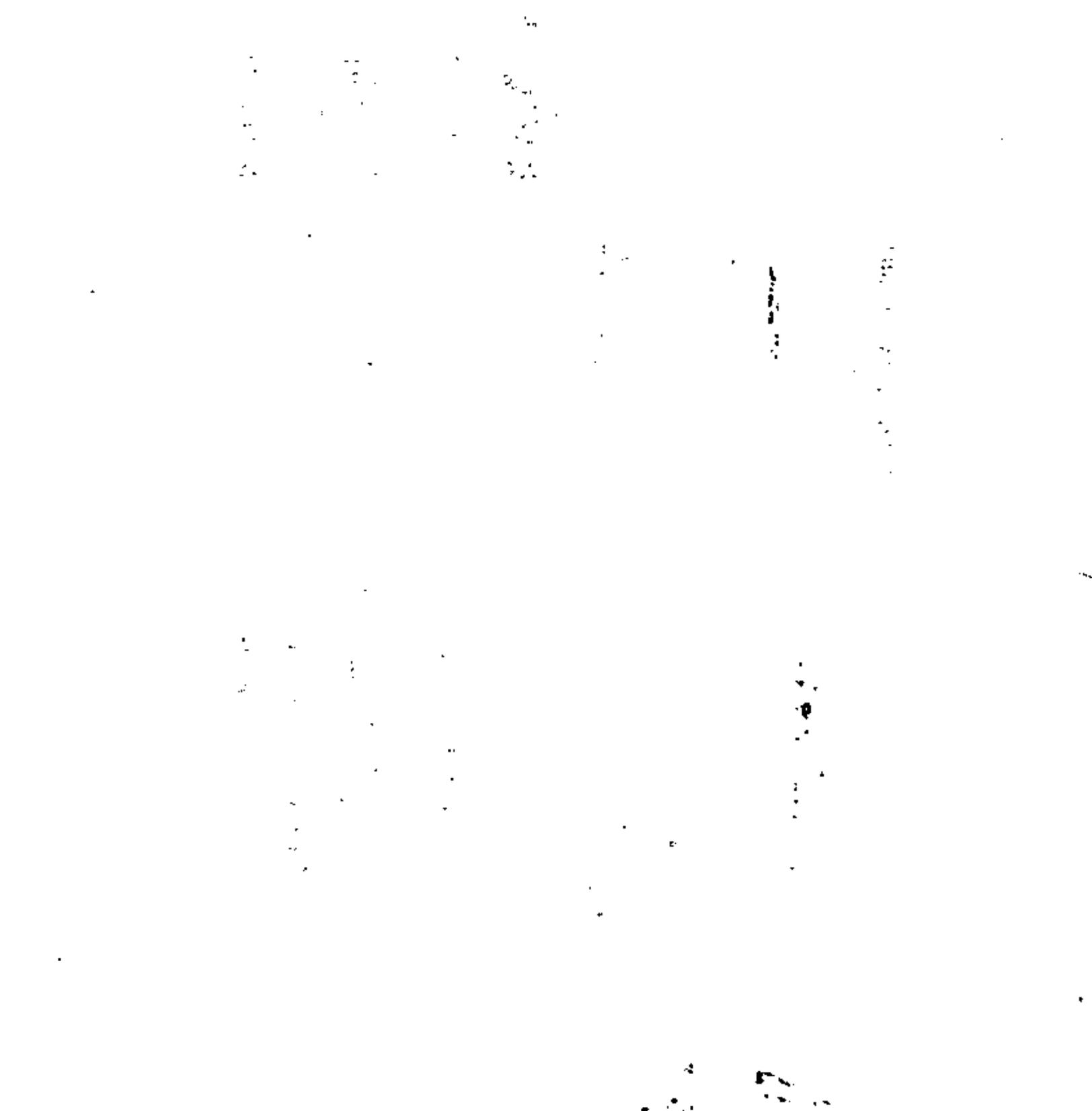


1. M. en C. Ramón Cervantes Beltrán
Profesor e Investigador.
División de Estudios de Posgrado
Facultad de Ingeniería
UNAM
550 52 15 Ext. 4495
2. M. en C. Enrique Del Valle Calderón
Asesor
Ingeniería de Sistemas de Transporte Metropolitano
Legarfa 252
Col. Pensil
México 17, DF.
399 69 22 Ext. 215
3. Dr. Luis Esteva Maraboto
Investigador
Instituto de Ingeniería
UNAM
48 97 94
4. M. en C. Jorge Prince Alfaro
Subdirector
Instituto de Ingeniería
UNAM
548 11 35
5. Dr. Octavio A. Rascón Chávez
Investigador
Instituto de Ingeniería
UNAM
548 54 79



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA
DINAMICA ESTRUCTURAL

Fecha	Tema	1980	Hora	Profesor
Julio 7, 9 y 11	Introducción. Vibración de sistemas elásticos e inelásticos de un grado de libertad		17 a 20 h c/dfa	Dr. Octavio A. Rascón Chávez
Julio 14	Vibraciones libres de sistemas lineales con dos grado de libertad: ambos en traslación, en torsión con traslación, y cabeceo con traslación. Vibración de vigas de flexión y vigas de cortante.		17 a 20 h	" " " "
Julio 16 " 18	Introducción al método del elemento finito " " " " " "		17 a 20 h 17 a 18:30 h	M. en C. Ramón Cervantes
Julio 18	Métodos de Holtzer y Newmark		18:30 a 20 h	M. en C. Enrique Del Valle Calderón.
Julio 21 y 23 Julio 25	Vibraciones libres y forzadas de sistemas elásticos lineales de varios grados de libertad. Análisis modal. Respuesta sísmica máxima. Método de Newmark para obtener la respuesta sísmica de sistemas elásticos e inelásticos.		18 a 20 h 17 a 18:30 h	M. en C. Jorge Prince Alfaro.
Julio 25	Respuesta sísmica de sistemas no lineales con varios grados de libertad.		18:30 a 20 h	Dr. Luis Esteva Maraboto





centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



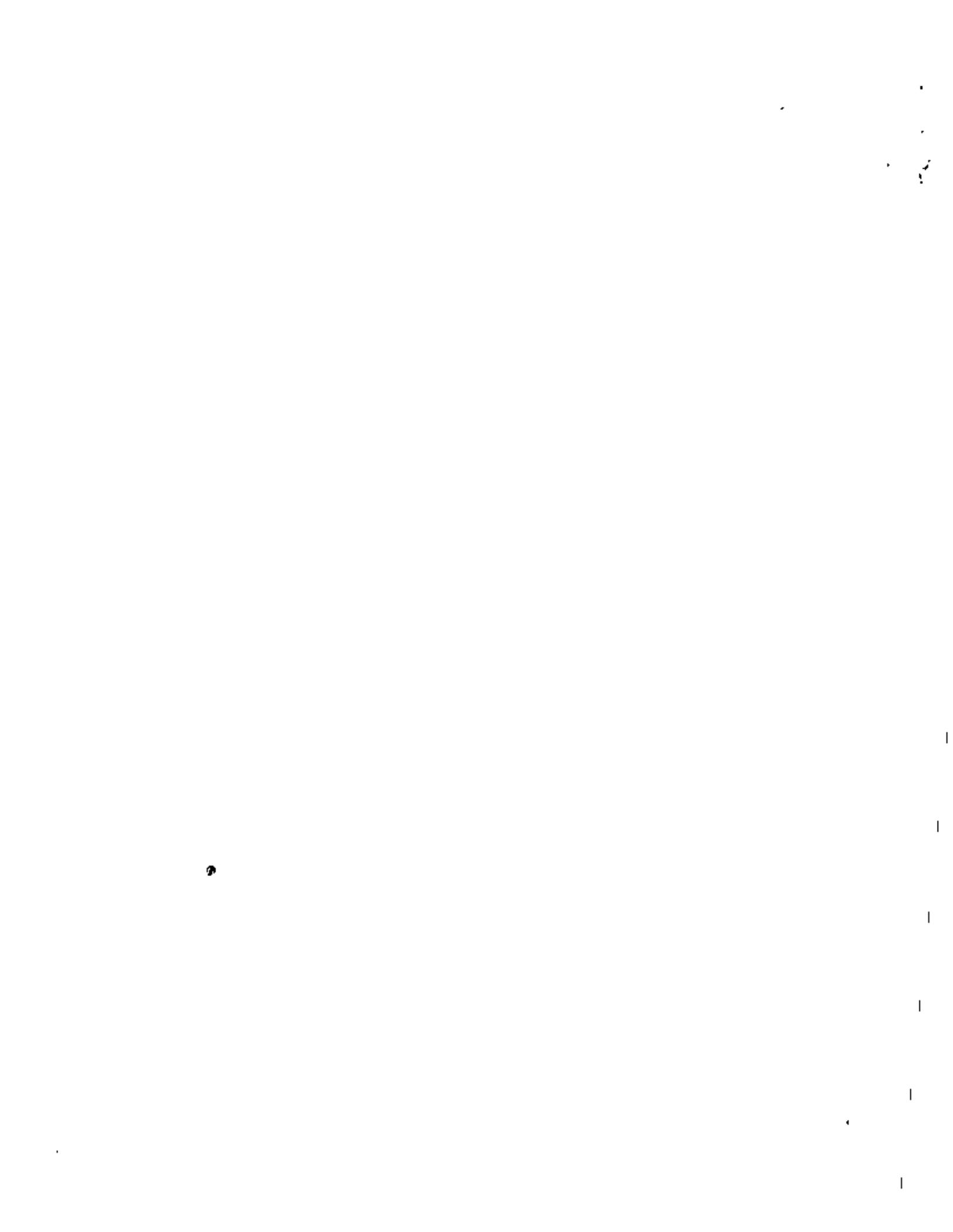
VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980

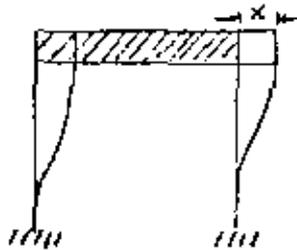


DINAMICA ESTRUCTURAL

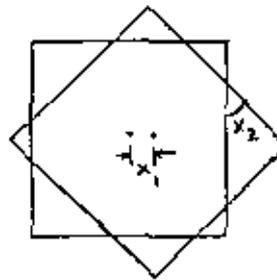
DR. OCTAVIO A RASCON CH.

DEFINICION.

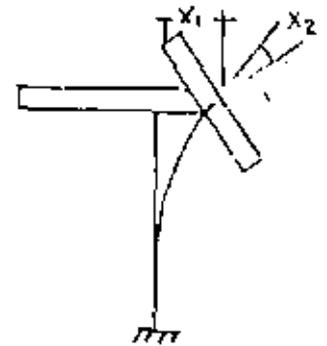
GRADOS DE LIBERTAD = NUMERO DE COORDENADAS GENERALIZADAS (DESPLAZAMIENTOS O GIROS) QUE SE REQUIEREN PARA DEFINIR LA POSICION DEL SISTEMA EN CUALQUIER INSTANTE.

EJEMPLOS

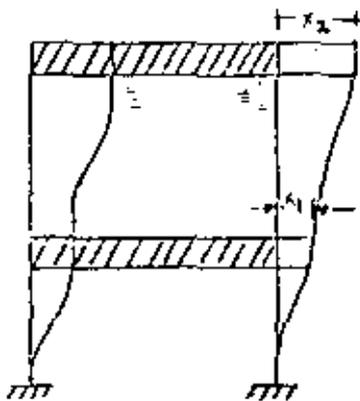
UN GRADO DE LIBERTAD



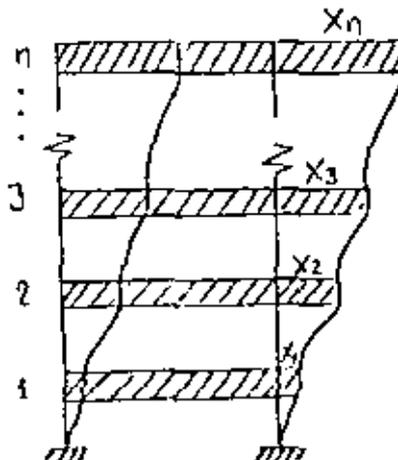
DOS GRADOS DE LIBERTAD



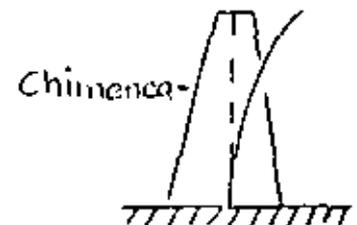
DOS GRADOS DE LIBERTAD



DOS GRADOS DE LIBERTAD



n GRADOS DE LIBERTAD

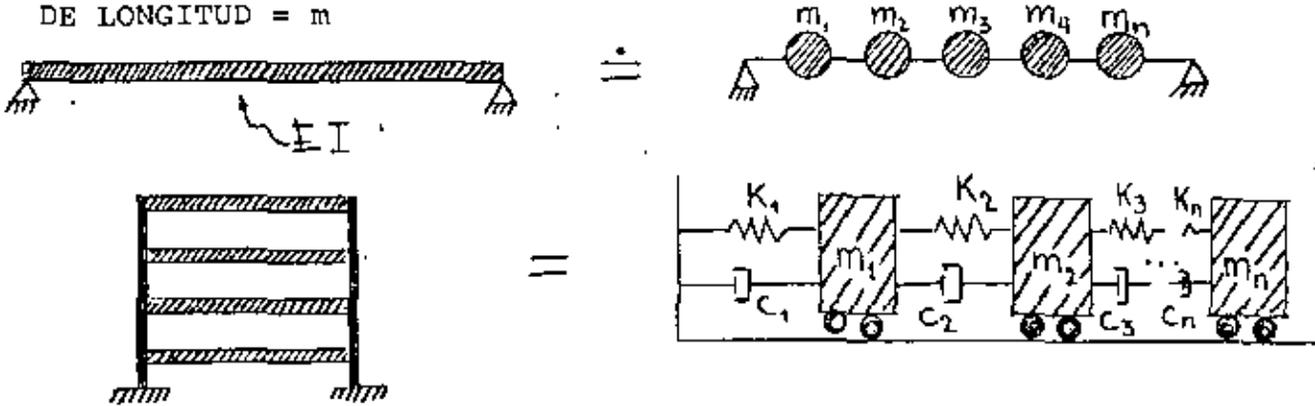


INFINITO NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

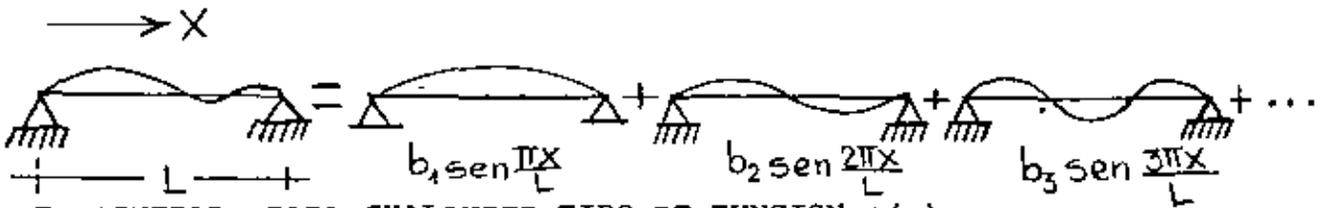
1. POR CONCENTRACION DE MASAS

MASA POR UNIDAD
DE LONGITUD = m



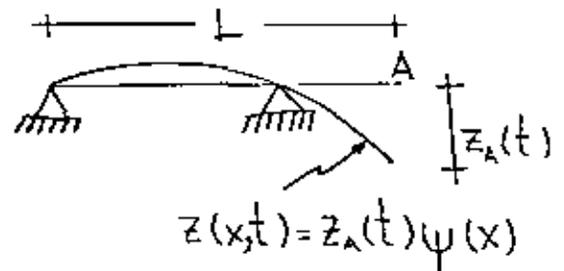
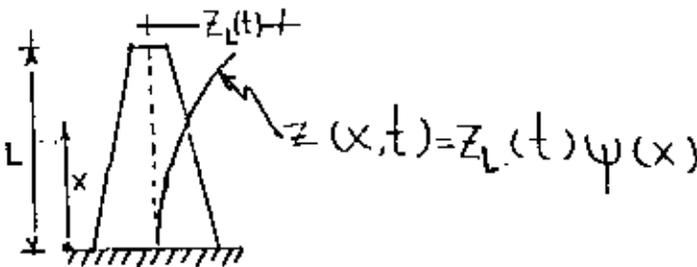
2. EXPRESANDO LA CONFIGURACION DE VIBRACION DE LA ESTRUCTURA COMO UNA SERIE DE FUNCIONES ESPECIFICADAS. POR EJEMPLO, SI ESTAS FUNCIONES SON ARMONICAS:

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^N b_i \text{sen } \frac{i\pi x}{L}$$

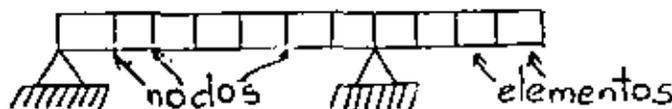


EN GENERAL. PARA CUALQUIER TIPO DE FUNCION ψ(x):

$$z(x,t) = \sum_{i=1}^N z_i(t) \psi_i(x)$$



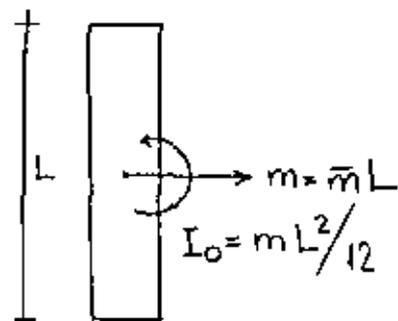
3. MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS



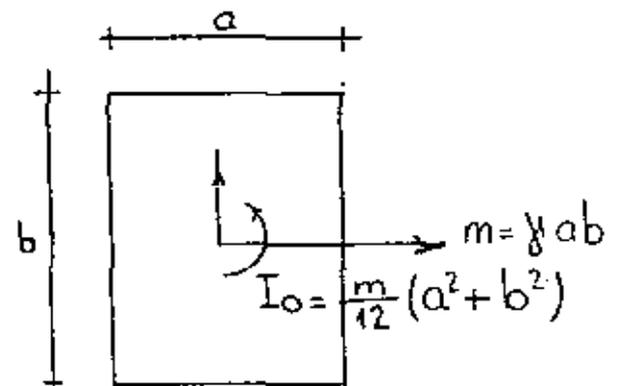
AL PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE CUERPOS RIGIDOS ES A MENUDO NECESARIO CONOCER LOS MOMENTOS DE INERCIA DE MASA. A CONTINUACION SE PRESENTAN ALGUNOS CASOS:

\bar{m} = MASA POR UNIDAD DE LONGITUD

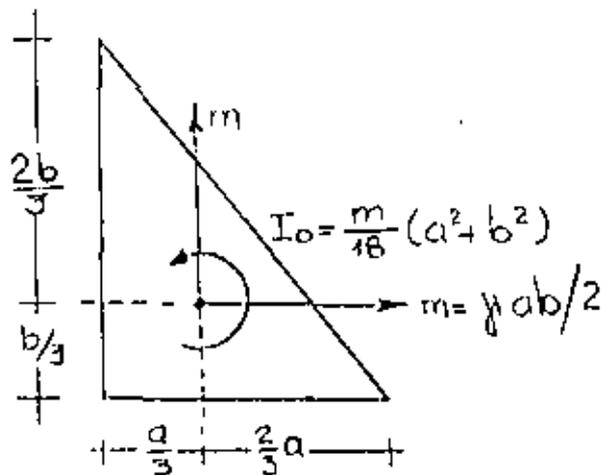
γ = MASA POR UNIDAD DE AREA



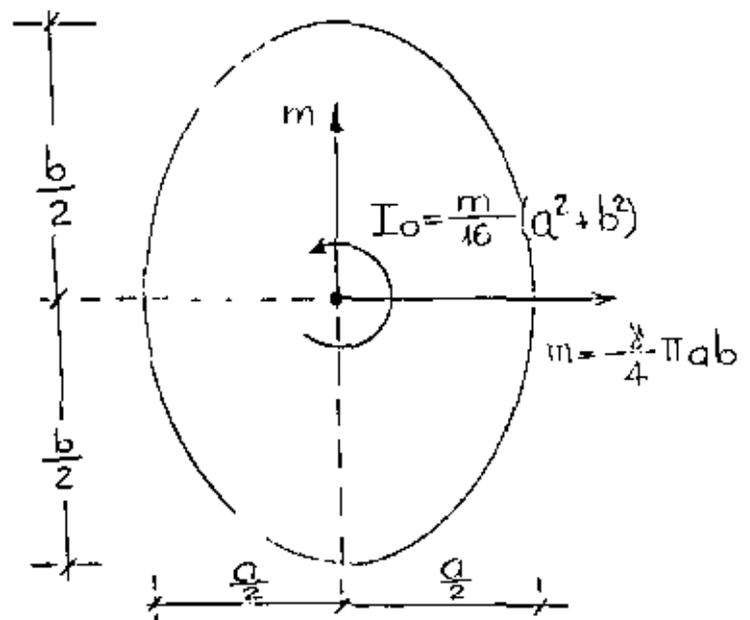
BARRA UNIFORME



PLACA UNIFORME RECTANGULAR

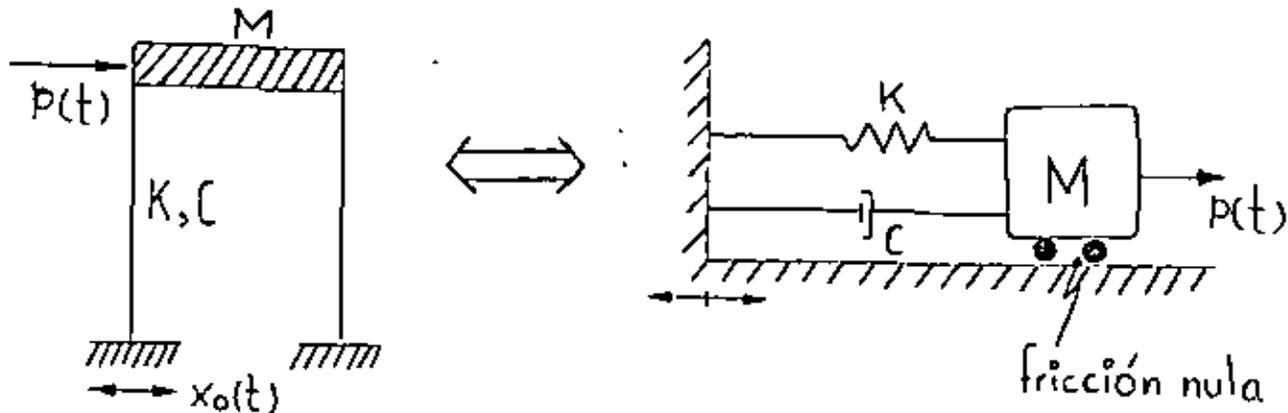


PLACA UNIFORME TRIANGULAR



PLACA UNIFORME ELIPTICA

RESPUESTA DINAMICA DE SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD
CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO



$t =$ TIEMPO

$M =$ MASA

$K =$ RIGIDEZ

$C =$ AMORTIGUAMIENTO

$f(t) =$ FUERZA EXTERNA

$x_0(t) =$ DESPLAZAMIENTO DEL SUELO

EL AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ES TAL QUE PRODUCE UNA FUERZA DE RESTAURACION PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA RESPECTO AL SUELO.

EL AMORTIGUAMIENTO SE DEBE PRINCIPALMENTE A LA FRICCIÓN INTERNA ENTRE LOS GRANOS O PARTICULAS DEL MATERIAL DE LA ESTRUCTURA, Y A FRICCIÓN EN LAS JUNTAS Y CONEXIONES DE LA MISMA. ES EL ELEMENTO DEL SISTEMA QUE DISCIPA ENERGIA.

2a. LEY DE NEWTON:

"LA RAPIDEZ DE CAMBIO DEL MOMENTUM DE CUALQUIER MASA, m , ES IGUAL A LA FUERZA QUE ACTUA SOBRE ELLA"

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x})$$

$p(t)$ = FUERZA ACTUANTE

x = DESPLAZAMIENTO

t = TIEMPO

SI m ES CONSTANTE: $p(t) = m\ddot{x}$

PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

SI LA 2a. LEY DE NEWTON LA ESCRIBIMOS COMO

$$p(t) - m\ddot{x} = 0$$

AL SEGUNDO TERMINO DE LA ECUACION SE LE CONOCE COMO FUERZA DE INERCIA; EL CONCEPTO DE QUE UNA MASA DESARROLLA UNA FUERZA DE INERCIA PROPORCIONAL A SU ACELERACION Y QUE SE OPONE A ELLA SE CONOCE COMO PRINCIPIO DE D'ALAMBERT, Y PERMITE QUE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO SE EXPRESEN COMO ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO.

ECUACION DE EQUILIBRIO

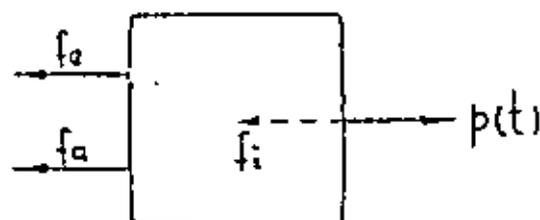
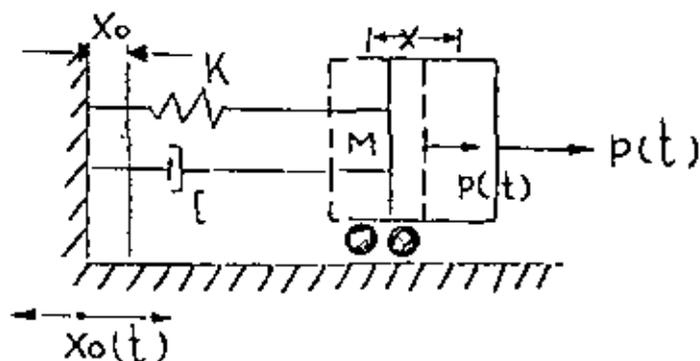


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

$$\text{EQUILIBRIO: } f_e + f_a + f_i = p(t) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{PARA UN SISTEMA ELASTICO: } f_e = K(x - x_0) = ky \\ \text{PARA AMORTIGUAMIENTO VISCOSO: } f_a = c(\dot{x} - \dot{x}_0) = C\dot{y} \\ \text{POR EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT: } f_i = m\ddot{x} = m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO LAS ECS. 2 EN LA EC. 1 SE OBTIENE:

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) + c\dot{y} + ky = p(t)$$

DE DONDE

$$\boxed{\ddot{M}y + c\dot{y} + Ky = p(t) - M\ddot{x}_0} \quad (3)$$

DIVIDIENDO ENTRE M AMBOS MIEMBROS DE LA EC. 3:

$$\ddot{y} + \frac{C}{M} \dot{y} + \frac{K}{M} y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0$$

SI $\frac{C}{M} = 2h$, y $\frac{K}{M} = \omega^2$, DONDE $\omega =$ FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, EN RAD/SEG:

$$\boxed{\ddot{y} + 2h \dot{y} + \omega^2 y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0} \quad (4)$$

CUANDO SE TIENEN EXCITACIONES EN EL SISTEMA SE TRATA DE UN PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS; EN CASO CONTRARIO EL PROBLEMA ES DE VIBRACIONES LIBRES.

VIBRACIONES LIBRES

EN ESTE CASO LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\ddot{y} + 2h \dot{y} + \omega^2 y = 0$$

CUYA SOLUCION ES

$$y(t) = e^{-ht} (C_1 \text{ sen } \omega' t + C_2 \text{ cos } \omega' t) \quad (5)$$

DONDE $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ = FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL AMORTIGUADA

Y C_1 Y C_2 SON CONSTANTES QUE DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES

(EN $t=0$) DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD QUE TENGA LA MASA DEL SISTEMA.

ESTAS RESULTAN SER

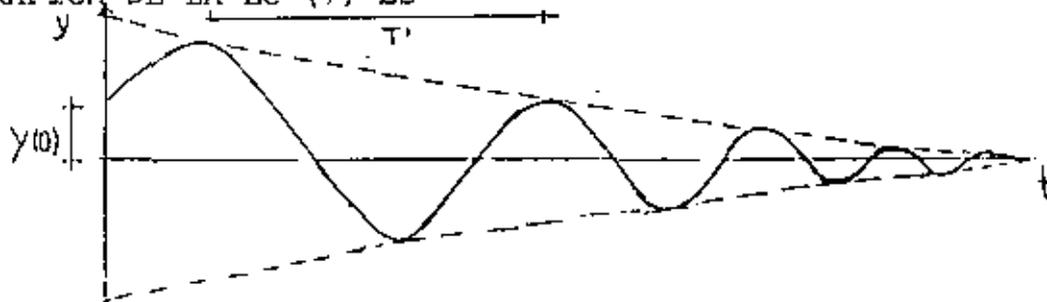
$$\boxed{C_1 = \frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'}} \quad \text{Y} \quad \boxed{C_2 = y(0)} \quad (6)$$

LA EC (5) SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIEN COMO:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) \quad (7)$$

DONDE $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ Y $\theta = \tan^{-1} \frac{C_1}{C_2} = \text{ANGULO DE FASE}$

LA GRAFICA DE LA EC (7) ES



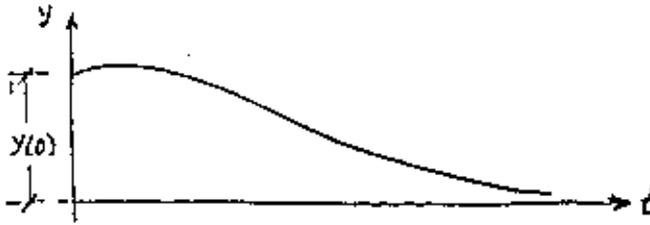
$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \text{PERIODO NATURAL AMORTIGUADO, SEG}$$

$$f' = \frac{1}{T'} = \text{FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA, cps}$$

VEAMOS EL CASO ESPECIAL DE LA EC. (5) EN QUE $h=\omega$. EN TAL CASO, $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} = 0$, $\cos \omega't = 1$ Y $\sin \omega't = \omega't$, CON LO CUAL LA EC. (5) SE REDUCE A

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\omega t} \left\{ \left[\frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'} \right] (\omega't) + y(0) \right\} \\ &= e^{-\omega t} [\dot{y}(0)t + (1 + \omega t)y(0)] \end{aligned}$$

LA GRAFICA DE ESTA ECUACION ES



Y OBTIENIENDO NO REPRESENTA UN MOVIMIENTO OSCILATORIO, POR LO CUAL SI $h = \omega$ SE DICE QUE SE TIENE AMORTIGUAMIENTO CRITICO. EN TAL CASO:

$$h_{cr} = \omega = \frac{C_{cr}}{2M} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

DE DONDE $C_{cr} = 2\sqrt{KM}$. (8)

A LA RELACION $\zeta = C/C_{cr}$ SE LE LLAMA FRACCION DEL AMORTIGUAMIENTO CRITICO.

DESPEJANDO A M DE LA EC. (8) Y SUSTITUYENDOLA EN LA EC. $h = C/(2M)$ SE OBTIENE:

$$h = \frac{C}{2 \frac{C_{cr}^2}{4K}} = \frac{C}{C_{cr}} \frac{2K}{2\sqrt{KM}} = \zeta \sqrt{\frac{K}{M}} = \zeta \omega$$

ADEMAS:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega^2 \zeta^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

LOS VALORES USUALES EN ESTRUCTURAS QUE ASUME ζ VARIAN ENTRE 2 Y 5%. EN ESTE INTERVALO ω' Y ω SON CASI IGUALES; VEAMOS, POR EJEMPLO, EL CASO EN QUE $\zeta = 0.1$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - 0.01} = 0.995\omega$$

OTRA FORMA DE MEDIR EL GRADO DE AMORTIGUAMIENTO QUE TIENE UNA ESTRUCTURA ES MEDIANTE EL DECREMENTO LOGARITMICO, EL CUAL SE DEFINE COMO EL LOGARITMO DEL COCIENTE DE DOS AMPLITUDES CONSECUTIVAS

$$\begin{aligned} L &= \ln \frac{y(t)}{y(t + T')} = \ln \frac{Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta)}{Ae^{-h(t+T')} \cos[\omega'(t+T') - \theta]} \\ &= \ln \left(\frac{e^{-ht}}{e^{-h(t+T')}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't + \omega'T' - \theta)} \right) \\ &= \ln \left(\frac{e^{-ht}}{e^{-ht} e^{-hT'}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't - \theta + 2\pi)} \right) \\ &= \ln e^{+hT'} = hT' = \zeta \omega T' = \zeta \omega \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{L = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (10)$$

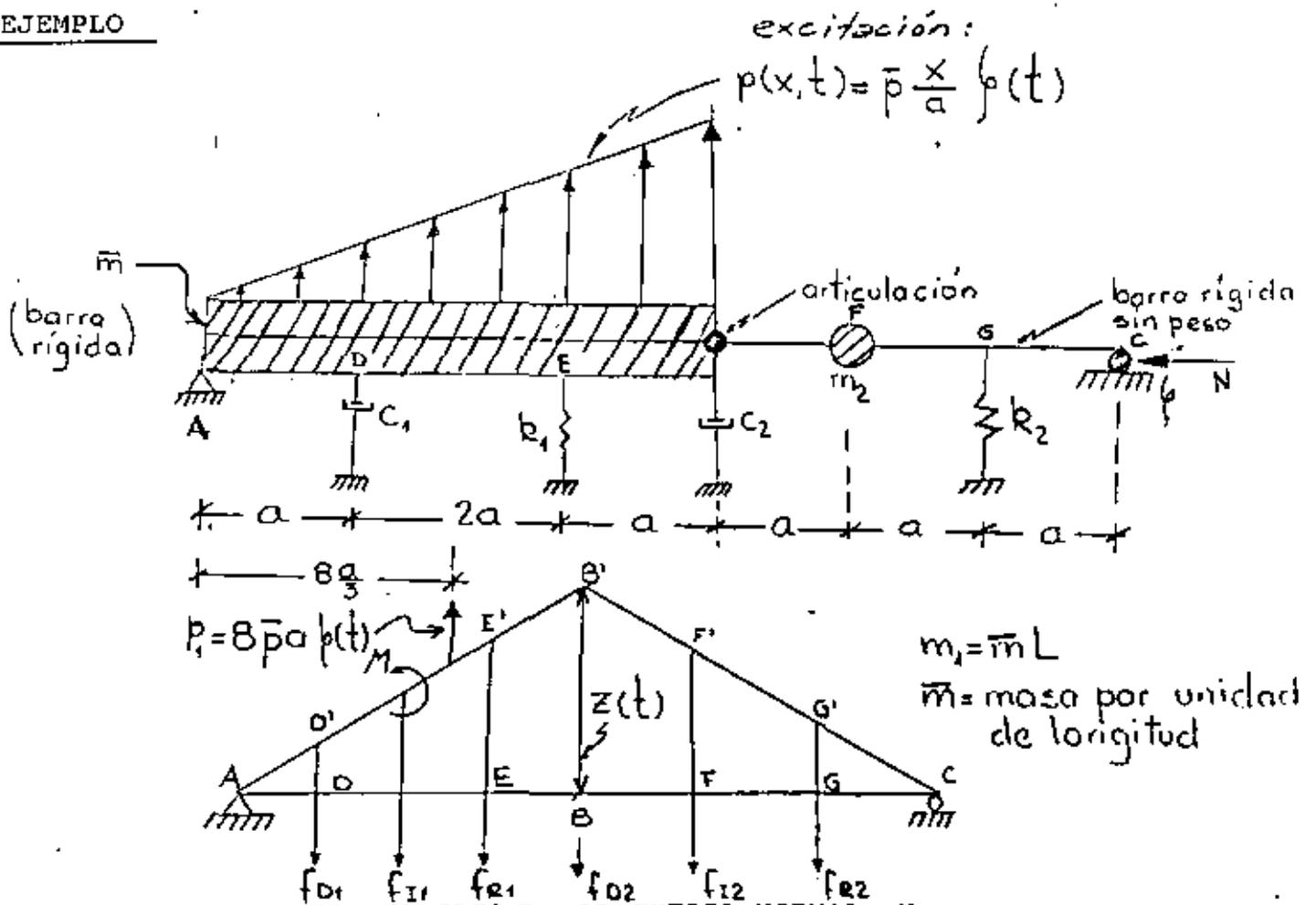
SI ζ ES PEQUEÑO,

$$\boxed{L \doteq 2\pi\zeta} \quad (11)$$

ECUACION DE MOVIMIENTO GENERALIZADA.

HAY PROBLEMAS QUE APARENTEMENTE CORRESPONDE A VIBRACIONES DE SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD PERO QUE EN REALIDAD SON DE UN GRADO SOLAMENTE.

EJEMPLO



CONSIDEREMOS PRIMERO EL CASO SIN LA FUERZA NORMAL, N.

TOMANDO COMO COORDENADA GENERALIZADA A $Z(t)$:

$$f_{R1} = k_1(EE') = k_1 \frac{3}{4} Z(t) ; \quad f_{R2} = k_2(GG') = k_2 \frac{1}{3} Z(t)$$

$$f_{D1} = C_1 \left(\frac{d}{dt} DD' \right) = C_1 \frac{1}{4} \dot{Z}(t) ; \quad f_{D2} = C_2 \dot{Z}(t)$$

$$f_{I1} = m_1 \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = \bar{m}L \frac{1}{2} \ddot{Z}(t) = 2a\bar{m}\ddot{Z}(t)$$

$$f_{I2} = m_2 \frac{2}{3} \ddot{Z}(t)$$

$$M = I_0 \frac{1}{4a} \ddot{z}(t) = \frac{\bar{m}L}{4a} \frac{L^2}{3} \ddot{z}(t) = \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{z}(t)$$

$$p_1 = 8\bar{p}a\zeta(t)$$

LA ECUACION DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA SE PUEDE ESTABLECER IGUALANDO A CERO EL TRABAJO VIRTUAL REALIZADO POR TODAS LAS FUERZAS AL DARLE AL SISTEMA UN DESPLAZAMIENTO VIRTUAL EN EL PUNTO B IGUAL A δz . EN TAL CASO

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_1 \frac{3}{4} z(t) \left(\frac{3}{4} \delta z\right) - k_2 \frac{1}{3} z(t) \left(\frac{1}{3} \delta z\right) - c_1 \frac{\dot{z}(t)}{4} \left(\frac{\delta z}{4}\right) - \\ & - c_2 \dot{z}(t) (\delta z) - 2a\bar{m} \ddot{z}(t) \left(\frac{\delta z}{2}\right) - m_2 \frac{2\ddot{z}(t)}{3} \left(\frac{2}{3} \delta z\right) - \\ & - \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{z}(t) \left(\frac{\delta z}{4a}\right) + 8\bar{p}a\zeta(t) \left(\frac{2}{3} \delta z\right) = 0 \end{aligned}$$

SIMPLIFICANDO SE OBTIENE

$$\left[(a\bar{m} + \frac{a\bar{m}}{3} + \frac{4m_2}{9}) \ddot{z}(t) + \left(\frac{c_1}{16} + c_2\right) \dot{z}(t) + \left(\frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9}\right) z(t) - \frac{16}{3} \bar{p}a\zeta(t) \right] \delta z = 0 \quad (A)$$

COMO EL DESPLAZAMIENTO VIRTUAL δz NO ES CERO, SE DEBE CUMPLIR QUE EL TERMINO ENTRE PARENTESIS ES CERO. EN TAL CASO:

$$\boxed{\bar{m} \ddot{z}(t) + \tilde{c} \dot{z}(t) + \tilde{k} z(t) = \tilde{p}(t)}$$

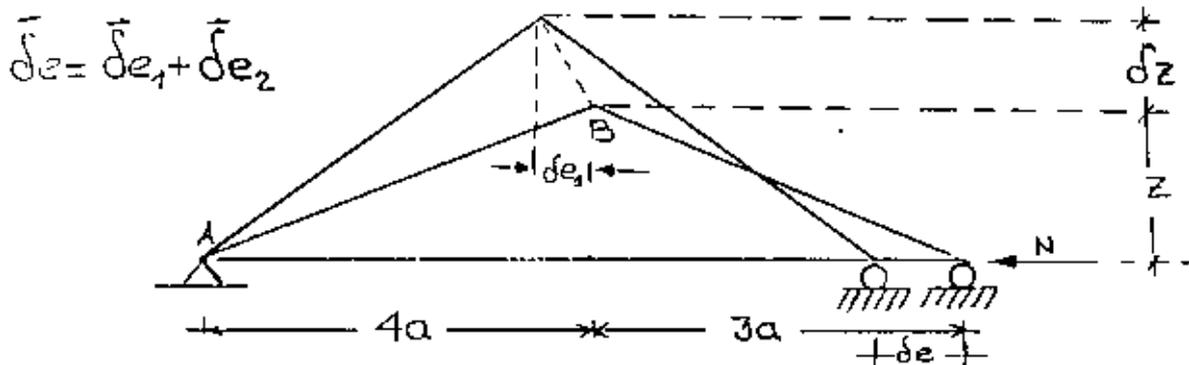
EN DONDE

$$\bar{m} = \frac{4}{3} \bar{m}_a + \frac{4}{9} m_2 \quad ; \quad \bar{c} = \frac{c_1}{16} + c_2$$

$$\bar{k} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \quad ; \quad \bar{p}(t) = \frac{16}{3} \bar{p}_a(t)$$

ESTOS PARAMETROS SE DENOMINAN MASA, AMORTIGUAMIENTO, RIGIDEZ Y FUERZA GENERALIZADAS, RESPECTIVAMENTE.

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO DE LA FUERZA NORMAL N SOLAMENTE:



δe_i = DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DEBIDO AL GIRO DE LA BARRA i

$$\delta e_1 = \frac{z}{4a} \delta z \quad ; \quad \delta e_2 = \frac{z}{3a} \delta z$$

$$\therefore \delta e = \frac{7}{12} \frac{z}{a} \delta z$$

EL TRABAJO VIRTUAL ES:

$$\delta W = N \delta e = \frac{7}{12} \frac{Nz}{a} (\delta z)$$

COMO EL SISTEMA ES LINEAL SE PUEDE SUMAR ESTE TRABAJO VIRTUAL AL DE LA ECUACION (A), CON LO CUAL LA RIGIDEZ GENERALIZADA SE MODIFICA, QUEDANDO EN LA FORMA:

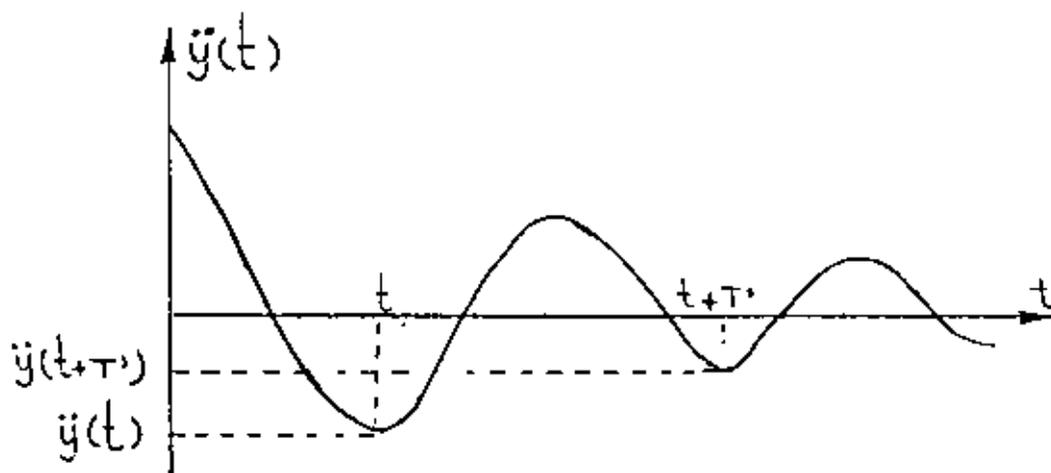
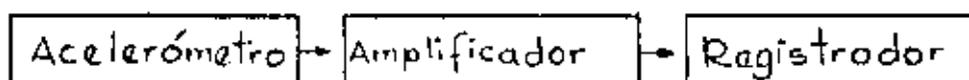
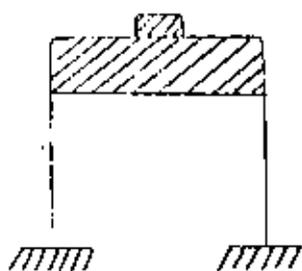
$$\bar{k} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 \quad \boxed{\frac{7}{12} \frac{N}{a}}$$

DE ESTA RIGIDEZ SE PUEDE SACAR, DE PASO, LA CARGA CRITICA DE PANDEO HACIENDO $\bar{k} = 0$:

$$N_{cr} = \left(\frac{27}{28} k_1 + \frac{4}{21} k_2 \right) a$$

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE ζ EN ESTRUCTURAS REALES O EN MODELOS

SI SE REALIZA UN EXPERIMENTO EN EL CUAL SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION DE EQUILIBRIO ESTATICO Y SE DEJA VIBRANDO LIBREMENTE, EL REGISTRO DE LAS ACELERACIONES QUE SE REGISTREN EN LA MASA TENDRA LA MISMA FORMA QUE LA GRAFICA DE LA EC. 7.

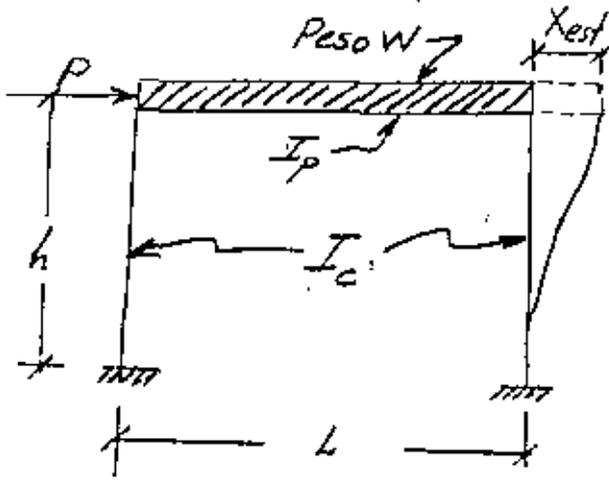


SI DE DICHO REGISTRO SE MIDEN $\ddot{y}(t + T')$ y $\ddot{y}(t)$ SE PUEDE OBTENER L Y, DE LA EC. (11), DESPEJAR A ζ

$$\zeta = \frac{L}{2\pi}$$

Ejemplo

Calcular el periodo natural de vibración de la estructura mostrada en la siguiente figura:



$$K = \frac{P}{X_{est}}$$

$P =$ carga estática
 $X_{est} =$ desplazamiento producido por P

$I_c =$ Momento de inercia de las columnas

$I_p =$ Momento de inercia del sistema de piso

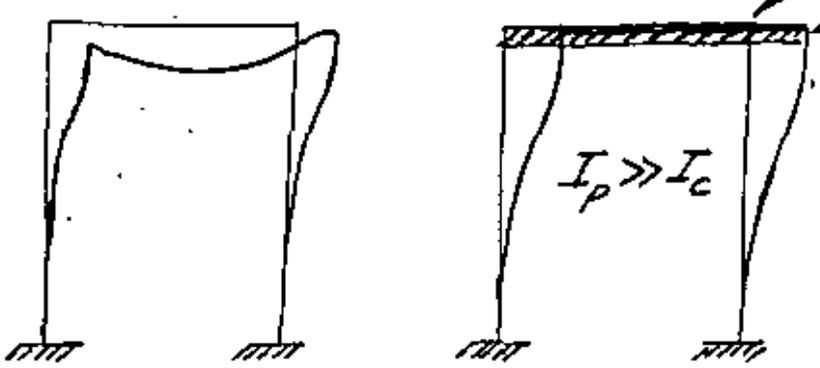
Mediante el análisis estático del marco se encuentra que

$$X_{est} = \frac{Ph^3}{6EI_c} \frac{\frac{3}{2} + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}{6 + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}} \Rightarrow K = \frac{6EI}{h^3} \frac{6 + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}{\frac{3}{2} + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}$$

Periodo natural = $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{gK}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3}{g6EI_c} \frac{\frac{3}{2} + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}{6 + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}}, \text{ en seg}$$

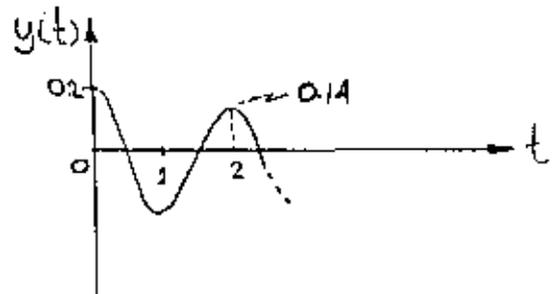
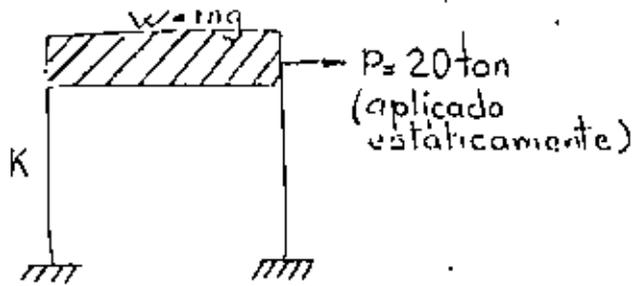
Si $I_p \gg I_c$ ($I_p \rightarrow \infty$), $K = \frac{24EI}{h^3}$



Estructura de CORTANTE: Cuando las deformaciones ocurren principalmente debido a la fuerza cortante de entrepiso.

EJEMPLO

A UNA ESTRUCTURA DE UN PISO SE LE APLICA UNA CARGA HORIZONTAL DE 20 TON EN SU MASA, OBSERVANDOSE UN DESPLAZAMIENTO ESTÁTICO DE 0.2 CM. AL SOLTAR SUBITAMENTE LA FUERZA SE REGISTRA UN PERIODO DE OSCILACION DE 0.2 SEG, Y QUE LA AMPLITUD EN EL SEGUNDO CICLO ES DE 0.14 CM.



CALCULAR ω , ω' , f' , L Y ζ

1. DE $T' \doteq \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = \frac{2\pi\sqrt{W}}{\sqrt{Kg}} = 0.2$ Y $K = \frac{2.0}{0.2} = 100 \frac{\text{TON}}{\text{CM}}$

SE OBTIENE

$$W \doteq T'^2 \text{ Kg}/4\pi^2 = (0.2)^2 \times 100 \times 981/4\pi^2 = \frac{0.04 \times 100 \times 981}{4 \times 9.87}$$

$$W \doteq 99.4 \text{ TON}$$

2. $\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$; $f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ cps}$

3. $L = \ln \frac{0.2}{0.14} \approx \ln 1.43 = 0.357$

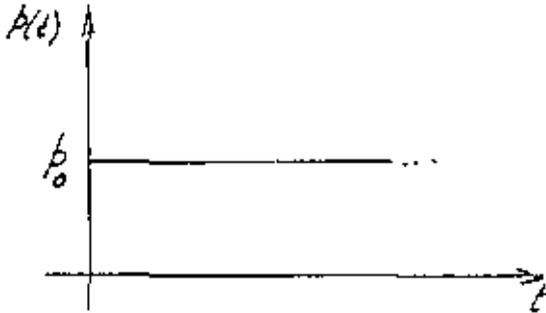
$$\zeta \doteq \frac{L}{2\pi} = \frac{0.357}{2\pi} = 0.0568 \quad \text{O} \quad \zeta = 5.68 \%$$

$$C = \zeta C_{cr} = \zeta 2\sqrt{KM} = 0.1132 \sqrt{100 \times 99.4/981}$$

$$= 1,132 \times 0,318 = 0,36 \text{ TON-SEG/CM}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A LA SIGUIENTE EXCITACION:



CON $C = 0$

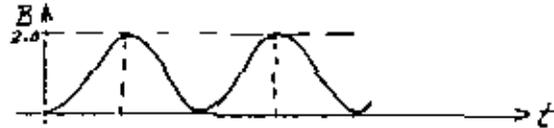
$$m\ddot{x} + kx = p_0$$

$$x = C_1 \operatorname{sen}\omega t + C_2 \operatorname{cos}\omega t + p_0/k$$

SI EN $t = 0$, $x = 0$ Y $\dot{x} = 0$:

$$C_2 = -p_0/k \quad \text{Y} \quad C_1 = 0$$

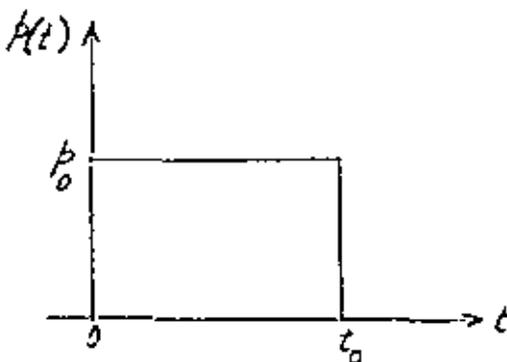
$$\therefore x = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t);$$



$$B = \text{FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA} = \frac{x}{\left(\frac{p_0}{k}\right)} = (1 - \operatorname{cos}\omega t)$$

$$B_{\text{MAX}} = 2, \text{ EN } t = T/2, 3T/2 \dots$$

AHORA, SI LA EXCITACION ES DE DURACION t_0 :



SI $t < t_0$:

$$x = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega p_0}{k} \operatorname{sen}\omega t$$

EN $t = t_0$:

$$x(t_0) = \frac{p_0}{k} (1 - \operatorname{cos}\omega t_0)$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{\omega p_0}{k} \operatorname{sen}\omega t_0$$

CONDICIONES INICIALES PARA $t > t_0$

SI $t > t_0$, $x = A \cos \omega t' + B \sin \omega t'$, CON $t' = t - t_0$

EN $t' = 0$ ($t = t_0$), SE DEBEN CUMPLIR LAS CONDICIONES INICIALES ANTERIORES, LO CUAL CONDUCE A

$$A = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \quad \text{Y} \quad B = \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0$$

POR LO QUE $x = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t' + \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0 \sin \omega t'$

$$= \frac{p_0}{k} \sqrt{(1 - \cos \omega t_0)^2 + \sin^2 \omega t_0} \sin(\omega t' - \theta)$$

O

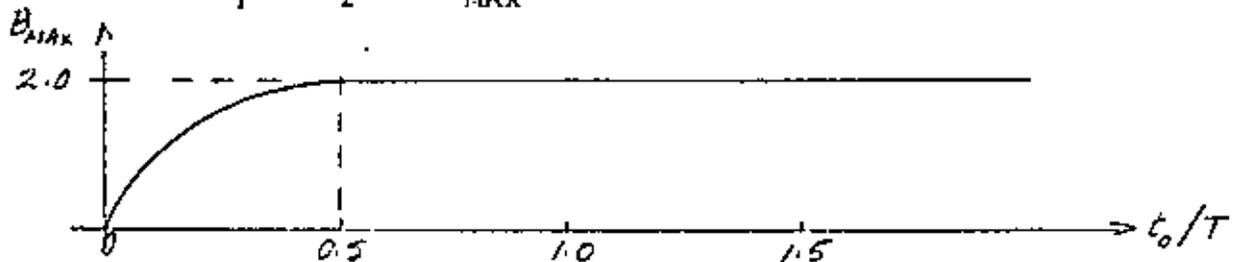
$$x = \frac{p_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos t_0)} \sin(\omega t' - \theta)$$

$$= \frac{p_0}{k} \underbrace{\left(2 \sin \frac{\omega t_0}{2} \right)}_{B} \sin(\omega t' - \theta)$$

B = FACTOR DE AMPLIFICACION

$$B_{\text{MAX}} = 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} = 2 \sin \left(\pi \frac{t_0}{T} \right)$$

CUANDO $\frac{\pi t_0}{T} = \frac{\pi}{2}$, $B_{\text{MAX}} = 2$



EL MAXIMO
OCURRE DES-
PUES DE LA
EXCITACION

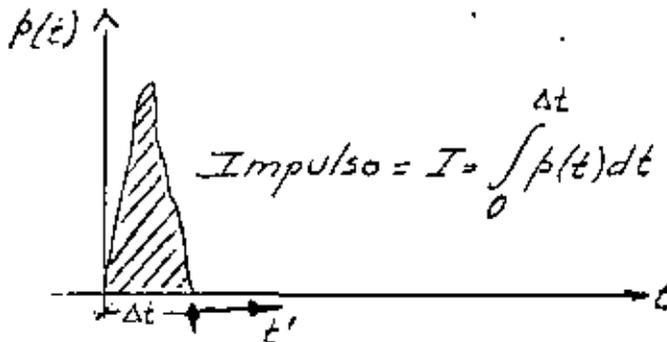
EL MAXIMO OCURRE DURANTE LA EXCITACION

SI t_0/T ES MUY PEQUEÑO, $\sin \frac{\pi t_0}{T} = \pi t_0/T$

$$Y x_{\text{MAX}} = \frac{2p_0}{k} \frac{\pi t_0}{T} = \frac{2p_0}{mk} \frac{\omega t_0}{2} = \frac{p_0 t_0}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

EN DONDE $i = p_0 t_0 = \text{AREA BAJO LA EXCITACION}$

EJEMPLO: EXCITACION DADA POR UN IMPULSO.-SEA UN IMPULSO APLICADO DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO Δt MUY PEQUEÑO, TAL QUE $\Delta t/T \ll 1$:



POR EL PRINCIPIO IMPULSO - MOMENTO SE TIENE QUE

$$I = \int_0^{\Delta t} p(t) dt = m\dot{x}$$

EN DONDE \dot{x} ES LA VELOCIDAD QUE EL IMPULSO LE IMPRIME A LA MASA DEL SISTEMA. DESPUES DE Δt EL SISTEMA QUEDA VIBRANDO LIBREMENTE CON VELOCIDAD INICIAL $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$, MIDIENDO EL TIEMPO EN LA ESCALA DE t' , Y CON DESPLAZAMIENTO INICIAL QUE PUEDE CONSIDERARSE NULO, DEBIDO A QUE EN EL CORTO INTERVALO DE TIEMPO Δt LA MASA ADQUIERE UN DESPLAZAMIENTO DE MAGNITUD DESPRECIABLE. EN TAL CASO LA RESPUESTA RESULTA SER

$$x(t') = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \text{sen}\omega t' = \frac{I}{m\omega} \text{sen}\omega t'$$

SI EL SISTEMA TIENE AMORTIGUAMIENTO,

$$x(t') = \frac{I}{m\omega} e^{-\zeta\omega t'} \text{sen}\omega' t'$$

PRINCIPIO DE HAMILTON

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

DONDE

T = ENERGIA CINETICA TOTAL

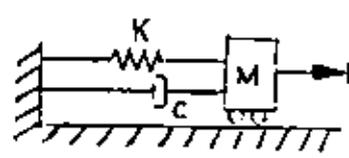
V = ENERGIA POTENCIAL TOTAL, INCLUYENDO ENERGIA DE DEFORMACION Y ENERGIA POTENCIAL DE LAS FUERZAS CONSERVATIVAS

W_{nc} = TRABAJO REALIZADO POR LAS FUERZAS NO CONSERVATIVAS (TALES COMO LAS DE AMORTIGUAMIENTO)

δ = VARIACION TOMADA DURANTE EL INTERVALO DE TIEMPO DE t_1 A t_2

EN ESTE PRINCIPIO SE ASUME QUE LA VARIACION, δx , DEL DESPLAZAMIENTO EN LOS INSTANTES t_1 Y t_2 ES NULO.

