



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DEL CENTRO DE EDUCACION
CONTINUA

Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe del Centro de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en la constancia, deberán entregar copia del mismo o de su cédula a más tardar el SEGUNDO DIA de clases, en las oficinas del Centro con la señorita encargada de inscripciones.

El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona encargada de entregar las notas del curso. Las inasistencias serán computadas por las autoridades del Centro, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencia.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso. Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes, entregando el oficio respectivo.

Con objeto de mejorar los servicios que el Centro de Educación Continua ofrece, al final del curso se hará una evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.





CENTRO DE EDUCACION CONTINUA, DIV. DE EST. SUP. F.I.-UNAM

APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

Fecha: Del 14 al 25 de noviembre de 1977
Coordinador: Dr. Rolando Springall G.

Duración: 40 horas

| TEMA | PROFESOR | DIA | HORA |
|--|---------------------------------|-----------|---------|
| 1. NATURALEZA DE LOS SISTEMAS | | | |
| 1.1 Ciclo Hidrológico. Fuentes y Usos del Agua. Disponibilidad. | | | |
| 1.2 Características Hidrológicas de los Sistemas de Aprovechamientos Hidráulicos. | | | |
| 1.3 Componentes estructurales de los Sistemas de Aprovechamientos Hidráulicos. Sistemas de - Captación. Sistemas de Conducción - Sistemas de Distribución. | M.en I. Francisco Echavarría A. | Lunes 14 | 17-21 h |
| 2. INTRODUCCION A SU PLANEACION | | | |
| 2.1 Factores Socio-Políticos y legales de los - - Aprovechamientos Hidráulicos | | | |
| 2.2 Naturaleza de los Sistemas de Aprovechamientos Hidráulicos. | Ing. Ricardo Martínez H. | Martes 15 | 17-19 h |

APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
(continuación)

| TEMA | PROFESOR | DIA | HORA |
|---|--------------------------|------------|---------|
| 3. METODOS Y TECNICAS DE ANALISIS | | | |
| 3.1 Simulación | | | |
| 3.1.1 Series Cronológicas | | | |
| 3.1.2 Componentes Principales | | | |
| 3.2 Optimización | | | |
| 3.2.1 Programación lineal | | | |
| 3.2.2 Programación dinámica | | | |
| 3.2.3 Optimización analítica | Ing. Francisco Téllez G. | Martes 15 | 19-21 h |
| | | Miérc. 16 | 17-21 h |
| | | Jueves 17 | 17-21 h |
| 4. ANALISIS DE DECISIONES | | | |
| 4.1 Sistemas determinísticos | | | |
| 4.1.1 Conceptos básicos | | | |
| 4.1.2 Técnicas de optimización | | | |
| 4.2 Sistemas probabilísticos. Decisiones bajo <u>in</u> certidumbre | | | |
| 4.2.1 Conceptos básicos, Reglas de decisión. Uti- lidad | | | |
| 4.2.2 Decisiones Bayesianas. Cálculo de estrate- gías. Estimación. | | | |
| 4.3 Aplicaciones a Sistemas Hidráulicos | Dr. Alejandro López T. | Viernes 18 | 17-21 |
| 4.4 Aplicación de análisis microeconómico a - problemas de Decisión. | | | |

APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
(continuación)

| TEMA | PROFESOR | DIA | HORA |
|-------|---------------------------|-----------|-------|
| 4.4.1 | | | |
| 4.4.1 | | | |
| 4.4.2 | | | |
| 4.4.2 | M.enI, Alexis Aguilar | Lunes 21 | 17-21 |
| 5. | | | |
| 5. | | | |
| 5.1 | | | |
| 5.1 | | | |
| 5.1.1 | | | |
| 5.1.2 | | | |
| 5.1.3 | | | |
| 5.1.4 | | | |
| 5.1.5 | M. en C. Cesar Herrera T. | Martes 22 | 17-21 |
| 5.2 | | | |
| 5.2.1 | | | |
| 5.2.3 | | | |
| 5.2.4 | M.en C Jaime Sancho | Miérc. 23 | 17-21 |
| 5.3 | | | |
| 5.3.1 | | | |
| 5.3.2 | | | |
| 5.3.4 | | | |
| 5.3.5 | | | |
| 5.3.6 | | | |
| 5.3.7 | | | |
| 5.3.8 | Dr. Jorge Díaz Padilla | Jueves 24 | 17-21 |

APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
(continuación)

| | TEMA | PROFESOR | DIA | HORA |
|-----|--|--------------------------|------------|---------|
| 6. | PLANEACION DE LOS SISTEMAS DE A- PROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS. | | | |
| 6.1 | El proceso de Planeación. | | | |
| 6.2 | Objetivos y Metas . Coordinación de Progra <u>mas</u> . | | | |
| 6.3 | Factores Humanos. | | | |
| 6.4 | Interacción del Agua con otros recursos. | Ing. Ricardo Martínez H. | Viernes 25 | 17-19 h |
| 7. | MESA REDONDA | | Viernes 25 | 19-21 h |

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO

"APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS"

1. M. en I. ALEXIS AGUILAR
INGENIERIA PROCESAMIENTO ELECTRONICO, S.A.
JEFE DE PROYECTO
San Lorenzo No. 153-6° Piso
Col. del Valle
México 12, D. F.
Tel. 575-40-77

2. DR. JORGE DIAZ PADILLA
FELIPE OCHOA Y ASOCIADOS
DIRECTOR TECNICO
Av. Revolución No. 1909-7° Piso
Col. Villa Alvaro Obregón
México 20, D. F.
Tel. 548-92-11

3. M. en I. FRANCISCO ECHAVARRIA A.
CONSULTORES, S. A.
GERENTE DE ESTUDIOS Y PROYECTOS
Insurgentes Sur No. 452 Desp. 507
Col. Roma
México 7, D. F.
Tel. 584-77-88

4. M. en C. CESAR HERRERA TOLEDO
COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO
DIRECTOR DE FORMULACION Y VERIFICACION
Tepic No. 40-2° Piso
Col. Roma
México 7, D. F.
Tel. 574-14-97

5. DR. ALEJANDRO LOPEZ T.
FELIPE OCHOA Y ASOCIADOS
JEFE DE PROYECTOS
Av. Revolución No. 1909-5° Piso
Col. Villa Alvaro Obregón
México 20, D. F.
Tel. 550-12-12

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO

"APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS"

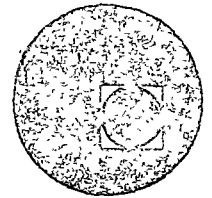
6. ING. RICARDO MARTINEZ H.
SUB-SECRETARIA DE EVALUACION
DE LA SECRETARIA DE PROGRAMACION
JEFE DEL DPTO. AGROPECUARIO
Fray Servando No. 77-2° Piso
México, D. F.

7. M. en C. JAIME SANCHO
COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO
DIRECTOR DE INVENTARIOS DE AGUA Y SUELO
Tepic No. 40-2° Piso
Col. Roma
México 7, D. F.
Tel. 584-72-74

8. ING. FRANCISCO TELLEZ G.
SUBSECRETARIA DE PUERTOS Y MARINA MERCANTE
DIR. GRAL. DE OBRAS MARITIMAS
CONSULTOR
Insurgentes Sur No. 465-3° Piso
México 12, D. F.



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

EJEMPLO DE UNA SERIE CRONOLOGICA

ING. FRANCISCO TELLEZ GRANADOS
NOVIEMBRE, 1977

)

o

o
a

| t | X(t) | Y(t) | sen θt | cos θt | y sen θt | y cos θt | sen $2\theta t$ | cos $2\theta t$ | Y _e (t) | Z(t) |
|----|-------|-------|----------------|----------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|--------------------|--------|
| 1 | 0.31 | 0.73 | 0.5 | 0.866 | 0.39 | 0.63 | 0.25 | 0.75 | 0.105 | 0.625 |
| 2 | 0.48 | 0.13 | 0.866 | 0.5 | 0.81 | 0.47 | 0.75 | 0.25 | -0.255 | 1.185 |
| 3 | -2.57 | -2.09 | 1 | 0 | -2.09 | 0 | 1 | 0 | -0.597 | -1.543 |
| 4 | -0.39 | 0.12 | 0.866 | -0.5 | 0.10 | -0.06 | 0.75 | 0.25 | -0.692 | 0.812 |
| 5 | -2.83 | -2.29 | 0.5 | -0.866 | -1.15 | 1.98 | 0.25 | 0.75 | -0.652 | -1.638 |
| 6 | 0.36 | 0.93 | 0 | -1 | 0 | -0.93 | 0 | 1 | -0.437 | 1.367 |
| 7 | -1.04 | -0.44 | -0.5 | -0.866 | 0.22 | 0.38 | 0.25 | 0.75 | -0.105 | -0.335 |
| 8 | 0.07 | 0.72 | -0.866 | -0.5 | -0.62 | -0.95 | 0.75 | 0.25 | 0.255 | 0.965 |
| 9 | 0.08 | 0.74 | -1 | 0 | -0.74 | 0 | 1 | 0 | 0.547 | 0.193 |
| 10 | -0.38 | 0.31 | -0.866 | 0.5 | -0.27 | 0.15 | 0.75 | 0.25 | 0.692 | -0.382 |
| 11 | -0.90 | -0.18 | -0.5 | 0.866 | 0.09 | -0.16 | 0.25 | 0.75 | 0.652 | -0.832 |
| 12 | -0.44 | 0.31 | 0 | 1 | 0 | 0.31 | 0 | 1 | 0.437 | -0.127 |
| | | | | | -3.28 | 2.64 | 6 | 6 | | -0.21 |

$$X(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + Y(t)$$

$$N = 12$$

$$\sum t = 78$$

$$\sum t^2 = 144$$

$$\sum t^3 = 6084$$

$$\sum t^4 = 60710$$

$$\sum t^5 = 630708$$

$$\sum t^6 = 8.1207191 \times 10^8$$

$$\sum X = -7.23$$

$$\sum Xt = -44.81$$

$$\sum Xt^2 = -333.91$$

$$\sum Xt^3 = -2956.73$$

$$\begin{bmatrix} N & \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 \\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 & \sum t^5 \\ \sum t^3 & \sum t^4 & \sum t^5 & \sum t^6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum X \\ \sum Xt \\ \sum Xt^2 \\ \sum Xt^3 \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = -0.39$$

$$a_1 = -0.03$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$X(t) = -0.39 - 0.03t + Y(t)$$

$$Y(t) = X(t) - (-0.39 - 0.03t) = X(t) + 0.39 + 0.03t$$

$$\begin{aligned} \text{Si se acepta que } Y(t) &= B_1 \operatorname{sen} \theta t + B_2 \cos \theta t + Z(t) \\ &= a_1 \operatorname{sen}(\theta t + \phi_1) + Z(t) \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.28 \\ 2.64 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} B_1 &= -0.55 \\ B_2 &= 0.44 \end{aligned}$$

)

o

o

$$a_1 = \sqrt{(-0.55)^2 + (0.44)^2} = 0.70$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{0.44}{-0.55} = \arctan -0.80$$

$$\alpha = -38.66^\circ$$



$$\phi_1 = 180^\circ - 38.66^\circ = 141.34^\circ$$

$$z(t) = y(t) - y_G(t)$$

$$y_G(t) = 0.70 \sin(30t + 141.34^\circ)$$

$$\bar{z} = -\frac{0.21}{12} = -0.018$$

| $z(t) - \bar{z}$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ | $t=4$ | $t=5$ | $t=6$ |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.693 | 1.203 | -1.525 | 0.83 | -1.62 | 1.385 | -0.317 |
| 1.203 | -1.525 | 0.83 | -1.62 | 1.385 | -0.317 | 0.483 |
| -1.525 | 0.830 | -1.62 | 1.385 | -0.317 | 0.483 | 0.211 |
| 0.830 | -1.620 | 1.385 | -0.317 | 0.483 | 0.211 | -0.364 |
| -1.620 | 1.385 | -0.317 | 0.483 | 0.211 | -0.364 | -0.814 |
| 1.385 | -0.317 | 0.483 | 0.211 | -0.364 | -0.814 | -0.109 |
| -0.317 | 0.483 | 0.211 | -0.364 | -0.814 | -0.109 | |
| 0.483 | 0.211 | -0.364 | -0.814 | -0.109 | | |
| 0.211 | -0.364 | -0.814 | -0.109 | | | |
| -0.364 | -0.814 | -0.109 | | | | |
| -0.814 | -0.109 | | | | | |
| -0.109 | | | | | | |

$$c_x(0) = \frac{1}{12} (10.603)$$

$$c_x(1) = \frac{1}{12} (-6.097)$$

$$c_x(2) = \frac{1}{12} (-7.446)$$

$$c_x(3) = \frac{1}{12} (-9.581)$$

$$c_x(4) = \frac{1}{12} (0.868)$$

$$c_x(5) = \frac{1}{12} (-0.555)$$

$$c_x(6) = \frac{1}{12} (0.121)$$

$$f_x(1) = -0.575$$

$$f_x(2) = 0.919$$

$$f_x(3) = -0.932$$

$$f_x(4) = 0.082$$

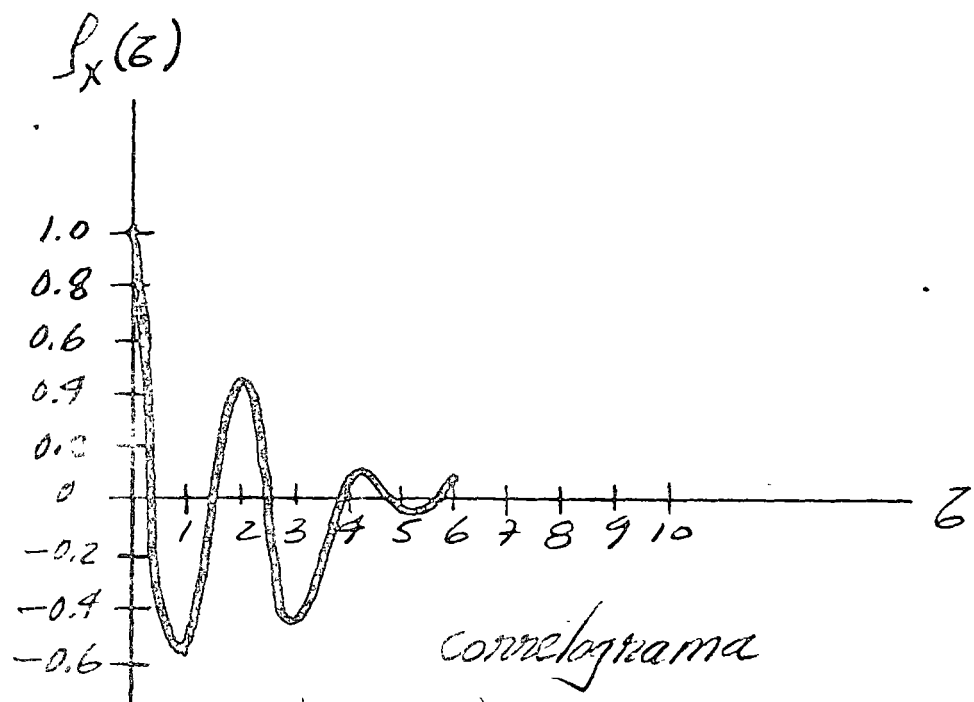
$$f_x(5) = -0.052$$

$$f_x(6) = 0.087$$

C

O

O



correlograma

$\lambda < 1 \Rightarrow$ No hay correlación entre los $z(t)$ y es ruido puro

Modelo matemático

$$X(t) = -0.039 - 0.03t + 0.70 \text{sen}(30t + 141.39^\circ) + E$$

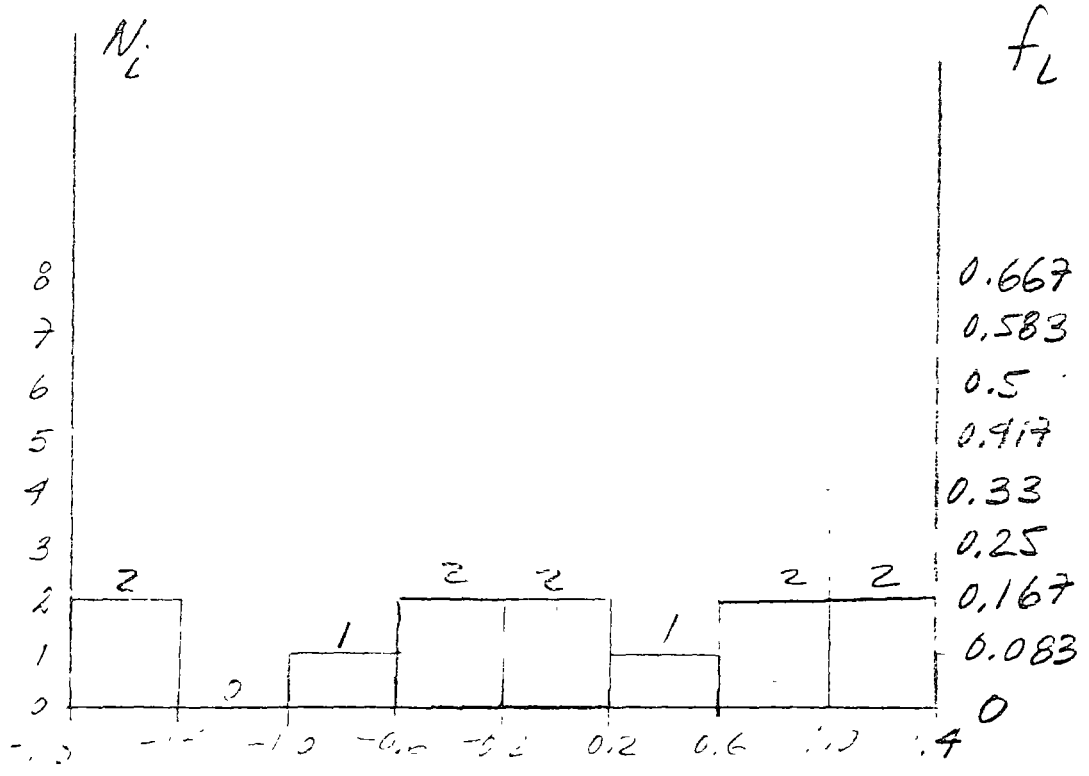
| t | (A) $-0.039 - 0.03t$ | (B) $0.70 \text{sen}(30t + 141.39^\circ)$ | (A) + (B) | NA | E | X(t) |
|---|----------------------|---|-----------|------|-------|--------|
| 1 | -0.069 | 0.105 | 0.036 | 0.65 | 0.6 | 0.636 |
| 2 | -0.099 | -0.255 | -0.354 | 0.16 | -1.9 | -1.754 |
| 3 | -0.129 | -0.597 | -0.676 | 0.09 | -1.58 | -2.256 |
| 4 | -0.159 | -0.692 | -0.851 | 0.22 | -0.72 | -1.571 |
| 5 | -0.189 | -0.652 | -0.841 | 0.91 | 1.22 | 0.379 |

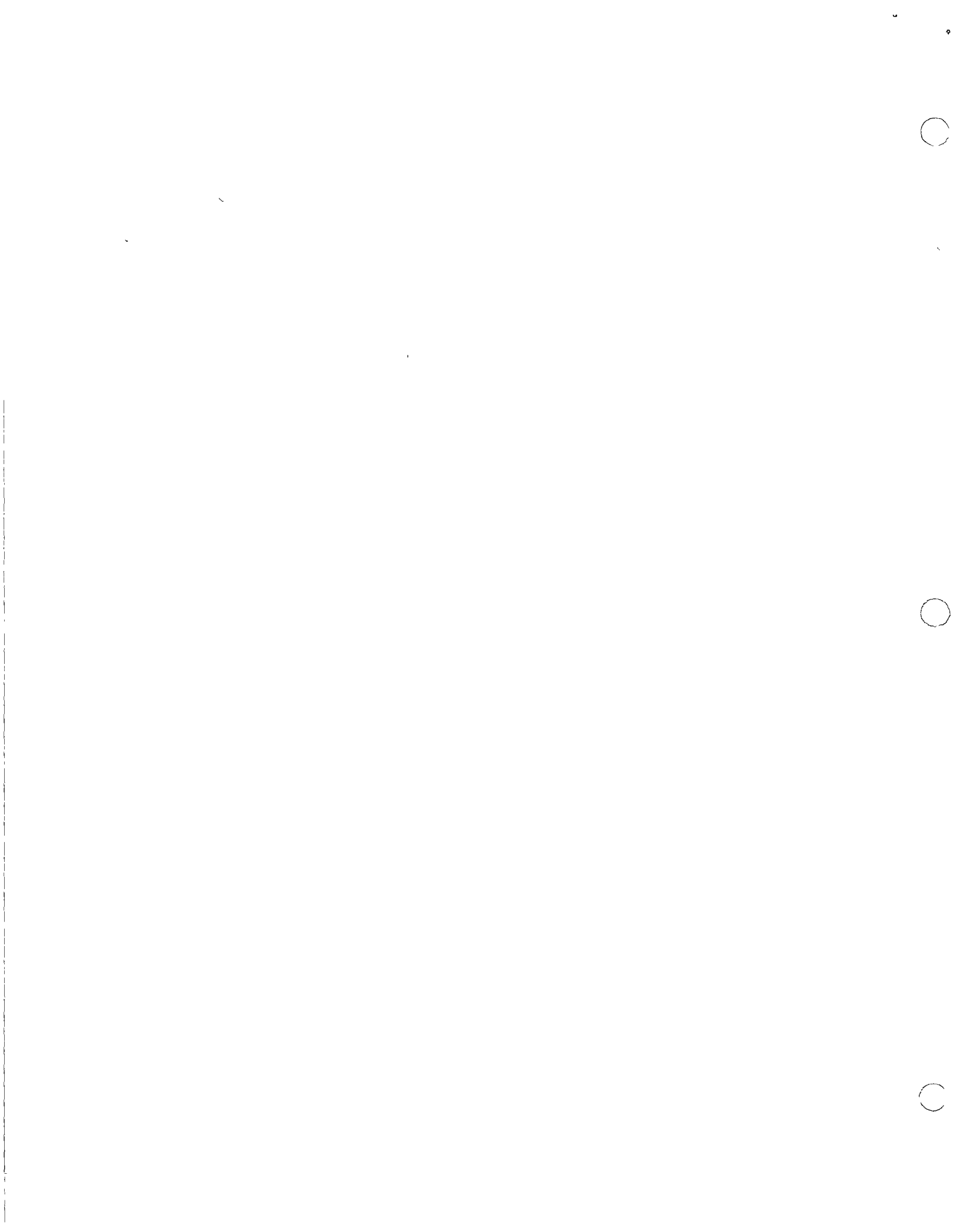
D

0

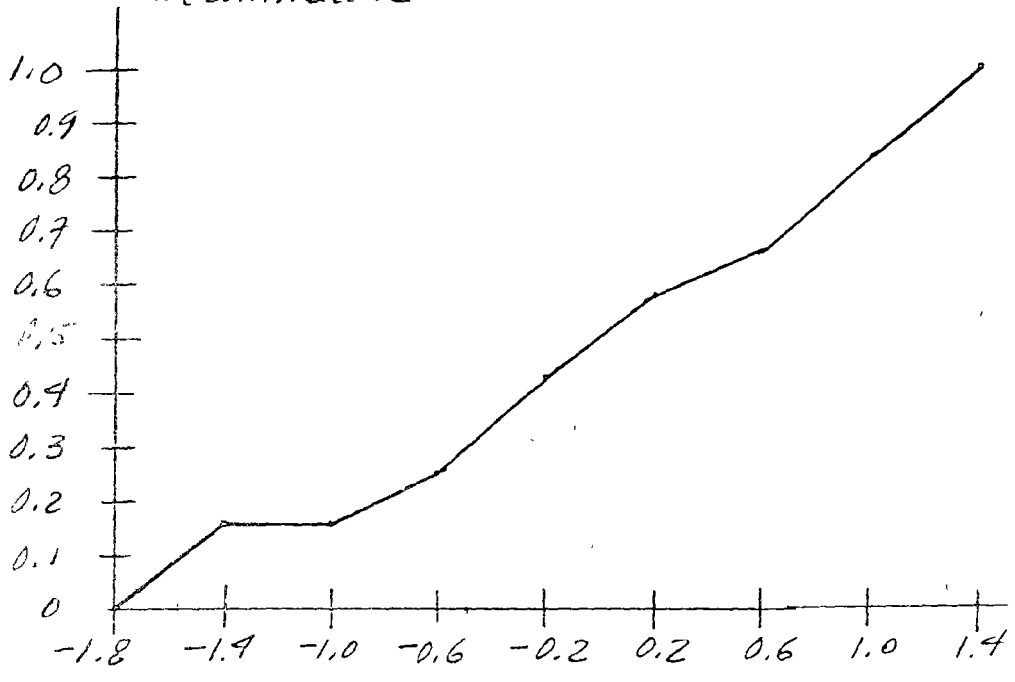
0

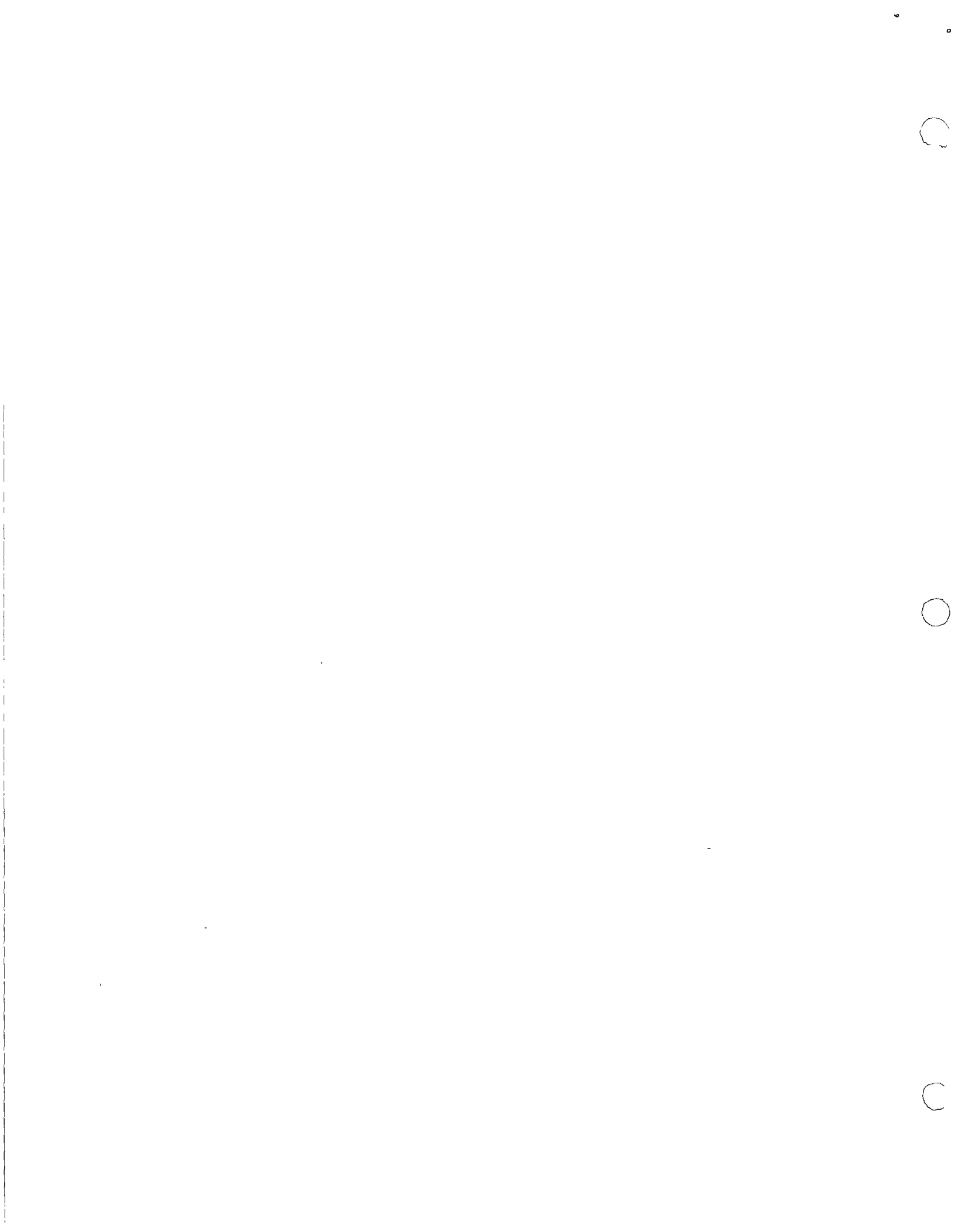
| Intervalos | n_i | $f_i = \frac{n_i}{N}$ | f_i acum. |
|---------------|-------|------------------------|-------------|
| -1.30 a -1.10 | 2 | $\frac{2}{12} = 0.167$ | 0.167 |
| -1.10 a -1.00 | 0 | 0 = 0 | 0.167 |
| -1.00 a -0.60 | 1 | $\frac{1}{12} = 0.083$ | 0.250 |
| -0.60 a -0.20 | 2 | $\frac{2}{12} = 0.167$ | 0.417 |
| -0.20 a 0.00 | 2 | $\frac{2}{12} = 0.167$ | 0.584 |
| 0.00 a 0.20 | 1 | $\frac{1}{12} = 0.083$ | 0.667 |
| 0.20 a 1.0 | 2 | $\frac{2}{12} = 0.167$ | 0.834 |
| 1.0 a 1.40 | 2 | $\frac{2}{12} = 0.167$ | 1.001 |



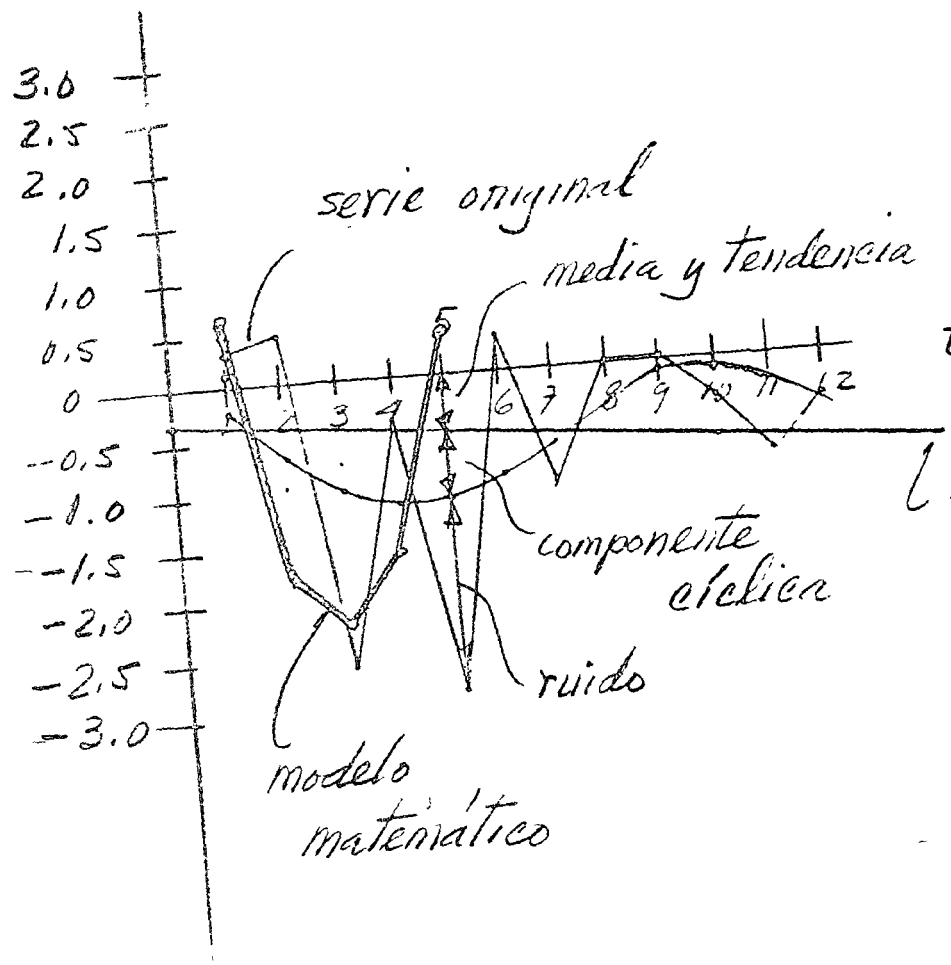


frecuencia relativa
acumulada





$X(t)$



su promedio va disminuyendo con el tiempo

3

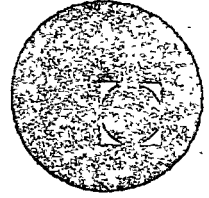
0

0

0



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

ANALISIS DE DECISIONES
PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS Y SOLUCION

ING. ALEXIS AGUILAR M.
NOVIEMBRE, 1977

1

○

○

○

8

condiciones generales de factibilidad Técnica-Económica.

1.1 CAPACIDAD DE LA OBRA DE DESVIO

La capacidad de la obra de desvío depende del tipo de cortina de la presa, -- presentándose generalmente los siguientes comportamientos:

Para presas de concreto, los daños en el sitio por inundación no ponen en peligro la construcción, además no implica riesgo adicional aguas abajo, pero se provocarían retrasos en el programa. Para este tipo de cortina es factible disminuir la capacidad de la obra de desvío por túneles, con desvíos adicionales a través del cuerpo de la cortina, tajos en el cauce o sobre parte de la propia cortina.

Para presas de materiales graduados, los daños son mayores bajo una inundación, aún cargas pequeñas sobre la cortina pueden provocar la falla de la estructura, ocasionándose un peligro adicional aguas abajo. Para éste caso la capacidad de la obra de desvío se verá incrementada debido a factores de seguridad mayores.

La capacidad que involucra una obra de desvío constituye una forma de seguro, cuyo volumen debe corresponder a los riesgos que se corre. Siendo la tendencia actual no la de aumentar la magnitud de las obras, sino disminuir los riesgos de falla mediante la construcción de la presa rápidamente. Para ello se busca sacar ventaja del período de estiaje y desarrollar técnicas construc



tivas de la presa rápidamente. La tendencia dominante para presas de concreto y las de enrocamiento consiste en reducir todo lo que sea posible la capacidad de los túneles de desvío, tomando en cuenta la inundación del vaso provocado por las ataguías. En este caso, la avenida puede ser desalojada por orificios dejados en la estructura definitiva de concreto, ó bien, es posible considerar el llenado parcial del vaso; en las presas de enrocamiento, la seguridad de la presa se garantiza por una distribución adecuada de las diversas categorías de enrocamiento o construyendo rápidamente el paramento impermeable de aguas arriba.

Un problema primordial para la etapa inicial de construcción es la de alcanzar una elevación necesaria para absorber la avenida con la ataguía de aguas arriba. De aquí la razón por la que con mayor frecuencia, se construyen más altas las ataguías de aguas arriba, siempre y cuando ésto sea técnica y económicamente permisible.

El criterio para definir la avenida de diseño durante la construcción, se hace por medio de un análisis de optimización, tomando en cuenta por un lado, el costo de construcción de la ataguía de aguas arriba y de los túneles de desvío, por otro, el valor de los daños que ocurrirían al sobrepasar las aguas el nivel de la ataguía, así como las pérdidas ocasionadas por el retraso en la terminación de las obras.

1

2

3

4

1.2 FACTORES QUE TIENEN INFLUENCIA EN LAS OBRAS DE DESVIO Y SU OPERACION.

1.2.1 REGIMEN HIDROLOGICO

La operación y el diseño están condicionados por el régimen hidrológico. Este condicionamiento se puede caracterizar por la distribución de los caudales máximos probables durante diferentes períodos en el año.

Los gastos a considerar son: La avenida de diseño de la obra del desvío, el caudal máximo de estiaje y el que se espera ocurra para la hora crítica del río, así como aquellos gastos máximos y medios mensuales para coordinar las diferentes etapas constructivas.

1.2.2 CONDICIONES TOPOGRAFICAS Y GEOTECNICAS

Las condiciones topográficas influyen en el tamaño y tipo de las obras de desvío; Un valle angosto puede ser adecuado para la solución clásica de ataguía de lado a lado del río, y un valle ancho puede hacer posible aislar parte del río con una ataguía, mientras el agua sigue corriendo por el resto de la sección.

Las condiciones geotécnicas pueden tener influencia en los túneles de desvío, ya sea limitando su tamaño o que tengan que revestirse debido a las velocidades que permita el tipo de roca. Para el caso de las ataguías, se pueden presentar problemas por erosión en el fondo a la hora del cierre o erosión en las ataguías en la zona de desvío, cuando el cierre sea par-

POSTERS ARE THE ONLY THING THAT CAN BE SEEN IN THE DARK

THE HISTORY OF THE POSTER

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause. The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause. The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause. The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause. The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

The poster is a form of visual communication that has evolved over time. It is a means of conveying information, advertising, or promoting a cause.

cial. Cuando los estratos del fondo del cauce sean permeables, se puede requerir un arreglo especial mediante pantallas impermeables o inyecciones.

1.2.3 MATERIALES DISPONIBLES

La disponibilidad de materiales para la construcción de las ataguías y el cierre (tierra, arena, aluviones con componentes más o menos gruesos y materiales de excavación), tienen influencia en el tipo de construcción escogido.

La tierra, la arena y material de aluvión pueden emplearse en el cierre, pero solamente en ciertas etapas. Cuando es muy difícil obtener bloques muy pesados, es posible utilizar bloques de forma especial muy resistentes al arrastre, o bien adoptar métodos especiales para el cierre.

1.3 METODOLOGÍA PARA LA ELECCION DE LA CAPACIDAD DE LA OBRA DE DESVIO.

Como una introducción general de la metodología para la elección de la capacidad de la obra de desvío, así como sus características, se juzga convenientemente dividir el estudio en tres etapas:

Estudio Hidrológico

Estudio Hidráulico

Estudio Técnico-Económico



1.3.1 ESTUDIO HIDROLOGICO.

Este estudio comprende un análisis preliminar de la información cronológica de los escurrimientos registrados en diferentes estaciones cercanas al sitio. De estas estaciones se hizo un análisis tanto cualitativo como cuantitativo en sus registros, para seleccionar aquellos registros que muestren mayor confiabilidad y un período adecuado que sea representativo del fenómeno.

Una vez seleccionada la información se procedió a hacer un análisis estadístico basado en correlogramas para identificar el tipo de avenidas o trenes de avenidas que presenten cierta uniformidad en el tiempo, correspondientes a gastos máximos registrados. Conjuntamente se realizó un estudio estadístico de valores extremos utilizando los métodos de Levediev, Nash, Gumbel y Warecoun, para asociarlos a diferentes períodos de retorno. En base a los resultados obtenidos y la experiencia que se tiene de ellos, se consideró como representativos los valores obtenidos con el método de Nash.

Con la complementación de los aspectos, forma y magnitud ligados a diferentes frecuencias de ocurrencia, se procedió a seleccionar aquel tipo de avenida que presente condiciones críticas de diseño de la obra de desvío. Lo que se hizo en base a un estudio hidráulico del tránsito de varios tipos de avenidas.



1.3.2. ESTUDIO HIDRAULICO

Las condiciones que rigen el diseño son proporcionados por una simulación o tránsito de avenidas que requieren del funcionamiento hidráulico de túneles y de las capacidades de regularización del vaso que están dadas por las alturas de ataguía. Con lo que para cada frecuencia se pueden tener diferentes combinaciones de túneles (número y diámetro) y de ataguía (alturas) que proporcionan una gama de alternativas. Estas alternativas se obtienen de transitar una avenida con un gasto asociado a una probabilidad de ocurrencia, a través de diferentes combinaciones de diámetros y cantidad de túneles, lo cual genera diferentes alturas de ataguía. El mismo procedimiento se aplica a diferentes avenidas asociadas a otros períodos de retorno, con lo que se obtiene una gama de combinaciones de tipo de obra, a las cuales se les puede aplicar un análisis de factibilidad Técnico-Económica.

1.3.3 ESTUDIO TECNICO-ECONOMICO

Antes de pasar a formular el análisis económico de las alternativas, se hace necesario un análisis de costos que involucren las cantidades de obra generales, los que serán englobados en un precio índice referido a los metros de excavación para el caso de túneles y para las ataguías un precio índice por material colocado.



De los tránsitos de avenidas se construyeron una serie de curvas de isogasto, que definen para las posibles combinaciones de capacidad de túneles y alturas de ataguías, el funcionamiento de la obra de desvío para un mismo gasto ligado a un período de retorno. El conjunto de estas curvas para una misma cantidad de túneles, se les aplicó un análisis económico, estimando los costos índice antes mencionados como una relación, lo cual nos permite identificar soluciones óptimas desde el punto de vista económico.

Por otro lado se hizo necesario un análisis por restricción de tipo técnico, basado en las velocidades máximas permisibles en los túneles, que restringe a su vez la altura de las ataguías. Considerando estos dos aspectos, por un lado alternativas óptimas económicas y por otro las restrictivas técnicas, se observó que las condiciones que rigen el diseño son las debidas a las limitaciones de velocidad, aplicándose a éstas alternativas los costos que dan las soluciones del diseño.

A las soluciones anteriores de costos de diseño, se les asocia un costo por riesgo, lo cual permite tomar decisiones adecuadas. Estos riesgos son los valores esperados del daño, los cuales se estimaron para diferentes soluciones de obras de desvío asociadas a distintos períodos de retorno, como: la suma de los productos del daño más crítico en la vida útil de las obras en caso de inundación por la probabilidad de que ocurra dicho daño.

1



Los daños consideran la pérdida total de la propia obra, retrasos en la obra e indemnizaciones. Las pérdidas de oportunidad no se tomaron en cuenta pues se piensa que las inversiones destinadas a dichas obras pueden ser transferidas a otros aprovechamientos. Por otra parte el daño subjetivo - de prestigio o aversión al riesgo no se tomó en cuenta.

Finalmente se hace un estudio de sensibilidad modificando varios de los parámetros como son precios, velocidades permisibles y daños subjetivos, que permitan tomar decisiones en caso de posibles cambios.



2.2.2. RESULTADOS.

La obtención de resultados se hace a partir de los programas de computadora existentes en la S.R.H., manejando los gastos máximos anuales en las cuatro estaciones hidrométricas antes mencionadas.

Los períodos de retorno considerados son (1, 2, 3, 4, 5, 10, 12.5, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50) para fines de obra de desvío. Se analizan también los períodos de (100, 500, 1000, 5000 y 10 000) para efectuar una comparación entre los cuatro métodos, tratando de estar coherente con los estudios hasta ahora realizados de la obra vertedora.

Del análisis de los cuatro métodos se desprende lo siguiente:

El método de Gumbel resulta ser el más adecuado de tomar en consideración para este caso, puesto que dicho método toma el efecto de una población doble, además permite una modificación hacia el método de Nash, ajustando la distribución de valores extremos por medio de mínimos cuadrados. El efecto de muestras con dos poblaciones es notable en el análisis principalmente para los valores mensuales.

El método de Nash es también bastante confiable para períodos de retorno pequeños, observándose que estas están dentro de rango aceptable.

El método del Water Resource Council es bastante conservador para períodos de retorno grandes y siendo lo menos para valores pequeños. Se descar



ta totalmente el método en lo que se refiere a gastos mensuales, pues - los resultados que se obtienen se disparan debido a la diferencia poblacional de las muestras.

El método de Lovediev es intermedio en los resultados y para gastos mensuales presenta valores disparados por el efecto poblacional.

Cabe mencionar que para el análisis mensual los valores considerados son los gastos máximos mensuales registrados.

El método de Nash es el recomendado para la obra de desvío, ya que es el más crítico para períodos de retorno pequeños.

Los resultados anuales y mensuales para los métodos y períodos de retorno antes mencionados, se representan en las tablas No. 2, 3, 4, 5, 6 y 7, en las figuras 9, 10 y 11 se presentan las distribuciones.

100



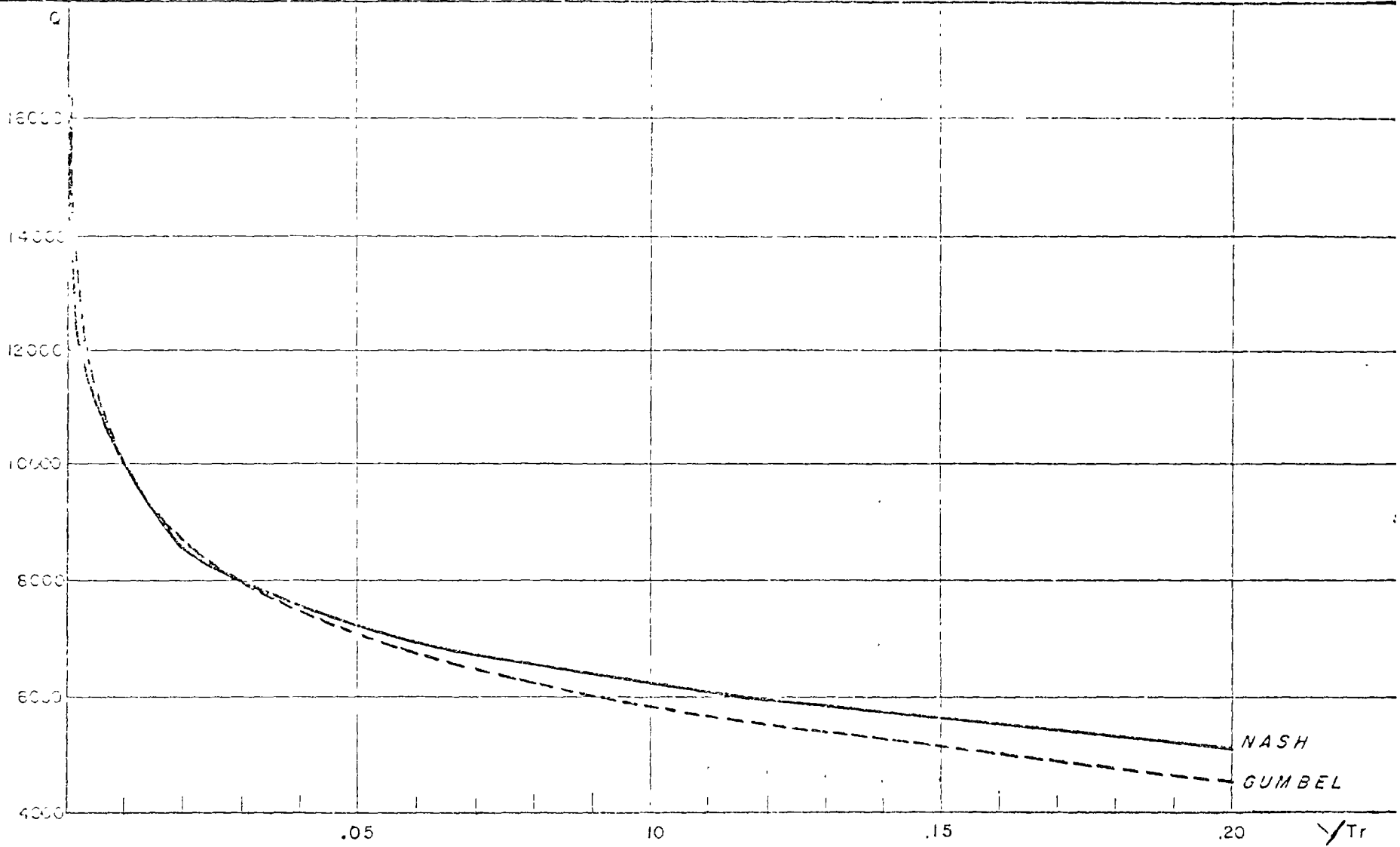
AGUAMILPA
GASTOS MAXIMOS ESPERADOS
TABLA No. 2

| PERIODO DE RETORNO | 50 | 100 | 500 | 1000 | 5000 | 10000 | AÑOS |
|-----------------------|--|---------|----------|----------|----------|----------|------|
| METODO | CAPOMAL (18 Km a abajo del sitio) | | | | | | |
| *WATERCOUN | 5459.37 | 6275.41 | 7408.92 | 9117.92 | 10572.27 | 12720.64 | |
| LEVEDIEV | 6164.63 | 6930.03 | 7922.65 | 9176.70 | 10127.06 | 11317.19 | |
| NASH | 6383.69 | 7074.50 | 8683.29 | 9387.32 | 11017.44 | 11721.82 | |
| +CUMBEL | 6230.0 | 6945.0 | 8602.0 | 9314.0 | 10968.0 | 11630.0 | |
| | CARRIZAL (5 Km a abajo del sitio) | | | | | | |
| *WATERCOUN | 6918.24 | 8154.47 | 9867.09 | 12522.00 | 14771.10 | 18158.79 | |
| LEVEDIEV | 8301.32 | 9569.25 | 11220.05 | 13311.82 | 14930.24 | 16962.29 | |
| NASH | 8419.24 | 9415.29 | 11743.76 | 12753.36 | 15110.07 | 16129.31 | |
| +CUMBEL | 8065.0 | 9106.0 | 11513.0 | 12549.0 | 14953.0 | 15838.0 | |
| | HUAYNAMOTA (afluente) | | | | | | |
| *WATERCOUN | 2562.29 | 3053.83 | 3817.61 | 5046.33 | 6245.09 | 8151.59 | |
| LEVEDIEV | 2976.36 | 3182.07 | 3743.16 | 4324.80 | 4766.74 | 5320.28 | |
| NASH | 3027.21 | 3348.86 | 4099.61 | 4424.63 | 5182.33 | 5509.67 | |
| +CUMBEL | 2958.0 | 3290.0 | 4060.0 | 4390.0 | 5159.0 | 5489.0 | |
| | DESPLAZADERO (500 m abajo confluencia) | | | | | | |
| *WATERCOUN | 4485.74 | 5150.64 | 6056.96 | 7417.31 | 8540.94 | 10211.95 | |
| LEVEDIEV | 5215.09 | 5898.78 | 6788.40 | 7913.25 | 8768.84 | 9840.91 | |
| NASH | 5381.90 | 5988.11 | 7405.35 | 8019.24 | 9450.35 | 10068.54 | |
| +CUMBEL | 5294.0 | 5920.0 | 7370.0 | 7994.0 | 9442.0 | 10066.0 | |

* WATER RESOURCES COUNCIL

+ VALORES SUPERIORES DEL INTERVALO DE CONFIANZA





AGUAMILPA
GASTOS - FRECUENCIA

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

FIG. No. 9



.

3. ESTUDIO HIDRAULICO

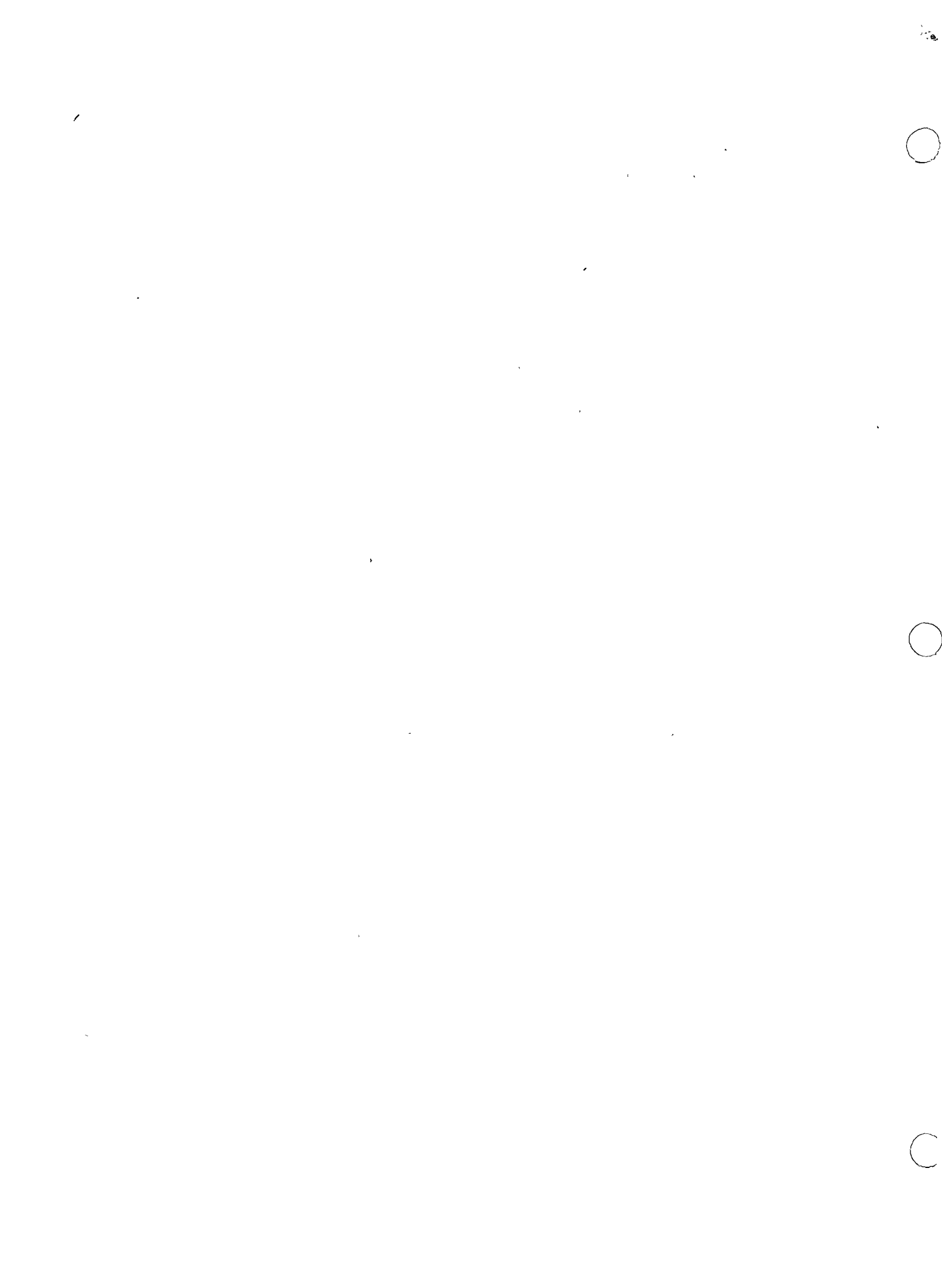
3.0. METODO DE DESVIO DEL RIO

El método para desviar el escurrimiento del río durante la construcción de la cortina, depende del tipo de la misma, del tipo de obras de excedencias y de toma, del flujo probable propiamente dicho, y del espacio disponible en la zona de construcción.

En el caso de una cortina de concreto, ya sea vertedora o no vertedora, que tenga suficiente espacio para el equipo de construcción, a menudo es favorable hacer colado de bloque, y dejar el flujo entre ellos, sin que tenga gran influencia el gasto máximo que brinque sobre la estructura. En otras ocasiones es factible que el flujo pueda pasar a través de un hueco dejado en la estructura.

El desvío por medio de tuneles construidos en las laderas de los cañones, y que libren la zona de construcción, pueden tener alguna ventaja en cortinas de concreto, y su uso es casi obligado en cortinas de materiales graduados.

Para cortinas de materiales graduados, con frecuencia existe la necesidad de hacer el desvío en dos etapas: una primera en tajo ó canal y una se-



gunda en túneles ó una combinación de tajo o canal con túneles.

Los túneles de desviación pueden usarse con ventaja en la descarga de vertederos con canal lateral y en obras de toma y de control, por lo que en la planeación general se toma en cuenta esa posibilidad.

El costo del desvío es generalmente mayor para cortina de materiales graduados, que para cortina de concreto, debido a la gran amplitud de la base en las cortinas primeramente señaladas y a la restricción de que brinque alguna avenida sobre el cuerpo de la misma.

Las diferencias en costo de diferentes desvíos, generalmente no son de gran importancia en la selección del tipo de cortina, sin embargo en el caso de que se tenga un río permanente y muy caudaloso la diferencia de costo puede contribuir a la selección de la cortina de concreto.

Según las consideraciones anteriores, la planeación de las estructuras que formarán la obra de desvío, dependerán principalmente de cinco elementos:

- a) Magnitud del flujo por desviar, cuyas características se han discutido anteriormente.
- b) Características físicas del sitio de construcción: topográficas, geológicas, etc., que en parte han sido proporcionadas por el anteproyecto, quedando pendiente algunos estudios básicos que influirán posterior



mente en la elección del tipo de cortina. Sin embargo para la alternativa de una cortina de materiales graduados se desecha la posibilidad de un tajo en el cauce, debido a que el índice (altura de cortina) / (base de boquilla) y los gastos a desviar son muy grandes.

- c) Tipo de cortina por construir. El tipo de cortina, queda sujeto a los estudios básicos de geología, mecánica de suelos y rocas, y de localización de bancos de materiales. Que actualmente se llevan a cabo.

Por lo que este estudio contemplará cálculos hidráulicos tanto para la alternativa de cortina de materiales graduados como de concreto.

- d) Características y localización del resto de las estructuras hidráulicas que forman la presa. En este caso, la altura de la cortina que es del orden de 180 m impide considerar a priori el aprovechamiento de las obras de desvío - como son los túneles - en forma integral con la obra vertedora ó con la obra de toma. Por lo que inicialmente no se considerará esta posibilidad para el análisis de costos.

- e) Secuencia de las operaciones constructivas. La secuencia de las etapas constructivas quedarán definidas posteriormente con un análisis de factibilidad de daños aplicada a diferentes alternativas de obras.



3.1. ANALISIS HIDRAULICO DE LAS OBRAS DE DESVIO

Este análisis contemplará primeramente las obras de desvío para la alternativa de una cortina de materiales graduados y posteriormente la de cortina de concreto.

Para la alternativa de materiales graduados, se calculará la derivación a través de túneles por ser este método el más factible.

Se considerará inicialmente en los cálculos hidráulicos, túneles sin revestir y con recubrimiento, con velocidades límites de 10 y 20 m/s respectivamente. Dependiendo su modificación en función de los estudios - de la naturaleza de la roca y de su permeabilidad - que se están llevando a cabo.

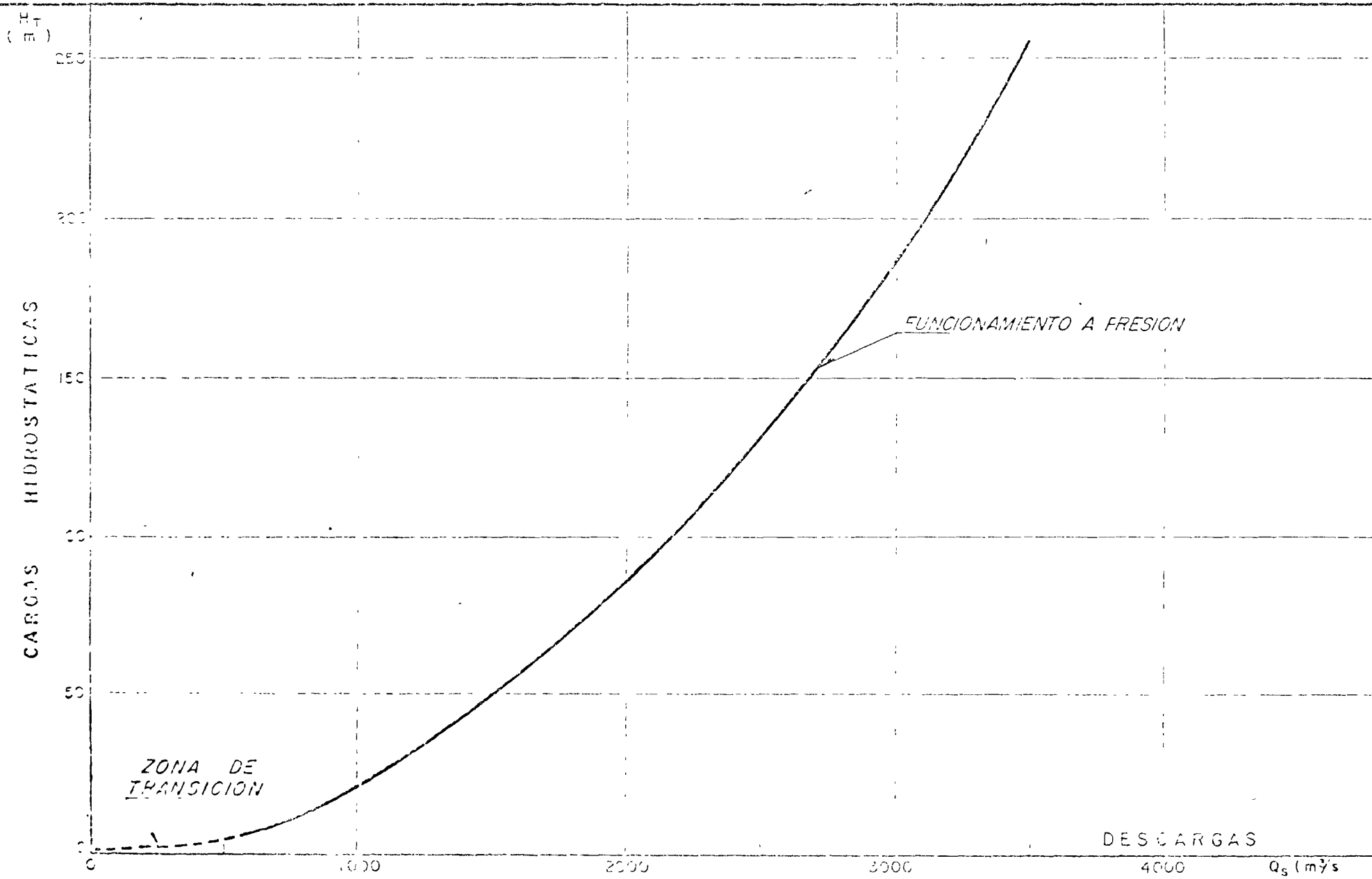
Se adoptará la forma circular para los túneles, por ser la más eficiente tanto hidráulica como estructuralmente, cuando estos operan a presión.

Los cálculos hidráulicos se harán para una gama de diámetros desde 11 m a 17 m, rango que se considera incluye las alternativas óptimas para la solución del problema.

3.1.1. FUNCIONAMIENTO HIDRAULICO A PRESION

El cálculo hidráulico de un conducto a presión puede basarse en la ecua-





CURVA GASTOS - CARGAS
 PARA UN TUNEL DE 12 m DE DIAMETRO



3.2. SIMULACION DE TRANSITO DE AVENIDAS.

Para el tránsito de avenidas a través de los túneles de desvío, se aplicó un programa de computación electrónica que está basado en los principios del Método de Goodridge.

Este programa requiere básicamente de la siguiente información:

- . Curva de elevaciones (cargas) - gastos de los túneles (ver. fig.12)
- . Curva de elevaciones - capacidades del vaso aguas arriba de la ataguía (ver fig.13)
- . Hidrograma de la avenida que se desea transitar.

Obteniéndose con dicho programa el hidrograma de descargas, así como las cargas hidráulicas que se requieren para dichas descargas, y que implican las alturas de ataguías que se necesitan.

Primera mente se transitó el tren típico de avenidas de gastos medios y se observó que la regularización por vaso, es prácticamente nula. Resultando ser las avenidas de mayor volumen de escurrimiento, tratadas aisladamente, las que producen la condición mas desfavorable. Los resultados de estos tránsitos aparecen en la sección "A" del apéndice.



AREAS EN HECTAREAS

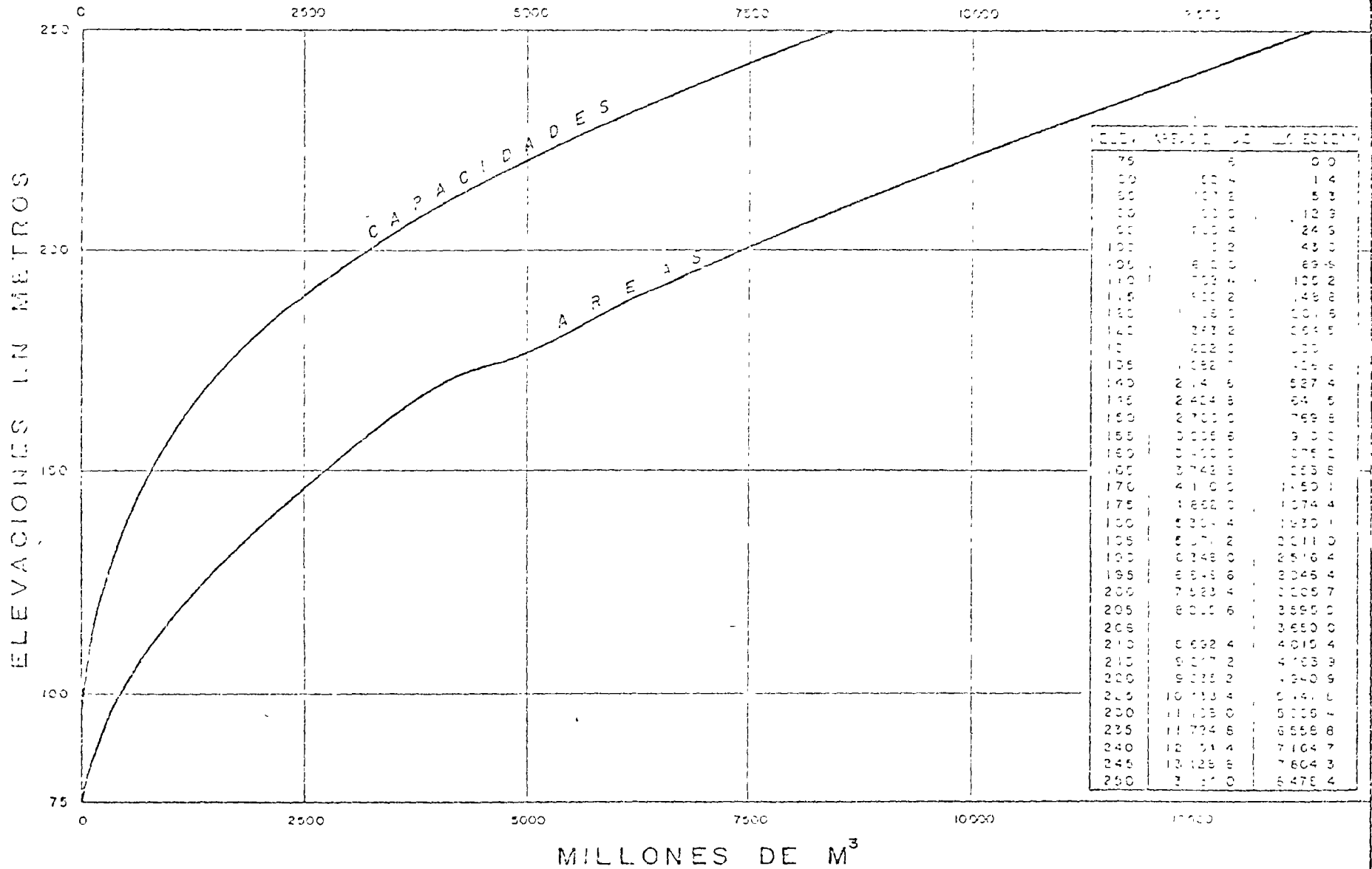
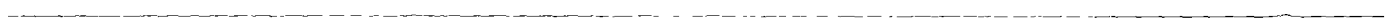


FIG. No. 13



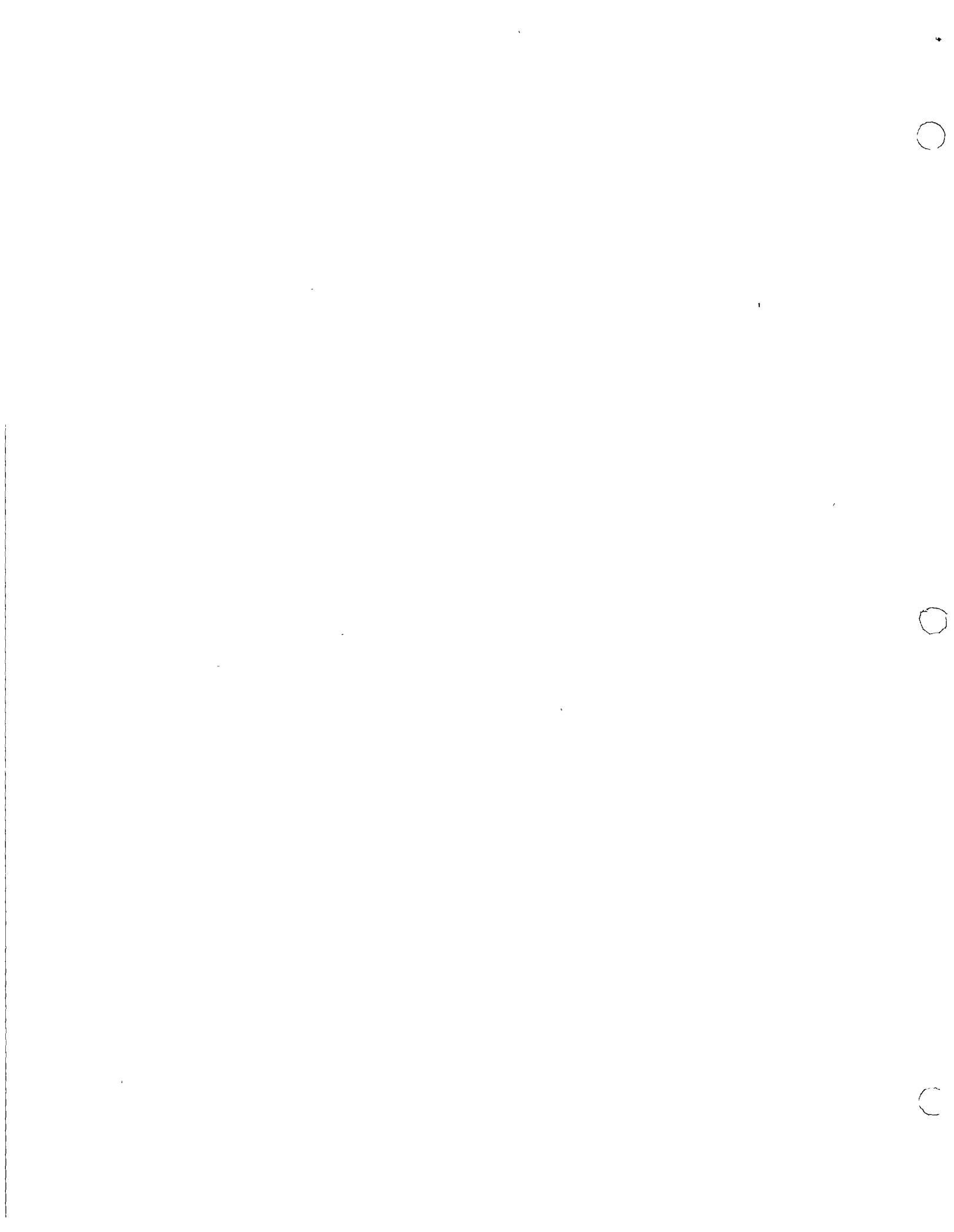
Habiéndose seleccionado la avenida registrada el mes de agosto de 1965 como prototipo de la avenida mas desfavorable. Esta avenida fue mayorada a períodos de retorno de 1, 2, 5, 12.5, 25, 50, 100 y 500 años para obtener una gama mayor de condiciones de operación de los túneles, ligadas a diferentes períodos de retorno.

Estas avenidas mayoradas fueron transitadas por 2, 3, 4 y 5 túnelés sin revestir y por 2 y 3 túneles revestidos para las alternativas de 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17 m de diámetro. Graficándose los resultados en forma de curvas de isogastos que se muestran con líneas continuas en las figuras 14, 15, 16, 17 y 18

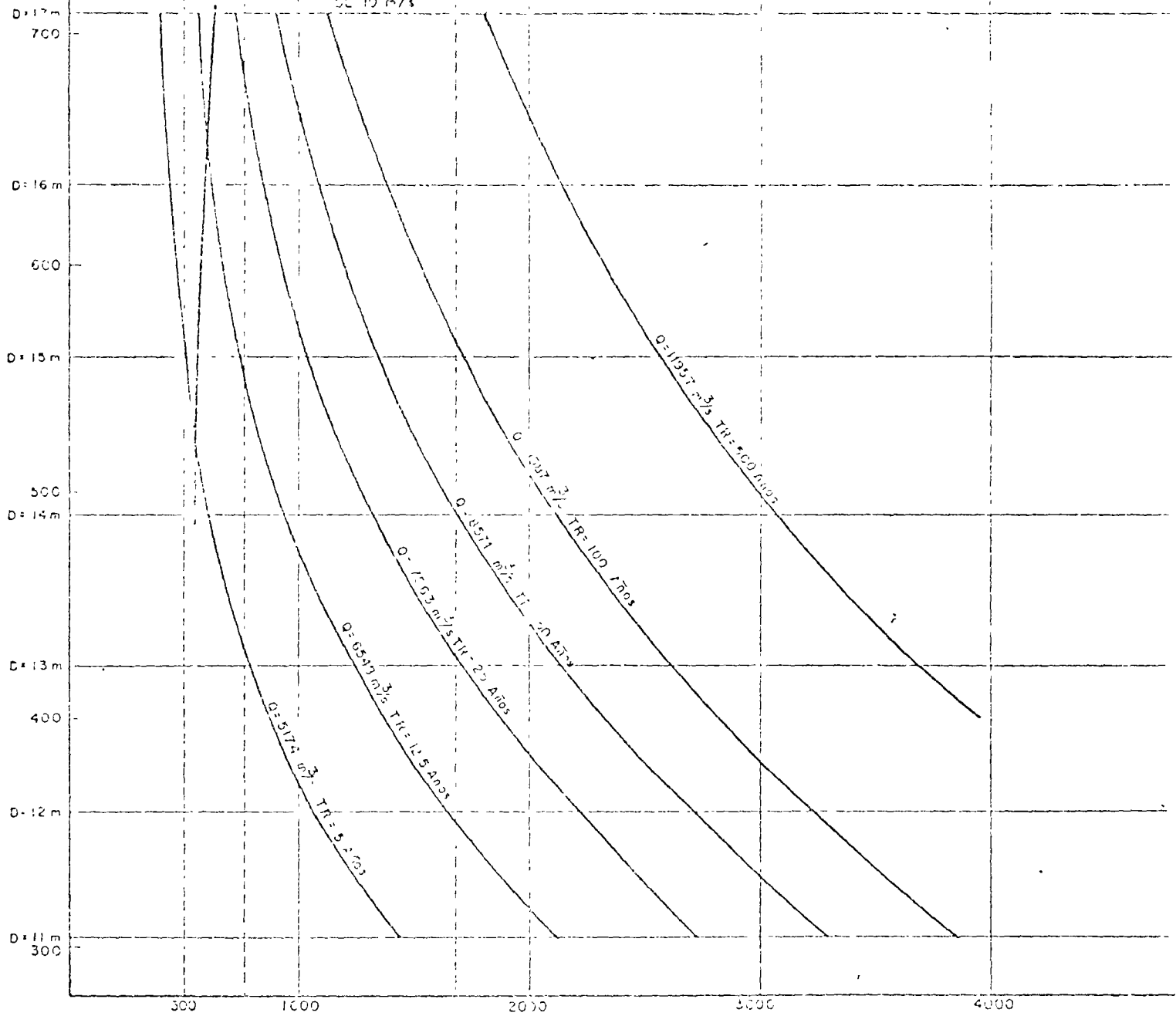
En estas gráficas se muestran los pares coordenados de volúmenes de obra para, túneles - ataguías, ligados a los gastos con diferentes períodos de retorno que fueron considerados.

Para construir las anteriores gráficas, se hicieron las siguientes consideraciones:

- . Las cargas hidráulicas necesarias para producir los diferentes escurrimientos, fueron consideradas a partir de la clave de los túneles aguas abajo.
- . Para la ataguía aguas arriba, se consideró una sobreelevación por bordo libre de 1.50 m adicional a la elevación por carga hidráulica.



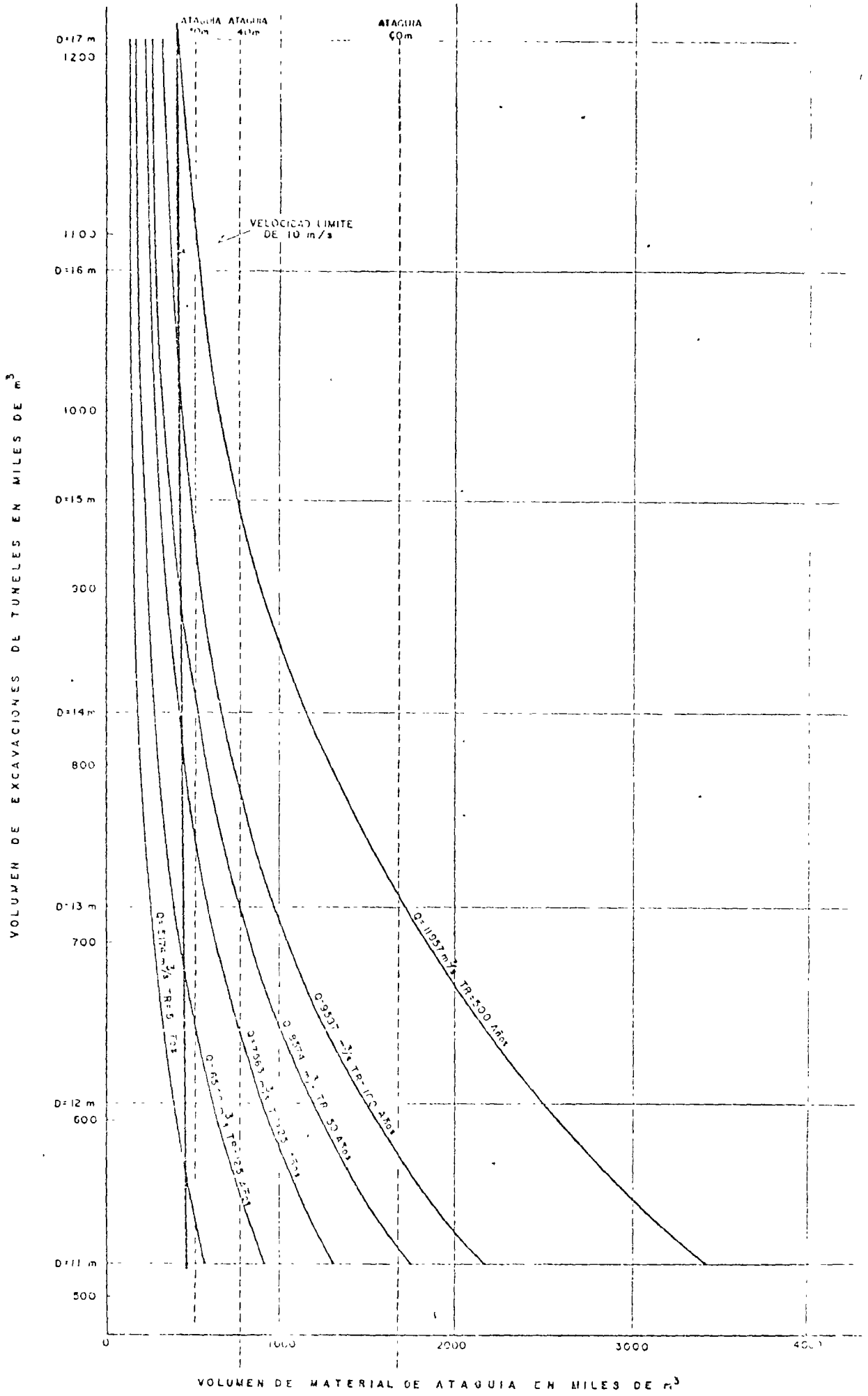
VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TUNELES EN MILES DE m³



VOLUMEN DE MATERIAL DE ATAJADA EN MILES DE m³
ALTERNATIVA - 3 TUNELES SIN REVESTIR

401



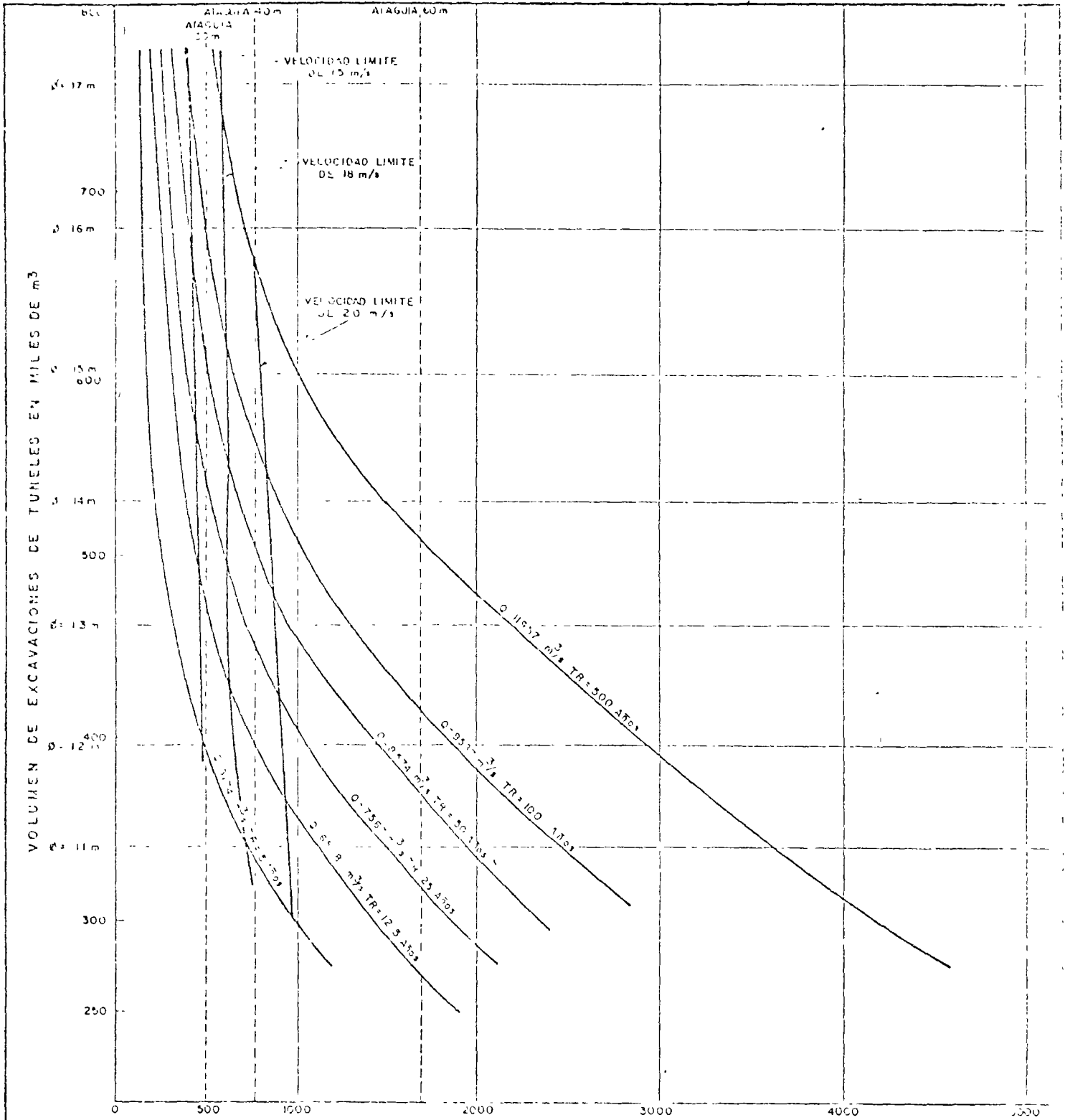


ALTERNATIVA -- 5 TUNELES SIN BENTAS

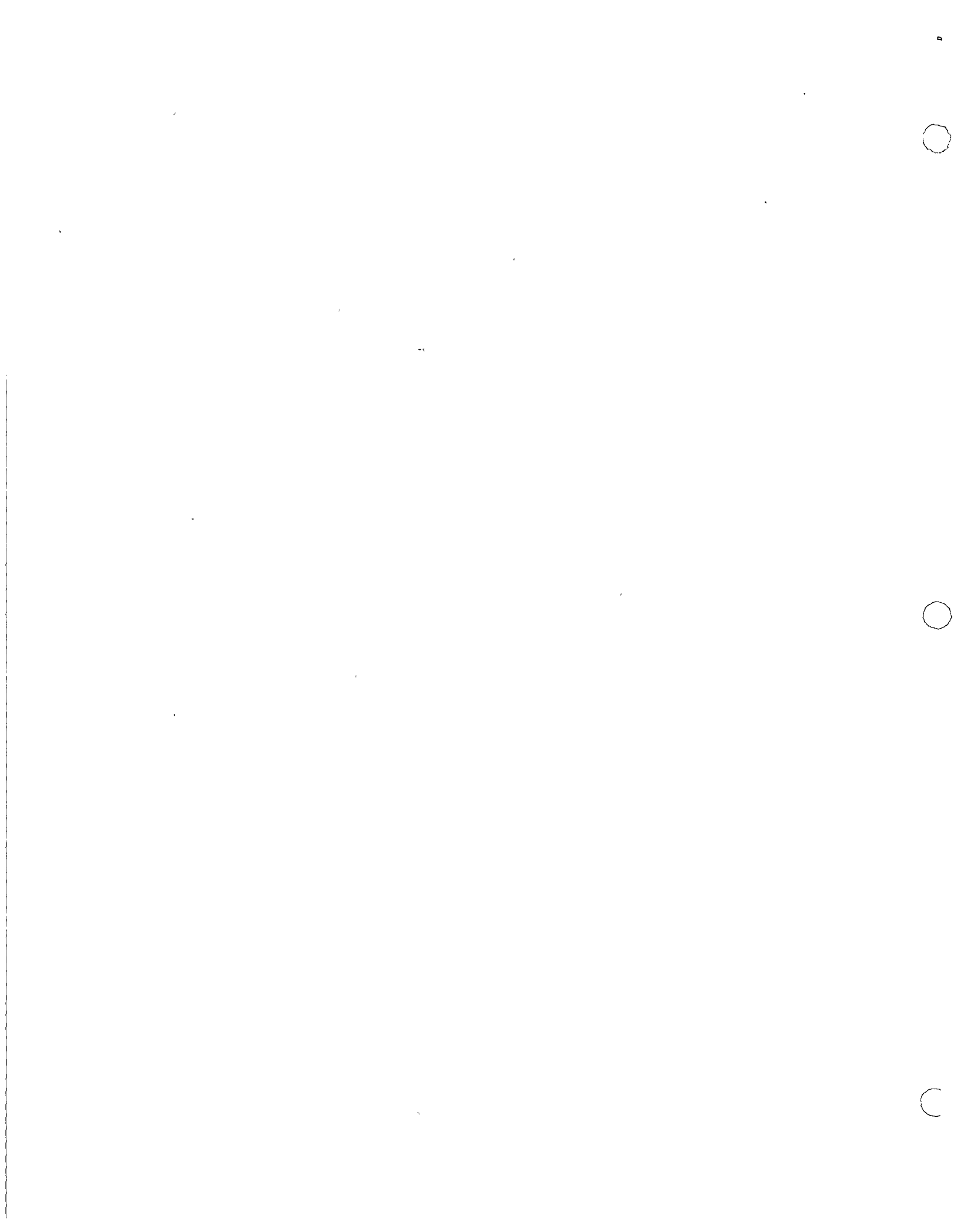
5

0

0



ALTERNATIVA - 3 TUNELES REVESTIDOS



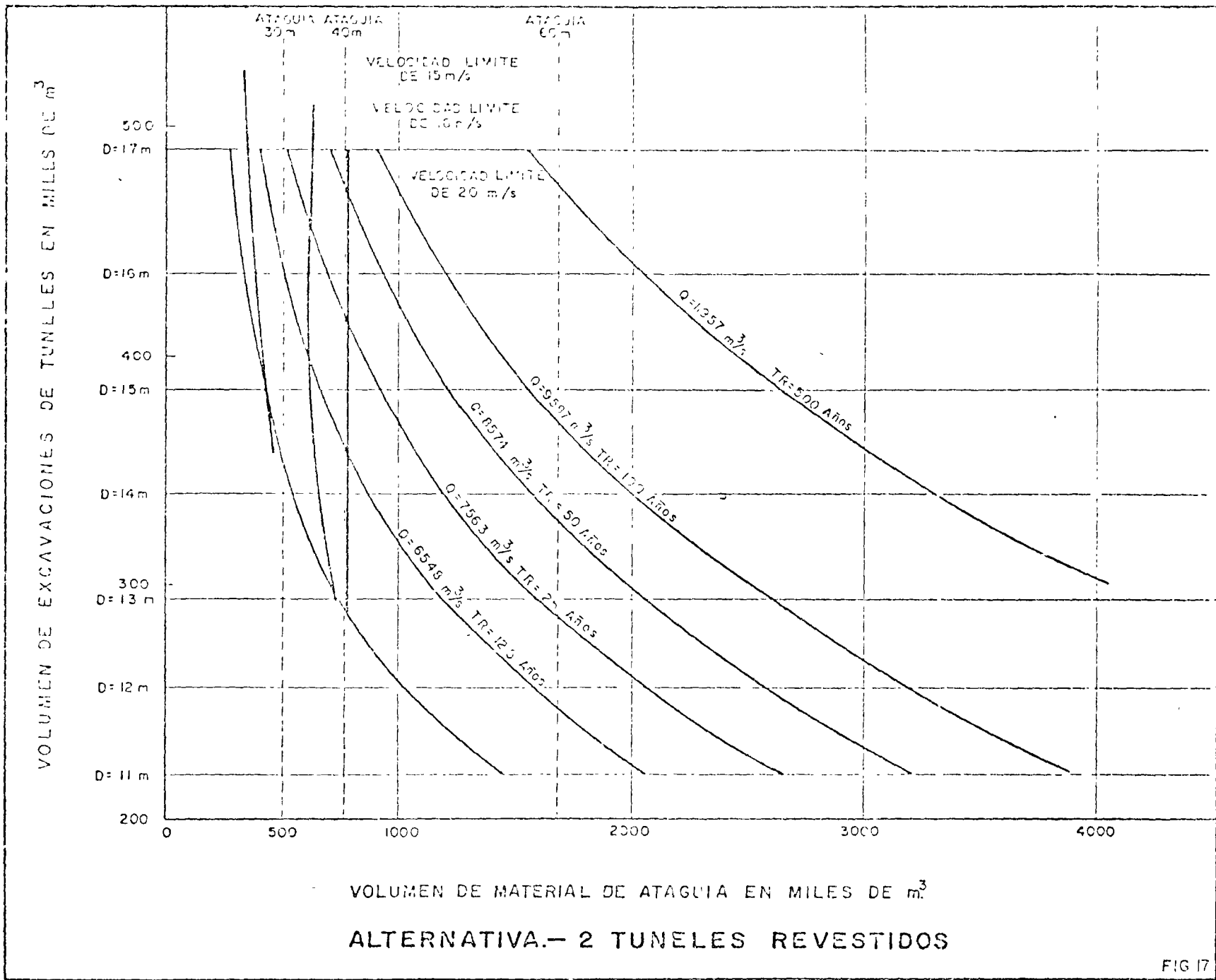
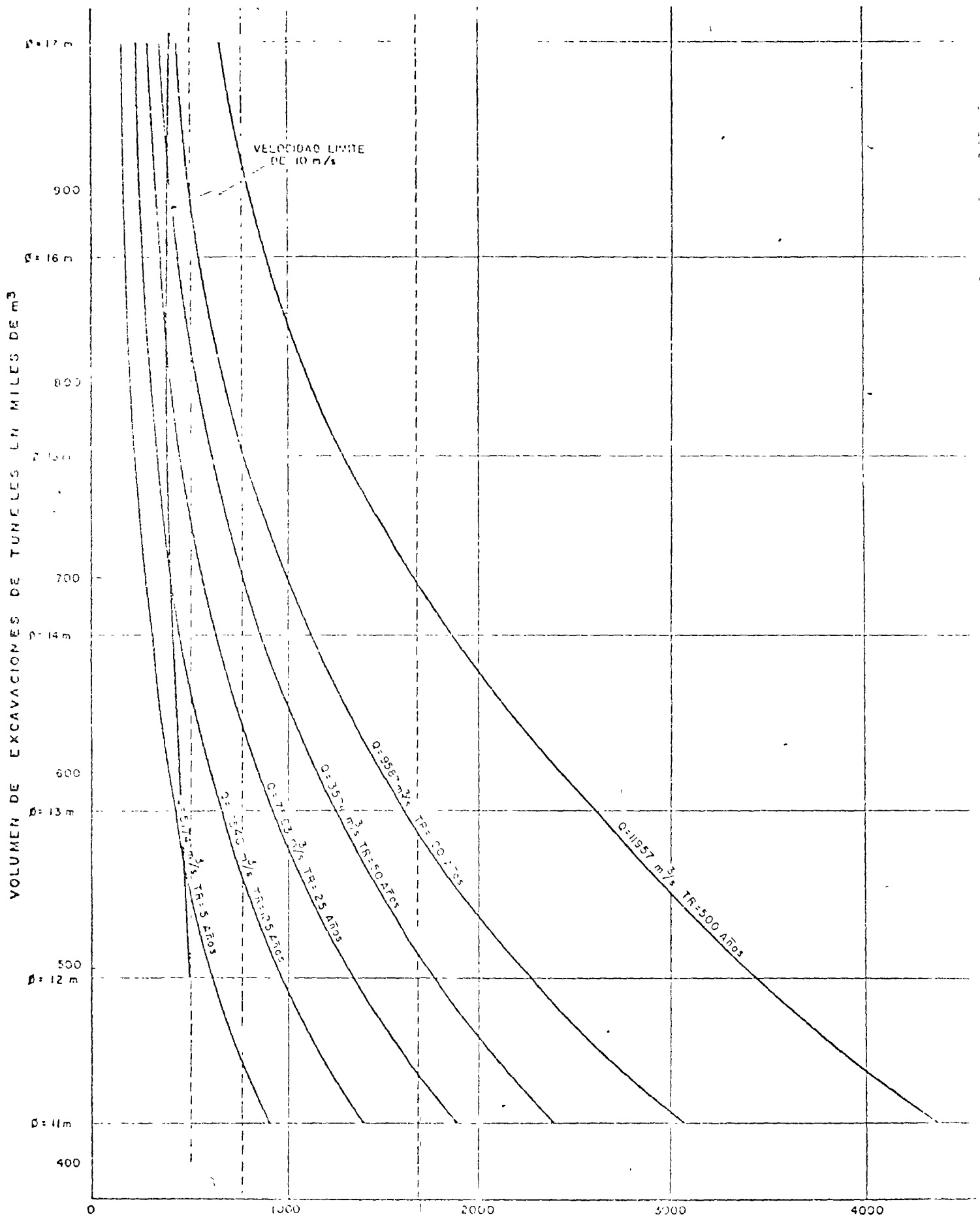
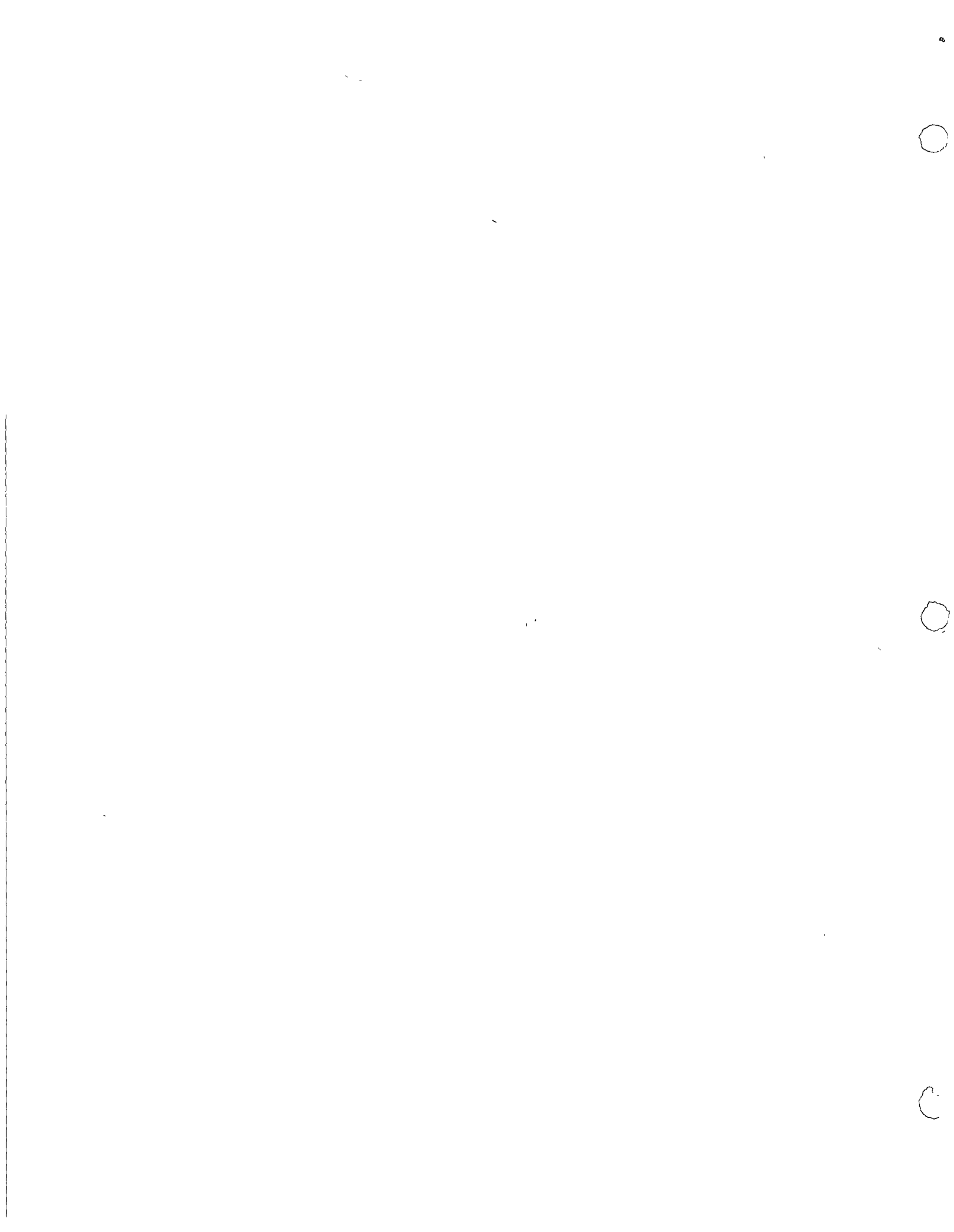


FIG 17



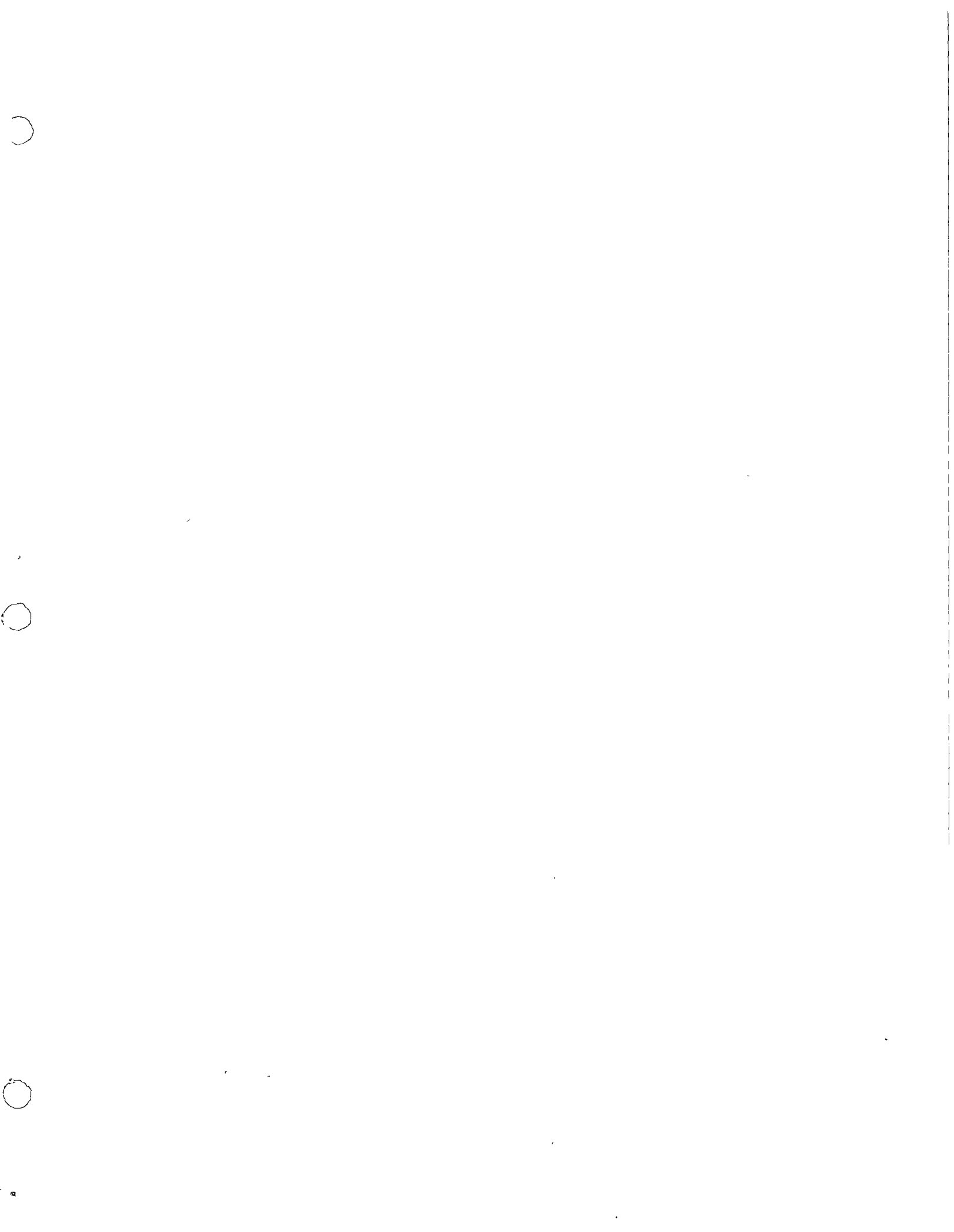


ALTERNATIVA.- 4 TUNELES SIN REVESTIR



- . Las ataguías de aguas abajo se consideraron de una altura neta de 22 m. En base a la altura máxima de escala registrada de 14.24 m en la estación Carrizal en el mes de septiembre de 1967, teniéndose de esta manera 7.76 m para sobreelevaciones provocadas por turbulencias en la descarga y por bordo libre.
- . Los volúmenes de excavación en los túneles incluyen una línea "B" de pago de 20 centímetros.

Algunos resultados de los tránsitos realizados, se anexan en la sección "B" del apéndice.

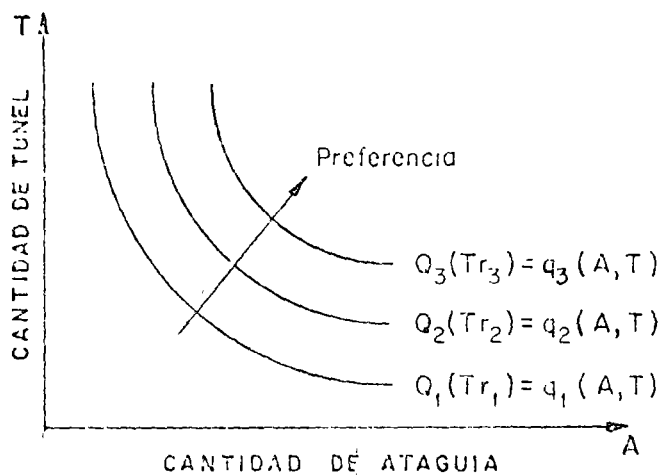


5.1.2. ANALISIS ECONOMICO

5.1.2.1. Curvas de isogasto

Se llamará curva de isogasto a la curva descrita por aquellos puntos coordinados dados por las combinaciones de ataguía-tunel, que representan el tránsito de un mismo gasto asociado a un período de retorno:

nivel de Satisfacción.



en donde:

$$Q_3(Tr_3) > Q_2(Tr_2) > Q_1(Tr_1)$$

Con lo cual serán preferibles los niveles de satisfacción que correspondan a gastos mayores ó de un mayor período de retorno.



Estas curvas de isogasto poseen las siguientes características:

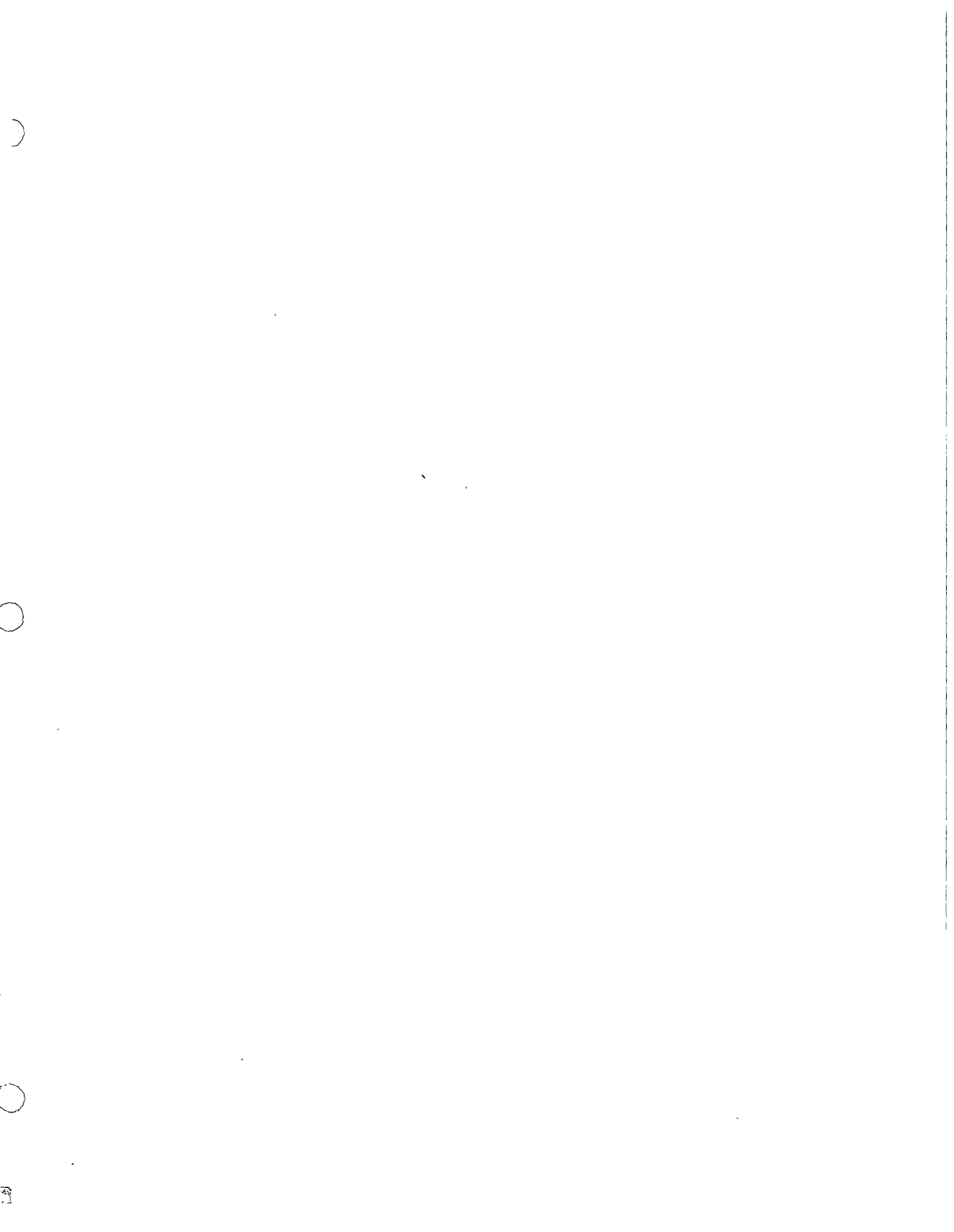
- a) Pendiente negativa
- b) alguna curva de isogasto pasa por cada uno de los puntos del espacio de combinaciones de obra.
- c) Las curvas de gasto no se pueden intersectar, y
- d) Son cóncavas vistas desde arriba

5.1.2.2. Tasa marginal de sustitución

La definición de Tasa Marginal de Sustitución para el caso específico de túneles- ataguías puede entenderse como "El número de unidades de cantidad de obra de túneles que pueden intercambiarse con unidades de cantidad de obra en ataguías, en forma tal que se mantenga un mismo nivel de satisfacción ó curva de isogasto.

En que $q(A, T)$ es el nivel de satisfacción, en donde: A - Cantidad de ataguía y T - Cantidad de túnel.

Según la definición de Tasa Marginal de Sustitución, se requiere que para una curva de isogasto se cumpla que $q(A, T) = CTE$.



Tomando la derivada total obtenemos:

$$\frac{\partial q}{\partial A} dA + \frac{\partial q}{\partial T} dT = 0$$

Despejando $-\frac{dT}{dA}$, que es la pendiente de la curva de isogasto, tenemos:

$$-\frac{dT}{dA} = \frac{(\partial q / \partial A)}{(\partial q / \partial T)}$$

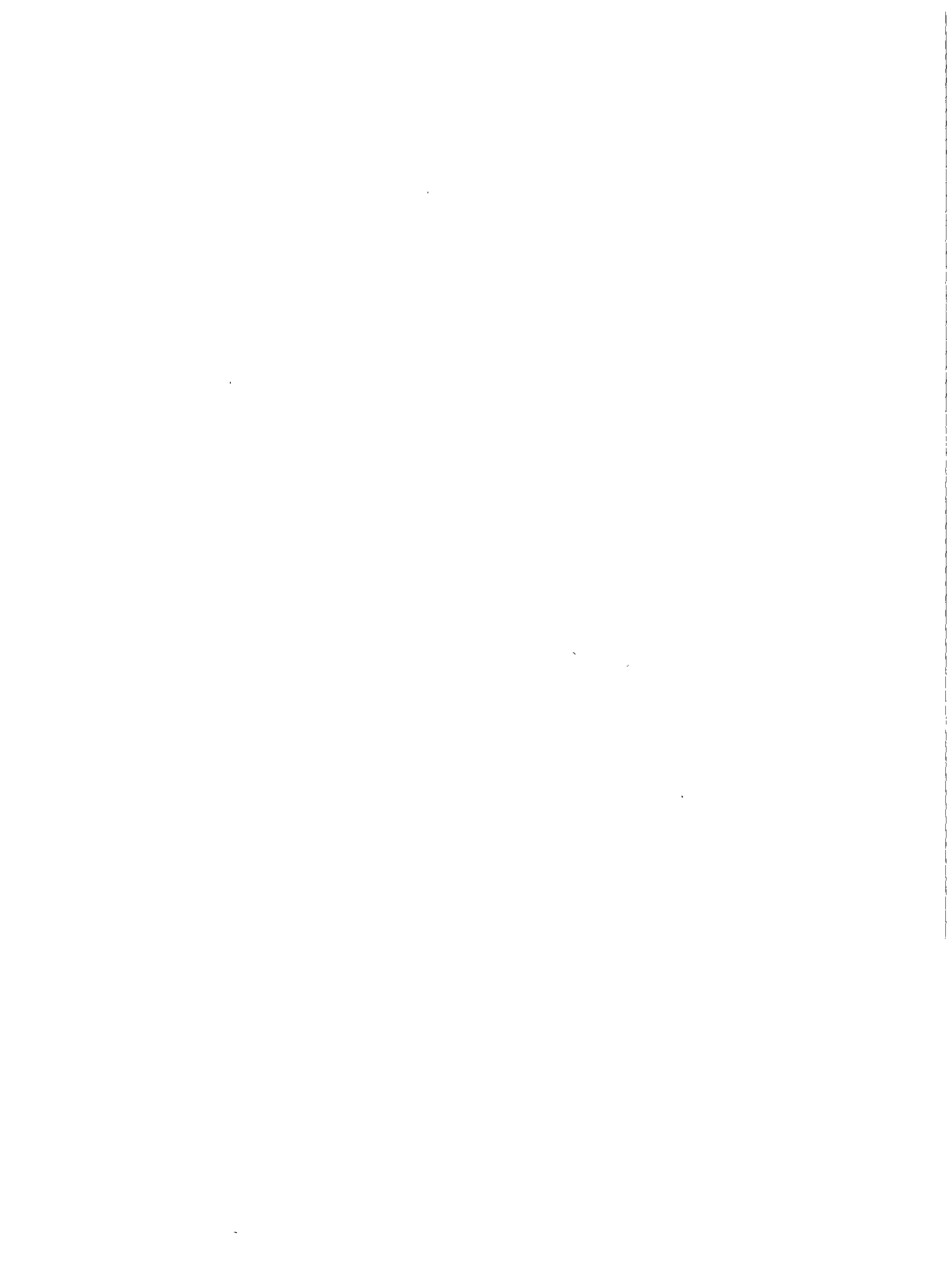
que equivale a la tasa Marginal de Substitución, que geométricamente queda representada por la pendiente de una curva de isogasto en un punto determinado. La cual equivale a la tangente en dicho punto con pendiente negativa.

