



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

MODELO DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA
(SEP) QUE PRESERVA SU ESTRUCTURA USANDO
LA TEORÍA DE PERTURBACIÓN SINGULAR

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

ING. ELÉCTRICA – SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

P R E S E N T A :

ING. CARLOS EMIGDIO CASTILLO LÓPEZ



TUTOR:
DR. CARLOS JUÁREZ TOLEDO

2010

Agradecimientos

A Dios

*Por brindarme
Fuerza y esperanza para
poder llevar a cabo este proyecto.*

A la UNAM

*Por darme esa
gran oportunidad de
realizar mis estudios y
formar parte de su historia.*

A mi Familia

*Emigdio Castillo Medellín,
Leonor López Alvarado y
Leonor Castillo López,
por sus invaluable consejos,
y a quienes dedico este trabajo que
es la muestra de su empeño y dedicación
al ser mi soporte durante este importante recorrido.*

A Ivón Elizabeth Curiel González

*Por su gran apoyo y
paciencia que me brindo
durante mis estudios, y por el tiempo
que no le pude dedicar en muchas ocasiones.*

A mis Amigos

*Por su motivación,
apoyo y tiempo que me dedicaron.*

A mis Profesores

*Por creer en mí y
por sus invaluable
enseñanzas académicas y de la vida.*

A mis Asesores

*Dra. Irma Martínez Carrillo y
Dr. Carlos Juárez Toledo,
por su gran ayuda y confianza
que depositaron en mí, ya que sin su apoyo
nunca hubiera sido posible realizar este trabajo.*

Índice General

Resumen	ii
Índice General	iii
Índice de Figuras	vi
Índice de Tablas	vii

Capítulo 1 Introducción

1.1 Planteamiento del Problema	1
1.2 Revisión del Trabajo Previo	2
1.2.1 El Método de Formas Normales	3
1.2.2 Estrategias Generales de Resolución y Reglas de Decisión Basadas en la Experiencia	3
1.2.3 Herramientas Analíticas Basadas en el Método Directo de de Lyapunov	4
1.2.4 Modelos Generalizados Derivados de la Utilización Combinada de estas Herramientas	4
1.3 Objetivo y Contribuciones de la Tesis	5
1.3.1 Contribuciones de la Tesis	5
1.4 Estructura de la Tesis	5
1.5 Referencias	6

Capítulo 2 Representación Lineal de Sistemas Dinámicos Variantes en el Tiempo

2.1 Introducción	9
2.2 Conceptos Generales	10
2.2.1 Sistemas no Lineales	10

2.2.1.1	Representación no Lineal del Sistema Reducido ..	11
2.2.1.2	Representación del Sistema Singularmente Perturbado	12
2.2.1.3	Soluciones Numéricas	14
2.3	Linealización del Sistema	14
2.4	Referencias	16

Capítulo 3 Desarrollo de Aproximaciones al Comportamiento del Sistema

3.1	Introducción	18
3.2	Primer Modelo: Sistema Lineal Singularmente Perturbado	19
3.2.1	Sistema de Ecuaciones Diferencial-Algebráico	19
3.2.2	Sistema no Lineal Singularmente Perturbado	19
3.2.3	Escalas de Tiempo	20
3.2.4	Representación Estándar de un Sistema Singularmente Perturbado	22
3.2.5	Representación Lineal de un Sistema Singularmente Perturbado	23
3.2.6	Forma Canónica de Jordan	23
3.2.7	Soluciones en el Dominio del Tiempo	25
3.3	Segundo Modelo: Caracterización de Términos no Lineales	26
3.3.1	Aproximación de Forma Normal	27
3.3.2	Aproximaciones de Orden Superior Usando Expansión por Series de Taylor	29
3.3.3	Diferencia de Fase	30
3.3.3.1	Cambio de Frecuencia del Sistema	30
3.4	Referencias	31

Capítulo 4 Aplicación

4.1	Introducción	33
4.2	Aplicación a un Sistema Real	34
4.2.1	Características del Modelo	34
4.2.2	Ecuaciones Diferenciales que Representan al Sistema Eléctrico de Potencia	35
4.2.2.1	Máquina Síncrona, Control y Modelo Turbina- Gobernador Simple	35
4.2.3	Ecuaciones Algebraicas que Representan al Sistema Eléctrico de Potencia	36
4.2.3.1	Ecuaciones de Interconexión de la Red	36
4.3	Aproximación Holística de la Perturbación Singular	37
4.4	Soluciones en el Dominio del Tiempo	39
4.5	Términos no Lineales en el Modelo Clásico de la Máquina y su Comparación Mediante la Diferencia de Fase	43
4.5.1	Resultados Obtenidos Mediante Formas Normales	43
4.5.2	Resultados Obtenidos Mediante Expansión de Series de Taylor	45
4.5.3	Diferencia de Fase Entre la Aproximación Lineal y no Lineal de la Máquina	46
4.6	Referencias	48

Capítulo 5 Conclusiones Generales y Recomendaciones para Trabajos Futuros

5.1	Conclusiones Generales	49
5.2	Recomendaciones para Trabajos Futuros	50

Apéndice A Parámetros del Sistema de Dos Áreas Cuatro Generadores 51

Apéndice B Parámetros del Sistema Máquina Bus Infinito 53

Índice de Figuras

Figura 2.1	Diagrama de flujo del procedimiento de análisis	15
Figura 3.1	Diagrama de flujo del procedimiento de análisis	26
Figura 4.1	Sistema de dos áreas del IEEE	34
Figura 4.2	Desviación angular del rotor de generadores	39
Figura 4.3	Desviación de la potencia mecánica turbina-gobernador de generadores	40
Figura 4.4	Desviación de la velocidad de los generadores	41
Figura 4.5	Desviación de la potencia mecánica en generadores	41
Figura 4.6	Desviación de la potencia eléctrica en generadores	42
Figura 4.7	Desviación del ángulo de fase de los voltajes en los buses de las líneas de transmisión	42
Figura 4.8	Sistema máquina bus infinito	43
Figura 4.9	Comportamiento dinámico lineal y no lineal (formas normales) de la máquina	45
Figura 4.10	Comportamiento dinámico lineal y no lineal (series de Taylor) de la máquina	46
Figura 4.11	Espectro de frecuencia del ángulo del rotor (a) y velocidad (b)	47

Índice de Tablas

Tabla 4.1	Eigenvalores electromecánicos del sistema para diferentes valores de ε	38
Tabla 4.2	Comparación espectral de potencia para señales electromecánicas del sistema máquina bus infinito	38
Tabla A.1	Características de la carga	51
Tabla A.2	Características nominales de los generadores	51
Tabla A.3	Características específicas de operación de los generadores	52
Tabla A.4	Coefficientes de amortiguamiento e inercia	52
Tabla A.5	Características de las líneas de transmisión	52
Tabla A.6	Características del excitador	52
Tabla B.1	Características de la máquina	53
Tabla B.2	Características de la línea de transmisión	53
Tabla B.3	Condiciones iniciales de operación	53

Resumen

Esta tesis investiga técnicas y métodos de modelado para sistemas eléctricos de potencia, basados en tres distintas teorías: perturbación singular, formas normales y series de Taylor. Los métodos propuestos permitirán que se conserve la mayor información del sistema, tanto en las características de sus elementos de la red así como de la carga, además de proporcionar ventajas con respecto a métodos convencionalmente usados.

En primer lugar, se establece un marco teórico orientado a la revisión de métodos usados en la simplificación de sistemas no lineales mediante modelos representados por ecuaciones diferenciales.

Se proponen los procedimientos sistemáticos de las teorías, mencionadas al inicio, para preservar la estructura del sistema eléctrico de potencia cuya representación es no lineal, además de plantear los algoritmos necesarios para la determinación de las soluciones analíticas del sistema.

La aplicación de los métodos se evalúan en el modelo del sistema de dos áreas cuatro generadores del IEEE (aplicación de la teoría de perturbación singular) y el modelo clásico de la máquina (aplicación de teorías de formas normales y series de Taylor).

Capítulo 1

Introducción

1.1 Planteamiento del Problema

A partir del descubrimiento de la energía eléctrica y su posible utilización comercial por parte del hombre, ésta ha jugado un papel muy importante en el desarrollo de la humanidad. El impulso de grandes fuentes de energía para ejecutar trabajos útiles ha sido la clave del dilatado progreso industrial y parte primordial en la mejora de la calidad de vida del hombre, en la sociedad moderna.

En las últimas dos décadas los sistemas de potencia han sido operados bajo un gran nivel de condiciones de esfuerzo, lo que los ha llevado a presentar ciertas limitaciones y deficiencias; además, el crecimiento de la población y desarrollo de la actividad humana han ocasionado un incremento en el uso de la electricidad, lo cual, ahora parece estar creando nuevas barreras en la expansión de los tales sistemas [2].

En años recientes la planeación, construcción y operación de los grandes sistemas de potencia han llegado a ser excesivamente complejas, la gran importancia de la generación y transmisión de la energía eléctrica, ha motivado la implementación de nuevos métodos y técnicas analíticas que permitan optimizar el estudio, análisis y control de los sistemas eléctricos de potencia.

La red eléctrica que consiste en un cúmulo de elementos, tales como: generadores, buses, líneas de transmisión y la carga; por mencionar algunos, es un sistema que por su propia naturaleza física original es representado por un conjunto de ecuaciones diferencial-algebráico no lineales, que para su análisis debemos considerar que dichas no linealidades pueden afectar o perturbar de

manera importante la estabilidad de pequeña señal del sistema.

En estudios convencionales, debido a la gran complejidad de la red se han implementado métodos y herramientas analíticas totalmente lineales, los cuales presentan principalmente la siguiente desventaja:

- Reducen el tamaño del sistema físico original a sistemas representados únicamente por un conjunto de ecuaciones diferenciales, en el cual el conjunto de ecuaciones algebraicas es eliminado; es decir ciertas variables se convierten en constantes.

Debido a lo anterior es necesario realizar el estudio del comportamiento no lineal de un sistema, para lo cual, se requieren diferentes y más avanzadas metodologías que las usadas para el estudio de las aproximaciones lineales; ya que, éstas debido a la reducción del sistema provoca ciertas pérdidas en la información, lo cual puede ser de gran importancia para estimar los efectos de la acción de control en la red de transmisión y evaluar el efecto de las características de la carga en el comportamiento del sistema.

El estudio de este tema ha generado un gran interés en el área de este campo de investigación, por lo cual, el objetivo fundamental del presente trabajo es desarrollar herramientas analíticas que nos permitan estudiar tales fenómenos (no linealidades) en los sistemas eléctricos de potencia.

1.2 Revisión del Trabajo Previo

El crecimiento y la complejidad creciente de los sistemas eléctricos ha provocado el desarrollo de métodos y técnicas de análisis alternativos o complementarios al estudio convencional de la estabilidad de pequeña señal. La mayoría de los métodos y técnicas desarrolladas están basadas en el análisis y estudio de sistemas lineales representados por ecuaciones puramente diferenciales donde los modos de oscilación proporcionan una medida de la estabilidad del sistema y permiten caracterizar de manera precisa la naturaleza y origen de las oscilaciones. En las referencias [18], [19-21] y [22] se resumen algunos aspectos importantes de estas técnicas donde el aspecto principal es el estudio del comportamiento dinámico natural de los sistemas eléctricos de potencia.

El estudio del comportamiento dinámico de los sistemas de potencia ha sido planteado en la literatura desde diversas perspectivas. A continuación se resumen algunas de las técnicas utilizadas.

1.2.1 El Método de Formas Normales

El método de formas normales (MFN) es una herramienta analítica poderosa que permite estudiar y analizar los procesos físicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias. Actualmente en el campo de la investigación de los sistemas de potencia el interés de la teoría de formas normales como herramienta analítica para el estudio de diversos aspectos del comportamiento no lineal del sistema de potencia ha sido extensamente reconocida en la literatura [18-23] e incluye el estudio de la determinación de interacción no lineal, la evaluación de fronteras de estabilidad y el análisis de resonancia entre modos.

Sin embargo, existen pocos trabajos analíticos que investiguen el efecto de términos no lineales de alto orden en la respuesta del sistema. En [24], Starret et al. mostraron que la respuesta dinámica del sistema puede incluir combinaciones de los modos fundamentales de oscilación. Más recientemente, diversos investigadores [19]-[24] han sugerido la necesidad de incluir términos de orden mayor en la respuesta dinámica del sistema.

La extensión de los métodos de análisis desarrollados para el estudio de sistemas de mayor dimensión, es un problema extremadamente complejo para el cual actualmente se han reportado escasos resultados [13-14-23].

Entre los trabajos actualmente reportados se dividen en dos modelos, el primero, está basado en el estudio y análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales [16] y el segundo parte de la representación matemática de modelos representados por ecuaciones diferenciales-algebraicas [13-14]. En algunos casos se proponen técnicas y modelos analíticos basados en formas normales de alto orden. Una característica notable en este tipo de modelos propuestos es que el costo computacional requerido para su implementación práctica puede resultar prohibitivo para el estudio de sistemas de gran dimensión.

1.2.2 Estrategias Generales de Resolución y Reglas de Decisión Basadas en la Experiencia

Estas estrategias también son conocidas comúnmente como métodos heurísticos, los cuales son desarrollados por medio de la intuición y de la experiencia previa con problemas similares, sus reglas proporcionan tácticas rápidas y prácticas que indican las vías o posibles enfoques a seguir para alcanzar una solución, ya que pueden reducir el trabajo exhaustivo que puede requerir otro método, permitiendo quizá llegar a una solución cercana a la óptima.

A pesar de que ésta metodología es fácil de estudiar y simple para ser implementada, en comparación con otros métodos, los resultados obtenidos no garantizan que sean la solución óptima del problema; es decir, la ejecución de estos métodos no garantiza la consecución de un resultado óptimo. Por ejemplo, reducir el espacio de un problema complejo a la identificación de sus principales elementos.

Los métodos heurísticos pueden ser aplicados al análisis basado en la integración numérica de ecuaciones diferenciales que describen solo una parte del comportamiento dinámico del sistema de potencia [6].

