

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	3
I. POLÍTICA MONETARIA Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA	
1.1 Problemática internacional	7
1.2 Relación entre política monetaria y programación dinámica estocástica. Modelos teóricos y hechos estilizados	11
II. INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA.	
2.1 Introducción	16
2.2 Ejemplos de problemas de programación dinámica	18
2.3 Principio de Optimalidad de Bellman	28
2.4 Aplicación del algoritmo de programación dinámica	29
III. PROGRAMACIÓN DINÁMICA APLICADA A LA POLÍTICA MONETARIA MEXICANA.	
3.1 Introducción	37
3.2 Función objetivo del banco central	39
3.3 Un modelo de programación dinámica aplicado a la economía monetaria mexicana	41
3.4 Solución al problema de optimización	48

CONCLUSIONES	50
Apéndice I	52
Apéndice II	61
Apéndice III	78
Apéndice IV	81
Apéndice V	88
Bibliografía	89

*Life can only be understood backwards,
But it must be lived going afterwards.*

Kierkegaard

INTRODUCCIÓN

Los bancos centrales nunca han sido tan poderosos como actualmente. La política monetaria se ha convertido en el instrumento fundamental de la estabilización macroeconómica (Blinder, 1999). Resulta por tanto pertinente analizar la gestión del marco institucional e intelectual que hay detrás de las decisiones de política monetaria de un banco central independiente.

En teoría todo Banco Central enfrenta un problema de control óptimo respecto a la minimización de una función de pérdida que depende del estado de un sistema con una dinámica propia, la dinámica económica (Woodford, 1999). Aquí el concepto de estado del sistema incluye toda la información disponible en un tiempo dado que ayude a pronosticar su evolución futura (Woodford, 1999). Es decir, teóricamente los responsables de la política monetaria tienen ciertos objetivos como inflación baja, estabilidad en la producción y en el sector externo y cuentan con instrumentos para lograr la optimización de una función objetivo, normalmente cuadrática, al encontrar un equilibrio entre los distintos objetivos en el corto plazo.

Sin embargo, en la práctica las autoridades monetarias enfrentan largos rezagos para observar los efectos sobre el producto y la inflación de la política monetaria instrumentada, lo cual ha sido objeto de estudio durante años (Gruen, Romalis & Chandra, 1997). La existencia de los rezagos en los mecanismos de transmisión de la política monetaria retarda la evaluación acerca de la existencia de la desviación del impacto real conforme a lo planeado haciendo que el problema de optimización se convierta, y no sea suficientemente valorado por las autoridades monetarias (Blinder, 1999), en un problema de programación dinámica.

En este sentido, la metodología de la programación dinámica trabaja con modelos de decisión secuenciales que son abstracciones matemáticas de situaciones en las cuales las decisiones deben ser hechas en diferentes etapas mientras se incurre en un costo en cada una de las etapas. Cada decisión puede influenciar las circunstancias bajo las cuales las decisiones futuras serán tomadas, de manera que si el costo total va a ser minimizado, el individuo debe balancear su deseo de minimizar el costo de la decisión presente con su deseo de evitar situaciones futuras donde un costo elevado sea inevitable debido a las decisiones tomadas en las secuencias previas (Bertsekas, 2000).

De esta forma la técnica de la programación dinámica le permitiría al banco central proyectar en el estado actual una serie de decisiones secuenciales futuras de política tomando en cuenta los largos rezagos que la política monetaria enfrenta y conforme transcurre el tiempo, en el periodo subsecuente, la autoridad monetaria contaría con más información disponible del estado actual de la economía que le permitiría decidir mantener la senda proyectada o ajustarse a una nueva dinámica del sistema en la que el costo esperado que desea minimizar tomando en cuenta el largo plazo¹ sean los objetivos de inflación baja, crecimiento económico o estabilidad de la producción y en el sector externo.

En este sentido, diversos economistas (Kydland y Prescott, 1977) han insistido que con el propósito de evitar la elección de una política monetaria subóptima, la política monetaria debe ser evaluada y conducida como una regla de política. Ellos encontraron que una política discrecional bajo la cual las autoridades monetarias seleccionan la mejor acción, dada la situación actual, no necesariamente resultará en la maximización de la función social objetivo. Sin embargo, si las decisiones se toman en base a reglas de política, el desempeño económico puede ser mejor. Este es el argumento de reglas versus discreción en la instrumentación de la política monetaria (Kydland y Prescott, 1977).

¹ Al considerar que la decisión presente afectará el costo futuro y por tanto se desea encontrar la política

Una ventaja adicional a la conducción de la política con base en reglas y no en discreción, es que permite evaluar los efectos reales de la política conforme a lo planeado. Una política monetaria conducida y evaluada con base en reglas, como por ejemplo fijar un objetivo de inflación anual de 2 por ciento,² parece mejorar su instrumentación, probablemente porque la credibilidad de las autoridades monetarias se acrecienta porque los participantes del mercado tienen una manera de predecir las decisiones futuras y la incertidumbre se reduce. No obstante, otros economistas como Taylor (1999), reconocen que cierta discreción es requerida en la operación sin descuidar las reglas.

El objetivo de la presente Tesis de Maestría es encontrar mediante el método de programación dinámica y de acuerdo con el principio de optimización de Bellman, la política monetaria óptima durante el período de 1997 a 2007 para la asignación óptima de los recursos en congruencia con la función objetivo del Banco de México.

El primer capítulo del presente trabajo plantea la problemática que ha enfrentado el análisis macroeconómico en los últimos años respecto al análisis de modelos de optimización dinámica empleados en economía. Se presenta una revisión a nivel internacional, así como los hallazgos reportados a través de la evidencia empírica considerando que para el análisis macroeconómico de política monetaria, una política subóptima es definida como aquella que produce una tasa más elevada de inflación y no un más bajo nivel de desempleo comparada con otra política que arroje una tasa de inflación más baja. (Kydland & Prescott, 1977).

El segundo capítulo muestra teóricamente en qué consiste el método de la programación dinámica especificando cómo se resuelve en cada etapa un problema de optimización donde el conocimiento del estado actual del sistema expresa toda la información sobre su comportamiento anterior y esta información es necesaria para la *determinación de la regla o política óptima*.

²Si además, otros bancos centrales adoptaran similares objetivos de inflación, es muy probable que habría estabilidad en los mercados de dinero internacionales.

En el tercer capítulo se realiza una evaluación del enfoque de la programación dinámica estocástica aplicado a la política monetaria a través del desarrollo de un modelo de programación dinámica probabilística para la economía mexicana durante el periodo 1997-2007. En este capítulo se desarrolla un modelo de programación dinámica estocástica para la política monetaria mexicana a través de la optimización intertemporal de las desviaciones del producto y la inflación de sus niveles de equilibrio de largo plazo durante el período 1997-2007.

El tercer capítulo contrasta los hallazgos con los resultados obtenidos en materia de política monetaria para la economía mexicana en el período mencionado. En este capítulo también se presentan las conclusiones y recomendaciones de política.

Cabe destacar que este acercamiento de la programación dinámica estocástica a la política monetaria constituye un estudio pionero en México debido a que durante la revisión bibliográfica no se encontraron, hasta la fecha³, trabajos semejantes en nuestro país ya sea en el ámbito académico o institucional. Al respecto, la autora solo encontró un trabajo internacional que aborda la relación entre política monetaria y programación dinámica en el que se presenta la calibración o estimación de la política óptima a través de la metodología de programación dinámica con datos reales de la economía. No obstante, es posible que existan proyecciones de política monetaria empleando el algoritmo de la programación dinámica elaboradas por bancos centrales principalmente de economías avanzadas y que, por el momento, no han sido dados a conocer públicamente.

³ La última fecha consultada se refiere al mes de marzo de 2011.

CAPÍTULO I

POLÍTICA MONETARIA Y PROGRAMACIÓN DINÁMICA.

Introducción

Previo al planteamiento y aplicación del modelo de programación dinámica estocástica del siguiente capítulo, el objetivo del presente capítulo es la exposición de los modelos - fundamentalmente teóricos - de optimización dinámica empleados en economía en los últimos años a nivel internacional. Así mismo, se plantean los hallazgos reportados a través de la evidencia empírica en las economías de Estados Unidos, la Euro área y Japón. Como se comentó en la introducción, en el momento en que se escribió la presente Tesis no se encontró algún trabajo documentado en programación dinámica aplicado a la política monetaria en la literatura nacional.

1.1 Problemática internacional

El análisis macroeconómico en los últimos treinta años se ha caracterizado por el empleo de una amplia variedad de modelos cuya diversidad radica no sólo en la perspectiva teórica sino además en la implementación empírica. Dentro de los modelos que ha empleado la macroeconomía y que se han convertido recientemente en la forma predominante del análisis de política monetaria se encuentran los modelos neo-Keynesianos (Hendry & Pagan, 2004).

La popularidad de los modelos neo-Keynesianos se basa en el empleo de microfundamentos donde los agentes económicos buscan la optimización intertemporal de desviaciones de variables como el producto y la inflación de sus valores objetivo de largo plazo⁴ (Ball, 1999). Una propiedad muy conocida de los modelos neo-Keynesianos es la incorporación de expectativas racionales de las variables endógenas con lo cual solucionan la famosa crítica de Lucas (Kara & Nelson, 2004) respecto a la inestabilidad de los parámetros ante los cambios de política al formular problemas de optimización.⁵

La crítica de Lucas sugiere que los modelos autorregresivos, al omitir la dinámica previsor, muestran inestabilidad en sus parámetros y podrían conducir, por tanto, a una elección inadecuada en el análisis de la política monetaria. Sin embargo, es un hecho que los modelos macroeconómicos autorregresivos o *backward-looking* son ampliamente usados en el análisis de política monetaria y algunos autores (Rudebush, 1998) han encontrado evidencia empírica de estabilidad en las representaciones empíricas autorregresivas. De hecho, algunos autores han encontrado evidencia para rechazar la hipótesis nula de estabilidad de parámetros en una variedad de modelos que fueron desarrollados en respuesta a la crítica de Lucas, entre ellos precisamente los modelos neo-Keynesianos (Fuhrer, 1997), (Rudebush, 1998) & (Estrella, 1999).

⁴ De acuerdo con la teoría económica neoclásica y la teoría económica neo-keynesiana el papel de la política monetaria en el largo plazo debe ser determinar el nivel de inflación. La política monetaria no afecta el producto en el largo plazo. Sin embargo, en el corto plazo, la política puede influenciar la variabilidad del producto y de la inflación alrededor de sus niveles de equilibrio. Para los neoclásicos, una política monetaria adecuada es aquella que produce un nivel bajo de inflación promedio y al mismo tiempo mantiene el producto y la inflación tan estables como sea posible. (Ball, 1999).

⁵ Lucas discutió el problema del pronóstico en econometría en una economía en la cual el comportamiento de las autoridades monetarias puede cambiar en el transcurso del tiempo. Cuando los agentes privados son previsores del futuro, sus decisiones dependerán en parte de las predicciones que tengan de las futuras acciones de política. Cuando la relación que describe las futuras acciones de política cambia en una manera que es observable para los agentes privados, los pronósticos o predicciones de éstos de las acciones de política cambia también. En consecuencia, los modelos econométricos bien especificados deben reflejar esta relación, de acuerdo con Lucas. Si los modelos carecen de esta relación, entonces sus predicciones pueden mostrar inestabilidad en el tiempo cuando un cambio en el régimen de política ocurre. (Estrella, 1999).

Por su parte, los modelos híbridos de expectativas racionales con rigideces nominales (curva de Phillips neo-Keynesiana) en los que se incorporaron tanto el promedio ponderado de valores esperados como los valores rezagados de la inflación mostraron que en realidad ofrecían una pobre descripción de la dinámica inflacionaria, así como poca evidencia de comportamiento previsor racional (J. Rudd y K. Whelan, 2003).

Al parecer, existe un mayor consenso entre los autores acerca de la dinámica inercial o persistencia de un componente inflacionario en el nivel agregado de precios. Este fenómeno ha sido ampliamente documentado para la Euro área (I. Angeloni, L. Aucremanne, M. Ehrmann, J. Gali, A. Levin & F. Smets, 2004)⁶; Estados Unidos (Fuhrer & Moore, 1995), (Guerrieri, 2002) (Altig, Christiano, Eichenbaum & Linde, 2005) y Japón (Ichiro Muto, 2006).

Kydland y Prescott (1977) asumieron que las expectativas del sector privado acerca de la política futura de las autoridades son racionales. Si el gobierno no se compromete a través de un mecanismo con respecto al desempeño de la política futura, la autoridad enfrentará una restricción adicional porque su política no será creíble. Y ciertos resultados económicos no serán alcanzables bajo la política discrecional. Por tanto, cuando existe un compromiso público de los gobernantes para alcanzar ciertos objetivos de política tanto los agentes privados como las autoridades actúan racionalmente y el equilibrio resultante proporciona un mayor bienestar.

De acuerdo con Woodford (1999) en el comportamiento de muchos bancos centrales el nivel de la tasa de interés nominal en el período pasado reciente parece ser un determinante importante para fijar la tasa de interés de corto plazo

⁶ Esos autores encontraron que mientras un cambio de política inesperado tiene efecto de corto plazo en el producto real de la euro área (de cuatro a seis trimestres posterior al shock y después se disipa relativamente rápido); el nivel de precios agregado presenta un efecto más gradual pero permanentemente en la economía.

en el periodo presente. Así, los cambios en las condiciones observadas como la tasa de inflación o nivel de actividad económica resultan en cambios en el nivel de los objetivos de los bancos centrales. Sin embargo esos cambios típicamente ocurren a través de una serie de pequeños ajustes en la misma dirección sobre un periodo de meses más que como una inmediata respuesta del banco central a las condiciones cambiantes de la economía. De esta manera, Woodford plantea lo que denomina un carácter inercial del comportamiento del banco central mostrado a través de funciones de reacción estimadas y especificadas como:

$$\bar{r}_t = r^* + \phi_\pi(\pi_t - \pi^*) + \phi_y(y_t - y_t^*)$$

\bar{r}_t es la tasa objetivo de los bonos federales

π_t es una medida de inflación

π^* es la tasa de inflación objetivo del Banco Central

y_t es una medida del producto

y_t^* es una medida de la tendencia del producto potencial

r^* , ϕ_π y ϕ_y son un conjunto de coeficientes constantes.

Sin embargo, las funciones de reacción estimadas de esta forma, siempre incorporan alguna forma de ajuste parcial de la tasa de fondos federales hacia este objetivo, por ejemplo al especificar que la actual tasa de fondos r_t sigue una ley de movimiento de la forma:

$$r_t = \theta r_{t-1} + (1-\theta) \bar{r}_t$$

Donde el coeficiente θ mide el grado de inercia de la respuesta del banco central. Sack (1998) estimó una función de reacción de la forma especificada en las ecuaciones anteriores usando datos trimestrales de la economía de Estados Unidos durante la era de Greenspan en la Fed. Su valor estimado para θ es de

0.63⁷ con un error estándar de 0.08. El grado de inercia estimado fue elevado y altamente significativo. Clarida (1998) encontró valores parecidos de θ en las funciones de reacción estimadas para otros bancos centrales. Woodford sostiene que hay beneficios al mantener una política con un cierto grado de inercia en la respuesta del banco central a las fluctuaciones económicas de corto plazo porque aumenta la credibilidad del banco central.

1.2 Relación entre Política Monetaria y Programación Dinámica Estocástica. Modelos teóricos y hechos estilizados.

Faust & Svensson (2001) parten del modelo de Cukierman & Meltzer (1986) para modelar el rol de credibilidad, reputación y transparencia de un banco central en el contexto de inflación baja y estacionaria. Para los autores el banco central muestra una función inobjetable, desde que puede ser interpretada lineal en el resultado. Es decir, el banco central debe aceptar incrementos arbitrarios en la varianza del empleo por pequeñas disminuciones en la inflación. El modelo tiene dos agentes, el sector privado y el banco central. El comportamiento del sector privado se resume a través de la curva de Phillips estándar (1958):

$$l_t = (\pi_t - \pi_{t|t-1}) + \varepsilon_t$$

l_t es el logaritmo del empleo en el periodo t , π_t es la tasa de inflación en el periodo t y ε_t es un choque o cambio inesperado en el empleo (un choque de oferta). Las expectativas de la inflación del sector privado son racionales $\pi_{t|t-1} = E_{t-1}^p \pi_t$, donde E^p denota la expectativa racional con respecto a la información que posee el sector privado. E denota la expectativa racional con

⁷ Empleando el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios.

respecto a la información del banco central. Los subíndices $E_{t|t-1}$ siempre indican expectativa condicional para el periodo t basado en la información del público al final del periodo $t-1$.

El banco central tiene un control imperfecto sobre la inflación

$$\pi_t = i_t + \eta_t$$

i_t es la intención del banco central para la inflación, y η_t es el error de control con media cero. Dado que se asume que i_t no es observado por el público, entonces i_t es el resultado de la intención de política y no es un instrumento. Esto captura el hecho de que los resultados que son observables no revelan perfectamente las intenciones de los bancos centrales. El error de control, además satisface $\eta_t = \xi_t + v_t$, donde ξ_t y v_t son choques normales e independientes con media cero. El sector privado observa ξ_t al final del periodo t donde el componente v_t permanece inobservable.

La función de pérdida del banco central al final de período t es:

$$E_{t-1} \sum_{j=t}^{\infty} \beta^{j-t} L_j$$

Donde $\beta (0 < \beta < 1)$ es un factor de descuento y la función de pérdida social está dada por:

$$L_t^p \equiv \frac{1}{2} [\pi_t^2 + (l_t - l_t^*)^2]$$

El objetivo de pleno empleo del banco l_t^* satisface

$$l_t^* = l^* + z_t$$

$$z_t = \rho z_{t-1} + \theta_t$$

Donde $l^* \geq 0$ es el nivel objetivo de pleno empleo de largo plazo, z_t es un parámetro que varía con el tiempo y que se puede llamar nivel de empleo objetivo, $0 \leq \rho < 1$, y θ_t es un choque en el nivel objetivo.

Así, las preferencias de los bancos tienen un componente de idiosincrasia que no es compartido por el público (Faust & Svensson, 2001). El banco central tiene información completa acerca de sus preferencias en cualquier régimen de política monetaria y, al final del período t , posee información completa acerca de todos los periodos t donde hubo algún suceso inesperado en el empleo. Al final de período $t-1$, el público forma sus expectativas de las variables en el periodo t y el banco central observa esas expectativas.⁸

Al inicio de cada período el banco central observa su objetivo de empleo, así como si hubo algún choque o suceso inesperado en la tasa de desempleo, y escoge su objetivo para la inflación. Posteriormente, hay un error de control que arroja la inflación del período y el público observa el suceso inesperado en el empleo. No obstante que Faust & Svensson (2001) no presentan calibración de algún modelo, hallaron, a través de datos numéricos indicativos, que un objetivo explícito de estabilización para el empleo y el producto hace que la política del banco central dependa de su reputación. Finalmente la credibilidad de un banco central se relaciona con la efectividad de sus políticas implementadas.

Orphanides & Volker (2000) mediante el empleo del método de programación dinámica estudiaron el diseño de una política monetaria óptima en un modelo de economía abierta y evaluaron, además, el efecto de la trampa de

⁸ En el mundo real, los bancos centrales obtienen las expectativas del sector privado a través de diferentes fuentes como las encuestas y los precios de instrumentos financieros. (Faust & Svensson, 2001).

liquidez⁹ generado por el límite de cero a la tasa de interés nominal. Es decir, encuentran cuál es la política óptima en escenarios diferentes. Determinan cómo un banco central puede formular e implementar la política monetaria cuando el límite de cero no se percibe, es decir, cuando la inflación es elevada.

Para el hallazgo de la política monetaria óptima en diferentes escenarios, es decir sin y con el límite de cero a la tasa de interés nominal, calibran un modelo de economía abierta al considerar la reciente experiencia japonesa en los noventa, así como la política monetaria implementada en la economía de los Estados Unidos durante la década de 1930. Los autores incorporan la tasa de interés y al tipo de cambio como canales de transmisión de la política monetaria.

Los autores consideraron que las autoridades monetarias muestran preferencias simétricas que son cuadráticas respecto a la desviación de la inflación π de un nivel objetivo π^* , así como de la desviación del producto de un nivel de producto potencial.

Ellos encontraron que la función de pérdida que enfrenta la autoridad monetaria en el período $t+1$, l_{t+1} puede ser expresada como un promedio ponderado de dos componentes:

$$l_{t+1} = w(\pi_{t+1} - \pi^*)^2 + (1-w)y_{t+1}^2.$$

Se asume que la autoridad monetaria descuenta el futuro con un factor de descuento fijo β . Como es claro de la estructura del modelo, la política monetaria opera con un rezago. Durante el periodo t , la política está orientada hacia la estabilización de la economía del período $t+1$ en adelante. Como un resultado, el objetivo de la autoridad monetaria en el periodo t es minimizar la suma esperada de descuentos de pérdidas futuras, de $t+1$ en adelante:

⁹ La trampa de la liquidez se refiere a una situación en que las tasas de interés son bajas o muy bajas y la tasa de ahorro es muy alta lo cual hace que la política monetaria sea inefectiva.

$$L_t = E_t \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s l_{t+1+s} \right\}$$

El banco central resuelve este problema sujeto a la dinámica económica.

