



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA
Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**DISEÑO Y ANÁLISIS DE OBSERVADORES POR
MODOS DESLIZANTES PARA SISTEMAS NO
LINEALES CON SALIDA MUESTREADA**

T E S I S

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**P R E S E N T A
ING. IVÁN DE JESÚS SALGADO RAMOS**

**TUTORES
DR. LEONID FRIDMAN
DR. JORGE ISAAC CHAIREZ ORIA**



2010

Diseño y Análisis de Observadores por Modos Deslizantes para Sistemas no Lineales con salida Muestreada

por

Ing. Iván de Jesús Salgado Ramos

Sometido a la División de estudios de Posgrado de la
Facultad de Ingeniería para obtener el grado de

Maestro en Ingeniería (Control)

el 01 de agosto de 2010

Resumen

Dentro de los esquemas de estimación de estados basados en la teoría de Modos Deslizantes (MD), se pueden diferenciar dos tipos de problemas, los que conciernen a sistemas en tiempo continuo, y los que tienen como objetivo la observación de sistemas discretos. Las principales ventajas que ofrece la teoría de MD es la convergencia en tiempo finito del error de estimación y la robustez ante incertidumbres paramétricas. El presente trabajo centra su estudio en la estimación de sistemas cuya dinámica es posible representar por medio de ecuaciones diferenciales pero su salida solo puede ser obtenida en ciertos instantes de tiempo, en otras palabras sistemas en tiempo continuo con salida es muestreada. Éste problema se deriva directamente de la implementación en tiempo real de esquemas de observación o control, donde la entrada al sistema se obtiene en términos de sensores, por lo que la eficiencia de los algoritmos propuestos tiene que ver directamente con la rapidez de respuesta del sensor. Por esta razón se realiza en ésta tesis, el análisis de cómo el periodo de muestreo afecta el proceso de estimación para tres esquemas de observación diferentes. Primero se propone un observador basado en Modos Deslizantes de Primer Orden (MDPO) para sistemas no lineales, con la desventaja de la presencia de chattering en las trayectorias del sistema, un problema en esta teoría. Los Modos Deslizantes de Segundo Orden, constituyen una herramienta que preserva las características de robustez y convergencia en tiempo finito, además de disminuir el chattering, un esquema comúnmente utilizado es el llamado algoritmo de Super-Twisting (AST) del cual se realiza un análisis de estabilidad de igual forma tomando en cuenta el muestreo en la salida del sistema a observar. Finalmente tratando de mejorar el desempeño del AST se adiciona un término proporcional en su estructura. Todos los esquemas que se presentan a lo largo de la tesis se proponen en forma continua, por esta razón es necesario manipular la señal de entrada del observador, traducida en el error de estimación. Para éste fin se utiliza la teoría de retención de señales, con el propósito de mantener continua la señal que se obtiene del sistema, se analiza el uso de retenedores de orden cero y de orden uno. De esta manera, a pesar de que la información disponible para entonar el observador es discreta, al usar los retenedores podemos introducir una señal continua para obtener el error de observación, es decir, la diferencia entre la señal estimada y la señal muestreada. Una vez solucionado el problema de la entrada de los observadores, es siguiente paso realizado, es demostrar la estabilidad de los esquemas de estimación a pesar de la falta de información consecuencia de las medidas discretas que se tienen en la salida del

sistema. Los de observación mencionados garantizan convergencia en tiempo finito a cero, sin embargo, al momento de tener un muestreo en el sistema, solo es posible probar convergencia en tiempo finito a una región, o una o bola, cuyo radio será estrictamente dependiente del periodo de muestreo. Para probar estabilidad se emplea los resultados recientes sobre funciones de Lyapunov de tipo fuerte desarrolladas en [1]. Finalmente, los resultados obtenidos se aplican en simulaciones al modelo de un péndulo simple, y se hace una extensión del AST para un caso vectorial, en donde se simula un robot manipulador de dos grados de libertad. Las simulaciones realizadas se obtienen para diferentes periodos de muestreo, para observar como la calidad de estimación se ve reducida si el periodo de muestreo aumenta.

La tesis se divide en 6 capítulos: En el primer capítulo se da una breve explicación del planteamiento del problema, incluyendo la justificación de la realización del presente trabajo, los objetivos y las principales contribuciones que se obtienen. En el segundo capítulo se explican los conceptos necesarios para entender el resultado principal de la tesis, incluyendo que son los modos deslizantes, como se manejan los sistemas muestreados y la teoría de estabilidad para sistemas no suaves. En el tercer capítulo se plantean los resultados principales de la tesis, el esquema de observación por MD de primer orden, los esquemas del AST clásico, y con término lineal, se realiza el análisis de estabilidad en términos de funciones de Lyapunov fuertes. En el penúltimo capítulo se describen los modelos usados para realizar las simulaciones y se presentan los resultados de éstas. El quinto capítulo muestra las conclusiones a las que se llegó con los resultados y finalmente el último capítulo es el apéndice de la tesis, donde detallan las pruebas de los teoremas realizados en el capítulo de diseño de los observadores.

Director de tesis: Dr. Leonid Fridman
Profesor Investigador, Facultad de Ingeniería, UNAM

Co-director de tesis: Dr. Jorge Isaac Chairez Oria
Profesor Investigador, Departamento de Bioprocesos, UPIBI - IPN

Índice general

1. Introducción	11
1.1. Justificación	13
1.2. Objetivos	14
1.2.1. Objetivos Generales	14
1.2.2. Objetivos Particulares	15
1.3. Contribuciones	16
2. Marco Teórico	19
2.1. Análisis de estabilidad para sistemas discontinuos	20
2.1.1. Análisis de estabilidad para sistemas no suaves	22
2.2. Estado del arte en la teoría de modos deslizantes	26
2.2.1. Modos deslizantes de segundo orden	27
2.2.2. Observadores por modos deslizantes	29
2.2.3. Control por Modos Deslizantes de alto orden	31
2.3. Teoría de Sistemas Muestreados	33
2.3.1. Teorema de Shanon	33
2.3.2. Retenedor de Orden Cero	34
2.3.3. Retenedor de orden uno	36
3. Diseño de Observadores por Modos Deslizantes	39
3.1. Observador para sistemas no lineales con salida muestreada por Modos Deslizantes de Primer Orden	40
3.1.1. Clase de Sistemas no Lineales a tratar	40

3.1.2.	Estructura del observador no lineal	42
3.2.	Observadores por Modos Deslizantes de segundo orden con salida muestreada . .	44
3.2.1.	Algoritmo de Super-twisting para caso escalar	45
3.2.2.	Algoritmo supertwisting para salida muestreada (extensión al caso vectorial)	50
3.3.	Observador por algoritmo de super-twisting con término lineal	55
4.	Resultados Numéricos	59
4.1.	Descripción de los modelos matemáticos	60
4.1.1.	Péndulo simple	60
4.1.2.	Modelo de un manipulador de dos grados de libertad	60
4.2.	Resultados de estimación para el péndulo simple empleando el retenedor de orden cero	61
4.2.1.	Análisis frecuencial para los diferentes tiempos de muestreo	62
4.2.2.	Comparación de los esquemas de estimación para los diferentes esquemas de observación	62
4.2.3.	Análisis del observador por Modos Deslizantes de primer orden (MDPO) para diferentes tiempos de muestreo	66
4.2.4.	Análisis del Observador por Modos Deslizantes de Segundo Orden (MD- SO) para diferentes tiempos de muestreo	67
4.2.5.	Análisis del Observador por MDSOL para diferentes tiempos de muestreo	71
4.3.	Resultados de estimación para el péndulo simple empleando el retenedor de orden uno	73
4.3.1.	Resultados de la implementación del ROU en el observador por MD de primer orden	77
4.3.2.	Resultados de la implementación del retenedor de ROU en el estimador por modos deslizantes de segundo orden	78
4.3.3.	Resultados de la implementación del retenedor de ROU en el estimador por modos deslizantes de segundo orden con término lineal	80
4.4.	Resultados de simulación para el caso vectorial	82
4.4.1.	Resultados empleando un retenedor de primer orden	84

5. Conclusiones	89
6. Apéndice	91

Índice de figuras

2-1. Trayectoria de un modo deslizante de segundo orden	28
2-2. Trayectorias del algoritmo Super-twisting	29
2-3. Diagrama de bloques de un Control continuo basado en la salida muestreada de un sistema lineal	32
2-4. Muestreo de una señal analógica	33
2-5. Reconstrucción de una señal por un retenedor de orden cero	34
2-6. Reconstrucción de la señal mediante un retenedor de orden uno	37
4-1. Péndulo Simple implementado en las simulaciones	60
4-2. Análisis frecuencial del modelo que describe la dinámica de un péndulo simple . .	62
4-3. Estimación de la posición del péndulo para los tres esquemas de observación propuestos: a) Modos deslizantes de primer orden (FOSM), b) Modos deslizantes de segundo orden (SOSM) y c) Modos deslizantes de segundo orden con término lineal (SOSML)	63
4-4. Acercamiento de las trayectorias de los esquemas de observación	64
4-5. Estimación de la velocidad angular en el modelo del péndulo simple. a) Modos deslizantes de primer orden (FOSM), b) Modos deslizantes de segundo orden (SOSM) y c) Modos deslizantes de segundo orden con término lineal (SOSML) . .	65
4-6. Acercamiento de las trayectorias de los esquemas de observación para el estado $x_{2,t}$	65
4-7. Resultados de simulación para el esquema por modos deslizantes de primer orden (FOSM) para diferentes tiempos de muestreo a) Posición del péndulo b) Velocidad del péndulo	66

4-8. Norma del error de estimación	67
4-9. Estimación de los parámetros del péndulo usando el AST para diferentes periodos de muestreo (0,1, , 0.01, 0,001 s) a) Posición del péndulo b) Velocidad del péndulo	68
4-10. Norma de los errores de estimación del observador por super twisting para periodos de muestreo de 0.1, 0.01 y 0.001	69
4-11. Acercamiento a la región de convergencia del error de estimación	69
4-12. Trayectorias de la función de Lyapunov para los periodos de muestreos usados en las simulaciones del péndulo.	70
4-13. Diagrama de fases del error de estimación para periodos de muestreo de 0.1 y 0.01 segundos	70
4-14. Diagrama de fases del error de estimación para periodos de muestreo de 0.1 y 0.001 segundos	71
4-15. Estimación de la velocidad del péndulo por Modos deslizantes de segundo orden con término lineal para periodos de muestreo de 0.1, 0.01 y 0.001. a) Posición del péndulo b) Velocidad del péndulo	72
4-16. Norma de los errores de estimación del observador por super twisting con término lineal para periodos de muestreo de 0.1, 0.01 y 0.001 segundos	72
4-17. Acercamiento a la zona de convergencia de la norma del error de observación $\ x_t\ $ para periodos de muestreo de 0.1, 0.01 y 0.001 segundos	73
4-18. Trayectorias de la función de Lyapunov para el observador por MDSOL a diferentes tiempos de muestreo.	74
4-19. Diagrama de fases del error de estimación para periodos de muestreo de 0.1 y 0.01 segundos	74
4-20. Diagrama de fases para periodos de muestreo de 0.1 y 0.001 segundos para el observador por MDSOL	75
4-21. Resultados de simulación muestreando la salida con un retedor de orden uno con un periodo de muestreo $T_s = 0,01$. a) Estimación de la posición del péndulo, b) Estimación de la velocidad del péndulo	76

4-22. Comparación del efecto del muestreo con un ZOH y un FOH con un periodo de muestreo de $T_s = 0,1s$ a) Estimación de la posición del péndulo, b) Estimación de la velocidad del péndulo	77
4-23. Comparación del índice de desempeño del observador por FOSM cuando la salida es muestreada a 0.1 s empleando un ZOH y FOH	78
4-24. Estimación de la posición y velocidad del modelo del péndulo usando MDSO y reconstruyendo la señal de salida en términos de un retenedor de orden uno para diferentes periodos de muestreo a) Estimación de la posición, b) Estimación de la velocidad	79
4-25. Norma del error de estimación usando el retenedor de orden uno	79
4-26. Acercamiento a las trayectorias de la norma del error de estimación para diferentes periodos de muestreo (ROU)	80
4-27. Trayectoria de la función de Lyapunov usando un ROU	81
4-28. Diagrama de fases del error de estimación para el péndulo usando MDSO para periodos de muestreo de 0.1 y 0.001 segundos	81
4-29. Comparación entre la zona de convergencia del error de estimación del péndulo usando MDSO y retenedores ROC y ROU	82
4-30. Estimación de los parámetros del péndulo usando un ROU a) Estimación de la posición. b) Estimación de la velocidad	83
4-31. Comparación de la norma del error para el observador por MDSOL, usando ROC y ROU	83
4-32. Simulación del robot manipulador de dos grados de libertad con periodos de muestreo de 0,001, 0,01 t 0,1s.a) Posición del primer eslabón b) Velocidad del primer eslabón c) Posición del segundo eslabón d) Velocidad del segundo eslabón	85
4-33. Norma del error de estimación para los periodos de muestreo utilizados.	86
4-34. Simulación del robot manipulador de dos grados de libertad usando un FOH y un ZOH. a) Posición del primer eslabón b) Velocidad del primer eslabón c) Posición del segundo eslabón d) Velocidad del segundo eslabón	87
4-35. Norma del error comparando el uso del retenedor de orden cero y el retenedor de orden uno	88

Capítulo 1

Introducción

La implementación en tiempo real de un esquema de estimación o de control conlleva necesariamente, una conversión entre los valores analógicos de las variables medibles a un valor digital para ser analizado dentro de sistemas computacionales.

En estos casos, existe una reducción en la cantidad y calidad de la información. Lo primero derivado de que no se cuenta con las variaciones de la salida en todo el tiempo y lo segundo, de que no se poseen los detalles que caracterizan a la señal medida. Se sabe bien que el diseño de observadores y su calidad de estimación dependen fuertemente de la riqueza de la información que la salida posea. Por lo mismo, es de esperarse que la eficiencia en el proceso de observación se vea reducida.

Una forma de atacar formalmente el problema de medición de la salida en períodos de tiempo fijos, es utilizando el concepto de muestreo y retención. Este esquema es muy utilizado en diseño de sistemas de control discretos que interactúan con plantas de naturaleza continua. Comúnmente se suelen emplear dispositivos conocidos como retenedores, los cuales son capaces de tomar los valores de la señal de salida y construir una versión continua de la señal dentro del periodo de muestreo siguiente.

En realidad no existen muchos trabajos que analicen el efecto del proceso de muestreo y retención antes mencionando sobre la calidad del problema de observación [2], [3]. Es por esto, que el presente trabajo pretende realizar un análisis de observación partiendo de la discretización (muestreo y retención) de la salida entendido como una posible consecuencia de una conversión analógica - digital.

Los trabajos desarrollados en esta área de estimación de estados han sido enfocados principalmente al uso de sistemas continuos estrictamente. Los desarrollos basados en la llamada Teoría de Modos Deslizantes (TMD) han ofrecido soluciones difícilmente alcanzables por los observadores tipo Luenberger por ejemplo.

Los modos deslizantes (MD) han sido considerados un tema de interés en varias investigaciones en las últimas décadas (ver los trabajos publicados por [4], [5], [6] y las referencias que contienen). Algunas características que presentan son el control y estimación de sistemas con incertidumbres paramétricas y convergencia en tiempo finito, entre otras. [7], [8]. En la mayoría de los casos, los modos deslizantes son obtenidos induciendo un término de discontinuidad dependiente del error (tanto en el problema de observación como en el de control). Esta inyección de discontinuidad es diseñada de tal forma que las trayectorias del sistema sean forzadas a permanecer en la superficie del espacio del error de seguimiento y/u observación. Este movimiento es referido como el modo deslizante [9]. El término de discontinuidad es el encargado de rechazar perturbaciones [10], [11], [12]. Nuevos resultados han sido desarrollados basados en los llamados modos deslizantes de segundo orden. Para aplicar este tipo de sistemas es necesario que la superficie evaluada sobre las trayectorias del sistema bajo estudio tenga grado relativo bien definido. Incluso, el empleo de funciones de Lyapunov se ha generalizado para obtener criterios de convergencia tanto en el diseño de controladores como de observadores. Todo esto hace de los observadores diseñados con base en la TMD una de las mejores opciones para resolver problemas de estimación de estados con alta confiabilidad en situaciones prácticas.

La aplicación en plantas reales de este tipo de observadores nuevamente implica el uso de retenedores, lo cual es relativamente difícil considerando la naturaleza de los sistemas que usan funciones discontinuas en su diseño (como es el caso de los observadores basados en la TMD). Empleando técnicas como los Modos Deslizantes de primer y segundo orden (MDPO y MDSO respectivamente) y el segundo método de Lyapunov, es posible probar la convergencia de los estimadores de estado, a pesar de no contar con la salida durante todos los instantes de tiempo.

Un entendimiento claro del efecto del proceso de muestreo y retención sobre la calidad de la estimación de estados, permitirá obtener de manera cuantitativa el tamaño de la región alrededor del origen donde el error de observación se ubicará. Más aún, se debe entender que, como el período de muestreo afecta la calidad mencionada, este parámetro deberá ser seleccionado

considerando las condiciones de la señal, específicamente el tamaño del ancho de banda de la salida del sistema. Un aspecto más que debe clarificarse es como el período de muestreo influye en la pérdida de la convergencia total al origen no importando el uso de esquemas discontinuos.

Las características antes mencionadas deberán poderse analizar no importando que se trate de observadores que empleen los llamados modos deslizantes de orden uno o bien de alto orden.

1.1. Justificación

Uno de los objetivos principales que se busca en el desarrollo de métodos de estimación o control es la implementación de la teoría desarrollada en sistemas físicos en tiempo real. Al momento de implementar un algoritmo, ya sea de observación o de control es necesario contar con los sensores necesarios para poder obtener el valor de las salidas del sistema, en muchos de estos casos solo podemos tener acceso parcial a todo el vector de estados. La respuesta de los sensores debe ser rápida, de lo contrario la eficiencia en el proceso de estimación o control se puede ver afectado.

Aunado a lo anterior, el tiempo en realizar una conversión analógica digital (CAD) necesaria para que los algoritmos que se proponen sean evaluados numéricamente dentro de una computadora o algún circuito programable digital, contribuye de igual manera como un factor en la calidad de respuesta de los algoritmos de observación. Esto se suele complementar con sistemas de muestreo y retención de las señales.

Partiendo de estos aspectos, la implementación en tiempo real de observadores de estado o controladores, lleva naturalmente a la presencia de sistemas continuos, a cuya salida solo se puede tener acceso a través de sensores que pasan por una CAD, o en otras palabras se tiene una salida muestreada (por el tiempo que se tiene que esperar entre dos conversiones consecutivas).

Refiriéndonos al caso de observación, como ya se ha mencionado, muchos esquemas han sido propuestos basados en la teoría de modos deslizantes, por sus diferentes características de robustez y convergencia en tiempo finito entre otras. Dentro de estos algoritmos de observación se pueden encontrar versiones para tiempo continuo ([11], [12], [13]) y para tiempo discreto ([13], [14], [15]). Estos últimos se obtienen generalmente a partir de una discretización del observador continuo.

El diseño de observadores que empleen señales muestreadas para su ajuste no se ha sido abordado ampliamente por diversos factores (complejidad en la combinación de algoritmos continuos con señales discretas, métodos de tratamiento del problema de convergencia, etc). Si bien, hay algunos trabajos desarrollados en el área de observadores tipo Luenberger, es necesario entender que no es posible generalizar tales resultados a otra clase de observadores como los de alta ganancia o los observadores discontinuos que se basan en la TMD.

En el presente trabajo de tesis se busca realizar el estudio de esta clase de observadores, de manera que se pueda analizar el comportamiento de estos estimadores de estados interpretando como una incertidumbre la falta de información respecto a la variación de la salida en el tiempo. Si bien, existen métodos de diversa naturaleza para demostrar la convergencia de los algoritmos basados en modos deslizantes, sería muy complicado tratar de utilizar criterios de tipo geométrico para obtener las regiones de convergencia dependientes del proceso de retención [11], [13]. Recientemente se han propuesto funciones de Lyapunov para el análisis de la convergencia del algoritmo por modos deslizantes de segundo orden (MDSO) denominado super-twisting [1]. Basándose en estas funciones de Lyapunov, es posible extender el análisis al caso de un observador continuo cuya salida solo está disponible en instantes específicos a lo largo del tiempo. En realidad, el uso de tales funciones de Lyapunov representarían una contribución en la implementación de los algoritmos de modos deslizantes. En el contexto del problema de observación, se debe establecer que no se puede considerar el uso de funciones discontinuas que en teoría, deberían oscilar con frecuencia infinita, si este es implementado en un sistema electrónico. Por lo tanto, la propuesta de esta tesis estará enfocada a resolver el problema de observación con funciones discontinuas (modos deslizantes de primer y segundo orden) cuando la salida está muestreada y retenida, usando el concepto de funciones de Lyapunov y el método derivado de ellas.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivos Generales

- Diseñar un estimador de estado empleando la teoría de modos deslizantes para sistemas no lineales continuos con salida muestreada a partir de retenedores de orden cero y orden

uno.

- Analizar el efecto del período de muestreo sobre la calidad del proceso de observación para un estimador de estados empleando la teoría de modos deslizantes convencionales (primer orden) para sistemas no lineales continuos con salida muestreada a partir de retenedores de orden cero y orden uno.
- Analizar el efecto del período de muestreo sobre la calidad del proceso de observación para un estimador de estados empleando la teoría de modos deslizantes de alto orden (super-twisting) para sistemas no lineales continuos con salida muestreada a partir de retenedores de orden cero y orden uno.
- Extender el uso de la técnica de funciones de Lyapunov para el análisis de regiones de convergencia del proceso de observación basado en la técnica de modos deslizantes cuando la información de la salida es muestreada.

1.2.2. Objetivos Particulares

- Revisar la teoría general de retenedores de señal (Retenedores de orden cero) y encontrar la cotá máxima del error entre la salida real y la salida muestreada.
- Revisar el diseño de observadores por Modos Deslizantes de Primer orden y diseñar un observador de estado para sistemas no lineales continuos con salida muestreada.
- Revisar los resultados existentes de la teoría de Lyapunov por funciones fuertes, aplicada a las pruebas de convergencia del algoritmo de supertwisting.
- Analizar el observador por modos deslizantes de segundo orden basado en el algoritmo de super-twisting cuando la salida del sistema es muestreada. Implementar un retenedor de orden cero para mantener la señal de salida continua e inyectarla como término de error en el algoritmo de estimación.
- Extender al caso MIMO el problema anterior.
- Analizar un observador por modos deslizantes de segundo orden basado en el algoritmo de super-twisting agregando un término lineal en su estructura para sistemas no lineales

con salida muestreada. Implementar un retenedor de orden cero para mantener la señal de salida continua e inyectarla dentro del término de corrección del observador.

- Probar diferentes observadores estimados con retenedores de señal de orden 1.
- Aplicar los observadores propuestos a modelos mecánicos para obtener resultados numéricos por simulación
 - Modelo matemático de un péndulo simple
 - Modelo matemático de un robot manipulador de dos grados de libertad
- Analizar los resultados obtenidos y brindar las conclusiones pertinentes

1.3. Contribuciones

El presente trabajo de tesis desarrolló el análisis de observadores basado en modos deslizantes cuando se tienen incertidumbres en la medición, consecuencia de no tener acceso al vector de salida del sistema en todos los instantes de tiempo. El análisis de convergencia se realiza mediante el segundo método de Lyapunov. Este es uno de los primeros trabajos en este sentido, dado que existen solo algunos resultados previos concretos para la teoría de modos deslizantes en el campo de trabajo de esta tesis. En realidad, se tienen esquemas de observación para sistemas discretos y para sistemas continuos solamente por separado. Esta clase de sistemas busca apearse más a casos reales cuando se quiere implementar en tiempo real los esquemas de observación que serán estudiados.

Al momento de tener en la dinámica del observador un muestreo, la salida que se obtendrá será discreta, por lo que es necesario aplicar alguna función que nos permita mantenerla continua, de tal manera que sea implementada en los esquemas propuestos de observación en tiempo continuo. Se proponen dos dinámicas para retención de la señal en cada instante de muestreo. Primero se hace un estudio de la dinámica de un retenedor de orden cero. De hecho, se obtiene el valor máximo posible del error entre las trayectorias de la salida original del sistema con la trayectoria de la salida usando la dinámica de un retenedor de orden cero, cuya función básica consiste en mantener la señal constante del último valor adquirido en el muestreo de la señal.

La segunda dinámica estudiada concierne al retenedor de orden uno, de la misma manera se tiene la máxima cota posible entre la salida real del sistema y la salida muestreada. A diferencia del retenedor de orden cero, este hace una aproximación de la señal real a través de una línea recta entre dos instantes de medición consecutivos.

Como primer caso de estudio se presenta la **propuesta** de un observador por modos deslizantes de primer orden para sistemas no lineales. Se demuestra que dadas las características del muestreo de la señal, no es posible obtener convergencia en tiempo finito a la trayectoria donde el error es igual a cero. Por lo tanto, usando el segundo método de Lyapunov se demuestra para este esquema, convergencia en tiempo finito a una región B_δ con δ definido como el radio de la bola. En realidad, se obtuvo la cota para el error de estimación empleando las funciones de Lyapunov mencionadas. Se logró demostrar que el radio de B_δ depende del periodo de muestreo con el que se obtenga la señal de salida del sistema. Para la correcta implementación de los diferentes esquemas propuestos y analizados, se asume que la salida y el periodo de muestreo satisfacen el teorema de Shannon [16], lo que permite obtener la cota máxima de la región donde converge el error de estimación.

Tomando como base el observador basado en los modos deslizantes de segundo orden (algoritmo de super-twisting) propuesto en [13], se implementa el esquema de mediciones discretas en la estructura continua del algoritmo. Teniendo como antecedentes los trabajos recientes en estabilidad del algoritmo de super twisting basados en la teoría de Lyapunov [1], se prueba convergencia en tiempo finito a una región aplicando funciones de Lyapunov de tipo fuerte. A partir de este análisis, se obtiene la cota para el error de estimación, de la misma forma se demuestra la amplitud de la región de convergencia B_δ , que es dependiente del periodo de muestreo. Siguiendo el mismo caso de estudio, se añade a la estructura clásica de super-twisting un término lineal para observar el comportamiento de las dinámicas del estimador, se observa que la región de convergencia es similar, pero la convergencia es mas rápida por el término lineal. La cota para la zona de convergencia B_δ es calculada. Siguiendo el trabajo desarrollado en [11] se hace la extensión del algoritmo de super twisting al caso de sistemas no lineales mecánicos con $2n$ ecuaciones diferenciales en su dinámica, se analizan sus condiciones de convergencia y se estima la zona a la cual llegará la trayectoria del error.

