



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis de Pruebas de Interferencia en
Yacimientos Naturalmente Fracturados con
Geometría Fractal

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN INGENIERÍA PETROLERA

ÁREA YACIMIENTOS

PRESENTA

Claudia León Villeda

Tutor

Dr. Rodolfo G. Camacho Velázquez

2010



Jurado Asignado:

Presidente	Dr. Fernando Samaniego Verduzco
Secretario	Dr. Jesús Rivera Rodríguez
Vocal	Dr. Rodolfo G. Camacho Velázquez
1er Suplente	M.en I.Gorgonio Fuentes Cruz
2do Suplente	M.en I. Mario Vásquez Cruz

Lugar donde se realizó la tesis
Cd. Universitaria, D.F. , México

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Rodolfo G. Camacho Velázquez

AGRADECIMIENTOS

A mis Padres, que siempre han creído en mí.

A mis Hermanos: Enri, Sandy, Caro y Alfre, que han hecho muy enriquecedor el viaje.

A Enrique por su amistad.

A Noel por su apoyo, por las discusiones, por su compañía y por mostrarme las bondades de Mathematica.

A mis Compañeros y Amigos de Generación: Ken, Gerard Oscar y Juan, por hacer agradable la estancia.

A mis Maestros: por su paciencia y por todo lo que aprendí de ellos.

ÍNDICE

	Pag.
Agradecimientos	I
Resumen	li
Abstract	lii
Introducción	lv

CONTENIDO.

CAPÍTULO 1. PRUEBAS DE INTERFERENCIA ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

- 1.1 ANTECEDENTES..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 1.2 INTERFERENCIA ENTRE POZOS PRODUCTORES..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 1.3 ESTIMACIÓN DEL COCIENTE ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 1.4 GENERALIZACIÓN PARA “N” POZOS..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 1.5 GEOMETRÍA FRACTAL..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

CAPÍTULO 2. MÉTODO DE IMÁGENES, FALLAS Y YACIMIENTO CERRADO.. ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

- 2.1 INTRODUCCIÓN ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 2.2 HISTORIA ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 2.3 FRONTERAS LINEALES..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 2.4 FRONTERAS PARALELAS..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 2.5 GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE IMÁGENES..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 2.6 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE IMÁGENES..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

CAPÍTULO 3. YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS (YNF) ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

- 3.1 INTRODUCCIÓN ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 3.2 MODELOS DE YNF ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

CAPÍTULO 4. FRACTALES..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

- 4.1 ANTECEDENTES..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 4.2 DIFUSIÓN EN MEDIOS POROSOS. YACIMIENTOS..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 4.3 TRANSPORTE EN FRACTALES ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 4.4 PRUEBAS DE PRESIÓN. MODELOS CON GEOMETRÍA FRACTAL..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 4.5 MODELO DE BARKER¹⁹..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
- 4.6 PRUEBAS DE INTERFERENCIA EN GEOMETRÍA FRACTAL..... ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.

ÍNDICE

<u>CAPÍTULO 5. DESARROLLO DEL MODELO SEMIANALÍTICO</u>	<u>¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.</u>
5.1 INTRODUCCIÓN	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
OBJETIVO GENERAL	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
OBJETIVOS PARTICULARES.....	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
5.2 DESARROLLO DEL MODELO SEMIANALÍTICO	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
<u>CAPÍTULO 6. COMPROBACIÓN DEL MODELO SEMIANALÍTICO .</u>	<u>¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.</u>
6.1 YACIMIENTO CON UNA FALLA Y UN POZO PRODUCTOR.....	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
6.2 POZO PRODUCTOR ENTRE FALLAS PARALELAS	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
6.3 YACIMIENTO CERRADO CON UN POZO PRODUCTOR.....	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
6.4 PRUEBAS DE INTERFERENCIA	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
<u>CAPÍTULO 7. APLICACIÓN</u>	<u>¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.</u>
7.1 CAMPO JUJO-TECOMINOACÁN	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
7.2 DETERMINACIÓN DEL COMPORTAMIENTO FRACTAL DEL YACIMIENTO.	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
7.3 DATOS DE LA PRUEBA DE INTERFERENCIA	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
<u>CAPÍTULO 8. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....</u>	<u>¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.</u>
<u>CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES.....</u>	<u>¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.</u>
<u>NOMENCLATURA.....</u>	<u>¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.</u>
<u>REFERENCIAS</u>	<u>¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.</u>
<u>APÉNDICE</u>	<u>79</u>

ÍNDICE

FIGURAS

- Figura 1.1 Respuesta de presión en una prueba de interferencia. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 1.2. Representación del caso más sencillo de interferencia. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 1.3. Solución de la ec. 1.1 en variables adimensionales... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 1.4. Interferencia entre dos pozos productores..... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 1.5. Comportamiento del gasto en una prueba de interferencia entre dos pozos.
pozos..... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 1.6. Un comportamiento típico para una prueba de interferencia entre dos pozos,
gráfica p_w vs $(t+\Delta t)/\Delta t$ en escala semilogarítmica **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 2.1. Pozo cerca de una falla sellante..... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 2.2. Caso con fallas paralelas..... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 2.3. Método de imágenes para el caso de dos fallas paralelas. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 2.4. Pozo en un yacimiento cerrado. Representación por el método de imágenes. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 3.1. Yacimiento naturalmente fracturado. Warren y Root⁶. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 3.2. Yacimiento fracturado idealizado. Warren y Root... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 3.3. Esquema del medio poroso según Chang y Yortsos²⁰. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.1. Ejemplo de un objeto fractal. Hoja de helecho²² **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.2 Alfombra de Sierpinski²¹ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.3. El escalamiento de una carpeta de Sierpinski²¹ A=1 A=3. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.4. Relación lineal entre el logaritmo(área) vs logaritmo(longitud). **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.5. (a) Un patrón de “agregación por difusión limitada”(DLA) y (b) un patrón
producido por la inyección de aire en un líquido epóxico, en un medio poroso
bidimensional de esferas de vidrio de 1.6mm de diámetro²². **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.6 a). Esquema del medio poroso, b) flujo a través de un diferencial de volumen²⁰. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.7. Gráfica de p_D vs. t_D con $d=0.6, 0.739, 0.905, 0.995$ para los casos A,B,C y D
respectivamente **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.8. Gráfica de $dp_D / d(\ln t_D)$ vs t_D , con $d=0.6, 0.739, 0.905, 0.995$ para los casos
A,B,C y D respectivamente **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.9. Gráfica de la caída de presión para un sistema matriz fractura. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.10. Gráfica de $dp_D / d(\ln t_D)$ para un sistema matriz fractura. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 4.11. Geometrías de flujo para dimensiones enteras. a) Flujo en una dimensión a
partir de un plano $d=1$; b) 2 dimensiones a partir de un cilindro $d=2$; c) flujo en 3
dimensiones desde una esfera $d=3$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 5.1. Representación del sistema de pozos imagen para un yacimiento cerrado con un
pozo productor..... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.1. Gráfica de Δp vs. x , para la representación de un pozo cerca de una falla,
empleando las ecuaciones (2.1) y (5.4). El pozo está colocado en $(50,50)$ y la falla
ubicada en $x=0$ **¡Error! Marcador no definido.**

ÍNDICE

- Figura 6.2. Gráfica de dp vs. t , representando el efecto de una falla cerca de un pozo. Con la ecuación de línea fuente y la ecuación de Barker. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.3. Gráfica de dp vs. t , para el caso de fallas paralelas utilizando la aproximación de Gringarten, el método de imágenes para el modelo homogéneo y el método de imágenes, modelo de Barker con $d=2$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.4. Gráfica de dp vs. t , para el caso de fallas paralelas utilizando la aproximación de Gringarten, el método de imágenes para el modelo homogéneo y el método de imágenes, modelo de Barker con $d=2$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.5. Gráfica de dp vs. x , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=2$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.6. Gráfica 3D de dp en función de la posición x,y , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=2$. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.7. Gráfica de dp vs. t , para el caso de fallas paralelas utilizando la aproximación de Gringarten, el método de imágenes para el modelo homogéneo y el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.8$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.8. Gráfica de dp vs. x , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.8$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.9. Gráfica de dp vs. x , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.5$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.10. Gráfica 3D de dp en función de la posición x,y , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.5$. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.11. Gráfica 3D de dp en función de la posición x,y , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.5$. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.12. Gráfica de dp vs. x , para el caso de yacimiento cerrado, utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.7$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.13. Gráfica 3D de dp en función de la posición x,y , para el caso de yacimiento cerrado, utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.7$. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.14. Gráfica de dp vs. t , para el caso de un yacimiento cerrado utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.5$, empleando 240 pozos imagen. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.15. Gráfica de dp vs. x , para el caso de yacimiento cerrado, utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.5$ **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.16. Gráfica 3D de dp en función de la posición x,y , para el caso de yacimiento cerrado utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.5$. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.17. Gráfica 3D de dp en función de la posición x,y , para el caso de yacimiento cerrado utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $d=1.5$. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.18. Gráfica de $\log\text{-}\log dp$ vs. t , para el caso de yacimiento cerrado, modelo de Barker con diferentes valores de la dimensión δ ; caída de presión en $x=51$ pies. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.19. Gráfica de $\log\text{-}\log dp$ vs. t , para el caso de yacimiento cerrado, modelo de Barker con diferentes valores de la dimensión δ ; caída de presión en $x=51$ pies. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.20. Gráfica de dp vs. x , para el caso de yacimiento cerrado, utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con la dimensión d variando desde 1.2-2. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.21. Gráfica de dp/dx vs. x para un yacimiento cerrado y $d=1.6$. **¡Error! Marcador no definido.**

ÍNDICE

- Figura 6.22. Gráfica de p vs t , para el ejemplo de una prueba de interferencia, para un yacimiento con geometría euclidiana, dimensión 2. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.23. Gráfica de p vs t , para el ejemplo de una prueba de interferencia, para diferentes dimensiones fractales. Las curvas con línea punteada son para la presión de incremento extrapolada..... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.24. Gráfica de p vs t_{IB} , para el ejemplo de una prueba de interferencia, para diferentes dimensiones fractales, las curvas extrapoladas de presión de incremento son las líneas punteadas..... **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.25. Gráfica de p_D vs t_D , para una prueba de interferencia con un tiempo de producción tanto del pozo observador como del pozo productor, previo al inicio de la prueba. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 6.26. Gráfica de p_D vs t_{ID} , para una prueba de interferencia con un tiempo de producción tanto del pozo observador como del pozo productor, previo al inicio de la prueba. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 7.1. Mapa de la estructura del Campo Jujo-Tecominoacán³².**¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 7.2. Canales de alta permeabilidad del Campo Jujo-Tecominoacán³².**¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 7.3. Zonas de Presión del Campo Jujo-Tecominoacán³².**¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 7.4. Mapa de la posición de los pozos que intervinieron en la prueba.**¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 7.5. Datos de *presión vs tiempo* registrados en el pozo B para la prueba de interferencia durante la cual el pozo A inyectó agua dulce. **¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 7.6. Gráfica de *presión vs tiempo* posterior al cierre, donde se compara la respuesta observada (línea azul) con curvas de diferentes dimensiones fractales.**¡Error! Marcador no definido.**
- Figura 7.7. Gráfica de *presión vs tiempo* posterior al cierre, donde se compara la respuesta observada con curvas con diferentes m y una dimensión fractal $d=1.9$.**¡Error! Marcador no definido.**

Resumen

Los Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF) contienen más del 60 % de las reservas remanentes de hidrocarburos a nivel mundial. En México se tienen grandes reservas en YNF.

Las fracturas naturales son heterogeneidades que se presentan en un rango amplio de escalas espaciales. Generalmente estos yacimientos se modelan en una Geometría Euclidiana, con sistemas de fracturas homogéneas que trabajan bien para casos específicos.

Sin embargo, la presencia de fracturas a diferentes escalas y con distribución no uniforme, presenta factores importantes de incertidumbre en la construcción del modelo del yacimiento. La geometría fractal es una de las mejores formas para tomar en cuenta heterogeneidades presentes en el medio poroso a diferentes escalas y su distribución no uniforme en el espacio.

Hasta ahora los modelos en geometría fractal prácticamente sólo se han utilizado para pruebas de presión en coordenadas radiales, por tanto el primer objetivo de este trabajo es crear un modelo semianalítico para generalizar el uso de las ecuaciones desarrolladas en geometría fractal radial a coordenadas rectangulares. El segundo objetivo, es aplicar este modelo al análisis de pruebas de interferencia, tanto de datos sintéticos como de campo.

Se presentan las soluciones de presión en cualquier punto, para el caso de un yacimiento con falla lateral, con fallas paralelas y para yacimiento cerrado, comparándolos de forma inicial con los modelos euclidianos respectivos, de tal forma, que se verificó el funcionamiento adecuado del modelo propuesto.

Se presenta un caso de un campo de México analizado con el modelo propuesto en este trabajo, conociendo previamente que el yacimiento tiene comportamiento fractal.

Abstract

Naturally Fractured Reservoirs (NFR) contain over 60% of hydrocarbon reserves in the world. Mexico has a large reserve in NFR.

Natural fractures are heterogeneities that occur in a wide range of spatial scales. Generally NFR are modeled using Euclidean geometry with homogeneous fracture systems that work well for specific cases.

However, the presence of fractures at different scales and non-uniform distribution of fractures, presents important factors of uncertainty in reservoir model building. Fractal geometry is one of the best ways to take into account heterogeneities present in the porous medium at different scales and their non-uniform distribution in space.

So far the models in fractal geometry has been used almost exclusively for well tests in radial coordinates, so the first objective of this work is to create a semi-analytical model to generalize the use of fractal equations developed in radial coordinates to rectangular coordinates. The second objective is to apply this model to the analysis of interference tests, with both synthetic and field data.

It presents the pressure solutions at any point, for the case of a reservoir with a lateral fault, with parallel faults and reservoir closed on initial comparison with the respective Euclidean models, so that we could verify the proper functioning of the proposed model.

A field case of Mexico is analyzed using the model proposed in this paper, knowing beforehand that the site has fractal behavior.

Introducción

Los Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF) tienen una gran importancia en la producción de hidrocarburos en México, en ellos se tienen las más grandes reservas conocidas hasta el momento. Es por ello que caracterizarlos es fundamental para explotarlos de forma eficiente y rentable.

Las fracturas naturales son heterogeneidades que se presentan en un rango amplio de escalas espaciales. Generalmente los YNF son modelados en geometría euclidiana con sistemas de fracturas homogéneas que aunque trabajan bien para casos particulares dejan sin explicación satisfactoria el comportamiento de otros. La geometría fractal permite modelar más adecuadamente este tipo de yacimientos considerando las heterogeneidades presentes en la formación a diferentes escalas y su distribución no uniforme en el espacio.

El estudio de los YNF en geometría fractal se ha enfocado principalmente en el comportamiento de presión en el pozo, utilizando coordenadas radiales para su modelaje. Deseando expandir el campo de aplicación, el primer objetivo del presente trabajo fue crear un modelo de flujo en medios porosos en coordenadas rectangulares y geometría fractal, sin embargo, se obtuvo resultados poco satisfactorios. En el apéndice se encuentra el desarrollo del modelo analítico que fue desarrollado para este trabajo, así como también los resultados de un simulador creado a partir de la ecuación diferencial parcial obtenida.

Debido a lo anterior se propuso un modelo semianalítico utilizando el método de imágenes y superposición en tiempo y espacio.

Este trabajo inicia con una explicación básica de las pruebas de interferencia, el método de imágenes y su aplicación a diferentes heterogeneidades del yacimiento. Posteriormente se describe al YNF y se mencionan los modelos más comúnmente usados en geometría euclidiana.

El siguiente capítulo habla sobre los objetos fractales y su característica fundamental la dimensión fractal y se explica en detalle el modelo que se utiliza como base para este trabajo.

En el capítulo 5 se desarrolla el modelo analítico y se presentan las expresiones con las cuales se hicieron las comprobaciones. Así en el capítulo 6 se muestran los resultados para diferentes configuraciones, un pozo cerca de una falla, entre fallas paralelas, y el caso de un yacimiento rectangular cerrado para evaluar el comportamiento del modelo propuesto. Se realizaron las comparaciones con expresiones analíticas y aproximaciones.

Además se presentan las expresiones para pruebas de interferencia y gráficas en variables adimensionales para observar el comportamiento con dimensiones fractales diferentes. También se presentan gráficas que usualmente son utilizadas como herramientas de análisis, mostrando con ello la poca utilidad que tienen al variar la dimensión fractal.

Se presentan un caso de campo que fue modelado parcialmente debido a que no se contó con la información suficiente para el adecuado análisis de los datos.

Finalmente se presentan el análisis de los resultados y las conclusiones.

Capítulo 1

Pruebas de Interferencia

La obtención de la respuesta de presión en un pozo observador debido a la producción o inyección en un pozo vecino.

1.1 Antecedentes.

Una prueba de interferencia consiste básicamente en inyectar o producir un fluido en al menos un pozo (pozo activo), mientras se observa la respuesta de presión en uno o más pozos vecinos (pozos observadores)ⁱ. El nombre de pruebas de interferencia proviene del hecho de que la caída de presión causada por el pozo activo “interfiere” con la presión medida en los pozos observadores.

Las pruebas de interferencia se crearon con dos objetivos principales: determinar si existe comunicación hidráulica entre dos o más pozos y si dicha comunicación existe, estimar la permeabilidad, k , y el producto de la compresibilidad y la porosidad de la formación $(\phi c)_t$ en la vecindad de los pozos probados. Además, se pueden contestar las preguntas siguientes: ¿La porción de un yacimiento en la que se encuentra un pozo, está siendo drenada por pozos vecinos?, ¿qué tan rápido ocurre lo anterior?; otro uso está dirigido a es determinar la dirección de patrones de flujo en la zona de estudio. Esto es posible al abrir selectivamente pozos alrededor de un pozo cerradoⁱⁱ.

En general los modelos matemáticos desarrollados para pruebas de interferencia consideran las siguientes suposiciones:

1. flujo ligeramente compresible de un fluido
2. medio poroso homogéneo e isótropo.
3. la ley de Darcy es aplicable
4. efectos gravitacionales despreciables
5. penetración total de los pozos en la formación.

El primer desarrollo matemático fue presentado por Theisⁱⁱⁱ en 1935, en el cual presenta la solución al problema de línea fuente (considerando los pozos con radio despreciable), en un medio poroso finito, análogamente con el problema de transferencia de calor y uso del principio de superposición en tiempo para simular un periodo de flujo finito.

Posteriormente, Jacob^{iv} en 1941, es el primero en utilizar el término prueba de interferencia para describir el cambio de presión en un pozo debido a cambios en el flujo de otros pozos.

En la figura 1.1, un pozo empieza a producir en un tiempo 0 a gasto constante. La presión en el pozo observador, a una distancia r , empieza a responder después de un cierto tiempo de retraso (relacionado con el tiempo en que la perturbación de presión alcanza al pozo observador. La presión en el pozo activo empieza a decaer inmediatamente. La magnitud y el tiempo de desviación en la respuesta de presión en el pozo observador dependen de las propiedades de la roca y de las del fluido en la vecindad del pozo activo y del observador.

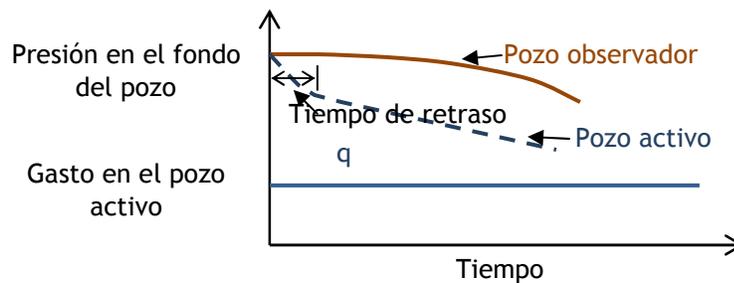


Figura 1.1 Respuesta de presión en una prueba de interferencia.

Considerando coordenadas radiales y las suposiciones anteriores, la función integral exponencial (Ei) que da solución a la ecuación de difusividad y describe los cambios de presión en un pozo observador como una función del tiempo en un yacimiento infinito, ecuación (1.1) y figura 1.2.

$$p_i - p_{r,t} = -\frac{qB\mu}{4\pi kh} Ei\left(-\frac{\phi\mu c_t r^2}{4kt}\right) \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) considera que el factor de daño del pozo activo no afecta la caída de presión en el pozo observador. Asimismo, el efecto del almacenamiento en el pozo se considera despreciable

tanto en el pozo activo como en el observador, cuando este modelo se utiliza en pruebas de interferencia. Jargon^v en 1976, demostró que el considerar las suposiciones anteriores puede acarrear errores en el análisis para ciertos casos; subestima la transmisibilidad (kh/μ) y sobreestimando el producto (ϕh).

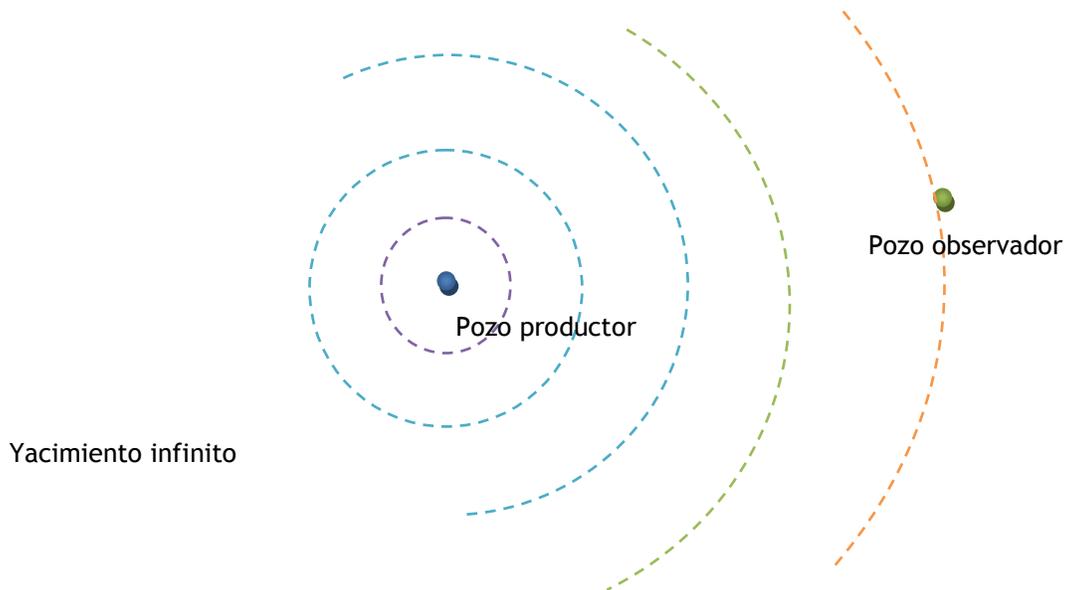


Figura 1.2. Representación del caso más sencillo de interferencia

Una técnica conveniente para el análisis de pruebas de interferencia es el uso de curvas tipo; en la figura 1.3, se presenta una curva tipo presentada por Earlougher; que es simplemente la función $Ei(x)$, expresada como una función de su argumento.

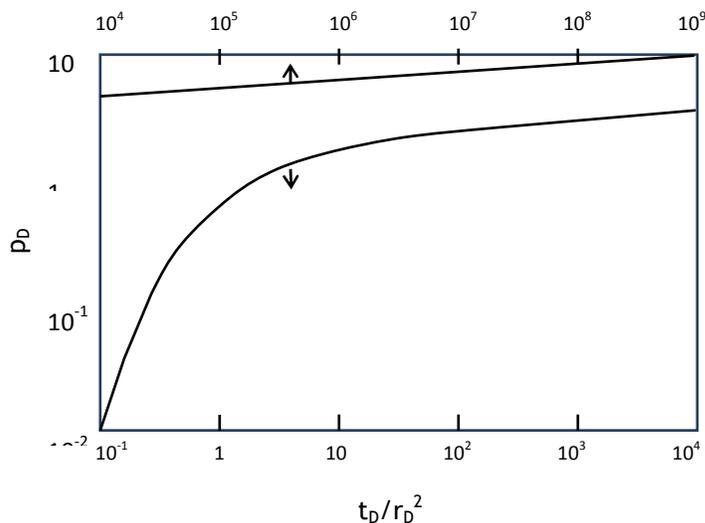


Figura 1.3. Solución de la ec. 1.1 en variables adimensionales.

Reescribiendo la ecuación 1.1 en variables adimensionales, tenemos:

$$p_D = -\frac{1}{2} Ei \left(-\frac{r_D^2}{4t_D} \right), \quad (1.2)$$

Donde

$$p_D = \frac{(p_i - p_r)kh}{141.2qB\mu}, \quad (1.3)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad (1.4)$$

$$t_D = \frac{0.000264kt}{\phi\mu c_t r_w^2}. \quad (1.5)$$

El estudio de los yacimientos heterogéneos, se benefició cuando el trabajo de Warren y Root^{vi} simplificó el análisis al considerar que un yacimiento contiene dos sistemas con porosidad y permeabilidad diferentes, llamado sistemas de doble porosidad, lo que permitió describir la distribución de presiones en términos de dos parámetros solamente, el parámetro de flujo interporoso λ (matriz-fractura) y la relación de almacenamiento ω . Kazemi^{vii} extendió el trabajo de Warren y Root para incluir la presencia de flujo transitorio entre matriz y fracturas. En otro estudio de Grasman y Grader^{viii} se presentó un método analítico para determinar las propiedades de un yacimiento con doble porosidad, a partir de datos de una prueba de interferencia en un yacimiento infinito produciendo a presión constante.

Hasta ese momento se habían realizado muchos estudios en sistemas radiales infinitos los cuales se usan para interpretar problemas de flujo en estado transitorio. Earlougher y Ramey^{ix} posteriormente presentaron la solución de efectos de interferencia en un sistema cerrado. Estas soluciones fueron presentadas en forma tabular de presiones adimensionales y tiempos adimensionales para varias formas de yacimientos y puntos de observación de presión. Esta solución se basa en resultados que obtuvieron Matthews et al.^x utilizando la técnica de superposición para un sistema con geometría cuadrada, ecuación (1.6a).

$$p_D(x_D, y_D, t_{DA}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} Ei \left(-\frac{\alpha_{iD}^2}{4t_{DA}} \right), \quad (1.6a)$$

con p_D teniendo la misma definición anterior y

$$a_{iD} = \frac{a_i}{\sqrt{A}} \quad (1.6b)$$

$$t_{DA} = \frac{kt}{\phi\mu c_t A} \quad (1.6c)$$

donde a_i es la distancia desde el i -ésimo pozo al punto (x_D, y_D) y A el área de drene del sistema cerrado.

Al usar nuevamente el principio de superposición, Earlougher y Ramey encontraron soluciones para sistemas rectangulares las cuales también se presentaron en forma tabular.

Papadópulos en 1965 desarrolló soluciones para pruebas de interferencia en yacimientos homogéneos y anisótropos, y Ramey en 1970 las adaptó para problemas de ingeniería petrolera.

En general las pruebas de interferencia pueden proporcionar la siguiente información sobre el yacimiento^{xi}:

- Confirmar la comunicación entre zonas del yacimiento
- Evidencias sobre la uniformidad de la extracción de fluidos y la presencia de heterogeneidades entre capas.
- Identificación de las contribuciones por espesor
- Si la consideración de yacimiento homogéneo es razonablemente cierta, entonces la unidad de capacidad de almacenamiento del yacimiento es el producto $(\mu\phi c_t)$.

1.2 Interferencia entre pozos productores

Si existe flujo en ambos pozos –‘pozo productor y observador al mismo tiempo’- la situación es más compleja. En este caso la respuesta analítica puede ser superpuesta para obtener la respuesta esperada. Suponiendo la uniformidad de un yacimiento horizontal infinito que conteniendo una fase líquida de baja compresibilidad la ecuación es siguiente:

$$p_i - p_{wfA} = \frac{q_A \mu}{4\pi k h} \left[-Ei \left(\frac{\phi \mu c_t r_w^2}{4k t_A} \right) - \frac{q_B}{q_A} Ei \left(\frac{\phi \mu c_t d^2}{4k t_B} \right) \right], \quad (1.7)$$

En la figura 1.4, se esquematiza el sistema considerado durante una prueba de interferencia.

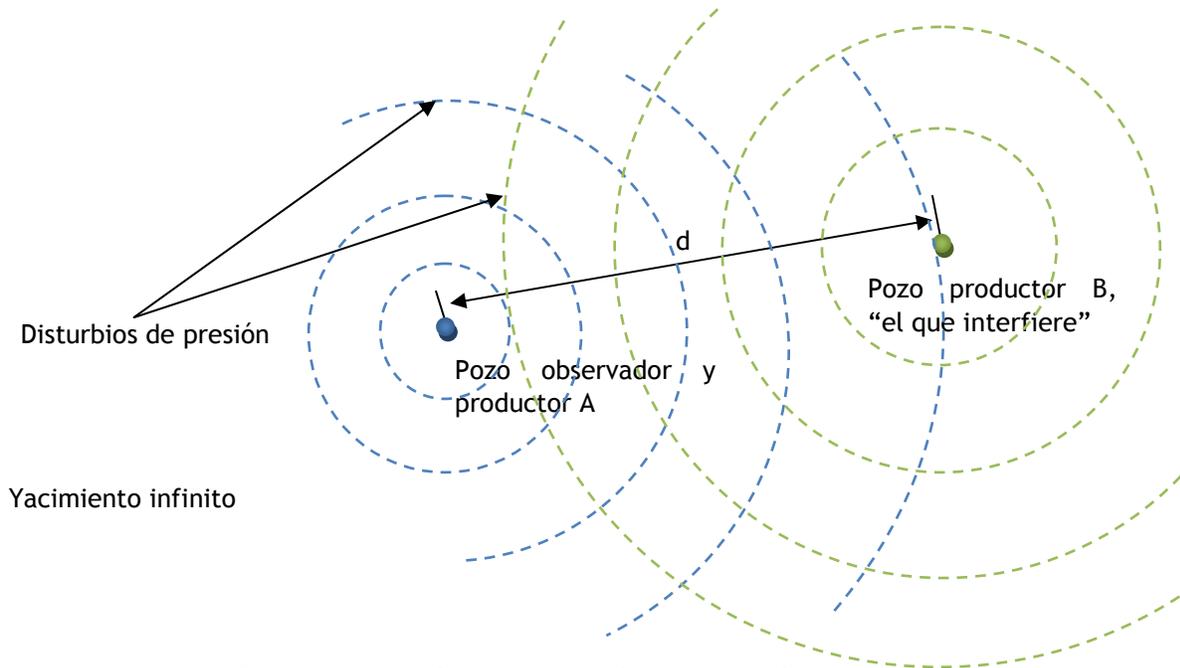


Figura 1.4. Interferencia entre dos pozos productores

La ecuación (1.7) representa la superposición tanto en tiempo como en espacio; donde $[q_A, t_A]$ y $[q_B, t_B]$, son los gastos y tiempos de producción de los pozos A y B respectivamente.

En el caso de pozos cerrados cuando éstos tienen historia de producción antes de la prueba, la historia de gastos debe ser considerada cuidadosamente. En el caso siguiente, el pozo A (el observador), ha producido a un gasto q_A por un tiempo t_A , y se ha cerrado. El tiempo de cierre se designa por Δt . El pozo B, el que interfiere, ha producido a un gasto q_B por un tiempo t_B antes del cierre del pozo A, figura 1.5 y ecuación (1.8a y b), la primera en la forma de línea fuente y la segunda su aproximación logarítmica:

$$P_i - P_{ws} = \frac{q_A \mu}{4\pi k h} \left[-Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t r_w^2}{4k(t_A + \Delta t)} \right) + Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t r_w^2}{4k \Delta t} \right) \right] + \frac{q_B \mu}{4\pi k h} \left[-Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d^2}{4k(t_B + \Delta t)} \right) + Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d^2}{4k(t_B)} \right) \right], \quad (1.8a)$$

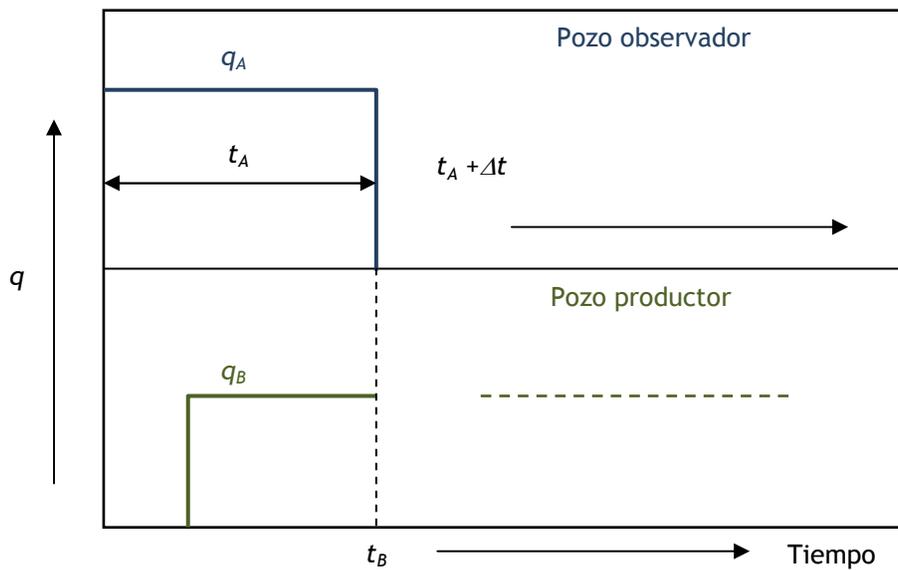


Figura 1.5. Comportamiento del gasto en una prueba de interferencia entre dos pozos.

$$P_t - P_{ws} = \frac{q_A \mu}{4\pi k h} \left[\ln \frac{t_A + \Delta t}{\Delta t} \right] + \frac{q_B \mu}{4\pi k h} \left[-Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d^2}{4k(t_B + \Delta t)} \right) + Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d^2}{4k(t_B)} \right) \right] \quad (1.8b)$$

1.3 Estimación del cociente $\phi \mu c_t / k$

Para estimar este cociente, existen varios métodos, algunos descritos a continuación.

