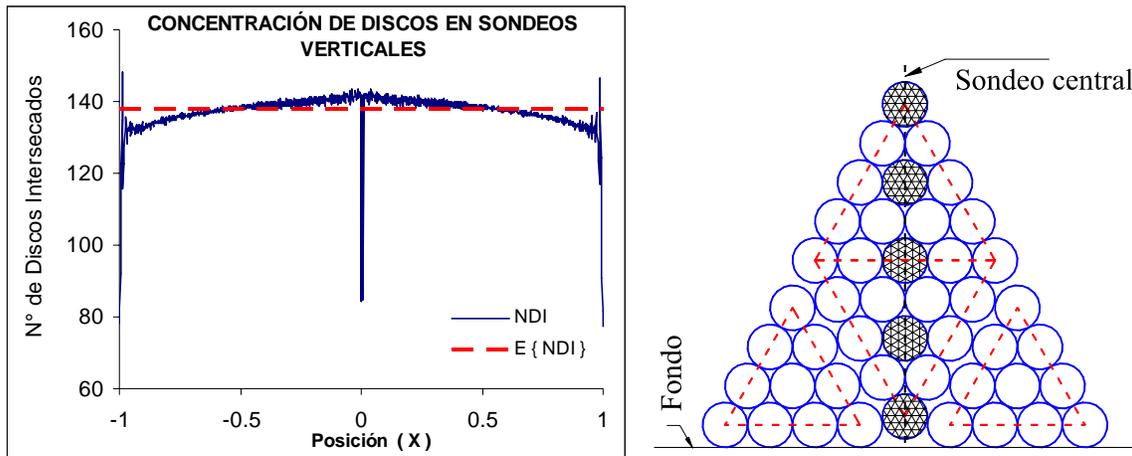


Figura 4.6. Concentración espacial de discos uniformes en sondeos verticales

Las diferencias entre la gráfica de *NDI* con su esperanza $E\{NDI\}$ vistas en las figuras anteriores se deben a que el valor teórico se calculó utilizando la porosidad media, pero el medio granular presenta zonas con porosidad bien diferenciada.

Es importante observar la variación de la porosidad en los mismos sondeos horizontales y verticales para complementar los resultados anteriores. En las trayectorias paralelas al fondo se observa nuevamente un comportamiento periódico ocasionado por las cadenas horizontales de partículas;

mientras que en dirección vertical, se observa el efecto de pared, ya estudiado por otros investigadores, y hacia el centro del recipiente se observan grandes variaciones por la presencia de los arreglos triangulares (que no se observó en *NDI*).

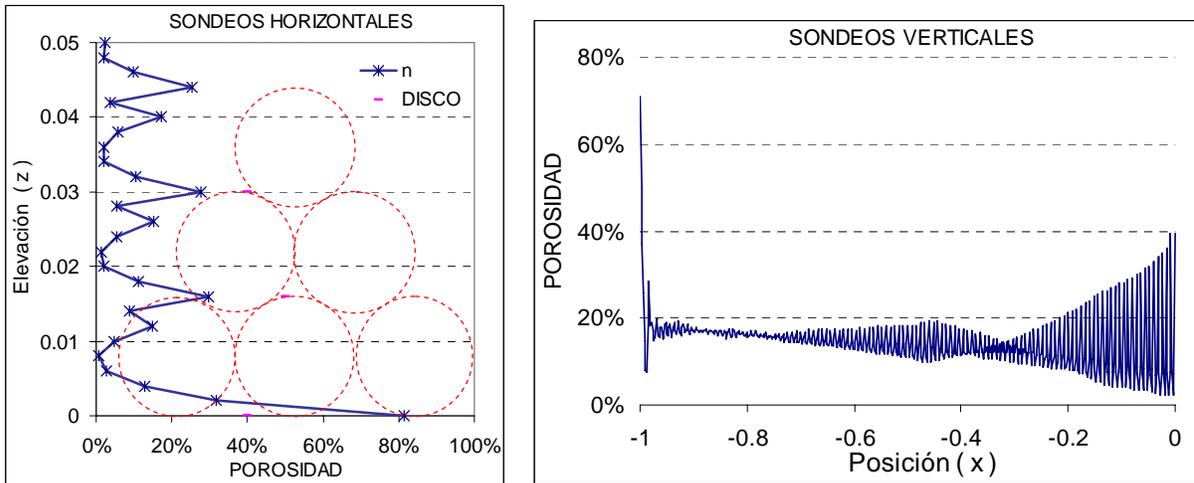


Figura 4.7. Porosidad en sondeos rectos, granulometría bidimensional uniforme

En ambas direcciones se obtuvieron grandes variaciones respecto a la porosidad media de la estructura ($n = 11\%$) obtenida por el método de Monte Carlo. La porosidad a lo largo de los sondeos prácticamente se anula cuando éstos cruzan preferentemente por los centros de los discos y se incrementa en caso contrario, particularmente el máximo se alcanza en las fronteras del medio.

Finalmente, fue necesario verificar que la semejanza entre las estructuras no se debe a que el modelo genera siempre los mismos números aleatorios. Esto se puede observar con la correlación cruzada de *NDI* ($\rho_{1,2}$) entre diferentes simulaciones. El máximo coeficiente de correlación cruzada obtenido fue de 0.96 en sondeos horizontales y 0.9 en sondeos verticales. Considerando que la correlación perfecta se presenta cuando $\rho_{1,2}=1$ se concluye que las simulaciones son diferentes. La figura 4.8 presenta los intervalos de variación de la correlación cruzada (media más-menos desviación estándar), en una muestra de 39 correlaciones. Se agrega un ejemplo de autocorrelación como referencia de comparación.

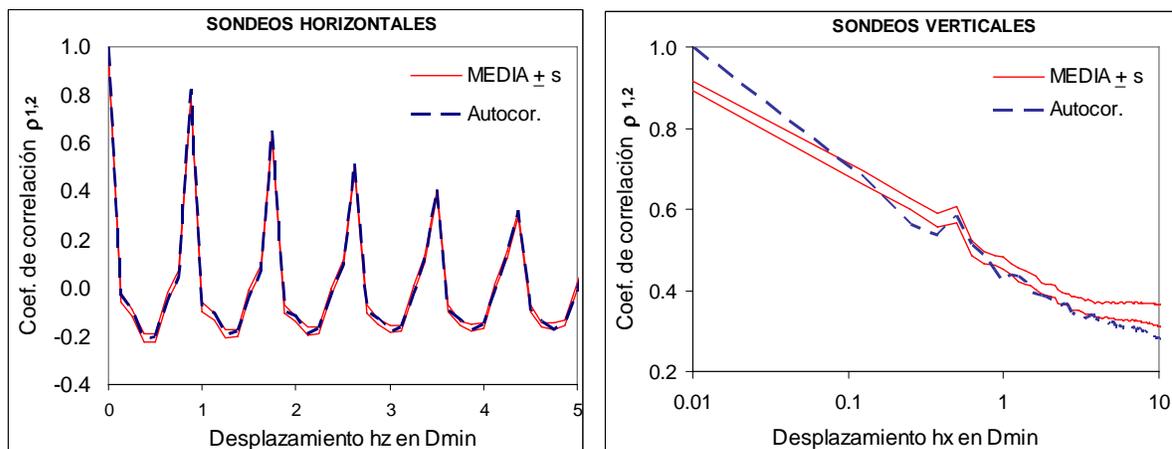


Figura 4.8. Coeficiente de correlación de *NDI* entre estructuras de granulometría uniforme 2 D

La periodicidad que caracteriza a *NDI* obtenido de sondeos horizontales y a sus coeficientes de correlación, se debe a la presencia de las zonas de traslape entre cadenas horizontales de partículas. Esto se corrobora al ajustar una función similar a la que describe el movimiento armónico (ecuación 4.1) a la autocorrelación media de los sondeos horizontales.

$$\rho_{NDI} = A e^{-\gamma h} \text{sen} \left(\omega h + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.1)$$

Donde:

- ρ_{NDI} Coeficiente de autocorrelación del número de discos intersecados
- A Amplitud inicial, $A=1.0$
- γ Factor de amortiguamiento
- ω Frecuencia de oscilación
- h Distancia entre dos puntos de comparación

Por regresión se determina el factor de amortiguamiento y la frecuencia de oscilación. Conocidos estos parámetros, el periodo (Q) con el cual se presentan los máximos locales de ρ_{NDI} es:

$$Q = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.2)$$

Como se esperaba, el periodo corresponde a la distancia vertical entre los centros de los discos de un arreglo triangular, o bien, a la diferencia de elevación entre los sondeos horizontales que cruzan por la zona de traslape de las cadenas horizontales de partículas. Este valor es de 0.867 veces el tamaño de partícula.

Con los resultados que se han visto se pone en evidencia que el medio es altamente anisótropo en cuanto a la concentración de partículas en el espacio y no se puede asociar su variación directamente con la segregación. Las fronteras, particularmente el fondo del recipiente, alteran notablemente esta concentración (medida con *NDI*), así como la porosidad en los mismos sondeos. Los valores que caracterizan las estructuras bidimensionales de granulometría uniforme se resumen en la tabla 4.1.

Tabla 4.1. Características de las estructuras de granulometría uniforme 2 D

SONDEOS		Horizontal	Vertical
Media	<i>NDI</i>	137	137
	<i>NDI</i> *	131	136
	$E \{NDI\}$	138	
	$\rho_{1,2} \text{ máx}$	0.96	0.90
	n	11.8%	
Coef. de variación	<i>NDI</i>	13.1%	4.5%
	<i>NDI</i> *	4.0%	2.3%
	$\rho_{1,2} \text{ máx}$	0.8%	1.2%
	n	3.7%	

* Se eliminaron los efectos de pared

Para asociar el coeficiente de variación de *NDI* con la segregación es necesario eliminar los sondeos que cruzan las zonas de traslape entre discos. Debido a que esta tarea es muy laboriosa es preferible ubicarse en una zona del medio granular donde los efectos de pared sean despreciables. Por tanto, el

coeficiente de variación obtenido de los sondeos verticales sin efectos de frontera es el más adecuado y se utilizará sistemáticamente en los estudios, salvo en segregación forzada.

b. Distancia mínima entre centros de partículas iguales

En estructuras de discos uniformes debe hacerse notar que la distancia mínima entre centros de partículas vecinas es constante en todo el medio, con un valor igual al diámetro de los discos, ya que el equilibrio estático requerido para la formación de la estructura exige que cada disco que se agrega entre en contacto con al menos otros dos previamente colocados.

4.3.2 Granulometrías bimodales

Para estas granulometrías se evaluará el efecto sobre la segregación de dos variables: la proporción en área (p_{2A}) de las partículas de D_{min} y la relación de tamaños $\alpha=D_{máx}/D_{mín}$.

a. Concentración espacial de discos

- Efecto de la proporción (p_{2A}) en área de las partículas pequeñas

Para observar este efecto es necesario mantener constante la variable $\alpha=D_{máx}/D_{mín}$ en un valor elegido arbitrariamente, por ejemplo $\alpha=5$. Una de las estructuras simuladas se ha presentado en la figura 4.2 algunas más se incluyen en el Anexo A.2.

Cuando $p_{2A}=0.1$, las partículas pequeñas forman pequeños grupos en el medio. Estos agregados ocasionan que la variabilidad del número de discos intersecados por sondeos verticales ($CV_{NDI}=5\%$) sea mayor respecto a las estructuras de discos uniformes.

Para $p_{2A}=0.3$, los agregados que forman las partículas iguales son de mayor tamaño y por tanto CV_{NDI} se incrementa a 8%. En la figura 4.9 se muestra un ejemplo de las variaciones que provoca la segregación sobre NDI en una estructura con $p_{2A}=0.5$. Se observa que cerca de las paredes laterales, los valores de NDI se incrementan debido a la organización sistemática de las partículas. En esta estructura granular, $CV_{NDI}=9\%$ sin considerar el efecto de pared.

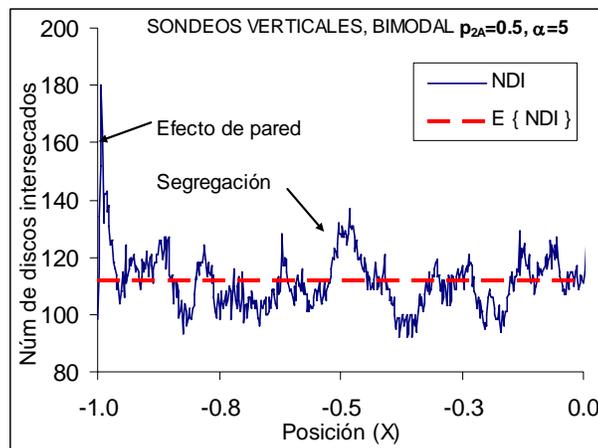


Figura 4.9. Comportamiento de NDI en sondeos verticales, granulometría bimodal 2 D

Considerando $p_{2A}=0.7$, las partículas pequeñas tienden a formar una matriz continua. El coeficiente de variación de NDI obtenido, indica que los grupos de partículas iguales a lo largo de los sondeos tienden a ser de menor tamaño. La segregación en ésta y en las estructuras mencionadas en párrafos anteriores se muestra en la figura 4.10.

Se espera que en estructuras con $p_{2A}>0.7$ la segregación decrezca a causa de que la granulometría tiende a ser nuevamente uniforme.

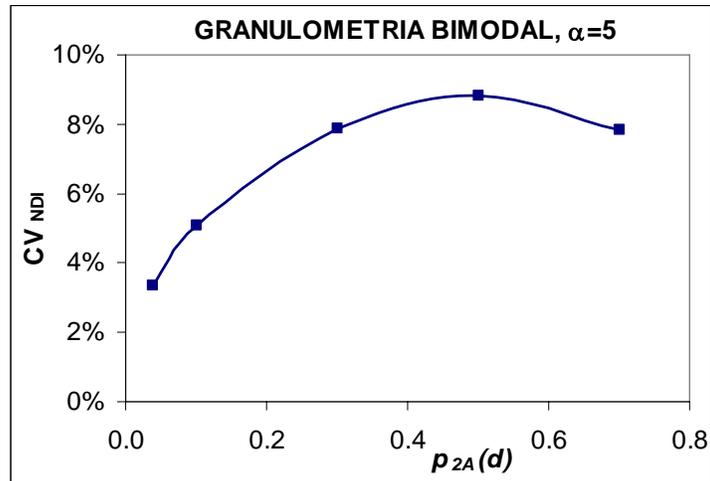


Figura 4.10. Efecto de la proporción de partículas pequeñas sobre la segregación

En este criterio se considera que la variación de NDI depende de la agrupación de una clase de partículas a lo largo del sondeo (figura 4.9). Entre más grande es el coeficiente de variación, mayor es la segregación.

Sin embargo, puede darse el caso donde se obtenga un valor de NDI cercano a la media y las clases de partículas estén completamente separadas (sondeos verticales de una estructura con segregación forzada). El modelo de simulación ofrece cierta garantía de que esto no sucede, pero es un defecto de CV_{NDI} en la medición del fenómeno.

- *Efecto de la relación de tamaños α*

Se considera constante la proporción (en área) de cada clase de partículas, por ejemplo $p_{2A}=0.5$, para aislar el efecto de $\alpha=D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$.

Para $\alpha=2$ se observan grupos de partículas iguales y el coeficiente de variación de NDI del 4%, resulta mayor al obtenido en estructuras de discos uniformes. De igual forma, la segregación se incrementa a $CV_{NDI}=9\%$ cuando $\alpha=5$.

El coeficiente de variación de NDI continúa incrementándose cuando aumenta la diferencia entre los tamaños de partículas como se observa en la figura 4.11. Estos resultados están de acuerdo con otros estudios de segregación reportados en la literatura (por ejemplo: Navakas, 2006, Rapaport, 2001).

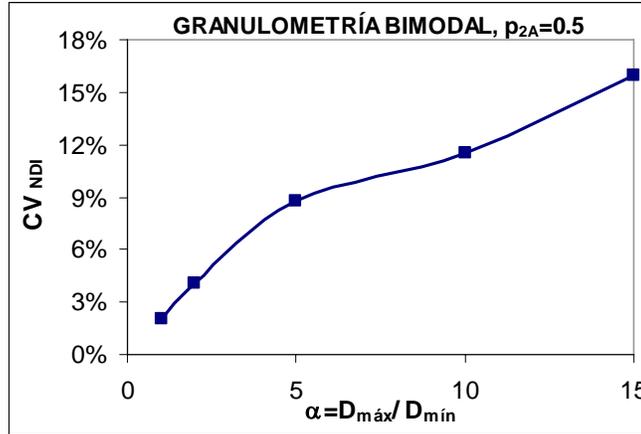


Figura 4.11. Efecto de α sobre la variabilidad de NDI en granulometría bimodal 2 D

▪ Efecto conjunto de p_{2A} y α sobre la segregación

En el espacio de estas dos variables y por interpolación lineal, se trazaron las curvas de isovalores (figura 4.12) de CV_{NDI} obtenidos de sondeos verticales. Los resultados de las estructuras de discos uniformes se incluyeron en la frontera inferior y fronteras laterales del espacio representado.

Se observa que la proporción p_{2A} de partículas pequeñas en la cual CV_{NDI} alcanza sus mayores valores del orden de 0.3. Aparentemente para esta proporción el número de partículas pequeñas es suficiente para formar grandes grupos, aunque tampoco es tan alto como para impedir la formación de grupos de las partículas de $D_{m\acute{a}x}$. La segregación disminuye si esta proporción tiende a cero o a uno, porque una clase de partículas forma una matriz continua en el medio y distribuye a las otras en su interior.

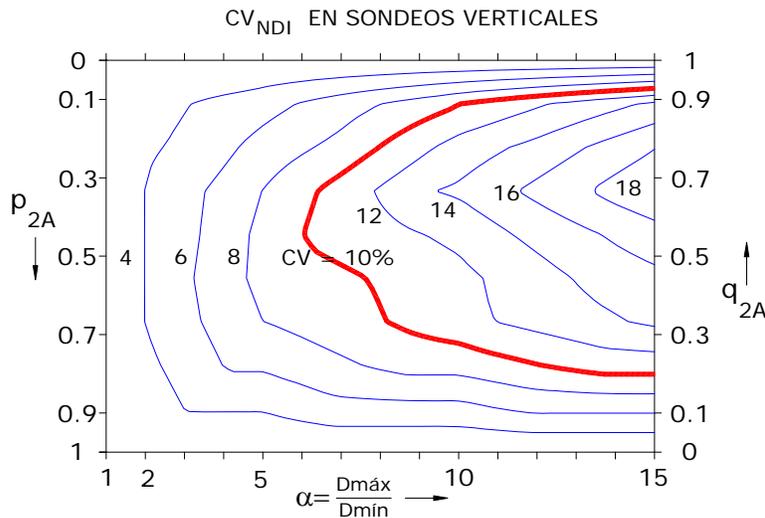


Figura 4.12. Segregación CV_{NDI} en estructuras de granulometría bimodal 2 D

Por su parte, la segregación siempre se incrementó con el crecimiento de la relación $\alpha = D_{m\acute{a}x} / D_{m\acute{i}n}$.

Se reconoce que es cuestionable la representatividad estadística de la figura anterior. Por esta razón se estimó la desviación estándar de CV_{NDI} en una pequeña muestra de diez simulaciones con la misma granulometría: $p_{2A} = 0.5$ y $\alpha = 5$. Las medidas representativas se encuentran en la tabla 4.2.

Tabla 4.2. Medidas descriptivas de CV_{NDI} en una granulometría bimodal 2 D

Dirección del sondeo	Vertical
Media CV_{NDI}	8.8%
Desviación estándar	0.72%

Los resultados obtenidos en la tabla 4.2 sugieren que las tendencias señaladas anteriormente son válidas.