5.1.2.3. Línea de presupuesto

Haciendo el supuesto de que M es una cantidad fija de presupuesto, en un momento dado, y conociendo los precios de las cantidades de obra de túneles y ataguías, denotados por P_T y P_A respectivamente, se tiene que:

$$M \geq A P_A + T P_T$$

Que significa que la cantidad gastada en ataguías más la cantidad gastada en túneles no debe exceder el presupuesto estipulado por M.



Considerando la linealidad de los precios con respecto a la cantidad y considerando además la igualdad de la ecuación anterior, se concluye:

$$M = A P_A + T P_T$$

que es la ecuación de una línea recta de la forma:

$$T = \frac{1}{P_T} M - \frac{P_A}{P_T} A$$

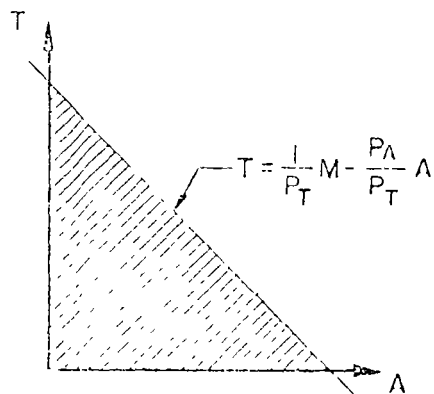
en donde:

T = Cantidad de obra de túnel (variable dependiente)

A = Cantidad de obra de ataguía (variable independiente)

P_A/P_T = Pendiente de la recta (relación de precios índice)

M/P_T = Ordenada al origen



3

4

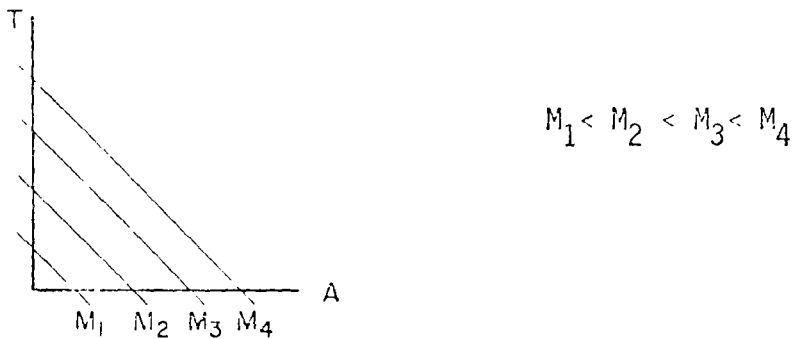
5

6

El área sombreada representa el espacio de posibles combinaciones según el presupuesto M.

5.1.2.4. Curvas de isocosto.

Se tiene que para varios presupuestos a precios constantes se pueden construir una serie de rectas que representan varios niveles de presupuesto.



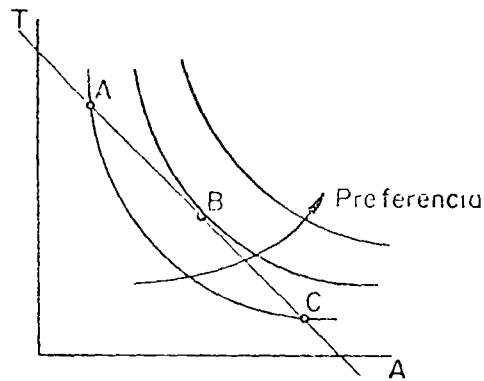
para precios constantes son rectas paralelas y se puede interpolar entre ellas.

5.1.2.5. Puntos económicos o de máxima satisfacción

Para alcanzar con un presupuesto dado, un máximo de satisfacción, se requiere un punto donde la línea de presupuesto sea tangencial a la curva de isogasto, como se muestra en la figura. Lo cual se demuestra con la construc-

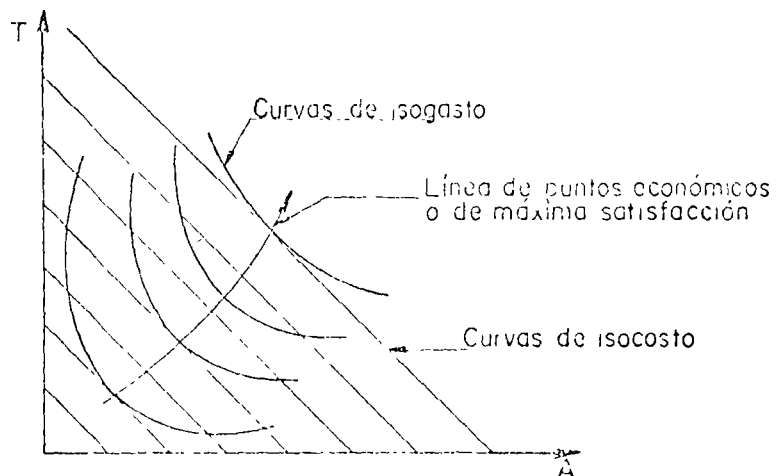


ción de la mencionada figura, en que se observa que la línea de presupuesto toca en tres puntos (A, B y C) a las curvas de isogasto, pero en el punto B se alcanza el máximo de satisfacción.



Por otra parte se dice que son puntos económicos, pues para un nivel dado de satisfacción, el presupuesto mínimo, es aquél en que la curva de isocosto ó línea de presupuesto es tangente a una curva de isogasto.

Para un conjunto de curvas de isogasto y para varias líneas de isocosto, se obtiene un número de puntos con las características anteriores, que definen una curva que contiene a todos los puntos de presupuesto mínimo y de máxima satisfacción, para los diferentes niveles de satisfacción del mapa de soluciones.





Analíticamente se puede garantizar que los puntos de máxima satisfacción y puntos económicos son aquellos en que la tasa marginal de sustitución de una curva de isogasto y la negativa de la relación de precios de unidad de obra de túnel y atagüfa son iguales, ésto es:

$$\text{Dado} \quad Q = q(A, T) \quad \text{y} \quad M = A P_A + T P_T$$

la elevación al máximo de Q , sujeta la restricción de M , es un problema de extremos de Langrange. Elaborando la función:

$$L = q(A, T) - \lambda (A P_A + T P_T - M)$$

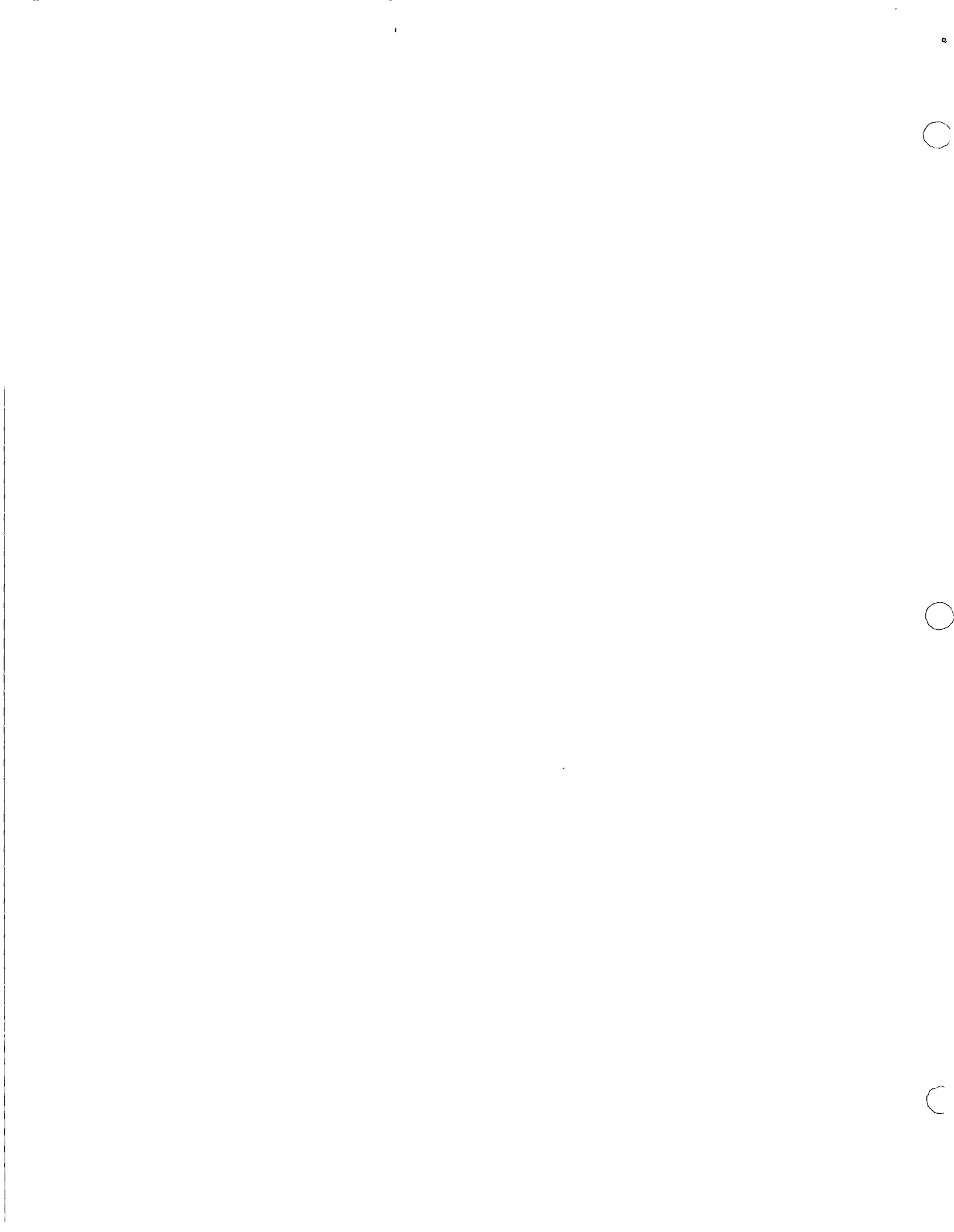
donde λ es un multiplicador de Langrange. Las condiciones de primer orden requieren que las dos derivadas parcialmente sean iguales a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial A} = \frac{\partial q}{\partial A} - \lambda P_A = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \frac{\partial q}{\partial T} - \lambda P_T = 0$$

Pasando el segundo término de cada ecuación al lado derecho, y dividiendo la primera ecuación por la segunda, obtenemos:

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial A}}{\frac{\partial q}{\partial T}} = \frac{P_A}{P_T}$$



MA

En donde: Tasa Marginal de sustitución = $\frac{\frac{\partial q}{\partial A}}{\frac{\partial q}{\partial I}}$

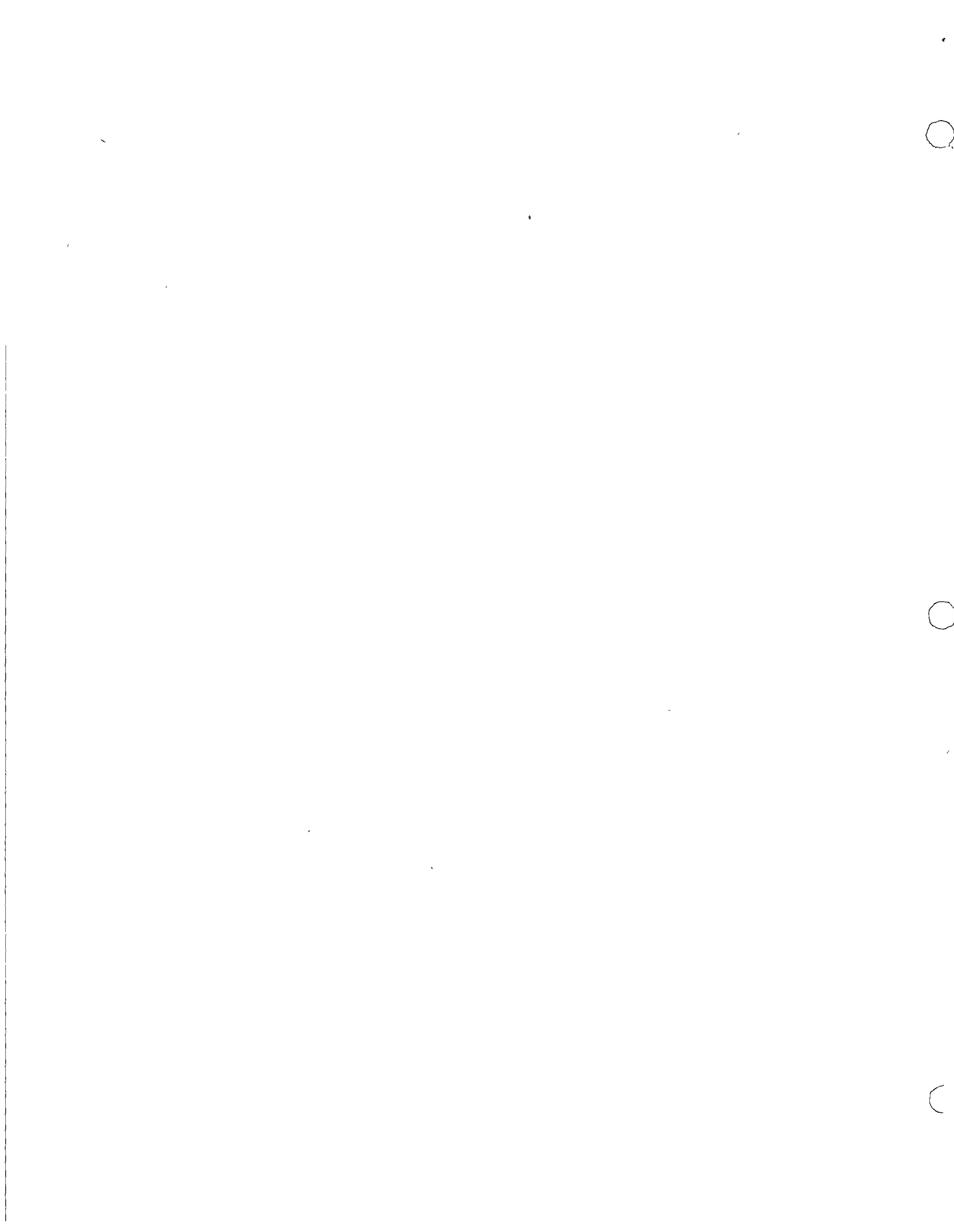
Con lo que el punto de máxima satisfacción de Q con la restricción de M es cuando la tasa marginal de sustitución es igual a la negativa de la relación de precios.

5.1.2.6. Resultados.

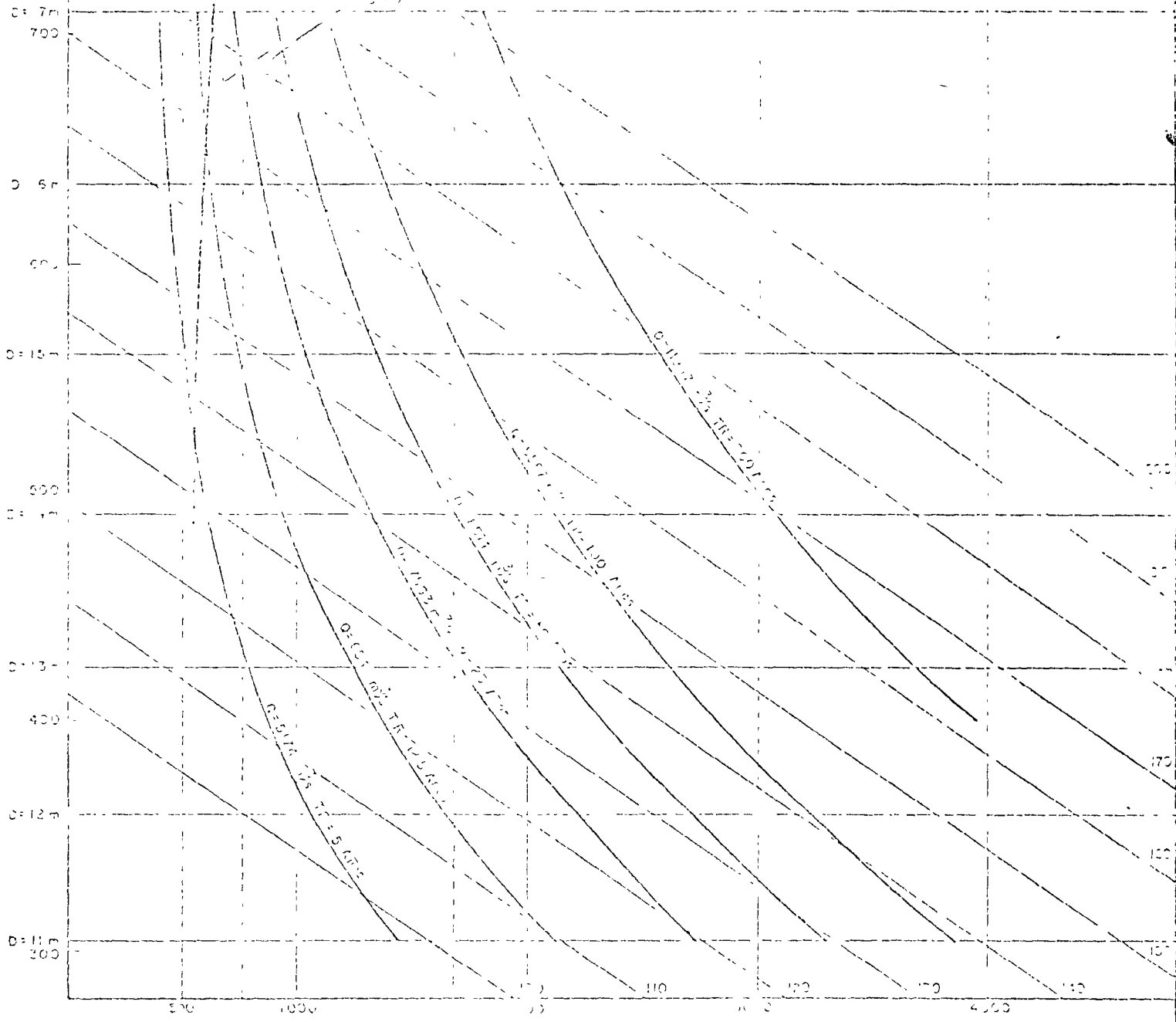
Todo el análisis anterior se llevó a cabo para 5 alternativas que cubren la gama de posibilidades para la obra de desvío, de las cuales se tienen dos alternativas para túneles revestidos y tres para túneles sin revestir.

Las alternativas se muestran en las figuras 27, 28, 29, 30 y 31 en cada una se presentan curvas de isogasto para diámetros de 11 a 17 metros y diferentes alturas de ataguía. Asimismo se presentan las curvas para períodos de retorno de 5, 12.5, 25, 100 y 500 años. Además de las curvas de isogasto se tienen las de isocosto, que nos dan los costos aproximados de la obra de desvío que corresponden a un punto de las curvas de isogasto y en general para cualquier punto del mapa de soluciones.

Se presenta también en la figura la curva de óptimos, que por condiciones técnicas no será factible aplicar, ya que las restricciones de velocidad

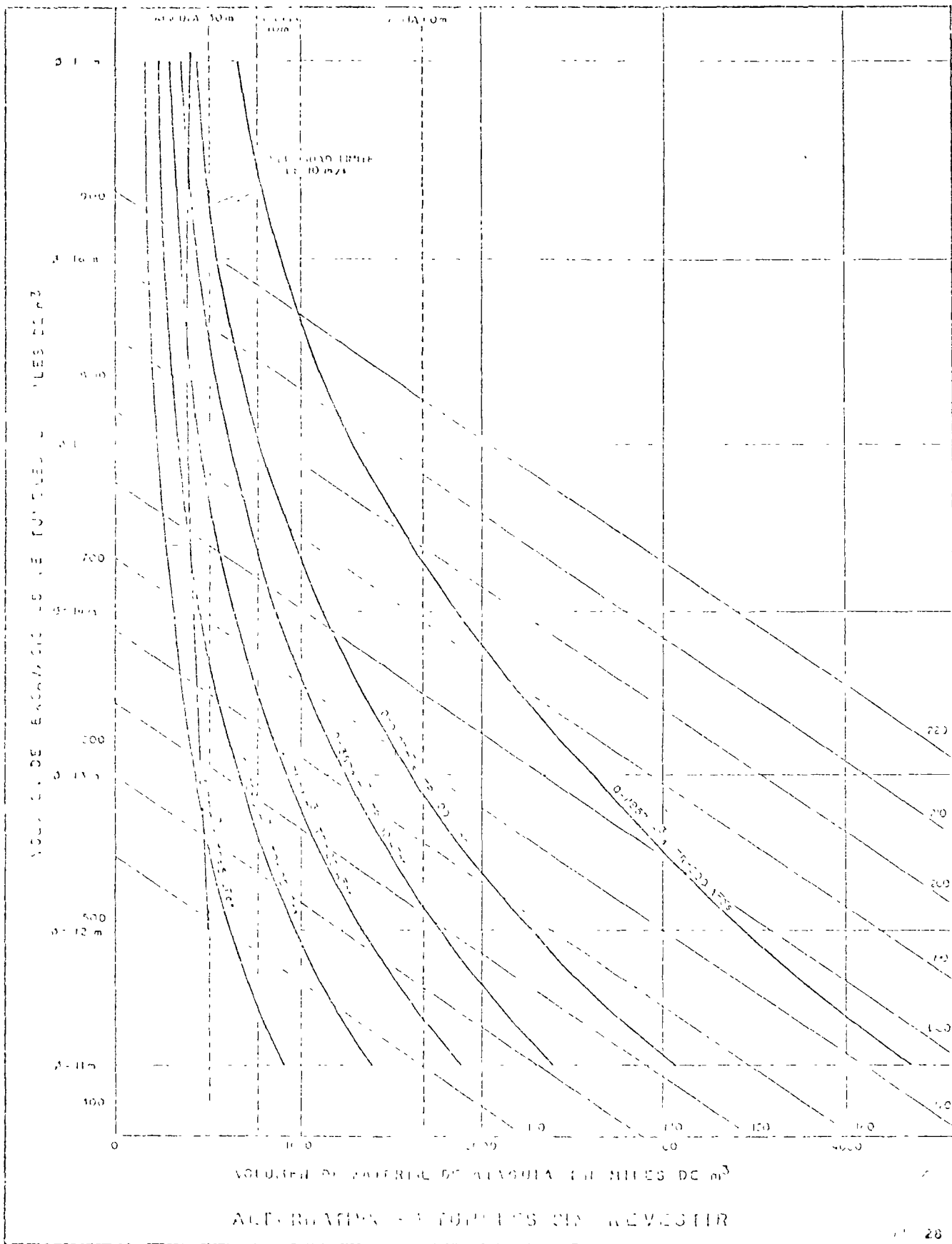


VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE FUJ LES 17 MILES DE m³



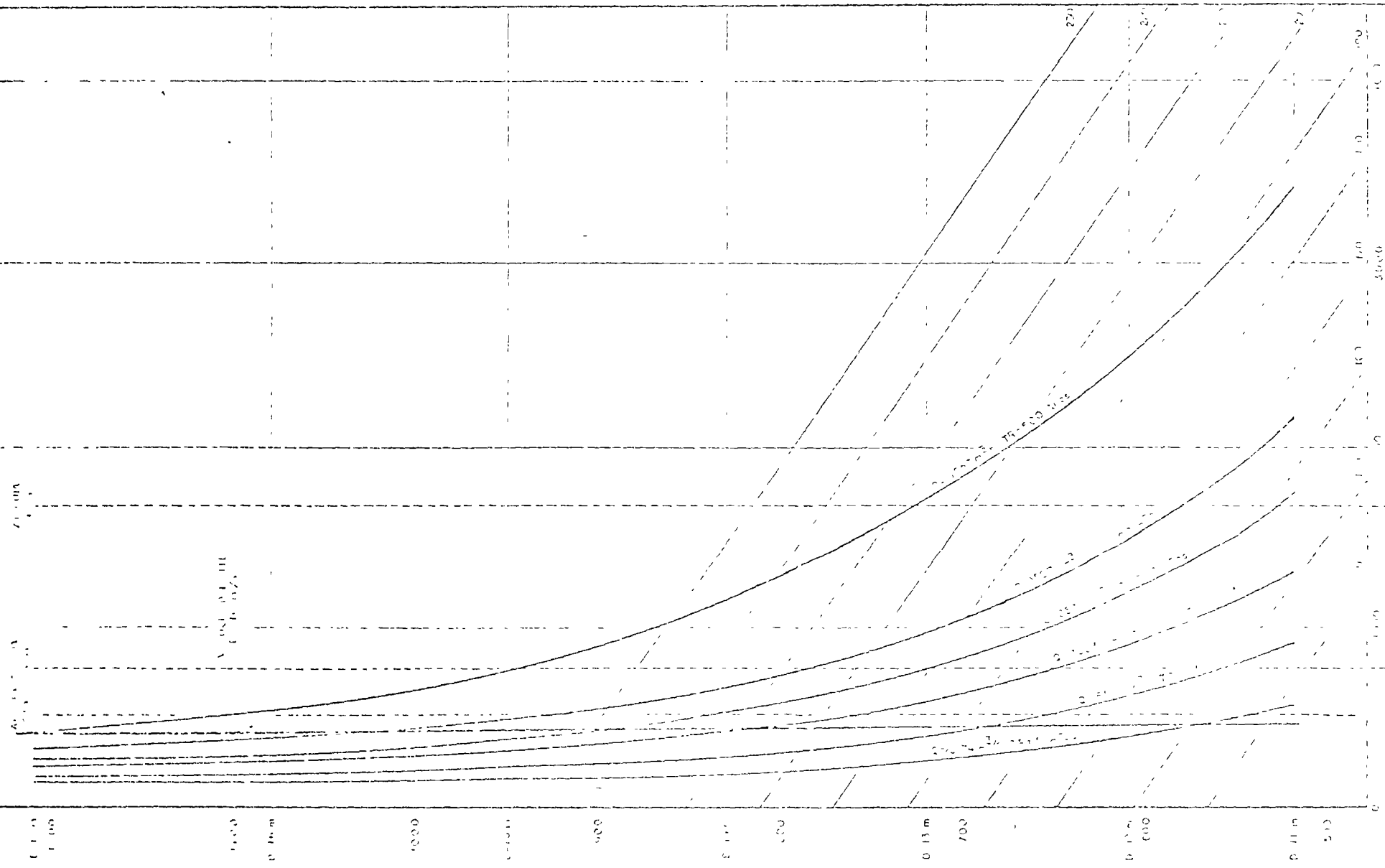
VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE FUJ LES 17 MILES DE m³
ALTEZAS DE EXCAVACIONES DE FUJ LES 17 MILES DE m







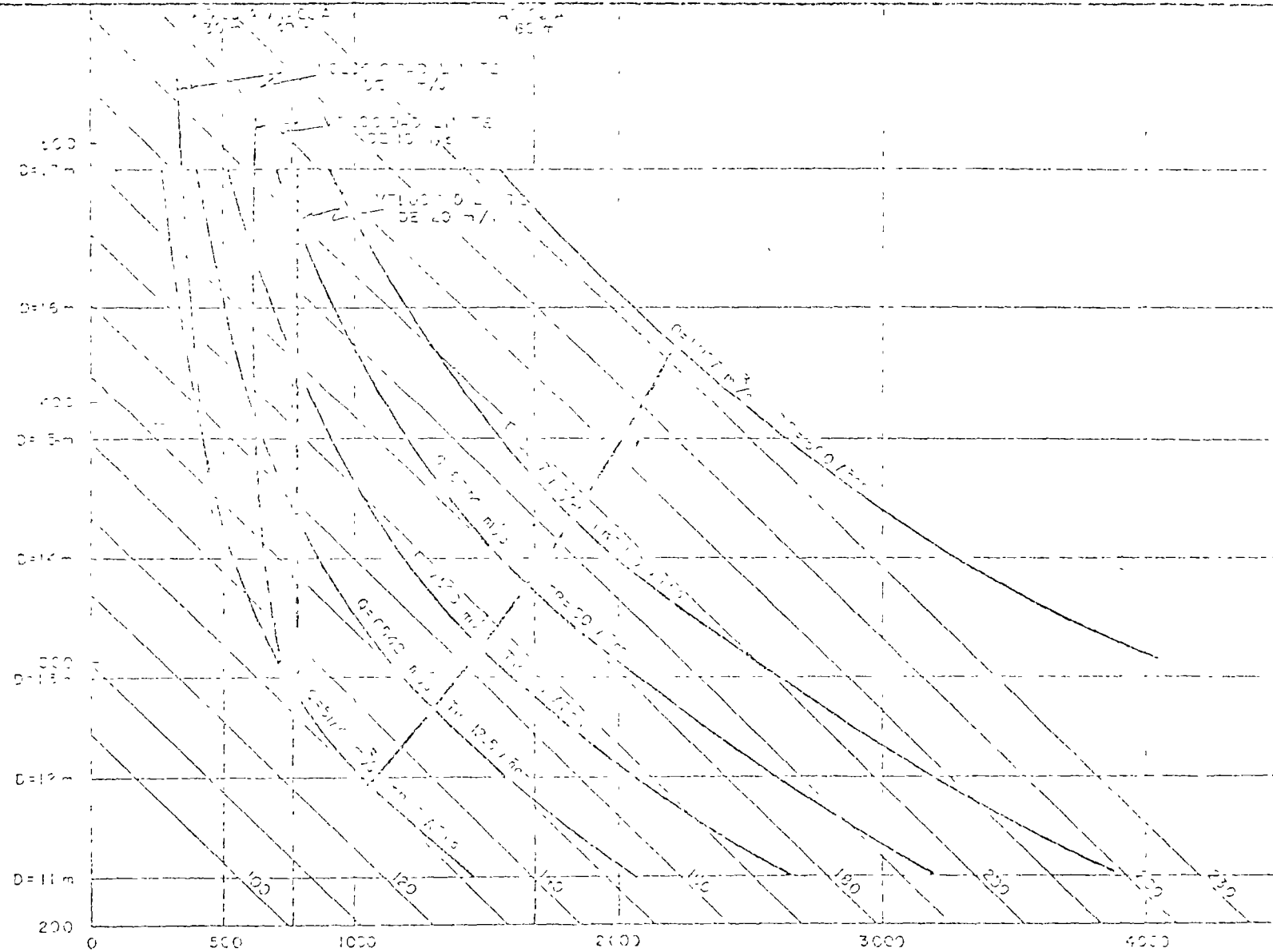
VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TALLER EN MILES DE m^3



VOLUMEN DE TALLER EN MILES DE m^3



VOLUMEN DE EXCAVACIONES DE TUNELES EN MILES DE m³

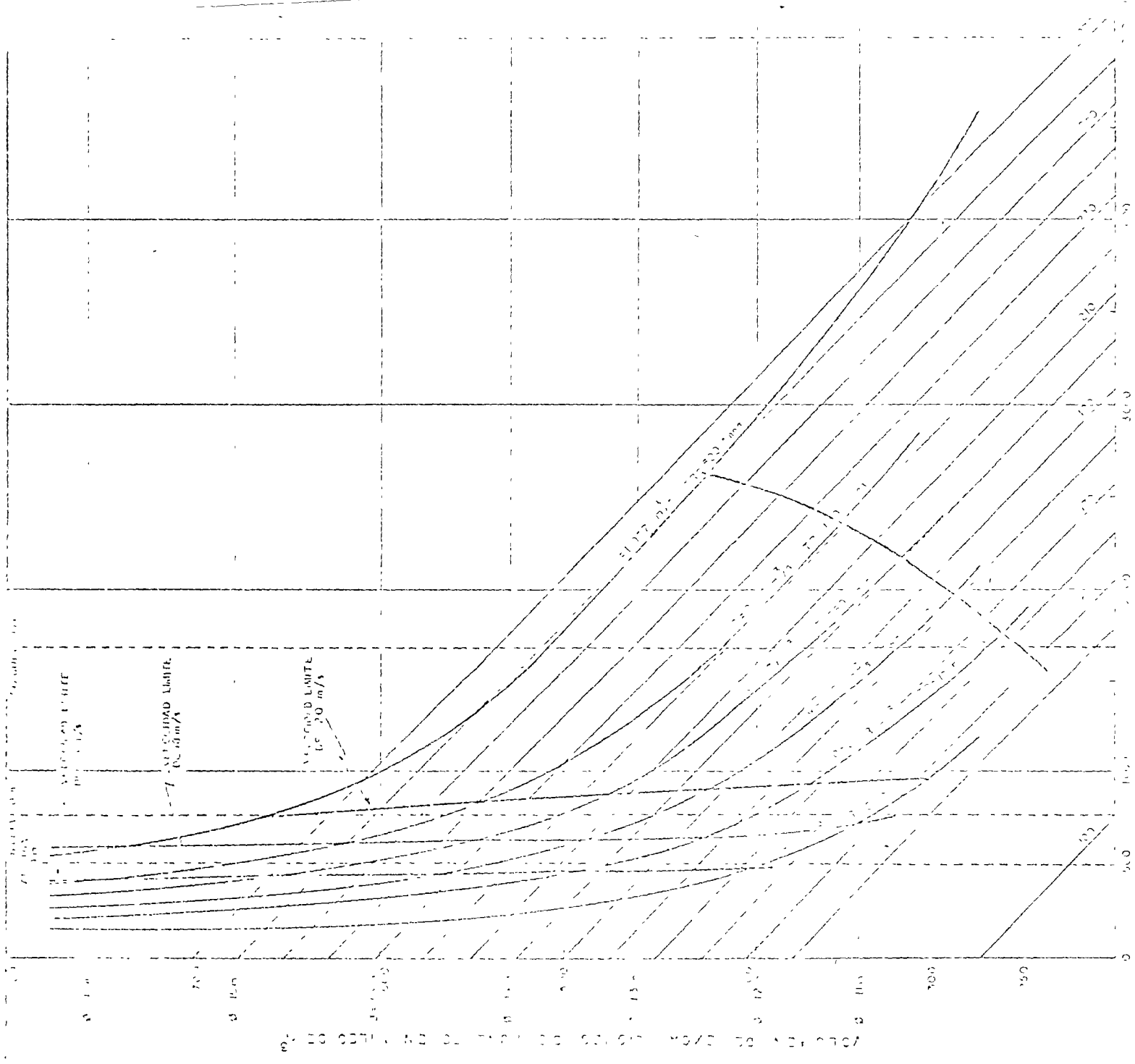


VOLUMEN DE MATERIAL DE ATAGUÍA EN MILES DE m³

ALTERNATIVA - 2 TUNELES REVESTIDOS

FIG 30





VELOCIDAD DE ATAGUA EN PILES DE m³

ALTERNATIVA -- 3 TUBULOS ESTACADOS

FIG 31



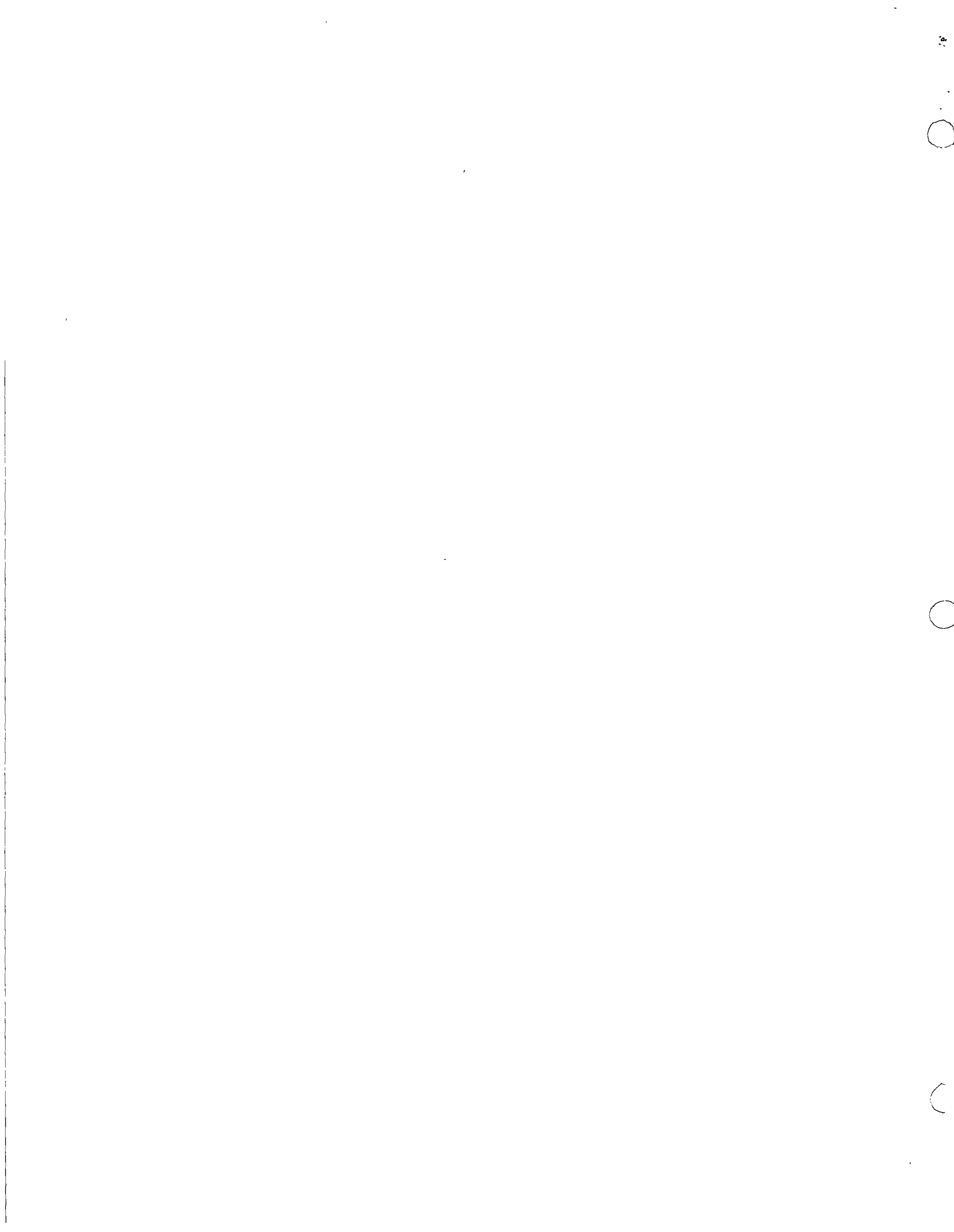
tanto para túneles sin revestir y revestidos implicaron alturas de ataguía hasta cierto nivel y que como se muestra en las figuras representan una zona factible más reducida. Las restricciones por velocidad da una curva sobre el mapa de soluciones que en rigor debería de ser vertical pero por condiciones de régimen transitorio entre funcionamiento a presión y a superficie libre, en los túneles, se obtuvieron inclinaciones en las mismas.

Con estas cinco gráficas se está en posibilidad de hacer el análisis de la alternativa más económica, aunando a estos costos los riesgos que involucra cada alternativa.

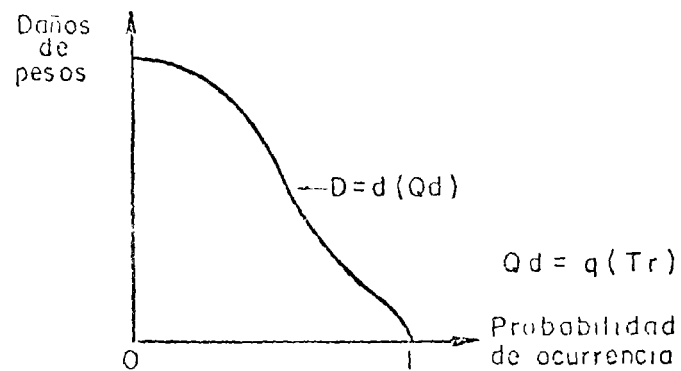
5.1.3. ANALISIS DE DAÑOS.

Para una obra de desvío, en que existe la posibilidad de destrucción parcial o total de la misma por inundación, durante su construcción y aún terminada la misma. Es necesario considerar el valor esperado de daños en la toma de decisiones. Este factor puede alcanzar proporciones importantes que alteren las posibles soluciones que se tengan, al considerar solo los costos.

El considerar la existencia de daños para una obra dada, involucra la presencia de escurrimientos mayores a los de diseño. Así, todos aquellos escurrimientos mayores proporcionan una distribución de daños, y la distribu-



ción teórica y continua, para una obra determinada, adquiere la forma siguiente.



En donde:

D = Distribución de daños

Q_d - Costo de diseño asociado a un período de retorno

T_r = Período de retorno

5.1.3.1. Daños nulos

Para una curva de daños se tiene que, los costos por daño son nulos cuando el escurrimiento probable,

$$Q_1 = q_i (T_r)$$

1

2

3

es de igual o menor período de retorno que el de diseño

$$Q_{d_j} = q_{d_j} (Tr),$$

lo cual representa un punto coordinado de abscisa (Tr), en el eje de las "Probabilidades de Ocurrencia" y ordenada en el origen (o), en el eje de los "Daños". O sea:

$$Q_i = q_i (Tr) \leq Q_{d_j} (Tr) \implies D = 0$$

5.1.3.2. Daños Totales.

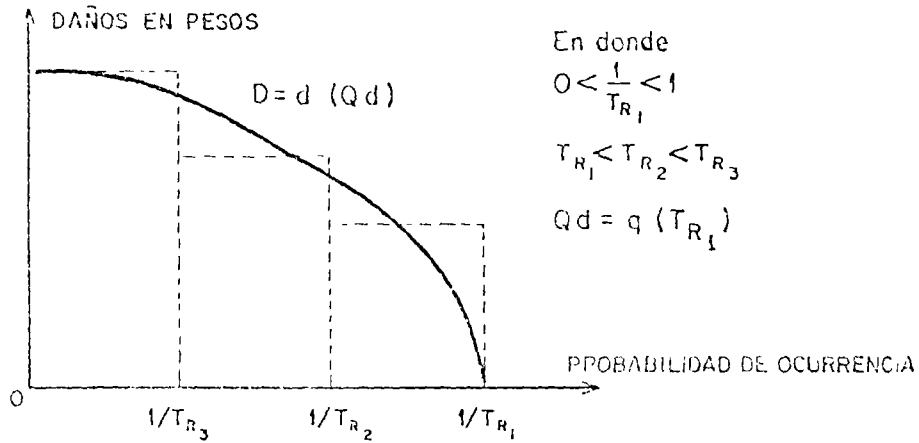
A medida que son mayores los escurrimientos, que el de diseño, los daños se incrementan. Pero para una probabilidad determinada y menores que dicha probabilidad, el daño prácticamente alcanza su valor total posible. Es decir, que la parte de la obra factible de dañarse queda totalmente destruida.



5.1.3.3. Cálculos de daños.

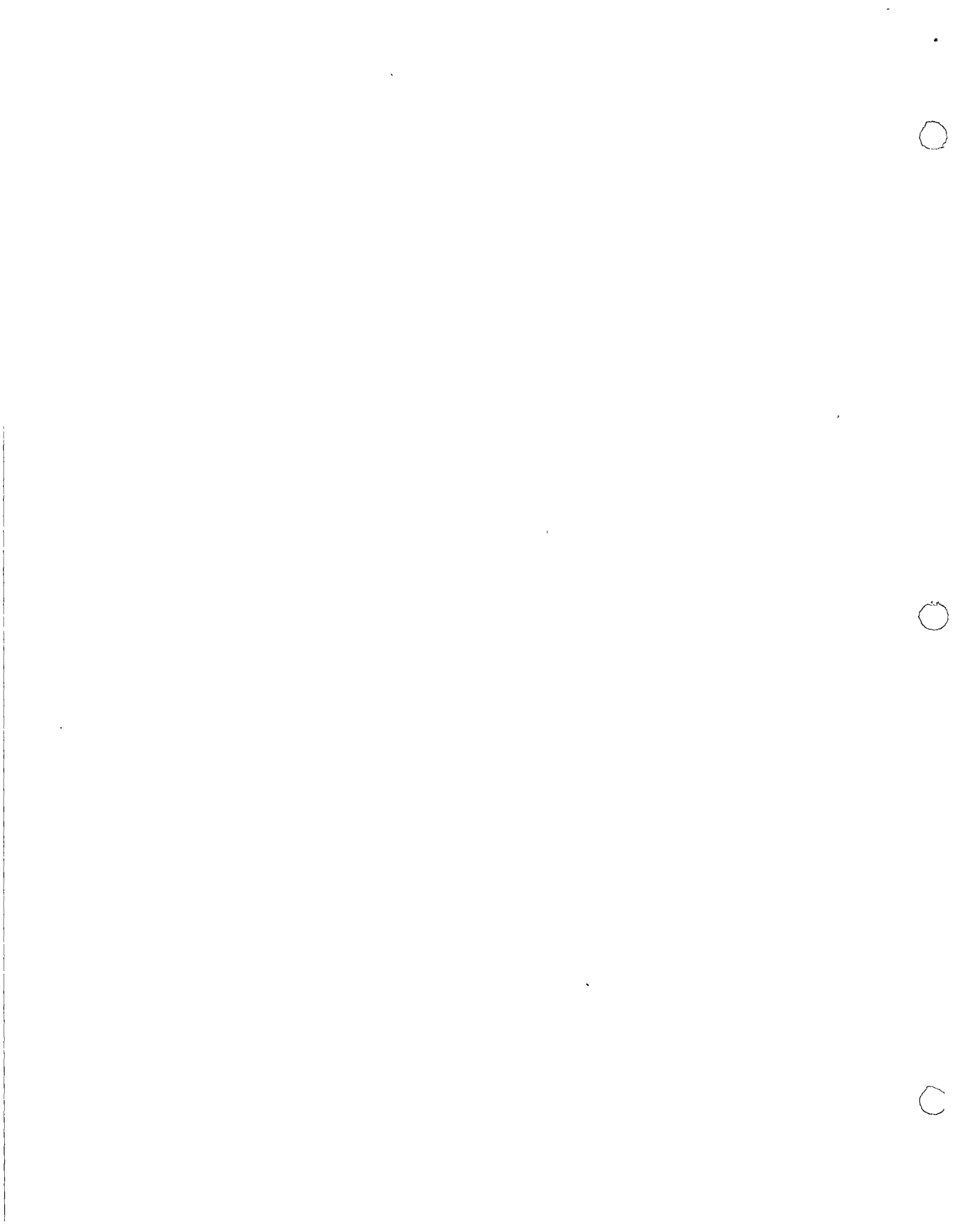
La distribución del costo por dano para una obra de capacidad de diseño determinada (tunel-ataguía), se estimará como los daños más críticos para cada uno de los ciclos anuales, durante la vida útil de la misma.

Es decir, para una obra de desvío, diseñada para un escurrimiento máximo Q_d , con un período de retorno T_r , se tendrá el siguiente comportamiento.



En donde se observan tres costos de daños (líneas punteadas), el primero corresponde a los daños ocasionados en caso de que el agua rebase la altura de la ataguía, y los siguientes en caso de que se rebase la altura de la cortina, dicha altura está definida por el programa de construcción. Con lo cual la probabilidad de que se presente una inundación es menor.

Si se hiciera un análisis semestral, trimestral, mensual, etc, la gráfica de danos tendería la forma de una curva continua $D = d (Q_d)$.



El costo total de daños debe considerar: pérdida de la obra hasta el momento de la inundación, retraso en la terminación del programa e indemnizaciones, costos por pérdida de oportunidad, y un valor subjetivo de -- prestigio o aversión al riesgo, que puede ser importante en la decisión final.

El análisis se hizo para 5 alternativas, que comprenden 2 y 3 túneles revestidos y 3, 4 y 5 túneles sin revestir.

Habiéndose considerado como costos por daño, debido al retraso del programa e indemnizaciones, un porcentaje adicional del daño de la obra perdida en el momento de la inundación, como sigue:

| | Valor del Daño | Incremento por retraso en el programa. | D: FO TU AL |
|-------------|----------------|--|-------------|
| PRIMER AÑO | D_1 | D_1 | $2.0 D_1$ |
| SEGUNDO AÑO | D_2 | $0.5 D_2$ | $1.5 D_2$ |
| TERCER AÑO | D_3 | $0.33 D_3$ | $1.33 D_3$ |
| CUARTO AÑO | D_4 | $0.25 D_4$ | $1.25 D_4$ |

Por concepto de pérdida de oportunidad no se consideró ningún daño, ya que las inversiones son transferibles a otros aprovechamientos.

Los costos de aversión al daño por prestigio, se consideran después en el análisis de riesgos. Los cálculos y resultados se muestran a continuación en las tablas 12, 13, 14, 15 y 16.



| | | | | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|------|----|----|-----|---|
| ATAGUIA AGUAS APRIBA. ELEV. (m) | D A N O S | | | | | |
| COSTO TOTAL ATAGUIAS (\$ MILIONES) | (MILLONES DE PESOS) | | | | | |
| PERIODO DE CONSTRUCCION (AÑOS) | ALTERNATIVA DOS TUNELES REVESTIDOS | | | | | |
| | 5 | 12.5 | 25 | 50 | 100 | 5 |

| | | | | | | | | |
|---|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 5 | 13.0 | ELEVACION PROBABLE DE ELEVACION (m) | 111.0 | 121.2 | 129.9 | 137.6 | 145.5 | 15 |
|---|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----|

AVANCE DE LA CORTINA

| AÑO | COSTO (MILLONES) | ELEVACION (m) | | | | | | |
|-----|------------------|---------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 76 | 77.5 | - | 49.0 | 49.0 | 49.0 | 49.0 | 49.0 |
| 2 | 68.7 | 111.5 | - | 111.1 | 111.1 | 111.1 | 111.1 | 111.1 |
| 3 | 129.2 | 139.0 | - | - | - | - | 171.6 | 171.6 |
| 4 | 190.3 | 170.0 | - | - | - | - | - | - |

| | | | | | | | | |
|------|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| 12.5 | 14.4 | ELEVACION PROBABLE DE ELEVACION (m) | 100.0 | 111.0 | 118.5 | 126.0 | 133.0 | 15 |
|------|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|----|

AVANCE DE LA CORTINA

| AÑO | COSTO (MILLONES) | ELEVACION (m) | | | | | | |
|-----|------------------|---------------|---|---|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 76 | 77.5 | - | - | 49.0 | 49.0 | 49.0 | 49.0 |
| 2 | 68.7 | 111.5 | - | - | 111.1 | 111.1 | 111.1 | 111.1 |
| 3 | 129.2 | 139.0 | - | - | - | - | - | 171.6 |
| 4 | 190.3 | 170.0 | - | - | - | - | - | - |

| | | | | | | | | |
|----|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 25 | 15.5 | ELEVACION PROBABLE DE ELEVACION (m) | 94.6 | 104.5 | 111.0 | 118.5 | 125.5 | 132.0 |
|----|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|

AVANCE DE LA CORTINA

| AÑO | COSTO (MILLONES) | ELEVACION (m) | | | | | | |
|-----|------------------|---------------|---|---|---|-------|-------|-------|
| 1 | 76 | 77.5 | - | - | - | 49.0 | 49.0 | 49.0 |
| 2 | 68.7 | 111.5 | - | - | - | 111.1 | 111.1 | 111.1 |
| 3 | 129.2 | 139.0 | - | - | - | - | - | 171.6 |
| 4 | 190.3 | 170.0 | - | - | - | - | - | - |

| | | | | | | | | |
|----|------|-------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| 50 | 16.7 | ELEVACION PROBABLE DE ELEVACION (m) | 90.4 | 99.1 | 106.0 | 111.0 | 116.6 | 121.0 |
|----|------|-------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|

AVANCE DE LA CORTINA

| AÑO | COSTO (MILLONES) | ELEVACION (m) | | | | | | |
|-----|------------------|---------------|---|---|---|---|-------|-------|
| 1 | 76 | 77.5 | - | - | - | - | 49.0 | 49.0 |
| 2 | 68.7 | 111.5 | - | - | - | - | 111.1 | 111.1 |
| 3 | 129.2 | 139.0 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | 190.3 | 170.0 | - | - | - | - | - | - |

TABLA 12



| | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|------|----|----|-----|-----|
| ATAGUIA AGUAS ARRIBA ELEV (1150m) | | D A N O S (MILLONES DE PESOS) | | | | | |
| COSTO TOTAL ATAGUIAS (\$472 MILLONES) | | ALTERNATIVA TRES TUNELES REVESTIDOS | | | | | |
| TÉRMINO DE OBRAS (años) | PERIODO DE OCURRENCIA (EN AÑOS) | 5 | 12.5 | 25 | 50 | 100 | 500 |

| | | | | | | | | |
|---|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5 | 10.0 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 118.0 | 129.0 | 133.0 | 146.0 | 154.0 | 174.0 |
|---|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

| AVANCE DE LA CORTINA | | ANO | COSTO (MILLONES) | ELEVACION (m) | | | | | |
|----------------------|-------|-------|------------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 76 | 77.5 | - | 54.8 | 54.8 | 54.8 | 54.8 | 54.8 | 54.8 |
| 2 | 68.7 | 111.5 | - | 115.9 | 115.9 | 115.9 | 115.9 | 115.9 | 115.9 |
| 3 | 129.2 | 139.0 | - | - | 176.4 | 176.4 | 176.4 | 176.4 | 176.4 |
| 4 | 190.3 | 170.0 | - | - | - | - | - | - | - |

| | | | | | | | |
|------|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 12.5 | 11.5 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 118.0 | 123.4 | 131.5 | 138.6 | 156.6 |
|------|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|

| AVANCE DE LA CORTINA | | ANO | COSTO (MILLONES) | ELEVACION (m) | | | | | |
|----------------------|-------|-------|------------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 76 | 77.5 | - | - | 54.8 | 54.8 | 54.8 | 54.8 | 54.8 |
| 2 | 68.7 | 111.5 | - | - | 115.9 | 115.9 | 115.9 | 115.9 | 115.9 |
| 3 | 129.2 | 139.0 | - | - | - | - | - | - | 176.4 |
| 4 | 190.3 | 170.0 | - | - | - | - | - | - | - |

| | | | | | | |
|----|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|------|
| 25 | 12.1 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 118.0 | 121.8 | 129.0 | 15.0 |
|----|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|------|

| AVANCE DE LA CORTINA | | ANO | COSTO (MILLONES) | ELEVACION (m) | | | | | |
|----------------------|-------|-------|------------------|---------------|---|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 76 | 77.5 | - | - | - | 54.8 | 54.8 | 54.8 | 54.8 |
| 2 | 68.7 | 111.5 | - | - | - | 115.9 | 115.9 | 115.9 | 115.9 |
| 3 | 129.2 | 139.0 | - | - | - | - | - | - | 176.4 |
| 4 | 190.3 | 170.0 | - | - | - | - | - | - | - |

| | | | | | |
|----|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|
| 50 | 13.2 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 118.0 | 122.3 | 134.5 |
|----|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|

| AVANCE DE LA CORTINA | | ANO | COSTO (MILLONES) | ELEVACION (m) | | | | | |
|----------------------|-------|-------|------------------|---------------|---|---|-------|-------|-------|
| 1 | 76 | 77.5 | - | - | - | - | 54.8 | 54.8 | 54.8 |
| 2 | 68.7 | 111.5 | - | - | - | - | 115.9 | 115.9 | 115.9 |
| 3 | 129.2 | 139.0 | - | - | - | - | - | - | 176.4 |
| 4 | 190.3 | 170.0 | - | - | - | - | - | - | - |



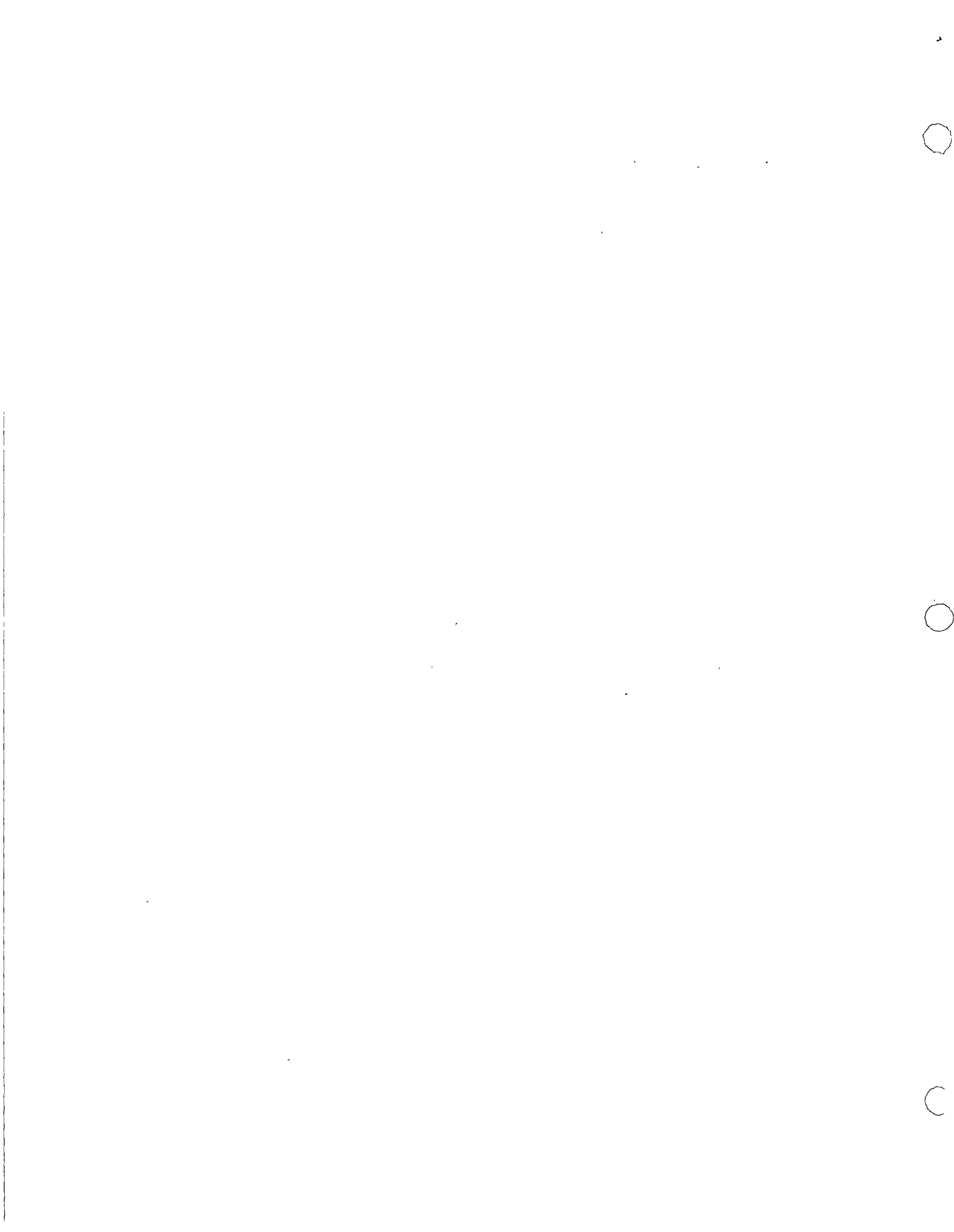
5.1.4. ANALISIS DE RIESGOS

Se define riesgo, como el valor esperado del daño. La estimación de los riesgos se hace en base a las probabilidades de encuentro que recomienda Leon E. Borgam, en su método conocido con el nombre de Criterio de Riesgo. El cual considera la probabilidad de encuentro que depende de la independencia del evento año con año, de la vida útil de la obra y un período de retorno.

Se consideró para la obra de desvío, una vida útil de 3 años, que comprende desde el cierre del cauce hasta una etapa constructiva de la corona, tal que la probabilidad de que el agua la rebase es demasiado pequeña. Con lo cual las probabilidades de encuentro dadas por Borgam, son las siguientes:

| Período de retorno en años | Probabilidad de encuentro |
|----------------------------|---------------------------|
| 5 | 0.488 |
| 12.5 | 0.229 |
| 25 | 0.115 |
| 50 | 0.059 |
| 100 | 0.030 |
| 500 | 0.006 |

Por otro lado, los períodos de retorno considerados para el diseño de la obra de desvío fueron de 5, 12.5, 25 y 50 años. Con lo que se construyeron



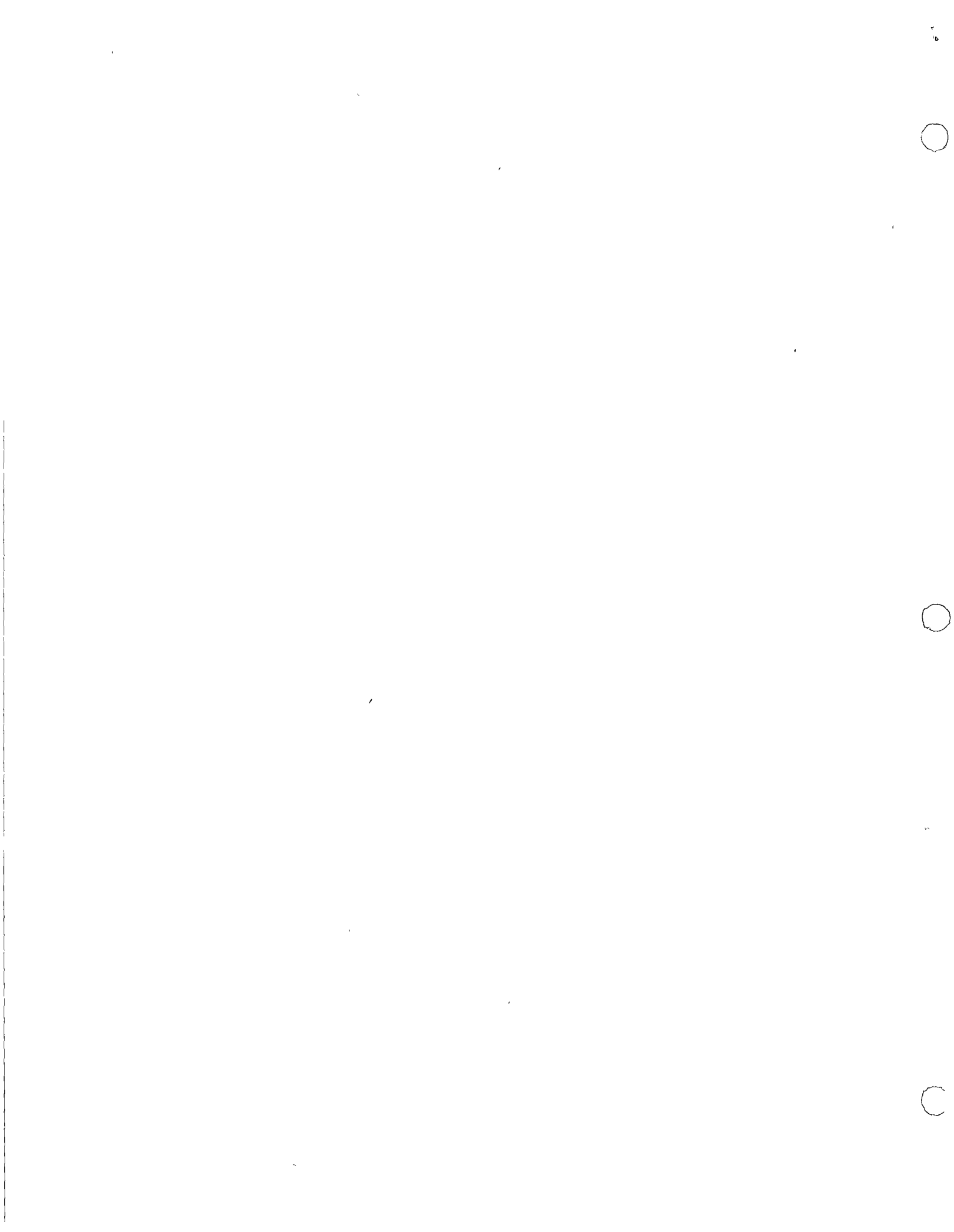
unas gráficas de riesgo para alternativas de 2 y 3 túneles revestidos y - 3, 4 y 5 túneles sin revestir, la cual se puede ver en la figura 32.

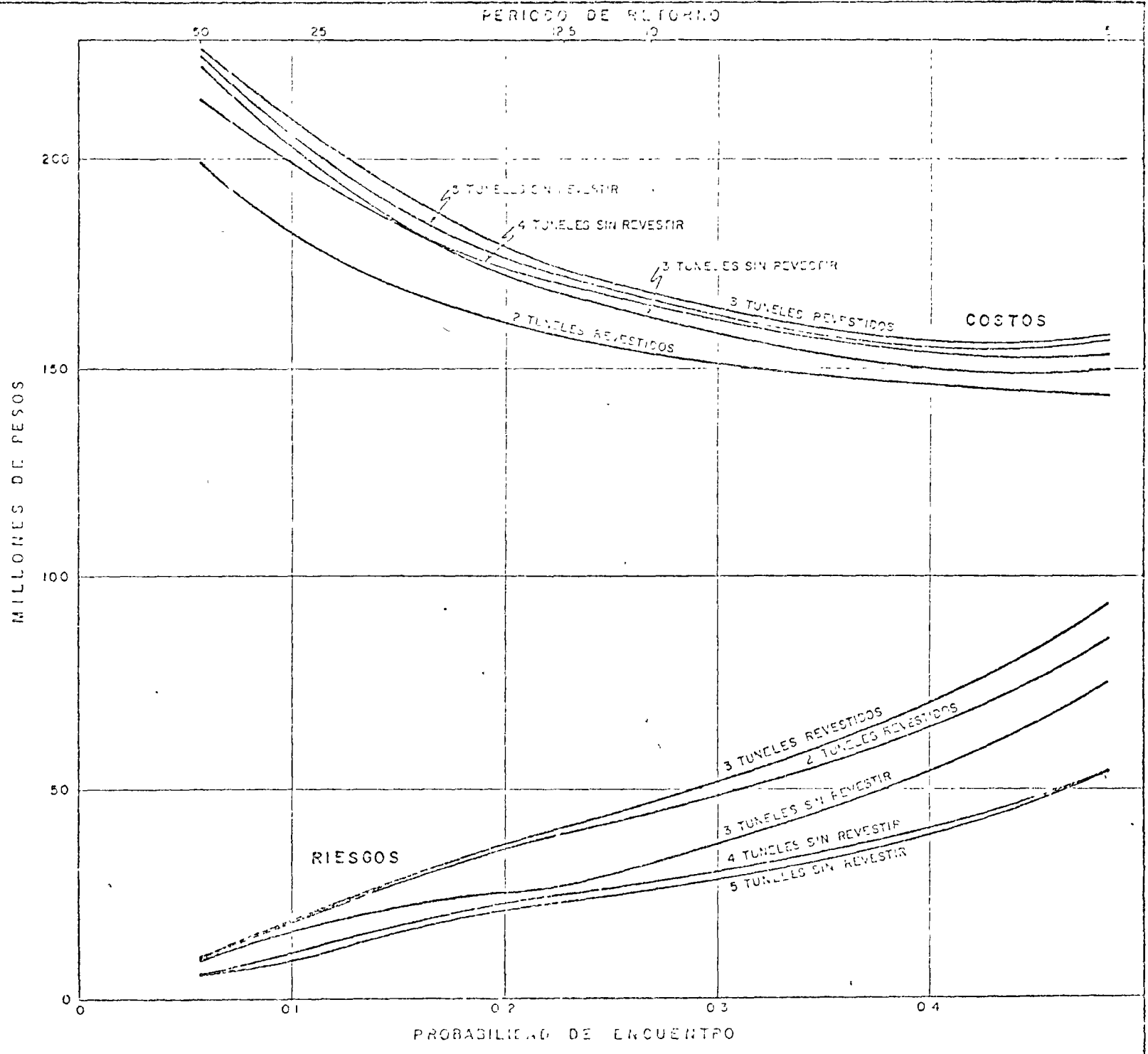
Posteriormente se estimó un riesgo de aversión al daño o de prestigio con el fin de obtener un índice que permita jerarquizar las distintas alternativas. Para lo cual se consideró el doble de los riesgos calculados - con anterioridad.

5.1.5 CURVAS COSTOS + RIESGOS

Finalmente se construyen curvas de costos + riesgo, las cuales comprenden los costos de las alternativas de túneles para los diferentes períodos de retorno considerados y los riesgos de las mismas alternativas. Los resultados considerando los riesgos por daños de inundación y retraso en el -- programa, así como los que incluyen los riesgos por aversión al daño ó - prestigio (costos + 2 riesgos). Se presentan en las gráficas 33 y 34 así como en las tablas 17, 18 y 19.

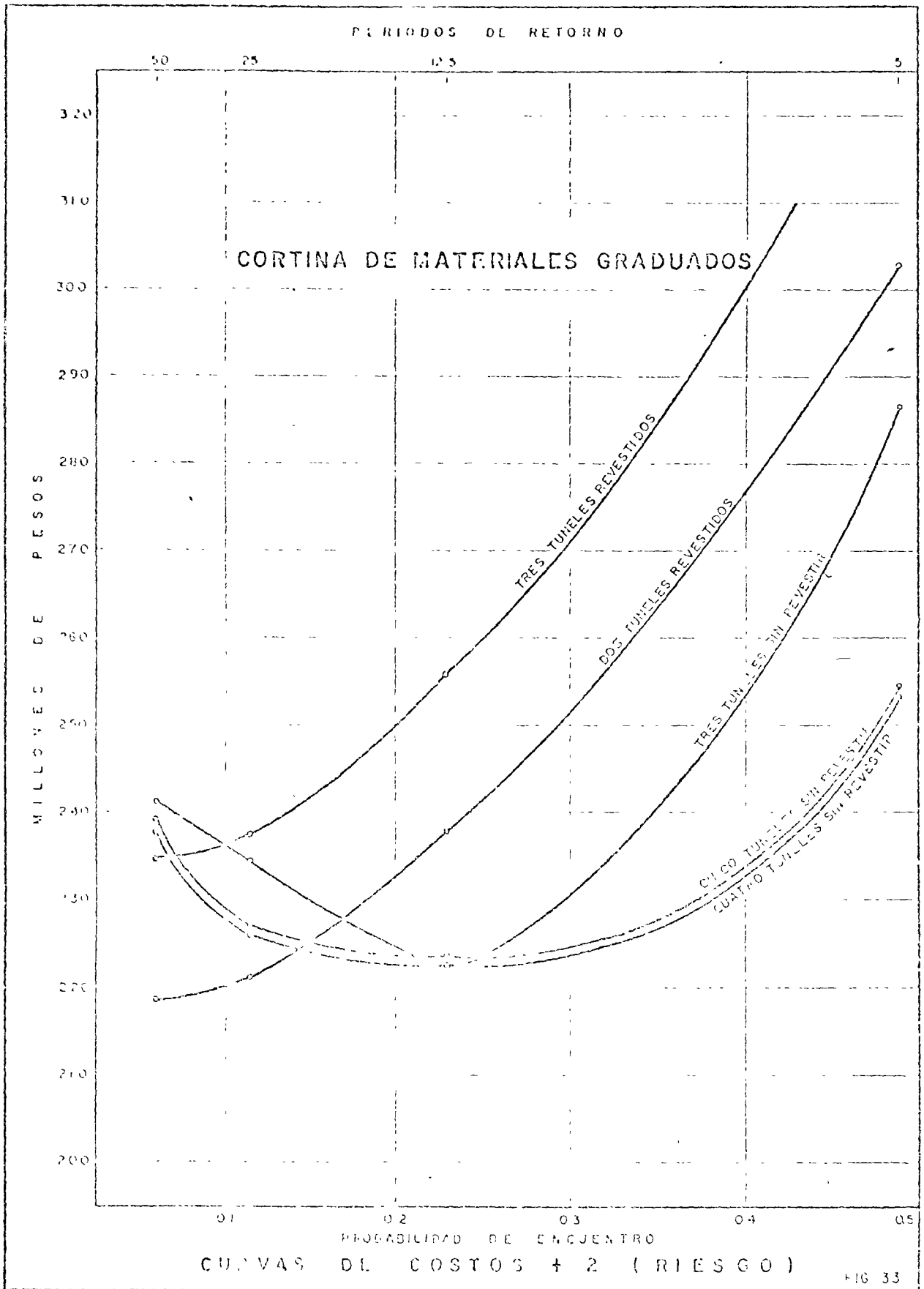
Gráficas que muestran a la alternativa de dos túneles revestidos, como la solución más confiable para períodos de retorno mayores a 12 años, y para períodos menores se observa que la mejor solución es la de cuatro túneles sin revestir.

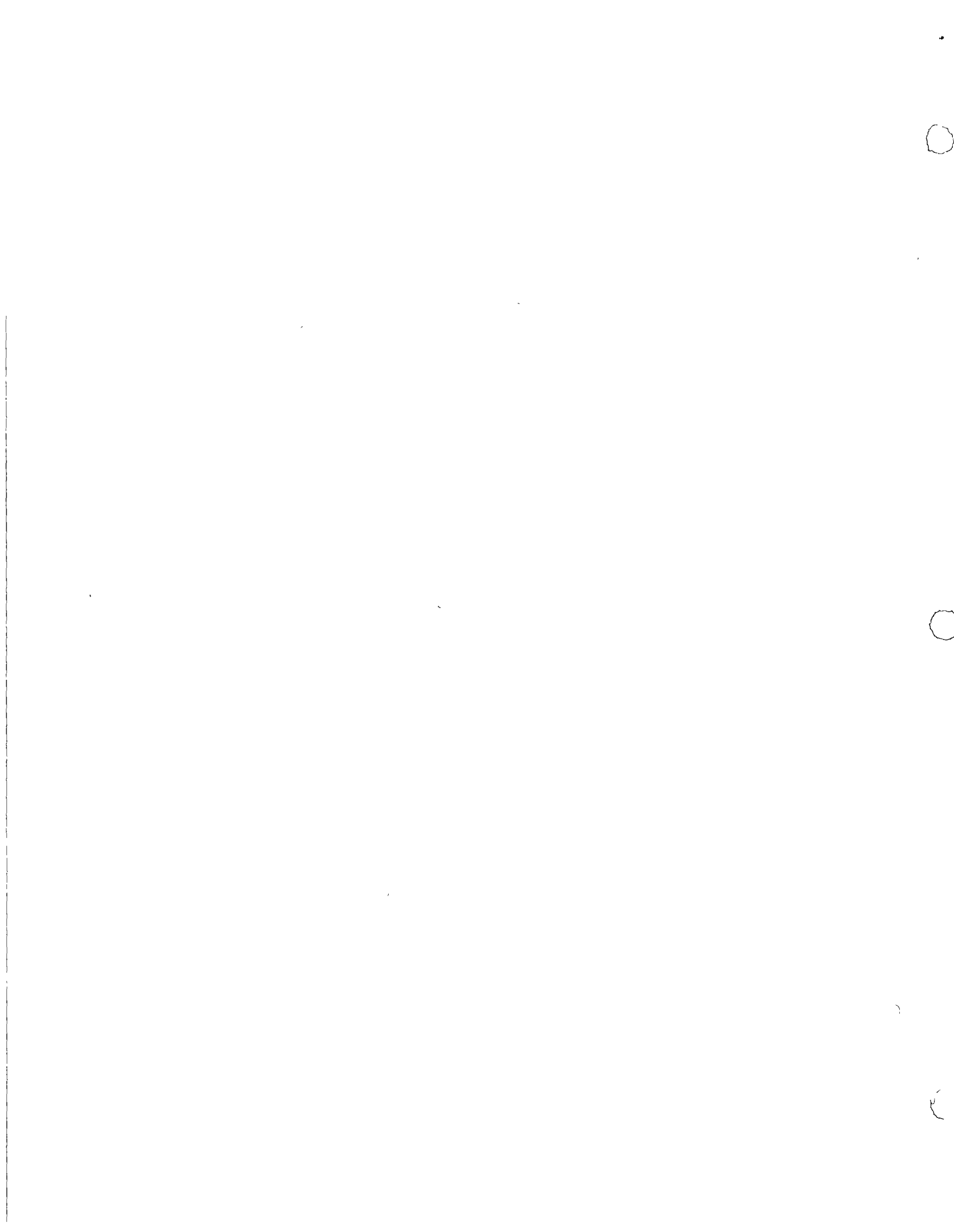




122







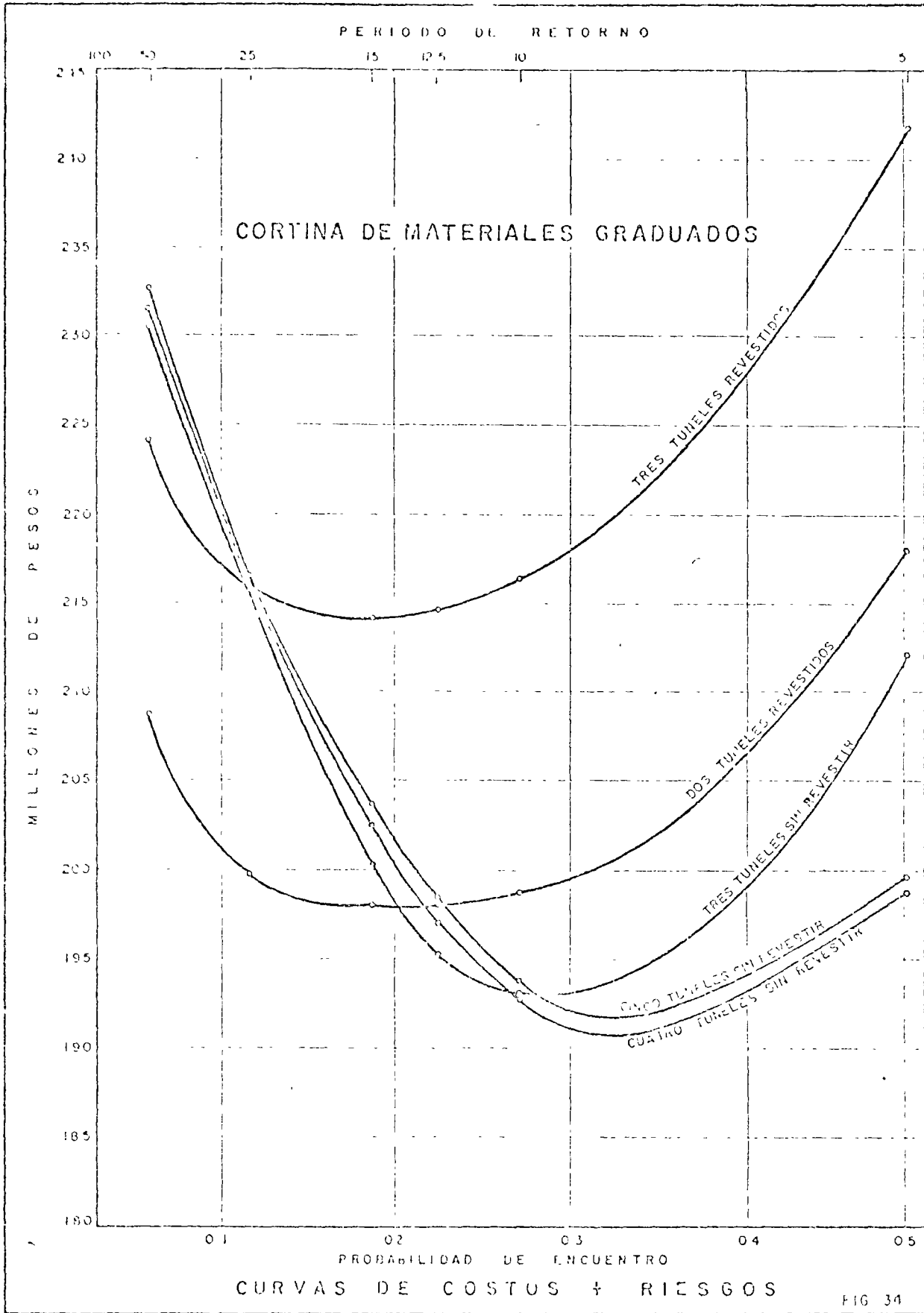
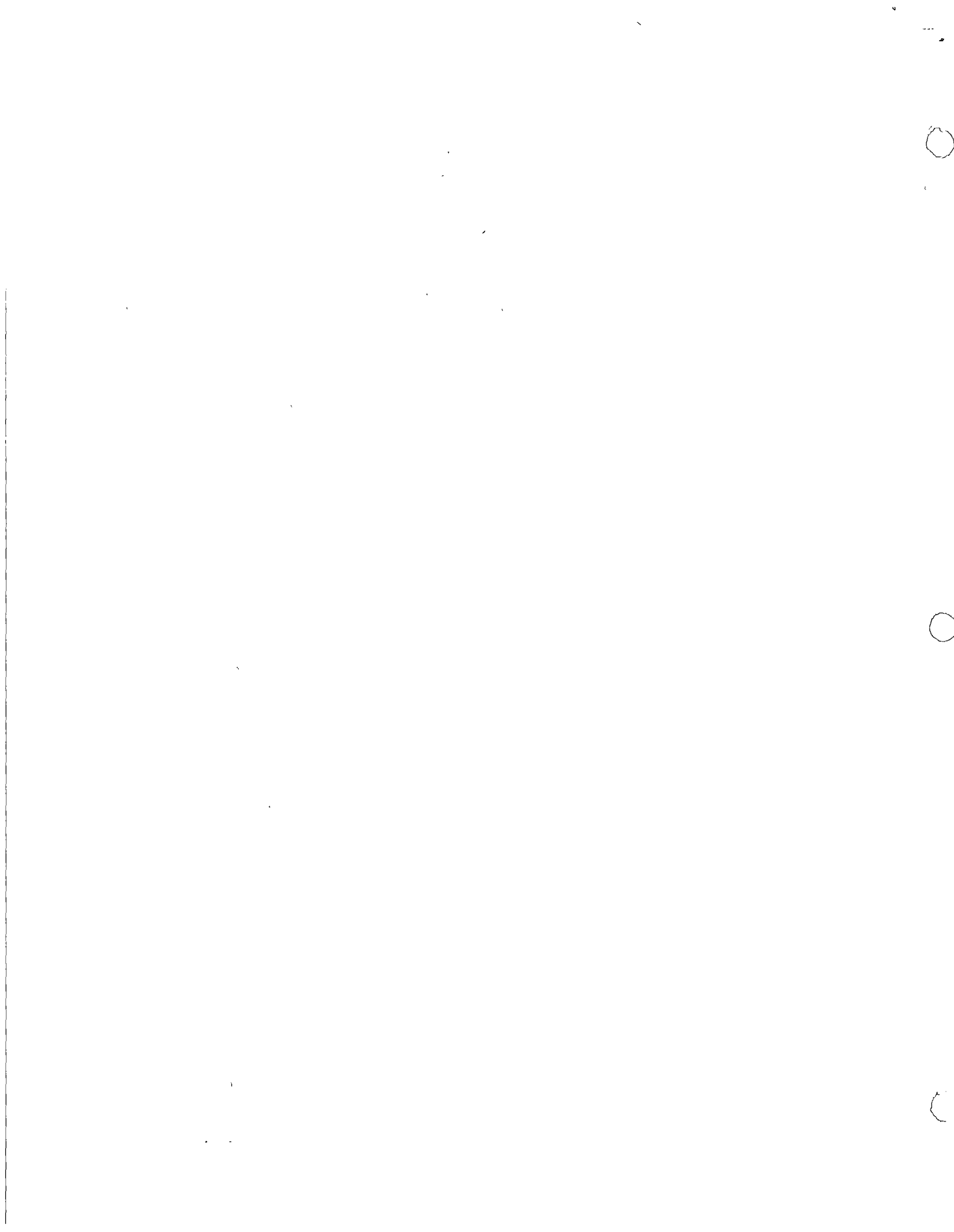


FIG 34



COSTOS - RIESCOC

| | | TUNELES REVESTIDOS (20 m/s) | | | | TUNELES SIN REVESTIR (10 m/s) | | | | | |
|-------------------|------------|-----------------------------|------|--------|-------|-------------------------------|------|--------|-------|-------|------|
| | | DOS | Ø | TRES | Ø | TRES | Ø | CUATRO | Ø | CINCO | Ø |
| | | 40.40 | | 42.0 m | | 34.5 m | | 28.0 m | | 27.0 | |
| ALTURA DE ATAGUIA | | | | | | | | | | | |
| Tr | COSTO | 133 | | 148 | | 137 | | 142 | | 145 | |
| 5 | E (DAÑO) | 84.9 | 12.8 | 93.8 | 10.0 | 75 | 14.5 | 54.6 | 12.75 | 54.6 | 11.6 |
| | Σ | 217.9 | | 241.8 | | 212 | | 198.6 | | 199.6 | |
| 12.5 | COSTO | 158 | | 173 | | 168 | | 172 | | 174 | |
| | E (DAÑO) | 40 | 14.3 | 41.6 | 11.50 | 27.6 | 16.2 | 25.1 | 14.4 | 24.9 | 12.7 |
| | Σ | 198 | | 214.6 | | 195.6 | | 197.2 | | 198.9 | |
| 25 | COSTO | 179 | | 194 | | 198 | | 202 | | 205 | |
| | E (DAÑO) | 20.7 | 15.5 | 21.6 | 12.40 | 18.2 | 17.5 | 12.7 | 15.5 | 10.6 | 13.2 |
| | Σ | 199.7 | | 215.6 | | 216.2 | | 214.7 | | 215.6 | |
| 50 | COSTO | 199 | | 214 | | 222 | | 224 | | 226 | |
| | E (DAÑO) | 9.8 | 16.6 | 10.2 | 13.3 | 9.5 | | 6.5 | 16.4 | 6.5 | 14.5 |
| | Σ | 208.8 | | 224.3 | | 231.5 | | 230.5 | | 232.5 | |

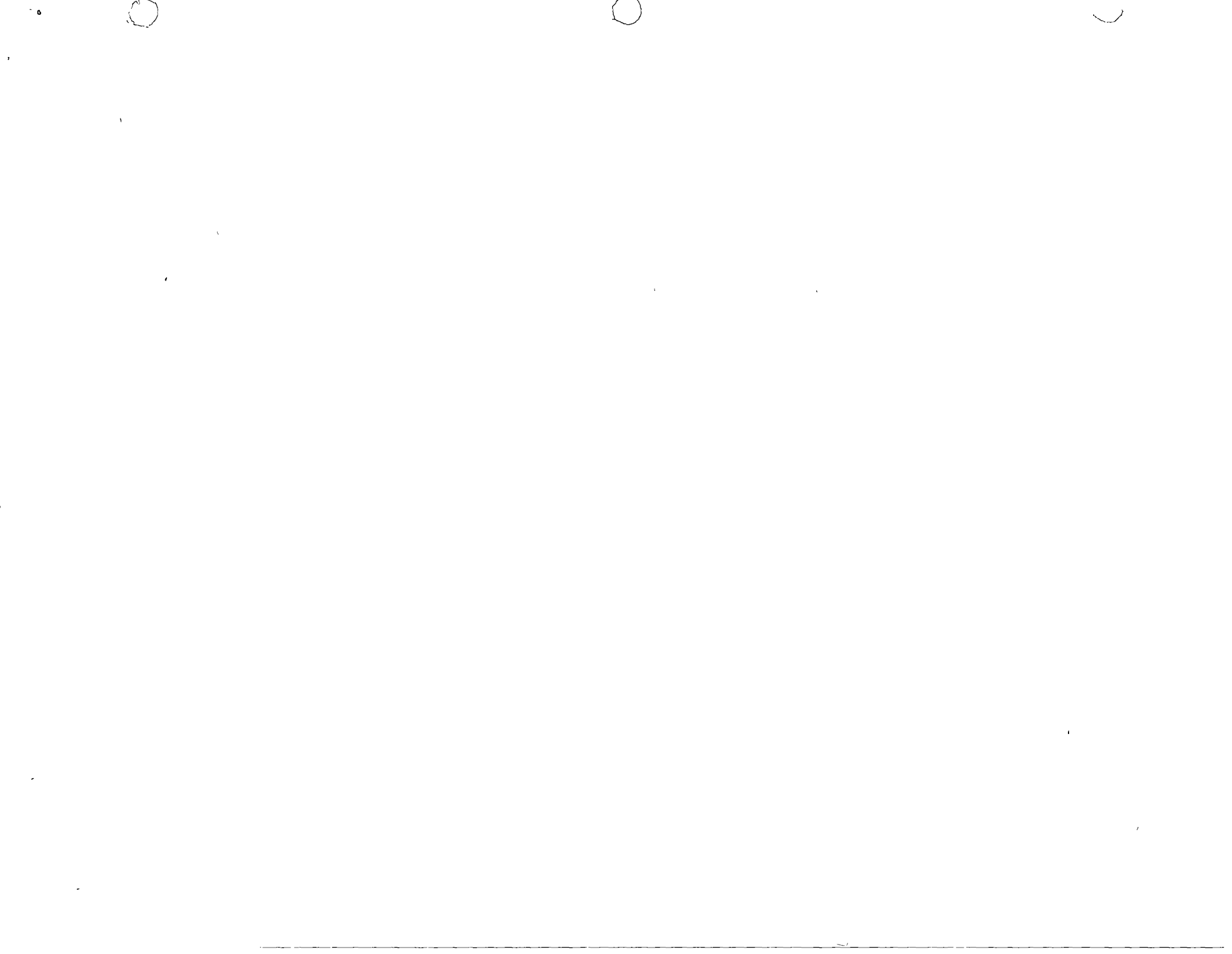
TABLA 17



COSTOS + 2 (RIESGOS)

| Tr | ALTURA DE ATAGUIA | TUNELES REVESTIDOS (20 m/s) | | | | TUNELES SIN REVESTIR (10 m/s) | | | | | |
|------|--------------------------|-----------------------------|------|-----------------------|------|-------------------------------|------|-----------------------|-------|-----------------------|------|
| | | DOS | Ø | TRES | Ø | TRES | Ø | CUATRO | Ø | CINCO | Ø |
| | | 40.40 | | 42.0 | | 34.5 | | 28.0 | | 27.0 | |
| 5 | COSTO E (DAÑO) Σ | 133 169.8 302.8 | 12.8 | 140 187.6 335.6 | 10.0 | 137 150 287 | 14.5 | 142 109.2 251.2 | 12.75 | 145 109.2 254.2 | 11.6 |
| 12.5 | COSTO E (DAÑO) Σ | 258 80 238 | 14.3 | 173 83.2 256.2 | 11.5 | 168 55.2 223.2 | 16.2 | 172 50.4 222.4 | 14.4 | 174 49.8 223.8 | 12.7 |
| 25 | COSTO E (DAÑO) Σ | 179 41.4 220.4 | 15.5 | 194 43.2 237.2 | 12.4 | 198 35.4 234.4 | 17.5 | 202 25.4 227.4 | 15.5 | 205 21.1 226.1 | 13.8 |
| 50 | COSTO E (DAÑO) Σ | 199 19.6 218.6 | 16.6 | 214 20.4 234.4 | 13.3 | 222 19 241 | | 224 13.0 237.0 | 16.4 | 226 13.1 239.1 | 14.5 |

TABLA 18



12

ALTERNATIVA DE 14 Ø

COSTOS + RIESGO

| | ALTERNATIVA | ALTURA ATAGUIA | COSTO | RIESGO | C + R |
|----|-------------------|----------------|-------|--------|-------|
| T. | | | | | |
| 3 | 3 T. sin revestir | 34.5 | 128 | 85 | 213 |
| 10 | 4 T. sin revestir | 28.0 | 170 | 30 | 200 |
| 10 | 2 T. revestidos | 40.40 | 153 | 46 | 199 |
| 30 | 5 T. sin revestir | 27.0 | 212 | 12 | 224 |
| 85 | 3 T. revestidos | 42.00 | 234 | 3 | 237 |

COSTOS + 2 (RIESGOS)

| | | | | | |
|----|-------------------|-------|-----|-----|-----|
| 3 | 3 T. sin revestir | 34.5 | 123 | 170 | 298 |
| 10 | 4 T. sin revestir | 28.0 | 170 | 60 | 230 |
| 10 | 2 T. revestidos | 40.40 | 153 | 92 | 245 |
| 30 | 5 T. sin revestir | 27.0 | 212 | 24 | 236 |
| 85 | 3 T. revestidos | 42.00 | 234 | 6 | 240 |

TABLA 19

)

o

o

Sin embargo, considerando la inversión neta, se observa de las gráficas de costos, que la mejor alternativa es la de dos túneles revestidos de diámetro de 15 m.

En el capítulo 6, se incluye un análisis de sensibilidad con el fin de estar en posibilidad de tomar una decisión en base a un conocimiento más amplio de las condiciones de funcionamiento del sistema de la obra de desvío.

5.2 PRESA DE CONCRETO

5.2.1. COSTOS INDICE

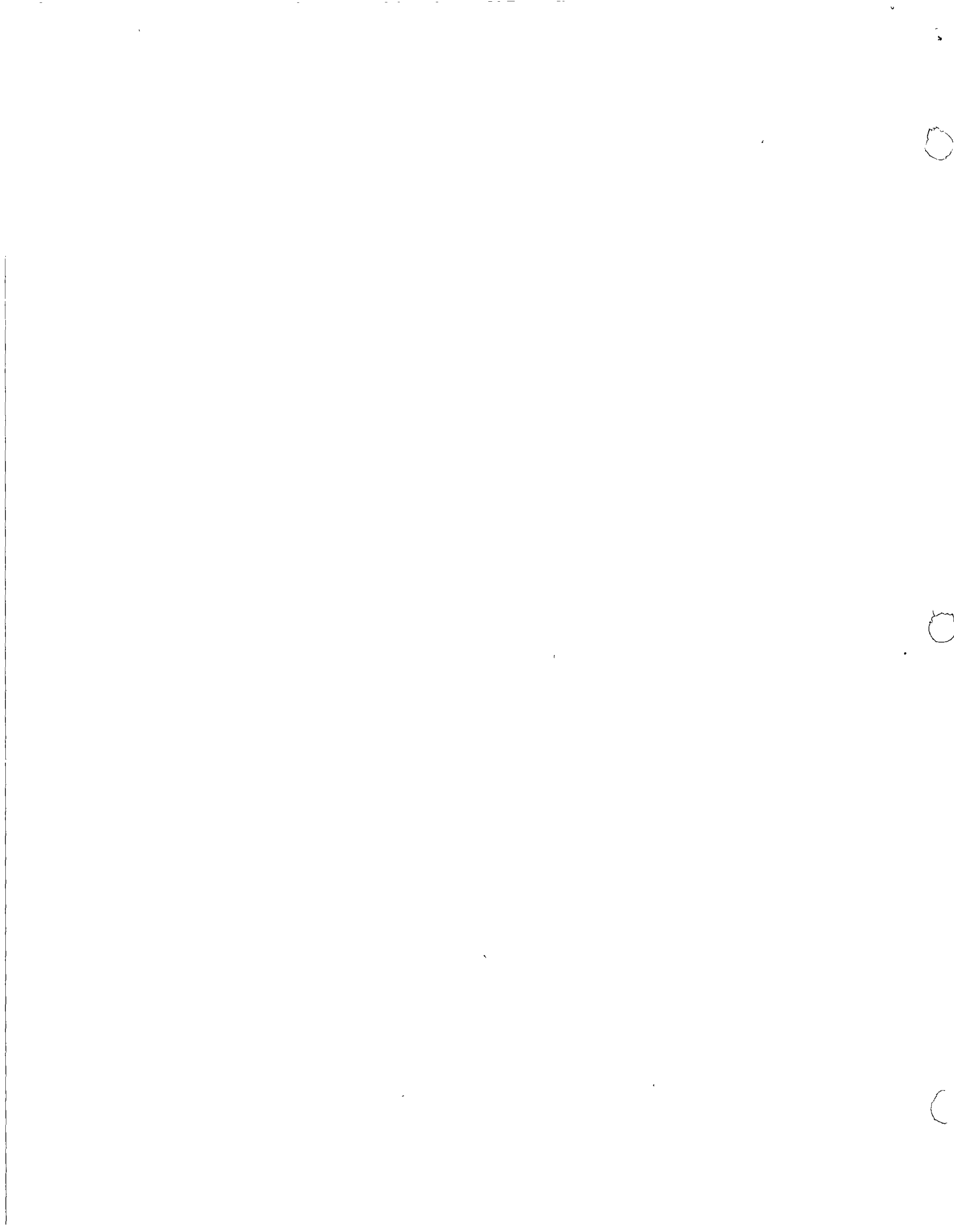
En el análisis de costos índice para la presa de concreto, se consideraron los mismos resultados del análisis de costos correspondientes a la presa de materiales graduados (capítulo 5.1.1).

5.2.2. ANALISIS ECONOMICO.

Las consideraciones en que se basó el análisis económico para la presa de concreto, son las mismas que se realizaron para la presa de materiales graduados (capítulo 5.1.2).

5.2.2.1 Resultados.

El análisis económico para la presa de concreto se llevó a cabo para las mismas 5 alternativas que se consideraron en la obra de desvío de la presa



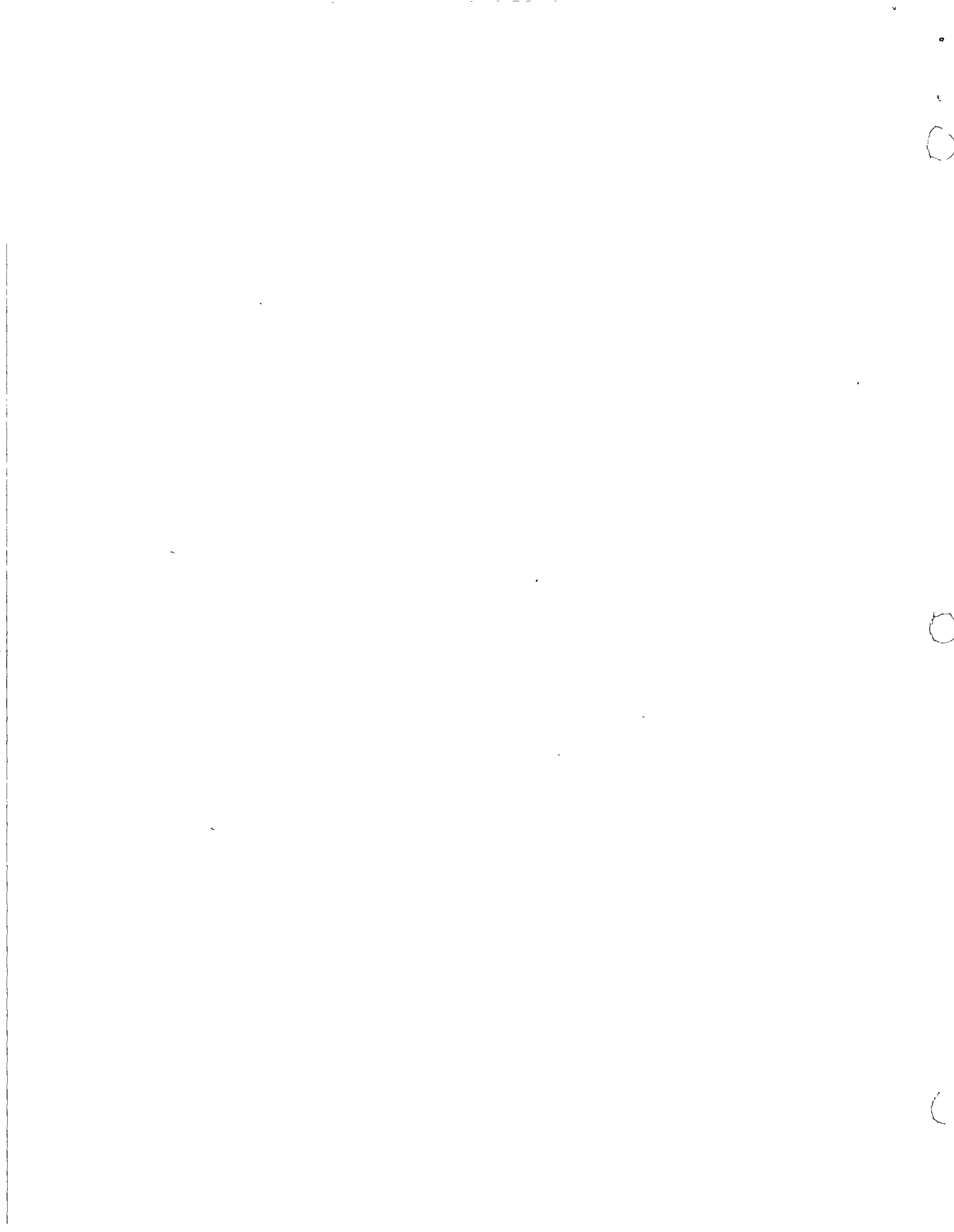
de materiales graduados, las cuales comprenden dos alternativas para túneles revestidos y tres para túneles sin revestir, que cubren una gama de 11 a 17 m de diámetro cada una. Con lo cual las restricciones técnicas debidas a las máximas velocidades permisibles en los túneles, así como las características constructivas, serán las mismas que las mencionadas en el análisis de materiales graduados.

5.2.3 ANALISIS DE DAÑOS.

La metodología que se considera para el análisis de daños para la presa de concreto, se basa en las mismas consideraciones que se hicieron en la metodología aplicada a la alternativa de la presa de materiales graduados (capítulos 5.1.3, 5.1.3.1 y 5.1.3.2), con algunas modificaciones referentes a la evaluación del daño por retraso en el programa, así como en los daños posteriores en que la cortina alcanza alturas que permiten no reconstruir las ataguías en caso de que se presente una inundación. Estos aspectos se discuten más ampliamente en el capítulo 5.2.3.1, que se refiere al cálculo de daños correspondientes a la presa de concreto.

5.2.3.1 Cálculo de Daños

Para la estimación de los costos por daños en la presa de concreto, se considera una cantidad por retraso adicional, en función de la elevación de la cortina en el momento de ocurrir la inundación. Estimándose éste en la siguiente forma:



| | Elevación de la cortina | Valor del Retraso |
|-------------|----------------------------|-----------------------|
| PRIMER AÑO | 52 m | 4.0 millones de pesos |
| SEGUNDO AÑO | 150 m | 1.0 |
| TERCER AÑO | 240 m | 0 |

En que se observa, que el daño por reposición de las ataguías, se considera solamente en el caso de que la inundación ocurra en el primer año.

Los cálculos realizados se presentan en las tablas 20, 21, 22, 23 y 24.

5.2.4. ANALISIS DE RIESGOS

Para la estimación de los riesgos, se tomaron en cuenta los mismos planteamientos de León.E. Borgam, que se mencionan en el capítulo 5.1.4. Así como las consideraciones referentes a la vida útil de la obra y de los períodos de retorno, mencionados en dicho capítulo.

5.2.5. CURVAS COSTOS + RIESGOS

Finalmente se construyen curvas de Costos + Riesgos, que comprenden los costos de las alternativas de túneles para los diferentes períodos de retorno considerados y los riesgos de dichas alternativas. Los resultados considerando los riesgos por daños de inundación y retraso en el programa, así como los que incluyen los riesgos por aversión al daño o prestigio (Costos + 2 Riesgos). Estos resultados se presentan en las gráficas 35 y 36, así como en las tablas 25 y 26.

1. 1950

2. 1951

3. 1952

4. 1953

5. 1954

6. 1955

7. 1956

8. 1957

9. 1958

10. 1959

11. 1960

The first observation was made for the purpose of the study in 1950. The results of the study are given in the following table.

The following table shows the results of the study for the years 1950 to 1960.

TABLE I

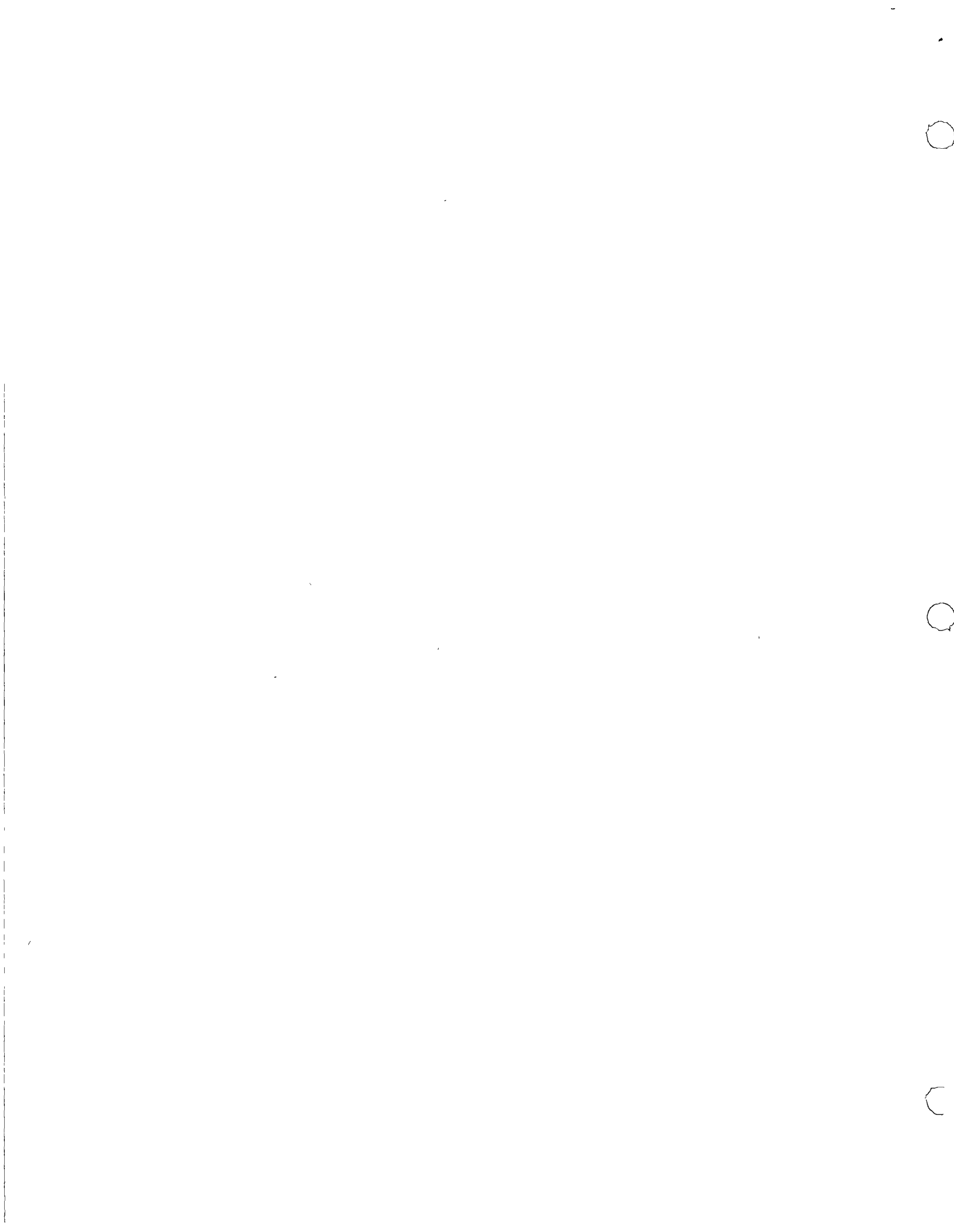
The following table shows the results of the study for the years 1950 to 1960. The results are given in the following table.

TABLE II

The following table shows the results of the study for the years 1950 to 1960. The results are given in the following table.

