



---

## ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Marzo 6	18 a 21 h	INTRODUCCION	Ing. Francisco Robles Fernández
" 8	18 a 21 h	PERDIDAS DE PRESFUERZO	Ing. José Luis Camba Castañeda
		Comportamiento de trabes sujetas a flexión	
" 10	18 a 21 h	ESTADO LIMITE DE FALLA EN FLEXION	Ing. José Luis Camba Castañeda
" 13	18 a 21 h	ESTADO LIMITE DE SERVICIO EN FLEXION	Ing. José María Riobóo Martín
" 15	18 a 21 h	TRAZO DE CABLES	Ing. Joel Ponsoda Selles
		Optimización de Secciones.	
" 17	18 a 21 h	SECCIONES COMPUESTAS EN FLEXION	Ing. José Gaya Prado
" 20	18 a 21 h	TRABES CONTINUAS. FLEXION	Ing. José Luis Camba Castañeda
" 27	18 a 21 h	COMPORTAMIENTO DE TRABES PRESFORZADAS SUJETAS A CORTANTE	Ing. Constancio Rodríguez Cabello
		Estados límite de falla Estados límite de servicio.	
" 29	18 a 21 h	SECCIONES COMPUESTAS	Ing. José María Riobóo Marín
		Diseño de extremos de trabes presforzados	
" 31	18 a 21 h	CONEXIONES EN ELEMENTOS PREFABRICADOS	Ing. Rubén Obregón Cházaro Ing. José Gaya Prado
Abril 3	18 a 21 h	EJEMPLOS INTEGRADOS DE DISEÑO	
" 5	18 a 21 h	EJEMPLOS INTEGRADOS DE DISEÑO	

## DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO


### ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

1. ING. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA  
Ometusco 35-602  
Col. Condesa  
México, D.F.  
Tel. : 553.68.80
  
2. ING. JOSE GAYA PRADO  
Gerente Técnico  
Presforzados Mexicanos, S.A.  
Av. Minas 143  
Mixcoac Z.P.18  
Tel. : 563.20.00
  
3. ING. RUBEN OBREGON CHAZARO  
Gerente Técnico  
Sistemas Presforzados, S.A.  
San Lorenzo 167  
México 12, D.F.  
Tel. : 575.30.11
  
4. ING. JOEL PONSODA SELLES  
Director General  
Freyssinet, S.A.  
Granos No. 9  
Col. Anzures  
México 5, D.F.  
Tel. : 50.70.00
  
5. ING. JOSE MARIA RIOBOO MARTIN  
Director General  
Riobóo, S.A.  
Insurgentes Sur 1194-302  
México 20, D.F.  
Tel. : 575.48.05
  
6. ING. FRANCISCO ROBLES FERNANDEZ  
Jefe del Departamento de Materiales  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Unidad Azcapotzalco  
U.A.M.  
Tel. : 561.37.33 Ext.205

7. ING. CONSTANCIO RODRIGUEZ CABELLO  
Coordinador Técnico del Departamento de  
Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica  
U. N. A. M.  
México 20, D.F.  
Tel.: 548.96.69



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

TEMA I : " I N T R O D U C C I O N "

PROF. ING. FRANCISCO ROBLES FERNANDEZ.

marzo-abril, 1978.



DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
PRESFORZADO: INTRODUCCION

F. Robles F.-V.  
Universidad Autónoma  
Metropolitana.

1. PRINCIPIOS GENERALES DEL PRESFUERZO

1.1 Conceptos introductorios

La resistencia a tensión del concreto simple es muy inferior a su resistencia a compresión. Para poder emplear el concreto simple en elementos que deben resistir tensiones, es necesario encontrar una forma de suplir esta falta de resistencia a tensión. Se puede lograr esto colocando acero de refuerzo en las zonas de los elementos estructurales donde pueden aparecer tensiones, que es precisamente lo que se hace en el concreto reforzado convencional. Sin embargo, esta forma de proporcionar resistencia a la tensión presenta un inconveniente: aun cuando el refuerzo garantiza una resistencia adecuada, no impide el agrietamiento del concreto a niveles de carga relativamente bajos. Son bien conocidos los efectos desfavorables de las grietas sobre la apariencia y durabilidad de los elementos de concreto reforzado; de ahí que eliminar el agrietamiento haya sido siempre una de

de las principales preocupaciones de los proyectistas. Aunque ha habido diversos intentos para resolver el problema, la contribución más importante suele atribuirse al ingeniero francés Eugenio Freyssinet, quien convirtió en realidad práctica la idea de presforzar los elementos de concreto reforzado. Se según Freyssinet (ref 1, cap 1 del Tomo I de la ref 2), presforzar un elemento estructural consiste en crear en él, mediante algún procedimiento, antes o al mismo tiempo que la aplicación de las acciones exteriores, esfuerzos tales que, al combinarse con los correspondientes a las cargas exteriores, anulen los esfuerzos de tensión o los mantengan menores que los esfuerzos permisibles de los materiales empleados. En otras palabras, lo que pretendía Freyssinet era eliminar totalmente las tensiones en el concreto, introduciendo una fuerza que creara esfuerzos de compresión que anulasen los de tensión.

Este concepto inicial del presfuerzo se ha ido modificando con el tiempo. T. Y Lin dice que presforzar significa la creación intencionada de esfuerzos, no para eliminar tensiones exclusivamente, sino para mejorar el comportamiento general de la estructura (cap 1 de la ref 4). El presfuerzo se utiliza para controlar no solamente el estado de agrietamiento, sino también el de deformación. De acuerdo con los criterios modernos de diseño, incluso no se considera imprescindible eliminar totalmente el agrietamiento. Así, el concreto presforzado puede

concebirse simplemente como una modalidad del concreto reforzado ordinario, constituyendo el presfuerzo una sollicitación artificial que introduce el proyectista en los elementos estructurales para alcanzar alguna finalidad que se estime ventajosa.

### 1.2 Ilustración del principio del presfuerzo

El principio del presfuerzo puede ilustrarse en forma elemental con los siguientes ejemplos. Considérese una viga de sección rectangular, de concreto simple, libremente apoyada, como la mostrada en la fig IA. Suponiendo un comportamiento elástico, debido a la acción de la carga exterior, la viga quedará sujeta en su sección crítica a esfuerzos de compresión y de tensión, en sus fibras extremas, de  $100 \text{ Kg/cm}^2$ . Evidentemente, el concreto no puede resistir esfuerzos de tensión de esta magnitud, pero si a la misma viga de concreto se le aplica una fuerza axial de 20 ton, que produce esfuerzos de compresión uniformes de  $100 \text{ Kg/cm}^2$ , los esfuerzos de tensión en la fibra inferior se anulan, aunque los de compresión en la fibra superior se incrementan a  $200 \text{ Kg/cm}^2$  (fig IB). En la fig IC se muestra la misma viga de concreto, pero con una fuerza de compresión igual a la mitad de la fuerza axial del caso exterior, aplicada en el límite del núcleo central. Así, la fuerza produce un momento de signo contrario al producido por las cargas exteriores en la sección crítica. Las tensiones

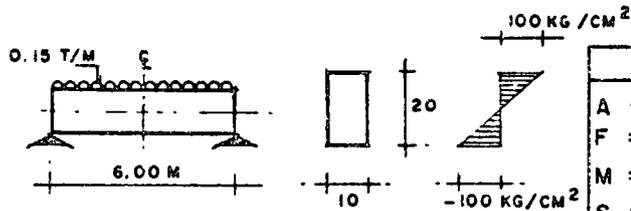
en la fibra inferior también se anulan, pero los esfuerzos de compresión en la fibra superior son iguales a la mitad de los esfuerzos correspondientes en la viga de la fig 1 B.

De lo anterior se deduce que para presforzar una viga de concreto, se debe aplicar una fuerza cuya magnitud depende de la excentricidad de la fuerza de presfuerzo con respecto al eje neutro. Cuanto mayor es la excentricidad, menor es la fuerza de presfuerzo requerida.

$$M = \frac{0.15 \times 6^2}{8} = 0.67 \text{ T-M}$$

$$S = \frac{1}{6} \times 10 \times 20^2 = 667 \text{ CM}^3$$

$$f_{i,s} = \frac{M}{S} = \frac{67000}{667} = 100 \text{ KG/CM}^2$$

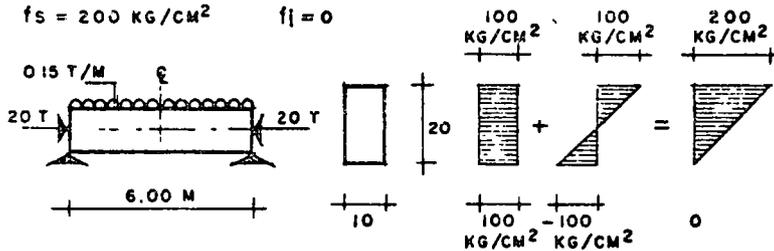


NOTACION	
A	= AREA DE LA SECCION
F	= FUERZA DE PRESFUERZO
M	= MOMENTO FLEXIONANTE
S	= MODULO DE SECCION
e	= EXCENTRICIDAD DEL PRESFUERZO
$f_{i,s}$	= ESFUERZO EN FIBRA INFERIOR Y SUPERIOR, RESPECTIVAMENTE

(A) VIGA DE CONCRETO SIMPLE

$$f_{i,s} = \frac{F}{A} \pm \frac{M}{S} = \frac{20000}{10 \times 20} \pm \frac{67000}{667}$$

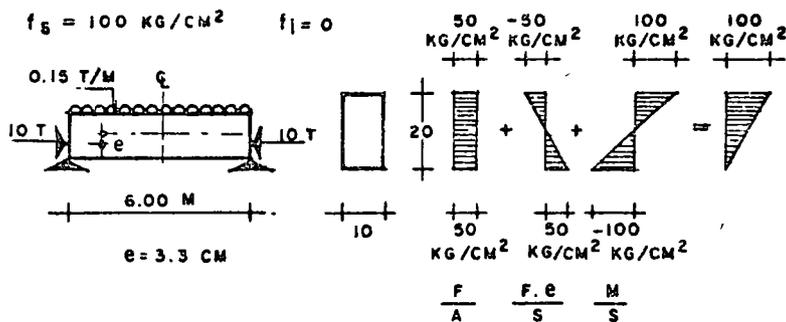
$$f_s = 200 \text{ KG/CM}^2 \quad f_i = 0$$



(B) VIGA CON PRESFUERZO AXIAL

$$f_{i,s} = \frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot e}{S} \pm \frac{M}{S} = \frac{10000}{10 \times 20} \pm \frac{10000 \times 3.3}{667} \pm \frac{67000}{667}$$

$$f_s = 100 \text{ KG/CM}^2 \quad f_i = 0$$



(C) VIGA CON PRESFUERZO EN EL LIMITE DEL NUCLEO CENTRAL

Fig 1.

### 1.3 Comportamiento de vigas de concreto presforzado. Criterios de diseño. Reglamentos.

En general, una viga de concreto presforzado con presfuerzo excéntrico tiene una curva carga-deformación como la representada en la fig 2, con un tramo prácticamente recto y uno curvo. El tramo recto, que indica un comportamiento lineal, se inicia en la región de deformaciones negativas, lo que significa que, debido a la acción del presfuerzo, se producen deformaciones hacia arriba (contraflechas), que no se contrarrestan totalmente por el peso propio y algún porcentaje de la carga total.

El punto 1 de la curva representa la condición de deformación nula, en que las deformaciones correspondientes a las cargas exteriores quedan totalmente equilibradas por las producidas por el presfuerzo. Esta condición se presenta, por ejemplo, cuando la combinación de los esfuerzos debidos a cargas exteriores y al presfuerzo produce un bloque de esfuerzos uniformes en todas las secciones de la viga.

El punto 2 de la curva resulta cuando los esfuerzos de tensión son nulos en la fibra inferior de la sección crítica de la viga. Durante mucho tiempo, los proyectistas de elementos de concreto presforzado consideraron que no debería excederse esta condición.

Si la carga se incrementa, se llega al punto 3, corres -

pondiente a la carga de agrietamiento, que se presenta cuando los esfuerzos de tensión en la fibra inferior de la sección crítica coinciden con el módulo de rotura de concreto. Este es un punto notable en el comportamiento de los elementos de concreto presforzado, debido a que corresponde a la iniciación del agrietamiento. Una vez sobrepasada la carga de agrietamiento, las deformaciones dejan de ser proporcionales a las cargas y la curva carga-deformación exhibe un quiebre marcado.

El punto 4 corresponde a la carga que hace que el acero alcance su esfuerzo de fluencia.

El punto 5 representa la resistencia de la sección, es decir, su capacidad máxima en flexión.

En la gráfica se indican sobre el eje vertical diversos estados de carga típicos, correspondientes a distintos estados de deformación y agrietamiento.

Idealmente, el diseño de elementos de concreto presforzado debe basarse en el conocimiento de la curva completa carga-deformación. Si se puede predecir esta curva, el proyectista está en condiciones de dimensionar la viga, de manera que cuente con un grado de seguridad a la ruptura predeterminado y que tenga un comportamiento adecuado bajo cargas de servicio. Así, comparando la resistencia que puede desarrollar una sección con la carga de servicio que debe soportar, tendrá una idea del grado de seguridad con que cuenta. Conociendo las re-

laciones entre las cargas y las deformaciones para distintos niveles de carga, puede mantener las deformaciones probables de la viga dentro de valores convenientes. Análogamente puede lograr que el agrietamiento no exceda de unos límites que se consideren aceptables.

Debe señalarse que un problema de especial dificultad en el estudio del comportamiento de elementos estructurales reforzados es la predicción de las variaciones que experimenta el presfuerzo inicialmente aplicado, al transcurrir el tiempo, como resultado de las características plásticas del concreto y del acero.

Los reglamentos de diseño suelen dar recomendaciones específicas para el grado de seguridad requerido en distintas condiciones, y normas respecto a las deformaciones y agrietamiento admisibles en distintas situaciones. Es frecuente también que los reglamentos especifiquen determinados esfuerzos permisibles que no deben excederse bajo condiciones de servicio de distintos tipos. Esto es una forma indirecta de lograr un grado de seguridad razonable y evitar agrietamientos. El criterio de diseño basado en esfuerzos permisibles es todavía muy común, pero se concibe la posibilidad de desarrollar métodos de diseño basados exclusivamente en requisitos de resistencia, agrietamiento y deformación.

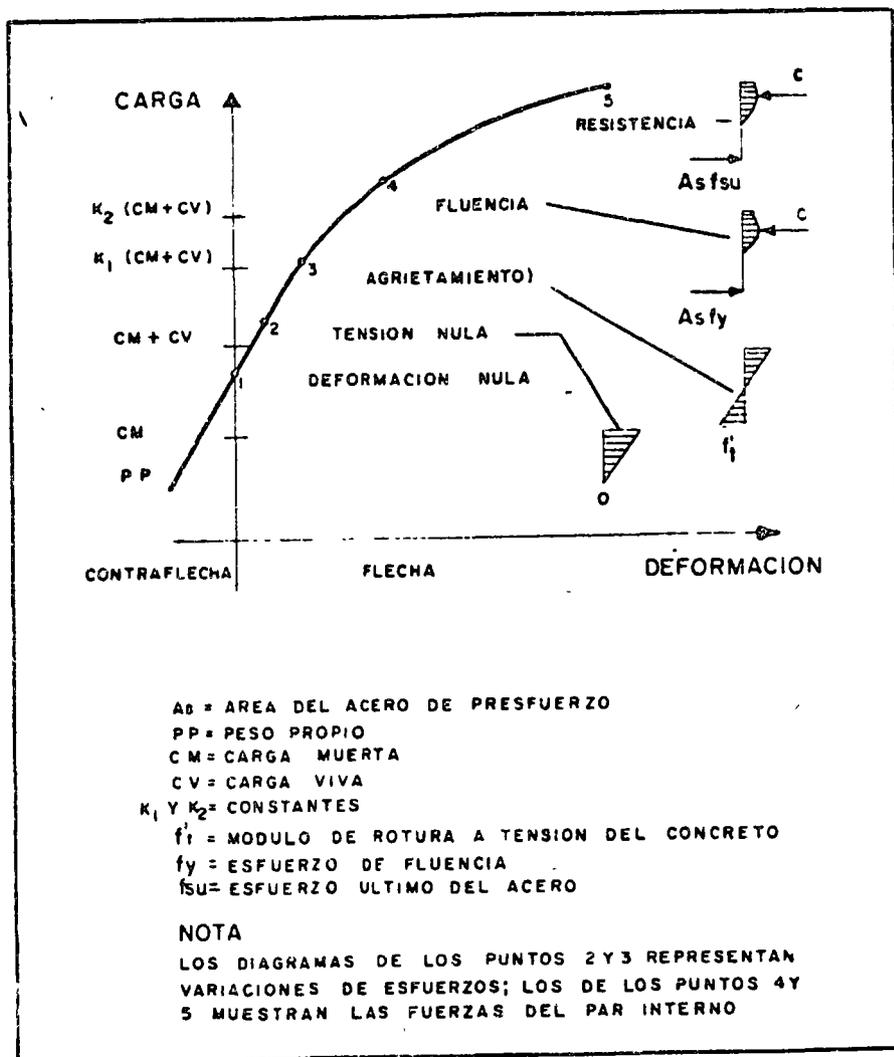


Fig 2.

Los reglamentos modernos tienden a incluir las recomen-  
daciones para el diseño de estructuras de concreto presforza-  
do en las recomendaciones generales para concreto reforzado.  
Así lo hacen las recomendaciones CEB-FIP (6), que fueron  
concebidas con un criterio semi-probabilístico. Se busca en e-  
llas que la probabilidad de alcanzar determinados estados lími-  
tes de rotura y de servicio no exceda de determinados límites.  
Un enfoque semejante es el del código inglés (7) y el del pro-  
yecto de reglamento de las construcciones para el Distrito Fe-  
deral (México) (8), actualmente en estudio. Otro reglamento im-

portante es el del ACI (9), que considera al concreto presforzado como un caso particular del concreto reforzado ordinario. Estas últimas normas se basan esencialmente en un criterio de resistencia, aunque se establecen también ciertas limitaciones a los esfuerzos que pueden alcanzar los materiales bajo condiciones de servicio.

## 2. MODALIDADES DEL PRESFUERZO

El presfuerzo suele aplicarse mediante elementos de acero de alta resistencia llamados tendones. Menos frecuentemente, el presfuerzo se crea por medio de gatos. A continuación se describen los sistemas más comúnmente utilizados para aplicar presfuerzo.

### 2.1 Sistemas pretensados

En los sistemas pretensados, los tendones se tensan antes del colado de los elementos, anclándolos en muertos de anclaje especiales. Cuando el concreto ha alcanzado suficiente resistencia, se cortan los tendones, que quedan anclados en las piezas de concreto por adherencia, y al tender a recuperar sus dimensiones originales, crean un estado de esfuerzos de compresión en el elemento.

Los sistemas pretensados se prestan a la producción de elementos estructurales estandarizados. En general, el tamaño de las piezas no suele alcanzar proporciones muy grandes debido a los problemas de transporte desde los centros de producción a la obra.

Las instalaciones para la producción de elementos pretensados pueden ser de características muy distintas. Fundamentalmente, consisten en una mesa donde se fabrican los productos, muertos de anclaje, moldes, gatos para tensar los tendones, grúas para el manejo de los productos prefabricados de concreto, moldes y equipo especial para el manejo de tendones. En algunas ocasiones, también se cuenta con plantas de vapor para reducir la duración de los ciclos de fabricación por medio de curado acelerado.

Las mesas de colado para la producción de elementos pretensados pueden tener características muy variables, dependiendo de la naturaleza de los productos por prefabricar, la magnitud de las fuerzas de presfuerzo para las que haya que proporcionar anclaje y las propiedades del suelo sobre el que deben apoyarse. Un aspecto fundamental es reducir al mínimo los movimientos diferenciales de las instalaciones, a fin de evitar tener que hacer ajustes frecuentes para conservarlas debidamente niveladas.

El dimensionamiento de las mesas se basa en la aplicación de los principios de la ingeniería estructural y de la mecánica de suelos. En la ref 5 (cap 10), se describen distintos tipos de mesas de presfuerzo y se dan algunas indicaciones sobre su diseño. En la fig 3 se muestra esquemáticamente una instalación típica. La longitud de las mesas oscila entre 40 y 200 m, aproximadamente, pudiéndose considerar 100 m como valor promedio.

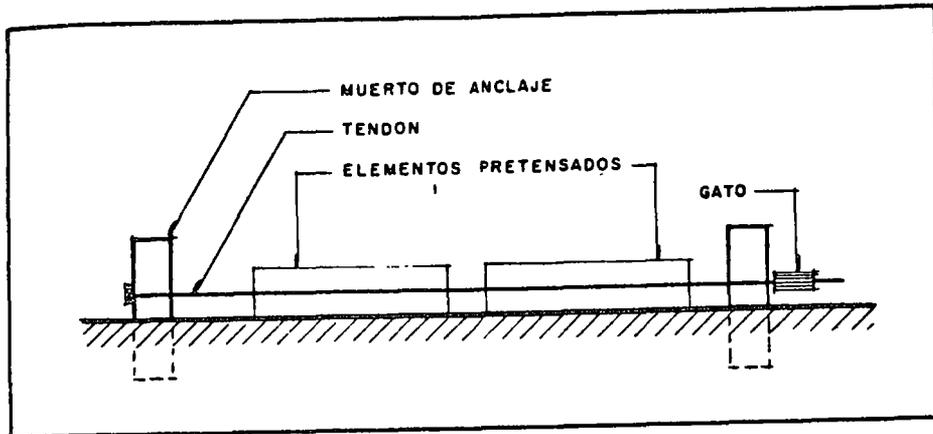


Fig 3.

En general, por sencillez constructiva, los elementos pretensados se fabrican con tendones rectos. Algunas plantas prefabricadas cuentan con dispositivos que permiten desviar los tendones de tal forma que sus trayectorias se ajusten a las necesidades de momentos en la forma más eficiente posible. En la fig 4 se muestra esquemáticamente una mesa de colado para producir elementos con tendones siguiendo trayectorias quebradas, así como detalles típicos de procedimientos para lograr los quiebres. En el cap 10 de la ref 5 se trata este tema más ampliamente.

Los tendones se sujetan en los muertos de anclaje por medio de mordazas que, en general, utilizan el principio de la cuña o la fricción, o una combinación de ambos recursos. En la fig 5 se presentan algunas variantes usuales. Existen anclajes para un solo alambre o torón (figs 5a y 5b), para dos alambres

fig 5c) o para un haz de alambres (fig 5d). En la mayoría de las plantas de pretensado, los tendones se tensan individualmente. Sin embargo, en algunos casos se estiran y anclan grupos de tendones simultáneamente.

El método más utilizado para estirar los tendones se basa en el empleo de gatos hidráulicos de distintos tipos. Los gatos pueden ser de capacidad relativamente pequeña, cuando se estiran los tendones individualmente, o llegar a tener capacidades de varios cientos de toneladas, cuando se estira un grupo de tendones grandes. El control de presfuerzo aplicado se realiza midiendo la longitud estirada directamente y por medio de los manómetros que suelen estar adaptados a los gatos.

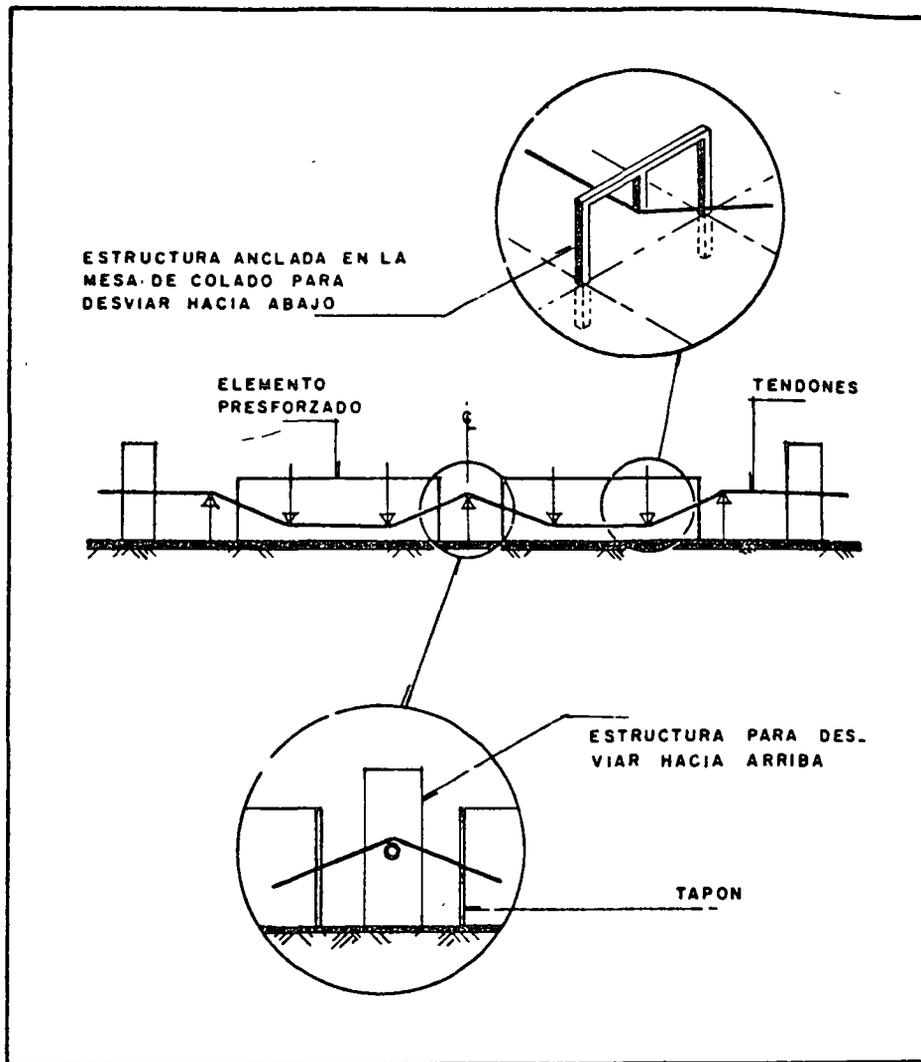


Fig 4

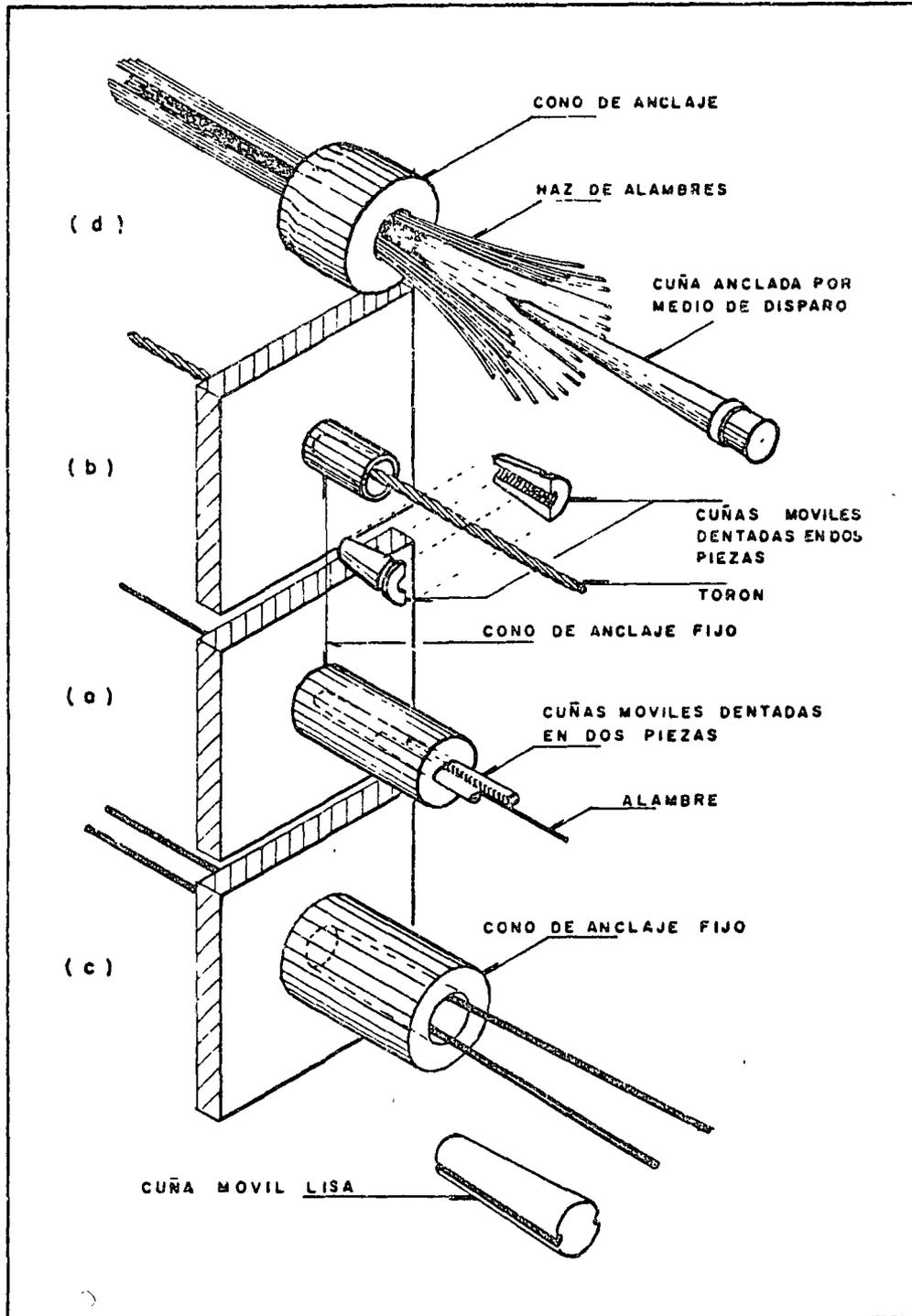


Fig 5

## 2.2 Sistemas postensados

En los sistemas postensados, el concreto se cuela o deposita en los moldes antes del tensado de los tendones, que se efectúa por medio de gatos hidráulicos que reaccionan contra el concreto. Esta operación puede hacerse desde un solo extremo,

como se indica en la fig 6, anclando el tendón mediante un dispositivo especial en el extremo contrario; puede también tensarse desde ambos lados por medio de dos gatos.

Al fabricar la pieza, los tendones se alojan dentro de ductos colocados en forma conveniente, que evitan que queden adheridos al concreto durante la operación del tensado. En algunos casos se forman ductos dentro de los elementos de concreto por medio de mangueras o algún otro sistema, y los tendones se enhebran en los ductos después que el concreto ha endurecido.

Una vez tensados los elementos, en la mayoría de los casos se inyecta lechada en los ductos, para que en condiciones de servicio exista adherencia entre los tendones y el concreto. Cuando se ha aplicado la deformación necesaria al tendón, los gatos se retiran y los tendones quedan anclados mediante dispositivos especiales. Las trayectorias de los tendones pueden ser rectas o curvas (fig 7). Los diversos tipos de anclaje que se utilizan en los sistemas postensados pueden consistir en uno de los cuatro procedimientos siguientes, o en alguna combinación de ellos.

1. Aprovechando el principio de la cuña, así como la fricción entre las cuñas y los tendones.

2. Apoyando directamente el tendón sobre una placa por medio de un engrosamiento formado en el extremo de los tendones.

3. Usando dispositivos a base de rosca.

4. Doblando los tendones.

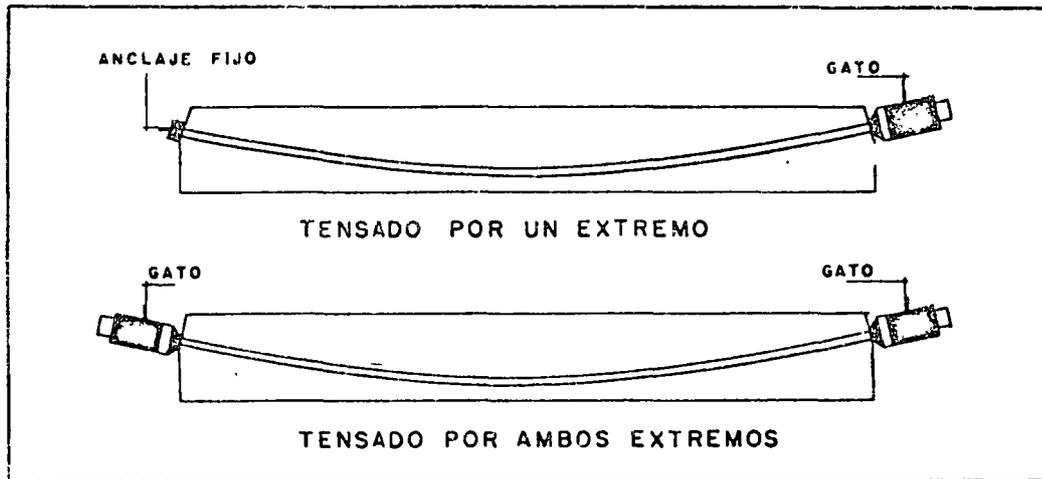


Fig 6

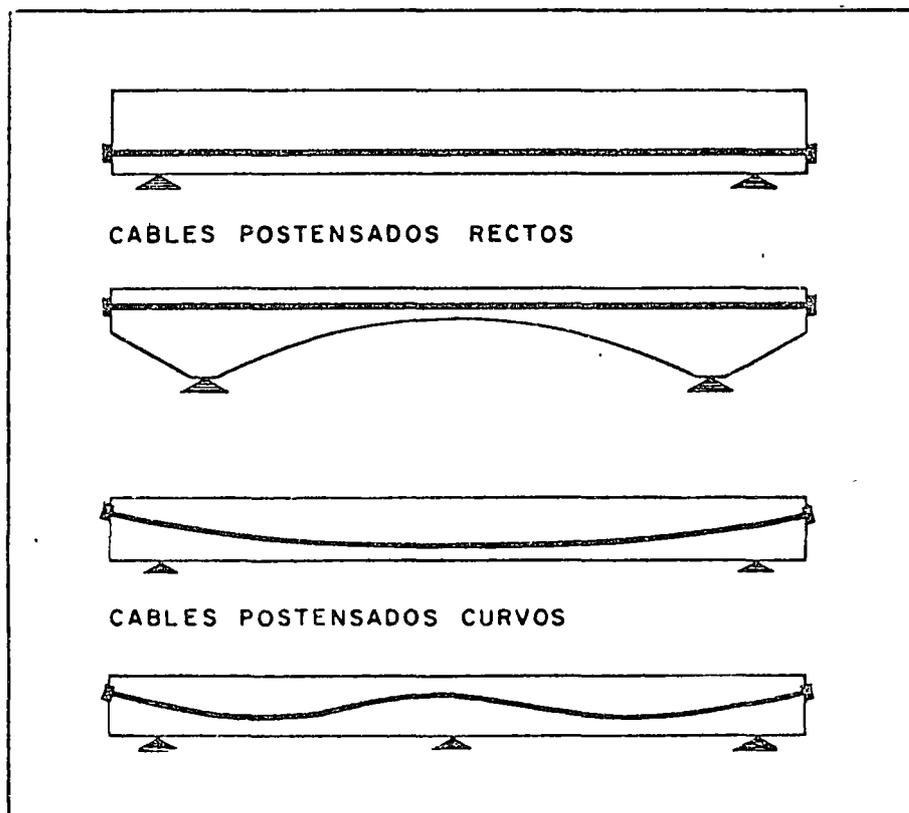


Fig 7

En las refs 2-5, 10 y 11 se encuentra información sobre la forma en que estos procedimientos de anclaje han sido utilizados en diversos sistemas.

### 2.3 Comparación entre el pretensado y el postensado

La elección de uno u otro sistema de presfuerzo está condicionada por consideraciones técnicas y económicas y dependerá de las circunstancias particulares de cada caso. A continuación, se reseñan algunos de los factores que deben tenerse en cuenta al comparar alternativas.

El pretensado, que por lo general requiere instalaciones bastante costosas, es apropiado para la fabricación de elementos estándar en forma repetitiva. La posibilidad de utilizar sistemas altamente industrializados puede significar economías importantes, siempre que el volumen de fabricación sea lo suficientemente grande y uniforme. El tamaño de los elementos suele quedar limitado por consideraciones de manejo en la planta y de transporte. Las desventajas esenciales son el alto monto de las inversiones en equipo, el costo de transporte y montaje y la dificultad de lograr uniones adecuadas entre los elementos prefabricados.

El postensado implica costos adicionales por concepto de anclajes, ductos e inyección de ductos. Se presta a la construcción de estructuras monolíticas de grandes proporciones. Así, gracias al control sobre deformaciones que pueda lograrse a

través del uso del presfuerzo, es ahora posible alcanzar claros de más de 100 metros en estructuras postensadas para puentes y techos.

### 3. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

#### 3.1 Concreto

##### Tipos

En la mayoría de las estructuras de concreto presforzado suele usarse concreto de peso volumétrico ordinario ( $2200 \text{ Kg/m}^3$ ).

Sin embargo, en algunos casos puede ser interesante el uso de concretos ligeros, sea de agregados naturales o sea de arcillas expandidas (fig 8).

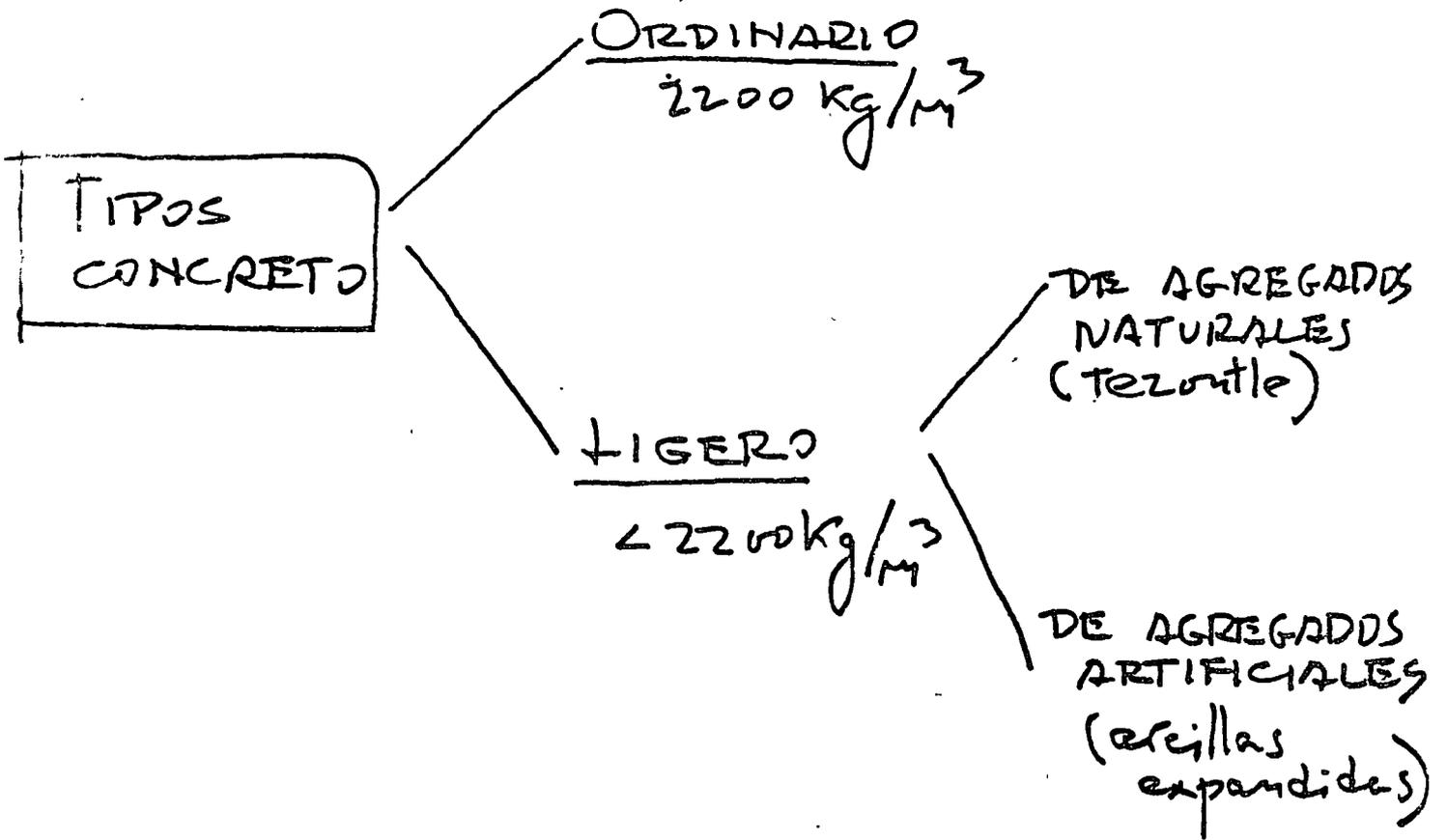


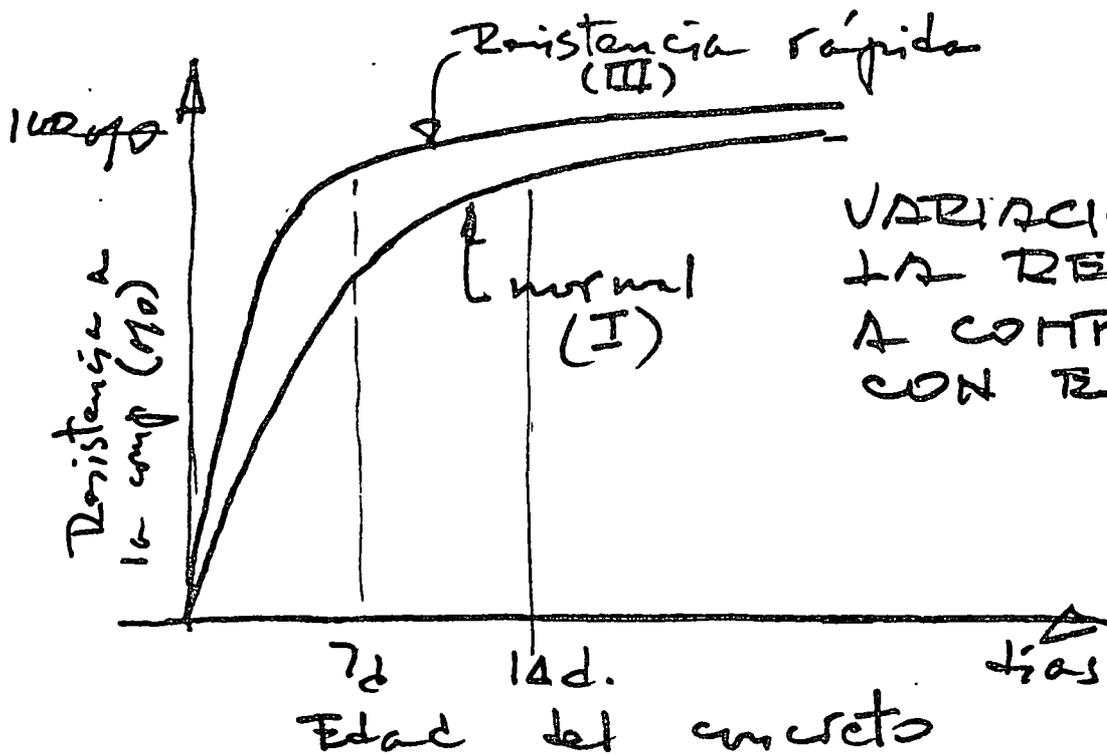
Fig 8

Resistencia a compresión

Suele tenderse a concretos de resistencias altas ( 300 - 600 Kg/cm<sup>2</sup>). Esto es conveniente para evitar problemas bajo los anclajes, donde puede haber esfuerzos concentrados altos, para contar con un módulo de elasticidad alto y para lograr menor volumen de concreto y, por lo tanto, mayor ligereza. Es importante conocer la variación de la resistencia del concreto con el tiempo, para conocer con qué resistencia se cuenta cuando se aplica el presfuerzo al concreto y durante las maniobras iniciales de las piezas cuando todavía no se han alcanzado los valores especificados para las condiciones de trabajo normal (fig 9).

RESISTENCIAS  
A LA COM-  
PRESION USUALES  
( $f'_c$ )

> 250-600 kg/cm<sup>2</sup>



VARIACION DE  
LA RESISTENCIA  
A COMPRESION  
CON EL TIEMPO

RAZONES PARA  
USAR RESISTENCIAS  
ALTAS

- ESFUERZOS ALTOS  
BAJO ANCLAJES
- MODULO DE  
ELASTICIDAD ALTO
- LIGEREZA

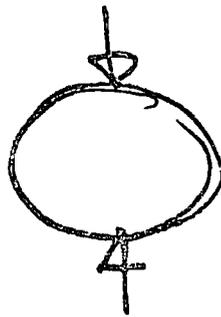
RESISTENCIA  
DEL CONCRETO  
A LA  
COMPRESION

Fig 9

Para poder estimar el riesgo de agrietamiento en vigas de concreto presforzado es necesario conocer la resistencia a tensión del concreto. Este puede determinarse de manera indirecta por medio de la prueba brasileña. Puede calcularse a partir de la resistencia a compresión por medio de expresiones como las que aparecen en la fig 10.

$$f_{tb} = 6 \log / \text{cm}^2 + 0.06 f'_c$$

Para agregados Santafé y prueba Brasileña



También, en

forma aproximada:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_t = 0.07 f'_c \quad (\text{para } f'_c \text{ alto}) \\ f_t = 0.10 f'_c \quad (\text{para } f'_c \text{ bajo}) \end{array} \right.$$

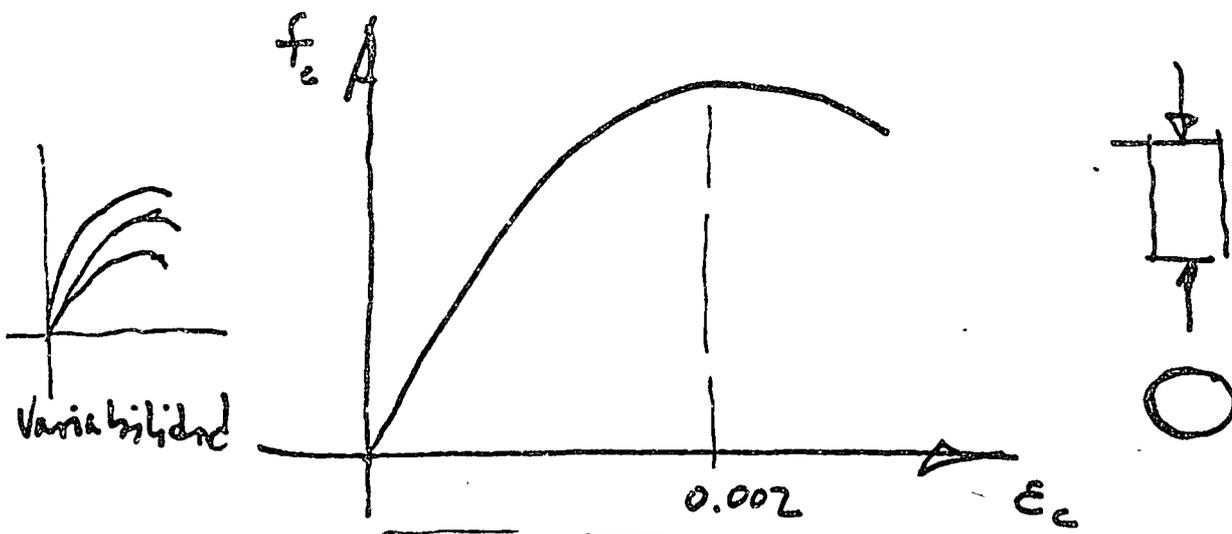
Resistencia del concreto a la tensión.

Curva esfuerzo-deformación y módulo de elasticidad

En la fig 11 se muestra una curva esfuerzo-deformación típica del concreto, obtenida ensayando una probeta cilíndrica en compresión. La resistencia del concreto corresponde siempre a un valor de la deformación unitaria del orden de 0.002.

Como puede apreciarse en la fig 11 el concreto no se comporta elásticamente bajo carga. Sin embargo, para cálculos de deformaciones y para otros fines suele recurrirse a un módulo establecido convencionalmente. Así se definen módulos "tangentes" y módulos "secantes". En la fig 11 se dan dos expresiones para calcular el módulo de elasticidad del concreto en función de la resistencia a compresión.

# CURVA ESFUERZO - DEFORMACION



# MODULOS ELASTICOS (tangente secante)

Fórmula ACEI

$$E_c = w^{1.5} \cdot 15000 \sqrt{f'_c}$$

$E_c$ , kg/cm<sup>2</sup>;  $w$ , ton/m<sup>3</sup>;  $f'_c$ , kg/cm<sup>2</sup>

Fórmula DDF (efecto corte descuido)

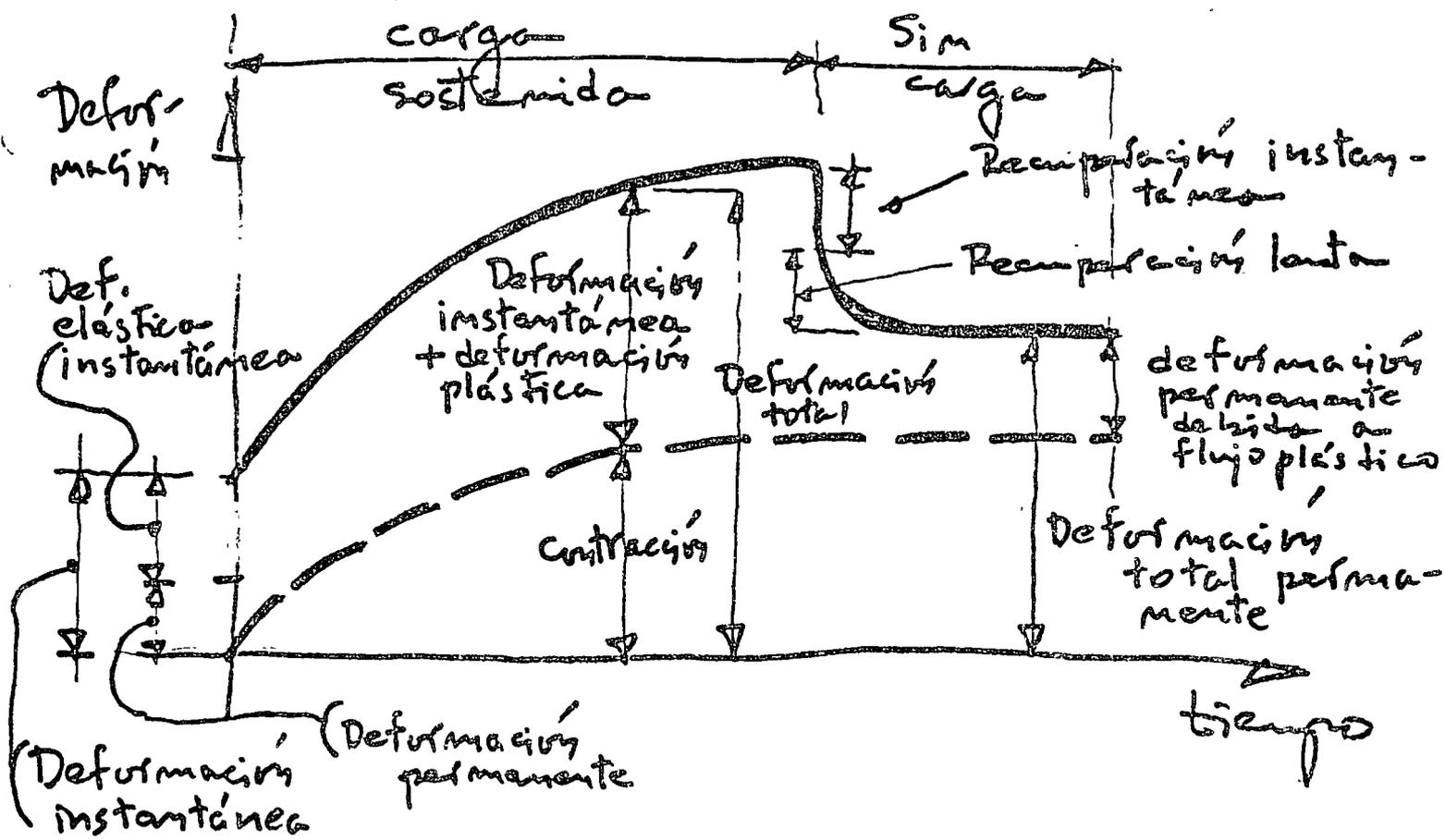
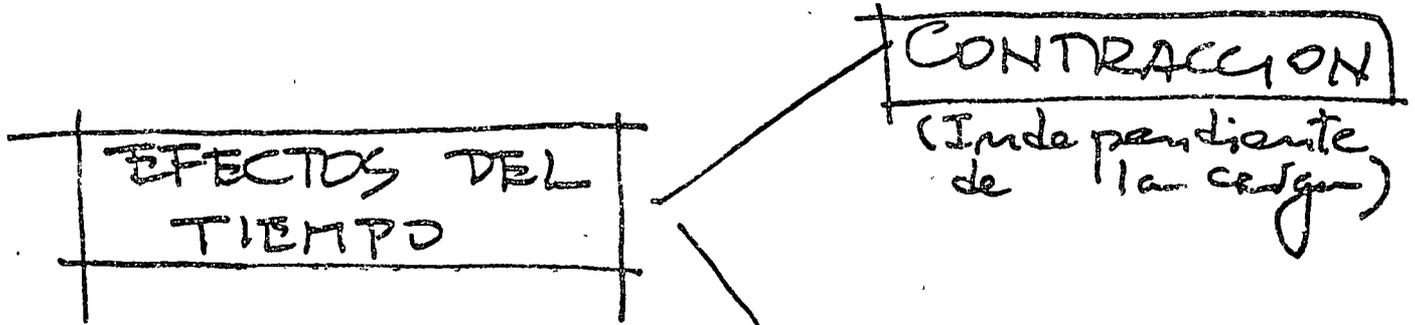
$$E_c = 10000 \sqrt{f'_c}$$

Apoyados Santa Fe

Fig 11

Efectos del tiempo

El concreto se deforma con el tiempo. Los dos efectos del tiempo fundamentales son la contracción, que es independiente de la carga, y el flujo plástico, que varía con ésta. En la fig 12 se representa una gráfica de deformación-tiempo que muestra la influencia del tiempo en las deformaciones de un elemento de concreto.



**CURVA DEFORMACION - TIEMPO**

Como se indica en la fig 13, las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga hasta niveles del orden del 50% de la resistencia. Se define un coeficiente de flujo plástico que es la relación entre la deformación unitaria total al cabo de un tiempo grande y la deformación unitaria inmediata. Este coeficiente es del orden de 2 a 3. En la fig 13 se dan algunos datos aproximados de la proporción de deformación total que se registra según la duración de la carga.

# FLUJO PLÁSTICO

Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga hasta niveles del orden de  $50\%$  de la resistencia.

Coefficiente de flujo plástico

$$C_c = \frac{\sum_t}{\sum_i}$$

$\sum_t$  = deformación unitaria total al cabo de un tiempo grande

$\sum_i$  = deformación unitaria inmediata

$$C_c \approx 2-3$$

Proporción de deformación total

$1/4$

$1/2$

$3/4$

1

Duración cargas

2 semanas

2-3 meses

1 año

muchos años

Las deformaciones unitarias debidas a contracción varían de 0.0002 a 0.001. Para diseño es frecuente considerar de 0.0002 a 0.0004. La intensidad de la contracción varía con el tiempo, como se muestra en la fig 14. La contracción puede variar considerablemente con el curado y las condiciones del medio ambiente.

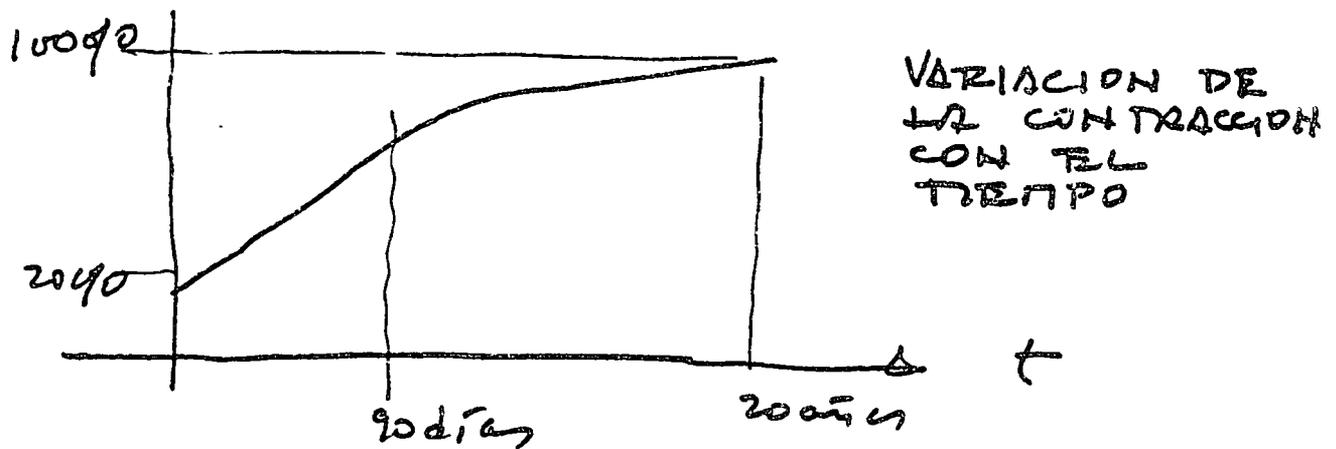
#### Efectos de la temperatura

Las dimensiones de las piezas de concreto varían con la temperatura, como tantos otros materiales. El coeficiente de expansión térmica para concreto suele variar entre 0.000 007 y 0.000 01, por grado centígrado de cambio de temperatura (fig 14).

## CONTRACCION

tas de deformación unitarias  
varían de 0.0002 y 0.001

(Para diseño y frecuentemente  
considerar de 0.0002 a 0.0004)



La contracción puede variar  
considerablemente con el curado y  
las condiciones del medio ambiente

## EFECTOS TEMPERATURA

Coefficiente expansión térmica:

0.000007 a 0.00011

de deformación unitaria por grado  
centígrado de cambio de temperatura.

### Consideraciones sobre la fabricación del concreto

Dos precauciones importantes deben considerarse en la fabricación del concreto para elementos presforzados:

- a) Evitar aditivos con compuestos de cloro, como el cloruro de calcio, que por su alta corrosividad pueden perjudicar el acero de presfuerzo.
- b) Usar precauciones al curar con vapor. (El curado con vapor puede resultar en resistencias menores que las obtenidas con un curado normal.)

### 3.2 Acero

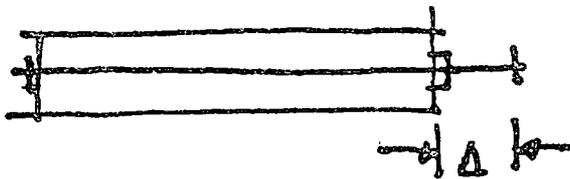
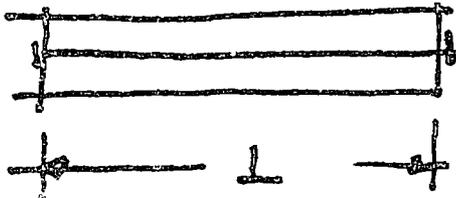
#### Por qué debe usarse acero de alta resistencia

El acero utilizado para presforzar forzosamente debe ser de una resistencia alta. Esto puede apreciarse en la fig 15 donde se comparan los distintos efectos que resultan de utilizar un acero de  $f_s = 1265 \text{ Kg/cm}^2$  o uno de  $10\,000 \text{ Kg/cm}^2$ . En el primer caso las deformaciones producidas por el flujo plástico y la contracción del concreto son superiores a la deformación que puede aplicarse al acero, de manera que el presfuerzo aplicado inicialmente se pierde.

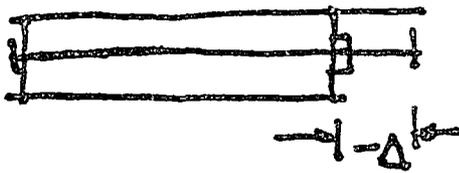
POR QUE DEBE USARSE ACERO DE ALTA RESISTENCIA ?

A

$f_s = 1265 \text{ kg/cm}^2$  ;  $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

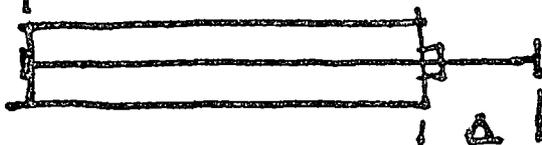
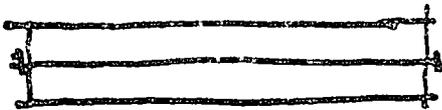


$\Delta = \frac{f}{E} L = \frac{1265}{2 \times 10^6} L = \underline{\underline{0.0006 L}}$



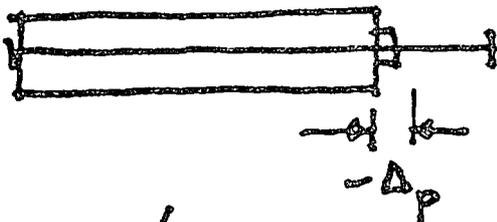
acortamiento por flujo y contracción  
No hay plastificación

B



$f_s = 10000 \text{ kg/cm}^2$   
 $E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$\Delta = \frac{10000}{2 \times 10^6} L = 0.005 L$



$\Delta_p = 0.0008 L$   
(por pérdidas)

Deformación unitaria disponible para plastificación :

$\delta = 0.005 - 0.0008 = 0.0042$

$f = 0.0042 \times 2 \times 10^6 = 8400 \text{ kg/cm}^2$

Fig 15

Tipos de refuerzo

En la fig 16 se presenta un resumen breve de los distintos tipos de acero utilizados para presforzar, que pueden clasificarse en alambres, torones y barras. En la fig 17 se muestran curvas esfuerzo-deformación para algunos aceros de presfuerzo típicos y, para efectos comparativos, las correspondientes a aceros de refuerzo ordinario. Las diversas formas en que puede definirse el esfuerzo convencional de fluencia se indican en la fig 18.

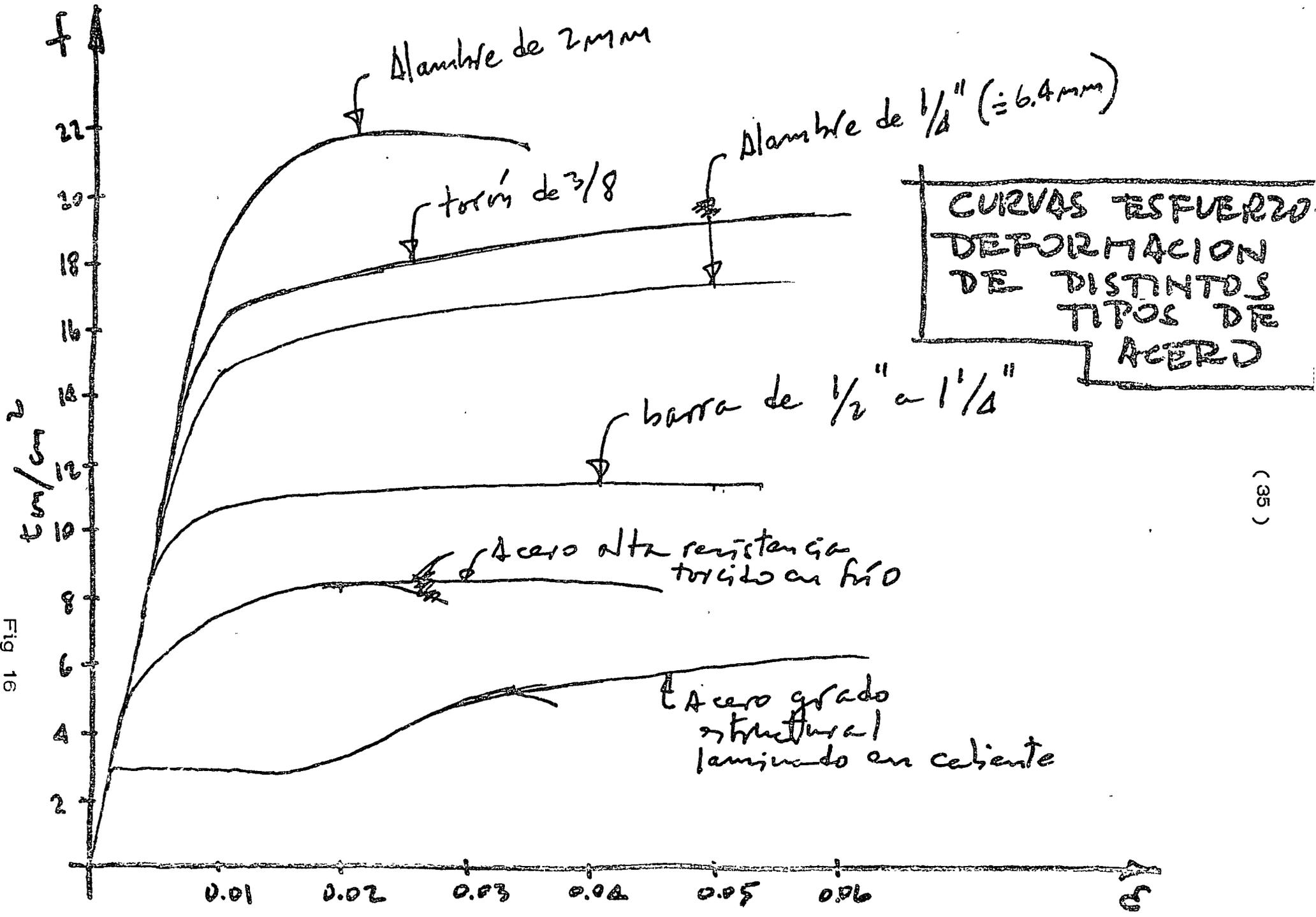


Fig 16

# TIPOS DE REFUERZO

(36)

ALAMBRES (lisos o corrugados)	2-7 mm $\phi$
TORONES (generalmente de 7 alambres)	$\frac{1}{4}$ " - $\frac{1}{2}$ " $\phi$
BARRAS (no son comunes en México)	$\frac{1}{2}$ " - $1\frac{1}{4}$ " $\phi$

Los alambres se fabrican de alambros con un alto contenido de carbono (0.72 - 0.93%), ~~stirando~~

El alambros se estira en hilo y se somete a tratamientos térmicos (stress-relieving)

la ductilidad disminuye y se aumenta y al disminuir el diámetro.

ESFUERZO CONVENCIONAL DE FLUENCIA

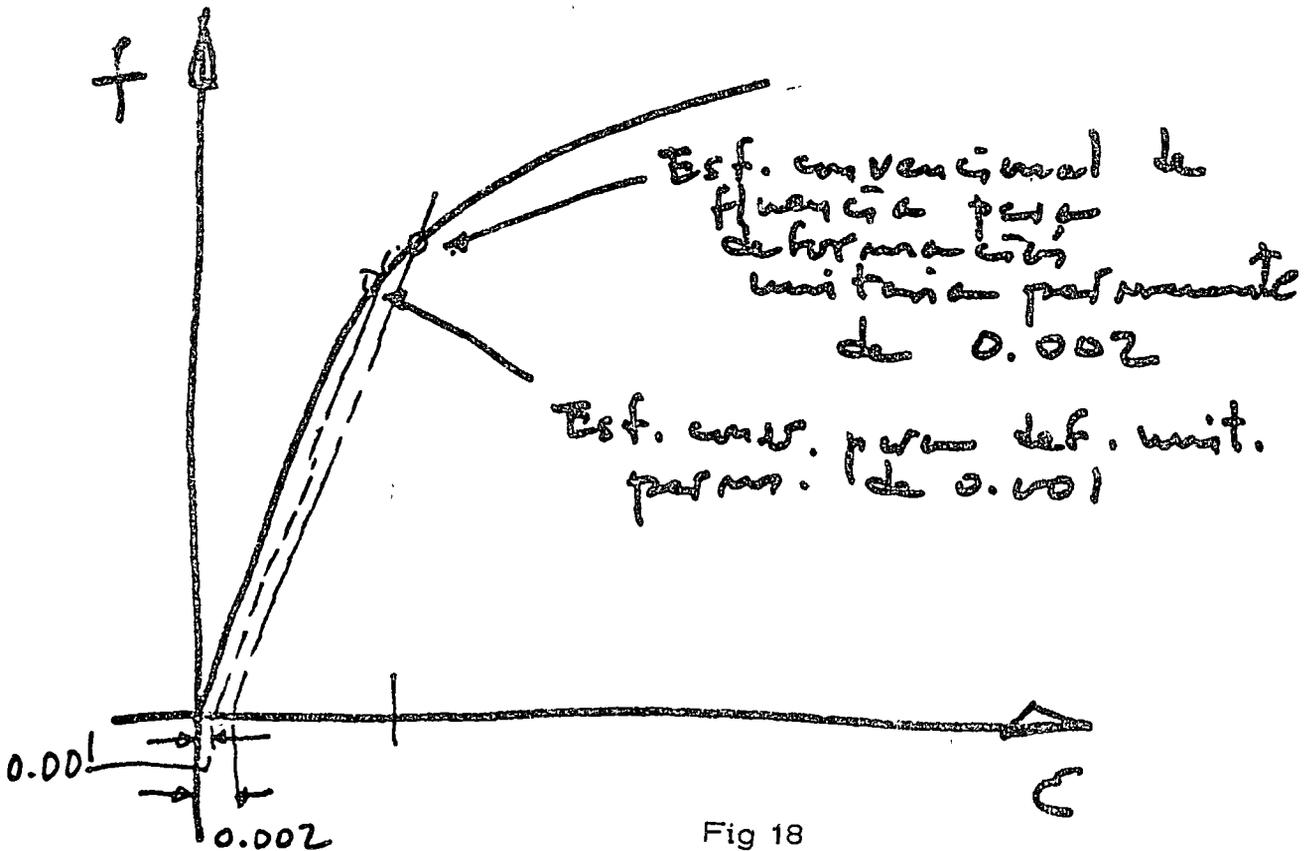
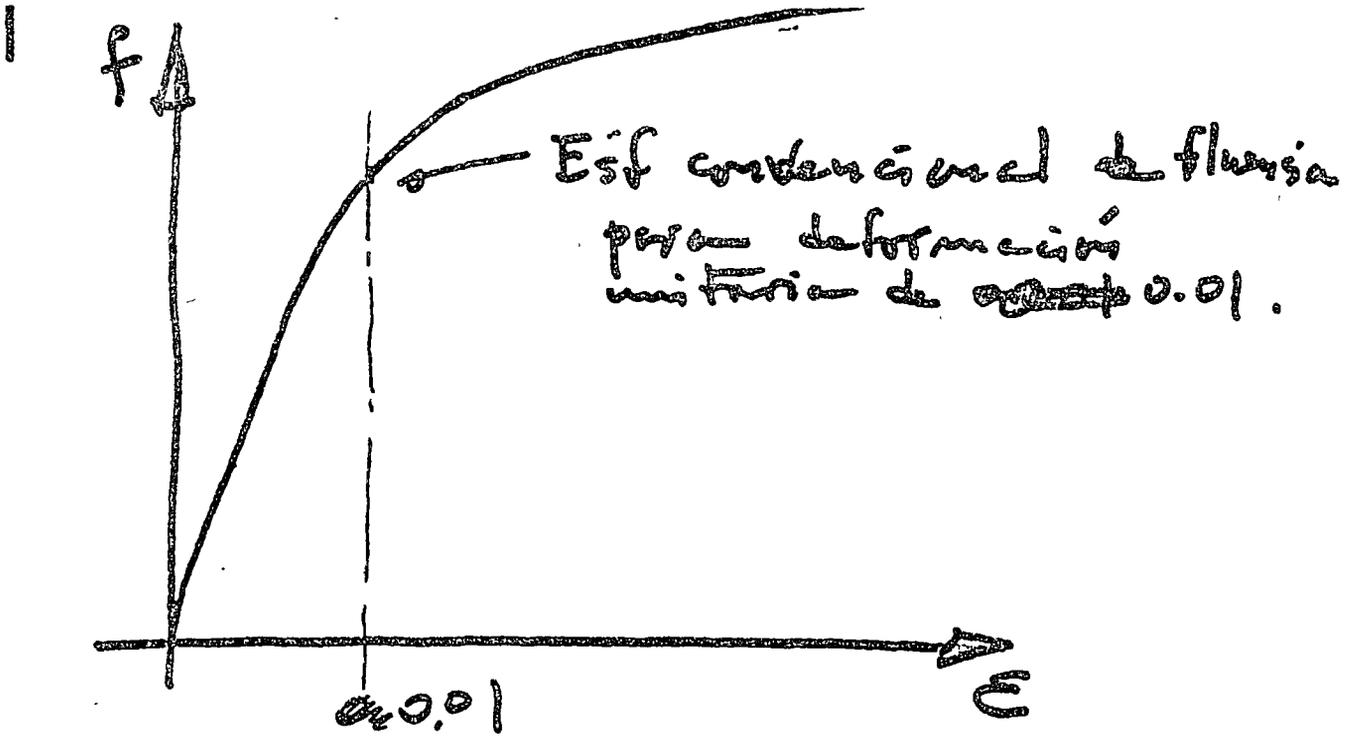


Fig 18

#### 4. PERDIDAS DE PRESFUERZO

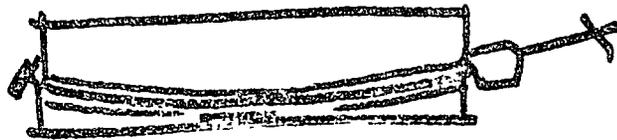
En el inciso 1.3 se señalaron las dificultades de predecir las variaciones que puede tener el presfuerzo inicialmente aplicado, al transcurrir el tiempo, como resultado de las características plásticas del acero y del concreto. Existen otros factores que contribuyen a ocasionar pérdidas de presfuerzo. En la fig 19 se presenta un resumen de las diversas causas que ocasionan pérdidas y unos valores típicos de su magnitud expresadas como porcentajes del presfuerzo inicial.

ACORTAMIENTO ELASTICO }  
 CONTRACCION } Com-  
 FLUTO PLASTICO } plets  
 RELAJACION DEL  
 ACERO

Es la pérdida de  
 esfuerzo por defor-  
 mación unitaria  
 constante

1 - 5%

ANCLAJE, ASENTAMIENTO DE  
FRICCION



VALORES APROXIMADOS

ELEMENTOS PRETENIADOS: 20%

✓ POSTENSADOS: 15%  
 + pérdidas por fricción

## 5. CONCLUSIONES FINALES

El uso del presfuerzo, en sus dos variantes de postensado y pretensado, ha extendido notablemente el campo de aplicación del concreto reforzado al mejorar el comportamiento de este en lo que se refiere tanto a agrietamiento como a deformación. Gracias al presfuerzo, se pueden salvar claros antes inconcebibles en estructuras de concreto reforzado con estructuras relativamente ligeras y esbeltas. (Se vislumbra la posibilidad de alcanzar claros de 500 m en puentes de carreteras.) En efecto, el presfuerzo ha ampliado el campo de aplicación del concreto a casos que antes eran del dominio exclusivo del acero. Por último, como ventaja adicional, puede citarse la reducción en los consumos de acero respecto a estructuras de concreto reforzado convencionales equivalentes, gracias a la alta resistencia de los aceros de presfuerzo.

## REFERENCIAS

1. E. Freyssinet, "Une révolution dans les techniques des bétons", Librairie de l'Enseignement Technique, Eyrolles, Paris, 1936.
2. Y. Guyon, "Béton précontraint", tomos I y II, Eyrolles, Paris, 1963.
3. Y. Guyon, "Constructions en béton précontraint", tomos I y II, Eyrolles, Paris, 1969.
4. T. Y. Lin, "Diseño de estructuras de concreto presforzado", traducción de la segunda edición en inglés, CECSA, México, 1969.
5. J. R. Libby, "Modern Prestressed Concrete" Van Nostrand-Reinhold, Nueva York, 1971.
6. "Propuesta Recomendaciones Internacionales CEB-FIP para el cálculo y la ejecución de obras de hormigón", CEB-FIP, Paris, Mayo, 1970.
7. "CP 110, The Structural use of concrete", British Standards Institution, Londres, 1972.

8. Instituto de Ingeniería, UNAM, "Proyecto del Reglamento de las Construcciones para el Distrito Federal", inédito.
9. "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)", American Concrete Institute, Detroit, 1971.
10. F. Leonhardt, "Prestressed Concrete Design and Construction", 2a ed., Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, 1964.
11. F. Robles y J. M. Rioboo, "Principios del concreto presforzado", Revista de Ingeniería, México, abril-junio, 1972.
12. "PCI Handbook", Prestressed Concrete Institute, Chicago, 1971.
13. N. Khachaturian y G. Gurfinkel, "Prestressed Concrete", Mc-Graw Hill Book Co., Nueva York, 1969



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

TEMA II : P E R D I D A S

DE

P R E S F U E R Z O .

PROF. ING. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA.

marzo-abril, 1978.

### 3 PERDIDAS DE PRESFUERZO

José Luis Camba

#### 3. 1.- INTRODUCCION

La tensión que se aplica inicialmente a un cable, sufre pérdidas debidas a diversas causas, de tal forma que la diferencia entre la fuerza inicial en los gatos al tensar y la fuerza efectiva puede ser importante.

Las causas que originan las pérdidas de presfuerzo son el acortamiento elástico del concreto, la fricción, el deslizamiento de anclajes, la contracción y el flujo plástico del concreto y la relajación del acero.

Las pérdidas mencionadas pueden considerarse como instantáneas las debidas al acortamiento elástico, la fricción y el deslizamiento de anclajes, ya que tienen lugar en el momento de tensar el cable. Estas dos últimas son despreciables generalmente en el caso de elementos pretensados. El resto de pérdidas se les considera a largo plazo ya que ocurren en función del tiempo, hasta llegar a estabilizarse.

Las pérdidas de presfuerzo son aleatorias debido a los factores que intervienen en él, como se vera a continuación al estudiar cada una de ellas. Sin embargo, cuando se tenga toda la información requerida, deberá hacerse con la mayor precisión posible.

En las conclusiones del presente artículo, se especifican recomendaciones respecto a las pérdidas de diversos reglamentos así como las de la propuesta de modificaciones al Reglamento del D.D.F. 1975.

Es importante señalar que la estimación de pérdidas no afecta el estado límite de falla pero sí puede influir en el comportamiento bajo los estados límite de servicio, manifestándose por ejemplo en deflexiones excesivas o en agrietamientos imprevistos, ya sea en la etapa o etapas de tensado y en servicio.

### 3.2.- PERDIDAS INSTANTANEAS

#### 3.2.1.- Acortamientos elásticos.

##### 3.2.1.1.- Miembros pretensados.

Cuando el presfuerzo se aplica a un miembro por adherencia, que es el caso del concreto pretensado, el miembro se acorta y en forma simultánea se acorta también el acero de presfuerzo, traduciéndose en una pérdida de tensión en el mismo.

Considerando el acortamiento del concreto provocado por la fuerza de presfuerzo:

$$\epsilon = \frac{f_c}{E_c} = \frac{F_o}{A_c E_c}$$

Fórmula en la cual:

$F_o$  = fuerza de presfuerzo inmediatamente después de la transferencia.

La pérdida de presfuerzo valdrá:

$$\Delta \sigma_{op} = \epsilon E_s = \frac{F_o E_s}{A_c E_c} = n \frac{F_o}{A_c}$$

El valor de  $F_o$  es incierto, debido a que es la fuerza de presfuerzo una vez producidas las pérdidas instantáneas, correspondientes al acortamiento elástico como al deslizamiento de

anclajes y la fricción.

El valor de las pérdidas por acortamiento elástico es relativamente pequeño, del orden de 2 a 3% de la fuerza inicial, por lo que puede compensarse mediante el sobretensado del acero de presfuerzo, teniendo cuidado de que no se sobrepase el esfuerzo del 80% de la resistencia última del mismo, especificada en la Propuesta DDF.

### 3.2.1.2.- Miembros postensados.

Quando el presfuerzo se aplica a un miembro tensando todos los cables simultáneamente, el acortamiento instantáneo del concreto no se traduce en pérdidas de tensión en el acero de presfuerzo, ya que la compresión del concreto se produce durante el tensado antes del anclaje de los cables.

Quando el presfuerzo se aplica en forma no simultánea, el primer cable o grupo de cables tensados sufrirá el efecto del tensado de cada una de las etapas posteriores. En cambio, el último cable o grupos de cables tensados, no sufrirán ninguna pérdida por acortamiento elástico.

El cálculo de pérdidas por acortamientos elásticos es complejo, debido a los valores del módulo de elasticidad instan-táneo del concreto entre otros problemas, lo cual conduce a considerar en la práctica el valor de la pérdida del primer cable o grupo de cables y utilizando la mitad de este valor para la pérdida en el resto de los mismos.

### 3.2.2.- Pérdida por fricción

#### 3.2.2.1.- Miembros pretensados

Quando los alambres son rectilíneos las pérdidas por fricción en elementos pretensados son despreciables. En el caso de

alambre de presfuerzo con trazos rectos quebrados mediante dispositivos, la fricción puede ser importante y su cálculo depende del tipo de dispositivo empleado, determinándose su valor por métodos experimentales.

### 3.2.2.2.- Miembros postensados

Durante el procedimiento de tensado, los cables ejercen una presión contra la generatriz cóncava del ducto en las partes curvas, originándose fricciones entre los cables y el ducto, que se traducen en pérdidas de presfuerzo de magnitud variable a lo largo del cable, partiendo de un valor nulo en el anclaje.

Las causas mas importantes que originan las pérdidas de presfuerzo por fricción, son las curvaturas impuestas a los cables al hacer el trazo de los mismos y las pequeñas desviaciones accidentales debidas a la deformación del cable por su peso propio y por los desplazamientos del mismo durante el colado.

Para determinar la expresión para el cálculo de pérdidas por fricción, el procedimiento es semejante al empleado en las pérdidas por fricción en poleas que se estudia en los cursos de Mecánica.

Considerando una parte curva de un cable de presfuerzo (fig. 1), siendo  $\mu$  el coeficiente de fricción entre el cable y el ducto, de radio  $R$  y de abertura angular  $d\alpha$ , el cable ejerce sobre el ducto una fuerza centrípeta, de valor  $\frac{T}{R}$  y una reacción debida al frotamiento cuyo valor es:  $\mu \frac{T}{R}$

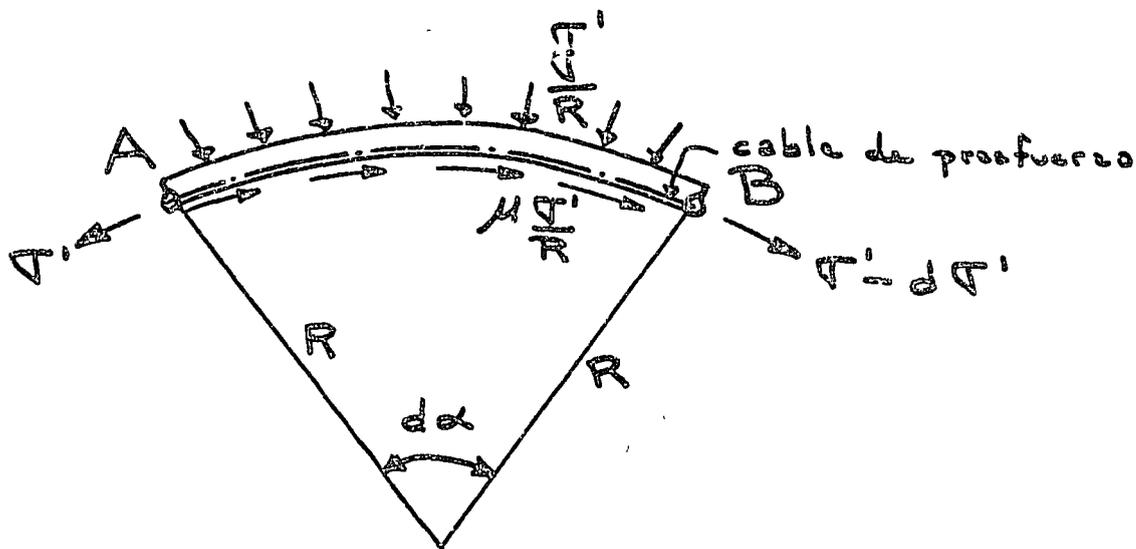


FIG. 1

Las pérdidas del punto A al B cuya longitud es  $R d\alpha$ , serán:

$$d\sigma_1 = \mu \frac{\sigma_1}{R} \cdot R d\alpha = \mu \sigma_1 d\alpha$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\sigma_1(\alpha) = \sigma_0 e^{-\mu\alpha}$$

en la cual

$\sigma_1(\alpha)$  = la tensión en una sección dada con una desviación angular  $\alpha$

$\sigma_0$  = la tensión en el extremo donde se aplica el gato.

Las pérdidas de presfuerzo debidas a las pequeñas desviaciones accidentales mencionadas, se consideran uniformemente repartidas en toda la longitud del cable, con un coeficiente llamado K.

El valor de la tensión final en el cable, sumando las pérdidas por curvatura y las accidentales, en una sección a X distancia del extremo de aplicación de la fuerza de presfuerzo - será:

$$\sigma_1 = \sigma_0 e^{-(\mu\alpha + Kx)}$$

Para valores pequeños del exponente, menores que 0.3, puede emplearse la expresión:

$$\sigma_i = \sigma_0 (1 - \mu \alpha - k x)$$

En ambas expresiones, el valor de  $\alpha$  es el cambio angular total en el trazo del cable, en radianes, a partir del extremo donde se aplica el gato hasta la sección considerada a una distancia  $X$  (fig. 2).

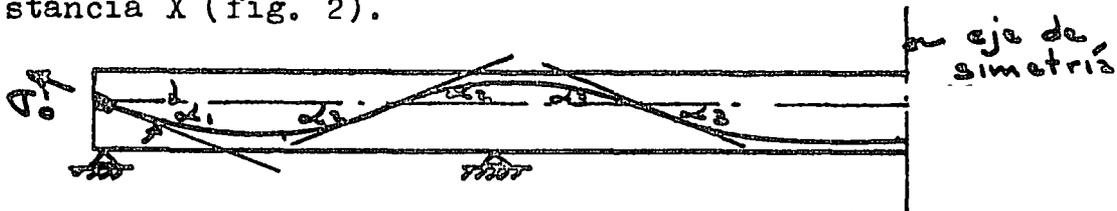


FIG. 2  $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$

Los valores de los coeficientes  $\mu$  y  $k$ , varían considerablemente de acuerdo con las características de los cables y de los ductos. Si no existen datos al respecto, se pueden tomar los valores siguientes:

$$\mu = 0.23 / \text{rad} \quad k = 0.003 / \text{m}$$

Es importante señalar que cuando los cables tienen desviaciones en planta, es decir según un plano vertical, habrá que tomar en cuenta en el cálculo de  $\alpha$ , la suma de las desviaciones angulares en ambos planos.

### 3. 2.3.- Pérdidas por deslizamiento del anclaje.

La pérdida de presfuerzo se efectúa cuando la fuerza de tensión del acero de presfuerzo ejercida por el gato se transmite directamente al concreto por medio del anclaje; la pérdida interviene en el momento en que una vez realizado el anclaje del acero de presfuerzo, se suprime la tensión ejercida por el gato.

