



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

**COMPARACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS DE
FONDO MÓVIL DE DOS Y DE TRES ECUACIONES**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA

P R E S E N T A :

FREDY RÍOS CRUZ

TUTOR:

DR. MOISÉS BEREZOWSKY VERDUZCO



Ciudad Universitaria, México D.F. Julio de 2010

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. OSCAR A. FUENTES MARILES
Secretario: M.I. VICTOR FRANCO
Vocal: DR. MOISÉS BEREZOWSKY VERDUZCO
1^{er}. Suplente: DRA. JOSELINA ESPINOZA AYALA
2^{do}. Suplente: DR. ABEL JIMÉNEZ CASTAÑEDA AMADO

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

DR. MOISÉS BEREZOWSKY VERDUZCO

AGRADECIMIENTOS

A mí familia por los medios proporcionados para seguir desarrollándome en el medio profesional.

A la UNAM por permitirme realizar un sueño más.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM por brindarme un espacio de trabajo.

Al Dr. Moisés Berezowsky por el apoyo brindado en la realización de esta tesis, por su apoyo en mi formación académica y por su amistad.

Al Dr. Oscar Fuentes, al M.I. Víctor Franco, a la Dra. Joselina Espinoza y al Dr. Abel Jiménez por las correcciones y valiosas sugerencias hechas en este trabajo.

A mis profesores y amigos del Instituto de Ingeniería.

I INTRODUCCIÓN	1
II MODELOS NUMÉRICOS DE FONDO MÓVIL	3
2.1 Modelo numérico semiacoplado	4
2.1.1 Ecuaciones básicas	4
2.1.2 Discretización de las ecuaciones básicas	5
2.2 Modelo numérico acoplado	9
2.2.1 Ecuaciones básicas	9
2.2.2 Discretización de las ecuaciones básicas	9
2.3 Ecuaciones de transporte de sedimentos	11
2.4 Condiciones iniciales y de frontera	15
2.5 Método de solución	17
2.6 Revisión del algoritmo de solución	18
2.6.1 Factorización-LU	18
2.6.2 Matrices en Bloques	20
2.6.3 Doble Barrido	21
III COMPARACIONES	24
3.1 Datos medidos en laboratorio	24
3.1.1 Variación de pendiente en la sección intermedia	24
3.1.2 Canal con trinchera	25
3.1.3 Contracción gradual	26
3.2 Variación de pendiente en la sección media	28
3.2.1 Pendiente suave	28
3.2.2 Pendiente moderada	31
3.3 Tramo con contracción gradual	36
IV EFECTO DE LA VARIABILIDAD ANUAL DEL GASTO	38
4.1 Sección constante	41
4.1.1 Gasto medio constante	41

4.1.2 Hidrograma medio anual	42
4.1.3 Hidrogramas medio-máximo-mínimo anual	43
4.1.4 Hidrogramas máximo-medio anual	43
4.1.5 Hidrogramas máximo-mínimo anual	44
4.2 Tramo de río con contracción	45
4.2.1 Gasto medio constante	45
4.2.2 Hidrograma medio anual	50
4.2.3 Hidrogramas medio-máximo-mínimo anual	53
4.2.4 Hidrogramas máximo-medio anual	56
4.2.5 Hidrogramas máximo-mínimo anual	58
V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	62
REFERENCIAS	64

I INTRODUCCIÓN

De acuerdo con estadísticas disponibles en el mundo sobre sedimentación, la erosión anual de la superficie del suelo de las cuencas fluviales asciende a 60 billones de toneladas, de las cuales 17 billones se vierten en los océanos. Durante el proceso, anualmente de 5 a 7 millones de hectáreas de tierras de cultivo quedan en ruinas y, cada año alrededor del 1 % de la capacidad del almacenamiento de los embalses del mundo se pierde con la depositación, Liu (2006). Entre los principales problemas que enfrenta la humanidad, está la sedimentación de suelo, incluidos los derivados de la erosión, transporte de sedimentos en los ríos y la depositación en embalses y lagos. La depositación de sedimentos en canales fluviales, puertos y estuarios, ha constituido el motor de diversas investigaciones en sedimentos.

Para estudiar el problema de transporte de sedimentos en cauces aluviales, en los años 50 se comenzaron a utilizar los modelos físicos; en la misma década se inicio el desarrollo de los modelos matemáticos de transporte de sedimentos que han sido ampliamente aplicados en la ingeniería fluvial, sobre todo desde la década de los 70 (Wu, 2004); con el avance de la computación, en las últimas décadas se han desarrollado diversos modelos computacionales en una dimensión, 1D, dos dimensiones, 2D, y tres dimensiones, 3D (Habersack, 1998; Papanicolaou, *et al.*, 2008). El uso de un modelo físico o matemático depende de diversas consideraciones; por ejemplo, de la naturaleza del problema que hay que resolver, los recursos disponibles y el costo global asociado a la solución del mismo. En algunos casos, una combinación de los dos tipos de modelos pueden ser utilizados para obtener una mejor comprensión del fenómeno, de Vries (1973).

En general el uso de los modelos matemáticos de transporte de sedimentos, implica la solución numérica de ecuaciones diferenciales que describen el flujo (que son, la ecuación de continuidad, de momento y la de energía del agua; la de continuidad del sedimento). Una de las ventajas de los modelos matemáticos sobre los físicos, es que puede adaptarse a diferentes condiciones físicas con mayor facilidad, ya que los modelos físicos suelen ser construidos para representar condiciones específicas de un sitio, otra ventaja de los modelos matemáticos es que no están sujetos a los efectos de distorsión de los modelos físicos, es decir, la solución puede obtenerse en las mismas condiciones del flujo (idéntico número de Reynolds y de Froude, misma longitud de escalas en las tres direcciones) y del terreno, (Papanicolao, 2008; Postma, *et al.*, 2008). La principal desventaja de los modelos físicos es su alto costo de construcción.

Los modelos matemáticos de transporte de sedimentos en canales aluviales en 1D, 2D o 3D, pueden resolver las ecuaciones gobernantes de manera acoplada, semiacoplada y no acoplada. Se han realizado numerosas investigaciones para conocer las ventajas y desventajas que se tienen al resolver el sistema de ecuaciones (ver Krishnapan, 1992; Cui y Paola, 1995; Saiedi, 1997; Habersack, 1998; Kassem y Chaudhry, 1998; Cao, Day y Egashira, 2002; Vásquez, Millar y Steffler, 2005; Simpson y Castelltort, 2006). Tomando en cuenta que solo la buena interpretación de la erosión y la depositación, pueden contribuir a la mitigación de los problemas de sedimentos y ayudar a orientarse hacia el desarrollo sostenible de los recursos naturales, especialmente suelo y agua; por ello es necesario seguir desarrollando trabajos sobre el transporte de sedimentos, para impulsar y difundir el conocimiento de erosión y depositación.

En la presente tesis se comparan dos modelos matemáticos de fondo móvil desarrollados en el Instituto de Ingeniería de la UNAM; uno de ellos, llamado NFONDAC, que emplea dos ecuaciones y es semiacoplado, mientras que el otro, FM3E, utiliza tres ecuaciones y es acoplado. Ambos modelos tienen las mismas fórmulas de transporte de sedimentos y resistencia al flujo. Como parte del método de solución, es necesario resolver sistemas de ecuaciones lineales; en este caso se comparan tres métodos de solución con el fin de disminuir el tiempo de cómputo. El objetivo principal de esta investigación consiste en comparar los dos modelos con el uso de diferentes hidrogramas de entrada, en un canal con secciones transversales constantes, y en otro con contracción. En el segundo caso se agrega un modelo no acoplado (HEC-RAS 4.1). El tiempo de simulación se extiende a dos décadas, que es mucho mayor que los tiempos de análisis hechos por otros investigadores. Aunque ambos modelos han sido probados en otras investigaciones, aquí se comparan los dos modelos con datos medidos de laboratorio, y con resultados obtenidos por otros investigadores en canales de diferentes secciones y pendientes. Desafortunadamente, en la presente investigación no se dispone de datos medidos de casos reales en cauces aluviales.

En el capítulo siguiente se describen los modelos NFONDAC y FM3E, sus ecuaciones básicas y su discretización; además, las condiciones iniciales y de frontera con una revisión del algoritmo de solución. En el capítulo tres se comparan los resultados de simulación con datos de laboratorio y con los del modelo FESWMS - FST2DH. Por último, a fin de notar el efecto de la variabilidad anual de los gastos, se estudia un tramo de río con secciones constantes y otro con contracción. Los resultados permitirán conocer los casos de aplicación de cada modelo.

II MODELOS NUMÉRICOS DE FONDO MÓVIL

La utilización de modelos con fondo móvil comenzó a principios de 1950, García (2007). En las últimas décadas se ha hecho un importante trabajo en este ámbito, tanto en el desarrollo de modelos físicos como en los matemáticos.

Uno de los estudios más antiguos y que todavía se utiliza sobre la degradación de fondo en canales abiertos es el de Newton (1951), (Singh, 2005). Después, con la mejora de las computadoras electrónicas de alta velocidad y el desarrollo de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, la investigación se ha centrado en modelos numéricos para flujo no permanente (Jaramillo, 1984), dando como resultado gran cantidad de modelos numéricos.

Según Singh (2005) uno de los primeros modelos numéricos fue desarrollado por Tinney (1962). Tinney analizó el proceso de degradación del fondo en canales con sedimento uniforme, usando la ecuación de transporte de sedimentos de Duboy's y de resistencia al flujo de Manning, comparando sus resultados con los datos de Newton (1951). En su trabajo, pionero sobre procesos morfológicos a largo plazo (de Vries, 1965, 1971) mostró que para números de Froude pequeños, las cinco ecuaciones básicas que rigen el proceso morfológico podrían reducirse a dos: la curva de remanso del flujo y la ecuación de continuidad del sedimento. Inicialmente, resuelve las ecuaciones mediante el método de las características y más tarde por un método de diferencias finitas (Jaramillo, 1984).

Los modelos numéricos en 1D son aplicados a casos que involucran tramos de ríos largos y amplios periodos de tiempo, mientras que el uso de los modelos 2D y 3D se limita a problemas que requieren resolución de detalles locales (por ejemplo, socavación en pilas de puentes) durante periodos de tiempo relativamente cortos. Los modelos 1D se rigen por las ecuaciones de conservación de masa y de impulso para aguas poco profundas; los modelos 2D incluyen la profundidad media. Los modelos 3D están regidos por las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones promedios de Reynolds (García, 2007).

Los modelos desacoplados se basan en el supuesto de que el cambio en una variable (como la sección transversal) y durante un intervalo de cálculo es tan pequeño que su efecto sobre las otras variables (como la del flujo), pueden ser ignorados; por tanto, las ecuaciones de flujo y de transporte de sedimentos pueden resolverse de manera desacoplada. Los modelos semiacoplados resuelven las ecuaciones de flujo y de transporte de sedimento de manera conjunta. Las variables de flujo obtenidos por la solución de las ecuaciones de flujo en un paso de tiempo dado, se utiliza para predecir los cambios en el nivel del fondo a lo largo del canal; entonces, el nuevo nivel del fondo se utiliza para ajustar las variables de flujo. Los pasos anteriores se repiten iterativamente hasta que los cambios sucesivos entre las estimaciones de los niveles del fondo son pequeños. Los modelos también se llaman semiacoplados cuando resuelven simultáneamente las ecuaciones de energía del flujo y la de continuidad del sedimento. En los modelos acoplados, las ecuaciones de flujo y de continuidad del sedimento se resuelven simultáneamente en un intervalo de tiempo dado (Kassen y Chaudhry, 1998).

2.1 Modelo numérico semiacoplado

Tomando en cuenta el concepto físico de escala morfológica en el que se acepta que el cauce ajusta su sección (ancho y pendiente) en el largo plazo (del orden de años), mientras que el tirante y gasto varían de instante a instante, es posible esquematizar el flujo no permanente con fondo móvil, para números de Froude bajos.

Si interesa el comportamiento del fondo, la escala de tiempos es del orden de un año, por lo que si se presta atención a disturbios en el fondo, los disturbios en la superficie libre del agua tienden a infinito. Esta hipótesis equivale a suponer que el gasto líquido no cambia a lo largo del cauce y de hecho es, por tanto, un flujo permanente no uniforme con fondo móvil (Berezowsky y Jiménez, 1995).

Bajo la explicación anterior se describe el modelo numérico semiacoplado NFONDAC.

2.1.1 Ecuaciones básicas

Para modelar numéricamente el movimiento unidimensional del fondo de un río, se requieren tres ecuaciones diferenciales parciales que son la de continuidad del líquido, la de cantidad de movimiento y la de continuidad del sedimento; además se necesita una ecuación de transporte de sedimentos y otra para la resistencia al flujo. Las ecuaciones del líquido expresadas en la llamada versión conservativa (Cunge, *et al.*, 1980) son

Ecuación de continuidad del líquido

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{T} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Ecuación dinámica (de impulso o cantidad de movimiento) del líquido

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gAS_f = 0 \quad (1.2)$$

donde Q , es el gasto líquido, en m^3/s ; T , el ancho de la superficie libre del agua, en m ; B_s , ancho promedio del fondo, en m ; A , el área hidráulica de la sección transversal, en m^2 ; g , la aceleración de la gravedad, en m/s^2 ; $H = Z + h$, elevación de la superficie libre del agua, en m ; h , tirante del agua, en m ; S_f , la pendiente de fricción o gradiente de la línea de energía, adimensional; x , longitud del tramo, en m ; t , tiempo, en s .

Ecuación de continuidad del sedimento

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{(1-\varepsilon)B_s} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

donde ε , es la porosidad del material sólido; G , gasto sólido, en m^3/s ; Z la elevación del fondo del cauce, en m.

En la deducción de las ecs 1.1 a 1.3 se consideran válidas las hipótesis de Saint-Venant; es decir, se considera que el flujo es unidimensional, esto es, que la velocidad es uniforme en toda la sección transversal; la curvatura de las líneas de corriente es pequeña y las aceleraciones verticales son despreciables, por tanto, la distribución de presiones es hidrostática; los efectos de fricción en la frontera así como la turbulencia pueden cuantificarse con leyes de resistencia análogas a las usadas en el cálculo de flujo uniforme; también se considera que en general la pendiente media del fondo es pequeña, de tal manera que el coseno del ángulo que forma con la horizontal puede considerarse casi igual a 1. Además, dada la lentitud con la que evolucionan las formas de las secciones, los efectos debidos a los meandros, corrientes secundarias, etc., se consideran despreciables.

En este caso se hace una simplificación de las ecuaciones fundamentales, que ayuda a reducir el tiempo de cálculo. Aceptar que las celeridades de disturbios en el agua viajan a velocidad infinita, equivale a suponer que el gasto es prácticamente constante a lo largo del río, esto es $\partial Q/\partial x = 0$; por ello, no se requiere la ecuación de continuidad del líquido. Si además, la variación temporal del gasto se incluye en forma de escalones de gasto constante, se tiene que $\partial Q/\partial t = 0$ (Berezowsky y Jiménez, 1989); por tanto, las ecuaciones fundamentales se reducen a la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 + g \left(\frac{\partial H}{\partial x} + S_f \right) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{(1-\varepsilon)B_s} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

donde las variables ya fueron definidas anteriormente.

La ec 1.4 es la ecuación de la energía con la que se calculan los perfiles hidráulicos y la ec 1.5 es la ecuación de continuidad del sedimento.

2.1.2 Discretización de las ecuaciones básicas

Para obtener la evolución del fondo del río es posible escribir en diferencias finitas las ecs 1.4 y 1.5, de tal forma que se tengan como incógnitas los cambios en el tiempo de la cota de la superficie libre del agua, $\Delta H = H^{n+1} - H^n$, y de la cota del fondo del cauce, $\Delta Z = Z^{n+1} - Z^n$. De los esquemas existentes, se ha encontrado que uno de los mejores es el de Preissmann, que es implícito de cuatro puntos. El método de discretización puede verse en Berezowsky y Jiménez (1995).

Sea un tramo entre las secciones j y $j+1$; entonces, el primer término de la ec 1.4 se expresa en diferencias finitas como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = \frac{\theta}{2\Delta x_j} \left[\Delta \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^2 - \Delta \left(\frac{Q}{A} \right)_j^2 \right] + \frac{1}{2\Delta x_j} \left[\left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^2 - \left(\frac{Q}{A} \right)_j^2 \right] \quad (1.6)$$

donde $\Delta(Q/A)^2$, con Q constante, es

$$\Delta \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = -2 \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \frac{\Delta A}{A} \quad (1.7)$$

El cambio del área, ΔA , se puede expresar por definición, para un canal ancho, como $B(\Delta H - \Delta Z)$, con lo que se obtiene

$$\Delta \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = -2 \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \frac{B(\Delta H - \Delta Z)}{A} \quad (1.8)$$

Por tanto, el primer término de la ec 1.4 queda como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{A} \right)^2 = \frac{\theta}{\Delta x_j} \left[- \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^2 \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} (\Delta H_{j+1} - \Delta Z_{j+1}) + \left(\frac{Q}{A} \right)_j^2 \frac{B_j}{A_j} (\Delta H_j - \Delta Z_j) \right] + \frac{1}{2\Delta x_j} \left[\left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^2 - \left(\frac{Q}{A} \right)_j^2 \right] \quad (1.9)$$

donde θ , es un factor de peso en el tiempo, $0 \leq \theta \leq 1$.

El segundo término de la ec 1.4 se expresa como

$$g \frac{\partial H}{\partial x} = g \frac{\theta}{\Delta x_j} (\Delta H_{j+1} - \Delta H_j) + g \frac{1}{\Delta x_j} (H_{j+1} - H_j) \quad (1.10)$$

y el último término de la ec 1.4 es

$$g S_f = g \frac{\theta}{2} [\Delta S_{f_{j+1}} + \Delta S_{f_j}] + g \frac{1}{2} [S_{f_{j+1}} + S_{f_j}] \quad (1.11)$$

el cambio de ΔS_f se aproxima como sigue

$$\Delta S_f = \frac{\partial S_f}{\partial h} (\Delta H - \Delta Z) \quad (1.12)$$

donde h , es el tirante, en m. El término $g S_f$ queda, por tanto, en la forma siguiente

$$g S_f = g \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} (\Delta H_{j+1} - \Delta Z_{j+1}) + \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_j (\Delta H_j - \Delta Z_j) \right] + g \frac{1}{2} (S_{f_{j+1}} + S_{f_j}) \quad (1.13)$$

Sustituyendo las ecs 1.9 a 1.11 en la 1.4, y ordenando se obtiene

$$CM 2_j \Delta Z_{j+1} + CM 3_j \Delta H_{j+1} = CM 5_j \Delta Z_j + CM 6_j \Delta H_j + CM 7_j \quad (1.14)$$

donde los coeficientes $CM2_j$ a $CM7_j$ son

$$\begin{aligned}
 CM\ 2_j &= \frac{\theta}{\Delta x_j} \left[\frac{Q}{A} \right]_{j+1}^2 \frac{B_{j+1}}{A_{j+1}} - g \frac{\theta}{2} \left[\frac{\partial S_f}{\partial h} \right]_{j+1} \\
 CM\ 3_j &= g \frac{\theta}{\Delta x_j} - CM\ 2_j \\
 CM\ 5_j &= \frac{\theta}{\Delta x_j} \left[\frac{Q}{A} \right]_j^2 \frac{B_j}{A_j} + g \frac{\theta}{2} \left[\frac{\partial S_f}{\partial h} \right]_j \\
 CM\ 6_j &= g \frac{\theta}{\Delta x_j} - CM\ 5_j \\
 CM\ 7_j &= - \left\{ \frac{1}{2\Delta x_j} \left[\left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^2 - \left(\frac{Q}{A} \right)_j^2 \right] + \frac{1}{\Delta x_j} g (H_{j+1} - H_j) + \frac{1}{2} g (S_{f_{j+1}} + S_{f_j}) \right\}
 \end{aligned}$$

El primer término de la ec 1.5 se expresa, como

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\psi}{\Delta t} \Delta Z_{j+1} + \frac{(1-\psi)}{\Delta t} \Delta Z_j \quad (1.15)$$

donde ψ , es un factor de peso en el espacio, $0 \leq \psi \leq 1$.

En cuanto a la derivada espacial del segundo término se tiene

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x_j} [\Delta G_{j+1} - \Delta G_j] + \frac{1}{\Delta x_j} (G_{j+1} - G_j) \quad (1.16)$$

En este caso, el cambio en el gasto sólido se expresa utilizando la regla de la cadena como

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial S_f} \Delta S_f + \frac{\partial G}{\partial h} (\Delta H - \Delta Z) \quad (1.17)$$

por lo que el cambio, ΔG , queda finalmente como

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial S_f} \frac{\partial S_f}{\partial h} (\Delta H - \Delta Z) + \frac{\partial G}{\partial h} (\Delta H - \Delta Z) \quad (1.19)$$

Por tanto, el segundo término de la ec 1.5 se expresa como

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\varepsilon)B_s} \frac{\partial G}{\partial x} = & \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \frac{\theta}{\Delta x_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} (\Delta H_{j+1} - \Delta Z_{j+1}) + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_{j+1} (\Delta H_{j+1} - \Delta Z_{j+1}) \right] \\ & - \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \frac{\theta}{\Delta x_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_j (\Delta H_j - \Delta Z_j) + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_j (\Delta H_j - \Delta Z_j) \right] + \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \frac{1}{\Delta x_j} (G_{j+1} - G_j) \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde

$$BM_j = \frac{B_{s_j} + B_{s_{j+1}}}{2}$$

Sumando las ecs 1.15 y 1.20, e igualándolas a cero, multiplicando todo por ΔZ y ΔH , en j y $j+1$, respectivamente, se obtiene

$$CS 2_j \Delta Z_{j+1} + CS 3_j \Delta H_{j+1} = CS 5_j \Delta Z_j + CS 6_j \Delta H_j + CS 7_j \quad (1.21)$$

donde

$$CS 2_j = \psi + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} - \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_{j+1} \right]$$

$$CS 3_j = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_{j+1} \right]$$

$$CS 5_j = - (1-\psi) + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_j - \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_j \right]$$

$$CS 6_j = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_j + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_j \right]$$

$$CS 7_j = - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{1}{(1-\varepsilon)BM_j} (G_{j+1} - G_j)$$

En las ecs 1.14 y 1.21 aparecen las derivadas parciales de S_f con respecto a h , y de G con respecto a h y S_f . Estas derivadas dependen de la fórmula de resistencia al flujo y del transporte de sedimentos empleadas, respectivamente, mismas que pueden verse en Berezowsky y Jiménez (1993).

Así, el sistema de ecuaciones que resulta puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} CM 2_j \Delta Z_{j+1} + CM 3_j \Delta H_{j+1} &= CM 5_j \Delta Z_j + CM 6_j \Delta H_j + CM 7_j \\ CS 2_j \Delta Z_{j+1} + CS 3_j \Delta H_{j+1} &= CS 5_j \Delta Z_j + CS 6_j \Delta H_j + CS 7_j \end{aligned} \quad (1.22)$$

2.2 Modelo numérico acoplado

Lara (1985) desarrolló un modelo numérico unidimensional, que resuelve las ecuaciones de continuidad del flujo, de cantidad de movimiento del flujo y de continuidad del sedimento, en forma acoplada.

2.2.1 Ecuaciones básicas

Al considerar los efectos dinámicos debido a cambios rápidos en el flujo y asumir que estos efectos influyen en la evolución del fondo, se requiere de un modelo que resuelva las ecuaciones completas como el descrito por Lara (1985), Berezowsky y Lara (1986). Es decir, el modelo matemático FM3E resuelve simultáneamente las ecs 1.1, 1.2 y 1.3.

2.2.2 Discretización de las ecuaciones básicas

Las ecuaciones que resuelve el modelo de nombre FM3E son discretizadas al igual que el modelo NFONDAC con el esquema implícito de Preissmann, el procedimiento puede verse en Lara (1985).

