



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN INGENIERÍA

Diseño de Observadores Disipativos  
Interconectados para Sistemas No  
Lineales

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
VIRGILIO RICARDO LÁZARO ZERMEÑO

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JAIME A. MORENO PÉREZ

México D.F., 2009



*A Efrén Lázaro, María de Jesús Zermeño  
y Ricardo Lázaro Cruz*



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.2. Estado del Arte . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	7
1.4. Formulación del Problema . . . . .	8
1.5. Organización de la Tesis . . . . .	11
<b>2. Preliminares</b>	<b>13</b>
2.1. Conceptos Básicos de Disipatividad . . . . .	14
2.2. Diseño de Observadores Disipativos . . . . .	16
2.3. Estabilidad Entrada-Estado . . . . .	22
2.4. Estabilidad de Sistemas en Cascada . . . . .	24
2.5. Estabilidad de Sistemas Retroalimentados . . . . .	26
<b>3. Observadores Disipativos Interconectados</b>	<b>33</b>
3.1. Observadores para Sistemas en Cascada . . . . .	34
3.1.1. Primera Etapa de Diseño . . . . .	34
3.1.2. Segunda Etapa de Diseño . . . . .	36
3.2. Observadores para Sistemas en Realimentación . . . . .	42
3.2.1. Primera Etapa de Diseño . . . . .	43

3.2.2. Segunda Etapa de Diseño . . . . .	44
3.3. Ejemplos . . . . .	50
3.3.1. Diseño de Observadores Interconectados en Cascada . . . . .	50
3.3.2. Diseño de Observadores Interconectados en Realimentación . . . . .	57
3.3.3. Simulaciones . . . . .	61
3.4. Conclusiones y Trabajo Futuro . . . . .	66
<b>Agradecimientos</b>	<b>71</b>

# Resumen

El presente trabajo presenta una metodología de diseño de observadores disipativos interconectados para cierta clase de sistemas, tanto en cascada como en realimentación. El diseño radica en descomponer el sistema original en dos subsistemas para los cuales se diseñan observadores disipativos de manera individual. Posteriormente, los observadores se interconectan y se obtiene así un observador para el sistema completo. Esta metodología simplifica el diseño de observadores ya que los subsistemas resultantes son de orden menor que el del original.



# Capítulo 1

## Introducción

Diversos sistemas físicos (sistemas nerviosos, sistemas ecológicos, sistemas bioquímicos) presentan una estructura compleja, difícil de analizar. Medir los estados de tales sistemas resulta a veces imposible, o muy costoso en caso de ser posible. El desconocer los estados de dicha clase de sistemas podría suponer dificultades para controlarlos. Aunado a ello, la misma dinámica compleja dificulta el diseño de un observador adecuado que permita recuperar los estados del sistema.

En principio, la problemática del diseño de observadores radica en estabilizar la dinámica del error que surge cuando el observador intenta estimar los estados. Sin embargo, el análisis de estabilidad de un sistema dinámico no lineal se complica conforme se eleva el orden del sistema, lo cual dificulta el diseño de un observador no lineal.

En muchos casos es posible descomponer un sistema en una serie de subsistemas interconectados, logrando así obtener subsistemas elementales con dinámicas más simples que su original y para los cuales resultará más sencillo diseñar observadores.

Un sistema interconectado es aquel sistema que consiste de subsistemas que interactúan entre sí. Mientras que las entradas de un sistema capturan información del ambiente inyectándola al sistema y las salidas registran la influencia del sistema sobre el ambiente, las asignaciones entrada-salida tales como la conexión en cascada o la retroalimentación establecen las interconexiones. De esta manera, las interconexiones son vistas como casos en los que la salida de un sistema se impone como la entrada de otro.

Es posible entonces, y bajo ciertas restricciones, diseñar un observador para cada subsistema despreciando las interconexiones para posteriormente conectarlos imitando las conexiones originales de la planta, obteniendo así un observador para el sistema completo.

En el presente trabajo se presenta un análisis de las conexiones básicas que pudiesen llegar a aparecer al descomponer la dinámica del sistema complejo de tal manera que sea posible describir dicho sistema mediante las interconexiones mencionadas.

La idea principal es similar a la presentada en las primeras páginas de [16], pero aplicada al diseño de observadores. En principio, el método de diseño consiste de 3 etapas:

- Segmentación: El sistema se divide en una serie de subsistemas que interconectados trabajan de manera idéntica al sistema original.
- Diseño de observadores para los subsistemas: En esta etapa se diseñan los observadores individuales para cada subsistema despreciando las interconexiones.

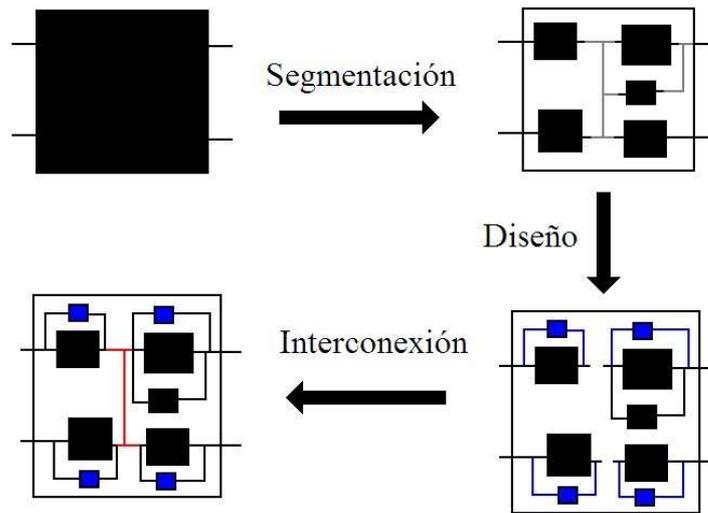


Figura 1.1: Etapas del diseño de observadores disipativos interconectados.

- **Reconexión:** Después de haber diseñado los *sub-observadores* se procede a interconectarlos para obtener así un observador para el sistema completo.

En este trabajo se hace hincapié en las dos últimas etapas de diseño, dejando a consideración del usuario la etapa de segmentación.

## 1.1. Motivación

Diseñar un observador implica buscar la estabilidad de la dinámica de error de sistema observado. Mientras más complejos sean sistema y observador, más compleja será su dinámica de error y más intrincado será su análisis de estabilidad.

La complejidad del análisis de estabilidad de un sistema dinámico no lineal se eleva conforme el orden del sistema crece. Esta situación motiva a buscar

maneras de simplificar el análisis de estabilidad del sistema. Es ahí donde surge atractivo el hecho de trabajar con subsistemas de menor orden que en conjunto funcionan como un sistema *global*.

La descomposición del sistema en subsistemas y el diseño de *sub-observadores* por el método disipativo, podría simplificar el diseño de observadores para sistemas cuya dinámica compleja impida el diseño de un observador de manera directa.

Los observadores interconectados encontrarán aplicación en aquellos campos de la ciencia que involucren sistemas matemáticos complejos en sus estudios, entre los cuales figuran los modelos matemáticos empleados en las ingenierías y muchas ramas de las ciencias.

## 1.2. Estado del Arte

En 1972, Jan C. Willems publica un artículo de dos partes titulado *Dissipative Dynamical Systems* [14], [15] en el cual se da a conocer la teoría de dichos sistemas definidos en espacio de estado para los cuales la denominada *disipatividad* se define en términos de la *tasa de suministro* y la *función de almacenamiento*. Inicialmente orientados a la termodinámica, los sistemas disipativos resultan de gran interés cuando son considerados sistemas físicos en general, presentando convenientes restricciones en su comportamiento dinámico.

En 1974, Peter Moylan [10] propone un teorema que relaciona las propiedades entrada-salida de sistemas no lineales y una serie de restricciones determinadas por sus ecuaciones de espacio de estados. A su vez, las propiedades

internas del sistema pueden ser relacionadas con propiedades disipativas. Dos años después [4], Peter Moylan y David Hill establecen criterios de estabilidad para sistemas disipativos haciendo uso de los resultados que obtuvo Moylan en el año de 1974.

En el año de 1977, Hill y Moylan [5] extienden esta teoría de estabilidad para sistemas disipativos ahora para interconexiones en retroalimentación.

Posteriormente, en [6] se unifican toda la teoría existente, incluyendo sus propios resultados. Por otro lado y en el mismo año Peter Moylan, Antonio Vannelli y Mathukumalli Vidyasagar [11] presenan algunos conceptos de detectabilidad –propiedad mas débil que observabilidad– que se preservan bajo interconexiones, determinando así las condiciones de comportamiento aceptables de un sistema, el cual se preserva bajo interconexiones.

El Dr. Jaime Moreno de la UNAM publica en el año 2004 [9] un método de diseño de observadores que emplea conceptos disipativos para asegurar convergencia exponencial de dichos sistemas (una versión mas completa se puede encontrar en [8]). Estos observadores tienen amplia aplicación en el campo de sistemas biológicos y reactores bioquímicos. Uno de los trabajos del Dr. Moreno titulado *Una Propiedad de Separación de los Observadores Disipativos para Sistemas No Lineales* presenta fundamentos sobre los cuales el *Principio de Separación* se cumple para esta clase específica de observadores, permitiendo esto la incorporación de conceptos como *Control por Retroalimentación de Estado Observado* para una clase de sistemas no lineales.

En el año 2008, Eduardo Sontag y Murat Arkac presentan un artículo [12] sobre estabilidad de estructuras interconectadas, particularmente para el caso de estructuras pasivas. Destaca su aplicación en la estabilidad de modelos de redes genéticas, ciclos metabólicos y otros más de biología matemática.

El presente trabajo busca extender la teoría de diseño disipativo de observadores al caso de sistemas interconectados, determinando condiciones bajo las cuales es posible diseñar observadores por este método a nivel subsistema los cuales posteriormente se interconectarán para fungir como un observador para el sistema completo. Esta metodología de diseño permitirá sortear los obstáculos frecuentemente presentados por la compleja dinámica de algunos sistemas no lineales.

## 1.3. Objetivos

Establecer condiciones factibles de diseño de observadores disipativos para sistemas interconectados en cascada y en retroalimentación.

### **Objetivos Específicos**

Determinar los casos en los cuales se mantiene la estabilidad de la dinámica de error, tanto para la interconexión en cascada como para la interconexión en retroalimentación.

Determinar las condiciones bajo las cuales las funciones de interconexión de los sistemas no alteran la estabilidad de la dinámica de error.

## 1.4. Formulación del Problema

Considere un sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x, y, u) \quad (1.1)$$

el cual es arbitrario, no lineal y de relativamente alta complejidad matemática. Suponga que es posible descomponer al sistema mencionado en subsistemas más sencillos interconectados entre si. Cada uno de los subsistemas presentaría una dinámica más sencilla que la del sistema completo.

El problema principal consiste en diseñar observadores para una clase de sistemas interconectados, tanto en cascada como en retroalimentación. Los sistemas con los que se trabaja son resultado de aplicar una transformación de estados a un sistema no lineal como (1.1)

Considere ahora un sistema dinámico de la forma

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + G\psi(\sigma) + \varphi(t, y, u) \\ y = Cx \\ \sigma = Hx \end{cases} \quad (1.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ , es el vector de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  es un vector de entradas conocidas,  $y \in \mathbb{R}^p$  es un vector de salidas medibles,  $\sigma \in \mathbb{R}^r$  es una función del estado, la cual no es necesariamente medible, y de la cual depende el vector  $\psi$  de dimensión  $q$ . La función  $\varphi(t, y, u)$  es una función no lineal arbitraria de la entrada y la salida.  $A$ ,  $G$ ,  $C$  y  $H$  son matrices con dimensiones apropiadas.

Considere ahora dos sistemas con la forma (1.2), los cuales se encuentran interconectados en cascada mediante una función del estado  $\mu$ , de la siguiente manera

$$\Sigma_a : \begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + \mu(x_b) + G_a \psi_a(\sigma_a; x_b) + \varphi_a(t, y, u) \\ y_a = C_a x_a \\ \sigma_a = H_a x_a \end{cases} \quad (1.3)$$

y

$$\Sigma_b : \begin{cases} \dot{x}_b = A_b x_b + G_b \psi_b(\sigma_b) + \varphi_b(t, y, u) \\ y_b = C_b x_b \\ \sigma_b = H_b x_b \end{cases} \quad (1.4)$$

respectivamente, donde  $y = [y_a \ y_b]^T$ ,  $u = [u_a \ u_b]^T$ .  $x_a \in \mathbb{R}^n$  y  $x_b \in \mathbb{R}^n$  son los vectores de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  es una entrada conocida,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida medible,  $\sigma_a \in \mathbb{R}^r$  y  $\sigma_b \in \mathbb{R}^r$  son funciones de los respectivos estados  $x_a$  y  $x_b$  no necesariamente medibles;  $\psi_a$  y  $\psi_b$  son vectores de dimensión  $q$  que dependen de  $\sigma_a$  y  $\sigma_b$  respectivamente, y las funciones  $\varphi_a(t, y, u)$  y  $\varphi_b(t, y, u)$  son funciones no lineales arbitrarias de la entrada y la salida.  $A_a$ ,  $G_a$ ,  $C_a$ ,  $H_a$ ,  $A_b$ ,  $G_b$ ,  $C_b$  y  $H_b$  son matrices con dimensiones apropiadas. Finalmente, los dos sistemas están interconectados entre si mediante una función  $\mu(x_b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Considere nuevamente dos sistemas con la forma (1.2). Considere también funciones  $\mu(\cdot)$  de tal manera que

$$\Sigma_a : \begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + \mu(x_b) + G_a \psi_a(\sigma_a; x_b) + \varphi_a(t, y, u) \\ y_a = C_a x_a \\ \sigma_a = H_a x_a \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\Sigma_b : \begin{cases} \dot{x}_b = A_b x_b + \mu(x_a) + G_b \psi_b(\sigma_b; x_a) + \varphi_b(t, y, u) \\ y_b = C_b x_b \\ \sigma_b = H_b x_b \end{cases} \quad (1.6)$$

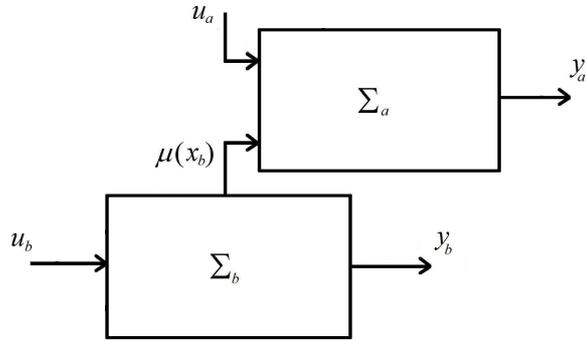


Figura 1.2: Sistemas Interconectados en Cascada.

respectivamente, donde  $y = [y_a \ y_b]^T$ ,  $u = [u_a \ u_b]^T$ .  $x_a \in \mathbb{R}^n$  y  $x_b \in \mathbb{R}^n$  son los vectores de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  es una entrada conocida,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida medible,  $\sigma_a \in \mathbb{R}^r$  y  $\sigma_b \in \mathbb{R}^r$  son funciones de los respectivos estados  $x_a$  y  $x_b$ ;  $\psi_a$  y  $\psi_b$  son vectores  $q$ -dimensionales que dependen de  $\sigma_a$  y  $\sigma_b$  respectivamente, y las funciones  $\varphi_a(t, y, u)$  y  $\varphi_b(t, y, u)$  son funciones no lineales arbitrarias de la entrada y la salida.  $A_a, G_a, C_a, H_a, A_b, G_b, C_b$  y  $H_b$  son matrices con dimensiones apropiadas. Observe que los dos sistemas están interconectados entre sí mediante las funciones  $\mu(x_b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\mu(x_a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A un sistema que presenta tal interconexión se le puede considerar *Retroalimentado*.