Por otra parte, se construyó una estructura con esta misma granulometría ($p_{2A}=0.5$ y $\alpha=5$) con el programa de simulación con segregación forzada (partículas pequeñas en el fondo y encima las grandes). De esta manera se observó que CV_{NDI} toma un valor máximo de alrededor del 65%. Al respecto se considera que la segregación inherente es apreciable.

Finalmente, se determinó la función de correlación cruzada (ecuación 3.16) entre las señales (figura 3.11) de NDI en sondeos verticales, correspondientes a las diez estructuras simuladas, para comprobar el carácter aleatorio de las simulaciones. En la figura 4.13 se observa que la correlación cruzada es nula y por lo tanto es aceptable la hipótesis de que las simulaciones son independientes. Se agrega un ejemplo de autocorrelación como referencia.

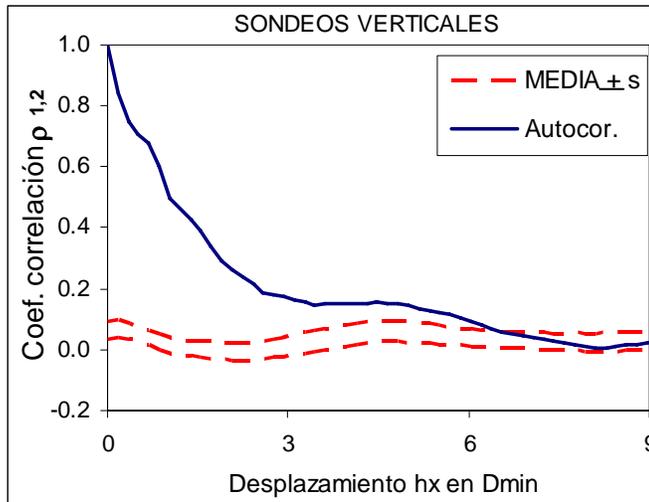


Figura 4.13. Correlación cruzada de NDI en estructuras 2 D de granulometría bimodal $p_{2A}=0.5$, $\alpha=5$

b. Distancia mínima entre centros de discos iguales

La representación gráfica de las densidades de probabilidad $f_{2T}(t)$ (ecuación 2.18) de las distancias mínimas entre partículas del mismo tamaño es una manera de poner en evidencia la agrupación de partículas. En la figura 4.14 se presentan dos ejemplos para las partículas de D_{min} . La línea discontinua indica la densidad de probabilidad de Poisson (distribución espacial de centros de partícula aleatoria uniforme), la curva continua es una densidad de probabilidad condicional dado que T_{2T} no puede ser inferior que el diámetro de la partícula (ecuación 4.3), y la escalonada es la observada en la simulación.

$$f_{2T}(t|D_{min} \leq t) = \frac{f_{2T}(t)}{1 - F_{2T}(D_{min})}; \quad \text{para } t \geq D_{min} \quad (4.3)$$

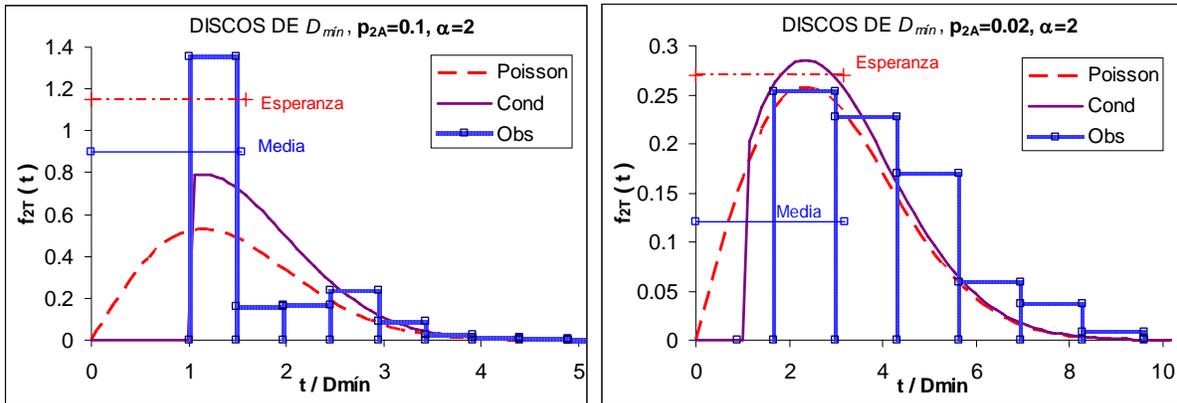


Figura 4.14. Densidades de probabilidad de T en granulometría bimodal 2 D

Se observa que la distribución espacial de los centros de las partículas no es aleatoria uniforme. La hipótesis Poissoniana para las partículas pequeñas solamente parece aceptable cuando su proporción es muy baja (lado derecho de la figura 4.14).

Cuando $p_{2A}=0.1$, ni siquiera la densidad de probabilidad condicional ofrece una buena aproximación, las distancias iguales a D_{min} son muy frecuentes. En esta estructura (figura A.2 del Anexo A.2), las partículas grandes se encuentran en contacto entre sí, por lo tanto las distancias observadas se concentran en una barra vertical en $t_{2T}/D_{max}=1$.

En la figura 4.15 se ilustran las densidades de probabilidad de las distancias mínimas entre centros de partículas grandes. La proporción de estas partículas es $q_{2A}=0.3$ (en área) y $q_{2D}=0.1$ (en número). Pese a que el número de partículas es reducido, las frecuencias observadas señalan que los contactos entre partículas iguales son abundantes.

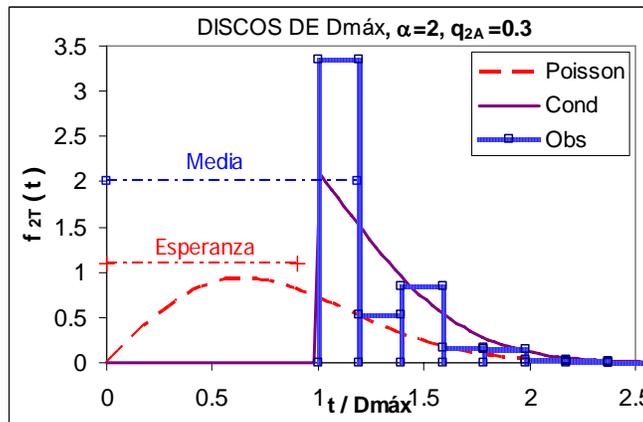


Figura 4.15. Densidades de probabilidad de T en granulometría bimodal 2 D

De acuerdo a las observaciones anteriores, las partículas iguales se agrupan cuando las distancias observadas son cercanas al diámetro de partículas y por lo tanto su media también $\bar{T}/D \rightarrow 1$. Sin embargo, se obtiene el mismo resultado cuando las partículas analizadas constituyen la matriz principal de la estructura granular, pero no puede decirse que se encuentren segregadas.

Una segregación nula implica que los centros de ambas clases de partículas se distribuyan uniformemente al azar en el espacio. En caso contrario, la segregación es máxima si en el medio existen únicamente dos agregados, cada uno de partículas idénticas, donde $\bar{T}/D_{\min}=\bar{T}/D_{\max} =1$ (segregación forzada).

Es conveniente, por tanto, tomar en cuenta los dos componentes de cada estructura. Se observó que la media aritmética τ_{2T} (ecuación 4.4) de las distancias mínimas medias observadas en las fracciones granulométricas ofrece resultados útiles.

$$\tau_{2T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{T}_i}{E_{2A}\{D\}_i} \right) \quad (4.4)$$

Donde: \bar{T}_i es la distancia mínima media entre centros de partículas de la fracción granulométrica i
 $E_{2A}\{D\}_i$ es la esperanza en área del diámetro de las partículas de la i -ésima clase granulométrica
 n es el número de clases granulométricas en las que se divide el medio granular

Esta forma de cuantificar la segregación tiene el inconveniente de ocultar la influencia de cada fracción granulométrica por el efecto de promedio.

La figura 4.16 presenta las curvas de isovalores de τ_{2T} en el espacio de las variables que determinan una granulometría bimodal. Estas curvas fueron obtenidas por interpolación lineal entre los valores obtenidos de las simulaciones. Se observó que otros métodos de interpolación requieren una mayor densidad de puntos conocidos para arrojar resultados aceptables.

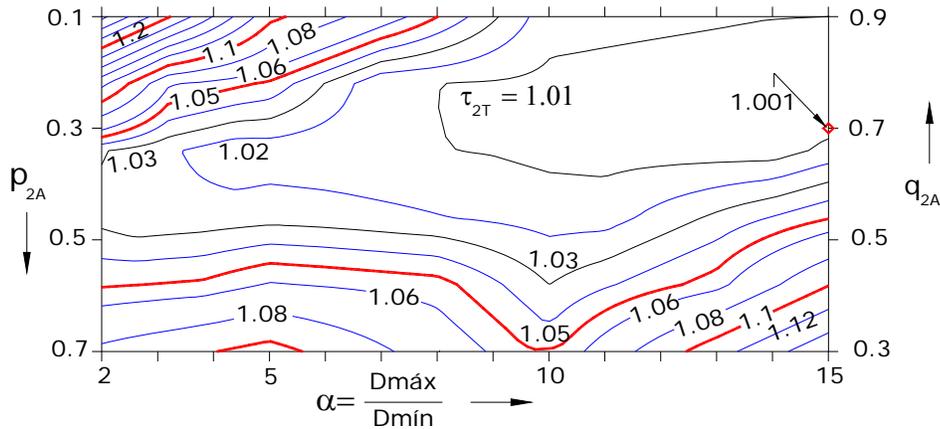


Figura 4.16. Segregación τ_{2T} en estructuras de granulometría bimodal 2 D

Se obtuvo una cierta correspondencia con los resultados de CV_{NDI} . Dependiendo del valor de α , la proporción p_{2A} de partículas pequeñas que maximiza la segregación oscila entre 0.3 y 0.5.

En general, la segregación se incrementa cuando aumenta la relación de tamaños $\alpha=D_{\max}/D_{\min}$. Dentro de los alcances del experimento realizado, la máxima segregación espontánea se presentó para la granulometría $p_{2A}=0.3$ y $\alpha=15$ (figura 4.17), que es bastante cercana a la máxima posible ($\tau_{2T}=1$). En la estructura de la figura 4.17 se observa la formación espontánea de agrupaciones alargadas

estratificadas con tendencia cuasi horizontal, donde se aprecian tramos con pendientes del orden de 45° .

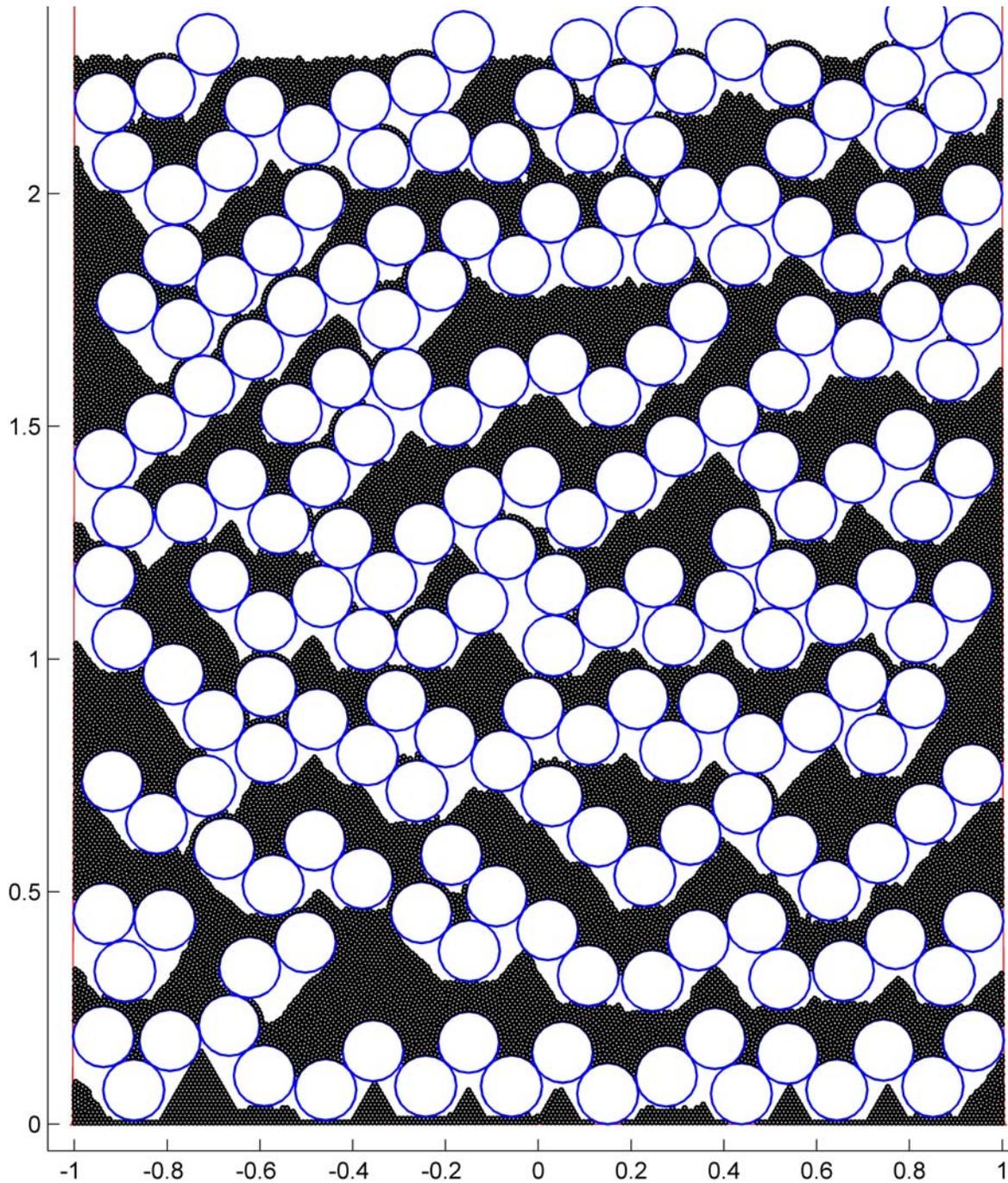


Figura 4.17. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.3$, $\alpha=15$

En conclusión, en granulometrías bimodales es evidente la presencia de una segregación geométrica inherente importante.

4.3.3 Granulometrías continuas

Se evalúa el efecto de la relación de tamaños $\alpha=D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$ y del coeficiente de distribución granulométrica λ sobre la segregación.

a. Concentración espacial de discos

Se recuerda que se le llama concentración espacial de discos al número de discos intersecados por sondeos rectos de dos unidades de longitud. Se intenta medir la segregación a través del coeficiente de variación de *NDI*.

Se puede señalar que la estructuración espontánea también está presente en este tipo de granulometría, principalmente cuando tiende a la de discos uniformes. La variación de *NDI* en sondeos horizontales continua siendo inapropiada en el estudio de la segregación.

En sondeos verticales, *NDI* sólo se incrementa notablemente a una pequeña distancia de las paredes laterales, donde se traslapan las cadenas de discos que siguen el contorno del recipiente (figura 4.18). En adelante, las variaciones de *NDI* pueden asociarse razonablemente con la segregación.

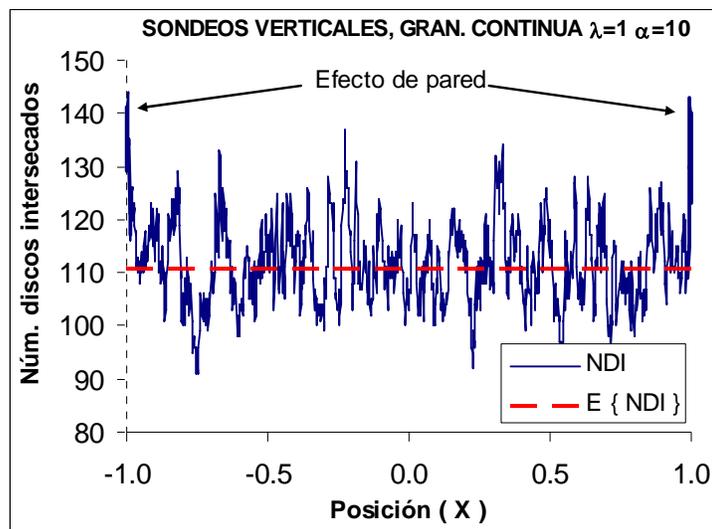


Figura 4.18. Ejemplo de *NDI* en granulometría continua 2 D con $Cu=3.5$

Eliminados los efectos de las paredes, en cada estructura granular se calculó el coeficiente de variación de *NDI*. Con estos coeficientes se observa la influencia de las variables granulométricas sobre la segregación (figura 4.19). Además se presta atención a la relación entre CV_{NDI} y el coeficiente de uniformidad granulométrica por ser un parámetro de uso común en la mecánica de suelos.

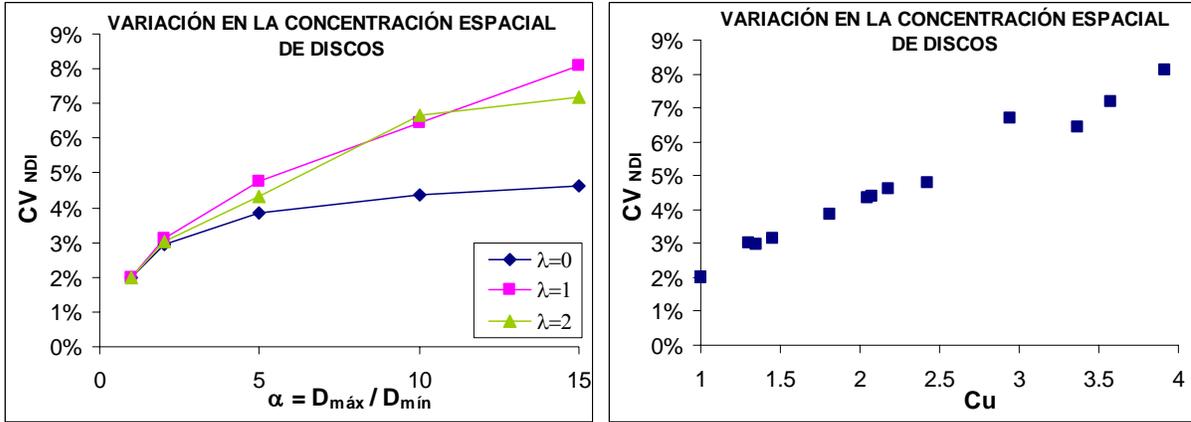


Figura 4.19. Segregación CV_{NDI} en granulometría continua 2 D

Al igual que en granulometrías bimodales, la segregación inherente se favorece con el incremento de la relación de tamaños $\alpha = D_{m\acute{a}x} / D_{m\acute{i}n}$. En cuanto al coeficiente de distribución granulométrica (λ), las estructuras con mayor presencia de partículas grandes ($\lambda=0$) se segregan en menor grado (figura 4.19).

Por otra parte, la segregación se relaciona linealmente con el coeficiente de uniformidad granulométrica (el coeficiente de correlación de la regresión lineal fue de 0.992). La ecuación 4.5 expresa CV_{NDI} como función de C_u .

$$CV_{NDI} = 0.021C_u - 0.0003 \quad \text{para } 1 \leq C_u \leq 4 \quad (4.5)$$

b. Distancia mínima entre centros de discos de la misma fracción granulométrica

El estudio de la segregación se realiza en fracciones granulométricas por separado, explorándose el estado de agrupación de las partículas que la conforman. En el capítulo anterior se decidió hacer la división en diez fracciones granulométricas, cada una con el 10% del área total de sólidos.

Una forma de evaluar la segregación es por comparación de las densidades de probabilidad de la distancia mínima entre centros de partículas teóricas y observadas.