Las ecuaciones en diferencias finitas quedan discretizadas de la manera siguiente:

Ecuación de continuidad del líquido 1.1

$$CL1_j \Delta Q_{j+1} + CL2_j \Delta Z_{j+1} + CL3_j \Delta H_{j+1} = CL4_j \Delta Q_j + CL5_j \Delta Z_j + CL6_j \Delta H_j + CL7_j \quad (1.23)$$

donde

$$CL1_j = \frac{2\theta}{TM_j} \frac{\Delta t}{\Delta x_j}$$

$$CL2_j = -1$$

$$CL3_j = 1$$

$$CL4_j = \frac{2\theta}{TM_j} \frac{\Delta t}{\Delta x_j}$$

$$CL5_j = 1$$

$$CL6_j = -1$$

$$CL7_j = \frac{2}{TM_j} \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (Q_j - Q_{j+1})$$

donde

$$TM_j = \frac{\theta(\Delta T_j + \Delta T_{j+1})}{2} + \frac{T_j + T_{j+1}}{2}$$

Ecuación de cantidad de movimiento del líquido 1.2

$$CM1_j \Delta Q_{j+1} + CM2_j \Delta Z_{j+1} + CM3_j \Delta H_{j+1} = CM4_j \Delta Q_j + CM5_j \Delta Z_j + CM6_j \Delta H_j + CM7_j \quad (1.24)$$

donde

$$\begin{aligned} CM1_j &= 1 + g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)_{j+1} + 2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \left(2 \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1} \right) \\ CM2_j &= -g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} \\ CM3_j &= 2g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} AM_j + g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} \\ CM4_j &= -1 - g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)_j + 2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \left(2 \left(\frac{Q}{A} \right)_j \right) \\ CM5_j &= g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_j \\ CM6_j &= 2g\theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} AM_j - g\theta\Delta t AM_j \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} \\ CM7_j &= 2 \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \left[\left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1} - \left(\frac{Q}{A} \right)_j \right] - 2g \frac{\Delta t}{\Delta x_j} AM_j (H_{j+1} - H_j) - g\Delta t AM_j (S_{f_{j+1}} + S_{f_j}) + \\ &\quad + 2\theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \left[\left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1}^2 \Delta A_{j+1} - \left(\frac{Q}{A} \right)_j^2 \Delta A_j \right] \end{aligned}$$

donde

$$AM_j = \frac{\theta(\Delta A_j + \Delta A_{j+1})}{2} + \frac{A_j + A_{j+1}}{2}$$

Para la ecuación de continuidad del sedimento 1.3, se tiene

$$CS1_j \Delta Q_{j+1} + CS2_j \Delta Z_{j+1} + CS3_j \Delta H_{j+1} = CS4_j \Delta Q_j + CS5_j \Delta Z_j + CS6_j \Delta H_j + CS7_j \quad (1.25)$$

donde

$$\begin{aligned} CS1_j &= \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{I}{(1-\varepsilon) BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right)_{j+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)_{j+1} \right] \\ CS2_j &= \psi + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{I}{(1-\varepsilon) BM_j} \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} - \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_{j+1} \right] \\ CS3_j &= \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{I}{(1-\varepsilon) BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right)_{j+1} \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_{j+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_{j+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CS4_j &= \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{I}{(1-\varepsilon) BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right)_j + \left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right) \left(\frac{\partial S_f}{\partial Q} \right)_j \right] \\
CS5_j &= -(1-\psi) + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{I}{(1-\varepsilon) BM_j} \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right) \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_j - \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_j \right] \\
CS6_j &= \theta \frac{\Delta t}{\Delta x_j} \frac{I}{(1-\varepsilon) BM_j} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S_f} \right) \left(\frac{\partial S_f}{\partial h} \right)_j + \left(\frac{\partial G}{\partial h} \right)_j \right] \\
CS7_j &= \frac{\Delta t}{(1-\varepsilon) \Delta x_j BM_j} (G_j - G_{j+1})
\end{aligned}$$

Los valores de ψ y θ en la ecuación de continuidad y de movimiento del líquido son de 0.5 y 0.6, respectivamente, en la ecuación de continuidad $\psi = 0.8$, para evitar problemas de oscilación.

Las expresiones para calcular $\partial G / \partial S_f$, $\partial S_f / \partial h$ y $\partial G / \partial h$, pueden verse en Berezowsky y Jiménez (1993).

De lo anterior, el sistema de ecuaciones que resulta puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned}
CM1_j \Delta Q_{j+1} + CM2_j \Delta Z_{j+1} + CM3_j \Delta H_{j+1} &= CM4_j \Delta Q_j + CM5_j \Delta Z_j + CM6_j \Delta H_j + CM7_j \\
CL1_j \Delta Q_{j+1} + CL2_j \Delta Z_{j+1} + CL3_j \Delta H_{j+1} &= CL4_j \Delta Q_j + CL5_j \Delta Z_j + CL6_j \Delta H_j + CL7_j \\
CS1_j \Delta Q_{j+1} + CS2_j \Delta Z_{j+1} + CS3_j \Delta H_{j+1} &= CS4_j \Delta Q_j + CS5_j \Delta Z_j + CS6_j \Delta H_j + CS7_j \quad (1.26)
\end{aligned}$$

2.3 Ecuaciones de transporte de sedimentos

El mecanismo y la cuantificación del transporte de sedimentos ha sido un tema de estudio durante décadas. Hasta la fecha, hay fórmulas para el cálculo de la tasa de transporte de sedimentos en canales aluviales, clasificadas básicamente en tres tipos: carga de fondo, carga en suspensión, y de carga total (Yang y Lim, 2003). La carga total se puede determinar indirectamente, como la suma de la carga de fondo y la carga en suspensión, calculado con las fórmulas por separado, aunque este método contradice lo que se observa en condiciones naturales donde no hay una clara distinción entre la carga de fondo y la de suspensión. Ambos modos de movimiento son intercambiables, como carga de fondo en una instancia y como carga en suspensión en otra, dependiendo de las características de los sedimentos y las condiciones de flujo (Chien y Wan, 1999). Las fórmulas que determinan la carga total directamente son útiles para calcular el aporte de sedimentos en los ríos naturales, por lo tanto, la predicción puede mejorar si la descarga total de sedimentos se determina directamente (Yang y Lim, 2003).

Los modelos numéricos que se trabajan en esta investigación incluyen los métodos que permiten valuar el transporte total del fondo; estos son, Engelund-Hansen (1967), Ackers-White (1972-1973) y Brownlie (1982). La explicación de los métodos se puede ver en Maza y García (1996).

Método de Engelund-Hansen (1967)

Los autores basaron su ecuación en los resultados de cuatro conjuntos de experimentos reportados por Guy en 1966, en la que se utilizaron arenas. Del análisis que realizaron, obtuvieron una relación que, expresada en términos de parámetros adimensionales, establece

$$f_c \phi_E = 0.1 \tau_*^{5/2} \quad (1.27)$$

donde el coeficiente f_c propuesto por Engelund es

$$f_c = \frac{2\tau_0}{\rho U^2} = \frac{2U_*^2}{U^2} \quad (1.28)$$

y el parámetro adimensional ϕ_E de Einstein que toma en cuenta el transporte de sedimentos,

$$\phi_E = \frac{g_{BT}}{\gamma_s (g \Delta D_{50}^3)^{1/2}} \quad (1.29)$$

Sustituyendo las ecs 1.28 y 1.29 en la ec 1.27, haciendo $\tau_* = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma) D_{50}}$ y simplificando, se tiene g_{BT} expresada en $kg\beta/s.m$.

$$g_{BT} = \frac{0.05 \gamma_s U^2 \tau_0^{3/2} \gamma^{1/2}}{g^{1/2} (\gamma_s - \gamma) D_{50}} \quad (1.30)$$

Engelund expuso la ec 1.30 en función del D_{35} en lugar del D_{50} como

$$g_{BT} = \frac{0.04 \gamma_s U^2 (y^* S)^{3/2}}{\Delta^2 g^{1/2} D_{35}} \quad (1.31)$$

Los presentes modelos trabajan la ec 1.31 como gasto total en función del gasto líquido, en m^3/s .

$$G = \frac{Q^2}{25 B \sqrt{g} D_{35} \Delta^2} S^{3/2} R_h^{-1/2} \quad (1.32)$$

donde D_{35} es el diámetro de la partícula por abajo del cual queda el 35 % de la muestra de suelo en peso; Δ la densidad relativa del material sólido sumergido; R_h el radio hidráulico en m.

La ec 1.32 sólo es válida, para régimen inferior, cuando en el fondo existen dunas y el número de Reynolds asociado a la velocidad de corte y al diámetro D_{50} , sea mayor o igual que 12, es decir,

$$R_{e*} = \frac{U_* D_{50}}{\nu} \geq 12$$

Engelund y Hansen recomiendan usar el método para arenas, siempre y cuando el D_{50} sea mayor de 0.15 mm y la desviación estándar geométrica de los diámetros sea menor de dos ($\sigma_g < 2$).

Método de Ackers-White (1972-1973)

Basado en el concepto de potencia de la corriente definida por Bagnold's, Ackers-White aplicaron el análisis dimensional para expresar la movilidad y la tasa del transporte de sedimentos en términos de parámetros dimensionales. La expresión, en m^3/s , es

$$G = BKD_{35} U \left(\frac{U}{U_*} \right)^2 \left(\frac{F_*}{F_{*c}} - 1 \right)^m \quad (1.33)$$

donde el número de movilidad de Ackers-White está dado por

$$F_* = \frac{U_*^n}{\sqrt{g\Delta D}} \left[\frac{U}{\sqrt{32} \log \frac{\alpha d_m}{D}} \right]^{1-n} \quad (1.34)$$

donde U_* , es la velocidad asociada al cortante del flujo, en m/s. $U_* = \sqrt{gR_h S}$; U , es la velocidad media de la corriente, en m/s; D , es el diámetro representativo de la muestra; d_m , tirante medio de la corriente, relación entre el área hidráulica y el ancho de la superficie libre del agua.

Los parámetros n , m , K , F_{*c} , se determinaron con ajustar a datos de laboratorio, como funciones de un tamaño de grano adimensional D_* , donde

$$D_* = D \left(\frac{g\Delta}{\nu^2} \right)^{1/3} \quad (1.35)$$

De esta manera se tiene

Si $D_* > 60$, entonces, $n = 0$; $K = 0.025$; $F_{*c} = 0.17$; $m = 1.5$

Si $D_* < 1$, entonces

$n = 1$ y la función de transporte no es aplicable puesto que el sedimento puede tener características cohesivas.

Si $1 \leq D_* \leq 60$, entonces

$$n = 1 - 0.56 \log(D_*)$$

$$m = \frac{9.96}{D_*} + 1.34$$

$$F_{*c} = \frac{0.23}{\sqrt{D_*}} + 0.14$$

$$K = \exp[2.86 \ln D_* - 0.4343 (\ln D_*)^2 - 8.128]$$

El método de Ackers-White es aplicable a sedimentos con $D_* > 1$, aproximadamente para limos con diámetro mayor de 0.04 mm. Según Maza y García (1996), para sedimentos con $D_* > 100$, el método se debe aplicar con reservas ya que contaron con un reducido conjunto de datos. El método es aplicable siempre y cuando el número de Froude sea menor que 0.8, pero puede ser aplicable sin restricciones para fondo plano, con rizados o dunas, es decir, para régimen inferior.

Brownlie (1981), citado por García (2007), encontró que la fórmula de transporte de sedimentos de Ackers-White predice muy bien las observaciones de laboratorio, pero las observaciones de campo las subestima. Niño (2002) encontró que la fórmula de Ackers-White predice muy bien el transporte de arenas gruesas y gravas en los ríos de Chile, con pendientes de 0.04 a 8.6 % y tamaños de grano de 0.3-250 mm.

Método de Brownlie 1982

Está basado en la regresión múltiple de 480 datos de laboratorio y 519 datos de campo medidos en 11 ríos. La ecuación obtenida, expresada en m^3/s , es

$$G = \frac{7.115 B Q c_f}{\rho_s} (F_g - F_{gc})^{.978} S^{0.6601} \left(\frac{R_h}{D_{50}} \right)^{-0.3301} \quad (1.36)$$

donde, c_f , coeficiente de ajuste que vale 1.0 para condiciones de laboratorio y 1.268 para condiciones de campo; F_g , número de Froude de las partículas dado por la ec 1.37

$$F_g = \frac{U}{\sqrt{g \Delta D_{50}}} \quad (1.37)$$

F_{gc} , número de Froude crítico de las partículas, dado por

$$F_{gc} = \frac{4.596 \tau_{*c}^{0.5293}}{S^{0.1405} \sigma_g^{0.1606}} \quad (1.38)$$

σ_g , desviación estándar geométrica de los tamaños de las partículas

$$\sigma_g = \frac{1}{2} \left(\frac{D_{50}}{D_{16}} + \frac{D_{84}}{D_{50}} \right) \quad (1.39)$$

τ_{*c} , parámetro adimensional de Shields para la condición crítica. La ecuación que Brownlie obtuvo es

$$\tau_{*c} = 0.22Y + 0.06(10)^{-7.7Y} \quad \text{o} \quad \tau_{*c} = \frac{0.22}{D_*^{0.9}} + \frac{0.06}{10^{\frac{7.7}{D_*^{0.9}}}} \quad (1.40)$$

donde

$$Y = \left(\frac{g\Delta}{\nu^2} \right)^{-0.3} D_{50}^{-0.9}; \quad D_* = D_{50} \left(\frac{g\Delta}{\nu^2} \right)^{1/3}$$

El método de Brownlie se recomienda para arenas y $D_{50}/R_h \leq 0.01$. Cuando la diferencia ($F_g - F_{gc}$) es negativa o nula no existe transporte de sedimentos.

2.4 Condiciones iniciales y de frontera

En el modelo matemático semiacoplado, los datos iniciales requeridos son:

- Características del río o canal: secciones transversales, longitud de tramos, características del material de fondo.
- Cotas del fondo, Z , $[x, t=0]$.
- Cotas del agua, H , $[x, t=0]$.

Además, de una ecuación de transporte de sedimentos y otra para la resistencia al flujo.

Para no violar las ecs fundamentales, se requieren tirantes que satisfagan inicialmente la ecuación 1.4, que es la ecuación de flujo gradualmente variado. El cálculo del perfil de la superficie libre del agua se hace con los métodos del cálculo de flujo gradualmente variado, pero considerando que la pendiente de fricción, S_f , se calcula con una ecuación de resistencia al flujo que incluyan las formas del fondo, ver Berezowsky y Jiménez (1993). Para hacer el cálculo en el tiempo se requieren dos condiciones de frontera, una aguas arriba y otra aguas abajo. En la frontera aguas abajo, se da la cota de la superficie libre del agua constante o variable en el tiempo, una curva elevaciones-gastos o su ecuación; en la frontera aguas arriba se da el gasto sólido constante o variable en el tiempo.

La solución de la frontera de aguas arriba es de la manera siguiente, se obtiene el valor de ΔZ_I a partir del gasto sólido; para ello se agrega un tramo ficticio, que permite expresar la ec 1.5 entre los nodos 1 y 2, como

$$\frac{\psi}{\Delta t} \Delta Z_2 + \frac{(1-\psi)}{\Delta t} \Delta Z_1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)0.5(B_1 - B_2)} \left[\frac{\theta}{\Delta x_1} (\Delta G_2 - \Delta G_1) + \frac{(G_2 - G_1)}{\Delta x_1} \right] = 0 \quad (1.41)$$

Con el factor de peso en el espacio, $\psi = 1$, y substituyendo el incremento del gasto sólido en el nodo 2 (ΔG_2) en la ec 1.39, se llega a la ec 1.42, expresada en diferencias finitas

$$CS2_1 \Delta Z_2 + CS3_1 \Delta H_2 = CS7_1 \quad (1.42)$$

En el coeficiente $CS7_1$ se incluye el gasto sólido que entra al tramo por la frontera aguas arriba, G_1 , y su incremento en el tiempo ΔG_1 . Con la ecuación de recurrencia para el nodo 2

$$\Delta H_2 = E_2 \Delta Z_2 + F_2 \quad (1.43)$$

se obtiene ΔZ_2 , y a partir de este valor se hace el barrido del nodo $j=2$ a $j=jj-1$ para obtener ΔZ_j y ΔH_j .

Los coeficientes de las ecs 1.42 y 1.43 se pueden ver en Berezowsky y Jiménez (1995).

Este modelo trabaja los gastos líquidos de manera escalonada, es decir, el gasto medio para un tiempo determinado se mantiene constante, y vuelve a cambiar en un intervalo de tiempo muy corto al valor promedio del tiempo siguiente.

En el modelo matemático acoplado se necesitan:

- a) Características del río o canal: secciones transversales, longitud de tramos, características del material de fondo.
- b) Cotas del fondo, Z , $[x, t=0]$
- c) Gasto líquido, Q $[x, t=0]$
- d) Cota del agua, H $[x, t=0]$

También de una ecuación de transporte de sedimentos y otra de resistencia al flujo.

Para hacer los cálculos en el tiempo es necesario resolver las ecuaciones gobernantes, para lo que se requieren tres condiciones de frontera, una aguas abajo y dos aguas arriba. En la frontera aguas abajo se puede dar la cota de la superficie libre del agua (constante o variable), la curva elevaciones-gasto o su ecuación. Aguas arriba se da un sedimentograma y un hidrograma, constantes o variables en el tiempo.

El ΔZ_1 en la frontera aguas arriba se obtiene con la ecuación siguiente

$$\Delta Z_1 = \frac{(G_{IDATO} - G_{IPOTENCIAL}) \Delta t}{(1-\varepsilon) B_s \Delta x_1} \quad (1.44)$$

donde G_{IDATO} es el gasto sólido dato, en m^3/s ; $G_{IPOTENCIAL}$ el gasto sólido calculado.

matriz L es triangular inferior unitaria se denomina factorización de Doolittle; por el contrario, si la matriz U es triangular superior unitaria se denomina factorización de Crout.

La factorización-LU es útil par resolver matrices donde los coeficientes del sistema es el mismo y solo cambian los términos independientes sucesivos.

Procedimiento de cálculo

- a) *Fase de descomposición LU*: consiste en factorizar o descomponer la matriz A en el producto de una matriz triangular inferior, L , por una matriz triangular superior, U .
- b) *Fase de sustitución*: se obtiene el vector solución. Para ello, esta fase se compone de las dos etapas siguientes:
 - 1) De la ecuación $L*y = b$ se obtiene y por sustitución hacia adelante.
 - 2) De la ecuación $U*x = b$ se obtiene x por sustitución hacia atrás.

Por ejemplo, sea la matriz A de 4x4, factorizada de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Se puede usar la factorización $LU = A$ para resolver el sistema lineal

$$A*x = (L*U)*x = L*(U*x) = b \quad (1.50)$$

La primera solución para el vector y es

$$L*y=b \quad (1.51)$$

y la resolución es

$$U*x=y \quad (1.52)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse por sustitución hacia adelante, como

$$y_1 = \frac{b_1}{\alpha_{11}}; \quad y_i = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j \right] \quad i=2,3,\dots,N \quad (1.53)$$

Con $U*x = y$, por sustitución hacia atrás se obtiene la solución del sistema

$$x_N = \frac{y_N}{\beta_{NN}}; \quad x_i = \frac{1}{\beta_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^N \beta_{ij} x_j \right] \quad i=N-1, N-2, \dots, 1 \quad (1.54)$$

- Conocidos estos valores en el nodo $j = I$, es posible calcular los coeficientes de las ecuaciones de recurrencia en los nodos restantes, con el primer barrido hacia adelante, hasta llegar a la frontera aguas abajo.
- En la frontera aguas abajo se conoce la variación de la superficie libre del agua en el tiempo, ΔH_{jj} , (ya sea de un linnigrama o de una curva elevaciones-gastos); por tanto, es posible calcular ΔQ_{jj} y ΔZ_{jj} .
- Se realiza el segundo barrido de aguas abajo hacia aguas arriba, desde el nodo $j = jj-I$ hasta el nodo $j = I$, calculando los valores ΔH_j , ΔZ_j y ΔQ_j que son la solución del sistema.

El método del doble barrido puede verse como una eliminación de Gauss óptima; el número de operaciones requerido es del orden de N (N número de ecuaciones), en lugar de N^2 si se invierte la matriz.

Los algoritmos usados son: el algoritmo de la factorización-LU, tomado de Press, *et al.* (1992), modificando la rutina para no hacer la eliminación de Gauss en las celdas con valores iguales a ceros; el de matrices por bloques, dividiendo la matriz en bloques de 3×3 , se desarrollo a partir de Dahlquist, *et al.* (1974); en este caso, la inversa se obtuvo por adjuntos y determinantes. El método del doble barrido se describe en Berezowsky y Lara (1986). La eficiencia de la solución se realizó comparando los errores en la solución del sistema de ecuaciones; la eficacia de los métodos se obtuvo al desarrollar un código (en el lenguaje de programación Fortran) que permite conocer los tiempo de cómputo, al resolver el mismo sistema de ecuaciones 1000, 10000 y 100000 veces.

Los errores de la solución del sistema de ecuaciones por cada uno de los métodos de solución probados, se obtiene de restar al término independiente la multiplicación de la matriz por el vector solución. En la Tabla 2.1 se muestra la media y desviación estándar de los errores de cada método analizado.

Tabla 2.1.- Media y desviación estándar en los errores de la solución del sistema

Método	Media	Desviación Estándar
Factorización-LU	1.138×10^{-8}	3.695×10^{-8}
Matrices en bloques	9.465×10^{-9}	3.540×10^{-8}
Doble barrido	-7.276×10^{-9}	3.614×10^{-8}

En la Tabla 2.2 se presentan los tiempos de cómputo de la solución, para los distintos números de veces que se resuelve el sistema de ecuaciones.

Tabla 2.2.- Tiempo de solución

Número de veces que se resuelve el sistema	Tiempo [s]		
	1000	10000	100000
Factorización-LU	5.797	57.344	572.828
Matrices en bloques	0.141	1.515	14.750
Doble barrido	0.015	0.234	2.279

En la Tabla 2.1 se observa que los tres métodos presentan muy buenos resultados en cuanto a la precisión, ya que sus diferencias son poco significativas; sin embargo, en la Tabla 2.2 se tienen diferencias bastante notorias en cuanto al tiempo de cómputo (que es solo para fines de comparación ya que depende de las características del equipo de cómputo utilizado), se observa claramente que de los tres métodos, el de doble barrido es del orden de 7 y 300 veces más rápido que el de matrices en bloques y factorización-LU, respectivamente. La factorización-LU consume el mayor tiempo, ya que forma la matriz inferior y superior en cada tiempo de cálculo, además de consumir memoria adicional en dichas matrices. El método de matrices en bloques es también muy eficiente ya que solo resuelve matrices de 3×3 , mismas que se resuelven directamente. Aún así, el hecho de tener productos con matrices inversas lo hace más lento que el doble barrido.

III COMPARACIONES

3.1 Datos medidos en laboratorio

Guo y Jin (1999) presentan un modelo matemático unidimensional que calcula la variación del fondo en canales aluviales basado en la profundidad media y en la ecuación de momento para flujo no permanente y transporte de sedimentos. Derivan la ecuación de momento del transporte de sedimentos en suspensión suponiendo una distribución vertical de la concentración del sedimento en suspensión. Los resultados del modelo son comparados con datos experimentales, mismos que se usan para trabajar en la presente investigación. La ecuación de transporte de sedimentos que usa es la de Bagnold (1973); emplea la fórmula de resistencia al flujo de Manning. El cálculo de los factores hidráulicos y de sedimentos se resuelve de manera no acoplada, ya que en la mayoría de las situaciones, este cálculo desacoplado no afecta la precisión de las variaciones del fondo, porque en un intervalo de tiempo corto, la erosión o depositación del canal tiene una influencia despreciable en los factores hidráulicos.

3.1.1 Variación de pendiente en la sección intermedia

En este caso, se usan datos de un experimento desarrollado por el Centro de Ingeniería Hidrológica del Cuerpo de Ingenieros de la Armada de Estados Unidos (USACE), se tiene un canal de concreto de 12 m de longitud y 0.6 m de ancho; los primeros 6 m del canal tienen pendiente cero, luego una pendiente de 0.1 m/m en una longitud de 1 m y los últimos 5 m, pendiente cero. El diámetro de partícula es de 0.9 mm. El gasto líquido es de 0.054 m³/s, sin gasto sólido de entrada; tirante aguas abajo de 0.39 m.

En la Fig 3.1 se muestra el nivel del fondo después de 120 min de simulación con los modelos NFONDAC, FM3E, los datos medidos y el calculado por Guo y Jin (1999). Se observa que el modelo de Guo y Jin (1999) presenta muy buenos resultados; los modelos de dos y de tres ecuaciones presentan la misma tendencia de erosión y depositación, se observa que las magnitudes de depósito son prácticamente igual a los valores medidos, la erosión es ligeramente subestimada por los dos modelos, empero el modelo acoplado presenta ligeramente mejores resultados. Se usa la fórmula de transporte de Engelund-Hansen ajustada con un coeficiente de 0.23 y como fórmula de resistencia al flujo la de Manning con n de 0.018.

Lo que hay que resaltar de los resultados mostrados en la Fig 3.1, es que la predicción de la evolución del fondo por estos modelos es aceptable; con lo que hay que tener cuidado es la forma de escoger la fórmula de transporte de sedimento. Brush (1960) realizó experimentos en canales con puntos de quiebre (knickpoints), esto es, punto a lo largo del perfil longitudinal donde la pendiente aumenta repentinamente, y muestra el mismo patrón de evolución del fondo. Señala que aguas arriba del punto de quiebre el fondo tiende a ser más estrecho y más profundo, mientras que aguas abajo tiende a ser más amplio y más superficial, ya que el flujo tiende rápidamente a eliminar la pendiente más empinada.