Finalmente, se aplican los algoritmos estudiados en dos modelos mecánicos, el primero un

péndulo simple para un sistema mecánico de dos estados, y un robot manipulador de dos grados de libertad. Se realizaron simulaciones para diferentes periodos de muestreo y se compararon cada una de las dinámicas de retención de las señales propuestas.

Capítulo 2

Marco Teórico

Las herramientas básicas necesarias para entender los resultados obtenidos en esta tesis, se plantean en el presente capítulo, en primera instancia se da una introducción al análisis de sistemas discontinuos mediante la propuesta de una función de Lyapunov no suave, es decir, que su derivada no existe durante todo el tiempo, para este análisis es importante entender los conceptos de gradiente generalizado, y el subdiferencial proximal. Ambos conceptos son necesarios para establecer conclusiones de estabilidad sobre la derivada de la función de Lyapunov. Posteriormente se plantean los fundamentos básicos en la teoría de MD (de primer y segundo orden), y los resultados existentes que servirán de base para la resolución del problema de observación para sistemas no lineales con salida muestreada. Una vez que se tiene el valor de la salida en determinados instantes de tiempo producto del muestreo de la señal, es necesario reconstruir la señal para que sea introducida en la dinámica del observador y este pueda ser entonado. Como se ha mencionado, para la reconstrucción de la señal, se hace uso de retenedores de señal, el retenedor de orden cero (ROC) y el retenedor de orden uno (ROU), la calidad de la estimación dependerá del periodo de muestreo elegido y del error entre la señal real y la señal reconstruida, por esta razón, es importante obtener como cambia este error y obtener su valor máximo durante cada periodo de muestreo, este resultado se explica la sección final de este capítulo.

2.1. Análisis de estabilidad para sistemas discontinuos

La solución de sistemas representados en ecuaciones diferenciales que tienen algún tipo de discontinuidad en su estructura puede ser obtenida en términos de Carathéodory [17] si la discontinuidad se da en el tiempo o en términos de Filippov [18] si la discontinuidad está presente en el tiempo y en las trayectorias del sistema. Para tener un mejor entendimiento en el resultado matemático que se plantea en el desarrollo de ésta tesis, se realizará una breve introducción al análisis de estabilidad para sistemas discontinuos.

Gradiente generalizado

El teorema de Rademacher [19] plantea que toda función que es localmente Lipschitz es diferenciable casi en todo lugar, en el sentido de una medición de Lebesgue. El principal problema radica en como poder analizar estos puntos en los que la función no es diferenciable. En estos casos la información que el gradiente generalizado puede dar es de gran ayuda. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz, y sea $\Omega_f \subset \mathbb{R}^d$ el conjunto de todos los puntos donde f no es diferenciable. El *gradiente generalizado* $\partial f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ de f es definido como

$$\partial f(x) \triangleq \text{co} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin S \cup \Omega_f \right\}$$

donde co denota el casco convexo. En esta definición $S \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto de medida cero que puede ser arbitrariamente escogido para simplificar los cálculos. El conjunto resultante $\partial f(x)$ es independiente de como fue escogido S . El gradiente generalizado de f en x consiste de todas las combinaciones convexas de todos los posibles límites del gradiente en vecindades cercanas en puntos donde f es diferenciable.

Algunas propiedades importantes del gradiente se puntualizan en el siguiente resultado.

Proposición 1 *Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz en un punto $x \in \mathbb{R}^d$, entonces las siguientes declaraciones son ciertas:*

- i) $\partial f(x)$ es un conjunto no vacío, compacto y convexo.*
- ii) El conjunto valuado del mapa $\partial f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$, $x \mapsto \partial f(x)$ es semicontinuo por arriba y localmente acotado en x .*

iii) Si f es continuamente diferenciable en x , entonces $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Algunas formas de calcular el gradiente y formas de simplificar su obtención pueden ser revisadas más a detalle en [20]. Con la siguiente definición se obtiene el significado de máximos y mínimos resultantes del cálculo del gradiente de una función, pero ahora en términos del gradiente generalizado. Sea $\text{Ln}: \mathfrak{S} : (\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ el conjunto valuado del mapeo que asocia a cada subconjunto S de \mathbb{R}^d el conjunto de los elementos con menor norma de su cerradura \bar{S} . Si el conjunto S es convexo y acotado, entonces el conjunto $\text{Ln}(S)$ tiene un solo elemento, que consiste en la proyección ortogonal de cero en S . Para una función localmente Lipschitz f , considere el *campo vectorial del gradiente generalizado* $\text{Ln}: \mathfrak{S} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}\mathbb{R}^d$ definido como

$$x \mapsto \text{Ln}(\partial f)(x) \triangleq \text{Ln}(\partial f)$$

entonces $-\text{Ln}(\partial f)$ implica que el punto $x \in \mathbb{R}^d$ en la función f está en dirección descendente. Más precisamente si $0 \notin \partial f(x)$, entonces existe un $T > 0$ tal que

$$f(x - t\text{Ln}(\partial f)(x)) \leq f(x) - \frac{t}{2} \|\text{Ln}(\partial f)(x)\|_2^2 < f(x)$$

esto significa, que si tomamos un pequeño paso en la dirección de $-\text{Ln}(\partial f)(x)$, es posible garantizar que la función f decrece por un valor que crece linealmente con el tamaño del paso escogido.

Sufdiferencial proximal de una función semicontinua inferior

Una herramienta complementaria para el análisis no suave usando funciones de Lyapunov se centra en el concepto del subdiferencial proximal. Éste concepto tiene la ventaja de estar definido para una clase de funciones semicontinuas inferiores, conjunto que es más grande que las funciones que son localmente Lipschitz.

Una función es *semicontinua inferior* [21] en el punto $x \in \mathbb{R}^d$ si, para todo $\varepsilon \in (0, \infty)$, existe un $\delta \in (0, \infty)$ tal que, para $y \in B(x, \delta)$, $f(y) \geq f(x) - \varepsilon$. El epigrama de f es el conjunto de todos los puntos que se encuentran sobre o arriba de esta gráfica, esto significa que, $\text{epi}(f) = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : f(x) \leq \mu\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$. La función es semicontinua inferior si y solo si

su epígrafo es cerrado. La función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua superior en el punto $x \in \mathbb{R}^d$ si $-f$ es semicontinua inferior en x .

Para una función semicontinua inferior $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, el vector $\zeta \in \mathbb{R}^d$ es un *subgradiente proximal* de f en el punto $x \in \mathbb{R}^d$ si existe $\sigma, \delta \in (0, \infty)$ tal que, para todo $y \in B(x, \delta)$,

$$f(y) \geq f(x) + \zeta(x - y) - \sigma^2 \|y - x\|_2^2$$

El conjunto $\partial_p f(x)$ de todos los subgradientes proximales de f en x es denominado *subdiferencial proximal* de f en x . El subdiferencial proximal en x , puede ser vacío, convexo pero no necesariamente abierto, cerrado o acotado.

2.1.1. Análisis de estabilidad para sistemas no suaves

Considere la inclusión diferencial invariante en el tiempo

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \tag{2.1}$$

donde $F : (\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$, se asume que la inclusión tiene solución y satisface la hipótesis de solución en el sentido de Carathéodory. Se pueden tomar las soluciones en el sentido de Filippov tomando. Es importante recalcar que las soluciones de un sistema discontinuo son no necesariamente únicas. A lo largo de esta sección se definirán las soluciones de estabilidad en sentido débil y fuerte, para este fin es necesario introducir los siguientes conceptos.

Análisis de estabilidad en términos del Gradiente Generalizado de una Función de Lyapunov no suave

Dada una función localmente Lipschitz $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, y un conjunto valuado en el mapa $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$, el *conjunto valuado de derivadas de Lie* $\bar{L}_F f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ de f con respecto a F en x es definido como

$$\bar{L}_F f(x) = \{a \in \mathbb{R} : \text{existe } v \in F(x) \text{ tal que } \zeta^T v = a \text{ para todo } \zeta \in \partial f(x)\}$$

Si F toma valores convexos y compactos, entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^d$, $\bar{L}_F f(x)$ es un intervalo cerrado y acotado en \mathbb{R} , posiblemente vacío. Si f es continuamente diferenciable en x , entonces

$$\bar{L}_F f(x) = \left\{ \nabla f(x)^T v : v \in F(x) \right\}$$

Usar el conjunto valuado de derivadas de Lie nos permite estudiar como f evoluciona a través de la inclusión diferencial, sin necesidad de obtener explícitamente las soluciones. Considere el siguiente resultado [22]:

Proposición 2 *Sea $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ sea una solución de la inclusión diferencial 2.1, y sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Lipschitz y regular. Entonces, los siguientes puntos son válidos*

- i) *La composición $t \mapsto f(x(t))$ es diferenciable casi en todo $t \in [0, t_1]$.*
- ii) *La derivada de $t \mapsto f(x(t))$ satisface $\frac{d}{dt}(f(x(t))) \in \bar{L}_F f(x)$ para casi todo $t \in [0, t_1]$*

Usando los resultados anteriores es posible definir un criterio de estabilidad para esta clase de sistemas usando funciones de Lyapunov discontinuas.

Resultados de Estabilidad

La prosoción anterior, permite establecer un criterio para el comportamiento monotónico de una función localmente Lipschitz a lo largo de las soluciones de una dinámica discontinua. Éste resultado conjuntamente con la apropiada definición de una función positiva definida (característica necesaria para establecer una función de Lyapunov) nos permite dar algunas pruebas de estabilidad para este tipo de dinámicas.

Teorema 3 *Sea un conjunto valuado en un mapa que satisface la hipótesis de soluciones en el sentido de Carathedory , sea x_e un punto de equilibrio de la inclusión diferencial (2.1), y sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y conectado con $x_e \in D$. Más aún, sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que las siguientes condiciones se cumplan:*

- i) *f es localmente Lipschitz y regular en D .*
- ii) *$f(x_e) = 0$, y $f(x) > 0$ para $x \in D \setminus \{x_e\}$.*

iii) $\max(\bar{L}_F f(x)) \leq 0$ para cada $x \in D$

Entonces, x_e es un punto de equilibrio fuertemente estable de (2.1). Si adicionalmente, iii) es sustituida por

iii') $\max(\bar{L}_F f(x)) \leq 0$ para cada $x \in D \setminus \{x_e\}$,

entonces x_e es un punto de equilibrio fuerte y asintóticamente estable de (2.1).

Otro resultado útil en la teoría de ecuaciones diferenciales es el principio de invarianza. Éste resultado permite determinar propiedades de convergencia asintótica de ecuaciones diferenciales. Ahora se presenta una generalización para ecuaciones diferenciales discontinuas. Considere el siguiente resultado para analizar el conjunto invariante al cual las trayectorias de un sistema discontinuo puede converger.

Teorema 4 Sea $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ un conjunto de un mapa valuado que satisfacen la hipótesis de solución en sentido de Carathéodory, y sea una función regular y localmente Lipschitz. Sea $S \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto y fuertemente invariante para (2.1), y asuma que $\max(\bar{L}_F f(x)) \leq 0$ para cada $y \in S$. Entonces, todas las soluciones definidas como $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ de (2.1) que empiezan en S convergen al conjunto mas grande débilmente invariante conjunto M contenido en

$$S \cap \{y \in \mathbb{R}^d : 0 \in \overline{\bar{L}_F f(y)}\}$$

Resultados de estabilidad empleando funciones de Lyapunov no suaves en términos del sutfdiferencial próximo

En este apartado se describe el análisis de estabilidad para una inclusión diferencial usando una función semicontinua inferior como candidata de Lyapunov. Y se hace empleo del sutfdiferencial proximal para concluir sobre los aspectos de estabilidad. Considere las siguientes definiciones sobre la derivada de Lie y su monotonicidad

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y conectado. Una función semicontinua inferior $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es débilmente no creciente en D en un conjunto valuado en un mapa $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ si, para toda $y \in D$, existe una solución $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de la inclusión diferencial (2.1) que comienza

en y y contenida en D que satisface

$$\begin{aligned} f(x(t)) &\leq f(x(0)) \\ &= f(y) \quad \text{para todo } t \in [0, t_1] \end{aligned}$$

Una función semicontinua inferior $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es *fuertemente no creciente* en D para un conjunto valuado en el mapa $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ si, para todo $y \in D$, todas las soluciones $x : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ de la inclusión diferencial (2.1) que empiezan en y y contenidas en D satisfacen

$$\begin{aligned} f(x(t)) &\leq f(x(0)) \\ &= f(y) \quad \text{para todo } t \in [0, t_1] \end{aligned}$$

Considere un conjunto valuado en el mapa $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ que toma valores no vacíos y compactos, y la función semicontinua inferior $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, la *derivada de Lie superior e inferior* $\bar{L}_F f, \underline{L}_F f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ de f con respecto a F en y están definidas respectivamente como

$$\begin{aligned} \underline{L}_F f(y) &\triangleq \{a \in \mathbb{R} : \text{existe } \zeta \in \partial_p f(y) \text{ tal que } a = \min \{\zeta^T v : v \in F(y)\}\} \\ \bar{L}_F f(y) &\triangleq \{a \in \mathbb{R} : \text{existe } \zeta \in \partial_p f(y) \text{ tal que } a = \max \{\zeta^T v : v \in F(y)\}\} \end{aligned}$$

Proposición 5 *Sea $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ un conjunto valuado en un mapa que satisface la hipótesis de soluciones en el sentido de Carathéodory, y considere la inclusión diferencial asociada(2.1). Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua inferior, y sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas*

i) *La función f es débilmente no creciente en D si y solo si*

$$\sup \underline{L}_F f(y) \leq 0 \quad \text{para todo } y \in D$$

ii) *Si en adición, se satisface que F sea localmente Lipschitz en D , o F es continua en D y f es fuertemente no creciente en D si y solo si*

$$\sup \bar{L}_F f(y) \leq 0 \quad \text{para todo } y \in D$$

Resultados de estabilidad

Considere el siguiente resultado descrito en [20]

Teorema 6 Sea $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^d)$ un conjunto valuado en un mapa que satisface la hipótesis de soluciones en el sentido de Carathéodory. Sea x_e una región de equilibrio de la inclusión diferencial (2.1), y sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un dominio con $x_e \in D$. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y asuma que las siguientes afirmaciones se satisfacen

- i) F es continua en D y f es localmente Lipschitz en D , o F es localmente Lipschitz en D y f es semicontinua inferior en D y f es continua en x_e .
- ii) $f(x_e) = 0$, y $f(x) > 0$ para $x \in D \setminus \{x_e\}$.
- iii) $\sup \bar{L}_F f(y) \leq 0$ para todo $x \in D$.

Entonces, x_e es un equilibrio fuertemente estable de (2.1).

- iii)' $\sup \bar{L}_F f(y) \leq 0$ para todo $x \in D \setminus \{x_e\}$

Entonces, x_e es un equilibrio fuerte y asintóticamente estable de la inclusión diferencial (2.1).

Los resultados anteriores son extendibles al uso de soluciones de la inclusión diferencial definida en (2.1) hablando en el sentido de Filippov.

2.2. Estado del arte en la teoría de modos deslizantes

Los sistemas con modos deslizantes han demostrado su capacidad para ser una herramienta eficiente en el diseño de controladores de alto orden de plantas dinámicas no lineales que operan bajo condiciones inciertas, un proceso común para muchos ejemplos de tecnología moderna. Esto explica el alto nivel de la actividad de publicación e investigación en el área de sistemas con estructura variable [9], [23]. Los sistemas con estructura variable son una clase de sistemas en los que la ley de control cambia deliberadamente durante la dinámica del sistema bajo una regla específica. La teoría de modos deslizantes puede ser presentada como la aplicación de una señal de control conmutado a alta frecuencia (teóricamente infinita) que consigue llevar al sistema a una superficie $\sigma = 0$ denominada superficie de deslizamiento y una vez que la

alcanza, el objetivo es mantener al sistema en la superficie a pesar de perturbaciones que tenga el sistema. La principal ventaja de la teoría de modos deslizantes es la robustez ante perturbaciones, tanto externas como internas, cuando estas tienen cotas conocidas, otra ventaja es la reducción del orden del sistema. Algunas desventajas que tiene esta técnica de modos deslizantes están relacionadas con el grado relativo del sistema, que puede definirse como el número de veces que hay que derivar la función que describe la superficie de deslizamiento σ para que la acción de control aparezca explícitamente. En el caso de las aplicaciones en modos deslizantes convencionales este debe ser uno. La segunda desventaja es el efecto de *chattering* provocado por la conmutación a alta frecuencias de la señal de control. Los modos deslizantes han sido ampliamente aplicados en problemas de observación y control [12], [24], [25], [26] por las características que ya se han mencionado.

2.2.1. Modos deslizantes de segundo orden

Algunas desventajas de los modos deslizantes de primer orden son referidas al *chattering* que ya ha sido estudiado en [8]. Algunas de las herramientas usadas para evitar o reducir este efecto consisten en disminuir la discontinuidad del control cambiando la función signo por la función saturación. El uso de la función de saturación permite disminuir la amplitud del *chattering*. Sin embargo, las características de robustez son parcialmente perdidas. Los modos deslizantes de alto orden (MDAO) constituyen una herramienta para poder trabajar con éstas desventajas. Considere un sistema dinámico con una función suave de salida σ , sea el sistema estabilizado por una retroalimentación discontinua. Las derivadas de la superficie, $\dot{\sigma}$, $\ddot{\sigma}$, ..., $\sigma^{(r-1)}$ son funciones continuas de las variables de estado del sistema no lineal retroalimentado, y el conjunto

$$\dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (2.2)$$

es no vacío y se compone de las trayectorias en el sentido de Filippov [18]. El movimiento en el conjunto $\dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ se denomina un modo deslizante de orden r [27]. La r -ésima derivada de la función σ es discontinua. Para el caso de orden dos, el movimiento que satisface la ecuación (2.2) se describe en la Figura (2-1). La principal dificultad para implementar un modo deslizante de segundo orden es la necesidad de usar la primera derivada de la salida, lo

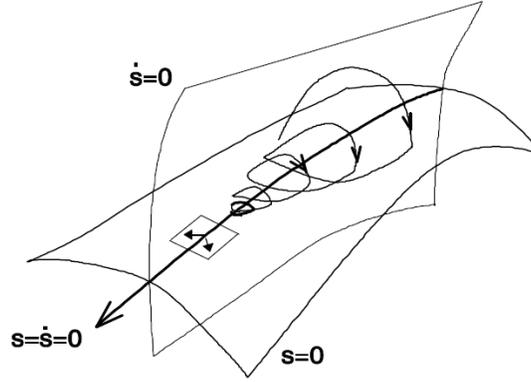


Figura 2-1: Trayectoria de un modo deslizante de segundo orden

cual puede causar cierta sensibilidad a ruidos en la señal. Dentro de los esquemas por modos deslizantes de segundo orden, el denominado algoritmo de segundo orden super-twisting ha sido ampliamente estudiado ([13], [28] entre otros) dado que, a pesar de ser un esquema de alto orden por modos deslizantes no necesita la primera derivada de la salida. Este algoritmo fue específicamente diseñado para sistemas con grado relativo uno con respecto a la variable de deslizamiento, esto se debe a que el algoritmo esta compuesto por un estado integral.

El algoritmo de supertwisting está definido como

$$u_t = u_{1,t} + u_{2,t}$$

con

$$\dot{u}_{1,t} = \begin{cases} -u & si \quad |u| > 1 \\ -\alpha \text{sign}(s) & si \quad |u| \leq 1 \end{cases}$$

$$u_{2,t} = \begin{cases} -\lambda |s_0|^p \text{sign}(s) & si \quad |s| > |s_0| \\ -\lambda |s|^p \text{sign}(s) & si \quad |s| \leq |s_0| \end{cases}$$

Las trayectorias del algoritmo super twisting se describen en la Figura (2-2).

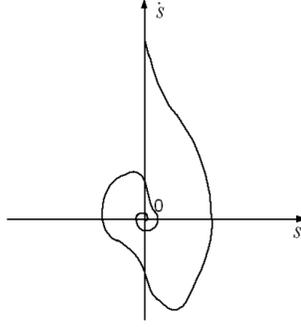


Figura 2-2: Trayectorias del algoritmo Super-twisting

2.2.2. Observadores por modos deslizantes

Para el diseño de observadores, la superficie de deslizamiento es el error dado por el estado real del sistema y el estado estimado del observador. Dentro de la literatura, existe una gran variedad de observadores usando la teoría de estructura variable. En [13] se propone un observador basado en el algoritmo de super twisting con la siguiente estructura

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}_1 &= \hat{x}_2 + z_1 \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_2 &= f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + z_2\end{aligned}$$

donde x_1 y x_2 son los estados estimados, y las variables de corrección z_1 y z_2 son inyecciones de la salida en la forma

$$\begin{aligned}z_1 &= \lambda |x_1 - \hat{x}_1|^{1/2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ z_2 &= \alpha \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)\end{aligned}$$

y su convergencia es probada en términos de curvas mayorantes. Realizando una discretización del esquema por el método de Euler, es posible extender el resultado para tiempo discreto

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1,t_{i+1}} &= \hat{x}_{1,t_i} + \left(\hat{x}_{2,t_i} + \lambda |x_{1,t_i} - \hat{x}_{1,t_i}|^{1/2} \text{sign}(x_{1,t_i} - \hat{x}_{1,t_i}) \right) \delta \\ \hat{x}_{2,t_{i+1}} &= \hat{x}_{2,t_i} + (f(t_i, x_{1,t_i}, \hat{x}_{2,t_i}, u_{t_i}) + \alpha \text{sign}(x_{1,t_i} - \hat{x}_{1,t_i})) \delta\end{aligned}\tag{2.3}$$

con δ como el periodo de muestreo. Reteniendo la derivada en el punto en que se esta tomando la salida (en cada instante de muestreo) es posible escribir el observador de la ecuación (2.3) en

forma continua como:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}_1 &= \hat{x}_{2,t_i} + \lambda |x_{1,t_i} - \hat{x}_{1,t_i}|^{1/2} \text{sign}(x_{1,t_i} - \hat{x}_{1,t_i}) \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_2 &= f(t_i, x_{1,t_i}, \hat{x}_{2,t_i}, u_{t_i}) + \alpha \text{sign}(x_{1,t_i} - \hat{x}_{1,t_i})\end{aligned}$$

Con este observador se logra establecer una cota para el error de estimación de

$$\begin{aligned}|\tilde{x}_1| &\leq \gamma_1 \delta^2 \\ |\tilde{x}_2| &\leq \gamma_2 \delta \\ \gamma > 0, \quad \delta &\text{ es el periodo de muestreo}\end{aligned}$$

Este esquema de observación es el que más se aproxima a la forma en la que se esta reconstruye la señal muestreada en este trabajo, principalmente en el uso de un retenedor de orden uno, análisis que se muestra en la sección siguiente. En la misma línea de investigación se presenta un análisis del caso vectorial para sistemas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,t} &= x_{n+i,t} \\ \dot{x}_{n+i,t} &= f_i(x_t, u_t) + \xi_{i,t} \\ y_{i,t} &= x_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

en los trabajos publicados en [11], añadiendo la ventaja de poder identificar perturbaciones. Este esquema será retomado en secciones posteriores para el diseño de algoritmos de estimación para sistemas 2n dimensionales con salida discreta.

Hasta este punto, la estabilidad referente a sistemas con modos deslizantes de alto orden, en especial los de segundo orden como el algoritmo de super twisting ha sido demostrada por criterios geométricos. Sin embargo en [1] y [29], se presenta una nueva aproximación para mostrar convergencia en tiempo finito en términos del segundo método de Lyapunov, donde se presenta una función con la siguiente estructura

$$V(x) = 2k_3 |x_1| + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2} \left(k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) - x_2 \right)^2$$

Donde $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}$, $V(\cdot) \geq 0$, $V(\cdot) \in C^1$ y $k_1, k_3 > 0$. Esta expresión puede ser rescrita en forma

simplificada como

$$V_t(x) = \xi(x)^\top P \xi(x)$$

donde el vector $\xi \in \mathfrak{R}^2$ se define como

$$\xi^\top = \left[|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) \quad x_2 \right]$$

y la matriz $P \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ está constituida por los siguientes elementos

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4k_3 + k_1^2 & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix}$$

A través del uso de esta función de Lyapunov, se ha logrado demostrar convergencia en tiempo finito para el algoritmo de supertwisting a través el siguiente resultado.

$$\dot{V}_t \leq -\gamma V_t^{1/2}$$

El tiempo de convergencia en el que el esquema de estimación alcanza la superficie de deslizamiento es

$$T = \frac{2V_0^{1/2}}{\gamma}$$

En el mismo trabajo se presenta una modificación al algoritmo de super twisting agregando un término lineal en su estructura. Este mismo algoritmo será empleado en el análisis de los esquemas de super twisting para sistemas con salida muestreada. La convergencia en tiempo finito es determinada en términos del segundo método de Lyapunov.

2.2.3. Control por Modos Deslizantes de alto orden

Partiendo de la propuesta de tesis para tratar con sistemas continuos con salida discreta, es necesario mencionar que entre los trabajos por modos deslizantes se ha desarrollado en dos vertientes: sistemas continuos en su mayoría y sistemas discretos. Muchos de los esquemas en tiempo discreto solo son una aproximación de algún esquema de control u observación para tiempo continuo ([3], [6], [13], [14], entre otros). En [7] se realiza un control por modos deslizantes tomando una aproximación por diferencias finitas de un control homogéneo por HOSM. En

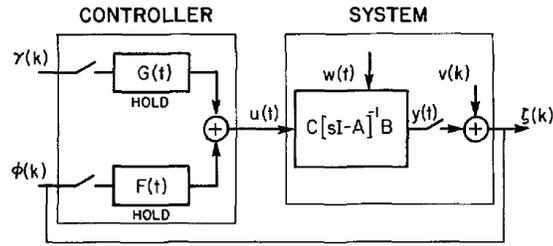


Figura 2-3: Diagrama de bloques de un Control continuo basado en la salida muestreada de un sistema lineal

[14] y [15] se realiza una implementación en tiempo discreto para un esquema de control basado en modos deslizantes de segundo orden para sistemas que pueden ser representados en la forma canónica de Brunovsky [30]. Los efectos de la discretización del esquema de control son estudiados, y se dan condiciones suficientes, bajo las cuales, el esquema de control puede dar como respuesta un comportamiento típico de un esquema por modos deslizantes de segundo orden (Figura (2-2)). En este mismo trabajo, se encuentra una cota para el error proporcional al periodo de muestreo a diferencia de la mayoría de los casos de estudio

$$|\Delta_t| \leq O(\delta^3)$$

siendo δ el periodo de muestreo de la salida del sistema no lineal y Δ_t el error de estimación. Dentro de los primeros trabajos que se tienen para sistemas continuos con salida muestreada se encuentra el realizado en [2], cuyo objetivo es obtener periódicamente la salida de un sistema lineal a través de una función de retención de la señal. Ésto permite generar un control adecuado en términos de la secuencia de salida del error, marcado como la trayectoria deseada menos la trayectoria actual del sistema. El esquema de control propuesto se resume en el diagrama de bloques mostrado en la Figura 2-3, el control resultante se da en tiempo continuo. Sin embargo, el control es construido bajo la secuencia discreta de la salida.