Prueba y Error

Se prueban una serie de valores de $\phi \mu c_t / k$ y se calculan las caídas de presión correspondientes; los valores obtenidos son entonces mostrados en una gráfica de caída de presión vs $\phi \mu c_t / k$, y el valor adecuado se puede encontrar por interpolación.

Uso del valor Máximo Observado.

Si hay un pozo definiendo un máximo en la gráfica de Horner^{xii} (fig. 1.6), esto puede ser usado como diagnóstico. La derivada con respecto al tiempo de la ecuación de incremento de presión, ecuación (1.8b), da como resultado la expresión (1.9).

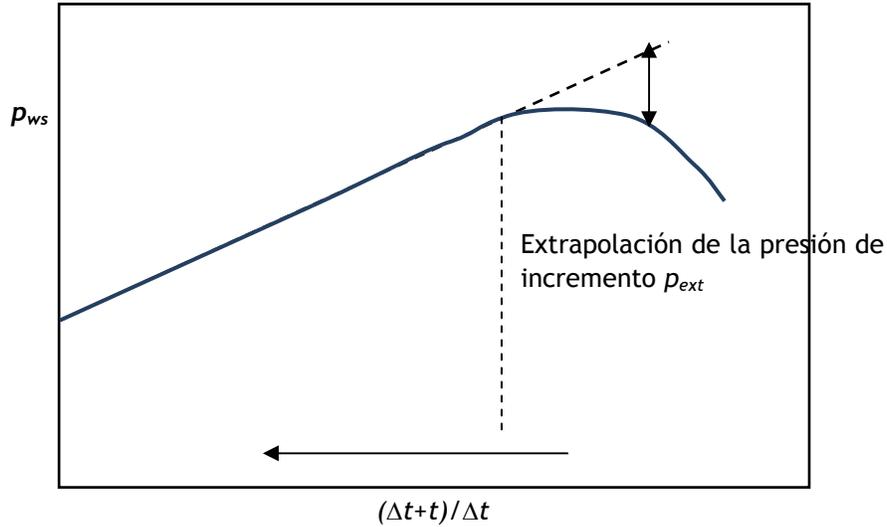


Figura 1.6. Un comportamiento típico para una prueba de interferencia entre dos pozos, gráfica p_{ws} vs $(t+\Delta t)/\Delta t$ en escala semilogarítmica

$$\frac{dp_{ws}}{dt} = -m_A \frac{t_A}{\Delta t(t_A + \Delta t)} + m_B \left[\frac{\exp\left(-\frac{\phi\mu c_t d^2}{4k(t_B + \Delta t)}\right)}{(t_B + \Delta t)} - \frac{\exp\left(-\frac{\phi\mu c_t d^2}{4kt_B}\right)}{t_B} \right] \quad (1.9)$$

donde $m_i = \frac{q_i \mu}{4\pi k h}$.

Haciendo el lado derecho de la ecuación (1.9) igual a cero al evaluarse en el tiempo t correspondiente al valor máximo, se obtiene el valor de $\phi\mu c_t/k$ buscado.

Considerando la figura 1.6 puede observarse que a Δt pequeños la diferencia entre la extrapolación de la presión de incremento p_{ext} y la presión observada p_{obs} se incrementa, es por ellos que se puede usar la siguiente expresión:

$$p_{ext} - p_{obs} = m_A \frac{q_B}{q_A} \left[-Ei\left(-\frac{\phi\mu c_t d^2}{4k(t_B + \Delta t)}\right) + Ei\left(-\frac{\phi\mu c_t d^2}{4kt_B}\right) \right] \quad (1.10)$$

1.4 Generalización para “n” pozos.

Cuando se tienen “n” pozos produciendo en un yacimiento con un pozo observador cerrado para una prueba incremento de presión, se puede escribir una ecuación generalizada para condiciones transitorias, ecuaciones (1.11a y b).

$$p_{ws} = p^* - \frac{q_A \mu}{4\pi k h} \left[-Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t r_w^2}{4k(t_A + \Delta t)} \right) + Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t r_w^2}{4k\Delta t} \right) \right] + \frac{q_A \mu}{4\pi k h} \sum_{i=2}^n \frac{q_i}{q_A} \left[Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d_i^2}{4k(t_i + \Delta t)} \right) - Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d_i^2}{4kt_i} \right) \right], \quad (1.11a)$$

$$p_{ws} = p^* - \frac{q_A \mu}{4\pi k h} \left[\ln \frac{t + \Delta t}{\Delta t} \right] + \frac{q_A \mu}{4\pi k h} \sum_{i=2}^n \frac{q_i}{q_A} \left[Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d_i^2}{4k(t_i + \Delta t)} \right) - Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d_i^2}{4kt_i} \right) \right], \quad (1.11b)$$

Es poco probable que las condiciones en el yacimiento sean transitorias para un tiempo determinado cuando un número de pozos están produciendo. La situación más factible es que se encuentre en estado pseudo-estacionario, probablemente con perturbaciones transitorias debido a nuevos pozos o interrupción en la producción, o pozos cerrados por inspección.

La generalización de la expresión (1.10) es:

$$p_{ext} - p_{obs} = m_A \left[\sum_{j=1}^{nw} \frac{q_j}{q_A} \left\{ -Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d^2}{4k(t_j + \Delta t)} \right) + Ei \left(-\frac{\phi \mu c_t d^2}{4kt_j} \right) \right\} \right] \quad (1.12)$$

1.5 Geometría fractal

Lo anterior fue desarrollado en geometría Euclidiana, Chang y Yortsos introdujeron en 1990 un modelo fractal para el análisis de pruebas de presión; el cual se deriva de la consideración básica de sistemas de doble porosidad, matriz y red de fracturas, pero considerando que la red de

fracturas es un objeto fractal, inmerso en un medio Euclidiano (matriz). Kristanto et al.^{xiii} basándose en el trabajo de Chang y Yortsos y utilizando la técnica de Curvas Tipo analizan pruebas de interferencia, aunque ellos simplificaron el análisis al hacer uso de variables convencionales. Este tema se tratará con mayor detalle en los siguientes capítulos.

Capítulo 2

Método de Imágenes, Fallas y Yacimiento Cerrado

Herramienta que permite obtener la respuesta de presión para sistemas afectados por diferentes eventos geológicos.

2.1 Introducción

Inicialmente el proyecto de tesis consistió en crear un modelo analítico para un yacimiento naturalmente fracturado con geometría fractal, rectangular con n pozos. Para el modelo desarrollado, obteniéndose una ecuación diferencial parcial (e.d.p.) y su solución; sin embargo, los resultados no fueron los esperados; se creó un simulador para evaluar el comportamiento de la ecuación diferencial parcial y se observó, con ello, que la e.d.p. no representaba adecuadamente al fenómeno físico de interés. Tanto el desarrollo analítico como los resultados de la simulación se detallan en el Apéndice.

Debido a ello, se pensó en un modelo semianalítico que nos permitiera utilizar las expresiones analíticas fractales obtenidas en coordenadas radiales para crear el modelo en coordenadas rectangulares.

Para espacios euclidianos existe una amplia gama de modelos semianalíticos para representar eventos geológicos y yacimientos cerrados; algunos de ellos se basan en el método de imágenes. Hasta el momento, no se ha comprobado la aplicación del método de imágenes a ecuaciones fractales. En este capítulo se describe el método de imágenes y su aplicación, para en los siguientes capítulos crear y comprobar las expresiones análogas para las ecuaciones fractales.

2.2 Historia

La continuidad de un yacimiento petrolero puede interrumpirse por uno o más de los eventos geológicos siguientes.

- Barreras al flujo (fallas, fracturas)
- Sellos parciales al flujo
- Fronteras a presión constante.

Además pueden existir cambios laterales de facies que causan alteraciones drásticas en las propiedades de transporte de la roca.

El método de imágenes es extensamente usado para interpretar la respuesta en presión de sistemas complejos, como los mencionados anteriormente.

2.3 Fronteras Lineales

El problema de un pozo produciendo a cierta distancia de una falla puede resolverse por medio del método de imágenes, Horner en 1951, introdujo este concepto. Este caso se muestra gráficamente en la figura 2.1. Se considera un pozo produciendo en un yacimiento semi-infinito limitado por una falla lineal; para representar lo anterior, se consideran dos pozos similares produciendo en un yacimiento infinito, donde la falla ha sido removida y el segundo pozo se coloca de tal forma que tiene el mismo efecto que la falla.

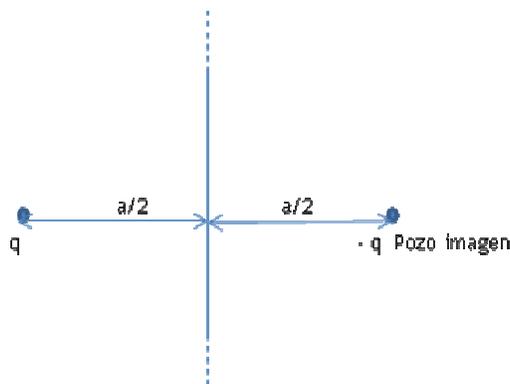


Figura 2.1. Pozo cerca de una falla sellante.

La expresión para la caída de presión en el pozo está dada por la ecuación (2.1):

$$\Delta p_{wf} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \left\{ \frac{1}{2} \left[-Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t r_w^2}{4kt} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[-Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t a^2}{4kt} \right) \right] \right\} \quad (2.1)$$

La expresión general para cualquier punto del espacio es:

$$\Delta p = \frac{q\mu}{2\pi kh} \left\{ \frac{1}{2} \left[-Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t r^2}{4kt} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[-Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t a^2}{4kt} \right) \right] \right\},$$

en donde se ha considerado que ahora a es la distancia desde el pozo imagen al punto de interés.

Para el caso de pruebas de incremento de presión, considerando el efecto de la falla, se tiene:

$$\Delta p_w = \frac{q\mu}{2\pi kh} \left\{ \frac{1}{2} \left[-Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t r_w^2}{4k(t + \Delta t)} \right) + Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t r_w^2}{4k(\Delta t)} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[-Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t a^2}{4k(t + \Delta t)} \right) + -Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t a^2}{4k\Delta t} \right) \right] \right\}. \quad (2.3)$$

2.4 Fronteras Paralelas

Para el caso de dos fallas paralelas, consideremos en la figura 2.2 el caso general, para el cual es posible observar los regímenes de flujo siguientes:

1. Inicialmente un flujo radial sin efectos de frontera.
2. La frontera más cercana se detecta, por lo que, el comportamiento corresponde a un yacimiento infinito con una sola falla lineal cerca.
3. Transición: este periodo de flujo inicia en el momento en que el pozo detecta la presencia de ambas fronteras y continúa hasta que se establece el flujo lineal.
4. Periodo de flujo lineal: las líneas de flujo durante este periodo serán paralelas a las fronteras mostrando comportamiento lineal.

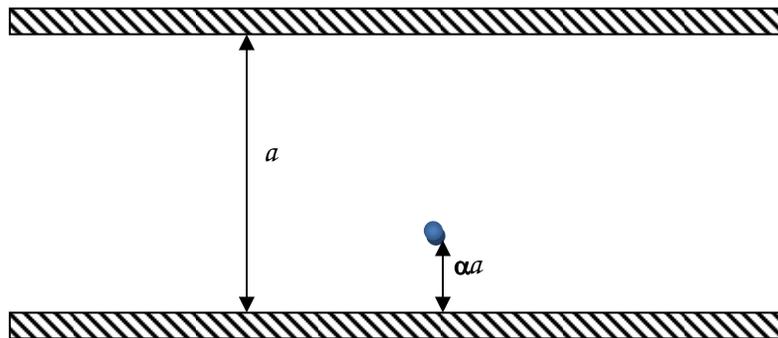


Figura 2.2. Caso con fallas paralelas.

El método de imágenes puede usarse para describir todos estos regímenes de flujo; la configuración será un conjunto infinito de pozos imagen, como se muestra en la figura 2.3.

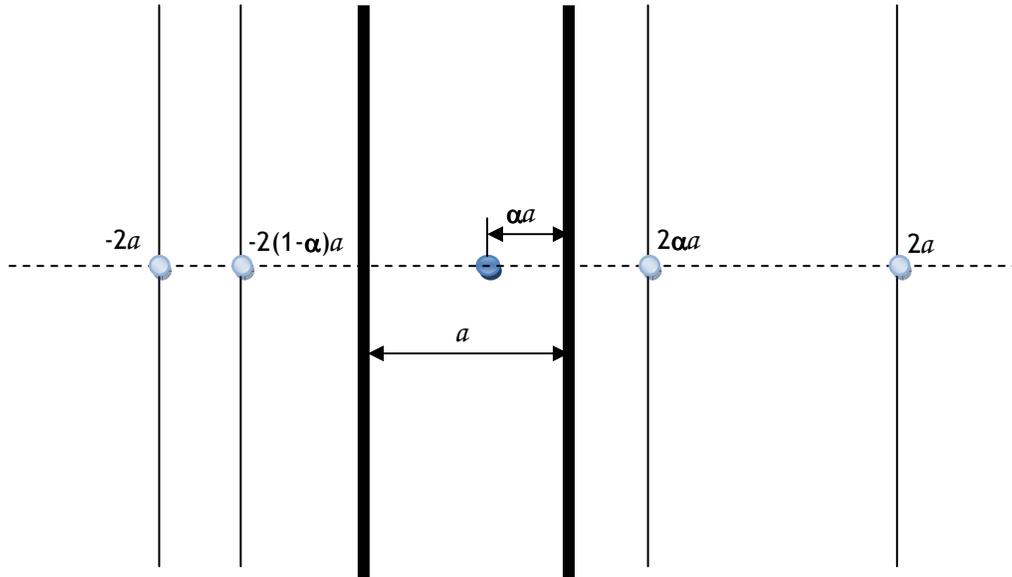


Figura 2.3. Método de imágenes para el caso de dos fallas paralelas.

Para este caso, la ecuación gobernante en unidades de campo es:

$$\Delta p_w = \frac{70.6q\mu}{kh} \left\{ -Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t r^2}{4kt} \right) + \left[\sum_{i=1}^{\infty} -Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t d_i^2}{0.00026kt} \right) \right] \right\} \quad (2.4)$$

Con d_i denotando la distancia del i-ésimo pozo imagen al pozo real.

Para tiempos cortos cuando el flujo dominante es el radial, los términos de la suma son cero; cuando se siente el efecto de una sola falla, la expresión (2.4), toma la forma de (2.1) con $d=2\alpha a$.

A partir del régimen de flujo de transición se requiere de la expresión completa de (2.4), sin embargo para ello, se requiere de métodos computacionales. Gringarten en 1974 hizo una simplificación y a partir de ella se obtuvo la aproximación¹ siguiente, ecuación (2.5):

$$\Delta p_w = \left\{ \frac{q}{\alpha h} \sqrt{\frac{\mu}{\phi c_t k}} \right\} \sqrt{t} + \frac{q\mu}{2\pi kh} \left\{ \ln \left(\frac{a}{r_w \text{sen}(\pi\alpha)} \right) - 1.838 + S_m \right\} \quad (2.5)$$

con S_m indicando daño mecánico.

En unidades de campo se tiene:

$$\Delta p_w = \left\{ \frac{8.1276qB}{ah} \sqrt{\frac{\mu}{\phi c_t k}} \right\} \sqrt{t} + \frac{141.2q\mu B}{kh} \left\{ \ln \left(\frac{a}{r_w \text{sen}(\pi\alpha)} \right) - 1.838 + S_m \right\} \quad (2.6)$$

El método de imágenes además permite representar muchos tipos de heterogeneidades laterales, en ángulo, 2 fallas perpendiculares, etc.

2.5 Generalización del método de imágenes

Cuando se desea representar a un pozo en un yacimiento rectangular, la implementación de la técnica consiste en los pasos siguientes:

- Obtención de la influencia de la suma de las presiones de cada pozo en la red infinita en la presión del pozo productor, y a partir de ello la deducción de p^* .
- Cálculo de la presión promedio en el volumen drenado.
- Relación entre la presión promedio y p^* .

Si consideramos cada pozo como una línea fuente, la respuesta de presión en el pozo será:ⁱⁱ

$$p_{wf} = p_i - \frac{q\mu}{4\pi kh} \left\{ -Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t r_w^2}{4kt} \right) - \sum_{i=1}^{\infty} Ei \left(-\frac{\phi\mu c_t a_i^2}{4kt} \right) \right\}, \quad (2.7)$$

donde a_i es la distancia del i -ésimo pozo imagen a partir del pozo en cuestión.

En la figura 2.4 se representa la configuración para el yacimiento cerrado. Cada intersección entre las líneas es un pozo imagen. El pozo dentro del yacimiento se encuentra en el origen del sistema coordenado.

La posición de las imágenes está dada por las coordenadas siguientes:

$$(2m\alpha, 2nb), (2(m+\alpha)\alpha, 2nb), (2m\alpha, 2(n+\beta)b), (2(m+\alpha)\alpha, 2(n+\beta)b), \quad \text{para}$$

$$-\infty \leq m, n \leq +\infty$$

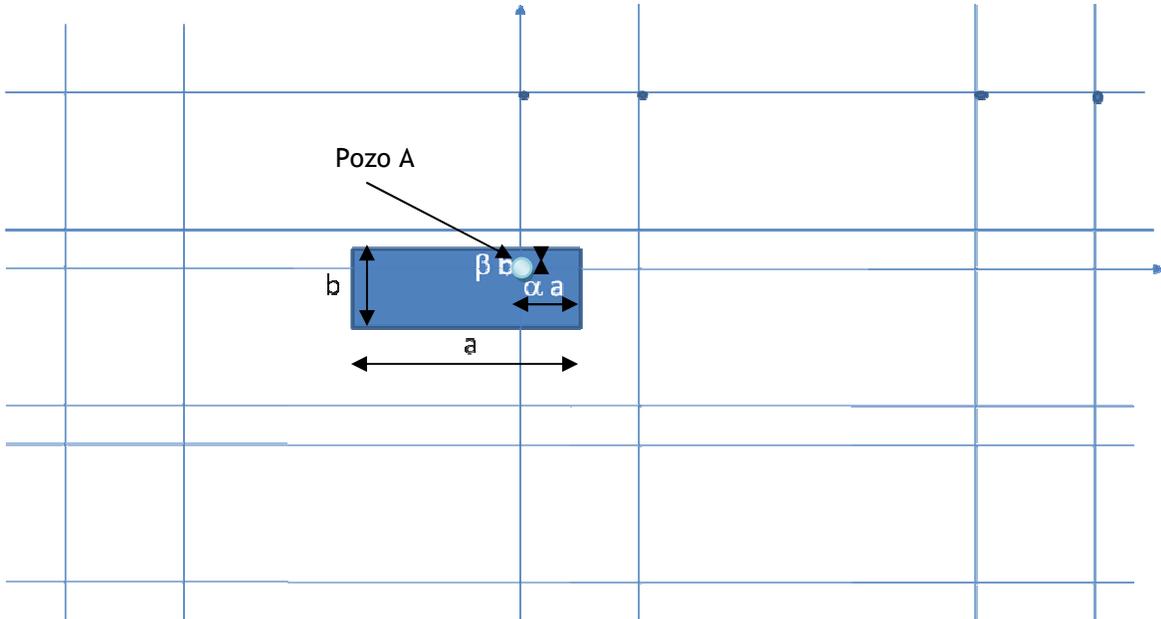


Figura 2.4. Pozo en un yacimiento cerrado. Representación por el método de imágenes.

2.6 Aplicación del Método de Imágenesⁱⁱⁱ

A partir de la ecuación de difusividad de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso homogéneo.

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c_e}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.8)$$

Se obtiene la solución en el espacio de Laplace para una línea fuente en un yacimiento radial infinito.

$$\tilde{p}(r, s) = \int_0^\infty e^{-st} p(r, t) dt \quad \rightarrow \quad \tilde{p}(r, s) = \frac{\mu q}{2\pi h k} K_0 \left(\sqrt{\frac{\phi c_e \mu}{k} s} r \right). \quad (2.9)$$

Las fronteras externas son aproximadas por la adición de pozos fuera de la frontera externa, es decir, utilizando el método de imágenes, pero con la variación de escoger el número y la posición de los puntos fuente. A partir de lo anterior se genera un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Lo anterior se logra al hacer el número de puntos donde se evalúan las condiciones de

frontera igual al número de parámetros. El sistema de ecuaciones se resuelve en el espacio de Laplace, con la ventaja que para agregar pozos produciendo a diferentes tiempos solo es necesario multiplicar la ecuación (2.4) por $\exp[-st_0]$, donde t_0 es el tiempo de inicio de la producción del pozo en cuestión.

Nuestro interés en el trabajo de Fokker et al.¹⁵, radica en que se desea utilizar este método en un yacimiento naturalmente fracturado con geometría fractal, aplicando para ello una ecuación que se haya desarrollado para éste tipo de yacimientos específicamente, lo que permitiría emular pozos interfiriendo con un pozo de interés u observador, al igual que fronteras “afectando” el comportamiento de presión del pozo observador, cuando ya se tiene cierto conocimiento de la geología de las vecindades.

Capítulo 3

Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF)

Yacimientos carbonatados que presentan heterogeneidades

3.1 Introducción

Los yacimientos carbonatados naturalmente fracturados contienen más del 60 % de las reservas remanentes de hidrocarburos a nivel mundial.

Las fracturas naturales son heterogeneidades que se presentan en un rango amplio de escalas espaciales. La distribución de flujo en el yacimiento es en su mayor parte controlada por la distribución y conectividad de las fracturas.

Se han construido modelos matemáticos que tienen como objetivo, representar a YNF como un conjunto de sistemas que interactúan entre sí. La mayoría de estos modelos se encuentran en geometría Euclidiana y funcionan bien para casos específicos.

Sin embargo, la presencia de fracturas a diferentes escalas y su distribución no uniforme, constituyen factores importantes de incertidumbre en la construcción del modelo del yacimiento. La geometría fractal es una de las mejores formas para tomar en cuenta heterogeneidades presentes en el medio poroso a diferentes escalas con distribución no uniforme en el espacio.

3.2 Modelos de YNF

Para un yacimiento con porosidad intergranular, generalmente sus estudios se simplifican considerando que el yacimiento es homogéneo y las propiedades físicas básicas, tales como porosidad y permeabilidad son siempre función del comportamiento del sistema roca-fluido.

En un yacimiento naturalmente fracturado existen discrepancias y discontinuidades como resultado de dos tipos de sistemas de porosidad en la misma formación, como se observa en la figura 3.1. La región de la matriz contiene poros finos con alta capacidad de almacenamiento pero

poca capacidad de flujo, se encuentra interconectada con la red de fracturas y vógelos, la cual tiene una baja capacidad de almacenamiento pero una gran capacidad de flujoⁱ.

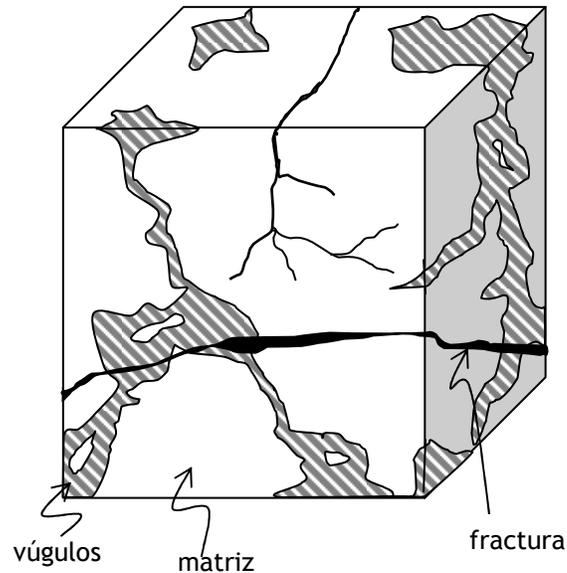


Figura 3.1. Yacimiento naturalmente fracturado. Warren y Root⁶.

En estos sistemas se requieren técnicas de ingeniería de yacimientos diferentes de aquellas usadas en sistemas con porosidad intergranular. Con este objetivo en mente se han escrito numerosos artículos, en los cuales se desarrollaron modelos matemáticos para simplificar el sistema real. Para usar estos modelos en forma exitosa, es importante, contar con datos de registros de pozo y núcleos. Estos datos incluyen estimaciones de porosidad y permeabilidad en todas las regiones, así como una evaluación de sus distribuciones y frecuencias.

Dentro de los modelos existentes se encuentra el de Warren⁶ y Root, Kazemiⁱⁱ, de Swaanⁱⁱⁱ. En el caso de Warren y Root, representan a la roca fracturada como un conjunto de paralelepípedos separados por una red ortogonal de fracturas a una sola escala, figura 3.2. El flujo hacia el pozo se considera que proviene de la red de fracturas que es “alimentada” por los bloques de matriz. Este flujo de la matriz hacia las fracturas se considera que ocurre bajo condiciones pseudoestacionarias.

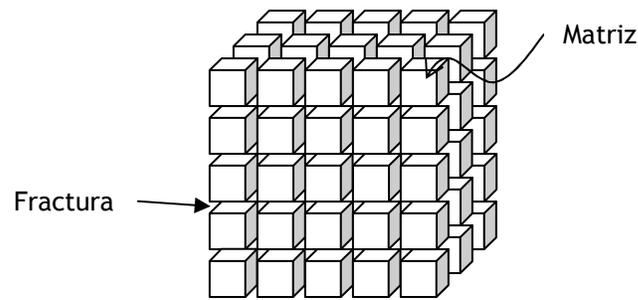


Figura 3.2. Yacimiento fracturado idealizado. Warren y Root.

El modelo de Kazemi, representa al yacimiento fracturado como un sistema de capas compuestas por unas altamente conductivas pero muy delgadas, representando a las fracturas, alternando con otras capas menos conductivas de una capacidad de almacenamiento grande, representando a la matriz. En su trabajo, de Swaan modela al yacimiento como un conjunto de losas infinitas y bloques esféricos. Tanto Kazemi como de Swaan consideran flujo transitorio de los bloques de matriz hacia las fracturas.

Todos estos trabajos consideran una distribución uniforme de fracturas, una sola escala de fracturas y que todas ellas están interconectadas.

Aunque estos modelos funcionan bien para casos específicos, se siguen buscando modelos que se acerquen más a la realidad, y que engloben o cubran una mayor cantidad de casos reales. De esta forma la red de fracturas en roca es una candidata natural para una descripción con geometría fractal.

Considerando lo anterior, Barker^{iv} presenta un modelo generalizado de un medio fracturado con geometría fractal. Chang y Yortsos^v modelan un yacimiento naturalmente fracturado como una red de fracturas fractal, inmersa en una matriz euclidiana. Este modelo se crea considerando el flujo hacia un pozo en un yacimiento infinito y coordenadas radiales, ver la figura 3.3.

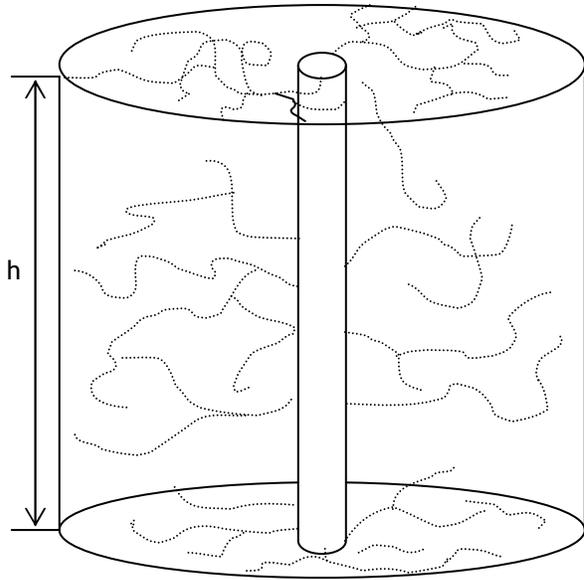


Figura 3.3. Esquema del medio poroso según Chang y Yortsos²⁰

Para este trabajo son de interés los modelos con geometría fractal y es por ello que en el siguiente capítulo se abordará el tema de la geometría fractal y su aplicación a la ingeniería petrolera.

Capítulo 4

Fractales

“Un fractal, es una forma hecha de partes similares al total de alguna manera”

4.1 Antecedentes

La geometría Euclidiana no es apropiada al intentar reproducir la forma de las nubes, montañas, o costas, ya que estos cuerpos no tienen forma de esferas, conos o rectángulos. La naturaleza presenta diferentes grados de complejidad y existen patrones de diferentes escalas de longitud.

Para el estudio de estos patrones naturales, Mandelbrot en su libro *“The fractal Geometry of nature”*ⁱ concibió y desarrolló una nueva geometría que puede aplicarse a diversos campos de la ciencia. Esta geometría describe muchos de los patrones fragmentados e irregulares que nos rodean, identificándolos como una familia de formas, que denominó fractales.

La palabra fractal proviene del adjetivo latín *fractus*, que corresponde al verbo latín *frangere*, que significa romper creando fragmentos irregulares; *fractus* también significa irregular ó fragmento.

Mandelbrot²¹ proporciona la definición de fractal siguiente:

Un fractal es por definición un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch estrictamente excede la dimensión topológica.

Sin embargo, esta definición formal matemática el mismo Mandelbrot la cambia por la siguiente:

Un fractal, es una forma hecha de partes similares al total de alguna manera.

La definición matemática de un fractal se concentra en la propiedad que tienen los objetos fractales respecto a poseer una dimensión fraccional; es decir una dimensión no entera. Lo anterior a diferencia del concepto de 1,2 y 3 dimensiones. Mandelbrot, llama a todas aquellas curvas las cuales tienen dimensión fractal que exceden la dimensión topológica “curvas fractales”.

Con ellas pueden dibujarse las costas de un país o bien el movimiento tortuoso en un medio poroso.

Un fractal puede tener cualquier dimensión fraccional; para ilustrarlo veremos los ejemplos siguientes:



Figura 4.1. Ejemplo de un objeto fractal. Hoja de helecho²²

En la hoja de helecho de la figura 4.1, el proceso de impresión limita lo que puede verse; sin embargo, si la figura se expandiera y se observará una de sus ramas, se vería como la original exponiendo más detalle. En la figura 4.2a hay un cuadrado con un hoyo en el centro. El hoyo tiene exactamente $1/3$ de la longitud total del cuadrado. Si este patrón se repitiera en toda la parte negra de la figura resultaría la figura 4.2b, repitiendo el proceso otra vez se produce la figura 4.2c. El proceso de generación repetido produce un objeto matemático llamado la “alfombra de Sierpinski²¹” y como la hoja de helecho es un objeto fractal.

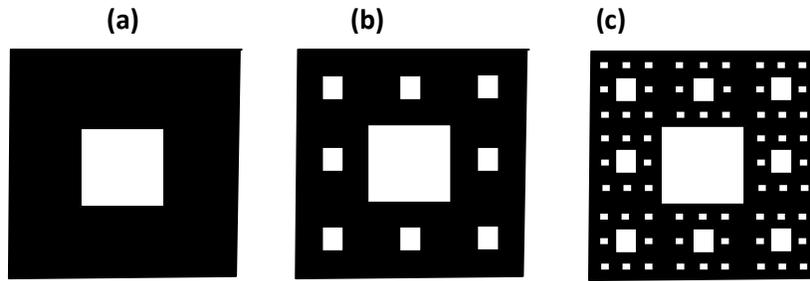


Figura 4.2 Alfombra de Sierpinski²¹

Por la definición matemática de fractal, la alfombra de Sierpinski tiene una dimensión de 1.893. Esta dimensión se calcula por medio de la relación del área A del objeto Euclidiano (no fractal) con una longitud característica L , de la siguiente manera:

$$A = c L^{\delta}, \quad (4.1)$$

donde c y d son constantes como se muestra en la figura 4.3.

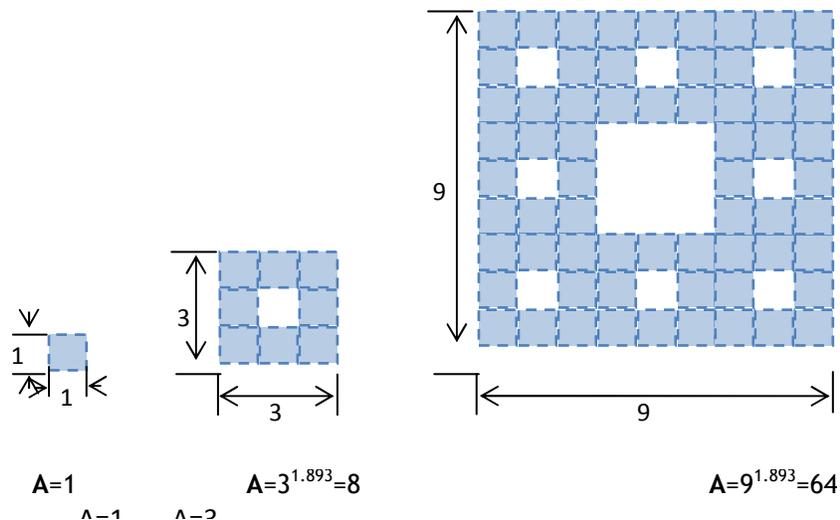


Figura 4.3. El escalamiento de una carpeta de Sierpinski²¹

En una gráfica doble logarítmica de área vs. longitud obtendríamos una línea recta con una pendiente igual a su dimensión fractal δ como se observa en la figura 4.4.

Así como el área, existen muchas características que se pueden escalar por medio de una ley de potencias. Por ejemploⁱⁱ la masa $m=cd^d$ donde c y a son constantes y d el diámetro de la figura 4.5; aunque en esta situación el objeto no es un fractal “exacto”. Los fractales también pueden

definirse en términos de sus propiedades estadísticas, en este caso el valor promedio de un atributo puede escalarse por medio de una ley de potenciasⁱⁱⁱ.