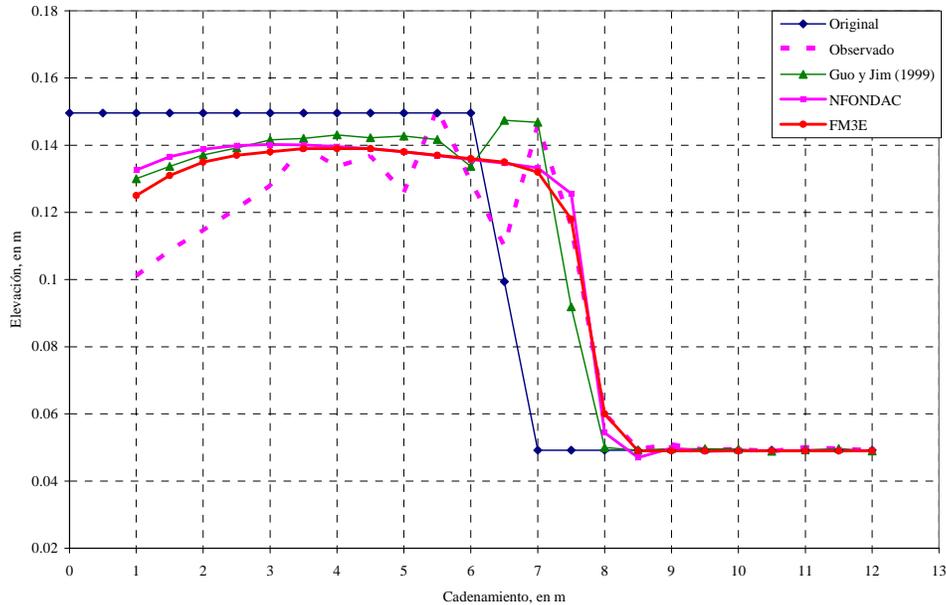


Figura 3.1. Elevación del fondo después de 120 minutos de simulación, usando agua clara y partícula de 0.9 mm de diámetro.

3.1.2 Canal con trinchera

Guo y Jin (1999) aplican su modelo a un experimento que simula los cambios morfológicos que experimenta una trinchera construida transversalmente a la dirección del flujo; el experimento fue realizado en el Laboratorio de Delft Hydraulics, Holanda (Galappati y Vreugdenhil, 1985; van Rijn, 1986; Guo y Jin, 1999). En este caso, se presenta la comparación con otros modelos matemáticos morfológicos. El canal es rectangular de 12 m de longitud y 0.5 m de ancho con tamaño de partícula de 0.16 mm; en el fondo del canal se excavó una trinchera trapezoidal, perpendicular a la dirección del flujo, con ancho en la base de 3 m, profundidad de 0.15 m y taludes 1V:10H. El gasto líquido de $0.09945 \text{ m}^3/\text{s}$ se mantuvo constante y gasto sólido de $5.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$, tirante aguas abajo de 0.39 m y velocidad de flujo de 0.51 m/s. Se usa la fórmula de resistencia al flujo de Manning con n de 0.017 y fórmula de transporte de Engelund-Hansen multiplicada por una constante de 0.14.

La Fig 3.2 muestra los resultados del nivel del fondo a las 7.5 h de simulación; se observa que los cambios morfológicos se reproducen satisfactoriamente. El modelo FM3E reproduce mejor tanto la erosión como la depositación que el modelo NFONDAC, ya que este último estima menor depositación al final de la trinchera, fenómeno que intuitivamente se justifica, pero contrasta con los datos medidos. En la misma figura se comparan los calculados, con un modelo bidimensional 2D-V, con el modelo bidimensional de aproximaciones asintóticas de Galappati y Vreugdenhil (1985) y con el modelo reportado por Guo y Jin (1999), observando que los resultados de los modelos NFONDAC y FM3E son similares a los obtenidos por los otros modelos.

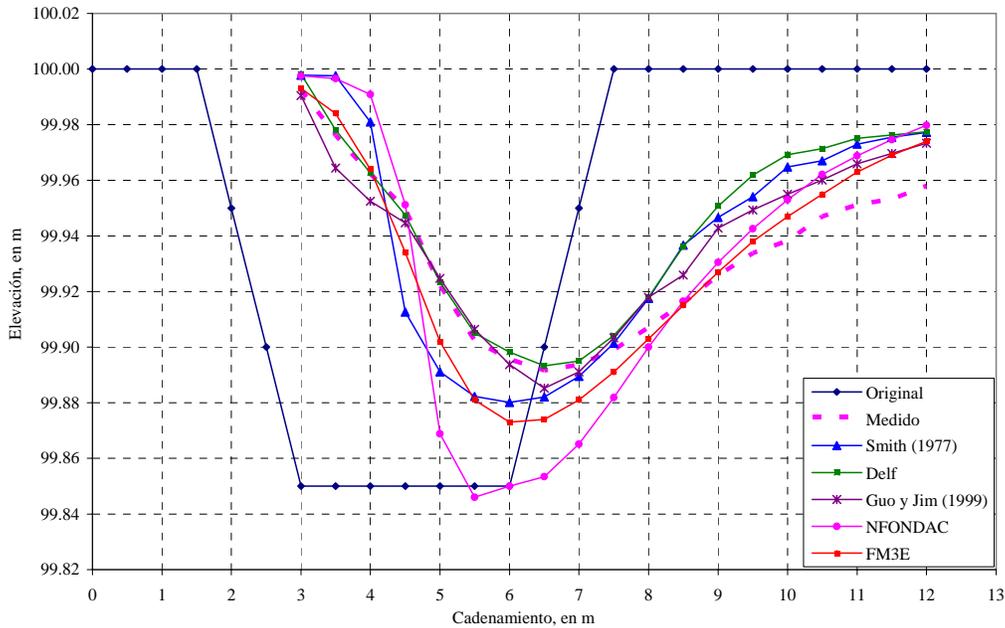


Figura 3.2. Elevación del fondo a las 7.5 horas de simulación, con gasto sólido inicial y diámetro de partícula de 0.16 mm.

3.1.3 Contracción gradual

En Tingsanchali y Supharatid (1996) se documentan los experimentos realizados por el Centro de Ingeniería Hidrológica del Cuerpo de Ingenieros de la Armada de Estados Unidos (USACE), para evaluar el Modelo HEC-6. Los experimentos se realizaron en un canal rectangular y horizontal de 12 m de longitud y 0.6 m de ancho de plantilla, el ancho del canal se mantiene constante 0.6 m una distancia de 3 m, luego se reduce gradualmente a 0.30 m en una distancia de 2 m; el ancho se mantiene en una longitud de 2 m y se vuelve ampliar al ancho original en una distancia de 2 m, para mantener el mismo ancho el resto del canal. Se maneja un gasto líquido uniforme de $0.04 \text{ m}^3/\text{s}$, sin gasto sólido de entrada, el tirante aguas abajo es de 0.17 m; el material del fondo es uniforme con diámetro de 1.2 mm.

La Fig 3.3 muestra los resultados del nivel del fondo a los 120 minutos de simulación. En los modelos NFONDAC y FM3E se usa la fórmula de transporte de Engelund-Hansen ajustada con un coeficiente de 0.38 y fórmula de resistencia al flujo de Manning con n igual a 0.018; además, se agregan los resultados de un modelo no acoplado HEC-RAS 4.1 con la misma fórmula de transporte de sedimentos. En la Fig se observa que los modelos de dos y de tres ecuaciones de esta investigación presentan buenos resultados, subestimando un poco la erosión al inicio de la contracción y sobrestimando el depósito aguas abajo, pero los resultados son aceptables. El modelo no acoplado presenta la misma tendencia de erosión, pero el efecto es mucho más lento.

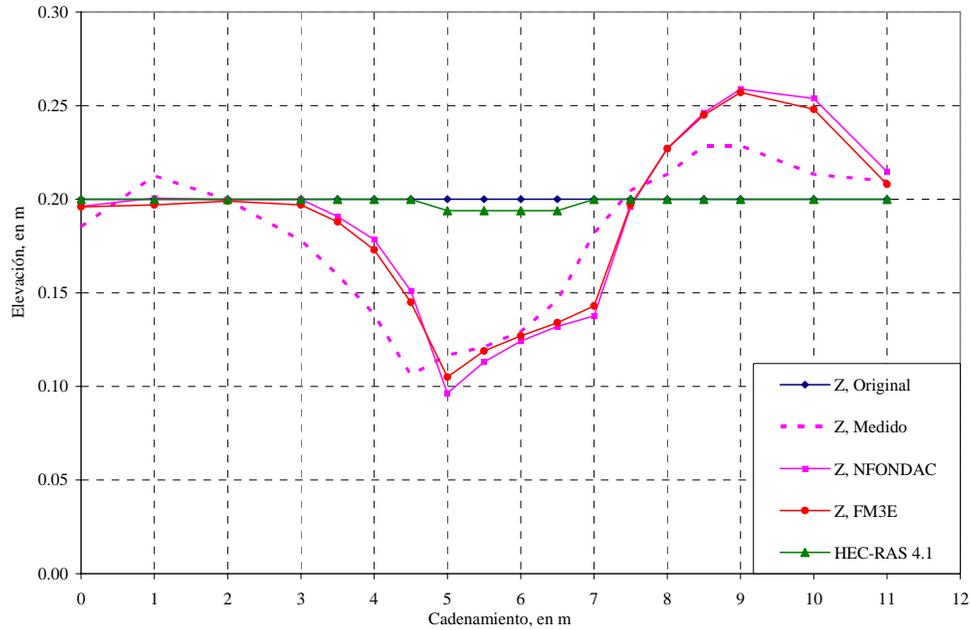


Figura 3.3. Elevación del fondo después de 120 minutos de simulación, usando agua clara y partícula de 1.2 mm de diámetro.

Los resultados obtenidos hasta este momento indican que el modelo semiacoplado presenta prácticamente los mismos resultados que el modelo acoplado, a diferencia de la prueba con trinchera en la que el modelo semiacoplado subestima la depositación en la trinchera y la erosión aguas abajo, lo que indica que para problemas complejos es convenientes resolver las ecuaciones del líquido y del sedimento en forma acoplada. Kassem y Chaudhry (1998) indican que la diferencia entre los modelos semiacoplados y acoplados son despreciables y por tanto, resulta más fácil aplicar los modelos semiacoplados, aunque ellos solo probaron casos con secciones de ancho constante. Saiedi (1997) sugiere el uso de modelos acoplados en la modelación de canales aluviales, que aunque requieren un tiempo de cálculo mayor a los semiacoplados, provee una mejor descripción matemática del fenómeno físico. Cao y Egashira (2002) sugieren que en la modelación de ríos aluviales las ecuaciones gobernantes se deben resolver de forma acoplada. Simpson y Castellort (2006) comentan que la simulación de manera acoplada es mejor ya que se puede usar tanto para escalas de tiempos cortos como para escalas de tiempos largos.

Comparación con resultados del modelo numérico FST2DH (Ipson, 2006).

La Administración Federal de Carreteras de los Estados Unidos, incorporó al paquete de cómputo Sistema de Modelación de Aguas Superficiales con Elementos Finitos (FESWMS FST2DH), modelo bidimensional semiacoplado, la capacidad de transporte de sedimentos, haciendo referencia a la profundidad media del flujo. Aunque la parte hidrodinámica del modelo se ha utilizado durante muchos años y está bien probada; las capacidades de la fase de transporte de sedimentos son probadas extensamente en la tesis de Mark K. Ipson, de la Universidad de Brigham Young (Ipson, 2006).

Ipson comparó sus resultados con los modelos, SED2D WES, desarrollado por el Cuerpo de Ingenieros de la Armada de Estados Unidos, y con el modelo SAMwin, también de la Armada de Estados Unidos. Concluyendo que el modelo FST2DH trabaja adecuadamente mientras no se tengan saltos hidráulicos en la sección. El modelo SED2D WES, presenta resultados de erosión muy diferentes a los estimados por FST2DH debido a su carácter desacoplado. Aquí se comparan los resultados del modelo FST2DH obtenidos por Ipson, con los resultados de los modelos de dos y de tres ecuaciones.

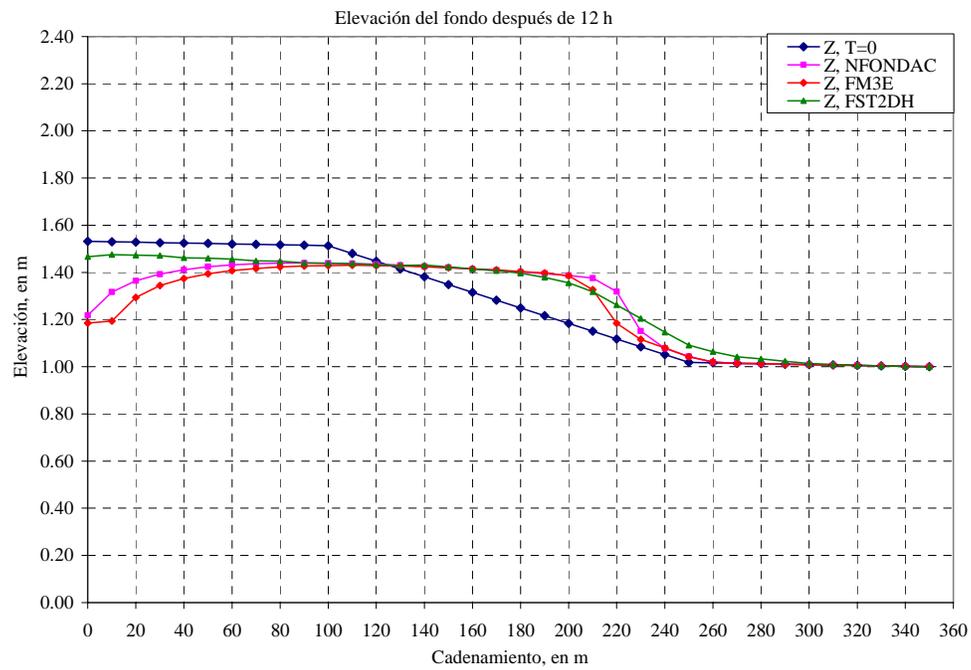
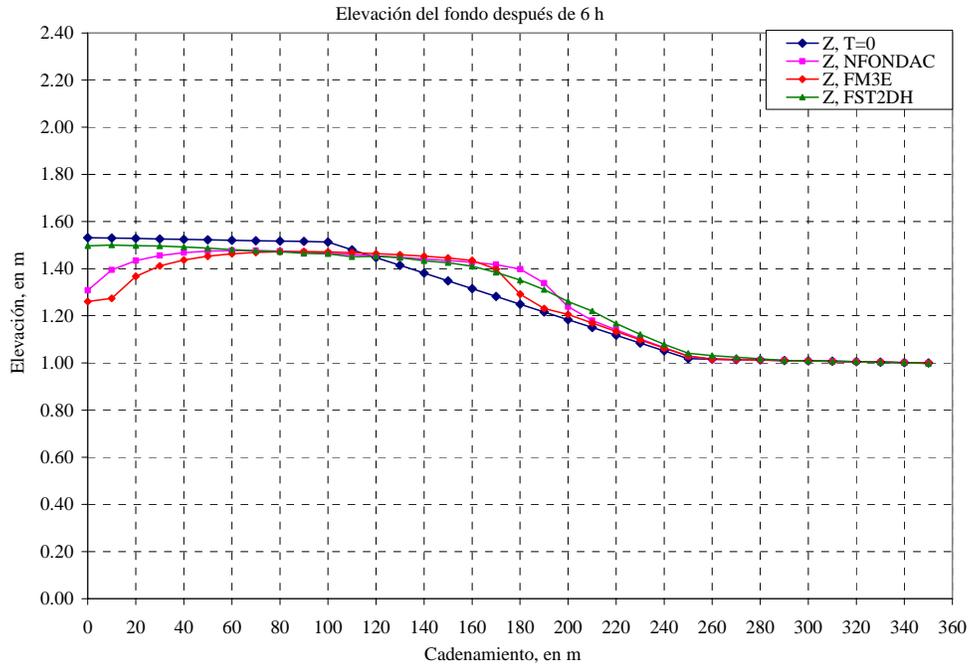
3.2 Variación de pendiente en la sección media

De las pruebas que Ipson realizó se tomaron dos casos con variación de pendiente en la sección intermedia del tramo en estudio, un tramo con cambio de pendiente pequeña y otro con cambio de pendiente moderada. La fórmula de transporte sedimentos usada en los procesos es la de Engelund-Hansen y como fórmula de resistencia al flujo se emplea la de Manning, con n de 0.025.

3.2.1 Pendiente suave

El tramo en estudio tiene 350 m de longitud y 25 m de ancho, y se divide en tres segmentos, los primeros 100 m tiene una pendiente de 0.000184 m/m, los siguientes 150 m con una pendiente de 0.0033 m/m y los últimos 100 m con una pendiente de 0.000184 m/m, el gasto líquido de entrada es de 12.6 m³/s, gasto sólido de 0 m³/s, diámetro de partícula uniforme de 0.2 mm. La simulación se realizó para un tiempo de 48 h con una malla de solución de 10 m y Δt de 0.25 h.

En la Fig 3.4 se muestran los resultados de la evolución del fondo, tanto espacial como temporal, obtenidos con los modelos NFONDAC, FM3E y FST2DH; se observa que los modelos predicen casi idéntico tanto la erosión como la depositación. La diferencia en la condición de frontera aguas arriba en FM3E y NFONDAC, es debido a la forma en que se resuelve dicho nudo para el cálculo de ΔZ , en función del gasto sólido.



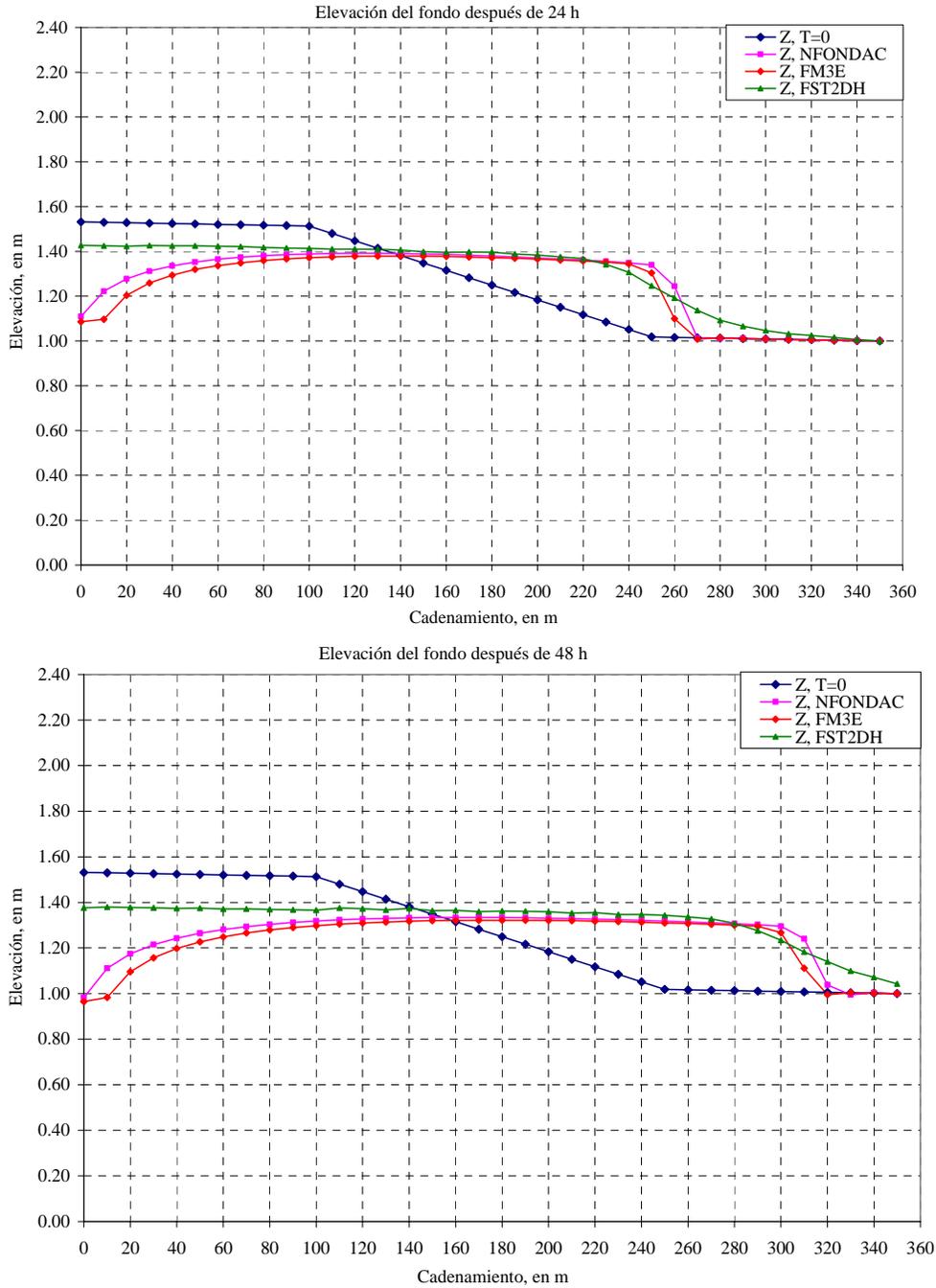


Figura 3.4. Elevación del fondo a las 6, 12, 24 y 48 horas, con agua clara y tamaño de partícula de 0.2 mm.

En la Fig 3.5 se muestra los resultados obtenidos con los tres modelos para un diámetro de partícula uniforme de 2 mm, y en la Fig 3.6 se observa la variación del fondo a lo largo del cauce.

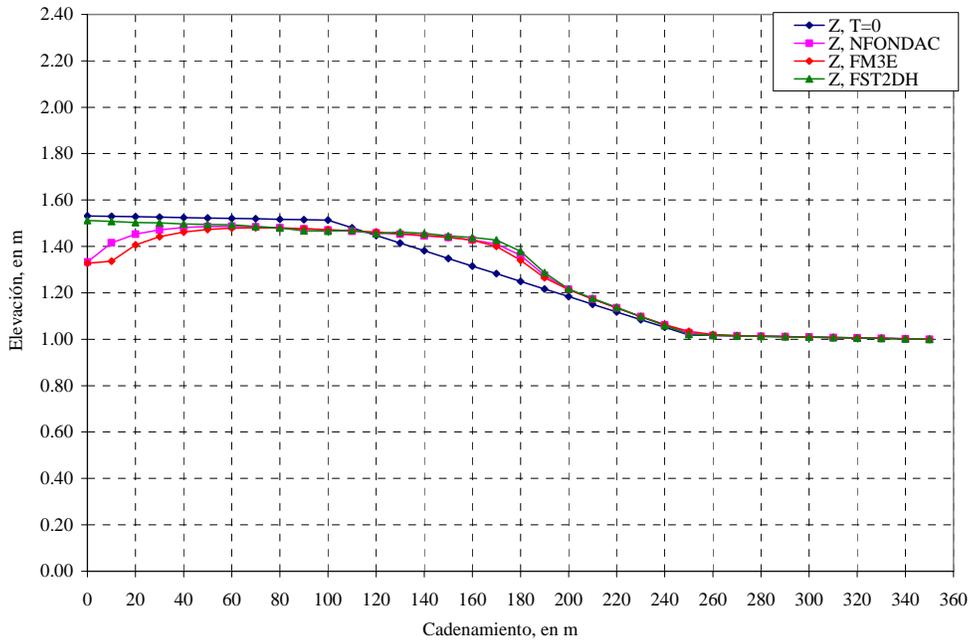


Figura 3.5. Elevación del fondo a las 48 horas con agua clara y diámetro de partícula de 2 mm.