TABLE III

Gráficas que muestran a la alternativa de dos túneles revestidos, como la solución mas confiable para períodos de retorno mayores a 7 años, y para períodos menores se observa que la mejor solución es la de tres túneles -- sin revestir.



| | | | | | | | |
|---------------------------------------|---|-------------------|------|----|----|-----|-----|
| AVANCE DE LA AGUJA ANCHA LLEVA (150m) | | D A N O S | | | | | |
| COSTO TOTAL AL AGUJA (107.5 MILION) | | (MILLON DE PESOS) | | | | | |
| ALTERNATIVA TRES HERRILES REVISTIDOS | | | | | | | |
| 1 | 0 | 5 | 12.5 | 25 | 50 | 100 | 500 |

| | | | | | | | |
|---|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3 | 60 | 118.0 | 129.0 | 139.0 | 146.0 | 151.0 | 174.0 |
|---|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

AVANCE DE LA CORTINA

| AÑO | COSTO (MILION DE PESOS) | ELEVACION (m) | | | | | | |
|-----|-------------------------|---------------|---|------|------|------|------|------|
| 1 | 5.0 | 52 | - | 51.2 | 51.2 | 51.2 | 51.2 | 51.2 |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | 1.0 | 1.0 |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 4 | 100 | 118.0 | 123.1 | 131.5 | 133.6 | 156.6 |
|---|-----|-------|-------|-------|-------|-------|

AVANCE DE LA CORTINA

| AÑO | COSTO (MILION DE PESOS) | ELEVACION (m) | | | | | | |
|-----|-------------------------|---------------|---|---|------|------|------|------|
| 1 | 5.0 | 52 | - | - | 51.2 | 51.2 | 51.2 | 51.2 |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | 1.0 |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|-----|-------|-------|-------|-------|
| 5 | 100 | 118.0 | 121.3 | 123.0 | 146.0 |
|---|-----|-------|-------|-------|-------|

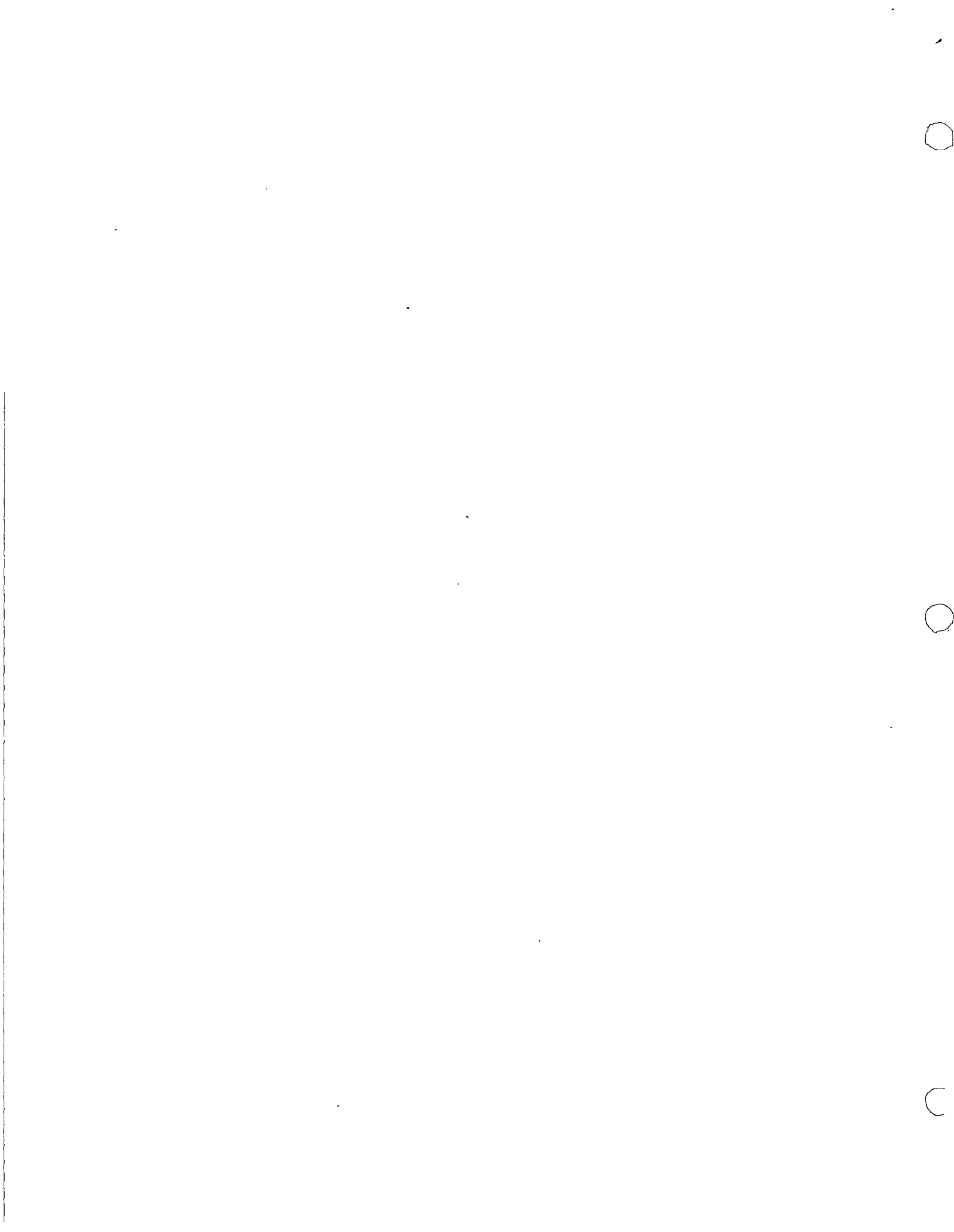
AVANCE DE LA CORTINA

| AÑO | COSTO (MILION DE PESOS) | ELEVACION (m) | | | | | | |
|-----|-------------------------|---------------|---|---|---|------|------|------|
| 1 | 4.0 | 52 | - | - | - | 51.2 | 51.2 | 51.2 |
| 2 | 1.0 | 152 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | |

| | | | | |
|---|-----|-------|-------|-------|
| 6 | 100 | 118.0 | 122.3 | 123.5 |
|---|-----|-------|-------|-------|

AVANCE DE LA CORTINA

| AÑO | COSTO (MILION DE PESOS) | ELEVACION (m) | | | | | | |
|-----|-------------------------|---------------|---|---|---|---|------|------|
| 1 | 2.0 | 52 | - | - | - | - | 51.2 | 51.2 |
| 2 | 1.0 | 152 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | |



| | | | | | | | |
|------------------------------------|------|------------------------------------|------|----|----|-----|-----|
| ATAGUIA AGUAS AEREA FLEV (III) | | D A N O S | | | | | |
| COSTO TOTAL ATAGUIAS (M. P. U. S.) | | (MILLONES DE PESOS) | | | | | |
| PERIODO DE OCUPACION (años) | | ALTERNATIVA DOS TUNELES REVESTIDOS | | | | | |
| 5 | 13.0 | 5 | 12.5 | 25 | 50 | 100 | 190 |

| | | | | | | | | |
|---|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5 | 13.0 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 111.0 | 121.2 | 129.9 | 137.6 | 145.5 | 154.1 |
|---|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

| AVANCE DE LA CORTINA | | | | | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|---|------|------|------|------|-----|
| AÑO | COSTO RETRASO | ELEVACION (m) | | | | | | |
| 1 | 4.0 | 52 | - | 46.4 | 46.4 | 46.4 | 46.4 | 16. |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | 1. |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|------|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 12.5 | 14.1 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 100.0 | 111.0 | 118.5 | 126.0 | 133.0 | 140 |
|------|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|

| AVANCE DE LA CORTINA | | | | | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|---|---|------|------|------|-----|
| AÑO | COSTO RETRASO | ELEVACION (m) | | | | | | |
| 1 | 4.0 | 52 | - | - | 46.4 | 46.4 | 46.4 | 16. |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | |

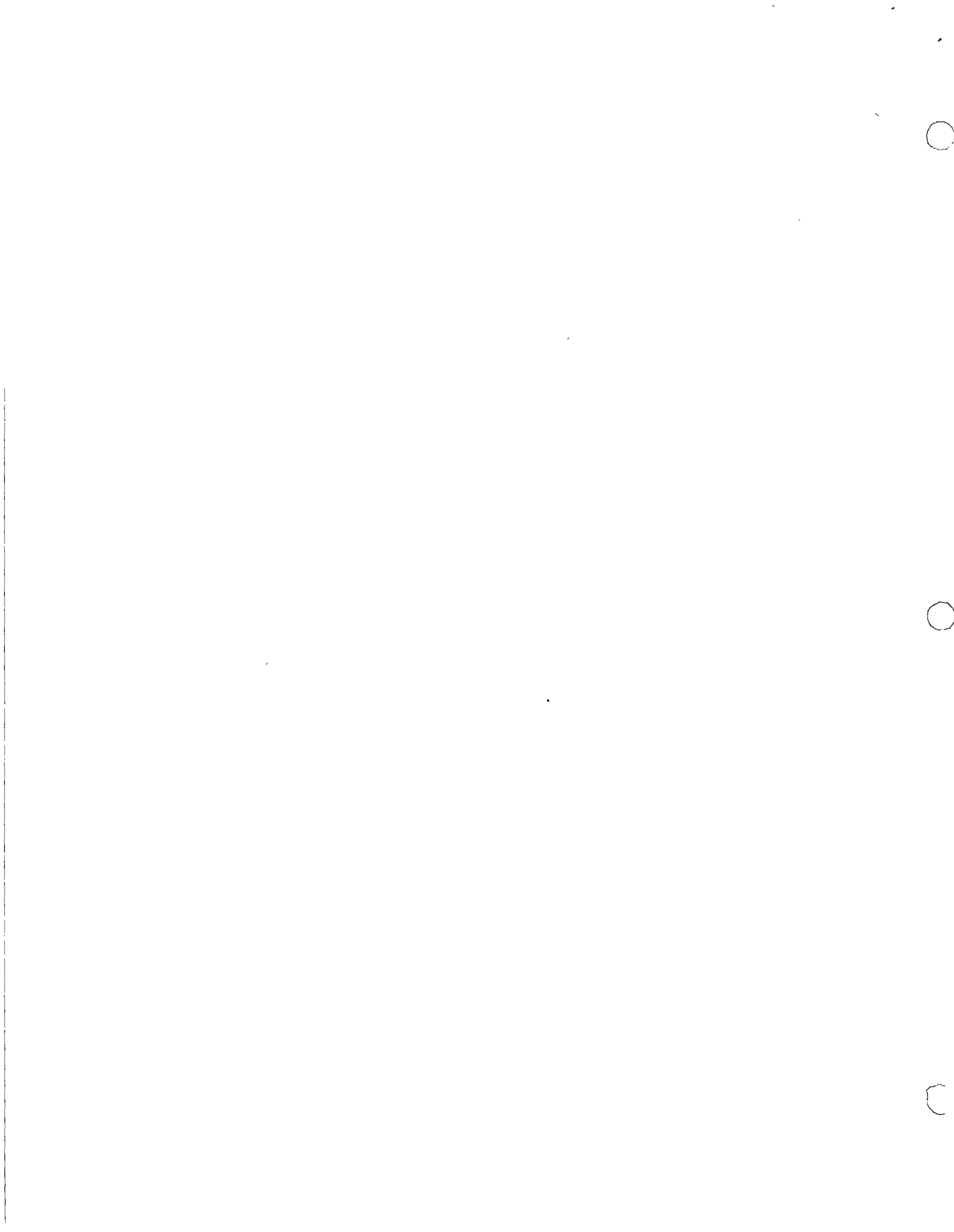
| | | | | | | | | |
|----|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|----|
| 25 | 15.5 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 94.6 | 104.4 | 111.0 | 118.5 | 125.5 | 14 |
|----|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|----|

| AVANCE DE LA CORTINA | | | | | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|---|---|---|------|------|----|
| AÑO | COSTO RETRASO | ELEVACION (m) | | | | | | |
| 1 | 4.0 | 52 | - | - | - | 46.4 | 46.4 | 16 |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|----|------|-------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-----|
| 50 | 16.7 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 90.4 | 99.4 | 105.0 | 111.0 | 118.6 | 124 |
|----|------|-------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|-----|

| AVANCE DE LA CORTINA | | | | | | | | |
|----------------------|---------------|---------------|---|---|---|---|------|----|
| AÑO | COSTO RETRASO | ELEVACION (m) | | | | | | |
| 1 | 4.0 | 52 | - | - | - | - | 46.4 | 6. |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | |

TABLA 20



| MACHIA ACUAGATIBA ELV (10101) | | D A Ñ O S | | | | | |
|--|--|-------------------------------------|------|----|----|-----|-----|
| COSTO TOTAL MACHIAS (\$31.2 MIL) (MILLONES DE PESOS) | | ALTERNATIVA TRES TUNEL SIN INVESTIP | | | | | |
| PERIODO DE EJECUCION (AÑOS) | | 5 | 12.5 | 25 | 50 | 100 | 100 |

| | | | | | | | | |
|---|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5 | 11.8 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 103.6 | 113.3 | 120.7 | 127.6 | 134.1 | 143.1 |
|---|------|-------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

| E = 101.6 S = 31.2 | | AVANCE DE LA CORTINA | | | | | | | |
|-----------------------|---------------|----------------------|---|------|------|------|------|------|------|
| AÑO | COSTO RETRASO | ELEVACION (m) | | | | | | | |
| 1 | 4.0 | 52 | - | 35.2 | 35.2 | 35.2 | 35.2 | 35.2 | 35.2 |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5 | 16.5 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 98.2 | 105.2 | 111.0 | 117.0 | 123.0 | 136.1 |
|---|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|

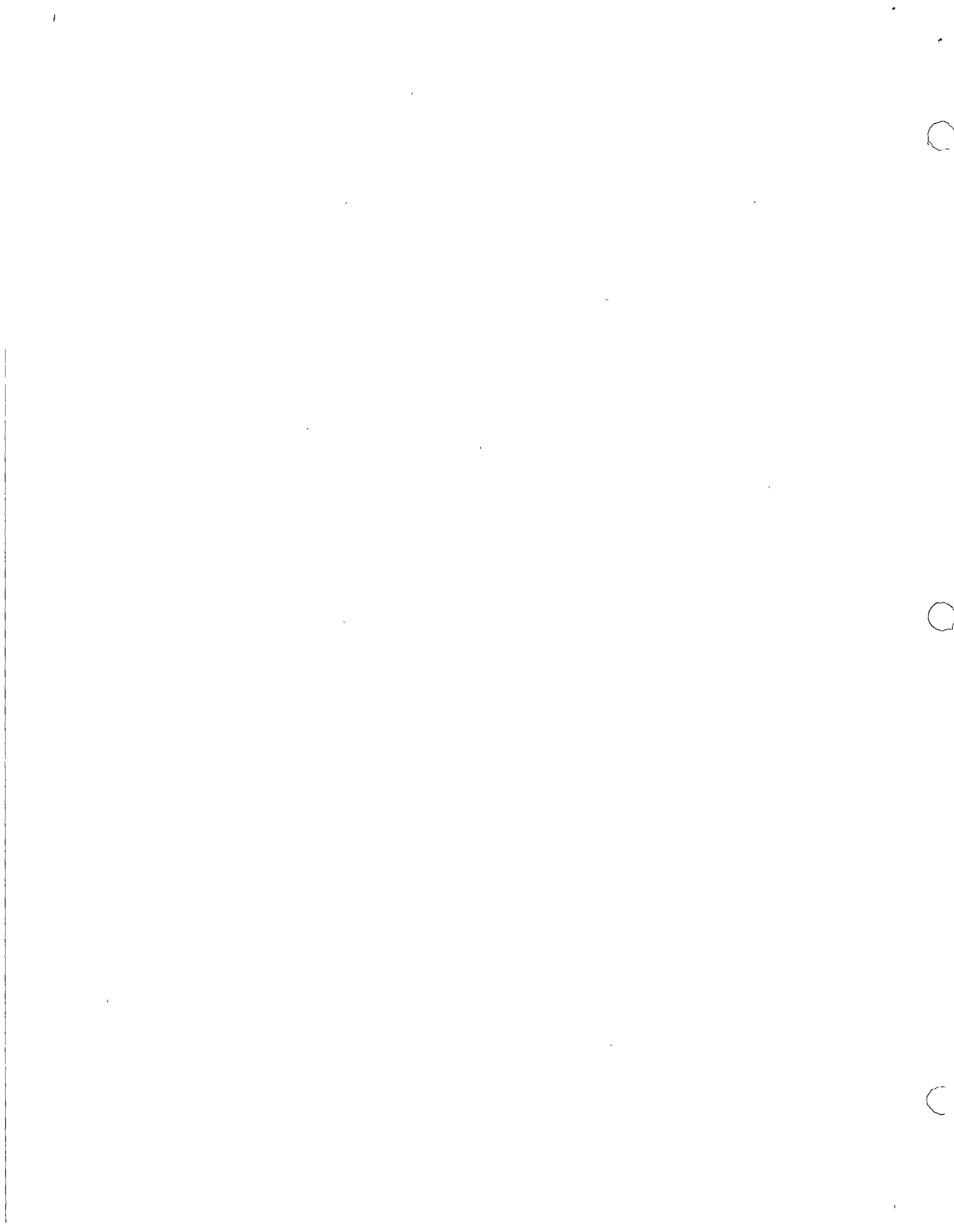
| E = 105.4 S = 35.2 | | AVANCE DE LA CORTINA | | | | | | | |
|-----------------------|---------------|----------------------|---|---|------|------|------|------|------|
| AÑO | COSTO RETRASO | ELEVACION (m) | | | | | | | |
| 1 | 4.0 | 52 | - | - | 39.2 | 39.2 | 39.2 | 39.2 | 39.2 |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5 | 17.3 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 96.3 | 102.4 | 107.3 | 112.6 | 118.3 | 130.7 |
|---|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|

| E = 107.0 S = 36.8 | | AVANCE DE LA CORTINA | | | | | | | |
|-----------------------|---------------|----------------------|---|---|---|------|------|------|------|
| AÑO | COSTO RETRASO | ELEVACION (m) | | | | | | | |
| 1 | 4.0 | 52 | - | - | - | 40.8 | 40.8 | 40.8 | 40.8 |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 240 | - | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|----|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 50 | 18.2 | ELEVACION PROBABLE DE FUNDACION (m) | 96.4 | 100.0 | 104.1 | 108.3 | 114.0 | 127.1 |
|----|------|-------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|

| E = 103.0 S = 38.4 | | AVANCE DE LA CORTINA | | | | | | | |
|-----------------------|---------------|----------------------|---|---|---|---|------|------|------|
| AÑO | COSTO RETRASO | ELEVACION (m) | | | | | | | |
| 1 | 4.0 | 52 | - | - | - | - | 42.4 | 42.4 | 42.4 |
| 2 | 1.0 | 150 | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 0 | 210 | - | - | - | - | - | - | - |
| 4 | | | | | | | | | |



PERIODO DE RETORNO EN AÑOS

50 25 12 10

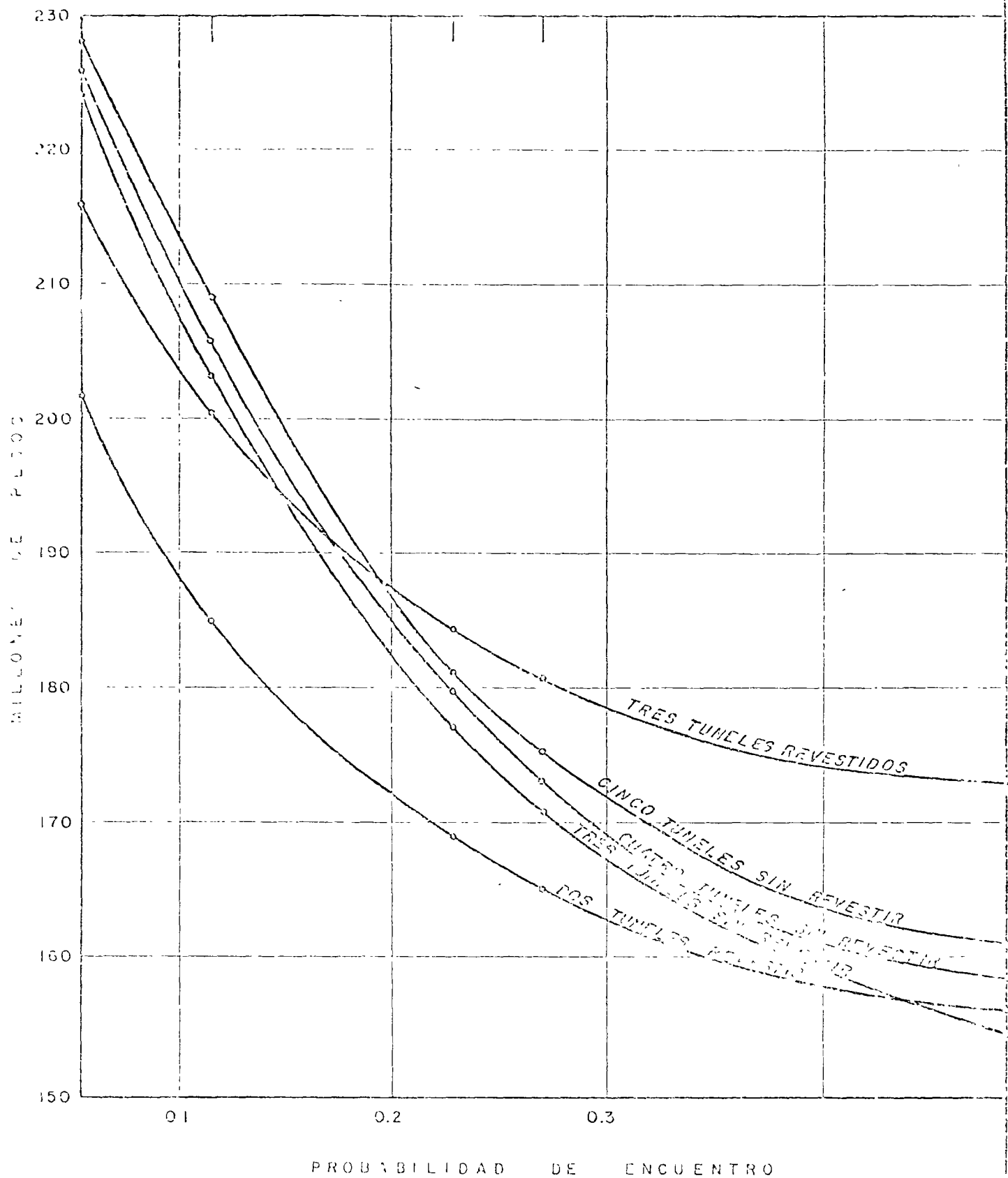


FIG 35.- CORTINA DE CONCRETO

COSTOS + RIESGOS



50

25

12.5

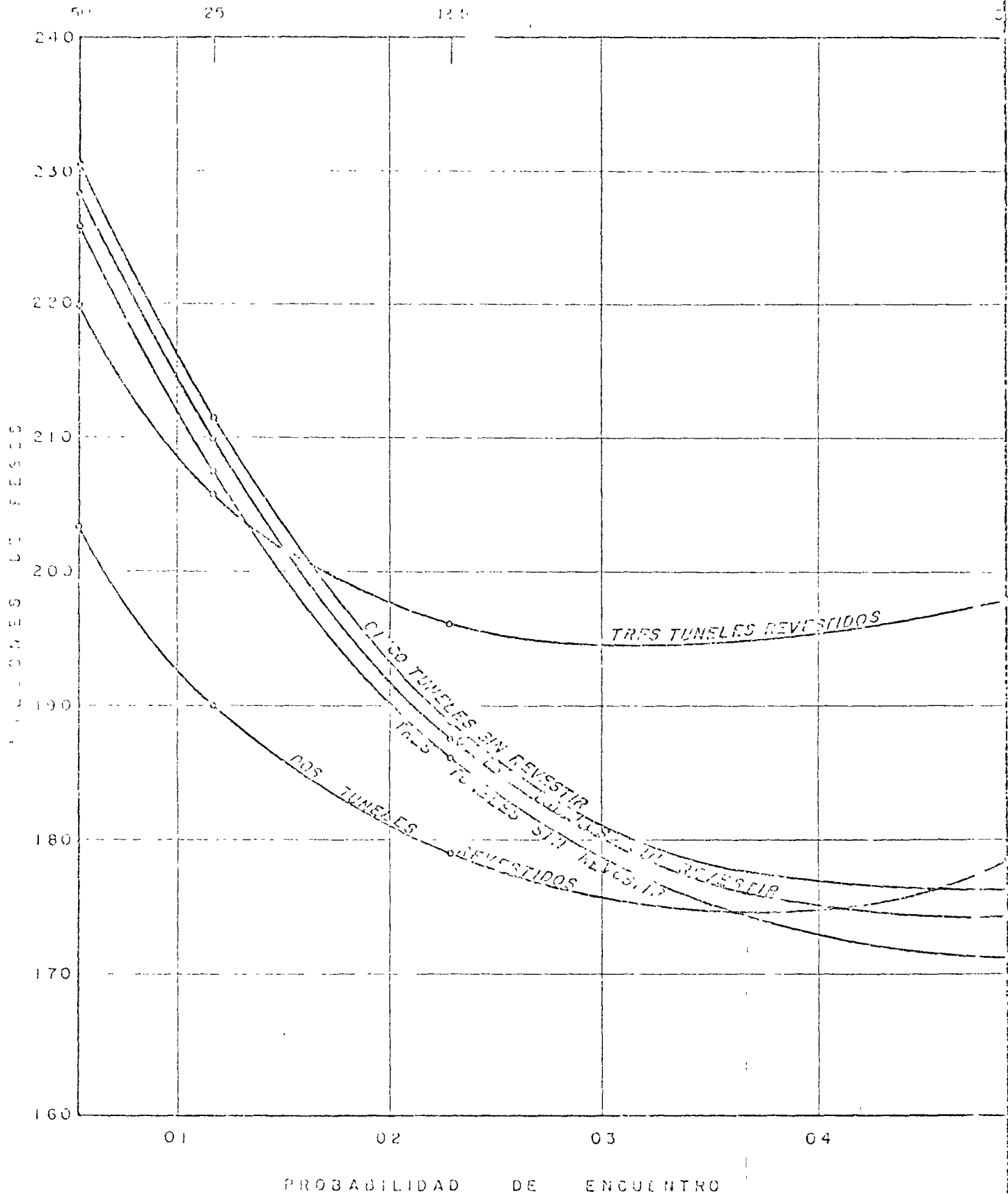
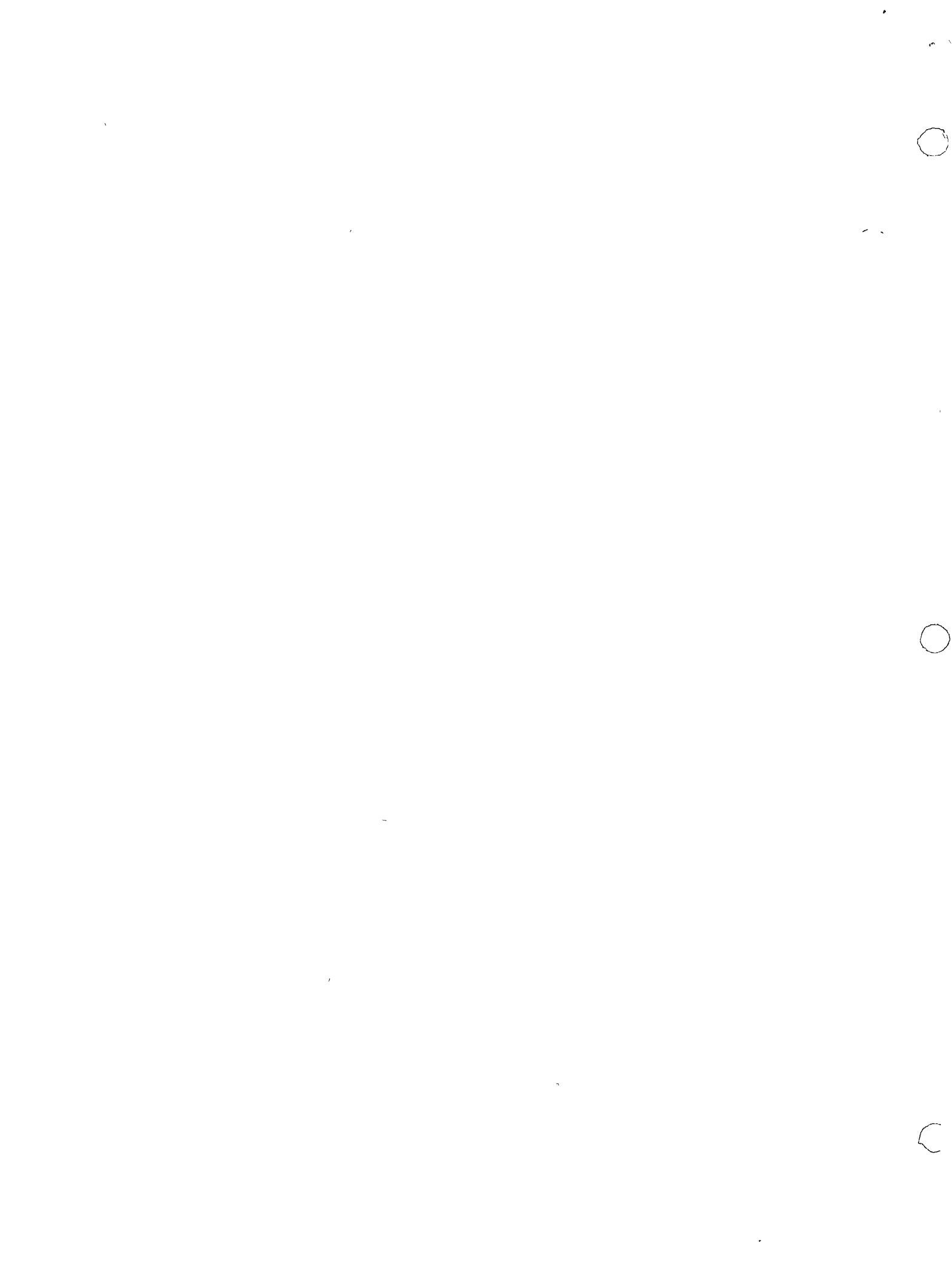


FIG. 36.- CORTINA DE CONCRETO
COSTOS + (2) RIESGOS



6. CONCLUSIONES GENERALES DEL ESTUDIO

6.1. PRESA DE MATERIALES GRADUADOS

El estudio de la obra de desvío consta de 3 partes fundamentales, que son:

Estudio Hidrológico

Estudio Hidráulico

Estudio Técnico-Económico

De los cuales se concluye lo siguiente:

Estudio Hidrológico.-

Para el cálculo de las avenidas máximas esperadas tanto en magnitud como en forma, fué necesario realizar análisis estadísticos de la información. Para la magnitud, se empleó cuatro métodos estadísticos de uso común para -- este tipo de trabajos. Método de Cumbel, Método de Nash, Método de Levediev y Método de Warecoun (Water Resources Council). De éstos se seleccionó el Método de Nash como el más confiable, aplicado a la estación Carrizal.

La forma de los hidrogramas se obtuvo en base a la información registrada y calculada en la estación El Capomal. De estos registros y haciendo un análisis de correlogramas de ellos en el tiempo, se concluye que la forma más crítica en que se presentan estas avenidas para el funcionamiento de la obra de desvío, es en forma de trenes horarios. Por consiguiente se seleccionó la -avenida de Septiembre de 1965, que caracteriza en buena forma el tipo de avenida. Esta fué mayorada para los diferentes períodos de recurrencia considerados.

Estudio Hidráulico.

Consistió principalmente en la simulación de tránsito de avenidas, para diferentes períodos de retorno y una gama de diámetro entre 10 y 18 metros. - De estos tránsitos se construyen curvas de isogasto para cinco alternativas base que son: 2 y 3 túneles revestidos, 3, 4 y 5 túneles sin revestir.

Las características hidráulicas de los túneles son:

Longitud promedio = 1 000/túnel

n (revestidos) = 0.015

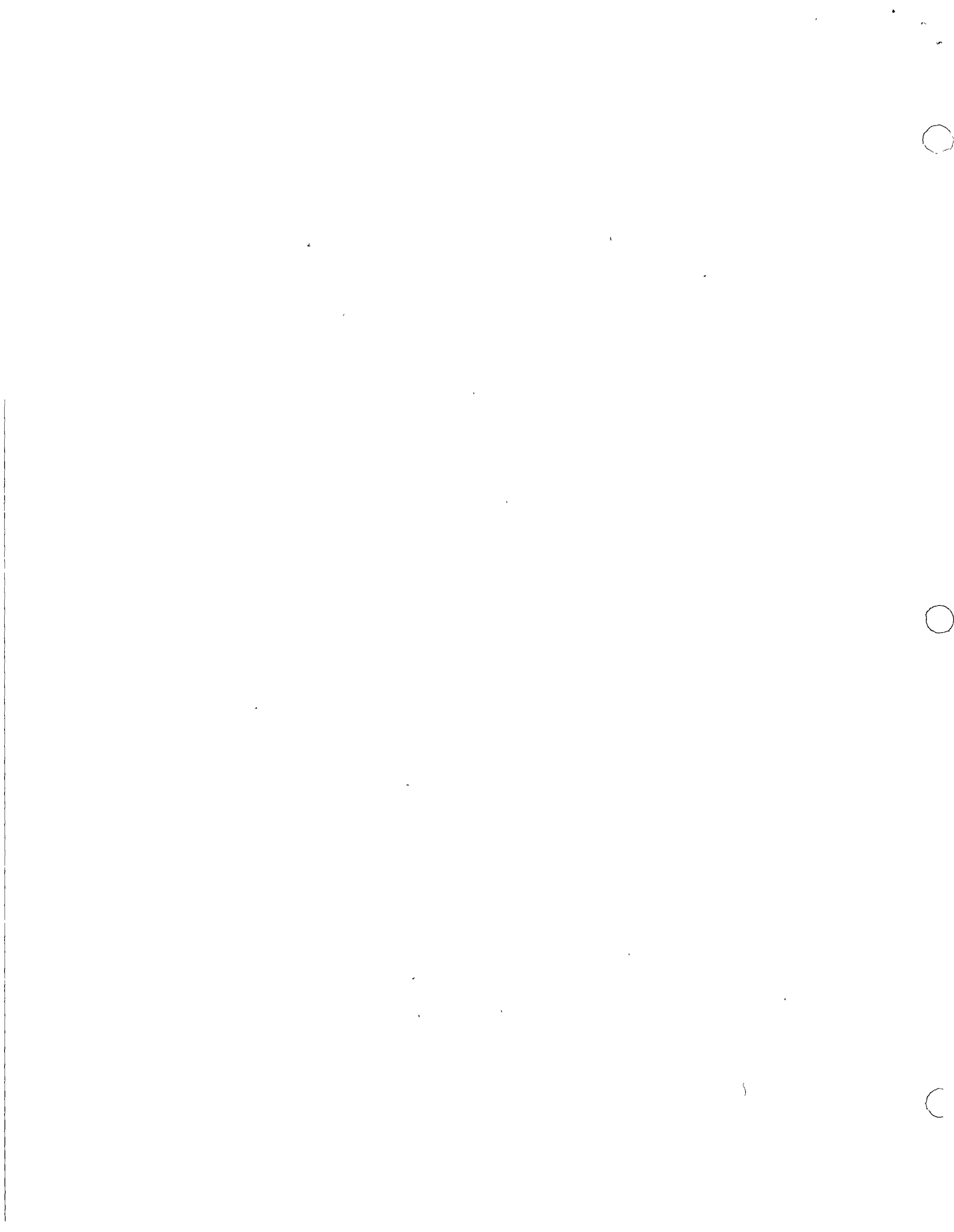
n (sin revestir) = 0.030

velocidad permisible (revestidos) 20 m/s

velocidad permisible (no revestidos) = 10 m/s

De los tránsitos se observa lo siguiente: que el funcionamiento hidráulico para túneles revestidos aumenta en un 30% la eficiencia hidráulica, dando así, ataguías más chicas para alternativas equivalentes que en túneles sin revestir o para ataguías de igual altura menores diámetros. Así mismo, se observa que casi no existe regulación por vaso, pues estas son del 15% o menores.

Por otra parte las restricciones de velocidad acotan en gran forma las posibilidades de soluciones para las cinco alternativas.



La sensibilidad con respecto a las velocidades es alta, así como para cambios pequeños en la velocidad. Se disminuye la zona factible de soluciones para cada gasto de diseño.

De una alternativa de menor número de túneles a una mayor, para una misma -- área hidráulica se observa que la carga hidráulica para manejar un mismo volúmen, aumenta, ya que la longitud sujeta a pérdidas por fricción es mayor.

Estudio Técnico-Económico

Para llegar a una evaluación de las alternativas en forma adecuada, se hizo necesario el elaborar precios índices para los dos conceptos centrales de la obra de desvío, ataguías y túneles. Los precios convenidos para este efecto son, para ataguías \$ 35.29/m³ colocado, para túneles sin revestir \$ 242.75/m³ y revestidos de \$ 367.43/m³ de excavación de túneles. Estos precios índice engloban en forma general los conceptos que intervienen en la obra.

Las curvas de isogasto resultado de los tránsitos y las nuevas curvas de presupuesto o de isocosto resultantes del análisis de precios índice, presentan en forma muy práctica, la observación de todas las posibles alternativas en todos sus aspectos. Es decir, las curvas de isogasto nos proporciona todas las combinaciones de túnel y ataguía para los diferentes gastos asociados a un período de recorno, dentro de la gama antes mencionada.

Sobre las curvas de isogasto se sobreponen las curvas de isocosto que nos dan el presupuesto óptimo para cualquier alternativa.



Una vez establecido el mapa de soluciones factibles y el costo en que incurre, se obtienen aquellas combinaciones que son las económicamente óptimas. Pero dicha optimización se ve afectada por la restricción técnica de velocidad permisible, disminuyendo la zona factible de soluciones e incrementando el costo de un 2.3% para períodos de retorno chico hasta cerca de un 64% para el caso de períodos de retorno grandes y también el número de túneles se ve aumentado.

La sensibilidad es alta en cambios pequeños de la velocidad para túneles revestidos, pues la velocidad de 20 m/s puede verse afectada por la calidad del acabado del revestimiento. Si la velocidad resultante aumenta, la zona de posibilidad se desplaza hacia costos menores, de lo contrario si la velocidad disminuye la zona se restringe en mucho y el costo aumenta.

Para el caso de túneles sin revestir, la velocidad de 10 m/s puede verse incrementada y disminuir los costos dependiendo de las condiciones naturales de la roca. Por otro lado el que la velocidad disminuya, restringe bastante la zona factible, con lo cual los costos se incrementan grandemente, lo que conducirá seguramente a túneles revestidos.

Las líneas propuestas sobre el mapa de soluciones para las alternativas, con las velocidades de 10 y 20 m/s. Nos indican las soluciones óptimas de factibilidad técnica y sus costos. A estos costos para que sean comparables y tomar la decisión, se les adicionan los valores esperados de daño. (Riesgos).

La cuantificación de daños es dependiente del ritmo de construcción alcanzado para cuando se presente un escurrimiento con características que lo produzcan.



Los rendimientos considerados son de dos tipos unos para una alternativa conservadora y otra optimista.

Los rendimientos promedios que se concluyen para las dos alternativas son:

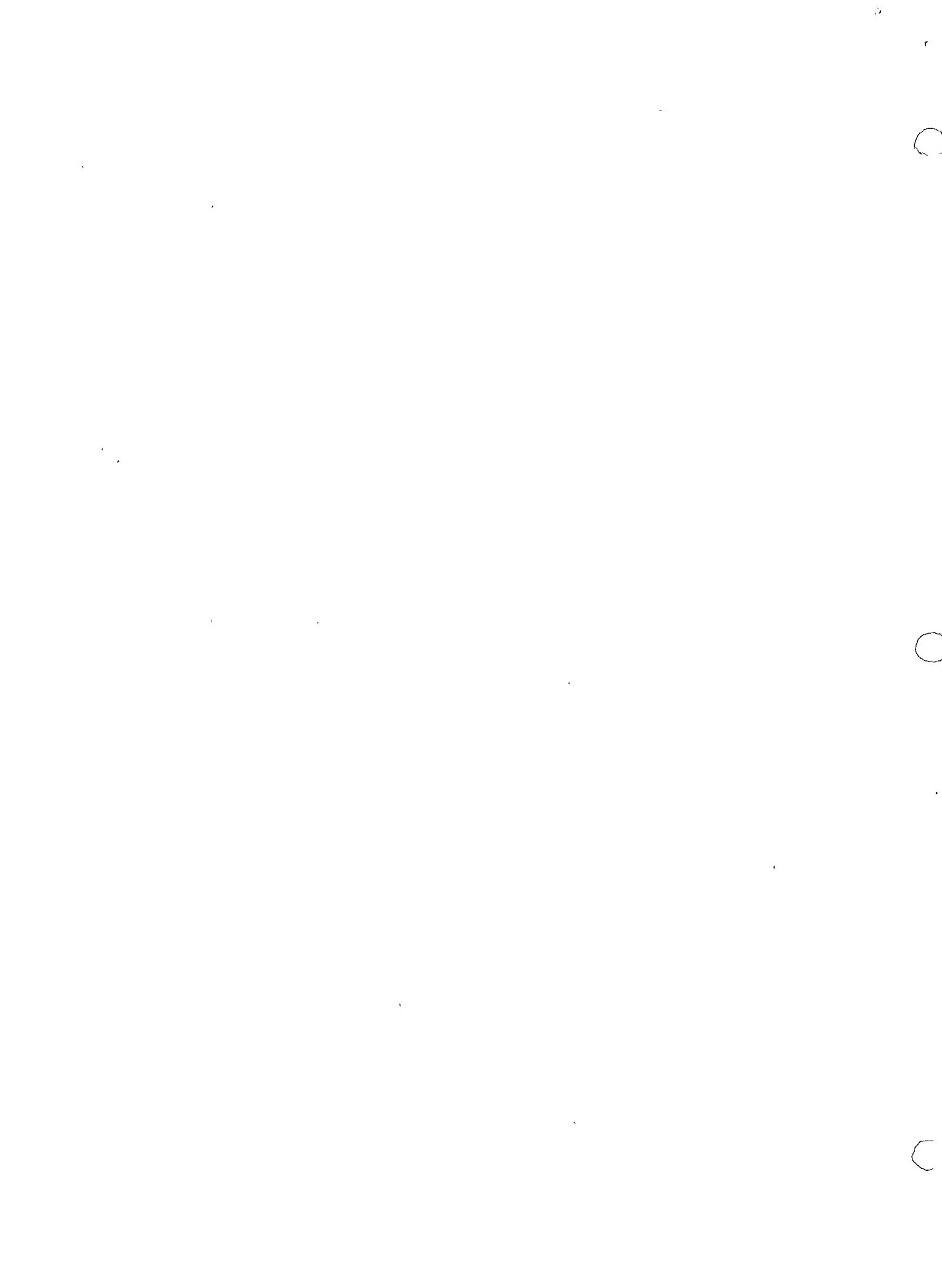
| | Conservadora | Optimista |
|-------------|----------------------------|----------------------------|
| Contina | 12 000 m ³ /día | 16 000 m ³ /día |
| atagüía | 12 000 m ³ /día | 12 000 m ³ /día |
| túneles | 6.81 m/día/4 frentes | 10.23 m/día/4 frentes |
| Terminación | Septiembre 1980 | Marzo 1978 |

El cálculo de daños considerando estos rendimientos, con la posibilidad de que se presenten en las épocas de lluvias de los tres primeros años después del inicio de la construcción.

Con el valor esperado de los daños, se obtienen los riesgos que en orden cronológico, considerando que el riesgo disminuye son:

- 3 túneles revestidos (mayor riesgo)
- 2 túneles revestidos
- 3 túneles sin revestir
- 4 túneles sin revestir
- 5 túneles sin revestir (menor riesgo)

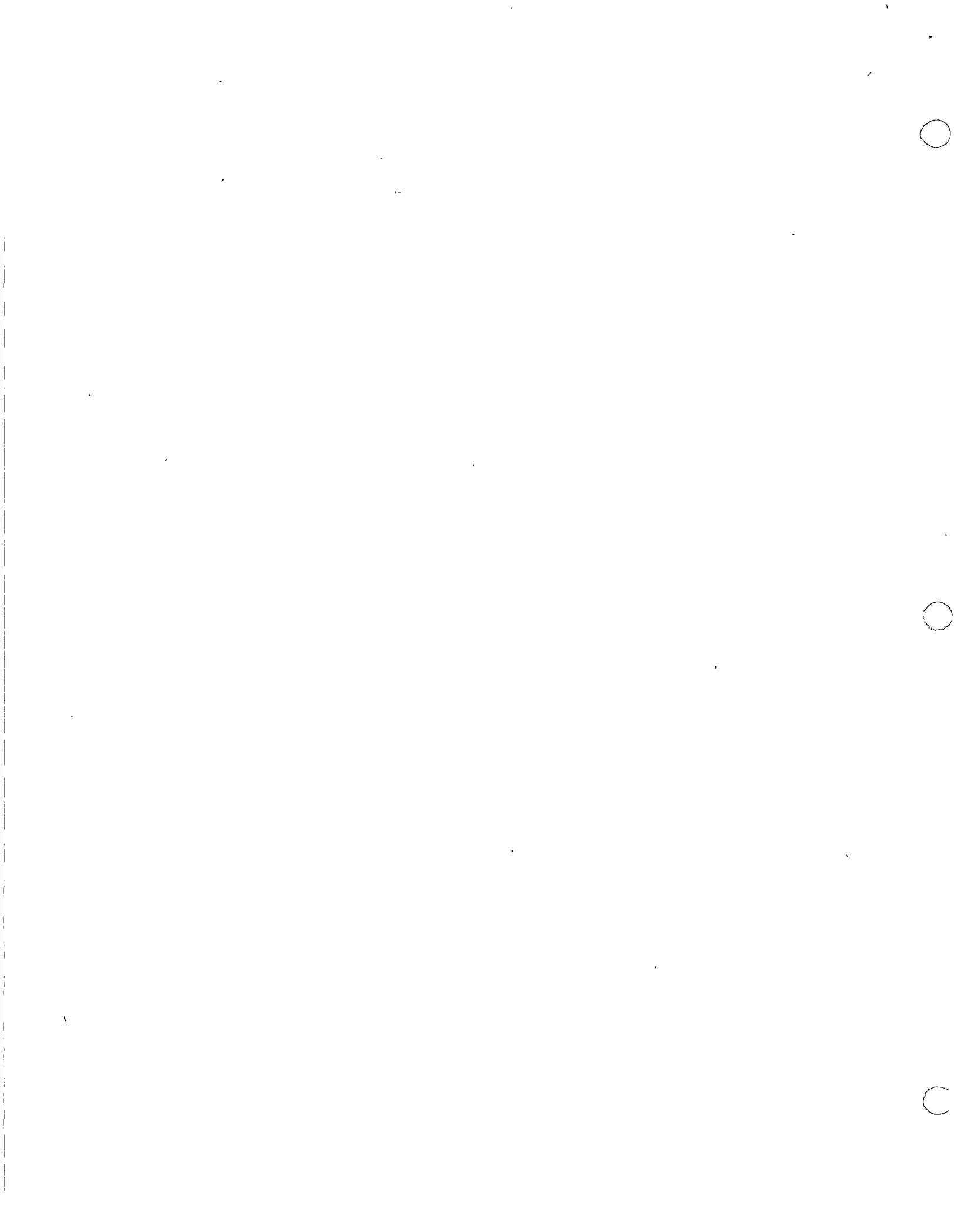
La decisión óptima, es la del costo total mínimo, que considera el costo por obra más los riesgos que involucra dicha obra. Resultando lo siguiente:



1. La alternativa más económica para períodos de retorno mayores de 10 años es la de dos túneles revestidos. Pues para períodos de retorno de 25 años ya su costo disminuye en 16 millones sobre cualquier alternativa.
2. Para períodos de retorno menores de 10 años, las alternativas por orden económico son las siguientes: 4 túneles sin revestir, 5 túneles sin revestir, 3 túneles sin revestir, 2 y 3 túneles revestidos.
3. Finalmente se observa que los períodos de retorno óptimos para cada alternativa, son:

| ALTERNATIVA | Tr Optimo (años) | Costo+Riesgo \$ millones | Altura de Ataguía (m) | Diámetro de Túnel |
|-------------------|---------------------|--------------------------------|-----------------------------|----------------------|
| 2 T. Revestidos | 12.5 | 197 | 40.40 | 15 |
| 3 T. Revestidos | 12.5 | 213 | 42.0 | 12 |
| 3 T. Sin Revestir | 10 | 193 | 34.5 | 15.5 |
| 4 T. Sin Revestir | 8 | 191 | 28.0 | 13.5 |
| 5 T. Sin Revestir | 8 | 192 | 27.0 | 12.0 |
| 14 m Ø | 9.0 | 199 | | |

Se tiene que una solución recomendable es la de dos túneles revestidos, que proporciona períodos adecuados, considerando como adecuados a períodos mayores de 15 años.



Se contempla otra alternativa para el caso en que diámetros mayores de 14 m se descarten por restricciones constructivas. Pero resulta más cara para períodos de retorno adecuados.

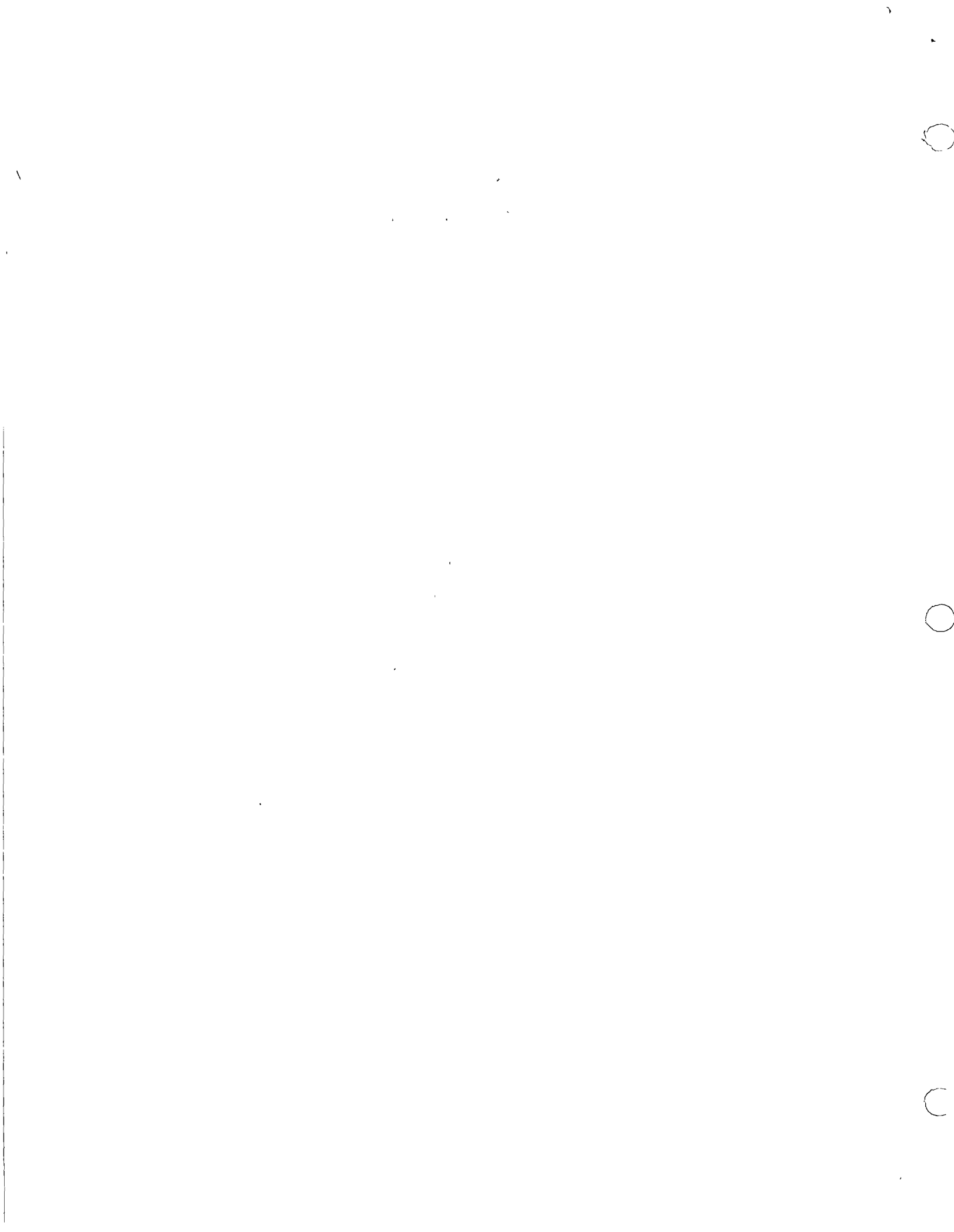
Se puede apuntar la seguridad que adquieren paulatinamente algunas alternativas especialmente aquellas de ataguías de poca altura, al ser rebasados el nivel de la ataguía por el avance en la cortina. Por lo que se podría llegar a plantear desde un punto de vista muy conservador alguna posibilidad que contemple este factor.

La sensibilidad de la alternativa de túneles con revestimiento, es muy notable para cambios en la velocidad permisible, notándose lo siguiente:

DOS TUNELES REVESTIDOS

COSTOS (Millones) -
VELOCIDADES

| Tr | 20 | 18 | 15 (m/s) |
|------|-----|-----|----------|
| 5 | 133 | 134 | 154 |
| 12.5 | 158 | 168 | > 230 |
| 25 | 179 | 189 | |
| 50 | 199 | 210 | |



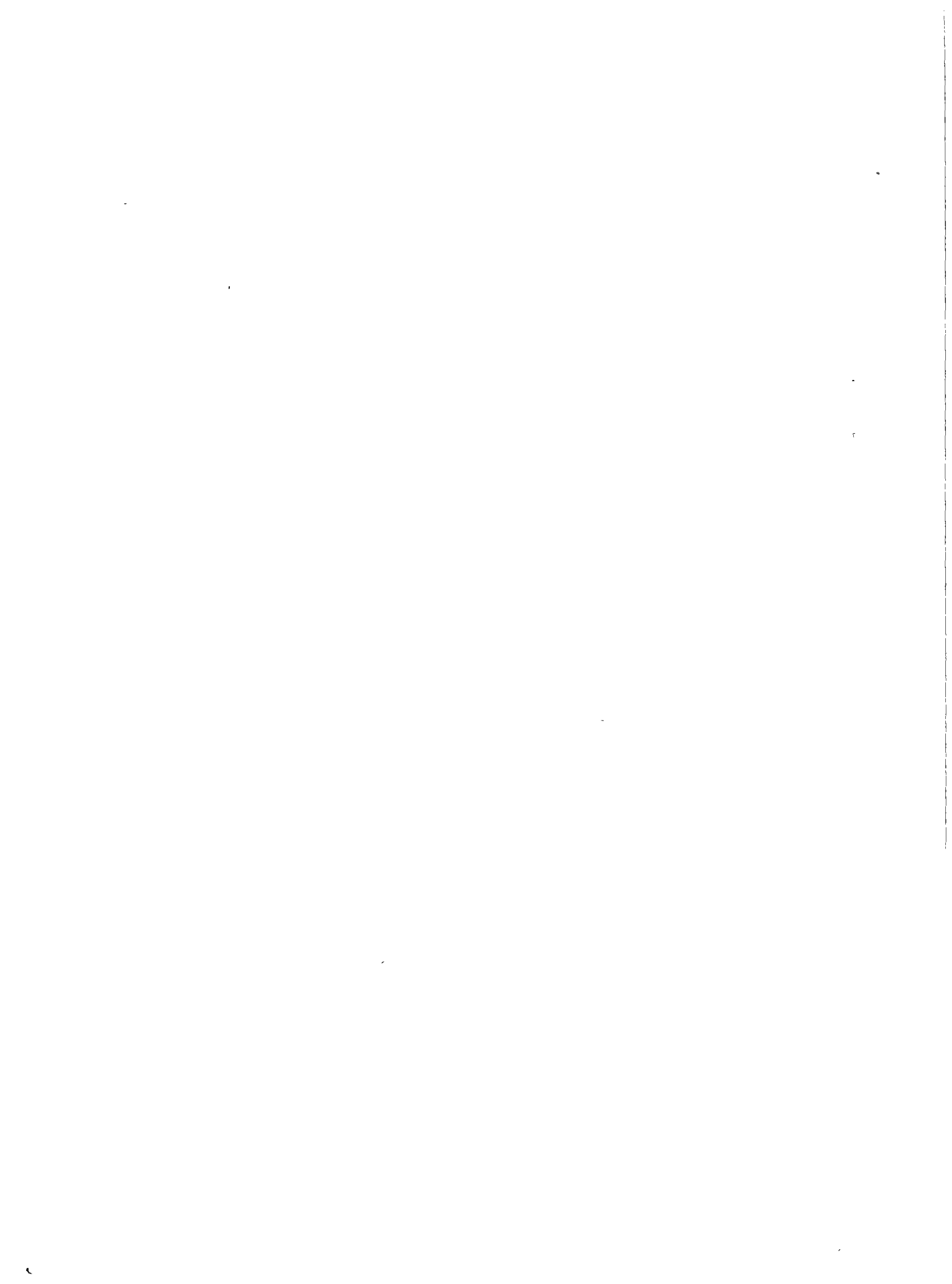
TRES TUNELES REVESTIDOS
 COSTOS (Millones)
 VELOCIDADES

| | | | |
|------|-----|-------|-------|
| Tr | 20 | 18 | 15 |
| 5 | 148 | 153 | 167 |
| 12.5 | 173 | 185 | 205 |
| 25 | 193 | 209 | 234 |
| 50 | 214 | 232 | 269 |
| 100 | 239 | > 300 | > 300 |

La sensibilidad de las cinco alternativas de los puntos de restricción técnica con respecto a los puntos de tecnología óptima, son en costo las siguientes:

A L T E R N A T I V A

| Tr | TUNELES REVESTIDOS | | TUNELES SIN REVESTIR | | |
|------|--------------------|-------|----------------------|--------|-------|
| | DOS | TRES | TRES | CUATRO | CINCO |
| 5 | 1.023 | 1.020 | 1.442 | 1.256 | 1.250 |
| 12.5 | 1.053 | 1.061 | 1.518 | 1.434 | 1.354 |
| 25 | 1.084 | 1.065 | 1.680 | 1.576 | 1.473 |
| 50 | 1.105 | 1.070 | 1.692 | 1.621 | 1.50 |
| 100 | | 1.081 | | 1.653 | 1.643 |
| 500 | | 1.096 | | | |



La sensibilidad para los precios índice aplicadas a las cantidades de obra, no afectan en mucho las decisiones, pues la curvatura de las curvas en este rango de optimalidad es poca. Además los precios no deberán variar en mucho y la pendiente de la curva de isocostos no varía.

RESTRICCION A 14 m DE DIAMETRO

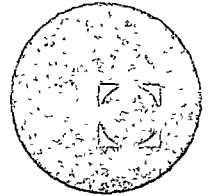
Dado que en el país, no se han construido túneles mayores de 14 m de diámetro, por desconocer su comportamiento, se piensa pueda ser una restricción del estudio. Pero el análisis a este problema muestra que:

| | | |
|-------------------------------------|------|----|
| TRES TUNELES SIN REVESTIR PROTEGE | Tr < | 5 |
| CUATRO TUNELES SIN REVESTIR PROTEGE | Tr = | 10 |
| CINCO TUNELES SIN REVESTIR PROTEGE | Tr = | 30 |
| DOS TUNELES REVESTIDOS PROTEGE | Tr = | 11 |
| TRES TUNELES REVESTIDOS PROTEGE | Tr = | 85 |





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

METODOS Y TECNICAS DE ANALISIS

ING. FRANCISCO TELLEZ G.
NOVIEMBRE, 1977



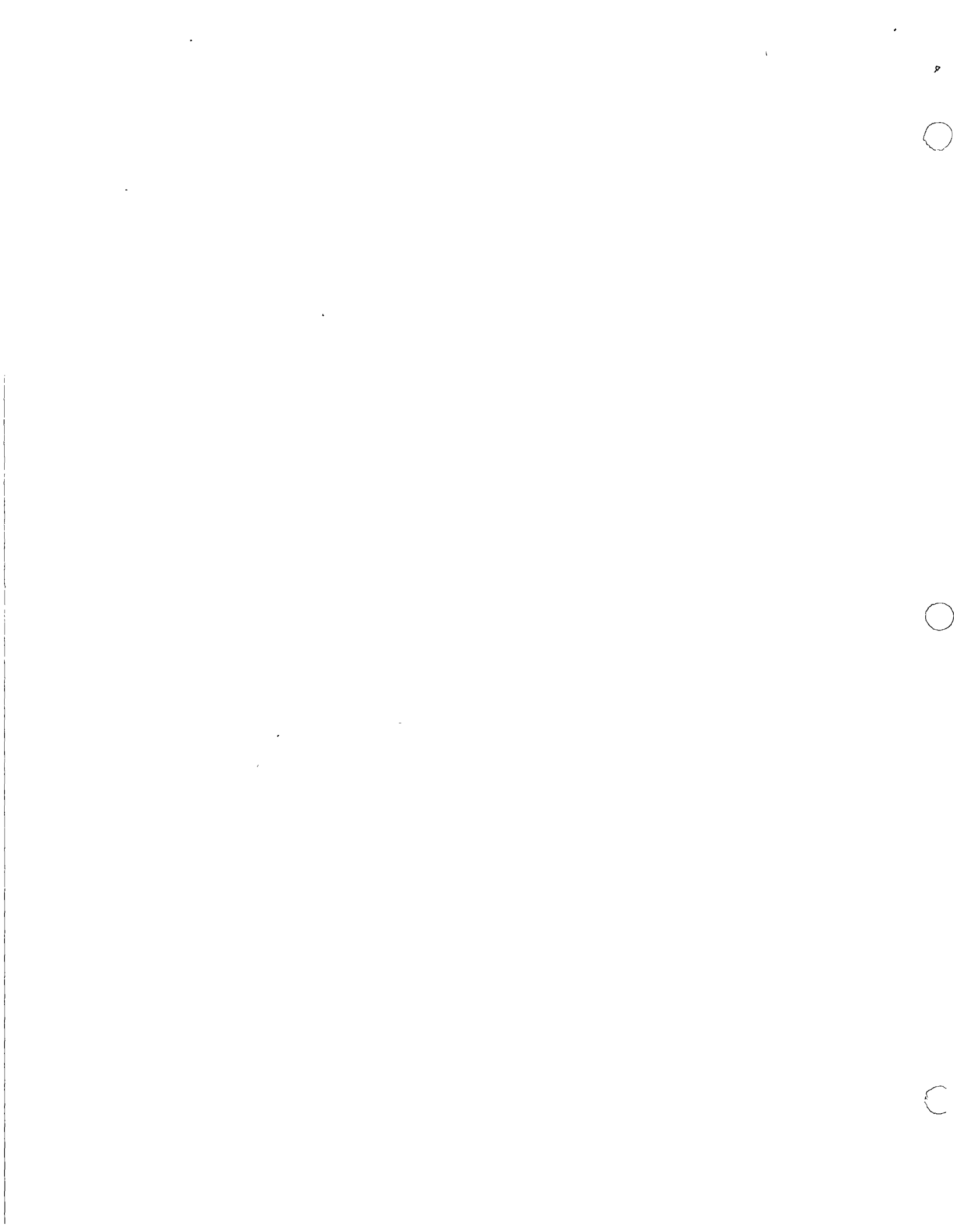
2.1 SIMULACION

La técnica de simulación ha sido una herramienta importante para el diseñador, ya sea simulando el vuelo de un aeroplano en un túnel de viento, o simulando una disposición de equipo con modelos a escala de maquinaria. Con la ayuda de las computadoras digitales se ha podido simular experimentos en forma rápida, por lo que esta técnica a cobrado un incremento importante para el investigador de operaciones. Estas notas tratan de presentar el modelo matemático que permite simular los principales datos hidrológicos y climatológicos que se presentan en los Aprovechamientos Hidraulicos.

2.1.1 Series cronológicas

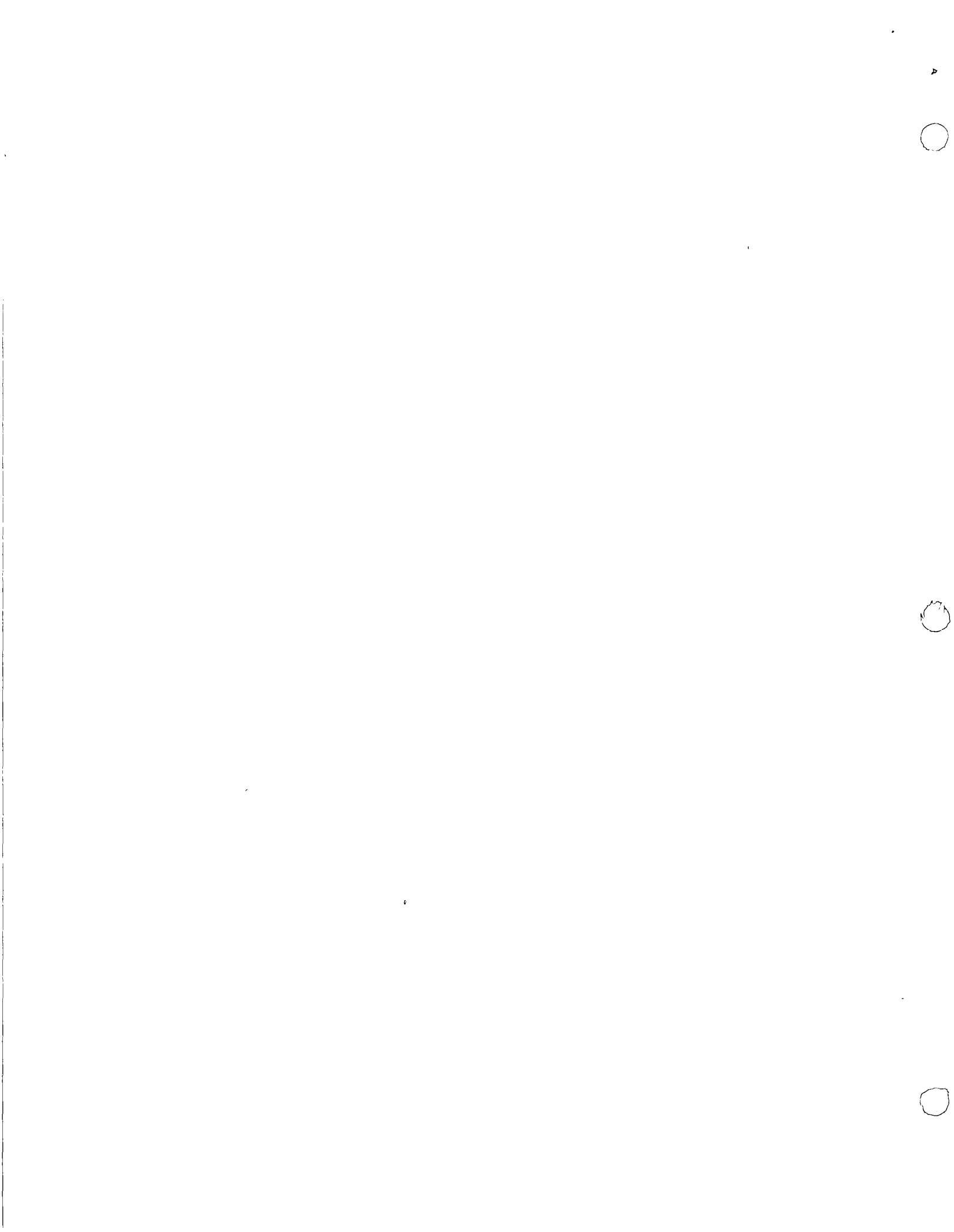
Una serie de datos que estan ligados con el tiempo y que tienen la peculiaridad de ser aleatorios definen lo que se llama una serie cronológica. Por lo tanto, los datos hidrológicos y climatológicos constituyen una serie cronológica.

La teoría de las series cronológicas permite hacer predicciones futuras a corto y a largo plazo de estos datos y consiste en lo siguiente: determinar a partir de los datos existentes las funciones determinísticas del tiempo y la parte aleatoria que los componen.

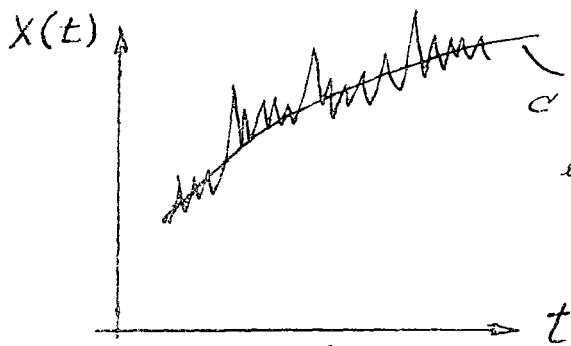


Las funciones determinísticas del tiempo son: la me
dia y la tendencia, las componentes cíclicas y la autorre--
gresividad. A la parte aleatoria de los datos se le acostum
bra llamar "ruido" y las predicciones futuras podrán reali-
zarse cuando se logre establecer un modelo matemático que -
permita generar el ruido.

A continuación se presenta la forma de obtener las
funciones determinísticas del tiempo de la serie cronologi
ca $X(t)$



Media y Tendencia



¿la media de la serie va creciendo con el tiempo o permanecer constante?

aceptemos que la serie original es igual a

$$X(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + \underbrace{y(t)}_{\text{error}}$$

Aplicando la técnica de los mínimos cuadrados se pueden obtener los valores de las constantes a_i

$$\begin{pmatrix} N & \sum t & \sum t^2 & \dots \\ \sum t & \sum t^2 & \sum t^3 & \dots \\ \sum t^2 & \sum t^3 & \sum t^4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum X \\ \sum Xt \\ \sum Xt^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

si resulta $a_0 \gg \gg \gg a_1$ entonces $a_0 = \frac{\sum X}{N}$ y se puede

concluir que la serie tiene tan solo media (la media permanece constante en el tiempo) En meteorología es común que no exista tendencia

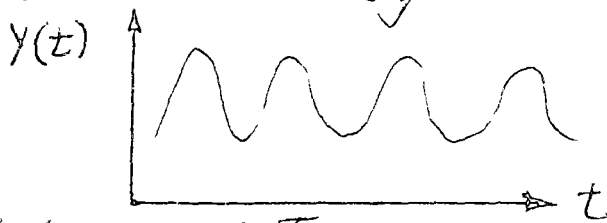
Quitamos de la serie original la media y la tendencia

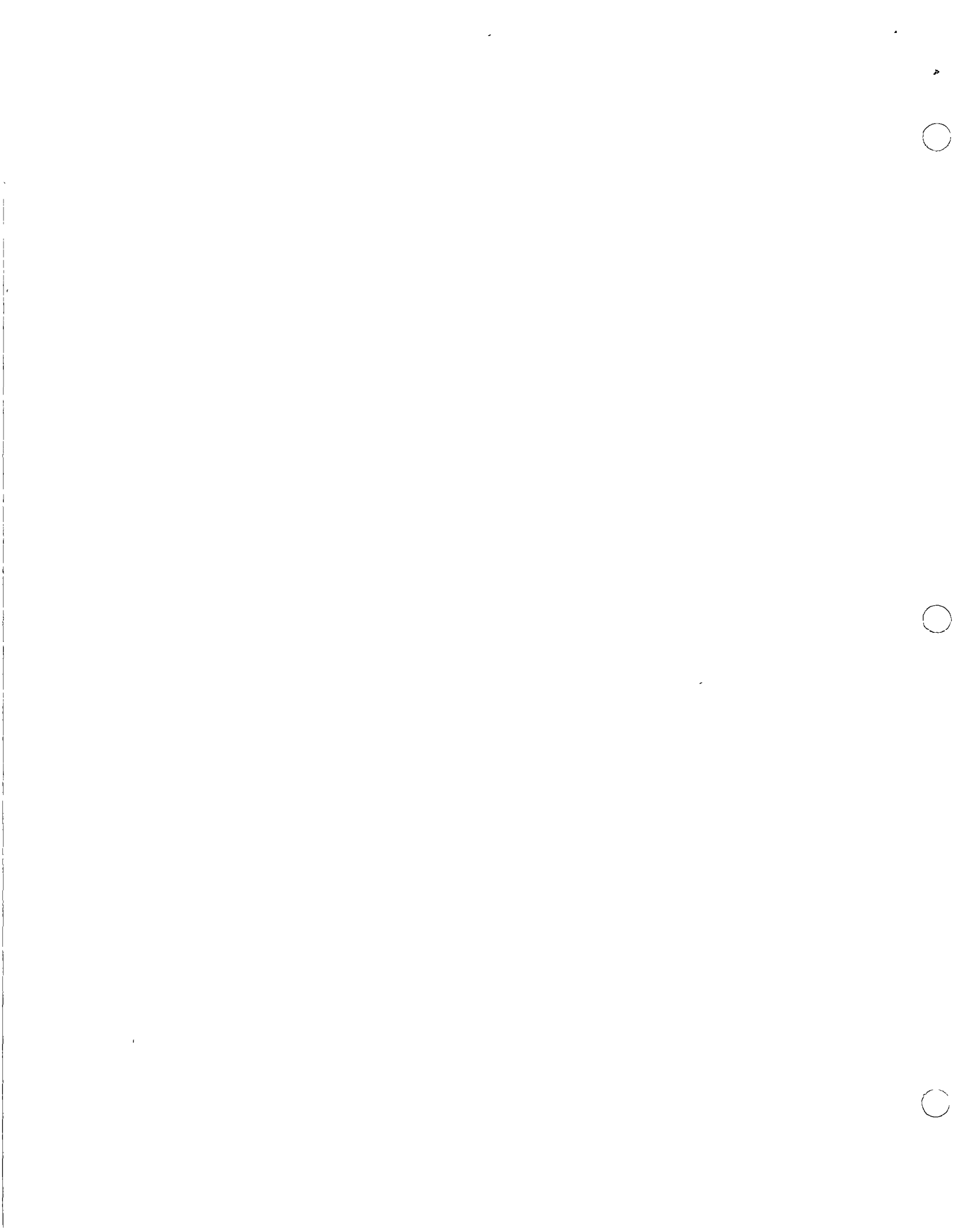
$$y(t) = X(t) - \underbrace{(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)}_{\text{tendencia}}$$

\uparrow
media

a esto se le llama "remoción de la media y la tendencia de la serie original"

Si al remover la media y la tendencia queda así la serie





Componentes cíclicas

Asumamos que

$$y(t) = \underbrace{b_1^c \sin \theta_1 t}_{B_1 X_1(t)} + \underbrace{b_1^s \cos \theta_1 t}_{B_2 X_2(t)} + \underbrace{b_2^c \sin \theta_2 t}_{B_3 X_3(t)} + \underbrace{b_2^s \cos \theta_2 t}_{B_4 X_4(t)} + z(t)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{error}}$

aplicando las técnicas de mínimos cuadrados se pueden obtener los coeficientes B_i que representan las amplitudes de las componentes cíclicas

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{y1} \\ C_{y2} \\ C_{y3} \\ C_{y4} \end{pmatrix}$$

donde:

$$C_{11} = \sum_{i=1}^N X_1(t_i) X_1(t_i) = \sum_{i=1}^N \sin(\theta_1 t_i) \sin(\theta_1 t_i)$$

$$C_{22} = \sum_{i=1}^N \cos(\theta_1 t_i) \cos(\theta_1 t_i)$$

$$C_{12} = \sum_{i=1}^N \sin(\theta_1 t_i) \cos(\theta_1 t_i)$$

$$C_{y1} = \sum_{i=1}^N y(t_i) \sin(\theta_1 t_i)$$

$$C_{y2} = \sum_{i=1}^N y(t_i) \cos(\theta_1 t_i)$$

Para obtener el desfase asumamos que

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 \sin(\theta_1 t + k_1) + a_2 \sin(\theta_2 t + k_2) + z(t) = \\ &= a_1 [\sin(\theta_1 t) \cos k_1 + \cos(\theta_1 t) \sin k_1] + a_2 [\sin(\theta_2 t) \cos k_2 + \\ &\quad + \cos(\theta_2 t) \sin k_2] + z(t) \end{aligned}$$

Al comparar esta expresión con la antes considerada para $y(t)$ se tiene que

$$y(t) = \underbrace{a_1 \cos k_1}_b^c \sin(\theta_1 t) + \underbrace{a_1 \sin k_1}_b^s \cos(\theta_1 t) + \dots$$



hagamos

$$(B_1)^2 + (B_2)^2 = a_1^2 (\cos^2 k_1 + \sin^2 k_1) = a_1^2$$

de donde

$$a_1 = \sqrt{(B_1)^2 + (B_2)^2}$$

que es la amplitud de la primera componente cíclica. En forma semejante la amplitud de la segunda componente cíclica es

$$a_2 = \sqrt{(B_3)^2 + (B_4)^2}$$

Además, realicemos la siguiente operación

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{a_1 \sin k_1}{a_1 \cos k_1} = \tan k_1$$

de donde

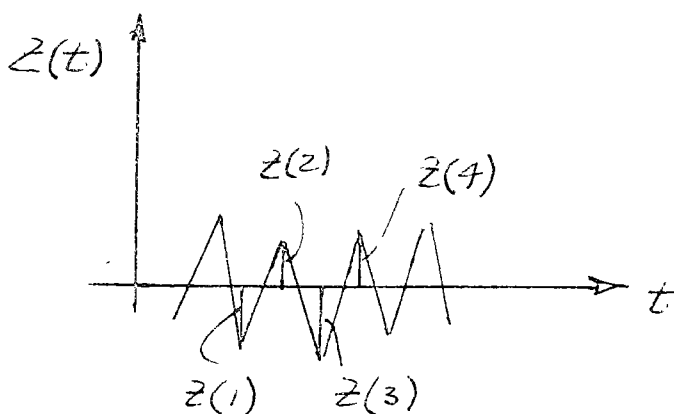
$$k_1 = \arctan \frac{B_2}{B_1}$$

que es el desfase de la primera componente cíclica. Análogamente el desfase de la segunda componente cíclica es

$$k_2 = \arctan \frac{B_4}{B_3}$$

Componente autorregresiva

Si se remueven las componentes cíclicas de la serie $y(t)$ se obtiene la nueva serie $z(t)$



¿ $z(4)$ depende de $z(3)$, $z(2)$, etc. ?

Aceptemos que

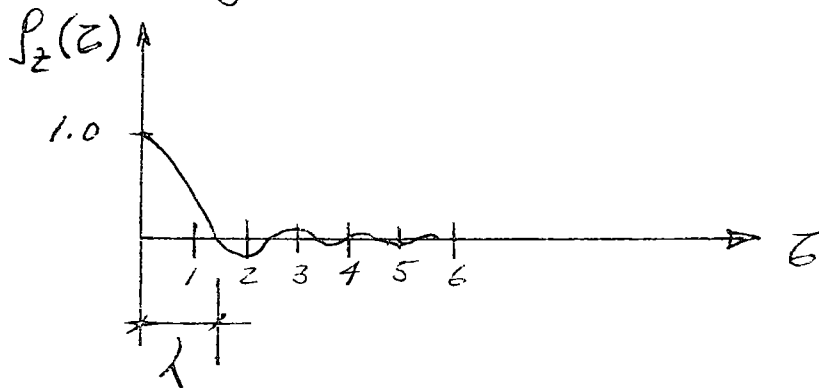
$$z(t) = a_1 z(t-1) + a_2 z(t-2) + a_3 z(t-3) + \dots + \epsilon$$

aplicando las técnicas de mínimos cuadrados se pueden obtener los valores de las constantes a_i

$$\begin{Bmatrix} C_z(0) & C_z(1) & C_z(2) & \dots \\ C_z(1) & C_z(0) & C_z(1) & \dots \\ C_z(2) & C_z(1) & C_z(0) & \dots \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_z(1) \\ C_z(2) \\ C_z(3) \end{Bmatrix}$$



donde $C_z(\tau)$ es la covarianza de z de orden τ
 Si formamos el correlograma de la serie $Z(t)$ se tendría



Donde el correlograma corta por primera vez al eje τ define el valor del primer alcance, λ . Este parámetro nos indica la autorregresividad de la serie. En la figura $1 < \lambda < 2$ lo que indica que tan solo existe autorregresividad con el valor anterior. En hidrología es común que no exista autorregresividad en más de la primera etapa.

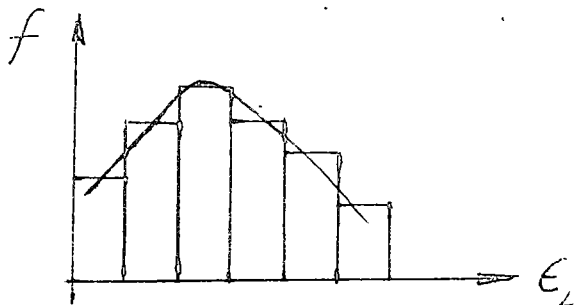
El modelo quedaría así:

$$X(t) = \bar{X} + \sum_{j=1}^N b_j \sin(\theta_j t + k_j) + \sum_{k=1}^N a_k z(t-k) + \epsilon$$

ruido

Análisis del ruido

El modelo matemático que permite generar el ruido se apoya en los modelos que proporcionan la teoría de probabilidades. Por lo tanto, con los valores ϵ_i del ruido se construye un histograma



Este histograma nos da la clave para asociarlo con alguna de las distribuciones de probabilidades conocidas. Por ejemplo, el histograma de la figura tiene tipo de normal, lo aplicamos la prueba χ^2 y comprobamos la hipótesis. Si resulta cierta nuestro modelo quedaría así:

$$X(t) = \bar{X} + \sum_{j=1}^N b_j \sin(\theta_j t + k_j) + \sum_{k=1}^M a_k z(t-k) + \epsilon \text{ (NOR, } \bar{\epsilon}, S_{\epsilon}^2)$$



Otra vez que se tiene el modelo se pueden hacer predicciones a corto plazo o simulaciones. Si al realizar predicciones resultan ruidos negativos muy grandes tales que $X(t)$ sea negativo; aunque comprobamos que el ruido tenía distribución normal, tendríamos que cambiar a una distribución lognormal.

Si se tuviera más de una serie.

$$X(t) = \bar{X} + \sum_{j=1}^N b_j \sin(\theta_j t + k_j) + \sum_{k=1}^N a_k z(t-k) + E(N, \bar{X}, \bar{S}_X^2)$$

$$Y(t) = \bar{Y} + \sum_{r=1}^R c_r \sin(\theta_r t + k_r) + \sum_{q=1}^R d_q z(t-q) + E(N, \bar{Y}, \bar{S}_Y^2)$$

Los ruidos pueden estar correlacionados y por se puede proceder como antes para trabajar los dos modelos. Se necesita aplicar la teoría de las componentes principales a los dos ruidos resultantes de las dos series.



2.1 2. COMPONENTES PRINCIPALES.

1. INTRODUCCION

En este artículo se describen los estudios que el Instituto de Ingeniería ha realizado, por encargo de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, para disponer de un modelo matemático que, simulando las más variadas condiciones de funcionamiento de un sistema hidrológico, permita tomar decisiones sobre las obras que han de realizarse, para lograr un mejor aprovechamiento del agua.

Basado en las ideas expuestas por Kendall ⁽¹⁾ y siguiendo los criterios de Hufschmidt y Fiering ^(2,3) este escrito tiene como meta aclarar y difundir las ideas de estos investigadores, adaptándolas a nuestro medio, con la esperanza de interesar a los ingenieros mexicanos que se dedican a este tipo de actividades.

2. PLANTEAMIENTO

Supóngase, con relación a la figura 1, que en la cuenca B se dispone de una presa en b y se desea tomar la decisión de construir una presa c, o bien una a, o modificar la presa b, o más aún, hacer alguna combinación de todas estas obras para lograr la mejor y más

C

0

0

económica forma de utilizar el agua.

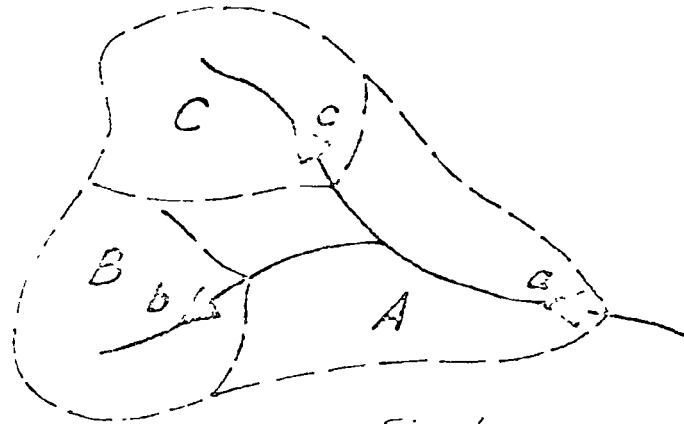


Fig. 1

El procedimiento tradicional consistiría en suponer que se realizan determinados tipos de obra en los sitios a, b y c, para después analizar el funcionamiento de ellos durante los n años de registro simultáneo disponible en los tres sitios. Este enfoque, con ser el mejor de los clásicos, indicaría exclusivamente qué habría pasado en el sistema si hubieran existido las obras propuestas. Después deberían modificarse las características de las obras proyectadas para, nuevamente, efectuar el análisis del funcionamiento conjunto con los mismos datos disponibles, y así sucesivamente hasta encontrar la mejor combinación para lo que habría sucedido si las obras construidas con ese plan hubieran funcionado en ese periodo.

El nuevo enfoque propuesto permite, en cambio, hacer cada uno de los análisis con una gran variedad de posibles condiciones de funcionamiento, que puedan ocurrir en el futuro. Condiciones estadísticamente equivalentes a las del periodo de n años de observación, es decir, según el nuevo enfoque, los datos son una sola de las muchas posibles muestras que se pueden seleccionar para analizar una cualquiera de las combinaciones en proyecto, de tal manera que con el nuevo método la decisión se toma una vez que se conoce un buen número de posibles condiciones de funcionamiento y no las de una sola muestra aislada.

Conviene hacer notar que esta ampliación no requiere de mayor número de datos que los del procedimiento clásico sino que, simplemente, requiere transferirlos de otra manera.



Aparentemente, el volumen de datos por manejar hace inabordable el procedimiento; sin embargo, con las nuevas computadoras este problema ya no existe y si alguna dificultad hubiera, ésta sería la de comprender el fundamento matemático del nuevo enfoque. Este artículo pretende ayudar a esta comprensión.

3. MANEJO DE DATOS

Llámense $x_1(t)$ los gastos medios registrados en a, $x_2(t)$ en b y $x_3(t)$ en c, durante el periodo de observación; estos gastos podrían ser, por ejemplo, los medios mensuales.

Si el problema fuera tratar exclusivamente con un solo registro, $x_2(t)$ por ejemplo, éste se podría analizar como una serie cronológica y estudiar si tiene una cierta tendencia, componentes cíclicas, si es un proceso autorregresivo, etc., en los términos que se describirán en un segundo artículo, para después hacer las posibles simulaciones de condiciones igualmente factibles a la muestra estudiada. Sin embargo, si deben tratarse los tres * registros simultáneamente, no es posible hacer las simulaciones en forma independiente, toda vez que por la proximidad de las cuencas, los escurrimientos no serán, en general, estadísticamente independientes, de tal suerte que los unos se verán afectados por los otros. Esto implica hacer un análisis llamado de componentes principales, con el que se determinan tres nuevas series cronológicas, $\xi_j(t)$, independientes entre sí y que se pueden tratar por separado, de tal forma que permiten simular a las $x_j(t)$ originales tomando en cuenta sus interrelaciones.

4. ANALISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

Es conveniente trabajar con variables estandarizadas, esto es, si se designa con m_j a la media de $x_j(t)$ y con S_j a su desviación estándar, se puede hacer la transformación

* Se habla de solo tres registros por simplicidad; pero obviamente, estas ideas se pueden generalizar a un mayor número de registros.



$x_i = \frac{\lambda_i - m_i}{S_i}$ con lo cual se dispone de una población $x_i(t)$ con media cero y variancia uno.

Supóngase ahora que existen tres variables $\xi_i(t)$ tales que

$$S(I) \begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & (I) \\ \xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & (II) \\ \xi_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & (III) \end{cases}$$

o en notación matricial

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o en notación matricial sintética

$$\xi = Ax$$

La variancia de ξ_1 , según S(I)(I) será

$$V_1 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \xi_1^2(t) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^3 a_{1i}^2 x_i^2 + \sum_{i \neq j} a_{1i} a_{1j} x_i x_j \right) \quad (2)$$

que, llamando $c_{ij} = \frac{1}{n} \sum x_i x_j$, puede escribirse

$$V_1 = a_{11}^2 c_{11} + a_{12}^2 c_{22} + a_{13}^2 c_{33} + 2a_{11} a_{12} c_{12} + 2a_{11} a_{13} c_{13} + 2a_{12} a_{13} c_{23} \quad (2')$$

Si se impone la limitación

$$\phi = 1 - (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) = 0 \quad (3)$$

siendo λ un operador indeterminado de Lagrange, véase Sokolnikoff ⁽⁴⁾, se puede decir que se

re maximizar V_1 , definida por 2' con la limitación 3, se requiere que

$$\frac{\partial V_1}{\partial a_{1i}} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial a_{1i}} = 0 \quad (4)$$



en donde a_{ji} representa a a_{11}, a_{12} ó a_{13} . Así, 4 implica el sistema

$$S(2) \begin{cases} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = \lambda a_{11} & (I) \\ a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23} = \lambda a_{12} & (II) \\ a_{11}c_{13} + a_{12}c_{23} + a_{13}c_{33} = \lambda a_{13} & (III) \end{cases}$$

Es obvio que dando a las variancias de ξ_2 y ξ_3 idéntico tratamiento se puede llegar a uno cualquiera de los tres sistemas

$$S(3) \begin{pmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22}-\lambda & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix} = 0$$

en donde a_{ji} representa a a_{1i}, a_{2i} ó a_{3i}

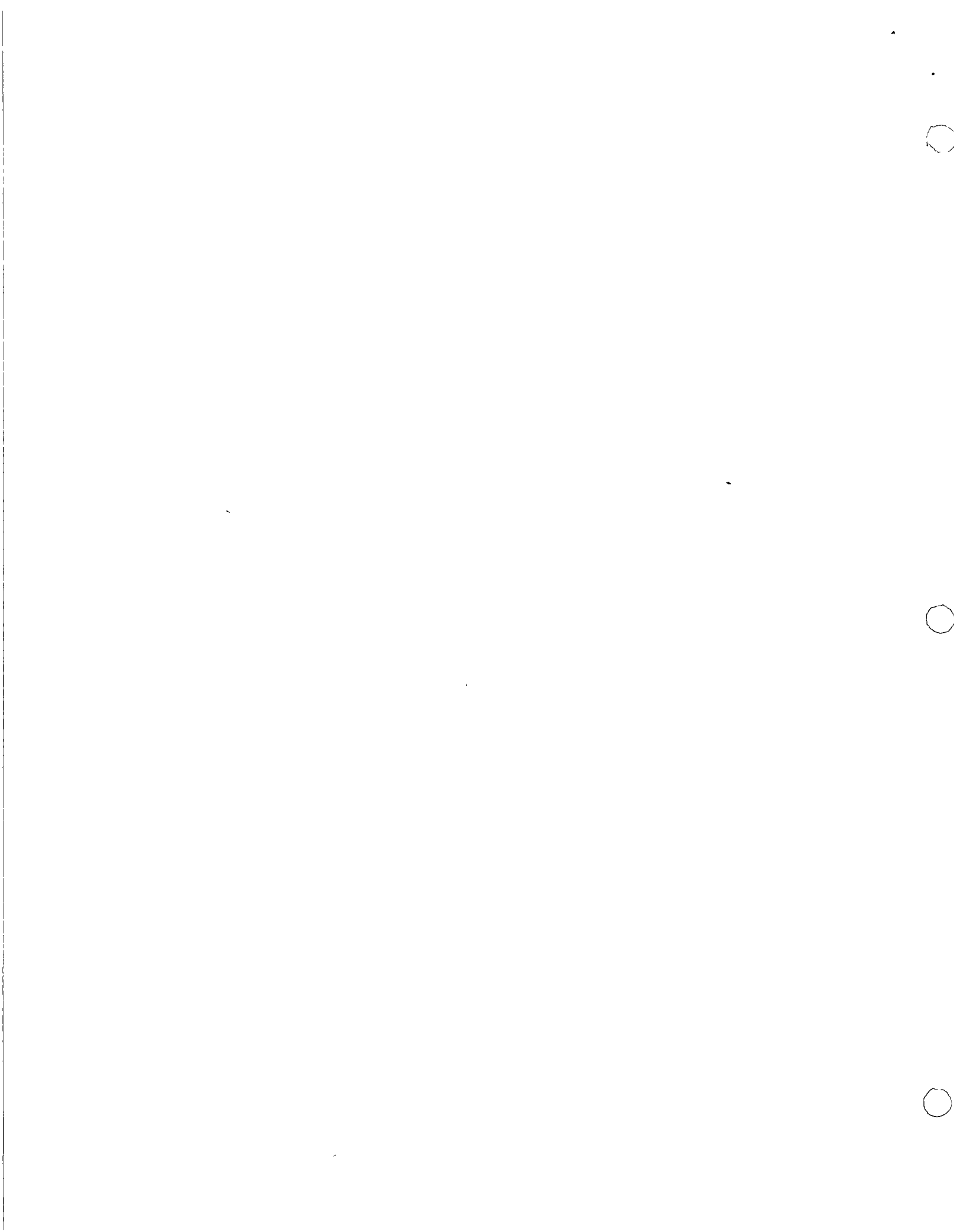
Para que cualquiera de los sistemas S(3) tenga solución distinta de la trivial, el determinante de las C debe anularse; esto implica una ecuación de tercer grado en λ , de la forma

$$-\lambda^3 + (c_{11} + c_{22} + c_{33}) \lambda^2 + f(c, d) = 0 \tag{5}$$

Si las raíces de 5 son λ_1, λ_2 y λ_3 , del teorema fundamental del álgebra de berá tenerse

$$-\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \lambda^2 + \phi(\lambda_1, \lambda_2) = 0 \tag{6}$$

de donde se concluye, comparando 5 y 6 que



en donde a_{ji} representa a a_{11}, a_{12} ó a_{13} . Así, 4 implica el sistema

$$S(2) \begin{cases} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = \lambda a_{11} & (I) \\ a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23} = \lambda a_{12} & (II) \\ a_{11}c_{13} + a_{12}c_{23} + a_{13}c_{33} = \lambda a_{13} & (III) \end{cases}$$

Es obvio que dando a las variancias de ξ_2 y ξ_3 idéntico tratamiento se puede llegar a uno cualquiera de los tres sistemas

$$S(3) \begin{pmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22}-\lambda & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix} = 0$$

en donde a_{ji} representa a a_{1i}, a_{2i} ó a_{3i}

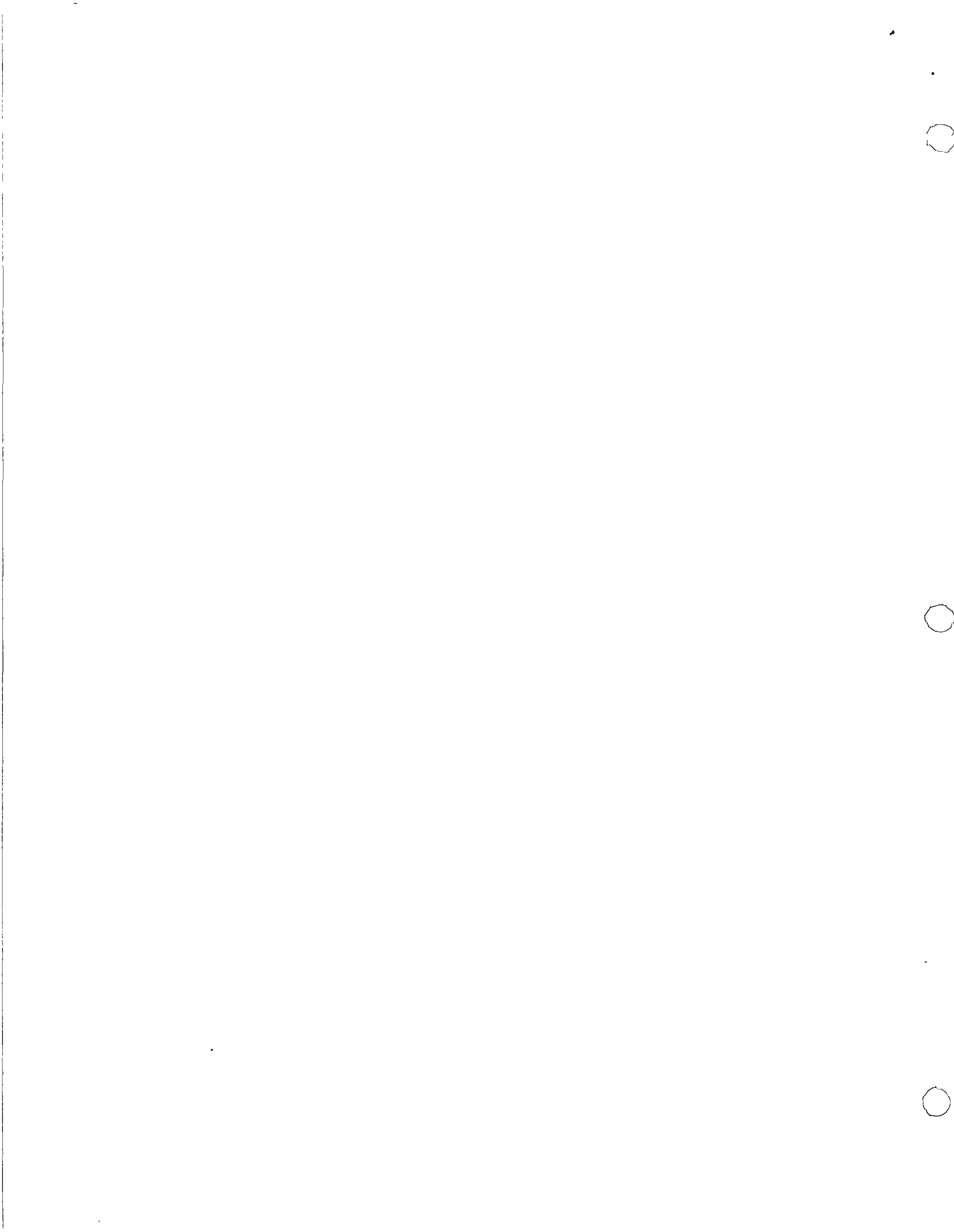
Para que cualquiera de los sistemas S(3) tenga solución distinta de la trivial, el determinante de las C debe anularse; esto implica una ecuación de tercer grado en λ , de la forma

$$-\lambda^3 + (c_{11} + c_{22} + c_{33}) \lambda^2 + f(c, d) = 0 \tag{5}$$

Si las raíces de 5 son λ_1, λ_2 y λ_3 , del teorema fundamental del álgebra de berá tenerse

$$-\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \lambda^2 + \phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0 \tag{6}$$

de donde se concluye, comparando 5 y 6 que



$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \quad R(1)$$

pues debe recordarse que por ser estandarizadas las X_i , $C_{ii} = 1$

Supóngase ahora que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ y que se asocia λ_1 al sistema $S(2)$ que permite determinar a_{1i} , λ_2 al que permite determinar a_{2i} y λ_3 al que determina a_{3i} . En el primero de estos sistemas deberá tenerse

$$S(4) \begin{cases} (c_{11} - \lambda_1) a_{11} + c_{12} a_{12} + c_{13} a_{13} = 0 & (I) \\ c_{12} a_{11} + (c_{22} - \lambda_1) a_{12} + c_{23} a_{13} = 0 & (II) \\ c_{13} a_{11} + c_{23} a_{12} + (c_{33} - \lambda_1) a_{13} = 0 & (III) \end{cases}$$

Para evaluar a_{11} y a_{12} , por ejemplo, se puede elegir libremente a_{13} ,

así, de $S(4)(I)$ y $S(4)(II)$

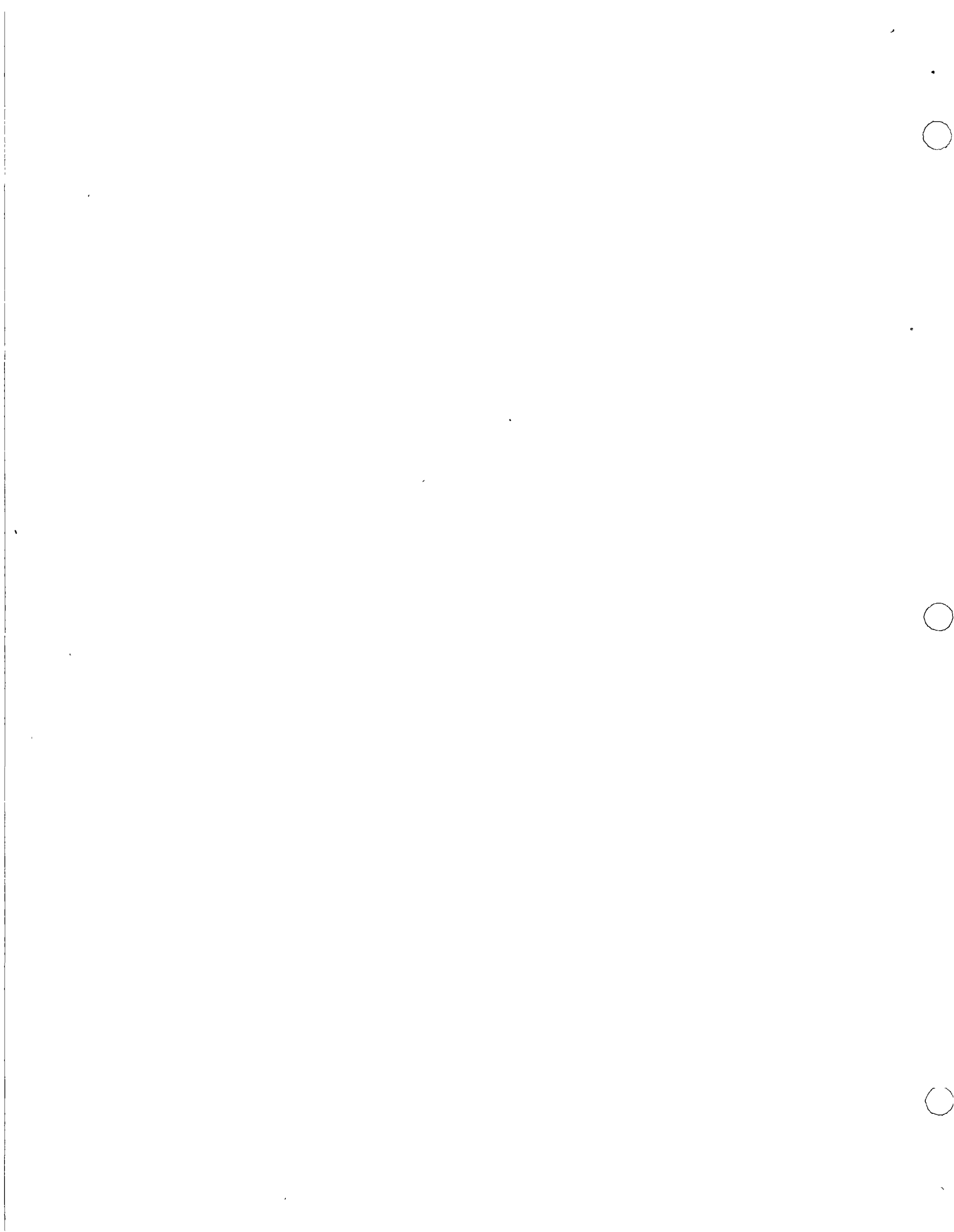
$$a_{11} = a_{13} \left| \begin{array}{cc|cc} -c_{13} & c_{12} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ -c_{23}(c_{22} - \lambda_1) & & c_{12} & (c_{22} - \lambda_1) \end{array} \right|$$

$$= a_{13} \left| \begin{array}{cc|cc} -c_{13} & c_{12} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ -(c_{33} - \lambda_1) c_{23} & & c_{13} & c_{23} \end{array} \right| \quad (7)$$

$$y \quad a_{12} = a_{13} \left| \begin{array}{cc|cc} (c_{11} - \lambda_1) & -c_{13} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ c_{12} & -c_{23} & c_{12} & (c_{22} - \lambda_1) \end{array} \right| \quad (8)$$

La condición impuesta por la doble igualdad 7

$$\left| \begin{array}{cc|cc} -c_{13} & c_{12} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ -c_{23}(c_{22} - \lambda_1) & & c_{13} & c_{23} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc|cc} (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} & (c_{11} - \lambda_1) & c_{12} \\ c_{12}(c_{22} - \lambda_1) & & -c_{13} & c_{12} \\ & & -(c_{33} - \lambda_1) & c_{23} \end{array} \right| = 0$$



es precisamente la de nulidad del determinante de los sistemas S(3), como fácilmente puede comprobarlo el lector que tenga la paciencia necesaria. Así de 7 y 8 se concluye que de los tres elementos a_{11} , a_{12} y a_{13} se puede escoger uno arbitrariamente y quedar definidos los otros dos.

Supóngase que se escogió $a_{13} = \alpha$, y que de acuerdo con 7 y 8 resultan ser $a_{11} = \beta$ y $a_{12} = \gamma$, con lo cual podría escribirse

$$\beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2 = \delta^2 \quad (9)$$

en donde, siendo δ un número distinto de cero, puede escribirse

$$\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2 = 1 \quad (10)$$

y seleccionar así para a_{13} el valor $\frac{\alpha}{\delta}$, en vez del original α , para cumplir con la restricción 3; obviamente de 7 y 8, $\frac{\beta}{\delta}$ y $\frac{\gamma}{\delta}$ son soluciones para a_{11} y a_{12}

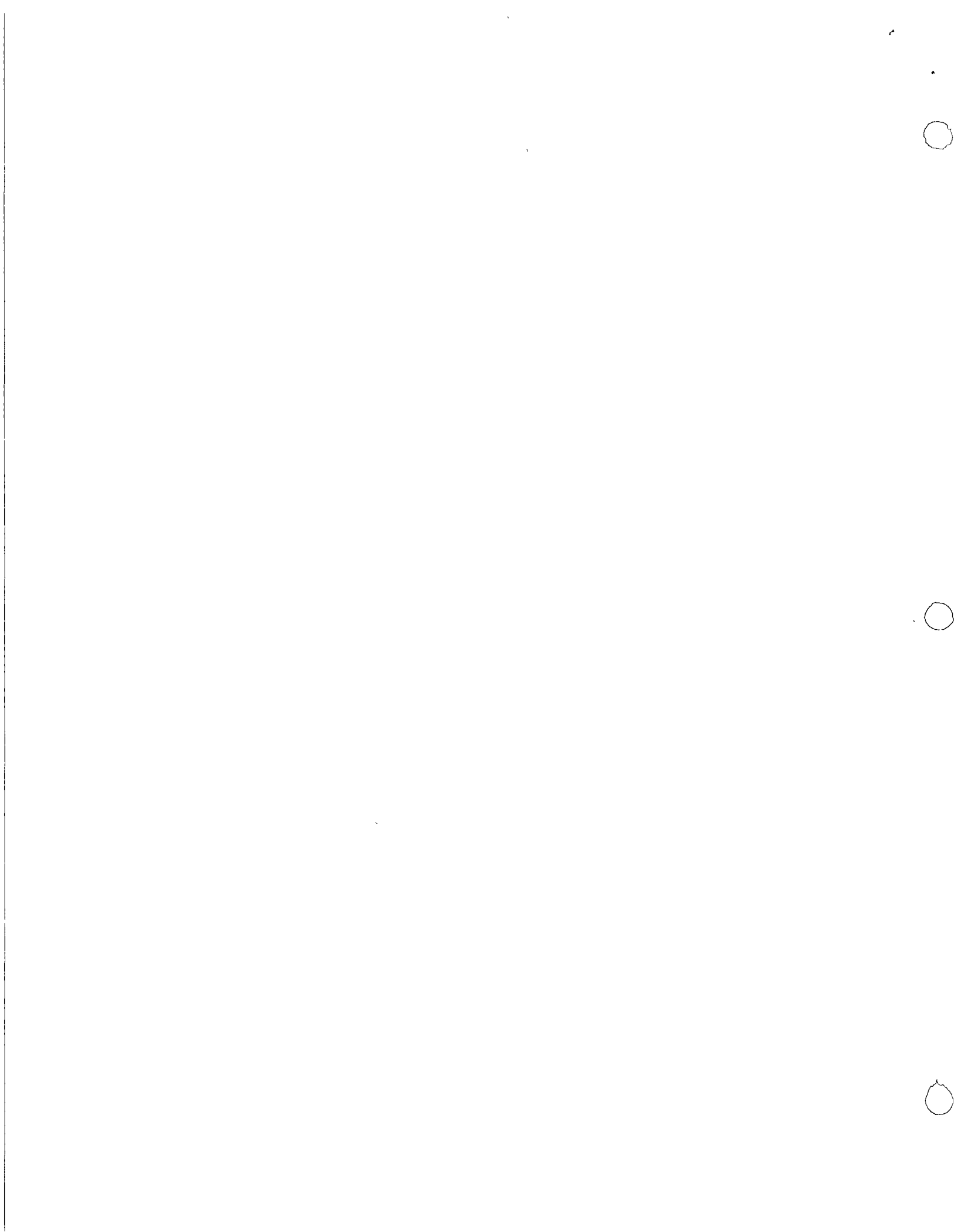
Obsérvese que en cambio no se podría seleccionar más de uno de los valores a_{1j} ; en efecto, para que en S(4)(I) y S(4)(II) pudieran escogerse arbitrariamente a_{11} y a_{13} , teniendo en cuenta que

$$(c_{11} - \lambda_1) a_{11} = -[c_{12} a_{12} + c_{13} a_{13}] \quad (11)$$

$$y \quad c_{12} a_{11} = -[(c_{22} - \lambda_1) a_{12} + c_{23} a_{13}] \quad (12)$$

se requerirá que $c_{11} - \lambda_1 = c_{12}$, $c_{12} = c_{22} - \lambda_1$ y $c_{13} = c_{23}$, esto es, que dos de las ecuaciones de S(4) fueran iguales; esto implicaría que las tres ecuaciones de S(4) fueran iguales, pero sobre esto se insistirá después.