En la figura 4.20 se muestran ejemplos de las densidades de probabilidad de T_{2T} de dos fracciones granulométricas de una estructura. Se incluye la densidad teórica de Poisson, la densidad condicional (la distancia mínima es el diámetro mínimo de la fracción granulométrica) y la observada en la fracción granulométrica.

Resalta que dentro de la misma estructura, las partículas pequeñas se agrupan mucho más que las grandes. Las distancias observadas t_{2T} se concentran en la esperanza del diámetro $E_{2A}\{D\}_i$ de la fracción granulométrica.

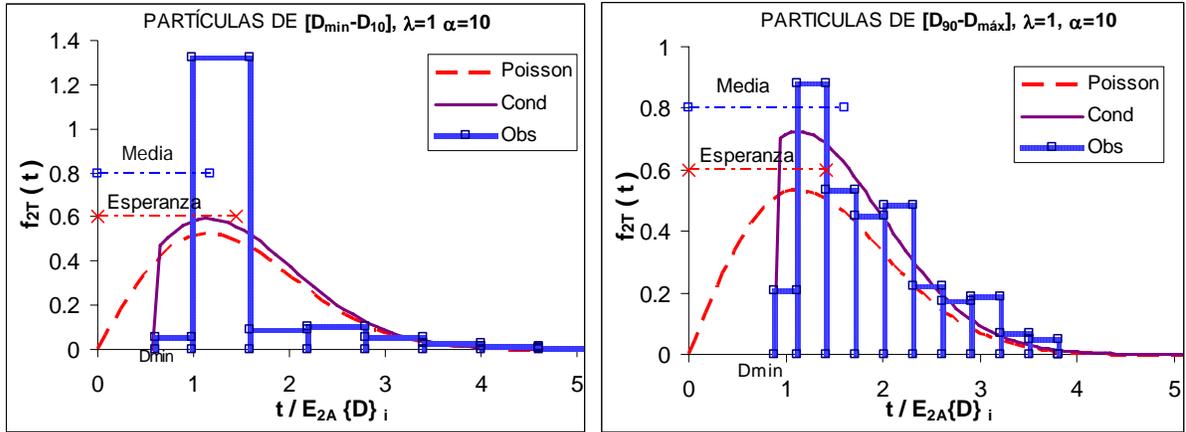


Figura 4.20. Ejemplos de densidades de probabilidad de T en granulometría continua 2 D

Por sencillez, para evaluar la segregación de la i -ésima fracción granulométrica se obtuvo la media de la distancia mínima \bar{T}_i entre los centros de las partículas de interés y se dividió por la esperanza del diámetro $E_{2A}\{D\}_i$ de la clase granulométrica. Se eligió la esperanza del diámetro en área por ser una medida representativa fácil de obtener de una curva granulométrica. Obviamente es posible encontrar distancias $T_{2T} < E_{2A}\{D\}_i$ pero nunca inferiores al diámetro mínimo de las partículas analizadas.

Los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas se concentran en la tabla 4.3. Entre ellos es interesante destacar que las partículas de menor tamaño siempre tienden a agruparse (se remarcó con negritas la mayor segregación), como se vio en la figura 4.20. En general, las partículas que pertenecen a $[D_{30} - D_{40}]$ y de tamaños mayores, no tienden a agruparse a pesar de la reducción de la uniformidad granulométrica.

Tabla 4.3. Segregación por fracción granulométrica en granulometría continua 2 D

GRANULOMETRÍA			$D_0 - D_{10}$	$D_{10} - D_{20}$	$D_{20} - D_{30}$	$D_{30} - D_{40}$	$D_{40} - D_{50}$	$D_{50} - D_{60}$	$D_{60} - D_{70}$	$D_{70} - D_{80}$	$D_{80} - D_{90}$	$D_{90} - D_{100}$
λ	α	Cu	DISTANCIA MÍNIMA MEDIA OBSERVADA EN LA SIMULACIÓN									
			$\bar{T}_i / E_{2A}\{D\}_i$									
0	2	1.35	1.587	1.580	1.737	1.609	1.594	1.752	1.685	1.669	1.773	1.610
0	5	1.81	1.406	1.458	1.527	1.642	1.671	1.601	1.797	1.762	1.720	1.631
0	10	2.07	1.257	1.487	1.568	1.621	1.545	1.637	1.616	1.637	1.737	1.749
0	15	2.18	1.146	1.512	1.563	1.616	1.605	1.724	1.579	1.561	1.741	1.605
1	2	1.45	1.654	1.611	1.594	1.635	1.725	1.618	1.626	1.735	1.631	1.689
1	5	2.43	1.412	1.493	1.521	1.651	1.642	1.670	1.648	1.726	1.780	1.715
1	10	3.37	1.214	1.395	1.514	1.582	1.638	1.649	1.663	1.721	1.718	1.704
1	15	3.92	1.088	1.329	1.542	1.538	1.748	1.771	1.728	1.625	1.663	1.660
2	2	1.30	1.686	1.595	1.748	1.672	1.669	1.776	1.633	1.655	1.711	1.689
2	5	2.05	1.626	1.511	1.563	1.572	1.646	1.864	1.686	1.754	1.652	1.690
2	10	2.95	1.384	1.600	1.519	1.669	1.745	1.633	1.670	1.735	1.788	1.628
2	15	3.58	1.335	1.452	1.637	1.566	1.602	1.681	1.847	1.803	1.747	1.795

La segregación de las partículas pequeñas puede explicarse desde el punto de vista geométrico. Las partículas pequeñas son capaces de separar las grandes, lo que favorece la entrada de otras partículas pequeñas en los espacios que se generan.

La figura 4.21 presenta las distancias normalizadas centro a centro para cada fracción granulométrica en estructuras granulares con $\lambda=1$ y $\alpha=10$ ($Cu = 3.37$). Esta gráfica es un ejemplo típico de la segregación dentro de una estructura granular de granulometría continua. Los datos se muestran sombreados en la tabla anterior.

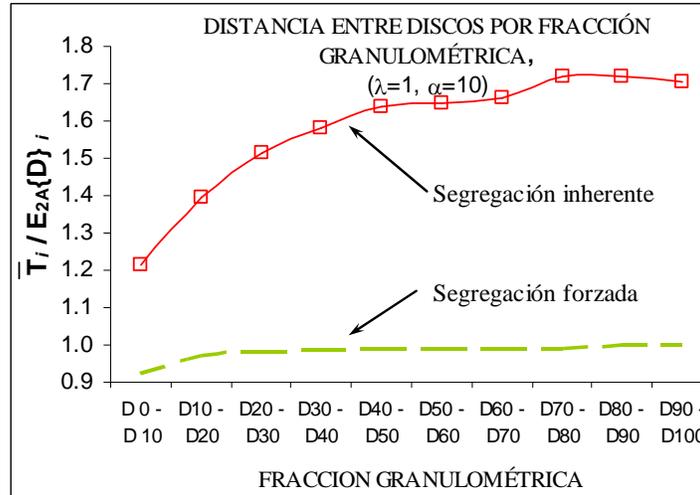


Figura 4.21. Segregación por fracción granulométrica en granulometría continua 2 D con $Cu=3.4$

En la figura 4.21 se muestran también las distancias mínimas entre centros de partículas para cada fracción granulométrica en una estructura con segregación forzada. Se observa que la segregación inherente observada en las estructuras simuladas es muy inferior a la segregación forzada.

Por ser de mayor interés, en la figura 4.22 se muestra la segregación de las partículas más pequeñas y de las más grandes de cada estructura en función de las variables granulométricas. La relación de tamaños máximo y mínimo afecta en proporción inversa a la distancia mínima entre centros de las partículas pequeñas (el incremento de $\alpha = D_{m\acute{a}x} / D_{m\acute{i}n}$ aumenta la segregación).

En cambio, no hay efecto importante de α sobre la segregación de las partículas grandes. El coeficiente de distribución granulométrica λ también es poco relevante para la segregación.

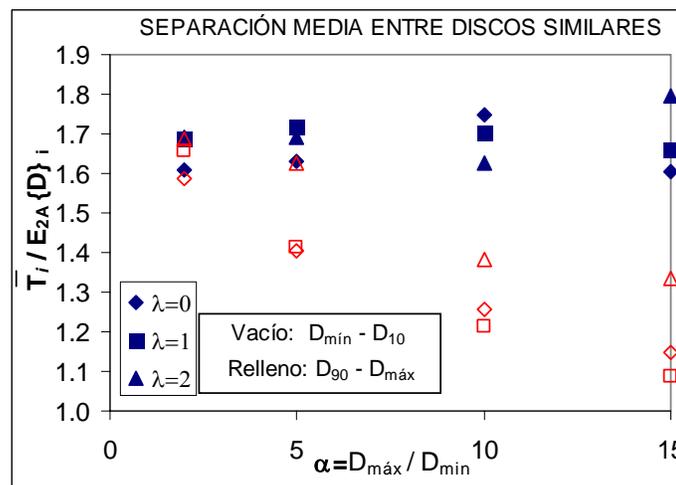


Figura 4.22. Segregación de los discos más pequeños y más grandes en granulometría continua

Es importante señalar que la influencia del coeficiente de uniformidad granulométrica (C_u) sobre la segregación no se detecta al aplicar este criterio. Estas observaciones coinciden con las recomendaciones prácticas para la selección de filtros granulares (Sherard *et al*, 1984 (b)), donde se da mayor importancia a la relación $D_{m\acute{a}x} / D_{m\acute{i}n}$ que al coeficiente de uniformidad granulométrica.

En conclusión, este estudio bidimensional muestra, tanto visualmente como a través de las variables de medición, que la segregación geométrica siempre está presente y que es mayor en las granulometrías bimodales.

4.4 INFLUENCIA DE LA GRANULOMETRÍA SOBRE LA SEGREGACIÓN 3 D

La segregación en estructuras tridimensionales es de mayor relevancia para la geotecnia, sin embargo se recomienda tener presente el estudio bidimensional por algunas dificultades encontradas para complementar gráficamente los resultados.

La secuencia de análisis es análoga a la de la sección anterior. Se realiza una revisión detallada de las estructuras con granulometrías uniformes (segregación nula) y continuas con $\lambda=1$ y $\alpha=10$.

4.4.1 Granulometrías de esferas uniformes

La importancia del estudio de estructuras de esferas uniformes se debe a que las variaciones en la concentración espacial de partículas no se deben exclusivamente a la segregación, sino que dependen de otros rasgos como la organización sistemática espontánea de las partículas. Los siguientes resultados se obtuvieron a partir de diez estructuras de esferas del mismo tamaño.

a. Concentración espacial de esferas

La simetría observada en el fondo del recipiente (fig. 4.4) implica que no es necesario evaluar *NEI* en tres direcciones perpendiculares. La concentración de partículas en los planos de corte se puede describir con cortes planos verticales ($x=\text{constante}$) y con horizontales ($z=\text{constante}$), como se supuso en la elaboración de la función *HOMOGENEIDADTD.m*. Es oportuno señalar que en todas las simulaciones realizadas, las medias de *NEI* coincidieron satisfactoriamente con sus esperanzas teóricas.

En esferas uniformes no es extraño que la gráfica de *NEI* sea oscilante en los planos horizontales cercanos al fondo del recipiente (figura 4.23 izquierda). En esta zona, un corte puede intersectar partículas de dos capas adyacentes de arreglos regulares. A una elevación mayor de 4 veces el tamaño de partícula, la estructuración espontánea se pierde, *NEI* sigue una tendencia aleatoria con menor variabilidad y es menor que su esperanza.

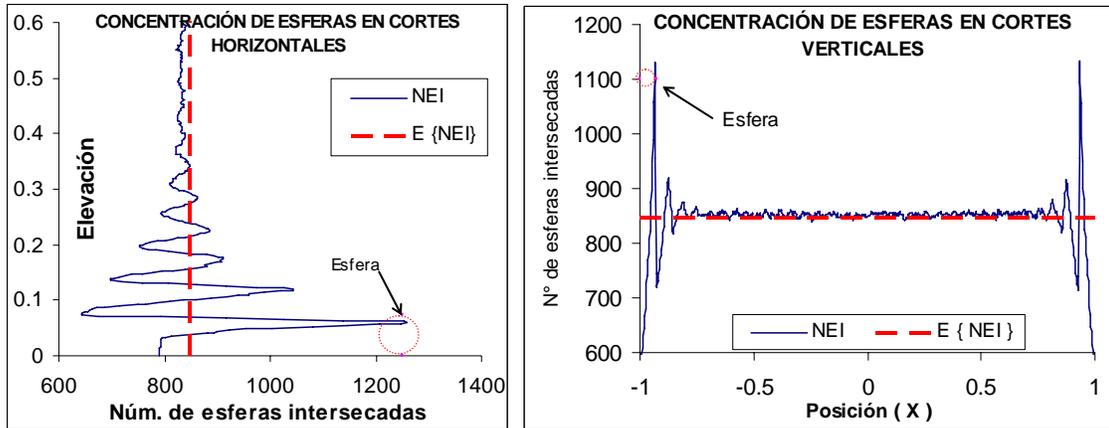


Figura 4.23. Concentración media de partículas, granulometrías uniformes 3 D

Las paredes verticales también condicionan la posición de las partículas en sus alrededores, provocan la aparición de vacíos inaccesibles a los granos y en consecuencia *NEI* es mucho menor a su esperanza. Al desplazar el plano de corte hacia el centro del recipiente, aproximadamente a una distancia de $0.9D$ aparece una zona de traslape entre dos capas de partículas (algo similar al fondo del recipiente) donde *NEI* se maximiza. Esto sucede una vez más pero a menor escala. A una distancia de tres veces el diámetro de las partículas, la concentración espacial de esferas puede considerarse constante.

La porosidad en los planos de corte varía de valores cercanos al 100% en el plano tangente al recipiente, a 23 ó 30% en el plano que pasa preferentemente por los centros de las esferas en contacto con el contenedor (figura 4.24). Al alejarse de las fronteras, la porosidad se incrementa en las zonas de traslape entre capas de partículas y continua oscilando cada vez con menor amplitud alrededor de su media.

A una distancia corta de las paredes del recipiente (3 ó 4 veces el diámetro de las partículas), la porosidad puede considerarse constante e igual a la porosidad tridimensional estimada con el método de Monte Carlo.

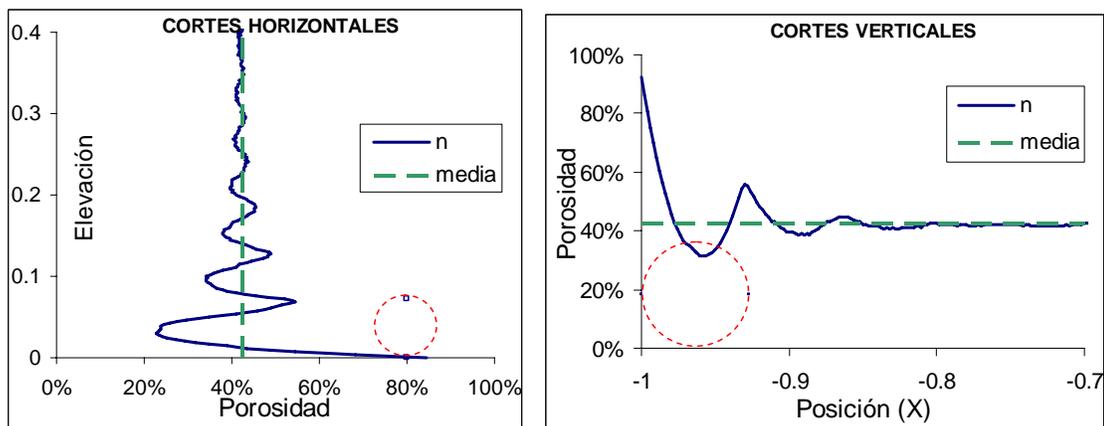


Figura 4.24. Porosidad en planos de corte horizontales y verticales, esferas uniformes 3 D

El comportamiento de *NEI* y de la porosidad indican que la estructuración espontánea del modelo tridimensional es menor que en el bidimensional. Parece obvio aceptar que las simulaciones son aleatorias, para corroborarlo se calculó el coeficiente de correlación de *NEI* entre las distintas estructuras de granulometría uniforme.

Con el coeficiente de correlación cruzada entre las señales de *NEI* (diez simulaciones y 39 combinaciones entre señales) se observó que las simulaciones presentan pocas diferencias entre sí. La correlación cruzada se distingue de una autocorrelación cualquiera, porque tiene como valor máximo $\rho_{1,2}=0.96$, mientras que la autocorrelación inicia en $\rho_{NEI}=1$. La estructuración espontánea que introduce el fondo del recipiente se manifiesta en la forma oscilante de las curvas de la figura 4.25 izquierda.

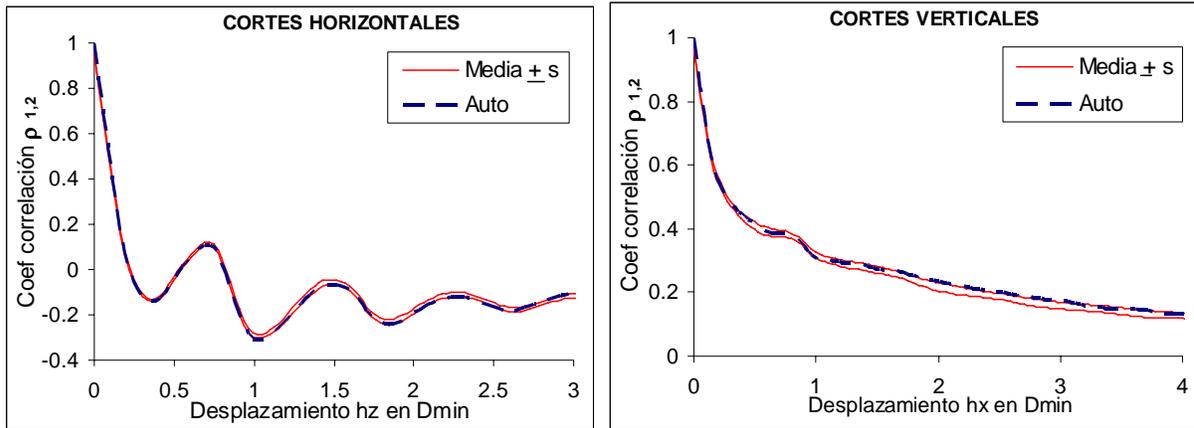


Figura 4.25. Correlación cruzada de *NEI* en granulometría uniforme 3 D

Considerando la mayor entropía que genera el modelo tridimensional respecto al bidimensional, es aceptable suponer que la correlación cruzada entre las señales de *NEI* en granulometrías bimodales y continuas es despreciable, por lo que su cálculo es innecesario.

De acuerdo a las figuras 4.23 a 4.25 se consideró adecuado evaluar la segregación por medio del coeficiente de variación CV_{NEI} obtenido de los cortes verticales, puesto que es el menos afectado por la estructuración espontánea de las partículas. El resumen de los resultados más importantes de la concentración espacial de partículas se presenta en la tabla 4.4.

Tabla 4.4. Características de las estructuras de granulometría uniforme 3 D

CORTES		Horizontal	Vertical
Media	<i>NEI</i>	830	846
	<i>NEI*</i>	827	853
	$E \{NEI\}$	848	
	ρ_{NEI} máx	0.95	0.96
	<i>n</i>	0.416	
Coef. de variación	<i>NEI</i>	5.3%	6.1%
	<i>NEI*</i>	0.55%	0.48%
	ρ_{NEI} máx	0.7%	0.4%
	<i>n</i>	1.3%	

* Se eliminaron los efectos de las paredes del recipiente

El estudio de estructuras granulares de esferas uniformes es de gran utilidad para poner en evidencia que las características del modelo (criterios de colocación y forma del recipiente) afectan propiedades del medio como la distribución espacial de partículas y la porosidad.

b. Distancia mínima entre centros de esferas iguales

Todas las partículas de una simulación están en contacto con al menos otras tres de sus compañeras, lo que conduce a que $t_{3T}/D=1$ en todas las observaciones. En esta granulometría carece de sentido hablar de segregación, pero la variable indica que cuando la estructura esté constituida por al menos dos tipos de partículas, la segregación máxima toma lugar cuando todas las partículas de cada clase forman un solo agregado y $\overline{T}_i/D_i=1$.