1.2.3 Herramientas Analíticas Basadas en el Método Directo de Lyapunov

Estas técnicas son una herramienta poderosa que ofrecen estudios analíticos para determinar la estabilidad asintótica aplicada a sistemas de potencia no lineales mediante su linealización, con esto se puede establecer el comportamiento dinámico del sistema lineal [1,7], el cual queda representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por otra parte, ésta metodología en si misma es una generalización de la función de energía, y en efecto fue aplicada implícitamente a los problemas de sistemas de potencia cuando la técnica del criterio de áreas iguales fue propuesta.

1.2.4 Modelos Generalizados Derivados de la Utilización Combinada de estas Herramientas

Aunque se tenga en los sistemas eléctricos de potencia la aplicación de métodos de integración numérica (métodos heurísticos) para la obtención de su solución en el tiempo, muchas veces estos no proporcionan una idea del comportamiento cualitativo que tiene el sistema; es decir, del comportamiento que tienen las ecuaciones diferenciales en su dinámica (método de Lyapunov).

Esto hace cada vez más necesario el contar con modelos generalizados que a partir de la utilización combinada de las herramientas antes mencionadas, nos brinden un mejor entendimiento en la dinámica de los sistemas eléctricos de potencia.

En las referencias [1], [3-5] y [7] se presentan algunas aproximaciones lineales utilizadas para representar los sistemas eléctricos de potencia desde el aspecto de estudio de estabilidad.

1.3 Objetivo y Contribuciones de la Tesis

El objetivo fundamental de esta tesis es el desarrollo de métodos y técnicas que preserven la estructura de los sistemas eléctricos de potencia y características de la carga utilizando la teoría de perturbación singular y técnicas lineales. Otros objetivos identificados son el desarrollo de modelos computacionales generales para el modelado de efectos no lineales ante diferentes condiciones de esfuerzo.

1.3.1 Contribuciones de la Tesis

Las principales contribuciones del presente trabajo son:

1. El establecimiento de un modelo matemático general del sistema de potencia donde los efectos no lineales se aproximan mediante una serie truncada de primer orden del campo vectorial original.
2. El desarrollo de una metodología para la determinación de soluciones analíticas en el tiempo de las variables que interactúan en el comportamiento completo del sistema.
3. La implantación computacional de los algoritmos desarrollados utilizando matemática simbólica en el ambiente de Matlab.
4. Cuantificar las variaciones no lineales en un sistema OMIB.
5. La determinación de la diferencia de fase entre el modelo clásico y el equivalente no lineal del sistema OMIB.

1.4 Estructura de la Tesis

La estructura general se describe a continuación: En el capítulo 2 se hace una revisión de métodos utilizados para la simplificación de sistemas no lineales representados por ecuaciones diferencial-algebraicas a la representación de modelos representados por ecuaciones diferenciales y se presenta una introducción al presente trabajo.

En el capítulo 3 se desarrolla un procedimiento sistemático basado en la teoría de perturbación singular y técnicas lineales para preservar la estructura del sistema eléctrico de potencia y características específicas de carga. Se propone un algoritmo para la determinación de las soluciones analíticas del sistema.

En el capítulo 4 se presenta la aplicación del método propuesto al modelo de un sistema de dos áreas cuatro generadores del IEEE, considerando distintos grados de esfuerzo en la representación del sistema, y la aplicación no lineal al modelo clásico de la máquina.

Por último, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones generales del presente trabajo y se proponen nuevas líneas de investigación.

1.5 Referencias

- [1]. P. Kundur, Power System Control and Stability, The EPRI Series, Mc Graw Hill, ISBN 0-07-035958-X.
- [2]. Thierry Van Cutsem, Costas Vournas, Voltaje Stability of Electrical Power Systems, Power Electronics and Power Systems Series, Springer Science + Bussines Media, ISBN 978-0-7923-8139-6.
- [3]. A. A. Fouad, Vijay Vittal, Power System Transient Stability Analysis Using the Transient Energy Funtion Method, 1992, Prentice Hall Inc., New Jersey, ISBN 0-13-682675-X.
- [4]. Syed A. Nasar, Electric Power Systems, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill, ISBN 0-07-045917-7.
- [5]. C. Juárez T., "Determinación de Modelos Equivalentes de Dos Máquinas para el Estudio de la Estabilidad Transitoria", Cinvestav Guadalajara, Agosto del 2003.
- [6]. C. Concordia, "Dynamic Assessment and Security of Interconected Systems", IEEE Power Engineering Review, March 1992, pp. 11-14.
- [7]. Y. Xue, Th. Van Cutsem, M Ribbens-Pavella, "Extended equal-area criterion justifications, generalizations, aplicaciones", IEEE Trans. On Power Systems, Vol. 4, No. 1, February 1989, pp. 44-52.
- [8]. Y. Zhang, P. Rousseaux, L. Wehenkel, M. Pavella, "SIME: A Hybrid Approach to fast transient stability assessment abd contingency selection", International journal of electric power and energy systems, vol. 19, No. 3, pp. 195-208, 1997.
- [9]. M. Ribbens-Pavella, F. J. Evans, "Direct methods for studying dinamics of large-scale electric power systems-A survey", Automática, vol. 2, No. 1, pp. 1-21.
- [10]. P. Kokotovi'c, H. K. Khalil, J. O'Reilly, Singular Perturbation Methods in Control Analysis and Design, Classics In Applied Mathematics, Siam, ISBN 0-89871-444-3.

- [11]. García G. J, Castillo L. C and Toledo C. J, “Frequency-Change of Nonlinear System Using Spectrum (Fast Fourier Transform) Theory” IEEE Conferences, Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th International Conference, 2009.
- [12]. Castillo L. C. E., I. Martínez, Juárez T. C., García G. J., “Modelo de Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP) que Preserva su Estructura Usando la Teoría de Perturbación Singular”, IV Congreso Iberoamericano de Estudiantes de Ingeniería Eléctrica (IV CIBELEC 2010) y las V Jornadas de Ingeniería Eléctrica (JIELECTRIC 2010), en La Universidad de los Andes, Estado Mérida, Venezuela, 7-13 de Mayo del 2010.
- [13]. I. Martínez C., A. R. Messina, and V. Vittal, “Normal form analysis of complex power systems: A structure-preserving approach”, IEEE Transactions on Power System, November 2007, Vol. 22, No. 4.
- [14]. I. Martínez C., A. R. Messina and E. Barocio, “A Structure-preserving Approach to Power System Normal Form Analysis”, In Power Tech 2007, ISBN: 978-1-4244-2189-3, July 2007, Lausanne, Switzerland.
- [15]. Brandon W. Gordon, Sheng Liu, “A singular perturbation approach for modeling differential-algebraic systems”, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 120, pp. 541-545, Dec. 1998.
- [16]. J.J. Sanchez Gasca, V. Vittal, M. J. Gibbard, A. R. Messina, D. J. Vowles, S. Liu, and U. D. Annakage, "Inclusion of higher order terms for small signal (modal) analysis: Committee Report-Task Force on assessing the need to include higher order terms for small-signal (modal) analysis", IEEE Trans. on Power Systems, vol. 20, no. 4, pp. 1886-1904, Nov. 2005.
- [17]. García G. J., Juárez T. C., I. Martínez, Castillo L. C. E., “Energy Loss Analysis Of The Inter-Area Mode Using TV-OMIB Equivalent”, IV Congreso Iberoamericano de Estudiantes de Ingeniería Eléctrica (IV CIBELEC 2010) y las V Jornadas de Ingeniería Eléctrica (JIELECTRIC 2010), en La Universidad de los Andes, Estado Mérida, Venezuela, 7-13 de Mayo del 2010.
- [18]. EPRI Report TR-107798, Nonlinear power system behavior-Extension of linear system analysis via higher order correction, February 1997.
- [19]. IEEE Task Force on the Need to Assess the Effect of Higher Order Terms, The Institute of Electrical & Electronics Engineers.
- [20]. P. Kundur, Power System Control and Stability, McGraw-Hill, 1994, (ISBN 0-07-035958-X).
- [21]. CIGRE, Task Force 07, Analysis and Control of Power System Oscillations, Final Report, December 1996.

- [22]. Dejan J. Sobajic, "An introduction to normal forms of vector fields: New framework for assessing stability of highly stressed power systems", Electrotechnical Conference MELECON'96, 8th Mediterranean, vol. 1, May 1996, pp. 13-16.
- [23]. A. R. Messina, E. Barocio, J. Arroyo, "Análisis of modal interaction in power systems with FACTS controllers using normal forms", IEEE General Meeting, July 13-17,2003, Toronto, Canada, Paper 03GM0697.
- [24]. S. K Starret, W. Klieman, V. Vittal, A.A. Fouad, "Power system modal behavior: Significance of second and third order nonlinear terms", North America Power Symposium, Washington D.C., October, 1993.

Capítulo 2

Representación Lineal de Sistemas

Dinámicos Variantes en el Tiempo

2.1 Introducción

Hoy en día, el estudio del comportamiento no lineal alrededor de un punto de equilibrio se ha convertido en una parte primordial del análisis de estabilidad en los sistemas eléctricos de potencia al ser perturbados por causas externas.

El primer paso para realizar un estudio analítico a un sistema, y en lo particular a un sistema eléctrico de potencia, es el modelado, que es, como describir matemáticamente los elementos o componentes que conforman al sistema para ser analizado. Dichos modelos no deben ser más detallados que lo requerido para una tarea específica, y la complejidad depende del tipo de estudio que se está investigando. Por otra parte también es muy importante tener el conocimiento de las condiciones iniciales del sistema para así poder dar solución a dichos estudios [11].

En el presente capítulo, se propone un modelo matemático general del sistema, basado en métodos y técnicas lineales y teoría de perturbación singular, para estudiar las no linealidades que se originan de la expansión en series de potencia de primer orden para sistemas dinámicos singularmente perturbados del modelo dinámico no lineal del sistema de potencia en la estabilidad de pequeña señal.

En primera estancia se presenta, una revisión de métodos utilizados para el estudio de sistemas dinámicos no lineales con énfasis en la teoría no

lineal de sistemas representados únicamente por un conjunto de ecuaciones diferenciales. A continuación se desarrolla un procedimiento sistemático, basado en el modelo natural u original de los sistemas eléctricos de potencia, los cuales son representados por un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico no lineal, el cual se introduce al enfoque de análisis utilizado en este trabajo. La técnica propuesta es general y puede aplicarse al estudio diversos sistemas físicos representados por ecuaciones diferencial-algebraico.

2.2 Conceptos Generales

En la actualidad se sabe, que por lo regular todos los sistemas por su propia naturaleza física son no lineales, más sin embargo, es común en el conocimiento de ingeniería que muchos sistemas prácticos de este tipo son difíciles, imprácticos o incluso imposibles de resolver analíticamente.

Por otra parte, debido a ciertas complejidades que se presentan al realizarles algún estudio a tales sistemas, por lo general se les aplican metodologías o técnicas lineales que permiten hacer un poco más sencillo su análisis.

2.2.1 *Sistemas no Lineales*

Como se mencionó con anterioridad, el estudio que se propone en este trabajo aborda principalmente los sistemas no lineales, los cuales pueden ser representados por un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico no lineal de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z, t), & x(t_o) &= x_0 \\ 0 &= g(x, z, t), & z(t_o) &= z_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde x es el vector de variables de estado que pertenece a R^n , z es el vector de variables algebraicas del sistema que pertenece a R^m .

Para realizar el análisis al sistema representado por (2.1), éste puede ser estudiado desde tres perspectivas o campos diferentes, los cuales son:

1. Llevar al sistema (2.1) a una expresión reducida representada solamente por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.
2. Mantener la conservación del sistema representado por (2.1) mediante la aplicación y uso de técnicas y métodos de perturbación singular que permita obtener un sistema singularmente perturbado, el cual es la base primordial de este trabajo.

3. Aplicar integración numérica al sistema (2.1) para obtener su solución de manera numérica.

A continuación, se presenta una breve descripción de éstos métodos.

2.2.1.1 Representación no Lineal del Sistema Reducido

Considérese un sistema no lineal descrito por (2.1) y su expansión de primer orden en series de potencia alrededor de condiciones de equilibrio x_0 y z_0 tal que

$$\dot{\tilde{x}} = Ax + Bz \quad (2.2)$$

$$0 = Cx + Dz \quad (2.3)$$

donde

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}, \quad B_{n \times m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \frac{\partial f_1}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_1} & \frac{\partial f_3}{\partial z_2} & \frac{\partial f_3}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} & \frac{\partial f_n}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_m} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}$$

$$C_{m \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}, \quad D_{m \times m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \frac{\partial g_1}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \frac{\partial g_2}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial z_m} \\ \frac{\partial g_3}{\partial z_1} & \frac{\partial g_3}{\partial z_2} & \frac{\partial g_3}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial g_3}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \frac{\partial g_m}{\partial z_2} & \frac{\partial g_m}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}$$

Sea D una matriz invertible; ahora bien, realizando el despeje de z de (2.3) resulta

$$z = -D^{-1}Cx \quad (2.4)$$

por otra parte, reemplazando o sustituyendo (2.4) en (2.2) se obtiene la representación linealizada del sistema (2.1), representada por ecuaciones diferenciales ordinarias, donde las variables algebraicas z son representadas únicamente por valores constantes.

De esta manera se obtiene la representación lineal del sistema no lineal (2.1), cuyo sistema queda representado por

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}x \quad (2.5)$$

donde $\tilde{A} = (A - BD^{-1}C)$.

Dada la complejidad que existe en los sistemas eléctricos de potencia la mayoría de las herramientas analíticas desarrolladas en este campo se dedican a analizar el comportamiento del sistema utilizando técnicas de análisis lineal donde los modos de oscilación proporcionan una medida de la estabilidad del sistema y permiten caracterizar de manera precisa la naturaleza y origen de las oscilaciones. Las referencias [1-5] resumen las principales características de este tipo de enfoques.

2.2.1.2 Representación del Sistema Singularmente Perturbado

El objetivo fundamental que tiene el sistema original en (2.1) es llevar al sistema a su representación mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en (2.6) donde el conjunto de variables algebraicas sean conservadas para el estudio de tal sistema.