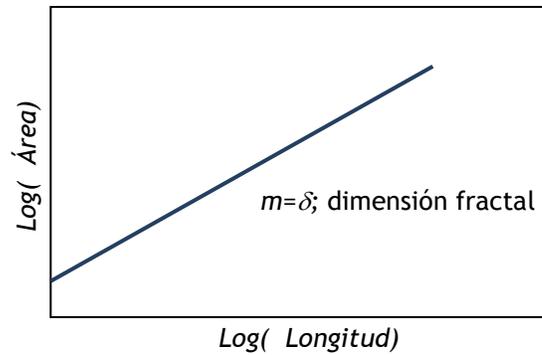


Figura 4.4. Relación lineal entre el logaritmo(área) vs logaritmo(longitud)

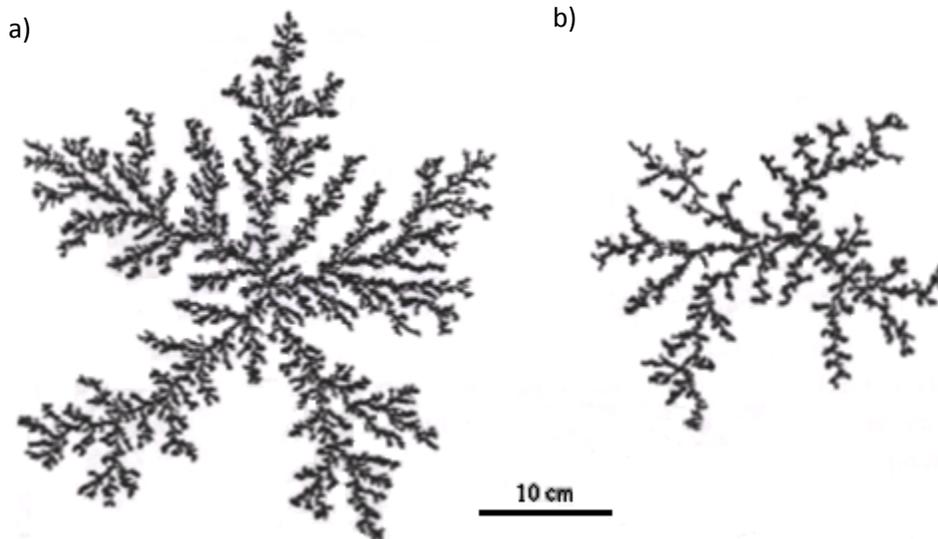


Figura 4.5. (a) Un patrón de “agregación por difusión limitada”(DLA) y (b) un patrón producido por la inyección de aire en un líquido epóxico, en un medio poroso bidimensional de esferas de vidrio de 1.6mm de diámetro²².

4.2 Difusión en medios porosos. Yacimientos

La mayor parte de la investigación de este tema se concentra en la caracterización del medio poroso a varias escalas: nivel del poro (micro escala), en laboratorio (macro escala), y a nivel de campo (mega escala)^{iv}.

El método tradicional utilizando las ecuaciones clásicas de transporte no describen satisfactoriamente las condiciones naturales, por lo que las adaptamos utilizando correlaciones para algunas propiedades y suponiendo otras. Esto sucede para yacimientos homogéneos y heterogéneos. Es obvio que las diferentes escalas a las que estudiamos la difusión en medios porosos debido a que las trabajamos por separado, no representan de forma única los fenómenos observados.

Existen 4 clases de aplicaciones de la geometría fractal en medios porosos:

- caracterización y propiedades de superficies porosas fractales,
- procesos de desplazamiento miscible e inmisible que tienen estructuras fractales
- gradientes de transporte sobre objetos fractales (por ejemplo redes de fracturas)
- y la representación de propiedades heterogéneas.

La geometría fractal afecta los procesos en medios porosos a todas las escalas. A nivel de poro la rugosidad de su superficie y su morfología. En un contexto diferente, la distribución de tamaño de poro, permeabilidades relativas y presión capilar se han modelado en un tipo de ley de potencias²⁴.

El proceso de percolación se usa para modelar los clusters de desplazamiento y a los fluidos desplazados bajo condiciones inmiscibles.

En la descripción macroscópica de los procesos, se han estudiado la densidad de probabilidad de la posición de una partícula moviéndose en el medio poroso, así como el desplazamiento frontal, percolación, digitaciones en flujo de dos fluidos inmiscibles, desplazamientos dominados por fuerzas viscosas o presiones capilares²⁴.

4.3 Transporte en fractales

Este es el transporte dentro de un objeto fractal, el cual tiene numerosas aplicaciones. El objeto fractal puede ser el cluster de poros del fluido desplazante, o consistir en caminos que crean espacios de conectividad limitada.

La difusividad efectiva D_e para un flujo en un cuerpo o sistema fractal está dada por

$$D_e = L^{-\theta} \quad (4.2)$$

La difusión frecuentemente se modela por medio del movimiento aleatorio de una partícula en un sistema, tal que el cuadrado de desplazamiento $\langle r^2 \rangle$ es:

$$\langle r^2 \rangle = 2d D_e t, \quad (4.3)$$

donde t es el tiempo.

Para la difusión en un medio Euclidiano (o macroscópicamente homogéneo), $\langle r^2 \rangle$ crece linealmente con el tiempo así que, $D_e \sim \langle r^2 \rangle / t$ es una constante, y se usa la ley de difusión de Fick. Sin embargo en un sistema fractal uno tiene:

$$\langle r^2 \rangle \sim t^\kappa, \quad (4.4)$$

Donde $\kappa < 1$. Esto es, el proceso de difusión es lento para una estructura fractal del sistema (la cual es heterogénea a cualquier escala). Un proceso de difusión caracterizado por la ecuación (4.4) fue llamado *transporte fractal* por Sahimi et al.^v La cantidad $\delta_w = 2/\kappa$ es generalmente llamada dimensión fractal de un caminante aleatorio y es, una propiedad dinámica. Gefen et al.^{vi} mostraron que

$$\delta_w = 2 + \theta. \quad (4.5)$$

Esta relación es válida para cualquier fractal, considerando que uno usa un valor adecuado de θ para el sistema fractal particular. Este proceso de difusión lento es llamado *difusión anómala* y es importante, por ejemplo, cuando la fase fluuyente está muy cerca de la saturación residual.

4.4 Pruebas de presión. Modelos con geometría fractal

Mientras la investigación respecto a presiones transitorias en sistemas fracturados ha avanzado considerablemente, estos se han basado en la noción clásica de los sistemas naturalmente fracturados comúnmente caracterizados por una escala que delinea la red de fracturas embebida en la matriz. Se han hecho además mejoras a los modelos mencionados, sin embargo siempre considerando geometría Euclidiana. La respuesta característica de presión transitoria para esos modelos en una gráfica doble logaritmo *presión vs. tiempo* es una línea recta con pendiente 1, 1/2 y -1/2 para dimensiones euclidianas $d=0, 1$ y 3 , respectivamente correspondiendo al almacenamiento, una fractura y flujo esférico. Mientras que la respuesta de presión con $d=2$, es una línea recta en una gráfica semilogarítmica *presión vs. logaritmo(tiempo)* que indica flujo radial.

Sin embargo, existen muchos sistemas naturalmente fracturados, para los cuales la respuesta transitoria de presión genera en gráficas logarítmicas rectas con pendiente 0.31, 0.4, 0.15, -0.16 etc. Se han dado algunas explicaciones a estas variaciones, sin embargo, no necesariamente se justifican. Es pues, razonable esperar la existencia de una red de fracturas que no llena completamente el espacio o que no se encuentra totalmente conectado^{vii}.

Como ya se ha mencionado, Chang y Yortsos²⁰ en 1988 presentaron un modelo que representa al medio poroso fracturado como una red de fracturas fractal embebida en una matriz euclidiana. Se considera que un fluido en una sola fase fluye por el objeto fractal. Por medio de la modificación de la ecuación de difusión se estudia la respuesta de presión transitoria, considerando flujo sólo en las fracturas o bien con la participación de la matriz.

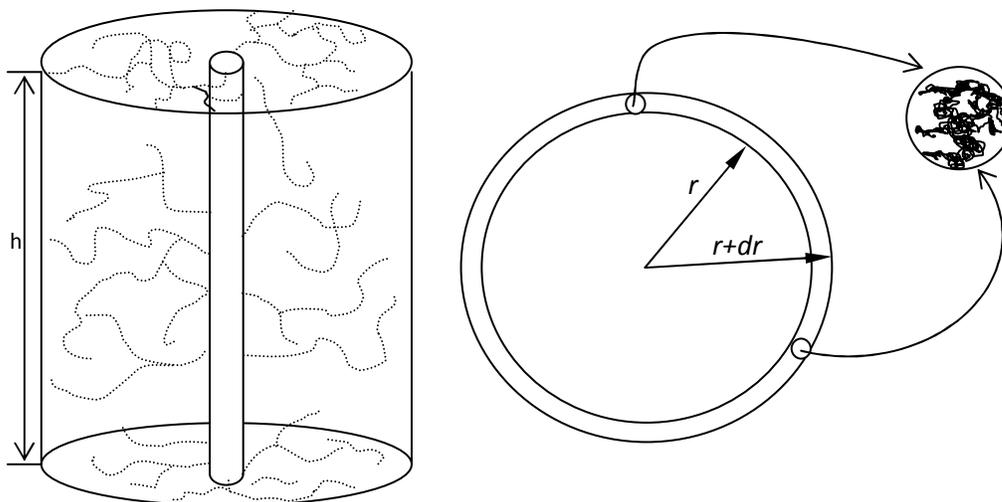


Figura 4.6 a). Esquema del medio poroso, b) flujo a través de un diferencial de volumen²⁰

En la figura 4.6a se esquematiza al medio poroso, la red punteada representa la red de fracturas fractal que se caracteriza por una ley de potencias. El espacio que queda es ocupado por una matriz euclidiana.

A diferencia de un objeto euclidiano, la permeabilidad para el flujo de un fluido en el medio fractal no es constante²⁰, es una propiedad local del medio, dada por la expresión siguiente:

$$k_f(r) = \left(\frac{\alpha V_s}{G} \right) m r^{\delta-d-\theta}, \quad (4.6)$$

donde m es una propiedad de estructura local de la red de fracturas similar a la permeabilidad convencional y expresa conectividad y conductancia de flujo. ϑ está relacionado al llamado exponente espectral de la red de fracturas. De forma sencilla se puede decir que ϑ es el índice de conductividad de la red de fracturas; αV_s es la porosidad superficial y G es un factor geométrico, $G=A, 2\pi h$, para simetría rectilínea y cilíndrica, respectivamente. δ es la dimensión fractal, d es la dimensión euclidiana, y r es la escala o coordenada radial.

La ecuación diferencial que representa el modelo se presenta a continuación:

$$\frac{c_f \mu}{m} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r^{\delta-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\delta-\theta-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (4.7)$$

Así el gasto se expresa de la manera siguiente

$$q_r = - \left(\frac{\alpha V_s m}{\mu} \right) \left[r^{\delta-\theta-1} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \right]. \quad (4.8)$$

La solución de la ecuación de difusión para el caso de producción de un pozo colocado en el centro, y sin considerar participación de la matriz da una presión en el sistema

(4.9a)

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{r_D^{\theta+2-\delta}}{\Gamma(\theta)(\theta+2)} \int_0^\infty z^{\theta-2} \exp(-z) dz,$$

donde

$$\theta = \frac{\delta}{\theta+2}. \tag{4.9b}$$

Obviamente esta ecuación se reduce al caso euclidiano cuando $\delta=2$ y $\theta=0$.

De aquí se obtiene que la presión en el pozo está dada por:

$$p_{wD} \approx \left[\frac{(\theta+2)^{2(1-\theta)}}{\Gamma(\theta)(\theta+2-\delta)} \right] t_D^{1-\theta}. \tag{4.10}$$

Las gráficas siguientes, figuras 4.7 y 4.8, producen líneas rectas con pendiente $(1-\theta)$ para sistemas fractales, es por ello que los autores recomiendan estas gráficas como herramientas para la identificación de sistemas con comportamiento fractal.

Análogamente cuando se tiene participación de la matriz, las gráficas tienen la forma mostrada en las figuras 4.9 y 4.10.

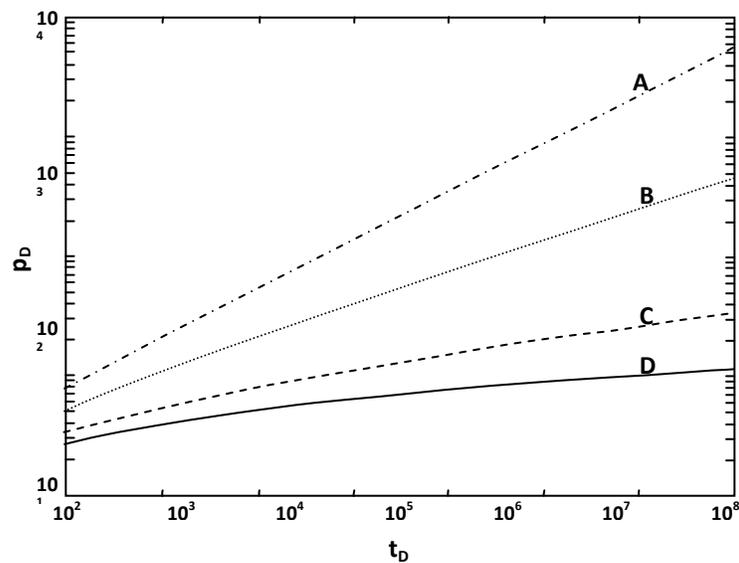


Figura 4.7. Gráfica de p_D vs. t_D con $\delta=0.6, 0.739, 0.905, 0.995$ para los casos A,B,C y D respectivamente

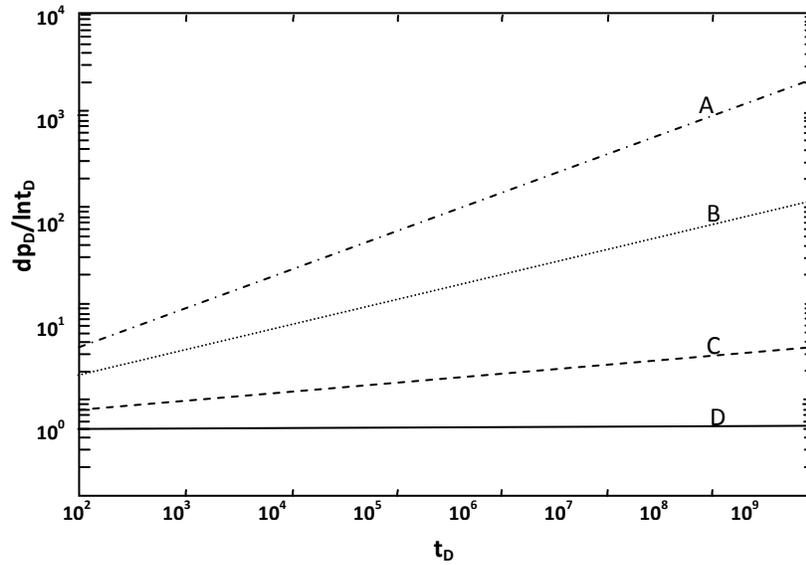


Figura 4.8. Gráfica de $dp_D / d(\ln t_D)$ vs t_D , con $\delta=0.6, 0.739, 0.905, 0.995$ para los casos A,B,C y D respectivamente

El modelo de Chang y Yortsos es bastante completo, permite identificar y describir yacimientos con grandes desórdenes espaciales, baja conectividad y propiedades múltiples escalables. Sin embargo, de una prueba de presión utilizando este modelo se obtienen dos valores, ϑ y C_L , de los cuales deben estimarse cuatro valores: $\delta, \vartheta, m, \alpha V_s$.

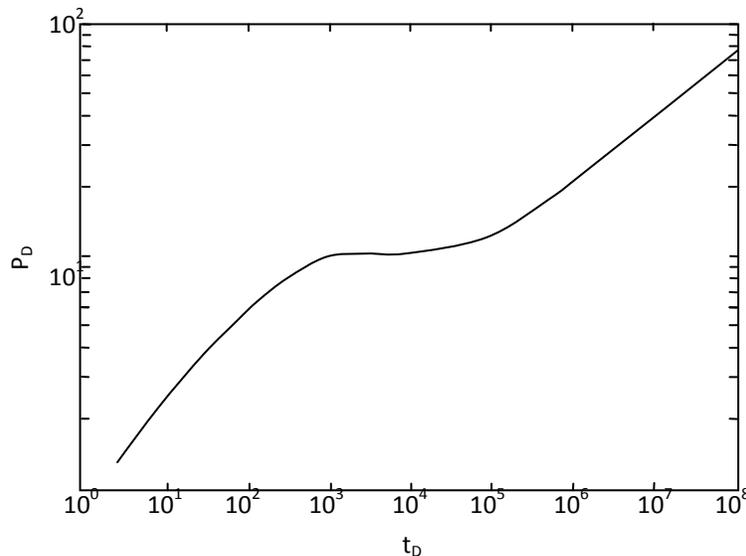


Figura 4.9. Gráfica de la caída de presión para un sistema matriz fractura.

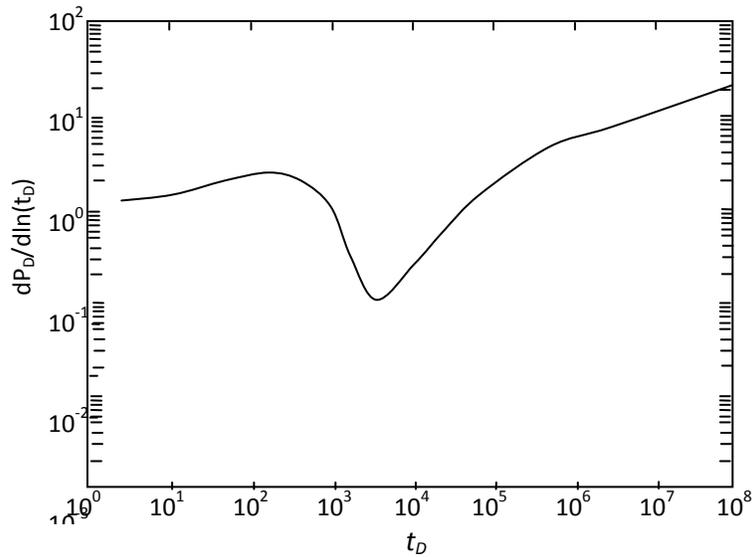


Figura 4.10. Gráfica de $dp_D/d(\ln t_D)$ para un sistema matriz fractura.

Este es un problema indeterminado, por lo que se requiere información adicional de registros de pozos. Además, no se conocen las variables que son de uso común, ϕ y k , sino las variables αV_s y m relacionadas, respectivamente a las anteriores. Es por ello que buscando un modelo que considere la red de fracturas fractal, pero que maneje ϕ y k , se presenta a continuación el modelo de Barker.

4.5 Modelo de Barker¹⁹.

Este modelo es una generalización del de flujo en una dimensión a través de un medio poroso.

Consideraciones:

- Flujo radial, en n dimensiones con un solo pozo en un medio fracturado isótropo y homogéneo, caracterizado por una permeabilidad k_f y una densidad determinada de fracturas.
- La ley de Darcy es aplicable en todo el sistema.
- El pozo es una esfera n -dimensional de radio r_w y una densidad específica.

En el modelo matemático a desarrollar, r se usará como la distancia radial desde el centro del pozo. La distancia real euclidiana desde el pozo será igual a r dividida por la tortuosidad, la cual puede considerarse un parámetro empírico.

Para obtener la ecuación de flujo consideramos una región limitada por dos superficies equipotenciales que tienen un radio r y $r+\Delta r$. Las superficies son proyecciones de una esfera δ -dimensional dentro de un espacio tridimensional por una cantidad $b^{3-\delta}$. Por ejemplo, cuando $\delta=2$ las superficies son cilindros infinitos de espesor b (fig.4.11). Por lo tanto, una esfera de radio r tiene un área $\alpha_\delta r^{\delta-1}$, donde α_δ es el área de una esfera unitaria en δ dimensiones:

$$\alpha_\delta = 2 \frac{\pi^{\delta/2}}{\Gamma(\frac{\delta}{2})}, \quad (4.11)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gama.

La ecuación diferencial de difusividad para este sistema es la siguiente:

$$c_f \mu \phi \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{r^{\delta-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\delta-1} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (4.12)$$

Nuevamente δ es la dimensión fractal. En función de la dimensión de flujo δ , puede representar, cuando es valor entero, ver figura 4.11:

- Flujo lineal con $\delta=1$
- Flujo cilíndrico con $\delta=2$
- Flujo esférico con $\delta=3$

La expresión (4.12) es claramente un caso particular del modelo de Chang y Yortsos²⁰ ecuación (4.7), cuando $\theta=0$.

Utilizando la transformación de Laplace para $\Delta p = p_i - p$ con p_i (presión inicial del yacimiento), tenemos:

$$\overline{\Delta p}(r, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \Delta p(r, t) dt. \quad (4.13)$$

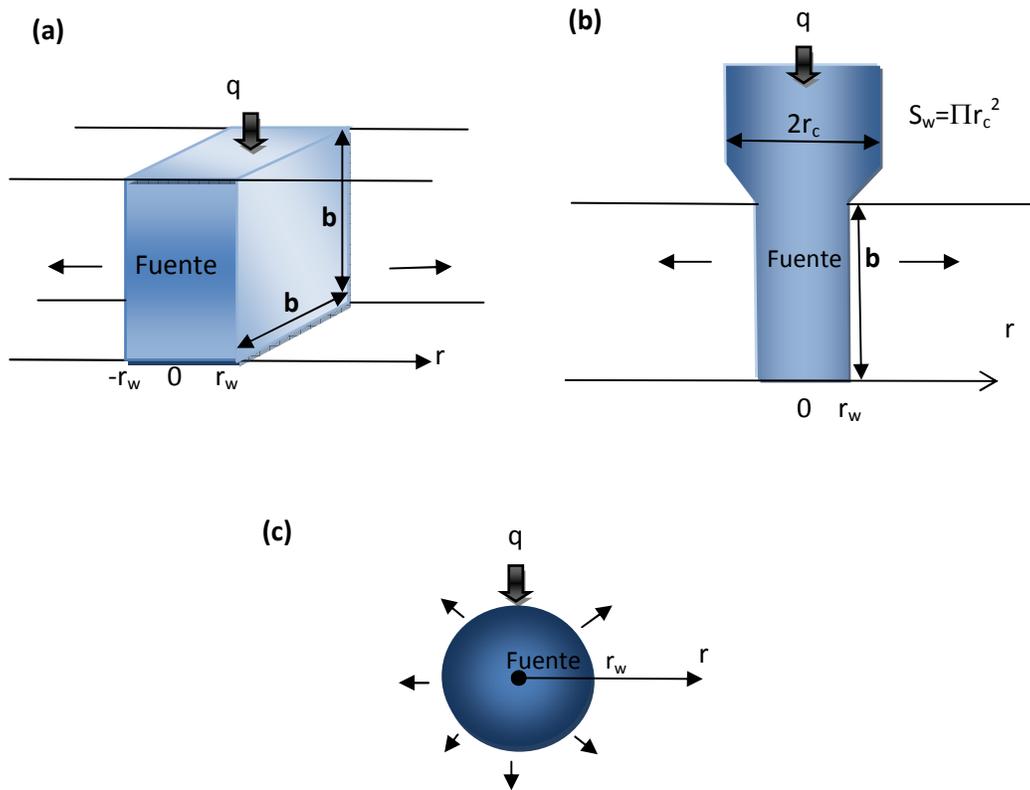


Figura 4.11. Geometrías de flujo para dimensiones enteras. a) Flujo en una dimensión a partir de un plano $\delta=1$; b) 2 dimensiones a partir de un cilindro $\delta=2$; c) flujo en 3 dimensiones desde una esfera $\delta=3$

La solución en el espacio de Laplace a la ecuación (4.12), considerando gasto contante y yacimiento infinito, es:

$$(4.14a)$$

$$\overline{\Delta p}(r, s) = \frac{\mu q B \alpha}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta \sqrt{\eta} s \sqrt{s}} \frac{1}{r_w^{\frac{\delta}{2}}} r^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}(\sqrt{|\eta s|} r) K_{-\frac{\delta}{2}}(\sqrt{|\eta s|} r_w)$$

con

$$\eta = \frac{\mu \phi c_t}{k} \quad (4.14b)$$

Para el caso en que el pozo se representa por medio de una línea fuente:

$$\overline{\Delta p}(r, s) = \frac{\mu q B \alpha}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \left(\frac{2r}{\sqrt{|\eta s|}}\right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}(\sqrt{|\eta s|} r) \quad (4.15)$$

En el espacio de real, la solución de línea fuente se expresa como, ecuación (4.16):

$$\Delta p(r, t) = \frac{\mu q B \alpha}{4\pi^{3/2} k h^{3-\delta}} r^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta r^2}{4t}\right) \quad (4.16)$$

En este caso $I(\varphi, z)$ es la función Gama incompleta.

La solución de este modelo maneja las variables conocidas ϕ y k , a diferencia del de Chang y Yortsos, por lo que, se utilizó como base para desarrollar un modelo para un yacimiento cerrado de forma rectangular, que tendrá en su primera etapa un pozo ubicado en cualquier posición.

En forma adimensional, la ecuación (4.12) queda expresada como, ecuación (4.17):

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D^{\delta-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{\delta-1} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) \quad (4.17)$$

Las variables adimensionales se definen como:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (4.18a)$$

$$(4.18b)$$

$$t_D = \frac{t k}{c_t \mu \phi r_w^2}$$

$$p_D = \frac{p_i - p}{\frac{q \mu B}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta r_D^{\delta-2}}} \quad (4.18c)$$

La solución a la ecuación (4.16) considerando gasto constante y yacimiento infinito, en el espacio de Laplace, es:

$$\overline{p}_D(r_D, s) = \frac{1}{s\sqrt{s}} r_D^{1-\frac{\delta}{2}} \frac{K_{1-\frac{\delta}{2}}(\sqrt{s} r_D)}{K_{-\frac{\delta}{2}}(\sqrt{s})} \quad (4.19)$$

Para una línea fuente, la solución en el espacio de Laplace quedará:

$$\overline{p}_D(r_D, s) = \frac{1}{s} \left(\frac{2r_D}{\sqrt{s}} \right)^{1-\frac{\delta}{2}} \frac{K_{1-\frac{\delta}{2}}(\sqrt{s} r_D)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (4.20)$$

Por lo que la solución para línea fuente (4.20) en espacio real queda expresada análogamente a (4.16) por medio de la ecuación (4.21):

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} (r_D)^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{r_D^2}{4t_D}\right) \quad (4.21)$$

4.6 Pruebas de Interferencia en Geometría Fractal

Krisanto et al^{viii} en 2000, desarrolló nuevas curvas tipo usando el modelo de Chang y Yortsos, especialmente para su uso en análisis de Pruebas de Interferencia. La ecuación (4.9) de Chang y Yortsos la reescribieron de la manera siguiente:

$$(4.22)$$

$$PDF(r_D, t_D) = \frac{(\theta + 2)^{1-2\theta}}{\Gamma(\theta)(1-\theta)} t_D^{1-\theta} \text{Exp} \left[-\frac{1}{(\theta + 2)^2 TDF} \right] + \frac{\Gamma(\theta - 1) r_D^{(\theta+2)(1-\theta)}}{\Gamma(\theta)(\theta + 2)}$$

Con θ definida según (4.9b) y además:

$$PDF = \frac{2\pi k_r(r)h}{q\mu} (p_i - p), \quad (4.23)$$

$$TDF = 0.0002637 \frac{k_f(r)t}{\phi_r(r)\mu c_t r_D^2}, \quad (4.24)$$

donde r_b es la distancia entre pozos y siendo PDF (Dimensionless Pressure Function), y TDF(Dimensionless Time Function).

La ecuación (4.22) se deriva y a partir de gráficas de PDF vs. TDF y $dPDF/d(\ln TDF)$ vs TDF y $d(\log PDF)/d(\log TDF)$ vs. TDF ; se pueden obtener la transmisibilidad, almacenamiento y la dimensión fractal.

Sin embargo, para obtener estos datos los autores utilizan las variables convencionales, es decir no respetan las variables del modelo de Chang y Yortsos. Es por ello que en éste trabajo no se utilizaron las curvas tipo propuestas por Krisanto et al²⁹.

Capítulo 5

Desarrollo del Modelo Semianalítico

Planteamiento de las ecuaciones generales del modelo aplicando superposición en espacio y tiempo.

5.1 Introducción

Debido a la enorme importancia que tienen los yacimientos naturalmente fracturados y a la necesidad de predecir su comportamiento respecto al tiempo, es importante desarrollar modelos que puedan representar mejor su comportamiento, y que al mismo tiempo permitan conocer las propiedades del yacimiento, así como la comunicación entre bloques de un mismo sistema.

De esta forma, los objetivos planteados para este trabajo son los siguientes:

Objetivo General

Crear un modelo con geometría fractal que permita obtener datos más realistas en un yacimiento naturalmente fracturado para pruebas de interferencia.

Objetivos Particulares

1. Crear un modelo analítico representando a un yacimiento naturalmente fracturado como una red de fracturas con comportamiento fractal, embebida en una matriz euclidiana en coordenadas rectangulares.
2. Crear un simulador, para corroborar los resultados del modelo analítico.
3. Utilizar el método de imágenes para crear un modelo semianalítico en coordenadas rectangulares a partir de un modelo en coordenadas cilíndricas
4. Validar el modelo con datos sintéticos.

Como fue mencionado en el Capítulo 2, los objetivos uno y dos se llevaron a cabo obteniéndose resultados desalentadores, es por ello que a continuación se detalla el

desarrollo de los objetivos tres y cuatro, dejando en el Apéndice el desarrollo de los dos primeros.

5.2 Desarrollo del Modelo Semianalítico

Este desarrollo consta de dos pasos:

1. Obtener las expresiones para diferentes configuraciones con fallas en el espacio de Laplace de la ecuación de Barker, así como también en el espacio real.
2. Sumar las respuestas de presión, de los pozos que interfieren al pozo observador así como fronteras existentes cerca del pozo de interés.
3. Además presentar las expresiones para pruebas de interferencia correspondientes a diferentes casos por medio de la superposición en el tiempo y en el espacio. Y aquellas utilizadas en gráficas de diagnóstico.

Paso 1

Pretendiendo emular el trabajo de Fokker et al¹⁵, se inicia con la solución de la ecuación de Barker en el espacio de Laplace, ecuación (4.15), para una línea fuente, así como la solución en espacio real, considerando la variable b igual al espesor h de la formación:

$$\bar{\Delta p}(r, s) = \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_{\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)^s} \left(\frac{2r}{\sqrt{|\eta s|}}\right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}\left(\sqrt{|\eta s|} r\right). \quad (5.1)$$

$$\Delta p(r, t) = \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} r^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta r^2}{4t}\right), \quad (5.2)$$

Con

$$\eta = \frac{\mu \phi c_t}{k}, \quad (5.3)$$

$$\alpha_{\delta} = 2 \frac{\pi^{\delta/2}}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)}. \quad (5.4)$$

Las ecuaciones siguientes fueron deducidas para este trabajo. Las expresiones (5.5) y (5.6) fueron obtenidas utilizando MATHEMATICA³⁴. Las ecuaciones (5.8) hasta la (5.16) se obtuvieron siguiendo el método de imágenes, y de la ecuación (5.17) a la (5.18) y la ecuación (5.21) se obtuvieron utilizando los principios de superposición en el tiempo y en el espacio.

Se presentan a continuación las derivadas de la caída de presión con respecto a la posición y con respecto al tiempo, ecuaciones (5.5) y (5.6) respectivamente y la derivada de la caída de presión con respecto al logaritmo natural de t, ecuación (5.7).

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial r} = \frac{\mu q B_o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} \left[\frac{\eta (2r)^{3-\delta} e^{-\frac{\eta r^2}{4t}} \left(\frac{\eta r^2}{t}\right)^{\frac{\delta}{2}-2}}{t} + (2-\delta)r^{1-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}-1, \frac{\eta r^2}{4t}\right) \right] \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = \frac{\mu q B_o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} \frac{\eta^{\frac{\delta}{2}} e^{-\frac{\eta r^2}{4t}}}{(t)^{\frac{\delta}{2}}} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \ln(t)} = \frac{\mu q B_o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} \frac{\eta^{\frac{\delta}{2}} e^{-\frac{\eta r^2}{4t}}}{(t)^{\frac{\delta}{2}-1}} \quad (5.7)$$

Para la presencia de una falla lineal lateral, el método de imágenes nos permite obtener la caída de presión en el pozo, a continuación se presenta la solución en el espacio de Laplace ec. (5.8) y en espacio real, ecuación (5.9):

(5.8)

$$\begin{aligned}\overline{\Delta p_w}(s) &= \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \left(\frac{2r_w}{\sqrt{|\eta s|}}\right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}(\sqrt{|\eta s|} r_w) \\ &\quad + \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \left(\frac{2(2a)}{\sqrt{|\eta s|}}\right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}(\sqrt{|\eta s|} 2a), \\ \Delta p_w(t) &= \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} r_w^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta r_w^2}{4t}\right) + \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} (2a)^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a^2}{t}\right),\end{aligned}\quad (5.9)$$

donde a es la distancia a la falla.

Para un sistema de fallas paralelas, ver figura (2.3), aplicando el método de imágenes para la ecuación de Barker expresión (5.1), en el espacio de Laplace da la ecuación (5.10) y en el espacio real la ecuación (5.11):

$$\begin{aligned}\overline{\Delta p_{wf}}(s) &= \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \left(\frac{2r_w}{\sqrt{|\eta s|}}\right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}(r_w \sqrt{|\eta s|}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \left(\frac{2a_i}{\sqrt{|\eta s|}}\right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}(a_i \sqrt{|\eta s|}),\end{aligned}\quad (5.10)$$

$$\Delta p_w(t) = \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} r_w^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta r_w^2}{4t}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} (a_i)^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a_i^2}{4t}\right),\quad (5.11)$$

donde a_i es la distancia del i -ésimo pozo imagen al pozo de interés.