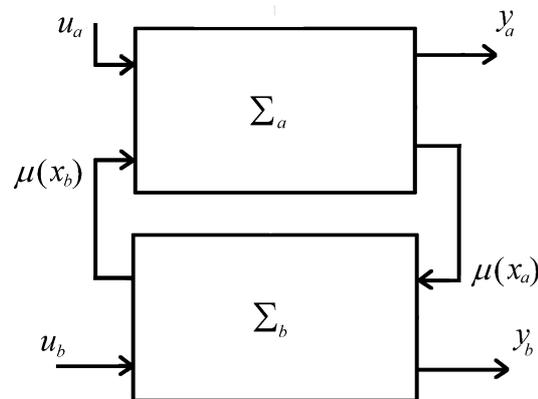


Figura 1.3: Sistemas Interconectados en Realimentación.

## 1.5. Organización de la Tesis

El presente trabajo de tesis se encuentra organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo se presentó una introducción y los motivos del desarrollo de la tesis, así como el estado del arte y los objetivos contemplados en el transcurso del desarrollo de la tesis y el planteamiento de la problemática a resolver.

En el segundo capítulo se abordan los conceptos preliminares que giran en torno a la teoría disipativa y del diseño de observadores por el método disipativo, así como algunos conceptos que serán empleados en el diseño de los observadores interconectados.

Finalmente, el tercer capítulo trata sobre la extensión del mencionado método disipativo de diseño de observadores para el caso de sistemas interconectados, tanto en cascada como en retroalimentación, siendo esta la parte medular del desarrollo de la tesis. Se incluye un par de ejemplos numéricos que presentan de manera sencilla la eficacia del método.



# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo se presenta algunos conceptos del método disipativo y su aplicación al diseño de observadores. Algunas referencias sobre el tema de disipatividad son [14], [15] y [3]. El método empleado para el diseño de los observadores individuales consiste en modelar la dinámica de error de un sistema no lineal como estructuras conformadas por la interconexión en retroalimentación de un sistema lineal invariante y una no linealidad sin memoria para las cuales es posible determinar estabilidad mediante nociones disipativas. Diseñar los observadores con este método asegura diseños con convergencia global y exponencial.

A continuación se presenta una serie de definiciones que dan forma al método de diseño disipativo de observadores. Estas definiciones se pueden consultar de manera extensiva en [14], o en [1] y [13].

## 2.1. Conceptos Básicos de Disipatividad

Suponga un sistema arbitrario

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) , & u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x, u) , & y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$

**Definición 1 (Tasa de Suministro)** *La Tasa de Suministro*

$w(t) = w(u(t), y(t))$ ,  $w : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función real positiva tal que

$$\int_{t_0}^{t_1} |w(u(t), y(t))| dt < +\infty \quad (2.2)$$

□

**Definición 2 (Sistemas Disipativos)** *Un sistema con tasa de suministro  $w$  es **disipativo** si existe una función no negativa  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  llamada **función energética de almacenamiento** tal que*

$$V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt \geq V(x(t_1)) \quad (2.3)$$

Además, si  $V \in \mathcal{C}^1$ , entonces

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq w(t) \quad (2.4)$$

□

Considere a  $V(x_0)$  como la energía inicial –o residual– del sistema en el instante  $t_0$ ,  $V(x_1)$  como la energía que se puede extraer del sistema en el instante  $t_1$  y  $\int_{t_0}^{t_1} w(t) dt$  como el suministro energético, el cual es finito debido a la definición 1. La expresión

$$V(x_1) - V(x_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} w(t) dt \quad (2.5)$$

indica que el suministro energético será siempre mayor –o igual– a la energía neta extraíble del sistema.

La función de almacenamiento puede ser encontrada calculando la máxima cantidad de energía extraíble del sistema en un intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$  y debido a sus características –se trata de funciones positivas reales, acotadas, siempre decrecientes– son buenas candidatas a funciones de Lyapunov.

**Definición 3 (Mapeo Disipativo sin Memoria)** *Un Mapeo Disipativo sin Memoria,*

$$y = \phi(t, u) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \quad (2.6)$$

*continuo a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ , tal que  $\phi(t, 0) = 0$ , es disipativo con respecto a una tasa de suministro  $w$  si  $\forall : t \geq 0, u \in \mathbb{R}^m$*

$$w(u, y) = w(u, \phi(t, u)) \geq 0 \quad (2.7)$$

□

Considere el sistema

$$\Sigma_L \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.8)$$

y una función de suministro cuadrática de la forma

$$\begin{aligned} w(u, y) &= \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \\ &= y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \end{aligned} \quad (2.9)$$

con  $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{p \times m}$  y  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $Q$  y  $R$  simétricas.

**Definición 4 (Disipatividad Estricta (SSD))** *El sistema LTI (2.8) es estrictamente disipativo con respecto a una función de suministro (2.9), si existe una matriz  $P = P^T > 0$ , y una constante  $\varepsilon > 0$ , tales que*

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \varepsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.10)$$

□

## 2.2. Diseño de Observadores por el Método Disipativo

El método de diseño disipativo de observadores aplica los principios del método disipativo para obtener diseños de observadores convergentes. El diseño del observador se efectúa de tal manera que es posible obtener una dinámica de error en la forma de Lur'e. Mediante sus características disipativas, la dinámica de error puede ser relacionada con criterios de estabilidad y de esta manera asegurar la convergencia global del observador.

Para diseñar un observador es necesario que el sistema tenga propiedades de observabilidad, esto es, que sea posible recuperar sus estados iniciales a partir de las señales de entrada y salida. Para el caso de sistemas no lineales existen varias definiciones de observabilidad, siendo una de las más populares aquella que involucra operadores de Lie

**Definición 5 (Derivada de Lie)** *La expresión*

$$L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f(x)$$

*Denota la derivada de Lie de la función  $h$ , que en realidad es la derivada direccional de la función  $h$  sobre el vector  $f$ .*

Derivadas de Lie de mayor orden se definen como

$$L_f^n h(x) = \frac{\partial}{\partial x} [L_f^{n-1} h(x)] f(x)$$

□

**Definición 6 (Observabilidad en Sistemas No lineales)** *El estado  $x_0$  de un sistema no lineal es observable si existe un vecindario  $\Omega$  de  $x_0$  tal que cada  $x \in \Omega$ , exceptuando  $x_0$ , es distinguible de  $x_0$ . Dos estados  $x_0$  y  $x_1$  son distinguibles entre sí, si existe una entrada  $U$  tal que  $y(x_0) \neq y(x_1)$ . Una posible prueba de observabilidad está dada por*

$$O(x_0) = \frac{\partial q(x_0)}{\partial x} = \begin{bmatrix} dL_f^0 h(x_0) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x_0) \end{bmatrix}$$

donde  $O(x_0)$  debe ser de rango  $n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y

$$q(x_0) = \begin{bmatrix} L_f^0 h(x_0) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x_0) \end{bmatrix}$$

□

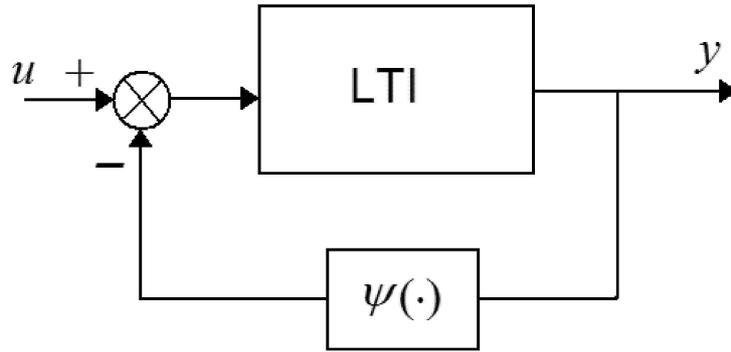


Figura 2.1: Sistema lineal con no linealidad sectorial en lazo cerrado.

Considere el siguiente sistema retroalimentado

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\
 y &= Cx \\
 u &= -\psi(t, y, u)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

y una tasa de suministro de suministro cuadrática (2.9)

**Lema 2.1 (Moreno 2004d)** *Si el sistema lineal  $(C, A, B)$  de (2.11) es estrictamente disipativo con  $w = (-R, S^T, -Q)$ , entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  del sistema es global y exponencialmente estable para cualquier no linealidad  $\psi(t, y, u)$  que sea disipativa con  $w = (Q, S, R)$*

**Demostración.** Se sabe por hipótesis que (2.10) se satisface con  $(Q, S, R) = (-R, S^T, -Q)$ . Se propone  $V = x^T P x$  como función candidata para el sistema (2.11), su derivada será

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\
&\leq \begin{bmatrix} x \\ -\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -C^T RC & C^T S^T \\ SC & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -\psi \end{bmatrix} - \varepsilon x^T P x \quad (2.12)
\end{aligned}$$

es posible reescribir (2.12) como:

$$- \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & S^T \\ S & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix} - \varepsilon x^T P x$$

Finalmente,  $\dot{V}$  se puede acotar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \begin{bmatrix} x \\ -\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -C^T RC & C^T S^T \\ SC & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -\psi \end{bmatrix} - \varepsilon x^T P x \\
&\leq - \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & S^T \\ S & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix} - \varepsilon x^T P x \\
&\leq -\varepsilon x^T P x \quad (2.13)
\end{aligned}$$

■

Los observadores son sistemas dinámicos que imitan el comportamiento de la planta empleando las entradas y salidas del sistema original como sus entradas para reproducir o estimar el estado de la planta. Estos se proponen de manera tal que sean una copia de la planta incluyendo términos de inyección de salida que apoyen la convergencia del error a cero.

Un posible observador disipativo para el sistema (2.11)

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + G\psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) + \varphi(t, y, u) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ \hat{\sigma} = H\hat{x} \end{cases} \quad (2.14)$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L \|\hat{y}(t) - y(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N \|\hat{y}(t) - y(t)\| = 0$$

hacen que el observador una copia exacta de la planta.

Definiendo al error como  $e := \hat{x} - x$ , la dinámica de error  $\dot{e}$  quedará definida como

$$\Xi : \dot{e} = (A + LC)(\hat{x} - x) + G[\psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) - \psi(\sigma)]$$

Es posible escribir

$$\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y) = H\hat{x} + NC(\hat{x} - x) = H(e + x) + NC(e + x - x) = He + Hx + NCe = \sigma + z \quad (2.15)$$

quedando la dinámica de error descrita de la siguiente manera

$$\Xi : \begin{cases} \dot{e} = (A + LC)e + G\nu \\ z = (H + NC)e \\ \tilde{y} = Ce \\ \nu = -\phi(z, \sigma) \end{cases} \quad (2.16)$$

Donde

$$\phi(z, \sigma) \triangleq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z)$$

Las matrices  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  y  $N \in \mathbb{R}^{r \times p}$  se diseñan para contribuir a que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_a(t) - x_a(t)\| = 0$ . Usualmente, el problema radica en encontrar matrices  $L$  y  $N$ , una matriz  $P = P^T > 0$  y una  $\varepsilon > 0$  de tal manera que se satisfaga la siguiente desigualdad matricial

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \varepsilon P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.17)$$

donde,  $A_L = (A + LC)$  y  $H_N = (H + NC)$ .  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son matrices que caracterizan a la no linealidad  $\phi$ . En la mayoría de los casos, la anterior desigualdad matricial (2.17) puede reducirse a una LMI (Linear Matrix Inequality, por sus siglas en inglés), para las cuales existen eficaces métodos computacionales de solución. Actualmente existen poderosos programas numéricos que dan solución a las LMI empleando los métodos establecidos por [2].

A continuación se presenta el teorema medular del diseño de observadores por el método disipativo, el cual enuncia lo siguiente:

**Teorema 2.1 (Moreno2004d)** *Si la no linealidad  $\phi$  de (2.16) es disipativa con  $w = (Q, S, R)$ , y el subsistema lineal  $\Xi_L$  es estrictamente disipativo con respecto a  $w = (-R, S^T, -Q)$ , la dinámica de error es global y exponencialmente estable. Si esto ocurre, entonces  $\Omega$  es un observador global y exponencial para  $\Sigma$ .*

La demostración del teorema aparece en [9].

### 2.3. Estabilidad Entrada-Estado

La interconexión en cascada de dos sistemas disipativos presupone la existencia de un sistema perturbador y un sistema perturbado. Una buena solución para determinar la estabilidad de la interconexión de la cascada implica el empleo del concepto de estabilidad entrada-estado.

Considere el sistema perturbado

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{2.18}$$

donde  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ ; continua a tramos en  $t$ . La entrada perturbadora  $u(t)$  es continua a tramos y acotada para toda  $t \geq 0$ .

Considere ahora una versión nominal de dicho sistema

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \tag{2.19}$$

la cual tiene un punto de equilibrio global y exponencialmente estable en  $x = 0$ . Debido a que existe una función  $V$  de Lyapunov para el sistema (2.19), es posible emplear dicha función para determinar estabilidad para el sistema (2.18) considerando que, a pesar de la entrada perturbadora  $u$ , la solución del sistema perturbado no varía en demasía con respecto al sistema nominal, esto es posible si existe una constante de Lipschitz tal que:

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L\|u\| \tag{2.20}$$

**Definición 7 (Estabilidad Entrada-Estado (IIS))** *Un sistema es **Entrada-Estado Estable** siempre que existan funciones comparativas  $\gamma$  y  $\beta$ , clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$  respectivamente, tales que para todo estado inicial  $x(t_0)$  y cualquier entrada  $u$ , la solución  $x(t)$  exista y satisfaga*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right) \quad (2.21)$$

□

Una condición de suficiencia para la estabilidad entrada-estado está dada por el siguiente teorema:

**Teorema 2.2 (Khalil 4.19)** *Sea  $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in \mathcal{C}^1$  tal que*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) \leq -W_3(x), \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0$$

$\forall (t, x, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\rho \in \mathcal{K}$  y  $W_3(x)$  es una función continua positiva definida en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces el sistema es entrada-estado estable con  $\gamma = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \rho$

La demostración de este teorema se encuentra en el capítulo 4 y el apéndice C de [7].