Sean x_0 y z_0 las condiciones de equilibrio de (2.1); además, sea ε un pequeño parámetro llamado perturbación singular tal que al aplicar una perturbación singular al sistema (2.1) tengamos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \hat{f}(t, x, z, \varepsilon), \quad x \in R^n, \quad x(t_0) = x_0 \\ \varepsilon \dot{z}(t) &= \hat{g}(t, x, z, \varepsilon), \quad z \in R^m, \quad z(t_0) = z_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Es muy importante puntualizar que $\varepsilon \rightarrow 0$, pero si $\varepsilon = 0$ el sistema (2.6) toma la forma del sistema no lineal (2.1).

Por otro lado, expandiendo (2.6) en series de potencias de primer orden alrededor de las condiciones de equilibrio se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= F_A x + F_B z \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}} &= G_C x + G_D z \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} F_A x + F_B z &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(t, x, z, \varepsilon)}{\partial x} x + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(t, x, z, \varepsilon)}{\partial z} z \\ G_C x + G_D z &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(t, x, z, \varepsilon)}{\partial x} x + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g(t, x, z, \varepsilon)}{\partial z} z \end{aligned} \quad (2.8)$$

para

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_p &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_p(t, x, z, \varepsilon)}{\partial x_p} x_p + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_p(t, x, z, \varepsilon)}{\partial z_j} z_j, \quad p = 1, 2, 3, \dots, n \\ \varepsilon \dot{\hat{z}}_q &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_q(t, x, z, \varepsilon)}{\partial x_p} x_p + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_q(t, x, z, \varepsilon)}{\partial z_j} z_j, \quad q = 1, 2, 3, \dots, m\end{aligned}\tag{2.9}$$

Tomando en cuenta el sistema singularmente perturbado (2.7) y reordenándolo en forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon F_A & \varepsilon F_B \\ G_C & G_D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}\tag{2.10}$$

donde la matriz jacobiana dependiente de ε del sistema interconectado esta dado por

$$\begin{aligned}J(\varepsilon) &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \\ J(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon F_A & \varepsilon F_B \\ G_C & G_D \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}J_{11n \times n} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}, & J_{12n \times m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \frac{\partial f_1}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} & \frac{\partial f_n}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_m} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}} \\ J_{21m \times n} &= \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}, & J_{22m \times m} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \frac{\partial g_1}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \frac{\partial g_2}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial z_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \frac{\partial g_m}{\partial z_2} & \frac{\partial g_m}{\partial z_3} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial z_m} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ z=z_0}}\end{aligned}$$

Muchos de estos sistemas tienen dinámicas que se desenvuelven en diferentes escalas de tiempo. Algunas son rápidas, otras lentas; en muchos casos no es práctico manejar todas éstas dinámicas juntas en un solo modelo.

2.2.1.3 Soluciones Numéricas

La integración numérica de las ecuaciones (2.5) o (2.10) permiten encontrar soluciones aproximadas al comportamiento dinámico del sistema basados en el procesamiento de señales obtenidas de la simulación o medición del comportamiento natural del sistema eléctrico de potencia.

A continuación, se hace una mención de ciertos métodos de integración numérica explícita e implícita aplicados a la solución de sistemas no lineales, en especial a sistemas de potencia.

- ❖ Método de Euler.
- ❖ Método de Euler modificado.
- ❖ Métodos de Runge-Kutta, de segundo y cuarto orden [12], [13].
- ❖ Regla trapezoidal.
- ❖ Método de Gauss-Seidal.
- ❖ Método de Newton-Raphson.

La desventaja del uso de la herramienta mencionada es que el análisis de estudio se reduce a la salida de las variables de estado variantes en el tiempo.

2.3 Linealización del Sistema

Dada la representación obtenida del sistema en (2.10) por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias singularmente perturbadas es posible llevar éste sistema no lineal a un sistema linealizado, el cual será aumentado mediante su forma canónica de Jordan.

Sean $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$ el conjunto de eigenvalores propios y $\{\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \lambda_{n+3}, \dots, \lambda_{n+m}\}$ el conjunto de pseudos-valores de la matriz jacobiana en función de la pequeña perturbación singular ($J(\varepsilon)$) [6] y sean $U = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ las matrices asociadas de vectores propios izquierdos y derechos, respectivamente. Entonces, el cambio lineal de coordenadas [7-10]

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x & z \end{bmatrix}^T = U(\varepsilon)\tilde{y} \quad (2.12)$$

La figura 2.1 muestra el procedimiento de análisis para sistemas no lineales, en el cual se enfatizó el tratamiento del sistema singularmente perturbado, debido a que es el enfoque que se le da a este trabajo.

En la aplicación para la obtención de un sistema singularmente perturbado es preciso indicar lo siguiente:

1. Conocer las condiciones de equilibrio en estado estable del sistema representado por el conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico.
2. Muchos de estos sistemas tienen dinámicas que se desenvuelven en diferentes escalas de tiempo; algunas son rápidas, otras lentas; en muchos casos no es práctico manejar todas estas dinámicas juntas en un solo modelo.

2.4 Referencias

- [1]. J. J. Sanchez-Gasca, V. Vittal, M. J. Gibbard, A. R. Messina, D. J. Vowles, S. Liu, and U. D. Annakkage, "Inclusion of higher order terms for small-signal (modal) analysis: committee report-task force on assessing the need to include higher order terms for small-signal (modal) analysis", IEEE Power Systems, vol. 20, pp. 1886-1904, Nov 2005
- [2]. J. Gilsoo, V. Vittal and W. Kliemann, "Effect of nonlinear modal interaction on control performance: Use of normal forms technique in control design, Part I: General theory and procedure", IEEE Trans. on Power Systems, vol. 13, pp. 401-407, May 1998
- [3]. C. M. Ling, V. Vittal, W. Kliemann, and A.A. Fouad, "Investigation of modal interaction and its effects on control performance in stressed power systems using normal forms of vector fields", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 11, pp. 781-787, May. 1996
- [4]. H. Amano, T. Kumano and T. Inoue, "Nonlinear stability indexes of power system oscillation using normal form analysis" IEEE Trans. on Power Systems, vol. 21, pp. 825-834, May 2006
- [5]. I. Dobson and E. Barocio, "Scaling of normal form analysis coefficients under coordinate change", IEEE Trans. on Power Systems, vol. 19, pp. 1438-1444, Aug 2004
- [6]. S. Liu, A. R. Messina and V. Vittal, "Assessing placement of controllers and nonlinear behavior using normal form analysis", IEEE Trans. on Power Systems, vol. 20, pp. 1486-1495, Aug 2005

- [7]. W. Brandon, B. W. Gordon and S. Liu, "A singular perturbation approach for modeling differential-algebraic systems", *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 120, pp. 541-545, Dec 1998
- [8]. I. Martínez, A. R. Messina and E. Barocio, "Perturbation analysis of power system: Effects of second and third-order nonlinear terms on system dynamic behavior", *Electric Power Systems Research*, vol. 71, pp. 159-167, Oct 2004
- [9]. P. V. Kokotovic, K. K. Hassan and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. Academic Press Inc., 1986
- [10]. G. M. Huang, K. Men and X. Song "A new remodeling technique for power system dynamic analysis", *Transmission and distribution conference and exhibitions: Asia and Pacific*, 2005
- [11]. P. M. Anderson, A. A. Fouad, *Power System Control and Stability*, Second Edition, IEEE Press Power Engineering Series Mohamed E. El-Hawary, Series Editor, John Wiley & Sons Inc., ISBN 0-471-23862-7.
- [12]. A. Ralston, H. S. Wilf, *Mathematical Methods for Digital Computers*, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [13]. B. Carnahan, H. A. Luther, J. O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc., 1969.

Capítulo 3

Desarrollo de Aproximaciones al Comportamiento del Sistema

3.1 Introducción

Las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento natural de los sistemas eléctricos de potencia, están descritos por un conjunto de ecuaciones diferencial-algebraico que contienen no linealidades que pueden afectar en forma importante la estabilidad de pequeña señal. La forma en que se ha abordado este problema ha sido desde dos perspectivas diferentes, la primera y más convencional está basada en la aplicación de técnicas de análisis lineal [1], la segunda, se centra en la aplicación de la teoría de perturbación de parámetros al modelo dinámico del sistema.

En este capítulo se desarrollarán dos procedimientos sistemáticos para reproducir el comportamiento de los sistemas de potencia, la primera está fundamentada en técnicas lineales y la teoría de perturbación singular para conservar la estructura del sistema y características específicas de la carga [2,3]. La segunda, se basa en la técnica de análisis no lineal con énfasis en el método de formas normales, donde se propone un modelo del sistema eléctrico de potencia donde los efectos no lineales se aproximan mediante una serie truncada de segundo orden del campo vectorial original.

Por último se describe brevemente la implementación computacional de los métodos y análisis propuestos, además se discute la validación de los algoritmos desarrollados.

3.2 Primer Modelo: Sistema Lineal Singularmente Perturbado

3.2.1 Sistema de Ecuaciones Diferencial-Algebráico

El comportamiento natural de los sistemas eléctricos de potencia está representado por un par de conjuntos de ecuaciones no lineales, el primero, un conjunto de ecuaciones diferenciales y el segundo un conjunto de ecuaciones algebraicas, ambos conjuntos conforman un conjunto de ecuaciones diferencial algebraico de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x, z) \\ 0 &= g(t, x, z)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x \in \mathcal{R}^n$ es el vector de variables de estado del sistema y $z \in \mathcal{R}^m$ son las variables algebraicas del resto del sistema.

Los sistemas de la segunda parte de (3.1), han sido considerados como “teóricamente problemáticos” debido a las grandes limitantes que presenta, además de que el sistema de ecuaciones algebraicas no lineal pudiera tener puntos singulares donde éste no pueda ser resuelto por las variables algebraicas dependientes z . En estos puntos la respuesta del sistema no puede ser definida, lo cual contradice que “cualquier sistema físico debe tener una solución en el tiempo” [11].

En estudios convencionales dado el tamaño y complejidad de los sistemas de potencia, el sistema es reducido a un comportamiento representado puramente por ecuaciones diferenciales, de la forma $\dot{x} = \bar{f}(x)$ donde x es el vector de variables de estado del sistema y \bar{f} es un vector de ecuaciones no lineales donde se incorporan las variables de la red como efectos constantes [4]. Una de las desventajas de este modelo es que se pierden características e información importantes propias de la red que pueden ser relevantes, como para la ubicación de dispositivos de control.

En recientes investigaciones una de las propuestas es preservar el modelo del sistema de potencia llevando al sistema representado por sus ecuaciones a un sistema representado por ecuaciones diferenciales singularmente perturbado [5], el cual será el objetivo fundamental de investigación en este trabajo.

3.2.2 Sistema no Lineal Singularmente Perturbado

Las técnicas de perturbación singular permiten un alto nivel de modelado, además de hacer simplificaciones “ad hoc” de los modelos dinámicos del sistema, una de ellas es la omisión de constantes de tiempo “pequeñas” tales

como, masas, capacitancias y otros parámetros similares “parásitos” los cuales incrementan el orden dinámico del modelo.

No obstante, un diseño basado en un modelo simplificado puede resultar en un sistema lejano al comportamiento deseado, o incluso en un sistema inestable, por esta razón se necesitan herramientas más avanzadas para mejorar el diseño. El primer paso es definir el fenómeno principal, convirtiendo las expansiones asintóticas en series reducidas y de frontera, las cuales son las características principales de las técnicas de perturbación singular [12].

Partiendo del sistema dado en (3.1), el objetivo de este trabajo es llevar al sistema representado por ecuaciones diferencial-algebraicas a un sistema representado por ecuaciones diferenciales singularmente perturbado de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \hat{f}(t, x, z, \varepsilon), & x(t_0) &= x_0, & x &\in \mathfrak{R}^n \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} &= \hat{g}(t, x, z, \varepsilon), & z(t_0) &= z_0, & z &\in \mathfrak{R}^m \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde ε es un pequeño parámetro llamado perturbación singular, cuando $\varepsilon = 0$ el sistema en (3.2) toma la forma del sistema representado por ecuaciones diferencial-algebraicas en (3.1), para cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, la dinámica de z en (3.2) por naturaleza es más rápida que la dinámica de x .

3.2.3 Escalas de Tiempo

Debido a que los sistemas de potencia son dinámicos, la descomposición en etapas es impuesta por la separación de escalas de tiempo. Usualmente, el modelo reducido representa el fenómeno más lento, el cual en muchas aplicaciones es el dominante, por otra parte, los modelos de frontera envuelven las escalas de tiempo más rápidas y representan las desviaciones del lento comportamiento previsto, la meta de las siguientes etapas de diseño es hacerlas asintóticamente estables, para lograr que las desviaciones disminuyan rápidamente. La separación de escala de tiempo es de gran utilidad para la implementación de un hardware y software más eficiente del sistema.

Si se establece que $\varepsilon = 0$, el modelo estará en su forma estándar en la cual la segunda ecuación diferencial de (3.2) se convertirá en una ecuación algebraica.

Suposición 1.- En un dominio de interés

$$0 = g(t, \bar{x}, z, 0) \quad (3.3)$$

tiene $k \geq 1$ raíces reales diferentes

$$z = \bar{\phi}_i(t, \bar{x}), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.4)$$

La suposición asegura que un modelo reducido de n dimensiones bien definido corresponderá a cada raíz. Para obtener el i th modelo reducido se sustituyen las raíces en la primera ecuación diferencial del modelo (3.2); esto es,

$$\bar{\dot{x}} = f(t, \bar{x}, \bar{\phi}_i(t, \bar{x}), 0), \quad \bar{x}(t_0) = x_0 \quad (3.5)$$

donde la barra indica que las variables pertenecen a un sistema con $\varepsilon = 0$.

Éste modelo reducido también es llamado modelo estado cuasi-estable, debido a que la velocidad

$$\dot{z} = g / \varepsilon \quad (3.6)$$

puede ser muy grande cuando ε sea pequeña, y así rápidamente converger a las raíces.

La inconveniencia para lograr la reducción de orden mediante el uso de un parámetro, es que no siempre es claro como elegir al parámetro para ser considerado como pequeño, pero afortunadamente en muchas aplicaciones, nuestro conocimiento de los procesos físicos y componentes del sistema nos ponen en el camino correcto.