4.4.2 Granulometrías bimodales

a. Concentración espacial de esferas

Obtenidos los valores de NEI en cada plano de corte vertical, se eliminan los datos afectados por las paredes y se obtiene el coeficiente de variación CV_{NEI} . Éste representa la segregación y se relaciona con las variables que definen la granulometría.

- *Efecto de la proporción (en volumen) de partículas pequeñas*

Este efecto se aísla manteniendo constante la relación de diámetros $\alpha = D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}=4$. El comportamiento de CV_{NEI} con la variación de p_{3V} es similar al observado en el estudio bidimensional. La segregación geométrica siempre está presente en las mezclas granulares, es mayor cuando existen proporciones importantes de ambas clases de partículas y se reduce cuando predomina ampliamente una clase de partículas como se muestra en la figura 4.26.

Además, la magnitud de la segregación es asimétrica respecto a la igualdad de proporciones ($p_{3V} = q_{3V} = 0.5$). Las estructuras con mayor proporción (en volumen) de partículas grandes son más segregables.

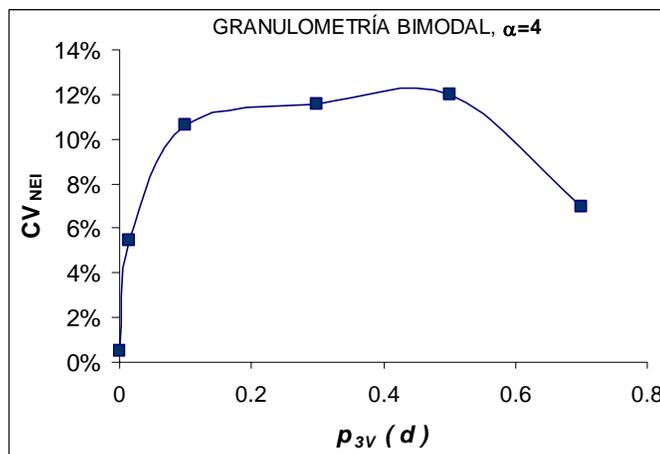


Figura 4.26. Efecto de la proporción de partículas pequeñas sobre la segregación 3 D

Cuando $p_{3V}=0.7$ se observa que la segregación tiende a disminuir debido a que la granulometría tiende a ser uniforme. Es de esperarse que las propiedades geométricas de las estructuras granulares sean también similares a las estudiadas en el inciso 4.4.1.

- *Efecto de la relación de tamaños*

Esta variable está directamente relacionada con la característica que distingue a unas partículas de otras. Por esta razón, la variabilidad de NEI es directamente proporcional a $\alpha = D_{m\acute{a}x} / D_{m\acute{i}n}$ (figura 4.27). Como ejemplo se muestran los resultados para CV_{NEI} como función de α y con $p_{3V} = 0.3$ constante.

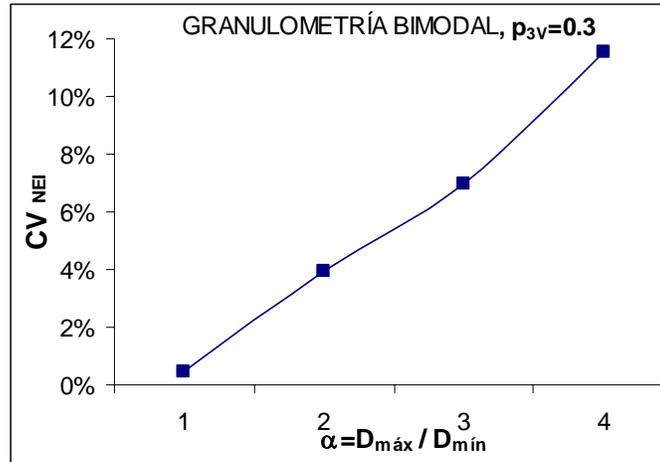


Figura 4.27. Efecto de α sobre la variabilidad de NEI en granulometría bimodal 3 D

La segregación se debe a que las partículas de $D_{m\acute{i}n}$ caen en los valles formados por las grandes. También, la presencia de una partícula pequeña obliga a las grandes a separarse entre sí, dando como resultado la formación de espacios únicamente accesibles a los granos de menor tamaño.

En inciso 4.2.2 se mencionó que el modelo de simulación encuentra ciertas dificultades para colocar partículas pequeñas cuando la proporción de partículas grandes es baja. Esta limitación y la dificultad para representar la percolación de partículas pequeñas (figura 3.13) son las causas de que el campo de estudio en granulometrías bimodales tridimensionales se haya reducido notablemente. Se decidió no modificar el algoritmo de formación de las estructuras para no introducir una fuente de variación adicional y porque con las estructuras obtenidas puede observarse la influencia de las variables granulométricas.

- *Efecto conjunto de p_{3V} y α*

Con los valores de CV_{NEI} calculados en cada estructura se obtuvieron las curvas de isovalores en el espacio de las variables granulométricas. El método utilizado fue el de interpolación lineal, apropiado por la baja nube de puntos con que se cuenta.

A pesar de que el campo de estudio es reducido se observa una segregación importante, debido a que la percolación de partículas pequeñas se da con mayor facilidad que en estructuras bidimensionales.

Este criterio de medición permite apreciar la aparición de la segregación geométrica inherente, nula en granulometrías de esferas uniformes y cada vez mayor conforme se agrega una determinada cantidad de partículas α veces más pequeñas que representan una fracción p_{3V} del volumen de sólidos (figura 4.28).

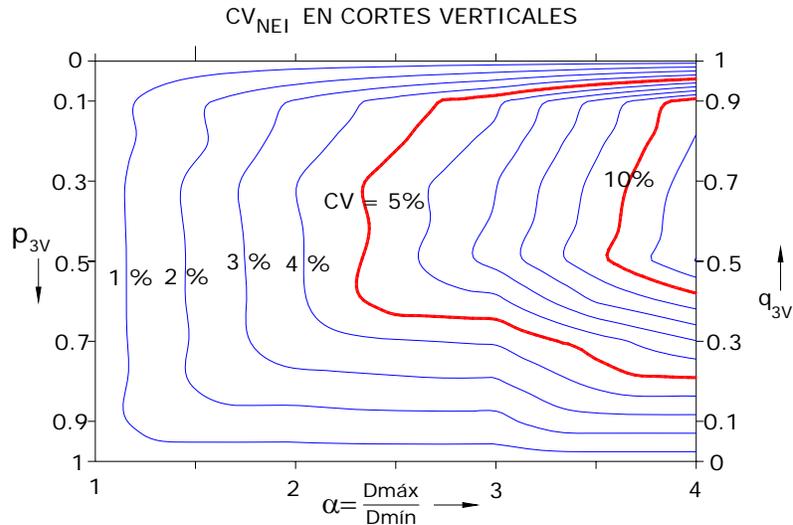


Figura 4.28. Segregación CV_{NEI} en estructuras de granulometría bimodal 3 D

La mayor segregación inherente se presentó para $\alpha=4$, en las estructuras con $p_{3V}=0.3$ y $p_{3V}=0.5$, donde CV_{NEI} fue del 12% aproximadamente. Como en el caso bidimensional, la segregación es más pronunciada cuando la proporción en volumen de partículas grandes es ligeramente predominante.

Para evaluar que tan importante es la segregación inherente, se realizó una simulación con segregación forzada. La colocación por tamaño se realizó con una granulometría de $p_{3V}=0.3$ & $\alpha=4$. La máxima segregación geométrica arrojó un CV_{NEI} , del 105%.

De acuerdo con este criterio se puede decir que la segregación inherente observada en las estructuras simuladas es relativamente baja.

b. Distancia mínima entre centros de esferas iguales

Se recuerda que en este criterio de estudio, se realiza la medición de las distancias mínimas T_{3T} entre los centros de partículas iguales. Es importante comparar los histogramas de las frecuencias de las distancias observadas con las densidades de probabilidad teóricas (de Poisson y Poisson condicional) de distribución espacial aleatoria uniforme.

En el lado izquierdo de la figura 4.29, resulta sobresaliente que las partículas pequeñas se agrupan aún cuando su proporción sea baja ($p_{3V} = 0.1$). Debido a que los contactos entre partículas iguales son predominantes, el histograma de distancias mínimas normalizadas se concentra en $\bar{T}/D_{\min}=1$. La distribución espacial de las partículas sólo se aproxima a una forma aleatoria uniforme, cuando la fracción granulométrica representa una fracción muy baja del total de los sólidos (estructura construida especialmente para ejemplificar esto, cuya gráfica aparece en el lado derecho de la figura 4.29).

Obviamente, las partículas grandes de las estructuras ejemplificadas se encuentran formando un gran grupo, posiblemente con algunas partículas aisladas entre las pequeñas. Esto no significa que las partículas se encuentren segregadas, sino que constituyen una matriz continua en la estructura granular. La segregación implica que ambos tipos de partículas formen grupos por separado.

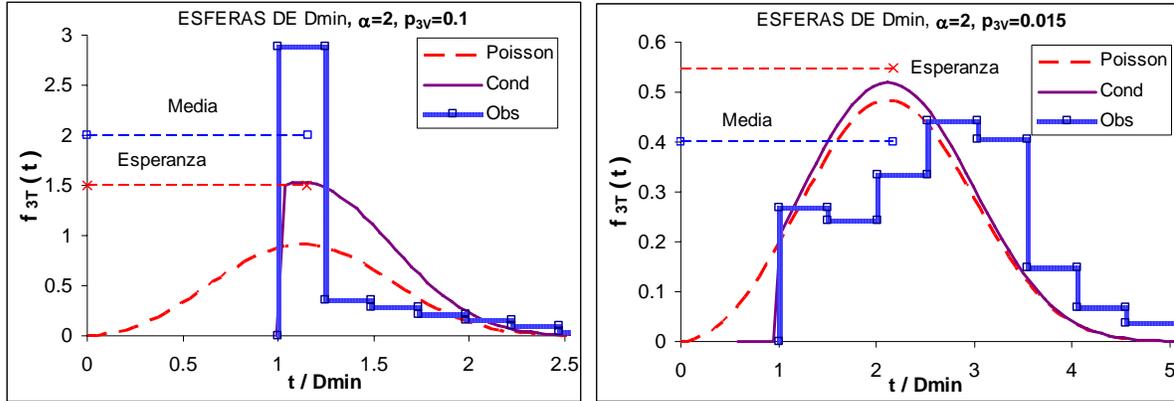


Figura 4.29. Ejemplos de la densidad de probabilidad de T en granulometría bimodal 3 D

Por sencillez, para considerar las dos fracciones granulométricas se utiliza el promedio (τ_{3T}) de las dos distancias normalizadas. La secuencia de cálculo queda representada por las ecuaciones 4.7 y 4.8.

$$\bar{T}_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} t_j \quad (4.76)$$

$$\tau_{3T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{T}_i}{E_{3V}\{D\}_i} \quad (4.7)$$

Donde m es el número de partículas de una fracción granulométrica
 t representa los valores que toma la distancia mínima entre los centros de dos partículas
 \bar{T}_i es la media de la variable en la i -ésima fracción granulométrica
 n es el número de fracciones granulométricas
 $E_{3V}\{D\}_i$ es la esperanza en volumen del diámetro en una fracción granulométrica
 τ_{3T} es la distancia mínima media de todas las fracciones granulométricas

Entre más cercanas se encuentren las partículas entre sí, menor es la distancia τ_{3T} y más evidente es la segregación. Los resultados se concentran en la tabla 4.5.

Tabla 4.5. Segregación en estructuras de granulometría bimodal 3 D

GRANULOMETRÍA			D I S T A N C I A S		
α	p_{3V}	q_{3V}	$\bar{T} / D_{mín}$	$\bar{T} / D_{máx}$	τ_{3T}
2	0.1	0.9	1.148	1.000	1.074
3			1.075	1.000	1.037
4			1.031	1.000	1.016
2	0.3	0.7	1.0085	1.0002	1.004
3			1.0031	1.0004	1.002
4			1.0019	1.0000	1.0010
2	0.5	0.5	1.0009	1.0049	1.003
3			1.0004	1.0066	1.004
4			1.0002	1.0021	1.0012
2	0.7	0.3	1.0002	1.0599	1.030
3			1.0001	1.0687	1.034
4			1.0000	1.0470	1.024

Se observa que en granulometrías compuestas principalmente por un tamaño de partículas, por ejemplo $p_{3V}=0.1$ y $q_{3V}=0.9$, las partículas grandes están juntas, pero las pequeñas no. Estas estructuras son de las menos segregables dentro de las granulometrías bimodales tridimensionales.

Cuando la proporción (en volumen) de partículas de D_{min} se incrementa al 30%, las distancias mínimas medias en ambas clases decrecen casi al diámetro de partícula ($\tau_{3T}=1.001$ para la mayor relación de tamaños estudiada). Estas estructuras están constituidas prácticamente por dos agregados, uno de partículas pequeñas y otro de grandes. Los contactos entre partículas grandes son más predominantes.

Para fines de comparación, con una granulometría de $p_{3V}=0.3$ y $\alpha=4$, se realizó la colocación por tamaño para imponer la segregación. Las distancias mínimas entre los centros de partículas iguales fue igual a su diámetro ($\tau_{3T}=1$) como ya se esperaba.

En estructuras con $p_{3V}=q_{3V}=0.5$, la segregación inherente es ligeramente menor a la de $p_{3V}=0.3$, debido a que las partículas de D_{min} son más numerosas que las de $D_{máx}$ y por tanto resulta más fácil que una partícula pequeña impida que las partículas grandes entren en contacto.

En las estructuras constituidas por el 70% (en volumen) de partículas pequeñas, las partículas grandes no pueden mantenerse juntas y tienden a ser distribuidas entre las pequeñas. Por tanto, la segregación se reduce (aumenta τ_{3T}). Es de esperarse que la segregación se reduzca al continuar incrementando la proporción de partículas pequeñas, por acercarse cada vez más a una granulometría de esferas uniformes.

Por otra parte, la segregación aumenta en proporción directa a la relación de tamaños $\alpha=D_{máx}/D_{min}$. Los resultados de la tabla 4.5 respaldan esta afirmación y es lo que se ha obtenido en otras estructuras y en otros estudios.

Se aclara que no se eligió una representación gráfica de superficie en el espacio de las variables (p_{3V} , α) como en el estudio bidimensional, porque se generarían zonas de alta concentración de curvas de isovalores y otras zonas vacías, obstaculizando la apreciación del efecto de las variables granulométricas sobre fenómeno de interés.

Comparando los resultados entre los dos criterios de medición, la principal diferencia se debe a la segregación máxima de referencia. El criterio de CV_{NEI} indica que la segregación inherente es pequeña respecto a la segregación geométrica forzada. En cambio, con el criterio de distancias mínimas, los datos numéricos indican que la segregación espontánea está próxima a la máxima posible. Esto resalta la complejidad del fenómeno en estudio.

4.4.3 Granulometrías continuas

Desde el punto de vista de la geotecnia, se considera que estas granulometrías son las de mayor interés porque corresponden mejor a los suelos granulares naturales.

a. Concentración espacial de esferas

En los sondeos horizontales se observó que el efecto del fondo del recipiente desaparece a una distancia cada vez menor cuando la granulometría es menos uniforme. En cambio, se considera

importante estimar la distancia a las paredes, a la cual, las variaciones de NEI pueden asociarse a la segregación.

Por ejemplo, con diez simulaciones con granulometría $\lambda=1$ y $\alpha=10$ se obtuvo la media de NEI . En ella las variaciones aleatorias (segregación) de las señales tienden a anularse, haciendo evidente el efecto de la pared (figura 4.30).

En la porosidad en los planos de corte se observa el mismo comportamiento. Ambas variables tienden a un valor constante a una distancia a la pared de $4D_{min}$ aproximadamente.

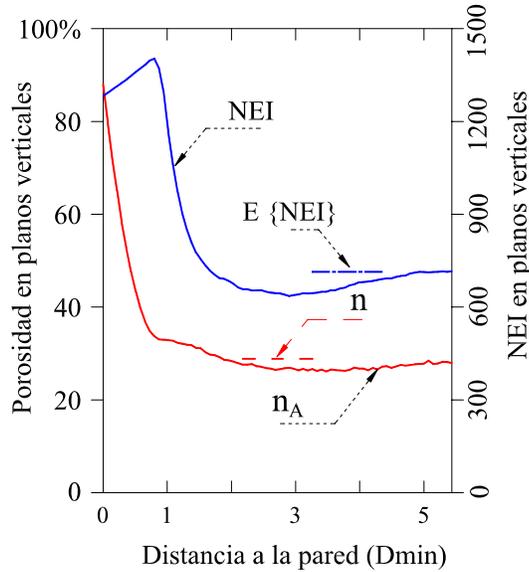


Figura 4.30. Efecto de paredes laterales sobre n y NEI , estructuras 3 D con $\lambda=1$, $\alpha=10$

En el interior de las estructuras granulares, la variación de NEI causada por la segregación depende principalmente de la relación de tamaños $\alpha=D_{m\acute{a}x} / D_{m\acute{i}n}$ (figura 4.31). El incremento de la segregación se debe a las diferencias cada vez mayores entre los tamaños de partículas.

El coeficiente de distribución granulométrica tiene menor influencia en la segregación. En general, las granulometrías con menor presencia de partículas pequeñas ($\lambda=0$) son menos segregables.

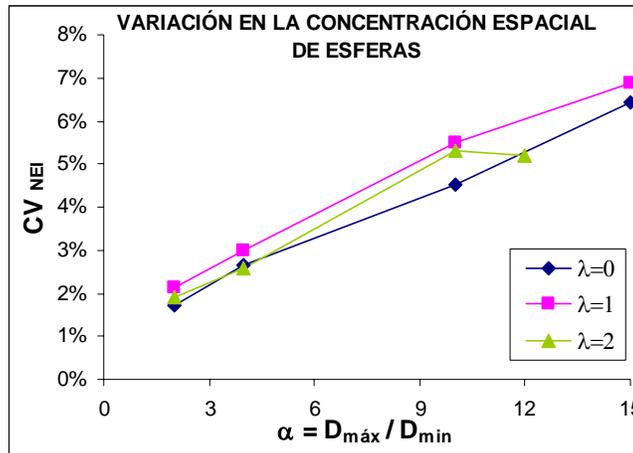


Figura 4.31. Segregación CV_{NEI} en estructuras de granulometría continua 3 D

También se realizó una simulación con segregación forzada considerando una granulometría con $\lambda=1$ y $\alpha=10$. El coeficiente de variación del número de esferas intersecadas por cortes planos fue del 114%, lo que sugiere que la segregación inherente es pequeña.

Nuevamente se observa que la segregación depende más de los tamaños máximo y mínimo de las partículas que del coeficiente de uniformidad granulométrica (que involucra al D_{60} y D_{10}).

b. Distancia mínima entre centros de esferas de la misma fracción granulométrica

Para estudiar la segregación, nuevamente se consideró adecuado separar la granulometría en diez fracciones o clases $[D_{min} - D_{10}]$, $[D_{10} - D_{20}]$,... $[D_{90} - D_{máx}]$ en frecuencias de volumen. Con esta discretización se pretende contar con una muestra suficiente de partículas en cada clase granulométrica y garantizar que las partículas analizadas no están juntas por formar una matriz continua dentro del material granular.