Del teorema anterior se deriva el siguiente lema sobre estabilidad entrada-estado:

**Lema 2.2 (Khalil 4.6)** *Suponga que  $f(t, x, u)$  es continuamente diferenciable, globalmente Lipschitz en  $(x, u)$  y uniforme en  $t$ . Si el sistema nominal (2.19) presenta un punto de equilibrio global y exponencialmente estable en el origen, entonces el sistema (2.18) es Entrada-Estado Estable.*

**Demostración.**

El sistema (2.18) es una versión perturbada de (2.19). Por hipótesis, se sabe que el sistema (2.19) cuenta con una función de Lyapunov  $V(t, x)$  que satisface las desigualdades del teorema anterior. Debido a la propiedad global de Lipschitz de  $f$ , el término de perturbación satisface (2.20) para toda  $t \geq t_0$  y todas  $(x, u)$ . La derivada de  $V$  con respecto a (2.18) satisface

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} f(t, x, 0) + \frac{\partial V}{\partial x} [f(t, x, u) - f(t, x, 0)] \\ &\leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \|x\| L \|u\|\end{aligned}$$

Para que el término  $-c_3 \|x\|^2$  domine a  $c_4 \|x\| L \|u\|$  para valores grandes de  $\|x\|$ , es posible escribir la desigualdad anterior como

$$\dot{V} \leq -c_3(1 - \theta) \|x\|^2 + c_4 \|x\| L \|u\|$$

donde  $0 < \theta < 1$ . Entonces,

$$\dot{V} \leq -c_3(1 - \theta) \|x\|^2, \quad \forall \|x\| \geq \frac{c_4 L \|u\|}{c_3 \theta}$$

para toda  $(t, x, u)$ . ■

## 2.4. Estabilidad de Sistemas en Cascada

El concepto de estabilidad entrada-estado presenta una aplicación interesante en el análisis de sistemas interconectados en cascada, tal como se verá a continuación.

Inicialmente, suponga dos sistemas

$$\dot{x}_1 = f(t, x_1, x_2) \tag{2.22}$$

$$\dot{x}_2 = f(t, x_2) \tag{2.23}$$

**Lema 2.3 (Khalil 4.7)** *Considere la interconexión en cascada de dos sistemas en las formas (2.23) y (2.22). Por hipótesis se sabe que el sistema (2.23) es global y exponencialmente estable. Si además el sistema (2.22) es entrada-estado estable ante una entrada  $x_2$ , entonces la interconexión en cascada (2.23)-(2.22) es global y asintóticamente estable.*

**Demostración.** Suponga un instante inicial  $t_0 \geq 0$ , tal que  $t_0 \leq t$ . Las soluciones de (2.23) y (2.22) satisfacen

$$\|x_1(t)\| \leq \beta_1(\|x_1(s)\|, t-s) + \gamma_1\left(\sup_{s \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\|\right) \quad (2.24)$$

y

$$\|x_2(t)\| \leq \beta_2(\|x_2(s)\|, t-s) \quad (2.25)$$

respectivamente, donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son funciones clase  $\mathcal{KL}$  y  $\gamma_1$  es de clase  $\mathcal{K}$ .

Sustituyendo  $s = \frac{t+t_0}{2}$ , en (2.24) se tiene

$$\|x_1(t)\| \leq \beta_1\left(\left\|x_1\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\|, \frac{t-t_0}{2}\right) + \gamma_1\left(\sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\|\right) \quad (2.26)$$

El estimado de  $x_1\left(\frac{t+t_0}{2}\right)$  se obtiene empleando  $s = t_0$  y reemplazando  $t$  por  $\frac{t+t_0}{2}$  en (2.24), así

$$\left\|x_1\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\| \leq \beta_2\left(\|x_1(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right) + \gamma_1\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\|\right) \quad (2.27)$$

considerando que  $t_0 \leq \frac{t+t_0}{2} \leq t$ , de (2.25) se obtienen

$$\sup_{t_0 \leq \tau \leq \frac{t+t_0}{2}} \|x_2(\tau)\| \leq \beta_2(\|x_2(t_0)\|, 0) \quad (2.28)$$

y

$$\sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \tau \leq t} \|x_2(\tau)\| \leq \beta_2\left(\|x_2(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right) \quad (2.29)$$

sustituyendo (2.27), (2.28) y (2.29) en (2.26) se obtiene

$$\begin{aligned} \|x_1(t)\| \leq & \beta_1 \left( \beta_1 \left( \|x_1(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2} \right) + \gamma_1(\beta_2(\|x_2(t_0)\|, 0)), \frac{t-t_0}{2} \right) + \\ & + \gamma_1 \left( \beta_2 \left( \|x_2(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

empleando la desigualdad

$$\|e(t)\| \leq \|e_1(t)\| + \|e_2(t)\|$$

finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \|e(t)\| \leq & \beta_1 \left( \beta_1 \left( \|x_1(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2} \right) + \gamma_1(\beta_2(\|x_2(t_0)\|, 0)), \frac{t-t_0}{2} \right) + \\ & + \gamma_1 \left( \beta_2 \left( \|x_2(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2} \right) \right) + \beta_2(\|x_2(t_0)\|, t-t_0) \end{aligned} \quad (2.30)$$

siendo posible verificar que (2.30) es una función de clase  $\mathcal{KL}$ . ■

## 2.5. Estabilidad de Sistemas Retroalimentados

Para las dos clases de interconexiones consideradas en el presente trabajo es pertinente asegurar condiciones de estabilidad para los sistemas interconectados. Mientras que para la conexión en cascada se emplean conceptos de estabilidad entrada-estado, para el caso de interconexión por retroalimentación existen funciones de Lyapunov que pueden ser aplicadas a nuestro problema particular.

**Definición 8 (Sistemas Retroalimentados)** *Se definen como interconectados dos sistemas de la forma*

$$\dot{x}_a = f_a(x_a, t) + \delta_a(x, t) \quad (2.31)$$

$$\dot{x}_b = f_b(x_b, t) + \delta_b(x, t) \quad (2.32)$$

donde  $x = [x_a \ x_b]^T$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  y  $\delta$  son suficientemente suaves y  $f(0, t) = 0$ ,  $\delta(0, t) = 0$ , de tal manera que  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema interconectado.  $\square$

Antes de comenzar con la definición de Función de Lyapunov compuesta, se vuelve necesario mencionar algunos conceptos sobre los cuales se fundamenta dicha definición.

Suponga dos sistemas

$$\dot{x}_a = f_a(x_a, t) \quad (2.33)$$

$$\dot{x}_b = f_b(x_b, t) \quad (2.34)$$

los cuales son versiones nominales de (2.31) y (2.32), y cuentan con funciones de Lyapunov  $V_a(x_a, t)$  y  $V_b(x_b, t)$  respectivamente, las cuales son cuadráticas, positivas definidas y decrecientes, cuyas derivadas son negativas definidas y satisfacen

$$\frac{\partial V_a}{\partial t} + \frac{\partial V_a}{\partial x_a} f_a(x_a, t) \leq -K_a \Phi_a^2(x_a) \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial V_b}{\partial t} + \frac{\partial V_b}{\partial x_b} f_b(x_b, t) \leq -K_b \Phi_b^2(x_b) \quad (2.36)$$

y

$$\left\| \frac{\partial V_a}{\partial x_a} \right\| \leq k_a \Phi_a(x_a) \quad (2.37)$$

$$\left\| \frac{\partial V_b}{\partial x_b} \right\| \leq k_b \Phi_b(x_b) \quad (2.38)$$

donde  $K_a$ ,  $K_b$ ,  $k_a$  y  $k_b$  son constantes positivas,  $\Phi_a : \mathbb{R}^{n_a} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Phi_b : \mathbb{R}^{n_b} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Suponga adicionalmente que las perturbaciones  $\delta_a$  y  $\delta_b$  de los sistemas (2.31) y (2.32) satisfacen las cotas

$$\|\delta_a(t, x)\| \leq \gamma_{aa}\Phi_a(x_a) + \gamma_{ab}\Phi_b(x_b) \quad (2.39)$$

$$\|\delta_b(t, x)\| \leq \gamma_{ba}\Phi_a(x_a) + \gamma_{bb}\Phi_b(x_b) \quad (2.40)$$

donde  $\gamma_{aa}$ ,  $\gamma_{ab}$ ,  $\gamma_{ba}$  y  $\gamma_{bb}$  son constantes positivas. Considerando lo anterior, es posible introducir la siguiente definición

**Definición 9 (Función de Lyapunov Compuesta (FLC))** *Una función de la forma*

$$V(t, x) = V_a(t, x_a) + V_b(t, x_b) \quad (2.41)$$

llamada **Función de Lyapunov Compuesta** será una función de Lyapunov para el sistema interconectado (2.31)–(2.32) si su derivada satisface

$$\dot{V}(t, x) = \dot{V}_a(t, x_a) + \dot{V}_b(t, x_b) \leq -\frac{1}{2}\Phi(x)^T(DV_C + V_C^T D)\Phi(x) \quad (2.42)$$

donde  $D = \text{diag}(d_a, d_b)$ , siendo  $d_a$  y  $d_b$  constantes positivas y

$$V_C = \begin{bmatrix} K_a - k_a\gamma_{aa} & -k_a\gamma_{ab} \\ -k_b\gamma_{ba} & K_b - k_b\gamma_{bb} \end{bmatrix}$$

lo anterior es válido siempre que  $V_C$  sea una matriz de tipo  $\mathcal{M}$ . Una matriz se considera **de tipo  $\mathcal{M}$**  si todos sus menores principales líderes son positivos definidos.  $\square$

Finalmente, a partir de las dos definiciones anteriores surge el siguiente teorema sobre la estabilidad de sistemas interconectados en retroalimentación

**Teorema 2.3** *Considere los sistemas (2.31) y (2.32). Por hipótesis, las versiones nominales de dichos sistemas, (2.33) y (2.34), son globalmente y exponencialmente estables. Suponga que las perturbaciones  $\delta_a$  y  $\delta_b$  de (2.31) y (2.32) son localmente Lipschitz en  $e$  y satisfacen las cotas (2.39) y (2.40), y la matriz  $V_C$  de la derivada (2.42) de la FLC (2.41) del sistema en realimentación es una matriz tipo  $\mathcal{M}$ , entonces el sistema (2.31)–(2.32) será uniforme y asintóticamente estable.*

**Demostración.** Para los sistemas nominales (2.33) y (2.34) se proponen funciones cuadráticas de Lyapunov  $V_a = x_a^T P_a x_a$  y  $V_b = x_b^T P_b x_b$  respectivamente; las derivadas de ambas  $V_a$  y  $V_b$  satisfacen (2.13). Suponga  $V = V_a + V_b$ . La derivada de la función será

$$\dot{V} = d_1 \dot{V}_a + d_2 \dot{V}_b$$

Las funciones de Lyapunov de los sistemas perturbados (2.31) y (2.32) satisfacen

$$\begin{aligned}\dot{V}_a &\leq -\varepsilon_a x_a^T P_a x_a + \delta_a^T P_a x_a + x_a^T P_a \delta_a \\ \dot{V}_b &\leq -\varepsilon_b x_b^T P_b x_b + \delta_b^T P_b x_b + x_b^T P_b \delta_b\end{aligned}$$

y es posible acotarles como

$$\begin{aligned}\dot{V}_a &\leq -\varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a) \|x_a\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_a) \|x_a\| \|\delta_a\| \\ \dot{V}_b &\leq -\varepsilon_b \lambda_{\min}(P_b) \|x_b\|^2 + 2\lambda_{\max}(P_b) \|x_b\| \|\delta_b\|\end{aligned}$$

Las perturbaciones  $\delta_a$  y  $\delta_b$  de los sistemas (2.31) y (2.32) satisfacen las cotas

$$\|\delta_a\| \leq \gamma_{aa} \|x_a\| + \gamma_{ab} \|x_b\| \quad (2.43)$$

$$\|\delta_b\| \leq \gamma_{ba} \|x_a\| + \gamma_{bb} \|x_b\| \quad (2.44)$$

La derivada de la función de Lyapunov compuesta queda expresada de la siguiente manera:

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a) - 2\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{aa} & -\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} - \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba} \\ -\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} - \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba} & \varepsilon_b \lambda_{\min}(P_b) - 2\lambda_{\max}(P_b)\gamma_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

ésta será negativa definida siempre que

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a) - 2\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{aa} & -\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} - \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba} \\ -\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} - \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba} & \varepsilon_b \lambda_{\min}(P_b) - 2\lambda_{\max}(P_b)\gamma_{bb} \end{bmatrix}$$

sea de clase  $\mathcal{M}$ , lo cual se cumple si

$$\gamma_{aa} < \frac{\varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a)}{2\lambda_{\max}(P_a)} \quad (2.45)$$

y

$$\gamma_{bb} < \frac{\varepsilon_b \lambda_{\min}(P_b)}{2\lambda_{\max}(P_b)} - \frac{(\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} + \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba})^2}{2\lambda_{\max}(P_b)(\varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a) - 2\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{aa})} \quad (2.46)$$

■





## Capítulo 3

# Diseño de Observadores Disipativos Interconectados

En este capítulo se muestra la metodología de diseño para los observadores interconectados. Básicamente, la metodología consiste en dos etapas:

En la primera etapa, los observadores se diseñan cada uno de manera individual por el método disipativo. En esta primera etapa de diseño se considera que la función que interconecta ambos sistemas es conocida.

En la segunda etapa, los observadores se interconectan imitando las interconexiones propias de la planta. Una vez interconectados, los observadores individuales funcionan como un observador para la planta entera. Al conectar los observadores se producen perturbaciones. Este proceso aplica tanto a sistemas interconectados en cascada como a aquellos que presentan interconexiones en retroalimentación.

### 3.1. Diseño de Observadores para Sistemas en Cascada

A continuación se presenta la metodología de diseño de observadores para sistemas interconectados en cascada. Los sistemas a considerar (1.3) y (1.4) fueron definidos en el capítulo 1. La primera parte de la metodología de diseño de observadores es la presentada en [9].