El estudio concluye que cuando existe un límite de cero en la tasa de interés nominal, conforme la inflación disminuye, la política se vuelve expansionista más rápido de lo que sería en la ausencia del límite. Lo cual introduce un sesgo en el nivel promedio de inflación.

CAPÍTULO II

INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA

2.1 Introducción

El término programación dinámica fue usado por Richard Bellman para describir las técnicas usadas para estudiar una clase de problemas de optimización que tienen que ver con una secuencia de decisiones. Las decisiones son tomadas en etapas que pueden tener un horizonte finito o infinito. El resultado de cada decisión no es completamente predecible, pero puede ser anticipado antes de que la siguiente decisión sea tomada. El objetivo es por tanto minimizar el costo, representado como una expresión matemática de lo que es considerado un resultado no deseado.

Un aspecto importante en la programación dinámica es que cada decisión no puede ser vista de forma aislada ya que el individuo debe balancear el deseo de un costo presente bajo con la indeseable posibilidad de costos futuros elevados. La técnica de la programación dinámica captura este *trade-off* o intercambio conflictivo, en la que en cada etapa el individuo se enfrenta a una gama de decisiones que son ordenadas en base a la suma del costo presente y de los costos futuros esperados asumiendo que escogerá la decisión óptima para esta etapa y las subsecuentes.

Una amplia variedad de problemas pueden ser tratados de esta manera, es decir mediante modelos aplicables de control óptimo de un sistema dinámico sobre un número finito de etapas (horizonte finito).

La estructura del modelo básico de programación dinámica estocástico a tiempo discreto está compuesta por dos características:

- i. Un sistema dinámico de tiempo discreto
- ii. Una función de costos que es aditiva sobre el tiempo.

El sistema dinámico expresa la evolución de algunas variables, o sea el “estado” del sistema bajo la influencia de decisiones hechas en periodos de tiempo discreto y puede ser de la forma:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Donde

k son los índices de tiempo discreto.

x_k es el estado del sistema y resume la información pasada que es relevante para la optimización futura.

u_k es la variable de control o variable de decisión que será seleccionada en el tiempo k con conocimiento del estado x_k .

w_k es el parámetro aleatorio (también llamado ruido o disturbio).

N es el horizonte o número de veces que el control es aplicado.

f_k es una función que describe el sistema y en particular el mecanismo por el cual el estado es actualizado.

La función de costos es aditiva en el sentido en que el costo incurrido en el periodo k y denotado por $g_k(x_k, u_k, w_k)$ se acumula sobre el tiempo.

Por tanto, el costo total se muestra como:

$$g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, w_k)$$

Donde $g_N(x_N)$ es el costo terminal incurrido al final del proceso.

De esta manera el costo total depende del costo incurrido al final del proceso, de la sumatoria de los estados del sistema hasta $N-1$, de las decisiones tomadas en el período k hasta $N-1$ y del parámetro aleatorio.

Sin embargo, dada la presencia de w_k , el costo es generalmente una *variable aleatoria*. Por tanto la ecuación anterior se convierte en un planteamiento de *programación dinámica estocástica* donde el problema se formula como una optimización del *costo esperado*

$$E \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, w_k) \right\}$$

donde la Esperanza es tomada con respecto a la distribución conjunta de las variables aleatorias involucradas y la optimización es sobre los controles u_0, u_1, \dots, u_{N-1} , tales que cada control o decisión hecha sea seleccionada con algún conocimiento del estado actual x_k .¹⁰

2.2 Ejemplos de problemas de programación dinámica

No obstante que la presente Tesis de Maestría maneja y aplica la metodología de la programación dinámica estocástica, con el objetivo de diferenciar un problema probabilístico de uno determinístico primero se muestra un ejemplo de un problema de programación dinámica determinística, es decir donde hay ausencia del término aleatorio y posteriormente se abordará un problema de programación dinámica estocástica.

¹⁰ Ya sea su valor exacto o alguna otra información relacionada.

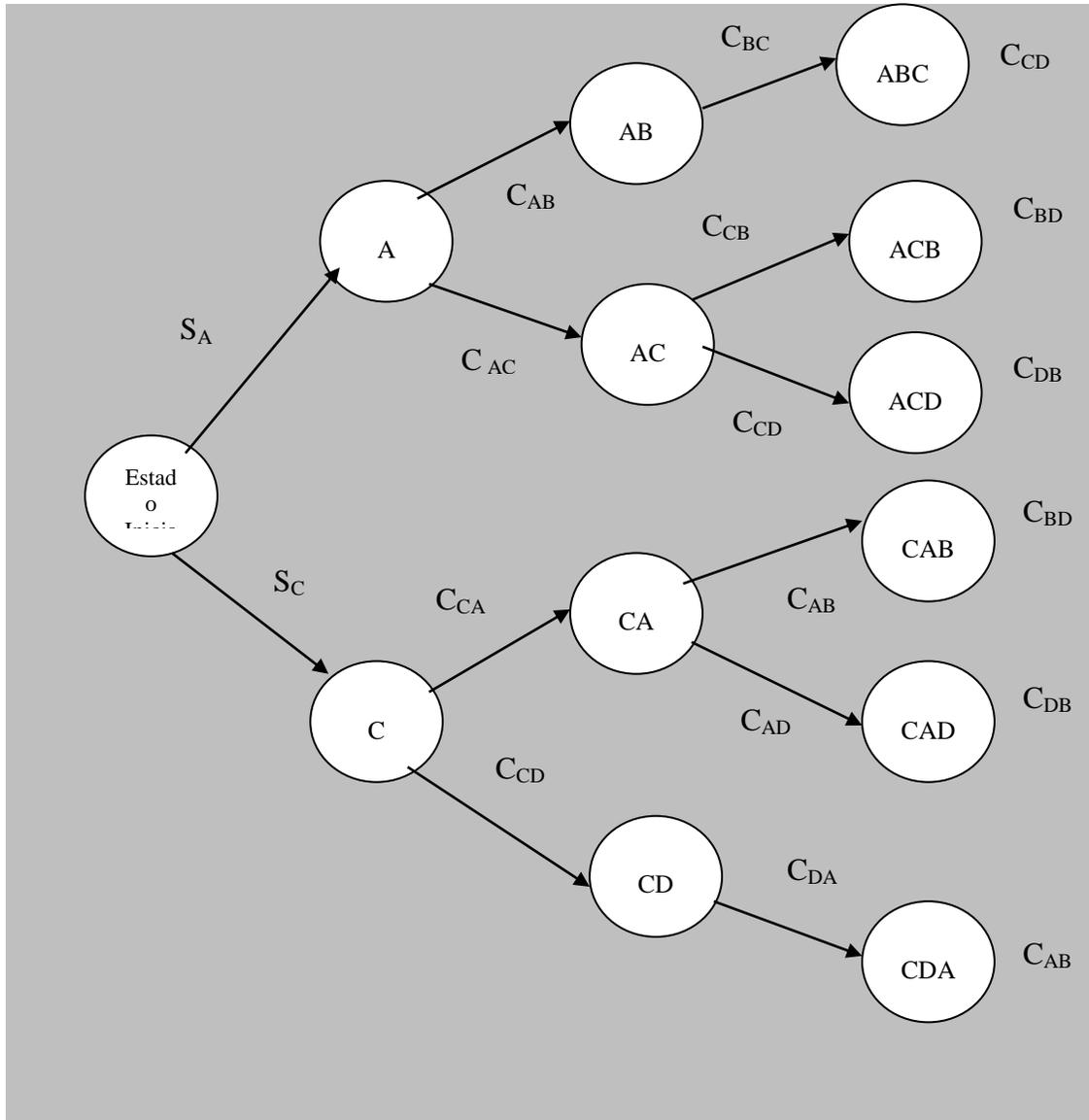
Ejemplo de un problema determinístico para la producción de un bien.

Los problemas determinísticos con un finito número de estados tienen la característica que para un estado dado cada elección de control conduce a un estado determinado que es único¹¹. Por ejemplo, suponga que para producir un bien se realizan cuatro operaciones en una máquina. Las operaciones se denotan como: A, B, C y D. Se asume que la operación B solo puede ser realizada después de que la operación A ha sido concluida. A su vez la operación D solo puede ser realizada después de que la operación C ha sido realizada también. De manera que la secuencia CDAB es permitida pero no así la secuencia CDBA. El costo determinado C_{mn} por pasar de la operación m a la operación n está dado. También existe un costo inicial S_A o S_C por empezar con la operación A o C respectivamente.

Los problemas determinísticos con un finito número de estados pueden ser representados adecuadamente en gráficas de transición como la de la siguiente página.

¹¹ Aunque también podría presentarse la situación en la que hubiera dos estados con el mismo costo.

Gráfica de Transición para un modelo de programación dinámica determinístico producción.



Fuente: Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*. pp.8.

Dado que el costo de la secuencia es la suma de los costos iniciales asociados con ella, por ejemplo la secuencia ACDB tiene el costo: $S_A + C_{AC} + C_{CD} + C_{DB}$, la solución óptima corresponde a la ruta que comienza en un estado inicial y termina en algún estado del tiempo terminal y posee la suma mínima de costos etiquetados en los arcos más el costo terminal.

Ejemplo de un modelo de programación dinámica estocástica

Control de Inventario

Si se considera el problema de ordenar la cantidad de un cierto bien al inicio de cada uno de los N periodos, de forma que podamos satisfacer la demanda del producto que se considera una variable estocástica al mismo tiempo que minimizamos el costo esperado.

Denotamos

x_k es el inventario disponible al inicio del k -ésimo período,

u_k es el inventario ordenado (e inmediatamente entregado) al inicio del k -ésimo período,

w_k es la demanda durante el k -ésimo período con la distribución de probabilidad dada.

Se asume que w_0, \dots, w_{N-1} son variables aleatorias independientes y que el exceso de demanda se satisface tan pronto como el inventario adicional se vuelve disponible.

La ecuación del inventario es ¹²:

$$x_{k+1} = x_k + u_k - w_k,$$

Implica que el inventario del periodo siguiente es una combinación lineal del inventario presente x_k , de la variable de decisión u_k respecto al pedido ordenado tomada en el periodo k y de la demanda del producto w_k presentada en el periodo k :

Y el costo incurrido en el periodo k tiene dos componentes:

1. El costo de compra cu_k , donde c es el costo por unidad ordenado, y

¹² En tiempo discreto.

2. Un costo $r(x_k + u_k - w_k)$ que representa una penalidad por un inventario positivo (por mantener almacenado exceso de inventario), o negativo (debido a un exceso de demanda que no fue completamente satisfecha) al final del periodo.

Así, el costo total esperado sobre N periodos como:

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (cu_k + r(x_k + u_k - w_k)) \right\}$$

Nuestro objetivo es minimizar este costo a través de la adecuada elección de los pedidos u_0, \dots, u_{N-1} sujeto a una restricción natural $u_k \geq 0$ para toda k .

Para minimizar el costo del inventario una posibilidad sería que en el tiempo 0 elegir todos los pedidos u_0, \dots, u_{N-1} sin esperar a ver los subsecuentes niveles de demanda, lo cual no tendría sentido desde la racionalidad económica.

Claramente una mejor decisión, y que es de central importancia para la programación dinámica, sería posponer el pedido de u_k hasta el último momento posible, en el periodo k , cuando el inventario actual x_k sea conocido siempre y cuando no exista penalidad por retrasar el pedido u_k hasta el periodo k , y se pueda tomar ventaja de la información que se vuelve disponible entre el tiempo 0 y el periodo k , es decir de la demanda pasada y de los niveles de stocks o inventarios en periodos pasados.

Las decisiones se van haciendo en etapas con información recabada en etapas previas y que será usada en las subsecuentes etapas para mejorar la calidad de las decisiones. El efecto de esta formulación es que no estamos interesados en hallar los valores numéricos óptimos de los pedidos de inventario. Más bien estamos interesados en hallar una regla de política óptima para seleccionar en cada periodo k una orden u_k para cada posible valor del stock x_k o nivel de

inventario que pueda ocurrir. Esto constituye una distinción entre una *estrategia versus acción aislada* en cada etapa.

Es decir que, matemáticamente estamos interesados en hallar una *secuencia de funciones* μ_k , $k=0, \dots, N-1$, trazando cerca del inventario x_k , dentro de la orden de pedidos u_k , tal que minimice el costo esperado.

El significado de μ_k es que, para cada k y cada valor esperado de x_k

$\mu_k(x_k)$ = la cantidad que debe ser ordenada al tiempo k si el inventario o stock es x_k .

La secuencia $\pi = \{\mu_0, \dots, \mu_{N-1}\}$ se conoce como política o regla de control. Para cada π , el costo correspondiente para un inventario fijo inicial x_0 es:

$$J_\pi(x_0) = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (c\mu_k(x_k) + r(x_k + u_k - w_k)) \right\},$$

y el objetivo es minimizar $J_\pi(x_0)$ para un x_0 dado sobre todas las secuencias admisibles π que satisfacen las restricciones del problema.

Para una elección razonable de la función de costos, la regla de política óptima es de la forma:

$$\mu_k(x_k) = \begin{cases} S_k - x_k & \text{si } x_k < S_k, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde S_k es un adecuado nivel determinado por los datos del problema.

Es decir, que cuando el inventario cae por debajo del umbral S_k , se ordena en el pedido una cantidad suficiente para tener el nivel de inventario nuevamente en S_k .

Una versión del problema del inventario con un punto de vista discreto puede encontrarse si el stock es medido en unidades completas. Entonces sería apropiado pensar en el *Espacio de Estados* como el conjunto de todos los

números enteros más que en el conjunto de números reales; y en la forma de la ecuación del sistema y el costo por periodo será el mismo.

En estados discretos es conveniente especificar las probabilidades de transición entre estados. Lo que se necesita conocer es $p_{ij}(u, k)$ definido como la probabilidad en el tiempo k que el siguiente estado sea j , dado que el estado actual es i y el control seleccionado es u_k , es decir u en la etapa k .

$$p_{ij}(u, k) = P\{x_{k+1} = j \mid x_k = i, u_k = u\}.$$

Este tipo de estado de transición puede alternativamente ser descrito en términos de la ecuación del sistema en tiempo discreto $x_{k+1} = w_k$

Donde la distribución de probabilidad del parámetro aleatorio w_k es

$$P\{w_k = j \mid x_k = i, u_k = u\} = p_{ij}(u, k)$$

Inversamente, dado n sistemas de estados discretos de la forma

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k),$$

junto con la distribución de probabilidad $P(w_k \mid x_k, u_k)$ de w_k , se puede proporcionar una descripción de probabilidad de transición equivalente. Así, las correspondientes probabilidades de transición están dadas por

$$p_{ij}(u, k) = P_k\{W_k(i, u, j) \mid x_k = i, u_k = u\}$$

Donde $W(i, u, j)$ es el conjunto

$$W(i, u, j) = \{w \mid j = f_k(i, u, w)\}$$

De esta forma un sistema en tiempo discreto puede ser equivalentemente descrito en términos de una ecuación en diferencias y en términos de probabilidades de transición.

En el contexto de los problemas de programación dinámica en tiempo discreto en ejemplos de programación dinámica determinística como se observó, el problema no cuenta con incertidumbre estocástica. En este marco, cuando un control es elegido en un estado dado, el siguiente estado está completamente determinado, o sea para cualquier estado i , control u y tiempo k , la probabilidad de transición $p_{ij}(u,k)$ es igual a 1 para el estado j y es igual a 0 para los demás estados.

Una diferencia fundamental entre el control estocástico óptimo y el determinístico es el momento cuando la información se vuelve disponible. En el control determinístico, para cada estado inicial y política corresponde una secuencia de variables de control (u_0, \dots, u_{N-1}) las cuales pueden ser especificadas por anticipado y los estados que resultan del sistema son determinados por $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$.

En contraste, si las variables de control son especificadas por adelantado para un sistema estocástico, la autoridad que toma las decisiones podría darse cuenta en el transcurso de la evolución del sistema que estados no esperados han aparecido y que las variables de control especificadas anteriormente ya no son apropiadas. Así, resulta esencial considerar políticas $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$ donde μ_k es una función desde la historia hasta el control. Si x_0 es el estado inicial, $u_0 = \mu_0(x_0)$ será una decisión tomada para el primer control. Si los estados y controles $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ han ocurrido, entonces el control $u_k = \mu_k(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ será elegido.

Se requerirá que la restricción del control $\mu_k(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k) \in U(x_k)$ sea satisfecha para cada $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ y k . De esta manera, la autoridad que toma las decisiones utiliza la información completa disponible para él en cada etapa. Más que escoger una secuencia de variables de control, la autoridad tratará de elegir una política que minimice el costo total esperado de la operación del sistema.

Elementos de un problema de programación dinámica

Metodológicamente los elementos de un problema de programación dinámica son:

i. *Acciones admisibles*

Se determinan por las alternativas asociadas llamadas variables de decisión o control.

ii. *Espacio de Estados*

Información disponible por la etapa anterior, muestra la información necesaria para hacer una decisión factible en cada etapa que transforma el estado actual en un estado asociado con la siguiente etapa.

iii. *Horizonte de Planeación*

Consiste en un determinado número de etapas que se van a resolver para a su vez solucionar el problema en su conjunto.

iv. *Índice de Funcionamiento*

Es la relación que mide la eficiencia y/o efectividad del sistema en todo el horizonte de planeación.

La forma natural de resolver los problemas de programación dinámica probabilística es recursivamente, es decir hacia atrás o *backward-looking*. Esto sucede así porque al inicio de un periodo el proceso se encuentra en un estado conocido o determinado. En este punto se elige una acción que lleva a uno de

varios estados futuros, es decir la probabilidad de pasar a otro estado es conocida.

El estado de la siguiente etapa está determinado por una distribución de probabilidad determinada por el estado y la política de decisión de la etapa presente. Lo que ahora nos interesa son las decisiones secuenciales para diferentes tipos de procesos aleatorios donde dado el estado actual x_t , una acción a_t , la ley de probabilidad, la cual determina la distribución de probabilidad para el siguiente estado x_{t+1} , depende solamente de x_t , a_t y el tiempo t .

La característica esencial del modelo es que dados un x_t en el tiempo t y la elección de a_t , es posible llegar al siguiente estado x_{t+1} con una distribución de probabilidad $p(x_{t+1}|x_t, a_t)$.

Si definimos $I_t(x_t, a_t) = E \left[\sum_{j=t}^T c(x_j, a_j) \right]$ como el costo esperado total de una etapa y cada vez nos vamos una etapa hacia adelante $t=T, T-1, \dots, 0$, entonces el proceso consiste en optimizar,

$$I_T(x_T, a_T) = c(x_T, a_T).$$

$$I_t(x, a) = \min \{ c(x, a) + E [I_{t+1}(x_{t+1}, a_{t+1})] \}.$$

$$t = T, T-1, \dots, 0.$$

De esta manera el problema se reduce a determinar las acciones $a_t, a_{t+1}, \dots, a_{T-1}$, por lo que el número real de decisiones o de variables de decisión que hay que tomar es:

$$n=T-t.$$

Es decir que para optimizar el índice de funcionamiento se usa el principio de programación dinámica **comenzando desde el destino hasta llegar al origen**. Como se ve, al optimizar de esta manera se obtiene no sólo la ruta del costo

mínimo de la meta al origen, sino además el costo mínimo de cualquier punto intermedio a la meta.

2.3 Principio de Optimalidad de Bellman

La técnica de programación dinámica -la elección de acciones dadas a tiempos dados- se apoya en una idea muy simple, el principio de optimalidad de Bellman.

El Principio de optimalidad de Bellman afirma que si $\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ es una política óptima para el problema básico y se asume que cuando usamos π^* , un estado dado x_i ocurre en el tiempo i con probabilidad positiva. Al considerar el subproblema donde nos encontramos en x_i en el tiempo i y deseamos minimizar el costo por ir del tiempo i al tiempo N .

$$E \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k) \right\}.$$

Entonces la política truncada $\{\mu_i^*, \mu_{i+1}^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ es óptima para éste subproblema.

La justificación intuitiva del principio de optimalidad es muy simple. Si la política trunca

$\{\mu_i^*, \mu_{i+1}^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ no fuera la óptima como se dijo, sería posible reducir el costo al cambiar a una política óptima para el subproblema una vez que alcanzamos x_i .

Para una analogía de un viaje en auto, esto implica que si la ruta más rápida de Los Angeles a Boston implica pasar por Chicago, el principio de optimalidad traslada el hecho obvio de que el trayecto de Chicago a Boston es también la ruta más rápida para un viaje que inicia en Chicago y termina en Boston. El principio de optimalidad sugiere que una política óptima puede ser construida por piezas al construir primero una política óptima para el subproblema de cola que envuelve la etapa $n-1$, después se extiende la política hacia el subproblema de cola que

envuelve las etapas $n-2$ y se continua sucesivamente hasta que la política óptima sea construida para el problema completo. Una política óptima tiene la propiedad de que sin importar el estado y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado que resulta de la primera decisión. Dada una política en la que se pueden introducir cambios que reducen el costo, entonces la política prevaleciente no puede ser la óptima.

2.4 Aplicación del Algoritmo de programación dinámica. Solución al problema determinístico de producción.

Al aplicar el principio de optimalidad al problema de la producción de un bien el problema se resuelve de manera recursiva o *backwards*, con el objetivo de construir primero una política óptima para el subproblema de cola que envuelve la última etapa y posteriormente extender la política hacia el subproblema de cola que envuelve la últimas dos etapas y continuar sucesivamente hasta que la política óptima sea construida para el problema completo.