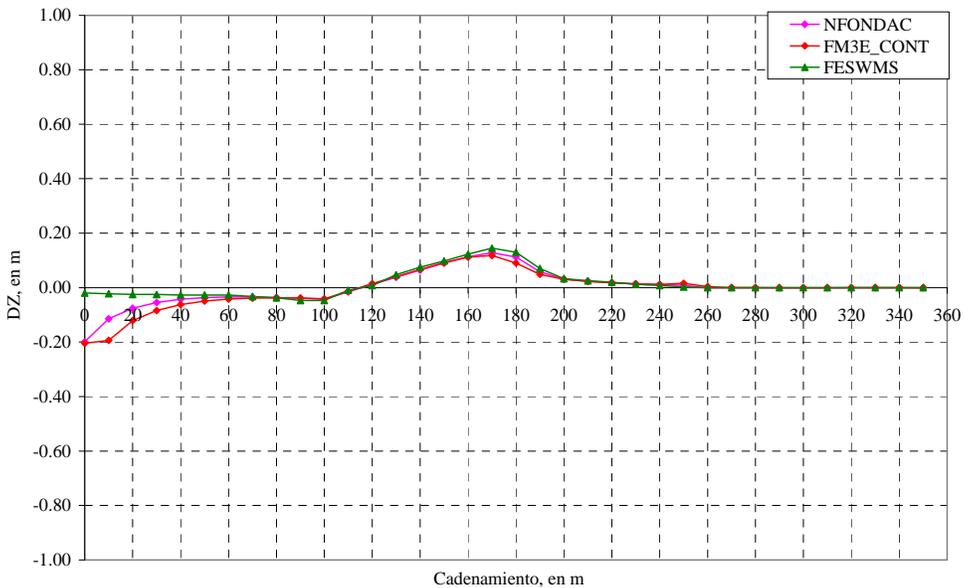
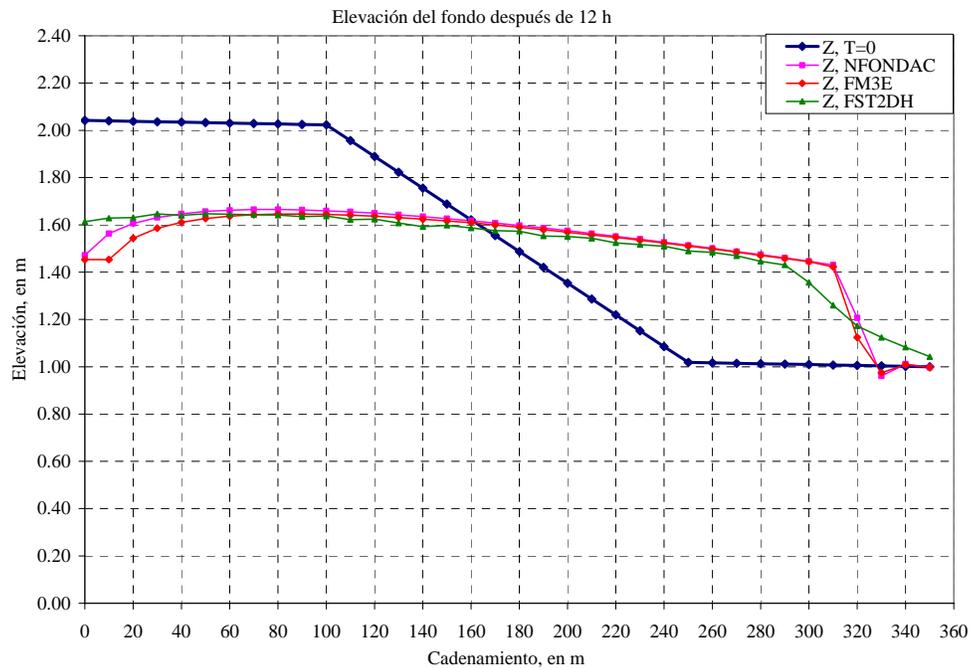
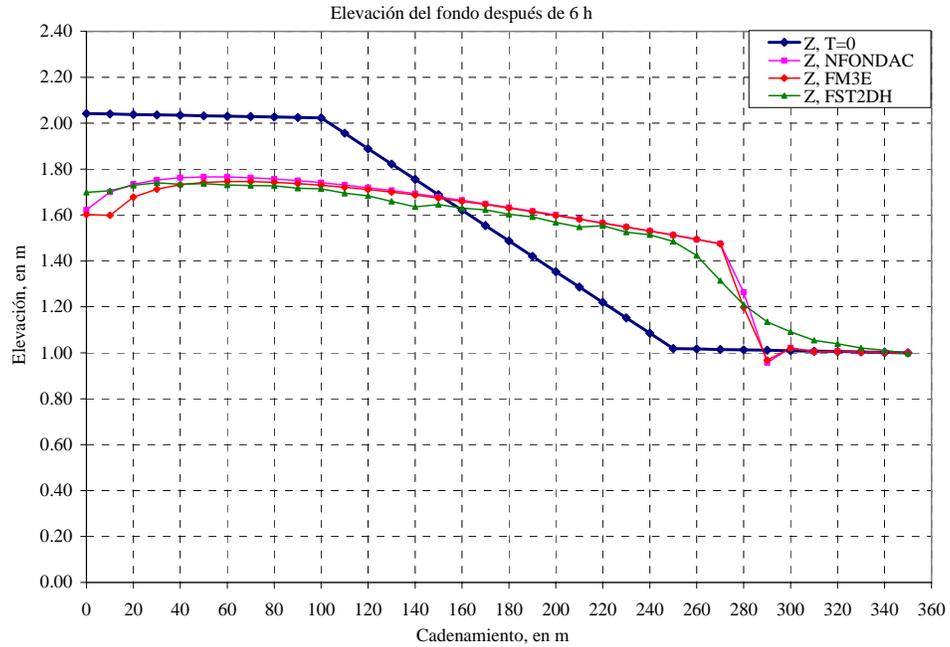


Figura 3.6. Variación del fondo a lo largo del cauce con agua clara y diámetro de partícula de 2 mm.

3.2.2 Pendiente moderada

Se simula el mismo tramo de la sección 3.2.1, pero con pendiente de 0.0067 en la sección intermedia; manejando tres casos, las primeras dos pruebas usan diámetro de partícula uniforme de 0.2 mm, la primera sin gasto sólidos de entrada, y la segunda con transporte de equilibrio inicial, la tercer prueba es con diámetro uniforme de partícula de 2 mm y gasto sólido de equilibrio inicial.

En la Fig 3.7 se compara la elevación del fondo del cauce, usando agua clara y partícula de 0.2 mm de diámetro. Se observa que los modelos presentan la misma tendencia de erosión y sedimentación.



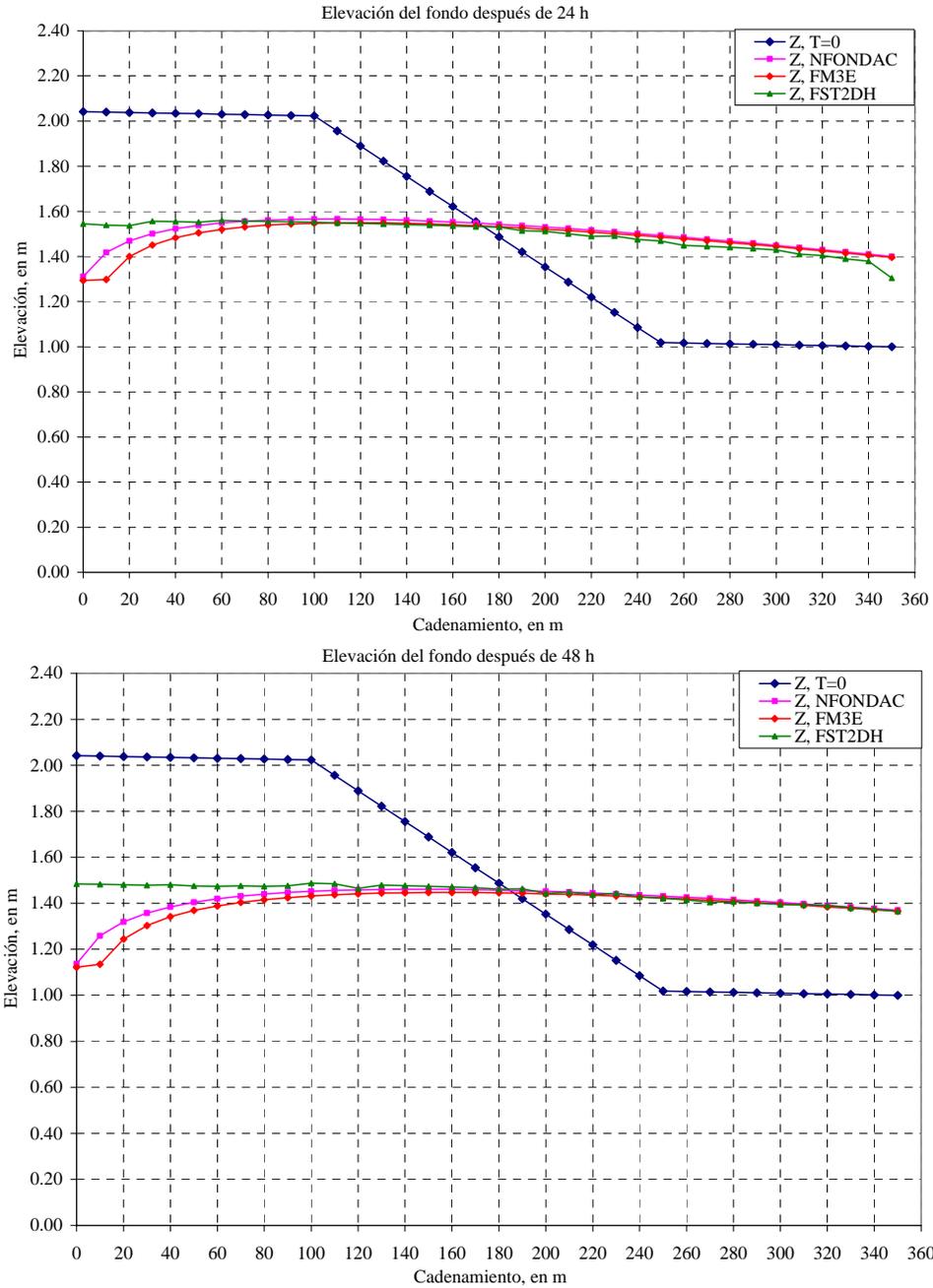


Figura 3.7. Elevación del fondo después de 6, 12, 24 y 48 horas de simulación con agua clara y diámetro de partícula de 0.2 mm.

En la Fig 3.8 se compara la elevación del fondo del cauce obtenidas con los tres modelos, usando transporte de equilibrio inicial y fondo uniforme con partícula de 0.2 mm de diámetro y, en la Fig 3.9 se muestra la variación del fondo a lo largo del cauce.

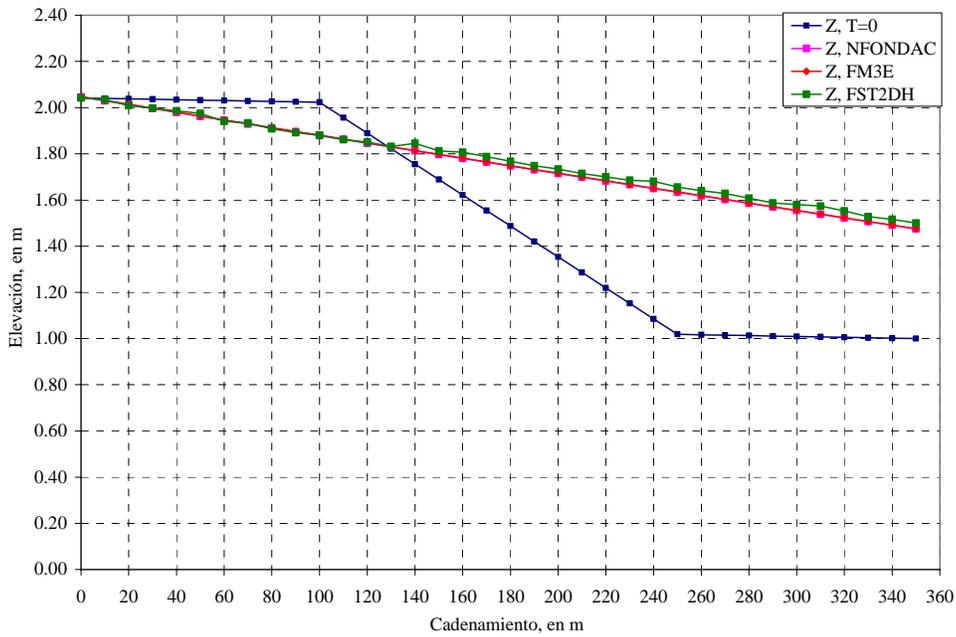


Figura 3.8. Elevación del fondo después de 48 horas de simulación con transporte de equilibrio inicial y diámetro de partícula de 0.2 mm.

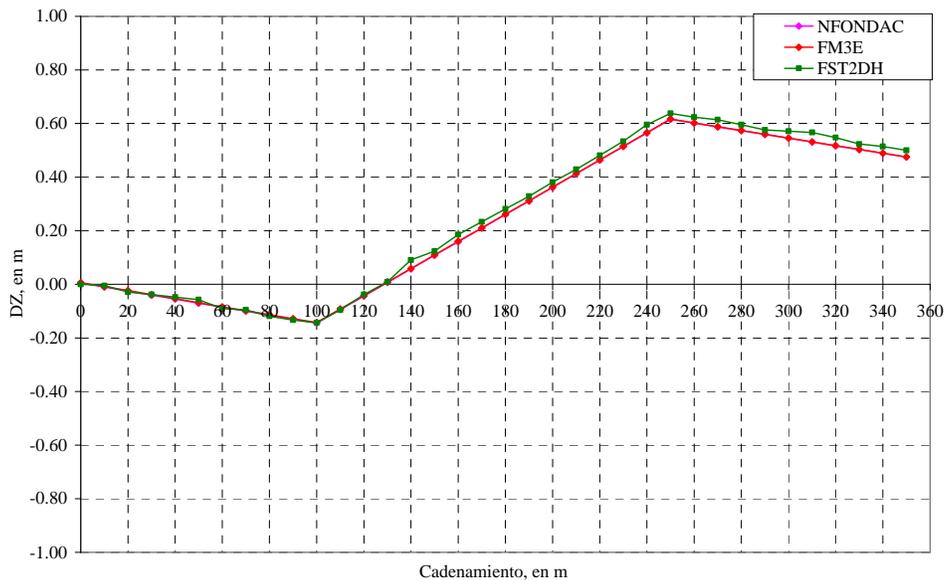


Figura 3.9. Variación del fondo a lo largo del cauce a las 48 horas de simulación con transporte de equilibrio inicial y diámetro de partícula de 0.2 mm.

A la vista de las Figs 3.8 y 3.9 se observa que al manejar una tasa de equilibrio de sedimento en la frontera aguas arriba, los resultados tanto de erosión como de sedimentación son prácticamente idénticos.

En la Fig 3.10 se compara la elevación del fondo del cauce obtenida con los modelos, usando transporte de equilibrio inicial y partícula de 2 mm de diámetro y, en la Fig 3.11 se presenta la variación del fondo a lo largo del cauce.

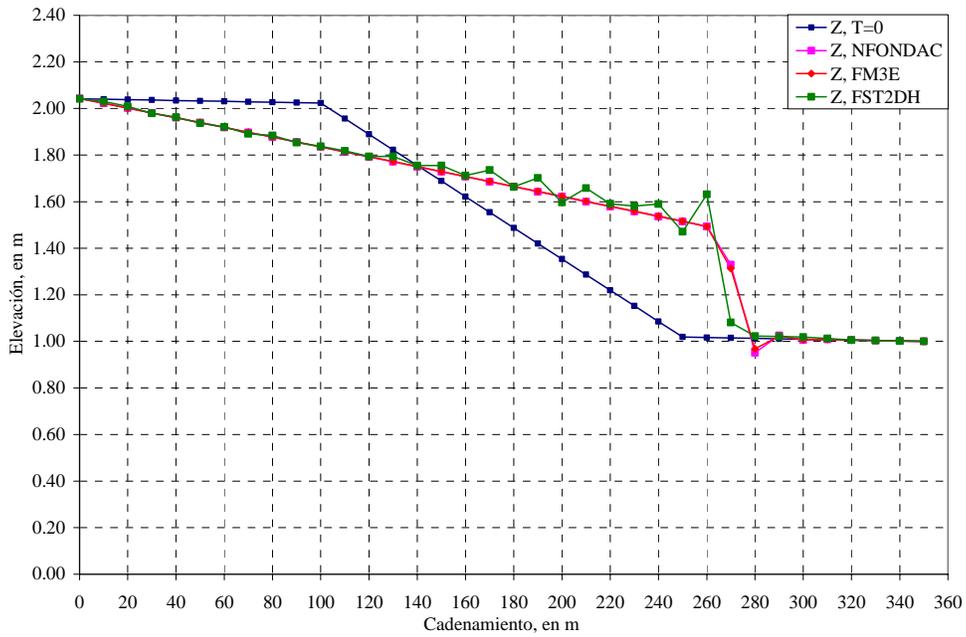


Figura 3.10. Elevación del fondo después de 48 horas de simulación con transporte de equilibrio inicial y diámetro de partícula de 2 mm.

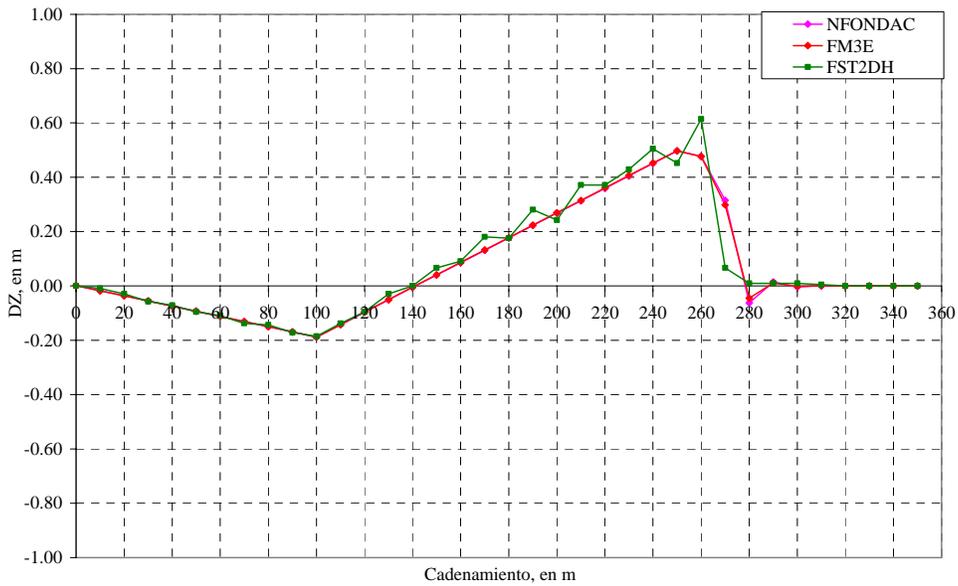


Figura 3.11. Variación del fondo a lo largo del cauce a las 48 horas de simulación con transporte de equilibrio inicial y diámetro de partícula de 2 mm.

En este caso, el modelo FST2DH presenta pequeñas oscilaciones en el tramo intermedio, lo cual Ipson (2006) lo atribuye a que la malla de solución debe ser más fina.

3.3 Tramo con contracción gradual

En la misma investigación desarrollada por Ipson (2006), se presentan datos para simular un tramo con contracción gradual en la región intermedia. El tramo es de 350 m de

longitud, 25 de ancho, sin pendiente; a los 130 m de la frontera de aguas arriba se contrae gradualmente a 10 m en un tramo de 30 m, se mantiene con el mismo ancho una longitud de 30 m y se vuelve a expandir al ancho original en los siguientes 30 m, se maneja un flujo de $12.5 \text{ m}^3/\text{s}$, fórmula de transporte de sedimentos de Engelund-Hansen. El tiempo de simulación es de 48 horas con una malla de 10 m y, un paso en el tiempo de 0.25 horas. Debe tomarse en cuenta que el modelo FST2DH es bidimensional y que, por tanto, se compara aquí con el valor reportado en el eje del canal.

En la Fig 3.12 se muestra la elevación del fondo del cauce obtenidas con los modelos NFONDAC, FM3E y FST2DH, usando fondo uniforme con partícula de 0.2 mm de diámetro y transporte de equilibrio inicial. Se observa que los modelos de dos y de tres ecuaciones presentan mayor erosión en la zona contracta; aguas abajo de la contracción, la altura de sedimentación es similar para los tres modelos, sin embargo, en el modelo FST2DH el lavado es más rápido.

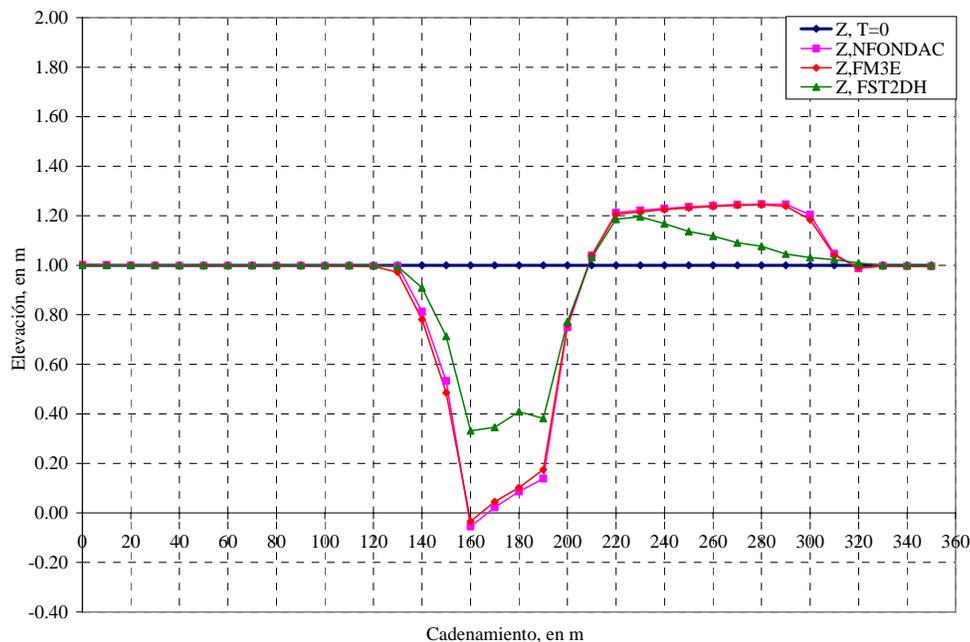


Figura 3.12. Elevación del fondo después de 48 horas de simulación con transporte de equilibrio inicial y diámetro de partícula de 0.2 mm.

En la Fig 3.13 se muestra la elevación del fondo del cauce obtenida con los tres modelos, usando agua clara y partícula con fondo uniforme de 2 mm de diámetro. En este caso se observa que el patrón de erosión y sedimentación es el mismo para los tres modelos y prácticamente los volúmenes son iguales. En la frontera aguas arriba comienza a tener efecto el uso de agua clara para los modelos NFONDAC y FM3E, comenzando a erosionar, este resultado es intuitivamente lógico, ya que al no haber ingreso de sedimentos el cauce presenta un desequilibrio por su capacidad de arrastre.

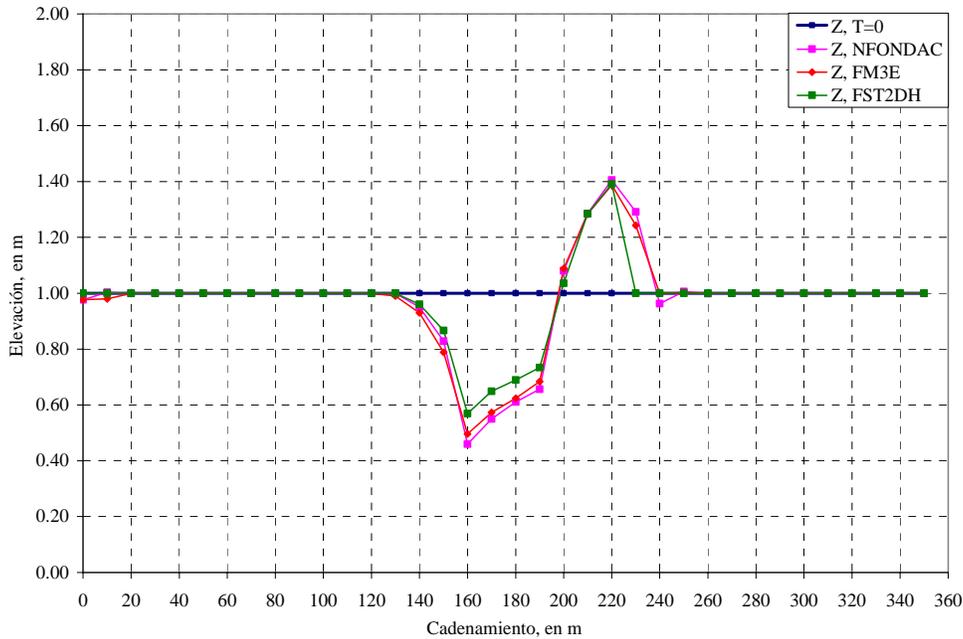


Figura 3.13. Elevación del fondo después de 48 horas de simulación con agua clara y diámetro de partícula de 2 mm.

En la Fig 3.14 se muestra la elevación del fondo del cauce obtenidas con los modelos, usando transporte de equilibrio inicial y fondo uniforme con partícula de 2 mm de diámetro. Los resultados obtenidos con los tres modelos presentan el mismo patrón de evolución del fondo.

Los resultados obtenidos al usar agua clara y transporte de equilibrio en la frontera aguas arriba, presentan la misma magnitud de socavación en el tramo contracto del cauce y la misma altura de depositación aguas abajo de la contracción, lo que indica que la forma de la socavación al usar agua clara o transporte de sedimentos en equilibrio, en general, es igual; Laursen (1999) señala que al usar agua clara, la erosión no se estabiliza; en este trabajo no se aprecia ese efecto, ya que tal vez se necesita mayor tiempo de simulación o un grado de contracción mayor.