EJEMPLO



$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$; $V = \frac{1}{2} kx^2$ (ES LA ENERGIA DE DEFORMACION, UNICAMENTE)

$$\delta W_{nc} = p(t) \delta x - c \dot{x} \delta x$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} (p(t) \delta x - c \dot{x} \delta x) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (m \dot{x} \delta \dot{x} - kx \delta x) dt + \int_{t_1}^{t_2} (p(t) - c \dot{x}) \delta x dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \dot{x} \delta \dot{x} - (c \dot{x} + kx - p(t)) \delta x] dt = 0$$

INTEGRANDO POR PARTES EL PRIMER TÉRMINO DE ESTA INTEGRAL;

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{x} \delta \dot{x} dt = m \dot{x} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

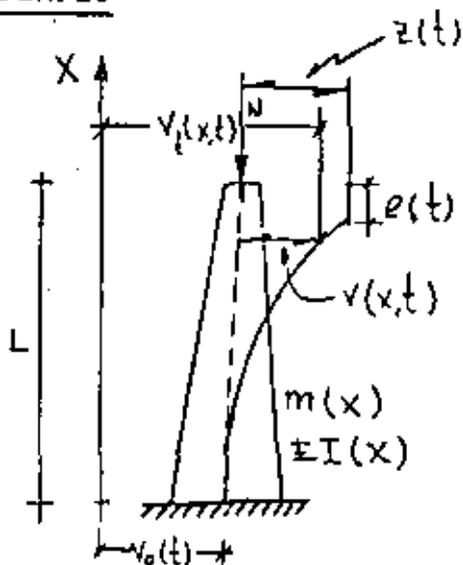
POR LO QUE

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{x} - c \dot{x} - kx + p(t)] \delta x dt = 0$$

PUESTO QUE δx ES ARBITRARIA, LA ECUACION ANTERIOR SE SATISFACE EN GENERAL SOLO SI

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx - p(t) = 0$$

EJEMPLO



$$v(x,t) = \psi(x)z(t)$$

APLICANDO EL PRINCIPIO DE HAMILTON:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\dot{v}_t(x,t))^2 dx$$

ENERGIA POTENCIAL POR DEFORMACION:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) (v''(x,t))^2 dx$$

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [v'(x,t)]^2 dx$$

ENERGIA POTENCIAL DEBIDA A LA FUERZA NORMAL:

$$V_N = -\frac{N}{2} \int_0^L [v'(x,t)]^2 dx$$

EN ESTAS ECUACIONES: $\dot{v} = dv/dt$; $v' = dv/dx$

$$v'' = d^2v/dx^2$$

PUESTO QUE NO HAY FUERZAS DINAMICAS EXTERNAS, Y SI CONSIDERAMOS AMORTIGUAMIENTO NULO, ENTONCES $\delta W_{nc} = 0$, POR LO QUE

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L m(x) \dot{v}_t(x,t) \delta \dot{v}_t dx - \int_0^L EI(x) v''(x,t) \delta v'' dx + \right. \\ \left. + N \int_0^L v'(x,t) \delta v' dx \right] = 0$$

TOMANDO EN CUENTA QUE

$$\dot{v}_t = \dot{v} + \dot{v}_0, \quad v'' = \psi'' Z, \quad v' = \psi' Z, \quad \dot{v} = \dot{\psi} Z$$

$$\delta \dot{v}_t = \delta \dot{v}, \quad \delta v'' = \psi'' \delta Z, \quad \delta v' = \psi' \delta z, \quad \delta \dot{v} = \psi \dot{\delta z}$$

SE OBTIENE

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{z} \delta \dot{z} \int_0^L m(x) \psi^2 \delta x + \delta \dot{z} \dot{v}_0(t) \int_0^L m(x) \psi \delta x - \right. \\ \left. - z \delta z \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 \delta x + Nz \delta z \int_0^L (\psi'')^2 \delta x \right] dt = 0$$

INTEGRANDO POR PARTES LAS PRIMERAS DOS INTEGRALES Y HACIENDO

$$\tilde{m} = \int_0^L m(x) \psi^2 dx = \text{MASA GENERALIZADA}$$

$$\bar{k} = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx = \text{RIGIDEZ GENERALIZADA SIN CONSIDERAR FUERZA NORMAL}$$

$$\bar{k} = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx - N \int_0^L (\psi')^2 dx = \text{RIGIDEZ GENERALIZADA CON N}$$

$$\bar{p}(t) = \text{FUERZA GENERALIZADA EFECTIVA} = - \ddot{v}_0 \int_0^L m(x) \psi dx$$

SE OBTIENE LA ECUACION

$$\int_{t_1}^{t_2} [\ddot{m}z + \tilde{k}z - \tilde{p}(t)] \delta z dt = 0$$

POR LO QUE

$$\ddot{m}z + \tilde{k}z = \tilde{p}(t)$$

CASO PARTICULAR. CONSIDEREMOS $EI = \text{cte}$ Y $m = \text{cte} = \tilde{m}$

SEA $\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$; EN TAL CASO:

$$\tilde{m} = \int_0^L \tilde{m} (\psi)^2 dx = \tilde{m} \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L})^2 dx = 0.228 \tilde{m}L$$

SI $N=0$:

$$\tilde{k} = \int_0^L EI (\psi'')^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L} \right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3}$$

$$\bar{p}(t) = -\ddot{v}_0(t) \int_0^L \tilde{m} \psi dx = -\tilde{m} \ddot{v}_0(t) \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L}) dx = -0.364 \tilde{m} L \ddot{v}_0(t)$$

SI $N \neq 0$:

$$\tilde{k} = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} - N \int_0^L (\psi')^2 dx = N \int_0^L \left(\frac{\pi}{2L} \sin \frac{\pi x}{2L} \right)^2 dx$$

$$\bar{k} = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} - \frac{N\pi^2}{8L}$$

PARA CARGA DE PANDEO: $\frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} - \frac{N_{cr}\pi^2}{8L} = 0 \Rightarrow N_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2}$

CON LO QUE $\bar{k} = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)$ Y LA ECUACION DE EQUILIBRIO

QUEDA EN LA FORMA:

$$0.228 \bar{m}L\ddot{z}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right) z(t) = 0.364 \bar{m}L\ddot{v}_o(t)$$

LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL CORRESPONDIENTE ES

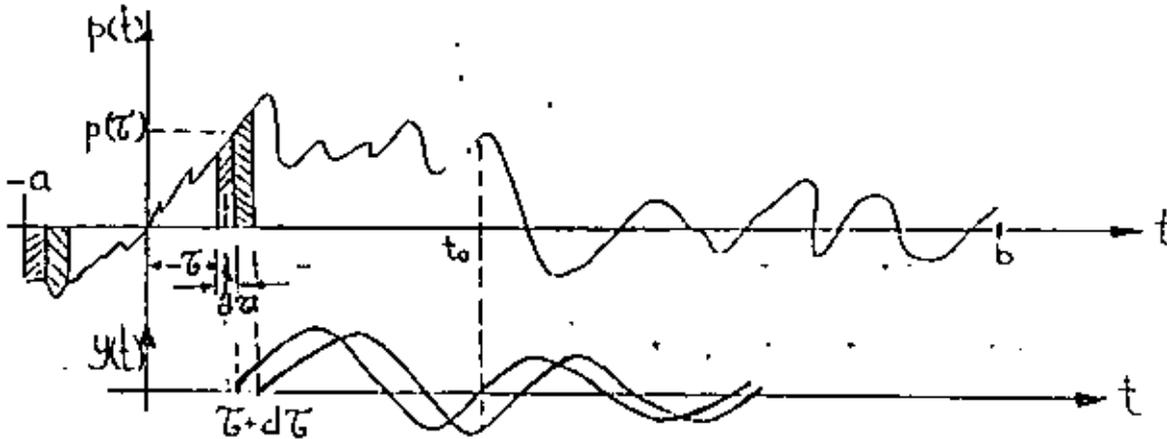
$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^4 EI \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)}{7.296 \bar{m}L^4}}$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS

A. FUERZA EXTERNA

VEAMOS PRIMERO EL CASO EN QUE EXISTE $p(t)$ Y QUE $\ddot{x}_0(t) = 0$,

SIENDO $p(t)$ ARBITRARIA



PUESTO QUE $d\tau \ll T$, LA FUERZA APLICADA EN $t = \tau$ PRODUCIRA UN INCREMENTO INSTANTANEO EN LA VELOCIDAD DE LA MASA IGUAL A

$$\dot{y} = \frac{p(\tau) d\tau}{M}$$

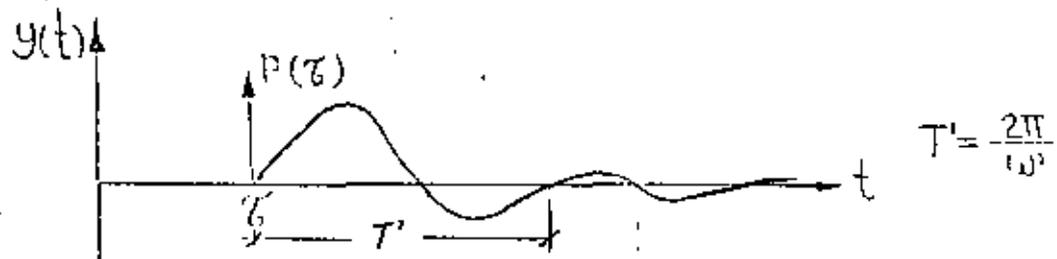
Y UN INCREMENTO INSTANTANEO NULO EN EL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR, $y=0$. TOMANDO ESTOS INCREMENTOS COMO CONDICIONES INICIALES EN $t = \tau$, LA EC. 5 DA COMO RESULTADO

$$y(t) = \frac{p(\tau) d\tau}{M\omega'} \text{ sen } \omega'(t-\tau) e^{-h(t-\tau)} ; t \geq \tau$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES LINEAL ES POSIBLE SUPERPONER LOS EFECTOS OCASIONADOS POR LOS IMPULSOS APLICADOS EN CADA τ QUE HAYAN OCURRIDO ANTES DEL INSTANTE t DE INTERES; ES DECIR,

$$y(t) = \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

LA FUNCION $\frac{1}{M\omega'} e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau)$, QUE ES LA RESPUESTA A UN IMPULSO INSTANTANEO UNITARIO DE FUERZA, SE LE CONOCE COMO FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.



LA SOLUCION DADA EN LA EC. (12) SE DENOMINA INTEGRAL DE DUHAMEL. ESTA CONSTITUYE LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO; LA SOLUCION GENERAL ES:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) + \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau$$

EN DONDE A Y θ DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD, $y(0)$ Y $\dot{y}(0)$, RESPECTIVAMENTE. EN GENERAL LA PARTE DE LA RESPUESTA DADA POR LA SOLUCION PARTICULAR ES LA MAS IMPORTANTE, YA QUE LA OTRA PARTE SE AMORTIGUA RAPIDAMENTE.

B. MOVIMIENTO DEL SUELO

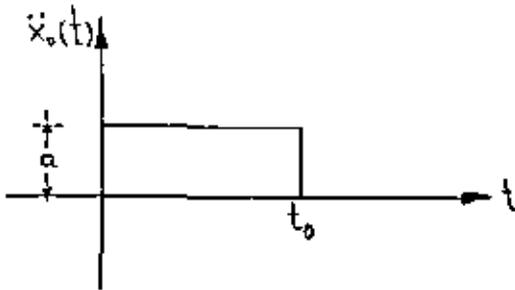
PARA ESCRIBIR LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO PARA EL CASO DE VIBRACION FORZADA POR MOVIMIENTO DE LA BASE DE LA ESTRUCTURA, BASTA CAMBIAR $p(\tau)/M$ DE LA EC. (12) POR $-\ddot{x}_0$, YA QUE EN DICHA ECUACION APARECE EN EL MIEMBRO DERECHO $p(t)/M$ CUANDO LA EXCITACION ES $P(t)$ Y APARECE $-\ddot{x}_0$ CUANDO LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DEL SUELO. EN ESTE CASO

LA SOLUCION PARTICULAR ES, ENTONCES

$$y(t) = \frac{-1}{\omega^2} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-h(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega'(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUANDO LA EXCITACION ES LA SIGUIENTE:



$$\zeta = 0$$

$$\ddot{x}_0(t) = a, \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$\ddot{x}_0(t) = 0, \text{ SI } t < 0 \text{ Ó } t > t_0$$

CONSIDERESE QUE $y(0)=0$ Y $\dot{y}(0)=0$. PUESTO QUE LAS CONDICIONES INICIALES SON NULAS SE TIENE QUE $A=0$. (UTILIZANDO LA EC. (13) Y LA SOLUCION PARTICULAR QUE SIGUE, EC. (A)):

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-1}{\omega^2} \int_{-\infty}^t a \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau = \frac{-a}{\omega^2} \int_0^t \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad \text{SI } 0 \leq t \leq t_0 \end{aligned} \quad (A)$$

PARA FINES DE DISEÑO ESTRUCTURAL ES IMPORTANTE CONOCER LA RESPUESTA MAXIMA; ESTA OCURRE CUANDO $\cos \omega t = -1$, O SEA, CUANDO

$$\omega t = \pi \quad \text{O} \quad t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2}$$

Y VALE

$$\text{MAX} (|y(t)|) = \frac{2a}{\omega^2} = \frac{a}{2\pi^2} T^2, \text{ SI } 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0 \text{ O } 0 \leq T \leq 2t_0$$

PARA $t > t_0$, O SEA, PARA $T/2 > t_0$ ES NECESARIO OBTENER LA RESPUESTA EN VIBRACION LIBRE CON LAS CONDICIONES INICIALES DE VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO CORRESPONDIENTES A $t = t_0$:

$$y(t_0) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t_0) ; \quad \dot{y}(t_0) = \frac{-a}{\omega} \text{sen} \omega t_0$$

APLICANDO LAS ECS. (5) Y (6) OBTENEMOS:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-a}{\omega^2} [\text{sen} \omega t_0 \text{sen} \omega t' - (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t'] \\ &= \frac{-a}{\omega^2} \sqrt{\text{sen}^2 \omega t_0 + (1 - \cos \omega t_0)^2} \text{sen} (\omega t' - \vartheta) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{-2a}{\omega^2} \frac{\text{sen} \omega t_0}{2} \text{sen} (\omega t' - \vartheta)$$

$$\text{DONDE } t' = t - t_0 \text{ Y } \vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos \omega t_0}{\text{sen} \omega t_0} \right)$$

EL VALOR MAXIMO DE LA RESPUESTA EN ESTE INTERVALO ES

$$\text{MAX} (|y(t)|) = \frac{2a}{\omega^2} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|, \text{ SI } t > t_0 \text{ O } T > 2t_0$$

EXCITACION ARMONICA

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO EN QUE LA ESTRUCTURA ES EXCITADA POR LA FUERZA ARMONICA

$$p(t) = p_0 \operatorname{sen} \Omega t$$

DE DURACION INDEFINIDA.

LA SOLUCION DE ESTE PROBLEMA SE PUEDE ENCONTRAR SUSTITUYENDO A $p(t) = p_0 \operatorname{sen} \Omega t$ EN LA INTEGRAL DE DUHAMEL Y OBTENIENDO SU SOLUCION. SIN EMBARGO, EL RESULTADO LO OBTENDREMOS DE LA CONSIDERACION DE QUE PARA QUE EL MIEMBRO DERECHO DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO APAREZCA UN TERMINO ARMONICO ES NECESARIO QUE EN EL IZQUIERDO SE TENGAN COMBINACIONES DE TERMINOS TAMBIEN ARMONICOS. CONSIDEREMOS, POR LO TANTO, LA SOLUCION

$$y(t) = A \operatorname{sen} \Omega t + B \operatorname{cos} \Omega t \quad (14)$$

Y DETERMINEMOS LOS VALORES QUE DEBEN TENER A Y B PARA SATISFACER LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO, PARA LO CUAL HAY QUE SUSTITUIR A $y(t)$, $\dot{y}(t)$ Y $\ddot{y}(t)$ EN LA ECUACION DIFERENCIAL. HACIENDO ESTO Y FACTORIZANDO:

$$\begin{aligned} (-A\Omega^2 - 2h\Omega B + \omega^2 A) \operatorname{sen} \Omega t + \\ (-B\Omega^2 + 2hA\Omega + \omega^2 B) \operatorname{cos} \Omega t = \frac{P_0}{M} \operatorname{sen} \Omega t + 0 \times \operatorname{cos} \Omega t \end{aligned}$$

PARA QUE ESTA IGUALDAD SE CUMPLA SE REQUIERE QUE

$$\begin{aligned} -A\Omega^2 - 2h\Omega B + \omega^2 A &= \frac{P_0}{M} \\ -B\Omega^2 + 2hA\Omega + \omega^2 B &= 0 \end{aligned}$$

RESOLVIENDO ESTE SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTIENE:

$$A = \frac{\frac{P_0}{M} (\Omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

$$B = \frac{-2h\Omega \frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

SUSTITUYENDO A Y B EN LA EC. (14):

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2} ((\Omega^2 - \omega^2) \operatorname{sen} \Omega t - 2h\Omega \operatorname{cos} \Omega t) \quad (15)$$

O, TAMBIEN

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}} \operatorname{sen}(\Omega t - \vartheta) \quad (16)$$

$$\text{EN DONDE } \vartheta = \operatorname{ANG} \operatorname{TAN} \left(\frac{-B}{A} \right) = \operatorname{TAN}^{-1} \frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \operatorname{ANGULO} \text{ DE FASE} \quad (17)$$

DIVIDIENDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LAS ECS. (16) Y (17) ENTRE ω^2 SE OBTIENE:

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + (2\zeta)^2}} \operatorname{sen}(\Omega t - \vartheta) \quad (18)$$

$$\vartheta = \operatorname{TAN}^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad (19)$$

SI SE TIENE EXCITACION ARMONICA EN LA BASE DE LA ESTRUCTURA

$x_0(t) = a \sin \Omega t$, O SEA, $\ddot{x}_0 = a \Omega^2 \sin \Omega t$, BASTA CAMBIAR A p_0/M EN LA EC. (16) POR $-a \Omega^2$; HACIENDO ESTO SE OBTIENE

$$y(t) = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} a \sin(\Omega t - \phi) \quad (20)$$

FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA DE DESPL. = $B_d = \text{MAX} \left| \frac{y(t)}{a} \right|$

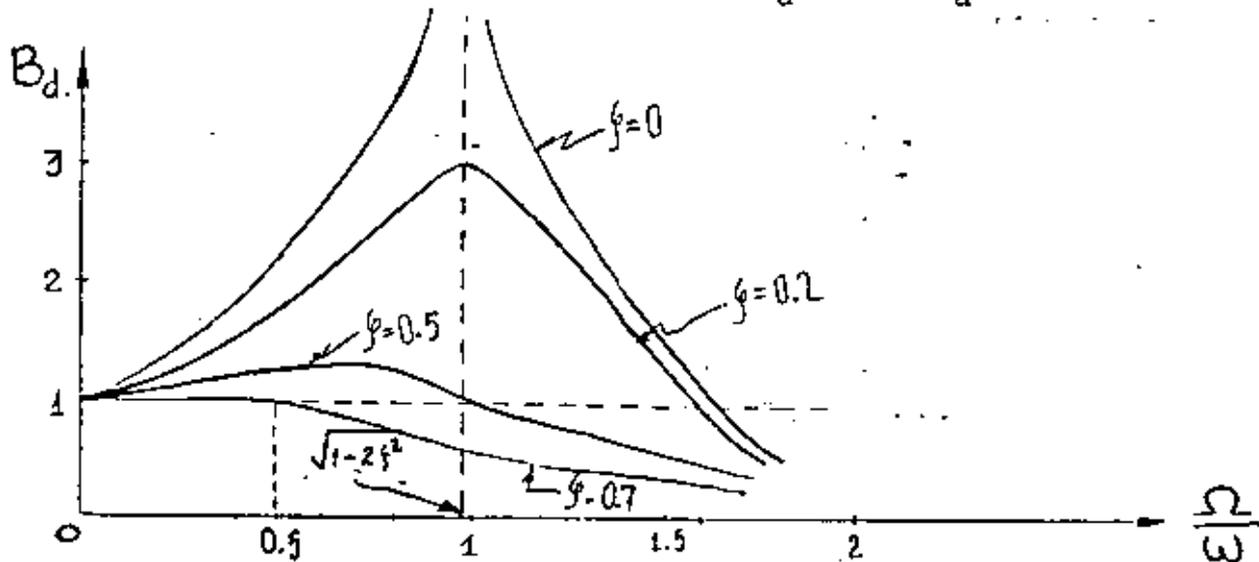


FIG. 1. CURVAS DE AMPLIFICACION DINAMICA PARA EL CASO DE FUERZA EXTERNA

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} \quad (21)$$

LOS FACTORES DE AMPLIFICACION DINAMICA DE VELOCIDAD Y ACELERACION SE SE PUEDEN OBTENER DERIVANDO RESPECTO A t LA EC. (16) O LA (20), SEGUN SEA EL CASO. LOS RESULTADOS SON, RESPECTIVAMENTE,.

$$\text{MAX} \left| \frac{\dot{y}(t)}{a\omega} \right| = B_v = \frac{\Omega}{\omega} B_d \quad \text{Y} \quad B_a = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 B_d = \text{MAX} \left| \frac{\ddot{y}(t)}{a\omega^2} \right| \quad (22)$$

EJEMPLO

CON UNA MAQUINA VIBRATORIA PORTATIL QUE PRODUCE FUERZAS ARMONICAS SE PROBO UNA ESTRUCTURA, AJUSTANDO LA MAQUINA EN LAS FRECUENCIAS $\Omega_1 = 16 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$ Y $\Omega_2 = 25 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$, CON UNA FUERZA MAXIMA DE 500 LB EN CADA CASO. LAS AMPLITUDES Y ANGULOS DE FASE DE LA RESPUESTA QUE SE MIDIERON FUERON:

$$\rho_1 = 7.2 \times 10^{-3} \text{ in}, \theta_1 = 15^\circ (\cos\theta_1 = 0.966 ; \text{sen}\theta_1 = 0.259)$$

$$\rho_2 = 14.5 \times 10^{-3} \text{ in}, \theta_2 = 55^\circ (\cos\theta_2 = 0.574; \text{sen}\theta_2 = 0.819)$$

EVALUAR LAS PROPIEDADES DINAMICAS DEL SISTEMA.

HACIENDO:

$$\rho_i = \frac{P_o}{k} B_{d_i} = \frac{P_o}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \underbrace{\left\{ \frac{1}{1 + [2c\beta/(1-\beta^2)]^2} \right\}^{1/2}}_{\cos\theta_i}$$

$$\rho_i = \frac{P_o}{k} \frac{\cos\theta_i}{1 - \beta^2} ; \beta = \Omega/\omega$$

O

$$k - k\beta^2 = \frac{P_o \cos\theta_i}{\rho_i} = k - \Omega^2 m \quad (23)$$

SUSTITUYENDO LOS VALORES EXPERIMENTALES DE LAS DOS PRUEBAS:

$$\left. \begin{aligned} k - (16)^2 m &= \frac{500 (0.966)}{7.2 \times 10^{-3}} \\ k - (25)^2 m &= \frac{500 (0.574)}{14.5 \times 10^{-3}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 100\,000 \frac{\text{lb}}{\text{in}} \\ m &= 128.5 \frac{\text{lb SEG}^2}{\text{in}} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} = 27.9 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}} \end{aligned}$$

USANDO LAS ECS. (17) Y (23) SE OBTIENE:

$$\zeta = \frac{p_0 \operatorname{sen} \theta_i}{2\beta_1 k_{p_1}} ; \text{ DE DONDE } \zeta = \frac{500 (0.259)}{2 \frac{16}{27.9} \cdot 100\,000 (7.2 \times 10^{-3})} = 15.7\%$$

RESONANCIA

CUANDO LA EXCITACION TIENE FRECUENCIA IGUAL A LA NATURAL DEL SISTEMA, SE DICE QUE SE PRESENTA EL CASO DE RESONANCIA. DE LA EC. (20) ES EVIDENTE QUE SI $\beta = \Omega/\omega = 1$ SE TIENE

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2\zeta}}_{B_d} a \operatorname{sen}(\Omega t - \theta)$$

$O(B_d)_{\text{res}} = \frac{1}{2\zeta}$ EN CASO DE MOVIMIENTO DEL SUELO Y DE FUERZA EXTERNA

SIN EMBARGO, AUNQUE ESTA RESPUESTA ES CASI IGUAL A LA MAXIMA, ESTA OCURRE CUANDO $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$. EN EL CASO DE $\dot{y}(t)$ Y $\ddot{y}(t)$, EL MAXIMO OCURRE, RESPECTIVAMENTE, CUANDO

$$\Omega = \omega \quad \text{Y} \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \quad \text{SI} \quad \zeta \leq 20\%, \text{ LOS VALORES DE ESTAS } \Omega \text{ NO}$$

DIFIEREN EN MAS DE 2%.

EL MAXIMO VALOR DE B_d (PARA $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$) ES

$$(B_d)_{\text{MAX}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{O} \quad (B_d)_{\text{MAX}} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

SI SE TIENE FUERZA EXTERNA O MOVIMIENTO DEL SUELO, RESPECTIVAMENTE.

SE OBSERVA EN ESTAS ECUACIONES QUE SI $\zeta = 0$, $(B_d)_{\text{MAX}} = \infty$.

SI SE ANALIZA LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO PARA EL CASO DE CONDICIONES INICIALES NULAS Y $\beta=1$ SE TIENE QUE:

$$y(t) = e^{-ht} (A \operatorname{sen} \omega' t + B \operatorname{cos} \omega' t) - \frac{p_0}{k} \frac{\operatorname{cos} \omega t}{2\zeta}$$

$$y(0) = B - p_0/(2\zeta k) = 0$$

DE DONDE, HACIENDO $y(0)=0$ Y $\dot{y}(0)=0$, SE OBTIENEN:

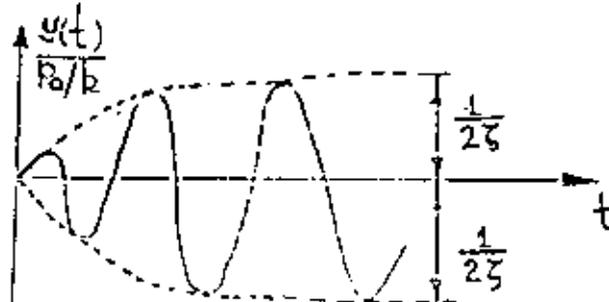
$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega'} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} ; B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta}$$

POR LO QUE

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \frac{p_0}{k} [e^{-ht} (\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega' t + \operatorname{cos} \omega' t) - \operatorname{cos} \omega t]$$

PARA AMORTIGUAMIENTOS PEQUEÑOS:

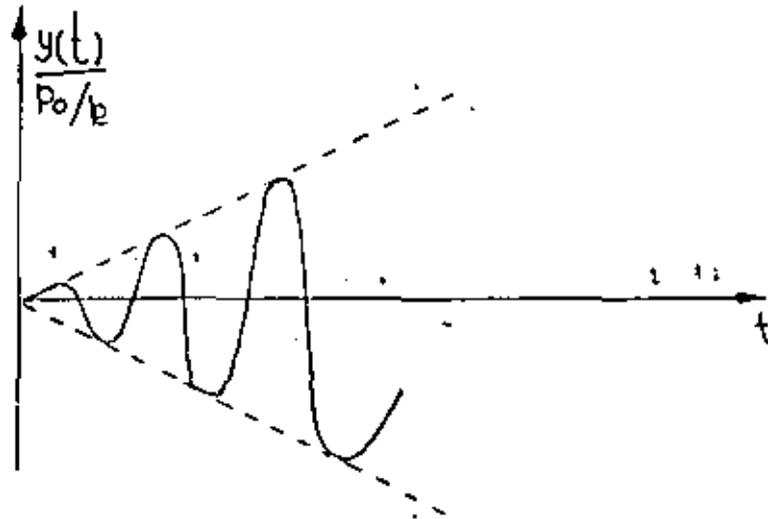
$$\frac{y(t)}{p_0/k} \doteq \frac{1}{2\zeta} (e^{-ht} - 1) \operatorname{cos} \omega t$$



SI $\zeta=0$, APLICANDO LA REGLA DE L'HOSPITAL, SE OBTIENE:

$$\frac{y(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \omega t - \omega t \operatorname{cos} \omega t)$$

O SEA, EL MAXIMO DE LA RESPUESTA TIENDE A INFINITO GRADUALMENTE.



CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS REGISTRADORES DE SISMOS.

SI LA ACELERACION DE LA BASE DE UN INSTRUMENTO ES ARMONICA, DADA POR LA ECUACION

$$\ddot{x}_0(t) = a \operatorname{sen} \Omega t$$

EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER

$$\bar{B}_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{B_d}{\omega^2}$$

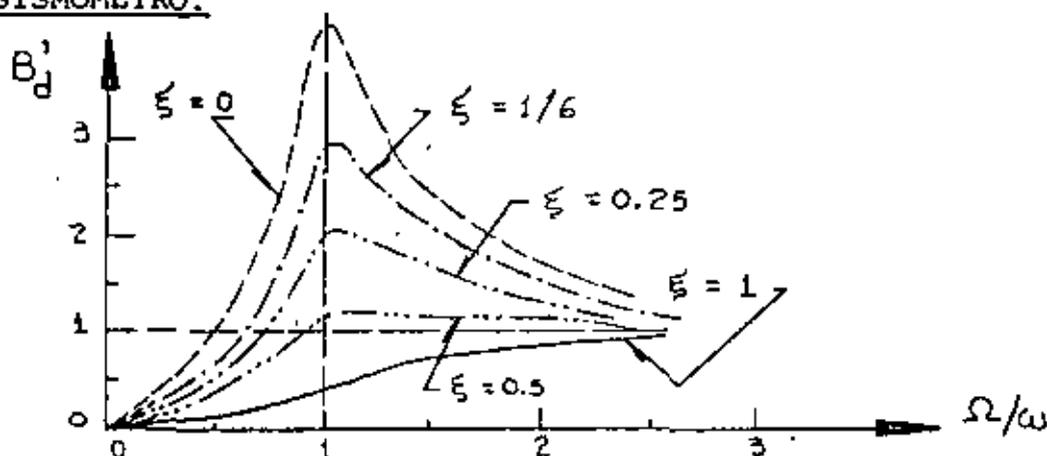
PUESTO QUE LA FIG I CORRESPONDE A B_d , Y EN ELLA SE OBSERVA QUE PARA $\zeta = 0.7$ SE TIENE $B_d \approx 1$ PARA $0 \leq \Omega/\omega \leq 0.6$, SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA DE UN SISTEMA ES PROPORCIONAL A LA ACELERACION DE SU BASE, SI ESTE TIENE AMORTIGUAMIENTO DEL 70% Y SI LAS EXCITACIONES QUE SE TRATAN DE REGISTRAR TIENEN FRECUENCIAS INFERIORES AL 60% DE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA. SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO RESULTA SER UN ACELEROMETRO.

EN INGENIERIA SISMICA LA MAXIMA FRECUENCIA DE INTERES ES DEL ORDEN DE 10 CPS (T = 0.1 SEG), POR LO QUE LOS ACELEROMETROS TIENEN FRECUENCIA NATURAL DE 16 A 20 CPS.

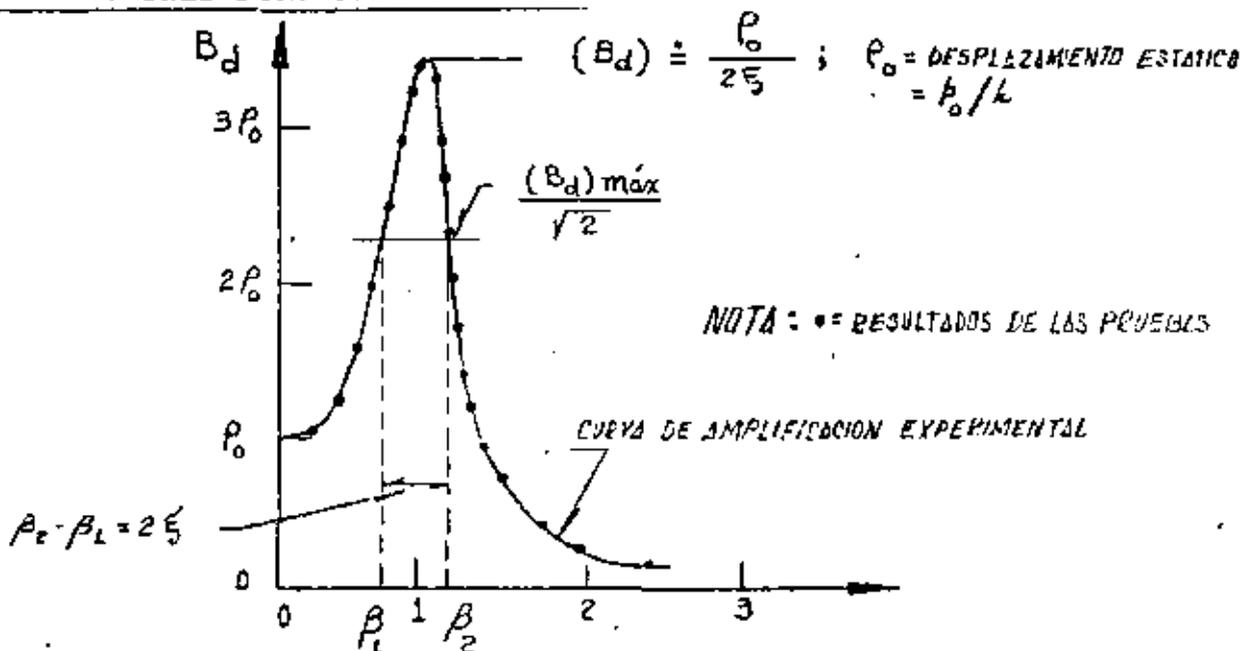
POR OTRA PARTE SI LA EXCITACION DEL SUELO ES $x_0 = a \text{ sen} \Omega t$, O SEA, $\ddot{x} = -a \Omega^2 \text{ sen} \Omega t$, ENTONCES EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER EL SEÑALADO EN LA ECUACION (20), ES DECIR,

$$B'_d = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1-(\Omega/\omega)^2)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}}$$

EN LA GRAFICA CORRESPONDIENTE SE OBSERVA QUE SI $\zeta=0.5$ Y $\Omega > \omega$ EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA ES PROPORCIONAL AL DEL SUELO; SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO, CONSTITUYE UN DESPLAZOMETRO, CONOCIDO TAMBIEN COMO SISMOMETRO.



DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL AMORTIGUAMIENTO DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE VIBRACIONES FORZADAS ARMONICAS

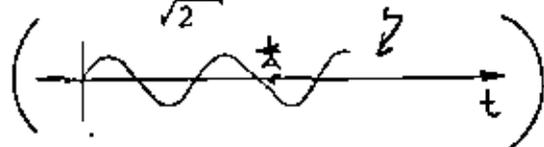


SI SE DETERMINA B_d EXPERIMENTALMENTE MEDIANTE UNA SERIE DE PRUEBAS DE VIBRACION FORZADA CON FUERZAS ARMONICAS, Y ADEMAS SE DETERMINA ρ_0 , ENTONCES

$$\zeta \doteq \frac{\rho_0}{2(B_d)_{\text{MAX}}} \quad (24)$$

OTRO METODO PARA DETERMINAR ζ CON BASE EN LA CURVA EXPERIMENTAL DE B_d SE CONOCE CON EL NOMBRE DE "MÉTODO DEL ANCHO DE BANDA DE LA MITAD DE POTENCIA". ESTE SE BASA EN DETERMINAR LAS FRECUENCIAS QUE CORRESPONDEN AL VALOR rms DE LA AMPLITUD EN RESONANCIA, EL CUAL VALE

$(B_d)_{\text{MAX}}/\sqrt{2}$; SEAN β_2 Y β_1 ESTAS FRECUENCIAS. DE LA ECUACION DE B_d SE OBTIENE:

$$\text{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \text{RAIZ CUADRADA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO}$$


$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_0}{2\zeta} = \rho_0 / \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

ELEVANDO AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS:

$$\frac{1}{8\zeta^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$\text{DE DONDE } \beta^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2}$$

DE AQUI, DESPRECIANDO EL TERMINO ζ^2 DEL RADICAL, SE OBTIENE

$$\beta_1^2 \doteq 1 - 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_1 \doteq 1 - \zeta - \zeta^2$$

$$\beta_2^2 \doteq 1 + 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_2 \doteq 1 + \zeta - \zeta^2$$

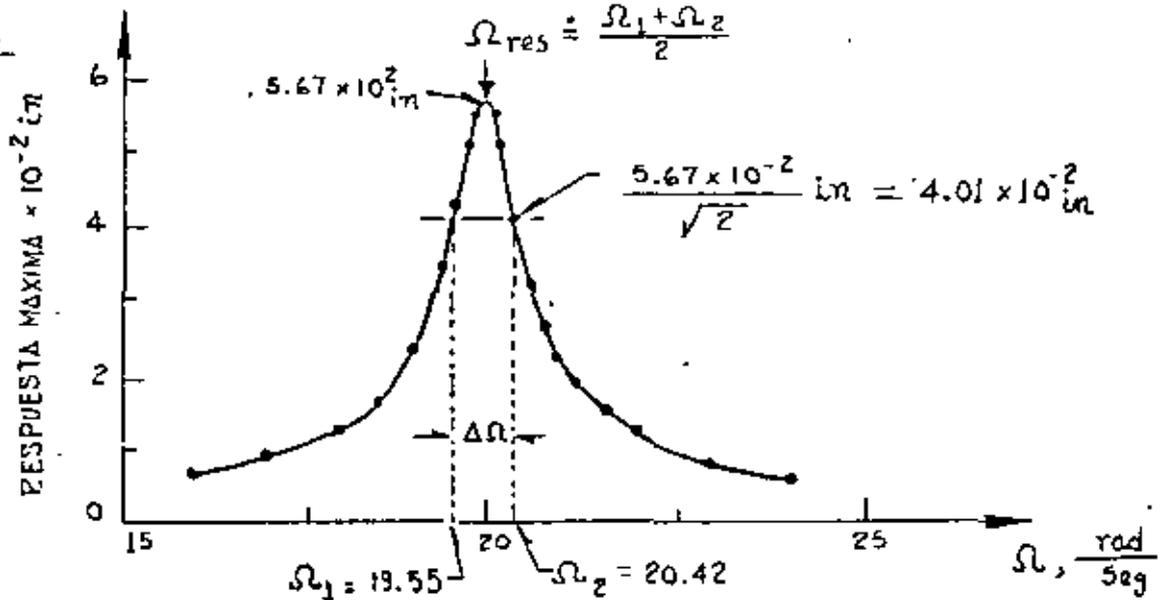
$$\beta_2 - \beta_1 \doteq 2\zeta$$

DE DONDE

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

(25)

EJEMPLO



DE LA EC (25)

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 0.87 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_{\text{res}}} - \frac{\Omega_1}{\Omega_{\text{res}}}}{2} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1} = \frac{0.87}{39.97} = 2.18\%$$

METODO NUMERICO B DE NEWMARK PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS.

EL METODO QUE A CONTINUACION SE DESCRIBE ES ADAPTABLE A SISTEMAS NO LINEALES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

PROCEDIMIENTO:

1. SEAN $y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i$, CONOCIDOS EN EL INSTANTE t_i , Y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. SUPONGAMOS EL VALOR DE \ddot{y}_{i+1}
2. CALCULEMOS $\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})\Delta t/2$ (26)

3. CALCULEMOS $y_{i+1} \doteq y_i + \dot{y}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{y}_{i+1} (\Delta t)$ (27)

4. CALCULEMOS UNA NUEVA APROXIMACION PARA \ddot{y}_{i+1} A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

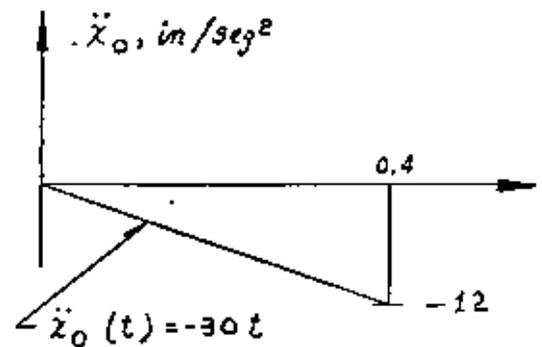
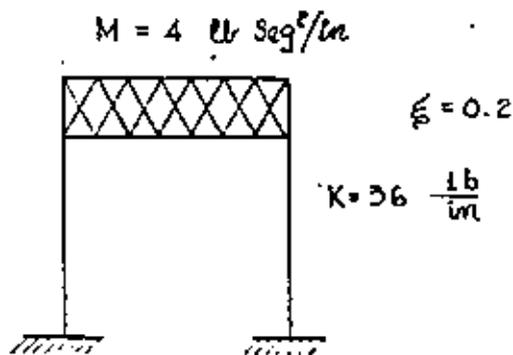
$$\ddot{y}_{i+1} \doteq -2\zeta\omega\dot{y}_{i+1} - \omega^2(y_{i+1} - y_{est}) - (\ddot{x}_o)_{i+1} \quad (28)$$

DONDE $y_{est} = p(t_{i+1})/k$

5. REPITAMOS LAS ETAPAS 2 A 4 EMPEZANDO CON EL NUEVO VALOR \ddot{y}_{i+1} HASTA QUE EN DOS CICLOS CONSECUTIVOS SE TENGAN VALORES DE \ddot{y}_{i+1} CASI IGUALES.

SE RECOMIENDAN VALORES DE β DE 1/6 A 1/4 Y $\Delta t \doteq 0.1T$ PARA ASEGURAR CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.

EJEMPLO



CALCULAR LA RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA APLICANDO EL METODO B DE NEWMARK

$$\omega = \sqrt{K/M} = \sqrt{36/4} = 3 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$h = \zeta\omega = 0.2 \times 3 = 0.6 \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{3} = 2.09 \text{ SEG}$$

TOMAREMOS $\beta = 0.2$ Y $\Delta t = 0.2$ ($\approx 0.1T$) SUSTITUYENDO EN LAS ECS. (26), (27) Y (28):

$$\dot{y}_{i+1} \approx \dot{y}_i + 0.1(\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})$$

$$y_{i+1} \approx y_i + 0.2\dot{y}_i + 0.012\ddot{y}_i + 0.008\ddot{y}_{i+1}$$

$$\ddot{y}_{i+1} = -1.2\ddot{y}_{i+1} - 9y_{i+1} - (\ddot{x}_0)_{i+1}$$

EN $t=0$ SABEMOS QUE SE TIENE $y=0$, $\dot{y}=0$ Y $\ddot{y}=0$

EN $t=0 + \Delta t = 0.2$ SEG; SUPONGAMOS $\ddot{y}_{i+1} = 5.0 \text{ IN/SEG}^2$; $\ddot{x}_0 = -6$

$$y_i = 0$$

$$\dot{y}_i = 0$$

$$\begin{array}{l}
 \text{1º CICLO} \\
 \text{2º CICLO}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \dot{Y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5) = 0.5 ; Y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5 = 0.04 \\
 \ddot{Y}_{i+1} = -1.2 \times 0.5 - 9 \times 0.04 - (-30 \times 0.2) = 5.04 \\
 \\
 \dot{Y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5.04) = 0.504 ; Y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5.04 = \\
 = 0.04032 \\
 \ddot{Y}_{i+1} = -1.2 \times 0.504 - 9 \times 0.4032 - (-6) = 5.033 \text{ IN/SEG}^2
 \end{array} \right.$$

ESTOS CALCULOS SE PUEDEN ORGANIZAR MEDIANTE UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

t SEG	x_0 IN/SEG ²	\ddot{Y} ING/SEG ²	\dot{Y} ING/SEG	Y IN
0	0	0	0	0
0.2	-6	5.0000	0.5000	0.04000
		5.040	0.5040	0.04032
		5.033	0.5033	0.04026
		5.034	0.5034	0.04027
0.4	-12	8.0000	1.8078	0.26536
		7.442	1.7510	0.26079
		7.534	1.7602	0.26163
		7.533	1.7601	0.26162
0.4 ⁺	0	-4.467	1.7601	0.26162
0.6	0	-6.000	0.7134	0.51204
		-5.464	0.7670	0.51633
		-5.550	0.7584	0.51564
		.	.	.
		.	.	.

EN $t = 0.2 + \Delta t = 0.4$ SEG: $x_0 = -30 \times 0.4 = -12$

$\ddot{Y}_1 = 5.034, \dot{Y}_1 = 0.5034, Y_1 = 0.04027$

SUPONIENDO $\ddot{y}_{i+1} = 8.000$ SE OBTIENE:

$$1^{\text{er}} \text{ CICLO } \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0.5034 + 0.1 (5.034 + 8.000) = 1.8068 \\ y_{i+1} = 0.04027 + 0.2 \times 0.5034 + 0.012 \times 5.034 + 0.008 \times 8 = 0.26536 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 1.8068 - 9 \times 0.26536 - (-12) = 7.442 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right.$$

EN $t = 0.4^+$ SOLO CAMBIA \ddot{y} : $\ddot{y}_{0.4+} = \ddot{y}_{0.4-} + \ddot{x}_0 = 7.533 - 12 = -4.467$

EN $t = 0.6$, $\ddot{y}_i = -4.467$) $\dot{y}_i = 1.7601$; $y = 0.26162$

ESPECTROS DE RESPUESTA ESTRUCTURAL

RECORDEMOS QUE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS CON EXCITACION SISMICA ES

$$y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(t-\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega'(t-\tau) d\tau$$

DE LA OBSERVACION DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO, $y(t)$, ES FUNCION DEL TIEMPO, t , EL AMORTIGUAMIENTO, ζ , Y LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, ω (O DEL PERIODO NATURAL):

$$y(t) = f(t, \omega, \zeta)$$

FIJEMOS UN VALOR DE ζ , POR EJEMPLO $\zeta=0$, Y LUEGO ASIGNEMOS VALORES A ω , POR EJEMPLO 0.1, 0.2, 0.3, ETC, HASTA CUBRIR UN INTERVALO DE INTERES, Y PARA CADA CASO CALCULEMOS LA FUNCION RESULTANTE DE APLICAR LA ECUACION ANTERIOR. CON ESTA OBTENEMOS

$$y_1(t) = f_1(t, 0.1, 0) = f_1(t)$$

$$y_2(t) = f_2(t, 0.2, 0) = f_2(t)$$

$$y_3(t) = f_3(t, 0.2, 0) = f_3(t)$$

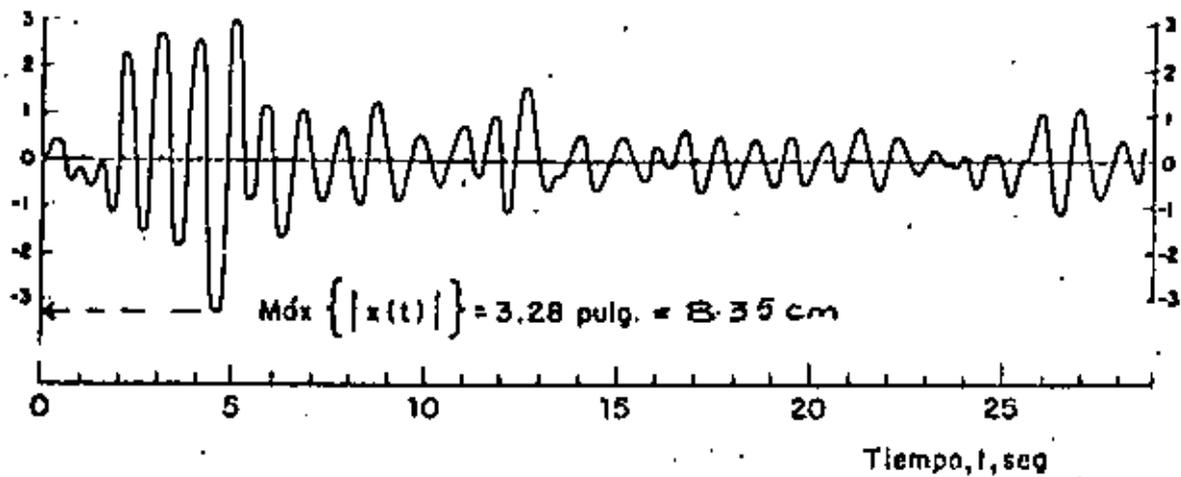
$$\text{SEAN } D_1 = \text{MAX} |y_1(t)| = D(\omega_1, \zeta)$$

$$D_2 = \text{MAX} |y_2(t)| = D(\omega_2, \zeta)$$

$$D_3 = \text{MAX} |y_3(t)| = D(\omega_3, \zeta)$$

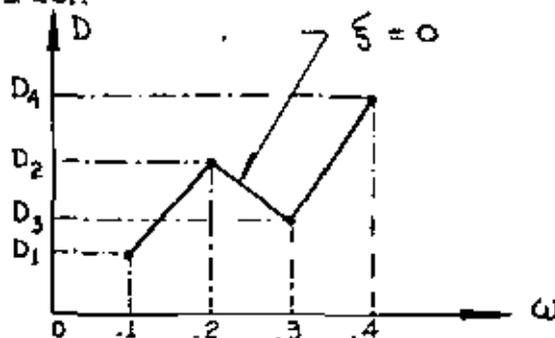
•
•
•

Desplazamiento relativo,
 $X(t)$, pulg



Respuesta de un sistema amortiguado simple
 con $T_1 = 1.0 \text{ seg}$ y $\zeta = 0.10$, al sismo de
 El Centro, Cal., 1940, componente N-S

EN TAL CASO, LA GRAFICA



ES EL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTOS PARA $\zeta = 0$. SI ESTE PROCESO DE REPITE FIJANDO OTROS VALORES DE ζ , POR EJEMPLO, $\zeta = 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$, ETC, SE OBTENDRAN LOS ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS CORRESPONDIENTES.

DE MANERA ANALOGA SE PUEDEN OBTENER LOS ESPECTROS PARA OTROS TIPOS DE RESPUESTA, TALES COMO VELOCIDAD RELATIVA, ACELERACIÓN ABSOLUTA, ETC, QUE SON, RESPECTIVAMENTE

$$V = \text{MAX} |\dot{y}(t)|_{\zeta, \omega} ; A = \text{MAX} |\ddot{x}(t)|_{\zeta, \omega} \quad (29)$$

PSEUDO - ESPECTROS

ESTADISTICAMENTE SE HA ENCONTRADO QUE

$$S_V = \omega D \doteq V \quad (30)$$

$$S_A = \omega^2 D \doteq A \doteq \omega V \quad (31)$$

A S_V Y S_A SE LES LLAMA PSEUDOESPECTROS.

DE LA EC. (30): $\log D = \log V - \log \omega = \log V + \log T - \log 2\pi$

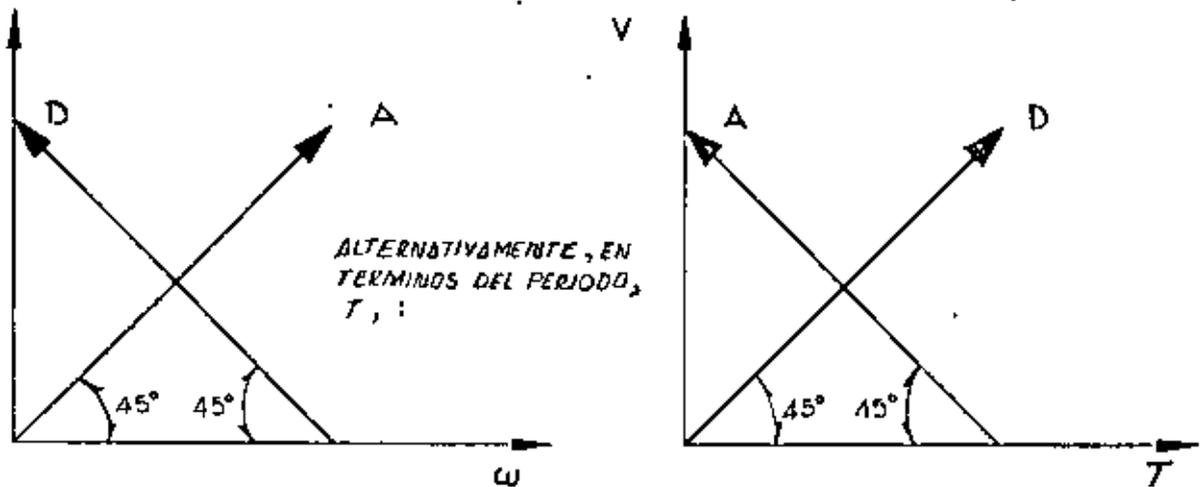
DE LA EC. (31): $\log A = \log V + \log \omega = \log V - \log T + \log 2\pi$

ESTAS ECUACIONES CORRESPONDEN A LINEAS RECTAS EN PAPEL LOGARITMICO;

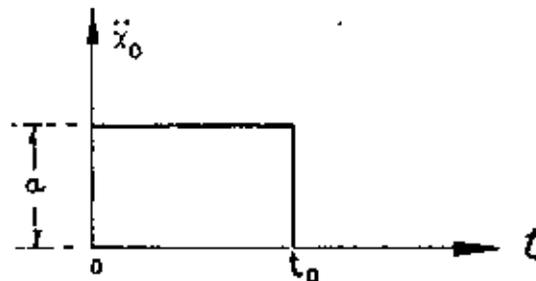
LA PRIMERA CON PENDIENTE -1 Y LA SEGUNDA CON PENDIENTE +1, SI SE USA

ω COMO VARIABLE INDEPENDIENTE; SI SE USA T, LA PRIMERA TENDRA PENDIEN-

TE + 1, Y LA SEGUNDA, -1.