Al comparar las densidades de probabilidad (de la distancia mínima entre centros de esferas) se observa que la distribución espacial de las partículas de las fracciones granulométricas no es aleatoria uniforme. La aproximación mejora parcialmente al considerar la densidad de probabilidad condicional de T_{3T} (dado que la distancia mínima entre centros de esferas es el $D_{mín}$ de la clase).

En los histogramas observados en las partículas pequeñas, las distancias mínimas se concentran en un intervalo pequeño de valores y ni siquiera las densidades de probabilidad condicional se les aproximan satisfactoriamente. La aproximación mejora parcialmente en las fracciones granulométricas de partículas cada vez más grandes. Ejemplos típicos aparecen en la figura 4.32.

Lo anterior es importante para mostrar que la segregación principalmente afecta las partículas más pequeñas de una estructura granular y que las partículas de mayor tamaño tienden a distribuirse en el espacio de manera más aleatoria.

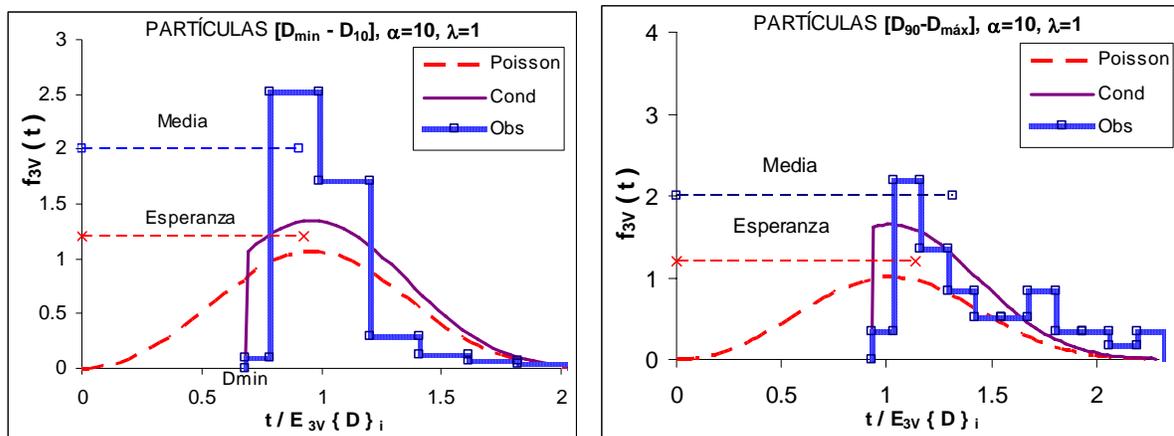


Figura 4.32. Densidades de probabilidad de T normalizada, granulometría continua 3 D

Para evitar estudiar la segregación con un conjunto de gráficas como las anteriores fue preferible tomar la media normalizada $(\bar{T}_i/E_{3V}\{D\}_i)$ como medida representativa en cada fracción granulométrica. La figura 4.33 muestra ejemplos de estos datos, los cuales representan la segregación geométrica de cada

fracción. En la tabla 4.6 se presentan las distancias normalizadas por fracción granulométrica en las distintas simulaciones realizadas.

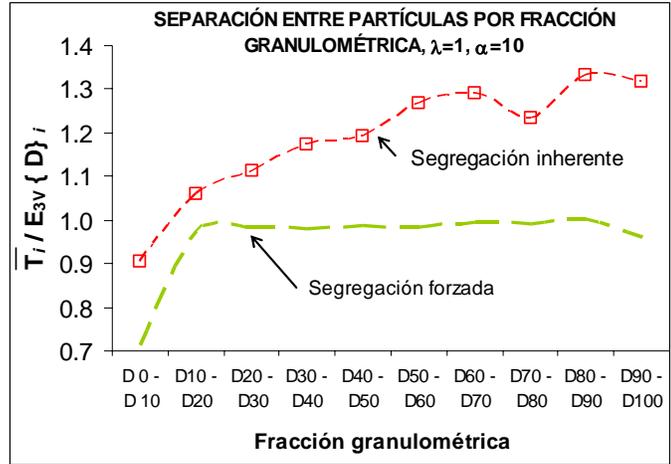


Figura 4.33. Segregación por fracción granulométrica en una granulometría continua 3 D

Comparando con las distancias mínimas medias normalizadas entre los centros de partículas similares con segregación forzada, se concluye que la segregación inherente en las estructuras simuladas es menos pronunciada.

Tabla 4.6. Segregación por fracción granulométrica en granulometría continua 3 D

GRANULOMETRÍA			D ₀ - D ₁₀	D ₁₀ - D ₂₀	D ₂₀ - D ₃₀	D ₃₀ - D ₄₀	D ₄₀ - D ₅₀	D ₅₀ - D ₆₀	D ₆₀ - D ₇₀	D ₇₀ - D ₈₀	D ₈₀ - D ₉₀	D ₉₀ - D ₁₀₀
λ	α	C_u	DISTANCIA MEDIA MÍNIMA OBSERVADA EN LA SIMULACIÓN									
			$\bar{T}_i / E_{3v} \{ D \}_i$									
0	2	1.348	1.188	1.214	1.258	1.218	1.260	1.246	1.271	1.235	1.282	1.268
	4	1.706	1.088	1.149	1.195	1.186	1.253	1.308	1.203	1.305	1.213	1.270
	10	2.073	0.813	1.101	1.163	1.219	1.239	1.220	1.249	1.310	1.205	1.278
	15	2.182	0.675	1.102	1.175	1.180	1.247	1.148	1.257	1.249	1.313	1.428
1	2	1.455	1.187	1.215	1.230	1.238	1.236	1.224	1.296	1.263	1.280	1.262
	4	2.154	1.086	1.154	1.162	1.206	1.228	1.238	1.260	1.264	1.282	1.292
	10	3.368	0.905	1.059	1.114	1.173	1.193	1.269	1.288	1.233	1.333	1.315
	15	3.917	0.745	1.010	1.087	1.150	1.226	1.156	1.306	1.307	1.397	1.335
2	2	1.301	1.207	1.254	1.230	1.255	1.257	1.296	1.311	1.320	1.254	1.287
	4	1.822	1.174	1.169	1.218	1.217	1.265	1.239	1.338	1.290	1.329	1.280
	10	2.947	1.101	1.127	1.186	1.231	1.202	1.301	1.387	1.255	1.286	1.272
	12	3.223	1.080	1.127	1.179	1.208	1.231	1.286	1.469	1.287	1.312	1.188

Es importante aclarar que en ocasiones la media observada es inferior al diámetro esperado (en volumen) porque cuando existen contactos entre partículas, las distancias tienden a considerar los diámetros más pequeños.

Para observar el efecto de las variables granulométricas sobre la segregación se consideraron la fracción granulométrica de partículas más pequeñas y la fracción granulométrica correspondiente a las partículas más grandes de cada estructura. Las distancias de la tabla 4.6 que las caracterizan se muestran en la figura 4.34 en función de las variables granulométricas. De acuerdo a esta figura se puede destacar lo siguiente:

- Las partículas pequeñas tienden a juntarse conforme se incrementa el cociente entre el tamaño máximo y mínimo de las partículas. La mayor segregación se presentó cuando $\alpha=15$.

- Las partículas grandes mantienen una separación centro a centro, aproximadamente constante independientemente de las variables granulométricas.
- Por su parte, el coeficiente de distribución granulométrica no muestra una influencia definida con claridad sobre la segregación.

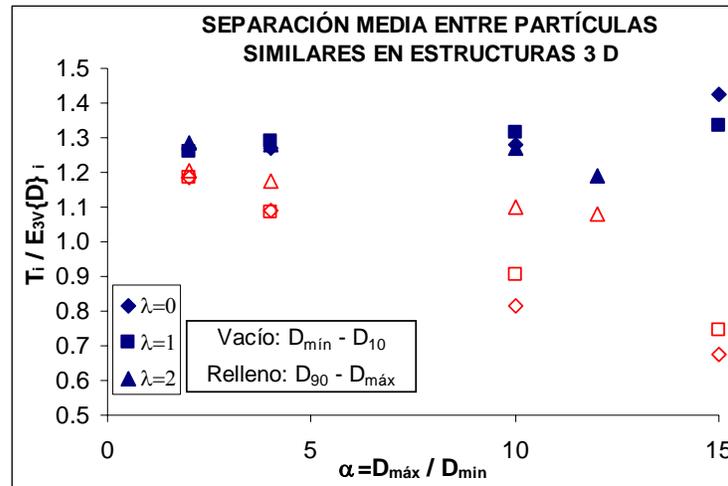


Figura 4.34. Segregación de las esferas más pequeñas y más grandes en granulometría continua

Respecto a las granulometrías bimodales tridimensionales, la segregación en granulometrías continuas es menor (las distancias normalizadas son mayores) porque coexiste una mayor diversidad de tamaños de partículas y la colocación aleatoria actúa con mayor efectividad.

Haciendo una comparación con las granulometrías continuas bidimensionales, la segregación inherente es mayor en estructuras tridimensionales.

4.5 ALGUNAS IMPLICACIONES PRÁCTICAS

En relación con la segregación y la estructuración espontánea de partículas de medios granulares se pueden recalcar las siguientes implicaciones que estos fenómenos pueden tener en los problemas prácticos de la ingeniería geotécnica.

- A la escala de los grupos de partículas, como las que se vieron en las simulaciones realizadas, los medios granulares son naturalmente heterogéneos y anisótropos, debido a la estructuración espontánea y a la segregación inherente.
- En muestras constituidas por un número limitado de partículas (efecto de escala), debe esperarse que la heterogeneidad y anisotropía mencionadas se reflejen en el comportamiento mecánico.
- La formación espontánea de agrupaciones alargadas de partículas iguales (figura 4.17) en una dirección preferencial influye en la transmisión de esfuerzos en un medio granular.

- En distintas simulaciones realizadas se observa que las partículas pequeñas tienden a quedar desligadas de la estructura, lo que afectaría la deformabilidad ante sollicitaciones mecánicas. Por ejemplo, un suelo formado por efecto de la gravedad bajo compresión hidrostática, las deformaciones verticales son menores que las horizontales.
- A la escala de las estructuras granulares simuladas la segregación propicia la aparición de zonas con distinta permeabilidad.
- En los problemas prácticos de la geotecnia y otras disciplinas, se debe tomar en cuenta que las granulometrías discontinuas son más segregables que las continuas.
- Los suelos que abarcan un amplio intervalo de diámetros de partícula (valores altos de $D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$) son los más segregables. Esto coincide con las recomendaciones prácticas dadas por algunos autores para reducir la segregación (Sherard *et al.*, 1984 (b) véase inciso 2.3.1).
- Se debe considerar que el mecanismo de segregación geométrico puede ser favorable en la explotación de bancos de préstamo de materiales granulares. La separación de partículas de cierto tamaño reduciría los costos de producción.

CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES

El presente trabajo se enfocó al estudio de la segregación inherente que se presenta en la formación de suelos granulares.

Se realizó una revisión de la literatura acerca de los estudios de segregación de medios granulares. Entre las propiedades de las partículas que propician la presencia del fenómeno están: el tamaño, la densidad y la forma.

En la literatura se señalan diferentes mecanismos de segregación (geométrica, convección y condensación). En el presente trabajo se prestó atención a la segregación geométrica.

Se usó un modelo numérico que permite simular la estructura de estos medios (Auvinet, 1972) recurriendo a lenguajes de programación recientes que permiten aumentar considerablemente su eficiencia. Se simularon estructuras constituidas por discos (modelo 2 D) o esferas (modelo 3 D) que forman una estructura en un recipiente aproximadamente cuadrado o cúbico. Los materiales representados incluyen los estrictamente uniformes, los bimodales (dos tamaños) y los de granulometría continua.

El modelo de simulación permitió involucrar un número de partículas relativamente grande. Sin embargo, los alcances quedaron limitados a granulometrías cuya uniformidad se asemeja a las arenas naturales más uniformes.

Se consideraron dos variables de medición de la segregación (el coeficiente de variación del número de partículas intersecadas por sondeos rectos o cortes planos y la distancia mínima entre centros de partículas similares). Esto permitió observar la presencia de la estructuración espontánea e identificar las fracciones granulométricas más susceptibles a la segregación.

De acuerdo a las dos variables de medición, los medios granulares tridimensionales son más segregables que los bidimensionales, debido a que los contactos entre esferas no cierran por completo el acceso a posiciones inferiores como en el caso bidimensional. Cualitativamente se observó que existe una mayor concentración de esferas pequeñas en el fondo del recipiente pero no de discos.

De las variables granulométricas, la relación entre el tamaño máximo y el tamaño mínimo de las partículas es la más influyente sobre la segregación. Se observó que el tipo de granulometría y los coeficientes de distribución granulométrica marcan cambios de menor importancia.

Las granulometrías de discos y esferas uniformes permitieron evidenciar que se produce una estructuración espontánea, en particular cerca del fondo del recipiente.

En mezclas de dos componentes, la proporción en área o volumen de cada clase de partículas tiene una fuerte influencia en la segregación inherente. La mayor segregación se observa cuando las partículas pequeñas representan entre el 30 y 50% del total de los sólidos.

Conservando constante la relación entre los diámetros máximo y mínimo, las granulometrías de tipo bimodal se segregan con mayor facilidad que las continuas.

También se apreció que la segregación inherente en granulometrías continuas afecta a las fracciones granulométricas de partículas pequeñas, $D < d_{10}$. En contraste, las partículas grandes ($D > d_{90}$) no tienden a agruparse aún cuando aumente la diferencia entre los tamaños extremos.

En el capítulo 4 se han señalado las siguientes implicaciones prácticas que la segregación puede tener en los problemas de la geotecnia:

- A la escala de los grupos de partículas, como las que se vieron en las simulaciones realizadas, los medios granulares son naturalmente heterogéneos y anisótropos, debido a la estructuración espontánea y a la segregación inherente.
- En muestras constituidas por un número limitado de partículas (efecto de escala), debe esperarse que la heterogeneidad y anisotropía mencionadas se reflejen en el comportamiento mecánico, por ejemplo: transmisión de esfuerzos en direcciones preferenciales y zonas con distinta deformabilidad.
- A la escala de las estructuras granulares simuladas la segregación propicia la aparición de zonas con distinta permeabilidad.
- Se debe tomar en cuenta que las granulometrías discontinuas son más segregables que las continuas.
- Los suelos que abarcan un amplio intervalo de diámetros de partícula (valores altos de $D_{máx}/D_{mín}$) son los más segregables. Esto coincide con las recomendaciones prácticas dadas por algunos autores para reducir la segregación (Sherard et al., 1984 (b) véase inciso 2.3.1).
- Se debe considerar que el mecanismo de segregación geométrico puede ser favorable en la explotación de bancos de préstamo de materiales granulares. La separación de partículas de cierto tamaño reduciría los costos de producción.

Para ampliar el alcance de la presente investigación en el futuro se requiere:

- Realizar modificaciones al modelo de simulación para representar la percolación de partículas pequeñas.
- Aumentar el número de partículas para representar estructuras de granulometrías con mayor amplitud en los tamaños de sus partículas. Para ello será necesario recurrir a los sistemas de cómputo con procesadores en paralelo. Se han dado los primeros pasos para el desarrollo de los algoritmos correspondientes.
- Estudiar la segregación inducida por sollicitaciones mecánicas, vibraciones, etcétera. Para ello se tendrá que recurrir a técnicas similares al Método de Elementos Discretos (Cundall, 1971), que permite simular las interacciones mecánicas entre partículas.

BIBLIOGRAFÍA

- Auvinet Gabriel. 1972. Generation of granular media by computer. Fifth Pan – American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Buenos Aires. Argentina.
- Auvinet Gabriel. 1986. Estructura de los medios granulares. DEPMI, Universidad Nacional Autónoma de México. Tesis Doctoral. México.
- Auvinet Gabriel. 2002. Incertidumbre en Geotecnia. Décimo Sexta Conferencia Nabor Carrillo. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos A C. México.
- Bantang J, Lim M, Monterola C, Saloma C. 2002. Gravity – assisted segregation of granular materials of equal mass and size. Physical review. National Institute of Physics. University of the Philippines. Quezon City. Philippines.
- Bizon C, Shattuc M D, Swift J B, McCormick W, Swinney H. 1998. Patterns in 3D vertically oscillated granular layers: Simulation and experiment. Physical review letters, Vol 80, N° 1.
- Boutreux T, H. A. Makse, P. G. de Gennes. 1999. Surface flows of granular mixtures. The European Physical Journal B. Vol 9. 110 – 115.
- Carson J, Royal T, Goodwill D. 1986. Understanding and eliminating particle segregation problems. Bulk solids handling, Vol 6, 139 – 134.
- Don Brock J, James G, Renegar G. (1994). Segregación causas y soluciones. Boletín técnico T – 117S, ASTEC Industries, Inc. USA.
- James A, Scherocman P. E. 2006. Segregación. Causas y soluciones. Revista Asphalt Spring.
- Jensen Richard, Bosscher P, Plesha M, Edil T. 1999. Dem simulation of granular media – structure interface: effects of surface roughness and particle shape. International Journal for numerical and analytical methods y geomechanics. Vol 23. USA.
- Jiayuan Zhang, Zigu Hu, Wei Ge, Yongjie Zhang, Tinghua Li, Jinghai Li. 2004. Application of the discrete approach to the simulation of size segregation in granular chute flow. Chinese Academy of Sciences. American Chemical Society, 43, 5521 – 5528.
- Khakhar D, McCarthy J, Ottino J. 1999. Mixing and segregation of granular materials in chute flows. American Institute Physics. USA.
- Koeppel J, Enz M, Kakalios J. 1998. Phase diagram for avalanche stratification of granular media. Physical review. American Physical Society.
- Lambe T. W, Whitman R. 2006. Mecánica de Suelos. Edición en español, LIMUSA Noriega Editores. Distrito Federal, México.

- Marsal R. 1977. Research on Granular Materials (Rocks and Soil – Gravel Mixtures). Instituto de Ingeniería, UNAM. E – 25. México.
- Mitarai Namiko, Nori Franco. 2006. Wet Granular Materials. Advances in Physics. Vol. 55. N° 1 – 2, 1 – 45. Taylor y Francis group, United Kingdom.
- Navakas Robertas. 2006. Simulation of motion of granular media in complex mechanical systems. Lithuanian Energy Institute. Kaunas, Lithuania.
- Ottino J. M., Khakhar D. V. 2000. Mixing and segregation of granular materials. Annual review of fluid mechanics. Vol 32, 55 – 91.
- Rapaport D. 2001. Mechanism for granular segregation. Physical Review. Physics Department, Bar – Ilan University, Ramat Gan, Israel.
- Rousseaux G, Caps H, Wesfreid J-E. 2004. Granular size segregation in underwater sand ripples. European Physical Journal, E 13, 213 – 219.
- Roy Tanguy, Auvinet Gabriel. 2004. Geoestadística y geomecánica. Reporte de estancia académica en el Instituto de Ingeniería, UNAM. México.
- Savage S. B, Lun C. K. K. 1988. Particle-size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids. Journal of Fluid Mechanics, 189, 311 – 335.
- Schröter Mattias, Ulrich Stephan, Kreft Jennifer, Swift Jack, Swinney Harry. 2006. Mechanisms in the size segregation of a binary granular mixture. Center for Nonlinear Dynamics and Department of Physics, University of Texas at Austin. Physical review E74, 011307, 2006.
- Sherard James, Dinnungan Lorn, Talbot James. 1984 (a). Basic Properties of Sand and Gravel Filters. Journal of the Geotechnical Engineering Division, American Society of Civil Engineers. Vol. 110, N° GT6. New York, USA.
- Sherard James, Dinnungan Lorn, Talbot James. 1984 (b). Filters for Silts and Clays. Journal of the Geotechnical Engineering Division, American Society of Civil Engineers. Vol. 110, N° GT6. New York, USA.
- Tarzia M, Fierro A, Nicodemi M, Pica Ciamarra M, Coniglio A. 2005. Size segregation in granular media induced by phase transition. Physical review letters. Napoli, Italy.
- United States Department of Agriculture. 1994. National Engineering Handbook, Chap. 26, Gradation Design of Sand and Gravel Filters. Natural Resources Conservation Resources. USA.
- Zuriguel Iker. 2003. Movimiento de convección en un medio granular agitado verticalmente. Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra. España.