La dependencia de la suposición 1 esta en función de la elección de las variables de estado; en muchas aplicaciones el objetivo del modelado es mantenerse lo más apegado a la variable física original.

Las perturbaciones singulares causan un comportamiento multi-escala de tiempo del sistema caracterizado, debido a la presencia de los transitorios lentos y rápidos en la respuesta del sistema a estímulos externos. La discrepancia entre la respuesta del modelo reducido y el modelo completo es el transitorio rápido, la cual se puede demostrar mediante la variable z que ha sido excluida del modelo reducido (3.5) y sustituida por \bar{z} en la cual no podemos asegurar que su valor inicial es z_0 , ya que puede existir una gran diferencia entre éste y su valor inicial

$$\bar{z}(t_0) = \bar{\phi}(t_0, \bar{x}(t_0)) \quad (3.7)$$

debido a lo anterior, la mejor aproximación de z será

$$z = \bar{z}(t) + O(\varepsilon), \quad t \in [t_1, T] \quad (3.8)$$

la cual establece que durante un intervalo inicial (capa límite) $[t_0, t_1]$ la variable z se aproximará a \bar{z} , y durante $[t_1, T]$ permanece cerca de ésta.

Por otra parte, la condición inicial de la variable \bar{x} si puede iniciar desde x_0 , por lo cual la aproximación de x será

$$x = \bar{x}(t) + O(\varepsilon), \quad t \in [t_0, T] \quad (3.9)$$

Al establecer ε igual a cero, en la segunda parte de la ecuación (3.2) se hace instantáneo el transitorio de z siempre que $g \neq 0$.

3.2.4 Representación Estándar de un Sistema Singularmente Perturbado

Siguiendo la metodología propuesta por Gordon y Liu [6], donde un sistema representado en coordenadas físicas en (3.1) es llevado a su representación estándar singularmente perturbado de la siguiente forma:

Sea

$$w = \hat{g}(t, x, z), \quad w \in \mathfrak{R}^m \quad (3.10)$$

una función que contiene un grado de error con respecto al conjunto de funciones algebraicas, es decir, una perturbación singular es implantada para crear una forma asintóticamente estable $\dot{w} = -(1/\varepsilon)w$. De (3.10), w puede ser representada por una función diferencial de la forma

$$\dot{w} = -\frac{1}{\varepsilon}w = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial w}{\partial z} \dot{z} \quad (3.11)$$

tal que

$$\varepsilon \dot{z} = -\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} w - \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \dot{x} \right] \quad (3.12)$$

o, equivalentemente

$$\varepsilon \dot{z} = -\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \hat{g}(t, x, z) - \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \hat{g}(t, x, z)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{g}(t, x, z)}{\partial x} \hat{f}(t, x, z, \varepsilon) \right] \quad (3.13)$$

en (3.13) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces

$$\varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \left[\frac{\partial \hat{g}(t, x, z)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{g}(t, x, z)}{\partial x} \hat{f}(t, x, z, \varepsilon) \right] \approx 0 \quad (3.14)$$

Por lo tanto es obtenido un sistema singularmente perturbado representado por ecuaciones diferenciales no lineales de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \hat{f}(t, x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} &= -\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \hat{g}(t, x, z) \approx -\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^T \hat{g}(t, x, z)\end{aligned}\tag{3.15}$$

donde la simplificación

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial \hat{g}(t, x, z)}{\partial z}\right)^{-1} \approx \left(\frac{\partial \hat{g}(t, x, z)}{\partial z}\right)^T$$

permite obtener un sistema más simple debido a que evita la inversión del Jacobiano del flujo de potencia.

3.2.5 Representación Lineal de un Sistema Singularmente Perturbado

Una vez obtenido el sistema estándar singularmente perturbado en (3.15) para una $\varepsilon \rightarrow 0$, el sistema en (3.15) puede ser llevado a su forma lineal¹ como

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} & \varepsilon \frac{\partial \hat{f}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{g}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}\tag{3.16}$$

donde la matriz Jacobiana de un sistema interconectado por x , z mediante una ε esta dada por

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} & \varepsilon \frac{\partial \hat{f}}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{g}}{\partial z} \end{bmatrix}\tag{3.17}$$

Cuando $\varepsilon = 0$, el sistema en (3.16) es representado en forma convencional representando un sistema reducido en coordenadas físicas de x como $dx/dt = (J_{11} - J_{12}J_{22}^{-1}J_{21})$. En el transcurso de esta investigación es implementada una $\varepsilon \neq 0$ con condición $\varepsilon \rightarrow 0$ para preservar la estructura del sistema en variables x , z .

3.2.6 Forma Canónica de Jordan

Sea $\Lambda = \{\Lambda_n \ \Lambda_m\} = \{\{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n\} \ \{\lambda_{n+1} \ \lambda_{n+2} \ \dots \ \lambda_{n+m}\}\}$ el espectro de los valores propios de la matriz $J(\varepsilon)$, sea $U = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+m})$ la matriz

¹ Este teorema garantiza la validación de f y g , como funciones representadas en diferentes escalas de tiempo dadas por x , z [4].

asociada a los vectores propios derechos y $V = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{n+m})$ a los vectores propios izquierdos, bajo el sustento de los siguientes teoremas:

Teorema 1. En un sistema estándar singularmente perturbado las trayectorias de x , z son dadas por (3.9) (3.8)

$$\begin{aligned} x &= x(t) + O(\varepsilon) \\ z &= z(t) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

con $O(\varepsilon)$ un error. Este teorema asume las siguientes dos hipótesis:

Hipótesis 1. Para un punto de equilibrio en $t=0$, $O(\varepsilon)=0$ tal que $O(\varepsilon)$ existe para $t > 0$.

Hipótesis 2. Los eigenvalores para un sistema aumentado con $\varepsilon \rightarrow 0$ contiene dos conjuntos de eigenvalores correspondientes a dos dinámicas en escalas de tiempo de la forma

$$\text{conjunto}(\Lambda_z) \leq \text{conjunto}(\Lambda_x) < 0$$

para $t = 0$, x_0 y z_0 puntos de equilibrio de interés.

Sea

$$\begin{aligned} \Lambda &= UAV = \{ \text{diagonal}(\Lambda_n) \quad \text{diagonal}(\Lambda_m) \} \\ &= \{ \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n \} \quad \{ \lambda_{n+1} \quad \lambda_{n+2} \quad \dots \quad \lambda_{n+m} \} \} \end{aligned} \quad (3.18)$$

la matriz de eigenvectores de la matriz aumentada de $J(\varepsilon)$, obtenidos de la solución de la ecuación característica

$$\begin{aligned} D \left[J - \lambda \begin{bmatrix} I_n & \\ & I_m \end{bmatrix} \right] &= D \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \hat{g}}{\partial z} - \lambda I_m \right] * \\ &= D \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} - \lambda I_n - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial z} - \varepsilon \lambda I_m \right)^{-1} \frac{\partial \hat{g}}{\partial x} \right] \\ &= P_1(\lambda, \varepsilon) P_2(\lambda, \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde D es el determinante, P_1 y P_2 son ecuaciones características de grado n y m respectivamente.

Entonces, el cambio lineal de coordenadas esta definido por

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = U(\varepsilon)y \quad (3.20)$$

donde $U(\varepsilon)$ es la matriz de eigenvectores derechos de (3.16).

Sustituyendo (3.20) en (3.16), entonces, la forma canónica de Jordan esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \begin{bmatrix} \Lambda_n & \\ & \Lambda_m \end{bmatrix} y \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ \vdots \\ y_{n+m} \end{bmatrix} = \Lambda y \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n \ y_{n+1} \ y_{n+2} \ \dots \ y_{n+m}]^T \in \mathfrak{R}^{n+m}$ es el vector de coordenadas en forma de Jordan.

3.2.7 Soluciones en el Dominio del Tiempo

La aproximación lineal en coordenadas de Jordan en (3.21) tendrá la forma

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \Lambda_n & \\ & \Lambda_m \end{bmatrix} y, \quad y \in \mathfrak{R}^{n+m} \quad (3.22)$$

Entonces:

$$y_j(t) = y_j^o e^{\lambda_j t} \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, n+m \quad (3.23)$$

en donde los términos y_j^o representan las condiciones iniciales en coordenadas físicas de (3.20) dadas por

$$y_o = U^{-1}(\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad \text{para } t=0, \quad x(t) = x_o \quad \text{y} \quad z(t) = z_o \quad (3.24)$$

sustituyendo (3.23) y (3.24) en (3.20)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = U(\varepsilon) \begin{bmatrix} e^{\Lambda_n t} & \\ & e^{\Lambda_m t} \end{bmatrix} y_o \quad (3.25)$$

o, equivalentemente

$$x_p(t) = \sum_{j=1}^{n+m} u_{pj} y_j(t) = \sum_{j=1}^{n+m} u_{pj} e^{\lambda_j t} \quad \text{para } p = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.28)$$

$$z_q(t) = \sum_{j=1}^{n+m} u_{qj} y_i(t) = \sum_{j=1}^{n+m} u_{qj} e^{\lambda_j t} \quad \text{para } q = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.29)$$

en coordenadas físicas, con respecto al sistema aumentado en (3.16) la solución del sistema en el dominio del tiempo es dada por (3.28) y (3.29) [1]-[7].

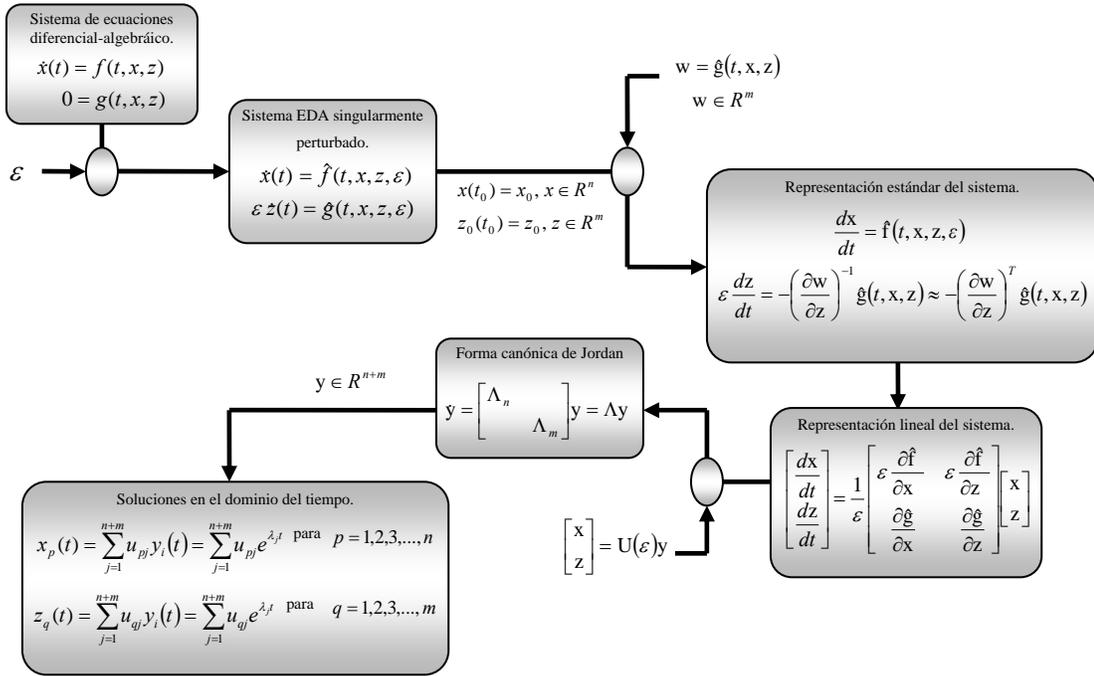


Figura 3.1 Diagrama de flujo del procedimiento de análisis.

Basado en la aproximación antes descrita, un algoritmo computacional fue desarrollado para el análisis no lineal de modelos de sistemas de potencia descritos por ecuaciones diferencial-algebraicos. La figura 3.1 ilustra la aproximación numérica adoptada en el estudio.

3.3 Segundo Modelo: Caracterización de Términos no Lineales

El estudio del comportamiento no lineal cerca del punto de equilibrio es de considerable importancia en los sistemas de potencia, por lo cual es necesario el uso de metodologías diferentes a las usadas para aproximaciones lineales, a continuación se presentan dos distintos métodos analíticos para modelos de segundo orden que proveerán soluciones aproximadas al comportamiento real del sistema [13], aquí se abordará el modelado de sistemas con débiles no linealidades.

La metodología a seguir es aplicada a un sistema simple (modelo clásico de la máquina).

3.3.1 Aproximación de Forma Normal

Esta técnica analítica ha sido utilizada para ayudar en la comprensión de la naturaleza fundamental de las oscilaciones inter-área, así como para predecir la aparición del comportamiento no lineal [14-16].

Las ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema de potencia son inherentemente no lineales, especialmente bajo condiciones de esfuerzo o de una gran carga; el método de formas normales resulta atractivo para el estudio de efectos no lineales originados de la expansión de series de la representación del sistema original.

Ahora bien, considérese un sistema dinámico no lineal descrito por el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n \quad (3.30)$$

en donde x es el vector de estados del sistema y $f(x)$ representa un campo vectorial, el cual contiene términos lineales y no lineales [1,2].

Se asume, además, que el sistema en (3.30) es analítico, y satisface las condiciones

$$\dot{x} = f(x_{sep}) = 0 \quad (3.31)$$

para el sistema en estado estable en el punto de equilibrio x_{sep} . Asumiendo que $f(x)$ es continuo y diferenciable, la expansión de series de potencia de (3.30) alrededor de x_{sep} hasta un orden k es

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=2}^k f_i(x) \quad (3.32)$$

donde la matriz A contiene la parte lineal del campo vectorial original, y cada $f_i(x)$ es un vector de polinomios de grado i en x que representa los efectos no lineales de orden dos y más altos.

La idea básica detrás del método de formas normales es usar una secuencia de transformaciones no lineales para eliminar o simplificar las no linealidades del sistema en (3.32), empezando con términos de segundo orden.