Se divide el problema en subproblemas y se va encontrando de manera recursiva, es decir tomando primero la última etapa, cuál es la política óptima para cada etapa y así sucesivamente hasta encontrar el problema 1.

Subproblemas de cola de dos etapas. Estos subproblemas son aquellos que envuelven dos operaciones y corresponden a los estados AB, AC, CA y CD.

Estado AB. En este estado la única posible operación que se puede decidir es C como la siguiente y por tanto el costo óptimo de este subproblema es 9, es decir el costo de proyectar C después de B que es 3, más el costo de elegir D después de C, que es 6.

Estado AC. Aquí las posibilidades son a) programar la operación B y después D lo cual tiene un costo de 5 o b) programar la operación D y después la B lo cual

tiene un costo de 9. La primera posibilidad es óptima y el costo correspondiente del subproblema de cola es 5, como se muestra cerca del nodo AC.

Estado CA. Aquí las posibilidades son: a) programar la operación B y entonces la D, lo cual tiene un costo de 3, o b) programar la operación D y después la B, lo cual tiene un costo de 7. La primera posibilidad es óptima y el costo correspondiente del subproblema de cola es 3 como se muestra cerca del nodo AC.

Estado CD. Aquí sólo es posible programar la operación A como la siguiente y el costo óptimo de este subproblema es 5.

Subproblemas de cola de tres etapas. Esos subproblemas pueden ahora resolverse empleando los costos óptimos de los subproblemas de 2 etapas.

Estado A. Aquí las posibilidades son: a) programar como la siguiente operación B) con costo 2) y entonces resolver óptimamente el subproblema correspondiente de dos etapas (costo 9, como se calculó anteriormente), con un costo total de 11, o b) Programar la siguiente operación como C (con costo 3) y entonces resolver óptimamente el subproblema correspondiente de 2 etapas (con costo 5 como se calculó anteriormente), con un costo total de 8. La segunda posibilidad es óptima y el costo correspondiente del subproblema de cola es 8, como se muestra cerca del nodo A.

Estado C. Aquí las posibilidades son: a) programar a A como la siguiente operación (con costo 4) y entonces resolver óptimamente el subproblema correspondiente de dos etapas (con costo 3, como se calculó anteriormente), con un costo total de 7 o, b) programar D como la siguiente operación (con costo 6) y entonces resolver óptimamente el correspondiente subproblema de dos etapas (con costo 5 como se calculó anteriormente), con un costo total de 11. La primera

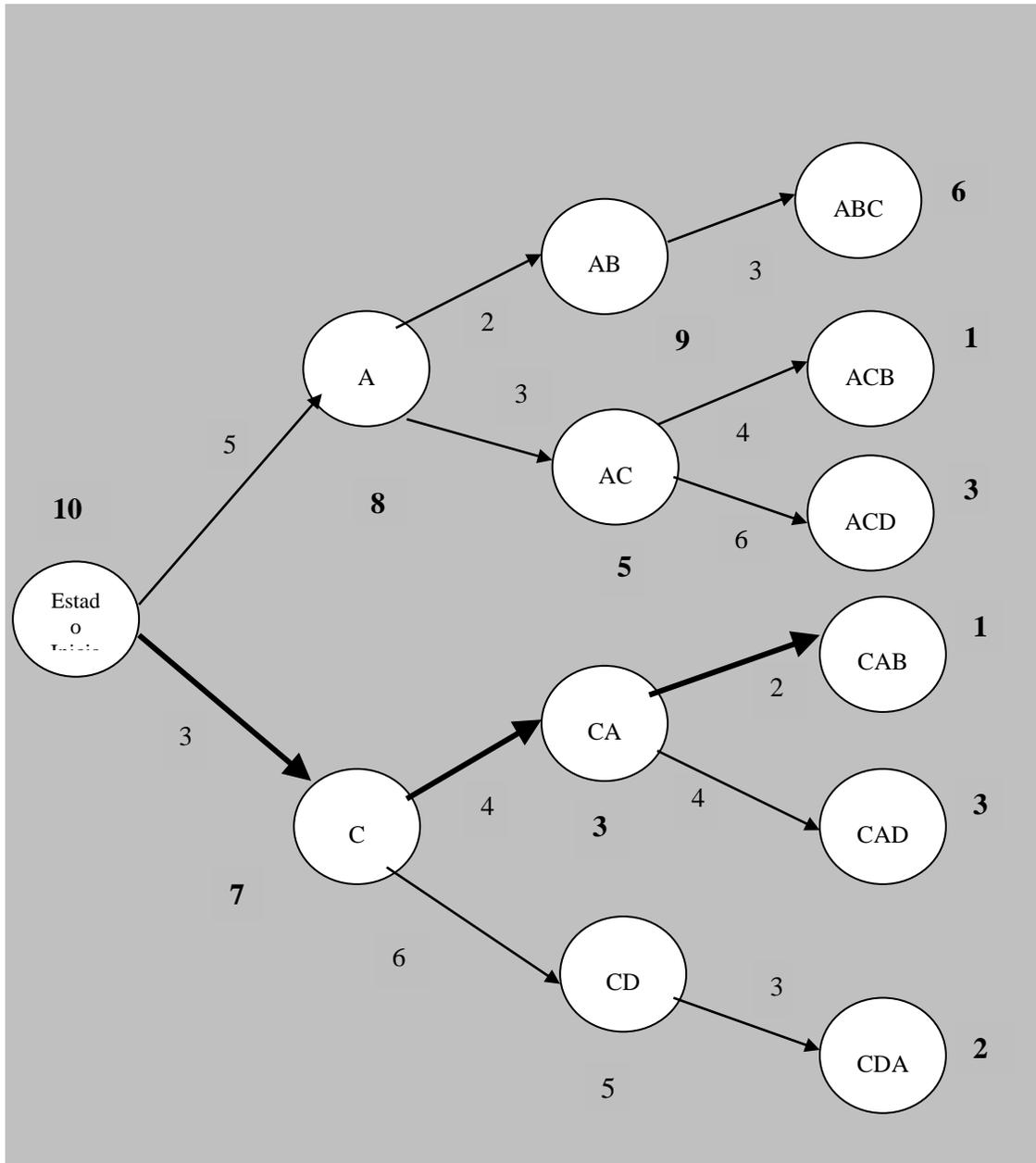
posibilidad es óptima y el costo correspondiente del subproblema de cola es 7 tal y como se muestra cerca del nodo A.

Problema original de cuatro etapas.

Las posibilidades aquí son: a) iniciar con la operación A (con costo 5) y entonces resolver óptimamente el subproblema correspondiente de 3 etapas (con costo 8 como se estimó previamente), con un costo total de 13, o b) comenzar con la operación C (con costo 3) y entonces resolver óptimamente el subproblema correspondiente de 3 etapas (con costo 7 como se resolvió anteriormente) con un costo total de 10. La segunda posibilidad es óptima y el costo óptimo correspondiente es 10 como se muestra cerca del nodo de estado inicial.

Cabe destacar que una vez estimado el costo óptimo del problema original a través de la solución de todos los subproblemas de cola es posible construir el plan o programa óptimo al iniciar comenzando en el nodo inicial y procediendo hacia adelante, cada vez se escogerá la operación que inicia con el programa óptimo para el subproblema de cola correspondiente. De esta manera, al inspeccionar la gráfica y los resultados estimados se determina que CABD es el plan o programa óptimo.

Gráfica de Transición con costos para el problema de producción.



Fuente: Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control*. pp.20.

El algoritmo de programación dinámica para el problema del inventario

Para resolver el problema del inventario se calculan, similar a la solución anterior, secuencialmente los costos óptimos de todos los subproblemas de cola, partiendo del más corto hacia el más largo de los problemas. La única diferencia es que los costos óptimos son estimados como valores esperados debido a que el problema es estocástico.

Subproblema de cola de una etapa o (periodo N-1).

Se asume que al inicio del periodo $N-1$ el inventario es x_{N-1} . Claramente sin importar lo que haya sucedido en el pasado, el administrador del inventario debe ordenar la cantidad de inventario que minimice $u_{N-1} \geq 0$ la suma del costo del pedido y el costo de almacenamiento esperado $cu_{N-1} + E_{w_{N-1}} \{r(x_{N-1} + u_{N-1} - w_{N-1})\}$.

El costo óptimo para el último período es:

$$J_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \geq 0} \left[cu_{N-1} + E_{w_{N-1}} \{r(x_{N-1} + u_{N-1} - w_{N-1})\} \right]$$

Naturalmente, J_{N-1} es una función del inventario x_{N-1} . Se calcula ya sea analíticamente o numéricamente (en ese caso se emplea una tabla para el almacenamiento computacional de la función J_{N-1}). En el proceso de calcular J_{N-1} se obtiene la política de inventario óptima $\mu^*_{N-1}(x_{N-1})$ para el último período; $\mu^*_{N-1}(x_{N-1})$ es el valor de u_{N-1} que minimiza el lado derecho de la ecuación previa para el valor dado de x_{N-1} .

Subproblemas de cola de dos etapas.

Se asume que al inicio del periodo $N-2$ el inventario es x_{N-2} . Es claro que el administrador de inventarios debe ordenar la cantidad de inventario que minimiza no sólo el costo esperado del período $N-2$ pero además el (Costo esperado del período $N-2$) + (Costo esperado del periodo $N-1$, dado que una política óptima será usada en el período $N-1$).

Lo cual es igual a

$$cu_{N-2} + E\{r(x_{N-2} + u_{N-2} - w_{N-2})\} + E\{J_{N-1}(x_{N-1})\}.$$

Empleando la ecuación del sistema $x_{N-1} = x_{N-2} + u_{N-2} - w_{N-2}$ el último término se escribe como $E\{J_{N-1}(x_{N-2} + u_{N-2} - w_{N-2})\}$.

Así el costo óptimo para los últimos dos períodos dado que estamos en el estado x_{N-2} denotado $J_{N-2}(x_{N-2})$, está dado por

$$J_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2} \geq 0} \left[cu_{N-2} + E_{w_{N-2}} \{r(x_{N-2} + u_{N-2} - w_{N-2}) + J_{N-1}(x_{N-2} + u_{N-2} - w_{N-2})\} \right].$$

Nuevamente $J_{N-2}(x_{N-2})$ es calculado para cada x_{N-2} . Al mismo tiempo, la política óptima $\mu_{N-2}^*(x_{N-2})$ también es calculada.

Subproblemas de cola de etapas $N-k$.

De forma similar, tenemos que en el periodo k , cuando el inventario es x_k , el administrador de inventario debe ordenar u_k para minimizar

(Costo esperado del período k) + (Costo esperado del periodo $k+1, \dots, N-1$, dado que una política óptima será usada para esos períodos).

Al denotar $J_k(x_k)$ el costo óptimo, tenemos

$$J_k(x_k) = \min_{u_k \geq 0} \left[cu_k + E_{w_k} \left\{ r(x_k + u_k - w_k) + J_{k+1}(x_k + u_k - w_k) \right\} \right],$$

La cual es, en realidad, la ecuación de programación dinámica para este problema.

Las funciones $J_k(x_k)$ denotan el costo esperado óptimo para el subproblema de cola que inicia en el periodo k con inventario inicial x_k . Estas funciones son estimadas recursivamente caminando hacia atrás en el tiempo, iniciando en el período $N-1$ y finalizando en el periodo 0. El valor $J_0(x_0)$ es el costo óptimo esperado cuando el inventario inicial en el tiempo 0 es x_0 . Durante los cálculos, la política óptima es al mismo tiempo calculada al minimizar el lado derecho de la ecuación anterior.

Los ejemplos muestran la principal ventaja de la programación dinámica. Mientras que el problema original del inventario requiere de una optimización sobre el conjunto de políticas, el algoritmo de programación dinámica de la ecuación anterior descompone este problema en una secuencia de minimizaciones llevadas a cabo sobre el conjunto de controles. Cada una de esas minimizaciones es mucho más simple que el problema original.

Algoritmo de programación dinámica

Para cada estado inicial x_0 el costo óptimo $J^*(x_0)$ del problema básico es igual a $J_0(x_0)$, dado por el último paso del siguiente algoritmo, el cual procede hacia atrás en el tiempo del período $N-1$ al período 0:

$$J_N(x_N) = g_N(x_N),$$
$$J_k(x_k) = \min_{u_k \in U_k(x_k)} E_{w_k} \left\{ g_k(x_k, u_k, w_k) + J_{k+1}(f_k(x_k, u_k, w_k)) \right\}.$$
$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde la expectativa es tomada con respecto a la distribución de probabilidad de w_k , la cual depende de x_k y u_k . Por lo tanto, si $u_k^* = \mu_k^*(x_k)$ minimiza el lado derecho de la ecuación anterior para cada x_k y k , la política $\pi^* = \{\mu_0^*, \dots, \mu_{N-1}^*\}$ es óptima.

CAPÍTULO III

MODELO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA APLICADO A LA ECONOMÍA MEXICANA 1997-2007.

3.1 Introducción

El objetivo del presente capítulo es desarrollar un modelo de programación estocástica para encontrar la optimización intertemporal de las desviaciones del producto y la inflación de sus niveles de equilibrio de largo plazo en la economía mexicana durante el período 1997-2007.¹³ El modelo tiene una estructura de rezago, lo cual es congruente con políticas óptimas bajo incertidumbre.

De acuerdo con la teoría neoclásica, el principal papel de la política monetaria a largo plazo es la determinación del nivel de inflación. La política monetaria no afecta el producto en el corto plazo, sin embargo, tiene influencia sobre la variabilidad del producto y la inflación alrededor de sus niveles promedio. Una buena política monetaria es aquella que produce baja inflación y mantiene el producto y la inflación tan estable como sea posible.

Se ha establecido que la mejor manera de lograr lo anterior es si los bancos centrales siguen una regla de política. Aunque no existe consenso acerca de cuál sería la regla más adecuada, países como Canadá y Nueva Zelanda han adoptado objetivos de inflación a inicios de la década de los noventa. En Estados

¹³ El período elegido es congruente con la temporalidad del instrumento de política monetaria empleado por el banco central.

Unidos, el comportamiento de las tasas de interés parece ajustado en respuesta a movimientos de la tasa de interés (Regla de Taylor).¹⁴

Si la prioridad de la política monetaria fuera estabilizar las variaciones de corto plazo en el producto e inflación con respecto al producto potencial y con respecto a la inflación objetivo respectivamente, puede existir con elevada probabilidad, un *trade-off* entre las varianzas de estas dos variables. Por tanto, dado el *trade-off*, la autoridad monetaria debe minimizar una suma ponderada de las varianzas de estas variables, donde los pesos se determinan por la autoridad monetaria, considerando el costo relativo de las fluctuaciones del producto alrededor de su nivel potencial y la inflación alrededor de su nivel objetivo.

En nuestro modelo las metas de estabilizar el producto y la inflación no son completamente compatibles. Como ya había sido enfatizado, (Taylor, 1994) la elección de una política envuelve un *trade-off* o intercambio conflictivo entre las varianzas del producto y la inflación alrededor de sus niveles de equilibrio. Las autoridades monetarias pueden ponderar las desviaciones del producto y de la inflación cuando buscan la optimización intertemporal de sus valores objetivos. En el presente modelo se consideró otorgar igual ponderación a la variabilidad de las variables en el problema de optimización al establecer que los valores base para los parámetros del producto y la inflación del modelo fueran $\gamma = 0.5$.

¹⁴ De acuerdo con la “regla de Taylor” la tasa de interés se ajusta en respuesta a movimientos del producto y la inflación (Krugman, 1996). Aunque ningún banco central ha adoptado explícitamente la regla de Taylor (Taylor, 1993) el comportamiento mostrado por las tasas de interés en los Estados Unidos y algunos otros países imita el comportamiento bajo tal regla. Por ejemplo en esos países, los bancos centrales elevan la tasa de interés en 50 puntos base por cada 1 por ciento de incremento ya sea en el producto o en la inflación.

3.2 Función Objetivo del Banco Central

De acuerdo con la regla de política monetaria elegida en el marco de la teoría monetaria neoclásica, y a través de los instrumentos de política monetaria empleados por el Banco de México durante el periodo considerado, es posible establecer la función objetivo del Banco Central como:

$$\begin{aligned} & \text{Min}\{I_t\}. \\ & I = E \left[\sum_{t=0}^{43} J_t \right]. \\ & J_t = \gamma(\pi_t - \pi_t^*) + (1-\gamma)(y_t - y_t). \end{aligned}$$

Donde I_t es la función de pérdida del banco central. El objetivo es minimizar I_t sobre todas las políticas. Es decir, sobre todas las decisiones de nivel de corto, $\{C_t\}$, tasa de interés, $\{Cet_t\}$, e inflación objetivo, $\{\pi_t^*\}$ que toma el banco central.

π_t es el nivel de precios real trimestral.

π_t^* es el nivel de inflación objetivo para el siguiente trimestre.

y_t es el nivel de producto potencial.

y_t es el nivel de producto real.

C_t es el nivel de corto actual con impacto en el siguiente trimestre.

Cet_t es la tasa de interés de los Cetes a 91 días para el periodo actual.

Dado $J_t = \gamma(\pi_t - \pi_t^*) + (1-\gamma)(y_t - y_t)$, el parámetro γ representa el ponderador para la inflación y $(1-\gamma)$ es el ponderador del producto. Obviamente éste parámetro es asignado por el banco central y todo depende de sus

prioridades en política. Así, un banco central cuya prioridad es únicamente preservar el poder adquisitivo puede trabajar con una γ igual a uno. Por otro lado, para un banco central cuya prioridad sea el crecimiento económico, su γ será de cero y otorgará todo el peso al nivel del PIB.

La solución a este problema produce entonces, una regla óptima o eficiente (debido al *trade-off*) de política monetaria.

Como se comentó en la introducción de la presente Tesis de Maestría, el objetivo de esta investigación es desarrollar un modelo de programación dinámica con horizonte finito asumiendo que en cada período la autoridad monetaria escoge la acción óptima tomando los resultados pasados como dados.

A través de la aplicación del algoritmo de programación dinámica estocástica explicado ampliamente en el capítulo previo y empleando como base los trabajos expuestos en el capítulo primero de la presente Tesis de Maestría, es posible plantear un escenario al considerar el espacio de estados de la economía, el conjunto de acciones admisibles de política monetaria, la dinámica del sistema económico, el horizonte determinado (finito) y un índice de funcionamiento, se encuentre la estrategia óptima para la conducción de la política monetaria instrumentada por el Banco de México, organismo autónomo encargado de dirigir la Política Monetaria y cuyas decisiones tienen un impacto significativo sobre el crecimiento del PIB; la inflación y el empleo en nuestro país.

De esta manera, se espera obtener una regla de política para el instrumento de política monetaria empleado que permita mejorar el bienestar de las familias a través de las intervenciones de política del Banco de México. Cabe resaltar que este tipo de trabajo hasta la realización de la presente investigación, como se comentó previamente, son nuevos en México.

3.3 Programación dinámica aplicada a la Política Monetaria Mexicana.

Para la aplicación de la programación dinámica a la política monetaria mexicana, primero fue necesario construir una base de datos que se ajustara a las necesidades del modelo en lo que se refiere al año base con el objetivo de ser congruente con el periodo de investigación.

Para tal efecto, se formó una base de datos con una muestra de 44 datos trimestrales¹⁵ de 1997:01 a 2007:04¹⁶ del PIB real base tercer trimestre de 1997=100. Esta base de datos se construyó con un cambio de base a partir de los datos proporcionados por el INEGI del PIB base 1993 a través de la obtención del Índice Implícito del PIB del nuevo año base, 1997=100.

La base de datos del Índice Nacional de Precios al Consumidor , (INPC) también se construyó a partir del cambio de base 1997=100 a partir de la base proporcionada por el Banco de México 2002=100, el cual se tomó como indicador de la inflación real. También se tomaron los datos muestrales de los CETES a 91 días como variable indicadora de la tasa de interés en México. Cabe resaltar que en México no existe una base de datos del instrumento de política monetaria empleado por el Banco de México de marzo de 1995 a diciembre de 2007 denominado Objetivo de Saldo Acumulados o “corto” por lo cual se recurrió a los *Informes de Política Monetaria* anuales publicados por el Banco de México para obtener datos del “corto” trimestrales. De la misma manera fueron recabados los datos de la inflación objetivo.

¹² En la base original los datos ya eran trimestrales con base 1993=100 y se realizó el cambio de base con el objetivo de contar con una serie que fuera más congruente con el periodo de estudio.

¹⁶ El período de estudio es congruente con la ubicación temporal del instrumento empleado por las autoridades monetarias durante la ejecución de la política monetaria en nuestro país.

El objetivo de saldos acumulados (SA) o “corto”, operó de marzo de 1995 a diciembre de 2007 como instrumento de política monetaria enviando señales al mercado de dinero cuyo impacto recayó sobre la tasa de interés del mercado.¹⁷

Cabe destacar, que previo a cualquier estimación se aplicó una transformación logarítmica a todos los datos con la finalidad de tener todos los datos en la misma escala.