A ANEXOS

A.1 TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Muchas características estructurales de los medios granulares se han descrito tradicionalmente mediante distribuciones granulométricas, forma de los granos y porosidad (relación de vacíos y compacidad relativa). La aplicación de los conceptos probabilistas es de gran utilidad en estos estudios. Por este motivo se presenta una introducción a la teoría de la probabilidad.

A.1.1 Definiciones

La teoría de la probabilidad considera el problema de un experimento con diversos resultados (ε) posibles, a los que agrupados o no, se les llama eventos A estos eventos se asocia un número llamado probabilidad en el intervalo $[0,1]$. La probabilidad asigna un valor numérico $P[A]$ a cada evento A del espacio muestral o universo S .

La definición conceptual de la probabilidad puede realizarse desde distintos puntos de vista. En este trabajo se aplica la probabilidad con origen en la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento, al repetir un experimento un gran número de veces.

Una variable aleatoria es una función, generalmente de valor real, cuyo dominio es el espacio muestral o conjunto de los resultados posibles del experimento. Si la variable aleatoria toma un número finito de valores numerables se le llama discreta. En caso contrario, al existir un número infinito de valores no numerables, se dice que la variable es continua.

Al realizar el experimento definido en la manera usual de la teoría de la probabilidad, es posible asociar a cada resultado (ε) una función de cierto parámetro t , $X(t,\varepsilon)$. En esta forma se define un proceso estocástico, donde t en la mayoría de los casos es el tiempo, sin embargo también puede tratarse de una o múltiples dimensiones espaciales. A estos últimos casos se le conoce como campos aleatorios.

A.1.2 Distribuciones y densidades de probabilidad

Se llama función de probabilidad (o distribución de probabilidad) $p_V(v)$ de la variable V , a aquella que asigna probabilidades a cada uno de los valores de una variable aleatoria discreta. La suma en todos los valores posibles de v es la unidad. La función de distribución $F_V(v)$ es la función que acumula las probabilidades asociadas a la variable aleatoria.

En variables continuas se define la función de densidad de probabilidad $f_V(v)$, como la concentración de probabilidad alrededor de los valores de una variable aleatoria. Para un valor en específico, la probabilidad asociada es nula, ya que existe un número infinito de valores posibles para V . La función de distribución $F_V(v)$ es la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual a determinado valor v , por lo que se establece como la integral de la densidad de probabilidad.

Es conveniente aclarar que se denota con letras mayúsculas a las variables y con la misma letra pero minúscula, a los valores que pueden tomar. Por ejemplo, la variable aleatoria V y sus posibles valores v .

Las principales medidas descriptivas que permiten caracterizar las distribuciones de probabilidad son la esperanza (medida de tendencia central) y varianza (medida de dispersión). Estos parámetros se definen en la tabla A.1 tanto para variables discretas como continuas.

Tabla A.1. Distribuciones de probabilidad y medidas descriptivas

Tipo de variable	Distribución de probabilidad o densidad de probabilidad	Función de distribución	Esperanza $E\{V\}$ o μ_v	Varianza $Var[V]$ o σ_v^2
Discreta	$p_v(v) = P[V = v] \quad \&$ $\sum_v P[V = v] = 1$ <p style="text-align: center;">(A.1)</p>	$F_v(v) = P[V \leq v]$ $= \sum_{u=-\infty}^v p_v(u)$ <p style="text-align: center;">(A.2)</p>	$E\{V\} = \sum_v v p_v(v)$ <p style="text-align: center;">(A.3)</p>	$Var[V] = E\{(V - \mu_v)^2\}$ <p style="text-align: center;">(A.4)</p>
Continua	$f_v(v) = P[a \leq V \leq b]$ $= \int_a^b f_v(v) dv$ <p style="text-align: center;">(A.5)</p>	$F_v(v) = P[V \leq v]$ $= \int_{-\infty}^v f_v(v) dv$ <p style="text-align: center;">(A.6)</p>	$E\{V\} = \int_{-\infty}^{\infty} v f_v(v) dv$ <p style="text-align: center;">(A.7)</p>	$Var[V] = E\{(V - \mu_v)^2\}$ <p style="text-align: center;">(A.8)</p>

Otras medidas de dispersión son: la desviación estándar (σ_v), que es la raíz cuadrada de la varianza, y el coeficiente de variación (CV), que se obtiene al dividir la desviación estándar por la esperanza.

A.1.3 Campos aleatorios

Cuando en cada punto X del dominio estudiado, una variable $V(X)$ se considera aleatoria, el conjunto de estas variables aleatorias constituyen un campo aleatorio. Este campo puede describirse por medio de los parámetros y funciones siguientes: valor esperado, varianza, desviación estándar, coeficiente de variación, función de autocorrelación, función de autocovarianza y coeficiente de autocorrelación.

La función de autocorrelación $R_v(X_1, X_2)$ definida en el espacio $R^p \times R^p$ ($p=1, 2$ ó 3), es útil para estimar la dependencia lineal entre los valores de una propiedad en diferentes puntos del medio. Es un momento de segundo orden expresado en la ecuación (A.9). Al centrar esta función respecto a la media se define la función de autocovarianza (ecuación A.10), y a su estandarización se le conoce como coeficiente de autocorrelación (ecuación A.11).

$$R_v(X_1, X_2) = E\{V(X_1)V(X_2)\} \tag{A.9}$$

$$Cov[V(X_1), V(X_2)] = E\{[V(X_1) - \mu_v(X_1)][V(X_2) - \mu_v(X_2)]\} \tag{A.10}$$

$$\rho_v = \frac{Cov[V(X_1), V(X_2)]}{\sigma_v(X_1)\sigma_v(X_2)} \tag{A.11}$$

Es importante recalcar que las tres funciones anteriores no son propiedades intrínsecas de los puntos X_1, X_2 sino que dependen de la población. Además, existe una distancia conocida como distancia de correlación a la cual ρ_v tiende a anularse, lo que indica pérdida de correlación. Se debe tomar en cuenta que la correlación lineal en muchos casos es burda, aunque no deja de ser una herramienta de análisis cuando no se conoce el tipo de correlación que existe.

Se dice que un campo aleatorio es estadísticamente homogéneo en caso de que la esperanza, varianza y demás parámetros sean constantes. Si estos parámetros no son constantes, el campo presenta una tendencia o deriva.

Cuando los parámetros pueden determinarse a partir de una sola función muestra o realización el campo aleatorio es ergódico.

En ocasiones, es aceptable la hipótesis que la esperanza de la variable de interés es constante en todo el dominio y que la autocovarianza espacial solo depende de la distancia entre los puntos X_1 y X_2 . En esta situación se tiene un campo estacionario en el sentido amplio donde se cumple:

$$Cov[V(X_1), V(X_2)] = Cov[X_2 - X_1] = Cov[h] \quad (A.12)$$

Donde h es la distancia escalar entre los puntos X_1 y X_2 , aunque a veces es necesario considerar que la relación es válida a lo largo de una dirección. Por lo tanto es necesario incluir un vector unitario en la dirección considerada.

Los parámetros descriptivos de un campo aleatorio pueden estimarse a partir de los resultados de un muestro (discreto o continuo), mediante la aplicación de estimadores estadísticos. Para esto, es necesario aceptar que el campo es estadísticamente homogéneo.

Por ejemplo, al realizarse una estimación en una longitud L a lo largo de la dirección del vector unitario \mathbf{u} , se obtiene el siguiente valor esperado y autocovarianza.

$$\mu_v \cong \mu^\bullet = \frac{1}{L} \int_0^L V(x) dx \quad (A.13)$$

$$C_v(hu) \cong \frac{1}{L} \int_0^L V(x)V(x+hu) dx - \mu^{\bullet 2} \quad (A.14)$$

En estas estimaciones se debe tomar en cuenta que la realización debe considerar una muestra suficientemente grande para que sea representativa del medio y no se caiga en el fenómeno de incremento de varianza o efecto de escala.

A. 2 EJEMPLOS DE SIMULACIONES REALIZADAS

Para respaldar los resultados mostrados en el Capítulo 4 se presentan ejemplos gráficos de algunas simulaciones bidimensionales con diferentes granulometrías. Ilustrar las estructuras granulares tridimensionales ofrece menos beneficios, por lo que se incluyeron menos ejemplos.

En cada estructura se hace mención de las propiedades y parámetros de interés para el presente estudio.

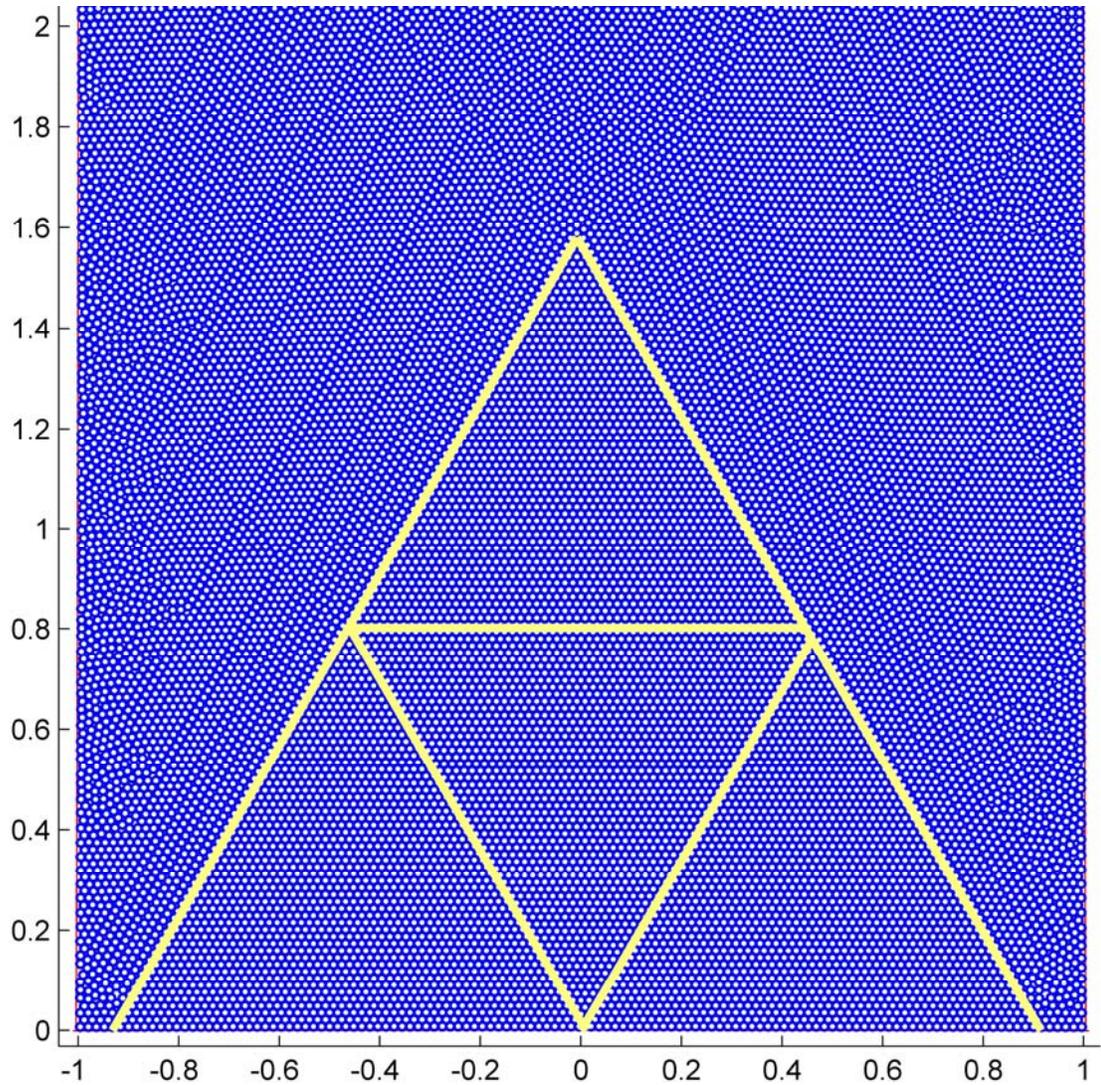


Figura A.1. Estructura granular de discos uniformes

Las estructuras de discos uniformes se caracterizaron por la presencia de arreglos regulares de tipo triangular que se desarrollan a partir del fondo del recipiente. La porosidad media en estos arreglos es del 10% y del 16% en la parte superior de la estructura. El coeficiente de variación del número de discos intersecados por sondeos rectos horizontales es de 13%, la misma variable medida en sondeos verticales es 2%. La separación mínima entre centros de partículas vecinas de igual tamaño es igual al diámetro de las partículas.

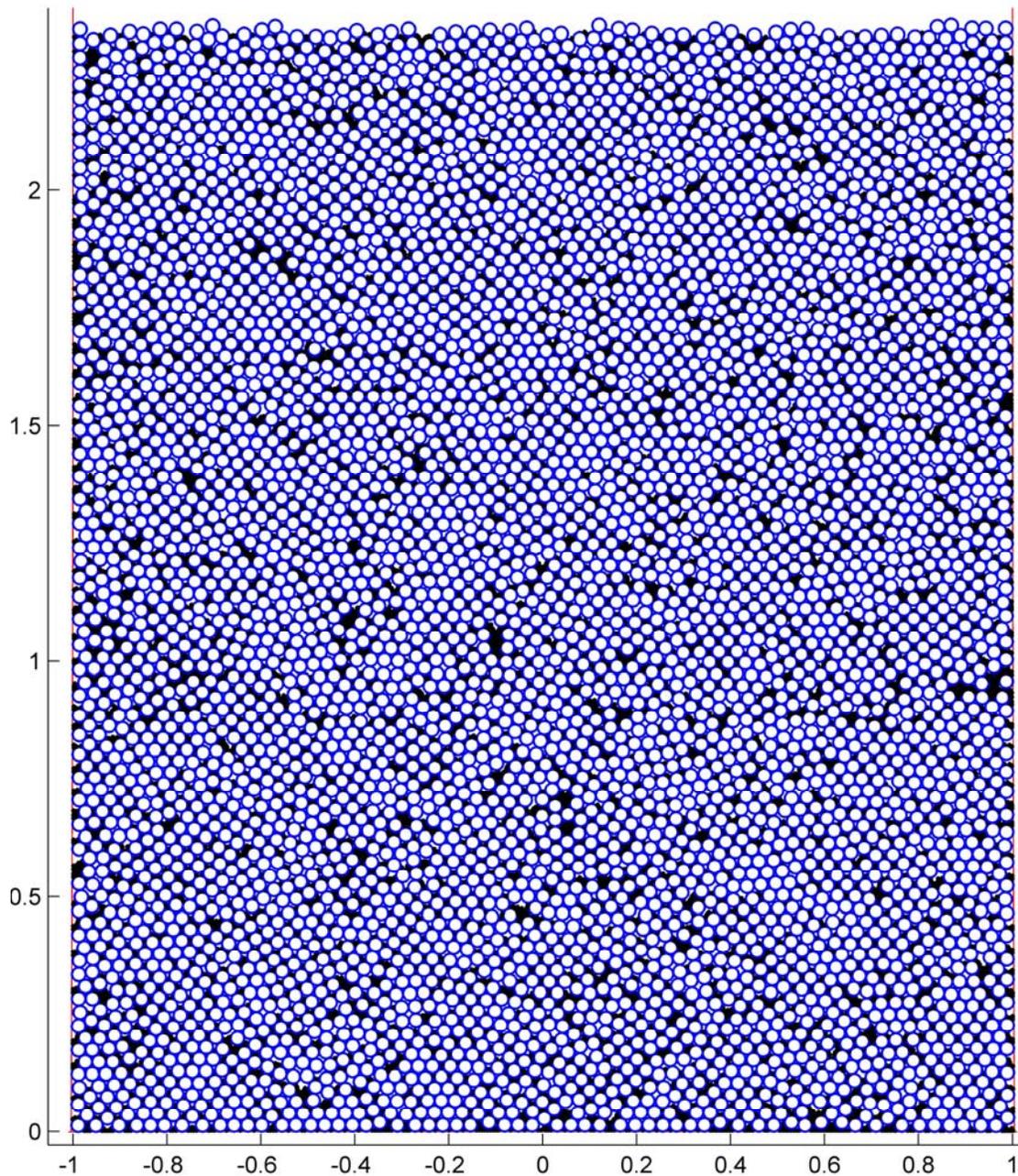


Figura A.2. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.1$ y $\alpha=5$

El número de partículas pequeñas representa el 74% del total y constituyen el 10% del área total de sólidos (figura A.2). Se observa que las partículas pequeñas se intercalan con las partículas grandes y con frecuencia forman pequeños agregados. Las partículas grandes forman una matriz continua.

La porosidad media es del 14%, el coeficiente de variación del número de discos intersecados por rectas verticales es 5.1% y la separación mínima promedio entre centros de partículas iguales de 1.11 veces el diámetro de las partículas.

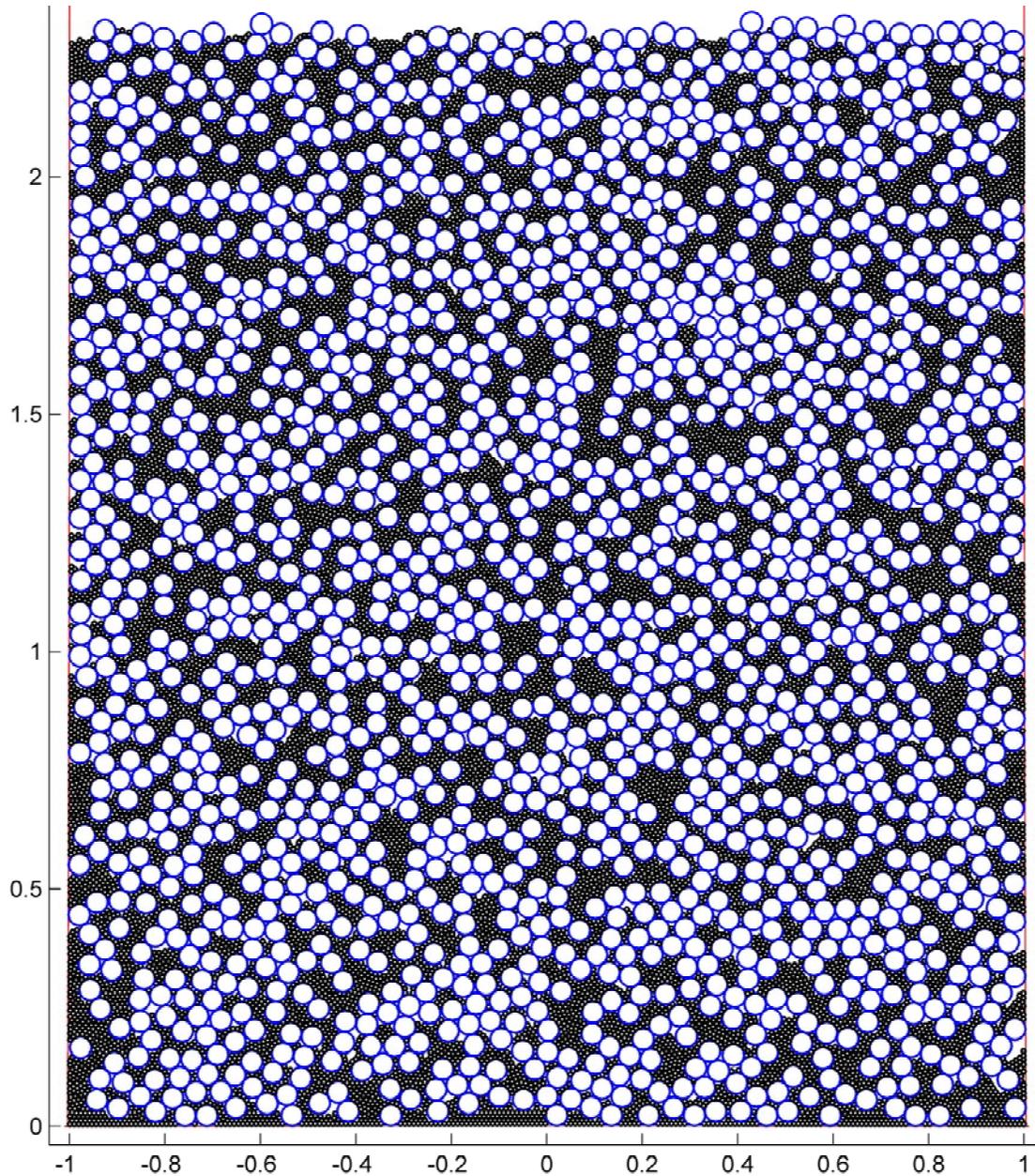


Figura A.3. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.3$ y $\alpha=5$

En la estructura de la figura A.3 el número de partículas de diámetro menor representan el 91.5% del total. La porosidad del medio es 14.8%. Las variables de segregación son: 7.9% en el coeficientes de variación del número de discos intersecados por sondeos verticales y la distancia mínima promedio entre centros de partículas de igual tamaño es 1.010 veces el diámetro de partícula.