Para transformar el sistema (3.32) en su forma normal, se asume que el estudio del comportamiento de tal sistema se realiza en las cercanías de x_{sep} . Suponiendo que la matriz A tiene diferentes eigenvalores $\{\lambda_1 \lambda_1 \dots \lambda_n\}$ con un correspondiente conjunto de eigenvectores derechos $U = col(u_1 u_1 \dots u_n)$, entonces

el cambio lineal de coordenadas $x = Uy$ transforma al sistema de la siguiente manera

$$y = \Lambda y + U^{-1} \left[\sum_{i=2}^k f_i(Uy) \right] \quad (3.33)$$

donde la matriz $\Lambda = U^{-1}AU$ es la matriz diagonal de los eigenvalores del sistema.

La reducción de (3.33) a su forma normal se realiza dejando la secuencia de identidad cercana a la transformación de coordenadas no lineales [21], como se presenta a continuación; cabe mencionar que solo se analizará la expansión hasta segundo orden.

$$y = z_2 + h_2(z_2) \quad (3.34)$$

donde $h_2(z_2)$ es un vector polinomial, y $z_2 \in C^n$ es un vector que denota las nuevas coordenadas del sistema.

Diferenciando con respecto al tiempo ambos lados de (3.34) tenemos

$$\dot{y} = \dot{z}_2 + Dh_2(z_2)\dot{z}_2 = [I + Dh_2(z_2)]\dot{z}_2 \quad (3.35)$$

donde D es el Jacobiano, e I es la matriz identidad.

Para determinar la representación de forma normal considerando la transformación no lineal de segundo orden (3.34), ésta se introduce en (3.33) y haciendo uso de (3.35) resulta en

$$\dot{z}_2 = [I + Dh_2(z_2)]^{-1} * \{\Lambda z_2 + \Lambda h_2(z_2) + F_2(z_2)\} \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) puede ser resuelta mediante la aproximación de los primeros términos de la expansión de Taylor de la matriz

$$[I + Dh_2(z_2)]^{-1} \approx I - Dh_2(z_2) + (Dh_2(z_2))^2 - (Dh_2(z_2))^3 + \dots = I \quad (3.37)$$

entonces realizando las operaciones indicadas en (3.36), el comportamiento del sistema de segundo orden puede ser aproximado por

$$\dot{z}_2 = \Lambda z_2 + \hat{F}_2(z_2) \quad (3.38)$$

donde $\hat{F}_2 = F_2(z_2) + \Lambda h_2(z_2) - Dh_2(z_2)\Lambda z_2$; por otra parte $h_2(z_2)$ es obtenido de

$$h_2(z_2) = L_A^{-1} \hat{F}_2(z_2) \quad (3.39)$$

donde $L_A(h_2(z_2)) = [h_2(z_2), \Lambda]$ es el grupo de Lie o Poisson [22].

3.3.2 Aproximaciones de Orden Superior Usando Expansión por Series de Taylor

El teorema de Taylor da una secuencia de aproximaciones de una función diferenciable alrededor de un punto dado por polinomios (los polinomios de Taylor de esa función), cuyos coeficientes dependen solo de las derivadas de la función en ese punto. El teorema da estimaciones precisas del tamaño del error en la aproximación.

Si $f(x)$ y sus derivadas son continuas en un intervalo que contenga a “ a ”, entonces la expansión por series de Taylor alrededor de ese punto es [17]

$$f(x) = f(a) + f'(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \quad (3.40)$$

para el caso de la función seno la expansión es

$$\text{seno}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \dots \quad (3.41)$$

esto puede ser usado para incluir términos no lineales de alto orden en el sistema.

Realizando la expansión de la parte no lineal en el modelo clásico de la máquina, se puede hacer una aproximación del sistema agregando sus partes lineal y no lineal, por lo tanto se puede representar el comportamiento de la máquina como [18], [20].

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= \frac{1}{M} [P_m - P_e(t) - D\omega(t)] \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde

$$\begin{aligned} P_m &= \text{constant} \\ P_e &= P_{\max} \sin(\delta) \\ \dot{\omega}(t) &= \dot{\delta}(t) = \frac{1}{M} [P_m - P_{\max} \sin(\delta) - D\dot{\delta}(t)] \\ M\ddot{\delta}(t) &= P_m - P_{\max} \sin(\delta) - D\dot{\delta}(t) \\ \dot{\delta}(t) &= \omega(t) \\ \ddot{\delta}(t) &= \dot{\omega}(t) \end{aligned}$$

Haciendo la simplificación para una ecuación de movimiento de segundo orden [20]

$$\ddot{\delta}(t) + C(t)\dot{\delta}(t) + \alpha(t)\delta(t) + N(\delta, \omega) = u(t) \quad (3.43)$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \delta(t) = \omega(t) \\ u(t) - C(t)\delta(t) - \alpha(t)\dot{\delta}(t) - N(\delta, \omega) \end{cases} \quad (3.44)$$

donde $N(\delta, \omega)$ representa la parte no lineal del sistema.

Reordenando los términos lineales y no lineales, el sistema puede ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h(\delta, \omega) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\frac{P_{\max}}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}$$

donde J representa la matriz Jacobiana del sistema, h representa la parte no lineal de los términos de segundo orden.

3.3.3 Diferencia de Fase

El principal motivo por el cual se usa en este trabajo la diferencia de fases entre un sistema lineal y el mismo pero con términos no lineales, es para comparar de una manera más sencilla las diferencias que se ocasionan al agregar tales no linealidades al sistema.

Pero para poder realizar la diferencia de fases es necesario hacer un cambio del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia en el sistema, por lo cual es necesario utilizar ciertas técnicas como la transformada rápida de Fourier.

3.3.3.1 Cambio de Frecuencia del Sistema

La transformada rápida de Fourier es muy importante en el área del análisis espectral, debido a que toma señales discretas en el dominio del tiempo y las transforma en el dominio de la frecuencia, en donde las gráficas tienen un espectro de frecuencia positivo y negativo.

Ésta puede variar dramáticamente dependiendo del número de puntos (N) de la FFT, y del número de periodos de la señal que este representando.

Finalmente al aplicar esta metodología para δ y ω del sistema antes mencionado tenemos

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt, \quad X_b(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.46)$$

3.4 Referencias

- [1]. J.J. Sanchez Gasca, V. Vittal, M. J. Gibbard, A. R. Messina, D. J. Vowles, S. Liu, and U. D. Annakage, "Inclusion of higher order terms for small signal (modal) analysis: Committee Report-Task Force on assessing the need to include higher order terms for small-signal (modal) analysis", IEEE Trans. on Power Systems, vol. 20, no. 4, pp. 1886-1904, Nov. 2005.
- [2]. I. Martínez C., A. R. Messina, and V. Vittal, "Normal form analysis of complex power systems: A structure-preserving approach", IEEE Transactions on Power System, November 2007, Vol. 22, No. 4.
- [3]. I. Martínez C., A. R. Messina and E. Barocio, "A Structure-preserving Approach to Power System Normal Form Analysis", In Power Tech 2007, ISBN: 978-1-4244-2189-3, July 2007, Lausanne, Switzerland.
- [4]. Danielle C. Tarraf, and H. Harry Asada, "On the nature and stability of differential-algebraic systems", in Proc. of the American Control Conference, 2002, Anchorage, AK.
- [5]. G. Jang, V. Vittal, and W. Kliemann, "Effect of nonlinear modal interaction on control performance: Use of normal forms technique in control design—Part I: General theory and procedure", IEEE Trans. Power Syst., vol. 13, no. 2, pp. 401–407, May 1998.
- [6]. Brandon W. Gordon, Sheng Liu, "A singular perturbation approach for modeling differential-algebraic systems", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, vol. 120, pp. 541-545, Dec. 1998.
- [7]. Peter W. Sauer, M. A. Pai, Power System Dynamics and Stability, Ed. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1998.
- [8]. C. M. Lin, V. Vittal, W. Kliemann, A. A. Fouad, "Investigation of modal interaction and its effects on control performance in stressed power systems using normal forms of vector fields", IEEE Trans. on Power Systems, vol. 11, no. 2, pp. 781-787, May 1996.
- [9]. García G. J, Castillo L. C and Toledo C. J, "Frequency-Change of Nonlinear System Using Spectrum (Fast Fourier Transform) Theory" IEEE Conferences, Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th International Conference, 2009.
- [10]. Castellanos B. R., A. R. Messina, and C. Juarez, "A New Linear Fractional Transformation Based Approach to Power System Robustness Analysis" International Journal of Emerging Electric Power Systems 8.5, 2007.
- [11]. Thierry Van Cutsem, Costas Vournas, Voltaje Stability of Electrical Power Systems, Power Electronics and Power Systems Series, Springer Science + Business Media, ISBN 978-0-7923-8139-6.

- [12]. P. Kokotović, H. K. Khalil, J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control Analysis and Design, Classics In Applied Mathematics*, Siam, ISBN 0-89871-444-3.
- [13]. I. Martínez, A. R. Messina, E. Barocio. "Perturbation analysis of power: effects of second- and third – order nonlinear terms on system dynamic behavior", *Electric Power Systems Research* 71 (2004) 159–167, Elsevier.
- [14]. S. K. Starret, W. Kliemann, V. Vittal, A.A. Fouad, "Power system modal behavior: significance of second and third order nonlinear terms", in: *Proceedings of the North American Power Symposium*, Washington, DC, October 1993.
- [15]. B. Kahn, Y. Zarmi, "Nonlinear dynamics: a tutorial on the method of normal forms", *Am. J. Phys.* 68 (10) (2000) 907–919.
- [16]. V. I. Arnold, "Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations", second ed., Springer Verlag, New York, 1988 (ISBN 0-387-96649-8).
- [17]. J. . W. Cooley, J. W. Tukey, "An algorithm for machine calculation of complex series", *Mathematics of Computation Journal*, 19(90), 297-301, 1965.
- [18]. C. Juarez T., A.R. Messina, D. Ruiz-Vega, "Analysis and Control of the inter-area mode phenomenon using selective One-machine Infinite Bus dynamic Equivalentents", *Electric Power Systems Research*, Volume 76, Issue 4, January 2006, Pages 180-193
- [19]. C. Juarez, R. Castellanos, A. R. Messina, "Analysis of Inter-Area Oscillations using Time-Varying One-Machine Infinite Bus Equivalentents", *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, San Francisco, California USA, 2005.
- [20]. Glassman, J.A., "A Generalization of the Fast Fourier Transform", *Computers*, *IEEE Transactions on* Volume C-19, Issue 2, Feb. 1970 Page(s):105 – 116
- [21]. A. H. Nayfeh, *Method of Normal Forms*, Wiley Series in Nonlienar Science, Wiley, New York, 1993, ISBN 0-471-59354-0
- [22]. S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, in: *Text in Applied Mathematics*, vol. 2, Springer Verlag, New York, 1990, ISBN0-387-97003-7

Capítulo 4

Aplicación

4.1 Introducción

Dada la importancia de realizar estudios precisos de los sistemas de potencia debido al surgimiento de factores no esperados que modifican el comportamiento natural del sistema, los cuales podrían ser resultado del alto grado de esfuerzo al que son sometidos hoy en día; es decir, tales sistemas son operados muy cerca de sus valores nominales, por lo cual es evidente que el análisis lineal es incapaz de dar resultados satisfactorios ante estos comportamientos dinámicos.

El modelado y análisis de sistemas cuya naturaleza física original es no lineal como es el caso de los sistemas eléctricos de potencia ha constituido un área de gran interés en la aplicación de diferentes metodologías que permitan obtener los resultados más cercanos al comportamiento real del sistema.

En el presente capítulo se explora la aplicación de los métodos de estudio desarrollados para el análisis de sistemas eléctricos de potencia cuyas ecuaciones matemáticas que describen su comportamiento dinámico están descritas por un conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas que contienen no linealidades, ésta metodología es aplicada al sistema de dos áreas cuatro generadores del IEEE.

Para finalizar, se da la aplicación de las metodologías para agregar términos no lineales al modelo clásico de la máquina y la ventaja que ofrece la técnica de cambio de frecuencia para evaluar la diferencia de fase entre un sistema lineal y el mismo pero con términos no lineales.

4.2 Aplicación a un Sistema Real

La aplicación del método propuesto es implementada en el sistema de dos áreas 4 generadores del IEEE (detalles de modelo se presentan en [1]) mostrado en la figura 4.1.

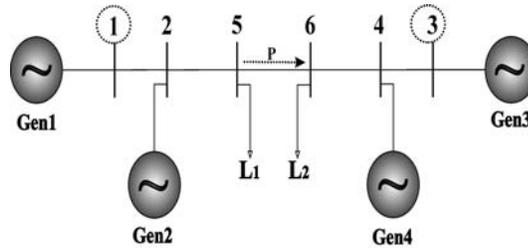


Figura 4.1 Sistema de dos áreas del IEEE.

Para propósitos de estudio, el comportamiento dinámico del generador se representa mediante el modelo de cuarto orden de las máquinas y modelo clásico turbina-gobernador. Los parámetros utilizados en el estudio se proporcionan en el Apéndice A.

4.2.1 Características del Modelo

El modelo de estudio está representado por ng generadores y nb buses y la potencia mecánica (T_m) está representada por una ecuación variante en el tiempo. El comportamiento del sistema esta descrito con las siguientes características.

