



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

**MODELO PARA LA ATENUACIÓN DE SISMOS
INTERPLACA EN LA ZONA DE SUBDUCCIÓN MEXICANA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

P R E S E N T A

MAURICIO ALEXANDER MORA ORTIZ

TUTOR

Dr. MARIO GUSTAVO ORDAZ SCHROEDER



Ciudad Universitaria, México D.F., Octubre de 2009.

Dedicado a mis padres y a mis hermanas

**MODELO PARA LA ATENUACIÓN DE SISMOS INTERPLACA EN LA ZONA DE
SUBDUCCIÓN MEXICANA**

México D.F., Octubre de 2009

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Esteva Maraboto Luis
Secretario:	Dr. Reinoso Angulo Eduardo
Vocal:	Dr. Ordaz Schroeder Mario Gustavo
1 ^{er} . Suplente:	M.I. García Domínguez Octavio
2 ^{do} . Suplente:	Dr. Arroyo Espinoza Danny

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM. MÉXICO D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Mario Gustavo Ordaz Schroeder

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN.....	7
1. MODELOS DE ATENUACIÓN PARA SISMOS DE SUBDUCCIÓN.....	11
1.1. ALGUNOS MODELOS DE ATENUACIÓN PROPUESTOS PARA ESTE TIPO DE SISMOS.....	11
1.2. DESARROLLO DEL FUNCIONAL.....	20
2. DESCRIPCIÓN DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN BAYESIANA LINEAL UNIVARIADA.....	26
2.1. CONCEPTOS BÁSICOS.....	26
2.1.1. Función de verosimilitud de un modelo parametrizado.....	26
2.1.2. Teorema de Bayes.....	29
2.1.3. Inferencia Bayesiana para el modelo lineal.....	30
2.2. APLICACIÓN DEL MODELO DE REGRESIÓN AL CASO UNIVARIADO.....	33
2.3. DESCRIPCIÓN DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN BAYESIANA LINEAL UNIVARIADA.....	39
2.4. MUESTREO DE GIBBS.....	43
2.5. PROCEDIMIENTO PARA LLEVAR A CABO EL ANÁLISIS DE REGRESIÓN BAYESIANO UNIVARIADO.....	47
3. DATOS USADOS Y DEFINICIÓN DE LA INFORMACIÓN A <i>PRIORI</i>.....	52
3.1. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS UTILIZADOS.....	52
3.2. DEFINICIÓN DE LA INFORMACIÓN A <i>PRIORI</i>	59
3.2.1. Definición de valores para los coeficientes de la regresión (α_0) y su matriz de covarianza (Δ).....	59
3.2.2. Definición de los valores esperados <i>a priori</i> de Q , v , a y b	68

4.	RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN Y DEFINICIÓN DEL MODELO DE ATENUACIÓN.....	71
4.1.	CÁLCULO DEL COEFICIENTE $\alpha_i(T)$. (PRIMERA ETAPA DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN).....	71
4.2.	RESULTADOS FINALES (SEGUNDA ETAPA DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN).....	75
5.	COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.....	86
5.1.	SEUDOACELERACIÓN (PSA) COMO FUNCIÓN DE LA MAGNITUD (M_w); DISTANCIA AL PLANO DE FALLA (R) CONSTANTE.....	86
5.2.	SEUDOACELERACIÓN (PSA) COMO FUNCIÓN DE LA DISTANCIA AL PLANO DE FALLA (R); MAGNITUD (M_w) CONSTANTE.....	94
5.3.	ASPECTOS SOBRESALIENTES DE LA COMPARACIÓN CON OTROS MODELOS DE ATENUACIÓN.....	100
6.	EVALUACIÓN DEL PELIGRO SÍSMICO (ACAPULCO).....	105
6.1.	IDENTIFICACIÓN Y DEFINICIÓN DE LAS FUENTES GENERADORAS DE SISMOS.....	105
6.2.	ESPECIFICACIÓN DE LA RELACIÓN DE ATENUACIÓN Y CÁLCULO PROBABILÍSTICO DEL PELIGRO SÍSMICO.....	113
7.	CONCLUSIONES.....	119
	ANEXO A: MODELO DE REGRESIÓN MULTIVARIADA APLICADO A RELACIONES DE ATENUACIÓN DE LA SEUDOACELERACIÓN.....	124
	REFERENCIAS.....	132

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Placas tectónicas y tipos de fallas (Kostoglodov y Pacheco, 1999).....	11
Figura 1.2. Estructura de la zona de subducción y localización de sismos profundos en México (Kostoglodov y Pacheco, 1999).....	12
Figura 1.3. Variación del tercer término del funcional para diferentes valores de magnitud M_w	23
Figura 2.1. Función de densidad de probabilidad normal con media igual a cero y desviación estándar $\sigma =$ (a) θ_1 y (b) θ_2	28
Figura 2.2. Esquema de las observaciones y los datos necesarios para adelantar el análisis de regresión.....	34
Figura 3.1. Epicentros de cada sismo (círculos) y estaciones (triángulos) utilizadas en el presente trabajo. Los triángulos sólidos representan las estaciones acelerográficas y los triángulos sin relleno las estaciones de banda ancha. (Tomada de Pseudo-acceleration attenuation relationships for interface Mexican subduction-zone earthquakes, Arroyo et al., 2008). Las líneas que salen de los círculos y terminan en un triángulo (estación) representan el número de registros de cada sismo.....	54
Figura 3.2. Magnitud contra distancia. Resumen de los datos utilizados en el presente estudio. Los símbolos indican el tipo de dato: los círculos representan los acelerogramas y los rombos los datos de velocidad (banda ancha). (Tomada de Pseudo-acceleration attenuation relationships for interface Mexican subduction-zone earthquakes, Arroyo et al., 2008).....	56
Figura 3.3. Mapa del centro de México, indicando los epicentros (círculos) y las estaciones (triángulos) utilizadas en este estudio. Los símbolos sólidos representan las estaciones acelerográficas y los símbolos sin relleno las estaciones de banda ancha. También se observa la ubicación del cinturón volcánico transmexicano (MVB, por sus siglas en inglés) y la fosa americana (MAT). También se muestran los Estados involucrados en este estudio. El cuadrado gris representa la estación ACAP. (Tomada de Pseudo-acceleration attenuation relationships for interface Mexican subduction-zone earthquakes, Arroyo et al., 2008).....	57
Figura 3.4. Espectros de PSA obtenidos mediante la teoría de vibraciones aleatorias a partir del modelo de fuente puntual de Hanks y McGuire (1981) y Boore (1983).....	64
Figura 3.5. Valores esperados a priori: (a) α_1 , (b) α_2 y (c) α_3 cuando $\alpha_4(T) = 0.0029, 0.01$ y 0.0	66

Figura 4.1. Desviación estándar (σ) como función del parámetro $\alpha_4(T)$ para diferentes periodos: círculos negros ($T=0.0$ s), círculos blancos ($T=0.5$ s), triángulos negros ($T=1.0$ s) y triángulos blancos ($T=5.0$ s)...72

Figura 4.2. Variación del parámetro $\alpha_4(T)$: (a) resultados obtenidos en la primera etapa de la regresión, (b) función suavizada adoptada para la regresión definitiva y (c) comparación de las dos curvas.....73

Figura 4.3. Coeficientes de regresión para el modelo de atenuación propuesto. Comparación entre los valores a priori y los resultados finales: (a) $\alpha_1(T)$, (b) $\alpha_2(T)$, (c) $\alpha_3(T)$, (d) $\gamma_e(T)$, (e) $\sigma(T)$ y (f) Sesgo.....76

Figura 4.4. Residuales obtenidos para el modelo de atenuación como función de la magnitud del sismo, M_w : (a) $T = 0.0$ s, (b) $T = 0.3$ s, (c) $T = 0.5$ s, (d) $T = 1.0$ s, (e) $T = 3.0$ y (f) $T = 5.0$ s.....77

Figura 4.5. Residuales obtenidos para el modelo de atenuación como función de la distancia al plano de falla, R : (a) $T = 0.0$ s, (b) $T = 0.3$ s, (c) $T = 0.5$ s, (d) $T = 1.0$ s, (e) $T = 3.0$ y (f) $T = 5.0$ s.....78

Figura 4.6. Residuales obtenidos para el modelo de atenuación como función de la profundidad focal, H : (a) $T = 0.0$ s, (b) $T = 0.3$ s, (c) $T = 0.5$ s, (d) $T = 1.0$ s, (e) $T = 3.0$ y (f) $T = 5.0$ s.....79

Figura 5.1. PSA contra M_w para $R = 20.83$ Km. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.....88

Figura 5.2. PSA contra M_w para $R = 50$ Km. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.90

Figura 5.3. PSA contra M_w para $R = 100$ Km. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.....91

Figura 5.4. PSA contra M_w para $R = 250$ Km. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.....92

Figura 5.5. PSA contra R para $M_w = 5.0$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.95

Figura 5.6. PSA contra R para $M_w = 6.0$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.96

Figura 5.7. PSA contra R para $M_w = 7.0$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.97

Figura 5.8. PSA contra R para $M_w = 8.0$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.98

Figura 5.9. PSA contra R para $M_w = 8.5$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo.....99

Figura 5.10. Residuales para: (a) el modelo propuesto, (b) modelo de García et al. (2008), (c) modelo de Youngs et al. (1997) y (d) modelo de Atkinson y Boore (2003). (e) Sesgo obtenido con los diferentes modelos y (f) desviación estándar, σ , de cada modelo de atenuación. En todas las gráficas se presentan resultados para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 s.....101

Figura 6.1. Identificación de fuentes generadoras de sismos en la zona de subducción mexicana y localización de Acapulco.....106

Figura 6.2. Ejemplo de la geometría de las fuentes.....107

Figura 6.3. Fuentes generadoras de temblores: (a) fuentes con el modelo de Poisson, (b) fuentes con el modelo característico. En total son 18 fuentes.....109

Figura 6.4. Curvas teóricas de peligro sísmico para Acapulco, calculadas con diferentes modelos de atenuación, y curvas empíricas de peligro sísmico: (a) $T=0.0$ s, (b) $T=0.1$ s, (c) $T=0.4$ s, (d) $T=1.0$ s, (e) $T=2.0$ s y (f) $T=3.0$ s.....115

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Valores del parámetro $\alpha_s(T)$ que se utilizarán para cada periodo T	48
Tabla 2.2. Periodos considerados en el análisis de regresión.....	49
Tabla 3.1. Sismos interplaca utilizados para la regresión.....	55
Tabla 3.2. Datos de magnitud de momento (M_w) y distancia más cercana a la superficie de falla (R) utilizados para determinar el valor esperado a priori de los parámetros de la regresión, α_0	60
Tabla 4.1. Coeficientes definitivos para el modelo de atenuación propuesto.....	82
Tabla 6.1. Definición geométrica de las fuentes generadoras de sismos.....	112
Tabla 6.2. Parámetros para las fuentes con el modelo de ocurrencia de Poisson (eventos pequeños y moderados). En todos los casos $M_0 = 4.5$ y $M_u = 7.2$	112
Tabla 6.3. Tasa de excedencia de $M_0 = 7.0$ para las fuentes con el modelo característico. En todos los casos $M_u = 8.4$, $EM = 7.5$ y $\sigma_M = 0.27$	112

INTRODUCCIÓN

La dinámica tectónica de México, tan compleja, hace que se forme una zona de subducción que comprende toda la costa del Océano Pacífico, desde Puerto Vallarta en el estado de Jalisco, hasta Tapachula, en Chiapas. Aunque no es la única fuente generadora de sismos, sí es la principal, pues en dicha zona se han registrado los sismos más grandes durante el último siglo en México.

En esta zona, como en la mayoría de zonas de subducción del mundo, se producen básicamente dos tipos de sismos con características diferentes: sismos interplaca e intraplaca. Los primeros son someros, con profundidades entre los 5 y 35 *Km*, aproximadamente, y su longitud de ruptura varía entre 50 *Km* y 200 *Km*, razón por la cual pueden llegar a tener magnitudes muy grandes. El otro tipo de sismos ocurre a profundidades mayores a los 40 *Km* y su magnitud suele ser menor; sin embargo, son igualmente peligrosos, debido a que ocurren bajo la zona más poblada del país.

En México, dada la mayor frecuencia de ocurrencia de los sismos de subducción interplaca y debido a que por la escasa profundidad de su foco suelen ser más catastróficos, la mayoría de las investigaciones ha sido dedicada a este tipo de eventos. Este trabajo no se aparta de esa tendencia y se enfocará en el estudio de la atenuación del movimiento de tierra, cuyo origen es la subducción interplaca originada en la costa mexicana del Océano Pacífico.

El objetivo general es proponer un modelo de atenuación que permita aprovechar de la mejor manera la información proveniente de los registros sísmicos obtenidos durante los últimos años, y también, aquella información teórica fruto de la constante labor investigadora de expertos en el campo de la Ingeniería Sismológica. Estas dos fuentes de información son igualmente valiosas.

El modelo propuesto se conforma básicamente de dos partes. En la primera, se debe definir un funcional adecuado para la zona de estudio, basándose en la información teórica disponible. En la segunda parte, debe realizarse un análisis de regresión que permita incorporar la información proveniente de los registros sísmicos, así como parte de la información teórica. Como resultado de lo anterior, se obtendrá una expresión matemática, dependiente del periodo estructural, la magnitud del sismo y la distancia más cercana a la superficie de ruptura, que permitirá pronosticar la intensidad del movimiento del suelo, expresada en términos de pseudoaceleración.

Hace algunos años, las relaciones de atenuación del movimiento del suelo se ajustaban al conjunto de datos disponibles utilizando el método de mínimos cuadrados. Sin embargo, éste dejó de usarse porque la atenuación con la distancia no se pronosticaba correctamente, y en muchas ocasiones, los resultados no eran lógicos desde el punto de vista de la Sismología; además, utilizar el método numérico de mínimos cuadrados implicaba ignorar la correlación existente entre las observaciones hechas en diferentes sitios para el mismo sismo. Para dar solución a estos problemas, se desarrolló el método de la máxima verosimilitud de uno y dos pasos. Actualmente, la mayoría de las relaciones de atenuación se determinan utilizando alguno de estos dos métodos.

En este trabajo se hará uso del análisis de regresión bayesiana. No es la primera vez que este tipo de regresión se utiliza para tal fin, pero debe reconocerse que ha sido utilizado en muy pocas ocasiones. El modelo de regresión bayesiana puede ser multivariado o univariado; cuando es multivariado es posible considerar la correlación existente entre las observaciones que puedan hacerse del mismo evento en diferentes sitios, la correlación entre los coeficientes de la regresión y entre las ordenadas espectrales de pseudoaceleración correspondientes a periodos diferentes. Si el análisis es univariado, sólo pueden ser considerados los dos primeros tipos de correlación.

Un hecho que no admite discusión es que la calidad de los resultados en un proceso de regresión depende en gran medida, aunque no exclusivamente, de la representatividad y cantidad de datos de la muestra. En este tipo de estudios es práctica común utilizar bases de datos que combinan información proveniente de diferentes zonas de subducción alrededor del mundo, para así aumentar el tamaño de la muestra, tal como lo hicieron Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003), entre otros. No obstante, cada zona de atenuación tiene características propias y no resulta conveniente hacer uso de bases de datos globales, pues va en detrimento de la representatividad de la muestra; aunque se tiene presente que en muchas zonas donde no hay suficiente instrumentación o la actividad sísmica es baja, se hace necesario recurrir a datos globales.

En ese orden de ideas, para la regresión que se llevará a cabo más adelante se usarán datos provenientes únicamente de la zona de subducción en el Pacífico mexicano, y por lo tanto, la relación de atenuación que se obtendrá será exclusiva para esta zona.

Otro de los objetivos, una vez se haya realizado la regresión y se tenga definida la relación de atenuación, es evaluar la exactitud de los resultados mediante la comparación con otros modelos de atenuación. Serán considerados los trabajos hechos por García *et al.* (2008), Youngs *et al.* (1997) y

Atkinson y Boore (2003). Adicionalmente, teniendo en mente que la aplicación final de una relación de atenuación es la estimación del peligro sísmico de un sitio específico, la exactitud del modelo propuesto será revisada en el marco del análisis probabilístico del peligro sísmico para la ciudad de Acapulco, en el estado de Guerrero.

Por último, para redondear estas líneas de introducción, debe señalarse que la expresión matemática que quiere encontrarse no tendrá carácter perentorio. En algunos años, cuando la base de datos sea más completa, podrá repetirse el análisis de regresión y de esta forma podrá perfeccionarse el ajuste entre los pronósticos y la realidad.

Es también importante señalar que si bien es cierto que la relación de atenuación será exclusiva para la zona de subducción mexicana, debe valorarse el procedimiento que en general quedará descrito, conformado tanto por la definición del funcional como por el análisis de regresión. Dicho procedimiento sí puede extenderse y aplicarse a otras zonas de subducción, basta con evaluar la conveniencia de la forma del funcional aquí presentado y la pertinencia de la información necesaria para realizar la regresión bayesiana. Obviamente, la base de datos debe contener información propia de ese sitio, y si es el caso (pues cada zona de subducción posee características propias), puede emplearse otra forma para el funcional, con más o con menos variables, lo importante es que se hagan las adaptaciones necesarias para que pueda implementarse el modelo de regresión bayesiana que acá se presenta.

CAPÍTULO 1

MODELOS DE ATENUACIÓN PARA SISMOS DE SUBDUCCIÓN

1. MODELOS DE ATENUACIÓN PARA SISMOS DE SUBDUCCIÓN

1.1. ALGUNOS MODELOS DE ATENUACIÓN PROPUESTOS PARA ESTE TIPO DE SISMOS

Antes de hacer mención de algunos estudios preliminares, es justo describir brevemente la dinámica sismotectónica de la región de subducción en la costa pacífica mexicana. Como puede verse en la figura 1.1, México se encuentra sobre cinco placas tectónicas: la placa Norteamericana, la del Pacífico, las placas de Cocos y Caribe y la microplaca de Rivera. La mayor parte del territorio mexicano está sobre la placa continental Norteamericana, que presenta movimiento muy pequeño.

Las placas oceánicas de Cocos y Rivera chocan frontalmente (régimen convergente o de compresión) con la placa Norteamericana, lo que genera una zona de subducción que se extiende a lo largo de la costa del Pacífico abarcando los estados de Nayarit y Jalisco sobre la placa de Rivera, y Colima, Michoacán, Guerrero, Oaxaca y Chiapas sobre la placa de Cocos.

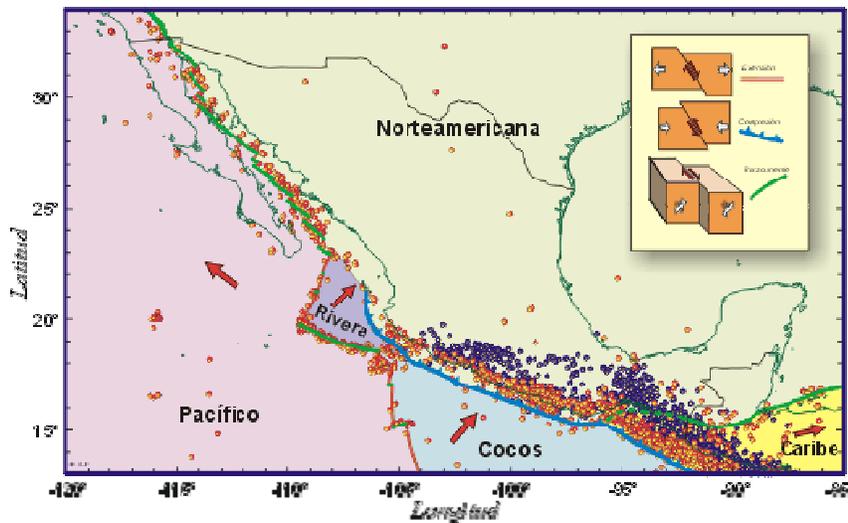


Figura 1.1. Placas tectónicas y tipos de fallas (Kostoglodov y Pacheco, 1999)

En las zonas de subducción (no solamente la del pacífico mexicano), se generan básicamente dos tipos de sismos:

- Sismos interplaca
- Sismos intraplaca

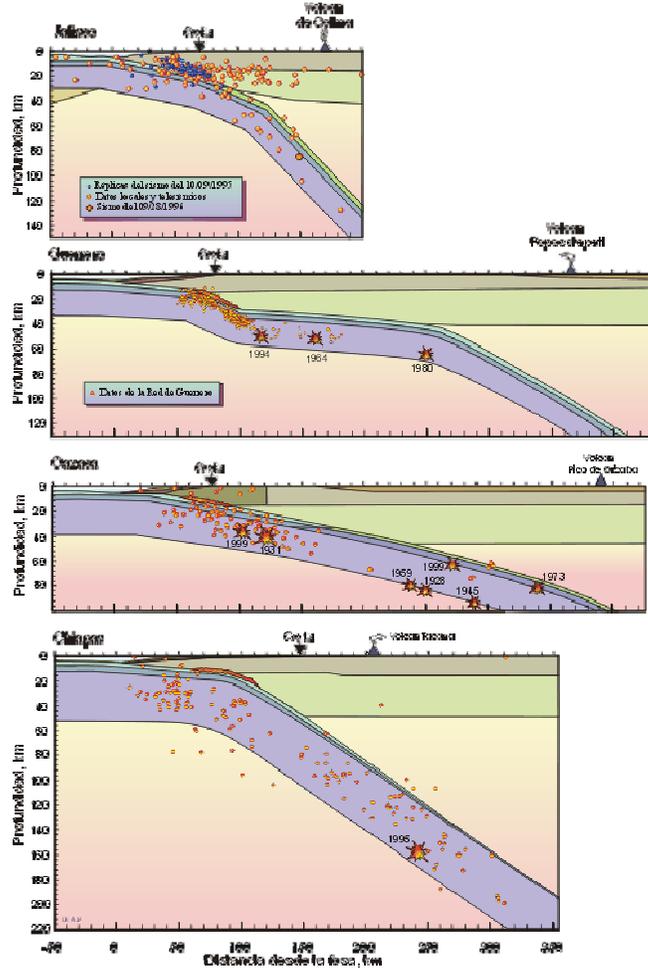


Figura 1.2. Estructura de la zona de subducción y localización de sismos profundos en México (Kostoglodov y Pacheco, 1999)

- *Sismos interplaca*, también llamados de subducción. Se generan por el roce entre la placa Norteamericana y las placas oceánicas de Cocos y Rivera, a lo largo de su zona de contacto (figura 1.1). Estos sismos se consideran superficiales, pues su origen se concentra entre los 5 y 35 *Km* de profundidad, aproximadamente; son más numerosos y presentan mayor tamaño (magnitudes M_w hasta 8.0-8.2 en el siglo XX¹). La longitud de ruptura de los grandes sismos de subducción que se han producido en México en el último siglo varía desde 50 hasta 200 *Km*. El sismo más grande de este tipo que se registró en el último siglo fue el del 3 de Junio de 1932, de magnitud 8.2 en la escala de Richter, ocurrido en las costas de Jalisco. Otro claro ejemplo es el sismo del 19 de septiembre de 1985, ocurrido en las costas de Michoacán y de magnitud 8.1. La longitud de ruptura de este sismo fue 180 *Km* y abarcó prácticamente la totalidad de la costa del estado de Michoacán. Aunque su epicentro se encontraba a más de

¹ D. García; ATENUACIÓN SÍSMICA: APLICACIÓN A TERREMOTOS INTRAPLACA EN MÉXICO CENTRAL. 2001.

200 Km de la Ciudad de México, fue precisamente allí donde se produjo el mayor daño (Kostoglodov y Pacheco, 1999).

- *Sismos intraplaca*, o profundos. Este tipo de eventos ocurre dentro de las placas oceánicas subducidas (Cocos y Rivera) debido a la fractura de éstas y se presenta a profundidades mayores a 30 Km. Existen dos tipos de sismos intraplaca, producto de la diferencia en el estado de esfuerzos predominante en las distintas porciones de la placa en subducción². A profundidades entre los 30 y 45 Km, se generan sismos pequeños o moderados de mecanismo inverso. El otro tipo de sismos presenta un mecanismo de falla normal y tiene lugar a profundidades mayores (45-80 Km), éstos son bastante frecuentes y pueden ser de magnitud grande. En la figura 1.2 se muestran los perfiles de subducción de las placas de Cocos y Rivera en los estados de Jalisco, Guerrero, Oaxaca y Chiapas así como la localización de los focos de sismos de este tipo.

Podría pensarse que los sismos intraplaca son menos peligrosos debido a su mayor profundidad. No obstante, su localización bajo la zona más poblada de México hace que tengan también un gran potencial de daño. Algunos ejemplos de terremotos intraplaca importantes son el de 1964 bajo el río Balsas, el de 1973 bajo Orizaba, el de 1980 bajo Huajuapán y el de 1999 bajo Tehuacán.

El modelo de atenuación que se desarrollará en el presente trabajo y los datos que se utilizarán, corresponden al primer tipo de sismos, es decir, sismos interplaca o de subducción. Las características de los sismos intraplaca son peculiares y por lo tanto la atenuación de este tipo de eventos debe estudiarse de manera separada. Es importante destacar que la mayoría de las investigaciones realizadas en México en este campo se refieren sólo a la sismicidad interplaca. Una de las explicaciones a esta tendencia puede ser su mayor frecuencia de ocurrencia. Sin embargo, los intraplaca tienen la misma importancia y está demostrado que pueden tener casi la misma magnitud y llegar a provocar los mismos daños que un evento interplaca. El trabajo más completo que se ha desarrollado hasta la fecha sobre sismicidad intraplaca en la región Centro Meridional de México fue desarrollado por García *et al.* en 2001. Esta investigación se enfoca en la determinación del factor de calidad $Q(f)$, así como en la determinación de una relación de atenuación.

² D. García; ATENUACIÓN SÍSMICA: APLICACIÓN A TERREMOTOS INTRAPLACA EN MÉXICO CENTRAL. 2001.

A continuación se mencionan sólo las investigaciones preliminares más relevantes, y aquellas que de una u otra forma sirvieron como base para el modelo de atenuación que aquí se presenta. En cada caso se comenta el alcance pretendido por los autores, se hace una breve descripción de los datos con los que trabajaron, se menciona el tipo de regresión utilizada y se reportan las conclusiones más destacadas. Esto, con la intención de tener un marco de referencia claro que permita encontrar las semejanzas y diferencias con el modelo de atenuación que se presenta, así como sus ventajas y limitaciones.

En 1990, Castro *et al.* fueron los primeros en determinar relaciones de atenuación que describieran el decaimiento de la amplitud del espectro de Fourier del movimiento del suelo con la distancia, para diferentes frecuencias ($0.1 < f < 40 \text{ Hz}$), basados en datos de acelerogramas. En este estudio se utilizaron registros de sismos moderados ($4.0 < M < 7.0$) registrados por la red Acelerográfica de Guerrero. También se determinó el factor de calidad Q de la zona, los espectros de fuente y los efectos de sitio.

Para caracterizar la atenuación de las ordenadas espectrales se utilizaron dos metodologías. La primera consistía en encontrar una expresión suavizada para la amplitud de espectro de Fourier como función de la distancia sin utilizar ninguna forma paramétrica y posteriormente la atenuación específica, $Q(f)$, se obtuvo en un segundo paso a partir de curvas no paramétricas. La segunda metodología consistió en adoptar desde un principio una forma paramétrica para determinar el espectro de Fourier del movimiento del suelo y resolver esta ecuación mediante una regresión por mínimos cuadrados. Los resultados obtenidos por ambas metodologías no fueron significativamente diferentes.

Es precisamente la segunda metodología la que se usa en este trabajo para desarrollar la relación de atenuación que se discutirá más adelante, sólo que se utiliza un modelo paramétrico diferente al usado por Castro *et al.* (1990) y se hace uso de una regresión bayesiana multilineal en lugar de mínimos cuadrados.

Un año más tarde, en 1991, Crouse presentó un trabajo cuyo objetivo era encontrar ecuaciones que caracterizaran la atenuación de la aceleración pico (PGA) y el espectro de pseudovelocidad (PSV) con 5% de amortiguamiento en la región de subducción de Cascadia (norte de California, Oregon y Washington en Estados Unidos y Columbia Británica en Canadá) para 10 periodos entre 0.1 y 4.0

segundos. Es importante mencionar que en este trabajo Crouse habla de sismos de subducción, pero no diferencia entre eventos interplaca e intraplaca.

Se utilizó un conjunto de datos de regiones de subducción alrededor del mundo con características análogas a las de Cascadia. La selección hecha por Crouse incluyó acelerogramas del centro de Chile, Perú, México, Alaska y Japón. A partir de esos datos se hicieron regresiones para encontrar ecuaciones, por separado, que caracterizaran la dependencia de la aceleración pico (*PGA*) con: (1) la distancia al centro de liberación de energía, y (2) con la magnitud del sismo. Posteriormente, basados en los resultados de estas regresiones preliminares, se definió la forma final del funcional que combinaba los dos efectos anteriormente mencionados y también tenía en cuenta la tendencia de los sismos a saturar³ con grandes magnitudes. Fue ese funcional, expresado en términos de la magnitud, distancia al centro de liberación de energía y profundidad focal, el que se utilizó para hacer la regresión definitiva.

Las ecuaciones para determinar el espectro de pseudovelocidades (*PSV*), se obtuvieron con el mismo funcional, y a algunos parámetros de la regresión, Crouse les asignó *a priori* los mismos valores obtenidos para la aceleración pico (*PGA*), es decir, consideró que no eran funciones de la frecuencia. De acuerdo con el autor, aplicar estas restricciones a la regresión implicaba una sobreestimación de los valores de pseudovelocidad (*PSV*) para sismos de magnitud pequeña; sin embargo, se obtenían buenos resultados para sismos de gran magnitud, que son las que realmente interesan en aplicaciones en ingeniería, como la construcción de espectros de diseño; de manera que encontró justificada la decisión de asumir, para algunos parámetros, los mismos valores encontrados para la *PGA* en la regresión correspondiente a la pseudovelocidad (*PSV*).

Finalmente, los resultados de los análisis de la regresión se utilizaron para construir espectros de sismos ocurridos en la región de Cascadia y se compararon con los espectros reales. La correlación que se encontró entre la predicción y las observaciones fue en general satisfactoria.

³ La saturación de la aceleración pico del suelo (*PGA*) consiste en que una vez alcanza un valor máximo, no seguirá aumentando (así la magnitud del sismo sí aumente), o lo hará a una tasa cada vez menor. La saturación se presenta cuando se supera una longitud de ruptura máxima (y, por lo tanto, una magnitud máxima); entonces los frentes de ondas generados por fuera de esta zona llegan a un punto en la superficie bastante atenuados, por consiguiente, no producen valores de aceleración muy grandes y la aceleración pico (*PGA*) en la superficie del suelo se produce debido a los frentes de ondas generados dentro de esta zona de ruptura máxima. También influye en la saturación (aunque en menor medida), la fractura del manto rocoso, que se produce cuando se alcanza una magnitud máxima. Las ondas sísmicas no se propagan cuando la roca está fracturada y por tal motivo no alcanzarán la superficie.

Más adelante, en 1994, Ordaz *et al.*, apoyados en principios de la elastodinámica y en modelos de campo lejano y fuente puntual, propusieron un funcional válido para el D.F. que no consideraba la saturación (fenómeno que se presenta sólo en zonas cercanas a la fuente). La forma es la siguiente:

$$\ln A(f) = \alpha_0(f) + \alpha_1(f)M + \alpha_2(f) \ln R + \alpha_3(f)R + \varepsilon \quad (1.1)$$

donde $A(f)$ es la amplitud del espectro de Fourier de aceleraciones. α_i , $i = 0, 1, 2$ y 3 son los parámetros de la regresión, en función de la frecuencia. R es la distancia más cercana al área de ruptura, y M es la magnitud de momento, relacionada con el momento sísmico mediante (Kanamori, 1977), $M = \frac{2}{3} \log M_0 - 10.7$.

Los datos utilizados consistían de un juego de 23 acelerogramas de sismos generados en la zona de subducción de México, registrados en la estación C.U. desde 1965, que abarcaban un rango de magnitudes entre 5.0 y 8.1 y distancias al área de ruptura entre 260 y 466 Km. Adicionalmente, en el análisis de regresión utilizaron por primera vez en México la técnica bayesiana univariada⁴. De esta forma, la relación de atenuación se obtuvo a partir no solamente de las observaciones (datos), como se había hecho hasta el momento con técnicas como mínimos cuadrados, sino que se hizo uso del conocimiento proveniente de otras fuentes, o información *a priori*, de acuerdo con la terminología bayesiana, para imponer ciertas restricciones probabilistas. Sin embargo, debido a la utilización de datos provenientes de una misma estación, la relación de atenuación obtenida no tenía en cuenta la correlación entre observaciones para un mismo sismo registradas en diferentes sitios.

A pesar de su mayor complejidad, este procedimiento generó soluciones numéricas más estables y racionales que aquellas obtenidas mediante técnicas convencionales de ajuste de datos cuyo uso en ese entonces era más común, como regresiones lineales o no lineales mediante mínimos cuadrados. Debido a que éste fue el primer trabajo en México en el que se hizo uso de regresiones bayesianas para determinar relaciones de atenuación, debe valorarse como un punto de inflexión en la evolución de este tipo de análisis, y el presente trabajo se puede considerar como la continuación de la investigación original de Ordaz *et al.* (1994), o en otras palabras, una generalización de la misma.

Posteriormente, en 1997, Youngs *et al.* desarrollaron relaciones de atenuación para la aceleración pico (*PGA*) y la aceleración espectral de 11 periodos (entre 0.075 y 3.0 s) producidas por sismos de

⁴ La técnica de regresión Bayesiana para obtener relaciones de atenuación fue utilizada inicialmente por Veneziano y Heidari (1985)

subducción interplaca e intraplaca, con magnitud de momento (M_w) mayor a 5.0 y distancias entre 10 y 500 Km , entendiéndose el término “distancia” como la longitud más cercana entre el sitio y la superficie de ruptura.

Dentro de la base de datos con la que se trabajó se tenían registros de sismos producidos en zonas de subducción en Alaska, Chile, Cascadia, Japón, México, Perú e Islas Salomón. Puede verse que en ese entonces era práctica común utilizar y combinar los datos de varias regiones de subducción alrededor del mundo. Estos datos se dividieron de acuerdo al origen del evento en dos grupos: interplaca e intraplaca; y a su vez se clasificaron en tres subgrupos: registros sobre roca, suelo poco profundo y rellenos de suelo profundos.

Los autores propusieron dos funcionales con forma similar, uno para la atenuación sobre roca y otro para rellenos de suelo. Cada uno permitía tener en cuenta el tipo de evento (interplaca o intraplaca), de manera que las predicciones obtenidas para cada caso eran diferentes, como debía ser. En el análisis de regresión se utilizó el modelo de efectos aleatorios, que es equivalente a la regresión de dos pasos y a la máxima verosimilitud (Brillinger y Preisler, 1985; Joyner y Boore, 1993).

Se encontró que, para todas las distancias evaluadas, existía una clara diferencia entre la atenuación de la aceleración pico (PGA) en roca y suelo. El valor de PGA es mayor en suelo que en roca y esta diferencia tiende a aumentar en la medida en que aumenta el nivel del movimiento de tierra. Otra importante conclusión obtenida por Youngs *et al.* es que los sismos intraplaca producen valores pico que son en promedio cerca del 50 por ciento más altos que aquellos para sismos interplaca para la misma magnitud y distancia. Con respecto a la predicción de la aceleración en sitios sobre rellenos de suelo, encontraron formas espectrales similares a aquellas derivadas del trabajo presentado por Crouse (1991). En general, la correlación obtenida entre las predicciones y las observaciones fue buena, excepto para distancias menores a 30 – 40 Km , debido principalmente a la ausencia de datos cercanos a la zona de falla.

Atkinson y Boore, en 2003, realizaron una completa investigación sobre relaciones de atenuación para sismos de subducción de los dos tipos: interplaca e intraplaca. La finalidad de este trabajo era encontrar empíricamente una ecuación para cada tipo de evento, que determinara la aceleración pico del suelo (PGA) o el espectro de pseudoaceleración (PSA) para un amortiguamiento del 5%, como función de la magnitud del sismo, la distancia a la zona de falla, la profundidad del foco y el tipo de suelo. Se utilizó una base de datos de registros de eventos con magnitud entre 5.0 y 8.3, ocurridos

en zonas de subducción de diferentes partes del mundo, como Japón, México, Centroamérica y la región de Cascadia. El tamaño del conjunto de observaciones (datos) era cuatro veces más grande que la base de datos disponible para regresiones previas. El funcional utilizado tenía en cuenta la clasificación del suelo de acuerdo con el esquema propuesto por el Programa Nacional para la Reducción del Peligro por Sismo de los Estados Unidos (NEHRP, por sus siglas en inglés) y la incidencia del mismo en el proceso de atenuación de las ondas sísmicas.

El proceso de regresión se llevó a cabo utilizando el método de la máxima verosimilitud (Joyner y Boore, 1993, 1994). Lógicamente, se hicieron regresiones por separado para los eventos interplaca y los intraplaca, debido, como ya se mencionó, a las claras diferencias en la atenuación de estos dos tipos de sismos.

Los resultados permitieron corroborar que los sismos interplaca se atenúan más lentamente con la distancia que los intraplaca. Además se encontró que en las distintas regiones de subducción del mundo, o por lo menos en las que se incluyeron en el análisis, existen variaciones regionales importantes, y se desvirtuó la creencia de que no existía mucha diferencia entre éstas. Por lo tanto, el uso de regresiones a partir de una base de datos global para zonas de subducción, tal como lo habían hecho Crouse en 1991 y Youngs *et al.* en 1997 no está bien justificado. Por ejemplo, se encontró que las amplitudes espectrales en la región de Cascadia difieren por más de un factor de 2 respecto a las de Japón para la misma magnitud, distancia, tipo de evento y clasificación del suelo (NEHRP).

No obstante, en numerosas zonas de subducción sigue siendo necesario calcular relaciones de atenuación a partir de datos recolectados en diferentes regiones del mundo con características análogas, debido a que no se dispone de suficientes estaciones acelerométricas que proporcionen los registros, o porque son zonas que presentan escasa actividad sísmica. Por tal motivo, aunque se sabe que no es recomendable, por necesidad, se sigue haciendo uso de bases de datos globales.

En el caso de la zona de subducción en la costa pacífica mexicana, lo anterior no representa ningún problema, ya que se cuenta con un excelente equipamiento sísmico y desde hace varios años la actividad sísmica se ha elevado, lo que permite disponer de una base de datos grande para el análisis de regresión (aunque no completa). Por lo anterior, y para seguir las recomendaciones de Atkinson y Boore (2003), en este trabajo se utilizarán datos provenientes de la misma zona de subducción, correspondientes a sismos registrados desde 1985 hasta 2004.

