

4 Modelación ARIMA

A finales del siglo XX diversos investigadores comenzaron a desarrollar y aplicar nuevas propuestas para la modelación de series de tiempo, las cuales lograron probar su eficacia, ya que son capaces de tratar con cualquier patrón de datos y producir pronósticos precisos en base a la descripción de patrones históricos en los datos (Aguirre 1994). Las nuevas propuestas de análisis de series de tiempo se empezaron a implementar en un principio a problemas de contaminación, en la economía, a enfermedades epidemiológicas y en la actualidad a fenómenos físicos e inclusive fenómenos sociales.

Específicamente los modelos desarrollados en las últimas décadas son los llamados autorregresivos (AR), de medias móviles (MA), integrados (I), así como las posibles combinaciones entre estos (ARMA y ARIMA).

La principal diferencia entre estos modelos y los clásicos es el enfoque estocástico que se le da a las series de tiempo, en vez de tratarlas de forma determinística. Bajo este enfoque se concibe a la serie de tiempo como un conjunto de valores de tipo aleatorio, generados a partir de un proceso totalmente desconocido, es decir, se concibe a la serie como un proceso estocástico.

Así mismo, derivado del desconocimiento del proceso generador de los datos, el objetivo de este enfoque es tratar de identificar el modelo probabilístico que represente las características principales del comportamiento de la serie (Aguirre 1994).

El desarrollo y aplicación de este tipo de modelos de series de tiempo en un principio estuvieron gravemente limitados, fundamentalmente debido a razones de cómputo. Actualmente con la amplia disponibilidad de las computadoras, el uso de los modelos ARIMA se ha tornado posible. En el presente texto se hace imprescindible el uso de paquetes informáticos especializados en la modelación ARIMA. En especial se hacen necesarios debido a la frecuencia con que se manejan grandes volúmenes de información. De otra forma, utilizar métodos tradicionales haría que la tarea de modelar bajo este enfoque fuera casi imposible de realizar.

4.1 Enfoque y procesos estocásticos

En general las series de interés llevan asociados fenómenos aleatorios. Por este motivo el estudio de su comportamiento pasado sólo permite acercarse a la estructura o modelo probabilístico para la predicción del futuro. La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelización de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no determinísticas, esto es, de carácter aleatorio y probabilístico.

Para aclarar esta idea definimos un proceso estocástico como una familia de variables aleatorias asociadas a un conjunto índice de números reales, de tal forma que a cada elemento del conjunto le corresponda una y sólo una variable aleatoria que evoluciona con el tiempo:

$$\text{Variables aleatorias } \{Y_t\}$$

$$\text{Con } t = 1, 2, 3, \dots, n$$

Bajo este enfoque, una serie de tiempo se define como una observación particular sobre el estado dinámico de una variable de un proceso de naturaleza aleatoria. Simultáneamente se presupone que los procesos de series de tiempo siguen un comportamiento aleatorio y debido a la propia dinámica de dicho proceso, tales impulsos pueden generar un conjunto de datos serialmente dependientes.

Así, mediante la identificación de la estructura de dependencia latente existe entre las observaciones, se puede modelar la serie.

Una de las principales ventajas de este enfoque aplicado a las series de tiempo, es la gran flexibilidad que se logra para representar un buen número fenómenos reales mediante una sola clase general de modelos. Otra ventaja es la facilidad y precisión para realizar pronósticos.

4.2 Modelos AR, MA y mixtos

La estructura existente de dependencia entre los datos en un proceso estocástico, puede ajustarse a seis modelos que pueden describir una gran variedad de fenómenos reales. La principal característica de dichos modelos es que no involucran a las variables independientes en su construcción, es decir, a la variable del tiempo t , como se hace en el análisis clásico. En cambio, emplean la información que se encuentra en la serie misma para generar los pronósticos (Makridakis y Wheelwright 2000).

Los modelos son los que se describen a continuación (Arnau 2001):

Proceso de ruido blanco – (a_t): Es un proceso formado por una secuencia de variables aleatorias mutuamente independientes e idénticamente distribuidas.

Modelo no estacionario de corrido aleatorio - (I): Correspondiente a aquellas situaciones en las que los impulsos aleatorios tienden a sumarse o a integrarse en el tiempo. La integración refleja la presencia de un componente de tendencia.

Modelo autorregresivo de orden p - AR(p): Se trata de un modelo en el que una determinada observación es predecible a partir de la observación inmediatamente anterior (modelo autorregresivo de primer orden) o a partir de las dos observaciones que le preceden (modelo autorregresivo de segundo orden). En este caso, la observación actual se define como la suma ponderada de una cantidad finita p de observaciones precedentes más un impulso aleatorio independiente.

Matemáticamente, un modelo autorregresivo tiene la forma siguiente:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t$$

En donde Y_t es la variable dependiente y $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}$ son las variables independientes.

En este caso, las variables independientes son valores de la misma variable (de aquí el nombre de auto), pero de periodos anteriores ($t - 1, t - 2, t - 3, \dots, t - p$). Por último, a_t es el error, o término residual, que representa perturbaciones aleatorias que no pueden ser explicadas por el modelo.

El modelo se llama autorregresivo porque se asemeja a la ecuación de regresión:

$$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \dots + b_p X_p + e$$

Las variables independientes son simplemente valores rezagados de la variable dependiente con rezagos de tiempo 1, 2, 3, ..., p periodos.

Modelo de Medias Móviles de orden q - MA(q): En este modelo, una determinada observación está condicionada por los “impulsos aleatorios” de las observaciones anteriores. De esta forma la observación actual se define como la suma del impulso actual y de los impulsos aleatorios anteriores con un determinado peso.

El modelo de medias móviles tiene la siguiente forma:

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Donde a_t es el residuo o error en el periodo t y $a_{t-1}, a_{t-2}, a_{t-3}, \dots, a_{t-q}$ son los valores anteriores del error. La ecuación es semejante a la anterior, con la excepción de que implica que la variable dependiente Y_t depende de valores previos del término residual más que de la variable misma.

Modelo autorregresivo de medias móviles de orden p,q - ARMA(p,q): Este modelo es la combinación de las estructuras anteriores: modelo autorregresivo y modelo de medias móviles. Así, una observación está determinada tanto por observaciones anteriores así como por “impulsos aleatorios” o también llamados “errores” de observaciones pasadas.

La forma general de un modelo autorregresivo de medias móviles es:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Se observa que la ecuación es sencillamente una combinación de las ecuaciones del modelo AR y MA.

En la ecuación anterior p simboliza los valores tomados por la variable durante los p periodos anteriores ($t - 1, t - 2, t - 3, \dots, t - p$). El grado de influencia de cada valor anterior sobre el valor considerado de la variable viene dado por el parámetro correspondiente $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$. Por su parte q representa los errores o residuos de la variable durante los q momentos anteriores ($t - 1, t - 2, t - 3, \dots, t - q$). El grado de influencia de cada uno de ellos viene ponderado por el parámetro correspondiente $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$.

Un modelo ARMA puede ajustarse a cualquier patrón de datos. Sin embargo, los valores de p y q se deben de especificar.

Por ejemplo si $p = 1$ y $q = 0$, el modelo ARMA es:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + a_t$$

El modelo derivado de esta ecuación es llamado modelo AR de primer orden y se escribe como AR(1) o ARMA(1,0).

Si $p = 2$ y $q = 0$, el modelo correspondiente es un AR(2) o un modelo ARMA(2,0) de la forma:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + a_t$$

La ecuación es un proceso AR de segundo orden.

Cuando $p = 0$ y $q = 1$, se trata de un modelo MA de primer orden y se escribe como MA(1) o ARMA(0,1):

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Cuando $p = 0$ y $q = 2$, el modelo es un MA(2) o ARMA(0,2) de la forma:

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

Por último p y q pueden cada una ser diferentes de 0, en cuyo caso existe un modelo ARMA mixto. Por ejemplo, cuando $p = 1$ y $q = 1$, el modelo es un modelo ARMA(1,1) y es de la forma:

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Es interesante darse cuenta que esta ecuación es no lineal y por lo tanto suficientemente general para describir una amplia variedad de patrones de datos.

Obviamente p y q pueden adoptar muchos otros valores, aun cuando raramente son mayores que 2.

Modelo autorregresivo integrado de medias móviles de orden p,d,q - ARIMA(p,d,q): Al igual que un modelo ARMA, es la combinación de los modelos autorregresivo y el de medias móviles, con la particularidad de incluir un proceso de restablecimiento (el cual se denomina integración) de

inestabilidad original presente en una serie de tiempo. La idea de inestabilidad es una característica que se presenta más adelante en la sección 4.3.1

La forma general de un modelo ARIMA es semejante al de un modelo ARMA:

$$Y'_t = \varphi_1 Y'_{t-1} + \varphi_2 Y'_{t-2} + \varphi_3 Y'_{t-3} + \dots + \varphi_p Y'_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Donde:

Y'_t : Es la serie inducida a la estabilidad

En ocasiones es apropiado incluir un término constante δ a los modelos AR, MA y ARIMA. En un modelo que contiene sólo parámetros de media móvil, el valor de la constante es la media de los valores de la serie ($\delta = \mu$). Mientras tanto en un modelo autorregresivo $\delta = \mu(1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \dots - \varphi_p)$ (Arнау 2001). La inclusión del término depende de la serie en estudio. Concretamente, depende del valor de la media. Si la media de todas las observaciones es cero o muy cercana, no se incluye término constante. Si la media es significativamente distinta de cero, se incluye el término.

Un rápido indicador, es conocer si la serie ha sido diferenciada (este concepto se estudia posteriormente). Si la serie ha sido diferenciada, la constante es eliminada, se puede probar que en una serie diferenciada $\mu = 0$. Por el otro lado si la serie no es diferenciada, se debe verificar el valor de μ (Arнау 2001).

4.3 Metodología Box-Jenkins No estacional

Existen distintas metodologías que ayudan a elegir el modelo que mejor se represente a la serie de tiempo de entre los diversos modelos existentes. La metodología más usada y difundida es la que propusieron los profesores G.E.P Box y G.M Jenkins en la década de los años 1970, en la cual lograron grandes avances en identificar, ajustar y verificar los modelos ARIMA adecuados (Hanke y Wichern 2006). Comúnmente se le conoce como *Metodología Box-Jenkins*. Se especifica en esta metodología únicamente el uso de los modelos ARIMA ya que los modelos autorregresivos (AR) y los de medias móviles (MA) se dicen que son las formas particulares de la clase general de modelos ARMA y este a su vez del modelo ARIMA.

Esta metodología se basa en tratar de determinar cuál es el modelo probabilístico que rige el comportamiento del proceso a lo largo del tiempo. Cabe apuntar en este momento la diferencia entre proceso y modelo. Se puede decir que un *proceso* es lo real, es decir, el fenómeno en sí, del cual se desconoce su mecanismo generador. Por el otro lado un *modelo* es solo la imitación o representación del proceso (Pankratz 1983).

En esta sección se estudiará el caso particular de la aplicación de modelos ARIMA para datos no estacionales, es decir, datos que no presentan fluctuaciones periódicas a lo largo del tiempo. Además en cuanto al tipo de datos que son aptos para someterse al análisis mediante la modelación ARIMA, se puede decir debido a la experiencia, que la mayoría de las series de tiempo se pueden modelar mediante estos métodos. Por ese motivo esta metodología es ampliamente utilizada.

Sólo se destacan en seguida algunas consideraciones importantes acerca de la naturaleza de los datos en la modelación ARIMA (Pankratz 1983):

- Los modelos ARIMA aplican tanto para datos discretos o continuos. Los datos discretos son aquellos que son medidos solamente en números enteros, nunca con cifras decimales. Mientras tanto los datos continuos son medidos en intervalos fraccionarios, es decir, con cifras decimales.
- Aunque la metodología ARIMA trata tanto con datos discretos y continuos, sólo se puede aplicar a datos espaciados equidistantemente en el tiempo, en intervalos discretos de tiempo. Los datos medidos en intervalos discretos de tiempo pueden clasificarse en dos tipos: 1) datos que son producto de la acumulación durante un periodo de tiempo, por ejemplo los ahorros de una persona en un mes. 2) datos que son producto de la medición instantánea periódicamente, por ejemplo la medición de la presión en una tubería en intervalos de una hora.
- Para elaborar un modelo ARIMA se requiere una cierta cantidad de datos mínimo. Los profesores Box y Jenkins sugieren un mínimo de 50 observaciones. Un modelo ARIMA se puede aplicar a una serie con menor tamaño, realizando con especial cautela su interpretación. Para series con patrones estacionales se aconseja una serie con gran número de muestras observadas.
- Los modelos ARIMA son especialmente útiles en el tratamiento de series que presentan patrones estacionales.
- Los métodos Box-Jenkins aplican a series estacionarias y no estacionarias. Una serie estacionaria es aquella cuya media, varianza y función de autocorrelación permanecen constantes en el tiempo.
- Se asume que las perturbaciones aleatorias (a_t) presentes en la serie, son independientes entre sí. No existe correlación entre ellas, por lo tanto ningún patrón modelable.

Una vez hechas estas anotaciones, se puede entrar de lleno a la metodología. La *Figura 4.1* muestra las etapas esenciales en la aplicación de esta metodología (Aguirre 1994). De la figura se destacan en especial 5 etapas principales:

1. Estacionariedad
2. Identificación
3. Estimación
4. Evaluación
5. Pronóstico

Cada una de estas etapas se desarrolla en las siguientes secciones.