La deformación del anclaje debida a la fuerza aplicada es del orden de 1 mm. y en general es despreciable; sin embargo el deslizamiento del anclaje puede ser mucho mas importante que el valor mencionado, según el tipo de anclaje, siendo la magnitud del desplazamiento del orden de 5 a 12 mm. También depende del diámetro del acero de presfuerzo.

En general, la pérdida por anclaje no afecta toda la longitud del acero de presfuerzo, debido a que el movimiento del cable en el interior se contraresta por la fricción del mismo sobre el ducto. Por lo tanto, la influencia del corrimiento del anclaje, se traducirá en una pérdida de presfuerzo máxima en ese punto, a un valor nulo situado a una distancia  $X$  del anclaje.

En la longitud  $X$  mencionada (fig. 3), se admite que los diagramas de tensiones, antes y después del corrimiento o deslizamiento del anclaje, son rectilíneos y simétricos con relación a la horizontal, cuya ordenada es  $\sigma_x$

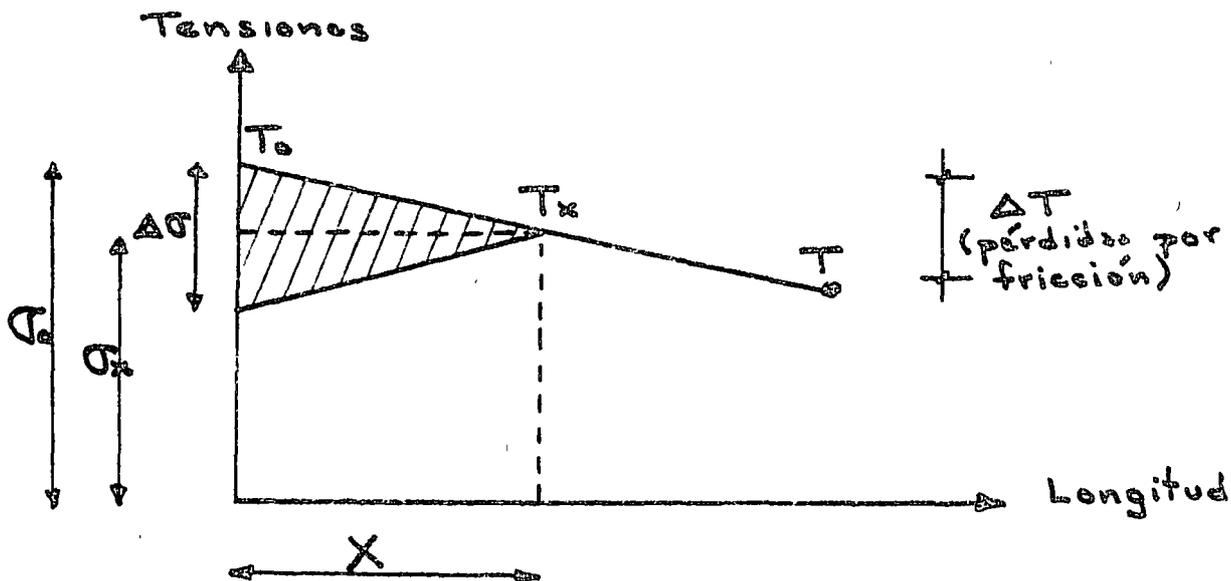


FIG. 3

Si  $\Delta\sigma$  es la pérdida debido a un corrimiento  $\Delta l$  del anclaje:

$$d\Delta l = \frac{\Delta\sigma}{E_s} dx$$

$$\Delta l = \frac{1}{E_s} \int \Delta\sigma dx$$

La integral representa el área del triángulo asciurado comprendido entre los diagramas de tensiones antes y después del anclaje del cable.

El valor de  $\Delta l$  es conocido y depende del tipo de anclaje, por lo tanto se puede calcular el valor de X, que es la distancia medida a partir del anclaje hasta el punto en el cual se deja sentir el valor de la pérdida por corrimiento del mismo; por triángulos semejantes y haciendo algunas transformaciones algebraicas:

$$X = \sqrt{\frac{\Delta l E_s}{\sigma_0 (\mu \frac{L}{2} + K)}} ; \quad \begin{array}{l} L \text{ y } \Delta l \text{ en metros} \\ X \text{ en metros} \end{array}$$

Es importante calcular el valor de X para traveses libremente apoyadas, debido a que si  $X > \frac{L}{2}$ , el cable deberá ser tensado por un solo lado, ya que de esta manera se obtendrán tensiones mayores en el centro del claro que si se tensara en ambos lados.

En el caso del pretensado, el tensado se realiza generalmente en bancos de grandes longitudes por lo que la influencia del corrimiento del anclaje es prácticamente despreciable.

### 3.3.- PERDIDAS A LARGO PLAZO

Como se comentó en la introducción, existen pérdidas en el presfuerzo, que están en función del tiempo. La tensión inicial en el cable se verá disminuída en primer lugar por las pérdidas instantáneas comentadas en el inciso anterior y por las pérdidas a largo plazo que son la contracción y el flujo plástico de concreto, así como la relajación del acero, que a continuación se describen brevemente.

#### 3.3.1.- Pérdidas por contracción del concreto.

La causa principal de la contracción del concreto es la pérdida de agua durante el proceso de endurecimiento y en grado mucho menor las debidas a reacciones químicas en el proceso mencionado. La parte mas importante de la contracción se realiza en los primeros días de vida del concreto y tiende a desaparecer con el tiempo. Debido a lo anterior, las pérdidas de presfuerzo por contracción son menores en miembros postensados, ya que el presfuerzo se aplica algún tiempo después de colado el concreto.

Cuando el cable está adherido al concreto en sus extremidades mediante los anclajes y en toda su longitud por la inyección de lechada en el ducto que garantiza la adherencia, las deformaciones unitarias de éste y del concreto en sus puntos de contacto son las mismas. Los valores de las deformaciones unitarias por contracción del concreto dependen de las condiciones del medio ambiente y la dosificación. Generalmente el valor de dichas deformaciones unitarias varía de  $1 \times 10^{-4}$  a  $3 \times 10^{-4}$ .

Tomando un valor de  $2.5 \times 10^{-4}$ , la pérdida de presfuerzo será:

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_1 &= \frac{\Delta L}{L} \epsilon_s = 2.5 \times 10^{-4} \times 20,000 \\ &= 5 \text{ Kg/mm}^2\end{aligned}$$

### 3.3.2.- Pérdidas por flujo plástico del concreto.

Esta pérdida se debe a la deformación progresiva del concreto bajo la acción de cargas permanentes. La magnitud de las deformaciones plásticas depende principalmente de la edad del concreto al ser aplicada la carga, de la duración de la misma y de la magnitud del esfuerzo. Las deformaciones por flujo plástico pueden ser de 0.5 a 4 veces la deformación elástica correspondiente a la carga permanente.

Llamando  $\sigma_c$  el valor de la compresión del concreto en el nivel del cable, de la sección considerada, el acortamiento en el concreto valdrá:

$$\epsilon_c = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma_c}{E_c} ; \quad \sigma_c = \text{compresión del concreto en el estado límite de servicio}$$

y la pérdida de presfuerzo en el acero:

$$\Delta \sigma_s' = \frac{\sigma_c}{E_c} E_s = n \sigma_c$$

Para determinar el valor de  $n$ , se puede tomar como módulo de elasticidad del concreto:

$$E_c = 10,000 \sqrt{f'_c}$$

El valor anterior  $E_c$ , equivale a considerar la pérdida de tensión por flujo plástico en servicio, debido a que en general, el presfuerzo se aplica antes de que el concreto alcance su valor nominal de  $f'_c$ .

### 3.3.3.- Pérdida por relajación del acero.

Cuando se tensa un cable con esfuerzo constante, se alarga progresivamente y fluye. Si un cable tensado se mantiene con longitud constante, su tensión disminuye progresivamente y se relaja.

La pérdida real por relajación es inferior a la realizada en los cálculos ya que la situación real de los cables es intermedia a las dos mencionadas.

El valor de la pérdida de presfuerzo depende principalmende de la tensión inicial y del tipo de acero. Las pérdidas por relajación ocurren aproximadamente la mitad de ellas en 5 días y tienden a estabilizarse al cabo de un mes. Las pérdidas por relajación son del orden del 5% de la tensión inicial.

A mayor tensión inicial en el cable mayor será la pérdida por relajación.

Cuando la tensión es del orden del 60% de la ruptura garantizada del acero, la pérdida por relajación es prácticamente despreciable.

Para calcular las pérdidas por relajación, ciertos reglamentos, como el francés de 1973, emplean las siguientes expresiones debiéndose tomar la mayor de ellas:

$$\frac{2.4 e_{1000}}{100} \cdot \frac{\sigma_0(x) - 0.55 f_{sr}}{0.25 f_{sr}} \sigma_0(x)$$

$$\frac{e_{3000} + 2.5}{100} \cdot \frac{\sigma_0(x) - 0.55 f_{sr}}{0.25 f_{sr}} \sigma_0(x)$$

$e = 0.10$

en las cuales

$\sigma_0(X)$  = tensión inicial en la abscisa X .

$f_{sr}$  = esfuerzo de ruptura garantizada

$e_{1000}$  y  $e_{3000}$  = los valores en porcentaje de la relajación a 1000 y 3000 horas.

CONCLUSIONES.-

1) El cálculo de las pérdidas de presfuerzo, como pudo apreciarse en los incisos anteriores se debe tomar como aleatorio dentro de ciertos límites. Las Recomendaciones europeas - CEB-FIP, así como el reglamento Francés, estiman que la probabilidad de alcanzar el valor "exacto" de las pérdidas es del 80%, de esta manera, toman en cuenta dos valores de presfuerzo máximo y mínimo que deberán aplicarse a las condiciones mas desfavorables:

$$P_1 = 1.02 P_0 - 0.8 \Delta \sigma_s; \text{ valor máximo}$$

$$P_2 = 0.98 P_0 - 1.2 \Delta \sigma_s; \text{ valor mínimo}$$

en las cuales:

$P_0$  = tensión nominal inicial en el cable

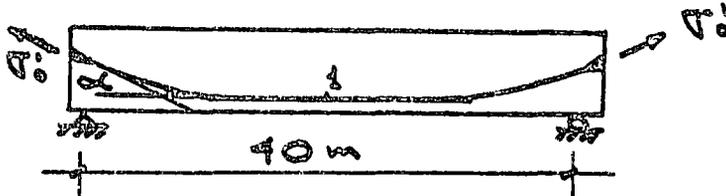
$\Delta \sigma_s$  = pérdidas de presfuerzo.

2) La Propuesta de modificaciones al Reglamento de Departamento del Distrito Federal, dice que se calcule cada pérdida si se cuenta con la información necesaria y en caso contrario, se supondrá que en elementos pretensados la suma de pérdidas es de 20% del presfuerzo inicial y en elementos postensados de 15%, sin incluir las pérdidas por fricción.

3) El cálculo de las pérdidas de fricción en elementos postensados deberá hacerse con la mayor precisión posible, ya que en base a los valores obtenidos, se hará el cálculo de los alargamientos en los cables, que permiten controlar el valor del presfuerzo aplicado en un elemento postensado.

EJEMPLO No. 1.- Calcular las pérdidas instantáneas y diferidas en una trabe postensada libremente apoyada.

DATOS



$$f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma'_o = 135 \text{ Kg/mm}^2$$

$$f_{sr} = 168 \text{ Kg/mm}^2$$

SOLUCION

a) Pérdidas por fricción

$$\alpha = 12^\circ$$

$$= 0.209 \text{ rad.}$$

esf. de comp. del concreto al nivel del cable en l,  $\sigma_c = 100 \text{ Kg/cm}^2$

$$\mu = 0.23/\text{rad}$$

$$k = 0.003/\text{m}$$

$$\sigma'_l = \sigma'_o e^{-(\mu\alpha + kx)}$$

$$= 135 e^{-(0.23 \frac{\pi}{180} \times 12 + 0.003 \times 20)} = 135 e^{-0.108}$$

$$= 120 \text{ Kg/mm}^2$$

NOTA.- Si se hubiese aplicado la fórmula:

$$\sigma'_l = \sigma'_o (1 - \mu\alpha - kx)$$

$$= 135 (0.892) = 120.4 \text{ Kg/mm}^2$$

prácticamente el mismo resultado.

La pérdida por fricción valdrá:

$$135 - 120.8 = 14.2 \text{ Kg/mm}^2$$

b) Pérdida por deslizamiento del anclaje.

$$\Delta l = 7 \text{ mm}$$

$$X = \sqrt{\frac{\Delta l E_s}{\sigma'_o (\mu \frac{\pi}{180} + k)}} = \sqrt{\frac{7 \times 10^{-3} \times 200000}{135 (0.23 \times 0.0174 + 0.003)}}$$

$$= 13.8 \text{ m} < 20 \text{ m}$$

Por lo tanto, la pérdida por anclaje no afecta la tensión al centro del claro.

c) Pérdidas por contracción del concreto

$$\Delta \sigma'_1 = \frac{\Delta L}{L} \approx \epsilon_s = 0.00025 \times 20,000 = 5 \text{ Kg/mm}^2$$

d) Pérdidas por flujo plástico del concreto

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2,000,000}{10000 \sqrt{250}} = 10.6$$

$$\Delta \sigma'_1 = n \sigma_c = 10.6 \times 1 = 10.6 \text{ Kg/mm}^2$$

e) Pérdidas por relajación del acero

$$\Delta \sigma'_1 = 0.05 \sigma'_0 = 0.05 \times 135 = 6.7 \text{ Kg/mm}^2$$

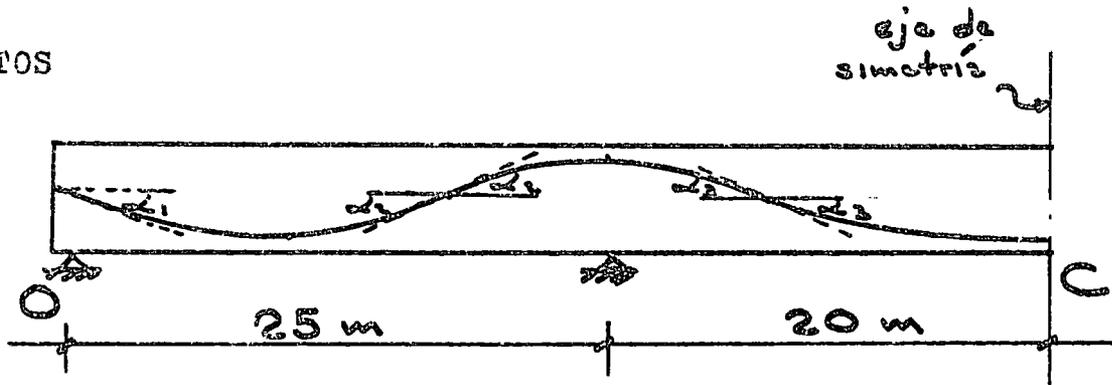
f) Resumen de pérdidas

fricción	14.2
contracción	5.0
flujo plástico	10.6
relajación	<u>6.7</u>
	36.5 Kg/mm <sup>2</sup>

es decir 27% de la tensión inicial y 17% de la tensión inicial sin considerar fricción.

EJEMPLO No.2.- Calcular las pérdidas por fricción en una trabe presforzada continua, entre los puntos O y C.

DATOS



$$\begin{aligned}\sigma_o &= 135 \text{ Kg/mm}^2 \\ f_{sr} &= 168 \text{ Kg/mm}^2 \\ \mu &= 0.23 \text{ rad/m} \\ K &= 0.003/\text{m}\end{aligned}$$

SOLUCION

$$\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 6 + 16 + 14 = 36^\circ$$

$$\sigma_c = \sigma_o e^{-(0.23 \cdot \frac{\pi}{180} \times 36 + 0.003 \times 45)}$$

$$= 102.6 \text{ Kg/mm}^2$$

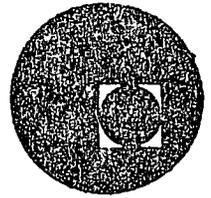
lo cual representa una pérdida importante de presfuerzo, 24% de la tensión aplicada en el anclaje.

BIBLIOGRAFIA

- 3.1.- J.Fauchart, "Beton Précontraint"  
Curso en el CHEBAP., Paris 1969. . .
- 3.2.- T.Y.Lin, "Diseño de Estructuras de Concreto  
Presforzado" C.E.C.S.A. México 1969.
- 3.3.- P.C.I. journal, revista Prestressed Concrete Institut  
te, Chicago, julio - agosto 1975.
- 3.4.- Reglamente Francés de Concreto Presforzado" Circulaire  
re No. 73 - 153 du 13 aout 1973", du Ministere de  
l' Equipement.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

TEMA: ESTADO LIMITE DE FALLA

ING. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA

MARZO-ABRIL, 1978.

## 4.2 ESTADO LIMITE DE FALLA DE TRABES PRESFORZADAS

### 4.2.1. INTRODUCCION:

Las presentes notas sobre el estado límite de falla de trabes presforzadas, están enfocadas con base en el Reglamento del Distrito Federal vigente que en las presentes notas se llamará Reglamento DDF 76.

Se definirá como estado límite de falla de un elemento a flexión aquel en el cual se agota la capacidad del mismo.

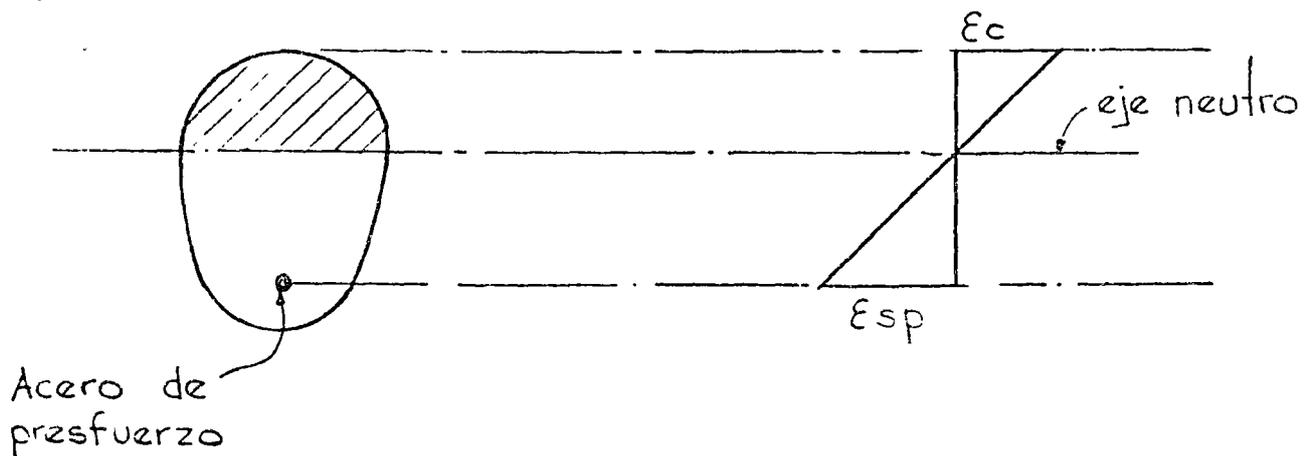
La resistencia será la intensidad de una acción o combinación de acciones que provocan el estado límite de falla.

En trabes de concreto presforzado, cuando aparece el --  
grietamiento debido a las cargas, el comportamiento de las --  
mismas es semejante al de trabes de concreto reforzado, for-  
mándose un par resistente debido a la fuerza de tensión del --  
acero y a la fuerza de compresión del concreto.

#### 4.2.2. HIPOTESIS GENERALES

1) Conservación plana de las secciones, es decir que la deformación unitaria en un punto de la sección transversal es proporcional a su distancia al eje neutro (fig. 1).

La validez de esta hipótesis ha sido verificada mediante ensayos de laboratorio y prácticamente se cumple salvo en la rama descendente de la curva carga - deflexión.



Conservación plana de las secciones

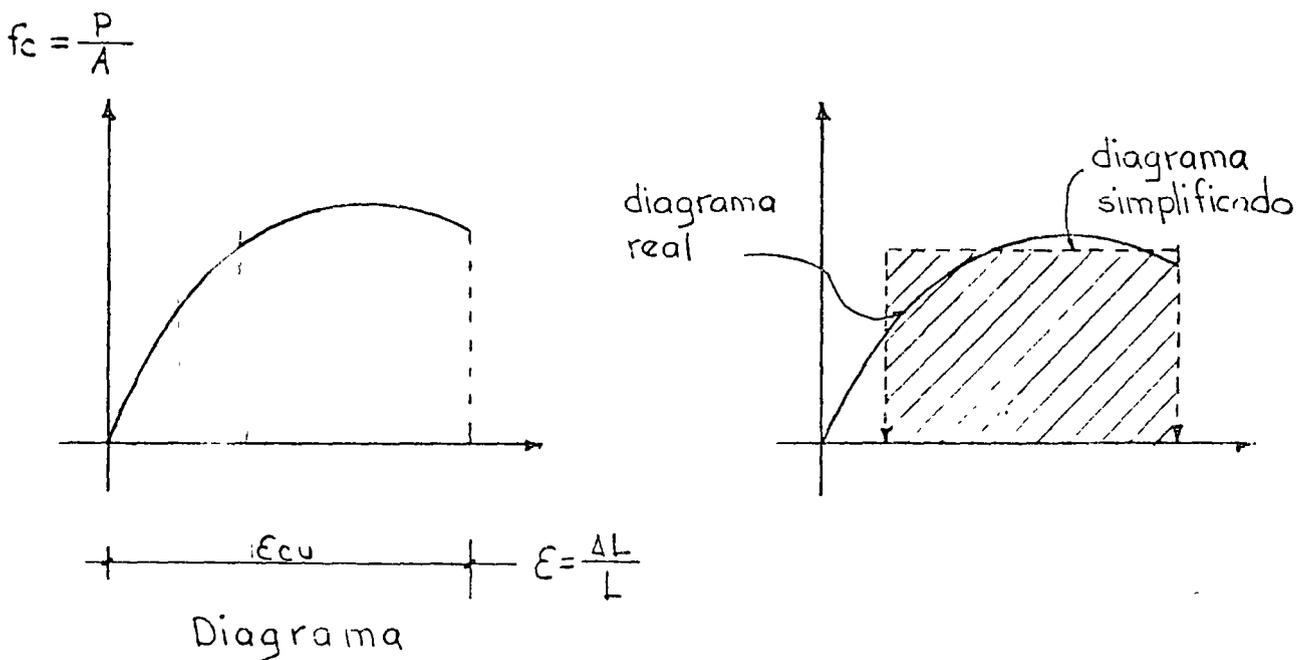
2) Se conoce el diagrama esfuerzo - deformación del concreto to.

En el diagrama típico en compresión axial del concreto (fig. 2a), éste alcanza su resistencia a un cierto valor de su deformación unitaria máxima útil,  $\epsilon_{cu}$ . Este valor varía de 0.003 a 0.004, de acuerdo con los distintos reglamentos.

La forma del diagrama de esfuerzos de compresión de una trabe en flexión es semejante a la curva esfuerzo - deformación en compresión axial (fig. 2b).

Con el fin de desarrollar métodos sencillos de cálculo, los reglamentos de construcción hacen uso de hipótesis simplificadoras para fijar el valor de  $\epsilon_{cu}$  y de diagramas idealizados de los esfuerzos de compresión en tal forma que se asemejen a las que corresponderían a la distribución real. (fig. 2b).

Mas adelante se verán las hipótesis del Reglamento DDF 76.



2a - Curva esfuerzo deformación en compresión axial.

2b. - Diagrama simplificado de esfuerzos de compresión en una sección bajo flexión

3) Se desprecia la resistencia del concreto en tensión, lo cual no influye considerablemente en la resistencia del elemento.

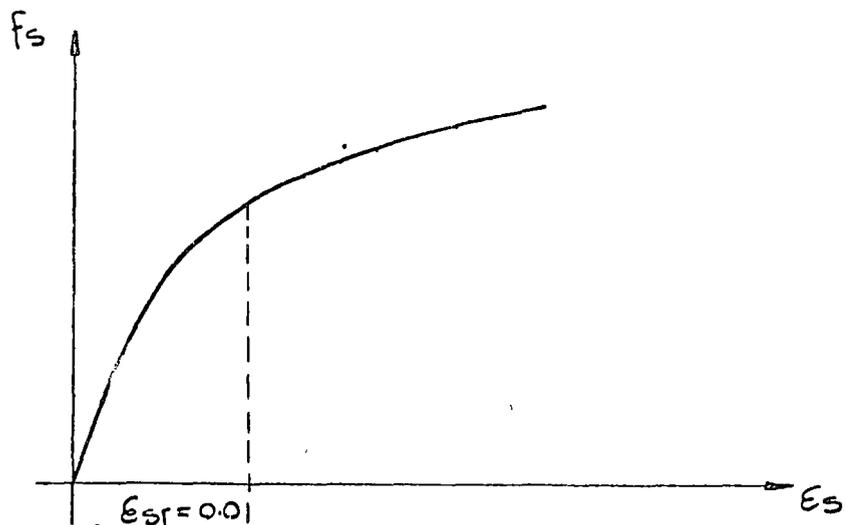
4) Se conoce el diagrama esfuerzo - deformación del acero.

El acero de presfuerzo, tiene resistencia varias veces mayores que los aceros ordinarios utilizados en concreto reforzado.

La gráfica típica de esfuerzo - deformación en tensión axial del acero de presfuerzo (fig. 3), no tiene punto de fluencia definido.

Existen varios criterios para determinar la carga teórica de fluencia. Por ejemplo, la ASTM, considera como carga teórica de fluencia, la correspondiente a una deformación unitaria de 1%, valor que se utilizará en las presentes notas, debido a que el Reglamento DDF 76 no especifica el valor que debe tomarse, para aceros de presfuerzo.

Se llamará  $f_{sr}$  el esfuerzo de ruptura del acero de presfuerzo.

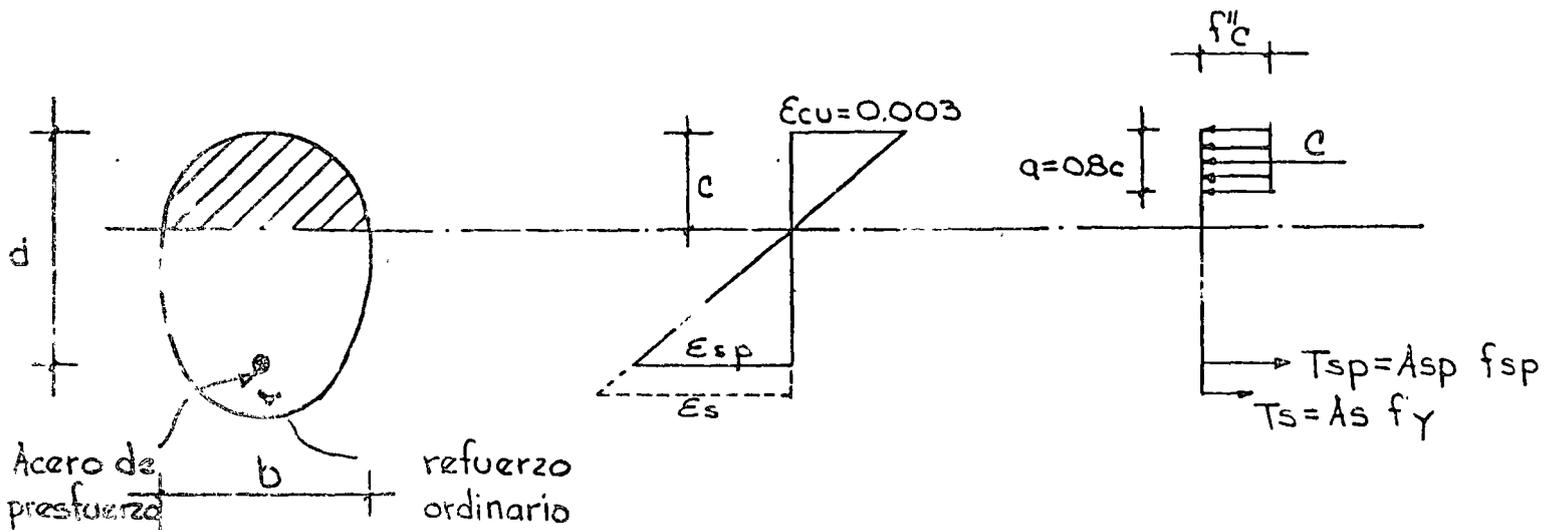


Curva típica esfuerzo-deformación del acero de presfuerzo.

#### 4.2.3. HIPOTESIS DEL REGLAMENTO DEL DEPARTAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL.

El Reglamento DDF.76 recomienda, un diagrama rectangular de esfuerzos de compresión en el concreto y utiliza las resistencias reducidas del concreto  $f_c$  en lugar de las resistencia nominal  $f'_c$  tomando así en cuenta las variaciones debidas al control de calidad y el tipo de carga.

La figura 4 muestra las características sobre la distribución de deformaciones y esfuerzos del Reglamento DDF 76.



Hipótesis del Reglamento del DDF 76

FIGURA 4

La deformación unitaria del concreto en compresión cuando se alcanza la resistencia de la sección es  $\epsilon_{cu} = 0.003$ .

a) Resistencias reducidas

El valor de la resistencia reducida en el concreto,  $f''_c$ , será:

$$f''_c = 0.8 f'_c$$

Para calcular el ancho del bloque de esfuerzos,  $f''_c$ , se usará la expresión:

$$f''_c = \left( 1.05 - \frac{f'_c}{1250} \right) f'_c \leq 0.8 f'_c.$$

El cambio de  $f'_c$  a  $f''_c$  para el diseño se debe a la transformación del diagrama de la curva real de esfuerzos de compresión del concreto al diagrama rectangular equivalente.

Las resistencias del acero de presfuerzo y del acero de refuerzo serán:

$f_{sp}$  = esfuerzo en el acero de presfuerzo cuando se alcanza la resistencia.

$f_y$  = esfuerzo nominal de fluencia del acero ordinario.

b) Factores de reducción de resistencia.

De acuerdo con el título del Reglamento DDF 76, en la revisión de los estados límite de falla, las resistencias estarán afectadas por un factor de reducción  $F_R$ , que valdrá 0.9 - en flexión.

c) Factores de carga.

El factor de carga,  $F_c$ , por el que deberán multiplicarse las acciones nominales, para combinaciones que incluyan exclusivamente acciones permanentes y variables, se tomará:

$$F_c = 1.4.$$

correspondiente al momento resistente de la sección sea igual, o menor que el 75% de la que correspondería a la falla balanceada.

Es interesante subrayar que existen criterios diferentes en otros reglamentos, por ejemplo las Recomendaciones europeas

CBS - FIP, no limitan la cantidad de acero de presfuerzo, lo cual implica aceptar la posibilidad de presentarse una falla frágil.

La falla balanceada se define como la que ocurre simultáneamente al alcanzar el concreto su máxima deformación  $\epsilon_{ca} = 0.003$  en compresión y el acero de presfuerzo llega a su esfuerzo convencional de fluencia  $f_{yp}^{**}$ . Para determinar las condiciones de falla balanceada deberá tomarse en cuenta la deformación inicial,  $\epsilon_{si}$ , del presfuerzo al tensar (fig. 5). En las presentes notas se tomará como valor de  $\epsilon_{si} = 0.005$ .

#### 4.2.4. PORCENTAJES COMUNES DE ACERO TRABES PRESFORZADAS.

Para tener una idea respecto a las cantidades de acero de presfuerzo que tienen las trabes presforzadas, el porcentaje varía entre 0.3 y 0.8%. En general, porcentajes mayores del 1% corresponden a trabes sobrerreforzadas, es decir que de presentarse la falla, sería por anclamiento del concreto.

El comportamiento de un elemento depende de la relación entre su capacidad en tensión y su capacidad en compresión. Esta relación puede medirse por medio del parámetro  $\alpha^{**} = p \frac{f_{yp}}{f_c^{**}}$  al cual se le llama índice de refuerzo.

En la fórmula anterior

$$p = \text{porcentaje de acero de presfuerzo} = \frac{A_p}{b d}$$

$f_{yp}$  = esfuerzo nominal de fluencia del acero de presfuerzo

$f_c^{**}$  = resistencia reducida del concreto en compresión axial

$d$  = peralte efectivo

$b$  = ancho de la sección

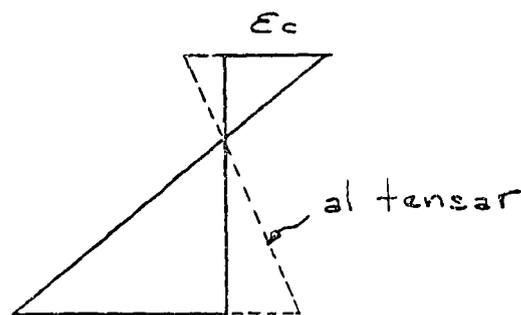


Diagrama de deformaciones

FIGURA 5

De acuerdo con lo anterior, se puede definir como elementos subreforzados y sobrerreforzados aquellos que tienen valores bajos y altos de  $\rho^*$  respectivamente.

Las secciones rectangulares de trabes presforzadas que tengan los índices de resistencia que se indican a continuación, serán subreforzadas, es decir la falla ocurrirá con grandes deformaciones, siendo falla dúctil:

Refuerzo presforzado

únicamente:

$$\rho^* = \rho \frac{f_{yp}}{f_c^*} \leq 0.3$$

Refuerzo presforzado

y refuerzo normal:

$$\rho^* + \rho - \rho' \leq 0.3$$

en las cuales:

$$\rho = \frac{A_s f_y}{b d f_c^*} \quad , \quad \rho' = \frac{A's f_y}{b d f_c^*}$$

siendo  $A_s$  y  $A's$ , las áreas de refuerzo no presforzado en tensión y compresión respectivamente y  $d$  el peralte efectivo.

#### 4.2.5. CALCULO DE LOS MOMENTOS RESISTENTES

A partir de las hipótesis del Reglamento DDF 76 y de las condiciones de equilibrio, se determinarán los momentos resistentes de miembros en flexión.

a) Secciones rectangulares sin acero en compresión.

Se considera en primer lugar que no se hace intervenir el refuerzo ordinario de tensión.

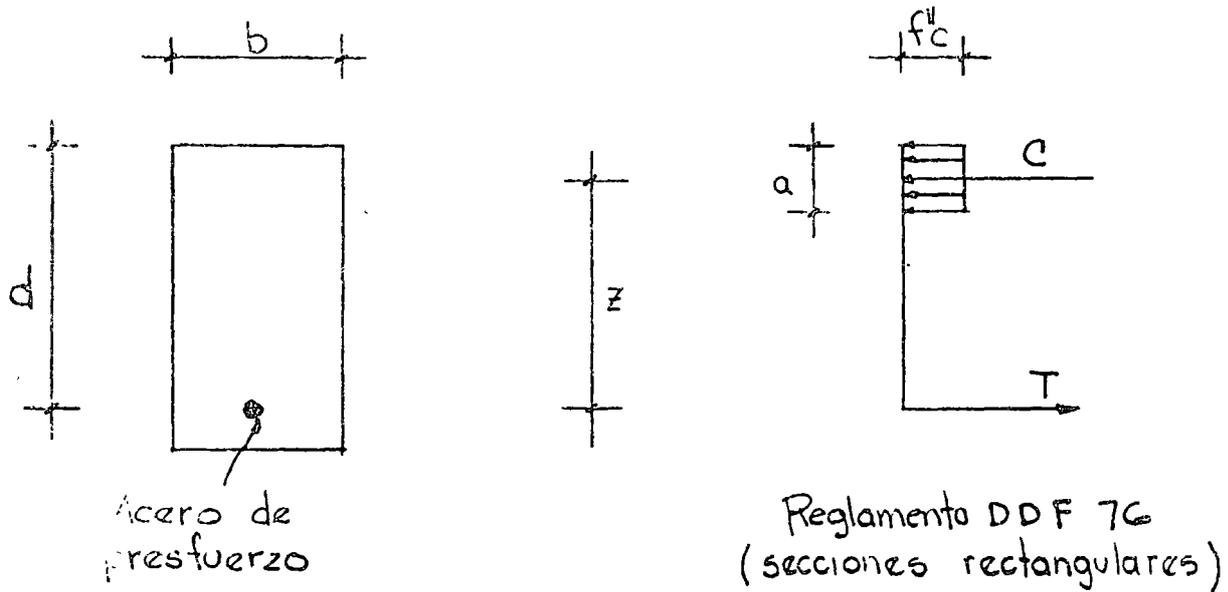


FIGURA 6

$$C = f''c \times b \times a$$

$$T = A_p f_{yp}$$

Estableciéndose el equilibrio de fuerzas:

$$C = T$$

$$f''c \times b \times a = A_p f_{yp} \quad (1)$$

De la ecuación (1) se obtiene el valor de a.

El momento resistente valdrá:

$$M_u = A_p f_{yp} \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (2')$$

y aplicando el factor de reducción,  $F_R = 0.9$  del DDF 76.

$$M_u = 0.9 A_p f_{yp} \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (2'')$$

Si en esta última ecuación, se substituye "a" por su valor obtenido en la ecuación (1) y el índice de resistencia  $q = p \frac{f_{sp}}{f''c}$ , se obtiene el valor del momento resistente en la forma:

$$M_u = 0.9 b d^2 f''c q (1 - 0.5 q)$$

Si en el cálculo de la resistencia de una sección de trabe presforzada se hace intervenir el acero ordinario, habrá, que agregar el término  $A_s f_y$  en el segundo término de la ecuación (1) y consecuentemente en el momento resistente. El ejemplo 1, muestra la introducción del acero ordinario en la resistencia de la sección.

En forma análoga se procederá a agregar el término  $A'_s f_y$  en el primer miembro de la ecuación (1) si se hace intervenir en el cálculo del momento resistente el acero ordinario en - compresión.

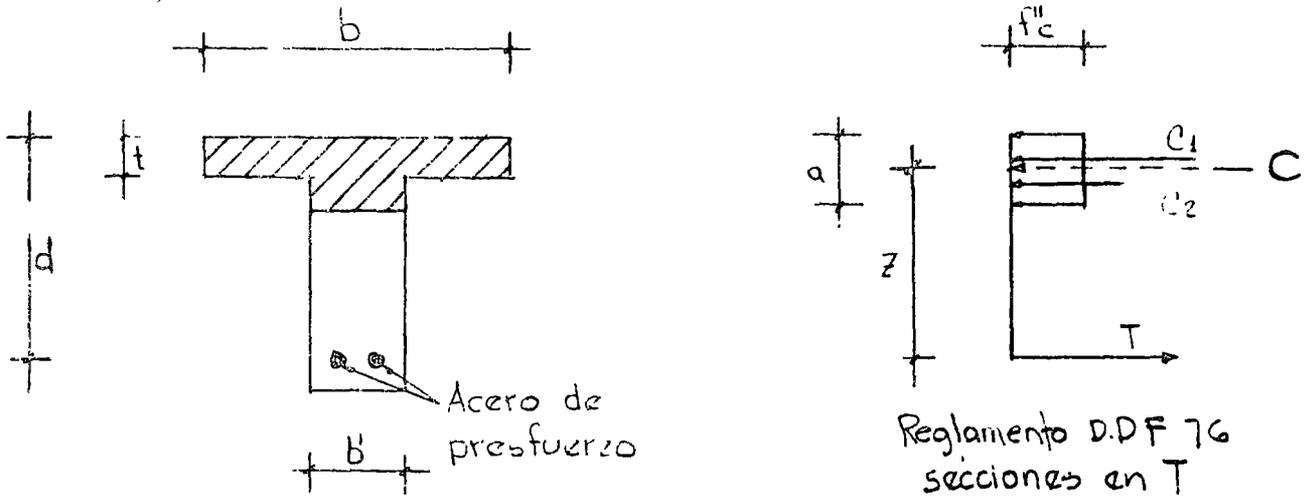


FIGURA 7

b) Secciones en T

El ancho del patín que se considera trabajando a compresión en secciones T, a cada lado del alma, será la menor de:

el octavo del claro

la mitad de centro de nervaduras

8 veces el espesor de la losa

estableciendo el equilibrio:

$$C = f_c'' \times b \times t + f_c'' b' (a - t)$$

$$T = A_s \sigma_s$$

El momento resistente valdrá:

$$M_u = T z = R C z$$

Si se hace intervenir en la resistencia el acero ordinario, se procederá como se indicó en las secciones rectangulares

Ejemplo 1.- Dimensionar una trabe presforzada de sección rectangular que resista un momento último de 35 tm.

Características de los materiales

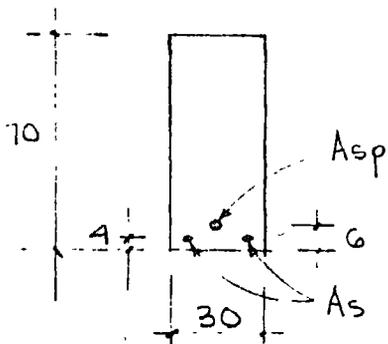
$$\begin{aligned}f'c &= 350 \text{ Kg/cm}^2 \\f_{sp} &= 13,000 \text{ Kg/cm}^2 \\f_y &= 4,000 \text{ Kg/cm}^2\end{aligned}$$

Cálculo de las resistencias reducidas

$$\begin{aligned}f^*c &= 0.8 f'c = 280 \text{ Kg/cm}^2 \\f''c &= \left(1.05 - \frac{280}{1250}\right) 280 \leq 0.8 f'c \\&= 231 \text{ Kg/cm}^2 > 224 \text{ Kg/cm}^2\end{aligned}$$

Se tomó  $f''c = 224$

Solución

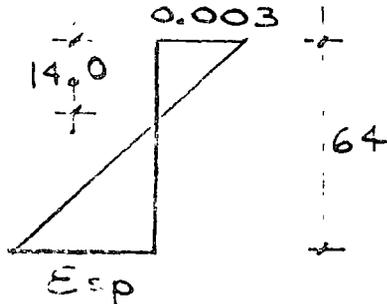


$$\begin{aligned}A_{sp} &= 4.6 \text{ cm}^2 \text{ (1 cable } 12\phi 7) \\A_s &= 4 \text{ cm}^2 \text{ (2 varillas } \# 5)\end{aligned}$$

Por equilibrio de fuerzas y suponiendo la fluencia del acero de presfuerzo.

$$\begin{aligned}C &= 224 \times 30 \times a \\T &= 4.6 \times 13,000 + 4 \times 4,000 = 74200 \text{ Kg} \\C &= T \\a &= \frac{75800}{224} = 11.2 \text{ cm}\end{aligned}$$

Verificando el tipo de falla:



$$c = \frac{11.2}{0.8} = 14.0 \text{ cm.}$$

$$\epsilon_{sp} = \frac{50.0 \times 0.003}{14} = 0.0107$$

suponiendo una deformación inicial del presfuerzo al tensar de 0.005

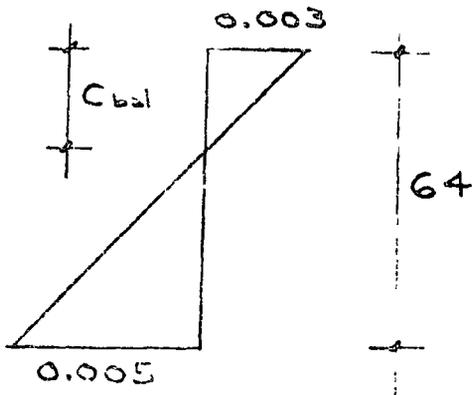
$$\epsilon_{sr} = 0.0107 + 0.005 = 0.0157 > 0.01$$

por lo tanto, el acero de presfuerzo fluye y la suposición es correcta.

$$M_u = 0.9 \left[ 59.8 \left( 0.04 - \frac{0.112}{2} \right) + 16 \left( 0.06 - \frac{0.112}{2} \right) \right] = 30.3 \text{ tm.} > 35 \text{ tm.}$$

Verificación de limitaciones de acero, de acuerdo en el Reglamento DDF 76.

Condición balanceada



$$c_{bal} = \frac{64}{0.008} \times 0.003 = 24 \text{ cm.}$$

$$a_{bal} = 0.8 \times 24 = 19.2 \text{ cm.}$$

la fuerza de compresión valdrá:

$$C_{bal} = 224 \times 19.2 \times 30 = 129024 \\ = 129 \text{ ton.}$$

Por equilibrio de fuerzas

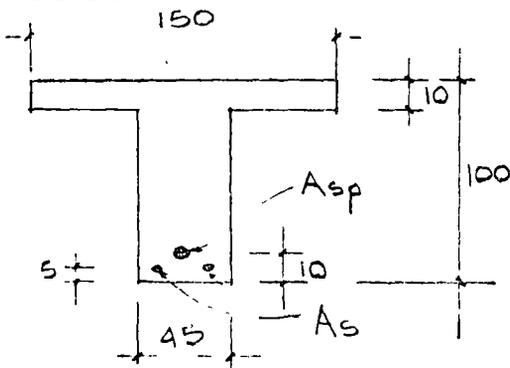
$$T_{bal} = 124 \text{ ton.}$$

de acuerdo con el DDF 76.

$$T_{m\acute{a}x} = 0.75 T_{bal} = 96.7 \text{ ton.} > 74.2 \text{ ton.}$$

la condición se cumple.

Ejemplo 2.- Calcular el momento resistente de la siguiente sec  
ción:



$$f'c = 300 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{sp} = 13,000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4,000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_{sp} = 5 \text{ cables } 12 \phi 7 = 23.0 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 2 \text{ varillas } \#6 = 5.74 \text{ cm}^2$$

Cálculo de las resistencias reducidas

$$f^{*c} = 0.8 \times 300 = 240$$

$$f''c = 0.80 f^{*c} = 0.80 \times 240 = 192 \text{ Kg/cm}^2$$

Solución

suponiendo la fluencia del acero de presfuerzo y que la sección trabaja como T.

Por equilibrio de fuerzas:

$$C = 192 \times 105 \times 10 + 192 \times 45 \times a$$

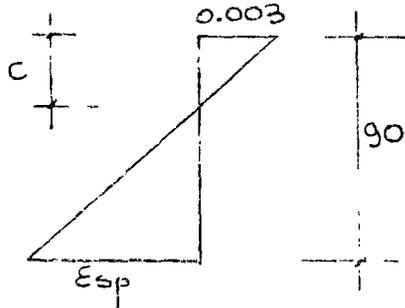
$$T = 23 \times 13,000 + 5.7 \times 4000$$

$$= 321,960$$

$$C = T$$

$$a = \frac{120360}{192 \times 45} = 14.0 \text{ cm}$$

Verificando el tipo de falla:



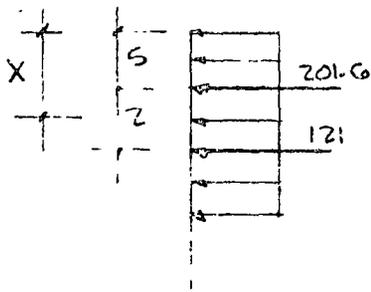
$$c = \frac{14}{0.8} = 17.4 \text{ cm.}$$

$$\epsilon_{sp} = \frac{72.6}{17.4} \times 0.003 = 0.0125$$

$$\epsilon_{s \text{ TOTAL}} = 0.0125 + 0.005 = 0.0175 > 0.01$$

las suposiciones son correctas

El momento resistente de la sección será:



la posición de la resultante de compresión está en:

$$121 \times 27 = 322 \times X$$

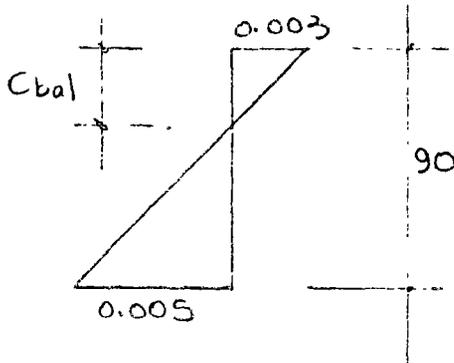
$$X = 0.75 \rightarrow 5.75 \text{ cm del borde libre}$$

$$M = F_R \quad 299 (0.9 - 0.057) + 22.8 (0.95 - 0.057)$$

$$= 0.9 (272.4) = 245.6 \text{ tm}$$

Verificación de limitación de acero, según DDF 76.

Condición balanceada



$$c_{bal} = \frac{90 \times 0.003}{0.008} = 33.7 \text{ cm.}$$

$$a_{bal} = 0.8 \times 33.7 = 27 \text{ cm.}$$

la fuerza de compresión valdrá:

$$\begin{aligned} C_{bal} &= 192 \times 105 \times 10 + 192 \times 27 \times 45 \\ &= 435 \text{ ton.} \end{aligned}$$

$$T_{bal} = C_{bal} \text{ 437 ton.}$$

$$T_{m\acute{a}x} = 0.75 \times 437 = 327 \text{ ton.} < 322$$

$$T_{actual} < T_{m\acute{a}x}.$$

BIBLIOGRAFIA

4.2. 1.- "Propuesta de Modificaciones al Reglamento del Departamento del Distrito Federal", México 1975.

4.2. 2.- J. Fauchart, "Beton Précontraint" Eyrolles, Paris 1967.

$x$	$e^{-x}$	$x$	$e^{-x}$	$x$	$e^{-x}$	$x$	$e^{-x}$	$x$	$e^{-x}$
0,005	0,9950	0,085	0,9185	0,165	0,8479	0,245	0,7827	0,40	0,6703
0,010	0,9900	0,090	0,9139	0,170	0,8437	0,250	0,7788	0,41	0,6636
0,015	0,9851	0,095	0,9094	0,175	0,8395	0,26	0,7710	0,42	0,6570
0,020	0,9802	0,100	0,9048	0,180	0,8353	0,27	0,7634	0,43	0,6505
0,025	0,9753	0,105	0,9003	0,185	0,8311	0,28	0,7558	0,44	0,644
0,030	0,9704	0,110	0,8958	0,190	0,8270	0,29	0,7483	0,45	0,6376
0,035	0,9655	0,115	0,8914	0,195	0,8228	0,30	0,7408	0,46	0,6313
0,040	0,9608	0,120	0,8869	0,200	0,8187	0,31	0,7334	0,47	0,6250
0,045	0,9560	0,125	0,8825	0,205	0,8149	0,32	0,7262	0,48	0,6188
0,050	0,9512	0,130	0,8781	0,210	0,8106	0,33	0,7189	0,49	0,6126
0,055	0,9465	0,135	0,8737	0,215	0,8065	0,34	0,7118	0,50	0,6065
0,060	0,9418	0,140	0,8694	0,220	0,8025	0,35	0,7047	0,51	0,6005
0,065	0,9371	0,145	0,8650	0,225	0,7985	0,36	0,6977	0,52	0,5945
0,070	0,9324	0,150	0,8607	0,230	0,7945	0,37	0,6907	0,53	0,5886
0,075	0,9277	0,155	0,8564	0,235	0,7906	0,38	0,6839	0,54	0,5828
0,080	0,9231	0,160	0,8521	0,240	0,7866	0,39	0,6771	0,55	0,5770



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

TEMA: SECCIONES COMPUESTAS

ING. JOSE MARIA RIOBOO MARTIN

MARZO-ABRIL, 1978.

CURSO DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE  
CONCRETO PRESFORZADO  
CENTRO DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM

ING. JOSE MA. RIOBOO MARTIN

INTRODUCCION

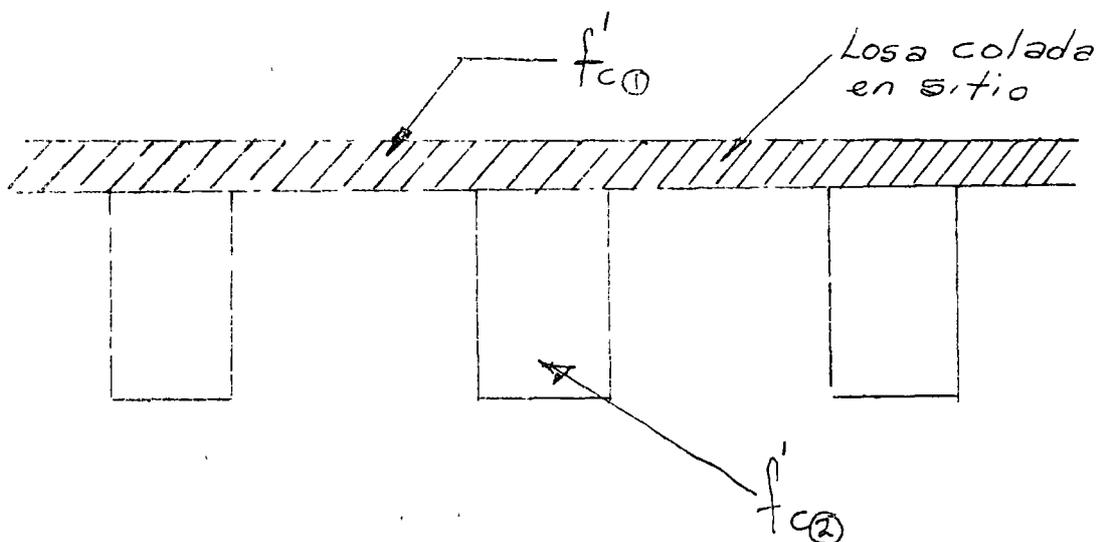
ES FRECUENTE LA NECESIDAD DE UTILIZAR ELEMENTOS PRECOLADOS LOS CUALES DEBERAN TRABAJAR EN COLABORACION CON ELEMENTOS COLADOS-EN SITIO. EN ESTE CAPITULO SE ABORDARA LOS ASPECTOS DE DISEÑO-DE VIGAS DE SECCION COMPUESTA DE ELEMENTOS DE CONCRETO PRESFORZADO SOLAMENTE BAJO LOS REQUISITOS DE FLEXION, LOS CRITERIOS - PARA GARANTIZAR LAS SECCIONES COMPUESTAS CORRESPONDE AL CAPITULO DE FUERZA CORTANTE. ASI MISMO SE TRATARA EL CASO GENERICO-EN QUE LAS RESISTENCIAS DE LOS CONCRETOS TANTO DE LAS PIEZAS - PRESFORZADAS COMO EN EL ELEMENTO COLADO EN SITIO SEAN DISTINTOS.

EL DISEÑO SE REALIZARA POR EL CRITERIO DE ESFUERZOS PERMISIBLES YA QUE EL ESTADO LIMITE DE FALLA DE LAS SECCIONES COMPUESTAS QUE SE MENCIONARON EN LOS CAPITULOS ANTERIORES PARA ELEMENTOS DE SECCION SENCILLA. POR ULTIMO SE INDICARA UN METODO PARA CONSIDERAR EL CASO DE LA CONTINUIDAD EN VIGAS DE SECCION COMPUESTA A BASE DE REFUERZO ORDINARIO EN SU REVISION DE LAS SECCIONES CRITICAS DONDE LA ZONA DE COMPRESION ESTA AFECTADA POR LA ACCION DEL PRESFUERZO, ESTO SE TRATARA COMO SECCION DE CONCRETO DE REFUERZO ORDINARIO CUYO DIMENSIONAMIENTO ESTARA BASADO EN EL ESTADO LIMITE DE FALLA.

## 4.6 VIGAS DE SECCION COMPUESTA

### COMENTARIO GENERAL

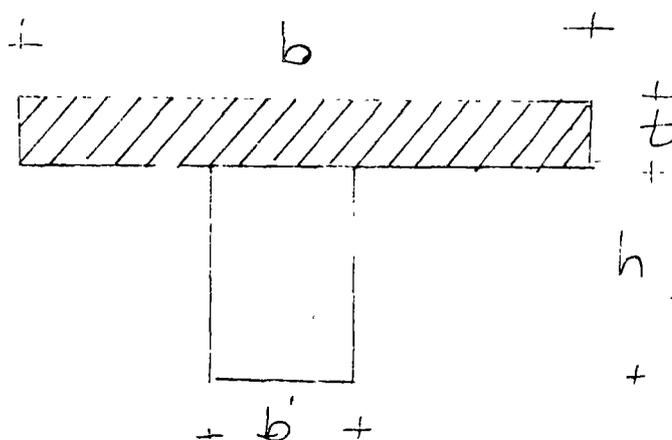
CUANDO SE VA A FORMAR SECCION COMPUESTA CON LA LOSA COLADA EN SITIO SE TIENE:



EN DONDE GENERALMENTE SE TIENE:

$$\text{QUE } f'_{c(2)} > f'_{c(1)}$$

#### 1.- DETERMINACION DEL ANCHO (b)



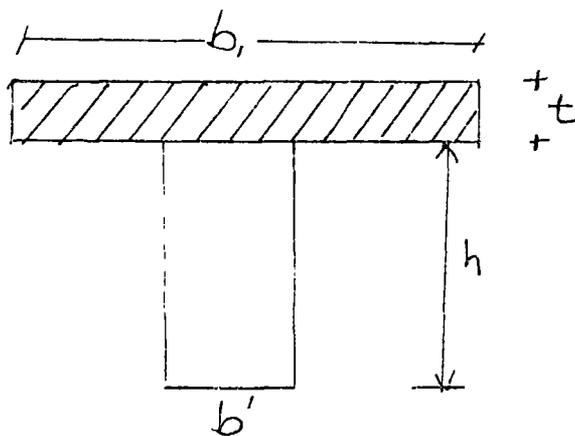
$$b = \left\{ \begin{array}{l} 16t + b' \\ \frac{\text{Long. trabe}}{4} = \frac{L}{4} \\ \text{SEPARACION CENTRO A CENTRO DE TRABES c.a.c.} \end{array} \right\} \text{ LA MENOR RIGE}$$

2.- UNA VEZ DETERMINADO EL ANCHO (b) SE CONVERTIRA A UN NUEVO ANCHO PROPORCIONAL AL ANCHO (b') ; POR LA DIFERENCIA DE CONCRETOS Y DICHO FACTOR ES:

$$F_c = \sqrt{\frac{f'_c (2)}{f'_c (1)}}$$

DE DONDE  $b_1 = b \times F_c$

POR LO QUE LA SECCION RESISTENTE COMPUESTA ES:



### 3.- ELEMENTOS MECANICOS

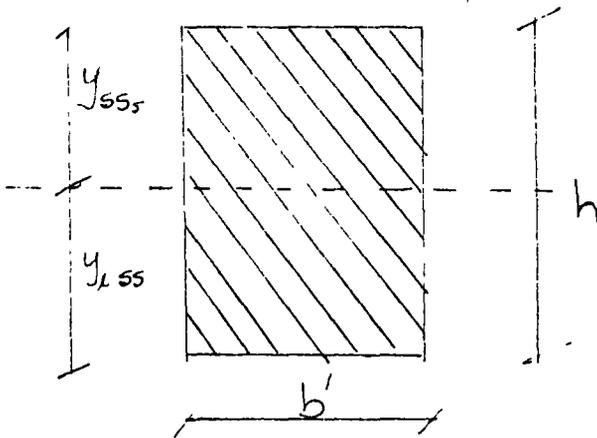
#### a) TRABAJANDO EN SECCION SIMPLE

LAS CARGAS SON:

1-a) PESO PROPIO

2-a) LOSA COLADA EN SITIO ANTES DE FRAGUAR

POR LO QUE LAS PROPIEDADES GEOMETRICAS SON:



$$A_{ss} = b'h$$

$$y_{i_{ss}}, y_{s_{ss}} \quad I_{ss} = \frac{b' h^3}{12}$$

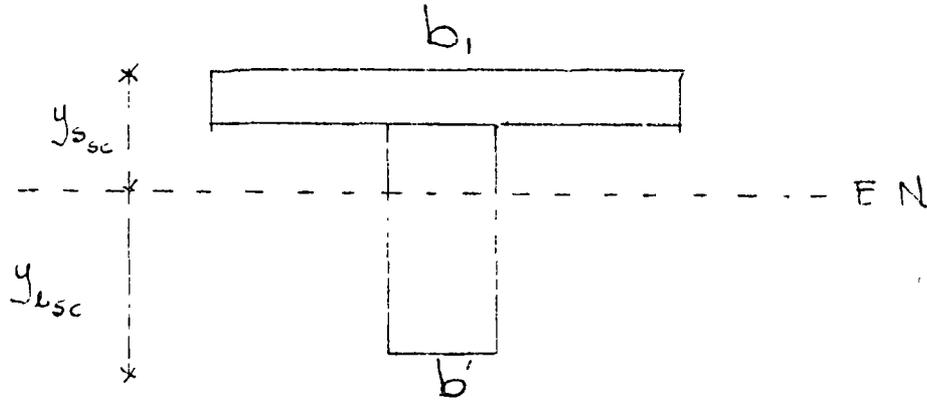
$$S_{i_{ss}} = \frac{I_{ss}}{y_{i_{ss}}} ; S_{s_{ss}} = \frac{I_{ss}}{y_{s_{ss}}}$$

Y SE LEERA POR EJEMPLO:

$A_{ss}$  = AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL EN SECCION SIMPLE

b) TRABAJANDO EN SECCION COMPUESTA

PARA LAS CARGAS MUERTAS Y VIVAS POSTERIORES AL FRAGUADO DE LA LOSA.



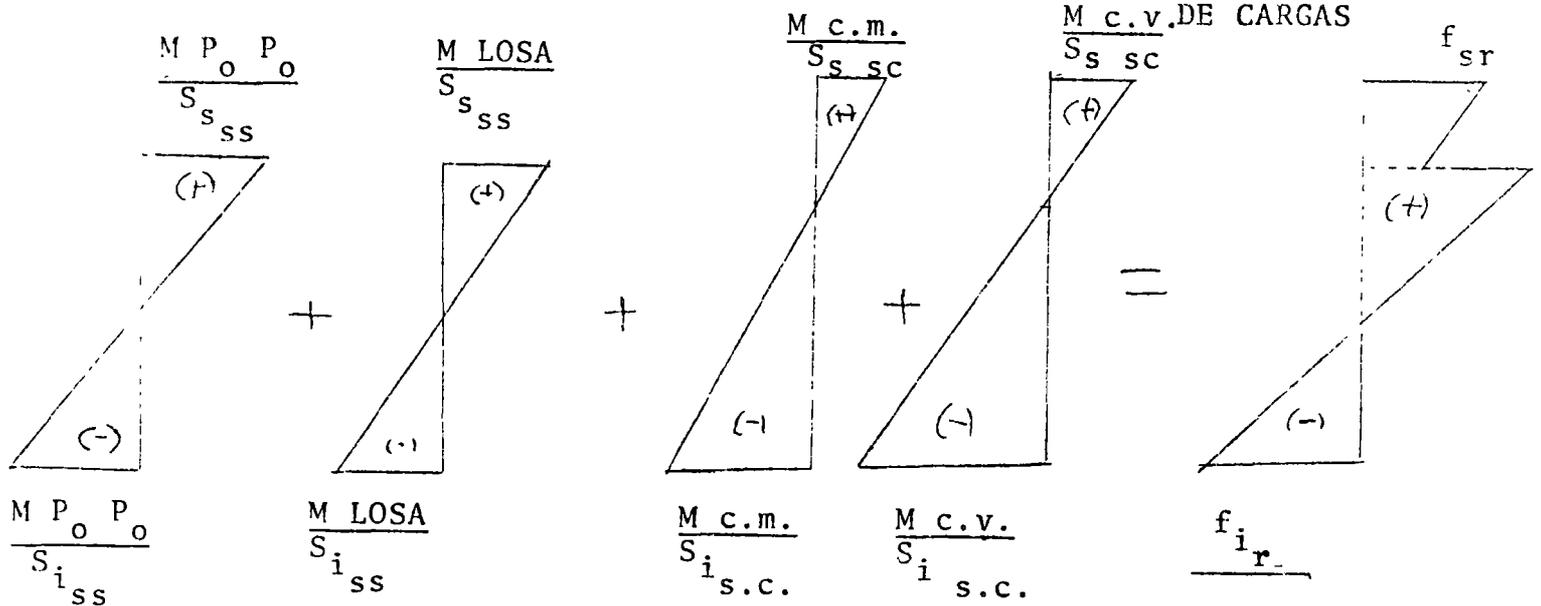
$$y_{ssc}; y_{isc}; A_{sc}; I_{sc}; S_{isc}; S_{ssc}$$

c) DIAGRAMAS

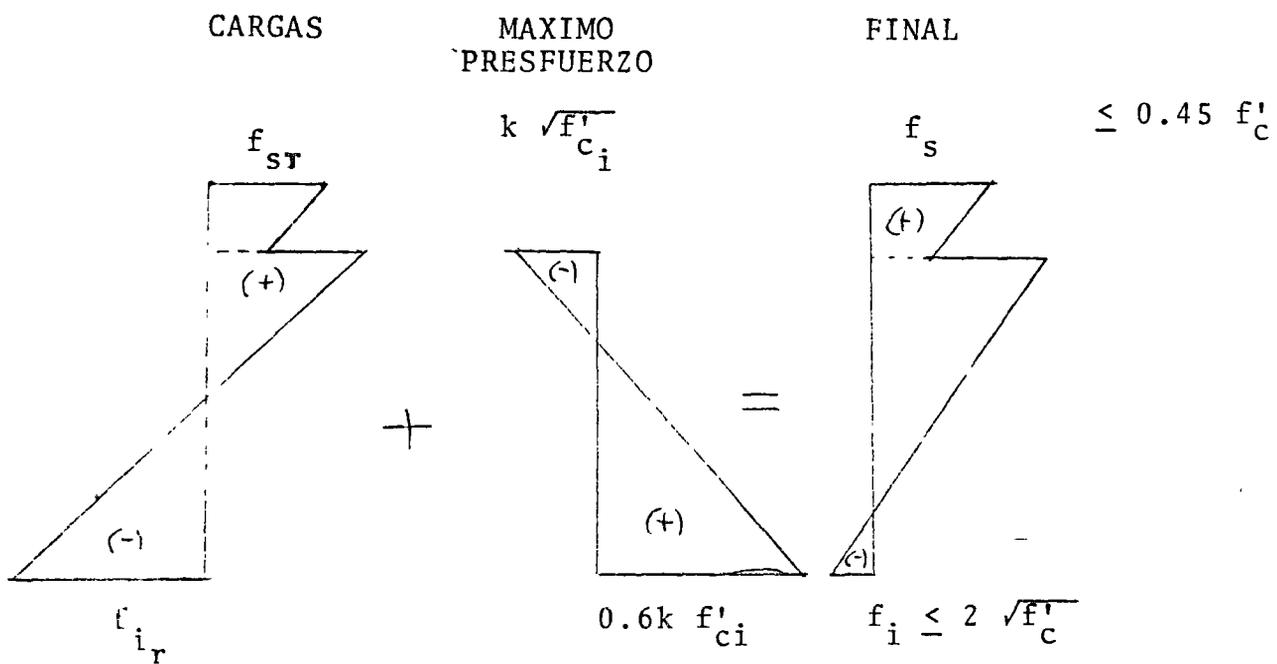
SECCION SIMPLE

SECCION COMPUESTA

DIAGRAMA FINAL



COMO EL PRESFUERZO SE DA EN SECCION SIMPLE TENEMOS:

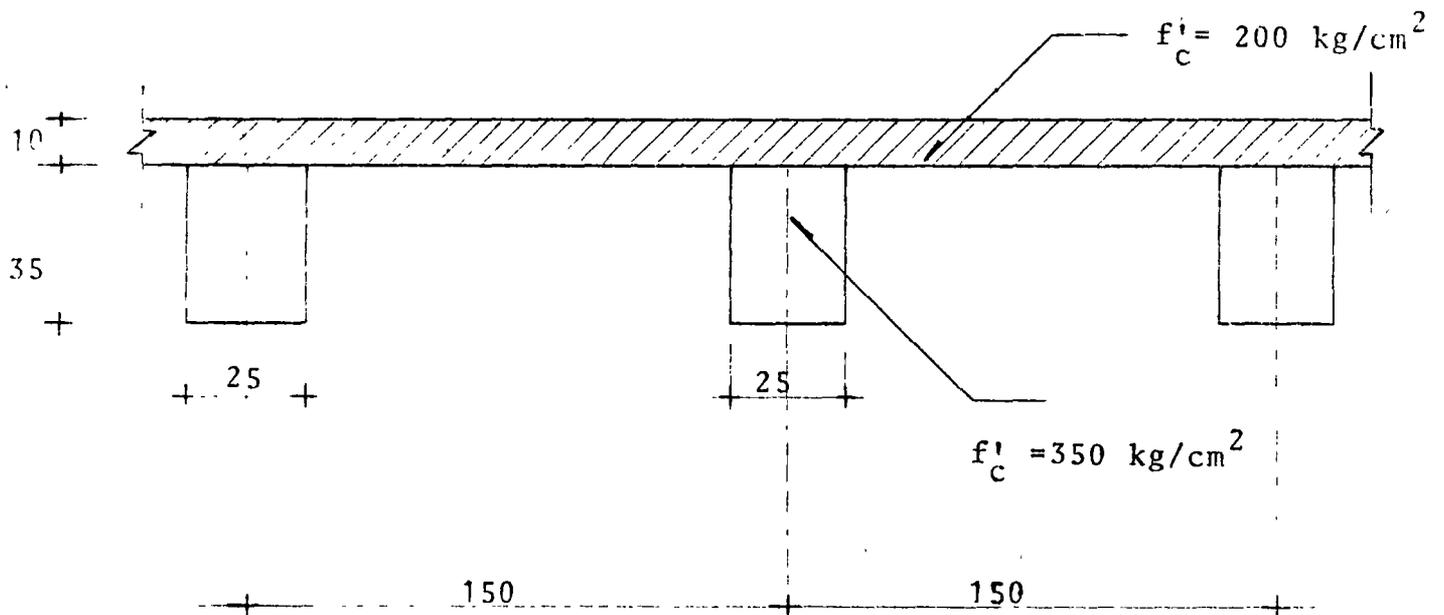


## EJEMPLO

DISEÑO DE UNA TRABE DE CONCRETO PRETENSADO POR FLEXION BAJO ESFUERZOS PERMISIBLES LA CUAL TRABAJA EN SECCION COMPUESTA CON UNA LOSA COLADA EN SITIO, LIBREMENTE APOYADA Y CON CONTINUIDAD EMPLEANDO PARA ELLO EL ACERO DE REFUERZO ORDINARIO EN LA LOSA.

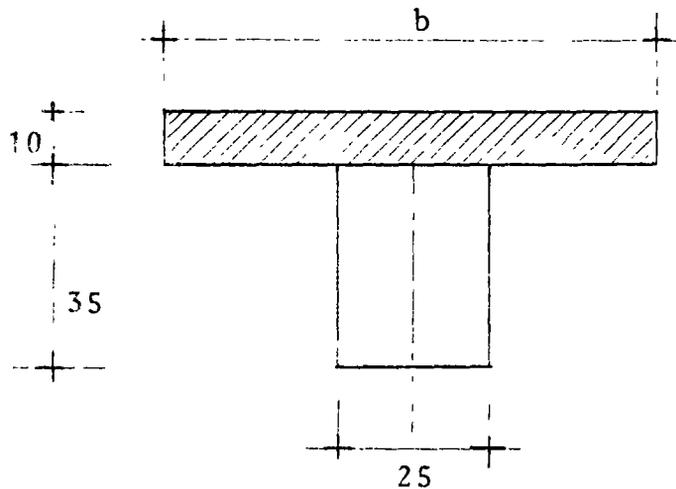
1er. CASO LIBREMENTE APOYADA

CLARO DE CALCULO  $L=10$  mts.



POR LO QUE EL ANCHO TRIBUTARIO DE LA TRABE ES DE 150 cm.

CALCULANDO LA SECCION RESISTENTE:



CALCULO DE b

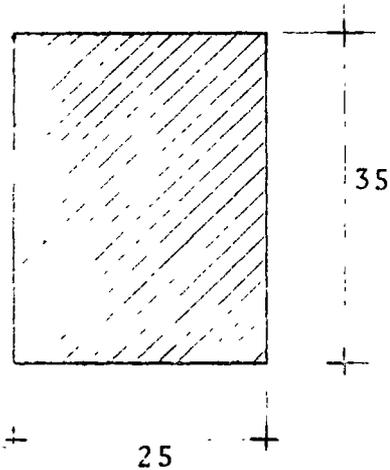
$$\begin{array}{l}
 b = 16t + b' \\
 b = \frac{L}{4} \\
 b = \text{DIST. c. a c.}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 16t + b' = 16 \times 10 + 25 = 185 \text{ cm} \\
 \frac{L}{4} = \frac{1000}{4} = 250 \text{ cm} \\
 \text{DIST c. a c.} = 150 \text{ cm}
 \end{array} \right\} b = 150 \text{ cm}$$

TRANSFORMANDOLA A CONCRETO DE  $350 \text{ kg/cm}^2$

$$F_c = \sqrt{\frac{200}{400}} = 0.76$$

$$b_1 = 150 \times 0.76 = 114 \text{ cm}$$

## PROPIEDADES GEOMETRICAS EN SECCION SIMPLE



$$\begin{aligned}
 A &= 875 \text{ cm}^2 \\
 y_{i_{ss}} = y_{s_{ss}} &= 17.5 \text{ cm} \\
 \bar{I}_{ss} &= 89100 \text{ cm}^4 \\
 S_{i_{ss}} = S_{s_{ss}} &= 5390 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

CALCULANDO LOS ESFUERZOS PRODUCIDOS POR LAS CARGAS EN SECCION SIMPLE

$$P_o \quad P_o \quad \text{---} \quad 0.0875 \times 2.4 = 0.210 \text{ ton/m}$$

$$\text{LOSA DE } 10 \text{ cm } 01 \times 1.5 \times 2.4 = \underline{0.36} \text{ ton/m}$$

$$\Sigma = 0.57 \text{ ton/m}$$

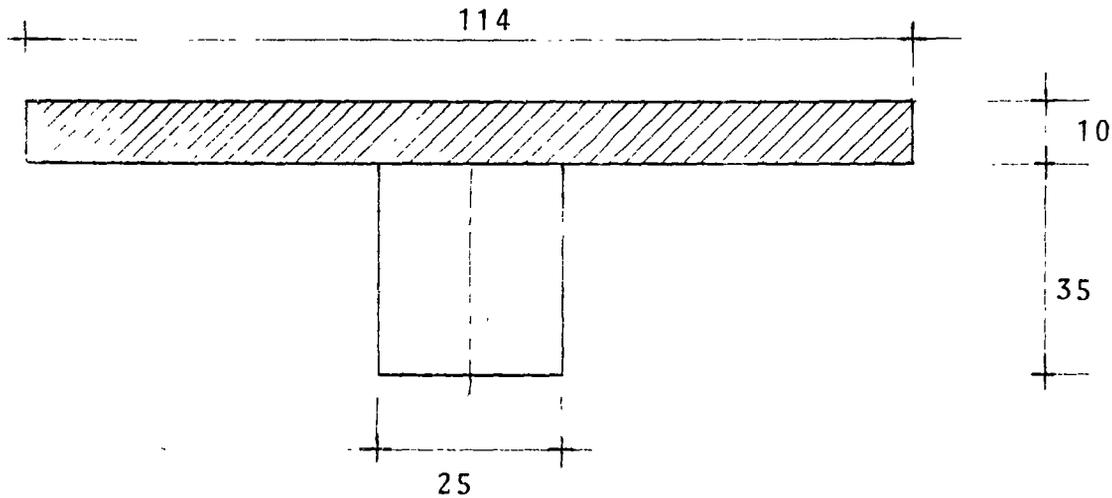
CALCULANDO EL MOMENTO MAXIMO

$$M_{\text{L}} = \frac{\omega l^2}{8} = \frac{0.57 \times 10^2}{8} = 7.125 \text{ ton.m}$$

Y SUS ESFUERZOS

$$f_i = f_s = \frac{M}{S} = \frac{608,000}{5390} = 132 \text{ kg/cm}^2 \text{ ( TENSION O COMP.)}$$

CALCULANDO LAS PROPIEDADES GEOMETRICAS EN SECCION COMPUESTA.



ELEMENTO	AREA	$\bar{y}$	$A\bar{y}$	d	$d^2$	$Ad^2$	I
(1)	875	17.5	15252	12.5	156	136400	89100
(2)	1140	40.0	45,600	10.0	100	114000	9500
SUMAS	2015		60850			250,400	98,600

$$\begin{aligned}
 A_{sc} &= 2015 \text{ cm}^2 & I_{t_{sc}} &= 349,000 \text{ cm}^4 \\
 y_{i_{sc}} &= 30 \text{ cm} & S_{i_{sc}} &= 11,630 \text{ cm}^3 \\
 y_{s_{sc}} &= 45 - 30 = 15 \text{ cm} & S_{s_{sc}} &= 23200 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

LAS CARGAS QUE SE TIENEN EN SECCION COMPUESTA SON:

$$\begin{aligned}
 \text{C.M.} & \text{---} 150 \text{ kg/m}^2 \\
 \text{C.V.} & \text{---} \frac{100}{250} \text{ ''} \\
 \text{SUMA} & \text{---} 250 \text{ ''}
 \end{aligned}$$

$$\omega = 0.25 \times 1.5 = 0.375 \text{ ton/m.}$$

EL MOMENTO MAXIMO:

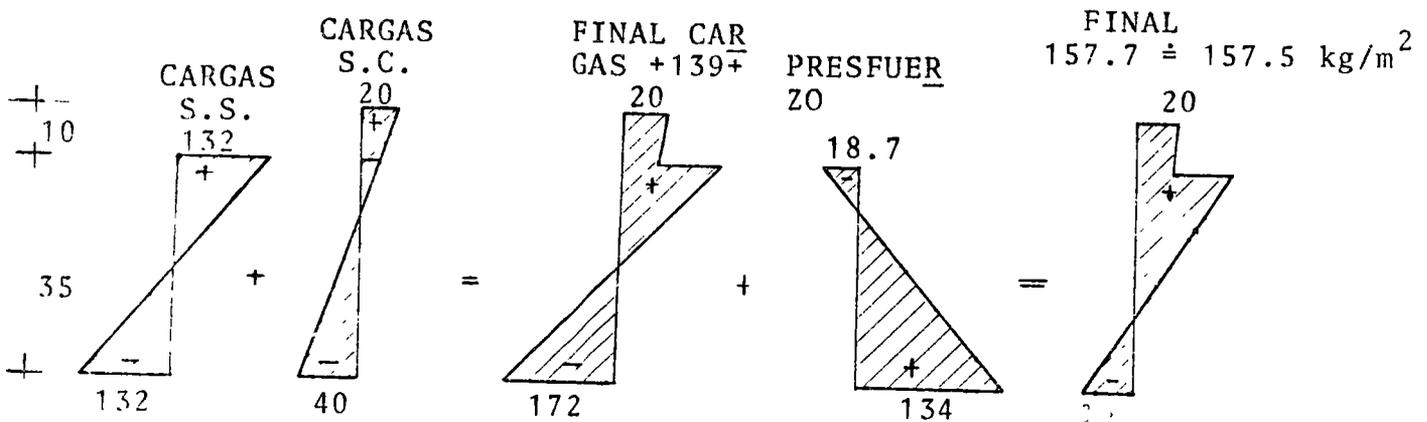
$$M_d = \frac{0.375 \times 10^2}{8} = 4.69 \text{ ton.m}$$

Y ESFUERZOS DE:

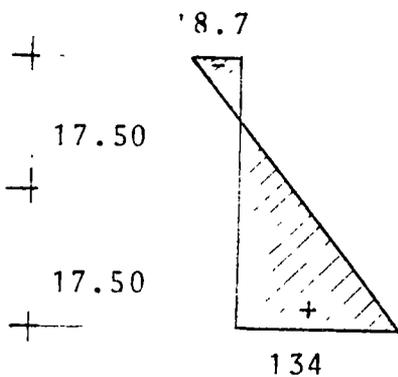
$$f_i = \frac{469000}{11630} = 41 \text{ kg/cm}^2 \text{ (TENSION)}$$

$$f_s = \frac{469000}{23200} = 20 \text{ kg/cm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

DIBUJANDO DIAGRAMAS:



DEL DIAGRAMA DE PRESFUERZO:  $0.6 \times 0.8 \times 0.8 \times 350 = 134$   $38 \approx 2\sqrt{f'_c} = 37.4$   
 $\text{kg/m}^2$



$$\frac{P}{A} = \frac{134 + 18.7}{2} - 18.7$$

$$\frac{P}{A} = 57.65 \text{ kg/cm}^2$$

$$P = 57.65 \times 875 = 50,444 \text{ kg}$$

$$\text{No.} = \frac{50,444}{5200} : 9.7$$

UTILIZAREMOS 10 TORONES Ø 3/8"

$$P = 52\,000 \text{ kg.}$$

CALCULANDO LA  $e$  TEORICA

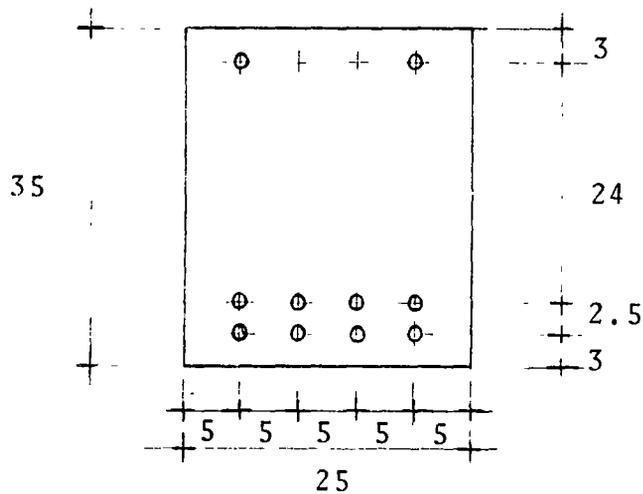
$$e = \frac{S_{i_{ss}}}{p} \left( f_{i_{ss}} - \frac{p}{A_{ss}} \right)$$

$$e = \frac{5390}{52000} \left[ 134 - \frac{52000}{875} \right]$$

$$e = 0.104 (134 - 59.4) = 0.104 \times 74.6 = 7.76 \text{ cm}$$

$$e' = y_i - e = 17.50 - 7.76 = 9.74 \text{ cm}$$

PROPONIENDO LA SIGUIENTE DISTRIBUCION DE PRESFUERZO:



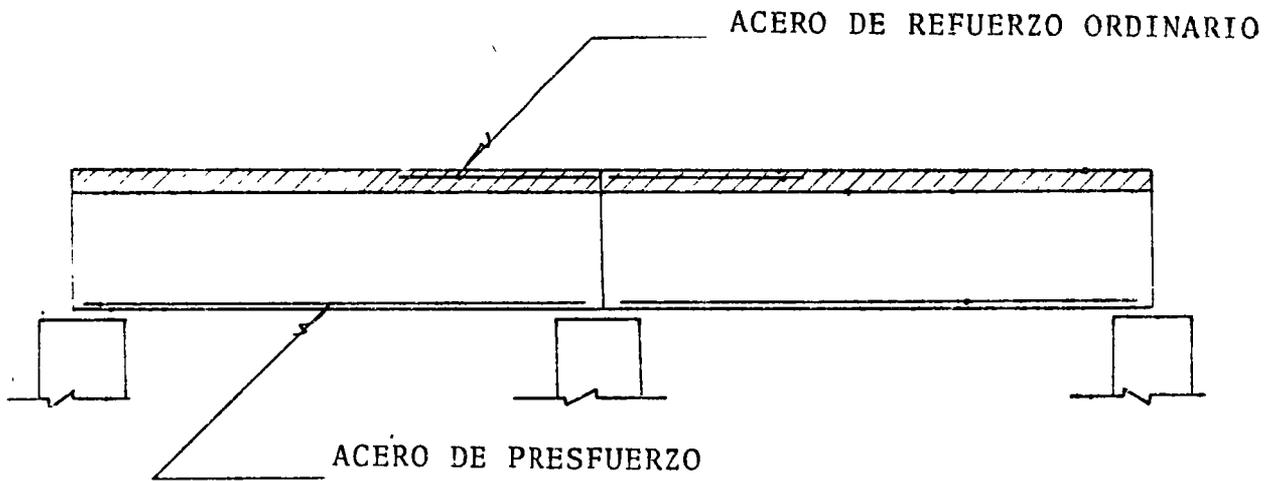
$$e' = \frac{4 \times 3 + 4 \times 5.5 + 2 \times 32}{10} = 9.8 \text{ cm}$$

$$e = y_i - e' = 17.50 - 9.8 = 7.7 \text{ cm}$$

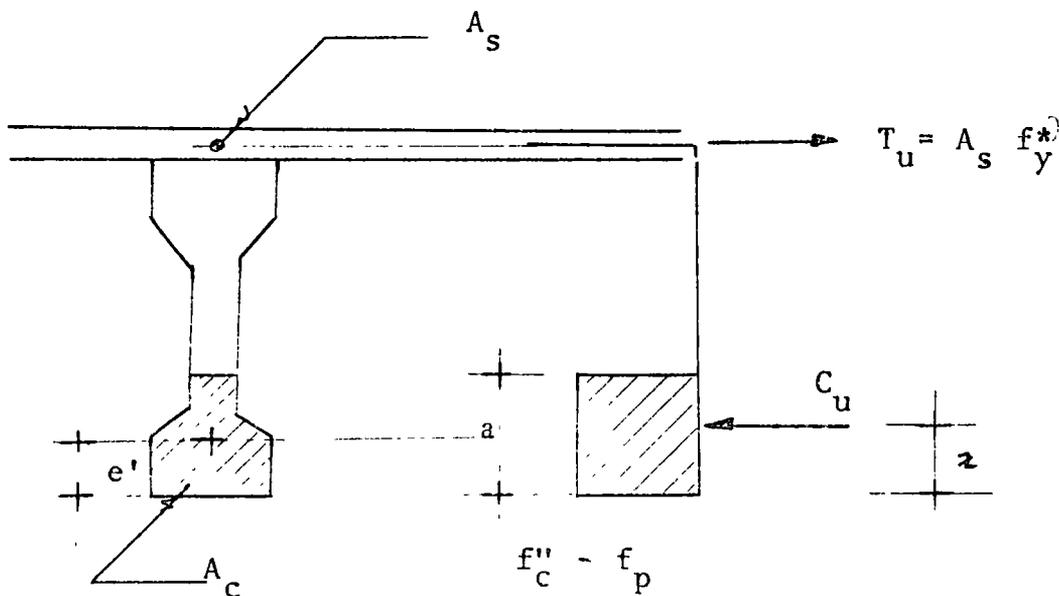
CALCULANDO LOS ESFUERZOS

$$f_i = \frac{52.000}{875} + \frac{52000 \times 7.7}{5390} = 59.4 + 74.3$$

REVISION DEL MOMENTO NEGATIVO EN EL APOYO DE UNA VIGA A LA CUAL SE LE DA CONTINUIDAD COLOCANDO REFUERZO ORDINARIO EN LA LOSA



ANALIZANDO LA SECCION DEL APOYO CENTRAL



## SECUELA DE CALCULO

- a) SUPONER  $A_s$  (AREA DEL ACERO DE REFUERZO ORDINARIO)  
 b) COMO  $T_u = A_s f_y^*$  CALCULAMOS  $T_u$   
 c) POR EQUILIBRIO  $T_u = C_u$   
 d) DE LA IGUALDAD ANTERIOR

$$A_c = \frac{T_u}{f'_c - f_p}$$

EN DONDE EL ESFUERZO  $f_p$  NOS REPRESENTA LA PERDIDA DE CAPACIDAD A COMPRESION DEL CONCRETO, DEBIDO A LA COMPRESION DEL PRESFUERZO.