Para representar la caída de presión en el espacio de Laplace, en cualquier punto en un yacimiento cerrado, con un sólo pozo productor, como en la figura 2.4, la expresión es:

$$\overline{\Delta p}(r, s) = \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \left(\frac{2r}{\sqrt{|\eta s|}}\right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}\left(r\sqrt{|\eta s|}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_\delta \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \left(\frac{2a_i}{\sqrt{|\eta s|}}\right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}\left(a_i\sqrt{|\eta s|}\right),$$

y la expresión en espacio real, es:

$$\Delta p(r, t) = \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} r_w^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta r_w^2}{4t}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} (a_i)^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a_i^2}{4t}\right). \quad (5.13)$$

aquí, a_i es la distancia desde el i -ésimo pozo imagen, hasta el punto de interés, figura 5.1.

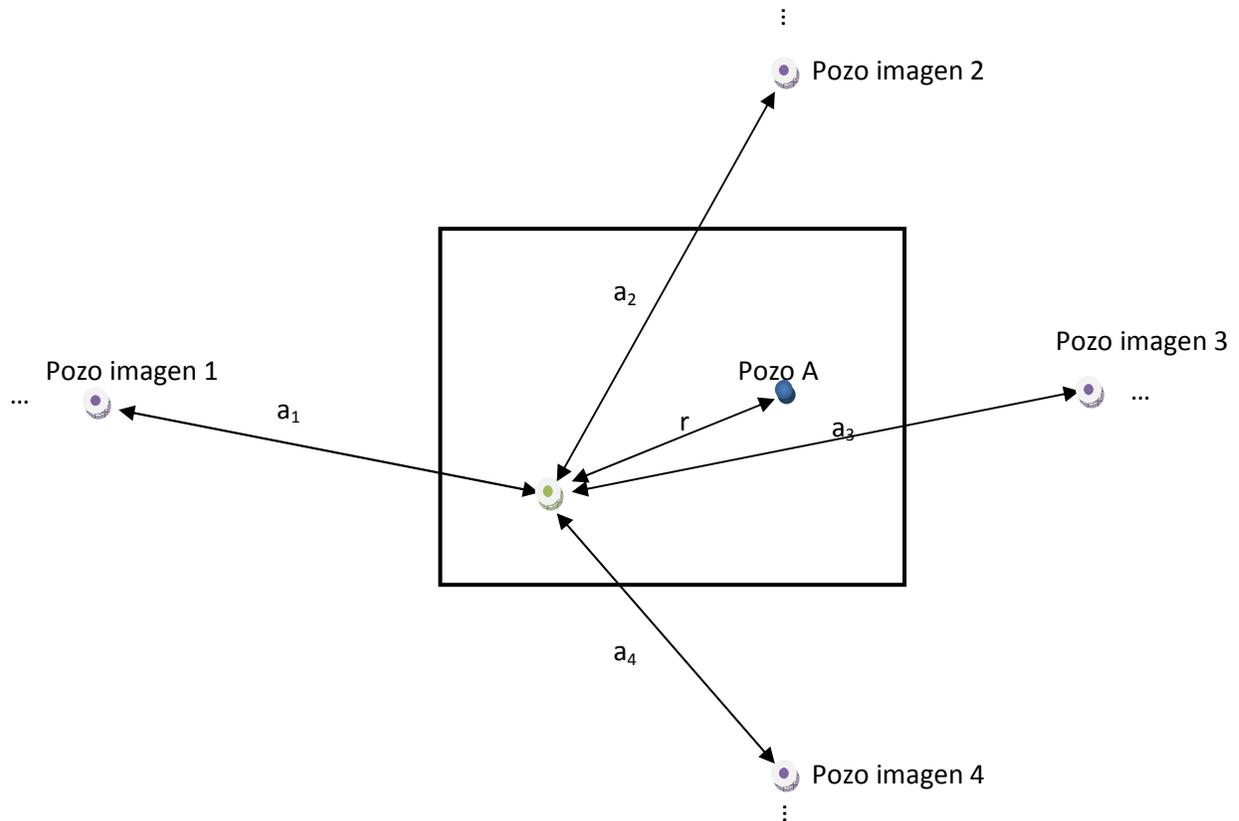


Figura 5.1. Representación del sistema de pozos imagen para un yacimiento cerrado con un pozo productor.

La derivada con respecto a la posición de la expresión (5.13) es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial r} = & \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} \left[\frac{\eta (2r_w)^{3-\delta} e^{-\frac{\eta r_w^2}{4t}} \left(\frac{\eta r_w^2}{t} \right)^{\frac{\delta}{2}-2}}{t} + (2-\delta) r_w^{1-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}-1, \frac{\eta r_w^2}{4t}\right) \right] \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} \left[\frac{\eta (2a_i)^{3-\delta} e^{-\frac{\eta r_w^2}{4t}} \left(\frac{\eta a_i^2}{t} \right)^{\frac{\delta}{2}-2}}{t} + (2-\delta) (a_i)^{1-\delta} \times \Gamma\left(\frac{\delta}{2}-1, \frac{\eta a_i^2}{4t}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Paso 2

La expresión completa para los pozos de interferencia y los pozos imagen representando un yacimiento cerrado, en el espacio de Laplace se expresa como, ecuación (5.15):

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_{wf}}(r_w, s) = & \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_{\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \frac{1}{\sqrt{|\eta s|}} \left(\frac{2r_w}{\sqrt{|\eta s|}} \right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}\left(r_w \sqrt{|\eta s|}\right) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu q B o}{k h^{3-\delta} \alpha_{\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \frac{1}{\sqrt{|\eta s|}} \left(\frac{2a_i}{\sqrt{|\eta s|}} \right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}\left(a_i \sqrt{|\eta s|}\right) \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{\mu q_j B o}{k h^{3-\delta} \alpha_{\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \frac{1}{\sqrt{|\eta s|}} \left(\frac{2b_j}{\sqrt{|\eta s|}} \right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}\left(b_j \sqrt{|\eta s|}\right) \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu q_j B o}{k h^{3-\delta} \alpha_{\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) s} \frac{1}{\sqrt{|\eta s|}} \left(\frac{2c_{j,k}}{\sqrt{|\eta s|}} \right)^{1-\frac{\delta}{2}} K_{1-\frac{\delta}{2}}\left(c_{j,k} \sqrt{|\eta s|}\right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

y en el espacio real:

$$\begin{aligned} \Delta p_w(r_w, t) = & \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} r_w^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}-1, \frac{\eta r_w^2}{4t}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu q B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} (a_i)^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}-1, \frac{\eta a_i^2}{4t}\right) \\ & + \sum_{j=1}^n \frac{\mu q_j B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} (b_j)^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}-1, \frac{\eta b_j^2}{4t}\right) \\ & + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu q_j B o}{4\pi^{\frac{\delta}{2}} k h^{3-\delta}} (c_{j,k})^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}-1, \frac{\eta c_{j,k}^2}{4t}\right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Para este caso, a_i es la distancia del i -ésimo pozo imagen al pozo de interés u observador, b_j es la distancia del j -ésimo pozo que esta interfiriendo al pozo observador o de interés y al considerar cada pozo productor se debe tener en cuenta que “se encontraría sólo” en un sistema cerrado, así que al utilizar superposición deben agregarse los k -ésimos pozos imagen para cada pozo productor que se encuentre interfiriendo, de tal forma que $c_{j,k}$ es la distancia del pozo del k -ésimo pozo imagen al j -ésimo pozo productor que interfiere .

Para una prueba de interferencia donde interviene un pozo productor A y un observador B, el cual tuvo un periodo de producción antes de iniciar la prueba, la expresión que representa la caída de presión en el pozo B para esta situación es:

$$\Delta p_B = \frac{\mu q_B B o}{4\pi^2 k h^3 - \delta} r_w^{2-\delta} \left[\Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta r_w^2}{4(t_B + \Delta t)}\right) - \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta r_w^2}{4(\Delta t)}\right) \right] + \frac{\mu q_A B o}{4\pi^2 k h^3 - \delta} a^{2-\delta} \left[\Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a^2}{4(t_A + \Delta t)}\right) - \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a^2}{4(t_A)}\right) \right], \quad (5.17)$$

donde

t_A, t_B son el tiempo de producción para cada pozo respectivamente antes del cierre del pozo observador B

Δt , es el intervalo de tiempo de interferencia de producción posterior al cierre del pozo observador B.

a es la distancia entre los pozos productor A y observador B

En el caso de una prueba de interferencia donde interviene un pozo productor A y un observador B con la presencia de una falla, sin un tiempo previo de producción del pozo observador B, la expresión que representa la caída de presión es:

$$\Delta p_B = \frac{\mu q_A B o}{4\pi^2 k h^3 - \delta} a^{2-\delta} \left[\Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a^2}{4(t_A + \Delta t)}\right) - \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a^2}{4(t_A)}\right) \right] + \frac{\mu q_A B o}{4\pi^2 k h^3 - \delta} a^{2-\delta} \left[\Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a^2}{4(t_A + \Delta t)}\right) - \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{\eta a^2}{4(t_A)}\right) \right], \quad (5.18)$$

donde d es la distancia del pozo imagen A hasta el pozo B.

Con el objetivo de generalizar se presenta nuevamente la solución para una línea fuente de la ecuación de Barker en variables adimensionales, ecuación (4.21)

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} (r_D)^{2-\delta} \Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{r_D^2}{4t_D}\right) \quad (5.19)$$

La expresión de la derivada de la presión adimensional p_D con respecto al logaritmo natural del tiempo adimensional t_D , queda expresada como:

$$\frac{\partial p_D}{\partial \ln(t_D)} = \frac{2^{1-\delta} e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}}}{t_D^{\frac{\delta}{2}-1} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (5.20)$$

Y la expresión análoga a la ecuación (5.17) en variables adimensionales es:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{1}{4(t_{DB} + \Delta t_D)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{1}{4(\Delta t_D)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} + \frac{1}{2} r_D^2 \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{r_D^2}{4(t_{DA} + \Delta t_D)}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} - \frac{1}{2} r_D^2 \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2} - 1, \frac{r_D^2}{4(t_{DA})}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (5.21)$$

Capítulo 6

Comprobación del modelo Semianalítico

Para efectuar la comprobación del modelo iniciamos con la comparación de soluciones ya conocidas en geometría euclidiana (capítulo 2), con las obtenidas con la ecuación de Barker al considerar la dimensión fractal δ igual a la dimensión euclidiana 2, utilizando las expresiones encontradas en el capítulo 5.

Para realizar la comparación utilizamos los datos sintéticos siguientes, para todos los casos presentados:

Tabla 6.1. Datos del aceite y del yacimiento		
Viscosidad, cp	μ	0.3
Factor de Volumen, adimensional	B	1.6
Porosidad, adimensional	ϕ	0.1
Compresibilidad, (lb/pg ²) ⁻¹	c	$2 \cdot 10^{-5}$
Permeabilidad, md	k	100
Espesor del yacimiento, pie	h	30
Gasto, BPD	q	100
Radio del pozo, pie	r_w	0.5

6.1 Yacimiento con una falla y un pozo productor

Iniciamos con la expresión (2.1) para un pozo cerca de una falla y la transformación de la ecuación (5.4) al espacio tiempo real.

Los resultados que se muestran a continuación se obtuvieron al considerar que el pozo se encuentra en la posición $x=50$ pies, $y=50$ pies.

La figura 6.1 muestra el resultado para la caída de presión en cada punto $(x, 50)$ a un tiempo $t=20h$, empleando las ecuaciones (2.1) y (5.4) considerando que existe una falla colocada en $x=0$. Debido a esto el pozo imagen se encuentra en $(-50,50)$, en esta figura puede verse claramente que existe una pendiente igual a cero para la función Δp en $x=0$, así como también que no existe diferencia alguna entre las curvas producidas por ambas ecuaciones. También, puede verse que, a partir de $x=50$ hasta $x=100$ la caída de presión es continua.

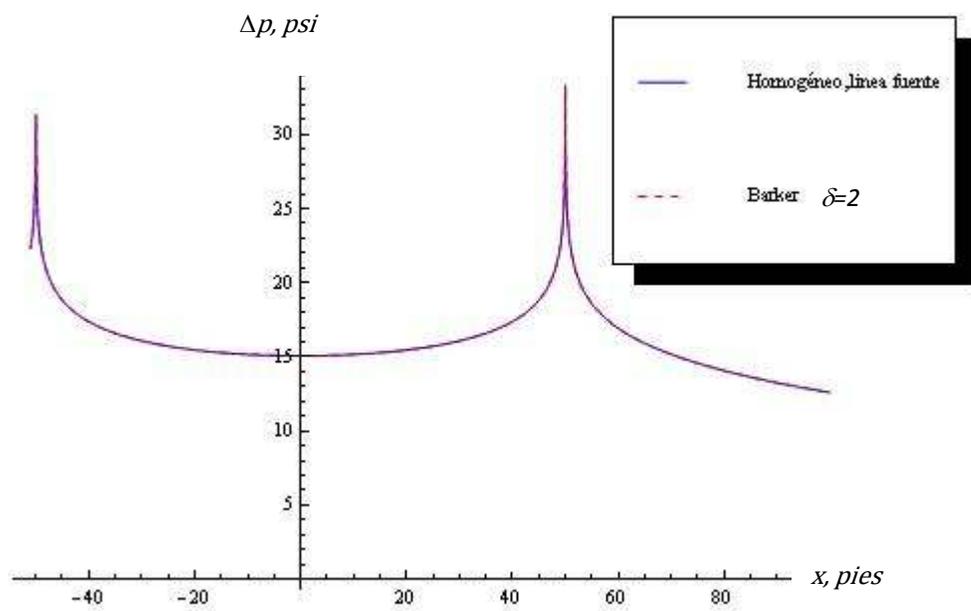


Figura 6.1. Gráfica de Δp vs. x , para la representación de un pozo cerca de una falla, empleando las ecuaciones (2.1) y (5.4). El pozo está colocado en $(50,50)$ y la falla ubicada en $x=0$.

A continuación se muestra en la figura 6.2 el comportamiento de la caída de presión con respecto al tiempo, para el caso de una falla cerca de un pozo productor, considerándose el punto de evaluación $(51,50)$.

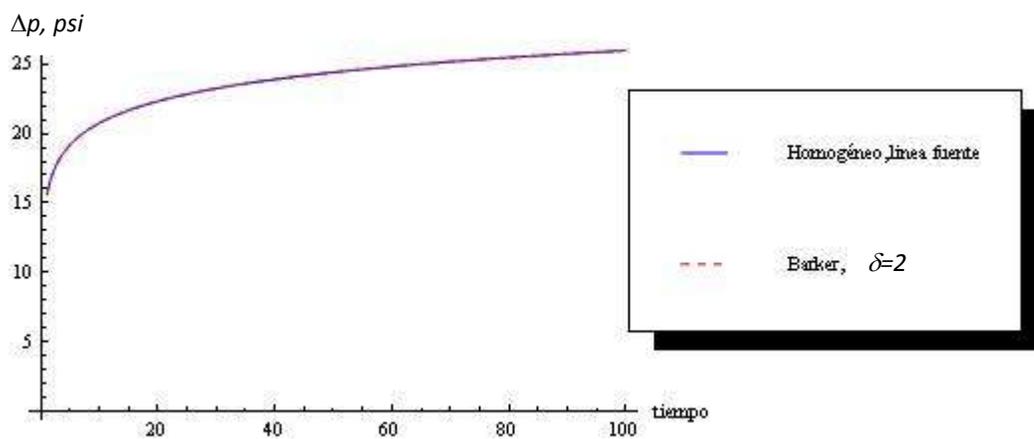


Figura 6.2. Gráfica de Δp vs. t , representando el efecto de una falla cerca de un pozo. Con la ecuación de línea fuente y la ecuación de Barker.

6.2 Pozo productor entre fallas paralelas

Ahora para el caso de fallas paralelas, las expresiones a utilizar son la (2.2), (2.4) y la (5.5). La posición del pozo es la misma que en el caso anterior $x=50$ pies, $y=50$ pies y las fronteras se ubican en $x=0$ y en $x=100$ pies. La figura 6.3 muestra la caída de presión Δp vs. t obtenida por medio de las ecuaciones anteriores con $x=50$ pies y $y=51$ pies, y como puede observarse para un número de 120 pozos imagen las soluciones de la aproximación de Gringarten y las dos del método de imágenes son diferenciales para un tiempo de 200 horas.

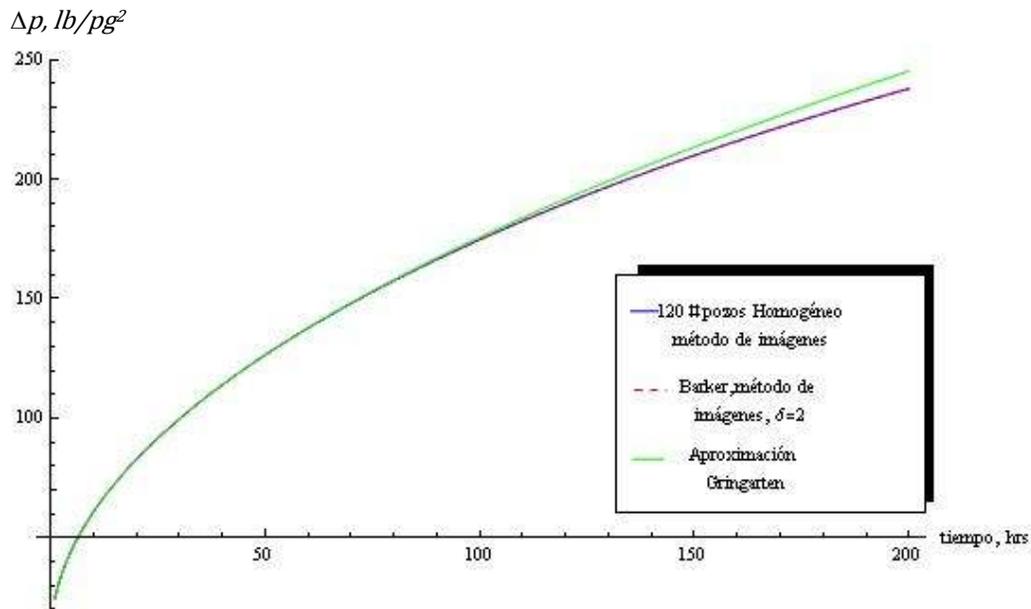


Figura 6.3. Gráfica de Δp vs. t , para el caso de fallas paralelas utilizando la aproximación de Gringarten, el método de imágenes para el modelo homogéneo y el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=2$.

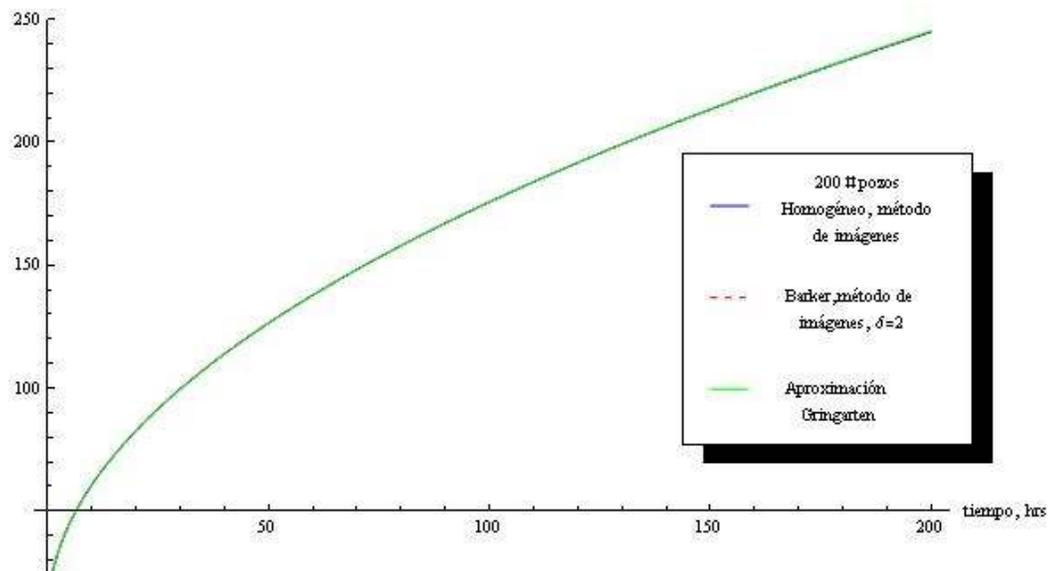


Figura 6.4. Gráfica de Δp vs. t , para el caso de fallas paralelas utilizando la aproximación de Gringarten, el método de imágenes para el modelo homogéneo y el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=2$.

Como se puede observar en la figura 6.4 para un número de 200 pozos todas las soluciones tienen diferencias mínimas, al grado que en su gráfica no pueden distinguirse.

En la figura 6.5 se muestra Δp vs. x , obtenida aplicando el método de imágenes a la ecuación de Barker, mostrándose claramente los puntos de pendiente cero en $x=0$ y $x=100$ para dos fallas paralelas, con un número de pozos imagen de 200 y dimensión $\delta=2$. El tiempo considerado en ésta gráfica es $t=20$ horas.

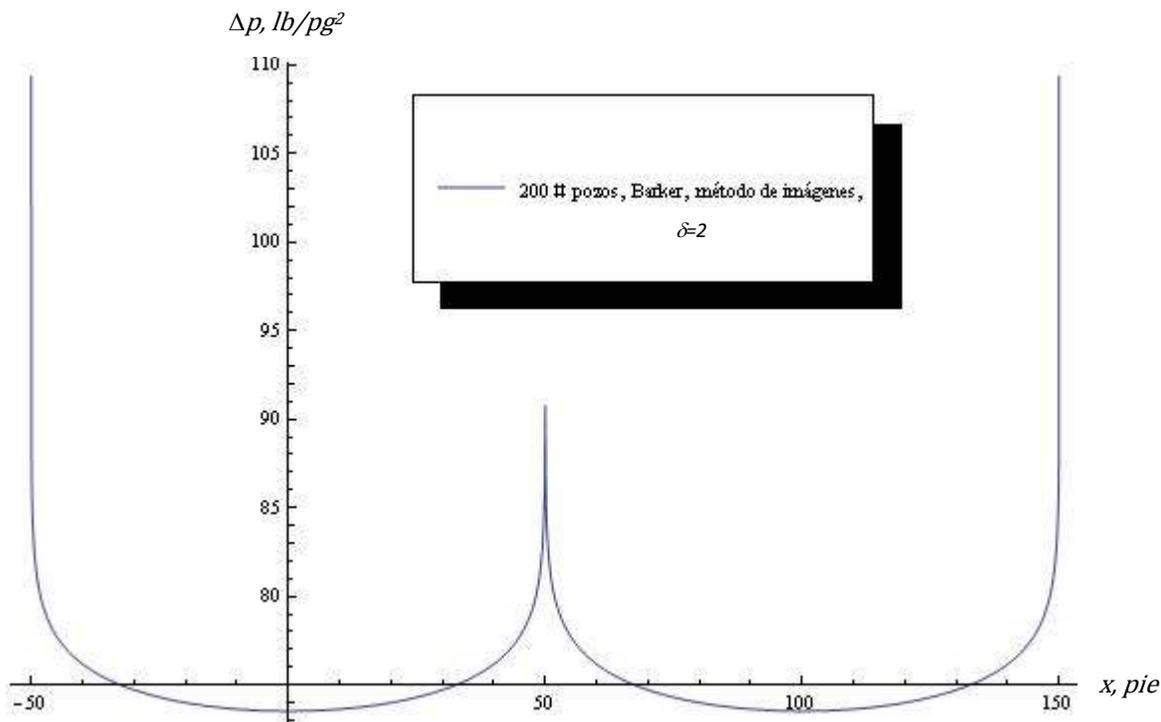


Figura 6.5. Gráfica de Δp vs. x , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=2$.

La figura 6.6 se muestra un gráfico 3D la solución para la ecuación de Barker con una dimensión $\delta=2$. Continuando con la comprobación de la utilidad del método de imágenes con respecto a la ecuación de Barker para dimensiones diferentes de 2, se muestran los resultados siguientes.

Continuando con la misma configuración, el pozo se encuentra en $x=50$ pies, $y=50$ pies, las fallas en $x=0$ pies y $x=100$ pies, lo único que se variará será el número de pozos imagen y la dimensión fractal. La figura 6.7 muestra Δp vs. t calculada empleando las ecuaciones (2.2), (2.4) y la (5.5), ahora con 240 pozos imagen, y la expresión de Barker se evaluó empleando $\delta=1.8$. La caída de presión Δp se obtuvo para $x=51$, $y=50$.

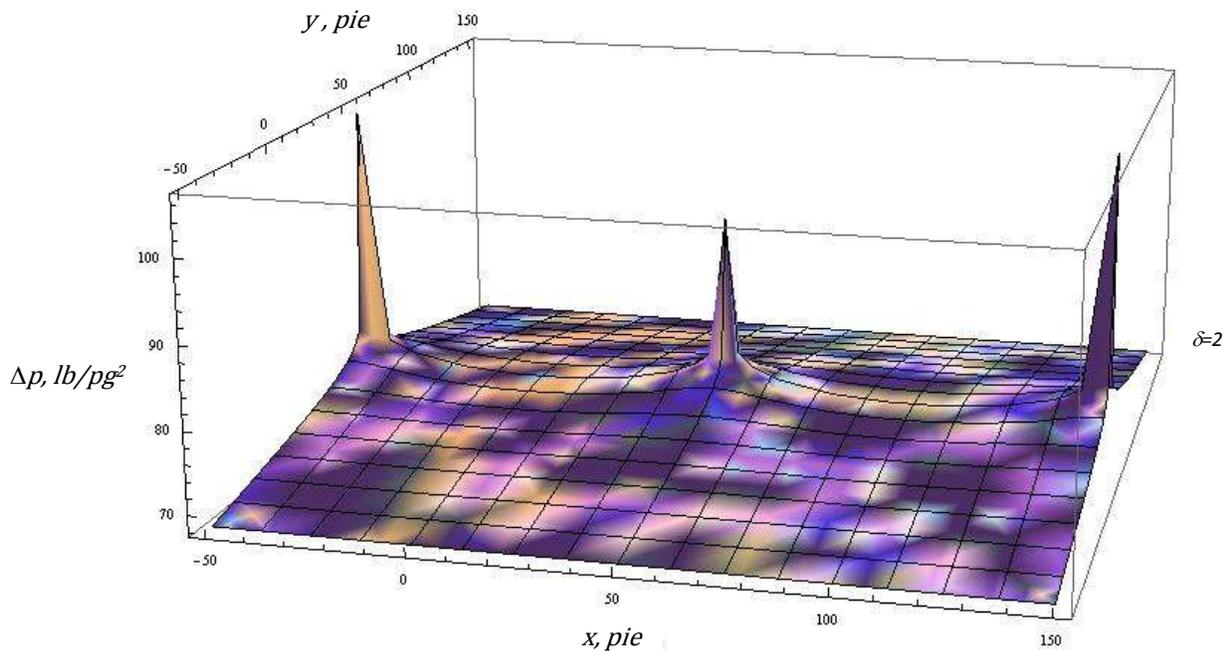


Figura 6.6. Gráfica 3D de Δp en función de la posición xy , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=2$.

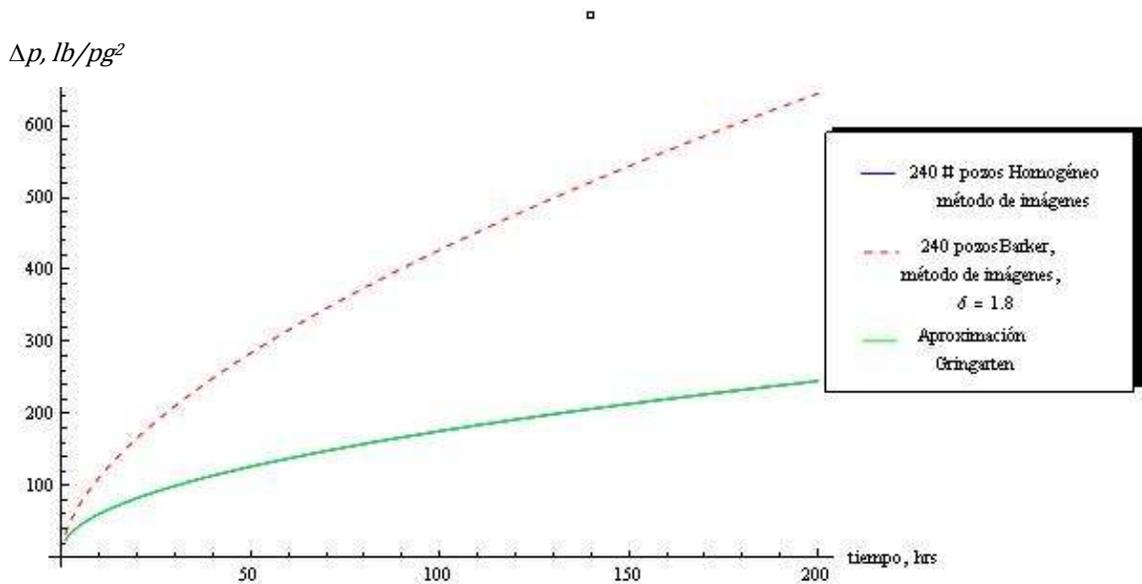


Figura 6.7. Gráfica de Δp vs. t , para el caso de fallas paralelas utilizando la aproximación de Gringarten, el método de imágenes para el modelo homogéneo y el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.8$.

La figura 6.8 muestra Δp vs. x para un pozo localizado entre fallas paralelas con la ecuación de Barker y una dimensión $\delta=1.8$. Se puede observar que para este caso las pendientes cero se

ubican en la posición esperada de las fallas. Aunque haciendo una comparación con la figura 6.5 puede notarse la variación en la forma de la curva resultante.

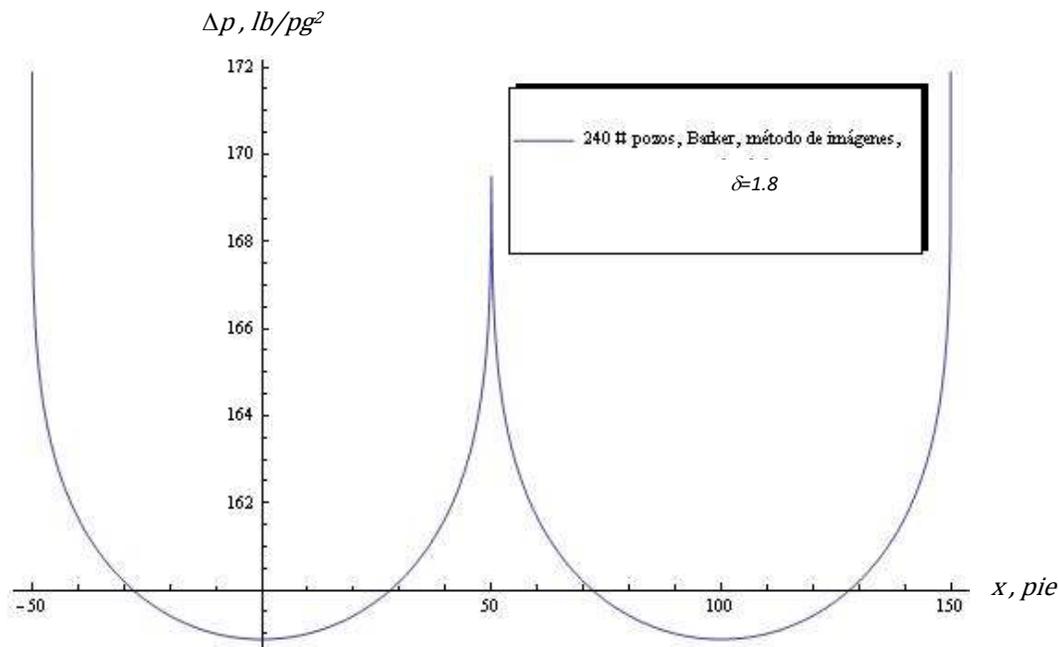


Figura 6.8. Gráfica de Δp vs. x , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.8$.

Las figuras 6.9-6.11 muestran las gráficas para fallas paralelas para una dimensión $\delta=1.5$

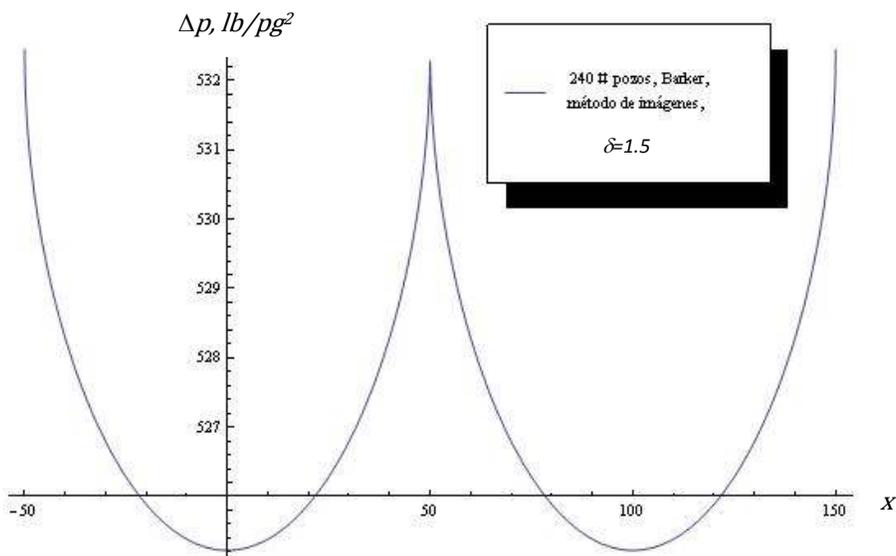


Figura 6.9. Gráfica de Δp vs. x , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.5$.