#### 3.1.1. Primera Etapa de Diseño

La propuesta de diseño de observadores para los sistemas (1.3) y (1.4) es la siguiente:

$$\Omega_a : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = A_a \hat{x}_a + L_a(\hat{y}_a - y_a) + \mu(x_b) + G_a \psi_a(\hat{\sigma}_a + N_a(\hat{y}_a - y_a); x_b) + \\ + \varphi_a(t, y, u) \\ \hat{y}_a = C_a \hat{x}_a \\ \hat{\sigma}_a = H_a \hat{x}_a \end{cases} \quad (3.1)$$

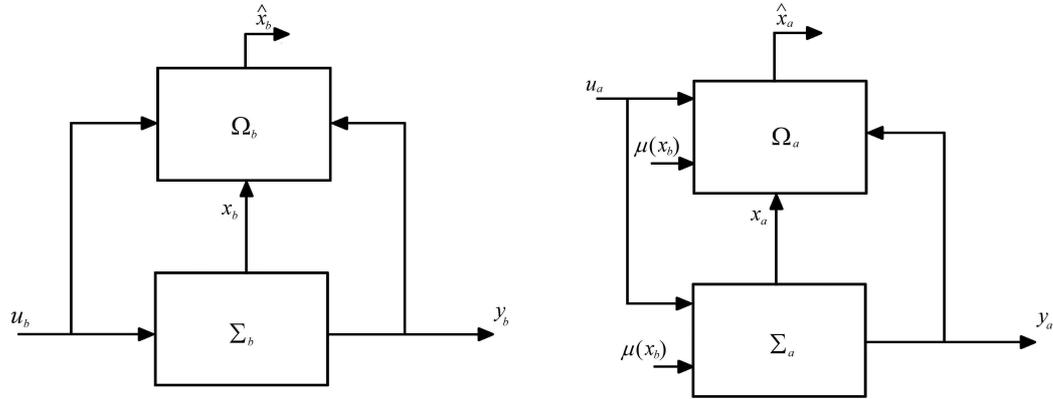
$$\Omega_b : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_b = A_b \hat{x}_b + L_b(\hat{y}_b - y_b) + G_b \psi_b(\hat{\sigma}_b + N_b(\hat{y}_b - y_b)) + \varphi_b(t, y, u) \\ \hat{y}_b = C_b \hat{x}_b \\ \hat{\sigma}_b = H_b \hat{x}_b \end{cases} \quad (3.2)$$

Donde  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $N_a$  y  $N_b$  son matrices que deben ser diseñadas de manera que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

Estas ganancias, junto con los términos de inyección de salida, auxilian a la convergencia del observador. Los términos  $L$  afectan la parte lineal mientras que los términos  $N$  afectan linealmente a las funciones no lineales  $\psi$ .

Es importante aclarar que al diseñar  $\Omega_a$  se supone  $x_b$  medible.

Figura 3.1: Diseño individual de  $\Omega_a$  y  $\Omega_b$ .

Las dinámicas de error quedan descritas como

$$\Xi_a : \begin{cases} \dot{e}_a = (A_a + L_a C_a) e_a + G_a \nu_a \\ z_a = (H_a + N_a C_a) e_a \\ \tilde{y}_a = C_a e_a \\ \nu_a = -\phi_a(z_a, \sigma_a; x_b) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\Xi_b : \begin{cases} \dot{e}_b = (A_b + L_b C_b) e_b + G_b \nu_a \\ z_b = (H_b + N_b C_b) e_b \\ \tilde{y}_b = C_b e_b \\ \nu_b = -\phi_b(z_b, \sigma_b) \end{cases} \quad (3.4)$$

Las matrices  $Q_a$ ,  $S_a$ ,  $R_a$ ,  $Q_b$ ,  $S_b$  y  $R_b$  pertenecen a las tazas de suministro  $w_a = (Q_a, S_a, R_a)$  y  $w_b = (Q_b, S_b, R_b)$  de los sistemas (3.3) y (3.4) y están definidas por sus respectivas no linealidades  $\phi_a$  y  $\phi_b$ . A su vez, los sistemas (3.3) y (3.4) presentan tazas de suministro cuadráticas  $V_a = e_a^T P_a e_a$  y  $V_b = e_b^T P_b e_b$  respectivamente.

De existir  $P_a = P_a^T > 0$ ,  $P_b = P_b^T > 0$ ,  $\varepsilon_a > 0$  y  $\varepsilon_b > 0$ , y matrices  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $N_a$  y  $N_b$  apropiadas que satisfagan las desigualdades matriciales

$$\begin{bmatrix} P_a A_{aL} + A_{aL}^T P_a + \varepsilon_a P_a + H_{aN}^T R_a H_{aN} & P_a G_a - H_{aN}^T S_a^T \\ G_a^T P_a - S_a H_{aN} & Q_a \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.5)$$

y

$$\begin{bmatrix} P_b A_{bL} + A_{bL}^T P_b + \varepsilon_b P_b + H_{bN}^T R_b H_{bN} & P_b G_b - H_{bN}^T S_b^T \\ G_b^T P_b - S_b H_{bN} & Q_b \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.6)$$

será posible emplear  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $N_a$  y  $N_b$  como ganancias para los observadores (3.1) y (3.2).

### 3.1.2. Segunda Etapa de Diseño

Posteriormente se interconectan los observadores  $\Omega_a$  y  $\Omega_b$ , lo cual produce una alteración en la dinámica de  $\Omega_a$  puesto que al hacer la interconexión ya no se tiene la certeza de que el estado  $\hat{x}_b$  sea una estimación fiel de  $x_b$ , esto es  $\hat{x}_b \neq x_b$ .

Considere al sistema (3.4) como sistema perturbador y al sistema (3.3) como sistema perturbado. La estabilidad de la interconexión en cascada (3.4)-(3.3) estará determinada por el comportamiento del sistema (3.3) ante una perturbación producida por el sistema (3.4).

El análisis de estabilidad pertinente al diseño de observadores por el método disipativo se realiza a nivel dinámica de error, es decir, se busca que la dinámica de error  $\Xi$  sea estable. De esa manera se concluye que el observador  $\Omega$  del sistema  $\Sigma$  es un observador global de orden completo para dicho sistema.

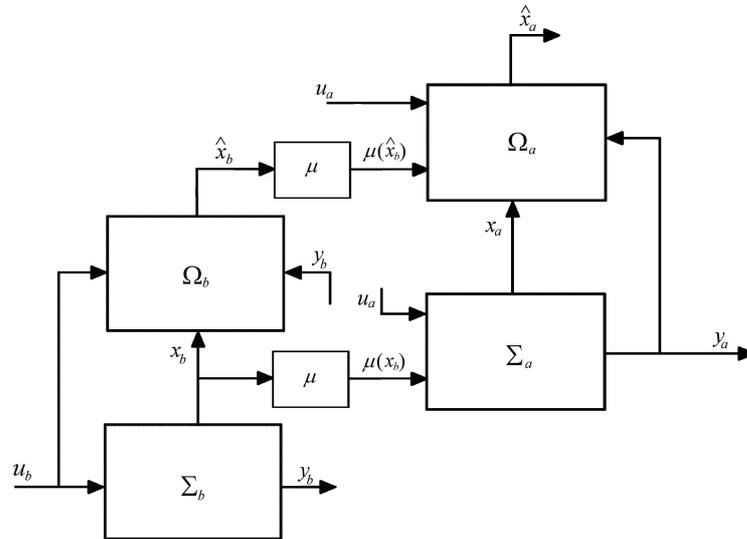


Figura 3.2: Observadores  $\Omega_a$  y  $\Omega_b$  interconectados. Caso Cascada.

Se sabe por hipótesis que los sistemas (3.4) y (3.3) presentan estabilidad global y exponencial. A su vez, el sistema (3.3)-perturbado, debe presentar estabilidad entrada-estado ante una entrada  $e_b$  producida por  $\Xi_b$ , esto es, la entrada perturbadora  $e_b$  no debe *sobre-excitar* al estado  $e_a$ , de tal manera que este se mantenga dentro de parámetros aceptables.

Al interconectar los observadores,  $x_b$  —que es quien interconecta a los sistemas  $\Sigma_a$  y  $\Sigma_b$ — deja de ser accesible y la única manera que tiene  $\Omega_a$  de acceder a dicho estado es mediante  $\Omega_b$ , quien recupera al estado  $x_b$  y manda el estimado  $\hat{x}_b$  a  $\Omega_a$ .  $\Omega_a$  empleará ahora  $\hat{x}_b$  como información en lugar de  $x_b$ .

Considerando ahora que  $\hat{x}_b - x_b \neq 0$  y  $\mu(\hat{x}_b) - \mu(x_b) \neq 0$ , la estructura del observador queda modificada de la siguiente manera

$$\Omega_a^* : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a^* = A_a \hat{x}_a^* + L_a(\hat{y}_a^* - y_a) + \mu(\hat{x}_b) + G_a \psi_a(\hat{\sigma}_a^* + N_a(\hat{y}_a^* - y_a); \hat{x}_b) + \\ + \varphi_a(t, y, u) \\ \hat{y}_a^* = C_a \hat{x}_a^* \\ \hat{\sigma}_a^* = H_a \hat{x}_a^* \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\Omega_b^* : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_b^* = A_b \hat{x}_b^* + L_b(\hat{y}_b^* - y_b) + G_b \psi_b(\hat{\sigma}_b^* + N_b(\hat{y}_b^* - y_b)) + \varphi_b(t, y, u) \\ \hat{y}_b^* = C_b \hat{x}_b^* \\ \hat{\sigma}_b^* = H_b \hat{x}_b^* \end{cases} \quad (3.8)$$

Observe que la dinámica de  $\Omega_b^*$  no sufre alteraciones con respecto a  $\Omega_b$  cuando se realiza la interconexión. A su vez, el error  $e_a$  queda redefinido como  $e_a^* \triangleq \hat{x}_a^* - x_a$ , donde  $\hat{x}_a^*$  es el estado observado interconectado. Luego entonces, la dinámica del error de  $\Xi_a$  se altera de la siguiente manera

$$\Xi_a^* : \begin{cases} \dot{e}_a^* = A_{La} e_a^* + G_a \nu_a + G_a \tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) - \phi_\beta(e_b; x_b) \\ z_a^* = (H_a + N_a C_a) e_a^* \\ \tilde{y}_a^* = C_a e_a^* \\ \nu_a = -\phi_a(z_a^*, \sigma_a, x_b) \end{cases}$$

$$\Xi_b^* : \begin{cases} \dot{e}_b^* = (A_b + L_b C_b) e_b^* + G_b \nu_a \\ z_b^* = (H_b + N_b C_b) e_b^* \\ \tilde{y}_b^* = C_b e_b^* \\ \nu_b = -\phi_b(z_b^*, \sigma_b) \end{cases}$$

donde

$$\phi_\beta(e_b; x_b) = \mu(x_b) - \mu(e_b + x_b)$$

$$\phi_a(z_a^*, \sigma_a; x_b) = \psi_a(\sigma_a; x_b) - \psi_a(\sigma_a + z_a^*; x_b)$$

$$\tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) = \psi_a(\sigma_a + z_a^*, x_b) - \psi_a(\sigma_a + z_a^*, e_b + x_b)$$

considerando

$$\delta(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) = G_a \tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) - \phi_\beta(e_b; x_b) \quad (3.9)$$

finalmente se obtiene

$$\Xi_a^* : \begin{cases} \dot{e}_a^* = A_{La} e_a^* + G_a \nu_a + \delta(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) \\ z_a^* = (H_a + N_a C_a) e_a^* \\ \tilde{y}_a^* = C_a e_a^* \\ \nu_a = -\phi_a(z_a^*, \sigma_a, x_b) \\ \delta(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) = G_a \tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) - \phi_\beta(e_b; x_b) \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\Xi_b^* : \begin{cases} \dot{e}_b^* = (A_b + L_b C_b) e_b^* + G_b \nu_a \\ z_b^* = (H_b + N_b C_b) e_b^* \\ \tilde{y}_b^* = C_b e_b^* \\ \nu_b = -\phi_b(z_b^*, \sigma_b) \end{cases} \quad (3.11)$$

Observe que

$$\begin{aligned} & G_a \tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) - \phi_\beta(e_b; x_b) \\ &= G_a [\psi_a(\sigma_a + z_a^*; x_b) - \psi_a(\sigma_a + z_a^*; e_b + x_b)] - [\mu(x_b) - \mu(e_b + x_b)] \end{aligned}$$

Si la entrada perturbadora  $e_b$  es igual a cero, entonces

$$G_a [\psi_a(\sigma_a + z_a^*; x_b) - \psi_a(\sigma_a + z_a^*; 0 + x_b)] - [\mu(x_b) - \mu(0 + x_b)] = 0$$

Es así que se puede afirmar que  $\delta(\sigma_a, z_a^*; x_b, 0) = 0$  para toda  $\sigma_a, z_a^*, x_b$ , esto es,  $\delta(\cdot)$  es desvaneciente en  $e_b = 0$ .

**Lema 3.1** *Si el término de interconexión  $\delta$  del sistema en cascada es desvaneciente en el origen, el sistema será global y exponencialmente estable y el observador interconectado (3.8)-(3.7) será un observador global y exponencial para el sistema en cascada (1.4)-(1.3)*

**Demostración.** Con  $V = e_a^T P e_a$  como función candidata para el sistema (3.10), se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PG \\ G^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} + \delta^T P e_a + e_a^T P \delta \\ &\leq -\varepsilon e_a^T P e_a + \delta^T P e_a + e_a^T P \delta \\ &\leq -\varepsilon \lambda_{\min}(P) \|e_a\|^2 + 2L \lambda_{\max}(P) \|e_b\| \|e_a\| \\ &\leq -(1-\theta)\varepsilon \lambda_{\min}(P) \|e_a\|^2 - \theta\varepsilon \lambda_{\min}(P) \|e_a\|^2 + 2L \lambda_{\max}(P) \|e_b\| \|e_a\|\end{aligned}$$

de donde

$$\|e_a\| \geq \frac{2L \lambda_{\max}(P) \|e_b\|}{\varepsilon \theta \lambda_{\min}(P)}$$

de esta manera,

$$\dot{V} \leq -(1-\theta)\varepsilon \lambda_{\min}(P) \|e_a\|^2 \quad \forall \quad \|e_a\| \geq \frac{2L \lambda_{\max}(P) \|e_b\|}{\varepsilon \theta \lambda_{\min}(P)}, \quad 0 < \theta < 1, \quad L < \infty$$

concluyendo así que el sistema (3.10) es entrada-estado estable con respecto a la perturbación  $e_b$ , siempre que

$$L \|e_b\| \leq \frac{\varepsilon \theta \lambda_{\min}(P)}{2 \lambda_{\max}(P)} \|e_a\|$$

■

### Estabilidad de la Dinámica de Error en Cascada

**Teorema 3.1** *Considere la interconexión en cascada de dos sistemas (3.11) y (3.10). Se sabe por hipótesis que el sistema (3.11) es global y exponencialmente estable. Si además el sistema (3.10) es entrada-estado estable ante una entrada*

$e_b$ , entonces la interconexión en cascada (3.11)-(3.10) es global y asintóticamente estable, y por lo tanto el observador interconectado (3.8)-(3.7) será un observador global y exponencial para el sistema en cascada (1.4)-(1.3)

**Demostración.** Suponga un instante inicial  $t_0 \geq 0$ , tal que  $t_0 \leq t$ . Se sabe que las soluciones de (3.4) y (3.10) satisfacen las cotas

$$\|e_a(t)\| \leq \beta_a(\|e_a(s)\|, t-s) + \gamma_a\left(\sup_{s \leq \tau \leq t} \|e_b(\tau)\|\right) \quad (3.12)$$

y

$$\|e_b(t)\| \leq \beta_b(\|e_b(s)\|, t-s) \quad (3.13)$$

donde  $\beta_a$  y  $\beta_b$  son funciones clase  $\mathcal{KL}$  y  $\gamma_a$  es de clase  $\mathcal{K}$ .