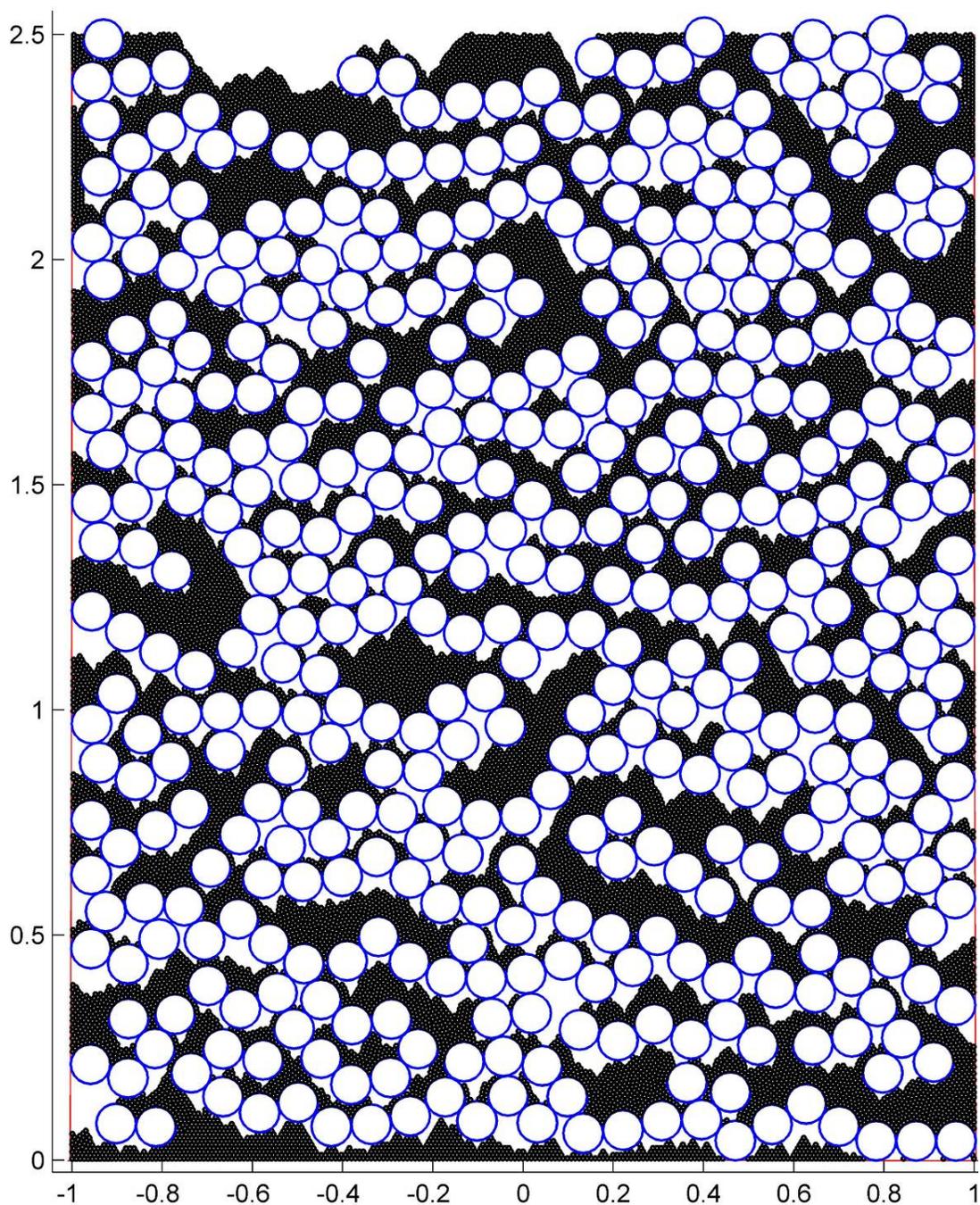


Figura A.4. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.3$ y $\alpha=10$

El 30% del área de los sólidos lo constituye un número de discos pequeños igual al 97.7% del total. Cada tipo de partículas forman grupos de tamaño importante y se refleja en las variables de segregación: coeficiente de variación del número de discos intersecados por sondeos verticales del 14.9% y la separación mínima promedio entre centros de partículas de igual tamaño es de 1.004 veces el diámetro. La porosidad media es de 15.4%.

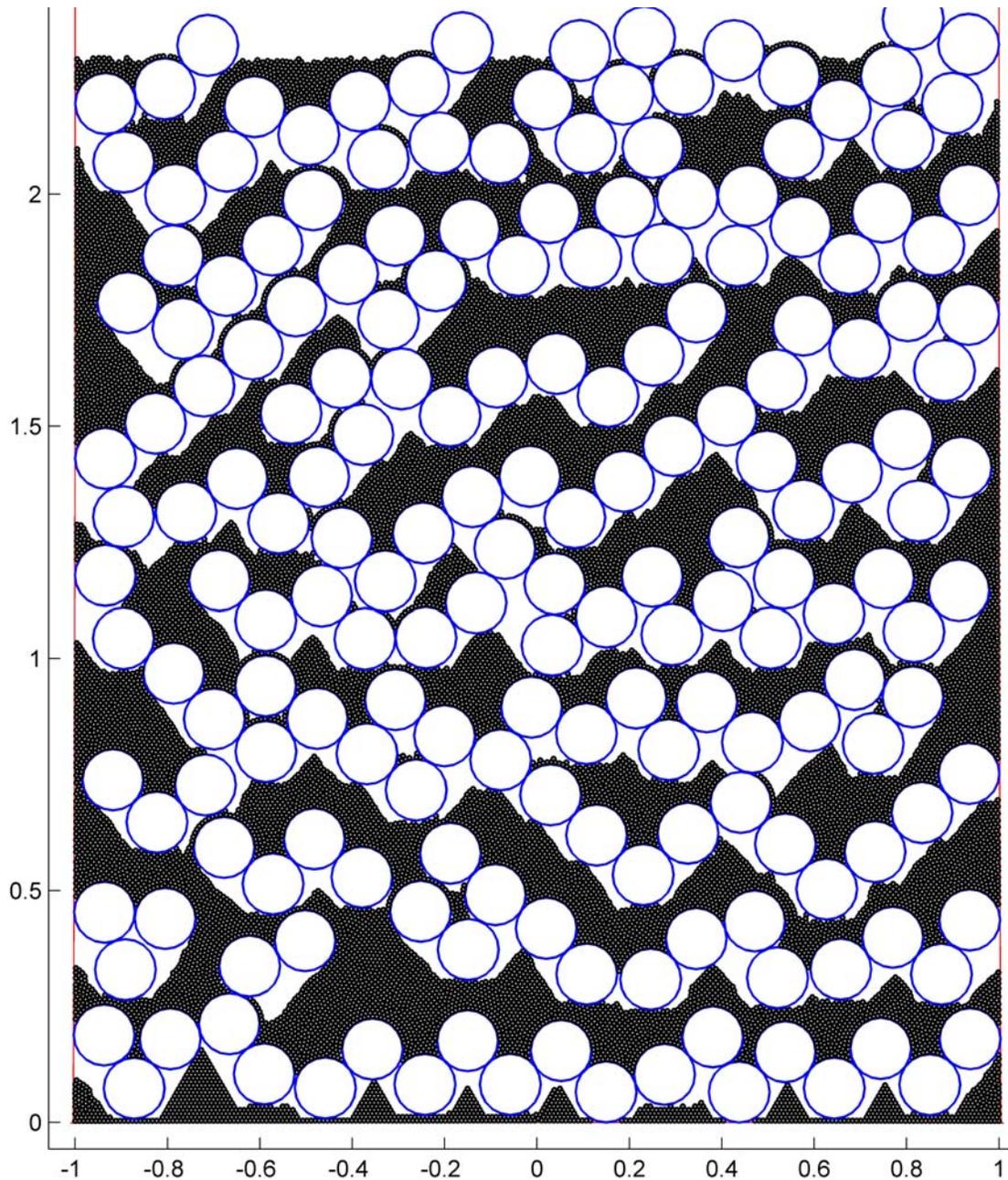


Figura A.5. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.3$ y $\alpha=15$

Los discos grandes representan el 1% del total en número. La porosidad media es de 17.8% observándose la presencia de grandes espacios vacíos. Las partículas de igual tamaño forman grandes grupos alargados en el medio, por lo que el coeficiente de variación del número de discos intersecados por sondeos rectos verticales es de 20.4% y la distancia mínima promedio del centro de una partícula al de la más cercana de igual tamaño es 1.001 veces el diámetro.

Esta fue la granulometría con mayor segregación inherente en el estudio bidimensional. Además, las partículas pequeñas en contacto con el fondo se disponen en arreglos triangulares.

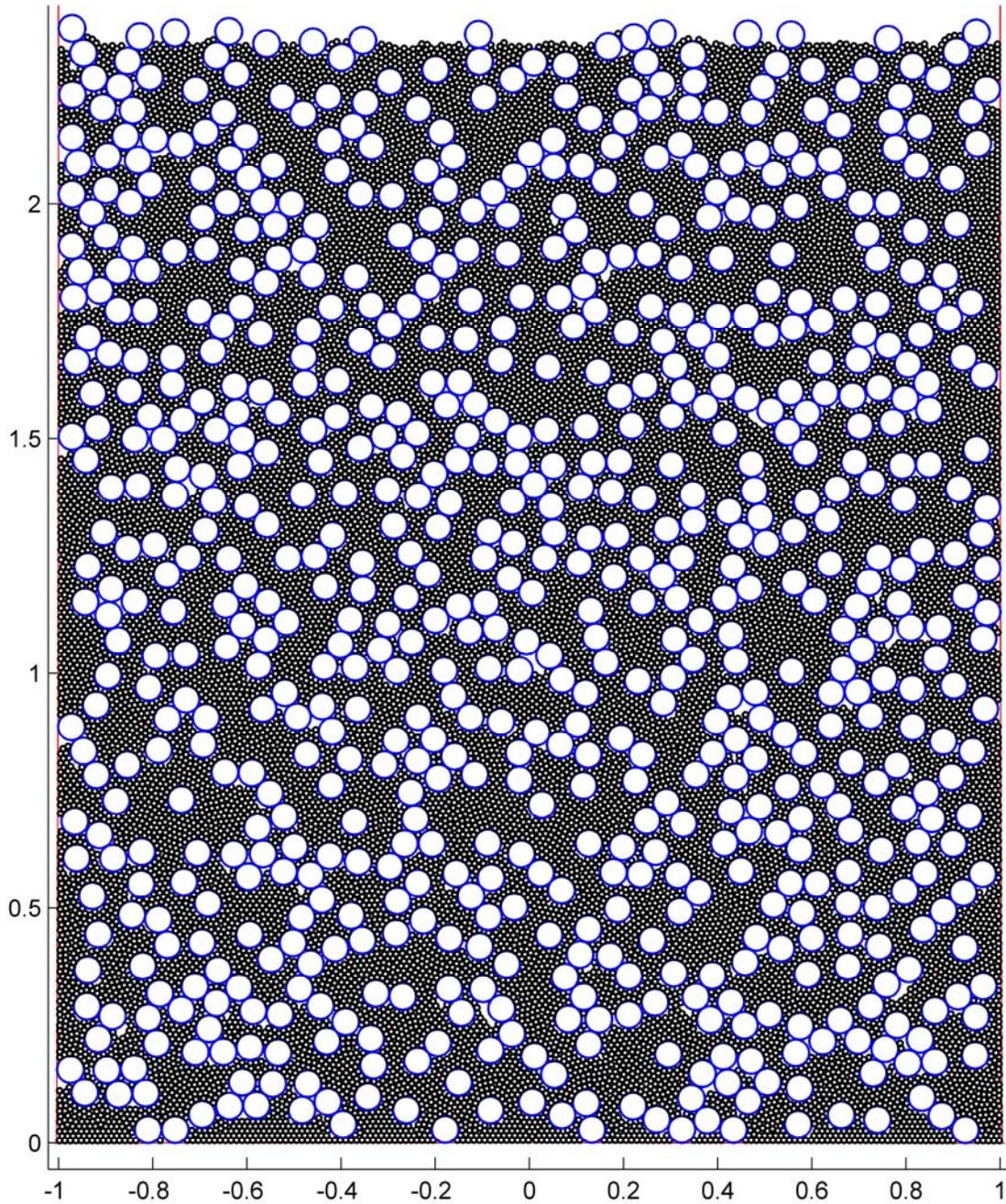


Figura A.6. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.5$ y $\alpha=5$

La figura A.6 es una estructura con porosidad de 15 %. Las partículas pequeñas forman una matriz continua y se observan grupos constituidos por un número reducido de partículas grandes. El coeficiente de variación del número de discos intersecados por sondeos rectos verticales es de 8.8%. La distancia mínima media es de 1.03 veces el diámetro de partícula.

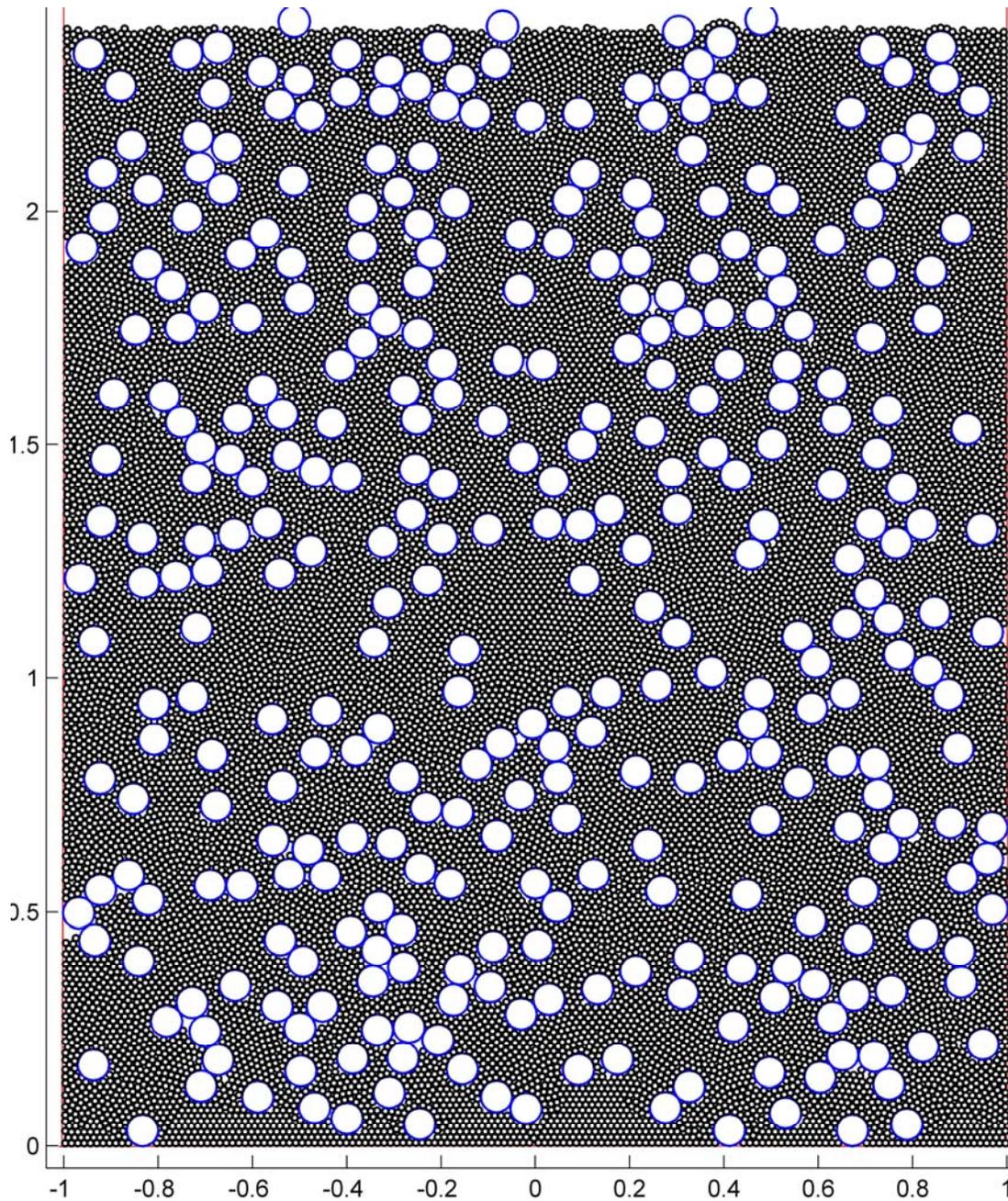


Figura A.7. Estructura bimodal bidimensional con $p_{2A}=0.7$ y $\alpha=5$

La porosidad estimada de la estructura es de 16.6%. En general, las partículas grandes se encuentran aisladas. En sondeos verticales, el coeficiente de variación del número de partículas intersecadas es 7.8%. La media de la distancia mínima entre partículas pequeñas es $1.0001D_{\min}$ y $1.214D_{\max}$ en las grandes, el promedio que caracteriza la segregación de la estructura es 1.107 veces el diámetro. Se observa estructuración espontánea de las partículas pequeñas en la parte inferior de la estructura.