Las figuras 6.10 y 6.11 muestran el mismo caso con vistas diferentes que permiten observar la variación de la caída de presión en las dos dimensiones x,y .

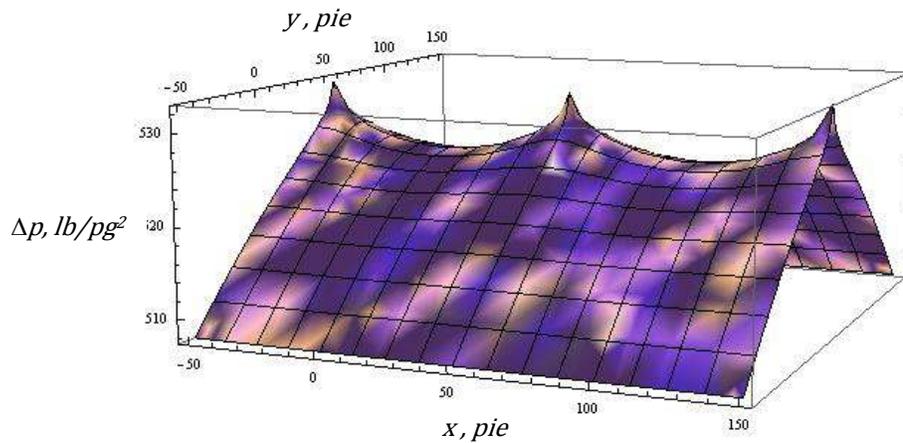


Figura 6.10. Gráfica 3D de Δp en función de la posición x,y , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.5$.

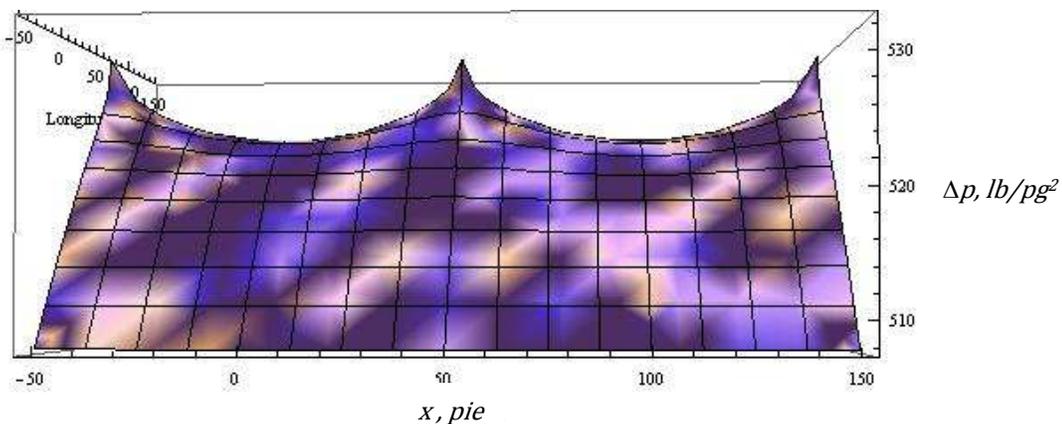


Figura 6.11. Gráfica 3D de Δp en función de la posición x,y , para el caso de fallas paralelas utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.5$.

Como puede verse las en las gráficas existe una pendiente cero en los puntos $x=0$ y $x=100$.

6.3 Yacimiento cerrado con un pozo productor

Ahora bien, para el caso de un yacimiento cerrado con fronteras en $x=0, x=100$ pies y $y=0, y=100$ pies, el método de imágenes utilizando el modelo de Barker con $\delta=1.7$, proporciona los resultados siguientes, figuras 6.12 y 6.13:

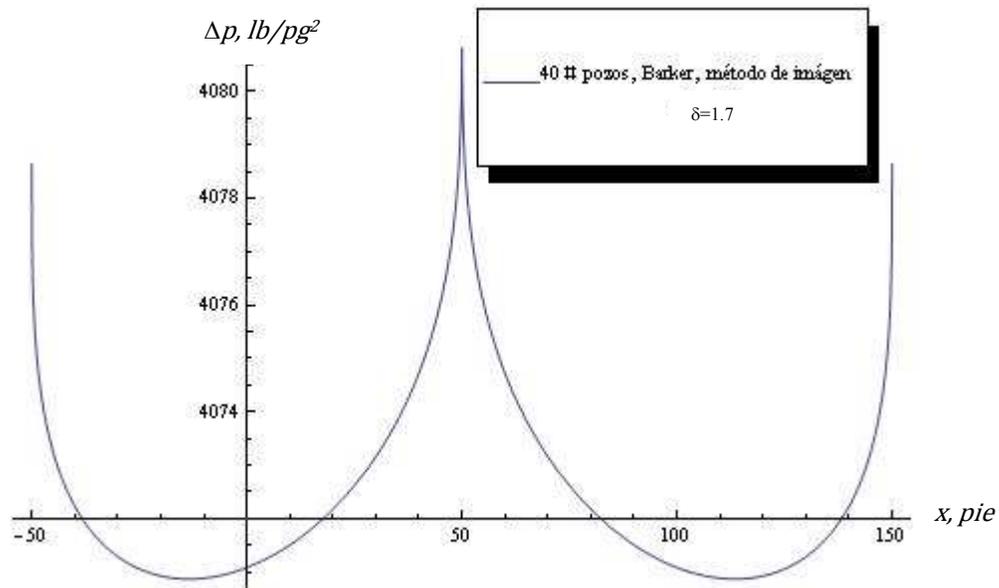


Figura 6.12. Gráfica de Δp vs. x , para el caso de yacimiento cerrado, utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.7$.

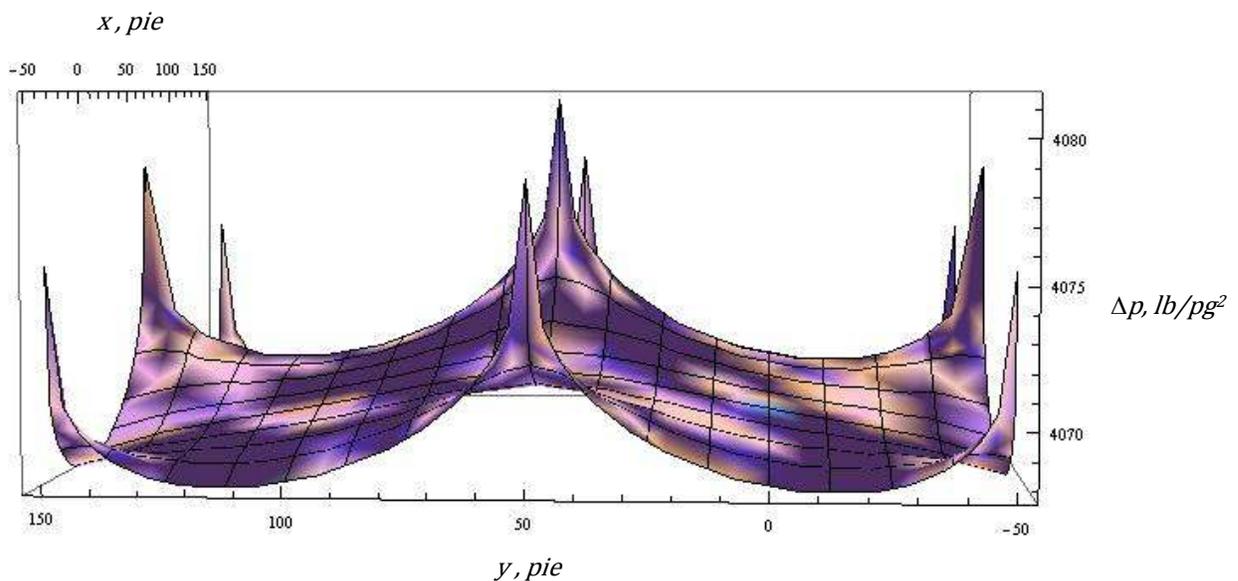


Figura 6.13. Gráfica 3D de Δp en función de la posición x, y , para el caso de yacimiento cerrado, utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.7$.

Es importante hacer mención que todos los resultados anteriores fueron obtenidos siguiendo el método de Fokker et al¹⁶, es decir calculando la suma de caída de presión en el espacio de Laplace para después efectuar la transformación al espacio real por medio del algoritmo de Stehfest¹.

Como puede observarse para el caso de un yacimiento cerrado se presentan deformaciones en las curvas, de tal suerte que las pendientes cero no se encuentran en los puntos esperados $x=0$ y $x=100$ pies. Por lo tanto, considerando los resultados anteriores se buscó aplicar el método de imágenes en el espacio real, ya que como se mostró en el capítulo 4, existe la expresión analítica para la transformada inversa de Laplace de la solución de línea fuente de Barker, dada por (4.16), así pues, los resultados siguientes se obtuvieron por medio del método de imágenes usando la expresión (4.16) como base.

Las gráficas siguientes se obtuvieron para 240 pozos imagen y los datos del yacimiento y del fluido incluidos en la tabla 6.1.

Las figuras 6.14 a 6.16, muestran los resultados obtenidos para una dimensión fractal de $\delta=1.5$.

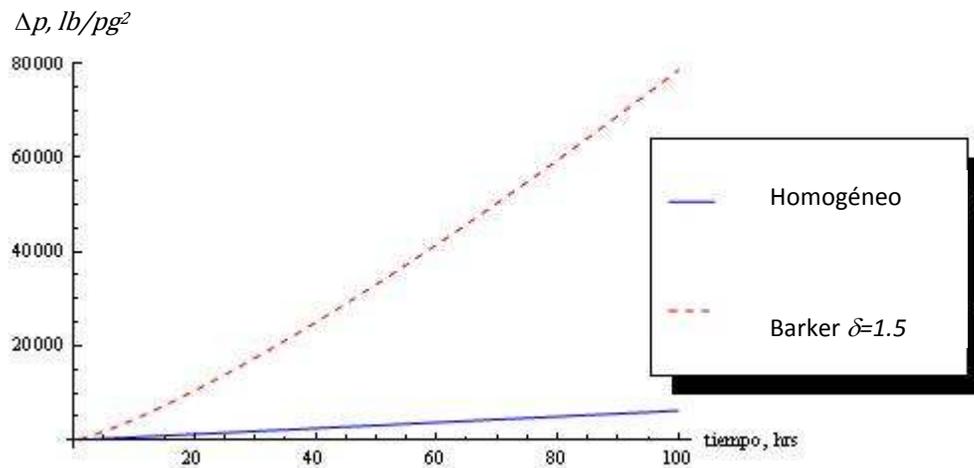


Figura 6.14. Gráfica de Δp vs t , para el caso de un yacimiento cerrado utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.5$, empleando 240 pozos imagen.

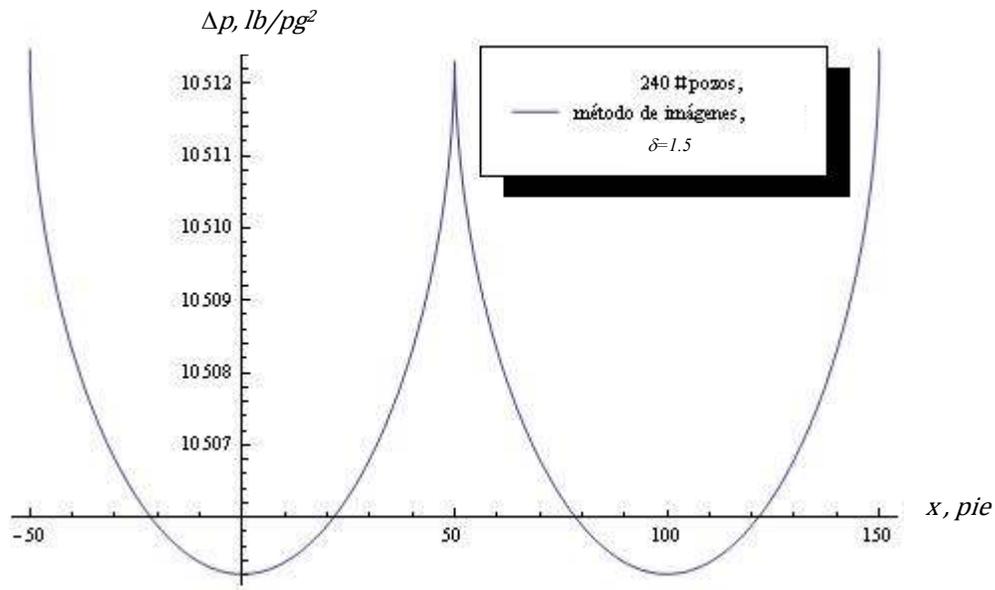


Figura 6.15. Gráfica de Δp vs. x , para el caso de yacimiento cerrado, utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.5$.

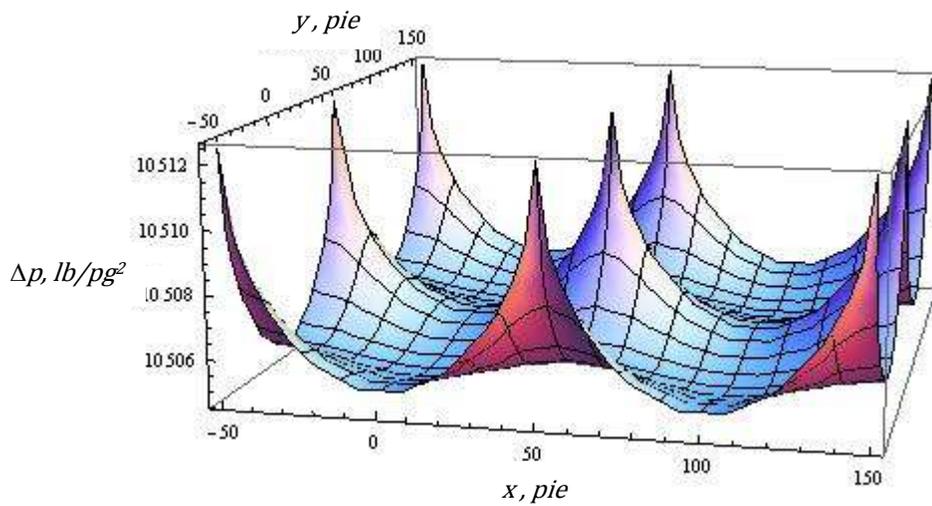


Figura 6.16. Gráfica 3D de Δp en función de la posición x,y , para el caso de yacimiento cerrado utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.5$.

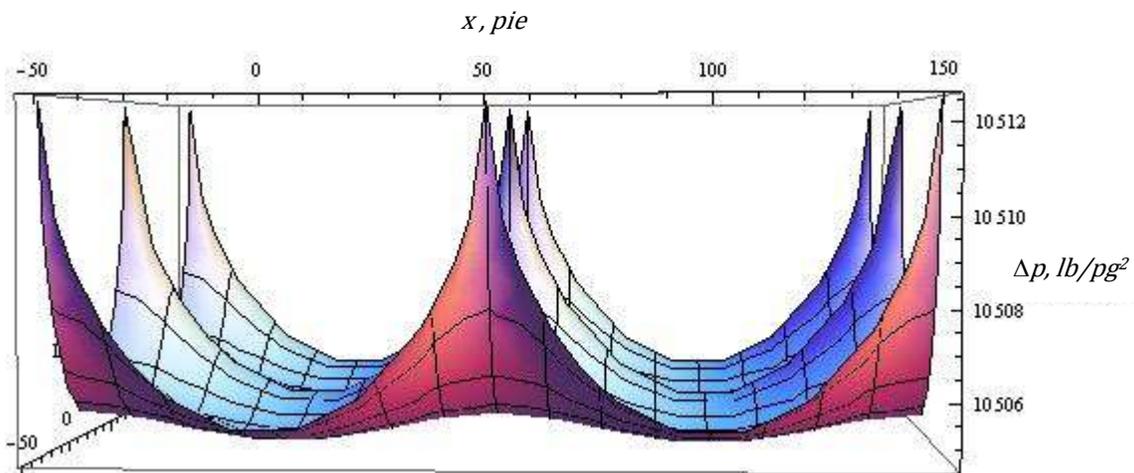


Figura 6.17. Gráfica 3D de Δp en función de la posición x,y , para el caso de yacimiento cerrado utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con $\delta=1.5$.

A continuación se muestran gráficas comparativas de los resultados para diferentes dimensiones δ para un yacimiento cerrado con un pozo productor en el centro. La figura 6.18 muestra la caída de presión con respecto al tiempo.

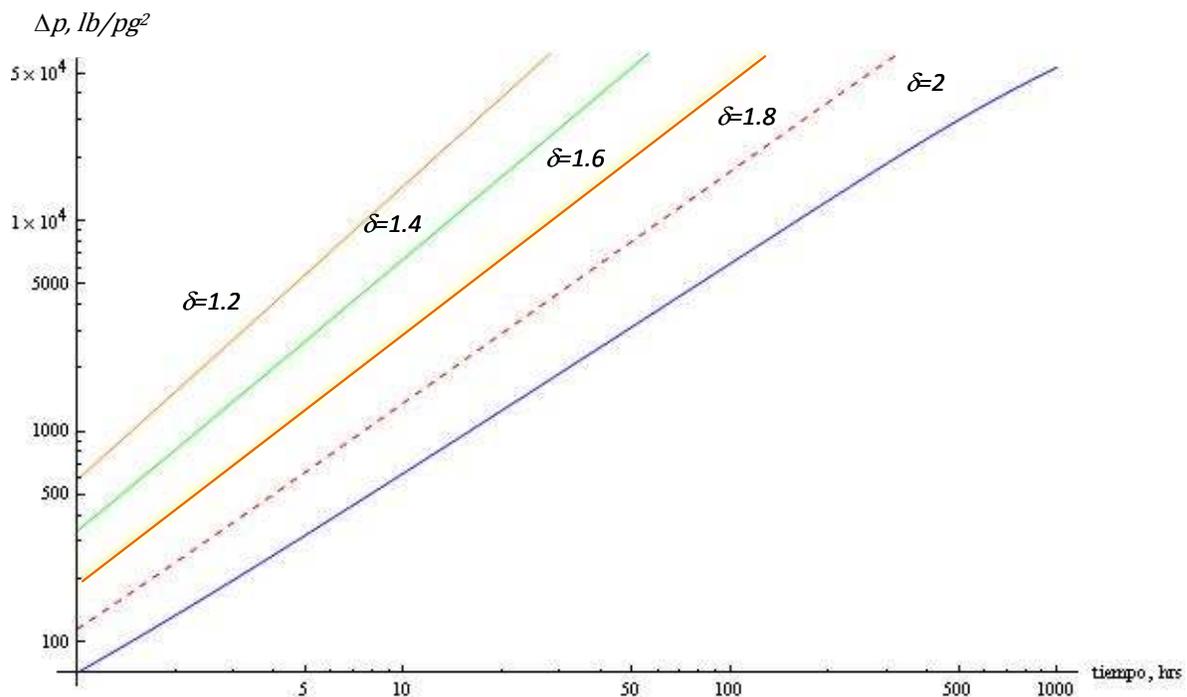


Figura 6.18. Gráfica de $\log\text{-}\log \Delta p$ vs. t , para el caso de yacimiento cerrado, modelo de Barker con diferentes valores de la dimensión δ ; caída de presión en $x=51$ pies.

La gráfica 6.19 sólo es una superposición de las gráficas de la caída de presión Δp con respecto a la posición x con el objetivo de observar como la forma de la curva se afecta por la dimensión fractal δ ; se puede observar que la pendiente cero de las curvas se conserva en los puntos de interés $x=0$ y $x=100$ pies, pero las caídas de presión son bastante diferentes; mientras menor sea la dimensión fractal δ , la presencia del pozo productor perturba una región mayor, y viceversa.

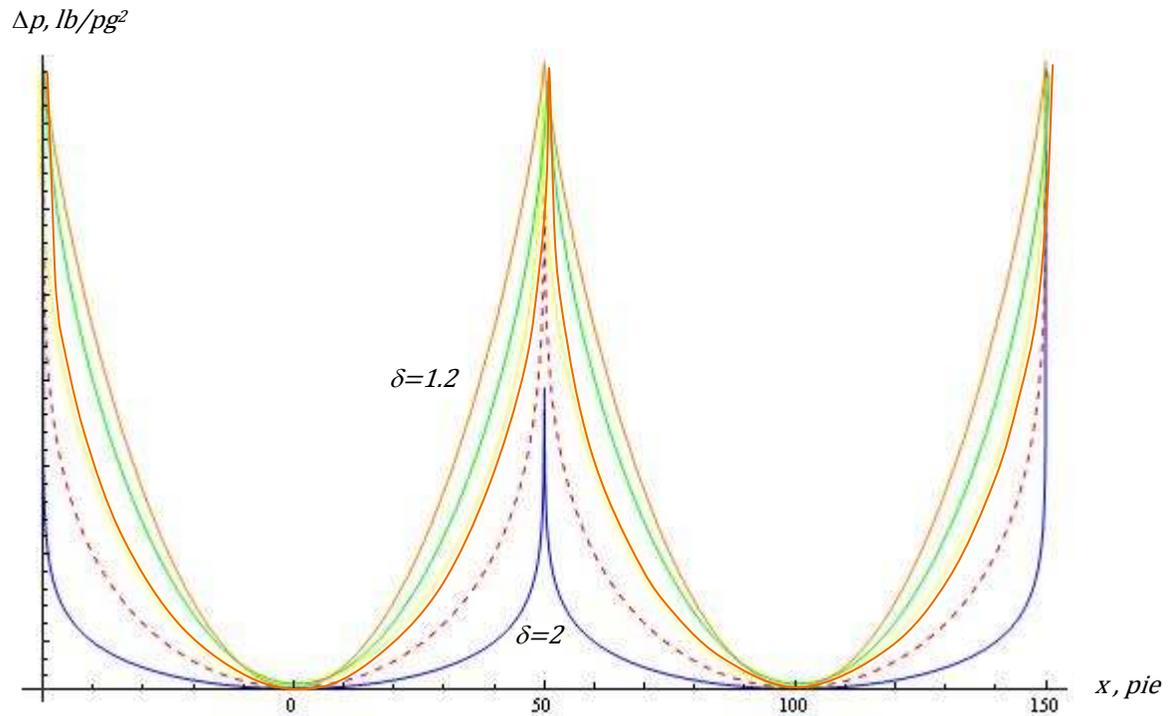


Figura 6.20. Gráfica de Δp vs. x , para el caso de yacimiento cerrado, utilizando el método de imágenes, modelo de Barker con la dimensión δ variando desde 1.2-2.

Para mostrar que la expresión (5.10) efectivamente genera un sistema con fronteras cerradas se muestra en la figura 6.20 la derivada de la presión con respecto a la posición, ecuación (5.14).

6.4 Pruebas de Interferencia

Para observar el comportamiento en el caso de pruebas de interferencia, en la se tiene sólo un pozo observador y un productor ambos con producción previa al cierre del pozo observador, se utilizaron los datos de la Tabla 6.2a y 6.2b:

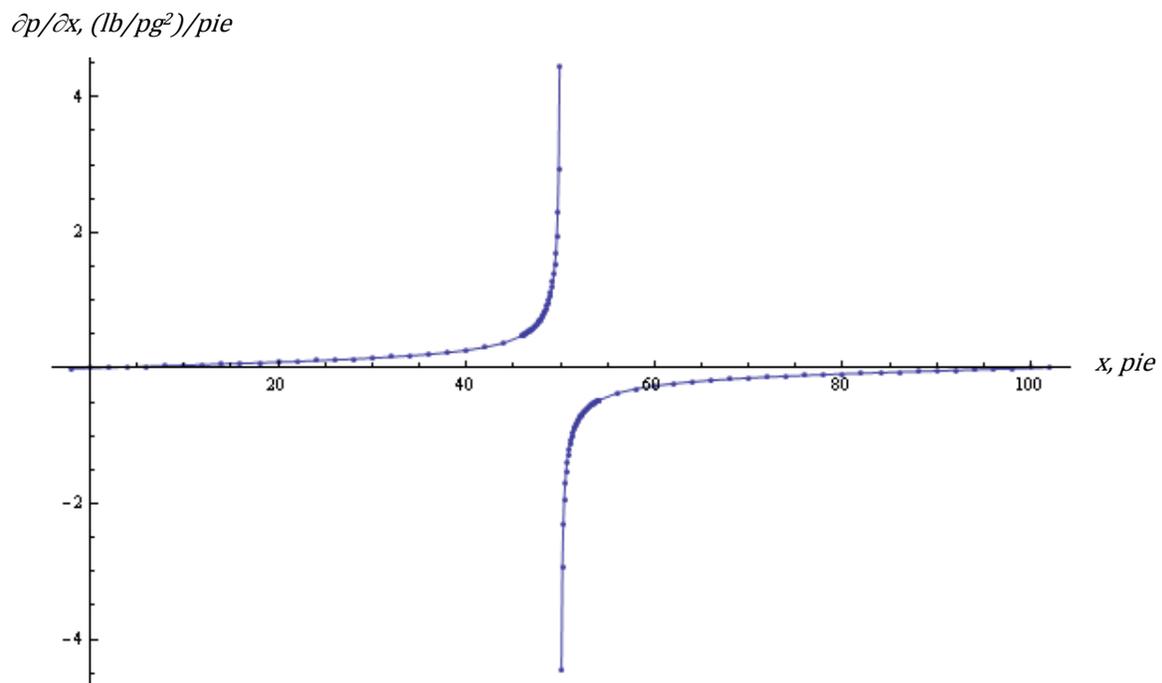


Figura 6.21. Gráfica de $\partial p / \partial x$ vs x para un yacimiento cerrado y $\delta=1.6$.

Tabla 6.2a. Datos del aceite y del pozo			
Viscosidad, cp	μ	0.3	
Factor de Volumen, adimensional	B	1.6	
Gasto, BPD	q_A	10000	
	q_B	600	
Radio del pozo, pie	r_w	0.27	
Posición del pozo(x,y), pie	A	0	0
	B	2300	2300
Tiempo de producción antes del cierre, hr	t_A	500	
	t_B	100	

Tabla 6.2b. Datos del yacimiento		
Porosidad, adimensional	ϕ	0.01
Compresibilidad, $(\text{lb/pg}^2)^{-1}$	c	$1.14 \cdot 10^{-5}$
Permeabilidad, md	k	37
Espesor del yacimiento, pie	h	164
Presión inicial, lb/pg^2	p_i	4500

En la siguiente gráfica se observa la solución de la ecuación (5.14), así como la expresión para una prueba de incremento de presión con una dimensión $\delta=2$.

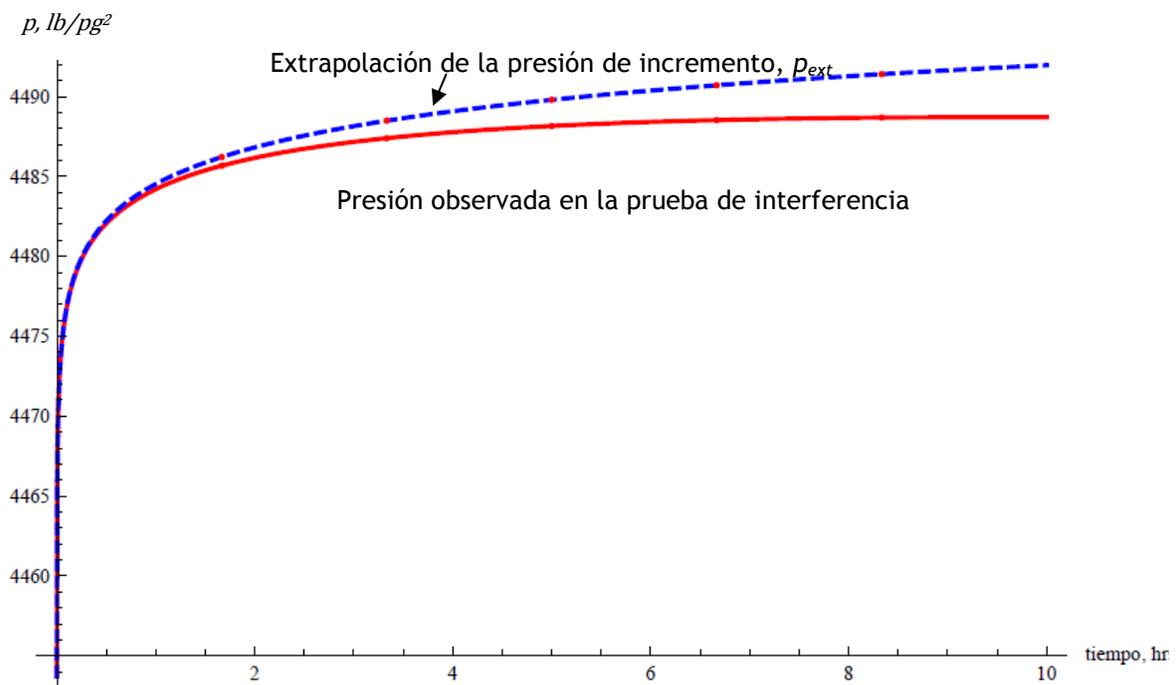


Figura 6.22. Gráfica de p vs t , para el ejemplo de una prueba de interferencia, para un yacimiento con geometría euclidiana, dimensión 2.

En la figura 6.22 se muestra la solución a la ecuación (5.14), así como la extrapolación de la presión de incremento, para diferentes dimensiones fractales.

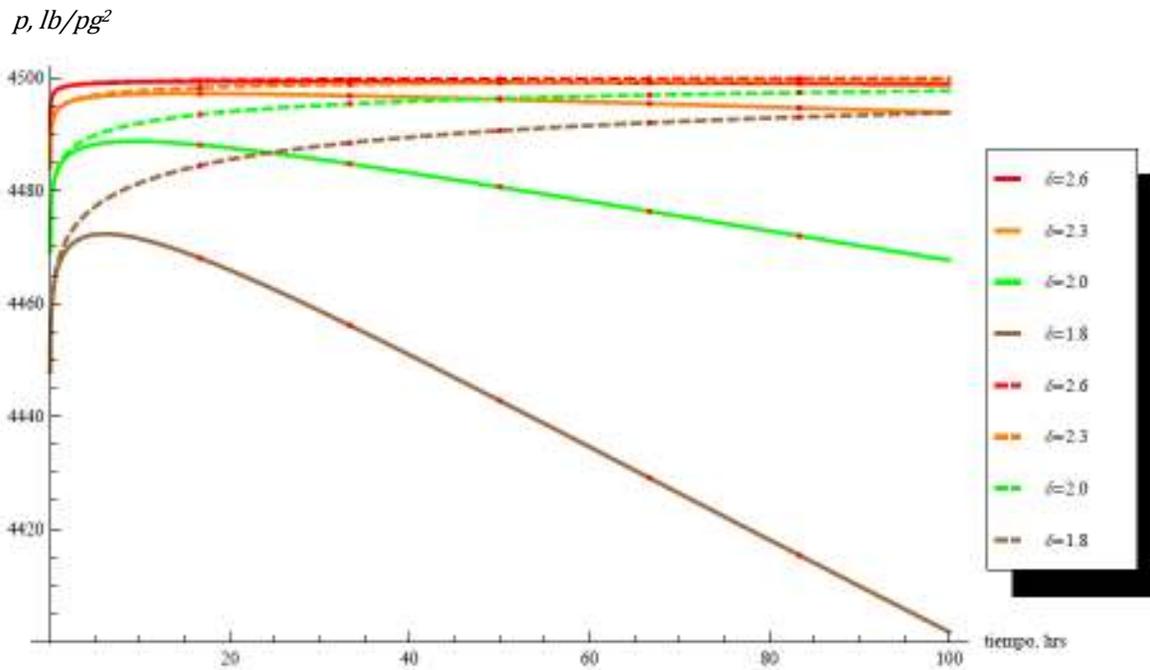
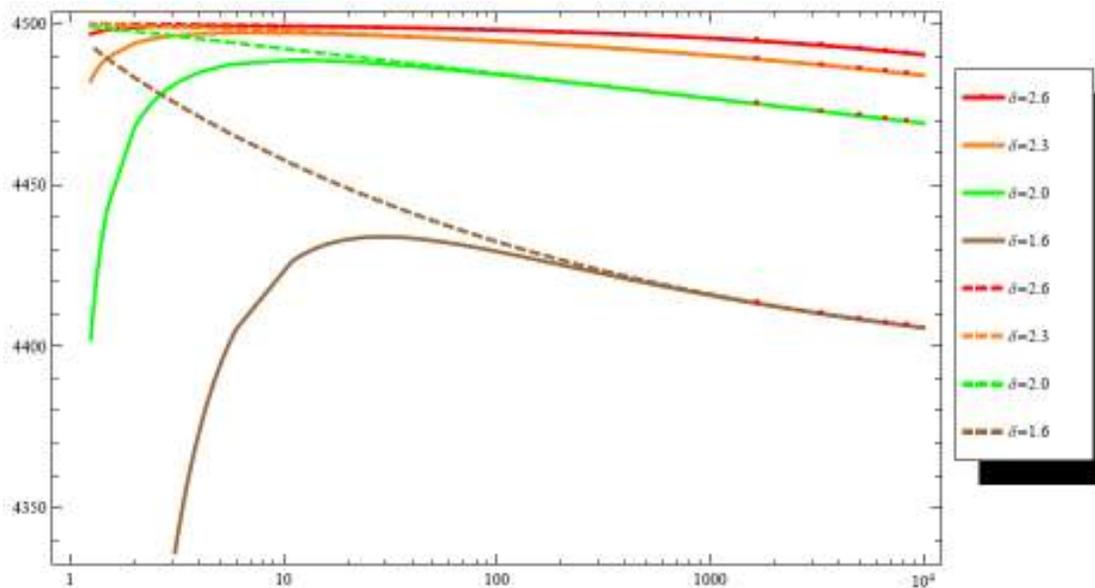


Figura 6.23. Gráfica de p vs t , para el ejemplo de una prueba de interferencia, para diferentes dimensiones fractales. Las curvas con línea punteada son para la presión de incremento extrapolada

La gráfica de la presión vs el tiempo de Horner correspondiente se muestra a continuación, Figura 6.23.