El producto potencial se estimó a través del filtro de Kalman ampliamente usado en economía¹⁸ empleando los datos del PIB real base 1997=100. Cabe destacar que esta metodología es usada ampliamente por los bancos centrales de casi todos los países. Así, bajo el enfoque neoclásico, el filtro de Kalman describe el nivel de producto “ideal” o aquel que sucedería sin fluctuaciones económicas tales como choques externos tales como variaciones en el precio del petróleo, alteración del nivel del tipo de cambio, etcétera, es decir, todos aquellos choques exógenos que provocarían una contracción, por lo general, en el nivel de demanda agregada de la economía.

Posteriormente se calcularon los coeficientes de regresión, empleando mínimos cuadrados ordinarios, del logaritmo de los precios tomado del Índice Nacional de Precios al Consumidor, (π_t) y del logaritmo del PIB (y_t) con las

¹⁷ Con el objeto de enviar señales sobre sus intenciones de política monetaria, el Banco de México da a conocer la cantidad a la que pretende llevar el “saldo acumulado de saldos diarios totales” (SA) de las cuentas corrientes de la banca a la apertura del siguiente día hábil. De esta manera, por ejemplo, un objetivo de SA igual a cero sería indicativo de la intención del Banco Central de satisfacer, a tasas de interés de mercado, la demanda de billetes y, por lo tanto, proporcionar los recursos necesarios para que ningún banco se vea obligado a incurrir en sobregiros o a acumular saldos positivos no deseados al finalizar el periodo de cómputo. Un objetivo de SA negativo señalaría la intención del Banco Central de no proporcionar a la banca los recursos suficientes a tasas de interés de mercado, obligando así a una o varias instituciones de crédito a obtener una parte de los recursos requeridos a través del sobregiro en sus cuentas corrientes. Esto último, abstrayendo de otras influencias, puede provocar un alza en las tasas de interés, ya que las instituciones tratarán de evitar pagar la elevada tasa del sobregiro, buscando obtener esos recursos en el mercado de dinero. *La Conducción de la Política Monetaria del Banco de México a través del Régimen de Saldos Acumulados*. Banco de México. Nota Técnica. Sin año de publicación.

¹⁸ Una explicación detallada del Filtro de Kalman, así como de las estimaciones obtenidas en el paquete R se puede encontrar en el Apéndice I.

siguientes covariables: datos rezagados un período del logaritmo del corto (C_{t-1}), del logaritmo del PIB base 1997 (y_{t-1}), del logaritmo del INPC base 1997=100 (π_{t-1}), y del logaritmo de los CETES a 91 días (Cet_{t-1}), más un término cuadrático del logaritmo del objetivo de saldos acumulados o “corto” (C_{t-1}^2) porque los residuales del modelo lineal exhibían un patrón que podía ser capturado con un término elevado al cuadrado. Las ecuaciones que se obtuvieron son las siguientes:

$$\pi_t = -13.12010 + 0.39404C_{t-1} - 0.03996C_{t-1}^2 + 1.17129y_{t-1} - 0.14489Cet_{t-1} + \varepsilon_t.$$

$$y_t = 12.381388 - 0.036902C_{t-1} + 0.001958C_{t-1}^2 + 0.530901\pi_{t-1} + 0.045423Cet_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Los residuales de ambas regresiones pasaron las pruebas de diagnóstico (Spanos, 1986) es decir pasaron el test de normalidad lo cual permitió modelar las probabilidades de transición asumiendo la existencia de distribución de Probabilidad Normal con media cero y varianza constante (Spanos, 1986).

$$\pi_t \square N(-13.12010 + 0.39404C_{t-1} - 0.03996C_{t-1}^2 + 1.17129y_{t-1} - 0.14489Cet_{t-1}, 0.002116)$$

$$y_t \square N(12.381388 - 0.036902C_{t-1} + 0.001958C_{t-1}^2 + 0.530901\pi_{t-1} + 0.045423Cet_{t-1}, 0.000884)$$

Cabe destacar que las pruebas de bondad de ajuste de ambas regresiones se realizaron en los softwares R y JMP, cuyo uso es ampliamente extendido en la investigación científica actual¹⁹ y cuyos resultados se encuentran en el Apéndice II.

¹⁹ Los artículos actuales en ciencias sociales en los journals de investigación han incrementado en la metodología del análisis de datos el uso del software R. (GESIS Leibniz Institute for the Social Sciences, Cologne-Germany, 2010).

Con la información anterior se retomó la función objetivo del Banco Central:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \{I_t\}. \\ & I = E \left[\sum_{t=0}^{43} J_t \right]. \\ & J_t = \gamma (\pi_t - \pi_t^*) + (1 - \gamma) (y_t - y_t). \end{aligned}$$

Dado el modelo de programación dinámica, donde las acciones admisibles se tomaron de acuerdo a los valores mínimos y máximos registrados de las series en logaritmos, a continuación se describen los siguientes elementos:²⁰

$$X = \{(\pi_t, y_t) : \pi_t \in (0, \infty), y_t \in (0, \infty)\} \quad \text{Espacio de Estados.}$$

$$A = \{(C_t, \pi_t^*) : C_t \in (0, \infty), \pi_t^* \in (0, \infty)\} \quad \text{Espacio de Acciones.}$$

$$A(\pi_t^*, C_t) = \{\pi_t^* \in (\pi_{t-1} + \ln(0.85), \pi_{t-1}), C_t \in (2.99, 6.17), C_{et_t} \in [1.64, 3.73]\}$$

Acciones Admisibles.

$$T = \{0, 1, \dots, 43\} \quad \text{Horizonte de Planeación.}$$

$$I(\pi_t, y_t, \pi_t^*) = E \left[\sum_0^{43} c(\pi_t, y_t, C_t, \pi_t^*) \right] \quad \text{Índice de Funcionamiento.}$$

Las acciones admisibles muestran el rango de valores factibles que pueden tomar las variables de acuerdo a su base de datos particular. En el caso del nivel de precios, dada la política permanente que mantiene Banco de México de lucha contra la inflación, se asume que en el límite inferior, la inflación presente puede tener un valor ligeramente inferior a la inflación pasada $(\pi_{t-1} + \ln(0.85))$ y en el

²⁰ En el caso del corto se tomaron los valores reales del corto durante el período mencionado (1997:01-2007:04) sustituyendo únicamente el valor del cuarto trimestre de 1997, que era cero debido a una política monetaria neutral, por el promedio de sus dos valores previos y subsecuentes.

límite superior puede tomar el valor de la inflación anterior (π_{t-1}), lo cual obviamente no es lo deseable por las autoridades monetarias.

Al considerar que los coeficientes de regresión reflejan la distribución de ambas variables condicionada a los valores de la variable, es decir, son una representación adecuada del proceso generador de datos, (PGD) (Spanos, 1986); se asume que en realidad muestran el valor esperado del producto y la inflación. Por tanto, es factible considerar a las ecuaciones estimadas como las probabilidades condicionales del estado siguiente en el caso de la inflación y el producto para el período de estudio:

$$\begin{aligned} (\pi_{t+1} | \pi_t, y_t, C_t, \pi_t^*) &\square N \left(\begin{array}{l} -13.12010 + 0.39404C_t - 0.03996C_t^2 + 1.17129y_t - 0.14489Cet, \\ 0.002116 \end{array} \right) \\ (y_{t+1} | \pi_t, y_t, C_t, \pi_t^*) &\square N \left(\begin{array}{l} 12.381388 - 0.036902C_t + 0.001958C_t^2 + 0.530901\pi_t + 0.045423Cet, \\ 0.000884 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Una vez resuelto el modelo de manera recursiva, claramente implica que de acuerdo con el horizonte de planeación, tenemos 44 etapas (trimestres)²¹. En cada una de las 44 etapas, la autoridad monetaria toma decisiones que implícitamente implican un costo, tal como lo explica el índice de funcionamiento. En este caso, las decisiones que toma la autoridad monetaria son: la inflación objetivo del siguiente período π_t^* , y el corto que se aplica en el período actual, C_t , el cual tendrá un impacto en el siguiente periodo.

²¹ En realidad tuvimos 45 etapas al considerar los valores *t-1* del trimestre 1997:01 para la estimación de los valores de la inflación y producto óptimos esperados pero al igual que en la estimación de promedios móviles (Moving Average) se pierde información en el cálculo.

Las decisiones no se toman de manera discrecional, como ya se explicó, las decisiones siguen una regla de política monetaria que se plantea en la función objetivo del banco central. Es decir, en el marco de la teoría monetarista neoclásica, el Banco de México busca en cada etapa minimizar las desviaciones de la inflación real con la inflación objetivo así como de minimizar las desviaciones del producto real con el producto potencial.

Como ya se mencionó en el Capítulo I, una política monetaria adecuada es aquella que produce baja inflación y mantiene el producto y la inflación tan estable como sea posible. Para cumplir su objetivo el Banco de México cuenta con el instrumento de política monetaria denominado “Corto” u Objetivo de Saldos Acumulados (SA).

En cada etapa, la autoridad monetaria observa los valores actuales de la inflación, (π_t) , y del PIB, (y_t) , y decide el nivel de corto actual (C_t) que tendrá un impacto en el siguiente periodo sobre el nivel de precios y el nivel de inflación objetivo (π_t^*) para el siguiente período. Así, en la primera etapa las autoridades monetarias toman como dados los valores iniciales de la inflación (π_t) y el producto (y_t) , y de acuerdo con las probabilidades de transición y dependiendo de la decisión que tome la autoridad monetaria en el presente respecto del nivel de corto (C_t) y del nivel de la inflación objetivo (π_t^*) , los valores de las variables nivel de precios (π_{t+1}) , y del PIB, (y_{t+1}) , pasan aleatoriamente al siguiente punto.

En la siguiente etapa la autoridad monetaria observa el nivel de inflación, del producto y decide una estrategia que lleva implícita el empleo de sus instrumentos de política monetaria, así como una regla de política monetaria definida por su función objetivo y de acuerdo con las probabilidades de transición los valores de las variables pasan aleatoriamente al siguiente punto hasta completar el horizonte de planeación.

Para encontrar cuál es la política monetaria óptima se resuelve primero el problema de manera recursiva partiendo de la última etapa y se optimiza en cada período y se va un período más atrás en donde también se optimiza en ese período tomando en cuenta los valores acumulados del (o los) períodos subsecuentes.

En la presente investigación, como se comentó, se trabajó bajo el supuesto de que el Banco de México confiere la misma importancia tanto al crecimiento como a la inflación, es decir que $\gamma = \frac{1}{2}$.

3.4 Solución al problema de optimización

Para resolver el problema de optimización la solución inicia, dado el método recursivo de la programación dinámica, con el cuarto trimestre de 2007 o sea en la etapa 44 que en esta terminología se denomina valor de salida:

Etapa 44

$$I_{44} = \frac{1}{2}(\pi_{44} - \pi_{44}^* + y_{44} - y_{44}) \text{ Valor de salida}$$

Etapa 43

$$I_{43} = \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{43} - \pi_{43}^* + y_{43} - y_{43} + E(\pi_{44} - \pi_{44}^* + y_{44} - y_{44}) \right\}$$

$$\pi_{44}^* \in [\pi_{43} + \ln(0.85), \pi_{43}]$$

$$C_{43} \in [2.99, 6.17]$$

$$Cet_{43} \in [1.64, 3.73]$$

Debido a que en cada etapa se minimiza la suma ponderada de las desviaciones del período actual más el valor esperado de las desviaciones de la etapa siguiente, el cual, con diferentes iteraciones también incluirá, no sólo el óptimo encontrado de una etapa siguiente, pero además, el valor esperado del óptimo considerando todas las etapas subsecuentes hasta completar el horizonte $n=44$, es posible encontrar una fórmula recursiva que permita encontrar el óptimo en cada etapa previa y así llegar a la etapa inicial, con un valor óptimo que resuelva el problema al considerar todas las etapas.

Lo anterior permitió resolver el problema en Excel dado que además no existe un software para resolver problemas con programación dinámica que no sean los tradicionales como son problemas de inventario principalmente.

Al emplear la metodología descrita por Richard Bellman (1957), fue posible encontrar la fórmula recursiva en excel que arrojara el **Valor Óptimo del Índice**

de Funcionamiento que fue de 1.18446269. ²² Este valor se comparó con el valor del **Índice de Funcionamiento real, 123.089224013**, el cual dista de manera importante del Valor Óptimo.

Cabe destacar que a partir de los Valores Óptimos en logaritmo del producto y la inflación es posible obtener los Valores Óptimos reales empleando el supuesto de Normalidad.²³

Así **el Valor Esperado Óptimo del Producto para la etapa 44 fue $y_t^* = 5,321,012.599$ millones de pesos (mdp)** a precios de 1997, mientras que **el valor real registrado para el cuarto trimestre de 2007 fue $y_t = 4,149,989.9$ mdp** a precios de 1997.

Así mismo, es posible regresar a los **valores óptimos de la inflación esperada, $\pi_t^* = 66.57962388$** para el último trimestre del 2007 y contrastarla con la **inflación real durante el mismo período que fue $\pi_t = 208.151$.**

²² Estas estimaciones se incluyen en los Apéndices III y IV.

²³ La transformación de logaritmos a números ordinarios se adjunta al final del trabajo como Apéndice V.

CONCLUSIONES

De acuerdo con Blinder (1999), la política monetaria efectiva debe basarse al menos en un modelo macroeconómico y el concepto subyacente de programación dinámica porque las autoridades monetarias deben trabajar en una ruta del presente a la situación futura deseada.

El objetivo de la presente Tesis de Maestría fue encontrar una estrategia de política monetaria efectiva que condujera hacia los valores óptimos de inflación y del Producto Interno Bruto para la economía mexicana durante el período de 1997 a 2007. La investigación se realizó con una función de comportamiento del Banco de México ampliamente usada por los modelos de optimización intertemporal y que es propia de los bancos centrales cuyo objetivo prioritario es la minimización de las varianzas del producto y la inflación alrededor de sus niveles de equilibrio. (Ball, 1999).

Tanto las regresiones del producto (y_t) como de la inflación (π_t) pasaron las pruebas de diagnóstico o de bondad de ajuste como se ilustra claramente en el Apéndice II, lo cual permitió afirmar que los modelos constituyen una representación adecuada del proceso generador de datos (Spanos, 1986).

Adicionalmente, la estimación del algoritmo de programación dinámica se realizó bajo el supuesto que el banco central ponderaba las desviaciones del producto y

la inflación con el mismo valor, donde $\gamma = \frac{1}{2}$.²⁴

²⁴ Es importante señalar que los resultados de la presente investigación podrían cambiar en el caso de que se tomara un valor diferente de γ , dado que su rango es $0 \leq \gamma \leq 1$. De hecho, se conservó en todo momento una posición moderada al otorgar a γ el valor de 1/2 dado que el Banco de México en numerosas ocasiones ha declarado que su prioridad es únicamente mantener el poder adquisitivo de la moneda a través de una

Al contrastar los resultados obtenidos en la aplicación del modelo de programación dinámica con la política monetaria instrumentada por el banco central, es factible definir que la política implementada por las autoridades monetarias fue subóptima durante el período 1997-2007 porque dados los valores óptimos y verdaderos de las variables consideradas, es posible suponer que se hubiera podido encontrar una estrategia con la misma función de comportamiento adoptada, que arrojará un nivel de producto real mayor y un nivel de inflación mucho menor al verdadero.

Por tanto, este estudio arroja evidencia empírica que muestra la existencia de un potencial que se encuentra latente y que es posible aplicar para mejorar la formulación de la política macroeconómicas, centradas como hoy en día se encuentran, alrededor de la estabilidad de variables consideradas objetivo, y que permitirían al banco central, en este caso al Banco de México, ampliar el bienestar social sin descuidar sus objetivos de política monetaria. Aunque una posibilidad es que el Banco Central ya posea información al respecto y que resultados similares a los hallados en la presente Tesis de Maestría pero que no los haga públicos.

inflación baja y estable; por lo cual acepta que lo anterior impactará favorablemente pero sólo de manera indirecta al crecimiento económico y al empleo en el largo plazo.

APÉNDICE I

Filtro de Kalman

De acuerdo la teoría neoclásica contemporánea (Romer, 2002) el producto interno de una economía evoluciona en torno a su tasa potencial. La tasa de producto potencial podría interpretarse como el nivel de producto congruente con el nivel de tendencia de largo plazo (Fuentes, Gredig & Larraín, 2007).

Para obtener la estimación del producto potencial se empleó un modelo estructural de series de tiempo a través del cual se descompuso la serie del PIB en sus elementos básicos (Loría & Ramos, 2007) como tendencia, ciclicidad y el componente irregular (Rudolf & Rünstler, 1996); de los cuales la tendencia se interpreta como una adecuada aproximación de la tasa potencial.

El algoritmo de Kalman calcula, a partir de un algoritmo recursivo de predicción y corrección, un estimador lineal e insesgado del estado en el momento t con la información disponible $t-1$ y se actualiza con la información adicional disponible en t .

Modelos Estado-Espacio

Los modelos estado-espacio son una forma conveniente para representar a los modelos estructurales de series de tiempo, permitiendo la estimación óptima de sus componentes a partir del filtro de Kalman.

Modelos Estado-Espacio

$$f(t) = H(t)x(t)$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

$$f(t) \in \mathbb{R}^p, H(t) \in \mathbb{R}^{p \times q}, x(t) \in \mathbb{R}^q$$

$x(t)$: $q \times 1$ vectores de estados no observados

$H(t)$: matrices conocidas.

Los vectores estado se propagan a través de las siguientes ecuaciones estado:

$$x(t+1) = F(t)x(t) + u(t) \quad \text{son las ecuaciones estado}$$

$F(t) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ son matrices $q \times q$ conocidas

$$t = 0, \dots, n-1$$

$u(0), \dots, u(n-1)$ son las perturbaciones aleatorias con media cero no observables.

$$E(u(t)) = 0$$

$$t = 0, \dots, n-1$$

$x(0)$ es un vector de estado inicial para empezar el proceso.

Al combinar los elementos anteriores formalmente se puede definir el modelo estado-espacio como:

$$y(t) = H(t)x(t) + e(t)$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

y

$$x(t+1) = F(t)x(t) + u(t)$$

$$t = 0, 1, \dots, n-1$$

Las perturbaciones tienen media cero.

$$E(e(t)) = E(u(t-1)) = 0$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

$x(0)$ tiene también media cero.

$$E(x(0)) = 0$$

La estructura de covarianza del modelo está determinada por las condiciones:

$$\text{Cov}(e(t), e(s)) = 0, s \neq t$$

$$\text{Var}(e(t)) = w(t), t = 1, 2, \dots, n$$

Para matrices definidas positivas $w(t), t = 1, \dots, n$.

$$\text{Cov}(u(s), u(t)) = 0, s \neq t$$

$$\text{Var}(u(t)) = Q(t), t = 0, \dots, n-1.$$

Para matrices semidefinidas-positivas $Q(t), t = 0, \dots, n-1$

$$\text{Var}(x(0)) =: s(0|0)$$

y para $t = 1, \dots, n$ y $s = 0, \dots, n-1$,

$$\text{Cov}(e(t), u(s)) = 0$$

$$\text{Cov}(e(t), x(0)) = 0$$

$$\text{Cov}(u(t), x(0)) = 0$$

En sentido estrictamente estadístico (Enders, 2004; Harvey 2000), una serie de tiempo cualquiera (y_t) se representa como:

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + \psi_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde $t = 1, \dots, T$ y $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_t^2)$.

Donde:

- a) Tendencia, μ_t , representa la evolución subyacente o secular de una serie.
- b) Estacionalidad, γ_t , recoge la ocurrencia periódica alrededor de la tendencia.
- c) Ciclicidad, ψ_t representa las oscilaciones periódicas alrededor de la tendencia. Y por último

d) Innovaciones, ε_t , son los movimientos erráticos que no siguen un patrón específico.

Un modelo estructural aditivo puede construirse a partir de la ecuación (1) con una especificación particular para cada componente.

TENDENCIA

$$\begin{aligned}\mu_t &= \mu_{t-1} + \beta_t \\ \beta_t &= \beta_{t-1} + \zeta_t\end{aligned}\quad (2)$$

β_t = pendiente de la tendencia

ζ_t = parte aleatoria, $\zeta_t \square NID(0, \sigma_\zeta^2)$.

ESTACIONALIDAD

$$\gamma_t = \gamma_{1t} + \gamma_{2t} \quad (3)$$

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{s}$$

$s=4$ para datos trimestrales,

$t = 1, \dots, T$;

$$\lambda_1 = \frac{2\pi j}{4} = \frac{\pi}{2}, \lambda_2 = \frac{4\pi}{4} = \pi \text{ frecuencia medida en radianes.}$$

$\omega_t \square NID(0, \sigma_\omega^2)$ y $\omega_t^* \square NID(0, \sigma_\omega^2)$ son dos términos de perturbación aleatoria mutuamente independientes.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1t} \\ \gamma_{1t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1t-1} \\ \gamma_{1t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{1t} \\ \omega_{1t}^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{2t} \\ \gamma_{2t}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{2t-1} \\ \gamma_{2t-1}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{2t} \\ \omega_{2t}^* \end{pmatrix}$$

$t = 1, 2, \dots, T.$

$\omega_{1t} \square N(0, \sigma_{\omega_1}^2)$ independiente

$\omega_{1t}^* \square N(0, \sigma_{\omega_1^*}^2)$ independiente

$\omega_{2t} \square N(0, \sigma_{\omega_2}^2)$ independiente

$\omega_{2t}^* \square N(0, \sigma_{\omega_2^*}^2)$ independiente

CICLICIDAD

$$\begin{bmatrix} \psi_t \\ \psi_t^* \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \text{sen } \lambda_c \\ -\text{sen } \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{t-1} \\ \psi_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_t \\ \xi_t^* \end{bmatrix} \quad (4)$$

λ_c : frecuencia del ciclo medida en radianes, $0 \leq \lambda_c \leq \pi$

$$\lambda_c = 0.44275$$

$\frac{2\pi}{\lambda_c}$ es el periodo del ciclo

$$\frac{2\pi}{\lambda_c} = 14.1913$$

ρ : factor de amortiguación, $0 \leq \rho \leq 1$

$$\rho = 1$$

$$\cos(14.1913) = -0.05410662424$$

$$\text{sen}(14.1913) = 0.9985351637$$

$\xi_t \square NID(0, \sigma_\xi^2)$ y $\xi_t^* \square NID(0, \sigma_{\xi^*}^2)$ son mutuamente independientes.