Por último, debe mencionarse el proyecto para la nueva generación de relaciones de atenuación (NGA Project⁵); un programa de investigación llevado a cabo durante un periodo de cinco años, cuyo objetivo principal fue desarrollar relaciones de atenuación mejoradas, para sismos poco profundos originados en el oeste de los Estados Unidos y otras regiones tectónicas activas con características similares.

Se conformaron cinco grupos de trabajo, cada uno estuvo liderado por un autor (o autores) de relaciones de atenuación de gran aceptación propuestas recientemente. El objetivo de cada grupo era desarrollar un modelo de atenuación, trabajando independientemente aunque en constante interacción con los demás. Los modelos se desarrollaron para un intervalo bastante amplio de magnitudes, distancias, condiciones de sitio y periodos estructurales; además, aparte de los parámetros comúnmente usados en este tipo de estudios (M_w , R), se incorporaron otros, como por ejemplo, la profundidad del sitio de ruptura, el tipo de falla y los efectos producidos por los rellenos de suelo.

Uno de los mayores aportes de este trabajo fue la expansión y actualización de la base de datos de registros de sismos del Centro de Investigación en Ingeniería de Terremotos del Pacífico (PEER, por sus siglas en inglés), en la que se incluyeron numerosos registros de sismos alrededor del mundo, siguiendo con la tendencia a utilizar bases de datos globales. La muestra utilizada por cada uno de los grupos de trabajo se extrajo de esta base de datos, que constituye una fuente de gran valor para la selección de registros útiles en numerosas aplicaciones en la práctica y la investigación.

Debe reconocerse que la principal diferencia en cuanto al alcance del presente trabajo con respecto a las investigaciones preliminares mencionadas, es que se abarcará sólo el estudio de la atenuación de las ondas generadas por eventos interplaca en suelo firme o roca, sin considerar los efectos del suelo. En cuanto al tipo de regresión, en muy pocos casos (Veneziano y Heidari, 1985; Ordaz *et al.*, 1994 y Reyes, 1998) se ha utilizado la técnica bayesiana. A pesar de ser en general más compleja e implicar un aumento en el esfuerzo numérico, su uso se justifica, de acuerdo con los resultados obtenidos que se presentarán más adelante.

En la siguiente sección se expone el desarrollo teórico seguido para obtener el funcional.

⁵ Special Issue on the Next Generation Attenuation Project. Earthquake Spectra. Volumen 24, Número 1. Febrero de 2008.

1.2. DESARROLLO DEL FUNCIONAL

A continuación se presenta el desarrollo teórico seguido para obtener el funcional que será aplicado en este trabajo para determinar relaciones de atenuación de la aceleración espectral ocasionada por sismos interplaca generados en la región de subducción del pacífico mexicano.

Basados en un modelo de fuente puntual, Hanks y McGuire (1981) y Boore (1983), propusieron una aproximación de la amplitud del espectro de aceleraciones de Fourier a una distancia R (ecuaciones 1.2-1.4), asumiendo el modelo de espectro de fuente ω^{-2} propuesto por Brune en 1970 (ecuación 1.5):

$$A(f) = C F(f) \frac{M_0 f^2}{1+(f/f_c)^2} e^{-\frac{\pi R}{\beta Q_0}} e^{-\frac{\pi \kappa f}{R}} \frac{1}{R} \quad (1.2)$$

$$C = \frac{R_P (2\pi)^2 F_1 P}{4\pi \rho \beta^3} \quad (1.3)$$

$$f_c = 4.91 \times 10^6 \beta \left(\frac{\Delta\sigma}{M_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.4)$$

$$S(f) = \frac{f^2 f_c^2 M_0(f)}{f^2 + f_c^2} \quad (1.5)$$

donde M_0 es el momento sísmico; $\beta = 3.2 \text{ Km/s}$ es la velocidad de las ondas de cortante; $Q_0 = 100$ es el factor de calidad (que caracteriza la atenuación anelástica y el esparcimiento o scattering), $R_P = 0.67$ es el patrón promedio de radiación; $F_1 = 2$ es un factor de corrección que tiene en cuenta los efectos de la amplificación de superficie libre. En los registros obtenidos en estaciones emplazadas sobre la superficie libre de esfuerzos de la Tierra, se genera un efecto de amplificación sobre el desplazamiento generado por la llegada de las ondas. Aki y Richards (1980) demostraron que la amplitud del movimiento generado por la incidencia de las componentes horizontales de una onda de superficie (SH) sobre la superficie de la Tierra es precisamente el doble que la que se observaría en el interior terrestre⁶, esa es la razón por la que $F_1 = 2$. P es otro factor de corrección que se

⁶ D. García; ATENUACIÓN SÍSMICA: APLICACIÓN A TERREMOTOS INTRAPLACA EN MÉXICO CENTRAL. 2001.

utiliza al considerar independientemente las dos componentes horizontales ortogonales (N-S y E-W) de los registros, entonces el factor de corrección P representa la descomposición del vector de aceleraciones en dos vectores ortogonales iguales (uno en cada dirección) y es igual a $\text{Seno}(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. $\rho = 2.8 \text{ gm/cm}^3$ es la densidad del medio; $F(f)$ es un factor que corrige la amplificación de las ondas S mientras éstas se propagan hacia arriba a través de un material que progresivamente va presentando menor velocidad. Se asume aproximadamente igual a 2 para $f > 1 \text{ Hz}$; f_c es la frecuencia de esquina, $\Delta\sigma$ es la caída de esfuerzos y κ es un parámetro de atenuación que corrige los efectos de sitio.

Combinando la ecuación (1.2) y utilizando la aproximación para altas frecuencias, Singh *et al.* (1989) obtuvieron mediante teoría de vibraciones aleatorias las siguientes expresiones para la amplitud del espectro de Fourier (ecuación 1.6) y aceleración cuadrática media del suelo⁷ (ecuación 1.7), válidas para un modelo circular de fuente finita, considerando que la intensidad de la fuente está uniformemente distribuida sobre el área de ruptura.

$$A(f)^2 = 2C^2 F(f)^2 (M_0 f_c^2)^2 e^{-2\pi\kappa f} \left[\frac{E_1(\alpha R) - E_1\left(\alpha \sqrt{R^2 + r_0^2}\right)}{r_0^2} \right] \quad (1.6)$$

$$a_{rms} = \frac{2\sqrt{2} C M_0 f_c^3}{\sqrt{\pi\kappa f_c}} \left[\frac{E_1(\alpha R) - E_1\left(\alpha \sqrt{R^2 + r_0^2}\right)}{r_0^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

Donde r_0 es el radio de la falla, de acuerdo con el modelo de la falla circular (Brune) definido en la ecuación (1.8); $\alpha = 2\pi/\beta Q_0$ y $E_1(x)$ es la función exponencial integral (Abramowitz y Stegun, 1972) presentada en la ecuación (1.9):

$$r_0 = \frac{2.34\beta}{2\pi f_c} \quad (1.8)$$

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = -\ln(x) - \gamma + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} x^i}{i*i!} \quad (1.9)$$

⁷ La aceleración cuadrática media del suelo a_{rms} se entiende como un promedio estadístico del acelerograma. Es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores de aceleración dividida entre el número de datos. De acuerdo con McCann y Boore (1983) es igual a $\left[\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} a^2(t) dt \right]^{1/2}$

γ es la constante de Euler, igual a 0.5772156649...

Reemplazando (1.3) y (1.4) en la ecuación (1.7) y utilizando la relación entre M_w y M_o ; el logaritmo natural de la ecuación (1.7) toma la forma que se presenta en (1.10):

$$\ln(\text{arms}) = \alpha_1 + \alpha_2 M_w + \alpha_3 \ln \left[\frac{E_1(\alpha_4 R) - E_1\left(\alpha_4 \sqrt{R^2 + r_o^2}\right)}{r_o^2} \right] \quad (1.10)$$

Para el valor cuadrático medio de la aceleración pico del suelo (PGA), los coeficientes toman los valores siguientes: $\alpha_2 = 0.5756$, $\alpha_3 = 0.5$ y $\alpha_4 = \alpha$. El coeficiente α_i contiene la información sobre los parámetros regionales y los factores de corrección comentados previamente (β , Q , ρ , R_p , F_l , P , etc.).

No obstante, debe tenerse en cuenta que las ecuaciones precedentes son sólo aproximaciones, debido a las suposiciones implícitas en cada una de ellas. Por lo tanto, decidió utilizarse la expresión de la ecuación (1.10) como el funcional que servirá de base para la regresión presentada más adelante. Considerando que no existe influencia del factor pico, FP ($FP = 1$), la forma final es:

$$\ln[SA(T)] = y(T) = \alpha_1(T) + \alpha_2(T)M_w + \alpha_3(T) \ln \left\{ \frac{E_1[\alpha_4(T)R] - E_1\left[\alpha_4(T)\sqrt{R^2 + r_o^2}\right]}{r_o^2} \right\} \quad (1.11)$$

En la ecuación (1.11), R es la distancia más cercana a la superficie de falla (de acuerdo con el modelo de fuente finita circular) y r_o está dado por:

$$r_o^2 = 1.4447 \times 10^{-5} (e^{3.45387 M_w})^{\frac{2}{3}} \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) se obtuvo a partir de la ecuación (1.8), utilizando una caída de esfuerzos ($\Delta\sigma$) igual a 100 *bar*. En teoría, los coeficientes de la ecuación (1.12) deberían ser también parte del análisis de regresión; sin embargo, se utilizarán los coeficientes mostrados en (1.12) para que el funcional tenga una forma más sencilla. De igual forma, se considera que los coeficientes de regresión $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$, $\alpha_3(T)$ y $\alpha_4(T)$ son capaces de corregir el error introducido por la suposición de 100 *bar* en la caída de esfuerzos.

El tercer término de la ecuación (1.11) caracteriza simultáneamente el efecto de la saturación en las zonas cercanas a la fuente y la atenuación con la distancia o expansión geométrica (obsérvese que es el único que contiene la variable R). En la siguiente figura puede verse la variación del tercer término del funcional con respecto a la distancia R , para diferentes magnitudes M_w .

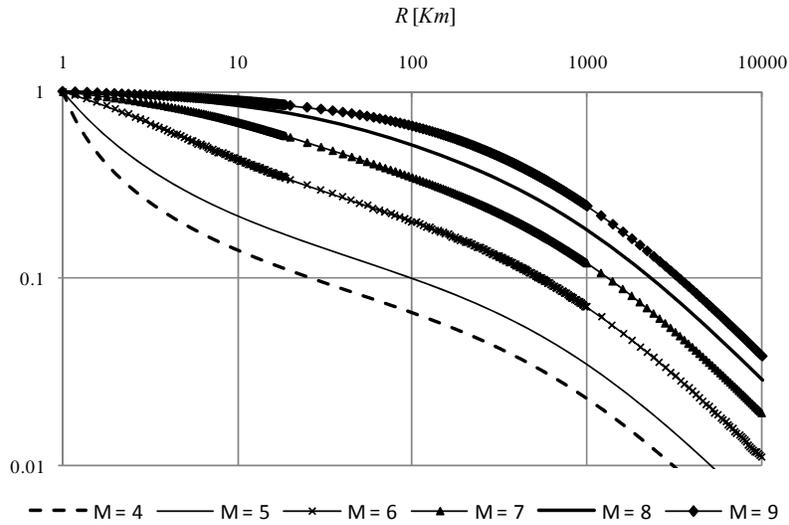


Figura 1.3. Variación del tercer término del funcional para diferentes valores de magnitud M_w

Para grandes distancias, el cociente R/r_o tiende a infinito y, según la figura, la pendiente de las gráficas es igual, independientemente de la magnitud (M_w). Para las ondas internas o de cuerpo, correspondientes a distancias R , lo suficientemente grandes en comparación con el tamaño de la fuente r_o ($R/r_o \rightarrow \infty$) la dependencia de la amplitud de la onda es proporcional a $1/R$, como fue demostrado por Aki y Richards (1980). Entonces se tiene que:

$$PSA \propto \frac{1}{R} \quad (1.13)$$

Tomando logaritmo natural en ambos lados de la ecuación y haciendo cambio de variables se llega a la expresión (1.15):

$$y = \ln(PSA) \propto -\ln(R) \quad (1.14)$$

$$y = -x \quad (1.15)$$

La anterior es la ecuación de una línea recta con pendiente igual a -1.0. Esto se puede observar claramente en la figura 1.3, que está en escala logarítmica: para valores de R grandes, la pendiente

de todas las gráficas es de una unidad. También puede concluirse, con base en la ecuación (1.14) que cuando $R/r_o \rightarrow \infty$ la atenuación es controlada principalmente por la distancia ($\ln R$).

Cuando R es similar a r_o , es decir, en las zonas cercanas a la superficie de falla, el efecto de la saturación es controlado por el coeficiente $\alpha_4(T)$. En la medida en que $\alpha_4(T)$ aumenta, el nivel de saturación también se incrementa. $\alpha_4(T)$ debe entenderse como una modificación empírica de α ($\alpha = 2\pi/\beta Q_0$) que considera implícitamente la dependencia del factor de calidad Q_0 con la frecuencia, es decir, $Q_0(f)$.

Además de la saturación, el funcional también considera el efecto de la sobresaturación (la pseudoaceleración decrece mientras la magnitud M_w aumenta). Aunque se tiene presente que es debatible el hecho de que la pseudoaceleración disminuya para valores de magnitud cada vez más grandes, se utilizará este funcional debido a que el nivel de saturación queda definido mediante los datos que se utilicen en el análisis de regresión (presentados en el Capítulo 3).

Se debe aclarar que el funcional no está definido para $R = 0$; sin embargo, no hay problema porque los datos de sismos mexicanos de subducción interplaca recolectados sugieren que la profundidad de la interfaz de la placa bajo la costa es aproximadamente 16 Km (Singh *et al.*, 1989).

Finalmente, se recuerda que el funcional (ecuación 1.11) está hecho para atenuación en roca y no tiene en cuenta los efectos de amplificación o deamplificación que en ocasiones puede ocasionar el suelo, a diferencia de otros funcionales presentados previamente por autores como Youngs *et al.*, 1997, o Atkinson y Boore, 2003.

CAPÍTULO 2

DESCRIPCIÓN DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN BAYESIANA LINEAL UNIVARIADA

2. DESCRIPCIÓN DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN BAYESIANA LINEAL UNIVARIADA

En este capítulo se expone la teoría concerniente al modelo propuesto para determinar relaciones de atenuación de la pseudoaceleración generada por sismos interplaca en la zona de subducción mexicana. El modelo de regresión univariada considera la correlación entre diferentes observaciones para el mismo sismo y la correlación entre los coeficientes de la regresión. Además, funciona para cualquier forma lineal; aunque, como pudo verse en el capítulo anterior, la forma de la relación, o funcional, que se utilizará en este trabajo para caracterizar la atenuación de sismos interplaca, no es lineal. Por tal motivo se expondrán las suposiciones hechas para linealizar el modelo y las implicaciones que esto conlleva.

Como base para la regresión que se presenta más adelante, se utilizó el modelo de regresión bayesiana multivariada propuesto por Arroyo y Ordaz (2008). En el Anexo A se expone la teoría de ese modelo. A continuación, se discuten algunos conceptos básicos sobre la función de verosimilitud y la Teoría de Bayes, necesarios para entender el modelo de regresión.

2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.1. Función de verosimilitud de un modelo parametrizado

En estadística, la función de verosimilitud desempeña un papel muy importante en lo que se conoce como inferencia estadística, es decir, el uso de la estadística para hacer inferencias o inducciones sobre algún proceso desconocido. La probabilidad permite predecir resultados desconocidos basándose en aspectos o parámetros conocidos, mientras que la verosimilitud permite determinar parámetros desconocidos basándose en resultados conocidos. La función de verosimilitud trabaja al contrario de cómo lo hace la función de probabilidad: dado un parámetro B , se utiliza la probabilidad condicional $P(A|B)$ para predecir el resultado A ; por el contrario, si lo que se conoce es el resultado A , se emplea la función de verosimilitud $L(B|A)$ para describir al parámetro B . Es importante aclarar que la función de verosimilitud no es una función de densidad de probabilidad; existen diferencias entre una y otra, por ejemplo, la integral de la función de verosimilitud con respecto a los parámetros de interés no siempre es 1.0.

Para una familia de funciones de densidad de probabilidad parametrizadas $f(x | \theta)$, θ es el parámetro (o parámetros) que define o caracteriza la función de densidad de probabilidad. Por ejemplo, si la función de densidad es la Normal $f(x | \mu, \sigma)$, el parámetro θ es el vector bidimensional (μ, σ) . La función de verosimilitud de esta familia de funciones es:

$$L(\theta | s) = f(s | \theta) \quad (2.1)$$

Donde s es el resultado observado de un experimento, es decir, las observaciones o datos. Al valor de $L(\theta | s)$ se le conoce como verosimilitud de θ . En otras palabras, cuando $f(s | \theta)$ es visto como una función de s conociendo el valor del parámetro θ , se habla de función de densidad de probabilidad, y cuando es vista como una función de θ , con s conocido, entonces es la función de verosimilitud.

La probabilidad, como ya se ha expuesto, se utiliza para tratar de predecir el resultado desconocido de un experimento, basándose en parámetros conocidos. En este caso, se habla de “el experimento” como un evento futuro, cuyo resultado no se sabe con certeza sino que sólo se conoce el conjunto de posibles resultados. Por el contrario, la función de verosimilitud se utiliza cuando el resultado del experimento se conoce, es decir, “el experimento” es un evento pasado y lo que quiere conocerse es la verosimilitud del parámetro θ .

Por ejemplo, para la función de densidad de probabilidad Normal, $f(x | \mu, \sigma)$, de acuerdo con lo que se comentó arriba, los parámetros son la media y la desviación estándar, μ y σ , respectivamente. En la figura 2.1 se muestra la distribución de probabilidad para $\mu = 0$ y dos valores diferentes de la desviación estándar, $\sigma_1 = \theta_1$ y $\sigma_2 = \theta_2$. s es el resultado del experimento, y como se puede observar, la probabilidad condicional de s dado θ_1 es menor que la probabilidad de s dado θ_2 .

$$f(s | \theta_2) > f(s | \theta_1) \quad (2.2)$$

Esto permite concluir que los datos u observaciones, s , son más probables si se considera θ_2 en lugar de θ_1 , y se establece un orden de preferencia o confianza. Se cree que θ_2 es el valor correcto de θ , por encima de θ_1 , según la ecuación 2.2.

En el anterior razonamiento se basa el proceso de inferencia del parámetro θ mediante la función de verosimilitud.

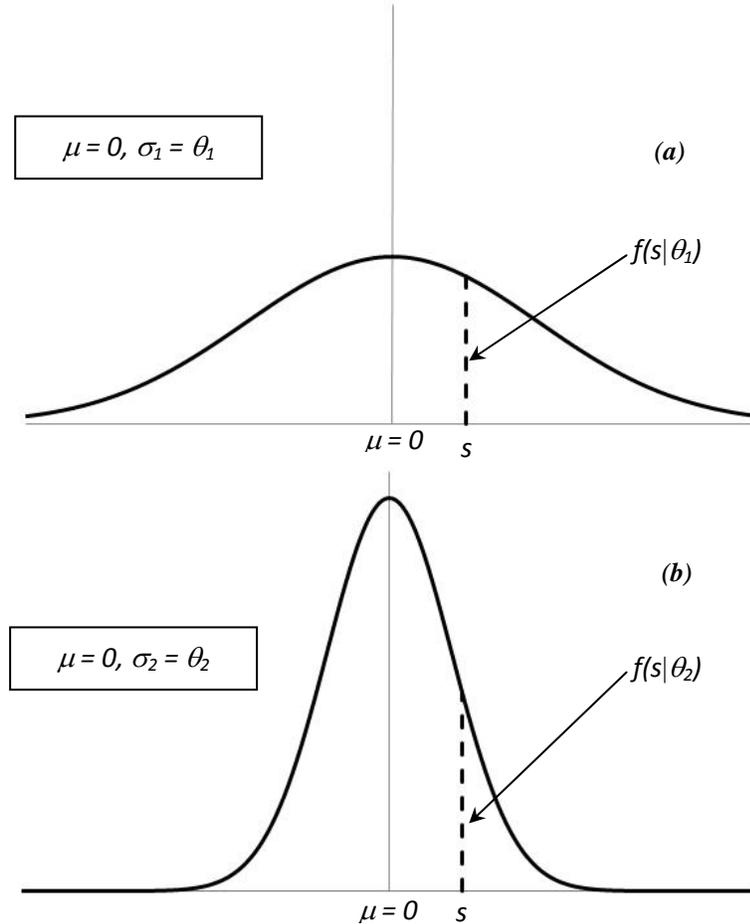


Figura 2.1. Función de densidad de probabilidad normal con media igual a cero y desviación estándar $\sigma =$ (a) θ_1 y (b) θ_2 .

La verosimilitud es un valor que no dice mucho, lo que realmente informa sobre el grado de confianza para cada valor de θ , es la relación o cociente entre verosimilitudes de los diferentes valores posibles del parámetro:

$$\frac{L(\theta_1 | s)}{L(\theta_2 | s)} \quad (2.3)$$

Un error en el que se incurre con frecuencia consiste en considerar la verosimilitud de una hipótesis ($\theta = \theta_i$), a partir de la evidencia observada (s), como la probabilidad de la hipótesis. En otras palabras, el valor de $L(\theta | s)$ es igual a la probabilidad de s dado que θ es el valor verdadero (ecuación 2.1), y no la probabilidad de θ dado que se conoce s , es decir, $L(\theta | s) \neq f(\theta | s)$.

Ahora bien, si en lugar del valor exacto de una observación, s , se tiene un intervalo dentro del cual podría estar el valor de dicha observación (s_{j-1}, s_j) , con longitud Δ_j , entonces, la probabilidad de que dicha observación esté dentro del intervalo j es aproximadamente:

$$L_{aprox}(\theta | s \text{ en el intervalo } j) = \Delta_j f(s_* | \theta) \quad (2.4)$$

Donde s_* puede ser cualquier punto dentro del intervalo j . Puede verse que si la longitud del intervalo j tiende a cero, la observación s toma un valor exacto y la ecuación (2.4) se convierte en la ecuación (2.1).

2.1.2. Teorema de Bayes

Es un teorema que forma parte de la teoría de probabilidades, enunciado inicialmente por Thomas Bayes y que se utiliza para determinar probabilidades finales, o probabilidades *a posteriori*, a partir del conocimiento previo y de las observaciones de un experimento. En el análisis bayesiano, inicialmente se asignan funciones de densidad de probabilidad a un evento aleatorio con base en el conocimiento previo o el grado de incertidumbre que se tenga sobre dicho evento, es decir, se permite el uso de probabilidades subjetivas. Este hecho representa un tema de controversia, debido a que muchos consideran que la densidad de probabilidad de un evento aleatorio debe asignarse de acuerdo con la frecuencia de ocurrencia de éste y no subjetivamente, basándose en el conocimiento propio. Por consiguiente, este teorema no goza de aprobación general, aunque, en la mayoría de los casos, se obtienen muy buenos resultados, siempre y cuando se asignen densidades de probabilidad iniciales adecuadas. La teoría bayesiana sirve entonces, para indicar cómo se deben modificar las probabilidades iniciales asignadas a partir del conocimiento previo, una vez que se recibe información adicional sobre los resultados del experimento.

En el análisis bayesiano se utilizan ciertos términos que es necesario definir:

- Evidencia observada: es el conjunto de observaciones o datos.
- Probabilidad *a priori*: es la función de densidad de probabilidad marginal que describe el conocimiento que se tiene sobre los parámetros de un evento aleatorio, en ausencia de la evidencia observada. Es decir, es el conocimiento sin considerar las observaciones.

- Probabilidad *a posteriori*: es la densidad de probabilidad condicional que se asigna a los parámetros de un evento aleatorio después de que se tiene en cuenta la evidencia observada.
- Constante de normalización: es una constante por la que se debe multiplicar cualquier función no negativa de manera que el área bajo su gráfica sea 1.0. El objetivo es convertirla en una función de densidad de probabilidad.

El teorema relaciona las probabilidades condicionales y marginales de dos eventos A y B , de la siguiente manera:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (2.5)$$

Donde, $P(A)$ es la probabilidad *a priori* o probabilidad marginal del evento A . Se considera “*a priori*” en el sentido de que no tiene en cuenta ningún tipo de información sobre B . $P(A|B)$ es la probabilidad condicional de A dado B ; también se conoce como la probabilidad *a posteriori* o probabilidad final porque se determina a partir del valor de B . $P(B|A)$ es la probabilidad condicional de B dado A . $P(B)$ es la probabilidad *a priori* o probabilidad marginal de B y actúa como una constante de normalización. En resumen, el teorema permite describir la forma en que el conocimiento previo sobre una observación A , se actualiza después de la observación de B . El Teorema de Bayes también se puede expresar en términos de la función de verosimilitud, dado que $L(A|B) = P(B|A)$:

$$P(A|B) \propto L(A|B)P(A) \quad (2.6)$$

Donde, como ya se vio, $L(A|B)$ es la verosimilitud de A , dado que se conoce B , y \propto es la constante de normalización igual a $P(B)$. De acuerdo con esto, la probabilidad *a posteriori* es proporcional al producto entre la probabilidad *a priori* y la verosimilitud.

2.1.3. Inferencia Bayesiana para el modelo lineal

La forma general de un modelo lineal univariado es como la que se presenta en la ecuación (2.7):

$$Y = X\theta + e \quad (2.7)$$

Donde $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ es un vector de tamaño $n \times 1$ que contiene las n observaciones, X es una matriz conocida de tamaño $n \times p$, θ es un vector de tamaño $p \times 1$ que contiene los parámetros de la regresión, y e es el vector de desviaciones con matriz de precisión τ . p es el número de parámetros o coeficientes de la regresión.

El objetivo es hacer inferencias para θ y τ (consideradas variables aleatorias) a partir de las observaciones $S = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. De acuerdo con Broemeling (1984), el mundo de las inferencias es vago, pero usualmente se puede seguir un procedimiento para extraer de la muestra s , información sobre θ . En el análisis bayesiano, todas las inferencias se basan en la distribución de probabilidad *a posteriori* de θ , la cual se obtiene mediante el Teorema de Bayes¹.

El conocimiento previo sobre θ se expresa en la función de densidad de probabilidad $\xi(\theta, \tau)$. El Teorema de Bayes combina esta información con la información contenida en la muestra (conjunto de observaciones). Si los elementos del vector e tienen distribución de probabilidad conjunta normal y son independientes entre sí, la función de verosimilitud de θ y τ es:

$$L(\theta, \tau|S) \propto \tau^{n/2} \exp\left[-\frac{\tau}{2}(Y - X\theta)^T(Y - X\theta)\right] \quad (2.8)$$

El símbolo \propto significa proporcionalidad. La función de verosimilitud representa la información que sobre los parámetros se tiene en la muestra y es igual a la función de densidad de probabilidad condicional de las variables aleatorias de la muestra dados θ y τ (ecuación 2.1). Con el Teorema de Bayes se determina la densidad de probabilidad condicional de θ dado S :

$$\xi(\theta, \tau|S) \propto L(\theta, \tau|S)\xi(\theta, \tau) \quad (2.9)$$

La densidad de probabilidad *a posteriori* de θ es $\xi(\theta, \tau|S)$ y representa el conocimiento propio sobre θ y τ después de observar la muestra S . Por otro lado, nuestra información o conocimiento sobre θ y τ antes de observar la muestra está contenida en la densidad de probabilidad *a priori* $\xi(\theta, \tau)$.

Después de comentar brevemente algunos conceptos básicos, en las siguientes páginas se entrará de lleno en la teoría del modelo de regresión bayesiana propuesto por Arroyo *et al.* (2008) y que se

¹ Broemeling, L.D. BAYESIAN ANALYSIS OF LINEAR MODELS. (1984)

utilizará en el presente trabajo para determinar relaciones de atenuación de la pseudoaceleración generada por sismos interplaca en la zona de subducción mexicana.

2.2. APLICACIÓN DEL MODELO DE REGRESIÓN AL CASO UNIVARIADO

Como se vio en el Capítulo 1, el funcional propuesto para el modelo de atenuación contiene cuatro coeficientes desconocidos, que serán calculados mediante el análisis de regresión. En la ecuación (2.10) se presenta nuevamente el funcional:

$$\ln[SA(T)] = y(T) = \alpha_1(T) + \alpha_2(T)M_w + \alpha_3(T) \ln \left\{ \frac{E_1[\alpha_4(T)R] - E_1[\alpha_4(T)\sqrt{R^2 + r_o^2}]}{r_o^2} \right\} \quad (2.10)$$

$$r_o^2 = 1.4447 \times 10^{-5} (e^{3.45387 M_w})^{\frac{2}{3}} \quad (2.11)$$

Los coeficientes $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$, $\alpha_3(T)$, y $\alpha_4(T)$ son diferentes para cada periodo, de manera que se tiene un total de $4 \times n_T$ incógnitas, siendo n_T el número de periodos que se considerarán en el análisis.

También se puede ver en la ecuación (2.10) que el funcional no es lineal, debido al tercer término. Sin embargo, se puede linealizar, haciendo el análisis para cada periodo por separado y asignando un valor al coeficiente $\alpha_4(T)$, es decir, si se hace un análisis univariado. De esta manera, dado que M_w , R y $\alpha_4(T)$ son constantes y no variables aleatorias, el logaritmo natural del tercer término toma un valor constante, y para cada periodo, el funcional adopta la forma siguiente:

$$y_i = \ln[SA_i] = x_{1i}\alpha_1 + x_{2i}\alpha_2 + x_{3i}\alpha_3 \quad (2.12)$$

En la ecuación (2.12), α_1 , α_2 y α_3 son las incógnitas que en el marco bayesiano son vistas como variables aleatorias y x_1 , x_2 y x_3 son constantes. y_i también es un vector de constantes que se construye a partir de los datos de las diferentes observaciones. El subíndice i hace referencia a las observaciones y varía desde 1 hasta n_o , siendo n_o el número de observaciones.

En la siguiente figura se presenta un esquema de las observaciones y los datos necesarios para adelantar el análisis de regresión. Nótese que para cada par de valores de magnitud M_w y distancia a la zona de falla R , se tiene un espectro de respuesta en el que se consideran n_T ordenadas espectrales (y_i).

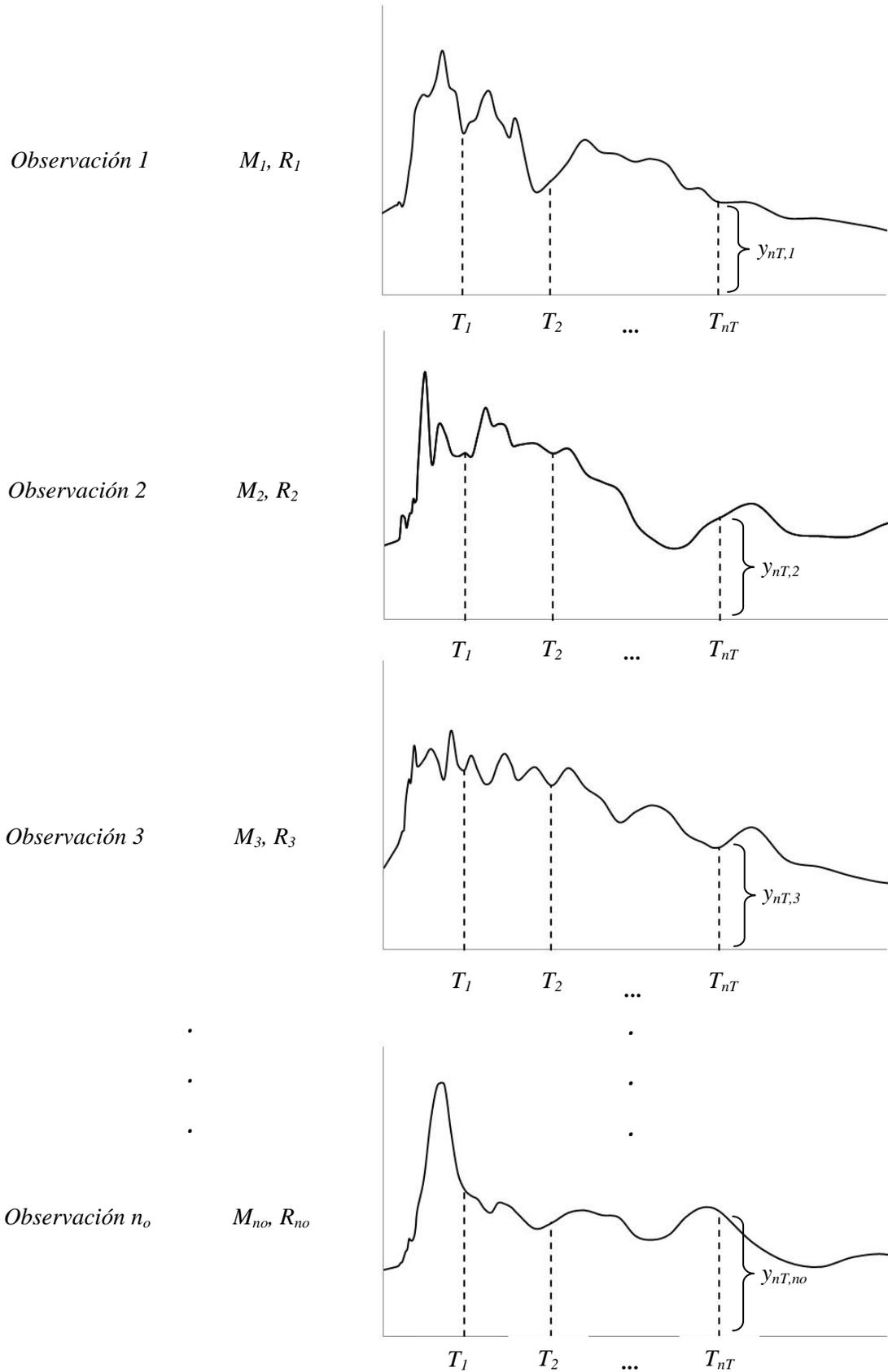


Figura 2.2. Esquema de las observaciones y los datos necesarios para adelantar el análisis de regresión

Entonces, para un periodo T , la ecuación (2.12) se puede escribir como el producto entre dos matrices:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n_o} \end{bmatrix}_{n_o \times 1} = \begin{bmatrix} x_{1_1}\alpha_1 + x_{2_1}\alpha_2 + x_{3_1}\alpha_3 \\ x_{1_2}\alpha_1 + x_{2_2}\alpha_2 + x_{3_2}\alpha_3 \\ x_{1_3}\alpha_1 + x_{2_3}\alpha_2 + x_{3_3}\alpha_3 \\ \vdots \\ x_{1_{n_o}}\alpha_1 + x_{2_{n_o}}\alpha_2 + x_{3_{n_o}}\alpha_3 \end{bmatrix}_{n_o \times 1} = \begin{bmatrix} x_{1_1} & x_{2_1} & x_{3_1} \\ x_{1_2} & x_{2_2} & x_{3_2} \\ x_{1_3} & x_{2_3} & x_{3_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1_{n_o}} & x_{2_{n_o}} & x_{3_{n_o}} \end{bmatrix}_{n_o \times n_p} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_{n_p \times 1} \quad (2.13)$$

Ó simplemente,

$$Y = X\alpha^T + E \quad (2.14)$$

El término n_p en la ecuación (2.13) es el número de parámetros o coeficientes involucrados en la regresión ($n_p = 3$), mientras que el símbolo T de la ecuación (2.14) representa la transpuesta de la matriz. Nótese que la ecuación (2.14) tiene la forma general de un modelo lineal. Sin embargo, esta ecuación no se puede considerar multivariada, debido, como ya se mencionó, a que el análisis se realizará para cada periodo por separado, en lugar de hacer sólo un análisis que tenga en cuenta los n_T periodos. En otras palabras, en este trabajo, se llevará a cabo un total de n_T análisis de regresión, por separado, uno para cada periodo, y no un análisis general que considere los n_T periodos (como se haría en el caso multivariado). Lo anterior implica que el modelo de la ecuación (2.14) es lineal pero univariado, es decir, es un caso particular del modelo general de regresión multivariada presentado por Arroyo y Ordaz (2008) y que es descrito en el Anexo A. Más adelante se comentarán algunas implicaciones que tienen lugar debido a este hecho.

El término Y representa una matriz conocida de tamaño $n_o \times 1$ que incluye n_o observaciones de $y(T) = \ln(PSA)$, para el mismo periodo estructural T (ver figura 2.2). X es una matriz conocida de tamaño $n_o \times 3$ que contiene n_o observaciones de las variables independientes (x_1 , x_2 y x_3 en la ecuación 2.12). Nótese que, de acuerdo con la ecuación (2.10), los elementos de la primera columna de la matriz X son iguales a 1.0 y los de la segunda columna corresponden a la magnitud M_w de cada observación. α es una matriz desconocida de tamaño 1×3 , que contiene los coeficientes determinados en el proceso de regresión: α_1 , α_2 y α_3 . Finalmente, E es una matriz

desconocida de tamaño $n_o \times I$, que contiene los residuales (errores) de la regresión. Al igual que Joyner y Boore (1993), se asume que cada elemento ε del vector E está conformado por ε_r y ε_e :

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{e_1} \\ \varepsilon_{r_2} + \varepsilon_{e_2} \\ \varepsilon_{r_3} + \varepsilon_{e_3} \\ \vdots \\ \varepsilon_{r_{n_o}} + \varepsilon_{e_{n_o}} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Donde ε_r es la componente de variabilidad entre registros y como cada registro se toma en un sitio específico, se puede decir que ε_r incluye la correlación entre sitios; y el término ε_e hace referencia a la componente de variabilidad entre sismos. ε_r toma un valor por cada registro mientras que ε_e toma un valor por cada sismo.

Se asume que los elementos de la matriz E son variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta Normal, correlacionadas y con media cero (la misma suposición fue hecha originalmente por Joyner y Boore, 1993). La correlación entre los elementos de E se define mediante una matriz desconocida de tamaño $n_o \times n_o$ llamada Ω , definida en la ecuación (2.16):

$$\Omega = \Sigma\Phi \quad (2.16)$$

Donde Φ es una matriz desconocida de tamaño $n_o \times n_o$ que tiene en cuenta la correlación entre las filas de Y , es decir, la correlación entre las diferentes observaciones y Σ es una variable aleatoria que representa la varianza del residual para el periodo considerado (ε_i).

La función de verosimilitud para la matriz Y , en el caso univariado, es la misma propuesta por Joyner y Boore² (1993):

$$L(Y|\alpha, \Sigma, \Phi, X) \propto |\Sigma|^{-1/2} |\Phi|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} (Y - X\alpha^T)^T \Phi^{-1} (Y - X\alpha^T) \right\} \quad (2.17)$$

² W. Joyner y D. M. Boore. METHODS FOR REGRESSION ANALYSIS OF STRONG-MOTION DATA, 1993.