EJEMPLO

CALCULAR EL ESPECTRO CORRESPONDIENTE A LA EXCITACION (CONSIDERESE $\zeta=0$)



EN UN EJEMPLO ANTERIOR SE OBTUVO

$$y(t) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$D = \text{MAX}|y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} ; 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0, (0 \leq T \leq 2t_0)$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} ; S_A = \omega V = 2a$$

$$Y \quad D = \text{MAX}|y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} \text{sen} \frac{\omega t_0}{2}, \text{ SI } T > 2t_0$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right| ; S_A = \omega V = 2a \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|$$

$$\text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} S_V = \text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} \left\{ a t_0 \frac{\text{sen} \frac{\omega t_0}{2}}{\frac{\omega t_0}{2}} \right\} = a t_0$$

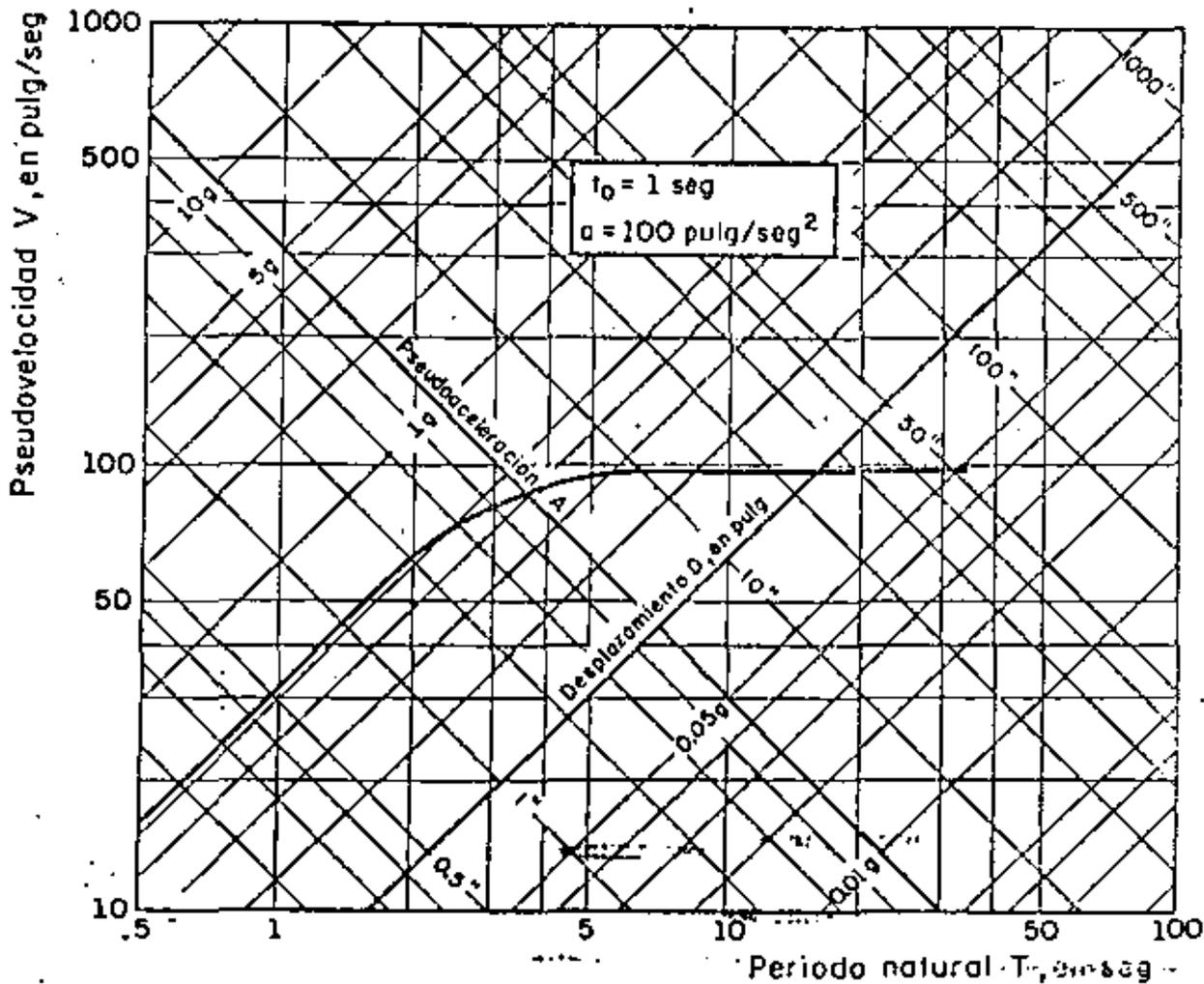
CASO PARTICULAR: SI $t_0 = 1$ SEG Y $a = 100$ IN/SEG²

$$S_V = \frac{2 \times 100}{2\pi} = \frac{100}{\pi} T, \text{ SI } 0 \leq T \leq 2 \text{ SEG}$$

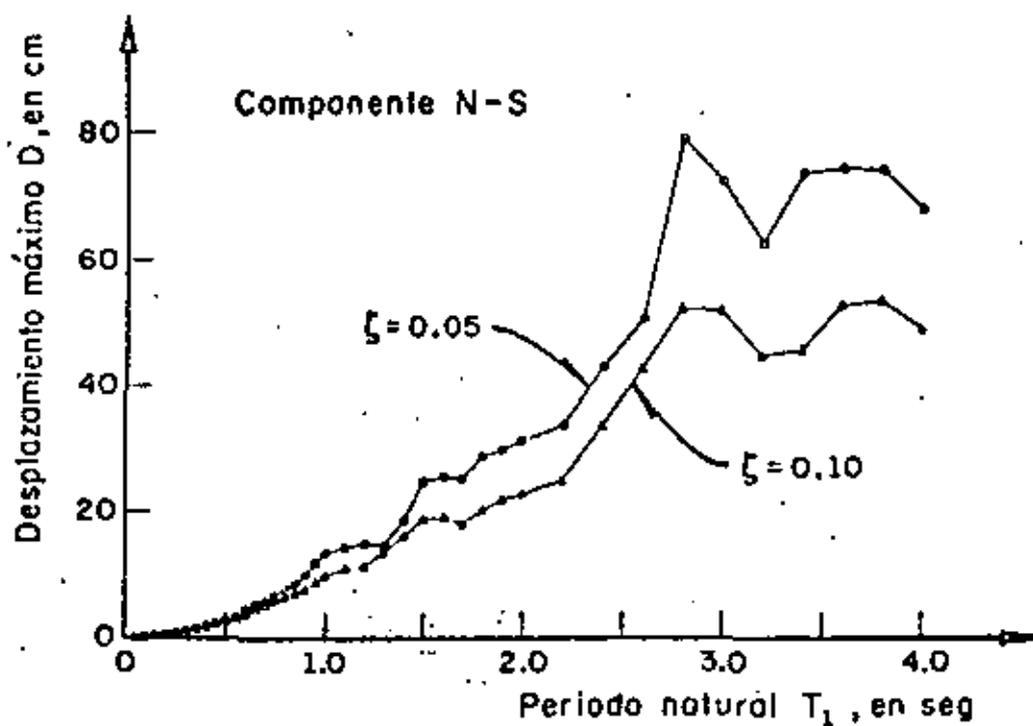
$$S_V = \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{2\pi \times 1}{T} \right| =$$

$$= \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\pi}{T} \right| \text{ SI } T > 2 \text{ SEG}$$

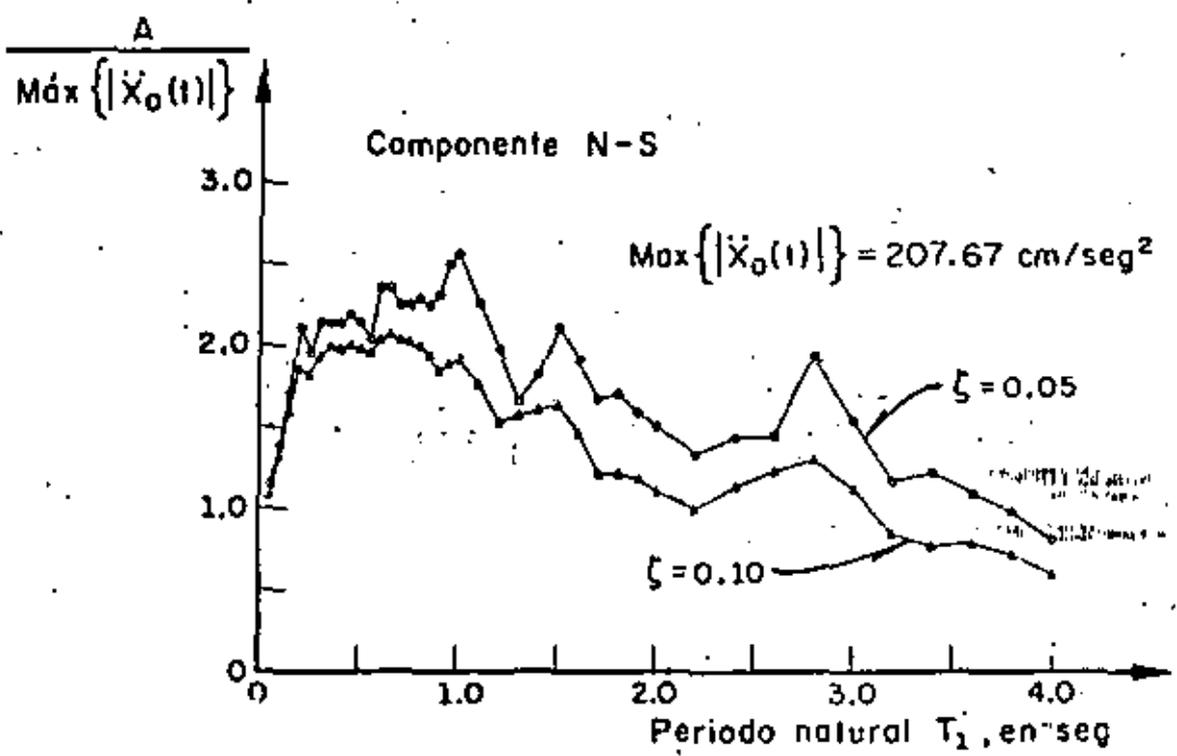
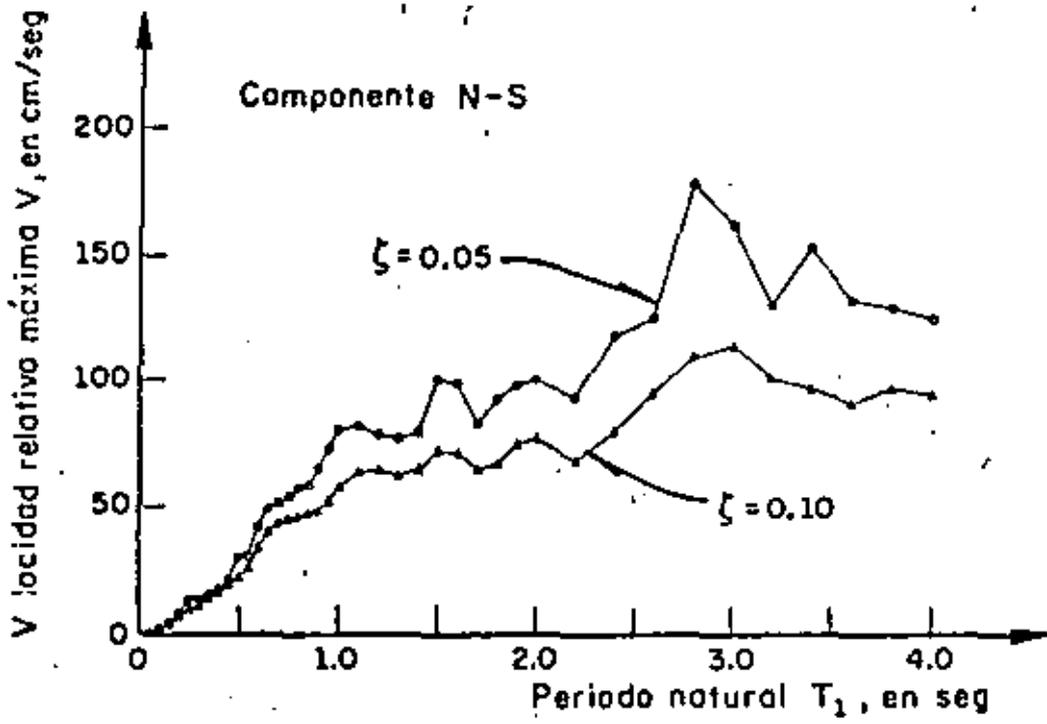
$$\text{LIM } S_V = 100 \text{ IN/SEG}$$



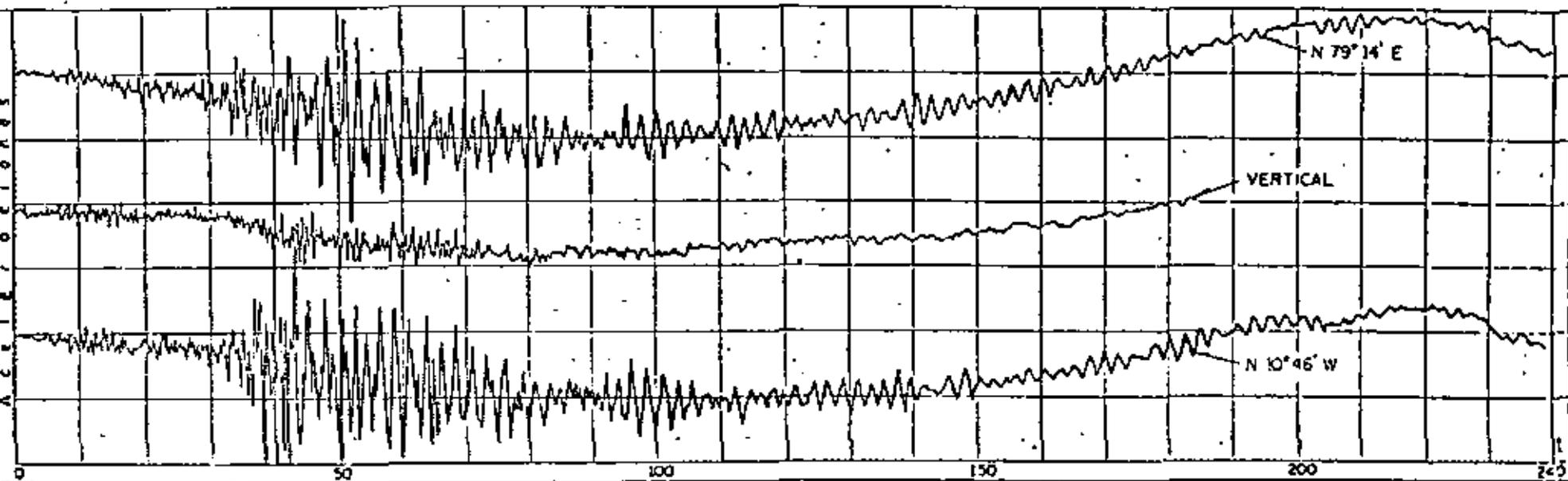
Espectro no amortiguado correspondiente a un pulso rectangular de aceleraciones. Según N. Newmark y E. Rosenblueth, ref 1



Espectro de desplazamientos. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4

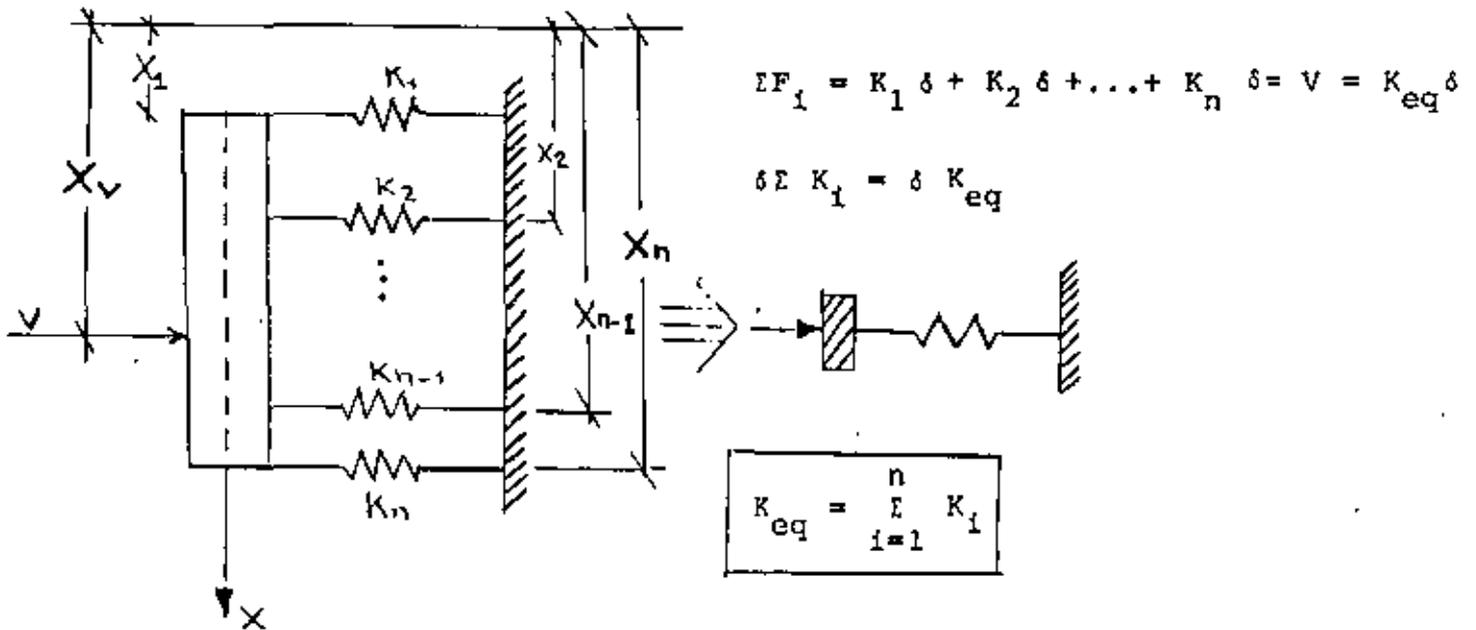


Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurato y K. Sudo, ref 4



Acclerogramas originales del sismo registrado el
11-V-1962 , en la ALAMEDA CENTRAL, Mex. D. F.

DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN UN ENTREPISO

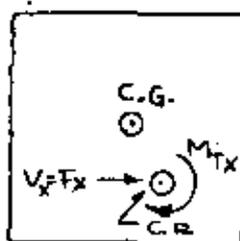
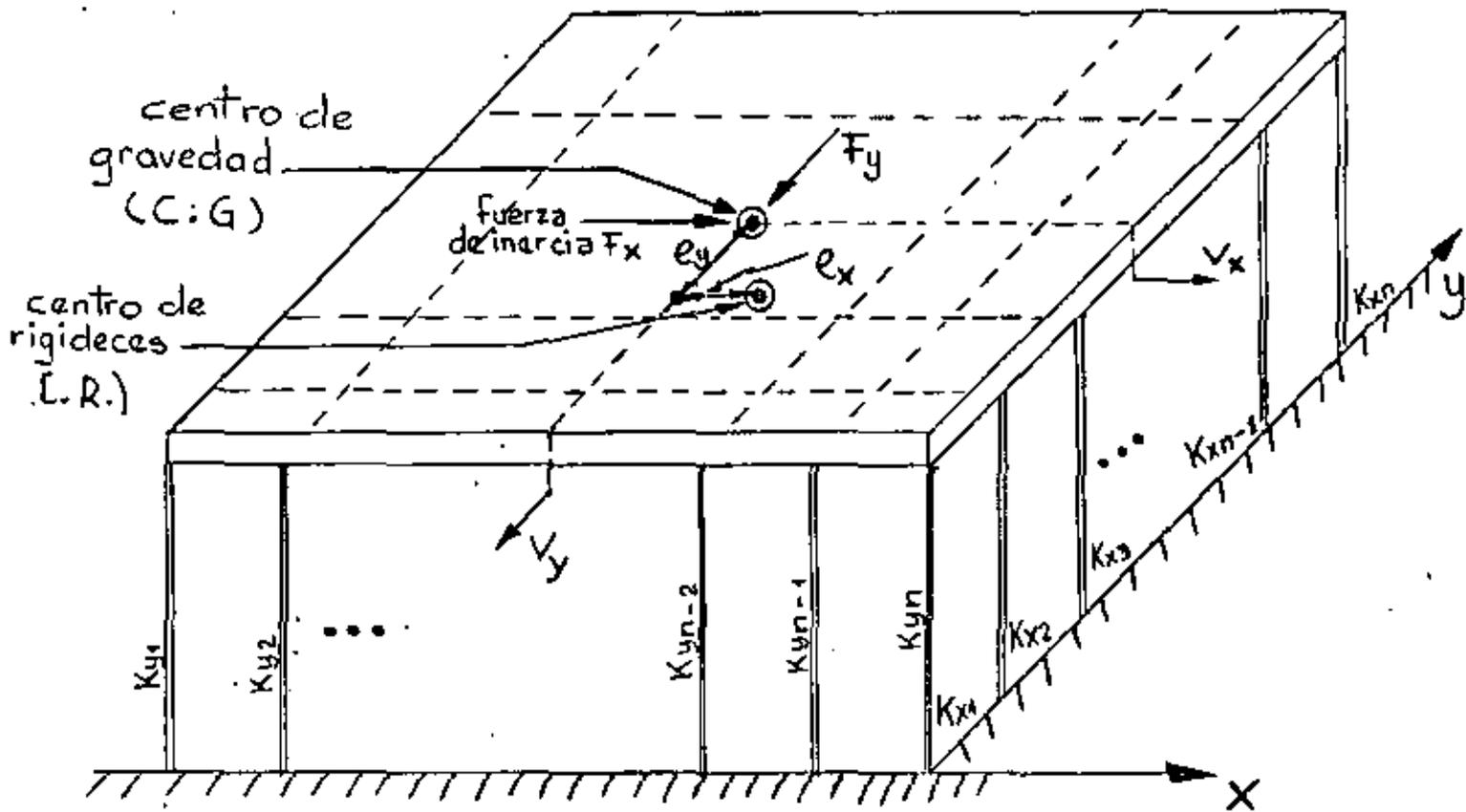


$$\Sigma M_i = \Sigma F_i X_i = \Sigma K_i \delta X_i = \delta \Sigma K_i X_i = V X_v = K_{eq} \delta X_v$$

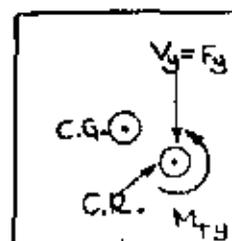
$$X_v = \frac{\sum_{i=1}^n K_i X_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

← POSICION DEL CENTRO DE RIGIDECEZ

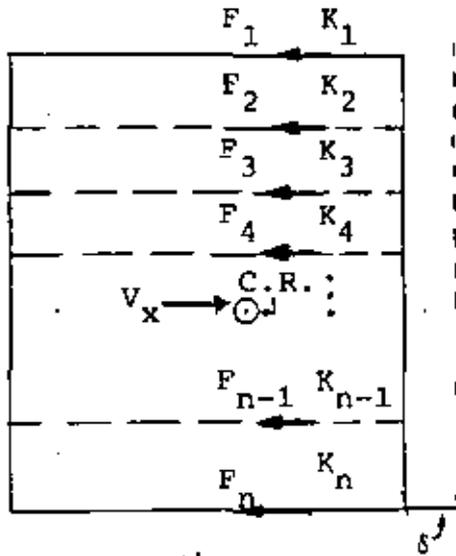
DISTRIBUCION DE FUERZAS CORTANTES DIRECTAS Y POR TORSION



+



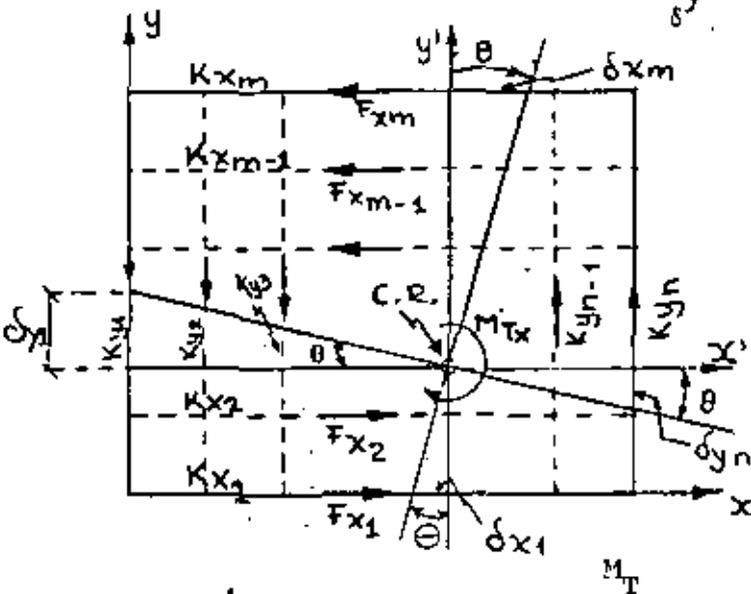
VEAMOS COMO SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS MARCOS



$$F_i = K_i \delta$$

$$\sum F_i = \sum K_i \delta = V_x \therefore \delta = \frac{V_x}{\sum K_i}$$

$$F_i = V_x \frac{K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$



$$F_{x_i} = K_{x_i} \delta_{x_i} = K_{x_i} y'_i \theta$$

$$F_{y_i} = K_{y_i} \delta_{y_i} = K_{y_i} x'_i \theta$$

$$\sum M_{C.R.} = \sum F_{x_i} y'_i + \sum F_{y_i} x'_i$$

$$= \theta (\sum K_{x_i} y_i'^2 + \sum K_{y_i} x_i'^2)$$

$$= M_{T_x}$$

$$\text{DE DONDE } \theta = \frac{M_{T_x}}{\sum K_{x_i} y_i'^2 + \sum K_{y_i} x_i'^2}$$

POR LO QUE

$$F_{x_i} = M_{T_x} \frac{K_{x_i} y_i'}{\sum K_{x_i} y_i'^2 + \sum K_{y_i} x_i'^2}$$

$$F_{y_i} = M_{T_x} \frac{K_{y_i} x_i'}{\sum K_{x_i} y_i'^2 + \sum K_{y_i} x_i'^2}$$

SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

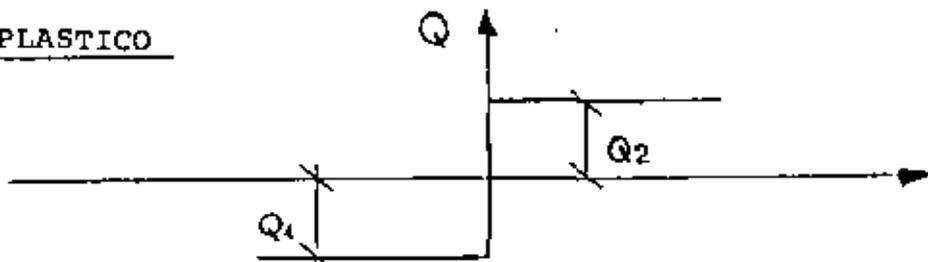
ECUACION DE MOVIMIENTO:

$$M\ddot{x} + Q(y, \dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x - x_0 = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI $Q(y, \dot{y}) = KY + C\dot{y}$ SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

1. RIGIDO-PLASTICO

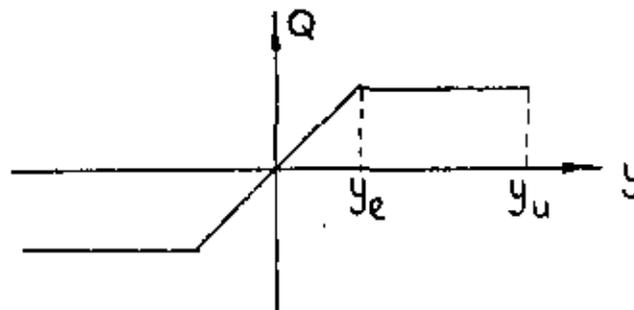


$$Q = -Q_1 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} < 0$$

$$Q = Q_2 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} > 0 \quad \text{EN DONDE } C = \text{CONSTANTE. SE HA EMPLEADO COMO}$$

MODELO EN EL ANALISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA Y ENROCAMIENTO

2. ELASTO-PLASTICO



$$Q = Q_1(y) + C\dot{y}$$

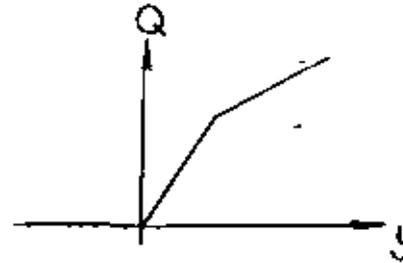
SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

$$\text{FACTOR DE DUCTILIDAD} = \mu = y_u / y_e$$

y_u = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.

3. SISTEMA BILINEALCON ENDURECIMIENTO

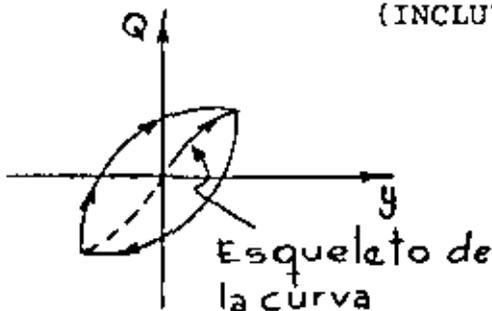
SE USA COMO MODELO PARA ANALISIS
DE Puentes COLGANTES

CON ABLANDAMIENTO

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS
QUE SE DEGRADAN POR AGRIETA-
MIENTO (MUROS DE MAMPOSTERIA,
POR EJEM).

4. TIPO MASING

(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)



$$\frac{Q - Q_0}{2} = Q_1 \left(\frac{y - y_0}{2} \right)$$

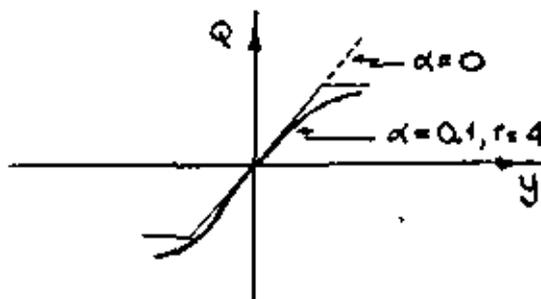
Q_0 = FUERZA EN $y = y_0$

y_0 = DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIÓ (Y CAMBIO
DE SIGNO) POR ULTIMA VEZ

CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

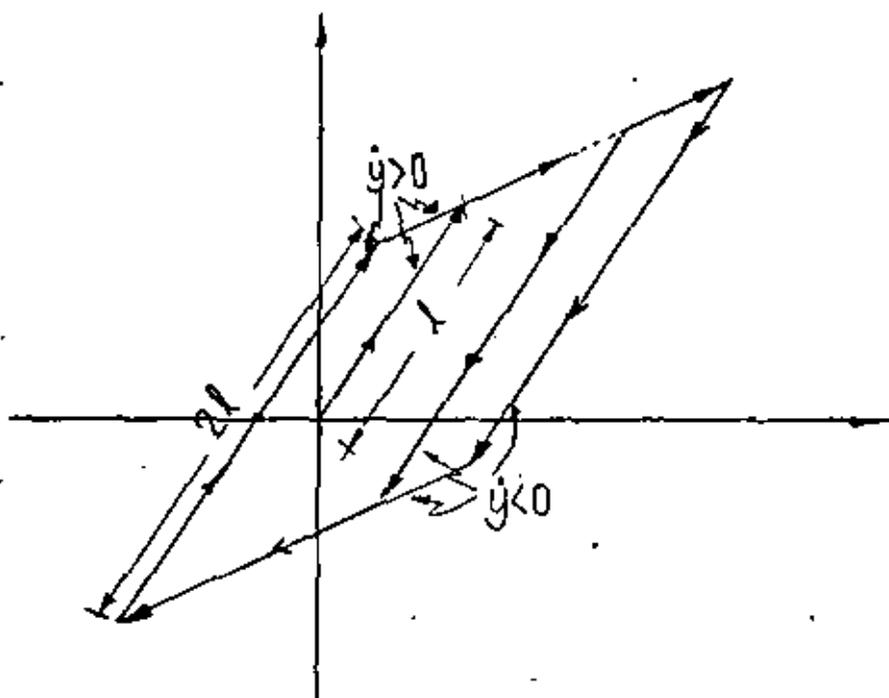
$$\frac{y}{y_1} = \frac{Q}{Q_1} + \alpha \left(\frac{Q}{Q_1} \right)^r \quad \text{(MODELO RAMBER - OSGOOD)}$$

DONDE y_1 , Q_1 , α y r SON CONSTANTES POSITIVAS

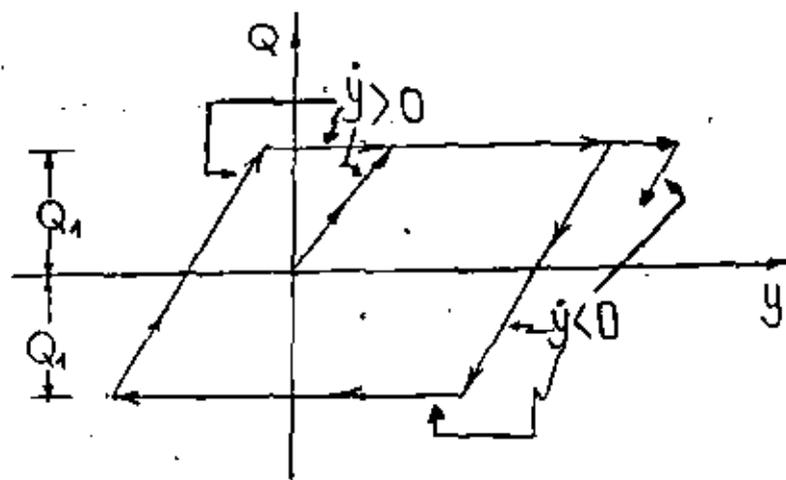


EJEMPLO:

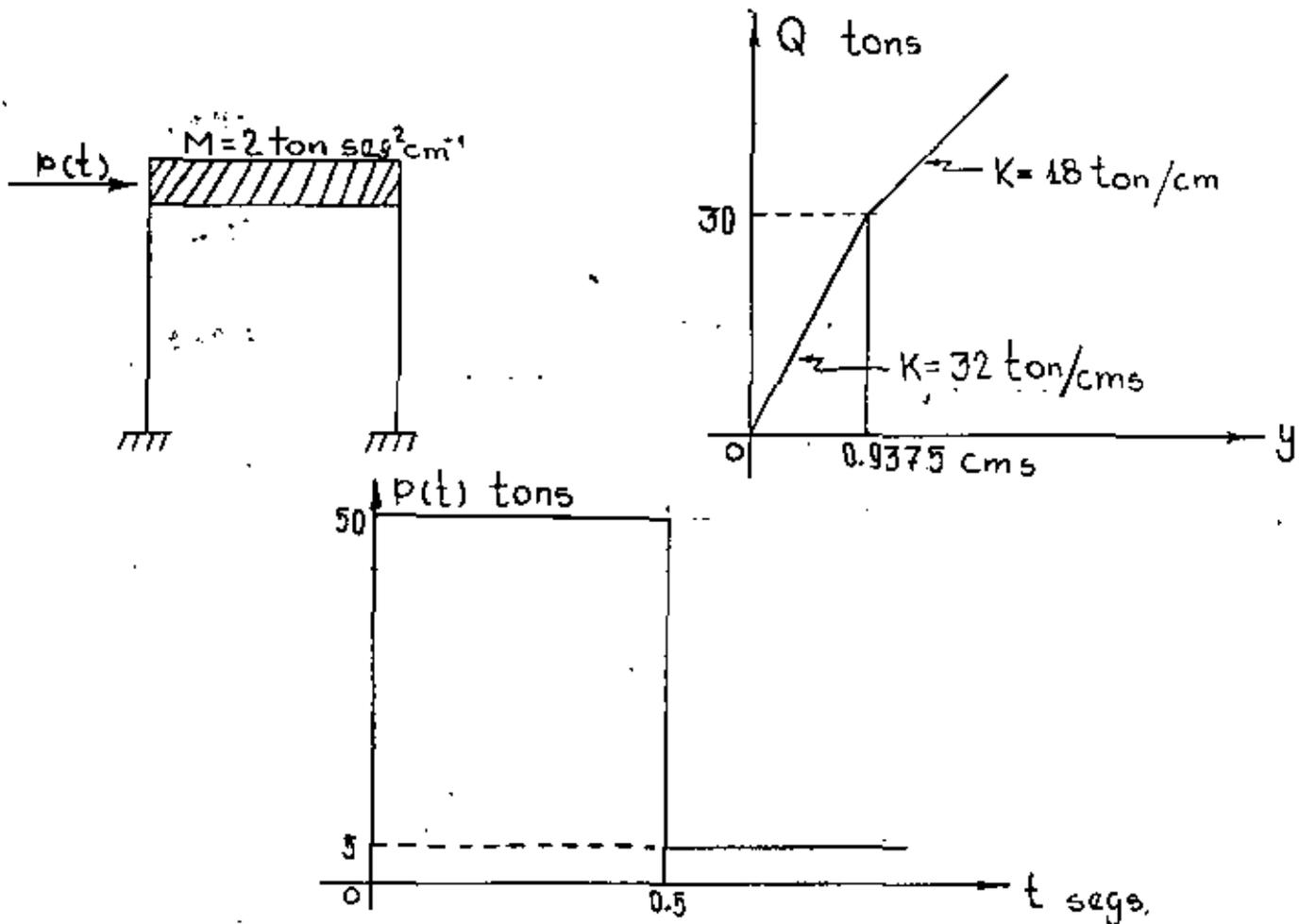
CASO BILINEAL

EJEMPLO

CASO ELASTOPLASTICO

METODO B DE NEWMARK

PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES SE PUEDE USAR EL METODO B
DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

EJEMPLO

ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO , $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) - Q(Y)}{M} = \frac{P(t) - Q(Y)}{2} \quad (I)$$

PARA LA APLICACION DEL METODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \Delta t / 2$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i \Delta t + (0.5 - \beta) \ddot{Y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{Y}_{i+1} (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO $\Delta t = 0.10$ SEG. Y $\beta = 1/6$ SE PUEDE ESCRIBIR,

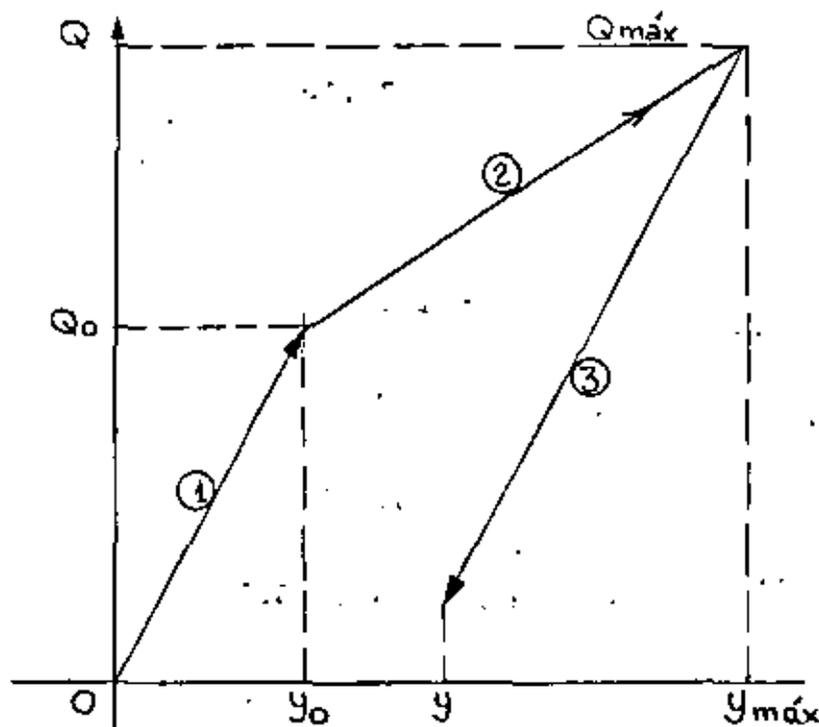
$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{20} (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (II)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i(0.10) + \frac{1}{600} (2\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (III)$$

EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO ES COMO SIGUE:

- | | | | |
|------|--|------------------|-----------------------|
| } | SE ASUME | \ddot{Y}_{i+1} | |
| | SE CALCULA | \dot{Y}_{i+1} | CON LA ECUACION (II) |
| | SE CALCULA | Y_{i+1} | CON LA ECUACION (III) |
| | SE CALCULA UN MEJOR VALOR DE \ddot{Y}_{i+1} CON LA ECUACION (I), | | |
| ETC. | | | |

PARA LA FUNCION DE RESISTENCIA Q SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



- | | |
|----------------------------|---|
| 1. COMPORTAMIENTO ELASTICO | $Q = 32 Y$ TONS |
| 2. CAMBIO DE RIGIDEZ | $Q = 30 + 18 (Y - Y_0)$ TON |
| 3. DESCARGA | $Q = Q_{\max} - 32 (Y_{\max} - Y)$ TONS |

ESTA ULTIMA EXPRESION MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE, $(Y_{\max} - Y) \leq 2Y_0$

$$Y_0 = 0.9375 \text{ CMS} \quad ; \quad Q_0 = 30.0 \text{ TON}$$

$$\text{PARA } t = 0, \quad \ddot{y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25 \quad ; \quad y = 0; \quad \dot{y} = 0$$

$$\text{PARA } t = 0.10, \quad y_1 = \dot{y}_1 = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_1 = 25 \quad \text{c}$$

1er. CICLO

SEA $\ddot{y}_{1+1} = 20$ COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$$\dot{y}_{1+1} = 0 + \frac{1}{20} (0 + 25) = 2.25$$

$$y_{1+1} = 0 + 0.10 \times 0 + \frac{1}{600} (2 \times 25 + 20) = 0.1167$$

$$Q = 32 \times 0.1167 = 3.7330$$

$$\ddot{y}_{1+1} = \frac{50 - 3.733}{2} = 23.134$$

2o. CICLO

$$\dot{y}_{1+1} = 23.134/2 = 16.567$$

$$y_{1+1} = 73.134/600 = 0.1219$$

$$Q = 32 \times 0.1219 = 3.9000$$

$$\ddot{y}_{1+1} = (50 - 3.9)/2 = 23.050$$

3er. CICLO

4o. CICLO

$$\ddot{Y}_{i+1} = 23.052$$

$$Y_{i+1} = 23.052/2 = 2.4026$$

$$Y_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175$$

$$Q = 32 \times 0.12175 = 3.8960$$

$$\ddot{y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052 \quad \dots \text{ ETC.}$$

LOS CALCULOS BASICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	p TONS	\ddot{Y} CM SEG ⁻²	\dot{Y} CM SEG ⁻¹	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	0.00
0.10	50.00	20.000	2.2500	0.1167	3.7330
		23.134	2.4070	0.1219	3.9000
		23.050	2.4025	0.12175	3.3960
		23.052	2.4026	0.12175	3.8960
0.20	50.00	20.000	4.5552	0.4722	15.110
		17.445	4.4270	0.46793	14.970
		17.513	4.4310	0.46804	14.977
		17.511	4.43075	0.46204	14.977
0.30	50.00	10.000	5.8060	0.98610	30.8750
		9.560	5.7840	0.98540	30.8620
		9.569	5.7848	0.98543	30.8630
0.40	50.00	0.00	6.2630	1.5958	41.849
		4.0750	6.4670	1.6026	41.972
		4.0141	6.4640	1.6025	41.970
		4.0150	6.4640	1.60250	41.970
0.50	50.00	0.00	6.6650	2.2623	53.846
		-1.9230			
		-1.9000	6.56975	2.2591	53.789
		-1.8944			
0.50+	5.00	-1.8946	6.5700	2.25912	53.789
		-24.3946			
0.60	5.00	-30.000	3.8503	2.7848	63.251
		-29.126	3.8940	2.78626	63.278
		-29.136	3.89347	2.78624	63.277
		-29.138	3.89347	2.78624	63.277
0.70	5.00	-32.000	0.83657	3.025127	67.577
		-31.289			
		-31.320	0.87057	3.02626	67.598
		-31.299			
		-31.301	0.87147	3.02641	67.600
0.7278	5.00	-31.620	-0.00313	3.03850	67.818
		-31.409			
		-31.420	-0.000352	3.03853	67.818
		-31.4093	-0.000205	3.03853	67.818

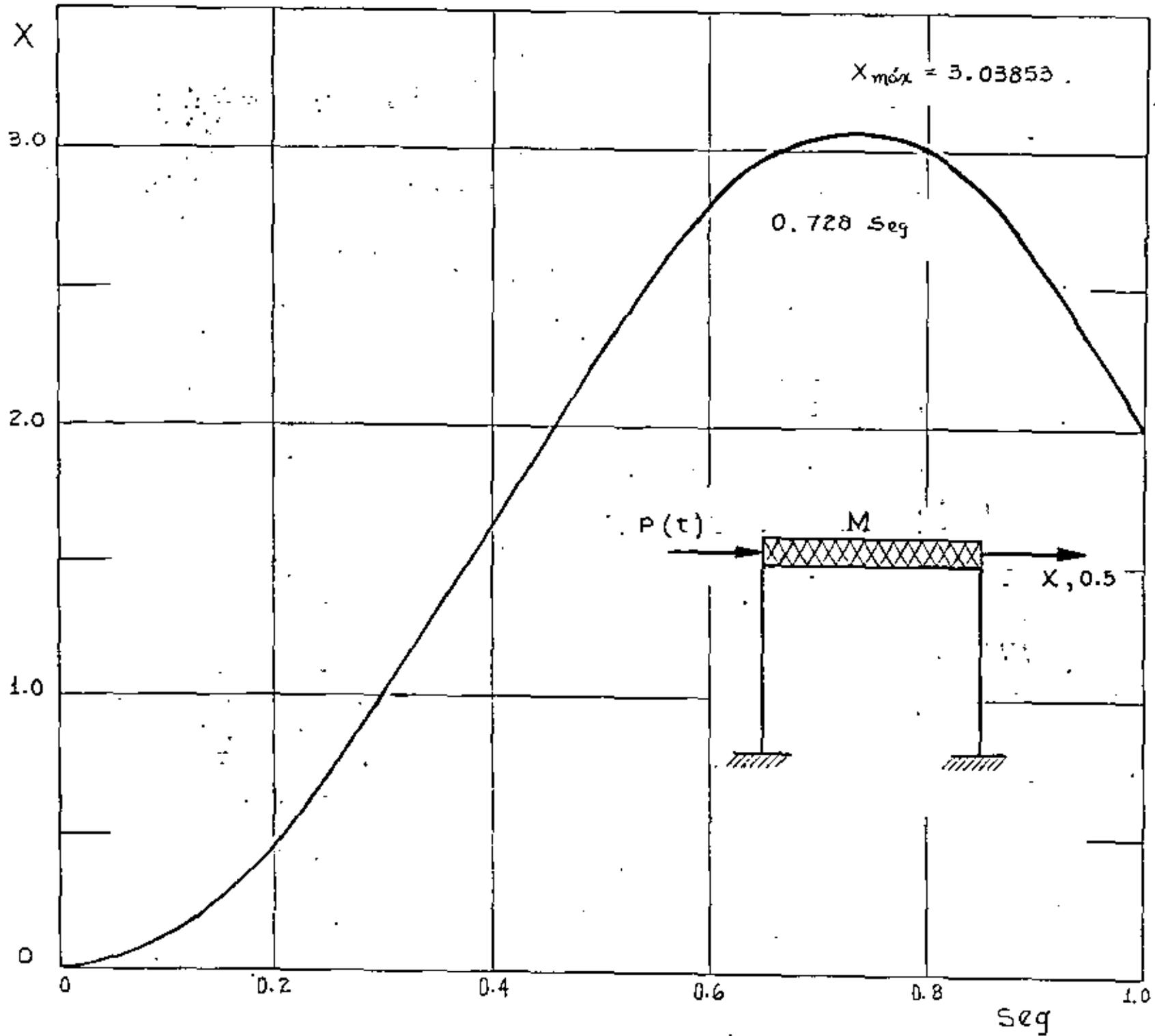
En $t=0.51 + \text{SEG}$, $\Delta y = -45/2 = -22.5 \therefore -22.5 - 1.8946 = -24.3946$

CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	p	\ddot{Y}	\dot{Y}	Y	Q
0.80	5.0	-28.000	-2.1449	2.959611	65.293
		-30.146			
		-30.000	-2.21708	2.957874	65.237
		-30.118			
		-30.117	-2.22127	2.95777	65.234
0.90	5.0	-27.00	-5.07712	2.59025	53.473
		-24.236			
		-25.00	-4.97712	2.59358	53.580
		-24.290			
		-24.294	-4.94182	2.59476	53.617
		-24.308	-4.94242	2.59474	53.617
1.00	5.0	-14.00	-6.85782	1.99614	34.461
		-14.7305			
		-14.7200	-6.89382	1.99494	34.423
		-14.7120	-6.89342	1.99495	34.423

EN ESTOS CALCULOS SE INTRODUJO $t = 0.50^-$ Y 0.50^+ PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA $P(t)$ DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACION DEL SISTEMA \ddot{Y} . EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN Y Y \dot{Y} . EL TIEMPO $t = 0.7273$ SEG. SE INTRODUJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE Y Y DE Q , PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRO SOBRE LA BASE DE APROXIMAR \dot{Y} A CERO, OBTENIENDOSE $Y_{MAX}=3.03853$ CMS Y $Q_{MAX} = 67.818$ TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.



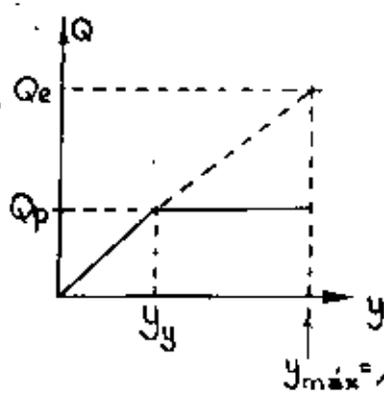
t Seg.	Y (supuesta) Cm Seg ⁻²	P Ton	Y Cm.	Q Ton	Y (calculado) Cm Seg ⁻²	Y Cm Seg ⁻¹	NOTAS
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50 ⁻	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50 ⁺	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	Q _{máx} , Y _{máx} .
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

RESPUESTA MAXIMA

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{\text{máx}} = 3.03853 \text{ cms} \\ Q_{\text{máx}} = 67.818 \text{ tons} \end{array} \right.$$

CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLASTICOS A PARTIR DEL ELASTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:

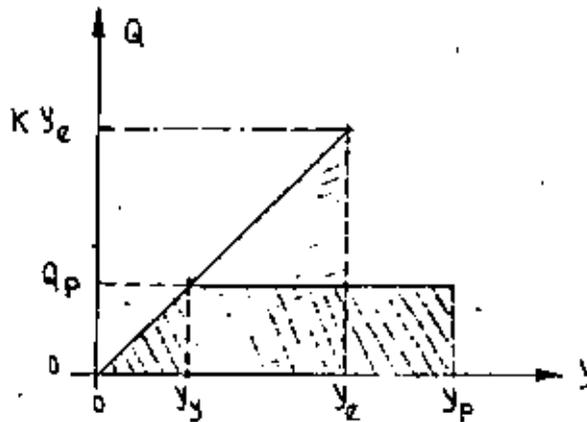


$$Q_p = Ky_y = \frac{Ky_{MAX}}{\mu} = \frac{Q_e}{\mu}$$

$$y_{MAX} = D_e = \mu y_y = \mu D_p$$

$$D_p = \frac{D_e}{\mu}$$

2. CRITERIO DE IGUAL ENERGIA ABSORVIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{Ky_e y_e}{2} = \frac{Ky_y y_y}{2} + Ky_y (y_p - y_y)$$

$$\frac{1}{2} y_e^2 = \frac{1}{2} y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_e}{y_y}\right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

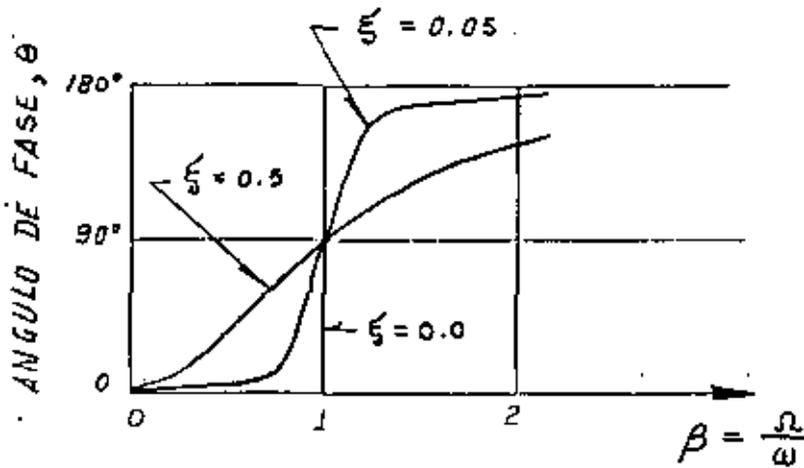
$$y_y]_{\text{MAX}} = D_p = \frac{y_e]_{\text{MAX}}}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

POR LO TANTO

$$D_p = D_e / \sqrt{2\mu - 1} \quad \text{Y} \quad Q_p = Q_e / \sqrt{2\mu - 1}$$

AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO

SI SE CUENTA CON EQUIPO PARA MEDIR EL ANGULO DE FASE ENTRE LA FUERZA DE EXCITACION Y EL DESPLAZAMIENTO RESULTANTE, SE PUEDE EVALUAR EXPERIMENTALMENTE EL AMORTIGUAMIENTO DEL SISTEMA CON UNA SOLA PRUEBA DE VIBRACION ARMONICA EN RESONANCIA. ESTA SE LOGRA CUANDO SE AJUSTA LA FRECUENCIA DEL EXCITADOR DE TAL MANERA QUE EL ANGULO DE FASE SEA 90°, YA QUE:



EN ESTAS CONDICIONES LA FUERZA DE EXCITACION QUEDA EN FASE CON LA VELOCIDAD DE LA MASA YA QUE

$$y = A \text{ sen}(\omega t - \theta) = -A \text{ cos} \omega t, \text{ SI } \theta = 90^\circ$$

$$Y \quad y = A \omega \text{ sen} \omega t \quad ; \quad \ddot{y} = A \omega^2 \text{ cos} \omega t$$

Y DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

$$M A \omega^2 \text{ cos} \omega t + C A \omega \text{ sen} \omega t + K(-A \text{ cos} \omega t) = p_0 \text{ sen} \omega t$$

SE VE QUE SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$C A \omega = p_0, \text{ DE DONDE } \boxed{C = \frac{p_0}{A \omega}} \quad (I)$$

DE LAS ECUACIONES ANTERIORES SE DEDUCE QUE:

$$y^2 = A^2 \text{ cos}^2 \omega t \quad ; \quad \frac{y^2}{A^2} = \text{cos}^2 \omega t$$

$$Y \quad p^2 = p_0^2 \text{ sen}^2 \omega t \quad ; \quad \frac{p^2}{p_0^2} = \text{sen}^2 \omega t$$

$$\text{SUMANDO:} \quad \frac{y^2}{A^2} + \frac{p^2}{p_0^2} = \text{sen}^2 \omega t + \text{cos}^2 \omega t$$

QUE ES LA ECUACION DE UNA ELIPSE CON LOS EJES COORDENADOS y Y p ,
 ASI (fig 1):

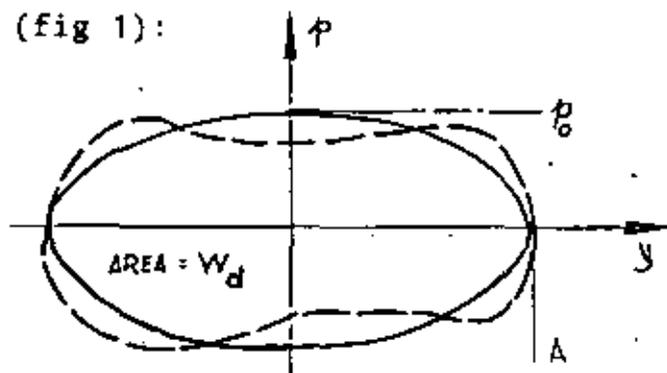


FIG 1

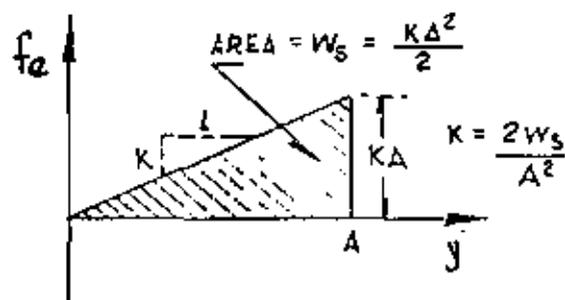


FIG 2

SI EL AMORTIGUAMIENTO NO ES EXACTAMENTE VISCOSO, LA GRAFICA QUE SE
 OBTENDRIA DE p CONTRA y NO SERIA EXACTAMENTE ELIPTICA, SINO ALGO
 COMO LA LINEA PUNTEADA AHI MOSTRADA. EN ESTE CASO SE PUEDE UTI-
 LIZAR UN AMORTIGUAMIENTO VISCOSO EQUIVALENTE, DE TAL MANERA QUE EL AREA
 W_d , DE ESTA CURVA SEA IGUAL A LA DE LA ELIPSE EQUIVALENTE, $W_{eq} = \pi A p_0$,
 ES DECIR

$$W_d = \pi A p_0, \text{ DE DONDE } p_0 = \frac{W_d}{\pi A}$$

POR LO QUE; DE LA EC. (I)

$$c_{eq} = \frac{W_d}{\pi \omega A^2}$$

(II)

ADEMAS, $C_{cr} = 2\sqrt{KM} = 2K/\omega$; DE FIG. 2 : $C_{cr} = 2\left(\frac{2W_s}{A}\right)/\omega$, DE DONDE

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{C_{cr}}$$

$$\zeta_{eq} = W_d / (4\pi W_s)$$

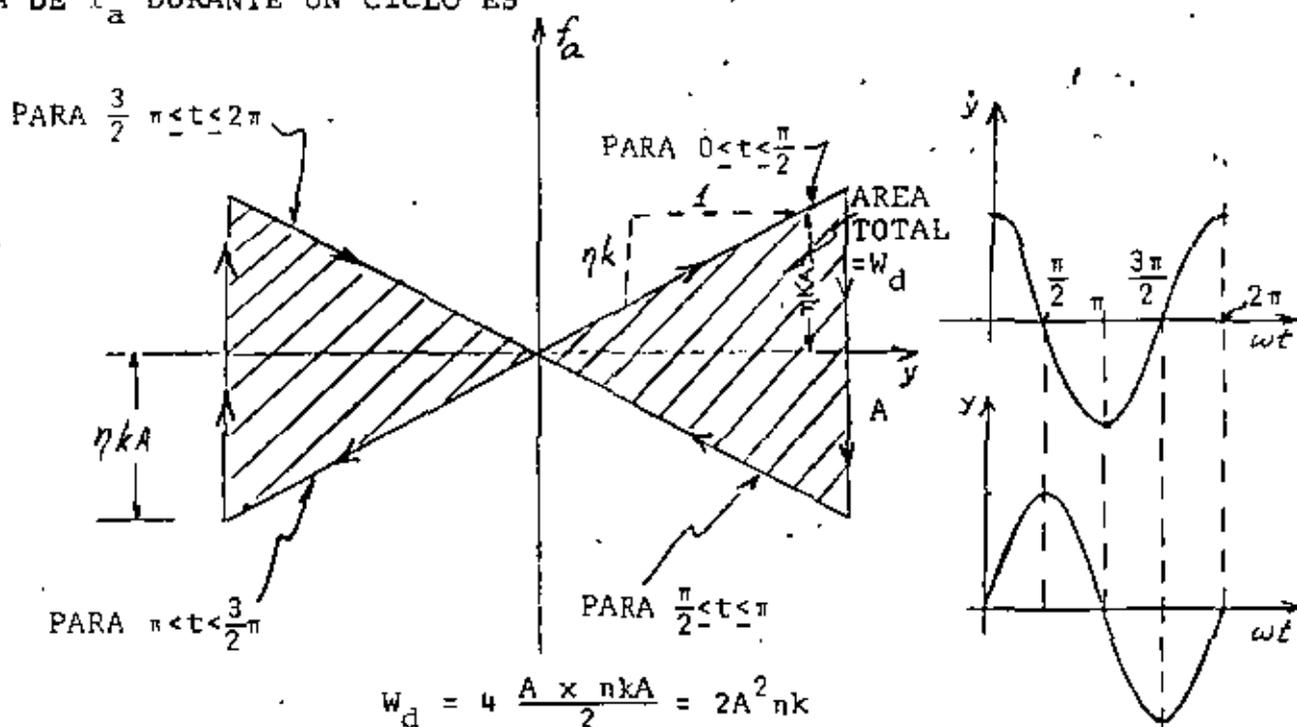
(II')

DE LAS ECS. (I) Y (II) SE CONCLUYE QUE EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ES FUNCION DE LA FRECUENCIA, ω .

EXISTE OTRO TIPO DE AMORTIGUAMIENTO QUE ES INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA, QUE SE CONOCE COMO AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO, EL CUAL PRODUCE UNA FUERZA EN FASE CON LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA, PERO PROPORCIONAL AL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR

$$f_a = \eta k |y(t)| \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{y}(t)|} \quad (\text{III})$$

DONDE η ES EL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO. EL DIAGRAMA DE f_a DURANTE UN CICLO ES



SI SE CONSIDERA QUE LA ENERGIA PERDIDA POR HISTERESIS SE PUEDE REPRESENTAR MEDIANTE UN AMORTIGUADOR VISCOSO, ENTONCES, DE LA EC. (II') Y FIG 2:

$$\zeta = \frac{2A^2 \eta k}{4\pi \frac{KA^2}{2}} = \frac{\eta}{\pi} \quad \text{O} \quad \boxed{\eta = \pi \zeta} \quad (\text{IV})$$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

METODO β DE NEWMARK

SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD CON COMPORTAMIENTO
INELASTICO

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980

METODO β DE NEWMARK

SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE N GRADOS DE LIBERTAD Y COMPORTAMIENTO ELASTICO LINEAL SE EMPLEAN LAS MISMAS ECUACIONES QUE PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \dot{x}_j(t_i)\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{x}_j(t_i) + \beta \ddot{x}_j(t_{i+1}) \right] (\Delta t)^2$$

EN DONDE $j = 1, 2, \dots, N$.

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA TAMBIEN UN VALOR DE β COMPRENDIDO ENTRE 1/4 Y 1/6, Y QUE $\Delta t \leq 0.1 T_N$, EN DONDE T_N ES EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION MAS PEQUEÑO.