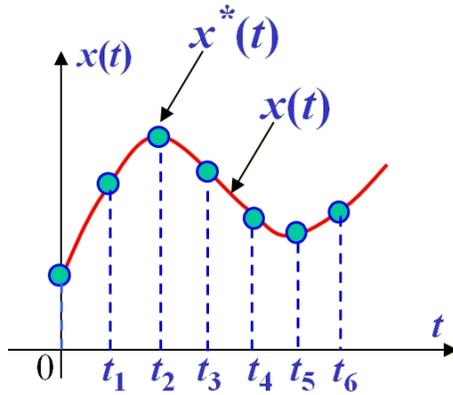


Figura 2-4: Muestreo de una señal analógica

2.3. Teoría de Sistemas Muestreados

Dada una señal analógica con ancho de pulso finito BW , el proceso de muestreo consiste en la conversión de dicha analógica en una discreta como se puede observar en la Figura (3.3) donde $x(t)$ es la señal continua y $x^*(t)$ es la señal muestreada. El muestreo de ña señal esta dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 x_s(t) &= x(t) T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\
 &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

El intervalo de tiempo entre cada una de las medidas se denomina periodo de muestreo y esta relacionado con la reconstrucción de la señal mediante el teorema de Shannon [16].

2.3.1. Teorema de Shanon

Si una señal analógica quiere ser reconstruida a través de su señal muestreada, la frecuencia de muestreo debe satisfacer

$$\omega_s \geq 2\omega_{\text{máx}}$$

en otras palabras, el periodo de muestreo debe satisfacer

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{\text{máx}}}$$

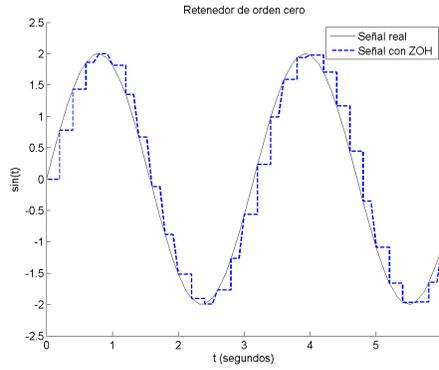


Figura 2-5: Reconstrucción de una señal por un retenedor de orden cero

donde $\omega_{\text{máx}}$ es la frecuencia máxima de la señal analógica. T es el periodo de muestreo y ω_s es la frecuencia de muestreo que es igual a $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

El proceso de reconstrucción de la señal, puede realizarse en términos de retenedores, cuya aproximación se directamente proporcional al orden de este. En el análisis del presente trabajo se manejan los retenedores de orden cero y uno.

2.3.2. Retenedor de Orden Cero

Un retenedor de orden cero es un modelo de reconstrucción de una señal muestreada de un sistema en una señal constante a tramos. La dinámica del retenedor de orden cero es descrita por las ecuaciones (2.5)

$$x_{ROC}(t) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (2.5)$$

La reconstrucción de la señal de salida se muestra en la Figura (2-5)

Cota máxima del error para retenedores de orden cero

Como se ha planteado en los objetivos de la tesis, el principal problema a tratar es la estimación de sistemas no lineales por MD cuando la salida disponible para entonar el observador se obtiene por un muestreo de la señal, al establecer un muestreo de la salida disponible en términos de retenedores (de primer o segundo orden) siempre existirá un error entre la señal

real y la señal reconstruida. Si se asume que el ancho de banda del sistema es finito y se satisface el teorema de Shanon [16] este error será acotado con una clara dependencia del periodo de muestreo y de la máxima componente frecuencial del sistema. Los dos siguientes Lemas muestran la cota máxima posible para cada periodo de muestreo entre la señal real del sistema definida como $y(t)$ y la señal reconstruida definida como $y_s(t)$.

Para el retenedor de orden cero considere el siguiente resultado

Lema 7 *Considere una función no lineal $f(\cdot)$ escalar con ancho de banda BW finito y componente frecuencial máxima F^+ , entonces la cota superior para la diferencia máxima entre la salida de la función no lineal $y(t)$ y la salida obtenida a través del retenedor de orden cero $y_s(t)$, en todo $t \in [TK, T(K+1)]$, $K \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ está dada por*

$$\|y(t) - y_s(t)\| \leq l_k f_0^+ F^+ T \quad (2.6)$$

donde

l_k es una constante positiva

f_0^+ es el valor máximo de la función $f(\cdot)$ en el intervalo $[Tk, T(k+1)]$

T es el periodo de muestreo

Prueba. Para un retenedor de orden cero existe una pendiente m_1 tal que

$$\|\dot{y}\| \leq m_1 \leq f_0^+$$

por lo tanto

$$\|y(t) - y_s(t)\| = \left\| \int_{KT}^t \dot{y}(\tau) d\tau - y_s(TK) \chi(TK) \right\| \quad (2.7)$$

donde la condición inicial c para la integral en (2.7) está definida como

$$c = y_s(TK) \chi(TK)$$

por lo tanto substituyendo en la ecuación (2.7) se tiene

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_s(t)\| &= \left\| \int_{KT}^t \dot{y}(\tau) d\tau + c - c \right\| \\ &\leq \int_{KT}^t \|\dot{m}_1\| d\tau \leq f_{0,k} F^+ T \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. ■

Es evidente dado el resultado obtenido que a mayor periodo de muestro y mayor componente frecuencial del sistema, como es de esperarse el error obtenido sera mayor.

2.3.3. Retenedor de orden uno

Un retenedor de orden uno (ROU) es un modelo matemático para la reconstrucción práctica de señales muestreadas que puede ser implementada a partir de un conversor analógico digital y un integrador, la señal reconstruida es una aproximación lineal en tramos de la salida real. La dinámica de un retenedor de orden uno puede ser descrita como:

$$x_{ROU}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{tri}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

donde la función $\text{tri}(\cdot)$ se define como:

$$\text{tri}(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La reconstrucción de la señal se visualiza en la Figura (2-6)

Cota máxima del error para retenedores de orden uno

De igual forma para el retenedor de orden uno se realiza un análisis del máximo error posible entre la señal de salida real $y(t)$ y la señal reconstruida en términos del retenedor de orden uno $y_s(t)$.

Lema 8 *Considere una función no lineal $f(\cdot)$ escalar con ancho de banda BW finito y componente frecuencial máxima F^+ , entonces la cota superior para la diferencia máxima entre la*

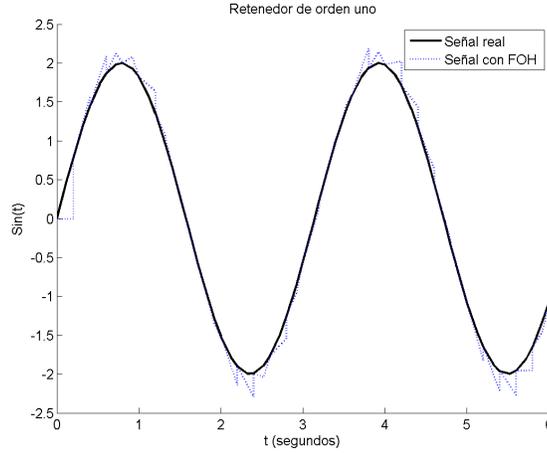


Figura 2-6: Reconstrucción de la señal mediante un retenedor de orden uno

salida de la función no lineal $y(t)$ y la salida obtenida usando la dinámica de un retenedor de orden uno $y_s(t)$, en todo $t \in [TK, T(K+1)]$ $K \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ está dada por

$$\|y(t) - y_s(t)\| \leq (f^0 + F^0)TF^+ \quad (2.8)$$

donde

f_0^+ es el valor máximo de la función $f(\cdot)$ en el intervalo $[Tk, T(k+1)]$

T es el periodo de muestreo

F^0 es el valor de la pendiente en el punto $t = KT$

Prueba. Para un retenedor de orden uno existe una pendiente m_2 tal que

$$\|y - y_2\| \leq m_2T$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \|y - y_2\| &\leq \|\Delta f^+ F^+ - \delta(KT) f(KT)\| \\ &\leq f^{0+}TF^+ + |\delta(KT) f(KT)| \\ &= f^{0+}TF^+ + \|\delta(KT) f(KT)\| \\ &\leq f^{0+}TF^+ + F^{0+}TF^+ \end{aligned}$$

Finalmente

$$\|y - y_2\| \leq (f^0 + F^0) TF^+$$

lo cual concluye la prueba. ■

Los resultados obtenidos, sobre los máximos errores posibles, serán de importancia primordial en el desarrollo de las pruebas de estabilidad de los estimadores de estado que serán propuestos. Dado que la eficiencia en el proceso de estimación estará dependiente del periodo de muestreo y por lo tanto del error máximo posible entre las señales reconstruidas, el cual, se plantea como acotado, dadas las características de los sistemas dinámicos que se toman en la presente tesis.

La cota del error obtenido por el retendor de orden uno, dada la dinámica de reconstrucción de la señal es menor que la obtenida por el retenedor de orden cero, siempre y cuando se satisfaga el Teorema de Shanon, como es posible observar en los resultados planteadas en el Lema 1 y Lema 2.

Capítulo 3

Diseño de Observadores por Modos Deslizantes

La teoría de modos deslizantes ha sido ampliamente explotada en el diseño de observadores, por sus características de convergencia en tiempo finito y robustez ante incertidumbres paramétricas [9], [13]. Sin embargo, los resultados existentes están orientados a sistemas en tiempo continuo y en menor cantidad a sistemas en tiempo discreto. Actualmente, no existen resultados para esta teoría en sistemas cuyo esquema sea continuo pero su medición discreta. En el presente capítulo se analizan y proponen diferentes esquemas de observación por MD para sistemas no lineales cuya salida es discreta o muestreada. Se parte de un observador por MD de primer orden, se presenta el algoritmo de super-twisting basado en el esquema propuesto en [13] y se concluye con un análisis de dicho esquema agregando a su estructura un término lineal [1]. Las pruebas de convergencia se basan en el segundo método de Lyapunov desarrollado en [1] tomando en cuenta los resultados de estabilidad descritos en el capítulo anterior. Debido a la presencia de errores en la medición derivados del muestreo de la señal, sólo es posible mostrar convergencia en tiempo finito a una región, cuya amplitud está delimitada por el periodo de muestreo.

3.1. Observador para sistemas no lineales con salida muestreada por Modos Deslizantes de Primer Orden

En este apartado se propone un observador basado en la teoría de modos deslizantes de primer orden (MDPO), la estructura del observador es lineal, y su estabilidad es probada en términos del segundo método de Lyapunov, la prueba de estabilidad permite delimitar la región de convergencia del observador. Es importante nuevamente subrayar que solo es posible obtener convergencia en tiempo finito a una zona.

3.1.1. Clase de Sistemas no Lineales a tratar

Los sistemas no lineales que serán estudiados en este punto de la tesis, están representados por la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= f(x_t) + g(x_t)u_t + \xi_t \\ y_t &= h(x_t) + \eta_t \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde el vector $x(\cdot) \in \mathfrak{R}^n$ corresponde a los estados dinámicos del sistema no lineal, la señal de salida del sistema $y_t \in \mathfrak{R}^p$ ($p \leq n$) está dado por la función $h(\cdot)$, $u(\cdot) \in \mathfrak{R}^m$ ($m < n$) es una perturbación medible externa en el sistema. El vector $\xi(t) \in \mathfrak{R}^n$ representa el conjunto de todas las posibles incertidumbres asociadas a la dinámica del sistema. Finalmente, la señal $\eta_t \in \mathfrak{R}^p$ representa las variaciones de la señal de salida asociadas con ruidos no medibles presentes en los sensores.

Las funciones no lineales $f(\cdot) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$, $g(\cdot) : \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $h(\cdot) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$ son continuamente diferenciables, esto es $\{f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)\} \in C^1$.

El sistema no lineal (3.1) cubre una amplia gama de sistemas dinámicos. Existen muchos observadores diseñados empleando técnicas como el esquema de Luenberger, algunas de las ventajas implementando MD son fácilmente predescibles, como la robustez ante incertidumbres, aunque también existirán ciertas desventajas como es el conocido *chattering*. Para obtener el resultado es necesario asumir los siguientes puntos

- A1. La salida del sistema no lineal definida como y_t en el sistema (3.1), no se encuentra

disponible en todos los instantes de tiempo (posible consecuencia de su implementación en tiempo real a partir de convertidores de señal). Sin embargo aplicando la teoría de retenedores de señal es posible mantenerla continua mediante un retenedor de orden cero, cuya dinámica es descrita por la función indicador $\chi(Tk)$ definida como

$$\chi(Tk) := \begin{cases} 1 & t \in [Tk, T(k+1)) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$k \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$$

Por lo tanto, la información usada en el desarrollo del observador es \bar{y}_t , la señal de salida reconstruida a partir del muestreo de la señal real

$$\begin{aligned} y_t &= h(x) \\ \bar{y}_t &= y_{t=Tk} \chi(Tk) \end{aligned} \quad (3.3)$$

se puede observar que a pesar de tener una salida muestreada, la señal \bar{y}_t permanece continua.

- A2. El sistema no lineal (3.1) nominal

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= f(x_t) + g(x_t) u_t \\ y_t &= h(x_t) \end{aligned}$$

cuando las perturbaciones son cero ($\xi_t = \eta_t = 0, \forall t \geq 0$) es observable

- A3. La entrada externa al sistema es acotada

$$\begin{aligned} \|u_t\| &\leq u^+ \\ u^+ &> 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

- A4. Las funciones inciertas no lineales $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$ satisfacen las siguientes desigual-

dades:

$$\begin{aligned}\|f(x_t) - Ax\| &\leq L_f \\ \|(g(x_t) - B)u_t\| &\leq L_g \\ \|h(x_t) - Cx_t\| &\leq L_h\end{aligned}\tag{3.5}$$

con $L_f, L_g, L_h \in \mathfrak{R}$ y $L_f, L_g, L_h > 0$, las matrices $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ y $C \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$. El par (A, B) tiene que ser controlable, y el par (A, C) observable

- A5. Las perturbaciones externas del sistema en los estados $\xi(t)$ y en la salida $\eta(t)$ están acotadas en forma elipsoidal

$$\begin{aligned}\|\xi_t\| &\leq \xi^+ & \xi^+ > 0 \\ \|\eta_t\| &\leq \eta^+ & \eta^+ > 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

3.1.2. Estructura del observador no lineal

Tomando en cuenta las consideraciones que se presentan para el sistema no lineal (3.1), la estructura del observador por MDPO propuesto es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}_t &= A\hat{x}_t + Bu_t + K \frac{e_t}{\|e_t\|}, \hat{x}(0) \text{ given} \\ e(t) &:= \bar{y}_t - C\hat{x}_t\end{aligned}\tag{3.7}$$

El error de estimación se define como:

$$\delta_t := x_t - \hat{x}_t\tag{3.8}$$

El siguiente Teorema, representa el resultado principal a la hora de implementar el observador propuesto descrito por la ecuación (3.7) basado en MDPO, tomando solo información muestreada de la salida del sistema no lineal.

Teorema 9 *Considere el sistema no lineal descrito en (3.1), donde la salida puede ser medida solo en ciertos intervalos de tiempo $t = kT$ ($k \in \mathbb{Z}^+ \cap 0$) con T que define un tiempo de muestreo finito. El ancho de banda BW de la señal es finito. El periodo de muestreo es seleccionado de tal forma que el teorema de Shanon se satisfaga. Usando el observador propuesto en (3.7), que*

usa información muestreada de las salidas y seleccionando la matriz K como

$$K := kP^{-1}C^\top \quad k > 0$$

entonces el error de estimación del observador ajustado por la información disponible para cada periodo de muestreo T converge en tiempo finito a una bola B_δ con radio equivalente a

$$B_\delta := \left\{ \delta_t : \|\delta_t\| \leq \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_3} \right\} \quad (3.9)$$

con los parámetros μ_1 , μ_2 y μ_3 definidos como

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \lambda_{\max}(\Lambda_1) L_f + \lambda_{\max}(\Lambda_2) L_g u^+ + 2k\sqrt{n}(\varphi^+ + L_h + \eta^+) \\ \mu_2 &:= 2\sqrt{n}(\varphi^+ + L_h + \eta^+) \\ \mu_3 &:= k\alpha_1 \lambda_{\min}(P^{-1}) \end{aligned}$$

donde

$$\varphi^+ := \max_{T > t \geq 0} \|\Delta_y\|$$

y P la solución positiva definida de la ecuación de Riccati

$$PA + A^\top P + P(\Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1} + 2\Lambda_3^{-1})P + Q_0 = 0 \quad (3.10)$$

con

$$\Lambda_j = (\Lambda_j)^\top > 0, \quad \Lambda_j \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \quad j := 1 : 3$$

Prueba. La prueba del teorema anterior puede ser revisada en el apéndice de la tesis. ■

El resultado anterior muestra como elegir las ganancias, de tal forma que podamos entonar el observador descrito por las ecuaciones (3.7) Sin embargo, a través de este teorema solo se obtienen condiciones suficientes. Existen un grupo de cuatro condiciones necesarias para poder encontrar una solución para la ecuación de Riccati, las cuales se describen a continuación:

Condición 10 La matriz A debe ser estable.

Condición 11 El par $(A, R^{1/2})$ es controlable, donde $R = \Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1} + 2\Lambda_3^{-1}$

Condición 12 El par $(Q_0^{1/2}, A)$ es observable.

Condición 13 Las matrices (A, Q, R) satisfacen la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{4} (A^T R^{-1} - R^{-1} A) R (A^T R^{-1} - R^{-1} A)^T + Q_0 \leq A^T R^{-1} A \quad (3.11)$$

Las condiciones anteriores ofrecen un método constructivo para la selección de Q_0 . El valor de lambda 1-3 queda previamente definido por el tamaño de las perturbaciones que participan en el sistema no lineal de segundo orden (3.1) y que están determinadas por la desigualdad desarrollada en el apéndice. Nótese que estos valores no son libres pero tampoco únicos. Del conjunto solución para éstas matrices solo se seleccionarán aquellas que satisfagan la condición de que el par $(A, R^{1/2})$ sea controlable. Una vez que se ha fijado el valor de R , el valor de Q_0 puede obtenerse de la expresión (3.11) por un simple despeje. Si el valor de Q_0 obtenido satisface la condición de que el par $(Q_0^{1/2}, A)$ es observable entonces se asegura la existencia de la solución positiva definida para la ecuación modificada de Ricatti (3.10).

Por otro lado es evidente que la región de convergencia depende del periodo de muestreo de la señal, dado que el término φ^+ , que aparece en el numerador de la región de convergencia (3.9) en los términos μ_1 y μ_2 , dicho término corresponde al máximo valor posible en un periodo de muestreo de la diferencia entre y_t y \bar{y}_t , el cual depende del tipo de retenedor que se este empleando. Resultado provisto por los Lemas 1 y 2, desarrollados en el capítulo anterior.

El teorema anterior da las condiciones suficientes para obtener el valor de la matriz $P = P^T > 0$, la cual permite obtener el valor de la ganancia K que será utilizada en el diseño del observador basado en la teoría de MDPO. La obtención de tal ganancia completa unívocamente el diseño del observador.

3.2. Observadores por Modos Deslizantes de segundo orden con salida muestreada

Dentro de las características que presentan los modos deslizantes convencionales (o de primer orden) se encuentra la convergencia en tiempo finito del error de observación, sin embargo comúnmente ligado a ésta teoría existe la presencia de *chattering* (ó castañeo). La teoría de

Modos Deslizantes de Segundo Orden, reducen este problema y conservan la convergencia en tiempo finito del observador. Para ser aplicados en primera instancia es necesario que la superficie cuente con grado relativo dos. En este apartado, se usa la técnica del algoritmo super-twisting aplicado a sistemas de segundo orden mecánicos. Siguiendo con la línea central de esta tesis: sistemas continuos, cuya salida es discreta o muestreada (3.3). Se propone el análisis de un estimador de estados basado en el algoritmo propuesto en [13] y se muestra la versión para un caso escalar, posteriormente se extiende el diseño para el caso vectorial. Tomando como referencia la teoría de Lyapunov desarrollada en [1], se muestra la convergencia de los observadores tomando la presencia del muestreo en la inyección del error del estimador y perturbaciones en los estados y en las salidas.

3.2.1. Algoritmo de Super-twisting para caso escalar

Clase de sistemas no lineales a tratar

El diferenciador basado en el AST, ha sido aplicado principalmente a sistemas mecánicos, donde solo es posible tener acceso a la posición del sistema. Tomando en cuenta este esquema de observador, se realiza un estudio de estabilidad considerando que la salida, que es el primer estado es muestreada y reconstruida en términos de retenedores de señal. Para aplicar el observador es necesario que el sistema bajo estudio, es decir, el sistema *observado* cumpla algunas características, las cuales se detallan a continuación.

La clase de sistemas no lineales con perturbaciones en sus estados estudiados en este apartado son descritos por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1,t} &= x_{2,t} \\
 \dot{x}_{2,t} &= f(x_t, u_t) + \xi_t \\
 y_t &= x_1
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde, $x_t = [x_{1,t}, x_{2,t}]^\top \in \mathfrak{R}^2$ es el vector de estados, $u_t \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control aplicada al sistema, la señal ξ_t representa perturbaciones internas en la estructura del sistema y $f(\cdot) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función no lineal discontinua que describe la dinámica del sistema. La solución a la ecuación diferencial anterior se entiende en el sentido de Filipov [18], es decir

$$\dot{x}_{2,t} \in \bar{F}(x_t, u_t) + \xi_t \quad (3.13)$$

Para este apartado es necesario que el sistema no lineal (3.12) cumpla las siguientes características

A1. Las perturbaciones se encuentran acotadas en sentido elipsoidal

$$\|\xi_t\|_{\Lambda_\xi}^2 \leq \Upsilon, \quad \Lambda_\xi = \Lambda_\xi^\top > 0 \quad (3.14)$$

A2. La salida del sistema está dada por $x_{1,t}$ que no puede ser medida durante todo el tiempo. Esta salida solo puede monitorearse en intervalos de tiempo definidos donde T denota el periodo de muestreo y satisface el teorema de Shannon. El estimador de estados presentado tiene una aplicación más cercana a aplicaciones en tiempo real, donde el observador es implementado en sistemas digitales como una computadora personal, en donde se necesita una versión muestreada de la salida del sistema. Esta situación se puede observar cuando se emplea un convertidor analógico digital. La información digital obtenida es manipulada a través de un retenedor de orden cero, cuya dinámica es descrita en (3.2). La salida usada para ajustar el observador de estados se describe en (3.3). Se puede observar que al aplicar la función indicador, la salida \bar{y}_t sigue siendo una señal continua.

A3. La diferencia entre la función no salida valuada en los estados reales y valuada en los estados estimados está acotada

$$|f(x_{1,t}, x_{2,t}, u_t) - f(\bar{x}_{1,t}, \hat{x}_{2,t}, u_t)| \leq \tilde{F}^+ \quad \tilde{F}^+ > 0$$

Estructura del observador basado en supertwisting

La estructura de observación propuesta para tratar con la clase de sistemas no lineales arriba mencionados se basa en el algoritmo de supertwisting, el cual se describe por medio de las siguientes ecuaciones diferenciales con discontinuidad en el lado derecho ():

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_t = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 + \beta_1 \lambda(\tilde{x}_{1,t}) \text{sign}(\tilde{x}_{1,t}) \\ f(\hat{x}, u, t) + \beta_2 \text{sign}(\tilde{x}_{1,t}) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

donde $\hat{x}_t = [\hat{x}_{1,t}, \hat{x}_{2,t}]^\top \in \mathfrak{R}^2$ es el vector de estados del observador, β_1 y β_2 son constantes que servirán para el ajuste del observador, $\lambda(\cdot)$ es una función no lineal, donde la función $\lambda(\cdot)$ se define como

$$\lambda(z) := |z|^{1/2}$$

En las siguientes líneas se muestra el resultado del análisis de la convergencia del AST cuando se considera que la salida del sistema no es continua. La inyección del error para corregir las trayectorias del observador se define como

$$\tilde{x}_{1,t} = \bar{x}_{1,t} - \hat{x}_{1,t}$$

donde el término $\bar{x}_{1,t}$ es la salida empleada reconstruida por las dinámicas de retención propuestas por lo que es evidente que

$$\begin{aligned}\bar{x}_{1,t} &= x_{1,t} - \bar{y}_{1,t} \\ \tilde{x}_{1,t} &= x_{1,t} - \hat{x}_{1,t} - \bar{y}_{1,t}\end{aligned}$$

es la salida muestreada disponible del sistema no lineal 3.12. La ecuación anterior que describe la salida usada para ajustar el sistema también puede escribirse como

$$\tilde{x}_{1,t} = x_{1,t} - \hat{x}_{1,t} + \Delta_t$$

donde Δ_t es el valor obtenido en los Lemas 1 y 2. Por lo tanto la ecuación que describe la dinámica del error es

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= x_i - \hat{x}_i \\ \frac{d}{dt}\tilde{x}_1 &= \tilde{x}_2 - \beta_1 \Lambda(\bar{x}_1) \mathbf{S}(\bar{x}_1) \\ \frac{d}{dt}\tilde{x}_2 &= f(x_t, u_t) - f(\bar{x}_{1,t}, \hat{x}_{2,t}, u_t) - \beta_2 \mathbf{S}(\bar{x}_1) + \xi_t\end{aligned}\tag{3.16}$$

El cambio de $\bar{x}_{1,t}$ durante el tiempo puede ser expresado como

$$\frac{d}{dt}\bar{x}_{1,t} = \frac{d}{dt}\tilde{x}_{1,t} + \dot{\Delta}_t\tag{3.17}$$

El término Δ_t aparece como consecuencia del muestreo de la señal. Considerando el uso de un retenedor de orden cero, se asume una cota para este término de la siguiente forma:

$$\left| \dot{\Delta}_t \right| \leq v^+$$

Esta cota es finita dado que el ancho de banda del sistema bajo análisis está acotado, es decir el sistema no tiene escape infinito. El resultado principal de esta sección es resumido en el siguiente teorema, donde se muestra como tienen que ser elegidas las ganancias para poder satisfacer las condiciones de convergencia del observador. Las ganancias del observador son calculados partiendo de una ecuación cuadrática de la forma

$$\begin{aligned} V &:= V(\tilde{x}_t, \hat{x}, t) = \begin{bmatrix} (\Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha))^\top & \tilde{x}_\beta^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & -p_{12} \\ -p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha) \\ \tilde{x}_\beta \end{bmatrix} \\ &= \zeta_t^\top P \zeta \end{aligned}$$

y la matriz P definida como

$$p := \begin{bmatrix} 4\varepsilon^2 + \varphi & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

con $\varepsilon, \varphi > 0$

Teorema 14 *Considere el sistema no lineal de segundo orden descrito en (3.12) donde la salida (definida en las coordenadas generalizadas) [31], puede ser medida en intervalos específicos de tiempo denominados $t = kT$ ($k \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$) con T definido como un intervalo de tiempo finito. El ancho de banda (BW) de la señal se asume acotado. El periodo de muestreo es seleccionado de tal manera que el teorema de Shannon se cumpla [16]. Usando el estimador de estados definido en (3.15) que emplea información muestreada de la salida y seleccionando las ganancias del observador β_1 y β_2 como*

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\gamma_1 + 4\varepsilon(F^+ + k_2)}{(4\varepsilon^2 + \varphi)} \\ \beta_2 &= -\frac{(\sqrt{8\varepsilon\gamma_1\alpha_1 - \gamma_2} + \alpha_2)(4\varepsilon^2 + \varphi)}{2(4\varepsilon^2 + (4\varepsilon^2 + \varphi))} - \frac{\varepsilon\gamma_1 - 4\varepsilon^2 F^+}{(4\varepsilon^2 + (4\varepsilon^2 + \varphi))} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\gamma_1 > 0$

entonces la matriz Q_1 es positiva definida

$$Q := \begin{bmatrix} p_{11}\beta_1 - 2p_{12}(\tilde{F}^+ + \beta_2) & -p_{11} - p_{12}\beta_1 - 2p_{22}(\tilde{F}^+ + \beta_2) \\ -p_{11} - p_{12}\beta_1 - 2p_{22}\tilde{F}^+ - 2p_{22}\beta_2 & p_{12}(1 - \Gamma^{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

y las trayectorias del error de observación quedan confinadas a una bola B_δ definida por

$$\begin{aligned} B_\delta &:= \left\{ \tilde{x}_t : \|\tilde{x}_t\| \leq \max\left(\frac{\rho_2}{\alpha}, \rho_1\right) \right\} \\ \rho_1 &:= \Gamma v^+ \quad \Gamma > 0 \\ \rho_2 &:= p_{11}v^+ \\ \alpha &= \frac{\lambda \max^{1/2}(P) \lambda \min(Q)}{\lambda \min(P)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Prueba. La prueba de este teorema es desarrollada en el apéndice del presente capítulo ■

El resultado anterior, muestra como se deben seleccionar las ganancias del observador de tal manera que las condiciones del teorema se satisfagan. Esto significa, que siguiendo la selección de las ganancias del observador sugeridas en (3.19), la matriz descrita por la ecuación (3.19) será positiva definida necesariamente. Al existir tal solución, el observador convergerá a la región dependiente del periodo de muestreo tal como lo indica la ecuación (3.20).