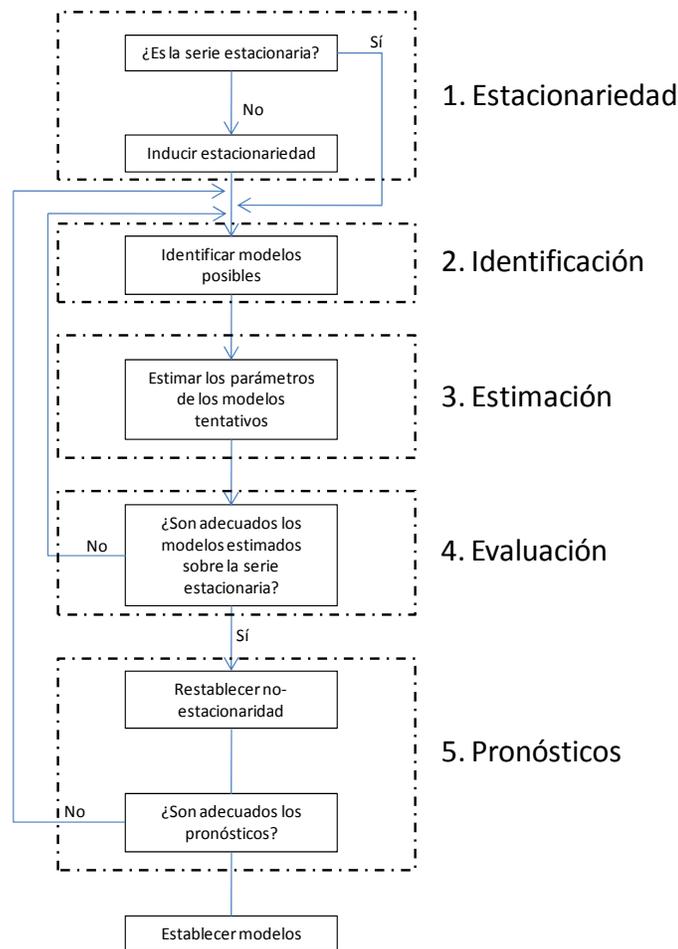


Figura 4.1 Metodología Box – Jenkins

4.3.1 Estacionariedad

Los procesos estocásticos se clasifican en estacionarios y no estacionarios. La idea de estacionariedad está relacionada con la estabilidad de la serie. Un proceso estacionario se describe como una secuencia de datos o valores que no presentan cambio sistemático en la media, ni cambio sistemático alguno en la varianza, se dice entonces que la serie es estable. De forma parecida, un proceso no estacionario es aquel que presenta cambios sistemáticos en la media y/o varianza; la serie de datos es inestable en el tiempo.

Aplicado dicho concepto a una secuencia cronológica y explicado en forma intuitiva, una serie de tiempo es estacionaria si sus propiedades estadísticas (media, varianza) son esencialmente constantes a través del tiempo. Una serie cuya media y/o varianza cambian a través del tiempo es una serie no estacionaria (Bowerman, O’Connell, Koehler 2007).

A partir de la definición previa, se puede advertir que una serie cuyos valores fluctúan respecto de una media constante, es decir, sin tendencia, es una serie estacionaria.

La *Figura 4.2* muestra la gráfica de una serie de tiempo, en ella se observa que los valores de una serie de tiempo fluctúan respecto de una media constante, entonces es razonable pensar que la serie temporal es estacionaria. Si los valores no fluctúan respecto de una media constante o fluctúan con variación constante, entonces es razonable pensar que la serie de tiempo es no estacionaria, como se observa en la *Figura 4.3*.

Este concepto es importante ya que el primer paso en la metodología Box-Jenkins es determinar si la serie de tiempo es estacionaria. En caso de que la serie de datos no sea estable a lo largo del tiempo, es necesario aplicar una transformación a la serie para inducirlo a ello. Este paso es indispensable para poder aplicar las demás etapas de esta metodología.

Existen dos formas de conocer si una serie es estacionaria: por medio del gráfico de la serie y mediante la exploración de función de autocorrelación simple.

1. Por medio de inspección gráfica

Visualmente se puede advertir si la serie es estacionaria si se detectan elevaciones o inclinaciones en los datos. Cualquier patrón de este tipo expresa que la serie es inestable. Por ejemplo la *Figura 4.2* previamente analizada, muestra una serie de datos estable, se observa que los valores giran alrededor de una media constante, sin incrementos o decrementos. Por otro lado la *Figura 4.3* muestra una serie con una fuerte tendencia ascendente, indicador inmediato de inestabilidad.

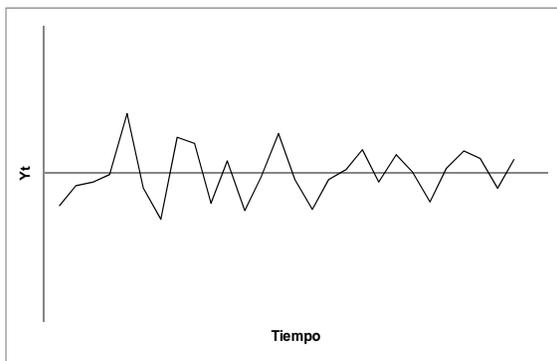


Figura 4.2 Serie de tiempo estacionaria

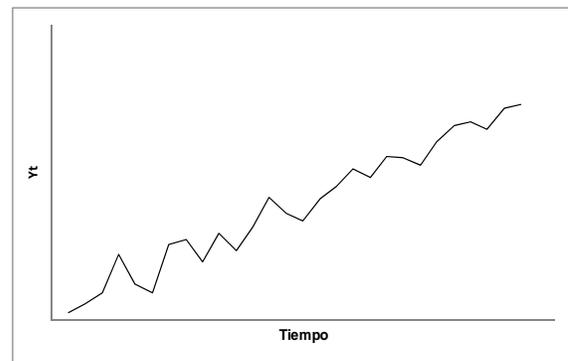


Figura 4.3 Serie de tiempo no estacionaria

2. Por medio de las funciones de autocorrelación

Cuando visualmente no es factible determinar si la serie es estacionaria, usualmente se recurre a la función de autocorrelación simple (FAS), en especial en aquellas series con tendencia poco remarcada. El reconocimiento de la estabilidad se logra a partir de la variedad de comportamientos que esta función que puede mostrar (Bowerman, O'Connell, Koehler 2007).

En primer lugar, la función de autocorrelación simple se puede cortar ó truncar. Para explicar este término, se dice que existe una espiga en el desfaseamiento k en la FAS si r_k es estadísticamente grande.

Se considera que existe una espiga en la función si el valor absoluto de:

$$t_{r_k} = \frac{r_k}{s_{r_k}}$$

es mayor que 2. La función de autocorrelación se trunca después del desfaseamiento k si no hay espigas en los desfaseamientos mayores que k en la función. Por ejemplo, si

$$|t_{r_1}| = 3.671$$

$$|t_{r_2}| = 2.873$$

$$|t_{r_3}| = 0.517$$

Entonces la función de autocorrelación simple se trunca o se corta después del desfaseamiento 2. Esto se ilustra en la siguiente figura (Figura 4.4).

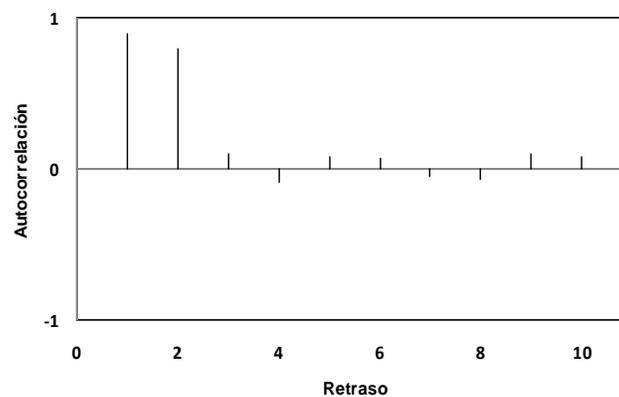


Figura 4.4 La función de autocorrelación se trunca

La salida de MINITAB muestra automáticamente el valor de t asociado a cada coeficiente y además muestra en la gráfica (Figura 4.5) un par de bandas que representan el valor de dos desviaciones estándar $2(s_{r_k})$. Si un coeficiente sobrepasa estas bandas ya sea en la parte de arriba como en la de abajo, significa que el valor de $|t_{r_k}|$ es mayor que 2.

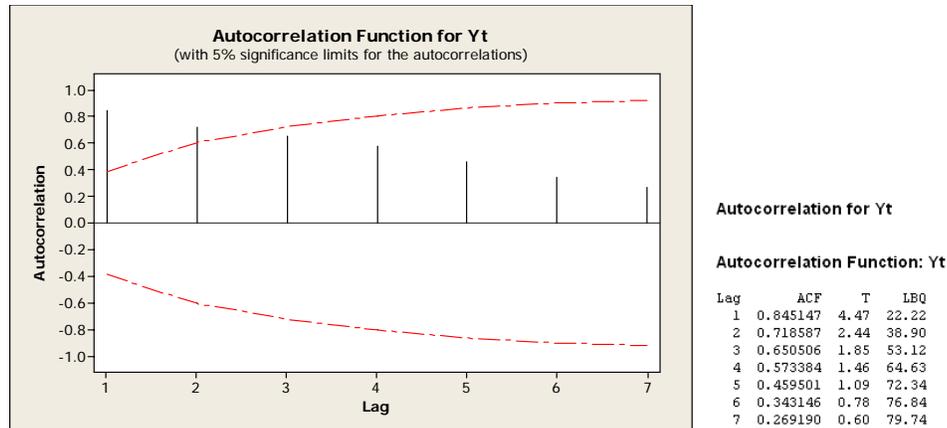


Figura 4.5 Salida MINITAB función de autocorrelación simple

Segundo, la función de autocorrelación simple decae ó se extingue si esta no se corta o muere sino que decrece en una forma permanente. Puede extinguirse de tres maneras:

- En forma exponencial (Figura 4.6)
- En seno amortiguada (Figura 4.7)
- En combinación de 1 y 2 (Figura 4.8)

Además puede cortarse con gran rapidez como se muestra en la Figura 4.9 o puede extinguirse con lentitud extrema como se muestra en la Figura 4.10.

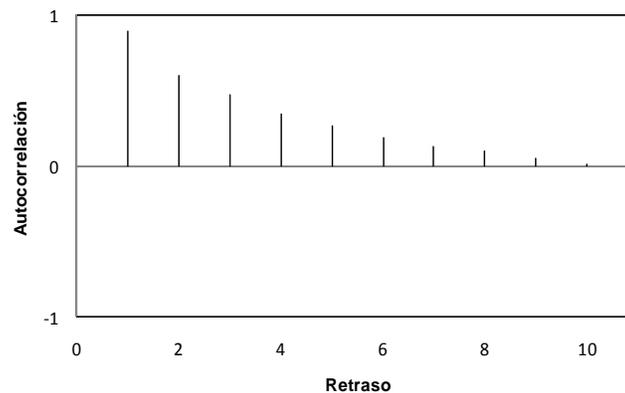


Figura 4.6 Se extingue en forma exponencial

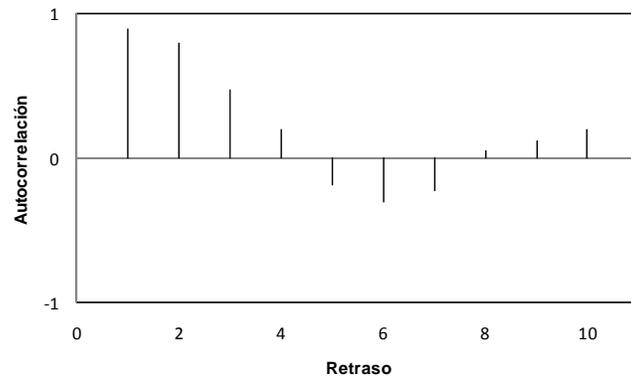


Figura 4.7 Se extingue en forma de seno amortiguada

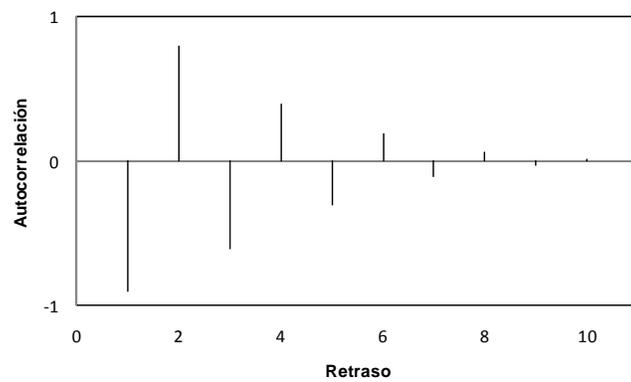


Figura 4.8 Se extingue en forma en forma combinada

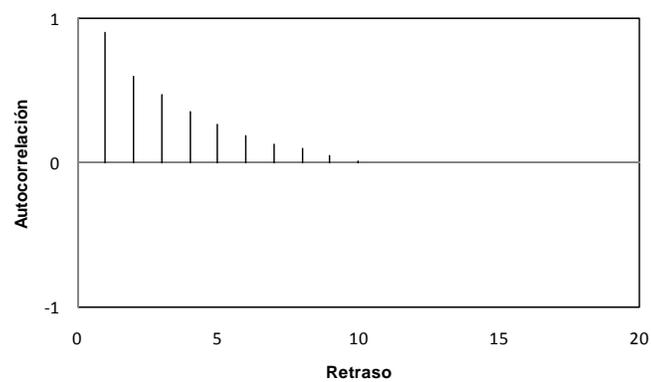


Figura 4.9 Se extingue con gran rapidez

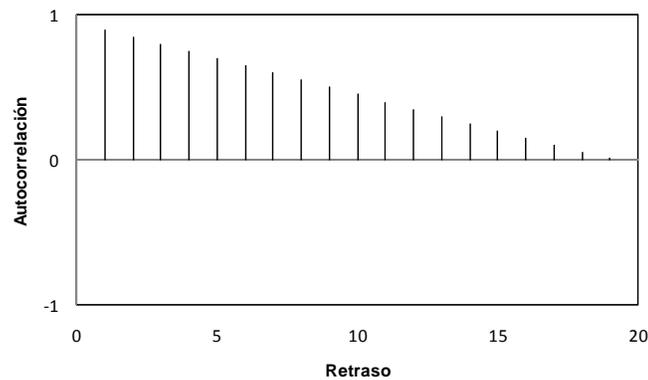


Figura 4.10 Se extingue con lentitud extrema

En general, se puede demostrar que:

Si la función de autocorrelación simple de los valores Y_1, Y_2, etc de la serie de tiempo se corta claramente con rapidez o si se corta rápidamente, entonces se deben considerar que los valores de la serie temporal son estacionarios.