Sustituyendo  $s = \frac{t+t_0}{2}$ , en (3.12) se tiene

$$\|e_a(t)\| \leq \beta_a\left(\left\|e_a\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\|, \frac{t-t_0}{2}\right) + \gamma_a\left(\sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \tau \leq t} \|e_b(\tau)\|\right) \quad (3.14)$$

El estimado de  $e_a\left(\frac{t+t_0}{2}\right)$  se obtiene empleando  $s = t_0$  y reemplazando  $t$  por  $\frac{t+t_0}{2}$  en (3.12), así

$$\left\|e_a\left(\frac{t+t_0}{2}\right)\right\| \leq \beta_a\left(\|e_a(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right) + \gamma_a\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|e_b(\tau)\|\right) \quad (3.15)$$

considerando que  $t_0 \leq \frac{t+t_0}{2} \leq t$ , de (3.13) se obtienen

$$\sup_{t_0 \leq \tau \leq \frac{t+t_0}{2}} \|e_b(\tau)\| \leq \beta_b(\|e_b(t_0)\|, 0) \quad (3.16)$$

y

$$\sup_{\frac{t+t_0}{2} \leq \tau \leq t} \|e_b(\tau)\| \leq \beta_b\left(\|e_b(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right) \quad (3.17)$$

sustituyendo (3.15), (3.16) y (3.17) en (3.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \|e_a(t)\| &\leq \beta_a\left(\beta_a\left(\|e_a(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right) + \gamma_a(\beta_b(\|e_b(t_0)\|, 0)), \frac{t-t_0}{2}\right) + \\ &+ \gamma_a\left(\beta_b\left(\|e_b(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

empleando la desigualdad

$$\|e(t)\| \leq \|e_a(t)\| + \|e_b(t)\|$$

finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \|e(t)\| \leq & \beta_a \left( \beta_a \left( \|e_a(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2} \right) + \gamma_a(\beta_b(\|e_b(t_0)\|, 0)), \frac{t-t_0}{2} \right) + \\ & + \gamma_a \left( \beta_b \left( \|e_b(t_0)\|, \frac{t-t_0}{2} \right) \right) + \beta_b(\|e_b(t_0)\|, t-t_0) \end{aligned} \quad (3.18)$$

la cual es posible verificar que es una función de clase  $\mathcal{KL}$ . ■

Obteniendo estimados de (3.13) y (3.12) y sustituyéndolos en el estimado (3.13) es posible obtener un solo estimado para la solución de la dinámica de error en cascada, el cual es una función de clase  $\mathcal{KL}$ , asegurando así la convergencia del observador interconectado. La anterior es una condición de suficiencia que asegura la estabilidad de la dinámica del error del sistema interconectado.

## 3.2. Diseño de Observadores para Sistemas en Retroalimentación

Suponga ahora que los sistemas  $\Sigma_a$  y  $\Sigma_b$  se encuentran interconectados en realimentación mediante funciones del estado las cuales pueden ser interpretadas como entradas perturbadoras, de tal manera que ahora tenemos 2 sistemas perturbados conectados entre si.

Para el diseño de los observadores nuevamente se desprecian las interconexiones y posteriormente se conectan los subsistemas con sus respectivos observadores.

### 3.2.1. Primera Etapa de Diseño

La dinámica de los sistemas  $\Sigma_b$  y  $\Sigma_a$  interconectados en realimentación presenta las formas (1.5) y (1.6) descritas en el capítulo 1. Ahora ambos subsistemas incluyen una función de perturbación. Los observadores para los subsistemas perturbados se proponen con la siguiente estructura

$$\Omega_a : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = A_a \hat{x}_a + L_a(\hat{y}_a - y_a) + \mu(x_b) + G_a \psi_a(\hat{\sigma}_a + N_a(\hat{y}_a - y_a); x_b) + \\ + \varphi_a(t, y, u) \\ \hat{y}_a = C_a \hat{x}_a \\ \hat{\sigma}_a = H_a \hat{x}_a \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\Omega_b : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_b = A_b \hat{x}_b + L_b(\hat{y}_b - y_b) + \mu(x_a) + G_b \psi_b(\hat{\sigma}_b + N_b(\hat{y}_b - y_b); x_a) + \\ + \varphi_b(t, y, u) \\ \hat{y}_b = C_b \hat{x}_b \\ \hat{\sigma}_b = H_b \hat{x}_b \end{cases} \quad (3.20)$$

En esta etapa de diseño se considera que tanto  $x_a$  como  $x_b$  son accesibles, lo cual dejará de ser cierto al momento de reconectar los sistemas. Siendo  $\hat{x}_b = x_b$  y  $\hat{x}_a = x_a$ , las dinámicas de error presentan la siguiente estructura matemática:

$$\Xi_a : \begin{cases} \dot{e}_a = A_{La} e_a + G_a \nu_1 \\ z_a = (H_a + N_a C_a) e_a \\ \tilde{y}_a = C_a e_a \\ \nu_1 = -\phi_a(z_a, \sigma_a; x_b) \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\Xi_b : \begin{cases} \dot{e}_b = A_{Lb} e_b + G_b \nu_2 \\ z_b = (H_b + N_b C_b) e_b \\ \tilde{y}_b = C_b e_b \\ \nu_2 = -\phi_b(z_b, \sigma_b; x_a) \end{cases} \quad (3.22)$$

Los sistemas (3.21) y (3.22) son disipativos con respecto a las tazas de suministro  $w_a = (Q_a, S_a, R_a)$  y  $w_b = (Q_b, S_b, R_b)$  y cuentan con funciones de almacenamiento cuadráticas  $V_a = e_a^T P_a e_a$  y  $V_b = e_b^T P_b e_b$  respectivamente.

Las ganancias de observación  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $N_a$  y  $N_b$  se diseñan de tal manera que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$ , ello se logra buscando  $P_a = P_a^T > 0$ ,  $P_b = P_b^T > 0$ ,  $\varepsilon_a > 0$  y  $\varepsilon_b > 0$ , que junto con  $L_a$ ,  $L_b$ ,  $N_a$  y  $N_b$  apropiadas satisfagan las desigualdades matriciales

$$\begin{bmatrix} P_a A_{aL} + A_{aL}^T P_a + \varepsilon_a P_a + H_{aN}^T R_a H_{aN} & P_a G_a - H_{aN}^T S_a^T \\ G_a^T P_a - S_a H_{aN} & Q_a \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} P_b A_{bL} + A_{bL}^T P_b + \varepsilon_b P_b + H_{bN}^T R_b H_{bN} & P_b G_b - H_{bN}^T S_b^T \\ G_b^T P_b - S_b H_{bN} & Q_b \end{bmatrix} \leq 0$$

correspondientes a los sistemas  $\Sigma_a$  y  $\Sigma_b$ .

### 3.2.2. Segunda Etapa de Diseño

Los observadores sufren una alteración debido a que, al realizar la interconexión  $\mu(\hat{x}_b) \neq \mu(x_b)$  y  $\mu(\hat{x}_a) \neq \mu(x_a)$ , debido a que  $\hat{x}_b \neq x_b$  y  $\hat{x}_a \neq x_a$ . Esto provoca que en la dinámica de error aparezcan términos de perturbación adicionales

$$\begin{aligned} \mu(x_a) - \mu(\hat{x}_a) &= \mu(x_a) - \mu(e_a + x_a) = \phi_\alpha(e_a; x_a) \\ \mu(x_b) - \mu(\hat{x}_b) &= \mu(x_b) - \mu(e_b + x_b) = \phi_\beta(e_b; x_b) \end{aligned}$$

de tal manera que la dinámica del observador considerando la interconexión adquiere la forma

$$\Omega_a^* : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a^* = A_a \hat{x}_a^* + L_a(\hat{y}_a^* - y_a) + \mu(\hat{x}_b) + G_a \psi_a(\hat{\sigma}_a^* + N_a(\hat{y}_a^* - y_a); \hat{x}_b) + \\ + \varphi_a(t, y, u) \\ \hat{y}_a^* = C_a \hat{x}_a^* \\ \hat{\sigma}_a^* = H_a \hat{x}_a^* \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\Omega_b^* : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_b^* = A_b \hat{x}_b^* + L_b(\hat{y}_b^* - y_b) + \mu(\hat{x}_a) + G_b \psi_b(\hat{\sigma}_b^* + N_b(\hat{y}_b^* - y_b); \hat{x}_a) + \\ + \varphi_b(t, y, u) \\ \hat{y}_b^* = C_b \hat{x}_b^* \\ \hat{\sigma}_b^* = H_b \hat{x}_b^* \end{cases} \quad (3.24)$$

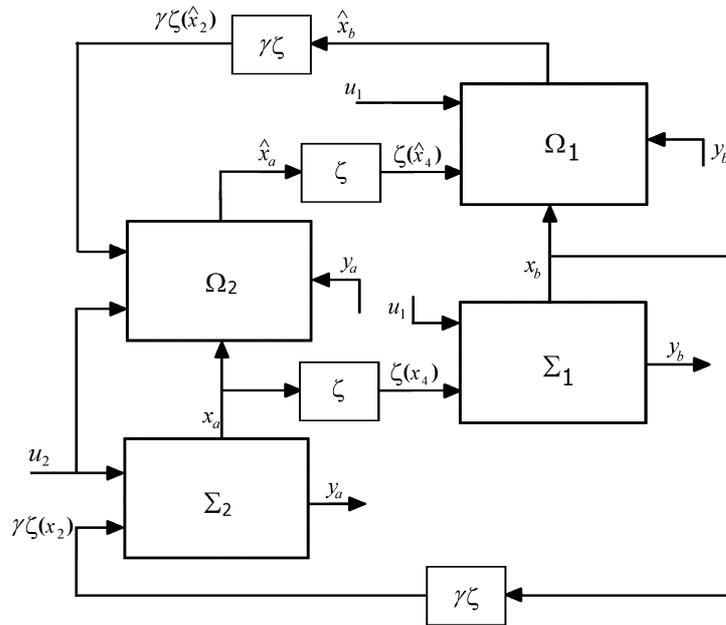


Figura 3.3: Observadores  $\Omega_a$  y  $\Omega_b$  interconectados. Caso Realimentación.

A diferencia de lo que ocurre en el caso de interconexión en cascada, en la interconexión en realimentación ambas dinámicas  $\Omega_a^*$  y  $\Omega_b^*$  resultan alteradas

con respecto a  $\Omega_a$  y  $\Omega_b$  en sus versiones —llámense— *no interconectadas*. Esto surge como efecto de la interconexión de los sistemas con sus respectivos observadores lo cual provoca la pérdida de accesibilidad de el término de interconexión, y se denota marcando a los estados observados interconectados como  $\hat{x}_a^*$  y  $\hat{x}_b^*$ . Los errores de estimación  $e_a$  y  $e_b$  quedan redefinidos como  $e_a^* \triangleq \hat{x}_a^* - x_a$  y  $e_b^* \triangleq \hat{x}_b^* - x_b$  respectivamente.

Las dinámicas del error de  $\Xi_a$  y  $\Xi_b$  quedan modificadas de la siguiente manera

$$\Xi_a^* : \begin{cases} \dot{e}_a^* = A_{La}e_a^* + G_a\nu_a + G_a\tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) - \phi_\beta(e_b; x_b) \\ z_a^* = (H_a + N_aC_a)e_a^* \\ \tilde{y}_a^* = C_a e_a^* \\ \nu_a = -\phi_a(z_a^*, \sigma_a, x_b) \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\Xi_b^* : \begin{cases} \dot{e}_b^* = A_{Lb}e_b^* + G_b\nu_b + G_b\tilde{\phi}_b(\sigma_b, z_b^*; x_a, e_a) - \phi_\alpha(e_a; x_a) \\ z_b^* = (H_b + N_bC_b)e_b^* \\ \tilde{y}_b^* = C_b e_b^* \\ \nu_b = -\phi_b(z_b^*, \sigma_b, x_a) \end{cases} \quad (3.26)$$

Donde

$$\phi_\beta(e_b; x_b) = \mu(x_b) - \mu(e_b + x_b)$$

$$\phi_\alpha(e_a; x_a) = \mu(x_a) - \mu(e_a + x_a)$$

$$\phi_a(z_a^*, \sigma_a; x_b) = \psi_a(\sigma_a; x_b) - \psi_a(\sigma_a + z_a^*; x_b)$$

$$\phi_b(z_b^*, \sigma_b; x_a) = \psi_b(\sigma_b; x_a) - \psi_b(\sigma_b + z_b^*; x_a)$$

$$\tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) = \psi_a(\sigma_a + z_a^*; x_b) - \psi_a(\sigma_a + z_a^*; e_b + x_b)$$

$$\tilde{\phi}_b(\sigma_b, z_b^*; x_a, e_a) = \psi_b(\sigma_b + z_b^*; x_a) - \psi_b(\sigma_b + z_b^*; e_a + x_a)$$

considerando

$$\delta_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) = G_a \tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) - \phi_\beta(e_b; x_b) \quad (3.27)$$

$$\delta_b(\sigma_b, z_b^*; x_a, e_a) = G_b \tilde{\phi}_b(\sigma_b, z_b^*; x_a, e_a) - \phi_\alpha(e_a; x_a) \quad (3.28)$$

de lo cual se obtiene

$$\Xi_a^* : \begin{cases} \dot{e}_a^* = A_{La} e_a^* + G_a \nu_a + \delta_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) \\ z_a^* = (H_a + N_a C_a) e_a^* \\ \tilde{y}_a^* = C_a e_a^* \\ \nu_a = -\phi_a(z_a^*, \sigma_a, x_b) \\ \delta_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) = G_a \tilde{\phi}_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) - \phi_\beta(e_b; x_b) \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\Xi_b^* : \begin{cases} \dot{e}_b^* = A_{Lb} e_b^* + G_b \nu_b + \delta_b(\sigma_b, z_b^*; x_a, e_a) \\ z_b^* = (H_b + N_b C_b) e_b^* \\ \tilde{y}_b^* = C_b e_b^* \\ \nu_b = -\phi_b(z_b^*, \sigma_b, x_a) \\ \delta_b(\sigma_b, z_b^*; x_a, e_a) = G_b \tilde{\phi}_b(\sigma_b, z_b^*; x_a, e_a) - \phi_\alpha(e_a; x_a) \end{cases} \quad (3.30)$$

Donde  $\delta(\sigma, z^*; x, 0) = 0, \forall \sigma, z^*, x$ , es decir,  $\delta(\cdot)$  es desvaneciente en  $e = 0$ .