El desarrollo de los resultados que se obtienen en esta tesis para el análisis de observadores por MDSO se basan en la función de Lyapunov publicada en [1]. Cabe resaltar que, la derivada de la función de Lyapunov no existe en el punto cero, por lo tanto haciendo uso de los conceptos de gradiente generalizado y subdiferencial proximal, es posible dar una conclusión sobre la estabilidad del observador.

Un aspecto importante es el punto donde la derivada de la función de Lyapunov llega a tocar el punto cero, en este punto la derivada no está definida. Por lo tanto, las trayectorias podrían presentar un salto que provoque su salida de la región de convergencia (tal y como lo prevé el concepto de subdiferencial proximal) para posteriormente ser forzadas a entrar en ella por la condición (ref, dada en el apéndice de la tesis). El siguiente comentario explica formalmente este concepto.

Comentario 15 Dado que, si la derivada de la función de Lyapunov $\dot{V}_t = 0$, no implica que V_t es igual a cero, se tiene que analizar la posible discontinuidad en la trayectoria de V_t cuando

\bar{x}_1 es igual a cero. De hecho

$$V_t|_{\bar{x}_1=0} = x_2^2$$

Tomando en cuenta una suposición que refiere a

$$|x_2^2| \leq x_2^+ \quad (3.21)$$

Lo cual implica que la bola de convergencia queda ahora definida como

$$B_\delta := \left\{ \tilde{x}_t : \|\tilde{x}_t\| \leq \max\left(\frac{\rho_2}{\alpha}, p_1^2, x_2^+\right) \right\}$$

Como en el teorema se asume un sistema con escape finito, entonces es posible acotar la trayectoria del sistema como en la ecuación (3.21).

Nótese además que, si no existe muestreo de la señal de salida del sistema no lineal, entonces, como se observa en el teorema tendremos convergencia en tiempo finito al error igual a cero, dado que $\rho_1 = \rho_1 = 0$, y se tendría el resultado de [1].

3.2.2. Algoritmo supertwisting para salida muestreada (extensión al caso vectorial)

Si definimos un nuevo sistema no lineal compuesto por pares de ecuaciones como las que se describen en (3.12), es posible extender el resultado a una clase de sistemas no lineales con $2n$ ecuaciones diferenciales, estructura clásica por ejemplo de un robot manipulador con n grados de libertad. Las consideraciones que se piden al sistema son similares que en el caso escalar, de igual forma la función de Lyapunov propuesta sigue el desarrollo publicado en [1]. A continuación se describe más a detalle la clase de sistemas no lineales que pueden ser analizados bajo el esquema de estimación del AST extendido al caso vectorial.

Clase de sistemas no lineales de dimensión $2n$

La dinámica del sistema no lineal se describe mediante $2n$ ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,t} &= x_{n+i,t} \\ \dot{x}_{n+i,t} &= f_i(x_t, u_t) + \xi_{i,t} \\ y_{i,t} &= x_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $x \in \mathfrak{R}^{2n}$, $x = [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}]^\top$ es el vector de estados del sistema, $f_i(\cdot, \cdot) : \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función no lineal incierta pero acotada y derivable. $\xi_{i,t} \in \mathfrak{R}$ es una perturbación en los estados del sistema. Para tener una facilidad en el manejo del sistema, este se reescribe como

$$\dot{x}_t = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\beta \\ f(x_t, u_t) + \xi_{i,t} \end{bmatrix}$$

donde \dot{x}_α y \dot{x}_β están definidos como

$$\begin{aligned} \dot{x}_\alpha &= \begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1,t} \\ x_{n+2,t} \\ \vdots \\ x_{2n,t} \end{bmatrix} \\ \dot{x}_\beta &= \begin{bmatrix} \dot{x}_{n+1,t} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1,t} \\ \dot{x}_{2n,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_t, u_t) + \xi_{1,t} \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_t, u_t) + \xi_{n-1,t} \\ f_n(x_t, u_t) + \xi_{n,t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se asume que el sistema no lineal descrito (3.22) cumple las siguientes características, necesarias para poder aplicar el observador basado en el AST extendido al caso vectorial.

A1. El conjunto de todos los controles no lineales admisibles esta dado por el conjunto

$$\begin{aligned} U^{adm} &:= \left\{ u: \|u_t\|^2 \leq v_0 + v_1 \|x_t\|_{\Lambda_u}^2 < \infty \right\} \\ \Lambda_u &= \Lambda_u^\top > 0, \quad \Lambda_u \in \mathfrak{R}^{n \times n} \\ v_0, v_1 &\in \mathfrak{R}^+ \end{aligned}$$

A2. Las perturbaciones son acotadas de la misma manera que han sido tomadas para los casos de estudio anteriores. La cota superior para las perturbaciones puede ser observada en la ecuación (3.14).

A3. La salida del sistema representada por el conjunto $[x_1, x_2, \dots, x_{n,t}]$ no se conoce en todo el tiempo. Esta salida es muestreada partiendo de un retenedor de orden cero a partir de la función indicador $\chi(k)$ descrita en (3.2) de tal forma que la salida disponible del sistema es

$$\begin{aligned} y^\top &= [x_{1,t} \quad x_{2,t} \quad \cdots \quad x_{n,t}] \\ \bar{y}^\top &= y_{t=TK}^\top \chi(TK) \end{aligned}$$

Nuevamente se considera una salida muestreada y reconstruida en términos de retenedores, como la información disponible para poder entonar el observador

Observador para un sistema 2n dimensional basado en el algoritmo de supertwisting

La estructura del observador por modos deslizantes de segundo orden (MDSOV) se basa en el AST y se describe como

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_t := \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{x}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(x_\alpha, \hat{x}_\beta) \\ s_2(x_\alpha, \hat{x}_\beta) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

donde s_1 y s_2 se definen como:

$$s_2(x_\alpha, \hat{x}_\beta) := \begin{bmatrix} f_1(\hat{x}, u, t) \\ f_2(\hat{x}, u, t) \\ \vdots \\ f_n(\hat{x}, u, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_2 \text{sign}(\bar{x}_{1,t}) \\ \beta_4 \text{sign}(\bar{x}_{2,t}) \\ \vdots \\ \beta_{2n} \text{sign}(\bar{x}_{n,t}) \end{bmatrix}$$

El estimador de estados es una copia del sistema con $2n$ parámetros de corrección determinados como $\beta_1, \dots, \beta_{2n}$. En forma compacta el El sistema puede ser reescrito de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x}_t &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{x}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_\beta \\ F(\hat{x}, u, t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\bar{x}_\alpha) \\ I_{n \times n} \end{bmatrix} S(\bar{x}_\alpha) \end{aligned} \quad (3.24)$$

con los siguientes parámetros

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \text{diag} [\beta_1, \beta_3, \dots, \beta_{2n-1}] \\ \Omega_2 &:= \text{diag} [\beta_2, \beta_4, \dots, \beta_{2n}] \\ \beta_i &\in \mathfrak{R}^+, \quad i = \overline{1, 2n} \\ \Lambda(\bar{x}_\alpha) &= \text{diag} [\lambda(\bar{x}_{1,t}), \lambda(\bar{x}_{3,t}), \dots, \lambda(\bar{x}_{2n-1,t})] \\ \lambda(\bar{x}_{r,t}) &:= |\bar{x}_{r,t}|^{1/2}, \quad r = 2i - 1, \quad i = \overline{1, n} \\ S(\bar{x}_\alpha) &:= [\text{sign}(\bar{x}_{1,t}), \text{sign}(\bar{x}_{2,t}), \dots, \text{sign}(\bar{x}_{n,t})] \end{aligned} \quad (3.25)$$

El conjunto de información disponible para entonar el estimador de estados se compone de los términos

$$\tilde{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha - \bar{x}_\alpha$$

donde \bar{x}_α es la información reconstruida del sistema en base a las mediciones discretas que se pueden tomar, de esta manera el error de observación queda definido como

$$\tilde{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha - x_\alpha + \Delta_t$$

El término Δ_t permanece acotado, dado que se pide que el sistema tenga ancho de banda finito y que el Teorema de Shannon se cumpla.

$$\|\Delta_t\| \leq v^+$$

El resultado principal de esta sección es descrito en el siguiente teorema, donde se dan condiciones de suficiencia de las características que tiene que tener las ganancias del observador para

lograr convergencia en tiempo finito.

Teorema 16 *Considere el sistema no lineal descrito en (3.22) donde la salida (definida en las coordenadas generalizadas) [31] puede ser medida en intervalos específicos de tiempo denominados $t = kT$ ($k \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$) con T definido como un intervalo de tiempo finito. El ancho de banda (BW) de la señal es acotado. El periodo de muestreo T es determinado tomando la cota superior para el BW definida por (BW^+) . Por lo tanto, usando el estimador de estados definido en (3.24) que usa información muestreada de la salida y seleccionando las ganancias Ω_1 y Ω_2 del observador de tal forma que las matrices Q_0 y Q_1 sean positivas definidas*

$$\begin{aligned}
Q_1 &:= [a_{i,j}], \quad i, j = 1, 2 \\
q_{11} &= \Lambda(\bar{x}_{\alpha,t})^{-1} \begin{bmatrix} -P_{11}\Omega_1 + P_{11}\Gamma^{11}P_{11} \\ +2P_{12}\Omega \end{bmatrix} \\
q_{12} = q_{21} &= \frac{1}{2}\Lambda(\bar{x}_{\alpha,t})^{-1} [-\Omega_1^\top P_{12} + P_{11} + 2P_{22}\Omega_2] \\
q_{22} &= -\Lambda(\bar{x}_{\alpha,t})^{-1} (P_{12} - P_{12}\Gamma^{-1}P_{12})
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &:= [a_{i,j}], \quad i, j = \bar{1} : \bar{4}, \quad a_{21} = a_{12} = -P_{12} \\
a_{11} &= a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0 \\
a_{32} &= a_{34} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0 \\
a_{31} &= a_{13} = -P_{12}\Omega_2, \quad a_{22} = \Gamma_1^{-1} \\
a_{33} &= \Gamma_2^{-1}, \quad a_{44} = P_{22}\Gamma_1 P_{22} + P_{22}\Gamma_2 P_{22}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

entonces el error de observación del estimador de estados propuesto usando salida muestreada del sistema converge a una bola B_δ definida como

$$\begin{aligned}
B_\delta &:= \left\{ \tilde{x}_t : \|\tilde{x}_t\| \leq \frac{\rho}{\alpha} + \varepsilon \right\} \\
\rho &:= (\gamma_1 + \gamma_2) v^+, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{R}^+ \\
\alpha &:= \frac{\lambda \text{mín}^{1/2} P \lambda \text{mín}(Q_0)}{\lambda \text{mín} P}, \quad \varepsilon \in \mathfrak{R}^+
\end{aligned}$$

Prueba. La prueba del teorema se presenta en el apéndice de éste capítulo ■

Las ganancias pueden ser obtenidas si se encuentra solución a las desigualdades matriciales Q_1 y Q_2 . Como es de esperarse nuevamente el teorema muestra que la calidad de la estimación

traducida en el aumento del radio de la bola B_δ decrecera si el periodo de muestreo T se hace mas grande. De contrario es posible encontrar convergencia en tiempo finito a la región del error delimitada por cero. Nuevamente el valor del parámetro v^+ se determina en base a los Lemas 1 y 2, desarrollados en el capítulo anterior. Dadas las condiciones del sistema, la necesidad de tener un menor tiempo de muestro en este resultado es evidente, debido al número de estados involucrados, las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema dependen, cada uno de todos los estados. Por ejemplo hablando de un robot manipulador el efector final dependerá de las posiciones de cada uno de sus eslabones.

3.3. Observador por algoritmo de super-twisting con término lineal

Finalmente se presenta un resultado complementario aplicando el AST, el cual mezcla el término del error clásico de un modo deslizante, es decir la función discontinua, y el término de un observador tipo Luenberger. Este esquema de observación fue presentado en el trabajo de [1], mismo trabajo donde se desarrollan las funciones de Lyapunov que hasta este momento han sido aplicadas para las pruebas de estabilidad del observador basado en el AST tomando en cuenta medidas discretas de la salida. Para el análisis de estabilidad, de igual forma que en los casos de estudio precedentes, es necesario que el sistema no lineal bajo estudio cumpla ciertas características. Para el problema de observación empleando el AST con término lineal (ASTL) considere el sistema no lineal descrito por las ecuaciones (3.12), estudiado en la sección del observador por AST para el caso escalar. Las consideraciones que se piden para el sistema son las mismas que fueron planteadas para el caso escalar con perturbaciones en sus estados y en la salida, actoadas en forma elipsoidal (ecuación (3.14)) y la salida del sistema muestreada con un retenedor de orden cero (ecuaciones 3.2 y 3.3) considere el siguiente esquema de estimación de estados [1]

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,t} &= x_{2,t} - k_1 |\bar{x}_{1,t}|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_{1,t}) - k_2 \bar{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} &= -k_3 \text{sign}(\bar{x}_{1,t}) - k_4 \bar{x}_{1,t}\end{aligned}\tag{3.28}$$

La ecuación anterior corresponde al algoritmo de supertwisting agregando un término lineal en su estructura, dicho término será mas fuerte cuando la dinámica del observador se encuentre

alejada de la dinámica real del sistema. Cerca de las dinámicas del sistema, la función sign tiene mayor aportación en la disminución del error de observación. El resultado de la convergencia de este esquema de estimación se describe en el siguiente teorema, con la adecuada selección de ganancias, es posible lograr que el estimador de estados converga a una región.

Teorema 17 *Considere el sistema no lineal de segundo orden e forma vectorial descrito en (3.12) donde la salida (definida en las coordenadas generalizadas) [31], puede ser medida en intervalos específicos de tiempo denominados $t = kT$ ($k \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$) con T definido como un intervalo de tiempo finito. El ancho de banda (BW) de la señal es acotado. El periodo de muestreo es seleccionado de tal manera que el teorema de Shannon se cumpla. Usando el estimador de estados definido en (3.15) que usa información muestreada de la salida y seleccionando las ganancias del observador cumpliendo las siguientes condiciones*

$$\begin{aligned}
k_1 &> 0 \\
k_2 &> -\sqrt{\frac{4\varepsilon_2 k_1}{\varepsilon_1}} + 2 \\
k_3 &< -k_1^2 \\
\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 &> 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

y k_4 tomando la solución positiva de la ecuación cuadrática

$$ak_4^2 + bk_4 + c = 0 \tag{3.30}$$

con los parámetros

$$\begin{aligned}
a &:= -\frac{1}{4}\varepsilon_1 k_1^3 \\
b &:= (k_1^3 k_2 \varepsilon_1 (2 - k_2) - \frac{1}{4}\varepsilon_1 k_1^3 k_2) \\
c &:= -\frac{1}{4}\varepsilon_1 k_1^3 k_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1^2 k_2^2 - 4k_1^4 k_2^2 \varepsilon_2 + \frac{1}{4}k_1 k_2^2 \varepsilon_1^2 (2 - k_2)^2 + k_1^3 k_2 \varepsilon_1 (2 - k_2) k_2 - \varepsilon_3
\end{aligned}$$

de tal forma que las matrices Q_0 y Q_1 sean positivas definidas, donde Q_0 se define como

$$\begin{aligned}
Q_0 &:= [q_{i,j}], \quad i, j = \overline{1:3} \\
q_{11} &= k_1 k_3 + k_1^3 \\
q_{22} &= 3k_1 k_2^2 + k_4 k_2^2 \\
q_{33} &= k_1 \\
q_{21} = q_{12} &= \frac{1}{2} (2k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2 - k_3 k_2^2 - \lambda_2^{-1} k_1^2 k_2^2) \\
q_{32} = q_{23} &= \frac{1}{2} (-k_1 k_4 - 2k_1 k_2) \\
q_{13} = q_{31} &= -2k_3 + 2k_3 - 2k_1^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

y Q_1 queda definida como

$$\begin{aligned}
Q_1 &:= [a_{i,j}], \quad i, j = \overline{1:4} \\
a_{11} &= 2k_2 k_4 - \lambda_2^{-1} k_1^2 k_2^2 - \lambda_3^{-1} k_1^2 k_2^2 \\
a_{22} &= -\lambda_4^{-1} k_2^2 - 2\lambda^{-1} k_4 \\
a_{33} &= 2k_4 + k_2 - \lambda_6^{-1} k_2^2 \\
a_{21} = a_{12} &= \frac{1}{2} (-k_1 k_2 + k_1^2 k_2 + 2k_1 k_4) \\
a_{32} = a_{23} &= \frac{1}{2} (-2k_2^2 - k_2^2 k_4 - 2k_4) \\
a_{13} = a_{31} &= 2k_4 + k_2 - \lambda_6^{-1} k_2^2
\end{aligned} \tag{3.32}$$

entonces el error de observación usando la información muestreada de la salida (con periodo de muestreo T) converge a una bola B_δ con radio

$$\begin{aligned}
B_\delta &:= \left\{ \tilde{x}_t : \|\tilde{x}_t\| \leq \max \left(\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^2, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \right\} \\
\alpha_1 &:= \frac{\lambda^{1/2} \min(P) \lambda \min(Q_0)}{\lambda \max(P)} \\
\alpha_2 &:= \lambda \min(P) \\
\beta_1 &:= \lambda_5 \nu^+ \\
\beta_2 &:= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) (\nu^+)^2 \\
\lambda_i &\in \mathbb{R}^+, \quad i = \overline{1,6}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Prueba. La prueba del teorema se muestra en el apéndice del capítulo ■

Si la selección de las ganancias se realiza conforme a lo estipulado en el Teorema anterior, se puede garantizar que las matrices Q_0 y Q_1 sean positivas definidas, por lo tanto la región de convergencia a la que el error de estimación llegará estará delimitada por el radio δ . Al momento de agregar el término lineal en la estructura del AST se pierde convergencia en tiempo finito, el error de estimación convergerá a la bola B_δ de forma exponencial de forma más rápida que el clásico AST.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Los esquemas de observación presentados pueden ser aplicados a sistemas mecánicos cuya forma general se describe como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + d = \tau \quad (4.1)$$

donde $q \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz asociada a las fuerzas de Coriolis y fuerzas centrífugas, g es el vector de fuerzas gravitacionales, d es un término de incertidumbre en el modelo y τ es el vector de control producido por los actuadores del sistema.

El capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección se presentan los observadores diseñados por modos deslizantes de primer orden y los basados en el esquema de supertwisting aplicados a un sistema de péndulo simple; en la segunda sección se aplica la extensión al caso vectorial del observador de supertwisting. Empleando en todos los esquemas la medida muestreada del sistema, que se podría ver como consecuencia natural de implementar los observadores en tiempo real, donde es necesario una conversión analógica digital para obtener los valores correspondientes del sistema físico a partir de los sensores disponibles para efectuar esta tarea. El tiempo de respuesta del sensor determinará el tiempo de muestreo para las medidas de la señal.

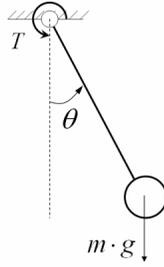


Figura 4-1: Péndulo Simple implementado en las simulaciones

4.1. Descripción de los modelos matemáticos

A continuación se da una descripción de los modelos usados para las simulaciones: un péndulo simple y un manipulador de dos grados de libertad.

4.1.1. Péndulo simple

Considere la imagen de la Figura (4-1) que corresponde a la descripción física de un péndulo simple, cuyo modelo se constituye por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{MgL}{2J} \sin(x_1) - \frac{V_s}{J}x_2 + \xi_t \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $x_1 = \theta$ es el ángulo de oscilación, $x_2 = \dot{\theta}$ es la velocidad angular, M es la masa del péndulo, g es la fuerza gravitacional, L es la longitud del péndulo, J es el brazo de inercia, V_s es el coeficiente de fricción viscosa del péndulo y ξ_t es una perturbación acotada.

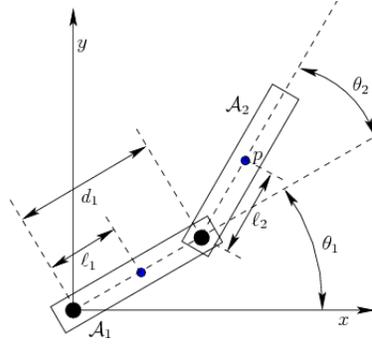
4.1.2. Modelo de un manipulador de dos grados de libertad

Para ilustrar el comportamiendo del observador mostrado en (3.24) (Observador de Super Twisting para caso vectorial) se implementa el resultado en un sistema no lineal referente a un robot manipulador de dos grados de libertad (Figura 4.1.2). Las matrices del modelo mecánico

que describe su dinámica $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ están dados por:

$$\begin{aligned}
 M(q) &= \begin{bmatrix} (m_1+m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2 \\ m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \\
 C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 (c_1 s_2 + s_1 c_2) & 0 \\ 0 & -m_2 l_1 l_2 (c_1 s_2 + s_1 c_2) \end{bmatrix} \\
 g(q) &= \begin{bmatrix} -(m_1+m_2) l_1 g s_1 \\ -m_2 l_2 g s_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $s_i = \sin(\theta_i)$ y $c_i = \cos(\theta_i)$.



Robot manipulador de dos grados de libertad

4.2. Resultados de estimación para el péndulo simple empleando el retenedor de orden cero

Los parámetros utilizados para el modelo (4.2) en las simulaciones son: las condiciones iniciales fueron escogidas para el modelo como $x_{1,0} = 3$ y $x_{2,0} = -1$, $\hat{x}_{1,0} = -3$, y $\hat{x}_{2,0} = -6$ para los observadores. Los parámetros del péndulo son : $m_1 = 1,1kg$, $L = 1m$, $g = 9,81 \left(\frac{m}{s^2}\right)$ y $V_s = 0,18 \frac{kg \cdot m}{s^2}$. Para efectos de simulación, la perturbación es expresada como:

$$\xi_t = 0,5 \sin(2t) + 0,5 \cos(5t) \tag{4.4}$$

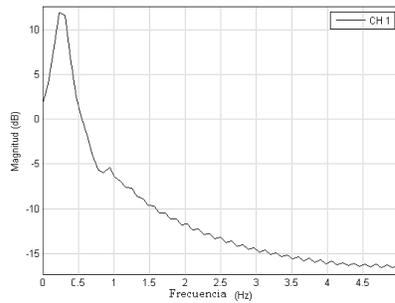


Figura 4-2: Análisis frecuencial del modelo que describe la dinámica de un péndulo simple

4.2.1. Análisis frecuencial para los diferentes tiempos de muestreo

La Figura (4-2) muestra el análisis frecuencial de la salida del sistema descrito por la ecuación (4.2). Las componente máxima es aproximadamente

4.2.2. Comparación de los esquemas de estimación para los diferentes esquemas de observación

El observador por MDPO fue entonado usando el siguiente vector de ganancias

$$K = \begin{bmatrix} 7 \\ 80 \end{bmatrix}$$

para el observador por supertwisting MDSOL las siguientes ganancias fueron propuestas para su funcionamiento

$$k_1 = 9, \quad k_2 = 10, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = 12$$

Tomando $k_2 = k_4 = 0$, el observador toma la forma del algoritmo clásico de super twisting (MDSO) ([32] y [1]). El periodo de muestreo para el retenedor de orden cero fue de 0,01 segundos usando un método de integración de paso variable ode45. Es importante resaltar que la comparación entre diferentes observadores es un aspecto difícil de mostrar, por la elección de ganancias, es posible que el observador por MDPO muestre un mejor desempeño. Sin embargo, un aumento en sus ganancias para lograrlo se traduciría en un sobretiro mayor. Es por esto que se trato de buscar cierto equilibrio para presentar los resultados de las siguientes gráficas.