Finalmente las ecuaciones (2), (3) y (4) se sustituyen en (1), y mediante una transformación algebraica se obtiene el modelo adoptado en este trabajo en su forma estado-espacio. Con este modelo se puede descomponer una serie de tiempo en sus partes integrantes:

$$\begin{aligned} y_t &= A_t x_t + B_t u_t \\ x_t &= C_t x_{t-1} + D_t u_t \end{aligned} \quad (5)$$

Donde: $A = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$, $x_t = (\mu_t \quad \beta_t \quad \gamma_{1,t} \quad \gamma_{2,t}^* \quad \gamma_{3,t} \quad \psi_t \quad \psi_t^* \quad \delta_t)'$,

$$B = (\sigma_\varepsilon, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad C = \text{diag}(C_\mu, C_\gamma, C_\psi, 1), \quad C_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_\psi = \rho \begin{bmatrix} \cos \lambda_c & \text{sen } \lambda_c \\ -\text{sen } \lambda_c & \cos \lambda_c \end{bmatrix} \quad D = (0, D), \quad D = \text{diag}(\sigma_\zeta^2, \sigma_\omega^2 I_3, \sigma_\zeta^2 I_2)$$

$$u_t = (\varepsilon_t, \zeta_t, \omega_{1,t}, \omega_{2,t}^*, \omega_{3,t}, \xi_t, \xi_t^*)'$$

HECHOS ESTILIZADOS

ESTIMACIÓN DEL PIB POTENCIAL PARA MÉXICO 1997-2007 EMPLEANDO EL ALGORITMO DE KALMAN (SOFTWARE R).

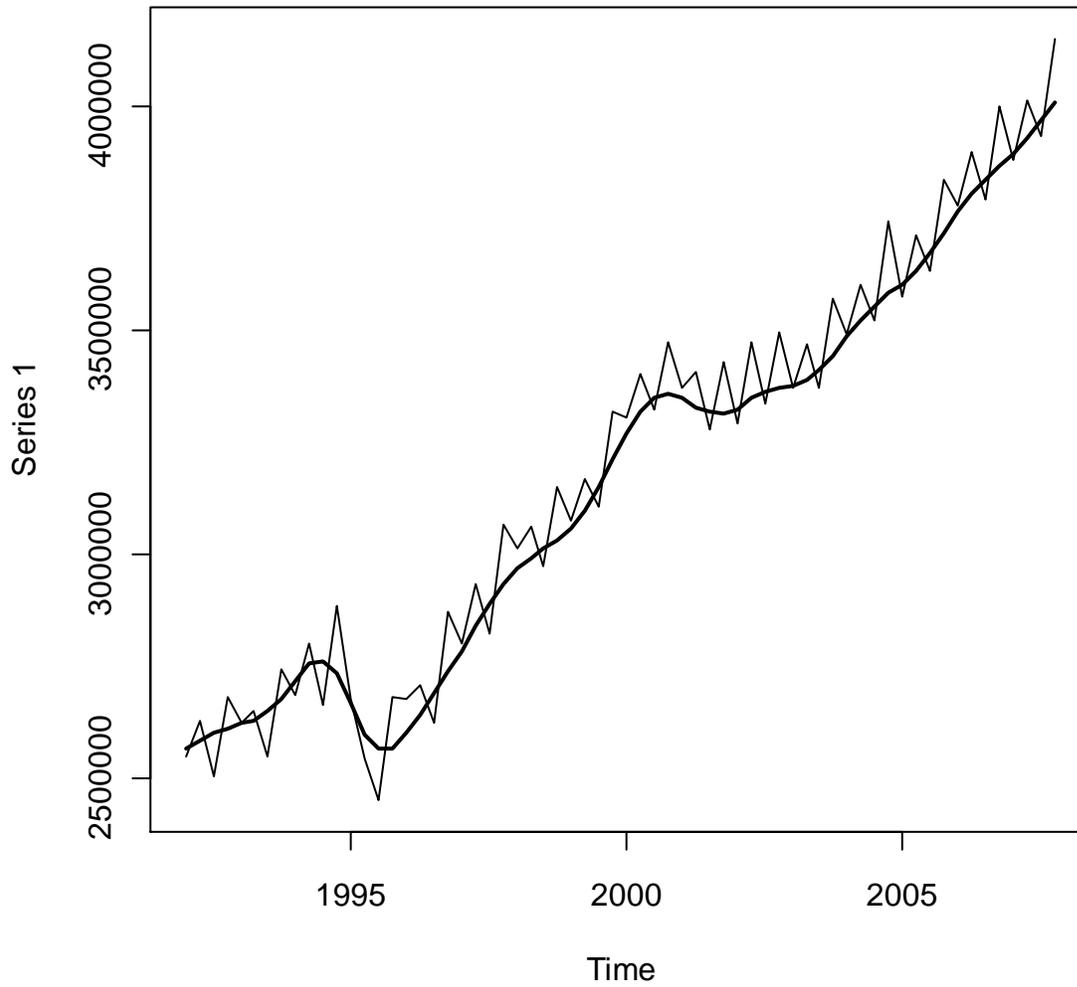
```
> library(MASS)
> library(sspir)
Loading required package: mvtnorm
> library(mvtnorm)
> library(MASS)

pib<-
c(2549798.768208,2629944.336243,2506560.536642,2684836.236008,2627396.282873,2651859.457322,25
49239.576541,2743964.548192,2688747.902831,2801523.441619,+
2666756.025781,2887177.180058,2676845.155846,2543930.129619,2452475.822747,2683733.741583,267
8574.790821,2708711.072344,2627209.588191,+
2874698.322830,2801702.633459,2935833.607419,2823877.805000,3066320.641760,3012304.098698,306
2297.189689,2972473.502704,3149178.838307,+
3077455.229550,3169184.263074,3104408.256003,3318380.819645,3305850.598040,3402201.155536,332
3184.683951,3474647.837793,3369341.530097,+
3407252.467177,3279527.730207,3427058.822951,3292284.263511,3472233.565651,3335036.796479,349
5404.759451,3369573.550730,3469372.040396,+
3370141.746264,3569034.211277,3492200.112473,3598787.390242,3520391.798830,3742049.587999,357
6581.749704,3712908.470679,3630934.298345,+
3835188.867460,3776863.734596,3897258.579616,3792513.273514,3998573.094075,3880435.911103,400
9525.968485,3934105.845301,4149989.885435)

> tpib<- ts(pib,start=1992,frequency=4)
> pib.time<- time(tpib)
> int<-c(rep(0,15),rep(1,length(pib)-15))
> index <- 1:length(pib)
> pib.m <- ssm(tpib ~-1 + tvar(polytime(index,1)) + int + tvar(sumseason(time,4))+tvar(polytrig(index,4,1)))
> pib.fit <- getFit(pib.m)
> win.graph()
> plot(pib.fit$y)
> lines(pib.fit$m[,1], lwd=2)
> pib.fit$m[,1]
```

	Qtr1	Qtr2	Qtr3	Qtr4
1992	2569135	2587485	2601674	2613239
1993	2624382	2631388	2649893	2677712
1994	2717888	2758508	2762108	2735459
1995	2668832	2598535	2567672	2566296
1996	2603226	2644984	2690510	2738688
1997	2785392	2843271	2890193	2935385
1998	2970281	2992904	3013968	3032374
1999	3058481	3098372	3150502	3210634
2000	3272029	3319077	3349237	3356784
2001	3349081	3329266	3316603	3314731
2002	3323397	3347785	3361060	3370457
2003	3377434	3387951	3410753	3443201
2004	3484538	3520404	3553942	3582722
2005	3601947	3632715	3670421	3713628
2006	3763582	3802694	3834285	3863868
2007	3893507	3928460	3967098	4006310

ESTIMACIÓN DEL PIB REAL Y POTENCIAL²⁵ EN MÉXICO (1997-2007)



²⁵ La estimación se realizó en el software R empleando el Filtro de Kalman el cual provee una amplia solución a los problemas de optimización en programación Dinámica. (Svensson, 2001).

APÉNDICE II

MODELOS DE REGRESIÓN EN LOS SOFTWARE R Y EN JMP.

1) Regresión de π_t en R.

```
psc<-read.table("C:/Users/valemayen/Desktop/psc.txt")
> regresionpsc<-lm(psc[,1]~psc[,2]+psc[,3]+psc[,4]+psc[,5],psc)
> summary(regresionpsc)
```

Call:

```
lm(formula = psc[, 1] ~ psc[, 2] + psc[, 3] + psc[, 4] + psc[, 5], data = psc)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-0.122306	-0.034789	0.001471	0.036607	0.089314

Coefficients:

		Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
	(Intercept)	-13.12010	2.37060	-5.535	2.48e-06 ***
CORTOt-1	psc[, 2]	0.39404	0.10587	3.722	0.000638 ***
CORTO t-1 ²	psc[, 3]	-0.03996	0.01148	-3.480	0.001275 **
Yt-1	psc[, 4]	1.17129	0.16490	7.103	1.78e-08 ***
CETEST-1	psc[, 5]	-0.14489	0.02398	-6.042	4.99e-07 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.046 on 38 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.953, **Adjusted R-squared: 0.9481**

F-statistic: 192.7 on 4 and 38 DF, **p-value: < 2.2e-16**

Los resultados de la regresión de π_t muestran que el intercepto, así como el instrumento de política monetaria, el corto, el corto elevado al cuadrado, el PIB

real base 1997=100 y los Cetes a 91 días, es decir, todas las covariables rezagadas un periodo son significativas para explicar el nivel de precios o inflación en México durante el periodo considerado.

Una variable muy significativa es el intercepto, el que se podría interpretar como un instrumento de política permanente de Banco de México para luchar contra la inflación, independientemente del nivel objetivo de SA. (el cual podría ser, por ejemplo, los salarios, tipo de cambio o riesgo país).

Para efectos de la regresión, no obstante que los datos del corto proporcionados por el Banco de México en sus Informes de Política Monetaria se expresan en cifras negativas, para efectos de la construcción de esta base de datos y al correr el modelo se trabajaron con números estrictamente positivos.

De esta manera, la interpretación para la variable corto en términos lineales es que ante disminuciones paulatinas de la cantidad de dinero en circulación (al pasar de 150 a 300 millones el corto, o de 80 a 100 millones, por ejemplo) la inflación del siguiente período en realidad aumenta 39 por ciento, si todo lo demás permanece constante.

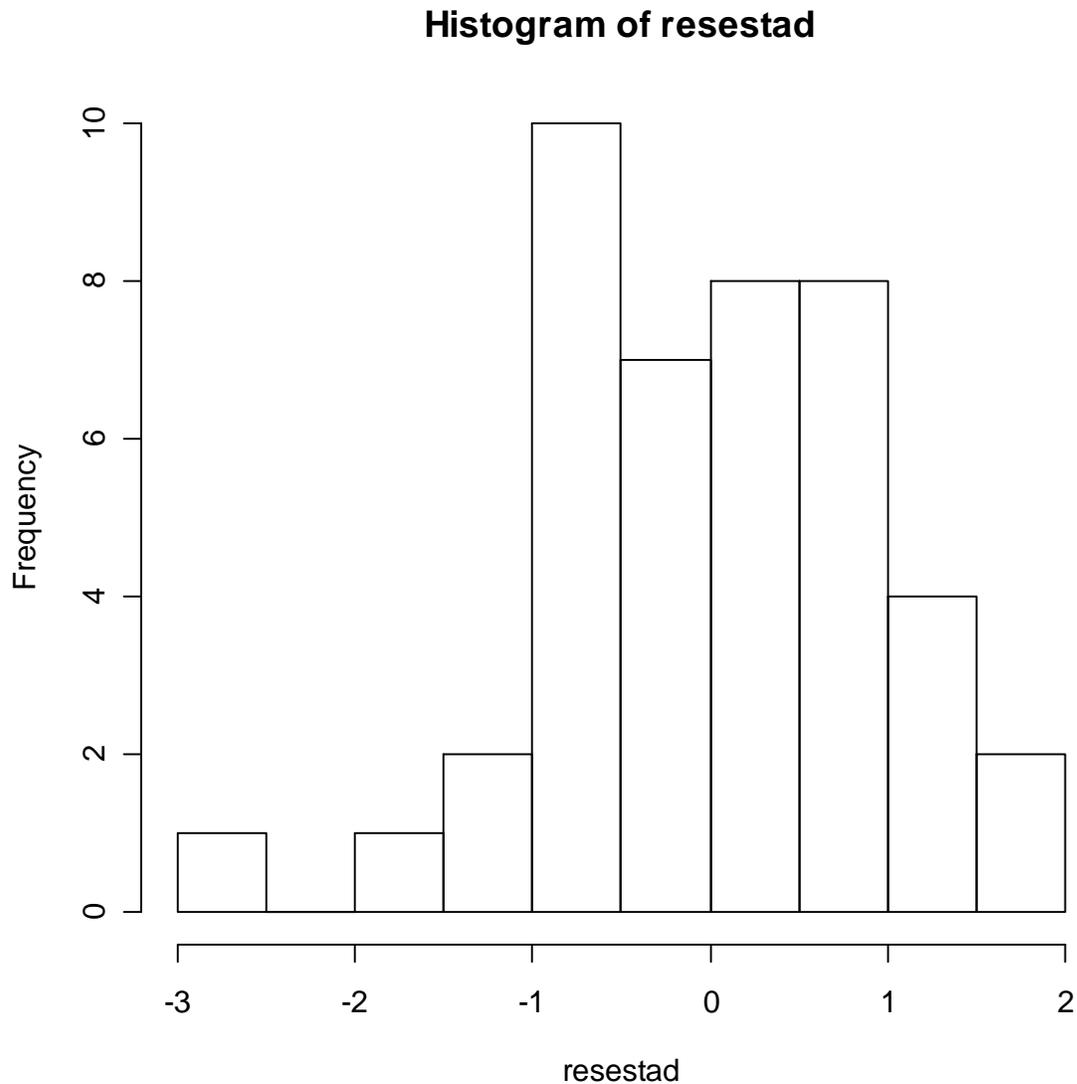
Para el caso de la variable corto en términos cuadráticos se muestra que cuando aumenta el corto al cuadrado el nivel de inflación si disminuye 0.04 por ciento. Es decir, que niveles más elevados de corto si disminuyen la inflación del siguiente período.

Por su parte, el producto tiene un efecto positivo sobre la inflación del siguiente período 117.13 por ciento, lo cual justifica parcialmente el argumento de las autoridades monetarias por minimizar las desviaciones del PIB de su nivel potencial.

Los Cetes muestran un efecto inverso sobre la inflación del período siguiente, es decir un incremento en la tasa de interés nominal líder del período anterior, disminuye 14.5 por ciento la inflación del período actual y por tanto aumenta la tasa de interés real del período actual.

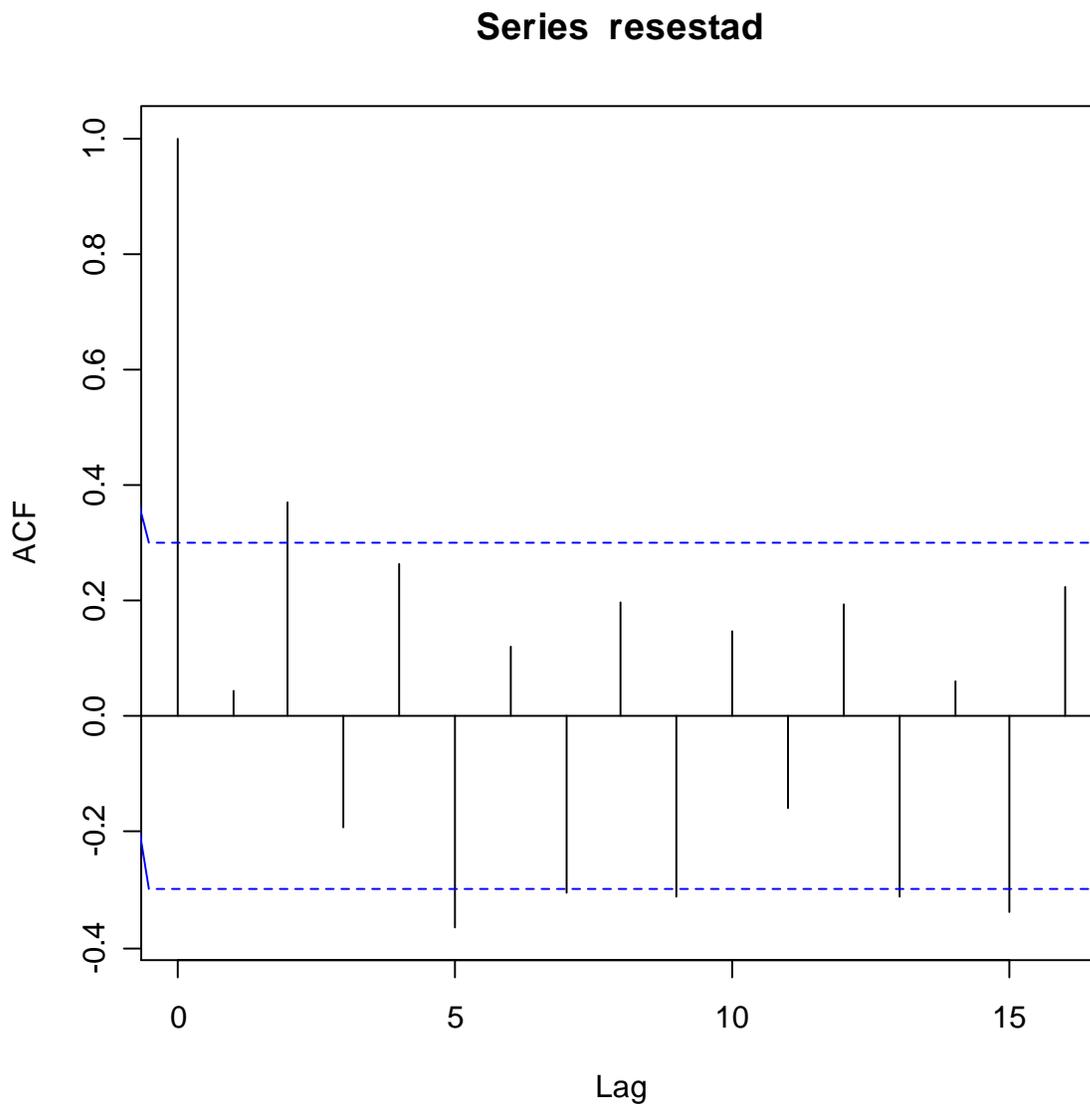
PRUEBAS DE DIAGNÓSTICO

```
> resestad<-regresionpsc$residuals/0.046  
> hist(resestad)
```



Al graficar los residuales estandarizados (se dividieron entre el error estándar **0.046** obtenido en el modelo que arroja R señalado en negritas) se observa que no obstante que se observa un pequeño pico, es posible apreciar que la gráfica de los residuales tiende a la Normal, lo cual es favorable para las pruebas de diagnóstico de la regresión.

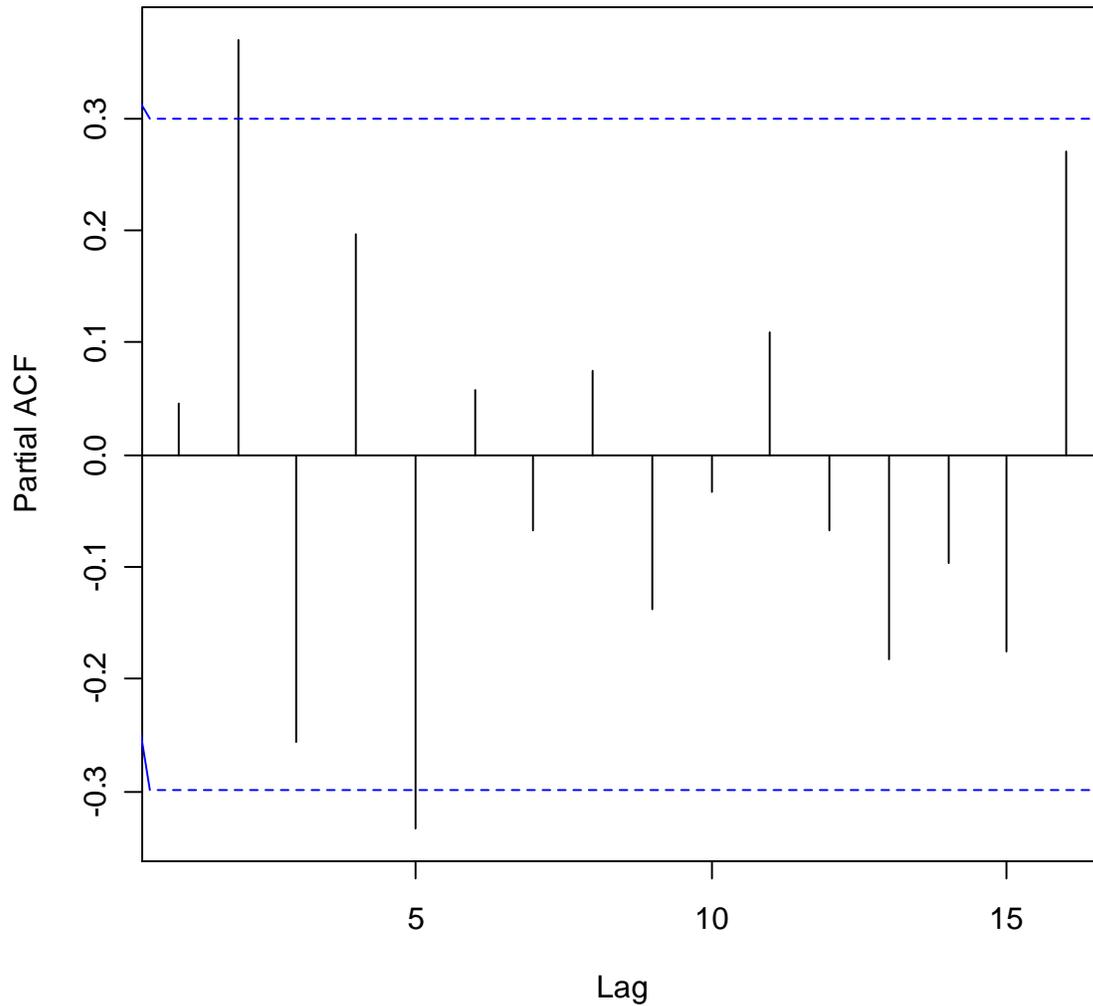
```
> acf(resestad)
```



Existe evidencia de autocorrelación de los residuales estandarizados de los precios con los residuales de los precios del segundo, quinto, séptimo, noveno, treceavo y quinceavo trimestre. Una posible opción sería ampliar la banda del intervalo de confianza al 90 por ciento para eliminar la autocorrelación de los residuales del modelo.