EJEMPLO

SEA UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUYAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES SON:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

USANDO EL METODO β DE NEWMARK CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$ CALCULE LA RESPUESTA DINAMICA ANTE UNA EXCITACION DADA POR LOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO:

$$\begin{aligned} x_o &= 1.2 t & \text{SI } 0 \leq t \leq 2 \text{ seg} & \quad (x_o \text{ EN CENTIMETROS}) \\ x_o &= 4.8 - 1.2 t & \text{SI } 2 \leq t \leq 4 \text{ seg} \\ x_o &= 0 & \text{SI } t < 0 \text{ o } t > 4 \text{ seg} \end{aligned}$$

PUESTO QUE ESTA EXCITACION IMPLICA QUE $\ddot{x}_o(t) = 0$ PARA TODO t , SE TIENE QUE LA ECUACION MATRICIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{K}\underline{Y} = \underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{Q} = \underline{0}$$

POR LO QUE

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + Q_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = Q_1/m_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + Q_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_2 = Q_2/m_2 \end{aligned}$$

EN DONDE $y_1 = x_1 - x_o$ Y $y_2 = x_2 - x_o$.

CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$, LAS ECUACIONES DEL METODO β DE NEWMARK QUEDAN EN LA FORMA

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t_{i+1}) &= \dot{x}_j(t_i) + 0.1 [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \\ x_j(t_{i+1}) &= x_j(t_i) + 0.1 \dot{x}_j(t_i) + 0.04 [\ddot{x}_j(t_i)/3 + \ddot{x}_j(t_{i+1})/6] \end{aligned}$$

EN $t = 0$, $y_i = x_i = 0$, $\dot{y}_i = \dot{x}_i = 0$, $\ddot{y}_i = \ddot{x}_i = 0$.

EN $t = 0.2$, $x_0 = 1.2 \times 0.2 = 0.24$ cm; SUPONGAMOS $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 1.35$

Y $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.50$ cm/seg:

PRIMER CICLO

PARA LA MASA 1: $\dot{x}_1 = 0 + 0.1 (0 + 1.35) = 0.135$ cm/seg

$$x_1 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.35/6) = 0.009 \text{ cm}$$

$$y_1 = 0.009 - 0.24 = -0.231 \text{ cm}$$

PARA LA MASA 2: $\dot{x}_2 = 0 + 0.1(0 + 1.50) = 0.15$

$$x_2 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.50/6) = 0.01$$

$$y_2 = 0.01 - 0.24 = -0.23 \text{ cm}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.540 \\ -1.381 \end{bmatrix}$$

POR LO QUE $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 = 2.54/2 = 1.27 \neq 1.35$

$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2 = 1.381/1 = 1.381 \neq 1.50$

SEGUNDO CICLO

$$x_1 = 0.1 \times 1.27 = 0.127$$

$$x_1 = 0.04 \times 1.27/6 = 0.0085$$

$$y_1 = 0.0085 - 0.24 = -0.2315$$

$$x_2 = 0.1 \times 1.381 = 0.138$$

$$x_2 = 0.04 \times 1.381/6 = 0.0092$$

$$y_2 = 0.0092 - 0.24 = -0.2308$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2315 \\ -0.2308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.546 \\ -1.386 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 2.546/2 = 1.273 \neq 1.27$
 $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.386/1 = 1.386 \neq 1.381$

EN $t = 0.2 + 0.2 = 0.4$ seg SE TIENEN $x_0 = 1.2 \times 0.4 = 0.48$,

$$\begin{array}{ll} x_1(t_i) = 0.0085 & ; \quad x_2(t_i) = 0.0092 \\ \dot{x}_1(t_i) = 0.127 & ; \quad \dot{x}_2(t_i) = 0.138 \\ \ddot{x}_1(t_i) = 1.273 & ; \quad \ddot{x}_2(t_i) = 1.386 \end{array}$$

PRIMER CICLO

SUPONIENDO $\ddot{x}_1(t_{i+1}) = 2.3$ Y $\ddot{x}_2(t_{i+1}) = 2.1$ SE OBTIENEN:

$$\dot{x}_1 = 0.127 + 0.1(1.273 + 2.3) = 0.484$$

$$x_1 = 0.0085 + 0.2 \times 0.127 + 0.04(1.273/3 + 2.3/6) = 0.0662$$

$$y_1 = 0.0662 - 0.48 = -0.4138$$

$$\dot{x}_2 = 0.138 + 0.1(1.386 + 2.1) = 0.486$$

$$x_2 = 0.0092 + 0.2 \times 0.138 + 0.04(1.386/3 + 2.1/6) = 0.0693$$

$$y_2 = 0.0693 - 0.48 = -0.4107$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4138 \\ -0.4107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.548 \\ -2.468 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 4.548/2 = 2.274 \neq 2.3$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 2.468 \neq 2.1$$

ETCETERA. LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA SE PRESENTAN EN LA TABLA 1.

Tomado del libro de N. Newmark y E. Rosenblueth D.

Tabla 2.1. Ejemplo 2.7

t seg	Q_1 ton	\dot{X}_1 cm/seg	\ddot{X}_1 cm/seg ²	X_2 cm	\dot{X}_2 cm/seg	\ddot{X}_2 cm/seg ²	Q_3 ton	\dot{X}_3 cm/seg	\ddot{X}_3 cm/seg ²	X_4 cm	\dot{X}_4 cm/seg	\ddot{X}_4 cm/seg ²
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.540	1.350	0.133	0.0090	-0.2310	1.380	1.500	0.150	0.0100	-0.2300	0.14	0.14
0.2	2.546	1.270	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.380	0.138	0.0092	-0.2304	0.24	0.24
0.2	2.546	1.273	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.386	0.138	0.0092	-0.2304	0.24	0.24
0.4	4.548	-2.300	0.484	0.0642	-0.4138	2.488	2.100	0.488	+0.0633	-0.4107	0.48	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0640	-0.4140	2.455	2.468	0.523	0.0718	-0.4082	0.48	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0680	-0.4140	2.433	2.433	0.522	0.0717	-0.4083	0.48	0.48
0.6	5.545	2.700	0.978	0.2195	-0.5095	2.960	3.200	1.088	0.2301	-0.4879	0.72	0.72
0.6	5.581	2.733	0.987	0.2111	-0.5089	2.967	2.960	1.084	0.2285	-0.4815	0.72	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.967	1.085	0.2285	-0.4814	0.72	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.966	1.085	0.2285	-0.4814	0.72	0.72
0.8	5.409	2.900	1.338	0.4430	-0.4930	2.750	2.380	1.460	0.5010	-0.4590	0.96	0.96
0.8	5.423	2.704	1.336	0.4637	-0.4963	2.798	2.790	1.641	0.4977	-0.4603	0.96	0.96
0.8	5.422	2.711	1.337	0.4638	-0.4962	2.797	2.798	1.642	0.4998	-0.4602	0.96	0.96
0.8	5.422	2.711	1.337	0.4638	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4998	-0.4602	0.96	0.96
1.0	4.104	2.150	2.023	0.8218	-0.3784	1.977	2.200	2.142	0.8802	-0.3198	1.20	1.20
1.0	4.111	2.052	2.013	0.8210	-0.3790	1.985	1.977	2.120	0.8787	-0.3213	1.20	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20	1.20
1.2	1.931	0.950	2.315	1.2575	-0.1825	0.712	0.700	2.390	1.3341	-0.1059	1.44	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44	1.44
1.4	-0.655	-0.320	2.381	1.7316	0.0518	-0.735	-0.800	2.382	1.8165	0.1365	1.68	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.387	1.8169	0.1369	1.68	1.68
1.6	-3.043	-1.500	2.197	2.1932	0.2752	-2.074	-2.100	2.184	2.2707	0.3507	1.92	1.92
1.6	-3.080	-1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.026	2.141	2.2712	0.3512	1.92	1.92
1.6	-3.080	-1.540	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.029	2.141	2.2712	0.3512	1.92	1.92
1.8	-4.830	-2.500	1.789	2.5443	0.4343	-2.869	-2.900	1.618	2.6471	0.4871	2.16	2.16
1.8	-4.838	-2.415	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.869	1.621	2.6473	0.4873	2.16	2.16
1.8	-4.838	-2.418	1.797	2.5949	0.4349	-2.871	-2.871	1.621	2.6473	0.4873	2.16	2.16
2.0	-5.547	-2.800	1.275	2.9034	0.5034	-3.069	-3.000	1.034	2.9132	0.9132	2.40	2.40
2.0	-5.549	-2.773	1.278	2.9038	0.5036	-3.068	-3.069	1.027	2.9127	0.9127	2.40	2.40
2.0	-5.549	-2.774	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.068	1.027	2.9127	0.9127	2.40	2.40

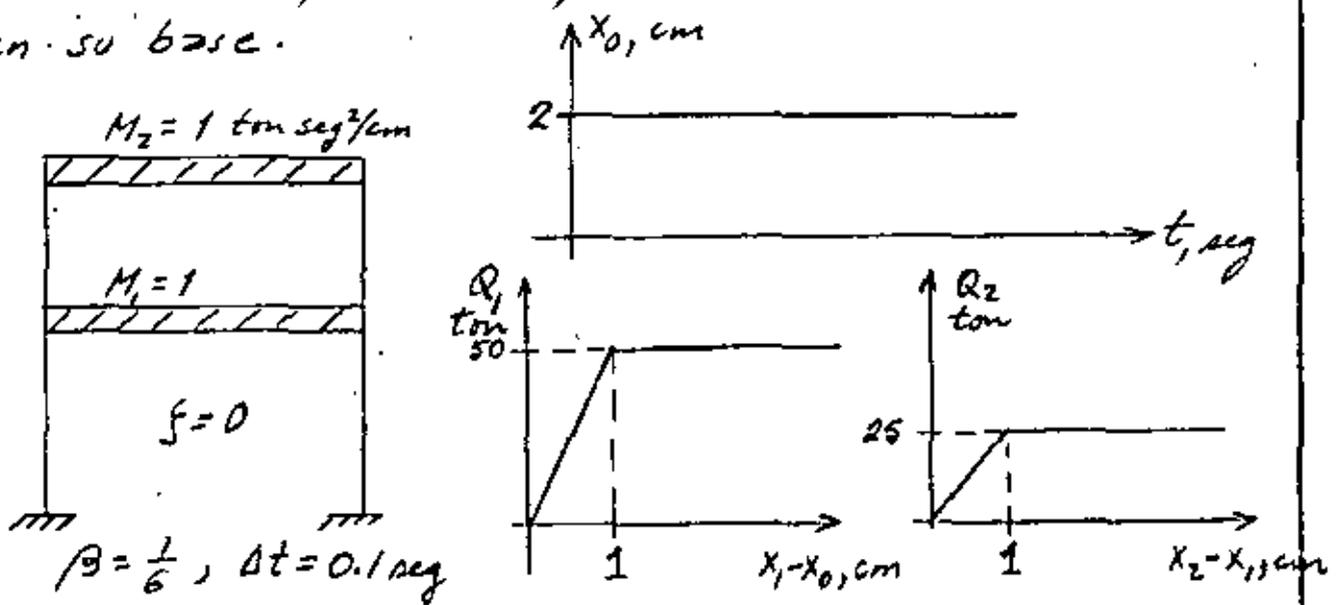
TABLE 2.1. Ejemplo 2.7 (Cont.)

t seg	Q_1 ton	\dot{x} cm/seg	\ddot{x} cm/seg ²	x_1 cm	$\dot{x}_1 - \dot{x}_2$ cm	Q_2 ton	\dot{x} cm/seg	\ddot{x} cm/seg ²	x_2 cm	$\dot{x}_2 - \dot{x}_0$ cm	\ddot{x}_2 cm
2.2	-40.156	-5.200	0.481	3.0875	0.9275	-5.332	-5.460	0.174	3.0408	0.8808	2.16
2.2	-40.165	-5.078	0.493	3.0883	0.9283	-5.337	-5.332	0.187	3.0417	0.8817	2.16
2.2	-40.165	-5.083	0.493	3.0883	0.9283	-5.337	-5.337	0.186	3.0417	0.8817	2.16
2.4	-12.576	-6.900	-0.705	3.0731	1.1551	-6.386	-6.200	-0.968	2.9665	1.0465	1.92
2.4	-12.617	-6.289	-0.644	3.0772	1.1572	-6.383	-6.386	-0.987	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.308	-0.644	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.308	-0.644	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.6	-12.388	-6.200	-1.897	2.8225	1.1425	-5.958	-6.000	-2.224	2.6428	0.9628	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.896	2.8225	1.1425	-5.959	-5.958	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.896	2.8225	1.1425	-5.959	-5.959	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.8	-9.573	-4.300	-2.945	2.5520	0.8920	-4.155	-4.100	-3.206	2.0975	0.6525	1.44
2.8	-9.540	-4.767	-2.994	2.5288	0.8888	-4.150	-4.150	-3.212	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.5289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.5289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
3.0	-4.687	-2.500	-3.718	1.6502	0.4502	-1.376	-1.400	-3.768	1.3853	0.1853	1.20
3.0	-4.698	-2.345	-3.703	1.6513	0.4513	-1.378	-1.376	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.0	-4.698	-2.348	-3.704	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.2	1.090	0.800	-3.859	0.8845	-0.0755	1.748	1.700	-3.732	0.6255	-0.3345	0.96
3.2	1.106	0.545	-3.884	0.8878	-0.0772	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.4	6.605	3.600	-3.468	0.1377	-0.3623	4.506	4.700	-3.082	-0.0648	-0.7848	0.72
3.4	6.629	3.304	-3.438	0.1357	-0.3643	4.515	4.506	-3.101	-0.0682	-0.7882	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.3642	4.515	4.515	-3.100	-0.0681	-0.7881	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.3642	4.515	4.515	-3.100	-0.0681	-0.7881	0.72
3.6	10.578	5.400	-2.568	-0.4716	-0.8518	6.251	6.900	-1.958	-0.3799	-1.0599	0.48
3.6	10.589	5.289	-2.579	-0.4725	-0.8525	6.277	6.251	-2.023	-0.3842	-1.0642	0.48
3.6	10.589	5.298	-2.577	-0.4725	-0.8525	6.277	6.277	-2.020	-0.3841	-1.0641	0.48
3.6	10.589	5.298	-2.577	-0.4725	-0.8525	6.277	6.277	-2.020	-0.3841	-1.0641	0.48
3.8	12.239	6.200	-1.427	-0.8780	-1.1160	6.612	6.600	-0.712	-0.8591	-1.0991	0.24
3.8	12.264	6.130	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.612	-0.731	-0.8603	-1.1003	0.24
3.8	12.264	6.132	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.618	-0.730	-0.8603	-1.1003	0.24
4.0	11.323	5.800	-0.260	-1.0441	-1.0441	5.454	5.400	0.472	-0.8821	-0.8821	0
4.0	11.319	5.661	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.434	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.0	11.319	5.660	-0.255	-1.0437	-1.0437	5.453	5.453	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.2	10.705	5.350	0.846	-0.9836	-0.9836	5.330	5.300	1.549	-0.8691	-0.8691	0
4.2	10.705	5.352	0.846	-0.9836	-0.9836	5.329	5.350	1.552	-0.8689	-0.8689	0

DINAMICA ESTRUCTURAL

SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD CON
COMPORTAMIENTO INELASTICOMétodo β de Newmark. Ejemplo

Calcular mediante el método β de Newmark los desplazamientos máximos absolutos del 1º y 2º niveles de la estructura mostrada abajo, cuando es excitada por un desplazamiento súbito de 2 cm en su base.



$$\begin{array}{c} \textcircled{M_2} \leftarrow F = m_2 \ddot{x}_2 \\ \leftarrow Q_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow Q_2 \\ \textcircled{M_1} \leftarrow F = m_1 \ddot{x}_1 \\ \leftarrow Q_1 \end{array}$$

$$\underline{M \ddot{X}} + \underline{Q} = 0$$

$$M_1 \ddot{x}_1 + Q_1 - Q_2 = 0$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + Q_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

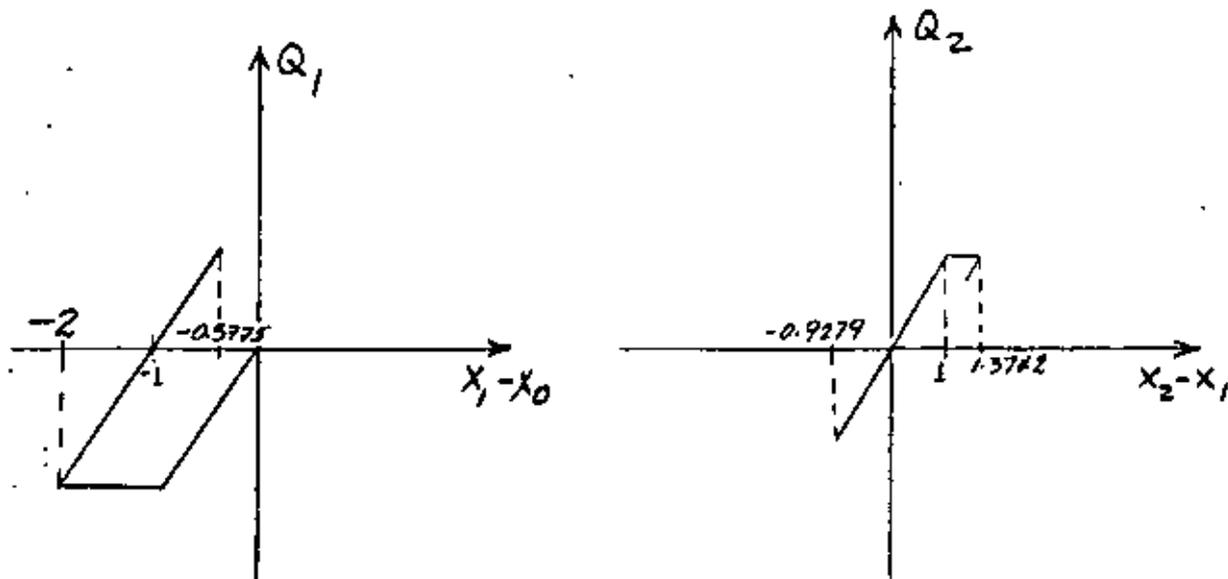
$$\ddot{x}_1 = \frac{Q_2 - Q_1}{M_1}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{Q_2}{M_2}$$

$$\left. \right\} (1)$$

En vez de suponer \ddot{x}_1 y \ddot{x}_2 al inicio de cada ciclo, supondremos Q_1 y Q_2 y calcularemos ambas aceleraciones con base en ellas mediante la ec. (1). Las ecuaciones para la velocidad y el desplazamiento son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + 0.05(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \\ x_{i+1} &= x_i + 0.1\dot{x}_i + \frac{1}{600}(2\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \end{aligned} \right\} (2)$$



t seg	x_0 cm	Q_1 ton	Q_2 ton	\ddot{x}_1 cm/seg ²	\ddot{x}_2 cm/seg ²	\dot{x}_1 cm/seg	x_1 cm	\dot{x}_2 cm/seg	x_2 cm	$x_1 - x_0$ cm	$x_2 - x_1$ cm	$\dot{x}_1 - \dot{x}_0$ cm/seg	$\dot{x}_2 - \dot{x}_1$ cm/seg	OBSERVA- CIONES
0.0	2.0	-50.00	0.00	50.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	
0.1	2.0	-37.500	-6.25	37.5	6.250	4.375	0.229	0.3125	0.0104	-1.771	-0.2185	4.375	-4.063	
		-38.550	-5.463	32.3	5.463	4.115	0.2205	0.2731	0.0091	-1.7795	-0.2113	4.115	-3.842	
		-38.975	-5.289	33.5125	5.289	4.1756	0.2225	0.2641	0.0088	-1.7774	-0.2136	4.1756	-3.9114	
		-38.875	-5.34	33.593	5.340	4.1796	0.2226	0.2670	0.0089	-1.7773	-0.2137	4.1796	-3.9126	
		-38.870	-5.343	33.530	5.3425	4.1765	0.2225	0.2671	0.0089	-1.7774	-0.2135	4.1765	-3.9093	
0.2	0.2	-20.00	-10.00	10.00	10.00	6.353	0.7685	1.0342	0.070	-1.2314	-0.6984	6.353	-5.3188	
		-11.575	-17.46	1.575	17.46	5.9317	0.7545	1.4072	0.083	-1.2455	-0.6919	5.9317	-4.5244	
		-12.275	-16.7975	-5.185	16.7975	5.5937	0.7432	1.3741	0.0814		-0.6617			
		-12.84	-16.5446	-3.9575	16.5446	5.6551	0.7453	1.3614	0.0809		-0.6643			
		-12.735	-16.6076	-3.8096	16.6076	5.6625	0.7455	1.3646	0.0810		-0.6644			
		-12.7216	-16.6100	-3.886	16.6100	5.6587	0.7454	1.3647	0.0811	-1.2546	-0.6642	5.6587	-4.294	
0.3	2.0	10.000	-25.00	-35.00	25.00	3.7144	1.2399	3.4452	0.3146		-0.9252			
		11.995	-23.1324	-36.995	23.132	3.6146	1.2366	3.3518	0.3114		-0.9251			
		11.83	-23.1277	-34.963	23.127	3.7162	1.2400	3.3510	0.3114		-0.9285			
		12.00	-23.2129	-35.13	23.213	3.7080	1.2397	3.3558	0.3116		-0.9280			
		11.9885	-23.2018	-35.202	23.202	3.7043	1.2396	3.3552	0.3116	-0.7604	-0.9279	3.7043	-0.3491	
0.4	2.0	25.009	-15.00	-40.000	15.000	-0.1193	1.4219	5.3067	0.7520		-0.6698			
		21.095	-16.745	-36.095	16.7457	0.0563	1.4272	5.3853	0.7544		-0.6727			
		21.360	-16.8193	-38.1057	16.8193	-0.0341	1.4245	5.3886	0.7545		-0.6699			
		21.225	-16.7493	-38.0443	16.7493	-0.0313	1.4245	5.3854	0.7544	-0.5755	-0.6700	-0.0313	5.4067	*
0.5	2.0	15.00												
		12.64	-10.00	-25.0	10.00	-3.1835	1.2528	6.7228	1.3654		0.1126			
		12.87	2.8159	-22.64	-2.8159	-3.0655	1.2568	6.0818	1.3440		0.0872			
		13.89	2.1819	-10.024	-2.1819	-2.4347	1.2778	6.1137	1.3451		0.0673			
		13.75	1.6833	-11.7081	-1.683	-2.5189	1.2750	6.1387	1.3459		0.0709			
		13.72	1.7853	-11.9459	-1.7853	-2.5308	1.2746	6.1336	1.3457	-0.7254	0.0741	-2.5308	8.6644	
0.6	2.0	0.000	15.000	15.000	-15.000	-1.6915	1.0524	5.2943	1.8745		0.8221			
		2.62	20.550	12.38	-20.55	-2.5090	1.0023	5.0168	1.9188		0.9165			
		0.115	22.9139	20.435	-22.9189	-2.1063	1.0157	4.8986	1.9149		0.8992			
		0.785	22.4804	22.1289	-22.4804	-1.9866	1.0185	4.9203	1.9156		0.8971			
		0.925	22.4285	21.5554	-22.4285	-2.050	1.0176	4.9229	1.9157		0.8987			
		0.68	22.4532	21.5485	-22.4532	-2.050	1.0176	4.9216	1.9156	-0.9824	0.8990	-2.050	6.9716	
0.615	2.00	-3.00	25.000	28.000	-25.000	-1.6905	0.9894	4.5657	1.9867		0.9973			
		-0.53	24.9334	25.53	-24.9334	-1.6967	0.9894	4.5659	1.9867	-1.0106	0.9973	-1.6967	6.2626	**

* $x_1 - x_0 = x_1$, SE HACE CASI CERO, CAMBIO DE POSITIVO A NEGATIVO. $|x_1|_{\max} = 1.4245$ cm

** CAMBIO DE RIGIDEZ EN EL 2o. PISO $x_2 - x_1 = 1.00$, $Q_2 = 25$

t seg	x_0 cm	Q_1 ton	Q_2 ton	\ddot{x}_1 cm/seg ²	\ddot{x}_2 cm/seg ²	\dot{x}_1 cm/seg	x_1 cm	\dot{x}_2 cm/seg	x_2 cm	$x_1 - x_0$ cm	$x_2 - x_1$ cm	$\dot{x}_1 - \dot{x}_0$ cm/seg	$\dot{x}_2 - \dot{x}_1$ cm/seg	OBSERVA- CIONES
0.70	2.00	-10.000	25.000	35.000	-25.000	0.8696	0.9484	2.441	2.285		1.3366			
		-2.580	25.000	27.580	-25.000	0.5728	0.9405	2.441	2.285		1.3445			
		-2.975	25.000	27.975	-25.000	0.5886	0.9409	2.441	2.285		1.3441			
		-2.955	25.000	27.955	-25.000	0.5878	0.9409	2.441	2.285	-1.0591	1.3441	0.5878	1.8532	
0.735	2.00	-1.000	25.000	26.000	-25.000	1.5368	0.98065	1.565	2.3549					
		-0.9675	25.000	25.9675	-25.000	1.5367	0.98065	1.566	2.3549					
		-0.9671	25.000	25.9671	-25.000	1.5367	0.98065	1.566	2.3549	-1.1093	1.3742	1.5367	0.0293	
0.80	2.00	5.000	20.000	15.000	-20.000	2.8823	1.1282	0.09128	2.4068		1.2756			
		6.365	22.575	16.245	-22.595	2.9196	1.0449	0.01343	2.4053		1.3604			
		6.570	22.4619	18.085	-22.469	2.9748	1.1300	0.0173	2.4053		1.2753			
		6.435	22.5613	16.0948	-22.5613	2.9151	1.1288	0.0144	2.4053	-0.8712	1.2765	2.9151	-2.9007	**

** x_2 SE HACE CASI CERO
 $|x_2|_{\text{máx}} = 2.4053 \text{ cm}$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

METODOS DE STODOLGA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA
EL CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980



MÉTODOS DE STODOLA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA EL CÁLCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

Enrique del Valle C *

Para calcular las frecuencias y configuraciones modales de estructuras idealizadas como una serie de masas unidas por resortes, sin amortiguamiento, en vibración libre, se puede suponer que cada masa se mueve en movimiento armónico simple definido por $X=X_0 \cos wt$ o $X=X_0 \sin wt$ donde X_0 define la amplitud y w la frecuencia circular del movimiento

La aceleración estará dada entonces: por $\ddot{X}=-w^2 X_0 \cos wt$ ó $\ddot{X}=-w^2 X_0 \sin wt=-w^2 X$ y las fuerzas de inercia a que estará sometida cada masa, de acuerdo con la segunda ley de Newton, serán $F_i = m\ddot{X} = -mw^2 X$

Por otro lado, la fuerza restitutiva que aparece en cada resorte estará dada por $F_e=RX$, donde R es la rigidez de entrepiso, que podemos definir como la fuerza cortante que es necesario aplicar para producir un desplazamiento unitario entre dos niveles consecutivos: $R = V/\Delta X$, para $\Delta X = 1$

Vemos entonces, que las fuerzas a que se verá sujeta cada masa dependerán de X y de w^2 únicamente.

Por otro lado, sabemos que para conocer un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la frecuencia w (o período T) como la configuración modal relativa, y que si la estructura está vibrando en un modo dado, la frecuencia del movimiento de cada masa será la misma.

Tomando en cuenta lo anterior, se pueden emplear dos métodos numéricos para el cálculo de las frecuencias y configuraciones modales.

* Profesor Titular, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM

El método propuesto por Stodola-Vianello-Newmark, consiste en:

1. Suponer una configuración deformada de la estructura:

$$X_{i\text{supuesta}}$$

2. Valuar las fuerzas de inercia asociadas a esa configuración $F_i = -mw^2 X_i$, dejando w^2 como factor común cuyo valor no conocemos.

3. Valuar la fuerza cortante en la estructura, como la suma acumulativa de las fuerzas de inercia de arriba abajo del edificio. $V_i = \sum_{j=1}^i F_j$ (función de w^2)

4. Calcular los incrementos de deformación correspondientes a las fuerzas cortantes.

$$\Delta X_i = \frac{V_i}{R_i} \quad (\text{función de } w^2).$$

5. Obtener la configuración calculada de la estructura como la suma acumulativa de los incrementos de deformación, de abajo hacia arriba.

$$X_{i\text{calc}} = \sum_{j=1}^i \Delta X_j = \text{coef.} \cdot w^2$$

Esto nos dará un coeficiente multiplicado por w^2 para cada masa.

6. Si la estructura está vibrando en un modo la configuración calculada será proporcional a la supuesta, y el factor de proporcionalidad será w^2 . Esto es, para cada masa podremos calcular

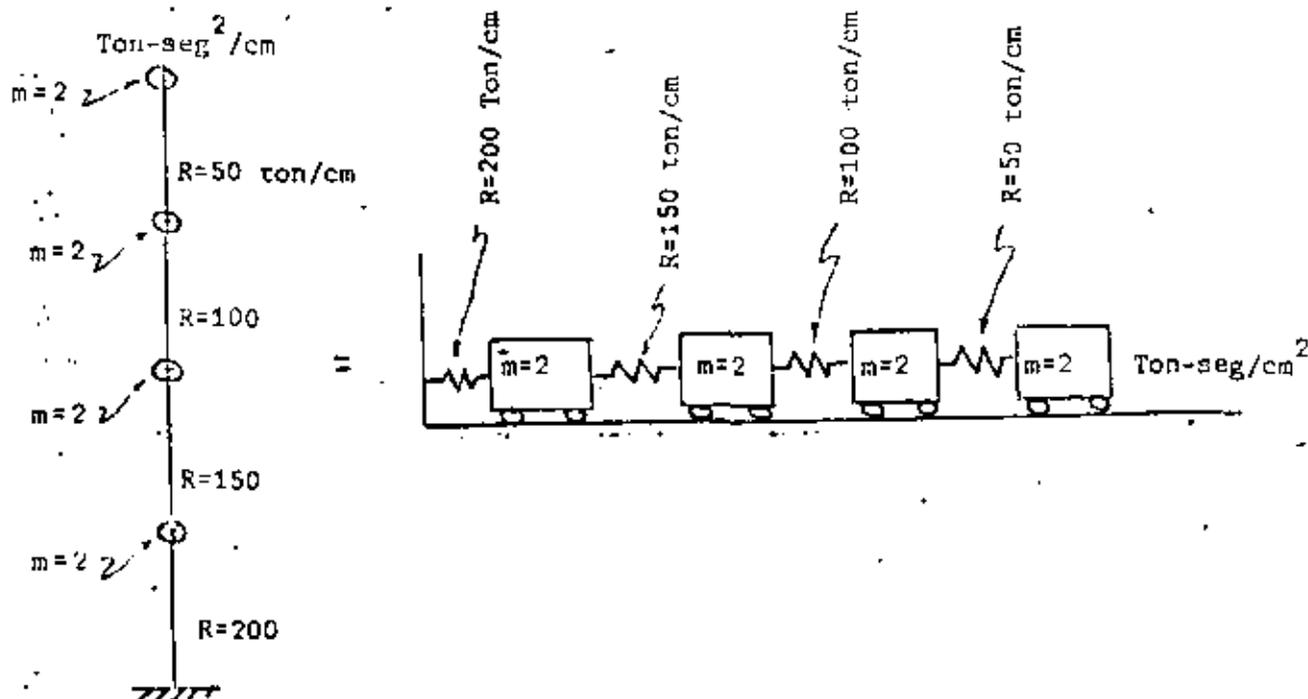
$$w^2 = \frac{X_{\text{supuesta}}}{\text{Coef. de } X_{\text{calc}}}$$

En general, los valores de w^2 calculados para cada masa,

no serán iguales en el primer ciclo, pero el método es de rápida convergencia si se usa como nueva configuración supuesta la obtenida al final de cada ciclo, de preferencia normalizándola, esto es, haciendo que la deformación de una de las masas, por ejemplo la primera, tenga siempre el mismo valor, con objeto de observar como se modifica la configuración relativa después de cada ciclo. Los valores de w^2 obtenidos en cada ciclo nos dan también un intervalo de valores que se va cerrando hasta que se obtiene finalmente los mismos valores para todas las masas.

El método descrito anteriormente converge siempre hacia el modo más bajo que esté presente en la configuración supuesta, y dado que al suponer una configuración cualquiera ésta estará formada por una combinación lineal de todos los modos posibles, el modo más bajo será el primero o fundamental. Más adelante se indica como hacer para calcular modos superiores.

Ejemplo. Calcular la frecuencia y configuración modal del primer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático siguiente.



Para realizar los pasos antes indicados conviene usar una tabulación como la siguiente:

1er. Ciclo

Nivel	$\frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm m}}$	$\frac{\text{ton}}{\text{cm R}}$	* cm X_{sup}	$F_i = mw^2 X$	V	$\Delta X = \frac{V}{R}$	X_{ciclo}	** w^2	*** X_{sup}
4	2	50	4	$8w^2$	$8w^2$	$0.16w^2$	$0.52w^2$	$7.692 = \frac{4}{0.52}$	5.2
3	2	100	3	$6w^2$	$14w^2$	$0.14w^2$	$0.36w^2$	$8.333 = \frac{3}{0.36}$	3.6
2	2	150	2	$4w^2$	$18w^2$	$0.12w^2$	$0.22w^2$	$9.091 = \frac{2}{0.22}$	2.2
1	2	200	1	$2w^2$	$20w^2$	$0.1w^2$	$0.1w^2$	$10.0 = \frac{1}{0.1}$	1
0							0		

Nótese que los valores R, V y ΔX están defasados, pues corresponden al entrepiso.

* Para iniciar el cálculo puede usarse cualquier valor de X. En general, el método convergirá más rápido entre más acertada sea la configuración supuesta, pero si se supone por ejemplo una configuración que se parezca a un segundo, tercero o cuarto modo, de cualquier manera, al término de algunos ciclos más, llegaremos al primer modo.

** Nótese que en este caso, el valor de w^2 estará comprendido entre $7.692 \frac{1}{\text{seg}^2}$ y $10 \frac{1}{\text{seg}^2}$

*** En un segundo ciclo, usaremos como nueva configuración supuesta la obtenida al final del primer ciclo normalizada de tal modo que la deformación del primer nivel, sea unitaria,

esto es, dividiendo la configuración calculada entre $0.1w^2$ en cada nivel.

2o. Ciclo

Nivel	m	R	X_{sup}	F_i	V	ΔX	X	w^2	X_{sup}
4	2	50	5.2	$10.4w^2$	$10.4w^2$	$0.208w^2$	$0.651w^2$	7.988	5.425
3	2	100	3.6	$7.2w^2$	$17.6w^2$	$0.176w^2$	$0.443w^2$	8.126	3.692
2	2	150	2.2	$4.4w^2$	$22w^2$	$0.147w^2$	$0.267w^2$	8.240	2.225
1	2	200	1.0	$2.0w^2$	$24w^2$	$0.120w^2$	$0.120w^2$	8.333	1.0
0							0		

Obsérvese que el intervalo de variación de w^2 se redujo a 7.988 y 8.333 y que las variaciones en la configuración modal fueron mucho menores que las que tuvo el primer ciclo.

Tomando como base de partida nuevamente la configuración calculada, en un tercer ciclo se tiene:

Nivel	m	R	X_{sup}	F	V	ΔX	X	w^2	X_i
4	2	50	5.425	$10.85w^2$	$10.85w^2$	$0.2170w^2$	$0.6739w^2$	8.050	5.461
3	2	100	3.692	$7.384w^2$	$18.234w^2$	$0.1823w^2$	$0.4569w^2$	8.081	3.703
2	2	150	2.225	$4.45w^2$	$22.684w^2$	$0.1512w^2$	$0.2746w^2$	8.103	2.225
1	2	200	1.0	$2.0w^2$	$24.684w^2$	$0.1234w^2$	$0.1234w^2$	8.104	1.00
0							0		

y finalmente, en un cuarto ciclo, la aproximación se considera suficiente:

Nivel	m	R	X_{sup}	F	V	ΔX	X	w^2	X_i
4	2	50	5.461	$10.922w^2$	$10.922w^2$	$0.2184w^2$	$0.6775w^2$	8.061	5.468
3	2	100	3.703	$7.406w^2$	$18.328w^2$	$0.1833w^2$	$0.4591w^2$	8.066	3.705
2	2	150	2.225	$4.45w^2$	$22.778w^2$	$0.1519w^2$	$0.2758w^2$	8.067	2.226
1	2	200	1.00	$2.00w^2$	$24.778w^2$	$0.1239w^2$	$0.1239w^2$	8.071	1.00
0		Σ	12.389			$\Sigma = 1.5363w^2$		8.064*	

* El valor final de w^2 lo obtenemos con más precisión dividiendo la suma de X_{sup} entre la suma de coeficientes de X_{calc} . Esto es más preciso que promediar los valores de w^2 de cada nivel

$$w = \sqrt{8.064} = 2.8397; \quad T = \frac{2\pi}{w} = \frac{6.2832}{2.8397} = 2.213 \text{ seg.}$$

Cálculo de modos superiores empleando este método

Como se indicó antes, el método converge al modo más bajo presente en la configuración supuesta, y al suponer una combinación cualquiera ésta estará constituida por una combinación lineal de los distintos modos de vibrar:

$X_{sup} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4}$, donde X_{i1} a X_{i4} son las configuraciones modales y C_i son coeficientes de participación.

Si queremos calcular el segundo modo de vibrar empleando este método, tendremos que quitar a la configuración supuesta la participación del primer modo: $C_1 X_{i1}$, para lo cual necesitamos conocer X_{i1} y C_1 . X_{i1} la calculamos como se indicó antes y C_1 lo podemos calcular recurriendo a la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración que indica que $\sum_i X_{in} X_{im} = 0$ si $n \neq m$, donde X_{in} y

X_{im} son configuraciones modales.

Si multiplicamos la expresión anterior de X_{sup} por $m_i X_{i1}$ y sumamos para todas las masas, considerando que los coeficientes de participación son constantes y pueden salir de la sumatoria, tendremos :

$$\sum_i m_i X_{i1} X_{sup} = C_1 \sum_i m_i X_{i1}^2 + C_2 \sum_i m_i X_{i1} X_{i2} + C_3 \sum_i m_i X_{i1} X_{i3} + \dots$$

donde los términos que multiplican a C_2 , C_3 , etc. son nulos por la propiedad de ortogonalidad de los modos, quedando entonces

$$C_1 = \frac{\sum_i m_i X_{i1} X_{sup}}{\sum_i m_i X_{i1}^2}$$

Esta expresión es válida para cualquier modo n .

Por tanto, si queremos calcular el segundo modo de vibrar, supondremos una configuración que se parezca a este modo, es decir, que tenga un punto de deflexión nula, calcularemos el valor de C_1 con la expresión anterior y restaremos a la configuración supuesta para el segundo modo la participación del primer modo $C_1 X_{i1}$, lo que da por resultado una nueva configuración supuesta para el segundo modo en la que el modo más bajo presente es el segundo y por lo tanto, al aplicar el método habrá convergencia hacia este modo. A la operación antes descrita se le llama "limpia" de modos.

Si quisiéramos calcular el tercer modo de vibrar, tendríamos que conocer de antemano las configuraciones correctas de primero y segundo modo, y suponer una configuración que se parezca al tercer modo, (que tenga dos puntos de deflexión nula); calcularíamos dos coeficientes de participación C_1 y C_2 , correspondientes a los modos primero y segundo, en la configuración supuesta y la limpiaríamos para que el modo más bajo presente en ella sea el tercero y el método converja a este modo.

Esto es :

$$X_{i3sup} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

$$C_1 = \frac{\sum m X_{i1} X_{i3sup}}{\sum m X_{i1}^2} \quad ; \quad C_2 = \frac{\sum m X_{i2} X_{i3sup}}{\sum m X_{i2}^2}$$

$$\bar{X}_{i3sup} = X_{i3sup} - C_1 X_{i1} - C_2 X_{i2} = C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

De manera semejante se procede para calcular otros modos superiores.

En la práctica, y debido a errores numéricos o de aproximación que van acarreándose no basta con una sola limpieza. Para lograr convergencia adecuada da buen resultado limpiar la configuración calculada al cabo de cada ciclo, antes de calcular los valores de w^2 . Esa misma configuración limpiada, normalizada, nos sirve como nueva configuración para un nuevo ciclo. Es conveniente llevar cuando menos tres cifras significativas en los cálculos.

Para fijar ideas, calculemos tres ciclos del segundo modo de vibrar de la estructura para la cual calculamos anteriormente el primer modo.

m	R	X_{i1}	mX_{i1}	mX_{i1}^2	X_{i2sup}	$mX_{i1} X_{i2sup}$	$-C_1 X_{i1}$	\bar{X}_{i2}	$\frac{F_{i2}}{m \bar{X}_{i2}^2} = \frac{X_{i2}}{w^2}$	V	ΔX	X Calc.
2	50	5.468	10.936	59.798	-1.0	-10.936	-0.054	-1.054	$-2.108w^2$	$-2.108w^2$	$-0.0422w^2$	$-0.0334w^2$
2	100	3.705	7.41	27.454	0	0	-0.036	-0.036	$-0.072w^2$	$-2.180w^2$	$-0.0218w^2$	$0.0088w^2$
2	150	2.226	4.452	9.910	2.0	9.910	-0.022	1.978	$3.956w^2$	$1.776w^2$	$0.0118w^2$	$0.0306w^2$
2	200	1.00	2.0	2.0	1.0	2.0	-0.010	0.990	$1.980w^2$	$3.756w^2$	$0.0188w^2$	$0.0188w^2$
			$\Sigma = 99.162$			$\Sigma = 0.974$						

DATOS

$$C_1 = \frac{0.974}{99.162} = 0.00982$$

La configuración supuesta puede ser cualquiera, pero desde luego es conveniente que se parezca a un segundo modo, esto es, que tenga un cambio de signo en la configuración modal.

Nivel	$m\bar{x}_{i1} X_{cal}$	$-C_1 X_{i1}$	\bar{x}_{2cal}	w^2	\bar{x}_{i2sup}^{**}	$m\bar{x}_{i2sup} w^2$	v	ΔX	X_{cal}
4	$-0.3653w^2$	$+0.00696w^2$	$-0.02644w^2$	39.86	-1.3042	$-2.6084w^2$	$-2.6084w^2$	$-0.05217w^2$	$-0.0314w^2$
3	$0.0652w^2$	$0.00472w^2$	$0.01352w^2$	-2.66	0.6669	$1.3338w^2$	$-1.2746w^2$	$-0.01275w^2$	$0.02077w^2$
2	$0.1362w^2$	$0.00284w^2$	$0.03344w^2$	59.15	1.6495	$3.2990w^2$	$2.0244w^2$	$0.01350w^2$	$0.03352w^2$
1	$.0376w^2$	$0.00127w^2$	$0.02007w^2$	49.33	0.990	$1.9800w^2$	$4.0044w^2$	$0.02002w^2$	$0.02002w^2$
Σ	$-0.1263w^2$								

$$C_1 = \frac{-0.1263w^2}{99.162} = -0.0012736w^2$$

** Normalizando con respecto a 0.99 en el primer nivel, para comparar la evolución de la configuración.

i-vel	$m\bar{x}_{i1} X_{cal}$	$-C_1 X_{i1}$	\bar{x}_{2cal}	w^{2***}	\bar{x}_{i2sup}	$m\bar{x}_{i2sup} w^2$	v	ΔX
4	$-0.34339w^2$	$+0.000012w^2$	$-0.031388w^2$	41.55	-1.5520	$-3.104w^2$	$-3.104w^2$	$-0.06208w^2$
3	$0.15391w^2$	$+0.000008w^2$	$0.020778w^2$	32.10	1.0274	$2.0548w^2$	$-1.0492w^2$	$-0.01049w^2$
2	$0.14923w^2$	$+0.000005w^2$	$0.033525w^2$	49.20	1.6577	$3.3154w^2$	$2.2662w^2$	$0.01511w^2$
1	$0.04004w^2$	$+0.000002w^2$	$0.020022w^2$	49.45	0.99	$1.98w^2$	$4.2462w^2$	$0.02123w^2$

$$\Sigma = -0.00021w^2$$

$$\Sigma = 2.1231$$

$$|\Sigma| = 5.2271$$

$$C_1 = \frac{-0.00021w^2}{99.162} = -0.0000021177w^2$$

*** Nótese que el intervalo de w^2 queda comprendido entre 32.1 y 49.49 y que el ajuste en la curva ocurre casi entre las dos últimas masas. Obsérvese que la corrección al limpiar es muy pequeña.

Nivel	X_{calc}	$mX_{ii} X_{calc}$	$-C_1 X_{ii}$	\bar{X}_{calc}	**** w^2	\bar{X}_{isup}
4	$-0.03623w^2$	$-0.39621w^2$	+0.000023	$-0.036207w^2$	42.86	-1.705
3	$0.02585w^2$	$0.19155w^2$	+0.000015	$0.025865w^2$	39.72	1.206
2	$0.03634w^2$	$0.16179w^2$	+0.000009	$0.036349w^2$	45.61	1.695
1	$0.02123w^2$	$0.04246w^2$	+0.000004	$0.021234w^2$	46.62	0.99
0	0	$\Sigma -0.00041w^2$.	$\Sigma = 0.047241w^2$	prom. 43.70 44.94	

$\Sigma = 0.119655w^2$ 43.68
(vals. abs.)

$$C_1 = \frac{-0.00041w^2}{99.162} = -0.0000041w^2$$

**** El intervalo de variación de w^2 se ha reducido a 39.72 - 46.62 (dif = 6.9) y los ajustes en la curva son menores. En uno o dos ciclos más se llegaría al valor correcto de w^2 y X_i . Nótese que para estimar un valor de w^2 procediendo como se indicó anteriormente podemos hacer las sumas de \bar{X}_{sup} y de los coeficientes de \bar{X}_{calc} tomando valores absolutos o tomando en cuenta el signo correspondiente. La variación que se obtiene en este caso es de 3% aprox. Si sacamos el promedio de w^2 se obtiene un valor casi igual al obtenido con las sumas de valores absolutos, que es más correcto.

Si no hubiéramos hecho la limpia en ninguno de los ciclos, al cabo de 8 habríamos llegado a la configuración del primer modo (en vez de 4 ciclos que se necesitaron cuando la configuración supuesta se parecía a la del primer modo).

Aplicación del Método de Stodola-Vianello-Newmark Para Estructuras de Flexión

Como se verá más adelante, cuando las trabes de los marcos son muy flexibles en comparación con las columnas, o cuando las fuerzas laterales son resistidas por muros que trabajan esencialmente a flexión, la rigidez de entrepiso no es independiente de la distribución de fuerzas a que esté sometida la estructura y por tanto no puede suponerse constante para el cálculo de los distintos modos de vibrar. En general, la pseudorigidez equivalente que se obtendría para un segundo modo será mayor que la correspondiente al primer modo, pues los efectos de flexión de conjunto se reducen considerablemente al no tener todas las fuerzas actuando en el mismo sentido. Lo mismo podría decirse para modos superiores (ref. 1).

En esos casos, las propiedades elástico geométricas de la estructura no quedarán definidas por rigideces de entrepiso sino por la variación de los productos EI y GA con los cuales se podrán calcular las deformaciones debidas a flexión y a fuerza cortante respectivamente.

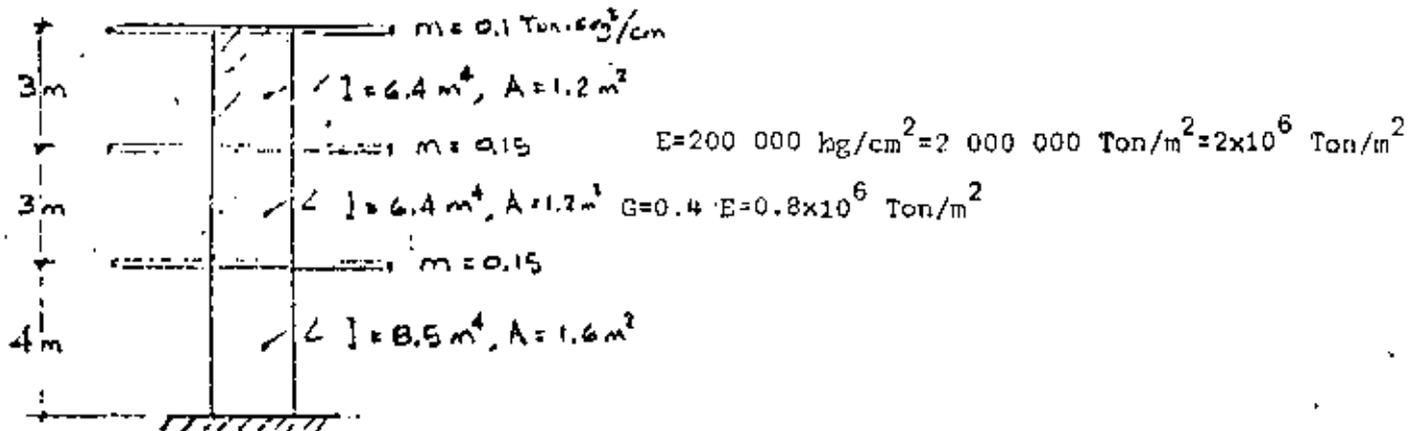
Para calcular las deformaciones por flexión es conveniente el empleo de los teoremas de la viga conjugada, que es, para el caso de un voladizo, otro voladizo empotrado en el extremo opuesto cargado con el diagrama de momentos entre EI , y en el cual los momentos flexionantes corresponden a las deformaciones de la viga real.

Las deformaciones por cortante, que en el caso de estructuras a base de muros pueden ser importantes en comparación con las de flexión, sobre todo en los niveles inferiores, se calculan mediante la expresión $\Delta X_{V_i} = \frac{V_i h_i}{A_i G}$, donde ΔX_{V_i} es el incremento de deformación por

cortante entre dos niveles consecutivos, V_i , h_i y A_i son, respectivamente la fuerza cortante, la altura y el área efectiva de cortante entre esos mismos niveles y G es el módulo de elasticidad al cortante del material de la estructura.

Para calcular los modos de vibración, se supone una configuración modal, se calculan las fuerzas de inercia $F_i = m_i w^2 X_i$ asociadas a la configuración y las fuerzas cortantes correspondientes y a partir de ellas se valúan los incrementos de momento de cada entrepiso y los momentos de volteo acumulados de arriba hacia abajo, los cuales se dividen entre EI (habrá dos valores de M/EI en un mismo nivel en los casos en que haya cambio de sección de los muros). La integración numérica del diagrama de M/EI nos permitirá transformar ese diagrama en una serie de cargas concentradas equivalentes a él aplicadas en los distintos niveles con los cuales es muy fácil calcular los cortantes equivalentes correspondientes a cada entrepiso y los incrementos de momento flexionante en la viga conjugada que serán iguales a los incrementos de deformación por flexión entre dos niveles consecutivos (es el equivalente de $\Delta X = V/R$ del caso visto anteriormente). A estos incrementos de deformación por flexión se sumarán los correspondientes a la deformación por cortante y con esa suma se podrá calcular la nueva configuración, que será como antes función de w^2 y de donde podremos despejar este valor y en caso de que no sea igual para todas las masas volver a hacer otro ciclo tomando como configuración de partida la encontrada anteriormente normalizándola con respecto a una de las masas para poder comparar la evolución de las configuraciones de cada ciclo.

Para fijar ideas, a continuación se presenta un ejemplo de análisis de una estructura en que las fuerzas laterales son resistidas por muros, cuyos valores de I y A son los indicados en la figura siguiente:



Ni	$\frac{T \cdot \text{seg}^2}{\text{cm}}$	$\frac{\text{m}^4}{I}$	$\frac{\text{Ton} \cdot \text{m}^2}{EI}$	$\frac{\text{m}^2}{A}$	$\frac{\text{Ton}}{GA}$	$\frac{\text{m}}{h}$	$\frac{\text{cm}}{X_{\text{sup}}}$	$\frac{\text{m} X_{\text{sup}}^2}{w^2}$	$\frac{\text{Ton}}{V}$	$\Delta M = Vh$	$\frac{\text{Ton} \cdot \text{m}}{M}$	$\frac{1/\text{m}}{\frac{M}{EI}}$
3	0.10	6.4	12.8×10^6	1.2	0.96×10^6	3	5.0	$0.50 w^2$	$0.5 w^2$	$1.5 w^2$	0	0
2	0.15	6.4	12.8×10^6	1.2	0.96×10^6	3	2.5	$0.38 w^2$	$0.88 w^2$	$2.64 w^2$	$1.5 w^2$	$0.1172 \times 10^{-6} w^2$
1	0.15	8.5	17.0×10^6	1.6	1.28×10^6	4	1	$0.15 w^2$	$1.03 w^2$	$4.12 w^2$	$4.14 w^2$	$0.3234 \times 10^{-6} w^2$ $0.2435 \times 10^{-6} w^2$
0											$8.26 w^2$	$0.4859 \times 10^{-6} w^2$

Ejemplo de cálculo de las concentraciones equivalentes al diagrama de M/EI

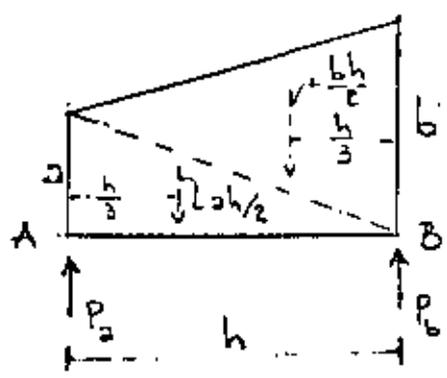
Para el nivel 3

$$P_{\text{eq}} = \frac{3}{6} (2 \times 0 + 0.1172 \times 10^{-6} w^2) = 0.0586 \times 10^{-6} w^2$$

(Ver aclaración al pie de la tabla de la página siguiente)

Ni- vel	Peq**	Veq**	m. $\Delta M = Veq \cdot h = \Delta X_F$	m **** ΔX_v	m ΔX_{tot}	m X_{cal}
3	$0.0586 \times 10^{-6} w^2$					
	$0.1172 \times 10^{-6} w^2$	$2.2369 \times 10^{-6} w^2$	$6.7107 \times 10^{-6} w^2$	$1.5625 \times 10^{-6} w^2$	$8.2732 \times 10^{-6} w^2$	23.0052×10^{-6}
2	$0.2789 \times 10^{-6} w^2$					
	$0.3820 \times 10^{-6} w^2$	$1.8408 \times 10^{-6} w^2$	$5.5224 \times 10^{-6} w^2$	$2.75 \times 10^{-6} w^2$	$8.2724 \times 10^{-6} w^2$	$14.732 \times 10^{-6} w^2$
1	$0.6486 \times 10^{-6} w^2$					
	$0.8102 \times 10^{-6} w^2$	$0.8102 \times 10^{-6} w^2$	$3.2408 \times 10^{-6} w^2$	$3.2188 \times 10^{-6} w^2$	$6.4596 \times 10^{-6} w^2$	$6.4596 \times 10^{-6} w^2$
0	$0.8102 \times 10^{-6} w^2$					0

$\sqrt{Peq^2}$ **** w^2	X_{sup}
2173.42	3.56
1696.99	2.28
1548.08	1.0



* Para obtener cargas concentradas equivalentes al diagrama de M/EI se puede usar la fórmula siguiente:

$$P_a = \frac{h}{6} (2a+b); \quad P_b = \frac{h}{6} (2b+a)$$

donde h es la distancia entre dos puntos A y B con ordenadas de M/EI iguales a a y b respectivamente. La variación de M/EI entre A y B es lineal, por lo que esta expresión se obtiene considerando dos triángulos con alturas a y b respectivamente y base h . P_a y P_b son las concentraciones correspondientes en los puntos A y B. (Ref. 2)

** Recuérdese que el empotramiento de la viga conjugada es el extremo superior, por lo que se empieza de abajo hacia arriba el cálculo.

*** Obsérvese que en el primer entrepiso la deformación por cortante es prácticamente igual a la de flexión por lo que despreciarla conduciría a errores muy grandes. Al ir aumentando la altura de la estructura la deformación por cortante va reduciendo su importancia en comparación con la de flexión y puede llegar a ser despreciable. En este caso la deformación por cortante en el tercer entrepiso es 23% de la debida a flexión.

**** Debe tenerse cuidado con las unidades al valuar w^2 pues es fácil equivocarse, obsérvese que X_{sup} está en cm y X_{calc} resulta en metros

Método de Holzer

Como se indicó anteriormente, para conocer completamente un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la configuración modal como la frecuencia del modo. Hemos visto que en el método de Stodola-Vianello-Newmark se supone una configuración relativa y a partir de ella se calcula el valor de w^2 . Hölzer procede exactamente alrevés, esto es, supone la frecuencia y a partir de ella se calcula la configuración relativa de abajo hacia arriba de la estructura. Dado que la configuración es relativa se puede suponer también la deformación de la primera masa (por consiguiente el incremento de deformación entre la base y la primera masa.) El método tiene las siguientes etapas :

Los datos son las masas y las rigideces de entrepiso, igual que antes.

1. Suponer un valor de w^2
2. Obtener los valores de $m w_{sup}^2$ para cada masa
3. Suponer la deformación del primer nivel: X_1 ; conviene suponer un valor unitario. Esto equivale también, como ya se dijo a suponer ΔX_1 :
4. Calcular la fuerza cortante en la base de la estructura, (primer entrepiso) que será por definición de rigidez de entrepiso

$$V_1 = R_1 \Delta X_1 \quad \text{si} \quad \Delta X_1 = 1, \quad V_1 = R_1$$

5. Calcular la fuerza de inercia asociada a la masa del primer nivel:

$$F_1 = m_1 w_{sup}^2 X_1$$

6. Por definición de fuerza cortante, como la suma acumulativa de las fuerzas arriba de un cierto nivel, podremos calcular la cortante del segundo entrepiso restando a la cortante en la base la fuerza de inercia del primer nivel, esto es

$$V_2 = V_1 - F_1$$

7. Conocida la fuerza cortante en el entrepiso 2 podemos calcular el incremento de deformación en ese entrepiso dividiendo la cortante entre la rigidez de entrepiso $\Delta X_2 = \frac{V_2}{R_2}$

8. Sumando ΔX_2 a la deformación del primer nivel obtendremos la deformación del segundo nivel $X_2 = X_1 + \Delta X_2$ / y podemos repetir los pasos 5 a 8 para todas las masas hasta llegar al extremo superior de la estructura.

Si la frecuencia supuesta corresponde a un modo de vibrar, obtendremos que la fuerza de inercia del último nivel es igual a la fuerza cortante del entrepiso correspondiente (por equilibrio dinámico). Si la frecuencia supuesta no es la correspondiente a un modo de vibrar, se obtendrá una diferencia entre el valor de la fuerza de inercia y el de la fuerza cortante en el extremo de la estructura. En este caso el método no es convergente, pero si hacemos otro ciclo con otro valor de w^2 relativamente, cercano al anterior, encontraremos otra diferencia y podremos trazar una gráfica que nos relacione las frecuencias supuestas (abscisas) con las diferencias entre fuerza de inercia y fuerza cortante en el extremo superior de la estructura (ordenadas). Una vez que tenemos dos puntos de esa gráfica podremos buscar un valor de w^2 supuesto en la intersección

con el eje de las abscisas de la línea que une los puntos antes obtenidos, o su prolongación si ambas diferencias tienen el mismo signo. Con este tercer valor supuesto para w^2 seguramente obtendremos otra diferencia, menor que las anteriores, que nos definirá un tercer punto en la gráfica. Podremos entonces trazar una curva entre los tres puntos y definir así un nuevo valor de w^2 que seguramente estará muy próximo a la frecuencia correcta de uno de los modos de vibrar de la estructura.