4.2.2 Ecuaciones Diferenciales que Representan al Sistema Eléctrico de Potencia

4.2.2.1 Máquina Síncrona, Control y Modelo Turbina-Gobernador Simple [2]

$$\dot{\delta}_i = \omega_i \quad (4.1)$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{1}{2H_i} [T_{m_i} - (E'_{d_i} I_{d_i} + E'_{q_i} I_{q_i}) - D_i \omega_i] \quad (4.2)$$

$$\dot{E}'_{d_i} = \frac{1}{T'_{qo_i}} [-E'_{d_i} + (X_{q_i} - X'_{q_i}) I_{q_i}] \quad (4.3)$$

$$\dot{E}'_{q_i} = \frac{1}{T'_{do_i}} [-E'_{q_i} - (X_{d_i} - X'_{d_i}) I_{d_i} + E_{fd_i}] \quad (4.4)$$

$$\dot{E}_{fd_i} = \frac{1}{T_{A_i}} [-E_{fd_i} + K_{A_i} (V_{o_i} - V_i)] \quad (4.5)$$

$$T_{in}^* = T_o + \frac{1}{R} (\omega_o - \omega)$$

$$T_{in} = \begin{cases} T_{in}^* & \text{if } T_{\min} \leq T_{in}^* \leq T_{\max} \\ T_{\max} & \text{if } T_{in}^* > T_{\max} \\ T_{\min} & \text{if } T_{in}^* < T_{\min} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$t_{g1_i} = \frac{1}{T_{s_i}} [T_{in} - t_{g1_i}] \quad (4.7)$$

$$t_{g2_i} = \frac{1}{T_{c_i}} \left[\left(1 - \frac{T_{3_i}}{T_{c_i}} \right) t_{g1_i} - t_{g2_i} \right] \quad (4.8)$$

$$t_{g3_i} = \frac{1}{T_{s_i}} \left[\left(1 - \frac{T_{4_i}}{T_{s_i}} \right) \left(t_{g2_i} + \frac{T_{3_i}}{T_{c_i}} t_{g1_i} \right) - t_{g3_i} \right] \quad (4.9)$$

Sea

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\delta^T \quad \omega^T \quad \mathbf{E}'_d{}^T \quad \mathbf{E}'_q{}^T \quad \mathbf{E}'_{fd}{}^T \quad t_1^T \quad t_2^T \quad t_3^T \right]^T \quad (4.10)$$

el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema de potencia en estudio formado por las ecuaciones (4.1) a (4.9) [2], y

$$\mathbf{x} = \left[\delta^T \quad \omega^T \quad \mathbf{E}'_d{}^T \quad \mathbf{E}'_q{}^T \quad \mathbf{E}'_{fd}{}^T \quad t_1^T \quad t_2^T \quad t_3^T \right]^T \quad (4.11)$$

el vector de variables de estado del sistema, en donde δ es la posición angular del rotor en radianes (rad), ω es la velocidad angular del rotor en radianes/segundo (rad/s), T_m es la potencia mecánica en p.u., D es el coeficiente de amortiguamiento del generador en p.u., H es la constante de inercia en MWs/MVA, E'_d , E'_q , I_d y I_q son los voltajes y corrientes de cuadratura d - q .

4.2.3 Ecuaciones Algebraicas que Representan al Sistema Eléctrico de Potencia

4.2.3.1 Ecuaciones de Interconexión de la Red

$$0 = -Tm_i + t_{g3_i} + \frac{T_{4_i}}{T_{5_i}} \left(t_{g2_i} + \frac{T_{3_i}}{T_{c_i}} t_{g1_i} \right) \quad (4.12)$$

$$0 = -I_{q_i} X'_{q_i} + R_{a_i} I_{d_i} - E'_{d_i} + V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \quad (4.13)$$

$$0 = -I_{d_i} X'_{d_i} - R_{a_i} I_{q_i} + E'_{q_i} - V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \quad (4.14)$$

$$0 = -P_{g_i} + I_{d_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) + I_{q_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) \quad (4.15)$$

$$0 = -Q_{g_i} + I_{d_i} V_i \cos(\delta_i - \theta_i) - I_{q_i} V_i \sin(\delta_i - \theta_i) \quad (4.16)$$

$$0 = -P_{g_i} + \sum_{k=1}^{ng} V_i V_k (G_{ik} \cos(\theta_{ik}) + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad (4.17)$$

$$0 = -P_{L_i} + \sum_{k=ng+1}^n V_i V_k (G_{ik} \cos(\theta_{ik}) + B_{ik} \sin(\theta_{ik})) \quad (4.18)$$

$$0 = -Q_{g_i} + \sum_{k=1}^{ng} V_i V_k (G_{ik} \sin(\theta_{ik}) - B_{ik} \cos(\theta_{ik})) \quad (4.19)$$

$$0 = -Q_{L_i} + \sum_{k=ng+1}^n V_i V_k (G_{ik} \sin(\theta_{ik}) - B_{ik} \cos(\theta_{ik})) \quad (4.20)$$

con

$$P_{L_i} = P_{Lo_i} \left(\frac{V_i}{V_{o_i}} \right)^{\alpha_{p_i}} ; \quad Q_{L_i} = Q_{Lo_i} \left(\frac{V_i}{V_{o_i}} \right)^{\alpha_{q_i}} \quad (4.21)$$

Para aprovechar al máximo las ecuaciones algebraicas que representan el comportamiento de interconexión generador-red, son usadas las ecuaciones (4.12) a (4.21) [2], bajo la siguiente clasificación: Ecuación (4.12), ecuación algebraica derivada del modelo turbina-gobernador, Ecuaciones (4.13) a (4.16), ecuaciones algebraicas de interface generador-red, Ecuaciones (4.17) a (4.20), ecuaciones algebraicas de la red de transmisión y características de los buses de carga.

Sean el conjunto de ecuaciones algebraicas dadas por (4.12) a (4.20) y satisfaciendo completamente las limitantes, $w = 0$ con su respectivo vector de variables algebraicas (pseudo-variables) [3]

$$z = \begin{bmatrix} T_m^T & I_d^T & I_q^T & P_g^T & Q_g^T & V^T & \theta^T \end{bmatrix}^T \quad (4.22)$$

en donde P_g y Q_g denotan la potencia real y reactiva del generador a los buses de carga en p.u., V y θ el voltaje y ángulo de fase de la red de transmisión en p.u.

4.3 Aproximación Holística de la Perturbación Singular

Una vez llevado al sistema representado por ecuaciones diferenciales algebraicas de la forma (4.0) y (4.22) usando la metodología propuesta, el sistema original puede ser llevado a un sistema singularmente perturbado dado por (3.22) en coordenadas de Jordan [4].

Para fines de este estudio la potencia de transferencia entre las áreas interconectadas es de 300 MW. Uno de los problemas más complejos es la selección de una ε conveniente que reproduzca adecuadamente el comportamiento natural del sistema de potencia en coordenadas físicas, con esta finalidad se proponen valores diferentes para ε cuyo primer propósito es reproducir el conjunto de eigenvalores del sistema singularmente perturbado [4], [5].

En la tabla 4.1 se muestran los eigenvalores obtenidos ante diversos valores de ε en donde por las características del modelo usado $\Lambda_n=32$ (eigenvalores electromecánicos del sistema) y $\Lambda_m=32$ (pseudo-eigenvalores), los resultados arrojados son comparados por un software comercial a los cuales nombraremos “solución exacta”.

Tabla 4.1

Eigenvalores electromecánicos del sistema para diferentes valores de ε

$\varepsilon = 1e-3$	$\varepsilon = 1e-6$	$\varepsilon = 1e-8$	Solución exacta
0.000	-0.002	0.042	-0.000
-0.332	-0.332	-0.331	-0.332
-0.333	-0.333	-0.332	-0.333
-0.333	-0.333	-0.332	-0.333

-0.478 ± j0.138	-0.478 ± j0.136i	-0.497 ± j0.091	-0.478 ± j0.137
-2.351	-2.348	-2.347	-2.348
-2.412	-2.408	-2.409	-2.408
-0.378 ± j3.111	-0.389 ± j3.107i	-0.388 ± j3.104	-0.389 ± j3.108
-5.066	-5.038	-5.032	-5.038
-5.291	-5.263	-5.270	-5.263
-2.231 ± j7.771	-2.248 ± j7.738i	-2.247 ± j7.739	-2.248 ± j7.738
-1.298 ± j8.224	-1.332 ± j8.199i	-1.340 ± j8.250	-1.332 ± j8.199
-8.809	-8.799	-8.7986	-8.799
-8.895 ± j0.060	-8.901 ± j0.051	-8.900 ± j0.051	-8.901 ± j0.051
-9.329	-9.316	-9.316	-9.316
-10.663 ± j0.297	-10.615 ± j0.290	-10.615 ± j0.290	-10.615 ± j0.290
-10.723 ± j0.995	-10.683 ± j0.967	-10.679 ± j0.969	-10.683 ± j0.967
-10.930	-10.930	-10.930	-10.9302
-10.989	-10.985	-10.985	-10.985
-13.169	-13.190	-13.191	-13.190
-21.311	-21.210	-21.210	-21.210
-75.867	-77.089	-77.090	-77.090
-85.534	-85.819	-85.821	-85.820
-94.812	-95.404	-95.404	-95.404
-95.801	-96.450	-96.451	-96.450

Parte real en 1/seg; parte imaginaria en rad/seg

Los resultados de la tabla 4.1 muestran que la mejor aproximación a la solución exacta del sistema se presenta para $\varepsilon = 1 e^{-6}$. En la siguiente sección se obtendrán soluciones en el dominio del tiempo de un sistema aumentado singularmente perturbado como se propuso en la sección 3.6.

4.4 Soluciones en el Dominio del Tiempo

En las figuras 4.2 y 4.3 se muestran las soluciones analíticas del sistema singularmente perturbado obtenidas, utilizando los procedimientos desarrollados.

Se observa, comparando las soluciones en el tiempo, que para valores diferentes de la perturbación singular, la aproximación de primer orden

proporciona una medida diferente del comportamiento del sistema, y los valores de la perturbación singular están acotados en un rango de $\varepsilon \approx 1e-8 < 1e-6 < 1e-3$ para este análisis de estudio en particular.

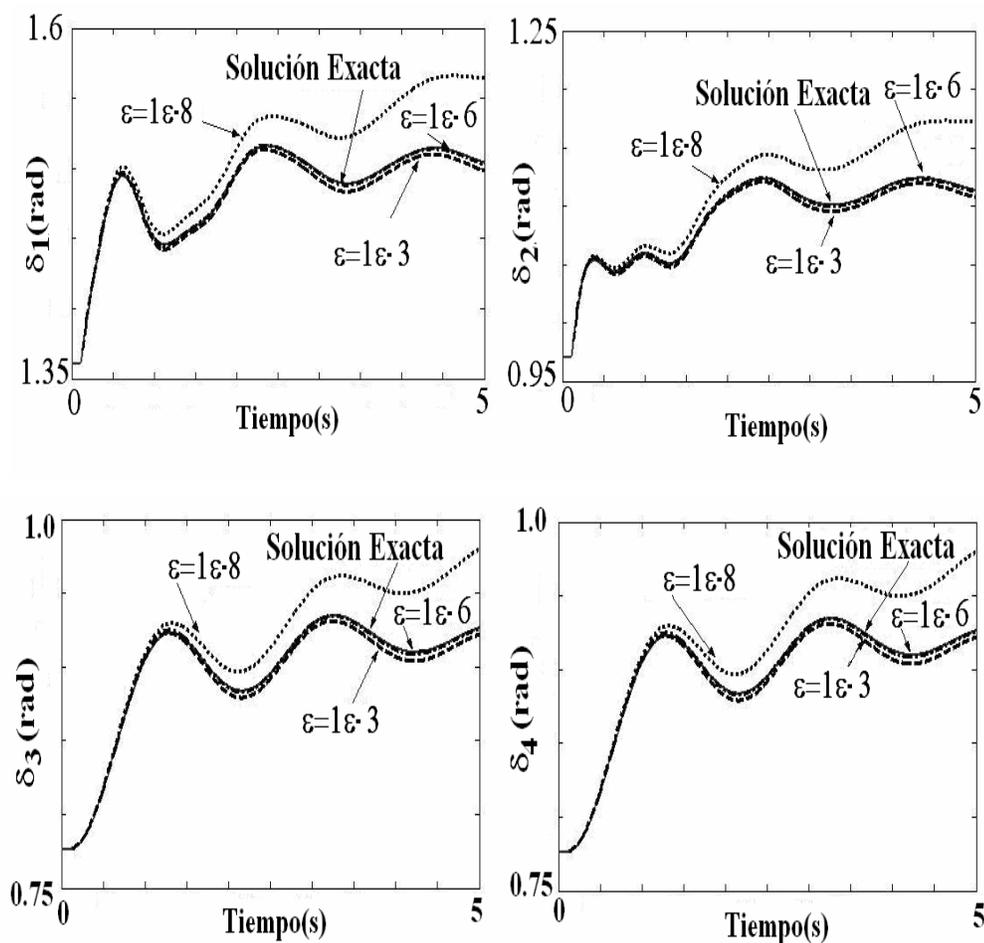


Figura 4.2 Desviación angular del rotor de generadores.

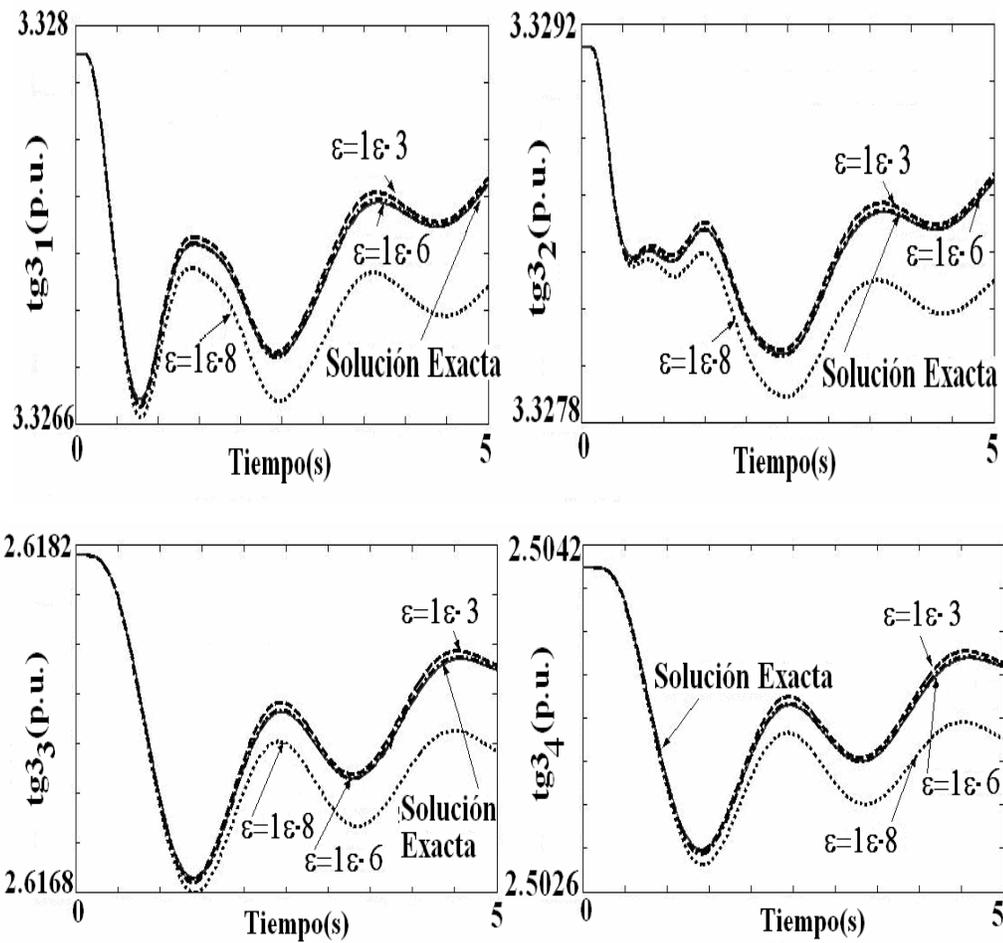


Figura 4.3 Desviación de la potencia mecánica turbina-gobernador de generadores.