El símbolo \propto se refiere a proporcionalidad, puesto que se ha omitido la constante de normalización.

En cuanto a los elementos de la matriz de residuales E , se hacen las siguientes consideraciones adicionales:

1. Para el mismo sismo, el coeficiente de correlación entre residuales correspondientes a sitios diferentes (es decir, diferentes registros) es igual a γ_e .
2. Los residuales asociados a sismos diferentes son independientes, es decir, no están correlacionados.

Es justo dejar en claro que una de las limitaciones del análisis de regresión univariada que se llevará a cabo en el presente trabajo (que es una particularización del modelo de regresión multivariada propuesto originalmente por Arroyo y Ordaz, 2008), es, que no permite tener en cuenta la correlación entre las ordenadas espectrales de pseudoaceleración PSA para diferentes periodos. Sin embargo, la correlación entre las diferentes observaciones (registros) de un mismo sismo y la correlación entre los coeficientes de la regresión (α_1 , α_2 y α_3) sí se considerará.

De acuerdo con las hipótesis mencionadas, la matriz Φ es diagonal:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{n_e} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Donde n_e es el número de sismos considerados en el análisis de regresión y la submatriz cuadrada ϕ_i que se relaciona con el sismo i , está dada por:

$$\phi_i = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_e & \cdots & \gamma_e \\ \gamma_e & 1 & \cdots & \gamma_e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_e & \gamma_e & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

El tamaño de ϕ_i es igual al número de registros para el sismo i y por lo tanto no necesariamente tiene el mismo tamaño entre un sismo y otro.

El parámetro γ_e , definido anteriormente como el coeficiente de correlación entre los residuales (elementos de la matriz E) correspondientes al mismo sismo es igual al parámetro γ definido por Joyner y Boore (1993):

$$\gamma_e = \gamma = \frac{\sigma_e^2}{(\sigma_r^2 + \sigma_e^2)} \quad (2.20)$$

La covarianza entre dos residuales correspondientes a sismos diferentes es cero, como se puede ver en la estructura de la matriz de la ecuación (2.18). El término del denominador $(\sigma_r^2 + \sigma_e^2)$ representa la varianza de cada residual. σ_e^2 es la covarianza entre dos residuales correspondientes al mismo sismo, es decir la varianza de ε_e , y σ_r^2 es la varianza de ε_r .

Finalmente, se debe mencionar que el modelo de regresión que se presenta se puede aplicar a cualquier otra forma lineal de relaciones de atenuación, y que n_p puede tomar cualquier valor entero positivo. En este caso $n_p = 3$ (α_1 , α_2 y α_3), – el término α_4 se considera una constante, pues desde el principio del análisis se le asigna un valor –. La teoría presentada en este capítulo no es aplicable sólo a esta forma de relación de atenuación y también es válida para modelos lineales con más ($n_p > 3$), y también con menos ($n_p < 3$), coeficientes desconocidos.

2.3. DESCRIPCIÓN DE LA TÉCNICA DE REGRESIÓN BAYESIANA LINEAL UNIVARIADA

En esta sección se aplican los principios del Teorema de Bayes al modelo lineal de atenuación mostrado anteriormente. De igual forma, se presenta la información necesaria para llevar a cabo la regresión bayesiana; parte de esta información corresponde a las funciones de densidad de probabilidad marginales *a priori* adoptadas para las matrices α , Σ y Φ . Finalmente se presenta la forma de la densidad de probabilidad *a posteriori* lograda mediante la aplicación de la teoría bayesiana.

De acuerdo con el modelo bayesiano, α , Φ y Σ son matrices de tamaño 1×3 , $n_o \times n_o$ y 1×1 , respectivamente, cuyos elementos son variables aleatorias con densidad de probabilidad conjunta *a priori* conocida $p(\alpha, \Sigma, \Phi)$. Esta probabilidad conjunta es actualizada mediante el Teorema de Bayes, y de esa manera, la densidad de probabilidad conjunta final o *a posteriori* se determina como el producto entre la verosimilitud y la densidad de probabilidad conjunta *a priori*.

$$p(\alpha, \Sigma, \Phi | X, Y) \propto L(Y | \alpha, \Sigma, \Phi, X) p(\alpha, \Sigma, \Phi) \quad (2.21)$$

En el análisis bayesiano tradicional, se utilizan tres tipos de densidad de probabilidad conjunta $p(\alpha, \Sigma, \Phi)$:

1. Densidades no informativas, también conocidas como densidades impropias.
2. Densidades conjugadas.
3. Densidades conjugadas generalizadas.

El primer tipo se utiliza cuando el conocimiento *a priori* de las variables (α , Σ y Φ , en este caso) es impreciso; las otras dos se usan cuando la información *a priori* sobre éstas es más amplia. En este trabajo se utilizará la densidad de probabilidad conjugada generalizada.

Con el propósito de conservar la estructura de la matriz Φ mostrada en la ecuación (2.18), se usa una densidad de probabilidad escalar beta para el parámetro γ_e , de manera que la densidad de probabilidad *a priori* de la matriz Φ no es de la forma estándar. Para los demás parámetros se escogieron las densidades de probabilidad que se mencionan a continuación. La justificación para

tal selección es que son las densidades adecuadas para incluir de manera apropiada el conocimiento que se tiene *a priori* sobre los parámetros involucrados en el análisis de regresión. La siguiente es la densidad de probabilidad conjunta inicial utilizada en el modelo:

$$p(\alpha_V, \Sigma, \Phi) = p(\alpha_V) p(\Sigma) p(\Phi) \quad (2.22)$$

Donde $\alpha_V = \text{vec}(\alpha)$. Puede verse que el modelo de regresión considera que las densidades de probabilidad *a priori* de las matrices α , Σ y Φ son independientes.

Arroyo *et al.* (2008) asumen que la densidad *a priori* de α_V es la densidad de probabilidad Normal que se muestra en la ecuación (2.23), con media α_{V0} y matriz de covarianza Δ . Así, $\alpha_{V0} = \text{vec}(\alpha_0)$, donde α_0 es el valor esperado *a priori* de los coeficientes de la regresión α_i , y la matriz positiva Δ , de tamaño $n_p \times n_p$ es la matriz de covarianza de α_{V0} . Como ya se mencionó, $n_p = 3$, de manera que para el modelo de atenuación que aquí se presenta la matriz de covarianza Δ es de tamaño 3×3 .

$$p(\alpha_V) \propto |\Delta|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha_V - \alpha_{V0})^T \Delta^{-1} (\alpha_V - \alpha_{V0}) \right] \quad (2.23)$$

La matriz simétrica Δ , puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n_p} \\ & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n_p} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \delta_{n_p n_p} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

δ_{ij} representa una variable aleatoria que se define en la ecuación (2.25):

$$\delta_{ij} = \text{cov}(\alpha_i, \alpha_j) \quad (2.25)$$

El término $\text{cov}(\alpha_i, \alpha_j)$ representa la covarianza entre $\alpha_i(T)$ y $\alpha_j(T)$ para el periodo T considerado.

En el presente estudio, se asumirá que Δ es diagonal; por lo tanto solo los términos δ_{11} , δ_{22} y δ_{33} son diferentes de cero, lo que implica creer, *a priori*, que los coeficientes $\alpha_i(T)$ para el mismo periodo T

no están correlacionados. Lo anterior tiene explicación en el hecho de que a partir del conjunto de datos con los que se hará la regresión (presentado en el siguiente capítulo), no se tiene suficiente información que permita inferir algún tipo de correlación entre los coeficientes $\alpha_i(T)$ correspondientes al mismo periodo.

Para Σ se usa como densidad de probabilidad *a priori* la función Wishart inversa (Rowe 2002), mostrada en la ecuación (2.26) como función de los parámetros Q y ν

$$p(\Sigma) \propto |\Sigma|^{-\frac{\nu}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr}[\Sigma^{-1}Q] \right\} \quad (2.26)$$

De acuerdo con las propiedades de este tipo de función de densidad de probabilidad, el parámetro positivo Q , se puede determinar a partir del valor esperado *a priori* de Σ como se muestra a continuación:

$$Q = [\nu - 2(I) - 2]\Sigma_0 \quad (2.27)$$

Donde Σ_0 es el valor esperado *a priori* de Σ . Nótese que Q también depende del escalar ν , que es una medida del grado de certeza que se tenga sobre Σ_0 . Para que la varianza de la variable aleatoria Σ tenga un valor finito, es necesario que ν sea mayor que $[2(I) + 4]$. Entre mayor sea el valor de ν , mayor el grado de certeza que se tiene sobre Σ_0 .

En el análisis Bayesiano, por lo general se utiliza la densidad Wishart inversa como densidad de probabilidad de la matriz Φ (Rowe 2002). No obstante, si se quiere que la estructura de la matriz Φ sea como la que se muestra en la ecuación (2.18), la densidad invertida de Wishart no se puede utilizar. Como se vio anteriormente, para un mismo conjunto de datos, Φ es solo una función de γ_e , por lo tanto se usa una densidad de probabilidad escalar beta para γ_e , de acuerdo con la ecuación (2.28):

$$p(\gamma_e) \propto \gamma_e^{a-1} (1 - \gamma_e)^{b-1} \quad (2.28)$$

Los parámetros a y b se pueden obtener a partir del valor esperado *a priori* de γ_e y de su desviación estándar (también *a priori*).

En resumen, la información *a priori* sobre los parámetros de la regresión se incluye en el análisis mediante α_{v0} , Δ , Q , ν , a y b . Los anteriores términos se conocen como hiperparámetros (ecuaciones 2.24 – 2.28).

Sustituyendo las ecuaciones (2.17), (2.23), (2.26) y (2.28) en la ecuación (2.21), se obtiene la densidad de probabilidad conjunta final o *a posteriori* de los parámetros de la regresión:

$$p(\alpha, \Sigma, \gamma_e | X, Y) \propto |\Sigma|^{-(n_0 + \nu)/2} |\Phi|^{-nT/2} \gamma_e^{a-1} (1 - \gamma_e)^{b-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\alpha_V - \alpha_{V0})^T \Delta^{-1} (\alpha_V - \alpha_{V0}) \right\} \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \Sigma^{-1} \left[(Y - X\alpha^T)^T \Phi^{-1} (Y - X\alpha^T) + Q \right] \right\} \right\} \quad (2.29)$$

Esta densidad de probabilidad debe ser marginalizada para posteriormente obtener los valores esperados finales o *a posteriori* de α , Σ , y γ_e . Sin embargo, para esta densidad (ecuación 2.29), no es posible obtener distribuciones marginales de manera analítica. Por lo tanto, los valores esperados marginales se deben calcular numéricamente mediante un método de integración estocástica conocido como muestreo de Gibbs.

En la siguiente sección se presenta el desarrollo de este método de integración.

2.4. MUESTREO DE GIBBS

El muestreo de Gibbs es un algoritmo utilizado para generar una secuencia de “muestras” o variaciones aleatorias a partir de la distribución de probabilidad conjunta de dos o más variables aleatorias, como, por ejemplo, la que se presenta en la ecuación (2.29). El propósito de este procedimiento es básicamente resolver una integral, bien sea para determinar un valor esperado o cualquier otro parámetro.

El muestreo de Gibbs se aplica cuando la función de distribución de probabilidad conjunta no se conoce explícitamente o, se conoce, pero es de difícil integración, y además se conocen las funciones de distribución de probabilidad condicional de cada variable aleatoria.

En resumidas cuentas, este procedimiento establece que dada una distribución de probabilidad como la de la ecuación 2.29, es decir, una densidad conjunta, es más sencillo generar muestras o variaciones aleatorias a partir de una densidad de probabilidad condicional que integrar dicha función de densidad conjunta.

Por ejemplo, se quieren k muestras o realizaciones de la variable aleatoria x , a partir de la densidad de probabilidad conjunta $p(x,y)$. El procedimiento es el siguiente:

- Se supone un valor inicial y_0 para la variable aleatoria y .
- Se determina x mediante $x_i \sim p(x|y = y_{i-1})$; $y_{i-1} = y_0$.
- Una vez se determina el valor de x , se genera una realización para la otra variable aleatoria, y , utilizando el valor de x calculado previamente: $y_i \sim p(y|x = x_{i-1})$.
- Ahora, se determina un nuevo x , utilizando el valor de y que se obtuvo en el paso anterior.
- El mismo proceso se repite k veces. En este punto resulta conveniente mencionar que es común generar ciertos valores antes y a partir de una realización dada se cuentan las k veces.

Aplicación del muestreo de Gibbs al modelo de regresión presentado

Una vez que se conoce la función de densidad de probabilidad conjunta de la ecuación (2.29), es posible obtener los valores esperados marginales de las matrices buscadas (α , Σ y Φ), generando y promediando variaciones aleatorias a partir de las densidades de probabilidad condicionales de α , Σ y Φ . La densidad condicional final de cada matriz se presenta en las ecuaciones (2.30) a (2.32):

$$p(\alpha_V | \Sigma, \Phi, X, Y) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\alpha_V - \tilde{\alpha}_V)^T (\Delta^{-1} + X^T \Phi^{-1} X \otimes \Sigma^{-1}) (\alpha_V - \tilde{\alpha}_V) \right\} \quad (2.30)$$

$$p(\Sigma | \alpha, \Phi, X, Y) \propto |\Sigma|^{-(n_0 + \nu)/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\Sigma^{-1} \left((Y - X\alpha^T)^T \Phi^{-1} (Y - X\alpha^T) + Q \right) \right] \right\} \quad (2.31)$$

$$p(\gamma_e) \propto \gamma_e^{a-1} (1 - \gamma_e)^{b-1} |\Phi|^{-n_T/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\Phi^{-1} \left((Y - X\alpha^T) \Sigma^{-1} (Y - X\alpha^T)^T \right) \right] \right\} \quad (2.32)$$

Donde,

$$\tilde{\alpha}_V = \left[\Delta^{-1} + X^T \Phi^{-1} X \otimes \Sigma^{-1} \right]^{-1} \left[\Delta^{-1} \alpha_{V0} + (X^T \Phi^{-1} X \otimes \Sigma^{-1}) \tilde{\alpha}_V \right] \quad (2.33)$$

$$\hat{\alpha}_V = \text{vec} \left[Y^T \Phi^{-1} X (X^T \Phi^{-1} X)^{-1} \right] \quad (2.34)$$

Con el propósito de calcular los valores esperados marginales, se debe asumir un valor inicial para Σ y otro para γ_e , es decir $\bar{\Sigma}_0$ y $\bar{\gamma}_{e0}$, y luego iterar de la siguiente manera:

- a) $\bar{\alpha}_{(l+1)}$ = variación aleatoria de la ecuación (2.30) con $\Sigma = \bar{\Sigma}_{(l)}$ y $\Phi = \bar{\Phi}_{(l)}$
- b) $\bar{\Sigma}_{(l+1)}$ = variación aleatoria de la ecuación (2.31) con $\alpha = \bar{\alpha}_{(l+1)}$ y $\Phi = \bar{\Phi}_{(l)}$
- c) $\bar{\gamma}_{e(l+1)}$ = variación aleatoria de la ecuación (2.32) con $\alpha = \bar{\alpha}_{(l+1)}$ y $\Sigma = \bar{\Sigma}_{(l+1)}$

Donde $\bar{\Phi}_{(l)}$ es el valor de Φ relacionado con $\bar{\gamma}_{e(l)}$.

El procedimiento para generar variaciones aleatorias depende del tipo de densidad de probabilidad marginal condicional de cada variable (ecuaciones 2.30 – 2.32).

De acuerdo con la ecuación (2.30), la densidad de probabilidad condicional *a posteriori* de α_V dados $\tilde{\alpha}_V$, Σ y γ_e es Normal, por lo tanto, una variación aleatoria de esta distribución se puede determinar de la siguiente manera:

$$\alpha_V = A_\alpha Y_\alpha + M_\alpha \quad (2.35)$$

donde A_α es una matriz triangular inferior que se calcula mediante la factorización de Cholesky³ de $A_\alpha A_\alpha^T = (\Delta^{-1} + X^T \Phi^{-1} X \otimes \Sigma^{-1})^{-1}$, Y_α es una matriz de tamaño $n_p n_T \times 1$ (3×1 en este caso) cuyos elementos son las variaciones aleatorias obtenidas a partir de la distribución Normal Escalar y M_α es la media condicional de α_V dada en la ecuación (2.33).

La densidad de probabilidad condicional *a posteriori* de Σ , dados α y γ_e , es la función invertida Wishart (ecuación 2.31). Una variación aleatoria para esta densidad se puede determinar de la siguiente manera (Rowe, 2002):

$$\Sigma = A_\Sigma (Y_\Sigma^T Y_\Sigma)^{-1} A_\Sigma^T \quad (2.36)$$

Donde A_Σ es una matriz triangular inferior que se calcula mediante la factorización de Cholesky de $A_\Sigma A_\Sigma^T = (Y - X\alpha^T)^T \Phi^{-1} (Y - X\alpha^T) + Q$, Y_Σ es una matriz de tamaño $(n_o + \nu - n_T - 1) \times n_T$ cuyos elementos son las variaciones aleatorias obtenidas a partir de la distribución Normal Escalar.

Como la densidad posterior de γ_e no es de forma estándar, se debe utilizar un método numérico para generar variaciones aleatorias a partir de la densidad de probabilidad condicional de la ecuación (2.32).

El método empleado, llamado de “aceptación o rechazo”, se describe en las siguientes líneas. Como densidad de probabilidad básica, se utiliza la distribución Estándar Uniforme ya que tiene el mismo dominio que la función de la ecuación (2.32).

- Se generan dos variaciones aleatorias independientes, h_o y u_o , a partir la distribución de densidad de probabilidad Estándar Uniforme.
- Si $u_o \leq \frac{p(h_o)}{c f(h_o)}$ donde c es una constante, h_o se acepta como variación aleatoria de la ecuación (2.32). Si lo anterior no sucede, entonces se generan nuevos valores para h_o y u_o .

$p(h_o)$ se obtiene evaluando h_o en la ecuación (2.32) y $f(h_o)$ es igual a la unidad ya que se escogió como densidad de probabilidad básica la función Estándar Uniforme. El valor de c se asume igual al valor pico de la ecuación (2.32).

³ La factorización de Cholesky establece que una matriz simétrica definida positiva puede ser descompuesta como el producto de una matriz triangular inferior y la transpuesta de ésta.

El resultado de la primera variación aleatoria se descarta y los siguientes K términos se promedian para determinar los valores marginales, siguiendo las siguientes expresiones:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \bar{\alpha}_{(l)} \quad (2.37)$$

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \bar{\Sigma}_{(l)} \quad (2.38)$$

$$\bar{\gamma}_e = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \bar{\gamma}_{e(l)} \quad (2.39)$$

Adicionalmente, la matriz de covarianza de $\bar{\alpha}$ se puede calcular como:

$$\bar{\Delta} = \left(\frac{1}{K} \sum_{l=1}^K \bar{\alpha}_{(l)} \bar{\alpha}_{(l)}^T \right) - \bar{\alpha} \bar{\alpha}^T \quad (2.40)$$

El método de muestreo de Gibbs converge casi con seguridad al valor esperado del parámetro α (Rowe 2002), independientemente de los valores iniciales de Σ y Φ que se utilicen.

El valor de K requerido para lograr la convergencia del muestreo de Gibbs depende de la correlación entre las observaciones (datos) y la covarianza de los parámetros de la regresión; por lo tanto, se debe definir iterativamente.

En los cálculos presentados más adelante (Capítulo 5), se logró la convergencia del método con K entre 200 y 500.

2.5. PROCEDIMIENTO PARA LLEVAR A CABO EL ANÁLISIS DE REGRESIÓN BAYESIANO UNIVARIADO

En el modelo general de atenuación propuesto por Arroyo *et al.* (2008), si el funcional es lineal es posible considerar la correlación entre distintas observaciones para un mismo sismo, así como la correlación entre las ordenadas del espectro de pseudoaceleración para periodos diferentes y la correlación entre los coeficientes del modelo de regresión.

El funcional utilizado en el presente estudio (ecuación 2.10) no es lineal; sin embargo, puede linealizarse asignando un cierto valor al coeficiente $\alpha_d(T)$, que depende del periodo estructural T (por eso toma un valor diferente para cada T); por lo tanto, el análisis de regresión se debe limitar a un solo periodo. Lo anterior convierte al análisis en univariado e implica omitir la correlación entre las ordenadas del espectro de pseudoaceleración.

El valor correcto de $\alpha_d(T)$ no se conoce en primera instancia y sólo puede intuirse el intervalo de valores que podría tomar. En el Capítulo 1 se vio que $\alpha_d(T)$ es el término que controla el efecto de la saturación en las zonas cercanas a la superficie de falla, y teóricamente es igual al término α ($\alpha = 2\pi/\beta Q_0$). $\alpha_d(T)$ se debe ver entonces como una modificación empírica de α para tener en cuenta la dependencia del factor de calidad Q_0 con la frecuencia, es decir, $Q_0(f)$. Singh *et al.* (1989) propusieron para la región de subducción en la costa pacífica mexicana una velocidad de propagación de ondas de corte $\beta = 3.2 \text{ Km/s}$ y factor de calidad $Q_0 = 100 \text{ s}$. Reemplazando se tiene que $\alpha_d(T) = \alpha = 2\pi/(3.2*100) = 0.0196$; entonces, se define (0.0001-0.02) como el intervalo probable de valores que podría tomar $\alpha_d(T)$. El valor correcto del parámetro $\alpha_d(T)$, por periodo, se encuentra por prueba y error, proponiendo diferentes valores, todos dentro del intervalo que se acaba de definir. Para cada $\alpha_d(T)$ se lleva a cabo la regresión bayesiana y con base en los resultados obtenidos, se determina cuál es el valor de $\alpha_d(T)$ que mejor se ajusta a los datos.

Se utilizarán 15 valores de $\alpha_d(T)$ por periodo, que se muestran en la tabla 2.1:

No.	$\alpha_d(T)$
1	0.0001
2	0.00143
3	0.00286

4	0.00429
5	0.00571
6	0.00714
7	0.00857
8	0.01
9	0.01143
10	0.01286
11	0.01429
12	0.01571
13	0.01714
14	0.01857
15	0.02

Tabla 2.1. Valores del parámetro $\alpha_d(T)$ que se utilizarán para cada periodo T

En el presente estudio se considerarán 57 periodos estructurales entre 0.001 y 5.0 segundos⁴. Éstos se presentan a continuación:

No	T [s]
1	0.001
2	0.040
3	0.045
4	0.050
5	0.055
6	0.060
7	0.065
8	0.070
9	0.075
10	0.080
11	0.085
12	0.090
13	0.095
14	0.10
15	0.12
16	0.14
17	0.16
18	0.18
19	0.20
20	0.22
21	0.24
22	0.26
23	0.28

⁴ Intervalo de periodos de mayor interés en la Ingeniería Civil.

24	0.30
25	0.32
26	0.34
27	0.36
28	0.38
29	0.40
30	0.45
31	0.50
32	0.55
33	0.60
34	0.65
35	0.70
36	0.75
37	0.80
38	0.85
39	0.90
40	0.95
41	1.00
42	1.10
43	1.20
44	1.30
45	1.40
46	1.50
47	1.60
48	1.70
49	1.80
50	1.90
51	2.00
52	2.50
53	3.00
54	3.50
55	4.00
56	4.50
57	5.00

Tabla 2.2. Periodos considerados en el análisis de regresión.

Para cada uno de los anteriores 57 periodos, se harán 15 regresiones bayesianas y se aplicará el muestreo de Gibbs, una para cada valor de $\alpha_4(T)$ (tabla 2.1). Esto permitirá obtener los coeficientes $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ (matriz α^T) y la desviación estándar (σ) de los residuales de la ecuación (2.10). El valor de $\alpha_4(T)$ relacionado con la mínima desviación estándar (σ) se adoptará como el que mejor se ajusta a los datos; de igual forma, los demás parámetros de la regresión $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ correspondientes a ese valor de $\alpha_4(T)$ son los valores correctos.

Lo anterior implica que el análisis de regresión no es completamente bayesiano, pues los coeficientes $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$, y $\alpha_3(T)$ se consideran variables aleatorias con una función de densidad de probabilidad *a priori* y otra *a posteriori*, pero $\alpha_4(T)$ no se considera como tal y se trata como una constante.

Con la descripción del procedimiento que se seguirá más adelante para llevar a cabo la regresión bayesiana univariada finaliza el Capítulo 2, dedicado principalmente a exponer la teoría concerniente al modelo de atenuación; el siguiente paso, antes de aplicarlo y obtener resultados, es conocer el conjunto de datos con los que se trabajará y definir la información *a priori* o hiperparámetros. Esto se hace en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

DATOS USADOS Y DEFINICIÓN DE LA INFORMACIÓN A *PRIORI*

3. DATOS USADOS Y DEFINICIÓN DE LA INFORMACIÓN A *PRIORI*

Después de dedicar los capítulos precedentes a exponer las bases teóricas sobre las que se sustenta el modelo de atenuación que aquí se presenta, es necesario, ahora, comentar sobre la información que se requiere para poder aplicarlo. Tal información se puede dividir en: 1) Datos recolectados y 2) Valores que se debe asignar a la información *a priori* o hiperparámetros (α_{v0} , Δ , Q , ν , a y b), de acuerdo con la definición que se les dio en el Capítulo 2. Ese es precisamente el objetivo de este capítulo. En primer lugar, se hace una descripción del conjunto de datos utilizados para adelantar la regresión, de manera que el lector pueda darse cuenta de la pertinencia y representatividad de éstos; posteriormente, se exponen los argumentos y procedimientos utilizados para asignar valores a α_{v0} , Δ , Q , ν , a y b .

3.1. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS UTILIZADOS

Se utilizará básicamente el mismo conjunto de datos de sismos de subducción interplaca utilizado por García *et al.* (2006). Estos autores agruparon todos los sismos de este tipo con magnitud de momento M_w mayor que 5.0, ocurridos entre 1985 y 2004 en la costa del Pacífico, entre los Estados de Colima y Oaxaca (ver figura 3.3). El conjunto de datos contiene registros de estaciones emplazadas sobre roca, en superficie libre (clase B, según clasificación NERPH), reportados por las diferentes redes de instrumentación sismológica que operan en la región, las cuales se pueden dividir en tres grupos: en primer lugar están las redes acelerométricas distribuidas por los Estados de la región y operadas por el Instituto de Ingeniería de la UNAM (II-UNAM), a este grupo pertenecen la Red Acelerográfica de Guerrero (GAA) y la Red Acelerográfica de Oaxaca (RAO). En segundo lugar se tiene la Red de Atenuación del Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED), conformada por 5 estaciones localizadas prácticamente de forma equidistante entre Acapulco y la Ciudad de México. Finalmente, se tiene la Red de Banda Ancha del Servicio Sismológico Nacional (SSN), operada por el Instituto de Geofísica de la UNAM (IGF-UNAM).

Del conjunto original de datos utilizado por García *et al.* (2008), conformado por 46 sismos, se excluyeron aquellos eventos cercanos a la Fosa Oceánica Americana (MAT, pos sus siglas en inglés) con frecuencia de radiación extrañamente baja (Shapiro *et al.*, 1998; Iglesias *et al.*, 2003).

También, fueron excluidos los datos reportados por estaciones con amplificaciones importantes debido a los efectos de sitio (Castro *et al.*, 1990; Humphrey y Anderson, 1992; Castro y Ruiz-Cruz, 2005); debido a que el propósito del presente trabajo, como se ha dicho en varias ocasiones, es modelar la atenuación de las ondas sísmicas sólo sobre roca. De igual forma, se excluyeron aquellos datos provenientes de estaciones ubicadas sobre el Cinturón Volcánico Transmexicano MVB, por sus siglas en inglés (ver figura 3.3), ya que es muy probable que éstos correspondan a sismos que tengan como origen la actividad volcánica y no la subducción interplaca.

Esta investigación está enfocada en el rango de magnitudes y distancias de interés en Ingeniería Civil, es decir $M_w > 6.5$ y $R < 150-200 \text{ Km}$. Para lograr que la cobertura de este conjunto de datos sea mayor, se aumentó el rango de distancias hasta 400 Km ($R < 400 \text{ Km}$), y se excluyeron los datos de aquellos eventos de $M_w \leq 5.5$ que contaban con pocos registros. Para los eventos de magnitud $M_w > 6.0$ se trabajará con la distancia mínima desde la estación al plano de falla, mientras que para eventos más pequeños se utilizará la distancia hipocentral. La explicación es sencilla: para eventos pequeños, el plano de falla no es tan grande y seguramente el hipocentro está muy cerca del punto más cercano medido desde la superficie de ruptura hasta la estación; sin embargo, para sismos grandes ($M_w > 6.0$) el plano de falla es más grande, por lo tanto, el hipocentro y el punto correspondiente a la mínima distancia, R , pueden diferir considerablemente.

La elección de 400 Km como límite superior para R , que podría interpretarse como grande, se hizo teniendo en cuenta el lento decaimiento del movimiento del terreno (originado en la costa del Océano Pacífico, ver figura 3.3) hacia adentro del continente, reportado por varios autores (algunos son Singh *et al.*, 1988; Cárdenas *et al.*, 1998; Cárdenas y Chávez, 2003; García *et al.*, 2008), lo que obliga a considerar distancias más grandes que aquellas que usualmente se utilizan en este tipo de análisis. Adicionalmente, con el propósito de reducir el potencial de variabilidad de los datos, para cada evento registrado en dos o más estaciones separadas menos de 5 Km , se utilizó sólo uno de estos registros, apoyándose en la inspección visual de las trazas (véase la figura 3.1).

El conjunto de datos resultante consiste de 418 registros correspondientes a 40 eventos cuyo origen es la subducción interplaca, obtenidos en 53 estaciones localizadas a distancias entre 20 y 400 Km . Los datos seleccionados fueron registrados por acelerómetros digitales de 12-19 bit (66% del total de los datos) y sismógrafos de banda ancha de 24 bit (el restante 34%). En la tabla 3.1 se presenta esta información.

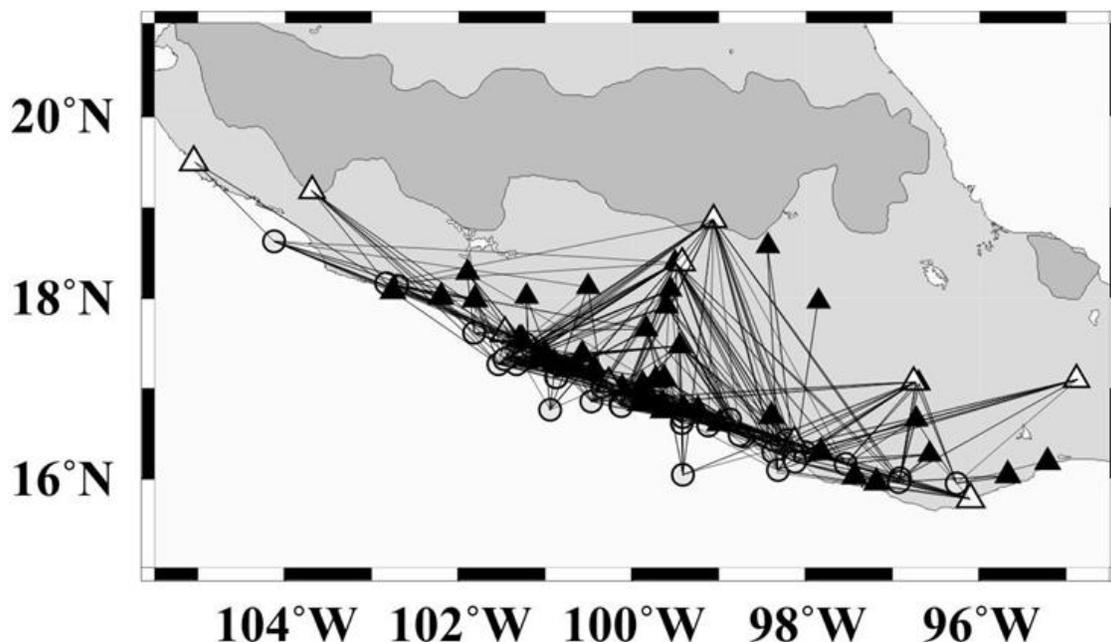


Figura 3.1. Epicentros de cada sismo (círculos) y estaciones (triángulos) utilizadas en el presente trabajo. Los triángulos sólidos representan las estaciones acelerográficas y los triángulos sin relleno las estaciones de banda ancha. (Tomada de Pseudo-acceleration attenuation relationships for interface Mexican subduction-zone earthquakes, Arroyo et al., 2008). Las líneas que salen de los círculos y terminan en un triángulo (estación) representan el número de registros de cada sismo.

Evento No.	Fecha (aammdd)	Lat °N	Lon °W	H (Km)	M_w	N ¹
1	850919	18.14	102.71	17.0	8.0	10
2	850921	17.62	101.82	22.0	7.6	8
3	880208	17.45	101.19	22.0	5.8	9
4	890310	17.45	101.19	20.0	5.4	6
5	890425	16.61	99.43	16.0	6.9	10
6	890502	16.68	99.41	15.0	5.5	5
7	900113	16.82	99.64	16.1	5.3	8
8	900511	17.12	100.87	21.0	5.5	6
9	900531	17.12	100.88	18.0	5.9	9
10	930515	16.47	98.72	16.0	5.5	6
11	931024	16.65	98.87	26.0	6.6	12
12	950914	16.48	98.76	16.0	7.3	15

¹ Número de registros con tres componentes utilizados.

13	960313	16.59	99.12	25.0	5.1	10
14	960327	16.36	98.30	18.0	5.4	9
15	960715	17.33	101.21	27.0	6.6	17
16	960718	17.44	101.21	25.0	5.4	10
17	970121	16.42	98.21	28.0	5.4	12
18	971216	16.04	99.41	27.0	5.9	7
19	980509	17.50	101.24	23.5	5.2	12
20	980516	17.27	101.34	28.2	5.2	10
21	980705	16.81	100.14	25.0	5.3	15
22	980711	17.35	101.41	28.9	5.4	12
23	980712	16.85	100.47	26.0	5.5	14
24	010904	16.29	98.37	20.0	5.2	10
25	011110	16.09	98.32	17.0	5.4	11
26	020607	15.99	96.92	20.0	5.2	10
27	020607	15.96	96.93	19.0	5.5	12
28	020619	16.29	98.02	20.0	5.3	12
29	020805	15.94	96.26	15.0	5.4	7
30	020827	16.16	97.54	15.0	5.0	10
31	020830	16.76	100.95	15.0	5.2	6
32	020925	16.80	100.12	12.0	5.3	15
33	021108	16.28	98.12	16.0	5.2	10
34	021210	17.36	101.25	24.0	5.4	8
35	030110	17.01	100.35	28.0	5.2	15
36	030122	18.62	104.12	10.0	7.5	8
37	040101	17.27	101.54	17.0	6.0	15
38	040101	17.32	101.47	27.0	5.6	11
39	040206	18.16	102.83	12.0	5.1	8
40	040614	16.19	98.13	20.0	5.9	18

Tabla 3.1. Sismos interplaca utilizados para la regresión.

De igual forma, en la figura 3.2 se presenta la distribución magnitud-distancia de los datos. Nótese que aproximadamente el 45% de los datos se encuentra en el intervalo de distancias entre 20-100 Km. En este punto resulta conveniente aclarar que esta muestra es grande, más no completa. Se

puede ver, en la figura 3.2, que hay condiciones para las que no se tienen datos suficientes, por ejemplo, para distancias muy cortas ($R < 20 \text{ Km}$); igualmente, se tienen muy pocos datos para sismos de magnitudes moderadas y grandes, y distancias mayores a 200 Km . Para estas condiciones, la información *a priori* toma más peso, pues trata de suplir la carencia de información en la muestra, es decir, la regresión debe estabilizarse con la información proveniente del conocimiento previo.

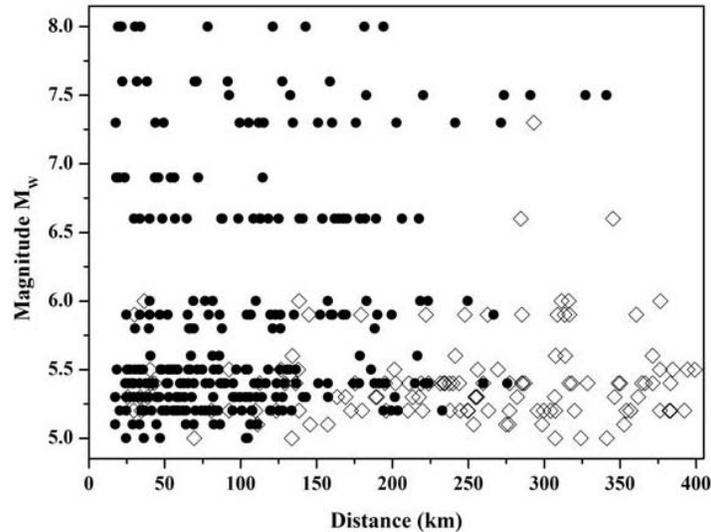


Figura 3.2. Magnitud contra distancia. Resumen de los datos utilizados en el presente estudio. Los símbolos indican el tipo de dato: los círculos representan los acelerogramas y los rombos los datos de velocidad (banda ancha). (Tomada de *Pseudo-acceleration attenuation relationships for interface Mexican subduction-zone earthquakes*, Arroyo et al., 2008).

La figura 3.3, presentada en la siguiente página, muestra la ubicación de los epicentros de los eventos y las diferentes estaciones, diferenciando entre las que tienen acelerógrafos digitales y sismógrafos de banda ancha (Servicio Sismológico Nacional, SSN). La mayoría de los registros provienen del Estado de Guerrero, aunque una cantidad importante proviene de Oaxaca.

De cada acelerograma, se obtiene la aceleración pico (PGA), y se calcula el espectro de pseudoaceleraciones (PSA), con un amortiguamiento del 5%, para 57 frecuencias entre 0.2 y 1000 Hz (0.001-5 segundos). Para determinar la velocidad pico (PGV) a partir de los acelerogramas, es necesario integrarlos, después de aplicar una corrección por línea base y un filtrado del tipo high-pass. Se utilizó una frecuencia de corte de 0.05 Hz ($T = 20 \text{ s}$) para eventos de magnitud $M_w > 6.5$ y 0.1 Hz ($T = 10 \text{ s}$) para el resto de eventos. Los registros de velocidad obtenidos en los sismógrafos de banda ancha se derivaron para obtener los acelerogramas y posteriormente éstos se procesaron de

la misma manera que ya se indicó. Para cada ordenada se calculó la media cuadrática de las dos componentes horizontales.