La figura 6.25 muestra la solución de la ecuación (5.17) para el caso de interferencia entre un pozo observador y un pozo productor, ambos con producción antes del cierre del pozo observador en variables adimensionales para diferentes dimensiones fractales, y la figura 6.26 muestra la presión adimensional, p_D en función del tiempo de Horner t_{HD} .

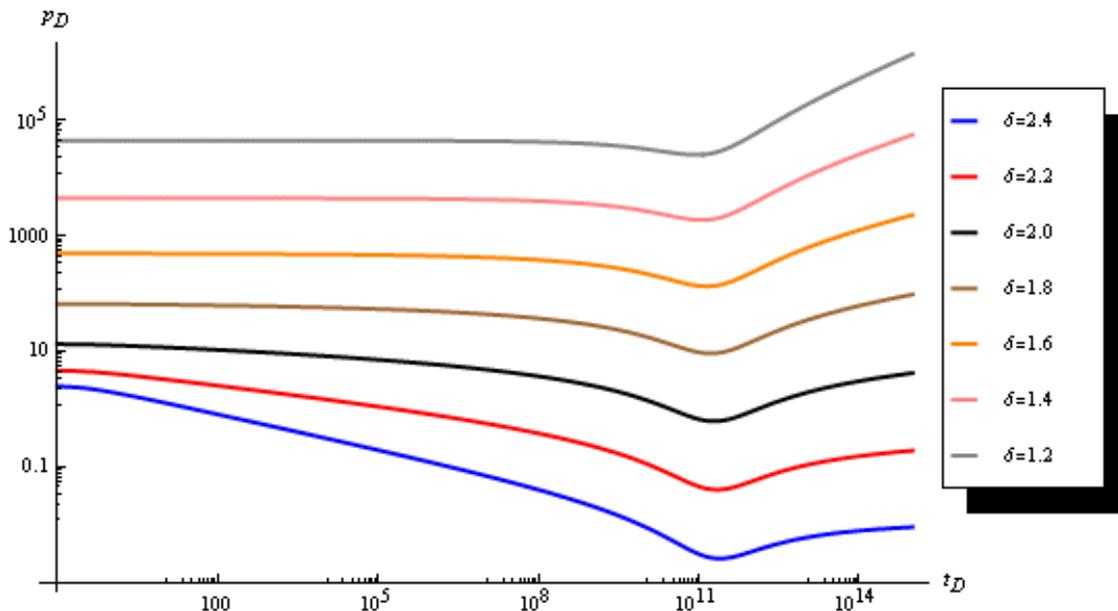


Figura 6.25. Gráfica de p_D vs t_D , para una prueba de interferencia con un tiempo de producción tanto del pozo observador como del pozo productor, previo al inicio de la prueba.

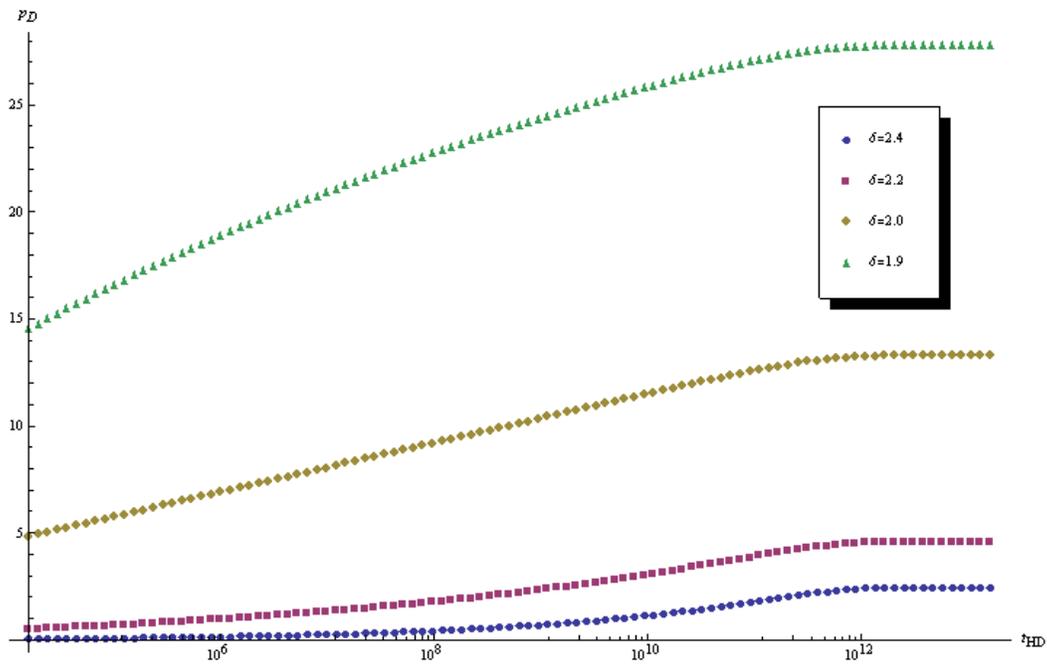


Figura 6.26. Gráfica de p_D vs t_{HD} , para una prueba de interferencia con un tiempo de producción tanto del pozo observador como del pozo productor, previo al inicio de la prueba.

Capítulo 7

Aplicación

El modelo desarrollado en este trabajo se aplicó al análisis de una prueba de interferencia del yacimiento Jujo-Tecominoacán. Es por ello que este capítulo inicia con información general de dicho yacimiento.

7.1 Campo Jujo-Tecominoacánⁱ

El campo Jujo-Tecominoacán es uno de los yacimientos de la Región Sur de México. Se localiza a 63 kilómetros al suroeste de la ciudad de Villahermosa, Tabasco, en el suroeste de la República Mexicana.

La ubicación geológica del mismo es en las Cuencas Terciarias del Suroeste, y específicamente, en el área central del denominado alto de Chiapas-Tabasco. Las rocas del yacimiento son dolomías en una trampa de tipo estructural. Se compone de un yacimiento de edades del Jurásico Superior Kimmeridgiano, Tithoniano y Cretácico Inferior. El yacimiento es de aceite volátil, con una densidad de 38°API.

Cubre un área de 74 km². La estructura de Jujo-Tecominoacán es un anticlinal, limitado al oriente por una falla inversa. Al oeste y sureste se presenta un cierre estructural, mientras que al norte y sur, se encuentran dos intrusiones salinas. Asimismo, el campo está dividido en una serie de bloques originados por una serie de fallas normales, aunque estos bloques están conectados hidráulicamente entre sí.

Se encuentra delimitado por un acuífero. Por medio de trabajos geológicos, petrofísicos y geofísicos, se ha identificado que su matriz es microcristalina con una porosidad de aproximadamente 3% y permeabilidad de 0.01md o menos.

El mapa estructural se muestra en la figura 7.1

Con base en pruebas de presión y otras fuentes se muestra en la figura 7.3 los diferentes regímenes de flujo que se han determinado en el yacimiento.

MODELOS DE FLUJO PARA YNF'S (PRUEBAS DE PRESION)

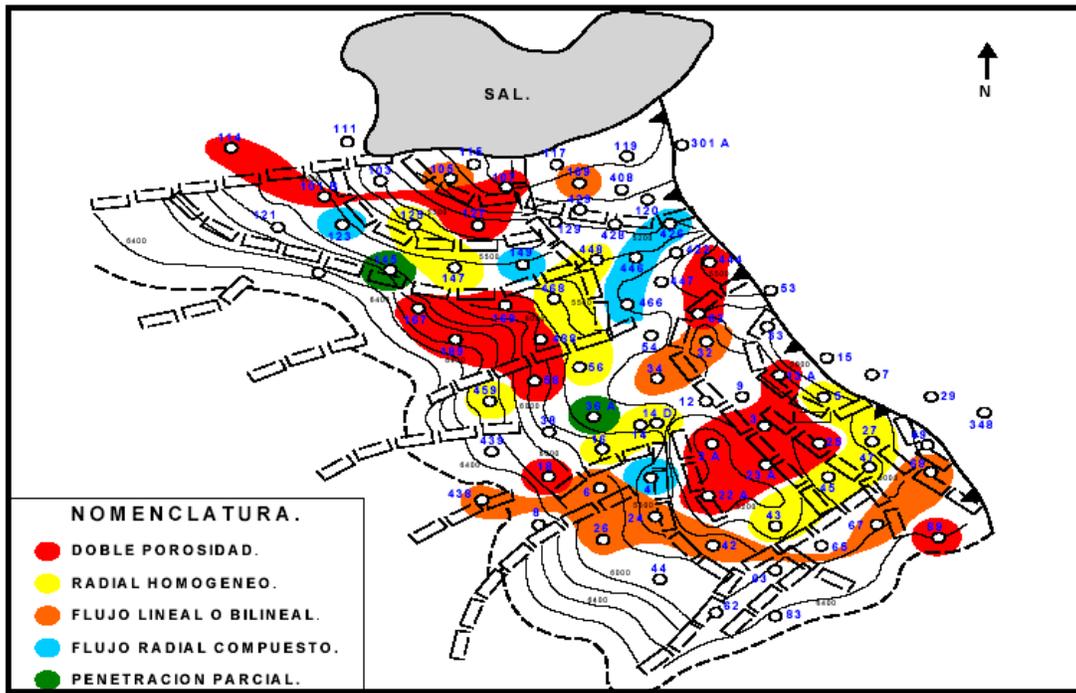


Figura 7.3. Zonas de Presión del Campo Jujo-Tecominoacán³².

7.2 Determinación del comportamiento fractal del yacimiento.

La diferencia en el comportamiento de producción de pozos vecinos es una indicación de que las fracturas no están distribuidas uniformemente, así como que tampoco están totalmente interconectadas; esto se comprueba por los diferentes patrones de flujo mostrados en la figura 7.3; lo cual se puede explicar por la existencia de una geometría fractal en el yacimiento.

Flamenco y Camachoⁱⁱ hicieron el análisis del flujo en estado transitorio y pseudoestacionario del campo. Ellos estudiaron 6 diferentes pruebas de presión de 4 pozos (A, B, C, D); encontrando en gráficas doble logarítmica Δp vs. t como la mostrada en la figura 4.7, líneas rectas con pendientes 0.327, 0.367, 0.535 y 0.35. Estos valores no representan algún tipo de flujo (radial,

esférico, lineal). Las pendientes de los pozos A, B y D tienen pendiente muy cerca 0.3214, la cual corresponde a un valor para cluster de percolación en $D=2$ y $\delta=1.9$ y $\theta=0.8$.

7.3 Datos de la Prueba de Interferencia

Gracias al apoyo de Pemex Exploración y Producción y en especial del Activo Jujo-Tecominoacánⁱⁱⁱ se obtuvo la información que se discute a continuación así como las figuras 7.1 a 7.3.

Con el objetivo de identificar la presencia de canales de alta conductividad que han provocado la invasión prematura de agua en pozos productores, se realizó una prueba de inyectividad e interferencia, en la zona sur-este del campo Jujo. Teniendo un pozo pulsante, 5 pozos observadores cerrados, 2 pozos fluyentes observadores y 2 pozos fluyentes con BN observadores, figura 7.4.

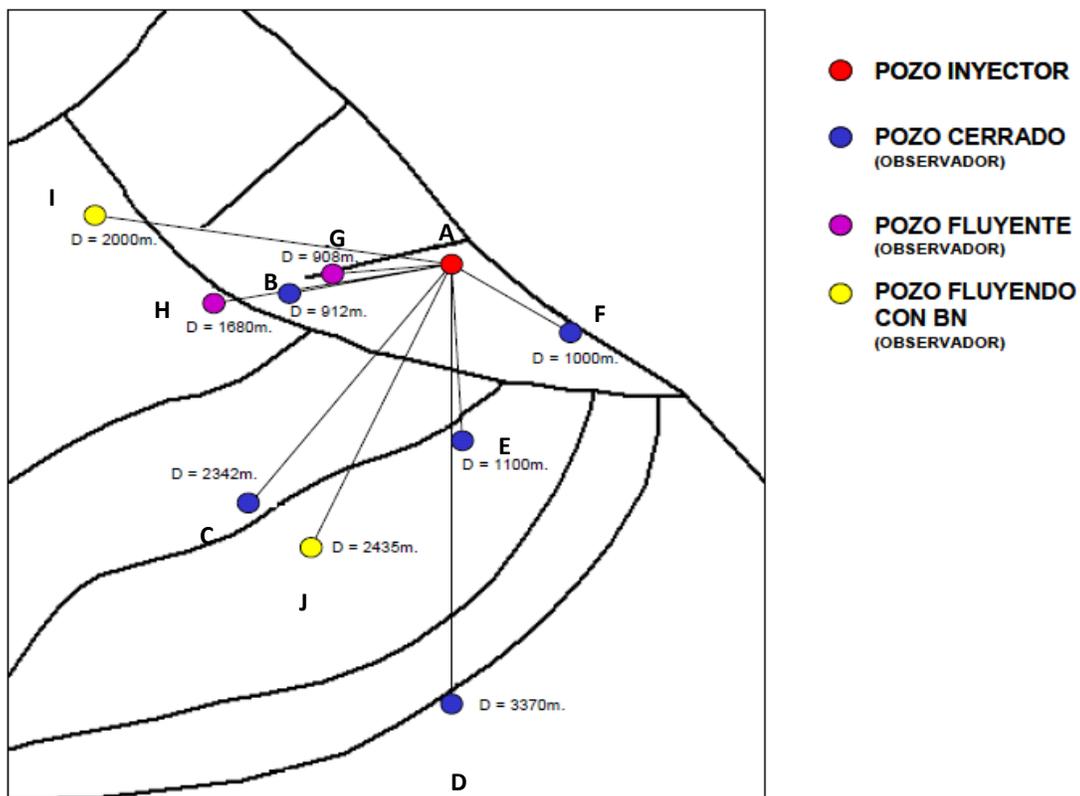


Figura 7.4. Mapa de la posición de los pozos que intervinieron en la prueba.

Para fines de este trabajo se seleccionó el pozo B para aplicar el modelo de flujo, considerando que es el pozo observador más cercano al pozo inyector A.

Los datos de la prueba se muestran en la Tabla 7.1

Tabla 7.1. Datos de la prueba	
Tiempo de Inyección	8hrs
Gasto, agua dulce	6.2bpm
Curva de Decremento	48hrs
Espesor	50m

Los datos de la prueba registrados en el pozo B se presentan en la figura 7.5.

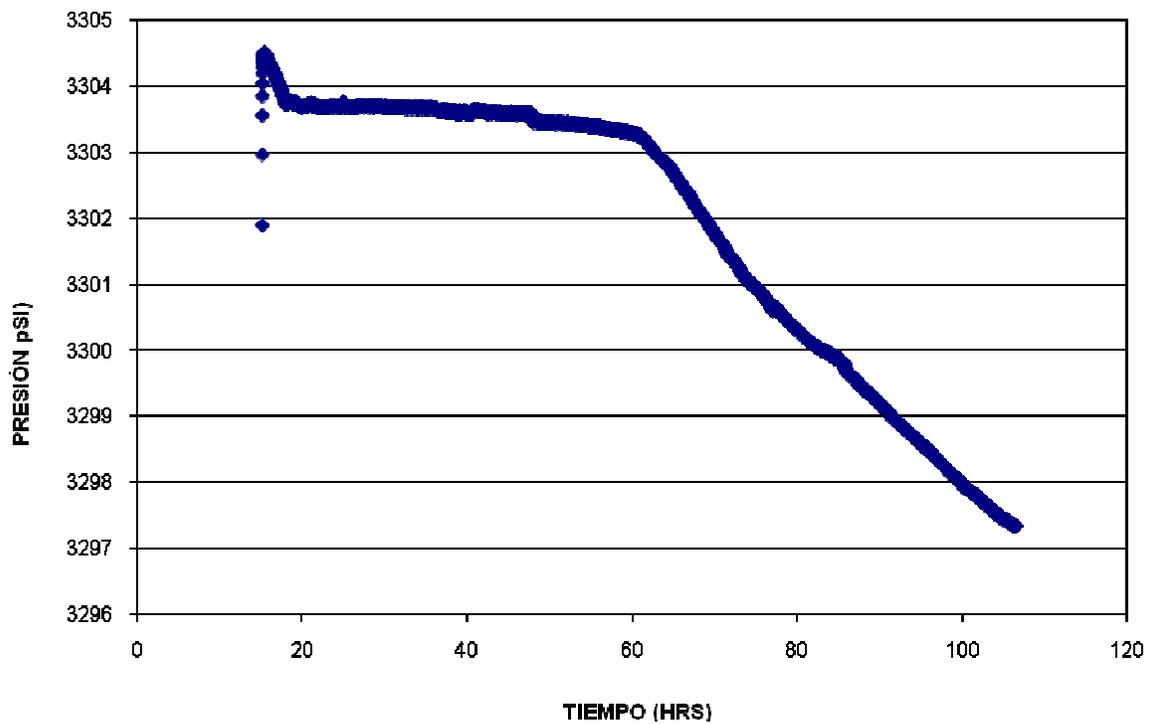


Figura 7.5. Datos de *presión vs tiempo* registrados en el pozo B para la prueba de interferencia durante la cual el pozo A inyectó agua dulce.

Debido a que no se pudo contar con la suficiente información de la prueba, se realizó, para fines de este trabajo, un análisis preliminar de los datos eliminando el efecto de la tendencia de declinación. La figura 7.6 muestra los resultados obtenidos al comparar el comportamiento de la presión observada en el pozo B con las curvas para pruebas de interferencia de un sólo pozo inyector con dimensiones fractales diferentes. Para este caso se han considerado las variables ϕ , k y c constantes. Como puede observarse la curva que más se aproxima a la respuesta en presión de la prueba es la que corresponde con $\delta=1.4$

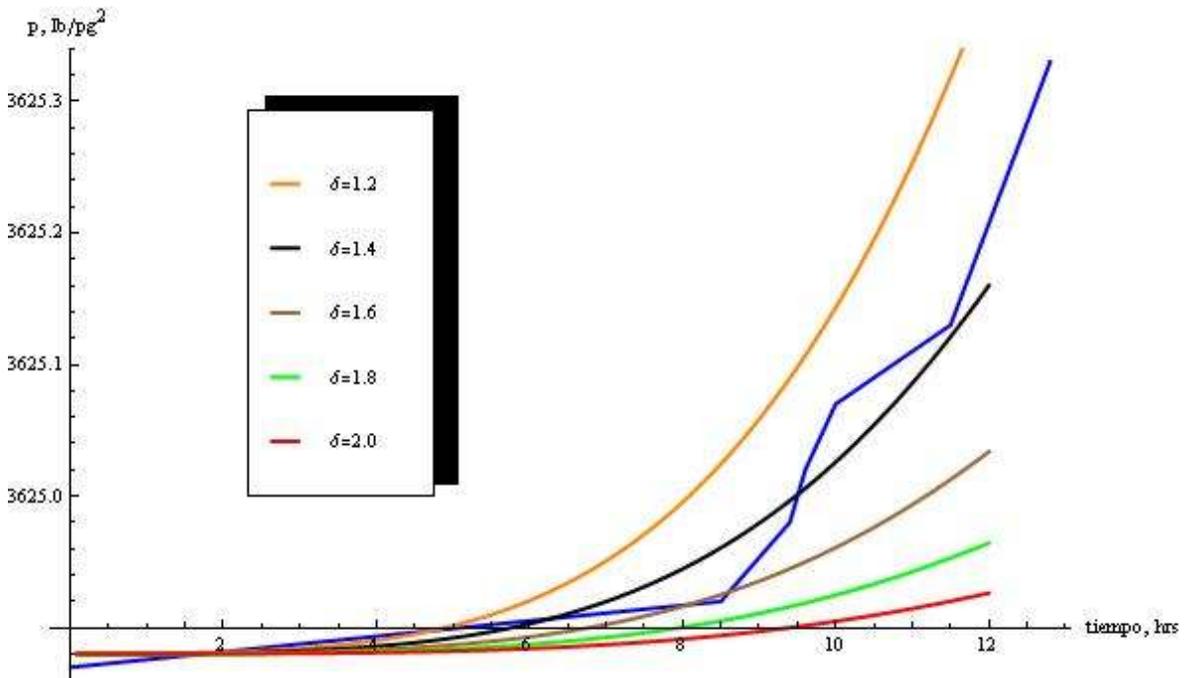


Figura 7.6. Gráfica de *presión vs tiempo* posterior al cierre, donde se compara la respuesta observada (línea azul) con curvas de diferentes dimensiones fractales.

Ahora bien, si se consideran los resultados obtenidos por Flamenco y Camacho³² en donde para éste yacimiento se encontró una dimensión $\delta=1.9$, con esta información se grafica la presión vs tiempo para diferentes valores de $m=\mu q B/(4\pi^{3/2}kh^{3-\delta})$. La figura 7.7 muestra dicha gráfica y como puede observarse en ella, la curva más aproximada a la respuesta de la prueba de presión es con $m=33$.

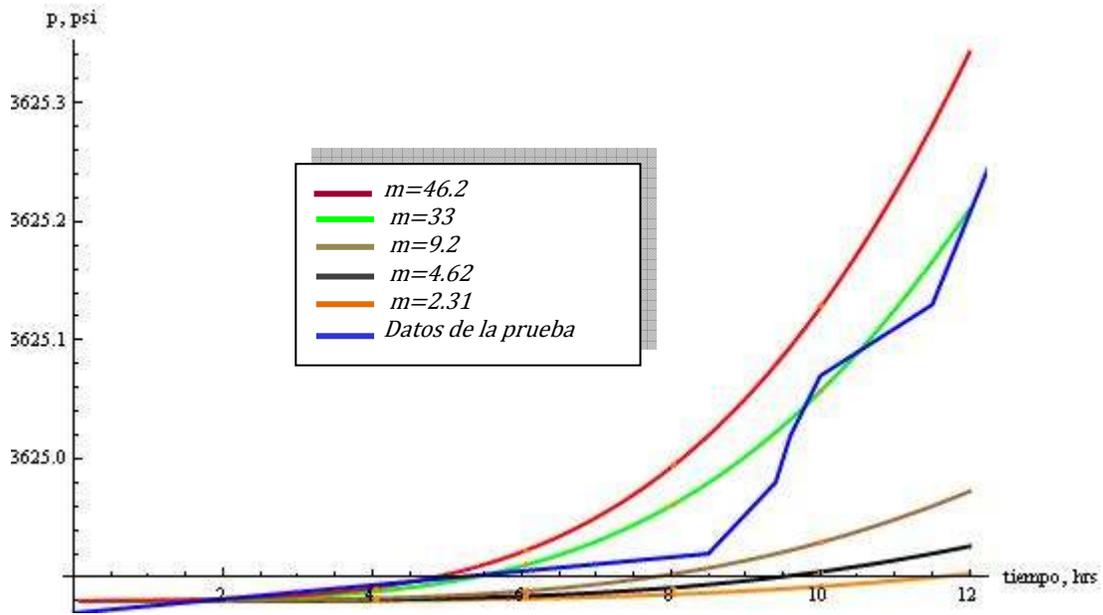


Figura 7.7. Gráfica de *presión vs tiempo* posterior al cierre, donde se compara la respuesta observada con curvas con diferentes m y una dimensión fractal $\delta=1.9$

Análisis de Resultados

Los resultados mostrados en el capítulo 6, validan el modelo semianalítico propuesto en este trabajo, relacionado con la utilización de la solución de Barker en coordenadas radiales en sistemas cartesianos por medio del método de imágenes. Desgraciadamente no fue posible emplear el método de Fokker et al¹⁶, debido a que la solución obtenida no respondió como se esperaba a la inversión desde el espacio de Laplace a tiempo real; esto se puede deber principalmente al algoritmo utilizado, en este caso fue el método de Stehfest, y aunque no se muestran resultados aquí, también fueron probados otros algoritmos con resultados aún menos alentadores. Afortunadamente la solución en espacio real dio buenos resultados permitiendo representar las geometrías más comúnmente encontradas en la literatura permitiendo la comprobación del adecuado funcionamiento del modelo propuesto. Con respecto al tiempo necesario para ejecutar el modelo, realmente depende mucho de la complejidad del sistema, pero la ventaja es que al utilizar superposición en el tiempo y espacio, se observan los resultados paulatinamente, permitiendo con ello revisar los resultados parciales.

En el ejemplo de un sistema cerrado (figura 6.18), se muestra como al disminuir la dimensión δ aumenta la caída de presión con respecto al tiempo considerablemente. En la figura 6.19 es mostrado el efecto que tiene la variación de la dimensión fractal al alejarse del pozo, con $\delta=2$ es decir el caso euclidiano, la caída de presión es mayor aunque el radio de drene es menor; pero con $\delta=1.2$ aunque en magnitud la caída de presión es menor, la presencia del pozo productor perturba un área mayor. Puede decirse con base en lo anterior, que a menor dimensión fractal un área mayor del yacimiento es afectada por la producción a un tiempo determinado.

Para el caso de la prueba de interferencia entre dos pozos ambos con producción previa al cierre del pozo observador, las curvas en la figura 6.22 son afectadas por el cambio de dimensión fractal, nuevamente se observa que a una menor dimensión fractal δ , existe una mayor caída de presión con respecto al tiempo. La figura 6.23 muestra, por otro lado, que a diferencia de lo que sucede para el caso euclidiano donde la curva extrapolada de presión de incremento es una línea recta que nos permite obtener el valor de m , con dimensiones menores a 2 esta curva tiende a ser cóncava hacia arriba, lo que hace imposible utilizarla como parte de ésta metodología.

Considerando las gráficas en variables adimensionales para el tipo de pruebas de interferencia mencionadas en el párrafo anterior, la figura 6.25 muestra que a tiempos adimensionales cortos las curvas tienden a ser rectas horizontales y que a valores de δ menores la presión adimensional es mayor. Cuando se grafica la presión adimensional con respecto al tiempo de Horner puede notarse dos comportamientos diferentes, la primera parte de la curva con $\delta < 2$ es cóncava hacia abajo y con $\delta > 2$ cóncava hacia arriba, esto se debe al cambio del comportamiento de flujo con $\delta < 2$ se acerca más a un flujo lineal y con $\delta > 2$ tiende a ser un flujo esférico.

En cuanto a la prueba de campo, desgraciadamente los datos amablemente proporcionados por el Activo Jujo-Tecominoacán, no fueron suficientes para poder hacer una comprobación suficiente del modelo, ya que existen demasiadas variables a considerar. Aún así, fueron agregados y parcialmente modelados con el objetivo de mostrar la forma de aplicar las ecuaciones obtenidas en este trabajo aunque los resultados no son concluyentes.

Respecto al intento de crear un modelo analítico en coordenadas cartesianas, se puede decir analizando los resultados mostrados en el Apéndice que el problema radica en la complejidad misma de los sistemas fractales. Los resultados obtenidos con el simulador muestran que no se logró desligar el crecimiento del fractal del punto de origen del sistema, en la literatura los esfuerzos por modelar grandes espacios con geometría fractal, se realizan utilizando la teoría probabilística; en los modelos más recientes primero se generan los puntos de origen de los objetos fractales para posteriormente, hacerlos “crecer”.

Conclusiones

Se puede establecer que, el modelo semianalítico es una buena herramienta para modelar sistemas con comportamiento fractal con varias configuraciones.

Los casos encontrados más comúnmente en la literatura como la presencia de una falla cercana, dos fallas paralelas e incluso configuraciones más complejas en yacimientos naturalmente fracturados con geometría fractal pueden ser modelados utilizando el método de imágenes, aplicado en este trabajo.

Las pruebas de interferencia con varias configuraciones también pueden ser modeladas por medio de las ecuaciones presentadas en este trabajo.

Trabajos posteriores deben enfocarse al modelaje de pruebas de campo de YNF con geometría fractal para validar el modelo propuesto, requiriendo toda la información disponible del yacimiento en estudio.

Modelo analítico, simulación y sus resultados.

Modelo de flujo en un yacimiento rectangular con un sistema de fracturas fractal inmersa en una matriz euclidiana.

Consideramos un yacimiento rectangular homogéneo con espesor uniforme con fronteras cerradas al flujo.

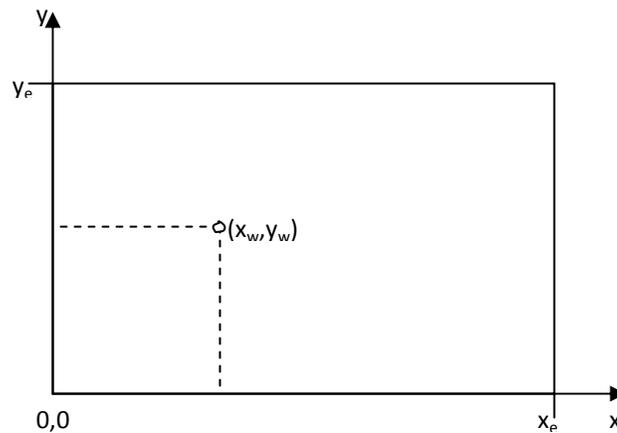


Fig. A.1. Esquema del yacimiento rectangular con un pozo en cualquier posición (x,y)

Se considera:

- ④ Flujo d-dimensional, con direcciones de flujo x y y , en un medio fracturado homogéneo e isotrópico, caracterizado por una permeabilidad en la fractura k_f .
- ④ La ley de Darcy se aplica en todo el sistema.
- ④ Existe un número finito de pozos (n -well) en posiciones (x_{wi}, y_{wi}) produciendo o inyectando.

Ecuaciones de flujo:

En una región de control pequeña con longitudes en dirección x , de x y $x+\Delta x$, y en y de y y $y+\Delta y$, tendremos un volumen de $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot x^{d-1} \cdot y^{d-1} \cdot h^{3-2d}$. Suponiendo que durante un periodo de tiempo

pequeño Δt , la presión en este volumen cambia Δp , producirá una entrada de fluido al volumen de control de:

$$\Delta V_{fi} = \phi_f \cdot c_f \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot x^{d-1} \cdot y^{d-1} \cdot h^{3-2d} \cdot \Delta p \quad (A.1)$$

donde

h : espesor del yacimiento

d = la dimensión fractal

los subíndices son:

f : fluido

f : fractura

De la ley de Darcy el flujo neto a través del volumen de control es:

$$\begin{aligned} q &= -\frac{k_f}{\mu} \cdot A \cdot \nabla p \\ &= \frac{k_f}{\mu} \left[A_{Tx} \left((x + \Delta x)^{d-1} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x, t} - x^{d-1} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x, t} \right) + A_{Ty} \left((y + \Delta y)^{d-1} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y, t} - y^{d-1} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y, t} \right) \right] \end{aligned} \quad (A.2)$$

Con μ : viscosidad del fluido.

Como $\Delta V_{fi} = q \cdot \Delta t$, igualamos (A.1) y (A.2)

$$\begin{aligned} \phi_f \cdot c_f \cdot h^{3-2d} \cdot x^{d-1} \cdot y^{d-1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta p &= \frac{k_f h^{3-2d}}{\mu} \cdot y^{d-1} \cdot \Delta y \left((x + \Delta x)^{d-1} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x, t} - x^{d-1} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x, t} \right) \Delta t \\ &\quad + \frac{k_f h^{3-2d}}{\mu} \cdot x^{d-1} \cdot \Delta x \left((y + \Delta y)^{d-1} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y+\Delta y, t} - y^{d-1} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y, t} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (A.3)$$

Dividiendo entre el volumen $\Delta V \Delta t$ y realizamos el límite cuando $t \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ y $y \rightarrow 0$ nos queda

$$\phi_f \cdot c_f \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_f}{\mu} \left[\frac{1}{x^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{d-1} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{d-1} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] \quad (A.4)$$

Arreglando tenemos:

$$\frac{\phi_f \cdot c_t \mu}{k_f} \frac{\partial p}{\partial t} = \left[\frac{1}{x^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{d-1} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{d-1} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Ahora bien si consideramos que dentro de este volumen de control se encuentra una o más fuentes o sumideros nos queda:

$$\frac{\phi_f \cdot c_t \mu}{k_f} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{x^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{d-1} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^{d-1} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\mu}{k_f} \sum_{j=1}^{nw} q_{wj}^*(t) \cdot \delta(x - x_{wj}, y - y_{wj}) \quad (\text{A.6})$$

Donde

q^* : es el gasto por unidad de volumen a condiciones de yacimiento

Ahora a este modelo de flujo le adicionamos las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

Para

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq x_e \\ 0 \leq y \leq y_e \end{array} \right\} \begin{array}{l} t=0 \quad p(x,y,0) = p_i, \\ t>0 \quad p(x,y,t) = p(x,y,t), \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=y_e} = 0, \end{array} \right\} \text{ Fronteras cerradas al flujo.}$$

Para facilitar el desarrollo analítico realizamos los siguientes cambios a variables dimensionales:

$$p_D = \frac{p_i - p(x,y,t)}{p_i - p_{wref}}, \quad q_D = \frac{\mu \cdot q_{wj} \cdot B \cdot A}{k(x_e y_e)^2 h^{3-2d} (p_i - p_{wref})}, \quad (\text{A.7})$$

$$x_D = \frac{x}{\sqrt{A}}, \quad y_D = \frac{y}{\sqrt{A}} \quad \text{Y} \quad t_D = \frac{kt}{\phi \mu c_t A};$$

Usando dichas variables la ecuación (A.6) se transforma a:

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{x_D^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x_D} \left(x_D^{d-1} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right) + \frac{1}{y_D^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y_D} \left(y_D^{d-1} \frac{\partial p_D}{\partial y_D} \right) + \sum_{j=1}^{nw} \bar{q}_{wDj} \delta(x_D - x_{wDj}, y - y_{wDj}) \quad (\text{A.8a})$$

Y las condiciones de frontera:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x_D \leq x_{eD} \\ 0 \leq y_D \leq y_{eD} \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_D=0 \quad p_D(x_D, y_D, 0) = 0, \\ t_D>0 \quad p_D(x_D, y_D, t_D) = p_D(x_D, y_D, t_D), \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left. \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=x_{eD}} = 0, \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} \left. \frac{\partial p_D}{\partial y_D} \right|_{y_D=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial p_D}{\partial y_D} \right|_{y_D=y_{eD}} = 0. \end{array} \quad (\text{A.8b})$$

Para resolver el problema mediante la aplicación de transformada de Laplace y funciones de Green, definimos las siguientes transformadas de Laplace para la presión y el gasto adimensional:

$$\bar{p}_D(x_D, y_D) = \int_0^{\infty} p_D(x_D, y_D, t_D) \exp(-st_D) dt_D$$

y

$$\bar{q}_{wDj} = \int_0^{\infty} q_{wDj}(t_D) \exp(-st_D) dt_D.$$

Transformando la ecuación (A.8a) mediante estas definiciones y utilizando la condición inicial nos queda:

$$\frac{1}{x_D^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x_D} \left(x_D^{d-1} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right) + \frac{1}{y_D^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y_D} \left(y_D^{d-1} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial y_D} \right) + \sum_{j=1}^{nw} \bar{q}_{wDj} \delta(x_D - x_{wDj}, y - y_{wDj}) = s \bar{p}_D \quad (\text{A.9})$$

Arreglando

$$\frac{1}{x_D^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x_D} \left(x_D^{d-1} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right) + \frac{1}{y_D^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y_D} \left(y_D^{d-1} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial y_D} \right) - s \bar{p}_D = - \sum_{j=1}^{nw} \bar{q}_{wDj} \delta(x_D - x_{wDj}, y - y_{wDj}) \quad (\text{A.10})$$

Y la transformación de las condiciones de frontera es:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=0} &= 0, & \left. \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right|_{x_D=x_{eD}} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right|_{y_D=0} &= 0 & \text{y} & \left. \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right|_{y_D=y_{eD}} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10b})$$

De forma general en (A.10), tenemos:

$$L\bar{p}_D = \frac{1}{x_D^{d-1}} \frac{\partial}{\partial x_D} \left(x_D^{d-1} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} \right) + \frac{1}{y_D^{d-1}} \frac{\partial}{\partial y_D} \left(y_D^{d-1} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial y_D} \right) - s\bar{p}_D, \quad (\text{A.10c})$$

Considerando que \bar{p}_D es una función hermitiana, resolvemos (A.10) por medio de funciones de Green. Para ello, desarrollamos el problema adjunto de la función de Green de la siguiente manera, integrando por partes:

$$\int_{\text{sup}} G \cdot L\bar{p}_D \cdot dS = [G \cdot L\bar{p}_D]_{\text{supo}} + \int_{\text{sup}} \bar{p}_D \cdot L^* G \cdot dS, \quad (\text{A.11})$$

De esta ecuación obtendremos el operador adjunto $[L^*]$ y la condiciones de frontera del problema para la función de Green. Hacemos cambio de variables, sólo para diferenciar el desarrollo de la función de Green y de \bar{p}_D , por lo que tendremos que $x=\zeta$ y $y=\eta$.