Si la función de autocorrelación simple de los valores Y_1, Y_2, etc de la serie de tiempo se corta con lentitud extrema, entonces se deben considerar que los valores de la serie de tiempo son no estacionarios

Cabe aclarar que los términos “claramente con rapidez” y con “lentitud extrema” es algo arbitrario, y se puede determinar mejor a través de la experiencia. Además, la experiencia indica que en lo que se refiere a datos no estacionales, si la función de autocorrelación simple se trunca claramente con rapidez, casi siempre sucede así, después de un desfase k que es menor o igual a 2 (Bowerman, O’Connell, Koehler 2007).

De esta simple forma se determina por medio de la FAS si la serie es estacionaria.

Ahora bien, la realidad es que las series de tiempo normalmente no se comportan establemente, es decir, no son procesos estocásticos estacionarios. Cuando se presenta esa situación entonces es preciso aplicar una transformación a los valores de la serie para tener una serie temporal estacionaria.

Existen distintas maneras de inducir la estacionariedad en una serie de tiempo, la más usada es el método llamado de construcción de diferencias. Este método consiste, como su nombre lo dice, en obtener diferencias entre los mismos valores de la serie, para remover cualquier patrón de tendencia.

Las primeras diferencias de los valores de la serie de tiempo Y_1, Y_2, \dots, Y_n son:

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$t = 2, 3, \dots, n$$

La *Tabla 4.1* muestra cómo se hace la diferenciación y cómo los datos con una tendencia lineal se convierten en estacionarios (horizontales) después de diferenciar. Gráficamente se puede observar esta transformación en la *Figura 4.11*

Serie de datos	Primeras diferencias	Nueva serie
2	4-2 = 2	2
4	6-4 = 2	2
6	8-6 = 2	2
8	10-8 = 2	2
10	12-10 = 2	2
12	14-12 = 2	2
14	-	-

Tabla 4.1 Obtención de las primeras diferencias en una serie

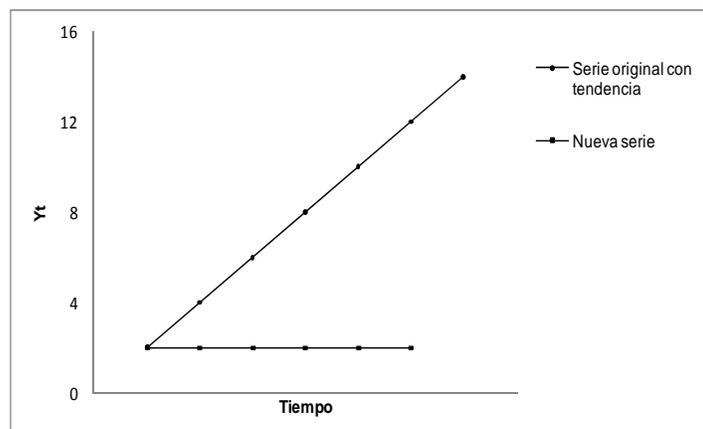


Figura 4.11 Transformación de la serie de tiempo mediante las primeras diferencias

En ocasiones es necesario realizar más de una diferenciación para generar valores de series de tiempo estacionarias. Si los valores originales no son estacionarios y las primeras diferencias de los valores originales de la serie de tiempo tampoco son estacionarios, entonces podemos obtenerlas segundas diferencias de los valores originales de la serie de tiempo.

Las segundas diferencias de los valores de la serie de tiempo son:

$$Y'_t = (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

$$Y'_t = Y_t - 2 Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

$$t = 3, 4, \dots, n$$

La *Tabla 4.2* muestra cómo se obtienen las segundas diferencias a una serie de tiempo, se puede apreciar que las primeras diferencias siguen siendo no estacionarias, al aplicar una nueva diferenciación se obtiene una serie estacionaria. Cabe aclarar que la notación Y'_t tan sólo se usa para indicar que la serie se transformó, ya sea mediante las primeras o las segundas diferencias.

En la gráfica de la *Figura 4.12* se observa ambas transformaciones a la serie original.

Serie de datos	Primeras diferencias	Nueva serie	Segundas diferencias	Nueva serie
5.6	$15.5 - 5.6 = 9.9$	9.9	$13.5 - 9.9 = 3.6$	3.6
15.5	$29 - 15.5 = 13.5$	13.5	$17.1 - 13.5 = 3.6$	3.6
29.0	$46 - 29 = 17$	17.1	$20.7 - 17.1 = 3.6$	3.6
46.0	$66.7 - 46 = 20.7$	20.7	$24.3 - 20.7 = 3.6$	3.6
66.7	$91 - 66.7 = 24.3$	24.3	$27.9 - 24.3 = 3.6$	3.6
91.0	$118.9 - 91 = 27.9$	27.9	-	-
118.9	-	-	-	-

Tabla 4.2 Obtención de las segundas diferencias de una serie

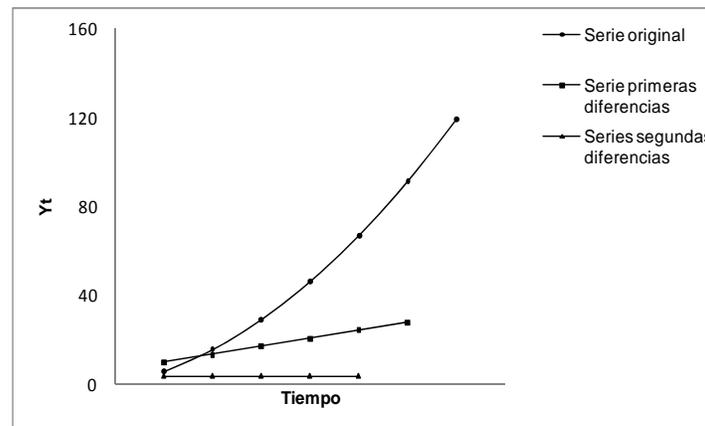


Figura 4.12 Transformación de la serie mediante primeras y segundas diferencias

La experiencia indica que si los valores de la serie de tiempo original son no estacionarios y no estacionales, entonces si se aplica la primera transformación por diferencias o la segunda transformación por diferencias por lo general se producen valores estacionarios de la serie de tiempo.

Una vez introducido el tema de estabilidad en una serie de tiempo, es turno de hacer un pequeño paréntesis en el curso de la metodología Box-Jenkins, a fin esclarecer la diferencia entre un modelo ARMA y un modelo ARIMA. La diferencia se halla en que un modelo ARMA(p,q) es capaz de operar únicamente sobre series estacionarias, mientras que un modelo ARIMA(p,d,q) es capaz de operar tanto sobre series de tiempo no estacionarias, como en series estacionarias.

El modelo ARIMA(p,d,q) es capaz de operar sobre cualquier ya que se incluye el proceso de estabilización de la serie, por medio del parámetro d , que simboliza el grado de diferenciación aplicado a la serie de tiempo. Por ejemplo si $d = 1$, significa que se esta trabajando con las primeras diferencias de la serie; si $d = 2$, se trabaja con las segundas diferencias y así sucesivamente.

4.3.2 Identificación

Una vez que se asegura que la serie es estable en el tiempo. El siguiente paso en la metodología Box-Jenkins es la identificación del modelo probable que rige el proceso de la serie de tiempo.

Las ideas básicas de esta fase son las siguientes:

- La serie de tiempo que se encuentre en proceso de estudio cuenta con sus respectivas funciones de autocorrelación simple y parcial (FAS y FAP), que se denominan prácticas o calculadas.
- Por otra parte, cada una de las distintas configuraciones ARMA posee su FAS y FAP teóricas asociadas al modelo.
- Si la FAS y FAP calculadas de la serie a la que deseamos ajustar un modelo se asemeja a alguna o varias FAS y FAP teóricas, entonces podemos decir que el modelo ARMA teórico es un modelo tentativo para la serie.

Queda claro entonces que la identificación del modelo probable se realiza por medio de la comparación de las funciones de autocorrelación calculadas contra las teóricas (tanto simples como parciales).

Las funciones de autocorrelación calculadas sólo se usan como guías para escoger uno o varios modelos ARMA que parezcan apropiados, ya que tan sólo brindan una aproximación a la estructura más adecuada que debe considerarse.

Las funciones de autocorrelación teóricas por su parte se derivan de una familia de modelos ARMA propuestos por Box y Jenkins. Cabe aclarar que aunque existen una infinidad de posibles procesos dentro de estos modelos ARMA, la mayoría de los procesos que ocurren normalmente en la práctica caben dentro de un número reducido de modelos. Es por esto que los modelos más comunes en la práctica, suelen ser precisamente los propuestos y desarrollados por estos profesores (Pankratz 1983)

De esta manera entonces los profesores Box y Jenkins sugirieron una completa familia de modelos teóricos de los cuales se puede escoger: AR(1), AR(2), MA(1), MA(2), ARMA(1,1).

Las principales características que se observan de las funciones de autocorrelación teóricas son:

Modelo	FAS	FAP
AR	Decae a cero	Se trunca o se corta (después del retraso p)
MA	Se trunca o se corta (después del retraso q)	Decae a cero
ARMA	Decae a cero	Decae a cero

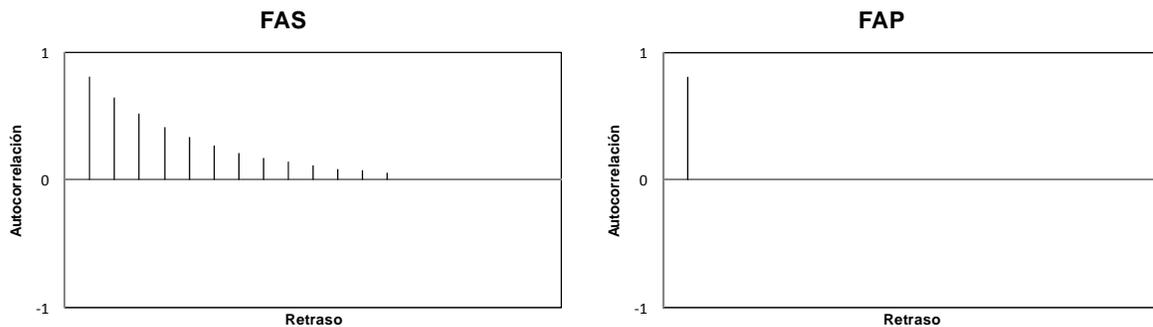
Tabla 4.3 Características FAS y FAP Teóricas (Pankratz)

A partir de la tabla anterior se describe en seguida a detalle las características de cada uno de los posibles modelos ARMA (Pankratz 1983).

Modelo AR: Las funciones de autocorrelación simples de los procesos autorregresivos decaen a cero. Es común que se usen también las expresiones: “se extingue” o “se muere”. La forma en que se extingue la FAS puede ser de forma exponencial, en forma de seno amortiguado, etc. Ahora bien, las funciones de autocorrelación parcial contienen espigas significativas hasta el retraso p , después del cual la función “se corta”. El número de espigas indica por tanto, el orden del proceso autorregresivo. Usualmente p no sobrepasa el valor de 2 o 3.