El análisis de las soluciones en el tiempo mostradas en las figuras 4.2 y 4.3 permite establecer que la aproximación más precisa al comportamiento real del sistema es obtenida para una $\epsilon=1e-6$, bajo esta información se obtienen las figuras 4.4 a 4.7. En donde SE (Solución exacta) y SL (Solución lineal) usando el método propuesto.

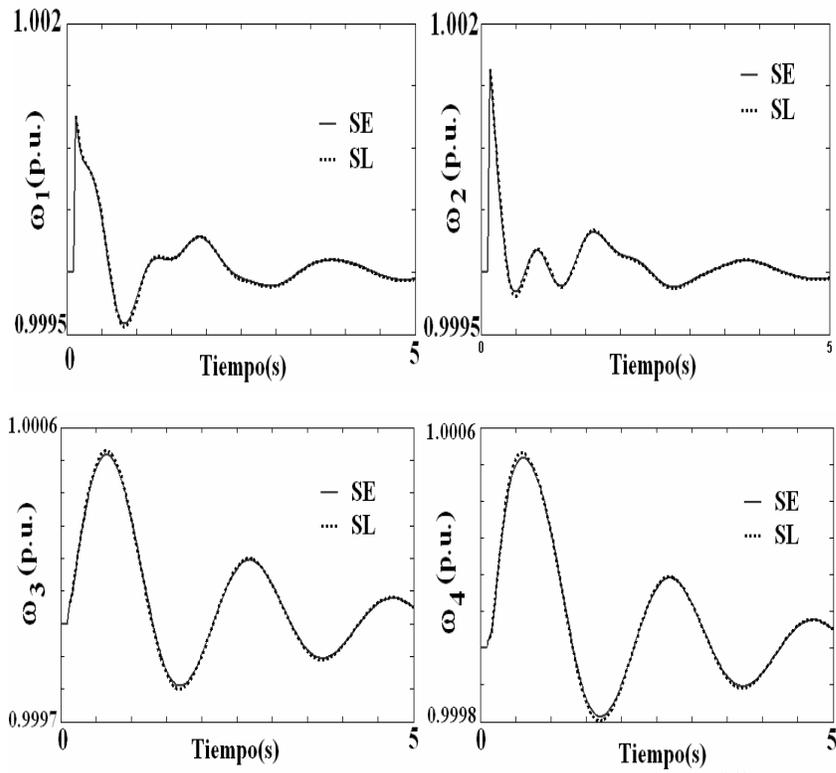


Figura 4.4 Desviación de la velocidad de los generadores.

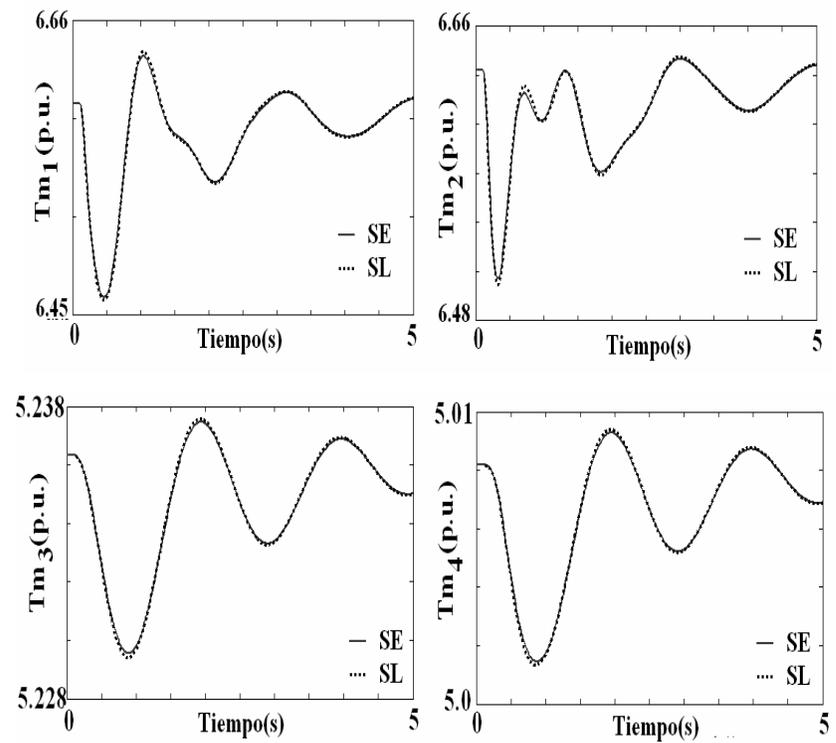


Figura 4.5 Desviación de la potencia mecánica en generadores.

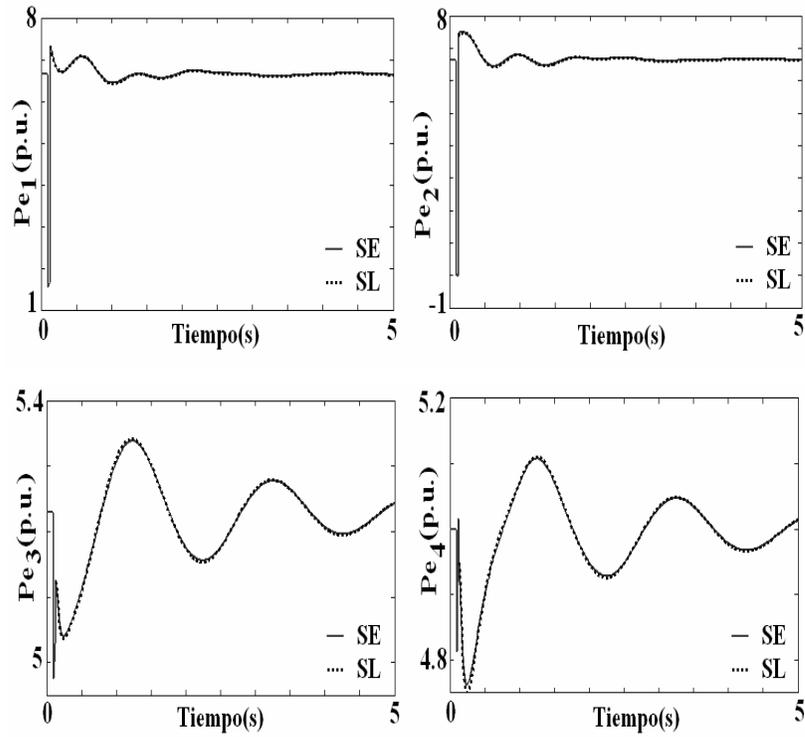


Figura 4.6 Desviación de la potencia eléctrica en generadores.

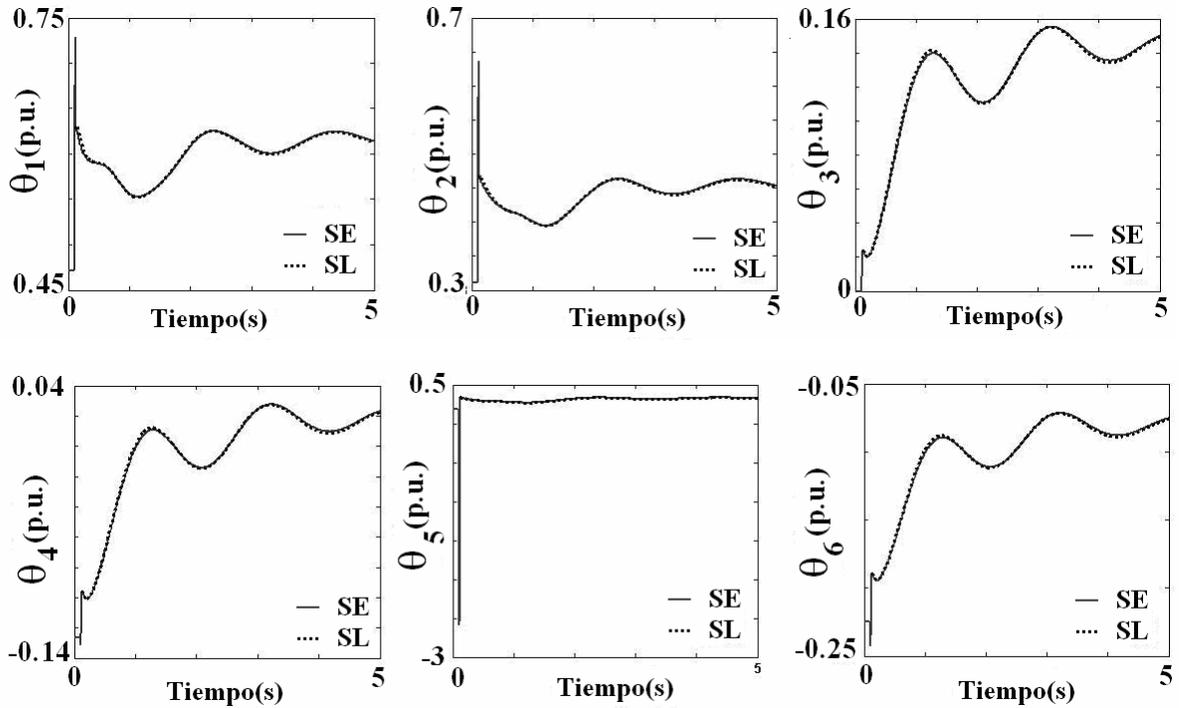


Figura 4.7 Desviación del ángulo de fase de los voltajes en los buses de las líneas de transmisión.

4.5 Términos no Lineales en el Modelo Clásico de la Máquina y su Comparación Mediante la Diferencia de Fase

La aplicación del método propuesto es implementada en el sistema máquina bus infinito, mostrado en la figura 4.8

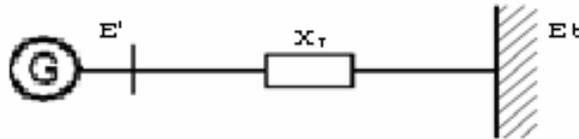


Figura 4.8 Sistema máquina bus infinito

4.5.1 Resultados Obtenidos Mediante Formas Normales

Las ecuaciones diferenciales de movimiento que describen al modelo clásico de la máquina son

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{2H} [P_m - D\omega - P_{\max} \sin \delta] \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde P_m es la potencia mecánica de entrada en p.u.

Introduciendo el vector de dos dimensiones $x = [x_1 \ x_2]^T = [\delta \ \omega]^T$, la ecuación de movimiento puede ser descrita por un sistema no lineal de dos dimensiones

$$z = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

donde $f_1(x_1, x_2) = \omega$ (4.25)

y $f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2H} [P_m - D\omega - P_{\max} \sin \delta]$ (4.26)

con el punto de equilibrio asociado en $(\sin^{-1}(P_m/P_{\max}) - k\pi, 0)$, donde k es un entero.

Dejando a $x_{\text{sep}} = [\delta^s \ 0]^T$ como el punto de equilibrio estable de interés, y expandiendo el sistema no lineal en las ecuaciones (2.14) hasta un orden 2 alrededor de x_{sep} resulta en

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Ax + f_2(x) \\ &= Ax + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x^T H_2^1 x \\ x^T H_2^2 x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde la matriz A representa la parte lineal del campo del vector original en x_{sep} y las matrices de variación H_2^1 y H_2^2 son definidas por

$$H_2^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{|x=x_{sep}}, \quad H_2^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{|x=x_{sep}} \quad (4.28)$$

Ahora bien, tenemos que los términos de cada matriz de variación de (4.28) son

$$\begin{aligned} H_2^1 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{|x=x_{sep}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ H_2^2 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{|x=x_{sep}} = \begin{bmatrix} \frac{P_{\max}}{M} \text{sen} \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $x_1 = \delta$ y $x_2 = \omega$.

Evaluando la matriz de términos no lineales en un punto de equilibrio estable $x = [\delta, 0]^T$, tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^T H_2^1 x \\ x^T H_2^2 x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{P_{\max}}{M} \text{sen} \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \delta^2 \frac{P_{\max}}{M} \text{sen} \delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

por lo tanto el sistema (4.27) queda representado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Ax + f_2(x) \\ \dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{P_{\max}}{M} \\ -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \omega \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta^2 \frac{P_{\max}}{M} \text{sen} \delta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

los parámetros utilizados en el estudio se proporcionan en el Apéndice B.

La figura 4.9 muestra la comparación del comportamiento dinámico de la desviación del ángulo (a) y de la velocidad (b) de la máquina entre el modelo de aproximación lineal y el modelo de aproximación no lineal mediante formas normales.