```
acf(resestad,type="partial")
```

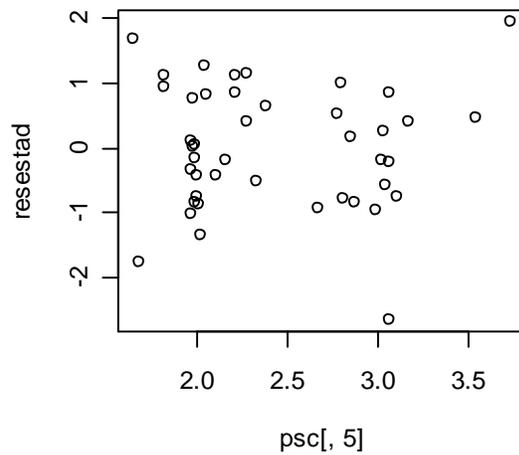
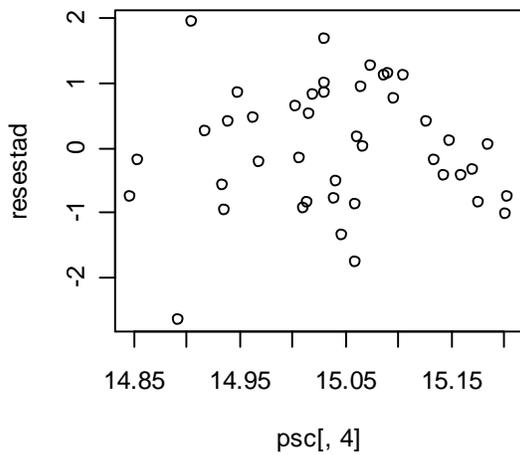
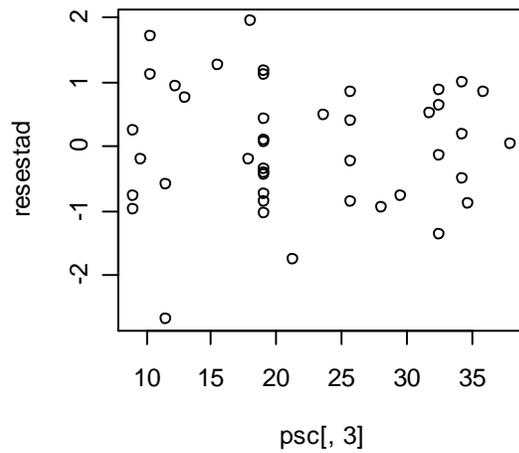
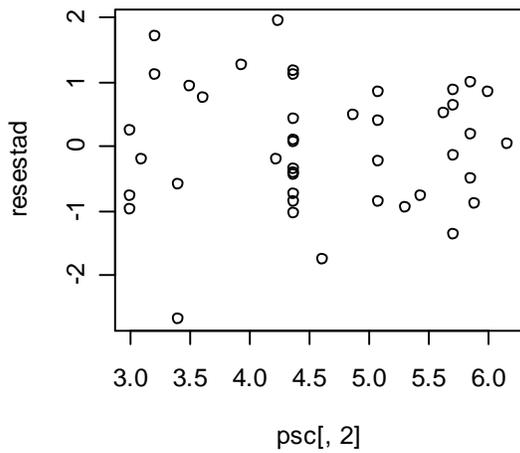
Series resestad



De acuerdo con la gráfica de autocorrelación parcial existe evidencia de autocorrelación parcial en el segundo y quinto trimestre. Una posible opción, sería al igual que con el caso de autocorrelación, ampliar la banda del intervalo de confianza al 90 por ciento con la finalidad de que los residuales estandarizados del modelo de regresión pasen las pruebas de autocorrelación.

GRÁFICAS DE LOS RESIDUALES ESTANDARIZADOS vs COVARIABLES

```
par(mfrow=c(2,2))  
> plot(psc[,2],resestad)  
> plot(psc[,3],resestad)  
> plot(psc[,4],resestad)  
> plot(psc[,5],resestad)
```

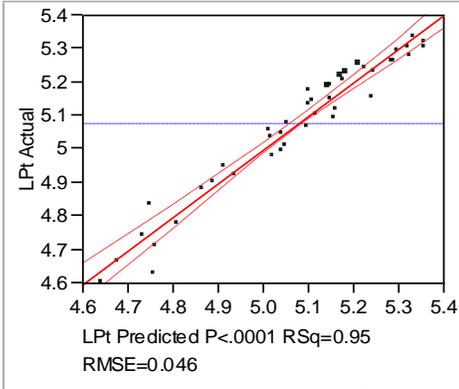


Los diagramas de dispersión de los residuales estandarizados con cada una de las covariables muestran un comportamiento aleatorio, por lo que se deduce ausencia de evidencia de correlación entre los residuales y cada covariable.

Regresión de π_t en JMP

Whole Model

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0.953017
RSquare Adj	0.948072
Root Mean Square Error	0.045998
Mean of Response	5.076992
Observations (or Sum Wgts)	43

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio	Prob > F
Model	4	1.6309003	0.407725	192.7023	
Error	38	0.0804015	0.002116		Prob > F
C. Total	42	1.7113018			<.0001

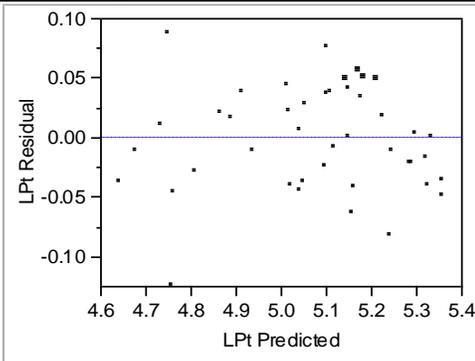
Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	-13.1201	2.370601	-5.53	<.0001
LCt-1	0.3940375	0.105868	3.72	0.0006
LCt-1ALCUAD	-0.039959	0.011483	-3.48	0.0013
LYt-1	1.1712878	0.164896	7.10	<.0001
LCTS91t-1	-0.144894	0.023981	-6.04	<.0001

Effect Tests

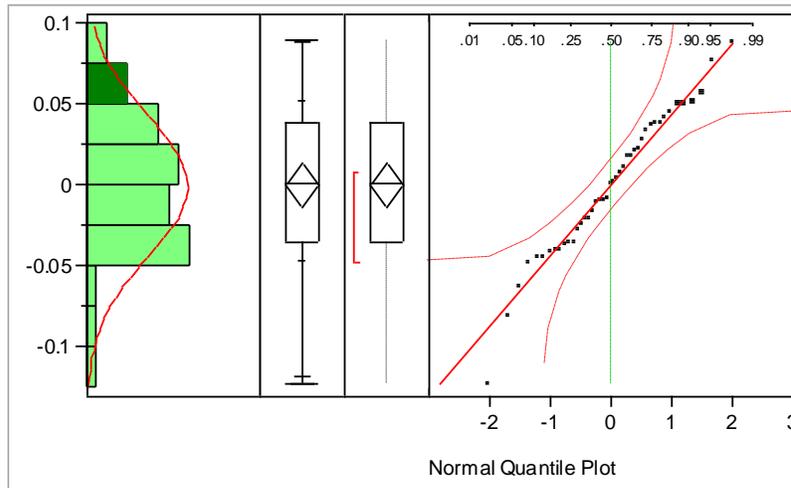
Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
LCt-1	1	1	0.02931072	13.8531	0.0006
LCt-1ALCUAD	1	1	0.02562225	12.1098	0.0013
LYt-1	1	1	0.10675502	50.4554	<.0001
LCTS91t-1	1	1	0.07723816	36.5049	<.0001

Residual by Predicted Plot



Distributions

Residual LPt



— Normal(-3e-15,0.04375)

Quantiles

100.0% maximum	0.0893
99.5%	0.0893
97.5%	0.0882
90.0%	0.0525
75.0% quartile	0.0382
50.0% median	0.0015
25.0% quartile	-0.0352
10.0%	-0.0461
2.5%	-0.1181
0.5%	-0.1223
0.0% minimum	-0.1223

Moments

Mean	-3.3e-15
Std Dev	0.043753
Std Err Mean	0.0066723
upper 95% Mean	0.0134652
lower 95% Mean	-0.013465
N	43

Fitted Normal

Parameter Estimates

Type	Parameter	Estimate	Lower 95%	Upper 95%
Location	Mu	-0.000000	-0.013465	0.0134652
Dispersion	Sigma	0.043753	0.036076	0.0556105

El resumen del modelo obtenido empleando el software JUMP muestra un adecuado nivel de ajuste (**R^2 ajustada =0.948**), la varianza del modelo pasa la prueba F y la gráfica de cuantiles de los residuales muestra un adecuado ajuste de acuerdo con la distribución Normal.

2) Regresión de y_t en R

```
> ysc<-read.table("C:/Users/valemayen/Desktop/ysc.txt")
> regresionysc<-lm(ysc[,1]~ysc[,2]+ysc[,3]+ysc[,4]+ysc[,5],ysc)
> summary(regresionysc)
```

Call:

```
lm(formula = ysc[, 1] ~ ysc[, 2] + ysc[, 3] + ysc[, 4] + ysc[,
  5], data = ysc)
```

Residuals:

```
   Min      1Q  Median      3Q      Max
-0.048713 -0.017402 -0.002109  0.017965  0.064314
```

Coefficients:

		Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)		12.381388	0.271428	45.616	< 2e-16 ***
CORTOt-1	ysc[, 2]	-0.036902	0.080124	-0.461	0.6477
CORTO ² t-1	ysc[, 3]	0.001958	0.008524	0.230	0.8195
□ _{t-1}	ysc[, 4]	0.530901	0.067649	7.848	1.81e-09 ***
Cetes91t-1	ysc[, 5]	0.045423	0.022294	2.037	0.0486 *

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.02973 on 38 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.9065, **Adjusted R-squared: 0.8967**

F-statistic: 92.16 on 4 and 38 DF, p-value: < 2.2e-16

Como en el caso anterior, existe un patrón o componente inercial del producto de 1238.14 por ciento que se podría interpretar como crecimiento endógeno porque el intercepto es altamente significativo.

En este caso existe evidencia que permite afirmar que el instrumento de política monetaria denominado “corto” no afecta el crecimiento del PIB; mientras que la

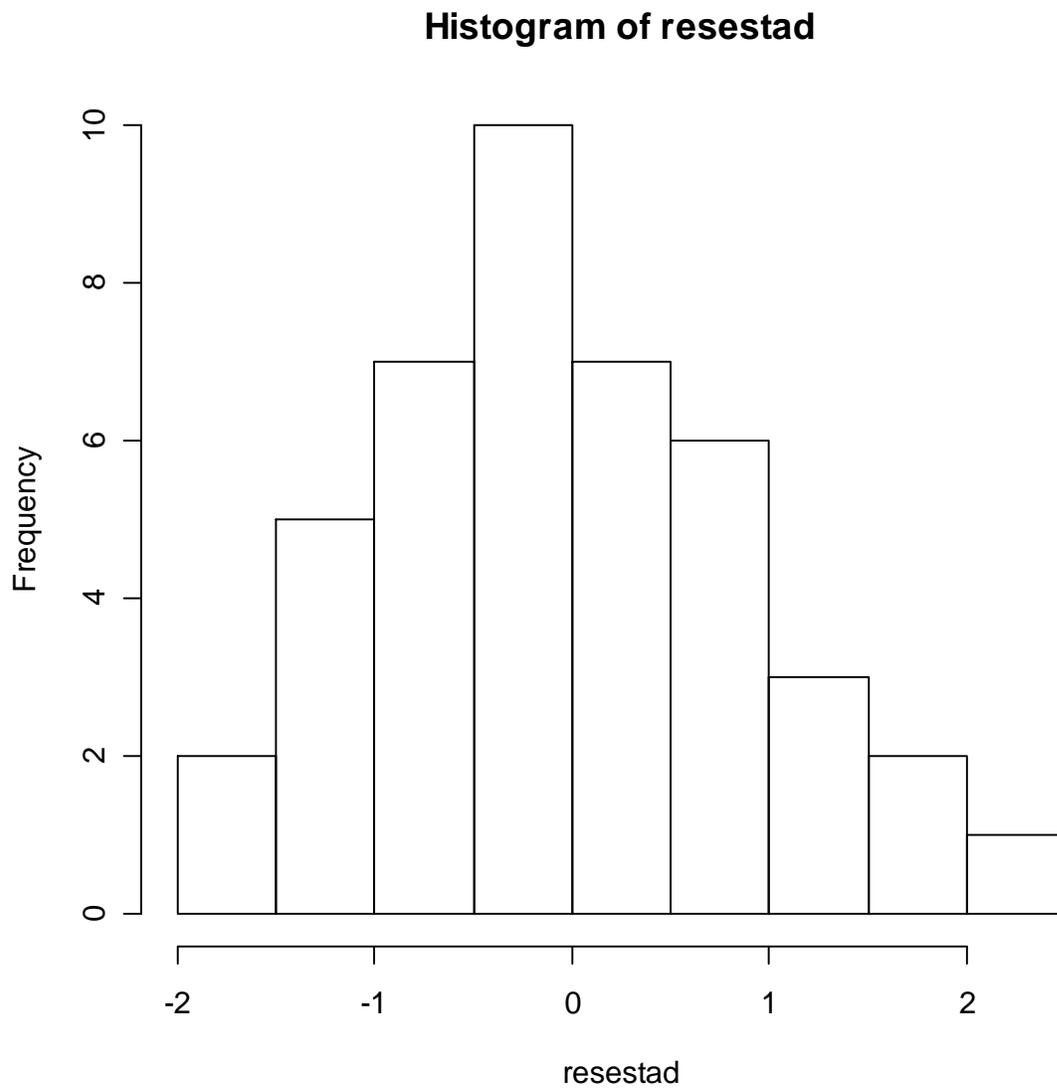
inflación del periodo anterior es significativa pero en términos positivos para el PIB (6.7 por ciento).

Por su parte un incremento de 1por ciento en los Cetes, provoca un incremento de 4por ciento sobre el producto. Por tanto, en este caso este estudio arroja evidencia para rechazar el Efecto Keynes.

PRUEBAS DE DIAGNÓSTICO

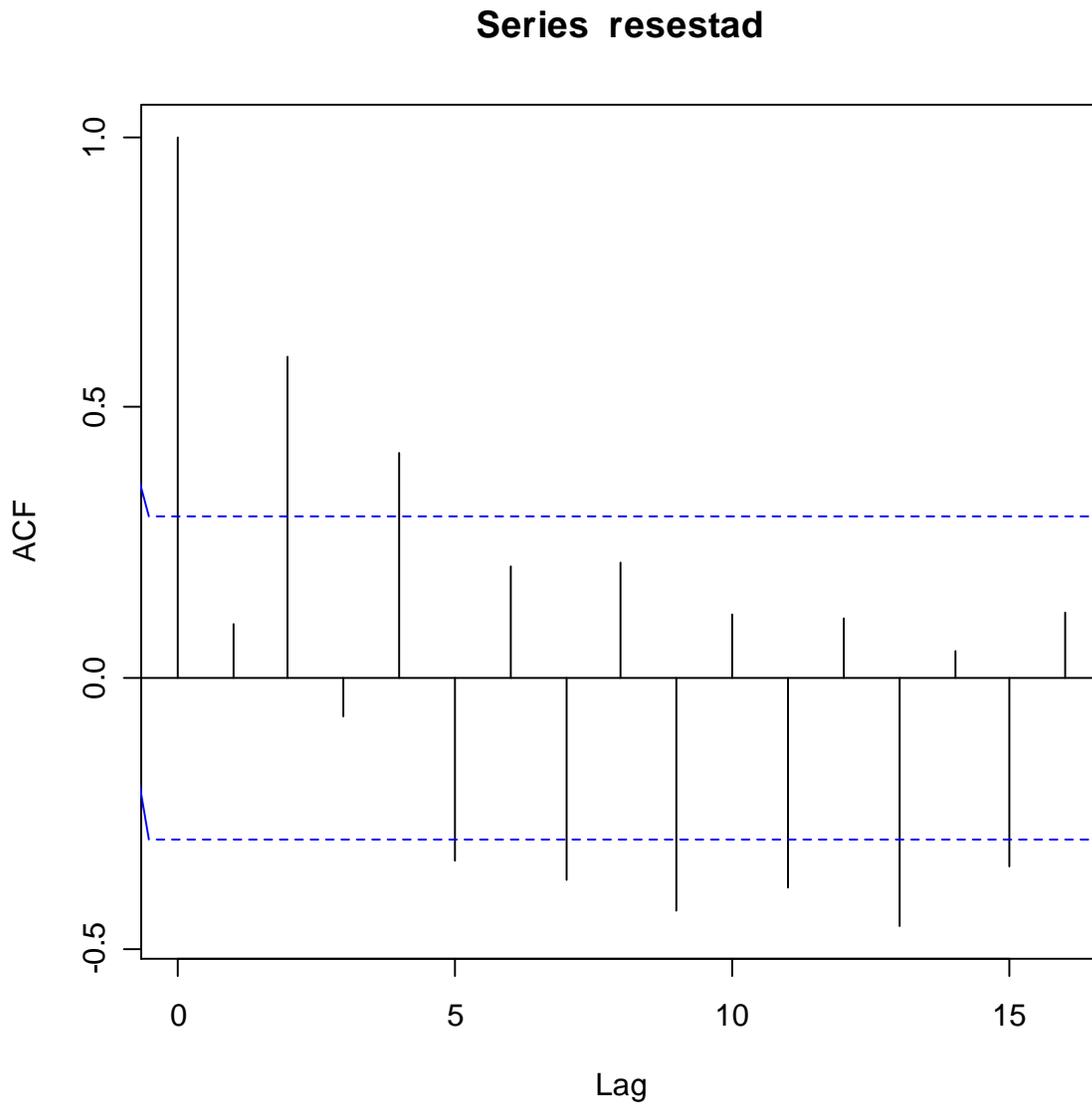
```
> resestad<-regresionycc$residuals/0.02973
> summary(resestad)
  Min.    1st Qu.  Median    Mean   3rd Qu.    Max.
-1.529e+00 -5.637e-01 -2.315e-02 -3.016e-18  5.510e-01  2.096e+00

> hist(resestad)
```



La gráfica de los residuales estandarizados tiende a la Normal, lo cual es favorable para las pruebas de diagnóstico de la regresión.

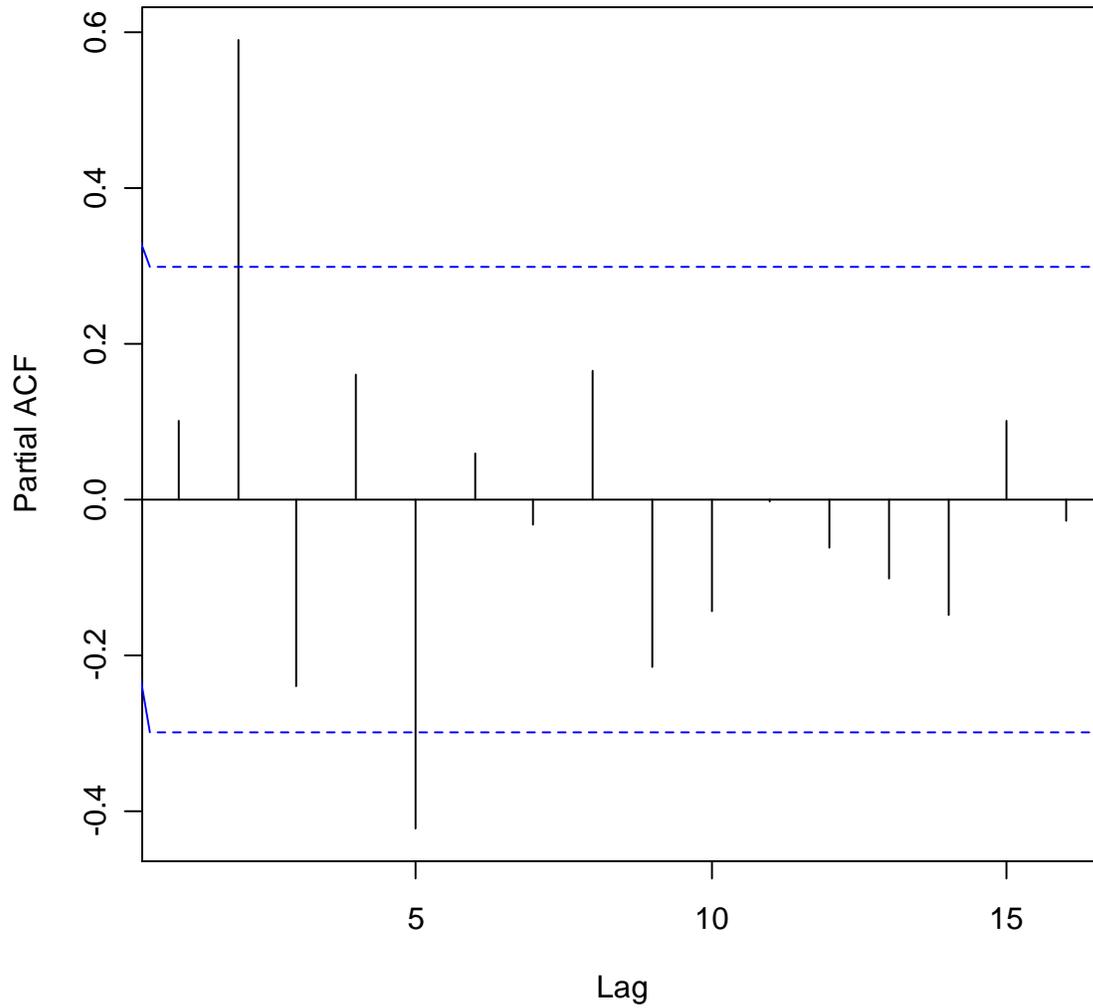
```
> acf(resestad)
```



No obstante que existe evidencia de autocorrelación de los residuales estandarizados con diferentes periodos, una posible solución sería ampliar la banda para tratar de corregir el problema.