La *Figura 4.13* (Aguirre 1994) muestra dos configuraciones posibles para un modelo AR(1) o bien ARMA(1,0). De esta figura se puede destacar que la FAS de un proceso autorregresivo de primer orden decae exponencialmente hacia cero, mientras que existe una espiga significativa en la FAP en el primer retraso. Además si $\varphi_1 > 0$, La FAS decae positivamente hacia cero y la espiga en la FAP es positiva también. Si $\varphi_1 < 0$, la FAS decae hacia cero alternando signos, mientras que la espiga significativa en la FAP es negativa.

a) $\varphi_1 > 0$



b) $\varphi_1 < 0$

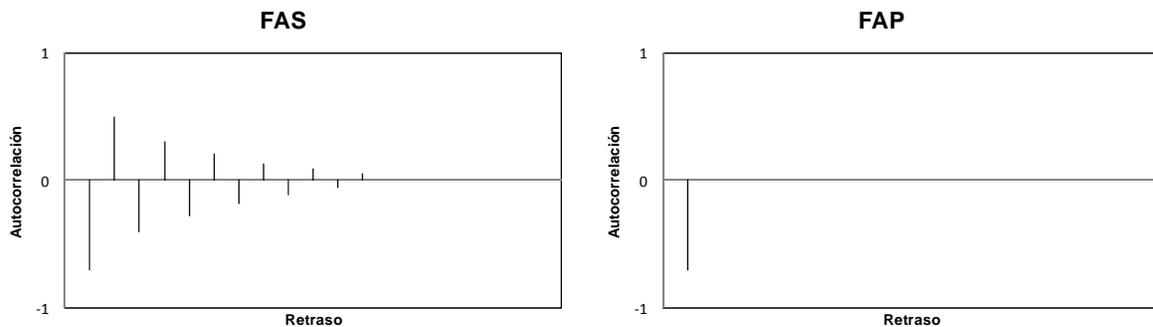
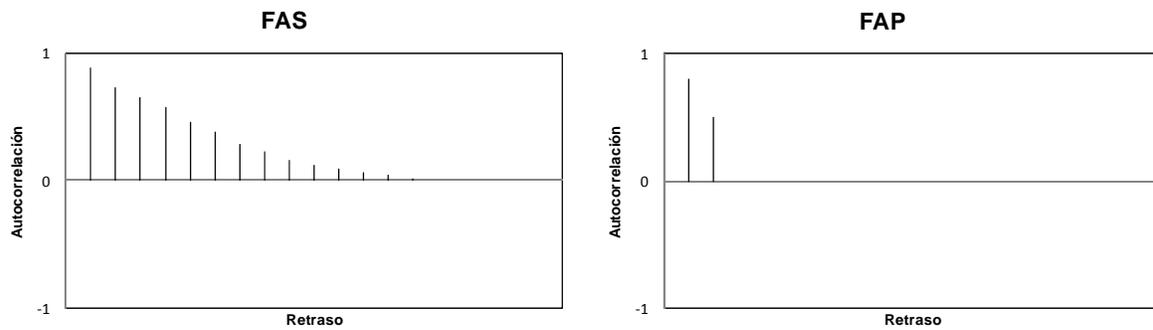


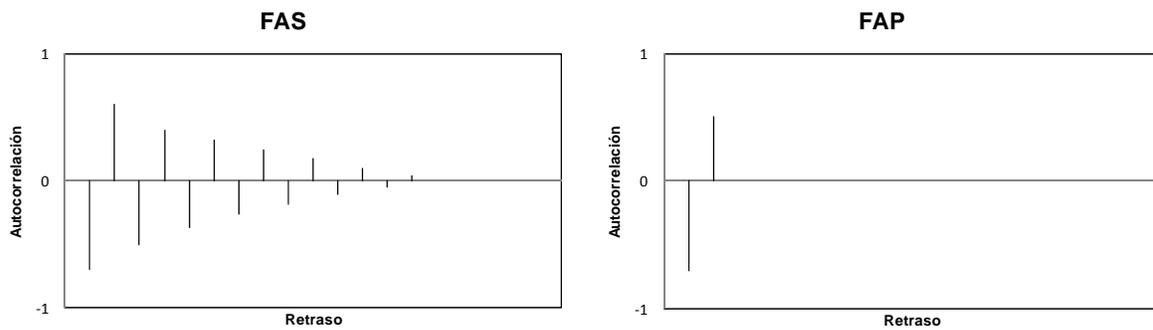
Figura 4.13 Funciones de autocorrelación simple y parcial teóricas para el modelo AR(1)

Para un modelo AR(2) o ARMA (2,0) existen una mayor variedad de patrones posibles que para un modelo AR(1). En general un proceso autorregresivo de segundo orden cuenta con una FAS que decae a cero tanto de forma exponencial como de seno amortiguado ó bien una mezcla de ambos. La FAP se caracteriza por tener espigas en los retrasos 1 y 2. El patrón exacto depende en las posibles combinación de signos para ϕ_1 y ϕ_2 . En la *Figura 4.14a* y *4.14b* se muestran cuatro posibles combinaciones.

a)



b)



c)

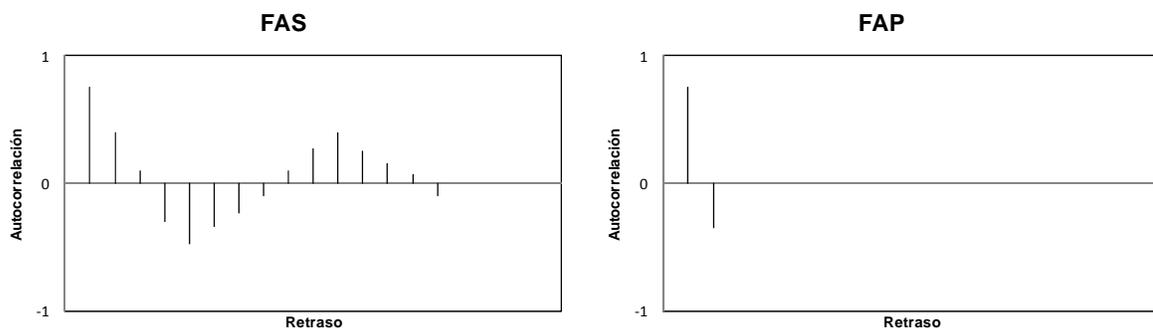


Figura 4.14a Funciones de autocorrelación simple y parcial teóricas para el modelo AR(2)

d)

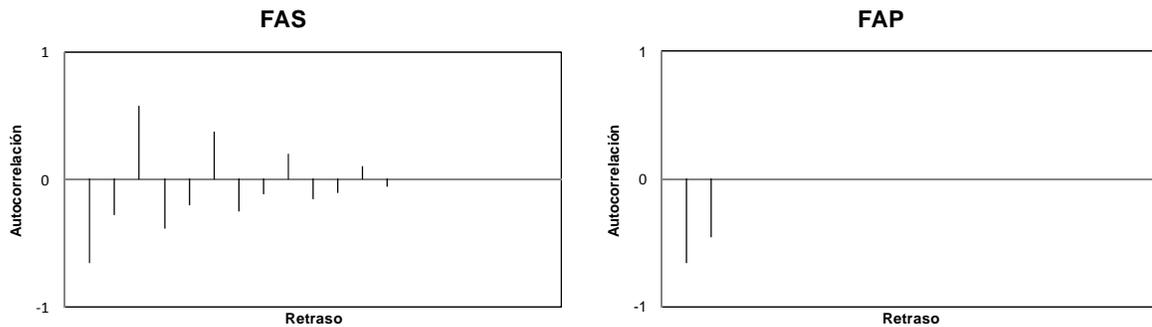
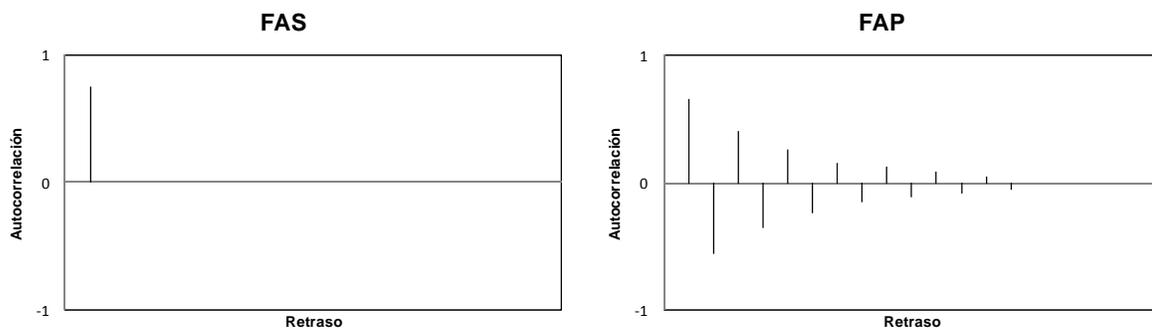


Figura 4.14b Funciones de autocorrelación simple y parcial teóricas para el modelo AR(2)

Modelo MA: En general la FAS de un proceso de medias móviles cuenta con espigas significativas hasta el retraso q , después del cual se corta la función. La FAP por su lado decae de forma exponencial o en forma de seno amortiguado. Normalmente el valor de q no es mayor que 2 o 3.

La Figura 4.15 muestra las configuraciones de un modelo MA(1). Se ilustra como si $\theta < 0$ en la FAS se presenta una espiga positiva mientras que la FAP decae exponencialmente a cero alternando signos. Si $\theta > 0$ la espiga en la FAS es negativa, la FAP decae exponencialmente a cero con signo negativo.

a) $\theta < 0$



b) $\theta > 0$

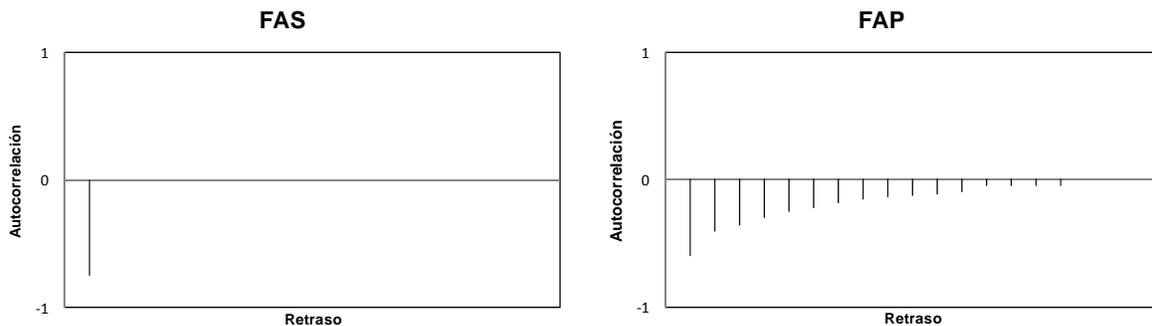
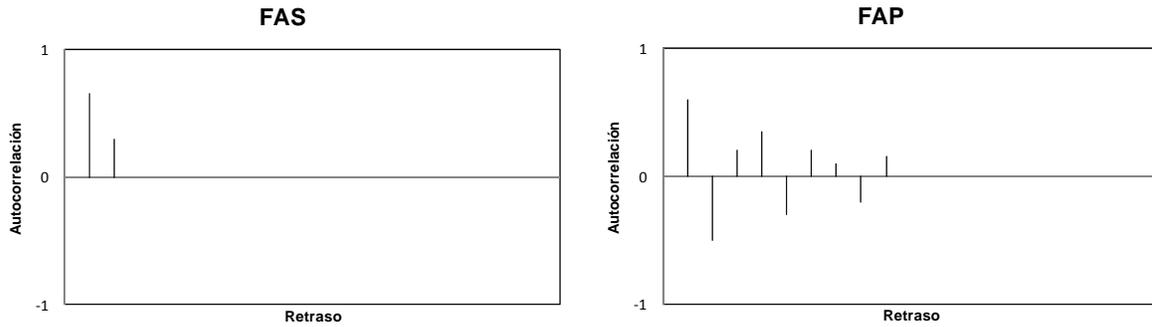


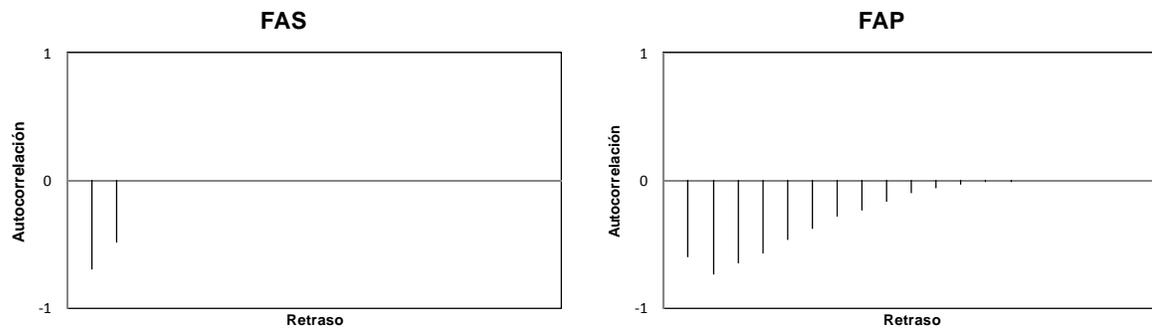
Figura 4.15 Funciones de autocorrelación simples y parcial teóricas para el modelo MA(1)

Para un modelo MA(2) la *Figura 4.16a* y *4.16b* muestra algunas formas que pueden tomar las funciones de autocorrelación. Se muestra que existen espigas en la FAS hasta el retraso q , en este caso hasta $q = 2$ y después de este retraso la función de corta o se extingue. La FAP decae a cero con distintas configuraciones.

a)



b)



c)