Finalmente se obtienen dos dinámicas perturbadas entre si debido a la interconexión. Para esta clase de sistemas aún es posible encontrar, bajo ciertas restricciones, una función de Lyapunov que garantice estabilidad para la interconexión en realimentación.

### Estabilidad del Sistema en Retroalimentación

Considere los sistemas

$$\dot{e}_a^* = A_{La} e_a^* + G_a \nu_a + \delta_a(\sigma_a, z_a^*; x_b, e_b) \quad (3.31)$$

$$\dot{e}_b^* = A_{Lb} e_b^* + G_b \nu_b + \delta_b(\sigma_b, z_b^*; x_a, e_a) \quad (3.32)$$

Como sistemas perturbados de la forma (2.31) y (2.32) en donde  $\delta_a$  y  $\delta_b$  aparecen debido a la interconexión del sistema.

Para ambos subsistemas aislados (3.21) y (3.22) hemos encontrado funciones de Lyapunov  $V_a(e_a, t)$  y  $V_b(e_b, t)$  positivas definidas tales que sus derivadas en la trayectoria de sus respectivos sistemas son negativas definidas. Si sus respectivas perturbaciones  $\delta_a$  y  $\delta_b$  satisfacen

$$\begin{aligned}\|\delta_a\| &\leq \gamma_{aa} \|e_a\| + \gamma_{ab} \|e_b\| \\ \|\delta_b\| &\leq \gamma_{ba} \|e_a\| + \gamma_{bb} \|e_b\|\end{aligned}$$

y a su vez, los elementos  $\gamma$  de estas cumplen las cotas

$$\gamma_{aa} < \frac{\varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a)}{2\lambda_{\max}(P_a)} \quad (3.33)$$

y

$$\gamma_{bb} < \frac{\varepsilon_b \lambda_{\min}(P_b)}{2\lambda_{\max}(P_b)} - \frac{(\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} + \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba})^2}{2\lambda_{\max}(P_b)(\varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a) - 2\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{aa})} \quad (3.34)$$

ya son localmente lipschitz en  $e$ , entonces es posible concluir el siguiente lema:

**Lema 3.2** *la interconexión de los sistemas (3.29) y (3.30) será asintóticamente estable si para los elementos de las cotas (2.39) y (2.40) se cumplen (3.33) y (3.34). Si lo anterior ocurre, el observador interconectado (3.24),(3.23) será un observador global y asintótico para el sistema retroalimentado (1.6),(1.5).*

**Demostración.** Se conoce que (3.21) y (3.22) son global y exponencialmente estables.  $\delta_a$  y  $\delta_b$  de (3.29) y (3.30) satisfacen

$$\begin{aligned}\|\delta_a\| &\leq \gamma_{aa} \|e_a\| + \gamma_{ab} \|e_b\| \\ \|\delta_b\| &\leq \gamma_{ba} \|e_a\| + \gamma_{bb} \|e_b\|\end{aligned}$$

La función de Lyapunov compuesta de la dinámica de error es

$$\begin{aligned} V &= V_a + V_b = e_a^T P_a e_a + e_b^T P_b e_b \\ &= \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_a & 0 \\ 0 & P_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mientras que su derivada satisface

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a) - 2\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{aa} & -\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} - \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba} \\ -\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} - \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba} & \varepsilon_b \lambda_{\min}(P_b) - 2\lambda_{\max}(P_b)\gamma_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Para que (3.35) sea negativa definida, se requiere que se cumplan

$$\gamma_{aa} < \frac{\varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a)}{2\lambda_{\max}(P_a)}$$

y

$$\gamma_{bb} < \frac{\varepsilon_b \lambda_{\min}(P_b)}{2\lambda_{\max}(P_b)} - \frac{(\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{ab} + \lambda_{\max}(P_b)\gamma_{ba})^2}{2\lambda_{\max}(P_b)(\varepsilon_a \lambda_{\min}(P_a) - 2\lambda_{\max}(P_a)\gamma_{aa})}$$

Siendo la dinámica de error asintóticamente estable bajo las anteriores restricciones. ■

### 3.3. Ejemplos

#### 3.3.1. Diseño de Observadores Interconectados en Cascada

Suponga dos sistemas matemáticos  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  con la forma

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_a = Ax_a + B_a u_a + G\psi(\sigma_a) \\ y_a = C_a x_a \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_b = Ax_b + B_b u_2 + G\psi(\sigma_b) \\ y_b = C_b x_b \end{cases}$$

Donde

$$x_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u_a = \begin{bmatrix} \zeta(x_4) \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$G = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_b = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_a = Hx_a = x_2, \psi(\sigma_a) = \sigma_a^3 - 2\sigma_a, \sigma_b = Hx_b = x_4, \psi(\sigma_b) = \sigma_b^3 - 2\sigma_b.$$

Los dos sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  antes mencionados están conectados en cascada. Para diseñar el observador de  $\Sigma_1$ ,  $x_4$  se supone medible.

Derivando las salidas  $y_a$  y  $y_b$  dos veces se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{y}_a &= -y_a + x_2^3 - x_2 \\ \dot{y}_b &= -y_b + x_4^3 - x_4 \\ \ddot{y}_a &= -\dot{y}_a + x_2^3 - x_2 \\ \ddot{y}_b &= -\dot{y}_b + x_4^3 - x_4\end{aligned}$$

Finalmente, los sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son observables puesto que

$$\begin{aligned}x_1 = y_a, \quad x_2 &= -\frac{3}{2}y_a - 2\dot{y}_a - \frac{1}{2}\ddot{y}_a \\ x_3 = y_b, \quad x_4 &= -\frac{3}{2}y_b - 2\dot{y}_b - \frac{1}{2}\ddot{y}_b\end{aligned}$$

Dada la estructura de los sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , observadores apropiados para ambos sistemas tendrán la forma

$$\begin{aligned}\Omega_1 : \quad &\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = A\hat{x}_a + L_a\tilde{y}_a + B_a u_a + G\psi(\hat{\sigma}_a + N_a\tilde{y}_a) \\ \hat{y}_a = C_a\hat{x}_a \end{cases} \\ \Omega_2 : \quad &\begin{cases} \dot{\hat{x}}_b = A\hat{x}_b + L_b\tilde{y}_b + B_b u_2 + G\psi(\hat{\sigma}_b + N_b\tilde{y}_b) \\ \hat{y}_b = C_b\hat{x}_b \end{cases}\end{aligned}$$

Donde  $\tilde{y}_a = \hat{y}_a - y_a$ ,  $\hat{\sigma}_a = H\hat{x}_a$ ,  $\tilde{y}_b = \hat{y}_b - y_b$ ,  $\hat{\sigma}_b = H\hat{x}_b$ .

En esta primera etapa, se considera  $\zeta(\hat{x}_4) = \zeta(x_4)$ . Luego entonces, considere  $e_a \triangleq \hat{x}_a - x_a$ ,  $e_b \triangleq \hat{x}_b - x_b$  de tal manera que

$$\begin{aligned}\dot{e}_a &= A(\hat{x}_a - x_a) + L_a\tilde{y}_a + G\psi(\hat{\sigma}_a + N_a\tilde{y}_a) - G\psi(\sigma_a) \\ \dot{e}_b &= A(\hat{x}_b - x_b) + L_b\tilde{y}_b + G\psi(\hat{\sigma}_b + N_b\tilde{y}_b) - G\psi(\sigma_b)\end{aligned}$$

Las dinámicas  $\Xi$  quedan definidas de la siguiente manera

$$\Xi_1 : \begin{cases} \dot{e}_a &= A_{aL}e_a + G\nu_a \\ z_a &= H_{aN}e_a \\ \nu_a &= -\phi(z_a, \sigma_a) \end{cases}$$

$$\Xi_2 : \begin{cases} \dot{e}_b &= A_L e_b + G\nu_b \\ z_b &= H_{bN}e_b \\ \nu_b &= -\phi(z_b, \sigma_b) \end{cases}$$

Si la no linealidad  $\phi$  es disipativa con  $w = (Q, S, R)$ , y el subsistema lineal  $\Xi_L$  es SSD con respecto a  $w = (-R, S^T, -Q)$ , la dinámica de error es global y exponencialmente estable, si esto ocurre, entonces  $\Omega$  es un observador global y exponencial para  $\Sigma$ . Para que lo anterior ocurra, las matrices  $Q$ ,  $S$  y  $R$  deben ser elegidas de tal manera que caractericen a la no linealidad en un sector.

En este ejemplo se tiene  $(Q, S, R) = (0, -\frac{1}{2}, 2)$ , la parte lineal del sistema debe ser estrictamente disipativa con  $(-R, S^T, -Q) = (-2, -\frac{1}{2}, 0)$ .

Los valores apropiados para  $L$  y  $N$  se obtienen resolviendo la siguiente desigualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \varepsilon P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.36)$$

Con

$$P = P^T > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad N < 0$$

En este ejemplo, los sistemas cuentan con estructuras idénticas y presentan las mismas no linealidades, los observadores presentan la misma estructura y la dinámica del error es igual en ambos sistemas para el caso nominal, esto se aprovecha en el diseño de las ganancias de observador pues debido a las

consideraciones anteriores, es posible emplear las mismas ganancias para ambos sistemas. Por ello, en lugar de resolver dos desigualdades matriciales para  $\Xi_1$  y  $\Xi_2$ , se resuelve únicamente una y se emplean los valores  $L$  y  $N$  obtenidos tanto para  $L_a$  y  $N_a$  como para  $L_b$  y  $N_b$

Expandiendo el bloque (1,1) de la desigualdad,  $PA_L + A_L^T P + \varepsilon P + H_N^T R H_N$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} (2l_1 + \varepsilon - 2)p_{11} + l_2 p_{12} + l_2 p_{21} + 2N^2 & p_{11} + (l_1 + \varepsilon - 2)p_{12} + l_2 p_{22} + 2N \\ p_{11} + (l_1 + \varepsilon - 2)p_{21} + l_2 p_{22} + 2N & p_{12} + p_{21} + (\varepsilon - 2)p_{22} + 2 \end{bmatrix}$$

Expandiendo  $PG - H_N^T S^T$  –bloque (1,2)– se obtiene

$$\begin{bmatrix} p_{11} + \frac{N}{2} \\ p_{21} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

El bloque (2,1) es igual al bloque (1,2) transpuesto, es decir,

$$\begin{bmatrix} p_{11} + \frac{N}{2} & p_{21} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

El bloque (2,2) es simplemente  $Q$ , que en este caso es cero.  $Q = 0$  impide obtener una desigualdad estrictamente menor que cero.

Puesto que  $Q = 0$ , se asume que (3.36) es igual con cero. Siendo así se tendría  $p_{11} = -\frac{N}{2}$  y  $p_{12} = p_{21} = -\frac{1}{2}$ , dado que  $P = P^T$ . El término (2,2) del bloque (1,1) es  $p_{12} + p_{21} + (\varepsilon - 2)p_{22} + 2$ . Igualando a cero y sustituyendo las  $p$  conocidas, se obtiene  $p_{22} = -\frac{1}{(\varepsilon-2)}$

Finalmente,

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{N}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{(\varepsilon-2)} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Para que (3.37) sea positiva definida es necesario que todos sus valores propios sean positivos y ninguno cero.

Ello se cumple si:

- a)  $tr(P) = -\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{\varepsilon-2}\right) > 0$
- b)  $det(P) = \frac{N}{2(\varepsilon-2)} - \frac{1}{2} > 0$
- c)  $(tr(P))^2 - 4(det(P)) = \left(\frac{N}{2} + \frac{1}{\varepsilon-2}\right)^2 - \frac{2N}{\varepsilon-2} + 2 > 0$

Observe que  $N$  y  $\varepsilon$  influyen directamente sobre la positividad de  $P$ . De lo anterior se obtiene:

- $N > \frac{2}{\varepsilon-2}, \quad \frac{2}{\varepsilon-2} < N < 0$
- $\frac{N}{2(\varepsilon-2)} > \frac{1}{2}, \quad N > \varepsilon - 2$  Como  $N < 0, \quad \varepsilon - 2 < 0, \quad \varepsilon < 2$
- $-\frac{N}{\varepsilon-2} > 0$ , solo si  $\varepsilon < 2$

De lo anterior surge la restricción  $0 < \varepsilon < 2$ . Sustituyendo  $p_{12} = p_{21} = -\frac{1}{2}$ ,  $p_{22} = -\frac{1}{(\varepsilon-2)}$  y  $p_{11} = -\frac{N}{2}$  en los elementos (1,1) y (1,2) de la desigualdad matricial se obtiene

$$l_2 = -\frac{N}{2}(2l_1 + \varepsilon - 2) + 2N^2$$

$$l_1 = 2N - \varepsilon + 2$$

Proponiendo  $N = -1$  y  $\varepsilon = 1$ , se tiene  $l_1 = -1$  y  $l_2 = \frac{1}{2}$ . Los valores  $L$  se obtuvieron mediante un sencillo programa condicional. Una vez obtenidos los parámetros de diseño, es posible implementar una simulación numérica. Estos parámetros son empleados tanto por  $\Omega_1$  como por  $\Omega_2$ , puesto su estructura es la misma y obedecen a la misma no linealidad.