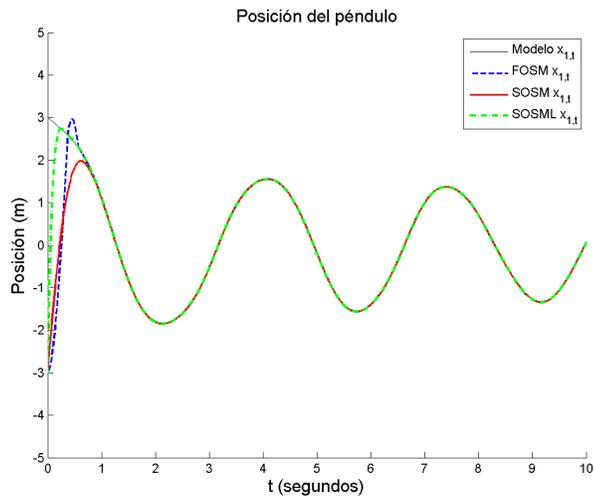


Figura 4-3: Estimación de la posición del péndulo para los tres esquemas de observación propuestos: a) Modos deslizantes de primer orden (FOSM), b) Modos deslizantes de segundo orden (SOSM) y c) Modos deslizantes de segundo orden con término lineal (SOSML)

Para los algoritmos basados en supertwisting se usaron las mismas ganancias. Una vez aclarado este aspecto se muestran los resultados obtenidos. La Figura 4-3 muestra el comportamiento de los tres observadores aplicados a la estimación del modelo del péndulo mostrado en 4.2. En primera instancia se muestra la posición del péndulo, podemos ver que como es el estado medible y tomando en cuenta que el periodo de muestreo es pequeño, entonces los tres esquemas logran estimar el estado, para el observador por MDPO la presencia del *chattering* es evidente. En lo que respecta a los algoritmos basados en supertwisting, en primera instancia el fenómeno del castaño es reducido y como ya se ha demostrado en trabajos previos [33] el observador que tiene un término proporcional al error alcanza la trayectoria real del sistema antes que el observador clásico de supertwisting estudiado en [13]. Para tener una perspectiva mas clara de las trayectorias seguidas por los esquemas de observación, antes de alcanzar las trayectorias reales del sistema se realiza un acercamiento a su dinámica. Este acercamiento se puede observar en la Figura 4-4 Para la estimación de la velocidad del péndulo, los resultados de simulación muestran que el algoritmo desarrollado por MDPO no tiene un buen desempeño, las trayectorias reales del sistema son reproducidas parcialmente, al igual que en la estimación de la posición, es posible aumentar las ganancias del observador de tal forma que se observe un mejor

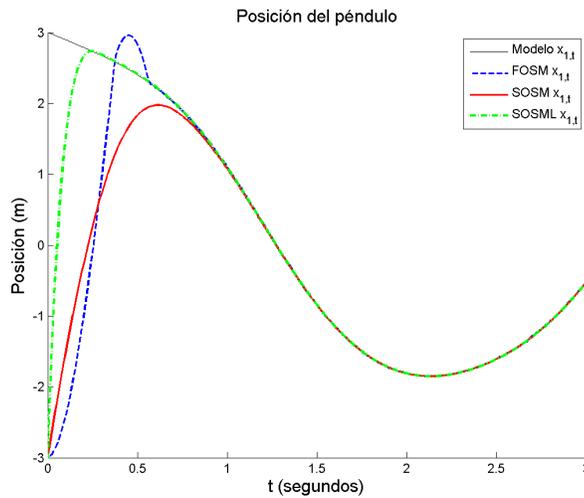


Figura 4-4: Acercamiento de las trayectorias de los esquemas de observación

desempeño. Sin embargo, esto implicaría un sobretiro mayor y el aumento en la amplitud del *chattering*. En la Figura 4-5 la línea continua negra presenta la dinámica del sistema original, la línea azul punteada hace referencia al observador por MDPO, se observa un sobretiro grande y el *chattering*, característica clásica de un MDPO. La línea punteada roja muestra el desempeño del observador por MDSO, se puede lograr una mejor convergencia ajustando las ganancias correspondientes. La principal diferencia de este esquema es comparada con el observador por MDSOL (línea verde punteada), la convergencia de este último es más rápida por el término proporcional al error que es más fuerte lejos de las trayectorias reales, una vez alcanzada la superficie cercana a cero (consecuencia del muestreo de la señal) del error de observación, los dos esquemas tienen un comportamiento similar y amplitud del castaño en la superficie desaparece parcialmente en relación al resultado obtenido por el esquema de primer orden. Para visualizar mejor el desempeño de cada uno de los esquemas de estimación de estados presentados, se hace un acercamiento a los primeros tres segundos de simulación. Este aspecto puede ser visualizado en la Figura 4-6.

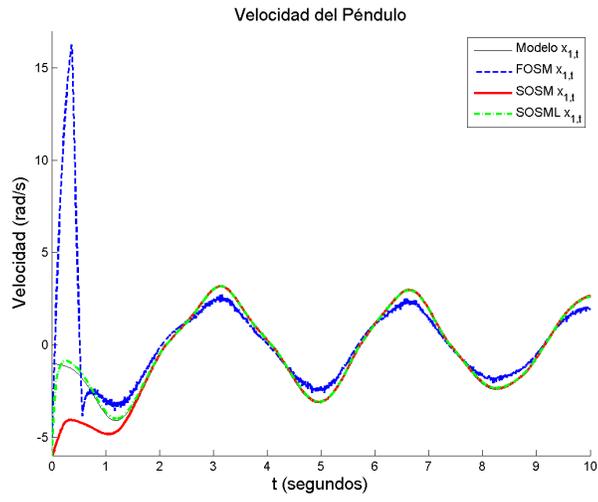


Figura 4-5: Estimación de la velocidad angular en el modelo del péndulo simple. a) Modos deslizantes de primer orden (FOSM, b) Modos deslizantes de segundo orden (SOSM) y c) Modos deslizantes de segundo orden con término lineal (SOSML)

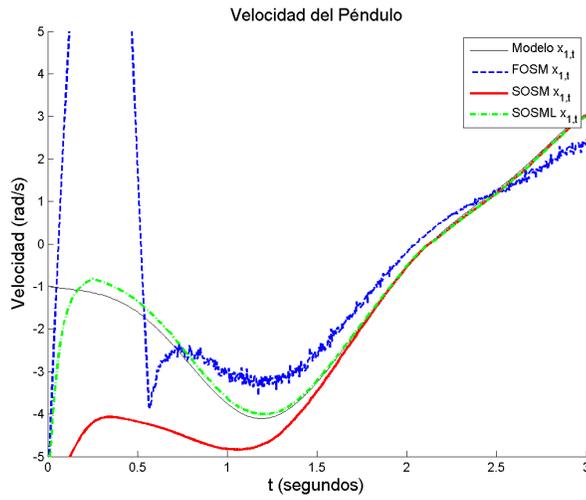


Figura 4-6: Acercamiento de las trayectorias de los esquemas de observación para el estado $x_{2,t}$

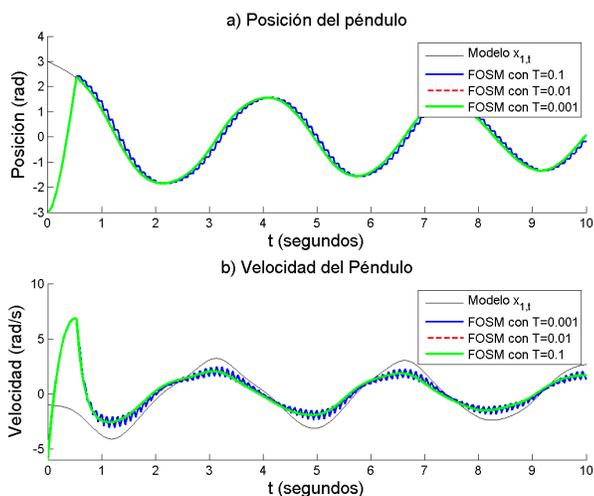


Figura 4-7: Resultados de simulación para el esquema por modos deslizantes de primer orden (FOSM) para diferentes tiempos de muestreo a) Posición del péndulo b) Velocidad del péndulo

4.2.3. Análisis del observador por Modos Deslizantes de primer orden (MD-PO) para diferentes tiempos de muestreo

Hasta este punto, han sido comparados los desempeños de cada uno de los esquemas estudiados para un mismo tipo de muestreo. A continuación se hace un análisis particular para cada observador con diferentes tiempos de muestreo de manera que se pueda observar la variación en su comportamiento dependiendo del periodo T .

La Figura 4-7 muestra el comportamiento del observador por MDPO, se observa en primera instancia la posición del péndulo comparando tres diferentes tiempos de muestreo. Se consideraron $T = 0,001$, $T = 0,01$ y $T = 0,1$, se observa que las trayectorias de los observadores siguen el mismo patrón. Existe una notable diferencia en la amplitud del *chattering* conforme el tiempo de muestreo aumenta, cumpliendo los resultados propuestos en el teorema correspondiente. La amplitud de la zona de convergencia dependerá directamente del periodo de muestreo con el que adquiramos la señal de salida para inyectarla en el observador. La segunda Figura indica la velocidad del péndulo, donde el esquema por MDPO no alcanza a reproducir eficazmente las trayectorias reales del sistema. La norma del error se observa en la Figura 4-8, el radio de convergencia del estimador se observa más claramente. La diferencia entre el muestreo a $0,001s$ y

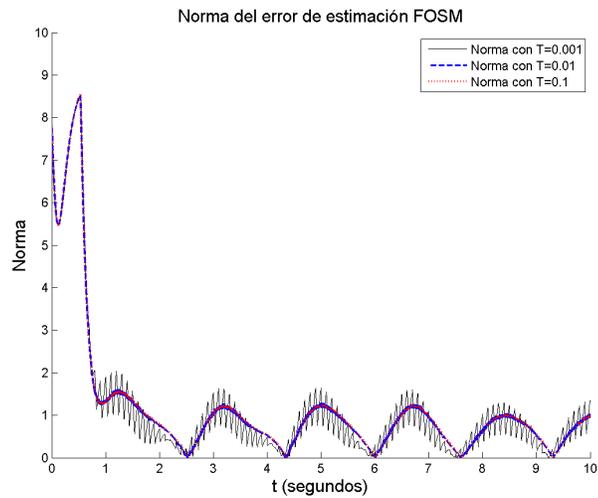


Figura 4-8: Norma del error de estimación

0,01 no es muy clara, pero es proporcional al chattering que presenta el sistema.

4.2.4. Análisis del Observador por Modos Deslizantes de Segundo Orden (MDSO) para diferentes tiempos de muestreo

En los resultados obtenidos por el esquema por MDPO, la presencia de esta característica afecta significativamente la calidad de estimación del sistema del péndulo. Es por esto que el algoritmo de super twisting logró tener mejores resultados a pesar de la deficiencia en la medición de la señal de salida. En la Figura 4-9 se describen los resultados obtenidos para tres diferentes periodos de muestreo, los mismos utilizados en la sección anterior para checar el comportamiendo del observador de primer orden. Primero se describe la posición del péndulo, no hay presencia de *chattering* en las simulaciones, el comportamiendo es notoriamente mejor que el esquema anterior, a pesar de un muestreo relativamente amplio que se simula con 10 mediciones por segundo, que para sensores destinados a la medición de posición es un tiempo muy grande a comparación de su capacidad de respuesta. Lógicamente, en comparación con periodos más grandes (0.01 y 0.1) se observa una variación respecto a las trayectorias del sistem original. La gráfica b muestra la velocidad del péndulo, donde es más claro el efecto de muestrear a 0.1, dado que el estimador no alcanza a reproducir totalmente las trayectorias del sistema. La

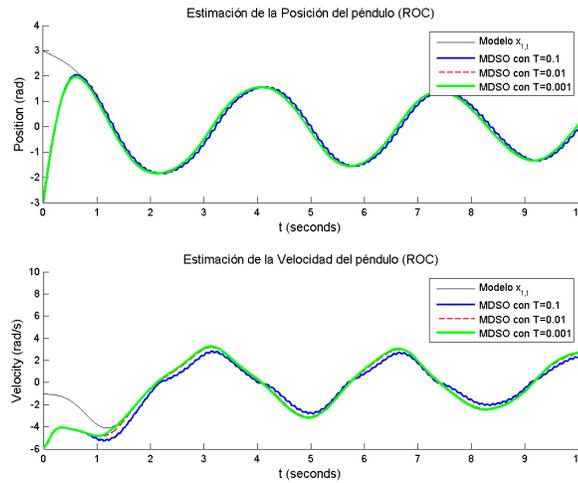


Figura 4-9: Estimación de los parámetros del péndulo usando el AST para diferentes periodos de muestreo (0,1, , 0.01,0,001 s) a) Posición del péndulo b) Velocidad del péndulo

norma del error de observación se observa en la Figura 4-10, la región de convergencia disminuye al aumentar el periodo de muestreo del estimador. Para analizar la zona, a la que el error de estimación converge se realiza un acercamiento a la Figura anterior en el área en que los errores llegan a la zona de convergencia, este aspecto es posible visualizarlo en la Figura (4-11). La Figura 4-12 describe el comportamiento de la función de Lyapunov y la región de convergencia a la que las trayectorias del estimador llegan, una vez dentro de la zona de convergencia, las trayectorias de la función de Lyapunov permanecerán en ella. La gráfica muestra un acercamiento de las trayectorias reales, para poder ilustrar claramente este punto. Todas estas gráficas, exhiben el comportamiento del observador tomando en cuenta diferentes periodos de muestreo, en todas es evidente que a mayor periodo de muestreo la calidad en la dinámica del observador decrecerá, las Figuras 4-13 y 4-14 muestran el diagrama de fases del error de estimación para los periodos de muestreo empleados en las simulaciones. En estas gráficas es más claro la región o bola de convergencia a las que las trayectorias del error convergen. La vecindad cerca del origen aumenta a medida que el periodo de muestreo de la señal aumenta, dado que la reconstrucción de la señal provee un mayor error entre la señal real y la señal muestreada.

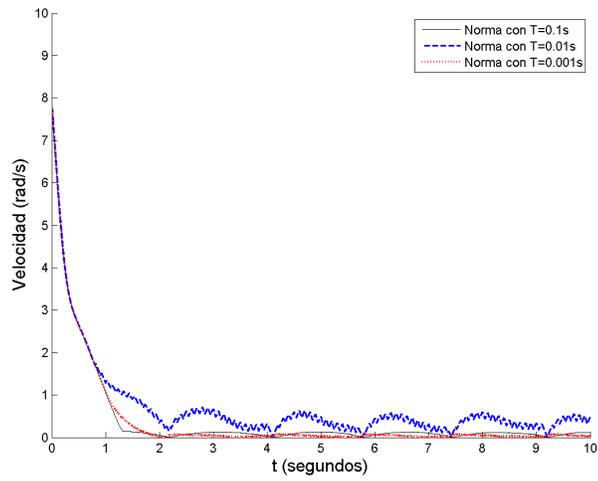


Figura 4-10: Norma de los errores de estimación del observador por super twisting para periodos de muestreo de 0.1, 0.01 y 0.001

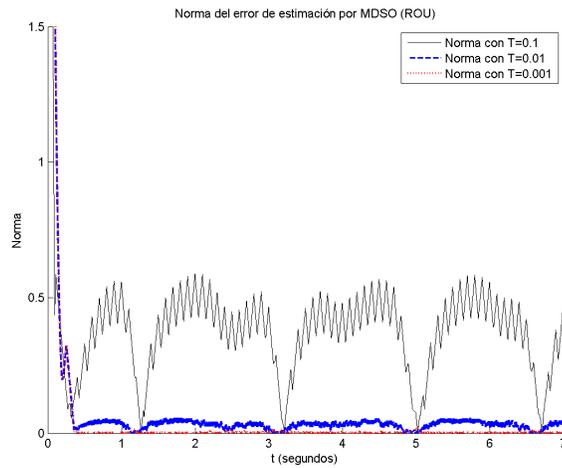


Figura 4-11: Acercamiento a la región de convergencia del error de estimación

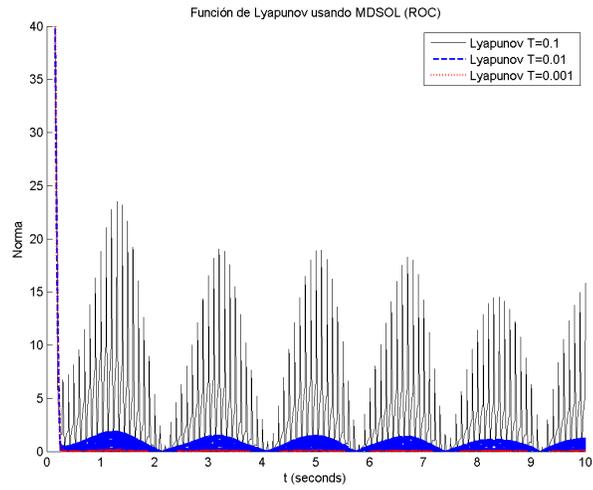


Figura 4-12: Trayectorias de la función de Lyapunov para los periodos de muestreos usados en las simulaciones del péndulo.

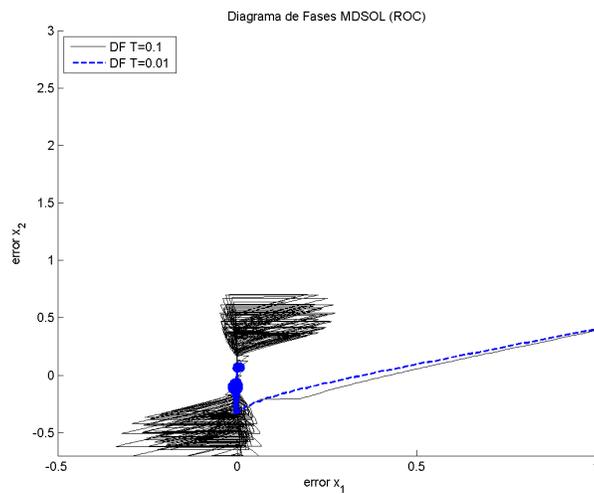


Figura 4-13: Diagrama de fases del error de estimación para periodos de muestreo de 0.1 y 0.01 segundos

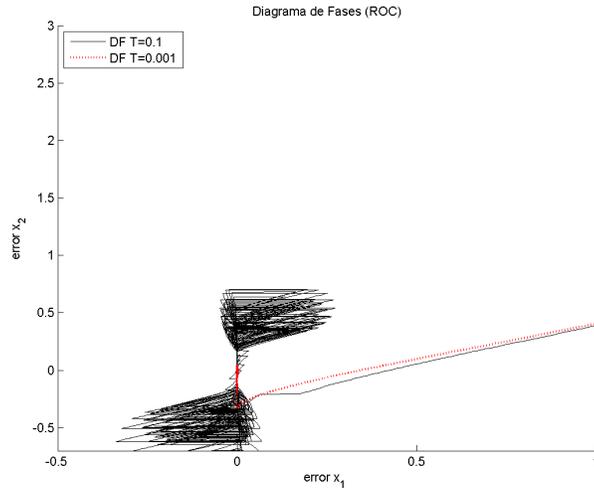


Figura 4-14: Diagrama de fases del error de estimación para periodos de muestreo de 0.1 y 0.001 segundos

4.2.5. Análisis del Observador por MDSOL para diferentes tiempos de muestreo

Al implementar el término lineal en la estructura del observador (ecuación 3.28), se pierde convergencia en tiempo finito. La principal ventaja es lograr un menor tiempo de convergencia, esta es en forma exponencial, ya se ha explicado el comportamiento del término lineal, que es más fuerte que el término de discontinuidad cuando las trayectorias del observador se encuentran más lejos de las trayectorias reales del sistema. Por otro lado el término de discontinuidad es más fuerte cerca de las trayectorias reales del sistema. La Figura 4-15 muestra los resultados de simulación del observador de super twisting con término lineal tomando en cuenta falta de medición en la salida por instantes de tiempo relativos al periodo de muestreo. La convergencia es más rápida si los comparamos con la Figura 4-9, la gráfica a muestra la posición del péndulo y la gráfica b la velocidad. En ambas, el comportamiento es igual al algoritmo por MDSO solo cambia el tiempo de convergencia. Una vez que el observador alcanza la trayectoria del sistema, el comportamiento de ambos observadores es similar. En la Figura referente a la norma de los errores de estimación obtenidos para los distintos periodos de muestreo (Figura 4-16) al ser comparada con la Figura 4-10 se observa un comportamiento similar. La única diferencia es el tiempo de convergencia de los observadores. La Figura (4-17) realiza un acercamiento a a la

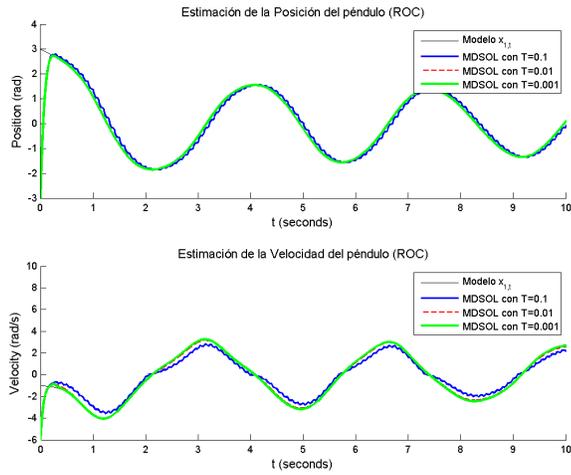


Figura 4-15: Estimación de la velocidad del péndulo por Modos deslizantes de segundo orden con término lineal para periodos de muestreo de 0.1, 0.01 y 0.001. a) Posición del péndulo b) Velocidad del péndulo

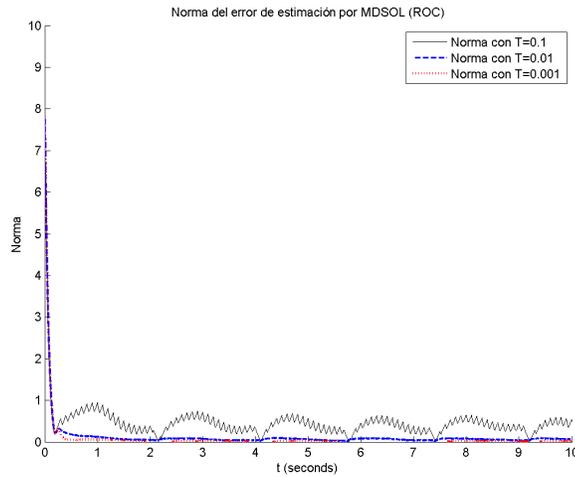


Figura 4-16: Norma de los errores de estimación del observador por super twisting con término lineal para periodos de muestreo de 0.1, 0.01 y 0.001 segundos

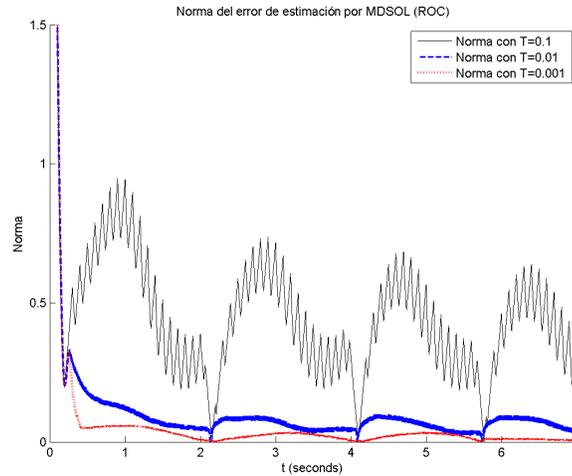


Figura 4-17: Acercamiento a la zona de convergencia de la norma del error de observación $\|x_t\|$ para periodos de muestreo de 0.1, 0.01 y 0.001 segundos

zona de convergencia, es posible observar que en comparación con el algoritmo STA clásico, la velocidad de convergencia es menor, y la amplitud de la zona es similar. Las trayectorias de la función de Lyapunov son exhibidas en la figura El diagrama de fases del error de observación para el observador por MDSOL se ilustra en las Figuras (4-19) y (4-20).

4.3. Resultados de estimación para el péndulo simple empleando el retenedor de orden uno

En el capítulo 3, se calculó la cota para el cambio en el error de estimación producto del muestreo de la señal partiendo de un retenedor de orden cero y orden uno, para éste último claramente se observó que el valor máximo es menor que el obtenido para el retenedor de orden cero. Este resultado es consecuencia de la dinámica de los retenedores, puesto que el de orden cero solo mantiene la señal entre instantes de tiempo donde se adquiere la señal, mientras que el retenedor de orden uno hace una aproximación de la trayectoria entre dos puntos de la medición. A continuación se presentan los resultados de los observadores usando un retenedor de orden uno. La Figura 4-21 muestra el comportamiento de la estimación de la posición para los tres esquemas de observación propuestos en este trabajo, un retenedor de orden uno es aplicado

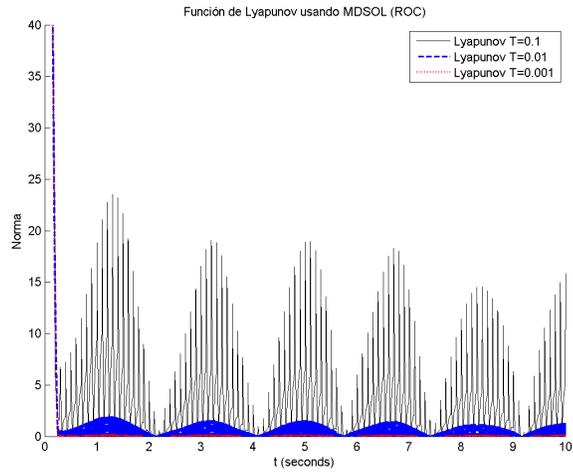


Figura 4-18: Trayectorias de la función de Lyapunov para el observador por MDSOL a diferentes tiempos de muestreo.