Cuando ya se está cerca del valor correcto, se puede mejorar el valor supuesto de w^2 empleando el cociente de Crandall siguiente :

$$\bar{w}^2 = w^2 \frac{\sum V \cdot \Delta X}{\sum F X}$$

donde \bar{w}^2 es el valor que debemos suponer en el ciclo siguiente.

El método presentado sirve para calcular cualquier modo natural de vibración teniendo como datos las masas y las rigideces de entrepiso de la estructura. El modo de que se trate se obtendrá de la inspección de la configuración modal, tomando en cuenta que en el primero todas las deformaciones tienen el mismo signo, en el segundo hay un cambio de signo, en el tercero dos cambios de signo y así sucesivamente.

Si se conoce la frecuencia del primer modo de vibrar (por haberlo calculado empleando el método Stodola-Vianello-Newmark, por ejemplo), se puede estimar gruesamente el valor de las frecuencias de los modos superiores empleando la relación $w_2^2 \approx 9w_1^2$; $w_3^2 \approx 25w_1^2$, etc. (Esta aproximación puede ser demasiado burda dependiendo de los valores relativos de las masas y rigideces en cada caso particular, pero sirve como orientación).

Ejemplo:

Calculemos el segundo modo de vibrar de la estructura que se usó en el método de Stodola-Vianello-Newmark, suponiendo

$$w_2^2 \approx 9w_1^2 = 9 \times 8 = 72 \frac{1}{\text{seg}^2}$$

Usaremos la tabulación siguiente :

Nivel	m	R	$m w_{sup}^2$	ΔX	X *	F	V	
4	2	50	144	-2.707	-2.751	-396.1	-135.4	Dif = 260.7
3	2	100	144	-1.417	-0.044	- 6.3	-141.7	
2	2	150	144	0.373	1.373	-197.7	56	
1	2	200	144	1.0	1.0	144	200	

$w_{sup}^2 = 72$

* Obsérvese que aunque la diferencia encontrada es fuerte, la configuración se parece a un segundo modo, pues tiene un cambio de signo.

Usando un nuevo valor de w_{sup}^2 de $50.1/\text{seg}^2$, tendremos

Nivel	m	R	$m w^2$	ΔX	X	F	V	
4	2	50	100	-3.334	-2.334	-233.4	-166.7	Dif. 66.7
3	2	100	100	-0.667	1.00	100	- 66.7	
2	2	150	100	0.667	1.667	166.7	100	
1	2	200	100	1.0	1.0	100	200	

Trazando la gráfica w_{sup}^2 -diferencias encontramos

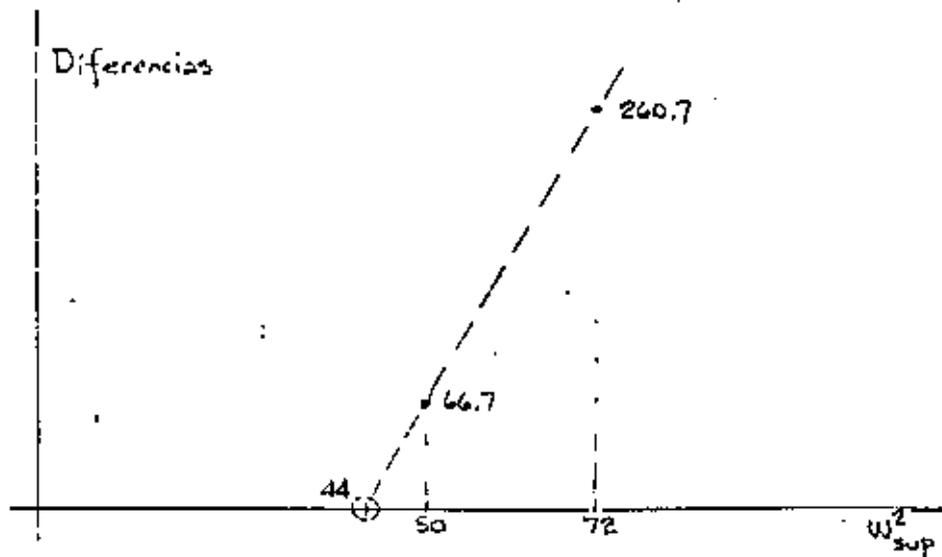


Fig 1.

que el valor de w^2 que hace cero las diferencias es aproximadamente 44 (podría obtenerse por triángulos semejantes, pero sabemos que aún cuando se hiciera así el valor no nos llevará exactamente a cero diferencia pues la variación no es lineal como estamos suponiendo, excepto en intervalos muy cerrados).

Suponiendo entonces $w^2 = 44$

Nivel	m	R	mw^2	ΔX	X	F	V	FX	V ΔX
4	2	50	88	-3.174	-1.844	-162.27	Dif. = 3.57 -158.7	299.23	503.71
3	2	100	88	-0.417	1.33	117	- 41.7	155.61	17.39
2	2	150	88	0.747	1.747	153.7	112	268.51	83.66
1	2	200	88	1.0	1.0	88	200	88	200
0								$\Sigma 811.35$	804.76

$$\bar{w}^2 = 44 \frac{804.76}{811.35} = 43.64 \text{ 1/seg}^2$$

$$\text{Usando } w_{\text{sup}}^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2$$

Ni- vel	m	R _i	mw ²	ΔX	X	F	V
4	2	50	87.28	-3.159	-1.809	-157.89	Dif.=0.05 -157.94
3	2	100	87.28	-0.401	1.350	117.83	- 40.11
2	2	150	87.28	0.751	1.751	152.83	112.72
1	2	200	87.28	1.0	1.0	87.28	200
0							

Como puede verse, la diferencia al final de este último ciclo es despreciable, por lo que

$$w_2^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2, w_2 = 6.606 \text{ 1/seg}, T_2 = 0.951 \text{ seg}$$

y la configuración modal es la indicada.

Suponiendo otro valor mayor de w^2 podría calcularse el tercero y cuarto modos. Puede también verificarse que la frecuencia del primer modo obtenido con el método de Stodola-Vianello-Newmark es correcta.

Comentarios adicionales

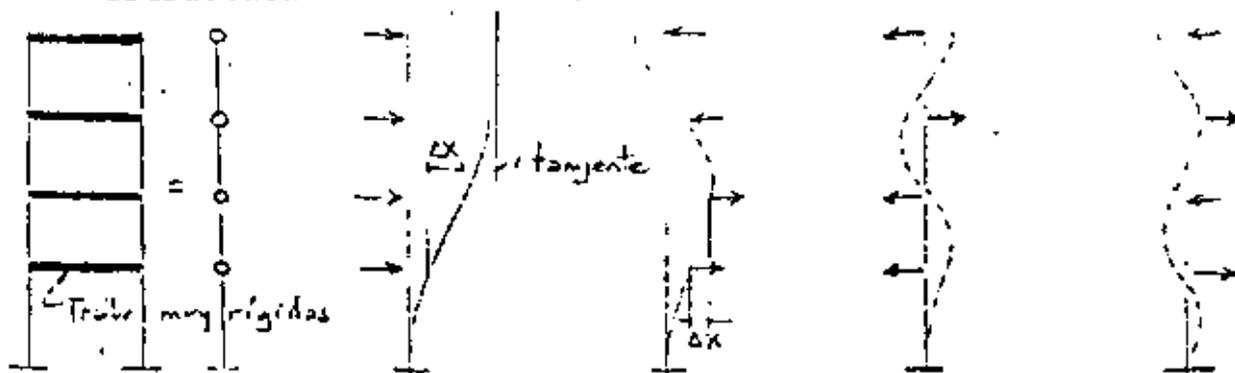
En los métodos presentados se tiene como datos las masas y las rigideces de entrepiso. Las masas son relativamente fáciles de calcular y dependen exclusivamente del peso de los materiales con que esté hecha la estructura y de la carga viva que se considere

para fines de análisis sísmico. Las rigideces serán función de las propiedades elástico-geométricas de los materiales empleados, que no es sencillo definir y de la estructuración, sobre todo de la relación que guarden las rigideces relativas de las barras que forman la estructura, traveses y columnas.

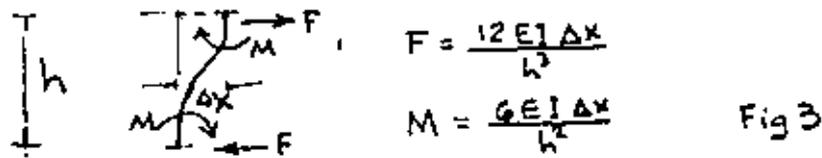
Dado el modelo matemático de un edificio como una serie de masas unidas por resortes, definimos como sistema estrechamente acoplado a aquel en que la rigidez de entrepiso es independiente de la distribución de cargas laterales a que se vea sometido el modelo, esto es, la rigidez de entrepiso es invariable independientemente de la elástica que adquiera la estructura al ser sometida a cargas laterales. Aquí se entiende por rigidez de entrepiso, como se indicó anteriormente, la fuerza necesaria para producir el desplazamiento unitario de un nivel con respecto al otro, esto es

$$R = \frac{V}{\Delta X} \quad ; \quad \text{para } \Delta X=1 \quad , \quad R=V$$

En la figura 2 se muestra el modelo matemático de un edificio de 4 niveles sometido a distintos sistemas de fuerzas. De acuerdo con lo antes dicho, la rigidez debe ser independiente de las fuerzas aplicadas (este tipo de estructuras se conoce también como estructura "de cortante").



Para que esto se cumpla, la rigidez de entrepiso debe ser función única y exclusivamente de las columnas de cada entrepiso, para lo cual, los giros de los nudos deben ser nulos, lo que se logra si las trabes son infinitamente rígidas en comparación con las columnas, en cuyo caso la elástica de cada una de las columnas es la mostrada en la figura 3, y los elementos mecánicos que aparecen son los que ahí se muestran, para barras de sección constante.



En la práctica, es difícil que la rigidez relativa de las trabes ($k=I/l$) sea muy grande en comparación con la de las columnas, lo que hará que los giros de los nudos no sean cero, relajándose el sistema y reduciéndose la rigidez del marco para un mismo tamaño de columnas. Debido a esto, el caso de trabes infinitamente rígidas en comparación con las columnas recibe a veces el nombre de cota superior de rigidez.

Al ser significativos los giros de los nudos, la rigidez de entrepiso ya no será independiente del sistema de fuerzas horizontales aplicadas. En el límite inferior, llegaremos al caso del voladizo mostrado en la figura 4, para el cual no tiene sentido hablar de rigidez de entrepiso, pues será diferente para cada una de las posibles configuraciones de fuerzas aplicadas. A este caso lo definiremos como sistema remotamente acoplado.

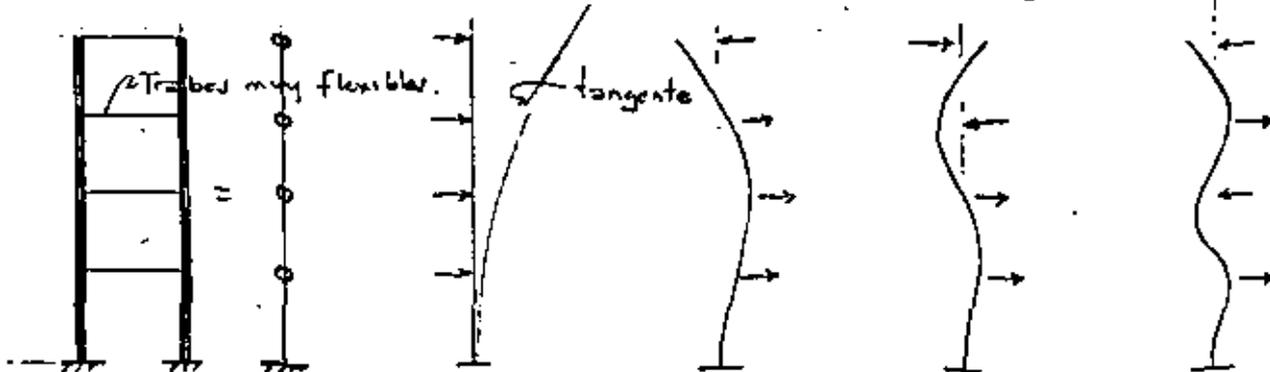
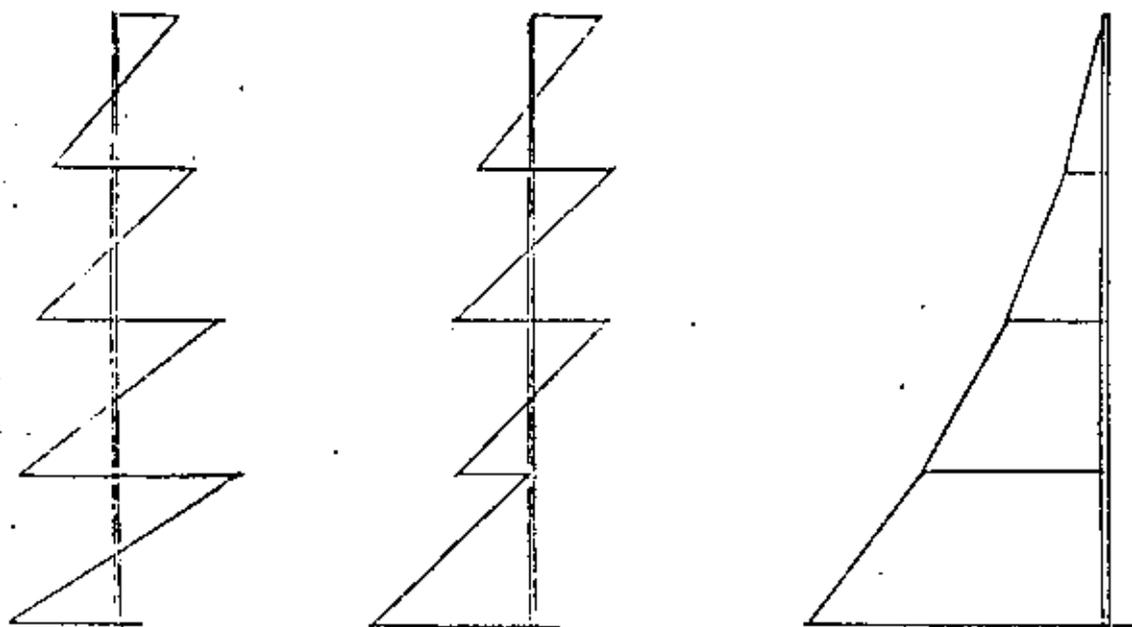


Fig 4

Nótese que en ambos casos se trata de estructuras aparentemente iguales, constituidas por marcos rígidos formados por traveses y columnas unidos en los nudos, sin embargo, como puede apreciarse en las figuras 1 y 3, las deformaciones de la estructura cuando todas las fuerzas se aplican en el mismo sentido son muy diferentes en uno y otro caso. En la figura 2, la tangente en el extremo superior es vertical, mientras que en la figura 4, la tangente en el extremo superior tiene la inclinación máxima.

La figura 5 ilustra la forma en que variarían los momentos flexionantes en las columnas del marco en los casos extremos y en uno intermedio. Nótese que la aplicación de métodos aproximados para la obtención de momentos en traveses y columnas, sin verificar cual es la situación del marco, puede conducir a errores muy importantes de subestimación de momentos en las columnas y de desplazamientos horizontales de la estructura,



marco con traveses rígidas en comparación con las columnas.

marco en situación intermedia

voladizo (traveses muy flexibles comparadas con las columnas).

Momentos flexionantes en columnas.

Fig. 5

ya que los métodos aproximados en general suponen la formación de articulaciones (puntos de momento nulo) en cada entrepiso, y la situación puede ser tal que los puntos de inflexión del diagrama de momentos desaparezcan en uno, varios o todos los niveles.

Cualquier edificio de la práctica estará en una posición intermedia con respecto a los casos descritos.

Para conocer cual es la situación en cada caso particular, John A. Blume (referencia 1) sugiere el empleo de un índice de rotación modal, que define como

$$\rho = \frac{\Sigma(I/l)_{\text{trabes}}}{\Sigma(I/l)_{\text{cols}}}$$

y se puede valuar en cualquier entrepiso. (Blume lo hace para el entrepiso medio). Aquí $\Sigma(I/l)_{\text{trabes}}$ es la suma de rigideces relativas de las trabes de un cierto nivel y $\Sigma(I/l)_{\text{cols}}$ es la suma de rigideces relativas de las columnas en que se apoyan las trabes antes mencionadas.

Blume encontró que si $\rho > 0.10$ hay puntos de momento nulo en las columnas de todos los entrepisos mientras que, para valores de ρ menores de 0.01 la estructura se asemeja más a un voladizo. Para valores de ρ entre 0.01 y 0.10 la situación es intermedia y habrá entrepisos en que no haya puntos de momento nulo, por lo que los métodos aproximados de análisis pueden conducir a fuertes errores del lado de la inseguridad por lo que respecta a los valores de los momentos flexionantes para los que debe diseñarse así como respecto a los desplazamientos laterales de la estructura; la rigidez de entrepiso pierde significado y conviene emplear métodos matriciales para analizarla.

Si la estructura tiene variaciones importantes con la altura, convendrá valuar ρ en distintos niveles.

Efectos de deformación axial de las columnas

Hasta aquí se ha considerado que las deformaciones axiales de las columnas, en el caso de marcos rígidos, son despreciables y no contribuyen a la deformación horizontal. Esto es válido sólo si la relación entre altura y ancho de la estructura es pequeña, tal vez menor que 3. Al aumentar el valor de esa relación, el efecto de momento de volteo en el edificio adquiere mayor importancia y se pueden cometer errores importantes al despreciar los acortamientos y alargamientos de las columnas debido a fuerza axial.

Cuando las trabes se vuelven muy flexibles en comparación con las columnas, cada una de las columnas trabajará como voladizo y la fuerza axial en ellas será pequeña.

En el caso de marcos contraventeados, la crujía o crujías contraventeadas tendrán comportamiento similar al de un muro y deberán por tanto considerarse como estructuras de flexión, calculando sus períodos como se indicó en el método de Stodola-Vianello-Newmark.

Cuando se tienen marcos y muros trabajando simultáneamente la situación se complica pues la interacción entre ambos sistemas estructurales hace que varíe la fuerza que toman uno y otro en cada entrepiso; los muros suelen tomar la mayor proporción de la cortante total en los entrepisos inferiores mientras que la situación se invierte en los niveles superiores. Ver referencia 1.

Esto hace difícil la aplicación de métodos numéricos para calcular los modos de vibración de este tipo de estructuras, siendo más

conveniente el empleo de métodos matriciales para este fin.

REFERENCIA 1

Blume, John A., "Dynamic Characteristics of Multistory Buildings",
Proceedings ASCE, Structural División, February 1968.

(Se entregará copia de ella como parte del material del curso)

REFERENCIA 2

Godden, William G., "Numerical Analysis of Beam and Column Structures",
Prentice Hall.



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

VIBRACION DE VIGAS DE CORTANTE Y DE FLEXION

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

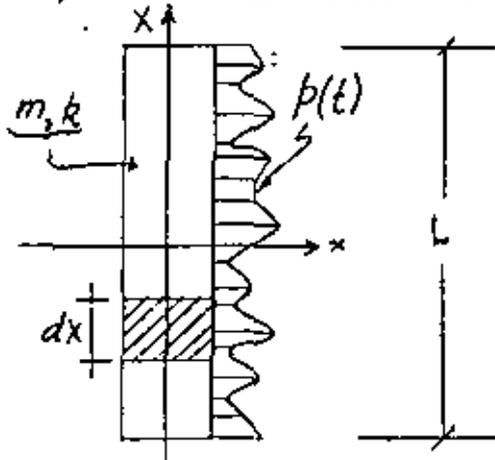
JULIO, 1980



VIGAS DE CORTANTE NO AMORTIGUADAS

SON SISTEMAS CONTINUOS CUYOS CAMBIOS DE PENDIENTE SON PROPORCIONALES AL CORTANTE QUE ACTUA EN LA SECCION.

SEAN m y p LA MASA Y FUERZA EXTERNA DISTRIBUIDAS POR UNIDAD DE LONGITUD, Y SEA k LA RIGIDEZ POR CORTANTE:



$$k = FAG$$

F = FACTOR DE FORMA

A = AREA SECCION TRANSVERSAL

G = MODULO DE ELASTICIDAD DINAMICO AL CORTANTE

$$F_I = mdx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

POR EQUILIBRIO:

$$\frac{\partial S}{\partial x} dx + p dx - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx = 0$$

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = p(t) \quad (1)$$

LA EC HOMOGENEA QUEDA (CON $p=0$)

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} = 0 ; \quad v^2 = \frac{k}{m}$$

ESCRIBIENDO $x(t) = z_n(X)\theta_n(t)$, LA EC (2) QUEDA

$$z_n \ddot{\theta}_n - v^2 z_n'' \theta_n = 0$$

$$\frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} - v^2 \frac{z_n''}{z_n} = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} = v^2 \frac{z_n''}{z_n} = \omega_n^2 = \text{CONSTANTE}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_n + \omega_n^2 \theta_n = 0 ; \quad z_n'' + \frac{\omega_n^2}{v^2} z_n = 0$$

$$\theta_n = \text{sen} \omega_n (t - t_n), \quad z_n = A_n \text{sen} \frac{\omega_n}{v} (X - a_n)$$

$$\therefore x_n = A_n \text{sen} \left[\frac{\omega_n}{v} (X - a_n) \right] \text{sen} \left[\omega_n (t - t_n) \right], \quad n=1, 2, \dots$$

LAS CONSTANTES a_n Y ω_n SE DETERMINAN EN CADA PROBLEMA EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

CONDICION DE ORTOGONALIDAD

$$\int_0^L x_n(X) x_j(X) = 0, \quad \text{SI } n \neq j$$

EJEMPLO 1: CUERDA VIBRANTE DE LONGITUD L Y EXTREMOS FIJOS:

EN EL EXTREMO $X=0$ SE TENDRA

$$(3) \quad x(0, t) = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n a_n}{v} = j\pi ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

EN EL EXTREMO $x = L$ SE TENDRA

$$(4) \quad x(L, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n L}{v} = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

PUESTO QUE EN LA EC (3) SE TOMA $j=0$, YA QUE $j=1, 2, \dots$ DAN LA MISMA SOLUCION, LO CUAL CONDUCE A $a_n = 0$

$$\text{DE LA EC (4):} \quad \omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

FRECUENCIA FUNDAMENTAL

$$\text{SI } n=1, \quad \omega_1 = \frac{\pi v}{L} \quad \therefore \quad \omega_n = n \omega_1$$

$$\text{Y} \quad T_1 = \frac{2L}{v} \quad T_n = \frac{T_1}{n}$$

LAS CONFIGURACIONES MODALES QUEDAN:

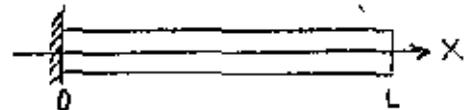
$$z_n = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad ; \quad x(t, x) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{L} (t - t_n)$$

CONDICION DE ORTOGONALIDAD:

$$\int_0^L A_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} A_j \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} dx = 0, \quad \text{SI } i \neq j$$

EJEMPLO 2: VIGA DE CORTANTE APOYADA EN $x = 0$ Y LIBRE EN $x = L$

$$\text{DE } x(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0$$



DE $x'(L, t) = 0$ (PUESTO QUE EN $x = L$ SE DEBE CUMPLIR QUE LA FUERZA CORTANTE, S , SEA NULA),

$$x'(x, t) = A_n \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n x}{v} \operatorname{sen} \omega_n (t - t_n)$$

$$\therefore x'(L, t) = 0 = \cos \frac{\omega_n L}{v} \Rightarrow \frac{\omega_n L}{v} = \frac{\pi}{2} (2n-1)$$

$$0 \quad \omega_n = \frac{v}{L} \frac{\pi}{2} (2n-1) \quad n = 1, 2, \dots$$

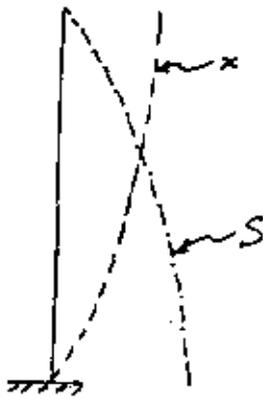
$$\text{SI } n=1; \omega_1 = \frac{\pi v}{L \cdot 2} \Rightarrow T_1 = \frac{4L}{v}$$

$$\therefore \omega_n = \omega_1 (2n-1); \quad T_n = \frac{T_1}{2n-1}$$

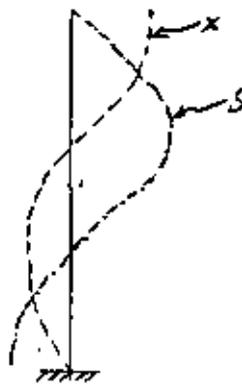
$$\text{ASI: } T_2 = \frac{T_1}{3}, \quad T_3 = \frac{T_1}{5}, \quad \text{ETC.}$$

DISTRIBUCION DE CORTANTES:

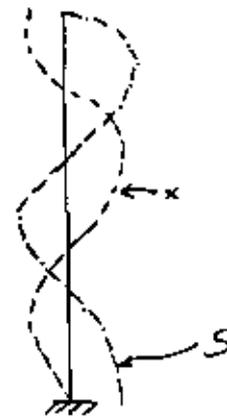
$$S_n = k \frac{\partial x}{\partial X} = A_n k \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n X}{v} \operatorname{sen} \omega_n (t - t_n)$$



1er. MODO (FUNDAMENTAL)



2o. MODO



3er. MODO

VIBRACIONES FORZADAS EN VIGAS DE CORTANTE

SEA $\ddot{x}_0(t)$ LA EXCITACION DEL TERRENO. LA RESPUESTA, $x(t)$, DEL SISTEMA ES

$$(3) \quad x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) \operatorname{sen} \omega_n(t-\tau) d\tau$$

DONDE

$$(4) \quad a_n = \frac{\int_0^L n \operatorname{sen} \frac{\omega_n v}{X} dx}{\int_0^L n \operatorname{sen}^2 \frac{\omega_n v}{X} dx} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

TAREA: DEMOSTRAR ECS (3) Y (4) Y ESTUDIAR SECCION 3.15.

EJEMPLO: CALCULAR EL LIMITE SUPERIOR DEL CORTANTE EN UNA VIGA DE CORTANTE A CUYA BASE SE LE SOMETE A UNA ACELERACION CONSTANTE,

a.

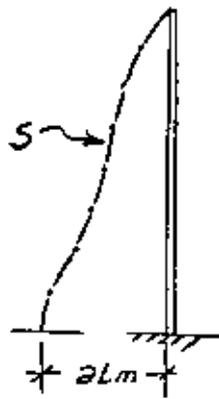
EL ESPECTRO DE ESTA EXCITACION ES $v = a/\omega$

$$\text{POR LO TANTO, } S \leq k \left| \frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \right) \right| v$$

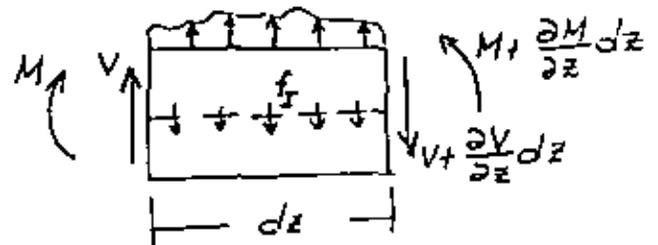
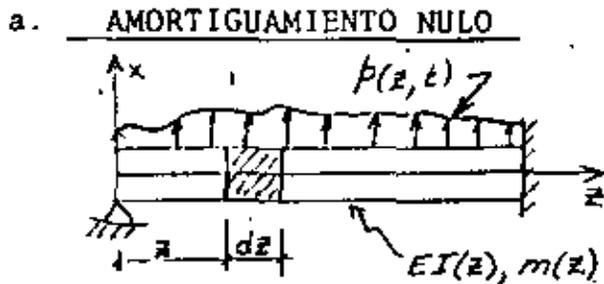
$$S \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ka_n v}{\omega_n} \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n}{v} X \right| = \frac{4k}{\pi} \frac{a}{\frac{k}{m}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}(2n-1)X}{(2n-1) \frac{v}{L} \frac{\pi}{2}(2n-1)} \right|$$

$$S \leq \frac{8aLm}{\pi^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi X}{2L} \right| ; \text{ EN } X=0$$

$$S \leq \frac{(8aLm)}{\pi^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}_{\pi^2/8} = aLm$$



VIBRACION DE VIGAS EN FLEXION



$$V + pdz - (V + \frac{\partial V}{\partial z} dz) - f_I dz = 0 \quad (1)$$

$$\text{EN DONDE } f_I dz = mdx \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO (2) EN (1) Y SIMPLIFICANDO:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$M + Vdz - (M + \frac{\partial M}{\partial z} dz) = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial z} = V \quad (4)$$

(DESPRECIANDO LOS TERMINOS DE SEGUNDO ORDEN DE LOS MOMENTOS DE p Y f_I)

SUSTITUYENDO (4) EN (3) SE OBTIENE

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (4')$$

TOMANDO EN CUENTA QUE $\frac{M}{EI} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ SE OBTIENE FINALMENTE

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (5)$$

b. AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

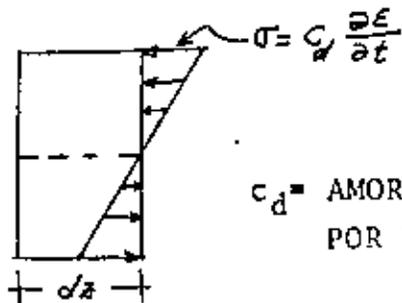
- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR

$$\text{VELOCIDAD TRANSVERSAL} = c(z) \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c \frac{\partial x}{\partial t} \quad (6)$$

- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION DE LA VIGA.

ACEPTANDO LA HIPOTESIS DE NAVIER DE DEFORMACION PLANA



$$M_{\text{amort}} = \int \sigma y da = c_d I(z) \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}$$

c_d = AMORTIGUAMIENTO
POR DEFORMACION

INCORPORANDO EL MOMENTO DEBIDO AL AMORTIGUAMIENTO EN LA
EC. (5)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p \quad (6)$$

SI LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DE LOS APOYOS, SE PUEDE
DEMOSTRAR (CLOUGH Y PENZIEN, PAG 303) QUE:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p_{\text{efect.}}$$

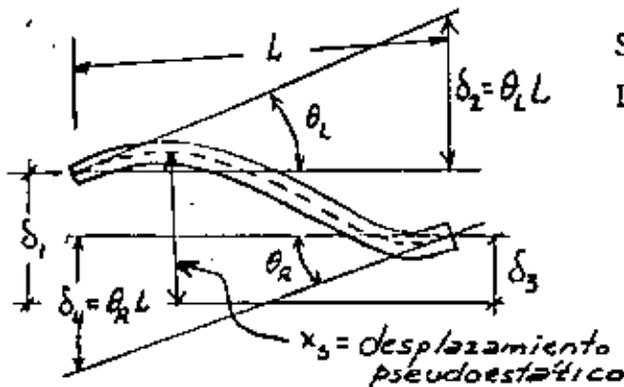
EN DONDE

$$p_{\text{efect}} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x_s}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x_s}{\partial z^2 \partial t} \right) - m \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} - c \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (7)$$

$$x(z,t) = x_{\text{est}}(z,t) + x(z,t)$$

x_s = DESPLAZAMIENTO PSEUDOESTATICO OCASIONADO POR EL MOV. DE
LOS APOYOS DE MANERA ESTATICA

x = DESPLAZAMIENTO DINAMICO



SI SE TIENE UNA ROTACION Y UNA TRAS-
LACION POR APOYO:

$$x_s = \sum_{i=1}^4 \theta_i \delta_i(t) \quad (8)$$

$\theta_i(z)$ = CONFIGURACION DE LA VIGA
DEBIDA A $\delta_i = 1$

INCORPORANDO (8) EN (7):

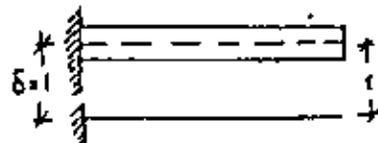
$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 \{ m \theta_i \ddot{\delta}_i(t) + c \theta_i \dot{\delta}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [c_d I(z) \frac{\partial^2 \theta_i(z)}{\partial z^2} \delta_i(t)] \} \quad (9)$$

EN LA MAYORIA DE LOS CASOS EL AMORTIGUAMIENTO INFLUYE POCO EN LA FUERZA
EFECTIVA Y LA EC. (9) SE SIMPLIFICA A

$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 m \theta_i(z) \ddot{\delta}_i(t)$$

EN EL CASO DE UN VOLADIZO

$$\theta_1(z) = 1$$



Y

$$P_{\text{efect}} = -m(z) \ddot{\delta}_1(t)$$

ANALISIS DE VIBRACIONES LIBRES

CONSIDEREMOS UNA VIGA DE SECCION CONSTANTE ($EI = \text{CONSTANTE}$; $\bar{m} = \text{MASA}$ POR UNIDAD DE LONGITUD).

DE LA EC. (5): $EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

RESOLVIENDO LA EC. (10) POR SEPARACION DE VARIABLES:

$$x(z, t) = \theta(z) Y(t)$$

$$\theta^{IV}(z) Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \theta(z) \ddot{Y}(t) = 0 ; \frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0$$

POR LO QUE

$$\frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = C = a^4 \quad (C = \text{CONSTANTE})$$

POR LO TANTO OBTENEMOS DOS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

$$\theta^{IV}(z) - a^4 \theta(z) = 0$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad \text{DONDE} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$$

$$0 \quad a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

LA SOLUCION DE LA SEGUNDA DE ESTAS ES:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \text{sen} \omega t + Y(0) \text{cos} \omega t \quad (11)$$

LA SOLUCION DE LA PRIMERA ES:

$$\theta(z) = A_1 \operatorname{sen} az + A_2 \cos az + A_3 \operatorname{senh} az + A_4 \operatorname{cosh} az \quad (12)$$

EN DONDE LAS A_i SE CALCULAN EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE LA VIGA EN AMBOS EXTREMOS.

EJEMPLO

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

LAS CUATRO CONDICIONES DE FRONTERA SON:

$$\text{en } z=0: \theta(0)=0, M(0) = EI \theta''(0) = 0$$

$$\text{en } z=L: \theta(L)=0, M(L) = EI \theta''(L) = 0$$

SUSTITUYENDO $\theta(0)=0$ Y $\theta''(0)=0$ EN LA EC. (12) Y SU SEGUNDA DERIVADA:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0 = 0 \\ \theta''(0) &= a^2(-A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_2 = A_4 = 0$$

HACIENDO LO MISMO CON $\theta(L) = 0$ y $\theta''(L) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \theta(L) &= A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL = 0 \\ \theta''(L) &= a^2(-A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_3 = 0$$

$$\text{POR LO TANTO, } \theta(L) = A_1 \operatorname{sen} aL = 0$$

PUESTO QUE $A_1=0$ ES LA SOLUCION TRIVIAL, SE DEBE TENER QUE A_1 SEA ARBITRARIA Y QUE

$$\operatorname{sen} aL = 0 \rightarrow aL = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

POR LO TANTO, $a = n\pi/L$. RECORDANDO QUE

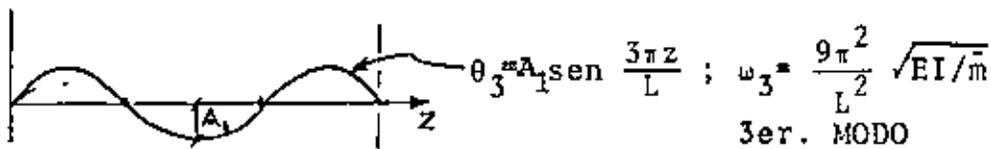
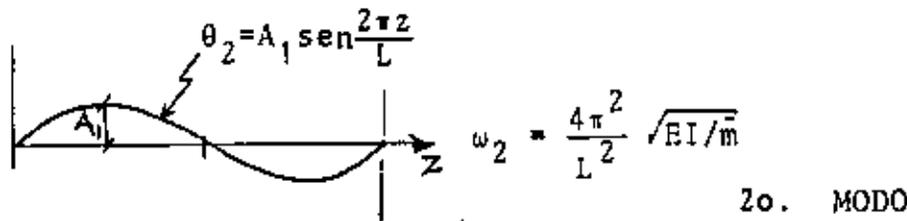
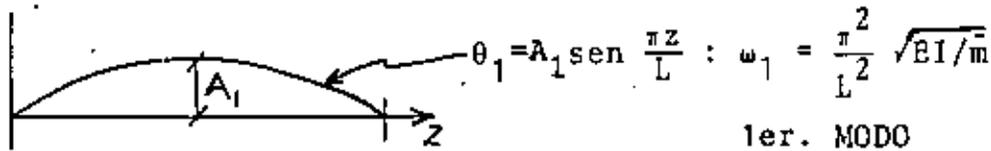
$$a^4 = \omega^2 \bar{m}/EI, \text{ SE TIENE QUE}$$

$$\omega_n^2 = (n\pi/L)^2 EI/\bar{m} \quad 0 \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{EI/\bar{m}}$$

SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES NATURALES DE VIBRACION DE LA VIGA.

LAS CONFIGURACIONES MODALES SON

$$\theta_n(z) = A_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} z$$



$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 :: 1 : 4 : 9$$

$$\omega_i = n^2 \omega_1$$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



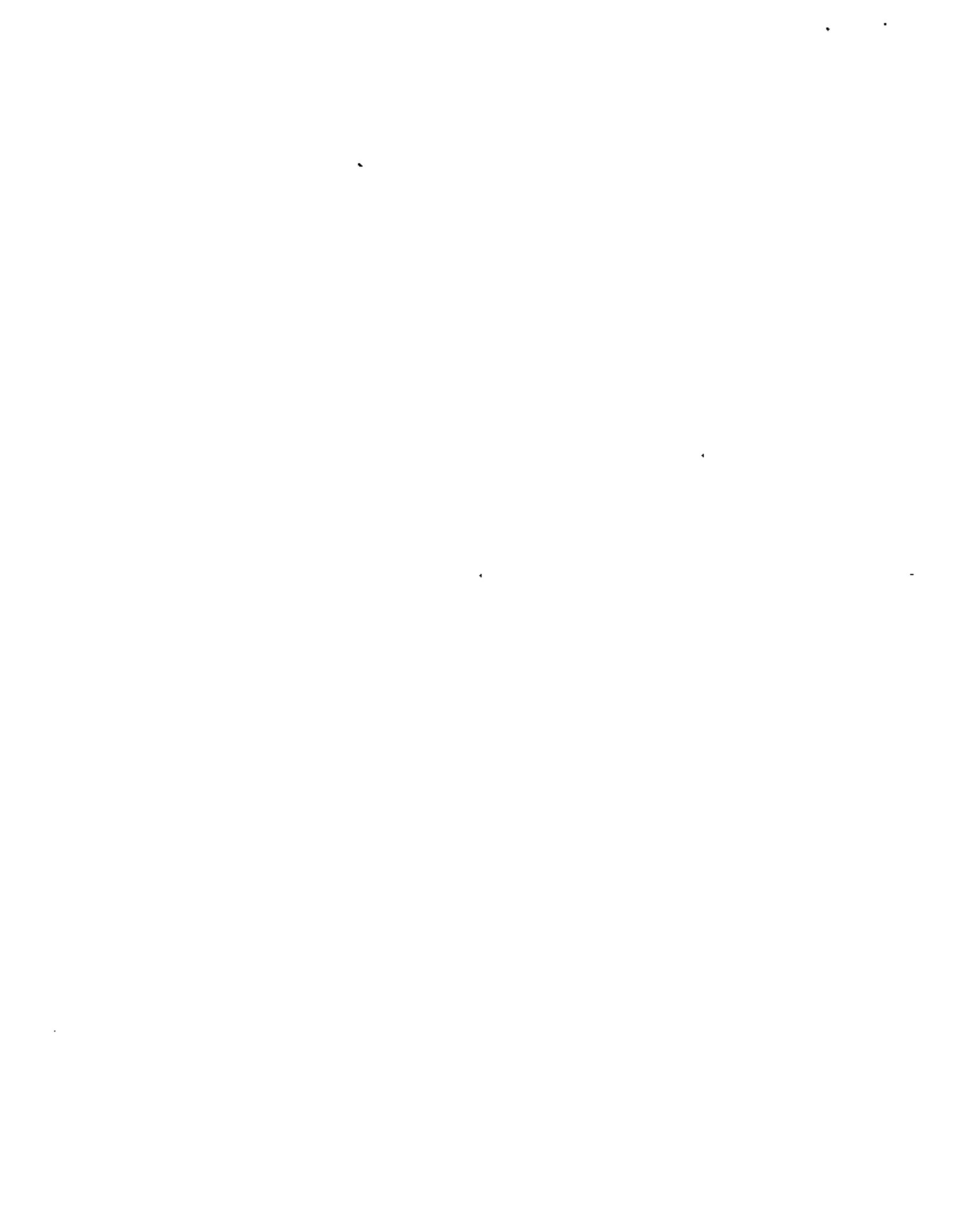
VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

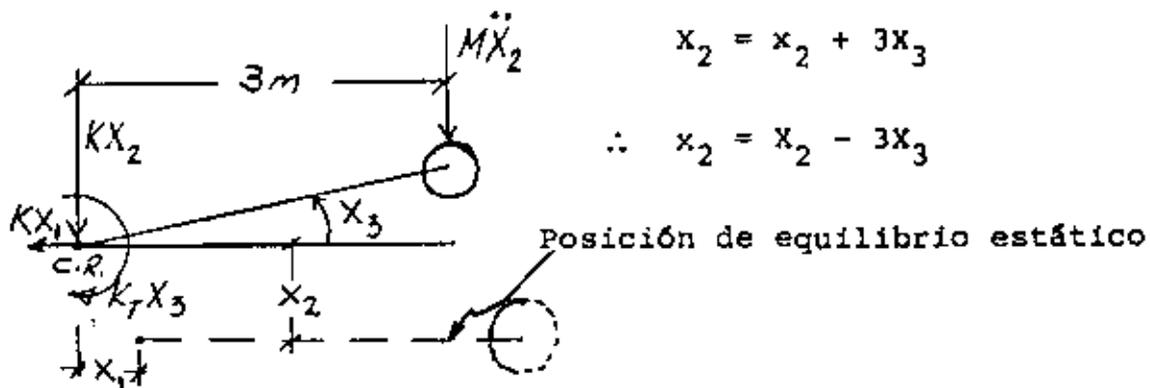
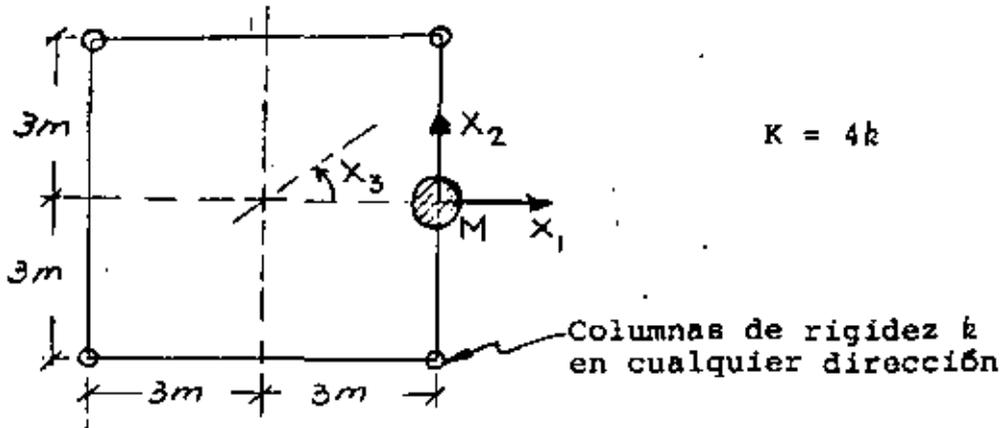
EJEMPLO

DR. OCTAVIO A. RASCON CLAVEZ

JULIO, 1980



Ejemplo: Calcular las frecuencias circulares y los modos de vibración de la siguiente estructura:



En la dirección de X_1 : $M\ddot{X}_1 + KX_1 = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{K}{M}$

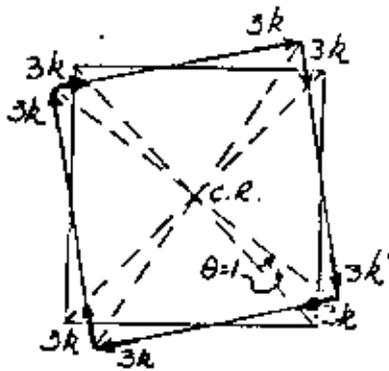
(movimiento desacoplado con X_2 y X_3)

$$\underline{z}_1^T = [1, 0, 0]$$

En la dirección X_2 : $M\ddot{X}_2 + KX_2 = 0$

$$M\ddot{X}_2 + KX_2 - 3KX_3 = 0 \quad (1)$$

En la dirección X_3 : $M\ddot{X}_2 \times 3 + K_T X_3 = 0 \quad (2)$



Momento respecto a C.R. = $8 \times 3k \times 3 = 72k$
 $= 18K$

Sustituyendo K_T en la ec. (2):

$$3M\ddot{X}_2 + 18K X_3 = 0 \quad (3)$$

$$M\ddot{X}_2 + 6K X_3 = 0 \quad (4)$$

Restando la ec. (4) a la ec. (1) se obtiene:

$$KX_2 - 9KX_3 = 0 \quad \therefore X_2 = 9X_3 \quad + \quad \ddot{X}_2 = 9\ddot{X}_3$$

Sustituyendo esto último en la ec. (4): $\ddot{X}_3 + \frac{6K}{9M} X_3 = 0$

$$\therefore \omega_2^2 = \frac{2}{3} \frac{K}{M} \quad ; \quad \underline{z}_2^T = [0, 9, 1]$$

METODO B DE NEWMARK

SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE N GRADOS DE LIBERTAD Y COMPORTAMIENTO ELASTICO LINEAL SE EMPLEAN LAS MISMAS ECUACIONES QUE PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \dot{x}_j(t_i)\Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{x}_j(t_i) + \beta\ddot{x}_j(t_{i+1})](\Delta t)^2$$

EN DONDE $j = 1, 2, \dots, N$.

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA TAMBIEN UN VALOR DE β COMPRENDIDO ENTRE 1/4 Y 1/6, Y QUE $\Delta t \leq 0.1 T_N$, EN DONDE T_N ES EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION MAS PEQUEÑO.

EJEMPLO

SEA UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUYAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES SON:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

USANDO EL METODO β DE NEWMARK CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$ CALCULE LA RESPUESTA DINAMICA ANTE UNA EXCITACION DADA POR LOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.2 t & \text{SI } 0 \leq t \leq 2 \text{ seg} & \quad (x_0 \text{ EN CENTIMETROS}) \\ x_0 &= 4.8 - 1.2 t & \text{SI } 2 \leq t \leq 4 \text{ seg} \\ x_0 &= 0 & \text{SI } t < 0 \text{ o } t > 4 \text{ seg} \end{aligned}$$

PUESTO QUE ESTA EXCITACION IMPLICA QUE $\ddot{x}_0(t) = 0$ PARA TODO t , SE TIENE QUE LA ECUACION MATRICIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{K}\underline{Y} = \underline{M}\ddot{\underline{X}}_0 + \underline{Q} = \underline{0}$$

POR LO QUE

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + Q_1 &= 0 & \rightarrow \ddot{y}_1 &= Q_1/m_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + Q_2 &= 0 & \rightarrow \ddot{y}_2 &= Q_2/m_2 \end{aligned}$$

EN DONDE $y_1 = x_1 - x_0$ Y $y_2 = x_2 - x_0$.

CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$, LAS ECUACIONES DEL METODO β DE NEWMARK QUEDAN EN LA FORMA

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t_{i+1}) &= \dot{x}_j(t_i) + 0.1[\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \\ x_j(t_{i+1}) &= x_j(t_i) + 0.1 \dot{x}_j(t_i) + 0.04[\ddot{x}_j(t_i)/3 + \ddot{x}_j(t_{i+1})/6] \end{aligned}$$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

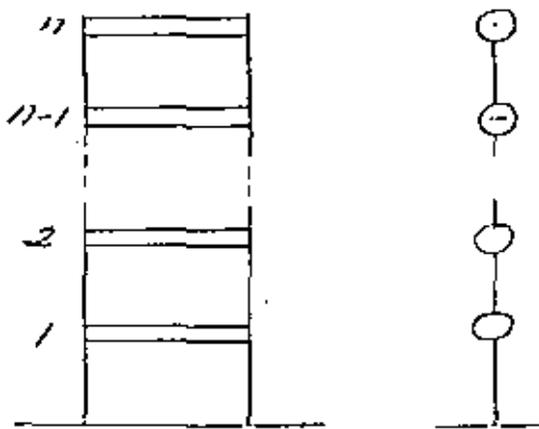
JORGE PRINCE ALFARO

JULIO, 1980



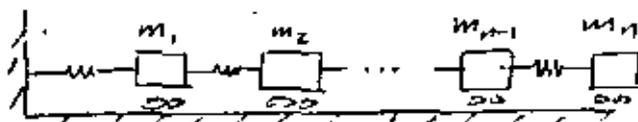
VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Ejemplos de sistemas de n GL

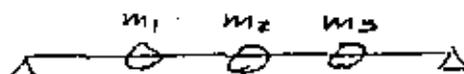


Características:

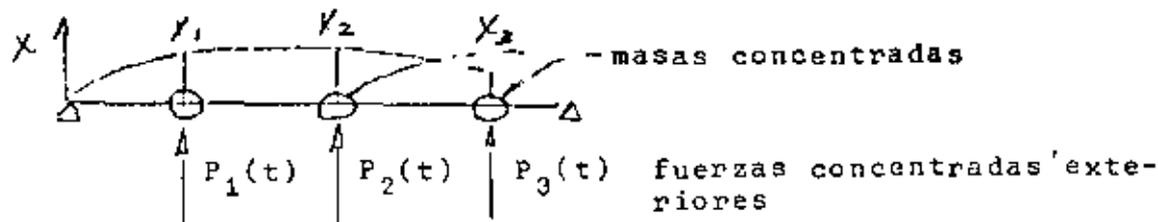
- masas concentradas rígidas
- columnas solo se deforman lateralmente
- con una coordenada por masa queda definida la configuración del sistema
- equivale a:



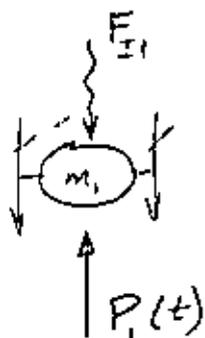
Además, la consideramos elástica, lineal



Supongamos:



aislemos una masa:



$$F_{r1} = \sum \text{fuerzas resistencia elástica a la deformación}$$

Las ecuaciones condensadas de movimiento serán:

$$F_{I1} + F_{r1} = P_1(t)$$

$$F_{I2} + F_{r2} = P_2(t)$$

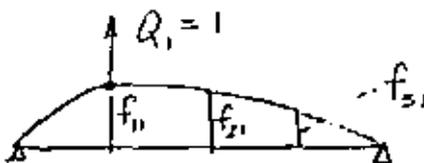
$$F_{I3} + F_{r3} = P_3(t)$$

Fuerzas asociadas al desplazamiento,
NO al movimiento

∴ la determinación de estas fuerzas es un problema estático.

Coefficientes de influencia

1. De flexibilidad



f_{ij} = despl. de la coord. i debido a una carga unitaria en coord. j (desplazamiento y fuerza en = dirección)

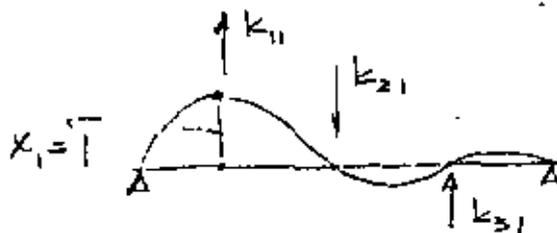
Por superposición

$$X_1 = f_{11} Q_1 + f_{12} Q_2 + f_{13} Q_3$$

$$X_2 = f_{21} Q_1 + f_{22} Q_2 + f_{23} Q_3 \quad \text{inv. (1)}$$

$$X_3 = f_{31} Q_1 + f_{32} Q_2 + f_{33} Q_3$$

2. De rigidez:



K_{ij} = fuerza en coordenada i por un desplazamiento unitario en coordenada j .

Por superposición

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 \\ Q_2 &= K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 \\ Q_3 &= K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Desde luego $K_{ij} = K_{ji}$ (y $f_{ij} = f_{ji}$) (Maxwell-Mohr)

La ecuación 2 también puede escribirse:

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} X_j$$

o bien, en notación matricial

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

matriz de rí-
gideces

Ponemos:

$$\{Q\} = [K] \{X\}$$

Claro que $[K]^{-1} = [F] = [f_{ij}]$

Sustituyendo (2) o (3) en ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{X}_2 + K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 &= P_2(t) \\ m_3 \ddot{X}_3 + K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 &= P_3(t) \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

o también:

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} &= \{P(t)\} \text{ (vibración forzada)} \\ &= \{0\} \text{ (vibración libre)} \end{aligned}$$

1. VIBRACION LIBRE

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \tag{1.1}$$

Supongamos la solución

$$\{x\} = \underbrace{\{r\}}_{\substack{\text{constante} \\ \text{con } t}} (A \underbrace{\text{sen } pt + B \text{ cos } pt}_{\text{escalar}}) = \{r\} Y(t)$$

define:
- variación armónica
- amplitud

tenemos:

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{r\} (A \text{ sen } pt + B \text{ cos } pt) = r Y(t) \\ \{\dot{x}\} &= \{r\} (Ap \text{ cos } pt - B p \text{ sen } pt) \\ \{\ddot{x}\} &= \{r\} (-Ap^2 \text{ sen } pt - B p^2 \text{ cos } pt) = -p^2 \{r\} Y(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Sustituyendo 1.2 en 1.1 y dividiendo entre Y(t) nos queda:

$$-p^2 [M] \{r\} + [K] \{r\} = \{0\}$$

o sea:

$$\underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[E]} \{r\} = \{0\} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
 [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} & [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} \\
 \text{pre } \times [M]^{-1} & & \text{pre } \times [K]^{-1} & \cdot \frac{1}{p^2} \\
 [M]^{-1} [K] \{r\} &= p^2 \{r\} & \frac{1}{p^2} \{r\} &= [K]^{-1} [M] \{r\}
 \end{aligned}$$

En las dos formas llegamos a un problema de VAC

$$[L] \{u\} = \lambda \{u\}$$

Problema de valores característicos:

- Dada una matriz cuadrada de orden (n x n) $[L]$, que representa una transformación lineal de vectores n-dimensionales, debe encontrarse un vector $\{u\}$ que transformado por $[L]$ resulte en otro vector $\lambda \{u\}$ en la misma "dirección". O sea, $[L]$ solo cambia la magnitud de $\{u\}$ sin cambiar la dirección.

El vector es un vector característico (o eigenvector) de $[L]$. λ (escalar) representa la relación entre las "longitudes" antes y después de la transformación y para llegar a los VEC debe tomar valores de un conjunto de valores característicos (VAC) (o eigenvalores).

El problema de encontrar frecuencias y modos naturales puede considerarse un problema de VAC. - (STD)

Tenemos

$$[K] - p^2 [M] \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Si en el sistema de ecuaciones

$$[A] \{x\} = \{0\}$$

$[A]$ es no singular, la solución única es la trivial

$\{x\} = \{0\}$, de donde nos interesa el caso en que $[A]$ es singular. En este caso la adjunta* $[\hat{A}]$ existe y puede pre X por ella, con el resultado

$$|A| \{x\} = \{0\}$$

porque $[\hat{A}] [A] = |A| [I] \quad \forall [A] \text{ (n \times n)}$

Puesto que $|A| = 0$, $\{x\}$ no necesariamente es nulo, pero si se asigna un valor dado a uno de sus elementos los demás quedan determinados en forma única.

También notamos que si $\{x\}$ es solución de $[A] \{x\} = \{0\}$ y α es una constante, entonces $\alpha\{x\}$ es también solución.

Por lo tanto, hay un número infinito de soluciones. Todos estas se considerarán juntas y hablaremos de una "solución" como un conjunto de relaciones entre los elementos de $\{x\}$.

$$\text{Volvemos a } \underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[E]} \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Al desarrollar $|E| = 0$ llegamos a una ecuación de grado n en p^2 , cuyas raíces son los VAC.

- Como $[K]$ y $[M]$ son simétricas y positivas definidas*,

*Transpuesta de la matriz de cofactores.

** $[A]$ es POS. DEF. si $\{q\} [A] \{q\} > 0$ para todo $\{q\}$ no nulo

puede demostrarse que las raíces de la ecuación característica son reales y positivas. Las llamamos $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$.

Las n frecuencias naturales son los términos positivos de las raíces y la más baja es llamada frecuencia fundamental.

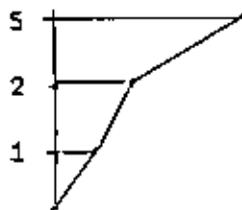
- Para la gran mayoría de los casos de interés las frecuencias son diferentes entre sí.
- Para cada frecuencia p_i existe una VEC asociado:

$$[K] \{r\}_i = p_i^2 [M] \{r\}_i \quad i = 1, \dots, n$$

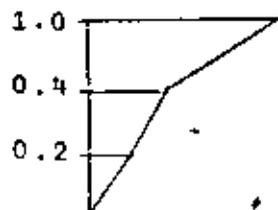
o sea para cada p_i existe una solución $\{r\}_i$ no trivial

- Normalización (solo conveniencia, sin significado físico)

Varias formas:



$$\{r\}_i' [M] \{r\}_i = 1$$



(modos normales)

- Los modos y frecuencias naturales del sistema son propiedades características derivadas de las propiedades de inercia y rigidez expresadas por los elementos de $[M]$ y $[K]$.
- Llamaremos matriz modal $[R]$ a la que tiene los VEC, o vectores modales, como columnas.

ORTOGONALIDAD DE MODOS DE VIBRACION

Se dice que dos vectores $\{a\}$ y $\{b\}$ son ortogonales con respecto a la matriz simétrica $[J]$ si

$$\{a\}' [J] \{b\} = \{b\}' [J] \{a\} = 0$$

Demostremos que dos vectores modales $\{r\}_i$ y $\{r\}_j$, asociados a frecuencias diferentes ($p_i \neq p_j$) son ortogonales con respecto a las matrices de inercia y elástica.