Por otra parte, si se designa con A' a la matriz traspuesta de A y con C a la de las c_{ij} , pueden formarse los productos



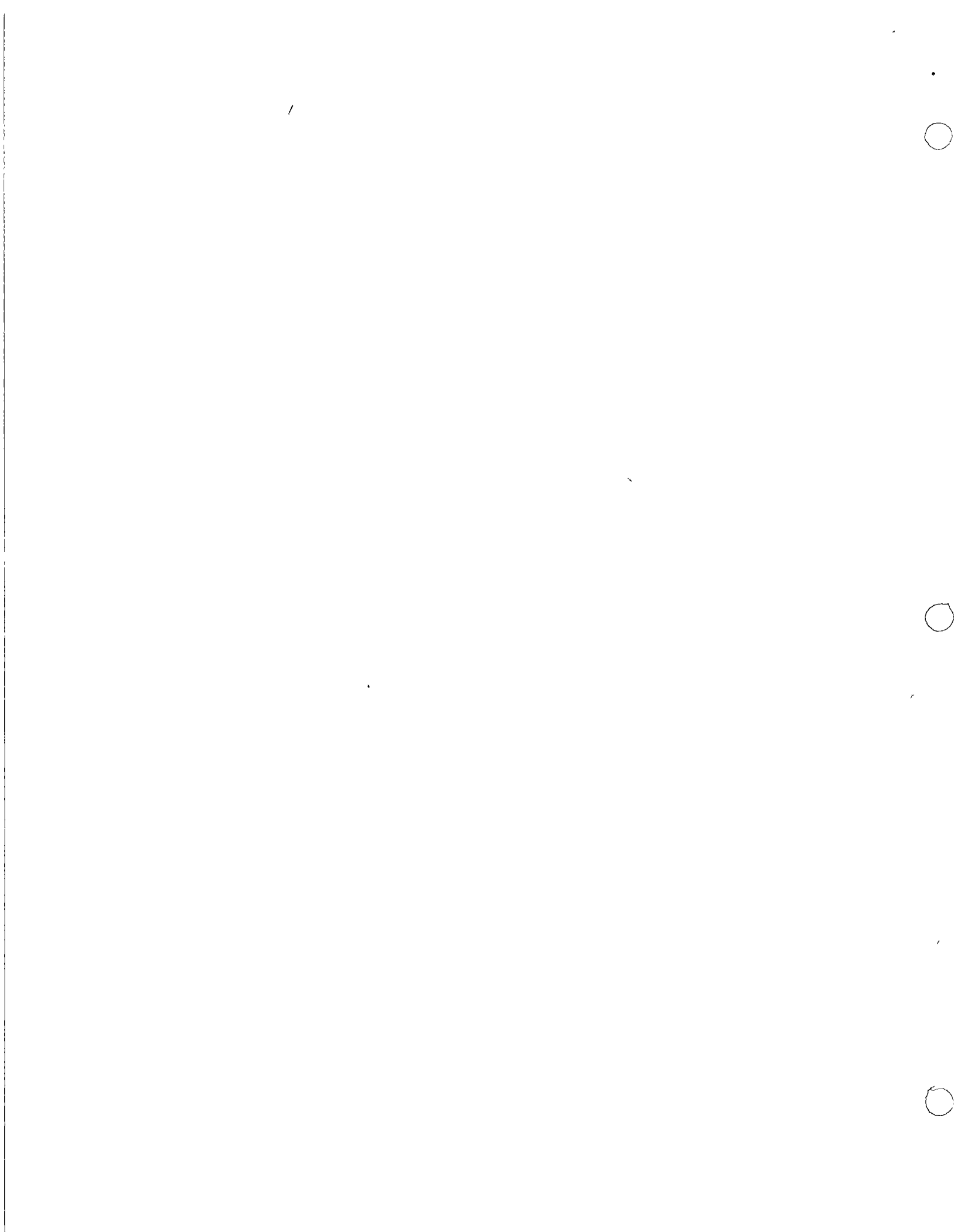
$$AC = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23} & a_{11}c_{13} + a_{12}c_{23} + a_{13}c_{23} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{12} + a_{23}c_{13} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} & a_{21}c_{13} + a_{22}c_{23} + a_{23}c_{23} \\ a_{31}c_{11} + a_{32}c_{12} + a_{33}c_{13} & a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} + a_{33}c_{23} & a_{31}c_{13} + a_{32}c_{23} + a_{33}c_{33} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$y \quad CA' = \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} & a_{21}c_{11} + a_{22}c_{12} + a_{23}c_{13} & a_{31}c_{11} + a_{32}c_{12} + a_{33}c_{13} \\ a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{23} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} & a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} + a_{33}c_{23} \\ a_{11}c_{13} + a_{12}c_{23} + a_{13}c_{33} & a_{21}c_{13} + a_{22}c_{23} + a_{23}c_{33} & a_{31}c_{13} + a_{32}c_{23} + a_{33}c_{33} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Si ahora se escogen para a_{1i} los valores dados por 10, esto es, valores modificados de a_{11} , a_{12} y a_{13} , deducidos de λ_1 en el sistema S(4) y si además se forman los sistemas S(5) y S(6) análogos a aquél con los valores a_{21} , a_{22} y a_{23} , deducidos a partir de λ_2 y los valores a_{31} , a_{32} y a_{33} , deducidos de λ_3 , 13 y 14 resultarán ser

$$AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$y \quad CA' = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{21} & \lambda_3 a_{31} \\ \lambda_1 a_{12} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{32} \\ \lambda_1 a_{13} & \lambda_2 a_{23} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$



para simplificar estas expresiones se puede definir la matriz diagonal Λ como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

y demostre que

$$\Delta A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23} \\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33} \end{pmatrix} \quad (18)$$

de 15 y 18 se concluye que

$$AC = \Delta A \quad (19)$$

en forma análoga puede hacerse ver que

$$CA' = A'\Delta \quad (20)$$

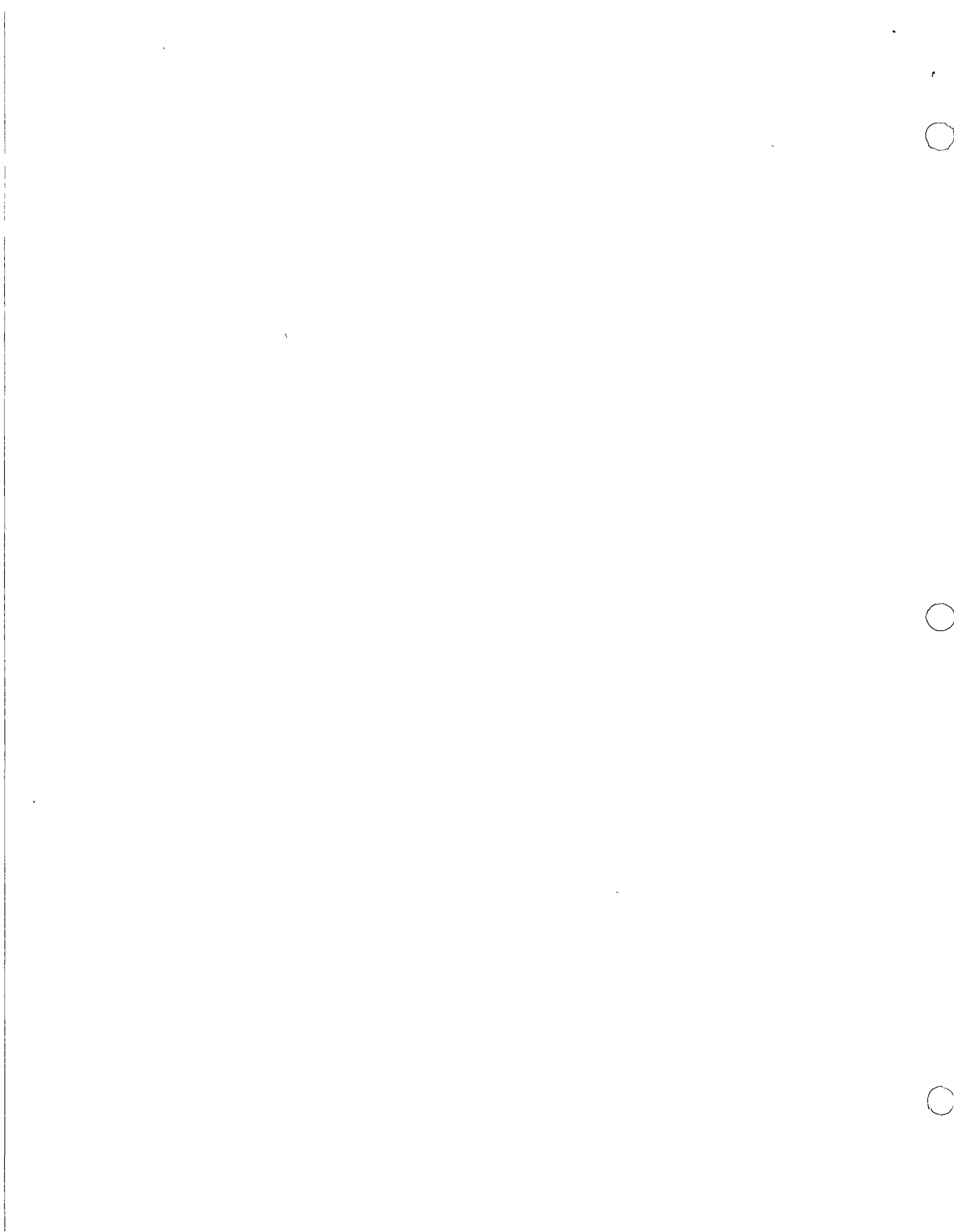
Si se premultiplica 19 por A' y se premultiplica 20 por A , se tendrá

$$ACA' = \Delta AA' \quad (21)$$

y

$$ACA' = AA'\Delta \quad (22)$$

De 21 y 22 se concluye entonces que, si se designa por $B = AA'$



se tendrá

$$AB = BA \quad (23)$$

como B es del mismo orden que A, deberá tenerse

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (24)$$

de 23 y 24 se concluye entonces que

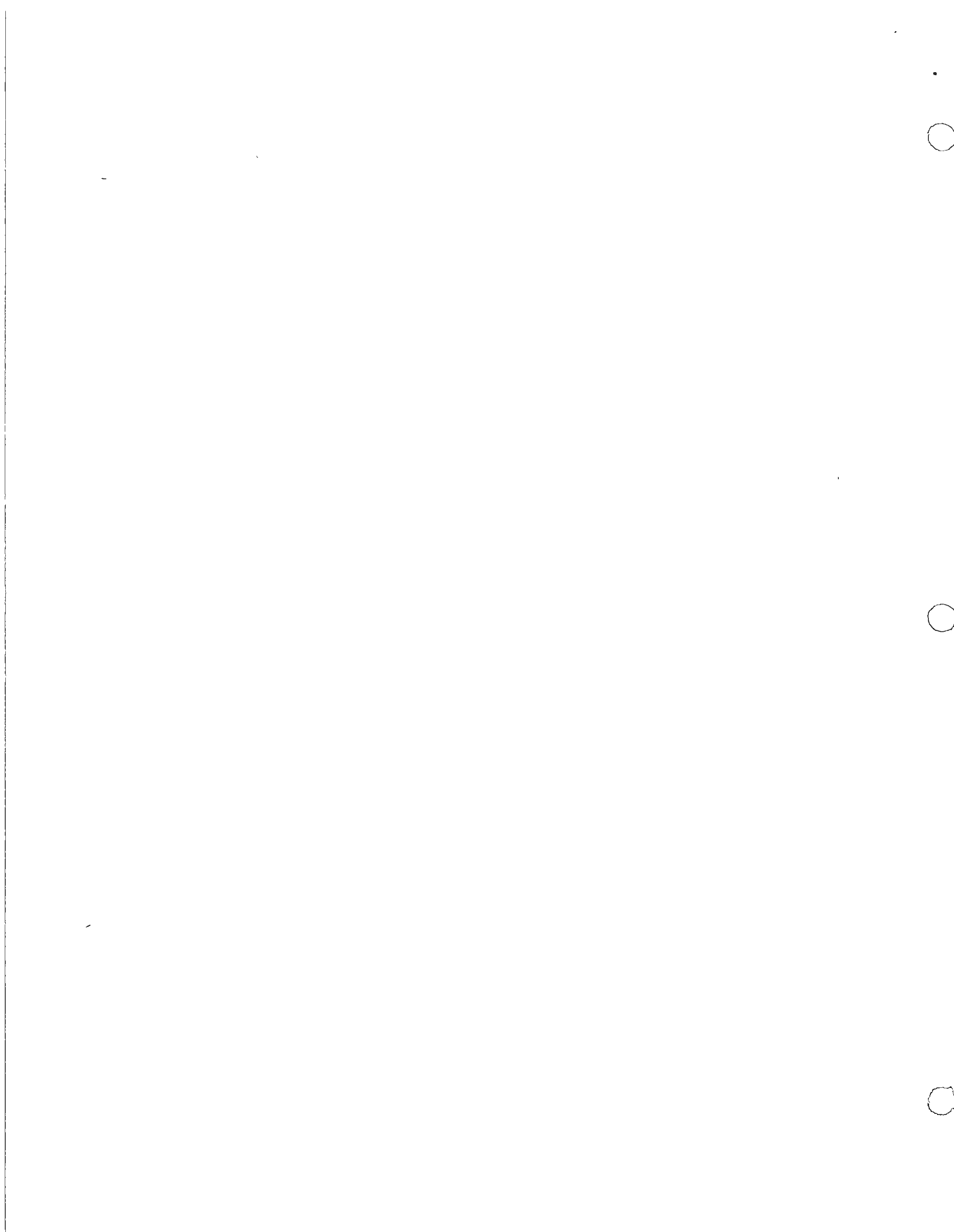
$$AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \lambda_1 b_{13} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_3 b_{31} & \lambda_3 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix} \quad (25)$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{21} & \lambda_3 b_{31} \\ \lambda_1 b_{12} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_3 b_{32} \\ \lambda_1 b_{13} & \lambda_2 b_{23} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix} \quad (26)$$

para que se satisfaga 23, si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, se requiere que $b_{ij} = 0$, si $i \neq j$ y, por definición de B, esto exige que cualquier producto de la forma mostrada en 27 sea nulo, esto es:

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = 0 \quad (27)$$



La igualdad 27 indica que los vectores (a_{11}, a_{12}, a_{13}) , (a_{21}, a_{22}, a_{23}) y (a_{31}, a_{32}, a_{33}) son ortogonales si las raíces λ son distintas. Además, como la condición 3 impuesta exige que $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$, $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$ y $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$ resultará que

$$AA' = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R(2)$$

Cuando por lo menos dos de las raíces fueran iguales no sería posible concluir inmediatamente 27; sin embargo, regresando a las ecuaciones 11 y 12, se puede recordar que si las tres ecuaciones de alguno de los sistemas S(4), S(5) ó S(6) son iguales, se podrían seleccionar arbitrariamente dos de las tres componentes de los vectores a_{ij} ; cualquiera de estos sistemas sería de la forma

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ a_{j3} \end{pmatrix} = 0 \quad S(7)^*$$

con $1-\lambda = a$, o bien

$$\lambda = 1 - a \quad (28)$$

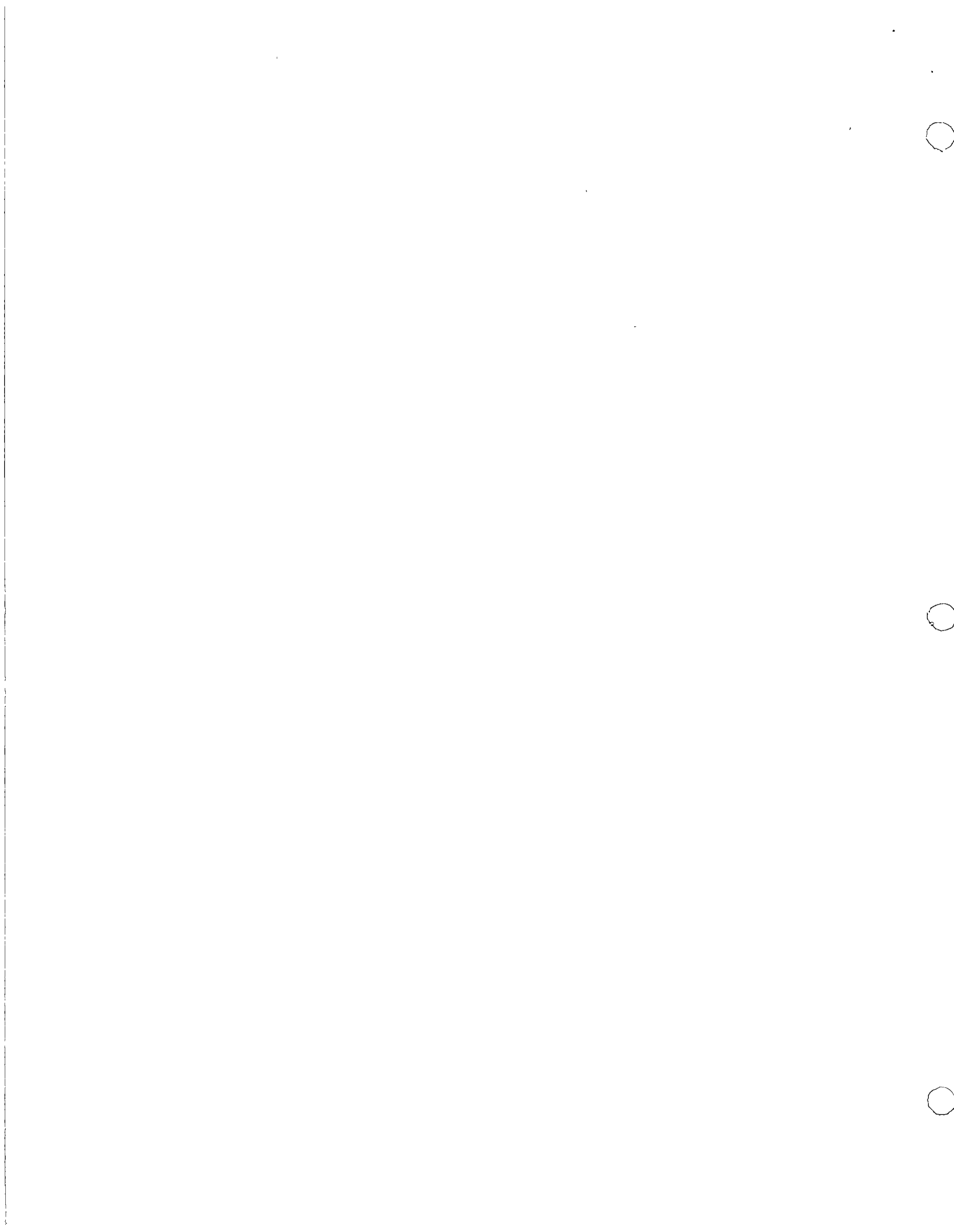
La existencia de una solución distinta de la trivial exige la nulidad del determinante del sistema S(7), lo que plantea la ecuación cúbica

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda(a^2 - 1) - 3a^2 + 2a^3 + 1 = 0 \quad (29)$$

y puesto que, como fácilmente se comprueba

$$\begin{aligned} & (\lambda - [1-a])^2 (\lambda - [1+2a]) = \\ & = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda(a^2 - 1) - 3a^2 + 2a^3 + 1 \end{aligned} \quad (30)$$

* Recuerdese que $C_{11} = 1$



resulta, del teorema fundamental del álgebra, y de acuerdo con 29 y 30, que 29 tiene precisamente dos raíces iguales, resultado que hace ver que, en el caso de tener dos raíces iguales, es posible determinar dos de los vectores a_i ; seleccionando arbitrariamente dos de sus componentes. Claro es que estos dos vectores corresponden a dos de los sistemas S(4), S(5) ó S(6) que intentarán resolverse para esas dos raíces iguales; por lo demás, el resultado 27 seguiría siendo válido para la raíz distinta.

Si, entonces, S(4) y S(5) son los sistemas que se van a resolver para

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 - a$, ambos quedan reducidos simplemente a

$$aa_{11} + aa_{12} + aa_{13} = 0 \quad (31)$$

y

$$aa_{21} + aa_{22} + aa_{23} = 0 \quad (32)$$

De 31 y 32 puede obtenerse, si se impone la condición de ortogonalidad,

$$2a_{12}a_{22} + 2a_{13}a_{23} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} = 0 \quad (33)$$

de aquí, por ejemplo

$$a_{12} = -a_{13} \frac{2a_{23} + a_{22}}{2a_{22} + a_{23}} \quad (34)$$

De acuerdo con 34 podrían escogerse arbitrariamente a_{22} y a_{23} (fijando a_{21} según 32); todavía, escoger a_{13} y determinar a_{12} según 34, para calcular a_{11} según 31.

Todos los razonamientos expuestos en las fórmulas 23 a 34 hacen ver que los resultados de la fórmula 25 y de la propiedad $\lambda(2)$, pueden aplicarse tanto al caso de raíces diferentes como al caso de raíces múltiples.



Volviendo ahora a la fórmula 13, se pueda postmultiplicar por la matriz

A' , con lo que se obtiene

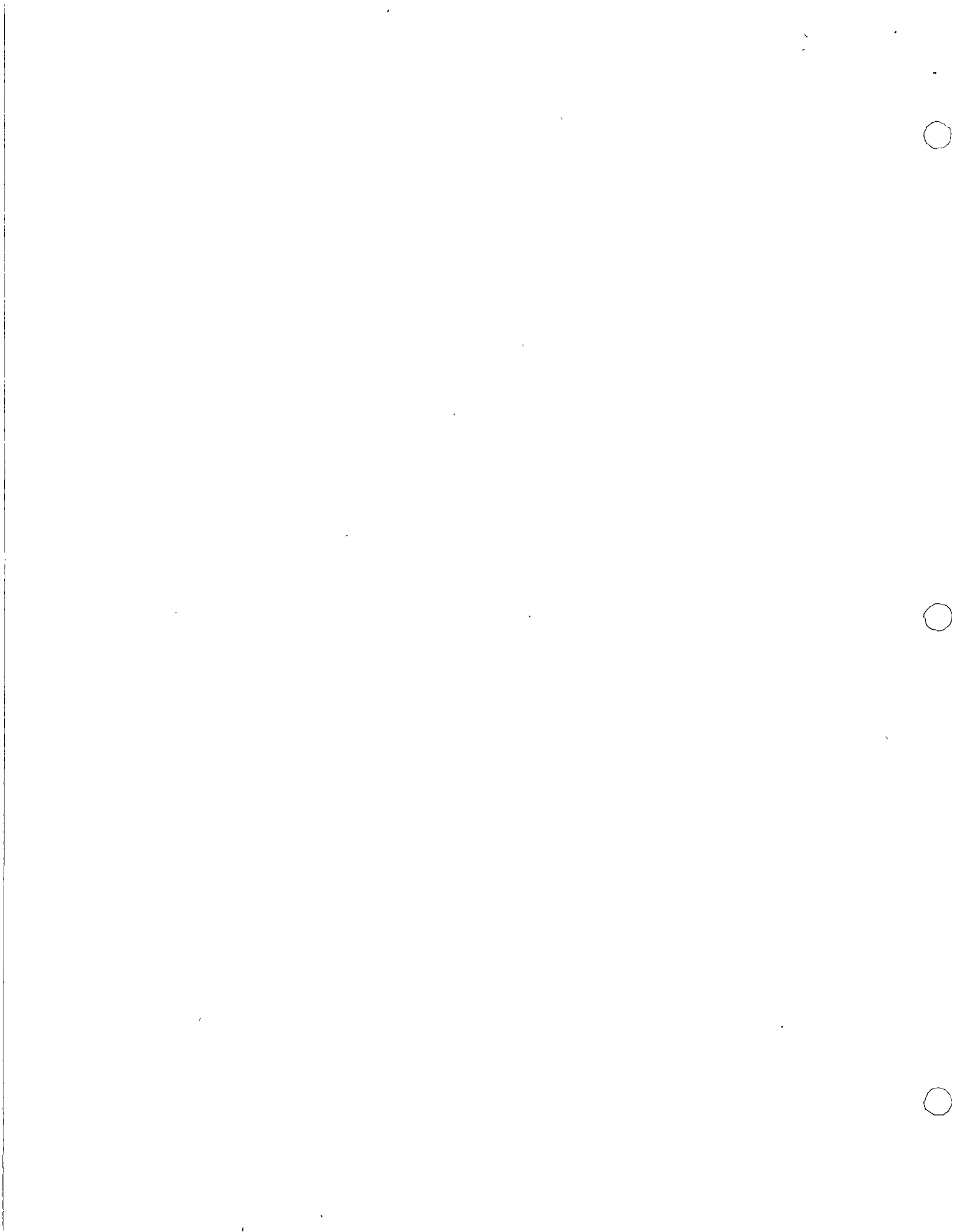
$$ACA' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Si se compara 35 con el sistema S(i), se puede concluir que

$$ACA' = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum \xi_1^2 & \sum \xi_1 \xi_2 & \sum \xi_1 \xi_3 \\ \sum \xi_1 \xi_2 & \sum \xi_2^2 & \sum \xi_2 \xi_3 \\ \sum \xi_1 \xi_3 & \sum \xi_2 \xi_3 & \sum \xi_3^2 \end{pmatrix} \quad (36)$$

La matriz definida en el miembro derecho de 36 se llama de variancia y covariancia de las nuevas variables.

Por otra parte 36 es válida para cualquier matriz A y su traspuesta A' ; sin embargo, si se escogen los elementos a_{ij} de éstos de acuerdo con los valores que resultan de resolver los sistemas S(4), S(5) y S(6), 13 toma la forma 15 y si después se postmultiplica por A' , se obtendrá



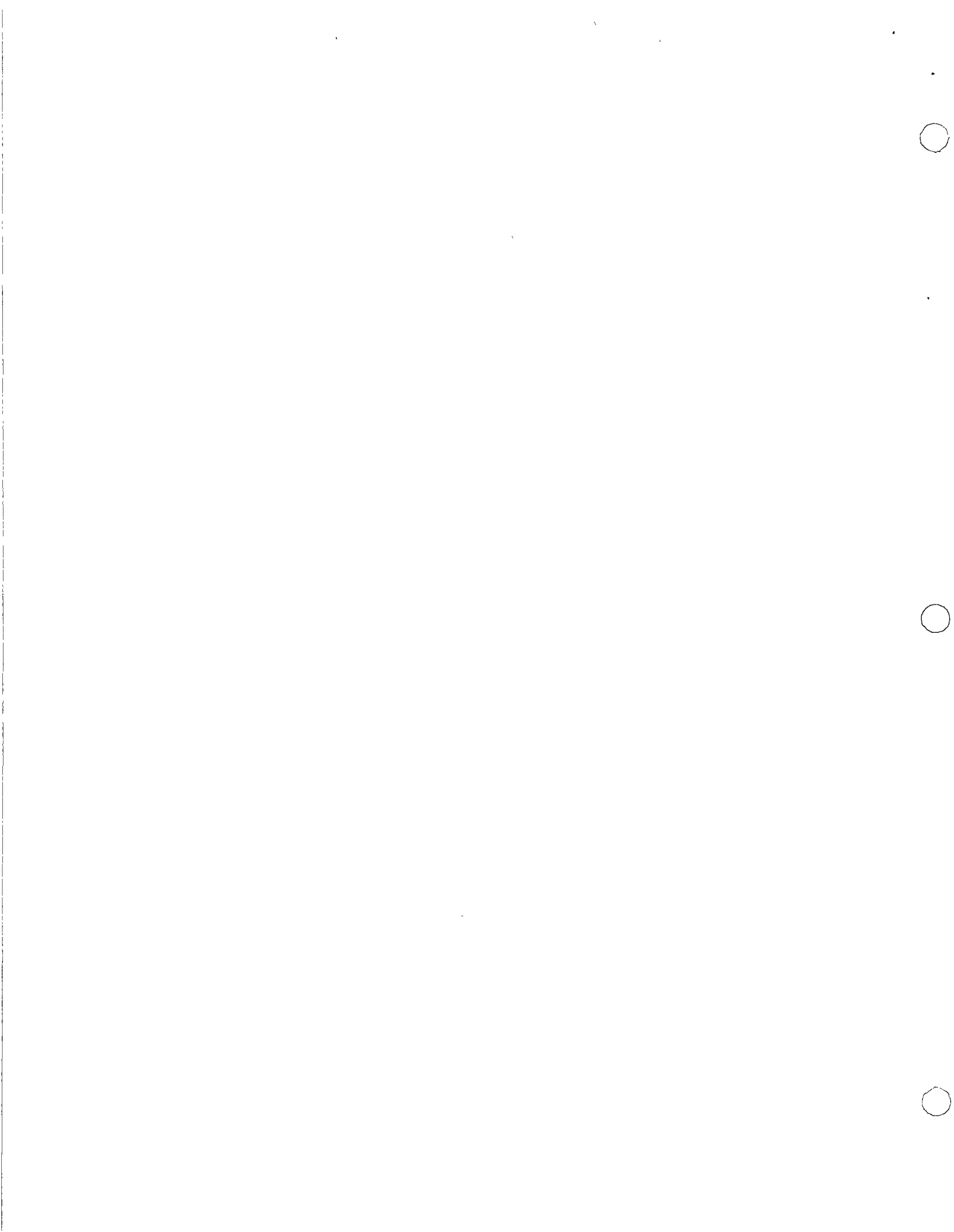
$$ACA' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \sum a_{1i}^2 & \lambda_1 \sum a_{1i} a_{2i} & \lambda_1 \sum a_{1i} a_{3i} \\ \lambda_2 \sum a_{1i} a_{2i} & \lambda_2 \sum a_{2i}^2 & \lambda_2 \sum a_{2i} a_{3i} \\ \lambda_3 \sum a_{1i} a_{3i} & \lambda_3 \sum a_{2i} a_{3i} & \lambda_3 \sum a_{3i}^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

que por las propiedades de los elementos a_{ij} se puede escribir

$$ACA' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad R(3)$$

R(3) muestra que la matriz de variancia y covariancia de ξ_i es precisamente la matriz diagonal Λ , definida en 17, si los elementos a_{ij} de las matrices A y A' se escogen en la forma indicada; más aún, resulta que procediendo así las ξ_i no están correlacionadas, puesto que sus covariancias son nulas y de aquí su nombre de componentes principales; además, las variancias de las ξ_i son precisamente las raíces λ_i de la ecuación 5. Finalmente, según el razonamiento hecho para encontrar 36, resulta que la variancia total del sistema, $(\sum \xi_1^2 + \sum \xi_2^2 + \sum \xi_3^2)/n$, es la suma de las raíces λ_1 , λ_2 y λ_3 , la cual según R(1) es igual a 3, el número de registros considerados (en a, b y c). Este último resultado indica que cocientes de la forma $\lambda_i/3$ miden el porcentaje de la variancia del conjunto que debe atribuirse a la componente principal ξ_i , sin olvidar que según 4 las variancias de ξ_i son las máximas posibles, sujetas a la restricción 3.

Para terminar, volviendo al sistema S(1), se puede afirmar que si los elementos a_{ij} de las matrices A y A' se escogen con el criterio descrito, resultará, de acuerdo



con $R(2)$

$$A' \hat{\xi} = X \quad (38)$$

5. RESUMEN DEL ANALISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

Para efectuar la simulación de un sistema de p registros $x_i(i)$, se procede a su estandarización; en seguida se calculan las variancias y covariancias de los elementos del sistema, haciendo

$$c_{ij} = \frac{1}{n} \sum x_i x_j \quad (39)$$

Después se forma con estos valores una matriz C , de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (40)$$

Se calculan los valores característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, de la matriz C .

Se forman sistemas lineales homogéneos con la matriz C y cada uno de los valores singulares, como se indica a continuación

$$\begin{pmatrix} c_{11} - \lambda_1 & c_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{12} & c_{22} - \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0 \quad (41)$$

Así, se encuentran vectores $(a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots)$ ligados a cada uno de los valores λ_j , mediante sistemas de la forma (41). Estos vectores deberán tener componentes tales que

$$a_{j1}^2 + a_{j2}^2 + a_{j3}^2 + \dots = 1 \quad (42)$$

y además serán ortogonales si las λ_j son diferentes, o podrán escogerse de modo que lo sean si



hay λ_j iguales. Con los vectores a_{ij} así escogidos, se podrá formar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (43)$$

tal que con su traspuesta, tenga la propiedad

$$AA' = I \quad (44)$$

A partir de la matriz A , se puede definir un conjunto de variables ξ_j , ligadas a las originales x_j mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad S(8)$$

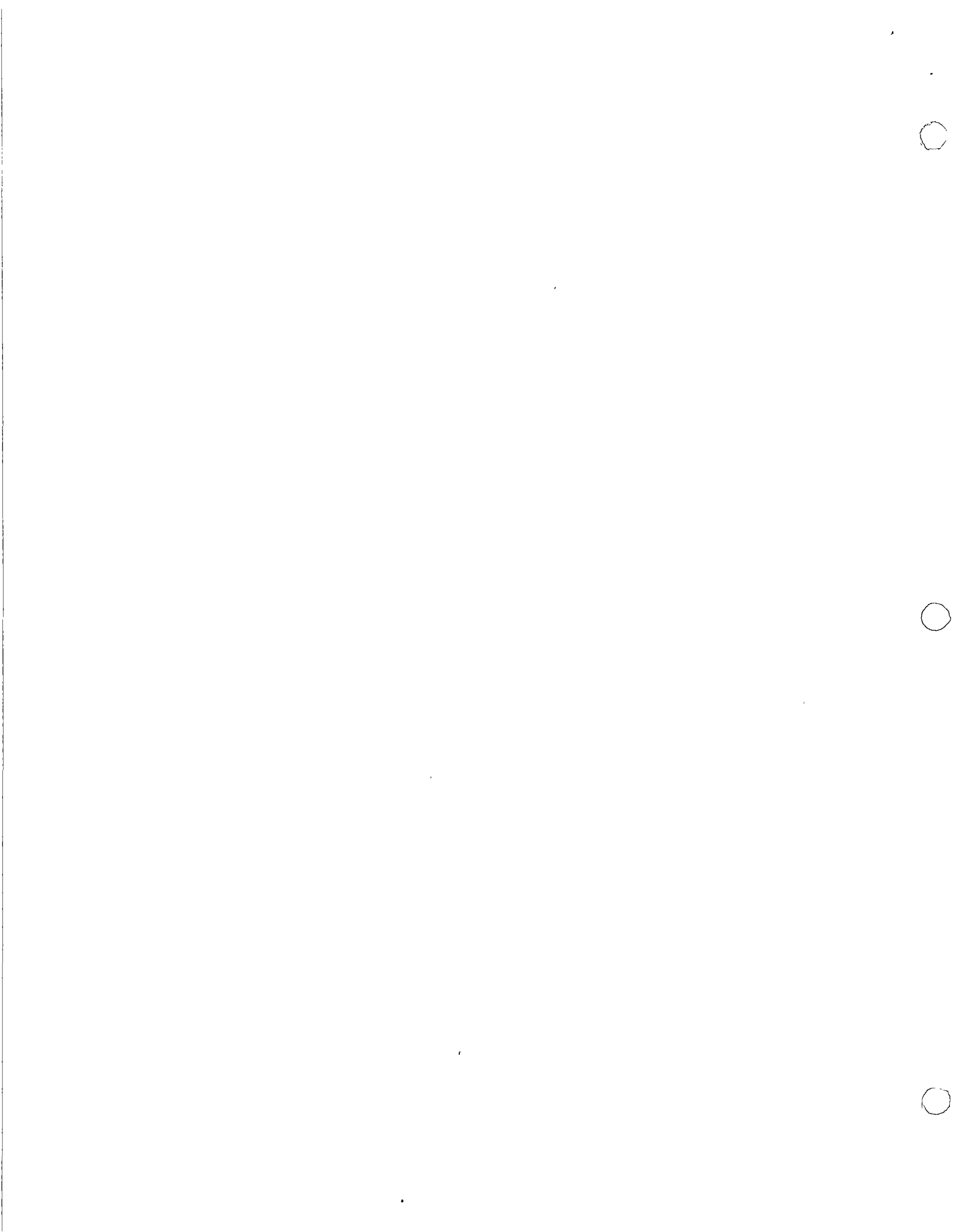
Si los elementos a_{ij} de A se han seleccionado como se indica en 41, las nuevas variables ξ_j tendrán solo covariancias nulas, esto es, serán estadísticamente independientes y las variancias tendrán el máximo valor posible, compatible con la condición 42.

De 44 y S(8) se concluye, además, que las x_j quedan determinadas, mediante las ξ_j por el sistema

$$A'\xi = X \quad S(9)$$

De esta manera, para simular las x_j , se procederá a simular independientemente cada ξ_j , para definir cada $x_j(t)$ mediante cada una de las ecuaciones de S(9).

Finalmente, la variancia de cada una de las ξ_j es precisamente λ_j .



y la variancia total del conjunto es

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots = \rho \quad (45)$$

en donde ρ es el número de x_i o de ξ_i .

Así resulta que la contribución de cada una de las ξ_i a la variancia total es

$$\lambda_i / \rho \quad (46)$$

La expresión 46 permite juzgar, en adición, la importancia de cada una de las ξ_i en la simulación y decidir, en última instancia, si vale la pena o no, representarla en el sistema.



2.2. Optimización.

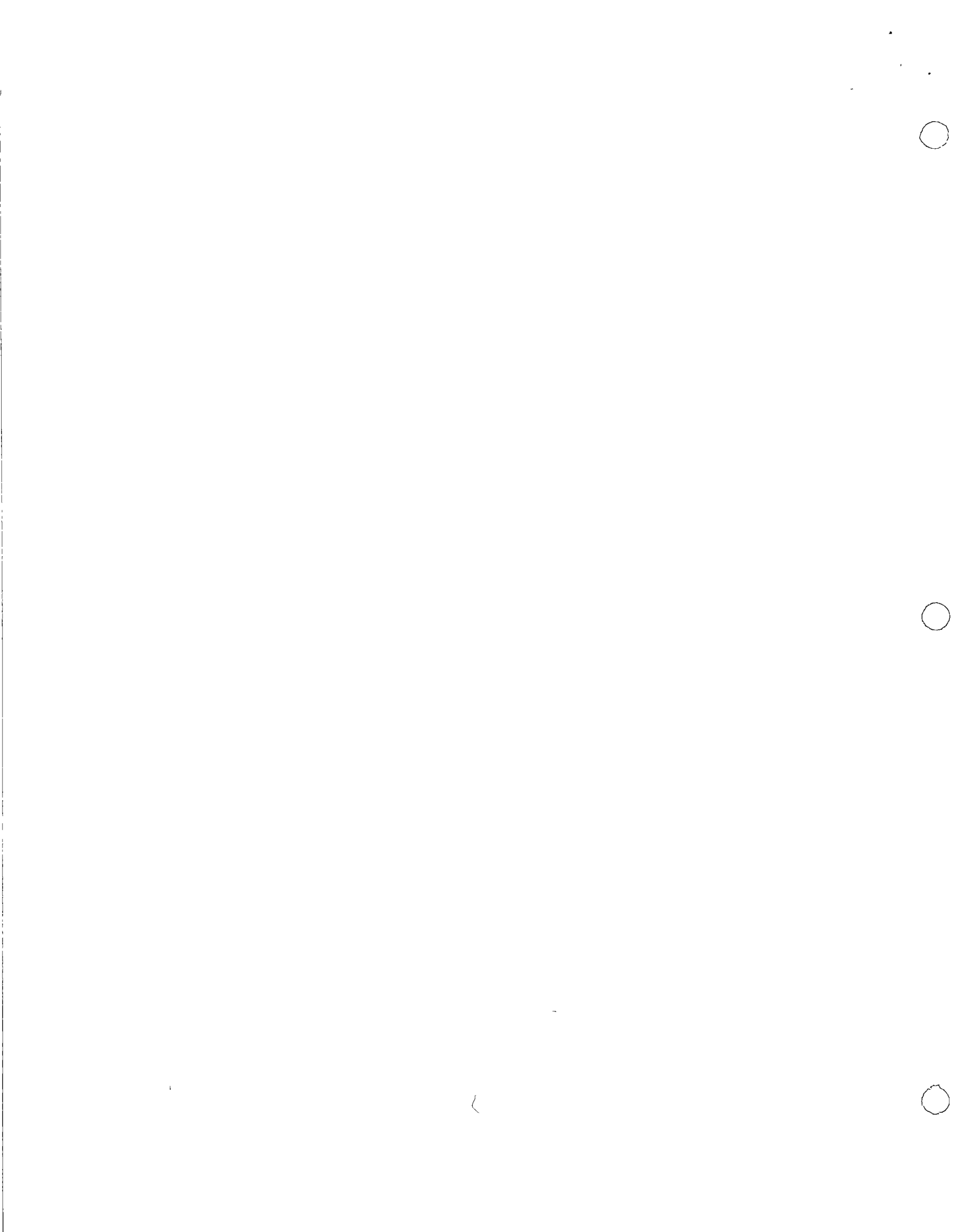
Estas notas tratan de desarrollar algunas de las técnicas más comunmente asociadas con la investigación de operaciones y sistemas ingenieriles y que son aplicables al diseño y operación de sistemas que conciernen a los ingenieros civiles.

2.2.1 Programación Lineal.

La programación matemática es una de las técnicas más comunmente usadas para resolver problemas de optimización de sistemas. Para esto se plantea un modelo matemático en el que queden -- expresadas las relaciones que existen entre las variables que intervienen en el problema. Estas relaciones están formadas por una función objetivo en la cual queda expresado el objetivo que deseamos alcanzar y las restricciones que indican las limitaciones que se le imponen al problema. Estos problemas se caracterizan por el gran número de soluciones que satisfacen a las restricciones, a las que llamaremos soluciones factibles. Dentro de estas soluciones factibles hay una que optimiza la función objetivo y que llamaremos solución óptima. Cuando las relaciones del modelo matemático son lineales, diremos que se trata de un problema de programación lineal.

El modelo matemático que representa un problema de -- programación lineal tiene la forma siguiente:

$$\text{Maximize: } Z = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$



Sujeto a las restricciones

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq C_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq C_2$$

.....
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq C_m$$

$$y \ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Las cantidades b_j , C_j , y a_{ij} ($i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$) son constantes y conocidas y m y n son enteros positivos. Las constantes C_j son convencionalmente no negativas y las b_j y a_{ij} no tienen restricción en signo.

Para obtener la solución óptima en un modelo matemático de este tipo se necesita plantear el algoritmo - procedimiento aritmético - llamado "simplex". Este consiste en efectuar la operación de intercambiar variables que es la base de todos los algoritmos del álgebra lineal.

Para ilustrar en que consiste la operación intercambiar variables, consideramos dos funciones lineales Y y Y' de dos variables independientes, x y x' ;

$$y = ax + bx' + c \tag{1}$$

$$y' = dx + ex' + f \tag{2}$$

suponiendo que $a \neq 0$, calculemos x explícitamente de la primera ecuación y substituyamos este resultado en la segunda ecuación obteniéndose.



$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a} x' - \frac{c}{a} \quad (3)$$

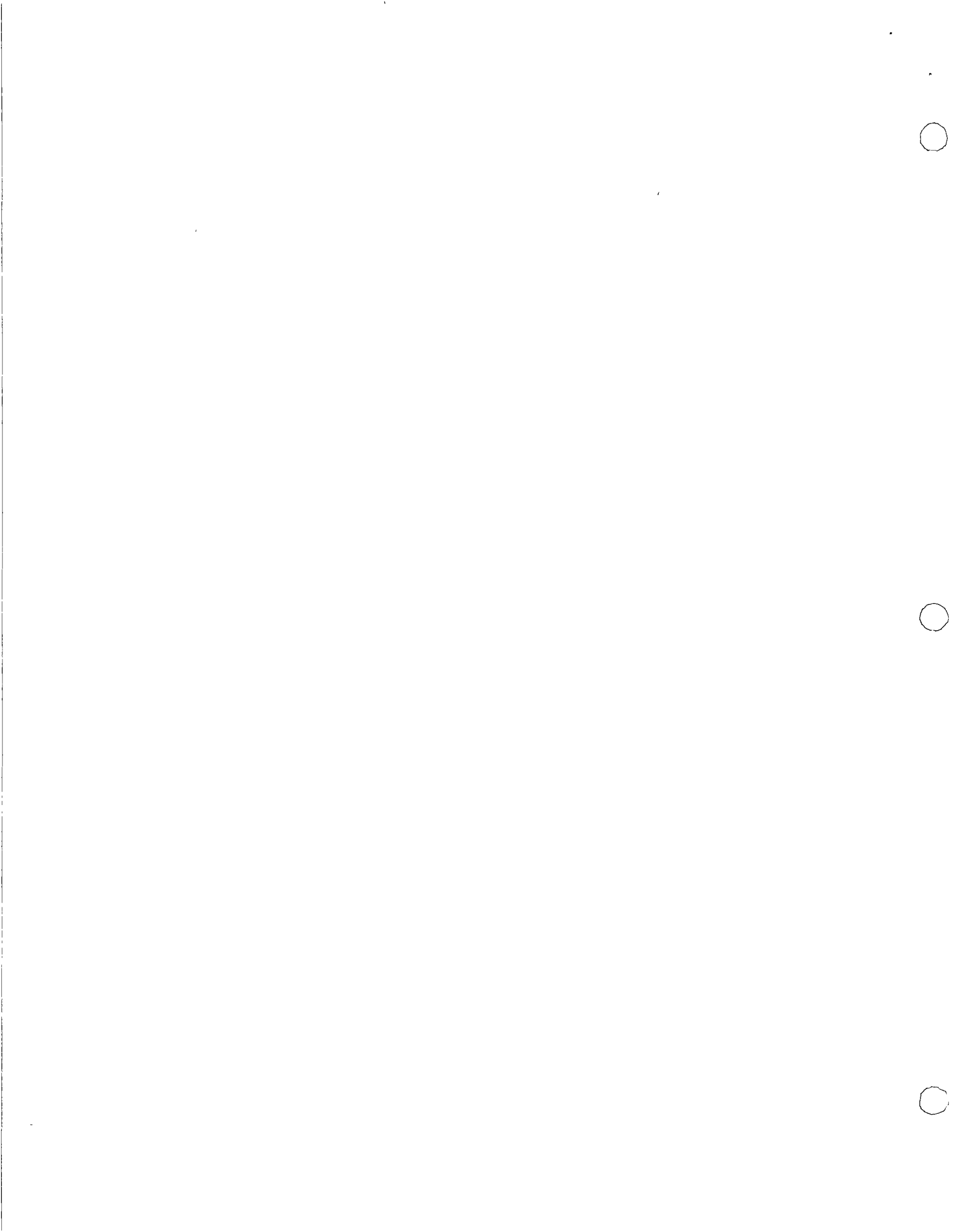
$$y' = \frac{d}{a} y + (e - \frac{bd}{a}) x' + (f - \frac{cd}{a}) \quad (4)$$

Estas dos nuevas funciones lineales se caracterizan por el hecho de que la variable x pasa a ser función, mientras que la función y resulta ahora una variable independiente. De una manera sencilla se puede decir que x y y han sido intercambiadas y a la operación total se le denomina un paso de intercambio. Ahora el problema consiste en arreglar este paso de intercambio en la forma de esquemas sencillos de cálculo. Por ejemplo, el intercambio de x y y en las ecs. (1) y (2) se representará de aquí en adelante por el siguiente esquema:

| | | | | | | | | | | |
|----------|--------|-----|------|---|--|---------------|------|----------------|----|----------------|
| | | x | x' | | | y | x' | | | |
| elemento | $y =$ | a | b | c | | $\frac{1}{a}$ | - | $\frac{b}{a}$ | - | $\frac{c}{a}$ |
| pivote | $y' =$ | d | e | f | | $\frac{d}{a}$ | e- | $\frac{bd}{a}$ | f- | $\frac{cd}{a}$ |

donde se cruzan el renglón y la columna de las variables que se quieren intercambiar nos define la localización del elemento pivote. Una vez determinado el elemento pivote, los pasos a seguir para intercambiar x por y son los siguientes:

1. El elemento pivote se cambia por su recíproco.
2. Los demás elementos de la columna donde se encuentra el pivote se dividen entre éste.
3. Los demás elementos del renglón donde se encuentra el pivote se dividen entre éste y se les cambia el signo.
4. Los restantes elementos se obtendrán como el elemento original menos el producto de los correspondientes dividido entre el pivote.





b y d son los correspondientes del elemento e.

Toda la secuencia anterior se conoce como el algoritmo Simplex.

Consideremos el siguiente problema de programación lineal con dos variables x_1 y x_2 :

$$\text{MAX: } Z = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Sujeto a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq c_1 \quad (5)$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq c_2 \quad (6)$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Este tipo de problema es ideal para resolverse por medios gráficos

En un sistema de ejes cartesianos x_1, x_2 las restricciones pueden

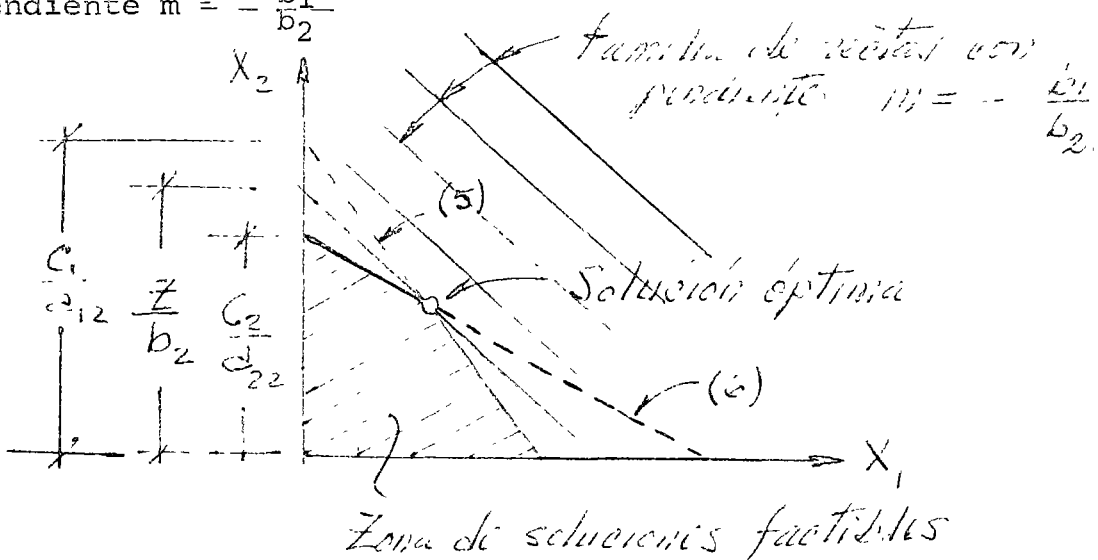
ser representadas por líneas rectas. Los puntos (x_1, x_2) que sa-

tisfacen estas restricciones definen la zona de soluciones facti-

bles (polígono convexo achurado mostrado en la figura). La fun-

ción objetivo se puede representar como una familia de rectas con

pendiente $m = -\frac{b_1}{b_2}$





De la figura puede observarse que la solución óptima cumple con los requisitos siguientes:

1. Se obtiene para una recta de la familia - - - -

$x_2 = -\frac{b_1}{b_2} x_1 + \frac{z}{b_2}$ que contenga a un punto del conjunto de soluciones factibles y que además tenga la mayor ordenada al origen

2. La recta anterior tiene una inclinación intermedia entre las rectas (5) y (6) o sea

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

Para ilustrar que este problema de programación lineal puede resolverse aplicando el algoritmo simplex procedamos de la manera siguiente: agreguemos a las restricciones las cantidades y_1 y y_2 que no se conocen pero que permiten lograr la igualdad

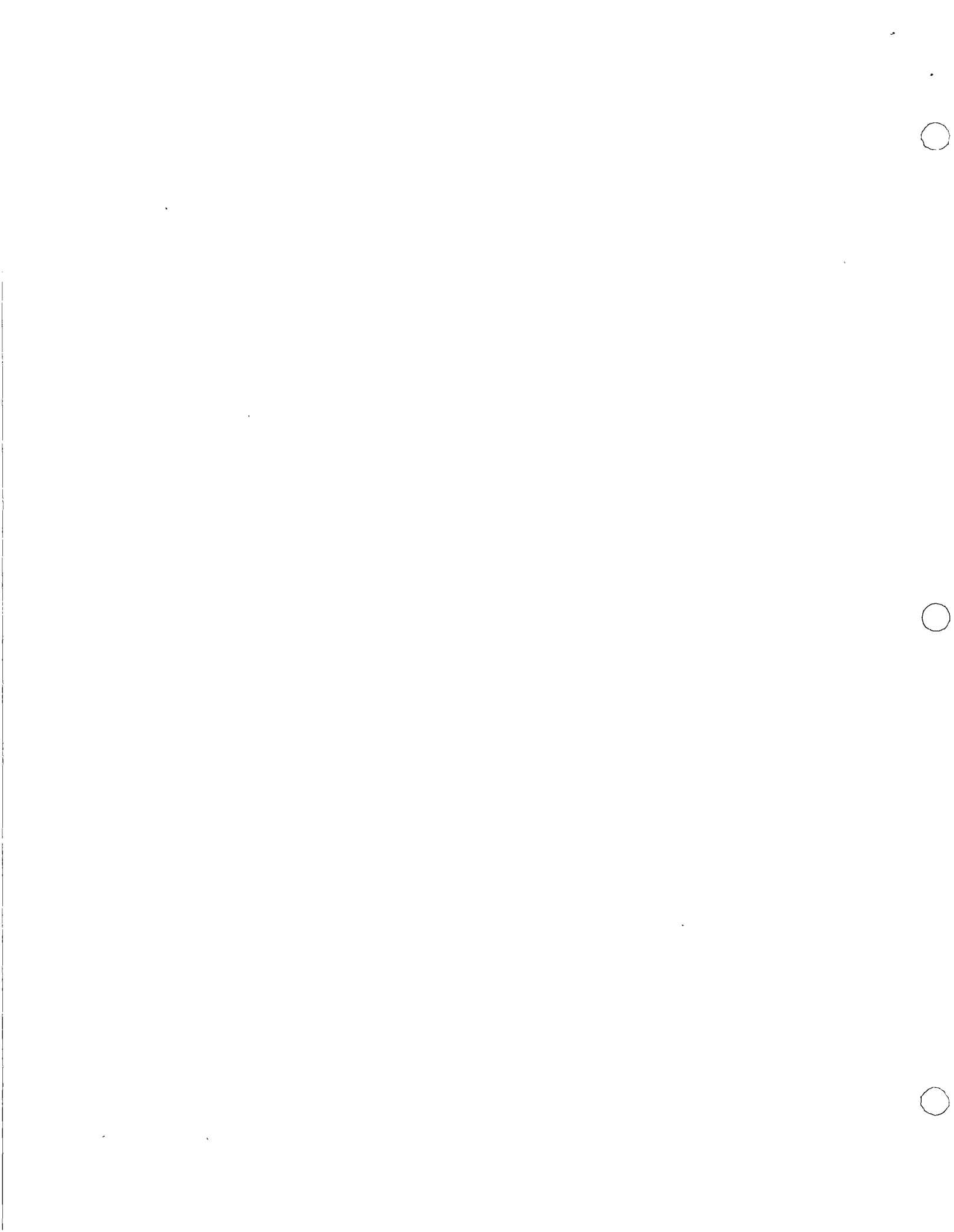
$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + y_1 = C_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + y_2 = C_2$$

Del sistema de ecuaciones así formado obtengamos los valores de x_1 y x_2

$$x_1 = \frac{a_{22} (c_1 - y_1) - a_{12} (c_2 - y_2)}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} (c_2 - y_2) - a_{21} (c_1 - y_1)}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}$$



Substituyendo en la función objetivo estos valores se obtiene

$$Z = \frac{1}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \left[a_{22} b_1 c_1 + a_{11} b_2 c_2 - a_{21} b_2 c_1 - a_{12} b_1 c_2 + (-a_{22} b_1 + a_{21} b_2) y_1 + (a_{12} b_1 - a_{11} b_2) y_2 \right]$$

En esta última expresión se puede observar que si los coeficientes de y_1 y y_2 son negativos, entonces lo mejor que puede suceder es que y_1 y y_2 sean iguales a cero para lograr el Z máximo. Admitiendo a priori que

$$-a_{22} b_1 + a_{21} b_2 < 0, \quad a_{12} b_1 - a_{11} b_2 < 0$$

se obtiene

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} < \frac{b_1}{b_2} \quad \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

juntando estas igualdades se obtiene

$$\frac{a_{21}}{a_{22}} < \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

lo que indica que la recta que resuelve el problema de máximo tiene una pendiente entre las rectas (5) y (6)

Por otra parte, de la expresión Z se observa que la solución óptima se obtiene de cambiar las x_i por las y_i , que es la característica en que se basa el método simplex



Consideremos ahora el problema de mínimo siguiente

$$\text{MIN} \quad z = c_1 x_1' + c_2 x_2'$$

Sujeto a

$$a_{11} x_1' + a_{21} x_2' \geq b_1$$

$$a_{12} x_1' + a_{22} x_2' \geq b_2$$

$$x_1' \geq 0 \quad x_2' \geq 0$$

donde c_i , b_i y a_{ij} , son comunes al problema de máximo antes planteado. Procediendo en forma semejante para que el problema de -- máximos se obtiene que

$$z = \frac{1}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \left[a_{22} b_1 c_1 - a_{12} b_1 c_2 + a_{21} b_2 c_1 + (a_{22} c_1 - a_{12} c_2) n_1 + (a_{11} c_2 - a_{21} c_1) n_2 \right]$$

donde n_1 y n_2 son las cantidades desconocidas que permiten lograr la igualdad de las restricciones. Ahora bien, si los coeficientes de n_1 y n_2 en la expresión de z son positivos, entonces lo -- mejor que puede suceder es que n_1 y n_2 sean iguales a cero para -- lograr z mínimo. Aceptando a priori que

$$a_{22} c_1 - a_{12} c_2 > 0$$

se obtiene que $\frac{c_1}{a_{12}} > \frac{c_2}{a_{22}}$



igualdad que define la región permisible para el problema de máximos.

Además, si y_1, y_2, n_1 y n_2 son cero, las expresiones que definen Z y z son las mismas. Esto permite afirmar que a cada problema de máximo le corresponde un problema de mínimo. Esto se llama dualidad en programación lineal.

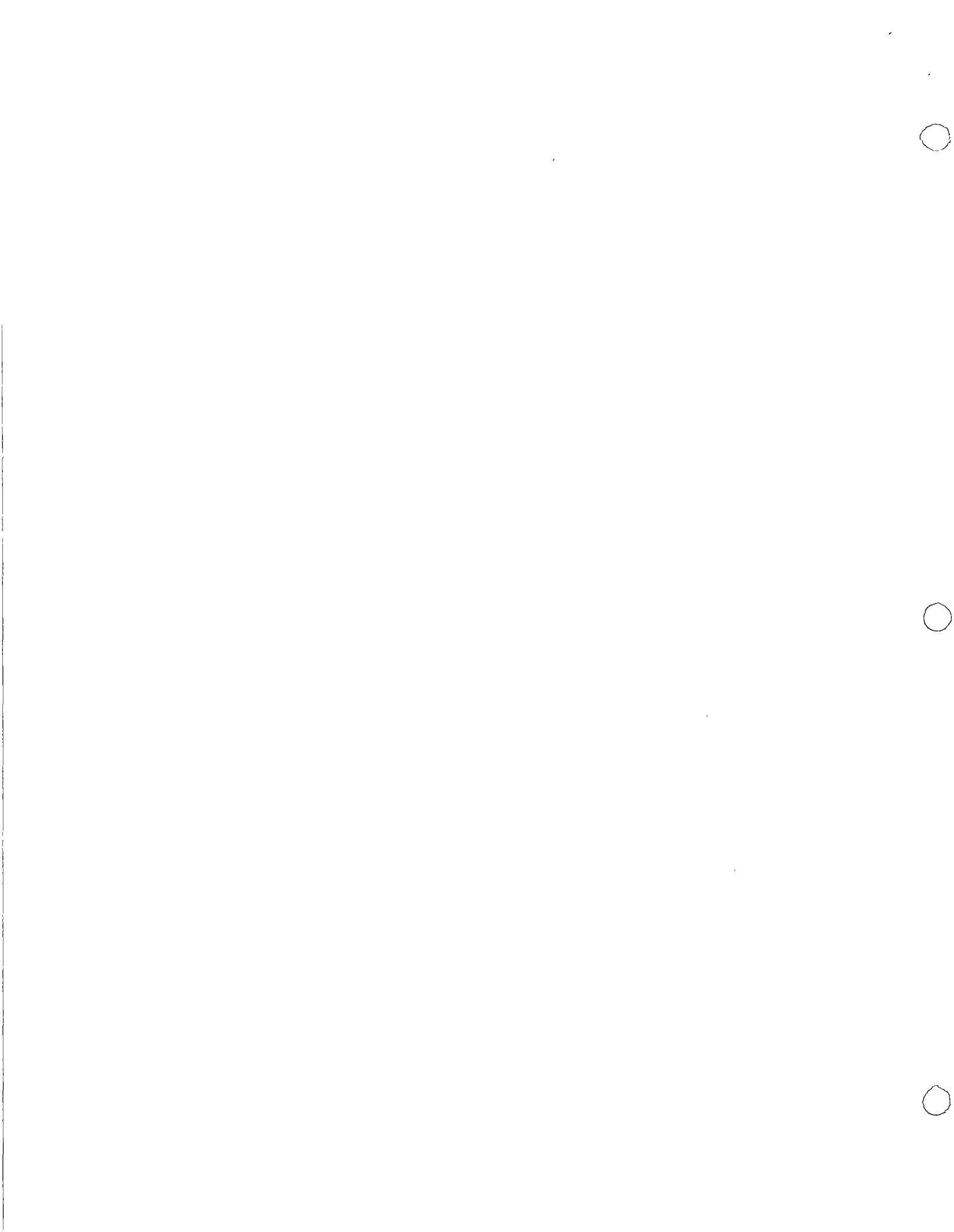
Como la obtención de la solución óptima consiste en efectuar varios pasos de intercambio hasta lograr intercambiar las x_i por las y_i , es necesario dar las siguientes reglas para seleccionar el elemento pivote en cada paso de intercambio.

Reglas para escoger el renglón donde se encuentra el pivote.

1. El elemento en la última columna del renglón del pivote tiene que ser menor que cero.
2. Si hay varios valores negativos en la última columna, el renglón del pivote corresponderá al valor más pequeño de estos.

Regla para escoger el pivote en el renglón del pivote.

1. Se seleccionan todos los elementos del renglón del pivote que son > 0 y se forman las correspondientes cantidades características. La más pequeña de estas determina la posición del pivote.



Las reglas anteriores se aplican reiteradamente y se llega a la solución óptima cuando sucede alguna de las siguientes dos cosas:

1. Todos los elementos de la columna \bar{z} son ≥ 0
2. Aunque existan elementos negativos en la columna \bar{z} , los elementos en los correspondientes renglones son sin excepción ≤ 0 .

Esto significa que el problema dado no tiene una única solución.

Ejemplo de optimización

MAX $\bar{z} = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$

Sujeto a

$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$

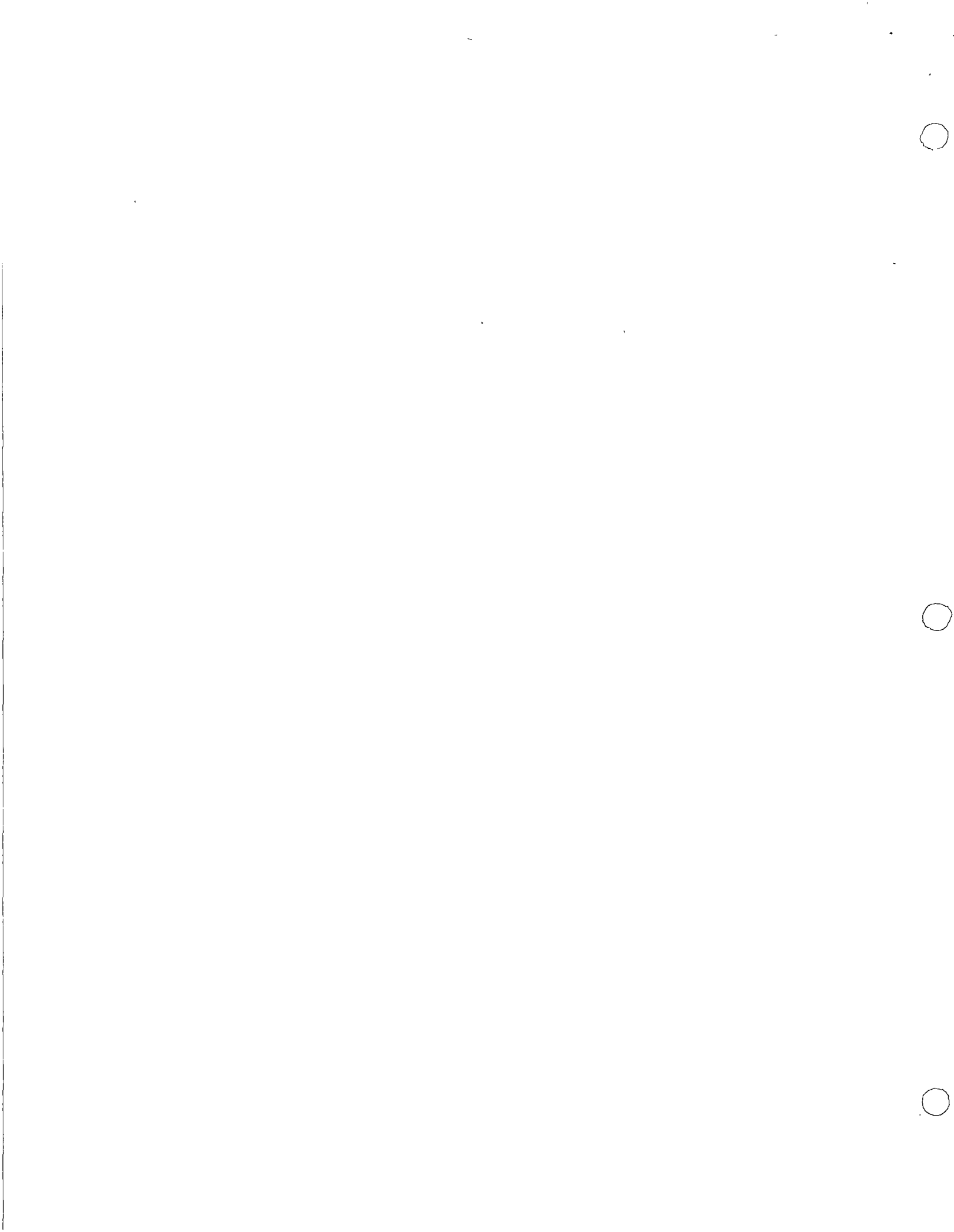
$x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 15$

$x_1 - 3x_3 \leq 12$

$x_i \geq 0$

| | y_1 | y_2 | y_3 | \bar{z} | |
|-------|----------------|-------|-------|-----------|---|
| x_1 | (3) | 1 | 1 | -5 | ← |
| x_2 | 3 | -3 | 0 | -3 | |
| x_3 | 2 | 1 | -3 | -2 | |
| c | 10 | 15 | 12 | | |
| | $\frac{10}{3}$ | 15 | 12 | | |

↑



| | x_1 | y_2 | y_3 | Z |
|-------|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| y_1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ |
| x_2 | 1 | -4 | -1 | 2 |
| x_3 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{11}{3}$ | $\frac{4}{3}$ |
| c | $\frac{10}{3}$ | $\frac{35}{3}$ | $\frac{26}{3}$ | $\frac{50}{3}$ |

La solución está regida tan solo por la primera restricción y es -
la siguiente:

$$x_1 = \frac{10}{3} \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \quad y_2 = \frac{35}{3}$$

$$x_3 = 0 \quad y_3 = \frac{26}{3}$$

$$Z \text{ max} = \frac{50}{3}$$

Comprobación:

$$3 \frac{10}{3} = 10 \quad \text{ok}$$

$$\frac{10+35}{3} = 15 \quad \text{ok}$$

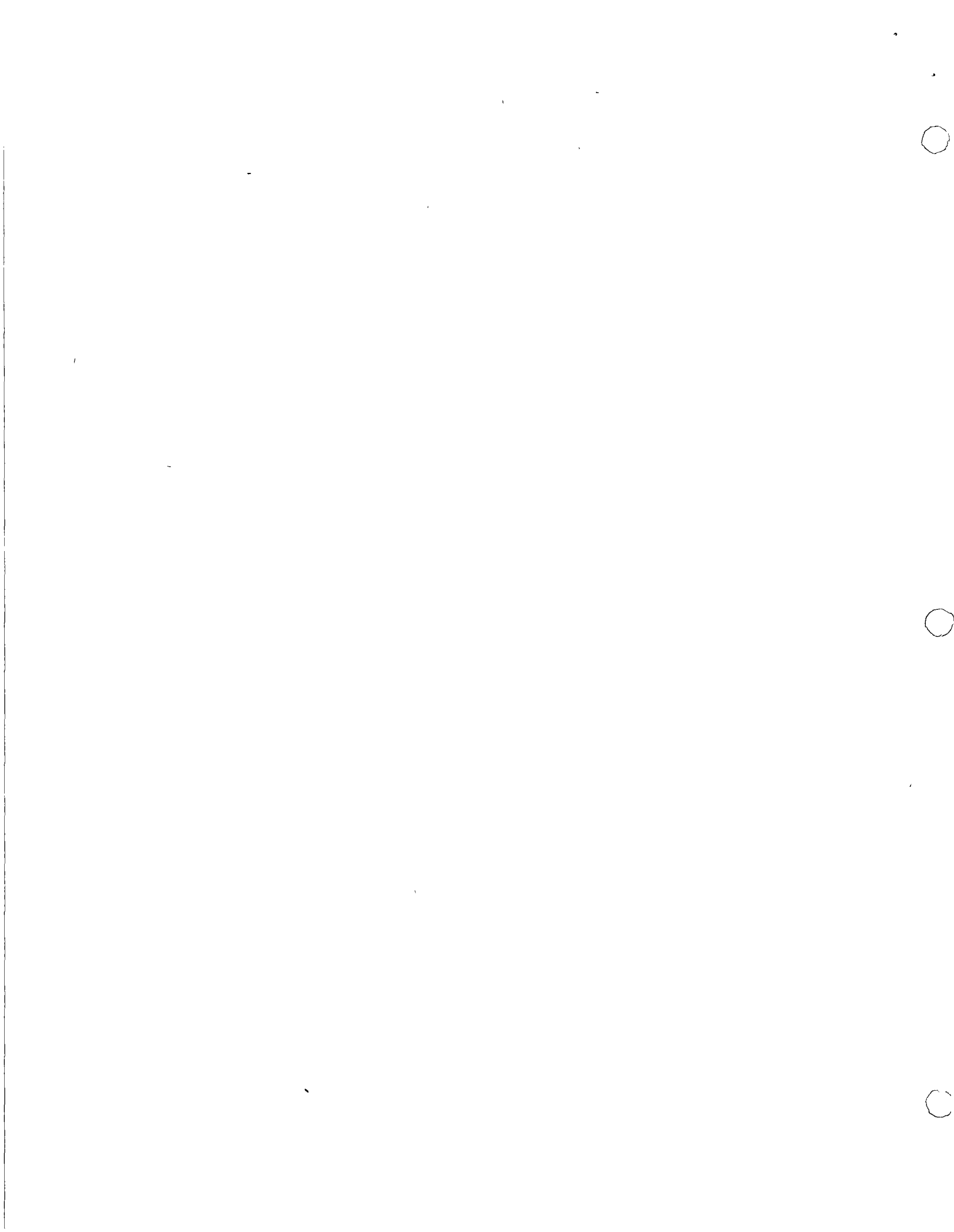
$$\frac{10+26}{3} = 12 \quad \text{ok}$$

$$Z = 5 \frac{10}{3} = \frac{50}{3}$$

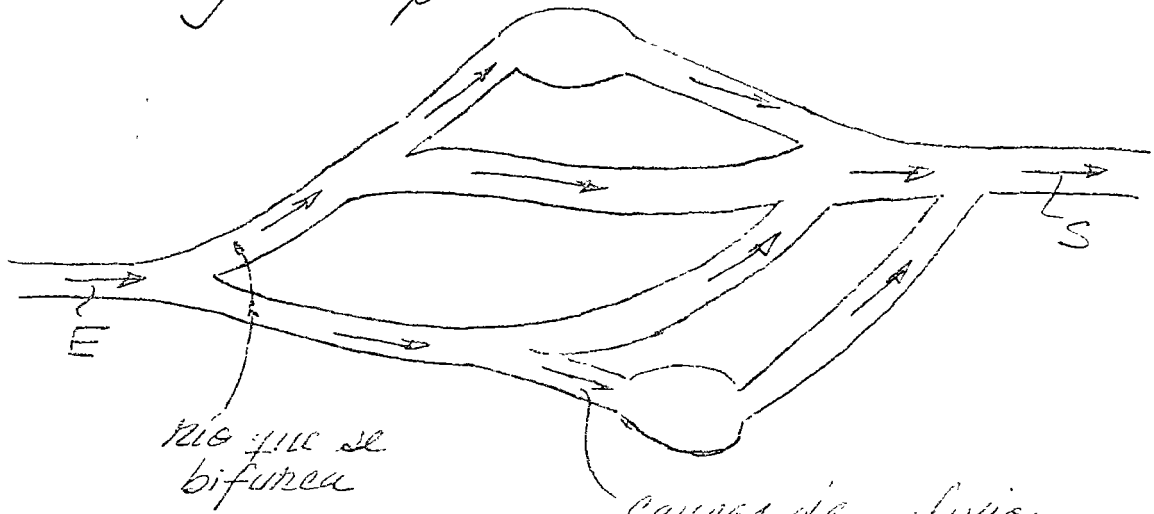


2.2.2. Programación dinámica.

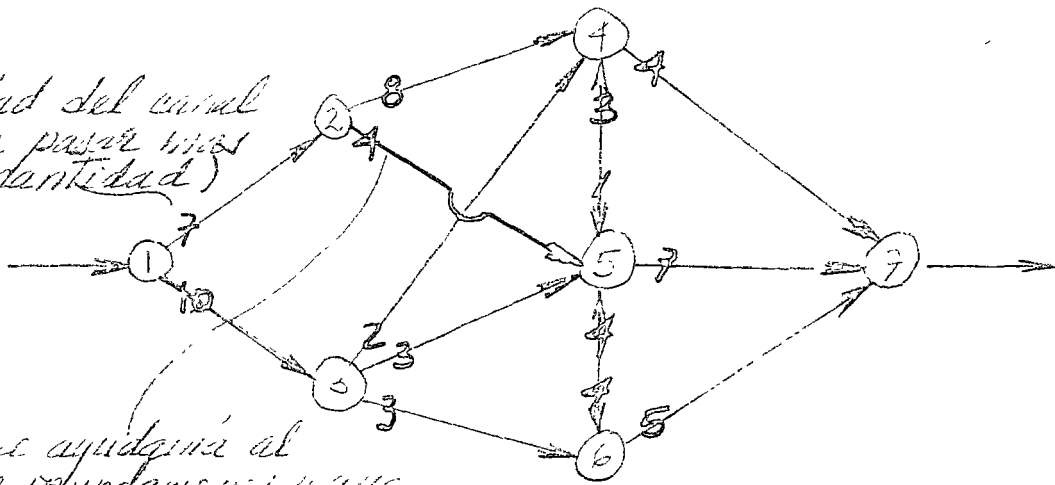
La programación dinámica es una técnica matemática - que permite analizar una secuencia de decisiones interrelacionadas. Proporciona un procedimiento sistemático que permite seleccionar - la combinación de decisiones que maximizan eficazmente el total. -- En contraste con la programación lineal, no existe un modelo mate- -- mático del problema de la programación dinámica. Por el contrario, la programación dinámica es una técnica en la que las ecuaciones -- particulares a usarse deben ser desarrolladas para adaptarse a - - cualquier situación individual. Por lo tanto, se requiere desarro- llar un cierto grado de ingenio y visión, que permita reconocer -- cuando un problema puede resolverse utilizando la programación di- -- námica y en que forma debe resolverse. Estas habilidades pueden - desarrollarse presentando una amplia variedad de aplicaciones que - ilustren las características que son comunes a todas las situacio- -- nes. En estas notas se presentan a continuación algunos ejemplos - de aplicación a políticas de operación de presas (quizá la aplica- -- ción más importante de esta técnica a los Aprovechamientos Hidráulicos) con este propósito.



Consideremos el siguiente problema:



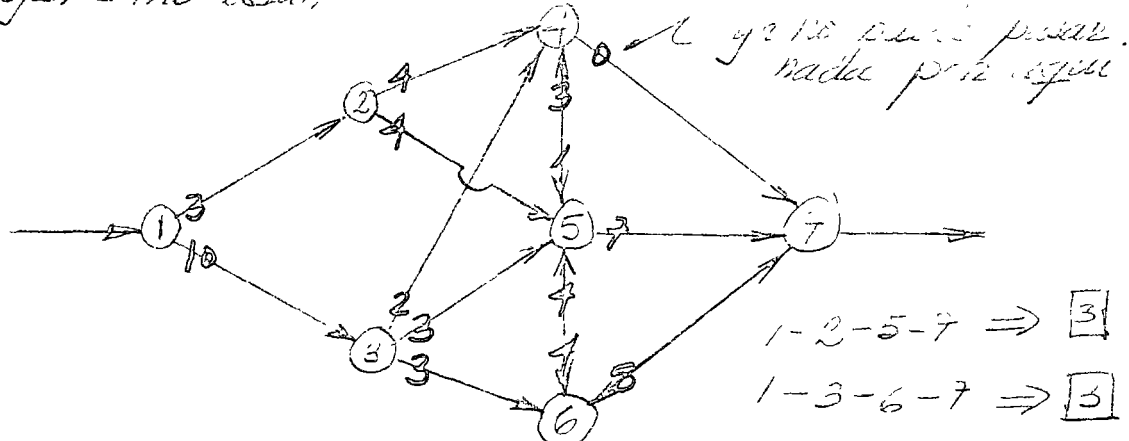
Es obvio que lo que entra es igual a lo que sale ($E=S$), lo que no es tan obvio es como se reparte el agua. Dadas valores a un problema como este y su solución, nos indicará que la "Programación Lineal" consiste en resolver un problema de N variables como una secuencia de N problemas de una sola variable.



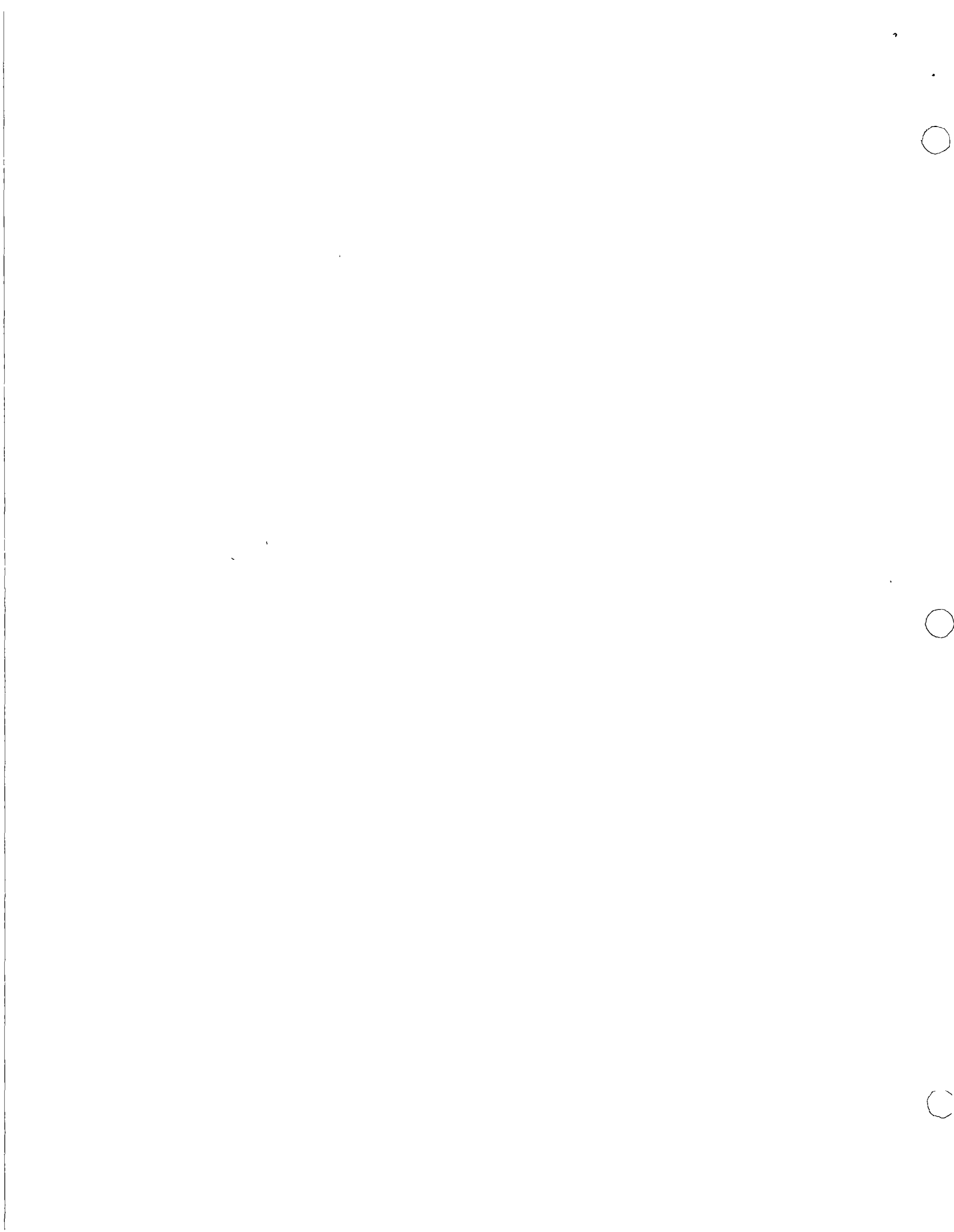
Capacidad del canal (no puede pasar más que esta cantidad)

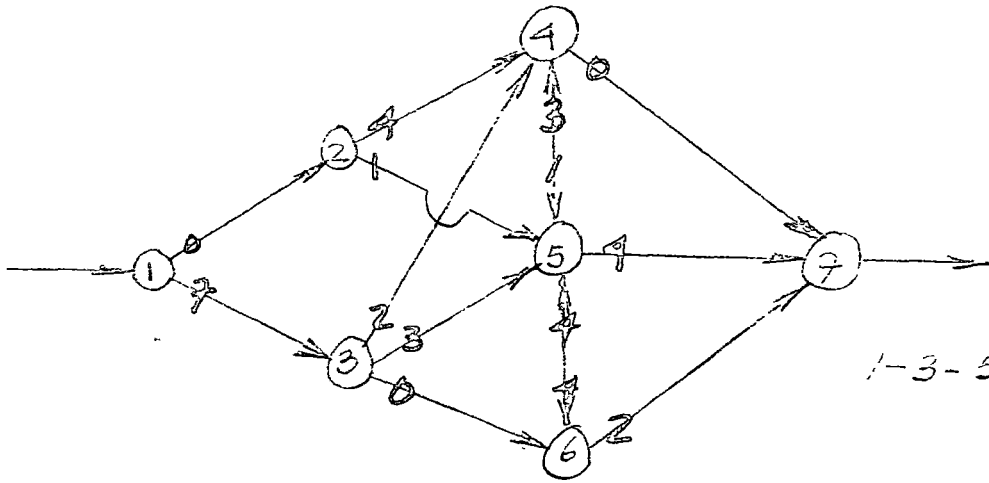
Sifón que ayudaría al control de inundaciones y que su máxima capacidad es 4 por cuestiones de tipo económico

Para sacar 4 unidades de flujo que seguir la ruta 1-2-4-7 y el resto a todas las oportunidades sobre esta ruta 4 unidades y las demás se dejan como están.

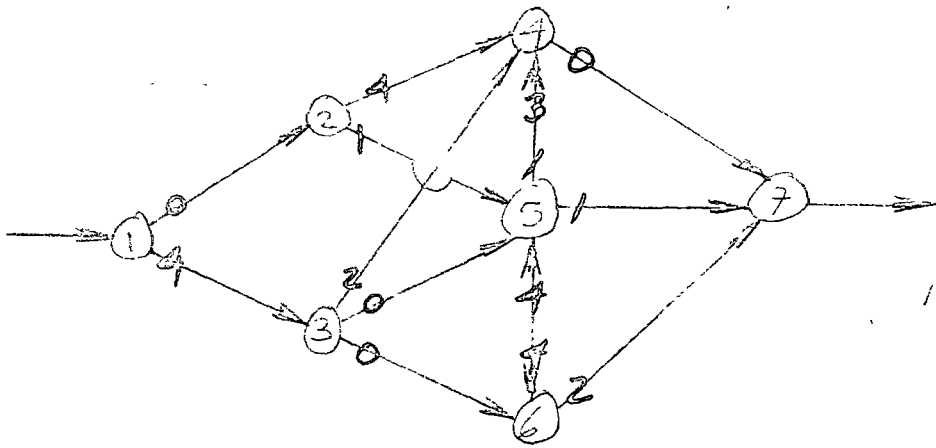


1-2-5-7 \Rightarrow 3
1-3-6-7 \Rightarrow 3

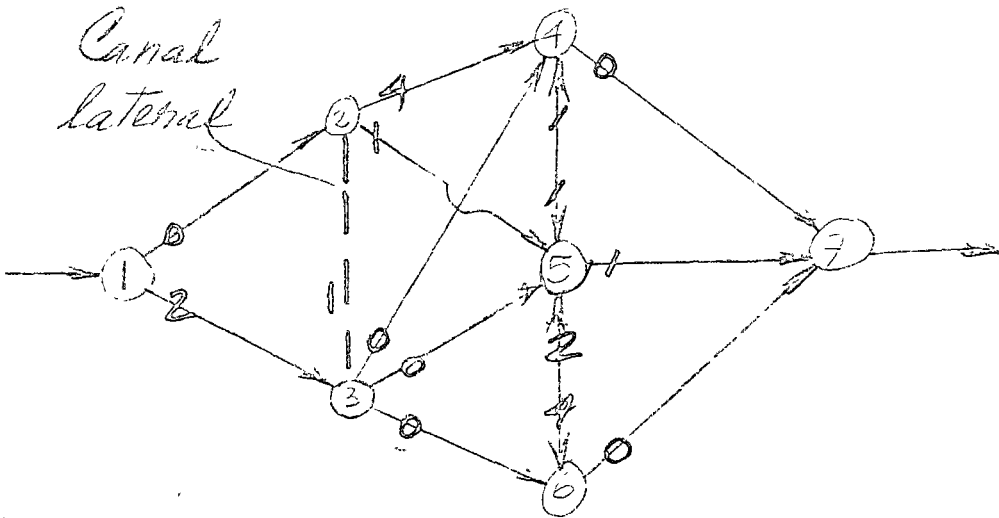




1-3-5-7 \Rightarrow 3



1-3-4-5-6-7 \Rightarrow 2



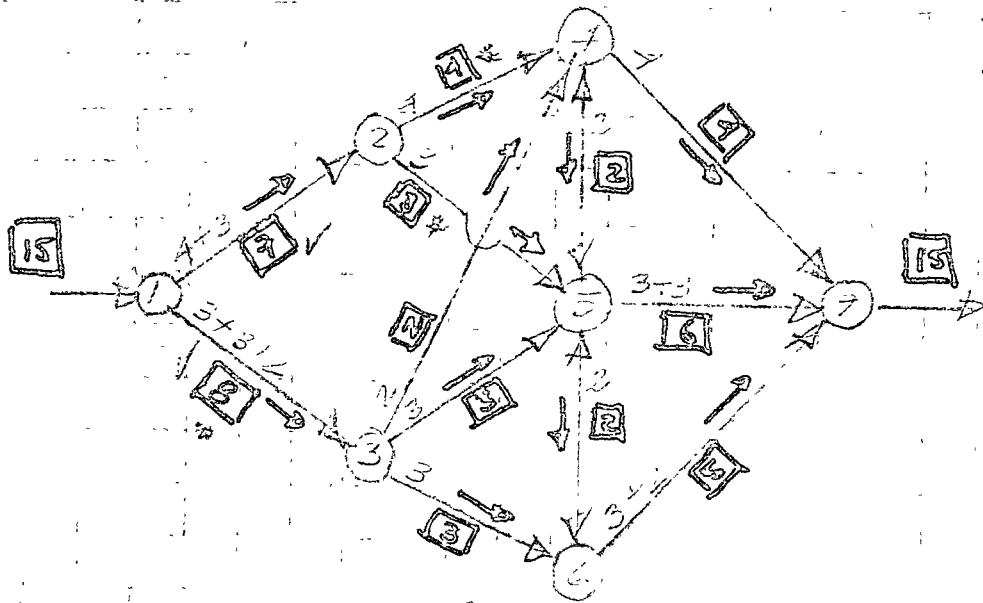
Resuelto el problema se obtiene la siguiente información:
 hay un el sifón para una capacidad de tres ya que el sistema lo limita. Si se le agrega al sistema el canal lateral indicado en la figura no habrá gran mejora

C

O

O

SOLUCIÓN



$4 + 3 = 7$ $3 + 3 = 6$
 $5 + 3 = 8$ $3 + 3 = 6$
 etc.

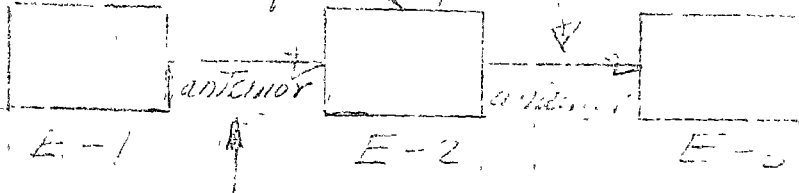
} se debe cumplir la
 continuidad

La solución de este problema de programación lineal

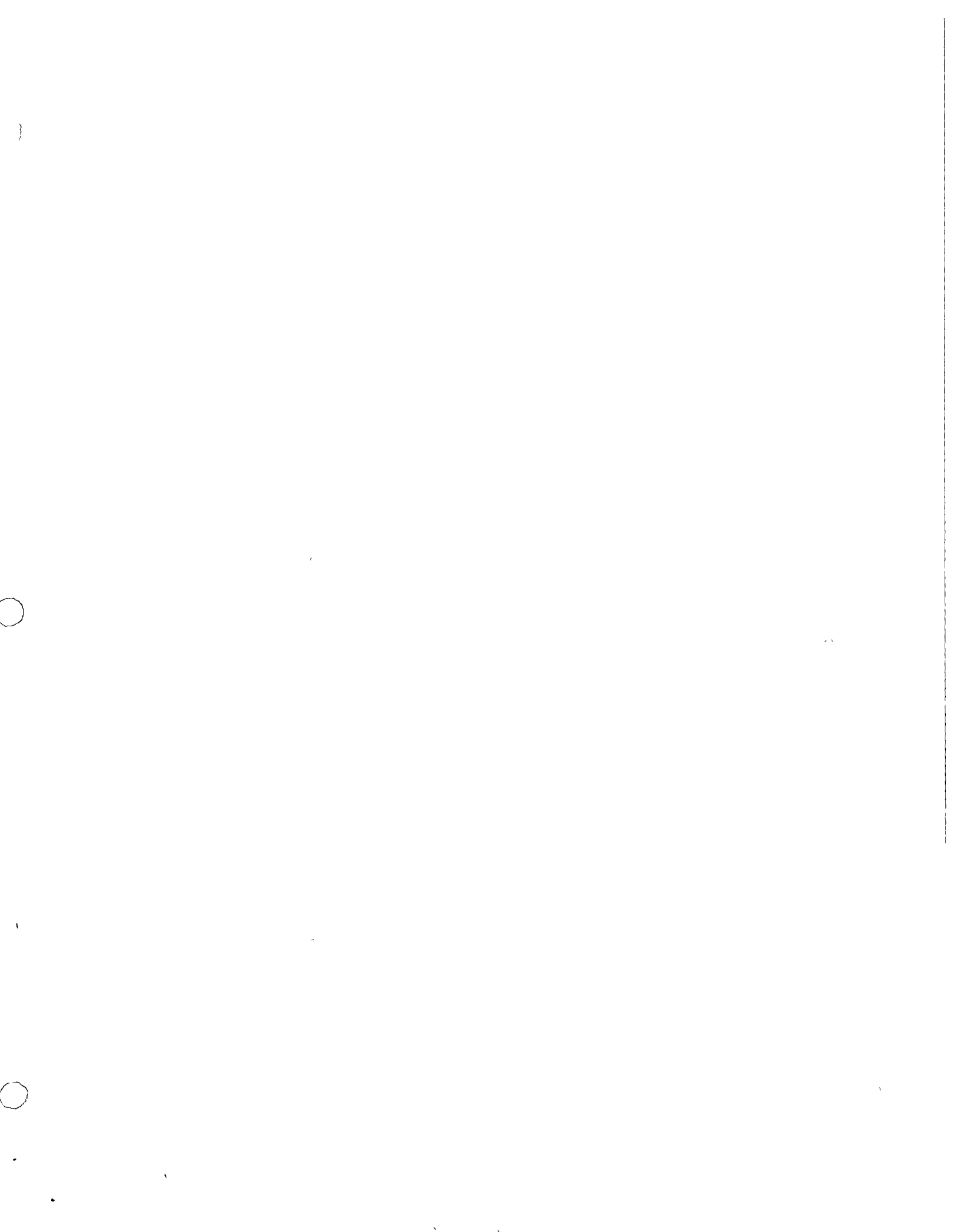
se puede encontrar de la siguiente manera:

incluye la etapa anterior
 recorda

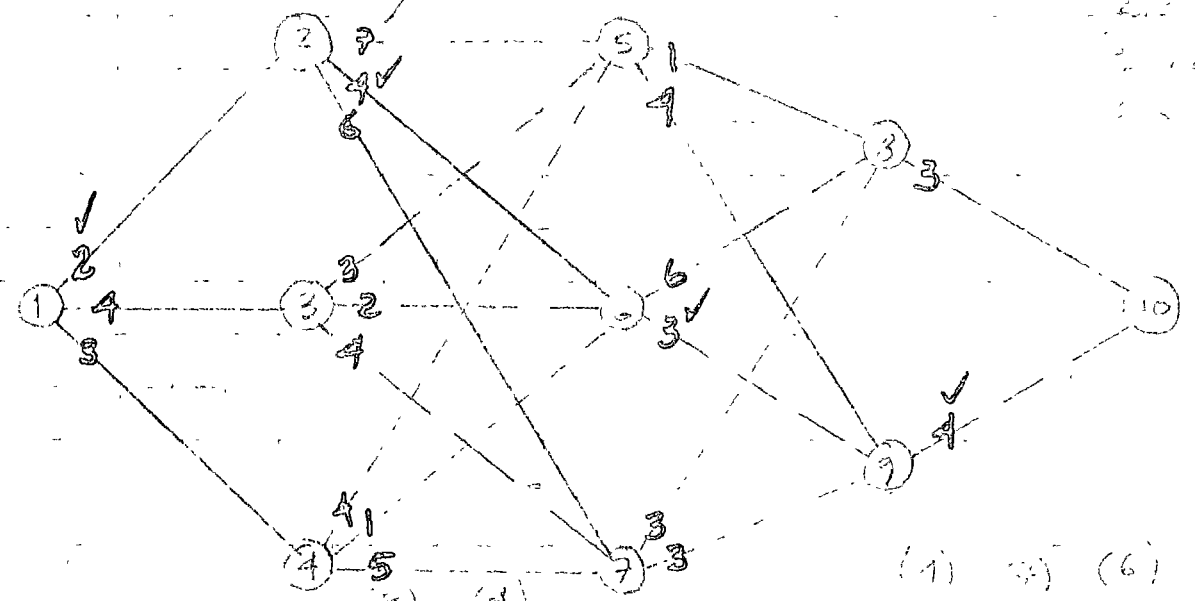
E- etapa



teniendo en cuenta
 el resultado de la etapa
 anterior



costo en millones
de cada una



10 millones
de cada una
de cada una
de cada una
de cada una
de cada una

10 millones

| | |
|-----------|------|
| de \ a | (10) |
| (3) ← (8) | 5 * |
| (4) ← (9) | 4 |

| | | |
|-----------|-----|-----|
| de \ a | (3) | (9) |
| (4) ← (5) | 4 | 3 |
| (7) ← (5) | 9 | 7 |
| (6) ← (7) | 6 | 7 |

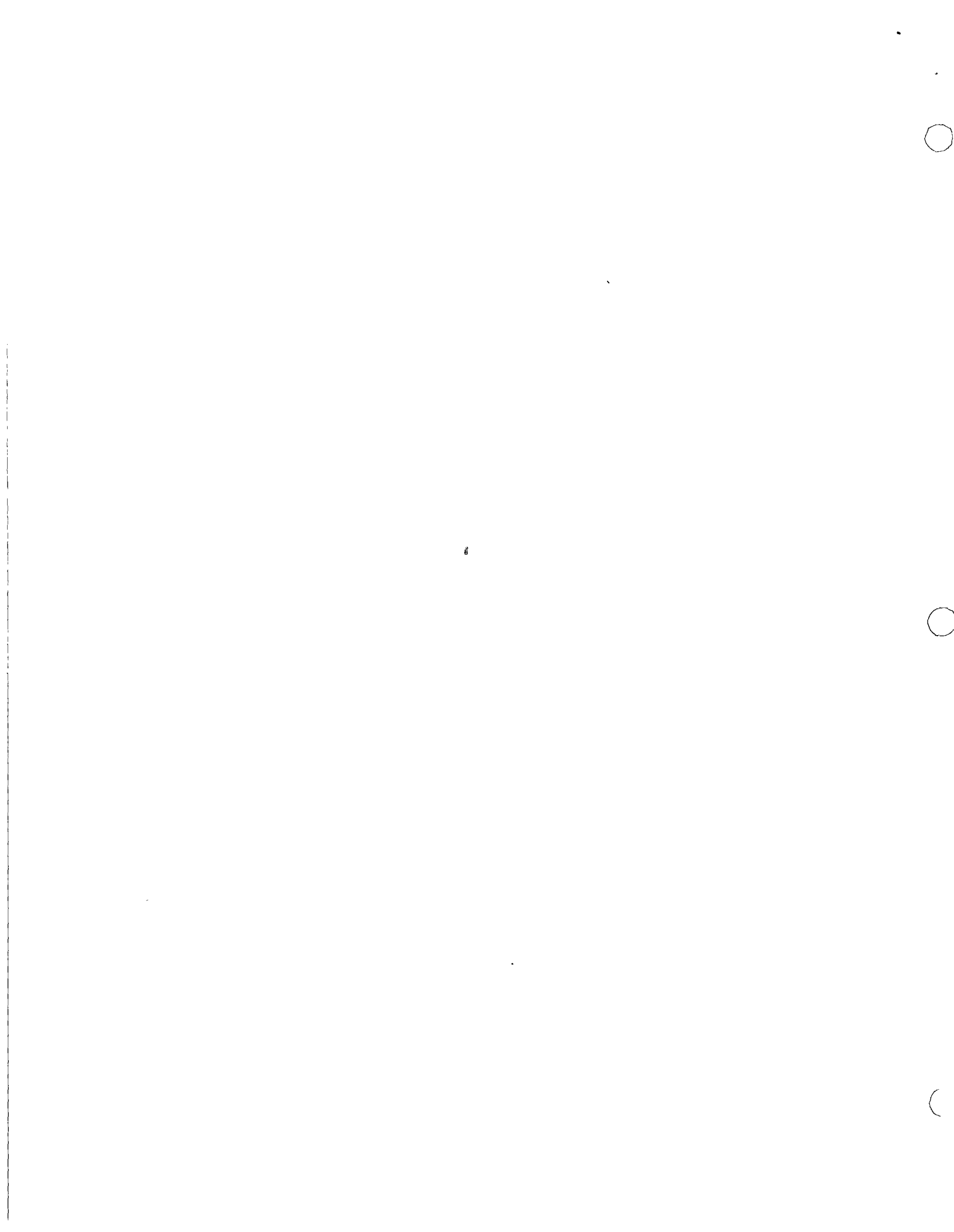
| | | | |
|------------|-----|-----|-----|
| de \ a | (5) | (6) | (7) |
| (11) ← (2) | 11 | 11 | 12 |
| (7) ← (3) | 7 | 9 | 10 |
| (8) ← (4) | 8 | 3 | 11 |

| | | | |
|--------|-----|-----|-----|
| de \ a | (2) | (3) | (5) |
| (1) | 13 | 11 | 14 |

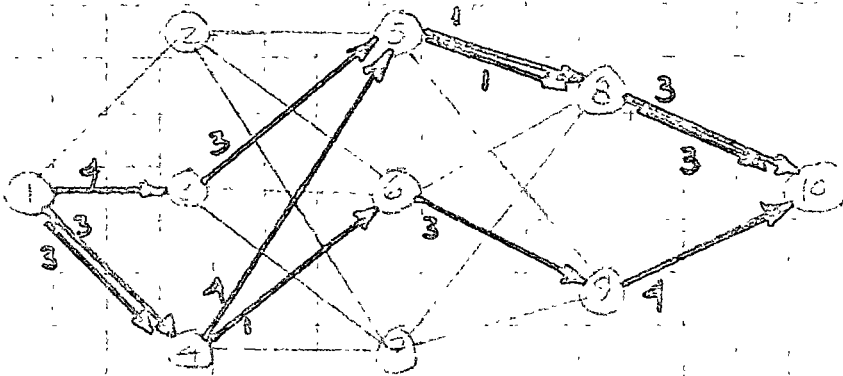
* Mayor a (5) por
(8) me queda 3 millones.

hay tres millones
de cada una
de cada una

La primera opción tiene la ventaja de que
algunas de las líneas más importantes y las de mayor
importancia, las líneas de transporte tienen estas características
mientras que una política de transporte con respecto al estado
resulta en la construcción de nuevas.



Actividad:



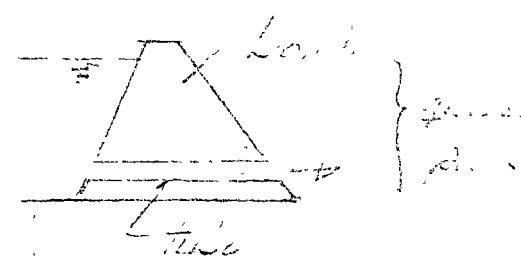
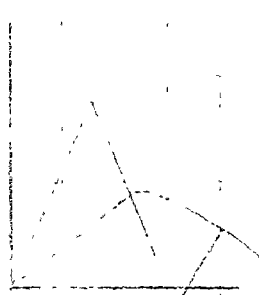
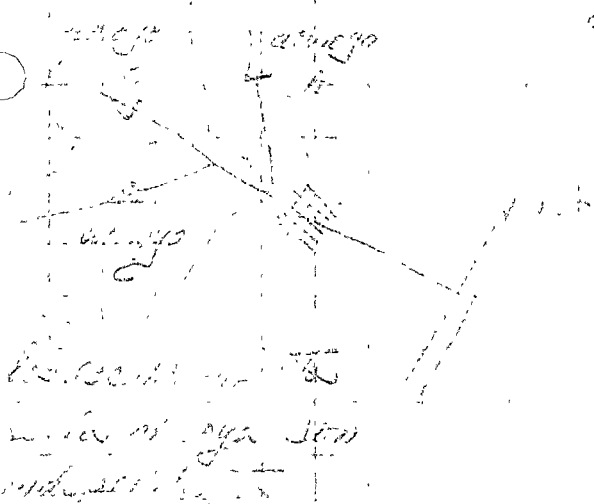
| | | |
|----|----|----|
| 3 | 3 | 4 |
| 1 | 4 | 3 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 3 | 3 |
| 11 | 11 | 11 |

... para 1-4 de tiempo a cambio de los 5 ...
para 5 y 6.

... se ve un camino 1-3 y luego según prioridad de ...
... a través de ... para obtener que el ...

Diagrama de ...

Problema en la ... de ...
... de ...



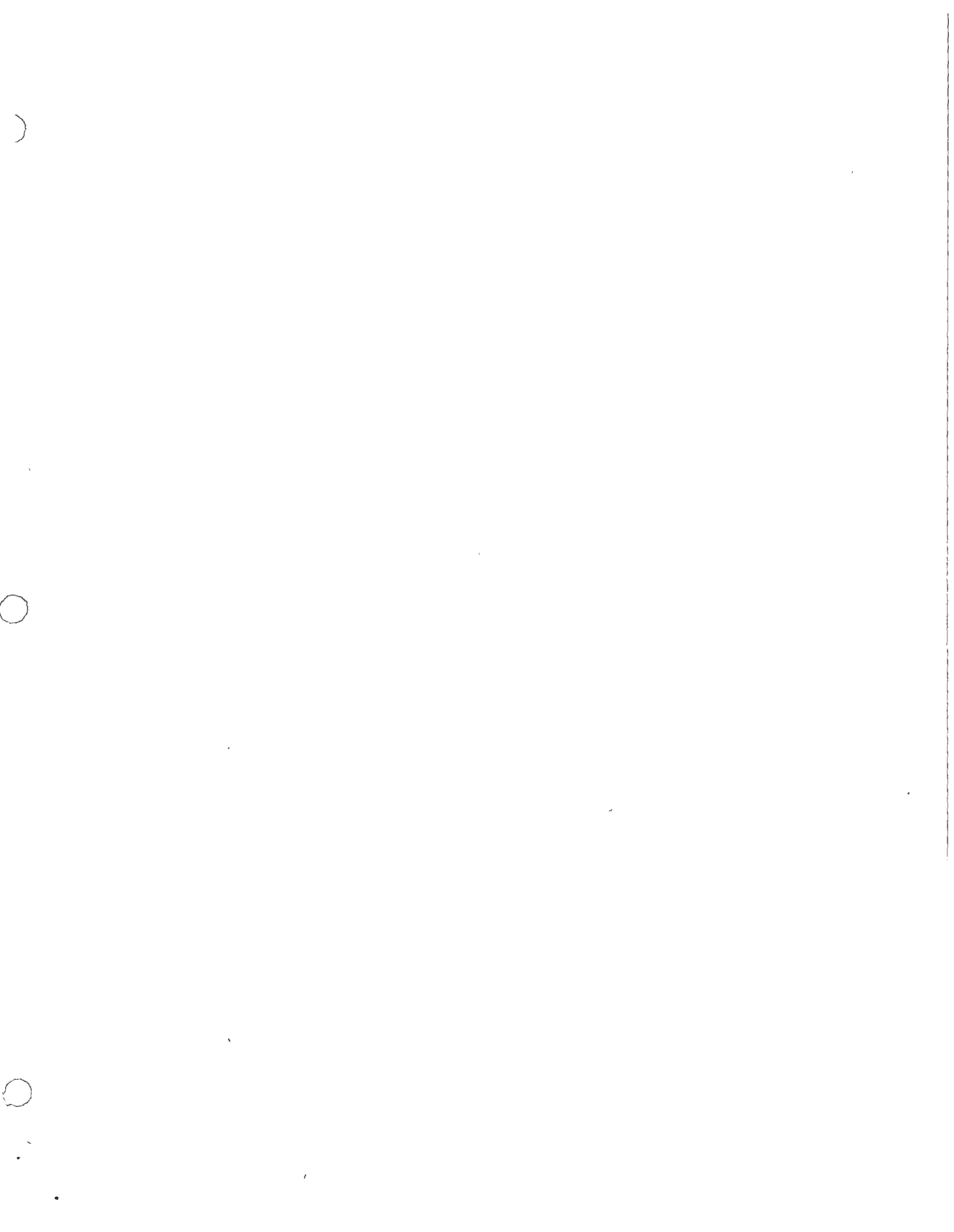
...
...
...

... que ...
...
...

...
...

| Millas | A | B | C |
|--------|------|-----|-----|
| 0 | 0.7 | 0.6 | 0.3 |
| 1 | 0.5 | 0.7 | 0.5 |
| 2 | 0.15 | 0.2 | 0.3 |

...
...
...



$\pi(5) = 0.1 \times 0.2 \times 0.3 = 0.006 \approx \frac{17}{100} \approx \frac{1}{5}$
 ¿cómo como cómo me importa no
 probabilidad del día a día

Tengo dos millones de pesos para invertir
 ¿cómo los gasto?

Etapa C (comenzamos con los pesos que
 tiene una probabilidad de
 éxito más grande y así seguimos)

| | | |
|-----|-------|-----|
| | y_a | 0 |
| 0.2 | → | 0 |
| 0.5 | → | 1 |
| 0.3 | → | 2 |
| | y_b | 0 |
| | | 0.8 |
| | | 0.5 |
| | | 0.5 |

Etapa B

| | | | | |
|------|-------|------|------|------|
| | y_a | 0 | 1 | 2 |
| 0.98 | → | 0 | 1 | 2 |
| 0.30 | → | 1 | 2 | 3 |
| 0.10 | → | 2 | 3 | 4 |
| | y_b | 0 | 1 | 2 |
| | | 0.48 | 0.32 | 0.30 |
| | | 0.16 | 0.20 | 0.18 |

$0.8 \times 0.6 = 0.48$
 $0.8 \times 0.4 = 0.32$
 $0.8 \times 0.2 = 0.16$

$0.5 \times 0.6 = 0.30$
 $0.5 \times 0.4 = 0.20$
 $0.5 \times 0.2 = 0.10$

$0.2 \times 0.5 = 0.10$

ETAPA A

| | | | | |
|------|-------|-------|------|-------|
| | y_a | 0 | 1 | 2 |
| 0.98 | → | 0 | 1 | 2 |
| 0.30 | → | 1 | 2 | 3 |
| 0.10 | → | 2 | 3 | 4 |
| | y_b | 0 | 1 | 2 |
| | | 0.072 | 0.26 | 0.064 |

$0.98 \times 0.15 = 0.147$
 $0.98 \times 0.1 = 0.098$
 $0.98 \times 0.05 = 0.049$

los resultados
 (0.98) → A
 (0.30) → B
 (0.10) → C

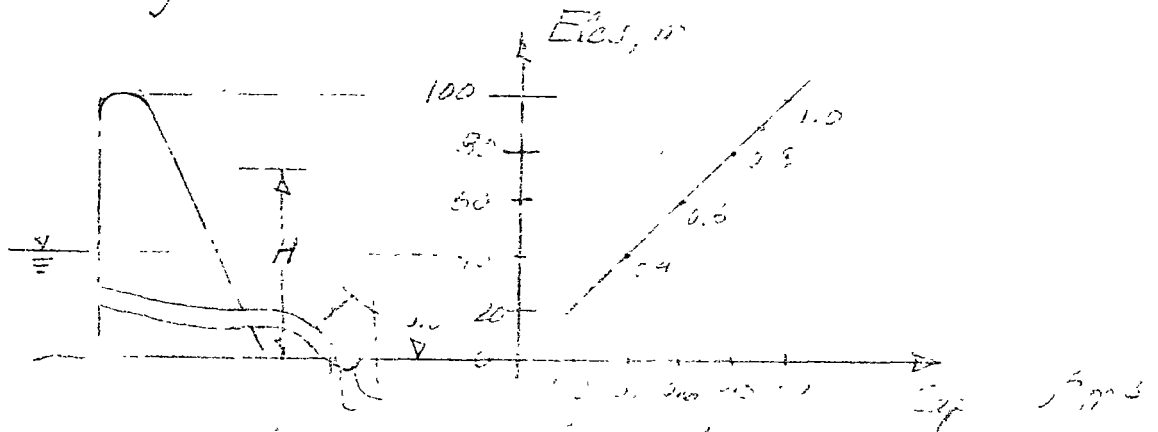
la probabilidad del conjunto luego de

)

o

o

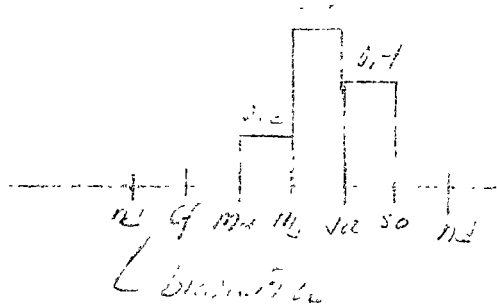
Section de manège de une co. 11m



H - 10 m de hauteur

Hmin = 70 m (dans la partie de la machine)

ingénieur (un...)