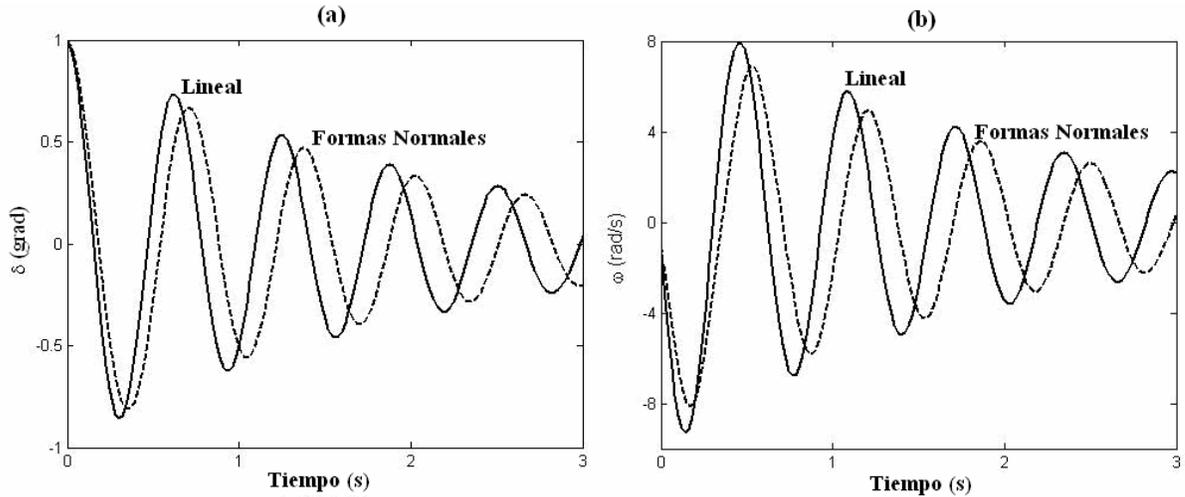


Figura 4.9 Comportamiento dinámico lineal y no lineal (formas normales) de la máquina.

4.5.2 Resultados Obtenidos Mediante Expansión de Series de Taylor

Considerando la expansión de la función seno de la sección 3.3.2 ecuación (3.41) podemos transformar la potencia mecánica de entrada como [20]

$$P_{\max} \sin(\delta) = P_{\max} \left(\frac{1}{1!} \delta - \frac{1}{3!} \delta^3 \right) = P_{\max} \left(\delta - \frac{1}{6} \delta^3 \right) \quad (4.32)$$

Reescribiendo el modelo de la máquina y agregando los términos no lineales, obtenemos la siguiente aproximación no lineal equivalente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} &= J \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h(\delta, \omega) \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{P_{\max}}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \frac{P_{\max}}{M} \delta^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

La figura 4.10 muestra la comparación del comportamiento dinámico de la desviación del ángulo (a) y de la velocidad (b) de la máquina entre el modelo

de aproximación lineal y el modelo de aproximación no lineal mediante series de Taylor.

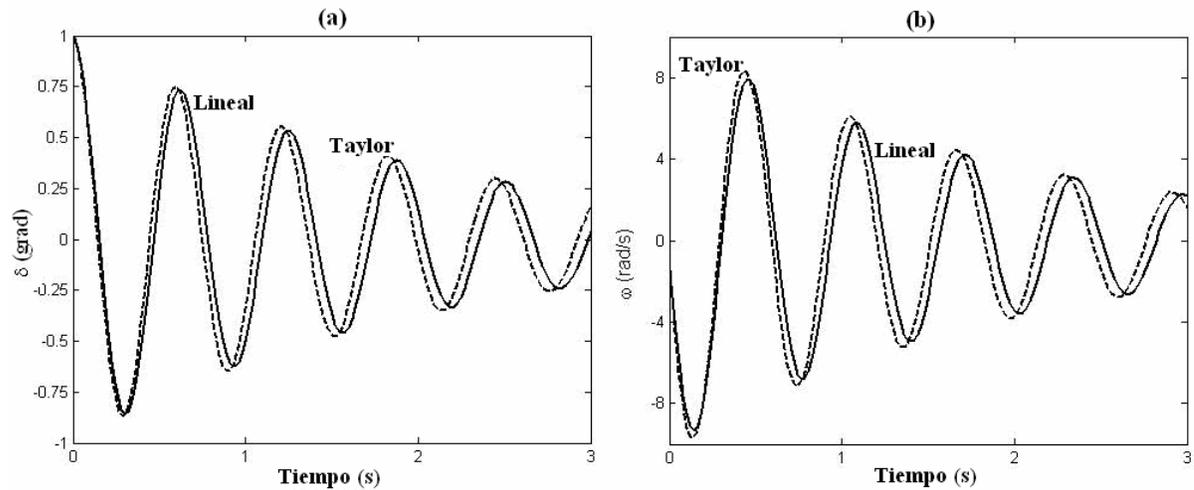


Figura 4.10 Comportamiento dinámico lineal y no lineal (series de Taylor) de la máquina.

4.5.3 Diferencia de Fase Entre la Aproximación Lineal y no Lineal de la Máquina

Para poder realizar la comparación entre la diferencia de fase del modelo lineal y no lineal de la máquina es necesario utilizar la metodología propuesta en la sección 3.3.3 para así poder encontrar el espectro de frecuencia de las variables de estado de tal sistema.

Los resultados fueron obtenidos haciendo uso de la función FFT de matlab [8], donde $N=4000$, la frecuencia de muestreo fue de $F=50$ (Hz) y el tiempo de muestreo fue de $T=0.02$ (s).

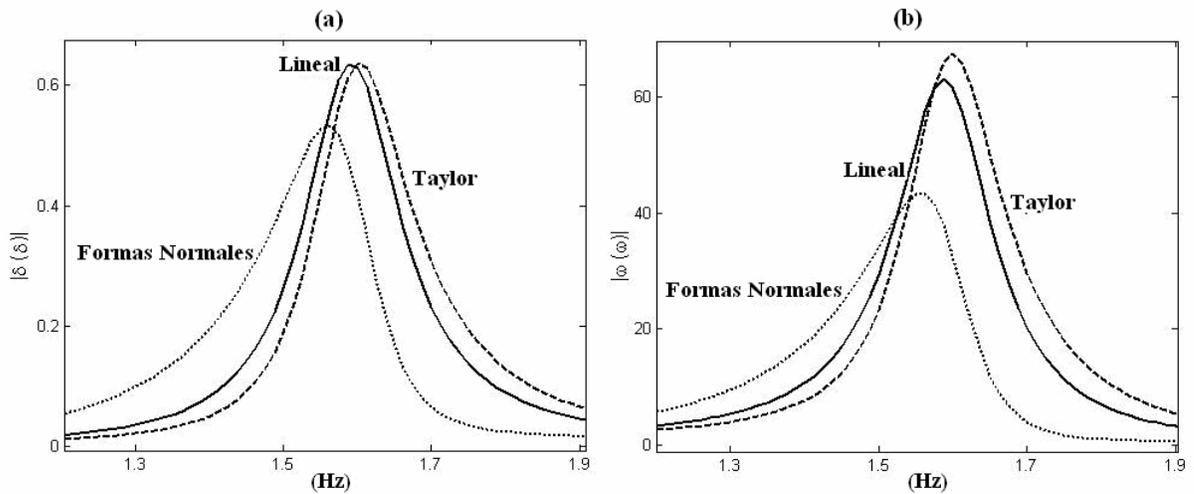


Figura 4.11 Espectro de frecuencia del ángulo del rotor (a) y velocidad (b)

La figura 4.11 nos muestra la comparación espectral de las variables de estado de la máquina correspondientes a los modelos lineal, formas normales y expansión de series de Taylor.

De la figura 4.11 y la tabla 4.2 podemos observar que los tres métodos difieren en el análisis de frecuencia. Sin embargo, hay una diferencia significativa entre el método de formas normales y el método de expansión de series de Taylor.

Tabla 4.2

Comparación espectral de potencia para señales electromecánicas del sistema máquina bus infinito.

	Pico de potencia (magnitud de FFT) en el pico de potencia.	Valor de la frecuencia (Hz)
Ángulo		
Lineal	0.6346	1.5875
Series de Taylor	0.6364	1.6
Formas Normales	0.5327	1.5625
Velocidad		
Lineal	63.1608	1.5875
Series de Taylor	67.5955	1.6
Formas Normales	43.2949	1.5625

4.6 Referencias

- [1]. Castellanos B. R., A. R. Messina, and C. Juarez, "A New Linear Fractional Transformation Based Approach to Power System Robustness Analysis" *International Journal of Emerging Electric Power Systems* 8.5, 2007.
- [2]. I. Martínez C., A. R. Messina, and V. Vittal, "Normal form analysis of complex power systems: A structure-preserving approach", *IEEE Transactions on Power System*, November 2007, Vol. 22, No. 4.
- [3]. C. M. Lin, V. Vittal, W. Kliemann, A. A. Fouad, "Investigation of modal interaction and its effects on control performance in stressed power systems using normal forms of vector fields", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 11, no. 2, pp. 781-787, May 1996.
- [4]. García J. J., Castillo L. C and Toledo C. J, "Frequency-Change of Nonlinear System Using Spectrum (Fast Fourier Transform) Theory" *IEEE Conferences, Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE*, 2009 6th International Conference, 2009.
- [5]. C. M. Ling, V. Vittal, W. Kliemann, A.A. Fouad, "Investigation of modal interaction and its effects on control performance in stressed power systems using normal forms of vector fields", *IEEE Trans. Power Syst.* 11 (2) (1996) 781–787.
- [6]. I. Martínez, A. R. Messina, E. Barocio. "Perturbation analysis of power: effects of second- and third – order nonlinear terms on system dynamic behavior", *Electric Power Systems Research* 71 (2004) 159–167, Elsevier.
- [7]. C. Juarez, R. Castellanos, A. R. Messina, "Analysis of Inter-Area Oscillations using Time-Varying One-Machine Infinite Bus Equivalents", *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, San Francisco, California USA, 2005.
- [8]. *Matlab Optimization Toolbox, User's Guide*, the Math Works Inc., Natick, MA, 1992.

Capítulo 5

Conclusiones Generales y

Recomendaciones para Trabajos

Futuros

5.1 Conclusiones Generales

El trabajo desarrollado permitió efectuar una metodología para preservar la estructura de un sistema eléctrico de potencia cuya representación física estaba definida mediante un sistema de ecuaciones diferencial-algebraico no lineales, el cual fue singularmente perturbado. Al aplicar ésta técnica la determinación del valor del pequeño parámetro llamado perturbación singular fue fundamental y de gran utilidad para poder dar solución al sistema.

La metodología propuesta brinda las siguientes ventajas:

- Permite conservar la estructura de la red y características específicas de la carga en el modelo dinámico del sistema.
- La aproximación al comportamiento real del sistema dependerá de valor perturbación singular asignado.
- La selección de una perturbación adecuada conjuntamente con la metodología que se propone garantiza un método analítico sencillo

mediante un sistema singularmente perturbado lineal que retendrá la información no lineal del resto del sistema.

- Ésta formulación puede ser usada para estimar el efecto de la acción de control en la red de transmisión y evaluar el efecto de las características de la carga en el comportamiento del sistema.

Por otra parte se propusieron dos métodos diferentes para incluir términos no lineales a un sistema muy simple de una máquina bus infinito (modelo clásico de la máquina), los cuales fueron:

1. El método de Formas Normales.
2. La expansión de series de Taylor.

Además, se realizó una comparación con el análisis lineal del sistema (referencia) mediante un cambio del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia; sin embargo, es muy importante notificar que es necesario comparar estos resultados con la solución completa del sistema.

5.2 Recomendaciones para Trabajos Futuros

Se proponen los siguientes tópicos para investigación:

- La introducción de una perturbación singular representada por una ecuación polinomial de grado n , retenga la no linealidad del sistema ante grandes condiciones de estrés.
- La búsqueda de metodologías para la obtención de n de acuerdo a la no linealidad del sistema.
- Metodologías y técnicas de medición y caracterización del grado de no linealidad dentro del modelo del sistema.

Apéndice A

Parámetros del Sistema de Dos Áreas Cuatro Generadores

Los parámetros de la máquina y de la red están expresados en valores de p.u. en 100 MVA. base con las características que se detallan a continuación en las Tablas A1-A6:

Tabla A.1
Características de la carga

Bus	Carga (MW)	Carga (MVAR)
5	11.200	1.800
6	11.800	1.800

Tabla A.2
Características nominales de los generadores

Generador	Voltaje en terminales	Potencia activa	Potencia reactiva
1	1.020	6.644	-0.128
2	1.020	6.644	3.032
3	1.020	5.229	-0.190
4	1.020	5.000	2.377

Tabla A.3
Características específicas de operación de los generadores

x_d	x_q	x'_d	x'_q	τ'_d	τ'_q	MVA
1.800	1.700	0.300	0.300	8.000	0.400	900

Tabla A.4
Coefficientes de amortiguamiento e inercia

Generador	D	H
1	4.000	6.500
2	2.000	6.500
3	11.000	6.500
4	10.000	6.500

Tabla A.5
Características de las líneas de transmisión.

Bus #	Bus #	R	X
1	2	0.0025	0.025
2	5	0.0010	0.010
5	6	0.0220	0.220
3	4	0.0025	0.025
4	6	0.0010	0.010

Tabla A.6
Características del excitador

Bus	K_A	T_A	V_{Rmin}	V_{Rmax}
1	180	0.010	$\frac{-}{5.000}$	5.000
2	100	0.010	$\frac{-}{5.000}$	5.000
3	130	0.010	$\frac{-}{5.000}$	5.000
4	220	0.010	$\frac{-}{5.000}$	5.000

Apéndice B

Parámetros del Sistema Máquina Bus Infinito

Los parámetros de la máquina y de la red están expresados en valores de p.u. en 22000 MVA. base con las características que se detallan a continuación en las Tablas B1-B3:

Tabla B.1
Características de la máquina

Inercia (MWs/MVA)	D (p.u.)	X'_d (p.u.)
3.5	11.200	1.800

Tabla B.2
Características de la línea de transmisión

X_T (p.u.)
0.65

Tabla B.3
Condiciones iniciales de operación

P (p.u.)	Q (p.u.)	E_t (p.u.)	E_B (p.u.)	P_{max} (p.u.)	δ_0 (°)	ω_0 (p.u.)
0.90	-0.30	$1.00\angle 36^\circ$	$0.995\angle 0^\circ$	1.1762	42.92	0