- Cada uno de estos vectores satisface la ecuación 1.3

$$p^2 [M] \{r\} = [K] \{r\} \quad [M] \{r\} = \frac{1}{p^2} [K] \{r\}$$

es decir:

$$p_i^2 [M] \{r\}_i = [K] \{r\}_i \quad [M] \{r\}_i = \frac{1}{p_i^2} [K] \{r\}_i$$

$$p_j^2 [M] \{r\}_j = [K] \{r\}_j \quad [M] \{r\}_j = \frac{1}{p_j^2} [K] \{r\}_j$$

pre X i y j por $\{r\}_j'$ y $\{r\}_i'$ respectivamente

$$\begin{aligned} p_i^2 \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \{r\}_j' [K] \{r\}_i & \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \frac{1}{p_i^2} \{r\}_j' [K] \{r\}_i \\ p_j^2 \{r\}_i' [M] \{r\}_j &= \{r\}_i' [K] \{r\}_j & \{r\}_i' [M] \{r\}_j &= \frac{1}{p_j^2} \{r\}_i' [K] \{r\}_j \end{aligned} \quad (a)$$

pero como $[M]$ y $[K]$ son simétricas:

$$\begin{aligned} \{r\}_j' [K] \{r\}_i &= \{r\}_i' [K] \{r\}_j \\ \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \{r\}_i' [M] \{r\}_j \end{aligned}$$

∴, restando miembro a miembro en ecuaciones (a):

$$(p_i^2 - p_j^2) \left(\{r\}'_i [M] \{r\}_j \right) = 0 \quad 0 = \left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2} \right) \{r\}'_i [K] \{r\}_j$$

y como $p_i^2 \neq p_j^2$

$$\{r\}'_i [M] \{r\}_j = 0 \quad ; \quad \{r\}'_i [K] \{r\}_j = 0$$

Tenemos ecuaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}'_i [K] \{r\}_j &= 0 \end{aligned} \quad \text{si } i \neq j$$

La ec

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (a)$$

y la matriz modal $[R]$

Hagamos:

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

y sustituyendo en (a):

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{0\}$$

premultiplicando por $[R]'$:

$$\underbrace{[R]' [M] [R]}_{\text{diagonales}} \{\ddot{y}\} + \underbrace{[R]' [K] [R]}_{\text{diagonales}} \{y\} = \{0\} \quad (b)$$

$$\{r\}'_i \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix} \{r\}_j \quad i \neq j$$

M, K

Llamemos

$$\begin{aligned}
 [R]' [M] [R] &= [M^*] \\
 [R]' [K] [R] &= [K^*]
 \end{aligned}$$

∴ la ec (b) (p. 14) puede ponerse:

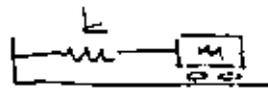
$$[M^*] \{\ddot{y}\} + [K^*] \{y\} = \{0\}$$

que equivale a:

$$\begin{aligned}
 m_{11}^* \ddot{y}_1 + k_{11}^* y_1 &= 0 \\
 m_{22}^* \ddot{y}_2 + k_{22}^* y_2 &= 0 \\
 \vdots & \\
 m_{nn}^* \ddot{y}_n + k_{nn}^* y_n &= 0
 \end{aligned}$$

de las que

$$p_1^2 = \frac{k_{11}^*}{m_{11}^*}, \dots, p_n^2 = \frac{k_{nn}^*}{m_{nn}^*}$$

Recordar que para 

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + kx &= 0 \\
 \ddot{x} + p^2 x &= 0 \quad \text{y} \quad p^2 = \frac{k}{m}
 \end{aligned}$$

O sea, con la transformación

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

aplicada a la ecuación

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

hemos descompuesto un sistema de nGL en n sistemas de 1GL independientes.

Consideremos el producto

$$\begin{aligned} [M^*]^{-1} [K^*] &= ([R]^T [M] [R])^{-1} [R]^T [K] [R] = [K^*] [M^*]^{-1} \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [R]^T [R]^T [K] [R] \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [K] [R] = [P] \end{aligned}$$

$[P]$ contiene las frecuencias naturales en la diagonal principal

∴ El problema de encontrar frecuencias y modos naturales equivale al de encontrar la matriz $[R]$ que diagonalice $[M]$ y $[K]$ de acuerdo con

$$\begin{aligned} [R]^T [M] [R] &= [M^*] \\ [R]^T [K] [R] &= [K^*] \end{aligned}$$

Las frecuencias naturales se obtendrán de

$$\underline{[M^*]^{-1} [K^*] = [K^*] [M^*]^{-1} = [P]}$$

Veámoslo en otra forma

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Sustituyendo $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{y\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\}$$

premultiplicando por $\{r\}'_j$

$$\underbrace{\{r\}'_j [M] [R] \{y\}}_{(a)} + \underbrace{\{r\}'_j [K] [R] \{y\}}_{(b)} = \underbrace{\{r\}'_j \{P(t)\}}_{\text{escalar}}$$

En los productos (a) y (b) solo queda (por ortogonalidad):

$$\underbrace{\{r\}'_j [M] \{r\}_j}_{M_j^*} \ddot{y}_j + \underbrace{\{r\}'_j [K] \{r\}_j}_{K_j^* = p_j^2 M_j^*} y_j = \underbrace{\{r\}'_j \{P(t)\}}_{P_j^* = \sum_i P_i r_{ij}}$$

y para el modo j tenemos:

$$M_j^* \ddot{y}_j + p_j^2 M_j^* y_j = P_j^*(t)$$

o bien

(1.5)

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^*(t)$$

análoga a la ecuación de movimiento para 1 GL:

$$m \ddot{x} + k x = P(t)$$

En (1.5) tenemos:

n ecuaciones independientes para n GL

1 ecuación independiente para cada modo

Para vibración libre (1GL)

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

la solución es:

$$x = A \cos pt + B \sin pt \quad (c)$$

y para el modo j tendremos ($P_j(t) = 0$)

$$y_j = A_j \cos p_j t + B_j \sin p_j t \quad (d)$$

Si en (c) hacemos

$$\underline{x}|_{t=0} = x_0 \quad \dot{\underline{x}}|_{t=0} = \dot{x}_0$$

llegamos a

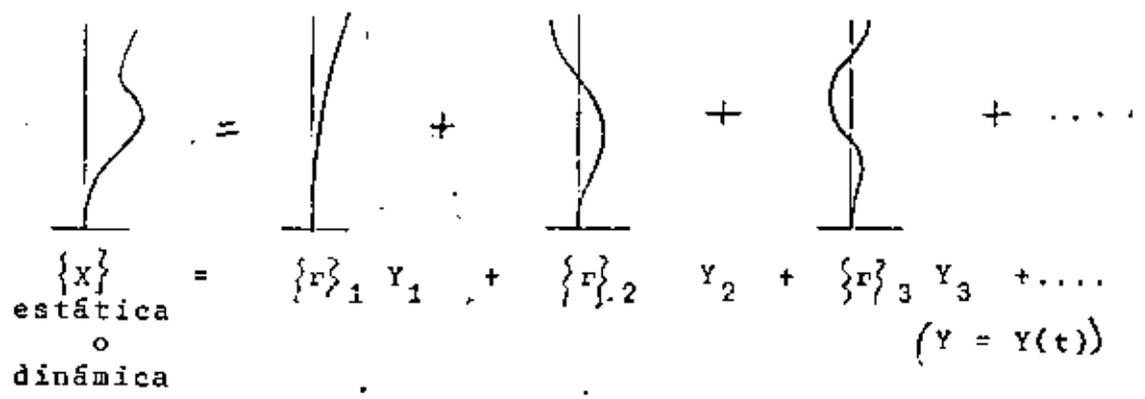
$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt$$

y ... en (d):

$$y_j = y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \sin p_j t$$

Cualquier configuración del sistema puede expresarse como una suma de formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes.

Esquemáticamente:...



$$\left(\{X\} = \{X(t)\} \right)$$

En nuestra expresión

$$\{x\} = [R] \{y\} \quad 1.4.$$

$\{x\}$ puede no ser función de t , por ejemplo:



$$\{1\} = [R] \{c\} \quad (e)$$

donde $\{c\}$ es el vector de constantes que prex $[R]$ nos da la configuración $\{1\}$

De la ec. (e):

$$\{c\} = [R]^{-1} \{1\} \quad ([R] \text{ NO SING})$$

En 1.4 también podríamos hacer

$$\{y\} = [R]^{-1} \{x\}$$

pero sigamos otro camino, premultiplicando por $\{r\}'_j [M]$
o por $\{r\}'_j [K]$

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{x\} &= \{r\}'_j [M] [R] \{y\} = \{r\}'_j [M] \{r\}'_1 y_1 + \\ &\quad + \{r\}'_j [M] \{r\}'_2 y_2 + \dots \\ &\quad + \{r\}'_j [M] \{r\}'_n y_n \end{aligned}$$

Por ortogonalidad todos estos productos son nulos excepto el término

$$\{r\}'_j [M] \{r\}'_j y_j$$

de donde tenemos

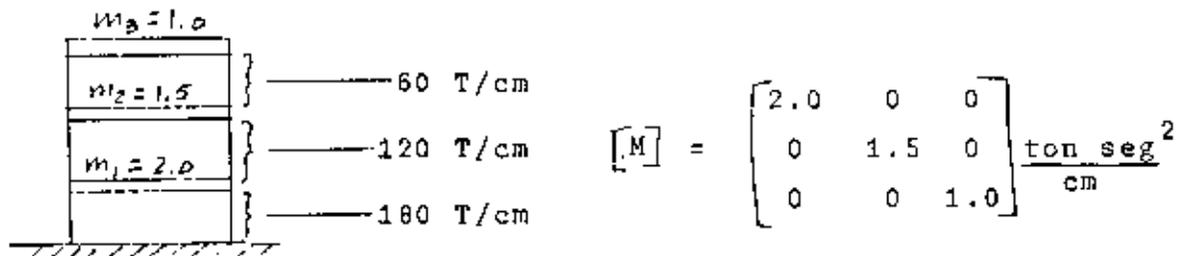
$$\{r\}_j' \cdot [M] \{x\} = \{r\}_j' [M] \{r\}_j y_j$$

de donde:

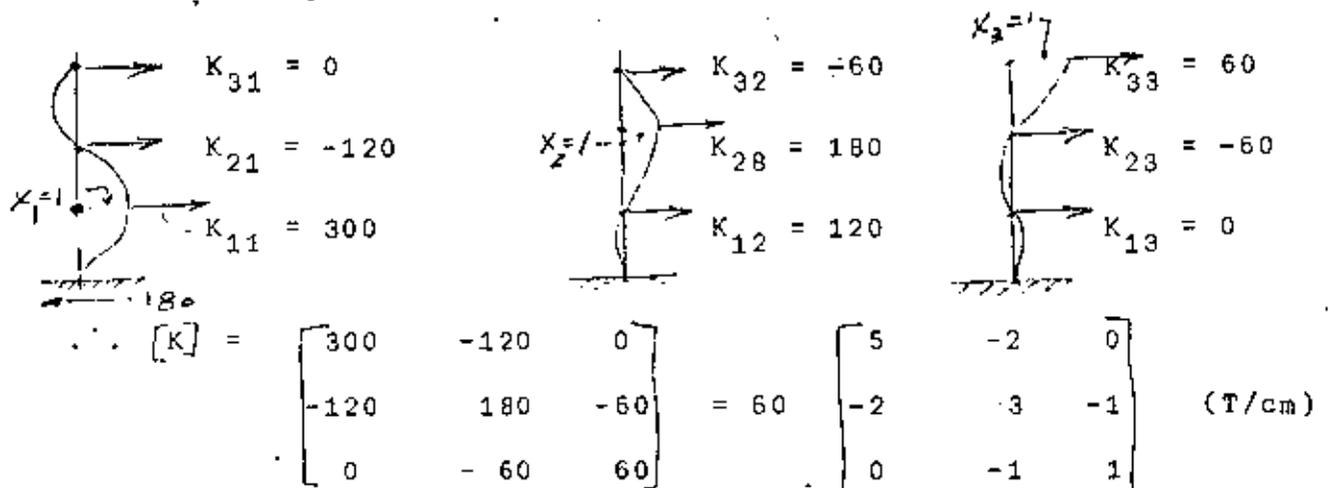
$$y_j = \frac{\{r\}_j' [M] \{x\}}{\{r\}_j' [M] \{r\}_j} = \frac{\{r\}_j' [M] \{x\}}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j' [K] \{x\}}{K_j^*} = \frac{\{r\}_j' [K] \{x\}}{P_j^2 M_j^*}$$

(coeficiente de participación)

Ejemplo (vigas rígidas)



Matriz de rigideces



$$[E] = [K] - p^2 [M] \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 60 \begin{bmatrix} (5 - \frac{2}{60} p^2) & -2 & 0 \\ -2 & (3 - \frac{1.5}{60} p^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1 - \frac{1}{60} p^2) \end{bmatrix}$$

si $d = p^2/60$:

$$[E] = 60 \begin{bmatrix} (5-2d) & -2 & 0 \\ -2 & (3-1.5d) & -1 \\ 0 & -1 & (1-d) \end{bmatrix}$$

$$[E] = 0 = 60 (d^3 - 5.5 d^2 + 7.5 d - 2) = 0$$

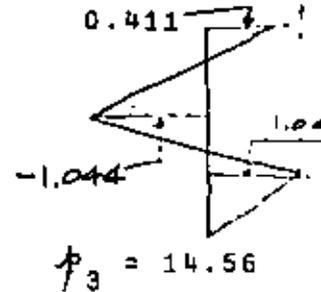
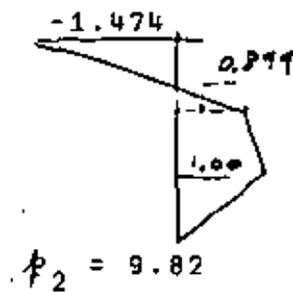
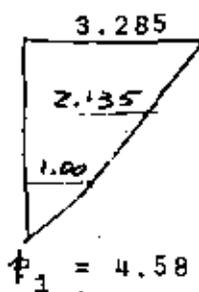
$$d_1 = 0.35$$

$$d_2 = 1.61$$

$$d_3 = 3.54$$

$$p^2 = 60 d: \quad \left. \begin{array}{ll} p_1^2 = 21.0 & p_1 = 4.58 \\ p_2^2 = 96.5 & p_2 = 9.82 \\ p_3^2 = 212.4 & p_3 = 14.56 \end{array} \right\} \text{frecuencias naturales}$$

Modos:



$$[R] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.135 & 0.899 & -1.044 \\ 3.285 & -1.474 & 0.411 \end{bmatrix}$$

$$[M^*] = [R]^T [M] [R] = \begin{bmatrix} 19.629 & 0.038 & 0.007 \\ 0.037 & 5.386 & -0.014 \\ 0.006 & -0.014 & 3.804 \end{bmatrix}$$

Ej:

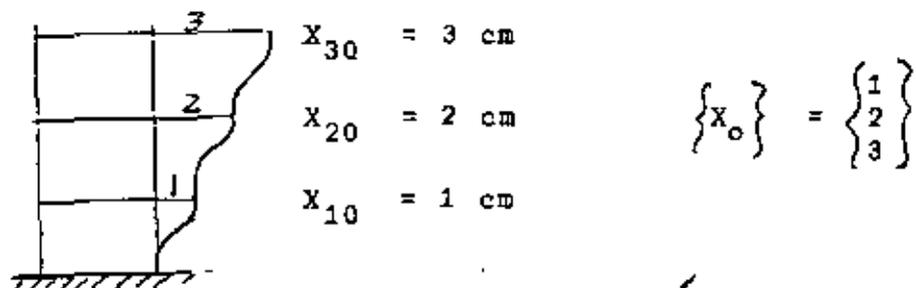
$$19.6296 = \{r\}_1^T [M] \{r\}_1 = M_1^* = \sum_i r_{i1}^2 m_i$$

$$[K^*] = [R]^T [K] [R] = 60 \begin{bmatrix} 6.899 & 0.042 & 0.034 \\ 0.042 & 8.651 & -0.040 \\ 0.034 & -0.040 & 13.473 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación con } [K^*] = [P^2 M^*] =$$

$$= \begin{bmatrix} 412.209 & 0 & 0 \\ 0 & 519.749 & 0 \\ 0 & 0 & 807.970 \end{bmatrix} = [P^2 M^*]$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 413.940 & 0 \dots & 0 \dots \\ 0 \dots & 519.060 & 0 \dots \\ 0 \dots & 0 \dots & 808.380 \end{bmatrix}$$



$$Y_{01} = \frac{\{r\}_1^T [M] \{X_0\}}{M_1^*} = \frac{2.0 + 6.405 + 9.855}{19.629} = 0.9303 \text{ cm}$$

$$Y_{02} = \frac{\{r\}_2^T [M] \{X_0\}}{M_2^*} = \frac{2.0 + 2.697 - 4.422}{5.386} = 0.0511$$

$$Y_{03} = \frac{\{r\}_3^T [M] \{X_0\}}{M_3^*} = \frac{2.0 - 3.132 + 1.233}{3.804} = 0.0266$$

Modo $Y_1(t)$

$$P_1 = 4.58$$

$$P_2 = 9.82$$

$$P_3 = 14.56$$

En p.

0.930 cm

0.051 cm

0.026 cm

son amplitudes de los
modos

Para obtener los desplazamientos de las masas debemos multiplicar por las configuraciones modales:

$$x_{i1} = \{r\}_1 \quad Y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} \quad 0.93 \cos 4.58 t$$

$$x_{i2} = \{r\}_2 \quad Y_2(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.899 \\ -1.474 \end{Bmatrix} \quad 0.051 \cos 9.82 t$$

$$x_{i3} = \{r\}_3 \quad Y_3(t) = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} \quad 0.0266 \cos 14.56 t$$

y sumar. O sea los desplazamientos $x_i(t)$ de las masas serán

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

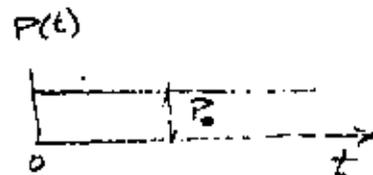
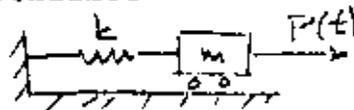
$$x_1(t) = r_{11} Y_1(t) + r_{12} Y_2(t) + r_{13} Y_3(t)$$

$$x_2(t) = r_{21} Y_1(t) + r_{22} Y_2(t) + r_{23} Y_3(t)$$

$$x_3(t) = r_{31} Y_1(t) + r_{32} Y_2(t) + r_{33} Y_3(t)$$

Otro ejemplo

Para 1GL teníamos



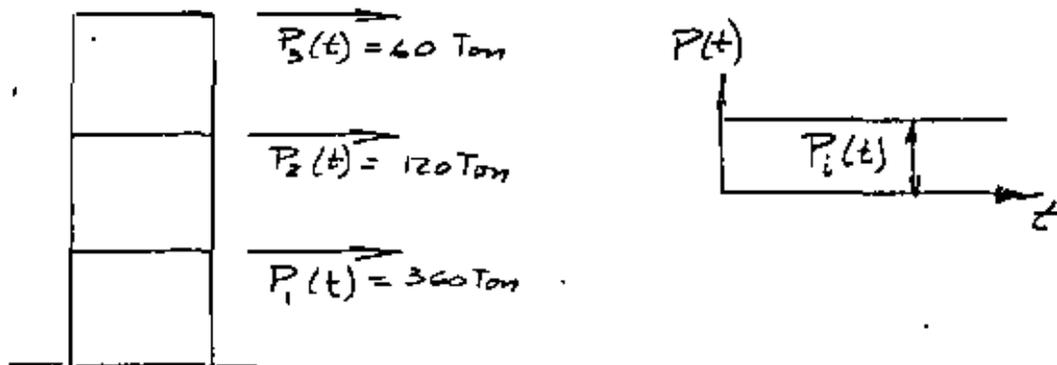
La ec:

$$x + P^2 x = \frac{P(t)}{m} = \frac{P_0}{m}$$

y para CI = 0 la solución

$$x = \frac{P_0}{K} (1 - \cos pt)$$

Tenemos ahora el problema de encontrar la respuesta de



Para el modo j :

$$\ddot{Y}_j + p_j^2 Y_j = \frac{P_j^*(t)}{M_j^*} = \frac{P_{j0}^*}{M_j^*} \quad \text{cuya solución es:}$$

$$Y_j = \frac{P_{j0}^*}{K_j^*} (1 - \cos p_j t) = \frac{P_{j0}^*}{p_j^2 M_j^*} (1 - \cos p_j t)$$

Cálculo de P_j^*

$$P_j^* = \{r\}_j' \{P(t)\} = \{r\}_j' \begin{Bmatrix} 360 \\ 120 \\ 60 \end{Bmatrix}$$

modo

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ 1 \left\{ \begin{array}{l} P_1^* = P_1 r_{11} + P_2 r_{21} + P_3 r_{31} = 360 + 256.2 + 197.1 = 813.3 \\ P_2^* = P_1 r_{12} + P_2 r_{22} + P_3 r_{32} = 360 + 107.88 - 88.4 = 379.48 \\ P_3^* = P_1 r_{13} + P_2 r_{23} + P_3 r_{33} = 360 - 125.28 + 24.66 = 259.98 \end{array} \right. \end{array}$$

Ahora bien,

$$Y_j(st) = \frac{P_j^*}{p_j^2 M_j^*} = \frac{P_j^*}{K_j^*}$$

$$Y_{1(st)} = \frac{813.30}{21 \times 19.629} = 1.973 \text{ cm}$$

$$Y_{2(st)} = \frac{379.48}{965 \times 5.386} = 0.730 \text{ cm}$$

$$Y_{3(st)} = \frac{259.38}{212.4 \times 3.804} = 0.321 \text{ cm}$$

de donde

$$Y_j = \frac{P_j^*}{P_j^2 M_j^*} (1 - \cos P_j t), \text{ y tenemos:}$$

$$Y_1(t) = Y_{1(st)} (1 - \cos p_1 t)$$

$$Y_2(t) = Y_{2(st)} (1 - \cos p_2 t)$$

$$Y_3(t) = Y_{3(st)} (1 - \cos p_3 t)$$

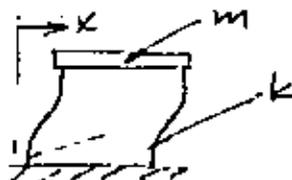
y, finalmente:

$$\{x(t)\} = \{r_1\} Y_1(t) + \{r_2\} Y_2(t) + \{r_3\} Y_3(t) = [R] \{Y\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} 1.973 (1 - \cos p_1 t) + \dots + \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} 0.321 (1 - \cos p_3 t)$$

EXCITACION SISMICA

A. Sistemas 1GL

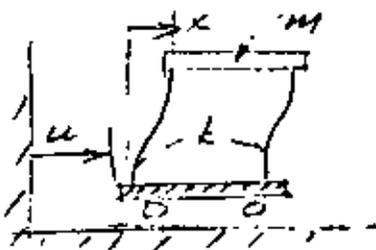


$$m \ddot{x} + kx + P(t) \quad (a)$$

Para $P(t)$ cualquiera y para $CI \neq 0$ la solución de (a) es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\zeta) \sin p(t-\zeta) d\zeta$$

Para excitación sísmica:



$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) + kx = 0$$

o sea,

$$m \ddot{x} + kx = -m\ddot{u} \quad (b)$$

De la comparación de (a) y (b), la solución completa de ésta es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt - \frac{1}{p} \int_0^t \ddot{u}(\zeta) \sin p(t-\zeta) d\zeta$$

B. Sistemas de nGL:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u} \\ -m_2 \ddot{u} \\ \vdots \\ -m_n \ddot{u} \end{Bmatrix}$$

$$= - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix} \ddot{u} \quad \ddot{u} = - \left\{ \frac{m}{m} \right\} \ddot{u}$$

Es decir, tenemos:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}$$

sust. $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}(t)$$

pre x $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \underbrace{\{r\}'_j \{P\}}_{P_j^*} = - \underbrace{\{r\}'_j \{m\}}_{m_j^*} \ddot{u}$$

por ortogonalidad:

$$\{r\}'_j [M] \{r\} \ddot{y}_j + \{r\}'_j [K] \{r\} y_j = P_j^* = U_j^*$$

y queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^* = U_j^* = - m_j^* \ddot{u}$$

∴ la solución (CI = 0) de esta ecuación es:

Para P_j^* :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t P_j^*(z) \sin \phi_j(t-z) dz$$

Para U_j^* :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t U_j^*(z) \sin \phi_j(t-z) dz$$

que puede escribirse:

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{p_j M_j^*} \int_0^t \ddot{u}(z) \operatorname{sen} p_j(t-z) dz$$

$$+ y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \operatorname{sen} p_j t \quad \begin{array}{l} \text{término a} \\ \text{para} \\ \text{CI} \neq 0 \end{array}$$

Una vez obtenidos los elementos de $\{y\}$ solo falta premultiplicar por $[R]$ para obtener $\{x\}$:

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

GENERALIZACION DE LAS CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

Tenemos la ecuación:

$$[K] - p^2 [M] \{x\} = \{0\}$$

que convenimos en escribir en la forma:

$$(K - p^2 M) x = 0$$

como los vectores modales la satisfacen:

$$K r_j = p_j^2 M r_j \quad (a)$$

y premultiplicando por: $r_i^T M M^{-1}$ tenemos:

$$r_i^T M M^{-1} K r_j = p_j^2 M M^{-1} M r_j = p_j^2 M M^{-1} K r_j = 0$$

que puede escribirse

$$r_i' M (M^{-1} K)^2 r_j = 0$$

y así podría seguirse para llegar a:

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} l \text{ entero} \\ -\infty < l < \infty \end{array} \right.$$

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad (b)$$

en forma análoga podemos obtener

$$r_i' (MF)^l M r_j = 0 \quad (c)$$

$$r_i' (K M^{-1})^l K r_j = 0$$

En (b):

$$l = -2 \quad M (M^{-1} K)^{-2} = M (M^{-1} K)^{-1} (M^{-1} K)^{-1}$$

$$(\text{en (c), con } l=2) \quad = M K^{-1} M K^{-1} M = \underline{M F M F M}$$

$$l = -1 \quad M (M^{-1} K)^{-1} = M K^{-1} M = \underline{M F M}$$

$$l = 0 \quad M (M^{-1} K)^0 = \underline{M}$$

$$l = 1 \quad M (M^{-1} K)^1 = M M^{-1} K = \underline{K}$$

$$l = 2 \quad M (M^{-1} K)^2 = M M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K}$$

$$l = 3 \quad M (M^{-1} K)^3 = M M^{-1} K M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K M^{-1} K}$$

VIBRACION LIBRE Y FORZADA DE SISTEMAS DE N GL CON AMORTIGUAMIENTO

Las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$\{F_I\} + \{F_a\} + \{F_r\} = \{P(t)\}$$

Ya tenemos:

$$\{F_I\} = [M] \{\ddot{x}\}$$

$$\{F_r\} = [K] \{x\}$$

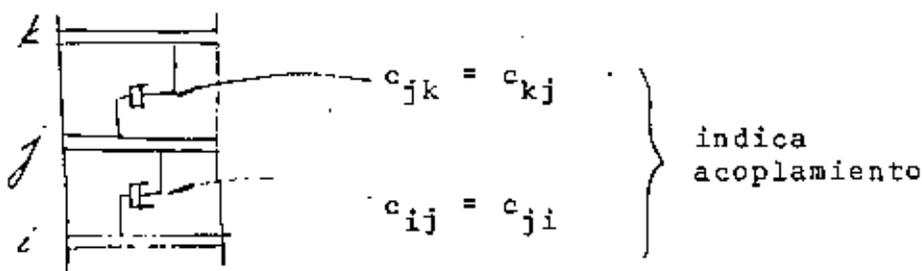
y ahora hacemos

$$\{F_a\} = [c] \{\dot{x}\}$$

donde

$$[c] = [c_{ij}]$$

y c_{ij} = fuerza de amortiguamiento en la coordenada i debido a una velocidad unitaria en la coordenada j .



La ecuación de movimiento es

$$[M] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Hagamos: $\{x\} = [R] \{y\}$ premultiplicando por $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\dot{y}\} + \{r\}'_j [C] [R] \{y\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \{r\}'_j \{P(t)\}$$

Para desacoplar estas ecuaciones debemos tener

$$\left. \begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \\ \{r\}'_j [K] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{cierto por} \\ \text{ortogonalidad} \end{array}$$

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_i = 0 \quad i \neq j \quad \text{¿pero ésta? (a)}$$

1° admitamos que se cumple:

Ya definimos

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{r\}_j &= M_j^* \\ \{r\}'_j [K] \{r\}_j &= K_j^* \end{aligned} \quad \{r\}'_j \{P(t)\} = P_j^*$$

y ahora

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_j = C_j^* = 2\beta_j \phi_j M_j^*$$

y nuestra ecuación para el modo j queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + 2\beta_j \phi_j M_j^* \dot{y}_j + \phi_j^2 M_j^* y_j = P_j^*$$

o bien:

$$\ddot{y}_j + 2\beta_j \phi_j \dot{y}_j + \phi_j^2 y_j = \frac{P_j^*}{M_j^*}$$

Como las soluciones para un sistema de 1GL (cuya ec. es $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + p^2x = \frac{P(t)}{m}$) ya las conocemos, solo nos falta saber cómo debe ser $[C]$ para que se cumpla

$$\{r\}_i^T [C] \{r\}_j = 0 \quad i \neq j \quad (a)$$

además, claro, de

$$y \quad \left. \begin{aligned} \{r\}_i^T [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}_i^T [K] \{r\}_j &= 0 \end{aligned} \right\} i \neq j$$

La ec. (a) se satisface si

i) $[C]$ es proporcional a $[M]$ o a $[K]$

ii) $[C]$ es una combinación lineal de $[M]$ y $[K]$, o

sea:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K]$$

esto es muy restringido.

iii) En forma más general:

$$[C] = [M] \sum_1^l a_l [M^{-1}K]^l = \sum_1^l [C_l] \quad (38.1)$$

pues ya sabemos que todas las posibles formas

$$[M] [M^{-1}K]^l \text{ son satisfactorias y (38.1) es}$$

una C. L. de matrices de este tipo.

La selección adecuada de a_1 dará a $[C]$ las propiedades deseadas, o sea, podremos dar valores específicos a los elementos de $[C]$. ¿Cuáles le damos?

Asignamos un cierto valor de β a cada modo.

$$C_{j1}^* = \underbrace{\{r\}_j^T}_{A} [C] \{r\}_j = 2\beta_j \phi_j^T M_j^* = \sum_1 \{r\}_j^T [C_1] \{r\}_j = \sum_1 C_{j1}^* \quad (38.2)$$

De 38.1 y A

$$C_{j1}^* = \{r\}_j^T [M] [M^{-1}K]^{-1} \{r\}_j a_1 \quad (38.3)$$

Por otra parte, para vibración libre:

$$(K - \phi_j^2 M) r_j = 0$$

$$K r_j = \phi_j^2 M r_j \leftrightarrow \frac{1}{\phi_j^2} r_j = F M r_j$$

premultiplicando por $r_j^T M$:

$$\frac{1}{\phi_j^2} r_j^T M r_j = r_j^T M F M r_j$$

es decir

$$(\phi_j^2)^{-1} M_j^* = r_j^T M (M^{-1} K)^{-1} r_j$$

y así podríamos llegar a que, para cualquier l :

$$(\phi_j^z)^1 M_j^* = r_j^1 M (M^{-1} K)^1 r_j = \underbrace{\frac{C_{j1}^*}{a_1}}_{\text{por 38.3}} \quad 39.1$$

De 39.1:

$$C_{j1}^* = (\phi_j^z)^1 M_j^* a_1$$

$$C_{j1}^* = (\phi_j^z)^1 M_j^* a_1$$

y sumando sobre 1:

$$\sum_1 C_{j1}^* = \sum_1 (\phi_j^z)^1 M_j^* a_1$$

pero ya teníamos que

$$\sum_1 C_{j1}^* = 2\beta_j \phi_j^z M_j^*$$

$$\therefore 2\beta_j \phi_j^z M_j^* = \sum_1 (\phi_j^z)^1 M_j^* a_1$$

de donde:

$$\beta_j = \frac{1}{2\phi_j^z} \sum_1 (\phi_j^z)^1 a_1$$

Con los n valores de β_j para los n modos podemos resolver para los n valores de a_1 y formar nuestra $[C]$ con la ecuación

$$[C] = [M] \sum_1 a_1 [M^{-1}K]^{-1}$$

Por ejemplo para nuestra estructura de 3GL asignemos:

$$\beta_1 = 0.10, \quad \beta_2 = 0.05, \quad \beta_3 = 0.02$$

$$\beta_1 = 0.10 = \frac{1}{2p_1} [a_{-1}(\phi_1^2)^{-1} + a_0(\phi_1^2)^0 + a_1(\phi_1^2)^1]$$

$$\beta_2 = 0.05 = \frac{1}{2p_2} [a_{-1}(\phi_2^2)^{-1} + a_0(\phi_2^2)^0 + a_1(\phi_2^2)^1]$$

$$\beta_3 = 0.02 = \frac{1}{2p_3} [a_{-1}(\phi_3^2)^{-1} + a_0(\phi_3^2)^0 + a_1(\phi_3^2)^1]$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \\ 0.02 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\phi_1^3 & 1/\phi_1 & \phi_1 \\ 1/\phi_2^3 & 1/\phi_2 & \phi_2 \\ 1/\phi_3^3 & 1/\phi_3 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

al resolver para a_1 resulta

$$\underline{[C]} = a_{-1} [MFM] + a_0 [M] + a_1 [K]$$

En p. tenemos que para $CI = 0$ y $\beta = 0$, para excitación sísmica

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{P_j M_j^*} \int_0^t u_j(\xi) \sin P_j(t-\xi) d\xi$$

coeficiente de participación

$$C_j = \frac{m_j^*}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j^T \{m\}}{\{r\}_j^T [M] \{r\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}^2}$$

y \therefore podemos poner:

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

en la que C_j está definida arriba y

$$z_j(t) = -\frac{1}{\beta_j} \int_0^t u(z) \sin \beta_j(t-z) dz$$

(y semejante si $\beta \neq 0$)

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

Además, tenemos

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

o sea

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

††
∴

$$x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j z_j(t)$$

De aquí (sin sumar para todos los modos)

$$\left. \begin{aligned} |X_{ij}|_{\max} &= r_{ij} C_j |z_j(t)|_{\max} = r_{ij} C_j S_d \\ &= r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2} \end{aligned} \right\} S_a = p S_v = p^2 S_d$$

De esta ec. pasamos a:

$$|X_i|_{\max}^{\text{ABS}} = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j S_d = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2}$$

$$|x_i|_{\max}^{\text{PROB}} = \sqrt{\sum (|X_{ij}|_{\max})^2}$$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA:

DINAMICA ESTRUCTURAL

EFFECTOS SISMICOS EN ESTRUCTURAS EN FORMA DE PENDULO INVERTIDO

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980

Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido

Octavio RASCON CH. *

INTRODUCCION

En la práctica se presentan estructuras constituidas por una sola columna la cual sostiene una cubierta que puede ser una losa o un cascarón. Su comportamiento dinámico debe estudiarse considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total de la estructura.

A principios de este año se presentó en California, E.U.A. un trabajo¹ en el cual se trató este problema desde un punto de vista energético. Se calculó sólo el periodo fundamental y con base en él, la respuesta de la estructura a un determinado temblor. Los periodos calculados para cuatro estructuras de este tipo ya construidas fueron menores que los medidos *in situ*. La discrepancia fue atribuida a efectos de rotación y traslación de la base.

El objeto de este trabajo es introducir un análisis modal, el cual nos proporcionará los efectos del acoplamiento que existe entre los modos de vibración. También se tomarán en cuenta en forma aproximada los efectos de rotación y traslación de la base.

CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES DE VIBRACION

1. Suelo rígido

Para el caso en que el centro de gravedad de la cubierta se encuentra localizado en la prolongación del eje de la columna, el movimiento de la estructura podrá estudiarse en dos direcciones perpendiculares entre sí. En tal caso el problema podrá discretizarse como de dos modos de vibración acoplados en cada dirección.

Para el cálculo de las frecuencias de vibración se idealizará la estructura como de comportamiento lineal, constituida por una cubierta infinitamente rígida de masa simétricamente distribuida y soportada por una sola columna. Como primer caso se considerará al suelo infinitamente rígido (fig. 1).

En fig 1

W = peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna

J = momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje z

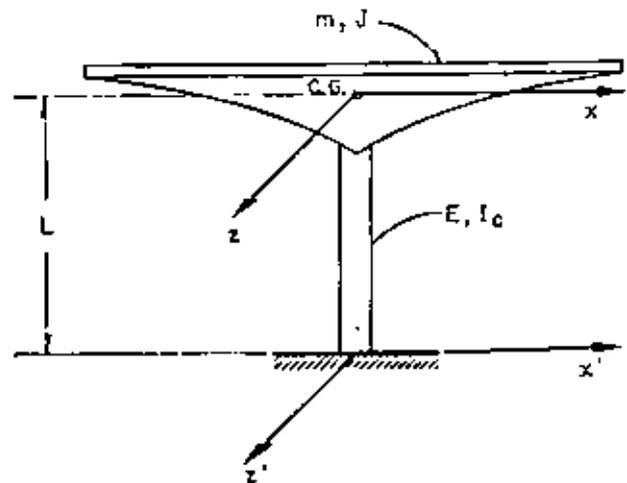


FIG. 1. Péndulo invertido

E = módulo de elasticidad del material de la columna

I_c = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto al eje z

C.G. = centro de gravedad de la cubierta

L = distancia de C.G. al suelo.

Para la columna mostrada en las figs. 2a y 2b.

k = rigidez por traslación (fuerza horizontal aplicada en C.G. necesaria para que este se desplace la unidad)

k_r = rigidez por rotación (par aplicado en C.G. necesario para producir un giro unitario a la altura de C.G.)

θ = rotación en C.G. debida a la fuerza k

δ = desplazamiento lateral de C.G. debido al momento k_r .

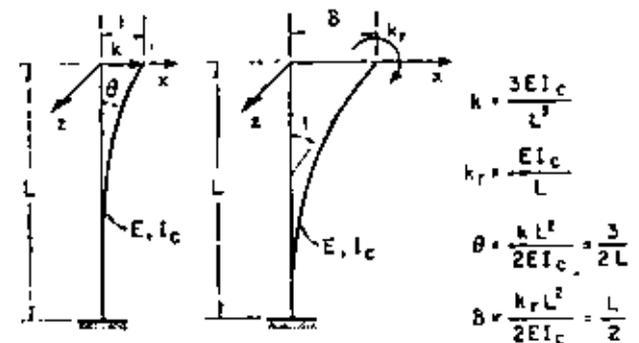


FIG. 2. Rigideces

* Asistente de Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

Despreciando las deformaciones por cortante, las expresiones para k , k_r , Θ y δ pueden encontrarse por estática y valen

$$k = 3EI_c/L^3; \quad (1a)$$

$$k_r = EI_c/L; \quad (2a)$$

$$\Theta = 1.5/L \quad (1b)$$

$$\delta = L/2 \quad (2b)$$

Para una fuerza de magnitud αk , el desplazamiento será α y el giro $\alpha\Theta$. Para un par de magnitud βk_r , el giro será β y el desplazamiento $\beta\delta$. Al aplicarse ambos simultáneamente, el desplazamiento total de C.G. será x_1 y el giro ϵ_1 (fig. 3).

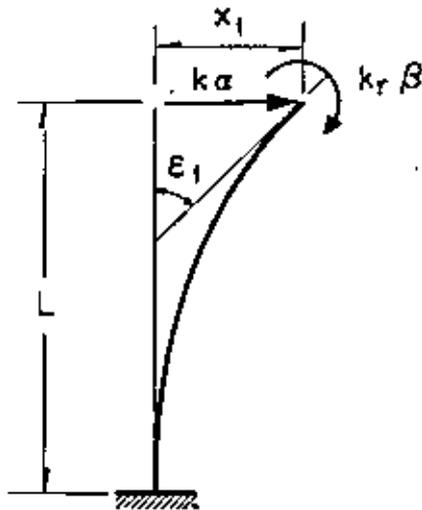


FIG. 3. Desplazamientos y giros totales

Por tanto los valores de x_1 y ϵ_1 quedan dados por

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \quad (3)$$

$$\epsilon_1 = \alpha\Theta + \beta \quad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3 y 4 para α y β , y utilizando las ecs 1b y 2b se obtiene

$$\alpha = (x_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa; \quad (5a)$$

$$\beta = (\epsilon_1 - \kappa\gamma x_1)/\kappa \quad (5b)$$

en las cuales

$$\gamma = L^2/2EI_c; \quad (6a)$$

$$\kappa = 1 - kL^3/4EI_c = 0.25 \quad (6b)$$

Para las oscilaciones del péndulo mostrado en la fig 1, el diagrama de cuerpo libre de la cubierta está indicado en la fig 4. Las ecuaciones de movimiento, despreciando efectos gravitacionales, serán

$$m\ddot{x}_1 + k\alpha = 0 \quad (7)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + k_r\beta = 0 \quad (8)$$

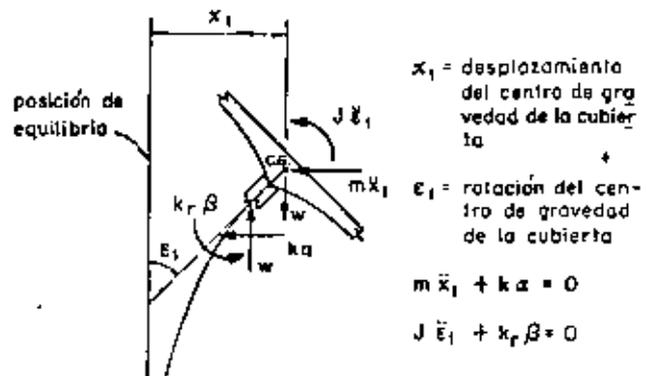


FIG. 4. Diagrama de cuerpo libre

Sustituyendo a (5a) y (5b) en (7) y (8) se obtiene

$$m\ddot{x}_1 + (kx_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa = 0 \quad (9)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + (k_r\epsilon_1 - k_r\gamma x_1)/\kappa = 0 \quad (10)$$

Las ecs. 9 y 10 se pueden expresar matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\epsilon}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\gamma k k_r \\ -\gamma k k_r & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Utilizando las ecs 1a, 2a y 6a se encuentra que

$$\gamma k k_r = Lk/2 \quad (12)$$

Puesto que el movimiento es armónico se tiene que

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{y} \quad \ddot{\epsilon}_1 = -\omega^2 \epsilon_1 \quad (13)$$

en donde ω es la frecuencia circular natural de vibración.

Sustituyendo las ecs. 12 y 13 en (11) se obtiene

$$-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

Factorizando en la ec. 14

$$\left\{ \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

La ec 15 representa un sistema de ecuaciones homogéneas, el cual, para tener solución diferente de la trivial, necesita que su determinante sea nulo. Por tanto

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\kappa} - m\omega^2 & -\frac{Lk}{2\kappa} \\ -\frac{Lk}{2\kappa} & \frac{k_r}{\kappa} - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Desarrollando el determinante se llega a

$$m\omega^4 - \frac{1}{\kappa} (kf + mk_r)\omega^2 + \frac{1}{4\kappa^2} (4kk_r - L^2 k^2) = 0 \quad (17)$$

Dividiendo ambos miembros entre m y considerando que $L^2 k^2 = 3kk_r$, se obtiene

$$\omega^4 - \frac{kf + mk_r}{m\kappa} \omega^2 + \frac{k k_r}{4m\kappa^2} = 0 \quad (18)$$

que es una ecuación de segundo grado en ω^2 , cuyas soluciones son

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{kf + mk_r}{2m\kappa} \pm \sqrt{\frac{(kf + mk_r)^2}{4m^2 \kappa^2} - \frac{k k_r}{4m\kappa^2}} \quad (19)$$

Dividiendo numerador y denominador de (19) entre m

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k/m + k_r/j}{2\kappa} \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{(k/m + k_r/j)^2 - (k/m)(k_r/j)} \quad (20)$$

Llamando a

$k/m = p^2 =$ cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$k_r/j = \Omega^2 =$ cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

se obtiene

$$\omega_{1,2}^2 = 2 \left(p^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(p^2 + \Omega^2)^2 - p^2 \Omega^2} \right) \quad (21)$$

Dividiendo ambos miembros de (21) entre p^2 y haciendo $\omega^2/p^2 = \lambda$ y $\Omega^2/p^2 = \mu$ se llega a

$$\lambda_{1,2} = 2 \left(1 + \mu \pm \sqrt{(1 + \mu)^2 - \mu} \right) \quad (22)$$

Es interesante notar que si $j = 0$ (masa concentrada) de la ec 17 se obtiene $\omega^2 = k/m = p^2$.

Las configuraciones modales pueden obtenerse de cualquiera de las dos ecuaciones algebraicas contenidas en la ecuación matricial dada en ec 15. La primera de ellas es

$$\left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2 \right) x_{1,n} - \frac{Lk}{2\kappa} r_{1,n} = 0 \quad (23)$$

donde el índice n indica el número del modo y de la cual se obtiene

$$x_{1,n}/r_{1,n} = \frac{Lk}{2\kappa} \left/ \left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2 \right) \right. \quad (24)$$

dividiendo numerador y denominador de (24) entre m y considerando que $\kappa = 0.25$, $k/m = p^2$ y que $\lambda_n = \omega_n^2/p^2$ se llega a

$$x_{1,n}/r_{1,n} = 2L/(4 - \lambda_n) \quad (25)$$

Si se desean tomar en cuenta las deformaciones por cortante basta con modificar las rigideces mediante un análisis de estática y partir de nuevo de la ec 17 sin considerar que $L^2 k^2 = 3kk_r$. Si existe excentricidad en alguna dirección su efecto podrá tomarse en cuenta introduciendo un grado de libertad adicional.

En las figs 5 y 6 se encuentran representados los resultados de las ecs 22 y 25.

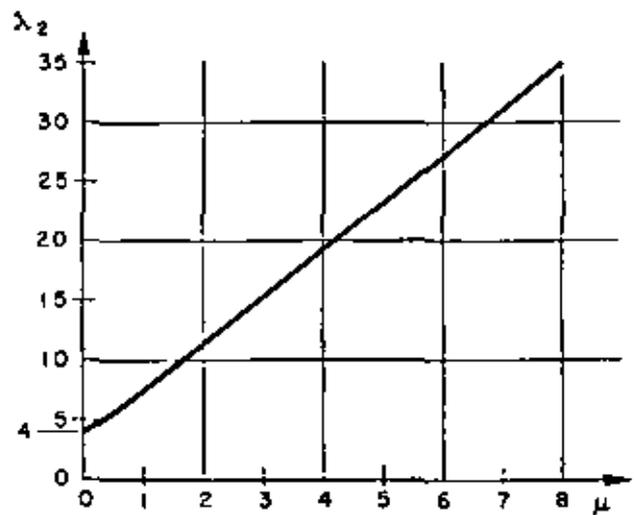
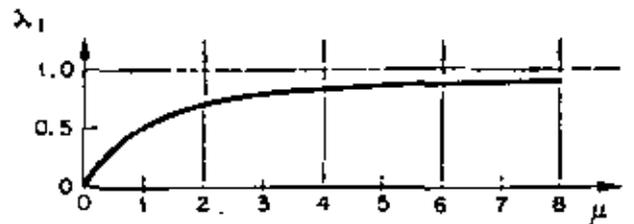


FIG. 5. Gráfica de frecuencias

FIG. 6. Gráfica $(x/L)/\epsilon$ vs λ

2. Suelo flexible

Al oscilar una estructura cimentada en suelo blando, existe interacción dinámica suelo-estructura que en la mayoría de los casos no debe despreciarse al calcular las frecuencias y los modos de vibración. En lo que sigue se propone la adaptación de un método numérico para tomar en cuenta dicho efecto.

Las restricciones del suelo serán idealizadas mediante resortes de comportamiento lineal: uno para desplazamientos lineales horizontales y otro para deformaciones angulares de cabeceo de la cimentación^{2,3}.

En la fig. 7 se hace referencia a los parámetros que a continuación se mencionan

K = rigidez del resorte correspondiente a la traslación de la base $= C_r A$

C_r = coeficiente de cortante elástico uniforme del suelo.

A = área de contacto de la cimentación.

R = rigidez del resorte correspondiente a rotación de la base $= C_\varphi J_b - W'y$

C_φ = coeficiente de compresión elástica no uniforme del suelo.

I_b = momento de inercia de área de la base de la cimentación con respecto al eje z'

W' = peso total de la estructura

y = altura del centro de gravedad de la estructura sobre el nivel de desplante

$F = m\omega_0^2 x$

x = desplazamiento ~~total~~ total en C.G.

$M = I\omega_0^2 \epsilon$

ϵ = desplazamiento angular total en C.G.

L' = altura de C.G. sobre el nivel de desplante

x_0 = traslación de la base

ϵ_0 = rotación de la base

$x_1 = \alpha + \beta\delta$

$\epsilon_1 = \beta + \alpha\theta$

$x_2 = L'r_0$

$\alpha = F/k$

$\beta = M/k_r$

$f, L, \delta, \theta, k, k_r, x_1, \epsilon_1$ y W ya definidos anteriormente.

El problema será resuelto utilizando un procedimiento iterativo y la tabulación propuesta por N. M. Newmark⁴; se despreciarán la variación de la rigidez de la columna debida a la fuerza normal W y los momentos en la misma, causados por la excentricidad del peso debida a deformaciones de la columna.

Sean

F_0 = fuerza horizontal en la base de la cimentación $= F$

M_0 = momento flexionante en la base de la cimentación $= M + FL'$

$x_0 = F_0/K$

$\epsilon_0 = M_0/R$

A continuación se describe el procedimiento a seguir:

1. Suponer valores para x y ϵ
2. Calcular F y M usando las expresiones $F = m\omega_0^2 x$ y $M = I\omega_0^2 \epsilon$. En esta etapa el valor de ω_0 aún no se conoce; por tanto se llevará como factor común en el resto del cálculo

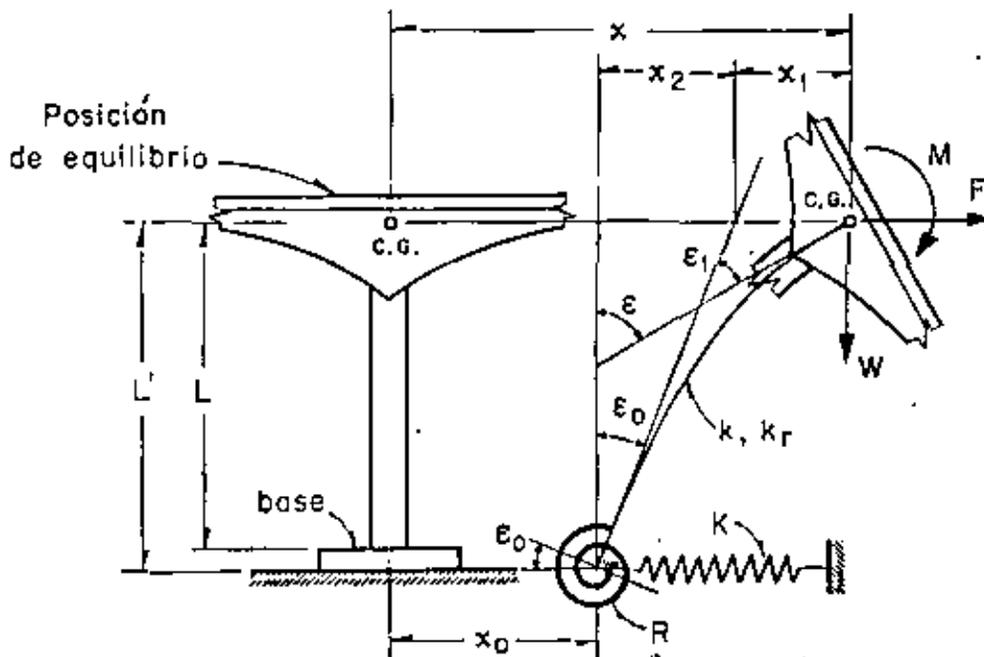


Fig. 7. Modelo de interacción dinámica suelo-estructura

3. Calcular la fuerza y el momento en la base mediante las fórmulas

$$F_0 = F \quad \text{y} \quad M_0 = M + FL'$$

4. Encontrar los valores de los desplazamientos $x_0 = F_0/K$ y $e_0 = M_0/R$

5. Calcular los valores de los parámetros $\alpha = F/k$ y $\beta = M/k_r$

6. Efectuar los productos $\beta\delta$ y $\alpha\epsilon$

7. Calcular $x_1 = \alpha + \beta\delta$ y $e_1 = \beta + \alpha\epsilon$

8. Efectuar el producto $x_2 = L'e_1$

9. Calcular los desplazamientos lineales y angulares totales de C.G. mediante las expresiones

$$x' = x_0 + x_1 + x_2 \quad \text{y} \quad e' = e_0 + e_1$$

10. Encontrar el valor de ω_n^2 mediante los cocientes x/x' y e/e'

11. Si los valores de ω_n^2 calculados en el paso anterior son aproximadamente iguales, el proceso habrá concluido. En caso contrario repítase la secuela utilizando como valores de partida para x y e los encontrados en etapa 9 o valores cuyo cociente sea igual al de x' entre e' . El proceso deberá continuarse hasta lograr la aproximación deseada.

EJEMPLO DE APLICACION

Con motivo de ilustrar los conceptos enunciados anteriormente se calcularán las frecuencias y modos de vibración de un cascarón ya construido en California, EUA (fig 8). Los datos necesarios han sido extraídos de la ref 1. Se computarán también las respuestas sísmicas suponiendo que esa estructura fuera a construirse en la zona blanda de la ciudad de México. Se utilizarán por tanto los parámetros elásticos de las arcillas del Valle de México y los espectros de diseño propuestos en el reglamento de construcción para el Distrito Federal⁴.

Los datos necesarios de la estructura son

$$\begin{aligned} L &= 419 \text{ cm} \\ L' &= 480 \text{ cm} \\ \hat{y} &= 249 \text{ cm} \\ W &= 20,450 \text{ kg} \quad (m = 20.81 \text{ kg seg}^2/\text{cm}) \\ W' &= 43,600 \text{ kg} \\ I_b &= 1.775 \times 10^8 \text{ cm}^4 \\ I_r &= 1.065 \times 10^6 \text{ cm}^4 \\ k &= 1.266 \times 10^4 \text{ kg/cm} \\ k_r &= 7.41 \times 10^8 \text{ kg cm/rad} \\ J &= 1.386 \times 10^6 \text{ kg seg}^2 \text{ cm} \\ \theta &= 0.00358 \text{ rad/cm} \\ \delta &= 208 \text{ cm/rad} \end{aligned}$$

Las expresiones para C_r y C_φ son las siguientes³

$$C_r = F_1 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}}; \quad C_\varphi = F_2 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (26)$$

En ecs 26

$$\begin{aligned} E' &= \text{módulo de elasticidad del suelo} \\ \nu &= \text{relación de Poisson del suelo} \end{aligned}$$

A = área de contacto de la cimentación
 F_1, F_2 = factores de forma de la cimentación

Para el caso de la zona blanda del Valle de México un valor representativo de E' es 50 kg/cm^2 y $\nu = 0.5$. Para una cimentación cuadrada los valores de F_1 y F_2 son 0.704 y 2.11 respectivamente.

Sustituyendo valores en ecs 26 se obtiene

$$\begin{aligned} C_r &= 0.123 \text{ kg/cm}^2 \\ C_\varphi &= 0.369 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

CASO 1. SUELO RÍGIDO

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración

Para el cálculo de las frecuencias de vibración usaremos la fórmula dada en ec 22. Los valores de los parámetros a sustituir son

$$\begin{aligned} p^2 &= k/m = 608 \text{ (rad/seg)}^2 \\ \Omega^2 &= k_r/J = 535 \text{ (rad/seg)}^2 \\ \mu &= \Omega^2/p^2 = 0.882 \end{aligned}$$

con los cuales

$$\lambda_{1,2} = 2(1.882 \pm \sqrt{3.55 - 0.882}) = 0.494; 7.034$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{0.494 \times 608} = \sqrt{300} = 17.32 \text{ rad/seg} \\ \omega_2 &= \sqrt{7.034 \times 608} = \sqrt{4260} = 65.30 \text{ rad/seg} \end{aligned}$$

Los periodos naturales son

$$T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.362 \text{ seg} \quad (T_1 \text{ obtenido de un registro de vibraciones libres de la estructura y reportado en ref 1} = 0.483 \text{ seg})$$

$$T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0.096 \text{ seg}$$

Comparando los valores calculado y medido de T_1 se puede ver la importancia de la interacción dinámica suelo-estructura.