$10^6 m^2$

$$P = 1.5 \times H = 1.5 \times 10 \frac{V}{T}$$

$$T = 2 \times 50 \times 60 \times 60 = 3,6 \times 10^6 \text{ s}$$

13-18-15

Quantité de travail

$$Q = \frac{7.8 H \times 2 \times 10^6}{5.15 \times 10^6} \times 24 \times 30 \times 60 = 1341.67 \text{ HV km/h}$$

LW

probleme \rightarrow $F = 0.25 / km/h$ (vitesse de marche)

$$Q_{max} = 1341.67 \times 0.25 = 335.42 \text{ HV km/h}$$

limitations importantes:

1. La hauteur de la machine
 2. La vitesse de marche de la machine, ne doit pas dépasser 350000
 3. La machine ne doit pas dépasser 1000000
- on se gênera de la machine et on pourra un autre genre de machine

C

O

O

1ª Etapa $50 - 10 = 40$ $E = 0$ (entrega)

hipótesis: 100 unidades de este recurso

| | | | | | | |
|----|---|-----|-----|-----|-----|--------------|
| | | -15 | 18 | 32 | 35 | |
| | | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | |
| de | 2 | 1 | 0.8 | 0.6 | 0.4 | exp |
| ✓ | 1 | -15 | 18 | 32 | 35 | 2 miles de t |

no saco agua ← → comienzo a sacar agua

de 1 a 0.7

$H = 70$

$V = 0.6$

Ganancia = $0.6 \times 70 = 42$

para los recursos no de más de 35 - en esta cantidad en términos de agua

de 1 a 0.8

$H = 100$

$V = 0.2$

costo variable

varianza = $0.2 \times 70 = 14$ miles de t

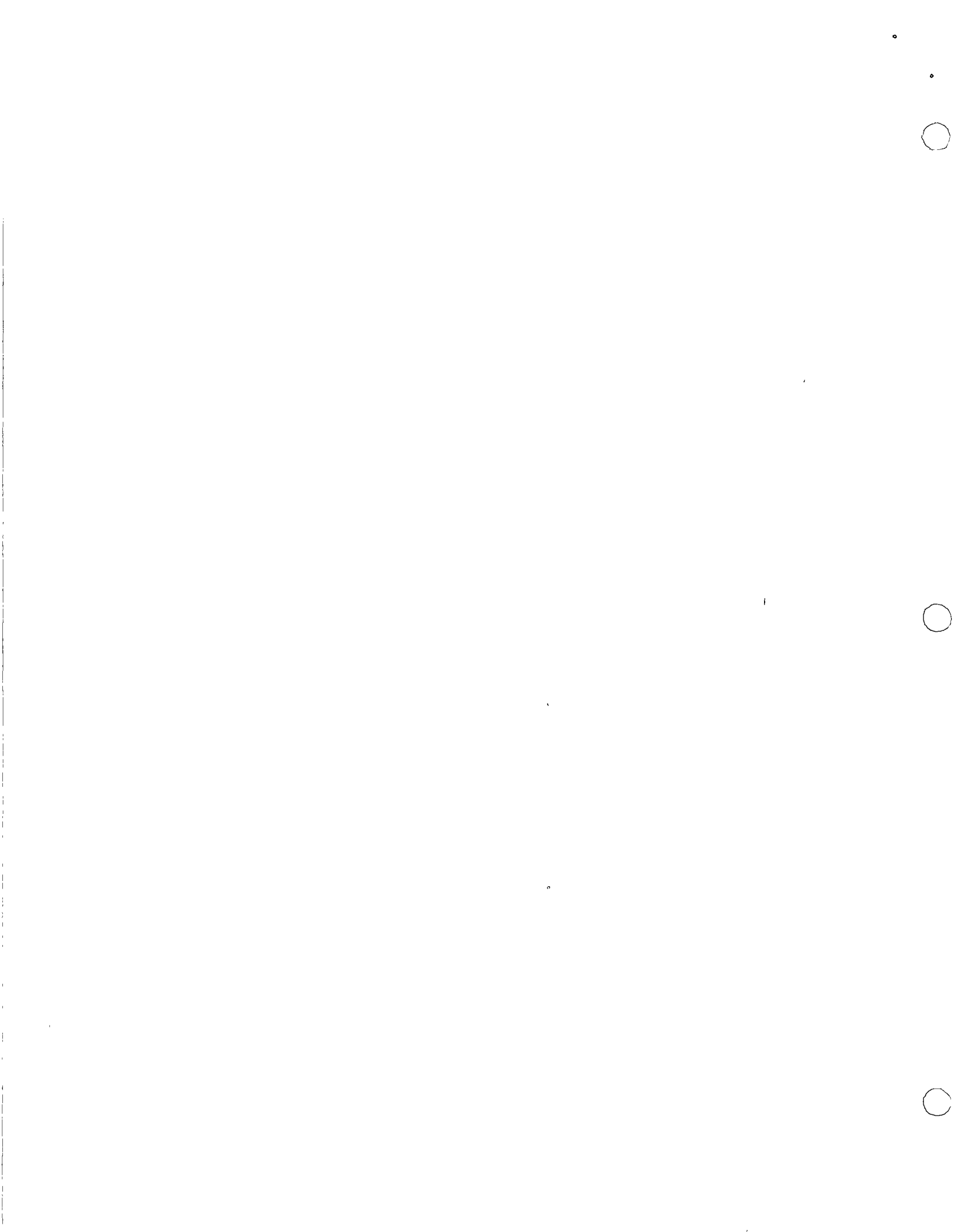
Etapa 2 $100 - 10 = 90$ $E = 0$

| | | | | | |
|----|-----|-----|-----|-----|--|
| | | -30 | 32 | 42 | |
| | | ↑ | ↑ | ↑ | |
| de | 2 | 1 | 0.6 | 0.4 | |
| ✓ | 1 | -30 | 17 | 20 | |
| ✓ | 0.8 | | 32 | 42 | |
| 32 | 0.6 | | 17 | 42 | |
| 35 | 0.4 | | | 20 | |

de 1 a 0.3
 $H = 70$
 $V = 0.2$
 Ganancia = $13 - 15$

Etapa 3 $90 - 10 = 80$ $E = 0$

| | | | | | |
|----|-----|-----|-----|----|-----|
| | | -45 | -12 | 2 | 5 |
| | | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |
| de | 2 | 1 | 0.5 | 0 | 0.4 |
| ✓ | 1 | -45 | -12 | 2 | 5 |
| ✓ | 0.8 | | -12 | 17 | 27 |
| ✓ | 0.6 | | | 17 | 42 |
| ✓ | 0.4 | | | | 27 |



Etapa 1 \checkmark $ma - m_j$ \checkmark $\checkmark E = 3,2$

| | | \uparrow -25 | \uparrow 4 | \uparrow 29 | \uparrow 50 |
|-------------------------------|-----|-------------------|-----------------|------------------|------------------|
| de | a | 1 | 0,8 | 0,6 | 0,4 |
| -45 \rightarrow | 1 | -25 | -10 | -10 | -10 |
| -12 \rightarrow | 0,8 | -27 | 4 | 16 | 23 |
| \checkmark 17 \rightarrow | 0,6 | /// | 2 | 10 | 47 |
| \checkmark 42 \rightarrow | 0,4 | /// | /// | 27 | 50 |

de 1 a 1
entre 0,2 y 0
saque
 $H = 100$
 $V = 0,2$
ganancia = 20
 $20 - 45 = -25$

de 1 a 0,8
 $V = 0,6$
 $\bar{H} = 50$

de 1 a 0,8
saque 0,2 y
entre 0,2 y 0,4
saque
 $V = 0,4$
 $\bar{H} = 10$

Ganancia = $20 \times 0,6 = 12$
 $\Rightarrow 35$
 $-45 + 35 = -10$
- soluciones idénticas

Ganancia = $0,4 \times 90 = 36$
 \Rightarrow ganancia = 35
 $-45 + 35 = -10$

de 0,8 a 1
los 0,2 que restan
los abastecemos y no
tenemos $\Rightarrow -15$
 $-15 - 12 = -27$

de 0,8 a 0,8
entre 0,2 y 0,4
saque
 $0,2 \times 20 = 4$
 $16 - 12 = 4$

de 0,8 a 0,6
 $V = 0,2 + 0,2 = 0,4$
 $\bar{H} = 70$
ganancia = 28
 $28 - 10 = 18$

de 0,6 a 0,6
 $V = 0,1 + 0,2 = 0,3$
 $\bar{H} = 30$
ganancia = 35
 $\Rightarrow 35$
 $-12 + 35 = 23$



9



Etapa 5 \downarrow mija \downarrow a $\quad E = 0,6$

| | | | | | |
|-------------------------------|-----|------------|------------|------------|------------|
| | | 45 | 62 | 70 | 71 |
| | | \uparrow | \uparrow | \uparrow | \uparrow |
| de \ a | | 1 | 0,8 | 0,6 | 0,4 |
| -25 \rightarrow | 1 | 10 | 1 | 2 | 2 |
| 4 \rightarrow | 0,8 | 39 | 39 | 39 | 39 |
| \checkmark 29 \rightarrow | 0,6 | 45 | 57 | 64 | 64 |
| \checkmark 50 \rightarrow | 0,4 | 35 | 62 | 70 | 71 |

de 0,6 a 1
 entran 0,6
 guarde 0,4 y tire
 0,2
 $H = 30$
 $V = 0,2$
 ganancia = $30 \times 0,2 =$
 $= 6$
 $16 + 6 = 22$

de 0,6 a 0,8
 entran 0,6 y guarde 0,2
 y tire 0,4
 $V = 0,4$
 $H = 40$

ganancia = $2E$
 $\frac{29}{57}$

de 0,6 a 0,6
 entran 0,6 y los tiro
 $V = 0,6$
 $H = 60$

ganancia = $3E$
 $\frac{35}{64}$

de 0,6 a 1
 entran 0,6 y los tiro
 tiro 0,2
 $V = 0,2$
 $H = 50$

ganancia = $4E$
 $\frac{35}{64}$

Etapa 6
 \downarrow a - 50
 $E = 0,4$

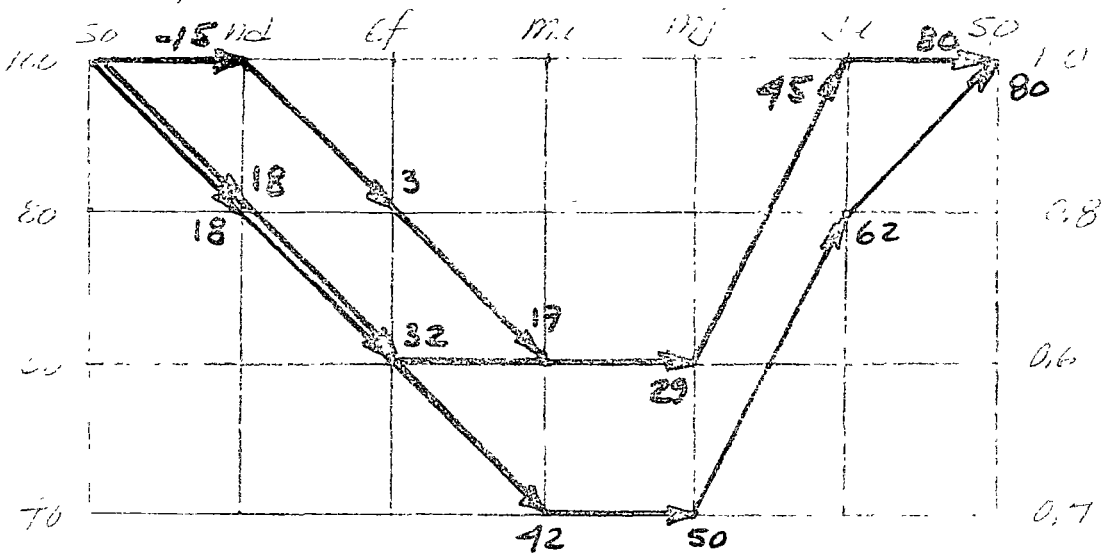
| | | | | | |
|------------------|-----|------------|------------|------------|------------|
| | | 45 | 62 | 70 | 71 |
| | | \uparrow | \uparrow | \uparrow | \uparrow |
| de \ a | | 1 | 0,8 | 0,6 | 0,4 |
| 45 \rightarrow | 1 | 50 | | | |
| 62 \rightarrow | 0,8 | 60 | | | |
| 70 \rightarrow | 0,6 | 55 | | | |
| 71 \rightarrow | 0,4 | | | | |

al final se le debe
 llegar a la decisión de
 perder (le pasa sta lla)

siempre bien le pasa
 la ganancia $E = 50$



Existen dos politicas de inversión



En la politica a. hay un de deterioro como la gamma se obtiene durante el año. Si hay un año malo se frustran los casos.

En la politica b. hay un de deterioro como la gamma se obtiene durante el año. Si hay un año malo no hay problema ya que no se sabe tener la misma gamma.

La decision de cual politica se mejor depende de quien haga esta seleccion (sea un tipo conservador, muy seguro, etc) y si independientemente del aspecto economico.



2.2.3. Optimización Analítica.

A diferencia de la programación lineal, el modelo matemático a plantearse para resolver un problema de optimización usando la optimización analítica, está formado por relaciones no lineales. De estas técnicas únicamente abarcaremos la de los -- 'Operadores de Lagrange' que es adecuada en sistemas de bombeo. A continuación se indican los pasos a seguir para aplicar esta -- técnica.

Se trata de optimizar la función continua de -- tres variables.

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

que debe cumplir con las siguientes condiciones adicionales.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

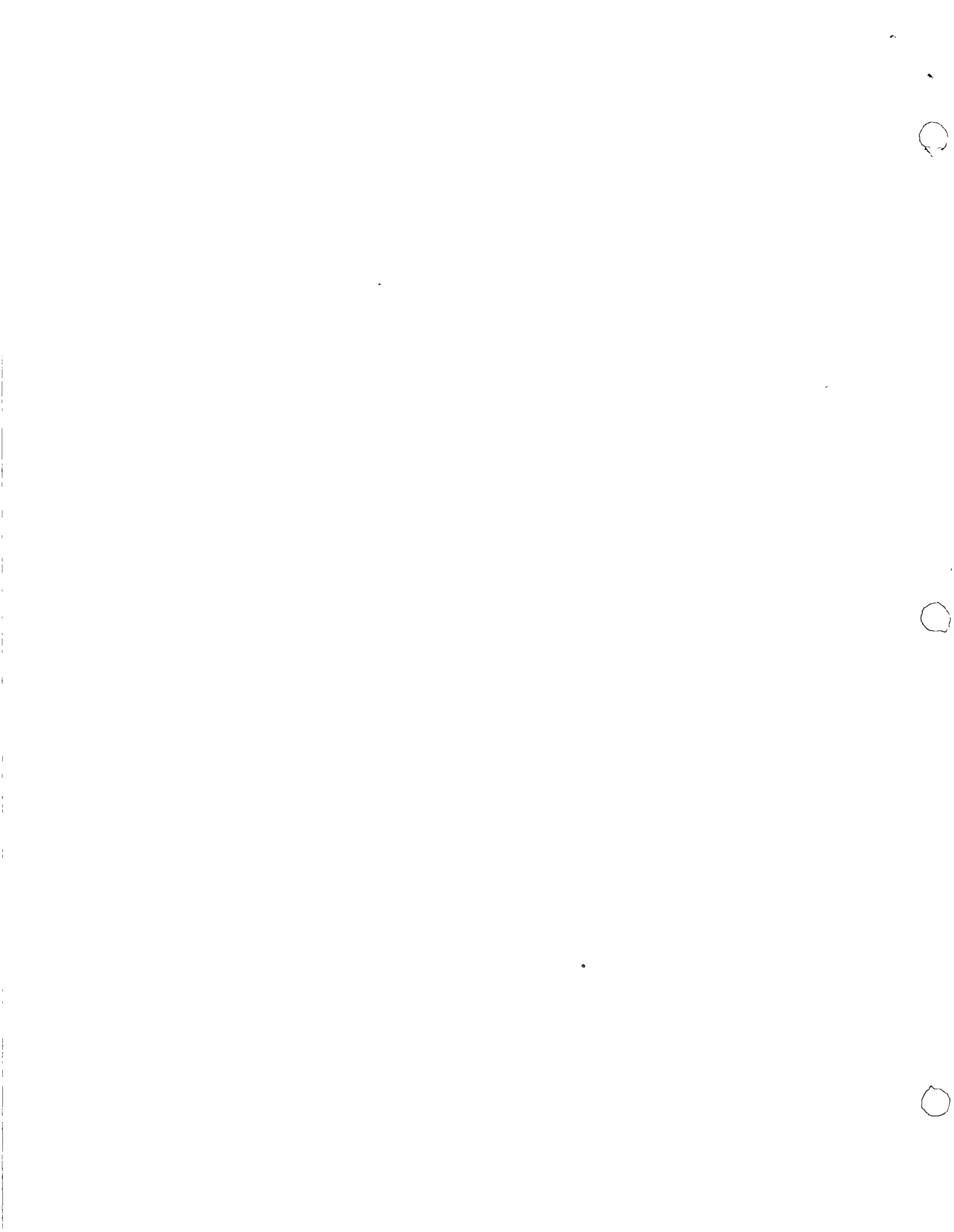
Pasos a seguir:

1. Se fabrica una función de Lagrange

$$L = F - L_1 f_1 - L_2 f_2$$

2. Se procede a calcular las derivadas de L respecto a las x_i e igualarlas a cero

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} - L_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - L_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$



$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = L_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - L_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \frac{\partial F}{\partial x_3} - L_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - L_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$$

3. Despejar x_1 , x_2 y x_3 en términos de L_1 y L_2

4. Substituir en f_1 y f_2 los valores de x_1 , x_2 y x_3 en términos de L_1 y L_2

5. En el sistema formado por $f_1(L_1, L_2) = 0$

$$f_2(L_1, L_2) = 0$$

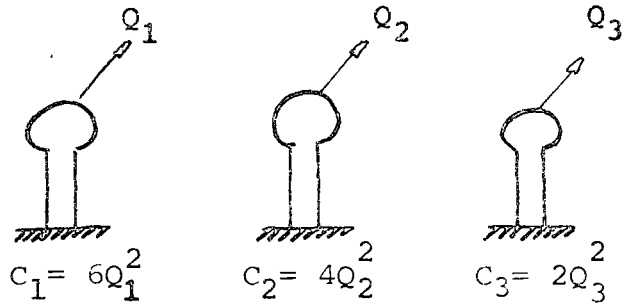
despejar L_1 y L_2

6. Valuar x_1 , x_2 y x_3 según los valores encontrados en el tercer paso.

7. Estos valores hacen máxima a F cumpliendo con las restricciones.

Ejemplo de aplicación

C Consumo de combustible en gal hr.



En las horas de pico se deben suministrar 5m³/Seg.

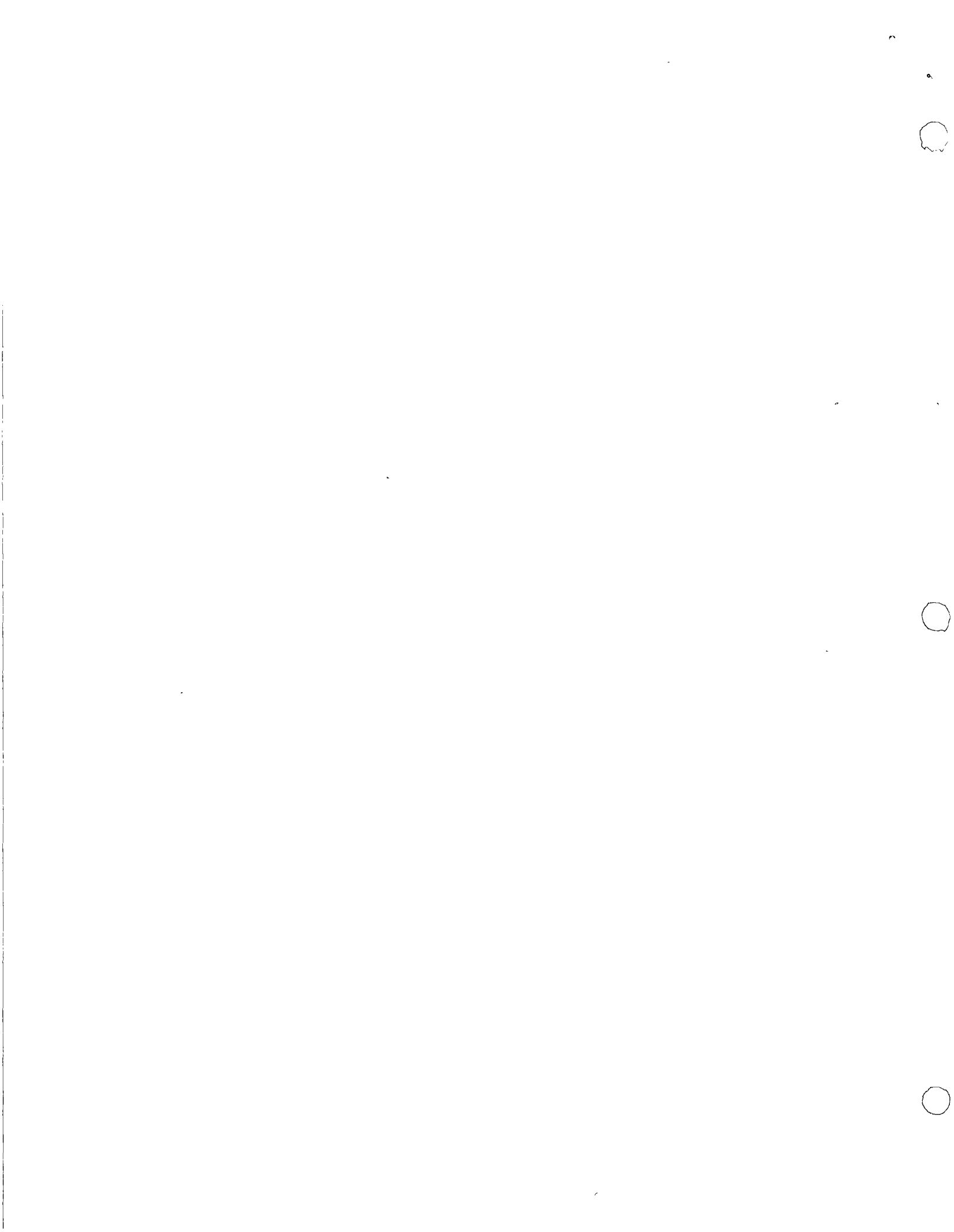
Para hacer mínimo el gasto de combustible quienes deben ser Q_1 ,

Q_2 y Q_3

$$F = 6Q_1^2 + 4Q_2^2 + 2Q_3^2$$

$$f = Q_1 + Q_2 + Q_3 - 5 = 0$$

$$L = 6Q_1^2 + 4Q_2^2 + 2Q_3^2 - L(Q_1 + Q_2 + Q_3 - 5)$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_1} &= 12Q_1 - L = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} &= 8Q_2 - L = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Q_3} &= 4Q_3 - L = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_1 &= 0.91 \\ Q_2 &= 1.36 \\ Q_3 &= \frac{2.73}{5.00} \end{aligned}$$

$$\frac{L}{12} + \frac{L}{8} + \frac{L}{4} = 5 \quad ; \quad L = 10.9$$

$$C_1 = 6 (0.91)^2 = 4.96$$

$$C_2 = 4 (1.36)^2 = 7.40$$

$$C_3 = 2 (2.73)^2 = \frac{14.84}{27.70} \text{ gal hr}$$

Hay que realizar chequeos como los siguientes :

Tan solo opera la bomba mas barata

$$C_3 = 2 (5)^2 = 50 > 27.20 \quad \text{ok}$$

Las dos bombas más baratas

$$F = 4Q_2^2 + 2Q_3^2$$

$$f = Q_2 + Q_3 - 5 = 0$$

$$L = 4Q_2^2 + 2Q_3^2 - L (Q_2 + Q_3 - 5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Q_2} &= 8Q_2 - L = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial Q_3} &= 4Q_3 - L = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q_2 &= \frac{L}{8} \\ Q_3 &= \frac{L}{4} \end{aligned} \quad \begin{aligned} Q_2 &= 1.67 \\ Q_3 &= \frac{3.33}{5.00} \end{aligned}$$



$$\frac{L}{8} + \frac{L}{4} = 5 \quad ; \quad L = 13.33$$

$$C_2 = 4 (.167)^2 = 11.15$$

$$C_3 = 2 (3.33)^2 = \frac{22.18}{33.33} \quad 2720$$

Con esto queda uno convencido que la mejor solución es una combinación de las tres bombas.





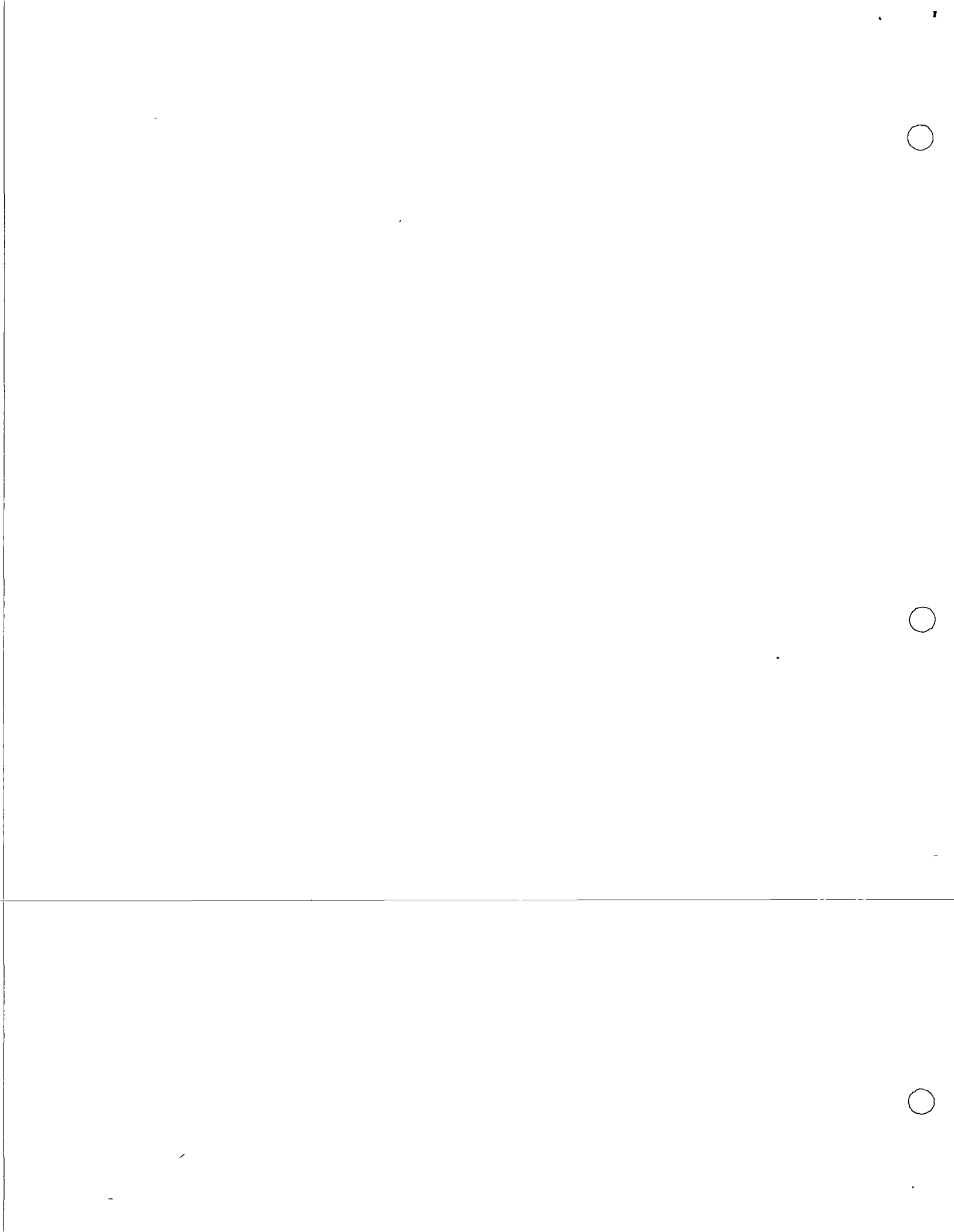
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería. unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

NATURALEZA DE LOS SISTEMAS

M. en I. FRANCISCO ECHAVARRIA ALFARO
NOVIEMBRE, 1977



1 NATURALEZA DE LOS SISTEMAS.

1.1 INTRODUCCION

Los aprovechamientos naturales pueden ser clasificados en diferentes formas, una de ellas es aquella en la cual se distingue a los aprovechamientos naturales en renovables y no renovables. Los aprovechamientos renovables usualmente cambian para repetirse ellos mismos en una trayectoria cíclica. El agua es un recurso renovable, que en la naturaleza sigue una trayectoria llamada el ciclo hidrológico, el cual se analizará mas adelante.

El hombre siempre ha intervenido dentro del ciclo hidrológico en uno o mas puntos, a fin de utilizar el agua para diferentes propósitos. Por ejemplo, desde el inicio de los tiempos ha utilizado las corrientes superficiales para su uso, ya sea para irrigación, uso doméstico o navegación. El agua subterránea también ha sido explotada desde los inicios de la civilización.

Los hombres siempre han hecho esfuerzos para tomar ventaja de ciertos aspectos del ciclo hidrológico, dando a los proyectos de aprovechamiento hidráulicos un amplio rango de sofisticación. En su forma simple, tales proyectos no son más que facilidades primitivas, para almacenar el agua de lluvia en cisternas para el consumo humano y uso doméstico. En su más forma compleja los proyectos de los aprovechamientos hidráulicos involucran un complejo de estructuras de procesos múltiples que regulan las corrientes, recargan los acuíferos

del agua subterránea, generan energía eléctrica, protegen a las áreas urbanas e industrializadas contra avenidas, satisfacen necesidades recreativas de gran número de gentes y también atienden otros objetivos. Los proyectos de propósitos múltiples se pueden definir como "trabajos de ingeniería que sirven a más de un propósito principal donde el valor de los beneficios acumulado de cada uno de tales propósitos es medido con la parte del costo total asignado a ello". Entre estos dos extremos—fáciles almacenajes de agua primitivos e intrincados—proyectos de propósitos múltiples—hay muchas maneras posibles en la cual los aprovechamientos hidráulicos pueden ser desarrollados y utilizados. Cada una de estas maneras representa una solución a un problema de programación, que es, un problema de demanda la optimización de un criterio dado, sujeto a un grupo de restricciones.

Por lo anterior, es fácil comprender que el incremento en complejidad de los sistemas de aprovechamientos hidráulicos dan cabida a una multitud de problemas ligados con el desarrollo, control, distribución, tratamiento, utilización y reutilización del agua. El análisis y solución de estos problemas involucran el campo de la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos.

El principal problema de la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos y tal vez el problema en su forma más general, surge del hecho de que el agua es a menudo disponible en el espacio y en el tiempo, y diferente de aquellas -

para el cual se define la demanda. En adición a esto, las cantidades de agua disponibles pueden ser diferentes con aquellas que se requieren para ciertas actividades económicas.

Considerando esta situación, la cual puede ser caracterizada por la mal distribución del agua en el tiempo y en el espacio, relacionada a menudo con propiedades no deseadas, se pueden plantear tres preguntas:

1. ¿Que sistema tiene que ser contruido en orden de minimizar la discrepancia existente entre el suministro natural de agua (en tiempo, espacio y propiedad) y la demanda para ella?
2. ¿Con que extensión deberá ser desarrollado el aprovechamiento hidráulico y que tan extensiva deberá de ser la región servida por el sistema?
3. ¿Una vez construido, como deberá de ser operado el sistema, para realizar un grupo de objetivos dados de la mejor manera posible?

El orden en el cual estas preguntas son presentadas corresponden ampliamente también a la secuencia cronológica en la cual deben ser contestadas. Primero, los hombres tratan de entender el fenómeno hidrológico natural y construyen almacenes y estructuras convenientes para el agua.

La segunda y tercera pregunta han ocupado a los Ingenieros, Economistas y Planificadores por bastante tiempo en los últimos setenta u ochenta años, cuando empezaron a reconocer específicamente los problemas originados por el desarrollo y utilización de los recursos naturales (incluyendo el agua); en contraste con otros procesos de producción.

El análisis y solución de estos problemas ha avanzado en una cantidad que se va incrementando con el advenimiento de las computadoras electrónicas de alta velocidad. El crecimiento en la sofisticación de las máquinas computadoras, no solo hizo posible la ejecución rápida y exacta de cálculos tediosos y repetitivos, sino que también sirvió como factor catalítico en la devolución de varias teorías matemáticas y métodos. Algunos de estos métodos fueron aplicados en el diseño de los sistemas de aprovechamientos hidráulicos y muchos más fueron potencialmente adaptados para ello. A la inversa, no todos los métodos matemáticos sofisticados han sido de uso práctico inmediato en la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos.

La naturaleza interdisciplinaria de la Ingeniería de los Aprovechamientos Hidráulicos emerge claramente de la siguiente discusión. Realmente, esta rama del campo de la ingeniería se encuentra entre el área donde se sobreponen las ciencias naturales y las ciencias sociales. (Por supuesto, no hay una frontera rígida entre las ciencias naturales y sociales). Este traslape se extiende de la ciencia

pura (básica) a su aplicación. La Ingeniería de los Aprovechamientos Hidráulicos cubre el traslape y se extiende también dentro de las ciencias naturales y sociales. Ello involucra partes de muchas disciplinas (ingeniería agrícola, ingeniería civil, economía, leyes y otras) pero es imposible identificar alguna de ellas con la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos.

Por ejemplo, muchas veces se dice que la Ingeniería Hidráulica y que la Ingeniería de los Aprovechamientos Hidráulicos son términos intercambiables.

La primera se refiere a una rama muy especializada de la ingeniería civil, - mientras que la segunda involucra todo el desarrollo y utilización de uno de

los más esenciales recursos naturales. Sin embargo se puede detectar en la Ingeniería de los Aprovechamientos Hidráulicos afinidades muy cercanas con

las disciplinas tradicionales siguientes :

i) Ingeniería Agrícola

Un aspecto de la Ingeniería Agrícola trata con el mantenimiento y control de un régimen de humedad adecuado dentro de la zona de raíces en los cultivos. Los problemas de irrigación y drenaje caen bajo esta característica, incluyendo el almacenaje de agua en granjas y distribución de agua para campos diferentes dentro de una empresa agrícola. Otros aspectos de la ingeniería agrícola que atañen a

Los aprovechamientos hidráulicos son el control de las --
aguas negras, la conservación del suelo y agua y la recla-
mación de tierras.

ii) Ingeniería Civil.

Un número de disciplinas de ingeniería son incluidas dentro de esta categoría. Así, dos son de importancia particular - en la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos: Inge-
niería Hidráulica e Ingeniería Sanitaria. La primera esta
relacionada con el diseño hidráulico y estructural de presas,
tomas, canales, líneas de tubería y facilidades para la gene-
ración de energía, así como la regulación de ríos y trabajos
de navegación (puertos, puentes y esclusas). La segunda tra-
ta con la calidad del agua suministrada para usos domésticos
e industriales y con el reparto, tratamiento, mejoramiento
y reutilización de las aguas negras.

iii) Hidrología.

La hidrología Aplicada es básica en el análisis y solución de
los problemas de la Ingeniería de los Aprovechamientos Hi-
dráulicos. Su primera función es la evaluación cuantitativa
del suministro de agua en un proyecto de desarrollo de apro

vechamientos hidráulicos. En relación con la existencia de registros, la Hidrología Aplicada puede estimar los escurrimientos futuros con probabilidades específicas. Estas probabilidades reflejan una fase de incertidumbre para la toma de decisiones en el desarrollo de los aprovechamientos hidráulicos, que está involucrada con la determinación del tamaño óptimo de los elementos estructurales para las políticas de operación. La incertidumbre es a menudo traducida en términos de riesgo, especialmente cuando se realizan las evaluaciones económicas.

iv) Ingeniería Química.

La ingeniería química tiene que ver con la cualidad mineral del agua (desalación). Esta involucrada en problemas de - transferencia de calor y de masa, termodinámica y otras - relaciones de energía, muchas de ellas irreversibles.

v) Economía.

La Ingeniería de los Aprovechamientos involucra los aspectos cuantitativos de Economía. Econometría, teoría de decisiones, métodos de programación y otras técnicas de investigación de operaciones es el enlace de las dos disciplinas.

vi) Administración Pública.

Proyectos de aprovechamientos hidráulicos son a menudo planeados, diseñados, construídos y operados, sujetos a - uno ó más restricciones institucionales. El tipo de organización y su administración tiene una influencia marcada en la operación de los sistemas de los aprovechamientos - - hidráulicos.

vii) Leyes.

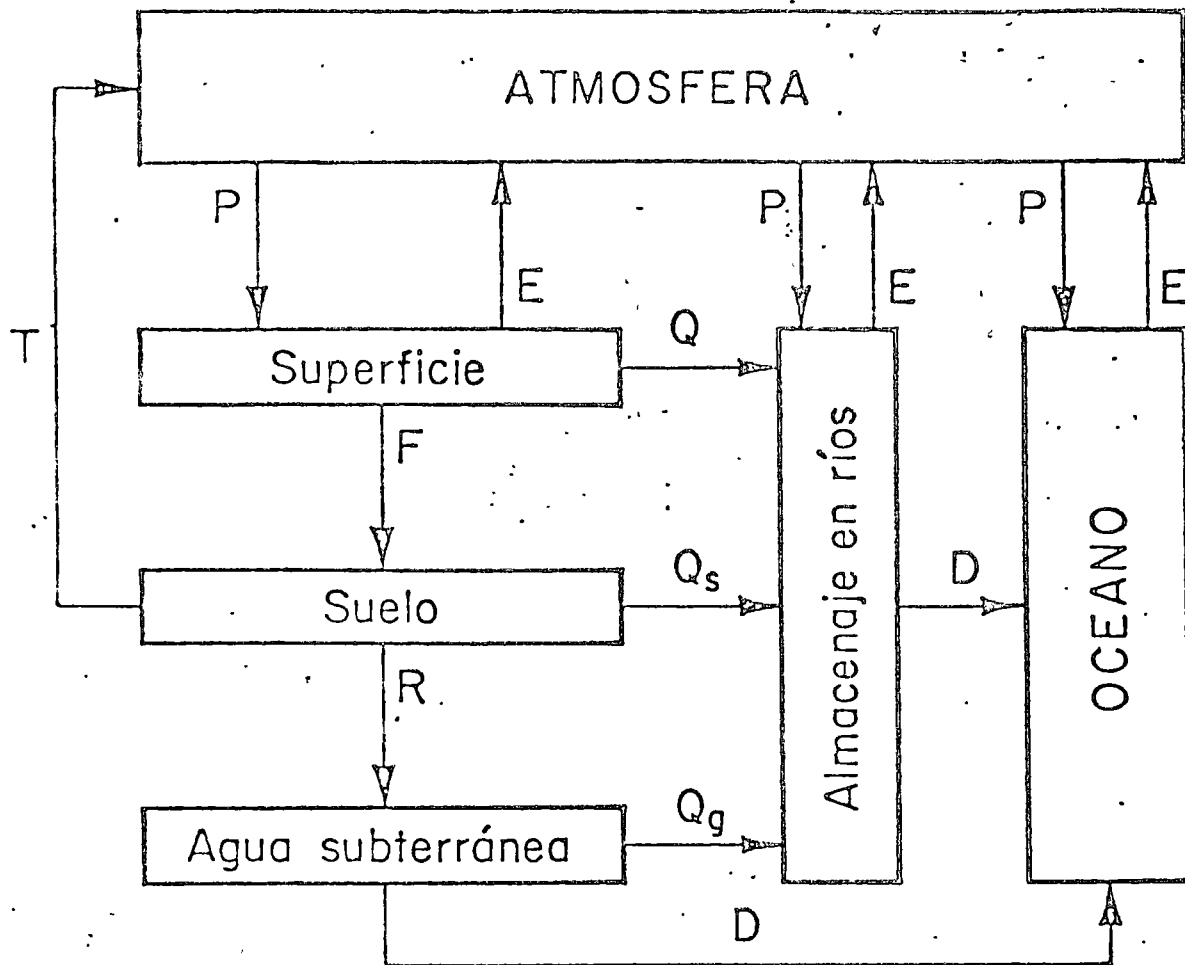
Es difícil que un proyecto de aprovechamientos hidráulicos exista sin estar involucrado con las leyes. Conceptos y - - doctrinas son desarrolladas continuamente y trasladadas - en leyes.

De la discusión anterior se llega a ver claramente que la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos es una disciplina compleja con muchas facetas. Una de sus cualidades más importantes, es que ella integra varias áreas de las ciencias naturales y sociales, en el análisis y solución de problemas que involucran el desarrollo y utilización de los recursos del agua en una cierta región. Se concluye que la ingeniería de los aprovechamientos hidráulicos debe ser (o llegará a ser por necesidad) generalista en el verdadero sentido de la palabra.

1.2 CICLO HIDROLOGICO

El ciclo hidrológico es un proceso continuo por medio del cual el agua es transportada de los océanos a la atmósfera, a la tierra y regresa al mar. Dentro de este ciclo existen diversos subciclos. Un ejemplo de esto es la evaporación del agua de la superficie terrestre y su subsecuente precipitación sobre ella - antes de regresar al océano. La fuerza que controla la totalidad del sistema - del transporte del agua proviene del sol, el cual provee la energía requerida para la evaporación. Cabe hacer notar que las cualidades del agua también cambian durante su paso a través del ciclo; el agua de mar se convierte en agua - fresca por la evaporación. En la fig. 1.1 se muestra la representación cualitativa del ciclo hidrológico y en la fig. 1.2. las fases que estudia la Hidrología. Como puede observarse en la fig. 1.2, las componentes del ciclo hidrológico involucran las diversas fases a que esta sujeta una cuenca hidrológica; Esto es - básico en el análisis de los procesos hidrológicos y en el desarrollo de modelos de simulación, los cuales tratan el ciclo hidrológico como un sistema cerrado y definen en forma continua los parámetros de entrada y salida a dicho sistema.

1.3 CARACTERISTICAS HIDROLOGICAS DE LOS SISTEMAS DE APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS.



- | | | |
|-------------------------------|---|--|
| E - Evaporación | P - Precipitación | T - Transpiración |
| Q - Escurrimiento superficial | Q _s - Escurrimiento subsuperficial | Q _g - Escurrimiento subterráneo |
| F - Infiltración | D - Descarga a los océanos | R - Recarga |

Fig 1.1 Ciclo hidrológico. Representación cualitativa

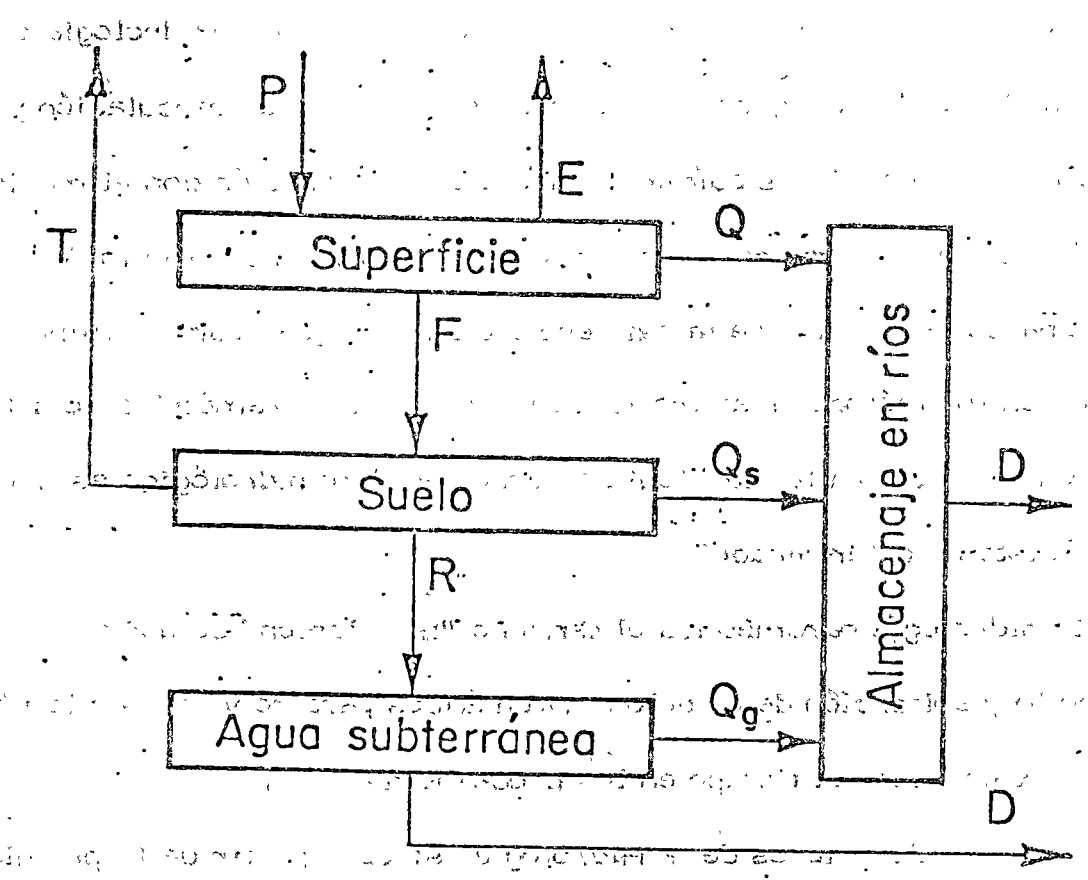


Fig 1.2 Fases que estudia la hidrología

De acuerdo con el U.S. Council for Science and Technology "Hidrología es la ciencia que trata de las aguas de la tierra, su ocurrencia, circulación y distribución, sus propiedades químicas y físicas y su reacción con el medio ambiente, incluyendo su relación con los seres vivientes. El dominio de la hidrología abarca la historia de la existencia total del agua sobre la tierra".

De acuerdo con los métodos matemáticos, la hidrología paramétrica se define como "La aproximación a la hidrología en donde el ciclo hidrológico es tratado como un sistema determinado".

Dentro de la hidrología paramétrica el término "Simulación" se define como "El desarrollo y aplicación de modelos matemáticos para representar la iteración de la variación del tiempo en los procesos físicos".

Para plantear las aplicaciones de la Hidrología, se debe partir de la premisa de que el hombre no puede existir sin el agua. Por lo anterior, en la época actual, el conocimiento de la hidrología y el disponer de gente preparada en este campo es de importancia fundamental para un efectivo manejo del agua, trascendental para nuestra sociedad.

Aunque el uso del agua para actividades domésticas es vital, su uso en la industria, comercio, agricultura y recreación es básico dentro del desarrollo del país.

Dado que el agua es un líquido vital y escaso, es lógico pensar que debemos

de contar con técnicas adecuadas para la planeación, manejo y desarrollo de los aprovechamientos hidrológicos del país. Una planeación y manejo efectivo de los recursos de agua es el compromiso del hidrólogo y sólo es posible alcanzarlo si se entiende claramente los sistemas físicos que deben manejar. Por otra parte, se requieren modelos matemáticos confiables para evaluar y predecir el funcionamiento de los sistemas hidrológicos.

El hidrólogo juega un papel elemental en esta problemática y entendimiento de la misma. Su competencia tiene un tremendo impacto en todas las actividades de los aprovechamientos hidrológicos.

Desde el punto de vista de diseño de un aprovechamiento hidrológico, los principales objetivos de la hidrología pueden resumirse en dos grandes grupos

- a) Obtención de la avenida máxima que con una determinada frecuencia puede ocurrir en un cierto lugar, lo cual es necesario considerar al diseñar vertedores, puentes y drenajes en general
- b) Conocimiento de la cantidad, frecuencia y naturaleza de ocurrencia del transporte del agua sobre la superficie terrestre. Esto se requiere en el diseño de sistemas de irrigación, abastecimiento de agua a aprovechamientos hidroeléctricos y navegación de ríos.

Por lo que respecta a las limitaciones de la hidrología, éstas se relacionan con la información hidrológica disponible y la complejidad de los procesos naturales con los cuales trata.

Lo anterior involucra que en general cada problema es único y es difícil analizarlos con un sistema deductivo riguroso. Esto ha involucrado que al tratar de uniformizarse de criterios, se plantean cada vez sistemas más complejos en donde interviene un mayor número de parámetros, que en ocasiones son - difíciles de cuantificar.

Al aplicar un criterio hidrológico para el análisis de un problema, debe considerarse que la aplicación del mismo no involucra el resultado esperado, a menos que las bases con las que se elaboró dicho criterio sean las mismas a las bases con las que se elaboró dicho criterio sean las mismas a las del problema. En caso contrario deberá tomarse en cuenta este hecho en la interpretación del resultado y darle a éste el peso que merece. Conforme se disponga de mayor información hidrológica se podrán ir ajustando los criterios existentes, - elaborar otros y tener una mayor seguridad en los resultados hidrológicos que se obtengan.

La República Mexicana dispone de una amplia red de estaciones climatológicas controladas, principalmente por la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos y en parte por la Comisión Federal de Electricidad y la Comisión In-

ternacional de Límites y Aguas. En la Tabla 1.1 se muestran las principales publicaciones de que se dispone en el país con información Hidrológica. Por otra parte, la Dirección de Hidrología de la S.A.R.H. ha dividido el país en 37 regiones hidrológicas y dispone de planos indicando las estaciones Climatológicas e Hidrométricas que se encuentran en cada una de ellas. Además del nombre de la estación, consigna los años de registro y que dependencia la controla.

1.4 COMPONENTES ESTRUCTURALES DE LOS SISTEMAS DE APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

Un sistema de aprovechamiento hidráulico se puede dividir principalmente en tres partes; las obras requeridas para la captación del agua en la fuente de aprovechamiento, las obras de conducción al sitio de aprovechamiento y las obras de distribución del agua para su uso. Para esta última parte, hay que considerar las obras para la eliminación del agua después de su uso o su excedente.

Los aprovechamientos hidráulicos mas importantes son los destinados a la agricultura, al abastecimiento de agua potable y a la generación de energía eléctrica. Puede tomarse en cuenta también el control de inundaciones, que aunque es en si una obra de defensa, está muy relacionada con el aprovechamiento del agua, ya que en un momento dado permite proteger el mismo aprovechamiento.

TABLA 1.1

INFORMACION HIDROLOGICA EN LA REPUBLICA MEXICANA

| PUBLICACION | ALCANCE | FRECUENCIA | DEPENDENCIA |
|--|---|---------------------------------|--|
| Boletín Hidrológico del Valle de México. | Datos Hidrométricos y Meteorológicos del Valle de México. | Anual | Comisión Hidrológica de la Cuenca del Valle de México, SARH. |
| Boletín del Servicio Meteorológico Nacional. | Observaciones pluviométricas y termométricas*. | Mensual | Dirección General de Geografía y Meteorología, SARH. |
| Boletín Hidrométrico. | Escurremientos del río Colorado y otros ríos internacionales del Oeste. | Anual | Comisión Internacional de Límites y Aguas, SRE. |
| Boletín Hidrométrica. | Datos Hidrométricos y climatológicos del río Papaloapan. | Anual | Comisión del Papaloapan, SARH. |
| Boletín Hidrológico. | Datos Hidrométricos* | Periódica | Comisión Federal de Electricidad. |
| Boletín Meteorológico. | Datos Meteorológicos*. | Periódica | Comisión Federal de Electricidad. |
| Boletín Hidrológico. | Datos Hidrométricos** | Periódica | Dirección de Hidrología, SARH |
| Boletín Climatológico. | Datos Climatológicos región Hidrológica - No. 12-A (parcial) | Información hasta Dic. de 1972. | Dirección de Hidrología, SARH. |

* Se refieren a sus estaciones en toda la República Mexicana

** Abarca información por región Hidrológica. El país está dividido en 37 regiones Hidrológicas.

Dada la amplitud del tema, en cuanto a las obras que componen un aprovechamiento hidráulico, a continuación se presenta un breve resumen de los tipos de obras, sus diferentes partes y estructuras que lo forman y se dan algunos lineamientos de su diseño.

1.4.1 OBRAS DE CAPTACION

La captación puede efectuarse de una fuente superficial o subterránea. Para el caso del aprovechamiento de escurrimientos superficiales la obra de captación puede ser una presa de almacenamiento, de derivación o una toma directa. Para el agua subterránea, solamente se tendrá una toma directa, como es el caso de la explotación de pozos, manantiales o galerías filtrantes.

Una presa de almacenamiento permitirá dar carga al sistema y almacenar los volúmenes necesarios para satisfacer la demanda; en cambio, la presa derivadora solo dará la carga hidráulica necesaria para la conducción del agua al sitio de su aprovechamiento.

Una presa en términos generales estará tomada por una cortina que impedirá el paso del agua por su cauce natural y propiciará la formación del vaso; una obra de excedencias para devolver al río los caudales no aprovechables; una obra de toma por la cual se extraerán del vaso los volúmenes de agua por utilizar; y otras estructuras como son: desarenadores, diques, etc.

Las cortinas, en cuanto a su comportamiento y materiales de construcción, se clasifican en flexibles y rígidas. Las primeras permiten asentamientos diferenciales en su cimentación, sin poner en peligro a la estructura, mientras que las rígidas en caso de presentarse ese problema podrá existir la posibilidad de que fallen.

Dentro de las cortinas flexibles se tienen las de material homogéneo (de tierra), enrocamiento y las de materiales graduados, siendo estas últimas una combinación de las dos anteriores y las de mayor uso en nuestro País. Las rígidas pueden ser de gravedad, de arco y aligeradas o de contrafuertes (machones).

Para la sección del tipo de cortina, principalmente se debe tomar en cuenta la geología de la boquilla, la disponibilidad de los materiales de construcción y como en el caso de México, la localización de la estructura en una zona sísmica. En forma secundaria se considera la forma y topografía de la boquilla, el tipo de obra de desvío, la altura del embalse, etc.

La altura de la cortina queda definida de la curva de elevaciones - volúmenes del vaso, al dimensionar la capacidad para azolves, el volumen útil y el sobrealmacenamiento para la regularización de avenidas. A esta altura se le incrementa el bordo libre para tomar en cuenta el efecto de la marea por viento y el oleaje.

Las fuerzas que intervienen en el diseño de una cortina son: el peso propio de

la estructura, la fuerza debida a la presión hidrostática del almacenamiento, la subpresión, las fuerzas sísmicas de la estructura y del cuerpo de agua, el empuje de los azolves y otras de menor valor como son las producidas por el oleaje.

Las obras de excedencias se clasifican en cuanto su colocación en: de cortina o de ladera; por su control en: de cresta libre y de cresta controlada; por la forma de su cresta en: rectas o curvas; por la forma de entrada del agua en: abanico, canal lateral y embudo.

En términos generales esta estructura se forma de las siguientes partes: canal de acceso o de llamada, cresta vertedora y cimacio, el cual puede tener o no pilas y compuertas, transición de su ancho, rápida o canal de conducción - abierto o en túnel, caída y estructura amortiguadora, y canal de salida. Desde el cimacio hasta la estructura amortiguadora el vertedor se reviste con losas de concreto, las cuales se diseñan considerando las fuerzas debidas al peso propio, al peso de agua, al empuje hidrostático, a la subpresión, y a las hidrodinámicas.

Las obras de toma para riego o abastecimiento de agua potable constan esencialmente de rejillas para evitar la entrada de cuerpos extraños al conducto del vaso hacia aguas abajo de la cortina, caída, estructura amortiguadora y de ser necesaria una transición para que el agua entre a la obra de conducción.

Para el caso de obras de toma para aprovechamientos hidroeléctricos, estas pueden ser: de canal de fuerza, con galería a presión y a pie de presa. La diferencia principal con las de riego y agua potable es que el conducto trabaja a presión, por lo cual se le adicionan otras estructuras auxiliares como es el tanque o pozo de oscilación que protege a la toma en contra del golpe de ariete y las oscilaciones de masa. Al final de la toma se localiza la casa de máquinas, que es donde se transforma la energía hidráulica en mecánica y ésta a su vez en energía eléctrica, a través de las turbinas y generadores.

Como se anotó en un principio, también se tienen tomas directas, generalmente para agua potable, en donde se capta el agua por aprovechar sin necesidad de una presa, con una estructura conectada directamente a la fuente de abastecimiento.

1.4.2 OBRAS DE CONDUCCION

La línea de conducción de la captación al sitio de aprovechamiento podrá realizarse a presión o a superficie libre, dependiendo de las características topográficas que se tengan; aunque en forma general, puede decirse, que para conducciones de agua potable se utiliza el sistema forzado o secciones de conducto cerradas para evitar la contaminación del agua y en aprovechamientos agrícolas las conducciones son por gravedad y abiertas.

Una conducción a presión requiere de estaciones de bombeo y rebombeo, de un conducto cerrado y de ciertos mecanismos auxiliares como son las válvulas de

limpieza, de alivio de presión, de purga, etc.

Su diseño requiere un balanceo entre las dimensiones de la conducción y la potencia requerida en los equipos de bombeo.

Las conducciones por gravedad pueden ser sin revestimiento o con él, siendo recomendable lo último para evitar pérdidas por filtraciones. En su recorrido se presentan problemas debidos a los accidentes topográficos que se resuelven con estructuras complementarias como son: sifones, puentes canal, represas, caídas y cruces con otros conductos o vías de comunicación.

1.4.3 OBRAS DE DISTRIBUCION

Las obras de distribución son las redes de conductos a presión o por gravedad, por las que se reparte el agua, a cada uno de los usuarios para su aprovechamiento.

Para el abastecimiento de agua potable se utilizan redes a presión abiertas o formando circuitos de acuerdo a la importancia de la población por servir. Se requieren otras obras intermedias como son las plantas de tratamiento, los tanques de almacenamiento y/o regularización, estaciones de rebombeo, cajas rompedoras de presión, etc. Paralelamente a la red de distribución de agua potable será necesario contar con la de alcantarillado sanitario y pluvial, para dar salida al agua después de su uso, recolectar el exceso de las precipitaciones y enviar el afluente a algún sitio donde no cauce problemas.

En las zonas de riego las obras de distribución están formadas por la red de canales principales, secundarios, ramales, regaderas, etc. que permitirán al agricultor llevar el agua a sus parcelas. La red de canales se traza de acuerdo a la topografía y puede presentarse la necesidad de usar estructuras auxiliares iguales a las de las conducciones, además de las de aforo, limpieza y de distribución final. Para este caso se requiere contar con una red de caminos para el mantenimiento y operación de los canales y que permitan transportar todo lo cosechado.

En forma semejante al agua potable, también se deberá tener una red de drenaje formada por drenes que saquen el exceso de agua de las áreas agrícolas.



centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

TEMA: EVALUACION DE PROYECTOS

APROF. M.en C. JAIME SANCHO.

Noviembre, 1977.



5.2 Evaluación de proyectos

La planeación de proyectos para el aprovechamiento de los recursos hidráulicos es generalmente una tarea complicada. Entre la concepción o identificación de un proyecto y la construcción del mismo pueden pasar de 3 a 5 años y si se considera su puesta en marcha, muchos más. Proyectos de gran envergadura requieren períodos que duplican y a veces triplican los períodos antes mencionados.

Actividades tales como: Captación de la información, análisis de alternativas, solución de conflictos, aceptación del proyecto y obtención

de financiamiento; generalmente consumen mucho tiempo, lo que hace imposible el implementar proyectos en períodos cortos. Los pasos por los que pasa un proyecto desde su identificación hasta su puesta en marcha son los siguientes:

- 1) Identificación de una necesidad y requerimientos de su solución.
- 2) Estudios de gran visión que identificará las posibles fuentes de abastecimiento.
- 3) Estudio de prefactibilidad que se centra básicamente en aspectos físicos.
- 4) Estudio de factibilidad que comprenderá aspectos físicos, socioeconómicos y financieros, y que hará una evaluación y selección de las alternativas factibles.

- 5) Aprobación del proyecto
- 6) Diseño del proyecto
- 7) Financiamiento
- 8) Construcción
- 9) Puesta en marcha.

Todo proyecto debe cumplir con los siguientes objetivos:

- Estar en conformidad con los objetivos de desarrollo del país.
- Ser técnicamente conveniente y el mejor de las alternativas dentro de las restricciones técnicas y de todo orden.
- Ser factible económica y financieramente.

Para cualquier proyecto, independientemente de su función son necesarios los siguientes análisis:

- 1) Estudios físicos básicos: Topografía, geología, hidrología, agrológico, etc.
- 2) Estudio de las alternativas: Estudio de todas las alternativas posibles de solución.
- 3) Diseño preliminar: considerando el programa de ejecución, inversión necesaria y las necesidades de equipo y mano de obra.
- 4) Desarrollo futuro: El posible desarrollo que se derivará del proyecto.
- 5) Estimación de Beneficios: Económicos, sociales, políticos, etc.
- 6) Evaluación del proyecto.

Ya para evaluar proyectos específicos es necesario tomar en cuenta las características particulares que presentan los diferentes tipos de proyecto. A

continuación se presentan las características principales a considerar en la evaluación de proyectos de riego, generación de energía y control de avenidas dándose para este último caso un ejemplo de la evaluación de un proyecto. Finalmente se verán los aspectos que son importantes en la evaluación de proyectos de uso múltiple.

5.2.1. Riego

El problema de riego es fundamentalmente un problema de abastecimiento de agua y en términos generales su objetivo es de desarrollo rural en zonas donde la precipitación es deficiente para cultivos de temporal, o bien se desean cultivos anuales o dobles cultivos.

Dentro de los aspectos generales de la evaluación de proyectos, en el caso del riego destaca el estudio de la fuente de abastecimiento, el de la demanda de agua, en el cual es importante el estudio de suelos, clima, mercado y preferencia regional de cultivos, etc. y el de distribución del recurso.

Fuente de abastecimiento:

La precipitación es la fuente última de abastecimiento, y en general representa un límite superior. Sin embargo, dado su errático comportamiento y lo escaso en algunas zonas, es necesario captar el agua en forma de escurrimiento para un mejor aprovechamiento.

Cuando se tienen cuencas grandes en zonas lluviosas o bien la demanda que se requiere es pequeña y concentrada principalmente en la época de avenidas, es factible desarrollar aprovechamientos en base a simple derivación de

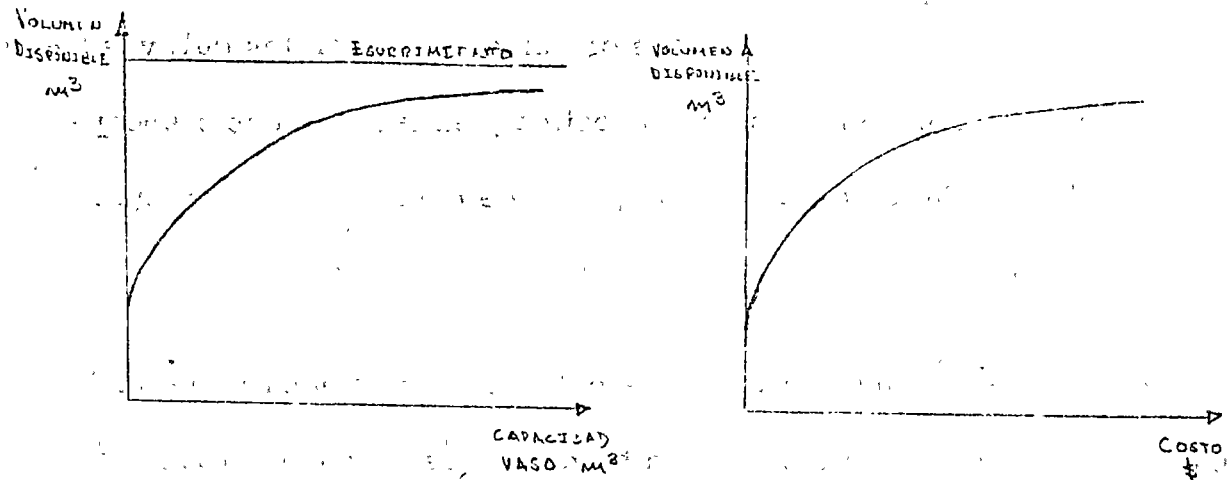
la corriente, Esto, al menos en México, es una solución que se limita a pocas áreas. Cuando se desea desarrollar aprovechamientos en zonas áridas o bien - aprovechamientos de gran magnitud es necesaria la construcción de almacena - mientos que hagan posible la captación de las aguas en épocas de avenidas pa - ra su posterior aprovechamiento durante el estiaje.

La determinación del volumen disponible en un vaso depende principal-- mente de cuatro variables que son:

- 1) Escurrimiento de la cuenca.
- 2) Capacidad del almacenamiento.
- 3) Volumen y distribución de la demanda
- 4) Política de operación del vaso.

Una vez que se ha definido la distribución aproximada de la demanda y la política de operación (déficits permisibles) y utilizando secuencias de escurrimiento (históricas o sinéticas) es factible desarrollar una curva de volumen aprovechable contra capacidad del vaso, la cual una vez definido el volumen de la demanda nos dará la capacidad necesaria del vaso.

A su vez, considerando el costo del vaso para cada capacidad diferente es factible desarrollar una curva que dé el volumen aprovechable en función del costo del almacenamiento.



Sistema de distribución:

En el caso de aprovechamientos superficiales se requiere conducir el agua de la fuente al lugar de uso. Esto puede hacerse ya sea utilizando el mismo tramo de río (en el caso de propiedades ribereñas), canales (tierra o revestidos) y tuberías. En el caso de que se requiera construir un sistema de distribución, el sistema que se elija dependerá del costo de construcción y de mantenimiento, así como de la eficiencia de conducción que se requiera.

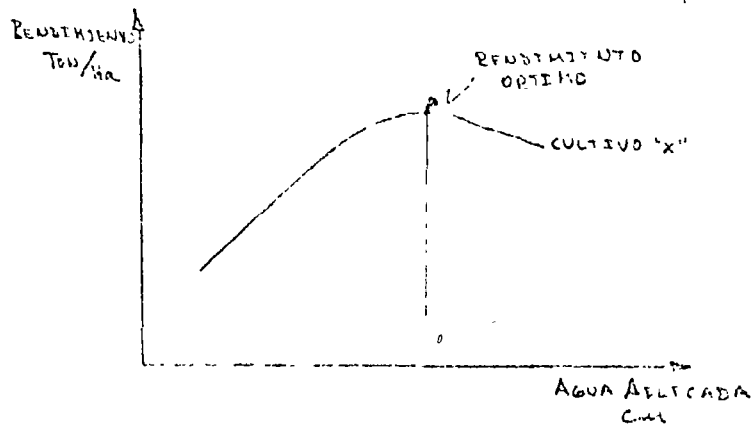
Estimación de la Demanda:

Para determinar la demanda de agua se requiere la superficie que se cultivará (depende del suelo y agua disponibles) y del patrón de cultivos que

se implantará.

Lo primero que se hace es planear el patrón de cultivos, el cual se debe de basar en el estudio de suelos, en el clima, en los cultivos tradicionales de la zona, en el mercado posible y en las técnicas disponibles de cultivo. En la definición de patrón de cultivo es de gran ayuda la utilización de programación lineal.

Una vez definido el patrón de cultivos se determina la demanda de agua de cada cultivo, esto se hace a través de los usos consultivos teóricos (Blaney-Criddle) o mediante datos experimentales aplicación de agua-rendimiento.



Considerando el agua que requiere cada cultivo (lámina) y el área definida por el patrón, es factible estimar la demanda neta de agua para cada cultivo, sumando estas se obtienen el total.

Dicha demanda es el volumen requerido por los cultivos, sin embargo el volumen bruto de agua o sea el que se debe dar en el aprovechamiento

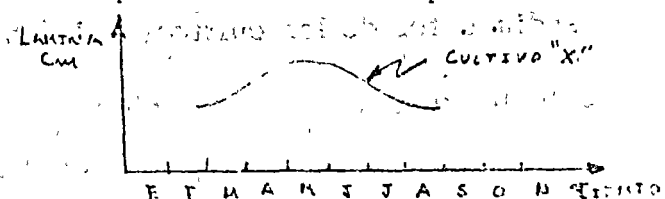
necesita considerar las pérdidas del sistema y que en general son:

- 1) Conducción. Las que se tienen en el sistema de conducción y distribución,
- 2) Parcelaria. La que se tiene al aplicar el agua a la parcela. La demanda bruta D_B es igual a:

$$D_B = \frac{DN}{E_c E_p}$$

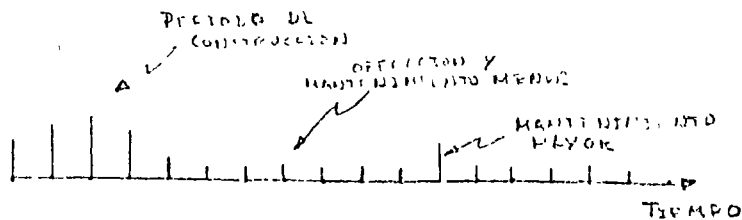
En términos generales la $E_r = E_c E_p$ varía en sistemas de riego superficiales entre 35% y 65%, dependiendo de las obras y de las técnicas de riego.

Es necesario para dicha demanda determinar su distribución en el tiempo, para lo cual se consideran los requerimientos (mensuales, semanales) de los diferentes cultivos, los cuales presentan curvas típicas como la que se muestra.



Evaluación económica del proyecto:

Para la evaluación económica de un proyecto de riego, es necesario considerar sus costos y beneficios directos del mismo. Dentro de los costos hay que tomar en cuenta el de construcción del sistema de abastecimiento y de distribución, los costos de desmonte y nivelación de terreno y costos anuales de mantenimiento y operación. Estos costos generalmente se comportan como se muestra a continuación.



Los beneficios de un proyecto de riego son determinados por el incremento en el ingreso neto proveniente de la superficie beneficiada y este se calcula como la diferencia entre el beneficio con proyecto y sin proyecto.

El beneficio sin proyecto se calcula en base a los cultivos anteriores al proyecto considerando su superficie, rendimiento y precios.

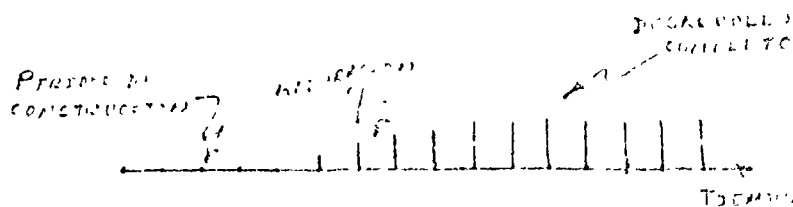
$$B_a = \sum_{i=1}^n S_{ai} R_{ai} P_i$$

El beneficio con el proyecto se estima considerando los posibles rendimientos de los cultivos del patrón definido (áreas experimentales), con sus superficies y precios.

$$B_d = \sum_{i=1}^n S_{di} R_{di} P_i$$

$$B_m = B_d - B_a$$

Un proyecto de riego implica un largo período antes de alcanzar su maduración, por lo que los beneficios presentan incrementos durante este período, hasta llegar a un máximo cuando ya ha madurado. Una curva típica de beneficios se muestra a continuación:



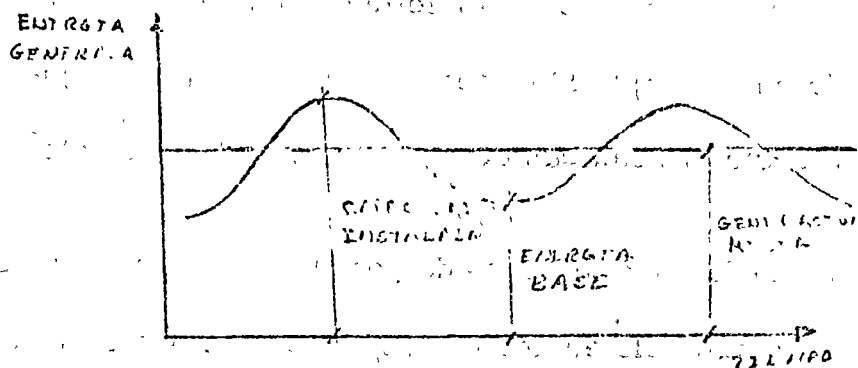
Una vez definidos los costos y beneficios de las diferentes alternativas se puede hacer la selección de la mejor alternativa ya sea en base a un análisis de beneficio marginal o bien por medio de B/C.

5.2.2 Generación de energía

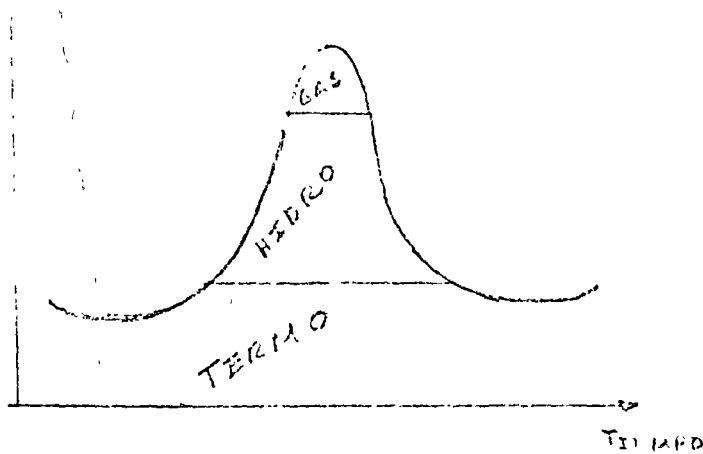
Los proyectos para generar energía hidroeléctrica buscan aprovechar grandes caídas y volúmenes de agua para generar energía.

La generación de energía se puede hacer en forma térmica (combustibles) o hidráulica, la energía hidráulica presenta la ventaja que permite almacenar energía para los momentos de gran demanda (pico), lo que le da gran flexibilidad de operación.

En general las plantas hidroeléctricas presentan curvas de operación como la siguiente:



Una planta hidroeléctrica generalmente forma parte de un sistema más complejo en el que se combinan plantas térmicas, hidroeléctricas y de gas, la composición de estas plantas en la curva de demanda típica de un día es como sigue:



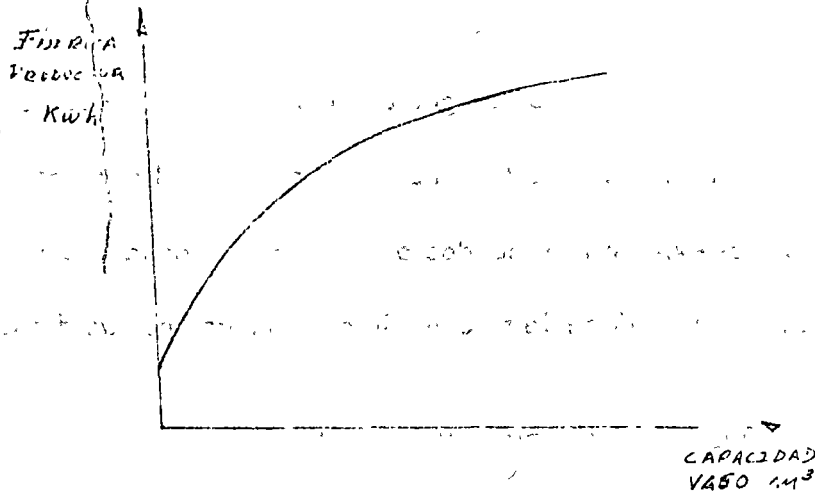
La potencia de una planta hidroeléctrica se expresa como:

$$P = Q \cdot H$$

lo cual multiplicado por el factor tiempo da energía. El "factor de carga" es el resultado de dividir la energía producida entre la que se podría generar si se utilizara la potencia instalada todo el tiempo. La "energía firme" (base) de una planta es la que se puede proveer durante todo el tiempo sin interrupción. "Energía secundaria" o pico es la que se puede proveer arriba de la energía firme.

La "eficiencia de planta" está definida como la energía eléctrica producida entre la energía hidráulica teórica o potencial y es igual al producto de las eficiencias mecánicas de la turbina, generador, etc.

Para estimar la energía generada por el proyecto se hace en forma similar al volumen disponible en una presa. En base a datos históricos o generados y con una política de operación dada, se estiman para diferentes capacidades la energía generada, resultando una curva como la siguiente:



La curva de demanda para la planta se estima en base a proyección del uso de energía. En general se considera al día un número de horas de energía base y un número de horas de energía pico.

Para la evaluación de un proyecto de energía hidroeléctrica, un método socorrido es el utilizar la "planta térmica equivalente". Cuando se define que la curva de demanda superará a la potencia instalada se requiere instalar nueva potencia, para lo cual se determina si es más conveniente una planta térmica o una hidroeléctrica. Otra forma de evaluar es haciendo uso del B/C, considerando como beneficio la energía generada al precio de mercado y como costo la inversión inicial de la planta y el costo de operación.

En general un proyecto hidroeléctrico forma parte de un sistema muy amplio, por lo que su evaluación debe ser comparada con muchos otros proyectos de diversa índole, esto hace necesario que las agencias de planeación utilicen modelos sofisticados que consideran todos los proyectos posibles así como su entrada en diferentes años. En México CFE utiliza el modelo Nacional de Inversiones, que está basado en un modelo francés.

5.2.3 Control de Avenidas.

Una avenida es un superfluo de agua que cubre zonas adyacentes o cercanas a un cauce y que generalmente no están cubiertas por agua. Las obras que se construyen para proteger zonas expuestas a inundaciones son denominadas "obras de control" y generalmente se hacen para reducir la frecuencia de inundaciones de dichas áreas.

Un término que va íntimamente ligado con los análisis sobre control de avenidas es el de frecuencia y significa el número de veces que un fenómeno se manifiesta en un período de tiempo "X", matemáticamente se representa como:

$$F = \frac{m}{n+1}$$

donde f es la frecuencia de un fenómeno con rango m en un período de registro de n años.

Otro término comunmente usado es el de período de retorno y que consiste en el número de años que en promedio se repite un evento "X".

Cuando se desea determinar eventos con frecuencias menores que el período de registro, es válido utilizar la fórmula anterior, sin embargo, los gastos para los que se diseñan las obras de control de avenidas tienen periodos de retorno generalmente superiores a la longitud de los registros históricos, por ello es necesario ajustar curvas probabilísticas a los datos históricos que permitan extrapolar eventos de mayor período de retorno. Para el caso de gastos extremos se utilizan funciones probabilísticas como las de Gumbel y Pearson III.

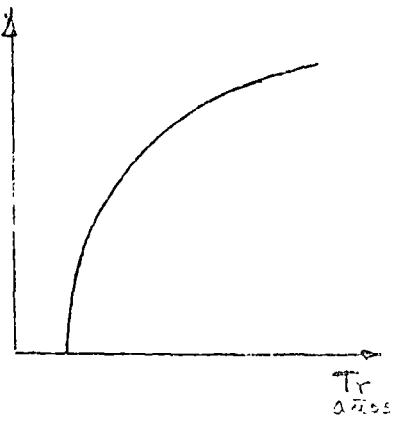
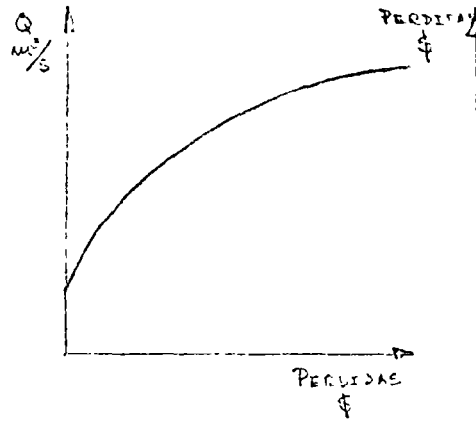
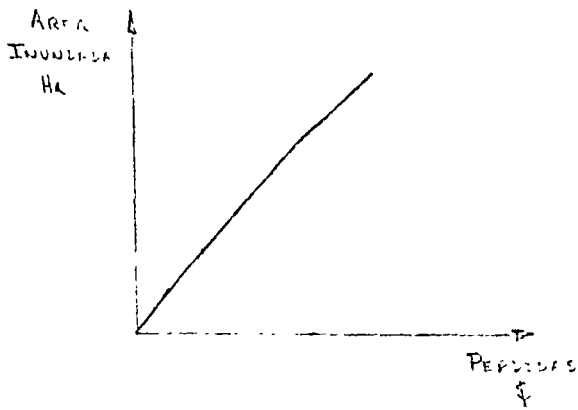
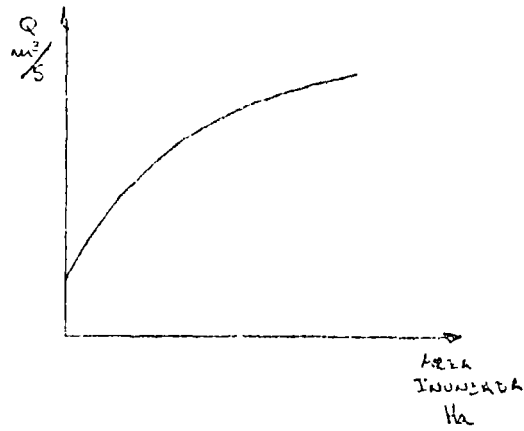
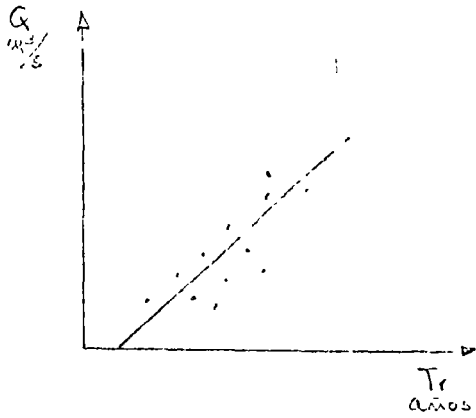
En general mientras más largos sean los registros históricos que se tengan más confiables serán las extrapolaciones que se hagan de gastos extremos. En muchas ocasiones no es posible contar con registros históricos confiables en alguna zona, por lo que es necesario utilizar otros métodos para definir los gastos y volúmenes que se utilizarán en el diseño y evaluación de las obras de control.

Las obras o medidas que se utilizan para el control de avenidas son de diferentes tipos y pueden utilizarse varias de ellas en combinación para obtener mejores resultados.

Las principales tipos de obra o medidas que se utilizan en el control de avenidas son: Presas, Rectificación de cauces, bordos, desvíos, canales de alivio y zonificación, medidas para reducir el escurrimiento, construcción de estructuras resistentes a las inundaciones y seguro de inundación.

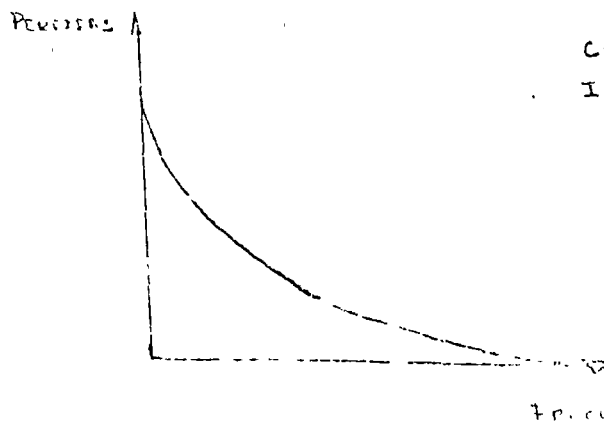
La evaluación de las obras de control se puede hacer ya sea mediante un análisis de beneficios marginales o bien con el B/C, y seleccionando la alternativa que muestre mejor índice.

Para proceder a la evaluación de los proyectos de control de avenidas es necesario determinar las pérdidas que ocasionan avenidas con diferentes frecuencias, para lo cual se requiere conocer la topografía del lugar y el uso del suelo. El beneficio en una obra de control está definido en función de la reducción de pérdidas anuales que se tenga con la obra en proyecto. Para este cálculo es muy útil elaborar curvas como las que se muestran.

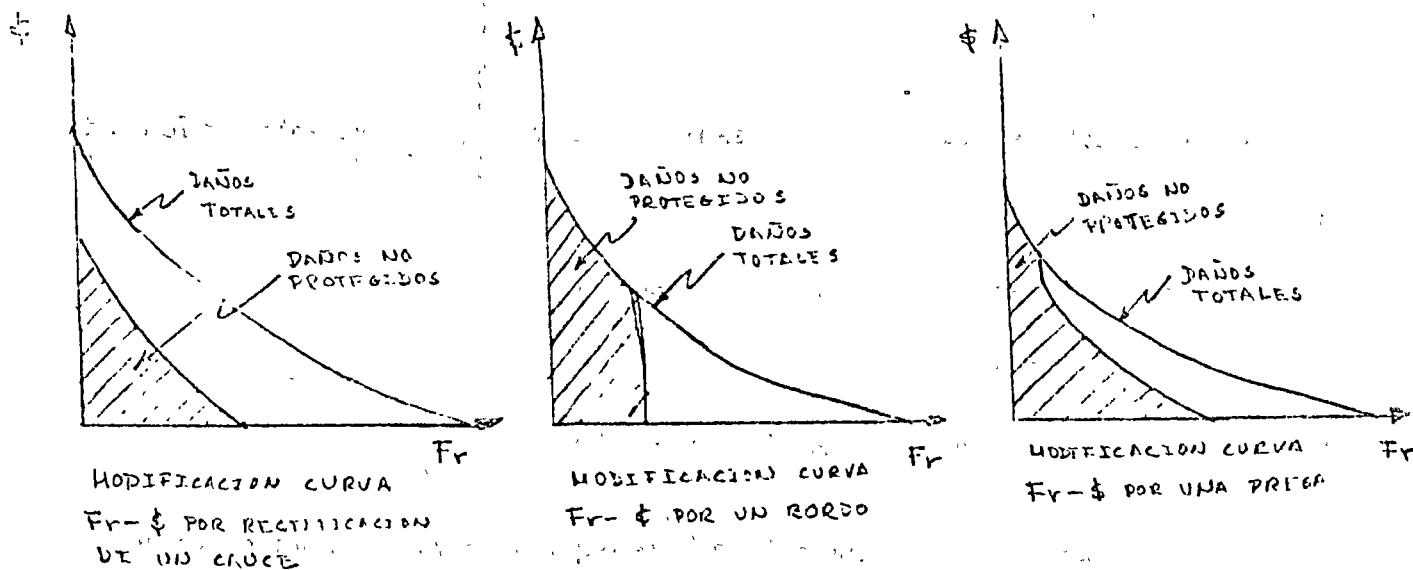


En base a las curvas presentadas es factible estimar las pérdidas por avenidas de diferente período de retorno, mediante la construcción de obras de control en algunos casos se protege contra un período de retorno determinado (bordos) y en otros se modifica el período de retorno de los eventos. Así utilizando estas curvas es factible determinar la reducción en pérdidas (beneficios) que ocasionan las obras.

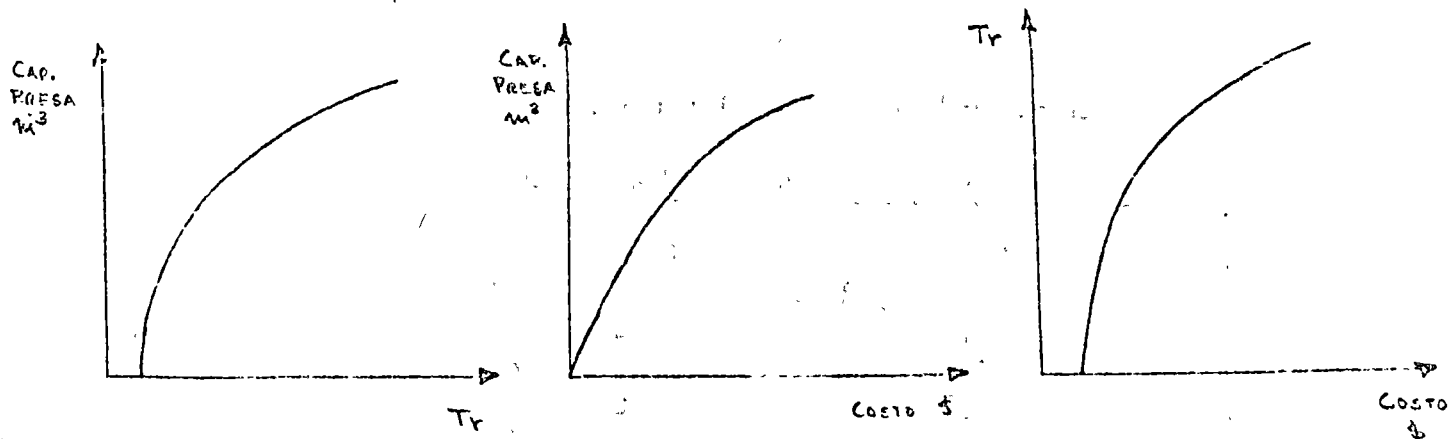
La forma en que los diferentes tipos de obras modifican la curva mostrada en la última gráfica se muestra a continuación:



CURVA FRECUENCIA-DAÑO
INVERSA TR-DAÑO



Por otro lado es factible definir el tamaño de una obra que nos proteja contra un evento determinado, y por supuesto es posible estimar el costo de la obra requerida, de esta manera se pueden determinar curvas como las siguientes y que nos proporcionarían el costo de la obra.



Utilizando curvas como las que se han mostrado es factible estimar costos y beneficios de proyectos de control de avenidas con las cuales es factible aplicar criterios de evaluación.

ya sea B/C, beneficio marginal o algún otro.

A continuación se presenta un ejemplo de la evaluación de un proyecto para proteger un área contra inundaciones.

Se tiene un proyecto de presa, de la cual se tienen los datos que se presentan en forma de gráficas, se requiere:

- 1) B/C de un proyecto que proteja contra una frecuencia del 50%.
- 2) B/C óptimo para control de avenidas.
- 3) Contra qué frecuencia protege el proyecto que tiene el B/C óptimo.

1) Para proteger contra una frecuencia del 50% se requiere un vaso con una capacidad de $200 \times 10^6 \text{ m}^3$

$$\text{Cap} = 200 \times 10^6 \text{ m}^3$$

$$\text{B anual} = \$ 22 \times 10^6$$

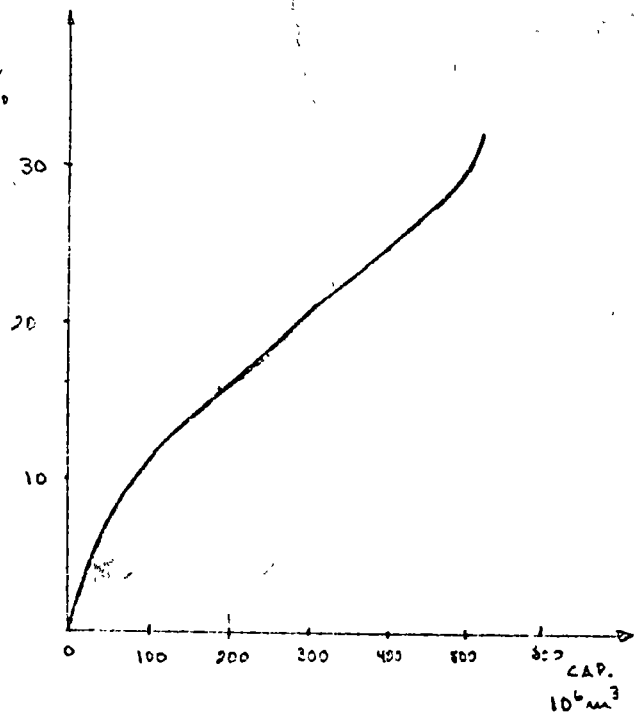
$$\text{C anual} = \$ 16.5 \times 10^6$$

$$\text{B/C} \approx 1.33$$

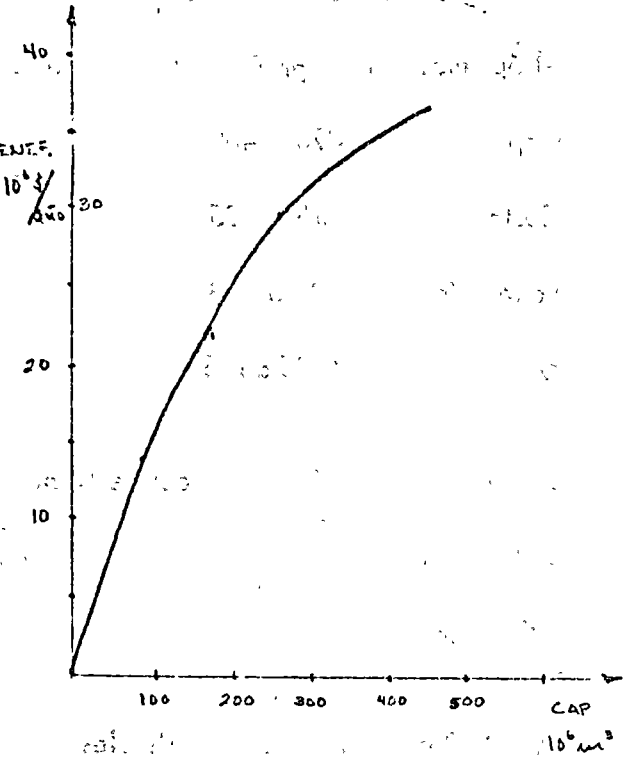
2) El análisis se hace por medio de un análisis marginal.

| Cap. | Costo | Δ Costo | Ben | Δ Ben |
|------|-------|----------------|------|--------------|
| 0 | 0 | | 0 | |
| | | 11.5 | | 13.0 |
| 100 | 11.5 | | 13.0 | |
| | | 5.0 | | 9.0 |
| 200 | 16.5 | | 22.0 | |
| | | 4.0 | | 7.0 |
| 300 | 20.5 | | 29.0 | |
| | | 4.0 | | 4.0 |
| 400 | 24.5 | | 33.0 | |
| | | 3.0 | | 5.0 |
| 500 | 27.5 | | 35.5 | |

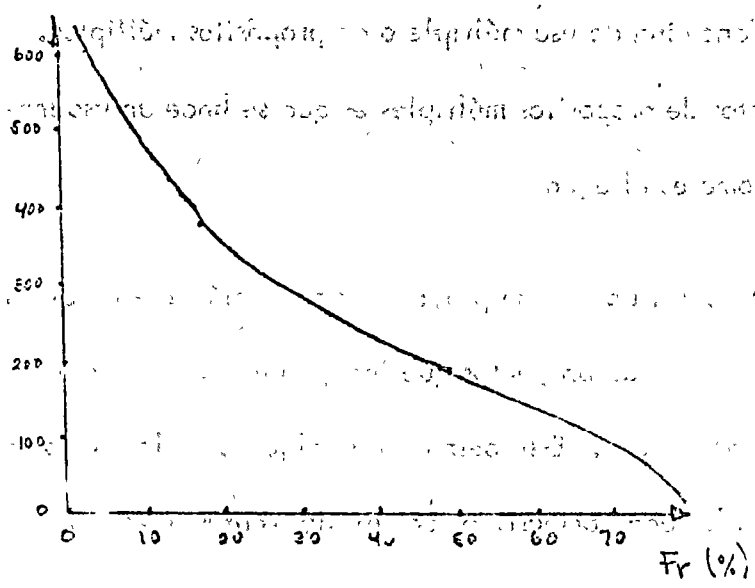
COSTO ANUAL
 $10^6 \frac{\$}{\text{año}}$



BENEF. $10^6 \frac{\$}{\text{año}}$



CAP. $10^6 m^3$



El renglón donde $\Delta C = 4$ y $\Delta B = 4$ es el punto donde se igualan ambos, por lo que debe ser el óptimo. Si se grafican los valores se obtiene aprox:

| | |
|-----------|-------------|
| Cap | 370 a 400 |
| Costo | .15 a .25 |
| Beneficio | 21 a 33 |
| B/C | 1.35 a 1.38 |

3) Para las capacidades dadas se tiene:

370 20%

400 18%

5.2.4 Proyectos de usos múltiples.

Cuando se ha identificado un proyecto cuya construcción puede acarrear más de un beneficio se le denomina de uso múltiple o de propósitos múltiples. La ventaja de desarrollar proyectos de propósitos múltiples es que se hace un uso más eficiente de un recurso escaso como es el agua.

Por otro lado la construcción de proyectos de uso múltiple aprovecha economías de escala, ya que hay partes de proyectos que independientemente del uso que se haga del mismo deben ser construidas. Esto permite que algunos de los costos de los proyectos de propósito múltiple sean compartidos por los diferentes usos.

La evaluación de proyectos de propósito múltiple presenta complicaciones, ya que requiere considerar los beneficios y costos particulares de cada uso y la proporción de los costos compartidos que deben asignarse a cada uso, siendo esta última parte difícil de definir pues para ello hay que estimar los beneficios adicionales en que incurre cada uso al considerar el proyecto como de usos múltiples y de esta forma definir su participación en

los costos compartidos.

Una parte muy importante en los proyectos de propósitos múltiples es la definición de la política de operación de las estructuras, ya que al utilizarse un mismo recurso por diferentes usuarios fácilmente surgen conflictos. Dicha política de operación debe de buscar la solución óptima global y no el beneficio particular de un uso. Dicha política de operación tendrá influencia directa en la evaluación, ya que el beneficio global y los beneficios particulares de cada uno dependerán de ella.

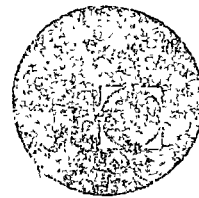


1
2
3





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam

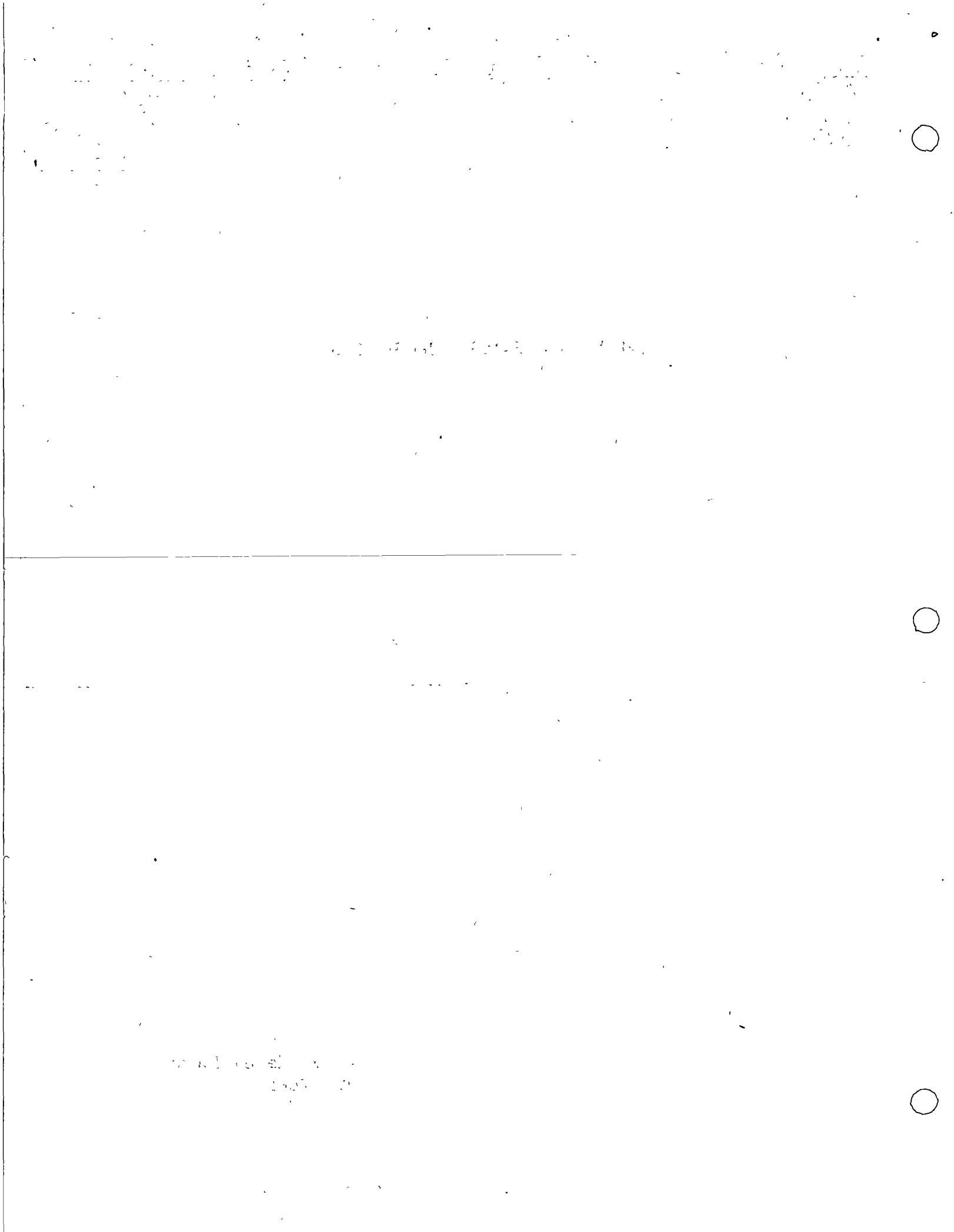


APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

CONCEPTOS DE EVALUACION

(Técnicas)

Ing. César A. Herrera Toledo
NOVIEMBRE, 1977



4.1 CONCEPTOS DE EVALUACION

La evaluación de proyectos tradicionalmente se ha basado en criterios económicos con el objetivo de máxima eficiencia económica. Es decir, buscando incrementar el ingreso nacional. No es esa la única manera de evaluar los proyectos dado que los objetivos pueden ser variados y la forma de alcanzarlos también.

Actualmente, se ha tratado de incorporar, en el proceso de evaluación, una serie de indicadores que reflejen el impacto que los proyectos puede tener sobre el ambiente, sobre la región, o específicamente en el medio social; en adición al impacto económico. En efecto, en algunos países se han establecido leyes que demandan estudios exhaustivos para determinar el impacto que originan los proyectos. Aún más, se ha incorporado en el proceso de planeación y de decisiones, la participación pública, de manera que el proceso de evaluación resulta muy complejo.

En esta primera parte, denominada conceptos de evaluación, se presenta una serie de métodos que están dirigidos al estudio de alternativas bajo el criterio de eficiencia económica exclusivamente. De hecho, estos criterios se siguen usando ampliamente y son requeridos para la aprobación de proyectos. No debe perderse de vista, sin embargo, la limitación del criterio, cuando se considera dentro de un marco que toma en cuenta aspectos ambientales y sociales a la vez.

4.1.1. Conceptos de Análisis Económico

La preocupación inicial que surge al comparar alternativas es la necesidad de expresar sus consecuencias en términos homogéneos, ya que los proyectos presentan diferencias en tiempo y de clase. El primer paso sería entonces buscar unidades de valores comunes; en decisiones económicas se utilizan unidades monetarias por la facilidad que representa para la gente entenderlas, a diferencia de otras.

Al hacer las comparaciones en términos monetarios, cada valor debe ser identificado por cantidad y tiempo; es decir, no deberán combinarse o compararse cantidades correspondientes a diferentes tiempos.

Se deben hacer equivalentes a través del empleo de factores que reflejen esas diferencias, o bien, que indiquen el cambio de valor del dinero a través del tiempo.

Para ello es necesario recurrir a los conceptos de tasa de interés y de equivalencia, que se describen a continuación :

Tasa de interés.- En forma simplista, interés puede definirse como el dinero que se debe pagar por usar dinero prestado; de otro modo, es el dinero que se obtiene al invertir capital en forma productiva. A la cantidad obtenida o pagada como interés, dividida entre el monto inicial de la inversión ó préstamo respectivamente se le denomina tasa de interés. Así por ejemplo, si el monto de la inversión es de \$ 1 000 y el interés al final de un año es \$ 80, la tasa de interés será de 0.08 ó del 8%.

La tasa de interés que se utiliza en evaluación es de gran importancia en la selección de proyectos, sería motivo de un capítulo completo; base por ahora manejar el concepto y posteriormente se mencionarán algunas observaciones al respecto.

Equivalencia

La forma de hacer que, pagos correspondientes a distintas alternativas, de diferente magnitud, efectuados en diferentes tiempos, puedan ser comparados en términos equivalentes se explica a través de un ejemplo:

Supóngase que se desea solicitar un préstamo con una tasa de interés del 5% y que existan varios planes de pago. El préstamo es por \$ 100 000 y los planes son:

- a) pagar todo al final de 10 años
 - b) pagar cantidades iguales cada año durante los próximos 10 años y;
 - c) pagar anualidades de 10 000 de capital más interés a lo largo de los 10 años,
- es decir, que cada año se pague parte del capital del préstamo y los intereses correspondientes a la cantidad de capital que no haya sido pagada (saldos in-

solutos). En la tabla 1 se presentan las cantidades correspondientes.

TABLA 1. SERIES DE PAGO EQUIVALENTES

| Año | Préstamo | Plan 1 | Plan 2 | Plan 3 |
|-----|----------|--------|--------|--------|
| 0 | 100 000 | | | |
| 1 | | | 12 950 | 15 000 |
| 2 | | | 12 950 | 14 500 |
| 3 | | | 12 950 | 14 000 |
| 4 | | | 12 950 | 13 500 |
| 5 | | | 12 950 | 13 000 |
| 6 | | | 12 950 | 12 500 |
| 7 | | | 12 950 | 12 000 |
| 8 | | | 12 950 | 11 500 |
| 9 | | | 12 950 | 11 000 |

Estas tres series de pago son equivalentes, desde el punto de vista de un inversionista con \$ 100 000 pues asegura la recuperación con cualquier serie, desde el punto de vista de la persona que solicita el préstamo, con cualquiera de las tres formas de pago asegura la adquisición del préstamo. En general, los pagos futuros o series de pagos que paguen la cantidad inicial con intereses a una tasa determinada, son equivalentes entre si.

Al analizar los plazos de pago se advierte que la tasa de interés no se aplica una sola vez en todo el período, ni aún en el Plan 1. El tipo de interés empleado aquí se denomina interés compuesto por cuanto a que se aplica a la cantidad en deuda al final del año anterior. Para el Plan 1, por ejemplo, los \$ 162 890 resultan de aplicar la tasa de interés a la cantidad del año anterior, de la siguiente forma :

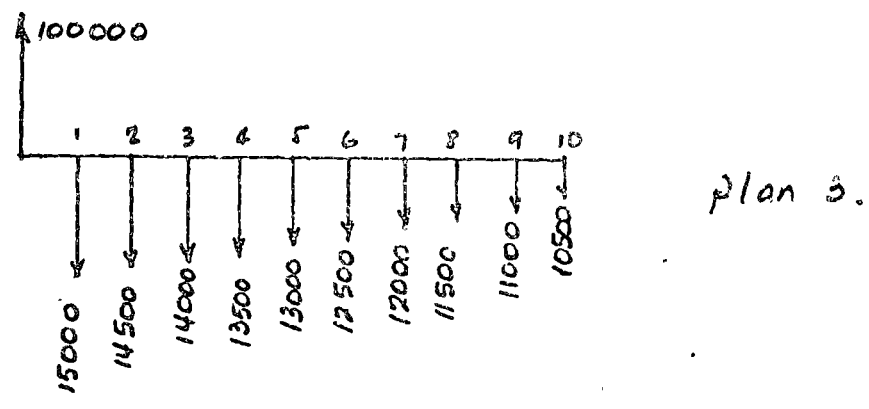
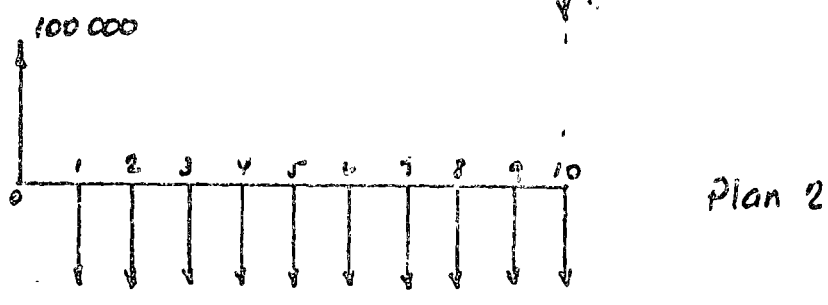
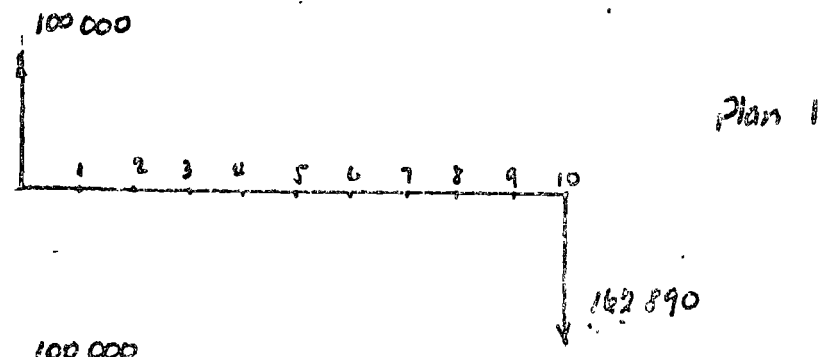
| | | |
|-------|--|-----------------------------------|
| Año 0 | | |
| Año 1 | $100\ 000 + 0.05 \times 100\ 000 = 105\ 000$ | $P + iP = P(1 + i)$ |
| Año 2 | $105\ 000 + 0.05 \times 105\ 000 = 110\ 250$ | $P(1+i) + iP(1+i) = P(1+i)^2$ |
| Año 3 | $110\ 250 + 0.05 \times 110\ 250 = 115\ 762$ | $P(1+i)^2 + iP(1+i)^2 = P(1+i)^3$ |
| etc | | $P(1+i)^N$ |

El Plan 2 no es tan sencillo como el primero; corresponde a anualidades uniformes y posteriormente se tratará con detalle.

El Plan 3 es similar al primero, sólo que aquí se descuenta cada año \$ 10 000. Esta se denomina serie de gradiente uniforme y también se analizará después.

Auxiliar en el análisis de series de pagos (y en la comparación de alternativas posteriormente) es el diagrama de flujo de caja. Este es una representación gráfica de las series de pago como las presentadas en la tabla 1.

En las figuras 1, 2, y 3 se muestran los diagramas correspondientes a los tres planes.



En los diagramas se indica en la parte superior la cantidad recibida y en la parte inferior los pagos correspondientes a cada plan. Es importante hacer énfasis en que los tres planes han sido analizados con la misma tasa de interés de 5% anual.

Al hacer comparación de alternativas, éstas pueden tener series de pagos diversas, pero, basados en el concepto de equivalencia, se advierte ya que es posible manejar cantidades en un tiempo determinado, o bien hacer series uniformes o de gradiente que permitan hacer las comparaciones.

Esto se logra a través de la aplicación de una serie de factores denominados de descuento que se describen adelante.

4.1.2. Factores de descuento

Se dividen en 3 tipos: factores de descuento de pagos simples, series uniformes y series de gradiente.

A). Factores de Descuento de pagos simples.- Se utilizan para convertir un valor de una fecha a otro valor en otra fecha. Corresponden a este tipo de factores:

a) Factor de interés compuesto de pago unitario. Indica la cantidad de pesos que se habían acumulado después de N años por cada peso que se invierta inicialmente con una tasa de retorno de i %. El factor es:

$$\left(\frac{F}{P}, i\%, N \right) = (1+i)^N = \frac{F}{P} \quad (1)$$

donde

$\frac{F}{P}$ se lee: valor futuro F, dado el valor presente P.

i = tasa de retorno

N = número de períodos (generalmente años)

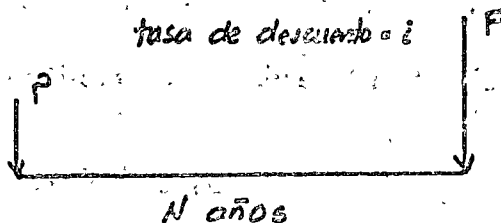
El término izquierdo de la expresión (1) se usa en forma genérica para representar el factor de descuento. Para los otros factores se usará notación similar.

b) Factor de valor presente.- Indica la cantidad de pesos debe invertirse inicialmente a i % para tener al final de N períodos un peso. Este factor es inverso del anterior.

$$\left(\frac{P}{F}, i\%, N \right) = \frac{1}{(1+i)^N} = \frac{P}{F} \quad (2)$$

El diagrama de flujo de caja correspondiente a estos dos factores es el siguiente

1/ En lo sucesivo se utilizarán los términos tasa de interés, tasa de retorno o tasa de descuento, y se les designará con la letra i. El término tasa de interés se definió anteriormente; la tasa de descuento tiene el mismo significado que la de interés pero se usa comúnmente al calcular el valor presente pues a este se le llama descuento. La tasa de re...



El empleo de estos factores se simplifica enormemente al emplear tablas como las que aparecen en el anexo 1. La forma de usarlas se ilustra a través de un ejemplo:

Calcular la cantidad que se habrá acumulado en 5 años si se invierten \$ 15 000 a una tasa de interés del 8% anual.