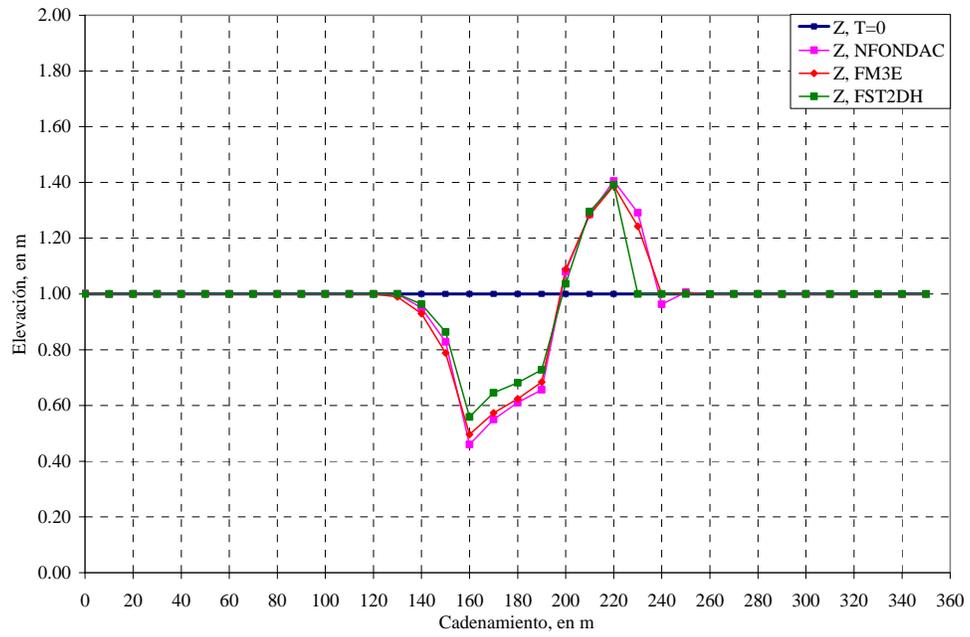


Figura 3.14. Elevación del fondo después de 48 horas de simulación con transporte de equilibrio inicial y diámetro de partícula de 2 mm.

IV EFECTO DE LA VARIABILIDAD ANUAL DEL GASTO

A modo de verificar el efecto que se tiene en la simulación, al manejar diferentes hidrogramas de entrada, se ha seleccionado un tramo de río con características semejantes al río Mezcalapa; se trabaja adaptándolo a un canal rectangular, con pendiente media de 0.0003 m/m, ancho de 570 m y una longitud de 79 km. Los tramos son de 1500 m y el paso de tiempo de una hora.

Los gastos líquidos con los cuales se hace la simulación del fondo, se obtuvieron del Banco Nacional de Aguas Superficiales (BANDAS) de la Estación Hidrométrica Las Peñitas, con 45 años de registro completos. Se determinaron tres hidrogramas: el hidrograma máximo anual, el hidrograma medio anual y el hidrograma mínimo anual, todos procesados a partir de los gastos máximos mensuales. En la Tabla 4.1 se presentan los valores correspondientes a los hidrogramas máximo, medio y mínimo anual. En la Tabla 4.2 se presentan los valores de los sedimentogramas máximo, medio y mínimo, que se utilizan como condición inicial en la frontera aguas arriba, calculados con la fórmula de Engelund-Hansen. Las Figs 4.1 y 4.2 muestran los hidrogramas y sedimentogramas anuales, la Fig 4.3 presenta la curva elevaciones-gasto que se utiliza en la frontera aguas abajo. En los casos que simulan con datos de hidrogramas y sedimentogramas en forma continua, se toma el gasto medio a mitad de cada mes; si se trabaja con datos escalonados, el gasto medio se mantiene constante durante el mes correspondiente.

La granulometría utilizada es, $D_{35} = 0.61$ mm, $D_{50} = 0.8$ mm, $D_{65} = 1.0$ mm, $D_{84} = 1.5$ mm, $D_{90} = 2.0$ mm, porosidad y densidad relativa del sólido de 0.4 y 1.65, respectivamente, n de Manning de 0.025.

Se hacen dos tipos de análisis; primeramente se considera un tramo con secciones transversales constantes y posteriormente el mismo tramo, pero con una contracción.

Tabla 4.1 Valores de los hidrogramas máximo, medio y mínimo

Hidrograma Anual, en m ³ /s			
Mes	Máximo	Medio	Mínimo
Ene	616.492	399.256	142.842
Feb	661.339	428.932	143.565
Mar	1043.627	463.066	149.770
Abr	1151.474	633.326	162.125
May	1173.312	770.536	254.682
Jun	1965.507	751.251	271.669
Jul	2177.265	1191.091	381.586
Ago	1457.287	1222.511	333.294
Sep	1060.066	696.011	243.964
Oct	840.166	516.433	182.400
Nov	677.045	475.720	161.748
Dic	630.169	444.663	148.600
Media	1121.146	666.066	214.687

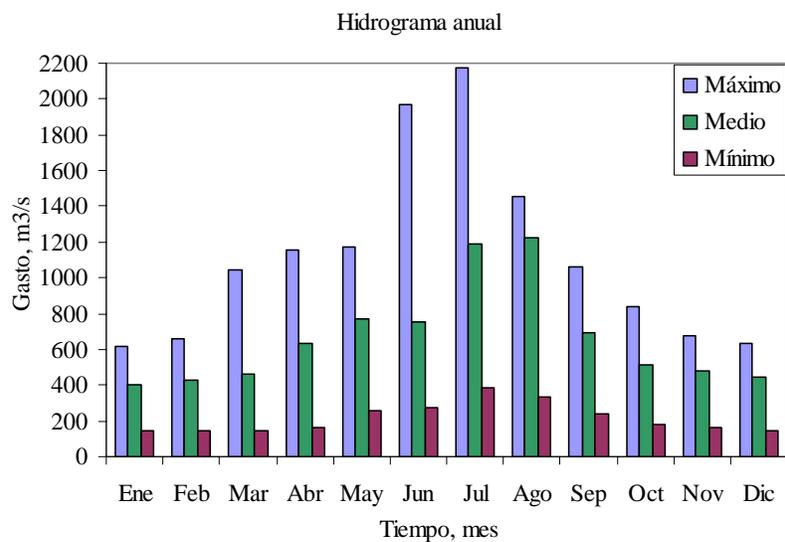


Figura 4.1. Hidrograma máximo, medio y mínimo.

Tabla 4.2 Valores del sedimentograma máximo, medio y mínimo.

Sedimentograma Anual, en m³/s			
Mes	Máximo	Medio	Mínimo
Ene	0.023	0.011	0.002
Feb	0.026	0.013	0.002
Mar	0.057	0.014	0.002
Abr	0.068	0.024	0.002
May	0.070	0.034	0.005
Jun	0.168	0.033	0.006
Jul	0.200	0.072	0.010
Ago	0.101	0.075	0.008
Sep	0.059	0.029	0.005
Oct	0.040	0.017	0.003
Nov	0.027	0.015	0.002
Dic	0.024	0.013	0.002
Media	0.072	0.029	0.004

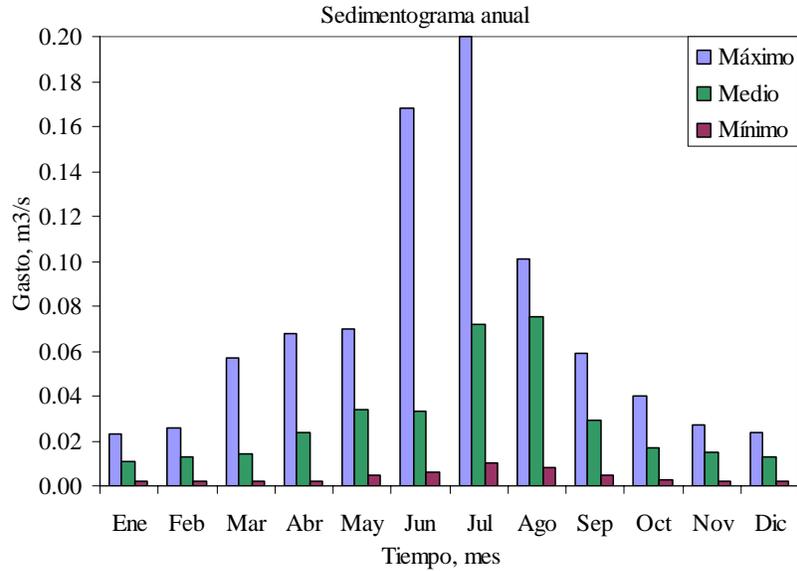


Figura 4.2. Sedimentograma máximo, medio y mínimo.

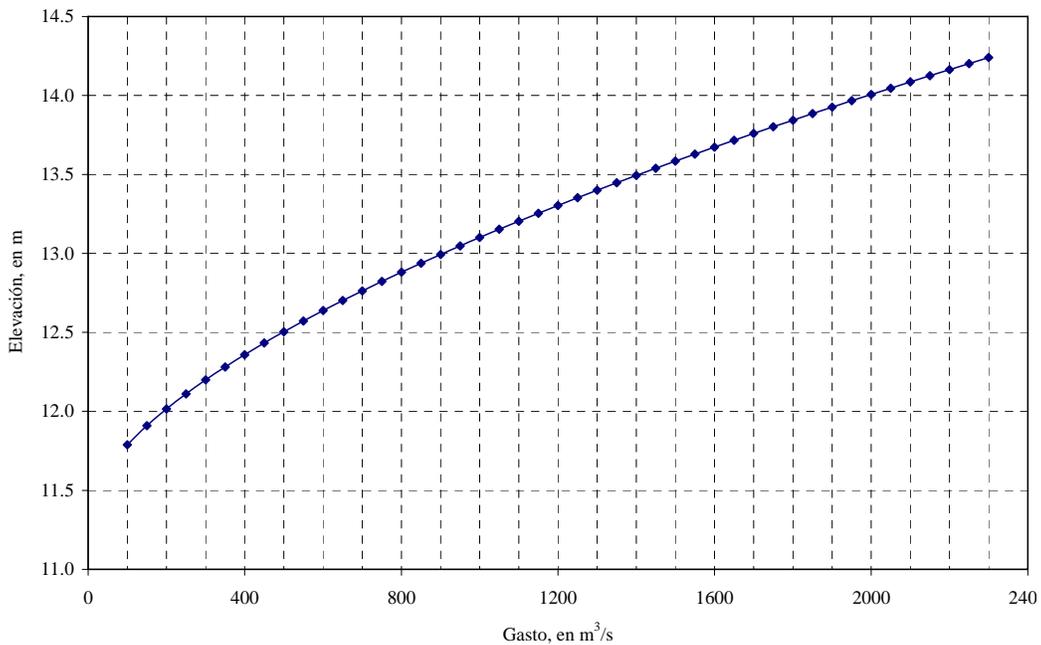


Figura 4.3 Curva elevaciones-gasto.

4.1 Sección constante

4.1.1 Gasto medio constante

En este primer caso se hace la simulación de fondo móvil con los modelos NFONDAC y FM3E (con datos de entrada de forma escalonada y continua), usando un gasto contante de $666 \text{ m}^3/\text{s}$, y la fórmula de transporte de sedimentos de Engelund-Hansen. En la Fig 4.4 se presentan los niveles del fondo y de la superficie libre del agua después de 10 años de

simulación, a la vista de estos resultados se aprecia que no hay modificaciones en el fondo del cauce, y los dos modelos matemáticos presentan los mismo resultados.

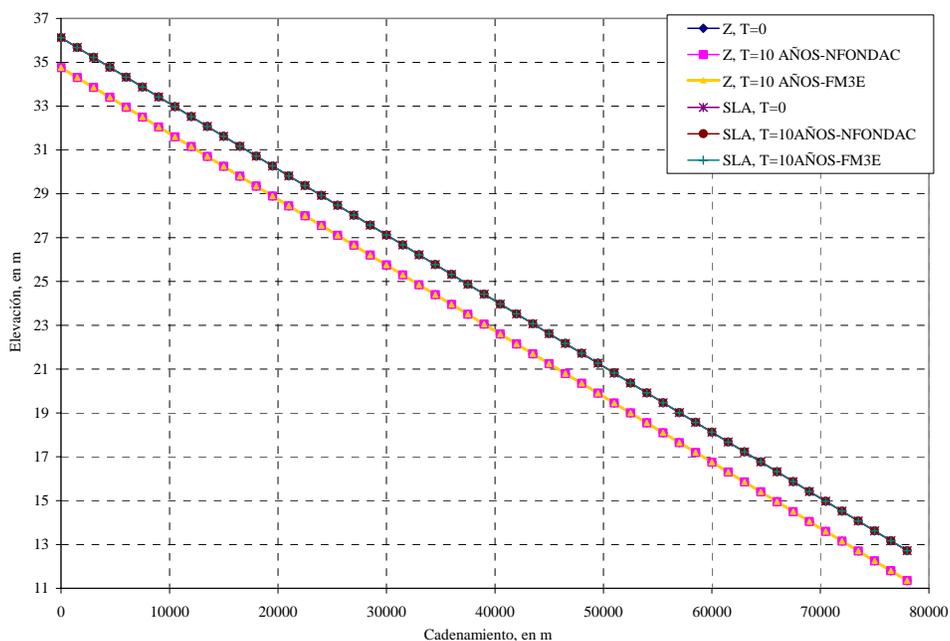


Figura 4.4. Nivel del fondo y de la SLA después de 10 años de simulación con gasto líquido y sólido constante.

4.1.2 Hidrograma medio anual

La Fig 4.5 presenta la variación del fondo del cauce después de 10 años de simulación, al utilizar como condición de frontera aguas arriba el hidrograma medio anual.

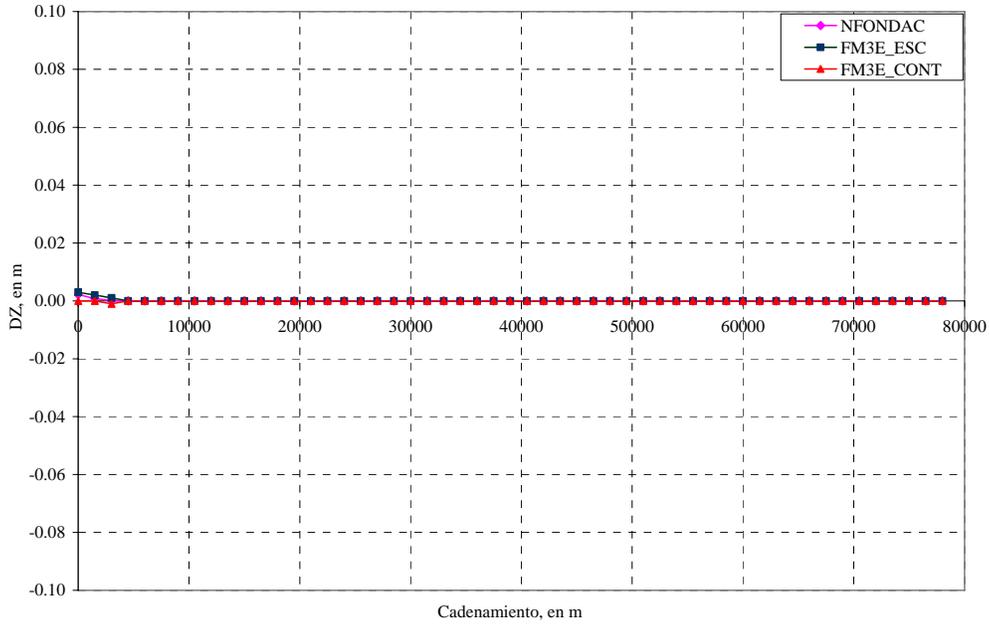


Figura 4.5. Variación del fondo a lo largo del cauce después de 10 años de simulación con hidrograma y sedimentograma medio anual.

4.1.3 Hidrogramas medio-máximo-mínimo anual

Con la finalidad de estudiar que pasa si se presenta aproximadamente el mismo comportamiento en la variación del gasto, en la Fig 4.6 se muestra la variación del fondo a lo largo del cauce, después de 10 años al utilizar como condición de frontera aguas arriba los tres hidrogramas, ordenados de la manera siguiente, hidrograma medio-hidrograma máximo-hidrograma mínimo, sucesivamente. Se observa que no hay un efecto apreciable de la variación del gasto si se tiene un ancho constante.

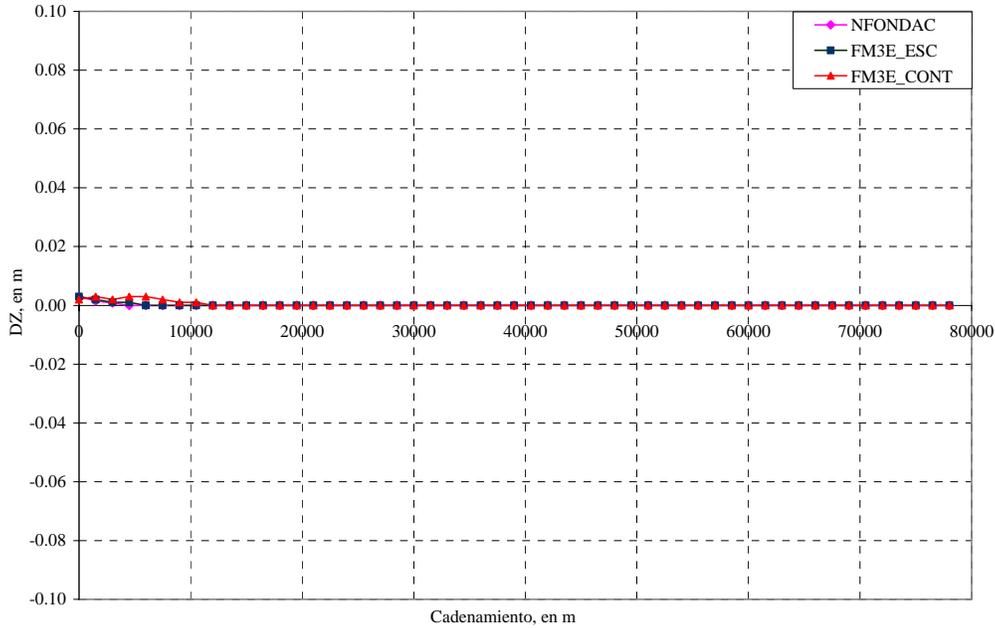


Figura 4.6. Variación del fondo a lo largo del cauce después de 10 años de simulación con hidrograma y sedimentograma medio- máximo-mínimo anual.

4.1.4 Hidrogramas máximo-medio anual

Este caso se hace para ver qué pasa si después de un año con avenida grande, en los siguientes años se tienen lluvias medias (Fig 4.7). En la Fig 4.8 se presentan la variación del fondo a lo largo del cauce al utilizar como condición de frontera aguas arriba en el primer año de simulación el hidrograma máximo, y en los otros años solo el hidrograma medio. Se observa que se mantiene el equilibrio de cauce.

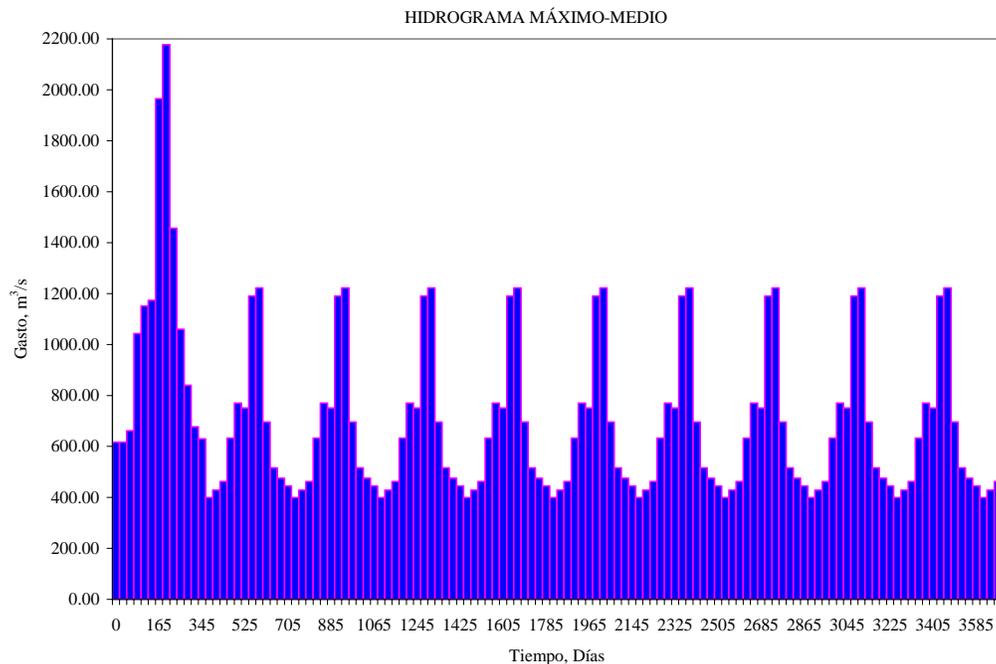


Figura 4.7. Hidrograma máximo-Hidrograma medio anual.

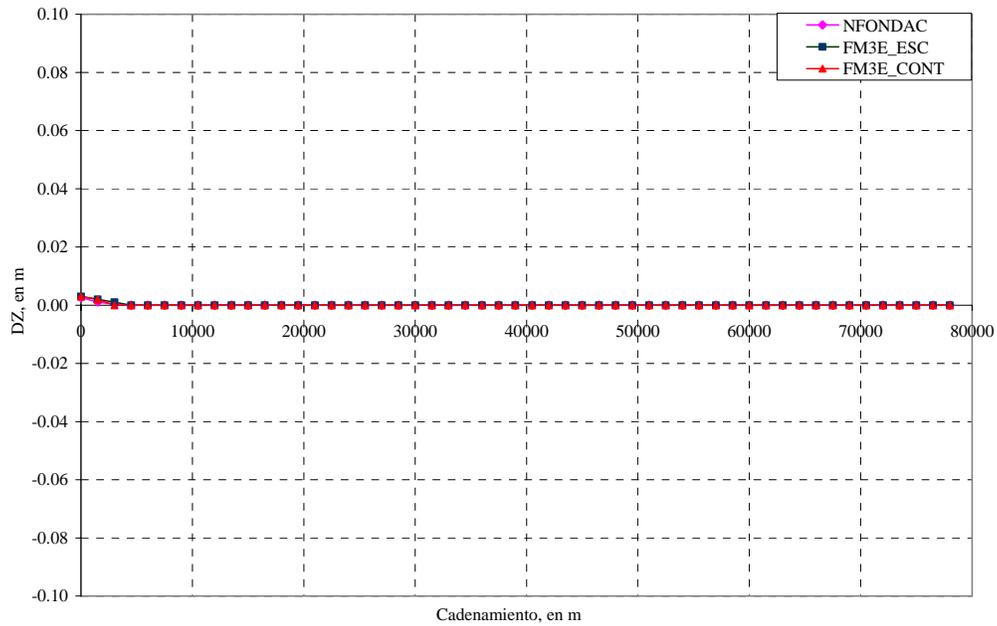


Figura 4.8. Variación del fondo a lo largo del cauce después de 10 años de simulación con hidrograma y sedimentograma máximo-medio anual.

4.1.5 Hidrogramas máximo-mínimo anual

Si después de una avenida grande se tienen épocas de sequía, en la Fig 4.9 se presentan la variación del fondo a lo largo del cauce al utilizar como condición de frontera aguas arriba el hidrograma máximo en el primer año y posteriormente solo el hidrograma mínimo. En este caso, después de los gastos máximos queda un volumen de sedimentos aguas arriba que los caudales mínimos no puede mover; este efecto es en los primeros kilómetros del tramo y en la mayor parte del cauce se tiene equilibrio.

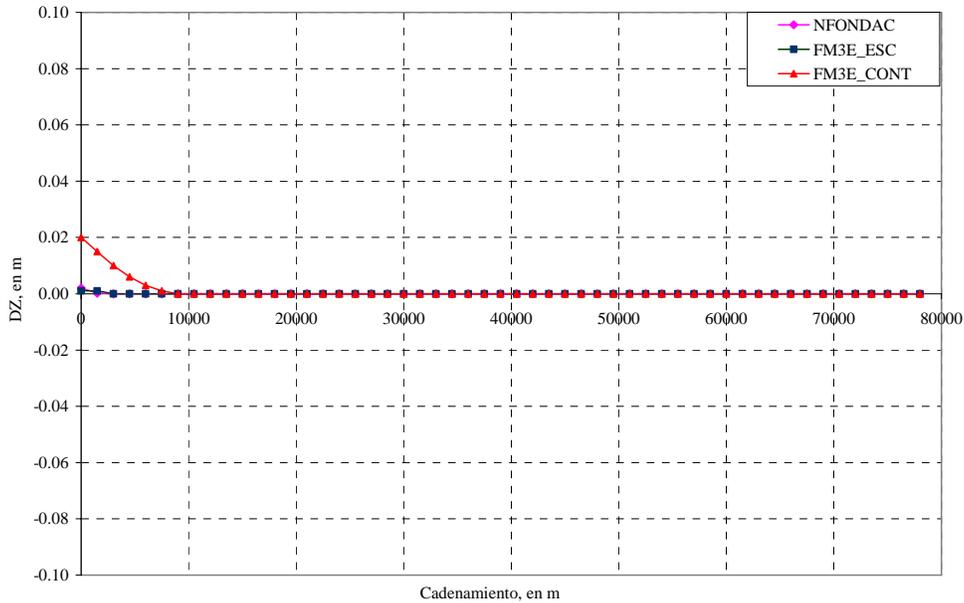


Figura 4.9. Variación del fondo a lo largo del cauce después de 10 años de simulación con hidrograma y sedimentograma máximo-mínimo anual.