Como se ha mencionado, y como se puede observar en la tabla 3.1, la base de datos que se usará está conformada por los acelerogramas registrados para 40 eventos. Este conjunto de datos se comparó con los datos de eventos interplaca originados en la zona de subducción en la costa pacífica mexicana utilizados por Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003). Se encontró que existen muy pocas coincidencias. Youngs *et al.* (1997) utilizaron únicamente los eventos 1, 2 y 5 de la tabla 3.1 mientras que Atkinson y Boore (2003) usaron solo los eventos 1, 5, 12 y 15 de la misma tabla.

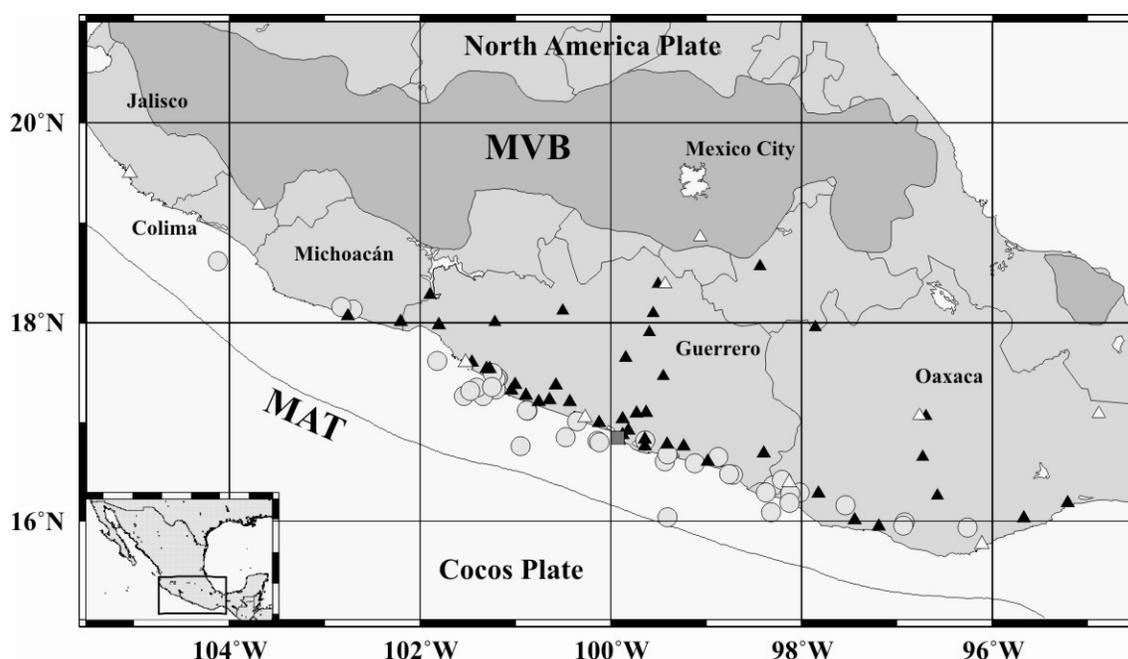


Figura 3.3. Mapa del centro de México, indicando los epicentros (círculos) y las estaciones (triángulos) utilizadas en este estudio. Los símbolos sólidos representan las estaciones acelerográficas y los símbolos sin relleno las estaciones de banda ancha. También se observa la ubicación del cinturón volcánico transmexicano (MVB, por sus siglas en inglés) y la fosa americana (MAT). También se muestran los Estados involucrados en este estudio. El cuadrado gris representa la estación ACAP. (Tomada de *Pseudo-acceleration attenuation relationships for interface Mexican subduction-zone earthquakes*, Arroyo *et al.*, 2008).

También, Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003) incluyeron el sismo del 30 de abril de 1986 en sus bases de datos. En el presente trabajo este sismo no se incluye debido, como se comentó previamente, a que los sismos con menos de cuatro registros se excluyeron para reducir la variabilidad. De igual forma, Atkinson y Boore (2003) incluyeron los sismos del 29 de mayo de

1986 y 23 de abril de 1996; éstos también se descartaron porque se pudo identificar que a pesar de ser eventos de subducción, su origen es intraplaca de mecanismo inverso, con profundidades focales que varían entre los 30 y 45 *Km*, según lo expuesto en el primer capítulo, y no interplaca, que es el tipo de eventos concerniente a la presente investigación. Eventos como los anteriores tienden a ser clasificados erróneamente por los catálogos sísmicos globales y es común que se reporten como sismos interplaca moderados poco profundos (10-30 *Km* de profundidad). La diferencia radica en que los sismos intraplaca de mecanismo inverso presentan una caída de esfuerzos considerablemente mayor que la de los sismos interplaca ($\Delta\sigma = 100 \text{ bar}$), por lo tanto su estudio debe hacerse de una manera separada.

Una diferencia más entre las bases de datos, es que la profundidad focal de los eventos considerados en el presente trabajo oscila entre 10 y 28.9 *Km* (véase tabla 3.1) mientras que Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003) utilizaron sismos de subducción con profundidades focales entre 11 y 50 *Km*.

La anterior comparación con los eventos mexicanos de subducción incluidos dentro de las bases de datos utilizadas precisamente por Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003), obedece a que más adelante, en el Capítulo 5, se compararán los resultados obtenidos usando el modelo de atenuación que acá se presenta con los resultados logrados con los modelos propuestos por esos autores.

3.2. DEFINICIÓN DE LA INFORMACIÓN A *PRIORI*.

Para llevar a cabo la regresión bayesiana del modelo de atenuación, es necesario asignar valores *a priori* a los hiperparámetros α_{v0} , Δ , Q , ν , a y b , basándose en el conocimiento propio y en el grado de incertidumbre que se tenga sobre éstos. A pesar de que estos valores iniciales serán modificados una vez se incluya en el análisis la información proveniente del conjunto de datos descrito en la sección anterior, es importante asignar valores *a priori* adecuados para lograr estabilidad en el proceso de regresión y evitar que los parámetros que resultan de tal regresión tomen valores físicamente inaceptables.

3.2.1. Definición de valores para los coeficientes de la regresión (α_0) y su matriz de covarianza (Δ)

El valor esperado *a priori* de la matriz α , es decir α_0 , se determinará de la siguiente manera: mediante la ecuación (1.6) del Capítulo 1 y utilizando los valores regionales propuestos por Singh *et al.* (1989) se calcula el espectro de Fourier de la aceleración del suelo para diferentes valores de magnitud (M_w) y distancia más cercana al plano de falla (R). Posteriormente, se define el conjunto de valores de periodo estructural para los que se quiere hacer el análisis de regresión (se utilizarán 57 periodos entre 0.001 y 5.0 s) y se asigna un valor al coeficiente $\alpha_d(T)$; finalmente, utilizando la teoría de vibraciones aleatorias se obtiene el espectro de *PSA* para el 5% del amortiguamiento crítico, es decir, se genera una muestra sintética. Con los datos anteriores (M_w , R y *PSA*) y utilizando la técnica de regresión por mínimos cuadrados se determina el valor de α_0 . Es importante aclarar que los datos con los que se realiza esta regresión no pertenecen a la muestra con la que se hará la regresión bayesiana definitiva; aquellos constituyen un conjunto que se construye de forma artificial, pues no se registraron en estación alguna, sino que se proponen diferentes valores de M_w y R , y con ellos se determina teóricamente el espectro de *PSA*.

Lo anterior implica que *a priori* se cree que la atenuación del espectro de pseudoaceleraciones se puede caracterizar correctamente mediante el modelo de Hanks y McGuire (1981) y Boore (1983), haciendo uso del espectro de fuente propuesto por Brune (1970) y la aproximación para altas frecuencias hecha por Singh *et al.* (1989).

En la siguiente tabla se presentan los 35 valores de magnitud de momento (M_w) y distancia más cercana a la superficie de falla (R) que se proponen para determinar α_0 .

M_w	R [Km]
5.0	16
5.5	16
6.0	16
6.5	16
7.0	16
7.5	16
8.0	16
5.0	25
5.5	25
6.0	25
6.5	25
7.0	25
7.5	25
8.0	25
5.0	50
5.5	50
6.0	50
6.5	50
7.0	50
7.5	50
8.0	50
5.0	100
5.5	100
6.0	100
6.5	100
7.0	100
7.5	100
8.0	100
5.0	200
5.5	200
6.0	200
6.5	200
7.0	200
7.5	200
8.0	200

Tabla 3.2. Datos de magnitud de momento (M_w) y distancia más cercana a la superficie de falla (R) utilizados para determinar el valor esperado a priori de los parámetros de la regresión, α_0 .

Procedimiento para determinar el espectro de pseudoaceleraciones

La transformada de Fourier para la aceleración del suelo se determina, como ya se mencionó en el primer capítulo, con las ecuaciones (1.3), (1.4), (1.6) y (1.8). A continuación éstas se presentan nuevamente:

$$A(f)^2 = 2C^2 F(f)^2 (M_o f_c^2)^2 e^{-2\pi\kappa f} \left[\frac{E_1(\alpha R) - E_1\left(\alpha \sqrt{R^2 + r_o^2}\right)}{r_o^2} \right] \quad (3.1)$$

Donde $A(f)$ son las ordenadas del espectro de aceleraciones de Fourier y,

$$C = \frac{R_P (2\pi)^2 F_1 P}{4\pi \rho \beta^3} \quad (3.2)$$

$$f_c = 4.91 \times 10^6 \beta \left(\frac{\Delta\sigma}{M_o}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.3)$$

$$r_o = \frac{2.34\beta}{2\pi f_c} \quad (3.4)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\beta Q_o} \quad (3.5)$$

$$M_o = 10^{(1.5M_w + 16.1)} \quad (3.6)$$

Según Singh *et al.* (1989), para la zona de subducción del Pacífico mexicano, los parámetros regionales (definidos previamente en el Capítulo 1) toman los valores siguientes: $\beta = 3.2 \text{ Km/s}$, $Q_o = 100 \text{ s}$, $\rho = 2.8 \text{ g/cm}^3$, $\kappa = 0.023$, $\Delta\sigma = 100 \text{ bar}$. Los factores de corrección son $F(f) = 2$, $R_P = 0.67$, $F_1 = 2$ y $P = 1/\sqrt{2}$.

Una vez se conoce el espectro de Fourier de aceleraciones del suelo $A(f)$, y haciendo uso de la función de transferencia, se determina el espectro de Fourier de la historia en el tiempo del desplazamiento de un oscilador de 1 grado de libertad (GDL):

$$A_Y(f) = |H(\omega)|^2 A(f) \quad (3.7)$$

Donde $A_Y(f)$ es la transformada de Fourier de la historia en el tiempo del desplazamiento de un oscilador de 1 GDL, y $|H(\omega)|^2$ es la norma cuadrada de la función de transferencia entre la aceleración en la base y el desplazamiento del oscilador, definida en la ecuación (3.8):

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 \omega_o^2} \quad (3.8)$$

ω es la frecuencia circular de la aceleración en la base, ω_o es la frecuencia circular del oscilador de 1 GDL y ζ es el amortiguamiento del oscilador, igual a 0.05 en este trabajo.

De acuerdo con la teoría de vibraciones aleatorias, la intensidad pico de interés (desplazamiento, en este caso, x_{max}) o valor esperado de la máxima respuesta $E[|x(t)|_{max}]$, se puede encontrar a partir del factor pico (FP) y el valor medio cuadrático:

$$x_{max} = FP * x_{rms} \quad (3.9)$$

El valor medio cuadrático del espectro de amplitudes de Fourier, también conocido como momento estadístico de orden 0 (m_0), es un promedio estadístico, y se calcula según la ecuación (3.10). Es común asumir que la media de la aceleración de la excitación en la base es igual a cero ($\mu = 0$), por consiguiente, la media de la historia en el tiempo del desplazamiento del oscilador es también igual a cero ($\mu_Y = 0$) y en tal caso, el valor medio cuadrático del espectro de Fourier del desplazamiento del oscilador, x_{rms} , es igual a la varianza del desplazamiento, σ_Y^2 :

$$x_{rms} = m_0 = \sigma_Y^2 = \frac{2}{T_d} \int_0^{\omega_n} A_Y(f)^2 df \quad (3.10)$$

El término T_d representa la duración de la fase intensa del evento. De acuerdo con Hermann (1985), para terrenos firmes, y en el caso del modelo de fuente finita es igual a:

$$T_d = \frac{1}{f_c} + 0.05r_o \quad (3.11)$$

La frecuencia de esquina, f_c , y la distancia focal, r_o , se calculan mediante las ecuaciones (3.3) y (3.4), respectivamente.

Para el cálculo del factor pico (FP), se hace uso de la siguiente expresión:

$$FP = K = \sqrt{2\ln(n)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2\ln(n)}} \quad (3.12)$$

γ es la constante de Euler, igual a 0.5772156649... y n representa el número de cruces por el eje x de la historia en el tiempo del desplazamiento del oscilador durante un lapso igual a la fase intensa del evento (T_d), es decir, el número de cruces cuando el umbral es igual a cero; y se determina como el producto entre la tasa por unidad de tiempo de cruces por el eje x , $\nu^+(0)$, y la duración de la fase intensa (T_d):

$$n = 2\nu^+(0) * T_d \quad (3.13)$$

La tasa de cruces por el eje x , por unidad de tiempo se estima con:

$$\nu^+(0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{Y}}}{\sigma_Y} \quad (3.14)$$

Donde, el cociente entre la desviación estándar de la velocidad del oscilador $\sigma_{\dot{Y}}$ y la desviación del desplazamiento σ_Y , se conoce como frecuencia aparente o frecuencia característica.

Como ya se mencionó, se asumió que la media de la excitación en la base es igual a cero, y, por lo tanto, la media de la historia en el tiempo del desplazamiento y la velocidad del oscilador son también iguales a cero ($\mu_Y = \mu_{\dot{Y}} = 0$). Entonces la varianza es igual a la integral de la función de densidad espectral, o densidad de potencia, $G(\omega)$:

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_Y(\omega) d\omega \quad (3.15)$$

y

$$\sigma_{\dot{Y}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_Y(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G_Y(\omega) d\omega \quad (3.16)$$

ω^2 es la norma cuadrada de la función de transferencia entre una función y su derivada ($i\omega$), como es el caso del desplazamiento y la velocidad. La función de densidad espectral se determina a partir del espectro de Fourier, como se muestra en la ecuación (3.17):

$$G_Y(\omega) = \frac{1}{\pi T_d} A_Y(\omega)^2 \quad (3.17)$$

$A_Y(f)^2$ es la transformada de Fourier del desplazamiento del oscilador y se calcula con la ecuación 3.7.

Se tiene todo lo necesario para calcular el desplazamiento máximo del oscilador para diferentes periodos (espectro de desplazamiento), mediante la ecuación (3.9). Finalmente, el espectro de pseudoaceleraciones PSA se obtiene multiplicando el desplazamiento máximo por la frecuencia circular del oscilador al cuadrado:

$$PSA(T) = \omega_o^2 * x_{max} = \left(\frac{2\pi}{T_o}\right)^2 x_{max} \quad (3.18)$$

En la figura 3.4 se presentan dos espectros de PSA obtenidos aplicando el anterior procedimiento, para un sismo de magnitud de momento igual a 8.0 y distancia al plano de falla de 16 Km y otro sismo de 7.5 y una distancia de 50 Km.

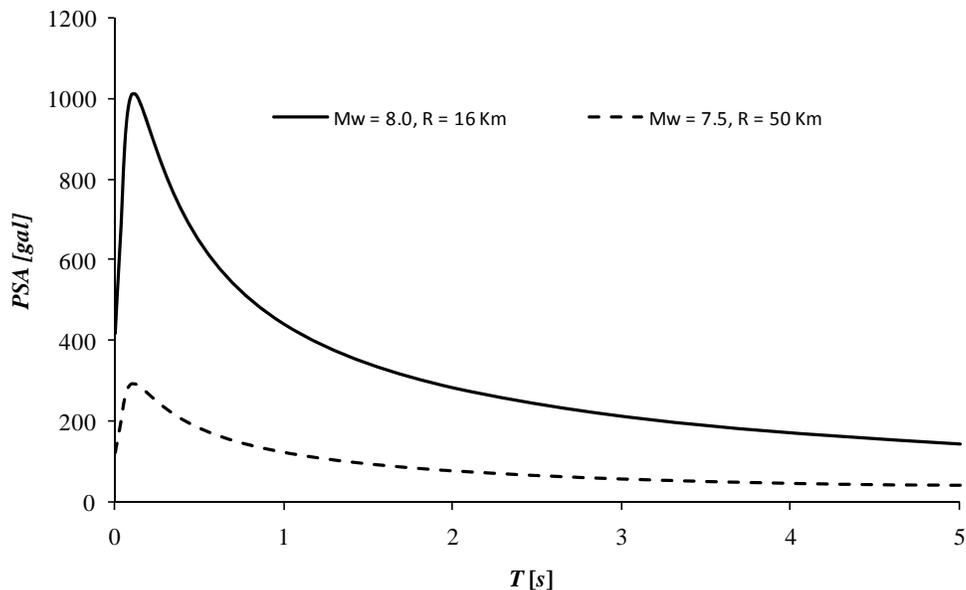


Figura 3.4. Espectros de PSA obtenidos mediante la teoría de vibraciones aleatorias a partir del modelo de fuente puntual de Hanks y McGuire (1981) y Boore (1983).

Es importante mencionar que la ecuación (3.1) para calcular la amplitud del espectro de Fourier, se obtuvo mediante la aproximación para frecuencias altas hecha por Singh *et al.* (1989), de manera que sólo es válida en el rango de periodos cortos; sin embargo, se utilizará para calcular el valor medio *a priori* de los parámetros de la regresión para todos los periodos (incluyendo periodos largos). Lo anterior tiene justificación en el hecho de que en el modelo bayesiano la información *a*

priori se modifica con la información contenida en las observaciones, como se discutió en el capítulo precedente.

Como se mencionó anteriormente, el valor de la matriz α_0 se determinará a partir de los datos propuestos para la magnitud M_w , distancia al plano de falla R (Tabla 3.2) y máxima pseudoaceleración (espectro de respuesta), utilizando la regresión por mínimos cuadrados. Al asumir un valor constante para el parámetro $\alpha_4(T)$, el modelo de atenuación toma la forma lineal que se presenta en la ecuación (3.19), donde las matrices Y y X se conforman con los datos (M_w , R y PSA):

$$Y = X\alpha^T + E \quad (3.19)$$

La matriz Y contiene los datos de pseudoaceleración, $\ln(PSA)$ más exactamente, y su tamaño es $n_o \times n_T$; n_o es el número de observaciones, que es igual a 35, como se puede ver en la tabla 3.2 y n_T es el número de periodos estructurales considerados en el análisis de regresión, de acuerdo con la tabla 2.2 es igual a 57; de manera que Y es una matriz de 35×57 . Cada fila de la matriz Y corresponde a un espectro de pseudoaceleración. La matriz X es de tamaño $n_o \times 3$, es decir, 35×3 , y contiene los datos de magnitud de momento M_w y distancia R de cada observación. Los coeficientes de la regresión, $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ están contenidos en la matriz α^T , cuyo tamaño es $3 \times n_T$ (3×57).

La solución de la ecuación (3.19), en el sentido de mínimos cuadrados, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\alpha_0 = \alpha_T = (X^T X)^{-1} (X^T Y) \quad (3.20)$$

Para llegar a la ecuación anterior es necesario proponer un valor para $\alpha_4(T)$; sin embargo, el valor correcto de este parámetro no se conoce en primera instancia y sólo se puede intuir el rango de valores que podría tomar (0.0001-0.02). Es por eso que el valor correcto se encuentra por prueba y error, proponiendo diferentes $\alpha_4(T)$, y para cada uno de éstos se determina la matriz α_0 . Finalmente, con base en los resultados de la regresión bayesiana descrita en el capítulo anterior, se determina cuál es el valor correcto por periodo para $\alpha_4(T)$.

A manera de ejemplo, en la figura de la siguiente página, se presentan los valores esperados *a priori* de los parámetros $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$, para $\alpha_4(T) = 0.0029$, 0.01 y 0.02.

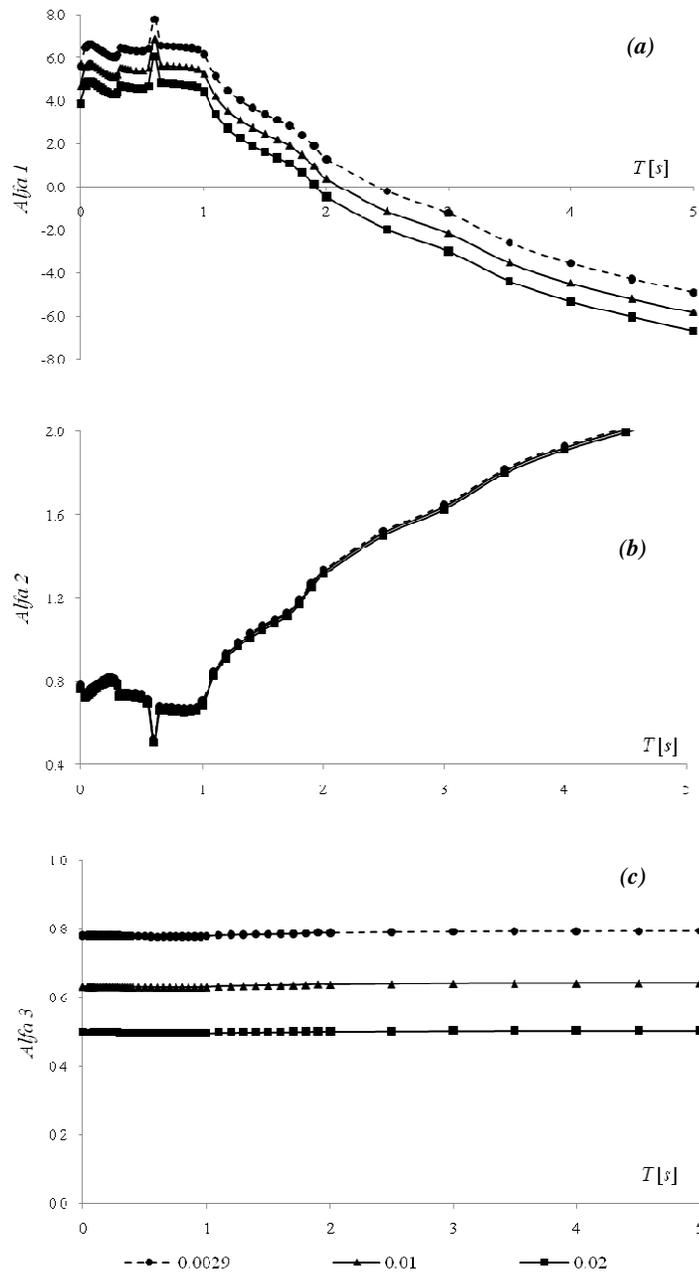


Figura 3.5. Valores esperados a priori: (a) α_1 , (b) α_2 y (c) α_3 cuando $\alpha_4(T) = 0.0029, 0.01$ y 0.02

En el análisis bayesiano la información *a priori* se debe definir adecuadamente para lograr estabilidad en el proceso de regresión y evitar que los parámetros que resultan de tal regresión tomen valores inaceptables físicamente. Después de calcular $\alpha_0(T)$, es necesario definir la varianza de los parámetros $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ y la covarianza entre éstos; que se representa con la matriz Δ , de acuerdo con la nomenclatura empleada en el capítulo precedente. En el caso univariado Δ es una

matriz de tamaño 3 x 3, en cuya diagonal principal se encuentran las varianzas de $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ y las covarianzas se localizan por fuera de ésta. Se asumirá, *a priori*, que Δ es diagonal, es decir, las covarianzas son iguales a cero. En la ecuación (3.21) se presenta la estructura con la que se trabajará:

$$\Delta_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\alpha_3}^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Debido a que $\alpha_1(T)$ puede depender de los efectos de sitio y a que este parámetro es el que contiene en mayor medida² la información sobre los valores regionales (β , Q_0 , $\Delta\sigma$, etc.) que son bastante inciertos, se asigna a su varianza ($\sigma_{\alpha_1}^2$) un valor grande con respecto a su valor esperado *a priori*; se asumirá que $\sigma_{\alpha_1}^2 = 10000$. Esto implica que $\alpha_1(T)$ no está controlado por su valor *a priori* sino que en el análisis de regresión puede tomar el valor que mejor se ajuste.

Con los parámetros $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ no existe tanta incertidumbre, por tal motivo a sus varianzas ($\sigma_{\alpha_2}^2$ y $\sigma_{\alpha_3}^2$, respectivamente) se les asigna un valor tal que su coeficiente de variación sea igual a 1/1.7, tal como lo hicieron Ordaz *et al.*³ en 1994. Entonces, para $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ se cumple que:

$$\sigma_{\alpha_i}^2 = \left(\frac{E[\alpha_i(T)]_{\text{priori}}}{1.7} \right)^2 \quad i = 2, 3 \quad (3.22)$$

Se debe mencionar que el hecho de que la covarianza entre los parámetros α_i sea cero, y por consiguiente, el coeficiente de correlación entre éstos sea también igual a cero, no quiere decir que $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ sean variables estadísticamente independientes. Una de las ventajas del modelo de regresión que se presenta es precisamente que sí tiene en cuenta la correlación entre los coeficientes del modelo de regresión.

² Se dice "en mayor medida" porque el parámetro $\alpha_1(T)$ también depende de la atenuación anelástica Q_0 y de la velocidad de propagación de las ondas de corte β , que también son parámetros regionales.

³ Ordaz *et al.*, BAYESIAN ATTENUATION REGRESSIONS: AN APPLICATION TO MEXICO CITY, 1994.

3.2.2. Definición de los valores esperados *a priori* de Q , ν , a y b

El valor esperado *a priori* de Σ , es decir Σ_0 ; variable que tiene en cuenta la varianza de los residuales para el periodo considerado, se asume igual a 0.49. De esta forma se cree *a priori* que la desviación estándar del residual es igual a 0.7, independientemente del periodo estructural T . Como se vio en el Capítulo 2, el grado de certeza que se tiene sobre Σ_0 depende del parámetro ν , entre más grande sea ν mayor certeza se tiene. En el presente trabajo se utilizará un valor igual a 7, que es el mínimo requerido para que la varianza de Σ tenga un valor finito; esto quiere decir que el valor esperado *a priori* que se propone (Σ_0) se considera incierto. Entonces $\Sigma_0 = 0.49$ y $\nu = 7$.

Con la anterior información es posible calcular el hiperparámetro Q , que es uno de los argumentos de la función de densidad de probabilidad Wishart, propuesta como función de densidad *a priori* para Σ . De acuerdo con la ecuación (2.27), el hiperparámetro Q es igual a:

$$Q = (\nu - 2n_T - 2)\Sigma_0 \quad (3.23)$$

El análisis de regresión que se llevará a cabo más adelante es univariado, como se ha dicho ya varias veces; entonces $n_T = 1$ y como consecuencia:

$$Q = (\nu - 2n_T - 2)\Sigma_0 = (7 - 2 \times 1 - 2) \times 0.49 = 1.47 \quad (3.24)$$

Finalmente, la correlación entre las filas de $Y = \ln(PSA)$, es decir, la correlación entre las diferentes observaciones, se define mediante la matriz Φ , que tiene estructura diagonal en bloque igual a la definida por Joyner y Boore (1993)⁴ en su procedimiento de regresión utilizando la máxima verosimilitud. De esta forma, se asume que las observaciones registradas durante sismos diferentes son independientes y que el coeficiente de correlación entre las observaciones de un mismo sismo registradas en sitios diferentes es γ_r . La información *a priori* que se tiene sobre el parámetro γ_e es vaga; por tal motivo se le asignará como densidad de probabilidad *a priori* la función estándar beta (ecuación 2.28) con parámetros $a = b = 1.5$, que representan una densidad bastante plana o incierta. El valor esperado *a priori* que se le asigna al parámetro γ_e es 0.5. Con lo anterior, se garantiza que en el análisis de regresión γ_e tome el valor que mejor se ajuste al conjunto de datos con los que se trabajará.

⁴ William B. Joyner y David M. Boore, METHODS FOR REGRESSIONS ANALYSIS OF STRONG-MOTION DATA, 1993.

Después de dedicar los Capítulos 1 y 2 a exponer las bases teóricas del funcional y la regresión bayesiana, y destinar este capítulo a describir el conjunto de datos que será utilizado y a exponer los criterios seguidos para definir la información *a priori* o hiperparámetros; se tiene todo lo necesario para aplicar el modelo de atenuación que aquí se presenta.

En los capítulos siguientes se muestran los resultados obtenidos, de acuerdo con el procedimiento expuesto en la sección 2.5 (Capítulo 2) y se hacen comparaciones con otras relaciones de atenuación para sismos de subducción de origen interplaca.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN Y DEFINICIÓN DEL MODELO DE ATENUACIÓN

4. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN Y DEFINICIÓN DEL MODELO DE ATENUACIÓN

Este capítulo se dedicará a presentar los resultados logrados mediante la regresión bayesiana lineal, a partir del conjunto de datos y la información *a priori* descritos en el capítulo precedente.

El proceso de regresión se dividió en dos etapas. La primera tiene como objetivo determinar para cada periodo el valor correcto del coeficiente α_4 ; en la segunda etapa se calculan los demás coeficientes de la regresión $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ así como $\gamma_e(T)$ y $\Sigma(T)$, tomando como base los resultados logrados en la primera etapa. Al final del capítulo quedará definido el modelo de atenuación para sismos que tienen como origen la subducción interplaca en la costa del Pacífico mexicano y con el que se podrá construir espectros de pseudoaceleración como función de la magnitud, M_w , y la distancia mínima al plano de falla, R .

4.1. CÁLCULO DEL COEFICIENTE $\alpha_4(T)$. (PRIMERA ETAPA DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN)

Se ha dicho ya que para adelantar la regresión bayesiana es necesario linealizar el funcional (ecuación 1.11). Para ello se debe asumir un valor para el coeficiente $\alpha_4(T)$, cuyo valor correcto se desconoce; aunque se sabe que puede estar entre 0.0001 y 0.02. Se propuso probar con los 15 valores entre 0.0001 y 0.02 mostrados en la tabla 2.1. Para cada uno de éstos se adelanta la regresión y se determina la matriz α , así como la desviación estándar σ de los residuales.

En esta sección, dedicada a la primera etapa de la regresión, se estudiará la variación de la desviación estándar, σ , de los residuales (matriz E) para cada uno de los periodos T considerados (tabla 2.2), y se determina el valor de $\alpha_4(T)$ que mejor se ajusta a los datos.

Sin embargo, antes de mostrar los resultados, es importante recordar que el parámetro $\alpha_4(T)$ controla el efecto de saturación de la pseudoaceleración en las zonas cercanas a la superficie de falla, y teóricamente, en el modelo de fuente finita circular (asumiendo la aproximación para altas frecuencias de Singh *et al.*, 1989) es igual a $\alpha = 2\pi/\beta Q_0$. Por lo tanto, $\alpha_4(T)$ se debe ver como una

modificación empírica de α para tener en cuenta la variación del factor de calidad Q_0 con la frecuencia, $Q_0(f)$. Por tal motivo, en el modelo de atenuación que aquí se propone, el efecto de la saturación en zonas cercanas a la superficie de falla está controlado principalmente por el factor de calidad, Q_0 , y por consiguiente, por $\alpha_4(T)$.

En la figura 4.1 puede verse cómo varía la desviación estándar con respecto a $\alpha_4(T)$, para los periodos 0.0, 0.5, 1.0 y 5.0 segundos. Se observa que, en el caso de $T = 1.0$ segundos y también en $T = 5.0$ segundos, la desviación estándar aumenta en la medida en que aumenta $\alpha_4(T)$. Lo anterior se debe a que, en el rango de periodos largos, el valor de la pseudoaceleración no presenta saturación ya que el desplazamiento pico para un oscilador con periodo muy largo es igual al desplazamiento máximo del suelo, y esta cantidad no se satura con la magnitud. Aunque no se muestra en la figura, esta tendencia se observó en los demás periodos mayores a 1.0 s.

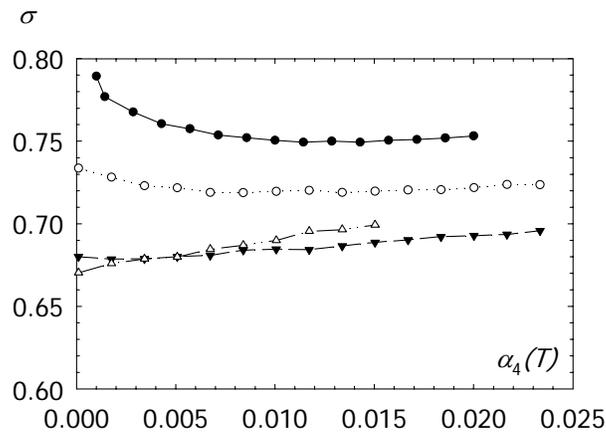


Figura 4.1. Desviación estándar (σ) como función del parámetro $\alpha_4(T)$ para diferentes periodos: círculos negros ($T=0.0$ s), círculos blancos ($T=0.5$ s), triángulos negros ($T=1.0$ s) y triángulos blancos ($T=5.0$ s).

Otra observación que se puede hacer sobre la figura es que para $T = 0.0$ y 0.5 segundos, mientras el parámetro $\alpha_4(T)$ aumenta, la desviación estándar decrece ligeramente hasta un valor mínimo. Una vez se llega a éste, σ empieza a crecer mientras $\alpha_4(T)$ sigue aumentando. En estos dos periodos, así como en otros que no se muestran en la figura, no está muy claro cuál es el valor de $\alpha_4(T)$ con la menor desviación; en tales casos, se selecciona el valor relacionado con el sesgo¹ más pequeño. Se puede decir entonces, que el valor de $\alpha_4(T)$ que produce la mínima desviación estándar de los residuales (σ), es decir, el valor correcto de $\alpha_4(T)$, depende del periodo estructural; como era de

¹ El sesgo es el valor medio de los residuales asociados al mismo periodo estructural T .

esperarse, ya que este parámetro está en función del factor de calidad Q_0 , que también es dependiente del periodo T : $Q_0(1/T) = Q_0(f)$.

La selección de los valores correctos para cada uno de los periodos considerados se presenta en la figura 4.2 (a).

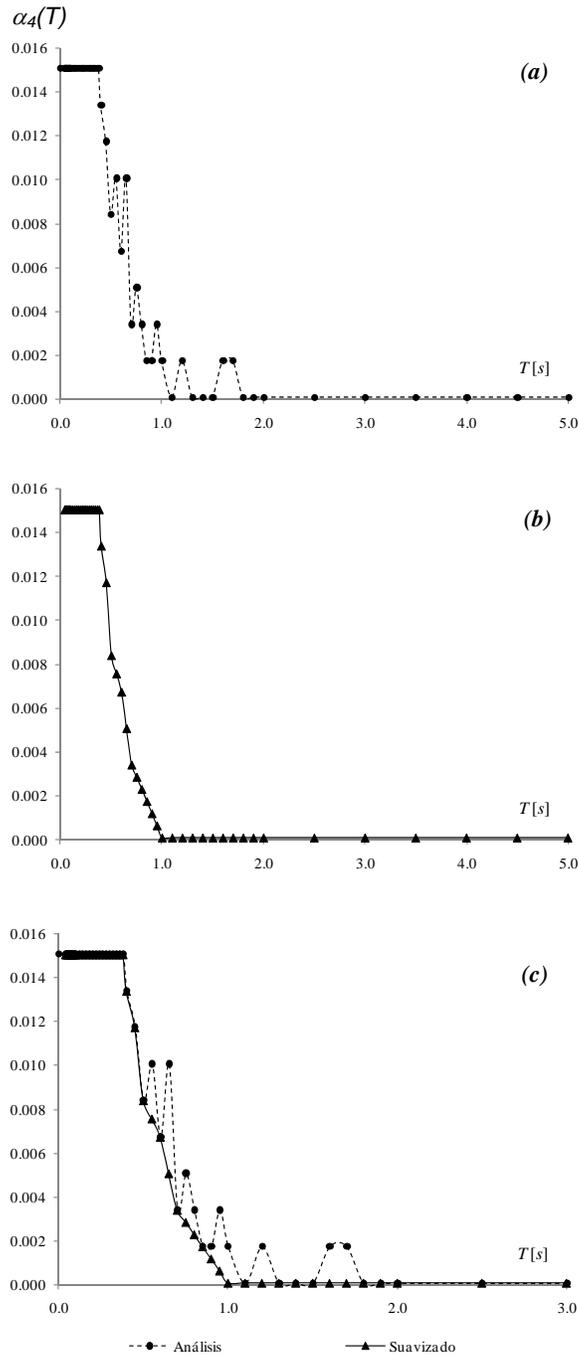


Figura 4.2. Variación del parámetro $\alpha_4(T)$: (a) resultados obtenidos en la primera etapa de la regresión, (b) función suavizada adoptada para la regresión definitiva y (c) comparación de las dos curvas.

De acuerdo con la figura, los valores correctos de $\alpha_4(T)$ más grandes se observaron en el rango de periodos cortos ($T < 0.5$ s) y evidentemente están relacionados con el efecto de la saturación de la pseudoaceleración en las zonas cercanas a la superficie de falla.

Después de $T = 0.5$ segundos se observa la tendencia de $\alpha_4(T)$ a decrecer en la medida en que aumenta el periodo estructural T y puede verse claramente que, para periodos mayores a 2.0 segundos, el valor de $\alpha_4(T)$ correspondiente a la desviación (σ) más pequeña es el menor de los valores con los que se probó, es decir 0.0001. En términos generales, se observa la tendencia mencionada anteriormente, sin embargo; entre 0.5 y 2.0 segundos, se presentan algunos saltos, que no resultan del todo lógicos. Por ejemplo, no es entendible que el valor de $\alpha_4(T)$ correcto para 0.5 segundos sea 0.00857 y luego, para 0.55 segundos ascienda a 0.01, para bajar nuevamente a 0.00714 en 0.6 segundos. Lo anterior no debe sorprender y tiene explicación en la naturaleza aleatoria del fenómeno que se está estudiando con la ayuda de modelos probabilísticos y cuyos resultados no son definitivos ni están exentos de error.

Para aplicaciones prácticas del modelo propuesto en este trabajo, la relación obtenida a partir de la regresión bayesiana se suavizó y es la que se muestra en la figura 4.2 (b). Esto implica descartar los valores de $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$ correspondientes al $\alpha_4(T)$ con la menor desviación σ (figura 4.2 a).

Ahora, con los nuevos valores de $\alpha_4(T)$ (obtenidos de la gráfica suavizada, figura 4.2 b), que de antemano se sabe son los correctos, se continúa con la segunda etapa del análisis de regresión, que tiene como objetivo principal determinar el valor definitivo de los demás coeficientes: $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$ y $\alpha_3(T)$, así como $\gamma_e(T)$ y $\Sigma(T)$.