EN DICHA ECUACION SUPONEMOS (  $f_p$  )

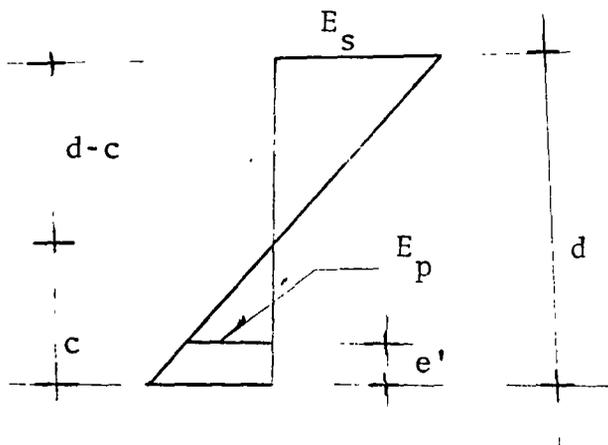
- e) COMO  $A_c = a_b$

$$\text{DESPEJANDO } q = \frac{A_c}{b}$$

- f) CALCULAMOS

$$c = \frac{a}{0.8}$$

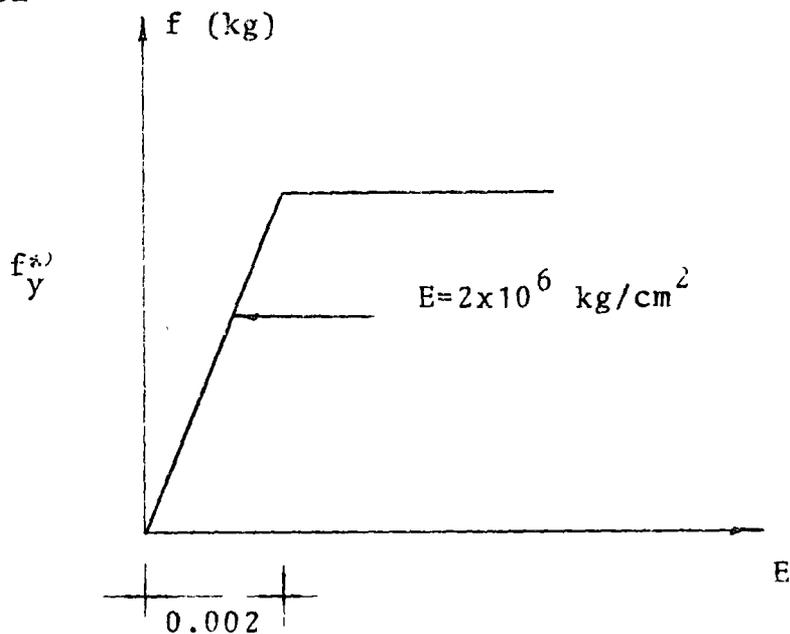
- g) DEL DIAGRAMA DE DEFORMACIONES UNITARIAS



g-1) PRIMERO VERIFICAR QUE

$$\epsilon_s \geq \frac{0.002}{0.75} \quad (\text{SE ASEGURA QUE EL ACERO FLUYE Y SE MANTIENE EL } 0.75 \rho_b \text{ REQUERIDO)}$$

PORQUE



g-2) SE LOCALIZA EL CENTRO DE GRAVEDAD DEL PRESFUERZO DE LA FIBRA INFERIOR

$e'$

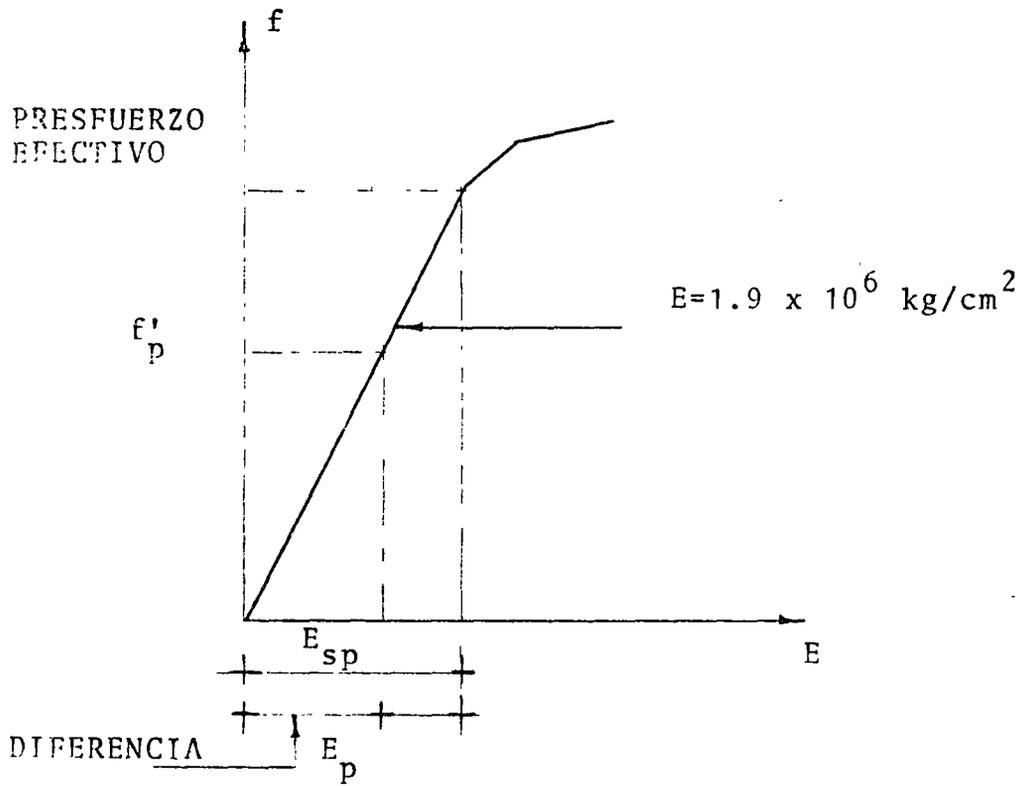
g-3) SE LOCALIZA  $E_p$  EN EL DIAGRAMA DE DEFORMACIONES Y SE CALCULA SU VALOR.

h)" CON EL VALOR  $E_p$  PODEMOS CALCULAR  $f'_p$  DE LA SIGUIENTE FORMA

h-1) ANALITICAMENTE

$$f'_p = (E_{sp} - E_p) E$$

h-2) GRAFICAMENTE



i) CON EL VALOR DE  $f'_p$  ENCONTRAMOS LA FUERZA DE PRESFUERZO

$$P_p = f'_p \times A_s \text{ presfuerzo}$$

EN DONDE  $A_s$  PRESFUERZO = No. TORONES  $\times$   $A_s$  / PARTICULAR

j) SE HACE EL COCIENTE

$$\frac{P_p}{A_c} \cong f_p$$

k) SI DICHO COCIENTE ES DIFERENTE DE  $f_p$  NOS SUPONDREMOS UN VALOR ENTRE  $f_p$  Y EL COCIENTE Y SE HARA OTRA ITERACION - HASTA QUE SEAN APROXIMADAMENTE IGUALES.

l) SI SON IGUALES, CONOCEMOS EL VALOR REAL DE  $A_c$  Y TENEMOS EL CORRESPONDIENTE DE  $a$

m) CALCULAMOS EL MOMENTO ULTIMO RESISTENTE

$$M_{ur} = F_R T_U (d - z)$$

n) CALCULAMOS EL MOMENTO ULTIMO ACTUANTE COMO

$$M_{ua} = 1.4 \left[ M_{c.m.} + M_{c.v.} \right]$$

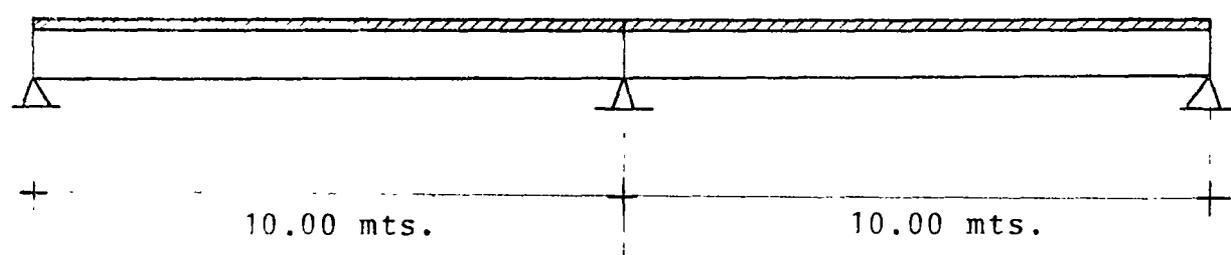
SI  $M_{UR} > M_{UA}$ , ES CORRECTA LA SOLUCION Y SI  $M_{UR} < M_{UA}$ , SUPONDREMOS UN NUEVO VALOR  $A_s$  Y EMPEZAMOS LA SECUENCIA DE CALCULO.

$$f_i = 133.7 < 134$$

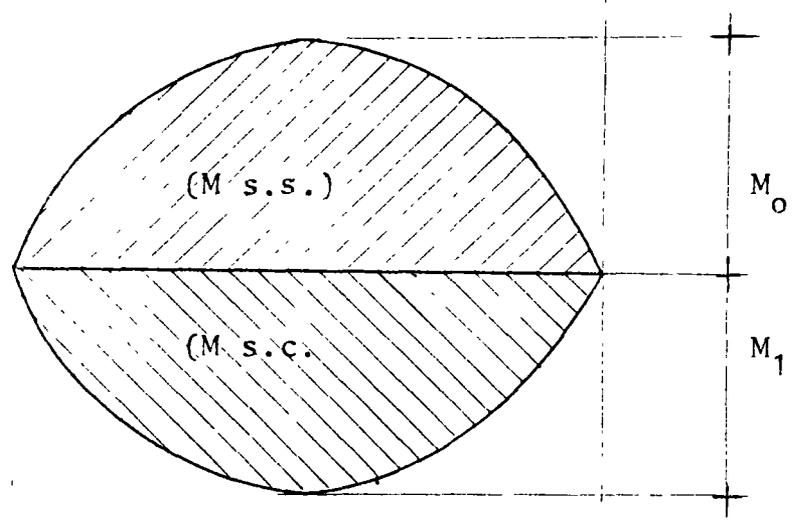
$$f_s = 14.9 < 18.7$$

EN FORMA DE ILUSTRACION OBTENER LA SOBRECARGA Y EL AREA DE ACERO ADICIONAL QUE SE TIENE EN LA MISMA VIGA DEL CASO ANTERIOR AL DARLE CONTINUIDAD EN SECCION COMPUESTA COMO SE ILUSTRA EN LA FIG.1

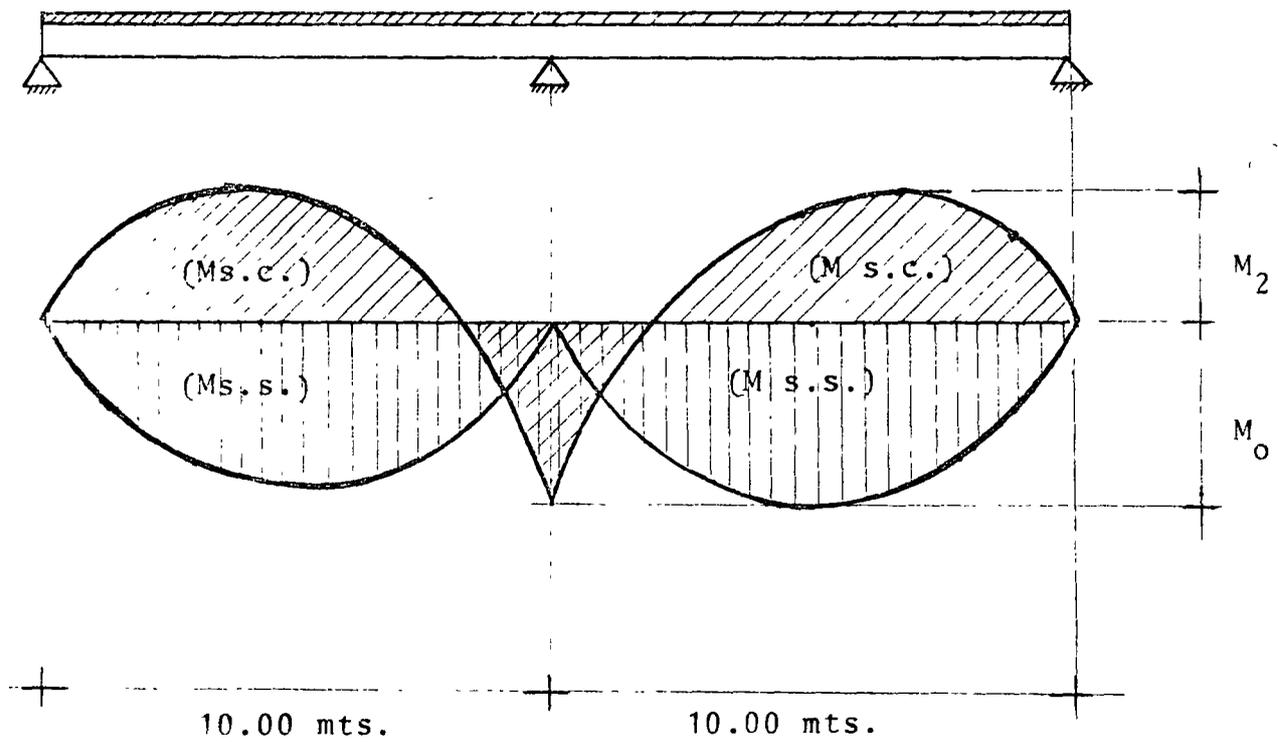
FIG.(1):



EN EL CASO ANTERIOR TENIAMOS:



TENEMOS LOS SIGUIENTES DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLEXIONANTES PARA LAS 2 ETAPAS DE TRABAJO.



DONDE PODEMOS ESTABLECER

$$\cancel{M}_0 + M_1 = \cancel{M}_0 + M_2$$

$$M_1 = M_2$$

$$\text{PERO } M_1 = \frac{\omega_1 \ell^2}{8} \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{9 \omega_2 \ell^2}{128}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{\omega_1 \ell^2}{128}$$

DESPEJANDO  $\omega_2$  :

$$\omega_2 = \frac{128 \omega_1 \ell^2}{72 \cdot 2} = \frac{128}{72} \omega_1 = 1.78 \omega_1$$

PERO  $\omega_1 = 375 \text{ kg/m}$  (CARGAS EN SECCION COMPUESTA)

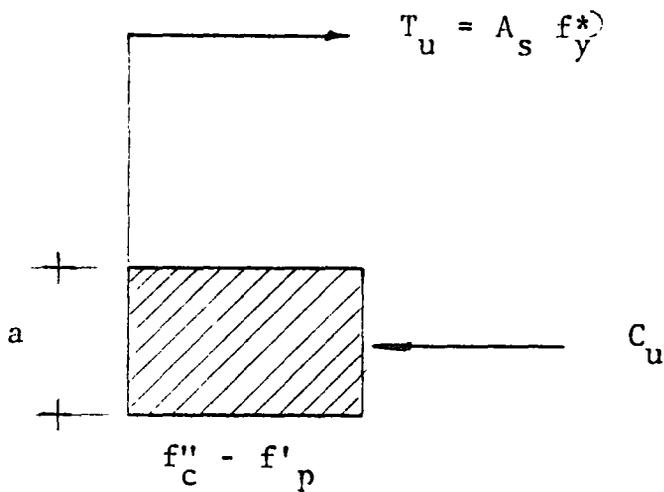
LA VIGA PUEDE RESISTIR UNA SOBRE CARGA EN SECCION COMPUESTA DE:

$$\omega_2 = 1.78 \times 375 = 668 \text{ kg/m}$$

CALCULANDO EL MOMENTO NEGATIVO

$$(-) M = \frac{\omega_2 \ell^2}{8} = \frac{0.668 \times 100}{8} = 8.35 \text{ ton.m}$$

CALCULO DEL ACERO PARA DICHO MOMENTO



a) Suponemos  $A_s = 11.48 \text{ cm}^2$  ( 4 varillas  $\emptyset 3/4''$  )

b)  $T_u = A_s f_y^* = 11.48 \times 3600 = 41328$

c)  $T_u = C_u = 41328 \text{ kg.}$

d)  $A_c = \frac{T_u}{f_c'' - f_p}$

$$f_c^* = 0.75 f_{c_1}^* + 30 \quad f_{c_1}^* = 330 \text{ kg/cm}^2 \text{ (tiene una probabilidad de 2\% de no ser alcanzado)}$$

$$f_c^* = 278 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = \left( 1.05 - \frac{f_c^*}{1250} \right) f_c^* = \left( 1.05 - \frac{278}{1250} \right) 278 = 230 \text{ kg/m}^2$$

SUPONIENDO  $f_p = 100 \text{ kg/cm}^2$

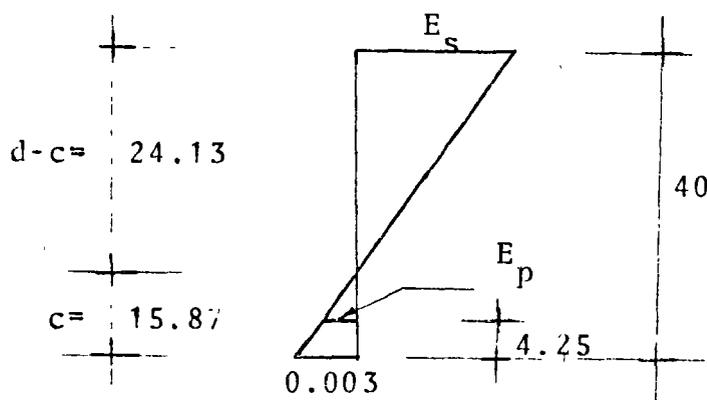
$$f_c'' - f_p = 230 - 100 = 230 - 100 = 130 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_c = \frac{41328}{130} = 317.9 \text{ cm}^2$$

e) Como  $A_c = ab$   $a = \frac{A_c}{b} = \frac{317.9}{25} = 12.7 \text{ cm}$

f)  $c = \frac{a}{0.8} = \frac{12.7}{0.80} = 15.87 \text{ cm}$

g) DEL DIAGRAMA DE DEFORMACIONES UNITARIAS:



g-1) POR TRIANGULOS SEMEJANTES

$$\frac{0.003}{15.87} = \frac{E_s}{24.13} ; E_s = \frac{24.13}{15.87} \times 0.003 = 0.0045$$

>  $\frac{0.002}{0.75} = 0.0027$  EL ACERO FLUYE O LA SECCION ES SUB REFORZADA

g-2) POR TRIANGULOS SEMEJANTES

$$\frac{0.003}{15.87} = \frac{E_p}{11.62} ; E_p = \frac{11.62}{15.87} \times 0.003 = 0.0022$$

h) CALCULO DE  $f'_p$

$$f'_p = (E_{sp} - E_p) \epsilon$$

$$f'_p = (0.0056 - 0.0022) \times 1.90 \times 10^6$$

$$f'_p = 6460 \text{ kg/cm}^2$$

i) CALCULO DE  $P_p$

$$P_p = f'_p \times A_s$$

$$A_s = 8 \times 0.516 = 4.12 \text{ cm}^2$$

$$P_p = 6460 \times 4.12 = 26615 \text{ kg.}$$

j) TOMANDO EL COCIENTE:

$$\frac{P_p}{A_c} = \frac{26615}{317.9} = 83.7 \neq f_p = 100$$

k) TOMANDO UN NUEVO VALOR DE  $f_p = 90$  SE LLEGA A QUE DICHO VALOR ES EL CORRECTO.

$$\therefore A_c = \frac{41328}{140} = 295.2 \text{ cm}^2$$

$$2a = \frac{A_c}{b} = \frac{295.2}{25} = 11.8 \text{ cm}$$

PARA ESTE CASO PARTICULAR

$$a = \frac{11.8}{2} = 5.9 \text{ cm}$$

1) CALCULO DEL MOMENTO ULTIMO RESISTENTE

$$M_{ur} = F_R T_u (d-2)$$

$$M_{ur} = 0.90 \times 41328 (40-5.9)$$

$$M_{ur} = 1268000 \text{ kg.cm}$$

$$M_{ur} = 12.68 \text{ ton x m}$$

m) CALCULO DEL MOMENTO ULTIMO ACTUANTE

$$W_u = 1.78 \times 1.4 (0.250 \times 1.5)$$

$$W_u = 0.934 \text{ ton/m}$$

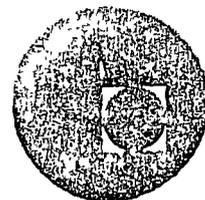
$$M_{u_a} = \frac{w_u l^2}{8} = \frac{0.934 \times 1.5^2}{8} = 11.67 \text{ ton x m}$$

$$\therefore M_{ur} > M_{u_a}$$





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

TEMA: DIMENSIONAMIENTO POR ESFUERZOS  
PERMISIBLES

ING. JOSE MARIA RIOBOO MARTIN

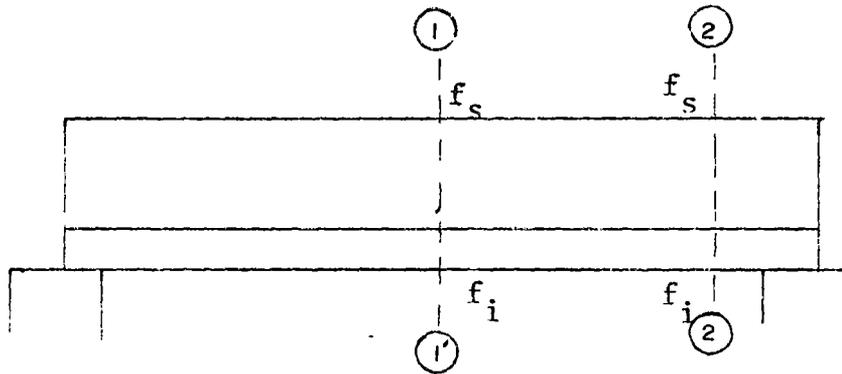
MARZO- ABRIL, 1978.



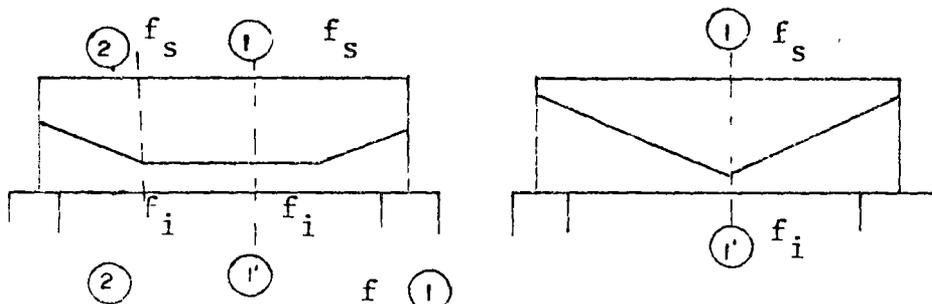
## 4.3.2 DIMENSIONAMIENTO POR ESFUERZOS PERMISIBLES

José María Riobóo Martín

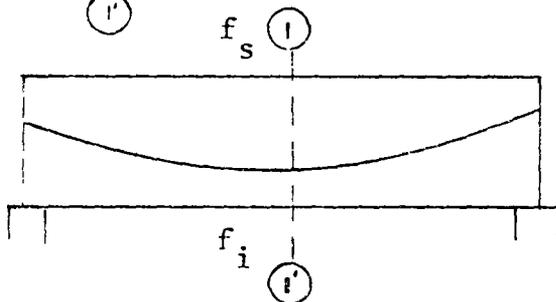
### 4.3.2. 1.- SECCIONES CRITICAS



TENDONES  
RECTOS (PRETENSADOS)



TENDONES  
DESVIADOS  
(PRETENSADOS)

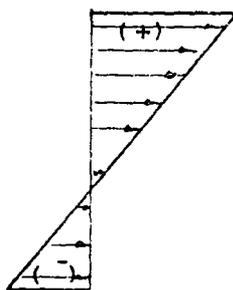


TENDONES  
CURVOS (POSTENSADO)

SECCIONES (1) - (1') RIGE CONDICIONES FINALES BAJO CARGAS EXTERIORES

SECCIONES (2) - (2') RIGE CONDICION INICIAL SIN EFECTO DE CARGAS EXTERIORES

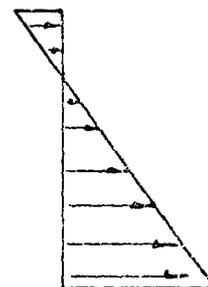
$$f_s \leq 0.45 f'_c \quad (\text{COMPRESION})$$



$$f_i \leq 2 \sqrt{f'_c} \quad (\text{TENSION})$$

(1) - (1')

$$f_s \leq \sqrt{f'_c} \quad (\text{TENSION})$$



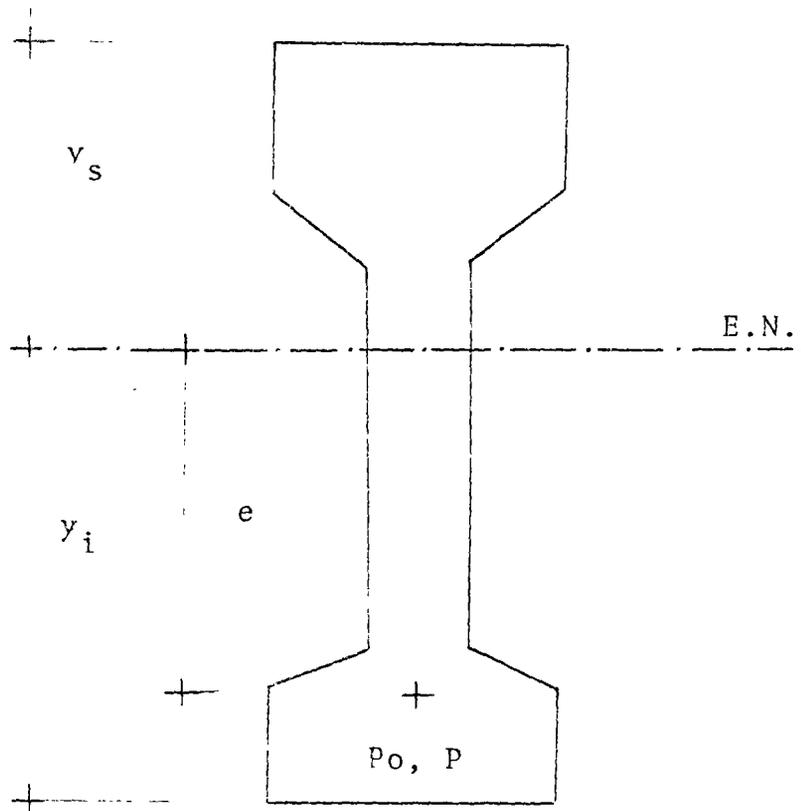
$$f_i \leq 0.6 f'_{ci} \quad (\text{COMPRESION})$$

(2) - (2')

#### 4.3.2.2.- REVISION DE ESFUERZOS

$$(1) \quad f = \frac{F}{A} + \frac{M}{I} y \quad - - \text{FORMULA DE LA ESCUADRIA}$$

POR LO QUE PARA UNA SECCION TENEMOS:



$P_0$  = PRESFUERZO INICIAL

$P$  = PRESFUERZO EFECTIVO

$A$  = AREA DE LA SECCION

$e$  = EXCENTRICIDAD DEL ACERO DE PRESFUERZO

$I$  = MOMENTO DE INERCIA CENTROIDAL

$S_i$  = MODULO DE SECCION INFERIOR =  $\frac{I}{y_i}$

$S_s$  = MODULO DE SECCION SUPERIOR =  $\frac{I}{y_s}$

$M_T$  = MOMENTO TOTAL PRODUCIDO POR LAS CARGAS EXTERIORES Y PESO PROPIO

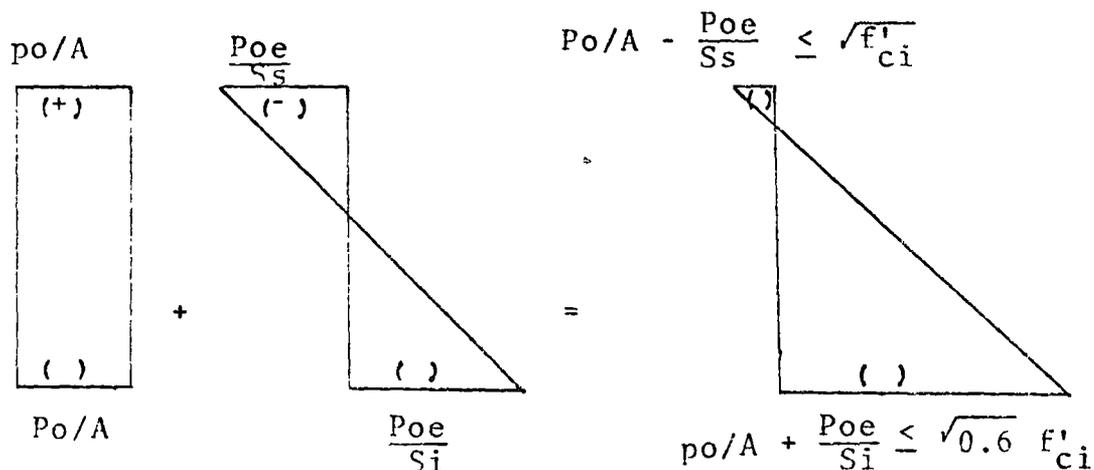
$r$  = RADIO DE GIRO =  $\sqrt{\frac{I}{A}}$

LA ECUACION (1) RESULTA:

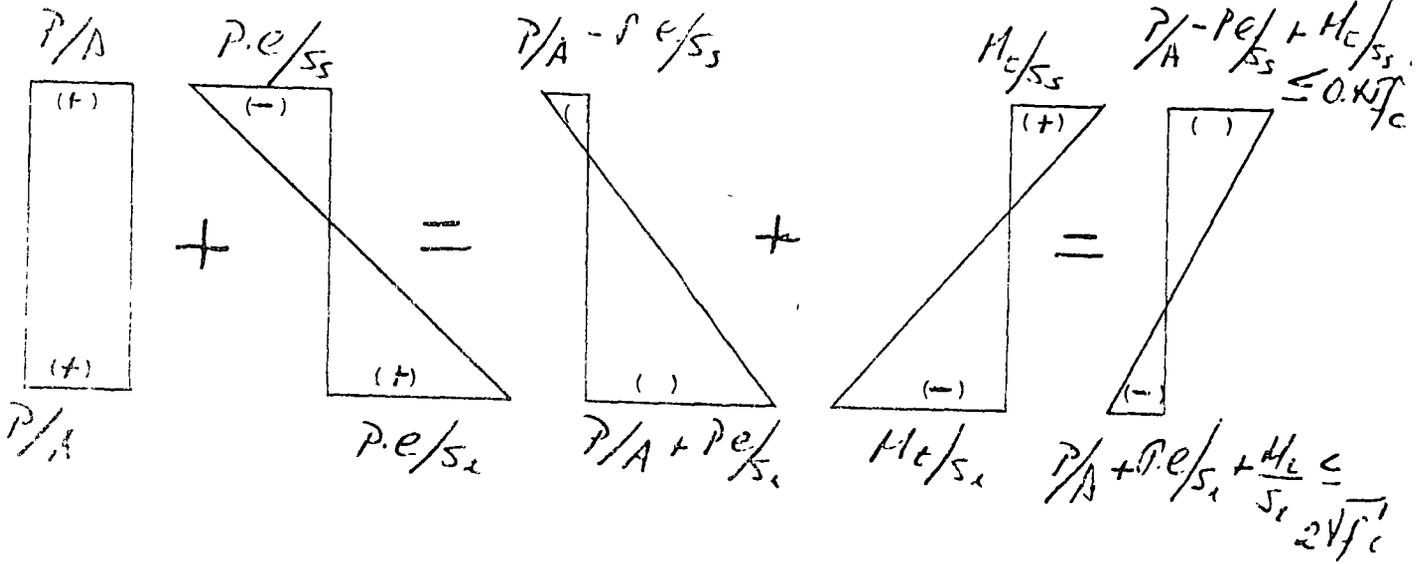
$$f_{i,s} = \frac{P}{A} \left[ 1 \pm \frac{e}{r^2} y_{i,s} \right] \pm \frac{M_r}{S_{i,s}}$$

#### 4.3.2.3.- DIAGRAMAS

##### 1.- PARA EL APOYO

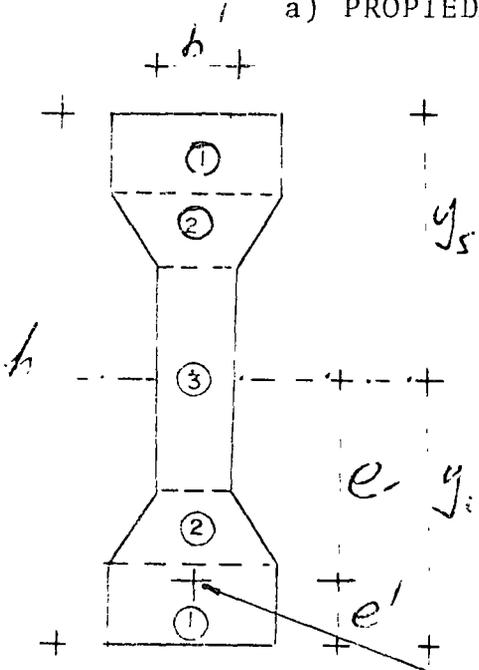


2.- EN EL CENTRO DEL CLARO



4.- DIMENSIONAMIENTO

a) PROPIEDADES GEOMETRICAS



Elem	AREA	$\bar{y}$	$A\bar{y}$	$d$	$d^2$	$A d^2$	$\bar{I}$
①							
②							
③							
④							X
$\Sigma$							

DONDE:  $A_c = (n-1)A_s = \textcircled{4}$

- $A_c$  = AREA DE CONCRETO DEL ACERO DE PRESFUERZO
- $n$  = RELACION MODULAR =  $\frac{E_s}{E_c}$
- $A_s$  = AREA DE ACERO DEL PRESFUERZO

b) CARGAS EXTERIORES (CAPACIDAD DE LA SECCION)

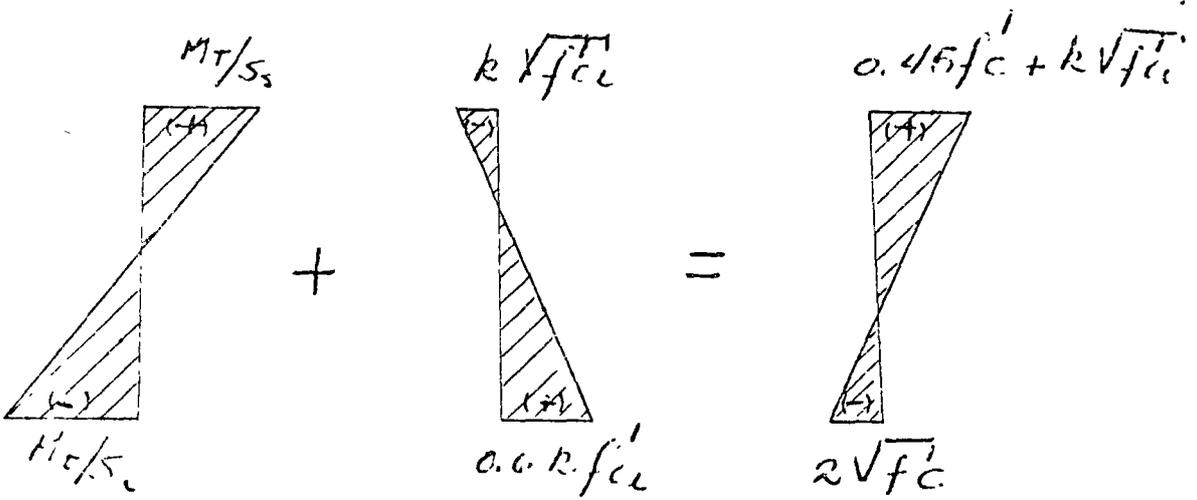
TRABAJANDO SOLO EN TERMINOS DE PRESFUERZO EFECTIVO (P) y  $S_i$

$$K = \frac{P}{P_0}$$

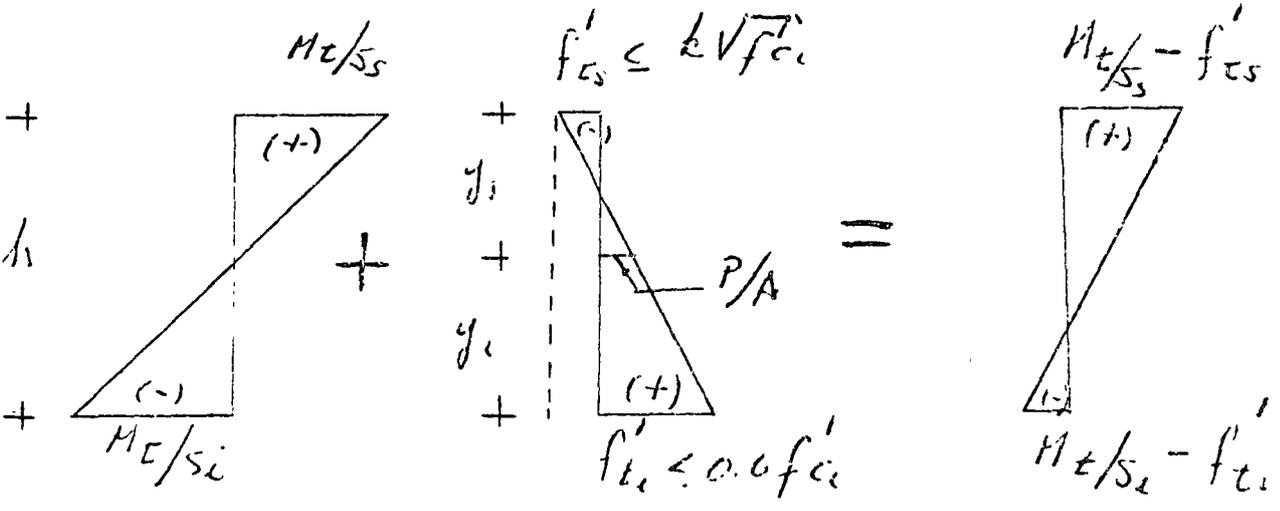
$$f_i = \frac{M_T}{S_i} \leq 0.6 K f'_{ci} + 2\sqrt{f'_c}$$

$$f_s = \frac{M_T}{S_s} \leq 0.45 f'_c + K\sqrt{f'_{ci}}$$

PARA LA SECCION LIMITE:



c) EN GENERAL



POR TRIANGULOS SEMEJANTES

$$\frac{P/A + f'_{ts}}{y_s} = \frac{f'_{ts} + f'_{ti}}{h}$$

$$P/A = \frac{y_s}{h} ( f'_{ts} + f'_{ti} ) - f'_{ts}$$

$$P = \frac{y_s}{h} A ( f'_{ts} + f'_{ti} ) - f'_{ts} A$$

COMO  $f'_{ti}$  ES EL ESFUERZO DE PRESFUERZO EN LA FIBRA INFERIOR SE TIENE:

$$f'_{ti} = \frac{P}{A} + \frac{Pe}{S_i}$$

PODEMOS ENCONTRAR LA EXCENTRICIDAD TEORICA (e), DEL PRESFUERZO

$$\frac{Pe}{S_i} = f'_{ti} - \frac{P}{A}$$

$$e = \frac{S_i}{P} ( f'_{ti} - \frac{P}{A} )$$

## EJEMPLO

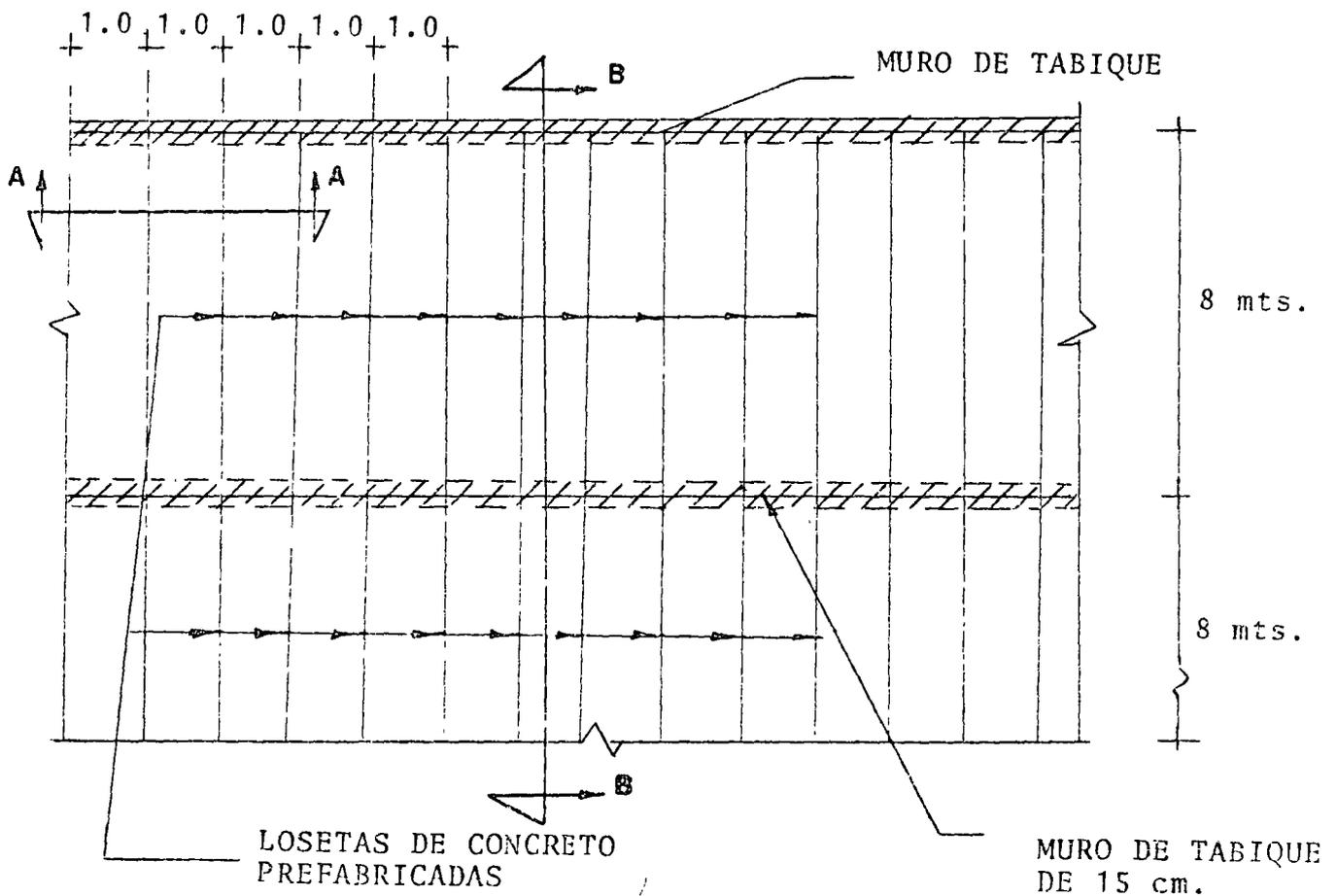
DISEÑO DE UN ELEMENTO DE LOSA DE CONCRETO PRESFORZADO A FLEXION.

### a) CARACTERISTICAS GENERALES:

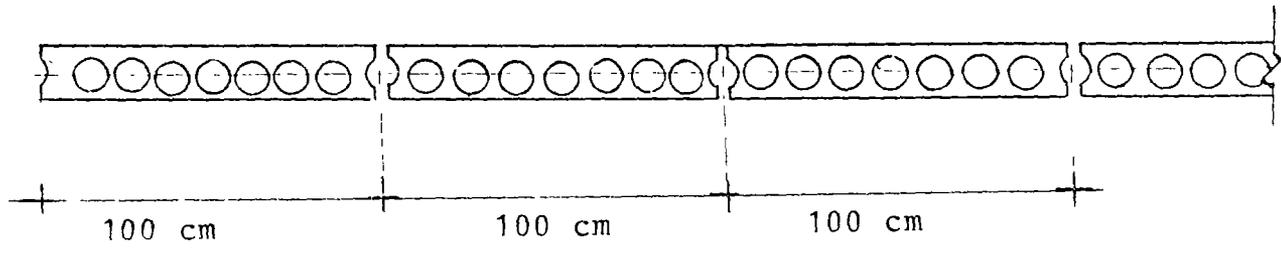
#### 1-a) CARGAS

CARGA MUERTA	150 kg/m <sup>2</sup>
CARGA VIVA	200 kg/m <sup>2</sup>

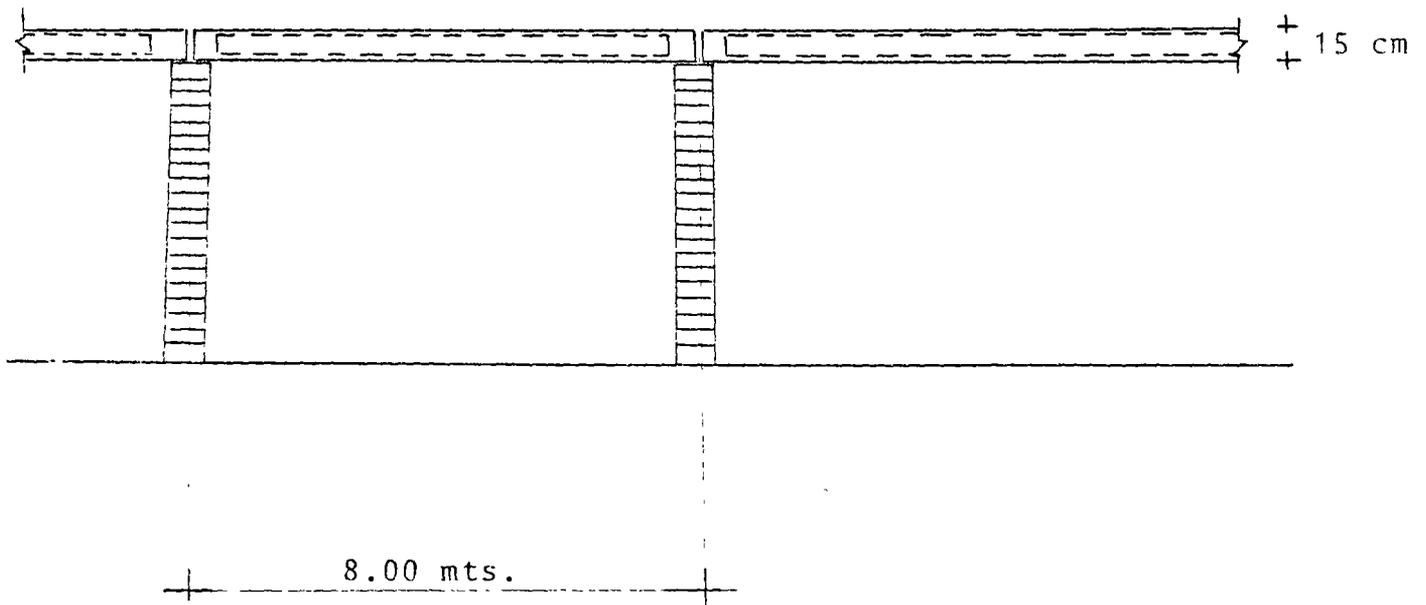
#### 2-a) CONDICIONES DE ESTABILIDAD



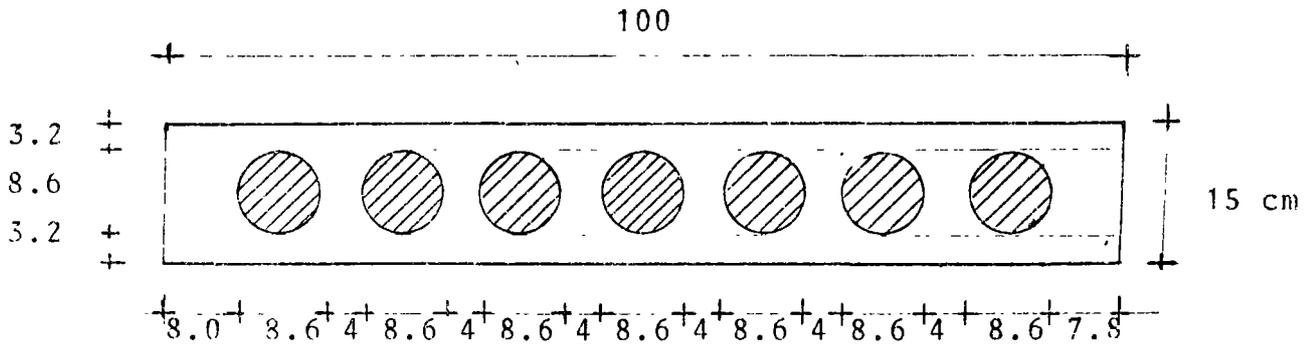
CORTE A-A



CORTE B-B



## b) CALCULO DE LAS PROPIEDADES GEOMETRICAS



$$\text{AREA} = 15 \times 100 - 7 \frac{\pi \times 8.6^2}{4} = 1500 - 406$$

$$\text{AREA} = 1094 \text{ cm}^2$$

EL MOMENTO DE INERCIA ES:

$$I_T = \frac{bh^3}{12} - 7 \frac{\pi D^4}{64} = \frac{100 \times 15^3}{12} - 7 \frac{\pi \times 8.6^4}{64}$$

$$I_T = 28100 - 1880 = 26,220 \text{ cm}^4$$

$$y_i = y_s = 7.50 \text{ cm}$$

$$S_i = S_s = \frac{I_T}{y_i} = \frac{26.220}{7.50}$$

$$S_i = S_s = 3440 \text{ cm}^3$$

## c) MATERIALES

## c-1) ACERO DE PRESFUERZO TORON Ø 3/8"

$$f_{s_r} = 18,000 \text{ kg/cm}^2 ; f_{s_r} \approx 9300 \text{ kg.}$$

$$\text{AREA} = 0.516 \text{ cm}^2$$

PRESFUERZO EFECTIVO P=5200 kg.

## c-2) CONCRETO

$$f'_c = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{y } f'_{ci} = 0.8 f'_c$$

$$f'_{ci} = 240 \text{ kg/cm}^2$$

## d) ELEMENTOS MECANICOS

## d-1) MOMENTO POR CARGAS EXTERIORES

CARGAS

$$\text{C.M.} \quad 150 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{C.V.} \quad \underline{200} \text{ kg/m}^2$$

$$\Sigma 350 \text{ kg/m}^2$$

COMO LA LOSA TIENE UN ANCHO DE UN METRO

$$\text{SU } \omega = 350 \times 1 = 3.50 \text{ kg/m}$$

COMO EL CLARO ES DE 8 mts.

SU MOMENTO VALE:

$$M_{\text{c}} = \frac{\omega L^2}{8} = \frac{350 \times 64}{8} = 2800 \text{ kg x m}$$

d-2) CALCULO DEL MOMENTO POR PESO PROPIO

$$\omega = \text{AREA} \times \rho_{\text{CONCRETO}}$$

$$\omega = 0.1094 \times 2400 = 263 \text{ kg/m}$$

SU MOMENTO EN EL CENTRO DEL CLARO ES:

$$M_{\text{c}} = \frac{263 \times 64}{8} = 2104 \text{ kg x m}$$

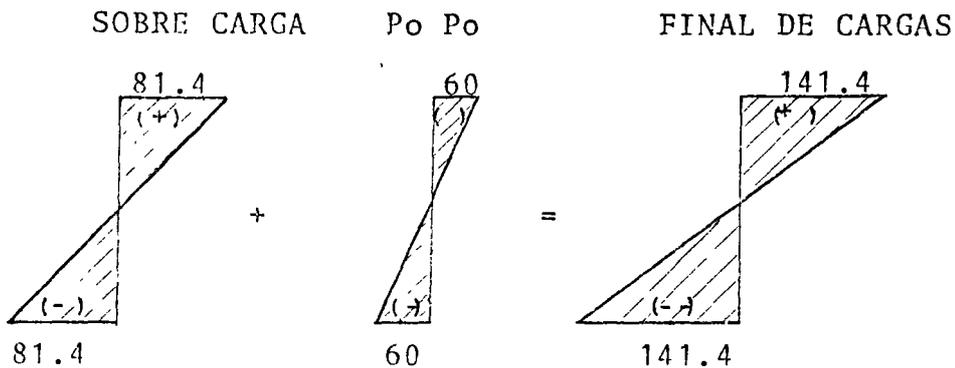
d-3) ESFUERZOS PRODUCIDOS POR SOBRE CARGA

$$\text{COMO } f_{\text{s}} = f_{\text{i}} = \frac{M_{\text{c}}}{S_{\text{i}} \delta} = \frac{280000}{3440} = 81.4 \text{ kg/cm}^2$$

d-4) ESFUERZOS POR PESO PROPIO

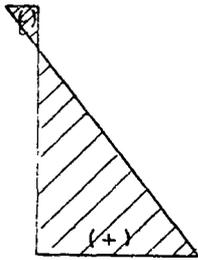
$$f_{\text{s}} = f_{\text{i}} = \frac{210400}{3440} = 60 \text{ kg/cm}^2$$

d-5) DIAGRAMAS:



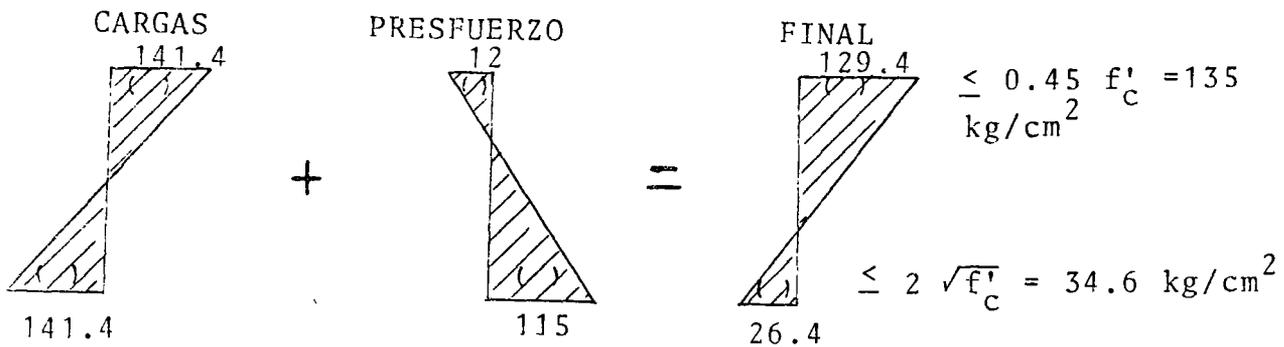
COMO EL PRESFUERZO LIMITE ES:

$$K \sqrt{f'_{c_i}} = 0.8 \times \sqrt{240} = 12.4 \doteq 12 \text{ kg/cm}^2 \text{ (TENSION)}$$

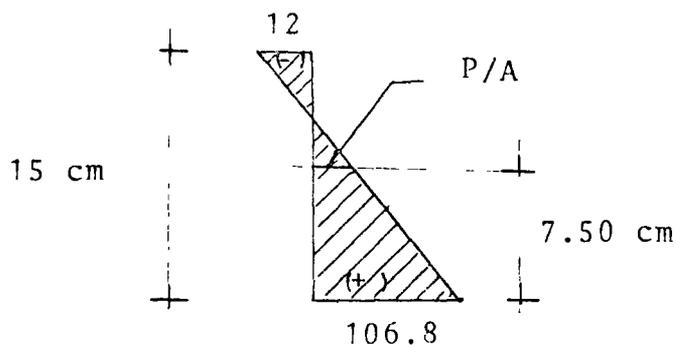


$$0.6 K f'_{c_i} = 0.6 \times 0.8 \times 240 = 115 \text{ kg/cm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

LA DIFERENCIA DE LOS 2 DIAGRAMAS TIENE QUE SER IGUAL O MENOR QUE:



∴ TOMAREMOS EL DIAGRAMA DE PRESFUERZO MINIMO PARA LA FIBRA INFERIOR SERA:  $141.4 - 34.6 = 106.8 \text{ kg/m}^2$



CALCULANDO EL ESFUERZO DEL PRESFUERZO EN EL CENTROIDE SE TIENE:

$$\frac{106.8 + 12}{15} = \frac{P/A + 12}{7.50} ; \frac{P}{A} = \frac{7.50}{15} (118.8) - 12$$

$$\therefore \frac{P}{A} = 47.4 \text{ kg/cm}^2 \text{ (COMPRESION)}$$

\therefore LA FUERZA DE PRESFUERZO ES:

$$P = 47.4 \times 1094 = 51\,855.6 \text{ kg.}$$

COMO LA CAPACIDAD DEL TORON  $\emptyset$  3/8" ES:

$$f_{sr} = 18000 \text{ kg/cm}^2 \quad A = 0.516 \text{ cm}^2 ; f'_s = 0.7 \times 18000 = 12600 \text{ kg/m}^2$$

$$P = 12600 \times 0.516 \times 0.8 = 5200 \text{ kg.}$$

$$\text{No. TORONES} = \frac{51855.6}{5200} = 9.97 \text{ TORONES}$$

TOMAREMOS 10 TORONES  $\emptyset$  3/8"

$$\therefore P = 10 \times 5200 = 52000 \text{ kg}$$

CALCULANDO LA EXCENTRICIDAD TEORICA:

$$e = \frac{S_i}{P} \left( f'_{ti} - \frac{P}{A} \right)$$

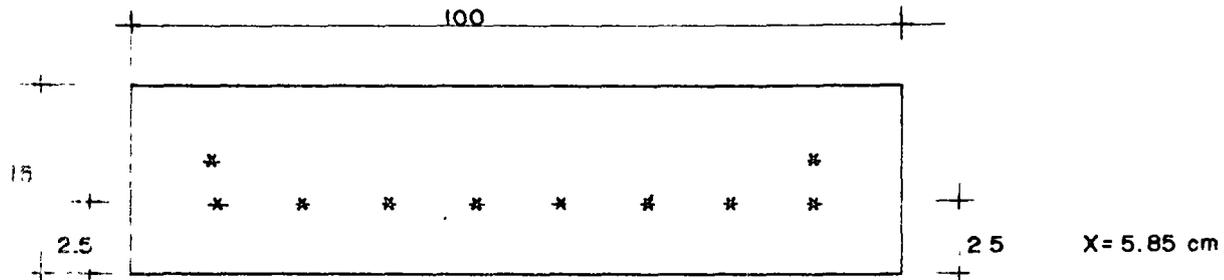
$$e = \frac{3440}{52000} (106.8 - 47.4)$$

$$e = 3.93 \text{ cm}$$

$$e' = y_i - e = 7.50 - 3.93$$

$$e' = 3.57 \text{ cm}$$

CONSIDERANDO LA SIGUIENTE DISTRIBUCION

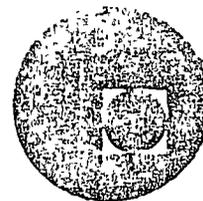


OBTENIENDO EL VALOR DE :  $x$

$$\frac{8 \times 2.5 + 2x}{10} = 3.57; x = \underline{5.85 \text{ cm}}$$



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

TEMA: ESTADOS LIMITES DE SERVICIO

ING. JOSE MARIA RIOBOO MARTIN

MARZO-ABRIL 1978.

JOSE MA: RIOBOO MARTIN.

#### 4.3. ESTADOS LIMITES DE SERVICIO

##### INTRODUCCION:

En este capítulo se revisarán las condiciones que deben cumplir los elementos o las estructuras de concreto presforzado bajo las sollicitaciones usuales, llamadas condiciones de servicio.

En cualquier estructura las condiciones de servicio se limitan a comparar las respuestas de la estructura con ciertos límites establecidos por los Reglamentos, las respuestas son: las deformaciones, el agrietamiento, la durabilidad, la vibración etc. en este curso solo abordaremos las dos primeras ya que la durabilidad y la vibración en la actualidad se tiene poco conocimiento de dichos temas y se restringe a la comparación con estructuras semejantes que actúan bajo condiciones similares.

##### 4.3.1 DEFLEXIONES

Aunque la propuesta al Reglamento de Construcciones del D.F. no especifica un criterio para evaluar las deformaciones en elementos de concreto presforzado, el cálculo de deformaciones se traduce a verificar la respuesta de elementos de concreto reforzado al cual se le añade el efecto de la fuerza de presfuerzo; éste generalmente deberá contrarrestar las deformaciones debido a la acción de las cargas. La deformación instantánea de un elemento de con-

...

creto presforzado deberá ser igual a:

$$\Delta_i = k_1 \frac{P \cdot e L^2}{EI} - k_2 \frac{W L^2}{EI}$$

en donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes que determinan las condiciones de apoyo y carga del elemento.

P es la fuerza de presfuerzo

e la excentricidad de la fuerza de presfuerzo respecto al eje neutro del elemento.

L el claro

W la carga total en la trabe bajo condiciones de servicio

E. el módulo de elasticidad del concreto

I el momento de inercia de la sección transversal de la viga

A diferencia con el concreto reforzado y en condiciones normales el momento de inercia es constante a lo largo de la viga y debe corresponder al momento de inercia de la sección maciza, ya que los esfuerzos producidos por el presfuerzo se encargan de contrarrestar las tensiones y el agrietamiento de la misma debido a las cargas. La dificultad para la evaluación de las deformaciones en los elementos de concreto presforzado lo constituyen los valores de (P) y de (E) ya que estos son variables, la fuerza de presfuerzo está en función de los acortamientos a largo plazo del elemento o sea a las pérdidas de presfuerzo y por otra parte existe una variación importante debido a la relación entre el tiempo en que el elemento presforzado se mantiene en los patios de almacenamiento solo sujeto a su peso propio, y el tiempo en que se le aplican las cargas totales de servicio.

De igual forma que en el concreto reforzado el valor (E) es variable y depende del nivel de cargas, de la edad del concreto en que se aplica la carga, la relación agua-cemento, el tipo de agregados y fundamentalmente del valor de  $\sqrt{f'_c}$

La evaluación de las deformaciones a largo plazo se complican debido a que la magnitud de la fuerza de presfuerzo no es constante la cual tiene una variación cuyo valor máximo es la fuerza de presfuerzo inicial y con un mínimo igual al presfuerzo efectivo con la complicación de que dicha fuerza actúa bajo resistencias variables del concreto con un valor mínimo  $f'_{ci}$  (resistencia a la transferencia) a un máximo de  $f'_c$

Por lo anterior existen varios criterios para calcular las deformaciones en elementos de concreto presforzado; algunos de ellos resultan muy laboriosos debido a que se basan en tomar en cuenta la interacción que existe entre la fuerza de presfuerzo y las pérdidas.

Un criterio razonable y simplista podría ser calcular las máximas y mínimas deformaciones que pueden aparecer en un elemento de concreto presforzado de acuerdo con las condiciones más favorables y desfavorables que representen; esto es, por una parte verificar las contraflechas máximas en función de la fuerza de presfuerzo inicial, el módulo de elasticidad correspondiente al concreto a la edad de la transferencia y considerar la mínima carga de servicio actuando bajo un módulo de elasticidad correspondiente a un  $f'_c$ . Por otra, calcular las deformaciones considerando la fuerza de presfuerzo efectiva y la máxima carga de servicio probable, ambas tomando en cuenta el módulo de elasticidad de  $f'_c$

Con este criterio se podrá obtener el rango de valores, en los cuales se conocen sus valores extremos; como las deformaciones es un aspecto que no interviene en la resistencia de los elementos, se procurará que el rango de valores calculados no sobrepase de los límites permisibles establecidos.

Los efectos de larga duración se tomarán en cuenta en función de la permanencia o no de las cargas que actúan en el elemento, para esto se podrá utilizar el mismo criterio que para los elementos de concreto reforzado, esto es, calcular las deflexiones adicionales multiplicando la deformación inmediata calculada de acuerdo con lo anterior para la carga sostenida por el factor:

$$\left[ 2 - 1.2 \left( A'_S / A_S \right) \right] \geq 0.6$$

#### 4.3.2. AGRIETAMIENTO:

Se tienen escasos conocimientos para evaluar directamente el agrietamiento en elementos de concreto presforzado. Cuando se sobrepasa el módulo de rotura en los elementos de concreto presforzado el agrietamiento suele ser notorio debido a la alta resistencia de los aceros de presfuerzo. Se ha demostrado empíricamente que si se combina el acero de presfuerzo con un bajo porcentaje de acero ordinario el agrietamiento mejora notablemente y puede llegarse a admitir hasta dos o dos veces y media el módulo de rotura del concreto sin que el elemento acuse un agrietamiento intolerable.

Por otra parte el permitir algún agrietamiento en elementos de concreto presforzado, depende de la relación entre el momento de carga viva y el momento total, cuando esta relación sea alta no sola -

mente es factible sino recomendable admitir esfuerzos de tensión importantes en el concreto, ya que por el contrario existe la inconveniencia de diseñar elementos de concreto presforzado con -- contraflechas permanentes exageradas. Así mismo si la relación de momento de carga viva a momento total es bajo es recomendable no admitir esfuerzos de tensión que excedan al momento de agrietamiento bajo cargas permanentes ya que el acero de presfuerzo por ser un acero de alta resistencia obtenido del proceso de estirado en frío, tiene muy poca defensa a la corrosión.

El Reglamento del D.F. propone una forma indirecta para garantizar que el agrietamiento no sea excesivo así como limitar las -- pérdidas por flujo plástico manteniendo los esfuerzos en el concreto bajo condiciones de servicio; este procedimiento permite -- revisar los esfuerzos bajo condiciones de servicio empleando la teoría elástica del concreto y la sección transformada, o sea añadir al momento de inercia del concreto macizo la presencia del -- acero. Con este criterio se limitan los esfuerzos a los siguientes valores:

a) Esfuerzos permisibles en el concreto de elementos presforzados.

Esfuerzos inmediatamente después de la transferencia y antes que ocurran las pérdidas por contracción y flujo plástico:

compresión	$0.60 f'_{ci}$
tensión en miembros sin refuerzo en la zona de tensión	$\sqrt{f'_{ci}}$ (en $\text{kg/cm}^2$ )

....

Cuando el esfuerzo de tensión calculado exceda de este valor, se suministrará refuerzo para que resista la fuerza total de tensión del concreto, valuada en la sección sin agrietar.

En las expresiones anteriores,  $f'_{ci}$ , en  $\text{kg/cm}^2$ , es la resistencia a compresión del concreto a la edad en que ocurre la transferencia. Esta tiene lugar en concreto pretensado cuando se cortan los tendones o se disipa la presión en el gato, o, en postensado, cuando se anclan los tendones.

Esfuerzos bajo cargas muerta y viva de servicio: /

Compresión	$0.45 f'_c$
Tensión	$2 \sqrt{f'_c}$ (en $\text{kg/cm}^2$ )

Estos valores pueden excederse siempre que se justifique que el comportamiento estructural del elemento es adecuado.

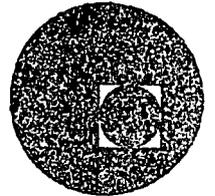
b) Esfuerzos permisibles en el acero de presfuerzo

Debidos a la fuerza aplicada por el gato	$0.80 f_{sr}$
Inmediatamente después de la transferencia	$0.70 f_{sr}$

En estas expresiones  $f_{sr}$  es el esfuerzo resistente nominal del acero de presfuerzo.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

TEMA: OPTIMIZACION DE SECCIONES

ING. JOEL PONSODA SELLES

MARZO-ABRIL, 1978.

## 10 - 1 DIFERENTES TIPOS DE SECCIONES USUALES

### 10-1-1 Criterios de formas de secciones transversales

#### 10-1-11 Resistencia a flexión y cortante

La resistencia a flexión ( $\frac{I}{V_s}$  y  $\frac{I}{v_i}$ ) debe ser lo más grande con la cantidad mínima (área) y peralte minimum (h). Es decir que el rendimiento " $\rho$ " debe ser lo más alto posible; entonces, por eso, concentrar el concreto en 2 patines opuestos.

El valor maximum de  $\rho = \frac{I}{S V_s V_i}$  ( $= 1$ ) es obtenido concentrando el concreto en 2 patines muy finos ligados entre ellos por una alma muy fina.

Pero se debe ligar los 2 patines por una alma que impide el desplazamiento relativo. Esta alma debe resistir entonces al esfuerzo de corte longitudinal y por consecuencia al esfuerzo de corte transversal o sea Cortante.

Lo que aclara la forma de vigas en I o cajones, constituidos por 2 patines ( que dan la mayor parte de resistencia a flexión) ligados por una o más almas (que aseguran la resistencia al cortante).

#### 10-1-111 Construcción de las almas

- a) Para obtener el mejor rendimiento " $\rho$ " entonces la más grande resistencia a flexión, se debe reducir al maximum el ancho de las almas.

b) La solución ideal por eso es de constituir las vigas en forma de cercha, pero es una solución costosa por su complicación. Es utilizada en casos particulares como:

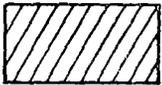
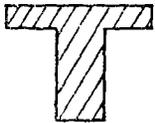
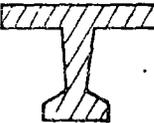
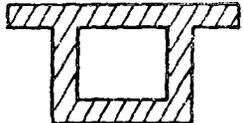
- vigas ligeras de edificios con peralte grande ( vigas de techo )
- vigas de grande claro por las cuales se debe disminuir al máximo el peso propio.

c) Las almas son, en la práctica, llenas con espesor mínima "a" fijada por:

- condiciones de resistencia al cortante
- y condiciones prácticas de colado

10-1-112 Espesor mínima (ver §22.23 Disposición de cables en almas)  
de las almas ( fig. 8 bis)

10-1-113 Orden de magnitud del rendimiento de secciones

	Rectangular	T	I	Cajón Fino
Sección				
e	1 / 3	≈ 0,4	≈ 0,5 a 0,55	≈ 0,6

10-1-12 Resistencia a la torsión

10-1-121 Características a torsión de secciones

a) Secciones rectangulares  $b \times h$  con  $h > b$

- Momento de inercia a torsión:  $J = \lambda b^3 \times h$
- Esfuerzo de corte máximo, debido a un cople  $M_t$ , en el medio del mas grande lado  $h$   $\sigma = \frac{M_t}{\lambda' b^2 \times h}$

$h/b$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10.0	$\infty$
$\lambda$	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333
$\lambda'$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333

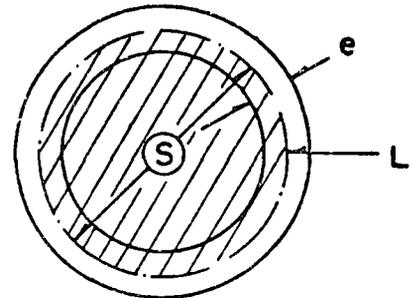
b) Secciones abiertas, compuestas de rectángulos finos

$$J = \sum_i \frac{h_i \times (b_i)^3}{3} \text{ con } h_i \gg b_i$$

c) Losa  $J = \frac{h (b)^3}{3}$

d) Cajón cerrado, cuyo espesor de pared es fina, y cuya fibra media, de longitud  $L$ , cierra la sección  $S$

$$J = \frac{4 S}{\int \frac{dL}{e}}$$



e) Módulo de elasticidad transversal :  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

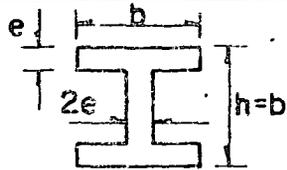
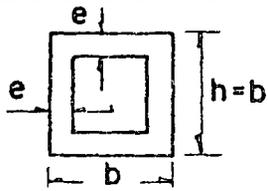
coeficiente de Poisson comprendido entre 0,15 y 0,25

10-1-122 Consecuencias

- a) Para obtener una buena resistencia a torsión se debe emplear secciones transversales cerradas (secciones llenas o cajones)

Ejemplo: Sean 2 secciones de mismos peraltes y ancho y misma área diferentes por la forma:

suma en I - la otra en cajón

Sección	Inercia de Torsión	Esfuerzo de Corte
I	 $J = \frac{10}{3} b e^3$	$\tau = 0,6 \frac{M_t}{b e^2}$
Cajón con Paredes Finas	 $J' = e b^3$	$\tau' = 0,5 \frac{M_t}{e b^2}$

Como por ejemplo  $e = \frac{b}{10}$   $J' = 30 J$   $\tau' = \frac{\tau}{6}$

La sección en cajón gira 30 veces menor, y tiene 6 veces menor de esfuerzo de corte.

- b) Para las vigas que deben soportar solicitaciones de torsión importantes (vigas curvas, o desviadas), es conveniente de darlas secciones cerradas. Pero se debe anotar que dando más rigidez a torsión a la viga, se aumenta la sollicitación a torsión.

10-1-2 Secciones rectangulares

10-1-21 Losas llenas

La sección rectangular es la más económica respecto a la cimbra y el colado. Permite además de tener el peralte minimum. Tiene una gran rigidez a torsión y una gran resistencia al cortante. Se necesita pocos estribos.

La losa llena, robusta y fácil de ejecución conviene muy bien para puentes chicos cuyo claro varía entre 15 y 25 m, con peralte

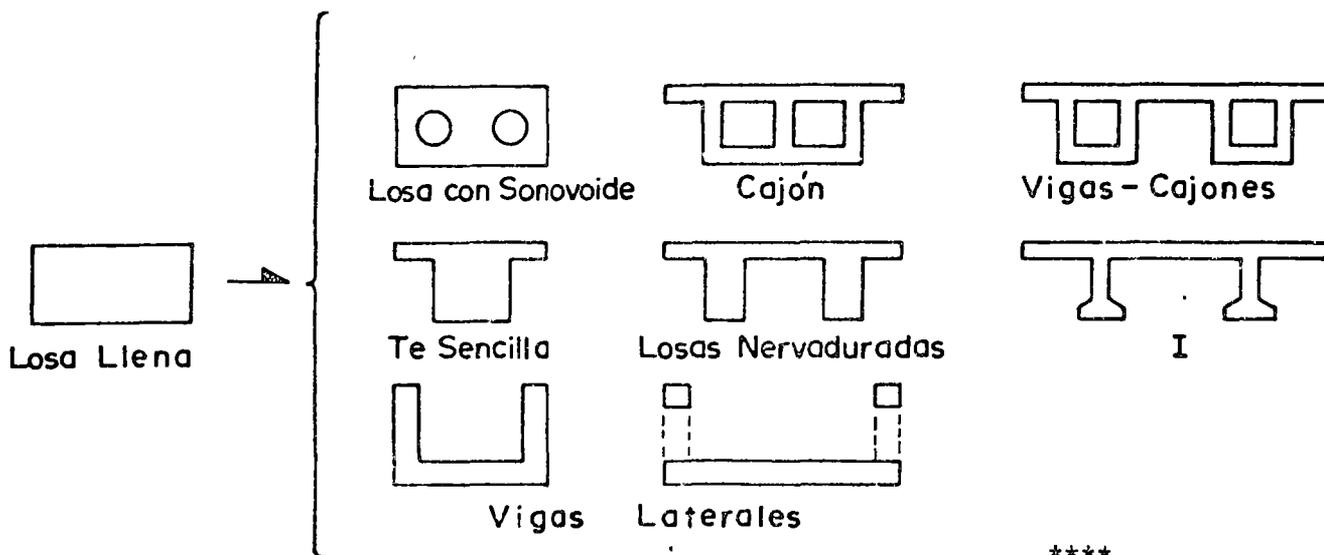
$$h = \frac{l}{30}$$

10-1-22 Losas aligeradas

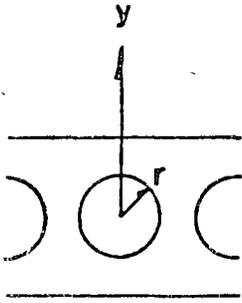
La sección rectangular llena es demasiado pesada para claros grandes (sobrepasando el "claro crítico ": su peso propio cuesta como la carga de servicio). Además su rendimiento es muy bajo.

Es interesante de quitar concreto para elegir la sección sea:

- en el centro: losa con alveoles (sonovoides); cajones
- abajo de la sección: losa nervadurada
- en la parte superior de la sección y en la zona central con dos vigas laterales



\*\*\*\*



Quitar el concreto en el centro de la sección permite aligerar sin prácticamente reducir su resistencia: el concreto quitado tiene brazos de palanca a flexión (y) y en torsión (r) muy bajos.

Teóricamente esa solución parece perfecta. Pero esas alveolas son muy costosas:

- en cimbra interior perdida, que debe ser:
  - suficientemente rígida para no deformarse
  - sólidamente fijada para no hundir bajo el peso del concreto
  - sólidamente fijada para no flotar bajo la vibración del concreto
  - impermeabilización para no absorber la lechada
- en armado pasivo:
  - en el surtido transversal, trabaja como viga Virendel, para resistir a las flexiones " secundarias" importantes. Se debe además colocar estribos entre las alveolas, y tirantes sobre ellas.

Además el colado es delicado bajo las alveolas. Las chimeneas deben ser suficientemente amplias para facilitar la vibración.

En conclusión, esa solución debe ser reservada a casos especiales: como claros grandes con peralte pequeño (sea para puentes de ca-

rretera	20	<	$\ell$	<	35 m
con	25	<	$\frac{h}{h}$	<	35 m

10-1-3 Vigas -Cajones

10-1-31 Empleo de vigas - cajones

- cuando las vigas son sometidas a torsión
- vigas paralelas deben tener patines inferior importantes.  
En este caso mejor vale distribuir en losas inferiores entre vigas
- vigas con peralte limitado (para puentes :  $h < \frac{l}{25}$  )
- secciones sometidas a momentos negativos importantes:

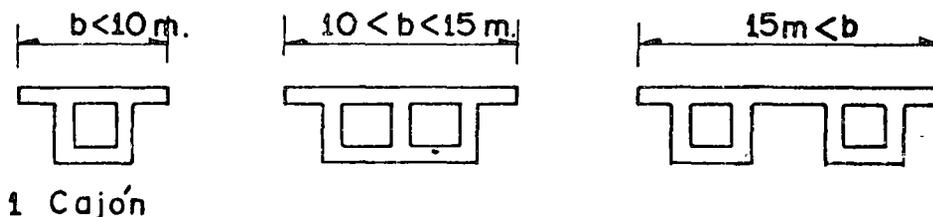
Ejemplos:

- zonas de apoyos intermedios de tramos continuos ( o cantilever )
- puentes en doble voladizo: en construcción todo el peso propio se toma en voladizo.

#### 10-1-32 Tipos de secciones transversales

Cuando se reduce el número, n, de las almas (de espesor a) n x a disminuye; en este caso el claro transversal de la losa superior aumenta y entonces aumentan también su espesor y armado.

El optimum en el caso de los puentes de carretera es:



#### 10-1-33 Determinación de la sección

- losa superior - por flexión transversal
- losa inferior - por compresión (espesor). En caso que contiene cables  $e = 3 \emptyset$ ,  $\emptyset$  diámetro del ducto del cable; e espesor de la losa.

- Almas. Espesor determinada por:
  - condiciones de colado
  - resistencia al cortante
  - resistencia bajo el anclaje de presfuerzo
  
- se inclinan las almas algunas veces - por estética
  - para aumentar el espesor de la losa inferior reduciendo el claro de esa misma. Pero el colado es más complicado; se debe prever ductos para los vibradores.

#### 10-1-4 Ejemplos de puentes colados en lugar sobre obra falsa

En este caso, el precio de la cimbra es caro. Se debe adoptar formas sencillas ( lo que facilita el colado)

- para claros limitados (inferiores a 40 m en claros continuos) y relación de peralte a claro del orden  $h > \frac{l}{25}$ , se adopta la solución de losa nervadurada con nervaduras<sup>25</sup> rectangulares o trapezoidales.
- para claros más importantes, o peraltes bajos disponibles, se adopta la solución de viga - cajón.

#### 10-1-5 Ejemplos de puentes con traveses prefabricados

Numerosos puentes son constituidos por claros isostáticos de 20 a 50 m. todos idénticos, a base de traveses prefabricados.

El uso del equipo necesario para la colocación de las traveses es económico que si hay muchas traveses ( minimum 15 traveses).

Según las posibilidades del equipo:

- se puede prefabricar elementos muy pesados (claros enteros)
- vigas aisladas
- partes de vigas (más fácil de transportar)

### Forma

El molde sirve para colar muchas trabes; entonces es ventajoso de complicar la forma para ahorrar concreto.

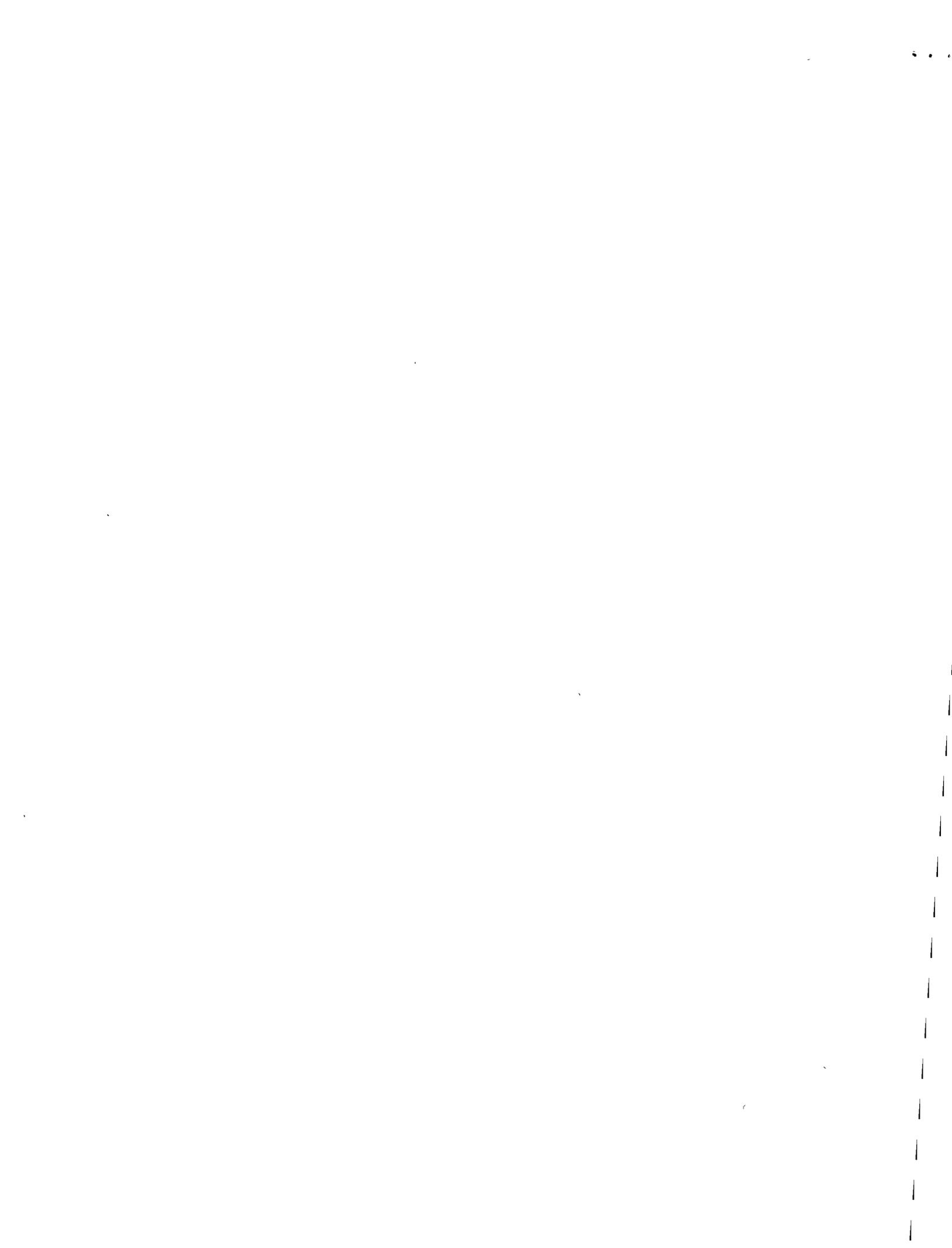
Como se vibra por el exterior su alma puede ser fina.

Se adopta, en general, una forma en I.

El ahorro de concreto disminuye el peso de la viga, facilita la colocación, y disminuye también el número de cables.

### Dimensiones

- Peralte. El valor económico es cerca de  $1/16$  del claro. Puede bajar a  $\frac{l}{20}$ . Después aumentan los cables rápidamente.
- Distancias entre vigas (d) para vigas prefabricadas d puede variar entre 2.75 m y 4 m. (Para puentes colados en lugar d entre 4 y 6 m. el optimum)
- Ancho del patín superior (b) determinado por condiciones de colocación  $b \approx 0,6 h$  o  $\frac{l}{50}$  (peligro de pendeo a la colocación).
- Area del patín inferior - debe ser suficientemente grande para
  - contener todos los cables
  - tener esfuerzos de compresión admisibles durante la construcción





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PREFORZADO

FUERZA CORTANTE

ING. CONSTANCIO RODRIGUEZ C.

MARZO 1978.

*FUERZA CORTANTE EN ELEMENTOS DE  
CONCRETO PREFORZADO.*

*I N D I C E*

- 1. Introducción.*
  
- 2. Comportamiento y modo de falla de elementos de concreto sujetos a fuerza cortante.*
  - 2.1. Comportamiento de elementos de concreto antes del agrietamiento.*
  
  - 2.2. Comportamiento de elementos de concreto después de aparecer las primeras grietas.*
    - 2.2.1. Elementos sin esfuerzo transversal.*
      - Tipos de falla.*
      - Comentarios en relación a fallas por cortante y fallas por flexión.*
  
    - 2.2.2. Elementos con refuerzo transversal.*
      - Tipos de refuerzo transversal.*
      - Contribución del concreto simple.*
      - Contribución del acero de refuerzo transversal.*
      - Contribución del prefuerzo .*

3. Mecanismos de falla en elementos sujetos a fuerza cortante.

3.1. Elementos sin refuerzo transversal.

3.2. Elementos con refuerzo transversal.

4. Factores que influyen en la carga de agrietamiento inclinado.

4.1. Elementos sin refuerzo transversal.

4.2. Elementos con refuerzo transversal.

5. Factores que influyen en la resistencia de elementos presforzados sujetos a fuerza cortante.

5.1. Elementos sin refuerzo transversal.

5.2. Elementos con refuerzo transversal.

6. Resistencia de elementos presforzados sujetos a fuerza cortante según las Normas Técnicas complementarias del Reglamento de Construcción para el Distrito Federal 1977.

7. *Contribución a la resistencia a fuerza cortante de cables de presfuerzo inclinados.*

8. *Ejemplo de aplicación.*

FUERZA CORPANTE EN ELEMENTOS DE  
CONCRETO PREFORZADO.

1. Introducción.

Las estructuras al estar sujetas a agentes externos (acciones permanentes, eventuales y accidentales) presentan diferentes comportamientos o respuestas (agrietamiento, deformaciones, vibraciones) dependiendo principalmente de: Las características geométricas de la sección transversal, las restricciones definidas por los apoyos y la calidad de los materiales empleados.