Los resultados anteriores al usar las mismas secciones transversales del cauce y las mismas condiciones de frontera, indican que la variación del fondo del cauce es insignificante, mientras haya condición de equilibrio en la frontera aguas arriba; al momento que comience haber una sobrecarga de sedimento en la entrada, la sedimentación del cauce se produce de la frontera de aguas arriba hacia aguas abajo. Se observa que no hay diferencias en los resultados obtenidos con los modelos acoplado y semiacoplado.

4.2 Tramo de río con contracción

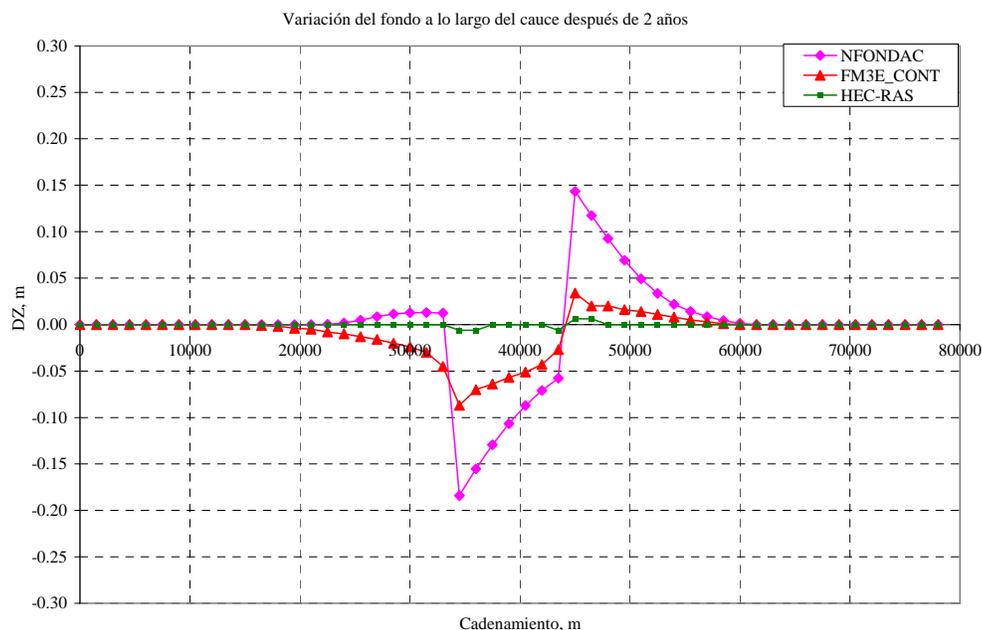
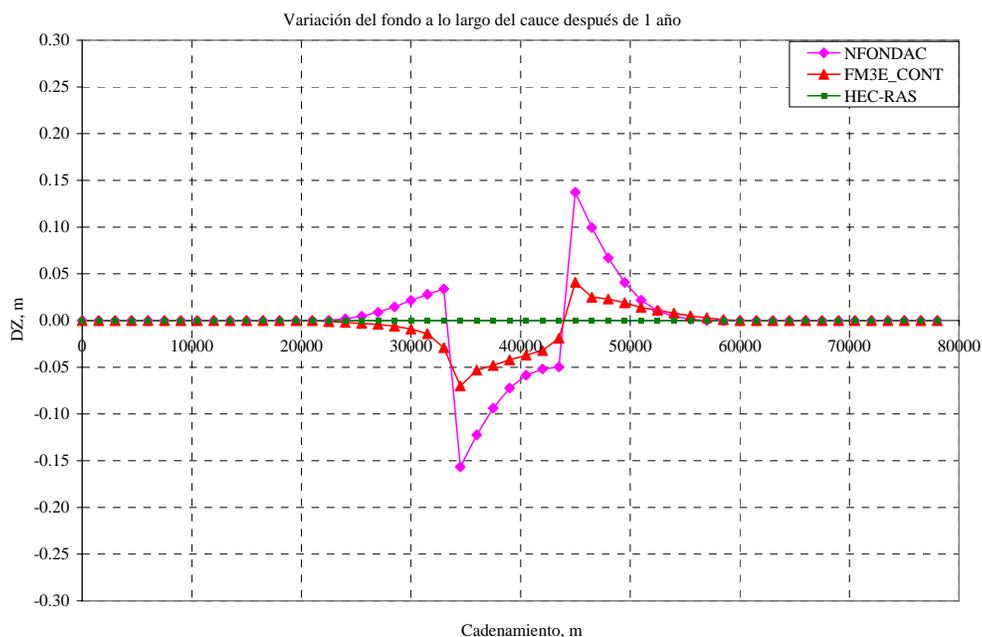
Al tramo de río trabajado en la sección anterior, se le incluye una contracción; se hace una contracción de 9 km de largo, del kilómetro 33 al 34.5 el canal se reduce de 570 m a 470 m, los siguientes 9 km se mantiene con este ancho, y del kilómetro 43.5 al 45 se vuelve a expandir a 570 m, para terminar con el ancho original. Las condiciones de frontera utilizadas son las mismas que en la sección anteriores, como se muestra en seguida.

4.2.1 Gasto medio constante

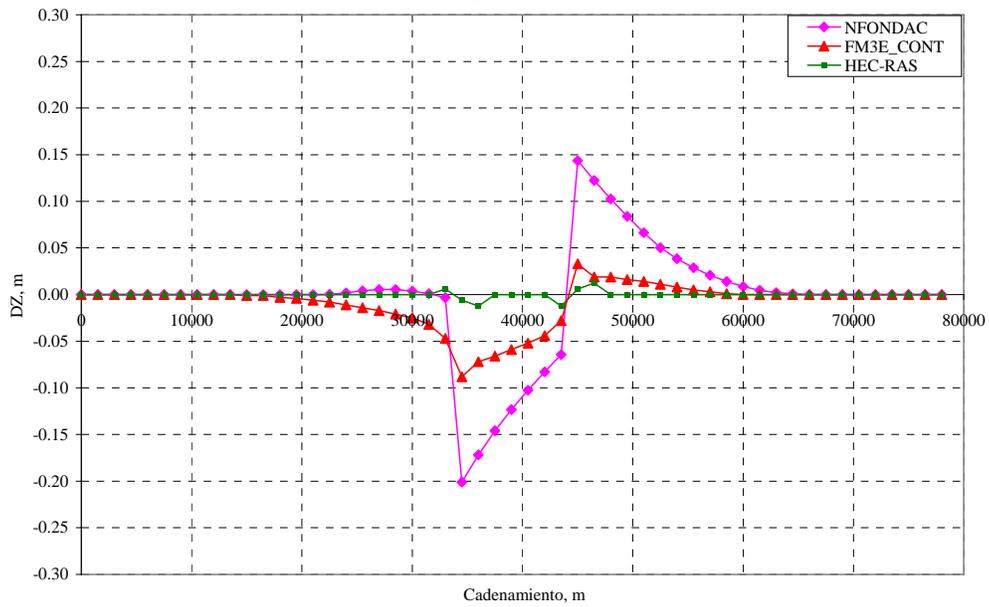
Esta primera prueba se hace con tres modelos, HEC-RAS 4.1, NFONDAC, y FM3E, modelo no acoplado, semiacoplado y acoplado respectivamente. Se usa la ecuación de transporte de sedimento de Engelund-Hansen y resistencia al flujo de Manning con valor de n igual a 0.025. Los Δx son de 1500 m y el Δt de una hora.

En la Fig 4.10 se presentan las variaciones de fondo espacio-temporales, calculados con los tres modelos; se observa que, al tener diferentes secciones transversales en un cauce (en este caso al tener una contracción gradual en la sección intermedia del cauce), los resultados obtenidos con los modelos NFONDAC, FM3E y HEC-RAS 4.1, son diferentes. El modelo acoplado no presenta depositación al inicio de la contracción como lo hace el

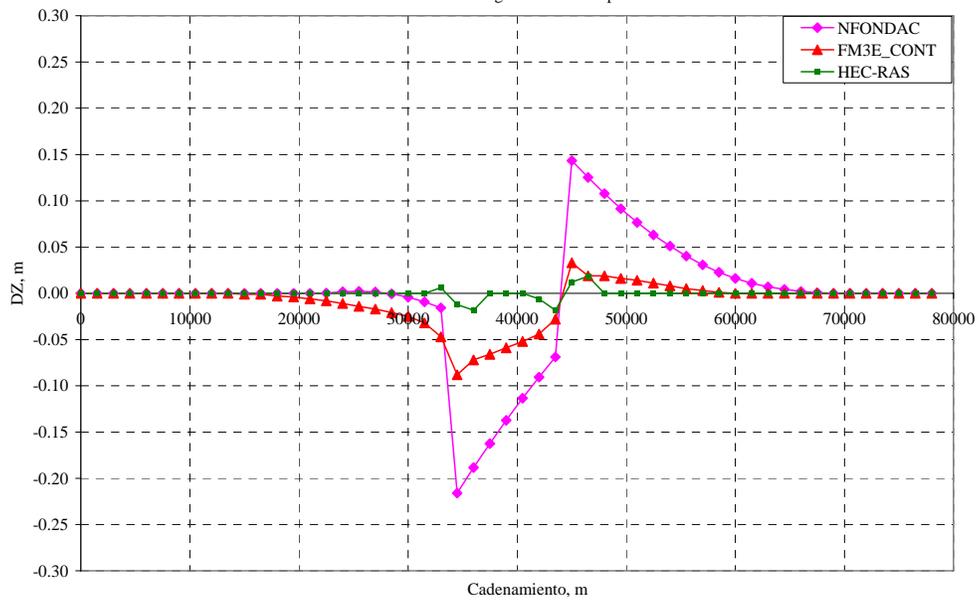
modelo semiacoplado; aguas abajo de la contracción los modelos semiacoplado y acoplado presentan depositación, con la diferencia de que el modelo acoplado lo lava más rápido. El HEC-RAS 4.1 (modelo no acoplado) presenta resultados completamente diferentes a los otros dos modelos, ya que a los 20 años de simulación no llega a estabilizarse, mientras que el modelo acoplado se estabiliza a los 3 años y el modelo semiacoplado a los 5 años; esto hace pensar que el modelo no acoplado es mucho más lento en su proceso.

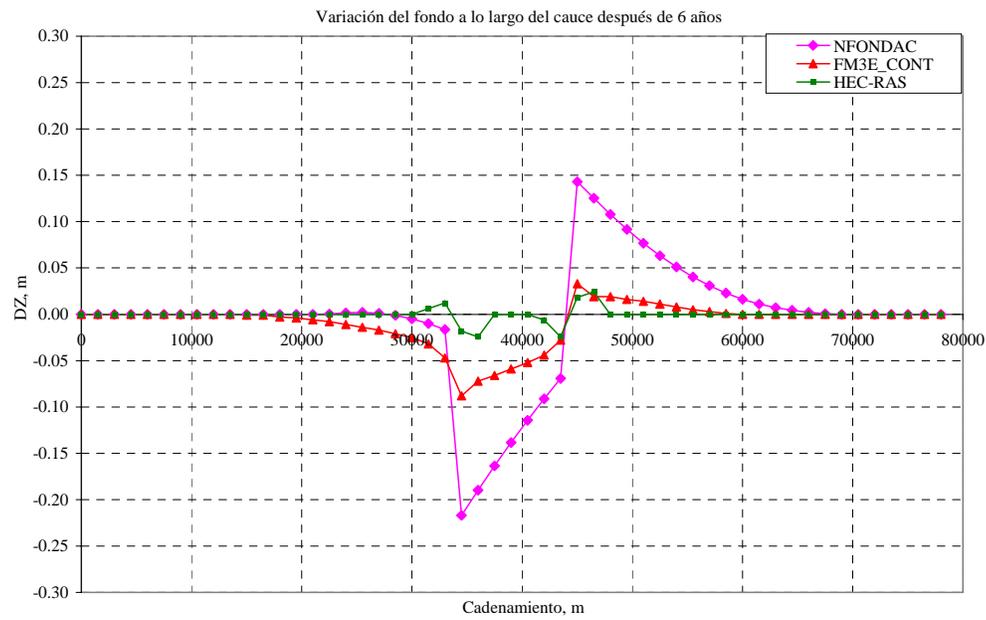
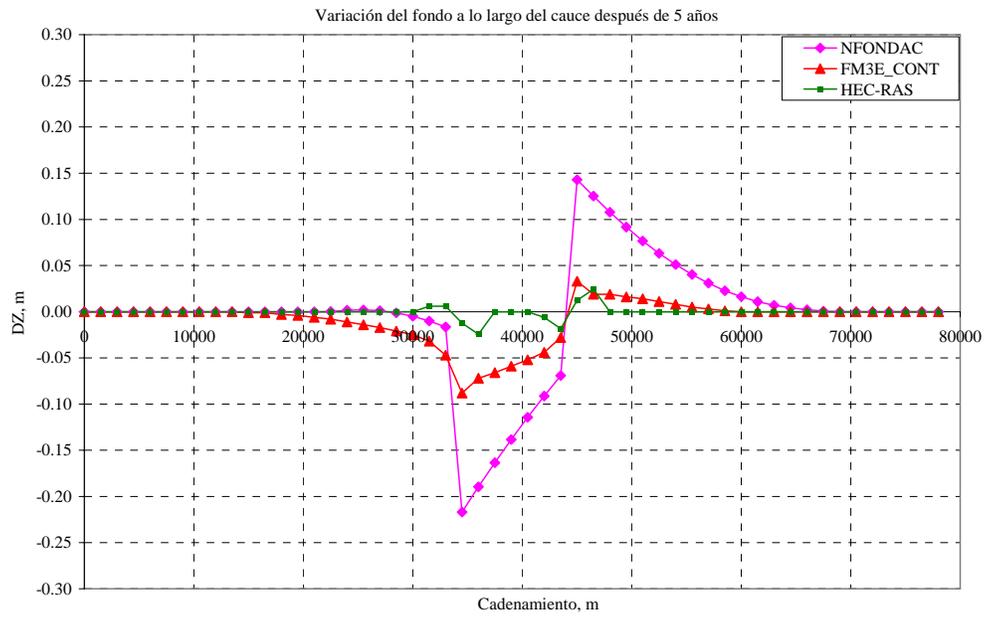


Variación del fondo a lo largo del cauce después de 3 años



Variación del fondo a lo largo del cauce después de 4 años





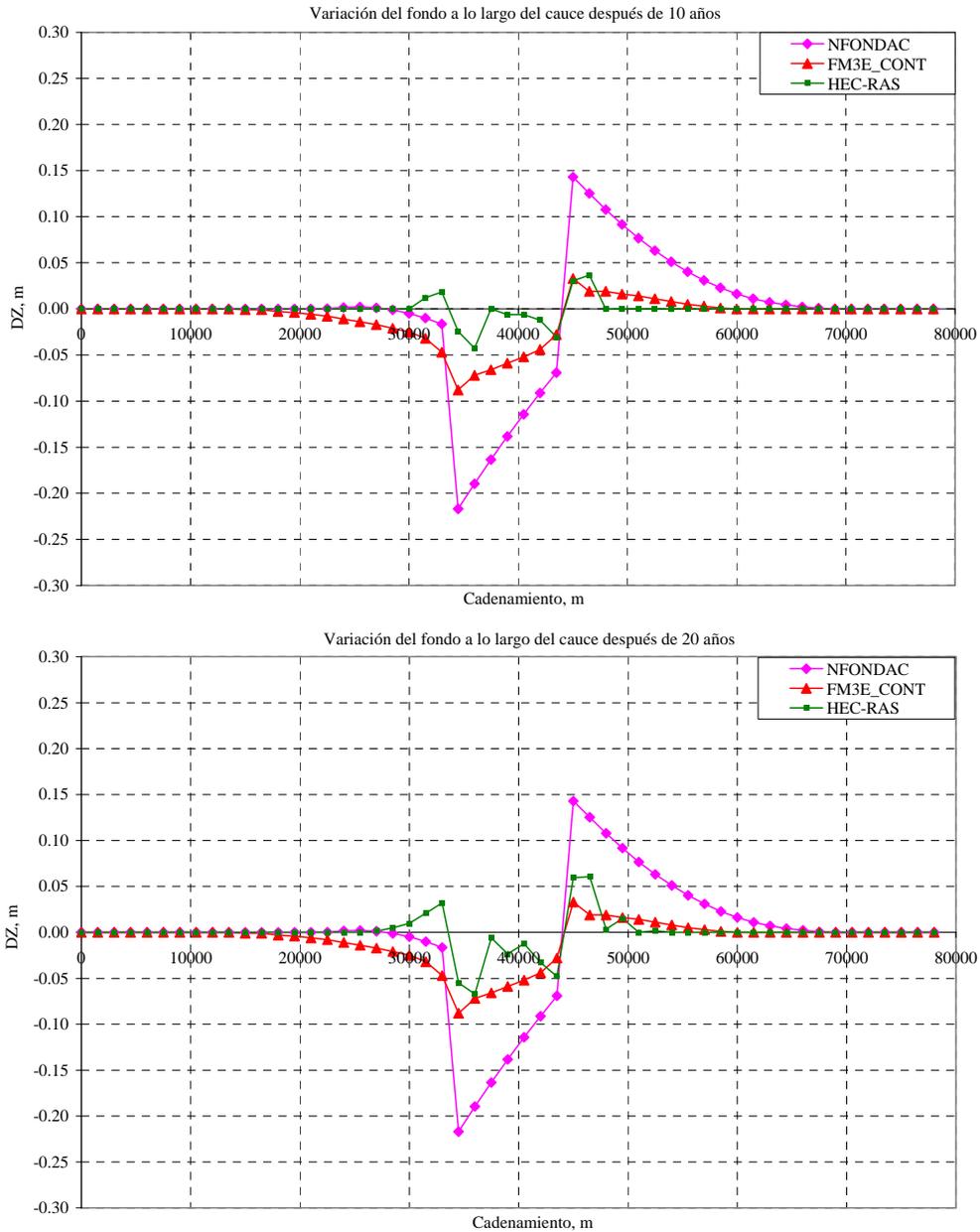
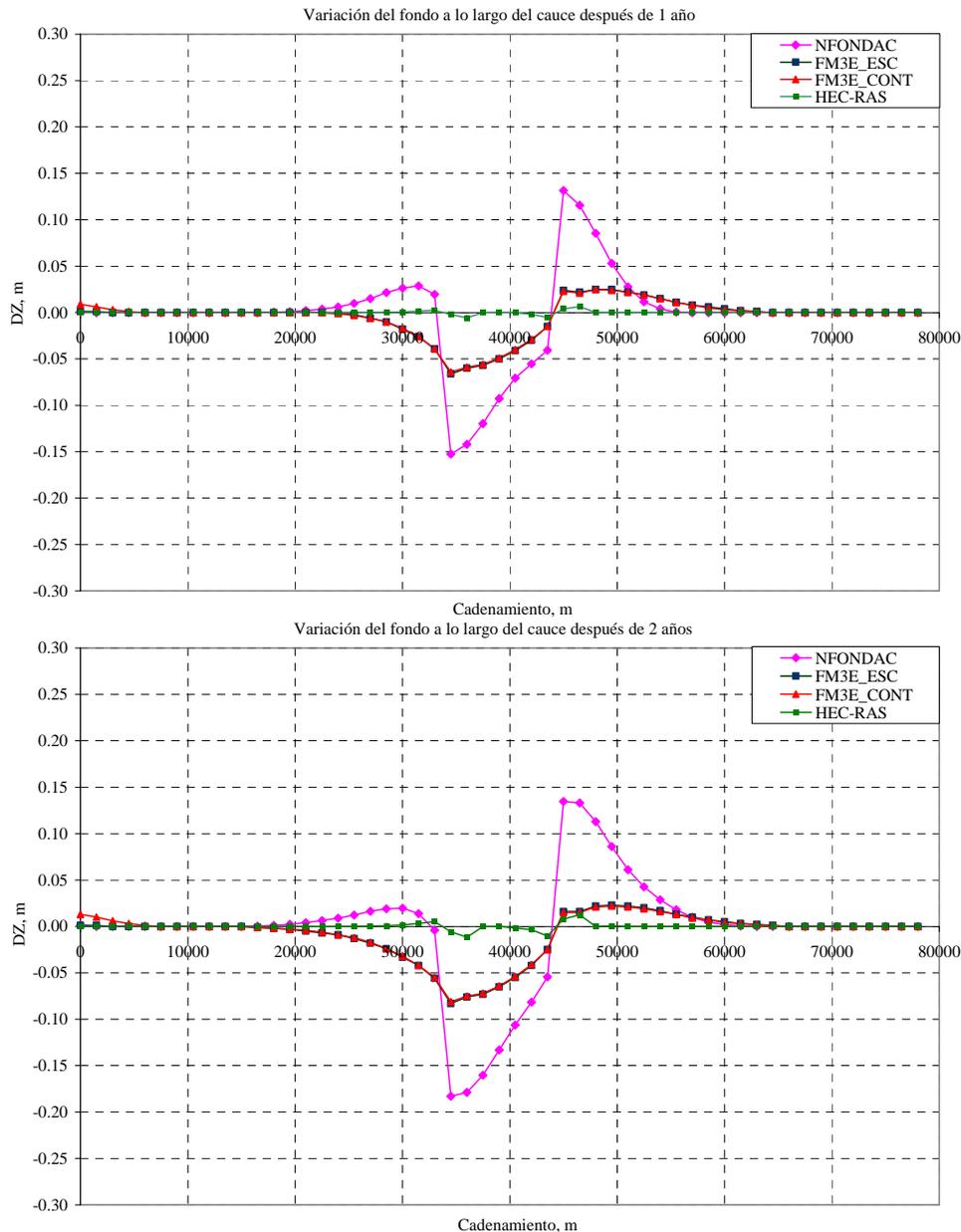


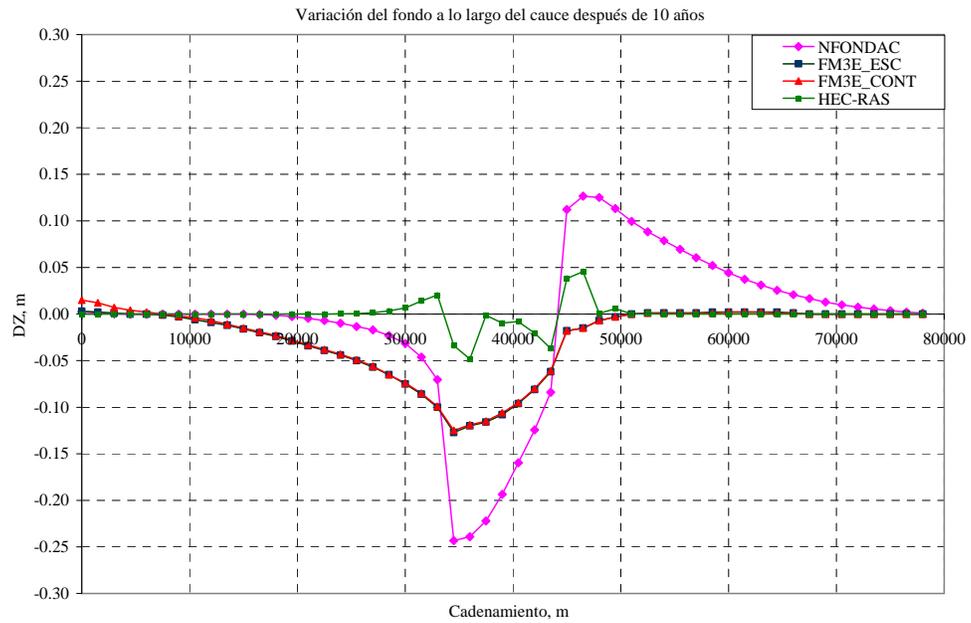
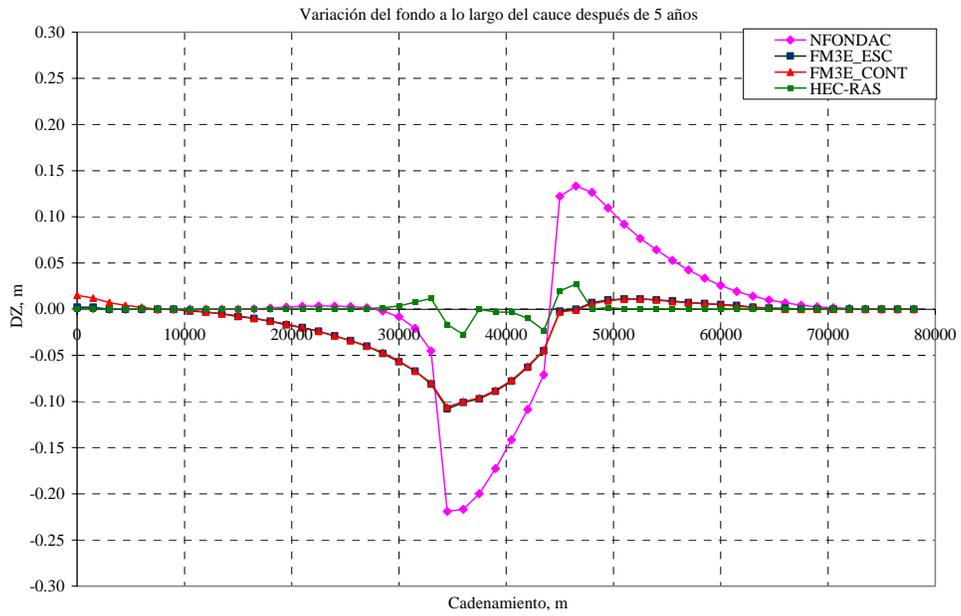
Figura 4.10. Variación del fondo a lo largo del cauce con contracción gradual en la sección intermedia, después de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10 y 20 años de simulación gasto líquido y sólido constante.