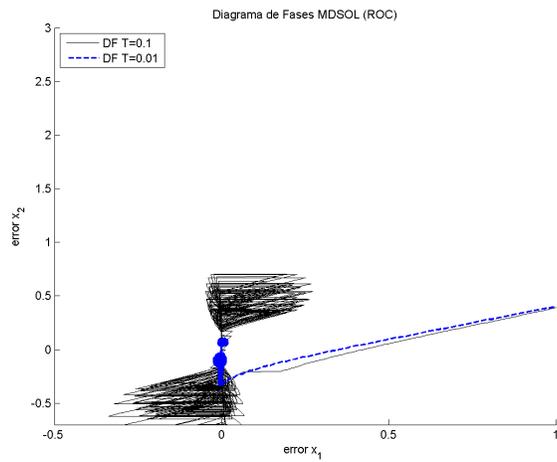


Figura 4-19: Diagrama de fases del error de estimación para periodos de muestreo de 0.1 y 0.01 segundos

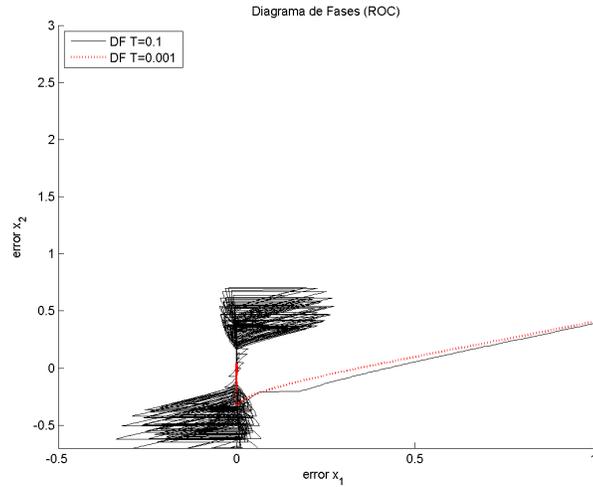


Figura 4-20: Diagrama de fases para periodos de muestreo de 0.1 y 0.001 segundos para el observador por MDSOL

para muestrear la salida y ser inyectada en los términos de corrección de cada algoritmo de estimación. El periodo de muestreo fue tomado como $T_s = 0,01$ el mejor desempeño se obtiene para el esquema por SOSML con una convergencia más rápida y una reducción del *switcheo* en la superficie del error. Para evitar un número elevado de gráficas, se presenta una tabla donde se hace un resumen de los resultados obtenidos para comparar la aplicación de las dos formas de retener la señal (ROC y ROU). Posteriormente, se dan los resultados detallados de comparación de ambas dinámicas de muestreo tomando el peor caso, es decir, el periodo de muestreo más grande utilizado en las simulaciones que fue de 0,1 segundos. La forma de comparar los resultados de simulación se hizo tomando el índice de desempeño siguiente

$$ind = \int_0^T \|\tilde{x}_t\| dt$$

El tiempo de simulación máximo fue de 10 segundos. En la tabla siguiente, se puede observar que la acumulación del error para el ROC es mayor que el de ROU en cada valor del periodo tomado en particular. No existe una variación significativa cuando con el menor periodo de muestreo, puesto que casi se puede ver como una señal cuasi continua. Sin embargo, para los dos periodos

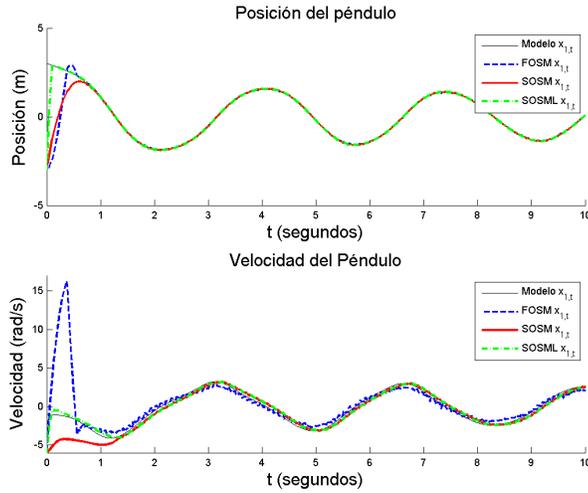


Figura 4-21: Resultados de simulación muestreando la salida con un retenedor de orden uno con un periodo de muestreo $T_s = 0,01$. a) Estimación de la posición del péndulo, b) Estimación de la velocidad del péndulo

de muestreo restantes ocupados en las simulaciones si se observa un mejor desempeño cuando se muestrea con un retenedor de orden uno. Solo hay una excepción, como se visualiza tomando el observador por MDPO con un periodo de muestreo de 0.1 segundos. El error acumulado es mayor para el ROU, sin embargo, es por la presencia del *chattering* que se presenta este caso particular. En la sección siguiente se da la simulación para comparar las trayectorias del sistema.

Norma del error de Estimación

Esquema	$T_s = 0,1s$		$T_s = 0,01s$		$T_s = 0,001s$	
	ROC	ROU	ROC	ROU	ROC	ROU
MDPO	11.01	11.33	11.39	11.24	11.24	11.23
MDSO	6.933	6.473	4.079	3.516	3.814	3.513
MDSOL	4.535	3.85	1.319	0.7084	1.083	0.6687

(Tabla 1)

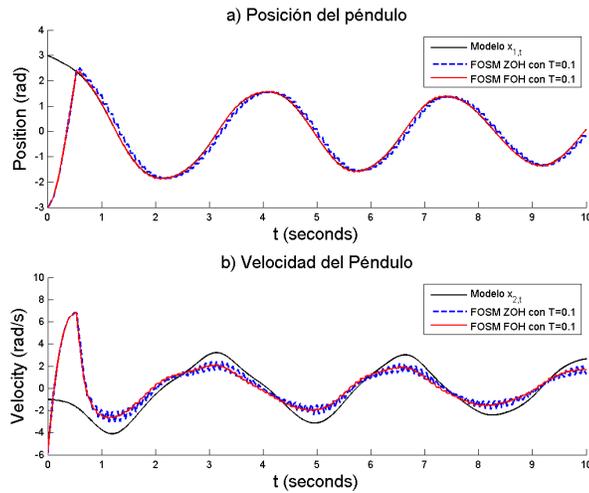


Figura 4-22: Comparación del efecto del muestreo con un ZOH y un FOH con un periodo de muestreo de $T_s = 0,1s$ a) Estimación de la posición del péndulo, b) Estimación de la velocidad del péndulo

4.3.1. Resultados de la implementación del ROU en el observador por MD de primer orden

Tomando el peor caso de muestreo, se presenta en la Figura 4-22 la comparación del esquema de observación por MDPO con la dinámica de un retenedor de orden cero y un retenedor de orden uno. Se observan las mismas trayectorias en la estimación del primer estado. Sin embargo, el ROC presenta chattering en su estructura. Para la estimación del segundo estado de la dinámica del péndulo se vuelve a presentar el mismo problema, las trayectorias son las mismas, no se alcanza a reproducir completamente la trayectoria del sistema. Cuando se usa un ROC claramente se ve la presencia de chattering con una amplitud mayor que en el caso cuando la salida es muestreada por el retenedor de orden uno. El índice de desempeño se muestra en la Figura 4-23, por la presencia del castaño en las trayectorias del observador, hay una contradicción clara a pesar de que el error acumulado al usar un ROU es mayor, claramente en las simulaciones se ve que el estimador con la salida muestreada por un ROC es menos eficiente.

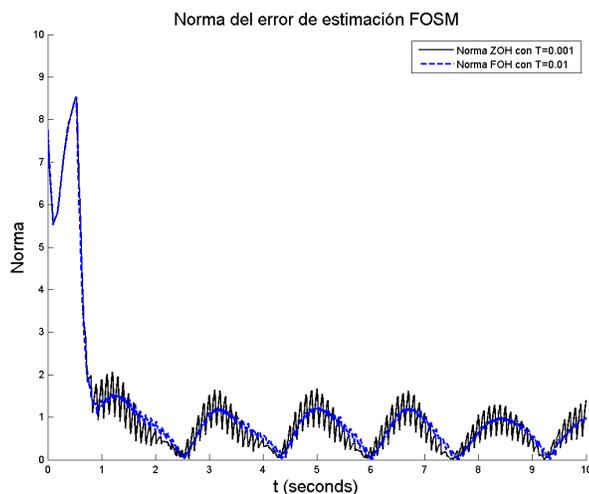


Figura 4-23: Comparación del índice de desempeño del observador por FOSM cuando la salida es muestreada a 0.1 s empleando un ZOH y FOH

4.3.2. Resultados de la implementación del retenedor de ROU en el estimador por modos deslizantes de segundo orden

Al comparar los resultados de implementar las dos dinámicas de retención propuestas en el esquema de estimación por super twisting [13], se observa en primer plano la reducción del castaño, comparada con el estimador de primer orden. Las trayectorias del sistema, empleando el retenedor de orden uno en el peor caso estudiado, son más suaves que las que presentan los resultados siguiendo la dinámica del retenedor de orden cero. La Figura 4-24 muestra la simulación para un tiempo máximo de 10 segundos. Se muestra la estimación de la posición del péndulo en la primera gráfica, y en la segunda la dinámica de la velocidad del péndulo. En esta última al muestrear por un ROU, se alcanzan relativamente más rápido las trayectorias del sistema original. La Figura 4-25 muestra el índice de desempeño de los observadores, la norma del estimador con ROU en casi todos los instantes de tiempo se encuentra por debajo de la norma del estimador muestreando con un ROC. Los valores escritos en la tabla 1 concuerdan con las simulaciones. Como en los casos anteriores se realiza un acercamiento a la zona de convergencia para observar que pasa con las trayectorias del error de estimación, es posible apreciar como dicha zona disminuye si el periodo de muestreo es menor (Figura (4-26)). La

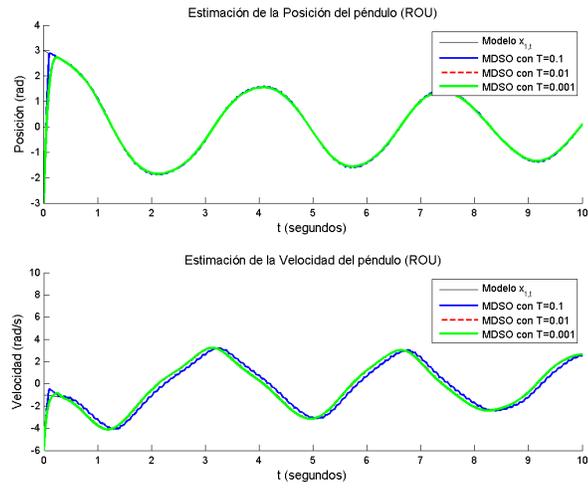


Figura 4-24: Estimación de la posición y velocidad del modelo del péndulo usando MDSO y reconstruyendo la señal de salida en términos de un retenedor de orden uno para diferentes periodos de muestreo a) Estimación de la posición, b) Estimación de la velocidad

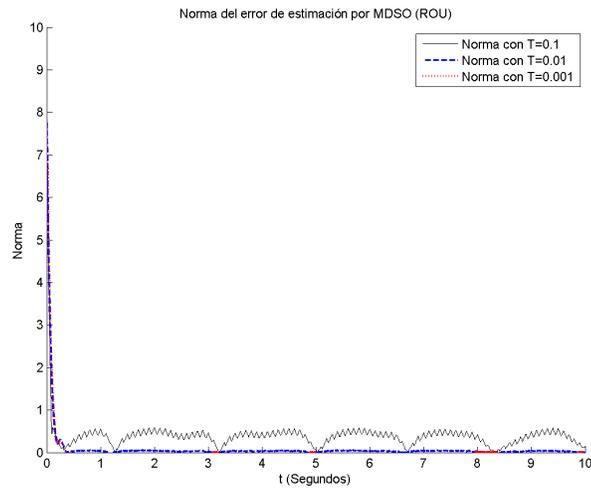


Figura 4-25: Norma del error de estimación usando el retenedor de orden uno

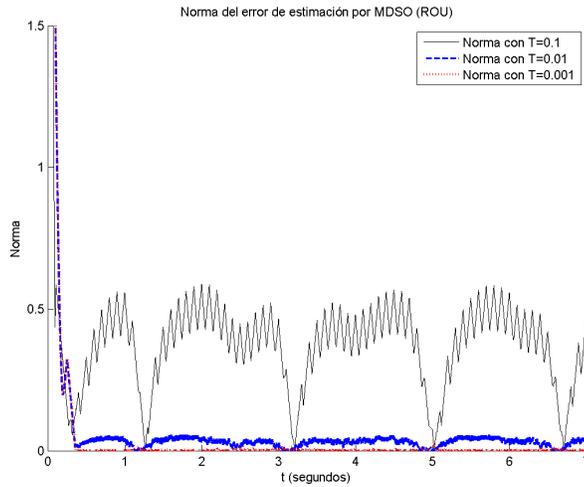


Figura 4-26: Acercamiento a las trayectorias de la norma del error de estimación para diferentes periodos de muestreo (ROU)

Figura (4-27) describe las trayectorias de la función de Lyapunov y muestra de igual forma la zona de convergencia del observador, mientras que la Figura (4-28) exhibe el diagrama de fases del error de estimación. La Figura (4-29) muestra la comparación de la zonas de convergencia del diagrama de fases del error de estimación usando los dos diferentes tipos de retenedores, el ROC y el ROU para un mismo periodo de muestreo, es evidente que la zona de muestreo disminuye si se reconstruye la señal en términos de un ROU y es de esperarse, dado que ésta realiza una aproximación lineal de la salida del sistema entre cada periodo de muestreo, mientras que el ROC mantiene una señal constante, por lo que el error va creciendo hasta que llega el siguiente periodo de muestreo.

4.3.3. Resultados de la implementación del retenedor de ROU en el estimador por modos deslizantes de segundo orden con término lineal

Para concluir con esta sección se presenta la comparación de las dinámicas del estimador por MDSOL usando las dos dinámicas de muestreo estudiadas. En la Figura 4-30 se visualiza los resultados de simulación. Para la primer gráfica se tiene la estimación de la posición del péndulo. La convergencia es más rápida y se nota mayor eficiencia al usar el ROU, por el tipo

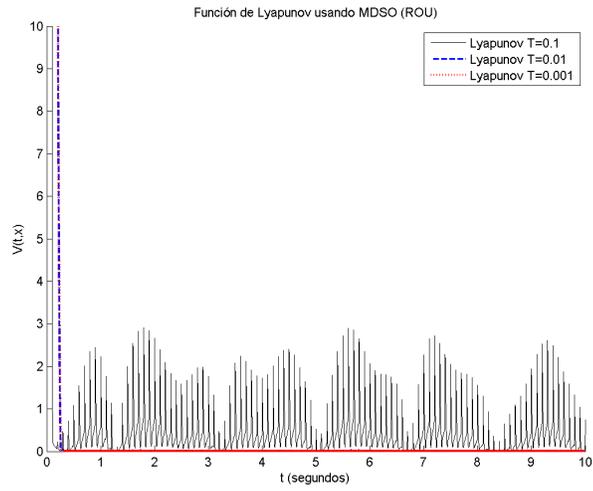


Figura 4-27: Trayectoria de la función de Lyapunov usando un ROU

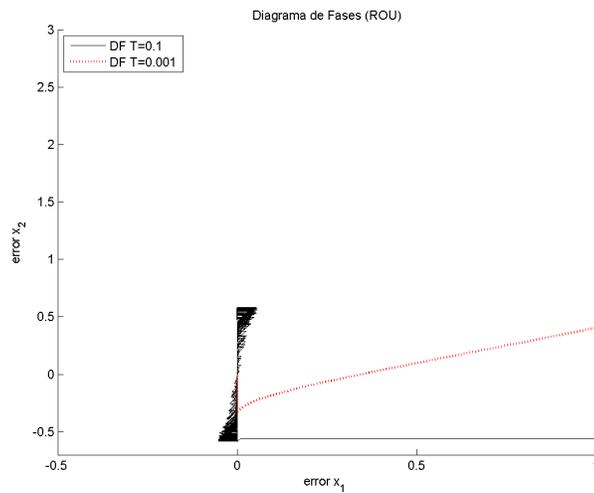


Figura 4-28: Diagrama de fases del error de estimación para el péndulo usando MDSO para periodos de muestreo de 0.1 y 0.001 segundos

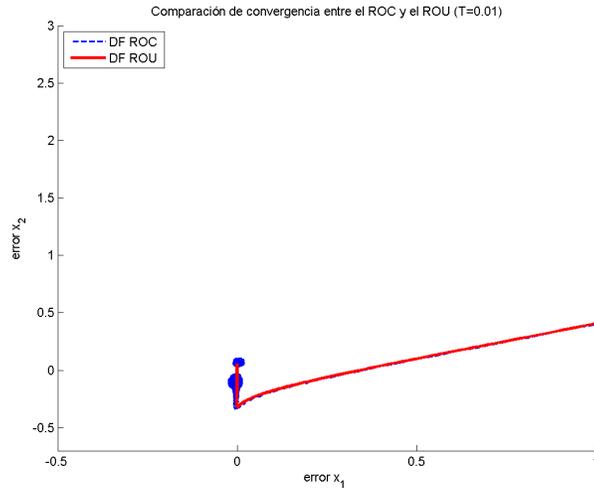


Figura 4-29: Comparación entre la zona de convergencia del error de estimación del péndulo usando MDSO y retenedores ROC y ROU

de reconstrucción de la señal al igual que en los casos anteriores. La segunda gráfica muestra la estimación de la velocidad del péndulo. Finalmente en la Figura 4-31 se muestra el índice de desempeño para las dos retenedores muestreando a 0.1 segundos.

4.4. Resultados de simulación para el caso vectorial

Para las simulaciones del robot manipulador de dos grados de libertad descrito por las ecuaciones diferenciales 4.3, se usaron los siguientes parámetros

$$m_1 = 5 \text{ (kg)} \quad l_1 = l_2 = 0,5 \text{ (m)} \quad g = 9,81 \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

Las condiciones iniciales del modelo fueron cero

$$x(0)_1 = x(0)_2 = x(0)_3 = x(0)_4 = 0$$

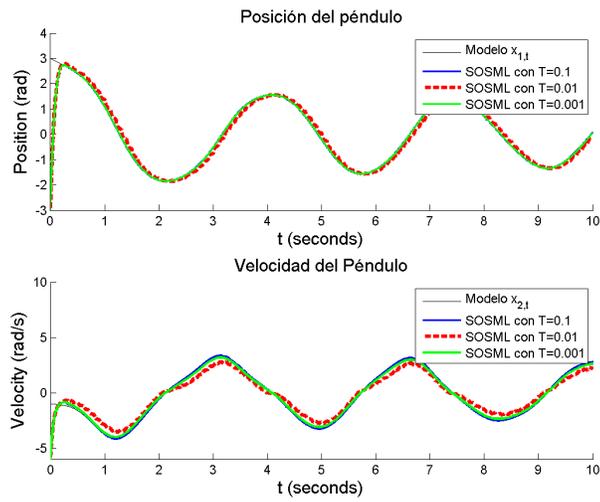


Figura 4-30: Estimación de los parámetros del péndulo usando un ROU a) Estimación de la posición. b) Estimación de la velocidad

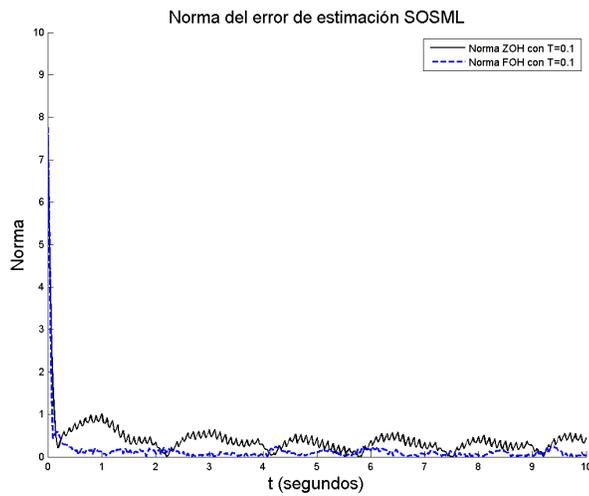


Figura 4-31: Comparación de la norma del error para el observador por MDSOL, usando ROC y ROU

Las ganancias utilizadas para entonar el estimador por super twisting fueron tomadas como

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Sus condiciones iniciales usadas son

$$\hat{x}(0)_1 = 2, \hat{x}(0)_2 = 3, \hat{x}(0)_3 = 4, \hat{x}(0)_4 = 5$$

La Figura 4-32 muestra los resultados numéricos. Fueron implementados tres periodos de muestro diferentes para checar la eficiencia del estimador (0.1, 0.01 y 0.001 segundos). La primera gráfica de la figura muestra la dinámica de la posición del primer eslabón del robot manipulador, a diferencia del péndulo al momento de aumentar el periodo de muestreo a 0.1 segundos, las trayectorias reproducidas siguen el patrón de la dinámica real del sistema. Sin embargo la calidad decrece en comparación con periodos mas pequeños. La segunda gráfica muestra la dinámica de la velocidad del primer eslabón para los mismos periodos de muestreo. Se tiene mucha oscilación en la dinámica del observador: Las graficas c y d de dicha figura muestran la posición y velocidad del segundo eslabón del robot manipulador. Se sigue el mismo patrón, entre menor sea el periodo mejor será el ajuste del observador a las trayectorias del sistema. El índice de desempeño del observador se puede apreciar en la gráfica de la Figura 4-33, es claro que a un periodo de muestreo de 0.1 segundos la región de convergencia es mayor.

4.4.1. Resultados empleando un retenedor de primer orden

Comparando el uso de los dos retenedores con un mismo periodo de muestreo, es evidente que al implementar la dinamica del retenedor de orden uno se logra obtener mejores resultados numéricos que con la dinámica del retenedor de orden cero. La Figura 4-34 muestra las simulaciones tomando en cuenta el peor periodo de muestreo ocupado a lo largo de ese trabajo. La primera gráfica muestra la evolución del primer eslabón del robot manipulador; mientras que la segunda muestra la dinámica de la velocidad. La oscilación en las trayectorias del observador son mayores usando un retenedor de orden cero. La gráfica c y d muestra las mismas características en la dinámica del estimador para la posición y velocidad del segundo manipulador.

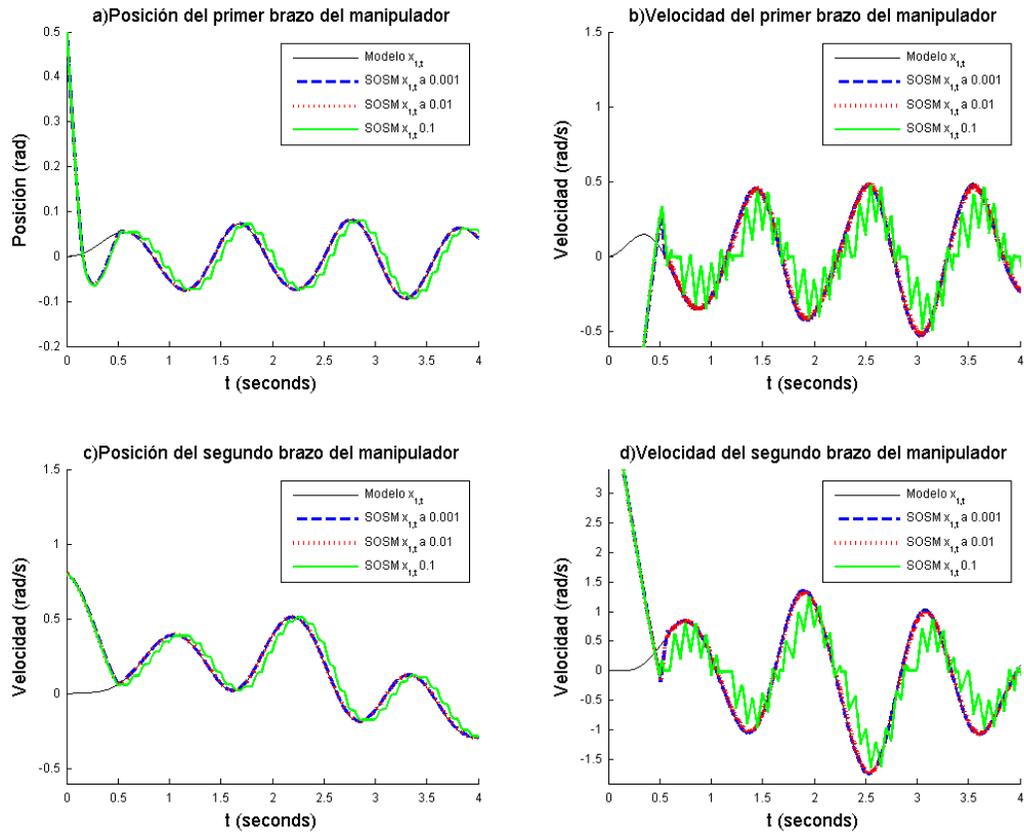


Figura 4-32: Simulación del robot manipulador de dos grados de libertad con periodos de muestreo de 0,001, 0,01 t 0,1s.a) Posición del primer eslabón b) Velocidad del primer eslabón c) Posición del segundo eslabón d) Velocidad del segundo eslabón

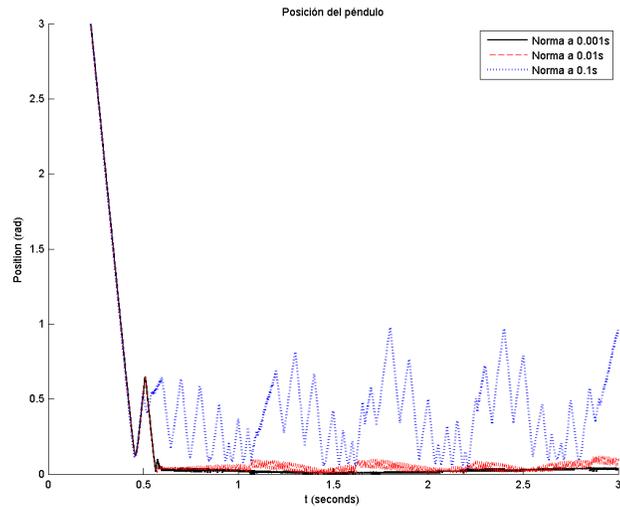


Figura 4-33: Norma del error de estimación para los periodos de muestreo utilizados.

Finalmente la 4-35 muestra el índice de desempeño del estimador usando los dos retenedores estudiados.