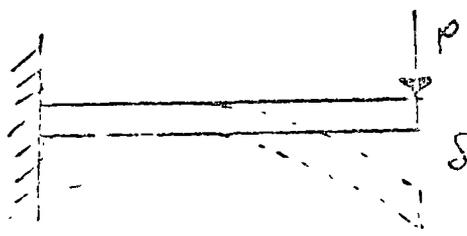
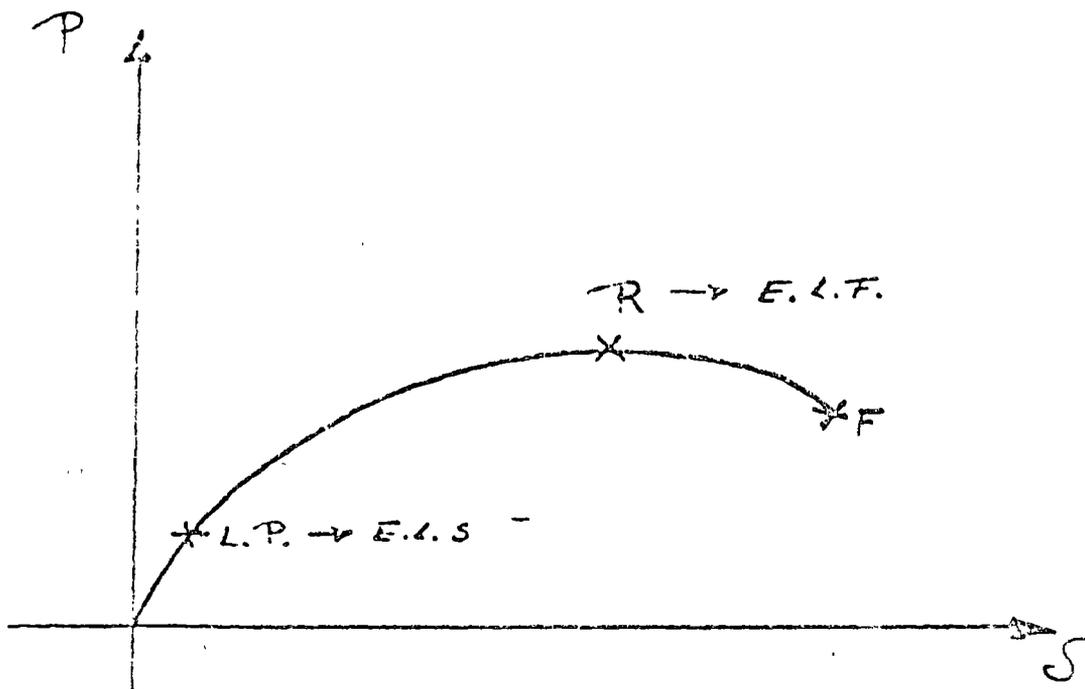
Para predecir el comportamiento de los elementos estructurales se recurre en laboratorio a modelos físicos a escala que permiten conocer las respuestas de las estructuras bajo diferentes condiciones externas, siendo este procedimiento costoso y de difícil realización.

Al diseñar elementos estructurales es conveniente conocer el comportamiento total de elementos y revisar dos etapas del mismo, a saber:

- Estados límites de servicio. E.L.S.

- Estados límites de falla. E.L.F.

El Reglamento del Distrito Federal, define a un estado límite como aquella etapa del comportamiento a partir de la cual una estructura o parte de ella deja de cumplir con una función para la que fué proyectada.



R = Resistencia  
L.P. = Límite de Proporcionalidad

Estados límites de servicio son aquellos que tienen lugar cuando la estructura llega a estados de deformaciones, agrietamiento, vibraciones o daños que afecten su correcto funcionamiento, pero no su capacidad para soportar cargas.

- Estados límites de falla son los que corresponden al agotamiento definitivo de la capacidad de carga de la estructura o de cualquiera de sus miembros o al hecho de que la estructura, sin agotar su capacidad de carga sufra daños irreversibles que afecten su resistencia ante nuevas aplicaciones de carga.

Para revisar los estados límites se pueden emplear procedimientos experimentales o bien métodos analíticos basados en evidencias teóricas y experimentales, siendo éste el procedimiento empleado en la mayoría de los casos, consiste en:

- Determinar mediante un análisis elástico y a partir de las características geométricas de los elementos estructurales y de las sollicitaciones externas, los elementos mecánicos o acciones internas

(fuerza normal, momento flexionante, fuerza cortante y momento torsionante) que se presentan en cada uno de ellos.

- A partir de los elementos mecánicos anteriores y mediante el empleo de las hipótesis simplificadoras diseñar y revisar los elementos estructurales.

Sería deseable contar con un procedimiento para dimensionar estructuras de concreto, que nos permitiera determinar la resistencia de cada uno de sus componentes, sujetos éstos a cualquier combinación de fuerza normal, fuerza cortante, momento flexionante o momento torsionante. Sin embargo el avance actual de nuestros conocimientos y el equipo con el que usualmente se dispone en los despachos de cálculo, no permiten resolver el problema planteado en su forma general y es por ello que se recurre a emplear métodos simplificados que consideran únicamente combinaciones parciales de ciertas acciones internas.

Así anteriormente se estudió el comportamiento y se obtuvo la resistencia de elementos presforzados sujetos a la combinación del presfuerzo y del momento flexionante, haciendo caso omiso de la fuerza cortante y el momento torsionante.

Ahora procederemos a estudiar los efectos de la fuerza cortante sobre elementos de concreto presforzado sometidos simultáneamente a la acción del momento flexionante y del presfuerzo.

En lo que a continuación se señala se considera al concreto presforzado como una modalidad del concreto reforzado con las características propias producidas por el presfuerzo.

## 2. Comportamiento y modo de falla de elementos de concreto sujetos a fuerza cortante.

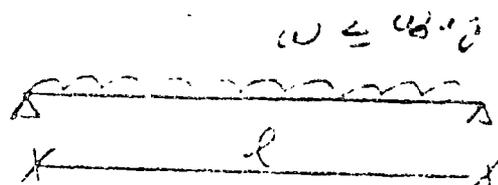
Al analizar el comportamiento de elementos de concreto reforzado o presforzado sujetos a fuerza cortante se pueden observar dos grandes etapas: La del comportamiento del elemento antes de que se presente el aprieteamiento y la del comportamiento -

del elemento después del mismo.

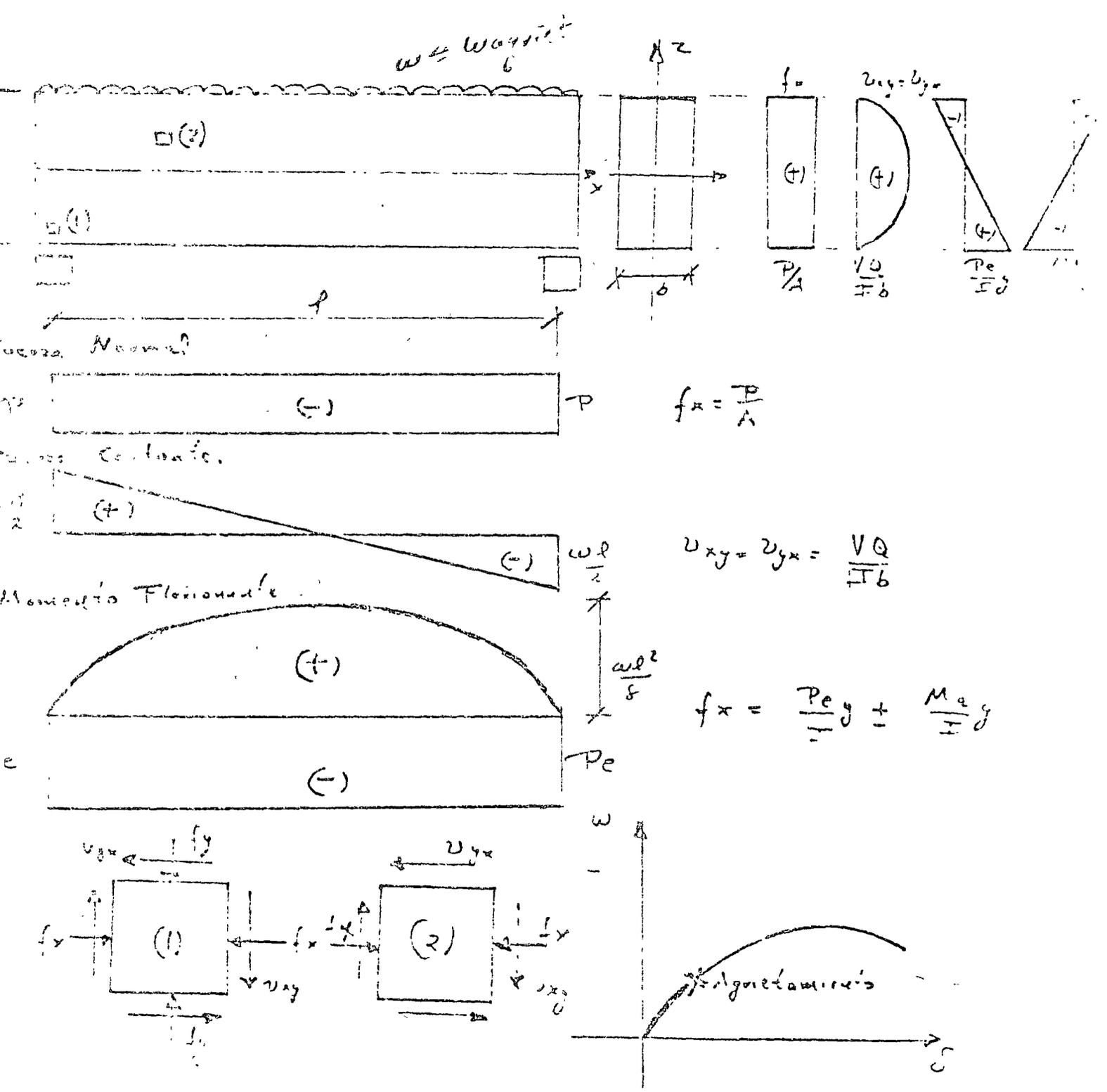
### 2.1. Comportamiento antes del agrietamiento.

Si analizamos el comportamiento de una trabe de concreto reforzado o preforzado sometida a la acción de cargas de baja intensidad que le producen momento flexionante y fuerza cortante antes de la aparición de las grietas de flexión, observamos que este comportamiento elástico es similar al de un material lineal. En este rango es factible determinar los esfuerzos a los que se encuentran sometidas todas las partículas que integran la pieza mediante las fórmulas convencionales de Mecánica de materiales.

Sea una viga de concreto preforzado simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente repartida



# Comportamiento de elementos de Concreto Reforzado a las del Alargamiento



A continuación se presentan los estados de esfuerzos de las partículas mostradas; de esta manera el esfuerzo normal en la dirección del eje longitudinal de la viga  $f_x$  se obtiene mediante la fórmula de la escuadría.

$$f_x = \frac{P}{A} \pm \frac{Pe}{I} y \pm \frac{Ma}{I} y \quad \text{-----} l$$

En que:

$f_x$  = Esfuerzo normal en la dirección  $x$

$P$  = Fuerza del presfuerzo.

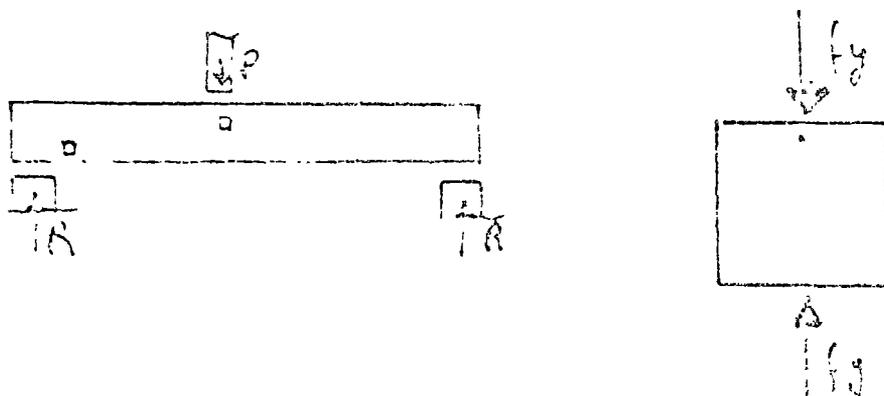
$e$  = Excentricidad

$Ma$  = Momento cortante en condiciones normales de servicio.

$I$  = Momento de inercia de la sección transversal.

$A$  = Area de la sección transversal.

En regiones cercanas a los apoyos y a las cargas concentradas, se presentan además de esfuerzos normales al eje longitudinal de la viga  $f_y$ .



Existen además esfuerzos cortantes en cada uno de los planos que definen a la partícula  $V_{xy}$  y  $V_{yx}$  normales entre sí. Estos esfuerzos se pueden evaluar con la ecuación:

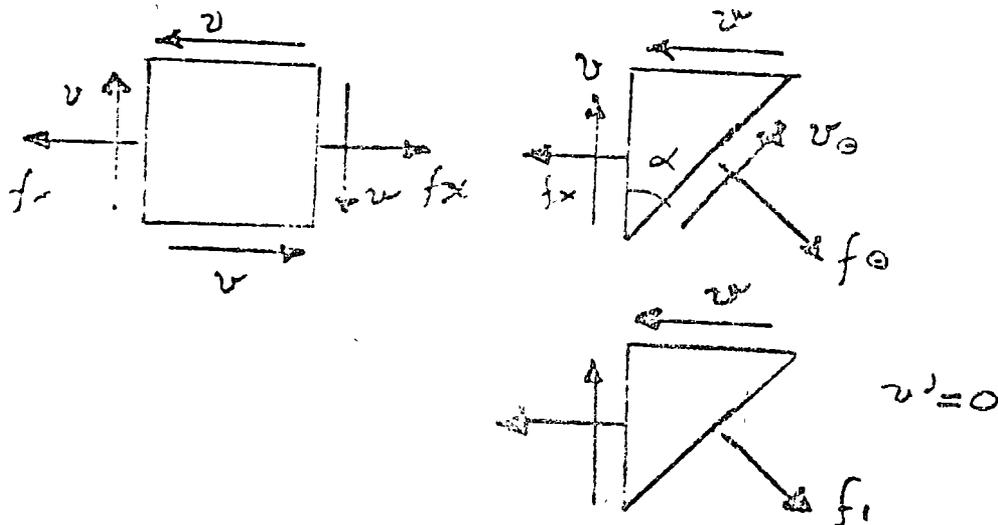
$$V_{xy} = V_{yx} = \frac{VQ}{Ib} \quad \text{-----} \quad 2$$

En el caso particular de vigas de sección rectangular:

$$V_{xy} = V_{yx} = \frac{3}{2} \frac{V}{I} \quad \text{-----} \quad 3$$

Se ha establecido que el estado de esfuerzos en un punto cualquiera queda definido por los esfuerzos normales y tangenciales según dos planos cualquiera perpendiculares entre sí.

En un punto cualquiera de un elemento estructural, es factible establecer un número infinito de planos normales entre sí y definir para cada uno de ellos su estado de esfuerzos respectivo en función de los esfuerzos normales, de los esfuerzos cortantes y del ángulo que formen cada plano con el eje longitudinal del elemento.



Para cada partícula del miembro existe un par de planos en los que el esfuerzo cortante es nulo y en los que se presentan esfuerzos normales; máximo en uno y mínimo en otro. Estos planos se denominan planos de esfuerzos principales.

Los esfuerzos principales se obtienen mediante las ecuaciones:

$$\tan 2\theta = \frac{2v_{xy}}{f_x} \quad (4)$$

$$f_1 = \frac{f_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + v_{xy}^2} \quad (5)$$

$$f_2 = \frac{f_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + v_{xy}^2} \quad (6)$$

Los esfuerzos  $f_1$  y  $f_2$  pueden ser de tensión o de compresión.

En el caso de partículas que presentan únicamente esfuerzos cortantes en los planos definidos por los ejes "X" y "Y" ( $v_{xy}$  y  $v_{yx}$ ) y que se localizan en o abajo del eje neutro, se presenta un esfuerzo principal máximo de tensión en un plano a  $45^\circ$  -- con el eje longitudinal del elemento cuyo valor es igual.

$$f_t = V_{zy} = V_{yx} \quad (7)$$

A estos esfuerzos se les denomina "Esfuerzo de tensión diagonal" y son los que producen las grietas inclinadas o grietas de tensión diagonal que se producen debido a la baja capacidad del concreto a resistir esfuerzos de tensión.

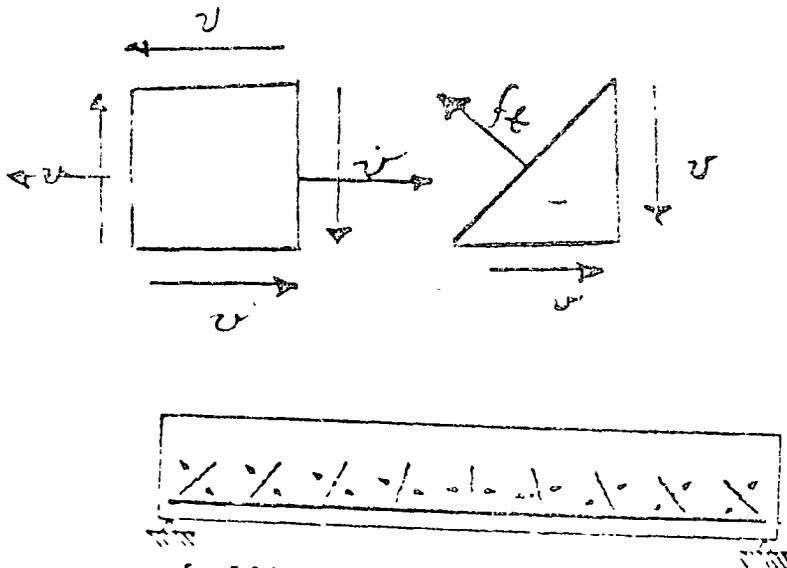


Fig. 532

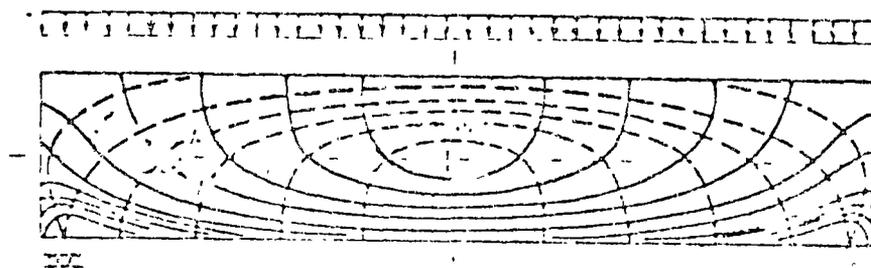
Directions of potential cracks in a simple beam

Si determinamos los esfuerzos principales que se presentan en todos los puntos de los miembros, se pueden trazar redes de esfuerzos de tensión y de compresión definiéndose trayectorias de esfuerzos.

\_\_\_\_\_ Trayectoria de esfuerzo de tensión.

- - - - Trayectoria de esfuerzo de compresión.

El concreto es un material que tiene resistencia considerable a los esfuerzos de compresión y -- cortante directo y muy baja capacidad a la tensión; es por ello que los elementos de concreto tienden a fallar según superficies perpendiculares a las direcciones de las tensiones principales.



Lo anterior hace necesario que se proporcione refuerzo de acero para soportar aquellas tensiones que exceden el valor de la resistencia a tensión -- del concreto.

Anteriormente al estudiar elementos presforzados sujetos a momento flexionante se definió el armado longitudinal que se localiza en la zona inferior de la viga y que resiste los esfuerzos de tensión en las regiones centrales del elemento.

En esta etapa, se observa que debido al efecto de la fuerza cortante se presentan esfuerzos principales de tensión inclinados con respecto al eje longitudinal de la viga. Estos esfuerzos son los que pueden originar la falla del elemento a una carga inferior a la que se produciría la falla de flexión del miembro.

Desde el punto de vista del comportamiento de una viga de concreto reforzado o presforzado es inconveniente que la resistencia de un elemento se deba a una falla por tensión diagonal por ser este tipo de falla de tipo frágil, a diferencia del caso en que juega el acero longitudinal presentándose una falla de tipo dúctil.

Es por ello que conviene estudiar este tipo de falla y evitar que se presente antes de la posible falla por fluencia del acero. Para evitar esta falla es necesario colocar acero transversal en forma de varillas de acero de refuerzo o doble cable de presfuerzo que sigan las trayectorias de esfuerzos o bien para simplificar el procedimiento constructivo, colocar estribos que contribuyan en combinación con el concreto a resistir la fuerza cortante actuante.

Conviene señalar que debido al efecto del presfuerzo, los elementos de concreto presforzado tienen una mayor capacidad para tener fuerza cortante que la de concreto reforzado.

## 2.2. Comportamiento de elementos de concreto después de aparecer las primeras grietas.

Al aparecer las primeras grietas, el comportamiento de los elementos de concreto deja de ser elástico y lineal; y por otra parte, el concreto no es un material homogéneo siendo imposible predecir la localización de las grietas.

Es por ello que para investigar el comportamiento de los elementos de concreto tanto reforzado como presforzado se ha recurrido a ensayos de laboratorio que han permitido establecer también la resistencia de este tipo de elementos.

#### *2.2.1. Elementos sin refuerzo transversal.*

Al estudiar una viga de concreto con refuerzo longitudinal adecuado, se observa que a bajos niveles de carga y antes de que aparezcan las primeras grietas de tensión debidas a la flexión el comportamiento del elemento es esencialmente elástico, sin embargo, si se incrementa la magnitud de las cargas, la fuerza cortante puede originar esfuerzos principales que exceden la resistencia a tensión del concreto produciéndose grietas inclinadas a la mitad del peralte o en las fibras inferiores del elemento. Estas grietas pueden aparecer en puntos en donde no existan grietas a flexión o pueden presentarse como una prolongación de ellas cambiando gradualmente de inclinación.

- Tipos de falla.

a) *Falla de tensión diagonal.*

A partir del momento en que se producen las grietas inclinadas, el comportamiento del elemento difiere del correspondiente a un miembro que falle por flexión. La grieta inclinada puede aparecer súbitamente sin señal previa y extenderse de inmediato hacia arriba y hacia abajo hasta causar el colapso del elemento, este tipo de falla se denomina falla de tensión diagonal. En este caso la carga de agrietamiento inclinado corresponde a la resistencia a fuerza cortante del elemento.

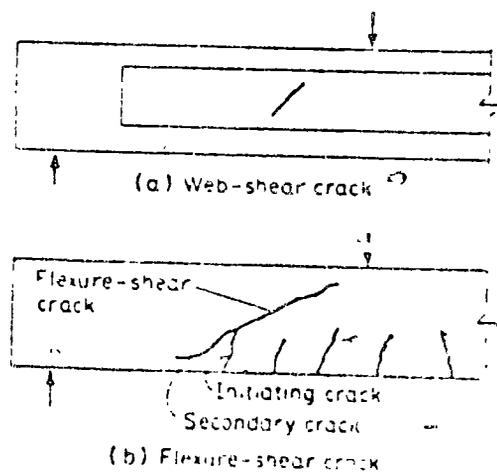


Fig. 5.4.1  
Types of inclined cracks (from Ref. 2).

b) *Falla de compresión por cortante.*

Puede suceder que el agrietamiento inclinado se desarrolle gradualmente y que el colapso de la pieza se produzca finalmente por el aplastamiento de la zona de compresión en las fibras superiores del elemento, al reducirse considerablemente la zona disponible para soportar los esfuerzos de compresión producidos por la flexión. A este tipo de falla se le denomina de compresión por cortante. En este caso el elemento puede soportar cargas de mayor intensidad que las de agrietamiento inclinado.

c) *Falla de adherencia por cortante.*

Es factible también que se presente otro tipo de falla denominada falla de adherencia por cortante, en este caso se presentan grietas longitudinales a nivel de cero de tensión, acompañadas de aplastamiento en la zona de compresión correspondiente al extremo de la grieta inclinada.

Al igual que en el caso anterior, la resistencia del elemento es mayor que la carga de agrietamiento inclinado.

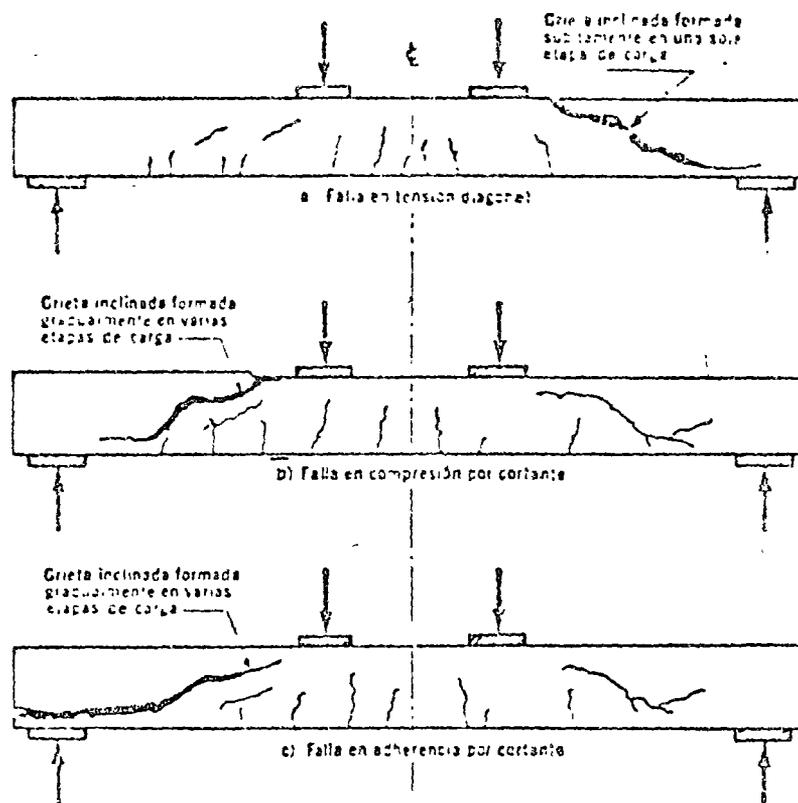


Figura 2.2 Representación esquemática de los diferentes tipos de falla en elementos en los que predomina la fuerza cortante

- *Comentarios en relación a las fallas por cortante y a las fallas por flexión.*

*Es inconveniente que los miembros de concreto reforzado o presforzado fallen por cualquiera de los tres tipos de fallas (de cortante) señaladas, ya que las tres son de tipo frágil. Es imprescindible que estos elementos se diseñen para que la resistencia se presente por fluencia del acero longitudinal (sección subreforzada) que son de tipo dúctil.*

*A la carga que se tiene en la viga al momento en que se presentan las primeras grietas inclinadas (tensión diagonal) se le denomina carga de agrietamiento inclinado; en algunos casos este valor corresponde a la carga máxima que soporta el elemento antes de su falla por tensión diagonal; sin embargo, hay otros casos en que se puede seguir incrementando esta carga hasta que se presente alguna de los otros dos tipos de fallas: Falla de compresión por cortante o falla de adherencia -*

por cortante. Esta posibilidad no es predecible y se considera que la resistencia del elemento corresponde a la carga de agrietamiento inclinado.

### 2.2.2. Elementos con refuerzo transversal.

Antes de comentar el comportamiento de los elementos de concreto reforzado y presforzado en refuerzo transversal y después del agrietamiento es conveniente mencionar los diferentes tipos de refuerzo transversal.

Existen varios tipos de refuerzo transversal, los más comunes son:

- a) Varillas dobladas.- A partir del punto en que no se requiere la totalidad del acero longitudinal, es factible doblar cierto porcentaje de varillas, llevarlas y anclarlas a la zona de compresión del miembro. Este doblar de varillas produce cierta capacidad a esfuerzo cortante.

- b) *Estribos inclinados.*- Este tipo de estribos puede formar ángulos de  $45^{\circ}$  a  $60^{\circ}$  con el eje longitudinal.
- c) *Estribos verticales.*- Es el tipo de refuerzo transversal más conveniente. Estos estribos pueden ser abiertos o cerrados, siendo estos últimos los únicos recomendados. De preferencia deben ser anclados mediante ganchos a  $135^{\circ}$  como se muestran en las figuras adjuntas.

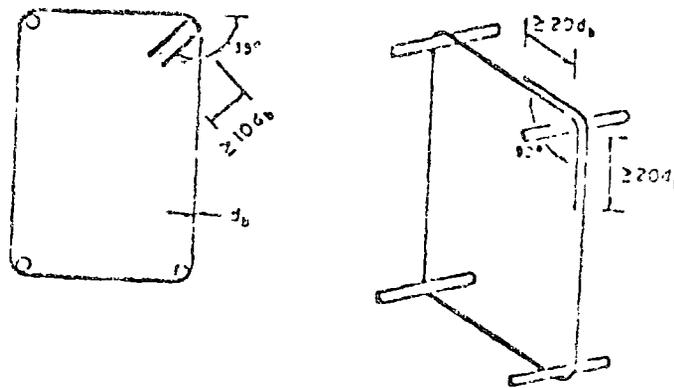
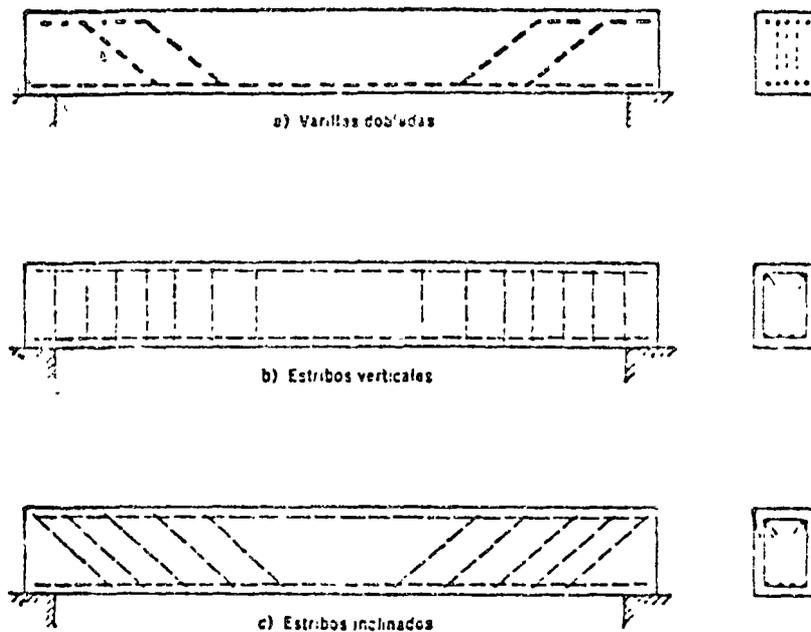


Fig. 1. Anclajes de estribos

- d) *Cables de presfuerzo inclinados.*- Al igual que en el caso de las varillas, estos cables producen capacidad para reducir la fuerza cortante.



El comportamiento de miembros con refuerzo --- transversal antes de que se presenten las primeras grietas inclinadas, es semejante al de los miembros sin refuerzo transversal; sin embargo, al momento que aparecen éstas, el acero transversal empieza a trabajar y resistir los esfuerzos de tensión inclinada evitando que se propaguen las grietas. Si la cantidad de acero transversal es adecuada, la posible falla del elemento se presenta por fluencia del acero longitudinal.

De los ensayos de laboratorio, se ha determinado que la capacidad de un miembro a fuerza cortante es igual a la suma de la capacidad del concreto simple y la capacidad del refuerzo transversal.

### 3. Mecanismos de falla en elementos sujetos a fuerza cortante.

Con el fin de simplificar la cuantificación de la resistencia a fuerza cortante de los elementos de concreto reforzado y presforzado se han ideado mecanismos de falla.

#### 3.1. Elementos sin refuerzo transversal.

Si en laboratorio ensayáramos una viga de concreto sin refuerzo transversal con acero longitudinal adecuado a las necesidades de las cargas externas  $P$  y se incrementa el valor de  $P$  desde 0 hasta la falla del elemento, se pueden presentar diferentes alternativas de falla.

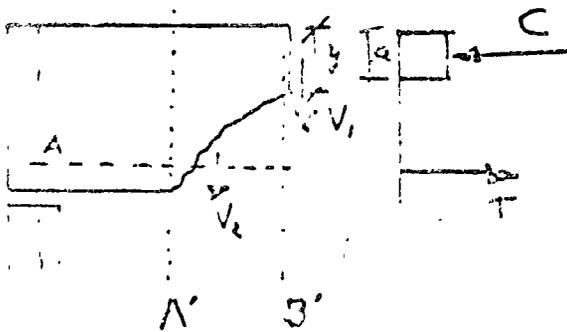
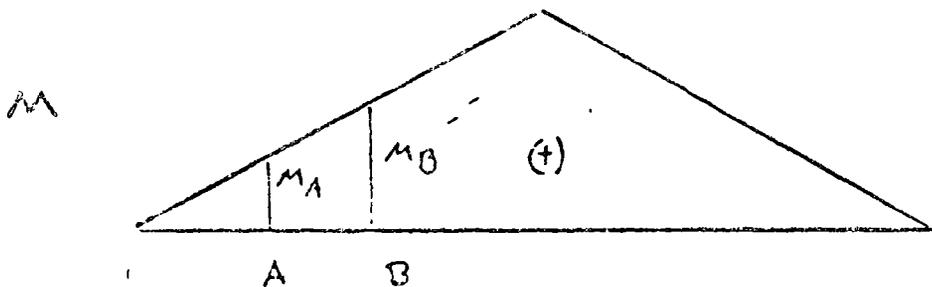
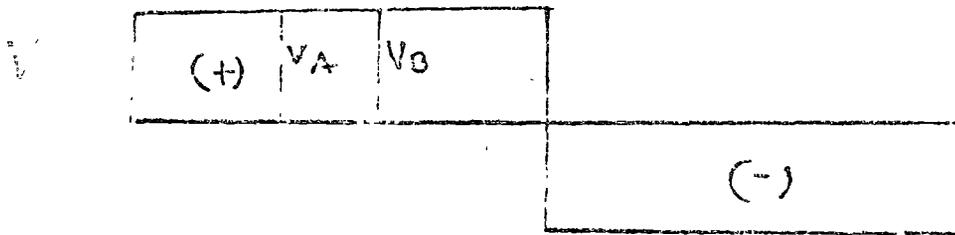
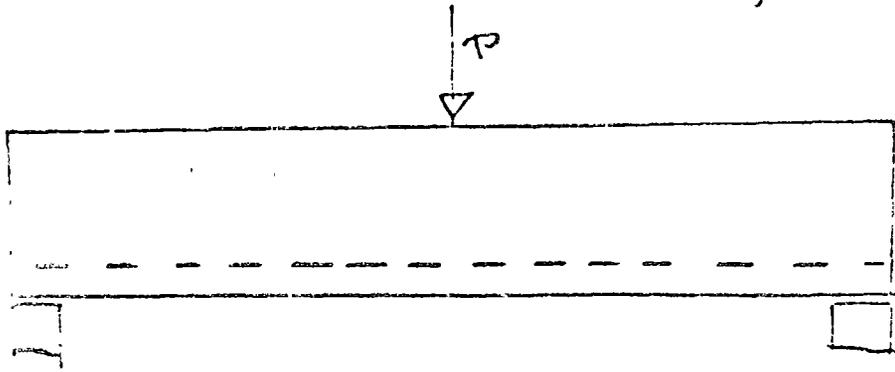
Al llegar al valor de  $P$  correspondiente al agrietamiento  $P_{ag}$ , se presentan las primeras grietas inclinadas de tensión diagonal mostradas en la figura. Estas grietas se propagan hacia abajo y hacia arriba del medio peralte hasta llegar a la zona de compresión del elemento.

En este momento se puede definir el siguiente diagrama de cuerpo libre.

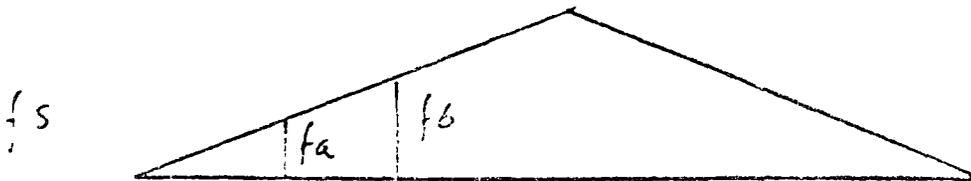
NOTA. El diagrama de esfuerzos de tensión en el acero longitudinal se supone lineal y semejante al diagrama de momento flexionante del elemento debido a que el comportamiento del elemento hasta el momento en que se presentan las primeras grietas inclinadas se puede considerar elástico y lineal.

Mecanismo de Falla

Elementar sin Refuerzo Transversal



P = Pagniet



Alfrendices

Constante

$$A = bd$$

$$A' = by \text{ --- tension region}$$

Flexión

$$y \geq a$$

$$y < a$$

Comp. Por Constante

distancia

$$f_a \rightarrow f_b$$

$$f_d > \bar{f}_c$$

La aparición de la grieta de tensión diagonal produce en el miembro tres efectos:

- Se reduce la zona que resiste los esfuerzos de --- compresión en el miembro a la profundidad  $y$ .
- Se reduce la capacidad a fuerza cortante del miembro pues un valor inicial  $b_d$  se llega a un valor  $b_u$  al presentarse dicho agrietamiento.
- Se incrementa el esfuerzo a tensión en la sección AA' de las varillas longitudinales al pasar de un esfuerzo  $f_a$  a un esfuerzo  $f_b$  después del agrietamiento.

Se debe considerar que después del agrietamiento inclinado se requiere contar con una longitud de anclaje de desarrollo adecuado de las varillas de acero longitudinal a partir del punto A para disipar el esfuerzo  $f_b$  que se presenta en dichas varillas.

A partir del nuevo estado el miembro se puede describir como un arco atirantado con la forma mostrada.

Se pueden presentar varias posibilidades.

a) El área reducida  $b_y$  sea insuficiente para resistir la fuerza cortante actuante, propagándose la grieta inclinada y fallando el miembro por tensión diagonal.

b) el valor de  $b_y$  sea menor que el valor de  $a$  requerido para resistir los esfuerzos de compresión presentándose una falla por aplastamiento del concreto en esa zona (falla de compresión por cortante).

c) La longitud de la varilla a la izquierda de A sea menor que la l<sub>d</sub> longitud de desarrollo requerida y se presente una falla de adherencia por cortante.

### 3.2. Elementos con refuerzo transversal.

A partir del momento en que se presentan las primeras grietas inclinadas el refuerzo transversal empieza a trabajar evitando se continúen las grietas inclinadas y las fallas mencionadas anteriormente e incrementando la capacidad del elemento a fuerza cortante.

A fines del siglo pasado, Ritter propuso una idealización de la contribución del acero transversal a fuerza cortante y le denominó "Analogía de la armadura", esta analogía sigue empleándose hasta la fecha y sirve de base para definir la contribución del acero transversal.

#### Analogía de la armadura.

Un miembro de concreto reforzado con acero --- transversal se asemeja a una armadura en la que el refuerzo longitudinal corresponde a la cuerda inferior, la zona que trabaja a compresión del concreto la cuerda superior, los estribos representan las diagonales que trabajan a tensión y la zona definida por dos grietas inclinadas las diagonales a compresión.

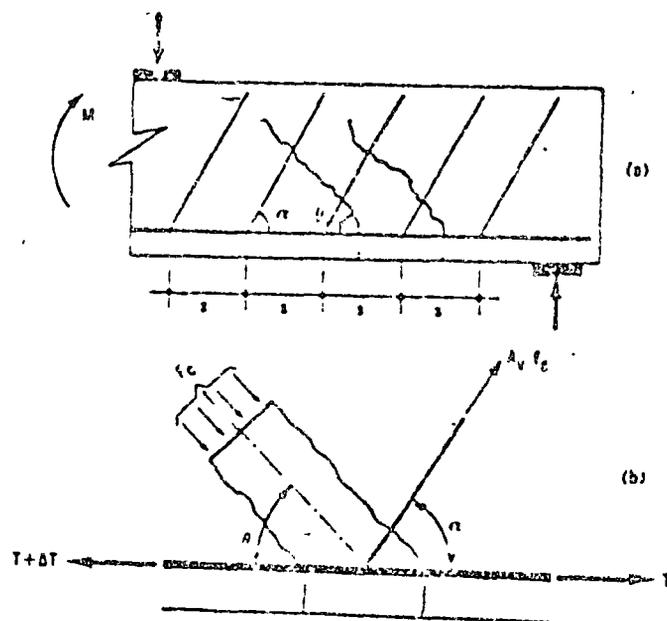


Figura 7.8 Analogía de la armadura

En esta analogía se ha despreciado el peso propio y las cargas distribuidas entre grietas inclinadas.

Del cuerpo libre del nudo se tiene:

$$\sum F_x = 0; \quad T + \Delta T - T = Av fs \cos \alpha + Fc \cos \theta \quad (8)$$

$$\Delta T = Av fs \cos \alpha + Fc \cos \theta$$

$$\sum F_y = 0; \quad Av fs \sin \alpha = Fc \sin \theta \quad (9)$$

El incremento del momento  $\Delta M$  se obtiene

$$\Delta M = \Delta T \cdot z \quad \Delta T = \frac{\Delta M}{z}$$

Pero:

$$\Delta M = V' \underline{s} \quad \Delta T = \frac{V' s}{z}$$

Substituyendo:

$$\frac{V' s}{z} = Av fs \cos \alpha + Fc \cos \theta$$

$$\frac{V' s}{z} = Av fs \cos \alpha + Av fs \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \cos \theta$$

$$\frac{V' s}{z} = Av fs \left[ \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \cos \theta \right]$$

$$V' = \frac{A u f s \cdot z}{s} \left[ \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sin \Theta} \right]$$

Sea

$$\Theta = 90^\circ \quad \sin \Theta = 1$$

$$V' = \frac{A u f s \cdot z}{s} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

Sea

$$z = d$$

$$V' = \frac{A u f s \cdot d}{s} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

El valor del cortante  $V'$  que interesa es el que corresponde a  $f_y$ .

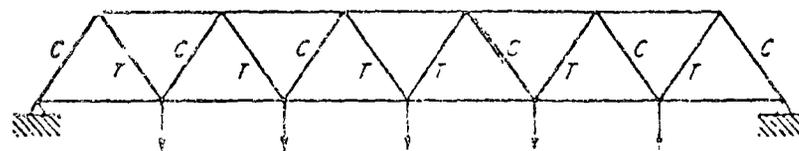
$$V' = \frac{A u f_y \cdot d}{s} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Para estribo vertical:

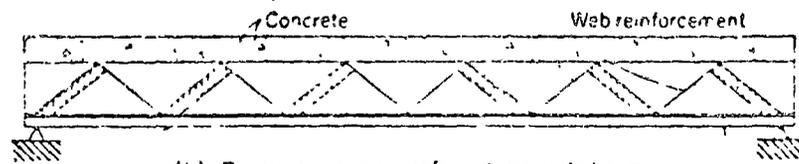
$$\alpha = -90^\circ$$

$$V' = \frac{A u f_y \cdot d}{s}$$

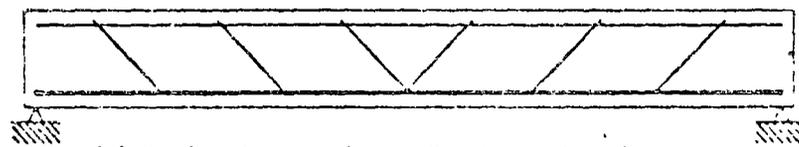
Esta ecuación proporciona la contribución del acero transversal a resistir la fuerza cortante actuante.



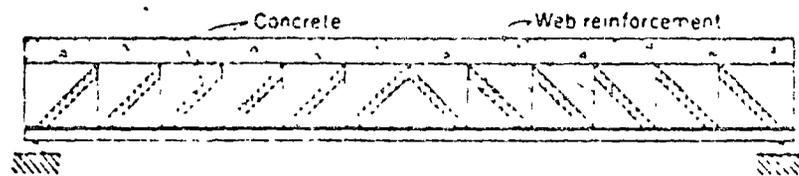
(a) A steel truss



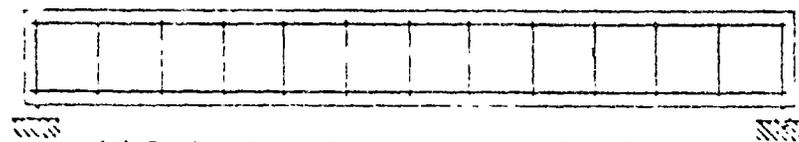
(b) Truss action in a reinforced concrete beam



(c) Reinforced concrete beam with inclined web reinforcement



(d) Truss action in a reinforced concrete beam



(e) Reinforced concrete beam with vertical web reinforcement

Fig. 5.6.2  
Truss analogies.

#### 4. Factores que influyen en la carga de agrietamiento inclinado.

##### 4.1. Elementos sin esfuerzo transversal.

Existen varios factores que influyen directamente en la carga de agrietamiento de un miembro de concreto reforzado. Los que se consideran de mayor importancia son los siguientes:

- a) Resistencia de concreto a tensión.— Se ha observado que a mayor resistencia del concreto a tensión mayor es la carga de agrietamiento, este factor se representa por  $k\sqrt{f_c}$  dado que la resistencia a tensión es función de la raíz cuadrada de la resistencia a compresión del concreto.
- b) Porcentaje de acero longitudinal.— Los miembros que cuentan con mayor porcentaje de acero longitudinal a tensión proporcionan cargas de agrietamiento superiores a los de bajos porcentajes, esto se debe a que en zonas agrietadas a flexión se reduce la capacidad

del concreto a fuerza cortante, reduciéndose la carga de agrietamiento inclinado.

c) *Tamaño.*— Se ha observado que en los ensayos de laboratorio, a mayor tamaño del elemento menor carga de agrietamiento inclinado.

d) *Relación de ancho a peralte.*— Se tiene mayor carga de agrietamiento en elementos con mayor relación de ancho a peralte  $b/h$ .

e) *Esbeltez.*— Si definimos la esbeltez en un miembro de concreto reforzado como la relación del claro donde existe fuerza cortante, al peralte; se ha obtenido en laboratorio que al aumentarse la esbeltez del elemento se reduce la carga de agrietamiento.

$$\text{Esbeltez} = \frac{M}{Vd}$$

*Nota.* Se anula la hoja 36

Esta relación inversa entre esbeltez y carga de agrietamiento, se explica por lo siguiente: A mayor esbeltez mayor agrietamiento por flexión y mayores concentraciones de esfuerzos en las partes superiores de las grietas al reducirse la zona para tomar fuerza constante. Estas concentraciones de esfuerzos incrementan las posibilidades de que se presenten grietas de tensión diagonal como continuación de las de flexión.

En elementos de esbeltez reducida o sea los que tienen cargas cercanas a los apoyos, los esfuerzos normales de compresión fy disminuyen el valor del esfuerzo principal de tensión y aumentan la carga de agrietamiento inclinado.

f) Carga axial.- Los miembros sujetos a fuerzas axiales de compresión desarrollan esfuerzos normales de compresión que reducen la tensión diagonal y por lo tanto los agrietamientos inclinados; por otra parte las cargas axiales de tensión producen esfuerzos de tensión diagonal y reducen la capacidad a carga de agrietamiento inclinado.

g) Corte de varillas longitudinales.- En las zonas en que existe fuerza cortante al cortarse varillas longitudinales trabajando a tensión se producen concentraciones de esfuerzos que provocan grietas de flexión, ésto a su vez incrementa los esfuerzos cortantes y facilita la formación de grietas inclinadas como continuación de las grietas de tensión.

#### 4.2. Elementos con refuerzo transversal.

Se comentó anteriormente que estos miembros -- presentan un comportamiento semejante al de los --- miembros sin refuerzo transversal hasta el momento en que aparecen las primeras grietas inclinadas, -- luego los factores que influyen en la carga de ---- agrietamiento inclinado son las mencionadas anteriormente.

### 5. Factores que influyen en la resistencia de elementos reforzados sujetos a fuerza cortante.

#### 5.1. Elementos sin refuerzo transversal.

Considerando que no es factible predecir en un miembro de concreto reforzado si la carga de jalla será mayor que la del agrietamiento inclinado se ha definido como resistencia del miembro la correspondiente a la carga de agrietamiento inclinado.

De lo anterior se concluye que los factores que influyen en la resistencia a fuerza cortante de un miembro de concreto reforzado sin refuerzo sin refuerzo transversal son los mismos que los especificados para la carga de agrietamiento en este tipo de elementos.

## 5.2. Elementos con refuerzo transversal.

Los ensayos de laboratorio realizados recientemente demuestran que la resistencia a fuerza cortante de un miembro de refuerzo transversal es igual a la suma de la contribución del concreto y la del refuerzo transversal. Los factores que influyen en la contribución del concreto han sido mencionados anteriormente y los correspondientes al refuerzo transversal se pueden deducir de la analogía de la arquitectura propuesta por Ritter.

6. Resistencia de elementos presforzados sujetos a --- fuerza cortante según Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcción para el Distrito Federal 1977.

A partir de los diagramas de elementos mecánicos obtenidos del análisis estructural se determinan las acciones internas últimas tomando en cuenta los factores de carga establecidos.

$$V_{ua} = F.C. V_a \quad (1)$$

Combinación de acciones permanentes y eventuales.

$$V_{ua} = 1.4 (V_{cm} + V_{cv}) \quad (2)$$

$$V_{ua} = 1.5 (V_{cm} + V_{cv}) \quad (3)$$

Cuando se pueden presentar aglomeraciones considerables.

Combinación de acciones permanentes eventuales y accidentales.

$$V_{ua} = 1.1 (V_{cm} + V_{cv} + V_s) \quad (4)$$

Se toma la mayor de ( 2 ) y ( 4 ) o (3) y (4).

### 6.1. Contribución del concreto simple.

6.1.1. Si la resistencia del presfuerzo efectivo representa menos del 40% de la resistencia a tensión de todo el refuerzo de tensión (presforzado y sin presfuerzo) se emplean las ecuaciones para evaluar  $V_c$  definidas para concreto reforzado.

6.1.2. Si la resistencia del presfuerzo efectivo representa el 40% o más de la resistencia a tensión de todo el refuerzo de tensión (presforzado y sin presforzar) se emplea la siguiente ecuación.

$$V_c = F_a b d \left( 0.15 \sqrt{f_c'} + 50 \frac{V_{it}}{M} \right) \quad (5)$$

En que:

$V_c$  = Fuerza cortante que toma el concreto --  
simple.

$F_r$  = Factor de reducción de la resistencia --  
con valor de 0.8

$b$  = Ancho de la sección rectangular.

$V$  = Fuerza cortante actuante en la sección  
considerada.

$M$  = Momento flexionante actuante en la sec-  
ción considerada.

$dt$  = Distancia de la fibra extrema en compre-  
sión al centroide de los tendones de --  
presfuerzo.

$f_c^*$  = Resistencia nominal del concreto a com-  
presión.

Para diseño se puede considerar:

$$f_c^* = 0.8 f'_c \quad \text{--- (6)}$$

Especificaciones complementarias.

(1)  $V_c$  mínimo. -- El esfuerzo  $V_c$  obtenido de la --  
ecuación deberá ser mayor que:

$$V_c \text{ min} = 0.5 F_r b^d \sqrt{f_c^*} \quad \text{--- (7)}$$

(2)  $V_c$  máximo.- El esfuerzo  $V_c$  obtenido de la ecuación deberá ser menor que:

$$V_c \text{ máx} = 1.3 Fr bd \sqrt{f^*c} \quad \text{--- (8)}$$

(3) Secciones T, I o L invertidas. El valor de  $b$  señalado en la ecuación 5 se substituye por  $b'$  (ancho del alma) y en esta ecuación se transforma en la siguiente:

Secciones T o I

$$V_c = Fr (b'd + t^2) \left( 0.15 \sqrt{f^*c} + 50 \frac{Vdt}{h} \right) \quad \text{--- (9)}$$

Sección L invertida

$$V_c = Fr \left( b'd + \frac{t^2}{2} \right) \left( 0.15 \sqrt{f^*c} + 50 \frac{Vdt}{h} \right) \quad \text{--- (10)}$$

En que  $t$  = espesor del patín.

(4) Consideraciones sobre peralte y relación - peralte-ancho.

El valor de  $V_c$  obtenido de las ecuaciones 7, 9 y 10 es válido si se cumplen -- las siguientes condiciones:

$$h \leq 1.00 \text{ m}$$

$$\frac{h}{b} \leq 6$$

En que:  $h$  = peralte total.

Si no se cumplen estas condiciones el valor de  $V_c$  obtenido en las ecuaciones 5, 9 y 10 se reduce en un 20%.

En secciones T, I o L la relación  $h/b$  se toma como  $h/b'$

## 6.2. Contribución del acero de refuerzo transversal.

- Cuando  $V_u > V_c$  sea mayor que  $V_c$  se requiere refuerzo por tensión diagonal, el que estará formado por estribos perpendiculares al eje de la pieza, con esfuerzo nominal de fluencia no mayor de -----  
 $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$ .

El espaciamiento  $s$  de los estribos se determina de acuerdo con la ecuación:

$$s = \frac{Fr A_v f_y d}{V_u - V_c}$$

En que:

$s$  = Separación de estribos normales al eje de la pieza.

$A_v$  = Área transversal del refuerzo por tensión diagonal (estribos) espaciados a una distancia  $s$

$f_y$  = Esfuerzo de fluencia nominal del refuerzo transversal.

Especificaciones complementarias.

(1) Separación máxima por área mínima de refuerzo transversal.

$$s \text{ máx} = \frac{F_r A_v f_y}{3.5b}$$

En secciones T, I o L, b se substituye por  $b^*$ .

(2) Separación máxima de refuerzo transversal.

$$- \text{ Si } V_{ua} \leq 1.5 F_r b d \sqrt{f_c^*}$$

$$s \text{ máx} = 0.75 h.$$

$$- \text{ Si } V_{ua} > 1.5 F_r b d \sqrt{f_c^*}$$

$$s \text{ máx} = 0.37 h$$

(3) Fuerza cortante última actuante máxima permisible.

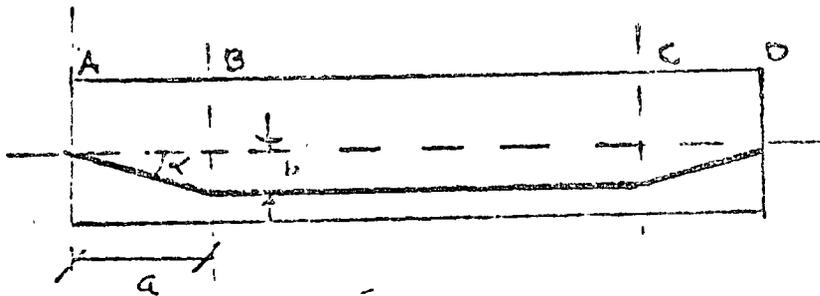
$$V_{ua} \text{ máx} = 2.5 F_r b d \sqrt{f_c^*}$$

Si  $V_{ua} > V_{ua} \text{ máx}$  se debe cambiar la sección transversal del elemento.

7. Contribución a la resistencia a fuerza cortante de cables de presfuerzo inclinados.

En el caso de vigas en que los tendones de presfuerzo son desviados en sus extremos, es factible reducir la fuerza cortante actuante debido a la compensación que produce la componente vertical del presfuerzo.

En el caso de vigas de concreto presforzadas con tendones de trayectorias rectas como el caso de la figura mostrada a continuación.

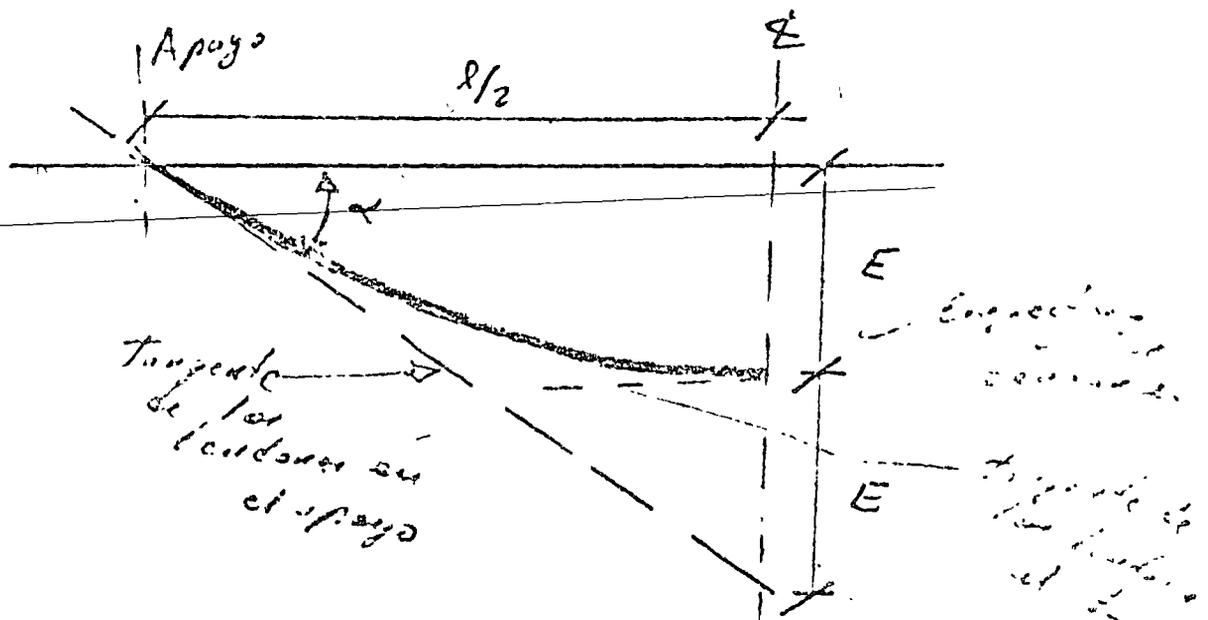


En las secciones localizadas entre A y B, C y D, se presentan tendones inclinados de presfuerzo y existe la componente vertical del resfuerzo que se puede obtener de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \text{Componente vertical del presfuerzo} &= P \operatorname{sen} \alpha \\ &= P \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

En el caso de vigas de concreto presforzado - mediante tendones con curvatura parabólica se puede obtener la componente vertical del presfuerzo - de la siguiente manera (siempre y cuando la resultante del presfuerzo no presente excentricidad en el extremo de la viga).

$$\text{Componente vertical del presfuerzo} = P \operatorname{sen} \alpha$$



Por ser el ángulo muy pequeño.  $P$

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \operatorname{tan} \alpha$$

De acuerdo con la propiedad de la parábola

$$\operatorname{Sen} \alpha = \tan \alpha = \frac{2E}{l/2} = \frac{4E}{l}$$

$E$  = Excentricidad de los tendones de presfuerzo al centro del claro.

$l$  = Claro de la viga.

La componente vertical del presfuerzo en este caso se puede obtener de la siguiente manera:

$$P \operatorname{Sen} \alpha (x) = P \operatorname{Sen} \alpha \cdot \frac{(l/2 - x)}{l/2}$$

$x$  = Distancia de la sección considerada al extremo de la viga.

$$P \operatorname{Sen} \alpha (x) = P \frac{4E}{l} \left( \frac{l/2 - x}{l/2} \right)$$

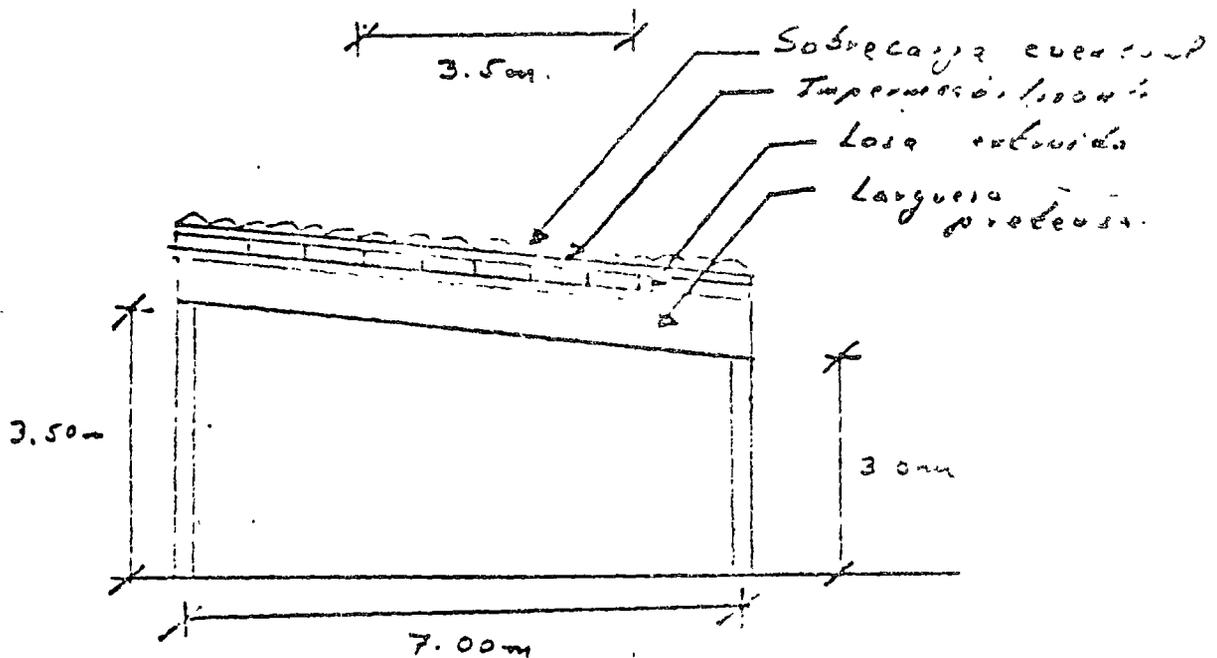
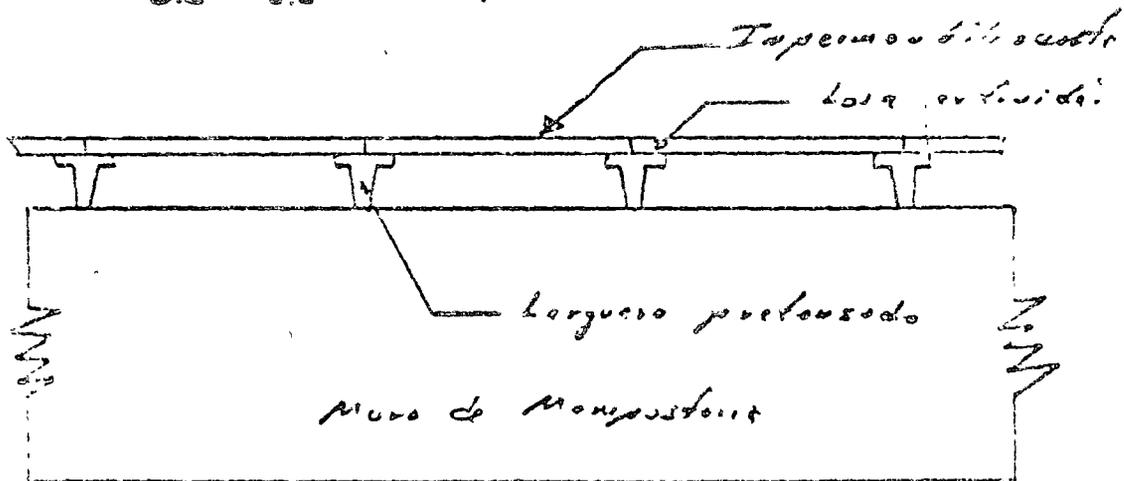
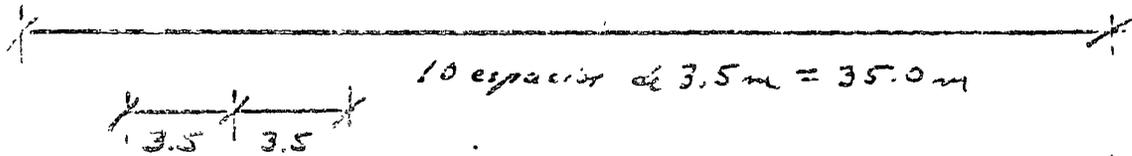
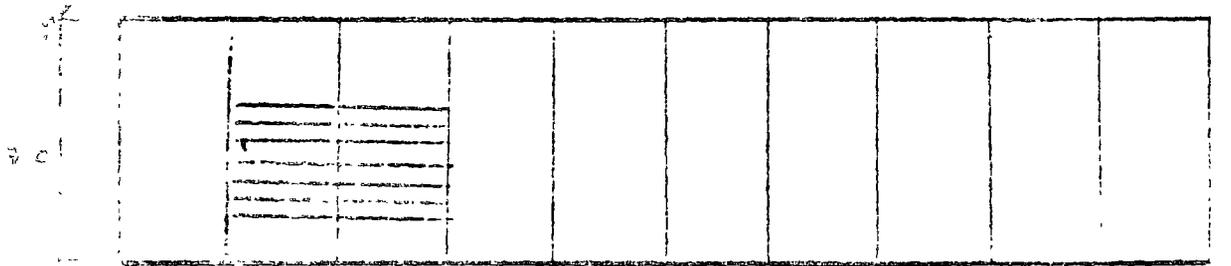
Para el caso en que las trayectorias de los tendones no sean parabólicas y presenten otro tipo de curva más complicada, es factible sin gran error emplear las ecuaciones anteriores.

## 8. Ejemplo de aplicación

### Diseño por flexión y corte de un tejadillo pretensado con tendones rectos

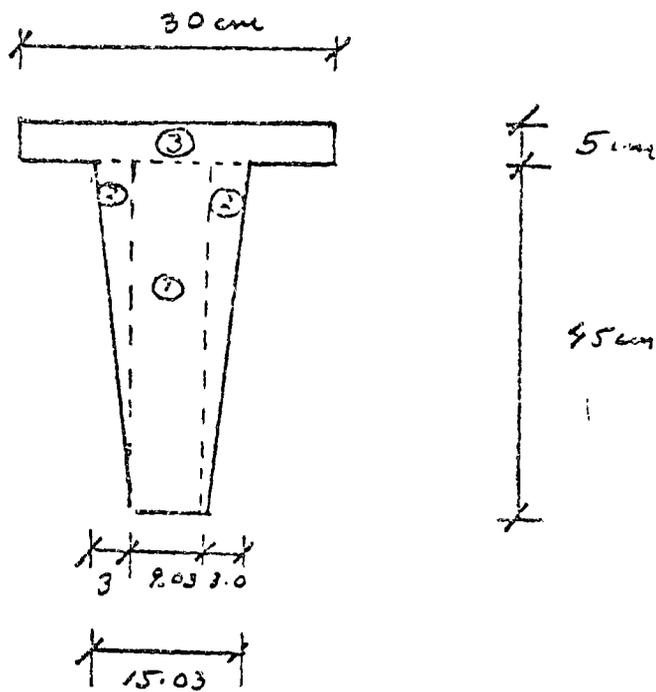
- Se desea cubrir una bodega cuya planta tiene  $7 \times 35 \text{ m}$ . Se tienen muros de mampostería perimetrales.
- Se empleará como cubierta losa exterior pretensada de  $10 \text{ cm}$  de peralte ( $4''$ ) con un peso por metro cuadrado de  $167 \text{ kg/m}^2$
- La cubierta tiene una inclinación de más del  $5\%$  y de menos del  $20\%$
- Eventualmente se tendrá una sobrecarga del orden de  $50 \text{ kg/m}^2$
- El peso del impermeabilizante es de  $15 \text{ kg/m}^2$
- La altura mínima de la cubierta es de  $3.00 \text{ m}$ .
- Se deberá emplear el Reglamento de Construcción del Distrito Federal 1977.

Planta de localización de largueros



# Larguero Pretensado

Datos. Concreto  $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$   
 Acero de Pretensado  $\text{Larguero } \phi 3/8''$   
 $f_{sr} = 18,000 \text{ kg/cm}^2$   
 Acero de Refuerzo  $f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$



Elemento	Area	$\bar{y}$	$A\bar{y}$	$d$	$d^2$	$Ad^2$	$I_c$
①	361.20	20.0	7,224	6.6	43.56	15,700	43,200
②	120.00	26.6	3,200	0	0	0	10,650
③	150.00	12.5	1,875	15.7	2530	37,950	315
$\Sigma$	631.20		16,799			53,650	59,163

$$y_c = \frac{16,799}{631.2} = 26.6$$

$$A = 631.2 \text{ cm}^2$$

$$I_c = 112,613 \text{ cm}^4$$

$$y_s = 45.0 - 26.6 = 18.4 \text{ cm}$$

## Esfuerzos Permisibles

Concreto  $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$

A.- Esfuerzos inmediatamente después de la transferencia y antes de que ocurran las pérdidas por contracción y flujo por autosecado.

$f'_{ci}$  = Resistencia nominal del concreto en compresión cuando ocurre la transferencia en el concreto pretensado

$$f'_{ci} = 0.80 f'_c = 0.8 \times 350 = 280 \text{ kg/cm}^2$$

Compresión  $0.60 f'_{ci}$   
 $0.60 \times 280 = 168 \text{ kg/cm}^2$

Tensión  $\sqrt{f'_{ci}}$   
 $\sqrt{280} = 16.73 \text{ kg/cm}^2$

B.- Esfuerzos bajo cargas permanentes y eventuales

Compresión  $0.45 f'_c$   
 $0.45 \times 350 = 157.5 \text{ kg/cm}^2$

Tensión  $2 \sqrt{f'_c}$   
 $2 \sqrt{350} = 37.92 \text{ kg/cm}^2$

Acero de presfuerzo

$$\text{toron } \phi 3/8'' \quad f_{sv} = 18,000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Area} = 0.516 \text{ cm}^2 \quad R = 9,300 \text{ kg.}$$

= Debido a la fuerza aplicada por el yugo.

$$0.80 f_{sv}$$

$$0.80 \times 18,000 = 14,400 \text{ kg/cm}^2$$

$$P = 7,430 \text{ kg}$$

= Inmediatamente despues de la transferencia

$$0.70 f_{sv}$$

$$0.70 \times 18,000 = 12,600 \text{ kg/cm}^2$$

$$P_i = 6,500 \text{ kg.}$$

Presfuerzo efectivo.

El Reglamento D.T. 1977 indica que se pueden considerar a las pérdidas de presfuerzo en elementos pretensados como el 20% del presfuerzo inicial

Esfuerzo efectivo

$$0.80 \times 12,600 = 10,080 \text{ kg/cm}^2$$

$$P_{efectivo} = 5,200 \text{ kg.}$$

Resumen. -  $\phi 3/8''$  toron

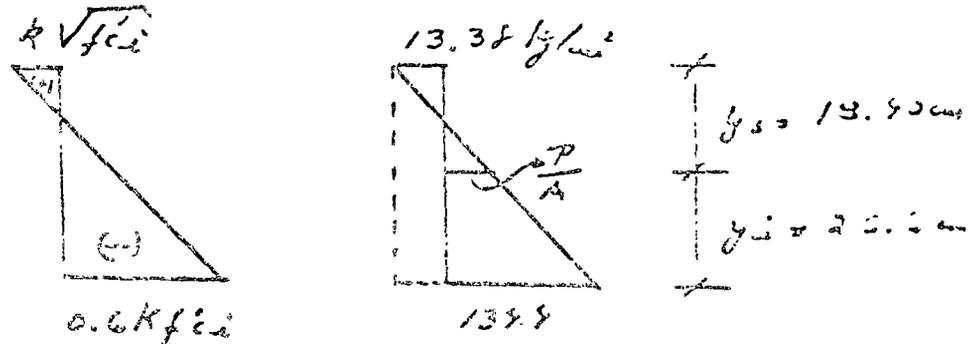
$$P_i = 6,500 \text{ kg}$$

$$P_{ef} = 5,200 \text{ kg}$$

$$R = 9,300 \text{ kg.}$$

Relación del presfuerzo efectivo respecto al presfuerzo inicial  $K = 0.8$

Diagrama de Presfuerzo



$$K \sqrt{f_{ci}} = 0.8 \times \sqrt{280} = 13.38 \text{ kg/cm}^2$$

$$0.6 K f_{ci} = 0.6 \times 0.8 \times 280 = 134.4 \text{ kg/cm}^2$$

Determinación de la fuerza de Presfuerzo

$$\frac{13.38 + 134.4}{45} = \frac{P/A + 13.38}{18.40}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{18.40}{45} \times 147.78 - 13.38 = 60.42 - 13.38$$

$$\frac{P}{A} = 47.04 \text{ kg/cm}^2$$

$$P = 47.04 A = 47.04 \times 631.2 = 29,691.6 \text{ kg}$$

Fuerza de Presfuerzo  $P = 29,691.6 \text{ kg}$

Número de Tornos

$$n = \frac{P}{\text{Presfuerzo/torno}} = \frac{29,691.6}{5200} \approx 6 \text{ tornos}$$

Excentricidad teórica.

$$f_{presuena} = \frac{P}{A} + \frac{P e_t y_i}{I}$$

$$e_t = \frac{I}{P y_i} \left( f_{presuena} - \frac{P}{A} \right)$$

$$e_t = \frac{112,813}{31,200 \times 26.6} \left( 134.4 - \frac{31,200}{631.2} \right)$$

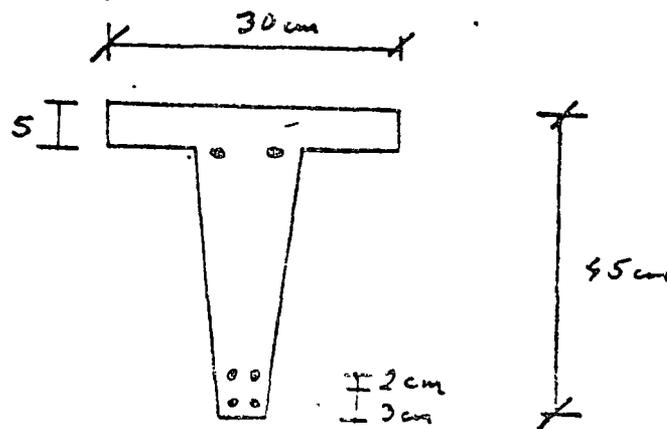
$$P = 6 \times 5200 = 31,200 \text{ kg.}$$

$$e_t = 0.136 (134.4 - 49.4) = 0.136 \times 85 = 11.56$$

$$e_t = 11.56 \text{ cm}$$

$$e' = y_i - e_t = 26.6 - 11.56 = 15.04 \text{ cm.}$$

Distribución de varones



$$e' = \frac{2 \times 3 + 2 \times 5 + 2 \times 40}{6} = \frac{6 + 10 + 80}{6} = \frac{96}{6}$$

$$e' = 16 \text{ cm} \approx 15.04 \text{ cm}$$

Se acepta la colocación propuesta.

$$e_{\text{real}} = y_i - e' = 20.6 - 10.0 = 10.6 \text{ cm}$$

$$e_{\text{total}} = 10.6 \text{ cm}$$

Prospuero real.

$$f_i = \frac{P}{A} + \frac{P e}{I} y_i$$

$$f_s = \frac{P}{A} - \frac{P e}{I} y_s$$

$$f_i = \frac{31,200}{631.2} + \frac{31,200 \times 10.6}{112,813} \times 20.6$$

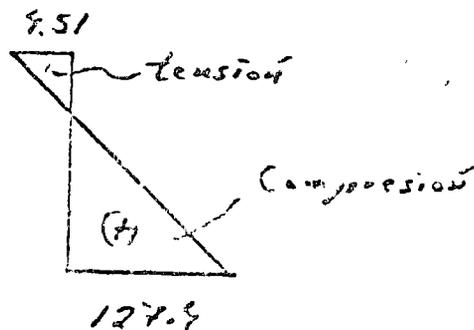
$$f_i = 49.43 + 57.98 = 107.41 \text{ Compression}$$

$$f_i = 107.41 \text{ kg/cm}^2 < 135.8 \text{ kg/cm}^2 = 0.79$$

$$f_s = \frac{31,200}{631.2} - \frac{31,200 \times 10.6}{112,813} \times 19.50$$

$$f_s = 49.43 - 53.94 = -4.51 \text{ tension}$$

$$f_s = -4.51 \text{ kg/cm}^2 < 13.38 \text{ kg/cm}^2 = 0.34$$



## 8.1 Revisión por Flexión

### 8.1.1. Revisión por esfuerzos permisibles

Análisis de carga.

Carga viva	_____	60 kg/m <sup>2</sup>
Sobrecarga eventual	_____	40 "
Impermeabilizante	_____	15 "
Losa estruvida	_____	167 "

$$w_{sc} = 282 \text{ kg/m}$$

$$w_{sc} = 282 \times 3.5 = 987 \text{ kg/m}$$

$$w_{pp} = 0.0631 \times 2400 = 151.4 \text{ kg/m}$$

Por ser una viga simplemente apoyada

$$M = \frac{wL^2}{8}$$

Peso propio  $M_{pp} = \frac{151.4 \times 7^2}{8} = 927.3 \text{ kg m}$

$$M_{sc} = \frac{987 \times 7^2}{8} = 6045.37 \text{ kg m}$$

- Esfuerzos en la sección crítica por momentos flexionantes al centro del claro.

Peso propio

$$f_i = \frac{M_{pp}}{I} y_i = \frac{927.3 \times 100}{112,513} \times 26.6 = 21.86$$

$$f_i = 21.86 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = \frac{M_{pp} \gamma_s}{I} = \frac{927.3 \times 100}{117,813} \times 18.4 = 15.12$$

$$f_s = 15.12 \text{ kg/cm}^2$$

Sobrecarga

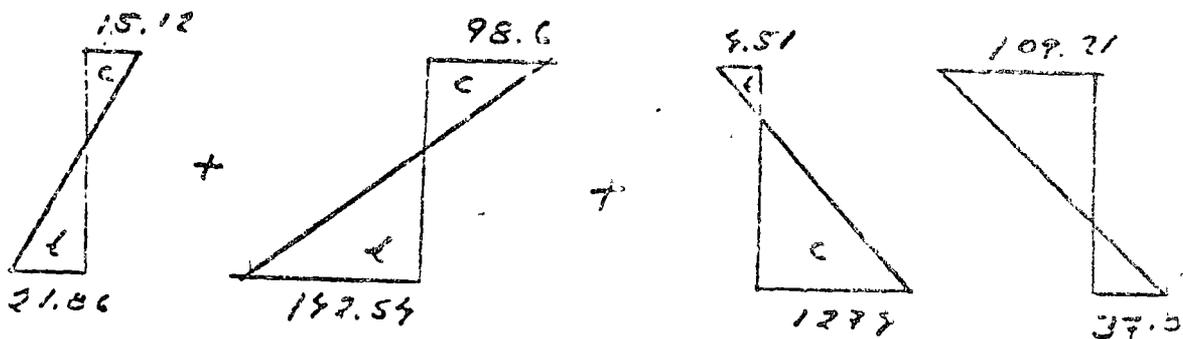
$$f_s^o = \frac{M_{sc} \gamma_i}{I} = \frac{6095.37 \times 100}{117,813} \times 26.6 = 132.54$$

$$f_s^o = 132.54 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = \frac{M_{sc} \gamma_s}{I} = \frac{6095.37 \times 100}{117,813} \times 18.4 = 98.6$$

$$f_s = 98.6 \text{ kg/cm}^2$$

Sobreposición de espigas



$$f_i = 21.86 + 132.54 - 127.5 = 37.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_i = 37.0 \text{ kg/cm}^2 < 37.92 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{O.K.}$$

$$f_s = 15.12 + 98.6 - 4.51 = 109.21 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = 109.21 \text{ kg/cm}^2 < 157.5 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{O.K.}$$

Esfuerzos en los apoyos, antes de las pérdidas del presurizado.

$$P_i = 6 \times 6500 = 39,000 \text{ kg.}$$

$$e = 10.6 \text{ cm.}$$

$$f_i = \frac{P_i}{A} + \frac{P_i \cdot e}{I} y_i$$

$$f_i = \frac{39,000}{631.2} + \frac{39,000 \times 10.6}{112,813} \times 26.6$$

$$f_i = 61.79 + 97.47 = 159.26$$

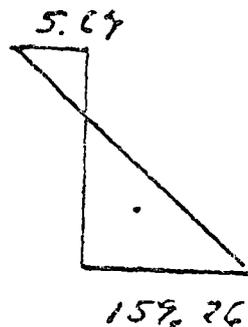
$$f_i = 159.26 \text{ kg/cm}^2 < 168.0 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{O.K.}$$

$$f_s = \frac{P_i}{A} - \frac{P_i \cdot e}{I} y$$

$$f_s = \frac{39,000}{631.2} - \frac{39,000 \times 10.6}{112,813} \times 18.4$$

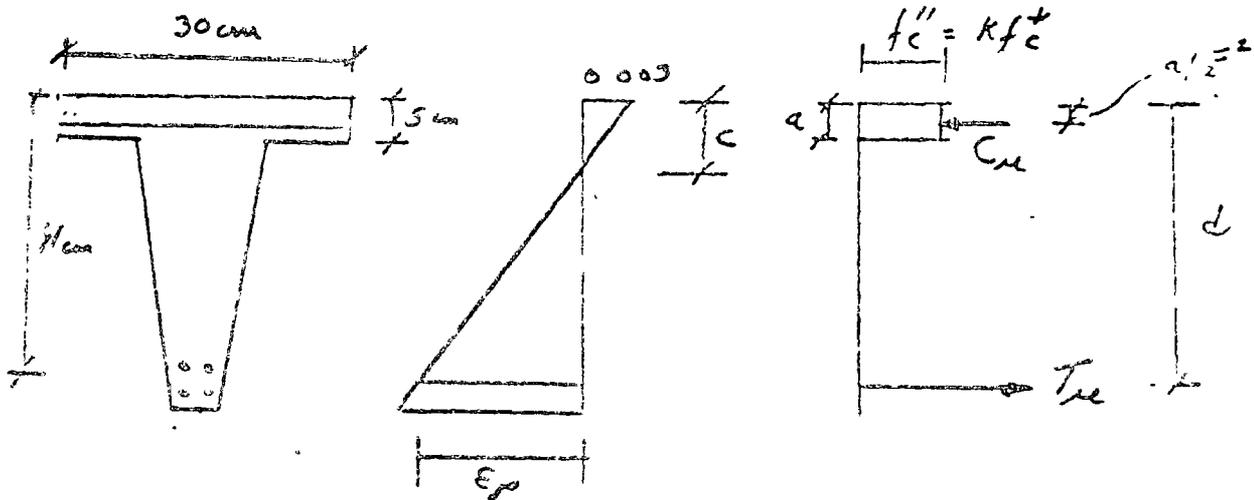
$$f_s = 61.79 - 67.43 = -5.64.$$

$$f_s = 5.64 \text{ kg/cm}^2 < 16.73 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{O.K.}$$



### 3.1.2. Revisión de la Resistencia

#### Centro del Claro - Sección Crítica



$$T = A_s \cdot f_{sua} = 4 \times 9300 = 37,200 \text{ kg}$$

Del Reglamento del Distrito Federal 1977

$$\alpha = 0.80$$

$$f_c^* = 0.8 f_c$$

$$f_c^* = 0.8 \times 350 = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_c'' = k f_c^* \quad - \quad k = \left( 1.05 - \frac{f_c^*}{1250} \right) = \left( 1.05 - \frac{280}{1250} \right)$$

$$k = (1.05 - 0.224) = 0.826$$

$$C_u = \alpha \cdot b \cdot 0.826 f_c^*$$

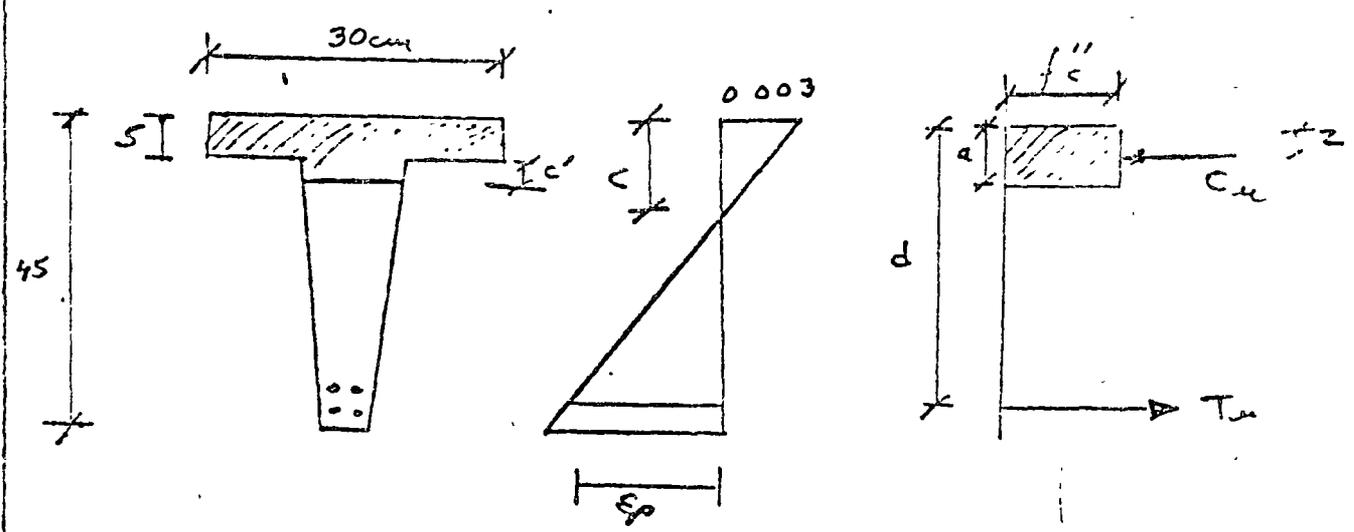
Para por equilibrio interno  
 $C_u = T_u$

$$T_u = \alpha \cdot b \cdot 0.826 f_c^*$$

$$\alpha = \frac{T_u}{0.826 f_c^* \cdot b} = \frac{37,200}{0.826 \times 280 \times 30} = \frac{37,200}{6,735.6}$$

$a = 5.36 \text{ cm}$

Luego  $a = 5.36 \text{ cm} > t = 5.00 \text{ cm}$



$A \times 0.826 f_c'' = T_u$

$0.826 f_c'' =$   
 $0.826 \times 250 = 206.5$

$A = \frac{T_u}{f_c''} = \frac{37,200}{231.28} = 160.89$

$A_{\text{requerida}} = A - A_{\text{potencia}}$   
 $= 160.89 - 150 = 10.89 \text{ cm}^2$

$c' = \frac{10.89}{15.07} = 0.72 \text{ cm}$

Centroide de la zona hachurada que trabaja en compresión.