Por último, en la figura 4.2 (c) se superpone la relación construida con los resultados de la regresión bayesiana con la gráfica suavizada que se utilizará en la segunda etapa del análisis; es claro que las diferencias más notorias se presentan entre 0.5 y 2.0 segundos; en los demás periodos las dos gráficas son coincidentes.

4.2. RESULTADOS FINALES (SEGUNDA ETAPA DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN)

Como se mencionó en la sección anterior, se debe adelantar nuevamente la regresión bayesiana univariada, para cada periodo T en que sea necesario, ahora con los nuevos valores de $\alpha_d(T)$ obtenidos de la curva suavizada presentada en la figura 4.2(b) y a partir de éstos determinar los valores esperados finales de las variables aleatorias involucradas en el modelo de atenuación: $\alpha_i(T)$, $\gamma_e(T)$ y $\Sigma(T)$. Los criterios y procedimientos para generar la información *a priori* son los mismos presentados en la sección 3.2. En algunos periodos, cuando la relación suavizada coincide con la gráfica construida con los resultados de la primera etapa (figura 4.2 c), no hace falta adelantar nuevamente la regresión bayesiana, pues al tenerse el mismo valor de $\alpha_d(T)$, se obtendrían resultados iguales, por lo tanto se conservan los mismos de la primera etapa.

Los resultados definitivos se muestran en la figura 4.3, donde el valor esperado final de cada variable aleatoria se compara con el valor esperado *a priori* utilizado para llevar a cabo la regresión. Puede verse cómo la información proveniente del conocimiento previo, se actualiza mediante las observaciones, de manera que los resultados no están ligados únicamente a la información *a priori*.

También se incluye una gráfica del sesgo obtenido para cada periodo estructural (figura 4.3f). Puede verse que los sesgos más grandes (en valor absoluto) son de alrededor de 0.05 y corresponden a periodos largos ($T > 3.0$ s), debido principalmente a que el funcional propuesto (ecuación 1.11) lleva implícita la aproximación hecha por Singh *et al.* (1989), que no necesariamente aplica en periodos largos (o frecuencias bajas), no obstante lo cual, se extendió a todos los periodos. De todas formas, y pese a lo anterior, se considera que el nivel de sesgo del modelo es aceptable. De igual forma, esta aproximación para periodos cortos está implícita en el procedimiento seguido para generar la información *a priori* sobre los coeficientes α_i (sección 3.2), es por eso que la diferencia entre los valores *a priori* y los resultados finales de la regresión bayesiana se incrementa en la medida en que el periodo crece, como sucede con $\alpha_1(T)$ y $\alpha_3(T)$ (figuras 4.3a y 4.3c, respectivamente).

La figura 4.3(d) muestra la variación del parámetro γ_e con el periodo estructural. Es importante destacar este hecho, ya que constituye una de las principales diferencias entre el análisis univariado, empleado en este trabajo, y el análisis multivariado (Anexo A). En el caso multivariado se tiene el mismo γ_e para todos los periodos, mientras que en el análisis univariado, como se observa en la figura, γ_e varía de periodo a periodo.

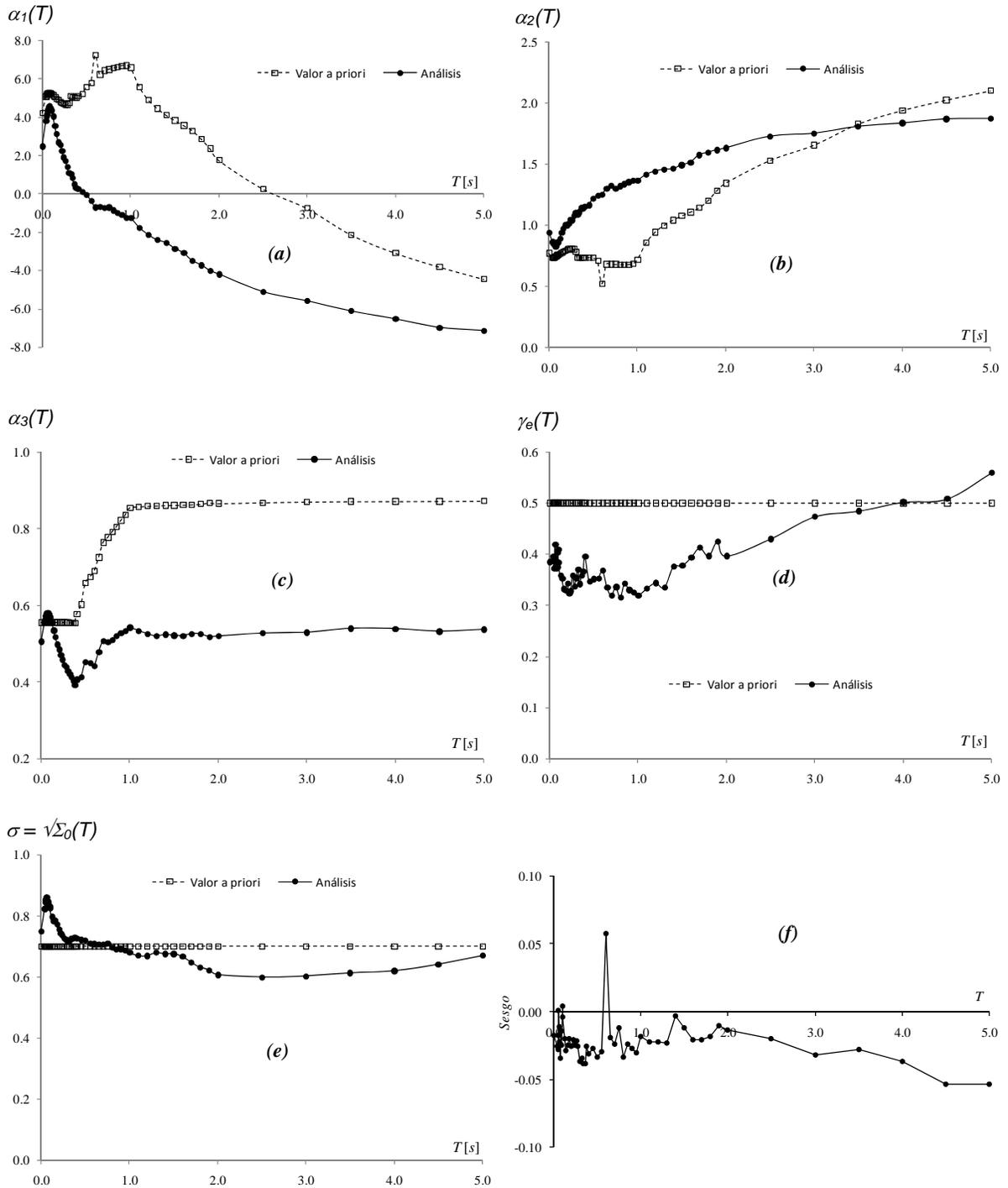


Figura 4.3. Coeficientes de regresión para el modelo de atenuación propuesto. Comparación entre los valores a priori y los resultados finales: (a) $\alpha_1(T)$, (b) $\alpha_2(T)$, (c) $\alpha_3(T)$, (d) $\gamma_e(T)$, (e) $\sigma(T)$ y (f) Sesgo.

Una vez culminado el proceso de regresión y conocidos los valores esperados definitivos de las variables aleatorias consideradas en el modelo de regresión ($E[\alpha_i]$, $E[\Sigma]$ y $E[\gamma_e]$), es conveniente utilizar los mismos valores de magnitud (M_w) y distancia a la superficie de falla (R) de la base de datos, para generar las ordenadas espectrales con el modelo de atenuación y compararlas con las

ordenadas espectrales reales provenientes de los datos. Se había definido el término y como el logaritmo natural de la pseudoaceleración: $y = \ln(PSA)$; a la diferencia entre y_{real} (datos) y $y_{teórico}$ (calculado con el modelo) se le conoce como residual.

Los residuales obtenidos deben ser revisados, para detectar cualquier dependencia de éstos con el periodo estructural T , la magnitud del sismo M_w , la distancia a la superficie de falla R , e incluso, la profundidad del foco H , así no esté incluida en el modelo de atenuación.

En primer lugar, en la figura 4.4 se muestran los residuales como función de la magnitud (M_w), para los periodos $T = 0.0, 0.3, 0.5, 1.0, 3.0$ y 5.0 segundos.

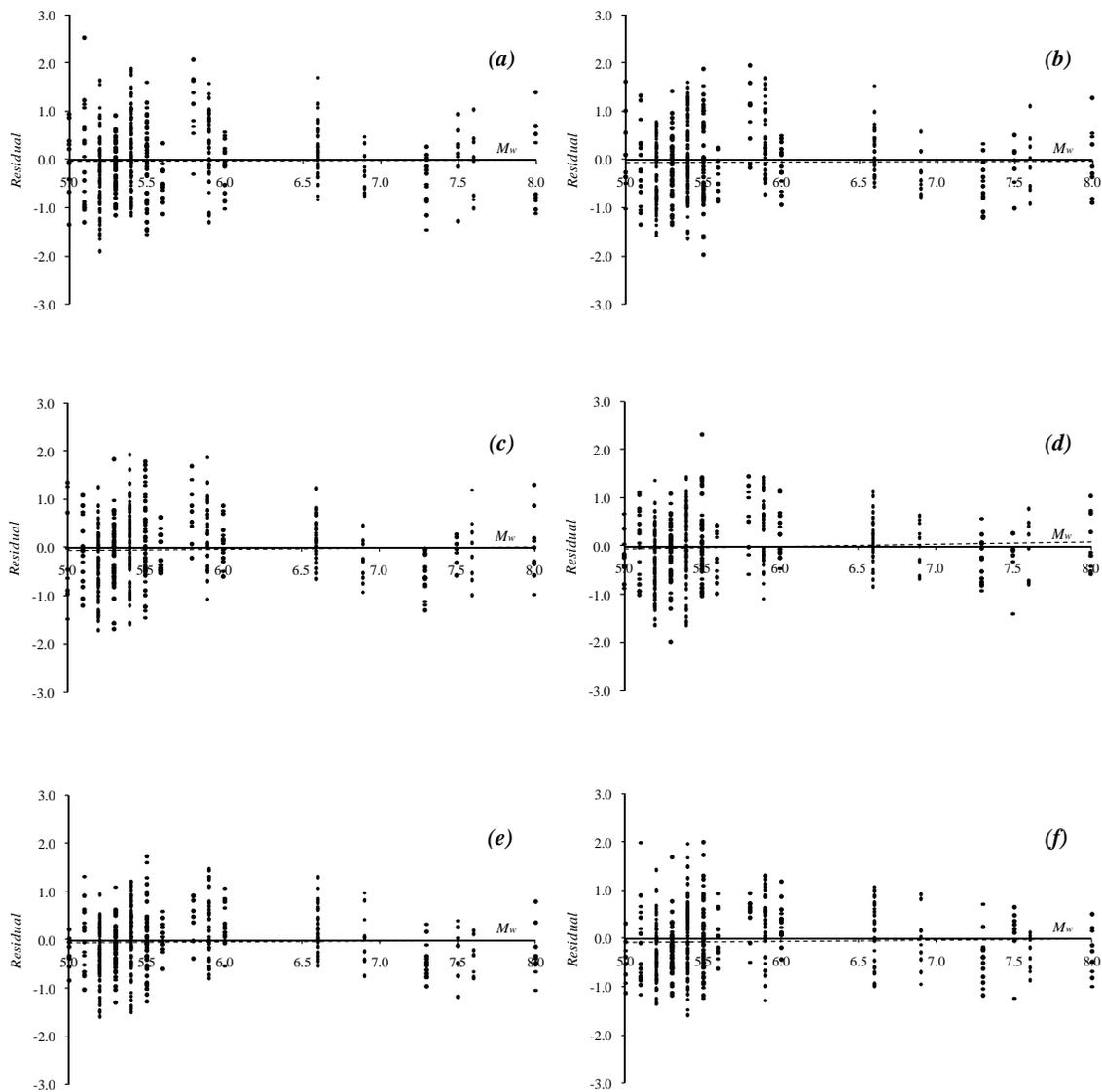


Figura 4.4. Residuales obtenidos para el modelo de atenuación como función de la magnitud del sismo, M_w :
 (a) $T = 0.0$ s, (b) $T = 0.3$ s, (c) $T = 0.5$ s, (d) $T = 1.0$ s, (e) $T = 3.0$ y (f) $T = 5.0$ s.

Se buscó una función que describiera la tendencia de los residuales de cada periodo. En todos los casos se utilizó una línea recta, y como se observa, su pendiente es prácticamente cero, de manera que no existe una tendencia significativa o dependencia de los residuales obtenidos con la magnitud del sismo (M_w). Aunque no se muestra, los resultados obtenidos para los demás periodos fueron similares.

A continuación, en la figura 4.5, se grafica el residual obtenido para cada valor de R , y $T = 0.0, 0.3, 0.5, 1.0, 3.0$ y 5.0 segundos. De igual forma, en cada periodo se busca una recta que describa la tendencia de los residuales.

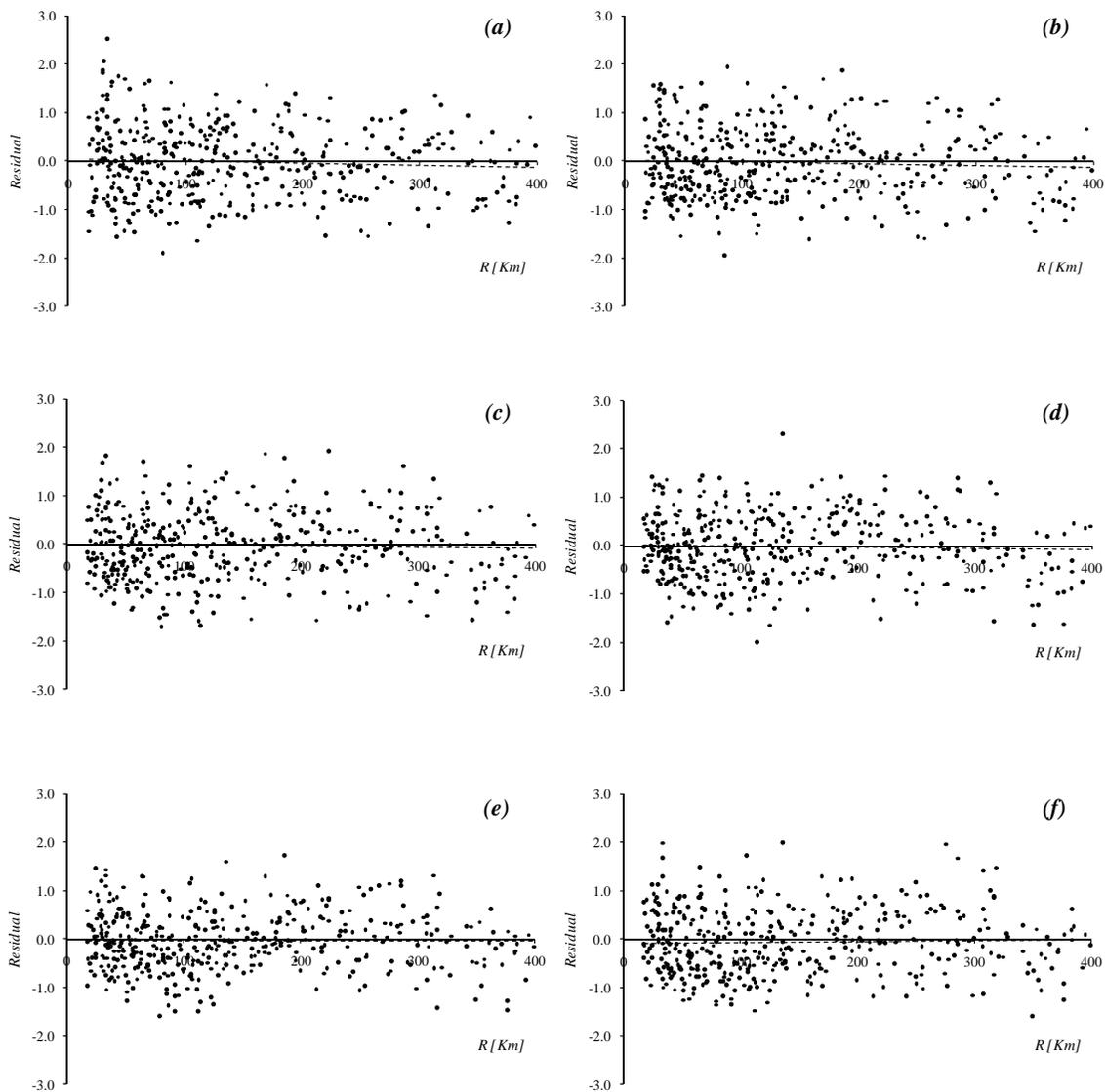


Figura 4.5. Residuales obtenidos para el modelo de atenuación como función de la distancia al plano de falla, R : (a) $T = 0.0$ s, (b) $T = 0.3$ s, (c) $T = 0.5$ s, (d) $T = 1.0$ s, (e) $T = 3.0$ y (f) $T = 5.0$ s.

La figura muestra que tampoco existe una tendencia significativa en los residuales con respecto a la distancia al plano de falla, R .

Por último, y a pesar de que en el modelo de atenuación que se presenta no está incluida la profundidad focal (H), en la figura 4.6 se muestran los residuales como función de este parámetro, para los periodos $T = 0.0, 0.3, 0.5, 1.0, 3.0$ y 5.0 segundos. En $T = 0.30$ y 5.0 s se aprecia una ligera dependencia, pues la pendiente de la línea de tendencia no es horizontal (estrictamente, en los demás casos tampoco es horizontal, pero se puede considerar como tal).

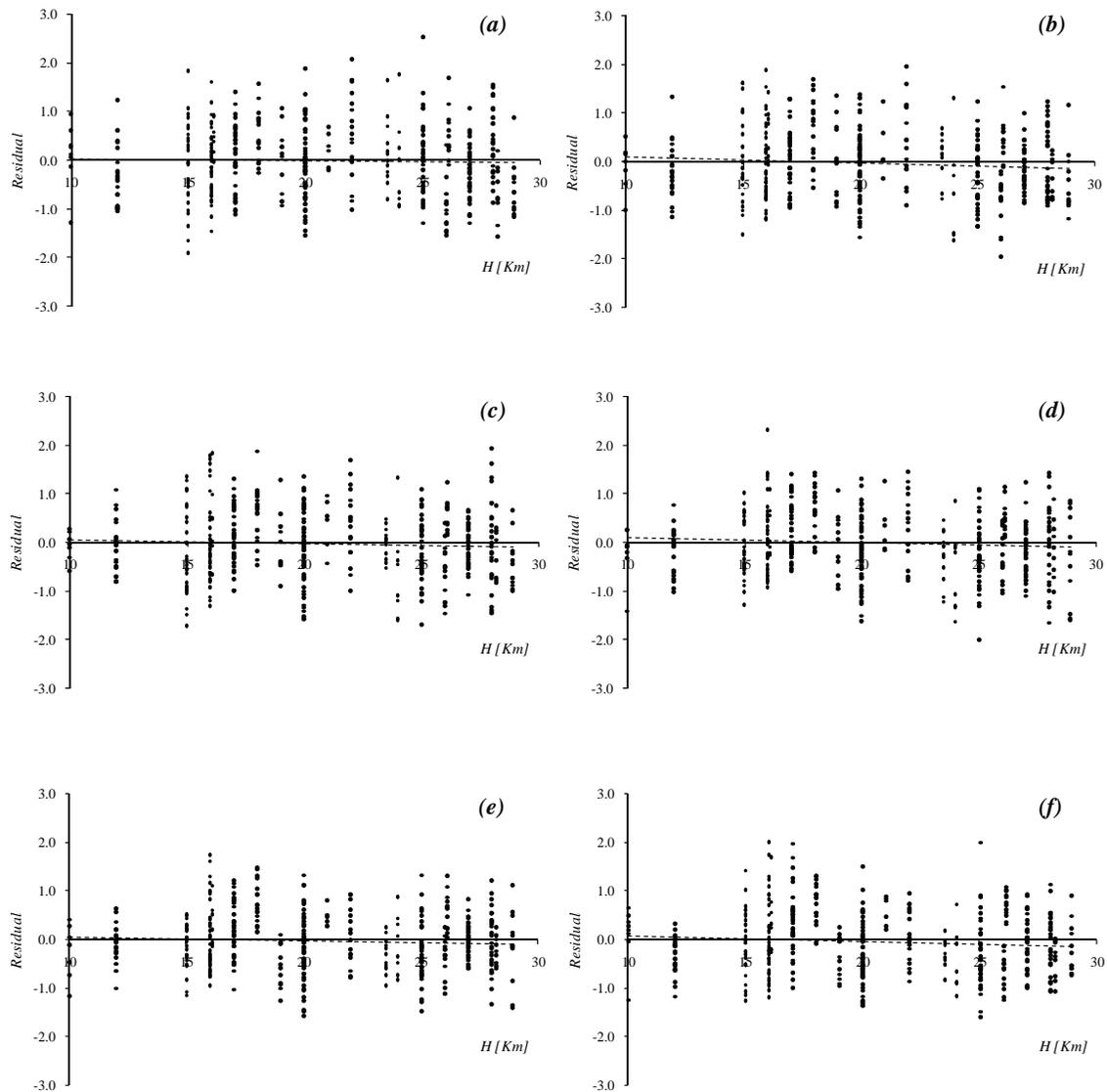


Figura 4.6. Residuales obtenidos para el modelo de atenuación como función de la profundidad focal, H : (a) $T = 0.0$ s, (b) $T = 0.3$ s, (c) $T = 0.5$ s, (d) $T = 1.0$ s, (e) $T = 3.0$ y (f) $T = 5.0$ s.

No obstante la pequeña dependencia de los residuales con la profundidad focal H , encontrada en algunos periodos, puede decirse, en términos generales, que los resultados obtenidos con el modelo de atenuación propuesto son aceptables.

De esta manera queda definido el modelo de atenuación para sismos de subducción interplaca originados en la costa pacífica mexicana. La relación de atenuación, es la siguiente:

$$y(T) = \ln[PSA(T)] = \alpha_1(T) + \alpha_2(T)M_w + \alpha_3(T)\ln\left\{\frac{E_1[\alpha_4(T)R] - E_1\left[\alpha_4(T)\sqrt{R^2 + r_0^2}\right]}{r_0^2}\right\} \quad (4.1)$$

Donde el parámetro r_0^2 , se determina mediante:

$$r_0^2 = 1.4447 \times 10^{-5} (e^{3.45387 M_w})^{\frac{2}{3}} \quad (4.2)$$

Las variables independientes en las anteriores expresiones son la magnitud del sismo (M_w) y la distancia (en Km) a la superficie de falla, R . Los demás términos, es decir, $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$, $\alpha_3(T)$ y $\alpha_4(T)$ son constantes que varían de un periodo a otro y se presentan en la siguiente tabla:

T	$\alpha_1(T)$	$\alpha_2(T)$	$\alpha_3(T)$	$\alpha_4(T)$	$\gamma_e(T)$	$\sigma(T)$	$\sigma_e(T)$	$\sigma_r(T)$
0.001	2.4862	0.9392	0.5061	0.0150	0.3850	0.7500	0.4654	0.5882
0.040	3.8123	0.8636	0.5578	0.0150	0.3962	0.8228	0.5179	0.6394
0.045	4.0440	0.8489	0.5645	0.0150	0.3874	0.8429	0.5246	0.6597
0.050	4.1429	0.8580	0.5725	0.0150	0.3731	0.8512	0.5199	0.6740
0.055	4.3092	0.8424	0.5765	0.0150	0.3746	0.8583	0.5253	0.6788
0.060	4.3770	0.8458	0.5798	0.0150	0.4192	0.8591	0.5562	0.6547
0.065	4.5185	0.8273	0.5796	0.0150	0.3888	0.8452	0.5270	0.6608
0.070	4.4591	0.8394	0.5762	0.0150	0.3872	0.8423	0.5241	0.6594
0.075	4.5939	0.8313	0.5804	0.0150	0.3775	0.8473	0.5206	0.6685
0.080	4.4832	0.8541	0.5792	0.0150	0.3737	0.8421	0.5148	0.6664
0.085	4.5062	0.8481	0.5771	0.0150	0.3757	0.8344	0.5114	0.6593
0.090	4.4648	0.8536	0.5742	0.0150	0.4031	0.8304	0.5272	0.6416
0.095	4.3940	0.8580	0.5712	0.0150	0.4097	0.8294	0.5309	0.6372
0.100	4.3391	0.8620	0.5666	0.0150	0.3841	0.8254	0.5115	0.6478
0.120	4.0505	0.8933	0.5546	0.0150	0.3589	0.7960	0.4769	0.6373

T	$\alpha_1(T)$	$\alpha_2(T)$	$\alpha_3(T)$	$\alpha_4(T)$	$\gamma_e(T)$	$\sigma(T)$	$\sigma_e(T)$	$\sigma_r(T)$
0.140	3.5599	0.9379	0.5350	0.0150	0.3528	0.7828	0.4650	0.6298
0.160	3.1311	0.9736	0.5175	0.0150	0.3324	0.7845	0.4523	0.6410
0.180	2.7012	1.0030	0.4985	0.0150	0.3291	0.7717	0.4427	0.6321
0.200	2.5485	0.9988	0.4850	0.0150	0.3439	0.7551	0.4428	0.6116
0.220	2.2699	1.0125	0.4710	0.0150	0.3240	0.7431	0.4230	0.6110
0.240	1.9130	1.0450	0.4591	0.0150	0.3285	0.7369	0.4224	0.6039
0.260	1.7181	1.0418	0.4450	0.0150	0.3595	0.7264	0.4355	0.5813
0.280	1.4039	1.0782	0.4391	0.0150	0.3381	0.7209	0.4192	0.5865
0.300	1.1080	1.1038	0.4287	0.0150	0.3537	0.7198	0.4281	0.5787
0.320	1.0652	1.0868	0.4208	0.0150	0.3702	0.7206	0.4384	0.5719
0.340	0.8319	1.1088	0.4142	0.0150	0.3423	0.7264	0.4250	0.5891
0.360	0.4965	1.1408	0.4044	0.0150	0.3591	0.7255	0.4348	0.5808
0.380	0.3173	1.1388	0.3930	0.0150	0.3673	0.7292	0.4419	0.5800
0.400	0.2735	1.1533	0.4067	0.0134	0.3956	0.7272	0.4574	0.5653
0.450	0.0990	1.1662	0.4127	0.0117	0.3466	0.7216	0.4248	0.5833
0.500	-0.0379	1.2206	0.4523	0.0084	0.3519	0.7189	0.4265	0.5787
0.550	-0.3512	1.2445	0.4493	0.0076	0.3529	0.7095	0.4215	0.5707
0.600	-0.6897	1.2522	0.4421	0.0067	0.3691	0.7084	0.4304	0.5627
0.650	-0.6673	1.2995	0.4785	0.0051	0.3361	0.7065	0.4096	0.5757
0.700	-0.7154	1.3263	0.5068	0.0034	0.3200	0.7070	0.3999	0.5830
0.750	-0.7015	1.2994	0.5056	0.0029	0.3364	0.7092	0.4113	0.5777
0.800	-0.8581	1.3205	0.5103	0.0023	0.3164	0.6974	0.3923	0.5766
0.850	-0.9712	1.3375	0.5201	0.0018	0.3435	0.6906	0.4048	0.5596
0.900	-1.0970	1.3532	0.5278	0.0012	0.3306	0.6923	0.3981	0.5664
0.950	-1.2346	1.3687	0.5345	0.0007	0.3264	0.6863	0.3921	0.5633
1.000	-1.2600	1.3652	0.5426	0.0001	0.3194	0.6798	0.3842	0.5608
1.100	-1.7687	1.4146	0.5342	0.0001	0.3336	0.6701	0.3870	0.5470
1.200	-2.1339	1.4417	0.5263	0.0001	0.3445	0.6697	0.3931	0.5422
1.300	-2.4122	1.4577	0.5201	0.0001	0.3355	0.6801	0.3939	0.5544
1.400	-2.5442	1.4618	0.5242	0.0001	0.3759	0.6763	0.4146	0.5343
1.500	-2.8509	1.4920	0.5220	0.0001	0.3780	0.6765	0.4159	0.5335
1.600	-3.0887	1.5157	0.5215	0.0001	0.3937	0.6674	0.4188	0.5197
1.700	-3.4884	1.5750	0.5261	0.0001	0.4130	0.6480	0.4164	0.4965
1.800	-3.7195	1.5966	0.5255	0.0001	0.3967	0.6327	0.3985	0.4914
1.900	-4.0141	1.6162	0.5187	0.0001	0.4248	0.6231	0.4061	0.4726

T	$\alpha_1(T)$	$\alpha_2(T)$	$\alpha_3(T)$	$\alpha_4(T)$	$\gamma_e(T)$	$\sigma(T)$	$\sigma_e(T)$	$\sigma_r(T)$
2.000	-4.1908	1.6314	0.5199	0.0001	0.3967	0.6078	0.3828	0.4721
2.500	-5.1104	1.7269	0.5277	0.0001	0.4302	0.6001	0.3936	0.4530
3.000	-5.5926	1.7515	0.5298	0.0001	0.4735	0.6029	0.4149	0.4375
3.500	-6.1202	1.8077	0.5402	0.0001	0.4848	0.6137	0.4273	0.4405
4.000	-6.5318	1.8353	0.5394	0.0001	0.5020	0.6201	0.4394	0.4376
4.500	-6.9744	1.8685	0.5328	0.0001	0.5085	0.6419	0.4577	0.4500
5.000	-7.1389	1.8721	0.5376	0.0001	0.5592	0.6701	0.5011	0.4449

Tabla 4.1. Coeficientes definitivos para el modelo de atenuación propuesto.

En la tabla también se incluye el valor de $\gamma_e(T)$ y la desviación estándar $\sigma(T)$, así como $\sigma_e(T)$ y $\sigma_r(T)$, obtenidos en la regresión definitiva.

La desviación estándar correspondiente a cada periodo, $\sigma(T)$, se calcula como la raíz cuadrada del promedio de todos los residuales al cuadrado obtenidos para dicho periodo, como se muestra en la ecuación 4.3 (para cada periodo se tienen n_o residuales):

$$\sigma = \sqrt{(y_{1_{obs}} - y_{1_{mod}})^2 + (y_{2_{obs}} - y_{2_{mod}})^2 + \dots + (y_{n_o_{obs}} - y_{n_o_{mod}})^2} \quad (4.3)$$

$y_{i_{obs}}$ hace referencia al valor proveniente de la observación i (es decir, el valor real), y $y_{i_{mod}}$ corresponde al valor calculado con el modelo para el par M_{w_i} y R_i .

La desviación estándar de la componente del residual correspondiente a la variabilidad entre sismos (ϵ_e) y la que corresponde a la variabilidad entre registros (ϵ_r), $\sigma_e(T)$ y $\sigma_r(T)$, respectivamente, se determinan a partir de los valores de $\gamma_e(T)$ y $\sigma(T)$, con la ecuación (2.20), que se repite a continuación:

$$\gamma_e = \frac{\sigma_e^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma_e^2}{(\sigma_r^2 + \sigma_e^2)} \quad (4.4)$$

Puede verse en la tabla 4.1, que en todos los periodos, excepto en los tres últimos, la variabilidad entre registros, σ_r , es mayor que la variabilidad entre sismos, σ_e .

Finalmente, resulta útil evaluar el grado de confianza que se puede tener en los resultados del modelo para diferentes valores de M_w y R . En la figura 3.2 se vio que aunque la muestra utilizada para la regresión es grande, existen vacíos en ciertos intervalos, por ejemplo, se tiene poca información para distancias muy cortas ($R < 20 \text{ Km}$), así como para sismos de magnitudes moderadas y grandes, y distancias mayores a 200 Km .

En primer lugar, debe calcularse el parámetro σ_p^2 , que representa la varianza de los residuales teniendo en cuenta la covarianza entre los coeficientes de la regresión:

$$\sigma_p^2 = \sigma^2 + X_N \Delta_\alpha X_N^T \quad (4.5)$$

Δ_α es una matriz de tamaño 3×3 que contiene la covarianza entre los coeficientes de regresión definitivos y la matriz X_N , de tamaño 1×3 , es equivalente a una fila de la matriz de variables independientes, mencionada en el Capítulo 2 (ecuación 2.14), sólo que en esta ocasión, se construye con los valores correctos de $\alpha_4(T)$; su estructura es la siguiente:

$$X_N = \left[1.0 \quad M_w \quad \ln \left\{ \frac{E_1[\alpha_4(T)R] - E_1[\alpha_4(T)\sqrt{R^2 + r_o^2}]}{r_o^2} \right\} \right] \quad (4.6)$$

r_o es el radio de la falla, según el modelo de fuente finita circular (Singh *et al.*, 1989), y se determina con la ecuación 1.12. Finalmente, se determina el parámetro S (ecuación 4.7), que representa el grado de confianza que se puede tener en los resultados del modelo, dado un par de valores de magnitud y distancia más cercana a la fuente (M_w, R).

$$S = \sqrt{\frac{\sigma_p^2}{\sigma^2}} \quad (4.7)$$

Si S es 1.0, se puede tener confianza absoluta en los resultados de PSA logrados con el modelo, pues σ es igual a σ_p , lo que significa que el ajuste con los datos fue perfecto.

En la figura 4.7 se muestran los contornos de S , para $T = 0.0, 0.2, 1.0$ y 5.0 s , así como la gráfica de dispersión de los datos de la muestra. Puede verse que el intervalo de mayor confianza corresponde a distancias entre $20\text{-}100 \text{ Km}$ y $5.0 < M_w < 6.0$, que es precisamente donde se concentra el mayor

número de observaciones; por el contrario, los valores más grandes de S corresponden a aquellos intervalos en los que existen vacíos de información.

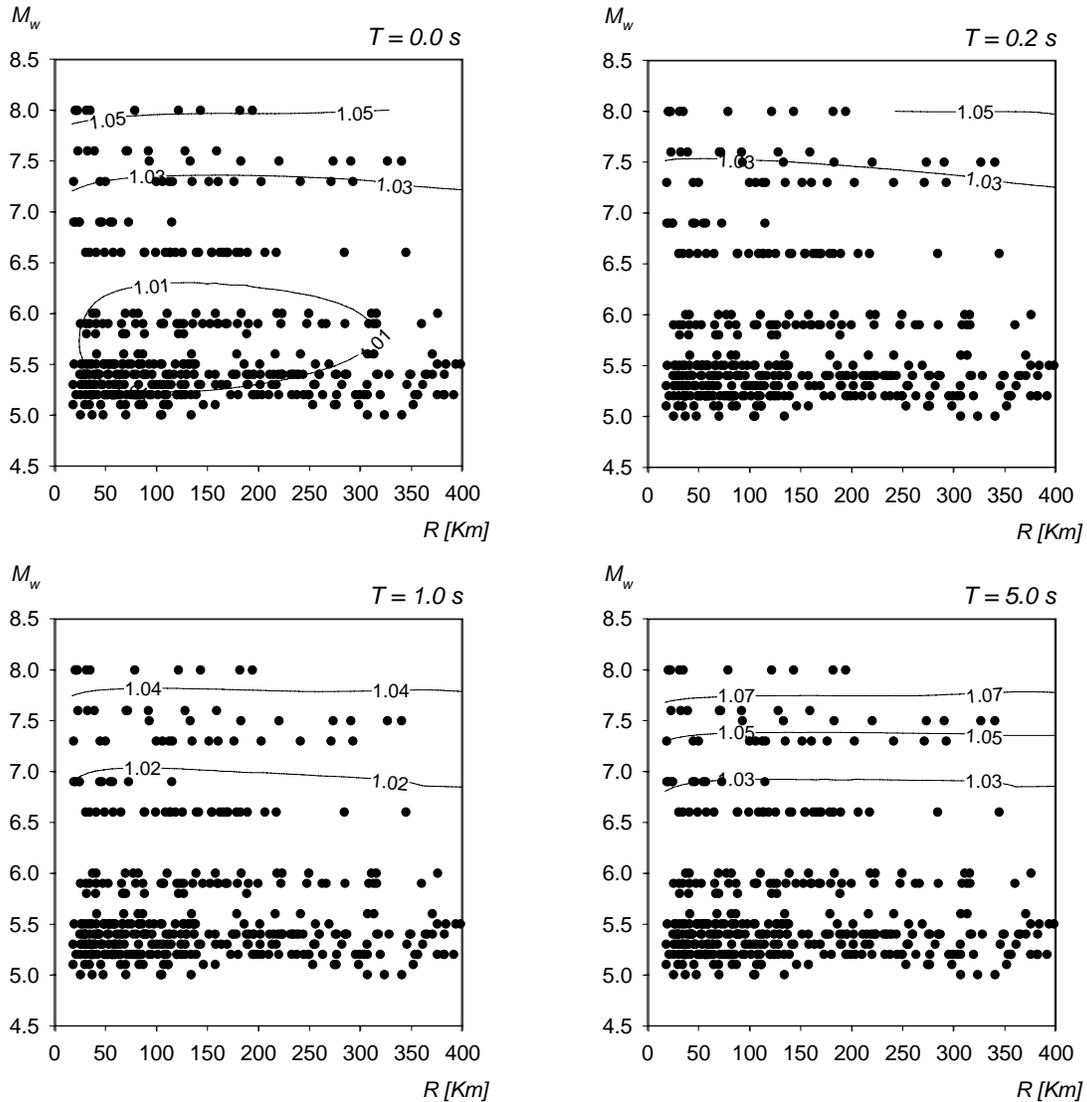


Figura 4.7. Contornos del parámetro S , que representa el grado de confianza en los resultados del modelo, dados diferentes valores de M_w y R . Resultados para $T = 0.0, 0.2, 1.0$ y 5.0 s.

En este punto finaliza el Capítulo 4. Ya se tiene todo lo necesario para utilizar el modelo de atenuación para sismos de subducción interplaca originados en la costa del Pacífico mexicano y generar información a partir de éste. Es precisamente eso lo que se hará en el capítulo próximo, donde además, la información y resultados logrados con el modelo serán comparados con los resultados de otras relaciones de atenuación.

CAPÍTULO 5

COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

5. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En este capítulo se comparan los resultados del modelo de atenuación acá desarrollado con los resultados de otros modelos o relaciones de atenuación para sismos generados en zonas de subducción interplaca. Se considerarán los modelos propuestos por García *et al.* (2008), Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003), para suelos tipo B, según la clasificación NEHRP (roca).