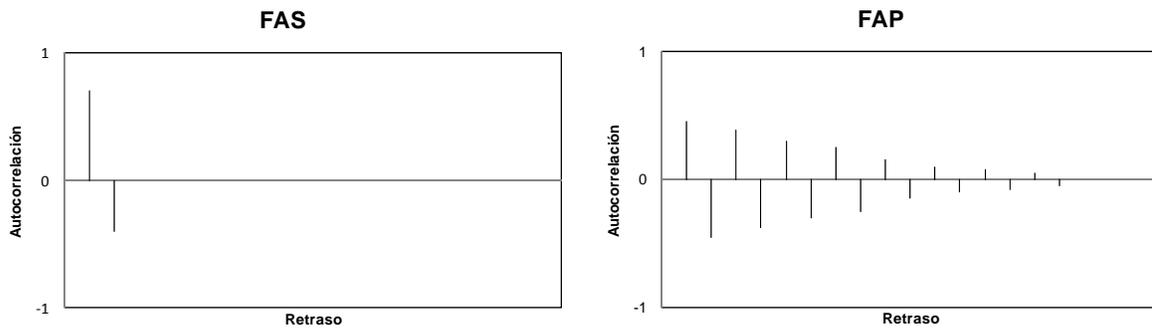


Figura 4.16a Funciones de autocorrelación simples y parcial teóricas para el modelo MA(2)

d)

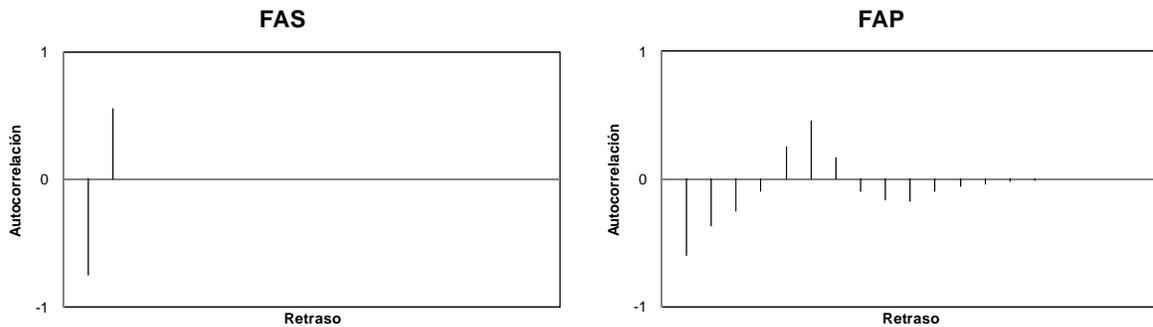
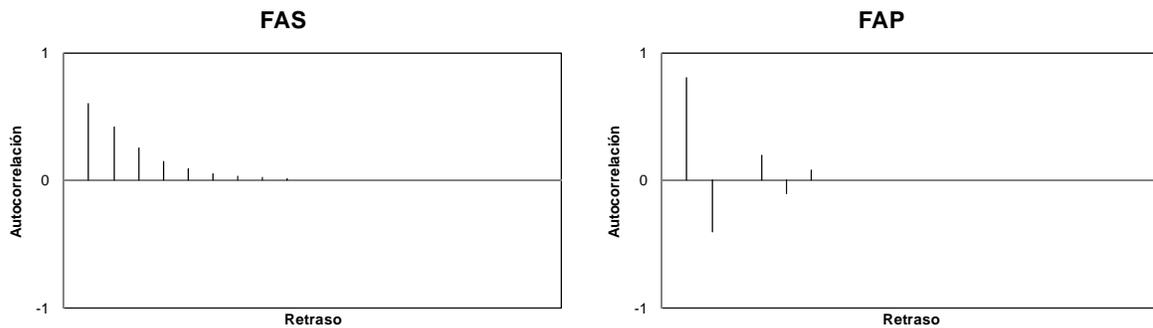


Figura 4.16b Funciones de autocorrelación simple y parcial teóricas para el modelo MA(2)

Modelos ARMA: Las funciones de autocorrelación combinan las características que se presentan en los modelos AR y los MA. En general la FAS decae a cero tanto exponencialmente como en forma de seno amortiguado después del retraso de tiempo $p - q$. La FAP teórica también decae a cero después del retraso $p - q$. Se muestran en la Figura 4.17a y 4.17b seis posibles combinaciones para el modelo teórico ARMA(1,1)

a)



b)

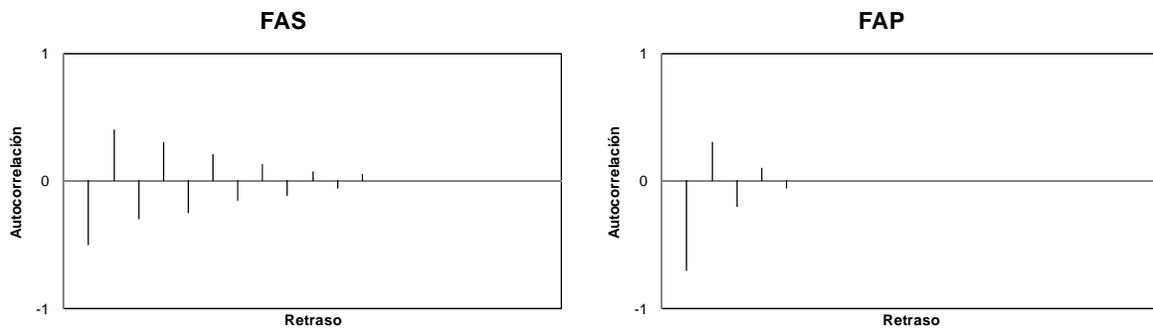
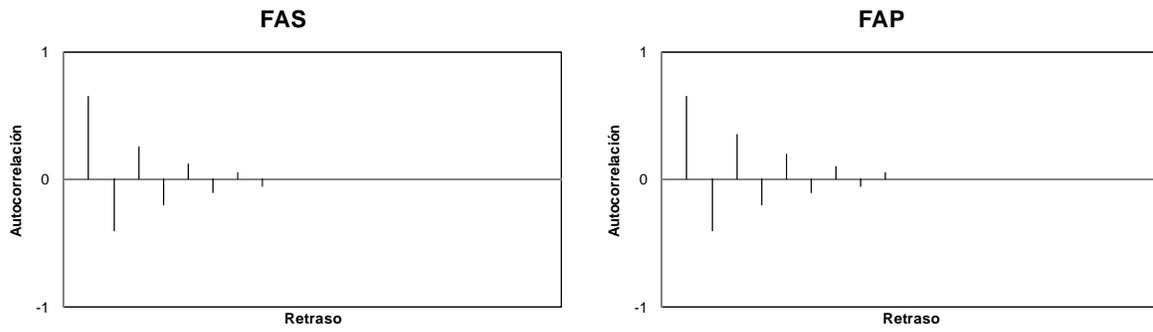
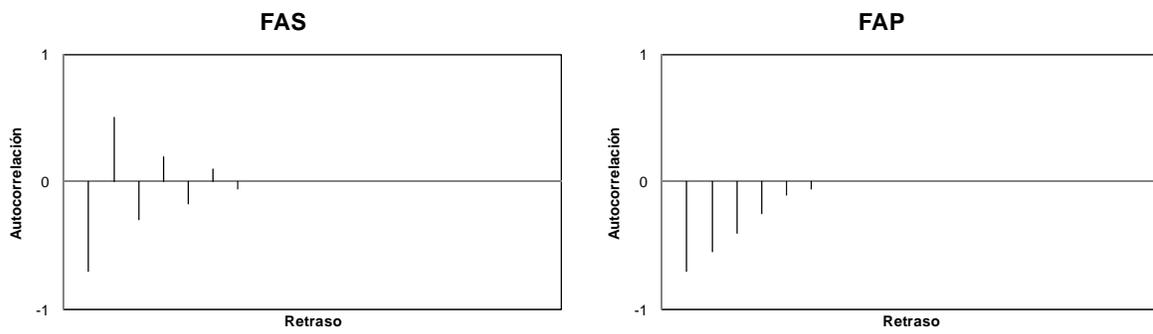


Figura 4.17a Funciones de autocorrelación simple y parcial teóricas para el modelo ARMA(1,1)

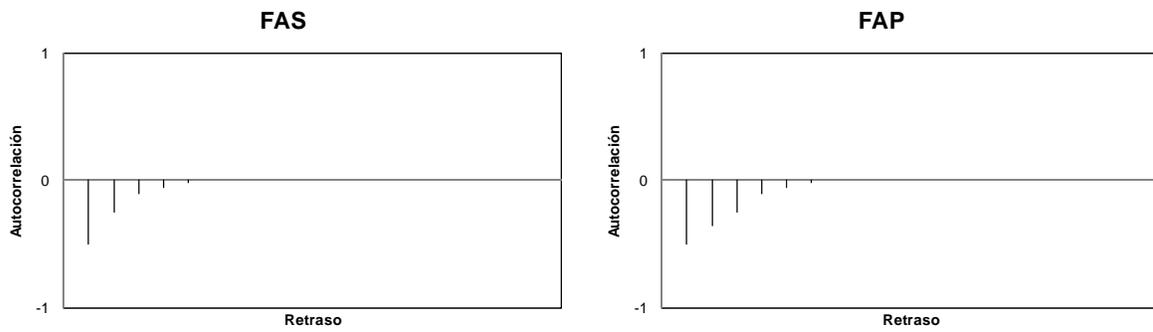
c)



d)



e)



f)

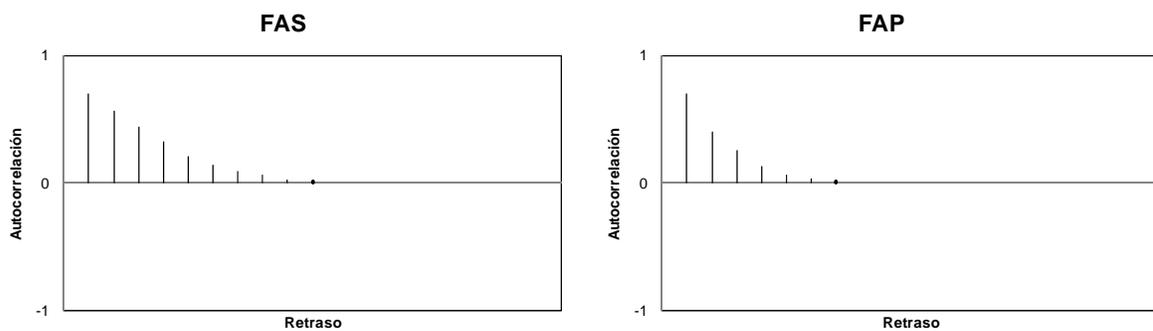


Figura 4.17b Funciones de autocorrelación simple y parcial teóricas para el modelo $ARMA(1,1)$

Es probable que exista cierta ambigüedad al determinar un modelo ARIMA apropiado a partir de los patrones que provienen de las FAS y FAP parciales de la muestra. Cualquier modelo que se escoja, se considera simplemente tentativo: sólo es un candidato para ser considerado como el modelo ideal. Si no fuera el caso, se deberá intentar con un modelo alterno.

4.3.3 Estimación

En esta etapa se estiman los coeficientes del modelo escogido tentativamente en el paso anterior, existen distintos criterios para dicho propósito. Usualmente se realiza por medio de paquetes informáticos. Además en esta etapa se puede pre-visualizar la adecuación del modelo a la serie de tiempo. Particularmente si los coeficientes no satisfacen ciertas condiciones matemáticas, el modelo es rechazado.

El principal criterio para el cálculo de los parámetros es el llamado *Estimación de máxima verosimilitud* ó *Maximum Likelihood* (ML por sus siglas en ingles). Se ha demostrado que los parámetros estimados a través de este criterio reflejan con gran exactitud las características presentes en los datos de la serie de tiempo. Sin embargo éste método se ve limitado debido al gran tiempo que conlleva realizar la estimación, aún con el uso de la computadora (Pankratz 1983).

Por esta razón la mayoría de la literatura existente sugiere el uso del criterio de *mínimos cuadrados* o *least squares* (LS por sus siglas en ingles). Se ha demostrado que las estimaciones hechas mediante este criterio son muy cercanas a las del criterio de máxima verosimilitud. La estimación de los parámetros del modelo ARMA seleccionado, se realiza por medio de minimizar la suma de los cuadrados de los residuales SSR (sum of squared residuals). En general, estos estimados de los mínimos cuadrados deben obtenerse mediante un procedimiento no lineal de mínimos cuadrados. Un procedimiento no lineal de mínimos cuadrados es, sencillamente, un algoritmo que encuentra el mínimo de la suma de la función de errores cuadrados, mediante un proceso iterativo.

Los residuales de cualquier modelo ARMA se definen como:

$$\hat{a}_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

Donde:

\hat{a}_t : *residual de la serie*

Y_t : *serie original*

\hat{Y}_t : *serie calculada con los parámetros estimados*

Entonces, la suma de los cuadrados de los residuales se define como:

$$SSR = \sum \hat{a}_t^2$$

Esta última función es la que se debe minimizar, a través de la búsqueda de los parámetros θ y φ del modelo ARMA que se desea ajustar.