$z = \frac{(30 \times 5) 2.5 + (15.03 \times 0.72) (5 + 0.72/2)}{30 \times 5 + 15 \times 0.72}$

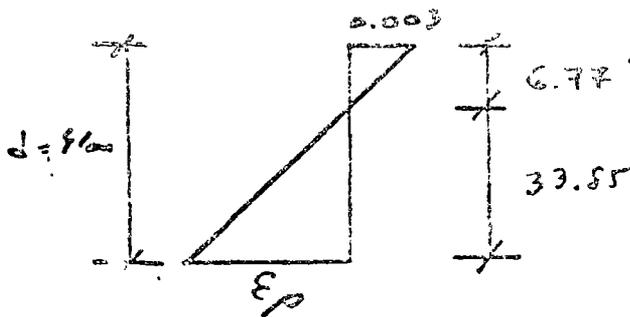
$$z = \frac{150 \times 4.5 + 10.82 \times 5.36}{150 + 10.8} = \frac{375 + 57.99}{160.8} = \frac{432.99}{160.8}$$

$$z = 2.69 \text{ cm.}$$

$$a = 5 + 0.72 = 5.72 \text{ cm}$$

$$c = \frac{a}{0.8} = \frac{5.72}{0.8} = 7.15 \text{ cm.}$$

$$e - c = 31.0 - 7.15 = 33.85 \text{ cm.}$$



Por triángulos semejantes,

$$\frac{\epsilon_p}{33.85} = \frac{0.003}{6.77}$$

$$\epsilon_p = \frac{33.85}{6.77} \times 0.003 = 0.015$$

Deformación unitaria inicial del acero:

$$f_i = E \cdot \epsilon_i$$

$$\epsilon_i = \frac{f_i}{E} = \frac{10,080}{2 \times 10^6} = 0.00504$$

$$E_t = E_p + E_i = 0.015 + 0.00504$$

$$E_t = 0.0204$$

La deformación unitaria correspondiente al límite convencional de fluencia según las gráficas esfuerzo-deformación del acero  $f_{3/8}$  es  $\epsilon = 0.011$

De acuerdo con las especificaciones, la falla balanceada se presenta cuando el acero tiene una deformación unitaria de 0.011, luego el 75% de la falla balanceada es:

$$\epsilon = \frac{0.011}{0.75} = 0.01467 < 0.0204$$

### Conclusión

Al presentarse la Resistencia a flexión en este larguero pretensado, el acero de proyección fluye y se tiene una sección subreforzada.

- El factor de carga especificado en el Reglamento de Construcción del Distrito Federal 1977 para combinaciones de acciones permanentes y variables es  $F_c = 1.4$
- El factor de reducción de resistencia para flexión  $F_R = 0.9$  según el mismo reglamento.

- Moments ultimo actuante.

$$M_{ua} = F_c \cdot M_a$$

$$M_a = M_{pp} + M_{sc}$$

$$M_a = 927.3 + 6045.37 = 6972.67$$

$$M_{ua} = 1.9 \times 6972.67 = 9761.79$$

$$\underline{M_{ua} = 9761.79 \text{ kgm}}$$

- Momento Resistido

$$M_{ua} = F_R T_u (d - e)$$

$$M_{ua} = 0.9 \times 37,200 (91 - 2.69)$$

$$M_{ua} = 0.9 \times 37,200 \times 38.31$$

$$M_{ua} = 12,826.19 \text{ kgm}$$

$$M_{ua} = 9,761.79 < M_{ua} = 12,826.19 \text{ kgm}$$

O.K.

• 9.2. Revisión por Fuerza Cortante

Apoyo - Sección crítica

Peso propio.

$$V_{pp} = w_{pp} \frac{l}{2} = 151.4 \times \frac{7}{2} = 529.9$$

$$V_{pp} = 529.7 \text{ kg}$$

Sobrecarga.

$$V_{sc} = w_{sc} \frac{l}{2} = 957 \times \frac{7}{2} = 3354.5$$

$$V_{sc} = 3354.5 \text{ kg}$$

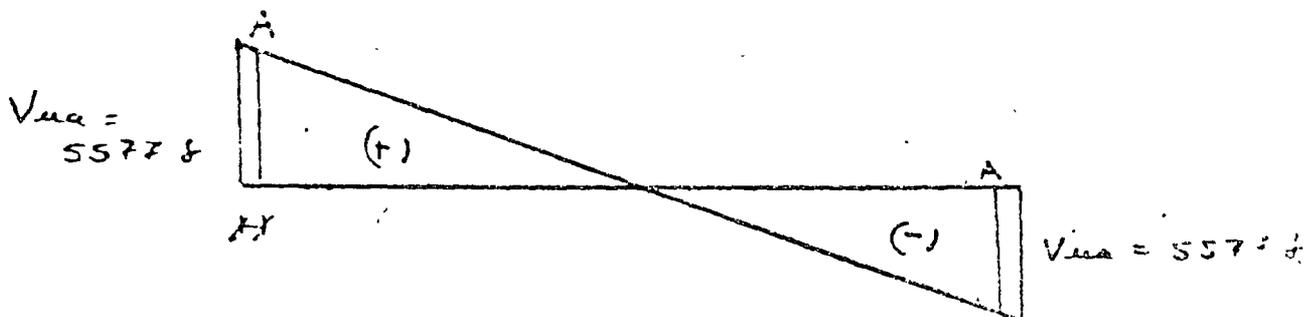
$$V_a = V_{pp} + V_{sc} = 529.7 + 3354.5$$

$$V_a = 3984.2 \text{ kg}$$

Fuerza Cortante Última

$$V_{ua} = F_c V_a = 1.4 \times 3984.2$$

$$V_{ua} = 5577.8 \text{ kg}$$



$$V_{ua} = \frac{30\%}{100} \times 5577.8 = 1673.34 \text{ kg}$$

## Contribución del Concreto Simple.

Nota: En este larguero la fuerza de peso,  $w$ , proporciona el 100% de la Resistencia a tensión del larguero.

Además es una viga de sección

Largo

$$V_c = FR (b'd^2) \left[ 0.15 \sqrt{f_c} + 50 \frac{w}{A} \right]$$

Revisión de especificaciones complementarias

a. -  $b \leq 1.00m$

En este caso

$$h \leq 0.75m \leq 1.50 \text{ m}$$

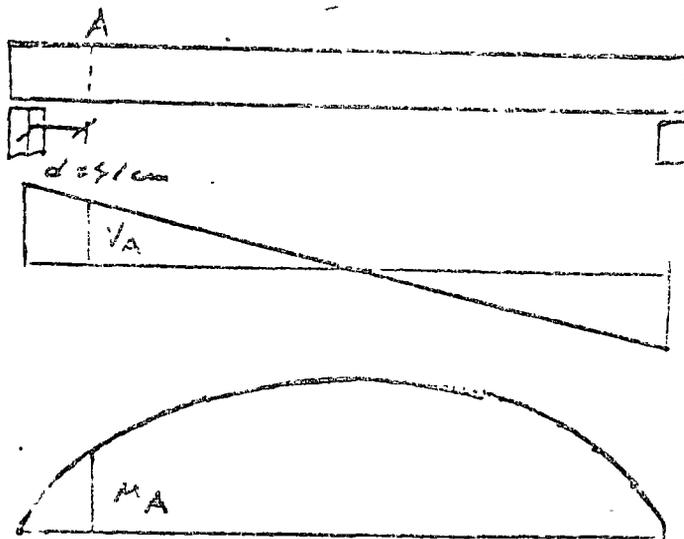
b. -  $\frac{h}{b'} \leq 6$

En este caso

$$\frac{h}{b'} = \frac{75}{9.03} = 8.30 < 6 \quad 0.11$$

Conclusión. - No se reduce el valor de  $V_c$

Revisión de la sección crítica a un punto  $d$  del eje del apoyo.



Momento Flexionante.

$$M_x = w \frac{l}{2} x - \frac{wx^2}{2}$$

$$\text{Sea } x = 0.91 \text{ m}$$

$$wL = w_{pp} + w_{sc}$$

$$wL = 151.9 + 987 = 1138.9$$

$$M_{.91} = 1138.9 \times \frac{7}{2} \times 0.91 - 1138.9 \times \frac{(0.91)^2}{2}$$

$$M_{.91} = 1633.6 - 95.68 = 1537.92 \text{ kgm}$$

Fuerza Cortante

$$V_x = w \frac{l}{2} - wx$$

$$V_{.91} = 1138.9 \times \frac{7}{2} - 1138.9 \times 0.91$$

$$V_{.91} = 3989.9 - 966.79 = 3517.66 \text{ kg}$$

Ancho promedio del alma

$$b' = \frac{15.03 + 9.03}{2} = 12 \text{ cm}$$

$$d_t = 91 \text{ cm}$$

$$t = 5 \text{ cm}$$

$$V_c = F_A (b'd + d^2) \left[ 0.15 \sqrt{f_c'} + 50 \frac{V_{dt}}{M} \right]$$

$$V_c = 0.8 (12 \times 91 + 91^2) \left[ 0.15 \sqrt{280} + 50 \times \frac{3517.66 \times 0.91}{1537.92} \right]$$

$$V_c = 0.8 \times 517 [2.51 + 96.59] = 0.8 \times 517 \times 99.10$$

$$V_c = 20,431.56 \text{ kg}$$

## Valores Límites de $V_c$

$$V_{c\text{mín}} = 0.5FR (b'd + \epsilon^2) \sqrt{f_c}$$

$$V_{c\text{mín}} = 0.5 \times 0.8 (12 \times 41 + 5^2) \sqrt{230}$$

$$V_{c\text{mín}} = 0.5 \times 0.8 \times 517 \times \sqrt{230} = 3460.4 \text{ kg}$$

$$V_c = 20,431.52 \text{ kg} > V_{c\text{mín}} = 3460.4 \text{ kg}$$

$$V_{c\text{máx}} = 1.3FR (b'd + \epsilon^2) \sqrt{f_c}$$

$$V_{c\text{máx}} = 1.3 \times 0.8 (12 \times 41 + 5^2) \sqrt{230}$$

$$V_{c\text{máx}} = 1.3 \times 0.8 \times 517 \times \sqrt{230} = 8997.1 \text{ kg}$$

$$V_c = 20,431.52 \text{ kg} > V_{c\text{máx}} = 8997.1 \text{ kg}$$

conclusión  $\therefore V_c = \underline{8997.1 \text{ kg}}$

## Determinación de $V_{ua}$

$$V_{ua} = F.C. \cdot V_c$$

$$V_{ua} = 1.4 \times 3517.66 = 4924.7 \text{ kg}$$

Conclusión  $V_{ua} = 4924.7 \text{ kg} < V_c = 8997.1 \text{ kg}$   
Luego, se colocan estribos  
por especificación

Estribos por especificación

Se usó estribos  $\phi 1/2''$   $f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$   
2 x 0 mds.

$$A_u = 2 \times 0.32 = 0.64 \text{ cm}^2$$

- Separación máxima por carga mínima

$$S_{max} = \frac{F A R u f_y}{3.5b'} = \frac{0.8 \times 0.64 \times 2530}{3.5 \times 12} = 30.89 \text{ cm}$$

- Separación máxima por especificación

$$V_{cmax} = 1.5 F A (b'd + l^2) \sqrt{f_c}$$

$$V_{cmax} = 1.5 \times 0.8 (12 \times 41 + 5^2) \sqrt{250}$$

$$V_{cmax} = 1.5 \times 0.8 \times 517 \times \sqrt{250}$$

$$V_{cmax} = 10,381.2 \text{ kg}$$

$$V_{ua} = 4924.7 \text{ kg} < V_{cmax} = 10,381.2 \text{ kg}$$

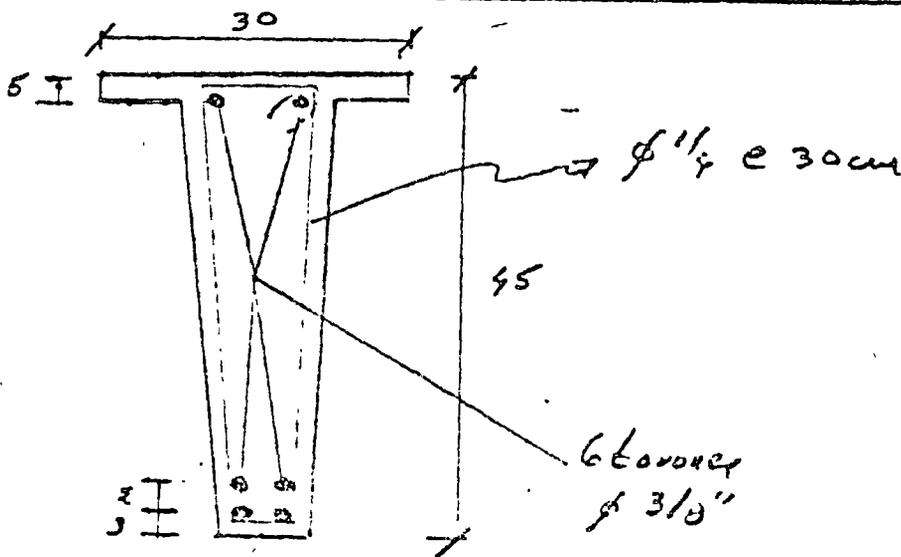
Luego

$$S_{max} = 0.75h$$

$$S_{max} = 0.75 \times 45 = 33.75$$

$$S_{max} = 33.75 \text{ cm}$$

Conclusión: - Estribos  $\phi 1/2''$  (2 rows)  $f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$   
 @ 30 cm (a lo largo de toda la columna)



$$V_{ua max} = 2.5 F A (b'd + l^2) \sqrt{f_c}$$

$$V_{ua max} = 2.5 \times 0.8 (12 \times 41 + 5^2) \sqrt{250} = 17,302.1 \text{ kg}$$

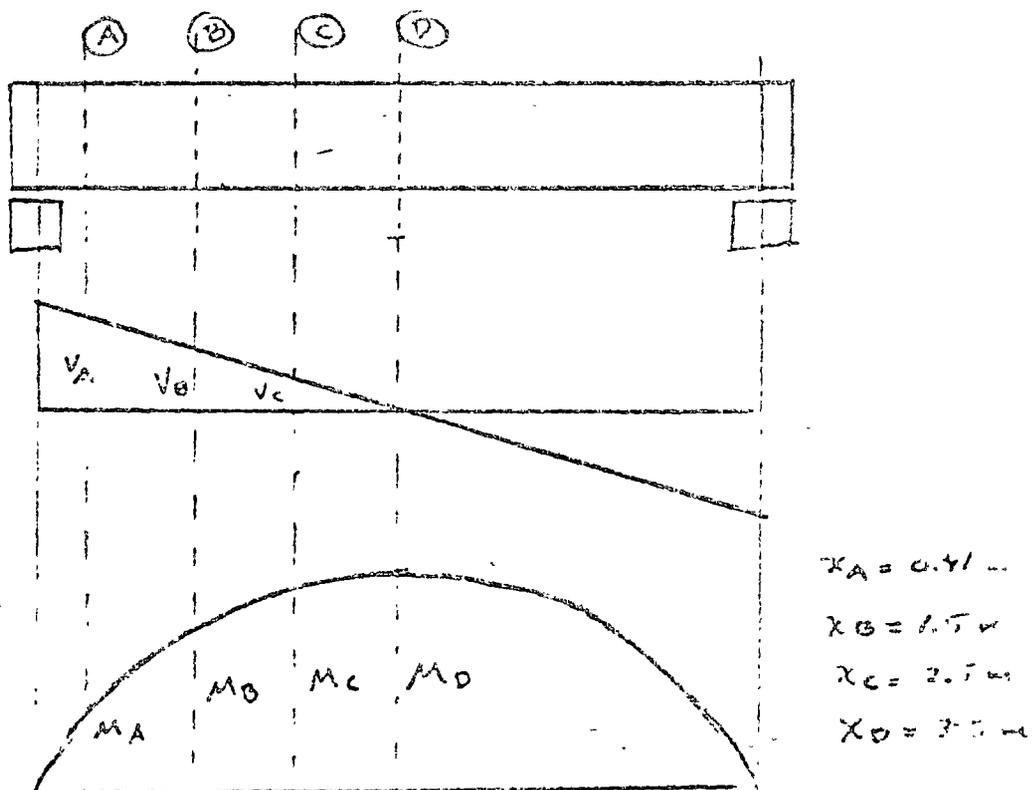
$$V_{ua} = 4924.7 < V_{cmax} = 10,381.2$$

Nota.- Con el objeto de mostrar el procedimiento a seguir en el caso de que no solo se requiera escribir por especificaciones, se usó a modificar en el problema anterior la carga actual.

$$\begin{aligned}
 \text{Sea } w_{sc} &= 2200 \text{ kg/m} \\
 w_{pp} &= 151.3 \text{ kg/m} \\
 \hline
 w_t &= 2351.3 \text{ kg/m}
 \end{aligned}$$

Se revisaran las siguientes secciones:

- Sección crítica - (A)
- Sección al centro del claro (D)
- Secciones a cada metro a partir del centro del claro. (B) y (C)



## Elementar Mecánica

Ecuaciones

$$V_x = w \frac{l}{2} - wx$$

$$w = 2351.4 \text{ kg/m}$$

$$l = 7.0 \text{ m}$$

$$M_x = w \frac{l}{2} x - w \frac{x^2}{2}$$

Sección A

$$x = 0.41 \text{ m}$$

$$V_{0.41} = 2351.4 \times \frac{7.0}{2} - 2351.4 \times 0.41$$

$$V_{0.41} = 8229.9 - 964.07 = \underline{7265.83 \text{ kg}}$$

$$M_{0.41} = 2351.4 \times \frac{7.0}{2} \times 0.41 - 2351.4 \times \frac{0.41^2}{2}$$

$$M_{0.41} = 3379.2 - 197.6 = \underline{3176.56 \text{ kgm}}$$

$$V_{Ma(0.41)} = 1.3 \times 7265.83 = \underline{10,177.15}$$

Sección B.

$$x = 1.5 \text{ m}$$

$$V_{1.5} = 2351.4 \times \frac{7.0}{2} - 2351.4 \times 1.5$$

$$V_{1.5} = 8229.9 - 3527.1 = \underline{4702.8 \text{ kg}}$$

$$M_{1.5} = 2351.4 \times \frac{7.0}{2} \times 1.5 - 2351.4 \times \frac{1.5^2}{2}$$

$$M_{1.5} = 12,399.85 - 2655.3 = \underline{9699.52 \text{ kgm}}$$

$$V_{Ma} = 1.4 \times 4702.8 = \underline{6583.92 \text{ kg}}$$

Sección C

$$x = 2.5$$

$$V_{2.5} = 2351.4 \times \frac{7}{2} - 2351.4 \times 2.5$$

$$V_{2.5} = 8229.9 - 5878.5 = \underline{2351.4 \text{ kg}}$$

$$M_{2.5} = 2351.7 \times \frac{2.0}{2} \times 2.5 - 2351.7 \times \frac{2.5^2}{2}$$

$$M_{2.5} = 20,579.75 - 7358.12 = \underline{13,221.63}$$

$$V_{uq}(2.5) = 1.5 \times 2351.7 = \underline{3527.55}$$

en x = 0

$$x = 3.5$$

$$V_{3.5} = 0$$

$$M_{3.5} = \frac{w \cdot x^2}{8} = \frac{2351.7 \times 3.5^2}{8} = \underline{36,502.34}$$

$$V_{uq}(3.5) = 0$$

Información obtenida anteriormente.

$$V_{cmin} = 3960.4 \text{ kg}$$

$$V_{cmax} = 8997.1 \text{ kg}$$

Seas estribos  $\phi \frac{1}{2}$  2 rows  $f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$

$$A_v = 2 \times 0.32 = 0.64 \text{ cm}^2$$

Separación máxima por area mínima  $S = 30 \text{ cm}$   
max

Separación por especificación.

$$V_{c base} = 1.5 F_A (6'0" + 1') \sqrt{f_c} = 10,381.2 \text{ kg}$$

$$\text{Si } V_{uq} \leq V_{c base} = 10,381.2 \text{ kg}$$

$$S_{max} = 0.75h = 0.75 \times 45 = 33.75 \text{ cm} \leq 30 \text{ cm}$$

$$\text{Si } V_{uq} > V_{c base} = 10,381.2 \text{ kg}$$

$$S_{max} = 0.37h = 0.37 \times 45 = 16.65 \text{ cm} \leq \dots$$

$$V_{\text{io máx}} = 17,307.1 \text{ kg}$$

A continuación conviene hacer una SLD, como la que se muestra en la hoja 71, para lo cual se aplican las siguientes fórmulas.

$$0.15 \sqrt{f_c} = 0.15 \sqrt{280} = 2.51$$

$$b'd + t^2 = 12 \times 91 + 5^2 = 1091 + 25 = 1116$$

$$FR(b'd + t^2) = 0.8(1116) = 892.8$$

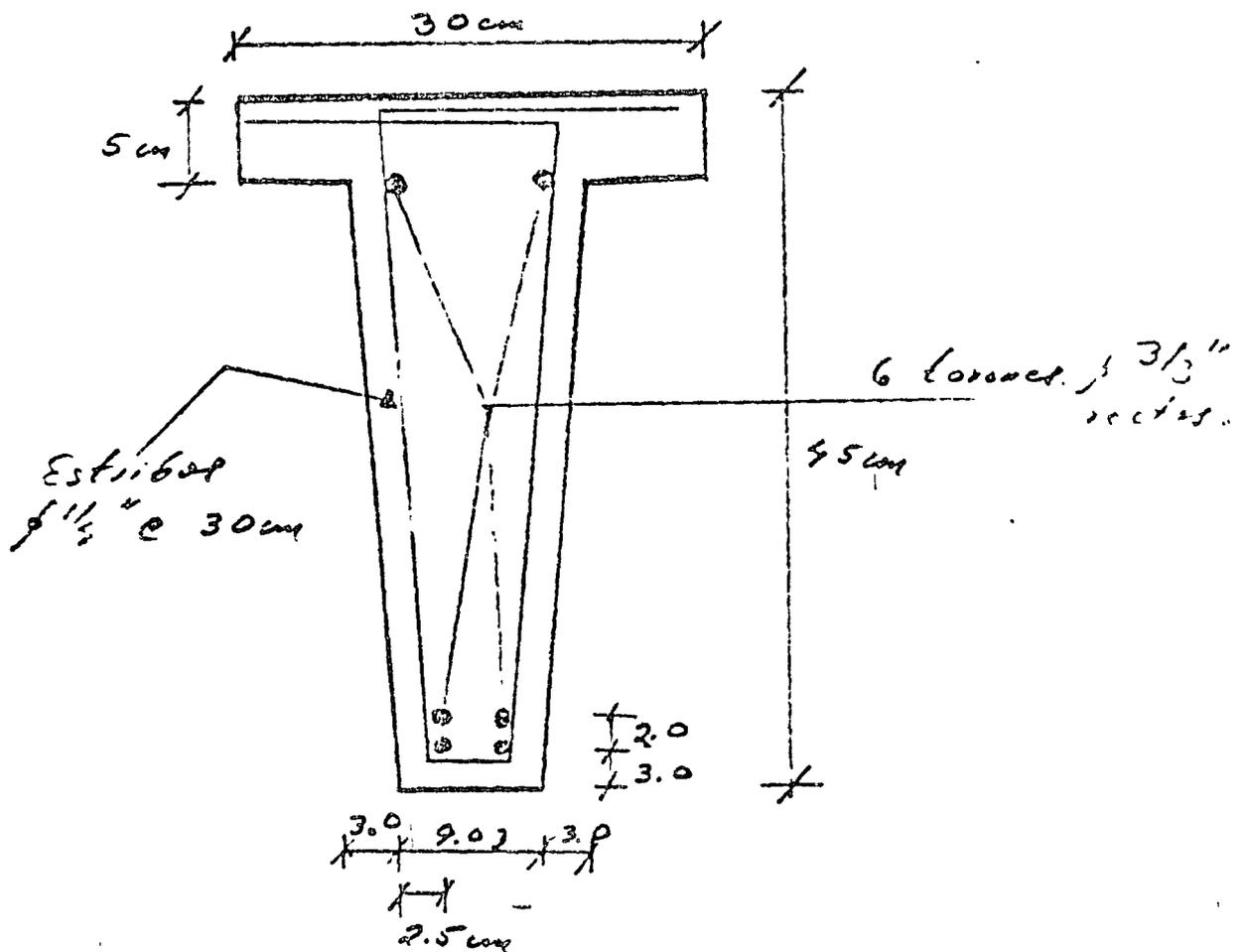
$$FR A_u f_y d = 0.8 \times 0.64 \times 2530 \times 91 = 53104.72$$

DESCRIPCION		A	B	C	D	Observaciones
Etapas		$x=0.91$	$x=1.5$	$x=1.5$	$x=1.5$	
1	V	7265.83	4702.8	2356.4	0	
2	de	0.91	0.91	0.91	0.91	de = de tendido recto
3	M	3176.56	9679.52	13,226.6	14,902.3	
4	$50 \frac{Vd}{M}$	96.89	9.99	3.69	0	
5	$0.15 \sqrt{f_c} + 50 \frac{Vd}{M}$	99.90	12.95	6.15	2.51	$0.15 \sqrt{f_c} = 2.51$
6	$V_c = FR(b'd + c^2) \left[ 0.15 \sqrt{f_c} + 50 \frac{Vd}{M} \right]$	20,936.89	5,199.32	2,593.69	1,038.13	$FR(b'd + c^2) = 913.6$
7	$V_c$ (definitivo)	8,997.1	5,199.32	3,960.9	3,960.9	$V_{c \text{ m\u00e1x}} = 3960.9 \text{ kg}$ $V_{c \text{ m\u00edn}} = 8997.1 \text{ kg}$
8	$V_{req}$	10,173.16	6,583.92	3,291.96	0	
9	Revisi\u00f3n de $V_{req}$	10,173.16	6,583.92	3,291.96	0	$V_{req \text{ m\u00edn}} = 17,307.1$ 0.18
10	$V' = V_{req} - V_c$	1,175.06	1,434.6	$V_c > V_{req}$	$V_c > V_{req}$	
11	$s = \frac{FR \text{ Aufg } d}{V'}$	95.19	37.0	-	-	$FR \text{ Aufg } d' = 53,107.76$
12	Revisi\u00f3n de $V_c$ (base) $V_c$ (base) = 10,581.2	✓	✓	✓	✓	$S_1 V_{req} \leq V_c$ base $S_{1 \text{ m\u00e1x}} = 37.0$ $S_1 V_{req} > V_c$ base $S_{1 \text{ m\u00e1x}} = 37.0$
	S (definitivo)	30 cm	30 cm	30 cm	30 cm	$S_{1 \text{ m\u00e1x}} = 30 \text{ cm}$ Area $A_{1 \text{ m\u00e1x}}$ $S_{1 \text{ m\u00edn}} = 33 \text{ cm}$

## Resumen

Los largueros pretensados deberán tener las siguientes características:

### 1.- Sección y Armado



### 2.- Materiales

2.1. Concreto  $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$

2.2. Acero de Refuerzo  $f_{rs} = 18,000 \text{ kg/cm}^2$

2.3. Acero de Refuerzo Transversal  $f_y = 2500 \text{ kg/cm}^2$



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

TEMA: FUERZA CORTANTE EN VIGAS  
DE SECCION COMPUESTA.

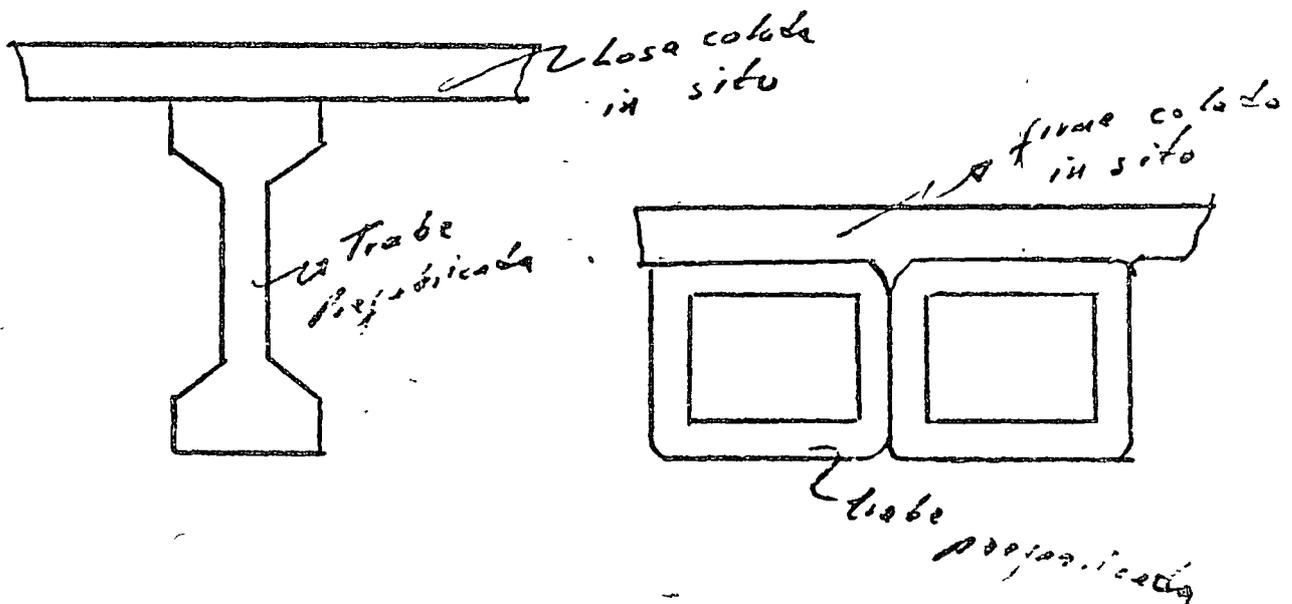
PROF. ING. CONSTANCIO RODRIGUEZ CABELLO.

Marzo de 1978.



FUERZA CORTANTE EN VIGAS PRESFORZADAS  
DE SECCION COMPUESTA

Una viga de sección compuesta es un elemento estructural formado por dos o más materiales de características diferentes. Existen diversos tipos de secciones compuestas; sin embargo el caso que nos interesa en este curso, es el de traveses de concreto presforzado, prefabricados, que trabajan en sección compuesta con una losa o firme estructural colado en el lugar.



Las traveses presforzados son prefabricada en plantas y posteriormente transportadas y colocadas en el sitio definitivo. En el lugar de la obra se cuela sobre ellas los firmes o losas estructurales, formando al fraguar y adquirir la resistencia adecuada una viga de sección compuesta.

La práctica usual, es que el concreto empleado en la trabe prefabricada y presforzada sea de mayor resistencia (en nuestro país se emplean concretos de  $f'c = 350$  a  $400 \text{ Kg/cm}^2$ ). que el de la losa o firme colado *in situ* ( $f'c = 200 \text{ Kg/cm}^2$ ).

Con anterioridad, en la parte correspondiente a flexión, se estudió el diseño y revisión por flexión de vigas de sección compuesta. Ahora nos dedicaremos al estudio de su comportamiento bajo la acción de la fuerza cortante.

En las vigas de sección compuesta es necesario asegurar que no exista, la posibilidad de desplazamientos horizontal relativos en la superficie de contacto, entre la losa o firme colada *in situ* y la trabe prefabricada, además se debe asegurar, que no se presente una separación (normal a la superficie de contacto) entre la losa y la trabe prefabricada.

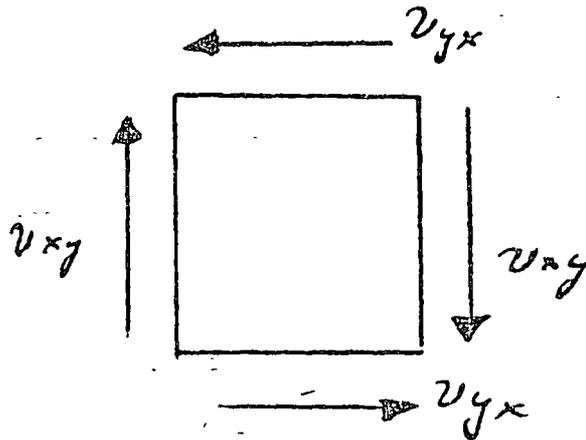
Para evitar el desplazamiento horizontal relativo entre los dos elementos se dejan superficies rugosas o las denominadas llaves de cortante (Shear Kegs) en las trabes prefabricadas.

Para evitar la separación de los dos elementos en el sentido normal a la superficie de contacto se emplean conectores de cortante (varillas de esfuerzo). Estos conectores deben estar convenientemente anclados en los trabes

presforzadas y cortar en una longitud de desarrollo suficiente en la losa o firme estructural.

Es usual también emplear a los estribos de la trabe como conectores para resistir fuerzas rasantes, para ello, se aumenta su longitud de manera que lleguen a la losa y se doblen en ella con la longitud necesaria para desarrollar su anclaje por adherencia.

Conviene recordar que en cualquier partícula de una viga, existen esfuerzos cortantes en dos planos normales,  $(v_{xy})$  esfuerzo cortante vertical y  $(v_{yx})$  esfuerzo cortante horizontal.



Anteriormente estudiamos los efectos de estos esfuerzos cortantes en conjunto con los esfuerzos normales producidos por la flexión, presentándose esfuerzos de tensión diagonal que son resistidos por el concreto y/o por los estribos. Ahora bien, en el caso de secciones compuestas, conviene revisar el plano de contacto entre las dos partes que integran la sección compuesta,

por ser éste un plano con características especiales, en el que es factible se presenten desplazamientos verticales u horizontales entre la trabe y la losa.

Para revisar por fuerza cortante <sup>en</sup> vigas de sección compuesta se emplean los mismo criterios especificados en secciones simples, considerando a la sección compuesta como un elemento monolítico en el que el peralte y el momento de inercia son los correspondientes a la propia sección compuesta.

Para revisar la capacidad de transmitir la fuerza rasante de la trabe a la losa o firme estructural, el reglamento del Distrito Federal 1977 ha definido las siguientes especificaciones:

Efectos de la fuerza cortante.

1. El esfuerzo cortante horizontal,  $v_h$ , en la superficie de contacto entre los elementos que forman la viga compuesta puede calcularse con la expresión

$$v_h = \frac{V_u}{F_R b_v d}$$

donde

$V_u$  — fuerza cortante de diseño

$b_v$  — ancho del área de contacto

$d$  — peralte efectivo de la sección compuesta

II. Debe asegurarse que en la superficie de contacto entre los elementos componentes se transmitan los esfuerzos cortantes que ahí actúan.

III. Para transmitir en la superficie de contacto los esfuerzos cortantes de diseño, se admitirán los valores siguientes:

1. En elementos donde no se usen anclajes metálicos y la superficie de contacto esté rugosa y limpia:  $3 \text{ kg/cm}^2$  (se admitirá que una superficie está rugosa si tiene rugosidades del orden de 5 mm o mayores).

2. Donde se cumplan los requisitos mínimos para los conectores que indica el inciso IV y la superficie de contacto esté limpia pero no rugosa:  $6 \text{ kg/cm}^2$ .

3. Donde se cumplan los requisitos mínimos para los conectores del inciso IV y la superficie de contacto esté limpia y rugosa:  $25 \text{ kg/cm}^2$ .

Cuando el esfuerzo cortante de diseño exceda de  $25 \text{ kg/cm}^2$ , el diseño por cortante horizontal se hará de acuerdo con los criterios de cortante por fricción de 2.1.5 k).

IV. - Para que sean válidos los esfuerzos prescritos en 2 y 3 del número III deben usarse conectores formados por barras o estribos normales al plano de contacto. El área mínima de este refuerzo será  $3/f_y$  veces el área de contacto ( $f_y$  en  $\text{kg/cm}^2$ ). Su espaciamiento no excederá de seis veces el espesor del elemento colado en lugar ni de 60 cm. Además, los conectores deben anclarse en ambos componentes del elemento compuesto de modo que en el plano de contacto puedan desarrollar no menos del 80 por ciento de su esfuerzo de fluencia.

V. El refuerzo por tensión diagonal de una viga compuesta se dimensionará como si se tratara de una viga monolítica de la misma forma.

#### Resistencia a fuerza cortante por fricción.

Estas disposiciones se aplican en secciones donde rige el cortante directo y no la tensión diagonal (en ménsulas cortas, por ejemplo, y en detalles de conexiones de estructuras prefabricadas. En tales casos, si se necesita refuerzo, este deberá ser perpendicular al plano crítico por cortante directo. Dicho refuerzo debe estar bien distribuido en la sección definida por el plano crítico y debe estar anclado a ambos lados de modo que pueda alcanzar su esfuerzo de fluencia en el plano mencionado.

La resistencia a fuerza cortante,  $V_R$ , se tomará como el menor de los valores calculados con las expresiones siguientes:

$$\frac{F_R \mu (A_{vf} \cdot f_y + N_u)}{0.3 F_R f'_c A} \left[ 14 A + 0.8 (A_{vf} \cdot f_y + N_u) \right]$$

donde  $A_{vf}$  es el área del refuerzo por cortante por fricción, en  $\text{cm}^2$ ;  $A$  es el área de la sección definida por el plano crítico en  $\text{cm}^2$ ;  $N_u$  es la fuerza de diseño de compresión normal al plano crítico, en kg, y  $\mu$  el coeficiente de fricción que se tomará igual a 1.4 en concreto colado monolíticamente, igual a 1.0 para concreto colado contra concreto endurecido e igual a 0.7 entre concreto y acero laminado. Los valores de  $\mu$  anteriores se aplican si el concreto endurecido contra el que se coloca concreto fresco tiene rugosidades del orden de 5 mm o mayores, y si el acero está limpio y sin pintura.

En las expresiones anteriores,  $f_y$  no se supondrá mayor de 4200 kg/ $\text{cm}^2$ . Cuando haya tensiones normales al plano crítico, sea por tensión directa o por flexión, en  $A_{vf}$  no se incluirá el área de acero necesaria por estos conceptos.

11 28

ESFUERZOS EN ZONAS DE ANCLAJE DE PRESFUERZO.

En las zonas de anclaje de los tendones de presfuerzo, se presentan esfuerzos de considerable magnitud que pueden llegar a ocasionar fallas del elemento presforzado al no tomarse las precauciones adecuadas. La falla se manifiesta por la formación de grietas longitudinales en los extremos de las vigas presforzadas. Es factible de evitar esta falla, si se determinan con más o menos precisión los esfuerzos actuantes debidos al anclaje del presfuerzo y se coloca el acero transversal requerido por estos esfuerzos.

Sin embargo, el determinar la magnitud de los esfuerzos es un problema de no fácil solución; además se ha observado que las características que se presentan en los elementos pretensados son diferentes a las que se presentan en los elementos postensados. A continuación se muestran los diagramas de cuerpo libre de los extremos de vigas pretensadas y postensadas:

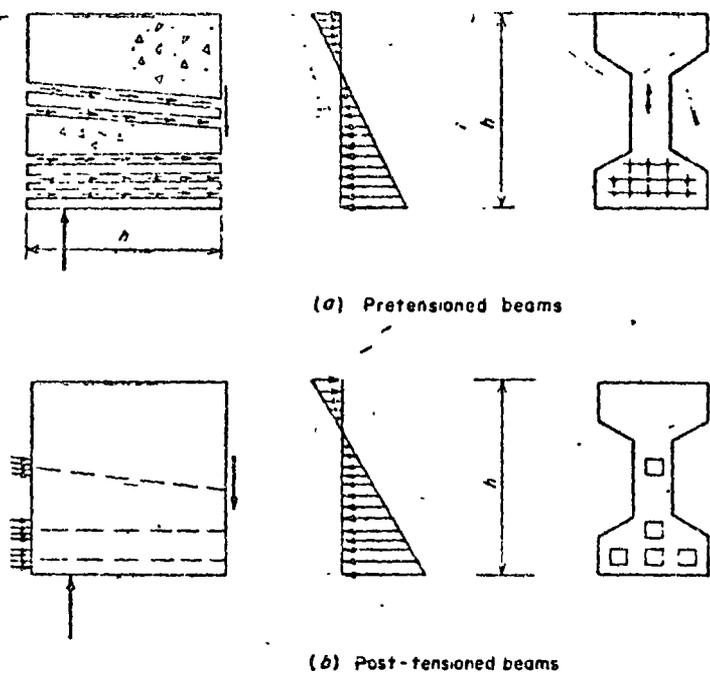


Fig. 5-6 Anchorage forces.

En las figuras anteriores, se pueden observar (tanto en piezas pretensadas como postensadas) las fuerzas actuantes en el concreto en las zonas extremas de las vigas debidas a la transferencia del presfuerzo y a las reacciones verticales. También existirán en estas secciones aunque no se muestra en las figuras anteriores, esfuerzos cortantes y esfuerzos normales debidos a la flexión. Sin embargo la fuerza de mayor magnitud y más crítica en esta zona de la viga es la de transferencia del presfuerzo, la cual es varias veces mayor en magnitud que la reacción vertical.

El problema pues consiste en determinar primeramente los esfuerzos creados en las zonas de anclaje por las fuerzas mostradas en las figuras anteriores. Dado que hay una concentración de fuerzas de gran magnitud en los extremos de las vigas presforzadas, se desarrollan esfuerzos notables en el concreto.

Esta concentración de esfuerzos, que se desarrolla en los extremos de las vigas presforzadas, se considera cetero parate en una longitud igual a un peralte de la sección, más allá de esta sección el presfuerzo se ha transmitido

y los efectos de concentración de esfuerzos son despreciables. A esta región de las vigas limitadas por los extremos y un peralte de las mismas se les denomina zonas de transferencia.

Los esfuerzos en las zonas de transferencia de las vigas varían apreciablemente en cuanto a valor y naturaleza a lo largo del claro, peralte y ancho de la viga. Existe una gran variedad de soluciones empíricas y prácticas para la determinación de estos esfuerzos basados todos ellos en hipótesis simplificadoras.

Entre las diferentes soluciones que podemos utilizar para la determinación de los esfuerzos en los extremos de las vigas, la solución bidimensional basada en la teoría de la elasticidad, da resultados aceptables. En esta teoría la influencia de las reacciones verticales se desprecia y se considera que la fuerza de presfuerzo se distribuye como una carga lineal en lo ancho de la viga. A continuación se muestra en la figura siguiente la sección idealizada de acuerdo con esta teoría:

BOND AND ANCHORAGE

165

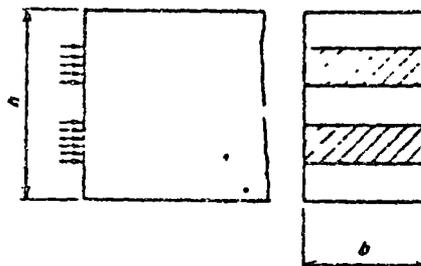


Fig. 5-7 Idealization of the anchorage zone for two-dimensional analysis.

Los resultados de esta investigación, nos muestra - que las fuerzas del presfuerzo mostradas en la figura anterior, producen esfuerzos de tensión en varios puntos de la zona de transferencia. La figura siguiente muestra una idealización típica del extremo de la viga sujetas a dos concentraciones simétricas de carga. Los esfuerzos de tensión aparecen en las dos siguientes regiones:

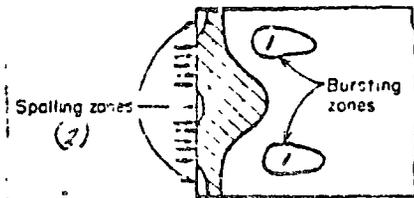


Fig. 5-8 Tensile stresses at the spalling and bursting zones.

1.- Inmediatamente después del punto de aplicación de las fuerzas del presfuerzo y dentro de la zona de transferencia, existen las zonas denominadas por el No. 1, según se muestra en la figura anterior. Los esfuerzos que aquí se presentan, se denominan esfuerzos de explosión (bursting stresses). La posición exacta de esta zona depende en el caso de vigas postensadas del área relativa de las placas de anclaje del presfuerzo (postensado).

2.- En extremo de la sección de la viga entre las placas de anclaje del presfuerzo y cercano a las fibras superiores e inferiores de la viga, se presenta otra zona de esfuerzos de tensión, señaladas en la figura con el No. 2 (spalling stresses).

Las zonas sombreadas representan las regiones en que se presentan esfuerzos de compresión.

La distribución de esfuerzos mostrada en la figura anterior ha sido verificada mediante estudios de fotoelasticidad en vigas presforzadas.

Los ingenieros Magñel y Guyón desarrollaron métodos aproximados para determinar esfuerzos en las zonas de transferencia. El Sr. Magñel consideraba que en las zonas de anclaje de una viga, la distribución de esfuerzos tenía la forma de una curva de tercer grado. Por otra parte, el Sr. Guyón introdujo la teoría simplificatoria bidimensional.

Los resultados obtenidos de las experiencias mostraron que los métodos anteriores únicamente son correctos bajo ciertas condiciones de carga. Se observó que para esfuerzos de tensión pequeños inferiores a los que se presen

ta al agrietarse el concreto, los métodos mencionados dan resultados correctos. Sin embargo, dado que el concreto no puede tomar esfuerzos de tensión considerables, al presentarse cierto nivel de cargas se producen grietas horizontales y en esta situación los métodos de análisis dan resultados incorrectos.

El objeto de determinar los esfuerzos que se presentan en los extremos de las vigas presforzadas, es el de desarrollar un método que determine la cantidad del refuerzo vertical que deba ser colocado en los extremos de esta viga. Dado que los esfuerzos de tensión producidos por el anclaje del presfuerzo, son de considerable magnitud y que el concreto se agrieta a niveles bajos, el objeto del refuerzo vertical es únicamente el de impedir que el agrietamiento horizontal aumente y se propague a lo largo de la viga, ya que se ha comprobado de que el refuerzo solamente trabaja una vez que se ha presentado el agrietamiento horizontal.

Los experimentos realizados en vigas de sección "I" muestran la naturaleza no lineal de los esfuerzos en los

blocks extremos de estas vigas y la formación de grietas longitudinales. Estos experimentos también han mostrado - que realmente no existe para este efecto ninguna ventaja notable en las secciones rectangulares en comparación con las secciones "I".

#### DETERMINACION DEL PRESFUERZO TRANSVERSAL.

A continuación se presenta un método práctico desarrollado por Warbey Khachaturian y German Gurfinkel para determinar con cierta aproximación el refuerzo requerido en los bloques extremos de las vigas presforzadas.

— En el extremo de viga mostrado en la figura siguiente la sección A-A se localiza a una distancia  $B$  del extremo de la viga. Considerando que en esta sección AA no existe influencia de las fuerzas concentradas debidas al anclaje del presfuerzo. Si despreciamos la reacción vertical y consideramos que la fuerza de presfuerzo está actuando a una distancia  $g$  de las fibras interiores de la viga, cualquier sección longitudinal localizada en la zona de transferencia a una distancia  $y$  de la fibra inferior está sujeta a un momento flexionante, el cual puede ser determinado a partir de las fuerzas que actúan en los extremos del block.

El momento flexionante puede ser determinado en cualquier sección longitudinal de acuerdo con las ecuaciones siguientes:

- 1.- Si  $y \leq g$ . En la figura B se muestra el diagrama de cuerpo libre de la sección longitudinal. El momento flexionante en esta sección se obtiene con la siguiente ecuación:

$$M = \left[ 2 \left( \frac{y}{h} \right)^3 - \left( 3 + \frac{h}{2e} \right) \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] P e$$

Si consideramos la convención de signos adoptada para momento flexionante positivo en el sentido de giro de las manecillas de un reloj, la ecuación anterior se puede describir de la siguiente manera:

$$\frac{M}{P e} = \left( \frac{y}{h} \right)^2 \left[ 2 \frac{y}{h} - \left( 3 + \frac{h}{2e} \right) \right]$$

- 2.- Si  $y > g$ . En la figura C se muestra el diagrama de cuerpo libre de la sección longitudinal, en ese caso el momento flexionante en forma adimensional se expresa con la ecuación siguiente:

$$\frac{M}{P e} = 2 \left( \frac{y}{h} \right)^3 - \left( 3 + \frac{h}{2e} \right) \left( \frac{y}{h} \right)^2 + \frac{h y}{e h} + \left( 1 - \frac{h}{2e} \right)$$

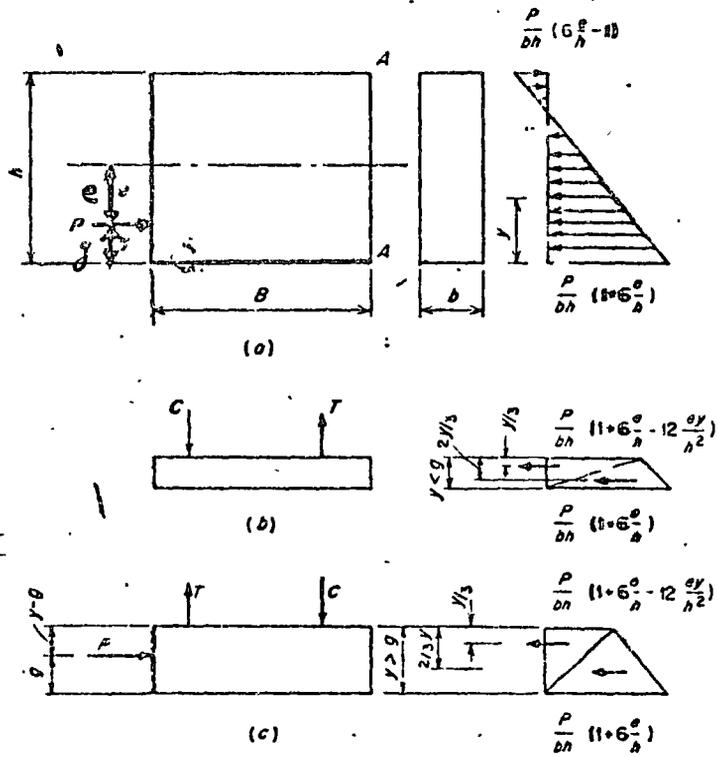


Fig. 5-9 Moment at a longitudinal section.

En el caso general de vigas postensadas con tendones de presfuerzo a diferentes niveles, se requiere dibujar el diagrama de cuerpo libre para obtener las ecuaciones necesarias para determinar la variación del momento respecto al peralte.

Con el objeto de simplificar la obtención de los momentos en las secciones longitudinales, los autores establecieron la siguiente gráfica que nos permite establecer la relación  $M/Pe$  a partir de las relaciones  $y/h$  y  $e/h$ . En esta gráfica como se puede observar se obtienen momentos positivos y negativos.

168

PRESTRESSED CONCRETE

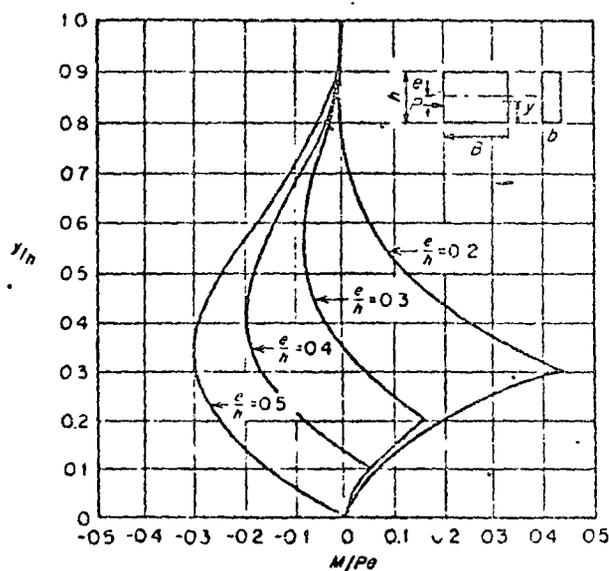


Fig. 5-10 Bending moment in longitudinal sections.

Las ecuaciones de momentos antes indicadas dan los momentos en las secciones longitudinales, pero no permiten obtener la forma exacta de distribución de esfuerzos en esas secciones. Sin embargo, las fuerzas totales de tensión y compresión producidas por esos momentos pueden ser determinadas con ellas si se supone el brazo del par interno. De esta manera se pueden determinar los estribos requeridos para tomar la fuerza total de tensión.

Los esfuerzos permitidos en los estribos deben ser limitados para controlar la abertura de las grietas longitudinales.

A continuación se presenta un método simplificado para determinar el esfuerzo transversal en la zona de transferencia.

Este método establece las siguientes condiciones:

- 1.- El refuerzo transversal debe estar formado por estribos cerrados localizados a una distancia  $h/2$  del extremo de la viga capaces de soportar la fuerza  $T$  dada por la siguiente expresión:

$$F_T = \frac{M_{in}}{h - z}$$

$F_T$  - Fuerza total de tensión.

$M_m$  - Momento máximo longitudinal.

$Z$  - Distancia entre el extremo de la viga y el centroide de los estribos (los cuales deberán estar localizados entre el extremo de la viga y una sección a  $h/2$  del mismo).

$h$  - Peralte total de la viga.

2.- El esfuerzo permisible en los estribos no debe exceder el dado por la siguiente ecuación:

$$f_s \leq 1.67 \left( \frac{E_s \sqrt{f'_c} \omega}{A_s} \right)^{1/2}$$

$f_s$  - Esfuerzo permitido en estribos.

$\omega$  - Ancho de la grieta.

$A_s$  - Area de estribos.

$f'_c$  - Resistencia del concreto a la compresión a los 28 días.

$E_s$  - Módulo de elasticidad del acero.

Acero

$$A_s = \frac{F_T}{f_s}$$

### Ejemplo de Aplicación.

Determinar la separación de conectores requerida en viga de sección compuesta mostrada a continuación.

#### Datos

- Viga pretensada rectangular de 20 cm de ancho y 50 cm de profundidad total  
 $f'_c = 350 \text{ kg/cm}^2$

- Losa colada in situ de 8 cm de espesor

$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

- Claro de la trabe = 12.20 m  
 Simplemente apoyada.

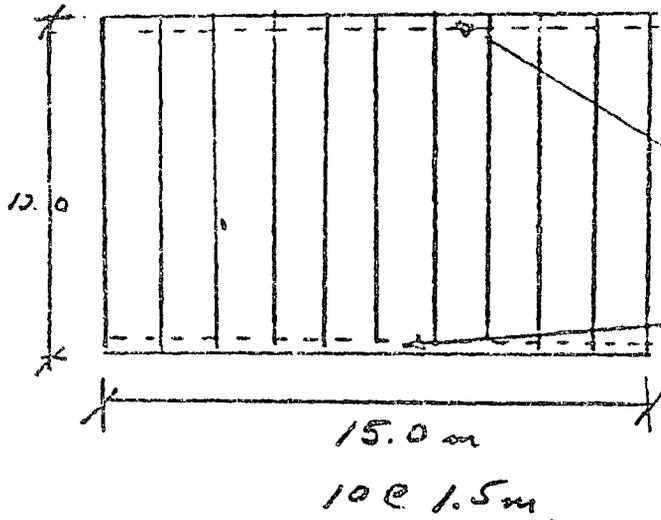
- Conectores  $\phi \frac{1}{4}$ "  $f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$   
 2 ramas

- Carga muerta = 150  $\text{kg/m}^2$

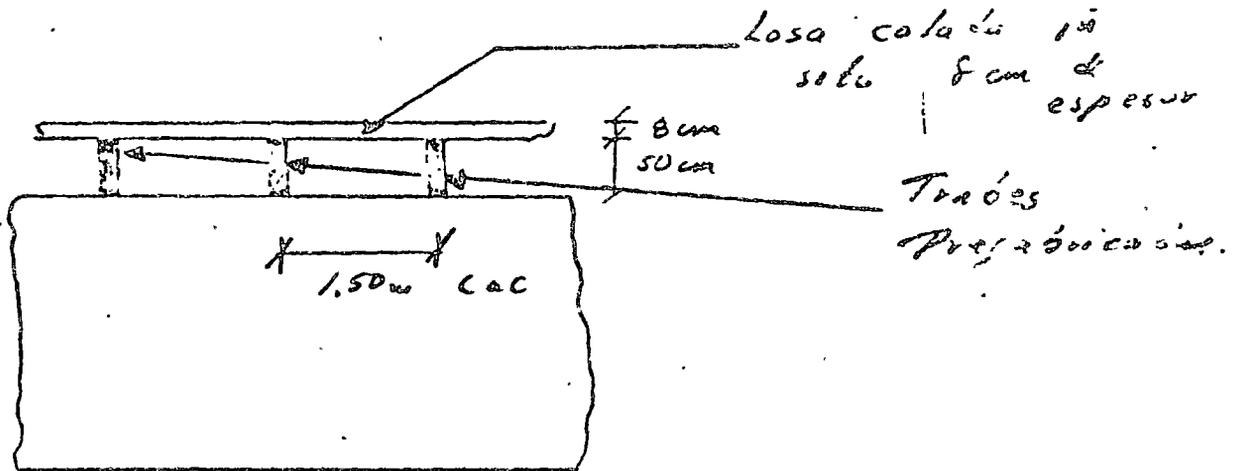
- Carga viva = 300  $\text{kg/m}^2$  (escuela)

- Separación de trabes 1.50 m.

# Planta de Localización de trabes

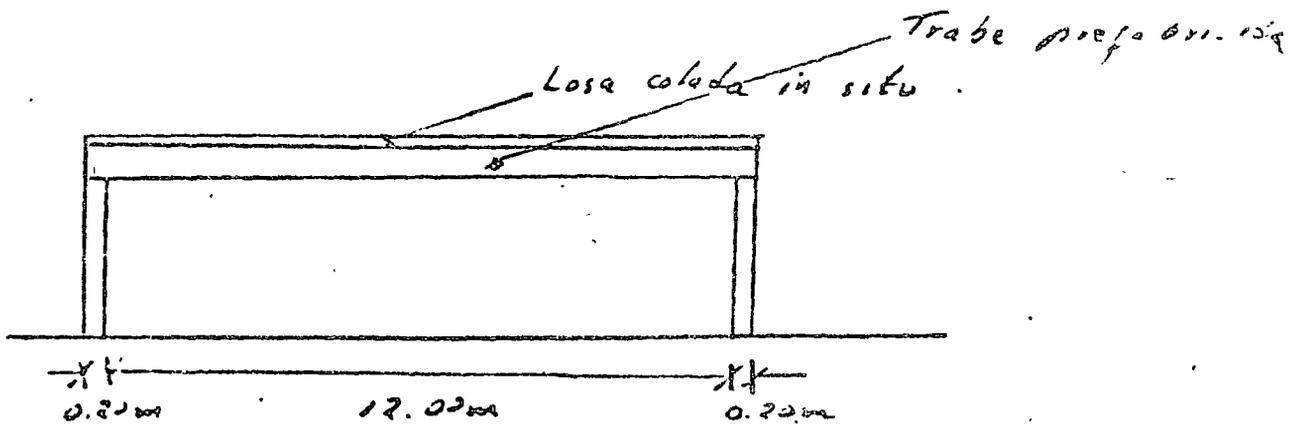


Muros de carga  
de 20 cm de  
espesor



Losas coladas in  
situ 8 cm de  
espesor

Trabes  
Prefabricadas.



Trabe prefabricada

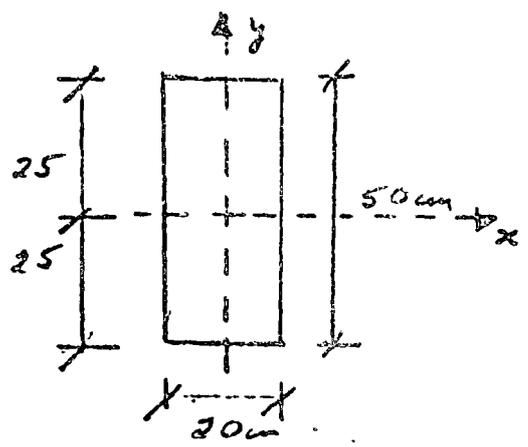
Losas coladas in situ

0.20m      17.00m      0.20m

$$\text{Claro} = 12.00 + 0.20 = 12.20 \text{ m}$$

## Características Geométricas de la Sección

### Sección Simple



$$A = 20 \times 50 = 1000 \text{ cm}^2$$

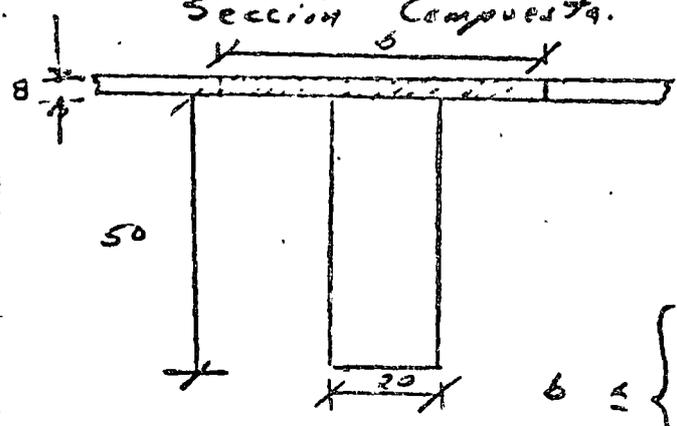
$$z_i = 25 \text{ cm}$$

$$z_s = 25 \text{ cm}$$

$$I = \frac{1}{12} \times 20 \times 50^3 = 208,333 \text{ cm}^4$$

$$W_{pp} = 0.1000 \times 2500 = 250 \text{ cm}^3$$

### Sección Compuesta.



$$b \leq \begin{cases} 16 \text{ cm} \\ \text{c.a.c} \\ 2/3 \end{cases}$$

$$b \leq \begin{cases} 16 \times 8 + 20 = 148 \text{ cm} \\ 150 \text{ cm} \\ \frac{12 \times 20}{4} = 3.05 \text{ m} \end{cases}$$

$\therefore b = 148 \text{ cm}$

Por ser concretos de diferentes resistencias, se debe transformar la losa al concreto de la trabe y así tener un material "homogéneo"

$$m = \frac{E_{trabe}}{E_{losa}} = \frac{10,000 \sqrt{350}}{10,000 \sqrt{200}} = \sqrt{\frac{350}{200}} = 1.32$$

$$b(350) = \frac{b(200)}{m} = \frac{148}{1.32} = 112 \text{ cm}$$

$\therefore b = 112 \text{ cm}$

	A	y	Ay	$\bar{y}$	$\bar{y}^2$	A $\bar{y}^2$	I
1	896	54	48384	15.3	234.09	209,799.64	4778.0
2	1000	25	25000	19.7	187.7	187,700.0	206,333.0
	1896		73,384			397,779.64	213,111.33

$$y_i = \frac{73,384}{1896} = 38.7$$

$$I = 610,555.97 \text{ cm}^4$$

$$y_s = 58 - 38.7 = 19.3 \text{ cm}$$

### Análisis de cargas

- Peso propio trabe —  
 - losa colada in situ —  
 - Carga muerta —  
 - Carga viva —

	Secc. Simple	Secc. Comp.
	240	—
	258	—
	—	225
	—	350
	498 kg/m	675 kg/m

$$w_L = 0.08 \times 1.50 \times 2800 = 258 \text{ kg/m}$$

$$w_{CM} = 150 \times 1.5 = 225 \text{ kg/m}$$

$$w_{CV} = 300 \times 1.5 = 350 \text{ kg/m}$$

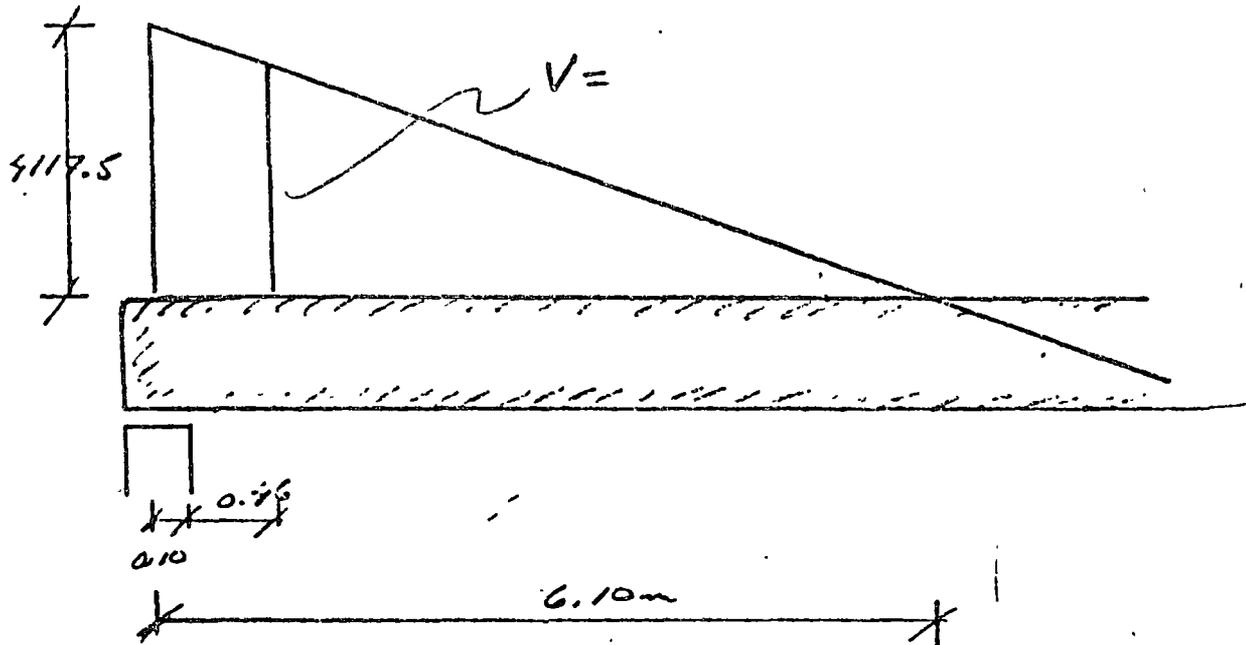
$$w_T = 498 + 675 = 1173 \text{ kg/m}$$

Para diseñar los conductores se toma únicamente la carga que actúa en sección compuesta

$$w = 675 \text{ kg/m}$$

En el apoyo

$$V_a = w \frac{l}{2} = \frac{675 \times 12.20}{2} = 4117.5 \text{ kg}$$



$$\text{sea } d = 0.84 = 0.8 \times 58 = 46.4 \text{ cm.}$$

$$d + 10 = 46.4 + 10 = 56.4 \text{ cm}$$

En sección crítica

$$\frac{V_c}{6.10 - 0.568} = \frac{4117.5}{6.10}$$

$$V_c = \frac{5.536}{6.10} \times 4117.5 = 3736.8 \text{ kg}$$

$$V_{ua} = 1.5 \times 3736.8 = 5605.20 \text{ kg}$$

de acuerdo con el Reglamento S.F. 1977

$$v_h = \frac{V_{ua}}{F_R b u d} = \frac{5605.20}{0.8 \times 20 \times 56.4} = 7.56 \text{ kg/cm}^2$$

Es lógico que la traba prefabricada se deje rugosa en su superficie superior para que tenga mayor adherencia con el concreto de la losa y que esta superficie esté limpia.

(Rugosidad de más de 5 mm).

$$\therefore U_c = 25 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow U_h = 7.56 \text{ kg/cm}^2$$

Conclusión: - Se requieren conexiones solo por especificación

$$A_{msa} = \frac{3}{f_y} A_c \quad A_c = \text{Área de contacto}$$

$$A_c = 20 \times 100 = 2000 \text{ cm}^2$$

$$A_{msa} = \frac{3}{2530} \times 2000 = 2.37 \text{ cm}^2$$

Sean conexiones  $\phi \frac{1}{4}$ " (2 ramas)

$$a_s = 2 \times 0.37 = 0.67 \text{ cm}^2$$

$$S = \frac{a_s}{A_{msa}} \times 100 = \frac{0.67}{2.37} \times 100 = 27 \text{ cm}$$

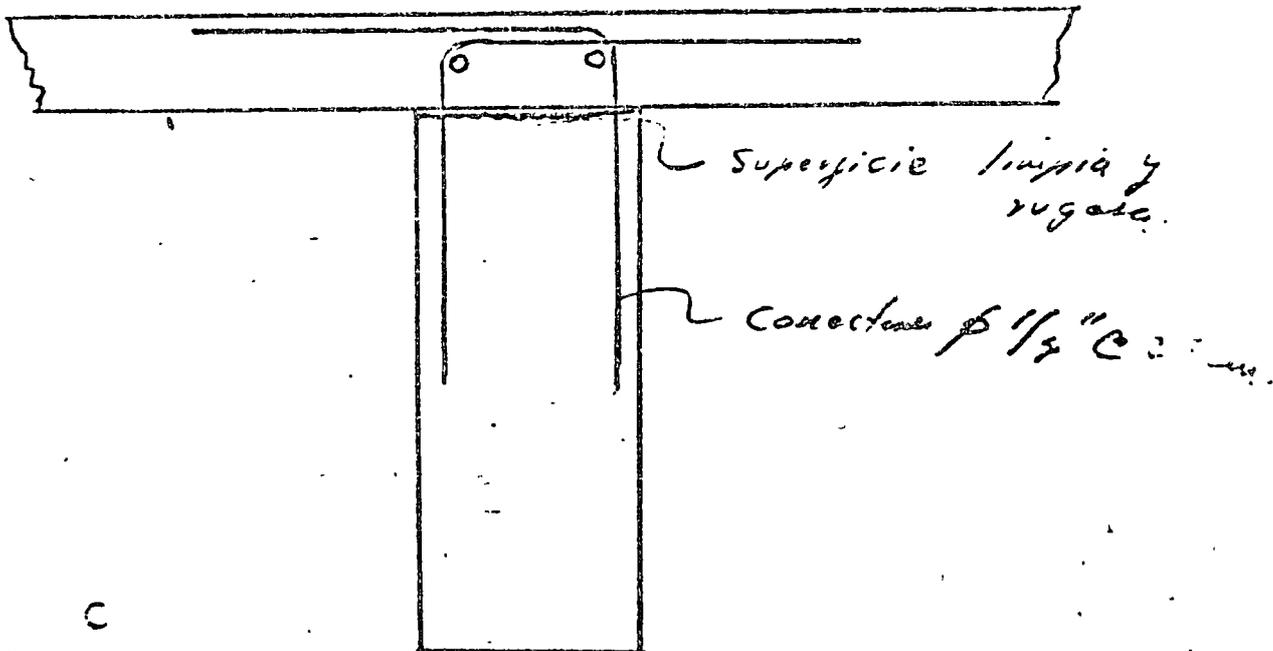
Separación máxima..

$$S_{max} = 6l = 6 \times 8 = 48 \text{ cm} \rightarrow 27 \text{ cm}$$

$$S_{max} = 60 \text{ cm} \rightarrow 27 \text{ cm}$$

Conclusión

Sección conectada  $\phi \frac{1}{4}''$  @ 27 cm  
 2 varillas  $f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$



Nota

Con el objeto de mostrar el procedimiento a seguir cuando  $W_h$  es mayor de 25% debe modificarse sus cargas actuantes en la trabe.

	Sección Simple	Sección Comp.
- Peso propio trabe	250	-
- Losa colada in situ	288	-
- Carga muerta	-	225
- Carga viva	-	225

528 2780

Luego

$$V_a = \omega \frac{I}{2} = \frac{2480 \times 12.20}{2} = 15,128 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

En sección crítica

$$V_a = \frac{5.536}{6.10} \times 15,128 = 13,779.21 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$V_{ua} = 1.5 \times 13,779.28 = 20,593.92 \text{ kg}$$

$$V_h = \frac{V_{ua}}{FR_{bud}} = \frac{20,593.92}{0.8 \times 20 \times 26.9} = 27.79$$

$$\therefore V_h = 27.79 \text{ kg/cm}^2 > 25 \text{ kg/cm}^2$$

Conclusión = Se deberá diseñar las columnas por Control de Tensión

El Reglamento L.P.F. 1977 indica:

$$V_{ua} \leq \begin{cases} FR_{\mu} (A_{uf} f_y + N_u) \\ FR [1.4A + 0.8(A_{uf} f_y + N_u)] \\ 0.3 FR f_c^* A \end{cases}$$

Notas

(1) En las ecuaciones anteriores no se toma en cuenta el valor de  $N_u$ .

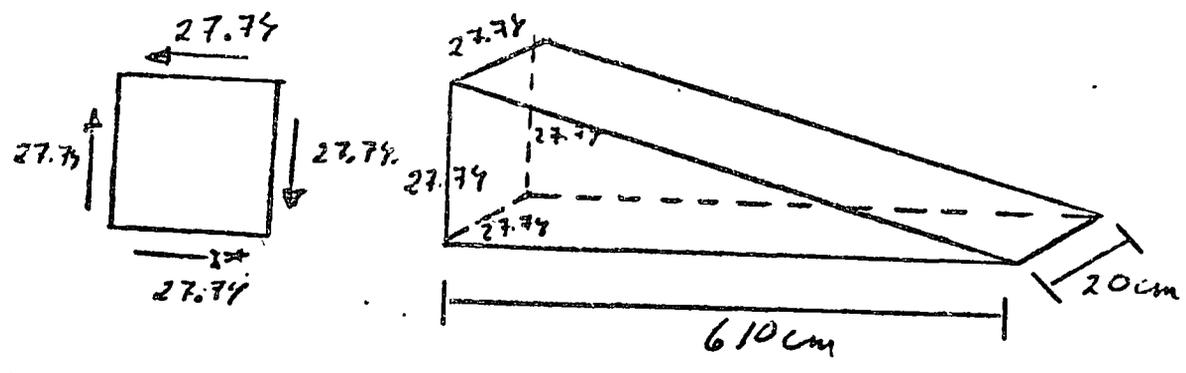
(2) El valor de  $\mu$  correspondiente es  $\mu = 1$

Tomando la primera ecuación se despeja  $A_{uf}$

$$A_{uf} = \frac{V_{ua}(\mu, \mu)}{FR \mu f_y}$$

V<sub>unR</sub> (total) corresponde a la mitad de la viga.

Luz: 0.8



V<sub>unR</sub> (total) = FA Volumen

= 0.8 \* (L/2) \* 27.74 \* 610 \* 20 = 131,371.2

V<sub>unR</sub> (total) = 135371.2 l<sup>3</sup>

Luz

A<sub>uf</sub> = 135,371.2 / (0.8 \* 1 \* 4200) = 40.3 cm<sup>2</sup>

Sean conectores φ 3/8 (2xmas) f<sub>y</sub> = 4200

Nº de conectores = 40.3 / 1.42 = 28.4 ≈ 29 conectores

A<sub>uf</sub> = 2 \* 0.71 = 1.42 m<sup>2</sup>

Sean 30 conectores.

## Revisión

Sean 30 conectores  $\phi 3/8$ " 20 mm

$$A_{uf} = 30 \times 1.12 = 32.6 \text{ cm}^2$$

$$A = 610 \times 20 = 12,200 \text{ cm}^2$$

$$f_c^* = 0.8 f_c = 0.8 \times 350 = 280 \text{ kg/cm}^2$$

Obtención de  $V_{uR}$ .

$$\begin{aligned} V_{uR(1)} &= F_{Ru} (A_{uf} \cdot f_y + N_{uR}) \\ &= 0.8 \times 1.0 (32.6 \times 4200) = \underline{113,136 \text{ kg}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{uR(2)} &= F_R [13A + 0.8 (A_{uf} \cdot f_y + N_{uR})] \\ &= 0.8 [13 \times 12200 + 0.8 (32.6 \times 4200)] \\ &= 0.8 [170,500 + 113,136] = \underline{251,198 \text{ kg}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{uR(3)} &= 0.3 F_R f_c^* A \\ &= 0.3 \times 0.8 \times 280 \times 12,200 = \underline{819,840 \text{ kg}} \end{aligned}$$

Conclusión

$$V_{uR} = \underline{\underline{113,136 \text{ kg}}}$$

Distribución de Conectores

Se distribuyen los conectores de la siguiente manera  
cada media ziga en tercios

$$\text{Conectores} = \frac{30}{6} = 5/\text{tercio}$$

- Tercios extremos  $N = 3 \times 5 = 15$  conectores

- Tercios medios  $N = 2 \times 5 = 10$  "

- Tercios centrales  $N = 1 \times 5 = 5$  "

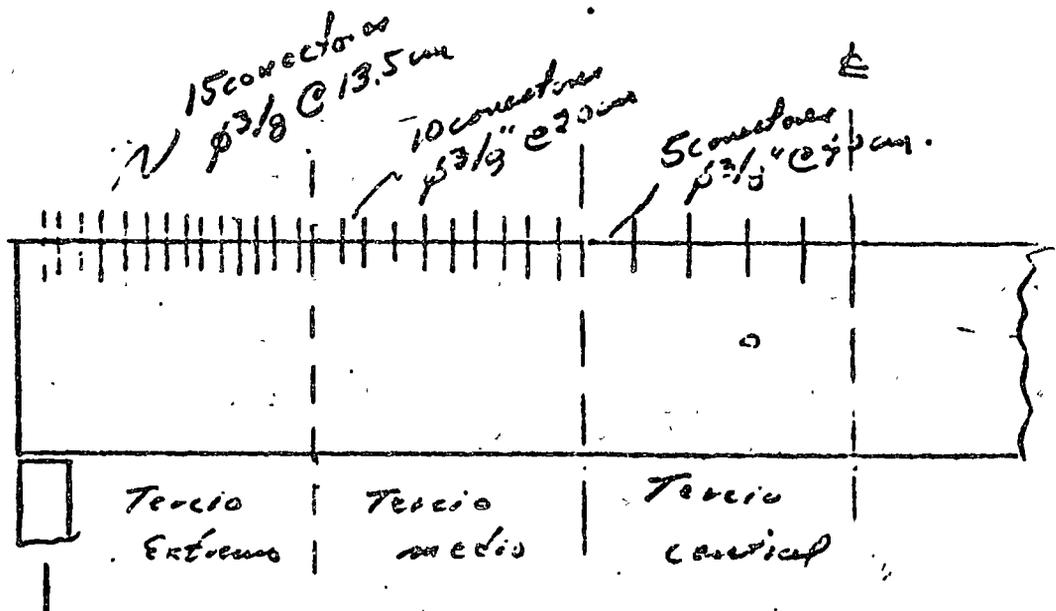
Total = 30 conectores

$$\text{longitudes de tercio} = \frac{6.10}{3} = 2.03 \text{ m}$$

- Tercios extremos  $S = \frac{203}{15} = 13.5 \text{ cm}$

- Tercios medios  $S = \frac{203}{10} = 20.3 \text{ cm}$

- Tercios centrales  $S = \frac{203}{5} = 40.6 \text{ cm}$



Problema.-

Determinar el refuerzo transversal requerido en la zona de transferencia de la viga postensada mostrada a continuación.

Datos.-

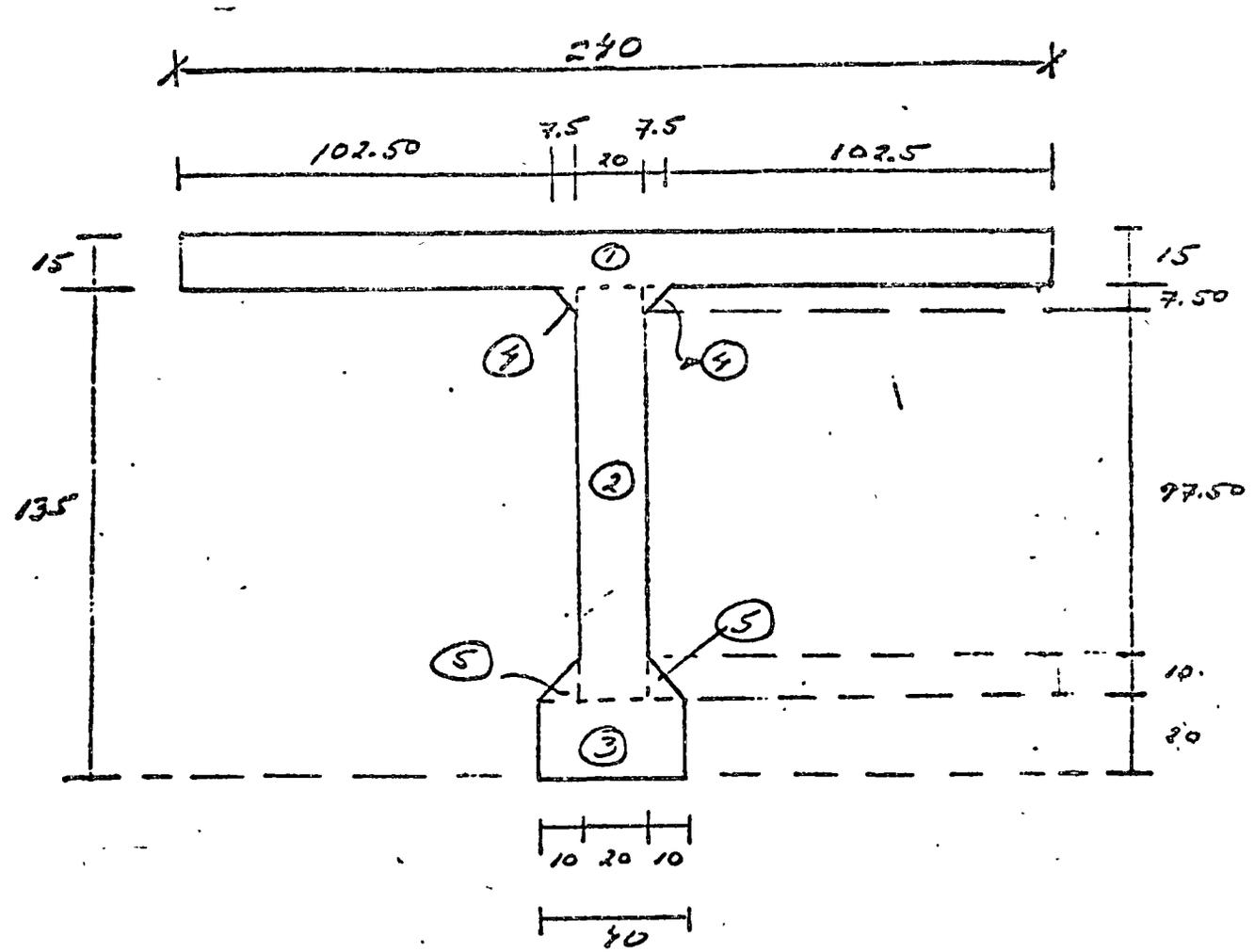
- Claro de cálculo - 25.00 mts.
- Condición - libremente apoyada.
- Cargas.-
  - Carga muerta - 200  $\text{kg}/\text{m}^2$
  - Carga viva - 800  $\text{kg}/\text{m}^2$
- Concreto  $f_c = 350 \text{ kg}/\text{cm}^2$
- Acero de pretensado

6 Cables  $12\phi$  7mm (Tipo Freyssinet)  
 $f = 17,000 \text{ kg}/\text{cm}^2$

- Acero de refuerzo transversal.  
 $\phi 3/8"$   
 $f_y = 3200 \text{ kg}/\text{cm}^2$

- Ancho máximo de grietas 0.01 cm

Sección de Trabe postensada.



Propiedades Geométricas.

Elemento	Area	$\bar{y}$	$A\bar{y}$	$\bar{y}$	$\bar{y}^2$	$A\bar{y}^2$	$\bar{I}$
1	3600	192.50	513,000	32.30	1468	5,240,000	67,500
2	2670	97.50	160,500	26.70	719	1,475,000	2,280,000
3	500	10.00	8,000	97.20	9520	7,100,000	25,700
4	50	132.50	7,420	28.30	800	44,800	175
5	100	23.30	2,330	80.90	6540	654,000	555
$\Sigma$	6626		691,250			14,563,800	3,371,730

$\bar{y}_2 = \frac{691,250}{6626} = 104.20 \text{ cm}$

$I_2 = 16,940,000 \text{ cm}^4$

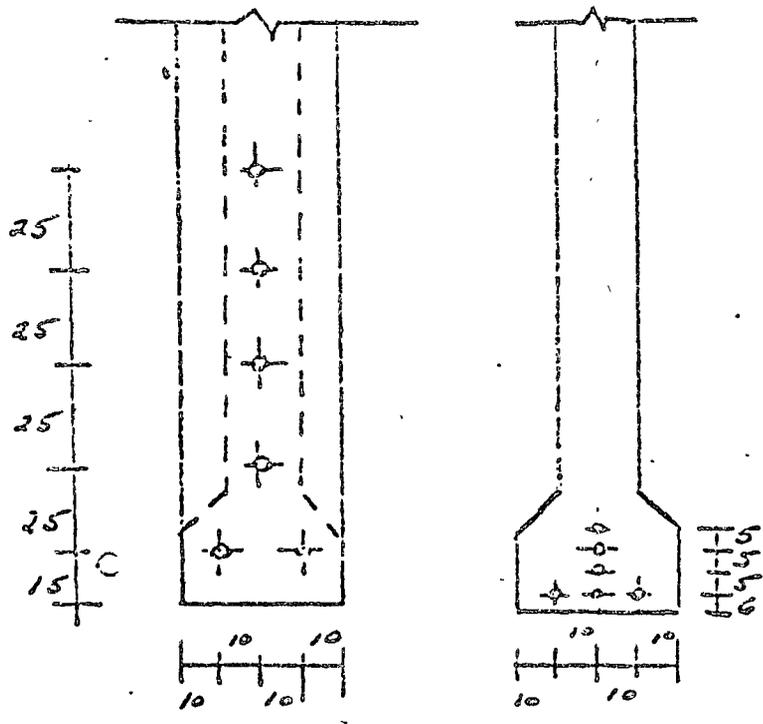
$\bar{y}_3 = 150.00 - 104.20 = 45.80 \text{ cm}$

$S_2 = 162,500 \text{ cm}^3$

$A = 6626 \text{ cm}^2$

$S_3 = 370,000 \text{ cm}^3$

Acero de Presfuerzo



Apoyo

Centro del claro

- Centriode del Presfuerzo en el Apoyo

$$e' = \frac{2 \times 15 + 1 \times 40 + 1 \times 60 + 1 \times 90 + 1 \times 105}{6} = 56.70 \text{ cm}$$

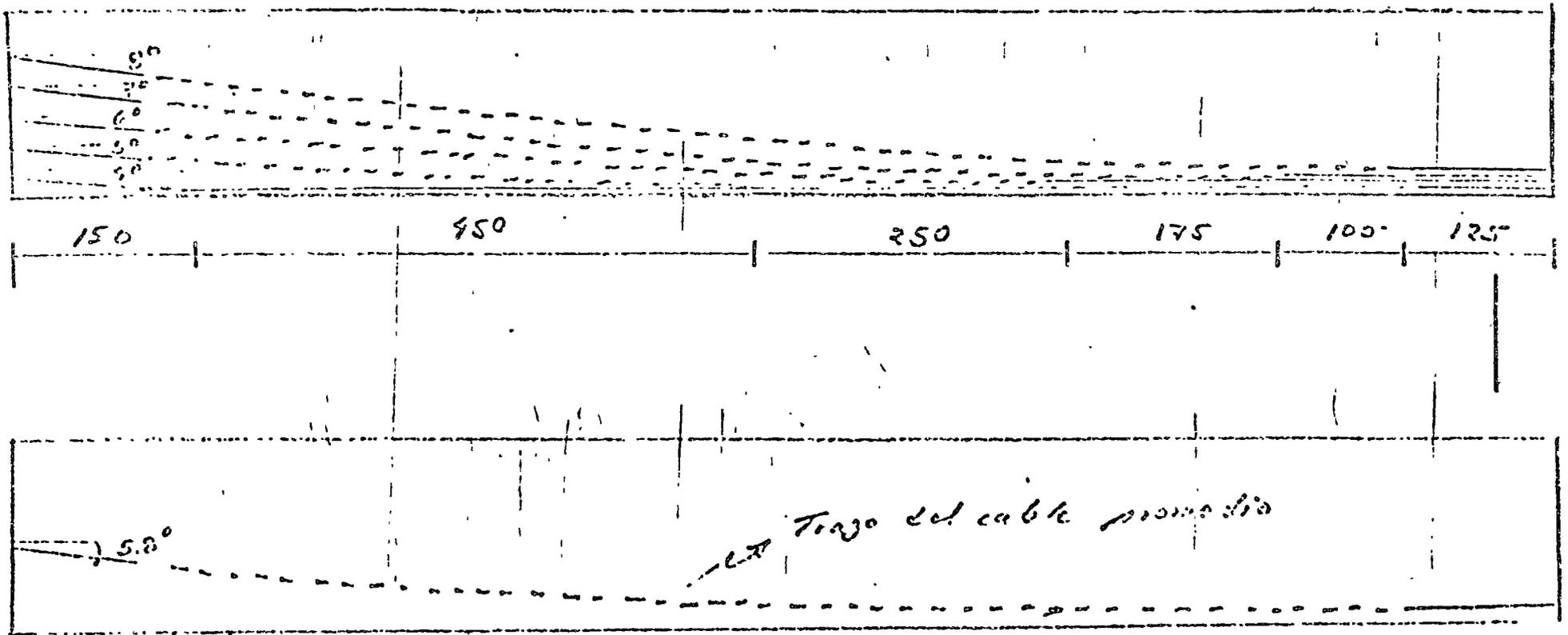
$$e = 104.2 - 56.7 = 47.5 \text{ cm}$$

- Centriode del Presfuerzo en el Centro del claro

$$e' = \frac{3 \times 6 + 1 \times 11 + 1 \times 16 + 1 \times 21}{6} = 11 \text{ cm}$$

$$e = 104.2 - 11.0 = 93.2 \text{ cm}$$

Cables de Postensacó



Determinación de los momentos actuantes en las secciones horizontales

- Tensión inicial en cada cable 12  $\phi$  7mm.  
 $T_i = 48,500 \text{ kg}$ .

$$P = 6 T_i = 6 \times 48,500 = 291,000 \text{ kg}$$

- Excentricidad en las secciones

$$e = 47.5 \text{ cm}$$

- Peralte  $h = 150 \text{ cm}$

Relación  $\frac{e}{h} = \frac{47.5}{150} = 0.317 \approx 0.32$

- Se establecen secciones horizontales cada 15cm. a partir de las fibras inferiores

- Para cada sección horizontal, se determina su relación  $\gamma/h$

- De la gráfica de Khachaturian, y a partir de  $\gamma/h$  y de  $e/h$  se determina el valor  $\overline{M/Pe}$

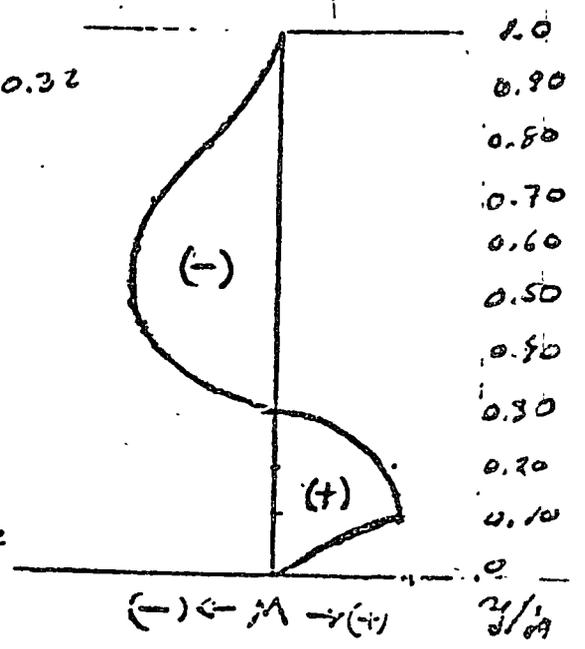
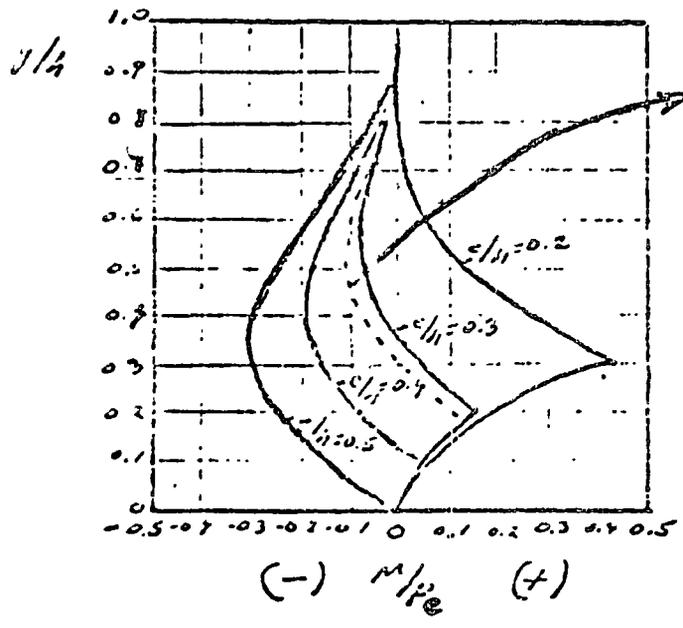
- Dado que se conoce  $P_e$ , se obtiene el valor de  $M$  (kgxcm).