En este caso se utiliza el factor de interés compuesto de pago unitario de la siguiente manera:

$$\left(\frac{F}{P}, i\%, N\right) = \left(\frac{F}{P}, 8\%, 5\right)$$

En la tabla D- 13, se busca en la columna correspondiente a factor de interés compuesto (F/P) y en la columna n se busca el número de años. El valor del factor resulta: 1.4693. De acuerdo con la expresión (1), siendo P = 15 000, el valor de F se obtiene despejando así:

$$F = \left(\frac{F}{P}, i\%, N\right) \times P = 1.4693 \times 15\,000 = \$ 22\,039.50$$

La aplicación del factor de valor presente es similar si ahora se parte, por ejemplo, de \$ 35 000 dentro de 15 años, y se requiere conocer a cuánto equivale en el presente, a una tasa de interés del 12% anual.

$$\left(\frac{P}{F}, i\%, N\right) = \left(\frac{P}{F}, 15\%, 12\right)$$

En la tabla D - 17 se busca la columna $\frac{P}{F}$ y el renglón 15 de la columna n. El valor que ahí aparece es: 0.1827. Sustituyendo en la expresión (2) se obtiene:

$$P = \left(\frac{P}{F}, i\%, N\right) \cdot F = 0.1827 \times 35000 = \$ 6394,50$$

B) Factores de Series Anuales Uniformes.- Se utilizan para establecer equivalencias entre pagos unitarios en una fecha determinada, con pagos periódicos durante N años. En realidad pueden usarse los factores de pagos unitarios, aplicándolos N veces pero esto es inoperante cuando se trata de muchos períodos. Sin embargo, los programas de computadora usan factores unitarios en la mayoría de los casos. Corresponden a este tipo de factores los dos siguientes casos:

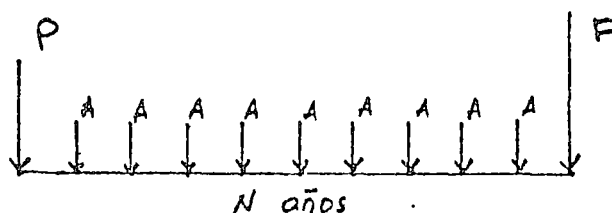
a) Factor de fondo acumulativo.- Indica el número de pesos que deben invertirse en cantidades uniformes a $i\%$ de interés durante N años para acumular un peso.

$$\left(\frac{A}{F}, i\%, N\right) = \frac{i}{(1+i)^N - 1} = \frac{A}{F} \dots (3)$$

b) Factor de Recuperación de Capital.- Indica la cantidad de pesos que puede retirar al final de cada uno de los N períodos si se deposita un peso inicialmente.

$$\left(\frac{A}{P}, i\%, N\right) = \frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N - 1} = \frac{A}{P} \dots (4)$$

El diagrama de flujo de caja correspondiente a estas dos series se presenta a continuación.



También para estos casos existen tablas que simplifican el cálculo. Así por ejemplo, sí

se requiere conocer cuánto se debe pagar anualmente, durante 15 años por un préstamo de \$ 200 000, haciendo pagos uniformes, con una tasa de interés del 18% anual, el cálculo sería el siguiente:

$$\left(\frac{A}{P}, i\%, N \right) = \left(\frac{A}{P}, 18\%, 15 \right)$$

En la tabla D-22, se busca la columna de factor de recuperación de capital (/P) y el renglón 15 de la columna n. El factor vale 0.19640.

La cantidad anual que tendría que pagar, aplicando la expresión 4 es:

$$A = \left(\frac{A}{P}, i\%, N \right) \cdot P = 0.19640 \times 200\,000 = \$ 39\,280$$

En las tablas aparece también el factor de fondo acumulativo y su aplicación es similar a la presentada para el factor de recuperación de capital.

Dentro de este grupo se incluyen también otros dos factores

c) Series Uniformes.- Factor de interés compuesto

$$\left(\frac{F}{A}, i\%, N \right) = \frac{(1+i)^N - 1}{i} = \frac{F}{A}$$

d) Series uniformes.- Factor de valor presente

$$\left(\frac{P}{A}, i\%, N \right) = \frac{(1+i)^N - 1}{i(1+i)^N} = \frac{P}{A}$$

También se consignan valores para estos factores en las tablas mencionadas y su empleo es similar.

C) Factores de Series de Gradiente Uniforme.- Algunos problemas contienen valores de inversiones que crecen o decrecen uniformemente con el tiempo, ejemplo de ello son

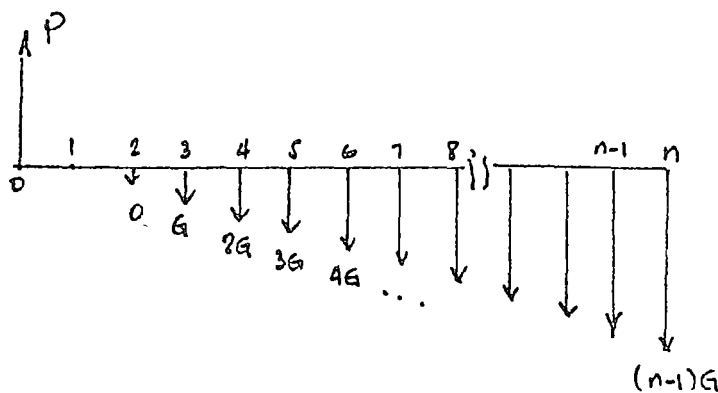
los gastos de mantenimiento. Aunque no siempre son uniformes puede asimilarse a una serie con variación uniforme.

En virtud de que la cantidad de dinero es diferente cada po, los factores antes vistos no pueden usarse, a continuación se derivan expresiones para simplificar el cálculo en el caso de series de gradiente.

a) Factor de valor presente en series de gradiente: - Indica la cantidad de pesos que debe invertirse inicialmente con una tasa de interés i %, para recibir un peso el año siguiente; dos pesos, dos años después, tres pesos tres años después, etc. hasta N pesos N años después. El factor se representa con :

$$\left(\frac{P}{G}, i\%, N \right) = \frac{(1+i)^{N+1} - (1+Ni+i)}{i^2 (1+i)^N} = \frac{P}{G} \dots (7)$$

El diagrama de flujo de caja se presenta a continuación. Es importante observar el año de inicio de la serie. Para claridad se presenta la serie hacia abajo, a diferencia de las otras. El sentido de las flechas se definirá posteriormente.



Conocido el factor $\frac{P}{G}$ es fácil determinar otros valores a partir de él, así:

b) Conversión de valor presente a serie de gradiente

$$\left(\frac{A}{G}, i\%, N \right) = \left(\frac{P}{G}, i\%, N \right) \left(\frac{A}{P}, i\%, N \right) = \frac{A}{G} \dots (8)$$

Esta expresión resulta de la aplicación de dos factores en forma consecutiva. Primero se convierte la serie de gradiente a valor presente, con la expresión (7) y esa cantidad se

multiplica por el factor de recuperación de capital.

Para las series de gradiente existen tablas que facilitan el cálculo.

Ejemplo

Considérese una inversión de \$ 100 000 el año cero con una tasa de interés del 8%.

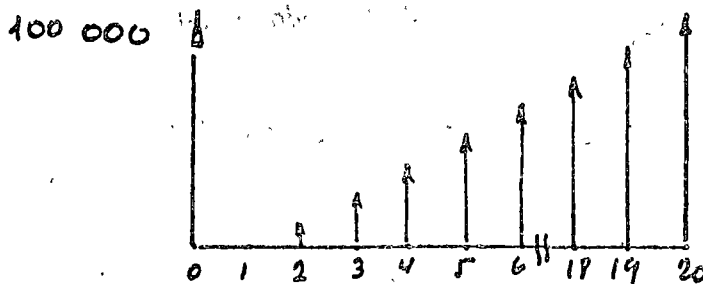
Se plantean las siguientes preguntas.

- a) Cuánto se tendrá al final de 20 años
- b)Cuál sería la inversión anual equivalente, durante 20 años, para tener los \$ 100 000 en el año cero.
- c) Determine la serie de pagos crecientes, que tendrían que hacerse durante 20 años para lograr una inversión equivalente a los \$ 100 000 de ahora.
- d) A partir de la serie de gradiente calcula la inversión equivalente en pagos uniformes.
- e) Supóngase, partiendo del planteamiento inicial, que en el año 5 se invierten \$ 50 000 y \$ 30 000 en el año 10. Calcule la inversión inicial equivalente y la serie anual equivalente.

a) $(\frac{F}{P}, 8\%, 20) = P = 4.6610 \times 100\ 000 = \$ 466\ 100$

b) $(\frac{A}{P}, 8\%, 20) = P = 0.10185 \times 100\ 000 = \$ 10\ 185$

c) Para resolver este punto obsérvese el diagrama de flujo de caja.



Para utilizar tablas de factores de gradiente, el primer pago se haría el año 2 (así fueron deducidas). Es obvio que pueden determinarse series para incluir el año 1. Para este caso, siguiendo las tablas D-31 se obtiene:

$$\left(\frac{P}{G}, i\%, N\right) = \frac{P}{G}; \text{ como lo que interesa es } G:$$

$$G = \frac{P}{\left(\frac{P}{G}, i\%, N\right)} = \frac{100.000}{69.0898} = \text{¢ } 1447.39$$

Esto indica que los valores de la serie serán:

| año | expresión | inversión (pesos) |
|-----|-----------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | G | 1447.39 |
| 3 | 2 G | 2894.78 |
| 4 | 3 G | 4342.17 |
| 5 | 4 G | 5789.57 |
| 19 | (N - R) G | 26053.05 |
| 20 | (N - 1) G | 27500.44 |

d) Utilizando la expresión (8):

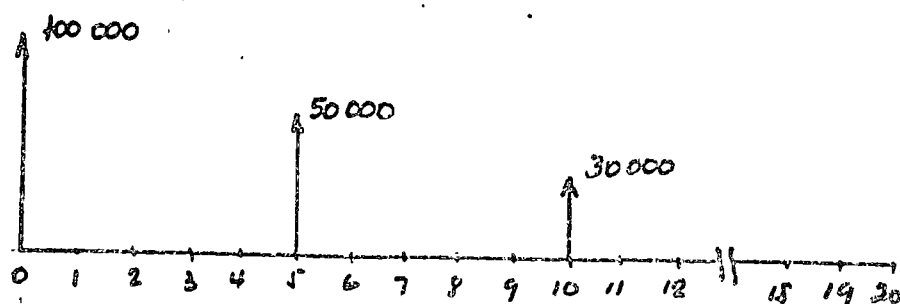
$$A = \left(\frac{P}{G}, i\%, N\right) \left(\frac{A}{P}, i\%, N\right) \times G$$

Substituyendo valores de las tablas D-31 y D-13:

$$A = (69.0898)(0.10185) \times 1447.39 = \text{¢ } 10185$$

Este valor corresponde exactamente al obtenido en (b)

e) Para resolver este inciso se usarán diagramas de flujo de caja inicialmente.



El valor presente se obtiene como la suma de las siguientes cantidades:

$$P = 100\,000 + 50\,000 \left(\frac{P}{F}, 8\%, 5 \right) + 30\,000 \left(\frac{P}{F}, 8\%, 10 \right)$$

$$= 100\,000 + 50\,000 (0.6806) + 30\,000 (0.4632) = \text{f } 147\,926$$

La serie uniforme se puede obtener utilizando el valor obtenido para el año cero. Es decir:

cir:

$$A = \left(\frac{A}{P}, 8\%, 20 \right) \times P = 0.10185 \times 147\,926 = \text{f } 15\,066.26$$

Por supuesto, esto se puede calcular también de la siguiente manera:

$$A = \left(\frac{A}{P}, 8\%, 20 \right) \times 100\,000 + \left(\frac{A}{P}, 8\%, 20 \right) \left(\frac{P}{F}, 8\%, 5 \right) \times 50\,000 + \left(\frac{A}{P}, 8\%, 20 \right) \left(\frac{P}{F}, 8\%, 10 \right) \times 30\,000$$

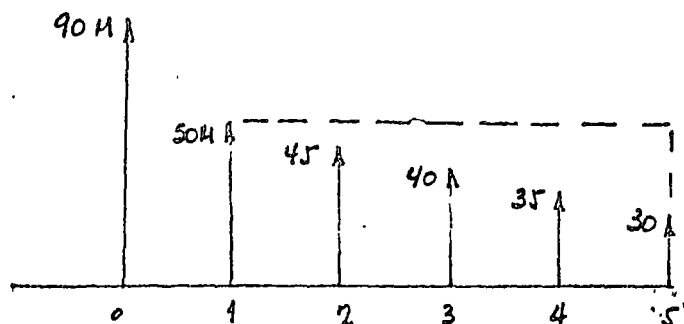
es decir realizando el cálculo para cada uno de los elementos.

Un problema que se encuentra con frecuencia es el de gradientes decrecientes, a diferencia de los mencionados anteriormente para los cuales existen tablas. Para estos casos, se sigue el procedimiento indicado en el siguiente ejemplo.

Supóngase que una compañía renta maquinaria en los siguientes términos: Pago inicial \$ 90 000 y una renta anual (pagadera al final de cada año) de \$ 50 000 el primer año, 45 000 el segundo año, y \$ 5 000 menos cada año. Si se renta por 5 años la máquina, cual será:

- el costo anual equivalente si se renta con una tasa de interés del 8%
- el costo inicial equivalente si se renta los 5 años con una tasa de 8% anual?

a) El diagrama de flujo de caja es:



Debido a que las tablas de series de gradiente son crecientes, se considera una inversión uniforme (de 50 000 al año) y se resta una serie donde $G = 5\,000/\text{año}$. Las anualidades serán:

para la inversión inicial

$$A = \left(\frac{A}{p}, 8\%, 5 \right) \times 90\,000 = 0.2546 \times 90\,000 = \text{\$ } 22\,914$$

• para la serie uniforme (punteada)

$$A = 50\,000$$

La serie de gradiente es: (se obtiene el factor directamente de la tabla D-30).

$$A = -5000 \left(\frac{1}{q}, i\%, s \right) = -5000 \times 1.85 = -\$9250$$

La serie uniforme resulta:

$$A = 22914 + 50000 - 9250 = \$63664$$

b) La cantidad equivalente en valor presente es:

$$P = \left(\frac{P}{A}, i\%, s \right) \cdot A = 3.933 \times 63664 = \$250390$$

4.1.3. TECNICAS DE DESCUENTO

A continuación se presentan cuatro procedimientos para comparar alternativas que incluyen pagos o ingresos diferentes. Los métodos son:

- a) Valor presente con una tasa de descuento definida
- b) Método de la tasa de retorno.
- c) Método del costo anual
- d) Relación beneficio-costo

Estas técnicas se utilizan para comprar alternativas mutuamente exclusivas

Por ello debe entenderse que se construye solo una de ellas, de manera que puedan ser alternativas correspondientes a dos proyectos diferentes o a distintos tamaños de un proyecto.

Conviene aquí anotar que la tasa de interés juega un papel preponderante en la comparación, pues sucede que al cambiarla puede cambiar también la alternativa que con la tasa de interés anterior era mejor. Para inversiones privadas, puede usarse una tasa de interés igual a la que ofrecen los bancos al invertir dinero; para el caso de inversiones gubernamentales, algunas veces la tasa de interés está fija por organismos internacionales

(cuando se manejan for los internacionales), o bien, las dependencias la fijan.

En los cuatro métodos se hará referencia a dos alternativas solamente. El caso de alternativas múltiples lleva al concepto de análisis marginal que solo se mencionará adelante.

Para todos los métodos, el primer paso al analizar alternativas será definir la información básica. Esta por una parte contiene datos de costos de las obras y por otra parte los beneficios. La determinación de costos se obtiene aplicando precios unitarios a cada elemento del proyecto. Los beneficios en algunos casos son fáciles de determinar, sobre todos los beneficios directos (aquellos que resultan de los bienes y servicios originados por el proyecto); sin embargo hay también beneficios indirectos, que por facilidad se calculan en muchos casos como porcentajes de los directos. La evaluación de los beneficios sería motivo de una sesión de cuatro horas, como ésta; sobre el tema, el libro de James and Lee ^{1/} presenta una explicación amplia.

En los cuatro métodos se usará el siguiente conjunto de datos base, que corresponde a dos alternativas que se desea comparar.

Considérese una zona urbana por la que pasa un arroyo, en donde se han propuesto obras de control para evitar inundaciones cuando ocurren crecientes, se han hecho estimaciones para dos alternativas, uno consiste en el revestimiento de un canal y el otro un almacenamiento en dos etapas para regulación debido al crecimiento futuro.

Se propone hacer el análisis económico para una vida útil de 40 años, con una tasa de retorno del 8% anual.

| Concepto | Alternativa canal | Alternativa presa |
|---------------------------|--------------------------------|--|
| Costo de construcción | 20 000 000 | 15 000 000 (1a. etapa) |
| | | 30 000 000 (2a. etapa) |
| Operación y mantenimiento | 160 000/año durante 40 años | 100 000 al año (20 años) 200 000 al año (20 años) |
| Vida económica de la obra | 40 años | 40 años cada/etapa |
| Beneficio anual | 4 000 000 | 5 000 000 |

A) Método del valor Presente

Este método selecciona el proyecto con mayor valor presente de la diferencia algebraica de los beneficios menos los costos, descontados a un año determinados, esto es en valor presente.

$$VP = \sum_{t=1}^N \left(\frac{P}{F}, i\%, t \right) (B_t - C_t)$$

donde C_t es el costo y B_t el beneficio en el año t , N es el período de análisis e i es la tasa de descuento.

El libro de James and Lee propone una serie de reglas que conviene usar al utilizar este método:

1. Todas las cantidades deben ser descontadas al mismo año base.
2. Todas las cantidades deben ser descontadas (o pasadas a valor presente), con la misma tasa de descuento i .
3. El período de análisis para todas las alternativas debe ser el mismo.

En relación a la selección de la alternativa, recomienda el libro que si la diferencia $B_t - C_t$ es negativa se elimine la alternativa y que si son muy parecidas las diferencias en dos alternativas, se seleccione aquella de menor costo.

En el ejemplo mencionado, el análisis de las alternativas sería el siguiente:

| Concepto | V. P. Alternativa A | V. P. Alternativa B |
|-------------------------|---|--|
| V.P. Costo construcción | - \$ 20 000 000 | - 15 000 000 |
| | | - 30 000 $\left(\frac{P}{F}, 8\%, 20\right)$ |
| V.P. Operación y mant. | - 160 000 $\left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right)$ | - 100 000 $\left(\frac{P}{A}, 8\%, 20\right)$ |
| | | - 200 000 $\left(\frac{P}{A}, 20\right) \left(\frac{P}{F}, 8\%, 20\right)$ |
| V.P. beneficios | + 4 000 000 $\left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right)$ | + 5 000 000 $\left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right)$ |

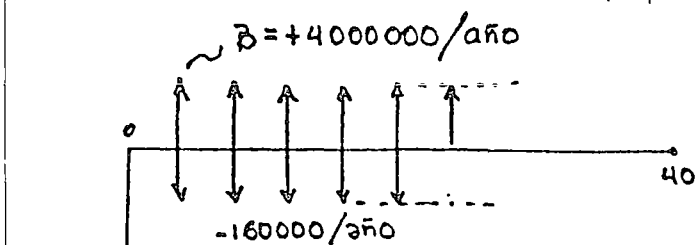
Sustituyendo valores quedará:

$$V.P._A = -20\,000\,000 - 160\,000(11.925) + 4\,000\,000(11.925) = \$ 25\,792\,000$$

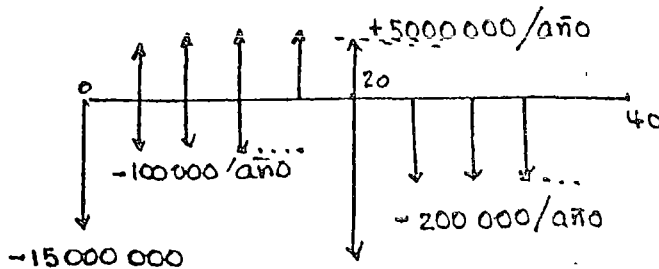
$$V.P._B = -15\,000\,000 - 30\,000(0.2145) - 100\,000(9.818) - 200\,000(9.818)(0.2145) + 5\,000\,000(11.925) = \$ 36\,787\,000.$$

La selección en este caso recaería sobre el proyecto B, que tiene la mayor diferencia en valor presente. El diagrama de flujo de caja, permite aclarar los cálculos efectuados.

En el diagrama se dibujan los costos hacia abajo y los beneficios hacia arriba.



Alternativa A (canal)



Alternativa B (almacenamiento)

B) Método de la tasa de retorno

Se define la tasa de retorno como la tasa de interés a lo cual el valor presente del flujo de caja neto es cero. El proceso de evaluación consta de varias etapas. En primer lugar se calcula la tasa de retorno de cada alternativa y se compara con la tasa de retorno mínima establecida. Si es mayor, entonces se procede a ordenar los proyectos (solo aquellos en que su tasa de retorno sea mayor que la mínima), en orden ascendente y se comparan por pares en la siguiente forma: se calcula primero el flujo de caja neto, posteriormente se pasan a valor presente e igualan a cero. Por prueba y error se obtiene el valor de la tasa de retorno. Para el ejemplo mencionado antes, la segunda parte del cálculo quedaría.

| Concepto | Alternativa A | Alternativa B | (A-B) |
|---------------------------|---------------|---------------|-------------------------|
| Costo de construcción | 20 000 000 | 15 000 000 | + 5 000 000 |
| | | 30 000 000 | - 30 000 000 |
| Operación y mantenimiento | 160 000 | 100 000 | 60 000 (1os. 20 años) |
| | | 200 000 | - 40 000 (2os. 20 años) |
| Beneficio anual | 4 000 | 5 000 000 | - 1 000 000 |

El valor presente de la diferencia resulta.

$$V.P. = + 5 000 000 - 30 000 000 \left(\frac{P}{F}, i\%, 20 \right) + 60 000 \left(\frac{P}{A}, i\%, 20 \right) - 40 000 \left(\frac{P}{A}, i\%, 20 \right) - 1 000 000 \left(\frac{P}{A}, i\%, 40 \right) = 0$$

Obsérvese que en esta expresión se anotó $i\%$, ya que se desconoce la tasa de interés que hace el valor presente cero.

Por tanteos, suponiendo $i = 15\%$ y dividiendo todo entre 1 000 000.

$$+ 5 - 30 (0.061) + 0.05 (6.259) - 0.04 (6.259) (0.0611) - 1 (6.642) = 0$$

$$+ 5 - 1.833 + 0.376 - 0.015 - 6.642 = - 3.114$$

Con $i = 20\%$

$$+ 5 - 30 (0.0261) + 0.06 (4.87) - 0.04 (4.87) (0.026) - 1 (4.997) = 0$$

$$+ 5 - 0.783 + 0.292 - 0.005 - 4.497 = 0.007$$

por lo tanto la tasa de retorno es 20%

El resultado indica que el proyecto B es mejor que A si la tasa de retorno mínima es menor que 20%. También puede entenderse de la siguiente manera: la inversión en exceso de B respecto a A es conveniente dado que la tasa de retorno de ese incremento es del 20%, siempre que esta tasa sea mayor que la mínima.

En general la tasa de retorno mínima es mucho menor, algunas veces se considera la tasa de interés bancario como la mínima, mediante el razonamiento de que dinero invertido en un banco cuando menos gana intereses a esa tasa.

C) Método del Costo Anual

En este método se convierten beneficios y costos a series anuales y se comparan los valores de las series. En este caso, el criterio de decisión es el mismo que en el método del valor presente, es decir, aquella alternativa en que la serie anual de beneficios menos costos sea mayor. Es evidente que en este método puede efectuarse el cálculo a partir de las cantidades obtenidas en valor presente; aunque también puede hacerse pasando a serie anual cada uno de los valores.

A partir de los datos del ejemplo, el cálculo sería el siguiente:

| Concepto | Anualidades | |
|---------------------------|---|---|
| | Alternativa A | Alternativa B |
| Costo de construcción | - 20 000 000 ($\frac{A}{P}, 8\%, 40$) | - 15 000 000 ($\frac{A}{P}, 8\%, 40$) |
| Operación y mantenimiento | - 160 000 | - 30000 000 ($\frac{A}{P}, 8\%, 40$) ($\frac{P}{A}, 8\%, 20$) |
| | | - 10000 ($\frac{A}{P}, 8\%, 40$) ($\frac{P}{A}, 8\%, 20$) |
| Beneficios | + 4000 000 | - 200,000 ($\frac{A}{P}, 8\%, 40$) ($\frac{P}{A}, 8\%, 20$) |
| | | ($\frac{P}{A}, 8\%, 20$) |
| | | + 5000 000 |

Sustituyendo valores :

$$\text{Serie alternativa A:} = -20000\ 000 (0.08386) - 160000 + 4000000 = \$ 2162\ 800$$

$$\begin{aligned} \text{Serie alternativa B:} &= -15\ 000\ 000 (0.08386) - 30\ 000\ 000 (0.08386)(0.2145) - \\ &- 100\ 000 (0.08386)(9.818) - 200\ 000 (0.08386)(0.2145)(9.818) + \\ &+ 5000\ 000 = \$ 3\ 024\ 806 \end{aligned}$$

El mayor valor se obtuvo con la serie B, por lo cual se considera la mejor alternativa.

Estos valores se pueden obtener a partir del cálculo de valor presente, de la siguiente

manera :

$$\text{Serie alternativa A} \quad 25792\ 000 (\frac{A}{P}, 8\%, 40) = \$ 2\ 162\ 917$$

$$\text{Serie alternativa B} \quad 36787\ 000 (\frac{A}{P}, 8\%, 40) = \$ 3\ 084\ 958$$

Relación Beneficio-Costo

Acerca de la relación beneficio costo se ha escrito mucho. Generalmente la relación Beneficio Costo se refiere al cociente entre el valor presente de los beneficios de un proyecto y el valor presente de los costos. Así, la siguiente expresión denota la relación mencionada.

$$\frac{B}{C} = \frac{\text{V.P. Benef.}}{\text{V.P. Costo}} = \frac{\sum_{t=1}^N \left(\frac{P}{F}, i\%, t\right) B_t}{\sum_{t=1}^N \left(\frac{P}{F}, i\%, t\right) C_t}$$

donde el significado de las variables corresponde al mencionado al estudiar valor presente.

La relación Beneficio-costo también puede obtenerse como el cociente de las series anuales de beneficios y de costos de un proyecto.

La forma de considerar los costos como tales o como beneficios negativos agrega a este método una característica arbitraria, lo que hace su aplicación cuidadosa. La relación debe ser mayor que uno para garantizar que los beneficios obtenidos con el proyecto superen la inversión.

El análisis de alternativas requiere de los siguientes pasos:

- a) Calcular el cociente B/C para cada proyecto, usando el mismo período de análisis y la misma tasa de descuento.
- b) Elegir la que tenga mayor valor B/C
- c) En caso de que se tengan recursos financieros para realizar varios proyectos mutuamente exclusivos, se ordenan estos en orden creciente (aquellos que tienen $B/C > 1$)

y se hace un análisis incremental. Esto es;

- Se calcula la diferencia de beneficios y costos entre la primera y la segunda y se calcula la relación B/C, si ésta es mayor que 1, eso indica que conviene incrementar la inversión.
- Se compara la tercera contra la segunda en forma similar y así sucesivamente
- En caso de que la relación B/C sea menor que uno, se desecha esa alternativa

y se compara con la siguiente, sin tomar en cuenta la alternativa eliminada.

Para el ejemplo, la relación de cada alternativa es:

Alternativa A:

$$\text{V.P. Beneficios} = 4000000 \left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right) = 4000000 (11.925) = \$ 47700 000$$

$$\begin{aligned} \text{V.P. Costos} &= 20 000 000 + 160 000 \left(\frac{P}{A}, 8\%, 40\right) = \\ &= 20 000 000 + 1908 000 = \$ 21 908 000 \end{aligned}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{47 700 000}{21 908 000} = 2.17$$

La relación es mayor que uno, en general no suelen ser tan altos los valores, varían en torno a 1 ó 2.

Para la alternativa B:

$$\text{V.P. Beneficios} = 59 625 000$$

$$\text{V.P. Costos} = 22 838 000$$

$$\frac{B}{C} = \frac{59 625 000}{22 838 000} = 2.61$$

Supóngase ahora que se trata de varios proyectos y que se requiere aplicar el análisis incremental.

$$\Delta \text{ Benef.} = 59 625 000 - 47 700 000 = 11 925 000$$

$$\Delta \text{ Costos} = 22 838 000 - 21 908 000 = 930 000$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta C} = \frac{11 925}{930} = 12.82$$

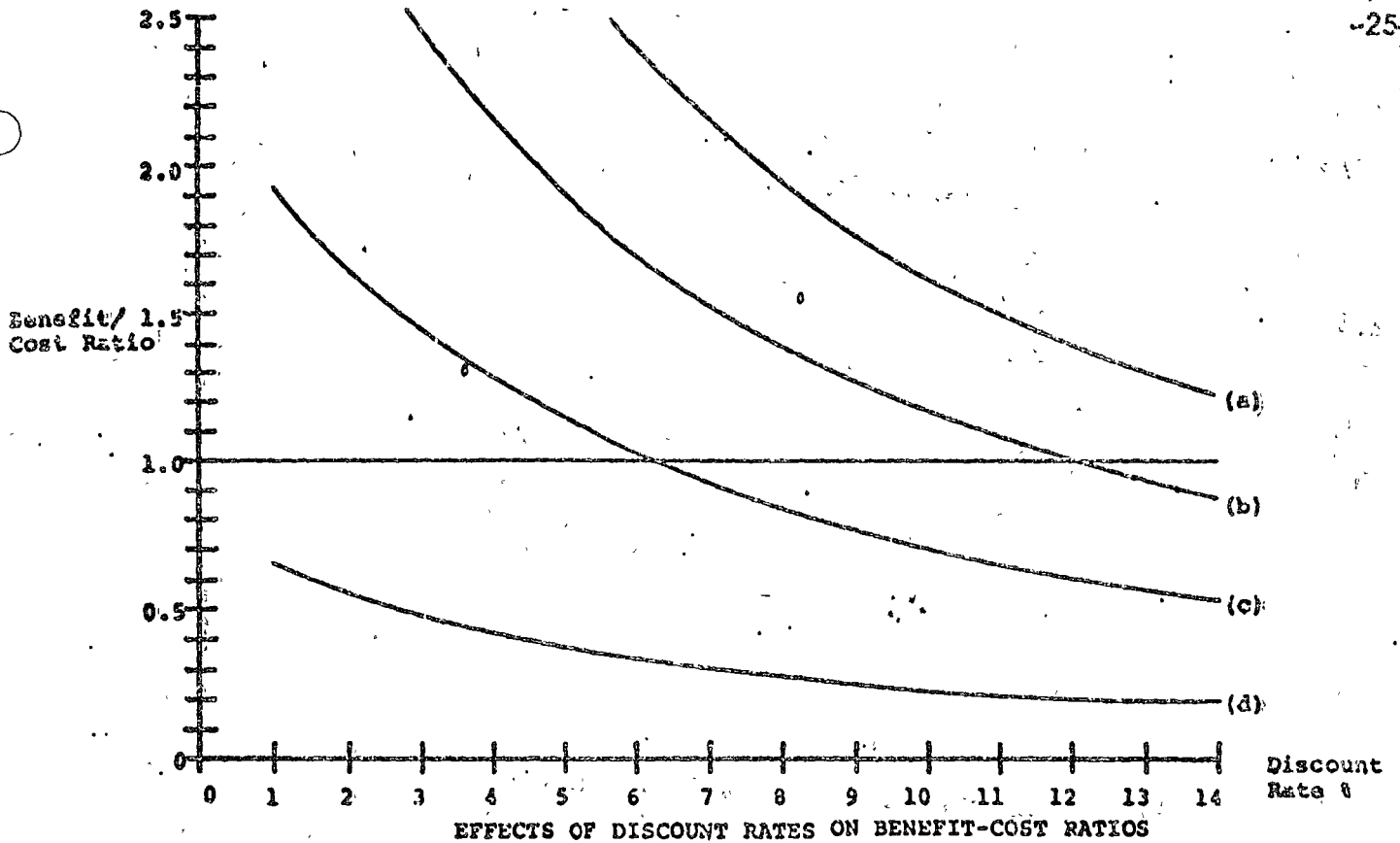
El cociente indica la conveniencia de invertir una mayor cantidad en el proyecto B, puesto que su relación B/C es muy alta.

Cuando se aplica en forma adecuada, la relación beneficio costo resulta idéntica al método del valor presente neto.

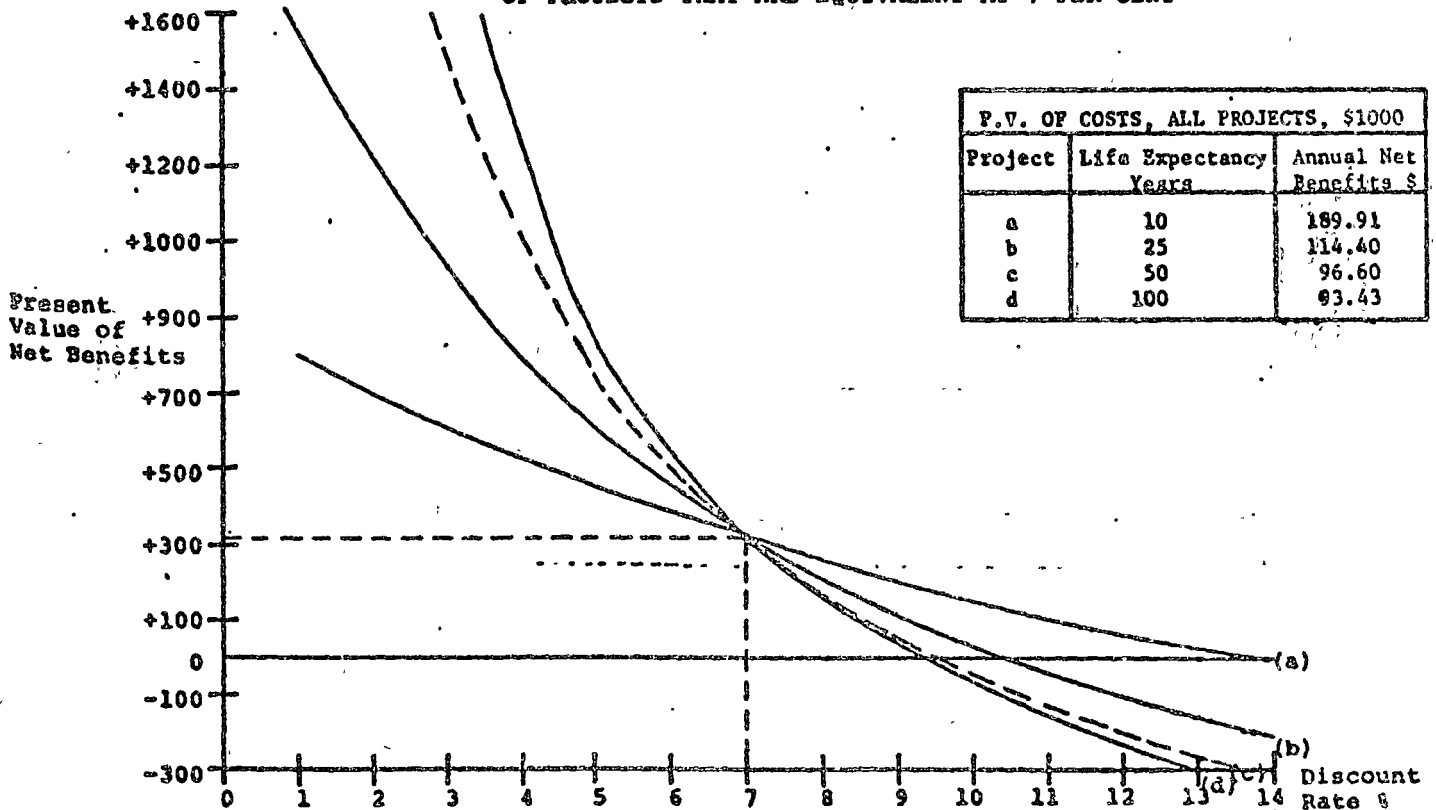
donde Q es la escala de proyecto.

Observaciones acerca de las técnicas de descuento

- a) El método del valor presente es especialmente útil cuando no existen restricciones de presupuesto y existe una serie de alternativas independientes.
- b) Acerca del método de series anuales, en general presenta pocas ventajas su empleo; se usa con mayor generalidad el método del valor presente, porque el flujo de caja puede ser muy complicado y pasar a anualidades requiere mayor trabajo.
- c) La tasa de retorno, tiene una ventaja fundamental: que los proyectos pueden jerarquizarse sin tener que determinar una tasa de descuento, aunque deberá fijarse una tasa de descuento mínima. Una desventaja de este método es que para algunos flujos de caja, es imposible obtener un valor único de i ,
- d) El análisis beneficio costo se ha usado ampliamente para justificar proyectos: sin embargo puede usarse como un enfoque para tomar decisiones acerca de la escala de proyecto o la selección de proyectos de una serie de alternativas. En este caso, se requiere que el criterio de selección resida exclusivamente en el objetivo de eficiencia económica o ingreso nacional, y que no existan efectos intangibles considerables, es decir efectos que no puedan cuantificarse monetariamente.
- e) Como se puede observar en la figura, el efecto de la tasa de descuento es notable.
- f) Otro aspecto importante que no debe pasarse por alto, es la definición del horizonte de planeación. En realidad el horizonte de planeación y la tasa de descuento van unidos ya que el tiempo para el cual los beneficios son insignificantes depende de la tasa de descuento. El efecto combinado de estos elementos se muestra en la siguiente tabla.



EFFECTS OF DISCOUNT RATE CHANGES ON NET BENEFITS OF PROJECTS THAT ARE EQUIVALENT AT 7 PER CENT



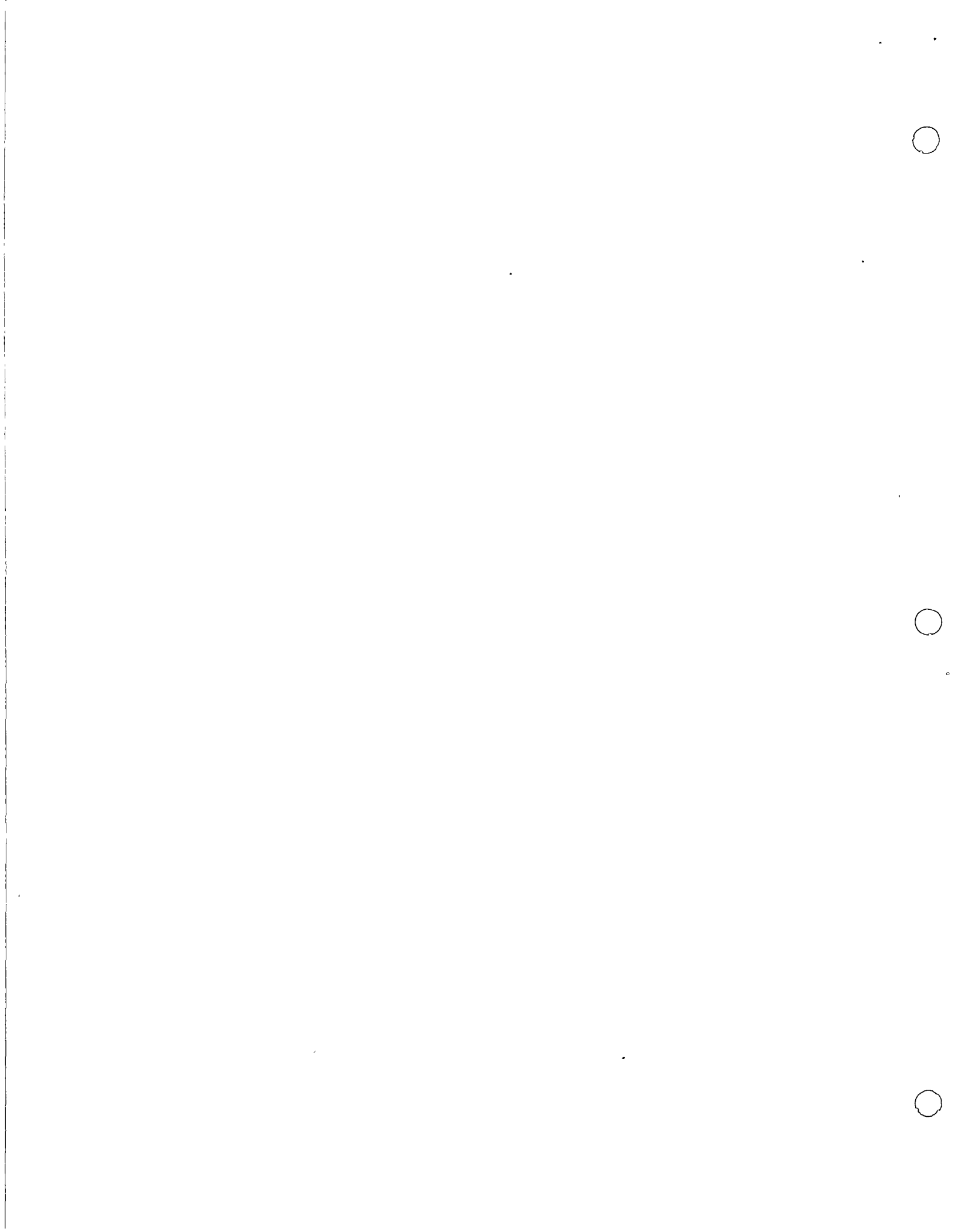
Source: Schramm [1970, p. 49]

| i % | Relación B/C | |
|-----|------------------------|-------------------------|
| | vida económica 50 años | vida económica 100 años |
| 2 | 1.39 | 1.51 |
| 2.5 | 1.33 | 1.43 |
| 3 | 1.28 | 1.35 |
| 3.5 | 1.22 | 1.28 |
| 4 | 1.17 | 1.21 |
| 5 | 1.08 | 1.10 |
| 6 | 1.00 | 1.00 |

e) Finalmente, respecto a la relación B/C, existen diversos problemas, algunos relacionados con la medición de beneficios y costo; otros con aspectos conceptuales, y otros con aspectos institucionales. La definición clara de cada uno de ellos influye de manera determinante en los resultados.

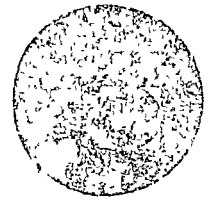
BIBLIOGRAFIA

1. L. Douglas James and Robert R. Lee. "Economics of Water Resources Planning" Mc. Graw Hill. New York. 1971.
2. William T. Morris "Engineering Economic Analysis". Reston Publishing Co. Virginia. 1976.
3. Eugene L. Grant, W. Grant Ireson and Richard S. Leavenworth. "Principles of Engineering Economy". Ronald Press. Co. New York. 1976.





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



ANEXO:

TABLAS DE INTERES COMPUESTO



TABLE D-10

5½% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|-----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|-----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.0550 | 0.9479 | 1.000 00 | 1.055 00 | 1.000 | 0.948 | 1 |
| 2 | 1.1150 | 0.8985 | 0.486 62 | 0.541 62 | 2.055 | 1.846 | 2 |
| 3 | 1.1742 | 0.8516 | 0.315 65 | 0.370 65 | 2.152 | 2.698 | 3 |
| 4 | 1.2388 | 0.8072 | 0.230 29 | 0.285 29 | 4.342 | 3.505 | 4 |
| 5 | 1.3070 | 0.7651 | 0.179 18 | 0.234 18 | 5.581 | 4.270 | 5 |
| 6 | 1.3788 | 0.7252 | 0.145 18 | 0.200 18 | 6.888 | 4.996 | 6 |
| 7 | 1.4547 | 0.6874 | 0.120 96 | 0.175 96 | 8.267 | 5.683 | 7 |
| 8 | 1.5347 | 0.6515 | 0.102 86 | 0.157 86 | 9.722 | 6.335 | 8 |
| 9 | 1.6191 | 0.6176 | 0.088 84 | 0.143 84 | 11.256 | 6.952 | 9 |
| 10 | 1.7081 | 0.5854 | 0.077 67 | 0.132 67 | 12.875 | 7.538 | 10 |
| 11 | 1.8021 | 0.5549 | 0.068 57 | 0.123 57 | 14.583 | 8.093 | 11 |
| 12 | 1.9012 | 0.5260 | 0.061 03 | 0.116 03 | 16.386 | 8.619 | 12 |
| 13 | 2.0058 | 0.4986 | 0.054 68 | 0.109 68 | 18.287 | 9.117 | 13 |
| 14 | 2.1161 | 0.4726 | 0.049 28 | 0.104 28 | 20.293 | 9.590 | 14 |
| 15 | 2.2325 | 0.4479 | 0.044 63 | 0.099 63 | 22.409 | 10.038 | 15 |
| 16 | 2.3553 | 0.4246 | 0.040 53 | 0.095 58 | 24.641 | 10.462 | 16 |
| 17 | 2.4848 | 0.4024 | 0.037 04 | 0.092 04 | 26.996 | 10.865 | 17 |
| 18 | 2.6215 | 0.3815 | 0.033 92 | 0.088 92 | 29.431 | 11.246 | 18 |
| 19 | 2.7656 | 0.3616 | 0.031 15 | 0.086 15 | 32.103 | 11.608 | 19 |
| 20 | 2.9178 | 0.3427 | 0.028 58 | 0.083 68 | 34.868 | 11.950 | 20 |
| 21 | 3.0782 | 0.3249 | 0.026 46 | 0.081 46 | 37.726 | 12.275 | 21 |
| 22 | 3.2475 | 0.3079 | 0.024 67 | 0.079 47 | 40.864 | 12.583 | 22 |
| 23 | 3.4262 | 0.2919 | 0.022 67 | 0.077 67 | 44.112 | 12.875 | 23 |
| 24 | 3.6146 | 0.2767 | 0.021 04 | 0.076 04 | 47.538 | 13.152 | 24 |
| 25 | 3.8134 | 0.2627 | 0.019 55 | 0.074 55 | 51.153 | 13.414 | 25 |
| 26 | 4.0231 | 0.2486 | 0.018 19 | 0.073 19 | 54.966 | 13.662 | 26 |
| 27 | 4.2444 | 0.2356 | 0.016 95 | 0.071 95 | 58.989 | 13.898 | 27 |
| 28 | 4.4778 | 0.2233 | 0.015 81 | 0.070 81 | 63.234 | 14.121 | 28 |
| 29 | 4.7241 | 0.2117 | 0.014 77 | 0.069 77 | 67.711 | 14.333 | 29 |
| 30 | 4.9840 | 0.2006 | 0.013 81 | 0.068 81 | 72.435 | 14.534 | 30 |
| 31 | 5.2581 | 0.1902 | 0.012 92 | 0.067 92 | 77.419 | 14.724 | 31 |
| 32 | 5.5473 | 0.1803 | 0.012 10 | 0.067 10 | 82.677 | 14.904 | 32 |
| 33 | 5.8524 | 0.1709 | 0.011 33 | 0.066 33 | 88.225 | 15.075 | 33 |
| 34 | 6.1742 | 0.1620 | 0.010 63 | 0.065 63 | 94.077 | 15.237 | 34 |
| 35 | 6.5138 | 0.1535 | 0.009 97 | 0.064 97 | 100.251 | 15.391 | 35 |
| 40 | 8.5153 | 0.1175 | 0.007 32 | 0.062 32 | 136.606 | 16.046 | 40 |
| 45 | 11.1266 | 0.0899 | 0.005 43 | 0.060 43 | 184.119 | 16.548 | 45 |
| 50 | 14.5420 | 0.0688 | 0.004 06 | 0.059 06 | 246.217 | 16.932 | 50 |
| 55 | 19.0058 | 0.0526 | 0.003 05 | 0.058 05 | 327.377 | 17.225 | 55 |
| 60 | 24.8398 | 0.0403 | 0.002 31 | 0.057 31 | 433.450 | 17.450 | 60 |
| 65 | 32.4646 | 0.0308 | 0.001 75 | 0.056 75 | 572.083 | 17.622 | 65 |
| 70 | 42.4299 | 0.0236 | 0.001 33 | 0.056 33 | 753.271 | 17.753 | 70 |
| 75 | 55.4542 | 0.0180 | 0.001 01 | 0.056 01 | 990.076 | 17.854 | 75 |
| 80 | 72.4764 | 0.0138 | 0.000 77 | 0.055 77 | 1299.571 | 17.931 | 80 |
| 85 | 94.7238 | 0.0106 | 0.000 59 | 0.055 59 | 1704.069 | 17.990 | 85 |
| 90 | 123.8002 | 0.0081 | 0.000 45 | 0.055 45 | 2232.731 | 18.035 | 90 |
| 95 | 161.8019 | 0.0062 | 0.000 34 | 0.055 34 | 2923.671 | 18.069 | 95 |
| 100 | 211.4686 | 0.0047 | 0.000 26 | 0.055 26 | 3826.702 | 18.096 | 100 |

TABLE D-11

6% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|-----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|-----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.0600 | 0.9434 | 1.000 00 | 1.060 00 | 1.000 | 0.943 | 1 |
| 2 | 1.1236 | 0.8900 | 0.485 44 | 0.545 44 | 2.060 | 1.833 | 2 |
| 3 | 1.1910 | 0.8396 | 0.314 11 | 0.374 11 | 3.184 | 2.673 | 3 |
| 4 | 1.2625 | 0.7921 | 0.228 59 | 0.288 59 | 4.375 | 3.465 | 4 |
| 5 | 1.3382 | 0.7473 | 0.177 40 | 0.237 40 | 5.637 | 4.212 | 5 |
| 6 | 1.4185 | 0.7050 | 0.143 36 | 0.203 36 | 6.975 | 4.917 | 6 |
| 7 | 1.5036 | 0.6651 | 0.119 14 | 0.179 14 | 8.394 | 5.582 | 7 |
| 8 | 1.5938 | 0.6274 | 0.101 04 | 0.161 04 | 9.897 | 6.210 | 8 |
| 9 | 1.6895 | 0.5919 | 0.087 02 | 0.147 02 | 11.491 | 6.802 | 9 |
| 10 | 1.7908 | 0.5584 | 0.075 87 | 0.135 87 | 13.181 | 7.360 | 10 |
| 11 | 1.8983 | 0.5268 | 0.066 79 | 0.126 79 | 14.972 | 7.887 | 11 |
| 12 | 2.0122 | 0.4970 | 0.059 28 | 0.119 28 | 16.870 | 8.384 | 12 |
| 13 | 2.1329 | 0.4688 | 0.052 96 | 0.112 96 | 18.882 | 8.853 | 13 |
| 14 | 2.2609 | 0.4423 | 0.047 58 | 0.107 58 | 21.015 | 9.295 | 14 |
| 15 | 2.3966 | 0.4173 | 0.042 96 | 0.102 96 | 23.276 | 9.712 | 15 |
| 16 | 2.5404 | 0.3936 | 0.038 95 | 0.098 95 | 25.673 | 10.106 | 16 |
| 17 | 2.6928 | 0.3714 | 0.035 44 | 0.095 44 | 28.213 | 10.477 | 17 |
| 18 | 2.8543 | 0.3503 | 0.032 36 | 0.092 36 | 30.906 | 10.828 | 18 |
| 19 | 3.0256 | 0.3305 | 0.029 62 | 0.089 62 | 33.760 | 11.158 | 19 |
| 20 | 3.2071 | 0.3118 | 0.027 18 | 0.087 18 | 36.786 | 11.470 | 20 |
| 21 | 3.3996 | 0.2942 | 0.025 00 | 0.085 00 | 39.993 | 11.764 | 21 |
| 22 | 3.6035 | 0.2775 | 0.023 05 | 0.083 05 | 43.392 | 12.042 | 22 |
| 23 | 3.8197 | 0.2618 | 0.021 28 | 0.081 28 | 46.996 | 12.303 | 23 |
| 24 | 4.0469 | 0.2470 | 0.019 68 | 0.079 68 | 50.815 | 12.550 | 24 |
| 25 | 4.2919 | 0.2330 | 0.018 23 | 0.078 23 | 54.865 | 12.783 | 25 |
| 26 | 4.5494 | 0.2198 | 0.016 90 | 0.076 90 | 59.156 | 13.003 | 26 |
| 27 | 4.8223 | 0.2074 | 0.015 70 | 0.075 70 | 63.706 | 13.211 | 27 |
| 28 | 5.1117 | 0.1956 | 0.014 59 | 0.074 59 | 68.528 | 13.406 | 28 |
| 29 | 5.4184 | 0.1846 | 0.013 58 | 0.073 58 | 73.640 | 13.591 | 29 |
| 30 | 5.7435 | 0.1741 | 0.012 65 | 0.072 65 | 79.058 | 13.765 | 30 |
| 31 | 6.0881 | 0.1643 | 0.011 79 | 0.071 79 | 84.802 | 13.929 | 31 |
| 32 | 6.4534 | 0.1550 | 0.011 00 | 0.071 00 | 90.890 | 14.084 | 32 |
| 33 | 6.8406 | 0.1462 | 0.010 27 | 0.070 27 | 97.343 | 14.230 | 33 |
| 34 | 7.2510 | 0.1379 | 0.009 60 | 0.069 60 | 104.184 | 14.368 | 34 |
| 35 | 7.6861 | 0.1301 | 0.008 97 | 0.068 97 | 111.435 | 14.498 | 35 |
| 40 | 10.2857 | 0.0972 | 0.006 46 | 0.066 46 | 154.762 | 15.046 | 40 |
| 45 | 13.7646 | 0.0727 | 0.004 70 | 0.064 70 | 212.744 | 15.456 | 45 |
| 50 | 18.4302 | 0.0543 | 0.003 44 | 0.063 44 | 290.336 | 15.762 | 50 |
| 55 | 24.6503 | 0.0406 | 0.002 54 | 0.062 54 | 394.172 | 15.991 | 55 |
| 60 | 32.9877 | 0.0303 | 0.001 88 | 0.061 88 | 533.128 | 16.161 | 60 |
| 65 | 44.1450 | 0.0227 | 0.001 39 | 0.061 39 | 719.083 | 16.289 | 65 |
| 70 | 59.0759 | 0.0169 | 0.001 03 | 0.061 03 | 967.932 | 16.385 | 70 |
| 75 | 79.0569 | 0.0126 | 0.000 77 | 0.060 77 | 1300.949 | 16.456 | 75 |
| 80 | 105.7960 | 0.0095 | 0.000 57 | 0.060 57 | 1746.600 | 16.509 | 80 |
| 85 | 141.5789 | 0.0071 | 0.000 43 | 0.060 43 | 2342.982 | 16.549 | 85 |
| 90 | 189.4645 | 0.0053 | 0.000 32 | 0.060 32 | 3141.075 | 16.579 | 90 |
| 95 | 253.5463 | 0.0039 | 0.000 24 | 0.060 24 | 4209.104 | 16.601 | 95 |
| 100 | 339.3021 | 0.0029 | 0.000 18 | 0.060 18 | 5638.368 | 16.618 | 100 |

TABLE D-12

7% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|-----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|-----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.0700 | 0.9346 | 1.000 00 | 1.070 00 | 1.000 | 0.935 | 1 |
| 2 | 1.1449 | 0.8734 | 0.483 09 | 0.553 09 | 2.070 | 1.808 | 2 |
| 3 | 1.2250 | 0.8163 | 0.311 05 | 0.381 05 | 3.215 | 2.624 | 3 |
| 4 | 1.3108 | 0.7629 | 0.225 23 | 0.295 23 | 4.440 | 3.387 | 4 |
| 5 | 1.4026 | 0.7130 | 0.173 89 | 0.243 89 | 5.751 | 4.100 | 5 |
| 6 | 1.5007 | 0.6663 | 0.139 80 | 0.209 80 | 7.153 | 4.767 | 6 |
| 7 | 1.6058 | 0.6227 | 0.115 55 | 0.185 55 | 8.654 | 5.389 | 7 |
| 8 | 1.7182 | 0.5820 | 0.097 47 | 0.167 47 | 10.260 | 5.971 | 8 |
| 9 | 1.8385 | 0.5439 | 0.083 49 | 0.153 49 | 11.978 | 6.515 | 9 |
| 10 | 1.9672 | 0.5083 | 0.072 38 | 0.142 38 | 13.816 | 7.024 | 10 |
| 11 | 2.1049 | 0.4751 | 0.063 36 | 0.133 36 | 15.784 | 7.499 | 11 |
| 12 | 2.2522 | 0.4440 | 0.055 90 | 0.125 90 | 17.888 | 7.943 | 12 |
| 13 | 2.4098 | 0.4150 | 0.049 65 | 0.119 65 | 20.141 | 8.358 | 13 |
| 14 | 2.5785 | 0.3878 | 0.044 34 | 0.114 34 | 22.550 | 8.745 | 14 |
| 15 | 2.7590 | 0.3624 | 0.039 79 | 0.109 79 | 25.129 | 9.108 | 15 |
| 16 | 2.9522 | 0.3387 | 0.035 86 | 0.105 86 | 27.888 | 9.447 | 16 |
| 17 | 3.1588 | 0.3166 | 0.032 43 | 0.102 43 | 30.840 | 9.763 | 17 |
| 18 | 3.3799 | 0.2959 | 0.029 41 | 0.099 41 | 33.999 | 10.059 | 18 |
| 19 | 3.6165 | 0.2765 | 0.026 75 | 0.096 75 | 37.379 | 10.336 | 19 |
| 20 | 3.8697 | 0.2584 | 0.024 39 | 0.094 39 | 40.995 | 10.594 | 20 |
| 21 | 4.1406 | 0.2415 | 0.022 29 | 0.092 29 | 44.865 | 10.836 | 21 |
| 22 | 4.4304 | 0.2257 | 0.020 41 | 0.090 41 | 49.006 | 11.061 | 22 |
| 23 | 4.7405 | 0.2109 | 0.018 71 | 0.088 71 | 53.436 | 11.272 | 23 |
| 24 | 5.0724 | 0.1971 | 0.017 19 | 0.087 19 | 58.177 | 11.469 | 24 |
| 25 | 5.4274 | 0.1842 | 0.015 81 | 0.085 81 | 63.249 | 11.654 | 25 |
| 26 | 5.8074 | 0.1722 | 0.014 56 | 0.084 56 | 68.676 | 11.826 | 26 |
| 27 | 6.2139 | 0.1609 | 0.013 43 | 0.083 43 | 74.484 | 11.987 | 27 |
| 28 | 6.6488 | 0.1504 | 0.012 39 | 0.082 39 | 80.698 | 12.137 | 28 |
| 29 | 7.1143 | 0.1406 | 0.011 45 | 0.081 45 | 87.347 | 12.278 | 29 |
| 30 | 7.6123 | 0.1314 | 0.010 59 | 0.080 59 | 94.461 | 12.409 | 30 |
| 31 | 8.1451 | 0.1228 | 0.009 80 | 0.079 80 | 102.073 | 12.532 | 31 |
| 32 | 8.7153 | 0.1147 | 0.009 07 | 0.079 07 | 110.218 | 12.647 | 32 |
| 33 | 9.3253 | 0.1072 | 0.008 41 | 0.078 41 | 118.933 | 12.754 | 33 |
| 34 | 9.9781 | 0.1002 | 0.007 80 | 0.077 80 | 128.259 | 12.854 | 34 |
| 35 | 10.6766 | 0.0937 | 0.007 23 | 0.077 23 | 138.237 | 12.948 | 35 |
| 40 | 14.9745 | 0.0668 | 0.005 01 | 0.075 01 | 199.635 | 13.332 | 40 |
| 45 | 21.0025 | 0.0476 | 0.003 50 | 0.073 50 | 285.749 | 13.606 | 45 |
| 50 | 29.4570 | 0.0339 | 0.002 46 | 0.072 46 | 406.529 | 13.801 | 50 |
| 55 | 41.3150 | 0.0242 | 0.001 74 | 0.071 74 | 575.929 | 13.940 | 55 |
| 60 | 57.9464 | 0.0173 | 0.001 23 | 0.071 23 | 813.520 | 14.039 | 60 |
| 65 | 81.2729 | 0.0123 | 0.000 87 | 0.070 87 | 1146.755 | 14.110 | 65 |
| 70 | 113.9894 | 0.0088 | 0.000 62 | 0.070 62 | 1614.134 | 14.160 | 70 |
| 75 | 159.8760 | 0.0063 | 0.000 44 | 0.070 44 | 2269.657 | 14.196 | 75 |
| 80 | 224.2344 | 0.0045 | 0.000 31 | 0.070 31 | 3189.063 | 14.222 | 80 |
| 85 | 314.5003 | 0.0032 | 0.000 22 | 0.070 22 | 4478.576 | 14.240 | 85 |
| 90 | 441.1030 | 0.0023 | 0.000 16 | 0.070 16 | 6287.185 | 14.253 | 90 |
| 95 | 618.6697 | 0.0016 | 0.000 11 | 0.070 11 | 8823.854 | 14.263 | 95 |
| 100 | 867.7163 | 0.0012 | 0.000 08 | 0.070 08 | 12381.662 | 14.269 | 100 |

TABLE D-13

8% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.0800 | 0.9259 | 1.000 00 | 1.080 00 | 1.000 | 0.926 | 1 |
| 2 | 1.1664 | 0.8573 | 0.480 77 | 0.560 77 | 2.080 | 1.783 | 2 |
| 3 | 1.2597 | 0.7938 | 0.308 03 | 0.388 03 | 3.246 | 2.577 | 3 |
| 4 | 1.3605 | 0.7350 | 0.221 92 | 0.301 92 | 4.506 | 3.312 | 4 |
| 5 | 1.4693 | 0.6806 | 0.170 46 | 0.250 46 | 5.867 | 3.993 | 5 |
| 6 | 1.5869 | 0.6302 | 0.136 32 | 0.216 32 | 7.336 | 4.623 | 6 |
| 7 | 1.7138 | 0.5835 | 0.112 07 | 0.192 07 | 8.923 | 5.206 | 7 |
| 8 | 1.8509 | 0.5403 | 0.094 01 | 0.174 01 | 10.637 | 5.747 | 8 |
| 9 | 1.9990 | 0.5002 | 0.080 08 | 0.160 08 | 12.488 | 6.247 | 9 |
| 10 | 2.1589 | 0.4632 | 0.069 03 | 0.149 03 | 14.487 | 6.710 | 10 |
| 11 | 2.3316 | 0.4289 | 0.060 08 | 0.140 08 | 16.645 | 7.139 | 11 |
| 12 | 2.5182 | 0.3971 | 0.052 70 | 0.132 70 | 18.977 | 7.536 | 12 |
| 13 | 2.7196 | 0.3677 | 0.046 52 | 0.126 52 | 21.495 | 7.904 | 13 |
| 14 | 2.9372 | 0.3405 | 0.041 30 | 0.121 30 | 24.215 | 8.244 | 14 |
| 15 | 3.1722 | 0.3152 | 0.036 83 | 0.116 83 | 27.152 | 8.559 | 15 |
| 16 | 3.4259 | 0.2919 | 0.032 98 | 0.112 98 | 30.324 | 8.851 | 16 |
| 17 | 3.7000 | 0.2703 | 0.029 63 | 0.109 63 | 33.750 | 9.122 | 17 |
| 18 | 3.9960 | 0.2502 | 0.026 70 | 0.106 70 | 37.450 | 9.372 | 18 |
| 19 | 4.3157 | 0.2317 | 0.024 13 | 0.104 13 | 41.446 | 9.604 | 19 |
| 20 | 4.6610 | 0.2145 | 0.021 85 | 0.101 85 | 45.762 | 9.818 | 20 |
| 21 | 5.0338 | 0.1987 | 0.019 83 | 0.099 83 | 50.423 | 10.017 | 21 |
| 22 | 5.4365 | 0.1839 | 0.018 03 | 0.098 03 | 55.457 | 10.201 | 22 |
| 23 | 5.8715 | 0.1703 | 0.016 42 | 0.096 42 | 60.893 | 10.371 | 23 |
| 24 | 6.3412 | 0.1577 | 0.014 98 | 0.094 98 | 66.765 | 10.529 | 24 |
| 25 | 6.8485 | 0.1460 | 0.013 68 | 0.093 68 | 73.106 | 10.675 | 25 |
| 26 | 7.3964 | 0.1352 | 0.012 51 | 0.092 51 | 79.954 | 10.810 | 26 |
| 27 | 7.9881 | 0.1252 | 0.011 45 | 0.091 45 | 87.351 | 10.935 | 27 |
| 28 | 8.6271 | 0.1159 | 0.010 49 | 0.090 49 | 95.339 | 11.051 | 28 |
| 29 | 9.3173 | 0.1073 | 0.009 62 | 0.089 62 | 103.966 | 11.158 | 29 |
| 30 | 10.0627 | 0.0994 | 0.008 83 | 0.088 83 | 113.283 | 11.258 | 30 |
| 31 | 10.8677 | 0.0920 | 0.008 11 | 0.088 11 | 123.346 | 11.350 | 31 |
| 32 | 11.7371 | 0.0852 | 0.007 45 | 0.087 45 | 134.214 | 11.435 | 32 |
| 33 | 12.6760 | 0.0789 | 0.006 85 | 0.086 85 | 145.951 | 11.514 | 33 |
| 34 | 13.6901 | 0.0730 | 0.006 30 | 0.086 30 | 158.627 | 11.587 | 34 |
| 35 | 14.7853 | 0.0676 | 0.005 80 | 0.085 80 | 172.317 | 11.655 | 35 |
| 40 | 21.7245 | 0.0460 | 0.003 86 | 0.083 86 | 259.057 | 11.925 | 40 |
| 45 | 31.9204 | 0.0313 | 0.002 59 | 0.082 59 | 386.506 | 12.108 | 45 |
| 50 | 46.9016 | 0.0213 | 0.001 74 | 0.081 74 | 573.770 | 12.233 | 50 |
| 55 | 68.9139 | 0.0145 | 0.001 18 | 0.081 18 | 848.923 | 12.319 | 55 |
| 60 | 101.2571 | 0.0099 | 0.000 80 | 0.080 80 | 1253.213 | 12.377 | 60 |
| 65 | 148.7798 | 0.0067 | 0.000 54 | 0.080 54 | 1847.248 | 12.416 | 65 |
| 70 | 218.6064 | 0.0046 | 0.000 37 | 0.080 37 | 2720.080 | 12.443 | 70 |
| 75 | 321.2045 | 0.0031 | 0.000 25 | 0.080 25 | 4002.557 | 12.461 | 75 |
| 80 | 471.9548 | 0.0021 | 0.000 17 | 0.080 17 | 5886.935 | 12.474 | 80 |
| 85 | 693.4565 | 0.0014 | 0.000 12 | 0.080 12 | 8655.706 | 12.482 | 85 |
| 90 | 1018.9151 | 0.0010 | 0.000 08 | 0.080 08 | 12723.939 | 12.488 | 90 |
| 95 | 1497.1205 | 0.0007 | 0.000 05 | 0.080 05 | 18701.507 | 12.492 | 95 |

TABLE D-14

9% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|-----|---------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|-----|
| | Compound Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.0900 | 0.9174 | 1.000 00 | 1.090 00 | 1.000 | 0.917 | 1 |
| 2 | 1.1881 | 0.8417 | 0.478 47 | 0.568 47 | 2.090 | 1.759 | 2 |
| 3 | 1.2950 | 0.7722 | 0.305 05 | 0.395 05 | 3.278 | 2.531 | 3 |
| 4 | 1.4116 | 0.7084 | 0.218 67 | 0.308 67 | 4.573 | 3.240 | 4 |
| 5 | 1.5386 | 0.6499 | 0.167 09 | 0.257 09 | 5.985 | 3.890 | 5 |
| 6 | 1.5771 | 0.5963 | 0.132 92 | 0.222 92 | 7.523 | 4.486 | 6 |
| 7 | 1.6280 | 0.5470 | 0.108 69 | 0.193 69 | 9.200 | 5.033 | 7 |
| 8 | 1.9926 | 0.5019 | 0.090 67 | 0.180 67 | 11.028 | 5.535 | 8 |
| 9 | 2.1719 | 0.4604 | 0.076 80 | 0.166 80 | 13.021 | 5.995 | 9 |
| 10 | 2.3674 | 0.4224 | 0.065 82 | 0.155 82 | 15.193 | 6.418 | 10 |
| 11 | 2.5804 | 0.3875 | 0.056 95 | 0.146 95 | 17.560 | 6.805 | 11 |
| 12 | 2.8127 | 0.3555 | 0.049 65 | 0.139 65 | 20.141 | 7.161 | 12 |
| 13 | 3.0658 | 0.3262 | 0.043 57 | 0.133 57 | 22.953 | 7.497 | 13 |
| 14 | 3.3417 | 0.2992 | 0.038 43 | 0.128 43 | 26.019 | 7.786 | 14 |
| 15 | 3.6425 | 0.2745 | 0.034 05 | 0.124 05 | 29.361 | 8.061 | 15 |
| 16 | 3.9703 | 0.2519 | 0.030 30 | 0.120 30 | 33.003 | 8.313 | 16 |
| 17 | 4.3276 | 0.2311 | 0.027 05 | 0.117 05 | 36.974 | 8.544 | 17 |
| 18 | 4.7171 | 0.2120 | 0.024 21 | 0.114 21 | 41.301 | 8.756 | 18 |
| 19 | 5.1417 | 0.1945 | 0.021 73 | 0.111 73 | 46.018 | 8.950 | 19 |
| 20 | 5.6044 | 0.1784 | 0.019 55 | 0.109 55 | 51.160 | 9.129 | 20 |
| 21 | 6.1088 | 0.1637 | 0.017 62 | 0.107 62 | 56.765 | 9.292 | 21 |
| 22 | 6.6586 | 0.1502 | 0.015 90 | 0.105 90 | 62.873 | 9.442 | 22 |
| 23 | 7.2579 | 0.1378 | 0.014 38 | 0.104 38 | 69.532 | 9.580 | 23 |
| 24 | 7.9111 | 0.1264 | 0.013 02 | 0.103 02 | 76.790 | 9.707 | 24 |
| 25 | 8.6231 | 0.1160 | 0.011 81 | 0.101 81 | 84.701 | 9.823 | 25 |
| 26 | 9.3992 | 0.1064 | 0.010 72 | 0.100 72 | 93.324 | 9.929 | 26 |
| 27 | 10.2451 | 0.0976 | 0.009 73 | 0.099 73 | 102.723 | 10.027 | 27 |
| 28 | 11.1671 | 0.0895 | 0.008 85 | 0.098 85 | 112.968 | 10.116 | 28 |
| 29 | 12.1722 | 0.0822 | 0.008 06 | 0.098 06 | 124.135 | 10.198 | 29 |
| 30 | 13.2677 | 0.0753 | 0.007 34 | 0.097.34 | 136.308 | 10.274 | 30 |
| 31 | 14.4618 | 0.0691 | 0.006 69 | 0.096 69 | 149.575 | 10.343 | 31 |
| 32 | 15.7633 | 0.0634 | 0.006 10 | 0.096 10 | 164.037 | 10.405 | 32 |
| 33 | 17.1820 | 0.0582 | 0.005 56 | 0.095 56 | 179.800 | 10.464 | 33 |
| 34 | 18.7284 | 0.0534 | 0.005 08 | 0.095 08 | 196.982 | 10.518 | 34 |
| 35 | 20.4140 | 0.0490 | 0.004 64 | 0.094 64 | 215.711 | 10.567 | 35 |
| 40 | 31.4094 | 0.0318 | 0.002 96 | 0.092 96 | 337.882 | 10.757 | 40 |
| 45 | 48.3273 | 0.0207 | 0.001 90 | 0.091 90 | 525.859 | 10.881 | 45 |
| 50 | 74.3575 | 0.0134 | 0.001 23 | 0.091 23 | 815.084 | 10.962 | 50 |
| 55 | 114.4083 | 0.0087 | 0.000 79 | 0.090 79 | 1,260.092 | 11.014 | 55 |
| 60 | 176.0313 | 0.0057 | 0.000 51 | 0.090 51 | 1,944.792 | 11.048 | 60 |
| 65 | 270.8460 | 0.0037 | 0.000 33 | 0.090 33 | 2,996.288 | 11.070 | 65 |
| 70 | 416.7301 | 0.0024 | 0.000 22 | 0.090 22 | 4,619.223 | 11.084 | 70 |
| 75 | 641.1909 | 0.0016 | 0.000 14 | 0.090 14 | 7,113.232 | 11.094 | 75 |
| 80 | 986.5517 | 0.0010 | 0.000 09 | 0.090 09 | 10,950.574 | 11.100 | 80 |
| 85 | 1,517.9320 | 0.0007 | 0.000 06 | 0.090 06 | 16,254.800 | 11.104 | 85 |
| 90 | 2,335.5266 | 0.0004 | 0.000 04 | 0.090 04 | 25,939.184 | 11.106 | 90 |
| 95 | 3,593.4971 | 0.0003 | 0.000 03 | 0.090 03 | 39,916.675 | 11.108 | 95 |
| 100 | 5,529.0408 | 0.0002 | 0.000 02 | 0.090 02 | 61,422.675 | 11.109 | 100 |

TABLE D-15

10% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|-----|---------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|-----|
| | Compound Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.1000 | 0.9091 | 1.000 00 | 1.100 00 | 1.000 | 0.909 | 1 |
| 2 | 1.2100 | 0.8264 | 0.476 19 | 0.576 19 | 2.100 | 1.736 | 2 |
| 3 | 1.3316 | 0.7513 | 0.302 11 | 0.402 11 | 3.310 | 2.487 | 3 |
| 4 | 1.4647 | 0.6830 | 0.215 47 | 0.315 47 | 4.641 | 3.170 | 4 |
| 5 | 1.6105 | 0.6209 | 0.163 80 | 0.263 80 | 6.105 | 3.791 | 5 |
| 6 | 1.7716 | 0.5645 | 0.129 61 | 0.229 61 | 7.716 | 4.355 | 6 |
| 7 | 1.9487 | 0.5132 | 0.105 41 | 0.205 41 | 9.487 | 4.868 | 7 |
| 8 | 2.1436 | 0.4665 | 0.087 44 | 0.187 44 | 11.436 | 5.335 | 8 |
| 9 | 2.3579 | 0.4241 | 0.073 64 | 0.173 64 | 13.579 | 5.759 | 9 |
| 10 | 2.5937 | 0.3855 | 0.062 75 | 0.162 75 | 15.937 | 6.144 | 10 |
| 11 | 2.8531 | 0.3505 | 0.053 96 | 0.153 96 | 18.531 | 6.495 | 11 |
| 12 | 3.1384 | 0.3186 | 0.046 76 | 0.146 76 | 21.384 | 6.814 | 12 |
| 13 | 3.4523 | 0.2897 | 0.040 78 | 0.140 78 | 24.523 | 7.103 | 13 |
| 14 | 3.7975 | 0.2633 | 0.035 75 | 0.135 75 | 27.975 | 7.367 | 14 |
| 15 | 4.1772 | 0.2394 | 0.031 47 | 0.131 47 | 31.772 | 7.606 | 15 |
| 16 | 4.5950 | 0.2176 | 0.027 82 | 0.127 82 | 35.950 | 7.824 | 16 |
| 17 | 5.0545 | 0.1978 | 0.024 66 | 0.124 66 | 40.545 | 8.022 | 17 |
| 18 | 5.5599 | 0.1799 | 0.021 93 | 0.121 93 | 45.599 | 8.201 | 18 |
| 19 | 6.1159 | 0.1635 | 0.019 55 | 0.119 55 | 51.159 | 8.365 | 19 |
| 20 | 6.7275 | 0.1486 | 0.017 46 | 0.117 46 | 57.275 | 8.514 | 20 |
| 21 | 7.4002 | 0.1351 | 0.015 62 | 0.115 62 | 64.002 | 8.649 | 21 |
| 22 | 8.1403 | 0.1228 | 0.014 01 | 0.114 01 | 71.405 | 8.772 | 22 |
| 23 | 8.9543 | 0.1117 | 0.012 57 | 0.112 57 | 79.543 | 8.883 | 23 |
| 24 | 9.8497 | 0.1015 | 0.011 30 | 0.111 30 | 88.497 | 8.985 | 24 |
| 25 | 10.8347 | 0.0923 | 0.010 17 | 0.110 17 | 98.347 | 9.077 | 25 |
| 26 | 11.9182 | 0.0839 | 0.009 16 | 0.109 16 | 109.182 | 9.161 | 26 |
| 27 | 13.1100 | 0.0763 | 0.008 26 | 0.108 26 | 121.100 | 9.237 | 27 |
| 28 | 14.4210 | 0.0693 | 0.007 45 | 0.107 45 | 134.210 | 9.307 | 28 |
| 29 | 15.8631 | 0.0630 | 0.006 73 | 0.106 73 | 148.631 | 9.370 | 29 |
| 30 | 17.4494 | 0.0573 | 0.006 08 | 0.106 08 | 164.494 | 9.427 | 30 |
| 31 | 19.1943 | 0.0521 | 0.005 50 | 0.105 50 | 181.943 | 9.479 | 31 |
| 32 | 21.1138 | 0.0474 | 0.004 97 | 0.104 97 | 201.138 | 9.526 | 32 |
| 33 | 23.2252 | 0.0431 | 0.004 50 | 0.104 50 | 222.252 | 9.569 | 33 |
| 34 | 25.5477 | 0.0391 | 0.004 07 | 0.104 07 | 245.477 | 9.609 | 34 |
| 35 | 28.1024 | 0.0356 | 0.003 69 | 0.103 69 | 271.024 | 9.644 | 35 |
| 40 | 45.2593 | 0.0221 | 0.002 26 | 0.102 26 | 442.593 | 9.779 | 40 |
| 45 | 72.8905 | 0.0137 | 0.001 39 | 0.101 39 | 718.905 | 9.863 | 45 |
| 50 | 117.3909 | 0.0085 | 0.000 86 | 0.100 86 | 1,163.909 | 9.915 | 50 |
| 55 | 189.0591 | 0.0053 | 0.000 53 | 0.100 53 | 1,880.591 | 9.947 | 55 |
| 60 | 304.4816 | 0.0033 | 0.000 33 | 0.100 33 | 3,034.816 | 9.967 | 60 |
| 65 | 490.3707 | 0.0020 | 0.000 20 | 0.100 20 | 4,893.707 | 9.980 | 65 |
| 70 | 789.7470 | 0.0013 | 0.000 13 | 0.100 13 | 7,887.470 | 9.987 | 70 |
| 75 | 1,271.8952 | 0.0008 | 0.000 08 | 0.100 08 | 12,708.954 | 9.992 | 75 |
| 80 | 2,048.4002 | 0.0005 | 0.000 05 | 0.100 05 | 20,474.002 | 9.995 | 80 |
| 85 | 3,298.9690 | 0.0003 | 0.000 03 | 0.100 03 | 32,979.690 | 9.997 | 85 |
| 90 | 5,313.0226 | 0.0002 | 0.000 02 | 0.100 02 | 53,120.226 | 9.998 | 90 |
| 95 | 8,556.6760 | 0.0001 | 0.000 01 | 0.100 01 | 85,556.760 | 9.999 | 95 |
| 100 | 13,780.6123 | 0.0001 | 0.000 01 | 0.100 01 | 137,796.123 | 9.999 | 100 |

TABLE D-16

11% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.1100 | 0.9009 | 1.000 00 | 1.110 00 | 1.000 | 0.901 | 1 |
| 2 | 1.2321 | 0.8116 | 0.473 93 | 0.583 93 | 2.110 | 1.713 | 2 |
| 3 | 1.3676 | 0.7312 | 0.299 21 | 0.409 21 | 3.342 | 2.444 | 3 |
| 4 | 1.5181 | 0.6587 | 0.212 33 | 0.322 33 | 4.710 | 3.102 | 4 |
| 5 | 1.6851 | 0.5935 | 0.160 57 | 0.270 57 | 6.228 | 3.696 | 5 |
| 6 | 1.8704 | 0.5346 | 0.126 38 | 0.236 38 | 7.913 | 4.231 | 6 |
| 7 | 2.0762 | 0.4817 | 0.102 22 | 0.212 22 | 9.783 | 4.712 | 7 |
| 8 | 2.3045 | 0.4339 | 0.084 32 | 0.194 32 | 11.859 | 5.146 | 8 |
| 9 | 2.5581 | 0.3909 | 0.070 60 | 0.180 60 | 14.164 | 5.537 | 9 |
| 10 | 2.8394 | 0.3522 | 0.059 80 | 0.169 80 | 16.722 | 5.889 | 10 |
| 11 | 3.1518 | 0.3173 | 0.051 12 | 0.161 12 | 19.561 | 6.207 | 11 |
| 12 | 3.4984 | 0.2858 | 0.044 03 | 0.154 03 | 22.713 | 6.492 | 12 |
| 13 | 3.8833 | 0.2575 | 0.038 15 | 0.148 15 | 26.212 | 6.750 | 13 |
| 14 | 4.3104 | 0.2320 | 0.033 23 | 0.143 23 | 30.095 | 6.982 | 14 |
| 15 | 4.7846 | 0.2090 | 0.029 07 | 0.139 07 | 34.405 | 7.191 | 15 |
| 16 | 5.3109 | 0.1883 | 0.025 52 | 0.135 52 | 39.190 | 7.379 | 16 |
| 17 | 5.8951 | 0.1696 | 0.022 47 | 0.132 47 | 44.501 | 7.549 | 17 |
| 18 | 6.5436 | 0.1528 | 0.019 84 | 0.129 84 | 50.396 | 7.702 | 18 |
| 19 | 7.2633 | 0.1377 | 0.017 56 | 0.127 56 | 56.939 | 7.839 | 19 |
| 20 | 8.0623 | 0.1240 | 0.015 58 | 0.125 58 | 64.203 | 7.963 | 20 |
| 21 | 8.9492 | 0.1117 | 0.013 84 | 0.123 84 | 72.265 | 8.075 | 21 |
| 22 | 9.9336 | 0.1007 | 0.012 31 | 0.122 31 | 81.214 | 8.176 | 22 |
| 23 | 11.0263 | 0.0907 | 0.010 97 | 0.120 97 | 91.148 | 8.266 | 23 |
| 24 | 12.2392 | 0.0817 | 0.009 79 | 0.119 79 | 102.174 | 8.348 | 24 |
| 25 | 13.5855 | 0.0736 | 0.008 74 | 0.118 74 | 114.413 | 8.422 | 25 |
| 26 | 15.0799 | 0.0663 | 0.007 81 | 0.117 81 | 127.999 | 8.488 | 26 |
| 27 | 16.7386 | 0.0597 | 0.006 99 | 0.116 99 | 143.079 | 8.548 | 27 |
| 28 | 18.5799 | 0.0538 | 0.006 26 | 0.116 26 | 159.817 | 8.602 | 28 |
| 29 | 20.6237 | 0.0485 | 0.005 61 | 0.115 61 | 178.397 | 8.650 | 29 |
| 30 | 22.8923 | 0.0437 | 0.005 02 | 0.115 02 | 199.021 | 8.694 | 30 |
| 31 | 25.4104 | 0.0394 | 0.004 51 | 0.114 51 | 221.913 | 8.733 | 31 |
| 32 | 28.2056 | 0.0355 | 0.004 04 | 0.114 04 | 247.324 | 8.769 | 32 |
| 33 | 31.3082 | 0.0319 | 0.003 63 | 0.113 63 | 275.529 | 8.801 | 33 |
| 34 | 34.7521 | 0.0288 | 0.003 26 | 0.113 26 | 306.837 | 8.829 | 34 |
| 35 | 38.5749 | 0.0259 | 0.002 93 | 0.112 93 | 341.590 | 8.855 | 35 |
| 40 | 65.0009 | 0.0154 | 0.001 72 | 0.111 72 | 581.826 | 8.951 | 40 |
| 45 | 109.5302 | 0.0091 | 0.001 01 | 0.111 01 | 986.639 | 9.008 | 45 |
| 50 | 184.5648 | 0.0054 | 0.000 60 | 0.110 60 | 1 688.771 | 9.042 | 50 |
| ∞ | | | | 0.110 00 | | 9.091 | ∞ |

TABLE D-17

12% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.1200 | 0.8929 | 1.000 00 | 1.120 00 | 1.000 | 0.893 | 1 |
| 2 | 1.2544 | 0.7972 | 0.471 70 | 0.591 70 | 2.120 | 1.690 | 2 |
| 3 | 1.4049 | 0.7118 | 0.296 35 | 0.416 35 | 3.374 | 2.402 | 3 |
| 4 | 1.5735 | 0.6355 | 0.209 23 | 0.329 23 | 4.779 | 3.037 | 4 |
| 5 | 1.7623 | 0.5674 | 0.157 41 | 0.277 41 | 6.353 | 3.605 | 5 |
| 6 | 1.9738 | 0.5066 | 0.123 23 | 0.243 23 | 8.115 | 4.111 | 6 |
| 7 | 2.2107 | 0.4523 | 0.099 12 | 0.219 12 | 10.089 | 4.564 | 7 |
| 8 | 2.4760 | 0.4039 | 0.081 30 | 0.201 30 | 12.300 | 4.968 | 8 |
| 9 | 2.7731 | 0.3606 | 0.067 68 | 0.187 68 | 14.776 | 5.328 | 9 |
| 10 | 3.1058 | 0.3220 | 0.056 98 | 0.176 98 | 17.549 | 5.650 | 10 |
| 11 | 3.4785 | 0.2875 | 0.048 42 | 0.168 42 | 20.655 | 5.938 | 11 |
| 12 | 3.8960 | 0.2567 | 0.041 44 | 0.161 44 | 24.133 | 6.194 | 12 |
| 13 | 4.3635 | 0.2292 | 0.035 68 | 0.155 68 | 28.029 | 6.424 | 13 |
| 14 | 4.8871 | 0.2046 | 0.030 87 | 0.150 87 | 32.393 | 6.628 | 14 |
| 15 | 5.4736 | 0.1827 | 0.026 82 | 0.146 82 | 37.280 | 6.811 | 15 |
| 16 | 6.1304 | 0.1631 | 0.023 39 | 0.143 39 | 42.753 | 6.974 | 16 |
| 17 | 6.8660 | 0.1456 | 0.020 46 | 0.140 46 | 48.884 | 7.120 | 17 |
| 18 | 7.6900 | 0.1300 | 0.017 94 | 0.137 94 | 55.750 | 7.250 | 18 |
| 19 | 8.6128 | 0.1161 | 0.015 76 | 0.135 76 | 63.440 | 7.366 | 19 |
| 20 | 9.6463 | 0.1037 | 0.013 88 | 0.133 88 | 72.052 | 7.469 | 20 |
| 21 | 10.8038 | 0.0926 | 0.012 24 | 0.132 24 | 81.699 | 7.562 | 21 |
| 22 | 12.1003 | 0.0826 | 0.010 81 | 0.130 81 | 92.503 | 7.645 | 22 |
| 23 | 13.5523 | 0.0738 | 0.009 56 | 0.129 56 | 104.603 | 7.718 | 23 |
| 24 | 15.1786 | 0.0659 | 0.008 46 | 0.128 46 | 118.155 | 7.784 | 24 |
| 25 | 17.0001 | 0.0588 | 0.007 50 | 0.127 50 | 133.334 | 7.843 | 25 |
| 26 | 19.0401 | 0.0525 | 0.006 65 | 0.126 65 | 150.334 | 7.896 | 26 |
| 27 | 21.3249 | 0.0469 | 0.005 90 | 0.125 90 | 169.374 | 7.943 | 27 |
| 28 | 23.8839 | 0.0419 | 0.005 24 | 0.125 24 | 190.699 | 7.984 | 28 |
| 29 | 26.7499 | 0.0374 | 0.004 66 | 0.124 66 | 214.583 | 8.022 | 29 |
| 30 | 29.9599 | 0.0334 | 0.004 14 | 0.124 14 | 241.333 | 8.055 | 30 |
| 31 | 33.5551 | 0.0298 | 0.003 69 | 0.123 69 | 271.292 | 8.085 | 31 |
| 32 | 37.5817 | 0.0266 | 0.003 28 | 0.123 28 | 304.847 | 8.112 | 32 |
| 33 | 42.0915 | 0.0238 | 0.002 92 | 0.122 92 | 342.429 | 8.135 | 33 |
| 34 | 47.1425 | 0.0212 | 0.002 60 | 0.122 60 | 384.520 | 8.157 | 34 |
| 35 | 52.7996 | 0.0189 | 0.002 32 | 0.122 32 | 431.663 | 8.176 | 35 |
| 40 | 93.0510 | 0.0107 | 0.001 30 | 0.121 30 | 767.091 | 8.244 | 40 |
| 45 | 163.9876 | 0.0061 | 0.000 74 | 0.120 74 | 1 358.230 | 8.283 | 45 |
| 50 | 289.0022 | 0.0035 | 0.000 42 | 0.120 42 | 2 400.018 | 8.305 | 50 |
| ∞ | | | | 0.120 00 | | 8.333 | ∞ |

TABLE D-18

13% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.1300 | 0.8850 | 1.000 00 | 1.130 00 | 1.000 | 0.885 | 1 |
| 2 | 1.2769 | 0.7831 | 0.469 48 | 0.599 48 | 2.130 | 1.668 | 2 |
| 3 | 1.4429 | 0.6931 | 0.293 52 | 0.423 52 | 3.407 | 2.361 | 3 |
| 4 | 1.6305 | 0.6133 | 0.206 19 | 0.336 19 | 4.850 | 2.974 | 4 |
| 5 | 1.8424 | 0.5428 | 0.154 31 | 0.284 31 | 6.480 | 3.517 | 5 |
| 6 | 2.0820 | 0.4803 | 0.120 15 | 0.250 15 | 8.323 | 3.998 | 6 |
| 7 | 2.3526 | 0.4251 | 0.096 11 | 0.226 11 | 10.405 | 4.423 | 7 |
| 8 | 2.6584 | 0.3762 | 0.078 39 | 0.208 39 | 12.757 | 4.799 | 8 |
| 9 | 3.0040 | 0.3329 | 0.064 87 | 0.194 87 | 15.416 | 5.132 | 9 |
| 10 | 3.3946 | 0.2946 | 0.054 29 | 0.184 29 | 18.420 | 5.426 | 10 |
| 11 | 3.8359 | 0.2607 | 0.045 84 | 0.175 84 | 21.814 | 5.687 | 11 |
| 12 | 4.3345 | 0.2307 | 0.038 99 | 0.168 99 | 25.650 | 5.918 | 12 |
| 13 | 4.8980 | 0.2042 | 0.033 35 | 0.163 35 | 29.985 | 6.122 | 13 |
| 14 | 5.5348 | 0.1807 | 0.028 67 | 0.158 67 | 34.883 | 6.302 | 14 |
| 15 | 6.2543 | 0.1599 | 0.024 74 | 0.154 74 | 40.417 | 6.462 | 15 |
| 16 | 7.0673 | 0.1415 | 0.021 43 | 0.151 43 | 46.672 | 6.604 | 16 |
| 17 | 7.9861 | 0.1252 | 0.018 61 | 0.148 61 | 53.739 | 6.729 | 17 |
| 18 | 9.0243 | 0.1108 | 0.016 20 | 0.146 20 | 61.725 | 6.840 | 18 |
| 19 | 10.1974 | 0.0981 | 0.014 13 | 0.144 13 | 70.749 | 6.938 | 19 |
| 20 | 11.5231 | 0.0868 | 0.012 35 | 0.142 35 | 80.947 | 7.025 | 20 |
| 21 | 13.0211 | 0.0768 | 0.010 81 | 0.140 81 | 92.470 | 7.102 | 21 |
| 22 | 14.7138 | 0.0680 | 0.009 48 | 0.139 48 | 105.491 | 7.170 | 22 |
| 23 | 16.6266 | 0.0601 | 0.008 32 | 0.138 32 | 120.205 | 7.230 | 23 |
| 24 | 18.7881 | 0.0532 | 0.007 31 | 0.137 31 | 136.831 | 7.283 | 24 |
| 25 | 21.2305 | 0.0471 | 0.006 43 | 0.136 43 | 155.620 | 7.330 | 25 |
| 26 | 23.9905 | 0.0417 | 0.005 65 | 0.135 65 | 176.850 | 7.372 | 26 |
| 27 | 27.1093 | 0.0369 | 0.004 98 | 0.134 98 | 200.841 | 7.409 | 27 |
| 28 | 30.6333 | 0.0326 | 0.004 39 | 0.134 39 | 227.950 | 7.441 | 28 |
| 29 | 34.6158 | 0.0289 | 0.003 87 | 0.133 87 | 258.583 | 7.470 | 29 |
| 30 | 39.1159 | 0.0256 | 0.003 41 | 0.133 41 | 293.199 | 7.496 | 30 |
| 31 | 44.2010 | 0.0226 | 0.003 01 | 0.133 01 | 332.315 | 7.518 | 31 |
| 32 | 49.9471 | 0.0200 | 0.002 66 | 0.132 66 | 376.516 | 7.538 | 32 |
| 33 | 56.4402 | 0.0177 | 0.002 34 | 0.132 34 | 426.463 | 7.556 | 33 |
| 34 | 63.7774 | 0.0157 | 0.002 07 | 0.132 07 | 482.903 | 7.572 | 34 |
| 35 | 72.0685 | 0.0139 | 0.001 83 | 0.131 83 | 546.681 | 7.586 | 35 |
| 40 | 132.7816 | 0.0075 | 0.000 99 | 0.130 99 | 1 013.704 | 7.634 | 40 |
| 45 | 244.6414 | 0.0041 | 0.000 53 | 0.130 53 | 1 874.165 | 7.661 | 45 |
| 50 | 450.7359 | 0.0022 | 0.000 29 | 0.130 29 | 3 459.507 | 7.675 | 50 |
| ∞ | | | | 0.130 00 | | 7.692 | ∞ |

TABLE D-19

14% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.1400 | 0.8772 | 1.000 00 | 1.140 00 | 1.000 | 0.877 | 1 |
| 2 | 1.2996 | 0.7695 | 0.467 29 | 0.607 29 | 2.140 | 1.647 | 2 |
| 3 | 1.4815 | 0.6750 | 0.290 73 | 0.430 73 | 3.440 | 2.322 | 3 |
| 4 | 1.6890 | 0.5921 | 0.203 20 | 0.343 20 | 4.921 | 2.914 | 4 |
| 5 | 1.9254 | 0.5194 | 0.151 28 | 0.291 28 | 6.610 | 3.433 | 5 |
| 6 | 2.1950 | 0.4556 | 0.117 16 | 0.257 16 | 8.536 | 3.889 | 6 |
| 7 | 2.5023 | 0.3996 | 0.093 19 | 0.233 19 | 10.730 | 4.288 | 7 |
| 8 | 2.8526 | 0.3506 | 0.075 57 | 0.215 57 | 13.233 | 4.639 | 8 |
| 9 | 3.2519 | 0.3075 | 0.062 17 | 0.202 17 | 16.085 | 4.946 | 9 |
| 10 | 3.7072 | 0.2697 | 0.051 71 | 0.191 71 | 19.337 | 5.216 | 10 |
| 11 | 4.2262 | 0.2366 | 0.043 39 | 0.183 39 | 23.045 | 5.453 | 11 |
| 12 | 4.8179 | 0.2076 | 0.036 67 | 0.176 67 | 27.271 | 5.660 | 12 |
| 13 | 5.4924 | 0.1821 | 0.031 16 | 0.171 16 | 32.089 | 5.842 | 13 |
| 14 | 6.2613 | 0.1597 | 0.026 61 | 0.166 61 | 37.581 | 6.002 | 14 |
| 15 | 7.1379 | 0.1401 | 0.022 81 | 0.162 81 | 43.842 | 6.142 | 15 |
| 16 | 8.1372 | 0.1229 | 0.019 62 | 0.159 62 | 50.980 | 6.265 | 16 |
| 17 | 9.2765 | 0.1078 | 0.016 92 | 0.156 92 | 59.118 | 6.373 | 17 |
| 18 | 10.5752 | 0.0946 | 0.014 62 | 0.154 62 | 68.394 | 6.467 | 18 |
| 19 | 12.0557 | 0.0829 | 0.012 66 | 0.152 66 | 78.969 | 6.550 | 19 |
| 20 | 13.7435 | 0.0728 | 0.010 99 | 0.150 99 | 91.025 | 6.623 | 20 |
| 21 | 15.6676 | 0.0638 | 0.009 54 | 0.149 54 | 104.768 | 6.687 | 21 |
| 22 | 17.8610 | 0.0560 | 0.008 30 | 0.148 30 | 120.436 | 6.743 | 22 |
| 23 | 20.3616 | 0.0491 | 0.007 23 | 0.147 23 | 138.297 | 6.792 | 23 |
| 24 | 23.2122 | 0.0431 | 0.006 30 | 0.146 30 | 158.659 | 6.835 | 24 |
| 25 | 26.4619 | 0.0378 | 0.005 50 | 0.145 50 | 181.871 | 6.873 | 25 |
| 26 | 30.1666 | 0.0331 | 0.004 80 | 0.144 80 | 208.333 | 6.906 | 26 |
| 27 | 34.3899 | 0.0291 | 0.004 19 | 0.144 19 | 238.499 | 6.935 | 27 |
| 28 | 39.2045 | 0.0255 | 0.003 66 | 0.143 66 | 272.889 | 6.961 | 28 |
| 29 | 44.6931 | 0.0224 | 0.003 20 | 0.143 20 | 312.094 | 6.983 | 29 |
| 30 | 50.9502 | 0.0196 | 0.002 80 | 0.142 80 | 356.787 | 7.003 | 30 |
| 31 | 58.0832 | 0.0172 | 0.002 45 | 0.142 45 | 407.737 | 7.020 | 31 |
| 32 | 66.2148 | 0.0151 | 0.002 15 | 0.142 15 | 465.820 | 7.035 | 32 |
| 33 | 75.4849 | 0.0132 | 0.001 88 | 0.141 88 | 532.035 | 7.048 | 33 |
| 34 | 86.0528 | 0.0116 | 0.001 65 | 0.141 65 | 607.520 | 7.060 | 34 |
| 35 | 98.1902 | 0.0102 | 0.001 44 | 0.141 44 | 693.573 | 7.070 | 35 |
| 40 | 188.8835 | 0.0053 | 0.000 75 | 0.140 75 | 1 342.025 | 7.105 | 40 |
| 45 | 363.6791 | 0.0027 | 0.000 39 | 0.140 39 | 2 590.565 | 7.123 | 45 |
| 50 | 700.2330 | 0.0014 | 0.000 20 | 0.140 20 | 4 994.521 | 7.133 | 50 |
| ∞ | | | | 0.140 00 | | 7.143 | ∞ |

TABLE D-20

15% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.1500 | 0.8696 | 1.000 00 | 1.150 00 | 1.000 | 0.870 | 1 |
| 2 | 1.3225 | 0.7561 | 0.465 12 | 0.615 12 | 2.150 | 1.626 | 2 |
| 3 | 1.5209 | 0.6575 | 0.287 98 | 0.437 98 | 3.472 | 2.283 | 3 |
| 4 | 1.7490 | 0.5718 | 0.200 26 | 0.350 27 | 4.993 | 2.855 | 4 |
| 5 | 2.0114 | 0.4972 | 0.148 32 | 0.298 32 | 6.742 | 3.352 | 5 |
| 6 | 2.3131 | 0.4323 | 0.114 24 | 0.264 24 | 8.754 | 3.784 | 6 |
| 7 | 2.6600 | 0.3759 | 0.090 36 | 0.240 36 | 11.067 | 4.160 | 7 |
| 8 | 3.0590 | 0.3269 | 0.072 85 | 0.222 85 | 13.727 | 4.487 | 8 |
| 9 | 3.5179 | 0.2843 | 0.059 57 | 0.209 57 | 16.786 | 4.772 | 9 |
| 10 | 4.0456 | 0.2472 | 0.049 25 | 0.199 25 | 20.304 | 5.019 | 10 |
| 11 | 4.6524 | 0.2149 | 0.041 07 | 0.191 07 | 24.349 | 5.234 | 11 |
| 12 | 5.3503 | 0.1869 | 0.034 48 | 0.184 48 | 29.002 | 5.421 | 12 |
| 13 | 6.1528 | 0.1625 | 0.029 11 | 0.179 11 | 34.352 | 5.583 | 13 |
| 14 | 7.0757 | 0.1413 | 0.024 69 | 0.174 69 | 40.505 | 5.724 | 14 |
| 15 | 8.1371 | 0.1229 | 0.021 02 | 0.171 02 | 47.580 | 5.847 | 15 |
| 16 | 9.3576 | 0.1069 | 0.017 95 | 0.167 95 | 55.717 | 5.954 | 16 |
| 17 | 10.7613 | 0.0929 | 0.015 37 | 0.165 37 | 65.075 | 6.047 | 17 |
| 18 | 12.3755 | 0.0808 | 0.013 19 | 0.163 19 | 75.836 | 6.128 | 18 |
| 19 | 14.2318 | 0.0703 | 0.011 34 | 0.161 34 | 88.212 | 6.198 | 19 |
| 20 | 16.3665 | 0.0611 | 0.009 76 | 0.159 76 | 102.444 | 6.259 | 20 |
| 21 | 18.8215 | 0.0531 | 0.008 42 | 0.158 42 | 118.810 | 6.312 | 21 |
| 22 | 21.6447 | 0.0462 | 0.007 27 | 0.157 27 | 137.632 | 6.359 | 22 |
| 23 | 24.8915 | 0.0402 | 0.006 28 | 0.156 28 | 159.276 | 6.399 | 23 |
| 24 | 28.6252 | 0.0349 | 0.005 43 | 0.155 43 | 184.168 | 6.434 | 24 |
| 25 | 32.9190 | 0.0304 | 0.004 70 | 0.154 70 | 212.793 | 6.464 | 25 |
| 26 | 37.8558 | 0.0264 | 0.004 07 | 0.154 07 | 245.712 | 6.491 | 26 |
| 27 | 43.5353 | 0.0230 | 0.003 53 | 0.153 53 | 283.569 | 6.514 | 27 |
| 28 | 50.0656 | 0.0200 | 0.003 06 | 0.153 06 | 327.104 | 6.534 | 28 |
| 29 | 57.5755 | 0.0174 | 0.002 65 | 0.152 65 | 377.170 | 6.551 | 29 |
| 30 | 66.2118 | 0.0151 | 0.002 30 | 0.152 30 | 434.745 | 6.566 | 30 |
| 31 | 76.1435 | 0.0131 | 0.002 00 | 0.152 00 | 500.957 | 6.579 | 31 |
| 32 | 87.5651 | 0.0114 | 0.001 73 | 0.151 73 | 577.100 | 6.591 | 32 |
| 33 | 100.6998 | 0.0099 | 0.001 50 | 0.151 50 | 664.666 | 6.600 | 33 |
| 34 | 115.8048 | 0.0086 | 0.001 31 | 0.151 31 | 765.365 | 6.609 | 34 |
| 35 | 133.1755 | 0.0075 | 0.001 13 | 0.151 13 | 881.170 | 6.617 | 35 |
| 40 | 267.8635 | 0.0037 | 0.000 56 | 0.150 56 | 1 779.090 | 6.642 | 40 |
| 45 | 538.7693 | 0.0019 | 0.000 28 | 0.150 28 | 3 585.128 | 6.654 | 45 |
| 50 | 1 083.6574 | 0.0009 | 0.000 14 | 0.150 14 | 7 217.716 | 6.661 | 50 |
| ∞ | | | | 0.150 00 | | 6.667 | ∞ |

TABLE D-21

16% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.1600 | 0.8621 | 1.000 00 | 1.160 00 | 1.000 | 0.862 | 1 |
| 2 | 1.3456 | 0.7432 | 0.462 96 | 0.622 96 | 2.160 | 1.605 | 2 |
| 3 | 1.5609 | 0.6407 | 0.285 26 | 0.445 26 | 3.506 | 2.246 | 3 |
| 4 | 1.8106 | 0.5523 | 0.197 38 | 0.357 38 | 5.066 | 2.798 | 4 |
| 5 | 2.1003 | 0.4761 | 0.145 41 | 0.305 41 | 6.877 | 3.274 | 5 |
| 6 | 2.4364 | 0.4104 | 0.111 39 | 0.271 39 | 8.977 | 3.685 | 6 |
| 7 | 2.8262 | 0.3538 | 0.087 61 | 0.247 61 | 11.414 | 4.039 | 7 |
| 8 | 3.2784 | 0.3050 | 0.070 22 | 0.230 22 | 14.240 | 4.344 | 8 |
| 9 | 3.8030 | 0.2630 | 0.057 08 | 0.217 08 | 17.519 | 4.607 | 9 |
| 10 | 4.4114 | 0.2267 | 0.046 90 | 0.206 90 | 21.321 | 4.833 | 10 |
| 11 | 5.1173 | 0.1954 | 0.038 86 | 0.198 86 | 25.733 | 5.029 | 11 |
| 12 | 5.9360 | 0.1685 | 0.032 41 | 0.192 41 | 30.850 | 5.197 | 12 |
| 13 | 6.8858 | 0.1452 | 0.027 18 | 0.187 18 | 36.786 | 5.342 | 13 |
| 14 | 7.9875 | 0.1252 | 0.022 90 | 0.182 90 | 43.672 | 5.468 | 14 |
| 15 | 9.2655 | 0.1079 | 0.019 36 | 0.179 36 | 51.660 | 5.575 | 15 |
| 16 | 10.7480 | 0.0930 | 0.016 41 | 0.176 41 | 60.925 | 5.668 | 16 |
| 17 | 12.4677 | 0.0802 | 0.013 95 | 0.173 95 | 71.673 | 5.749 | 17 |
| 18 | 14.4625 | 0.0691 | 0.011 88 | 0.171 88 | 84.141 | 5.818 | 18 |
| 19 | 16.7765 | 0.0596 | 0.010 14 | 0.170 14 | 98.603 | 5.877 | 19 |
| 20 | 19.4608 | 0.0514 | 0.008 67 | 0.168 67 | 115.380 | 5.929 | 20 |
| 21 | 22.5745 | 0.0443 | 0.007 42 | 0.167 42 | 134.841 | 5.973 | 21 |
| 22 | 26.1864 | 0.0382 | 0.006 35 | 0.166 35 | 157.415 | 6.011 | 22 |
| 23 | 30.3762 | 0.0329 | 0.005 45 | 0.165 45 | 183.601 | 6.044 | 23 |
| 24 | 35.2364 | 0.0284 | 0.004 67 | 0.164 67 | 213.978 | 6.073 | 24 |
| 25 | 40.8742 | 0.0245 | 0.004 01 | 0.164 01 | 249.214 | 6.097 | 25 |
| 26 | 47.4141 | 0.0211 | 0.003 45 | 0.163 45 | 290.088 | 6.118 | 26 |
| 27 | 55.0004 | 0.0182 | 0.002 96 | 0.162 96 | 337.502 | 6.136 | 27 |
| 28 | 63.8004 | 0.0157 | 0.002 55 | 0.162 55 | 392.503 | 6.152 | 28 |
| 29 | 74.0085 | 0.0135 | 0.002 19 | 0.162 19 | 456.303 | 6.166 | 29 |
| 30 | 85.8499 | 0.0116 | 0.001 89 | 0.161 89 | 530.312 | 6.177 | 30 |
| 31 | 99.5859 | 0.0100 | 0.001 62 | 0.161 62 | 616.162 | 6.187 | 31 |
| 32 | 115.5196 | 0.0087 | 0.001 40 | 0.161 40 | 715.747 | 6.196 | 32 |
| 33 | 134.0027 | 0.0075 | 0.001 20 | 0.161 20 | 831.267 | 6.203 | 33 |
| 34 | 155.4432 | 0.0064 | 0.001 04 | 0.161 04 | 965.270 | 6.210 | 34 |
| 35 | 180.3141 | 0.0055 | 0.000 89 | 0.160 89 | 1 120.713 | 6.215 | 35 |
| 40 | 378.7212 | 0.0026 | 0.000 42 | 0.160 42 | 2 360.757 | 6.233 | 40 |
| 45 | 795.4438 | 0.0013 | 0.000 20 | 0.160 20 | 4 965.274 | 6.242 | 45 |
| 50 | 1 670.7038 | 0.0006 | 0.000 10 | 0.160 10 | 10 435.649 | 6.246 | 50 |
| ∞ | | | | 0.160 00 | | 6.250 | ∞ |

TABLE D-22
18% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/I | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.1800 | 0.8475 | 1.000 00 | 1.180 00 | 1.000 | 0.847 | 1 |
| 2 | 1.3924 | 0.7182 | 0.458 72 | 0.638 72 | 2.180 | 1.566 | 2 |
| 3 | 1.6450 | 0.6086 | 0.279 92 | 0.459 92 | 3.572 | 2.174 | 3 |
| 4 | 1.9388 | 0.5158 | 0.191 74 | 0.371 74 | 5.215 | 2.690 | 4 |
| 5 | 2.2873 | 0.4371 | 0.139 78 | 0.319 78 | 7.154 | 3.127 | 5 |
| 6 | 2.6996 | 0.3704 | 0.105 91 | 0.285 91 | 9.442 | 3.498 | 6 |
| 7 | 3.1855 | 0.3159 | 0.082 36 | 0.262 36 | 12.142 | 3.812 | 7 |
| 8 | 3.7389 | 0.2660 | 0.065 24 | 0.245 24 | 15.327 | 4.078 | 8 |
| 9 | 4.3355 | 0.2255 | 0.052 39 | 0.232 39 | 19.086 | 4.303 | 9 |
| 10 | 5.2338 | 0.1911 | 0.042 51 | 0.222 51 | 23.521 | 4.494 | 10 |
| 11 | 6.1759 | 0.1619 | 0.034 78 | 0.214 78 | 28.755 | 4.656 | 11 |
| 12 | 7.2876 | 0.1372 | 0.028 63 | 0.208 63 | 34.931 | 4.793 | 12 |
| 13 | 8.5994 | 0.1163 | 0.023 69 | 0.203 69 | 42.219 | 4.910 | 13 |
| 14 | 10.1472 | 0.0985 | 0.019 68 | 0.199 68 | 50.818 | 5.008 | 14 |
| 15 | 11.9737 | 0.0835 | 0.016 40 | 0.196 40 | 60.965 | 5.092 | 15 |
| 16 | 14.1290 | 0.0708 | 0.013 71 | 0.193 71 | 72.939 | 5.162 | 16 |
| 17 | 16.6722 | 0.0600 | 0.011 49 | 0.191 49 | 87.068 | 5.222 | 17 |
| 18 | 19.6733 | 0.0508 | 0.009 64 | 0.189 64 | 103.740 | 5.273 | 18 |
| 19 | 23.2144 | 0.0431 | 0.008 10 | 0.188 10 | 123.414 | 5.316 | 19 |
| 20 | 27.3930 | 0.0365 | 0.006 82 | 0.186 82 | 146.628 | 5.353 | 20 |
| 21 | 32.3238 | 0.0309 | 0.005 75 | 0.185 75 | 174.021 | 5.384 | 21 |
| 22 | 38.1421 | 0.0262 | 0.004 85 | 0.184 85 | 206.345 | 5.410 | 22 |
| 23 | 45.0076 | 0.0222 | 0.004 09 | 0.184 09 | 244.487 | 5.432 | 23 |
| 24 | 53.1090 | 0.0188 | 0.003 45 | 0.183 45 | 289.494 | 5.451 | 24 |
| 25 | 62.6686 | 0.0160 | 0.002 92 | 0.182 92 | 342.603 | 5.467 | 25 |
| 26 | 73.9490 | 0.0135 | 0.002 47 | 0.182 47 | 405.272 | 5.480 | 26 |
| 27 | 87.2598 | 0.0115 | 0.002 09 | 0.182 09 | 479.221 | 5.492 | 27 |
| 28 | 102.9665 | 0.0097 | 0.001 77 | 0.181 77 | 566.481 | 5.502 | 28 |
| 29 | 121.5005 | 0.0082 | 0.001 49 | 0.181 49 | 669.447 | 5.510 | 29 |
| 30 | 143.3706 | 0.0070 | 0.001 26 | 0.181 26 | 790.948 | 5.517 | 30 |
| 31 | 169.1774 | 0.0059 | 0.001 07 | 0.181 07 | 934.319 | 5.523 | 31 |
| 32 | 199.6293 | 0.0050 | 0.000 91 | 0.180 91 | 1 103.496 | 5.528 | 32 |
| 33 | 235.5625 | 0.0042 | 0.000 77 | 0.180 77 | 1 303.125 | 5.532 | 33 |
| 34 | 277.9638 | 0.0036 | 0.000 65 | 0.180 65 | 1 538.688 | 5.536 | 34 |
| 35 | 327.9973 | 0.0030 | 0.000 55 | 0.180 55 | 1 816.652 | 5.539 | 35 |
| 40 | 750.3783 | 0.0013 | 0.000 24 | 0.180 24 | 4 163 213 | 5.548 | 40 |
| 45 | 1 716.6839 | 0.0006 | 0.000 10 | 0.180 10 | 9 531.577 | 5.552 | 45 |
| 50 | 3 927.3569 | 0.0003 | 0.000 05 | 0.180 05 | 21 813.094 | 5.554 | 50 |
| ∞ | | | 0.180 00 | | | 5.556 | ∞ |