Si se considera un solo pozo, tenemos

$$-\bar{q}_{wD}(s)\delta(\zeta - x_{wD}, \eta - y_{wD}) = L\bar{p}_D = \phi, \quad (\text{A.12})$$

y

$$L^* G = \delta(\zeta - x_D, \eta - y_D), \quad (\text{A.13})$$

Donde (x_D, y_D) , es cualquier punto dentro del espacio $[0, x_{De}]$, $[0, y_{eD}]$.

Sustituimos (A.12) y (A.13) en (A.11) y aplicando la propiedad de la función delta de Dirac, se obtiene:

$$\int_{\text{supo}} G(x_D, y_D, \zeta, \eta) \cdot \phi(\zeta, \eta) \cdot d\zeta d\eta = [G \cdot L\bar{p}_D]_{\text{supo}} + \bar{p}_D, \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Y finalmente haciendo } [G \cdot L\bar{p}_D]_{suo} = 0, \quad (\text{A.15})$$

De la ecuación (A.15) obtendremos las condiciones de frontera adjuntas del problema de funciones de Green.

Obteniendo:

$$\bar{p}_D = \int_{suo} G(x_D, y_D, \zeta, \eta) \cdot \phi(\zeta, \eta) \cdot d\zeta d\eta, \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, para obtener la solución de (A.10), es entonces necesario dar solución a (A.13), con las condiciones adjuntas surgidas de (A.15).

Iniciamos, con el desarrollo de cada término en (A.10c) en función de ζ y η .

$$\begin{aligned} L\bar{p}_D &= \frac{1}{\zeta^{d-1}} \left(\zeta^{d-1} \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \zeta^2} + \varrho - 1 \zeta^{d-2} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{\eta^{d-1}} \left(\eta^{d-1} \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \eta^2} + \varrho - 1 \eta^{d-2} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} \right) - s\bar{p}_D \\ &= \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \eta^2} + \varrho - 1 \left\{ \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} \right\} - s\bar{p}_D \\ &= \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \eta^2} + \varrho - 1 \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} \right) - s\bar{p}_D, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Sustituyendo (A.17) en (A.11), separando términos:

$$\begin{aligned} &\int_0^{yeD} \int_0^{xeD} G \left[\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \eta^2} + \varrho - 1 \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} \right) - s\bar{p}_D \right] d\zeta d\eta = \\ &\int_0^{yeD} \int_0^{xeD} G \left[\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \zeta^2} + \varrho - 1 \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} \right) \right] d\zeta d\eta + \\ &\int_0^{yeD} \int_0^{xeD} G \left[\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \eta^2} + \varrho - 1 \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} \right) \right] d\zeta d\eta - \int_0^{yeD} \int_0^{xeD} G [s\bar{p}_D] d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Integrando por partes cada una de las integrales del lado derecho de (A.18), considerando $\int u dv = uv - \int v du$:

El primer término del lado derecho de (A.18) al integrarse por partes da:

$$\int_0^{yeD} \int_0^{xeD} G \left[\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \zeta^2} + \ell - 1 \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} \right) \right] d\zeta d\eta = \int_0^{yeD} \left[G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \ell - 1 \frac{1}{\zeta} G(\bar{p}_D) \right]_0^{xeD} d\eta - \quad (\text{A.19a})$$

$$\int_0^{yeD} \int_0^{xeD} \left[G_\zeta \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \ell - 1 \bar{p}_D \left(\frac{1}{\zeta} G_\zeta - \frac{1}{\zeta^2} G \right) \right] d\zeta d\eta$$

para el segundo término del lado derecho de (A.19a) hicimos $u = \frac{1}{\zeta} G$ y $dv = \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta}$,

integrando por partes:

$$\int_0^{yeD} \int_0^{xeD} \left[G_\zeta \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \ell - 1 \bar{p}_D \left(\frac{1}{\zeta} G_\zeta - \frac{1}{\zeta^2} G \right) \right] d\zeta d\eta = \int_0^{yeD} \left[G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \ell - 1 \frac{1}{\zeta} G(\bar{p}_D) \right]_0^{xeD} d\eta -$$

$$\int_0^{yeD} \left[(G_\zeta \bar{p}_D)_0^{xeD} - \int_0^{xeD} \left[G_{\zeta\zeta} \bar{p}_D - \ell - 1 \bar{p}_D \left(\frac{1}{\zeta} G_\zeta - \frac{1}{\zeta^2} G \right) \right] d\zeta \right] d\eta$$

Agrupando los términos del lado derecho de la ecuación anterior, tenemos

$$\int_0^{yeD} \left\{ \left[G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \left(\ell - 1 \frac{1}{\zeta} G - G_\zeta \right) \bar{p}_D \right]_0^{xeD} + \int_0^{xeD} \left(G_{\zeta\zeta} - \ell - 1 \frac{1}{\zeta} G_\zeta + \ell - 1 \frac{1}{\zeta^2} G \right) \bar{p}_D d\zeta \right\} d\eta \quad (\text{A.19b})$$

Análogamente, el segundo término de (A.18) al integrar con respecto a η queda:

$$\int_0^{xeD} \left\{ \left[G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} + \left(\ell - 1 \frac{1}{\eta} G - G_\eta \right) \bar{p}_D \right]_0^{yeD} + \int_0^{yeD} \left(G_{\eta\eta} - \ell - 1 \frac{1}{\eta} G_\eta + \ell - 1 \frac{1}{\eta^2} G \right) \bar{p}_D d\eta \right\} d\zeta \quad (\text{A.19c})$$

Y el último término permanece igual

$$- \int_0^{yeD} \int_0^{xeD} G [s \bar{p}_D] d\zeta d\eta, \quad (\text{A.19d})$$

Finalmente reuniendo todos los términos resultantes (A.19b), (A.19c) y (A.19d), nos queda

$$\begin{aligned}
& \int_0^{yeD} \int_0^{xeD} G \left[\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \eta^2} + \ell - 1 \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} \right) - s \bar{p}_D \right] d\zeta d\eta = \\
& \int_0^{xeD} \left[G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta \right] \bar{p}_D \Big|_0^{yeD} d\zeta + \int_0^{yeD} \left[G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\zeta} G - G_\zeta \right] \bar{p}_D \Big|_0^{xeD} d\eta + \\
& \int_0^{yeD} \int_0^{xeD} \left(G_{\zeta\zeta} - \ell - 1 \right) \frac{1}{\zeta} G_\zeta + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\zeta^2} G + G_{\eta\eta} - \ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G_\eta + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta^2} G - sG \Big) \bar{p}_D d\zeta d\eta
\end{aligned} \tag{A.20}$$

De esta última ecuación (A.20) tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left[G\bar{p} \right]_{\text{sup}} = \\
& \int_0^{xeD} \left[G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta \right] \bar{p}_D \Big|_0^{yeD} d\zeta + \int_0^{yeD} \left[G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\zeta} G - G_\zeta \right] \bar{p}_D \Big|_0^{xeD} d\eta = 0
\end{aligned} \tag{A.21}$$

y

$$L^* G = G_{\zeta\zeta} + G_{\eta\eta} - \ell - 1 \left(\frac{1}{\zeta} G_\zeta + \frac{1}{\eta} G_\eta \right) + \left(\ell - 1 \right) \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) - s \Big) G \tag{A.22}$$

Ahora bien, para poder cumplir la igualdad a cero de (A.21) aplicamos las condiciones de frontera (A.10b) convertidas a ζ y η .

$$\begin{aligned}
& \left[G\bar{p} \right]_{\text{sup}} = \int_0^{xeD} \left[\left(G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta \right) \bar{p}_D \right]_{yeD} - \left(G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta \right) \bar{p}_D \Big|_0 \right] d\zeta + \\
& \int_0^{yeD} \left[\left(G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\zeta} G - G_\zeta \right) \bar{p}_D \right]_{xeD} - \left(G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} + \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\zeta} G - G_\zeta \right) \bar{p}_D \Big|_0 \right] d\eta = 0,
\end{aligned}$$

Así, al no conocer \bar{p}_D , se encuentran las condiciones de frontera adjuntas:

$$\begin{aligned}
& \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\zeta} G - G_\zeta \Big|_{x=0} = 0, \tag{A.23a} & \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\zeta} G - G_\zeta \Big|_{xeD} = 0, \tag{A.23c} \\
& \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta \Big|_{y=0} = 0, \tag{A.23b} & \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta \Big|_{yeD} = 0. \tag{A.23d}
\end{aligned}$$

De esta forma con (A.22) y (A.23a,b,c,d) se forma el problema adjunto de la función de Green, la ecuación diferencial y sus condiciones de frontera.

Ahora bien, para dar solución a este problema adjunto, se dividió el espacio en dos regiones, de tal manera que, dentro de ambas regiones la ecuación diferencial es homogénea (A.24) y sólo en la intersección o interfase se cumple (A.13).

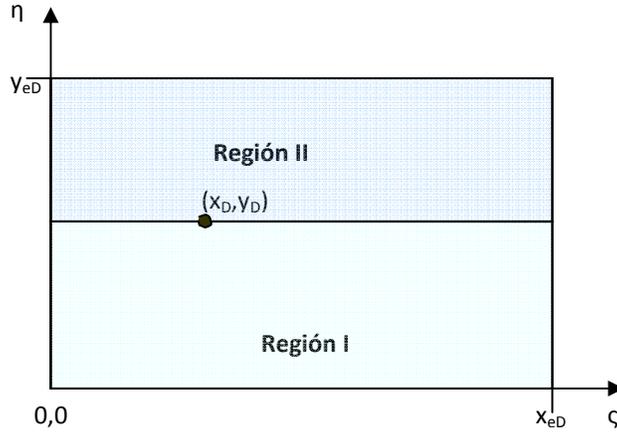


Figura A.2. Esquema del yacimiento rectangular y su división en dos regiones.

$$L^*G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} - (d-1)\left(\frac{1}{\xi}G_{\xi} + \frac{1}{\eta}G_{\eta}\right) + \left((d-1)\left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}\right) - s\right)G = 0, \quad (\text{A.24})$$

Para dar solución a (A.24), se utiliza el método de separación de variables, de tal forma que:

$$G = Z(\xi_D)N(\eta_D),$$

por lo tanto

$$G_{\xi} = Z_{\xi}N, \quad \Rightarrow \quad G_{\xi\xi} = Z_{\xi\xi}N \quad \text{y} \quad G_{\eta} = ZN_{\eta}, \quad \Rightarrow \quad G_{\eta\eta} = ZN_{\eta\eta},$$

Sustituyendo y separando variables

$$\frac{Z_{\xi\xi}}{Z} - (d-1)\frac{1}{\xi}\frac{Z_{\xi}}{Z} + (d-1)\frac{1}{\xi^2} = s - \frac{N_{\eta\eta}}{N} + (d-1)\frac{1}{\eta}\frac{N_{\eta}}{N} - (d-1)\frac{1}{\eta^2} = \lambda^2$$

Separando las ecuaciones:

$$Z_{\zeta\zeta} - (d-1)\frac{1}{\zeta}Z_{\zeta} + \left((d-1)\frac{1}{\zeta^2} - \lambda^2 \right) Z = 0, \quad (\text{A.25a})$$

y

$$N_{\eta\eta} - (d-1)\frac{1}{\eta}N_{\eta} + \left((d-1)\frac{1}{\eta^2} - s + \lambda^2 \right) N = 0, \quad (\text{A.25b})$$

Para resolver (A.25a) multiplicamos por ζ^2 y se realiza el siguiente cambio de variable:

$$v(\zeta) = \zeta^{-(1+d/2)} Z, \quad (\text{A.26a})$$

Así:

$$Z' = \left(1 + \frac{d}{2} \right) \zeta^{d/2} v + \zeta^{1+d/2} v'$$

y

$$Z'' = \left(1 + \frac{d}{2} \right) \frac{d}{2} \zeta^{d/2-1} v + \left(1 + \frac{d}{2} \right) \zeta^{d/2} v' + \left(1 + \frac{d}{2} \right) \zeta^{d/2} v' + \zeta^{1+d/2} v'', \quad (\text{A.27a})$$

Sustituyendo (A.27) en (A.25a)

$$\left(1 + \frac{d}{2} \right) \frac{d}{2} \zeta^{1+d/2} v + 2 \left(1 + \frac{d}{2} \right) \zeta^{2+d/2} v' + \zeta^{3+d/2} v'' - (d-1) \left(1 + \frac{d}{2} \right) \zeta^{1+d/2} v - (d-1) \zeta^{2+d/2} v' + \left[(d-1) - \lambda^2 \zeta^2 \right] \zeta^{1+d/2} v = 0,$$

ordenando:

$$\zeta^{3+d/2} v'' + 3\zeta^{2+d/2} v' + \left[\left(1 + \frac{d}{2} \right) \frac{d}{2} - (d-1) \left(1 + \frac{d}{2} \right) + (d-1) - \lambda^2 \zeta^2 \right] \zeta^{1+d/2} v = 0,$$

$$\Rightarrow \zeta^{3+d/2} v'' + 3\zeta^{2+d/2} v' + \left[-\frac{d^2}{4} + d - \lambda^2 \zeta^2 \right] \zeta^{1+d/2} v = 0,$$

dividiendo por $\zeta^{1+d/2}$, queda finalmente:

$$\zeta^2 v'' + 3\zeta v' + \left[-\frac{d^2}{4} + d - \lambda^2 \zeta^2 \right] v = 0. \quad (\text{A.28a})$$

La solución de (A.28a) se dará por medio de la ecuación generalizada de Bessel:

$$u^2 U'' + u \left[a + 2bu^p \right] U' + \left[c + eu^{2q} - b(1-a-p)u^p + b^2 u^{2p} \right] U = 0,$$

que tiene como solución:

$$U(u) = u^{\frac{1-a}{2}} \exp \left\{ -\frac{b}{q} u^p \right\} Y_{\chi} \left(\frac{\sqrt{|e|}}{q} u^q \right),$$

$$\text{siendo: } Y_{\chi}(\xi) = C_1 I_{\chi}(\xi) + C_2 K_{\chi}(\xi) \quad \text{y} \quad \chi = \frac{1}{q} \sqrt{\left(\frac{1-a}{2} \right)^2 - c}.$$

Para (A.28) los coeficientes de la ecuación generalizada de Bessel son:

$$a = 3, \quad b = 0, \quad c = d - \frac{d^2}{4}, \quad e = -\lambda^2, \quad p = 0 \quad \text{y} \quad q = 1.$$

así:

$$\chi = 1 - \frac{d}{2}, \quad \text{obteniendo:} \quad v = \zeta^{-1} Y_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta),$$

Volviendo a la variable original con (A.26a), la solución a (A.25a) es finalmente

$$Z = \zeta^{\frac{d}{2}} \left(C_1 I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) \right), \tag{A.29a}$$

Para resolver (A.25b), multiplicamos por η^2 y se realiza el siguiente cambio de variable:

$$w(\eta) = \eta^{-(1+d/2)} N, \tag{A.26b}$$

De tal forma que queda:

$$N' = \left(1 + \frac{d}{2} \right) \eta^{d/2} w + \eta^{1+d/2} w', \tag{A.27b}$$

y

$$N'' = \left(1 + \frac{d}{2} \right) \frac{d}{2} \eta^{d/2-1} w + \left(1 + \frac{d}{2} \right) \eta^{d/2} w' + \left(1 + \frac{d}{2} \right) \eta^{d/2} w'' + \eta^{1+d/2} w''',$$

Sustituyendo en (A.25b):

$$\left(1 + \frac{d}{2}\right) \frac{d}{2} \eta^{1+d/2} w + 2 \left(1 + \frac{d}{2}\right) \eta^{2+d/2} w' + \eta^{3+d/2} w'' - (d-1) \left(1 + \frac{d}{2}\right) \eta^{1+d/2} w - (d-1) \eta^{2+d/2} w' + \left[(d-1) + (\lambda^2 - s) \eta^2\right] \eta^{1+d/2} w = 0,$$

ordenando:

$$\eta^{3+d/2} w'' + 3\eta^{2+d/2} w' + \left[\left(1 + \frac{d}{2}\right) \frac{d}{2} - (d-1) \left(1 + \frac{d}{2}\right) + (d-1) + \lambda^2 - s \eta^2\right] \eta^{1+d/2} w = 0,$$

$$\Rightarrow \eta^{3+d/2} w'' + 3\eta^{2+d/2} w' + \left[-\frac{d^2}{4} + d + \lambda^2 - s \eta^2\right] \eta^{1+d/2} w = 0,$$

dividiendo por $\eta^{1+d/2}$, queda finalmente:

$$\eta^2 w'' + 3\eta w' + \left[-\frac{d^2}{4} + d + \lambda^2 - s \eta^2\right] w = 0. \quad (\text{A.28b})$$

Para (A.28b), los coeficientes de la ecuación generalizada de Bessel son:

$$a = 3, \quad b = 0, \quad c = d - \frac{d^2}{4}, \quad e = \lambda^2 - s, \quad p = 0 \quad \text{y} \quad q = 1.$$

así:

$$\chi = 1 - \frac{d}{2}, \quad \text{obteniendo:}$$

$$w = \eta^{-1} Y_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right),$$

Volviendo a la variable original con (A.26b), la solución a (A.25b) es finalmente

$$N = \eta^{\frac{d}{2}} \left(D_1 I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right) + D_2 K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right) \right). \quad (\text{A.29b})$$

Con (A.29a) y (A.29b) se obtiene, la solución general para la ecuación homogénea de G (A.24):

$$G = \zeta^{\frac{d}{2}} \left(C_1 I_{1-\frac{d}{2}} (\lambda \zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}} (\lambda \zeta) \right) \cdot \eta^{\frac{d}{2}} \left(D_1 I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right) + D_2 K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right) \right) \quad (\text{A.31})$$

Escribiendo para cada región:

Región I: $0 \leq \eta \leq \eta_b$

$$G^I = \zeta^{\frac{d}{2}} \eta^{\frac{d}{2}} \left(C_1^I I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) + C_2^I K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) \right) \left(D_1^I I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta\right) + D_2^I K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta\right) \right) \quad (\text{A.32})$$

Región I: $y_D \leq \eta \leq y_{eD}$

$$G^{II} = \zeta^{\frac{d}{2}} \eta^{\frac{d}{2}} \left(C_1^{II} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) + C_2^{II} K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) \right) \left(D_1^{II} I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta\right) + D_2^{II} K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta\right) \right) \quad (\text{A.33})$$

El valor de las constantes se encuentra al evaluar las condiciones de frontera y las condiciones de continuidad de G en $\eta=y_D$, es decir en la interfase entre regiones. Hay que hacer notar que para la variable ζ de ambas regiones las fronteras son las mismas (ver fig. A.2), por lo que, para aplicar las condiciones de frontera (A.23a) y (A.23c) se deriva G (A.31) con respecto a ζ , considerando los demás términos reunidos en una constante A, y utilizando las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^\nu I_\nu(\lambda z) &= \lambda z^\nu I_{\nu-1}(\lambda z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu K_\nu(\lambda z) &= -\lambda z^\nu K_{\nu-1}(\lambda z). \end{aligned}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} G &= A \zeta^{d-1} \zeta^{1-\frac{d}{2}} \left[C_1 I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) \right], \\ G_\zeta &= A(d-1) \zeta^{d-2} \zeta^{1-\frac{d}{2}} \left[C_1 I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) \right] + \\ &\quad A \zeta^{d-1} \left[C_1 \lambda \zeta^{1-\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) - C_2 \lambda \zeta^{1-\frac{d}{2}} K_{\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) \right] \end{aligned}$$

Finalmente la derivada parcial de G con respecto a ζ

$$\begin{aligned} G_\zeta &= A(d-1) \zeta^{\frac{d}{2}-1} \left[C_1 I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) \right] + \\ &\quad A \zeta^{\frac{d}{2}} \left[C_1 \lambda I_{\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) - C_2 \lambda K_{\frac{d}{2}}(\lambda \zeta) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Con el resultado de (A.34), se desarrolla (A.23a):

$$\begin{aligned} (d-1)\frac{1}{\zeta}G - G_\zeta &= (d-1)A\frac{1}{\zeta^2} \left[C_1 I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) \right] - \\ &A(d-1)\zeta^{\frac{d}{2}-1} \left[C_1 I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) \right] + \\ &A\zeta^{\frac{d}{2}} \left[C_1 \lambda I_{-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) - C_2 \lambda K_{-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d-1)\frac{1}{\zeta}G - G_\zeta &= \\ &A \left\{ (d-1)\zeta^{\frac{d}{2}-1} \left[C_1 I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) \right] - (d-1)\zeta^{\frac{d}{2}-1} \left[C_1 I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) + C_2 K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) \right] \right\} - \\ &A\zeta^{\frac{d}{2}} \left[C_1 \lambda I_{-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) - C_2 \lambda K_{-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$(d-1)\frac{1}{\zeta}G - G_\zeta = A \left\{ -\zeta^{\frac{d}{2}} \left[C_1 \lambda I_{-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) - C_2 \lambda K_{-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) \right] \right\} \quad (\text{A.35})$$

Con el objetivo de evaluar (A.35), utilizamos las siguientes identidades:

$$K_{-v}(z) = K_v(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-v} I_v(z) = \frac{2^{-v} \lambda^v}{\Gamma(1+v)}, \quad v \neq -1, -2, \dots$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^v K_v(z) = \frac{2^{v-1}}{\lambda^v} \Gamma(v), \quad v > 0.$$

De tal forma que evaluando el límite de (A.35) cuando $\zeta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left((d-1)\frac{1}{\zeta}G - G_\zeta \right) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left\{ \zeta^{\frac{d}{2}} \left[C_1 \lambda I_{-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) - C_2 \lambda K_{-\frac{d}{2}}(\lambda\zeta) \right] \right\} \\ &= C_1 \lambda \frac{2^{\frac{d}{2}} \lambda^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)} - C_2 \lambda \frac{2^{\frac{d}{2}-1}}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$C_1 \lambda \frac{2^{\frac{d}{2}} \lambda^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)} = C_2 \lambda \frac{2^{\frac{d}{2}-1}}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right), \quad \Rightarrow C_1 \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)} = C_2 2^{-1} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$$

Finalmente tenemos la siguiente relación entre constantes

$$\Rightarrow C_1 = C_2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)}{2} \quad (\text{A.36a})$$

O bien usando: $\Gamma(v)\Gamma(1-v) = \pi \csc(\pi v)$,

$$C_1 = C_2 \frac{\pi \csc\left(\frac{\pi}{2}d\right)}{2}. \quad (\text{A.36b})$$

Ahora al evaluar (A.35) cuando $\zeta = x_{eD}$, condición (A.23c)

$$\left((d-1)\frac{1}{\zeta}G - G_\zeta \right) \Big|_{\zeta=x_{eD}} = x_{eD}^{\frac{d}{2}} \left[C_1 \lambda I_{\frac{d}{2}}(\lambda x_{eD}) - C_2 \lambda K_{\frac{d}{2}}(\lambda x_{eD}) \right] = 0,$$

$$C_1 I_{\frac{d}{2}}(\lambda x_{eD}) = C_2 K_{\frac{d}{2}}(\lambda x_{eD}), \quad \Rightarrow C_1 = C_2 \frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda x_{eD})} \quad (\text{A.37})$$

Ahora, se evalúa la condición (A.23b) para la región I, que tiene una forma análoga a (A.35), ahora lo que no depende de η , se reúne en una constante B^1 :

$$\begin{aligned} (d-1)\frac{1}{\eta}G - G_\eta &= (d-1)B^1 \frac{1}{\eta^{\frac{d}{2}}} \left[D_1 I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|}\eta\right) + D_2 K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|}\eta\right) \right] - \\ & B^1 (d-1)\eta^{\frac{d}{2}-1} \left[D_1 I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|}\eta\right) + D_2 K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|}\eta\right) \right] + \\ & B^1 \eta^{\frac{d}{2}} \left[D_1 \sqrt{|\lambda^2 - s|} I_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|}\eta\right) - D_2 \sqrt{|\lambda^2 - s|} K_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|}\eta\right) \right] \\ \Rightarrow \\ (d-1)\frac{1}{\eta}G - G_\eta &= \\ B^1 \left\{ -\eta^{\frac{d}{2}} \left[D_1 \sqrt{|\lambda^2 - s|} I_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|}\eta\right) - D_2 \sqrt{|\lambda^2 - s|} K_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda^2 - s|}\eta\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Obteniendo el límite cuando $\eta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta = \\
& \lim_{\eta \rightarrow 0} B^1 \left\{ -\eta^{\frac{d}{2}} \left[D_1' \sqrt{|\lambda^2 - s|} I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right) - D_2' \sqrt{|\lambda^2 - s|} K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right) \right] \right\} \\
& \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta = D_1' \frac{2^{\frac{d}{2}} \lambda^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma \left(1 + \left(-\frac{d}{2} \right) \right)} - D_2' \frac{2^{\frac{d}{2}-1}}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \Gamma \left(\frac{d}{2} \right) = 0, \\
& D_1' \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma \left(1 - \frac{d}{2} \right)} = D_2' 2^{\frac{d}{2}-1} \Gamma \left(\frac{d}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad D_1' = D_2' \frac{\Gamma \left(\frac{d}{2} \right) \Gamma \left(1 - \frac{d}{2} \right)}{2} \tag{A.39a}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad D_1' = D_2' \frac{\pi}{2} \csc \left(\frac{\pi}{2} d \right). \tag{A.39b}$$

Para la condición de frontera (A.23d) se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left(\ell - 1 \right) \frac{1}{\eta} G - G_\eta \Big|_{\eta=y_{eD}} = \\
& B^1 \left\{ -y_{eD}^{\frac{d}{2}} \left[D_1'' \sqrt{|\lambda^2 - s|} I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} y_{eD} \right) - D_2'' \sqrt{|\lambda^2 - s|} K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} y_{eD} \right) \right] \right\} = 0, \\
& D_1'' \sqrt{|\lambda^2 - s|} I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} y_{eD} \right) = D_2'' \sqrt{|\lambda^2 - s|} K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} y_{eD} \right) \\
& \Rightarrow \quad D_1'' = D_2'' \frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} y_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} y_{eD} \right)}. \tag{A.40}
\end{aligned}$$

Aunque aún no se encuentra el valor de las constantes, ya se tiene relaciones entre ellas, de tal forma que:

Región I

$$G^I = C_2^I D_2^I \zeta^{\frac{d}{2}} \eta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} (\lambda \zeta) + K_{1-\frac{d}{2}} (\lambda \zeta) \right) \times \\ \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda^2 - s|} \eta \right) \right)$$

Considerando que existe un conjunto de n soluciones que satisfacen las condiciones de frontera para G y utilizando el principio de superposición, podemos escribir:

$$G^I = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^I \zeta^{\frac{d}{2}} \eta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} (\lambda_n \zeta) + K_{1-\frac{d}{2}} (\lambda_n \zeta) \right) \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) \right) \quad (\text{A.41})$$

$$\text{con } \alpha_n^I = C_2^I D_2^I.$$

Es importante recalcar que para cada solución existe un valor de lambda que satisface (A.24), es por ello que escribimos λ_n .