- Se define el máximo valor de  $M$

$\epsilon/h = 0.32$

$P_c = 291,000 \times 47.5 = 13,822,500 \text{ kg cm}$   
 $= 13,822,500 \text{ kg cm}$

y	y/h	M/Pc	M (kg cm)
15	0.10	+0.11	+1,520,975
30	0.20	+0.10	+1,382,250
45	0.30	0.00	-
60	0.40	-0.07	-967,575
75	0.50	-0.11	-1,520,975
90	0.60	-0.10	-1,382,250
105	0.70	-0.08	-1,105,800
120	0.80	-0.07	-967,575
135	0.90	-0.01	-138,225
150	1.00	0.00	-



Del diagrama de momentos horizontales se observa que el momento máximo es aproximadamente igual a 1,600,000 kg cm ó sea 16 Tm m tanto positivo como negativo.

Fuerza total de tensión

$$F_T = \frac{\frac{1}{2} M_{max}}{h - z}$$

$M_{max} = 16 \text{ Jcm}$

$h = 1.50 \text{ cm}$

$z = 25 \text{ cm}$

$$F_T = \frac{16.0}{1.50 - 0.25} = \frac{16}{1.25} = 12.8 \text{ Jcm}$$

Espesor permisible en las soldaduras

$$f_s = 1.67 \left( \frac{E_s \sqrt{f_c} \omega}{A_s} \right)^{1/2}$$

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$

$\omega = 0.01 \text{ in}$

$f_c = 350 \text{ lb/in}^2$

$A_s = \text{Esquinas } \frac{1}{2}'' \text{ (2 ranuras)} = 1.27$

$$f_s = 1.67 \left( \frac{2 \times 10^6 \sqrt{350} \times 0.01}{1.27} \right)^{1/2}$$

$$f_s = 1.67 (542.78) = 906.4$$

$$f_s = 906.4 \text{ lb/in}^2$$

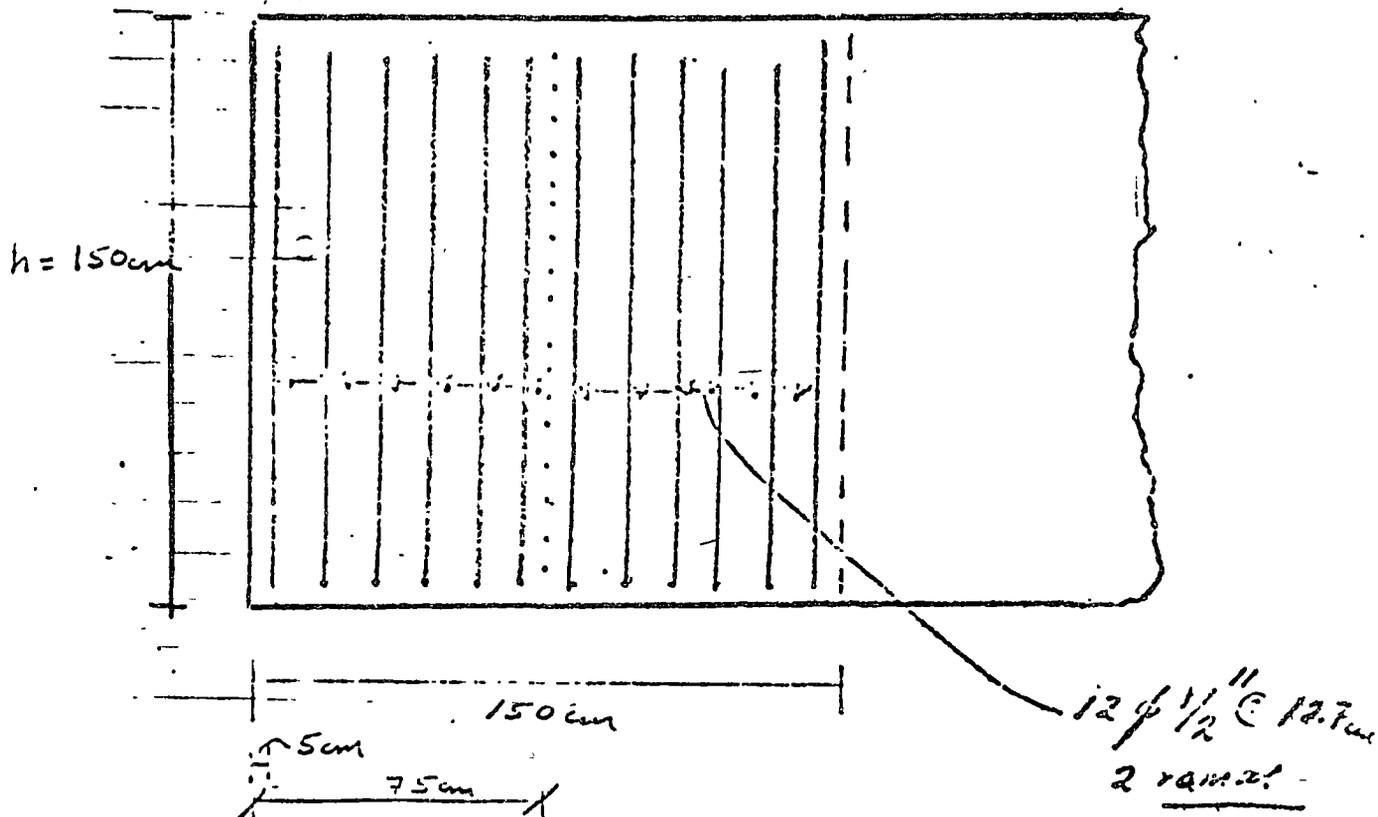
Area de Acero necesaria

$$A_s = \frac{F \cdot T}{f_s} = \frac{12,800}{906.4} = 14.12 \text{ cm}^2$$

$$\phi \frac{1}{2} - 2 \text{ ramas} \quad a_s = 1.27 \times 2 = 2.54 \text{ cm}^2$$

$$\text{N}^\circ \text{ varillas} = \frac{14.12}{2.54} = 5.6 \approx \underline{\underline{6 \text{ varillas}}}$$

Distribución de Varillas



Se deben colocar 12 varillas, 6 a cada lado de  $\phi/2$  (75 cm) pues se tienen momentos positivos y negativos, horizontales de 16.0 por metro





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



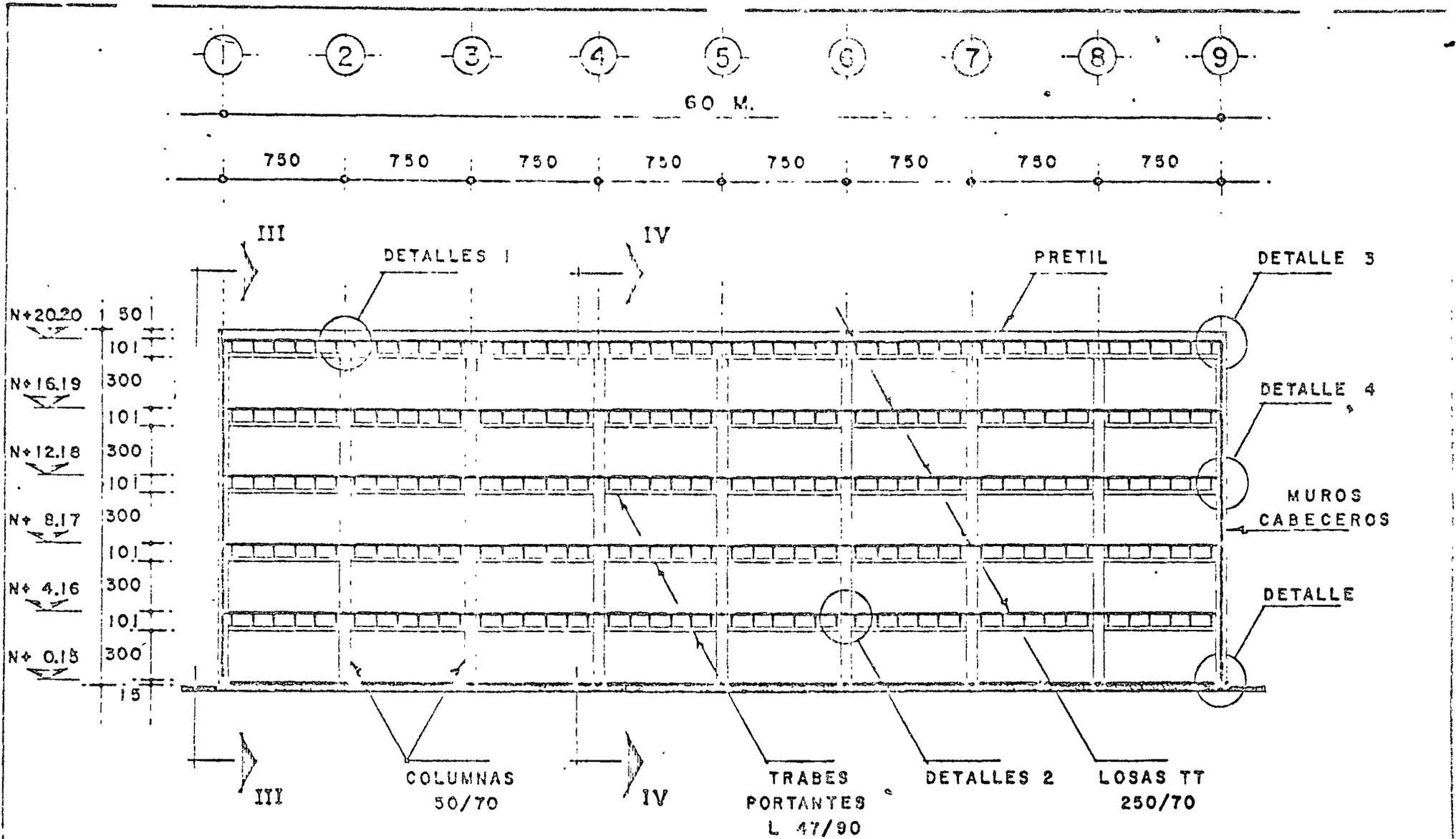
**ESTRUCTURAS DE CONCRETO PREFORZADO**

**EJEMPLOS INTEGRADOS DE DISEÑO**

**ING. JOSE GAYA PRADO**

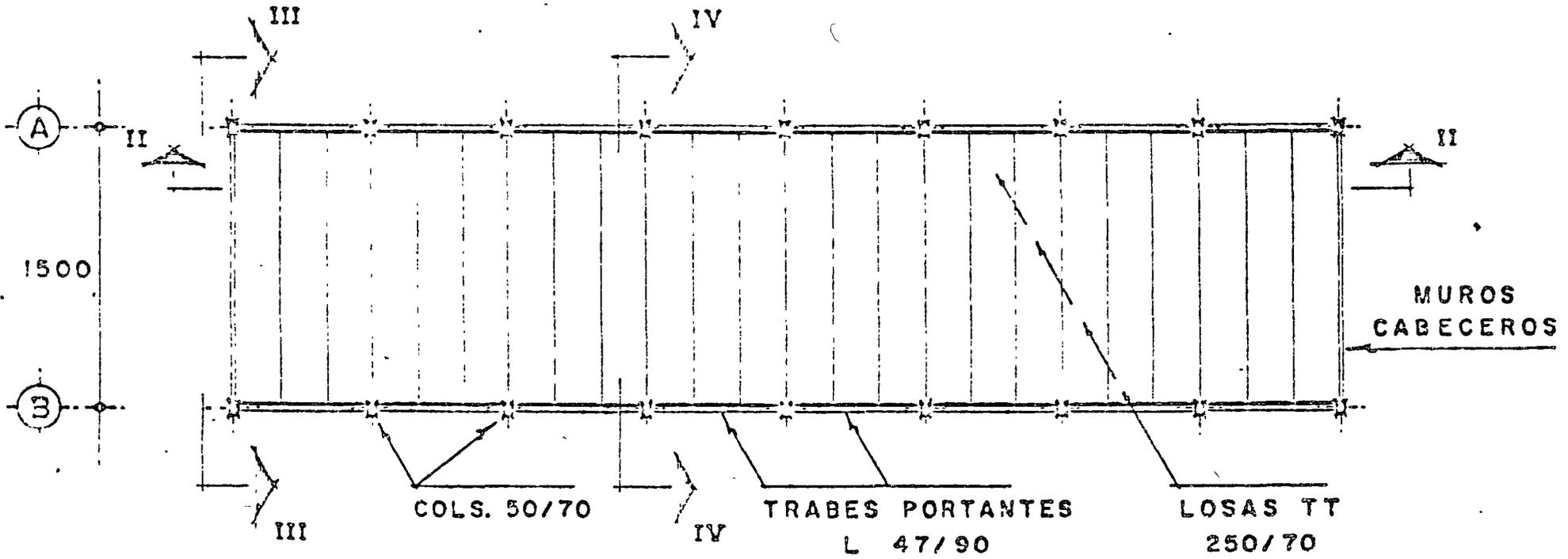
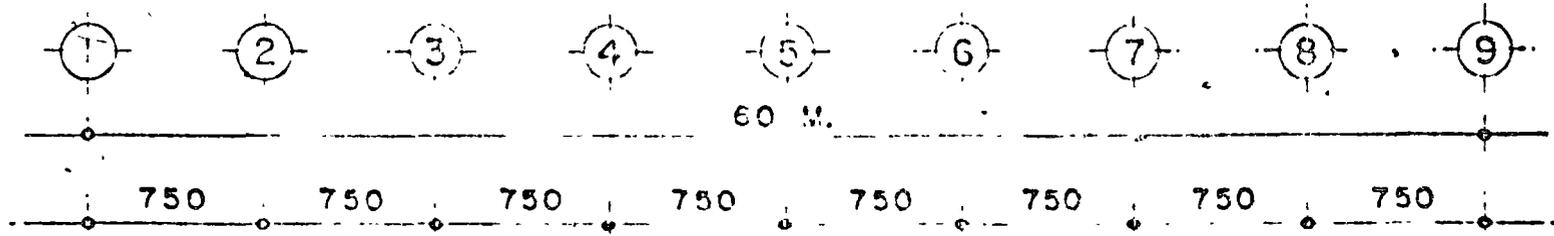
**ABRIL DE 1978.**



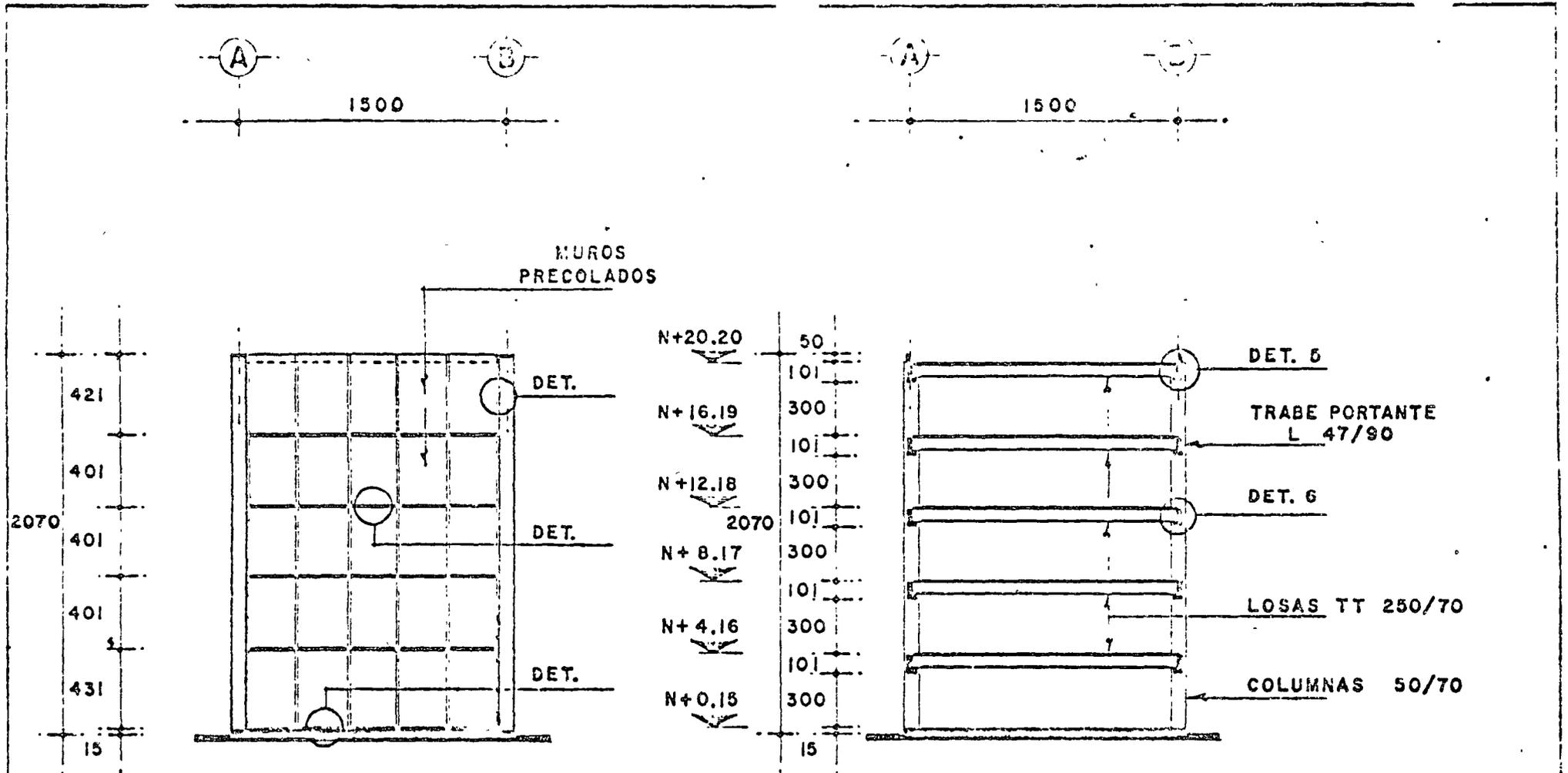


# CORTE LONGITUDINAL • II

( EDIFICIO DE 5 NIVELES )



PLANTA TIPO ( EDIFICIO DE 5 NIVELES )



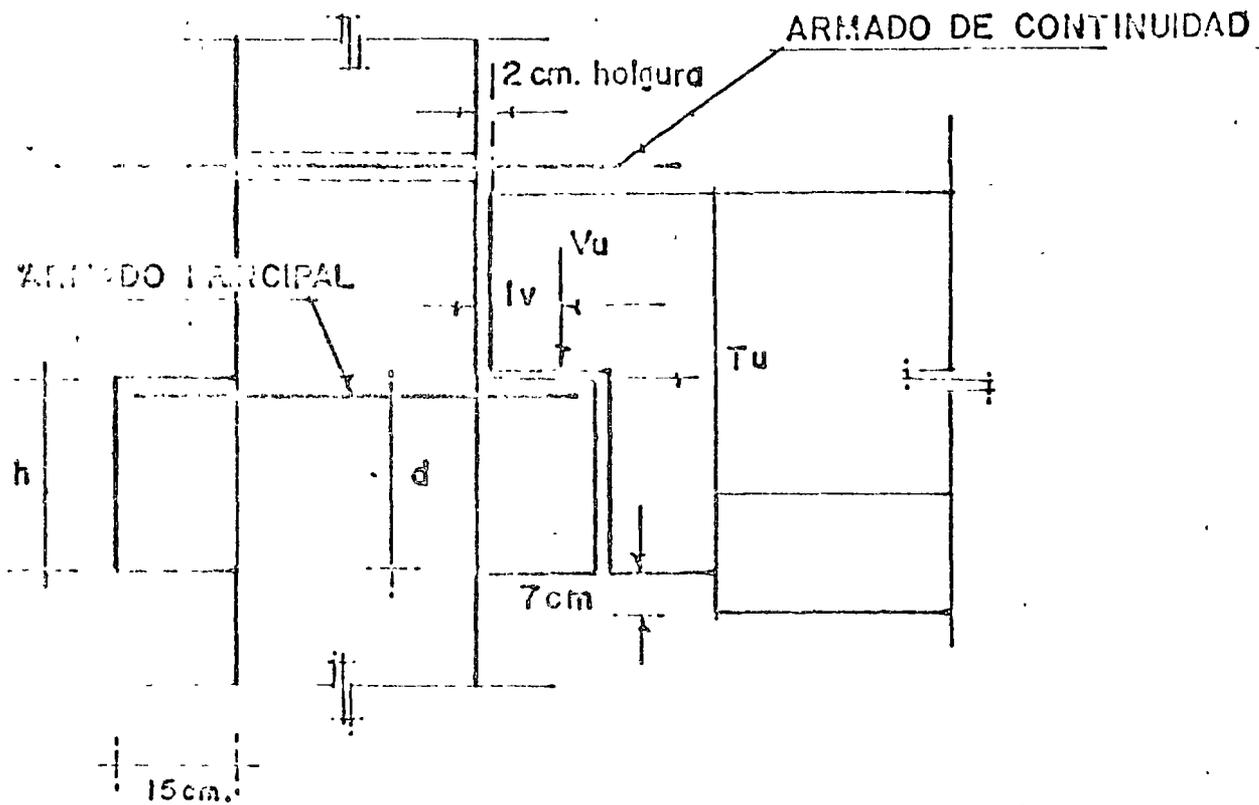
VISTA LATERAL ° III

CORTE TRANSVERSAL ° IV

( EDIFICIO DE 5 NIVELES )

# CONEXION TRABE-COLUMNA (ENTREPISOS)

## 1º.- DISEÑO DE LA MENSULA DE LA COLUMNA



### DATOS:

CONCRETO  $f'_c = 400 \text{ kg/cm}^2$

ACERO  $f_y = 4200$

ANGULOS Y PLACAS DE ACERO A-36

SOLDADURA ELECTRODO E-70

$h = 41.50 \text{ cm.}$

$b = 25 \text{ cm}$

FACTOR DE CARGA = 1.40 (4/3)

$V_u = 50.18 \text{ Ton.}$

$T_u = 10.04 \text{ Ton.}$

$\mu = 1.40$

CHECANDO LA RELACION  $l_v/d \leq 0.40$

$$l_v = 2 + 2/3 \cdot 15 = 12 \text{ cm.}$$

$$d = 41.5 - 3 = 38.5 \text{ cm}$$

$$l_v/d = 0.31 \text{ (INTERPOLADO)}$$

DE LA AYUDA DE DISEÑO B-8  $C_1 = 5.60$

RESOLVIENDO LA ECUACION (2.8) PARA  $C_2$

$$C_2 = \frac{V_u}{\phi b d \sqrt{f'c'} (C_1)(0.265)}$$

$$C_2 = \frac{50180}{0.85 \times 25 \times 38.5 \times 20 \times 5.60 \times 0.265} = 1.995$$

$$T_u/V_u = 0.20$$

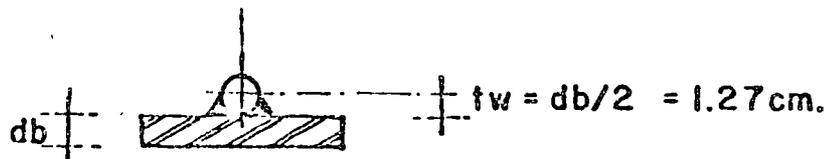
DE LA AYUDA DE DISEÑO B-9  $\rho_{vf} = 0.0150$

$$A_{uf} = b d \rho_{vf}$$

$$A_{uf} = 25 \times 38.5 \times 0.0150 = 12.51 \text{ cm}^2$$

USANDO 3 VARS  $\# 8$   $A_{uf} = 15.21 > 12.51 \text{ cm}^2$

DISEÑO DE LA SOLDADURA:



$$T_u = A_s f_y = 5.07 \times 42000 = 21294 \text{ kg}$$

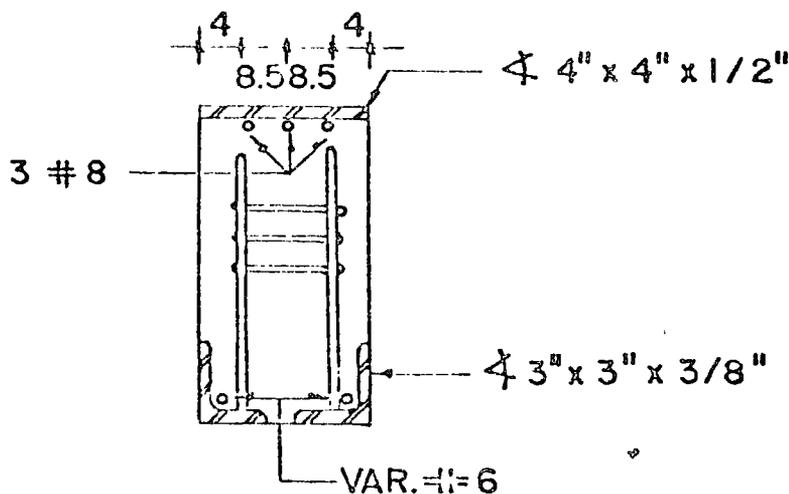
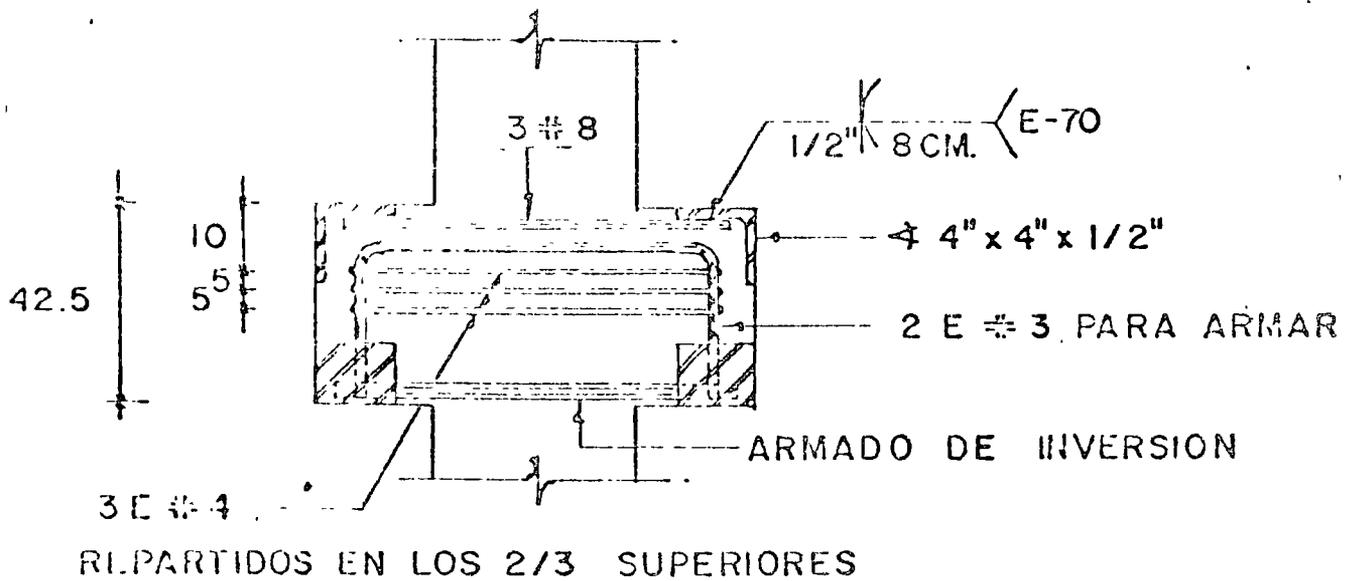
$$T_w = \phi (1750) l_w t_w$$

$$l_w = \frac{21294}{0.7 \times 1750 \times 1.27} = 13.70 \text{ cm}^2$$

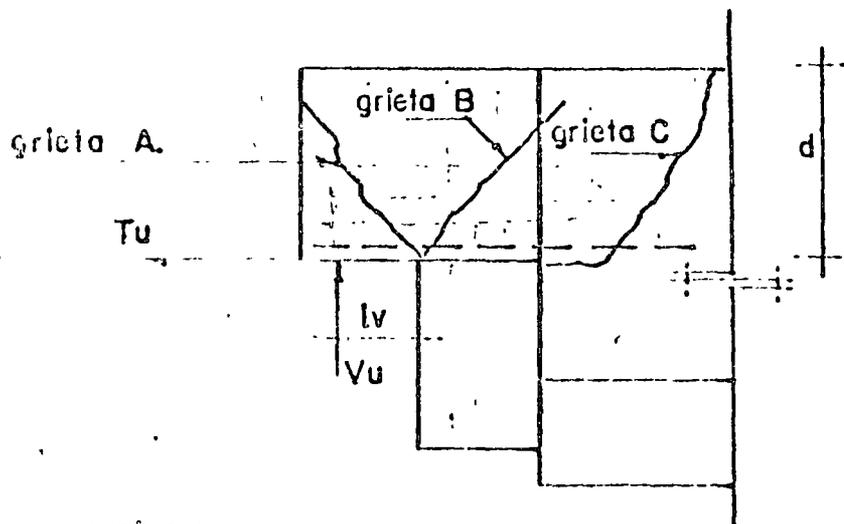
$$A_{uh} = \frac{A_{vf}}{2} = 7.61 \text{ cm}^2$$

COLOCANDO 3 ESTR. # 4  $A_s = 7.62 \text{ cm}^2$

### ARMADO DE LA MENSULA DE LA COLUMNA



# DISEÑO DE LA NARIZ DE LA TRABE



DATOS: TODOS LOS DATOS DE LA MENSULA SON VALIDOS

DETERMINACION DE  $A_{uf}$  (PARA LAS GRIETAS A y B)

USANDO LA EC. (2.5)

$$A_{uf} = \frac{l}{0.85 \times 4200} = \frac{50180}{1.40} + 10040$$

$$A_{uf} = \frac{45883}{0.85 \times 4200} = 12.85 \text{ cm}^2$$

USANDO 3 VARS. # 8  $A_s = 15.21 \text{ cm}^2$

DETERMINACION DE  $A_{sh}$  (PARA LA GRIETA C)

USANDO LA EC. (2.6)

$$A_{sh} = \frac{15.21}{1.40} = 10.86 \text{ cm}^2$$

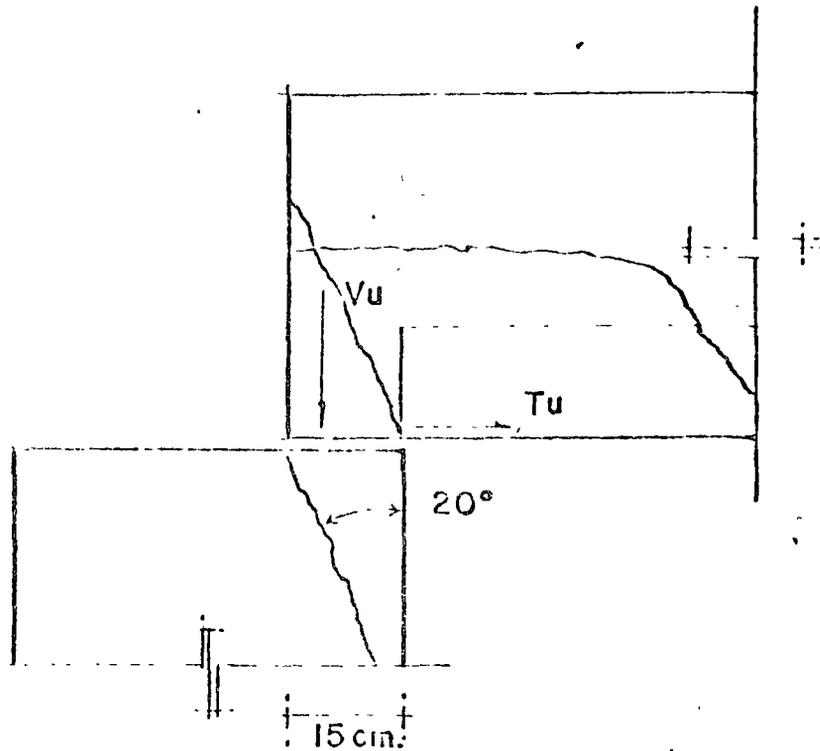
USANDO 4 ESTRS. # 4  $A_s = 10.16 \text{ cm}^2$

DETERMINACION DE  $A_{uh}$

$$A_{uh} = \frac{A_{uf}}{2} = 7.61 \text{ cm}^2$$

USANDO 3 ESTRS # 4  $A_s = 7.62 \text{ cm}^2$

DISEÑO DE LA CONEXION TRABE-COLUMNA (AZOTEA)  
 DISEÑO DE LA CABEZA DE LA COLUMNA.



DAIOS

CONCRETO  $f'_c = 400 \text{ kg/cm}^2$   
 ACERO  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$   
 ANGULOS Y PLACAS ACERO A - 36  
 SOLDADURA ELECTRODO E-70  
 $b = 35 \text{ cm.}$   
 FACTOR DE CARGA = 1.40 (4/3)  
 $V_u = 47.13 \text{ Ton.}$   $\mu = 1.40$   
 $T_u = 9.43 \text{ Ton.}$

I.- APLASTAMIENTO EN CONCRETO SIN CONFINAR  
 ESFUERZO ULTIMO DE APLASTAMIENTO

$$f_{bu} = 18.58 \phi \sqrt{f'_c} \sqrt[3]{s/w}$$

$$\phi = 0.70$$

$$f_{bu} = 0.70 \times 18.58 \times 20 \times \sqrt{10/15} = 226 \text{ kg/cm}^2$$

POR EXISTIR  $T_u$

$$C_y = \left[ \frac{S_w}{1290} \right] T_u / V_u$$

$$S_w \leq 58 \text{ cm}^2 \quad 10 \times 15 = 150 > 58$$

$$C_y = \left[ \frac{58}{1290} \right]^{0.2} = 0.54$$

$$\therefore f_{bu} = 122 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_b \text{ aplicado} = \frac{V_u}{b_w} = \frac{47150}{35 \times 1.5} = 89.77 \text{ kg/cm}^2 < f_{bu}$$

II.- APLASTAMIENTO EN CONCRETO CONFINADO

$$f_b \leq 0.85 f'_c$$

$$0.70 \times 0.85 \times 400 = 238 \text{ kg/cm}^2 > 89.77$$

PARA LA GRIETA VERTICAL --(EC. 2.5)

$$A_{uf} = \frac{l}{0.85 \times 4200} \left[ \frac{47150}{1.40} + 9430 \right]$$

$$A_{uf} = 12.07 \text{ cm}^2$$

$$\text{CON 3 VARILLAS } \# 8 \quad A_s = 15.21 \text{ cm}^2$$

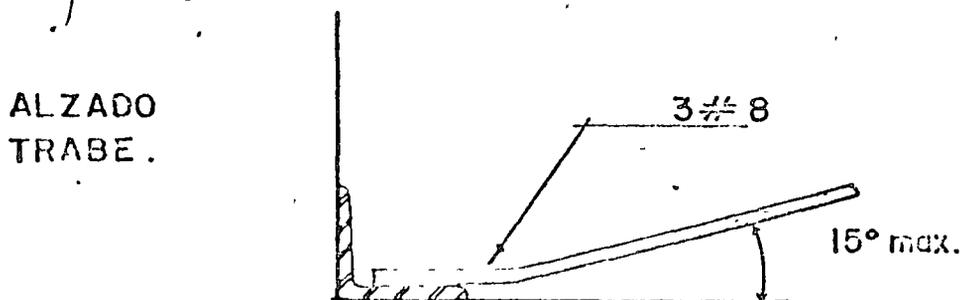
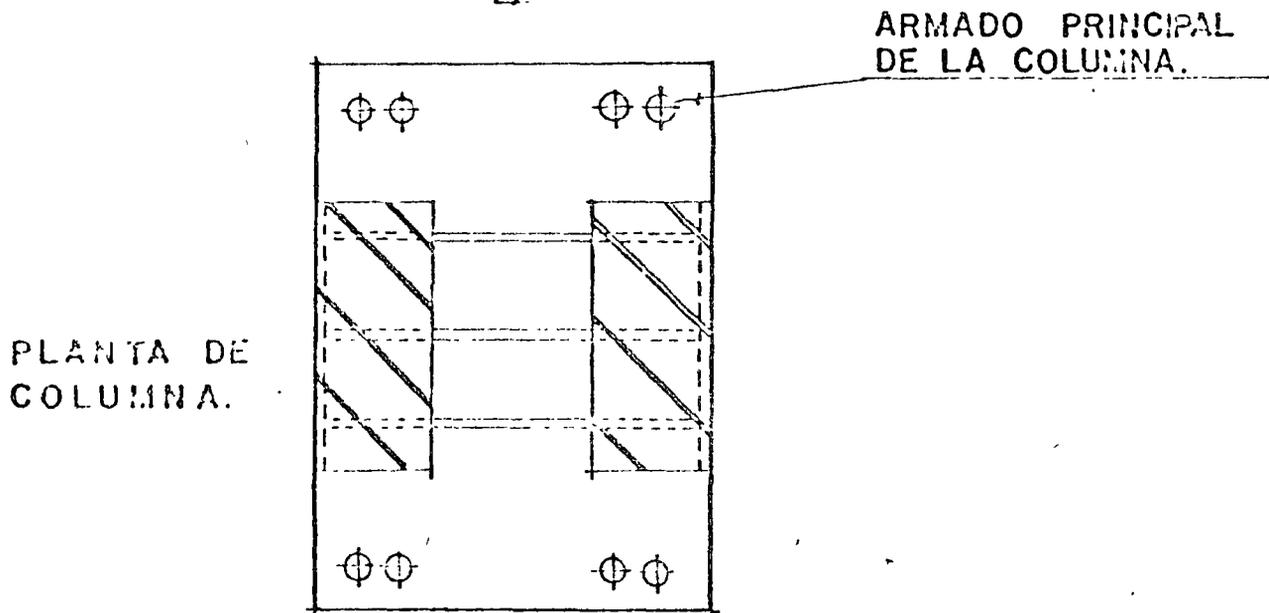
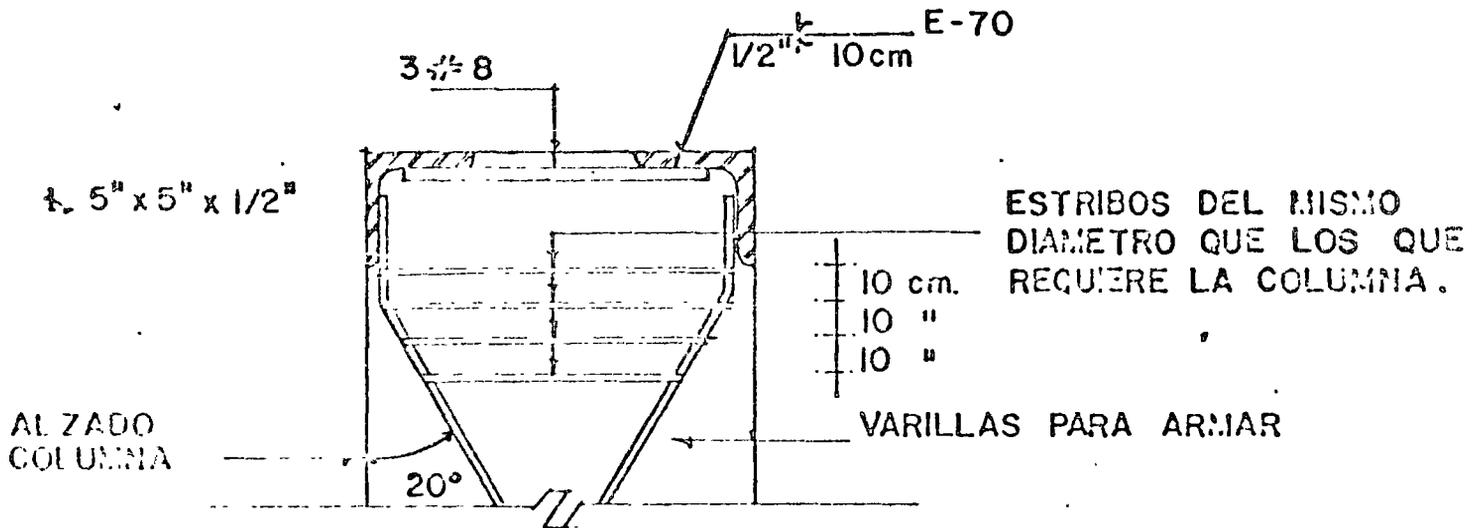
DISEÑO DEL EXTREMO DE LA TRABE

PARA LA GRIETA VERTICAL  $A_{uf}$  ES LA MISMA  
DE LA COLUMNA

PARA LA GRIETA HORIZONTAL

$$A_{sh} = \frac{A_{vf} f_{yv}}{u f_{ys}} = \frac{12.07}{1.40} = 8.62 \text{ cm}^2$$

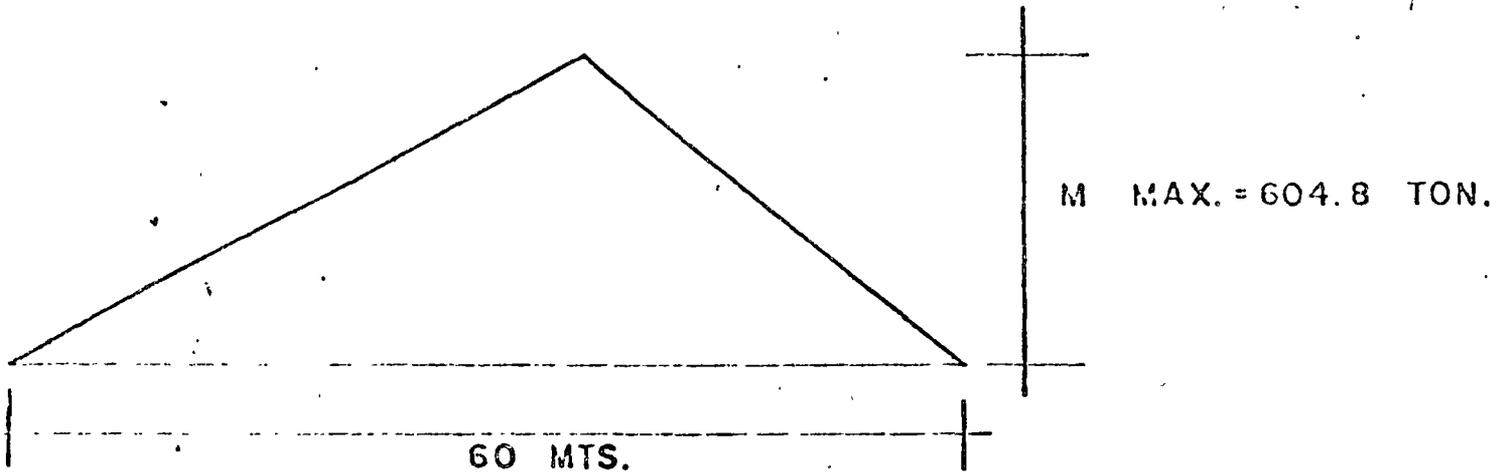
USANDO 4 ESTR  $\frac{3}{8}$  4  $A_s = 10.16 \text{ cm}^2$



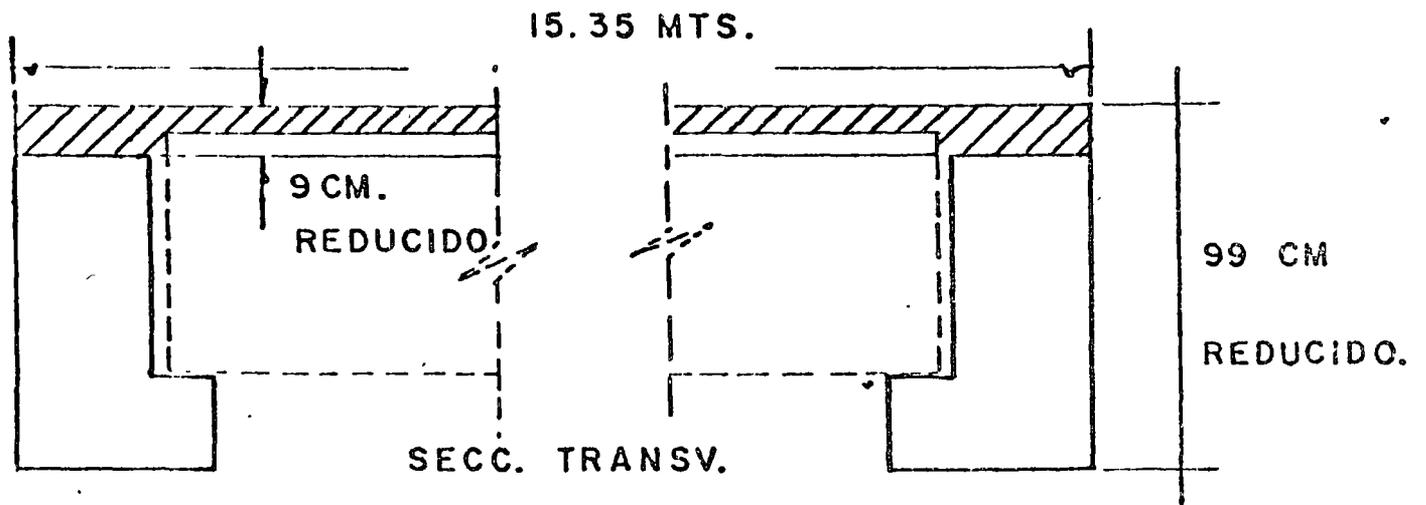
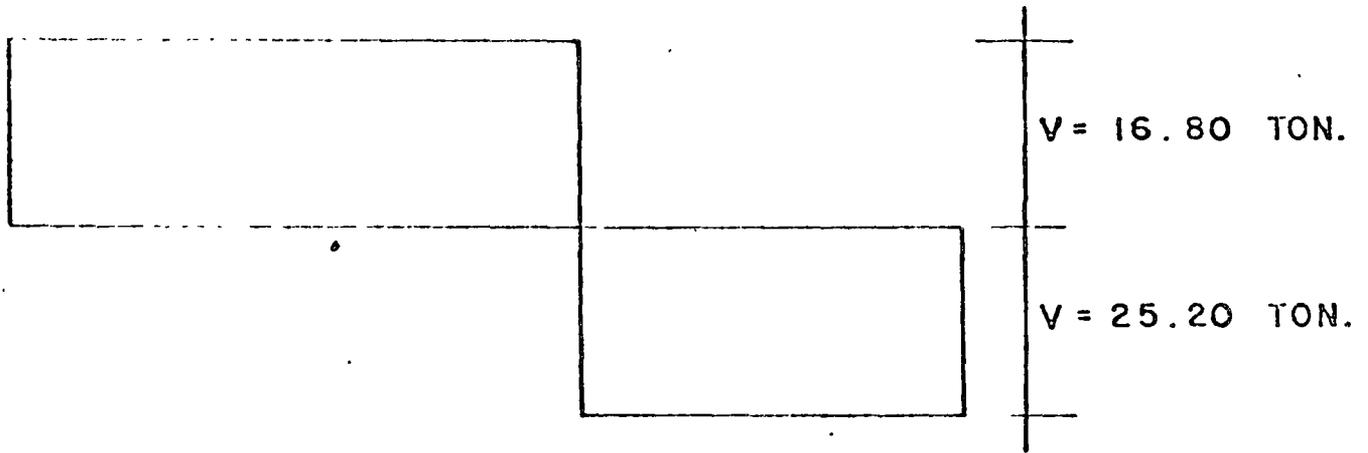
ARMADO PARA LA TRABE

# MOMENTOS MECANICOS

## MOMENTO FLEXIONANTE :



## FUERZA CORTANTE



CONVERTIENDO EL ESPESOR DEL FIRME (6 cms.) A  
CONCRETO DE  $f'_c = 400 \text{ kg/cm}^2$

$6 F_c$

$$F_c = \sqrt{\frac{f'_{c1}}{f'_{c2}}} = \sqrt{\frac{200}{400}} = 0.707$$

$$6 \times 0.707 = 4 \text{ cm.}$$

ESPESOR DE LA LOSA =  $4 + 5 = 9 \text{ cm.}$

MÓMENTO DE INERCIA (SECC. TRANSVERSAL)

$$I = 31.54 \text{ m}^4$$

MODULO DE ELASTICIDAD

$$E = 10000 \sqrt{f'_c}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ Ton./m}^2$$

CALCULO DE LA DEFLEXION MAXIMA

$$\Delta_{\text{max.}} = \frac{5 \omega L^4}{384 EI}$$

$$\Delta_{\text{max}} = 0.19 \text{ cm.}$$

CONEXION DIAFRAGMA-MURO

$$V_{\text{max}} = 25.20 \text{ Ton.}$$

$$V_u = \frac{4}{3} \times 1.1 \times 25.20 = 36.96 \text{ Ton.}$$

# POR EL CONCEPTO DE CORTANTE -- FRICCION

$$A_{uf} = \frac{V_u}{\phi f_y u.} \quad (2-1)$$

$$\phi = 0.85 \text{ (PARA ACI-71)} \quad FR = 0.80 \text{ (D.F.)}$$

$$A_s = \frac{36960}{0.80 \times 1 \times 2530} = 18.26 \text{ cm}^2$$

USANDO VARILLAS # 2.5

COLOCAR 38 VAR. # 2.5

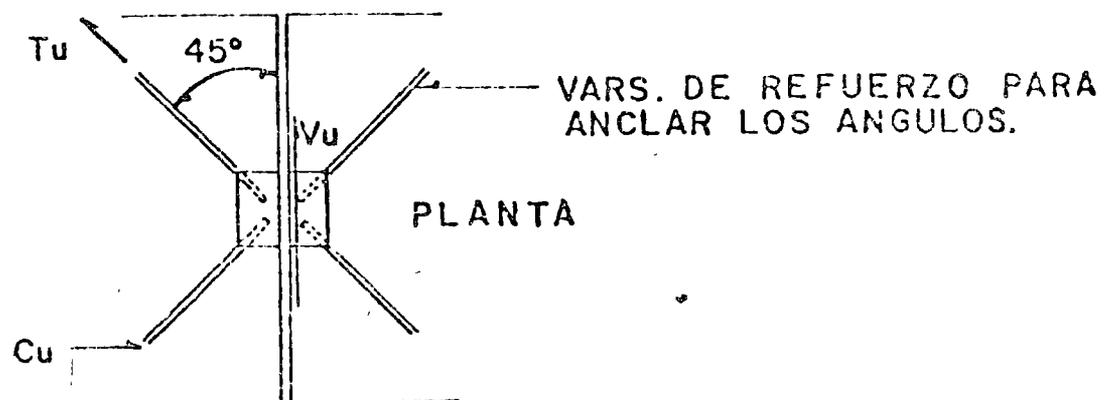
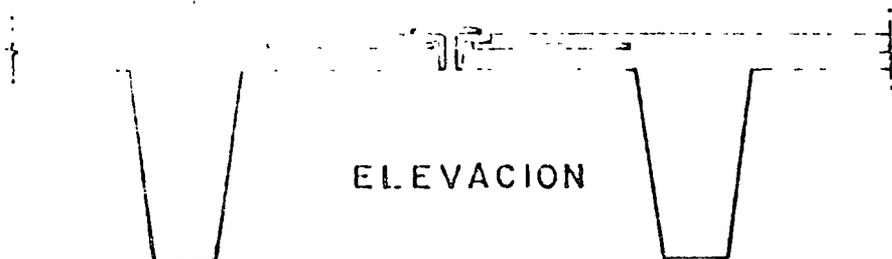
°. VAR. # 2.5 @ 35 cm.

## CONEXION ENTRE LOSAS PRECOLADAS TTs

LA UNION MAS CRITICA SE ENCUENTRA A 2.50 MTS.  
DEL EXTREMO.

$$V_u = 36.96 \text{ TON.}$$

SE USARAN CONECTORES



$$C_u = T_u = \rho f_y A_s$$

$$V_{RU} = (C_u + T_u) \cos 45^\circ = 2 \rho f_y A_s \cos 45^\circ$$

$$\rho = 0.90 \text{ (ACI-71)}$$

$$FR = 0.90 \text{ (D.F.)}$$

USANDO VARILLAS #5 ACERO GRADO DURO

$$V_{RU} = 2 \times 0.90 \times 4200 \times 0.707 \times 1.99 = 10.64 \text{ Ton.}$$

$$\text{NUMERO DE CONECTORES} = \frac{36.96}{10.64} = 3.47$$

∴ USAR 4 CONECTORES

## DISEÑO DE LA SOLDADURA

CAPACIDAD DE LA SOLDADURA

$$T_w = \rho (1750) l_w t_w \quad \rho = 0.70$$

CAPACIDAD DE LA VARILLA

$$T_v = A_s f_y = 1.99 \times 4200 = 8358 \text{ kg}$$

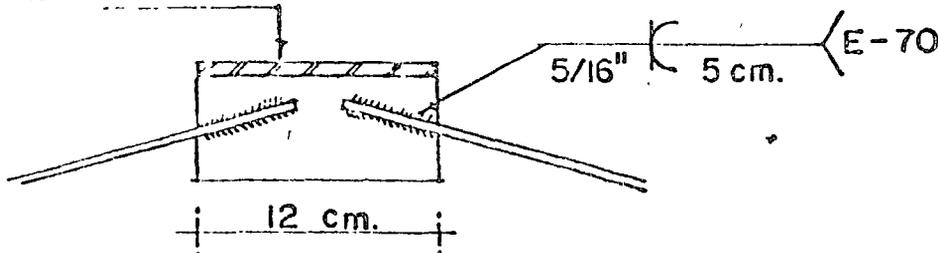
ESPECIFICACIONES PARA SOLDAR



USANDO  $t = 5/16''$

$$\text{IGUALANDO } l_w = t_v \quad l_w \frac{8358}{0.70 \times 1750 \times 0.79} = 8.64 \text{ cm.}$$

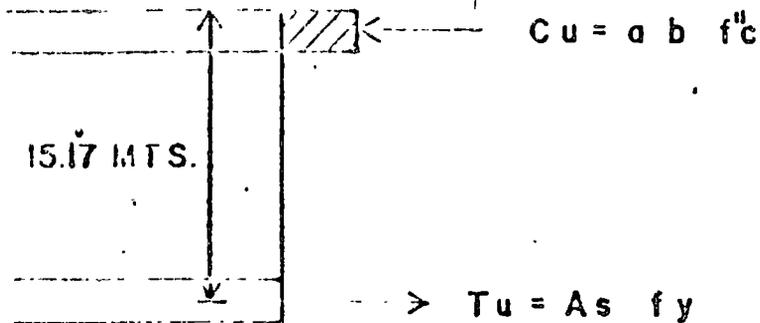
L 3" x 2" x 5/16"



## REVISION POR MOMENTO FLEXIONANTE

$$M_{max} = 604.80 \text{ TON} - \text{M.}$$

$$M_u = 1.1 \times 604.8 = 665.28 \text{ TON} - \text{M.}$$



$$A_s = \frac{M_u}{0.8 d F_R f_y}$$

$$A_s = \frac{66528000}{0.8 \times 1517 \times 0.9 \times 4200} = 14.50 \text{ CM}^2$$

CHECANDO EL REFZO. MINIMO

$$\rho_{min} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} \quad (\text{REGLAMENTO D. F.})$$

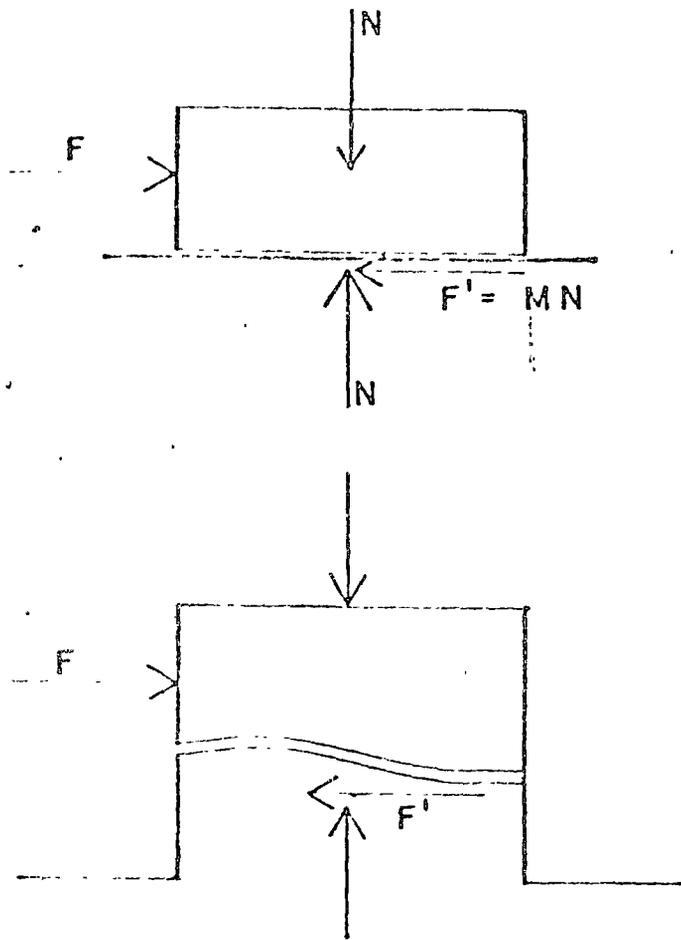
$$\rho_{min} = 0.0033$$

$$A_{smin} = 18360 \times 0.003 = 60.60 \text{ CM}^2$$

∴ RIGE REFUERZO MINIMO

USAR 12 VARILLAS # 8

# CORTANTE - FRICCIÓN



HACIENDO

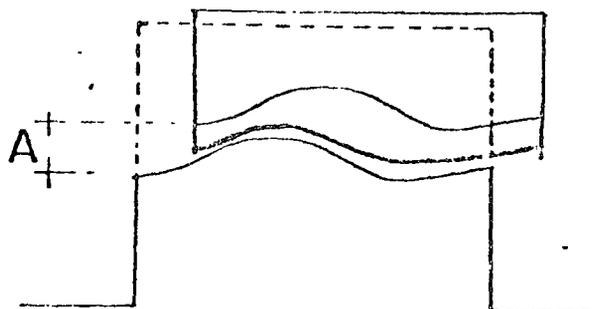
$$F' = F$$

$$F' = MN$$

$$N = A_s f_s$$

$$A_s = \frac{F}{M f_s}$$

$$f_s = f_y$$



$$A_{uf} = \frac{F}{M f_y}$$

Si se Presenta  $T_u$

$$f_{bu} = \phi Cr 18.58 \sqrt{f'_c} \sqrt{\frac{S}{W}} \quad (2-3)$$

$$Cr = \left[ \frac{S W}{1290} \right]^{T_u / V_u} \quad (2-4)$$

$$S W \leq 58 \text{ cm}^2$$

# AN. ASTAMIENTO EN CONCRETO CONFINADO

$$f_{bu} = 0.85 f'_c$$

Para las Grietas Verticales

$$A_{vf} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{V_u}{f_{yv}} + t_u \right] \quad (2-5)$$

$$\mu = 0.85$$

$$t_u \leq 0.2 V_u$$

Para las Grietas Horizontales

$$A_{sh} = \frac{A_{vf} f_{yv}}{\mu f_{ys}} \quad (2-6)$$

RFZO. DE CONFINAMIENTO

$$A_{ch} = A_{cv} = \frac{V_u}{8 f_y} \quad (2-7)$$

MIENSULAS o REPISAS DE  
CONCRETO

RESISTENCIA ULTIMA AL  
CORTANTE

$$V'_u = \phi b d \sqrt{f'_c} C_1 C_2 (0.265)$$

(2-8)

$$\phi = 0.85$$

$$C_1 = 6.5 (1 - 0.5^{d/l_v})$$

$$C_2 = \frac{(1000 e_u)^{(1/3 + 0.4 T_u/V_u)}}{(10) 0.8 T_u/V_u}$$

# SOLDADURA DE BARRAS DE REFUERZO

## RESISTENCIA A LA RUPTURA

$$\phi_w = \phi (1761) \phi_w \phi_w \quad (2-15)$$

$$\phi = 0.70$$

## UNIONES TRASLAPADAS DE REFUERZO

long. de desarrollo en tension

$$L_d = 0.06 A_b f_y / \sqrt{f'_c} \geq 0.0057 d_b f_y \geq 30 \text{ cm} \quad (2-16)$$

long. de desarrollo en compresion

$$L_d = 0.0755 d_b f_y / \sqrt{f'_c} \geq 0.00427 d_b f_y \geq 20 \text{ cm} \quad (2-17)$$

Rfzo. de confinamiento de traslape

$$A_t = \frac{A_s f_y}{\mu f_{yt}}$$



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

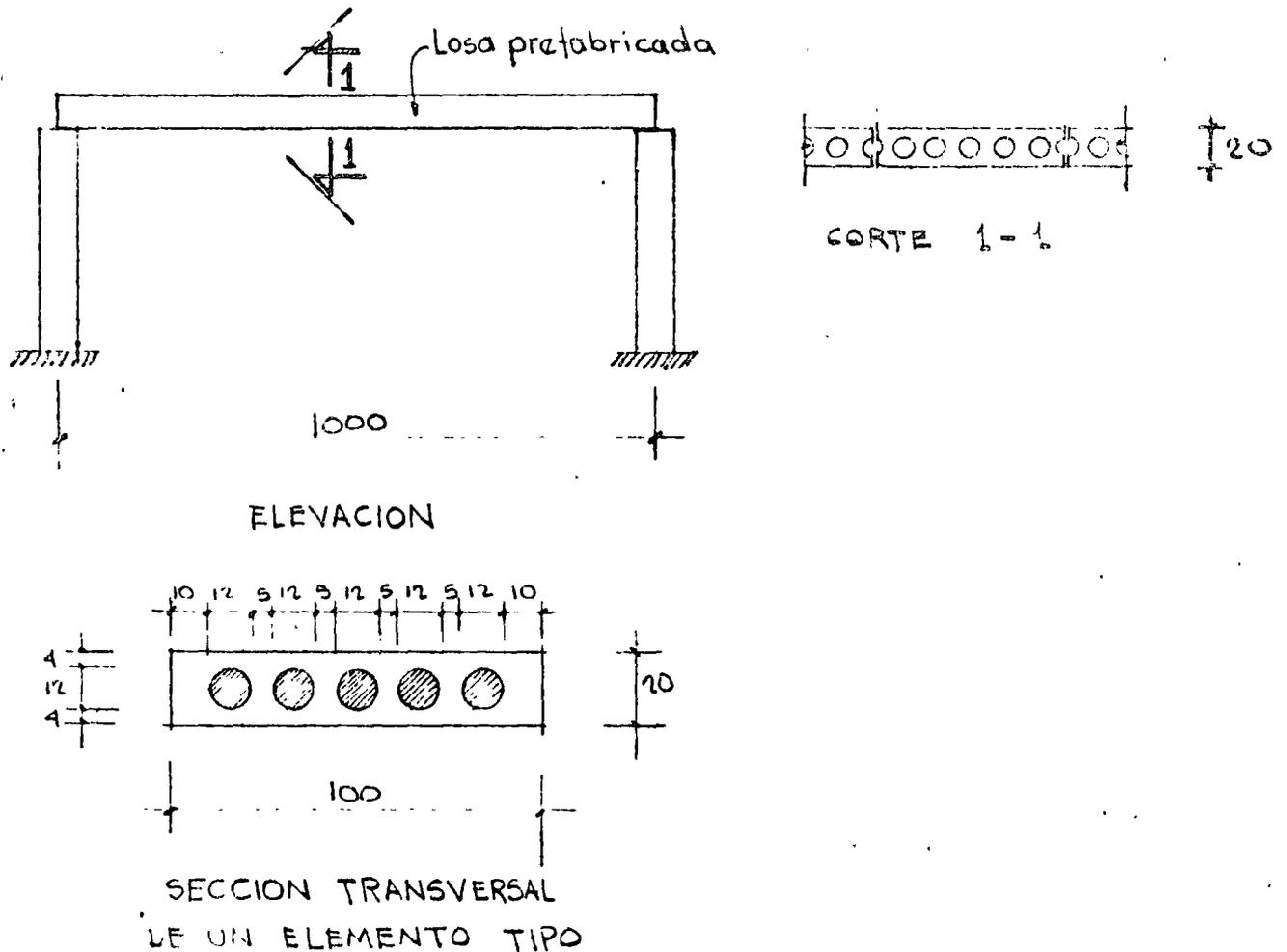
EJEMPLOS INTEGRADOS DE DISEÑO

ING. JOSE LUIS CAMBA C.

ABRIL, 1978.



EJEMPLO 1.- Diseñar una losa de concreto pretensado a flexión.



$$\text{Carga muerta} = 100 \text{ Kg/m}^2$$

$$\text{Carga viva} = 200 \text{ Kg/m}^2$$

a) Características de la sección

$$A = 20 \times 100 - \pi (6)^2 \times 5 = 2000 - 565 = 1435 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{100 (20)^3}{12} - \frac{\pi (6)^4}{4} \times 5 = 66666 - 5089 = 61577 \text{ cm}^4$$

$$Y_s = Y_i = 10 \text{ cm}$$

$$S_i = S_s = \frac{61577}{10} = 6157 \text{ cm}^3$$

b) Materiales

Concreto  $f'_c = 300 \text{ Kg/cm}^2$

$f'_{ci} = 240 \text{ Kg/cm}^2$

Acero de presfuerzo

$f_{sr} = 17000 \text{ Kg/cm}^2$

torón  $1/2'' \rightarrow A = 0.93 \text{ cm}^2$

Presfuerzo efectivo del torón de  $1/2''$

$F = 0.6 F_0 = 9500 \text{ Kg}$

c) Momentos flexionantes

c1) Peso propio

$M_{pp} = \frac{(0.1435 \times 2.4)(10)^2}{8} = 4.3 \text{ ton m/m}$

c2) Carga muerta + carga viva

$M = \frac{0.3(10)^2}{8} = 3.75 \text{ ton m/m}$

d) Esfuerzos

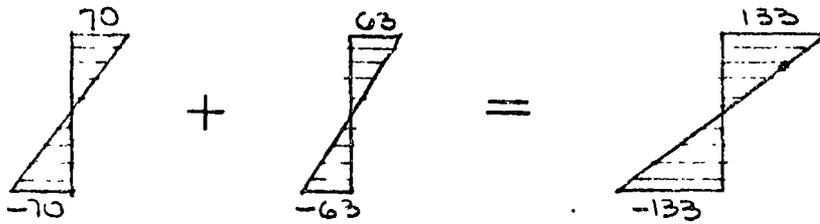
d1) Peso propio

$f_s = f_i = \frac{M}{S} = \frac{4.3 \times 10^5}{6157} = 69.8 \text{ Kg/cm}^2$

d2) carga muerta + carga viva

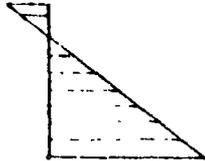
$f_s = f_i = \frac{3.75 \times 10^5}{6157} = 61 \text{ Kg/cm}^2$

d3) Diagramas



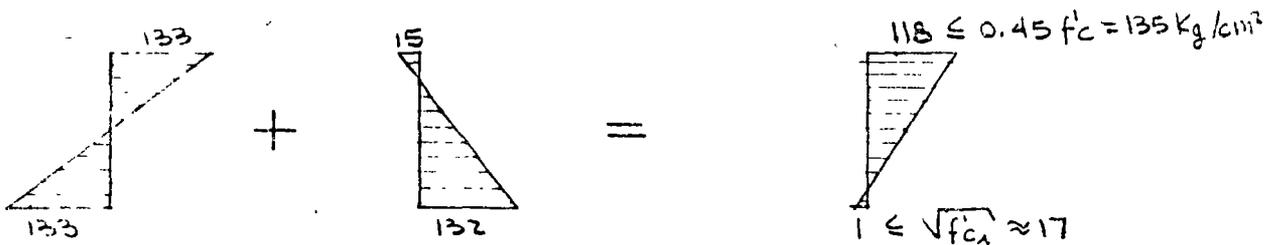
El presfuerzo máximo permisible es :

$$\sqrt{f'_{ci}} = \sqrt{240} = 15 \text{ Kg/cm}^2$$



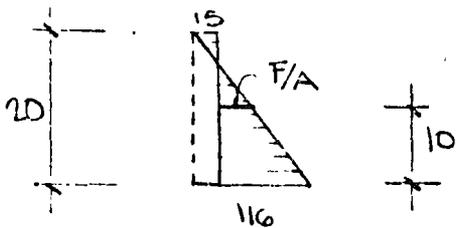
$$0.55 f'_{ci} = 0.55 \times 240 = 132 \text{ Kg/cm}^2$$

La suma algebraica de los diagramas anteriores debera ser igual o menor que :



Se tomará el valor del presfuerzo mínimo en la fibra inferior:

$$133 - 17 = 116 \text{ Kg/cm}^2$$



Calculando el valor de la fuerza de presfuerzo en el centro de gravedad de la sección del diagrama anterior por triángulos se-

mejantes:

$$\frac{15 + 116}{20} = \frac{\frac{F}{A} + 15}{10}$$

$$\therefore \frac{F}{A} = 50.5 \text{ Kg/cm}^2$$

El valor del presfuerzo será:

$$F = 50.5 \times 1435 = 72\,467 \text{ Kg}$$

$$\frac{72\,467}{9500} = 7.7 \text{ toneladas de } 1/2''$$

Se pondrán 8 torones

$$\therefore F = 9400 \times 8 = 75\,200 \text{ Kg}$$

Calculando la excentricidad teórica

$$e = \frac{S_i}{F} \left( f_{pi} - \frac{F}{A} \right)$$

$$e = \frac{6157}{72\,467} (116 - 52)$$

$$= 5.4 \text{ cm}$$

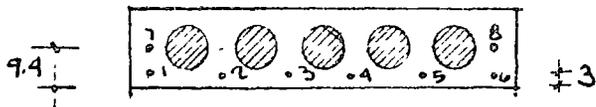
La distancia a la fibra inferior será

$$10 - 5.4 = 4.6 \text{ cm}$$

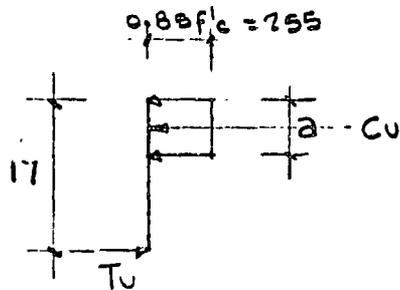
Si se colocan 6 torones a 3 cm del borde inferior y los dos restantes a

$$\frac{6 \times 3 + 2x}{8} = 4.6 \text{ cm}$$

$$x = 9.4 \text{ cm}$$



k) Verificación por resistencia



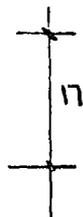
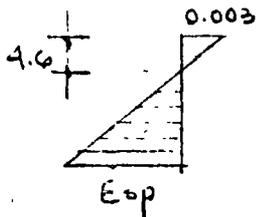
$$T_u = 0.93 \times 6 \times 17000 = 94860 \text{ Kg}$$

Por equilibrio de fuerzas

$$100 \times a \times 255 = 94860$$

$$a = 3.7 \text{ cm} < 4.00 \text{ cm}$$

$$c = \frac{3.7}{0.8} = 4.6 \text{ cm}$$



$$E_{sp} = 0.008$$

Si la deformación inicial debida al presfuerzo  $\epsilon_{si} = 0.0055$

$$E_T = 0.008 + 0.0055 = 0.0135 > 0.01$$

∴ El acero de presfuerzo fluye y la sección es subreforzada

$$M_{resist} = 0.9 \times 94860 (17 - 6.85) = 12.93 \times 10^5 \text{ t.m}$$

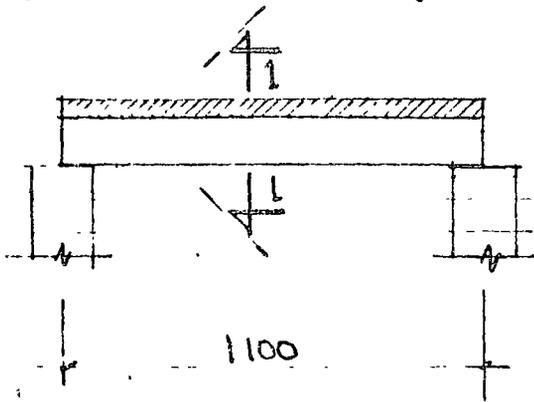
$$M_{act} = 1.4 \times 9.3 + 1.7 \times 3.75 = 6.0 + 6.37 = 12.37 \text{ t.m}$$

$$M_{resist} > M_{act}$$

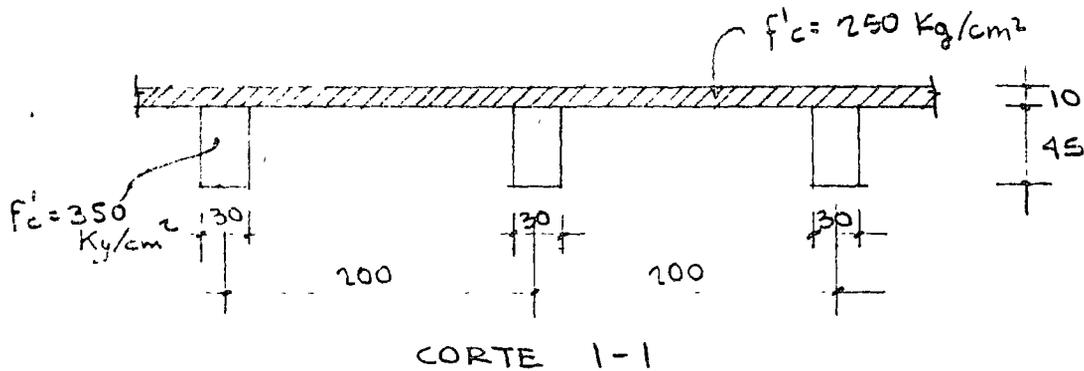
La condición del acero máximo de presfuerzo igual o menor que 75% de la condición balanceada:

$$\epsilon = \frac{0.01}{0.75} = 0.0133 < 0.0135 \quad \therefore \text{O.K.}$$

EJEMPLO 2.- Diseñar una trabe de concreto prestorzado de sección compuesta, en flexión y cortante.



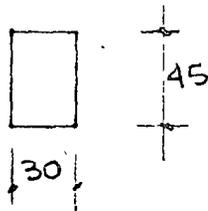
Carga muerta = 100 Kg/m<sup>2</sup>  
 carga viva = 150 Kg/m<sup>2</sup>  
 f<sub>sr</sub> = 17 000 Kg/cm<sup>2</sup>



DISEÑO POR FLEXION

a) Características de la sección

a1) Sección simple



$$A = 30 \times 45 = 1350 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{30 \times (45)^3}{12} = 227812 \text{ cm}^4$$

$$S_s = S_i = \frac{227812}{22.5} = 10124 \text{ cm}^3$$

a2) Sección compuesta

$$\text{ancho máximo} \begin{cases} b = 16t + b' = 160 + 30 = 190 \text{ cm} \\ \text{c.a.c.} = 200 \\ L/4 = \frac{1100}{4} = 275 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore b = 190 \text{ cm}$$

aplicando el factor de corrección por la diferencia de concretos:

$$F_{red} = \sqrt{\frac{250}{350}} = 0.84 \rightarrow b = 0.84 \times 190 = 160 \text{ cm}$$

$$M = \frac{8}{0.5 (11)^2} = 7.56 \text{ t.m.}$$

b2) Sección compuesta

$$M_{asa} = \frac{8}{0.48 (11)^2} = 7.26 \text{ t.m.}$$

$$M_{p.p.p.p.} = \frac{8}{0.324 (11)^2} = 4.90 \text{ t.m.}$$

b1) Sección simple

b) Cálculo de momentos.

$$S_1 = \frac{794875}{37.4} = 21253 \text{ cm}^3$$

$$S_2 = \frac{794875}{17.6} = 45163 \text{ cm}^3$$

$$= 290761 - 19022 + 523136 = 794875 \text{ cm}^3$$

$$I = \frac{160 (17.6)^3}{3} - \frac{130 (7.6)^3}{3} + \frac{30 (37.4)^3}{3}$$

El momento de inercia será:

$$Y_2 = 17.6 \text{ cm}$$

$$Y_1 = 37.4 \text{ cm}$$

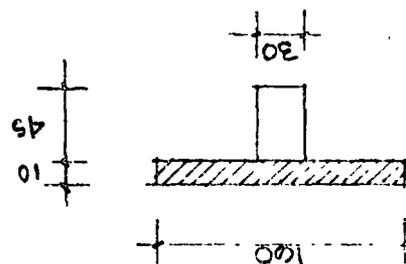
$$2950 \times Y_1 = 110375$$

$$1850 \times Y_2 = 30375$$

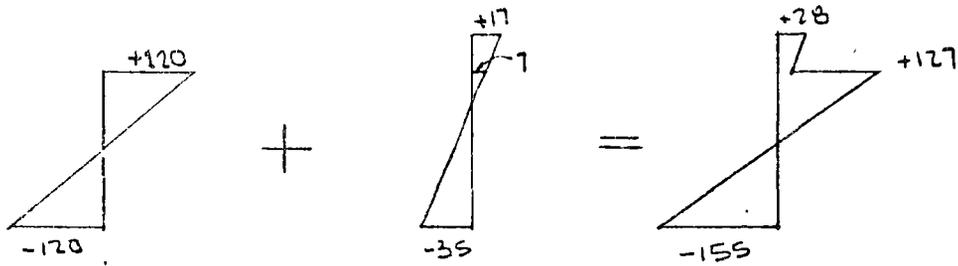
$$1600 \times 50 = 80000$$

Calculando el centro de gravedad

$$A = 160 \times 10 + 45 \times 30 = 2950 \text{ cm}^2$$



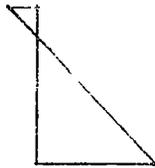
c) Cálculo de esfuerzos



SECCION SIMPLE

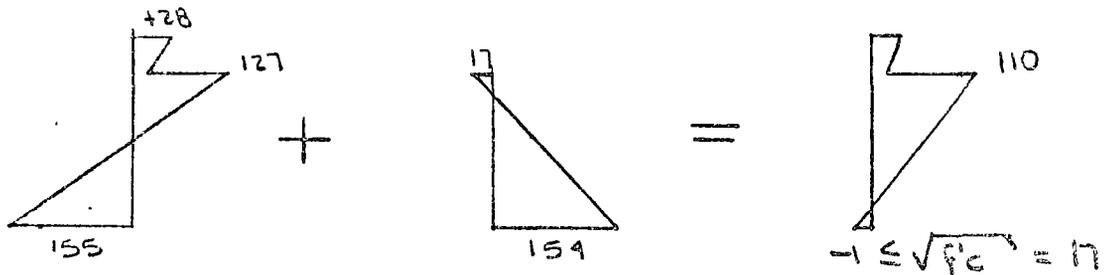
El presfuerzo máximo permisible.

$$\sqrt{f_{ct}} = \sqrt{280} = 16.7 \approx 17$$



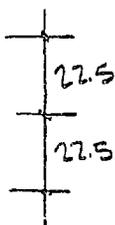
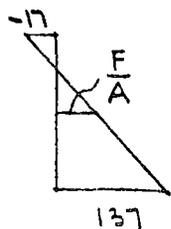
$$0.55 f'_{ci} = 0.55 \times 0.8 \times 350 = 154$$

La suma algebraica de los diagramas anteriores, deberá ser igual o menor que:



Se tomará el valor del presfuerzo mínimo en la fibra inferior:

$$154 - 17 = 137$$



$$\frac{137 + 17}{45} = \frac{F}{A} + 17$$

$$\frac{F}{A} = 58.5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F = 78\ 975 \text{ Kg}$$

$$\frac{78\,975}{950} = 8.3 \text{ torones de } 1/2''$$

Se utilizarán 8 torones:

$$F = 76\,000 \text{ kg}$$

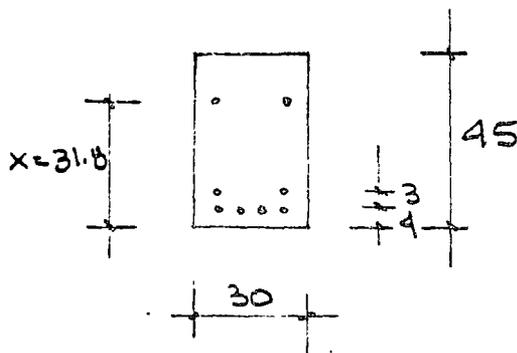
Calculando la excentricidad teórica (todo en sección simple)

$$e = \frac{S_i}{F} \left( F p_i - \frac{F}{A} \right)$$
$$= \frac{10\,124}{76\,000} (137 - 56)$$
$$= 10.8 \text{ cm}$$

∴ La distancia al borde inferior vale:

$$22.5 - 10.8 = 11.7$$

Los torones quedarán colocados según:



Verificación de la localización del c. de G del presfuerzo:

$$\frac{4 \times 4 + 2 \times 7 + 2 \times x}{8} = 11.7$$
$$x = 31.8$$

La verificación por resistencia se hace en forma semejante a la realizada en el ejemplo 1 pero tomando el paralte efectivo de la sección compuesta.