En el capítulo anterior se determinaron los coeficientes de regresión, $\alpha(T)$, y con esto, quedó definido el modelo, como función de la magnitud del sismo (M_w) y la distancia más cercana a la superficie de ruptura (R); ahora, es conveniente hacer comparaciones de los resultados como función de los dos parámetros anteriores. En la primera parte de este capítulo, se presentan curvas de la pseudoaceleración como función de la magnitud, manteniendo constante R . Posteriormente, se comparan nuevamente las ordenadas de PSA , pero esta vez como función de la distancia al plano de falla para valores constantes de M_w . El capítulo termina presentando y comparando los residuales, sesgos y desviaciones estándar obtenidos con cada uno de los modelos en algunos periodos estructurales y mencionando los aspectos más sobresalientes de la comparación.

Es justo mencionar desde un principio que el mejor ajuste con los datos reales, entiéndase por esto que los residuales más pequeños, así como los menores sesgos y desviaciones, se esperan para el modelo propuesto, debido a que para la comparación se tomará como referencia el mismo conjunto de datos con el que se hizo la regresión (Capítulo 4). La base de datos usada por García *et al.* (2008) para su regresión es similar a la utilizada en este trabajo, como se comentó en el Capítulo 3; por tal motivo, los resultados obtenidos con ese modelo deben ser muy parecidos a los obtenidos con el modelo que acá se propone. Por el contrario, las bases de datos usadas por Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003) son diferentes, e incluyen sismos de otras zonas de subducción en el mundo, de manera que para estos dos modelos se espera menor correlación.

5.1. SEUDOACELERACIÓN (PSA) COMO FUNCIÓN DE LA MAGNITUD (M_w); DISTANCIA AL PLANO DE FALLA (R) CONSTANTE

A continuación, se grafican los resultados de pseudoaceleración como función de la magnitud del sismo (M_w), para valores constantes de R , y para los periodos $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 s.

Resulta conveniente comparar los resultados en un rango de distancias amplio, que abarque sitios cercanos a la superficie de falla y puntos localizados a distancias medianas, grandes y muy grandes. Por tal motivo, se muestran las comparaciones entre los resultados obtenidos para $R = 20.8, 50, 100$ y 250 Km .

Las relaciones de atenuación de García *et al.* (2008), Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003), consideran que la profundidad focal, H , es otra variable. En los tres casos se asume que H es igual al promedio de las profundidades focales incluidas en la base de datos usada en este trabajo (Sección 3.1), $H = 20.83 \text{ Km}$.

En primer lugar, en la figura 5.1 se presentan los resultados correspondientes a sitios cercanos a la falla. Los círculos representan 16 observaciones con R oscilando entre 17.32 y 24.74 Km , con promedio de $R = 20.8 \text{ Km}$. Cada una de las gráficas se construyó manteniendo constante la distancia al plano de falla e igual al promedio anterior, es decir, $R = 20.8 \text{ Km}$.

A primera vista es notoria la falta de datos suficientes, y en la mayoría de los casos, no es del todo claro cuál es la gráfica que mejor se ajusta a éstos. Sin embargo, hay algunos indicios que sugieren que el modelo propuesto en este trabajo es más adecuado. Por ejemplo, el fenómeno de la saturación de la pseudoaceleración (PSA) es evidente para los periodos más cortos ($T = 0.0, 0.1$ y 0.2 s). Se observa que para magnitudes grandes ($M_w > 7.5$) la tasa de crecimiento de la pseudoaceleración se hace cada vez menor; incluso en $T = 0.1 \text{ s}$ (figura 5.1b) la curva alcanza un valor máximo, aproximadamente en $M_w = 8.0$, y luego decrece ligeramente (fenómeno conocido como sobresaturación). Como se mencionó varias veces en los capítulos precedentes, el parámetro $\alpha_d(T)$ controla el efecto de la saturación en las zonas cercanas a la superficie de falla, y en la medida en que $\alpha_d(T)$ aumenta, el nivel de saturación también se incrementa. De acuerdo con los resultados del análisis de regresión (Capítulo 4), los valores de $\alpha_d(T)$ más grandes corresponden a los periodos menores a 0.38 s ; después, $\alpha_d(T)$ decrece rápidamente hasta hacerse prácticamente cero (figura 4.2). Por lo tanto, debe esperarse saturación sólo en los periodos cortos. Los resultados logrados con el modelo propuesto son coherentes, pues sólo se observa saturación en los periodos menores a 0.38 s .

Con respecto a los demás modelos, los resultados muestran que las relaciones de atenuación de García *et al.* (2008) y la de Youngs *et al.* (1997) no caracterizan adecuadamente el efecto de la saturación de la pseudoaceleración.

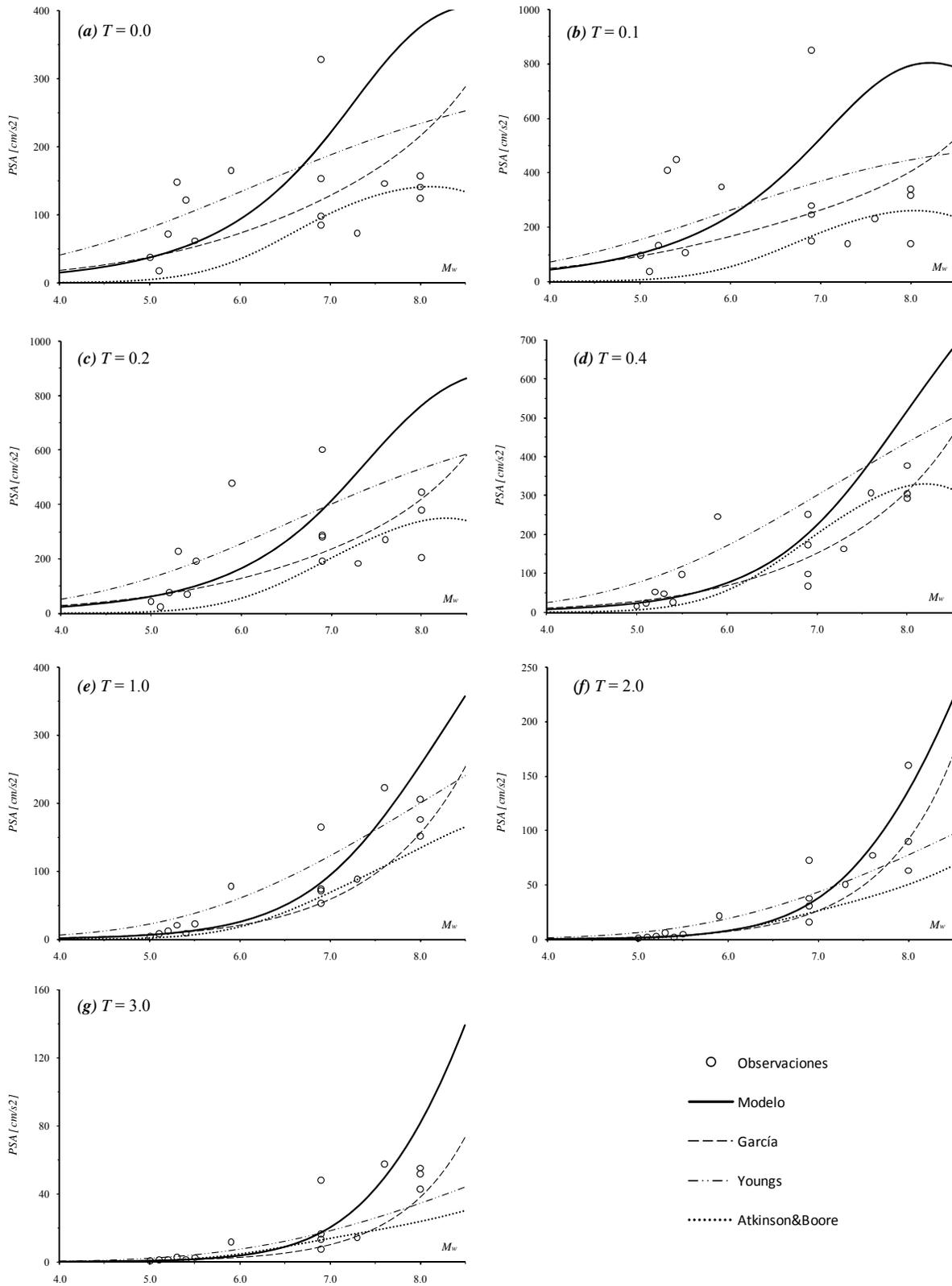


Figura 5.1. PSA contra M_w para $R = 20.83$ Km. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.

Por el contrario, el modelo de Atkinson y Boore (2003) sí caracteriza la saturación, aunque los valores de pseudoaceleración son evidentemente menores que los obtenidos con el modelo propuesto (aproximadamente 3 veces más pequeños para las magnitudes más grandes) y menores también, en la mayoría de los casos, que las observaciones (círculos). Por lo anterior, puede decirse que, en el caso de zonas cercanas a la superficie de falla, el modelo propuesto es más adecuado.

La siguiente comparación se presenta en la figura 5.2 y corresponde a sitios localizados a distancias a la falla medianas. Nuevamente se muestran gráficas de pseudoaceleración contra magnitud (M_w), manteniendo constante la distancia al plano de falla e igual a 50 Km.

Los círculos simbolizan las 22 observaciones de la base de datos con R entre 45 y 55 Km. Estrictamente, en cada una de las gráficas de la figura 5.2 sólo podría ir un punto (el que corresponda a $R = 50$ Km), sin embargo, resulta útil incluir otras observaciones con R cercano a 50 Km, dado que la variación de las ordenadas de pseudoaceleración no es muy grande y permite ver cuál de los modelos se ajusta mejor a los datos.

En primer lugar, vale la pena destacar que 50 Km de distancia al plano de falla son suficientes para que ya no se presente saturación, y es precisamente eso lo que se puede ver en la figura. Nótese que la pendiente de las curvas nunca decrece, excepto en el caso del modelo de Atkinson y Boore (2003) en $T = 0.0$ y 0.1 s, donde se nota una ligera disminución.

También, se nota mayor similitud entre los resultados de los diferentes modelos, excepto por el de Youngs *et al.* (1997), que en $T = 0.0, 0.2, 0.4, 1.0$ y 2.0 s, tiende a proporcionar valores de pseudoaceleración un poco más grandes, incluso que los mismos datos. De todas formas, igual que en el caso anterior, no hay suficientes datos para concluir cuál de los modelos se ajusta mejor; sobre todo, es notoria la ausencia de datos para magnitudes grandes.

Las últimas comparaciones de esta parte del capítulo, se hacen para distancias grandes. Los resultados se muestran en las figuras 5.3 y 5.4, y corresponden a $R = 100$ Km y $R = 250$ Km, respectivamente. Las observaciones que se incluyen en las figuras están condicionadas a tener una distancia R entre 95 y 105 Km en la figura 5.3, y R entre 240 y 260 Km en la figura 5.4. Nuevamente, se tienen pocos datos, especialmente para magnitudes grandes. Nótese que hay sólo dos datos para $M_w > 6.0$, lo que genera incertidumbre en este rango de magnitudes.

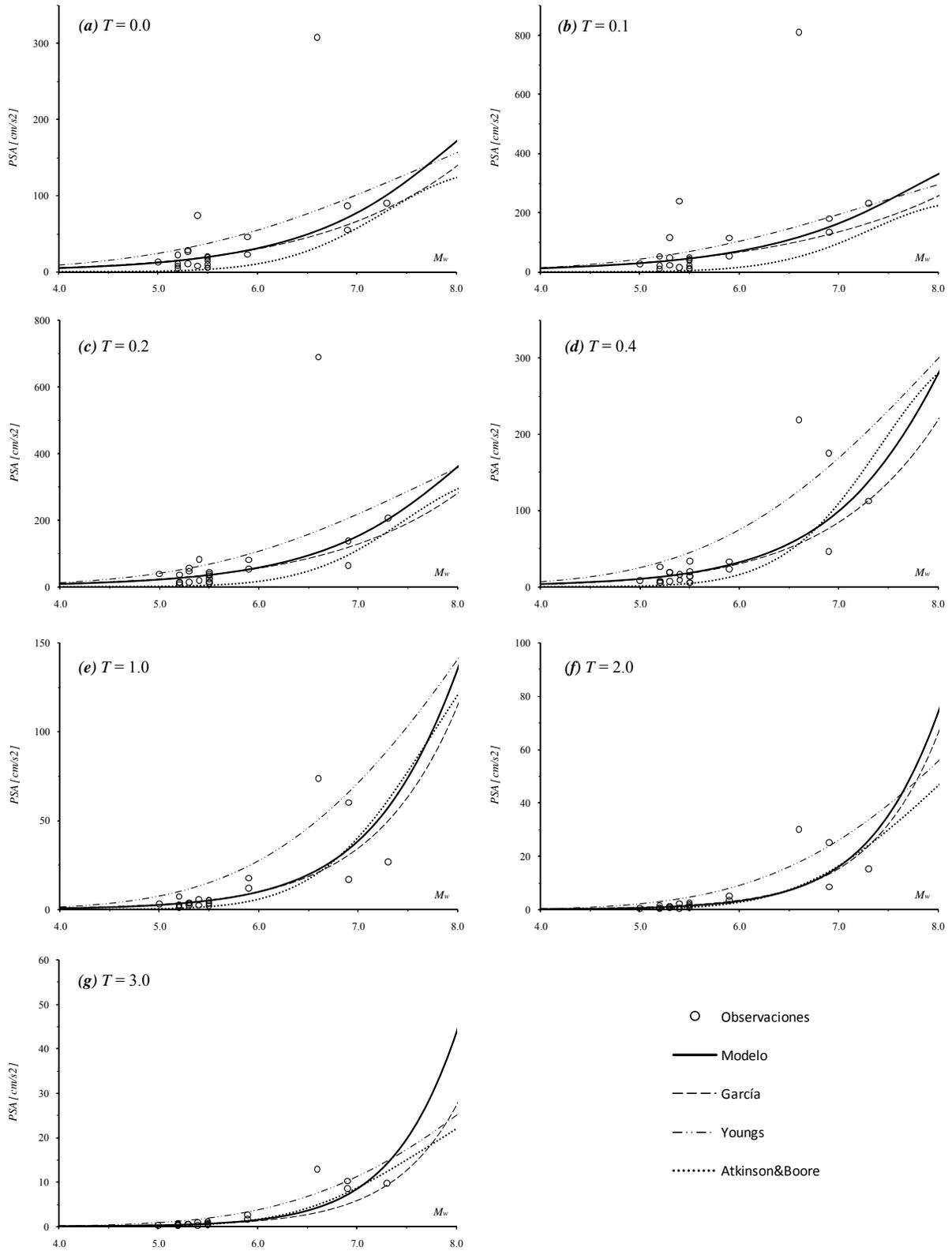


Figura 5.2. PSA contra M_w para $R = 50$ Km. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.

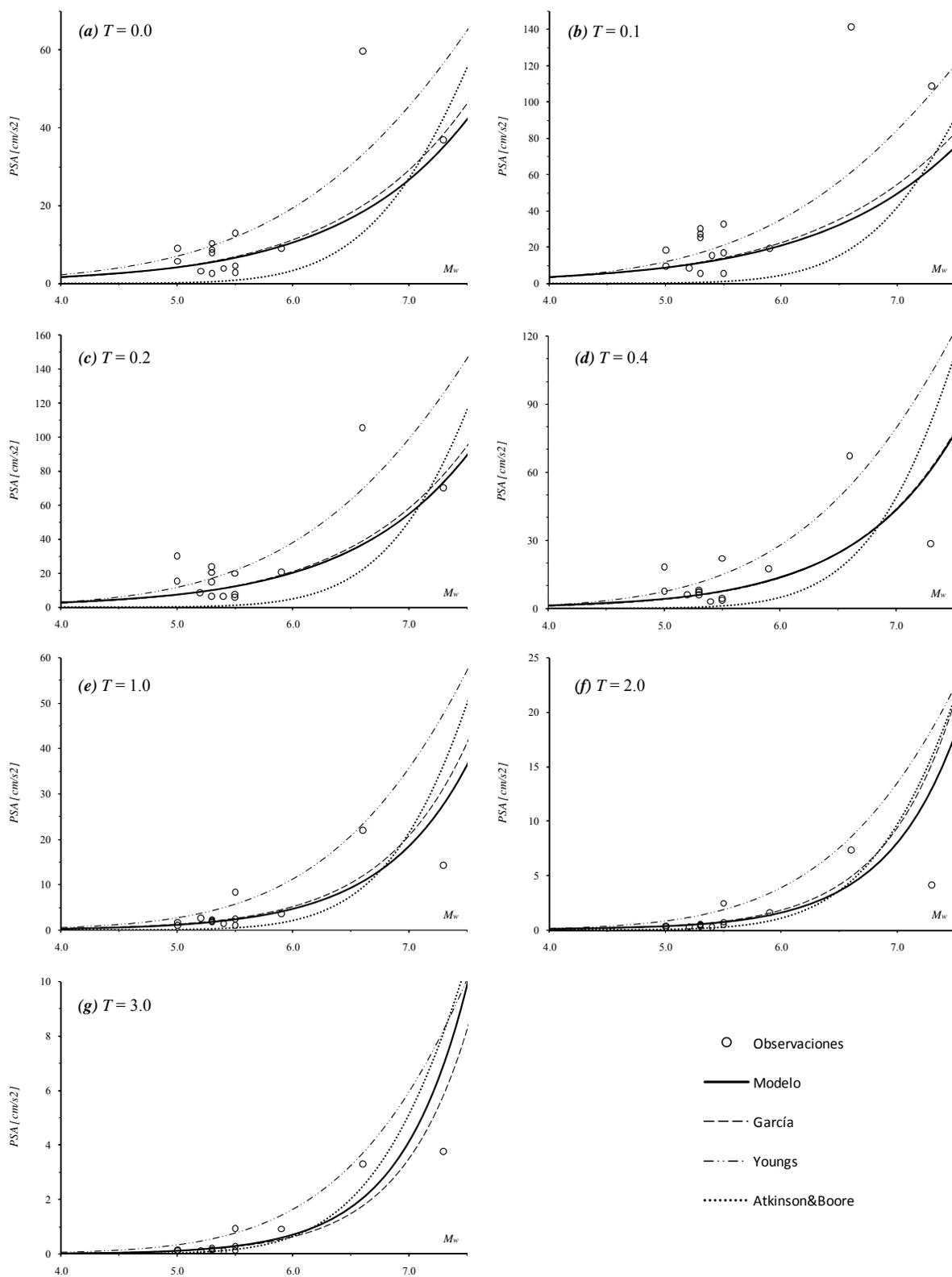


Figura 5.3. PSA contra M_w para $R = 100$ Km. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.

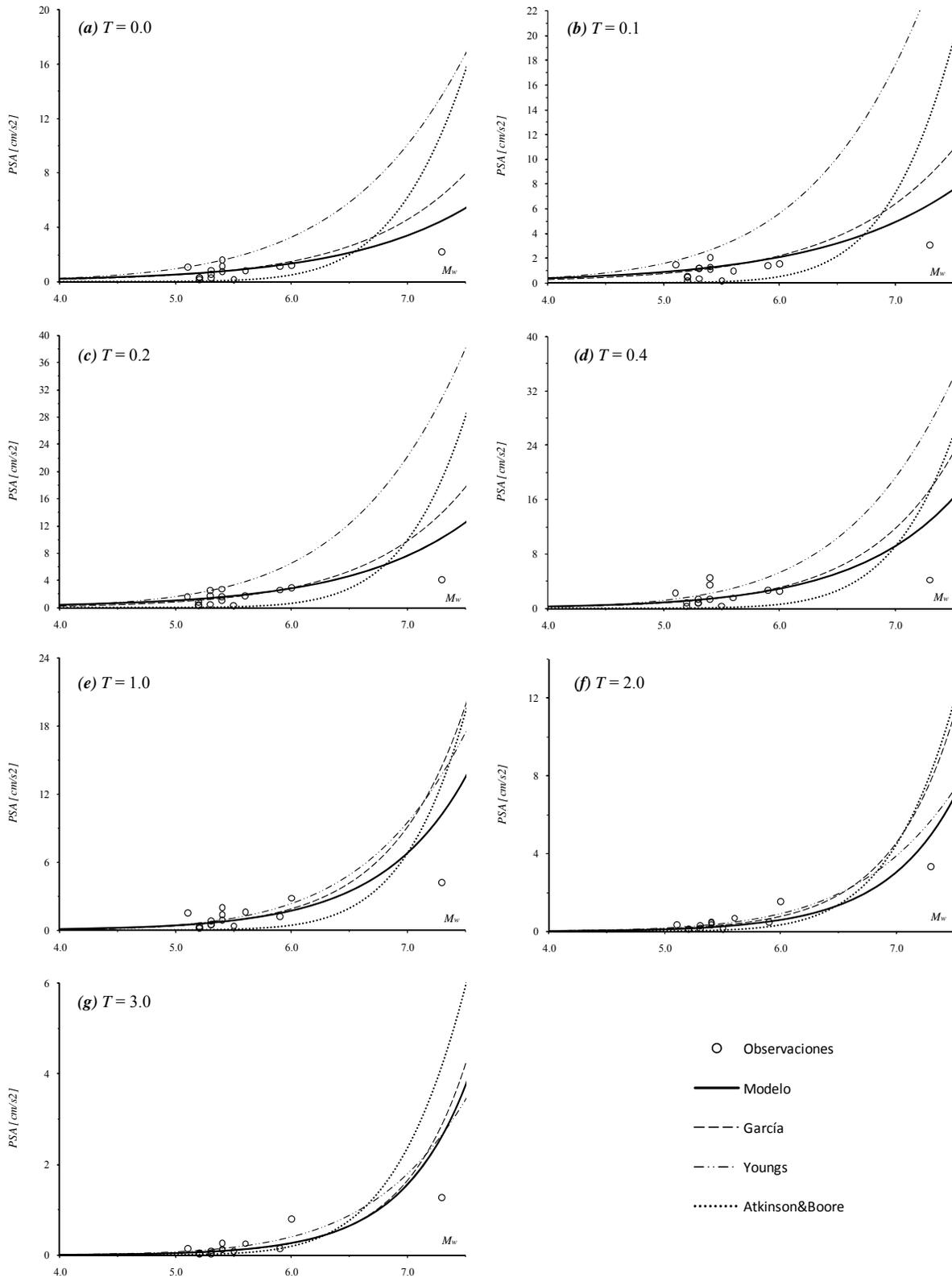


Figura 5.4. PSA contra M_w para $R = 250$ Km. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.

En general, se observan dos tendencias. La primera: existe mayor similitud entre las curvas correspondientes a periodos largos ($T > 1.0 s$), mientras que para periodos cortos ($T \leq 1.0 s$) sucede lo contrario, es decir, hay claras diferencias. Y la segunda: excepto en zonas cercanas a la falla, el modelo propuesto produce valores de pseudoaceleración (*PSA*) menores que los modelos de Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003); y aunque con el modelo de García *et al.* (2008) no son tan notorias las diferencias (incluso, en $R = 100 Km$ las curvas son muy similares), en la mayoría de los casos, los valores de pseudoaceleración (*PSA*) del modelo propuesto también son menores.

Puede decirse entonces, con base en lo que hasta aquí se ha expuesto, que hay diferencias importantes entre los resultados de los distintos modelos y que las mayores discrepancias corresponden a sitios cercanos a la superficie de falla y magnitudes grandes, donde el modelo propuesto produce valores de pseudoaceleración visiblemente mayores que los demás, mientras que en sitios ubicados a distancias muy grandes ($R = 250 Km$), las pseudoaceleraciones del modelo son menores. En términos generales, los resultados logrados con el modelo de atenuación propuesto son coherentes y, no obstante la falta de datos, puede verse que éstos se ajustan aceptablemente.

Otro aspecto importante es que al parecer, el modelo de Atkinson y Boore (2003) produce pseudoaceleraciones (*PSA*) muy pequeñas. Es claro que para $R = 20.83, 50$ y $100 Km$ (figuras 5.1, 5.2 y 5.3, respectivamente), en la mayoría de los periodos (aunque no en todos), la curva obtenida con ese modelo está por debajo de las demás, incluso por debajo de las observaciones.

Todo lo anterior permite establecer que el modelo propuesto en este trabajo es más adecuado que las demás relaciones de atenuación utilizadas para la comparación.

5.2. SEUDOACELERACIÓN (PSA) COMO FUNCIÓN DE LA DISTANCIA AL PLANO DE FALLA (R); MAGNITUD (M_w) CONSTANTE

Ahora, es conveniente comparar las pseudoaceleraciones obtenidas como función de la distancia al plano de falla, manteniendo constante M_w . En las siguientes figuras se muestran las curvas para los mismos periodos: $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 s y $M_w = 5.0, 6.0, 7.0, 8.0$ y 8.5 . Nuevamente, los círculos simbolizan observaciones y se asume que la profundidad focal, H , es igual al promedio de las profundidades focales incluidas en la base de datos ($H = 20.83$ Km).

Inicialmente, en las figuras 5.5 y 5.6 se muestran las curvas correspondientes a magnitudes medianas: $M_w = 5.0$ y 6.0 , respectivamente. Se incluyen también las observaciones con $M_w \approx 5.0$ (figura 5.5) y $M_w \approx 6.0$ (figura 5.6). En esta comparación, a diferencia de las hechas previamente, sí se tienen suficientes observaciones, lo cual hace que sobresalgan claramente dos aspectos: primero, las curvas que mejor describen el comportamiento real (es decir, las observaciones) son las correspondientes al modelo propuesto y al de García *et al.* (2008); y segundo, los resultados de pseudoaceleración del modelo de Atkinson y Boore (2003) son evidentemente menores.

Más adelante, se comparan los resultados para sismos fuertes: $M_w = 7.0$ (figura 5.7) y $M_w = 8.0$ (figura 5.8). Nuevamente, es notoria la ausencia de datos, sobre todo para $M_w = 7.0$ y distancias mayores a 100 Km; de todas formas, el ajuste que se observa entre los datos existentes y el modelo propuesto es bueno. El comentario más relevante que puede hacerse es que se repite una de las tendencias observadas con anterioridad, consistente en que para magnitudes grandes y distancias pequeñas, el modelo propuesto produce pseudoaceleraciones claramente mayores que los demás modelos y datos, y en la medida en que la distancia R aumenta, éstas tienden a disminuir hasta ser menores (aunque no menores que los datos).

La última comparación (figura 5.9) se hace para $M_w = 8.5$ y corresponde a magnitudes muy grandes. En la base de datos no hay ninguna observación con magnitud igual a 8.5 (la más grande es 8.0), por tal motivo, en esta figura no se presentan datos. El comentario expuesto en el párrafo anterior sobre las figuras 5.7 y 5.8 es igualmente aplicable en este caso; adicionalmente, puede decirse que las curvas tienen un punto en común (o en un sentido más estricto, un conjunto de puntos) aproximadamente en $R = 100$ Km. En este punto las pseudoaceleraciones calculadas con el modelo propuesto son, en términos generales, muy parecidas a las obtenidas con los demás modelos, mientras que a la derecha son menores y a la izquierda mayores.

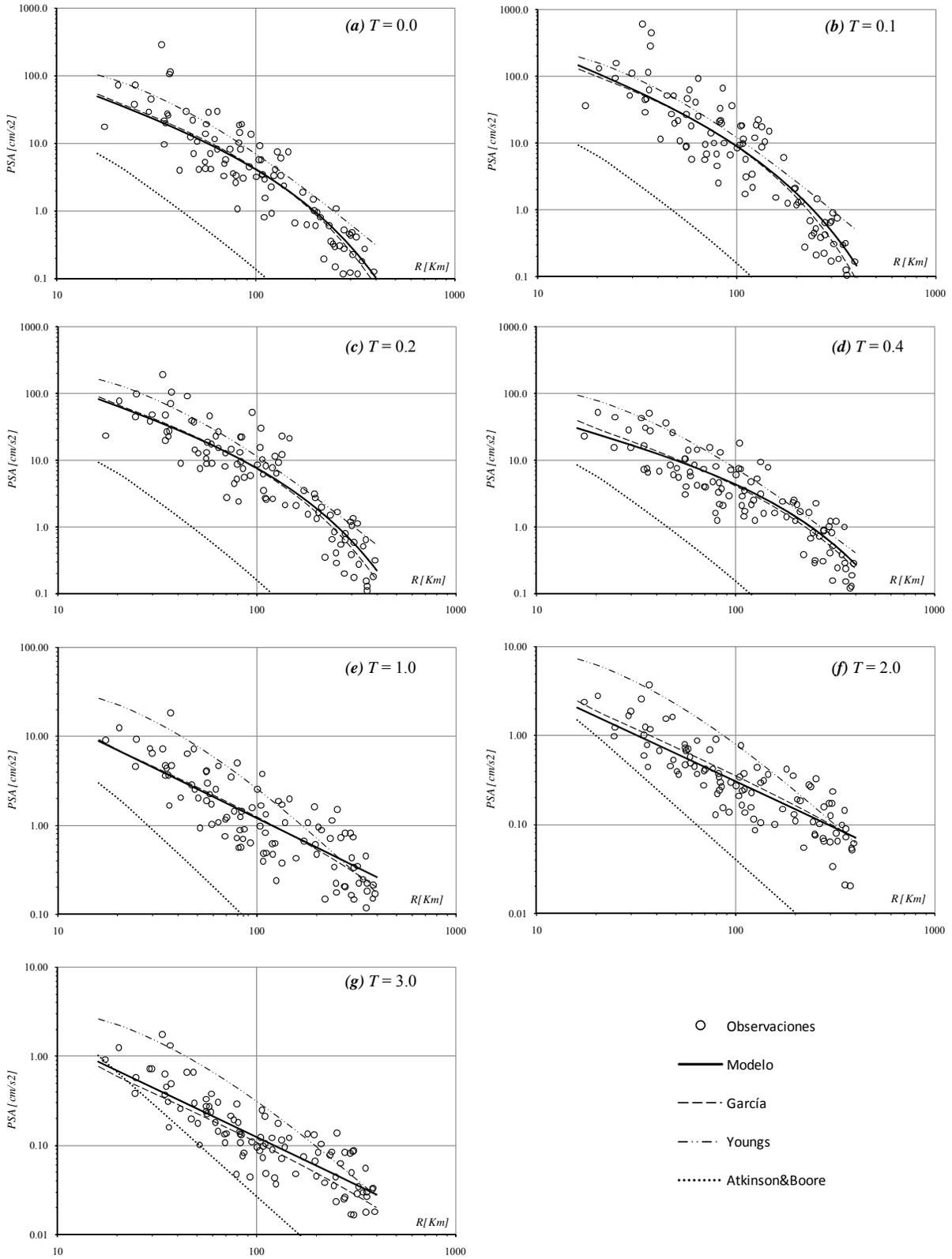


Figura 5.5. PSA contra R para $M_w = 5.0$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.

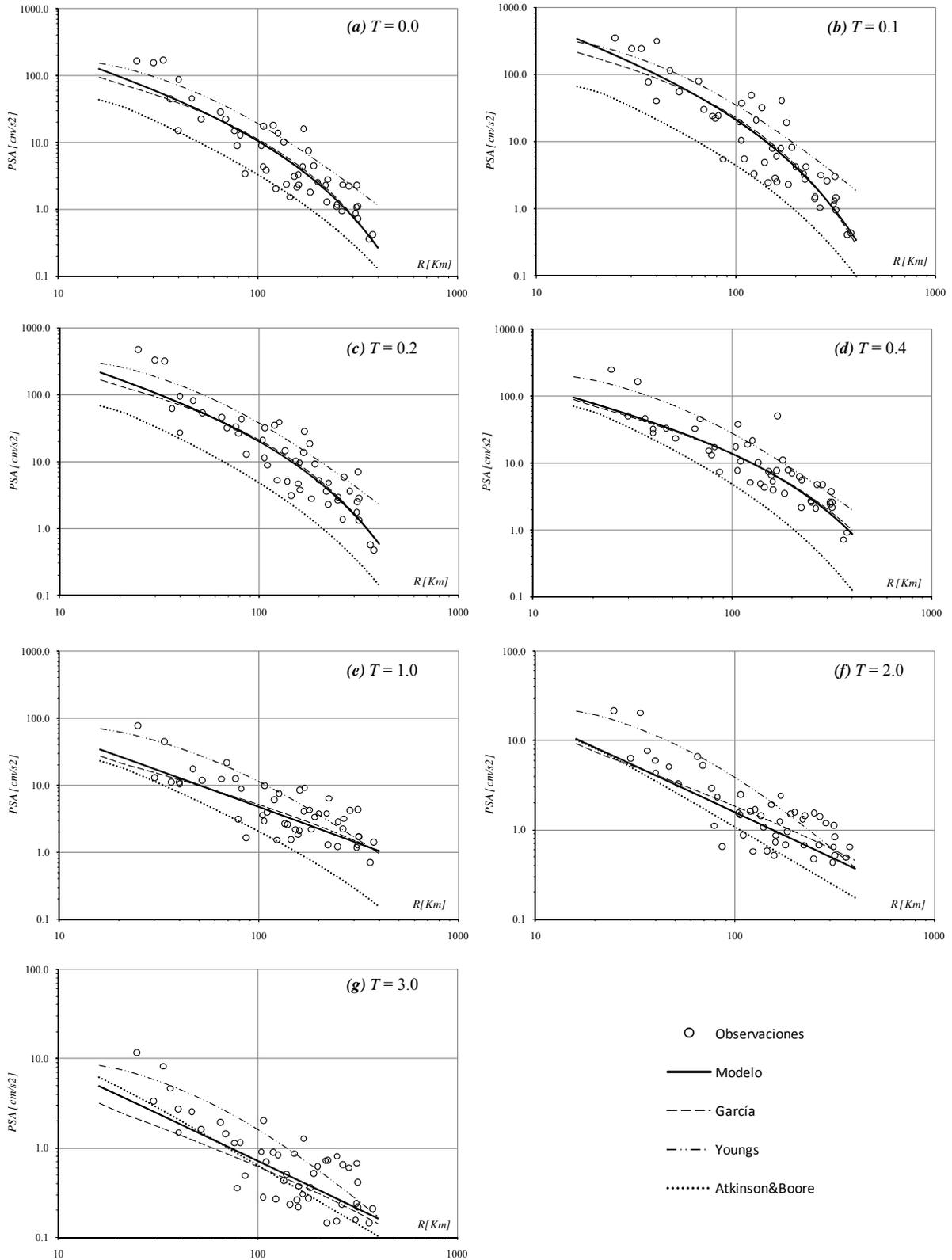


Figura 5.6. PSA contra R para $M_w = 6.0$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.

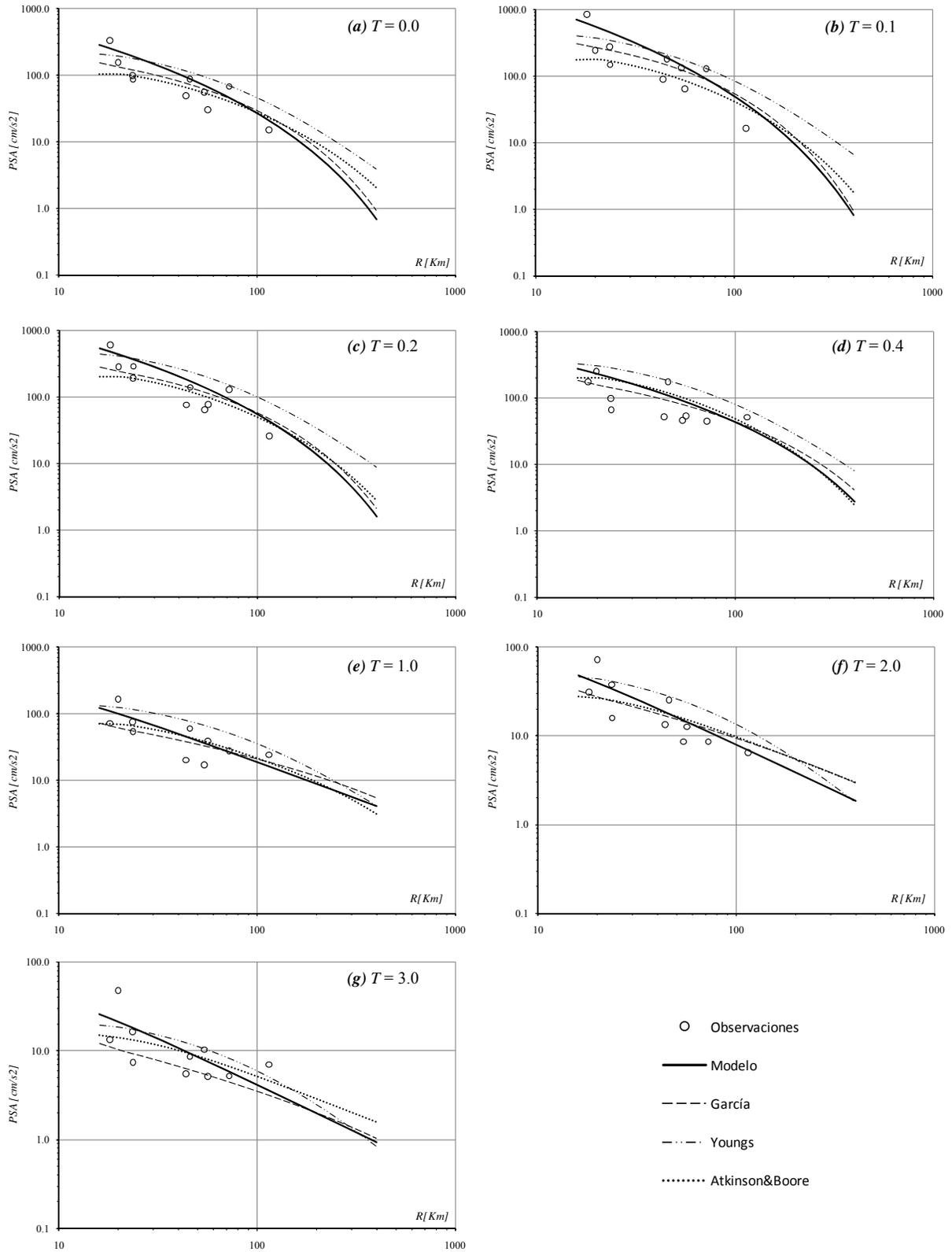


Figura 5.7. PSA contra R para $M_w = 7.0$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.