Observe que para el diseño individual de los observadores,  $x_4$  se supone medible, mientras que para el diseño interconectado se desconoce  $x_4$ , provocando ello la existencia de la perturbación  $\delta = \zeta(\hat{x}_4) - \zeta(x_4)$ , no así para la segunda

etapa del diseño –Interconexión–. En esta etapa la dinámica que interconecta ambos sistemas en cascada aparece expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \delta = \zeta(\hat{x}_4) - \zeta(x_4) &= \hat{x}_4^3 - x_4^3 \\
 &= \hat{x}_4^3 - x_4^3 - 3\hat{x}_4^2x_4 + 3\hat{x}_4x_4^2 + 3\hat{x}_4^2x_4 - 3\hat{x}_4x_4^2 \\
 &= (\hat{x}_4 - x_4)^3 + 3\hat{x}_4^2x_4 - 3\hat{x}_4x_4^2 \\
 &= e_4^3 + 3(\hat{x}_4^2x_4 - \hat{x}_4x_4^2)
 \end{aligned}$$

La dinámica de error  $\Xi_1$  es

$$\Xi_1 : \begin{cases} \dot{e}_1 &= -e_1 + e_2 + l_1e_1 + \delta - \phi(z_a, \sigma_a) \\ \dot{e}_2 &= -e_2 + l_2e_1 \\ \delta &= e_4^3 + 3(\hat{x}_4^2x_4 - \hat{x}_4x_4^2) \end{cases}$$

o de manera compacta

$$\Xi_1 : \dot{e}_a = A_L e_a + G(\delta - \phi) \quad (3.38)$$

$\Xi_2$  resulta similar, salvo que no incluye a la perturbación que aparece en  $\Xi_1$

$$\Xi_2 : \begin{cases} \dot{e}_3 &= -e_3 + e_4 + l_1e_3 - \phi(z_b, \sigma_b) \\ \dot{e}_4 &= -e_4 + l_2e_3 \end{cases}$$

dicha dinámica se puede reescribir de manera compacta como

$$\Xi_2 : \dot{e}_b = A_L e_b - G\phi \quad (3.39)$$

Mientras que  $\dot{e}_b$  permanece inalterada,  $\dot{e}_a$  ahora incluye un elemento perturbador  $\delta$ . Si el sistema  $\Xi_1$  es entrada-estados estable con  $e_4$  como entrada perturbadora, entonces la cascada será global y asintóticamente estable.

Por hipótesis se sabe que (3.38) es global y asintóticamente estable.

Eligiendo  $V_a = e_a^T P_a e_a$ , se tiene

$$\dot{V}_a \leq -(1 - \theta) \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \|e_a\|^2 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \theta \|e_a\|^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \|e_b\| \|e_a\|$$

Se busca que el término que incluye a  $\theta$  domine al que incluye a la perturbación, esto es

$$\|e_a\| \geq \frac{(3 + \sqrt{5}) \|e_b\|}{2(3 - \sqrt{5})\theta}$$

de donde

$$\dot{V}_a \leq -(1 - \theta) \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \|e_a\|^2, \quad \forall \|e_a\| \geq \frac{(3 + \sqrt{5}) \|e_b\|}{2(3 - \sqrt{5})\theta}, \quad 0 < \theta < 1$$

ello prueba que  $\Xi_1$  es entrada-estados estable. Finalmente, por el teorema 3.1 es posible concluir que la dinámica del sistema en cascada  $\Xi_2 - \Xi_1$  es global y asintóticamente estable.

### 3.3.2. Diseño de Observadores Interconectados en Realimentación

Considere los siguientes sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  descritos como

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_a = Ax_a + B_a u_a + G\psi(\sigma_a) \\ y_a = C_a x_a \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_b = Ax_b + B_b u_b + G\psi(\sigma_b) \\ y_b = C_b x_b \end{cases}$$

Donde

$$x_a = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u_a = \begin{bmatrix} \zeta(x_4) \\ u_1 \end{bmatrix},$$

$$G = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_b = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, B_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u_b = \begin{bmatrix} \zeta(x_2) \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_a = Hx_a = x_2, \psi(\sigma_a) = \sigma_a^3 - 2\sigma_a,$$

$$\sigma_b = Hx_b = x_4, \psi(\sigma_b) = \sigma_b^3 - 2\sigma_b.$$

Observe que los dos sistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  antes mencionados están conectados en realimentación gracias a las funciones  $\zeta(x_4)$  y  $\zeta(x_2)$ .

Los observadores se proponen de la siguiente manera

$$\Omega_1 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = A\hat{x}_a + L_a \tilde{y}_a + B_a u_a + G\psi(\hat{\sigma}_a + N_a \tilde{y}_a) \\ \hat{y}_a = C_a \hat{x}_a \end{cases}$$

$$\Omega_2 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_b = A\hat{x}_b + L_b \tilde{y}_b + B_b u_2 + G\psi(\hat{\sigma}_b + N_b \tilde{y}_b) \\ \hat{y}_b = C_b \hat{x}_b \end{cases}$$

Donde  $\tilde{y}_a = \hat{y}_a - y_a$ ,  $\hat{\sigma}_a = H\hat{x}_a$ ,  $\tilde{y}_b = \hat{y}_b - y_b$ ,  $\hat{\sigma}_b = H\hat{x}_b$ . La diferencia con respecto al ejemplo anterior radica en la entrada  $u_b$  que incluye a la perturbación  $x_2$ . Ahora ambos sistemas se encuentran perturbados.

Considerando  $\zeta(\hat{x}_4) = \zeta(x_4)$  y  $\zeta(\hat{x}_2) = \zeta(x_2)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \Xi_1 : & \begin{cases} \dot{e}_a = A_{aL}e_a + G\nu_a \\ z_a = H_{aN}e_a \\ \nu_a = -\phi(z_a, \sigma_a) \end{cases} \\ \Xi_2 : & \begin{cases} \dot{e}_b = A_{bL}e_b + G\nu_b \\ z_b = H_{bN}e_b \\ \nu_b = -\phi(z_b, \sigma_b) \end{cases} \end{aligned}$$

La estabilidad de ambos sistemas se asegura proponiendo funciones de Lyapunov cuadráticas para cada sistema

$$V = e^T P e$$

de tal manera que

$$\dot{V} \leq -\varepsilon e^T P e$$

La prueba del argumento anterior se encuentra en [9]

Para este ejemplo, las ganancias de los observadores  $L_a$ ,  $N_a$ ,  $L_b$  y  $N_b$  se obtienen igualmente resolviendo la desigualdad matricial, siendo ahora  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 1,9$ ,  $N_a = N_b = -1$  y  $L_a = L_b = [-\frac{19}{10} \quad \frac{1}{20}]^T$ .

En la segunda parte, se considera que  $\zeta(\hat{x}_4) \neq \zeta(x_4)$  y  $\zeta(\hat{x}_2) \neq \zeta(x_2)$ , con ello se obtienen

$$\begin{aligned}\delta_a = \zeta(\hat{x}_4) - \zeta(x_4) &= \hat{x}_4^3 - x_4^3 \\ &= \hat{x}_4^3 - x_4^3 - 3\hat{x}_4^2x_4 + 3\hat{x}_4x_4^2 + 3\hat{x}_4^2x_4 - 3\hat{x}_4x_4^2 \\ &= (\hat{x}_4 - x_4)^3 + 3\hat{x}_4^2x_4 - 3\hat{x}_4x_4^2 \\ &= e_4^3 + 3(\hat{x}_4^2x_4 - \hat{x}_4x_4^2)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\delta_b = \zeta(\hat{x}_2) - \zeta(x_2) &= \hat{x}_2^3 - x_2^3 \\ &= \hat{x}_2^3 - x_2^3 - 3\hat{x}_2^2x_2 + 3\hat{x}_2x_2^2 + 3\hat{x}_2^2x_2 - 3\hat{x}_2x_2^2 \\ &= (\hat{x}_2 - x_2)^3 + 3\hat{x}_2^2x_2 - 3\hat{x}_2x_2^2 \\ &= e_2^3 + 3(\hat{x}_2^2x_2 - \hat{x}_2x_2^2)\end{aligned}$$

ello modifica las dinámicas de error de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\Xi_1 : &\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1 + e_2 + l_1e_1 + \delta_a - \phi_a(z, \sigma) \\ \dot{e}_2 = -e_2 + l_2e_1 \\ \delta_a = e_4^3 + 3(\hat{x}_4^2x_4 - \hat{x}_4x_4^2) \end{cases} \\ \Xi_2 : &\begin{cases} \dot{e}_3 = -e_3 + e_4 + l_1e_3 + \delta_b - \phi_b(z, \sigma) \\ \dot{e}_4 = -e_4 + l_2e_3 \\ \delta_b = e_2^3 + 3(\hat{x}_2^2x_2 - \hat{x}_2x_2^2) \end{cases}\end{aligned}$$

o de manera compacta

$$\begin{aligned}\Xi_1 : \dot{e}_a &= A_L e_a + G(\delta_a - \phi_a) \\ \Xi_2 : \dot{e}_b &= A_L e_b + G(\delta_b - \phi_b)\end{aligned}$$

Donde  $e_a = [e_1 \ e_2]^T$ ,  $e_b = [e_3 \ e_4]^T$ ,  $A_L = \begin{bmatrix} l_1 - 1 & 1 \\ l_2 & -1 \end{bmatrix}$  y  $G = [1 \ 0]^T$ .

Finalmente, la función de Lyapunov a la cual debe su estabilidad el sistema es la siguiente:

$$V = V_a + V_b = e_a^T P_a e_a + e_b^T P_b e_b$$

$$= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\frac{N_a}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{(\varepsilon_a-2)} & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & -\frac{N_b}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{(\varepsilon_b-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

con

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{4} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\gamma_{aa} & -\frac{3+\sqrt{5}}{4}\gamma_{ab} - \frac{3+\sqrt{5}}{4}\gamma_{ba} \\ -\frac{3+\sqrt{5}}{4}\gamma_{ab} - \frac{3+\sqrt{5}}{4}\gamma_{ba} & \frac{3-\sqrt{5}}{4} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\gamma_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix}$$

donde

$$\gamma_{aa} < \frac{(3 - \sqrt{5})}{2(3 + \sqrt{5})}$$

$$\gamma_{bb} < \frac{(3 - \sqrt{5})}{2(3 + \sqrt{5})} - \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\gamma_{ab} + \frac{3+\sqrt{5}}{4}\gamma_{ba}\right)^2}{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\gamma_{aa}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

### 3.3.3. Simulaciones

Habiendo obtenido los valores de  $N$  y  $L$ , se procede a crear los modelos y sus observadores en un software de simulación para posteriormente interconectarlos. Se empleó como entrada un escalón unitario y se obtuvieron las respuestas que a continuación se presentan.

#### Conexión en Cascada

Después de interconectar los subsistemas con sus observadores se obtuvieron las siguientes gráficas

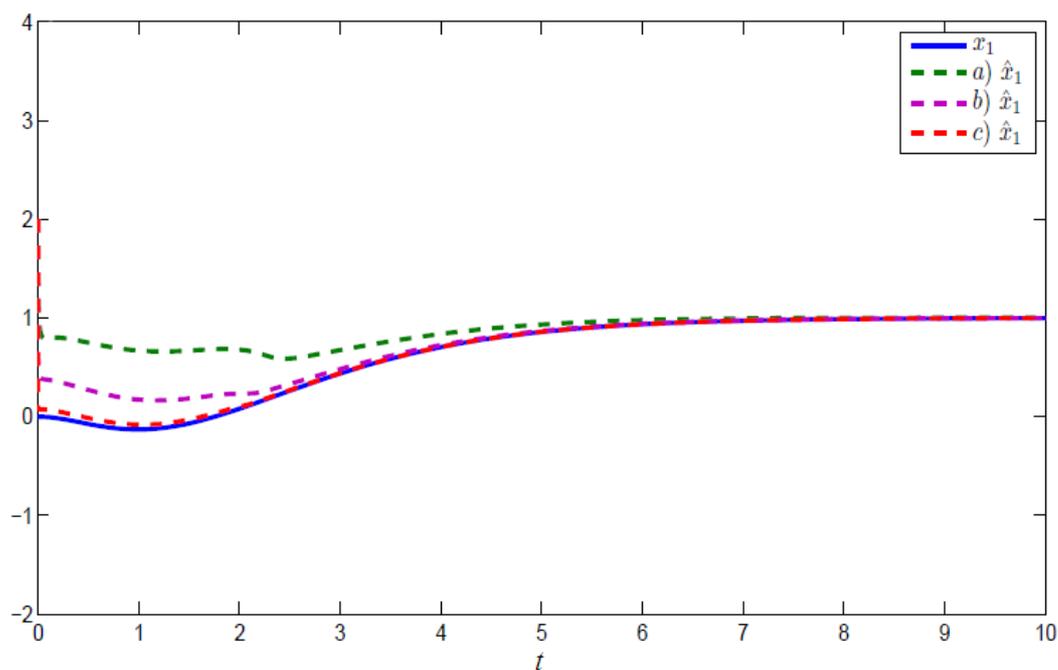


Figura 3.4: Reconstrucción del estado  $x_1$  con a)  $N = -5$ ,  $\varepsilon = 1$  b)  $N = -10$ ,  $\varepsilon = 1.5$  c)  $N = -50$ ,  $\varepsilon = 1.9$ .

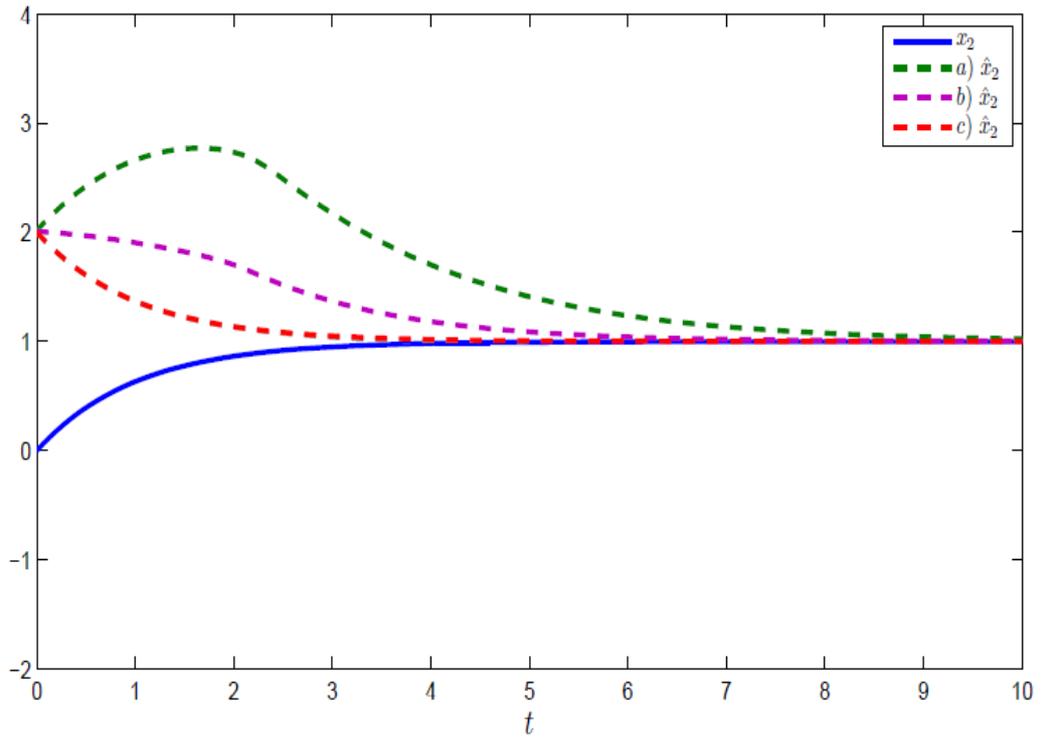


Figura 3.5: Reconstrucción del estado  $x_2$  con a)  $N = -5$ ,  $\varepsilon = 1$  b)  $N = -10$ ,  $\varepsilon = 1.5$  c)  $N = -50$ ,  $\varepsilon = 1.9$ .