4.2.2 Hidrograma medio anual

En la Fig 4.11 se presentan las variaciones de fondo a lo largo del cauce, calculadas con los 3 modelos, usando como condición de frontera aguas arriba el hidrograma medio anual, como lo hacen en el caso de estudio sobre el río Kankakee en Illinois (Bhowmik, *et al.*, 2008). Estos autores simulan los posibles cambios en la elevación de la superficie libre del agua y del fondo sobre el río Kankakee, usando un hidrograma medio anual que obtienen a partir de promediar los registros de flujo de los últimos 20 años y suponiendo que este flujo prevalecerá en el futuro.

Los resultados de la simulación al usar el hidrograma medio anual, presenta diferencias significativas al usar un modelo semiacoplado con el modelo acoplado; el modelo acoplado no presenta sedimentación aguas arriba de la contracción; aguas abajo de la contracción, los dos modelos sedimentan a diferencia que el modelo acoplado que comienza a lavarlos a través del tiempo. La erosión obtenida con el modelo semiacoplado en la zona contracta es mayor. Tanto el modelo acoplado como el desacoplado, presentan erosión aguas arriba de la contracción, tendencias similares a las reportadas por Jansen, *et al.* (1979), en los casos de estudio sobre la contracción en los ríos Waal en Holanda y Magdalena en Colombia; en ambos caso hay erosión aguas arriba de la contracción extendiéndose hacia la frontera con el transcurso del tiempo.





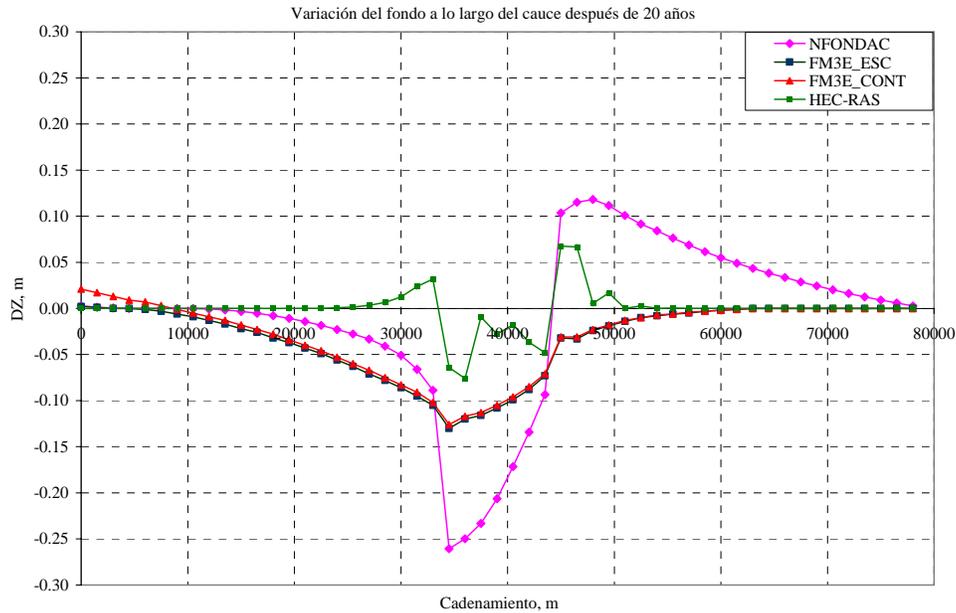
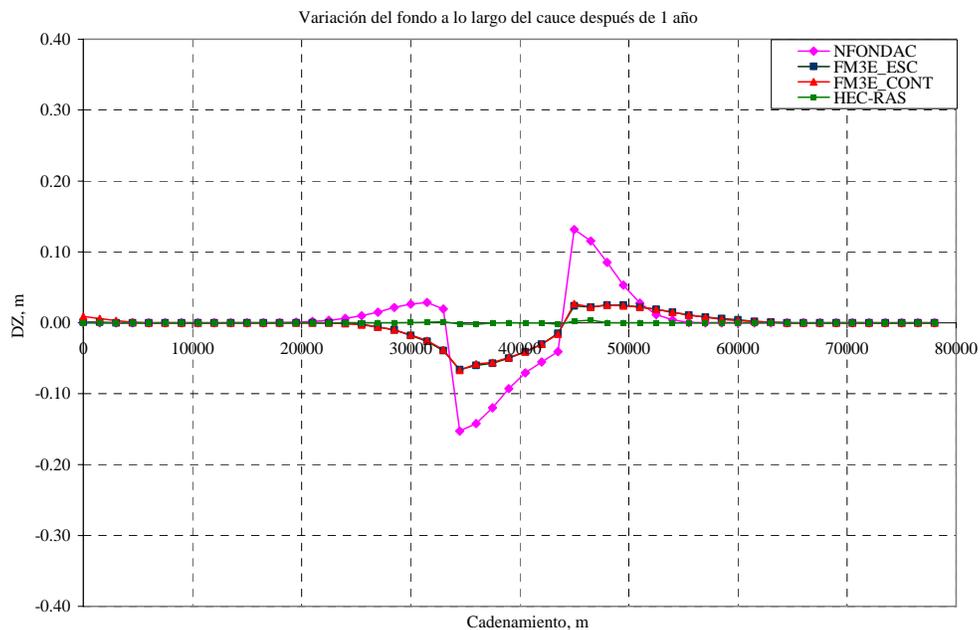
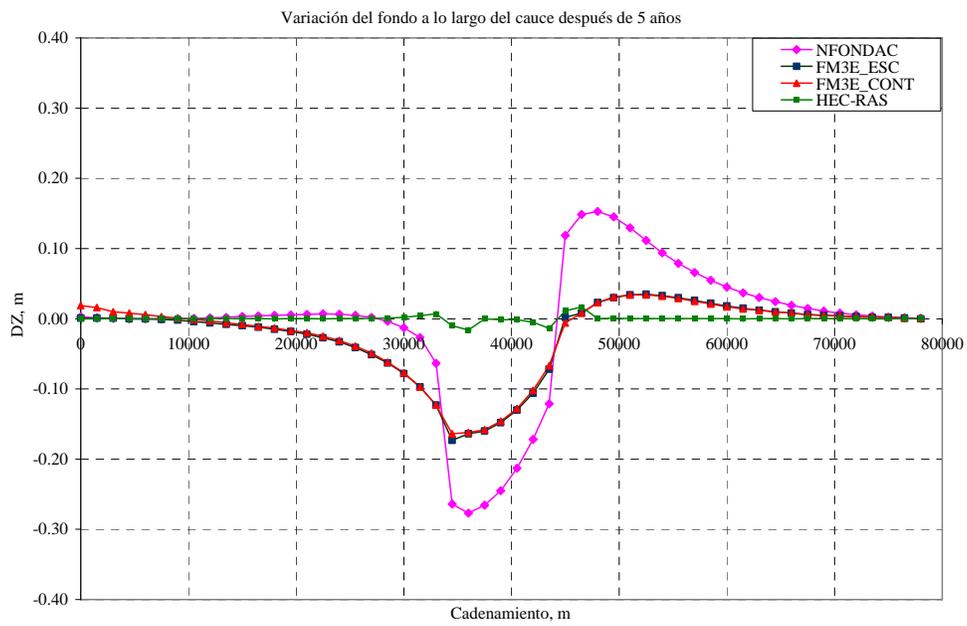
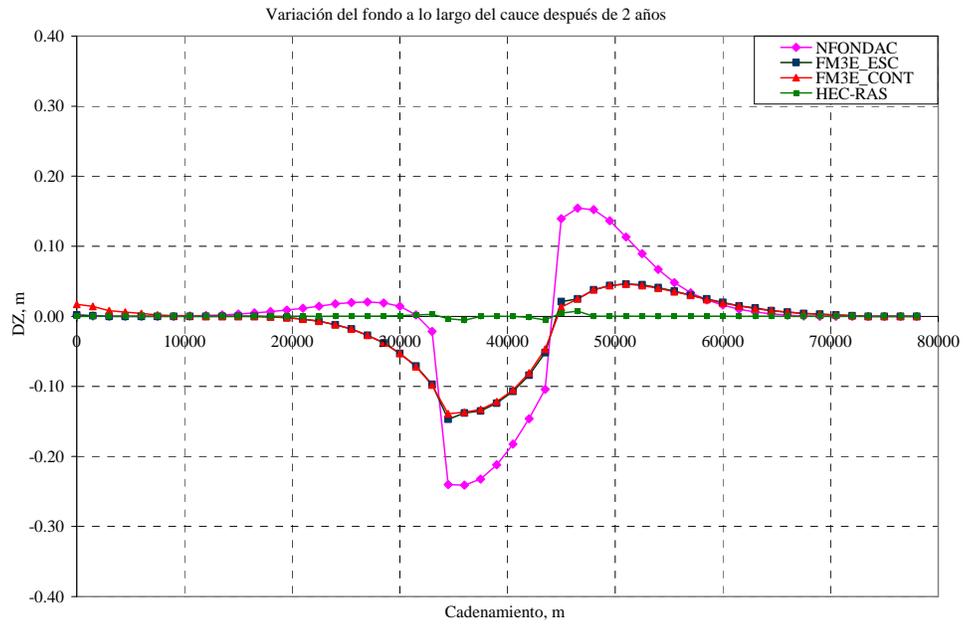


Figura 4.11. Variación del fondo a lo largo del cauce con contracción gradual en la sección intermedia, después de 1, 2, 5, 10 y 20 años de simulación con hidrograma medio anual.

4.2.3 Hidrogramas medio-máximo-mínimo anual

Tratando de apegarse más a la realidad se simula el cambio morfológico del fondo, cambiando los hidrogramas anuales; en este caso se eligió colocar primero el hidrograma medio anual, el año siguiente el hidrograma máximo anual y por último el hidrograma mínimo anual, repitiendo la secuencia en el tiempo de simulación. Los resultados de la evolución del fondo en el espacio y en el tiempo se muestran en la Fig 4.12.





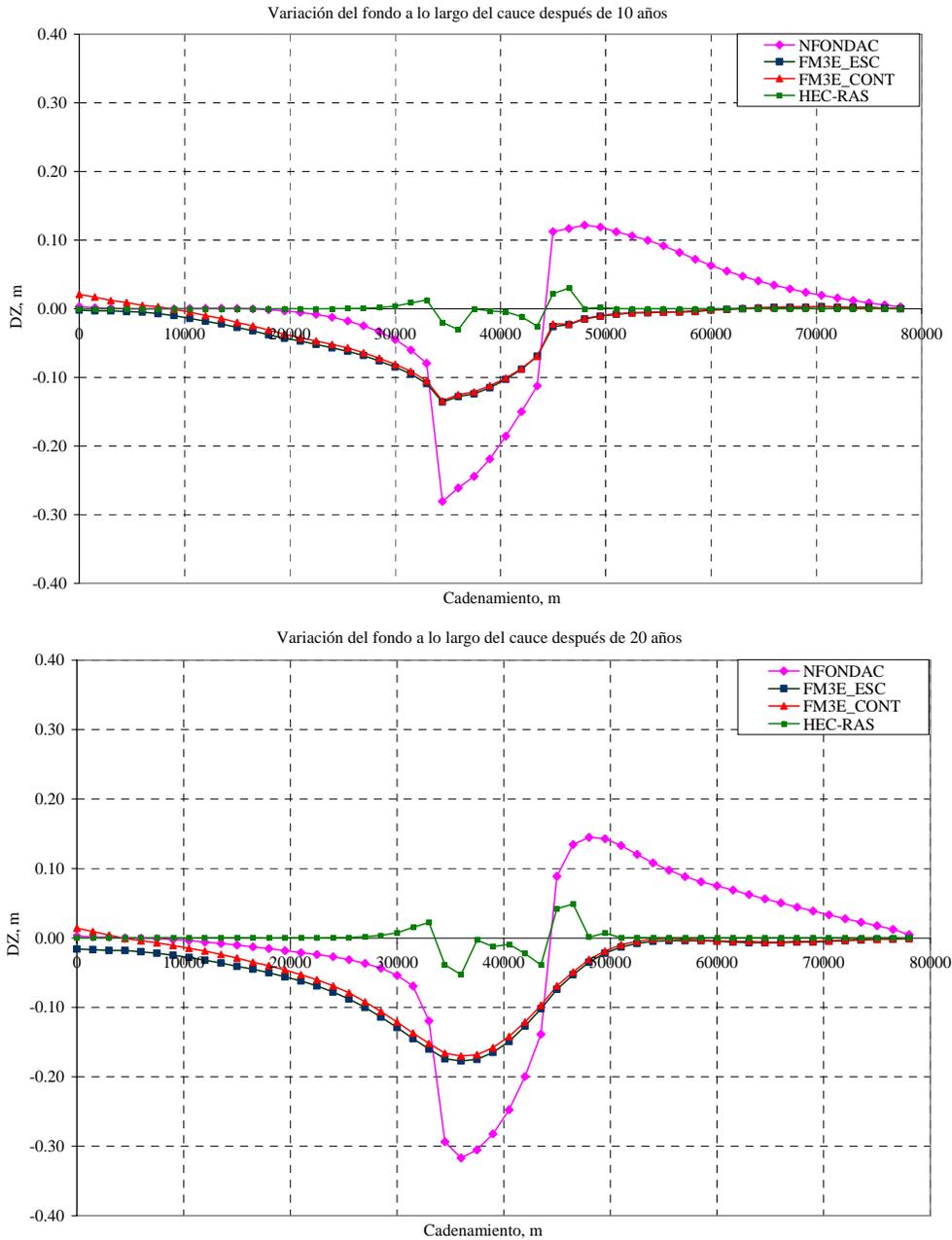


Figura 4.12. Variación del fondo a lo largo del cauce con contracción gradual en la sección intermedia, después de 1, 2, 5, 10 y 20 años de simulación con hidrograma medio-máximo-mínimo anual.

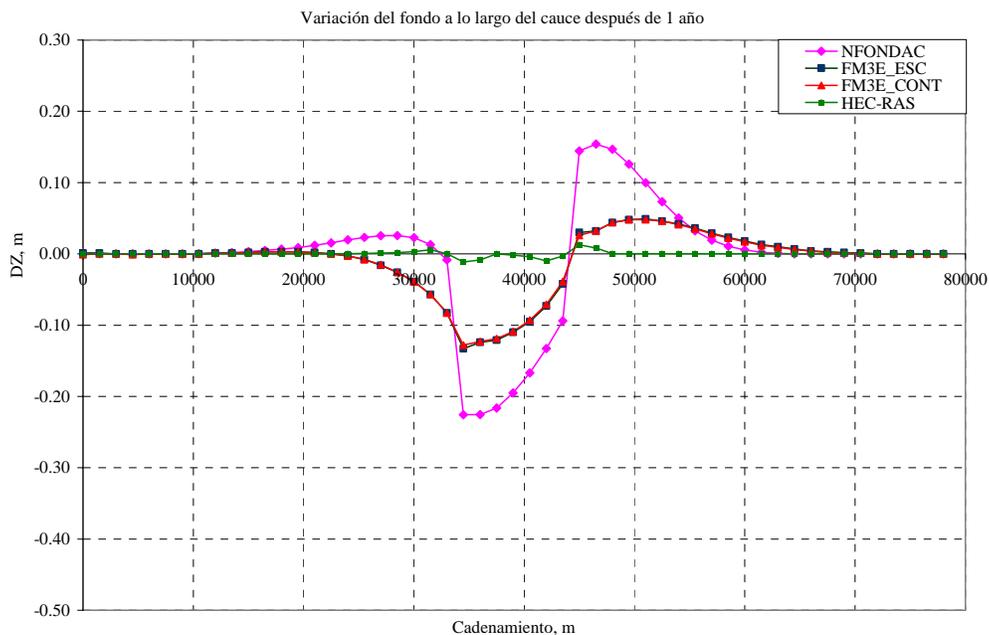
Los resultados al usar diferentes hidrogramas de entrada muestran que hay una clara diferencia entre usar un modelo acoplado, un modelo semiacoplado o un modelo no acoplado, incluso puede apreciarse una diferencia mínima en el modelo acoplado, pero usando datos escalonados y continuos. Asimismo, aguas abajo de la contracción muestra el mismo patrón de evolución que reporta Shimizu e Itakura (1991), que a la salida de la contracción la evolución del cauce tiende al fondo inicial. El modelo no acoplado (HEC-AS

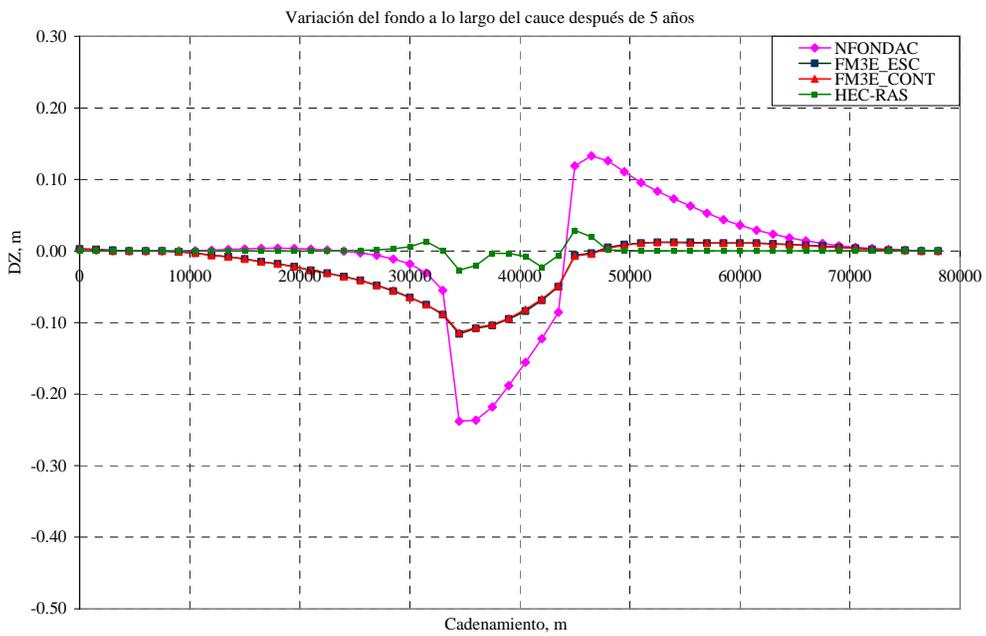
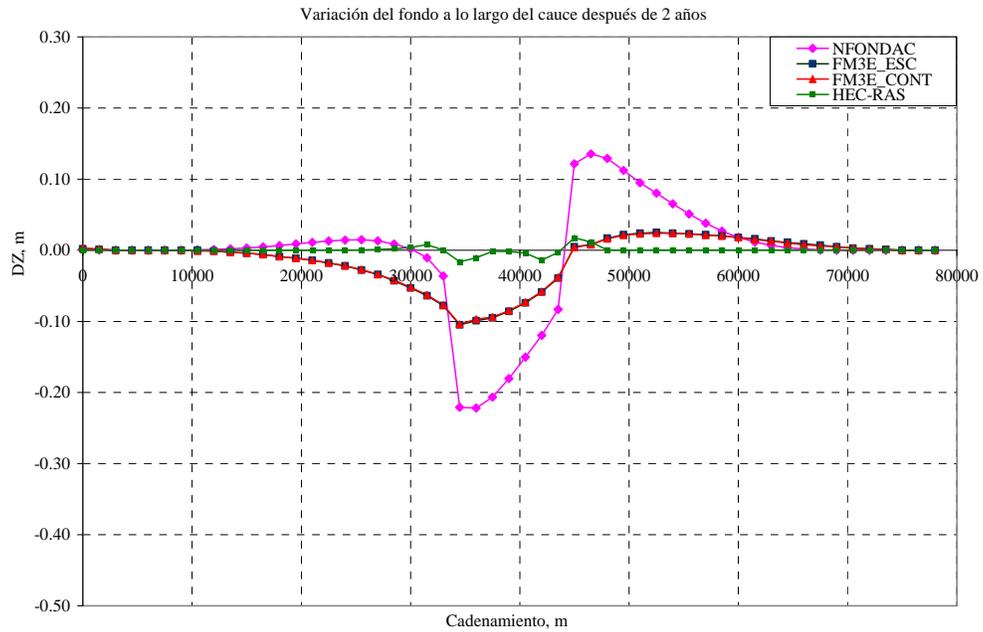
4.1) presenta la misma tendencia de evolución, pero las magnitudes son totalmente diferentes, incluso en la zona contracta presenta inestabilidad.

Aquí se observa que si hay una diferencia entre usar el gasto constante, el hidrograma medio anual y las sucesiones de hidrogramas.

4.2.4 Hidrogramas máximo-medio anual

La Fig 4.13 muestra la evolución espacio-temporal del fondo del cauce al hacer la simulación usando hidrograma máximo el primer año y los siguientes 19 años el hidrograma medio anual. Se observa que en el primer año cuando se tienen gastos máximos la socavación alcanza su máxima profundidad, para posteriormente comenzar a estabilizarse, con tendencia de volver al fondo inicial. En este caso el modelo semiacoplado presenta el mismo patrón de evolución del fondo que el modelo acoplado, ya que no presenta depositación al inicio de la contracción. Ambos modelos depositan en el tramo aguas arriba por la sobrecarga de sedimentos que se tiene. En este análisis se observan pequeñas diferencias en los resultados del modelo acoplado al manejar los datos de entrada de manera continua o escalonada, incrementando la diferencia a medida que el tiempo de simulación aumenta. El modelo no acoplado presenta resultados similares a los casos anteriores, solo cambia en la magnitud de la solución, ya que la inestabilidad en la zona contracta se sigue produciendo.