```
> acf(resestad,type="partial")
```

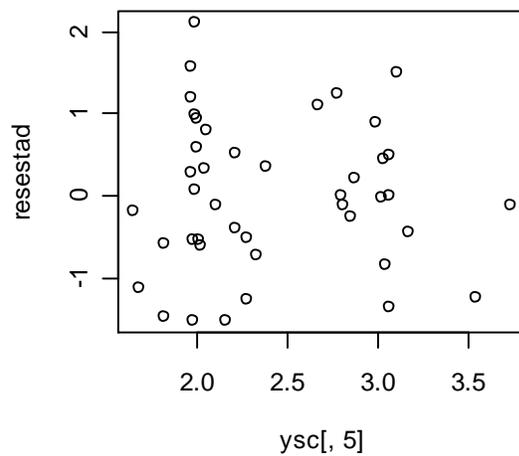
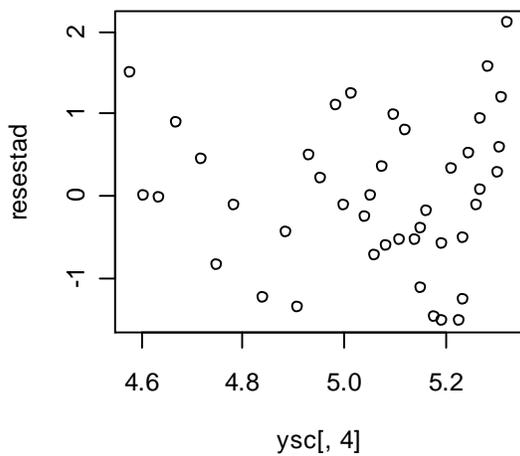
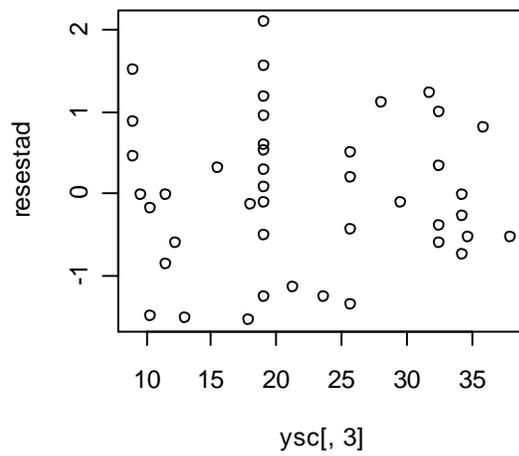
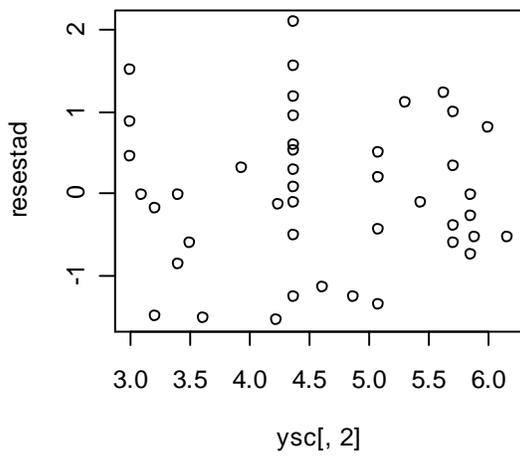
Series resestad



La gráfica de autocorrelación parcial muestra evidencia de autocorrelación con el segundo y quinto periodo, lo cual se podría solucionar también ampliando la banda del intervalo de confianza.

GRÁFICAS DE LOS RESIDUALES ESTANDARIZADOS vs COVARIABLES