Las relaciones modales se obtienen de las ecs. 25 y sus valores son

$$x_1/e_1 = \frac{2 \times 419}{4 - 0.494} = 238 \text{ cm/rad}$$

$$x_2/e_2 = \frac{2 \times 419}{4 - 7.034} = -275 \text{ cm/rad}$$

b) Respuesta sísmica

Para el cálculo de la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad es necesario calcular los coeficientes de participación de cada modo de vibración. Se puede demostrar¹ que para este caso es aplicable la siguiente ecuación

$$C_n = \frac{X_n^T M \bar{1}}{X_n^T M X_n} \quad (27)$$

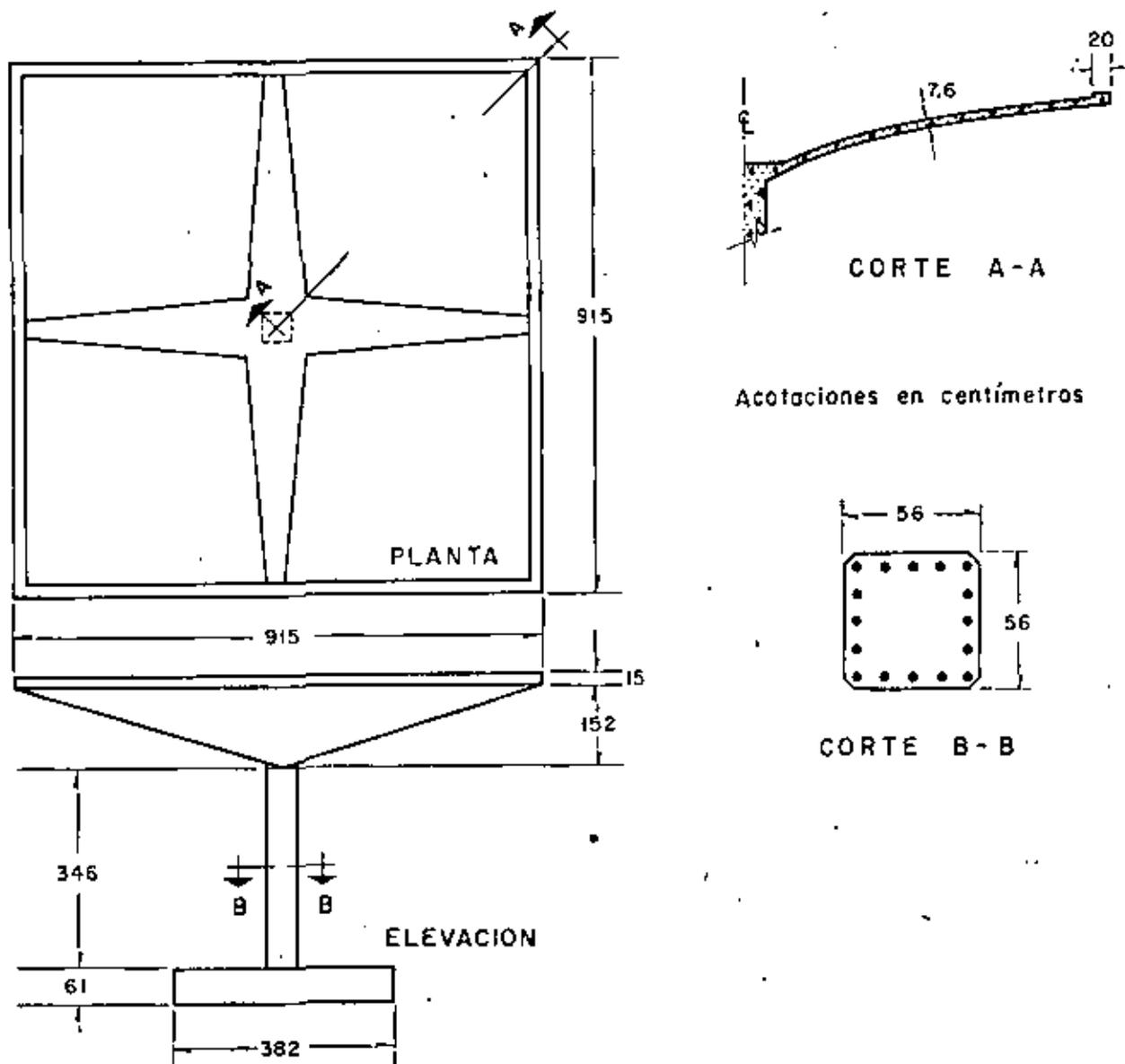


FIG. 8. Cascarón utilizado para ejemplo. (Después de R. McLain)

en la cual

\vec{i} es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

\bar{X}_n es el vector modal para el enésimo modo (n)

\bar{M} es la matriz de inercia y

\bar{X}_n^T es el vector traspuesto de \bar{X}_n .

Para nuestro caso se tendrá

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} X_{est} \\ v_{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 238 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -275 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1^T = \begin{bmatrix} 238 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2^T = \begin{bmatrix} -275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.81 & 0 \\ 0 & 1.386 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores en ec 27 y efectuando los productos matriciales en ella indicados se obtiene

$$C_1 = \frac{4,960}{2.566 \times 10^6} = 0.00193$$

$$C_2 = \frac{-5,720}{2.959 \times 10^6} = -0.00193$$

El valor absoluto de la respuesta máxima en cada uno de los modos será r .

$$\begin{bmatrix} V_n = \text{fuerza cortante} \\ M_n = \text{momento flexionante} \end{bmatrix} = |C_n| \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_n \\ r_n \end{bmatrix} S_{an} \quad (28)$$

donde

S_{an} = ordenada del espectro de aceleraciones afectada por el coeficiente sísmico $C = 0.15$.

El espectro que será utilizado es el propuesto en el reglamento de construcciones del Distrito Federal^h (fig. 9). Los valores de las ordenadas espectrales correspondientes a T_1 y T_2 son 100 cm/seg² y 80.6 cm/seg² respectivamente.

Sustituyendo valores en ec 28 se llega a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 957 \text{ kg} \\ 268,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 893 \text{ kg} \\ 216,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (30)$$

El criterio propuesto en ref. 8 será utilizado para el cálculo de la respuesta total (considerando los efectos combinados de los dos modos). Por lo anterior la respuesta total de la estructura valdrá

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} ; M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (31a, 31b)$$

En ecs 31a y 31b

V = fuerza cortante total en la columna

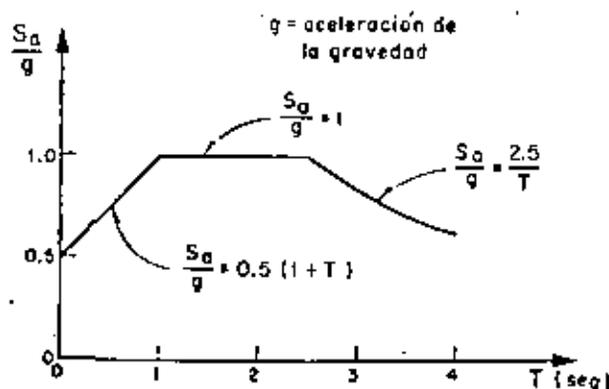


Fig. 9. Espectro de aceleraciones (Después de E. Rosenblueth y L. Esteve)

M = momento flexionante total en C. G.
Sustituyendo los valores dados en ecs 29 y 30 en (31) se obtiene

$$V = 1,310 \text{ kg} ; M = 344,000 \text{ kg cm}$$

El momento en la base de la columna valdrá

$$M_b = 344,000 + 1,310 \times 419 = 893,000 \text{ kg cm}$$

Los resultados de este caso se resumen en la fig. 10a.

CASO 2. SUELO FLEXIBLE

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración.

Para considerar las restricciones del suelo emplearemos el método propuesto anteriormente procediendo en forma tabular. Sustituyendo valores en ecuaciones para K y R se obtienen 1.88×10^6 kg/cm y 6.35×10^6 kg cm/rad respectivamente.

PRIMER MODO

Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
x, ϵ (supuestos)	$x = 400 \text{ cm}$	$\epsilon = 1 \text{ rad}$	
$F = m \omega_1^2 x, M = I \omega_1^2 \epsilon$	$F = 8320$	$M = 1,386,000$	ω_1^2
$F_0 = F, M_0 = M + FI'$	$F_0 = 8320$	$M_0 = 5,376,000$	ω_1^2
$x_0 = F_0/K, \epsilon_0 = M_0/R$	$x_0 = 0.4420$	$\epsilon_0 = 0.00847$	ω_1^2
$\alpha = F/k, \beta = M/k_r$	$\alpha = 0.6570$	$\beta = 0.00187$	ω_1^2
$\beta \delta, \alpha \theta$	$\beta \delta = 0.3892$	$\alpha \theta = 0.00235$	ω_1^2
$x_1 = \alpha + \beta \delta, \epsilon_1 = \beta + \alpha \theta$	$x_1 = 1.0462$	$\epsilon_1 = 0.00422$	ω_1^2
$x_2 = r_0 L'$	$x_2 = 4.0650$	—	ω_1^2
$x' = x_0 + x_1 + x_2, \epsilon' = \epsilon_0 + \epsilon_1$	$x' = 5.5532$	$\epsilon' = 0.01269$	ω_1^2
$\omega_1^2 = x/x', \omega_1^2 = \epsilon/\epsilon'$	72.0	78.7	

$$x'/\epsilon' = 438, \quad \ddot{X}_1^2 = [438 \quad 1]$$

PRIMER MODO

Parámetros	Valores (2º ciclo)		Factor común
x, e	438	1	
F, M	9130	1,386,000	ω_1^2
F_0, M_0	9130	5,766,000	ω_1^2
x_0, e_0	0.4860	0.00910	ω_1^2
α, β	0.7210	0.00187	ω_1^2
$\beta\delta, a\theta$	0.3892	0.002585	ω_1^2
x_1, e_1	1.1102	0.004455	ω_1^2
x_2, e_2	4.365	—	ω_1^2
x', e'	5.961	0.013565	ω_1^2
ω_1^2	73.5	75.8	—

Suponiendo que la aproximación es suficiente resulta

$$x'/e' \approx 440, \bar{X}_1^T = [440, 1], \omega_1^2 \approx 74 \text{ (rad/seg)}^2$$

$$T_1 = 0.731 \text{ seg.}$$

El procedimiento para el cómputo de los parámetros del segundo modo es el mismo, sólo que la configuración supuesta deberá "limpiarse", antes de proseguir el cálculo, de las componentes del primer modo que pudiera contener. Se demuestra que si \bar{X}_2^T es el vector de la configuración supuesta, el vector libre de componentes del primer modo queda dado por

$$\bar{X}_2 = X_2' - \frac{\bar{X}_1^T M \bar{X}_2'}{\bar{X}_1^T M X_1'} X_1' \quad (32)$$

Suponiendo para el primer ciclo

$$\bar{X}_2' = \begin{bmatrix} -150 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo valores en la ecuación matricial 32 se obtiene

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -151 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que nos da los valores de partida para el primer ciclo de cálculo.

SEGUNDO MODO

Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
x, e	-151	1	
F, M	-3143	1,386,000	ω_2^2
F_0, M_0	-3143	-123,000	ω_2^2
x_0, e_0	-0.1672	-0.0001940	ω_2^2
α, β	-0.2487	0.0018700	ω_2^2
$\beta\delta, a\theta$	0.3892	-0.0008890	ω_2^2
x_1, e_1	0.1411	0.0009810	ω_2^2
x_2, e_2	-0.0930	—	ω_2^2
x', e'	-0.1191	0.0007870	ω_2^2
ω_2^2	1267	1270	—

$$x'/e' = -151, \bar{X}_2^T = [-151 \ 1], T_2 = 0.176 \text{ seg.}$$

En este caso se supuso un valor cercano al real y por tanto sólo se necesitó un ciclo para que se obtuviera la aproximación deseada. Si el valor supuesto no hubiese sido ese sino otro cualquiera seguramente no hubiera sido suficiente un ciclo de cálculo. En los ciclos subsiguientes se procedería en igual forma que antes: suponer inicialmente la configuración obtenida en el ciclo anterior; limpiarla de las componentes del primer modo; etc.

b) Respuesta sísmica

Los valores de los coeficientes de participación y de las ordenadas espectrales para este caso son:

$$C_1 = 0.001689, \quad C_2 = -0.001689$$

$$S_{a1} = 127.4 \text{ cm/seg}^2, \quad S_{a2} = 86.6 \text{ cm/seg}^2$$

Las respuestas máximas para cada modo valen

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,970 \text{ kg} \\ 298,200 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461 \text{ kg} \\ 203,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

Las respuestas máximas totales serán (fig 10b)

$$V = 2,030 \text{ kg}$$

$$M = 361,000 \text{ kg cm}$$

$$M_0 = 1,209,000 \text{ kg cm}$$

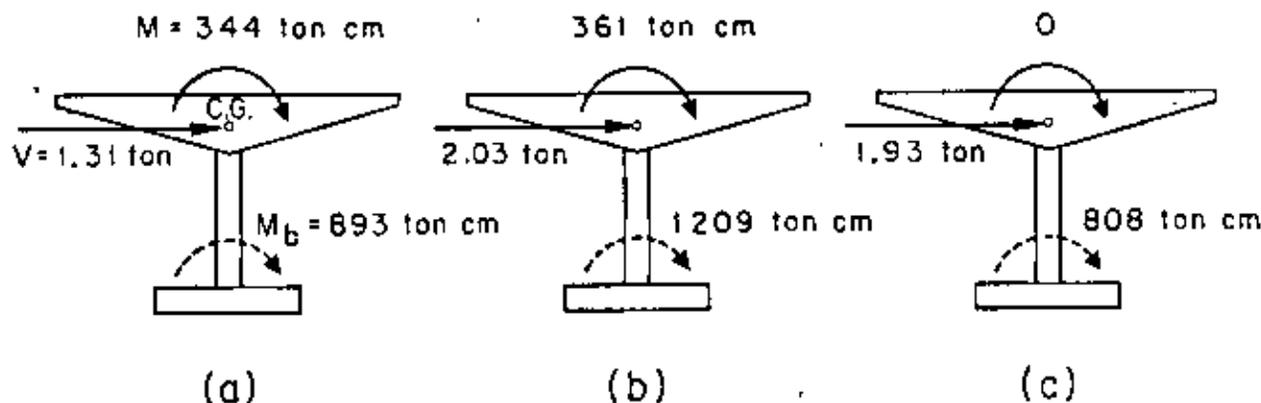


Fig. 10. Respuestas sísmicas

CASO 3. BASE RÍGIDA Y MASA CONCENTRADA

Para comparación de resultados se verá cuál es el valor de la respuesta máxima en el caso de despreciar la inercia rotacional y la interacción suelo-estructura.

Para este caso $p^2 = 608 \text{ (rad/seg)}^2$, $T = 0.325 \text{ seg}$, $0.15S_s = 92.6 \text{ cm/seg}^2$, $V = mS_s = 1,930 \text{ kg}$ y $M_b = 808,000 \text{ kg cm}$ (fig 10c).

CONCLUSIONES

En la siguiente tabla se resumen los resultados de los tres casos, indicados como porcentajes del segundo caso.

Concepto	Caso 1	Caso 2	Caso 3
V	64.4%	100%	95.0%
M	95.2%	100%	0 %
M_b	73.8%	100%	66.7%

Los resultados de la tabla anterior dan una idea clara de la importancia que tiene el considerar la inercia rotacional de la cubierta y la interacción suelo-estructura. La importancia del primer concepto aumentará conforme mayor sea el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto al eje z. El último concepto es tanto más importante cuanto más blando sea el suelo de cimentación. En particular puede observarse que en el tipo de solución 3 no se obtiene momento flexionante a la altura de C.G. Esto puede traer consigo serios errores en la cuantía del acero de refuerzo necesario en la unión columna-cubierta que es donde más ductilidad necesita desarrollarse.

AGRADECIMIENTO

El autor manifiesta su agradecimiento a los doctores E. Rosenblueth y J. A. Nieto, así como al Ing. E. del Valle por sus valiosos comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

1. McLean, R. S., "Inverted pendulum structures", technical report of Consulting Civil and Structural Engineers, Fullerton, Cal. (ene. 1965).
2. Barkan, D. D., "Dynamics of bases and foundations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1962).
3. Jacobsen, L. S., y Ayre, R. S., "Engineering vibrations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1958).
4. Newmark, N. M., "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads", Transactions ASCE, Vol. 108 (1943), pp. 1161-1234.
5. Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Proyecto de reglamento de las construcciones en el Distrito Federal. "Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios", Ediciones Ingeniería, México (1962).
6. Marsal, R., y Mazari, M., "El subsuelo de la Ciudad de México", Publicación del Instituto de Ingeniería, UNAM (1962).
7. Newmark, N. M., y Rosenblueth, E., "Earthquake Engineering", será publicado por Prentice-Hall, Inc.
8. Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, Cal. (1956), paper 8.

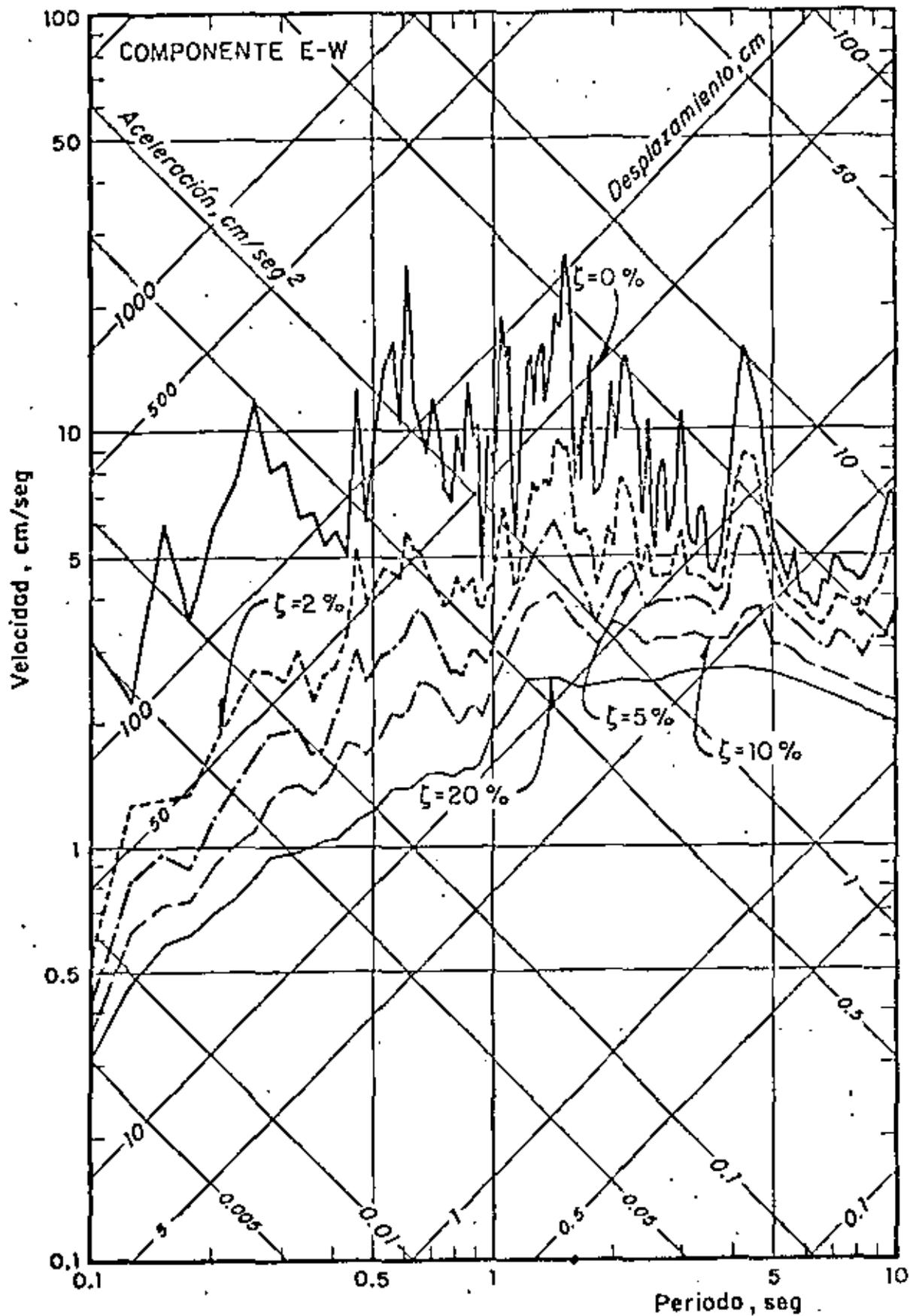


Fig 116 .Espectros de respuesta. Ciudad Universitaria,
6 de julio de 1964

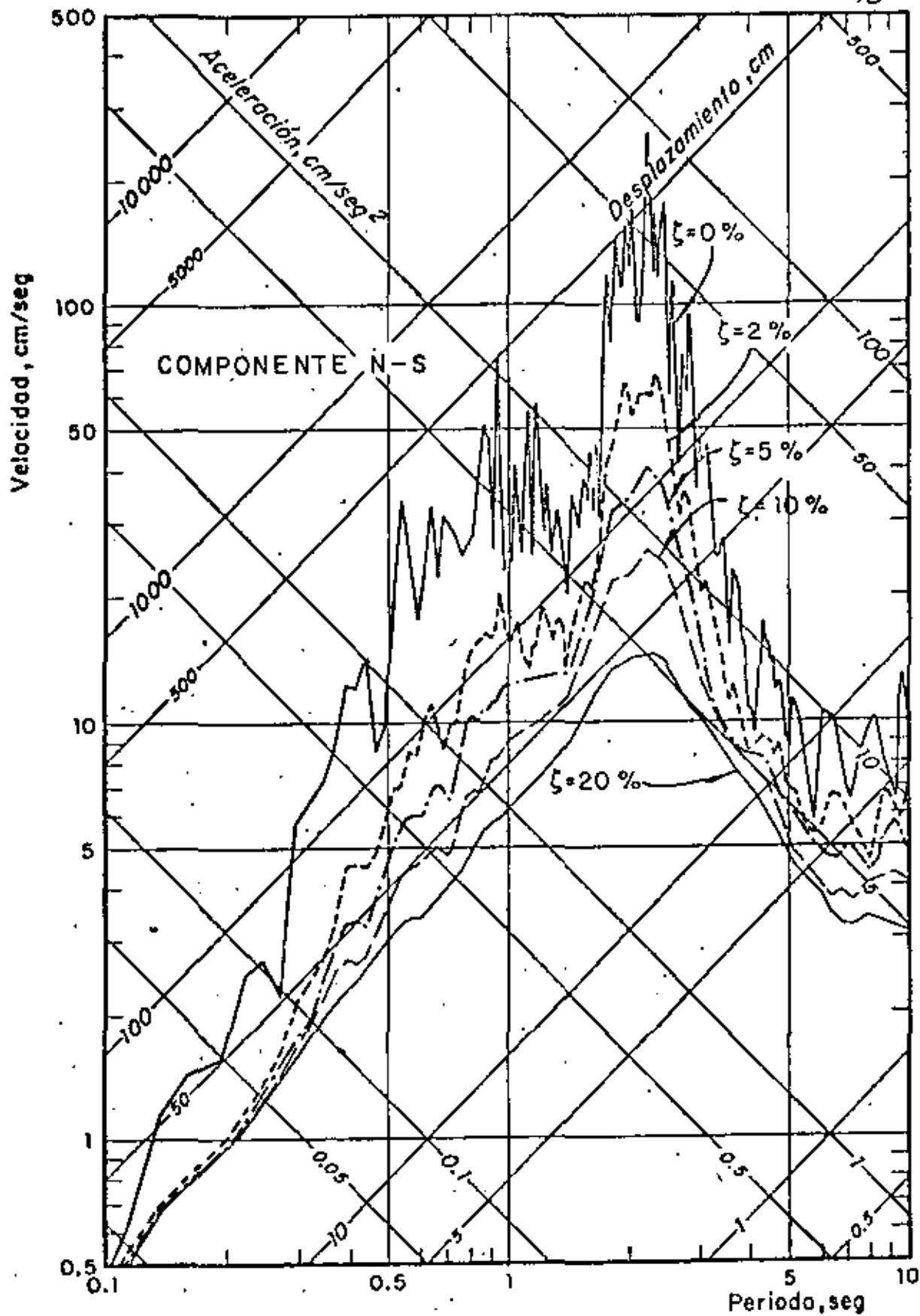


Fig 89 Espectros de respuesta. Edificio Manuel González, 6 de julio de 1964

COMPONENTE E-W

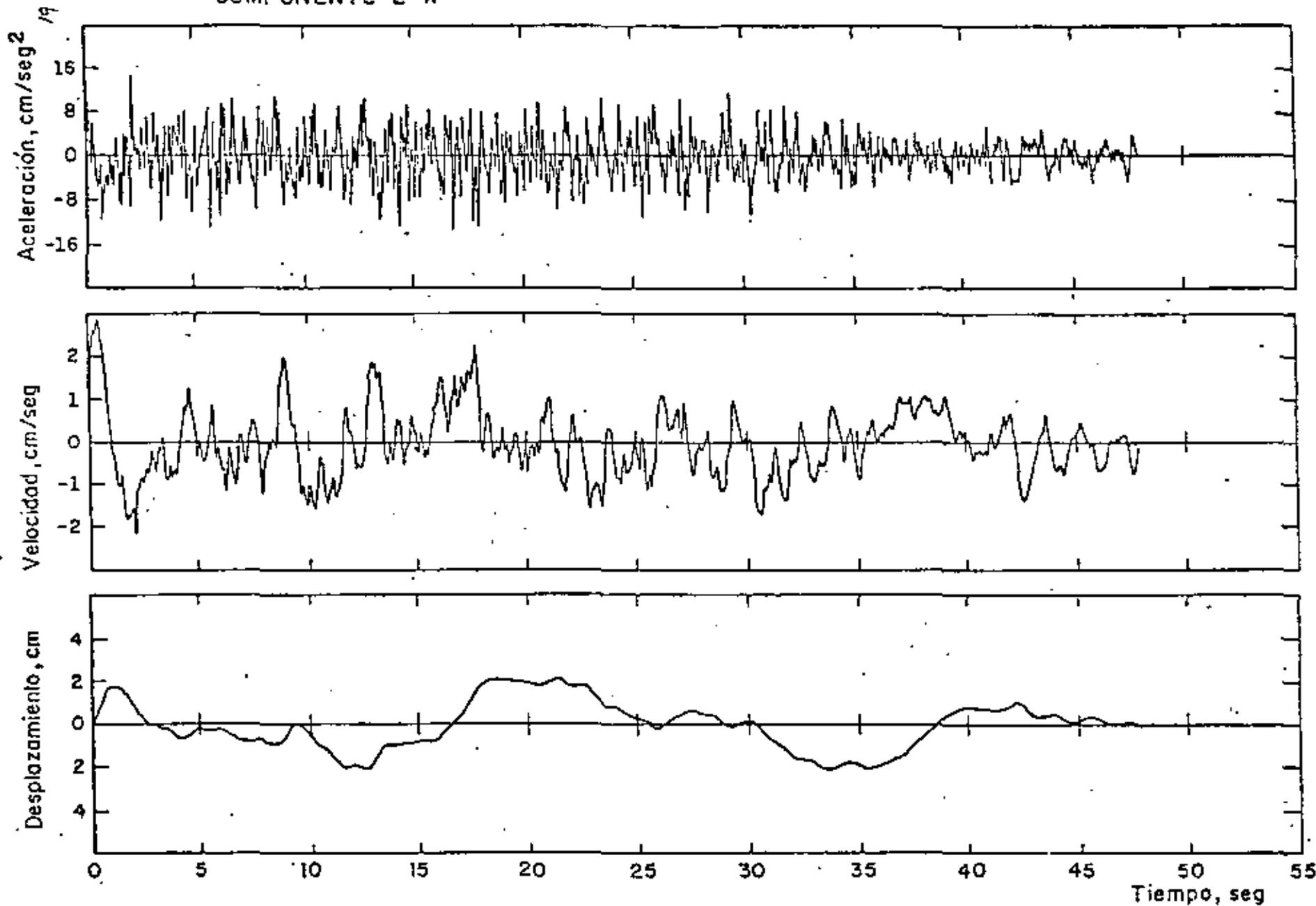


Fig 42 Movimiento del terreno. Ciudad Universitaria, 6 de julio de 1964

COMPONENTE N-S

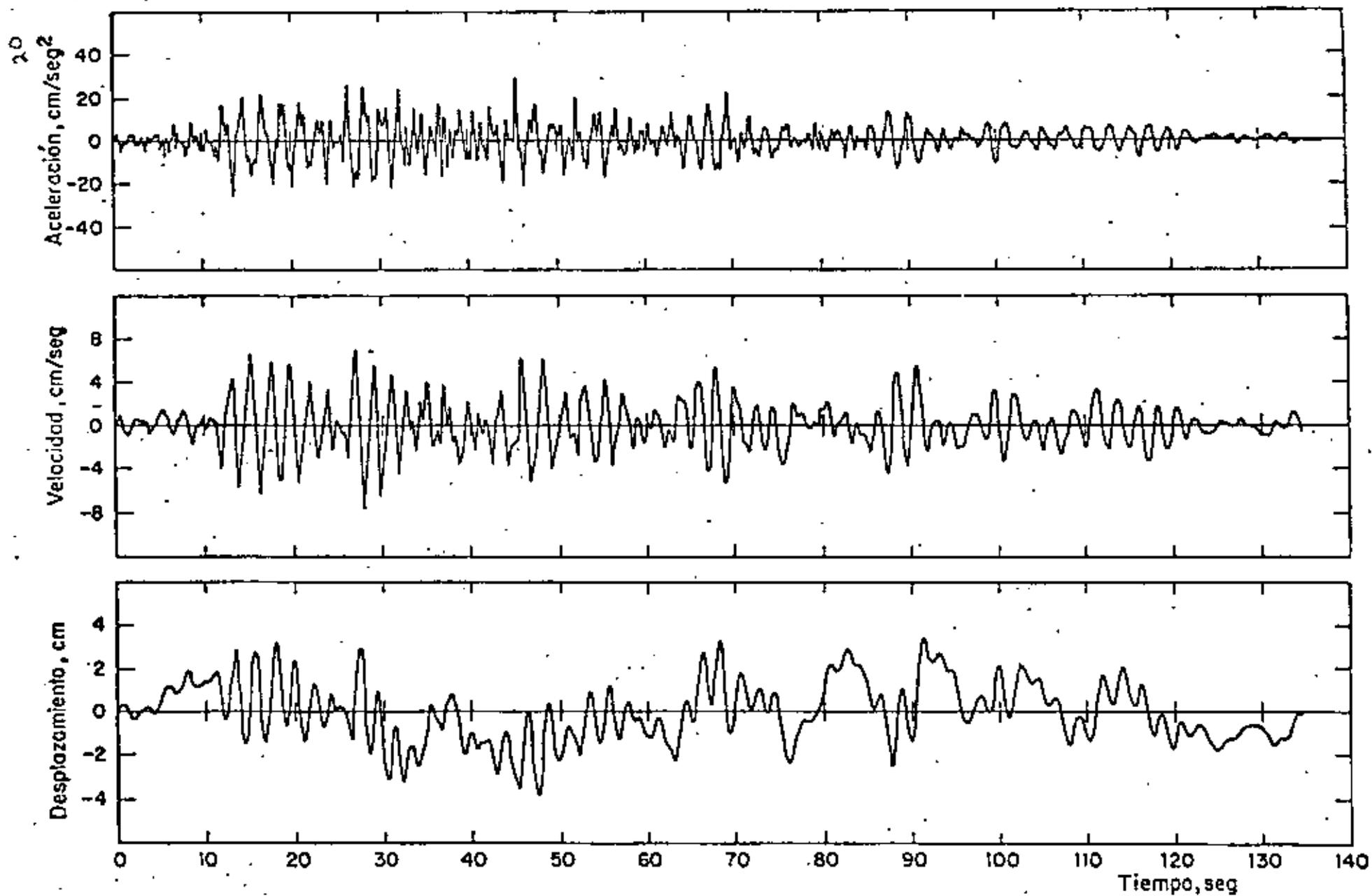


Fig 16 Movimiento del terreno. Edificio Manuel González, 6 de julio de 1964



ximación a un bajo costo.

Es necesario hacer notar que entre mas pequeño se elija el tamaño del paso de integración (Δt) mejor será la aproximación; sin embargo, el costo del tiempo de computación resulta mayor, ya que éste es directamente proporcional al número de pasos de integración. Entonces, la eficiencia de un método depende de la elección apropiada del paso de integración, Δt , para el cual el método converge a la solución.

La convergencia de un método se puede probar al satisfacer las condiciones de consistencia y estabilidad. Además se ha observado que cuando el tamaño del paso es grande, comparado con el período más corto del sistema, la solución aproximada, no obstante satisfacer el criterio de estabilidad, presenta errores significativos en las amplitudes correspondientes a los primeros pasos de integración. Este fenómeno se conoce con el nombre de excedencia y debe investigarse que no se presente en el método seleccionado.

En el método de superposición modal se transforma el sistema de n ecuaciones diferenciales acopladas (ec 2.3.48) en n ecuaciones de un grado de libertad, desacopladas (n es el número de grados de libertad de las ec 2.3.48). La transformación que se emplea para desacoplar las ecuaciones se determina al resolver el correspondiente problema de vibración libre de la ec 2.3.48 (cuando $\underline{C} = \underline{0}$ y $\underline{P} = \underline{0}$), que conduce a un problema de valores característicos. En el espacio transformado (denominado natural) se integran por separado las ecuaciones desacopladas, cuya solución se transforma al espacio original. El método directo que se describe en este resumen, cuyo uso se recomienda, es el método Beta de Newmark, para $\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$. Ya que es incondicionalmente estable, se obtiene buena aproximación y no presenta el fenómeno de excedencia.

El método de superposición modal también se recomienda como método eficiente para obtener la respuesta de sistemas lineales.

4.2.2 Método Beta de Newmark

Al considerar que la variación de la aceleración relativa, asociada a cada grado de libertad, tiene una variación lineal en el intervalo de integración $[t_0, t_1]$, como se indica en la fig. 4.4, se obtienen las expresiones siguientes:

$$\ddot{\underline{U}}_1 = \ddot{\underline{U}}_0 \quad (4.2.1)$$

$$\dot{\underline{U}}_1 = \dot{\underline{U}}_0 + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{\underline{U}}_0 + \ddot{\underline{U}}_1) \quad (4.2.2)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \Delta t \dot{\underline{U}}_0 + \frac{1}{6} \Delta t^2 (2 \ddot{\underline{U}}_0 + \ddot{\underline{U}}_1) \quad (4.2.3)$$

Con base en las ecs 4.2.2 y 4.2.3, Newmark propone la aproximación siguiente:

$$\dot{\underline{U}}_1 = \dot{\underline{U}}_0 + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\underline{U}}_0 + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_1 \quad (4.2.4)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \Delta t \dot{\underline{U}}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_0 + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_1 \quad (4.2.5)$$

El parámetro β está relacionado con la estabilidad del método (para $\beta = 1/4$, es incondicionalmente estable) y el parámetro γ está relacionado con la estabilidad y convergencia del método debido al amortiguamiento matemático que puede inducirse (para $\gamma = 1/2$, no existe amortiguamiento matemático). Para el caso en que $\beta = 1/6$ y $\gamma = 1/2$, las ecs 4.2.4 y 4.2.5 son iguales a las ecs 4.2.2 y 4.2.3, respectivamente.

Al definir los vectores \underline{a} y \underline{b} , como se indica a continuación:

$$\underline{a} = \ddot{\underline{U}}_0 + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\underline{U}}_0 \quad (4.2.6)$$

$$\underline{b} = \underline{U}_0 + \Delta t \dot{\underline{U}}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_0 \quad (4.2.7)$$

las ecs 4.2.4 y 4.2.5 se escriben como sigue:

$$\dot{\underline{U}}_1 = \underline{a} + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_1 \quad (4.2.8)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{b} + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_1 \quad (4.2.9)$$

Al valuar las ecuaciones de movimiento (ec 2.3.48) al final del intervalo ($t = t_1$) y en la ecuación resultante se sustituyen las ecs 4.2.8 y 4.2.9, se obtiene la siguiente expresión:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_1 + \underline{C} (\underline{a} + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_1) + \underline{K} (\underline{b} + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_1) = \underline{P}_1 \quad (4.2.10)$$

que puede escribirse como

$$\underline{K}^* \underline{\ddot{U}} = \underline{F} \quad (4.2.11)$$

donde

$$\underline{K}^* = \underline{M} + \gamma \Delta t \underline{C} + \beta \Delta t^2 \underline{K} \quad (4.2.12)$$

$$\underline{F} = \underline{P}_1 - \underline{C} \underline{a} - \underline{K} \underline{b} \quad (4.2.13)$$

La ecuación que gobierna a la aceleración al final del paso es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, como los descritos en el inciso 4.1. Puesto que las matrices \underline{M} , \underline{C} y \underline{K} son simétricas, \underline{K}^* también lo es. Si el tamaño del (Δt) se conserva constante durante el proceso de integración y puesto que las matrices \underline{M} , \underline{C} y \underline{K} son constantes, \underline{K}^* también resulta constante.

Al sustituir la ec 2.3.49 en las ecs 4.2.12 y 4.2.13 se obtienen las expresiones siguientes:

$$\underline{K}^* = (1 + \gamma \Delta t \alpha) \underline{M} + (\gamma \Delta t \mu + \beta \Delta t^2) \underline{K} \quad (4.2.14)$$

$$\underline{F} = \underline{P}_1 - \alpha \underline{M} \underline{a} - \underline{K} (\mu \underline{a} + \underline{b}) \quad (4.2.15)$$

La forma sistemática para utilizar el método de Newmark se muestra en la tabla 4.2.

4.3 Esquema simple para organizar un programa de computadora

En la fig. 4.2 se muestra, en forma esquemática, los aspectos mas relevantes para construir un programa de computadora simple, basado en el método del elemento finito, para cargas estáticas.

Una secuencia a seguir para construir el programa de computadora puede ser la siguiente:

- a) Se define el modelo matemático que se va a resolver. Para ello se procede como se bosqueja en el capítulo 1.
- b) Se especifica la forma de como manipular los parámetros que definen a los materiales con que se va a construir la estructura. De acuerdo con las ecuaciones constitutivas del capítulo 1, son: E , ν y ρ . Esto se define en el bloque indicado con MATERIALES.
- c) Se establece como definir la geometría de la estructura por resolver. Queda definida al conocer las coordenadas de los puntos

nodales en que se idealiza la estructura, según el capítulo 2. Esto se realiza en el bloque llamado COORDENADAS.

- d) Se especifica la información necesaria para establecer las ecuaciones de equilibrio de cada uno de los elementos de la estructura (por ejemplo: puntos nodales, material, geometría, funciones de interpolación, etc). Con tal información se puede construir la matriz de rigideces de cada elemento, según se indica en los capítulos 2 y 3. También se puede establecer el ensamble de la matriz de rigideces, como se especifica en el capítulo 2. Todo lo anterior se realiza en el bloque indicado por ELEMENTOS.
- e) Se indica la forma de introducir las condiciones de frontera en la matriz de rigideces (capítulo 2) y se lleva a cabo la triangulación (cap. 4). Esta actividad queda indicada en el bloque denominado FRONTERA.
- f) Se sistematiza la forma de cuantificar el vector de cargas con opción a varias condiciones de cargas. Las fuerzas debidas a esfuerzos y deformaciones iniciales, peso propio, y cargas de superficie en los elementos finitos (capítulos 2 y 3) es conveniente cuantificarlos en el bloque ELEMENTOS. En el bloque CARGAS se especifican las cargas concentradas que actúan en los puntos nodales y se llevan a cabo las operaciones indicadas, de acuerdo con los capítulos 2 y 4.

Es muy recomendable que los bloques mostrados funciones como sub-rutinas controladas por un programa principal que permita el dimensionamiento eficiente de los arreglos que se utilicen en las sub-rutinas.

Desde luego que el esquema simplista de la fig.4, puede tener muchas variantes que dependerán de la experiencia numérica de quienes las elaboren.

5. BIBLIOGRAFIA

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aero. Sce., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823
2. CLOUGH, R. W., "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378
3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967
4. ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971
5. SMITH, G. N., An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering, Applied Science, London, 1971
6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostran and Reinhold, New York, 1972
7. ODEN, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York, 1972
8. URAL, O., Finite Element Method, Intext Educational Publishers, New York, 1973
9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973
10. STRANG, G. and FIX, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, N. J., 1973
11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., Fundamentals of Finite Element Technique, Butterworths, London, 1973
12. NORRIS, D. H. and de VRIES, G., The Finite Element Method-Fundamentals and Applications, Academic Press, New York, 1973
13. COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974
14. WACHPRESS, E. L., A Rational Finite Element Basis, Academic Press, New York, 1975
15. FENNER, R. T., Finite Element Method for Engineers, MacMillan Press, London, 1975
16. GALLAGHER, R. H., Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, N. J., 1975

17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers, John Wiley, New York, 1975
18. ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975
19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976
20. ODEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976
21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976
22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976
23. TONG, P., and ROSSETTOS, J. N., "Finite Element Method. Basic Technique and Implementation", The MIT Press, 1977
24. ZIENKIEWICZ, O. C., "The Finite Element Method", Third Edition, McGraw-Hill, 1977
25. DESAI, C. S., and CHRISTIAN, J. T. (Eds), "Numerical Methods in Geotechnical Engineering", McGraw-Hill, 1977
26. CHUNG, T. J., "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics", McGraw-Hill, 1978
27. International Journal for NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS IN GEOMECHANICS, John Wiley.
28. International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley.

TABLA 3.1

Abcisas y coeficientes de peso para la cuadratura de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(\sigma_j)$$

$\pm \sigma_j$	H_j
$n = 2$	
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
$n = 3$	
0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
$n = 4$	
0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
$n = 5$	
0.90617 95459 38664	0.23692 68850 56189
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
0.00000 00000 00000	0.56588 88888 88889
$n = 6$	
0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691
$n = 7$	
0.94910 79123 42759	0.12948 49661 68870
0.74153 11855 99394	0.27970 53914 89277
0.40584 51533 77397	0.38183 00505 05119
0.00000 00000 00000	0.41795 91636 73469
$n = 8$	
0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376
0.79666 64774 13627	0.22238 10344 53374
0.52553 24099 16329	0.31370 66458 77887
0.18343 46424 95650	0.36268 37833 78362
$n = 9$	
0.96816 02395 07626	0.08127 43883 61574
0.83603 11073 26636	0.18064 81606 94857
0.61337 14327 00590	0.26061 06964 02935
0.32425 34234 03509	0.31234 70770 40603
0.00000 00000 00000	0.33023 93550 01260
$n = 10$	
0.97390 65285 17172	0.06667 13443 08688
0.86506 33666 88985	0.14945 13491 50381
0.67940 95682 99024	0.21908 63625 15982
0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996
0.14887 43389 51631	0.29552 42247 14753

Tabla 3.2. Fórmulas para integración numérica de tetraedros

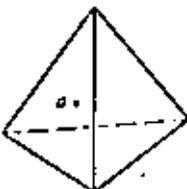
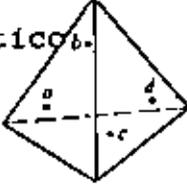
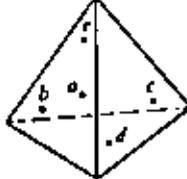
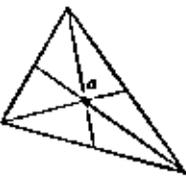
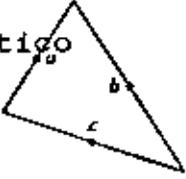
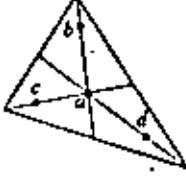
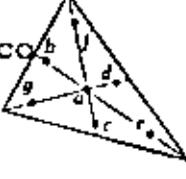
No	Orden	Fig	Error	Pto.	Coord.	W_i^V /Volumen
1	Lineal		$R = O(h^1)$	a	1, 1, 1, 1	1
2	Cuadrático		$R = O(h^2)$	a, b, c, d	$\alpha, \beta, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \beta, \alpha, \beta$ $\beta, \beta, \beta, \alpha$ $\alpha = 0.58541020$ $\beta = 0.13819660$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
3	Cúbico		$R = O(h^3)$	a, b, c, d, e	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{20}$

Tabla 3.3 Fórmulas para integración numérica de triángulos

Orden	Fig	Error	Pto.	Coord.	W_i^A /Area
Lineal		$R = O(h^1)$	a	1, 1, 1	1
Cuadrático		$R = O(h^2)$	a, b, c	$1, 1, 0$ $0, 1, 1$ $1, 0, 1$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Cúbico		$R = O(h^3)$	a, b, c, d	$1, 1, 1$ $0.6, 0.2, 0.2$ $0.2, 0.6, 0.2$ $0.2, 0.2, 0.6$	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$
Quintico		$R = O(h^5)$	a, b, c, d, e, f, g	$1, 1, 1$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	$0.22500, 0.00000$ $0.13339, 41527$ $0.12543, 91803$

with
 $\alpha_1 = 0.059715x717$
 $\beta_1 = 0.4701420641$
 $\alpha_2 = 0.7974269853$
 $\beta_2 = 0.1012x65073$

TABLA 4.1 Subrutinas para la triangulación y sustitución del método de Gauss-Crout para matrices cuadradas

```

SUBROUTINE TGCCC3(A,N)
DIMENSION A(N,N)
C REDUCCION TOTAL DE A POR GAUSS-CROUT V2-SE
IF(N.EQ.1) RETURN
A(1,2)=A(1,2)/A(1,1)
A(2,2)=A(2,2)-A(1,2)*A(1,2)/A(1,1)
IF(N.EQ.2) RETURN
C DO 600 J=3,N
IS=J-1
C PPIMER PASO
DO 300 I=2,IS
XX=0.
KS=I-1
C DO 200 K=1,KS
200 XX=XX+A(K,I)*A(K,J)
CONTINUE
C A(I,J)=A(I,J)-XX
300 CONTINUE
SEGUNDO PASO
C XX=0.
DO 400 I=1,IS
YY=A(I,J)/A(I,I)
XX=XX+YY*A(I,J)
400 A(I,_) = YY
CONTINUE
A(J,J)=A(J,J)-XX
500 CONTINUE
RETURN
END

```

a) Triangulación

```

SUBROUTINE SGCCC3(A,X,N)
DIMENSION A(N,N),X(N)
C REDUCCION Y SUSTITUCION TOTAL POR GAUSS-CROUT
REDUCCION
IF(N.EQ.1) RETURN
DO 300 I=2,N
KS=I-1
XX=0.
C DO 200 K=1,KS
200 XX=XX+A(K,I)*X(K)
CONTINUE
C X(I)=X(I)-XX
300 CONTINUE
DO 340 I=1,N
340 X(I)=X(I)/A(I,I)
SUSTITUCION
C NP=N+1
IF(I.EQ.1) RETURN
NX=N-1
DO 500 M=1,NX
I=NP-M
KS=I-1
C DO 400 K=1,KS
400 X(K)=X(K)-A(K,I)*X(I)
CONTINUE
500 CONTINUE
RETURN
END

```

b) Sustitución

TABLA 4.2 Algoritmo del método Beta de Newmark, para sistemas lineales de varios grados de libertad

a) Calcular las siguientes constantes:

$$a_0 = \gamma \Delta t$$

$$a_1 = \Delta t - a_0$$

$$a_2 = \beta \Delta t$$

$$a_3 = a_2 \Delta t$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \Delta t^2 - a_3$$

$$a_5 = 1 + a_0 \alpha$$

$$a_6 = a_0 + \mu + a_3$$

b) Construir la matriz \underline{K}^*

$$\underline{K}^* = a_5 \underline{M} + a_6 \underline{K}$$

c) Triangularizar \underline{K}^*

Para cada paso de integración:

d) Construir los vectores \underline{a} , \underline{b} y $\underline{\Gamma}$.

$$\underline{a} = \dot{\underline{U}}_0 + a_1 \ddot{\underline{U}}_0$$

$$\underline{b} = \underline{U}_0 + \Delta t \dot{\underline{U}}_0 + a_4 \ddot{\underline{U}}_0$$

$$\underline{\Gamma} = \underline{P}_1 - \alpha \underline{M} \underline{a} - \underline{K} [\mu \underline{a} + \underline{b}]$$

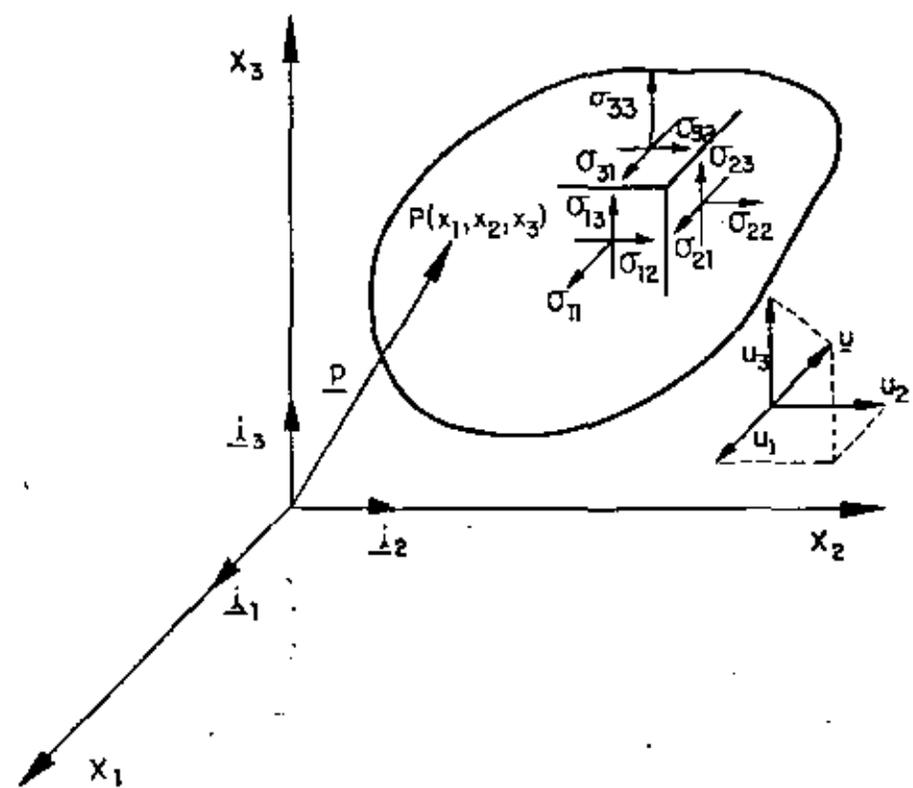
e) Calcular $\ddot{\underline{U}}_1$ mediante la sustitución hacia adelante y hacia atrás en el sistema de ecuaciones

$$\underline{K}^* \ddot{\underline{U}}_1 = \underline{\Gamma}$$

f) Calcular los vectores

$$\dot{\underline{U}}_1 = \underline{a} + a_0 \ddot{\underline{U}}_1$$

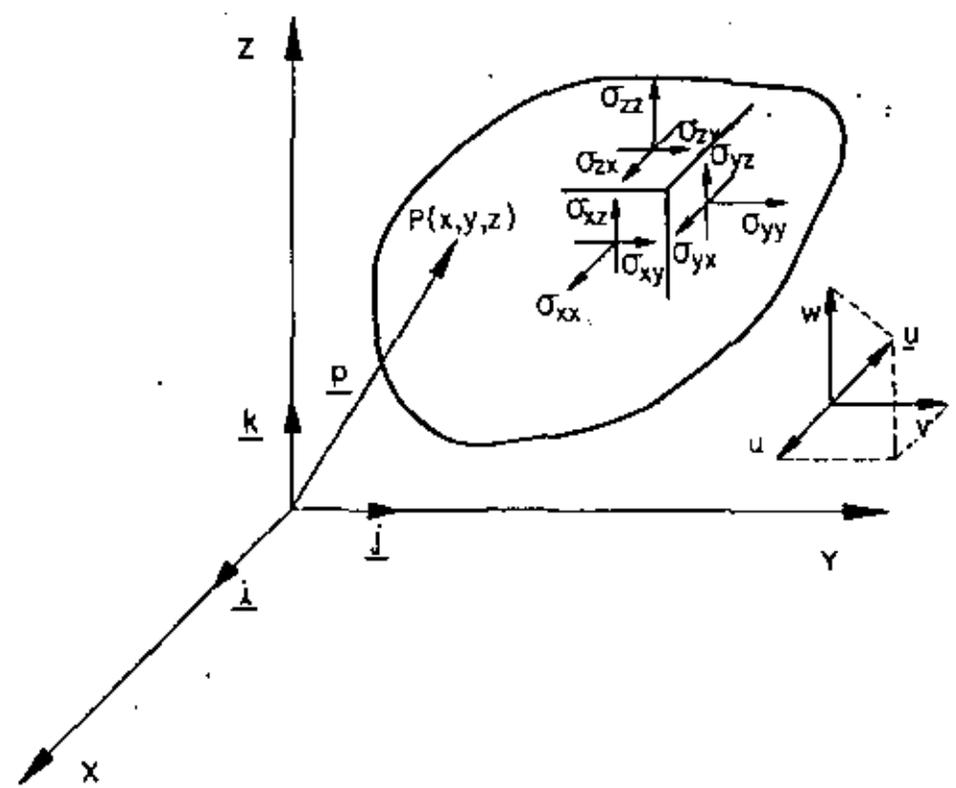
$$\underline{U}_1 = \underline{b} + a_3 \ddot{\underline{U}}_1$$



$$\underline{p} = X_k \underline{i}_k = X_1 \underline{i}_1 + X_2 \underline{i}_2 + X_3 \underline{i}_3$$

$$\underline{u} = u_k \underline{i}_k = u_1 \underline{i}_1 + u_2 \underline{i}_2 + u_3 \underline{i}_3$$

a) Notación indicial

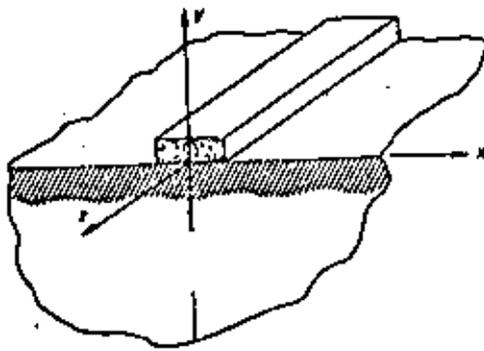


$$\underline{p} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$$

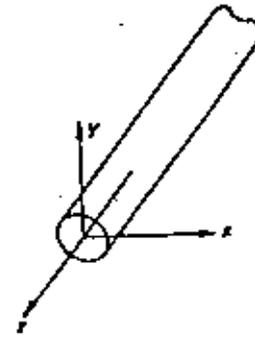
$$\underline{u} = u \underline{i} + v \underline{j} + w \underline{k}$$

b) Notación tradicional (sin índice)

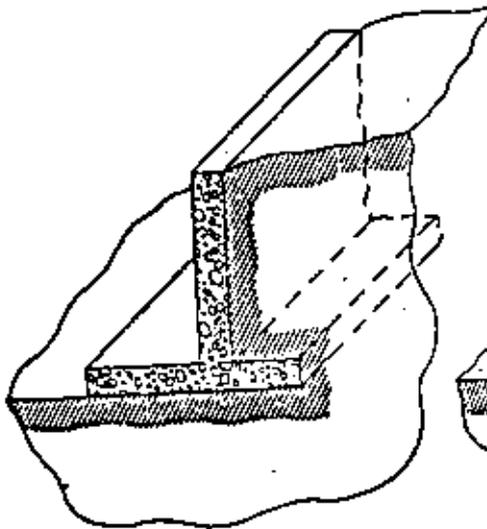
Fig 1.1 Sistemas de referencia cartesiano



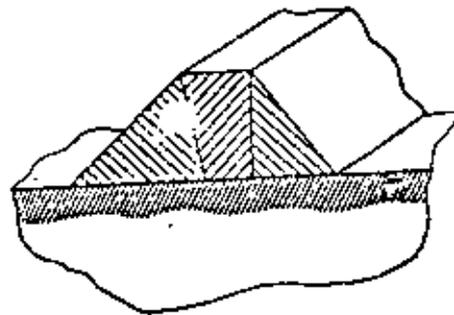
Zapata corrida



Cilindro alargado



Muro de retención



Presa de tierra

Fig 1.2 Ejemplos de problemas de estados planos de deformación

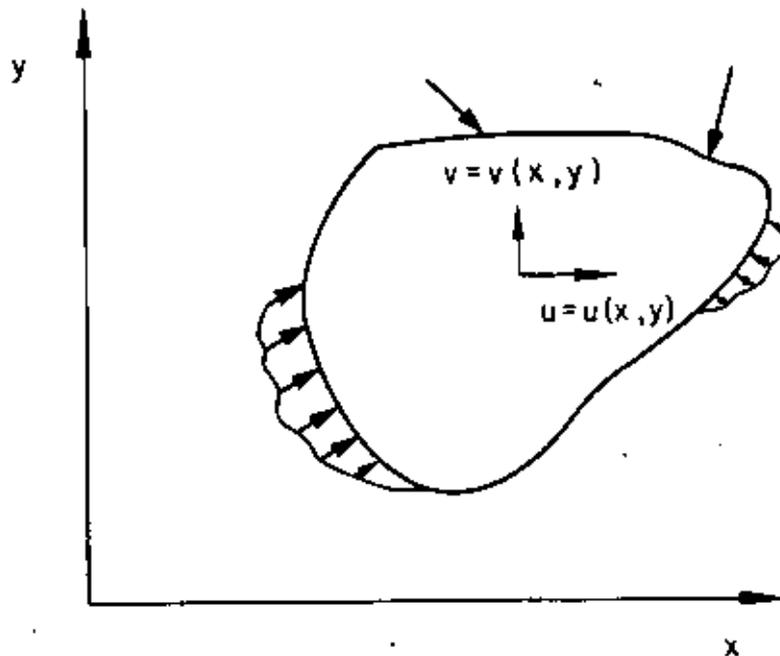


Fig 1.3 Región para los estados planos

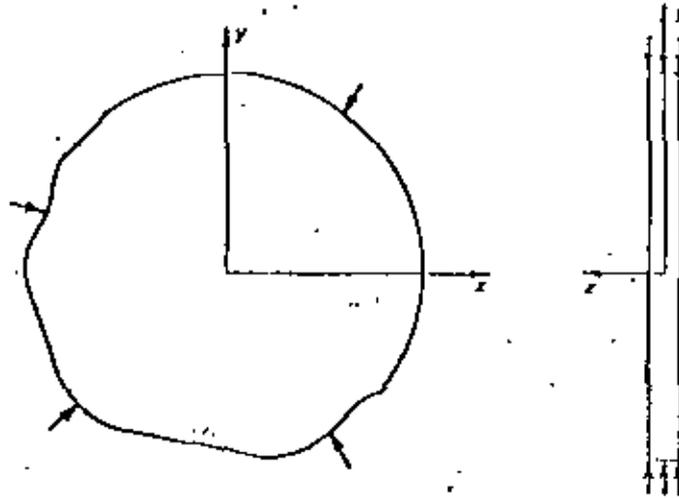


Fig. 1.4 Estado plano de esfuerzos. Placa delgada con cargas en su plano

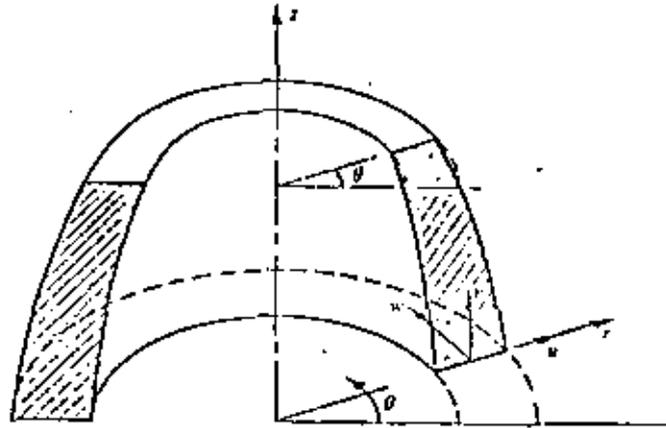


Fig 1.5 Sistema de coordenadas cilíndricas para sólidos axisimétricos.