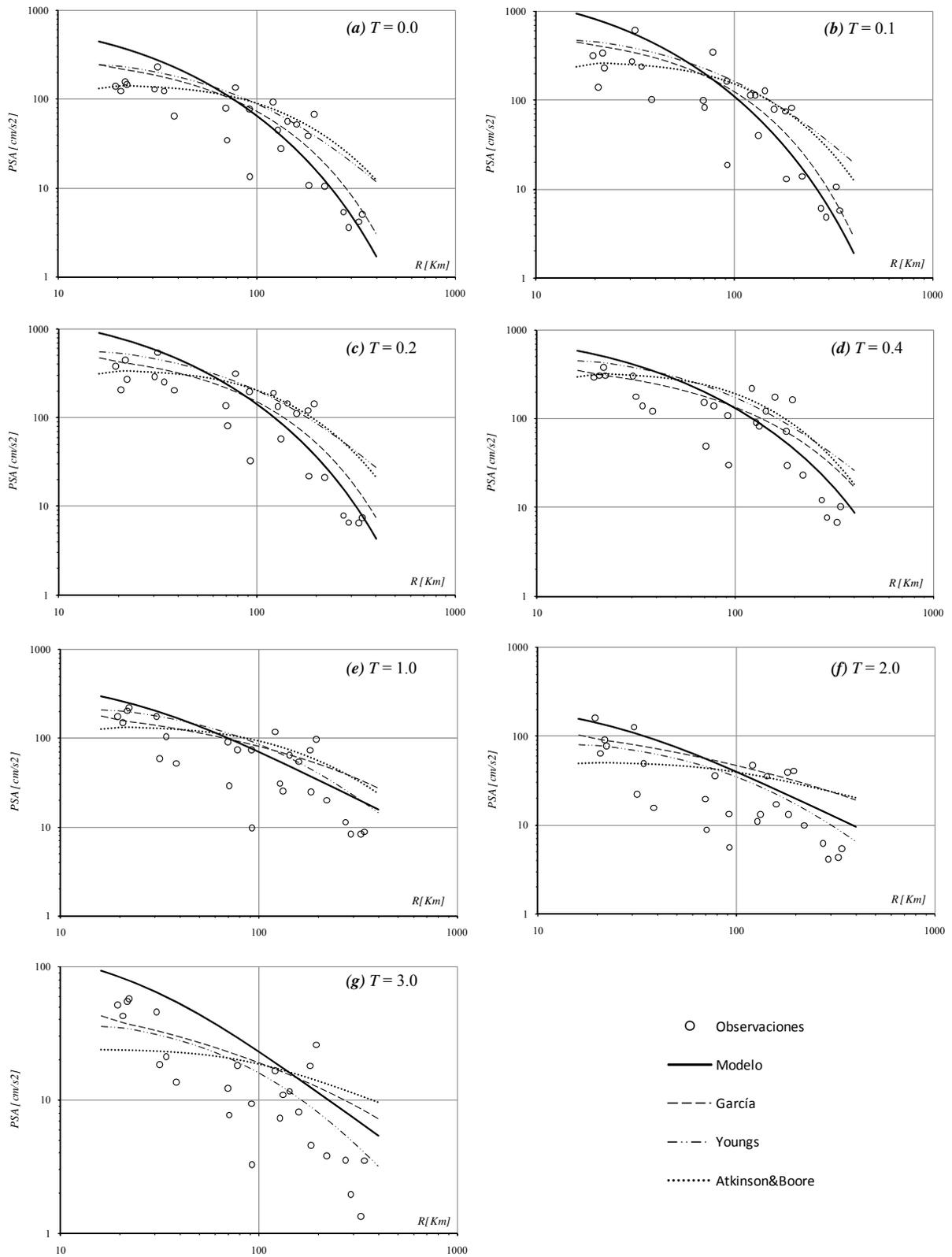


Figura 5.8. PSA contra R para $M_w = 8.0$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo. Los círculos corresponden a observaciones en el conjunto de datos.

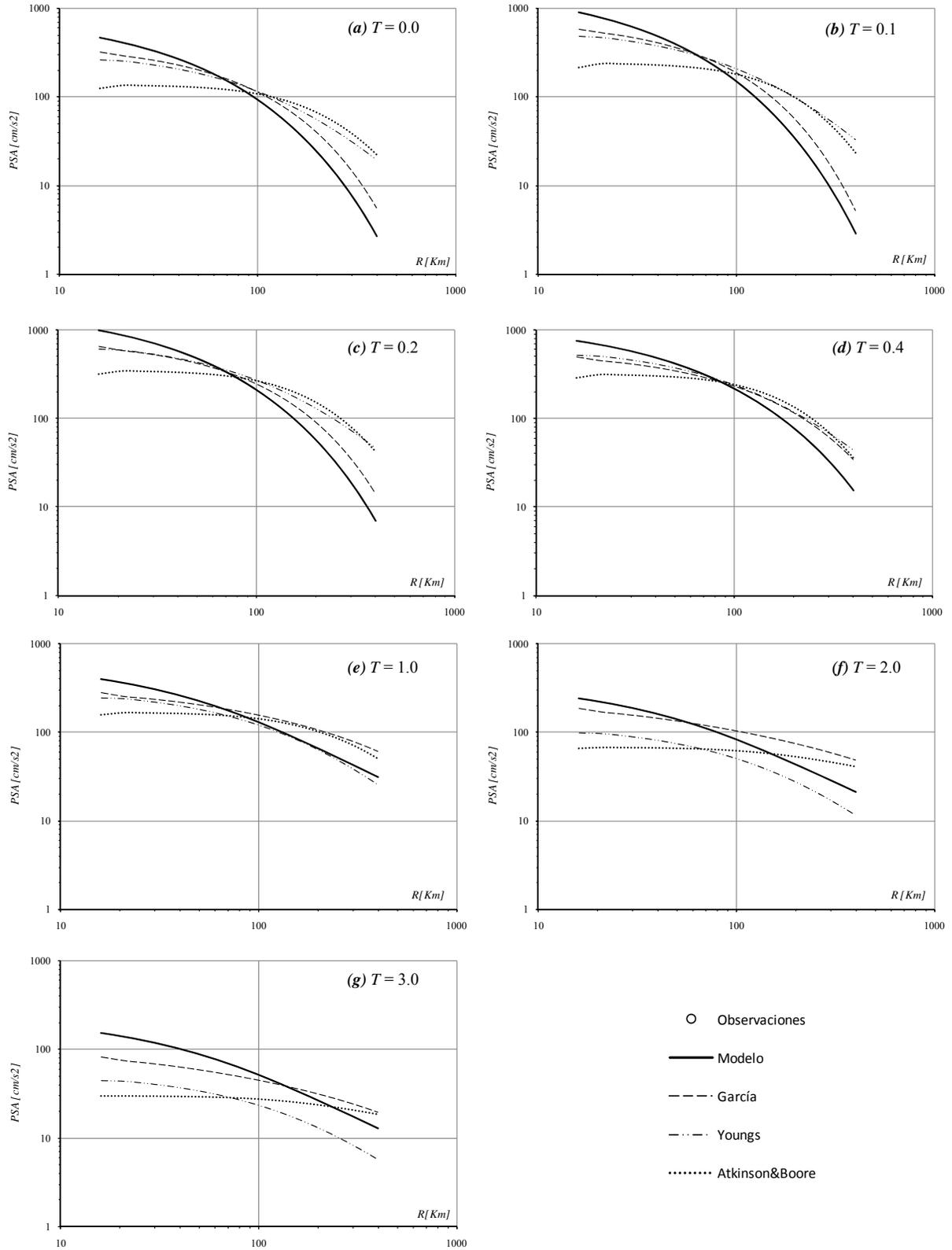


Figura 5.9. PSA contra R para $M_w = 8.5$. Resultados obtenidos para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 segundos, con los modelos de García et al. (2008), Youngs et al. (1997), Atkinson y Boore (2003), y el que se desarrolló en este trabajo.

5.3. ASPECTOS SOBRESALIENTES DE LA COMPARACIÓN CON OTROS MODELOS DE ATENUACIÓN

En la figura 5.10 se hacen las comparaciones finales: se muestran los residuales, el sesgo y la desviación estándar, σ , correspondiente a cada uno de los modelos de atenuación para sismos interplaca considerados en el presente capítulo.

Al logaritmo natural del cociente entre la pseudoaceleración observada (PSA_o) y la pseudoaceleración calculada (PSA_c) se le conoce como residual:

$$Residual = \ln\left(\frac{PSA_o}{PSA_c}\right) = \ln(PSA_o) - \ln(PSA_c) = y_o - y_c \quad (5.1)$$

En las gráficas 5.10(a), 5.10(b), 5.10(c) y 5.10(d) se presentan los residuales obtenidos con el modelo propuesto y los modelos de García *et al.* (2008), Youngs *et al.* (1997) y Atkinson y Boore (2003), respectivamente; para los periodos $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 s. Vale la pena destacar que los residuales más grandes corresponden al modelo de Atkinson y Boore (2003), éstos varían entre -2 y 6, mientras que los menores corresponden al modelo propuesto y al de García *et al.* (2008), cuya variación está entre -2 y 2.5. Los residuales para el modelo de Youngs *et al.* (1997) están distribuidos aproximadamente en un rango entre -3 y 2.

Más adelante, en la gráfica 5.10(e), se hace la comparación entre los sesgos obtenidos con los diferentes modelos. El sesgo, de acuerdo con lo mencionado en el capítulo anterior, es el promedio de todos los residuales asociados con el mismo periodo.

Si el ajuste con los datos fuera perfecto, los residuales serían iguales a cero y, por consiguiente, el sesgo también sería cero. En la figura se ve claramente que el mejor ajuste con los datos lo tiene el modelo propuesto, como era de esperarse, ya que se está tomando como referencia el mismo conjunto de datos utilizado en el proceso de regresión. El modelo de García *et al.* (2008) también presenta buen ajuste, similar al del modelo propuesto. Esto es lógico, teniendo en cuenta que la base de datos utilizada en este trabajo es básicamente la misma usada por García *et al.* (2008).

Puede verse también que los valores de sesgo obtenidos con el modelo de Atkinson y Boore (2003), en todos los periodos, son positivos. La interpretación a este hecho es que en la mayoría de los

casos, la pseudoaceleración calculada (PSA_c) es menor que la pseudoaceleración observada (PSA_o), es decir, este modelo subestima las pseudoaceleraciones.

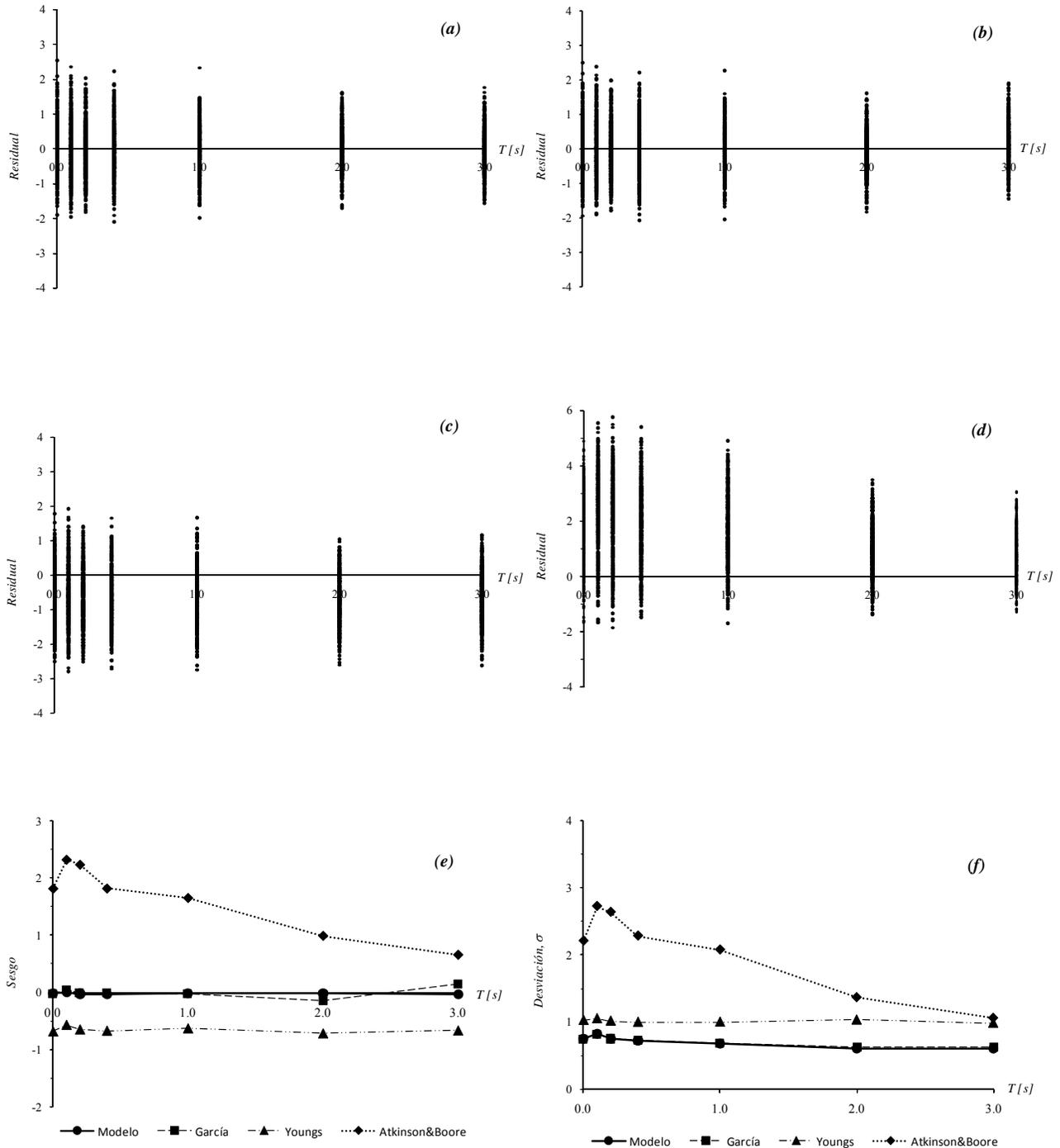


Figura 5.10. Residuales para: (a) el modelo propuesto, (b) modelo de García et al. (2008), (c) modelo de Youngs et al. (1997) y (d) modelo de Atkinson y Boore (2003). (e) Sesgo obtenido con los diferentes modelos y (f) desviación estándar, σ , de cada modelo de atenuación. En todas las gráficas se presentan resultados para $T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 s.

De forma contraria, el sesgo producido por el modelo de Youngs *et al.* (1997), en cada uno de los periodos analizados, es negativo; lo que significa que, en general, la pseudoaceleración calculada (PSA_c) es mayor que la observada (PSA_o).

En valor absoluto, el sesgo de Atkinson y Boore (2003) es cerca de tres y, en algunos casos, cuatro veces más grande que el de Youngs *et al.* (1997), de manera que las diferencias respecto a los datos reales son mucho mayores con el modelo de Atkinson y Boore (2003).

Por último, en la figura 5.10(f) se presenta la desviación estándar obtenida con los diferentes modelos para los mismos periodos ($T = 0.0, 0.1, 0.2, 0.4, 1.0, 2.0$ y $3.0 s$). Ésta se calculó como la raíz cuadrada del promedio de los residuales (asociados al mismo periodo, T) al cuadrado. Nuevamente se observa que el mejor ajuste se logró con el modelo propuesto, mientras que la mayor desviación corresponde al modelo de Atkinson y Boore (2003).

A manera de resumen, y después de encontrar diferencias importantes entre los resultados de los distintos modelos, se hacen comentarios y observaciones sobre los aspectos más relevantes de la comparación:

- Las mayores diferencias encontradas corresponden a magnitudes grandes en sitios cercanos a la superficie de falla. Para estas condiciones, el modelo propuesto genera resultados de pseudoaceleración (PSA) visiblemente mayores que los demás (García *et al.*, 2008; Youngs *et al.*, 1997 y Atkinson y Boore, 2003), y en algunas oportunidades, más grandes incluso que los datos.
- Sucede lo contrario en sitios ubicados a distancias muy grandes, donde las pseudoaceleraciones (PSA) obtenidas con el modelo son menores que las demás.
- La correlación entre los resultados de los diferentes modelos para magnitudes grandes y distancias medianas, entre 50 y 100 Km aproximadamente, es relativamente buena.
- El modelo de Atkinson y Boore (2003) tiende a subestimar las pseudoaceleraciones que se producen en sitios cercanos a la falla y a distancias medianas (aproximadamente hasta 100 Km). En muchos casos, la curva obtenida con este modelo estaba por debajo de las demás, incluso por debajo de las observaciones (figuras 5.5 y 5.6). La misma tendencia se observó en

la figura 5.10(e), donde el sesgo de este modelo, aparte de ser el más grande, es siempre positivo.

- Los modelos de García *et al.* (2008) y Youngs *et al.* (1997) no caracterizan adecuadamente el efecto de la saturación de la pseudoaceleración (PSA).
- A pesar de que la base de datos utilizada contiene numerosos registros (418 en total), es notoria la falta de suficientes datos en sitios cercanos a la superficie de falla, así como de eventos grandes en magnitud; por ejemplo, solo hay cuatro sismos con $M_w > 7.0$. Por consiguiente, cualquier característica anómala en estos sismos pudo influenciar los resultados.

Los resultados logrados con el modelo de atenuación que acá se propone son coherentes y, no obstante la falta de datos, el modelo presenta muy buen ajuste (menor sesgo y desviación), como se pudo ver en la figura 5.10. Puede decirse entonces, que el modelo que se propone en este trabajo para caracterizar la atenuación de los sismos cuyo origen es la subducción interplaca en la costa del Pacífico mexicano, es más adecuado que los demás contra los que se comparó.

Una vez se llega a la anterior conclusión, el siguiente paso es utilizar el modelo en las múltiples aplicaciones que puede llegar a tener; esto se hace en el siguiente capítulo, donde se construyen curvas de peligro sísmico.

CAPÍTULO 6

EVALUACIÓN DEL PELIGRO SÍSMICO (ACAPULCO)

6. EVALUACIÓN DEL PELIGRO SÍSMICO (ACAPULCO)

La aplicación final de una relación de atenuación es la estimación del peligro sísmico de un sitio específico. El peligro sísmico se cuantifica en términos de periodos de retorno de intensidades sísmicas relevantes, o sus inversos, las tasas de excedencia, que pueden entenderse como el número de veces, por unidad de tiempo, en que dicha intensidad es excedida.

En el presente capítulo se construyen algunas curvas de peligro sísmico para la ciudad de Acapulco, haciendo uso nuevamente de los modelos de atenuación considerados en el capítulo precedente. Las curvas obtenidas se comparan con las curvas de peligro construidas empíricamente.

El primer procedimiento desarrollado para evaluar el peligro sísmico de un sitio determinado se conoce como el método Esteva–Cornell, (Cornell, 1968; Esteva, 1968), y salvo algunas modificaciones, en la actualidad sigue siendo utilizado ampliamente. En las siguientes páginas, el peligro sísmico será evaluado en términos de *PSA* contra tasa de excedencia, ν , en lugar de *PGA* contra periodo de retorno, como fue planteado inicialmente por Cornell (1968).

Según el método Esteva–Cornell, es necesario, en primer lugar, identificar y definir geoméricamente cada una de las fuentes generadoras de sismos; luego se evalúa la tasa de actividad sísmica en éstas, se les asigna una relación de atenuación y, por último, se integran los efectos que producen en el sitio (para el cual se está calculando el peligro sísmico) los temblores generados en cada una de las fuentes. Básicamente, el análisis comprende tres pasos:

- 1) Identificación y definición de las fuentes generadoras de sismos
- 2) Especificación de la relación de atenuación
- 3) Cálculo probabilístico

6.1. IDENTIFICACIÓN Y DEFINICIÓN DE LAS FUENTES GENERADORAS DE SISMOS

Como se mencionó arriba, la metodología para determinar el peligro sísmico se aplicará para la ciudad de Acapulco, en el estado de Guerrero, cuyas coordenadas geográficas son 99.9° de longitud

oeste y 16.85107° de latitud norte.

En México, a partir de la tectónica y la historia instrumental de sismos registrados en el pasado, se han identificado 476 fuentes generadoras de temblores. Cada una de éstas genera sismos a una tasa aproximadamente constante. Sin embargo, dado que la presente investigación está enfocada únicamente en sismos de subducción interplaca, serán consideradas sólo aquellas fuentes generadoras de este tipo de eventos, localizadas en la región de subducción en la costa del Océano Pacífico. Las demás fuentes se omiten deliberadamente, porque quedan por fuera del alcance de la investigación, pero debe dejarse en claro que también representan una amenaza sísmica, de menor importancia, para esta ciudad.

En total, como se muestra en figura 6.1, se identificaron 18 fuentes sísmicas, localizadas a lo largo de la falla de subducción generada por el choque frontal (régimen convergente o de compresión) entre las placas oceánicas de Cocos y Rivera con la placa Norteamericana (continental) y que se extienden sobre los estados de Nayarit, Jalisco, Colima, Michoacán, Guerrero, Oaxaca y Chiapas.



Figura 6.1. Identificación de fuentes generadoras de sismos en la zona de subducción mexicana y localización de Acapulco.

Geoméricamente, las fuentes pueden ser definidas como puntos, líneas o áreas. Aquí se les dará el tratamiento de áreas, con vértices en tres dimensiones (longitud, latitud y profundidad). Para cada fuente se definen por lo menos 4 vértices y sólo dos valores de profundidad. En todos los casos, los vértices menos profundos se encuentran a 15 Km, mientras que los más profundos están a 30 Km. Lo anterior puede verse en la figura 6.2.

La actividad sísmica de cada una de las fuentes se especifica en términos del parámetro $\lambda(M)$, que mide la frecuencia de ocurrencia de sismos de magnitud superior a un valor establecido M , en una fuente sísmica, es decir, $\lambda(M)$ representa la tasa de excedencia de la magnitud. Para describir $\lambda(M)$ se utilizan dos modelos:

- Modelo de Poisson.
- Modelo característico.

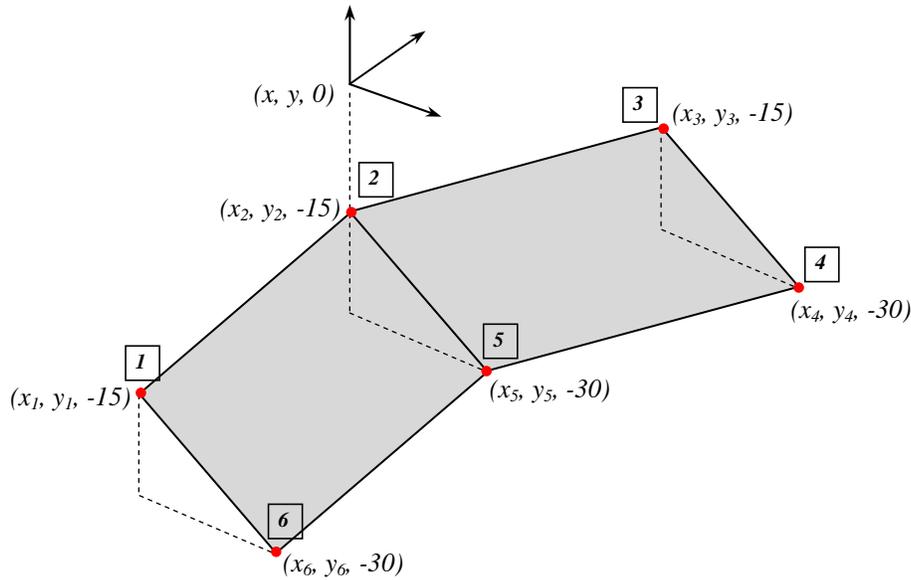


Figura 6.2. Ejemplo de la geometría de las fuentes

El modelo de Poisson es una versión modificada de la relación de Gutenberg y Richter, en este caso, la tasa de excedencia de la magnitud está dada por:

$$\lambda(M) = \lambda_0 \frac{e^{-bM} - e^{-bM_u}}{e^{-bM_0} - e^{-bM_u}}; M_0 \leq M \leq M_u \quad (6.1)$$

donde, λ_0 es la tasa de excedencia de la magnitud M_0 , b es el mismo parámetro de la relación de Richter entre el número de eventos y la magnitud¹, M_0 es una magnitud inicial (el límite inferior de M), de manera que los eventos menores que M_0 pueden ser ignorados y M_u es la magnitud más grande de la fuente.

¹ De acuerdo con Richter, $\log_{10} n_m = a - bm$; donde n_m es el número de eventos y m es la magnitud. a y b son parámetros propios de la fuente.

Cada fuente posee parámetros propios (λ_0 , b , M_0 y M_u), que se determinan mediante procedimientos estadísticos e información sobre otras regiones con una tectónica similar.

A pesar de que el modelo de Poisson se utiliza ampliamente, se ha encontrado que no describe correctamente la ocurrencia de sismos de subducción de magnitudes muy grandes, es decir, existe un valor máximo de magnitud, aproximadamente $M = 7.0$, a partir del cual no es el adecuado y se hace necesario utilizar otro modelo que sí tenga en cuenta la ocurrencia del sismo característico observado por Singh *et al.*, 1983. Éste se conoce como modelo característico. En tal caso, la tasa de excedencia de la magnitud, $\lambda(M)$, está dada por:

$$\lambda(M) = \lambda_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{M - EM}{\sigma_M} \right) \right]; \text{ si } M > M_0 \quad (6.2)$$

M_0 es la magnitud característica mínima ($M_0 = 7.0$), λ_0 es la tasa de excedencia de la magnitud M_0 , Φ es la función normal estándar, EM y σ_M son parámetros propios de la fuente que se deben obtener estadísticamente, EM puede interpretarse como el valor esperado de la magnitud del sismo característico y σ_M su desviación estándar.

De acuerdo con lo anterior, la ocurrencia de sismos de subducción que representan peligro sísmico para la ciudad de Acapulco puede ser descrita mediante el modelo de Poisson siempre y cuando no se sobrepase un cierto valor de magnitud y para magnitudes más grandes se utiliza el modelo característico.

En ese orden de ideas, la zona de subducción se dividió inicialmente en 4 fuentes cuya sismicidad sigue el modelo de Poisson, es decir, son fuentes que producen sismos pequeños y moderados, como se puede ver en la figura 6.3 (a). Sin embargo, para describir la ocurrencia de sismos grandes se hace necesario utilizar el modelo característico; por lo tanto, la misma falla se divide posteriormente en 14 fuentes (figura 6.3b), cuya actividad sísmica se rige por el modelo característico. En total, se consideran 18 fuentes enumeradas como se muestra en la figura 6.3.

Los valores de los parámetros correspondientes a cada fuente (λ_0 , b , EM , etc), se obtuvieron a partir del catálogo de sismos mexicanos preparado por Zúñiga y Guzmán, 1994; haciendo uso de los procedimientos estadísticos bayesianos descritos en Rosenblueth y Ordaz, 1987 y Arboleda y Ordaz, 1993.

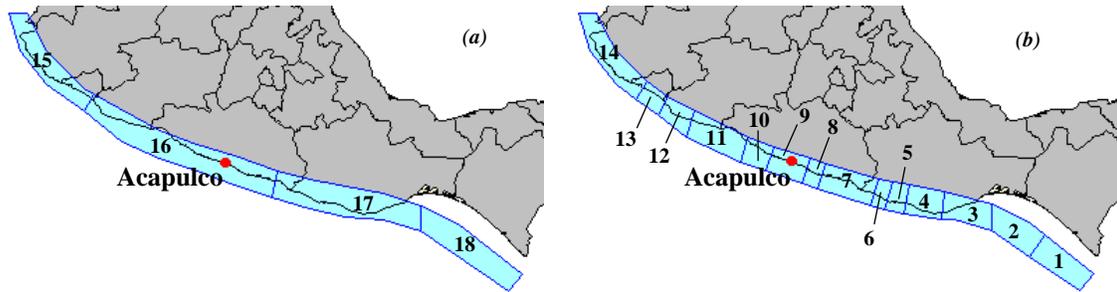


Figura 6.3. Fuentes generadoras de temblores: (a) fuentes con el modelo de Poisson, (b) fuentes con el modelo característico. En total son 18 fuentes.

Ya se tienen identificadas y definidas tanto geométrica como sísmicamente las fuentes generadoras de sismos de subducción que podrían representar alguna amenaza sísmica para Acapulco. En la tabla 6.1 se presenta un resumen con el número de vértices para cada fuente, las coordenadas de éstos y el tipo de modelo de ocurrencia que se asignó, y en las tablas 6.2 y 6.3 se indican los parámetros² relativos a la sismicidad de las fuentes que siguen el modelo de Poisson y el modelo característico, respectivamente.

² La mayoría de estos valores fueron tomados de Ordaz y Reyes (1999)

Fuente No.	No. de vértices	Longitud	Latitud	Profundidad [Km]	Modelo de ocurrencia
1	4	-94.018	14.527	15	Característico
		-92.667	13.620	15	
		-92.301	14.069	30	
		-93.613	15.100	30	
2	5	-95.000	15.197	15	Característico
		-94.018	14.527	15	
		-93.613	15.100	30	
		-93.987	15.392	30	
		-95.000	15.910	30	
3	5	-96.349	15.526	15	Característico
		-96.000	15.500	15	
		-95.000	15.197	15	
		-95.000	15.910	30	
		-96.267	16.257	30	
4	4	-97.354	15.670	15	Característico
		-96.349	15.526	15	
		-96.267	16.257	30	
		-97.210	16.443	30	
5	4	-97.877	15.775	15	Característico
		-97.354	15.670	15	
		-97.210	16.443	30	
		-97.655	16.528	30	
6	4	-98.242	15.873	15	Característico
		-97.887	15.775	15	
		-97.655	16.528	30	
		-98.035	16.591	30	
7	4	-99.663	16.343	15	Característico
		-98.242	15.873	15	
		-98.035	16.591	30	
		-99.438	17.010	30	
8	4	-100.062	16.473	15	Característico
		-99.663	16.343	15	
		-99.438	17.010	30	
		-99.836	17.143	30	
9	4	-101.005	16.797	15	Característico
		-100.062	16.473	15	
		-99.836	17.143	30	
		-100.810	17.437	30	
10	4	-101.701	17.044	15	Característico
		-101.005	16.797	15	
		-100.810	17.437	30	
		-101.499	17.709	30	
11	4	-103.135	17.701	15	Característico
		-101.701	17.044	15	
		-101.499	17.709	30	
		-102.916	18.393	30	

Fuente No	No. de vértices	Longitud	Latitud	Profundidad [Km]	Modelo de ocurrencia
12	4	-103.868	18.300	15	Característico
		-103.135	17.701	15	
		-102.916	18.393	30	
		-103.612	18.761	30	
13	4	-104.457	18.717	15	Característico
		-103.868	18.300	15	
		-103.612	18.761	30	
		-104.182	19.173	30	
14	8	-104.457	18.717	15	Característico
		-104.182	19.173	15	
		-105.000	20.000	15	
		-105.130	20.256	15	
		-105.500	21.000	30	
		-106.000	21.000	30	
		-105.700	20.000	30	
15	8	-105.000	19.100	30	Poisson
		-106.000	21.000	15	
		-105.700	20.000	15	
		-105.000	19.100	15	
		-104.000	18.400	15	
		-103.730	18.840	30	
		-104.000	19.000	30	
		-105.000	20.000	30	
16	11	-105.500	21.000	30	Poisson
		-104.000	18.400	15	
		-103.000	17.600	15	
		-102.000	17.150	15	
		-101.000	16.800	15	
		-100.000	16.450	15	
		-99.000	16.100	15	
		-98.820	16.810	30	
		-100.000	17.200	30	
		-101.000	17.500	30	
		-102.000	17.900	30	
17	10	-103.730	18.840	30	Poisson
		-99.000	16.100	15	
		-98.000	15.800	15	
		-97.000	15.600	15	
		-96.000	15.500	15	
		-95.000	15.200	15	
		-95.000	15.900	30	
		-96.000	16.200	30	
		-97.000	16.400	30	
		-98.000	16.600	30	
-98.820	16.810	30			

Fuente No	No. de vértices	Longitud	Latitud	Profundidad [Km]	Modelo de ocurrencia
18	5	-95.000	15.200	15	Poisson
		-92.670	13.620	15	
		-92.300	14.080	30	
		-94.000	15.400	30	
		-95.000	15.900	30	

Tabla 6.1. Definición geométrica de las fuentes generadoras de sismos

Fuente No.	λ_0 (1/año)	b
15	2.014	1.827
16	4.792	1.547
17	6.717	1.847
18	18.938	2.059

Tabla 6.2. Parámetros para las fuentes con el modelo de ocurrencia de Poisson (eventos pequeños y moderados). En todos los casos $M_0 = 4.5$ y $M_u = 7.2$ ¹⁸

Fuente No.	λ_0 (1/año)
1	0.03690
2	0.03344
3	0.02793
4	0.01898
5	0.01339
6	0.01116
7	0.02899
8	0.01116
9	0.02232
10	0.01563
11	0.03356
12	0.01786
13	0.01675
14	0.04566

Tabla 6.3. Tasa de excedencia de $M_0 = 7.0$ para las fuentes con el modelo característico. En todos los casos $M_u = 8.4$, $EM = 7.5$ y $\sigma_M = 0.27$ ³

³ La mayoría de estos valores fueron tomados de Ordaz y Reyes (1999)

6.2. ESPECIFICACIÓN DE LA RELACIÓN DE ATENUACIÓN Y CÁLCULO PROBABILÍSTICO DEL PELIGRO SÍSMICO

Una vez se ha definido la sismicidad de todas las fuentes, el siguiente paso consiste en asignar un modelo de atenuación adecuado para cada una de éstas. Sólo se consideraron las fuentes que generan sismos de subducción interplaca, debido a que es el tipo específico de sismos que interesa en la presente investigación. Entonces, para que exista coherencia, a cada fuente se le debe asignar una relación de atenuación exclusiva para este tipo de sismos. Sin embargo, como se ha dicho antes, existen más fuentes sísmicas que representan una amenaza sísmica para Acapulco, razón por la que deberían ser tenidas en cuenta, pero se excluyen, intencionalmente, porque quedan fuera del alcance de este trabajo.

Dado que uno de los objetivos principales de este capítulo es evaluar la exactitud del modelo de atenuación propuesto, en el marco del análisis probabilístico del peligro sísmico, se asume que las ondas sísmicas generadas en cada una de las 18 fuentes se atenúan de acuerdo con el modelo que acá se propone y también, como se ha hecho hasta ahora, con los modelos de García *et al.*, 2008; Youngs *et al.*, 1997 y Atkinson y Boore, 2003. Las curvas de peligro sísmico se construirán para cada una de las anteriores relaciones y luego serán comparadas con las curvas empíricas.

Después de identificar y definir geoméricamente las fuentes, describir su sismicidad y asignar una relación de atenuación, el peligro sísmico se calcula considerando la suma de efectos producidos por cada una de las fuentes. Se asume que para una fuente sísmica, el proceso de ocurrencia de sismos que tiene lugar es independiente, y que además, cualquier punto dentro de la fuente puede ser el foco. Por lo tanto, la evaluación del peligro sísmico en un punto determinado es un proceso de integración, que tiene en cuenta todas las posibles localizaciones focales. Para la i -ésima fuente, el peligro sísmico se determina con la siguiente expresión, que representa la tasa de excedencia de un valor de intensidad en términos de pseudoaceleración (PSA):

$$v_i(PSA) = \sum_j \int_{M_0}^{M_u} \left[-\frac{d\lambda_i(M)}{dM} \right] Pr(PSA > a | M, R_{ij}) dM \quad (6.3)$$

donde M_0 y M_u son, respectivamente, la magnitud más pequeña y la más grande consideradas en el análisis, $Pr(PSA > a | M, R_{ij})$ representa la probabilidad de que la pseudoaceleración PSA exceda un valor a en el sitio, dado que se genera un sismo de magnitud M a una distancia R_{ij} y $\lambda(M)$ es la tasa de excedencia de la magnitud, M .

Finalmente, se suman las contribuciones de las N fuentes al peligro sísmico del sitio en cuestión:

$$v(PSA) = \sum_{i=1}^N v_i(PSA) \quad (6.4)$$

Las curvas teóricas, para los periodos $T = 0.0, 0.1, 0.4, 1.0, 2.0$ y 3.0 s fueron obtenidas con el programa CRISIS 2007 versión 3.0⁴ y se muestran en la figura 6.4.

El procedimiento para construir curvas empíricas de peligro sísmico es sencillo. Si en el sitio de estudio se han registrado valores de pseudoaceleración durante un periodo de tiempo lo suficientemente largo, la tasa de excedencia, $\nu(a)$, puede ser determinada simplemente contando el número de veces en que cierto valor a fue excedido por unidad de tiempo (generalmente 1 año). Debido a que no se requiere el uso de ningún modelo matemático, a este procedimiento se le conoce como cálculo empírico de $\nu(a)$. No obstante, este tipo de cálculos difícilmente se puede llevar a cabo debido a dos razones principales (Ordaz y Reyes, 1999): 1) los datos de intensidades sísmicas útiles son, en general, datos acelerométricos locales, y muy pocos sitios de interés coinciden con estaciones acelerométricas y 2) incluso si se cuenta con datos acelerométricos en el sitio de interés, el tiempo de observación generalmente no es suficiente.

Por suerte, la estación Acapulco Pellandini, conocida como ACAP, localizada en Acapulco, sobre roca granítica y cuyas coordenadas geográficas son 99.914° de longitud oeste y 16.836° de latitud norte, ha registrado información desde hace casi 40 años (de acuerdo con la base mexicana de datos de sismos fuertes, el primer registro que se tiene corresponde al 11 de abril de 1973). En la figura 3.3 (Capítulo 3) puede verse su ubicación, representada mediante un cuadrado gris.

Utilizando los datos registrados en esta estación, contando el número de veces que ciertos valores de pseudoaceleración fueron excedidos y luego dividiendo por el número de años de observación, se construyen las curvas empíricas correspondientes a los mismos periodos mencionados anteriormente. En la figura 6.4 se muestran éstas y se comparan con las curvas obtenidas mediante el método indirecto de Esteva-Cornell.

Debe advertirse desde un principio que los comentarios que puedan hacerse con base en las comparaciones de la figura 6.4 son válidos sólo para la estación ACAP y no son necesariamente válidos para otros sitios en la región de subducción. Lamentablemente, las demás estaciones de la

⁴ CRISIS 2007 versión 3.0. Programa para el cálculo del peligro sísmico. M. Ordaz, A. Aguilar, J. Arboleda.

zona no han registrado datos durante un lapso lo suficientemente largo que permita calcular otras curvas empíricas de peligro.