TABLE D-23
20% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/I | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.2000 | 0.8333 | 1.000 00 | 1.200 00 | 1.000 | 0.833 | 1 |
| 2 | 1.4400 | 0.6944 | 0.454 55 | 0.654 55 | 2.200 | 1.528 | 2 |
| 3 | 1.7280 | 0.5787 | 0.274 73 | 0.474 73 | 3.640 | 2.106 | 3 |
| 4 | 2.0736 | 0.4823 | 0.186 29 | 0.386 29 | 5.368 | 2.589 | 4 |
| 5 | 2.4883 | 0.4019 | 0.134 38 | 0.334 38 | 7.442 | 2.991 | 5 |
| 6 | 2.9860 | 0.3349 | 0.100 71 | 0.300 71 | 9.930 | 3.326 | 6 |
| 7 | 3.5832 | 0.2791 | 0.077 42 | 0.271 42 | 12.916 | 3.605 | 7 |
| 8 | 4.2998 | 0.2326 | 0.060 61 | 0.260 61 | 16.499 | 3.837 | 8 |
| 9 | 5.1598 | 0.1938 | 0.048 08 | 0.248 08 | 20.799 | 4.031 | 9 |
| 10 | 6.1917 | 0.1615 | 0.038 52 | 0.238 52 | 25.959 | 4.192 | 10 |
| 11 | 7.4301 | 0.1346 | 0.031 10 | 0.231 10 | 32.150 | 4.327 | 11 |
| 12 | 8.9161 | 0.1122 | 0.025 26 | 0.225 26 | 39.581 | 4.439 | 12 |
| 13 | 10.6993 | 0.0935 | 0.020 62 | 0.220 62 | 48.497 | 4.533 | 13 |
| 14 | 12.8392 | 0.0779 | 0.016 89 | 0.216 89 | 59.196 | 4.611 | 14 |
| 15 | 15.4070 | 0.0649 | 0.013 88 | 0.213 88 | 72.035 | 4.675 | 15 |
| 16 | 18.4884 | 0.0541 | 0.011 44 | 0.211 44 | 87.442 | 4.730 | 16 |
| 17 | 22.1861 | 0.0451 | 0.009 44 | 0.209 44 | 105.931 | 4.775 | 17 |
| 18 | 26.6233 | 0.0376 | 0.007 81 | 0.207 81 | 128.117 | 4.812 | 18 |
| 19 | 31.9480 | 0.0313 | 0.006 46 | 0.206 46 | 154.740 | 4.844 | 19 |
| 20 | 38.3376 | 0.0261 | 0.005 36 | 0.205 36 | 186.688 | 4.870 | 20 |
| 21 | 46.0051 | 0.0217 | 0.004 44 | 0.204 44 | 225.026 | 4.891 | 21 |
| 22 | 55.2061 | 0.0181 | 0.003 69 | 0.203 69 | 271.031 | 4.909 | 22 |
| 23 | 66.2474 | 0.0151 | 0.003 07 | 0.203 07 | 326.237 | 4.925 | 23 |
| 24 | 79.4968 | 0.0126 | 0.002 55 | 0.202 55 | 392.484 | 4.937 | 24 |
| 25 | 95.3962 | 0.0105 | 0.002 12 | 0.202 12 | 471.981 | 4.948 | 25 |
| 26 | 114.4755 | 0.0087 | 0.001 76 | 0.201 76 | 567.377 | 4.956 | 26 |
| 27 | 137.3706 | 0.0073 | 0.001 47 | 0.201 47 | 681.853 | 4.964 | 27 |
| 28 | 164.8447 | 0.0061 | 0.001 22 | 0.201 22 | 819.223 | 4.970 | 28 |
| 29 | 197.8136 | 0.0051 | 0.001 02 | 0.201 02 | 984.068 | 4.975 | 29 |
| 30 | 237.3763 | 0.0042 | 0.000 85 | 0.200 85 | 1 181.882 | 4.979 | 30 |
| 31 | 284.8516 | 0.0035 | 0.000 70 | 0.200 70 | 1 419.258 | 4.982 | 31 |
| 32 | 341.8219 | 0.0029 | 0.000 59 | 0.200 59 | 1 704.109 | 4.985 | 32 |
| 33 | 410.1863 | 0.0024 | 0.000 49 | 0.200 49 | 2 045.931 | 4.988 | 33 |
| 34 | 492.2235 | 0.0020 | 0.000 41 | 0.200 41 | 2 456.118 | 4.990 | 34 |
| 35 | 590.6682 | 0.0017 | 0.000 34 | 0.200 34 | 2 948.341 | 4.992 | 35 |
| 40 | 1 469.7716 | 0.0007 | 0.000 14 | 0.200 14 | 7 343.858 | 4.997 | 40 |
| 45 | 3 657.2620 | 0.0003 | 0.000 05 | 0.200 05 | 18 281.310 | 4.999 | 45 |
| 50 | 9 100.4382 | 0.0001 | 0.000 02 | 0.200 02 | 45 497.191 | 4.999 | 50 |
| ∞ | | | | 0.200 00 | | 5.000 | ∞ |

TABLE D-24
25% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.2500 | 0.8000 | 1.000 00 | 1.250 00 | 1.000 | 0.800 | 1 |
| 2 | 1.5625 | 0.6400 | 0.444 44 | 0.694 44 | 2.250 | 1.440 | 2 |
| 3 | 1.9531 | 0.5120 | 0.262 30 | 0.512 30 | 3.813 | 1.952 | 3 |
| 4 | 2.4414 | 0.4096 | 0.173 44 | 0.423 44 | 5.766 | 2.362 | 4 |
| 5 | 3.0518 | 0.3277 | 0.121 85 | 0.371 85 | 8.207 | 2.689 | 5 |
| 6 | 3.8147 | 0.2621 | 0.088 82 | 0.338 82 | 11.259 | 2.951 | 6 |
| 7 | 4.7684 | 0.2097 | 0.066 34 | 0.316 34 | 15.073 | 3.161 | 7 |
| 8 | 5.9605 | 0.1678 | 0.050 40 | 0.300 40 | 19.842 | 3.329 | 8 |
| 9 | 7.4506 | 0.1342 | 0.038 76 | 0.288 76 | 25.802 | 3.463 | 9 |
| 10 | 9.3132 | 0.1074 | 0.030 07 | 0.280 07 | 33.253 | 3.571 | 10 |
| 11 | 11.6415 | 0.0859 | 0.023 49 | 0.273 49 | 42.566 | 3.656 | 11 |
| 12 | 14.5519 | 0.0687 | 0.018 45 | 0.268 45 | 54.208 | 3.725 | 12 |
| 13 | 18.1899 | 0.0550 | 0.014 54 | 0.264 54 | 68.760 | 3.780 | 13 |
| 14 | 22.7374 | 0.0440 | 0.011 50 | 0.261 50 | 86.949 | 3.824 | 14 |
| 15 | 28.4217 | 0.0352 | 0.009 12 | 0.259 12 | 109.687 | 3.859 | 15 |
| 16 | 35.5271 | 0.0281 | 0.007 24 | 0.257 24 | 138.109 | 3.887 | 16 |
| 17 | 44.4089 | 0.0225 | 0.005 76 | 0.255 76 | 173.636 | 3.910 | 17 |
| 18 | 55.5112 | 0.0180 | 0.004 59 | 0.254 59 | 218.045 | 3.928 | 18 |
| 19 | 69.3889 | 0.0144 | 0.003 66 | 0.253 66 | 273.556 | 3.942 | 19 |
| 20 | 86.7362 | 0.0115 | 0.002 92 | 0.252 92 | 342.945 | 3.954 | 20 |
| 21 | 108.4202 | 0.0092 | 0.002 33 | 0.252 33 | 429.681 | 3.963 | 21 |
| 22 | 135.5253 | 0.0074 | 0.001 86 | 0.251 86 | 538.101 | 3.970 | 22 |
| 23 | 169.4066 | 0.0059 | 0.001 48 | 0.251 48 | 673.626 | 3.976 | 23 |
| 24 | 211.7582 | 0.0047 | 0.001 19 | 0.251 19 | 843.033 | 3.981 | 24 |
| 25 | 264.6978 | 0.0038 | 0.000 95 | 0.250 95 | 1 054.791 | 3.985 | 25 |
| 26 | 330.8722 | 0.0030 | 0.000 76 | 0.250 76 | 1 319.489 | 3.988 | 26 |
| 27 | 413.5903 | 0.0024 | 0.000 61 | 0.250 61 | 1 650.361 | 3.990 | 27 |
| 28 | 516.9879 | 0.0019 | 0.000 48 | 0.250 48 | 2 063.952 | 3.992 | 28 |
| 29 | 646.2349 | 0.0015 | 0.000 39 | 0.250 39 | 2 580.939 | 3.994 | 29 |
| 30 | 807.7936 | 0.0012 | 0.000 31 | 0.250 31 | 3 227.174 | 3.995 | 30 |
| 31 | 1 009.7420 | 0.0010 | 0.000 25 | 0.250 25 | 4 034.968 | 3.996 | 31 |
| 32 | 1 262.1774 | 0.0008 | 0.000 20 | 0.250 20 | 5 044.710 | 3.997 | 32 |
| 33 | 1 577.7218 | 0.0006 | 0.000 16 | 0.250 16 | 6 306.887 | 3.997 | 33 |
| 34 | 1 972.1523 | 0.0005 | 0.000 13 | 0.250 13 | 7 884.609 | 3.998 | 34 |
| 35 | 2 465.1903 | 0.0004 | 0.000 10 | 0.250 10 | 9 856.761 | 3.998 | 35 |
| 40 | 7 523.1638 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.250 03 | 30 088.655 | 3.999 | 40 |
| 45 | 22 958.8740 | 0.0001 | 0.000 01 | 0.250 01 | 91 831.496 | 4.000 | 45 |
| 50 | 70 064.9232 | 0.0000 | 0.000 00 | 0.250 00 | 280 255.693 | 4.000 | 50 |
| ∞ | | | | 0.250 00 | | 4.000 | ∞ |

TABLE D-25
30% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.3000 | 0.7692 | 1.000 00 | 1.300 00 | 1.000 | 0.769 | 1 |
| 2 | 1.6900 | 0.5917 | 0.434 78 | 0.734 78 | 2.300 | 1.361 | 2 |
| 3 | 2.1970 | 0.4552 | 0.250 63 | 0.550 63 | 3.990 | 1.816 | 3 |
| 4 | 2.8561 | 0.3501 | 0.161 63 | 0.461 63 | 6.187 | 2.166 | 4 |
| 5 | 3.7129 | 0.2693 | 0.110 58 | 0.410 58 | 9.043 | 2.436 | 5 |
| 6 | 4.8268 | 0.2072 | 0.078 39 | 0.378 39 | 12.756 | 2.643 | 6 |
| 7 | 6.2749 | 0.1594 | 0.056 87 | 0.356 87 | 17.583 | 2.802 | 7 |
| 8 | 8.1573 | 0.1226 | 0.041 92 | 0.341 92 | 23.858 | 2.925 | 8 |
| 9 | 10.6045 | 0.0943 | 0.031 24 | 0.331 24 | 32.015 | 3.019 | 9 |
| 10 | 13.7858 | 0.0725 | 0.023 46 | 0.323 46 | 42.619 | 3.092 | 10 |
| 11 | 17.9216 | 0.0558 | 0.017 73 | 0.317 73 | 56.405 | 3.147 | 11 |
| 12 | 23.2981 | 0.0429 | 0.013 45 | 0.313 45 | 74.327 | 3.190 | 12 |
| 13 | 30.2875 | 0.0330 | 0.010 24 | 0.310 24 | 97.625 | 3.223 | 13 |
| 14 | 39.3738 | 0.0254 | 0.007 82 | 0.307 82 | 127.913 | 3.249 | 14 |
| 15 | 51.1859 | 0.0195 | 0.005 98 | 0.305 98 | 167.286 | 3.268 | 15 |
| 16 | 66.5417 | 0.0150 | 0.004 58 | 0.304 58 | 218.472 | 3.283 | 16 |
| 17 | 86.5042 | 0.0116 | 0.003 51 | 0.303 51 | 285.014 | 3.295 | 17 |
| 18 | 112.4554 | 0.0089 | 0.002 69 | 0.302 69 | 371.518 | 3.304 | 18 |
| 19 | 146.1920 | 0.0068 | 0.002 07 | 0.302 07 | 483.973 | 3.311 | 19 |
| 20 | 190.0496 | 0.0053 | 0.001 59 | 0.301 59 | 630.165 | 3.316 | 20 |
| 21 | 247.0645 | 0.0040 | 0.001 22 | 0.301 22 | 820.215 | 3.320 | 21 |
| 22 | 321.1839 | 0.0031 | 0.000 94 | 0.300 94 | 1 067.280 | 3.323 | 22 |
| 23 | 417.5391 | 0.0024 | 0.000 72 | 0.300 72 | 1 388.464 | 3.325 | 23 |
| 24 | 542.8008 | 0.0018 | 0.000 55 | 0.300 55 | 1 806.003 | 3.327 | 24 |
| 25 | 705.6410 | 0.0014 | 0.000 43 | 0.300 43 | 2 348.803 | 3.329 | 25 |
| 26 | 917.3333 | 0.0011 | 0.000 33 | 0.300 33 | 3 054.444 | 3.330 | 26 |
| 27 | 1 192.5333 | 0.0008 | 0.000 25 | 0.300 25 | 3 971.778 | 3.331 | 27 |
| 28 | 1 550.2933 | 0.0006 | 0.000 19 | 0.300 19 | 5 164.311 | 3.331 | 28 |
| 29 | 2 015.3813 | 0.0005 | 0.000 15 | 0.300 15 | 6 714.604 | 3.332 | 29 |
| 30 | 2 619.9956 | 0.0004 | 0.000 11 | 0.300 11 | 8 729.985 | 3.332 | 30 |
| 31 | 3 405.9943 | 0.0003 | 0.000 09 | 0.300 09 | 11 349.981 | 3.332 | 31 |
| 32 | 4 427.7926 | 0.0002 | 0.000 07 | 0.300 07 | 14 755.975 | 3.333 | 32 |
| 33 | 5 756.1304 | 0.0002 | 0.000 05 | 0.300 05 | 19 183.768 | 3.333 | 33 |
| 34 | 7 482.9696 | 0.0001 | 0.000 04 | 0.300 04 | 24 939.899 | 3.333 | 34 |
| 35 | 9 727.8604 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.300 03 | 32 422.868 | 3.333 | 35 |
| ∞ | | | | 0.300 00 | | 3.333 | ∞ |

TABLE D-25

30% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.3000 | 0.7692 | 1.000 00 | 1.300 00 | 1.000 | 0.769 | 1 |
| 2 | 1.6900 | 0.5917 | 0.434 78 | 0.734 78 | 2.300 | 1.361 | 2 |
| 3 | 2.1970 | 0.4552 | 0.259 63 | 0.550 63 | 3.990 | 1.816 | 3 |
| 4 | 2.8561 | 0.3501 | 0.161 63 | 0.461 63 | 6.187 | 2.166 | 4 |
| 5 | 3.7129 | 0.2693 | 0.110 58 | 0.410 58 | 9.043 | 2.436 | 5 |
| 6 | 4.8268 | 0.2072 | 0.078 39 | 0.378 39 | 12.756 | 2.643 | 6 |
| 7 | 6.2749 | 0.1594 | 0.056 87 | 0.356 87 | 17.583 | 2.802 | 7 |
| 8 | 8.1573 | 0.1226 | 0.041 92 | 0.341 92 | 23.858 | 2.925 | 8 |
| 9 | 10.6045 | 0.0943 | 0.031 24 | 0.331 24 | 32.015 | 3.019 | 9 |
| 10 | 13.7858 | 0.0725 | 0.023 46 | 0.323 46 | 42.619 | 3.092 | 10 |
| 11 | 17.9216 | 0.0558 | 0.017 73 | 0.317 73 | 56.405 | 3.147 | 11 |
| 12 | 23.2981 | 0.0429 | 0.013 45 | 0.313 45 | 74.327 | 3.190 | 12 |
| 13 | 30.2875 | 0.0330 | 0.010 24 | 0.310 24 | 97.625 | 3.223 | 13 |
| 14 | 39.3738 | 0.0254 | 0.007 82 | 0.307 82 | 127.913 | 3.249 | 14 |
| 15 | 51.1859 | 0.0195 | 0.005 98 | 0.305 98 | 167.286 | 3.268 | 15 |
| 16 | 66.5417 | 0.0150 | 0.004 58 | 0.304 58 | 218.472 | 3.283 | 16 |
| 17 | 86.5042 | 0.0116 | 0.003 51 | 0.303 51 | 285.014 | 3.295 | 17 |
| 18 | 112.4554 | 0.0089 | 0.002 69 | 0.302 69 | 371.518 | 3.304 | 18 |
| 19 | 146.1920 | 0.0068 | 0.002 07 | 0.302 07 | 483.973 | 3.311 | 19 |
| 20 | 190.0496 | 0.0053 | 0.001 59 | 0.301 59 | 630.165 | 3.316 | 20 |
| 21 | 247.0645 | 0.0040 | 0.001 22 | 0.301 22 | 820.215 | 3.320 | 21 |
| 22 | 321.1839 | 0.0031 | 0.000 94 | 0.300 94 | 1 067.280 | 3.323 | 22 |
| 23 | 417.5391 | 0.0024 | 0.000 72 | 0.300 72 | 1 388.464 | 3.325 | 23 |
| 24 | 542.8003 | 0.0018 | 0.000 55 | 0.300 55 | 1 806.003 | 3.327 | 24 |
| 25 | 705.6410 | 0.0014 | 0.000 43 | 0.300 43 | 2 348.303 | 3.329 | 25 |
| 26 | 917.3332 | 0.0011 | 0.000 33 | 0.300 33 | 3 054.444 | 3.330 | 26 |
| 27 | 1 192.5333 | 0.0008 | 0.000 25 | 0.300 25 | 3 971.778 | 3.331 | 27 |
| 28 | 1 550.2933 | 0.0006 | 0.000 19 | 0.300 19 | 5 164.311 | 3.331 | 28 |
| 29 | 2 015.3813 | 0.0005 | 0.000 15 | 0.300 15 | 6 714.504 | 3.332 | 29 |
| 30 | 2 619.9956 | 0.0004 | 0.000 11 | 0.300 11 | 8 729.985 | 3.332 | 30 |
| 31 | 3 405.9943 | 0.0003 | 0.000 09 | 0.300 09 | 11 349.981 | 3.332 | 31 |
| 32 | 4 427.7926 | 0.0002 | 0.000 07 | 0.300 07 | 14 755.975 | 3.333 | 32 |
| 33 | 5 756.1304 | 0.0002 | 0.000 05 | 0.300 05 | 19 183.768 | 3.333 | 33 |
| 34 | 7 482.9696 | 0.0001 | 0.000 04 | 0.300 04 | 24 939.899 | 3.333 | 34 |
| 35 | 9 727.8604 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.300 03 | 32 422.868 | 3.333 | 35 |
| ∞ | | | | 0.300 00 | | 3.333 | ∞ |

TABLE D-26

35% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.3500 | 0.7407 | 1.000 00 | 1.350 00 | 1.000 | 0.741 | 1 |
| 2 | 1.8225 | 0.5487 | 0.425 53 | 0.775 53 | 2.350 | 1.289 | 2 |
| 3 | 2.4604 | 0.4064 | 0.239 66 | 0.589 66 | 4.172 | 1.696 | 3 |
| 4 | 3.3215 | 0.3011 | 0.150 76 | 0.500 76 | 6.633 | 1.997 | 4 |
| 5 | 4.4840 | 0.2230 | 0.100 46 | 0.450 46 | 9.954 | 2.220 | 5 |
| 6 | 6.0534 | 0.1652 | 0.069 26 | 0.419 26 | 14.438 | 2.385 | 6 |
| 7 | 8.1722 | 0.1224 | 0.048 80 | 0.398 80 | 20.492 | 2.507 | 7 |
| 8 | 11.0324 | 0.0906 | 0.034 89 | 0.384 89 | 28.664 | 2.598 | 8 |
| 9 | 14.8937 | 0.0671 | 0.025 19 | 0.375 19 | 39.696 | 2.665 | 9 |
| 10 | 20.1066 | 0.0497 | 0.018 32 | 0.368 32 | 54.590 | 2.715 | 10 |
| 11 | 27.1439 | 0.0368 | 0.013 39 | 0.363 39 | 74.697 | 2.752 | 11 |
| 12 | 36.6442 | 0.0273 | 0.009 82 | 0.359 82 | 101.841 | 2.779 | 12 |
| 13 | 49.4697 | 0.0202 | 0.007 22 | 0.357 22 | 138.485 | 2.799 | 13 |
| 14 | 66.7841 | 0.0150 | 0.005 32 | 0.355 32 | 187.954 | 2.814 | 14 |
| 15 | 90.1585 | 0.0111 | 0.003 93 | 0.353 93 | 254.738 | 2.825 | 15 |
| 16 | 121.7139 | 0.0082 | 0.002 90 | 0.352 90 | 344.897 | 2.834 | 16 |
| 17 | 164.3138 | 0.0061 | 0.002 14 | 0.352 14 | 466.611 | 2.840 | 17 |
| 18 | 221.8236 | 0.0045 | 0.001 59 | 0.351 58 | 630.925 | 2.844 | 18 |
| 19 | 299.4619 | 0.0033 | 0.001 17 | 0.351 17 | 852.748 | 2.848 | 19 |
| 20 | 404.2736 | 0.0025 | 0.000 87 | 0.350 87 | 1 152.210 | 2.850 | 20 |
| 21 | 545.7693 | 0.0018 | 0.000 64 | 0.350 64 | 1 556.484 | 2.852 | 21 |
| 22 | 736.7886 | 0.0014 | 0.000 48 | 0.350 48 | 2 102.253 | 2.853 | 22 |
| 23 | 994.6646 | 0.0010 | 0.000 35 | 0.350 35 | 2 839.042 | 2.854 | 23 |
| 24 | 1 342.7973 | 0.0007 | 0.000 26 | 0.350 26 | 3 833.706 | 2.855 | 24 |
| 25 | 1 812.7763 | 0.0006 | 0.000 19 | 0.350 19 | 5 176.504 | 2.856 | 25 |
| 26 | 2 447.2480 | 0.0004 | 0.000 14 | 0.350 14 | 6 989.280 | 2.856 | 26 |
| 27 | 3 303.7848 | 0.0003 | 0.000 11 | 0.350 11 | 9 436.528 | 2.856 | 27 |
| 28 | 4 460.1095 | 0.0002 | 0.000 08 | 0.350 08 | 12 740.313 | 2.857 | 28 |
| 29 | 6 021.1478 | 0.0002 | 0.000 06 | 0.350 06 | 17 200.422 | 2.857 | 29 |
| 30 | 8 128.5495 | 0.0001 | 0.000 04 | 0.350 04 | 23 221.570 | 2.857 | 30 |
| 31 | 10 973.5418 | 0.0001 | 0.000 03 | 0.350 03 | 31 350.120 | 2.857 | 31 |
| 32 | 14 814.2815 | 0.0001 | 0.000 02 | 0.350 02 | 42 323.661 | 2.857 | 32 |
| 33 | 19 999.2800 | 0.0001 | 0.000 02 | 0.350 02 | 57 137.943 | 2.857 | 33 |
| 34 | 26 999.0280 | 0.0000 | 0.000 01 | 0.350 01 | 77 137.223 | 2.857 | 34 |
| 35 | 36 448.6878 | | 0.000 01 | 0.350 01 | 104 136.251 | 2.857 | 35 |
| ∞ | | | | 0.350 00 | | 2.857 | ∞ |

TABLE D-27

40% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.4000 | 0.7143 | 1.0000 | 1.4000 | 1.000 | 0.714 | 1 |
| 2 | 1.9600 | 0.5102 | 0.41667 | 0.81667 | 2.400 | 1.224 | 2 |
| 3 | 2.7440 | 0.3644 | 0.22936 | 0.62936 | 4.360 | 1.589 | 3 |
| 4 | 3.8416 | 0.2603 | 0.14077 | 0.54077 | 7.104 | 1.849 | 4 |
| 5 | 5.3782 | 0.1859 | 0.09136 | 0.49136 | 10.946 | 2.035 | 5 |
| 6 | 7.5295 | 0.1328 | 0.06126 | 0.46126 | 16.324 | 2.168 | 6 |
| 7 | 10.5414 | 0.0949 | 0.04192 | 0.44192 | 23.853 | 2.263 | 7 |
| 8 | 14.7579 | 0.0678 | 0.02907 | 0.42907 | 34.395 | 2.331 | 8 |
| 9 | 20.6610 | 0.0484 | 0.02034 | 0.42034 | 49.153 | 2.379 | 9 |
| 10 | 28.9255 | 0.0346 | 0.01432 | 0.41432 | 69.814 | 2.414 | 10 |
| 11 | 40.4957 | 0.0247 | 0.01013 | 0.41013 | 98.739 | 2.438 | 11 |
| 12 | 56.6939 | 0.0176 | 0.00718 | 0.40718 | 139.235 | 2.456 | 12 |
| 13 | 79.3715 | 0.0126 | 0.00510 | 0.40510 | 195.929 | 2.469 | 13 |
| 14 | 111.1201 | 0.0090 | 0.00363 | 0.40363 | 275.300 | 2.478 | 14 |
| 15 | 155.5681 | 0.0064 | 0.00259 | 0.40259 | 386.420 | 2.484 | 15 |
| 16 | 217.7953 | 0.0046 | 0.00185 | 0.40185 | 541.988 | 2.489 | 16 |
| 17 | 304.9135 | 0.0033 | 0.00132 | 0.40132 | 759.784 | 2.492 | 17 |
| 18 | 426.8789 | 0.0023 | 0.00094 | 0.40094 | 1064.697 | 2.494 | 18 |
| 19 | 597.6304 | 0.0017 | 0.00067 | 0.40067 | 1491.576 | 2.496 | 19 |
| 20 | 836.6826 | 0.0012 | 0.00048 | 0.40048 | 2089.206 | 2.497 | 20 |
| 21 | 1171.3554 | 0.0009 | 0.00034 | 0.40034 | 2925.889 | 2.498 | 21 |
| 22 | 1639.8976 | 0.0006 | 0.00024 | 0.40024 | 4097.245 | 2.498 | 22 |
| 23 | 2295.8569 | 0.0004 | 0.00017 | 0.40017 | 5737.142 | 2.499 | 23 |
| 24 | 3214.1997 | 0.0003 | 0.00012 | 0.40012 | 8032.999 | 2.499 | 24 |
| 25 | 4499.8796 | 0.0002 | 0.00009 | 0.40009 | 11247.199 | 2.499 | 25 |
| 26 | 6299.8314 | 0.0002 | 0.00006 | 0.40006 | 15747.079 | 2.500 | 26 |
| 27 | 8819.7640 | 0.0001 | 0.00005 | 0.40005 | 22046.910 | 2.500 | 27 |
| 28 | 12347.6696 | 0.0001 | 0.00003 | 0.40003 | 30866.674 | 2.500 | 28 |
| 29 | 17286.7374 | 0.0001 | 0.00002 | 0.40002 | 43214.343 | 2.500 | 29 |
| 30 | 24201.4324 | 0.0000 | 0.00001 | 0.40002 | 60501.081 | 2.500 | 30 |
| 31 | 33882.0053 | | 0.00001 | 0.40001 | 84702.513 | 2.500 | 31 |
| 32 | 47434.8074 | | 0.00001 | 0.40001 | 118584.519 | 2.500 | 32 |
| 33 | 66408.7304 | | 0.00001 | 0.40001 | 166019.326 | 2.500 | 33 |
| 34 | 92972.2225 | | 0.00000 | 0.40000 | 232428.056 | 2.500 | 34 |
| 35 | 130161.1116 | | | 0.40000 | 325400.279 | 2.500 | 35 |
| ∞ | | | | 0.40000 | | 2.500 | ∞ |

TABLE D-28

45% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/P | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.4500 | 0.6897 | 1.0000 | 1.4500 | 1.000 | 0.690 | 1 |
| 2 | 2.1025 | 0.4756 | 0.40816 | 0.85816 | 2.450 | 1.165 | 2 |
| 3 | 3.0486 | 0.3280 | 0.21966 | 0.66966 | 4.552 | 1.493 | 3 |
| 4 | 4.4205 | 0.2262 | 0.13156 | 0.58156 | 7.601 | 1.720 | 4 |
| 5 | 6.4097 | 0.1560 | 0.08318 | 0.53318 | 12.022 | 1.876 | 5 |
| 6 | 9.2941 | 0.1076 | 0.05426 | 0.50426 | 18.431 | 1.983 | 6 |
| 7 | 13.4765 | 0.0742 | 0.03607 | 0.48607 | 27.725 | 2.057 | 7 |
| 8 | 19.5409 | 0.0512 | 0.02427 | 0.47427 | 41.202 | 2.109 | 8 |
| 9 | 28.3343 | 0.0353 | 0.01646 | 0.46646 | 60.743 | 2.144 | 9 |
| 10 | 41.0847 | 0.0243 | 0.01123 | 0.46123 | 89.077 | 2.168 | 10 |
| 11 | 59.5728 | 0.0168 | 0.00768 | 0.45768 | 130.162 | 2.185 | 11 |
| 12 | 86.3806 | 0.0116 | 0.00527 | 0.45527 | 189.735 | 2.196 | 12 |
| 13 | 125.2518 | 0.0080 | 0.00362 | 0.45362 | 276.115 | 2.204 | 13 |
| 14 | 181.6151 | 0.0055 | 0.00249 | 0.45249 | 401.367 | 2.210 | 14 |
| 15 | 263.3419 | 0.0038 | 0.00172 | 0.45172 | 582.982 | 2.214 | 15 |
| 16 | 381.8458 | 0.0026 | 0.00118 | 0.45118 | 846.324 | 2.216 | 16 |
| 17 | 553.6764 | 0.0018 | 0.00081 | 0.45081 | 1228.170 | 2.218 | 17 |
| 18 | 802.8308 | 0.0012 | 0.00056 | 0.45056 | 1781.846 | 2.219 | 18 |
| 19 | 1164.1047 | 0.0009 | 0.00039 | 0.45039 | 2584.677 | 2.220 | 19 |
| 20 | 1687.9518 | 0.0006 | 0.00027 | 0.45027 | 3748.782 | 2.221 | 20 |
| 21 | 2447.5301 | 0.0004 | 0.00018 | 0.45018 | 5436.734 | 2.221 | 21 |
| 22 | 3548.9187 | 0.0003 | 0.00013 | 0.45013 | 7884.264 | 2.222 | 22 |
| 23 | 5145.9321 | 0.0002 | 0.00009 | 0.45009 | 11433.182 | 2.222 | 23 |
| 24 | 7461.6015 | 0.0001 | 0.00006 | 0.45006 | 16579.115 | 2.222 | 24 |
| 25 | 10819.3222 | 0.0001 | 0.00004 | 0.45004 | 24040.716 | 2.222 | 25 |
| 26 | 15688.0173 | 0.0001 | 0.00003 | 0.45003 | 34860.038 | 2.222 | 26 |
| 27 | 22747.6250 | 0.0000 | 0.00002 | 0.45002 | 50548.056 | 2.222 | 27 |
| 28 | 32984.0563 | | 0.00001 | 0.45001 | 73295.681 | 2.222 | 28 |
| 29 | 47826.8816 | | 0.00001 | 0.45001 | 106279.737 | 2.222 | 29 |
| 30 | 69348.9783 | | 0.00001 | 0.45001 | 154106.618 | 2.222 | 30 |
| ∞ | | | | 0.45000 | | 2.222 | ∞ |

TABLE D-29

50% Compound Interest Factors

| n | Single Payment | | Uniform Series | | | | n |
|----|----------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------------------------|--------------------------|----|
| | Compound Amount Factor F/F | Present Worth Factor P/F | Sinking Fund Factor A/F | Capital Recovery Factor A/P | Compound Amount Factor F/A | Present Worth Factor P/A | |
| 1 | 1.5000 | 0.6667 | 1.0000 | 1.5000 | 1.000 | 0.667 | 1 |
| 2 | 2.2500 | 0.4444 | 0.4000 | 0.9000 | 2.500 | 1.111 | 2 |
| 3 | 3.3750 | 0.2963 | 0.2105 | 0.7105 | 4.750 | 1.407 | 3 |
| 4 | 5.0625 | 0.1975 | 0.1230 | 0.6230 | 8.125 | 1.605 | 4 |
| 5 | 7.5938 | 0.1317 | 0.0758 | 0.5758 | 13.188 | 1.737 | 5 |
| 6 | 11.3906 | 0.0878 | 0.0481 | 0.5481 | 20.781 | 1.824 | 6 |
| 7 | 17.0859 | 0.0585 | 0.0310 | 0.5310 | 32.172 | 1.863 | 7 |
| 8 | 25.6289 | 0.0390 | 0.0203 | 0.5203 | 49.258 | 1.922 | 8 |
| 9 | 38.4434 | 0.0260 | 0.0133 | 0.5133 | 74.887 | 1.948 | 9 |
| 10 | 57.6650 | 0.0173 | 0.0088 | 0.5088 | 113.330 | 1.965 | 10 |
| 11 | 86.4976 | 0.0116 | 0.0058 | 0.5058 | 170.995 | 1.977 | 11 |
| 12 | 129.7453 | 0.0077 | 0.0038 | 0.5038 | 257.493 | 1.985 | 12 |
| 13 | 194.6195 | 0.0051 | 0.0025 | 0.5025 | 387.239 | 1.990 | 13 |
| 14 | 291.9293 | 0.0034 | 0.0017 | 0.5017 | 581.859 | 1.993 | 14 |
| 15 | 437.8939 | 0.0023 | 0.0011 | 0.5011 | 873.788 | 1.995 | 15 |
| 16 | 656.8408 | 0.0015 | 0.0007 | 0.5007 | 1311.682 | 1.997 | 16 |
| 17 | 985.2613 | 0.0010 | 0.0005 | 0.5005 | 1968.523 | 1.998 | 17 |
| 18 | 1477.8919 | 0.0007 | 0.0003 | 0.5003 | 2933.784 | 1.999 | 18 |
| 19 | 2216.8378 | 0.0005 | 0.0002 | 0.5002 | 4431.676 | 1.999 | 19 |
| 20 | 3525.2567 | 0.0003 | 0.0001 | 0.5001 | 6648.513 | 1.999 | 20 |
| 21 | 4987.8851 | 0.0002 | 0.0001 | 0.5001 | 9973.770 | 2.000 | 21 |
| 22 | 7481.8276 | 0.0001 | 0.0000 | 0.5000 | 14961.655 | 2.000 | 22 |
| 23 | 11222.7415 | 0.0001 | 0.0000 | 0.5000 | 22443.483 | 2.000 | 23 |
| 24 | 16834.1122 | 0.0001 | 0.0000 | 0.5000 | 33665.224 | 2.000 | 24 |
| 25 | 25251.1683 | 0.0000 | 0.0000 | 0.5000 | 50500.357 | 2.000 | 25 |
| ∞ | | | | 0.5000 | | 2.000 | ∞ |

TABLE D-30

Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent Uniform Annual Series (A/G)

This table contains multipliers for a gradient G to convert the n-year end-of-year series 0, G, 2G, ... (n-1)G to an equivalent uniform annual series for n years.

| n | 1% | 2% | 3% | 4% | 5% | 6% | 7% | 8% | 10% | n |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-----|
| 2 | 0.50 | 0.50 | 0.49 | 0.49 | 0.49 | 0.49 | 0.48 | 0.48 | 0.48 | 2 |
| 3 | 0.99 | 0.99 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.96 | 0.95 | 0.95 | 0.94 | 3 |
| 4 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.40 | 1.38 | 4 |
| 5 | 1.98 | 1.96 | 1.94 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.81 | 5 |
| 6 | 2.47 | 2.44 | 2.41 | 2.39 | 2.36 | 2.33 | 2.30 | 2.28 | 2.22 | 6 |
| 7 | 2.96 | 2.92 | 2.88 | 2.84 | 2.81 | 2.77 | 2.73 | 2.69 | 2.62 | 7 |
| 8 | 3.45 | 3.40 | 3.34 | 3.29 | 3.24 | 3.20 | 3.15 | 3.10 | 3.00 | 8 |
| 9 | 3.93 | 3.87 | 3.80 | 3.74 | 3.68 | 3.61 | 3.55 | 3.49 | 3.37 | 9 |
| 10 | 4.42 | 4.34 | 4.26 | 4.18 | 4.10 | 4.02 | 3.95 | 3.87 | 3.73 | 10 |
| 11 | 4.90 | 4.80 | 4.70 | 4.61 | 4.51 | 4.42 | 4.33 | 4.24 | 4.06 | 11 |
| 12 | 5.38 | 5.26 | 5.15 | 5.03 | 4.92 | 4.81 | 4.70 | 4.60 | 4.39 | 12 |
| 13 | 5.86 | 5.72 | 5.59 | 5.45 | 5.32 | 5.19 | 5.06 | 4.94 | 4.70 | 13 |
| 14 | 6.34 | 6.18 | 6.02 | 5.87 | 5.71 | 5.56 | 5.42 | 5.27 | 5.00 | 14 |
| 15 | 6.81 | 6.63 | 6.45 | 6.27 | 6.10 | 5.93 | 5.76 | 5.59 | 5.28 | 15 |
| 16 | 7.29 | 7.08 | 6.87 | 6.67 | 6.47 | 6.28 | 6.09 | 5.90 | 5.55 | 16 |
| 17 | 7.76 | 7.52 | 7.29 | 7.07 | 6.84 | 6.62 | 6.41 | 6.20 | 5.81 | 17 |
| 18 | 8.23 | 7.97 | 7.71 | 7.45 | 7.20 | 6.96 | 6.72 | 6.49 | 6.05 | 18 |
| 19 | 8.70 | 8.41 | 8.12 | 7.83 | 7.56 | 7.29 | 7.02 | 6.77 | 6.29 | 19 |
| 20 | 9.17 | 8.84 | 8.52 | 8.21 | 7.90 | 7.61 | 7.32 | 7.04 | 6.51 | 20 |
| 21 | 9.63 | 9.28 | 8.92 | 8.58 | 8.24 | 7.92 | 7.60 | 7.29 | 6.72 | 21 |
| 22 | 10.10 | 9.70 | 9.32 | 8.94 | 8.57 | 8.22 | 7.87 | 7.54 | 6.92 | 22 |
| 23 | 10.56 | 10.13 | 9.71 | 9.30 | 8.90 | 8.51 | 8.14 | 7.78 | 7.11 | 23 |
| 24 | 11.02 | 10.55 | 10.10 | 9.55 | 9.21 | 8.80 | 8.39 | 8.01 | 7.29 | 24 |
| 25 | 11.48 | 10.97 | 10.48 | 9.99 | 9.52 | 9.07 | 8.64 | 8.23 | 7.46 | 25 |
| 26 | 11.94 | 11.39 | 10.85 | 10.33 | 9.83 | 9.34 | 8.88 | 8.44 | 7.62 | 26 |
| 27 | 12.39 | 11.80 | 11.23 | 10.66 | 10.12 | 9.60 | 9.11 | 8.64 | 7.77 | 27 |
| 28 | 12.85 | 12.21 | 11.59 | 10.99 | 10.41 | 9.86 | 9.33 | 8.83 | 7.91 | 28 |
| 29 | 13.30 | 12.62 | 11.96 | 11.31 | 10.69 | 10.10 | 9.54 | 9.01 | 8.05 | 29 |
| 30 | 13.75 | 13.02 | 12.31 | 11.63 | 10.97 | 10.34 | 9.75 | 9.19 | 8.18 | 30 |
| 31 | 14.20 | 13.42 | 12.67 | 11.94 | 11.24 | 10.57 | 9.95 | 9.36 | 8.30 | 31 |
| 32 | 14.65 | 13.82 | 13.02 | 12.24 | 11.50 | 10.80 | 10.14 | 9.52 | 8.41 | 32 |
| 33 | 15.10 | 14.22 | 13.36 | 12.54 | 11.76 | 11.02 | 10.32 | 9.67 | 8.52 | 33 |
| 34 | 15.54 | 14.61 | 13.70 | 12.83 | 12.01 | 11.23 | 10.50 | 9.82 | 8.61 | 34 |
| 35 | 15.98 | 15.00 | 14.04 | 13.12 | 12.25 | 11.43 | 10.67 | 9.96 | 8.71 | 35 |
| 40 | 18.18 | 16.89 | 15.65 | 14.48 | 13.38 | 12.36 | 11.42 | 10.57 | 9.10 | 40 |
| 45 | 20.33 | 18.70 | 17.16 | 15.70 | 14.36 | 13.14 | 12.04 | 11.04 | 9.37 | 45 |
| 50 | 22.44 | 20.44 | 18.56 | 16.81 | 15.22 | 13.80 | 12.53 | 11.41 | 9.57 | 50 |
| 60 | 26.53 | 23.70 | 21.07 | 18.70 | 16.61 | 14.79 | 13.23 | 11.90 | 9.80 | 60 |
| 70 | 30.47 | 26.66 | 23.21 | 20.20 | 17.62 | 15.46 | 13.67 | 12.18 | 9.91 | 70 |
| 80 | 34.25 | 29.36 | 25.04 | 21.77 | 18.35 | 15.90 | 13.93 | 12.33 | 9.96 | 80 |
| 90 | 37.87 | 31.79 | 26.57 | 22.28 | 18.87 | 16.19 | 14.08 | 12.41 | 9.98 | 90 |
| 100 | 41.34 | 33.99 | 27.84 | 22.98 | 19.23 | 16.37 | 14.17 | 12.45 | 9.99 | 100 |

TABLE D-30 Continued

Factors To Convert a Gradient Series to an Equivalent Uniform Annual Series (A/G)

This table contains multipliers for a gradient G to convert the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots (n-1)G$ to an equivalent uniform annual series for n years.

| n | 12% | 15% | 20% | 25% | 30% | 35% | 40% | 45% | 50% | n |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 2 | 0.47 | 0.47 | 0.45 | 0.44 | 0.43 | 0.43 | 0.42 | 0.41 | 0.40 | 2 |
| 3 | 0.92 | 0.91 | 0.88 | 0.85 | 0.83 | 0.80 | 0.78 | 0.76 | 0.74 | 3 |
| 4 | 1.36 | 1.33 | 1.27 | 1.22 | 1.18 | 1.13 | 1.09 | 1.05 | 1.02 | 4 |
| 5 | 1.77 | 1.72 | 1.64 | 1.56 | 1.49 | 1.42 | 1.36 | 1.30 | 1.24 | 5 |
| 6 | 2.17 | 2.10 | 1.98 | 1.87 | 1.77 | 1.67 | 1.58 | 1.50 | 1.42 | 6 |
| 7 | 2.55 | 2.45 | 2.29 | 2.14 | 2.01 | 1.88 | 1.77 | 1.66 | 1.56 | 7 |
| 8 | 2.91 | 2.78 | 2.58 | 2.39 | 2.22 | 2.06 | 1.92 | 1.79 | 1.68 | 8 |
| 9 | 3.26 | 3.09 | 2.84 | 2.60 | 2.40 | 2.21 | 2.04 | 1.89 | 1.76 | 9 |
| 10 | 3.58 | 3.38 | 3.07 | 2.80 | 2.55 | 2.33 | 2.14 | 1.97 | 1.82 | 10 |
| 11 | 3.90 | 3.65 | 3.29 | 2.97 | 2.68 | 2.44 | 2.22 | 2.03 | 1.87 | 11 |
| 12 | 4.19 | 3.91 | 3.48 | 3.11 | 2.80 | 2.52 | 2.28 | 2.08 | 1.91 | 12 |
| 13 | 4.47 | 4.14 | 3.66 | 3.24 | 2.89 | 2.59 | 2.33 | 2.12 | 1.93 | 13 |
| 14 | 4.73 | 4.36 | 3.82 | 3.36 | 2.97 | 2.64 | 2.37 | 2.14 | 1.95 | 14 |
| 15 | 4.98 | 4.56 | 3.96 | 3.45 | 3.03 | 2.69 | 2.40 | 2.17 | 1.97 | 15 |
| 16 | 5.21 | 4.75 | 4.09 | 3.54 | 3.09 | 2.72 | 2.43 | 2.18 | 1.98 | 16 |
| 17 | 5.44 | 4.93 | 4.20 | 3.61 | 3.13 | 2.75 | 2.44 | 2.19 | 1.98 | 17 |
| 18 | 5.64 | 5.08 | 4.30 | 3.67 | 3.17 | 2.78 | 2.46 | 2.20 | 1.99 | 18 |
| 19 | 5.84 | 5.23 | 4.39 | 3.72 | 3.20 | 2.79 | 2.47 | 2.21 | 1.99 | 19 |
| 20 | 6.02 | 5.37 | 4.46 | 3.77 | 3.23 | 2.81 | 2.48 | 2.21 | 1.99 | 20 |
| 21 | 6.19 | 5.49 | 4.53 | 3.80 | 3.25 | 2.82 | 2.48 | 2.21 | 2.00 | 21 |
| 22 | 6.35 | 5.60 | 4.59 | 3.84 | 3.26 | 2.83 | 2.49 | 2.22 | 2.00 | 22 |
| 23 | 6.50 | 5.70 | 4.65 | 3.86 | 3.28 | 2.83 | 2.49 | 2.22 | 2.00 | 23 |
| 24 | 6.64 | 5.80 | 4.69 | 3.89 | 3.29 | 2.84 | 2.49 | 2.22 | 2.00 | 24 |
| 25 | 6.77 | 5.88 | 4.74 | 3.91 | 3.30 | 2.84 | 2.49 | 2.22 | 2.00 | 25 |
| 26 | 6.89 | 5.95 | 4.77 | 3.92 | 3.30 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 26 |
| 27 | 7.00 | 6.03 | 4.80 | 3.94 | 3.31 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 27 |
| 28 | 7.11 | 6.10 | 4.83 | 3.95 | 3.32 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 28 |
| 29 | 7.21 | 6.15 | 4.85 | 3.96 | 3.32 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 29 |
| 30 | 7.30 | 6.21 | 4.87 | 3.96 | 3.32 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 30 |
| 31 | 7.38 | 6.25 | 4.89 | 3.97 | 3.32 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 31 |
| 32 | 7.46 | 6.30 | 4.91 | 3.97 | 3.33 | 2.85 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 32 |
| 33 | 7.53 | 6.34 | 4.92 | 3.98 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 33 |
| 34 | 7.60 | 6.37 | 4.93 | 3.98 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 34 |
| 35 | 7.66 | 6.40 | 4.94 | 3.99 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 35 |
| 40 | 7.90 | 6.52 | 4.97 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 40 |
| 45 | 8.06 | 6.58 | 4.99 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 45 |
| 50 | 8.16 | 6.62 | 4.99 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 50 |
| 60 | 8.27 | 6.65 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 60 |
| 70 | 8.31 | 6.66 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 70 |
| 80 | 8.32 | 6.67 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 80 |
| 90 | 8.33 | 6.67 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 90 |
| 100 | 8.33 | 6.67 | 5.00 | 4.00 | 3.33 | 2.86 | 2.50 | 2.22 | 2.00 | 100 |

TABLE D-31

Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series —Interest Rates from 1% to 50% (P/G)

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n -year end-of-year series $0, G, 2G, \dots (n-1)G$.

| n | 1% | 2% | 3% | 4% | 5% | 6% | n |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1 |
| 2 | 0.9803 | 0.9612 | 0.9426 | 0.9246 | 0.9070 | 0.8900 | 2 |
| 3 | 2.9215 | 2.8458 | 2.7729 | 2.7025 | 2.6347 | 2.5692 | 3 |
| 4 | 5.8044 | 5.6173 | 5.4383 | 5.2670 | 5.1028 | 4.9455 | 4 |
| 5 | 9.6103 | 9.2403 | 8.8888 | 8.5547 | 8.2369 | 7.9345 | 5 |
| 6 | 14.3205 | 13.6801 | 13.0762 | 12.5062 | 11.9680 | 11.4594 | 6 |
| 7 | 19.9168 | 18.9035 | 17.9547 | 17.0657 | 16.2321 | 15.4497 | 7 |
| 8 | 26.3812 | 24.8779 | 23.4806 | 22.1806 | 20.9700 | 19.8416 | 8 |
| 9 | 33.6959 | 31.5720 | 29.6119 | 27.8013 | 26.1268 | 24.5768 | 9 |
| 10 | 41.8435 | 38.9551 | 36.3088 | 33.8814 | 31.6520 | 29.6023 | 10 |
| 11 | 50.8067 | 46.9977 | 43.5330 | 40.3772 | 37.4988 | 34.8702 | 11 |
| 12 | 60.5687 | 55.6712 | 51.2482 | 47.2477 | 43.6241 | 40.3369 | 12 |
| 13 | 71.1126 | 64.9475 | 59.4196 | 54.4546 | 49.9879 | 45.9629 | 13 |
| 14 | 82.4221 | 74.7999 | 68.0141 | 61.9618 | 56.5538 | 51.7128 | 14 |
| 15 | 94.4810 | 85.2021 | 77.0002 | 69.7355 | 63.2880 | 57.5546 | 15 |
| 16 | 107.2734 | 96.1288 | 86.3477 | 77.7441 | 70.1597 | 63.4592 | 16 |
| 17 | 120.7834 | 107.5554 | 96.0280 | 85.9581 | 77.1405 | 69.4011 | 17 |
| 18 | 134.9957 | 119.4581 | 106.0137 | 94.3498 | 84.2043 | 75.3569 | 18 |
| 19 | 149.8950 | 131.8139 | 116.2788 | 102.8933 | 91.3275 | 81.3062 | 19 |
| 20 | 165.4664 | 144.6003 | 126.7987 | 111.5647 | 98.4884 | 87.2304 | 20 |
| 21 | 181.6950 | 157.7959 | 137.5496 | 120.3414 | 105.6673 | 93.1136 | 21 |
| 22 | 198.5663 | 171.3795 | 148.5094 | 129.2024 | 112.8461 | 98.9412 | 22 |
| 23 | 216.0660 | 185.3309 | 159.6566 | 138.1284 | 120.0087 | 104.7007 | 23 |
| 24 | 234.1800 | 199.6305 | 170.9711 | 147.1012 | 127.1402 | 110.3812 | 24 |
| 25 | 252.8945 | 214.2592 | 182.4336 | 156.1040 | 134.2275 | 115.9732 | 25 |
| 30 | 355.0021 | 291.7164 | 241.3613 | 201.0618 | 168.6226 | 142.3588 | 30 |
| 35 | 470.1583 | 374.8826 | 301.6267 | 244.8768 | 200.5807 | 165.7427 | 35 |
| 40 | 596.8561 | 461.9931 | 361.7500 | 286.5303 | 229.5452 | 185.9568 | 40 |
| 45 | 733.7038 | 551.5652 | 420.6325 | 325.4028 | 255.3146 | 203.1097 | 45 |
| 50 | 879.4177 | 642.3606 | 477.4804 | 361.1639 | 277.9148 | 217.4574 | 50 |
| n | 7% | 8% | 10% | 12% | 15% | 20% | n |
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1 |
| 2 | 0.8734 | 0.8573 | 0.8264 | 0.7972 | 0.7561 | 0.6944 | 2 |
| 3 | 2.5060 | 2.4450 | 2.3291 | 2.2208 | 2.0712 | 1.8519 | 3 |
| 4 | 4.7947 | 4.6501 | 4.3781 | 4.1273 | 3.7864 | 3.2986 | 4 |
| 5 | 7.6467 | 7.3724 | 6.8618 | 6.3970 | 5.7751 | 4.9061 | 5 |
| 6 | 10.9784 | 10.5233 | 9.6842 | 8.9302 | 7.9368 | 6.5806 | 6 |
| 7 | 14.7149 | 14.0242 | 12.7631 | 11.6443 | 10.1924 | 8.2551 | 7 |
| 8 | 18.7889 | 17.8061 | 16.0287 | 14.4715 | 12.4807 | 9.8831 | 8 |
| 9 | 23.1404 | 21.8081 | 19.4215 | 17.3563 | 14.7548 | 11.4335 | 9 |
| 10 | 27.7156 | 25.9768 | 22.8913 | 20.2541 | 16.9795 | 12.8871 | 10 |
| 11 | 32.4665 | 30.2657 | 26.3963 | 23.1289 | 19.1289 | 14.2330 | 11 |
| 12 | 37.3506 | 34.6339 | 29.9012 | 25.9523 | 21.1849 | 15.4667 | 12 |
| 13 | 42.3302 | 39.0463 | 33.3772 | 28.7024 | 23.1352 | 16.5883 | 13 |
| 14 | 47.3718 | 43.4723 | 36.8005 | 31.3624 | 24.9725 | 17.6008 | 14 |
| 15 | 52.4461 | 47.8857 | 40.1520 | 33.9202 | 26.6930 | 18.5055 | 15 |

TABLE D-31 Continued

Factors To Compute the Present Worth of a Gradient Series
—Interest Rates from 1% to 50% (P/G)

This table contains multipliers for a gradient G to find the present worth of the n-year end-of-year series 0, G, 2G, ... (n - 1)G.

| n | 7% | 8% | 10% | 12% | 15% | 20% | n |
|----|----------|----------|---------|---------|---------|---------|----|
| 16 | 57.5271 | 52.2640 | 43.4164 | 36.3670 | 28.2960 | 19.3208 | 16 |
| 17 | 62.5923 | 56.5883 | 46.5820 | 38.6973 | 29.7828 | 20.0419 | 17 |
| 18 | 67.6220 | 60.8426 | 49.6396 | 40.9080 | 31.1565 | 20.6805 | 18 |
| 19 | 72.5991 | 65.0134 | 52.5827 | 42.9979 | 32.4213 | 21.2439 | 19 |
| 20 | 77.5091 | 69.0898 | 55.4069 | 44.9676 | 33.5822 | 21.7395 | 20 |
| 21 | 82.3393 | 73.0629 | 58.1095 | 46.8188 | 34.6448 | 22.1742 | 21 |
| 22 | 87.0793 | 76.9257 | 60.6893 | 48.5543 | 35.6150 | 22.5546 | 22 |
| 23 | 91.7201 | 80.6726 | 63.1462 | 50.1776 | 36.4988 | 22.8867 | 23 |
| 24 | 96.2545 | 84.2997 | 65.4813 | 51.6929 | 37.3023 | 23.1760 | 24 |
| 25 | 100.6765 | 87.8041 | 67.6964 | 53.1047 | 38.0314 | 23.4276 | 25 |
| 30 | 120.9718 | 103.4558 | 77.0766 | 58.7821 | 40.7526 | 24.2628 | 30 |
| 35 | 138.1353 | 116.0920 | 83.9872 | 62.6052 | 42.3587 | 24.6614 | 35 |
| 40 | 152.2928 | 126.0422 | 88.9526 | 65.1159 | 43.2830 | 24.8469 | 40 |
| 45 | 163.7559 | 133.7331 | 92.4545 | 66.7343 | 43.8051 | 24.9316 | 45 |
| 50 | 172.9051 | 139.5928 | 94.8839 | 67.7625 | 44.0958 | 24.9698 | 50 |
| n | 25% | 30% | 35% | 40% | 45% | 50% | n |
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 1 |
| 2 | 0.6400 | 0.5917 | 0.5487 | 0.5102 | 0.4756 | 0.4444 | 2 |
| 3 | 1.6640 | 1.5020 | 1.3616 | 1.2391 | 1.1317 | 1.0370 | 3 |
| 4 | 2.8928 | 2.5524 | 2.2648 | 2.0200 | 1.8103 | 1.6296 | 4 |
| 5 | 4.2035 | 3.6297 | 3.1568 | 2.7637 | 2.4344 | 2.1564 | 5 |
| 6 | 5.5142 | 4.6656 | 3.9828 | 3.4278 | 2.9723 | 2.5953 | 6 |
| 7 | 6.7725 | 5.6218 | 4.7170 | 3.9970 | 3.4176 | 2.9465 | 7 |
| 8 | 7.9469 | 6.4800 | 5.3515 | 4.4713 | 3.7758 | 3.2196 | 8 |
| 9 | 9.0207 | 7.2344 | 5.8837 | 4.8585 | 4.0581 | 3.4277 | 9 |
| 10 | 9.9870 | 7.8872 | 6.3363 | 5.1696 | 4.2772 | 3.5838 | 10 |
| 11 | 10.8460 | 8.4452 | 6.7047 | 5.4166 | 4.4450 | 3.6994 | 11 |
| 12 | 11.6020 | 8.9173 | 7.0049 | 5.6106 | 4.5724 | 3.7842 | 12 |
| 13 | 12.2617 | 9.3135 | 7.2474 | 5.7618 | 4.6682 | 3.8459 | 13 |
| 14 | 12.8334 | 9.6437 | 7.4421 | 5.8788 | 4.7398 | 3.8904 | 14 |
| 15 | 13.3260 | 9.9172 | 7.5974 | 5.9688 | 4.7929 | 3.9224 | 15 |
| 16 | 13.7482 | 10.1426 | 7.7206 | 6.0376 | 4.8322 | 3.9452 | 16 |
| 17 | 14.1085 | 10.3276 | 7.8180 | 6.0901 | 4.8611 | 3.9614 | 17 |
| 18 | 14.4147 | 10.4788 | 7.8946 | 6.1299 | 4.8823 | 3.9729 | 18 |
| 19 | 14.6741 | 10.6019 | 7.9547 | 6.1601 | 4.8978 | 3.9811 | 19 |
| 20 | 14.8932 | 10.7019 | 8.0017 | 6.1828 | 4.9090 | 3.9868 | 20 |
| 21 | 15.0777 | 10.7828 | 8.0384 | 6.1998 | 4.9172 | 3.9908 | 21 |
| 22 | 15.2326 | 10.8482 | 8.0669 | 6.2127 | 4.9231 | 3.9936 | 22 |
| 23 | 15.3625 | 10.9009 | 8.0890 | 6.2222 | 4.9274 | 3.9955 | 23 |
| 24 | 15.4711 | 10.9433 | 8.1061 | 6.2294 | 4.9305 | 3.9969 | 24 |
| 25 | 15.5618 | 10.9773 | 8.1194 | 6.2347 | 4.9327 | 3.9979 | 25 |
| 30 | 15.8316 | 11.0687 | 8.1517 | 6.2466 | 4.9372 | 3.9997 | 30 |
| 35 | 15.9367 | 11.0980 | 8.1603 | 6.2493 | 4.9381 | | 35 |
| 40 | 15.9766 | 11.1071 | 8.1625 | 6.2498 | | | 40 |
| 45 | 15.9915 | 11.1099 | 8.1631 | | | | 45 |
| 50 | 15.9969 | 11.1108 | | | | | 50 |





centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

TEMA: EVALUACION DE OBJETOS MULTIPLES Y BAJO
CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE.

PROF. DR. JORGE DIAZ PADILLA.

Noviembre de 1977.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
5800 S. UNIVERSITY AVENUE
CHICAGO, ILLINOIS 60637

RECEIVED

NOV 10 1964

NOV 10 1964

NOV 10 1964

EVALUACION POR OBJETIVOS MULTIPLES Y BAJO
CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE¹

Dr. Jorge Díaz Padilla*

INTRODUCCION

Durante los últimos años se ha observado una transformación radical no solo de las técnicas computacionales sino de la *filosofía básica* del proceso de evaluación de sistemas y proyectos públicos. Algunos enfoques y técnicas que se emplean actualmente difieren substancialmente del procedimiento tradicional costo-beneficio (que durante muchos años ha sido la herramienta convencional para la evaluación de proyectos) al tomar en cuenta aspectos tales como: no linealidad, incertidumbre, objetivos múltiples, etc.

En este contexto, y con el objeto de ubicar algunas de dichas herramientas dentro de un marco general de referencia, a continuación se clasifican² y discuten brevemente ciertos enfoques que han resultado útiles dentro del proceso de evaluación. En la tabla que se presenta a continuación se muestra una posible tipificación de algunas técnicas de evaluación.

* Director Técnico, FOA, Consultores.

1 Curso sobre *Aprovechamientos Hidráulicos*, Centro de Educación Continua, DESFI, UNAM, Nov. 14-25, 1977.

2 R. de Neufville y D.H. Marks, *Systems Planning and Design: Case Studies in Modeling, Optimization and Evaluation*, Prentice-Hall, Inc., 1974.

| METODOLOGIA | | ATRIBUTOS DE LA EVALUACION | | | |
|-------------|--------------------------|----------------------------|---------------|------------------|------------------|
| | | no-lineal | incertidumbre | multidimensional | varios decisores |
| I | Costo-Beneficio Estandar | no | no | no | no |
| II | A. no Lineal | si | no | no | no |
| III | A. de Decisiones | si | si | no | no |
| IV | A. por Multiatributos | si | si | si | no |
| V | Objetivos Múltiples | si | si | si | si |

TIPOLOGIA DE LAS TECNICAS DE EVALUACION

I. El análisis convencional costo-beneficio se emplea en la tabla como punto de partida y representa el procedimiento en el cual los costos y beneficios futuros se descuentan al presente (se actualizan) y posteriormente se comparan entre sí. Las hipótesis empleadas son:

- los costos y beneficios se tratan como lineales
- las variables se sustituyen por sus valores esperados
- se considera un solo objetivo
- se tiene un solo decisor

El problema fundamental con este procedimiento (una vez que se aceptan las hipótesis anteriores) es la selección de la *tasa de descuento* ya que los resultados son una función directa del valor que se asigne a este parámetro.

- II. Los costos y beneficios son generalmente no lineales en lo que respecta a su *valor real*. Las funciones de utilidad correspondientes son generalmente no lineales y, para el caso de los beneficios, presentan utilidades marginales decrecientes. La evaluación tipo II trata de incorporar esta propiedad en los análisis y representa un avance sobre el procedimiento convencional aunque presenta ciertas dificultades en la estimación de las funciones de demanda utilidad-cantidad.
- III. Por medio del análisis de decisiones es posible incorporar en el proceso de evaluación a la incertidumbre que rodea al problema. Para esto, se definen funciones de utilidad con respecto al riesgo (generalmente no lineales) que reflejan el valor real que el decisor asigna a los posibles impactos del proyecto.
- IV. El análisis por atributos múltiples permite tomar en cuenta las consecuencias que diferentes planes alternativos pueden ocasionar en varios objetivos y grupos involucrados. Una vez definida una función de utilidades para un conjunto de atributos es posible asignar una calificación relativa a cada acción posible y de esta manera discriminar a la más conveniente. Este tipo de evaluación, sin embargo, presenta importantes limitaciones al definirse las reglas e hipótesis necesarias para combinar varios atributos generalmente no lineales y no independientes entre sí.
- V. Este procedimiento está dirigido a lograr *compromisos* (negociaciones) entre varios objetivos y grupos afectados pensando que el proceso de evaluación es en realidad un proceso político difícil (o imposible) de modelar analíticamente y por lo tanto que la metodología no debe tratar de imponer soluciones tecnócratas en problemas que afecten a la comunidad.

A continuación se discute e ilustra una metodología de evaluación tipo IV que fue desarrollada para su aplicación en el caso de sistemas hidráulicos y que ha sido empleada con éxito en varios casos reales.

SISTEMAS DE ESTIMACION DE COSTOS EN ETAPAS DE INFLACION SU APLICACION Y EFECTO EN EL DESARROLLO DEL SECTOR AGROPECUARIO¹

por el

Dr. Jorge Díaz Padilla*

I. INTRODUCCION

La fase de estimación de costos constituye una de las etapas más complejas y de mayor relevancia durante el proceso de análisis y evaluación de proyectos de ingeniería. Generalmente, dichas estimaciones se apoyan en información histórica, en comparaciones con proyectos similares, en factores de experiencia y en el conocimiento de la problemática local. Sin embargo, resulta fácil reconocer que las variables en cuestión son inciertas y que en muchos casos, los valores asignados a dichas variables servirán únicamente como indicadores de sus tendencias y no como estimaciones firmes. En el contexto del estudio de un proyecto de rehabilitación o construcción de una zona de riego, es clara la dificultad que existe en asignar valores exactos a los costos de producción de los cultivos, a los costos de operación y mantenimiento del sistema o simplemente al monto de las inversiones iniciales.

En épocas de inflación, la incertidumbre que rodea al problema se incrementa aún más dado que en estos casos resulta necesario recurrir a la formulación de pronósticos para los costos de los insumos de mayor importancia los cuales, generalmente, son inciertos en mayor o menor grado.

* Director Técnico, F. Ochoa y Asociados, Consultores, México, D.F.

¹ Trabajo presentado en el Seminario sobre el papel de la Ingeniería de Costos en la Planeación del Desarrollo del Sector Agropecuario, Sociedad Mexicana de Ingeniería de Costos, A. C., Oaxtepec, Mor., Oct. 1976.

De lo anterior resulta evidente la necesidad de contar con una metodología formal con la cual se pueda tomar en cuenta de manera explícita la incertidumbre de cada una de las componentes del problema y que permita cuantificar la variabilidad total de la eficiencia de cada una de las alternativas de solución para así poder efectuar una toma de decisiones más racional. Asimismo, esta metodología serviría también para identificar a las componentes más relevantes desde el punto de vista de su variabilidad, con lo cual se podrían desarrollar análisis de sensibilidad más completos.

A pesar de esto, las metodologías utilizadas en la práctica para el análisis y evaluación de proyectos se han apoyado tradicionalmente en marcos de referencia de carácter determinístico pues el desarrollo de modelos probabilísticos no se ha dirigido a la solución de problemas reales. Los modelos propuestos, aunque valiosos desde el punto de vista teórico, no han demostrado su factibilidad para utilizarse en la práctica y por lo tanto no han avanzado de un nivel meramente conceptual [7], [8]. Ante esta situación, los efectos de la incertidumbre se han tratado de incorporar indirectamente en los análisis de costos utilizando estimaciones conservadoras de las mismas o recurriendo a análisis de sensibilidad.

En este trabajo se presenta una metodología para la evaluación de proyectos, la cual toma en cuenta explícitamente a la incertidumbre que rodea la estimación de costos de las componentes de los proyectos bajo estudio y permite medir su impacto en la bondad de las alternativas de solución. El modelo que se presenta a continuación es un modelo probabilístico el cual fue ideado y formulado sin perder de vista ni la *factibilidad* ni la *facilidad* de su aplicación a casos reales. Para esto, fué necesario recurrir a un enfoque aproximado de primer orden cuyos detalles matemáticos se discuten en la sección siguiente. Las características fundamentales de un enfoque de este tipo son que las variables aleatorias se caracterizan únicamente por sus dos primeros momentos (en

contraposición con su función completa de densidad de probabilidades) y que la no linealidad de una función de variables aleatorias se elimina desarrollando dicha función en una serie de Taylor. Este enfoque permite desarrollar modelos probabilísticos sumamente poderosos y aplicables a problemas reales aún en aquellos casos en que la información con que se cuente sea escasa o poco confiable [4], [5]. Los conceptos fundamentales del modelo probabilístico se presentan en la Sección 3 y por último en la Sección 4 se hacen algunos comentarios finales. La metodología desarrollada ha sido ya probada y utilizada durante el proceso de evaluación y selección de inversiones en el Valle del Guadiana, Dgo. [6] y actualmente se está utilizando en los estudios de las zonas de Aguamilpa, Nay. y Piaxtla-Elota, Sin.*

2. EL ENFOQUE PROBABILISTICO DE PRIMER ORDEN

El enfoque adoptado para la formulación matemática del modelo tiene las características siguientes ([2], [3]):

- a. La incertidumbre de cualquier variable aleatoria se mide únicamente a través de su coeficiente de variación.
- b. La no linealidad de una función de variables aleatorias se elimina desarrollando dicha función en una serie de Taylor alrededor de los valores esperados de las variables y conservando de dicho desarrollo únicamente los términos de primer orden.

El primero de los puntos anteriores implica que en un análisis probabilístico de primer orden, la componente aleatoria de cualquier variable X (la desviación de la variable de su valor esperado, $\mu[X]$) se mide únicamente a través de su varianza:

* para las Direcciones Generales de Estudios y de Planeación de la Subsecretaría de Planeación de la S.R.H., respectivamente.

$$E[(X - \mu[X])^2] = \sigma^2[X] \quad (2.1)$$

en donde $E[.]$ es el operador "valor esperado" y $\sigma^2[X]$ representa la varianza de la variable X . Es decir, el comportamiento de la variable aleatoria se define únicamente con su valor esperado $\mu[X]$ y su coeficiente de variación $v[X] = \sqrt{\sigma^2[X]} / \mu[X]$ (o equivalentemente, por su desviación estandar $\sigma[X] = \sqrt{\sigma^2[X]} = v[X]\mu[X]$) y no por su función completa de densidad de probabilidades. Esto constituye una gran ventaja pues implica que la utilización de modelos probabilísticos de este tipo no requieren del conocimiento de la forma de las distribuciones de las variables sino únicamente de sus dos primeros momentos.

Por otro lado, para el caso de dos o más variables, adicionalmente a los valores esperados y a los coeficientes de variación será necesario especificar los coeficientes de correlación, $\rho[.,.]$, como medidas de la dependencia probabilística entre dichas variables.

La segunda característica de un análisis de primer orden significa que cuando se tengan funciones no lineales de las variables aleatorias, primero habrá que eliminar la no linealidad de dichas funciones por medio de expansiones en series de Taylor. Por ejemplo, para el caso de una función de una sola variable independiente, $Z = h(X)$, el desarrollo en serie de Taylor está dado por:

$$h(\mu[X]) + (\partial h / \partial X)_{\mu[.]} (X - \mu[X]) + (\partial^2 h / \partial X^2)_{\mu[.]} (X - \mu[X])^2 / 2! + \dots \quad (2.2)$$

en donde la expansión se hace alrededor del valor esperado de la variable aleatoria X y $(\partial h / \partial X)_{\mu[.]}$ representa la derivada de la función $h(.)$ con respecto a la variable X y evaluada en su valor esperado. Una vez linealizada la función, se conservan únicamente los términos de primer orden (los términos lineales) y se procede a calcular la esperanza y la varianza de la expresión resultante por medio de métodos conocidos [1].

Los conceptos anteriores se discuten e ilustran a continuación por medio del cálculo de la incertidumbre asociada con la estimación de los beneficios derivados

de cierto cultivo. En este caso, dichos beneficios están dados por la expresión siguiente:

$$B_n = A (RP - C_p) \quad (2.3)$$

en donde B_n representa los beneficios netos obtenidos del cultivo (\$), A el área sembrada (has), R el rendimiento del cultivo (ton/ha), P el precio de venta (\$/ton) y C_p el costo unitario de producción (\$/ha). En el contexto de una evaluación desde el punto de vista nacional, es necesario ajustar los precios de mercado de los costos de producción, para que reflejen su verdadero costo de oportunidad social. Tomando en cuenta únicamente la corrección debida al costo de la mano de obra no calificada, la expresión (2.3) toma la forma siguiente:

$$B_n^{(s)} = A (RP - C_p) - \lambda(AC_p\Omega) = A \{RP - C_p (1 + \lambda\Omega)\} \quad (2.4)$$

en donde $B_n^{(s)}$ representa la contribución al consumo agregado nacional de los beneficios netos obtenidos del cultivo, λ el factor que corrige el costo a precios de mercado de la mano de obra no calificada a su verdadero costo de oportunidad y Ω el porcentaje de participación de este tipo de mano de obra en los costos de producción.

En un análisis probabilístico de primer orden, si las variables C_p , λ y Ω se tratan como variables aleatorias, de acuerdo con lo discutido anteriormente el comportamiento estocástico de dichas variables queda definido por sus valores esperados y sus coeficientes de variación. Los valores esperados son simplemente los valores promedio de las variables y los coeficientes de variación se pueden estimar estadísticamente (si se cuenta con la información adecuada) o bien de manera subjetiva en caso contrario [9]. Como la función es no lineal, para calcular aproximadamente los dos primeros momentos de la variable aleatoria dependiente, $B_n^{(s)}$, es necesario en primer lugar desarrollar la expresión (2.4) en una serie de Taylor (ec. (2.2)):

$$B_n^{(s)} \doteq A \{RP - \mu[C_p] (1 + \mu[\lambda] \mu[\Omega])\} + (C_p - \mu[C_p]) (\partial B_n^{(s)} / \partial C_p)_{\mu[\cdot]} + \\ + (\lambda - \mu[\lambda]) (\partial B_n^{(s)} / \partial \lambda)_{\mu[\cdot]} + (\Omega - \mu[\Omega]) (\partial B_n^{(s)} / \partial \Omega)_{\mu[\cdot]} \quad (2.5)$$

en donde ya se han eliminado los términos no lineales. Efectuando las derivaciones:

$$B_n^{(s)} \doteq A \{RP - \mu[C_p] (1 + \mu[\lambda] \mu[\Omega])\} - (C_p - \mu[C_p]) A \mu[\lambda] \mu[\Omega] - \\ - (\lambda - \mu[\lambda]) A \mu[C_p] \mu[\Omega] - (\Omega - \mu[\Omega]) A \mu[C_p] \mu[\lambda] \quad (2.6)$$

La expresión resultante es una aproximación de primer orden a la función original. Como la ec. (2.6) es lineal en las variables aleatorias, el cálculo del valor esperado y de la varianza de la variable dependiente ya no presente dificultad. En este caso,

$$\mu[B_n^{(s)}] \doteq A \{RP - \mu[C_p] (1 + \mu[\lambda] \mu[\Omega])\} \quad (2.7)$$

$$\sigma^2[B_n^{(s)}] \doteq A^2 \{ \mu^2[\lambda] \mu^2[\Omega] \sigma^2[C_p] + \mu^2[C_p] \mu^2[\Omega] \sigma^2[\lambda] + \mu^2[C_p] \mu^2[\lambda] \sigma^2[\Omega] \} \quad (2.8)$$

en donde se supone que las tres variables aleatorias son estocásticamente independientes. Si se substituyen en estas expresiones los valores de los parámetros indicados en la Tabla 2.1, y suponiendo que $A = 50$ has, $R = 20$ ton/ha y $P = \$1000/\text{ton}$, se obtienen los resultados siguientes:

$$\mu[B_n^{(s)}] \doteq 50 \{20 \times 1000 - 10\,000 (1.0 - 1.0 \times 0.5)\} = \$750\,000$$

$$\sigma^2[B_n^{(s)}] \doteq (50)^2 \{ (1.0)^2 (0.5)^2 (10\,000)^2 (0.3)^2 + (10\,000)^2 (0.5)^2 (1.0)^2 (0.1)^2 + \\ + (10\,000)^2 (1.0)^2 (0.5)^2 (0.2)^2 \} = 8\,750\,000\,000 \text{ \2$

de donde,

$$\sigma[B_n^{(s)}] \doteq \frac{\sqrt{8\,750\,000\,000}}{750\,000} = \frac{93\,541}{750\,000} = 0.12$$

De lo anterior resultan evidentes las ventajas del enfoque. Adoptando las hipótesis de un modelo de primer orden, resulta sencillo el cálculo de la variabilidad de una función de variables aleatorias en términos de las variabilidades de sus componentes individuales. La estimación de los

coeficientes de variación de dichas componentes resulta fácil y conduce a resultados generalmente confiables. Sin embargo, la estimación "directa" del coeficiente de variación de la variable dependiente es difícil y puede llevar a resultados erróneos.

La facilidad con que puede estimarse la variabilidad de una función de variables aleatorias permite efectuar fácilmente análisis de sensibilidad desde el punto de vista de la incertidumbre. Por medio de este tipo de análisis es posible detectar aquellas componentes cuya incertidumbre tiene un efecto importante en la variabilidad total resultante y a aquellas otras que, a pesar de ser inciertas, pueden tratarse como determinísticas dado que sus efectos son despreciables en el cálculo de la incertidumbre total de la función. Por ejemplo, de los cálculos anteriores resulta lo siguiente:

$$\sigma^2[B_n^{(s)}] = 5\,625\,000\,000 + 625\,000\,000 + 2\,500\,000\,000 = 8\,750\,000\,000 \text{ \2$

de donde puede verse que la incertidumbre asociada a los costos de producción es importante ($5\,625/8\,750 = 0.64$) y que la del factor λ es despreciable desde un punto de vista práctico ($625/8\,750 = 0.07$).

Por otro lado, el coeficiente de variación de la variable $B_n^{(s)}$ resulta con un valor menor que los de las variables de mayor importancia, lo cual no es evidente a priori.

| Variable | μ [.] | v [.] |
|-----------|-------------|---------|
| C_p | \$10 000/ha | 0.3 |
| λ | - 1.0* | 0.1 |
| Ω | 0.5 | 0.2 |

TABLA 2.1 VALORES ASIGNADOS A LOS PARAMETROS °

* Este valor implica un exceso de mano de obra no calificada en la zona bajo estudio.

3. EL MODELO DE EVALUACION

En esta sección se presenta someramente un modelo de evaluación de proyectos en el cual los costos se tratan como variables aleatorias. El beneficio neto marginal de la situación "con proyecto" comparado con la situación "sin proyecto" se cuantificó mediante el indicador "valor presente neto de los beneficios asociados con el consumo agregado" (VPN_s). En este caso, la expresión correspondiente es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 VPN_s = & \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\theta(t)}{(1+i)^t} \left[\sum_{j=1}^J A_j (R_j P_j - \bar{C}_{pj}) \right] - \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{1}{(1+i)^t} \left[\sum_{j=1}^J \hat{A}_j (\hat{R}_j \hat{P}_j - \bar{\hat{C}}_{pj}) \right] - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t'} \frac{\bar{C}_i(t)}{(1+i)^t} - \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\bar{O}}{(1+i)^t} \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

en donde,

A_j = área sembrada con el cultivo j

R_j = rendimiento del j -ésimo cultivo

P_j = precio de mercado del j -ésimo cultivo

C_{pj} = costos de producción del j -ésimo cultivo

$\theta(t)$ = función de aprendizaje evaluada en el período t

J = número de cultivos

$C_i(t)$ = costos iniciales en el año t

O = costos periódicos de operación y mantenimiento del proyecto

t_f = período en que termina la vida útil del proyecto

t_i = período en que se inicia la operación del proyecto

t' = período en que se termina la construcción del proyecto

t_0 = período en que se inicia la construcción del proyecto

i = tasa de descuento

y los símbolos $\hat{\cdot}$ y $\bar{\cdot}$ sobre algunas de las variables indican que dichas cantidades se refieren a la producción actual y a que las variables ya han sido corregidas

en base a sus costos de oportunidad, respectivamente.

En la formulación de un modelo de primer orden, es posible generar expresiones para el cálculo de la esperanza y de la varianza del VPN_S . Aplicando la metodología indicada en la sección anterior y utilizando la ec. (3.1) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mu[VPN_S] = & \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\theta(t)}{(1+i)^t} \left\{ \sum_{j=1}^J A_j (R_j P_j - \mu[\bar{C}_{pj}]) \right\} - \left[\sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{1}{(1+i)^t} \left[\sum_{j=1}^J \hat{A}_j (\hat{R}_j \hat{P}_j - \bar{\bar{C}}_{pj}) \right] \right] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t'} \frac{\mu[\bar{C}_1(t)]}{(1+i)^t} - \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\mu[\bar{O}]}{(1+i)^t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[VPN_S] = & \sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{\theta(t)}{(1+i)^t}^2 \left\{ \sum_{j=1}^J A_j^2 \sigma^2[\bar{C}_{pj}] \right\} + \left\{ \sum_{t=t_0}^{t'} \sum_{l=t_0}^{t'} \frac{\sigma[\bar{C}_1(t)] \sigma[\bar{C}_1(l)]}{(1+i)^t (1+i)^l} \right\} + \\ & + \left[\sum_{t=t_i}^{t_f} \frac{1}{(1+i)^t} \right]^2 \sigma^2[\bar{O}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

en donde se supone que todos los conceptos de costo son inciertos pero probabilísticamente independientes unos de otros para cualquier período de tiempo. Por otro lado, también se supone que una misma componente se encuentra perfectamente correlacionada a lo largo del horizonte de evaluación.

Para cada alternativa resulta sencillo el cálculo de los dos parámetros anteriores. Los resultados pueden visualizarse fácilmente graficando, para cada proyecto, el valor esperado y la desviación estandar del VPN_S en un espacio coordinado $\mu[.] - \sigma[.]$ (ver Fig. 3.1). En este caso, si en dicho espacio se trazan rectas de la forma:

$$\mu[VPN_S] - \beta \sigma[VPN_S] = 0 \quad (3.4)$$

para diferentes valores del parámetro β , será posible definir zonas de aceptación y rechazo de proyectos para diferentes niveles de riesgo. Por ejemplo, si se supone que la variable VPN_S tiene una distribución del tipo normal, entonces los proyectos cuyas coordenadas $(\mu[VPN_S], \sigma[VPN_S])$ se localizan por debajo de la

recta con ecuación $\mu[VPN_S] - 2\sigma[VPN_S] = 0$ tiene una probabilidad superior al 98 % de que su VPN_S resultante sea positivo*.

En la Fig. 3.1 se muestran los resultados de este tipo de evaluación para las rehabilitaciones de dos zonas de riego. De la figura puede apreciarse que el proyecto II es aceptable según este tipo de evaluación pero que el proyecto I, a pesar de tener un alto valor esperado del VPN_S , tiene también un fuerte nivel de incertidumbre y por lo tanto debe de ser rechazado.

4. COMENTARIOS FINALES

De los resultados obtenidos puede verse que la metodología propuesta es sumamente *pragmática y factible* de aplicar a problemas reales. Con el enfoque aquí sugerido, la única información que se necesita para incorporar los efectos de la incertidumbre en la estimación de costos son ciertas medidas de la variabilidad de cada una de las componentes (en forma de coeficientes de variación, por ejemplo) y de los niveles de correlación entre las variables. Para esto último, será importante entender a los fenómenos que controlan las relaciones entre las variables y, en última instancia, invocar hipótesis de independencia o de dependencia perfecta según sea el caso. Sin embargo, estas hipótesis se formularán para las componentes individuales de los costos y no

* Dado que el valor presente neto es una suma de un número grande de variables, a pesar de que se desconozca la forma de la función de densidad de probabilidades para cada beneficio neto en cada uno de los períodos, en virtud del Teorema del Límite Central es muy razonable suponer que la variable VPN seguirá muy de cerca un comportamiento probabilístico de tipo normal [1]. Sin embargo, si no se desea invocar esta hipótesis de normalidad, se puede utilizar el Teorema de Chebyshev para efectuar el cálculo de probabilidades en forma aproximada. Para el caso de $\beta=2$, esta aproximación conduce a un valor de la probabilidad de éxito igual a 0.75.

$\sigma[VPN_s]$
($10^6 \$$)

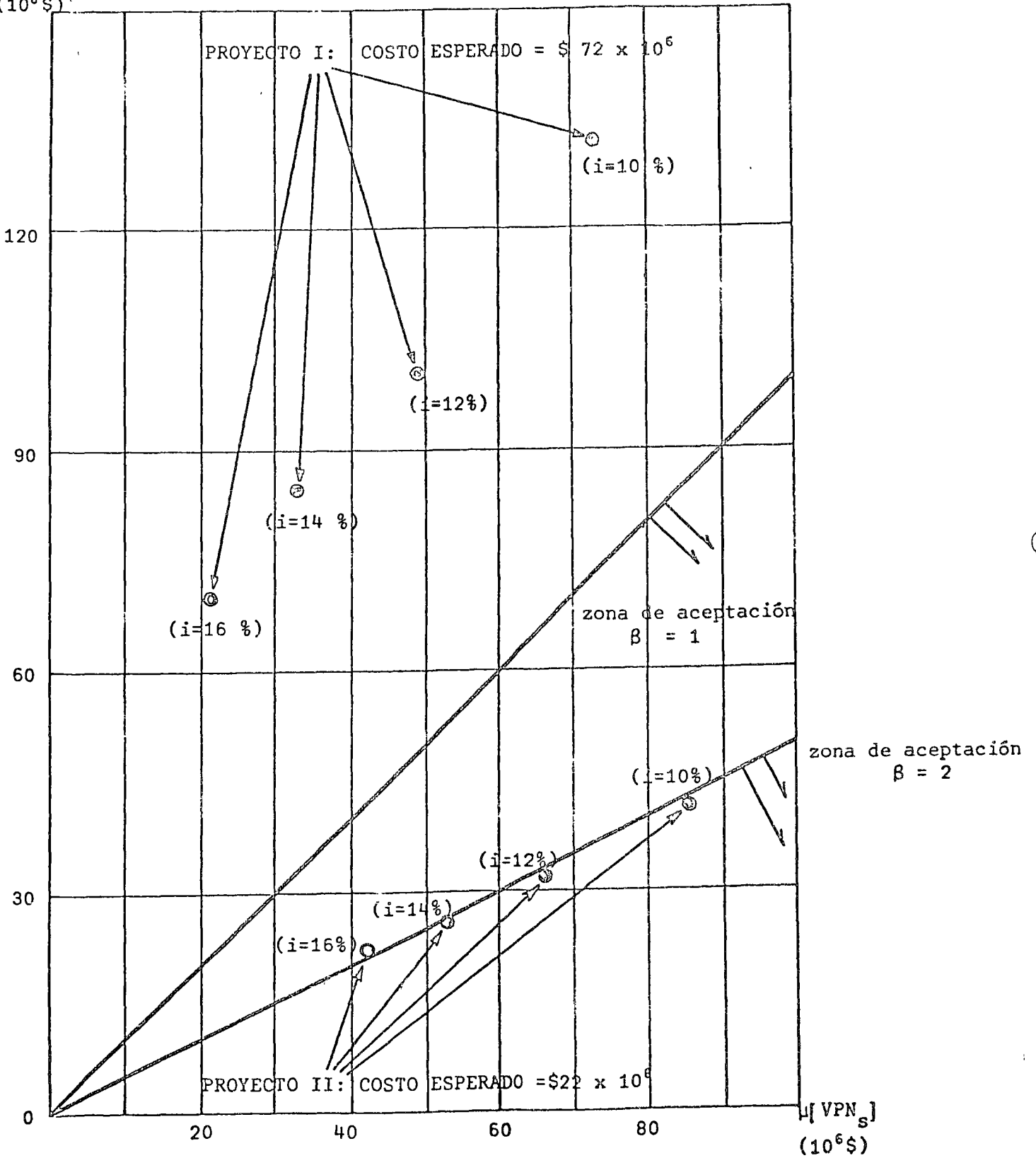


FIG. 3.1 RESULTADOS DE LA EVALUACION DE LAS REHABILITACIONES DE DOS ZONAS DE RIEGO

para los flujos netos de capital*. Aunque sea de manera aproximada, los efectos de la correlación deben de incluirse en los análisis. En algunas ocasiones, será razonable aceptar la hipótesis de independencia probabilística para algunas de las variables y para un momento dado, pero en general no será posible argumentar esta hipótesis para los costos incurridos durante varios períodos de tiempo. Es decir, debido a que estas variables pueden ser funciones de las mismas componentes durante diferentes períodos de tiempo, en general la correlación puede ser alta y el no tomarla en cuenta puede conducir a variabilidades de las eficiencias de las alternativas mucho menores que las verdaderas y por lo tanto del lado de la inseguridad.

Vale la pena mencionar nuevamente que los resultados obtenidos con este tipo de análisis constituyen aproximaciones a las soluciones exactas. El grado de aproximación dependerá del grado de no linealidad de las funciones y de la forma que tengan las funciones de densidad de probabilidades de las variables. Por ejemplo, si se tiene una función lineal, de variables gaussianas entonces los resultados obtenidos por medio de un análisis de primer orden coincidirán con los exactos. Al ir perdiendo la función su carácter lineal, al irse alejando las funciones de probabilidad de distribuciones simétricas y unimodales, y al ir aumentando la incertidumbre de las variables, los resultados se van haciendo cada vez menos exactos. Sin embargo, el análisis de problemas prácticos dentro de un marco de incertidumbre tiene necesariamente que apoyarse en enfoques pragmáticos como el señalado en este trabajo, principalmente en aquellas situaciones en que la información sea escasa o poco confiable.

* Los modelos probabilísticos propuestos a la fecha se basan en la hipótesis de que "se conoce" la variabilidad de los flujos netos de capital para cada uno de los períodos que definen el horizonte de evaluación. Sin embargo, esta suposición es poco realista en la práctica pues aunque sí es factible estimar la incertidumbre de las componentes individuales que integran a cada uno de los costos, no es sencillo efectuar dicha estimación para los flujos de capital los cuales, en algunos casos, pueden ser funciones complejas de sus componentes.

5. REFERENCIAS

- [1] Benjamín, J.R. y C.A. Cornell, "Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers", Mc Graw-Hill Book Co., 1970.
- [2] Cornell, C.A., "First-Order Analysis of Model and Parameter Uncertainty", International Symposium on Uncertainties in Hydrologic and Water Resource Systems, Universidad de Arizona, Tucson, Dic. 1972.
- [3] Cornell, C.A., "Notes on First-Order Uncertainty Analysis", notas no publicadas, Insituto Tecnológico de Massachusetts, Cambridge, 1971.
- [4] Díaz Padilla, J., "Análisis de Inversiones Bajo Condiciones de Incertidumbre", XIV Convención Nacional del IMIQ, Guadalajara, Jal., Nov. 1974.
- [5] F.O.A., Consultores, "Modelos de Reglamentación y de Decisión Bajo Incertidumbre para la Resolución de Solicitudes de Uso del Agua", informe interno a la S.R.H., Subsecretaría de Planeación, Dir. Gral. de Usos del Agua y Prevención de la Contaminación, Dic. 1974.
- [6] F.O.A., Consultores, "Evaluación y Selección de Inversiones en Recursos Hidráulicos para el Valle del Guadiana, Dgo.", informe interno a la S.R.H., Subsecretaría de Planeación, Dir. Gral. de Planeación, Dic. 1974.
- [7] Mao, J.C.T., "Quantitative Analysis of Financial Decisions", Capítulo 8, Investment Decisions Under Conditions of Uncertainty, The Macmillan Co., 1969.
- [8] Oakford, R.V., "Capital Budgeting", Capítulo 11, Probabilistic Treatment of Uncertainty, The Ronald Press Co., 1970.
- [9] Raiffa, H., "Decision Analysis, Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty", Addison-Wesley Press Inc., 1968.

A. M. H.

IV CONGRESO NACIONAL DE HIDRAULICA¹

EVALUACION BAJO INCERTIDUMBRE DE PROYECTOS HIDRAULICOS

Dr. Jorge Díaz Padilla* Ing. Eduardo Camhaji Samra**

I. INTRODUCCION

Durante el proceso de evaluación de proyectos, la estimación de costos constituye una de las fases mas complejas. Dicha estimación se apoya, generalmente, en información histórica, en comparaciones con proyectos similares, en resultados obtenidos en regiones cercanas a la beneficiable, en factores de experiencia y en el conocimiento de la problemática local. Sin embargo, las variables involucradas son inciertas en mayor o menor grado y en muchas ocasiones, los valores que se les asignan servirán únicamente como indicadores aproximados lo cual en algunos casos, y en particular en épocas de inflación, puede conducir a decisiones equivocadas.

En el contexto del estudio de proyectos hidráulicos, es evidente la dificultad en asignar valores exactos a los costos y rendimientos de los cultivos, a los costos de las obras y del equipo o simplemente al valor de la componente extranjera de las alternativas. Mas aún, considerando que a ciertos niveles de estudio (Gran Visión y Prefactibilidad), los valores asignados a dichas variables pueden tener errores importantes, el no tomar en cuenta la incertidumbre de los parámetros puede originar que dichos estudios no cumplan su objetivo. Esto es, que los resultados de las evaluaciones conduzcan a tomar decisiones equivocadas

* Director Técnico, FOA, Consultores, México, D. F.

** Jefe de Proyecto, FOA, Consultores, México, D. F.

¹ Trabajo presentado en el IV Congreso Nacional de Hidráulica, Acapulco, Gro., Oct. 1976.

tales como seguir estudiando innecesariamente un proyecto que aparentemente puede ser rentable aunque de verdad no lo sea. Aunado a lo anterior, se tiene el efecto de la incertidumbre que rodea a los problemas en épocas de inflación, lo cual constituye un elemento de gran importancia durante la estimación de costos.

Resulta evidente la necesidad de contar con una metodología formal con la que se pueda tomar en cuenta de manera explícita la incertidumbre de cada una de las componentes del problema y permita cuantificar la variabilidad total de la eficiencia de cada una de las alternativas de solución para que de esta manera se puedan realizar tomas de decisión más racionales. Adicionalmente, cualquier metodología que tome en cuenta la incertidumbre de las variables consideradas servirá también para identificar a las componentes de mayor variabilidad, con lo que se podrán desarrollar análisis de sensibilidad más completos.

No obstante lo anterior, las metodologías empleadas en la evaluación de proyectos han sido de tipo determinístico, debido principalmente a que los modelos desarrollados de carácter probabilístico han resultado ser valiosos solo desde el punto de vista teórico ya que su aplicación a problemas reales no ha demostrado ser ni práctica ni sencilla. Por lo tanto, los efectos de la incertidumbre se tratan de incorporar en forma indirecta a través de análisis de sensibilidad y utilizando estimaciones conservadoras de las variables.

En este trabajo se presentan algunos resultados de un modelo probabilístico de evaluación el cual ha sido útil para tomar en cuenta explícitamente la incertidumbre de las variables que intervienen en el análisis de proyectos hidráulicos sin que se pierda de vista ni la factibilidad ni la facilidad de su aplicación práctica.

El modelo probabilístico está basado en un enfoque aproximado de primer orden, el cual permite desarrollar modelos sumamente poderosos y aplicables en forma sencilla a problemas reales, aún cuando la información con que se cuente sea escasa.

La metodología que aquí se presenta ha sido ya probada y utilizada durante el proceso de evaluación de los proyectos: Aguamilpa, Nay., Elota-Pixtla, Sin. y El Tunal, Dgo., para la Secretaría de Recursos Hidráulicos.

II. EL ENFOQUE PROBABILISTICO DE PRIMER ORDEN

El enfoque probabilístico adoptado para la formulación matemática del modelo de evaluación tiene las características siguientes*:

- a. La incertidumbre de cualquier variable aleatoria se mide únicamente a través de su coeficiente de variación.
- b. La no linealidad de una función de variables aleatorias se elimina desarrollando dicha función en una serie de Taylor alrededor de los valores esperados de las variables y conservando de dicho desarrollo únicamente los términos de primer orden.

El primero de los puntos anteriores implica que en un análisis probabilístico de primer orden, la componente aleatoria de cualquier variable X (la desviación de la variable de su valor esperado, $\mu[X]$) se mide únicamente a través de su varianza:

$$E[(X - \mu[X])^2] = \sigma^2[X] \quad (2.1)$$

en donde $E[\cdot]$ es el operador "valor esperado" y $\sigma^2[X]$ representa la varianza de la variable X . Es decir, el comportamiento de la variable aleatoria se define únicamente con su valor esperado $\mu[X]$ y su coeficiente de variación

$v[X] = \sqrt{\sigma^2[X]} / \mu[X]$ (o equivalentemente, por su desviación estandar $\sigma[X] = \sqrt{\sigma^2[X]} = v[X] \mu[X]$), y no por su función completa de densidad de

* Cornell, C. A., "First-Order Analysis of Model and Parameter Uncertainty", International Symposium on Uncertainties in Hydrologic and Water Resource Systems, Univ. de Arizona, Tucson, Ariz., Dic. 1972.

Díaz Padilla, J., "Análisis de Inversiones Bajo Condiciones de Incertidumbre", XIV Convención Nacional del IMIQ, Guad., Jal., Nov. 1974.

probabilidades. Esto constituye una gran ventaja pues implica que la utilización de modelos probabilísticos de este tipo no requiere del conocimiento de la forma de las distribuciones de las variables sino únicamente de sus dos primeros momentos.

Por otro lado, para el caso de dos o más variables, adicionalmente a los valores esperados y a los coeficientes de variación será necesario especificar los coeficientes de correlación, $\rho[\dots]$, como medidas de la dependencia probabilística entre dichas variables.

La segunda característica de un análisis de primer orden significa que cuando se tengan funciones no lineales de las variables aleatorias, primero habrá que eliminar la no linealidad de dichas funciones por medio de expansiones en series de Taylor. Por ejemplo, para el caso de una función de una sola variable independiente, $Z = h(X)$, el desarrollo en serie de Taylor está dado por:

$$h(\mu[X]) + (\partial h / \partial X)_{\mu[\cdot]} (X - \mu[X]) + (\partial^2 h / \partial X^2)_{\mu[\cdot]} (X - \mu[X])^2 / 2! + \dots \quad (2.2)$$

en donde la expansión se hace alrededor del valor esperado de la variable aleatoria X y $(\partial h / \partial X)_{\mu[\cdot]}$ representa la derivada de la función $h(\cdot)$ con respecto a la variable X , evaluada en su valor esperado. Una vez linealizada la función, se conservan únicamente los términos de primer orden (los términos lineales) y se procede a calcular la esperanza y la varianza de la expresión resultante por medio de métodos conocidos*.

Por último, vale la pena hacer notar que si en un análisis determinístico los valores que se asignan a las variables se toman iguales a sus valores promedio, los resultados obtenidos de dichos análisis coincidirán con los valores esperados de los resultados obtenidos con un modelo probabilístico de primer orden.

* Benjamin, J. y C. A. Cornell, "Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers, Mc Graw-Hill Book Co., N. Y., 1970.

III. METODOLOGIA DE EVALUACION

La evaluación de los sistemas hidráulicos alternativos se hace en un contexto de objetivos múltiples, cuantificando el impacto de cada proyecto sobre la economía del país mediante el uso de *parámetros nacionales* los cuales reflejan los objetivos económicos y sociales de la nación.

La interpretación de los objetivos nacionales para los proyectos de la zona beneficiable lleva a la consideración de los siguientes:

- a. Incremento del estándar de vida de los habitantes del país (medido en términos de la contribución de cada alternativa al consumo agregado nacional).
- b. Mayor desarrollo de la zona beneficiable (medido por la redistribución del ingreso hacia dicha región)
- c. Incremento de los ingresos de los ejidatarios de la zona (medido por la redistribución del ingreso hacia los grupos ejidales de la región).

Los objetivos anteriores son claramente distintos y en cierta forma conflictivos. La contribución de las diferentes alternativas a cada uno de dichos objetivos se determina, por tanto, en forma separada y posteriormente se combinan las diferentes contribuciones por medio de una función de valor o preferencia. Para esto, se adopta una función lineal en la cual el *valor presente neto múltiple* de cada alternativa, VPN_M , se calcula como una combinación convexa de las contribuciones a los objetivos anteriores:

$$VPN_M = VPN_S \alpha_S + VPN_R \alpha_R + VPN_L \alpha_L \quad (3.1)$$

en donde,

$$\alpha_S + \alpha_R + \alpha_L = 1$$

$$\alpha_S, \alpha_R, \alpha_L \geq 0$$

En la ec. (3.1), los parámetros nacionales α_S , α_R y α_L pretenden reflejar la importancia relativa* que el Gobierno Federal, encargado de las inversiones, atribuye a cada uno de los objetivos considerados y por otro lado, el valor presente neto social (VPN_S), regional (VPN_R) y local (VPN_L) miden la contribución de cada alternativa a los objetivos indicados.

En la formulación del modelo de evaluación bajo incertidumbre, los siguientes conceptos se tratan como variables aleatorias:

- Rendimientos de los cultivos
- Costos unitarios de la producción agrícola
- Porcentajes de participación de los conceptos en los costos de la producción agrícola
- Costos de construcción de las obras
- Costos del equipo electromecánico para generación de energía
- Porcentajes de participación de los conceptos en los costos de construcción y equipo
- Costos de operación y mantenimiento

El modelo probabilístico resulta al desarrollar las funciones en series de Taylor, eliminar los términos no lineales y calcular los dos primeros momentos, con lo cual se obtienen expresiones que permiten calcular el valor esperado y la varianza del valor presente neto múltiple para cada alternativa. El valor esperado, $\mu[VPN_M]$, se calcula con la misma expresión usada en el caso determinístico simplemente considerando los valores de las variables como sus valores esperados. Por otro lado, el riesgo que representa cada una de las alternativas de solución estará medido por la varianza $\sigma^2[VPN_M]$ y se calcula en base a los coeficientes de variación de las variables y su nivel de dependencia o independencia estocástica.

* Aunque los valores de los parámetros α_j deberán ser establecidos por el decisor, los siguientes parecen ser aplicables en la mayoría de los casos: α_S - de 0.6 a 1.0; α_R - de 0.0 a 0.3; α_L - de 0.0 a 0.2.

En las expresiones resultantes, a excepción de los rendimientos y costos de producción agrícola (los cuales se suponen perfectamente correlacionados positivamente ya que al aumentar los primeros aumentan también los segundos), se puede suponer que las variables son probabilísticamente independientes para cualquier período de tiempo*. Por otro lado, si se desea un mayor nivel de aproximación, se puede suponer una estructura de correlación diferente de cero en las variables que representan los porcentajes de participación de los conceptos en los diferentes costos (mano de obra, componente externa, etc.).

De lo anterior se ve que resulta sencillo el cálculo de los parámetros $\mu[VPN_M]$ y $\sigma[VPN_M]$ para cada alternativa los que al graficarse en un sistema de ejes coordenados permiten visualizar tanto su bondad como el riesgo asociado. El criterio de selección entre un conjunto de alternativas también se puede establecer en dicho espacio coordenado ya que si en él se trazan rectas de la forma:

$$\mu[VPN_M] - \beta\sigma[VPN_M] = U \quad (3.2)$$

para diferentes valores del parámetro β , será posible definir regiones de aceptación y rechazo de alternativas para diferentes niveles de riesgo. Dado que el valor presente neto es la suma de un número grande de variables, e invocado al Teorema de Límite Central, se puede suponer razonablemente que la variable VPN_M obedece una distribución del tipo normal. En este caso, el nivel de confianza será el área bajo la curva normal estandarizada, calculada para un valor igual a β (en el caso de $\beta = 2$, por ejemplo, se obtiene una "confiabilidad" del 98%, o sea, una probabilidad de que el VPN_M resultante sea menor que cero, igual al 2%).

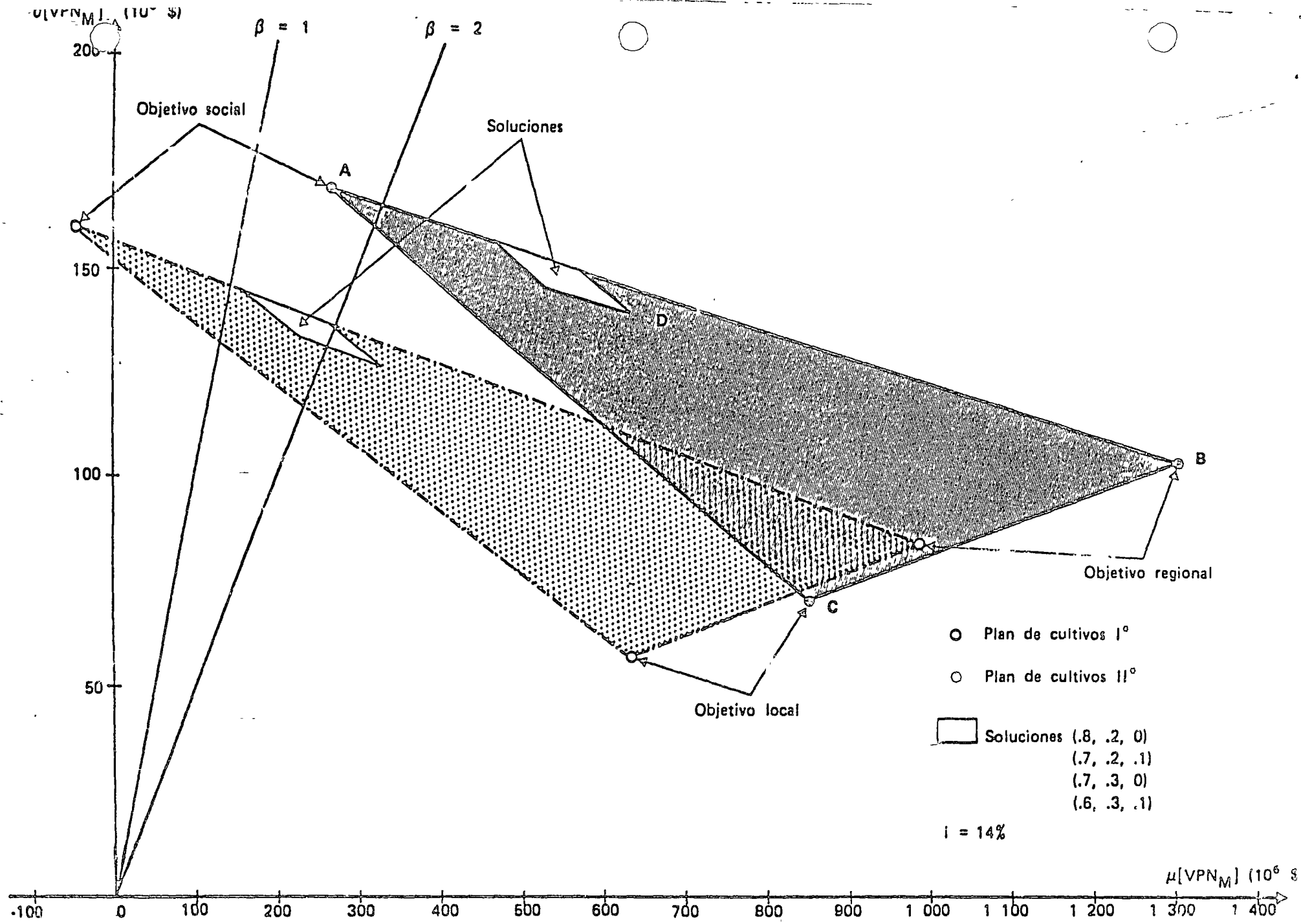
* Díaz Padilla, J., "Sistemas de Estimación de Costos en Etapas de Inflación, su Aplicación y Efecto en el Desarrollo del Sector Agropecuario", Seminario Sobre el Papel de la Ingeniería de Costos en la Planeación del Desarrollo del Sector Agropecuario, SMIC, Oax., Mor., Oct. 1975.

IV. ILUSTRACIONES

Algunos de los resultados obtenidos para los proyectos estudiados se presentan a continuación. En la Fig. 4.1 se indican los resultados de la evaluación de una alternativa en particular del proyecto Elota-Piactla. Variando los valores relativos de los parámetros α_j en la función objetivo, se obtiene un conjunto de valores $(\mu[VPN_M], \sigma[VPN_M])$ que definen un espacio de soluciones. Así por ejemplo, el punto A de la figura se obtiene para una combinación: $\alpha_S = 1$, $\alpha_R = 0$, $\alpha_L = 0$, mientras que el punto B resulta para $\alpha_S = 0$, $\alpha_R = 1$, $\alpha_L = 0$ y el C para $\alpha_S = 0$, $\alpha_R = 0$, $\alpha_L = 1$. El triángulo que tiene como vértices a los puntos A, B y C limita a todas las soluciones factibles; el punto D, por ejemplo, se obtiene para los valores: $\alpha_S = 0.6$, $\alpha_R = 0.3$, $\alpha_L = 0.1$. En la misma figura se observa que si el criterio de aceptación se define con la recta $\beta = 2$, el punto A representa una solución no aceptable a pesar de que en un análisis determinístico sí se hubiera aceptado dicha alternativa. Por otro lado, tomando en cuenta adicionalmente a los objetivos regional y local, la alternativa en estudio satisface el criterio anterior.

En la Fig. 4.2 se muestran los resultados de la evaluación de un conjunto de alternativas para el mismo proyecto Elota-Piactla, en donde se consideran dos objetivos únicamente: el nacional y el regional. El punto A, por ejemplo, representa una solución con un valor esperado del valor presente neto múltiple de la alternativa I ($\mu[VPN_M]$) igual a 309 millones de pesos y una desviación estándar para esta misma variable ($\sigma[VPN_M]$) igual a 142 millones de pesos. Este punto representa una combinación de objetivos $\alpha_S = 1$, $\alpha_R = 0$, o sea que se calculó dándole todo el peso al objetivo social y despreciando el objetivo regional. De igual manera, el punto B de la misma figura representa una combinación de objetivos $\alpha_S = 0$, $\alpha_R = 1$ (todo el peso al objetivo regional). El segmento de recta AB define el conjunto de todas las posibles combinaciones de los pesos relativos de los objetivos social y regional.

Asimismo, el criterio de selección empleado fue aceptar todas aquellas alternativas con un VPN_M positivo para un nivel de confianza mayor del 98% (aquellos proyectos con coordenadas debajo de la recta $\beta = 2$).