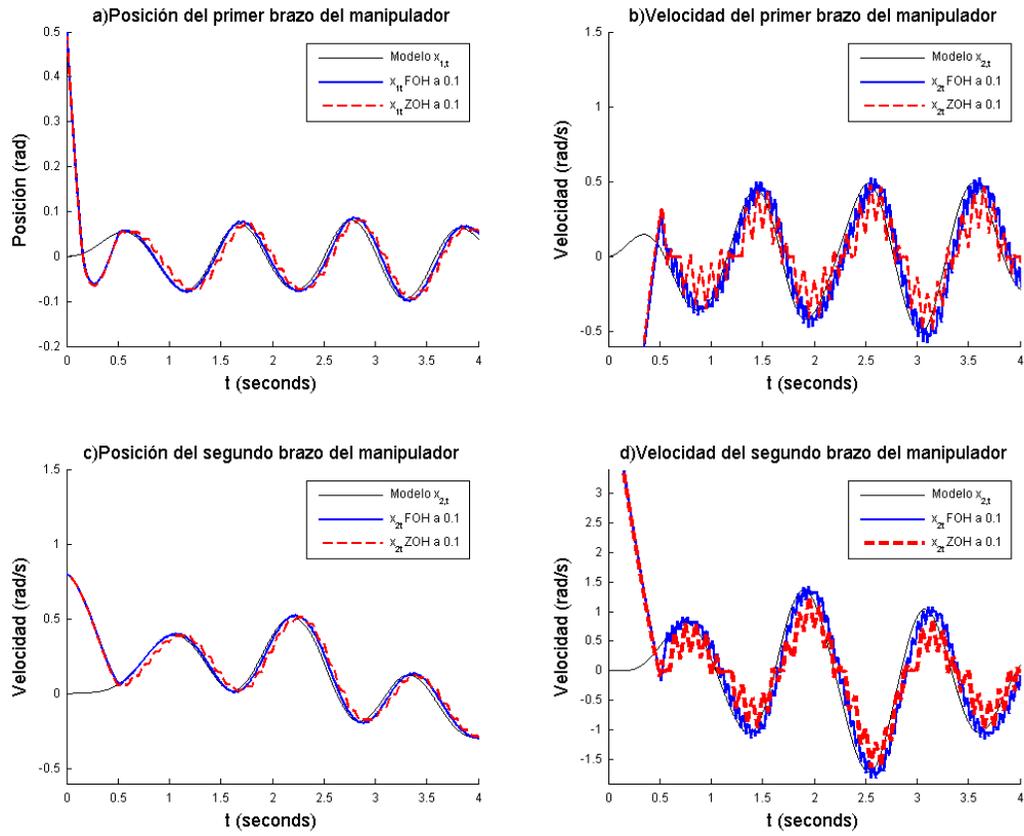


Figura 4-34: Simulación del robot manipulador de dos grados de libertad usando un FOH y un ZOH. a) Posición del primer eslabón b) Velocidad del primer eslabón c) Posición del segundo eslabón d) Velocidad del segundo eslabón

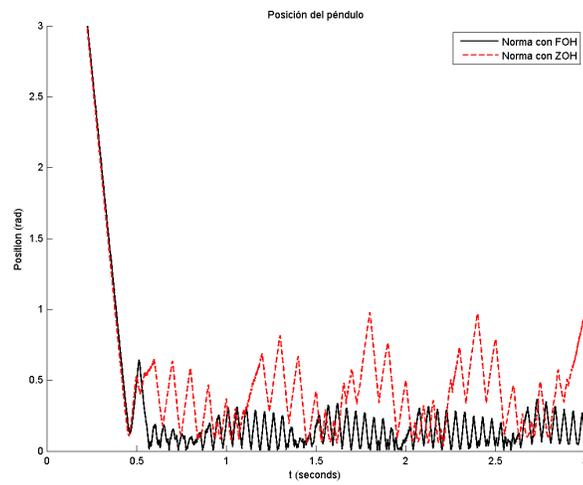


Figura 4-35: Norma del error comparando el uso del retenedor de orden cero y el retenedor de orden uno

Capítulo 5

Conclusiones

Con el presente trabajo se han presentado y analizado diferentes esquemas de estimación de estados para sistemas de segundo orden no lineales basados en la teoría de modos deslizantes, tomando en cuenta la deficiencia de la medición de salida en todos los instantes de tiempo. A lo largo del trabajo se presentaron tres observadores, uno diseñado por modos deslizantes de primer orden, y dos observadores por modos deslizantes de segundo orden, específicamente basados en el esquema de super-twisting, el tercer esquema agregando un término lineal. Estos dos basados en resultados ya existentes [11], [33].

En trabajos previos, dentro del área de modos deslizantes no se tiene registro de esquemas similares al propuesto en esta tesis (sistema continuo-salida muestreada-estimador continuo). Este aspecto si es analizado a detalle se puede presentar en cualquier aplicación en tiempo real. En el caso del muestreo de la señal se presentaron dos dinámicas: el retenedor de orden cero y el retenedor de orden uno. Se estudió su comportamiento y se implementaron en los esquemas de estimación. En el capítulo 3 se desarrollaron las cotas para el error máximo entre la salida real del sistema y la salida obtenida con los retenedores. De ésta forma se pueden tener casos en que la dinámica del retenedor de orden cero podría tener un mejor desempeño que el retenedor de orden uno, aunque este aspecto es proporcional al periodo de muestreo.

Para el observador de primer orden por modos deslizantes se propuso un análisis de Lyapunov para encontrar el radio de convergencia del estimador de estados. Se probó convergencia en tiempo finito a una región, el radio de la región de convergencia depende directamente de las cotas obtenidas para la dinámica de los retenedores de orden cero y orden uno que es propor-

cional al tiempo de muestreo. Para los observadores basados en super-twisting, se tomaron los resultados obtenidos para la convergencia del algoritmo super-twisting desarrollados por [33]. La función de Lyapunov fuerte estudiada en este trabajo fue tomada como base para mostrar la convergencia de los esquemas de estimación en base al error máximo provisto por las dinámicas de los retenedores. Se determinó el radio de convergencia para éstos esquemas de observación, logrando convergencia en tiempo finito para el caso del algoritmo de super twisting puro, y convergencia exponencial para el algoritmo de super twisting con término lineal.

Una vez obtenidas las pruebas se implementaron, los esquemas de estimación en tres modelos dinámicos no lineales: un péndulo simple con fricción viscosa para el caso de los esquemas escalares (sistemas de segundo orden) y un modelos para el caso vectorial, un robot manipulador de dos uniones (2 grados de libertad). Se probaron diferentes tiempos de muestreo, donde claramente se pudo visualizar como la extensión del radio de convergencia aumentaba proporcionalmente al periodo de muestreo. En total se tienen en las simulaciones tres diferentes periodos de muestreo (a 0.1, 0.01 y 0.001 segundos). El observador de primer orden presentó chattering, como es de esperarse en esta teoría, cuya amplitud también demostró proporcionalidad en referencia al tiempo de muestreo. Para los observadores por modos deslizantes de segundo orden, este fenómeno se vio ampliamente reducido, las trayectorias fueron más suaves. Su eficiencia como se observó en la tabla uno depende de dos factores, el periodo de muestreo y el retenedor que se esté empleando. La diferencia con el observador al que le fue agregado un término lineal radica en el tiempo de convergencia, que alcanza mas rápido las trayectorias originales del sistema no lineal.

Capítulo 6

Apéndice

Para realizar las pruebas de convergencia de los observadores mostrados en este capítulo, es necesario considerar los siguientes dos lemas para obtener los resultados finales de cada teorema

Lema 18 *Considere una función candidata de Lyapunov*

$$V_t := \xi_t^\top P \xi_t$$

donde

$$\xi_t = \begin{bmatrix} x_2 & \Lambda^{-1}(x_1) S(x_1) \end{bmatrix}^\top$$

La derivada de esta función en las trayectorias del sistema no lineal $f(x_t, t)$ está dado por

$$\dot{V}_t \leq \Lambda^{-1}(x_1) \xi_t^\top Q \xi_t + \rho \quad (6.1)$$

con $Q = Q^\top > 0$, entonces la derivada de la función de Lyapunov toma la siguiente forma

$$\dot{V}_t \leq -\frac{\lambda \text{máx}^{1/2}(P) \lambda \text{mín}(Q)}{\lambda \text{mín}(P)} \sqrt{V_t} + \rho$$

Prueba. Trabajando con el término $-\Lambda^{-1}(\bar{x}_1) \xi_t^\top Q \xi_t$ se tiene

$$\|\xi_t\|_2^2 = \|\tilde{x}_2\|_2^2 + \|\Lambda(\bar{x}_1) S(\bar{x}_1)\|^2 \geq \|\Lambda(\bar{x}_1)\|^2$$

Además se puede probar que

$$V_t \leq \lambda \text{mín}(P) \|\xi\|^2$$

Con los dos resultados anteriores se llega a

$$\|\xi_t\| \geq \frac{\sqrt{V_t}}{\lambda \text{mín}^{1/2}(P)}$$

Por lo tanto

$$-\Lambda^{-1}(\bar{x}_1) \leq \frac{\lambda \text{mín}^{1/2}(P)}{\sqrt{V_t}}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &\leq -\frac{\lambda \text{mín}^{1/2}(P) \lambda \text{máx}(Q)}{\sqrt{V_t}} \|\xi_t\|^2 + \rho \\ &\leq -\frac{\lambda \text{mín}^{1/2}(P) \lambda \text{mín}(Q)}{\lambda \text{mín}(P) \sqrt{V_t}} V_t + \rho \\ &\leq -\frac{\lambda \text{máx}^{1/2}(P) \lambda \text{mín}(Q)}{\lambda \text{mín}(P)} \sqrt{V_t} + \rho \end{aligned}$$

Y el lema es probado ■

Lema 19 Sea V_t una función no negativa que satisface la siguiente desigualdad diferencial

$$\dot{V}_t \leq -\alpha \sqrt{V_t} + \beta$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ ($\beta = 0$ significa una salida continua). Entonces

$$\left[1 - \mu/\sqrt{V_t}\right]_+ \rightarrow 0$$

con

$$\mu = \beta/\alpha$$

y la función $[\cdot]_+$ definida como

$$[z]_+ := \begin{cases} z & \text{if } z \geq 0 \\ 0 & \text{if } z < 0 \end{cases}$$

Prueba. Defina una función G_t como

$$G_t := \left[\sqrt{V_t} - \mu \right]_+^2$$

Tomando su derivada podemos obtener

$$\begin{aligned} \dot{G}_t &= \frac{[\sqrt{V_t} - \mu]}{\sqrt{V_t}} \dot{V}_t = \frac{[\sqrt{V_t} + \mu]_+}{\sqrt{V_t}} (-\alpha\sqrt{V_t} + \rho) \\ &= -\frac{1}{\alpha\sqrt{V_t}} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{V_t}} \right]_+ \left(1 - \frac{\rho}{\alpha\sqrt{V_t}} \right) \end{aligned}$$

si $\mu = \beta/\alpha + \varepsilon$ llegamos a la siguiente ecuación

$$\dot{G}_t = -\alpha\sqrt{V_t} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{V_t}} \right]_+ \left(1 - \frac{\mu - \varepsilon}{\sqrt{V_t}} \right) < 0 \quad (6.2)$$

Por el teorema de Weiershtass la desigualdad anterior implica que G_t converge (puesto que es una función no creciente y acotada por debajo), es decir, $G_t \rightarrow G_T < \infty$ para $t < T$. La integración de la ecuación (6.2) con límites de integración de 0 a T implica que

$$G_T - G_0 \leq -\alpha \int_0^T \sqrt{V_t} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{V_t}} \right]_+ \left(1 - \frac{\mu - \varepsilon}{\sqrt{V_t}} \right) dt$$

se cumple que

$$\alpha \int_0^T \sqrt{V_t} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{V_t}} \right]_+ \left(1 - \frac{\mu - \varepsilon}{\sqrt{V_t}} \right) dt \leq G_0 - G_T \leq G_0$$

Dividiendo sobre T y tomando el límite superior en ambos lados de la desigualdad podemos obtener finalmente

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{V_t} \left[1 - \frac{\mu}{\sqrt{V_t}} \right]_+ \left(1 - \frac{\mu - \varepsilon}{\sqrt{V_t}} \right) dt \leq 0$$

por lo tanto, existe una subsecuencia t_k tal que

$$0 \leq V_{\phi_k} G_{T_k} \left[1 - \frac{\mu - \varepsilon}{\sqrt{V_t}} \right]_+ \rightarrow 0$$

o

$$G_{T_k} \rightarrow 0$$

Tomando que $G^* = 0$, que es equivalente al hecho de que

$$\left[1 - \frac{\mu - \varepsilon}{\sqrt{V_t}} \right]_+ \rightarrow 0$$

lo cual completa la prueba ■

Prueba del Teorema 9. Tomando las definiciones del sistema no lineal (3.1), la estructura del observador propuesto en (3.7) y la definición del error de observación δ_t en (3.8) podemos describir la derivada del error de observación $\dot{\delta}_t$ como:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_t &= f + g(x_t)u_t + \xi_t - A\hat{x}_t - Bu_t - K \frac{e_t}{\|e_t\|} = \\ & \quad Ax_t - Ax_t + f(x_t) + B - B + u_t \\ &= Ax_t + \tilde{f}(x_t) + Bu_t + \tilde{g}(x_t)u_t + \xi_t - A\hat{x}_t - Bu_t - K \frac{e_t}{\|e_t\|} \bar{y}_t - C\hat{x}_t \end{aligned}$$

usando las cotas para las funciones no lineales $f(\cdot), g(\cdot), h(\cdot)$ descritas en (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_t) &:= f(x_t) - Ax_t \\ \tilde{g}(x_t) &:= g(x_t) - B \end{aligned}$$

La derivada del error de observación toma la siguiente forma:

$$\dot{\delta}_t = A\delta_t + \tilde{f}(x_t) + \tilde{g}(x_t)u_t + \xi_t - K \frac{e_t}{\|e_t\|} \quad (6.3)$$

Se define la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_t := \frac{1}{2} \|\delta_{(t)}\|_P^2$$

Tomando su derivada y sustituyendo la ecuación (6.3) para la derivada del error se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= \delta_t^\top P \dot{\delta}_t = \delta_t^\top P \left(A\delta_t + \tilde{f}(x_t) + \tilde{g}(x_t)u_t + \xi_t - K \frac{e_t}{\|e_t\|} \right) \\ &= \delta_t^\top P A \delta_t + \delta_t^\top P \tilde{f}(x_t) + \delta_t^\top P \tilde{g}(x_t)u_t + \delta_t^\top P \xi_t - \delta_t^\top P K \frac{e_t}{\|e_t\|} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Aplicando la siguiente desigualdad, cuya demostración es presentada en ([34])

$$X^\top Y + Y^\top X \leq X^\top \Lambda X + Y^\top \Lambda^{-1} Y \quad (6.5)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_t^\top P \tilde{f}(x_t) &\leq \delta_t^\top P \Lambda_1 P \delta_t + \tilde{f}^\top(x_t) \Lambda_1^{-1} \tilde{f}(x_t) \\ \delta_t^\top P \tilde{g}(x_t) u_t &\leq \delta_t^\top P \Lambda_2 P \delta_t + (\tilde{g}(x_t) u_t)^\top \Lambda_2^{-1} \tilde{g}(x_t) u_t \\ \delta_t^\top P \xi_t &\leq \delta_t^\top P \Lambda_3 P \delta_t + \xi_t^\top \Lambda_3^{-1} \xi_t \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (6.4)

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &\leq \delta_t^\top (PA + A^\top P) \delta_t + \delta_t^\top P \Lambda_1^{-1} P \delta_t + \left\| \tilde{f}(x_t) \right\|_{\Lambda_1}^2 \\ &+ \delta_t^\top P \Lambda_2^{-1} P \delta_t + \|\tilde{g}(x_t)\|_{\Lambda_2}^2 \|u_t\|_{\Lambda_2}^2 + \delta_t^\top P \Lambda_3^{-1} P \delta_t + \|\xi_t\|_{\Lambda_3}^2 \\ &- \delta^\top(t) PK \left(\frac{(\tilde{y}_t - y_t + y_t - Cx_t + Cx_t - C\hat{x}_t)}{\|(\tilde{y}(t) - C\hat{x}(t))\|} \right) \end{aligned}$$

Recordando que la ecuación de salida del sistema es $y = h(x) + \eta(t)$ y las definiciones mencionadas (3.5) podemos llegar a

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &\leq \delta^\top(t) (PA + A^\top P) \delta(t) + \delta^\top(t) P \Lambda_1^{-1} P \delta(t) + \left\| \tilde{f}(x(t)) \right\|_{\Lambda_1}^2 \\ &+ \delta^\top(t) P \Lambda_2^{-1} P \delta(t) + \|\tilde{g}(x(t))\|_{\Lambda_1}^2 \|u(t)\|_{\Lambda_1}^2 + \delta^\top(t) P \Lambda_3^{-1} P \delta(t) + \|\xi(t)\|_{\Lambda_3}^2 \\ &- \delta^\top(t) PK \left(\frac{\Delta_y(t) + \eta(t) + \tilde{h}(x) + C\delta(t)}{\|(\Delta_y(t) + \eta(t) + \tilde{h}(x) + C\delta(t))\|} \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Donde $\Delta_y t$ es la diferencia entre la salida muestreada y la salida teórica continua del sistema.

Definiendo

$$\psi(t) := \Delta_y(t) + \eta(t) + \tilde{h}(x)$$

La ecuación (6.6) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &\leq \delta^\top(t) (PA + A^\top P) \delta(t) + \delta^\top(t) P \Lambda_1^{-1} P \delta(t) + \left\| \tilde{f}(x(t)) \right\|_{\Lambda_1}^2 \\ &+ \delta^\top(t) P \Lambda_2^{-1} P \delta(t) + \|\tilde{g}(x(t))\|_{\Lambda_1}^2 \|u(t)\|_{\Lambda_1}^2 \\ &+ \delta^\top(t) P \Lambda_3^{-1} P \delta(t) + \|\xi(t)\|_{\Lambda_3}^2 - \delta^\top(t) PKG \left(\frac{\psi(t) + C\delta(t)}{\|G(\psi(t) + C\delta(t))\|} \right) \end{aligned}$$

Tomando en consideración que $PK = kC^\top$, es posible aplicar la siguiente desigualdad [35]

$$2k\delta^\top(t) C^\top \left(\frac{\psi(t) + C\delta(t)}{G \|\psi(t) + C\delta(t)\|} \right) \geq k\alpha_1 \|\delta(t)\| - 2k\sqrt{n} \|G\psi(t)\|$$

Tomando las cotas para la dinámica no modelada del sistema no lineal

$$\left\| \tilde{f}(x(t)) \right\|_{\Lambda_1}^2 \leq \lambda_{\max}(\Lambda_1) \left\| \tilde{f}(x(t)) \right\|^2$$

y la definida en (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \delta^\top(t) (PA + A^\top P) \delta(t) + \delta^\top(t) P\Lambda_1^{-1}P\delta(t) + \lambda_{\max}(\Lambda_1) L_f \\ & + \delta^\top(t) P\Lambda_2^{-1}P\delta(t) + \lambda_{\max}(\Lambda_2) L_g(u^+)^2 + \delta^\top(t) P\Lambda_3^{-1}P\delta(t) + \lambda_{\max}(\Lambda_3) \xi^+ \\ & - k\alpha_1 \|\delta(t)\| + 2k\sqrt{n} \left(\|\Delta_y\| + \left\| \tilde{h}(x) \right\| + \|\eta(t)\| \right) \end{aligned}$$

Trabajando con el término $k\alpha_1 \|\delta(t)\|$ es posible llegar a

$$k\alpha_1 \|\delta(t)\| = k\alpha_1 \sqrt{\delta^\top(t) P^{1/2} (P^{-1}) P^{1/2} \delta(t)} \leq k\alpha_1 \lambda_{\min}(P^{-1}) \sqrt{V(t)}$$

Sustituyendo el resultado anterior llegamos a

$$\begin{aligned} & \delta^\top(t) (PA + A^\top P + P(\Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1} + 2\Lambda_3^{-1})P + Q_0) \delta(t) + \\ & \lambda_{\max}(\Lambda_1) L_f + \lambda_{\max}(\Lambda_2) L_g u^+ + 2k\sqrt{n}(\varphi^+ + L_h + \eta^+) - k\alpha_1 \lambda_{\min}(P^{-1}) \sqrt{V(t)} \end{aligned}$$

Si la ecuación de Ricatti $PA + A^\top P + P(\Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1} + 2\Lambda_3^{-1})P + Q_0 = 0$ tiene solución positiva definida es posible obtener finalmente la siguiente ecuación

$$\dot{V}(t) \leq \mu_1 + k\mu_2 - k\mu_3 \sqrt{V(t)}$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1 & := \lambda_{\max}(\Lambda_1) L_f + \lambda_{\max}(\Lambda_2) L_g u^+ + 2k\sqrt{n}(\varphi^+ + L_h + \eta^+) \\ \mu_2 & := 2\sqrt{n}(\varphi^+ + L_h + \eta^+) \\ \mu_3 & := k\alpha_1 \lambda_{\min}(P^{-1}) \end{aligned}$$

considerando el resultado obtenido en el lema 19, el error de observación $\delta(t)$ converge a una bola B_δ delimitada por

$$B_\delta := \left\{ \delta_t : \|\delta_t\| \leq \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_3} \right\}$$

y esto concluye la prueba. ■

Prueba del Teorema 10. Se propone la siguiente función fuerte candidata de Lyapunov

$$V := V(\tilde{x}_t, \hat{x}, t) = \begin{bmatrix} (\Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha))^\top & \tilde{x}_\beta^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & -p_{12} \\ -p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \\ \tilde{x}_\beta \end{bmatrix}$$

Tomando la derivada de la función de Lyapunov y sustituyendo la dinámica del error de estimación se obtiene

$$\dot{V} = 2p_{11}\Lambda(\bar{x}_1)\dot{\Lambda}(\bar{x}_1) - 2p_{12}\Lambda(\bar{x}_1)\mathbf{S}(\bar{x}_1)\frac{d}{dt}\tilde{x}_2 - 2p_{12}\dot{\Lambda}(\bar{x}_1)\mathbf{S}(\bar{x}_1)\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_2p_{22}\frac{d}{dt}\tilde{x}_2$$

Definiendo las siguientes variables

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(\bar{x}_\alpha) &:= \frac{1}{2|\bar{x}_{1,t}|^{1/2}}\mathbf{S}(\bar{x}_1)\frac{d}{dt}(\tilde{x}_1 + \Delta\tilde{x}_1) \\ \Lambda^{-1}(\bar{x}_1) &= \frac{1}{|\bar{x}_{1,t}|^{1/2}} \\ \dot{\Lambda}(\bar{x}_\alpha) &= \frac{1}{2}\Lambda^{-1}(\bar{x}_1)\mathbf{S}(\bar{x}_1)\frac{d}{dt}(\tilde{x}_1 + \Delta\tilde{x}_1) \end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica de las trayectorias del sistema no lineal (3.1) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= p_{11}\mathbf{S}(\bar{x}_1)(\tilde{x}_2 - \beta_1\Lambda(\bar{x}_1)\mathbf{S}(\bar{x}_1)) + p_{11}\mathbf{S}(\bar{x}_1)\frac{d}{dt}\Delta\tilde{x}_1 - 2p_{12}\Lambda(\bar{x}_1)\mathbf{S}(\bar{x}_1)\left(\tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) - \beta_2\mathbf{S}(\bar{x}_1) + \xi_t\right) \\ &\quad - p_{12}\Lambda^{-1}(\bar{x}_1)\tilde{x}_2(\tilde{x}_2 - \beta_1\Lambda(\bar{x}_1)\mathbf{S}(\bar{x}_1)) - p_{12}\Lambda^{-1}(\bar{x}_1)\tilde{x}_2\frac{d}{dt}\Delta\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2p_{22}\left(\tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) - \beta_2\mathbf{S}(\bar{x}_1) + \xi_t\right) \end{aligned}$$

Desarrollando términos que se encuentren dentro de paréntesis es posible llegar a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq p_{11}\mathbf{S}(\bar{x}_1)\tilde{x}_2 - p_{11}\beta_1\Lambda(\bar{x}_1) + p_{11}\mathbf{S}(\bar{x}_1)\frac{d}{dt}\Delta\tilde{x}_1 \\ &\quad - 2p_{12}\Lambda(\bar{x}_1)\mathbf{S}(\bar{x}_1)\tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) + 2p_{12}\Lambda(\bar{x}_1)\beta_2 - 2p_{12}\Lambda(\bar{x}_1)\mathbf{S}(\bar{x}_1)\xi_t \\ &\quad - p_{12}\Lambda^{-1}(\bar{x}_1)\tilde{x}_2^2 + p_{12}\tilde{x}_2\beta_1\mathbf{S}(\bar{x}_1) \\ &\quad - p_{12}\Lambda^{-1}(\bar{x}_1)\tilde{x}_2\frac{d}{dt}\Delta\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2p_{22}\tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) - 2\tilde{x}_2p_{22}\beta_2\mathbf{S}(\bar{x}_1) + 2\tilde{x}_2p_{22}\xi_t \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\Lambda^{-1}(\bar{x}_1) \Lambda(\bar{x}_1)$ y agrupando términos obtenemos

$$\dot{V} \leq \Lambda^{-1}(\bar{x}_1) \begin{bmatrix} p_{11} S(\bar{x}_1) \Lambda(\bar{x}_1) \tilde{x}_2 - p_{11} \beta_1 \Lambda(\bar{x}_1) \Lambda(\bar{x}_1) + p_{11} S(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_1 \\ -2p_{12} \Lambda^2(\bar{x}_1) S(\bar{x}_1) \tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) + 2p_{12} \Lambda^2(\bar{x}_1) \beta_2 - 2p_{12} \Lambda^2(\bar{x}_1) S(\bar{x}_1) \xi_t \\ -p_{12} \tilde{x}_2^2 + p_{12} \tilde{x}_2 \beta_1 \Lambda(\bar{x}_1) S(\bar{x}_1) \\ +2\tilde{x}_2 \Lambda(\bar{x}_1) p_{22} \tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) - 2\tilde{x}_2 p_{22} \beta_2 \Lambda(\bar{x}_1) S(\bar{x}_1) + 2\tilde{x}_2 \Lambda(\bar{x}_1) p_{22} \xi_t \end{bmatrix}$$

Tomando la cota para el error en la dinámica del sistema no lineal $F(\tilde{x}_t, u_t) \leq \tilde{F}^+$

$$\begin{aligned} -2\Lambda^{-1}(\bar{x}_1) p_{12} \Lambda^2(\bar{x}_1) S(\bar{x}_1) \tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) &\leq \Lambda^{-1}(\bar{x}_1) 2|p_{12}| \Lambda^2(\bar{x}_1) \tilde{F}^+ \\ 2\Lambda^{-1}(\bar{x}_1) \tilde{x}_2 \Lambda(\bar{x}_1) S(\bar{x}_1) p_{22} \tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) S(\bar{x}_1) &\leq 2\Lambda^{-1}(\bar{x}_1) \tilde{x}_2 \Lambda(\bar{x}_1) |p_{22}| \tilde{F} \end{aligned}$$