Finalmente obtenidos los parámetros θ y φ del modelo ARMA propuesto, deben de cubrir en conjunto los siguientes requerimientos (Pankratz 1983):

1. El modelo debe tener parsimonia: Box y Jenkins enfatizaron la importancia del principio de parsimonia. Un modelo con parsimonia ajusta la información disponible sin usar coeficientes innecesarios. Es decir, se opta siempre por el modelo con el menor número de coeficientes. Este principio es importante ya que en la práctica un modelo con esta característica produce mejores predicciones. El objetivo en la modelación ARIMA no es encontrar el modelo exacto que represente al proceso generador de las observaciones, es más bien encontrar el modelo que se aproxime al verdadero proceso y que explique el comportamiento de la variable en estudio de forma adecuada y práctica.
2. El modelo debe ser estacionario e inversible: La metodología Box-Jenkins requiere que el modelo que se utiliza para la descripción y pronóstico de una serie de tiempo sea tanto estacionario como inversible.

La inversibilidad se refiere a que cualquier modelo ARIMA puede expresar a la serie Y_t en función de las Y observaciones pasadas, es decir $Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, etc.$ Esto es obvio para un modelo autorregresivo de orden p :

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + a_t$$

No es obvio para un modelo de medias móviles de orden q :

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

No obstante, se puede demostrar que un modelo de medias móviles puede expresar a la serie Y_t como una serie *infinita* de Y observaciones pasadas. Es decir, un modelo de medias móviles se puede transformar o invertir en un modelo autorregresivo de orden infinito.

La *Tabla 4.4* (Bowerman, O'Connell, Koehler 2007) muestra las condiciones de estacionariedad e inversibilidad para los modelos ARMA más comunes. Las condiciones para modelos generales son complicadas por lo que no se estudian en este texto. Sin embargo, se puede decir que si un modelo utiliza parámetros autorregresivos, una condición de estacionariedad necesaria (pero no suficiente) es que la suma de los valores de los parámetros autorregresivos es menor que 1. Si un modelo utiliza parámetros de media móvil, una condición de inversibilidad necesaria (pero no suficiente) es que la suma de los valores de los parámetros de la media móvil es menor que 1. Además, un modelo que utiliza sólo parámetros autorregresivos no tiene condiciones de inversibilidad y un modelo que utiliza sólo parámetros de media móvil no tiene condiciones de estacionariedad.

Modelo	Condiciones de estacionariedad	Condiciones de inversibilidad
AR(1)	$ \varphi_1 < 1$	Ninguna
AR(2)	$\varphi_1 + \varphi_2 < 1$ $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$ $ \varphi_2 < 1$	Ninguna
MA(1)	Ninguna	$ \theta_1 < 1$
MA(2)	Ninguna	$\theta_1 + \theta_2 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$ $ \theta_2 < 1$
ARMA(1,1)	$ \varphi_1 < 1$	$ \theta_1 < 1$

Tabla 4.4 Condiciones de estacionariedad e invertibilidad

3. Los coeficientes del modelo deben ser estadísticamente significativos: Se debe determinar si los coeficientes son importantes en el modelo o se deben excluir del mismo. Se hace uso de los valores del error estándar y el valor t asociado a cada uno de los coeficientes del modelo.

El valor de t se define como:

$$t = \frac{\text{coeficiente calculado}}{\text{error estándar asociado al coeficiente calculado}}$$

Ambos valores normalmente son calculados automáticamente por los programas estadísticos tales como MINITAB o SAS.

La exclusión de aquellos coeficientes que no son importantes en el modelo se hace mediante la hipótesis de que el coeficiente no es significativo, por tanto si se rechaza esta hipótesis, el coeficiente es significativo y debe permanecer en el modelo. Como regla práctica se dice que es razonable incluir en el modelo un parámetro cuya estadística t absoluta es mayor que 2. Si el valor de t absoluto de un coeficiente es menor a 2, entonces debemos considerar seriamente, excluir el parámetro del modelo.

La Figuras 4.18 y 4.19 muestra la salida de dos ajustes realizados por MINITAB. En la primer figura se observa que los valores t asociados a los coeficientes calculados son menores a dos, por lo que supone que el modelo propuesto no es apropiado y debe considerarse excluir algún parámetro del modelo. En la segunda figura se ha excluido un parámetro y el valor t en valor absoluto es mayor a dos, para el coeficiente MA. En este caso el parámetro es importante en el modelo y no debe excluirse.

```

ARIMA Model: Yt
Estimates at each iteration
Iteration      SSE      Parameters
0  169.473    0.100  0.100
1  161.440    0.195  0.005
2  160.266    0.057  -0.145
3  159.645    -0.075  -0.295
4  159.497    -0.037  -0.286
5  159.497    -0.048  -0.298
6  159.496    -0.036  -0.286
7  159.496    -0.045  -0.295
8  159.496    -0.038  -0.288
9  159.496    -0.043  -0.294
10 159.496    -0.039  -0.290
11 159.495    -0.042  -0.293
12 159.495    -0.040  -0.290
13 159.495    -0.042  -0.292
14 159.495    -0.040  -0.291
15 159.495    -0.041  -0.292
16 159.495    -0.041  -0.291
17 159.495    -0.041  -0.292
18 159.495    -0.041  -0.292
19 159.495    -0.041  -0.291
20 159.495    -0.041  -0.291

Relative change in each estimate less than 0.0010

Final Estimates of Parameters
Type      Coef  SE Coef  T      P
AR  1     -0.0409  0.3656  -0.11  0.911
MA  1     -0.2914  0.3504  -0.83  0.407

Differencing: 1 regular difference
Number of observations: Original series 120, after differencing 119
Residuals:      SS = 159.468 (backforecasts excluded)
                MS = 1.363  DF = 117

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag      12      24      36      48
Chi-Square 14.0  27.6  43.6  57.4
DF        10      22      34      46
P-Value   0.172  0.188  0.125  0.121
    
```

Figura 4.18 Ajuste MINITAB – modelo inadecuado

```

ARIMA Model: Yt
Estimates at each iteration
Iteration      SSE      Parameters
0  178.398    0.100
1  166.087    -0.050
2  160.064    -0.200
3  159.534    -0.254
4  159.533    -0.256
5  159.533    -0.256

Relative change in each estimate less than 0.0010

Final Estimates of Parameters
Type      Coef  SE Coef  T      P
MA  1     -0.2361  0.0892  -2.87  0.005

Differencing: 1 regular difference
Number of observations: Original series 120, after differencing 119
Residuals:      SS = 159.505 (backforecasts excluded)
                MS = 1.352  DF = 118

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic
Lag      12      24      36      48
Chi-Square 13.8  27.4  43.2  56.8
DF        11      23      35      47
P-Value   0.243  0.241  0.160  0.154
    
```

Figura 4.19 Ajuste MINITAB – modelo adecuado

4. El modelo debe proporcionar un adecuado ajuste: Aplicar la modelación ARIMA a una serie de tiempo no es garantía de que se obtendrá un modelo que ajuste a la perfección, en especial en aquellas series donde existe gran cantidad de perturbaciones aleatorias que no puedan ser ajustadas al modelo. Suele suceder que para una misma serie de tiempo, existen varios modelos que cumplen con las

características de un modelo adecuado y proporcionan resultados similares, sin embargo debe escogerse aquel que se ajuste mejor a la serie.

Una medida útil que ayuda a conocer el grado de ajuste del modelo a la serie es la **RMSE** (root-mean-squared error). Esta medida da a conocer la desviación estándar de los residuales \hat{a}_t , y se calcula como:

$$RMSE = \hat{\sigma}_a = \frac{1}{n - m} \sum \hat{a}_t^2$$

Donde:

\hat{a}_t : residuales del modelo

n : número de residuales

m : número de coeficientes del modelo

Generalmente se utiliza el valor de RMSE para compararlo con el de otros modelos estimados para la misma serie. Se preferirá aquel modelo cuyo RMSE tienda a tener menor valor.

4.3.4 Evaluación del modelo

Una vez estimados los coeficientes del modelo propuesto, la siguiente etapa en la metodología Box-Jenkins es la evaluación ó verificación del mismo. En este paso se comprueba la eficiencia del modelo y se decide si es estadísticamente adecuado.

Un modelo estadísticamente adecuado es aquel cuyos residuales son independientes entre sí. Es decir, si los residuales son completamente aleatorios.

Para comprender mejor el objetivo de esta etapa, es conveniente recordar algunas ideas importantes:

1. La idea básica de la metodología es modelar aquellos datos que estén correlacionados entre sí, mediante la combinación de términos AR y MA.
2. Los fenómenos reales siempre presentan **perturbaciones aleatorias** (a_t), también llamados **choques aleatorios** ó **proceso de ruido blanco**.
3. La metodología Box-Jenkins asume que las perturbaciones aleatorias (a_t) pertenecientes a un proceso Y_t son independientes entre sí. No existe correlación alguna entre ellas. Por tanto estas perturbaciones no se modelan mediante términos AR o MA.

En la práctica las **perturbaciones aleatorias** no se pueden identificar directamente en una serie de tiempo. Sin embargo, los residuales \hat{a}_t del modelo ARIMA, nos proporcionan un cálculo aproximado de las perturbaciones reales a_t (Pankratz 1983).

Recordemos que los residuales de cualquier modelo ARIMA se definen como:

$$\hat{a}_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

Donde:

\hat{a}_t : residual en el tiempo t

Y_t : serie original

\hat{Y}_t : serie calculada con los parámetros estimados

Entonces, si los residuales muestran estar correlacionados entre sí, significa que existe un patrón que aun no ha sido tomado en cuenta por los términos autorregresivos y/o de medias móviles del modelo propuesto.

Por lo tanto, se concluye que si los residuales están correlacionados de alguna manera, estos no son ruido blanco y se debe buscar otro modelo cuyos residuales sean completamente aleatorios.

La **función de autocorrelación simple de los residuales** es el instrumento que se utiliza para determinar si el modelo es estadísticamente adecuado. El cálculo de los coeficientes de autocorrelación se realiza por medio de la misma fórmula vista en el capítulo 2 pero aplicada a los residuales (\hat{a}_t) del modelo ajustado (Pankratz 1983):

$$r_k(\hat{a}) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (\hat{a}_t - \bar{a})(\hat{a}_{t+k} - \bar{a})}{\sum_{t=1}^n (\hat{a}_t - \bar{a})^2}$$

Donde:

$r_k(\hat{a})$: coeficiente de autocorrelación simple residual para un retraso de k periodos

\bar{a} : media de los residuales

\hat{a}_t : residual en el periodo t

\hat{a}_{t+k} : residual en el periodo con k retrasos

n : número total de residuales

Mediante el análisis de esta función se busca que los coeficientes de autocorrelación sean cero o muy cercanos a él. Específicamente se pretende que los coeficientes no sean significativos. Esto se determina a través del estadístico t asociado a la función de autocorrelación simple de los residuales:

$$t = \frac{r_k(\hat{a})}{s[r_k(\hat{a})]}$$

$$s[r_k(\hat{a})] = \sqrt{\frac{1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} r_j(\hat{a})^2}{n}}$$

La mayoría de los programas de computadora realiza automáticamente el cálculo del estadístico t . MINITAB por su parte despliega el gráfico de la función de autocorrelación de los residuales, tal como se observa en la *Figura 4.20*.

Por medio del gráfico y de las bandas se puede establecer si el valor de un coeficiente es significativo. Si uno o varios valores de autocorrelación sobrepasan las bandas de dos desviaciones estándar, significa que el ó los coeficientes son significativamente distintos de cero y por lo tanto, los residuales no son independientes entre sí. El modelo no es estadísticamente adecuado. De modo contrario, si los valor de los coeficientes no sobrepasan la banda de puntos, indica que dichos valores no son significativo y por tanto se asume que los residuales son independientes entre si y se acepta el modelo.

También una regla común es que para los tres primeros rezagos de tiempo, si el valor del estadístico t calculado es menor que 1.25 y menor que 1.6 para rezagos posteriores, se concluya que las perturbaciones aleatorias son independientes entre sí (Pankratz 1983).

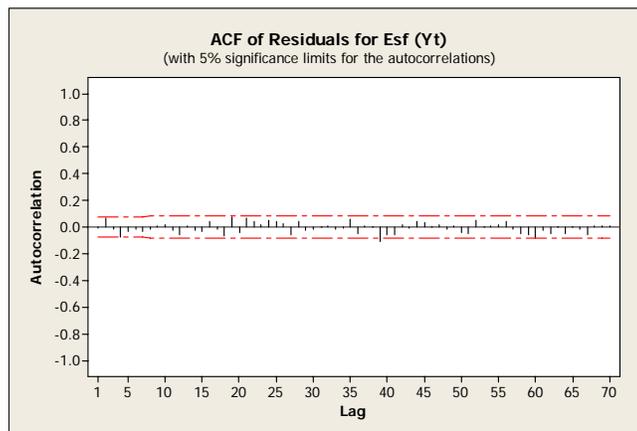


Figura 4.20 Función de autocorrelación simple de los residuales mediante MINITAB

Es necesario precisar que el cálculo del estadístico t tan sólo es una aproximación del valor real, lo que podría provocar que se consideren los residuos como aleatorios, cuando en realidad no lo son, o viceversa. Por esta razón se recomienda el uso del estadístico **Ljung-Box**, el cual también se enfoca al análisis de los coeficientes de autocorrelación de los residuales, pero lo hace de manera grupal. Es una prueba que considera un conjunto de K coeficientes de autocorrelación.