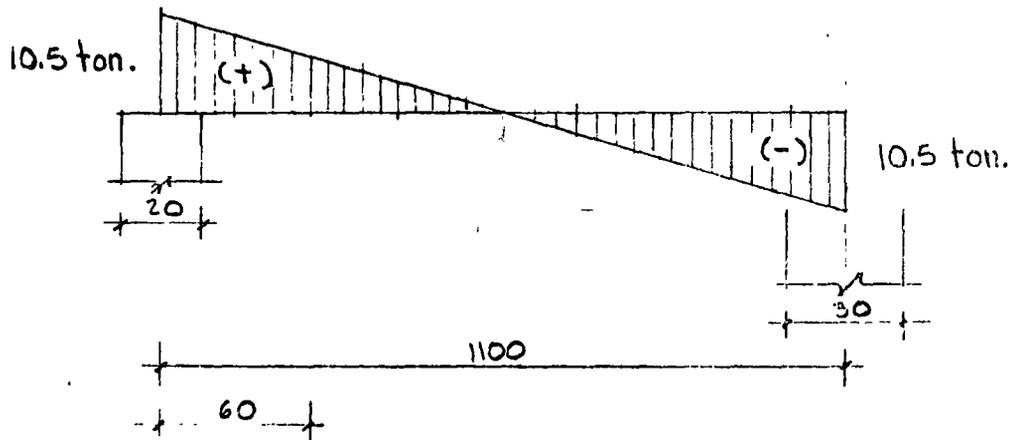
## DISEÑO POR CORTANTE

### a) Cargas consideradas

Peso propio de la trabe	0.32 ton/m
Losa de 10cm colada in situ	0.48 ton/m
Carga muerta	0.20 ton/m
Carga viva	0.30 ton/m
Suma	<u>1.3 ton/m</u>

El cortante último actualmente vale:

$$V_{act.} = (1.4 \times 1 + 1.7 \times 0.3) \frac{11}{2} \\ = 10.5 \text{ ton}$$



### b) Cortante por tensión diagonal

La sección crítica está a un peralte efectivo del paño del apoyo.

$$V = \frac{490}{5.5} \times 10.5 = 9.35 \text{ ton}$$

La contribución del concreto está dada por la expresión:

$$V_c = \left( 0.16 \sqrt{f_c} + 50 \frac{V_{ud}}{M_u} \right) b d ; \frac{V_{ud}}{M_u} \leq 1.0$$

$$V_u = 9.35 \text{ ton}$$

$$M_u = \frac{PL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{PL^2}{2} = \frac{1.91 \times 11}{2} \times 0.6 - \frac{1.91 (0.6)^2}{2}$$
$$= 5.96 \text{ tm}$$

$$\frac{9350 \times 43.3}{5.96 \times 10^5} = 0.67 \leq 1.0 \quad \text{O.K.}$$

$$V_c = (0.16 \sqrt{350} + 50 \times 0.67) 30 \times 43.3$$
$$= 47,413 \text{ Kg}$$

$$V_c \text{ mín.} = 0.5 \sqrt{f'_c} b d = 0.5 \times 18.7 \times 30 \times 43.3$$
$$= 12,145 \text{ Kg}$$

$$V_c \text{ máx.} = 1.3 \sqrt{f'_c} b d = 1.3 \times 18.7 \times 30 \times 43.3$$
$$= 31,578 \text{ Kg} \rightarrow \text{rige}$$

$V_c \text{ resistente} > V_u \text{ actuante}$

$\therefore$  Solo necesita estribos por especificación.

$$A_v = \frac{A_{ps}}{80} \frac{f_{pu}}{f_y} \frac{s}{d} \sqrt{\frac{d}{b}}$$
$$= \frac{0.93 \times 6}{80} \times \frac{17000}{2530} \times \frac{s}{30} \sqrt{\frac{43.3}{30}}$$
$$= 0.019 s$$

$$\text{Como } s \leq \frac{3}{4} d = 32 \text{ cm}$$

Con estribos  $\phi 1/4''$  de dos ramas

$$A_v = 0.32 \times 2 = 0.64 \text{ cm}^2$$

$$A_{v \text{ mín.}} = 0.019 \times 32 = 0.60 \text{ cm}^2 < 0.64 \quad \text{O.K.}$$

$$A_{v \text{ mín.}} = \frac{3.5 b s}{f_y} \rightarrow s = \frac{0.64 \times 2530}{30 \times 3.5} = 15.4 \text{ cm}$$

$\therefore$  Se pondrán estribos  $\phi 1/4''$  en dos ramas a cada 15 cm

c) Revisión de cortante horizontal

El cortante horizontal máximo provocado en la unión de las dos superficies vale:

$$V_u = \frac{300}{1300} \times 10,5 = 2,43 \text{ ton}$$

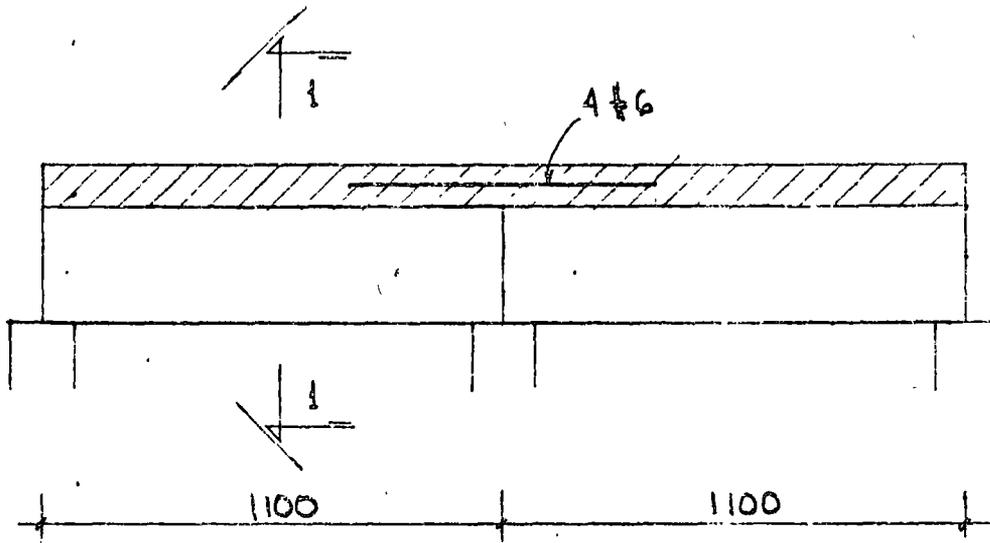
El esfuerzo cortante horizontal valdrá:

$$V_{dh} = \frac{V_u}{\phi b_v d} = \frac{2430}{0,85 \times 30 \times 43,3} = 2,2 \text{ Kg/cm}^2$$

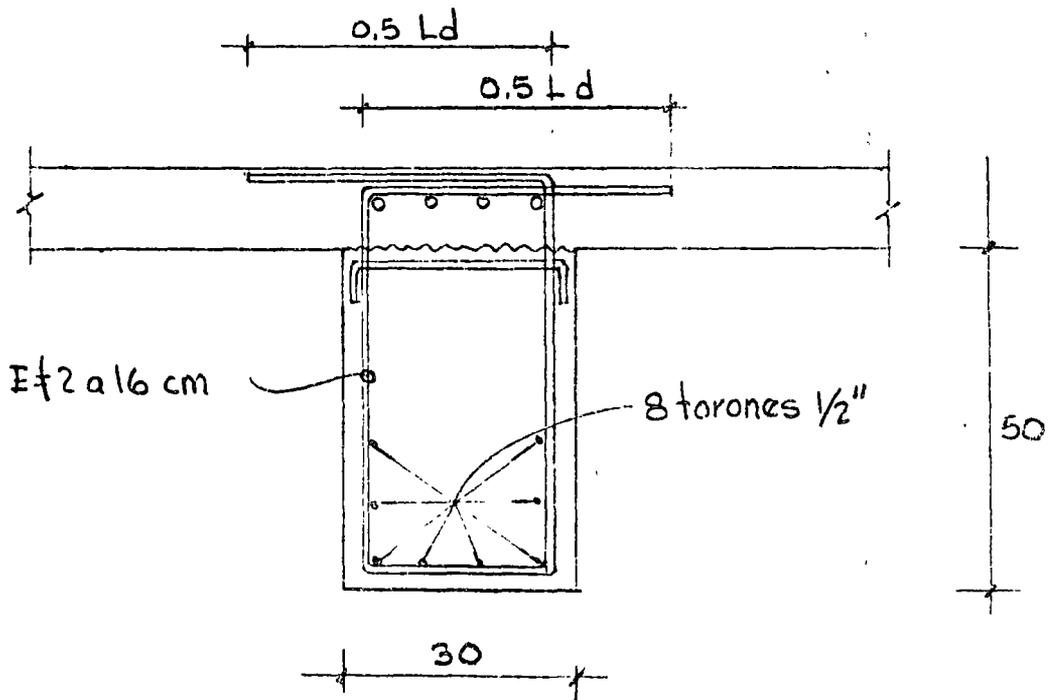
bastará con dejar la superficie superior de la trabe intencionalmente rugosa de 5 mm y poner conectores solo por especificación.

Como las especificaciones son las mismas en acero mínima de conectores que en las de tensión diagonal quedarán estribos  $\phi 1/4''$  a cada 15 cm.

Cuando la separación de estribos por cortante vertical es menor que la separación por cortante horizontal, regirán evidentemente los primeros y se prolongarán dentro de la losa anclándolos convenientemente.



ELEVACION



CORTE 1-1

### EJEMPLO 3

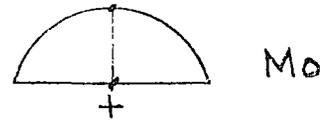
Calcular la sobrecarga y el área de acero para momento negativo si las trabes del ejemplo 2 se les da continuidad

a) Cálculo de la sobrecarga

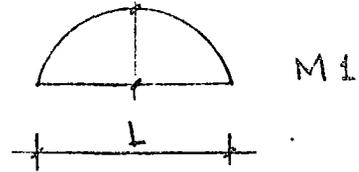
Como libremente apoyada se tenía:

$$M = 4.90 + 7.26 = 12.16 \text{ tm}$$

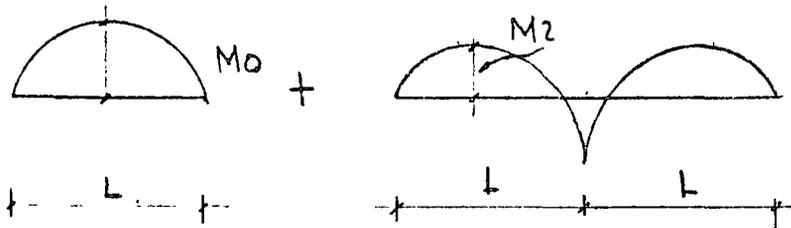
p. propio    losa



$$M_{\text{secc. compuesta}} = 7.56 \text{ tm}$$



Si la trabe se hace continua



$$M_0 + M_1 = M_0 + M_2$$

$$M_1 = M_2$$

$$M_1 = \frac{p_1 L^2}{8} \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{9}{128} p_2 L^2$$

$$\frac{p_1 L^2}{8} = \frac{9}{128} p_2 L^2$$

$$\text{de donde } p_2 = \frac{128}{72} p_1 = 1.77 p_1$$

$$\text{Si } p_1 = 100 + 150 = 250 \text{ Kg/m}^2 \text{ (Ver problema 2)}$$

∴ La trabe puede resistir una sobrecarga de:

$$p_2 = 1.77 \times 250 = 422 \text{ Kg/m}^2$$

b) Cálculo del área de acero para momento negativo

En el apoyo:

$$M(-) = \frac{0.84(11)^2}{8} = 12.6 \text{ tm}$$

$$M_u = 18.7 \text{ tm}$$

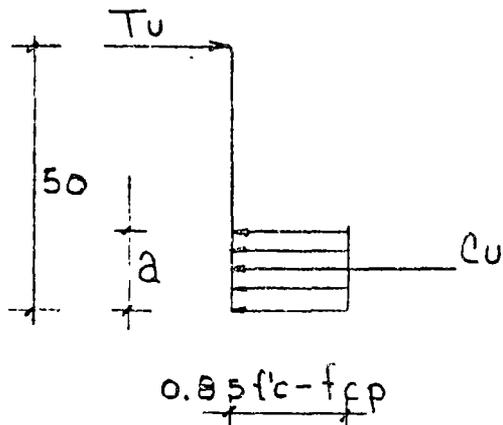
El área de refuerzo se calculará como sigue

$$A_s \approx \frac{M_u}{d \cdot f_y}$$

$$A_s = \frac{18.7 \times 10^5}{50 \times 4000} = 9.4 \text{ cm}^2$$

Se pondrán 4 varillas  $\#6 \rightarrow A_s = 11.5 \text{ cm}^2$

Estableciendo el equilibrio en la sección del apoyo:



$$C_u = T_u$$

$$C_u = (297 - f_{cp}) \cdot 30 \cdot a$$

$$T_u = 11.5 \times 4000 = 46000 \text{ Kg}$$

Suponiendo que la compresión del prestuerzo,  $f_{cp}$ ,

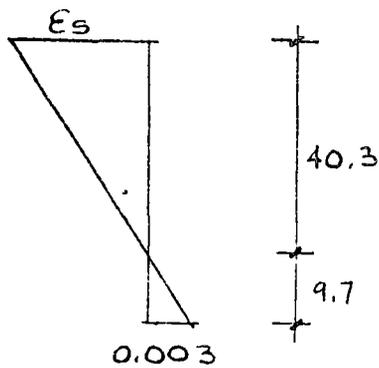
sea de  $100 \text{ Kg/cm}^2$

$$a = \frac{46000}{197 \times 30} = 7.8 \text{ cm}$$

verificando el tipo de falla:

$$c = \frac{7.8}{0.8} = 9.7 \text{ cm}$$

Verificando el tipo de falla



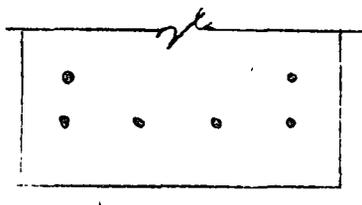
$$\frac{\epsilon_s}{40.3} = \frac{0.003}{9.7}$$

$$\epsilon_s = 0.012 > \frac{0.002}{0.75} = 0.0026$$

∴ el acero fluye, la sección es sobreforzada y se cumple la condición del 75% del acero de la condición balanceada.

Es necesario verificar también el esfuerzo de compresión supuesto de 100 Kg/cm<sup>2</sup> provocado por el prestuerzo.

El c. de g. del prestuerzo del ejemplo 2 con respecto al borde inferior:



$$\frac{4 \times 4 + 2 \times 6}{6} = 4.6 \text{ cm}$$

Del diagrama de deformaciones unitarias

$$\frac{0.003}{9.7} = \frac{\epsilon_p}{5.1} \longrightarrow \epsilon_p = 0.0015$$

La deformación del acero de prestuerzo al tensarse fue de:  $\epsilon_{pu} = 0.005$ , el esfuerzo valdrá:

$$\begin{aligned} f_{sp} &= \epsilon_{sp} \times E \\ &= (0.005 - 0.0015) \times 2 \times 10^6 \\ &= 7,000 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned}$$

La fuerza del presfuerzo sera :

$$F = 7000 \times 6 \times 0.93 = 39000 \text{ Kg}$$

y por lo tanto la compresión en el concreto

$$f_{cp} = \frac{39000}{30 \times 7.8} = 163 \text{ Kg/cm}^2$$

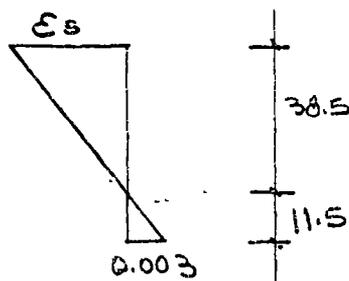
$$163 \neq 100 \text{ Kg/cm}^2 \text{ supuestos}$$

Como la diferencia es considerable, se hará un 2º tanteo, con el  $f_{cp}$  promedio de  $130 \text{ Kg/cm}^2$ .

$$a = \frac{46000}{167 \times 30} = 9.2 \text{ cm}$$

$$c = \frac{9.2}{0.8} = 11.6 \text{ cm}$$

Por los valores obtenidos, se deduce que  $\epsilon_s > \epsilon_y$



$$\frac{\epsilon_s}{38.5} = \frac{0.003}{11.6}$$

$$\epsilon_s = 0.001$$

$$\epsilon_p = \frac{0.003}{11.6} \times 7 = 0.0018$$

$$F_{sp} = 6400 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F = 35700 \text{ Kg}$$

y la compresión en el concreto valdrá:

$$f_{cp} = \frac{35700}{30 \times 9.2} = 129 \text{ Kg/cm}^2$$

$$129 \neq 130 \text{ Kg/cm}^2 \text{ supuestos}$$

El momento resistente valdrá

$$M_u = \phi T_u \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$= 0.9 \times 46\,000 \left( 0.5 - \frac{0.092}{2} \right)$$

$$= 18.8 \text{ tm}$$

$$M_u > M_{act} \quad \therefore \text{O.K.}$$

# UNA POSIBLE SOLUCION AL PROBLEMA DE LA TRABE CONTINUA

1) Analisis de cargas, momentos flexionantes y fuerzas cortantes.

$$\begin{aligned}
 \text{p. propio } l_{o12} &= 0.12 \times 2400 = 290 \\
 \text{piso y firme} &= 50 \\
 \text{c. viva} &= 50 \\
 \hline
 &= 540 \text{ Kg/m}^2
 \end{aligned}$$

• peso por metro lineal:

$$540 \times 4 + 0.42 \times 0.53 \times 2400 = 2595 \text{ Kg/m.l.}$$

Se tomarán 2.6 ton/m, (1.4 ton/m al tensor)

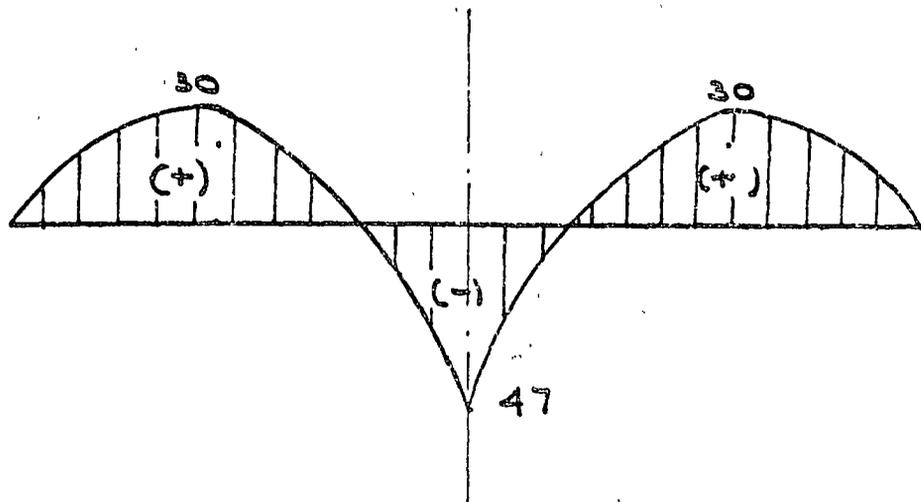
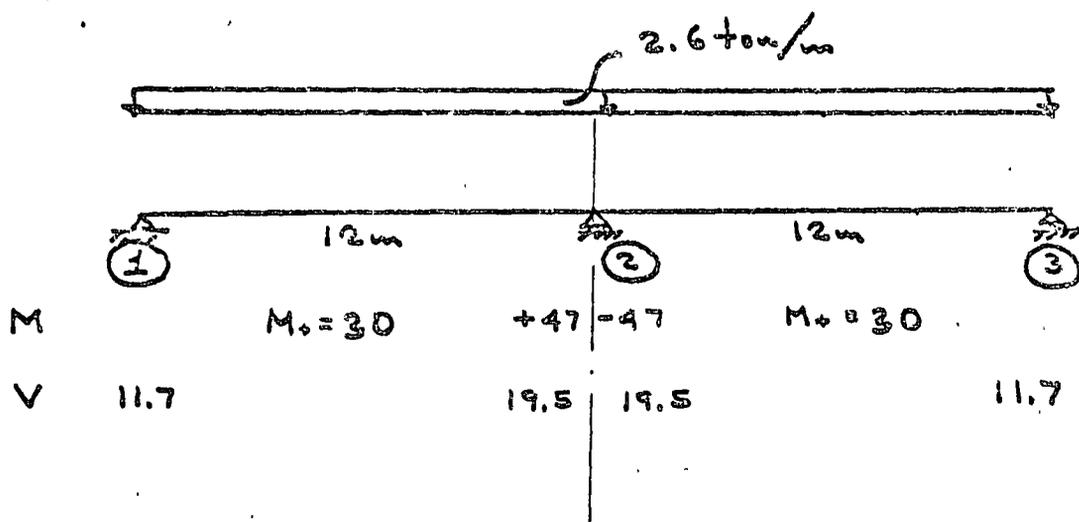


DIAGRAMA DE MOMENTOS (ton-m)

## 2) Diseño por resistencia

Suponiendo 2 cables  $12\phi 7$  y 2 #5

$$A_{\text{pref.}} = 4.62 \times 2 = 9.24 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{ref.}} = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$$

2a - Verificación en el apoyo central

$$f''_c = 0.7f'_c = 245 \text{ Kg/cm}^2$$

Suponiendo la fluencia del acero:

$$245 \times 42 = Y = 9.24 \times 13,000 + 4 \times 4000$$

$$Y = \frac{120,120 + 16,000}{10290}$$

$$= 13.2 \text{ cm}$$

El eje neutro estará en:

$$c = \frac{Y}{0.8} = \frac{13.2}{0.8} = 16.5 \text{ cm}$$

$$E_s_{\text{pref.}} = \frac{41.5 \times 0.003}{16.5} = 0.0075$$

$$E_s = 0.0075 + 0.0055 = 0.013 > 0.01$$

(al tener)

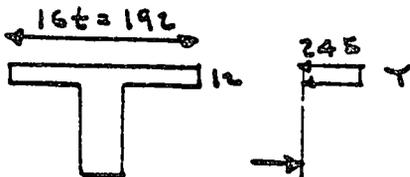
∴ El acero fluye y la suposición fue correcta

$$M_{\text{resist}} = 120.12 (0.51) + 16 (0.54)$$

$$= 61.2 + 8.6 = 69.8 \text{ tm}$$

$$M_{\text{actuado}} = 47 \times 1.4 = 65.8 < 69.8 \quad \text{O.K.}$$

2a - Verificación para el momento positivo



$$192 \times 245 = Y = 120120 + 16000$$

$$Y = 2.9 \text{ cm}$$

(Es obviamente subreforzada)

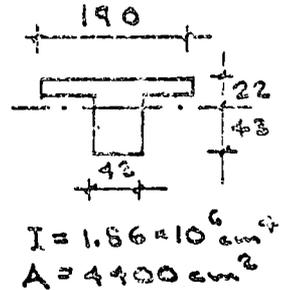
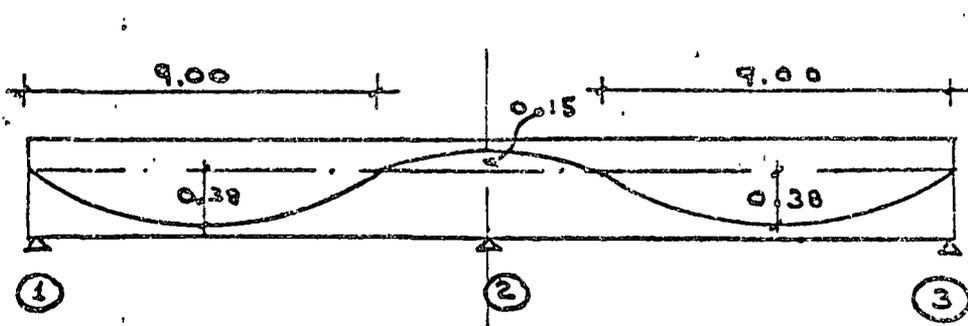
$$M_{\text{resist}} = 120.1 (0.55) + 16 (0.60)$$

$$= 66 + 9.6 = 75.6 \text{ tm}$$

$$M_{\text{act}} = 30 \times 1.4 = 42 \text{ tm} < 75.6 \text{ tm}$$

3) Verificación de esfuerzos

3a) Trazo de cables y cálculo del momento hiperestático de pretensión

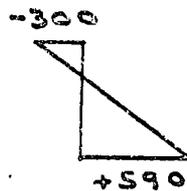


Cálculo del momento hiperestático de pretensión, usando el 2º teorema de Mohr:

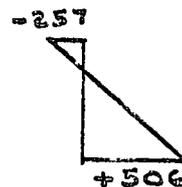
$$\Delta_{12} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 0.38\right) 4.5 - \left(\frac{2}{3} \cdot 0.15 \cdot 3.00\right) 10.87 - \left(\frac{M_h \cdot 12}{2}\right) 8 = 0$$

$M_h = 0.14 F$ , siendo  $F$  la fuerza de pretensión

3b) Verificación de esfuerzos en el apoyo 2



carga permanente



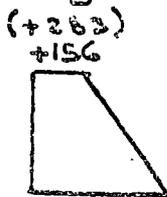
firma + carga vivo

pretensión:  $e = 0.15 + 0.14 = 0.29 \text{ m}$

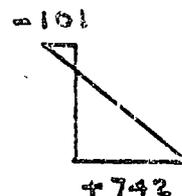
$$f_{p0} = 80 \left( \frac{1}{0.44} + \frac{0.29 \cdot 0.22}{0.0186} \right) = +456 \text{ ton/m}^2$$

$$f_{p0} = 80 \left( \frac{1}{0.44} - \frac{0.29 \cdot 0.43}{0.0186} \right) = -354 \text{ ton/m}^2$$

Diagramas finales:

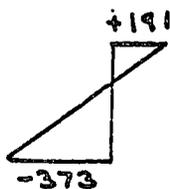


al tensionar

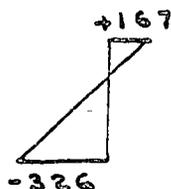


en servicio

3e) Verificación de esfuerzos para momento positivo



carga permanente



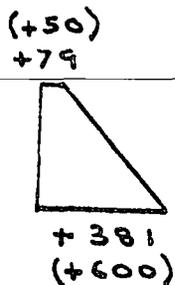
firmo + carga viva

Prestuerzo :  $e = 0.38 - 0.07 = 0.31 \text{ m}$

$f_{p0} = 80 \left( \frac{1}{0.44} - \frac{0.31 \times 0.22}{0.0186} \right) = -112 \text{ ton/m}^2$  (transferencia) (-143 ton/m<sup>2</sup>)

$f_{pi} = 80 \left( \frac{1}{0.44} + \frac{0.31 \times 0.43}{0.0186} \right) = +754 \text{ ton/m}^2$  (+965 ton/m<sup>2</sup>)

Diagramas de esfuerzos finales:



al tensor



en servicio

Conclusiones :

- 1.- Por resistencia, el prestuerzo está bien proporcionado (Ver apoyo central)
- 2.- Por esfuerzos permisibles, el prestuerzo está algo sobrado, de acuerdo a la tensión permisible de 200 ton/m<sup>2</sup>
- 3.- Falta la verificación de la fuerza de prestuerzo supuesta en la transferencia y en servicio, y compararla con la supuesta; para esto, será necesario el cálculo de las pérdidas de prestuerzo

## 4) Diseño por cortante

## 4a) Contribución del concreto

$$\begin{aligned}
 V_c &= v_c b d = 0.5 \sqrt{f_c'} b d \\
 &= 0.5 \sqrt{245} \times 42 \times 60 \\
 &= 19780 \text{ Kg} = 19.78 \text{ ton}
 \end{aligned}$$

$$V_{act} = 19.5 \times 1.4 = 27.3 \text{ ton}$$

∴ Los estribos deberán tomar:

$$V_s = 27.3 - 19.7 = 7.6 \text{ ton}$$

Suponiendo estribos del #3 a cada 30 cm y con límite de fluencia = 4,000 Kg/cm<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
 V_s &= \frac{A_v \times f_y' \times d}{s} & f_y' &= 0.8 \times 4000 \\
 & & &= 3200 \text{ Kg/cm}^2 \\
 &= \frac{1.42 \times 3200 \times 60}{30} = 9,000 \text{ Kg}
 \end{aligned}$$

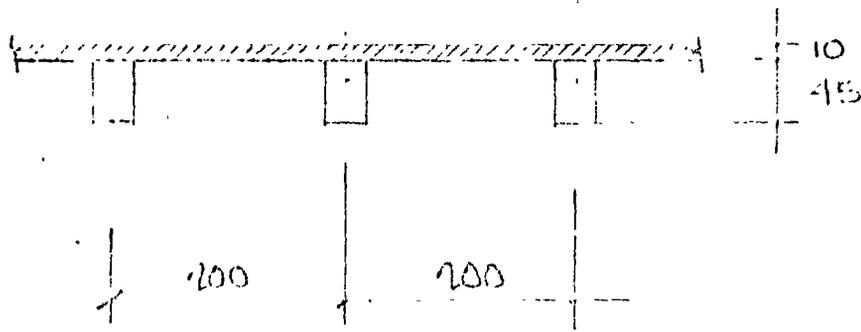
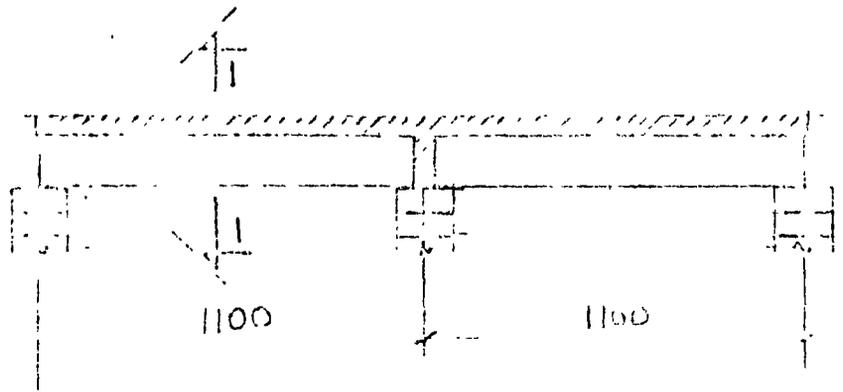
$$19.7 + 9 = 28.7 \text{ ton} > 27.3 \text{ ton} \quad \text{O.K.}$$

Se pondrán E#3 a 30 cm.

NOTA.- Si se hubiera aplicado el criterio de algunos reglamentos europeos que dan prelación la participación del concreto para tomar fuerza cortante y haciendo intervenir la compresión en el concreto producido por el pretensado, la separación sería E#3 a 22 cm.

Ejemplo 25

Calcular la sobrecarga y el área de acero para momento negativo en los traveses del ejemplo 2 se le da continuación.



CORTE 1-1



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

FLEXION EN TRABES CONTINUAS

ING. JOSE LUIS CAMBA CASTAÑEDA

MARZO, 1978.



## 4.5 FLEXION EN TRABES CONTINUAS

José Luis Camba

4.5.I.- Trabes prestensadas continuas

## A) Estados límite de servicio

4.5.1.1. Introducción.-

En la flexión isostática de traves prestensadas quedó aclarado que debido a la ley acción-reacción, la acción del cable -- sobre el concreto estaba en equilibrio con la reacción que éste -- impone al cable, es decir que el presfuerzo solamente producía esfuerzos internos y por lo tanto las reacciones de apoyo de la estructura bajo la acción del presfuerzo eran nulas.

Bajo la acción del presfuerzo la trabe se deforma. Si dicha trabe es isostática se deformará libremente pero si se trata de una trabe hiperestática, va a encontrar ciertas restricciones para hacerlo, provocando en los apoyos reacciones debidas al presfuerzo. Dichas reacciones se las llamará hiperestáticas y los momentos debidos a dichas reacciones serán llamados momentos hiperestáticos de presfuerzo.

El efecto producido por las mencionadas reacciones hiperestáticas deberá agregarse a la acción isostática del cable.

El conjunto de reacciones hiperestáticas de presfuerzo forman un sistema de fuerzas, nulo.

Para aclarar los conceptos mencionados, la trabe del ejemplo 1, es de sección constante de longitud  $\overline{AC}=L$  ( fig. 1) y se considerará la acción debida solamente al presfuerzo.

Dicho presfuerzo  $F$  es horizontal y tiene una excentricidad  $e_1$  constante a todo lo largo de la trabe.

Ejemplo 1.-

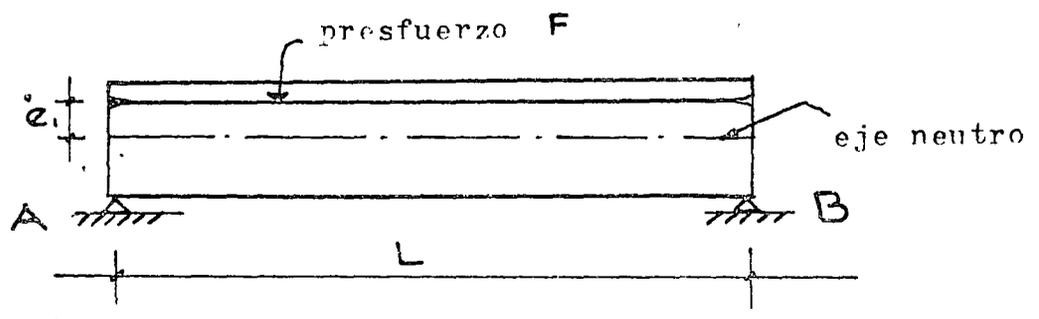
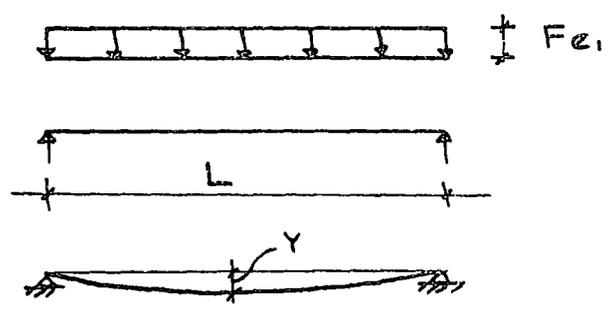


Figura 1.

La trabe está libremente apoyada, por lo tanto si calculamos la flecha al centro del claro debida al presfuerzo se tendrá:



usando el método de la viga conjugada (fig. 2.)

Figura 2.

El momento al centro de la viga conjugada será:

$$M = \frac{Fe_1 L}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{Fe_1 L}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{Fe_1 L^2}{8}$$

por lo tanto, la flecha al centro será:

$$y = \frac{Fe_1 L^2}{4 E I}$$

si la trabe de la fig. 1 está apoyada en A, C y en B (fig. 3) la trabe será hiperestática y por lo tanto la flecha en el punto B debe ser nula. Se resolverá mediante el método de las flexibilidades.

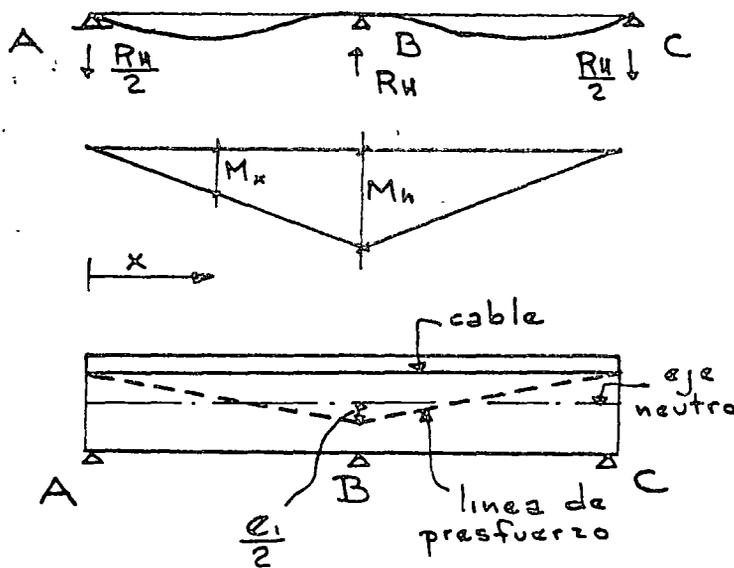


Figura 3.

Para nulificar la flecha al centro, el apoyo B debe provocar una reacción hiperestática de presfuerzo que anule la flecha anteriormente calculada o sea:

$$\frac{R_{H_B} L^3}{48 E I} = \frac{F e_1 L^2}{8 E I}$$

(El primer miembro representa la flecha al centro del claro, de una carga concentrada en dicho punto y libremente apoyada).

de donde:

$$R_{H_B} = \frac{6 F e_1}{L}$$

Por simetría y por suma de fuerzas verticales

$$R_{H_A} = R_{H_C} = - \frac{3 F e_1}{L}$$

Por lo tanto si analizamos una sección cualquiera  $x$ , siendo  $0 \leq x \leq L/2$  tendremos, además del efecto isotático del cable, las acciones hiperestáticas de:

$$M_{Hx} = - R_{HA} x$$

$$V_{Hx} = - R_{HA}$$

De donde el momento total debido al presfuerzo será:

$$M_x = P \cdot e_1 + M_{Hx} = Fe_1 - \frac{3 Fe_1}{L} x = Fe_1 \left(1 - \frac{3x}{L}\right)$$

La línea de presfuerzo tiene una excentricidad:

$$e_x^* = \frac{M_x}{P} = e_1 \left(1 - \frac{3x}{L}\right)$$

al centro del claro valdrá:

$$e^* = e_1 \left(1 - \frac{3L}{2L}\right) = -\frac{1}{2} e_1$$

resultando  $e^*$  una línea quebrada como se indica en la fig. 7, que es la línea de presfuerzo.

Comparando los resultados así obtenidos con los de la trabe isostática se pueden hacer las siguientes conclusiones:

- 1) La línea de presfuerzo  $e^*$  no coincide con el cable o alambre equivalente, debido al momento hiperestático de presfuerzo.
- 2) Los esfuerzos provocados por el presfuerzo en el concreto, serán debidos a la excentricidad  $e^*$  de la línea de presfuerzo y NO a la excentricidad  $e_1$  del cable, es decir que en una estructura hiperestática, el presfuerzo no pasa donde se coloca el cable, salvo un caso particular que se verá más adelante .

3) En una estructura hiperestática deberá considerarse el conjunto de la misma y no podrá tomarse una sección aislada como se hace en una trabe isostática.

Por todo lo anterior, se podría decir aparentemente que - Las reacciones hiperestáticas de presfuerzo tienen una intervención desfavorable por ejemplo en el caso que acabamos de ver, mientras más subamos el cable en el apoyo para comprimir el concreto, más lo pondremos en tensión, ya que bajará aún más la línea de presfuerzo .

Sin embargo, las dificultades que se presentan en las estructuras hiperestáticas presforzadas pueden resolverse tomando en cuenta dichas reacciones hiperestáticas y tratando de obtener de las mismas la mayor ventaja posible.

El caso del ejemplo 1, se utilizó para hacer notar en -- forma sencilla, la presencia de los momentos hiperestáticos; sin embargo la posición que se escogió para colocar el presfuerzo fue arbitraria y no corresponde a un caso práctico

Como en el caso de la  flexión isostática, se puede considerar el presfuerzo en dos formas: el directo, considerado como un sistema de cargas exterior a la trabe y el interno.

Ambos métodos podrán utilizarse para calcular las reacciones hiperestáticas debidas al presfuerzo. En la fig. 4 se observa una trabe continua con un cable ondulado y la forma como se presentan las solicitaciones debidas al presfuerzo usando el método directo.

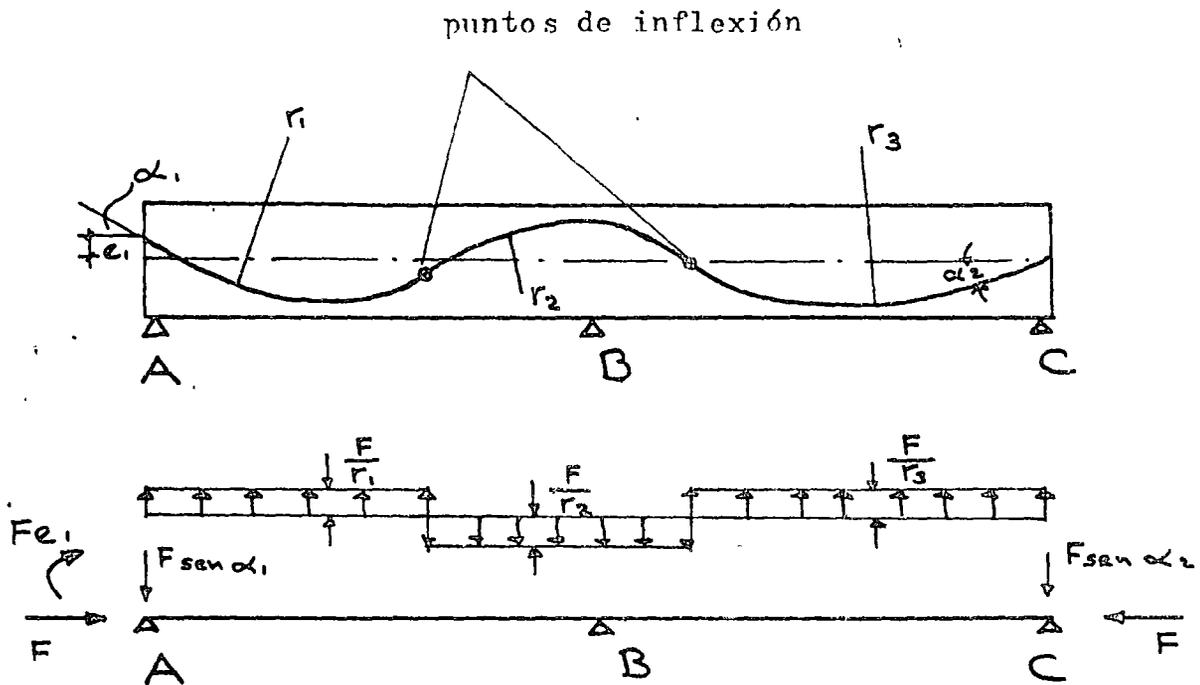


Figura 4.

Las reacciones hiperestáticas debidas al presfuerzo se calcularán por cualquiera de los métodos utilizados para resolver estructuras hiperestáticas (teorema del área momento, deflexión-pendiente, método de Cross, ... etc.).

La trabe del ejemplo 2, describe el cálculo de las reacciones hiperestáticas debidas al presfuerzo, por el método interno.

Se empleará el método del área momento (Fig. 5).

Se supondrá que el trazo del cable es parabólico y que las excentricidades del mismo están de acuerdo a las solicitaciones de cargas permanentes y variables.

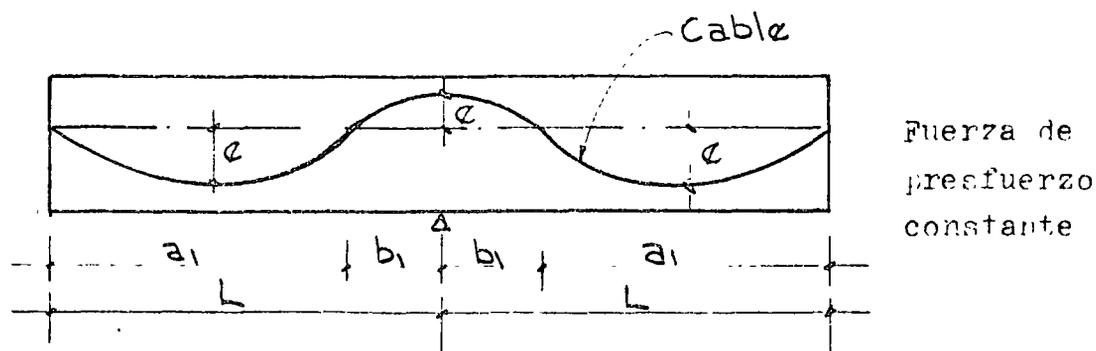
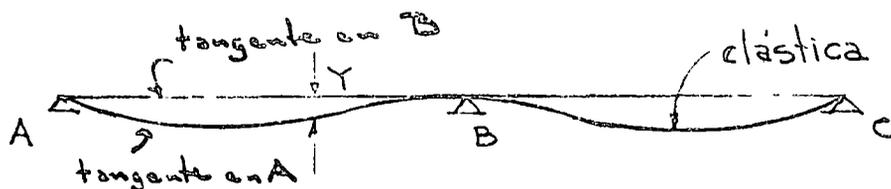
Ejemplo 2.-

Figura 5.

Dada la forma simétrica del trazo del cable se tendrá, por el método del área momento:



$$A = \left( \frac{2}{3} F e_2 b_1 \right) \left( \frac{5}{8} b_1 + a_1 \right) - \left( \frac{2}{3} F e_1 a_1 \right) \frac{a_1}{2} + \frac{(M_h I_1)}{3} \left( \frac{2}{3} L_1 \right) = 0$$

De la ecuación anterior se obtiene el momento hiperestático de presfuerzo  $M_h$  y por lo tanto las reacciones  $R_h$  en los apoyos.

Una vez obtenidos los momentos hiperestáticos, el efecto total de los momentos debidos al presfuerzo será la suma algebraica de los isostáticos e hiperestáticos como se ilustra en la fig. 6

Cuando el trazo del cable equivalente difiera notablemente de una parábola, tendrá que fraccionarse el diagrama de momentos y calcular con su área correspondiente, el momento hiperestático de presfuerzo.

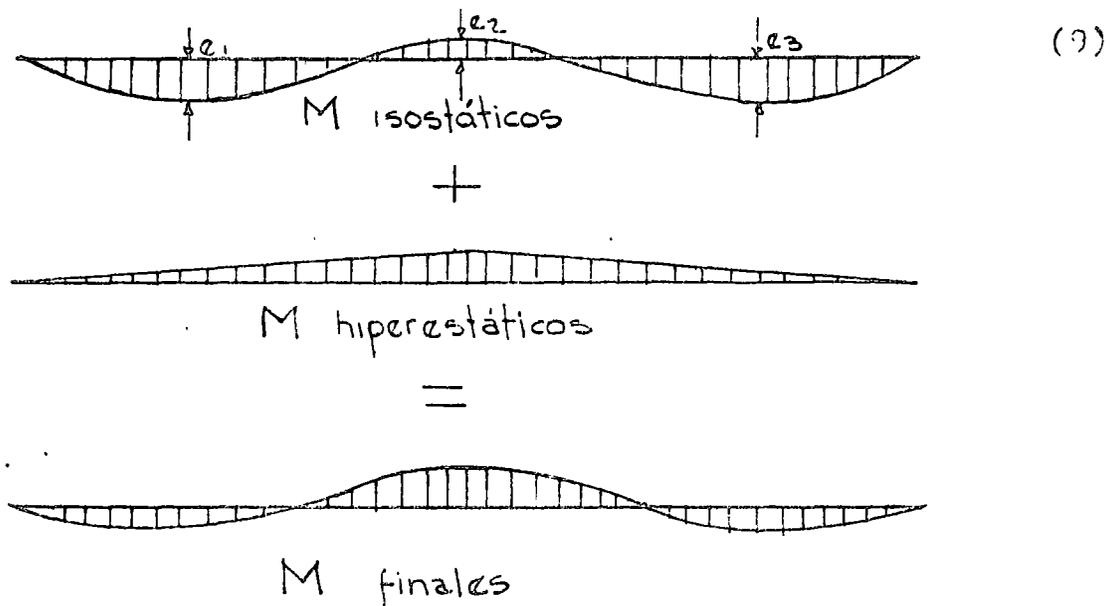


Figura 6.

#### 4.5.1.2 Trazo de cables

De los ejemplos anteriores se puede concluir que el valor de los momentos hiperestáticos de presfuerzo, son debidos al trazo de los cables.

Cuando dicho trazo es de tal forma, que no produce efectos hiperestáticos se le llama trazo concordante, es decir que dicho trazo no provocaría giros extremos en la trabe, si ésta fuera libremente apoyada. Sin embargo este caso se presenta con muy poca frecuencia debido a que en general las secciones mas solicitadas por momento, el presfuerzo se excentra al máximo, es decir se busca la optimización del uso del presfuerzo y además no necesariamente se traduce el cálculo del cable concordante en una solución mas económica.

El trazo de cables en trabes continuas se hace inicialmente en forma semejante al trazo en trabes isostáticas, posteriormente, con el trazo obtenido, se calculan los momentos hiperestáticos de presfuerzo y con el diagrama de momentos de presfuerzo total, se harán las verificaciones correspondientes en las diferentes etapas de carga.

Cuando el número de cables es grande y la fuerza de presfuerzo variable, se calcularán las zonas límite haciendo intervenir el momento hiperestático de presfuerzo.

Una propiedad importante en el trazo de cables en trabes continuas, es el hecho de que si se cambia la posición del cable equivalente en tal forma que permanezcan fijos los extremos del mismo y las curvaturas, dicho cable queda transformado linealmente y en ambos casos la línea de presfuerzo no sufre alteración y por consiguiente tampoco cambian los esfuerzos en el concreto debidos al presfuerzo.

Esto último se demuestra fácilmente haciendo uso del método directo, ya que la carga uniformemente distribuida  $F/r$  es la misma al no variar la curvatura y que la fuerza vertical en los anclajes sí se altera, pero <sup>se</sup> transmite directamente al apoyo ( fig. 4).

En la práctica el trazo de cables es con curvaturas graduales y sin cambios bruscos como lo indicaría las zonas límite, que tienen forma semejante al diagrama de momentos, por lo que es necesario proceder como lo muestran las figuras 7a y 7 b,

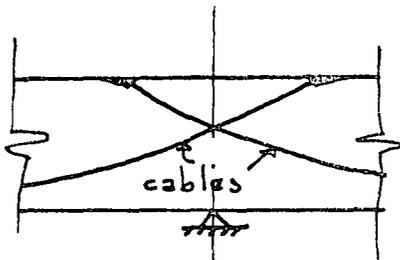


Figura 7 - a.

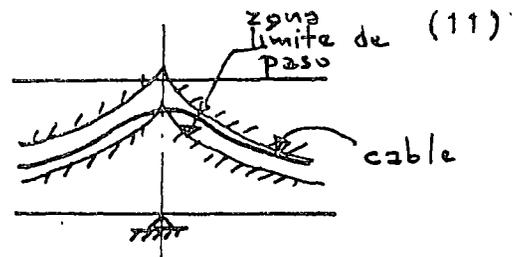


Figura 7 - b.

Figura 7.

Una vez analizados los efectos hiperestáticos debidos al -- presfuerzo en traveses continuos y las características de transformación lineal del cable equivalente, se procederá al cálculo de la fuerza de presfuerzo.

#### 4.5.1.3 Cálculo del presfuerzo.-

Las formas de calcular la fuerza de presfuerzo será semejante a las utilizadas en las de traveses isostáticos, pero haciendo intervenir el momento hiperestático de presfuerzo; como éste a su vez depende del trazo del cable, será necesario proceder por tanteos hasta lograr obtener la fuerza de presfuerzo óptima con un poco de experiencia, dos tanteos bastarán para obtener esta última.

De acuerdo con lo dicho anteriormente se pueden resumir las etapas necesarias para el diseño de un trabe continuo postensado en la forma siguiente:

- 1) Suposición de la sección transversal.
- 2) Cálculo aproximado de la fuerza de presfuerzo en las secciones críticas de momento apoyos y centros de claros y ver la compatibilidad de esta con las secciones supuestas.
- 3) Trazo de las zonas límites y de la línea de presfuerzo en dichas zonas, cuando el número y variación de cables lo ameriten.
- 4) Correcciones y ajustes.

## 4.5.2.- Trabes postensadas continuas

## B) Estado límite de falla

Las hipótesis de base para el diseño de trabes postensadas continuas por resistencia o estado límite de falla, son las mismas que se indicaron en las notas de trabes isostáticas, las cuales se mencionan a continuación:

- a) Conservación plana de las secciones
- b) Se conoce el diagrama esfuerzo-deformación del concreto
- c) Se conoce el diagrama esfuerzo-deformación del acero
- d) Se desprecia la resistencia del concreto en tensión

La diferencia en la ruptura de una trabe hiperestática y una isostática es que en la primera al alcanzar una sección el momento de ruptura se forma una articulación plástica reduciendo solamente su grado de hiperestaticidad, en cambio en la segunda, se transforma en un mecanismo libremente deformable, hipostática, produciéndose la ruptura.

En la fig. 8 se puede ver una trabe hiperestática, su poniendo su funcionamiento perfectamente elasto-plástico.

Una vez que la carga  $P$  sigue aumentando más allá de la zona elástica, la primera articulación se presenta en  $D$ , máximo momento, habiendo una readaptación debido al nuevo sistema. Al seguir aumentando la carga  $P$  se forma otra articulación plástica en el apoyo  $B$ , provocándose así el mecanismo de ruptura.

La hipótesis del funcionamiento elástico no permite darse cuenta del comportamiento de una estructura en la fase de ruptura.

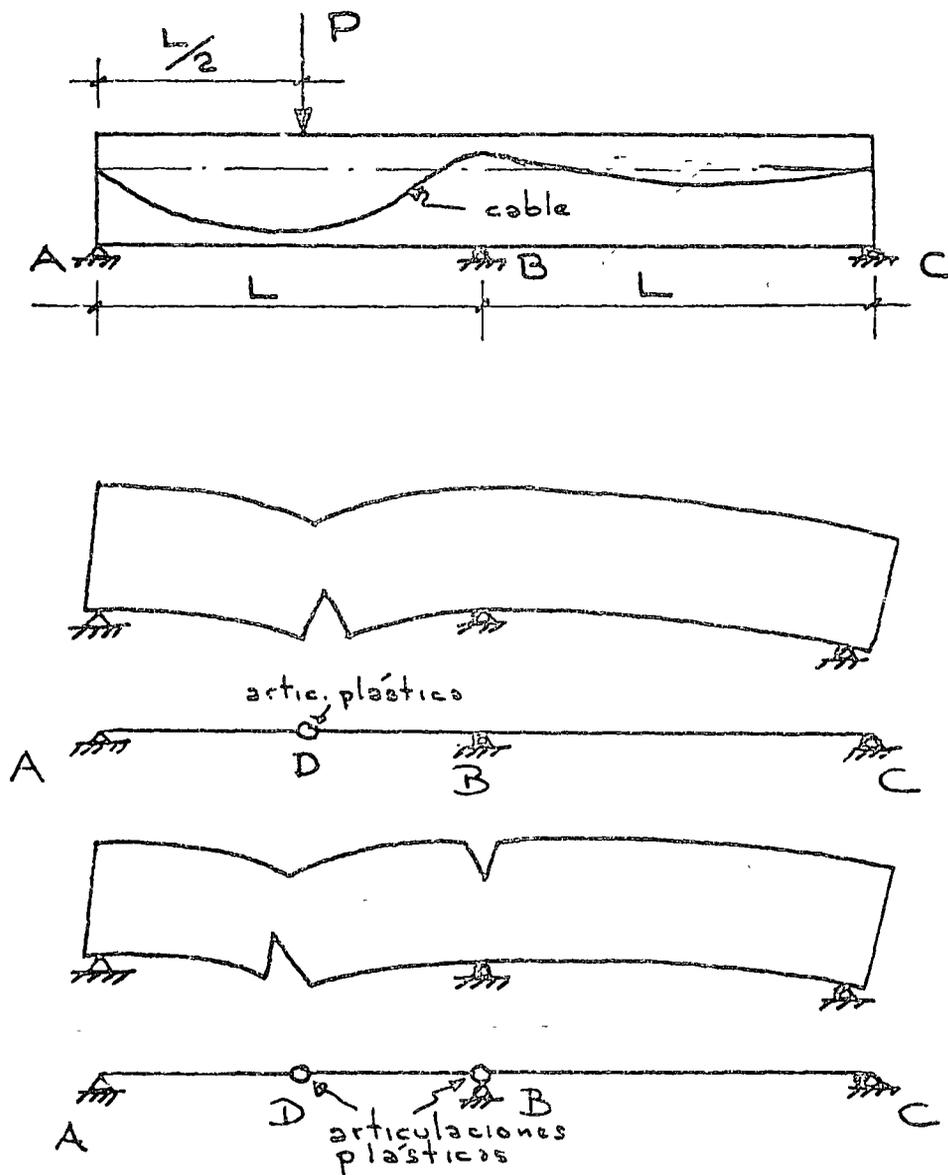


Figura 8.

Sin embargo se conocen en la mayoría de sistemas hiperestáticos simples, el **mecanismo de ruptura**, al cual puede aplicarse el método estático o de trabajos virtuales.

Dado que las traveses presforzadas continuas tienen permanentemente un sistema de esfuerzos debidos a la acción del presfuerzo, en el proceso de carga y descarga, habrá esfuerzos residuales si se llegó al límite elástico (Teoría de Kjanjytsin). Si en el caso

de la fig. 8 se varía la carga  $P$  hasta formar la articulación plástica en  $D$  y después se suprime, repitiendo de nuevo este ciclo de cargas, se provocaría la ruptura de la trabe por fatiga, aunque el valor de  $P < P_r$ .

El ciclo de carga podría repetirse indefinidamente si no se sobrepasa el rango plástico.

De lo anterior se puede concluir lo siguiente:

- a) En la ruptura, las trabes presforzadas continuas tienen un comportamiento semejante a las de concreto reforzado.
- b) La ruptura no depende de los valores elásticos iniciales de los momentos hiperestáticos de presfuerzo ya que el estado inicial de esfuerzos va a transformarse debido a la adaptación plástica de la estructura, por lo tanto los momentos de resistencia en cada sección de la trabe pueden calcularse con la posición del cable equivalente, sin tomar en cuenta si la posición de éste coincide o no con la línea de presfuerzo.

En el diseño de trabes presforzadas continuas se recomienda hacer una gráfica comparando los momentos flexionantes multiplicados por el factor de carga y así mismo la gráfica de los momentos resistentes para comprobar que no hay problema con la ruptura en las diferentes secciones críticas de la trabe.

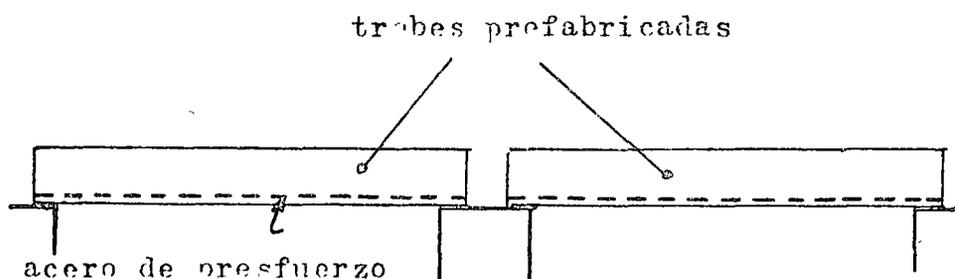
Así mismo se subraya la importancia de que todas las secciones sean subreforzadas, tal como se indicó en las notas de trabes isostáticas, para tener una falla dúctil. El Reglamento DDF 76, limita la cantidad de acero de presfuerzo y ordinario, en tal forma que la fuerza  $A_s f_s + A_s p f_{sp}$ , correspondiente al momento resistente de la sección, sea igual o menor de la que correspondería al 75% de la falla balanceada.

### 11.3. CONTINUIDAD EN TRABES PRETENSADAS

#### Estado límite de falla

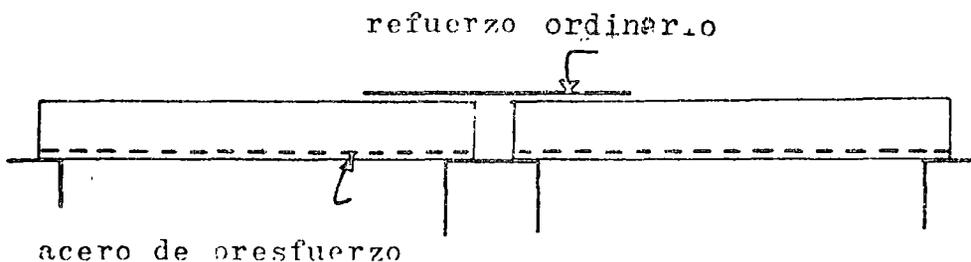
##### a) Introducción.-

El estudio de este tipo de continuidad en traves, supone un estado inicial de prefabricación de las mismas en el cual trabajan isostáticamente y que en su estado final trabajarán como continuas mediante una losa colada in situ y con refuerzo normal para momento negativo (fig. 12).

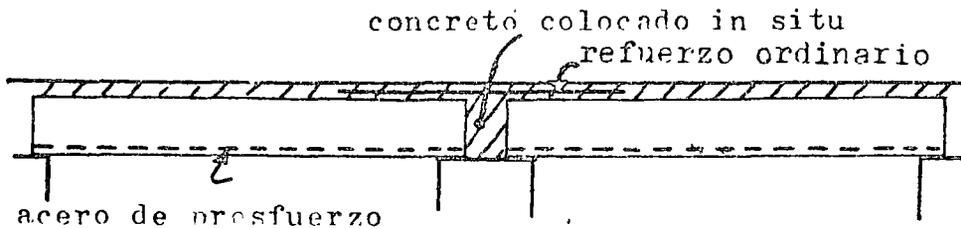


(a)

Fig. 12



(b)



(c)

En el estado inicial de prefabricación las traveses pueden ser pre o postensadas fig13 siendo más comunmente el uso de las primeras.

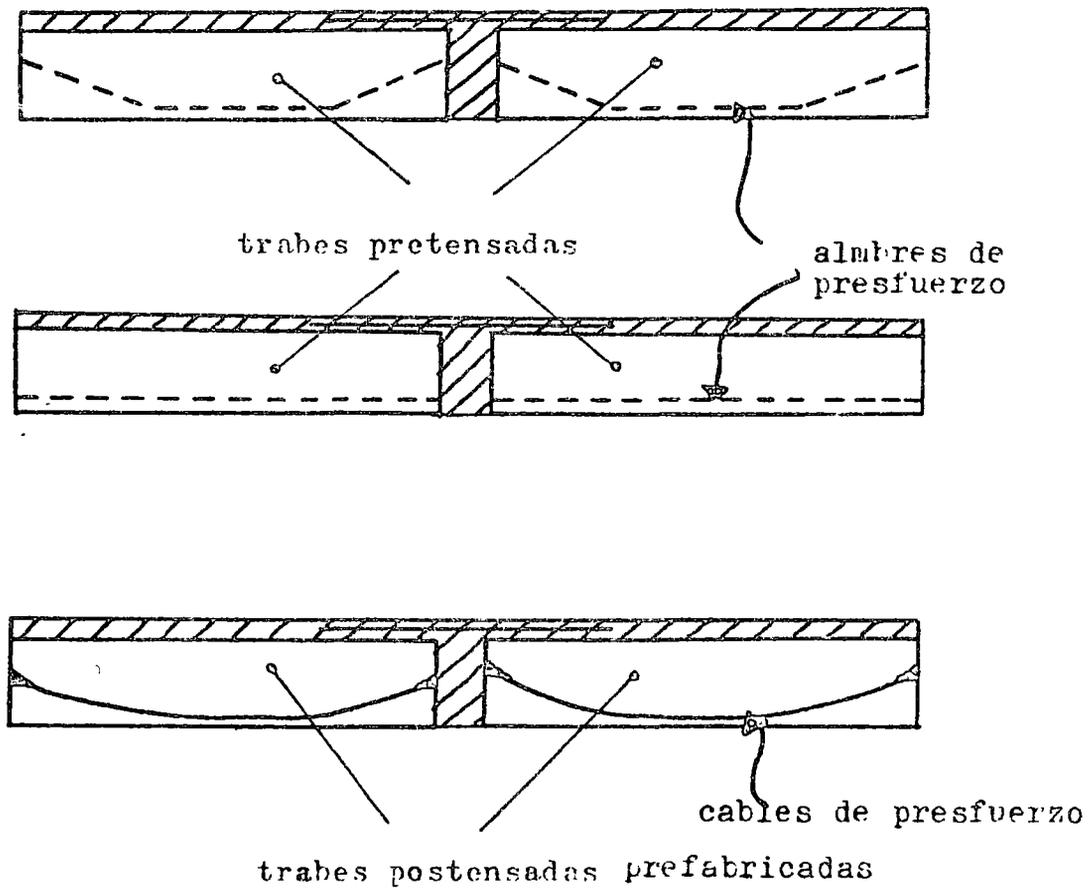


Fig. 13

Este tipo de continuidad a base de refuerzo ordinario se traduce en una economía considerable en las construcciones, comparada con traveses libremente apoyadas y además amplía el campo de la utilización de la prefabricación, al proporcionar a los elementos prefabricados la capacidad para tomar momentos negati-

vos y efectos de fuerzas horizontales, viento o sismo al formar marcos rígidos con las columnas.

Cuando la continuidad en trabes prefabricadas se realiza mediante el refuerzo ordinario, las secciones prefabricadas deben ser capaces de resistir su peso propio y la losa que será colada posteriormente in situ; una vez fraguado el concreto de dicha losa, la sección se le llamará comuesta y es ésta última la que va a resistir el resto de la carga permanente y la carga viva total, como se indicó en 11.2.3.

De acuerdo con esto último, la economía que se realice será mayor mientras la relación entre carga viva y muerta sea más grande.

En estas notas se desprestigiarán los momentos positivos en los apoyos debidos al flujo y a la contracción del concreto en las trabes prefabricadas pretensadas cuyo efecto es pequeño y disminuido por los momentos negativos debidos a la contracción entre la losa colada in situ y las trabes prefabricadas. Además se supone que al diseñar la conexión en los apoyos las trabes pretensadas ya efectuaron una parte importante de las deformaciones debidas al flujo y a la contracción del concreto.

Cuando la continuidad en traveses pretensados se realiza con acero ordinario y que el presfuerzo no actúa en las zonas extremas de las mismas por no estar ahí adherido, el cálculo de dicho refuerzo se hará en idéntica forma al diseño por resistencia indicado en las notas del estado límite de falla.

Se supondrá un diagrama simplificado de esfuerzo-deformación para el acero grado duro, suponiendo un valor del límite de fluencia del mismo  $f_y = 4,000 \text{ kg/cm}^2$  (fig. 14) y que la deformación unitaria en la fluencia tiene un valor de  $\epsilon_y = 0.002$

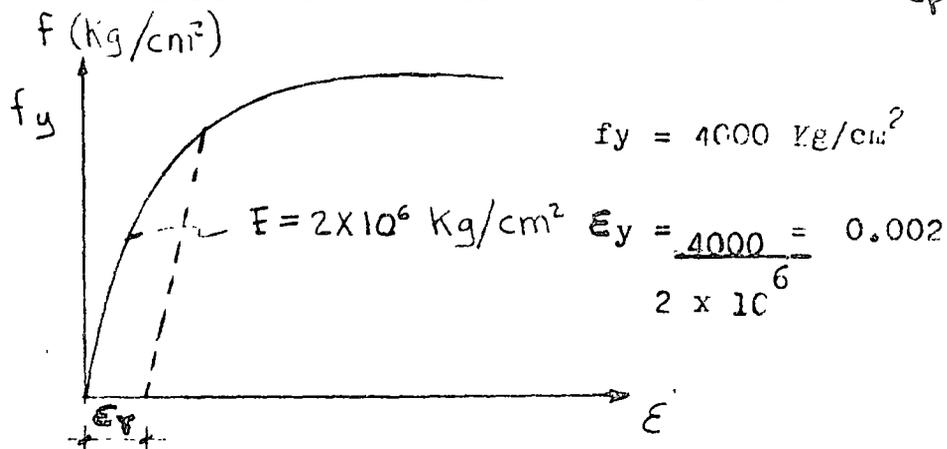


Figura 14

Las etapas de diseño en el estado límite de falla son semejantes a las indicadas en el inciso del mismo nombre, la diferencia que existe en este caso con el procedimiento citado se debe a la presencia de una compresión ya existente en el concreto debida al pretensado, (fig. 15).

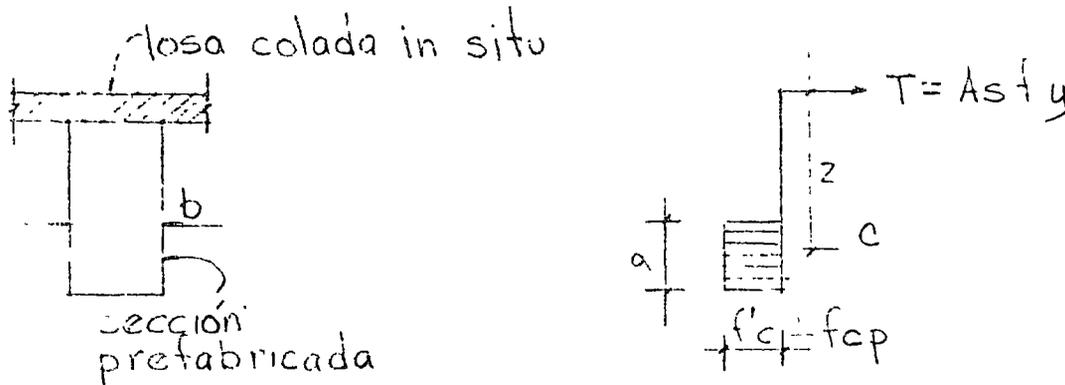


Figura 15

es decir que el bloque de compresión del concreto valdrá:

$$C_u = (f'c - f_{cp}) \times b \times a$$

$$T_u = A_s f_y$$

$$M_r = T \times z = C \times z$$

en las expresiones anteriores todos los términos han sido definidos, subrayando solamente que  $f_{cp}$  es la compresión en el concreto debida al presfuerzo, que deberá disminuirse del valor de  $f'c$ .

Como el valor de  $f_{cp}$  depende del diagrama de deformaciones en la sección del apoyo y que aún no se conoce, el procedimiento más expedito consiste en suponer un valor de  $f_{cp}$ , cuyo valor inicial para el primer tanteo puede ser  $100 \text{ kg/cm}^2$  para traveses pretensados y verificar posteriormente que la suposición fué correcta. Si la diferencia entre el valor supuesto y el encontrado de  $f_{cp}$  se considera importante, por ejemplo 10% o más, bastará con tomar un valor intermedio a la diferen-

cia y así calcular de nuevo el valor de "a", profundidad del bloque resistente de compresión del concreto y después el momento resistente. Dicho momento resistente deberá ser mayor que el momento último actuante, cuyo valor se calculará con el factor de carga indicados en las notas de estado último de falla.

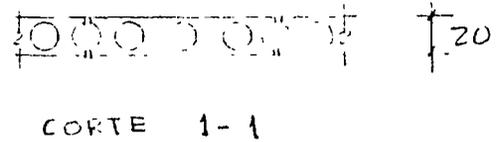
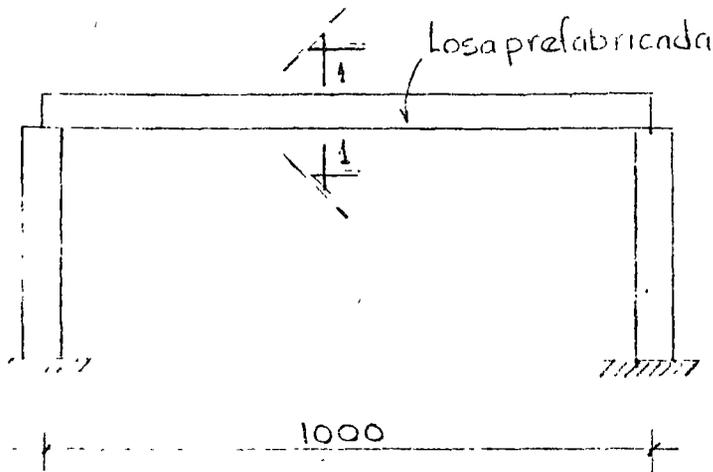
Deberá siempre verificarse que el tipo de falla es dúctil, o sea que la ruptura es producida por la fluencia del acero, secciones sobreforzadas; de no ser así tendrá que modificarse la sección de concreto, o el área de acero, en tal forma que la fuerza de tensión sea el 75% de la tensión balanceada.

Para las secciones en los centros de claros, el momento positivo debido al resto de cargas permanentes y al total de cargas vivas se hará en la forma indicada en el inciso de secciones compuestas, solo se analizará en este capítulo la sección sujeta a momento negativo.

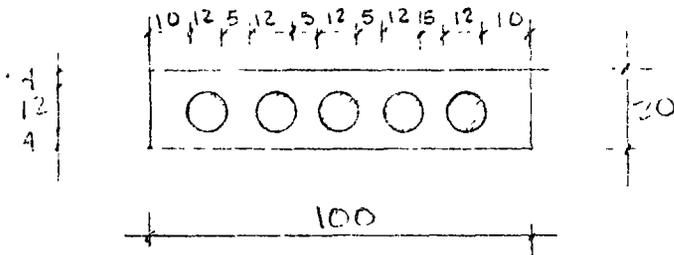
El ejemplo 3 ilustra la verificación por flexión, del estado límite de falla de una sección compuesta, derivada de la continuidad de dos trabes isostáticas; solo se analiza para momento negativo.

EJEMPLO 1 - Diseñar una losa de concreto prestozado a flexión.

Marzo 1978



ELEVACION



SECCION TRANSVERSAL DE UN ELEMENTO TIPO

Carga muerta = 100 Kg/m<sup>2</sup>

Carga viva = 200 Kg/m<sup>2</sup>

Materiales

concreto  $f'_c = 300 \text{ Kg/cm}^2$

Acero de prestuerzo

$f_{sr} = 17\,000 \text{ Kg/cm}^2$

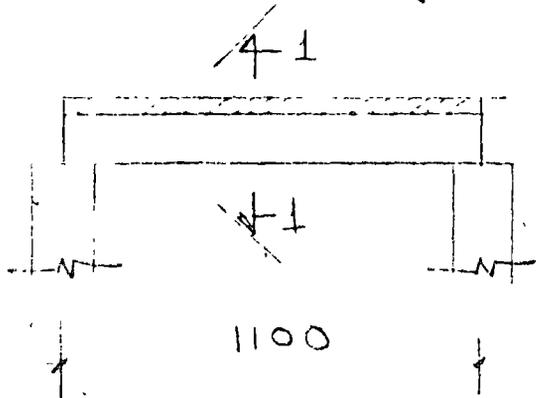
torón 1/2"  $\rightarrow A = 0.93 \text{ cm}^2 \rightarrow F = 9\,500 \text{ kg}$

Prestuerzo efectivo del torón de 1/2"

$$F = 0.6 F_0 = 9\,500 \text{ Kg}$$

Marzo 1978

EJEMPLO 2.- Diseñar una trabe de concreto preforzado de sección compuesta, en flexión y cortante.

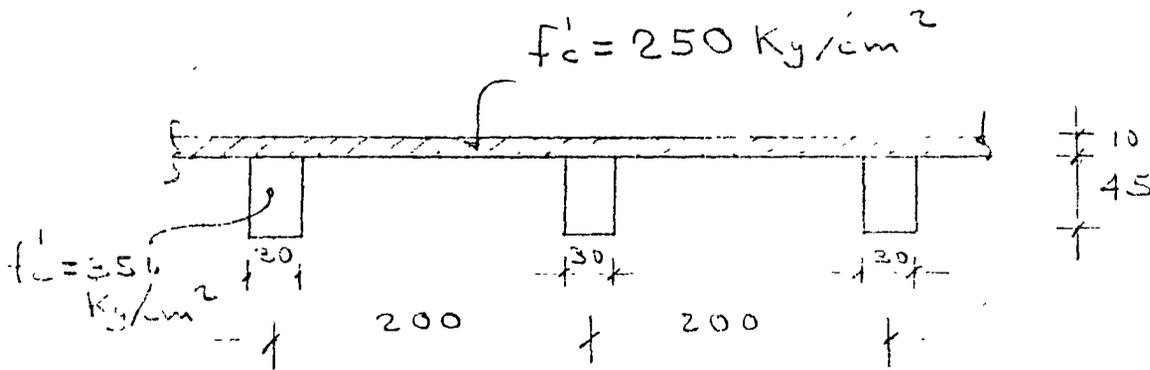


$$\text{Carga muerta} = 100 \text{ Kg/m}^2$$

$$\text{Carga viva} = 150 \text{ Kg/m}^2$$

$$f_{sp} = 17,000 \text{ Kg/cm}^2 \rightarrow F = 9,500 \text{ Kg}$$

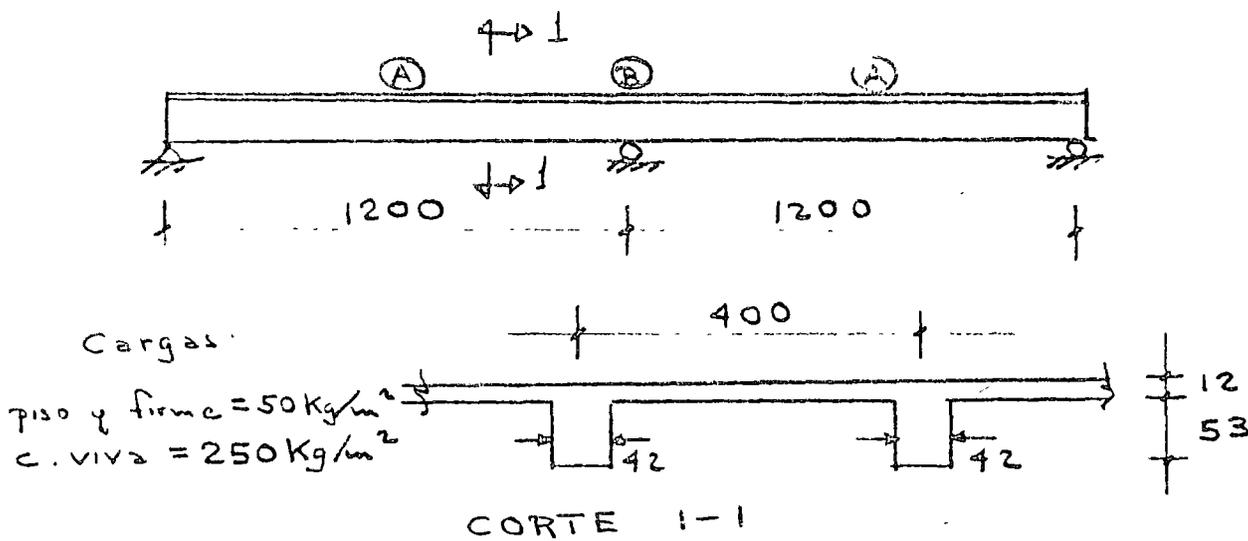
$$\text{toron } \frac{1}{2}'' \rightarrow A = 0.93 \text{ cm}^2$$



CORTE 1-1

EJEMPLO 3.- En la viga postensada se pide: ...

Marzo 1978



- 1.- Determinar el pretensado continuo en toda la trabe con cables  $12\phi 7$  ( $A_{cable} = 4.65 \text{ cm}^2$ ), admitiendo tensiones de  $20 \text{ Kg/cm}^2$  en el concreto
- 2.- Verificar resistencia en los puntos A y B
- 3.- Verificar esfuerzos en los puntos A y B
- 4.- Calcular pérdidas de pretensado

Materiales

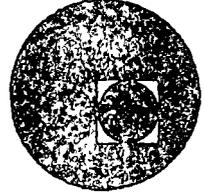
$$f'_c = 350 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{sp} = 16,000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_y = 4,000 \text{ Kg/cm}^2$$



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

DISEÑO DE MUROS CABECEROS  
(CONTINUACION)

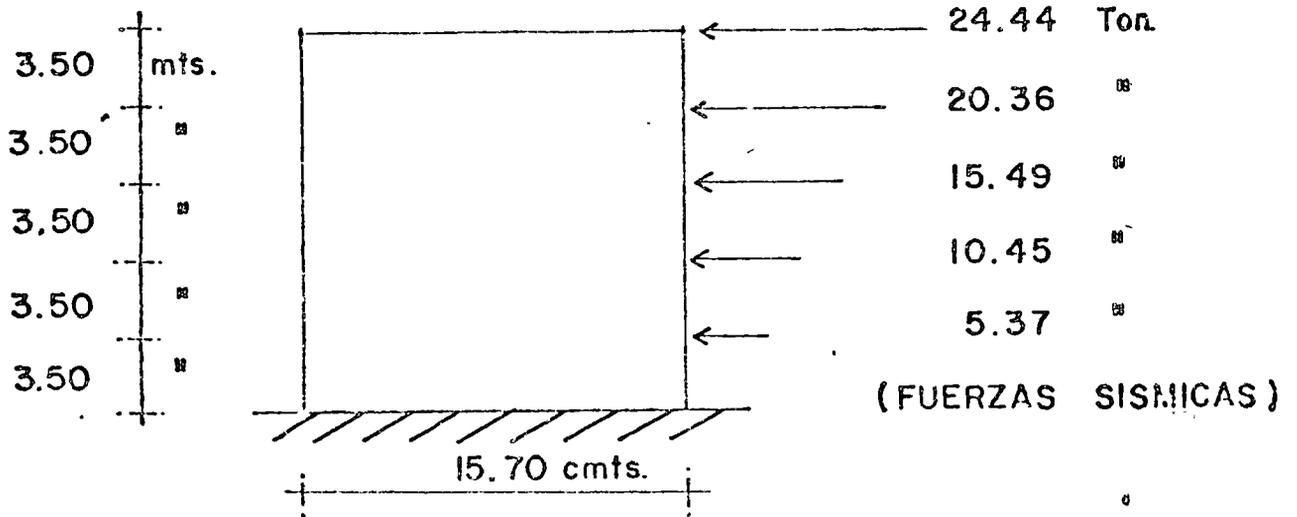
ING. JOSE GAYA PRADO

ABRIL, 1978.

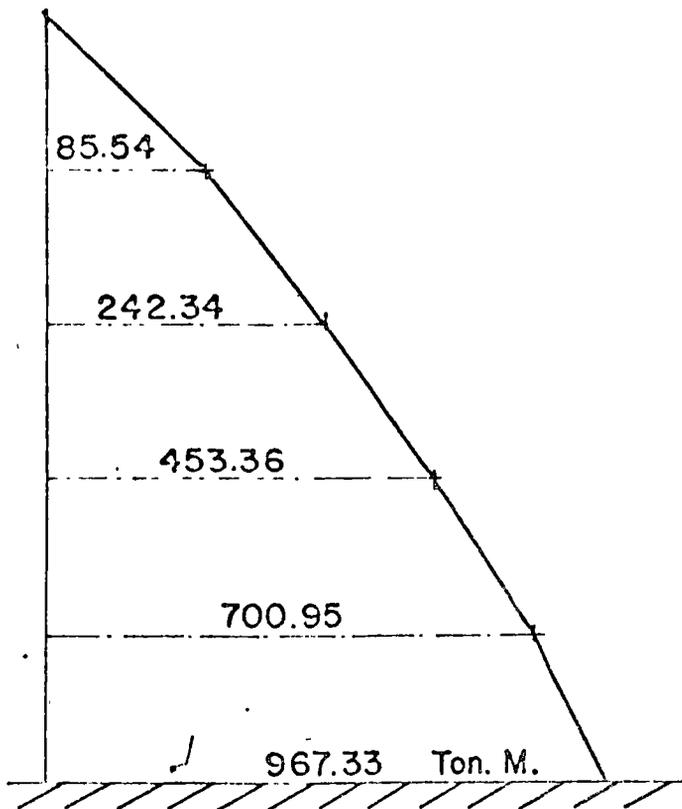


# DISEÑO DE LOS MUROS CABECEROS :

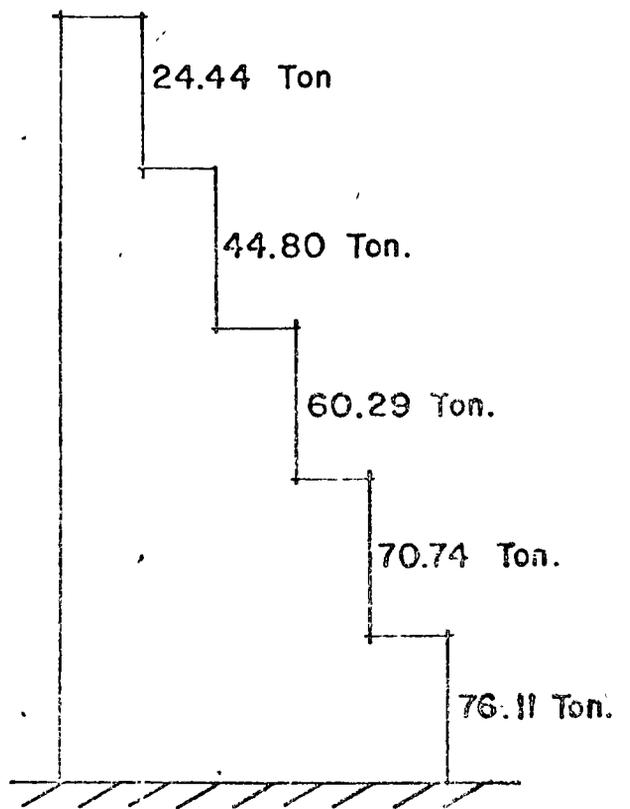
## SISTEMA DE FUERZAS



## ELEMENTOS MECANICOS:

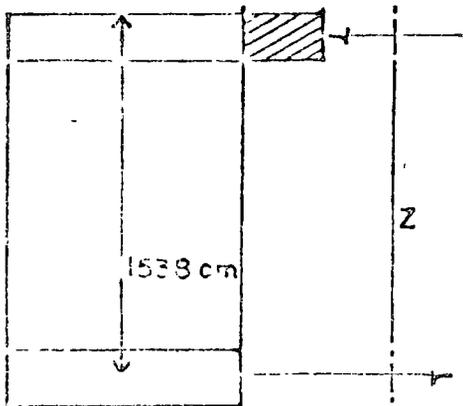


MOMENTO FLEXIONANTE



FUERZA CORTANTE

# REVISION POR FLEXION



$$C_u = a b f'_c$$

POR EQUILIBRIO

$$C_u = T_u$$

$$T_u = A_s f_y$$

MATERIALES:

CONCRETO  $f'_c = 400 \text{ kg/cm}^2$

ACERO  $f_y = 4200$

$f''_c = 254 \text{ kg/cm}^2$

EN FORMA APROXIMADA

$$A_s = \frac{l_u}{0.8d} FR f_y \quad Z = 0.8d$$

$l_u \text{ max.} = 967.33 \text{ Ton.M.}$

$l_u = 1.1 \times 967.33 = 1064.06 \text{ Ton.M.}$

$$A_s = \frac{106406000}{0.8 \times 1538 \times 0.9 \times 4200} = 22.41 \text{ cm}^2$$

SUPONIENDO 4 VARS  $\phi = 8$   $A_s = 20.28 \text{ cm}^2$

$T_u = 20.28 \times 4200 = 85176 \text{ kg.}$

$$a = \frac{85176}{50 \times 254} = 6.71 \text{ cm.}$$

$MR = 15.31 \times 85.18 =$

$FR MR =$

CHECANDO EL PORCENTAJE MINIMO:

$$e_{\min} = \frac{0.7 \sqrt{f'_c}}{f_y} \quad (\text{REGL. D.F.})$$

$$e_{\min} = \frac{0.7 \sqrt{400}}{4200} = 0.0033$$

$$A_s \text{ min} = 27000 \times 0.0033 = 90 \text{ cm}^2$$

$$\text{USANDO 8 VARILLAS } \# 12 \quad A_s = 91.20 \text{ cm}^2$$

∴ RIGE ARMADO MINIMO

REVISION POR CORTANTE :

PARA EL CORTANTE VERTICAL SE USARAN CONECTORES  
Y PARA EL HORIZONTAL

CONECTORES EN PANELES A NIVEL CIMENTACION

$$V = 76.11 \text{ Ton.}$$

$$V_u = 1.1 \times 76.11 = 83.72 \text{ Ton.}$$

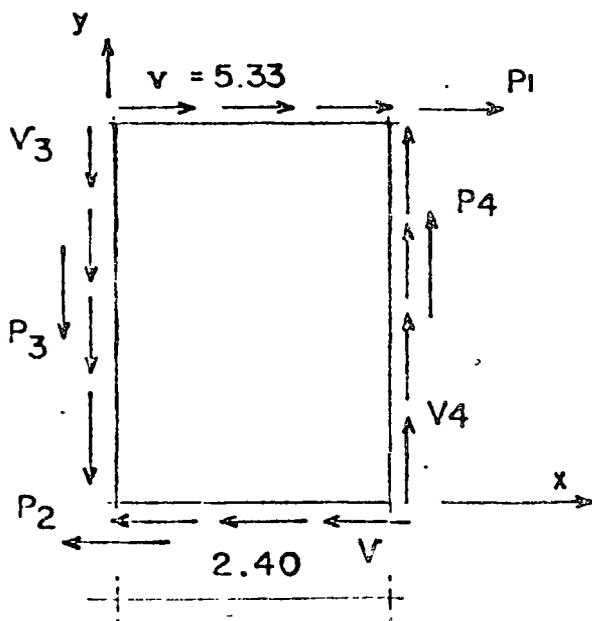
FLUJO DE CORTANTE :

$$V_u = \frac{V_u}{h}$$

$$V_u = \frac{83720}{1570} = 5.33 \text{ Ton./ml.}$$

SE COLOCARAN 6 PANELES DE 2.40 mts DE ANCHO POR  
3.50 mts. DE ALTO APROXIMADAMENTE.