```
> par(mfrow=c(2,2))  
> plot(ysc[,2],resestad)  
> plot(ysc[,3],resestad)  
> plot(ysc[,4],resestad)  
> plot(ysc[,5],resestad)
```

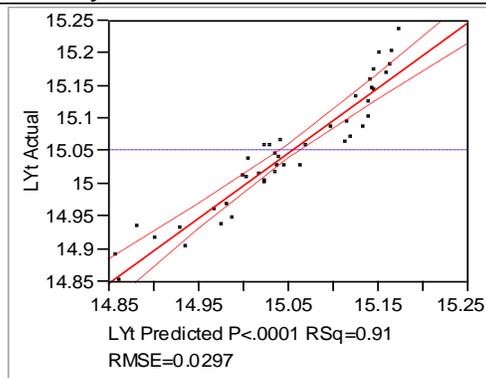


Las gráficas muestran una distribución aleatoria de los residuales con respecto a cada una de las covariables.

Regresión de y_t en JMP

Whole Model

Actual by Predicted Plot



Summary of Fit

RSquare	0.90655
RSquare Adj	0.896713
Root Mean Square Error	0.029733
Mean of Response	15.05141
Observations (or Sum Wgts)	43

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Ratio
Model	4	0.32589818	0.081475	92.1584
Error	38	0.03359470	0.000884	Prob > F
C. Total	42	0.35949289		<.0001

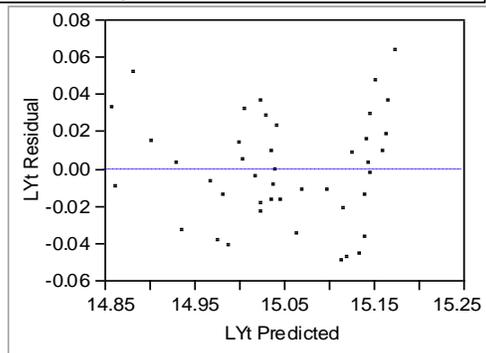
Parameter Estimates

Term	Estimate	Std Error	t Ratio	Prob> t
Intercept	12.381388	0.271428	45.62	<.0001
LCORTOt-1	-0.036902	0.080124	-0.46	0.6477
LCORTOt-1ALCUADRA	0.0019583	0.008524	0.23	0.8195
LPt-1	0.5309006	0.067649	7.85	<.0001
LCTt-1	0.0454231	0.022294	2.04	0.0486

Effect Tests

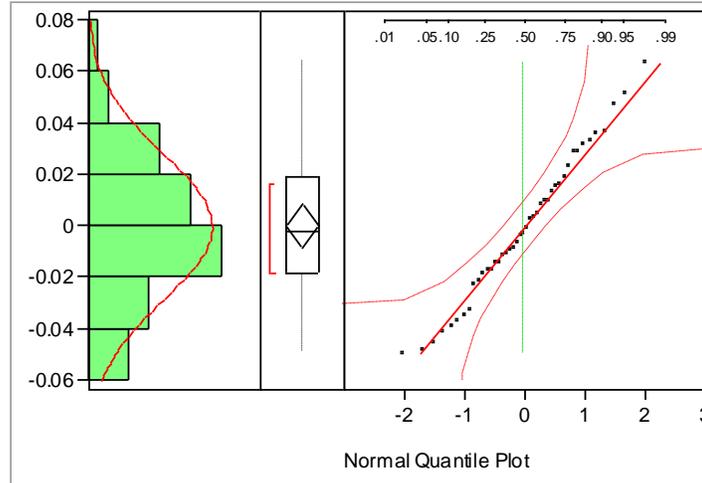
Source	Nparm	DF	Sum of Squares	F Ratio	Prob > F
LCORTOt-1	1	1	0.00018752	0.2121	0.6477
LCORTOt-1ALCUADRA	1	1	0.00004666	0.0528	0.8195
LPt-1	1	1	0.05444979	61.5898	<.0001
LCTt-1	1	1	0.00366988	4.1511	0.0486

Residual by Predicted Plot



Distributions

Residual LYt



— Normal(2.5e-16,0.02828)

Quantiles

100.0% maximum	0.0643
99.5%	0.0643
97.5%	0.0631
90.0%	0.0369
75.0% quartile	0.0193
50.0% median	-0.0021
25.0% quartile	-0.0182
10.0%	-0.0398
2.5%	-0.0486
0.5%	-0.0487
0.0% minimum	-0.0487

Moments

Mean	2.479e-16
Std Dev	0.028282
Std Err Mean	0.004313
upper 95% Mean	0.0087039
lower 95% Mean	-0.008704
N	43

Fitted Normal

Parameter Estimates

Type	Parameter	Estimate	Lower 95%	Upper 95%
Location	Mu	0.000000	-0.008704	0.0087039
Dispersion	Sigma	0.0282820	0.023320	0.0359468

El resumen del modelo en JUMP muestra un adecuado nivel de ajuste (R^2 ajustada =0.8967), la varianza del modelo pasa la prueba F y la gráfica de cuantiles de los residuales muestra un adecuado ajuste de acuerdo con la distribución Normal.

APÉNDICE III

MODELO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA PROBABILÍSTICA

ETAPA 44

$I_{44} = \frac{1}{2}(\pi_{44} - \pi_{44}^* + y_{44} - y_{44})$ Valor de salida. Este es el valor con el que se comienza a optimizar y posteriormente se almacena y se procede con el inmediato anterior. Es decir, se empieza a optimizar en la última etapa.

ETAPA 43

$$I_{43} = \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{43} - \pi_{43}^* + y_{43} - y_{43} + E \left(\pi_{44} - \pi_{44}^* + y_{44} - y_{44} \right) \right\}$$

$$\pi_{44}^* \in [\pi_{43} + \ln(0.85), \pi_{43}]$$

$$C_{43} \in [2.99, 6.17]$$

$$Cet_{43} \in [1.64, 3.73]$$

$$I_{43} = \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{43} - \pi_{43}^* + y_{43} - y_{43} - \pi_{44}^* - 13.12010 + 0.39404C_{43} - 0.03996C_{43}^2 + 1.17129y_{43} - 0.14489Cet_{43} - \pi_{44}^* \right\}$$

Dado que se trata de un problema de minimización y por los signos de los coeficientes se escogieron los valores óptimos de Corto, Cetes e Inflación Objetivo dentro del intervalo que fueran los óptimos. El mismo criterio se aplicó en cada periodo para obtener los valores óptimos de esas variables que se multiplican por los coeficientes. Por tanto,

$$I_{43} = \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{43} - \pi_{43}^* + y_{43} - y_{43} - \pi_{44}^* - 13.12010 + 0.39404(2.99) - 0.03996(2.99)^2 + 1.17129y_{43} \right\}$$

$$-0.14489(3.73) - \pi_{44}^* \}$$

$$I_{43} = \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{43} - \pi_{43}^* + y_{43} - y_{43} - \pi_{44}^* - 13.12010 + 1.1781796 - 0.357246396 + 1.17129y_{43} - 0.5404397 - \pi_{43} \right\}$$

$$I_{43} = \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{43} - \pi_{43}^* + y_{43} - y_{43} - \pi_{44}^* + 1.171296y_{43} - 12.8396065 - \pi_{43} \right\}$$

ETAPA 42

$$I_{42} = \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{42} - \pi_{42}^* + y_{42} - y_{42} + E \left[-\pi_{43}^* + y_{43} - y_{43} + 1.17129y_{43} - 12.8396065 \right] \right\}$$

$$\pi_{43}^* \in [\pi_{42} + \ln(0.85), \pi_{42}]$$

$$C_{42} \in [2.99, 6.17]$$

$$Cet_{42} \in [1.64, 3.73]$$

Dado que $E[y_t - y_t] = 0$ para cualquier periodo y la constante sale de la

Esperanza, tenemos que:

$$I_{42} = \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{42} - \pi_{42}^* + y_{42} - y_{42} + \right.$$

$$E \left[-\pi_{43}^* + 1.17129(12.381388 - 0.036902C_{42} + 0.001958C_{42}^2 + 0.530901\pi_{42} + 0.045423Cet_{42}) \right] - 12.8396065 \left. \right\}$$

$$= \min \frac{1}{2} \left\{ \pi_{42} - \pi_{42}^* + y_{42} - y_{42} + E \left[-\pi_{43}^* \right] + 14.50219595 \right. \\ \left. - 0.043222943C_{42} + 0.0022933C_{42}^2 + 0.62183903\pi_{42} + 0.0532035Cet_{42} - 12.8396065 \right\}$$

$$\pi_{43}^* \in [\pi_{43} + \ln(0.85), \pi_{43}]$$

$$C_{42} \in [2.99, 6.17]$$

$$Cet_{42} \in [1.64, 3.73]$$

Por tanto, para minimizar escogemos los valores para las variables de:

$$\pi_{43}^* = \pi_{42}$$

$$C_{42} = 6.17$$

$$Cet_{42} = 1.64$$

$$I_{42} = \min \frac{1}{2} \left\{ -\pi_{42}^* + y_{42} - y_{42} + 1.57046104 + 0.62183903\pi_{42} \right\}$$

Así se obtienen los restantes valores hasta que se obtuvo la fórmula recursiva y se resolvió el Modelo en Excel hasta llegar a la **ETAPA 1**.

Con la metodología de la programación dinámica fue posible estimar los Valores Óptimos Esperados del Producto y la Inflación para cada etapa en logaritmos y posteriormente se convirtieron en valores en niveles con el procedimiento empleado en el **Apéndice V**. También se obtuvieron los Valores Óptimos del Índice de Funcionamiento, el cual fue comparado con el Índice del Gobierno como se muestra en el **Apéndice IV**.

APENDICE IV

TABLA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA . CÁLCULOS RECURSIVOS.										
Año	p_t	y_t	Inflación y Producto Esperado en logaritmos		Inflación y Producto Esperado		p_t real	y_t real	Diferencias	Esperado-Observado
			p_t real	y_t real	Óptimo en niveles					
					p_t	y_t				
1996/04			4.522005945	14.8714583						
1997/01	-12.447726	12.302735	4.576505959	14.84573787	97.17426944	2801702.633	97.17426	2801702.6	0	0
1997/02	-12.839606	12.457983	4.549057818	14.88765054	94.6433691	2922916.682	100	2935833.6	-5.35663090	-12916.92572
1997/03	-12.447726	12.302735	4.990030156	14.71783008	147.2521106	2467495.143	103.0356	2823877.8	44.21650543	-356382.6622
1997/04	-12.839606	12.457983	4.399240701	15.10719054	81.64778577	3643723.061	106.4923	3066320.6	-24.8445517	577402.4188
1998/01	-12.447726	12.302735	5.247175159	14.63829217	190.8346142	2280853.275	112.0110	3012304.1	78.82353722	-731450.8242
1998/02	-12.839606	12.457983	4.306078745	15.24370882	74.54244872	4180405.534	115.3066	3062297.1	-40.7641657	1118108.344
1998/03	-12.447726	12.302735	5.407077657	14.58883249	224.3989864	2172707.17	119.4439	2972473.5	104.9550395	-799766.3328
1998/04	-12.839606	12.457983	4.248147113	15.32860105	70.49579857	4554813.09	126.3096	3149178.8	-55.8138515	1405634.252
1999/01	-12.447726	12.302735	5.506511084	14.55807659	248.3837885	2108764.078	132.4589	3077455.2	115.9248565	-968691.152
1999/02	-12.839606	12.457983	4.212123031	15.38139026	68.14549362	4805964.268	135.3622	3169184.2	-67.2167812	1636780.005
1999/03	-12.447726	12.302735	5.568342554	14.5389514	264.7861593	2070646.434	138.3478	3104408.2	126.4383368	-1033761.822
1999/04	-12.839606	12.457983	4.189721894	15.41421659	66.77707904	4970736.558	141.8693	3318380.8	-75.0922291	1652355.738
2000/01	-12.447726	12.302735	5.606791703	14.52705864	275.7480822	2047976.191	145.8537	3305850.6	129.8943699	-1257874.407
2000/02	-12.839606	12.457983	4.175792018	15.43462924	65.99282459	5077731.887	148.1040	3402201.1	-82.1111850	1675530.732
2000/03	-12.447726	12.302735	5.63070084	14.51966327	283.0186622	2034684.379	150.5908	3323184.6	132.4278444	-1288500.305
2000/04	-12.839606	12.457983	4.167129894	15.4473226	65.56223825	5147144.236	154.5798	3474647.8	-89.0175761	1672496.398
2001/01	-12.447726	12.302735	5.645568446	14.51506455	287.8663892	2027140.114	156.3180	3369341.5	131.5483349	-1342201.416
2001/02	-12.839606	12.457983	4.161743457	15.45521581	65.34817133	5192520.661	157.8395	3407252.4	-92.4913594	1785268.194
2001/03	-12.447726	12.302735	5.654813687	14.51220489	291.1555576	2023139.129	159.8363	3279527.7	131.3192323	-1256388.601
2001/04	-12.839606	12.457983	4.158393967	15.46012411	65.26761469	5222684.564	161.3867	3427058.8	-96.1191195	1795625.741

TABLA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA . CÁLCULOS RECURSIVOS.

Año	Inflación y Producto Esperado en logaritmos		Inflación y Producto Esperado				Diferencias	Esperado-Observado		
	p _t	y _t	p _t real	y _t real	Óptimo en niveles					
					p _t real	y _t real				
2002/01	-12.447726	12.302735	5.660562727	14.51042664	293.4545368	2021330.757	163.6044	3292284.2	129.8501115	-1270953.506
2002/02	-12.839606	12.457983	4.156311127	15.46317628	65.26977901	5243282.427	165.6352	3472233.5	-100.365424	1771048.862
2002/03	-12.447726	12.302735	5.664137698	14.50932086	295.1293392	2020882.517	167.7452	3335036.8	127.3841284	-1314154.28
2002/04	-12.839606	12.457983	4.155015938	15.46507423	65.32337517	5257889.297	170.5865	3495404.7	-105.263176	1762484.537
2003/01	-12.447726	12.302735	5.666360751	14.50863325	296.4127031	2021279.425	172.8360	3369573.5	123.5766183	-1348294.125
2003/02	-12.839606	12.457983	4.154210541	15.46625445	65.40904429	5268753.939	172.7150	3469372.0	-107.306026	1799381.898
2003/03	-12.447726	12.302735	5.667743129	14.50820566	297.4514828	2022202.177	174.5170	3370141.7	122.9344646	-1347939.569
2003/04	-12.839606	12.457983	4.153709714	15.46698835	65.5147766	5277285.179	177.3699	3569034.2	-111.855186	1708250.968
2004/01	-12.447726	12.302735	5.668602744	14.50793977	298.3379021	2023452.509	180.1483	3492200.1	118.1895915	-1468747.603
2004/02	-12.839606	12.457983	4.153398281	15.46744472	65.63310915	5284363.435	180.2560	3598787.3	-114.622953	1685576.044
2004/03	-12.447726	12.302735	5.669137285	14.50777443	299.1297079	2024907.207	183.3477	3520391.8	115.7819877	-1495484.592
2004/04	-12.839606	12.457983	4.15320462	15.46772851	65.7593996	5290538.055	186.5769	3742049.5	-120.817569	1548488.467
2005/01	-12.447726	12.302735	5.669469683	14.50767162	299.8629938	2026489.653	188.0490	3576581.7	111.8139649	-1550092.097
2005/02	-12.839606	12.457983	4.153084195	15.46790498	65.89075839	5296151.488	188.0639	3712908.4	-122.17319	1583243.018
2005/03	-12.447726	12.302735	5.669676381	14.50760769	300.5602943	2028152.19	189.7830	3630934.3	110.777285	-1602782.108
2005/04	-12.839606	12.457983	4.15300931	15.46801472	66.02538634	5301417.079	192.7950	3835188.8	-126.769709	1466228.212
2006/01r	-12.447726	12.302735	5.669804913	14.50756793	301.2356693	2029865.167	194.4660	3776863.7	106.7695863	-1746998.567
2006/02	-12.839606	12.457983	4.152962743	15.46808295	66.16216297	5306467.694	194.0516	3897258.5	-127.889488	1409209.114
2006/03	-12.447726	12.302735	5.669884839	14.50754321	301.8978875	2031610.135	197.5511	3792513.2	104.3467779	-1760903.139
2006/04	-12.839606	12.457983	4.152933786	15.46812539	66.30039046	5311386.058	200.6096	3998573.0	-134.309222	1312812.964
2007/01	-12.447726	12.302735	5.669934541	14.50752783	302.5524166	2033375.613	202.6469	3880435.9	99.90545985	-1847060.298
2007/02	-12.839606	12.457983	4.15291578	15.46815177	66.43963427	5316223.673	201.7799	4009525.9	-135.340332	1306697.705
2007/03	-12.447726	12.302735	5.669965447	14.50751827	303.202666	2035154.456	205.0423	3934105.8	98.16029636	-1898951.389

TABLA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA . CÁLCULOS RECURSIVOS.										
Año	p_t	y_t	Inflación y Producto Esperado en logaritmos		Inflación y Producto Esperado		p_t real	y_t real	Diferencias	Esperado-Observado
			p_t real	y_t real	Óptimo en niveles					
2007/04	-12.839606	12.457983	4.152904583	15.46816818	66.57962388	5321012.599	208.1506	4149989.8	-141.570980	1171022.714

TABLA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA .CÁLCULOS RECURSIVOS.

Año	y_{t-1}	π_{t-1}		COEFICIENTES DE REGRESION	CTES AMPLIADOS	AA	AB
1997/01	1.17129	0.5309	yt	1.17129	1.17129	-12.8396065	-12.8396065
1997/02			pt	0.5309	0.621837861	12.30273529	1.570464317
1997/03			yt	1.17129	0.728352468	-12.8396065	-6.413689122
1997/04			pt	0.5309	0.386682325	12.30273529	2.547038489
1998/01			yt	1.17129	0.452917141	-12.8396065	-2.417810407
1998/02			pt	0.5309	0.24045371	12.30273529	3.154309283
1998/03			yt	1.17129	0.281641026	-12.8396065	0.066978265
1998/04			pt	0.5309	0.149523221	12.30273529	3.531933255
1999/01			yt	1.17129	0.175135053	-12.8396065	1.612113939
1999/02			pt	0.5309	0.0929792	12.30273529	3.766754138
1999/03			yt	1.17129	0.108905607	-12.8396065	2.572937801
1999/04			pt	0.5309	0.057817987	12.30273529	3.912774653
2000/01			yt	1.17129	0.06772163	-12.8396065	3.170414456
2000/02			pt	0.5309	0.035953413	12.30273529	4.003575738
2000/03			yt	1.17129	0.042111873	-12.8396065	3.541948061
2000/04			yt	0.5309	0.022357194	12.30273529	4.060039291
2001/01			pt	1.17129	0.026186757	-12.8396065	3.772981723
2001/02			yt	0.5309	0.013902549	12.30273529	4.095150466
2001/03			pt	1.17129	0.016283917	-12.8396065	3.916647202
2001/04			yt	0.5309	0.008645132	12.30273529	4.116983923
2002/01			pt	1.17129	0.010125956	-12.8396065	4.005983836
2002/02			yt	0.5309	0.00537587	12.30273529	4.130560794
2002/03			pt	1.17129	0.006296703	-12.8396065	4.061536737
2002/04			yt	0.5309	0.00334292	12.30273529	4.139003406

Año	y_{t-1}	π_{t-1}		COEFICIENTES DE REGRESION	CTES AMPLIADOS	AA	AB
2003/01			pt	1.17129	0.003915528	-12.8396065	4.096081634
2003/02			yt	0.5309	0.002078754	12.30273529	4.144253342
2003/03			pt	1.17129	0.002434824	-12.8396065	4.117562959
2003/04			yt	0.5309	0.001292648	12.30273529	4.147517951
2004/01			pt	1.17129	0.001514066	-12.8396065	4.130920861
2004/02			yt	0.5309	0.000803817	12.30273529	4.149548009
2004/03			yt	1.17129	0.000941503	-12.8396065	4.139227309
2004/04			pt	0.5309	0.000499844	12.30273529	4.150810375
2005/01			yt	1.17129	0.000585462	-12.8396065	4.144392574
2005/02			pt	0.5309	0.000310822	12.30273529	4.151595362
2005/03			yt	1.17129	0.000364063	-12.8396065	4.14760453
2005/04			pt	0.5309	0.000193281	12.30273529	4.152083497
2006/01r/			yt	1.17129	0.000226388	-12.8396065	4.149601847
2006/02			pt	0.5309	0.000120189	12.30273529	4.152387038
2006/03			yt	1.17129	0.000140777	-12.8396065	4.150843854
2006/04			pt	0.5309	7.47383E-05	12.30273529	4.152575791
2007/01			yt	1.17129	8.75402E-05	-12.8396065	4.151616181
2007/02			pt	0.5309	4.64751E-05	12.30273529	4.152693165
2007/03			yt	1.17129	5.44358E-05	-12.8396065	4.152096443
2007/04			pt	0.5309	2.89E-05	12.30273529	4.152766152

0.5

7.9321439

7.93798259

3.687010486

2.89E-05

$I_t = 1.1844627$

TABLA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA .CÁLCULOS RECURSIVOS.

Año	PIB	PIB potencial	LPIB	LPIB POTENCIAL	π	$L\pi$	π^*	$L\pi^*$	$\pi-\pi^* + Y_{potencial}-Y$
1997/01	2785392	2785392	14.83989918	14.83989918	97.17426944	4.576505959	3.715	1.312378678	3.264127281
1997/02	2843271	2843271	14.86046571	14.86046571	100	4.605170186	3.4825	1.247750427	3.357419759
1997/03	2890193	2890193	14.87683384	14.87683384	103.0356052	4.63507461	3.39	1.220829921	3.414244689
1997/04	2935385	2935385	14.89234918	14.89234918	106.4923375	4.668073034	3.375	1.216395324	3.45167771
1998/01	2970281	2970281	14.90416712	14.90416712	112.011077	4.718597768	2.625	0.965080896	3.753516872
1998/02	2992904	2992904	14.91175471	14.91175471	115.3066145	4.747594793	2.75	1.011600912	3.735993882
1998/03	3013968	3013968	14.91876804	14.91876804	119.4439469	4.782847198	3.225	1.17093295	3.611914248
1998/04	3032374	3032374	14.92485637	14.92485637	126.3096501	4.838736433	3.375	1.216395324	3.622341108
1999/01	3058481	3058481	14.93342895	14.93342895	132.4589321	4.886272651	2.75	1.011600912	3.874671739
1999/02	3098372	3098372	14.94638737	14.94638737	135.3622749	4.907954702	2.5	0.916290732	3.99166397
1999/03	3150502	3150502	14.96307236	14.96307236	138.3478225	4.929770967	2.25	0.810930216	4.118840751
1999/04	3210634	3210634	14.98197898	14.98197898	141.8693082	4.954906269	2	0.693147181	4.261759089
2000/01	3272029	3272029	15.00092084	15.00092084	145.8537123	4.982604149	1.5	0.405465108	4.577139041
2000/02	3319077	3319077	15.01519729	15.01519729	148.1040096	4.997914795	1.5	0.405465108	4.592449687
2000/03	3349237	3349237	15.02424312	15.02424312	150.5908179	5.014566343	1.35	0.300104592	4.714461751
2000/04	3356784	3356784	15.02649393	15.02649393	154.5798144	5.040710561	1.35	0.300104592	4.740605968
2001/01	3349081	3349081	15.02419654	15.02419654	156.3180543	5.051892741	1.25	0.223143551	4.82874919
2001/02	3329266	3329266	15.01826242	15.01826242	157.8395308	5.061578889	1	0	5.061578889
2001/03	3316603	3316603	15.01445162	15.01445162	159.8363253	5.074150325	1.25	0.223143551	4.851006773
2001/04	3314731	3314731	15.01388703	15.01388703	161.3867343	5.083803561	1.125	0.117783036	4.966020525
2002/01	3323397	3323397	15.01649801	15.01649801	163.6044253	5.097451473	0.175	-1.742969305	6.840420778
2002/02	3347785	3347785	15.02380949	15.02380949	165.6352038	5.109787803	0.175	-1.742969305	6.852757108
2002/03	3361060	3361060	15.02776696	15.02776696	167.7452108	5.122446226	0.225	-1.491654877	6.614101103

Año	PIB	PIB potencial	LPIB	LPIB POTENCIAL	π	$L\pi$	π^*	$L\pi^*$	$\pi - \pi^* + y_{potencial} - Y$
2002/04	3370457	3370457	15.0305589	15.0305589	170.5865518	5.139242803	0.3	-1.203972804	6.343215607
2003/01	3377434	3377434	15.03262681	15.03262681	172.8360849	5.152343659	0.325	-1.123930097	6.276273756
2003/02	3387951	3387951	15.03573587	15.03573587	172.7150709	5.151643248	0.3	-1.203972804	6.355616052
2003/03	3410753	3410753	15.04244365	15.04244365	174.5170182	5.162022262	0.1675	-1.786771928	6.94879419
2003/04	3443201	3443201	15.05191212	15.05191212	177.3699632	5.178237739	0.215	-1.537117251	6.71535499
2004/01	3484538	3484538	15.06384603	15.06384603	180.1483106	5.19378046	0.3075	-1.179280192	6.373060651
2004/02	3520404	3520404	15.07408631	15.07408631	180.2560628	5.194378411	0.27	-1.30933332	6.503711731
2004/03	3553942	3553942	15.08356797	15.08356797	183.3477202	5.21138446	0.41	-0.891598119	6.10298258
2004/04	3582722	3582722	15.0916334	15.0916334	186.5769689	5.228843856	0.6175	-0.48207621	5.710920066
2005/01	3601947	3601947	15.09698509	15.09698509	188.0490288	5.236702721	0.25	-1.386294361	6.622997082
2005/02	3632715	3632715	15.10549086	15.10549086	188.0639484	5.236782056	0.2	-1.609437912	6.846219968
2005/03	3670421	3670421	15.11581693	15.11581693	189.7830094	5.245881364	0.15	-1.897119985	7.143001348
2005/04	3713628	3713628	15.12751985	15.12751985	192.795096	5.261627946	0.15	-1.897119985	7.158747931
2006/01	3763582	3763582	15.14088172	15.14088172	194.466083	5.270257767	0.1	-2.302585093	7.57284286
2006/02	3802694	3802694	15.15122032	15.15122032	194.0516517	5.26812437	0.075	-2.590267165	7.858391535
2006/03	3834285	3834285	15.15949353	15.15949353	197.5511096	5.285997333	0.175	-1.742969305	7.028966639
2006/04	3863868	3863868	15.16717931	15.16717931	200.6096125	5.301360793	0.2	-1.609437912	6.910798706
2007/01	3893507	3893507	15.17482085	15.17482085	202.6469568	5.311465336	0.15	-1.897119985	7.208585321
2007/02	3928460	3928460	15.18375805	15.18375805	201.7799665	5.307177829	0.125	-2.079441542	7.386619371
2007/03	3967098	3967098	15.1935454	15.1935454	205.0423696	5.323216639	0.175	-1.742969305	7.066185944
2007/04	4006310	4006310	15.20338118	15.20338118	208.1506044	5.338261877	0.2	-1.609437912	6.94769979

INDICE DE FUNCIONAMIENTO 246.178448

Millones de pesos a precios de 1997.

REAL DEL GOBIERNO CON LA POLÍTICA MONETARIA INSTRUMENTADA 123.089224

APÉNDICE V

PROCEDIMIENTO EMPLEADO PARA REGRESAR DE LOGARITMOS A VALORES DE LAS VARIABLES EN NIVELES

Para regresar a los valores de niveles a partir de valores en logaritmos cuando se trata de una distribución normal se hace lo siguiente:

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$y = e^x$$

$$E[y] = E[e^x] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\left(-x + \frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)^2} e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu} dx$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= e^{\frac{\sigma^2}{2} + \mu} (1).$$

Bibliografía

Acevedo, Ernesto. (2009). "PIB Potencial y Productividad Total de los factores. Recesiones y Expansiones en México". *Economía Mexicana*, CIDE. Vol. XVIII, núm. 2, segundo semestre de 2009, pp.175-219.

Aguiar & Martins. (2002), "Volatilidad Macroeconómica, intercambio conflictivo y régimen de Política Monetaria en la Euro área". Universidad do Porto.

Alexandre, Bacao y Drifill. (2007), "Política Monetaria Óptima con un régimen cambiante de tipo de cambio". Universidade do Minho. Portugal.

Altig, D.; Christiano, L.; Eichenbaum, M.; Linde, J. (2005), "Firm-Specific Capital, Nominal Rigidities and the business cycle". National Bureau of Economic Research. Working Paper 11034. United States.

Altman, Eitan. (1999), *Constrained Markov Decision Process*. Chapman and Hall.

Balvers, Ronald & Cosimano, Thomas. (1999). "Inflation Variability and Gradualist Monetary Policy". *Review of Economic Studies*, 61, pp.721-738.

Ball, Laurence. (1999), "Efficient Rules for Monetary Policy". *International Finance* 2:1, pp.63-83.

Banco de México. "La Conducción de la Política Monetaria del Banco de México a través del Régimen de Saldos Acumulados". Nota Técnica. Sin año de publicación.

Bather, John. (2000), "An introduction to Dynamic Programming and Sequential Decisions", Wiley, University of Sussex, UK.

Bellman, Richard. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press. Princeton, N.J., United States.

Bertsekas, Dimitri P. (2000), *Dynamic Programming and Optimal Control*. Massachusetts Institute of Technology. Athena Scientific.

Blinder, Allan. (1999). *El Banco Central. Teoría y Práctica*. Princeton University. Antoni Bosh.

Bullard, James. (1999), "Learning about Monetary Policy Rules". *Journal of Monetary Economics*.

Dutsey & Hornstein. (2003), "Optimal Monetary Policy", Banco de la Reserva Federal de Filadelfia, Estados Unidos.

Estrella, Arturo & Fuhrer Jeffrey.(1999), "Are "Deep" Parameters Stable? The Lucas Critique as an Empirical Hypothesis", Federal Reserve Bank of New York.

Eubank, R.L. (2006). *A Kalman Filter Primer*. Arizona State University. CRC Press, Estados Unidos.

Fuhrer, Jeffrey & Moore, George. (1995), "Inflation Persistence". Federal Reserve Bank of Boston.

Fuhrer, Jeffrey. (1997). "The (Un) Importanco of Forward-Looking Behavior in Price Specifications". *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 29, No. 3 (Aug., 1997), pp. 338-350.

Fuhrer, Jeffrey. (2005). "Intrinsic and Inhereted Inflation Persistence". Federal Reserve Bank of Boston.

Fuhrer, J.; Olivei, G. & Tootell, G. (2009), “Empirical Estimates of Changing Inflation Dynamics”, Federal Reserve Bank of Boston.

Fuentes R., Gredig F. & M. Larraín. (2007). The Output gap and the growth rate of potential output. Central Bank of Chile.

Gaspar, V.; Smets, F. & Vestin, D. (2006), “Adaptative Learning, Persistence and Optimal Monetary Policy”. Journal of the European Economic Association, April-May 4(2–3), pp. 376–385.

Guerrieri, Luca. (2002), “The Inflation Persistence of Staggered Contracts”, Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington, D.C.

Gruen, Romalis & Chandra. (1997). “The lags of monetary policy”. Research Discussion Paper 9702. Reserve Bank of Australia.

Harvey, Andrew. (1989), Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter. The London School of Mathematics. United Kingdom. Cambridge University Press.

Hendry, S. G. B. & Pagan, A.R. (2004), “The Econometrics of the New Keynesian Policy Model: Introduction”. Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 66, Supplement 035-9049, pp.581-607.

Horn G., Logeay C. & Tober S. (2007). “Estimating Germany’s Potential Output”. IMK at the Hans Boeckler Foundation. Macroeconomic Policy Institute in its series [IMK Working Paper](#) number 02-2007.

Ichiro, Muto. (2006). “Can the New Keynesian Phillips Curve Explain Japanese Inflation Dynamics? A Labor Share Correction Approach”, Discussion Paper No. 2006-E-25, Institute for Monetary and Economic Studies. Bank of Japan.

Kara, Amit & Nelson, Edward. (2004), "International Evidence on the Stability of the Optimizing IS Equation". Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 66, Supplement 035-9049, pp. 687-712.

Kydland & Prescott (1977). "Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans" Journal of Political Economy, 1977, vol. 85, no. 3, pp. 473-492.

Lindé, Jesper. (2000). "Monetary Policy Analysis in Backward-Looking Models". Executive Board of Sveriges Riksbank.

Loría, E. y M. Ramos. (2007) "Producto Potencial y Ciclos Económicos en México. 1980.1-2006.4", Facultad de Economía, UNAM, México.

Lucas, Robert & Stokey, Nancy. (1987). "Money and Interest in a Cash-in-Advance Economy", Econometrica, Vol. 55, No.3, pp.491-513.

Mayén Espinosa, Lizbeth Valeria. (2004), Los Mecanismos de Transmisión de la Política Monetaria en México: 1985-2003, Un Modelo VAR. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.

Mavroeidis, Sophocles. (2004). "Weak Identification of Forward-Looking Models in Monetary Economics", Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 66, Supplement, pp.609-635.

McCallum, Bennet & Nelson, Edward. (2000), Timeless Perspective Vs. Discretionary Monetary Policy in Forward-Looking Models. National Bureau of Economic Research. Working Paper 7915.

Montgomery, Douglas, Elizabeth Perck y Geoffrey Vining.(2002), Introducción al Análisis de Regresión Lineal. CECSA, México.

Orphanides, Athanasios y Wieland, Volker. (2000), "Efficient Monetary Policy Design near Price Stability". Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington, D.C. 20551. J. Japan. Int. Econ., 14(4), pp. 327–365.

Phillip, A. W. (1958). "The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957". *Economica*. November. Pp. 283-299.

Romer, D. (2002) *Advanced Macroeconomics*. Segunda edición. McGraw Hill.

Rudd, Jeremy & Whelan, Karl. (2003). "Can Rational Expectations Sticky-Price Models Explain Inflation Dynamics?" Federal Reserve Board and Central Bank of Ireland.

Rudebush, Glenn. (2002). "Assesing the Lucas Critique in Monetary Policy Models". Federal Reserve Bank of San Francisco.

Rudolf & Rünstler. (1996). *Potential Output, the Natural Rate of Unemployment, and the Phillips Curve in a Multivariate Structural Time Series Framework*. Austrian Institute for Economic Research, Vienna & Department of Economics, Institute for Advanced Studies, Vienna.

Spanos, Aris. (1986). *Statistical Foundations of Econometric Modelling*. Cambridge University Press.

Svensson, Lars. (1998). "Open-Economy Inflation Targeting". National Bureau of Economic Research. Working Paper 6545.

Svensson, Lars. (1999), "Inflation Targeting as a Monetary Policy Rule", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 43, pp.607-654.

Svensson, Lars & Faust, Jon. (2001), "Transparency and Credibility: Monetary Policy with Unobservable Goals", *International Economic Review*. Vol. 42, No.2, pp.369-397.

Taylor, John B. (1999), *Monetary Policy Guidelines for Employment and Inflation Stability*. Symposium on Public Policy. Harvard University.

The Royal Swedish Academy of Sciences. (2004). "Finn Kydland and Edward Prescott's Contribution to Dynamic Macroeconomics: The Time Consistency of Economic Policy and the Driving Forces Behind Business Cycles". Advanced information on the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel ,11 October 2004.

Vazquez Salas, Javier. (1996), *Introducción a la Programación Dinámica*. Facultad de Ciencias. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.

Weerapana, Akila. (2000). *The Performance of Simple Monetary Policy Rules in a Backward Looking Model of the U.S. and the EMU*. Wellesley College.

Woodford, Michael. (1999) "Optimal Monetary Policy Inertia". National Bureau of Economic Research. Working Paper 7261.

Yano, Kiti y Seisho Sato. (2005), "Dynamic Instrument Rules Based on Time Varying Coefficients Vector Autoregressive Modeling and Forecast-Based Monetary Policy". Graduate University for Advanced Studies and The Institute of Statistical Mathematics. Japón.