Región II

$$G^{II} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{II} \zeta^{\frac{d}{2}} \eta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{-\frac{d}{2}} (\lambda_n x_{eD})}{I_{-\frac{d}{2}} (\lambda_n x_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}} (\lambda_n \zeta) + K_{1-\frac{d}{2}} (\lambda_n \zeta) \right) \left(\frac{K_{-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)}{I_{-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) \right) \quad (\text{A.42})$$

$$\text{con: } \alpha_n^{II} = C_2^{II} D_2^{II}.$$

Ahora se acoplarán las soluciones de ambas regiones integrando la ecuación (A.13) y (A.22) con respecto a η , en un pequeño intervalo rodeando a y_D .

$$\int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} G_{\zeta\zeta} d\eta + \int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} G_{\eta\eta} d\eta - (d-1) \left(\int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} \frac{1}{\zeta} G_{\zeta} d\eta + \int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} \frac{1}{\eta} G_{\eta} d\eta \right) + \int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} \left((d-1) \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) - s \right) G d\eta \\ = \int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} \delta(\zeta - x_D, \eta - y_D) d\eta.$$

Utilizando el Teorema fundamental del Cálculo, parte dos, así como la propiedad de la delta de Dirac al integrar tenemos:

$$\int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} G_{\zeta} d\eta + G_{\eta} \Big|_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} - \vartheta - 1 \left(\int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} \frac{1}{\zeta} G_{\zeta} d\eta + \frac{1}{\eta} G \Big|_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} + \int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} \frac{1}{\eta^2} G d\eta \right) + \quad (\text{A.43})$$

$$\int_{y_D-\varepsilon}^{y_D+\varepsilon} \left(\vartheta - 1 \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) - s \right) G d\eta = \delta(\zeta - x_D) .$$

Al aplicar el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, solamente quedan los términos de evaluación de la función G a ambos lados de la interfase, así al diferenciarlas con superíndices para la región I y II respectivamente se tiene:

$$G_{\eta}^{\text{II}} \Big|_{y_{D+}} - G_{\eta}^{\text{I}} \Big|_{y_{D-}} - (d-1) \left(\frac{1}{\eta_D} G^{\text{II}} \Big|_{y_{D+}} - \frac{1}{\eta_D} G^{\text{I}} \Big|_{y_{D-}} \right) = \delta(\zeta - x_D). \quad (\text{A.44})$$

Además en la interfase, se debe cumplir la condición de continuidad, para que no existan saltos:

$$G^{\text{II}} \Big|_{y_{D+}} - G^{\text{I}} \Big|_{y_{D-}} = 0. \quad (\text{A.45})$$

Considerando (A.45), la expresión de (A.44) puede escribirse:

$$G_{\eta}^{\text{II}} \Big|_{y_{D+}} - G_{\eta}^{\text{I}} \Big|_{y_{D-}} = \delta(\zeta - x_D). \quad (\text{A.46})$$

Resolviendo para la n -ésima solución de G y sabiendo que su derivada con respecto a η es:

$$G_{\eta}^{\text{I}} = \beta^{\text{I}} (d-1) \eta^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{\pi}{2} \text{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) \right) + \beta^{\text{I}} \eta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \text{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) - \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) \right) \quad (\text{A.47})$$

$$\text{con: } \beta_n^{\text{I}} = \alpha_n^{\text{I}} \zeta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \text{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} (\lambda_n \zeta) + K_{1-\frac{d}{2}} (\lambda_n \zeta) \right).$$

y de forma análoga para la región II

$$\begin{aligned}
G_\eta^{II} &= \beta_n^{II} (d-1) \eta^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) \right) + \\
&\quad \beta_n^{II} \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) - K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) \right) \quad (A.48) \\
\text{con : } \beta_n^{II} &= \alpha_n^{II} \zeta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\lambda_n x_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\lambda_n x_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\lambda_n \zeta \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\lambda_n \zeta \right) \right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo (A.47) y (A.48) en (A.46), considerando superposición:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^{II} \zeta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\lambda_n x_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\lambda_n x_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\lambda_n \zeta \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\lambda_n \zeta \right) \right) \times \\
&\quad \left\{ (d-1) y_D^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) - K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) \right) \right\} - \\
&\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^I \zeta^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} \left(\lambda_n \zeta \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\lambda_n \zeta \right) \right) \times \\
&\quad \left\{ (d-1) y_D^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. y_D^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) - \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) \right) \right\} = \delta(\zeta - x_D) \quad (A.49)
\end{aligned}$$

Al tener del lado derecho una expresión que solo depende de ς , se reunirán los términos que no dependen ς del lado izquierdo en constantes:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n'' \psi_n'' \varsigma^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \varsigma) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \varsigma) \right) -$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n' \psi_n' \varsigma^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \varsigma) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \varsigma) \right) = \delta(\varsigma - x_D)$$

con: $\psi_n' = \left\{ (d-1) y_D^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) \right) + \right.$

$$\left. y_D^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) - \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} \eta \right) \right) \right\}$$

y

$$\psi_n'' = \left\{ (d-1) y_D^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) + K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) \right) + \right.$$

$$\left. \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)}{I_{\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD} \right)} I_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) - K_{1-\frac{d}{2}} \left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D \right) \right) \right\}.$$

Factorizando términos comunes:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} \alpha_n'' \psi_n'' - \frac{\pi}{2} \operatorname{csc} \left(\frac{\pi}{2} d \right) \alpha_n' \psi_n' \right) \varsigma^{\frac{d}{2}} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \varsigma) +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n'' \psi_n'' - \alpha_n' \psi_n') \varsigma^{\frac{d}{2}} K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \varsigma) = \delta(\varsigma - x_D)$$

utilizamos la identidad : $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)].$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} \alpha_n'' \psi_n'' - \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \alpha_n' \psi_n' \right) \zeta^{\frac{d}{2}} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \zeta) +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n'' \psi_n'' - \alpha_n' \psi_n') \zeta^{\frac{d}{2}} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\left(1-\frac{d}{2}\right)\pi\right)} \left[I_{\frac{d}{2}-1}(\lambda_n \zeta) - I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \zeta) \right] = \delta(\zeta - x_D),$$

reacomodando términos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} \alpha_n'' \psi_n'' - \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \alpha_n' \psi_n' + (\alpha_n'' \psi_n'' - \alpha_n' \psi_n') \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} d\right)} \right) \zeta^{\frac{d}{2}} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \zeta) -$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n'' \psi_n'' - \alpha_n' \psi_n') \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} d\right)} \zeta^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}-1}(\lambda_n \zeta) = \delta(\zeta - x_D).$$

se integra en el intervalo, con respecto a ζ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} \alpha_n'' \psi_n'' - \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \alpha_n' \psi_n' + (\alpha_n'' \psi_n'' - \alpha_n' \psi_n') \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \right) \times$$

$$\int_0^{x_{eD}} \zeta^{\frac{d}{2}} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n \zeta) d\zeta \right] - \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha_n'' \psi_n'' - \alpha_n' \psi_n') \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \int_0^{x_{eD}} \zeta^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}-1}(\lambda_n \zeta) d\zeta =$$

(A.50)

$$\int_0^{x_{eD}} \delta(\zeta - x_D) d\zeta.$$

Para dar solución a las integrales del lado izquierdo de (A.50) se utilizan las siguientes identidades:

$$\int_0^Z t^{\nu} I_{\nu-1}(t) dt = z^{\nu} I_{\nu}(z), \quad (\Re \nu > 0),$$

$$\int_0^Z t^{-\nu} I_{\nu+1}(t) dt = z^{-\nu} I_{\nu}(z) - \frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)},$$

Haciendo el cambio de variable necesario y aplicando la propiedad de la función delta de Dirac se obtiene:

$$\left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} \alpha_n^{II} \psi_n^{II} - \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \alpha_n^I \psi_n^I + (\alpha_n^{II} \psi_n^{II} - \alpha_n^I \psi_n^I) \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \right) \times$$

$$\frac{1}{\lambda_n^{\frac{d}{2}+1}} \left[(\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)} \right] -$$

$$(\alpha_n^{II} \psi_n^{II} - \alpha_n^I \psi_n^I) \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \frac{1}{\lambda_n^{\frac{d}{2}+1}} \left[(\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) \right] = 1,$$

\Rightarrow

$$\left[\left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} + \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \right) \alpha_n^{II} \psi_n^{II} - \pi \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \alpha_n^I \psi_n^I \right] \times$$

$$\left[(\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)} \right] -$$

$$(\alpha_n^{II} \psi_n^{II} - \alpha_n^I \psi_n^I) \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) \left[(\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) \right] = \lambda_n^{\frac{d}{2}+1}.$$

Como son α_n^I y α_n^{II} los valores de interés factorizamos nuevamente para obtener:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{K_{\frac{-d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} + \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{-d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)} \right) \alpha_n^{\text{II}} \psi_n^{\text{II}} - \\
& \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) \right) \alpha_n^{\text{II}} \psi_n^{\text{II}} + \\
& \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) \right) \alpha_n^{\text{I}} \psi_n^{\text{I}} - \\
& \pi \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{-d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)} \right) \alpha_n^{\text{I}} \psi_n^{\text{I}} = \lambda_n^{\frac{d}{2}+1}. \tag{A.51}
\end{aligned}$$

La ecuación (A.51) es la relación existente entre las constantes α^{I} y α^{II} de cada región, se necesita una ecuación más para dar solución a ambas constantes, por lo que se utiliza la condición (A.46), adicionando la evaluación de ζ en x_D :

$$\begin{aligned}
G|_{y_D^+} - G|_{y_D^-} &= \alpha_n^{\text{II}} x_D^{\frac{d}{2}} y_D^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{-d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) \right) \times \\
& \left(\frac{K_{\frac{-d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D) \right) \\
& - \alpha_n^{\text{I}} x_D^{\frac{d}{2}} y_D^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) \right) \times \\
& \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) I_{1-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D) \right) = 0,
\end{aligned}$$

despejando α_n^I :

$$\alpha_n^I = \frac{\left(\frac{K_{-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) \right)} \times$$

$$\frac{\left(\frac{K_{-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD}\right)}{I_{-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD}\right)} I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) + K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2} d\right) I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) + K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) \right)}. \quad (\text{A.52})$$

Las ecuaciones (A.51) y (A.52) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de tal forma que sustituyendo (A.52) en (A.51):

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} + \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)} \right) \alpha_n'' \psi_n'' \\
& - \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) \right) \alpha_n'' \psi_n'' + \\
& \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) \right) - \pi \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)} \right) \right] \psi_n' \alpha_n'' \times \\
& \frac{\left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) \right)} \times \\
& \frac{\left(\frac{K_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD}\right)}{I_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD}\right)} I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) + K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) + K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) \right)} = \lambda_n^{\frac{d}{2}+1}.
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\alpha_n^{\prime\prime} = \frac{\lambda_n^{\frac{d}{2}+1}}{\left[\Psi_1 \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} + \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \right) - \Psi_2 \right] \psi_n^{\prime\prime} + \Psi_3} \quad (\text{A.53})$$

con

$$\Psi_1 = \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)} \right)$$

$$\Psi_2 = \frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) \right)$$

$$\Psi_3 = \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) \right) - \pi \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) \left((\lambda_n x_{eD})^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)} \right) \right] \psi_n^{\prime} \times$$

$$\frac{\left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_D) \right)} \times$$

$$\frac{\left(\frac{K_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD}\right)}{I_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD}\right)} I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) + K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) \right)}{\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi}{2}d\right) I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) + K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D\right) \right)}$$

Recordando que:

$$\text{con: } \psi_n^I = \left\{ (d-1)y_D^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{\pi}{2} \csc\left(\frac{\pi}{2}d\right) I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_D\right) + K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_D\right) \right) + y_D^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \csc\left(\frac{\pi}{2}d\right) \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}\eta\right) - \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}\eta\right) \right) \right\},$$

y

$$\psi_n^{II} = \left\{ (d-1)y_D^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_{eD}\right)}{I_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_{eD}\right)} I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_D\right) + K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_D\right) \right) + \sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_D^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_{eD}\right)}{I_{\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_{eD}\right)} I_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_D\right) - K_{1-\frac{d}{2}}\left(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|}y_D\right) \right) \right\}.$$

Con (A.52) y (A.53) obtenemos el valor de las constantes para las funciones de Green en cada región, ahora solo resta encontrar los valores de λ , para resolver el problema adjunto. Por lo tanto de (A.37):

$$\frac{\frac{1}{2}\pi \frac{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}d\right)}}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} = \frac{\pi \csc\left(\frac{\pi}{2}d\right)}{2}.$$

usando identidades trigonométricas:

$$-\frac{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) - I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} = 0$$

quedando :

$$I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD}) = 0$$

Como se observa, esta relación da cero y no se puede obtener el valor de λ .

Ahora bien, la solución para \bar{p}_D , se obtiene por medio de (A.16), y como se tiene dividido el yacimiento en 2 regiones, ésta queda como:

$$\bar{p}_D(x_D, y_D) = - \int_{\zeta} \int_{\eta} [G(x_D, y_D, \zeta, \eta)] \bar{q}_{wD} \delta(\zeta - x_{wD}, \eta - y_{wD}) d\zeta d\eta \quad (\text{A.61})$$

Utilizando a propiedad de la delta de Dirac, obtenemos:

$$\bar{p}_D(x, y) = - [G(x_D, y_D, x_{wD}, y_{wD})] \bar{q}_{wD}.$$

Evaluamos las funciones G en la posición del pozo, lo que produce:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^I x_{wD}^{\frac{d}{2}} y_{wD}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \csc\left(\frac{\pi}{2} d\right) I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{wD}) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{wD}) \right) \times \\ \left(\frac{\pi}{2} \csc\left(\frac{\pi}{2} d\right) I_{1-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{wD}) + K_{1-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{wD}) \right),$$

para $y_{wD} < y_D$

y de forma análoga para la región II

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{II} x_{wD}^{\frac{d}{2}} y_{wD}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})}{I_{\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{wD}) + K_{1-\frac{d}{2}}(\lambda_n x_{wD}) \right) \times \\ \left(\frac{K_{\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD})}{I_{-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{eD})} I_{1-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{wD}) + K_{1-\frac{d}{2}}(\sqrt{|\lambda_n^2 - s|} y_{wD}) \right).$$

para $y_{wD} > y_D$

Con α_n^I y α_n^{II} , expresadas por (A.52) y (A.53).

Esta solución analítica generó resultados no satisfactorios, por lo que, el siguiente paso a seguir y considerando que el problema estaba en la solución y no en la ecuación diferencial, se creó un simulador para dicha ecuación (A.6).

El simulador no lineal, se programó en FORTRAN 90 en diferencias finitas y los resultados obtenidos en archivos de salida se graficaron en EXCEL. En la tabla A1 se muestran los parámetros de yacimiento con los que se alimentó al simulador.

Tabla A1. Datos del yacimiento	
PERMEABILIDAD(MD)	30
COMPRESIBILIDAD(PSI-1)	1.479E-09
POROSIDAD_INICIAL(-)	0.1
PRESION_INICIAL(PSIA)	3555.78
GASTO(BPD)	5031.84
ESPESOR_YACIMIENTO(ft)	164.04
LONGITUD_YACIMIENTO(ft)	1640.42

El yacimiento es cuadrado $L=1640.42$ ft, con 3×3 celdas encontrándose el pozo en la celda central es decir en la (2,2). (Figura A3). El tiempo de prueba fue de 10 días.

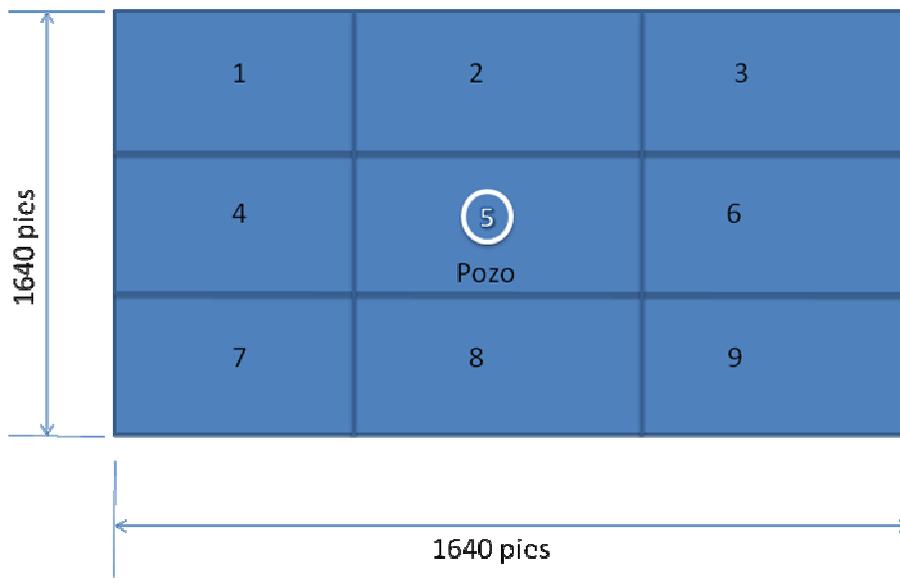


Figura A.3. Representación del yacimiento, su mallado y la posición del pozo productor.

La figura A.4 muestra los resultados obtenidos por el simulador para una dimensión fractal de 2 es decir un sistema euclidiano. Ésta muestra una gráfica de P vs X , cada curva representa el comportamiento de presión en un conjunto de nodos a un tiempo dado, aquí solo se muestran los

resultados obtenidos para los nodos 1, 2 y 3, así como para los nodos 4, 5 y 6 esto debido a que siendo un yacimiento cuadrado, los resultados para los nodos 7, 8 y 9 son idénticos a los de 1, 2 y 3 respectivamente. Se puede observar claramente que la caída de presión mayor es para los nodos 4, 5 y 6 en el tiempo $t=10$ días, siguiéndole los nodos 1, 2 y 3 para el mismo tiempo. Aquí lo importante a resaltar es que el sistema es simétrico, es decir, se obtienen los mismos valores en los nodos 1 y 3, 4 y 6 y 7 y 9, así como en los nodos 2 y 8 respectivamente y concuerda con los resultados para un sistema euclidiano

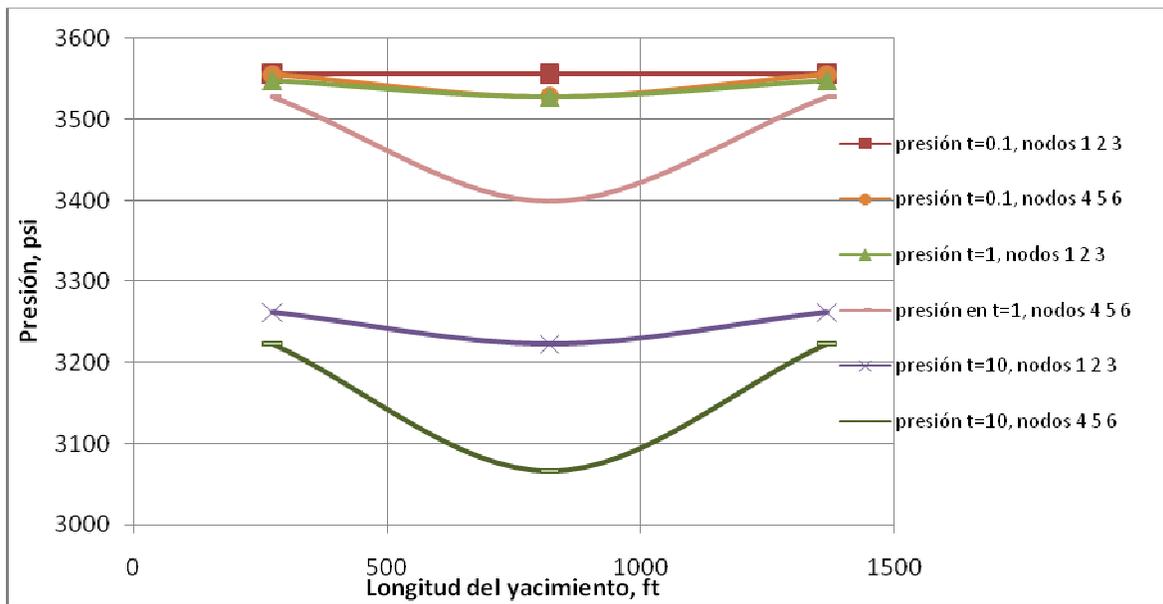


Figura A.4. Comportamiento de presión vs distancia para un yacimiento cuadrado con una $d=2$. Resultados obtenidos a partir del simulador no lineal para la ec. A6.

Otra forma de representar los resultados obtenidos se muestra en la figura A5, donde se muestra el comportamiento de la **presión vs x y** de cada nodo. Se ve claramente como el comportamiento es simétrico de la presión con respecto a la posición de los nodos.

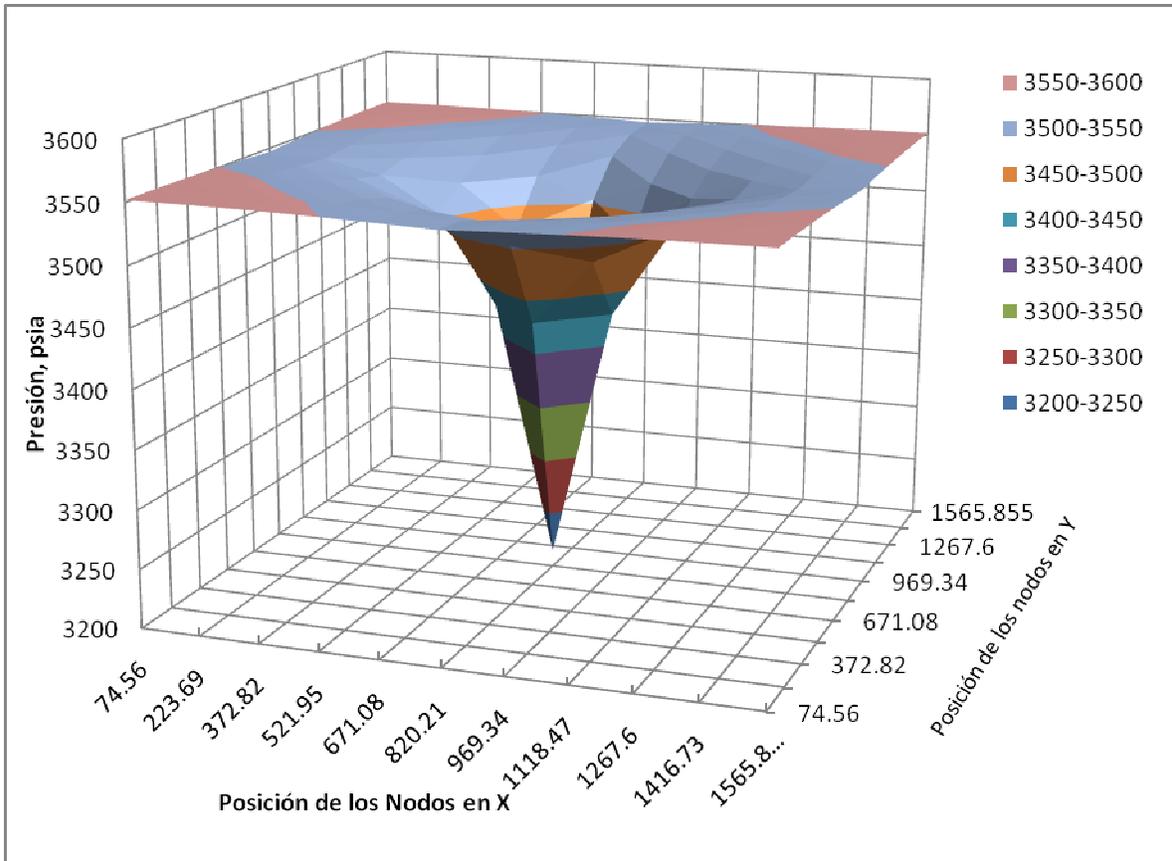


Figura A.5. Comportamiento de presión vs distancia para un yacimiento cuadrado con una $d=2$. Resultados obtenidos a partir del simulador no lineal para la ec. A6. Para $t=10$ días

A continuación se presentan los resultados obtenidos por el mismo simulador con los mismos datos de entrada, pero ahora con una dimensión fractal de 1.5. Para este caso además de cambiar la dimensión fractal se aumentó el número de nodos como se muestra en la figura A.6

#Nodos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
3	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
4	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
5	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
6	56	57	58	59	60	61 (Pozo)	62	63	64	65	66
7	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
8	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
9	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
10	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
11	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

Figura A.6. Representación del yacimiento cuadrado con L=1640ft, su mallado y la posición del pozo productor.

El comportamiento de presión en los nodos 50-60 se muestra en la gráfica A.7, a diferentes tiempos.

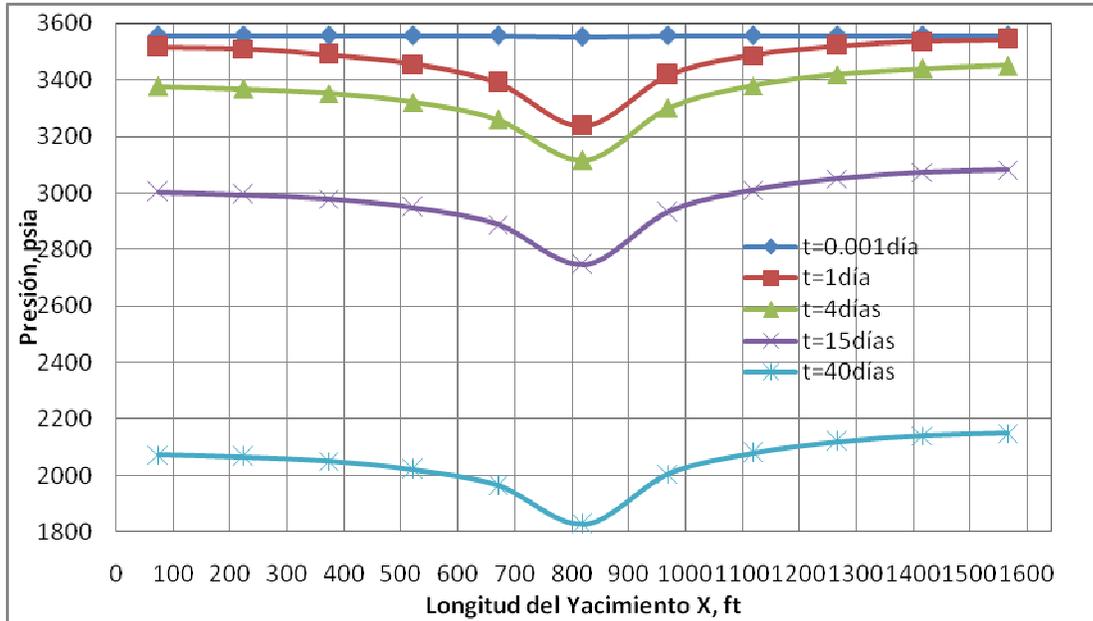


Figura A.7. Comportamiento de presión vs posición nodal en X para un yacimiento cuadrado con una $d=1.5$. Resultados obtenidos a partir del simulador no lineal para la ec. A6.

En la gráfica A.7 puede verse el comportamiento asimétrico con respecto a distancia, a menor distancia del origen una mayor caída de presión, sin importar que el pozo se encuentre en el centro del yacimiento. Este comportamiento se mantiene en el tiempo como puede observarse.

Ahora en la gráfica A.8 se muestra este mismo comportamiento pero a un tiempo fijo $t=10$ días, donde no existe un comportamiento simétrico y que a menor distancia del origen (0,0), una mayor caída de presión y viceversa. Es como si a una menor distancia al origen del eje existiera un efecto mayor por la presencia del pozo, incluso cuando 2 nodos se encuentran a la misma distancia del pozo en el nodo 61.

Debido a estos resultados, que son prácticamente los mismos que para la solución analítica de la ecuación A6, se concluyó que es la ecuación A6 la que no representa adecuadamente al problema planteado, por ello se continuó con el modelo semianalítico.

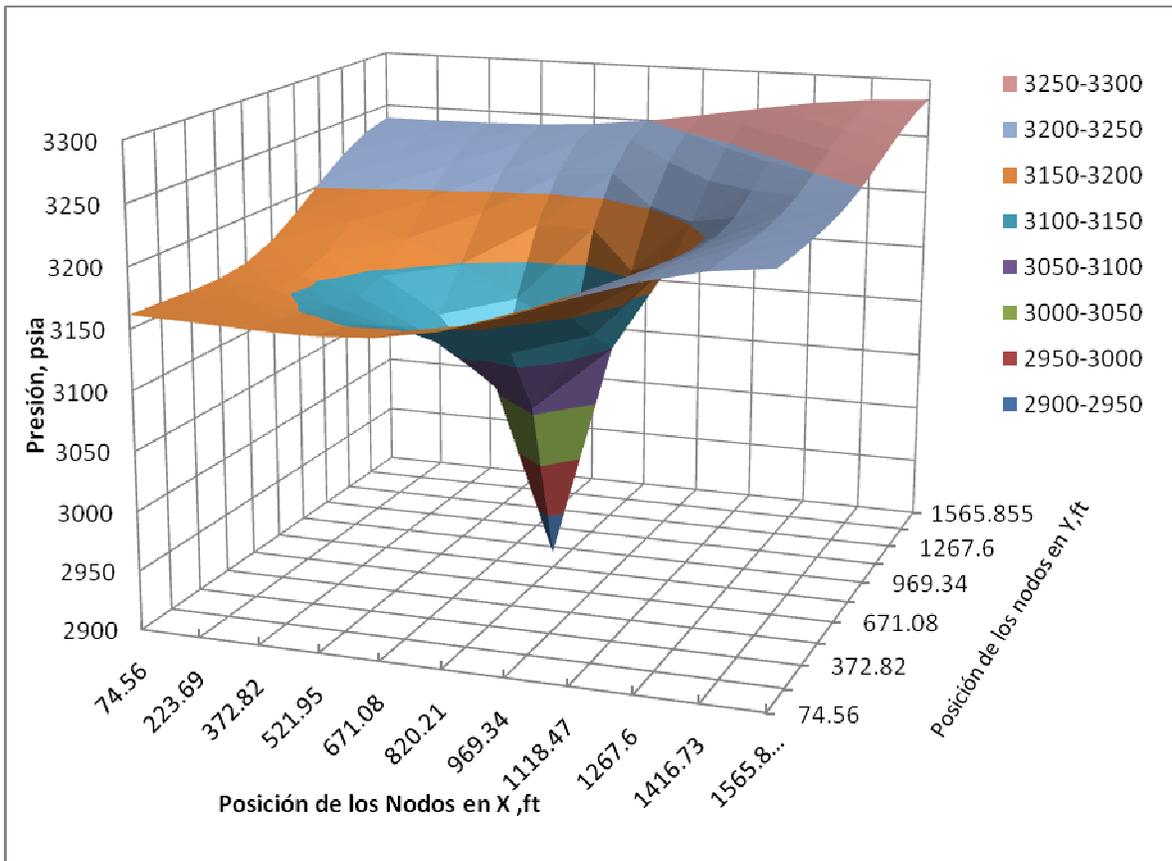


Figura A. 8. Comportamiento de presión vs distancia para un yacimiento cuadrado con una $d=1.5$. Resultados obtenidos a partir del simulador no lineal para la ec. A6. A un tiempo $t=10$ días

Referencias

- Lee, J. *Well Testing*. First Edition. SPE of AIME. New York. 1982. Chapter 6.
- Matthews, C.S. & Russel D.G. *Pressure Buildup and Flow Test in Wells*. Monograph Volume 1. SPE of AIME. 1967. Chapter 7.
- Theis, C.V. "The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage". *Eos Trans.* Num. 16 Agosto 1935. 519-524.
- Leaver D. J. "A Technical review of Interference Testing with Application in the Ohaaki Geothermal Field". Stanford University, marzo 1986.
- Jargon, J.R. "Effect of wellbore storage and wellbore damage at the active well on interference testing analysis". *J. Pet. Tech.* (Agosto. 1976) 851-858.
- Warren, J.E. & Root, P.J. "The Behavior of Naturally Fractured Reservoir. *Soc. Pet. Eng. J.* 245-255.
- Kazemi, H. "Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution". SPEJ (December) 451-62; Trans AIME 246.
- Grasman, T.J. & Grader A.S. "Constant-Pressure Interference Testing: Detecting Double-Porosity Properties". SPE 18835. *SPE Formation Evaluation*, December 1990. 353-359
- Earlougher, Jr. R.C. & Ramey Jr. H.J. "Pressure Distributions in Rectangular Reservoirs". SPE 1956. *JPT*. Feb. 1958. 199-208.
- Matthews, C.S. & Brons, F. Hazebroek, P. "A method for Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoir". *Trans. AIME*, vol. 201, 1954. 182-191
- Daltaban, T.S, & Wall, C. G. *Fundamental and Applied Pressure Analysis*. Imperial College Press. 1998 Chapter 12.
- Horner, D.R. "Pressure Build-Up in Wells", Proc., Third World Pet Cong., E.J.Brill, Leiden(1951), II, 503.
- Krisanto, D & Abdassah, D. "Practical Application of fractal Model to Analysis Interference Test in the Naturally Fracture Reservoir, Amoseas Indonesia Inc" , SPE 59402. 2000
- Daltaban, T.S & Wall, C.G *Fundamental and Applied Pressure Analysis*. Imperial College Press. 1998. Pag. 307
- Matthews, C.S. & Brons, F. Hazebroek, P. "A method for Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoir". *Trans. AIME*, vol. 201, 1954. 182-191
- Fokker, Verga & Torino. A Semi-analytic Model for the productivity testing of multiple wells. SPE 94153
- Van Golf-Racht, T.D. *Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering*. Elsevier Scientific Publishing Company. 1982. Chapter 7.

- Kazemi, H. Seth, M.S. & Thomas, G.W. "The interpretation of Interference Tests in Naturally Fractured Reservoir with uniform fracture distribution". *SPEJ*. Diciembre 463-472.
- de Swaan A.O. "Analytic Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by well testing". *SPEJ* junio 1976. 117-122.
- Barker, J.A. "A generalized Radial Flow Model Hydraulic Test in Fractured Rock". *Water Resources Research*. Vol. **24**, num. 10, octubre 1988. 1796-1804.
- Chang, J & Yortsos, Y.C. "Pressure-transient Analysis of Fractal Reservoir". SPE 18170. *SPE Formation Evaluation*. Marzo 1990. 31-38.
- Mandelbrot, B.B. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman San Francisco. 1983.
- Feder, J. *Fractals*. Plenum Press, New York, 1988.
- Hardy, H.H & Beier R.A. *Fractals in Reservoir Engineering*. World Scientific. 1994
- Sahimi, M. & Yortsos, Y.C. "Applications of Fractal Geometry to Porous Media: A Review". SPE 20476. Presentado en la 65a Annual SPE Fall Meeting, New Orleans, Sep. 1990.
- Sahimi, M, Hughes, B.D., Scriven & Davis, H.T. *J. Chem. Phys.*, **78**, 6849.1983b.
- Gefen, Y., Aharony, A., 6 Alexander, S. *Phys. Rev. Lett.*, **51**, 77. 1983
- Acuña, J. A. Ershaghi, I. & Yortsos, Y.C. "Practical Implementation of Fractal Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs". SPE24705
- Krisanto, D., Abdassah, D., & Siregar, S. "Practical Application of Fractal Model to Analysis Interference Test in the Naturally Fracture Reservoir Amoseas Indonesia Inc." SPE59402, 2000
- Stehfest, H. "Numerical Inversion of Laplace Transforms". *Communications of the ACM* (January 1970) **13**, No. 1, 47-49. (Algorithm 368 with correction (October 1970) **13**, No. 10)
- Las reservas de hidrocarburos de México. Volumen II. Los principales campos de petróleo de gas de México. 1999. Pemex Exploración y Producción.
- Flamenco-Lopez, F. & Camacho-Velázquez, R. "Determination of Fractal Parameters of Fracture Networks using Pressure Transient Data". SPE 71591, 2001.
- Prueba de Inyectividad e interferencia. Campo Jujo-Tecominuacán- Area Jujo.
- Wolfram *Mathematica* 7, 1988-2008 Versión para estudiantes.

Nomenclatura

- a** parámetro de densidad de sitio, $L^{-\delta}$, *modelo Chang y Yortsos*
 a, b, d distancia, L
 A área de drene del sistema, L^2
 b longitud de proyección, L
 B factor de volumen del fluido, adimensional
 B_0 factor de volumen del aceite
 c compresibilidad, $LM^{-1}T^2$
 $c_{i,j}$ distancia, L
 d dimensión euclidiana
 D difusividad efectiva
 δ dimensión fractal
 E_i función integral exponencial
 G factor geométrico, L^{3-d}
 h espesor de la formación, L
 h superficie de proyección, L^2
 k permeabilidad, L^2
 I_v función modificada de Bessel
 K_v función modificada de Bessel
 m parámetro de la red de fracturas, $L^{\theta+2}$
 m_i caída de presión por ciclo para una curva de incremento en el pozo observador, $L^{-1}MT^2/ciclo$
 p presión, $L^{-1}MT^2$
 p_D presión adimensional
 q gasto volumétrico de flujo, LT^{-1}
 r radio, L
 r_D radio adimensional
 s variable de Laplace
 t tiempo, T
 t_H tiempo de Horner, adimensional
 t_D tiempo adimensional
 V_s volumen por sitio L^3
 x, y variables espaciales, L
 z variable de integración
 α fracción
 α_δ área de una esfera unidimensional, en δ dimensiones
 γ constante de Euler = 0.5772
 Γ función gama
 θ índice de conductividad
 μ viscosidad, $L^{-1}T^1M$
 ρ densidad, ML^{-3}
 σ variable definida por la ecuación (4.9b)
 ϕ porosidad
 η variable definida por la ecuación (4.14b)

Subíndice

A, B nombre del pozo al que se refiere

b distancia entre pozos

D adimensional

i, j índice

o inicio

w del pozo

w_f pozo fluyente

w_s pozo cerrado

Superíndice

ρ Variable de Laplace

τ Variable de Laplace