* Rendimientos Altos
 ** No incluye afectaciones

FIG. 4.1 RESULTADOS DE LA EVALUACION: ALTERNATIVA IIIb°°

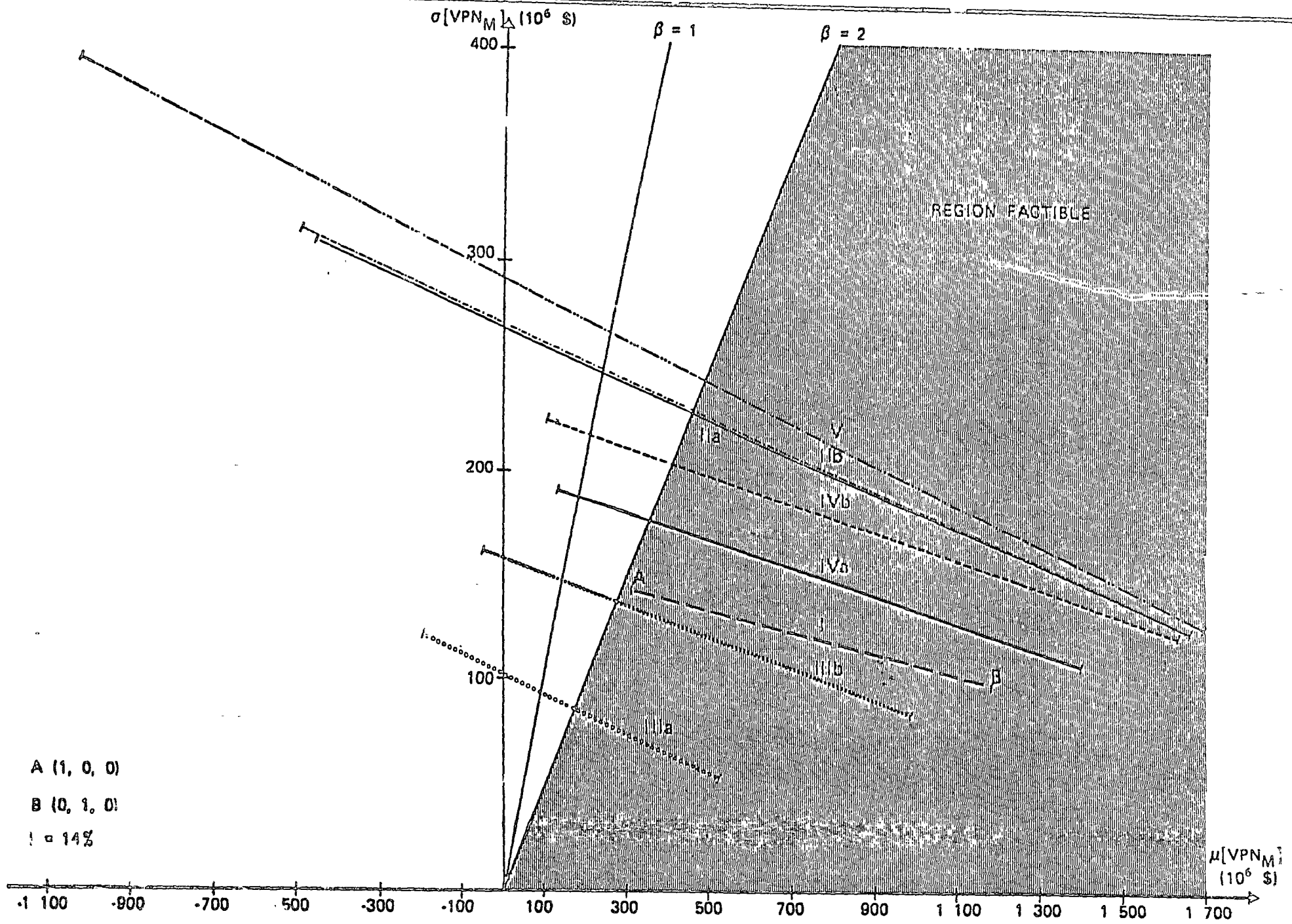


FIG. 4.2 RESULTADOS DE LA EVALUACION: PLAN I, RENDIMIENTOS ALTOS

En la misma figura se observa que si solo interesara el objetivo social, las alternativas I, IVa y IVb resultan con un VPN_M positivo y por lo tanto, atractivas desde el punto de vista determinístico. Sin embargo, considerando un criterio probabilístico, solo la alternativa I se encuentra en la región factible de acuerdo a lo mencionado anteriormente, y las alternativas IVa y IVb se rechazan según este criterio ya que tienen un fuerte nivel de incertidumbre.

Finalmente, en la Fig. 4.3 se muestra la interpretación probabilística de la tasa interna de retorno para una de las alternativas del proyecto Aguamilpa. De la figura puede verse que desde el punto de vista determinístico, este índice es igual al 39% aunque este valor se ve acompañado de una incertidumbre muy grande.

V. COMENTARIOS FINALES

De los resultados obtenidos puede verse que la metodología propuesta es sumamente *pragmática y factible* de aplicar a problemas reales. Con el enfoque aquí sugerido, la única información que se necesita para incorporar los efectos de la incertidumbre en la estimación de costos son ciertas medidas de la variabilidad de cada una de las componentes (en forma de coeficientes de variación, por ejemplo) y de los niveles de correlación entre las variables. Para esto último, será importante entender a los fenómenos que controlan las relaciones entre las variables y, en última instancia, invocar hipótesis de independencia o de dependencia perfecta según sea el caso. Sin embargo, estas hipótesis se formularán para las componentes individuales de los costos y no para los beneficios netos* Aunque sea de manera aproximada, los efectos de la

* Los modelos probabilísticos propuestos a la fecha se basan en la hipótesis de que "se conoce" la variabilidad de los beneficios netos para cada uno de los períodos que definen el horizonte de evaluación. Sin embargo, esta suposición es poco realista en la práctica pues aunque sí es factible estimar la incertidumbre de las componentes individuales que integran a cada uno de los costos individuales, no es sencillo efectuar dicha estimación para los beneficios netos los cuales, en algunos casos, pueden ser funciones complejas de sus componentes.

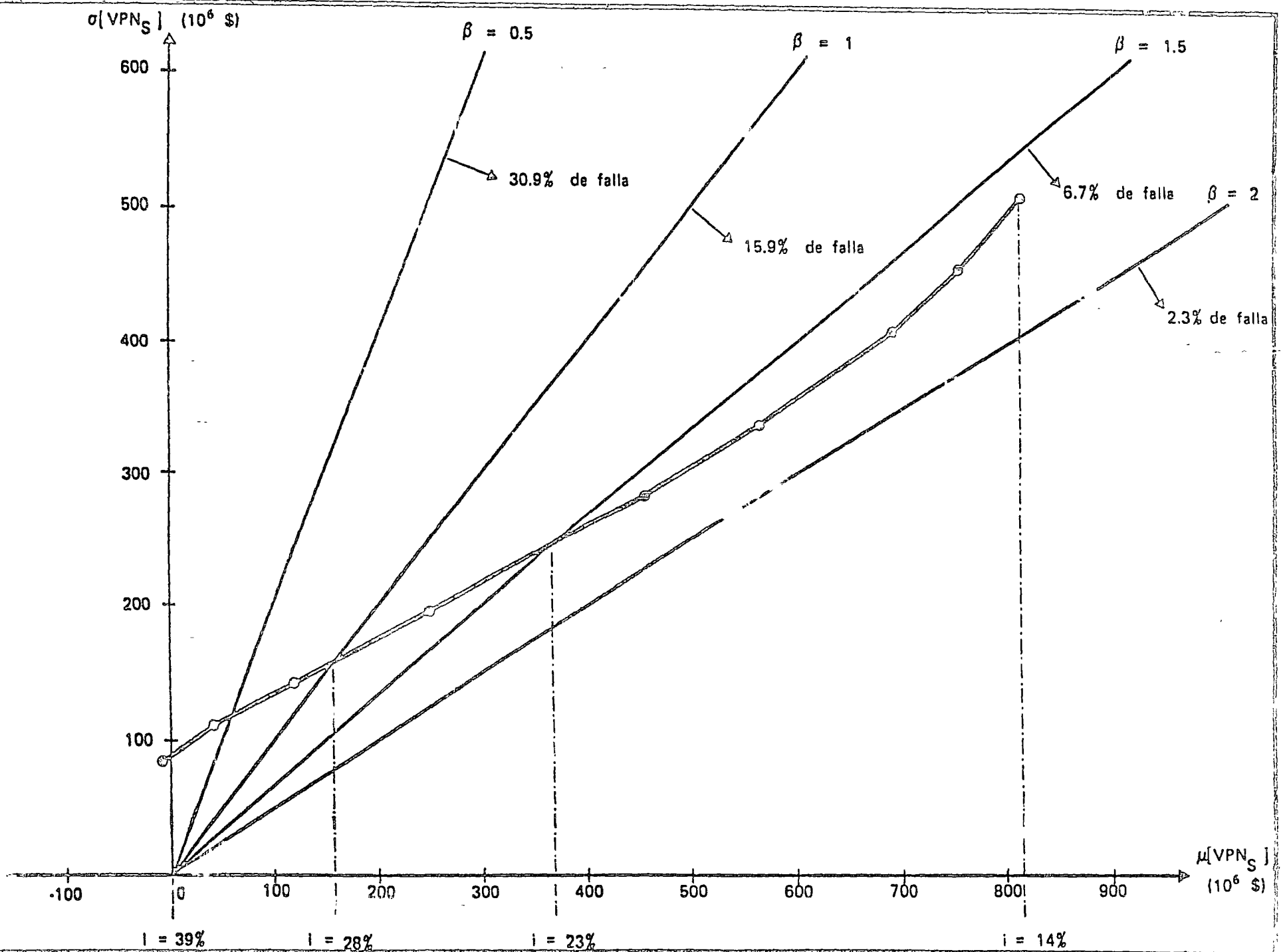


FIG. 4.3 ALTERNATIVA I: TASA INTERNA DE RETORNO

dependencia entre las variables deben de incluirse en los análisis. En algunas ocasiones será razonable aceptar la hipótesis de independencia probabilística para algunas de las variables y para un momento dado, pero en general no será posible argumentar esta hipótesis para los costos incurridos durante varios períodos de tiempo. Es decir, debido a que estas variables pueden ser funciones de las mismas componentes durante diferentes períodos de tiempo, en general la correlación puede ser alta y el no tomarla en cuenta puede conducir a variabilidades de las eficiencias de las alternativas mucho menores que las verdaderas y por lo tanto del lado de la inseguridad.

Vale la pena mencionar nuevamente que los resultados obtenidos con este tipo de análisis constituyen aproximaciones a las soluciones exactas. El grado de aproximación dependerá del grado de no linealidad de las funciones y de la forma que tengan las funciones de densidad de probabilidades de las variables. Por ejemplo, si se tiene una función lineal de variables gaussianas, entonces los resultados obtenidos por medio de análisis de primer orden coincidirán con los exactos. Al ir perdiendo la función su carácter lineal, al irse alejando las funciones de probabilidad de distribuciones simétricas y unimodales, y al ir aumentando la incertidumbre de las variables, los resultados se van haciendo cada vez menos exactos. Sin embargo, el análisis de problemas prácticos dentro de un marco de incertidumbre tiene necesariamente que apoyarse en enfoques pragmáticos como el señalado en este trabajo, principalmente en aquellas situaciones en que no se puedan justificar funciones de densidad de probabilidades específicas.





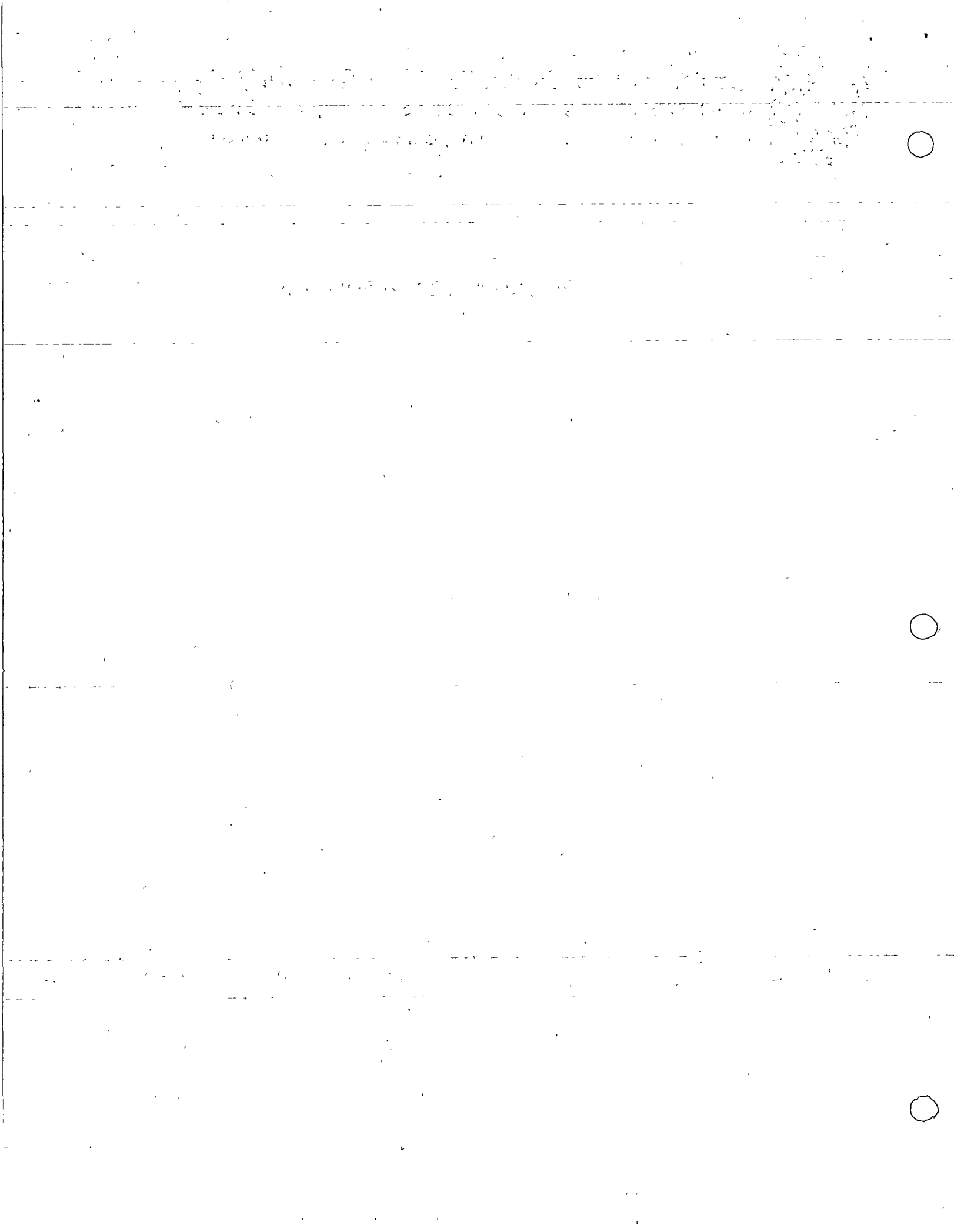
centro de educación continua
división de estudios superiores
facultad de ingeniería, unam



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

TEORIA DE DECISIONES

ING. A.A. LOPEZ TOLEDO
Nov. 1977



APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS

(Centro de Educación Continua

DESFI - UNAM

TEORIA DE DECISIONES

Dr. As. López Toledo

1. INTRODUCCION

Constantemente nos encontramos tomando decisiones en nuestra vida cotidiana. En general puede decirse que todas las acciones que se realizan en un día, con excepción de las biológicas propias del cuerpo humano, son decisiones que tomamos, basadas normalmente en información disponible.

Muchas de estas decisiones se hacen intuitivamente y no requieren de mayor análisis. Sin embargo, cuando alguna decisión puede conducir a diferentes consecuencias que se distinguen por los beneficios o pérdidas que nos ocasionan, conviene realizar un análisis de nuestros posibles cursos de acción y sus correspondientes consecuencias. En este caso, la teoría de decisiones puede proporcionar las herramientas que apoyen nuestras decisiones y nos permitan seleccionar de manera racional la más conveniente.

2. EL CONCEPTO DE INCERTIDUMBRE

La condición de incertidumbre se refiere al desconocimiento del valor verdadero de alguna o algunas variables relacionadas al proceso de decisión. En particular, es de interés la incertidumbre acerca del estado de la naturaleza, o estado real del medio en que se toma la decisión.

Formalmente, al tomar una decisión (un curso de acción), dependiendo del estado real de la naturaleza, se observará la consecuencia de la decisión, que puede estar expresada en términos de pérdidas y ganancias.

Cuando la incertidumbre acerca del estado de la naturaleza se reduce, o equivalentemente se tiene un gran conocimiento acerca de este estado, las consecuencias de una decisión se pueden prever con alto grado de confianza. En el límite, cuando se conocen exactamente las consecuencias de una decisión, se dice que la decisión se hace bajo condiciones de certeza.

3. TABLAS DE PERDIDAS Y GANANCIAS

Las pérdidas o ganancias que miden las consecuencias de una decisión pueden expresarse en unidades que representen el cambio neto que experimenta nuestra situación o estado antes de tomar la decisión, por ejemplo, en unidades monetarias.

Considérese por ejemplo el caso de tener que decidir por alguna de dos acciones A y B. Por su parte, los estados posibles de la naturaleza o eventos relacionados a nuestra decisión pueden ser dos I y II. La tabla de pérdidas y ganancias se presenta normalmente como sigue:

| | | Evento | |
|----------|---|--------|--------|
| | | I | II |
| Decisión | B | \$ 30 | - \$ 5 |
| | A | \$ 5 | \$ 20 |

Tabla 1

Por ejemplo, A puede ser la decisión de perforar en una zona dada en busca de petróleo y B la decisión de no perforar. Los eventos podrán ser I el encontrar petróleo y II el no encontrar petróleo. Entonces las pérdidas y ganancias en

unidades monetarias, (millones de pesos) para cada combinación decisión - estado de la naturaleza son los elementos de la tabla. Dado que las pérdidas pueden representarse como ganancias con signo negativo, los elementos de la tabla son en general beneficios B , que dependen de las variables de decisión y eventos:

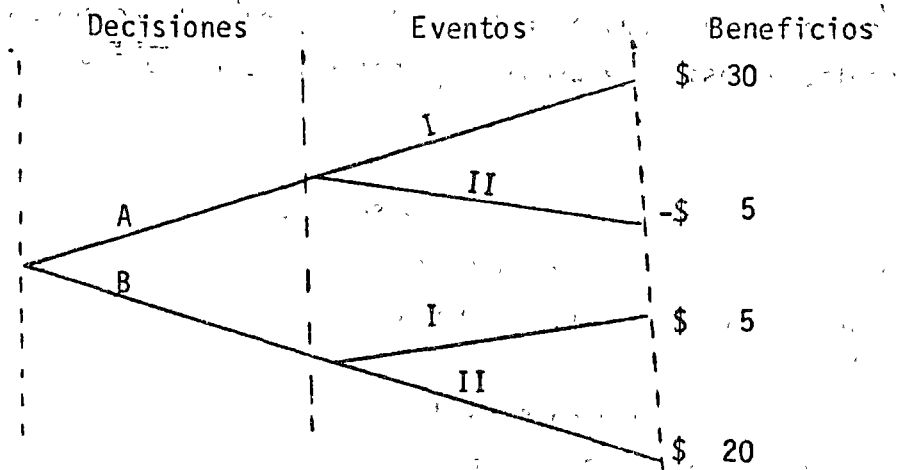
$$B(A, I) = \$ 30$$

$$B(B, I) = \$ 5$$

$$B(A, II) = -\$ 5$$

$$B(B, II) = \$ 20$$

En ocasiones es conveniente representar las combinaciones decisión - eventos por un árbol de decisiones:



Este árbol de decisiones es particularmente útil para problemas que involucran decisiones sucesivas y eventos en el tiempo.

4. CRITERIOS NO - PROBABILISTICOS PARA DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE

Dado un problema de toma de decisiones, la decisión o curso de acción que se tome traerá como consecuencia un beneficio. El problema de toma de decisiones consiste en decidir por aquella acción que traiga como consecuencia máximos beneficios para el decisor.

La definición de beneficio máximo o criterio de decisión para un decisor no es única. Los criterios más comúnmente utilizados en teoría de decisiones pueden clasificarse como probabilísticos y no - probabilísticos, dependiendo de la información disponible al decisor y del uso que le de en la toma de decisiones. Entre los últimos se encuentran los siguientes:

CRITERIO DE MAXIMIN

La regla de decisión en este criterio dice: para cada acción, encuentre el mínimo beneficio posible y escoja la acción para la cual este mínimo beneficio es el mayor.

En este criterio, el decisor está suponiendo que para cada acción que tome, el peor estado de la naturaleza ocurrirá. El decisor trata entonces de maximizar los mínimos beneficios que podría obtener.

El criterio es desde luego conservador y utiliza poca información de la que se tiene disponible. Ignora por ejemplo la magnitud de los beneficios que no son mínimos para cada decisión y pueden encontrarse ejemplos en que los resultados de esta regla de decisión no sean muy razonables.

En el ejemplo mostrado anteriormente el decisor optaría por la acción B de acuerdo a este criterio, esperando que su ganancia fuese al menos de \$ 5. En este caso, la decisión se observa conservadora pero es razonable.

Considérese sin embargo, la siguiente tabla de pérdidas y ganancias:

| | | ESTADO | | |
|----------|---|--------|-------|----------------------------|
| | | I | II | |
| Decisión | A | 10 000 | -0.01 | Decisión Maximin: Acción B |
| | B | 0 | 0 | |

TABLA 2

En esta situación, la regla de maximin da un resultado poco realista.

CRITERIO DE MAXIMAX

La regla de decisión maximax dice: para cada acción, encuentre el máximo beneficio y escoja la acción para la cual este máximo beneficio es el mayor.

En este criterio, el decisor está suponiendo que para cada acción que tome el estado el de la naturaleza será el mejor y trata entonces de maximizar los máximos beneficios que podría obtener.

En contraste con el anterior, este criterio es optimista y para el ejemplo de la Sección 2 (Tabla 1), indicaría que la acción a tomar es la A, o sea, que perforará y espera encontrar petróleo.

Sin embargo, al igual que en el caso anterior, ignora información relativa a los otros beneficios y se pueden obtener por tanto resultados no realistas, como se observa en el siguiente ejemplo:

| | | EVENTO | | |
|----------|---|---------|--------|----------------------------|
| | | I | II | |
| Decisión | A | 100 000 | 99 999 | Decisión maximax: Acción B |
| | B | 100 001 | 0 | |

TABLA 3

(Observe sin embargo, que las tablas de pérdidas y ganancias que conducen a resultados poco realistas son muy especiales, en el sentido que los beneficios cambian drásticamente de una acción a otra).

CRITERIO DE PERDIDA MINIMAX

La regla de decisión en este criterio dice: para cada acción, encuentre la pérdida más grande y escoja la acción para la cual ésta es mínima.

En el contexto de teoría de decisiones, el concepto de pérdida se interpreta como un costo de oportunidad y, para cada combinación decisión - estado de la naturaleza, este costo es la diferencia entre el beneficio asociado y el máximo beneficio que se podría obtener para el estado de la naturaleza dado.

Dado que este costo de oportunidad equivale al beneficio adicional que se podría haber obtenido al escoger la acción para la cual el estado de la naturaleza dado es el mejor, el criterio se conoce también como el de arrepentimiento minimax.

La tabla de pérdidas (costos de oportunidad) asociadas a las 3 tablas anteriores son respectivamente:

| | | EVENTO | |
|----------|---|--------|----|
| | | I | II |
| Decisión | A | 0 | 25 |
| | B | 25 | 0 |

TABLA 1'

| | | EVENTO | |
|----------|---|--------|------|
| | | I | II |
| Decisión | A | 0 | 0.01 |
| | B | 10 000 | 0 |

TABLA 2'

| | | EVENTO | |
|----------|---|--------|--------|
| | | I | II |
| Decisión | A | 1 | 0 |
| | B | 0 | 99 999 |

TABLA 3'

Según el criterio de pérdida minimax para la Tabla 1', el decisor es indiferente entre A y B, escogería la acción A en las Tablas 2' y 3'. Se observa por tanto que la regla de pérdida minimax no es tan pesimista y conservadora como la regla maximin ni tan optimista y arriesgada como la regla maximax.

5. CRITERIOS PROBABILISTICOS DE DECISION BAJO INCERTIDUMBRE

En ocasiones el decisor cuenta con alguna información relativa a los estados de la naturaleza. Cuando esta información se manifiesta en forma de probabilidades asociadas a los estados de la naturaleza es posible utilizar conceptos de la teoría de probabilidad para evaluar criterios como valores esperados de los beneficios de las acciones a tomar.

En particular, si $B(A_i, I_j)$ son los beneficios que se obtienen al tomar la acción A_i y el estado de la naturaleza resulta I_j y $p(I_j)$ es la probabilidad de que el estado de la naturaleza sea I_j , entonces los beneficios esperados al tomar la acción A_i pueden calcularse por:

$$E \{B/Acción A_i\} = \sum_j B(A_i, I_j) p(I_j)$$

donde la sumatoria es sobre los estados de la naturaleza.

La distribución de probabilidades sobre los estados, $p(I_j)$ puede obtenerse de varias maneras. Por ejemplo, a priori puede estimarse cuales son las oportunidades relativas (probabilidades) de cada estado de la naturaleza, bien sea de manera subjetiva o a través de datos históricos relativos al tipo de problema de decisión que se trata de resolver. También puede tenerse información a posteriori relevante al problemas en estudio que afecte nuestro conocimiento a priori del mismo.

CRITERIO DEL BENEFICIO ESPERADO

Este criterio es fundamental en la Teoría de Decisiones y establece que el decisor escoja la acción con el máximo beneficio esperado.

De una manera equivalente, el criterio de minimizar la pérdida máxima conduce a los mismos resultados.

El criterio del beneficio esperado incluye los criterios no - probabilísticos de la sección anterior, cuando la distribución de probabilidad $p(I_j)$ permite que solo un estado de la naturaleza pueda ocurrir (si este es k , $p(I_k) = 1$, $p(I_j) = 0$, toda $j \neq k$). El criterio es en este sentido por tanto más general que los mencionados y es justificado en la teoría de decisiones en función de que cumple con ciertas características deseables en un criterio de decisión (esta justificación está fuera del alcance del curso; consiste a grandes rasgos en el establecimiento de un perfil ideal para criterios de decisión y la observación de que el criterio del beneficio esperado los cumple).

En el ejemplo de la Tabla 1, considérese por ejemplo que se tiene conocimiento de que existen buenas oportunidades de encontrar petróleo y que esto es manifestado por la distribución de probabilidades:

$$p(I) = 0.8$$

$$p(II) = 0.2$$

Entonces:

$$E \{B/\text{Acción A}\} = 30 \times 0.8 - 5 \times 0.2 = \$ 23$$

$$E \{B/\text{Acción B}\} = 5 \times 0.8 + 20 \times 0.2 = \$ 8$$

y la decisión que maximiza el beneficio esperado es la acción A de realizar la perforación.

Para la Tabla 1' de pérdidas asociadas a este problemas, se tiene que:

$$E \{P/\text{Acción A}\} = 0 \times 0.8 + 25 \times 0.2 = \$ 5$$

$$E \{P/\text{Acción B}\} = 25 \times 0.8 + 0 \times 0.2 = \$ 20$$

y la acción que minimiza la pérdida asociada es la acción A.

ESTRATEGIAS BAYESIANAS

En ocasiones se tiene información relevante al problema en análisis en forma de observaciones Z_k que permiten mejorar nuestro conocimiento del estado de la naturaleza.

En este caso, la distribución a priori $p(I_j)$ de los estados de la naturaleza que refleja nuestro conocimiento de estos estados, es reemplazada por una distribución a posteriori $p(I_j/Z_k)$ de los estados en el cálculo de los beneficios esperados. La distribución a posteriori $p(I_j/Z_k)$ refleja un mejor conocimiento del estado de la naturaleza al utilizar la información Z disponible sobre estos estados.

Para cada observación Z_k se tiene una distribución a posteriori sobre los estados con la cual se obtiene el beneficio esperado de las acciones y, se selecciona la acción óptima que conduce al máximo beneficio esperado. Para un conjunto de n diferentes observaciones Z_1, \dots, Z_n , que se puedan tener, se tendrá un conjunto de n acciones óptimas correspondientes. El conjunto

de parejas observación - decisión óptima constituye lo que se conoce como una estrategia bayesiana.

Las distribuciones a posteriori $p(I_j/Z_k)$ se obtienen de la regla de Bayes:

$$p(I_j/Z_k) = \frac{p(Z_k/I_j) p(I_j)}{p(Z_k)}$$

$$= \frac{p(Z_k/I_j) p(I_j)}{\sum_{i=1}^n p(Z_k/I_i) p(I_i)} \quad k = 1, \dots, n$$

donde $p(I_j)$ es la distribución a priori de los estados de la naturaleza y $p(Z_k/I_j)$ es la probabilidad condicional de observar Z_k cuando el verdadero estado es I_j .

Típicamente, $p(I_j)$ y $p(Z_k/I_j)$ se obtienen de datos históricos relativos al problema de decisión en análisis.

Por ejemplo, en el problema de decidir sobre la perforación (Tabla 1) en busca de petróleo, $p(I)$ puede ser el porcentaje de ocasiones en que se ha encontrado petróleo al perforar en medios similares al de estudio. Supóngase que antes de tomar una decisión sobre una perforación en busca de petróleo se hacen pequeñas perforaciones a 5 metros y se analiza el subsuelo. Suponga que se ha observado en estas perforaciones que a los 5 metros la dureza del subsuelo ha sido en dos rangos $a \leq Z_1 \leq b$ y $c \leq Z_2 \leq d$; entonces $p(Z_1/I)$ puede ser el porcentaje de ocasiones en que se ha observado Z_1 a los 5 metros cuando se ha encontrado petróleo al continuar la perforación y $p(Z_2/I)$ es el porcentaje de ocasiones en que se ha observado Z_2 cuando se ha encontrado

petróleo al continuar la perforación y similarmente, $p(Z_1/II)$ y $p(Z_2/II)$ son los porcentajes de ocasiones en que se ha observado Z_1 y Z_2 cuando no existe petróleo en el subsuelo.

En este ejemplo, las probabilidades a posteriori $p(I/Z_1)$, $p(II/Z_1)$ y $p(I/Z_2)$, $p(II/Z_2)$ reflejan nuestro conocimiento del estado de la naturaleza cuando en nuestro problema en estudio se ha observado Z_1 ó Z_2 a los 5 metros de la perforación de prueba.

Si $p(I) = 0.8$, $p(II) = 0.2$, $p(Z_1/I) = 0.7$, $p(Z_2/I) = 0.3$, $p(Z_1/II) = 0.4$, $p(Z_2/II) = 0.6$, entonces:

$$p(I/Z_1) = \frac{0.7 \times 0.8}{0.7 \times 0.8 + 0.4 \times 0.2} = 0.875$$

$$p(II/Z_2) = \frac{0.4 \times 0.2}{0.7 \times 0.8 + 0.4 \times 0.2} = 0.125$$

y

$$p(I/Z_2) = \frac{0.3 \times 0.8}{0.3 \times 0.8 + 0.6 \times 0.2} = 0.667$$

$$p(II/Z_2) = \frac{0.6 \times 0.2}{0.3 \times 0.8 + 0.6 \times 0.2} = 0.333$$

El beneficio esperado de cada acción para las pérdidas y ganancias de la Tabla 1, considerando las probabilidades a priori es entonces:

| | | OBSERVACION | |
|--------|---|-------------|---------|
| | | Z_1 | Z_2 |
| Acción | A | \$ 25.6 | \$ 18.3 |
| | B | \$ 6.87 | \$ 10 |

Ejemplo:

$$E \{ \text{Benef/A}, Z_1 \} = 30 \times 0.875 - 5 \times 0.125 \\ = 25.6$$

$$E \{ \text{Benef/B}, Z_1 \} = 5 \times 0.875 + 20 \times 0.125 \\ = 6.87$$

La estrategia bayesiana es entonces:

Cuando se observa Z_1 decida A

Cuando se observa Z_2 decida A

6. EL CONCEPTO DE UTILIDAD

En los ejemplos anteriores, el criterio de beneficio esperado considera las probabilidades de los estados de la naturaleza y supone que los pérdidas y ganancias en unidades monetarias reflejan los beneficios reales del decisor. Sin embargo, existe un factor adicional que debe considerarse y que implica que esta suposición no es siempre cierta: la actitud hacia el riesgo del decisor.

El concepto de utilidad permite tomar en cuenta esta actitud al transformar la escala monetaria de consecuencias de las acciones a una escala de utilidad.

La actitud del decisor hacia el riesgo se observa fácilmente en el siguiente ejemplo:

| | | ESTADO | | |
|--------------------|---|----------|--------|-----------|
| | | I | II | E {Benef} |
| Decisión | A | 0 | 0 | 0 |
| | B | - 10 000 | 10 000 | 0 |
| P(I _j) | | 0.5 | 0.5 | |

TABLA 4

Suponga que esta tabla se interpreta como una apuesta al decisor: si toma la acción A entonces su riqueza no se altera, independientemente del estado de la naturaleza, pero si toma la decisión B, entonces ganará \$ 10 000 con probabilidad 0.5 o perderá -\$ 10 000 con la misma probabilidad.

Ambas decisiones conducen a un mismo beneficio esperado $E\{Benef\} = 0$ y en base a este criterio el decisor sería indiferente por la acción A o B. Sin embargo, un decisor que tratara de evitar el riesgo incluido en la acción B tendería a favorecer a la acción A y solo sería indiferente entre A y B cuando la probabilidad de ganar \$ 10 000 fuese mayor que la probabilidad de perder \$ 10 000. Por ejemplo, podría ser indiferente si:

$$P(I) = 0.6$$

$$P(II) = 0.4$$

en cuyo caso: $E\{Benef/B\} = 10\,000 \times 0.6 - 10\,000 \times 0.4 = \$ 2\,000$

Esta actitud del decisor puede tomarse en cuenta a través de funciones de utilidad, que relacionan valores monetarios con una escala de utilidad. Cuando el criterio de decisión consiste en tomar la decisión que maximiza la utilidad esperada del decisor, la escala de utilidad que se utilice puede ser arbitraria. Convenientemente se podrá escoger entre 0 y 1 ó entre 0 y 100, por ejemplo.

Los tipos de funciones de utilidad que se presentan típicamente se ilustran en la Fig. 1 y cumplen con las siguientes propiedades:

- i) Si el beneficio B_1 es preferido al beneficio B_2 , entonces la utilidad de B_1 es mayor que la de B_2 , $u(B_1) > u(B_2)$, y si ningún beneficio es preferido entonces $u(B_1) = u(B_2)$.
- ii) Si el decisor es indiferente entre (a) recibir un beneficio de B_1 con seguridad y (b) entrar a una lotería con probabilidad p de recibir B_2 y $1 - p$ de recibir B_3 , entonces:

$$u(B_1) = pu(B_2) + (1 - p) u(B_3)$$

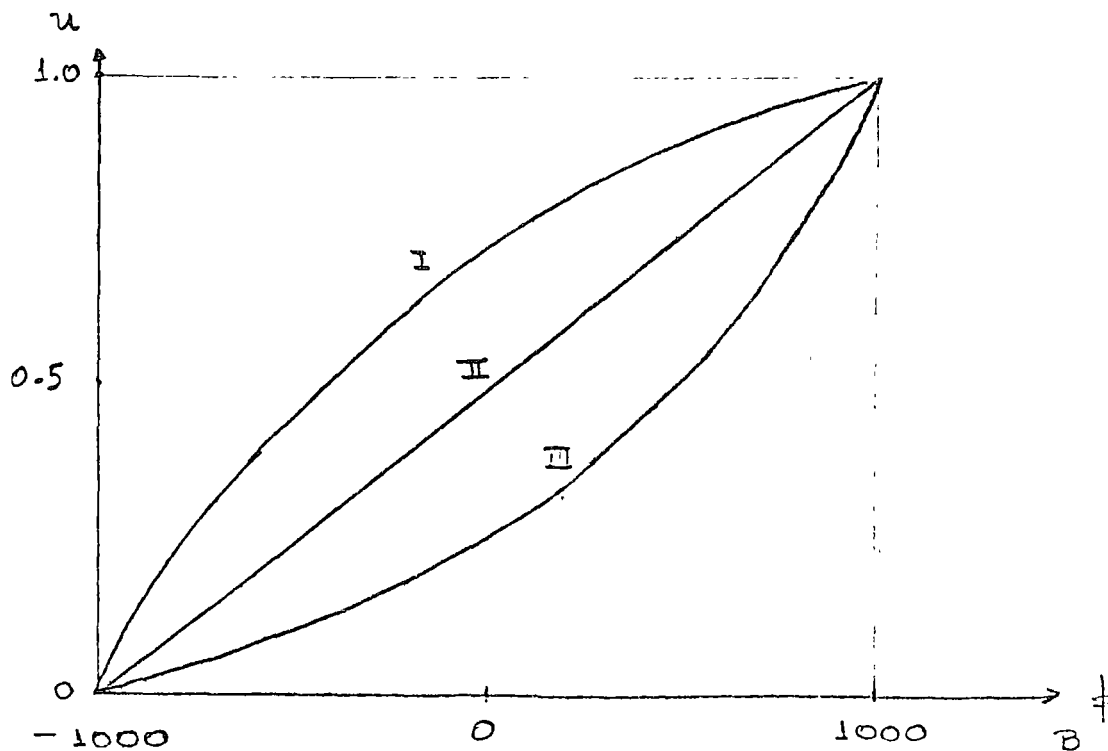


FIG. 1 FUNCIONES DE UTILIDAD

En la figura, la función de utilidad I corresponde a un decisor que trata de evitar el riesgo (es conservador); la curva III corresponde a un decisor que trata de tomar riesgos (es jugador); finalmente, la línea II es sólo un reescalamiento de la escala monetaria y el decisor maximiza el beneficio esperado al maximizar su utilidad esperada.

Una vez conocida la función de utilidad del decisor, la acción A_i que maximiza su utilidad esperada puede fácilmente determinarse a través de:

$$E \{u/A_i\} = \sum_j u(B(A_i, I_j)) p(I_j)$$

donde $B(A_i, I_j)$ es el beneficio (pérdida o ganancia monetaria) que resulta al tomar la acción A_i cuando el estado de la naturaleza es I_j , $u(B(A_i, I_j))$ es la utilidad de este beneficio y $p(I_j)$ es la probabilidad de que el estado de la naturaleza sea I_j .

Asimismo, el concepto de estrategia bayesiana puede también aplicarse para determinar la estrategia que maximice la utilidad esperada del decisor en función de observaciones relativas al problema de decisión en estudio.

Finalmente, para determinar la función de utilidad del decisor se puede resumir a preguntas sencillas basadas en la propiedad (ii) de esta función. Por ejemplo, considérese nuevamente el problema de la Tabla 1.

En primer lugar, se obtiene el rango de la escala monetaria de beneficios, identificando los extremos de ganancias y pérdidas. En nuestro caso:

$$B_{\max} = 30$$

$$B_{\min} = -5$$

A continuación, para cualquier beneficio B , es evidente que $u(B_{\min}) \leq u(B) \leq u(B_{\max})$. Supóngase que $u(B_{\min}) = 0$, $u(B_{\max}) = 1$.

Ahora, considere las acciones alternativas:

A_1 : Recibir B con seguridad

A_2 : Recibir B_{\max} con probabilidad p y B_{\min} con probabilidad $1 - p$

De acuerdo al criterio de utilidad esperada, el decisor escogerá la acción con mayor utilidad esperada.

Estas son:

$$E \{u/A_1\} = u(B)$$

$$E \{u/A_2\} = pu(B_{\max}) + (1 - p) u(B_{\min}) = p$$

entonces, si $u(B) > p$, la acción A_1 será seleccionada y si $u(B) < p$ la acción A_2 será seleccionada; pero si $u(B) = p$, el decisor será indiferente entre A_1 y A_2 .

En nuestro ejemplo, valores de utilidad de beneficios en el rango de - \$ 5 a \$ 30 se obtendrán como sigue. Por ejemplo, para $B = \$ 20$ se tienen las alternativas:

A_1 = Recibir \$ 20 con seguridad

A_2 = Recibir \$ 30 con probabilidad p y - \$ 5 con probabilidad $1 - p$

Suponga que el decisor puede asegurar que A_1 es claramente preferible a A_2 cuando $p = 0.7$ y que por el contrario A_2 es preferible cuando $p = 0.95$ y que después de un análisis decide que es indiferente entre ambas cuando $p = 0.85$. Entonces, de acuerdo a nuestro análisis anterior, $u(20) = 0.85$.

Similarmente, para $B = \$ 5$ considérese:

A_1 = Recibir \$ 5 con seguridad

A_2 = Recibir \$ 30 con probabilidad p y - \$ 5 con probabilidad $1 - p$

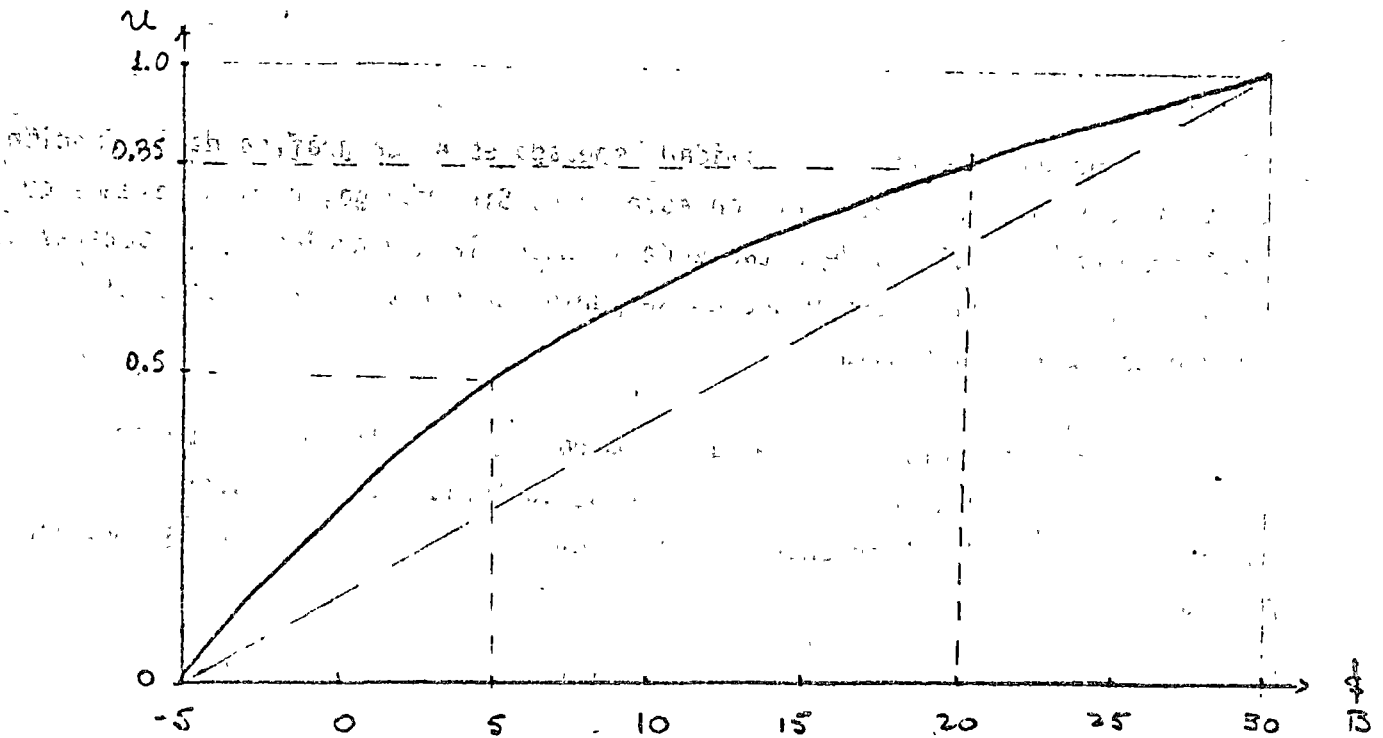


FIG. 2 FUNCIONES DE UTILIDAD. EJEMPLO

y nuestro decisor indica que es indiferente entre A_1 y A_2 cuando $p = 0.5$, luego $u(5) = 0.5$.

La función de utilidad en nuestro ejemplo se ilustra en la Fig. 2. En este caso, los 4 puntos cuya utilidad ha sido calculada permiten obtener la tabla de utilidad del problema de decisión asociado a la Tabla 1:

| | | ESTADO | |
|----------|---|--------|-----|
| | | I | II |
| Decisión | A | 1 | 0 |
| | B | 0.85 | 0.5 |

El valor esperado de la utilidad para cada acción cuando $p(I) = 0.8$, $p(II) = 0.2$, es:

$$E\{u/A\} = 1 \times 0.8 + 0 \times 0.2 = 0.8$$

$$E\{u/B\} = 0.85 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2 = 0.78$$

y la decisión que maximiza la utilidad esperada es A. La gráfica de la función de utilidad no ha sido necesaria en este caso. Sin embargo, para problemas que involucran un alto número de estados de la naturaleza y acciones, el obtener la curva a partir de un número reducido de puntos presenta ventajas para el cálculo de la acción óptima.

A continuación se incluye un ejemplo, tomado del libro "Decisions Under Uncertainty" por A. N. Halter y G. W. Dean, editorial South-Western Publishing Co., 1971, referente a aplicaciones de la Teoría de Decisiones en Agricultura.

CHAPTER VII

Applications in Agriculture I

In this chapter we apply Bayesian decision theory to a stocking rate problem that is typical of many problems in agriculture. We present the problem in three stages of complexity; first assuming no prior distribution, then a prior distribution, and finally a posterior distribution. Throughout this chapter we assume that monetary values adequately reflect payoffs; that is, we assume a linear utility function for money.

THE STOCKING RATE PROBLEM

There are 30 million acres of foothill land in California suited primarily for livestock grazing. Rainfall in these areas is concentrated in the winter months with essentially no rainfall for at least six months in the summer and fall. Range land that is a lush green during the rainy season becomes parched and tinder-dry in late summer and fall. Thus, the feed supply is highly seasonal, with large amounts available during the winter and spring and little during the summer and fall. Some of the excess feed during the winter and spring can be reserved for summer or fall grazing although it loses a substantial portion of its feed value in the drying process. Year-around grazing operations are therefore feasible, although some supplemental feeding is required during late fall and early winter. The feed supply is not only variable seasonally, but between years, depending on rainfall, temperature, wind, and other factors. Historical studies show that feed supply in a "good" year can be double that in a "bad" year.

One fairly common type of livestock operation in this area is a beef cow herd (cow-calf operation). Brood cows graze year-around on the range land, and their calves are sold at weaning time (8 months of age) weighing around 500 pounds. This type of organization is rather inflexible in that cow numbers cannot be changed easily from year to year in response to weather conditions and feed supply. The rancher's dilemma is to decide on the size of herd to maintain: if the herd is too small, feed will be wasted in many years; if the herd is too large, the feed supply in many years will be inadequate, and expensive supplemental feeds must be purchased.

THE STOCKING PROBLEM UNDER COMPLETE IGNORANCE

We assume initially that the rancher has no idea of the probability distribution of range conditions (that is, no prior information), although this is probably quite unrealistic. As we have argued earlier, it is in fact extremely difficult to think of realistic problems where the decision maker does not have some information, however vague, about the probability of various states of nature.

Assume a rancher with 3,000 acres of range land of varying quality. In a "normal" year, the range produces sufficient feed to carry a 360-cow beef herd, with calves sold at an 8-month weight of 500 pounds. In a "very poor" year there is sufficient feed for only about 230 cows; in an "excellent" year the range can carry 460 cows. To analyze this problem in a decision framework, we define the three components common to all decision models - the states of nature, the actions, and the payoff for each state-action combination. This information is summarized in Table 7.1. We define six states of nature (range conditions) from θ_1 (very poor) to θ_6 (excellent). The six actions (herd sizes) range from a_1 (230 cows) to a_6 (460 cows). Thus, the six actions are selected to match the six states of nature, that is, action a_1 is the herd size which utilizes the feed produced in a very poor year (θ_1), a_2 the herd size that utilizes the feed produced in a poor year (θ_2), and so forth.

Each payoff entry in the body of Table 7.1 is the result of a budgeting computation indicating the net farm income that would accrue to the rancher for the specified action and state of nature. An example budget is shown in Table 7.2, indicating a net income of \$5,800 for a 360-cow herd (a_4) with normal range conditions (θ_4). Payoff entries for the elements off the diagonal in Table 7.1 are obtained by adjusting net income either for (1) the additional cost of supplemental feeding (for entries above the diagonal), or (2) the small additional income from excess feed (hay) that can be sold (for entries below the diagonal).

In most problems of this type some minor questions arise concerning which costs to include in arriving at the payoff values. Would annual cash income be a more realistic measure of payoff than deducting depreciation (a deferrable cost) to arrive at net farm income? Should unpaid interest on investment (opportunity cost) be deducted in arriving at the payoffs? The general rule is that if a cost differs from cell to cell of the table, it must be considered as a cost in arriving at a complete comparison of payoffs. Thus, in Table 7.1 depreciation is included as a cost because it differs by actions, while unpaid interest is omitted because it is the same for all entries in the table.

TABLE 7.1
PAYOFF TABLE FOR A COW-CALF OPERATION UNDER UNCERTAINTY OF RANGE CONDITIONS

| States of Nature: Range Conditions (θ_i) | Actions: Herd Size (a_i) | | | | | | Criterion | |
|---|------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------------|------------------------|
| | a_1 230 Cows | a_2 280 Cows | a_3 320 Cows | a_4 360 Cows | a_5 415 Cows | a_6 460 Cows | Hurwicz $\alpha = .6$ | Insufficient Reason |
| | Dollars | | | | | | | |
| Very poor | -4,580 | -6,290 | -8,260 | -10,040 | -12,690 | -14,930 | 0.6 | $\frac{1}{6}$ |
| Poor | -3,330 | -870 | -2,090 | -3,970 | -6,620 | -8,860 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| Fair | -2,530 | 450 | 2,830 | 1,440 | 600 | 2,800 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| Normal | -1,890 | 1,090 | 4,060 | 5,800 | 5,530 | 2,020 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| Good | -930 | 2,050 | 5,020 | 7,420 | 10,230 | 8,510 | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| Excellent | -130 | 2,850 | 5,820 | 8,220 | 11,770 | 13,930 | 0.4 | $\frac{1}{6}$ |
| Hurwicz ($\alpha = .6$) sufficient Reason $P(\theta_i) = \frac{1}{6}$ | -2,800 | -2,630 | -2,630 | -2,740 | -2,910 | -3,390 | — | — |
| | -2,230 | -120 | 1,230 | 1,480 | 1,270 | 350 | — | — |

TABLE 7.2

COMPUTATION OF NET FARM INCOME FOR A 360-COW HERD
(ACTION a_4) WITH NORMAL RANGE CONDITIONS (STATES θ_3)

| Item | Subtotal | Total |
|---|----------|--------|
| | Dollars | |
| Gross Income (sale of calves, cull cows, and bulls) | | 53,000 |
| Cash Variable Costs | 24,200 | |
| Cultural Costs (fertilizer, seed, gas, oil, etc.) | 14,200 | |
| Livestock Costs (veterinary, medicine, replacement bulls, purchased feed, etc.) | 10,000 | |
| Cash Fixed Costs (hired labor, taxes, insurance, paid interest, etc.) | 15,700 | |
| Depreciation | 7,300 | |
| Total Costs (excluding unpaid interest on investment) | | 47,200 |
| Net Farm Income | | 5,800 |

We proceed now to evaluate the decision problem of Table 7.1 under the assumption of complete ignorance, that is, no prior probability distribution of range conditions is known. We apply successively the alternative criteria which have been proposed to handle this type of problem as discussed in Chapter IV.

Maximin Criteria

A rancher using the maximin criterion assumes that the worst consequence of each act will occur, then selects the action which offers the best of these unfavorable occurrences. In terms of Table 7.1, he in effect assumes that the very poor range conditions (θ_1) will occur, then selects a herd size of 230 cows (a_1) as the optimal action because the loss of \$4,580 is less than for any other herd size. This criterion is clearly pessimistic or conservative in that the entire weight in the decision is given only to the worst possible outcomes. The dubious acceptability of this criterion is emphasized by observing that a rancher who stocked only 230 cows (a_1) would never sustain a profit regardless of the range condition which actually eventuates. A rancher using the maximin criterion would thus be forced out of business in the long run — exactly the consequence he is probably trying to avoid by being conservative! Intuitively it would ap-

pear that even a very conservative rancher should choose some other action such as a_2 which, although it has slightly worse consequences than a_1 if θ_1 should occur, has significantly better consequences for all other states of nature. Only if the rancher felt that nature were a conscious adversary, as in game theory, would action a_1 make much sense. Furthermore, such an attitude seems to imply that θ_1 is "more likely" to occur than other states, which appears inconsistent with our assumption of complete ignorance. This empirical decision problem should raise some doubts in the minds of those who feel that a conservative person should follow a maximin approach to decision making.

Maximax Criterion

Contrary to the maximin criterion, the maximax criterion places the entire emphasis in decision making on the best outcomes possible. In Table 7.1 the rancher using this criterion would stock 460 cows (a_6) since this action includes the possibility of the maximum profit of \$13,930. This criterion hypothesizes a confirmed optimist who takes no account of the possibility of the less favorable consequences of his action. Note that if θ_1 should occur, the maximax action a_6 could result in a loss of \$14,930. It is difficult to imagine a rancher who would ignore completely all the possibilities other than the most favorable in determining a stocking rate, again raising serious doubts about this as an acceptable criterion.

The Minimax Regret Criterion

The motivation for the minimax regret criterion is that a person feels dissatisfied when an opportunity has been missed. For example, suppose in Table 7.1 that action a_4 (360 cows) is selected and that θ_6 occurs. The rancher then makes a net income of \$8,220, which is relatively favorable. On the other hand, if he had known that θ_6 would occur, he could have made \$13,930 (by choosing a_6). His opportunity cost or income foregone of selecting a_4 was \$13,930 - \$8,220 or \$5,710. In decision theory terms, the opportunity cost of \$5,710 is known as regret. On the other hand, suppose a_1 were selected and θ_1 occurred. If θ_1 could have been anticipated, action a_1 would have been optimum, incurring a loss of \$4,580 rather than \$10,040; the regret involved in having selected a_1 when θ_1 occurs is then the difference between these two figures, or \$5,460. In like fashion, the complete regret Table 7.3 is constructed corresponding to payoff Table 7.1. Computationally, to convert the gains to regrets, subtract from the largest gain for each state all the entries in the same row (state).

TABLE 7.3
REGRET TABLE FOR THE COW-CALF OPERATION UNDER UNCERTAINTY OF RANGE CONDITIONS

| States of Nature: Range Conditions (θ_j) | Actions: Herd Size (a_j) | | | | | |
|---|------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | a_1 230 Cows | a_2 280 Cows | a_3 320 Cows | a_4 360 Cows | a_5 415 Cows | a_6 460 Cows |
| | Dollars | | | | | |
| θ_1 Very poor | 0 | 1,710 | 3,680 | 5,460 | 8,110 | 10,350 |
| θ_2 Poor | 2,460 | 0 | 1,220 | 3,100 | 5,750 | 7,990 |
| θ_3 Fair | 5,360 | 2,380 | 0 | 1,390 | 3,430 | 5,630 |
| θ_4 Normal | 7,690 | 4,710 | 1,740 | 0 | 270 | 3,780 |
| θ_5 Good | 11,160 | 8,180 | 5,210 | 2,810 | 0 | 1,720 |
| θ_6 Excellent | 14,060 | 11,080 | 8,110 | 5,710 | 2,160 | 0 |

The minimax regret criterion states that the rancher should act so as to minimize the maximum regret which could occur. In terms of Table 7.3 this means that action a_4 (stocking rate of 360 cows) is optimum since its maximum regret of \$5,710 is less than the maximum regret for the other actions. While the maximin criterion directs attention to the worst outcomes, minimax regret directs attention to the largest opportunity losses. In both cases, the tone is pessimistic or conservative. However, the minimax regret is less so, since it takes into account the opportunities foregone in calculating regret. Both criteria, however, can be criticized as ignoring most of the information in the table in making the final choice.

Hurwicz Optimism-Pessimism Criterion

As discussed in Chapter IV, Hurwicz has proposed a compromise criterion that incorporates information on both the best and the worse consequences of each act. Specifically, indexes of relative pessimism (α) and optimism ($1 - \alpha$) are derived and used in assigning weights to the worst and best consequences of each action. The optimum decision is then the action with the maximum weighted average.

The value of α for the rancher could be estimated by confronting him with the following simple decision problem. The rancher is asked to select

| | a_1 | a_2 |
|------------|-------|-------|
| θ_1 | 0 | x |
| θ_2 | y | z |

21

the value of x that would make him indifferent between action a_1 and a_2 . The two extreme values of x would be 0 and 1. If the rancher should choose $x = 0$, the decision table would look as follows:

| | a_1 | a_2 |
|------------|-------|-------|
| θ_1 | 0 | 0 |
| θ_2 | 1 | 0 |

Clearly no weight is being given to θ_2 if the rancher is indifferent between a_1 and a_2 — he is looking only at the worst that can happen. Thus, a value of $x = 0$ implies a maximin criterion. Conversely, if the rancher selects $x = 1$, the decision table would read as follows:

| | a_1 | a_2 |
|------------|-------|-------|
| θ_1 | 0 | 1 |
| θ_2 | 1 | 1 |

Here no weight is given to θ_1 — the rancher is looking only at the best result for each action and hence is indifferent between a_1 and a_2 ; that is, he is following the maximax criterion.

Suppose the rancher picks some value for x between 0 and 1, such as $x = 0.4$. The table now reads:

| | a_1 | a_2 |
|------------|-------|-------|
| θ_1 | 0 | 0.4 |
| θ_2 | 1 | 0.4 |

The implication now is that there is some set of weights α and $(1 - \alpha)$ for θ_1 and θ_2 that make the decision-maker indifferent between a_1 and a_2 . That is,

$$\alpha 0 + (1 - \alpha) 1 = (\alpha) 0.4 + (1 - \alpha) 0.4 \text{ or}$$

$$\alpha = 0.6 \text{ and } 1 - \alpha = 0.4.$$

(This assignment of values to α and $1 - \alpha$, given x , assumes that the decision-maker is indifferent between the two actions if they have the same expected value.) The α and $1 - \alpha$ indices so derived are then used in determining the $P(\theta)$ in *real* decision problems — a very special $P(\theta)$ in which the “worst” state of nature for each action is assigned a probability of α , the “best” state of nature a probability of $1 - \alpha$, and all other states

a probability of zero. Viewed in this light, the maximin and maximax criteria are simply special cases of the Hurwicz criterion where the pessimism index (α) and optimism index ($1 - \alpha$), alternately, take values of 1.

To illustrate the Hurwicz criterion in the range stocking problem of Table 7.1, assume that an index $\alpha = 0.6$ has been derived as above for the rancher. The optimum action is now either a_2 or a_3 with a weighted average value of $-\$2,630$. To break the tie, the rancher would have to flip a coin. Intuitively, the Hurwicz criterion appears to be fairly reasonable in this case. However, the idea of ignoring all the information in the payoff table for intermediate states of nature θ_2 through θ_5 is somewhat disturbing. Certainly these values should carry some weight in arriving at a decision.

The Principle of Insufficient Reason: Equally Likely States

Since we are dealing with decision making under complete ignorance, a reasonable suggestion might be to assume that each state of nature is equally likely to occur. In terms of Table 7.1, this amounts to assuming that each of the six states of nature has a probability of one-sixth. The criterion of insufficient reason would then specify action a_4 (stocking 360 cows) as the optimum action since its expected value of $\$1,480$ is the maximum of the six alternative actions.

This criterion has considerable appeal in the sense that all of the information in the payoff table is utilized in arriving at the optimum decision, whereas the criteria discussed above concentrate on particular values only. The difficulty with the principle of insufficient reason as a criterion is that it is sensitive to the way in which states are defined. The states of nature must be defined in such a way as to include all possible outcomes. But this can ordinarily be done in many different ways. Unfortunately, the optimum action may depend on these definitions even though the real problem is the same. Suppose, for example, that after developing the six states as specified in Table 7.1, the rancher has second thoughts. He decides that θ_6 (“excellent” range conditions) is too broad a definition to characterize accurately the more favorable conditions that could occur. Therefore, he replaces old θ_6 (“excellent” conditions) with a new θ_6 (“very good” conditions) and θ_7 (“ideal” conditions). He now assigns equal probabilities to the seven states of nature. The original states θ_1 through θ_6 now have probabilities of $1/7$ rather than $1/6$, and it is clear that the resulting decision could change.

Some may object that the new states θ_6 and θ_7 should be On probabilities of $1/6$ and $1/6$ since they simply split the old θ_6 which had a prob-

ability of $\frac{1}{6}$. But to do so would imply that we are not in a situation of complete ignorance about the likelihood of alternative states. That is, we would be saying that new θ_2 and θ_3 are each only half as likely as states θ_1 through θ_5 . Thus, the principle of insufficient reason has the disquieting feature that arbitrary definitions of states may dictate different solutions to the same real problem.

Evaluation of Criteria

Our earlier examination in Chapter IV of the criteria employed in the range stocking decision problem of this chapter showed that there are serious objections to each. While the various criteria have elements which we have recognized in our own decision-making processes, it seems unlikely that we would be willing to turn our decision making under uncertainty over to a clerk who mechanically used any one of the criteria outlined.

We assert that there probably is no such thing as "complete ignorance" or "absolute uncertainty." Rather, most of us would or could be forced to attach probabilities to the various states of nature in real decision problems, even though these are highly subjective and based on fragmentary evidence. For example, in the range stocking problem, even a rancher with no previous experience in California is likely to have some information about various kinds of weather conditions and feed supplies that he could formulate into subjective probabilities. Alternatively, he might consult an experienced rancher to obtain more definite information, that is, to search for a suitable prior distribution. Another rancher with experience in California would have some personal basis for establishing his prior probabilities. Some ranchers may attempt to analyze published historical rainfall or weather data to supplement their personal experience. In other words, as Horowitz¹ has stated:

In a sense, therefore, and even though there have been no explicit probability assessments, there is still the suggestion of some underlying subjective probability distribution(s) over the states of nature, for there is certainly a probability of distribution(s) over the states of nature against which the decision would be nonoptimal; the latter distribution must have been judged unlikely relative to the set of possible alternative distributions or a different decision would have been made. Thus it is indeed questionable whether or not we can justifiably treat any decision problem, particularly one that actually confronts us in the real world, as a problem under uncertainty.

¹ Ira Horowitz, *An Introduction to Quantitative Business Analysis* (New York: McGraw-Hill, 1965), p. 99

Consistent with the above quotation, we have shown in Chapter IV that a particular action will be optimum for some probability distribution over the states of nature. Thus, the fact that different people arrive at different decisions to the same problem can be partly explained by their different subjective judgments as to the probability distribution over the states of nature.

THE STOCKING PROBLEM WITH A PRIOR DISTRIBUTION

We pointed out above that it was highly unrealistic to assume that a rancher has no idea of the probability distribution of range conditions. Even without prior evidence, the rancher would probably search for some information on which to form a prior distribution. One source of such information is the California Crop and Livestock Reporting Service, which has regularly reported an index of range conditions as of the first of the month from 1922 to date. This report is widely circulated among ranchers; many have undoubtedly analyzed the historical record at least informally to gain some idea of the variability of range conditions from year to year.

These data are reported in Table 7.4, by month, January through June, from 1922 through 1965. February through June is the period of year in which most of the plant growth occurs. After June the plants dry out and remain essentially dormant until rains begin the following November or December. Hence, the average range index over the February to June period is a good measure of the level of feed supply available for the entire year. An average range condition of 78 was computed for the period February 1 to June 1 based on the 44 years of observations; this average was defined as a "normal" feed supply. The index for this period, however, ranged from a low of 50 in 1937 to a high of 98 in 1927. The distribution of range conditions was approximated by simply dividing the observations into class intervals and calculating directly the corresponding probabilities. Thus, six class intervals are defined in Table 7.5, with a descriptive name given to each, as was done earlier in Table 7.1. As the reader can verify from counting observations in Table 7.4, "very poor" range conditions (index < 55) occurred in only 2 years out of 44, from which we estimate the probability of this state to be 0.045. "Poor" range conditions (index 55 to 64) occurred in 5 years out of 44, or with a probability of 0.114. The other probabilities in Table 7.5 are calculated in like manner.

Table 7.6 presents the same decision problem outlined in the previous

TABLE 7.4
INDEX OF MONTHLY RANGE CONDITIONS FOR THE
SACRAMENTO VALLEY, CALIFORNIA

| Year | Month | | | | | | Average Range Condition, Feb. 1-June 1 |
|------|-------|------|------|------|-----|------|--|
| | Jan. | Feb. | Mar. | Apr. | May | June | |
| 1922 | 75 | 66 | 57 | 74 | 73 | 82 | 70 |
| 1923 | 96 | 99 | 94 | 65 | 98 | 98 | 91 |
| 1924 | 57 | 46 | 73 | 59 | 42 | 47 | 53 |
| 1925 | 84 | 71 | 94 | 105 | 108 | 95 | 95 |
| 1926 | 82 | 71 | 95 | 90 | 97 | 93 | 89 |
| 1927 | 95 | 95 | 96 | 102 | 100 | 96 | 98 |
| 1928 | 88 | 86 | 87 | 100 | 98 | 95 | 93 |
| 1929 | 80 | 80 | 74 | 76 | 66 | 63 | 72 |
| 1930 | 64 | 72 | 84 | 92 | 89 | 90 | 85 |
| 1931 | 55 | 62 | 77 | 76 | 50 | 52 | 63 |
| 1932 | 63 | 63 | 54 | 76 | 73 | 77 | 69 |
| 1933 | 55 | 55 | 50 | 63 | 68 | 63 | 60 |
| 1934 | 71 | 86 | 94 | 97 | 88 | 83 | 90 |
| 1935 | 94 | 90 | 96 | 96 | 102 | 99 | 97 |
| 1936 | 71 | 85 | 87 | 86 | 88 | 87 | 87 |
| 1937 | 45 | 23 | 32 | 58 | 70 | 68 | 50 |
| 1938 | 93 | 95 | 96 | 98 | 99 | 95 | 97 |
| 1939 | 74 | 67 | 53 | 58 | 54 | 56 | 58 |
| 1940 | 44 | 62 | 72 | 88 | 96 | 94 | 82 |
| 1941 | 86 | 84 | 88 | 92 | 92 | 97 | 91 |
| 1942 | 92 | 84 | 84 | 80 | 91 | 92 | 86 |
| 1943 | 81 | 75 | 81 | 90 | 90 | 84 | 84 |
| 1944 | 63 | 64 | 64 | 61 | 60 | 68 | 63 |
| 1945 | 91 | 86 | 84 | 87 | 81 | 79 | 83 |
| 1946 | 84 | 81 | 71 | 73 | 79 | 77 | 76 |
| 1947 | 71 | 56 | 72 | 84 | 86 | 79 | 75 |
| 1948 | 80 | 65 | 54 | 66 | 86 | 91 | 72 |
| 1949 | 65 | 44 | 47 | 74 | 68 | 67 | 60 |
| 1950 | 61 | 63 | 74 | 82 | 83 | 81 | 77 |
| 1951 | 92 | 88 | 89 | 84 | 79 | 85 | 85 |
| 1952 | 81 | 78 | 81 | 72 | 85 | 87 | 81 |
| 1953 | 76 | 81 | 67 | 70 | 73 | 82 | 75 |
| 1954 | 71 | 72 | 76 | 86 | 93 | 91 | 84 |
| 1955 | 73 | 69 | 66 | 61 | 70 | 78 | 69 |
| 1956 | 74 | 74 | 74 | 71 | 79 | 87 | 77 |
| 1957 | 66 | 60 | 73 | 81 | 85 | 88 | 77 |
| 1958 | 87 | 86 | 89 | 88 | 88 | 88 | 88 |
| 1959 | 63 | 74 | 79 | 70 | 72 | 68 | 73 |
| 1960 | 59 | 61 | 68 | 77 | 79 | 81 | 73 |
| 1961 | 81 | 80 | 81 | 83 | 80 | 83 | 81 |
| 1962 | 73 | 67 | 78 | 81 | 77 | 78 | 76 |
| 1963 | 90 | 68 | 85 | 87 | 90 | 92 | 84 |
| 1964 | 86 | 82 | 75 | 72 | 68 | 70 | 73 |
| 1965 | 84 | 82 | 81 | 85 | 91 | 88 | 85 |

section, with six actions (herd sizes)² and six states (range conditions). There is now, however, the significant additional information represented by the long-run (prior) probabilities of each of the six states of nature $P(\theta)$. We are no longer in a situation of complete ignorance, but rather one of risk. By multiplying the payoff for each action by the corresponding probability and summing, we find the expected monetary value for each

TABLE 7.5
CALCULATION OF PRIOR PROBABILITIES OF RANGE
CONDITIONS, SACRAMENTO VALLEY, CALIFORNIA

| States of Nature: Average Range Conditions, February 1-June 1 (θ_i) | | | |
|--|-------------------------|--|------------------------|
| Description | Range Index Interval | Number of Years Observed ^a | Prior Probabilities |
| θ_1 Very poor | Less than 55 | 2 | 0.045 |
| θ_2 Poor | 55 to 64 | 5 | 0.114 |
| θ_3 Fair | 65 to 74 | 8 | 0.182 |
| θ_4 Normal | 75 to 84 | 14 | 0.318 |
| θ_5 Good | 85 to 94 | 11 | 0.250 |
| θ_6 Excellent | 95 or over | 4 | 0.091 |
| TOTAL | — | 44 | 1.000 |

^a From Table 7.4.

action. For example, the expected monetary value of action a_6 is \$1,850, calculated as follows:

$$(-14,930)(0.045) + (-8,860)(0.114) + (-2,800)(0.182) \\ + (2,020)(0.318) + (8,510)(0.250) + (13,930)(0.091) = 1,850.$$

Action a_5 (stock 415 head) provides the maximum expected monetary value of \$3,950. Under the assumptions outlined earlier, a linear utility function and subjective probabilities equal to the empirical probabilities of Table 7.5, we can say unequivocally that action a_5 (415 head) is the optimum stocking rate. In other words, it pays to stock the range at a rate corresponding to "good" conditions, knowing that conditions this favorable (or better) will probably occur about $\frac{1}{3}$ of the time. While action a_5 will

² In this particular case, each of the actions (say a_5) was defined as the maximum size of cow herd that can be maintained by optimally allocating the feed supply for the corresponding range condition (θ_5), assuming no supplemental feed is purchased for cattle on range. Thus, the actions were defined by solving six rather simple linear programming problems involving optimal allocation of feed supplies under given range conditions. The off-diagonal payoffs also represent linear programming solutions. They show how action a_i is adjusted to stock a_j with minimum loss (or maximum profit).

TABLE 7.6
PAYOFF TABLE FOR A COW-CALF OPERATION WITH PRIOR PROBABILITIES OF RANGE CONDITIONS

154

| States of Nature: Range Conditions (θ_i) | Actions: Herd Size (a_i) | | | | | | Prior Probabilities $P(\theta_i)$ |
|--|------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------------------------|
| | a_1 230 Cows | a_2 280 Cows | a_3 320 Cows | a_4 360 Cows | a_5 415 Cows | a_6 460 Cows | |
| | Dollars | | | | | | |
| θ_1 Very poor | -4,580 | -6,290 | -8,260 | -10,040 | -12,690 | -14,930 | 0.045 |
| θ_2 Poor | -3,330 | 870 | -2,090 | 3,970 | 6,620 | 8,860 | 0.114 |
| θ_3 Fair | -2,530 | 450 | 2,830 | 1,440 | 600 | 2,800 | 0.182 |
| θ_4 Normal | -1,890 | 1,090 | 4,060 | 5,800 | 5,530 | 2,020 | 0.318 |
| θ_5 Good | 930 | 2,050 | 5,020 | 7,420 | 10,230 | 8,510 | 0.250 |
| θ_6 Excellent | 130 | 2,850 | 5,820 | 8,220 | 11,770 | 13,930 | 0.091 |
| Expected value | -1,890 | 820 | 2,980 | 3,800 | 3,950 | 1,850 | 1.000 |

involve buying supplemental feed in approximately $\frac{2}{3}$ of the years, the opportunities foregone by understocking are even more costly. It is significant to note that in the previous section, where we assumed complete ignorance, none of the criteria selected a_5 as optimal.

In some cases the problem is more complicated than suggested here. For example, the rancher might stock cows for below average range conditions and buy additional stocker animals to graze for a short period if above average feed supplies materialize.³

For the rancher who wishes to reevaluate the above problem using his own subjective probabilities, it is necessary to substitute these probabilities for the empirical probabilities, then recalculate the expected monetary values. For the rancher whose utility function is nonlinear, a different complexity arises. If we knew his utility function, we could simply evaluate the utility numbers corresponding to the various gains and losses, substitute the utility numbers for incomes in Table 7.6, and maximize expected utility rather than expected monetary value. However, if no utility function is available, we could make a rough check on whether the rancher's utility function is linear over the relevant range. We might suggest that he ask himself several questions, such as:

"Is my financial position such that I can take the long-run view of this problem, that is, that things 'will average out'?"

"Even if my financial position is such that I can afford to take the long-run view, does a bad year particularly worry me?"

"Is my financial position such that losses of the order which could occur in this decision problem would adversely affect my ability to stay in business?"

Affirmative answers to questions like these suggest that the rancher's underlying utility function is not linear over this range. A more rigorous check on the linearity of the utility function is the test proposed in Chapter III: Pick two dollar values that span the outcomes in the actual problem (for example, $-\$15,000$ and $\$15,000$ in our case). Find if the producer is indifferent between the average of these two values ($\$0$) for certain or a contract involving the two extremes values with probability 0.5 each. If the answer to this question is "no," we need to proceed by the methods of Chapter III to the derivation of the utility function.

One advantage of presenting decision problems in the framework similar to that of Table 7.6 is that it forces the decision maker to focus on the aspects of risk inherent in the problem. Most research studies make

³ For readers interested in these more complex cases, see G W Dean, A J Finch, and J A Pettit, Jr., *Economic Strategies for Foothill Beef Cattle Ranchers*, California Agricultural Experiment Station Bulletin 824 (June, 1966)

recommendations based on single valued estimates, which do not allow the decision maker any flexibility to adjust to the risk in the situation.

THE STOCKING PROBLEM WITH A POSTERIOR DISTRIBUTION

We now turn to the case in which additional information is used in attempting to predict the state of nature (range condition) that will occur in a specific decision period. In particular, we will be interested in showing how some observation, experiment, or other forecasting device will allow the decision maker to spy on the state of nature. If the state of nature could be predicted prior to the decision with a high degree of accuracy, decisions could then be adjusted to the conditions expected and, over time, the value of gains increased. Formally, as explained in Chapter V, we will estimate posterior probabilities $P(\theta_i|Z)$ where Z represents a set of predictors, z_i , and θ_i represents states of nature. These posterior probabilities can then be used to derive the action that maximizes expected value, given the z_i observed prior to a particular decision. An optimum action can thus be derived for any observed value of z_i . This set of actions was called the Bayesian strategy; it is a complete set of rules that tells the decision maker how to act in response to any observed conditions z_i . The expected value of gains using the Bayesian strategy, that is, the data problem, can be compared with the expected value of gains using the optimal action from using the prior probabilities, that is, the no-data problem. The increase in expected value from employing posterior rather than prior probabilities is a measure of the usefulness of the predicting device employed. This gain we have called the value of the experiment in Chapter V.

To illustrate the concepts involved in problems employing posterior distributions, let us turn to a variation of the stocking rate problem on California range land. Instead of a year-around cow-calf operation, we now consider another typical kind of operation of a more seasonal nature, where stocker cattle are purchased in early winter (during January) and sold in early summer (around July 1). Thus, the cattle are on the range only during the green forage period of the year, and stocking rates can be varied easily from year to year depending on the outlook for range conditions. The payoffs for six alternative stocking rates for this type of operation are shown in Table 7.7. Using the same prior probability distribution of range conditions derived in the previous section (Table 7.5), the optimum stocking rate for the no-data problem is shown to be action a_4 (1,345 head)

By January, when the steers are purchased, the operator will have some

TABLE 7.7
PAYOFF TABLE FOR A STOCKER OPERATION WITH PRIOR PROBABILITIES OF RANGE CONDITIONS

| States of Nature: Range Conditions (θ_i) | Actions: Stocking Rate (a_j) ^a | | | | | | Probabilities $P(\theta_i)$ |
|--|---|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------------------|
| | a_1 841 Head | a_2 1,009 Head | a_3 1,177 Head | a_4 1,345 Head | a_5 1,513 Head | a_6 1,681 Head | |
| | Dollars | | | | | | |
| θ_1 Very poor | -3,691 | -5,585 | -7,575 | -9,411 | -11,395 | -13,307 | 0.045 |
| θ_2 Poor | -3,007 | 237 | -1,753 | -3,589 | -5,575 | -7,485 | 0.114 |
| θ_3 Fair | -2,407 | 969 | 4,147 | 2,311 | 327 | -1,585 | 0.182 |
| θ_4 Normal | -1,807 | 1,569 | 4,851 | 8,181 | 6,197 | 4,285 | 0.318 |
| θ_5 Good | 1,207 | 2,169 | 5,451 | 8,885 | 12,067 | 10,155 | 0.250 |
| θ_6 Excellent | -607 | 2,869 | 6,051 | 9,485 | 12,773 | 16,015 | 0.091 |
| Expected value | -1,879 | 1,254 | 3,670 | 5,274 | 5,061 | 3,618 | 1.000 |

^a Negative numbers represent negative net incomes (losses).

idea of whether range conditions during the spring are likely to be relatively favorable or unfavorable, that is, an opinion based on rainfall, temperature, and range conditions up to that date. The operator might use the observed range conditions in January as a predictor or indicator of the true range condition during the subsequent spring grazing period. Casual observation suggests that favorable spring grazing conditions tend to follow favorable conditions early in the season, and vice versa. This casual observation can be made more explicit and useful by judicious analysis of the data presented in Table 7.4. From these data, a table like Table 7.8 can be constructed that shows the conditional probabilities $P(Z|\theta)$, that is, the probabilities of observing a particular range condition in January given that the true spring season range condition is θ . With these conditional probabilities and his own subjective prior probabilities, we could compute the operator's posterior distribution over the states of nature using Bayes' formula.

The data from Table 7.4 are summarized on the left side of Table 7.8 and converted to the conditional probabilities, $P(Z|\theta)$, on the right side. To illustrate how these probabilities are calculated and interpreted, consider the second row of Table 7.8. We notice that three out of five years when the spring range conditions were poor, the January range condition was also poor, thus the probability of observing z_2 when θ_2 is the true state is $\frac{3}{5} = 0.600$. Two years out of the five years when the spring range conditions were poor, the January condition was fair, which gives $P(z_3|\theta_2) = 0.400$. The other values in the table are obtained in the same manner. The conditional probabilities sum to 1.0 by rows.

The calculations required to obtain a posterior distribution of the spring range conditions using Bayes' formula are now shown. The conditional probabilities of Table 7.8 are reproduced in part A of Table 7.9 along with the ranch manager's prior probability distribution which, for the sake of convenience, we have taken to be the one derived in Table 7.5. Parts B and C of Table 7.9 are derived directly from the two distributions in part A. Part B shows the joint probabilities of the various combinations of θ and Z obtained by multiplying $P(Z|\theta) P(\theta)$. For example, part A of Table 7.9 shows that the probability of observing z_4 when the true range condition is θ_6 is $P(z_4|\theta_6) = 0.250$. The probability of θ_6 is $P(\theta_6) = 0.091$. Hence, the joint probability of observing z_4 and state θ_6 is

$$P(z_4|\theta_6) P(\theta_6) = (0.250)(0.091) = 0.023,$$

as shown in row θ_6 , column z_4 of part B. The other cells of part B are derived similarly, by multiplying the conditional probabilities $P(Z|\theta)$ in each row of part A by the $P(\theta)$ for that row. Summing the probabilities in

TABLE 7.8
NUMBER OF YEARS OF OCCURRENCE OF VARIOUS COMBINATIONS OF RANGE CONDITIONS ON JANUARY 1
AND THE SUBSEQUENT SPRING PERIOD, AND CALCULATION OF CONDITIONAL PROBABILITIES

| Spring Range Conditions (θ_i) | Observed Range Conditions, January 1 | | | | | | Conditional Probabilities, $P(Z \theta)$ | | | | | |
|--|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------------|--------------------------|-----------------------------|--|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | z_1 Very Poor (<55) | z_2 Poor (55-64) | z_3 Fair (65-74) | z_4 Normal (75-84) | z_5 Good (85-94) | z_6 Excellent (>95) | $P(z_1 \theta)$ | $P(z_2 \theta)$ | $P(z_3 \theta)$ | $P(z_4 \theta)$ | $P(z_5 \theta)$ | $P(z_6 \theta)$ |
| | Total | Total | Total | Total | Total | Total | Total | Total | Total | Total | Total | |
| θ_1 Very poor (<55) | 1 | 1 | | | | | 0.500 | 0.500 | | | | |
| θ_2 Poor (55-64) | | 3 | 2 | | | | 0.600 | 0.400 | | | | |
| θ_3 Fair (65-74) | | 3 | 1 | 3 | 1 | | 0.325 | 0.125 | 0.375 | 0.125 | | |
| θ_4 Normal (75-84) | 1 | 1 | 5 | 5 | 2 | | 0.071 | 0.357 | 0.357 | 0.143 | | |
| θ_5 Good (85-94) | | 1 | 2 | 2 | 5 | 1 | 0.091 | 0.182 | 0.182 | 0.454 | 0.091 | |
| θ_6 Excellent (>95) | | | | 1 | 2 | 1 | | | 0.250 | 0.500 | 0.250 | |
| TOTAL | 2 | 9 | 10 | 11 | 10 | 2 | 44 | 44 | 44 | 44 | 44 | 44 |

TABLE 7.9
DETERMINATION OF POSTERIOR PROBABILITIES OF SPRING RANGE CONDITIONS BASED ON
OBSERVED RANGE CONDITIONS, JANUARY 1^a

| A. Conditional Probabilities, $P(Z \theta)$ | | | | | | | Prior Probability $P(\theta)$ |
|--|-----------|-------|-------|--------|-------|-----------|-------------------------------|
| Observed Range Conditions, January 1 (z_1) | | | | | | | |
| Spring Range Conditions (θ_1) | Very Poor | Poor | Fair | Normal | Good | Excellent | Sum |
| θ_1 Very poor | 0.500 | 0.500 | 0.400 | 0.375 | 0.125 | | 1.000 |
| θ_2 Poor | | 0.600 | 0.125 | 0.337 | 0.143 | | 1.000 |
| θ_3 Fair | 0.071 | 0.375 | 0.357 | 0.182 | 0.454 | 0.091 | 1.000 |
| θ_4 Normal | | 0.091 | 0.182 | 0.250 | 0.500 | 0.250 | 1.000 |
| θ_5 Good | | | | | | | 1.000 |
| θ_6 Excellent | | | | | | | 1.000 |

| B. Joint Probabilities of θ and Z , $P(Z \theta)P(\theta)$ | | | | | | | Sum |
|---|-----------|-------|-------|--------|-------|-----------|-------|
| Observed Range Conditions, January 1 (z_1) | | | | | | | |
| Spring Range Conditions (θ_1) | Very Poor | Poor | Fair | Normal | Good | Excellent | Sum |
| θ_1 Very poor | 0.022 | 0.022 | 0.046 | 0.068 | 0.023 | | 0.228 |
| θ_2 Poor | | 0.068 | 0.114 | 0.114 | 0.043 | | 0.454 |
| θ_3 Fair | 0.023 | 0.023 | 0.046 | 0.016 | 0.114 | 0.023 | 0.228 |
| θ_4 Normal | | 0.023 | 0.046 | 0.023 | 0.114 | 0.023 | 0.454 |
| θ_5 Good | | | | | 0.016 | | 0.114 |
| θ_6 Excellent | | | | | 0.016 | | 0.114 |
| $P(Z)$ | 0.045 | 0.204 | 0.229 | 0.251 | 0.228 | 0.016 | 1.000 |

| C. Posterior Probabilities, $P(\theta Z)$ | | | | | | | Sum |
|--|-----------|-------|-------|--------|-------|-----------|-------|
| Observed Range Conditions, January 1 (z_1) | | | | | | | |
| Spring Range Conditions (θ_1) | Very Poor | Poor | Fair | Normal | Good | Excellent | Sum |
| θ_1 Very poor | 0.500 | 0.111 | 0.200 | 0.273 | 0.200 | | 1.000 |
| θ_2 Poor | | 0.333 | 0.100 | 0.454 | 0.200 | | 1.000 |
| θ_3 Fair | | 0.333 | 0.500 | 0.182 | 0.500 | | 1.000 |
| θ_4 Normal | 0.500 | 0.111 | 0.200 | 0.091 | 0.200 | | 1.000 |
| θ_5 Good | | | | | | | 1.000 |
| θ_6 Excellent | | | | | | | 1.000 |
| Sum | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 6.000 |

^a Original calculations rounded off to three places for presentation in table. Therefore, data presented in tables will not check exactly in the last decimal place.

each column of part B gives $P(Z)$, that is, the probability $P(Z)$ is given by $P(Z) = P(Z|\theta_1)P(\theta_1) + P(Z|\theta_2)P(\theta_2) + \dots + P(Z|\theta_6)P(\theta_6) = \sum_{\theta=1}^6 P(Z|\theta)P(\theta)$. The final section C of Table 7.9 shows the calculation of the posterior distribution $P(\theta|Z)$ from the components of Bayes' formula given in section B. That is, $P(\theta|Z) = P(\theta)P(Z|\theta) \div P(Z)$. Specifically, the joint probabilities $P(\theta)P(Z|\theta)$ in part B are divided by the marginal probability $P(Z)$ at the bottom of each column to provide the posterior distribution $P(\theta|Z)$ in part C. For example, $P(\theta_1)P(z_1|\theta_1) = 0.022$ in row 1, column 1, part B. $P(z_1) = 0.045$ at the bottom of column 1, part B. The posterior probability $P(\theta_1|z_1)$ in row 1, column 1, part C is then $P(\theta_1)P(z_1|\theta_1) \div P(z_1) = 0.022 \div 0.045 = 0.500$.

The posterior distributions given in part C of Table 7.9 could be obtained directly from the data in Table 7.8. If instead of dividing each element in a row by the row total, we divided each element in a column by the column total, we would obtain the posterior probabilities directly. For example, z_1 was observed in 11 years. Following a z_1 , states θ_3 , θ_4 , θ_5 , and θ_6 occurred 3, 5, 2, and 1 years, respectively. Hence, $P(\theta_3|z_1) = \frac{3}{11} = 0.273$, $P(\theta_4|z_1) = \frac{5}{11} = 0.454$, $P(\theta_5|z_1) = \frac{2}{11} = 0.182$, and $P(\theta_6|z_1) = \frac{1}{11} = 0.091$. These probabilities appear in the column headed z_1 in part C of Table 7.9. The other values in part C of Table 7.9 could be obtained similarly.

Although the direct method is a more convenient way of obtaining the posterior probabilities, it has the distinct disadvantage that it incorporates the prior distribution given by the same data. Thus, a ranch manager would have no way of modifying these posterior probabilities to conform to his own subjective prior probabilities if he believed that the prior distribution provided by the data did not describe his situation. The conditional probabilities $P(Z|\theta)$ can be used with any prior distribution whatever in Bayes' formula to obtain the posterior probabilities. It is for this reason that it would be more useful to decision makers to have experimental results summarized in the form of conditional probabilities $P(Z|\theta)$ than in the posterior probability form of $P(\theta|Z)$. This conclusion is made more vivid when one considers the situation in which the decision maker is physically removed from the experimenter or analyst, as is frequently the case in agriculture where the manager is far removed from his sources of information, such as the agricultural experiment station.

Obtaining the Bayesian Strategy

Table 7.10 summarizes the calculations involved in deriving the Bayesian strategy using the posterior probabilities derived in Table 7.9. The

TABLE 7.10
COMPUTATION OF BAYESIAN STRATEGY USING POSTERIOR PROBABILITIES:
VALUE OF A PERFECT PREDICTOR; VALUE OF THE Z PREDICTOR

| States of Nature: Range Conditions (θ_i) | Actions: Stocking Rates (a_i) | | | | | | Posterior Probabilities, $P(\theta Z)$ | | | | | | |
|---|-----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|
| | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 | $P(\theta z_1)$ | $P(\theta z_2)$ | $P(\theta z_3)$ | $P(\theta z_4)$ | $P(\theta z_5)$ | $P(\theta z_6)$ | $P(\theta)$ |
| | 841 Head | 1,009 Head | 1,177 Head | 1,345 Head | 1,513 Head | 1,681 Head | | | | | | | |
| θ_1 Very poor | -3,691 | -5,585 | -7,575 | -9,411 | -11,395 | -13,307 | 0.500 | 0.111 | 0.200 | | | | 0.045 |
| θ_2 Poor | -3,007 | 287 | -1,753 | -3,589 | -5,575 | -7,485 | 0.333 | 0.333 | 0.100 | 0.273 | 0.100 | 0.100 | 0.114 |
| θ_3 Fair | -2,407 | 969 | 4,147 | 2,311 | 327 | -1,585 | 0.333 | 0.333 | 0.100 | 0.454 | 0.200 | 0.200 | 0.182 |
| θ_4 Normal | -1,807 | 1,569 | 4,851 | 8,181 | 6,197 | 4,285 | 0.500 | 0.111 | 0.500 | 0.454 | 0.200 | 0.500 | 0.318 |
| θ_5 Good | -1,207 | 2,169 | 5,451 | 8,885 | 12,067 | 10,155 | 0.111 | 0.111 | 0.200 | 0.182 | 0.500 | 0.500 | 0.250 |
| θ_6 Excellent | -607 | 2,869 | 6,051 | 9,485 | 12,773 | 16,015 | 0.111 | 0.111 | 0.200 | 0.091 | 0.200 | 0.500 | 0.091 |

Expected net income from a perfect predictor = $(-3,691)(.045) + 237(114) + 16,015(.091) = \$7,691$

| Z Observation: | Expected Net Incomes Given Z Observation | | | | | | $P(Z)$ |
|----------------|--|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 | |
| z_1 | -2,749 | -2,008 | -1,362 | -615 | -2,599 | -4,511 | 0.045 |
| z_2 | -2,549 | 197 | 1,100 | 424 | -985 | -2,895 | 0.204 |
| z_3 | -1,987 | 1,363 | 3,580 | 5,381 | 4,430 | 2,518 | 0.229 |
| z_4 | -1,752 | 1,633 | 4,877 | 6,825 | 6,261 | 4,818 | 0.251 |
| z_5 | -1,327 | 2,069 | 5,321 | 8,207 | 9,860 | 8,979 | 0.228 |
| z_6 | -907 | 2,519 | 5,751 | 9,185 | 12,420 | 13,085 | 0.046 |

Expected net income from Z predictor = $(-615)(.045) + (1,100)(.204) + \dots + (13,085)(.046) = \$5,992$

Value of a perfect predictor = $\$7,691 - \$5,992 = \$1,699$

Value of the Z predictor = $\$5,992 - \$5,274^a = \$718$

^a \$5,274 represents the expected net income from the optimum action a_i using only prior probabilities, as shown in Table 7.5.

Bayesian strategy:

- When z_1 observed, follow a_4
- When z_2 observed, follow a_3
- When z_3 observed, follow a_4
- When z_4 observed, follow a_4
- When z_5 observed, follow a_5
- When z_6 observed, follow a_6

upper left-hand portion of Table 7.10 repeats the payoff Table 7.7, while the upper right-hand portion gives the posterior probabilities. The first step is to derive the expected net income for each action, assuming a particular z_k observation. For example, suppose z_1 is observed. Given a z_1 observation (very poor range conditions in January), there is, according to the posterior probabilities $P(\theta|z_1)$, a 0.500 probability that θ_1 (very poor spring range conditions) will ensue and also a 0.500 probability that θ_4 (normal spring range conditions) will follow. Thus, we calculate the expected value of each of the actions when z_1 is observed. For action a_1 , for example, this is $(-3,691)(0.500) + (-1,807)(0.500) = -\$2,749$. For action a_2 it is $(-5,585)(0.500) + (1,569)(0.500) = -\$2,008$. These values and those calculated for a_3 through a_6 are given in the first row of the lower section of Table 7.10. Thus, given a z_1 observation, action a_4 gives the greatest expected net income ($-\$615$).

Given an observation of z_2 the probabilities $P(\theta|z_2)$ are applied to the original payoff table, resulting in expected values shown in the second row of the lower section of Table 7.10. Given an observation of z_3 , action a_4 provides maximum expected net income ($\$1,100$). Optimum actions can be derived in a similar manner following each of the other observed values of z_k . It is seen that the Bayesian strategy is $(a_4, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6)$. In other words, the optimum strategy is:

- When *very poor* range conditions are observed in January, stock 1,345 head
- When *poor* range conditions are observed in January, stock 1,177 head.
- When *fair* or *normal* range conditions are observed in January, stock 1,345 head.
- When *good* range conditions are observed in January, stock 1,513 head.
- When *excellent* range conditions are observed in January, stock 1,681 head.

While the strategy appears generally quite sensible, the careful reader will note the anomaly of "very poor" range conditions in January leading to a larger stocking rate than when "poor" range conditions are observed. This point is examined in more detail later in this chapter under the heading "Comments on the Adequacy of the Data."

The Bayesian Strategy with Different Prior Distributions.
Suppose the manager is willing to accept the conditional relationship $P(Z|\theta)$ between range conditions on January 1 and subsequent spring range conditions. However, suppose he believes that the past 44 years of observed range conditions have been generally more favorable than will be the case in the future. Hence, he forms his own subjective prior distribution $P'(\theta)$ independently from the range data observed in the past. Suppose he adopts a prior distribution as shown in the upper part of Table 7.11.

This distribution is considerably more pessimistic than the prior distribution $P(\theta)$ actually observed over the past 44 years (shown in the right-hand column of Table 7.9). Using the new prior distribution $P'(\theta)$ and the conditional distribution $P(Z|\theta)$ in Table 7.9, a different set of posterior probabilities $P'(\theta|Z)$ are calculated using Bayes' formula and presented in the upper part of Table 7.11. Applying these posterior probabilities to the payoffs (upper left-hand portion of Table 7.10), we arrive at the Bayes' strategy $(a_1, a_3, a_3, a_3, a_4, a_5)$. Not surprisingly this is a more conservative strategy than the previous strategy $(a_4, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6)$.

Suppose another manager adopts an optimistic subjective prior distribution $P''(\theta)$ shown in the lower part of Table 7.11. Again, working through Bayes' formula to obtain the new set of posterior probabilities $P''(\theta|Z)$ shown in the lower part of Table 7.11 and applying them to the payoffs of Table 7.10, the Bayesian strategy $(a_1, a_4, a_1, a_4, a_5, a_6)$ is obtained. Because of the more optimistic prior distribution $P''(\theta)$, this strategy is somewhat less conservative than the original Bayesian strategy.

These examples demonstrate the way in which subjective prior probability can be incorporated with experimental conditional probabilities in decision making. The results demonstrate the sensitivity of the optimal strategy to the particular subjective prior distribution specified. Furthermore, the fact that operators employ different strategies in actual situations might be explained by their use of different subjective prior distributions, even though they are considering the same actions, states, and payoffs and employing the same source of information as summarized in the conditional probabilities $P(Z|\theta)$.

Comments on the Adequacy of the Data. The reader may raise a question concerning the relatively high stocking rate following a z_1 observation in the initial Bayesian strategy $(a_1, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6)$. Examination of data in Table 7.8 indicates the source of this questionable result: There are only two z_1 observations over the 44 years, and one of these occurred in a year in which normal spring range conditions (θ_4) ensued. With only two observations, the probabilities $P(\theta|z_1)$ are likely to be misleading; likewise, $P(\theta|z_6)$ may also be misleading since z_6 occurred only twice in the 44 years. In the latter case, however, they occurred for θ_5 and θ_6 , which is more intuitively reasonable. A manager confronted with the experimental probabilities $P(\theta|z_1)$ would likely revise the $P(\theta|z_1)$ distribution based on experience and intuition. For example, if he substituted subjective probabilities of $P(\theta_1|z_1) = 0.5$ and $P(\theta_2|z_1) = 0.5$ for those shown, the Bayesian strategy would be $(a_2, a_3, a_4, a_4, a_5, a_6)$.

The \odot adjustment in the $P(\theta|z_1)$ distribution indicates the im-

TABLE 7.11
POSTERIOR PROBABILITIES USING PESSIMISTIC PRIOR AND
AN OPTIMISTIC PRIOR DISTRIBUTION

| Spring Range Conditions (θ_i) | Pessimistic Prior Probability | Posterior Probabilities with Pessimistic Prior | | | | | |
|---|----------------------------------|--|---------------|---------------|-----------------|---------------|--------------------|
| | | Observed Range Conditions, January 1 (z_i) | | | | | |
| | | z_1 Very Poor | z_2 Poor | z_3 Fair | z_4 Normal | z_5 Good | z_6 Excellent |
| θ_1 | 0.10 | 0.126 | 0.514 | 0.704 | 0.532 | 1.000 | |
| θ_2 | 0.30 | 0.454 | 0.215 | 0.254 | 0.223 | 1.000 | |
| θ_3 | 0.40 | 0.379 | 0.232 | 0.042 | 0.245 | 1.000 | |
| θ_4 | 0.15 | 0.028 | 0.039 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | |
| θ_5 | 0.05 | 0.013 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | |
| θ_6 | 0.00 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | |
| Sum | 1.00 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | |
| Spring Range Conditions (θ_i) | Optimistic Prior Probability | Posterior Probabilities with Optimistic Prior | | | | | |
| | | Observed Range Conditions, January 1 (z_i) | | | | | |
| | | z_1 Very Poor | z_2 Poor | z_3 Fair | z_4 Normal | z_5 Good | z_6 Excellent |
| θ_1 | 0.00 | 0.213 | 0.084 | 0.201 | 0.073 | 1.000 | |
| θ_2 | 0.05 | 0.397 | 0.083 | 0.512 | 0.218 | 0.519 | |
| θ_3 | 0.15 | 0.199 | 0.601 | 0.197 | 0.518 | 0.481 | |
| θ_4 | 0.40 | 0.191 | 0.232 | 0.090 | 0.191 | 1.000 | |
| θ_5 | 0.30 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | |
| θ_6 | 0.10 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | |
| Sum | 1.00 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | |

portance of subjective knowledge even in the derivation of conditional probabilities $P(Z|\theta)$. Even after all the empirical evidence available is accumulated, there may be inadequacies in the data that will require revision of the empirical probabilities. These inadequacies may arise because of an insufficient number of observations or from errors and biases in reporting. For example, different people have been involved over the years in reporting and making estimates of indices and may not have been entirely consistent in their ratings. Also, in the case of $P(\theta|z_1)$ and $P(\theta|z_6)$, too few observations were available in some critical cells. Thus, an intelligent manager is not likely to use the probabilities mechanically. Instead, he will peruse them carefully and make any adjustments he feels necessary in order to bring them in line with his own subjective evaluation. He is not bound to accept the data uncritically, particularly when there are compelling reasons, such as those mentioned above, for suspecting that the data are inadequate.

The researcher or analyst whose job it is to make recommendations to decision makers based on inadequate data is faced with a somewhat different problem. He cannot simply substitute his own subjective probabilities into the problem where he thinks necessary and present this as objective information to his audience. There are procedures available to the analyst for handling analytical problems of this type, such as "smoothing" procedures that involve fitting continuous functions to the data. Such procedures will be used in later chapters.

Value of Experiment. What is it worth to consider additional information of the type used here in attempting to fit stocking rates to range conditions? One way of arriving at the potential worth of additional information is to suppose that we had a forecasting device for range conditions which was perfectly accurate, so that the true state of nature, θ , would always be known at decision time. In this case the $P(\theta_i|Z)$ values of Table 7.10 would be 1's down the diagonal and 0's elsewhere, that is, the true states would be perfectly predicted by the z_k values. Thus, when z_1 is observed θ_1 is predicted with certainty, and action a_1 is taken since it maximizes the payoff for that state. Likewise, z_2 predicts θ_2 without error and a_2 is selected, and similarly for the other observations and states. Therefore, the expected value obtained, if a perfect predictor were available, is \$7,691 as shown in Table 7.10. This value is compared with the expected value of the no-data problem, \$5,274, obtained earlier in Table 7.7. Therefore, the value of a perfect predictor is $\$7,691 - \$5,274 = \$2,417$. One way of interpreting this figure is to say that \$2,417 is the

upper limit on the cost that should be expended in obtaining added information to predict the true state of nature.

It is also possible to calculate the value of the data actually used (January range conditions) as a predictor of the true spring range conditions. This value can be calculated using the solution to the data problem by weighting the expected net income of the actions making up the Bayesian strategy with the frequencies from the $P(Z)$ distribution. Hence, the weighted average return of the optimal strategy is \$5,992 (expected net income from Z predictor line in Table 7.10). Thus, the "value" of our simple Z predictor is $\$5,992 - \$5,274 = \$718$. Since this observation can be made at essentially no cost, it clearly should be used. However, the difference between the value of our predictor (\$718) and the value of a perfect predictor (\$2,417) suggests that it might be worthwhile to explore other and perhaps more sophisticated predicting devices.

SUMMARY

In this chapter we have examined a realistic, straightforward application of decision theory to the agricultural decision-making problem of range stocking rates for beef cattle under uncertainty. Initially, we made the unrealistic assumption that the decision must be made in a framework of complete ignorance (no prior distribution). We examined a number of possible decision criteria in this situation and found each to be seriously lacking when examined from a theoretical point of view. In fact, each of these criteria can be thought of as a special case of maximizing expected value in which the prior probability distribution is pre-specified in a very restricted way (for example, the maximax criterion implies a probability of 1.0 for the most favorable state of nature and zero for all others).

We therefore turned to examination of the range stocking problem in the more general framework of expected value maximization (of money or utility) to be used for the remainder of the empirical applications in this book. In these cases, the decision-maker forms objective or subjective probabilities rather than implicitly accepting a pre-specified "rule" regarding probabilities. In the range stocking problem a prior probability distribution of range conditions was developed from historical data, although it is recognized that individual ranchers might legitimately modify these probabilities either subjectively or on the basis of more detailed information or records regarding their own ranch conditions. On the basis of these probabilities the action that maximized expected monetary value (expected net income) was selected as the optimal decision.

We then examined a case in which the stocking rate decision could be realistically changed from year to year depending on a forecast of weather conditions. An elementary forecasting device of simply observing actual range conditions (Z) prior to the decision point was examined. Conditional probabilities, $P(Z|\theta)$, were derived from historical data and Bayes rule used to derive an optimal decision strategy for a given prior distribution. The expected monetary value (net income) from using the forecasting device (data problem) was compared with that from not using a forecasting device (no-data problem) to determine the value of the experiment or the value of the forecast. For the given problem the value of the forecast turned out to be about \$720 per year. A "perfect" predictor would increase expected net income by about \$2,400 per year. Therefore, a useful line of research would appear to be a search for predicting devices of greater accuracy.

It has been the authors' experience that the simple concepts of decision theory can be explained to and understood by ranchers. We have found that a simple decision framework often helps clarify issues that are often vague without such a systematic approach. A typical statement by ranchers is that their decisions are "just a wild gamble" or "pure guesswork." On closer examination, however, it is usually found that they are using some elements of a decision framework. We believe that decisions can be improved by making this framework more explicit.

In the next chapter we turn to somewhat more complex applications of decision theory in agriculture.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
DEL 14 AL 25 DE NOVIEMBRE DE 1977

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- 1.- ING. ENRIQUE ALBARRAN AGUILAR
Rafael Buelna No. 35
Col. D. Carmona
México 9, D.F.
Tel. 789-30-69
S. A. R. H.
Reforma No. 69
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel.
- 2.- ING. JAVIER LUIS ALTAMIRANO MARQUEZ
Miguel Domínguez No. 12-Altos
Col. Morelos
México 1, D.F.
Tel. 789-22-03
S. A. R. H.
Reforma No. 69
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel. 535-25-25
- 3.- ING. DAMASO ANAYA GUERRERO
Sur 67 No. 3124
Col. Viaducto Piedad
México 13, D.F.
Tel. 538-06-39
S.A.R.H.
Reforma No. 69-7o. Piso
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel. 535-71-44
- 4.- ING. VICENTE CASTAÑEDA PEÑA
Educación Pública No. 70,
Col. Federal
México 9, D.F.
Tel. 571-65-74
S. A. R. H.
Reforma No. 69-4o. Piso
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel. 553-25-25
- 5.- ING. HECTOR CASTILLO GUTIERREZ
Asia No. 60,
Col. Romero Rubio
México 9, D.F.
Tel.
COMISION DE AGUAS DEL
VALLE DE MEXICO
Balderas No. 55
Col. Centro
Tel. 585-50-66 Ext. 315
- 6.- FIS. TOMAS ERNESTO CHAVEZ RAMIREZ
Rotograbados No. 205
Col. 20 de Noviembre
México 2, D.F.
Tel. 526-99-96
S. A. R. H.
Reforma No. 107-1er. Piso
Col. Sn. Rafael
México 4, D.F.
Tel. 566-06-88
- 7.- M. en I. GERMAN E. FIGUEROA VEGA
La Loma No. 13
Col. San Angelín
México 20, D.F.
Tel. 548-75-11
COMISION DE AGUAS DEL
VALLE DE MEXICO
Balderas No. 55-2o. Piso
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel. 510-09-87

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
DEL 14 AL 25 DE NOVIEMBRE DE 1977

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- 8.- ING. FIDEL FLORES GARCIA
Héroes de 1810
Col. Tacubaya
México 18, D.F.
Tel. 516-36-70
- S. A. R. H.
Reforma No. 69
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel. 535-25-25
- 9.- ING. JUAN PABLO GARCIA MORALES
Medellin No. 229-4
Col. Roma
México 7, D.F.
- S. A. R. H.
Reforma No. 107-1er. Piso
Col. Sn. Rafael
México 4, D.F.
Tel. 566-06-88
- 10.- ING. RODOLFO GRANADOS AGUILAR
Calle 7 No. 96
Col. Pantitlan
México 9, D.F.
Tel. 572-47-22
- ESC. SUPERIOR DE INGENIERIA
Y ARQUITECTURA
Unidad Profesional Zacatenco
Col. Lindavista
México 14, D.F.
Tel. 586-54-70
- 11.- ING. SANTIAGO HERNANDEZ CARDENAS
Dr. Lucio No. 103 Edif. B-10-2
Depto 104
Col. Doctores
México 7, D.F.
Tel. 566-49-38
- S. A. R. H.
Plaza de la República #31-2 P.
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel. 566-49-38
- 12.- ING. SALVADOR HERNANDEZ RAMIREZ
Insurgentes Cento No. 119-A
Col. San Rafael
México 4, D.F.
Tel. 591-19-65
- S. A. R. H.
La Fragua No. 45-9o. Piso
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel.
- 13.- LIC. JUAN ARMANDO IBARRA TORRES
Jacarandas Lote 26 Manzana 3 Int. 2
Col. las Aguilas
México 20, D.F.
Tel. 566-33-80
- S. A. R. H.
Viena No. 20
Col. Juárez
México 6, D.F.
Tel.
- 14.- SR. GABINO GASPAR MONTERROSA REYES
Saratoga No. 1017-204
Col. Portales
México 13, D.F.
Tel. 539-72-23
- S.A.R. H.
Reforma No. 107-1er, Piso
Col. Sn. Rafael
México 4, D.F.
Tel. 566-95-58

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
DEL 14 AL 25 DE NOVIEMBRE DE 1977

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

- 15.- ING. ANTELMO MORALES PEREZ
Insurgentes Centro No. 60-9
Col. Tabacalera
México 4, D.F.
Tel. 546-74-75
- 16.- LIC. JUAN CARLOS PEREZ CASTAÑEDA
Chosica No. 662
Col. Lindavista
México 14, D.F.
Tel. 586-57-09
- 17.- ING. LUIS ORTIZ VILLANUEVA
Filomeno Mata No. 50
Queretaro, Qro.
Tel.
- 18.- ING. RAMON PEREZ VARGAS
Calle Unión No. 105
Col. La Cruz
México 8, D.F.
Tel. 657-29-01
- 19.- ING. JOSE RAMON RODRIGUEZ A.
Playa Caleta No. 268
Col. Reforma Ixtacihuatl
México 13, D.F.
Tel. 590-90-71
- 20.- ING. PASCUAL RAMOS BLANCO
Edo. Colima No. 82-3
Col. Providencia
México 14, D.F.
Tel.
- 21.- ING. RAUL RIOS SANCHEZ
Leandro Valle No. 24-24
Col. Centro
México 1, D.F.
- S. A. R. H.
Plaza de la República 31-7o.
Col. Tabacalera
México 4, D.F.
Tel. 566-87-49
- S. A. R. H.
Viena No. 20
Col. Juárez
México 6, D.F.
Tel. 535-66-80
- S. A. R. H.
Colón No. 2
Queretaro, Qro.
Tel. 4-03-59 y 4-08-83
- S. A. R. H.
Reforma No. 107-1er. Piso
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel. 566-93-58
- S. A. R. H.
Reforma No. 46
México, D.F.
Tel. 591-00-41
- COMISION DEL PLAN NACIONAL
HIDRAULICO
Tepic No. 40
Col. Roma
México 7, D.F.
Tel. 574-49-43
- COMISION DEL RIO BALSAS
Río Churubusco No. 650
Col. Acapulco
México 13, D.F.
Tel. 657-10-00

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
DEL 14 AL 25 DE NOVIEMBRE DE 1977

| <u>NOMBRE Y DIRECCION</u> | <u>EMPRESA Y DIRECCION</u> |
|--|--|
| 22.- ING. ENRIQUE ALFONSO ROMERO CERVANTES Membrillo No. 276 Col. Sta. María México 16, D.F. Tel. 55633-56 | S. A. R. H. Reforma No. 35 Col. Centro México 1, D.F. Tel. 592-33-24 |
| 23.- ING. ABDIAS ROMO SANTOS Calle California Lote 36 Manz. 29 Col. Nva. Rosita México, D.F. Tel. | COMISION DEL PLAN NACIONAL HIDRAULICO Tepic No. 40 México 7, D.F. Tel. 574-14-98 |
| 24.- MODESTO ELIAS SANCHEZ DIAZ Poza Rica No. 135 Col. Petrolera México 16, D.F. Tel. 561-80-19 | S. A. R. H. Reforma No. 69-4o. Piso Col. Centro México 1, D.F. Tel. 535-25-25 |
| 25.- ING. MARIO SANCHEZ GUTIERREZ P. Unidad Residencial Morelos Edif. B-12 4 Depto. 403 Col. Doctores México 7, D.F. Tel. 578-47-99 | S. A. R. H. Reforma No. 51-15 Piso Col. Sn. Rafael México 4, D.F. Tel. 566-97-92 |
| 26.- ING. MARIO SANCHEZ LARA Norte 81 No. 412 Col. Electricistas México 16, D.F. Tel. | S. A. R. H. Reforma 69-7o. Piso Col. Centro México 1, D.F. Tel. 566-45-25 |
| 27.- ING. FERNANDO SANDOVAL MUÑOZ Tarascos No. 24 Col. Satélite Edo. de México Tel. 560-60-72 | COMISION DEL RIO BALSAS Av. Río Churubusco No. 650 México, D.F. Tel. 657-10-00 |
| 28.- ING. FRANCISCO SANDOVAL PADILLA Santander No. 76 Col. Sn. Rafael Azcapotzalco México 16, D.F. Tel. 561-68-84 | COMISION DE AGUAS DEL VALLE DE MEXICO Balderas No. 55-204 Col. Centro Tel. 510-02-94 |

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO: APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS
DEL 14 AL 25 DE NOVIEMBRE DE 1977

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

29.- ING. GENARO TORRES TABOADA
Atenor Salas No. 102-B
Col. Narvarte
México 12, D.F.
Tel. 538-86-87

S. A. R. H.
Reforma No. 69 - 4o. Piso
Col. San. Rafael
México 1, D.F.
Tel. 535-25-25

30.- ING. ADOLFO I. V. VITAL JATIP
Gabriel Mancera No. 306-11
Col. del Valle
México 12, D.F.
Tel. 543-92-94

S. A. R. H.
Plaza de la República 31-9o.
Col. Centro
México 1, D.F.
Tel. 566-88-93