TOMANDO UN SOLO PANEL  $b = 2.40 \text{ mts.}$



$$P_1 = V_1 (b)$$

$$P_2 = V_2 (b)$$

$$h = 3.50 \text{ mts.} \quad P_3 = V_3 (h)$$

$$P_4 = V_4 (h)$$

POR EQUILIBRIO :

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

$$\sum F_x = P_1 - P_2 = 0$$

$$P_1 = P_2$$

$$\therefore V_2 = V_1 = 5.33 \text{ Ton.}$$

$$\sum F_y = P_4 - P_3 = 0$$

$$\sum M_o = P_1 h - P_4 b = 0$$

$$P_4 = \frac{h}{b} P_1$$

$$P_4 = V_1 (b) \frac{h}{b}$$

$$V_4 (h) = V_1 (h)$$

$$\therefore V_4 = V_1 = V_3 = 5.33 \text{ Ton/ml.}$$

$$P_1 = P_2 = 12.79 \text{ Ton.}$$

$$P_3 = P_4 = 18.66 \text{ Ton.}$$

USANDO CONECTORES CON VARILLAS DEL # 5 PARA P3 y P4

$$V_{RV} = 2 \rho f_y A_s \cos 45^\circ$$

$$V_{RV} = 2 \times 0.9 \times 4200 \times 1.99 \times 0.707 = 10.70 \text{ Ton.}$$

POR SER CONEXION

$$\frac{V_{RV}}{4/3} = 8 \text{ Ton.}$$

$$\text{NUMERO DE CONECTORES} = \frac{18.66}{8} = 2.33$$

$\therefore$  USAR 3 CONECTORES

## USANDO ESPIGAS PARA $P_1$ y $P_2$

POR SER CONEXION

$$V_u = \frac{4}{3} \times 12.79 = 17.05 \text{ Ton.}$$

POR EL CONCEPTO CORTANTE - FRICCION

$$A_{vf} = \frac{V_u}{f_r \mu f_y} \quad (z-1)$$

$$A_{vf} = \frac{17050}{0.8 \times 1 \times 4200} = 5.08 \text{ cm}^2$$

USANDO 3 ESPIGAS  $\neq$  5  $A_s = 5.97 \text{ cm}^2 > 5.08 \text{ cm}^2$

CHECANDO LA LONGITUD DE ANCLAJE:

$$L_d = 0.06 A_s f_y / \sqrt{f_c} \geq 0.006 d_b f_y \geq 30 \text{ cm.}$$

$$L_{d1} = 25.20 \text{ cm.}$$

$$L_{d2} = 40.64 \text{ cm.} \leftarrow \text{rige}$$

REVISANDO EL CORTANTE PARA ESPIGAS EN EL PRIMER NIVEL.

$$V_u = 1.1 \times \frac{4}{3} \times 70.74 = 103.75 \text{ Ton.}$$

$$\text{FLUJO DE CORTANTE} = \frac{103.75}{15.70} = 6.61 \text{ Ton/ml.}$$

PARA EL ANCHO DE UN PANEL DE 2.40 m.

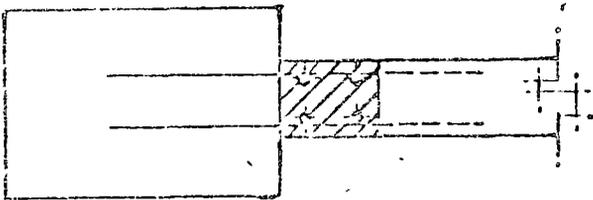
$$V_u = 6.61 \times 2.40 = 15.86 \text{ Ton.}$$

POR EL CONCEPTO CORTANTE - FRICCION

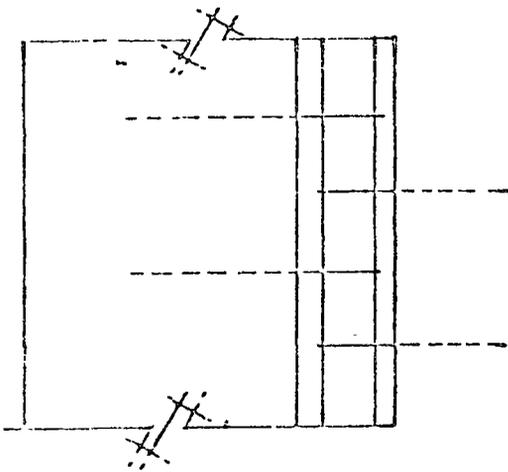
$$A_{vf} = \frac{15860}{0.8 \times 1 \times 4200} = 4.72 \text{ cm}^2$$

USAR 3 ESPIGAS  $\neq$  5 POR PANEL

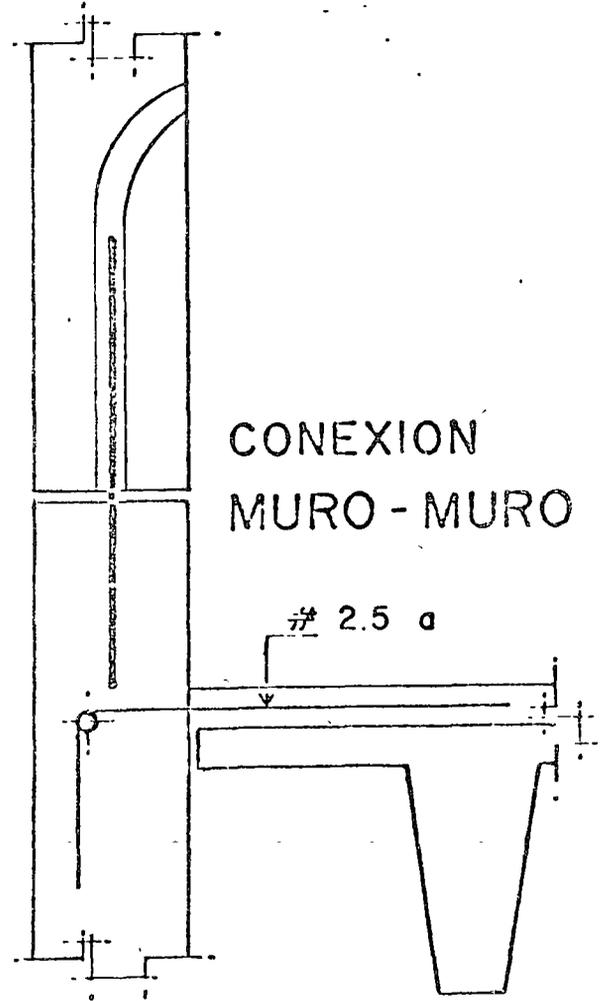
# CONEXION MURO COLUMNA



PLANTA



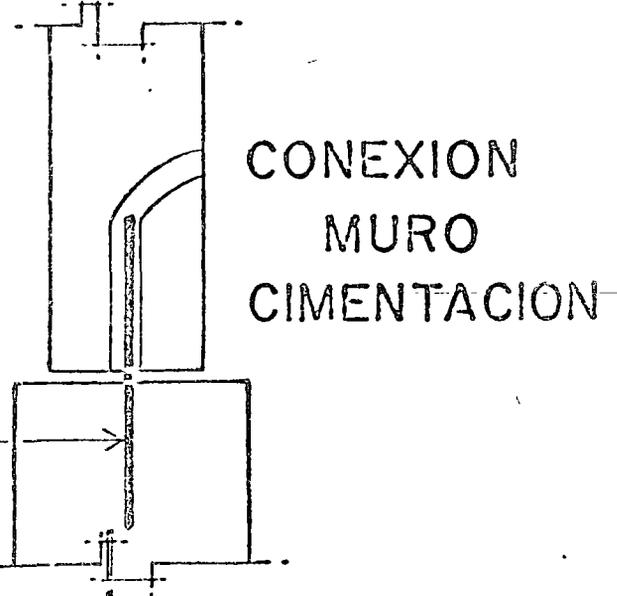
ELEVACION



CONEXION MURO - MURO

30 CM

# 2.5 a



CONEXION MURO CIMENTACION

# 5  
3 POR CADA  
PANEL



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRESFORZADO

CALCULO ESTATICO DE TRABES  
ISOSTATICAS A FLEXION

ING. JOEL PONSODA SELLES

ABRIL, 1978

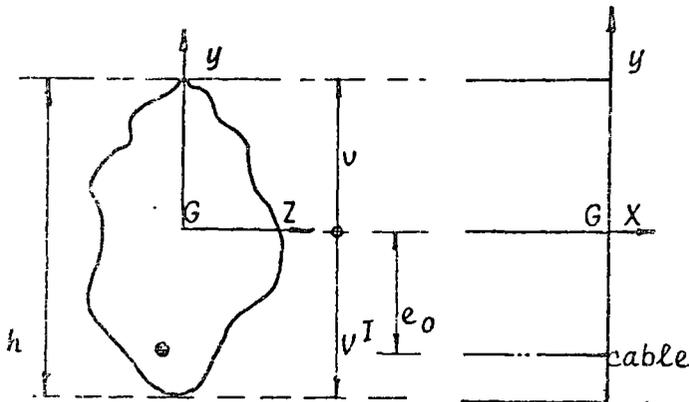
7. CALCULO ELASTICO DE TRABES  
ISOSTATICAS A FLEXION.

T E M A R I O

- 7.1.- Anotaciones.
- 7.2.- Solicitaciones:
  - .2.1.- Acción de un cable sobre una trabe.
  - .2.2.- Centro de presión.
  - .2.3.- Compensación de la carga permanente.
  - .2.4.- Límite de compensación de la carga permanente.
- 7.3.- Esfuerzos.
- 7.4.- Condiciones a respetar:
  - .4.1.- Condiciones a respetar.
  - .4.2.- Núcleo límite.
- 7.5.- Determinación del presfuerzo.
- 7.6.- Determinación de la sección mínima de concreto.
  - .6.1.- Regla general.
  - .6.2.- Sección sub-crítica.
  - .6.3.- Sección sobre-crítica.
- 7.7.- Ejemplo numérico.

- \* \* \* -

# 1 ANOTACIONES



Consideramos una trabe de línea media  $Ox$  que se supone recta ( la trabe es isostática ) el plano medio -  $Oxy$  presforzado y flexionado en ese plan.

Llamamos :

El claro de la trabe  $l$  .

El área de la sección  $S$  .

El centro de gravedad de la sección  $G$  ; éste punto está situado a una distancia  $v$  de la fibra superior, y  $v'$  de la fibra inferior.

$I$	=	Momento de inercia con respecto a $GZ$
$I/v$ $I/v'$	=	Módulos de inercia.
$i = \sqrt{\frac{I}{S}}$	=	Radio de giro.
$\rho$	=	Rendimiento de la sección $\frac{I}{Sv} + \frac{I}{Sv'}$
$h$	=	$\rho = \frac{i^2}{vv'} = \frac{I}{Svv'}$ Peralte de la sección. $\frac{I}{Sv} + \frac{I}{Sv'}$

En la sección estudiada, la trabe está sometida a los efectos de dos solicitaciones principales.

1.-) Las cargas exteriores que introducen en la sección considerada un momento  $M$  y una fuerza cortante  $T$  . El momento varía entre dos valores extremos  $M_m$  y  $M_M$  tales como :

$$M_m \leq M \leq M_M$$

$M_p$  Será el momento de carga muerta.

$M_s$  Será el momento de carga viva.

$M(p+s)$  Será el momento de carga muerta + carga viva.

En el caso de la trabe independiente tendremos:

$M_p = M_m$  ( momento mínimo ).

$M(p+s) = M_M$  ( momento máximo ).

Se considerará positivo, todo momento que comprima la fibra superior.

2.-) El presfuerzo ejercido por un conjunto de cables cuyo centro de gravedad se encuentra a una distancia  $e_0$  de la fibra media. La fuerza global es  $F$  y será considerada como positiva, ya que introduce una compresión en el concreto.

$e_0$  será considerada en valor algebraico positivamente hacia arriba.

En el esquema de la página anterior, el valor de  $e_0$  es por ende negativo. Además,  $v$  y  $v'$  se considerarán en valor absoluto.

En todo lo que sigue supondremos, el cable horizontal en la sección estudiada, despreciando así su ángulo  $\alpha$  con respecto a  $Gx$ , es decir igualando  $\cos \alpha$  a uno.

## 2 SOLICITACIONES

### 21 Acción de un cable sobre una trabe.

211 Consideramos una estructura sometida únicamente

a la acción del presfuerzo. Las cargas exteriores y en particular el peso propio y las cargas vivas se suponen nulas. Se llama éste estado - el estado de "Presfuerzo Puro".

En su conjunto ésta estructura está sometida - a un sistema de fuerzas idénticamente nulo. En efecto a una fuerza en el cable ( tensión- $F$  por ejemplo ) se opone directamente una fuerza en el concreto ( compresión +  $F$  por ejemplo ) y esto - en virtud de la Ley de Acción y Reacción.

NOTA:

De no ser así existiría una fuerza diferencial  $\Delta F$  que introduciría a la estructura de masa -  $m$  una aceleración:

$$\gamma = \frac{-\Delta F}{m}$$

El presfuerzo desarrolla por consecuencia en la estructura únicamente fuerzas internas y por - ende las reacciones de apoyo de la estructura - constituyen un sistema idénticamente nulo.

Desarrolla también en dicha estructura, deformaciones que son : un acortamiento debido a la - compresión del concreto, una curvatura debido - al efecto de excentricidad de la fuerza del - - presfuerzo.

Si la estructura es isostática se puede deformar con toda libertad. Las reacciones de apoyo introducidas por el presfuerzo puro, son todas nulas.

Si la estructura es hiperestática las deformaciones que la solicitarían si fuese isostática no satisfacen en la mayoría de los casos a las uniones sobre abundantes que la hacen hiperestática. Por consecuencia nacen en cada apoyo,

reacciones que llamaremos reacciones hiperestáticas de presfuerzo que no son nulas de manera a satisfacer la compatibilidad de deformaciones a derecha y a izquierda de un mismo apoyo.

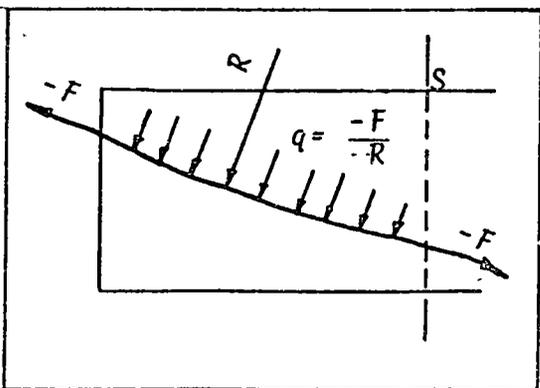
Por lo dicho anteriormente, éstas reacciones forman en su conjunto un sistema idénticamente nulo.

212 Estudio de la sección. Vamos a estudiar de manera separada en una sección S cualquiera, el equilibrio del cable y del concreto.

Cada uno de éstos elementos está sometido a fuerzas ejercidas por el elemento al contacto. Así mismo:

- El cable está en equilibrio bajo las reacciones ejercidas sobre él por el concreto.
- El concreto está en equilibrio bajo los efectos del cable y las reacciones de apoyo.

2121 Equilibrio del cable :



El concreto ejerce sobre el cable, una fuerza de tensión  $-F$  situado al nivel del anclaje y las fuerzas

$$q = \frac{-F}{R}$$

debidas a la curvatura ( $R$ =radio de curvatura del cable ).

El cable es asimilable a un hilo perfecto, es decir que su rigidez a flexión es nula. No puede equilibrar ni momento de flexión ni fuerza de compresión. El equilibrio estático de dicho cable exige por consecuencia que esté sometido en cada sección a una fuerza  $-F$  tangente a su trazo.

En particular si cortamos la trabe en una sección  $S$  el equilibrio del trozo de cable situado a izquierda impone que el punto de paso de la fuerza tensión que se ejerce sobre el cable coincida con el punto de paso del cable.

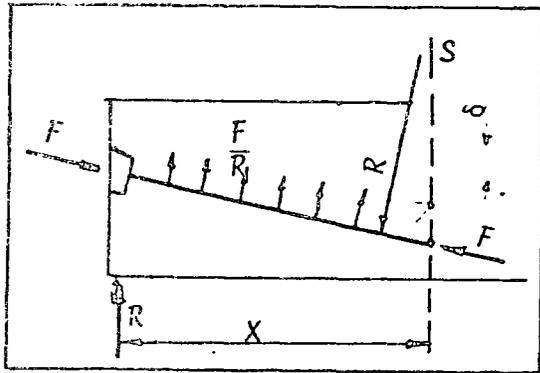
### 2122 Equilibrio del Concreto:

El pedazo de trabe situada a izquierda de la sección  $S$  está en equilibrio bajo:

- La acción del cable.
- La reacción de apoyo.
- Los efectos del cable en la sección  $S$  son directamente opuestos a los que acabamos de mencionar.

La fuerza de compresión pasa por el cable.

- El sistema de reacción de apoyo  $R$  introduce en la sección  $S$ , un momento flexionante  $Rx$  y el equilibrio del trozo a izquierda no puede ser asegurado que a la condición que la fuerza  $F$  de compresión se desplace de un valor  $\delta$  que satisfaga a la relación  $F \delta + Rx = 0$



### CONCLUSIONES

En el caso de una estructura hiperestática ( $R \neq 0$ ) el punto de paso de la fuerza de compresión en el concreto en una sección cualquiera es diferente del punto de paso del cable. En el caso de una estructura isostática  $R = 0$  este punto de paso coincide con el punto de paso del cable.

### 22 Centro de Presión.

Consideramos un caso de carga cualquiera constituí

do por un momento exterior  $M$  que puede variar entre dos valores extremos  $M_m$  y  $M_M$

La sección está además sometida a una fuerza de presfuerzo  $F$  con una excentricidad de  $e_0$  la solicitación global será entonces :

- Una fuerza normal de compresión  $F$
- Un momento flexionante en la sección  $Fe_0 + M$

Esto equivale a la acción única de la fuerza de presfuerzo  $F$  excéntrica de un valor :

$$e = \frac{Fe_0 + M}{F} = e_0 + \frac{M}{F}$$

El punto de paso " $e$ " de la fuerza  $F$  se llama centro de presión. Cuando la sección describe la trabe el centro de presión describe la línea de presión.

Anotaremos que bajo la sola acción del presfuerzo es decir bajo presfuerzo puro el valor de " $e$ " es igual a  $e_0$  punto de paso del cable de presfuerzo en la sección. Esto es cierto cuando la trabe es isostática conforme al párrafo anterior.

Anotaremos en fin que bajo el efecto de un momento exterior  $M$  el centro de presión se desplaza de  $\frac{M}{F}$  ( hacia arriba si  $M$  es positivo y hacia abajo si  $M$  es negativo ).

Vamos a ilustrar en el esquema siguiente las diferentes posiciones del centro de presión en los casos de carga que soliciten una trabe independiente sometida a momentos positivos.



también que esta no es la única condición a la cual debe satisfacer el presfuerzo.

- 23 Compensación de la carga permanente. La sollicitación resultante en la sección estudiada se descompone en una fuerza de compresión  $F$  y un momento  $-Fe_0 + M$ .

Se puede anular el efecto de un aumento de momento permanente  $\delta M$  desplazando únicamente el cable de un valor :

$$\delta e_0 \text{ tal como } \delta e_0 = -\frac{\delta M}{F}$$

Las sollicitaciones globales permanecen sin cambio. Tenemos siempre una fuerza de compresión centrada y un momento  $(F(e_0 + \delta e_0) + M + \delta M)$  o sea  $Fe_0 + M$

En consecuencia las cantidades de materiales acero de presfuerzo y concreto no cambiarían ; sólo cambiaría la excentricidad del cable que será  $e_0 + \delta e_0$  o sea  $e_0 - \frac{\delta M}{F}$

Tomando en cuenta ésto, porqué no admitir de dimensionar una sección ( concreto y acero ) sin tomar en cuenta las cargas permanentes. Imaginemos que el peso propio de la trabe sea nulo y por lo tanto dimensionamos la sección considerando únicamente los momentos de carga viva.

En contramos una fuerza  $F$  y una excentricidad  $e_{00}$ . La hipótesis hecha es obviamente falsa pues la trabe pesa; sea  $M_p$  el momento de cargas permanentes.

Se podrá conservar la misma sección de concreto y los mismos cables a condición de aumentar la excentricidad del cable de  $\delta e_0 = \frac{-M_p}{F}$  la excentricidad definitiva será entonces  $e_0 = e_{00} = \frac{-M_p}{F}$

Se ha compensado así la carga permanente y la trabe, cuesta lo mismo que pese o no.

De manera contraria a los otros procedimientos en los cuales toda carga cuesta lo mismo que sea permanente o variable, el concreto presforzado por su carácter activo debido a la posibilidad de dosificar las fuerzas permanentes, actuando sobre el término presfuerzo, sólo se dimensiona con la parte variable; es decir la carga viva. Esto es cierto teóricamente, prácticamente existen límites a ésta compensación.

- 24 Límite de compensación de la carga permanente. La práctica nos impone límites a ésta compensación de la carga permanente, debido al hecho de que el cable se debe quedar en el interior del concreto. Es necesario que la excentricidad sea como:

$$e_0 \leq (v' - d') \quad \text{caso de } M > 0$$

$$e_0 \leq (v - d) \quad \text{caso de } M < 0$$

Siendo  $d$  y  $d'$  la distancia mínima que se debe respetar entre el centro de gravedad de los cables y la fibra extrema más cercana. Es necesario que el desplazamiento :

$$\left( \frac{-M}{Fp} \right) \quad \left( \text{o sea } \delta e_0 \right)$$

Sea suficientemente pequeño para poder respetar la condición anterior; o también habiendo dimensionado la fuerza  $F$  considerando únicamente el momento de carga viva no se podrá resistir gr $\bar{a}$ tis al efecto de la carga permanente que en caso de que  $\frac{P}{S}$  sea inferior a un valor crítico.

Si no es el caso, solo quedará como solución el aumentar la fuerza  $F$  para poder reducir el desplazamiento  $\left( \frac{-M}{Fp} \right)$

En función de la posibilidad que se tenga de compensar la totalidad o parte de las cargas permanentes se podrán distinguir tres tipos de secciones :

- a) Sección sub-crítica : la carga permanente se puede compensar sin que el cable esté en excentricidad máxima.
- b) Sección sobre-crítica : la carga permanente no se puede compensar totalmente. La excentricidad del cable es máxima.
- c) Sección crítica : la carga permanente se puede compensar íntegramente y el cable tiene una excentricidad máxima.

La misma distinción se puede hacer en el claro. Debemos notar que en el caso de una trabe isostática cuyo claro es sobre-crítico todas las secciones no son sobre-críticas.

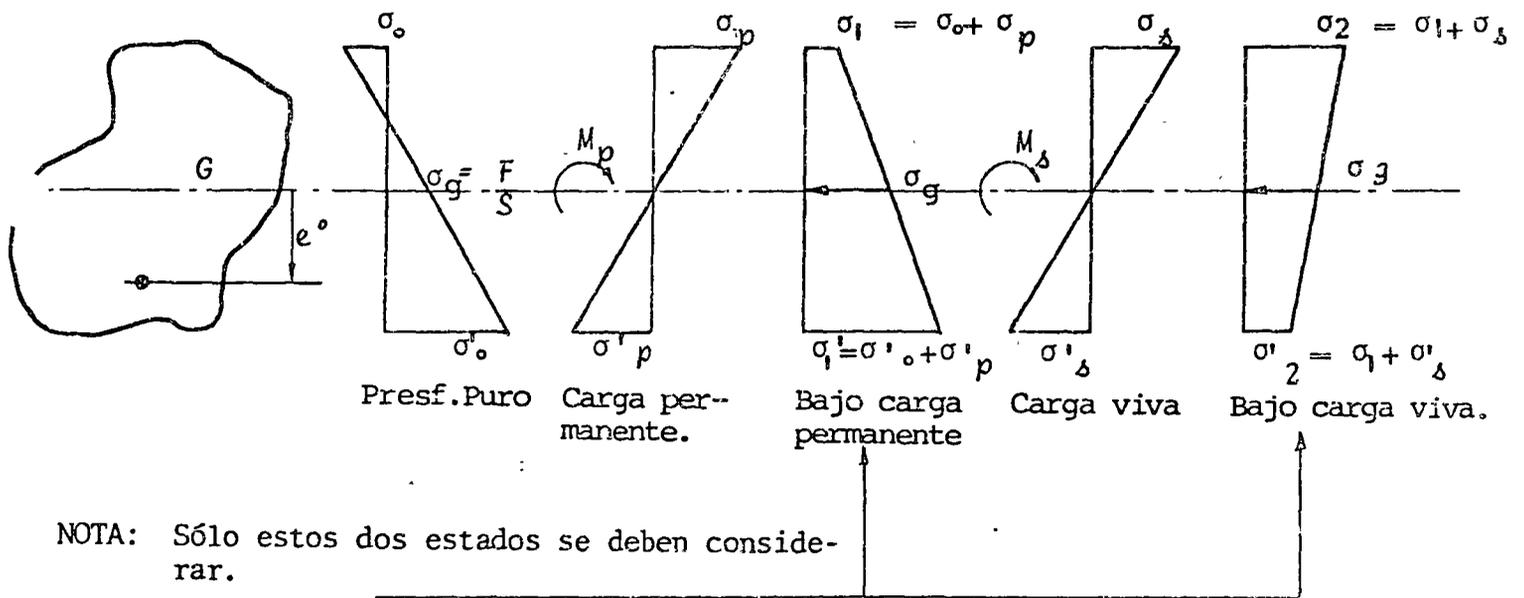
### 3 ESFUERZOS

Se considerará el concreto funcionando de manera elástica, son entonces los esfuerzos una función lineal de las sollicitaciones. Los esfuerzos son aditivos.

En el centro de gravedad, el esfuerzo  $\sigma_g$  es igual a

$\frac{F}{S}$  siendo los esfuerzos introducidos por los momentos, nulos en este punto.

Damos a continuación el aspecto de los diagramas generales de esfuerzos en el caso de una trabe independiente.



NOTA: Sólo estos dos estados se deben considerar.

Dimencionamiento.

Este capítulo trata de las condiciones a respetar y del dimencionamiento en el caso del presfuerzo total.

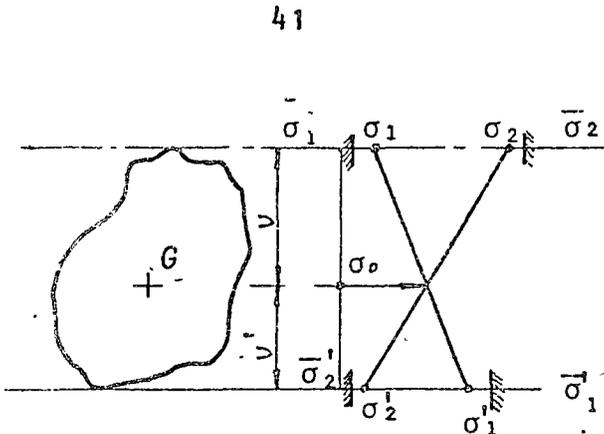
Condiciones a respetar.

Los cuatro esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_1', \sigma_2, \sigma_2'$  deben quedarse en el interior de un sector de seguridad que se ha fijado en función de los reglamentos.

Se debe tener en servicio

$$\begin{matrix} \sigma_1 > \bar{\sigma}_1 & \sigma_2' > \bar{\sigma}_2' \\ \sigma_2 < \bar{\sigma}_2 & \sigma_1' < \bar{\sigma}_1' \end{matrix}$$

Los esfuerzos indicados  $\bar{\sigma}$  son los esfuerzos permisibles.



Si es la excentricidad del centro de presión en un caso de carga determinado el esfuerzo  $\sigma$  sobre la fibra superior se escribe :

$$\sigma = \frac{F}{S} \left( 1 + \frac{e}{I} S_v \right) = \frac{F}{S} \left( 1 + \frac{e v}{i^2} \right) = \sigma_g \left( 1 + \frac{e v}{i^2} \right)$$

De la misma manera sobre la fibra inferior se escribe  $\sigma_1' = \sigma_g \left( 1 - \frac{e v}{i^2} \right)$  lo que conduce a las expresiones generalizadas del equilibrio de la sección siguiente :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &\leq \sigma = \sigma_g \left( 1 + \frac{e v}{i^2} \right) \leq \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_2' &\leq \sigma_1' = \sigma_g \left( 1 - \frac{e v}{i^2} \right) \leq \bar{\sigma}_1' \end{aligned} \quad ( I )$$

Núcleo Límite.

Se define el núcleo límite como la zona en el interior del cual se debe encontrar el centro de presión o sea el valor de  $e$  para satisfacer a las condiciones de equilibrio.

De las inigualdades (I) escritas anteriormente y aislando el término 'e' se pueden determinar los cuatro límites del núcleo.

$$a) \quad \sigma_g \left( 1 + \frac{e v}{i^2} \right) \geq \bar{\sigma}_1 \quad \frac{e v}{i^2} \geq \bar{\sigma}_1 - \sigma_g$$

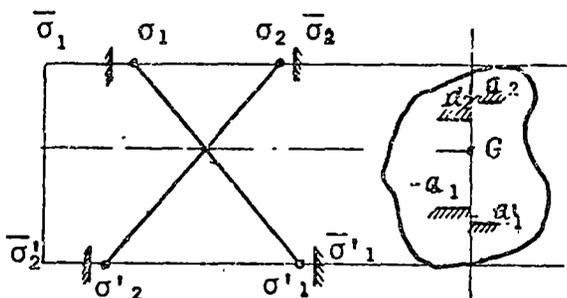
$$\begin{aligned} \text{o sea} \quad e &\geq (\bar{\sigma}_1 - \sigma_g) \frac{i^2}{v} \\ \text{o} \quad e &\geq \sigma_g \left( \frac{\bar{\sigma}_1 - 1}{\sigma_g} \right) \frac{i^2}{v} \\ e &\geq - \frac{i^2}{v} \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_g} \right) = - a_1 \end{aligned}$$

b) De la misma manera se obtendrán los 3 otros límites. La expresión generalizada se escribe:

$$(1) \quad -a_1 = -\frac{i^2}{v} \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_g} \right) \quad \frac{i^2}{v} \left( \frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma_g} - 1 \right) = a_2$$

$$(2) \quad -a'_1 = -\frac{i^2}{v'} \left( \frac{\bar{\sigma}'_1}{\sigma_g} - 1 \right) \quad \frac{i^2}{v'} \left( 1 - \frac{\sigma'_2}{\sigma_g} \right) = a'_2$$

Se obtienen las siguientes condiciones :



Se obtienen las siguientes condiciones :

- (1)  $e > -a_1$  para obtener  $\sigma_1 > \frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_g}$
- (2)  $e > -a'_1$  para obtener  $\sigma'_1 < \frac{\bar{\sigma}'_1}{\sigma_g}$
- (3)  $e < a_2$  para obtener  $\sigma_2 < \frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma_g}$
- (4)  $e < a'_2$  para obtener  $\sigma'_2 > \frac{\bar{\sigma}'_2}{\sigma_g}$

Las condiciones 1 y 4 son las de esfuerzos minimales (condiciones de mínimo de presfuerzo).

Las condiciones 2 y 3 son las condiciones de esfuerzos máximos (condiciones de dimensionamiento del concreto).

Si llamamos "e" al más pequeño de los valores  $a_2$  y  $a'_2$  y "e'" el más pequeño de los valores  $a_1$  y  $a'_1$  el centro de presión debe satisfacer a la igualdad siguiente :

$$-e' \leq e \leq e$$

Para que la estabilidad de la sección en todos los casos sea satisfecha.

Caso particular importante del núcleo central. En el caso de que los esfuerzos minimales permisibles sean nulos  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0$  se obtienen los valores siguientes para los límites del núcleo límite; (el núcleo límite cuando los esfuerzos considerados son nulos toma el nombre de núcleo central).

$$(1) \quad -a_1 = -\frac{i^2}{v} = -\frac{I}{Sv} \quad \frac{i^2}{v} \left( \frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma_g} - 1 \right) = a_2 \quad (3)$$

$$(2) \quad -a'_1 = \frac{i^2}{v'} \left( \frac{\bar{\sigma}'_1}{\sigma_g} - 1 \right) \quad \frac{i^2}{v'} = \frac{I}{Sv'} = a'_2 \quad (4)$$

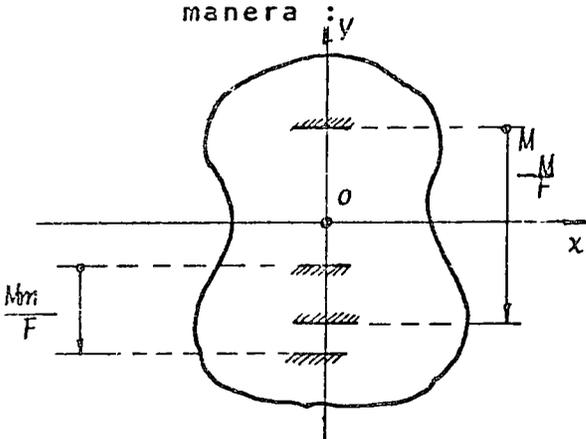
Cuando la sección considerada describe la trabe el conjunto de los núcleos límites de todas las secciones constituye el huso límite.

### 5 DETERMINACION DEL PRESFUERZO MINIMO

Las posiciones extremas del centro de presión bajo los dos momentos extremos  $M_m$  y  $M_M$  se obtienen llevando a partir del cable los vectores de intensidad  $\frac{M_m}{F}$  y  $\frac{M_M}{F}$  hacia arriba ( si  $M > 0$  ) ( conferir párrafo 22).

Los puntos obtenidos se deben quedar en el interior del núcleo límite para que los esfuerzos sean permisibles.

Al inverso para satisfacer estas condiciones el cable se debe quedar en el interior de una zona llamada núcleo de paso que se obtiene de la siguiente manera



A partir del límite superior c translación de  $-\frac{M_M}{F}$

A partir del límite inferior c' translación de  $-\frac{M_m}{F}$

Cuando  $M > 0$ . Por lo tanto la excentricidad  $e_0$  del cable debe ser tal como

$$e_1 = -c' - \frac{M_m}{F} \leq e_0 \leq e_2 = c - \frac{M_M}{F}$$

El valor mínimo de la fuerza de presfuerzo - se obtiene cuando se puede alcanzar los esfuerzos mínimos permisibles  $\bar{\sigma}_1$  y  $\bar{\sigma}_2$  en los casos extremos de carga.

Entonces :  $c = a'_2$

y  $c' = a_1$

si  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0$

$$c = \frac{I}{SV}$$

$$c' = \frac{I}{SV'}$$

$$y \quad c + c' = \frac{I}{SV} + \frac{I}{SV'} = \rho \quad h$$

La inigualdad precedente se trans--  
forma en igualdad

$$e_1 = -c' - \frac{M_m}{F} = e_0 = e_2 = c - \frac{M_M}{F}$$

El núcleo de paso se cierra y se vuelve en un punto de excentricidad  $e_1 = e_2 = e_0$ . Esto significa que se alcanzan los esfuerzos permisibles en esta sección.

El valor mínimo de la fuerza de presfuerzo es entonces :

$$F = \frac{M_M - M_m}{c + c'}$$

$$o \quad F = \frac{\Delta M}{c + c'}$$

$$Si \quad \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0$$

$$F = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

la excentricidad impuesta al cable

$$e_0 = -c' - \frac{M_m}{F} = c - \frac{M_M}{F}$$

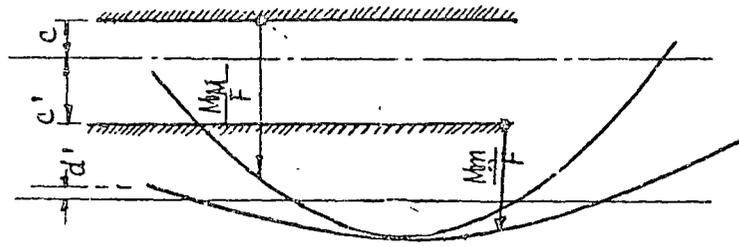
Este valor es el valor mínimo del presfuerzo, pero se supone en este cálculo que la carga permanente se ha compensado enteramente; en efecto en ningún momento se ha escrito una condición que limite el valor de la excentricidad  $e_0$  en función de la geometría de la sección. Cuando el valor  $e_0$  obtenido aplicando el cálculo precedente, es tal que el cable sale de la sección, se deberá aumentar la fuerza de presfuerzo como se indica a continuación:

Consideramos un ejemplo con  $M > 0$ ; se debe aumentar  $F$  de manera a reducir el desplazamiento  $M_M$  y hacer pasar así la línea superior del huso de paso arriba de la línea de excentricidad máxima. El valor mínimo de  $F$  se obtiene cuando estas 2 líneas son tangentes o sea :

$$c - \frac{M_M}{F} = -(v' - d') \text{ lo que da } F = \frac{M_M}{v' - d' + c}$$

$$si \quad \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0 \quad F = \frac{M_M}{\frac{I'}{Sv'} - (v' + d')} = \frac{M_M}{Z}$$

$$y \quad e_0 = -(v' - d')$$



CONCLUSION PRACTICA

En práctica no se debe checar si el valor  $e_0$  obtenido a partir del primer dimensionamiento de la fuerza es compatible con la geometría de la sección.

Solo basta en aplicar la regla siguiente:

En toda sección el valor mínimo del presfuerzo debe ser igual al más grande de los dos valores siguientes :

$$F_1 = \frac{\Delta M}{c+c'} \quad y \quad F_2 = \frac{M_M}{v'-d'+c}$$

6 DETERMINACION DE LA SECCION MINIMA DE CONCRETÓ

61

Regla General

La sección de concreto es mínima - cuando su compresión alcanza los valores permisibles en los dos casos de carga extremos o sea  $\bar{\sigma}_1$  y  $\bar{\sigma}_2$

En este caso  $c = a_2$

y  $c' = a_1$

En el caso general cuatro expresiones rigen la estabilidad de la sección. Estas expresiones son :

$$\sigma_1 = (M_m + Fe_0) \left( \frac{v}{I} + \frac{F}{S} \right) \geq \bar{\sigma}_1$$

$$\sigma_1' = - (M_m + Fe_0) \left( \frac{v'}{I} + \frac{F}{S} \right) \leq \bar{\sigma}_1'$$

$$\sigma_2 = (M_M + Fe_0) \left( \frac{v}{I} + \frac{F}{S} \right) \leq \bar{\sigma}_2$$

$$\sigma_2' = - (M_M + Fe_0) \left( \frac{v'}{I} + \frac{F}{S} \right) \geq \bar{\sigma}_2'$$

Las incógnitas son :

a) Presfuerzo  $F$  y  $e_0$

b) Concreto  $\frac{I}{v}$   $\frac{I}{v'}$

Por ende el problema tiene siempre - una solución matemática que satisfaga a las cuatro expresiones más arriba, convertidas en igualdades.

Significa esto que matemáticamente - se pueden alcanzar los cuatro valores permisibles de los esfuerzos.

62

La sección es sub-crítica.

Por hipótesis el valor de  $e_0$  es compatible con la geometría de la sección ( $e_0 < v!d'$ ).

La solución del sistema es

621

Para el presfuerzo como ya lo vimos

$$F = \frac{M_M - M_m}{c + c'} = \frac{\Delta M}{c + c'}$$

$$-e_0 = c - \frac{M_M}{F} = -c' - \frac{M_m}{F}$$

622

Para el concreto:

$M_m$  a  $M_M$  los esfuerzos pasan:

- en la fibra superior de  $\bar{\sigma}_1$  a  $\bar{\sigma}_2$

- en la fibra inferior de  $\bar{\sigma}'_1$  a  $\bar{\sigma}'_2$

Por lo que se puede escribir

$$\frac{I}{v} = \frac{M_M - M_m}{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}}$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{M_M - M_m}{\bar{\sigma}'_1 - \bar{\sigma}'_2} = \frac{\Delta M}{\Delta \bar{\sigma}'}$$

con  $c = a_2 = a'_2 = \rho v' \left( \frac{\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}'_2 v} h - 1 \right) = \rho v \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}'_2}{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}'_2 v} h \right)$

$$c' = a_1 = a'_1 = -\rho v' \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1 v' + \bar{\sigma}'_1 v} h \right) = -\rho v \left( \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_1 v' + \bar{\sigma}'_1 v} h - 1 \right)$$

y que  $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}'_1$   $\bar{\sigma}$  En el caso de que  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}'_2 = 0$ .  
se obtiene:

$$F = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

$$e_0 = \frac{I}{\Delta v'} - \frac{M_M}{F} = -\frac{I}{\Delta v} - \frac{M_m}{F}$$

$$\frac{I}{v} = \frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\bar{\sigma}}$$

con  $c = a_2 = a'_2 = \frac{I}{\Delta v'}$

$$c' = a_1 = a'_1 = \frac{-I}{\Delta v}$$

63

La sección es sobre-crítica.

Se razona con momentos  $M$  positivos.

En este caso  $e_0$  no es una incognita :

$$e_0 = - ( v' - d' )$$

por lo que el sistema anterior de expresiones conduce a tres igualdades y una inigualdad.

El esfuerzo permisible que no se puede alcanzar en éste caso es  $\bar{\sigma}_1$

En efecto se ha tenido que aumentar  $F$  y disminuir  $e_0$  por lo que  $\sigma_1$  aumenta con respecto a la solución de la sección sub-crítica.

Se pueden alcanzar los esfuerzos  $\bar{\sigma}_2$   $\bar{\sigma}'_2$  y  $\bar{\sigma}'_1$  por lo que la solución del sistema es :

631

Para el presfuerzo:

$$F = \frac{M_M}{c + v' - d'} = \frac{M_M}{Z}$$

$$e_0 = - ( v' - d' )$$

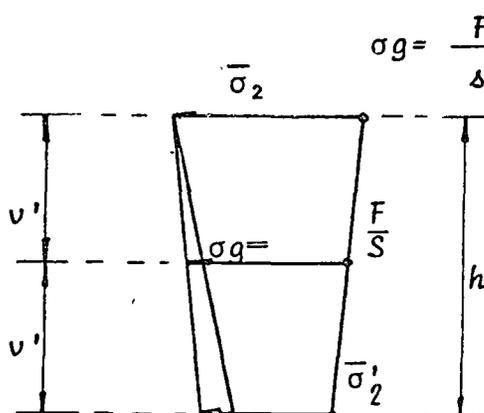
632

Para el concreto :

$$\frac{I}{v'} = \frac{M_M - M_m}{\sigma_1 - \sigma'_2} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma'}$$

$$\frac{I}{v} = F \frac{\rho h}{\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}'_2 \frac{v'}{v}}$$

: Del diagrama de esfuerzos bajo carga máxima se escribe :



$$\sigma_g = \frac{F}{s} = \frac{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}'_2 v}{h} =$$

$$S = \frac{I}{\rho v v'}$$

$$\frac{F}{I} \rho v v' = \frac{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}'_2 v}{h}$$

$$\frac{v}{I} = \frac{1}{F} \left( \frac{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}'_2 v}{h} - \frac{I}{\rho v'} \right)$$

$$\frac{I}{v} = F \frac{\rho h}{\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}'_2} \frac{v'}{v}$$

$$e = a_2 = a'_2 = \rho v' \left( \frac{\bar{\sigma}_2 h}{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}'_2 v} - 1 \right) = \rho v \left( 1 - \frac{\bar{\sigma}'_2 h}{\bar{\sigma}_2 v' + \bar{\sigma}'_2 v} \right)$$

$$e' = a_1 = - \rho v \left( \frac{\bar{\sigma}_1 h}{\bar{\sigma}_1 v' + \bar{\sigma}'_1 v} - 1 \right)$$

$$\boxed{\bar{\sigma}'_2 = 0}$$

$$F = \frac{M_M}{\frac{I}{Sv} + v' - d'} = \frac{M_M}{Z}$$

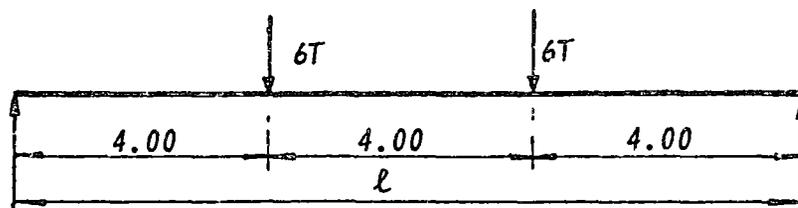
$$e_0 = - (v' - d')$$

$$\frac{I}{v'} = \frac{\Delta M}{\bar{\sigma}}$$

$$\frac{I}{v} = F \frac{\rho h}{\bar{\sigma}}$$

Flexión de traves isostáticas

Ejemplo numérico



Sea una trabe rectangular sobre dos apoyos de :

Claro  $l = 12 \text{ m.}$   
 Ancho  $b = 1 \text{ m.}$

Los dos tercios del claro :

- La resistencia permisible del concreto es de :  $120 \text{ kg/cm}^2$
- La resistencia permisible a tensión : 0

Los valores que se deben calcular son los siguientes :

a) Para el concreto  
 Peralte ( incógnitas de cálculo  $\frac{i}{v}$  e  $\frac{i}{v'}$  )

b) Para el presfuerzo  
 La excentricidad  $e_0$  del cable  
 La fuerza  $F$  necesaria.

1 Cálculo del momento de carga viva.

$M = M_S = 6 \times 4 = 24 \text{ Tm.}$

- Se supone la sección sub-crítica por lo que:

$\frac{i}{v} = \frac{i}{v'} = M_S = \frac{24}{1200} = 0.02 \text{ m}^3.$

- Se deduce el peralte de la trabe de la relación:

$\frac{i}{v} = \frac{bh^2}{6}$  lo que da  $h = .346 \text{ m.}$

2 Cálculo del presfuerzo

$$F_1 = \frac{M_S}{bh} = \frac{24}{1/3 \times .346} \text{ o sea } F_1 = 207 \text{ t.}$$

- Se checa que efectivamente la sección es subcrítica; calculando  $F_2$

$$F_2 = \frac{M_M}{Z}$$

$M_M$  = momento de peso propio + momento de carga viva.

El momento de carga viva es = 24 Tm.

El momento de peso propio =  $\frac{.346 \times 1 \times 2.5 \times 12^2}{8} = 15 \text{ Tm.}$

Por lo que  $M_M = 39 \text{ Tm.}$

$$Z = \frac{I}{S_{v'}} + v' - d' = \frac{.346}{6} + \frac{.346}{2} - .04 = .19 \text{ m.} \quad \text{por lo que}$$

$$F_2 = \frac{39}{.19} = 205 \text{ t.}$$

$F_2 < F_1$  = La sección es sub-crítica pero ya al límite.

3 Cálculo de excentricidad

$$e_0 = \frac{i}{S_{v'}} - \frac{M_M}{F} \text{ o sea } \frac{.346}{6} - \frac{39}{207} = -.13 \text{ m.}$$

- Se puede checar calculando  $e_0$  a partir de la segunda fórmula; es decir:

$$\frac{I}{S_v} - \frac{M_m}{F} \text{ es decir } \frac{.346}{6} - \frac{15}{207} = .13$$

- Que los dos resultados son idénticos y que el núcleo de paso se limita a un punto.

4 Cálculo de los esfuerzos

1) Peso propio  $\sigma_p = \frac{15}{.2} = 75 \text{ kg/cm}^2$   
 $\sigma'_p = -75 \text{ kg/cm}^2$

2) Presfuerzo

$$\sigma_o = \frac{F}{S} - \frac{F e_o}{i/v} = \frac{207}{3.46} - \frac{207 \times .13}{.2} = -75 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_o = \frac{F}{S} + \frac{F e_o}{i/v'} = \frac{207}{3.46} + \frac{207 \times .13}{.2} = 195 \text{ kg/cm.}$$

- Bajo carga permanente los esfuerzos son entonces ( en la fibra superior )

$$\sigma_1 = 75 - 75 = 0$$

$$\sigma'_1 = -75 + 195 = 120 \text{ kg/cm}^2. (\text{valores permisibles}).$$

- Carga Viva

$$\sigma_S = \frac{24}{.2} = 120 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_S = \frac{-24}{.2} = -120 \text{ kg/cm}^2$$

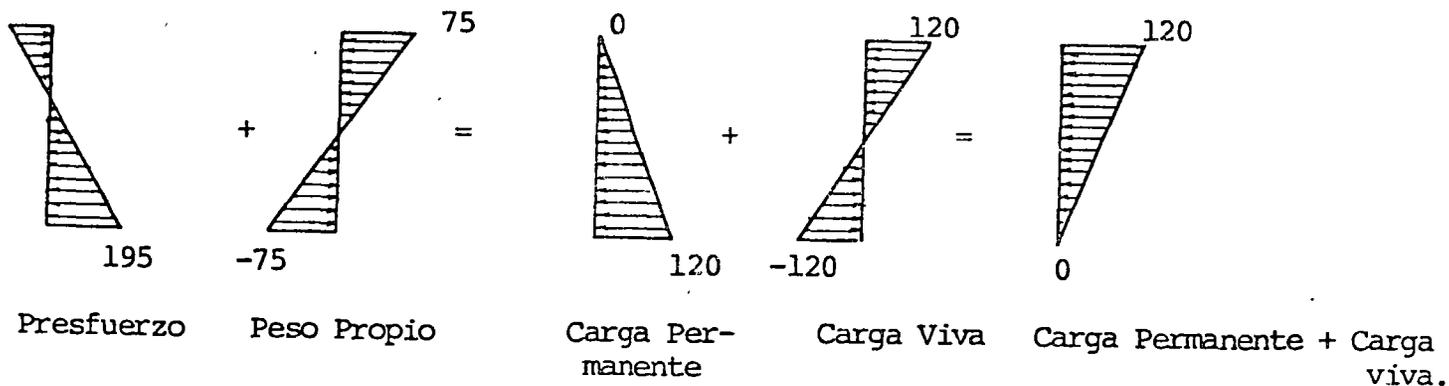
- Los esfuerzos bajo carga viva son entonces:

$$\sigma_2 = 0 + 120 = 120 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma'_2 = 120 - 120 = 0 (\text{esfuerzos permisibles}).$$

El diagrama de los esfuerzos se dá a continuación.

-75



10.- DISPOSICIONES CONSTRUCTIVAS.

1. Diferentes tipos de secciones usuales, ventajas e inconvenientes.
  
2. Consideraciones referentes al trazo de los cables y espesores mínimos de concreto necesario.

10-1-1 Criterios de formas de secciones transversales

10-1-11 Resistencia a flexión y cortante

La resistencia a flexión ( $\frac{I}{V_s}$  y  $\frac{I}{v_i}$ ) debe ser lo más grande con la cantidad mínima (área) y peralte minimum (h). Es decir que el rendimiento "  $\rho$  " debe ser lo más alto posible; entonces, por eso, concentrar el concreto en 2 patines opuestos.

El valor maximum de  $\rho = \frac{I}{S V_s V_i}$  ( $= 1$ ) es obtenido concentrando el concreto en 2 patines muy finos ligados entre ellos por una alma muy fina.

Pero se debe ligar los 2 patines por una alma que impide el desplazamiento relativo. Esta alma debe resistir entonces al esfuerzo de corte longitudinal y por consecuencia al esfuerzo de corte transversal o sea Cortante.

Lo que aclara la forma de vigas en I o cajones, constituidos por 2 patines ( que dan la mayor parte de resistencia a flexión) ligados por una o más almas (que aseguran la resistencia al cortante).

10-1-111 Construcción de las almas

- a) Para obtener el mejor rendimiento "  $\rho$  " entonces la más grande resistencia a flexión, se debe reducir al maximum el ancho de las almas.

b) La solución ideal por eso es de constituir las vigas en forma de cercha, pero es una solución costosa por su complicación. Es utilizada en casos particulares como:

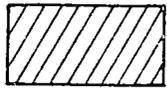
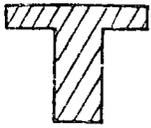
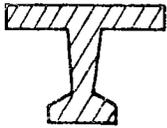
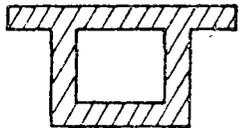
- vigas ligeras de edificios con peralte grande (vigas de techo)
- vigas de grande claro por las cuales se debe disminuir al máximo el peso propio.

c) Las almas son, en la práctica, llenas con espesor mínima "a" fijada por:

- condiciones de resistencia al cortante
- y condiciones prácticas de colado

10-1-112 Espesor mínima (ver §22.23 Disposición de cables en almas)  
de las almas ( fig. 8 bis)

10-1-113 Orden de magnitud del rendimiento de secciones

	Rectangular	T	I	Cajón Fino
Sección				
$\rho$	1 / 3	$\approx 0,4$	$\approx 0,5$ a $0,55$	$\approx 0,6$

10-1-12 Resistencia a la torsión

10-1-121 Características a torsión de secciones

a) Secciones rectangulares b x h con h > b

- Momento de inercia a torsión:  $J = \lambda b^3 x h$
- Esfuerzo de corte maximum, debido a un cople  $M_t$ , en el medio del mas grande lado h  $\sigma = \frac{M_t}{\lambda' b^2 x h}$

$h/b$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10.0	$\infty$
$\lambda$	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333
$\lambda'$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333

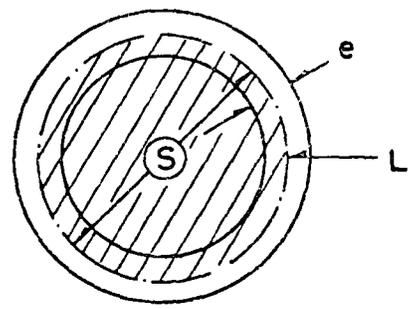
b) Secciones abiertas, compuestas de rectángulos finos

$$J = \sum_i \frac{h_i x (b_i)^3}{3} \text{ con } h_i \gg b_i$$

c) Losa  $J = \frac{h (b)^3}{3}$

d) Cajón cerrado, cuyo espesor de pared es fina, y cuya fibra media, de longitud L, cierra la sección S

$$J = \frac{4 S}{\int \frac{dL}{e}}$$



e) Módulo de elasticidad transversal :  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$

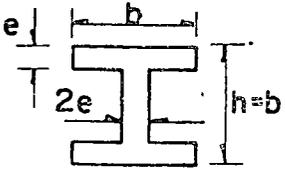
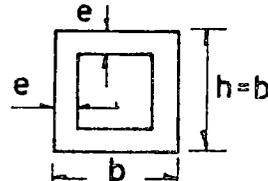
coeficiente de Poisson comprendido entre 0,15 y 0,25

10-1-122 Consecuencias

- a) Para obtener una buena resistencia a torsión se debe emplear secciones transversales cerradas (secciones llenas o cajones)

Ejemplo: Sean 2 secciones de mismos peraltes y ancho y misma área diferentes por la forma:

suma en I - la otra en cajón

S e c c i ó n	Inercia de Torsión	Esfuerzo de Corte
<p>I</p> 	$J = \frac{10}{3} b e^3$	$\tau = 0,6 \frac{M t}{b e^2}$
<p>Cajón con Paredes Finas</p> 	$J' = e b^3$	$\tau' = 0,5 \frac{M t}{e b^2}$

Como por ejemplo  $e = \frac{b}{10}$   $J' = 30 J$   $\tau' = \frac{\tau}{6}$

La sección en cajón gira 30 veces menor, y tiene 6 veces menor de esfuerzo de corte.

- b) Para las vigas que deben soportar solicitaciones de torsión importantes (vigas curvas, o desviadas), es conveniente de darlas secciones cerradas. Pero se debe anotar que dando más rigidez a torsión a la viga, se aumenta la sollicitación a torsión.

10-1-2 Secciones rectangulares

10-1-21 Losas llenas

La sección rectangular es la más económica respecto a la cimbra y el colado. Permite además de tener el peralte minimum. Tiene una gran rigidez a torsión y una gran resistencia al cortante. Se necesita pocos estribos.

La losa llena, robusta y fácil de ejecución conviene muy bien para puentes chicos cuyo claro varía entre 15 y 25 m, con peralte

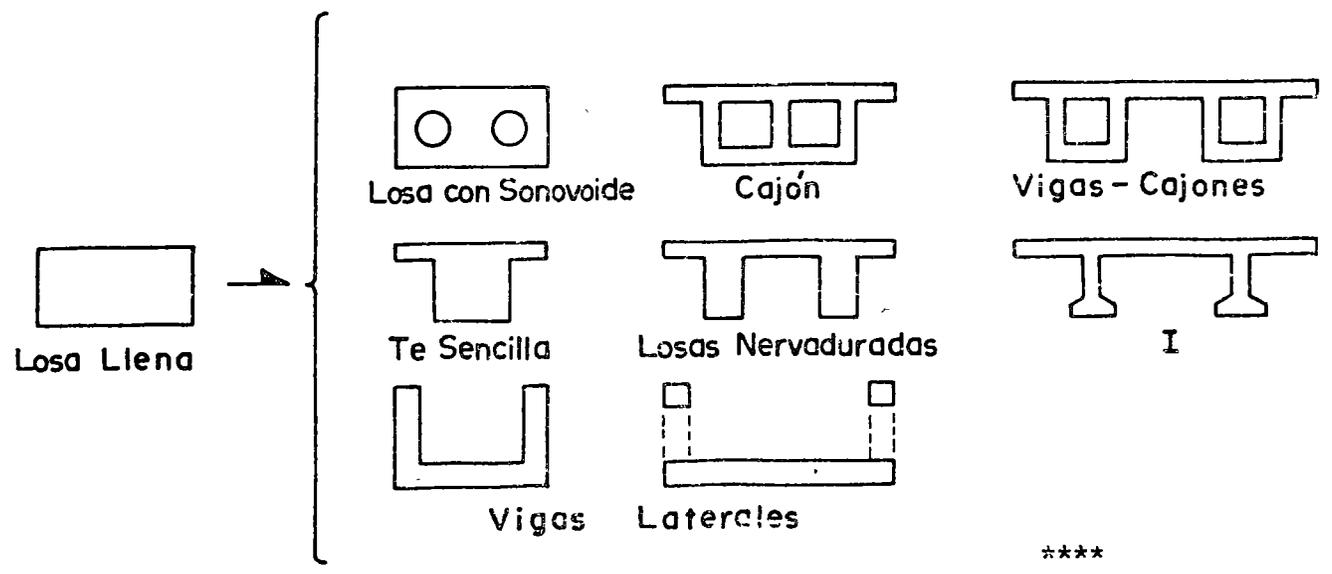
$$h \approx \frac{l}{30}$$

10-1-22 Losas aligeradas

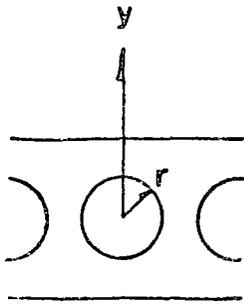
La sección rectangular llena es demasiado pesada para claros grandes (sobrepasando el "claro crítico ": su peso propio cuesta como la carga de servicio). Además su rendimiento es muy bajo.

Es interesante de quitar concreto para elegir la sección sea:

- en el centro: losa con alveoles (sonovoides); cajones
- abajo de la sección: losa nervadurada
- en la parte superior de la sección y en la zona central con dos vigas laterales



10-1-23 Losas con sonovoides



Quitar el concreto en el centro de la sección permite aligerar sin prácticamente reducir su resistencia: el concreto quitado tiene brazos de palanca a flexión (y) y en torsión (r) muy bajos.

Teóricamente esa solución parece perfecta. Pero esas alveolas son muy costosas:

- en cimbra interior perdida, que debe ser:

- suficientemente rígida para no deformarse
- sólidamente fijada para no hundir bajo el peso del concreto
- sólidamente fijada para no flotar bajo la vibración del concreto
- impermeabilización para no absorber la lechada

- en armado pasivo:

- en el surtido transversal, trabaja como viga Vireendel, para resistir a las flexiones " secundarias" importantes. Se debe además colocar estribos entre las alveolas, y tirantes sobre ellas.

Además el colado es delicado bajo las alveolas. Las chimeneas deben ser suficientemente amplias para facilitar la vibración.

En conclusión, esa solución debe ser reservada a casos especiales:

como claros grandes con peralte pequeño (sea para puentes de ca-

rretera	20	< l	<	35 m
con	25	< $\frac{h}{h}$	<	35 m

10-1-3 Vigas -Cajones

10-1-31 Empleo de vigas - cajones

- cuando las vigas son sometidas a torsión
- vigas paralelas deben tener patines inferior importantes.  
En este caso mejor vale distribuir en losas inferiores entre vigas
- vigas con peralte limitado (para puentes :  $h < \frac{l}{25}$ )
- secciones sometidas a momentos negativos importantes:

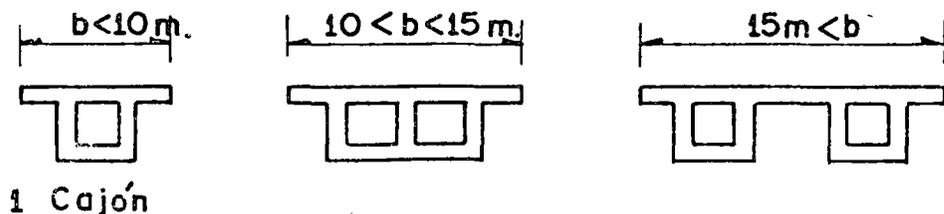
Ejemplos:

- zonas de apoyos intermedios de tramos continuos ( o cantilever )
- puentes en doble voladizo: en construcción todo el peso propio se toma en voladizo.

#### 10-1-32 Tipos de secciones transversales

Cuando se reduce el número, n, de las almas (de espesor a) n x a disminuye; en este caso el claro transversal de la losa superior aumenta y entonces aumentan también su espesor y armado.

El optimum en el caso de los puentes de carretera es:



#### 10-1-33 Determinación de la sección

- losa superior - por flexión transversal
- losa inferior - por compresión (espesor). En caso que contiene cables  $e = 3 \emptyset$ ,  $\emptyset$  diámetro del ducto del cable; e espesor de la losa.

- Almas. Espesor determinada por:
  - condiciones de colado
  - resistencia al cortante
  - resistencia bajo el anclaje de presfuerzo
  
- se inclinan las almas algunas veces - por estética
  - para aumentar el espesor de la losa inferior reduciendo el claro de esa misma. Pero el colado es más complicado; se debe prever ductos para los vibradores.

10-1-4 Ejemplos de puentes colados en lugar sobre obra falsa

En este caso, el precio de la cimbra es caro. Se debe adoptar formas sencillas ( lo que facilita el colado)

- para claros limitados (inferiores a 40 m en claros continuos) y relación de peralte a claro del orden  $h > \frac{l}{25}$ , se adopta la solución de losa nervadurada con nervaduras<sup>25</sup> rectangulares o trapezoidales.
- para claros más importantes, o peraltes bajos disponibles, se adopta la solución de viga - cajón.

10-1-5 Ejemplos de puentes con traves prefabricadas

Numerosos puentes son constituidos por claros isostáticos de 20 a 50 m. todos idénticos, a base de traves prefabricadas.

El uso del equipo necesario para la colocación de las traves es económico que si hay muchas traves ( mimumum 15 traves).

Según las posibilidades del equipo:

- se puede prefabricar elementos muy pesados (claros enteros)
- vigas aisladas
- partes de vigas (más fácil de transportar)

### Forma

El molde sirve para colar muchas trabes; entonces es ventajoso de complicar la forma para ahorrar concreto.

Como se vibra por el exterior su alma puede ser fina.

Se adopta, en general, una forma en I.

El ahorro de concreto disminuye el peso de la viga, facilita la colocación, y disminuye también el número de cables.

### Dimensiones

- Peralte. El valor económico es cerca de  $1/16$  del claro. Puede bajar a  $\frac{\ell}{20}$ . Después aumentan los cables rápidamente.
- Distancias entre vigas (d) para vigas prefabricadas d puede variar entre 2.75 m y 4 m. (Para puentes colados en lugar d entre 4 y 6 m. el optimum)
- Ancho del patín superior (b) determinado por condiciones de colocación  $b \approx 0,6 h$  o  $\frac{\ell}{50}$  (peligro de pendeo a la colocación).
- Area del patín inferior - debe ser suficientemente grande para
  - contener todos los cables
  - tener esfuerzos de compresión admisibles durante la construcción

## 2. CONDICIONES REFERENTES AL TRAZO DE LOS CABLES.

### 2 1.-) GENERALIDADES :



fig. 1

a) Para diseñar una trabe se empieza por determinar las secciones más solicitadas en flexión.

Se concentran los cables en las partes sometidas a tensiones bajo el efecto de las cargas exteriores o sea para una trabe continua: arriba sobre los apoyos intermedios; abajo en el centro del claro.

Fuera de estas secciones se debe determinar un trazo de cables que siga las condiciones de cargas exteriores.

El producto  $F_{e0}$ , debiendo ser proporcional a las solicitaciones, se pueden pasar los cables en secciones particulares, sacándolos en las partes superiores o inferiores de las vigas.

b.-) Esta disposición ayuda a la resistencia al cortante.

c.-) Pero, son las condiciones prácticas que determinan el diseño.

### 2 2.-) CONDICIONES PRACTICAS A RESPETAR :

22 1.-) Se debe estudiar la disposición de los cables en sección transversal en las zonas.

- más solicitadas en flexión.
- de extremo donde se anclan los cables.

Posteriormente, se estudiará el trazo entre las secciones ya mencionadas tomando en cuenta las solicitaciones exteriores y el método constructivo.

22 2.-) Disposiciones de los cables en sección transversal.

Se dispondrán los cables de tal manera que :

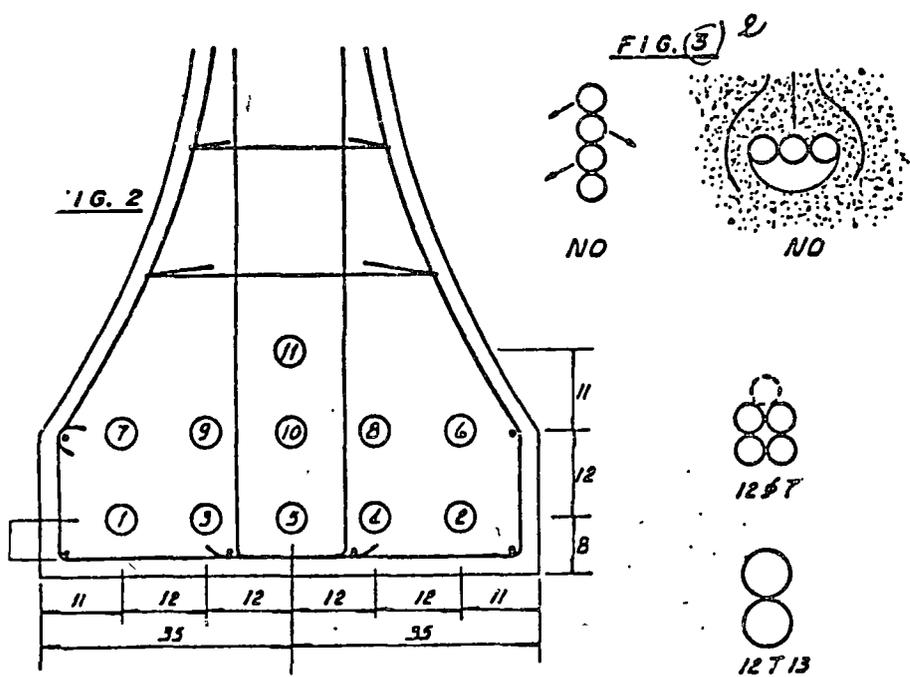
- a) El concreto puede bajar correctamente hasta el fondo del molde con todo el espacio necesario para la vibración.
- b) El recubrimiento de los cables sea suficiente para asegurar la protección del cable contra la corrosión, y también para asegurar su adherencia al concreto.

Los diferentes factores que intervienen en estas condiciones son :

- El diámetro del ducto.
- El tamaño máximo de los agregados.
- El diámetro del vibrador.

22 21.-) Paquete de cables :

De manera general es aconsejable el seguir las siguientes reglas:

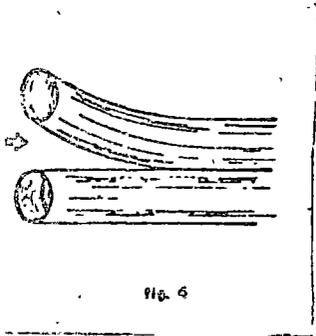


a) Cuando se trata de cables de capacidad superior a 100 toneladas, es preferible mantenerlos aislados ( ejemplo puente de Abidjan ).

b) Cuando los cables son de menor capacidad y numerosos, es preferible agruparlos en paquetes para no tener una sección de concreto en forma de "gruyere". De esa manera se concentran los cables aumentando la excentricidad y se dá más rigidéz a los ductos. También el concreto tiene más espacio para su paso. Pero se deben limitar los paquetes, ( así como el agujero que afecta el concreto ).

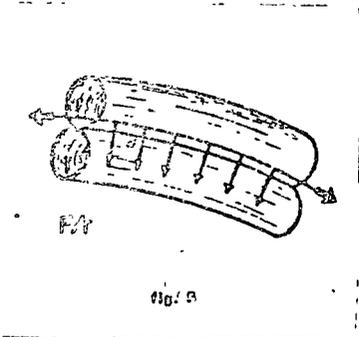
- paquetes verticales de más de dos cables presentan el riesgo de que salgan de su posición al colado.
- paquetes horizontales de más de 2 cables pueden impedir un colado correcto debajo de ellos.

Los paquetes que se pueden admitir agrupan en general 2 ó 4 cables. Se deberá también limitar la fuerza total desarrollada por los cables de un mismo paquete, aproximadamente a 330 toneladas .



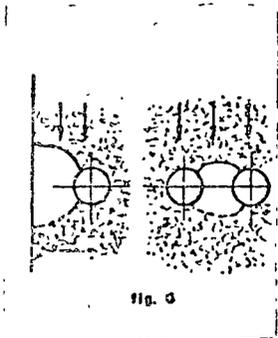
Además se deberá :

- Cuidar el buen colocado de las zonas donde se separan los cables progresivamente.



- Emplear ductos cuya rigidez sea suficiente para no tener aplastamiento en trayectoria curva en caso de 2 ductos.

22 22.-) Recubrimiento mínimo de los cables :

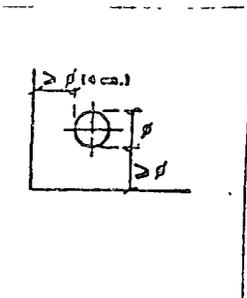


- a.-) El concreto debe bajar correctamente entre un ducto, el paño del molde, u otro ducto.

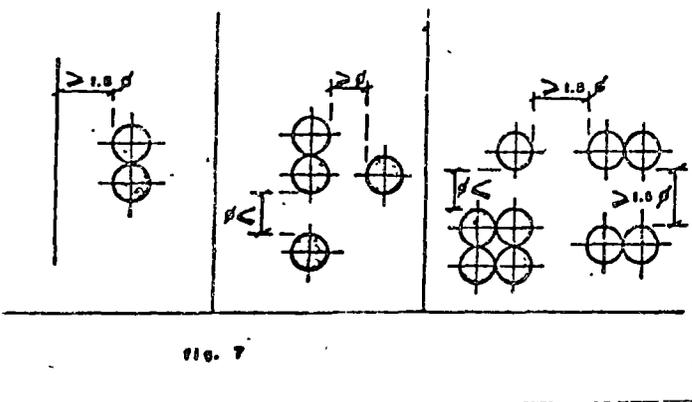
Este espacio debe ser suficientemente grande para dejar paso a los mayores agregados y también para no tener un efecto de " arco " .

- b.-) El recubrimiento del concreto debe ser suficiente para proteger el cable contra la corrosión.

- c.-) Finalmente, se puede optar por los recubrimientos siguientes :



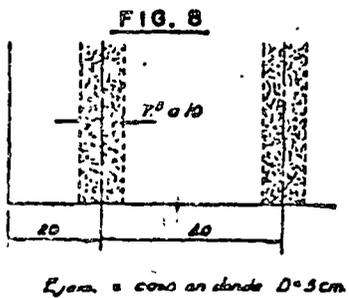
Se cambiará  $\varnothing$  por 4 cm. si  $\varnothing < 4$  cm.



Entre un paño y un ducto :  $\phi$

- ~ Entre un paño vertical y una columna de cables 1.5
- ~ Entre dos ductos :
 

	1 línea	2 líneas
en el sentido vertical	$\phi$	1.5 $\phi$
en el sentido horizontal	$\phi$	1.5 $\phi$



Cuando se vibra el concreto por medio de vibradores internos se deben prever chimeneas de vibración cuyo número y diámetro depende del diámetro "D" del vibrador.

Como indicación se puede admitir :

Diámetro de la chimenea 1.5 a 2 D según la profundidad.

Distancia entre el eje de la chimenea al paño próximo 4 D; al eje de alguna otra chimenea 8 D.

22 23.-) Disposición de cables que suben en las almas :

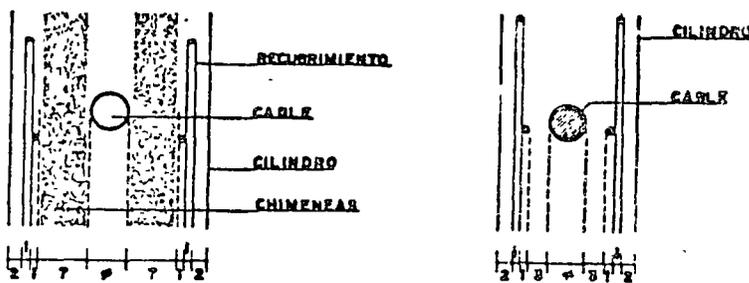


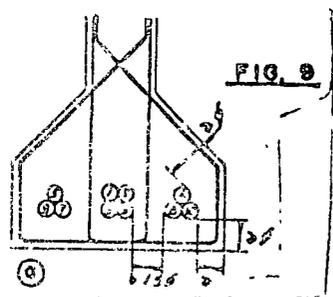
fig. 8 bis

Para facilitar el colado de la trabe y evitar de reducir demasiado el ancho del alma que resiste al cortante, se debe limitar el número de cables que suben simultáneamente (suben normalmente uno por uno cuando el alma de la trabe es fina).

Ejemplos de disposiciones en caso de secciones sobre-críticas :

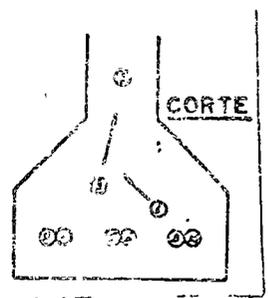
a.-) Se deben poner los cables en excentricidad sin imponer desviaciones en planta demasiado fuertes. Además no deben formar en planta una barrera que impida el paso del concreto y de los vibradores.

NUMERO DE COLUMNAS DE CABLES	1	2	3	4		
				$\beta < 7$	$7 < \beta < 11$	$11 < \beta$
ANCHO MINIMO DEL ALMA.	$22 + \beta$	$7 + 4\beta$	$14 + 5\beta$	$7 + 6\beta$	$14 + 8\beta$	$6\beta + 21$
BEA	27	27	30	$\beta = 5$ 37	$\beta = 7$ 56	$\beta = 11$ 87



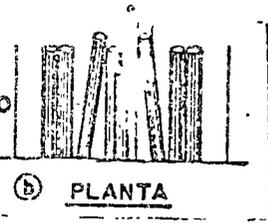
b.-) Ejemplo del patín inferior de una trabe prefabricada de puente :

En el centro de claro, generalmente los cables están en 3 paquetes.

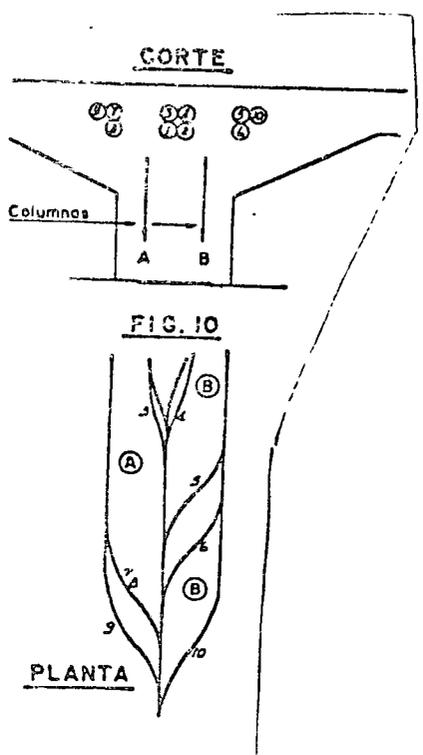


El paquete central tiene más cables porque ésta posición central permite subir los cables directamente en el alma sin desviaciones.

Por ende se subirán primero estos cables centrales y posteriormente los cables de los paquetes laterales.



Eso permite evitar la tapa que se forma en la disposición b.



c.-) Ejemplo de una sección sobre un apoyo intermedio de una trabe continua colada en sitio :

Se debe bajar los cables en el eje del alma.

Se les agrupa en 3 paquetes uno en el centro y 2 laterales. Bajan primero los cables del paquete central y alternativamente los de los paquetes laterales, asegurando la existencia de una chimenea libre cuando la otra está ocupada.

2 3 .-) ASCENSO DE UN CABLE :

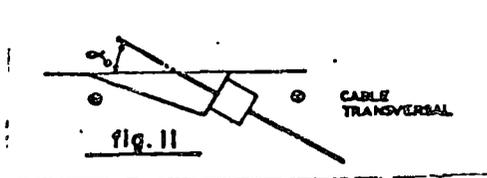
Para limitar las pérdidas por fricción en su ducto, y facilitar su colocación, el cable debe tener un trazo :

- lo más regular posible.
- de radio de curva suficiente.

El ángulo de salida en la fibra superior, debe ser suficientemente grande. De no ser así la longitud de la caja de salida necesaria para colocar el gato podría ser demasiado grande y dificultar :

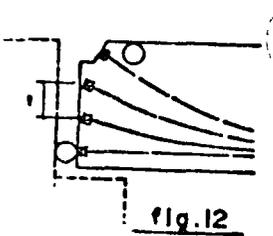
- los ascensos sucesivos de cables ( falta de espacio ).
- el paso de cables transversales, o del refuerzo transversal.
- el colado bajo las cajas de salida.

Los valores usuales de los ángulos de salida son variables entre 20° y 30°.

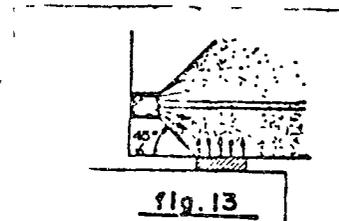


2 4 .-) DIVERSOS TIPOS DE TRAZOS DE CABLES :

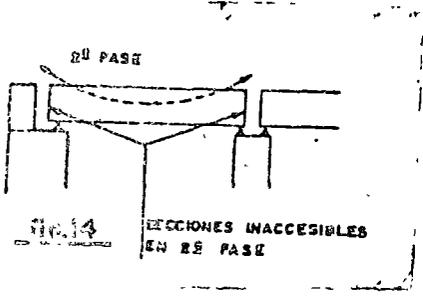
24 1.-) Cables continuos anclados en el extremo de una trabe.



- a.-) El espaciamiento de los anclajes debe ser suficiente para no solicitar demasiado el concreto.
- b.-) El anclaje del cable inferior debe estar suficientemente bajo para que influencia cubra bien la zona de apoyo. Se supone una repartición a 45° a partir del puño del anclaje.



c.-) Cuando se tensen los cables en diferentes fases se deberán tensar en primera fase :

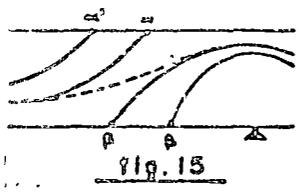


La mayor parte de los cables largos ( para comprimir la viga en toda su longitud ).

Algunas veces la totalidad de esos cables cuando el extremo quede posteriormente inaccesible.

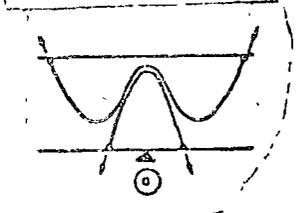
Es el caso usual de los puentes de traves precoladas. Una vez colocadas en su lugar no se pueden tensar dichos cables. Se tensan entonces los cables de 2a. fase por la parte superior de las traves.

24.2.-) - Cables saliendo en claro de la trabe y subiendo por el alma.



a.-) Este ascenso :

- Mejora la resistencia a flexión ( reducción del momento  $F_{eq}$  ) y el corte ( componente F ).
- Facilita la colocación del cable.



b.-) En una zona donde los momentos de flexión cambian de signo no se debe dejar la sección sin presfuerzo. Las zonas de salidas de cables deben traslaparse.

c.-) Las condiciones de construcción son también determinantes en el trazo de los cables.

Por ejemplo, es mejor para una trabe colada en lugar evitar el tensar los cables por abajo de la trabe colocando anclajes muertos en los extremos inferiores de los cables ( esquema b y a ).

Directorio de Alumnos del Curso: ESTRUCTURAS DE CONCRETO PRES-FORZADO del 6 de Marzo al 3 de Abril de 1978.

1. SR. CARLOS H. ALVAREZ GUILLEN  
Cía. Mex. de Consultores en Ing., S.A. Bertha III-4  
Insurgentes Sur 1824-4° México 13, D.F.  
México 20, D.F. Tel. 524.98.94  
Tel. 534.50.82
2. SR. JOSE FRANCISCO BELTRAN MONDACA  
Precolados Hércules, S.A. Edif. J.Ma. Morelos y Pavón Entrada B  
Carr. a Costa Rica Km. 1.5 Depto. 604  
Culiacán, Sin. Unidad Tlalotelco  
Tel. 2.44.60 México 3, D.F.  
Tel. 583.92.45
3. SR. ANTONIO BERNAL CARRILLO  
Pte. 85 No. 33  
México 18, D.F.
4. SR. EDUARDO BRAVO GONZALEZ  
Cía. de Luz y Fuerza del Centro S.A. Sur 69 A No. 3131  
Tlaloc 90-4° Col. Viaducto México 13, D.F.  
Col. Anáhuac México 17, D.F. Tel. 519.46.52  
Tel. 546.46.12
5. SR. HECTOR CORTES BASTIDAS  
Facultad de Ingeniería, UNAM Bartolache 1740 A -101  
Mexico 20, D.F. México 12, D.F.  
Tel. 548.96.64 Tel. 524.20.56
6. SR. SERGIO FERNANDEZ ARMENDARIZ  
Constructora Metro, S.A. Prosperidad 12-404  
Minería 145 Col. Escandón México 18, D.F.  
México 18, D.F. Tel. 516.76.76  
Tel. 516.04.60
7. ING. MARCOS GODINEZ HANA  
Sur 132 # 118-502  
Col. América, México 18, DF.
8. ING. JOSE ULISES GONZALEZ BOLIO  
Ing. Ulises González Torre Calle 19 # 201  
Gerente Col. García Ginéres  
39-510 H (Int.) Mérida, Yuc.  
Mérida, Yuc. Tel. 14.512  
Tel. 15.665
9. SR. JOAQUIN GUTIERREZ GUERRA  
Facultad de Ingeniería Rancho el Vergel 90  
U.N.A.M. Prado Coapa, México 22, D.F.  
Tel. 584.96.64 Tel. 532.50.72

10. JUAN TITO GUTIERREZ RIVERO  
PIR, S.A Impermeabilizantes  
Parral 48-205  
México 11, D.F.  
Henry Ford 4010  
Col. Gertrudis Sánchez  
México 14, D.F.  
Tel. 551.03.05
11. SR. HUGO ABARCA HERRERA  
Bufete Industrial, Diseños y Proyectos, S.A.  
León Tolstoi 22  
Col. Anzures  
México, D.F.  
Tel. 533.15.00  
Av. Pino Suárez Sur 503 Bis. Depto. 6  
Toluca, México  
Tel. 4.29.70
12. SR. MAURICIO HERNANDEZ GARCIA  
Dirac, S.A. de C.V.  
Gerente de Estructuras  
Ma. de la Luz Bringas 28  
Col. del Valle  
México 12, D.F.  
Tel. 534.26.50  
Ejido 140  
Vergel Coyoacán  
México 22, D.F.  
Tel. 677.31.64
13. SR. ENRIQUE HUERTA VELAZQUEZ  
Junta de Planeación y Urbanización del  
Estado de México  
Libramiento Sur s/n.  
Morelia, Mich.  
Tel. 2.65.05  
Virrey de Mendoza 271  
Morelia, Mich.
14. SR. EMILIO LARRAZABAL BOLAÑOS  
Cía. Mex. de Consultores en Ing., S.A.  
Insurgentes Sur 1824-4°  
México 20, D.F.  
Tel. 524.66.54  
Manuel Glz. 436-2-808  
Col. Tlaltelolco  
México 3, D.F.
15. SR. ROBERTO LUNA LUNA  
Cía. Mex. de Consultores en Ing., S.A.  
Insurgentes Sur 1824-4°  
México 20, D.F.  
Tel. 534.10.36  
Norte 54 A No. 5135  
Col. Joyita  
México 14, D.F.  
Tel. 537.94.03
16. SR. ALEJANDRO MACIAS MARTINEZ  
Secretaría de Agricultura y Recursos  
Hidráulicos  
Reforma 45-10°  
México 1, D.F.  
Tel. 592.00.34  
Playa Ola Verde 294  
Col. Reforma Iztaccihuatl  
México 13, D.F.  
Tel. 579.17.08

17. SR. JOSE MARIA MENDEZ SANTOS  
S.A.H.O.P.  
Xola y Av. Universidad  
México 12, D.F.  
Tel. 519.65.93  
Convento Churubusco 45  
Sta. Mónica  
Tlalnepantla, Edo. de México.
18. SR. HOMERO MORONES OCHOA  
Cantera de Dolores 2  
Sta. Cruz del Monte  
Naucalpan, Edo. de México  
Tel. 572.61.37
19. SR. CARMELO OCOTOXTLE MEDINA  
Cía. Mex. de Consultores en Ingeniería S.A.  
Insurgentes Sur 1824-4°  
México 20, D.F.  
Tel. 524.66.54  
3 Nte. 1604 Altos 6  
Puebla, Pue.  
Tel. 46.60.01
20. SR. ROBERTO ORTEGA MENDOZA  
Esc. de Ing. de U.A.G.  
Av. Primer Congreso Anáhuac
21. SR. ROBERTO A. RIVERA RIOS  
S.A.H.O.P.  
Xola y Av. Universidad  
México 12, D.F.  
Tel. 519.27.70  
Aniceto Ortega 1044-6  
México 12, D.F.  
Tel. 559.24.68
22. SR. CARLOS VALDESPINO PONCE  
Facultad de Ingeniería  
U.A.E.M.  
Toluca, México  
Tel. 5.45.12  
Roble 29  
Col. Casa Blanca  
Toluca, México  
Tel. 6.17.24
23. SR. FRANCISCO VERA  
Dirección Técnica Bienes y Servicios, S.A.
24. SR. JAN VAN ROSMALEN JANSEN  
Instituto Mexicano del Seguro Social  
Durango 291  
México 11, D.F.  
Tel. 553.21.11 Ext.120  
Matehuala I-1  
Edificio Condesa  
México 11, D.F.  
Tel. 553.41.97