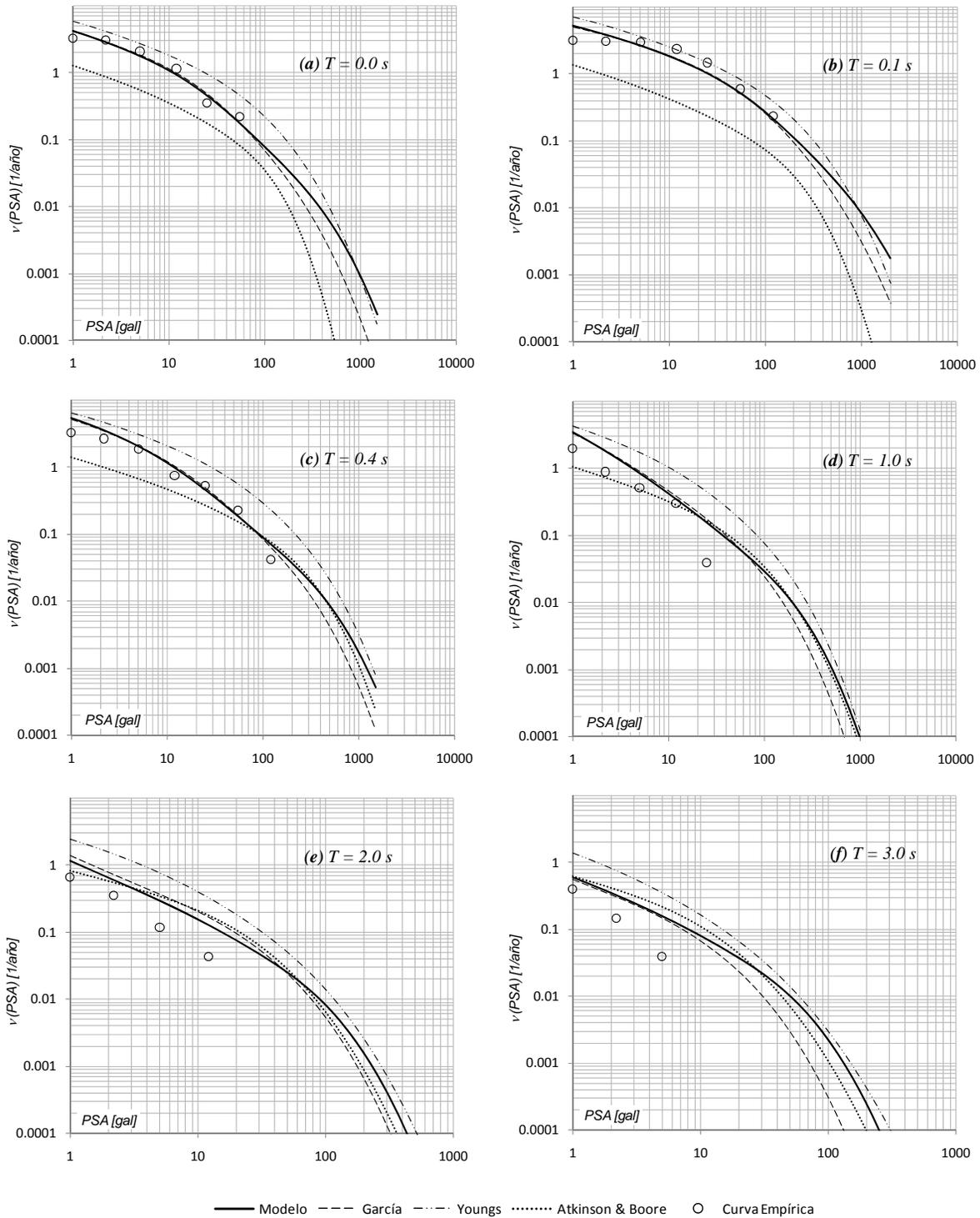


Figura 6.4. Curvas teóricas de peligro sísmico para Acapulco, calculadas con diferentes modelos de atenuación, y curvas empíricas de peligro sísmico: (a) $T=0.0 \text{ s}$, (b) $T=0.1 \text{ s}$, (c) $T=0.4 \text{ s}$, (d) $T=1.0 \text{ s}$, (e) $T=2.0 \text{ s}$ y (f) $T=3.0 \text{ s}$.

Se pueden hacer varias observaciones. En primer lugar, en términos generales, el modelo propuesto lleva a curvas de peligro sísmico más cercanas a las curvas empíricas que los otros modelos. Además, apoyándose también en los resultados del capítulo anterior, queda demostrado que la relación obtenida por Atkinson y Boore (2003) a partir de una base de datos de sismos ocurridos en zonas de subducción (interplaca) de diferentes partes del mundo, incluyendo a México, no describe de manera adecuada la atenuación de las ondas producidas por este tipo de sismos en la costa del Pacífico mexicano.

Con referencia específicamente a los resultados logrados con el modelo propuesto, es claro que para valores de *PSA* pequeños, las tasas de excedencia obtenidas son mayores que las empíricas. La explicación más razonable a este hecho, es que posiblemente muchos sismos pequeños no fueron registrados por los acelerómetros de la estación ACAP.

En los periodos cortos ($T < 1.0$ s), se ve que para *PSA* moderadas las tasas de excedencia empíricas son un poco mayores; aunque las diferencias no son muy grandes y la forma general de las curvas empírica y teórica es similar. Lo anterior puede deberse a que en el método indirecto (Esteva-Cornell) deben definirse múltiples parámetros, lo que incrementa la incertidumbre y puede afectar la exactitud de los resultados.

Otro aspecto que sobresale en la figura es la falta de concordancia entre las diferentes curvas y las observaciones a periodo largo ($T > 1.0$ s). Debe reconocerse que, en tales casos, los resultados logrados con el modelo que acá se propone se alejan un poco de la realidad, tendiendo a sobreestimar las tasas de excedencia pronosticadas –algo que para fines de diseño sísmico no resulta del todo inconveniente, sería más indeseable el escenario contrario, es decir, que los pronósticos subestimarán las tasas de excedencia–. Lo anterior tiene explicación, en parte, en la aproximación para altas frecuencias (o periodos largos) hecha por Singh *et al.* (1989) y que está implícita en el desarrollo del funcional.

También, merece mención el hecho de que las discrepancias con la realidad no son exclusivas para las curvas de peligro construidas con el modelo propuesto, sino que, por el contrario, se observan también con las demás curvas teóricas. Esto indica que, posiblemente, las tasas de excedencia empíricas tienen valores muy pequeños, algo que no resultaría extraño, pues podría ser que el tiempo de observación para estos periodos (periodos largos, $T > 1.0$ s) fue muy corto, por lo tanto, no todas las veces que ciertos valores de *PSA* fueron excedidos se contaron, y como consecuencia

se tienen tasas de excedencia empíricas más pequeñas. Además, las ordenadas espectrales para periodos largos son menores, y tienden a ser muy parecidas, independientemente de la magnitud del sismo. Entonces, es posible que algunos sismos pequeños que no quedaron registrados en la estación ACAP, produjeron pseudoaceleraciones que sí debieron tenerse en cuenta en el conteo para la construcción de las curvas empíricas.

Por último, se hace notar que si bien las observaciones hechas sobre la figura 6.4 son válidas sólo para la estación ACAP, la tendencia observada en la mayoría de las comparaciones, no únicamente en el marco del análisis probabilístico del peligro sísmico, sino incluso desde el capítulo anterior, ha sido reiterativa y permite tener confianza en los resultados logrados con el modelo de atenuación desarrollado a lo largo de este trabajo y que no pueden ser comprobados con datos reales (por falta de datos suficientes). Puede afirmarse, ahora con más argumentos, que el modelo de atenuación presentado es más adecuado para la zona de subducción mexicana que otros modelos obtenidos a partir de catálogos de diferentes zonas de subducción alrededor del mundo.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

7. CONCLUSIONES

En este capítulo es necesario recordar las metas y objetivos que se formularon al inicio de la investigación, debe reflexionarse sobre el alcance a satisfacción o parcial de éstos, y también, sobre la pertinencia y valor de los aportes que se han hecho a la Ingeniería Estructural y a la Sismología.

El objetivo principal era obtener una relación matemática que describiera adecuadamente la atenuación de los sismos de subducción interplaca originados en la costa del Océano Pacífico en México, y dicho sea desde un comienzo: el objetivo se logró. No obstante, para llegar a la anterior aseveración, tuvieron que sortearse numerosos inconvenientes que posteriormente resultaron en limitaciones de la investigación y que de alguna manera afectaron los resultados. Tales limitaciones serán mencionadas más adelante.

Este trabajo fue concebido como una continuación de la investigación previa de Ordaz *et al.*, 1994, y tuvo como base teórica el modelo de regresión bayesiana lineal desarrollado por Arroyo y Ordaz, 2008. El funcional utilizado se obtuvo a partir de los trabajos de Hanks y McGuire, 1981; Boore, 1983 y Singh *et al.*, 1989.

Se llevaron a cabo regresiones bayesianas independientes para cada periodo estructural T , de tal forma que en lugar de hacer una única regresión bayesiana multivariada (que involucrara todos los n_T periodos estructurales considerados), se hicieron n_T regresiones bayesianas univariadas, por separado.

Esto permitió resolver el problema de aplicar la teoría de regresión bayesiana lineal a un funcional que originalmente no tenía esa forma, pero representa la principal limitación del modelo de atenuación que aquí se presenta:

- No es posible considerar la correlación existente entre las ordenadas de pseudoaceleración correspondientes a diferentes periodos estructurales T .
- También vale la pena destacar como una limitación importante el hecho de que a pesar de disponer de una base de datos grande, que contiene 418 registros en total, es notoria la falta de

datos suficientes en sitios cercanos a la superficie de falla, así como de eventos de magnitud grande. Por ejemplo, sólo hay cuatro sismos con $M_w > 7.0$, por lo tanto, cualquier característica anómala en estos sismos pudo haber influenciado los resultados.

- La aplicación del modelo de regresión bayesiana para determinar relaciones de atenuación requiere más trabajo analítico y computacional que otros métodos tradicionales. Esto resulta obviamente poco atractivo; sin embargo, el esfuerzo bien vale la pena y se justifica en el hecho de que permite hacer uso de la información que se tiene sobre este tipo de sismos en México, proveniente de dos fuentes: por un lado, existe una cantidad importante de información derivada del conocimiento previo, producto del trabajo constante de autores como Singh, Ordaz y Kostoglodov, y adicionalmente, se tiene una base de datos con numerosos registros, reportados por las diferentes redes de instrumentación sismológica que operan en la región.

Una vez concluido el proceso de regresión y definidos los coeficientes $\alpha(T)$, se generó información a partir del modelo propuesto y ésta fue comparada con los resultados de los modelos de García *et al.*, 2008; Youngs *et al.*, 1997 y Atkinson y Boore, 2003.

Desde el punto de vista estadístico, las diferencias (exceptuando el modelo de Atkinson y Boore, 2003) no son muy grandes. Los sesgos y desviaciones más pequeñas corresponden al modelo propuesto, algo que resulta lógico, pues para la comparación se tomó como referencia el mismo conjunto de datos utilizado para la regresión.

Sin embargo, se identificaron diferencias importantes en los resultados de pseudoaceleración, especialmente para eventos de magnitud grande en zonas cercanas a la superficie de ruptura. A continuación se mencionan las conclusiones más importantes que pueden ser hechas a partir de la comparación:

- Las diferencias más grandes en los valores de pseudoaceleración corresponden a sismos de magnitud grande en sitios cercanos a la superficie de falla. Para tales condiciones, el modelo que acá se propone genera pseudoaceleraciones visiblemente mayores que los demás, y en algunas oportunidades, más grandes incluso que los datos.
- En sitios ubicados a distancias muy grandes, se observa la tendencia contraria, es decir, las pseudoaceleraciones obtenidas con el modelo propuesto son menores que las demás.

- La correlación entre las pseudoaceleraciones de los diferentes modelos para magnitudes grandes y distancias medianas, entre 50 y 100 Km aproximadamente, es relativamente buena.
- Los modelos de García *et al.*, 2008, y Youngs *et al.*, 1997, no caracterizan adecuadamente el efecto de la saturación de la pseudoaceleración.
- El modelo de Atkinson y Boore, 2003, tiende a subestimar las pseudoaceleraciones que se producen en sitios cercanos a la falla y también a distancias medianas (aproximadamente hasta 100 Km). En muchos casos, los resultados obtenidos con este modelo estaban por debajo de los demás, incluso por debajo del conjunto de observaciones.

En la última parte del trabajo, se evaluó el peligro sísmico de la ciudad de Acapulco, haciendo uso de los mismos modelos de atenuación. Adicionalmente se construyeron curvas empíricas de peligro sísmico. La comparación permitió confirmar la tendencia observada anteriormente y pudo llegarse a las conclusiones siguientes:

- Las pseudoaceleraciones y sus tasas de excedencia, $\nu(PSA)$, obtenidas con la relación de atenuación propuesta por Atkinson y Boore, 2003, son menores, en la mayoría de los casos, que los datos reales; por consiguiente, puede decirse que este modelo no describe de manera adecuada la atenuación de las ondas producidas por los sismos de tipo interplaca generados en la zona de subducción en la costa del Pacífico mexicano y no se recomienda hacer uso de dicho modelo. De igual forma, los datos utilizados en un análisis de regresión deben corresponder a la misma zona de subducción. No es correcto combinar datos de varias regiones de subducción alrededor del mundo, pues existen variaciones regionales importantes.
- El modelo que acá se propone lleva a curvas de peligro sísmico más cercanas a las curvas empíricas, por lo menos para Acapulco. Sin embargo, la tendencia observada en las numerosas comparaciones es reiterativa y permite tener confianza en los resultados logrados con el modelo propuesto, muchos de los cuales no se pueden comparar con datos reales, debido a la ausencia de datos suficientes.

Por último, debe resaltarse que el alcance de esta tesis no se limita a la expresión matemática obtenida, sino que uno de los aportes más valiosos es el procedimiento que en general queda descrito, incluyendo la aplicación de la regresión bayesiana univariable.

En unos años, cuando la base de datos sea más completa, podrá repetirse el análisis de regresión y encontrarse una relación para la atenuación de este tipo de sismos que tenga mejor correlación con la realidad. No obstante, los resultados logrados con la base de datos actual son satisfactorios y puede afirmarse que los objetivos planteados al inicio de la investigación se lograron a cabalidad y que el modelo desarrollado a lo largo de este trabajo es el más adecuado para describir la atenuación de los sismos interplaca originados en la zona de subducción mexicana.

**ANEXO A: MODELO DE REGRESIÓN
MULTIVARIADA APLICADO A
RELACIONES DE ATENUACIÓN DE
LA SEUDOACELERACIÓN.**

ANEXO A: MODELO DE REGRESIÓN MULTIVARIADA APLICADO A RELACIONES DE ATENUACIÓN DE LA SEUDOACELERACIÓN

En este anexo se presenta la teoría del modelo de regresión bayesiana multivariada propuesto por Arroyo y Ordaz, 2008, en el trabajo titulado MULTIVARIATE BAYESIAN REGRESSION ANALYSIS APPLIED TO PSEUDO-ACCELERATION ATENUATION RELATIONSHIPS. PART 1: THEORY AND SYNTHETIC EXAMPLE; y que sirvió como base para la presente investigación. El modelo permite adelantar un análisis de regresión general que tiene en cuenta los n_T periodos estructurales considerados, o, en otras palabras, un análisis multivariado, y no n_T análisis por separado, como se haría en el caso univariado. Adicionalmente, es posible incluir la correlación entre las diferentes observaciones del mismo sismo, la correlación entre los coeficientes de regresión y la correlación entre las ordenadas espectrales de pseudoaceleración.

El análisis de regresión univariada, que fue el que se utilizó en el modelo de atenuación desarrollado en este trabajo, es un caso particular de la regresión multivariada. El análisis multivariado es teóricamente más completo; sin embargo, por las razones que se mencionaron en el Capítulo 2, para linealizar el funcional (ecuación 1.11) debe hacerse un análisis independiente para cada periodo (regresión univariada). En la parte final de este anexo se comentan las principales diferencias entre los análisis multivariado y univariado.

El procedimiento que se presente a continuación es aplicable a cualquier forma lineal de relaciones de atenuación. La forma general de un modelo lineal de regresión multivariada es la siguiente:

$$Y = X\alpha^T + E \quad (\text{A.1})$$

El símbolo T representa la transpuesta de la matriz. Y es una matriz conocida de tamaño $n_o \times n_T$ que incluye n_o observaciones de $y(T) = \ln(PSA)$ para los n_T periodos considerados. Cada fila de la matriz Y contiene el espectro de pseudoaceleración correspondiente a un par de valores de magnitud y distancia a la falla (M_w, R). X es una matriz conocida de tamaño $n_o \times n_p$ que contiene n_o observaciones de las n_p variables independientes (es decir, aquellas que provienen de los datos y no son consideradas variables aleatorias). α es una matriz desconocida de tamaño $n_T \times n_p$, que incluye los coeficientes determinados en el proceso de regresión ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_{np}$) que en el marco del análisis bayesiano se consideran variables aleatorias. Cada fila de la matriz α contiene los

coeficientes $\alpha_i(T)$ para un periodo T dado. A continuación se presenta la estructura de cada una de las matrices mencionadas:

$$Y = \begin{array}{cccccc} & T_1 & T_2 & T_3 & \dots & T_{n_T} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccccc} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \dots & y_{1n_T} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \dots & y_{2n_T} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \dots & y_{3n_T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n_o1} & y_{n_o2} & y_{n_o3} & \dots & y_{n_on_T} \end{array} \right] & \rightarrow & \begin{array}{l} (M_{w_1}, R_1) \\ (M_{w_2}, R_2) \\ (M_{w_3}, R_3) \\ \vdots \\ (M_{w_{n_o}}, R_{n_o}) \end{array} \end{array} \quad (\text{A.2})$$

$$X = \begin{array}{cccccc} & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n_p} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n_p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n_p} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3n_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_o1} & x_{n_o2} & \dots & x_{n_on_p} \end{array} \right] & \rightarrow & \begin{array}{l} (M_{w_1}, R_1) \\ (M_{w_2}, R_2) \\ (M_{w_3}, R_3) \\ \vdots \\ (M_{w_{n_o}}, R_{n_o}) \end{array} \end{array} \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha = \begin{array}{cccccc} & \alpha_{1_1} & \alpha_{2_1} & \alpha_{3_1} & \dots & \alpha_{n_{p_1}} \\ & \alpha_{1_2} & \alpha_{2_2} & \alpha_{3_2} & \dots & \alpha_{n_{p_2}} \\ & \alpha_{1_3} & \alpha_{2_3} & \alpha_{3_3} & \dots & \alpha_{n_{p_3}} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \alpha_{1_{n_T}} & \alpha_{2_{n_T}} & \alpha_{3_{n_T}} & \dots & \alpha_{n_{p_{n_T}}} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{n_T} \end{array} \quad (\text{A.4})$$

E es una matriz desconocida de tamaño $n_o \times n_T$ que contiene los residuales (errores) de la regresión.

Se asume que cada elemento ε del vector E está conformado por ε_r y ε_e :

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{e_1} \\ \varepsilon_{r_2} + \varepsilon_{e_2} \\ \varepsilon_{r_3} + \varepsilon_{e_3} \\ \vdots \\ \varepsilon_{r_{n_o}} + \varepsilon_{e_{n_o}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Donde ε_r incluye la correlación entre sitios (registros) y el término ε_e hace referencia a la componente de variabilidad entre sismos. ε_r toma un valor por cada registro mientras que ε_e toma un valor por cada sismo. Se supone que los elementos de la matriz E son variables aleatorias con media cero, correlacionadas entre sí y con distribución de probabilidad conjunta Normal. La correlación entre los elementos de E se define mediante una matriz desconocida de tamaño $n_o n_T \times n_o n_T$, llamada Ω , que a su vez se puede descomponer en dos matrices definidas en la ecuación (A.6):

$$\Omega = \Phi \otimes \Sigma \quad (\text{A.6})$$

Donde Φ es una matriz desconocida de tamaño $n_o \times n_o$ que tiene en cuenta la correlación entre las filas de Y , es decir, la correlación entre las diferentes observaciones y Σ es otra matriz desconocida de tamaño $n_T \times n_T$ que tiene en cuenta la correlación entre las ordenadas espectrales. El símbolo \otimes representa al producto Kronecker.

Adicionalmente, se hacen las siguientes consideraciones para los elementos de la matriz de residuales, E :

1. Para el mismo sismo y el mismo sitio (o registro), el coeficiente de correlación entre los residuales para dos periodos diferentes, T_i y T_j , es igual a ρ_{T_i, T_j} .
2. Para el mismo sismo, el coeficiente de correlación entre residuales para el mismo periodo T pero en sitios diferentes (es decir, diferentes registros) es igual a γ_e .
3. Para un determinado sismo, el coeficiente de correlación entre los residuales de dos periodos distintos, T_i y T_j , en sitios diferentes es $\gamma_e \rho_{T_i, T_j}$.
4. Los residuales asociados a sismos diferentes son independientes, es decir, no están correlacionados.

Los numerales 1, 2 y 3 son válidos siempre y cuando γ_e tenga el mismo valor para todos los periodos estructurales T . De esta forma se incluye en el análisis la correlación entre las diferentes observaciones o registros del mismo sismo y la correlación entre las ordenadas del espectro de pseudoaceleración correspondientes a periodos diferentes.

De acuerdo con las hipótesis mencionadas, la matriz Φ es diagonal:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{n_e} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Donde n_e es el número de sismos considerados en la regresión y la submatriz cuadrada ϕ_i , que se relaciona con el sismo i , está dada por

$$\phi_i = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_e & \cdots & \gamma_e \\ \gamma_e & 1 & \cdots & \gamma_e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_e & \gamma_e & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

El tamaño de ϕ_i es igual al número de registros para el sismo i . El parámetro γ_e , definido anteriormente como el coeficiente de correlación entre los residuales (elementos de la matriz E) correspondientes al mismo sismo y al mismo periodo T , es igual a:

$$\gamma_e = \frac{\sigma_e^2}{(\sigma_r^2 + \sigma_e^2)} \quad (\text{A.9})$$

La covarianza entre dos residuales correspondientes a sismos diferentes es cero, como se puede ver en la estructura de la matriz de la ecuación (A.7). El término del denominador, $(\sigma_r^2 + \sigma_e^2)$, representa la varianza de cada residual. σ_e^2 es la varianza de ε_e y σ_r^2 es la varianza de ε_r .

La matriz simétrica Σ , como ya se dijo, tiene en cuenta la correlación entre las ordenadas del espectro de pseudoaceleración (PSA) y es de tamaño $n_T \times n_T$. Su estructura es la siguiente:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2_1 & \rho_{T_1T_2} & \rho_{T_1T_3} & \cdots & \rho_{T_1T_{n_T}} \\ \rho_{T_2T_1} & \sigma^2_2 & \rho_{T_2T_3} & \cdots & \rho_{T_2T_{n_T}} \\ \rho_{T_3T_1} & \rho_{T_3T_2} & \sigma^2_3 & \cdots & \rho_{T_3T_{n_T}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{T_{n_T}T_1} & \rho_{T_{n_T}T_2} & \rho_{T_{n_T}T_3} & \cdots & \sigma^2_{n_T} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Los elementos de la diagonal principal representan la varianza de los residuales, periodo a periodo, mientras que $\rho_{T_iT_j}$ es la correlación del periodo T_i con el periodo T_j .

Como se ha mencionado en varias oportunidades a lo largo de este trabajo, α , Σ , y Φ son matrices cuyos elementos son variables aleatorias con densidad de probabilidad conjunta *a priori* conocida, $p(\alpha, \Sigma, \Phi)$, que se actualiza mediante el Teorema de Bayes (Capítulo 2). La función de verosimilitud de la matriz Y , de acuerdo con las suposiciones hechas anteriormente, es:

$$L(Y|\alpha, \Sigma, \Phi, X) \propto |\Sigma|^{-n_o/2} |\Phi|^{-n_T/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Tr}[\Phi^{-1}(Y - X\alpha^T)\Sigma^{-1}(Y - X\alpha^T)^T]\right\} \quad (\text{A.11})$$

Donde Tr y $||$ representan la traza y el determinante de la matriz, respectivamente, y el símbolo \propto se refiere a proporcionalidad, pues se ha omitido la constante de normalización. La densidad de probabilidad conjunta final, o *a posteriori*, se determina como el producto entre la verosimilitud y la densidad de probabilidad conjunta *a priori*.

$$p(\alpha, \Sigma, \Phi | X, Y) \propto L(Y | \alpha, \Sigma, \Phi, X) p(\alpha, \Sigma, \Phi) \quad (\text{A.12})$$

La densidad de probabilidad conjunta inicial utilizada en el modelo es de la siguiente forma:

$$p(\alpha_V, \Sigma, \Phi) = p(\alpha_V) p(\Sigma) p(\Phi) \quad (\text{A.13})$$

Donde $\alpha_V = \text{vec}(\alpha)$. Puede verse que el modelo de regresión considera que las densidades de probabilidad *a priori* de las matrices α , Σ y Φ son independientes.

La densidad de probabilidad *a priori* de α_V es Normal, como se muestra en la ecuación (A.14), con media α_{V0} y matriz de covarianza Δ . $\alpha_{V0} = \text{vec}(\alpha_0)$, donde α_0 es el valor esperado *a priori* de la matriz que contiene los coeficientes de la regresión α_i , y Δ , de tamaño $n_T n_P \times n_T n_P$, es la matriz de covarianza de α_{V0} .

$$p(\alpha_V) \propto |\Delta|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha_V - \alpha_{V0})^T \Delta^{-1} (\alpha_V - \alpha_{V0}) \right] \quad (\text{A.14})$$

La matriz simétrica positiva Δ , puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n_P} \\ & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n_P} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \delta_{n_P n_P} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Donde δ_{ij} es una matriz simétrica de tamaño $n_T \times n_T$, que se define en la ecuación (A.16):

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} \text{cov}(\alpha_{iT_1}, \alpha_{jT_1}) & \text{cov}(\alpha_{iT_1}, \alpha_{jT_2}) & \dots & \text{cov}(\alpha_{iT_1}, \alpha_{jT_{n_T}}) \\ & \text{cov}(\alpha_{iT_2}, \alpha_{jT_2}) & \dots & \text{cov}(\alpha_{iT_2}, \alpha_{jT_{n_T}}) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \text{cov}(\alpha_{iT_{n_T}}, \alpha_{jT_{n_T}}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

El término $\text{cov}(\alpha_{iT_k}, \alpha_{jT_l})$ representa la covarianza entre el parámetro $\alpha_i(T)$ para el periodo k y el parámetro $\alpha_j(T)$ para el periodo l .

Para Σ se usa como densidad de probabilidad *a priori* la densidad invertida de Wishart (Rowe, 2002), mostrada en la ecuación (A.17), como función de los parámetros Q y ν .

$$p(\Sigma) \propto |\Sigma|^{-\frac{\nu}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr}[\Sigma^{-1} Q] \right\} \quad (\text{A.17})$$

De acuerdo con las propiedades de este tipo de función de densidad de probabilidad, la matriz positiva Q , de tamaño $n_T \times n_T$ se puede determinar a partir del valor esperado *a priori* de Σ como se muestra a continuación:

$$Q = (\nu - 2n_T - 2)\Sigma_0 \quad (\text{A.18})$$

Donde Σ_0 es el valor esperado *a priori* de Σ . Nótese que Q solo depende del escalar ν , que es una medida del grado de certeza que se tenga sobre Σ_0 . Para que la varianza de los elementos de la matriz Σ tenga un valor finito, es necesario que ν sea mayor que $(2n_T + 4)$. Entre mayor sea el valor de ν , mayor el grado de certeza que se tiene sobre Σ_0 .

La matriz Φ está solo en función de γ_e , por lo tanto se asigna la densidad de probabilidad escalar beta para γ_e , de acuerdo con la ecuación (A.19):

$$p(\gamma_e) \propto \gamma_e^{a-1} (1 - \gamma_e)^{b-1} \quad (\text{A.19})$$

Los parámetros a y b se pueden obtener a partir del valor esperado *a priori* de γ_e y de su desviación estándar (también *a priori*).

En resumen, la información *a priori* sobre los parámetros de la regresión se incluye en el análisis mediante α_{V0} , Δ , Q , ν , a y b . Los anteriores términos se conocen como hiperparámetros (ecuaciones A.13 – A.19).

Sustituyendo las ecuaciones (A.11), (A.14), (A.17) y (A.19) en la ecuación (A.12) se obtiene la densidad de probabilidad conjunta final o *a posteriori* de los parámetros de la regresión:

$$p(\alpha, \Sigma, \gamma_e | X, Y) \propto |\Sigma|^{-(n_0 + \nu)/2} |\Phi|^{-n_T/2} \gamma_e^{a-1} (1 - \gamma_e)^{b-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\alpha_V - \alpha_{V0})^T \Delta^{-1} (\alpha_V - \alpha_{V0}) \right\} \\ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \Sigma^{-1} [(Y - X\alpha^T)^T \Phi^{-1} (Y - X\alpha^T) + Q] \right\} \right\} \quad (\text{A.20})$$

Los valores esperados marginales de α , Φ y Σ se obtienen numéricamente mediante el muestreo de Gibbs (Sección 2.4).

El lector puede darse cuenta de que en el análisis multivariado el valor de γ_e es el mismo para todos los periodos, mientras que en el análisis univariado se obtiene un γ_e diferente para cada periodo (figura 4.3d). Por consiguiente, en el caso univariado, la matriz de covarianza Ω no se puede expresar como el producto Kronecker de dos matrices, es decir, no se puede desacoplar (ecuación

2.16). Otra diferencia importante, que puede entenderse como una limitación del análisis univariado, es que por medio de éste es posible determinar sólo los elementos de la diagonal principal de la matriz Σ , lo que implica ignorar la correlación entre las ordenadas espectrales de la pseudoaceleración (*PSA*).

De acuerdo con Arroyo y Ordaz, 2008: *en el caso de datos provenientes de sismos reales, la verdadera estructura de la correlación es desconocida, por lo tanto, no se debe considerar que el análisis multivariado es más exacto que el análisis univariado*, basándose únicamente en los resultados obtenidos por estos autores. No obstante, a partir de la discusión presentada en este anexo, puede decirse que el modelo de regresión multivariada es teóricamente más sólido.

REFERENCIAS

- Abramowitz M. & Stegun I.A. 1972. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York. (<http://mintaka.sdsu.edu/faculty/wfw/ABRAMOWITZ-STEGUN/frameindex.htm>).
- Aki K. & Richards P.G. 1980. *Quantitative Seismology. Theory and Methods*. W.H. Freeman, San Francisco.
- Arboleda J. & Ordaz M. 1993. Un mejor uso de los datos estadísticos para estimación de la sismicidad local. Memorias del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica. Puerto Vallarta, Jal. 8-11 de octubre de 1993. 21-27.
- Arroyo D. & Ordaz M. 2008a. Multivariate Bayesian regression analysis applied to pseudo-acceleration attenuation relationships. Part 1: Theory and synthetic example. *Bull. seism. Soc. Am.* (enviado).
- Arroyo D. & Ordaz M. 2008a. Multivariate Bayesian regression analysis applied to pseudo-acceleration attenuation relationships. Part 2: Numerical example with actual data. *Bull. seism. Soc. Am.* (enviado).
- Arroyo D., Ordaz M., García D., Mora M. A. & Singh S. K. 2008. Pseudo-acceleration attenuation relationships for interface Mexican subduction-zone earthquakes. *Journal of Seismology*. (enviado).
- Atkinson G. M. & Boore D. M. 2003. Empirical Ground-Motion Relations for Subduction-Zone Earthquakes and Their Application to Cascadia and Other Regions. *Bull. seism. Soc. Am.*, **93**, 4, 1703-1729.
- Atkinson G. M. & Boore D. M. 2008. *Erratum to* Empirical Ground-Motion Relations for Subduction-Zone Earthquakes and Their Application to Cascadia and Other Regions. *Bull. seism. Soc. Am.*, **98**, 5, 2567-2569.

-
- Boore D. M. 1983. Stochastic Simulation of High-Frequency Ground Motions Based on Seismological Models of the Radiated Spectra. *Bull. seism. Soc. Am.*, **73**, 6, 1865-1894.
 - Brilinger D. R. & Preisler H. K. 1985. Further Analysis of the Joyner-Boore Attenuation Data. *Bull. seism. Soc. Am.*, **75**, 611-614.
 - Broemeling L. D. 1984. *Bayesian Analysis of Linear Models*. Marcel Dekker Inc., New York.
 - Brune J. N. 1970. Tectonic Stress and the Spectra of Seismic Shear Waves from Earthquakes. *J. Geophys. Res.*, **75**, 4997-5009.
 - Cárdenas M. & Chávez F.J. 2003. Regional Paths Effects on Seismic Wave Propagation in Central Mexico. *Bull. seism. Soc. Am.*, **93**(3), 973-985.
 - Cárdenas M., Núñez-Cornú F., Lermo J., Córdoba D. & González A. 1998. Seismic Energy Attenuation in the Region between the Coast of Guerrero and Mexico City: Differences between Paths along and Perpendicular to the Coast. *Phys. Earth Pl. Int.*, **105**(1), 47-57.
 - Castro R. R., Anderson J. G. & Singh S. K. 1990. Site Response, Attenuation and Source Spectra of S Waves Along the Guerrero, Mexico, Subduction Zone. *Bull. seism. Soc. Am.*, **80**(6), 1481-1503.
 - Castro R.R. & Ruiz-Cruz E. 2005. Stochastic Modeling of the 30 September 1999 M_w 7.5 Earthquake, Oaxaca, Mexico. *Bull. seism. Soc. Am.*, **95**(6), 2259-2271.
 - Cornell C. A. 1968. Engineering Seismic Hazard Analysis. *Bull. seism. Soc. Am.*, **58**, 5, 1583-1606.
 - Crouse C. B. 1991. Ground-Motion Attenuation Equations for Earthquakes on the Cascadia Subduction Zone. *Earthquake Spectra*, **7**, 201-236.

-
- Esteva L. 1968. Regionalización sísmica de México para fines de Ingeniería. *Ph. D. Tesis*. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
 - Gallego-Silva M. 2004. Evaluación de Variables de Interés para Procesos Sísmicos Estocásticos y Estacionarios. *Revista de Ingeniería*, **19**, 90-108. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
 - García D. 2001. Atenuación sísmica. Aplicación a terremotos intraplaca en México central. Trabajo de Investigación. Programa de Doctorado en Geodesia, Geofísica y Meteorología. Departamento de Física de la Tierra, Universidad Complutense de Madrid.
 - García D. 2006. Estimación de parámetros del movimiento fuerte del suelo para terremotos interplaca e intraslab en México central. Memoria para optar al grado de doctor. Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I. Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid.
 - García D., Singh S. K., Herraiz M., Ordaz M. & Pacheco F. J. 2008. Azimuthal Dependence of Attenuation in the Mexican Subduction Zone, *Geophys. J. Int.* (Enviado).
 - Hanks T. & McGuire R. 1981. The Character of High-Frequency Strong Ground Motion. *Bull. seism. Soc. Am.*, **62**, 561-589.
 - Hermann R. B. 1985. An Extension of Random Vibration Theory Estimates of Strong Ground Motion to Large Distances. *Bull. seism. Soc. Am.*, **73**, 157-171.
 - Humprey J.R.Jr & Anderson J.G. 1992. Shear-Wave Attenuation and Site Response In Guerrero, Mexico. *Bull. seism. Soc. Am.* **82**(4), 1622-1645.
 - Iglesias A., Singh S.K., Pacheco J.F., Alcántara L., Ortiz M. & Ordaz M. 2003. Near-Trench Mexican Earthquakes Have Anomalously Low Peak Accelerations. *Bull. seism. Soc. Am.*, **93**(2), 953-959.

-
- Joyner W. B. & Boore D. M. 1993. Methods for Regression Analysis of Strong-Motion Data. *Bull. seism. Soc. Am.*, **83**(2), 469-487.
 - Joyner W. B. & Boore D. M. 1994. Errata: Methods for Regression Analysis of Strong-Motion Data. *Bull. seism. Soc. Am.*, **84**(3), 955-956.
 - Kanamori H. 1977. The Energy Release in Great Earthquakes. *J. geophys. Res.*, **82**, 2981-2987.
 - Kostoglodov V. & Pacheco J.F. 1999. Cien años de sismicidad en México. Catálogo de sismos moderados y grandes ocurridos en México durante el siglo XX. Póster publicado por el Instituto de Geofísica, UNAM, México D.F.
 - Ordaz M. & Reyes C. 1999. Earthquake Hazard in Mexico City: Observations versus Computations. *Bull. seism. Soc. Am.*, **89**(5), 1379-1383.
 - Ordaz M., Singh S. K. & Arciniega A. 1994. Bayesian attenuation regressions: an application to Mexico City. *Geophys. J. Int.*, **117**, 335-344.
 - Power M., Chiou B., Abrahamson N., Bozorgnia Y., Shantz T. & Roblee C. 2008. An Overview of the NGA Project. *Earthquake Spectra.*, **24**(1), 3-21.
 - Reyes C. 1998. El estado límite de servicio en el diseño sísmico de edificios. *Ph. D. Tesis*. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
 - Rosenblueth E. & Ordaz M. 1987. Use of Seismic Data from Similar Regions. *Earthq. Engrng. Struct. Dyn.* **15**, 619-634.
 - Rowe D.B. 2002. *Multivariate Bayesian Statistics: Models for Source Separation and Signal Unmixing*, Chapman & Hall/ CRC, New York.

-
- Shapiro N.M., Singh S.K. & Pacheco J.F. 1998. A Fast and Simple Diagnostic Method for Identifying Tsunamigenic Earthquakes. *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 20, 3911-3914.
 - Sing S.K., Mena E. & Castro R. R. 1988. Some Aspects of Source Characteristics of the 19 September 1985 Michoacán Earthquake and Ground Motion Amplification in and Near Mexico City from Strong Motion Data. *Bull. seism. Soc. Am.*, **88**(2), 451-477.
 - Singh S. K., Ordaz M., Anderson J. G., Rodríguez M., Quass R., Mena E., Ottaviani M. & Almora D. 1989. Analysis of near-source strong-motion recordings along the Mexican subduction zone. *Bull. seism. Soc. Am.*, **79**, 6, 1697-1717.
 - Singh S. K., Rodríguez M. & Esteva L. 1983. Statistics of Small Earthquakes and Frequency of Occurrence of Large Earthquakes along the Mexican Subduction Zone. *Bull. seism. Soc. Am.*, **73**, 1779-1796.
 - Veneziano D. & Heidari M. 1985. Statistical Analysis of Attenuation in the Eastern United States, *Methods of Earthquake Ground-Motion Estimation for the Eastern United States*, EPRI Research Project RP2556-16, Palo Alto, CA.
 - Youngs R. R., Chiou S. J., Silva W. J. & Humphrey J. R. 1997. Strong Ground Motion Attenuation Relationships for Subduction Zone Earthquakes. *Seism. Res. Lett.*, **68**, 1, 58-73.
 - Zúñiga R. & Guzmán M. 1994. Main Sismogenic Sources in Mexico, Technical Report, Seismic Hazard Project. Instituto Panamericano de Geografía e Historia. (IPGH). Méx 1 – Méx 82.