A continuación se presenta la gráfica de convergencia del error del sistema en cascada.

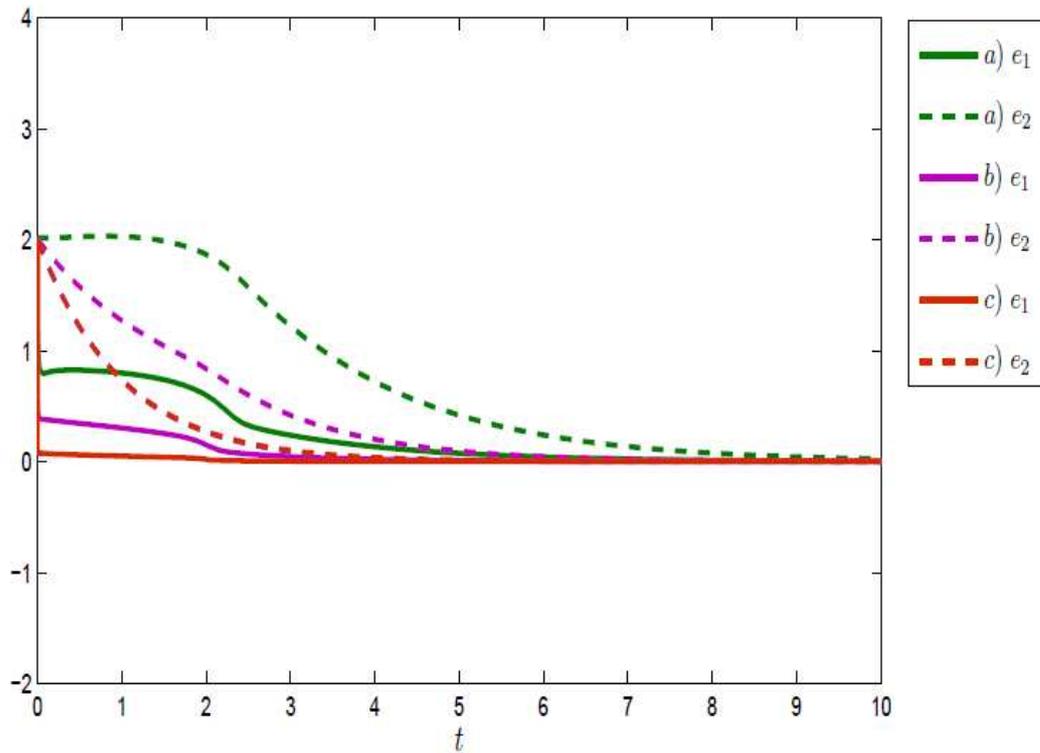


Figura 3.6: Convergencia del error de estimación del sistema en cascada con a)  $N = -5$ ,  $\varepsilon = 1$  b)  $N = -10$ ,  $\varepsilon = 1.5$  c)  $N = -50$ ,  $\varepsilon = 1.9$ .

Es de notar que hacer  $N \rightarrow \infty$ , y al mismo tiempo,  $\varepsilon \rightarrow 2$  acelera la convergencia del observador.

### Conexión en Realimentación

La simulación del sistema en retroalimentación con sus respectivos observadores interconectados arroja los siguientes resultados

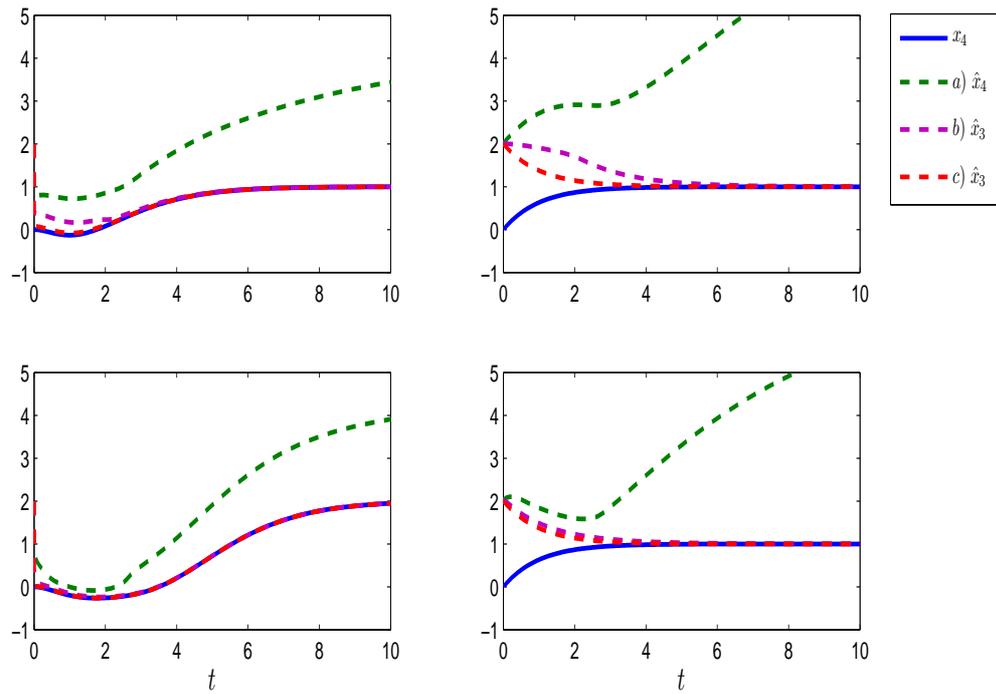


Figura 3.7: Reconstrucción de estados  $x_1$  (sup. izq.),  $x_2$  (sup. der.),  $x_3$  (inf. izq.) y  $x_4$  (inf. der.), del sistema en retroalimentación con a)  $N = -5$ ,  $\varepsilon = 1$  b)  $N = -10$ ,  $\varepsilon = 1.5$  c)  $N = -50$ ,  $\varepsilon = 1.9$ .

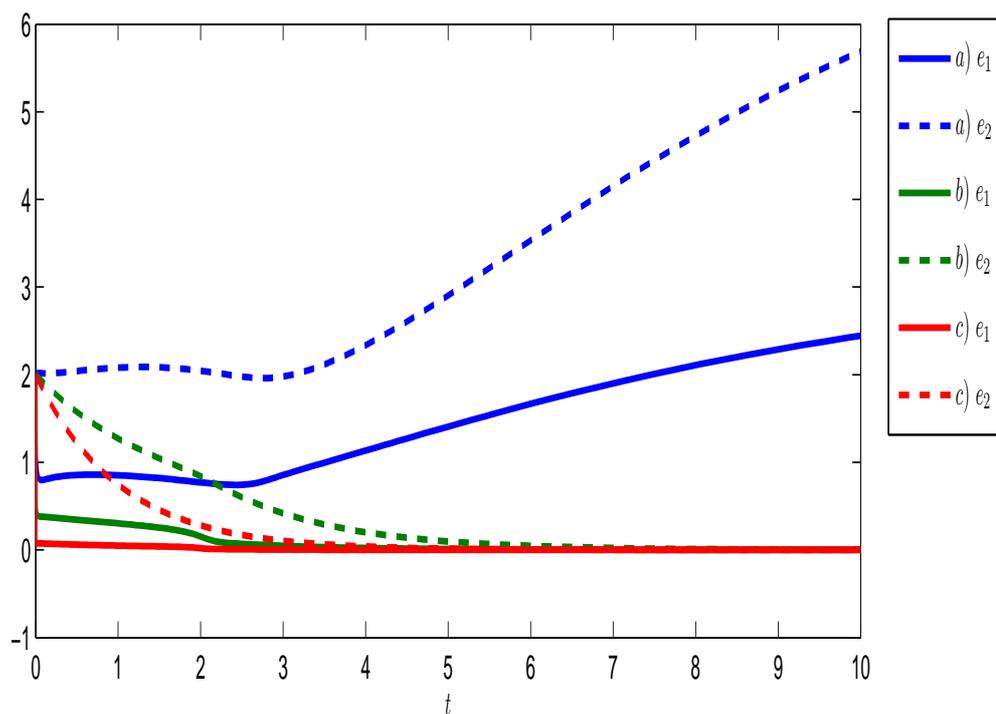


Figura 3.8: Convergencia del error del sistema retroalimentado con a)  $N = -5$ ,  $\varepsilon = 1$  b)  $N = -10$ ,  $\varepsilon = 1.5$  c)  $N = -50$ ,  $\varepsilon = 1.9$ .

Note como valores que funcionaban para el caso en cascada no logran hacer que el observador interconectado en retroalimentación converja. Nuevamente se puede apreciar una mejora en la rapidez de convergencia conforme  $N \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon \rightarrow 2$ .

### 3.4. Conclusiones y Trabajo Futuro

Se obtuvieron condiciones de factibilidad de diseño de observadores interconectados para el caso de interconexión en cascada y en retroalimentación. La metodología presentada es una extensión del método disipativo de diseño de observadores para sistemas interconectados en cascada, ésta da pauta a la extensión de dichas propiedades a  $n$  cantidad de sistemas interconectados en cascada o en retroalimentación, o bien una combinación de ambos.

El diseño de los observadores se facilita debido a que se realiza para los sistemas nominales sin tomar en cuenta las perturbaciones que surgen debido a las interconexiones, lo cual nos permite emplear las funciones de Lyapunov de dichos sistemas para posteriormente realizar el análisis de los sistemas interconectados.

La anterior metodología podría simplificar el trabajo de diseño de observadores para la clase de sistemas mencionados, suponiendo que la descomposición en subsistemas implica la disminución del orden del sistema.

Es deseable emplear los estados recuperados por los observadores presentados para ejercer una acción de control sobre el sistema.

# Bibliografía

- [1] Bao, Jie and Lee, Peter. *Process Control, The Passive Systems Approach*. Springer, Londres, Reino Unido, 2007.
- [2] Boyd, Stephen, El Ghaoui, Laurent, Feron, Eric, and Balakrishnan, Venkataramanan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Filadelfia, Estados Unidos, 1994.
- [3] Brogliato, Bernard, Lozano, Rogelio, Maschke, Bernhard, and Egeland, Olav. *Dissipative Systems Analysis and Control*. Springer, Londres, Reino Unido, 2007.
- [4] Hill, David and Moylan, Peter J. The Stability of Nonlinear Dissipative Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 708–711, Octubre 1976.
- [5] Hill, David J. and Moylan, Peter J. Stability for nonlinear feedback systems. *Automatica*, 13:377–382, 1976.
- [6] Hill, David J. and Moylan, Peter J. Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. *Journal of the Franklin Institute*, 309(5):327–357, mayo 1980.
- [7] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems (Third ed.)*. Prentice–Hall, Upsaddle River, New Jersey, 2002.

- [8] Jaime A. Moreno. Approximate Observer Error Linearization by Dissipativity Methods. In Meurer, Thomas, Graichen, Knut, and Gilles, Ernst Dieter, editors, *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*, volume 322 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 35–51. Springer, Londres, Reino Unido, 2005.
- [9] Jaime A. Moreno Pérez. Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. *IFAC Symposium on Systems, Structure and Control*, 2:735–740, Diciembre 2004d.
- [10] Peter J. Moylan. Implications of passivity in a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(4):1097–1101, Agosto 1974.
- [11] Moylan, Peter J., Vannelli, Antonio, and Vidyasagar, Mathukumalli. On the stability and well-posedness of interconnected nonlinear dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-27(11):1097–1101, Noviembre 1980.
- [12] Sontag, Eduardo D. and Arcak, Murat. Passivity-based stability of interconnection structures. In V.D. Blondel, editor, *Recent Advances in Learning and Control*, pages 195–204. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [13] Arjan Van Der Schaft.  *$L_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control (Second ed.)*. Springer-Verlag, Londres, Reino Unido, 2000.
- [14] Jan C. Willems. Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *IEEE Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44:321–351, 1972a.
- [15] Jan C. Willems. Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic supply rates. *IEEE Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 44:352–393, 1972a.

- [16] Jan C. Willems. The behavioral approach to open and interconnected systems. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 46–99, Diciembre 2007.



# Agradecimientos

A Efrén Lázaro, mi padre, le agradezco el haberme dejado crecer libre y sin preocupaciones. Mi madre, María Zermeño, ha sido todo un ejemplo de vida. Mi hermana Julia –y segunda mamá– cuidó de mí todos los días mientras estuve en la carrera. Mi hermana Greta, nunca me niega una reta de videojuegos –y últimamente, de ajedrez–. Mi segundo padre, Ricardo Lázaro, siempre se mostró tierno y paciente con el más huraño de sus nietos. Mis tíos Taide, Toño, Baudelio y Mary, supieron hacerme sentir como en casa cada vez que los iba a visitar. A Odilio Orozco le agradezco sus cátedras sobre circuitos, sobre baloncesto y sobre la vida.

A mi tutor, el Dr. Jaime Moreno, le agradezco su apoyo académico a lo largo del desarrollo de esta tesis. Mi *tío* científico, el Doctor Leonid Fridman, siempre estuvo al pendiente, y al igual que con mis tíos biológicos, también fui bienvenido en su *casa*. El Doctor Luís Álvarez-Icaza, además de revisar mi tesis y resolverme varias interrogantes, me dió acertados consejos de gran calidad humana. A los doctores Maya Ortiz y Álvarez Calderón –este último muy al pendiente– también les agradezco el haberse tomado la molestia de revisar mi tesis.

Alexander, Lenin y Marisol me ayudaron con dudas sobre el tema, mientras que Jeannette, Saidhy, William, Luís, Marco, Javier, Emilio, Juvenal, Fco. Bañuelos, José Luís, Jesús y mi primo Toño hicieron mas amena mi estancia en el distrito. Al CONACYT le agradezco la beca otorgada sin la cual no hubiese sido posible la realización de este proyecto y finalmente, a todos los profesores del grupo de control les agradezco su paciencia y dedicación.

おわり