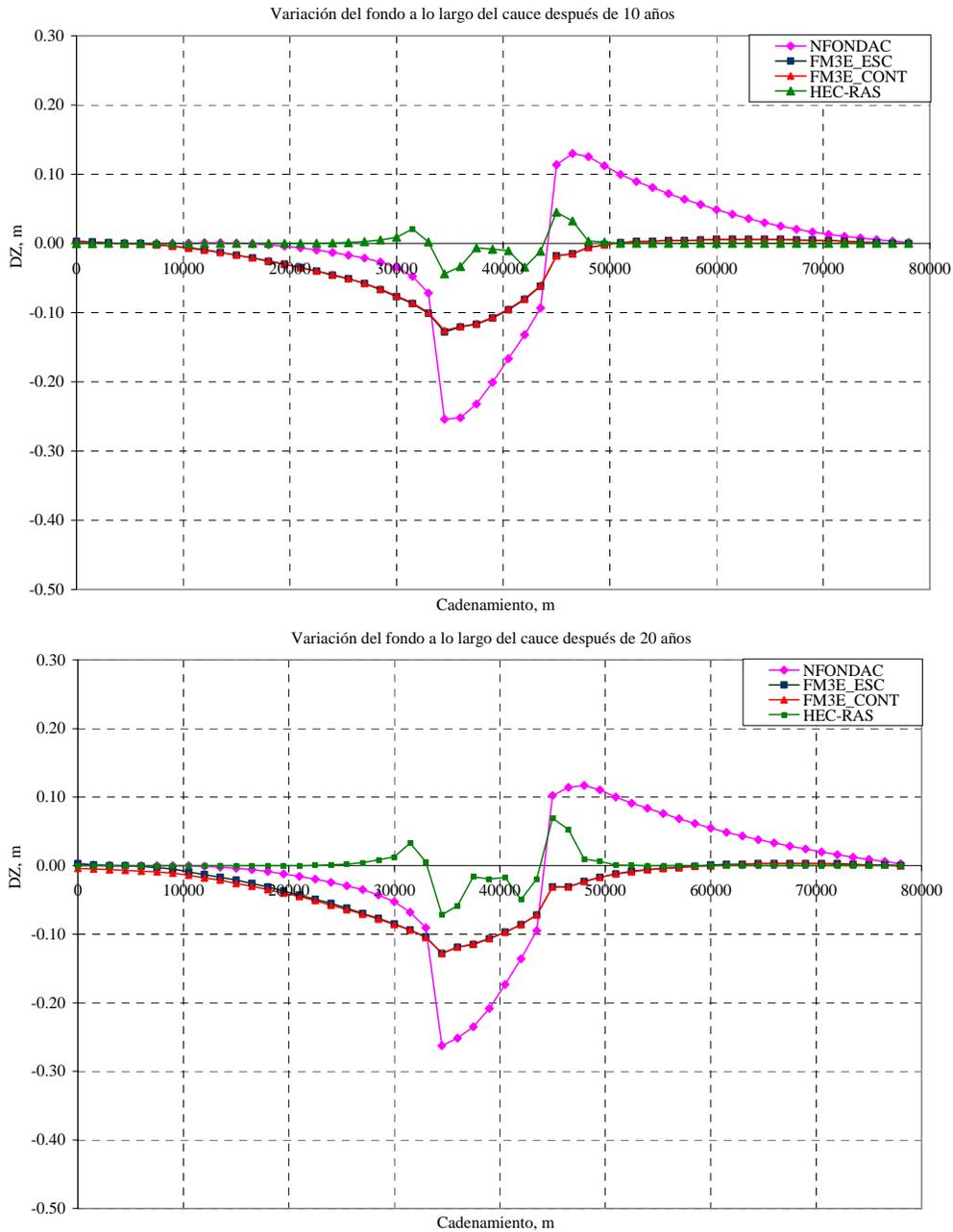
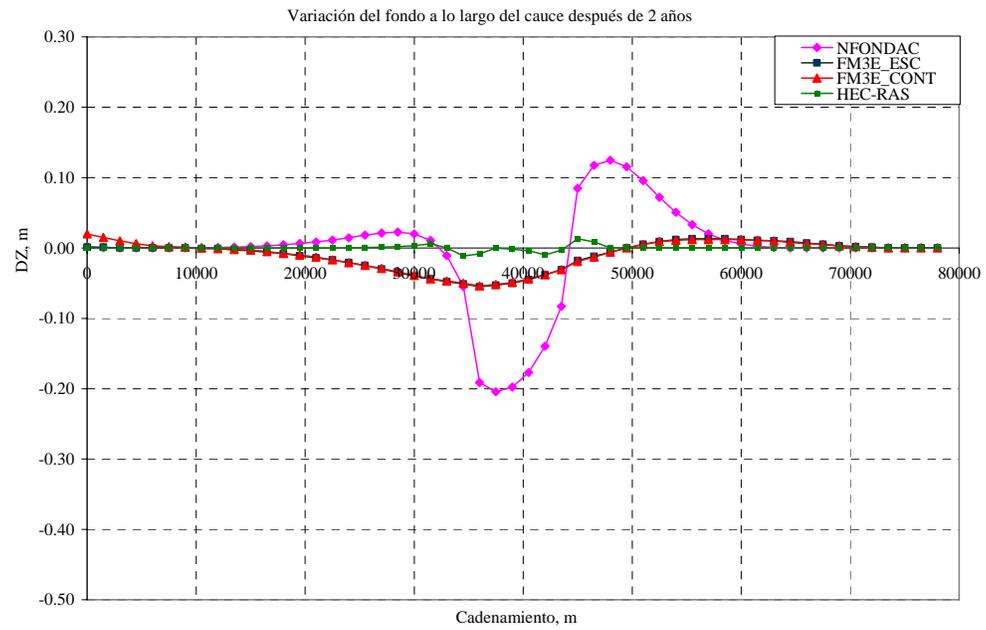
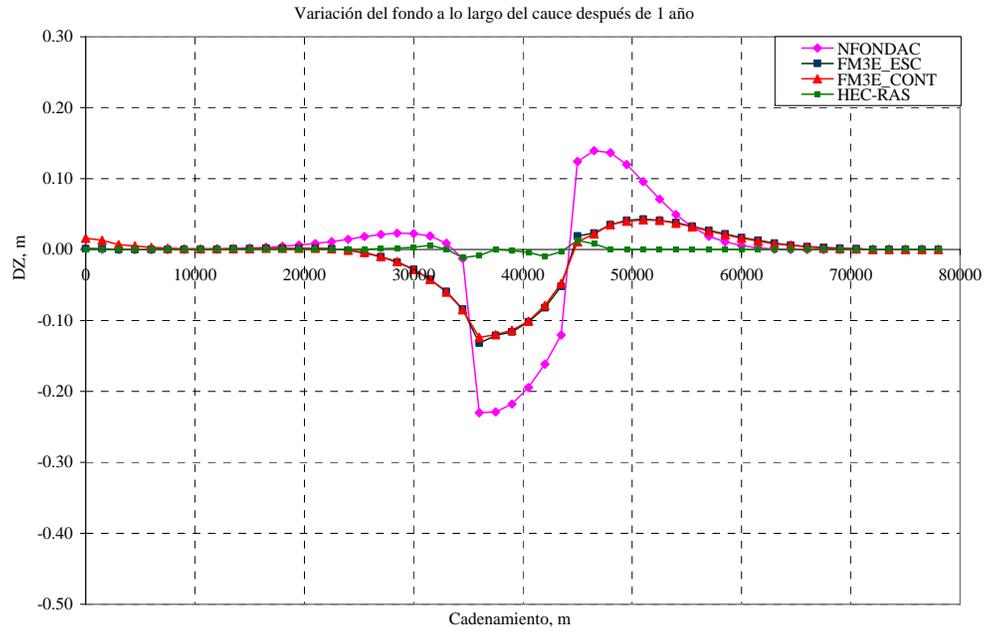
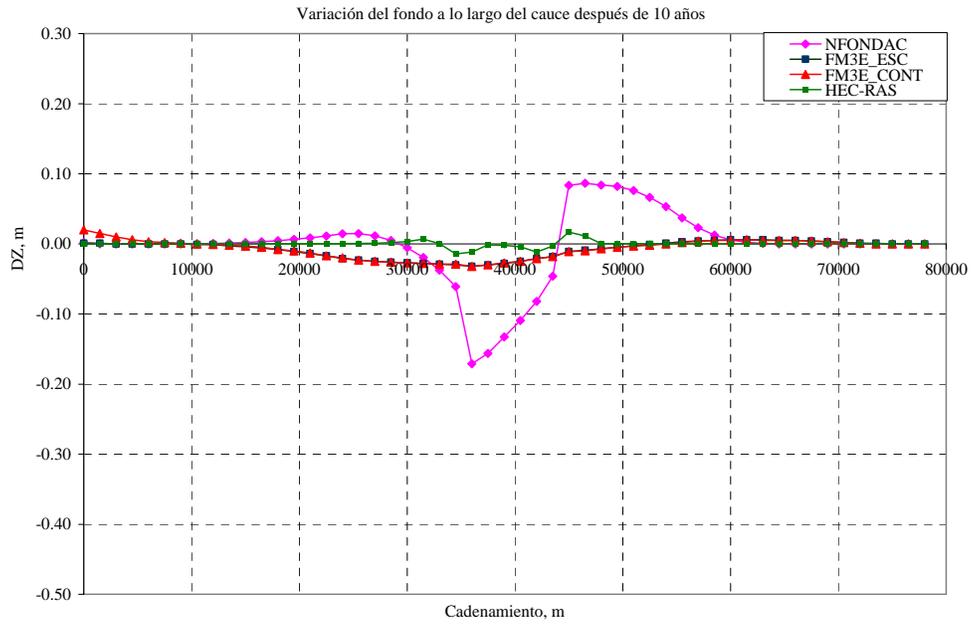
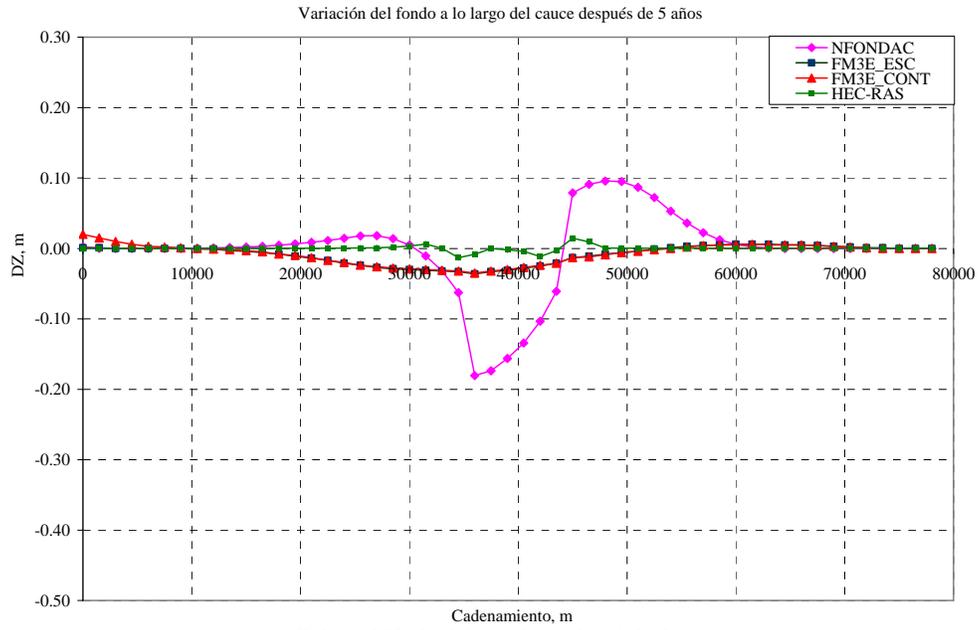


Figura 4.13. Variación del fondo a lo largo del cauce con contracción gradual en la sección intermedia, después de 1, 2, 5, 10 y 20 años de simulación con hidrograma máximo-medio anual.

4.2.5 Hidrogramas máximo-mínimo anual

La Fig 4.14 presenta la evolución espacio-temporal del cauce simulado por un tiempo de 20 años, en el primer año se usa el hidrograma máximo y el tiempo restante el hidrograma mínimo anual. Se observa que sólo en el año con gastos máximos alcanza su mayor socavación y con los gastos mínimos solo se tiene depositación en la zona contracta, tendiendo al fondo inicial. En la frontera aguas arriba se aprecia una diferencia en los resultados obtenidos con el modelo acoplado al usar flujo de forma discretizada y continua.





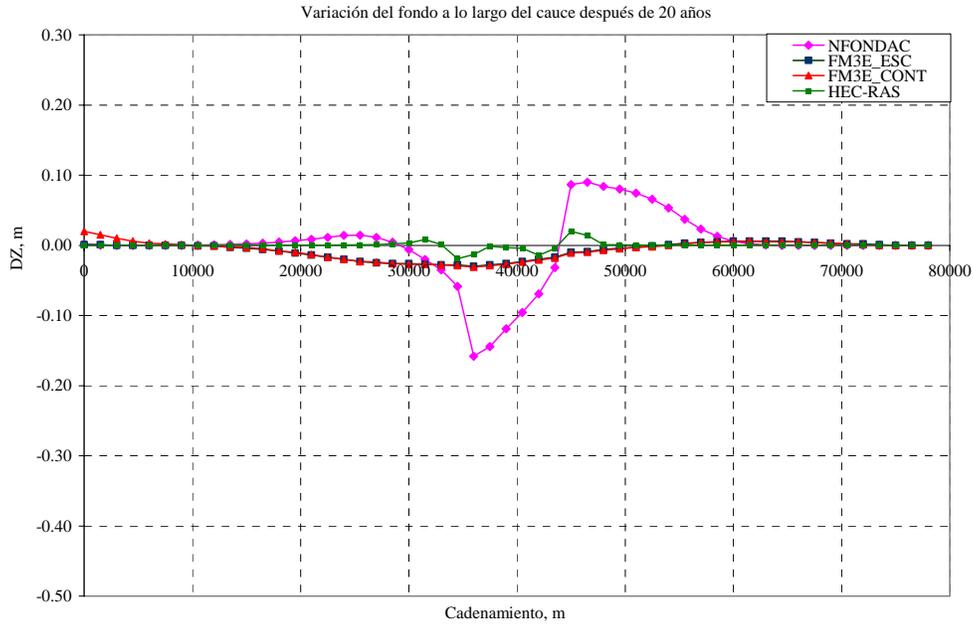


Figura 4.14. Variación del fondo a lo largo del cauce con contracción gradual en la sección intermedia, después de 1, 2, 5, 10 y 20 años de simulación con hidrograma máximo-mínimo anual.

En las Figs 10 a 14 se observa que al tener secciones transversales variables si hay un efecto importante de la variabilidad de los gastos con el tiempo. EL modelo FONDAC erosiona y deposita más que el modelo FM3E; en general, el HEC-RAS 4.1 tiene una evolución mucho más lenta y erosiona muchísimo menos. En el modelo FM3E se presentan resultados de cálculos con hidrogramas escalonados (gastos mensuales constantes) y continuos; solo hay pequeñas diferencias en la evolución del fondo en el largo plazo en la secuencia de hidrogramas medio-máximo-mínimo.

En las Figs 10 y 11 se puede compara el efecto de calcular con gasto contante contra el de hidrogramas mensuales; se nota que si hay un efecto importante. Lo mismo puede decirse al comparar el hidrograma medio (figura 11) con las secuencias de gastos medio máximo mínimo (figura 12).

V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Primeramente se revisó en la tesis la eficiencia de la solución del sistema de ecuaciones lineales que se tiene con el esquema de diferencias finitas de Preissmann. Los tres métodos probados, presentan excelentes resultados en cuanto a la precisión con diferencias poco significativas. Sin embargo, en cuanto al tiempo de cómputo, resulta mejor el método de doble barrido, ya que para el sistema resuelto, la factorización-LU es aproximadamente 300 veces más lento. El de matrices en bloques es del orden de 7 veces más lento; además, en el método de factorización-LU requiere formar la matriz, lo que, consume más memoria y tiempo de cómputo. Estos resultados son para fines de comparación, ya que dependen de las características del equipo de cómputo utilizado.

Los resultados obtenidos al analizar un canal con puntos de quiebre en la pendiente (knickpoints), muestran que los dos modelos trabajados, simulan el movimiento del fondo con buena aproximación a los datos reales en condiciones de flujo subcrítico.

En el experimento de un tramo de canal con una zanja dragada, Galappati y Vreugdenhil (1985), se usó la función de transporte de Engelund-Hansen y fórmula de resistencia al flujo de Manning. Los resultados muestran que la trinchera se va llenando de sedimento mientras avanza hacia aguas abajo. En este caso, el modelo acoplado representa mejor tanto el fenómeno de depositación como el de socavación que el modelo semiacoplado. Debido a las condiciones de pendiente fuerte que representan las trincheras, los resultados son una prueba exigente para los modelos.

Los resultados de la simulación en un canal con contracción gradual, comparados con datos medidos por el Cuerpo de Ingenieros de la Armada de Estados Unidos, muestran que los modelos semiacoplados y acoplados representan muy bien el fenómeno de erosión, aunque los resultados del modelo acoplado se ajustan mejor a los datos medidos. Los resultados obtenidos con el modelo HEC-RAS 4.1 muestran el mismo patrón de evolución del fondo, pero con mayor lentitud.

Se verificaron los modelos matemáticos de dos y de tres ecuaciones, simulando un canal con los datos empleados por Ipson (2007), en el que se simula un canal con variación de pendiente en la sección intermedia del canal, y otro con contracción gradual en la sección intermedia del cauce; los resultados se compararon con los de Ipson, que usa un modelo bidimensional semiacoplado. Estos resultados indican la amplia funcionalidad de los modelos NFONDAC y FM3E, incluso en el caso de la simulación con variación de pendiente moderada, donde los presentes modelos simulan mejor la variación del fondo, ya que no muestran oscilación como el modelo usado por Ipson.

Los modelos analizados han simulado cambios morfológicos en canales rectangulares de laboratorio bajo diferentes condiciones, con agua clara en la condición de frontera aguas arriba o con transporte de sedimentos, canales con contracción, canales con variación de pendientes y con trinchera, por lo que, los modelos pueden ser usados para canales aluviales, caracterizados por régimen de flujo subcrítico y granulometría uniforme o diferente.

En las simulaciones de tramos de ríos, si las secciones transversales son similares, no hay diferencias significativas entre usar gasto constante, hidrograma medio anual o una sucesión de hidrogramas. Los resultados son prácticamente iguales si se usan modelos acoplados o semiacoplados.

Tomando en cuenta que en los tramos de ríos aluviales normalmente se tienen ampliaciones y reducciones en las secciones transversales; la simulación del tramo de canal con contracción, muestra que hay diferencias significativas al usar un gasto constante, hidrograma medio anual o sucesión de hidrogramas. En este caso se tienen fuertes diferencias en las simulaciones hechas con modelos acoplados y semiacoplados, ya que ambos siguen el mismo patrón de evolución del fondo, pero el modelo semiacoplado presenta mayores magnitudes de erosión y depositación. El modelo no acoplado HEC-RAS 4.1, presenta resultados de erosión y depositación muy diferentes a los otros modelos, su respuesta de evolución del fondo es más lento y en la zona contracta presenta problemas de estabilidad.

En el modelo acoplado, el uso de flujo escalonado y continuo presenta prácticamente los mismos resultados; sin embargo, con el uso de secciones complejas acompañadas de alta variabilidad en el gasto, la diferencia en los resultados se incrementa, sobre todo en simulaciones a largo plazo.

Con el modelo NFONDAC se puede calcular el proceso de acorazamiento del fondo del cauce (Berezowsky y Jiménez, 1992), pero en ninguna de las simulaciones hechas en este trabajo se calcula éste proceso.

Finalmente, para tener una buena predicción de la evolución del fondo del cauce, es necesario elegir la fórmula de transporte de sedimentos que mejor se ajusta al caso de interés; por tanto, es importante conocer las características del sedimento y el rango de aplicación de las fórmulas disponibles.

REFERENCIAS

- Abbott, M. B. (1979). *Computational Hydraulics, Elements of the Theory of Free Surface Flows*, Pitman, U.K.
- Berezowsky, V. M., y Jiménez, C. A. A. (1998). "Friction slope computations for mathematical models." *Procc of the International Symposium on Sediemnt Transport modeling, ASCE*, pp 136-141, Nueva Orleans.
- Berezowsky, V. M., y Jiménez, C. A. A. (1995). Flujo no permanente en ríos. Capítulo 6 del Manual de ingeniería de Ríos, Instituto de Ingeniería, UNAM, D.F., México.
- Berezowsky, V. M., y Jiménez, C. A. A. (1993). Cálculo de Perfiles en Ríos de fondo Arenoso con Métodos de Resistencia al flujo de hidráulica Fluvial. Instituto de Ingeniería, UNAM, D.F., México.
- Berezowsky, V. M., y Jiménez, C. A. A. (1992). Método simplificado para calcular el proceso de acorazamiento en cauces. Instituto de Ingeniería, UNAM, D.F., México.
- Berezowsky V. M., Lara F. M. A. (1986). "Simulación del proceso de erosión y sedimentación en cauces considerando la variación de las formas de fondo". *Memorias del XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, IAHR, Vol. 3 pp. 118-128*. Sao Paulo Brasil.
- Bhowmik, N. G., Tsai, C., Parmar, P., y Demissie, M. (2008). "Case Study: Application of the HEC-6 Model for the Main Stem of the Kankakee River in Illinois." *Journal of Hydraulic engineering, Vol. 134, No. 4, 355-366*.
- Brush, L. M., Jr., y Wolman, M. G. (1960). "Knickpoint behavior in noncohesive material: a laboratory study." *Geolical Society of America Bulletin. Vol. 71, PP, 59-74*.
- Cao, Z., Day, R., y Egashira, S. (2002). "Coupled and decoupled numerical modeling of flow and morphological evolution in alluvial rivers." *Journal of Hydraulic engineering, Vol. 128, No. 3, 306-321*.
- Cui, Y., Parker G. y Paola, Ch. (1995). "Numerical simulation of aggradation and downstream fanning." University of Minnesota Supercomputer Institute Research Report *UMSI 95/241*.
- Cunge, J. A., Holly, F. M. y Verwey, A. (1980). *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman, Inglaterra.
- Dahlquist, Bjorck, y Anderson. (1974). *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Inc. EUA.
- De Vries, M. (1965). "Considerations About Non-Steady Bed-Load Transport in Open channels." *11th Congress, IAHR, Vol. 3, No. 3.8*.

De Vries, M. (1971). "Solving River Problems by Hydraulics and Mathematical Models." *Delft Hydraulics Laboratory, Publication 76-II*.

De Vries, M. (1973). "River-Bed Variations-Aggradation and Degradation." *Delft Hydraulics Laboratory, Publication No. 107*.

Galappatti, G., y Vreugdenhil, C. B. (1985). "A depth-integrated model for suspended sediment transport." *Journal of Hydrologic Research., Vol 23 No. 4, pag. 359-377*.

García, M. H. (2007). "Sedimentation Engineering, Processes, Measurements, Modeling, and Practice." *ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice, No. 110*. USA.

Guo, Q. C. y Jin, Y. C. (1999). "Modeling Sediment Transport Using Depth-Averaged and Moment equations." *Journal of Hydraulic engineering, Vol. 125, No. 12, Paper No. 18545, 1262-1269*.

Habersack, H. M. (1998). "Numerical Sediment Transport Models. Theoretical and practical aspects." *Modeling Soil erosion, Sediment Transport and Closely Related Hydrological Processes*. IAHS. Publ. No. 249. Australia.

Jansen, J. C., Van Bendegom, L., Van de Berg, J., de Vries, M., y Zanen, A. (1983). *Principles of River engineering, the non-tidal alluvial river*. Edit. PITMAN.

Jaramillo, T. W. F., y Jain, S. C. (1984). "Aggradation and degradation of alluvial-channel beds." *Iowa Institute of Hydraulic Research, Report No. 247*, The University of Iowa, Iowa City.

Jiménez, C. A. A., y Domínguez, M. R. (2002). *Modelo matemático para tránsito de avenidas con aplicación al sistema de drenaje de la zona oriente del valle de México*. Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, D.F, México.

Kassem, A. A., y Chaudhry, M. H. (1998). "Comparison of coupled and semicoupled Numerical Models for Alluvial channels." *Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 124, No. 8, Paper No. 14508, PP. 794-802*.

Krishnapan, B., G. (1992). "Mathematical modeling of river dynamics-a Canadian case study:Discussion." *Canadian Journal Civil Engineering, Vol. 19, 1092*.

Lara, F. A. M. (1985). *Modelo matemático para la simulación de algunos aspectos morfológicos de ríos*, Tesis de maestría, DEPI, UNAM, México.

Laursen, E., M. (1999). "Clear-Water Contraction Scour under Bridges in Pressure flow." *Journal of Hydraulic Engineering. Vol 122. 785-792*.

Liu, Z. (2006). "Introduction to the World Association for Sediment and Erosion Research" *International Network on Erosion and Sedimentation, China*.

Ipson, M. K. (2006). "Analysis of the sediment transport capabilities of FESWMS FST2DH" Máster's Thesis, Brigham Young University, Department of Civil and Environmental Engineering.

Maza, A. J. A. y García, F. M. (1996). Transporte de Sedimentos. Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No 584, México, D.F.

Molinas, A. y Wu, B. (2001). "Transport of sediment in large sand-bed Rivers." *Journal of Hydraulic research*, Vol., 39, No. 2.

Niño, Y. (2002). "Simple Model for Downstream Variation of Median Sediment size in Chilean Rivers." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, No. 10, Pag. 934-941.

Papanicolaou, A. N., Elhakeem, M., Krallis, G., Prakash, S., Edinger J. (2008). "Sediment Transport Modeling Review- Current and Future developments." *FORUM, Journal of Hydraulics Engineering*.

Postma, G., Kleinhans, M. G., Meijer, P. TH., y Eggenhuisen, J. T. (2008). "Sediment transport in analogue flume models compared with real-world sedimentary systems: a new look at scaling evolution of sedimentary systems in a flume." *Sedimentology*, Vol. 55, 1541-1557.

Press, W. H., et al. (1992). Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Second edition. Cambridge University Press, EUA.

Rijn, L. C. van. (1986). "Mathematical modeling of suspended sediment in nonuniform flows." *Journal of Hydraulics Engineering*, Vol. 112 No. 6, pag. 433-455.

Runkel, R. L., y Chapra, S.C. (1993). "An efficient Numerical Solution of the Transient Storage Equations for Solute Transport in Small Streams" *University of Colorado, Center for Advanced Decision Support for Water and Environmental Systems, Boulder, Colorado*.

Scott, S. H., y Jia, Y. (2006) "Simulation of sediment transport and channel morphology change in large river systems." *US-CHINA WORKSHOP ON ADVANCED COMPUTATIONAL MODELLING IN HYDROSCIENCE & ENGINEERING September 19-21, Oxford, Mississippi, USA*.

Shimizu, Y. e Itakura, T. (1991). Calculation of flow and bed deformation with a general non-orthogonal coordinate system. Proc. Of XXIV IAHR Cong., Madrid, Spain. Vol.C:241-248.

Singh, V. (2005). "Two dimensional sediment transport model using parallel Computers." *Tesis de Grado presentada a la Universidad Estatal de Louisiana., B.Tech., Banaras Hindu University, India*.

Tawatachai, T., y Supharatid, S. (1996). "Experimental investigation and analysis of HEC-6 River morphological model." *Journal Hydrological Processes*, Vol. 10, 747-761.

Vasquez, J. A., Millar, R. G., y Steffler, P. M. (2005). "RIVER2D Morphology, Part I: Straight Alluvial Channels." *17th Canadian Hydrotechnical conference*, Edmonton, Canada.

Wu, W. (2004). "Depth-Averaged Two-Dimensional Numerical Modeling of Unsteady Flow and Nonuniform Sediment Transport in Open Channels." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 130, No. 10. pag. 1013-1024.

Yang, S.Q, y Lim, S.Y. (2003). "Total Load Transport Formula for Flow in Alluvial Channels." *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 129, No. 1, pag. 68-72.