El estadístico **Ljung-Box** se define como:

$$Q^* = n'(n' + 2) \sum_{k=1}^K (n' - k)^{-1} r_k (\hat{a}_t)^2$$

Donde:

$$n' = n - d$$

n : es el número de observaciones de la serie

d : es el grado de diferenciación

$r_k (\hat{a}_t)^2$: es el cuadrado de $r_k (\hat{a}_t)$

K : número de autocorrelaciones

El valor de K se fija arbitrariamente, la mayoría de los programas de computadora establecen $K = 6, 12, 18$ y 24 .

La forma en que se prueba la eficiencia de un modelo a través de este estadístico sigue el mismo razonamiento, es decir, se trata de comprobar que los residuos no están correlacionados y, por tanto, las autocorrelaciones de los residuos deben ser pequeñas. Por consiguiente, Q^* debe ser pequeña. Ahora bien, juzgar que el valor de Q^* es un valor pequeño, es sumamente subjetivo. Es por eso que se utilizan ciertas condiciones para establecer un punto de rechazo de la suficiencia del modelo. Se utiliza una escala de distribución *chi-cuadrado*, a la cual se asocia un valor p que representa la probabilidad de juzgar de manera correcta el valor de Q^* . Se puede demostrar que si el valor de p es pequeño, el valor de Q^* es grande y el modelo no es adecuado y viceversa (Bowerman, O’Connell, Koehler 2007).

De forma práctica, si el valor de p es mayor que 0.01 pero menor que 0.05, se considera que el modelo es inaceptable sin lugar a dudas. Si el valor de p es mayor que 0.05 entonces se dice que es razonable concluir que el modelo es suficiente. No es del alcance de esta tesis demostrar los valores anteriores, pero se consideran aceptables y válidos debido a la amplia difusión que tienen en la literatura existente.

También cabe destacar que la razón de mencionar el valor de p para analizar la suficiencia de un modelo es que en los paquetes informáticos se incluye con frecuencia este valor. Además es una manera práctica y rápida de evaluar la suficiencia del modelo. Una manera de comprobar que el modelo es estadísticamente adecuado.

Para ejemplificar lo enunciado anteriormente, consideremos la salida de MINITAB para dos modelos propuestos (Figuras 4.21 y 4.22). En primera figura, la tabla se muestra los valores del estadístico *Ljung-Box* y el valor p . Los valores p son menores que 0.05, en este caso, se rechaza la suficiencia del modelo y debe proponerse un nuevo modelo. En la segunda, los valores de p son mayores a 0.05 por lo que se acepta la suficiencia del modelo y puede procederse a la realización de pronósticos.

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	20.4	40.5	49.5	73.4
DF	8	20	32	44
P-Value	0.009	0.004	0.025	0.004

Figura 4.21 Salida MINITAB 1

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic				
Lag	12	24	36	48
Chi-Square	13.8	27.4	43.2	56.8
DF	11	23	35	47
P-Value	0.243	0.241	0.160	0.154

Figura 4.22 Salida MINITAB 2

4.3.5 Pronóstico

La fase final de la metodología Box-Jenkins es pronosticar valores futuros de la serie de tiempo. En primer lugar se debe comprender cómo realizar *predicciones puntuales* a partir de un modelo ARIMA ya estimado. En segundo lugar se debe estudiar cómo estimar límites de probabilidad alrededor de una estimación puntual, conocidos particularmente como *intervalos de confianza*. Y por último se debe conocer y probar la *suficiencia de los pronósticos*.

A partir de este punto y con el fin de explicar la generación de pronósticos, se asumirá que se conoce al modelo ARIMA en su totalidad, es decir, se conoce sus coeficientes y se ha probado que el modelo es adecuado. Se hace notar que en la práctica, estas consideraciones son verdaderas si se ha identificado y estimado los parámetros del modelo conforme a la aplicación de las etapas anteriores.

El pronóstico de una serie de tiempo se hace por medio de predicciones ó estimaciones puntuales. Así, una **predicción puntual** (\hat{Y}_t) se define como el valor de la variable Y en el tiempo t , calculado por medio del modelo ARIMA ajustado a la serie.

La forma más conveniente para empezar a realizar predicciones puntuales es escribir el modelo incluyendo el restablecimiento de la no estacionariedad. Hay que recordar que en el primer paso de la metodología, se induce la estacionariedad en la serie de tiempo (sólo en caso que se requiera), por medio de diferencias. Para restablecer las características originales de la serie, se realiza la operación inversa, es decir, se *integra* a la serie. A este proceso inverso se le conoce como **integración**. Se advierte la importancia del restablecimiento de condiciones iniciales, ya que es lógico que se requieran para obtener pronósticos adecuados y apegados a la realidad.

Para ejemplificar cómo se escribe un modelo considerando la integración de la serie, tomemos un modelo ARIMA(1,1,0) cuya ecuación es:

$$Y'_t = \varphi_1 Y_{t-1} + a_t$$

Donde:

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Y'_t : primeras diferencias de la serie

Simplemente se sustituye Y'_t en la ecuación del modelo:

$$Y_t - Y_{t-1} = \varphi_1 Y_{t-1} + a_t$$

Despejando Y_t :

$$Y_t = Y_{t-1} + \varphi_1 Y_{t-1} + a_t$$

Ahora bien, para explicar la forma en que se realizan las predicciones puntuales tomemos como ejemplo el modelo ARIMA(0,1,1) ajustado a la serie que se muestra en la *Tabla 4.5*. (Se explicará de esta forma debido a que es práctico y fácilmente entendible).

t	Y_t	t	Y_t	t	Y_t	t	Y_t
1	15.0000	31	10.7752	61	-1.3173	91	10.5502
2	14.4064	32	10.1129	62	-0.6021	92	11.4741
3	14.9383	33	9.9330	63	0.1400	93	11.5568
4	16.0374	34	11.7435	64	1.4030	94	11.7986
5	15.6320	35	12.2590	65	1.9280	95	11.8867
6	14.3975	36	12.5009	66	3.5626	96	11.2951
7	13.8959	37	11.5378	67	1.9615	97	12.7847
8	14.0765	38	9.6649	68	4.8463	98	13.9435
9	16.3750	39	10.1043	69	6.5454	99	13.6859
10	16.5342	40	10.3452	70	8.0141	100	14.1136
11	16.3839	41	9.2835	71	7.9746	101	13.8949
12	14.1006	42	7.7219	72	8.4959	102	14.2853
13	17.7876	43	6.8300	73	8.4539	103	16.3867
14	17.7354	44	8.2046	74	8.7114	104	17.0884
15	17.0010	45	8.5289	75	7.3780	105	15.8861
16	17.7485	46	8.8733	76	8.1905	106	14.8227
17	18.1888	47	8.7948	77	9.9720	107	15.9479
18	18.5997	48	8.1577	78	9.6930	108	15.0982
19	17.5859	49	7.9128	79	9.4506	109	13.8770
20	15.7389	50	8.7978	80	11.2088	110	14.2746
21	13.6971	51	9.0775	81	11.4986	111	15.1682
22	15.0059	52	9.3234	82	13.2778	112	15.3818
23	16.2574	53	10.4739	83	13.5910	113	14.1863
24	14.3506	54	10.6943	84	13.4297	114	13.9996
25	11.9515	55	9.8367	85	13.3125	115	15.2463
26	12.0328	56	8.1803	86	12.7445	116	17.0179
27	11.2142	57	7.2509	87	11.7979	117	17.2929
28	11.7023	58	5.0814	88	11.7319	118	16.6366
29	12.5905	59	1.8313	89	11.6523	119	15.3410
30	12.1991	60	-0.9127	90	11.3718	120	15.6453

Tabla 4.5 Serie de tiempo ejemplo

La ecuación del modelo, considerando la integración de la serie es:

$$Y_t = Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Una predicción puntual para este modelo ARIMA(0,1,1) particular se calcularía a partir de:

$$\hat{Y}_t = Y_{t-1} + \hat{a}_t - \hat{\theta}_1 \hat{a}_{t-1}$$

Donde:

$$\hat{a}_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

$$\hat{a}_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1}$$

Al realizar predicciones puntuales (específicamente para este ejemplo) se considera lo siguiente:

- La predicción puntual de \hat{a}_t de la perturbación futura es cero.
- La predicción puntual de \hat{a}_{t-1} de la perturbación aleatoria pasada es el residuo $(t - 1)$ -ésimo si podemos calcular \hat{Y}_{t-1} y es cero si no la podemos determinar.

El coeficiente del modelo calculado mediante MINITAB es:

$$\hat{\theta}_1 = -0.3534$$

A partir del valor del coeficiente se trata de predecir el valor de la variable en el tiempo $t = 1$, la ecuación queda:

$$\hat{Y}_1 = Y_0 + \hat{a}_1 - (-0.2561)\hat{a}_0$$

Puesto que no hay valor para Y_0 , no se puede calcular el valor de \hat{Y}_1 , ni el primer residuo ($\hat{a}_1 = Y_1 - \hat{Y}_1$) y este se considera 0.

Luego para intentar predecir \hat{Y}_2 a partir del tiempo de origen 1 se tiene:

$$\hat{Y}_2 = Y_1 + \hat{a}_2 - (-0.3534)\hat{a}_1$$

$$\text{Como } \hat{a}_1 = \hat{a}_2 = 0$$

$$\hat{Y}_2 = 15 + 0 + 0.3534(0) = 15$$

En este caso $Y_1 = 15$ de la *Tabla 4.5*

Al usar el valor $Y_2 = 14.4064$ se puede calcular:

$$\hat{a}_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 = 14.4064 - 15 = -0.5936$$

Con este residuo se puede calcular Y_3 a partir del origen 2 como:

$$\hat{Y}_3 = Y_2 + \hat{a}_3 - (-0.3534)\hat{a}_2$$

$$\hat{Y}_3 = 14.4064 + 0 - (-0.3534)(-0.5936) = 14.1966$$

Con este valor se calcula a su vez:

$$\hat{a}_3 = Y_3 - \hat{Y}_3 = 14.9383 - 14.1966 = 0.7417$$

Al continuar con este proceso con cada uno de los siguientes periodos, se obtiene que la predicción puntual $\hat{Y}_{120} = 14.956$. El residuo para el periodo 120 es:

$$\hat{a}_{120} = Y_{120} - \hat{Y}_{120} = 15.6443 - 14.956 = 0.6893$$

Ahora bien, hasta ahora se han predicho valores hasta el periodo 120, a partir del origen inmediato anterior, es decir, se calculó el valor de \hat{Y}_{120} a partir del origen 119, el valor \hat{Y}_{119} a partir del origen 118, y así sucesivamente. Sin embargo como no se cuenta con las observaciones para los periodos subsecuentes 121, 122, 123, etc., las predicciones puntuales $\hat{Y}_{121}, \hat{Y}_{122}, \hat{Y}_{123}, etc.$ se obtienen a partir del origen 120. Entonces el pronóstico puntual para Y_{121} es:

$$\hat{Y}_{121} = Y_{120} + \hat{a}_{121} - (-0.3534)\hat{a}_{120}$$

$$\hat{Y}_{121} = 15.6453 + 0.3534(0.6893)$$

$$\hat{Y}_{121} = 15.8889$$

Puesto que no se cuenta con la observación Y_{121} , no se puede obtener el valor \hat{a}_{121} por lo que se supone un valor de 0. Entonces la predicción puntual para Y_{122} a partir del origen 120 es:

$$\hat{Y}_{122} = Y_{121} + \hat{a}_{122} - (-0.3534)\hat{a}_{121}$$

Se asume que el valor Y_{121} es igual al valor de \hat{Y}_{121} puesto que no existe valor observado en ese tiempo.

$$\hat{Y}_{122} = 15.8889 + 0 - (-0.3534)(0)$$

$$\hat{Y}_{122} = 15.8889$$

Esta operación se realiza sucesivamente hasta el periodo de tiempo que se desee pronosticar.

Por otra parte cada pronóstico posee un intervalo de confianza asociado a la probabilidad de que el valor futuro observado se encuentre dentro de dicho intervalo. Normalmente se establece que la probabilidad sea del 95%. A esta combinación probabilidad-intervalo normalmente se le conoce como *intervalo de confianza del 95%*.

Por medio de esta manera se puede conocer si los pronósticos son satisfactorios o no. La generación de pronósticos es satisfactoria si los valores futuros se encuentran dentro del intervalo de confianza. De manera inversa serán insatisfactorios si estos se hallan fuera del intervalo.

El cálculo de un intervalo de confianza del 95% para un pronóstico, se realiza por medio de la ecuación:

$$[\hat{Y}_{n+t} \pm 1.96 SE_{n+t}]$$

Donde:

\hat{Y}_{n+t} : pronóstico en el periodo $(n + t)$ a partir del origen n

SE_{n+t} : error estandar del error del pronóstico del periodo $(n + t)$

El cálculo de SE_{n+t} quedará fuera del alcance de este texto. No obstante, las salidas de los programas estadísticos contienen los valores SE_{n+t} correspondientes a cada predicción puntual.

Para el ejemplo anterior donde $\hat{Y}_{121} = 15.8889$ y $\hat{Y}_{122} = 15.8889$ se tiene que

$$SE_{120+1} = 1.0394$$

$$SE_{120+2} = 1.7491$$

El intervalo de confianza del 95% para Y_{121} es:

$$[15.8889 \pm 1.96 (1.0394)] = [13.8517, 17.9261]$$

Para Y_{122} es:

$$[15.8889 \pm 1.96 (1.7491)] = [12.4608, 19.3170]$$

Después de que se ha encontrado un modelo adecuado, se pueden llevar a cabo los pronósticos para un periodo, o varios, en el futuro.