Así se llega a la siguiente expresión

$$\dot{V} \leq -\Lambda^{-1}(\bar{x}_1) \zeta^\top \begin{bmatrix} p_{11} \beta_1 - 2p_{12} \tilde{F}^+ - 2p_{12} \beta_2 + 2p_{12} \Gamma_2^{-1} & -p_{11} - p_{12} \beta_1 - 2p_{22} (\tilde{F}^+ + \beta_2) \\ -p_{11} - p_{12} \beta_1 - 2p_{22} \tilde{F}^+ - 2p_{22} \beta_2 & p_{12} (1 - \Gamma^{-1}) \end{bmatrix} \zeta \\ + p_{11} \left| \frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_1 \right| + \Lambda^{-1} \Gamma \left(\left| \frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_1 \right| \right)^2$$

que es equivalente a escribir

$$\dot{V}_t \leq -\Lambda^{-1}(\bar{x}_1) \left(\zeta^\top Q \zeta - \Gamma v^+ \right) + p_{11} v^+$$

Seleccionando las ganancias como se describe en las ecuaciones 3.18, la matriz Q es positiva definida y la expresión anterior por el Lema 14 puede ser descrita como

$$\dot{V}_t = -\alpha \left(\sqrt{V_t} - p_1 \right) + \rho_2$$

Siguiendo el Lema 19 se obtiene convergencia a una bola B_δ delimitada por el periodo de muestreo y definida como

$$B_\delta := \left\{ \tilde{x}_t : \|\tilde{x}_t\| \leq \max \left(\frac{\rho_2}{\alpha}, \rho_1 \right) \right\}$$

con

$$\begin{aligned}\rho_1 &:= \Gamma v^+ \\ \rho_2 &:= p_{11} v^+ \\ \alpha &:= \frac{\lambda \text{máx}^{1/2}(P) \lambda \text{mín}(Q)}{\lambda \text{mín}(P)}\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. ■

Prueba del Teorema 12. Considere la siguiente función como candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned}V &:= V(\tilde{x}_t, \hat{x}, t) = \begin{bmatrix} (\Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha))^\top & \tilde{x}_\beta^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & -P_{12} \\ -P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha) \\ \tilde{x}_\beta \end{bmatrix} \\ &= (\Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha))^\top P_{11} \Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha) - \tilde{x}_\beta^\top P_{12}^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha) - S(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \tilde{x}_\beta + \tilde{x}_\beta^\top P_{22} \tilde{x}_\beta \\ &= S(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha) - 2S(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \tilde{x}_\beta + \|\tilde{x}_\beta\|_{P_{22}}^2\end{aligned}$$

Siguiendo el segundo método de Lyapunov por diferenciación directa se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2S(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \frac{d}{dt} (\Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha)) - 2 \frac{d}{dt} (\Lambda(\bar{x}_\alpha) S(\bar{x}_\alpha))^\top P_{12} \tilde{x}_\beta \\ &\quad - 2S(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \frac{d}{dt} \tilde{x}_\beta + 2 \left(\tilde{x}_\beta, P_{22} \frac{d}{dt} \tilde{x}_\beta \right)\end{aligned}$$

Considerando la definición del error de observación $\tilde{x}_t := x_t - \hat{x}_t$, podemos obtener la dinámica del error:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_t &:= x_t - \hat{x}_t \\ \frac{d}{dt} \tilde{x}_t &:= \frac{d}{dt} x_t - \frac{d}{dt} \hat{x}_t \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_\alpha \\ \tilde{x}_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_\beta \\ F(x_t, u_t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_\beta \\ F(\hat{x}, u, t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\bar{x}_\alpha) \\ I_{n \times n} \end{bmatrix} S(\bar{x}_\alpha) \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{x}_\beta \\ \tilde{F}(\tilde{x}_t, u_t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\bar{x}_\alpha) \\ I_{n \times n} \end{bmatrix} S(\bar{x}_\alpha)\end{aligned}$$

Sustituyendo la dinámica del error en la derivada de la función de Lyapunov:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \frac{d}{dt} (\Lambda(\tilde{x}_\alpha) \mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha)) - 2 \frac{d}{dt} (\Lambda(\tilde{x}_\alpha) \mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha))^\top P_{12} \tilde{x}_\beta \\ &- 2\mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha)^\top \Lambda(\tilde{x}_\alpha)^\top P_{12} \left(\tilde{F}(x_t, u_t) - \Omega_2 \mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha) + \xi_t \right) + 2 \left(\tilde{x}_\beta, P_{22} \left(\tilde{F}(x_t, u_t) - \Omega_2 \mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha) + \xi_t \right) \right) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las definiciones usadas en la ecuación (3.24)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha)^\top \Lambda(\tilde{x}_\alpha)^\top P_{11} \left(\Lambda(\tilde{x}_\alpha) \dot{\mathbf{S}}(\tilde{x}_\alpha) + \dot{\Lambda}(\tilde{x}_\alpha) \mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha) \right) - 2 \begin{pmatrix} \Lambda(\tilde{x}_\alpha) \dot{\mathbf{S}}(\tilde{x}_\alpha) \\ + \dot{\Lambda}(\tilde{x}_\alpha) \mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha) \end{pmatrix}^\top P_{12} \tilde{x}_\beta \\ &- 2\mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha)^\top \Lambda(\tilde{x}_\alpha)^\top P_{12} \left(\tilde{F}(x_t, u_t) - \Omega_2 \mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha) + \xi_t \right) + 2 \left(\tilde{x}_\beta, P_{22} \begin{pmatrix} \tilde{F}(x_t, u_t) \\ -\Omega_2 \mathbf{S}(\tilde{x}_\alpha) + \xi_t \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Considerando los intervalos donde la función signo es constante, la función de Lyapunov se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \dot{\Lambda}(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) - 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \dot{\Lambda}^\top(\bar{x}_\alpha) P_{12} \tilde{x}_\beta \\ &- 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \left(\tilde{F}(x_t, u_t) - \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) + \xi_t \right) + 2 \left(\tilde{x}_\beta, P_{22} \left(\tilde{F}(x_t, u_t) - \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) + \xi_t \right) \right) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(\bar{x}_\alpha) &= \text{diag} \left[\frac{\text{sign}(\bar{x}_{1,t}) \frac{d}{dt} \bar{x}_{1,t}}{2 |\bar{x}_{1,t}|^{1/2}}, \frac{\text{sign}(\bar{x}_{2,t}) \frac{d}{dt} \bar{x}_{2,t}}{2 |\bar{x}_{2,t}|^{1/2}}, \dots, \frac{\text{sign}(\bar{x}_{n,t}) \frac{d}{dt} \bar{x}_{n,t}}{2 |\bar{x}_{n,t}|^{1/2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{diag} \left[\frac{1}{|\bar{x}_{1,t}|^{1/2}}, \frac{1}{|\bar{x}_{2,t}|^{1/2}}, \dots, \frac{1}{|\bar{x}_{n,t}|^{1/2}} \right] \text{diag} \left(\frac{d}{dt} \bar{x}_\alpha \right) \text{diag}(\mathbf{S}(\bar{x})) \\ &= \frac{1}{2} \text{diag} \left[\frac{1}{|\bar{x}_{1,t}|^{1/2}}, \frac{1}{|\bar{x}_{2,t}|^{1/2}}, \dots, \frac{1}{|\bar{x}_{n,t}|^{1/2}} \right] \text{diag}(\mathbf{S}(\bar{x})) \text{diag} \left(\frac{d}{dt} \bar{x}_\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{diag} \left[\frac{1}{|\bar{x}_{1,t}|^{1/2}}, \frac{1}{|\bar{x}_{2,t}|^{1/2}}, \dots, \frac{1}{|\bar{x}_{n,t}|^{1/2}} \right] \text{diag}(\mathbf{S}(\bar{x})) \text{diag} \left(\frac{d}{dt} (\tilde{x}_\alpha + \Delta \tilde{x}_\alpha) \right) \end{aligned}$$

Si definimos

$$\Lambda^{-1} = \text{diag} \left[\frac{1}{|\bar{x}_{1,t}|^{1/2}}, \frac{1}{|\bar{x}_{2,t}|^{1/2}}, \dots, \frac{1}{|\bar{x}_{n,t}|^{1/2}} \right]$$

esto conduce a

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda^{-1} \text{diag} \left(\frac{d}{dt} \tilde{x}_\alpha \right) + \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda^{-1} \text{diag} \left(\frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_\alpha \right) \\
& - \text{diag} \left(\frac{d}{dt} \tilde{x}_\alpha \right) \Lambda^{-1} P_{12} \tilde{x}_\beta - \text{diag} \left(\frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_\alpha \right) \Lambda^{-1} P_{12} \tilde{x}_\beta \\
& - 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \tilde{F}(x_t, u_t) + 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \\
& - 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \xi_t + 2\tilde{x}_\beta P_{22} \tilde{F}(x_t, u_t) - 2\tilde{x}_\beta P_{22} \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) + 2\tilde{x}_\beta P_{22} \xi_t
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Recordando que

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}_\alpha := \tilde{x}_\beta - \Omega_1 \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)$$

y sustituyéndolo este último resultado en (6.7)

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda^{-1} (\tilde{x}_\beta - \Omega_1 \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)) \\
& - (\tilde{x}_\beta - \Omega_1 \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha))^\top \Lambda^{-1} P_{12} \tilde{x}_\beta \\
& + \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda^{-1} \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha) - \left(\frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_\alpha \right)^\top \Lambda^{-1} P_{12} \tilde{x}_\beta \\
& - 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \tilde{F}(x_t, u_t) \\
& + 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) - 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Omega_2 \xi_t \\
& + 2\tilde{x}_\beta P_{22} \tilde{F}(x_t, u_t) - 2\tilde{x}_\beta P_{22} \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) + 2\tilde{x}_\beta P_{22} \xi_t
\end{aligned}$$

Desarrollando términos

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda^{-1} (\tilde{x}_\beta) \tilde{x}_\beta - \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda^{-1} \Omega_1 \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \\
& - \tilde{x}_\beta^\top \Lambda^{-1} P_{12} \tilde{x}_\beta + \mathbf{S}^\top(\bar{x}_\alpha) \Lambda^\top(\bar{x}_\alpha) \Omega_1^\top \Lambda^{-1} P_{12} \tilde{x}_\beta + \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda^{-1} \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha) \\
& - \left(\frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_\alpha \right)^\top \Lambda^{-1} P_{12} \tilde{x}_\beta - 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \tilde{F}(x_t, u_t) + 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \\
& - 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Omega_2 \xi_t + 2\tilde{x}_\beta P_{22} \tilde{F}(x_t, u_t) - 2\tilde{x}_\beta P_{22} \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) + 2\tilde{x}_\beta P_{22} \xi_t
\end{aligned}$$

Agrupando nuevamente

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1} \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha) - \left(\frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_\alpha \right)^\top \Lambda^{-1} P_{12} \tilde{x}_\beta \\
&- \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} (\Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha))^\top & \tilde{x}_\beta^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \Omega_1 + 2P_{12} \Omega_1 & \frac{1}{2} (-P_{11} - \Omega_1^\top P_{12}) \\ \frac{1}{2} (-P_{11} - \Omega_1^\top P_{12}) & P_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \\ \tilde{x}_\beta \end{bmatrix} \\
&- 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \tilde{F}(x_t, u_t) - 2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Omega_2 \xi_t \\
&+ 2\tilde{x}_\beta P_{22} \tilde{F}(x_t, u_t) - 2\tilde{x}_\beta P_{22} \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) + 2\tilde{x}_\beta P_{22} \xi_t
\end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de lambda en los siguientes términos

$$\begin{aligned}
&-2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \tilde{F}(x_t, u_t) \leq 4\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Gamma_1 P_{12} \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \\
&\quad + \tilde{F}^\top(x_t, u_t) \Gamma_1^{-1} \tilde{F}(x_t, u_t) \\
&-2\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Omega_2 \xi_t \leq 4\mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{12} \Omega_2 \Gamma_2 \Omega_2 P_{12} \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \\
&\quad + \xi_t^\top \Gamma_2^{-1} \xi_t \\
&2\tilde{x}_\beta P_{22} \tilde{F}(x_t, u_t) \leq 4\tilde{x}_\beta P_{22} \Gamma_3 P_{22} \tilde{x}_\beta^\top + \tilde{F}^\top(x_t, u_t) \Gamma_3^{-1} \tilde{F}(x_t, u_t) \\
&\quad - 2\tilde{x}_\beta P_{22} \Omega_2 \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \leq 4\tilde{x}_\beta P_{22} \Omega_2 \Gamma_4 \Omega_2 P_{22} \tilde{x}_\beta^\top \\
&\quad 2\tilde{x}_\beta P_{22} \xi_t \leq 4\tilde{x}_\beta P_{22} \Gamma_5 P_{22} \tilde{x}_\beta^\top + \xi_t^\top \Gamma_5^{-1} \xi_t \\
&\quad + \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha) \\
&\leq \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top P_{11} \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \Gamma_6 \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} P_{11} \Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha) \\
&\quad + \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \Gamma_6^{-1} \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha) \\
&\quad - \left(\frac{d}{dt} \Delta \tilde{x}_\alpha \right)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} P_{12} \tilde{x}_\beta \\
&\leq \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \Gamma_7 \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha) \\
&\quad + \tilde{x}_\beta^\top P_{12} \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} \Gamma_7^{-1} \Lambda(\bar{x}_\alpha)^{-1/2} P_{12} \tilde{x}_\beta
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Definiendo el vector ψ_t como

$$\psi_t := \begin{bmatrix} (\Lambda(\bar{x}_\alpha) \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha))^\top & \tilde{x}_\beta^\top \end{bmatrix}^\top$$

y

$$\eta_t := \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\bar{x}_\alpha)^\top \Lambda(\bar{x}_\alpha)^\top & \tilde{F} & \xi_t & \tilde{x}_\beta^\top \end{bmatrix}$$

y sustituyendo en la ecuacion (6.8) obtenemos

$$\dot{V} \leq -\Lambda^{-1} \left(\psi_t^\top Q_1 \psi_t - \left(\left\| \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha) \right\|_{\Gamma_6^{-1}} + \left\| \frac{d}{dt} (\Delta \tilde{x}_\alpha) \right\|_{\Gamma_7} \right) \right) + \eta_t Q_2 \eta_t$$

Donde las matricez Q_1 y Q_2 se definen como

$$Q_1 = \begin{bmatrix} P_{11}\Omega_1 + 2P_{12}\Omega_1 + P_{11}\Gamma_6 P_{11} & \frac{1}{2}(-P_{11} - \Omega_1^\top P_{12}) \\ \frac{1}{2}(-P_{11} - \Omega_1^\top P_{12}) & P_{12} + P_{12}\Gamma_7^{-1} P_{12} \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 4P_{12}\Gamma_1 P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ +P_{12}\Omega_2\Gamma_2\Omega_2 P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_1^{-1} + \Gamma_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2^{-1} + \Gamma_5^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4P_{22}\Gamma_3 P_{22} + 4P_{22}\Omega_2 \\ & & & \times \Gamma_4 \Omega_2 P_{22} \\ & & & + P_{22}\Gamma_5 P_{22} \end{bmatrix}$$

Tomando el resultado mostrado en el Lema 18 se tiene

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda \text{mín}^{1/2} P \lambda \text{mín} (Q_0)}{\lambda \text{mín} P} \sqrt{V} + \rho$$

siguiendo el Lema 19 se tiene que

$$B_\delta \leq B_\delta := \left\{ \tilde{x}_t : \|\tilde{x}_t\| \leq \frac{\rho}{\alpha} + \varepsilon \right\}$$

con los siguientes parámetros

$$\rho := (\Gamma_6^{-1} + \Gamma_7) v^+$$

$$\alpha := \frac{\lambda \text{mín}^{1/2} P \lambda \text{mín} (Q_0)}{\lambda \text{mín} P}$$

Lo cual concluye la prueba. ■

Prueba del Teorema 13. Se propone la siguiente función candidato de Lyapunov desarrollada en [33]

$$V(x) = 2k_3 |\bar{x}_1| + k_4 \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} \left(k_1 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) + k_2 \bar{x}_1 - x_2 \right)^2$$

calculando su derivada y desarrollando términos se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + 2k_4 \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ &+ k_1^2 \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \bar{x}_1 - k_1 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \dot{x}_2 \\ &+ k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + k_2^2 \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 - k_2 \bar{x}_1 \dot{x}_2 - k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} x_2 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 - k_2 x_2 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \end{aligned}$$

Tomando la definición del error de observación en la ecuación (3.17)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right) + 2k_4 \bar{x}_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right) + x_2 \dot{x}_2 \\ &+ k_1^2 \text{sign}(\bar{x}_1) \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right) + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right) - k_1 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \dot{x}_2 \\ &+ k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} \bar{x}_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right) + k_2^2 \bar{x}_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right) - k_2 \bar{x}_1 \dot{x}_2 \\ &- k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} x_2 \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right) - k_2 \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right) x_2 + x_2 \dot{x}_2 \end{aligned}$$

sustituyendo el algoritmo de super twisting y desarrollando términos obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2k_3 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) x_2 - 2k_1 k_3 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \\ &- 2k_3 k_2 \bar{x}_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) + 2k_4 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \bar{x}_1 x_2 \\ &- 2k_1 k_4 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - 2k_2 k_4 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \bar{x}_1 \\ &- k_3 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) x_2 - k_4 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} x_2^2 + k_1^2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) x_2 \\ &- k_1^3 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} - k_2 k_1^2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \bar{x}_1 \\ &+ k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) x_2 - k_1^2 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1| \\ &- k_1 k_2^2 \bar{x}_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) + k_1 k_3 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \\ &+ k_4 k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) x_2 + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} \bar{x}_1 x_2 - k_1^2 k_2 \bar{x}_1 \text{sign}(\bar{x}_1) \\ &- k_1 k_2^2 \bar{x}_1^2 |\bar{x}_1|^{-1/2} + k_2^2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \bar{x}_1 x_2 - k_1 k_2^2 \bar{x}_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k_4 k_2^2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \bar{x}_1^2 + k_3 k_2^2 \bar{x}_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \\
& + k_4 k_2^2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \bar{x}_1 x_2 - k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} x_2^2 \\
& + k_1^2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} x_2 \text{sign}(\bar{x}_1) + k_2 k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} x_2 \bar{x}_1 \\
& - k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} x_2^2 + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) x_2 \\
& + k_2^2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \bar{x}_1 x_2 - k_3 x_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_4 |\bar{x}_1|^{-1/2} |\bar{x}_1|^{1/2} x_2^2 \\
& + 2k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \Delta x_1 + 2k_4 \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \Delta x_1 + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \Delta x_1 \\
& + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \Delta x_1 + k_2^2 \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \Delta x_1 \\
& - k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} x_2 \frac{d}{dt} \Delta x_1 + k_2 x_2 \frac{d}{dt} \Delta x_1 + k_1^2 \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \Delta x_1
\end{aligned}$$

Si definimos el vector ξ_t como:

$$\xi_t = \left[|x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \quad \bar{x}_1 \quad x_2 \right]^\top$$

Agrupamos los términos de la ecuación anterior se obtiene la siguiente forma cuadrática

$$\begin{aligned}
V = & -|\bar{x}_1|^{-1/2} \xi_t^\top \begin{bmatrix} k_1 k_3 + k_1^3 & +2k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2 - k_3 k_2^2 - \lambda_2^{-1} k_1^2 k_2^2 & -2k_3 + 2k_3 - 2k_1^2 \\ 0 & 3k_1 k_2^2 + k_4 k_2^2 & -k_1 k_4 - 2k_1 k_2 \\ 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \xi_t \\
& - \xi_t^\top \begin{bmatrix} 2k_2 k_4 - \lambda_2^{-1} k_1^2 k_2^2 - \lambda_3^{-1} k_1^2 k_2^2 & -k_1 k_2 + k_1^2 k_2 + 2k_1 k_4 & -k_1 k_2 \\ 0 & -\lambda_4^{-1} k_2^2 - 2\lambda^{-1} k_4 & -2k_2^2 - k_2^2 k_4 - 2k_4 \\ 0 & 0 & +2k_4 + k_2 - \lambda_6^{-1} k_2^2 \end{bmatrix} \xi_t \\
& + |\bar{x}_1|^{-1/2} \lambda_5 (\nu^+)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \left(\frac{d}{dt} \Delta x_1 \right)^2
\end{aligned}$$

Se tiene finalmente la expresión

$$V \leq -|\bar{x}_1|^{-1/2} \left(\xi^\top Q_0 \xi - \beta_1 \right) - \xi^\top Q_1 \xi + \beta_2$$

Con Q_0 y Q_1 definidos en las ecuaciones (3.31) y (3.32) respectivamente Tomando las ganancias como se muestra en las ecuaciones (3.29) y (3.30). Con el resultado mostrado en el Lema 18 se

obtiene la siguiente solución

$$\begin{aligned}
 V &\leq -|\bar{x}_1|^{-1/2} \left(\alpha_1 \sqrt{V} + \beta_1 \right) - \alpha_2 V + \beta_2 \\
 \sqrt{V} &\geq \frac{\beta_1}{\alpha_1} \\
 V &\geq \frac{\beta_2}{\alpha_2}
 \end{aligned}$$

$$V \geq \text{máx} \left(\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^2, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l}
 \alpha_1 := \frac{\lambda^{1/2} \text{mín}(P) \lambda \text{mín}(Q_0)}{\lambda \text{máx}(P)} \\
 \alpha_2 := \lambda \text{mín}(P) \\
 \beta_1 := \lambda_5 (\nu^+)^2 \\
 \beta_2 := (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) (\nu^+)^2
 \end{array} \right)$$

La solución de la ecuación de Lyapunov es negativa semi definida si se cumplen las siguientes condiciones

$$\sqrt{V} \geq \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad V \geq \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

por lo tanto siguiendo el lema 19, el error de observación para el observador basado en el esquema de super twisting con término lineal converge a una bola que converge a

$$B_\delta := \left\{ \hat{x}_t : \|\hat{x}_t\| \leq \text{máx} \left(\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^2, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) \right\}$$

esto concluye la prueba ■

Bibliografía

- [1] J. Moreno and M. Osorio, “A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers,” in *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [2] P. Kabamba, “Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, no. 9, pp. 772–783, 1987.
- [3] S. Govindaswamy, T. Floquet, and S. Spurgeon, “On output sampling based sliding mode control for discrete time,” in *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [4] Y. Shtessel, I. A. Shkolnikov, and M. D. J. Brown, “An asymptotic second-order smooth sliding mode control,” *Asian Journal of Control*, vol. 5, no. 4, pp. 498–504, 2003.
- [5] H. Sira-Ramirez, “Dynamic second-order sliding mode control of the hovercraft vessel,” *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 10, no. 6, pp. 860–865, 2004.
- [6] E. Punta, “Multivariable second order sliding mode control of mechanical systems,” in *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, pp. 4939–4944.
- [7] A. Levant, “Finite differences in homogeneous discontinuous control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 7, pp. 1208–1217, 2007.
- [8] I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano, and E. Usai, “Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 11, pp. 2085–2102, 2007.
- [9] V. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.

- [10] C. Tan and C. Edwards, “An lmi approach for designing sliding mode observers,” *International Journal of Control*, vol. 74, no. 16, pp. 1559–1568, 2001.
- [11] J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak, “Observation and identification of mechanical systems via second-order sliding modes,” *International Journal of Control*, vol. 79, no. 10, pp. 1251–1262, 2006.
- [12] J. Barbot, M. Djemai, and T. Boukhobza, *“Sliding Mode observers” in Sliding Mode Control in Engineering*, N. Y. M. Dekker, Ed. Springer-Verlag, 2002.
- [13] J. Davila, L. Fridman, and L. A., “Second-order sliding-mode observer for mechanical systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 11, pp. 1785–1789, 2005.
- [14] G. Bartolini, A. Pisano, and E. Usai, “Digital second-order sliding mode control for uncertain nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 37, no. 9, pp. 1371–1377, 2001.
- [15] —, “Digital second order sliding mode control of siso uncertain nonlinear systems,” in *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, Pennsylvania, 1998.
- [16] A. Oppenheim, R. Schafer, and J. Buck, *Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto*, 2, Ed. Prentice Hall, 2000, vol. 1, no. 2.
- [17] *On Carathedory’s conditions for the initial value problema*, ser. Proceedings of the American Math Society, vol. 125, no. 5, 1997.
- [18] A. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*, t.Ñ. Dirdrecht, Ed. Kluwer, 1998.
- [19] F. H. Clarke, “Optimization and nonsmooth analysis,” in *Canadian Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Text*. New York: Wiley, 1983.
- [20] J. Cortés, “Discontinuous dynamical systems: A tutorial on solutions, nonsmooth analysis and stability,” *IEEE Systems Control Magazine*, vol. 28, no. 3, pp. 36–73, 2008.
- [21] F. H. Clarke, Y. Ledyaev, R. Stern, and P. R. Wolensky, *Nonsmooth Analysis in Control Theory*, S. Axler, F. Gehring, and Ribet, Eds. New York: Springer, 1998.

- [22] A. Bacciotti and F. Caragioli, “Nonpathological lyapunov functions and discontinuous carathedory systems,” *Automatica*, vol. 42, no. 3, pp. 453–458, 2006.
- [23] V. Utkin, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, C. P. Second Edition, Ed. Automation and Control Engineering, 2009.
- [24] G. Bartolini, A. Ferrara, E. Usai, and V. Utkin, “On multi input chattering-free second-order sliding mode control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 9, pp. 1711–1719, 2000.
- [25] C. Edwards and S. Spurgeon, *Sliding Mode Control*, Taylor and Francis, Eds. London:, 1998.
- [26] A. Levant and L. Fridman, *Sliding Mode in Control in Engineering*. Marcel Dekker, Inc., 2002, ch. High Order Sliding Modes, pp. 53–101.
- [27] A. Levant, “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control,” *International Journal of Control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [28] —, “Principles of 2-sliding mode designing,” *Automatica*, no. 43, pp. 823–830, 2005.
- [29] A. Dávila, J. Moreno, and L. Fridman, “Reaching time estimation for super twisting based on lyapunov function,” in *IEEE Conference on Decision and Control*, 2009.
- [30] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall U.S., 2002.
- [31] P. Wellstead, *Introduction to Physical Systems and Modelling*. Academic Press LTD., 1979.
- [32] I. Salgado, A. Moreno, and I. Chairez, “Sampled output based continuous second-order sliding mode observer,” in *Conference on Variable Structure Systems, In Press*, 2010.
- [33] J. Moreno and M. Osorio, “A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers,” in *47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008.
- [34] A. Poznyak, E. Sánchez, and Y. Wen, *Differential Neural Networks for Robust Nonlinear Control (Identification, State Estimation and Trajectory Tracking)*. World Scientific Press, 2001.

- [35] A. Poznyak, *Deterministic Output Noise Effects in Sliding Mode Observation (Chapter 3) in Variable structure systems: From principles to Implementation*, A. Sabanovic, L. Fridman, and S. Spurgeon, Eds. World Scientific Press, 2001.