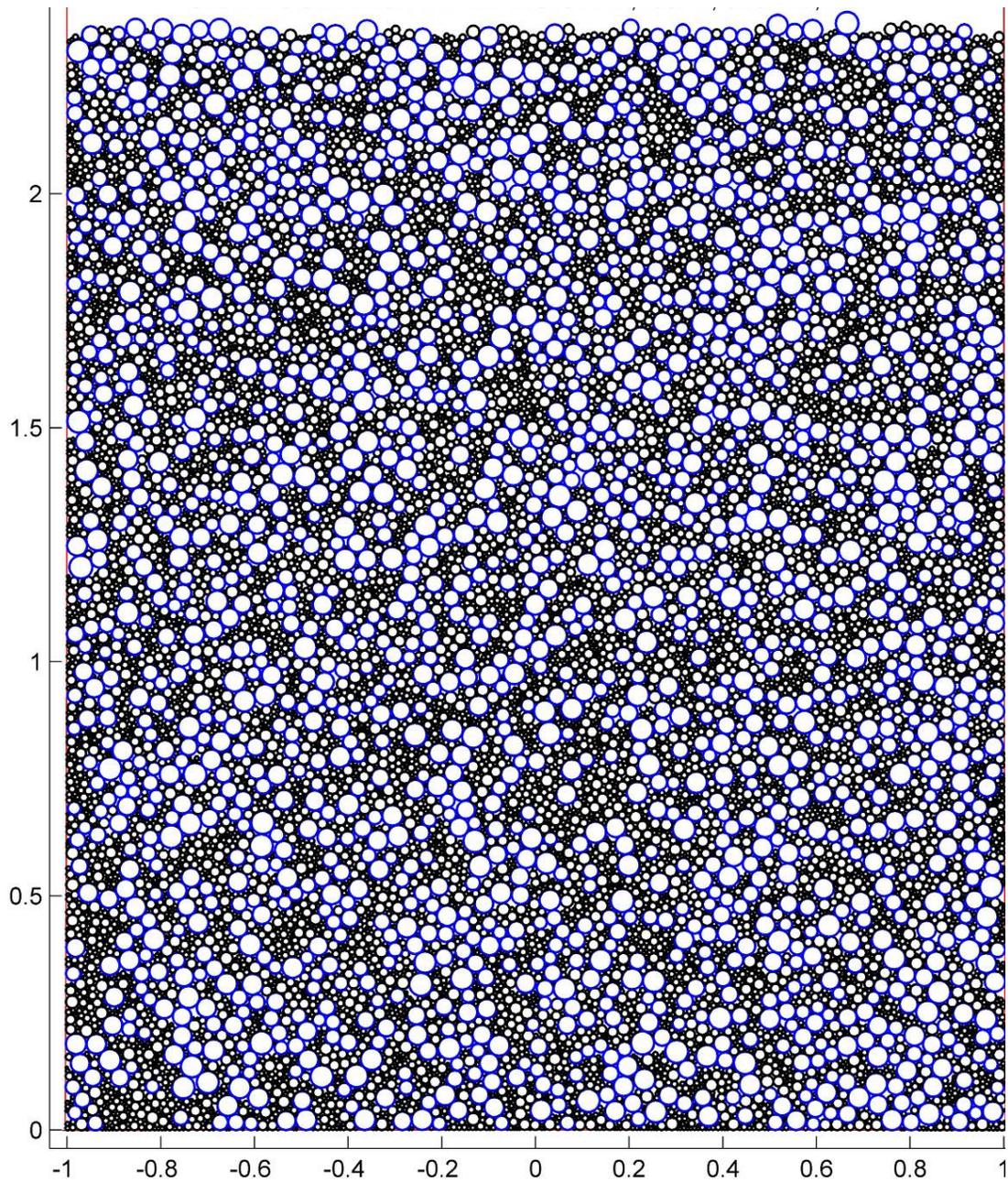


Figura A.8. Estructura bidimensional, granulometría continua con $\lambda=1$ y $\alpha=10$

Los parámetros de interés son: porosidad 14.3%, coeficiente de variación del número de discos intersecados por rectas verticales 6.5% y discos pequeños mucho más agrupados (ceranos entre sí) que los grandes. Es notable que el tamaño de los poros es menor que en las granulometrías bimodales.

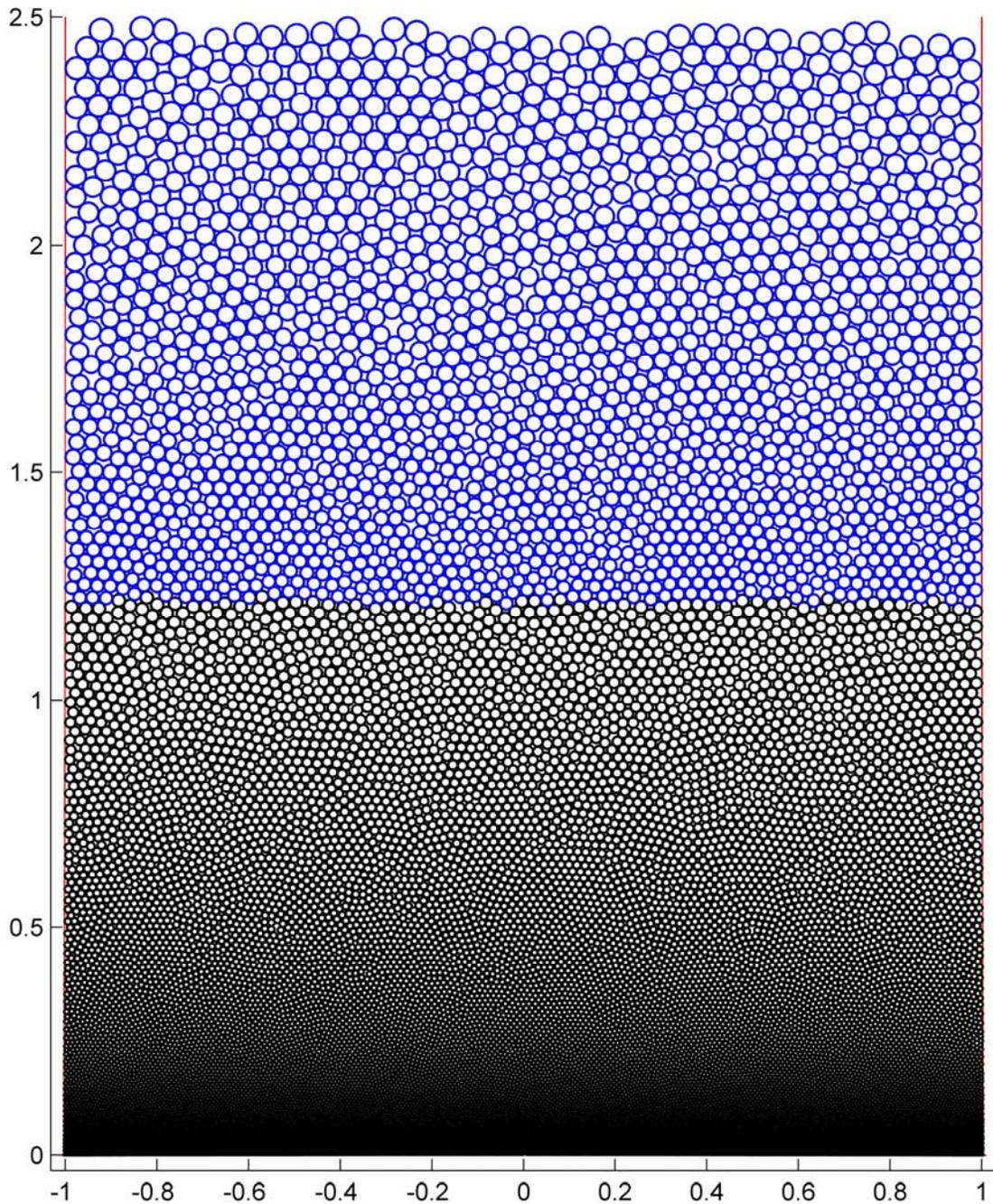


Figura A.9. Estructura 2 D de granulometría continua ($\lambda=1$, $\alpha=10$) con segregación forzada

La estructura colocada en orden ascendente de tamaños tiene una porosidad media de 18%, el coeficiente de variación del número de discos intersecados por sondeos verticales no detecta la segregación, su valor es de 2.7%. Considerando los sondeos horizontales que cruzan preferentemente por el centro de las partículas se obtuvo un coeficiente de variación de *NDI* de 66%. La separación mínima entre los centros de discos de la misma fracción granulométrica varía de 0.92 a 1.0 veces el diámetro esperado de la fracción. Esta es la condición de segregación geométrica máxima.

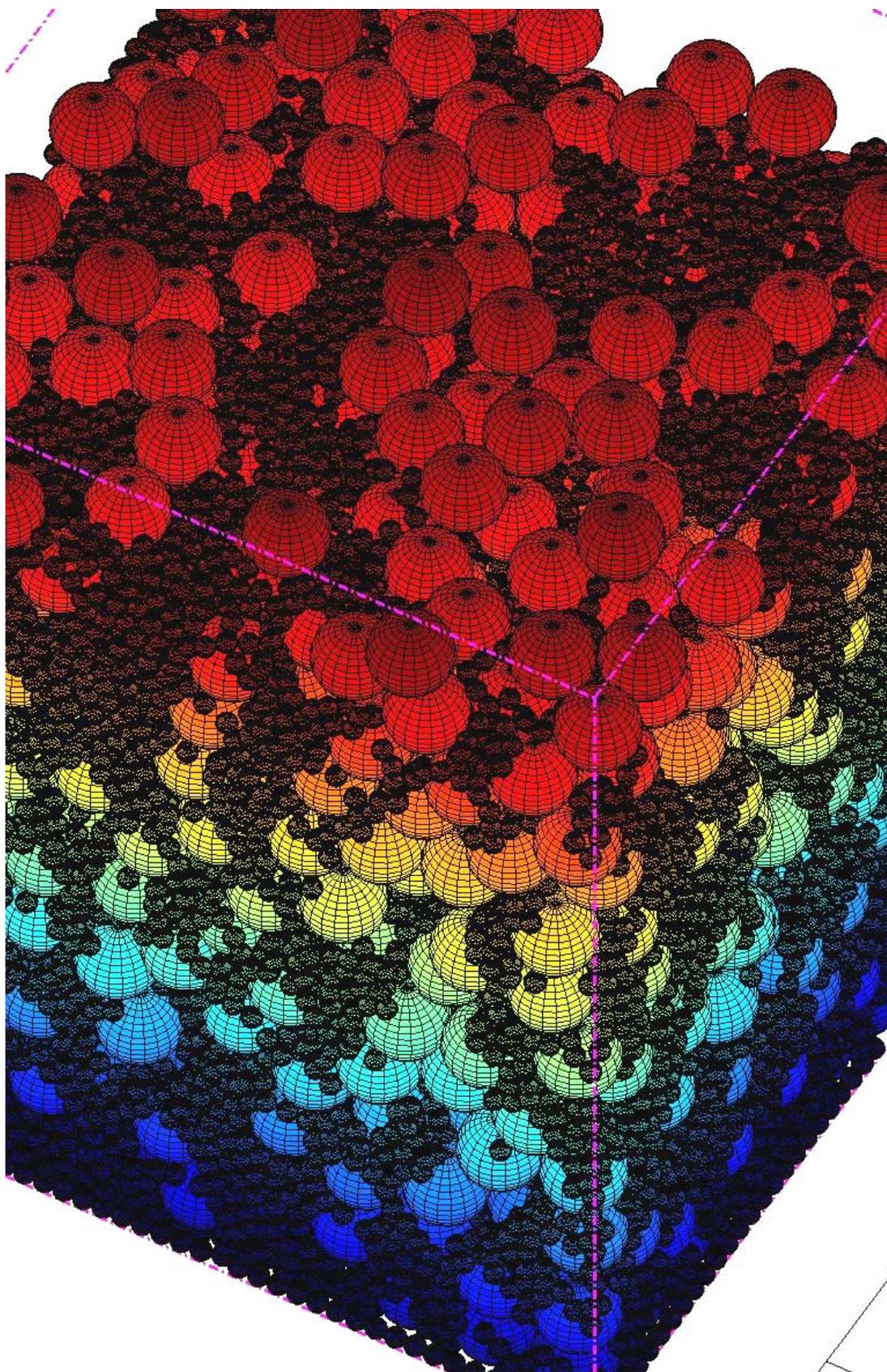


Figura A.10. Estructura bimodal tridimensional con $p_{3V}=0.3$ y $\alpha=4$

En la estructura de la figura A.10 las esferas de diámetro mínimo representan el 30% del volumen total de sólidos y el 96.5% en número. La porosidad tridimensional es 31.8%, el coeficiente de variación del número de esferas intersecadas por cortes planos verticales es 11.5% y $1.001D$ en la distancia mínima media entre centros de partículas iguales.



Figura A.11. Estructura tridimensional de granulometría continua, vista en planta

El último ejemplo visual de las estructuras simuladas lo constituyen las figuras A.11 y A.12, de granulometría continua con: coeficiente de distribución granulométrica unitario y diámetro máximo 10 veces mayor al mínimo.

La porosidad media es de 32% y los indicadores de segregación son los siguientes: coeficientes de variación del número de esferas intersecadas por cortes planos verticales de 5%. La distancia mínima media (normalizada con el diámetro esperado de la fracción granulométrica) entre centros de esferas de la misma fracción granulométrica es menor entre las partículas pequeñas. En cambio, las partículas grandes tienden a estar separadas entre sí y a ubicarse espacialmente al azar.

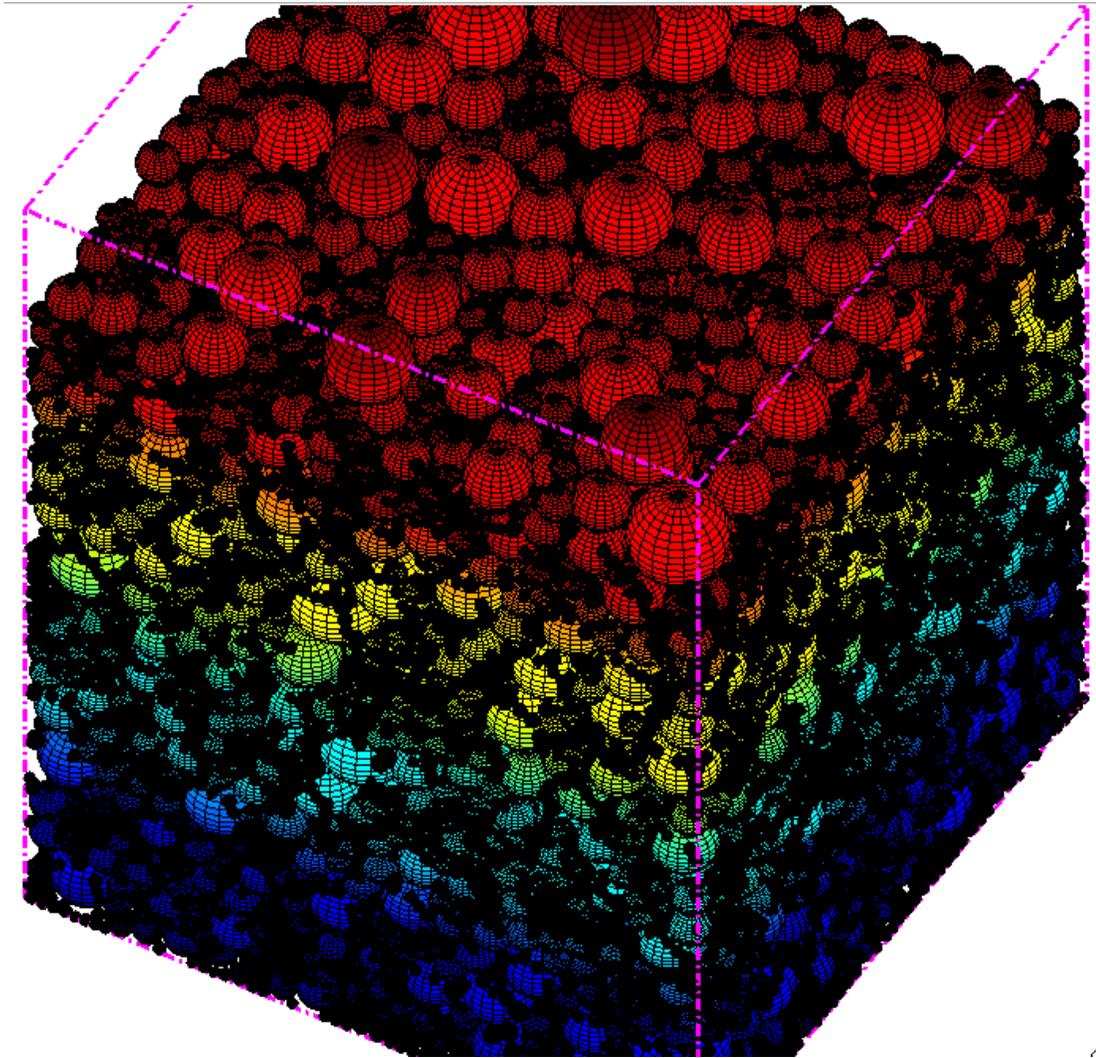


Figura A.12. Estructura tridimensional de granulometría continua, vista en perspectiva

A. 3 PROGRAMAS PARA COMPUTADORA

Para el correcto funcionamiento de los modelos de estudio es necesario contar con todos los programas de cómputo que se enlistan a continuación. Se les llama funciones a los programas de cómputo que realizan alguna subrutina para complementar los programas principales.

A.3.1 Modelo Bidimensional

El programa DISCOS se encarga de realizar la simulación de la estructura granular como se describió en el inciso 3.1.1.

El programa SEGREGA evalúa los parámetros que permiten estudiar las estructuras simuladas.

Programa	Funciones	
DISCOS	DIBUJO	Trazo del recipiente de simulación
	TRAPECIAL	Selección del tamaño de partícula a partir de una densidad de probabilidad granulométrica lineal en área
	DOSRADIOS	Obtención el tamaño de partícula de una granulometría bimodal en frecuencias de número
	EJEC	Determinación del eje de caída de las partículas y primer apoyo
	EJESC	Elección del eje de caída y primer apoyo de posición más baja entre varias alternativas
	PARTICULA	Graficación de las partículas que conforman una estructura
SEGREGA	MATCENT	Selección de partículas de la región central de la simulación
	GRANUMERO	Cálculo de la granulometría en frecuencias de número
	GRANAREA	Cálculo de la granulometría en frecuencias de área
	MATFONDO	Selección de partículas ubicadas en el fondo del recipiente
	PORO	Estimación de la porosidad por el método de Monte Carlo
	HOMOGENEIDAD	Conteo del número de partículas intersecadas por sondeos rectos en dos direcciones perpendiculares
	COEFICIENTES	Cálculo los coeficientes granulométricos
	POROBIN	Estimación de la variación de la porosidad en trayectorias rectas cercanas a las paredes del recipiente.
CORRELNDI	Cálculo la función de correlación cruzada de <i>NDI</i> de diferentes simulaciones.	
	DCERCANA	Medición de distancias mínimas entre centros de partículas vecinas de la misma clase granulométrica
RECOL		Colocación de partículas de una granulometría empezando por los discos de menor tamaño y así sucesivamente hasta los más grandes

A.3.2 Modelo Tridimensional

ESFERAS es el programa de cómputo que construye las estructuras granulares y SEGREGATD evalúa los parámetros que permiten describir estas estructuras.

Programa	Funciones	
ESFERAS	CAJA	Trazo aproximado del recipiente de simulación
	TRAPECIALTD	Elección del tamaño de partícula de una densidad de probabilidad granulométrica lineal en volumen
	DOSRADIOS*	Ver modelo bidimensional
	GRANO	Graficación de las partículas esféricas
SEGREGATD	MATCENTTD	Selección de las partículas de la región central de la simulación
	GRANUMEROTD	Obtención de la granulometría en frecuencias de número
	GRANAREATD	Obtención de la granulometría en términos de superficie de partículas
	GRANVOLTD	Obtención de la granulometría del material en volumen
	MATFONDOTD	Matriz de partículas del fondo del recipiente
	POROTD	Estimación de la porosidad con el método de Monte Carlo
	HOMOGENEIDADTD	Conteo del número de esferas intersecadas por cortes planos en dos direcciones distintas
	COEFICIENTESTD	Cálculo de los coeficientes granulométricos
	POROBINTD	Estimación de la porosidad en planos cercanos a las paredes del recipiente
CORRELNEI	Cálculo de la función de correlación cruzada de <i>NEI</i> entre distintas simulaciones	
DCERCANATD	Medición de distancias mínimas entre centros de partículas vecinas de la misma clase granulométrica	
RECOLTD		Colocación de partículas de una granulometría dada, de menor a mayor tamaño

*El modelo tridimensional hace uso de la función DOSRADIOS.m del modelo bidimensional.