Si el patrón de la serie parece cambiar con el tiempo, los nuevos datos podrían usarse para volver a estimar los parámetros del modelo o, de ser necesario, desarrollar un modelo completamente nuevo.

Vigilar los errores de pronóstico es una buena idea. Si las magnitudes de los errores más recientes tienden a ser considerablemente mayores que los anteriores, quizá sea hora de evaluar nuevamente el modelo.

4.4 Metodología Box-Jenkins Estacional

La metodología vista hasta ahora, está enfocada a series de tiempo no estacionales. Sin embargo, en la práctica se presentan frecuentemente series con estacionalidad. Este hecho no se había remarcado anteriormente debido a que las etapas de la metodología para series estacionales no varían en su concepto y siguen las mismas pautas.

Las variaciones que deben tenerse en cuenta al aplicar modelos ARIMA a series estacionales consisten principalmente en tres aspectos: el reconocimiento del periodo estacional, la estabilización de la serie y la adición de términos autorregresivos y/o de medias móviles referidos a L periodos de tiempo anteriores donde $L = \text{periodo estacional}$. A continuación se presentan aquellas consideraciones extras que deben hacerse en cada una de las etapas.

Estacionariedad: Uno de los requisitos para poder iniciar la identificación y estimación del modelo es que la serie debe ser estacionaria. Recordemos que si la serie presenta algún tipo de patrón ascendente o descendente, la serie es inestable o no estacionaria, por lo que la serie debe ser transformada para lograr su estabilización. La *Figura 4.23* muestra una serie estacional donde se muestra un aumento en los valores de la serie.

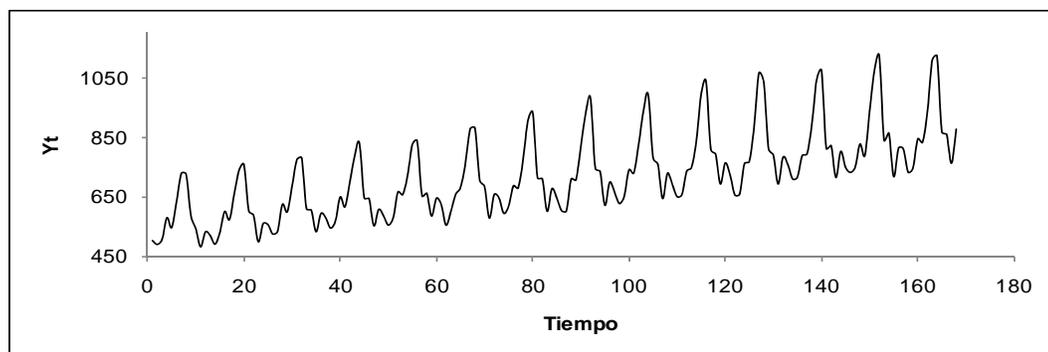


Figura 4.23 Serie de tiempo no estacionaria

Para series estacionales, la estabilidad se logra por medio de las transformaciones siguientes:

- Diferenciación regular: Es la el mismo tipo de diferenciación presentado en la sección. Al igual que en series no estacionales, se puede requerir las primeras o las segundas diferencias de la serie.

$$Y'_t = Y_t - Y_{t-1} \quad \text{Primeras diferencias}$$

- Diferencias estacionales: Se obtienen a partir de restar el valor de la variable L periodos anteriores.

$$Y^*_t = Y_t - Y_{t-L}$$

- Combinación de ambas:

$$Y^*_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-L} - Y_{t-L-1}$$

El periodo estacional L se obtiene de acuerdo a lo visto en la modelación clásica, con la ayuda de las funciones de autocorrelación o en su caso con el periodograma.

Para conocer si una serie estacional es estacionaria desde un principio o bien una vez aplicada alguna de las transformaciones anteriores, se sigue el mismo razonar que el visto en la *sección 4.3.1*.

Si la función de autocorrelación simple de los valores $Y_1, Y_2, etc.$ de la serie de tiempo se corta claramente con rapidez o si se corta rápidamente para los primeros retrasos (1,2,3) y para los retrasos de L periodos de tiempo ($L, 2L, 3L, etc.$), entonces se deben considerar que los valores de la serie estacional son estacionarios. (Bowerman, O'Connell, Koehler 2007)

Si la función de autocorrelación simple de los valores Y_1, Y_2, etc para los primeros retrasos (1,2,3) y para los retrasos de L periodos de tiempo ($L, 2L, 3L, etc.$) de la serie de tiempo, se cortan con lentitud extrema, entonces se deben considerar que los valores de la serie de tiempo son no estacionarios

Además de estas transformaciones, normalmente en series estacionales, se suelen aplicar transformaciones del tipo:

$$Y^*_t = Ln Y_t$$

$$Y^*_t = Y_t^{0.25}$$

ó

$$Y^*_t = Y_t^{0.5}$$

Estas transformaciones se deben a la variabilidad que puede existir entre distintos periodos de tiempo. La gráfica de la figura anterior (*Figura 4.23*) muestra el ejemplo de una serie estacional con

variabilidad estacional, es decir, se tiene un incremento en el rango de valores en cada periodo de tiempo.

Ahora bien, las Figuras 4.24, 4.25 y 4.26 muestran la transformación de la misma serie, utilizando $Y^*_t = Y_t^{0.5}$, $Y^*_t = Y_t^{0.25}$ y $Y^*_t = \ln Y_t$ respectivamente. Se puede observar que la última transformación quita totalmente la variación estacional presente en la serie, mientras que las otras dos tan sólo la atenúan ligeramente.

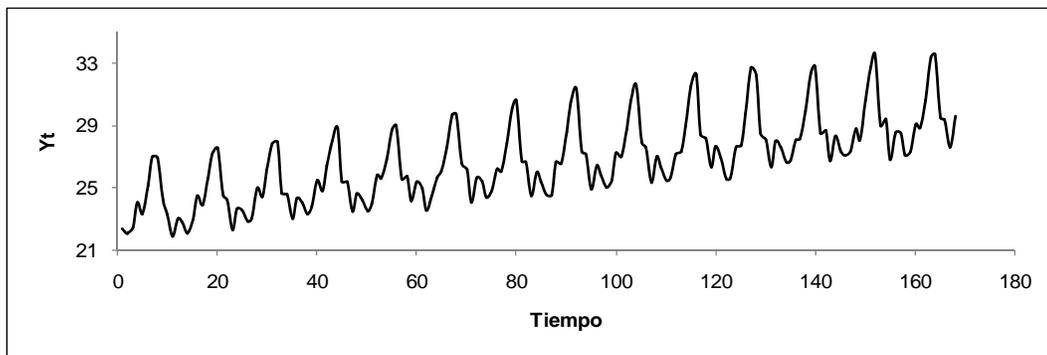


Figura 4.24 Raíz cuadrada de Y_t

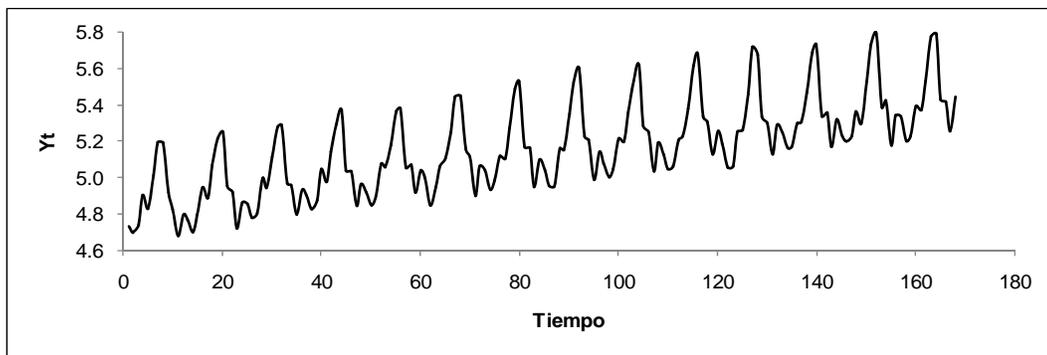


Figura 4.25 Raíz cuarta de Y_t

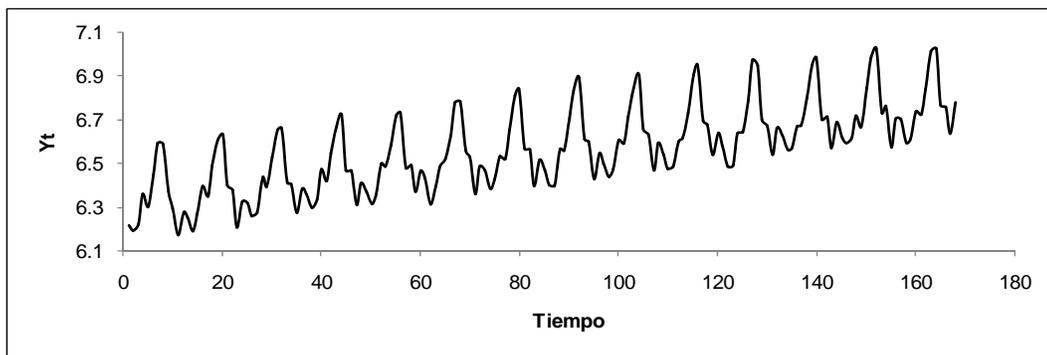


Figura 4.26 Logaritmo natural de Y_t

Identificación: Para series estacionales, se realiza de la misma forma que para una serie no estacional, es decir, observando el comportamiento de la FAS y la FAP, tanto para los primeros periodos de tiempo ($t = 1, 2, 3, 4, 5$) como para aquellos alejados L periodos de tiempo ($t = L, 2L, 3L, 4L$).

El modelo propuesto para series estacionales estará conformado tanto por coeficientes autorregresivos y de media móvil ordinarios, como de coeficientes autorregresivos y medias móviles estacionales de orden P y Q respectivamente.

Un modelo autorregresivo estacional de orden P sería:

$$Y_t = \varphi_L Y_{t-L} + \varphi_{2L} Y_{t-2L} + \dots + \varphi_{PL} Y_{t-PL} + a_t$$

Se puede demostrar que la FAS se extingue en los retrasos $L, 2L, 3L, \dots, etc.$, mientras que la FAP tiene autocorrelaciones significativas (espigas) en los retrasos $L, 2L, \dots, PL$.

De forma similar, un modelo de media móvil estacional de orden Q sería:

$$Y_t = a_t - \theta_L a_{t-L} + \theta_{2L} a_{t-2L} + \dots + \theta_{PL} a_{t-PL}$$

En este modelo la FAS tiene autocorrelaciones significativas (espigas) en los retrasos $L, 2L, \dots, QL$ y autocorrelaciones no significativas en los demás. La FAP se extingue en los retrasos de tiempo $L, 2L, 3L, \dots, etc$ (Bowerman, O'Connell, Koehler 2007).

Estimación, Evaluación y Pronóstico: Las tres etapas finales se efectúan de la misma manera que el visto para series no estacionales. Únicamente en el estadístico Ljung-Box, se calcula n' mediante la fórmula:

$$n' = n - (d + LD)$$

Donde:

d: grado de diferenciación regular

D: grado de diferenciación estacional

L: periodo estacional

4.5 Ventajas y desventajas de la modelación ARIMA

La modelación ARIMA presenta importantes ventajas frente a la modelación clásica. La principal de ellas es el gran grado de ajuste que proporciona a la mayoría de las series de tiempo. A diferencia de la modelación clásica en donde se ajusta una serie a un modelo matemático ya establecido, los modelos ARIMA se ajustan a una serie en particular.

Utilizando la metáfora, como lenguaje, la modelación ARIMA viene a ser como la confección de un traje que debe ser ajustado a una serie de tiempo particular. De acuerdo a esta analogía, el analista de series de tiempo utiliza instrumentos (los modelos estadísticos), materiales (los datos) y planes (estrategias de construcción del modelo) para la definitiva especificación del modelo.

Otras ventajas de los modelos ARIMA sobre los métodos clásicos de tratamiento de series de tiempo son:

- Los conceptos que se utilizan para la modelación ARIMA, se derivan de sólidas teorías de la probabilidad clásica y de la estadística matemática
- Los modelos ARIMA son una familia de modelos, no simplemente un único modelo
- Box y Jenkins desarrollaron una completa estrategia que sirve de guía para escoger un apropiado modelo dentro de esta gama de modelos
- Un apropiado modelo ARIMA produce óptimas predicciones

Por otro lado, dentro de las dificultades que se pueden presentar en la modelación ARIMA, se encuentra el problema que supone para el analista, recién iniciado en la teoría y la ejecución de la metodología Box-Jenkins, la correcta elección de un modelo adecuado en los primeros intentos. Es por ello que la modelación de un proceso ARIMA ha sido referida por algunos autores como un arte. Quizá sería preferible utilizar el término habilidad, debido a que las técnicas básicas en la modelación de los procesos ARIMA son fácilmente accesibles y ajustables tras un aprendizaje relativamente mediano.

Una desventaja más es que, aunque se utilizan programas de cómputo en el cálculo de los coeficientes de un modelo ARIMA probable, la aplicación de la metodología Box-Jenkins sigue siendo una labor manual, es decir, requiere ser ejecutada por el analista. Hay que recordar que no cualquier modelo propuesto proporciona necesariamente el ajuste adecuado.