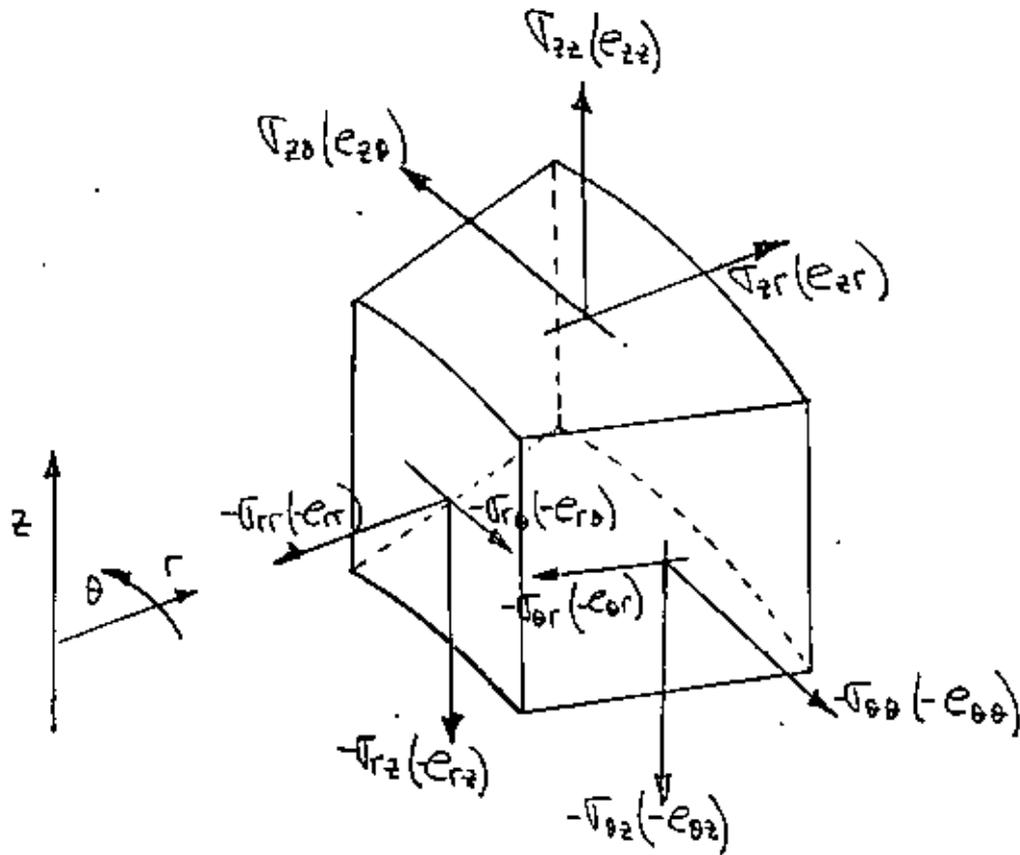


Fig 1.6 Componentes de los tensores de esfuerzo y de deformación en la referencia cilíndrica.

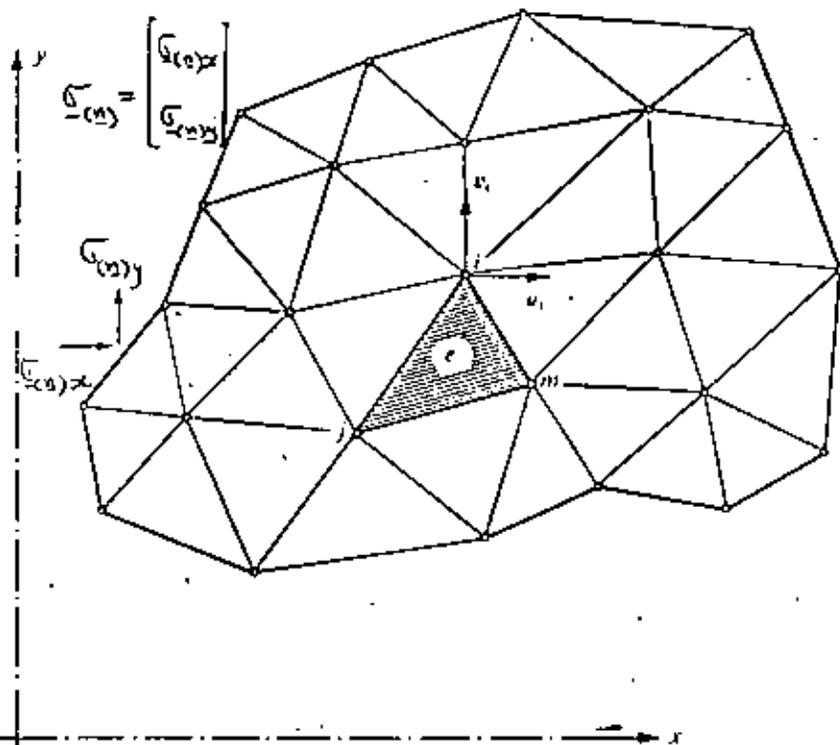


Fig. 2.1 Idealización de una región bidimensional, (estado plano de esfuerzos) mediante elementos finitos

No. de elementos finitos = 33
 No. de puntos nodales = 25

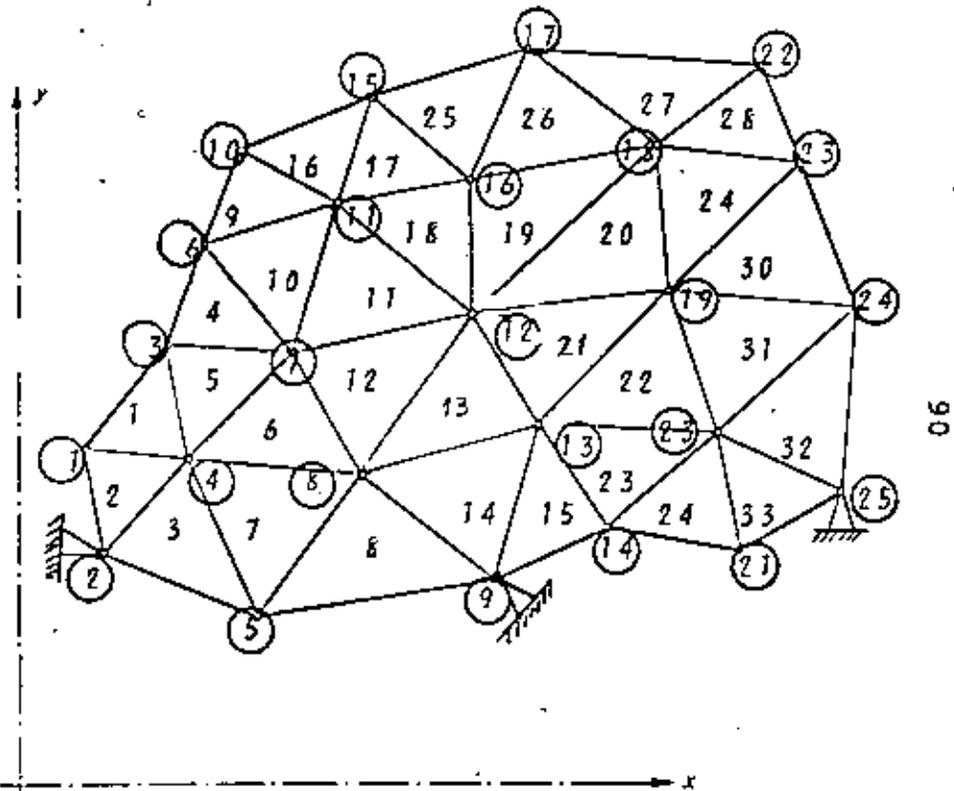


Fig. 2.2 Elementos finitos para establecer el equilibrio global de la estructura.

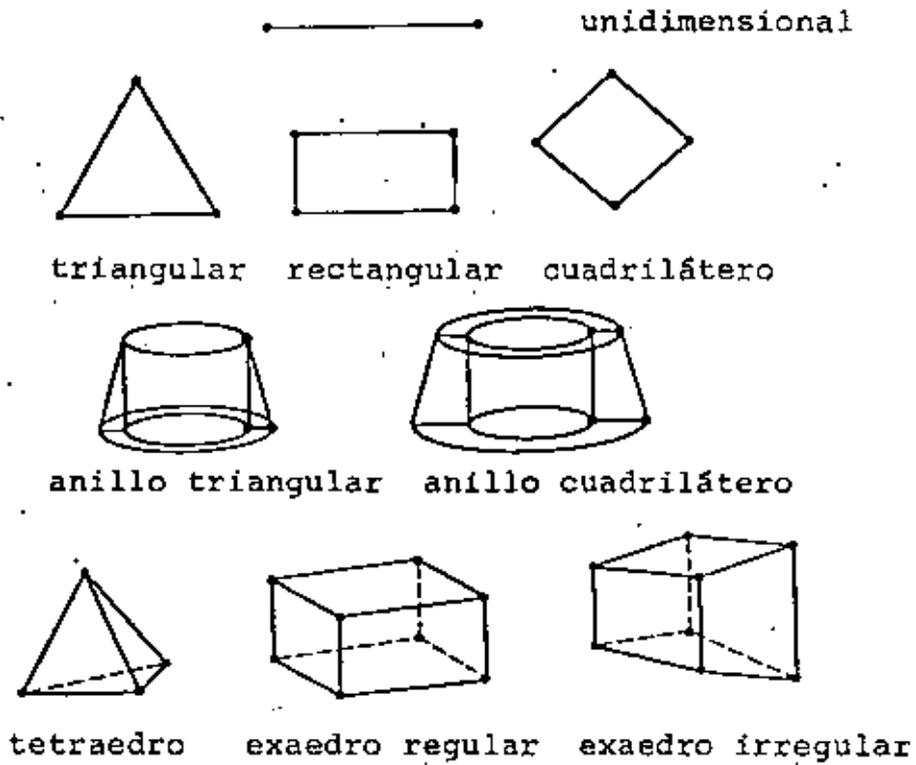


Fig 3.1 Elementos finitos de varias formas

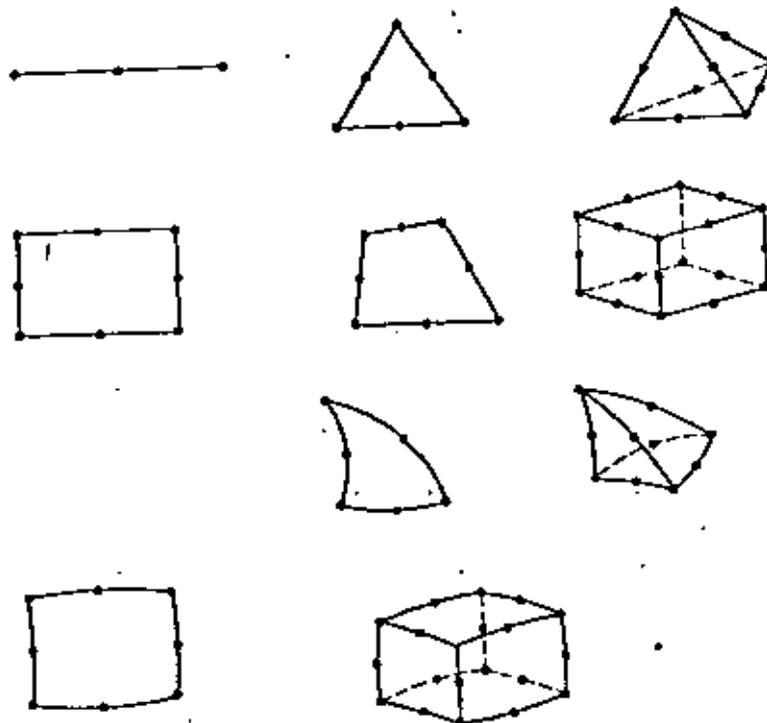


Fig 3.2 Elementos cuadráticos

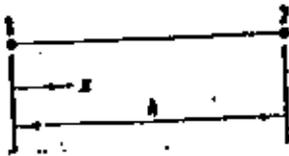


Fig 3.3. Elemento unidimensional, (variación lineal), con origen en un extremo

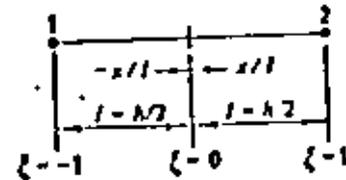


Fig 3.4. Elemento unidimensional, (variación lineal), con origen en el centro

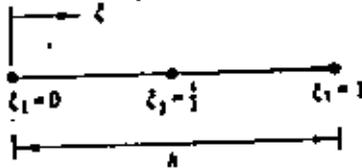


Fig 3.5 Elemento unidimensional, (variación cuadrática), con origen en un extremo

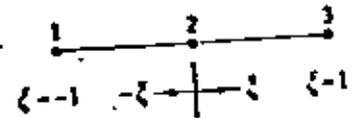


Fig 3.6 Elemento unidimensional, (variación cuadrática), con origen en el centro

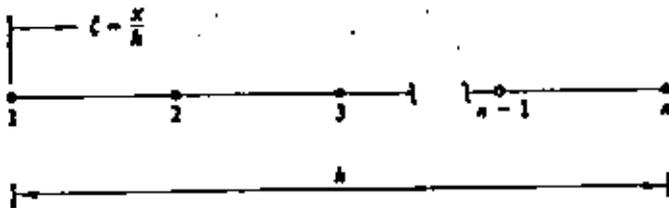
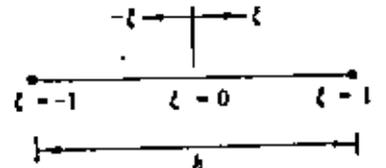
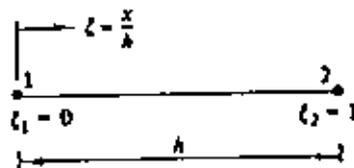
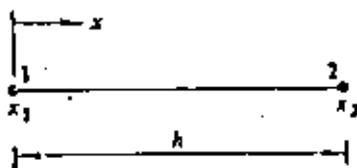
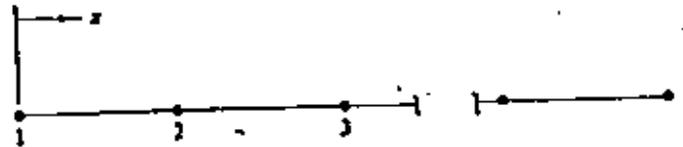
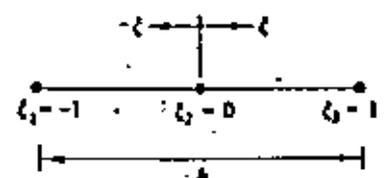
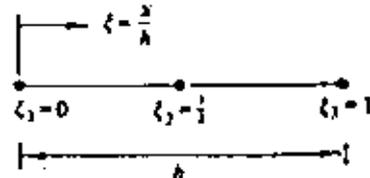
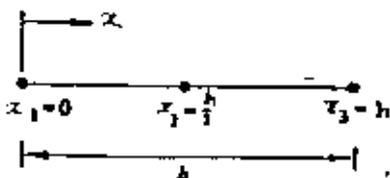


Fig 3.7 Coordenadas en un elemento en el que se utiliza interpolación lineal



a) variable no normalizada (origen en un extremo) b) variable normalizada (origen en un extremo) c) variable normalizada (origen en el centro)

Fig 3.8 Aproximación lineal, en un elemento lagrangiano



a) variable no normalizada (origen en un extremo) b) variable normalizada (origen en un extremo) c) variable normalizada (origen en el centro)

Fig 3.9 Aproximación cuadrática en un elemento lagrangiano

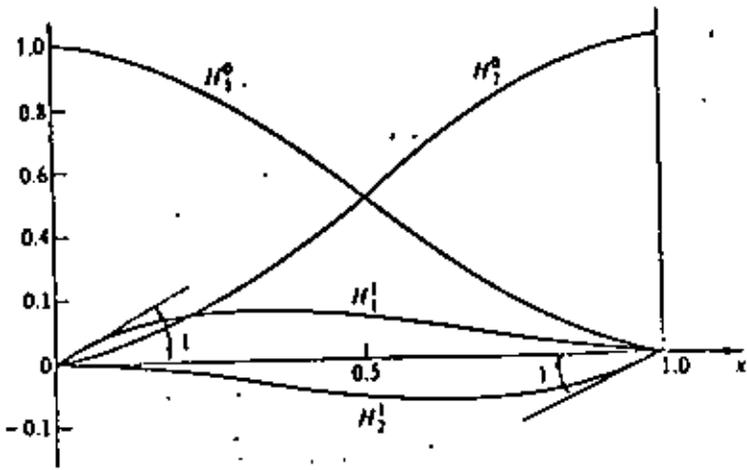


Fig 3.10 Funciones de interpolación de Hermite

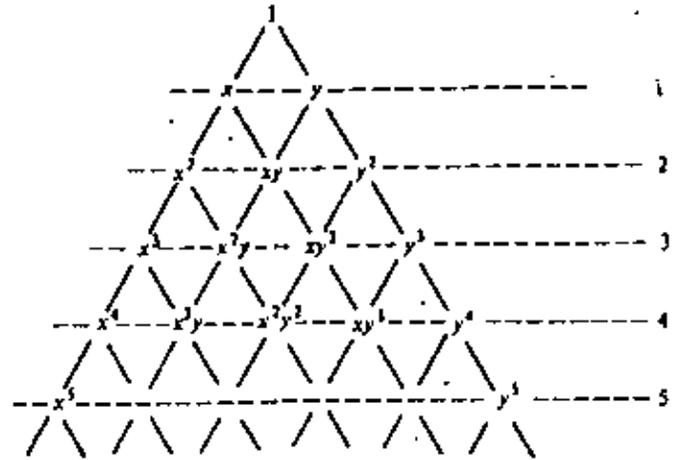


Fig 3.11 Triángulo de Pascal

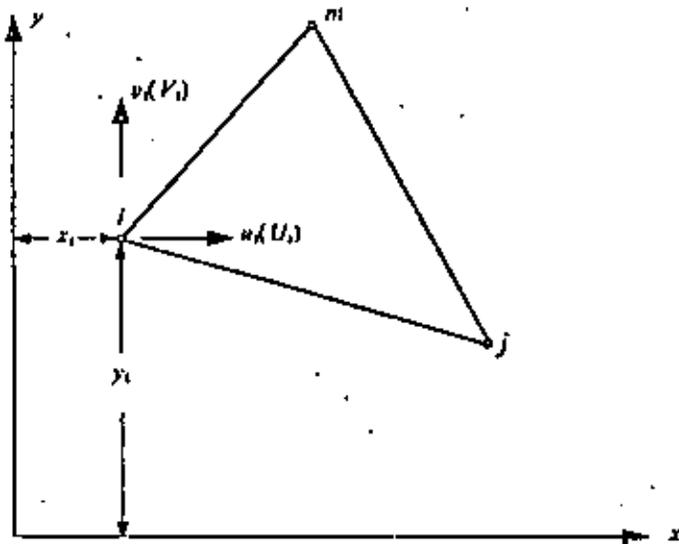


Fig 3.12 Elemento triangular lineal

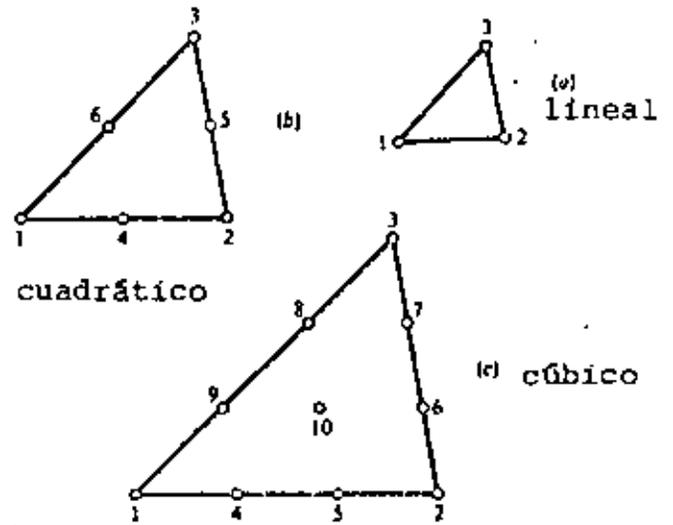


Fig 3.13 Familia de elementos triangulares

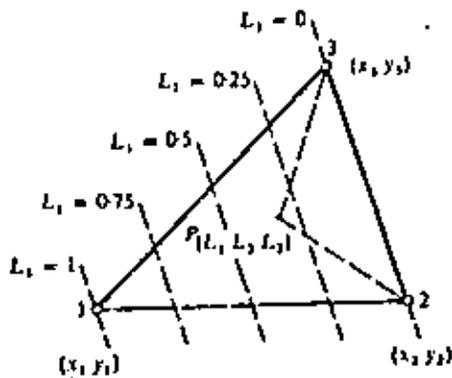


Fig 3.14 Coordenadas de área

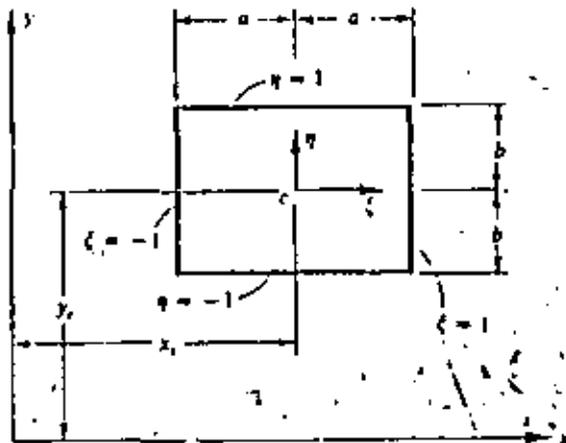


Fig 3.16 Coordenadas normalizadas para un rectángulo

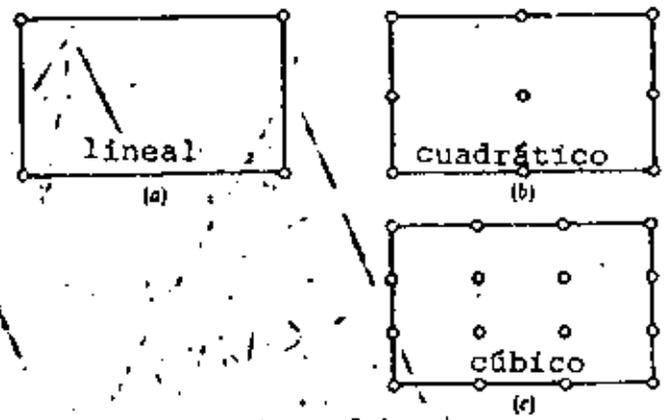


Fig 3.17 Familia Lagrangiana de rectángulos

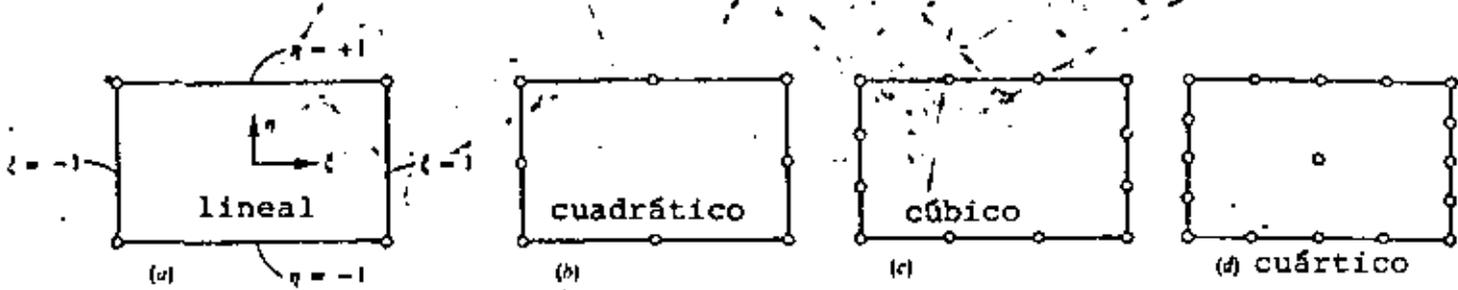


Fig 3.18 Familia Serendipity de rectángulos

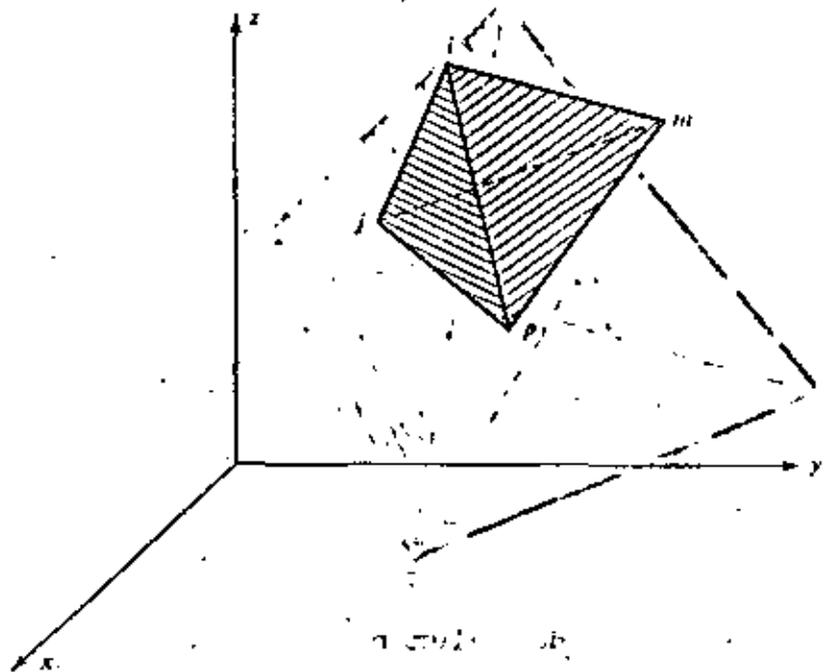
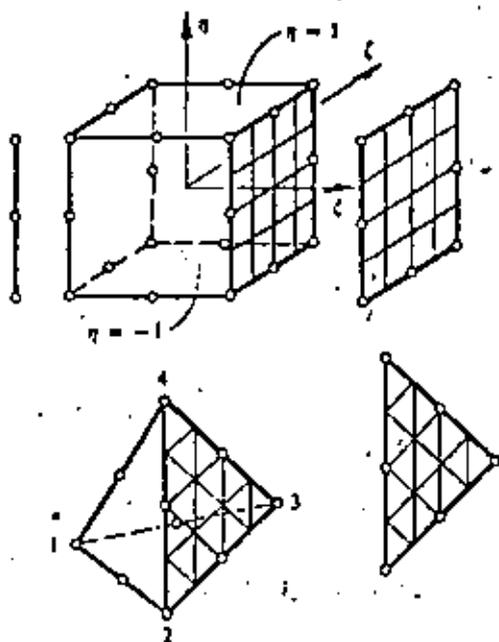
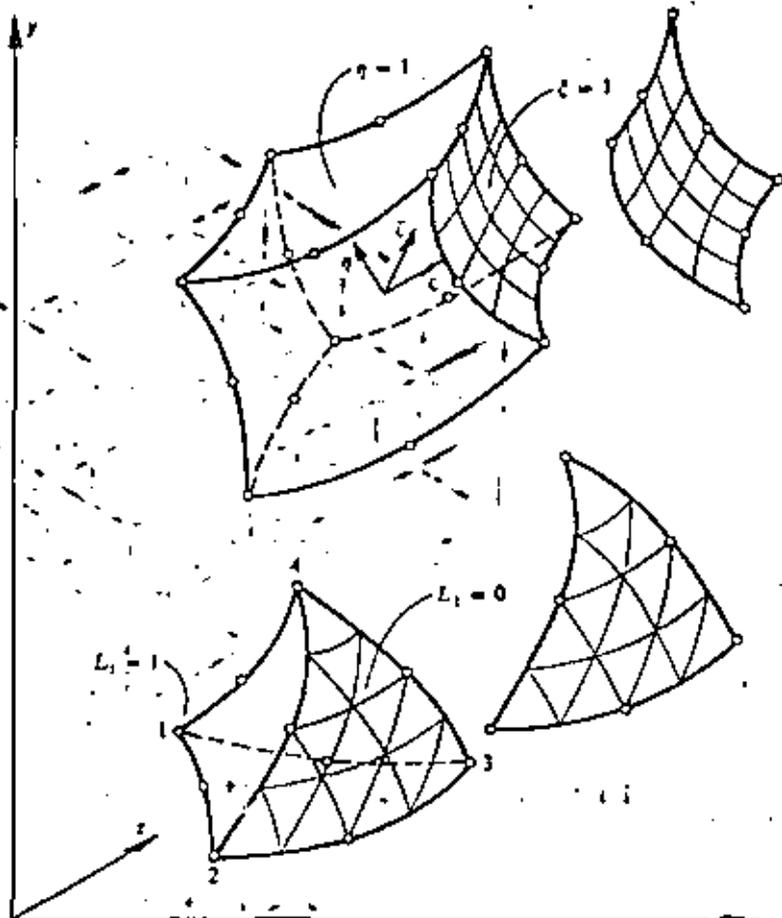


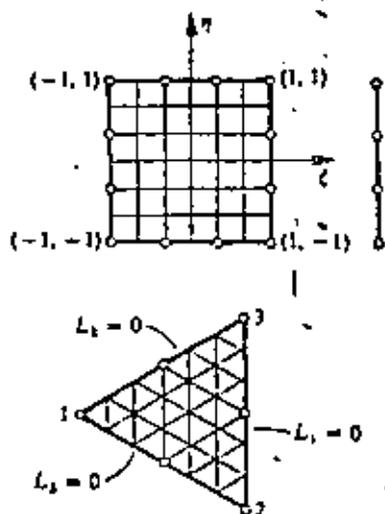
Fig 3.19 Elemento tetraedro lineal



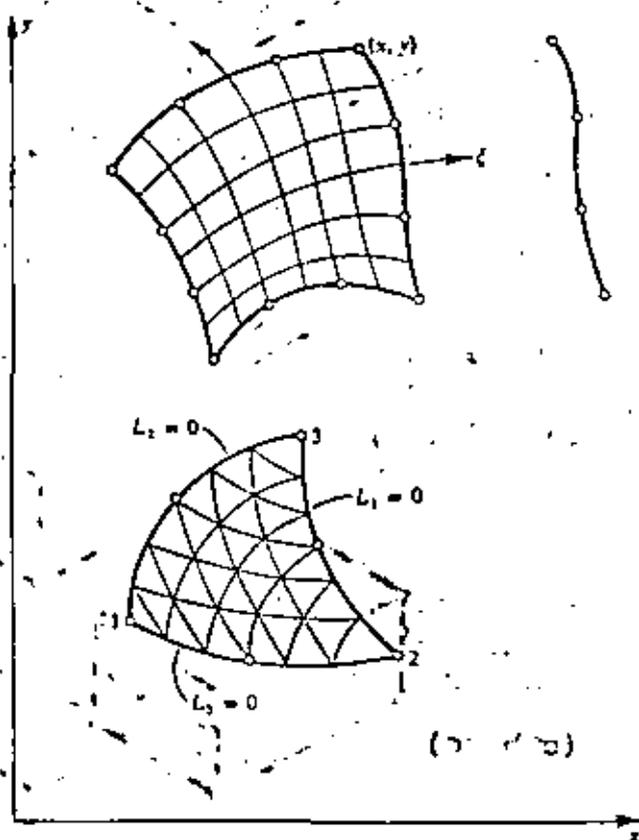
Coordenadas locales



Coordenadas cartesianas

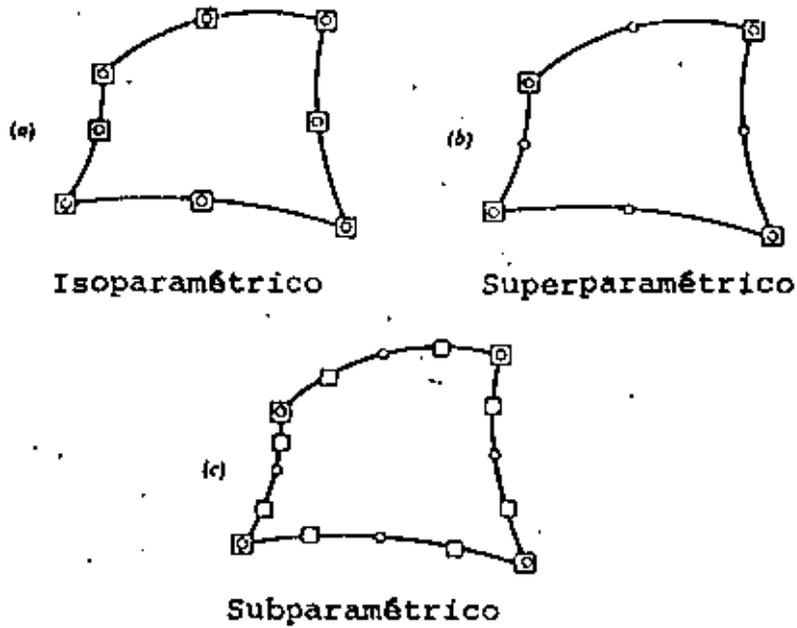


coordenadas locales



coordenadas cartesianas

Fig 3.24 Mapeos de elementos bidimensionales y tridimensionales



Punto donde se define la coordenada

Punto donde se define la función

Fig. 3.25 Transformación de coordenadas mediante funciones de forma

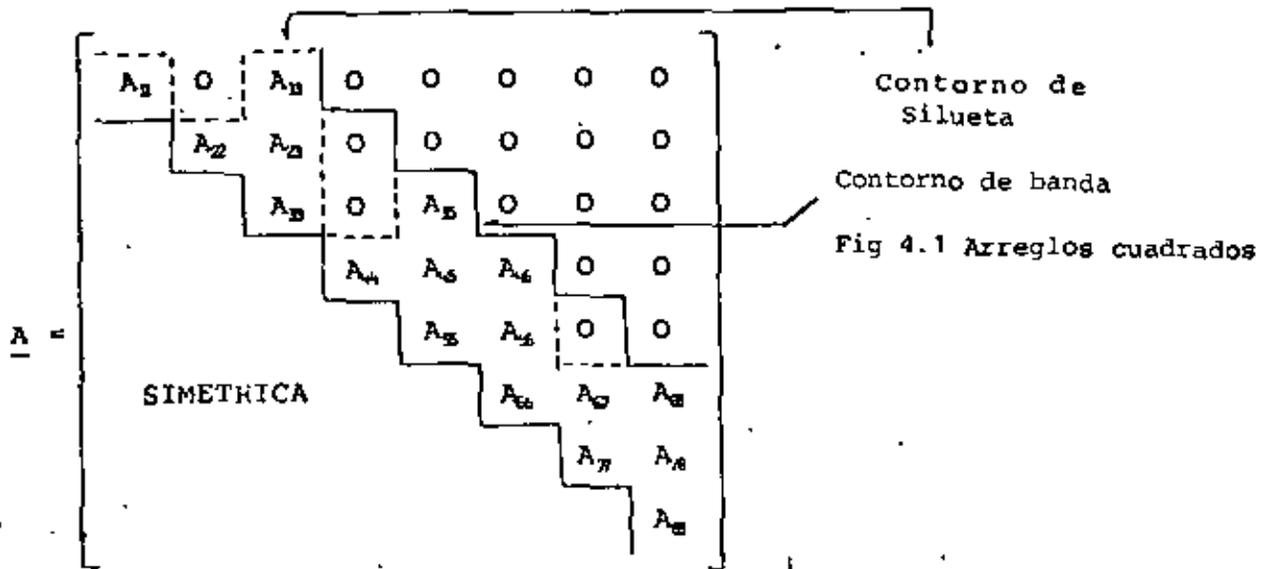


Fig. 4.2 Arreglos cuadrados (en banda)

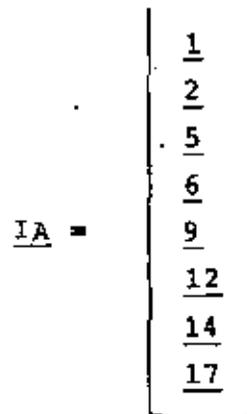
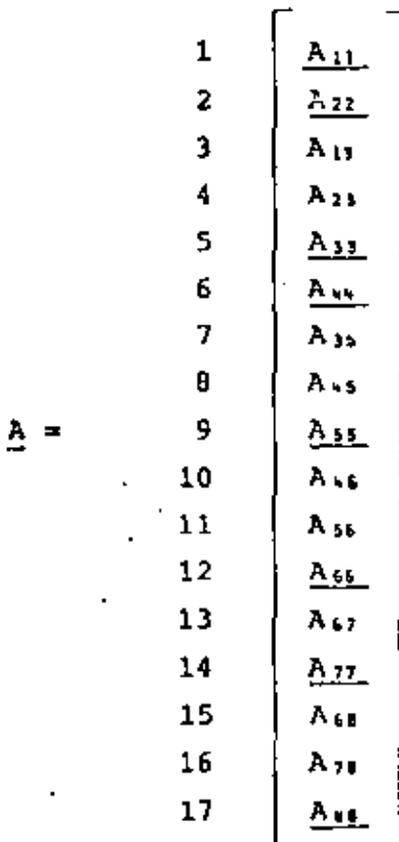
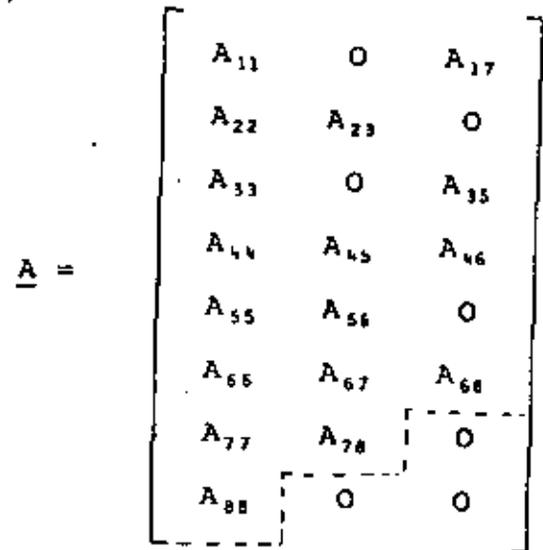
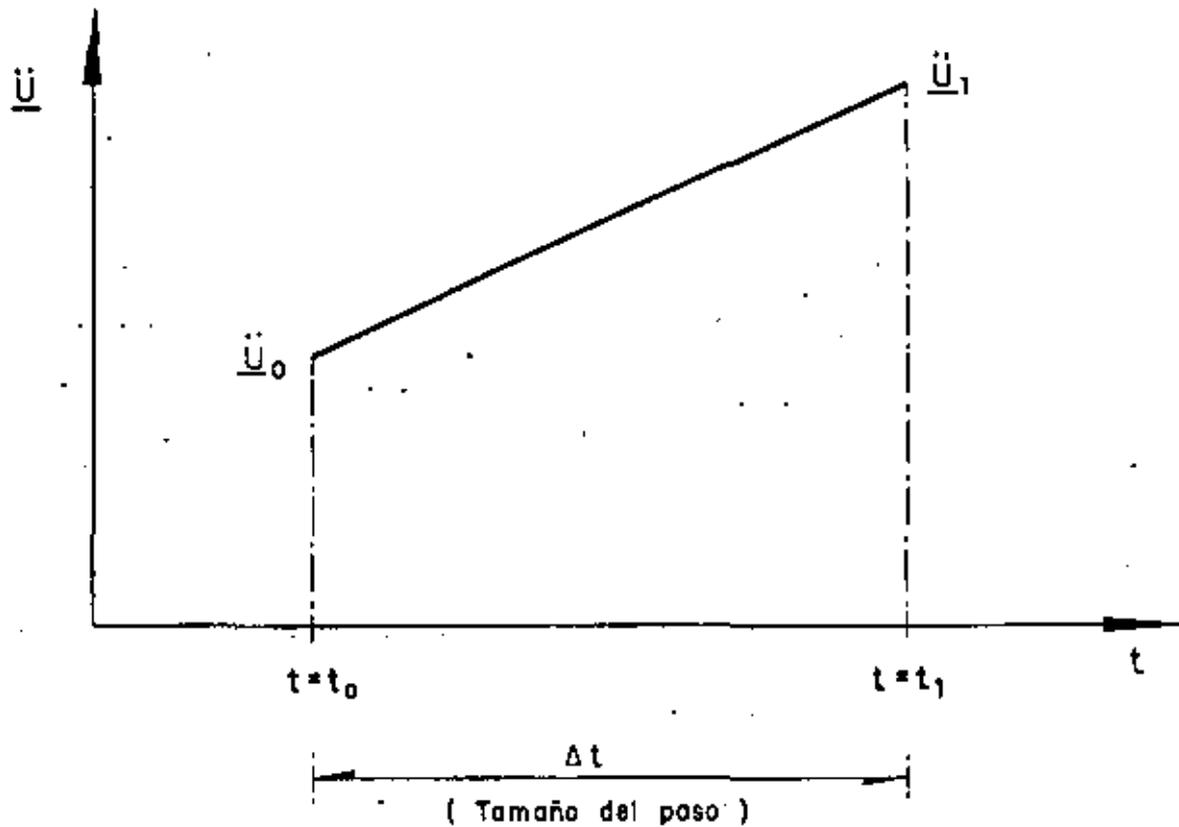


Fig. 4.3 Arreglos unidimensionales (en silueta)



Valores conocidos al inicio del paso : \underline{u}_0 , $\underline{\dot{u}}_0$, y $\underline{\ddot{u}}_0$

Valores por conocer al final del paso : \underline{u}_1 , $\underline{\dot{u}}_1$, y $\underline{\ddot{u}}_1$

Fig 4.4 Variación lineal de la aceleración en el intervalo de integración, Δt .

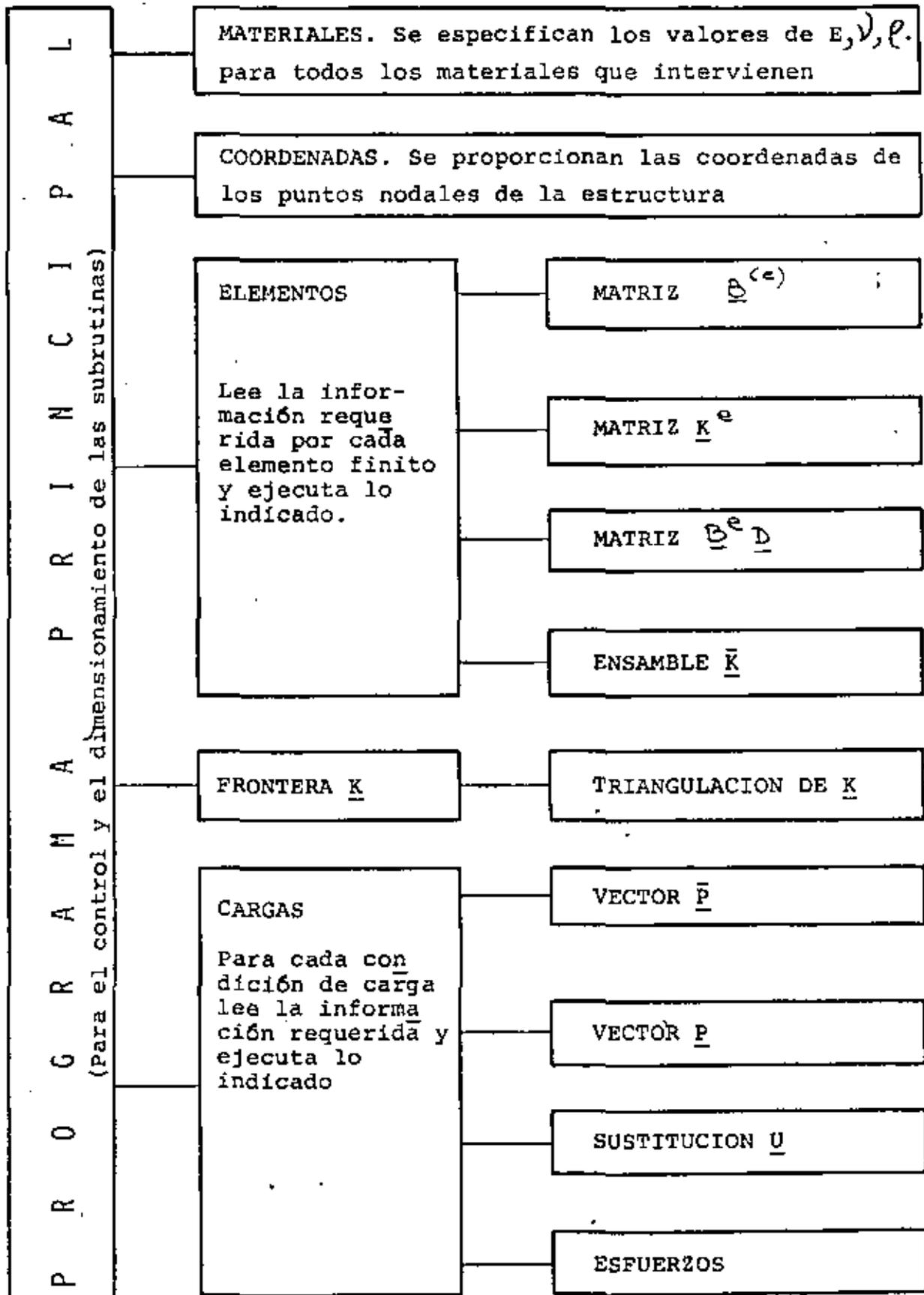


Fig. 4.5 Organización esquemática simple para un programa computadora del método del elemento finito (estático)



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

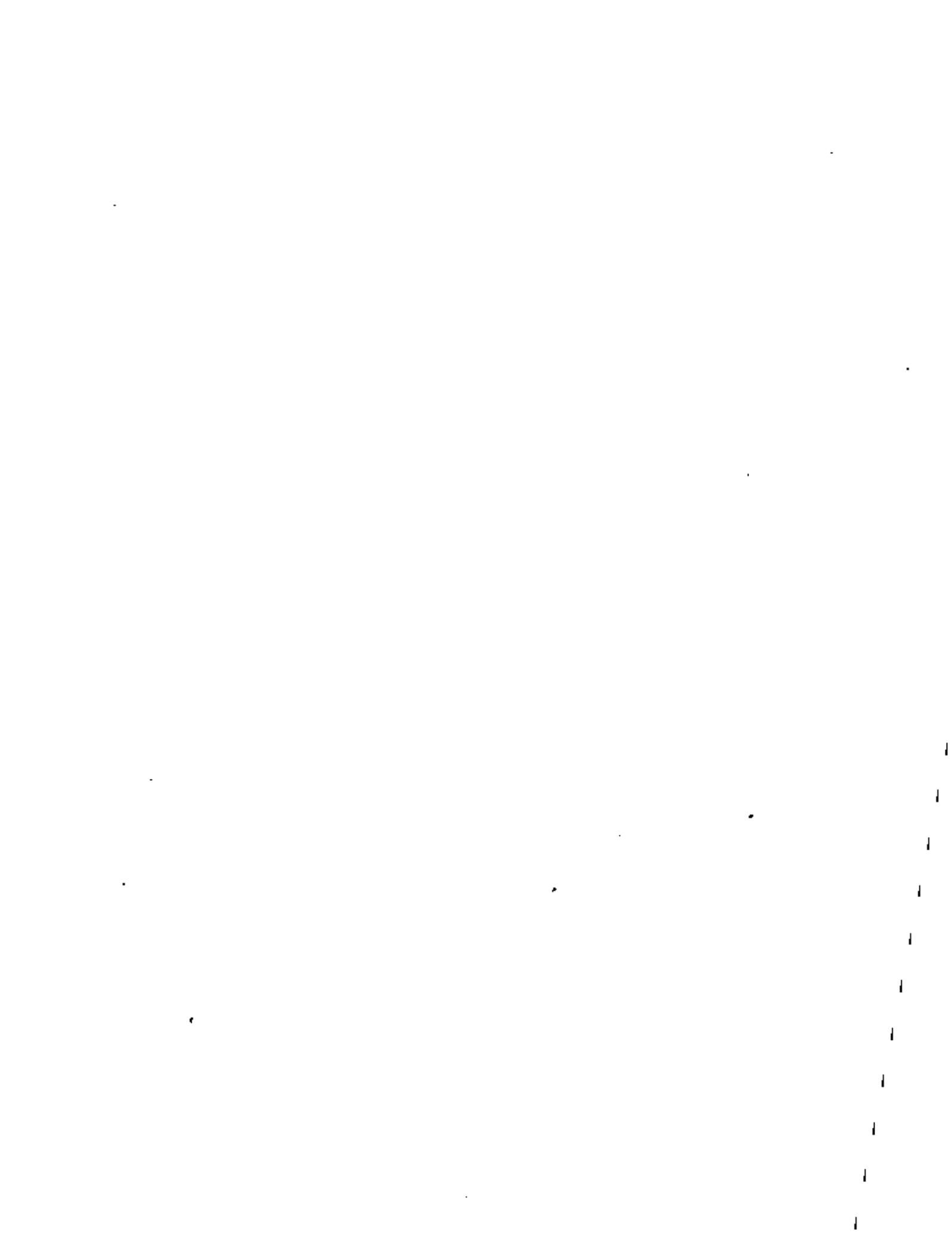
DINAMICA ESTRUCTURAL

INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

RAMON CERVANTES BELTRAN

VICTOR PORRAS SILVA

JULIO, 1980



	Página
I N D I C E	
1. INTRODUCCION	1
1.1 <u>Generalidades</u>	1
1.2 <u>Ecuaciones de equilibrio de la elastodinámica</u>	2
1.2.1 Principio de la conservación de la cantidad de movimiento en su forma local o primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento	2
1.2.2 Tensor de deformaciones	4
1.2.3 Ecuaciones constitutivas	6
1.2.4 Ecuaciones de campo	9
1.3 <u>Ecuaciones de equilibrio para varias geometrías</u>	11
1.3.1 Estados planos	11
1.3.1.1 Estado plano de deformaciones	11
1.3.1.2 Estado plano de esfuerzos	13
1.3.1.3 Relación entre los estados planos	14
1.3.2 Sólidos axisimétricos o de revolución	15
1.3.2.1 Tensor de deformaciones	15
1.3.2.2 Ecuaciones constitutivas	15
1.3.2.3 Ecuaciones de Cauchy del movimiento	16
1.3.1.4 Representación de las cargas arbitrarias mediante series de Fourier	16
1.3.1.5 Sólidos axisimétricos con carga axial	16
1.4 <u>Métodos aproximados para la solución de las ecuaciones de equilibrio</u>	18
1.4.1 Métodos de las funciones de prueba	18
1.4.2 Métodos de los residuos pesados	19
1.4.3 Método de Galerkin	19
1.4.4 Métodos variacionales	20
1.4.5 Método de Rayleigh	20
2. ELEMENTOS FINITOS DE UN MEDIO CONTINUO.	
ENFOQUE DE DESPLAZAMIENTOS	22
2.1 <u>Modelo discreto estándar</u>	22
2.2 <u>Principio del trabajo virtual en la teoría de la elasticidad lineal</u>	23
2.3 <u>Ecuación de equilibrio de los elementos finitos</u>	24
2.3.1 Definición de la geometría	24
2.3.2 Aproximación de la solución	24
2.3.3 Componentes del tensor de deformaciones	26
2.3.4 Ecuación constitutiva	27
2.3.5 Equilibrio dinámico	27
2.3.6 Equilibrio estático	29
2.3.7 Propiedades de las matrices de rigidez y de masas	29
2.3.8 Matrices de masas concentradas (diagonal)	30
2.3 <u>Ecuación de equilibrio del medio continuo global</u>	31
2.3.1 Ensamble de las ecuaciones	31
2.3.2 Condiciones de frontera	33
2.3.3 Matriz de amortiguamiento	34
2.3.4 Condiciones iniciales	34
2.3.5 Equilibrio estático	35
2.3.6 Solución de las ecuaciones de equilibrio	35

3.	FUNCIONES DE INTERPOLACION DE ELEMENTOS FINITOS	
3.1	Generalidades	36
3.2	Elementos unidimensionales	37
3.1.1.1	Interpolación lineal	37
3.2.1.2	Interpolación lineal normalizada	38
3.2.1.3	Interpolación cuadrática	40
3.2.1.4	Interpolación cuadrática normalizada	42
3.2.1.5	Interpolación en coordenadas naturales	43
3.2.2	Elementos con polinomios de Lagrange	43
3.2.2.1	Interpolación lineal	44
3.2.3	Elementos con polinomios de Hermite	46
3.3	<u>Elementos bidimensionales</u>	47
3.3.1	Elemento triangular lineal en coordenadas cartesianas	48
3.3.2	Elementos triangulares en coordenadas naturales	49
3.3.2.1	Interpolación lineal	50
3.3.2.2	Interpolación cuadrática	50
3.3.2.3	Interpolación cúbica	51
3.3.3	Referencia para elementos rectangulares	52
3.3.4	Familia Lagrangiana para elementos rectangulares	52
3.3.5	Familia Serendipity para elementos rectangulares	52
3.3.5.1	Interpolación lineal	53
3.3.5.2	Interpolación cuadrática	53
3.3.5.3	Interpolación cúbica	53
3.4	<u>Elementos tridimensionales</u>	53
3.4.1	Elemento tetraedro lineal en coordenadas cartesianas	54
3.4.2	Elementos tetraedros en coordenadas naturales	56
3.4.2.1	Interpolación lineal	57
3.4.2.2	Interpolación cuadrática	57
3.4.2.3	Interpolación cúbica	58
3.4.3	Familia Lagrangiana para prismas rectangulares	58
3.4.4	Familia Serendipity para prismas rectangulares	59
3.4.4.1	Interpolación lineal	59
3.4.4.2	Interpolación cuadrática	59
3.4.4.3	Interpolación cúbica	59
3.4.5	Elementos anillos axisimétricos	60
3.5	<u>Elementos isoparamétricos</u>	60
3.5.1	Transformación de coordenadas mediante funciones de forma	60
3.5.2	Derivación de las funciones de forma	62
3.5.3	Integración en coordenadas locales	64
3.5.3.1	Integración numérica para rectángulos y prismas rectangulares	64
3.5.3.2	Integración numérica para triángulos y tetraedros	65
4	ASPECTOS NUMERICOS DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO	68
4.1	<u>Solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales</u>	68
4.1.1	<u>Métodos directos generales</u>	68
4.1.1.1	Método de Gauss	69
4.1.1.2	Método de Crout	69
4.1.2	Métodos directos para matrices simétricas	69
4.1.2.1	Método de Gauss modificado	70
4.1.2.2	Método de Crout modificado	71
4.1.2.3	Método de Cholesky	71
4.1.2.4	Selección y organización del método de solución	72
4.1.3	Organización de las ecuaciones de equilibrio	73
4.1.3.1	Arreglos cuadrados	73

4.1.3.2	Arreglos rectangulares (en banda)	73
4.1.4	Arreglos unidimensionales (en silueta)	74
4.2	<u>Solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales</u>	74
4.2.1	Introducción	74
4.2.2	Método Beta de Newmark	76
4.3	<u>Esquema simple para organizar un problema de computadora</u>	78
5	BIBLIOGRAFIA	80
	TABLAS Y FIGURAS	82

.

.

.

.

INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Ramón Cervantes Beltrán* y Víctor Porras Silva*

1. INTRODUCCION

1.1 Generalidades

El método del elemento finito es un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales de problemas de valores en la frontera o de valores en la frontera e iniciales, que se presentan en ingeniería y en la física matemática. Esquemáticamente, la secuencia del método del elemento finito se puede resumir en los pasos siguientes:

- 1) El medio continuo se divide en varias regiones, denominados elementos, de formas convenientes (triangulares, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, etc.).
- 2) Mediante una selección apropiada de ciertos puntos de los elementos, denominados puntos nodales, las variables de la ecuación diferencial se escriben como una combinación lineal de funciones de interpolación, seleccionadas adecuadamente, y de los valores especificados en los puntos nodales de las variables o sus derivadas.
- 3) Mediante el uso de los métodos variacionales o de los residuos pesados, las ecuaciones diferenciales que gobiernan al problema se transforman en ecuaciones del elemento finito, que gobiernan, en forma aislada, a todos los elementos finitos.
- 4) Los elementos aislados se agrupan para formar un sistema global de ecuaciones diferenciales (problema de valores en la frontera e iniciales) o de ecuaciones algebraicas (problema de valores en la frontera), con sus propias condiciones de frontera o condiciones iniciales.
- 5) Los valores de la variable se determinan al resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

El objetivo de este curso consiste en discutir, brevemente, los fundamentos del método del elemento finito y sus aplicaciones a

* Profesor investigador, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.

la ingeniería estructural. Básicamente se utilizan las ecuaciones de equilibrio de la teoría de la elasticidad lineal.

1.2 Ecuaciones de equilibrio de la elastodinámica

Para poder estudiar el comportamiento de las estructuras es necesario establecer su modelación, ya sea experimental o matemática. La modelación que forma parte de este tema es la matemática y consiste en expresar, en un lenguaje formal o matemático, las leyes que gobiernan al comportamiento.

Toda estructura queda definida por los conceptos siguientes:

- 1) Geometría
- 2) Material
- 3) Cargas

Las leyes que gobiernan a los conceptos anteriores son las leyes de la mecánica y en especial las correspondientes a la mecánica del medio continuo. Las estructuras que se estudiarán en este tema son las que se construirán con un material sólido, elástico, lineal e isótropo. Las leyes que gobiernan a tales estructuras forman la base de la teoría de la elasticidad lineal y las ecuaciones correspondientes a cualquier punto de la estructura, asociadas a un sistema de referencia cartesiano, resultan ser:

1.2.1 Principio de la conservación de la cantidad de movimiento - en su forma local o primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento.

a) En notación indicial

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho a_i \quad (1.2.1)$$

donde σ_{ij} son los componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy, simétrico, que en forma matricial se puede expresar como:

$$[\sigma_{ij}] = \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

f_i son los componentes del vector fuerzas de cuerpo por unidad de masa cuya expresión es:

$$[f_i] = \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

a_i , son los componentes del vector aceleración indicados como:

$$[a_i] = \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

El vector aceleración se puede expresar en función de los componentes del vector de velocidades v_i , del vector de posición p_i y del vector de desplazamientos, u_i , como se indica a continuación

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2\underline{p}}{dt^2} = \frac{d^2\underline{u}}{dt^2} \quad (1.2.5)$$

que en forma de sus componentes resulta ser

$$\underline{a} = \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right]^T \quad (1.2.6)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

ρ es la densidad de masa por unidad de volumen

b) En notación tradicional, las primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento resultan ser:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = \rho a_x \quad (1.2.8)a$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho f_y = \rho a_y \quad (1.2.8)b$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{zx}}{\partial z} + e f_x = e a_x \quad (1.2.8)c$$

donde los elementos del tensor $\bar{\sigma}$ y los vectores \underline{f} y \underline{a} resultan ser:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\sigma}_{xy} & \bar{\sigma}_{xz} \\ \bar{\sigma}_{yx} & \bar{\sigma}_{yy} & \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_{zx} & \bar{\sigma}_{zy} & \bar{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.9)$$

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (1.2.10)$$

$$\underline{a} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]^T \quad (1.2.11)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

1.2.2 Tensor de deformaciones

La métrica utilizada para medir el cambio geométrico del cuerpo - resulta ser:

a) En notación indicial

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2.13)$$

donde e_{ij} son los componentes del tensor de deformaciones, simétrico, que en forma matricial se indica como:

$$[e_{ij}] = \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.14)$$

u_i son los componentes del vector desplazamiento. En la primera forma de la ec. 1.2.13 se utiliza la convención de derivadas parcial, mediante una coma

b) En notación tradicional

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2.15)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.16)$$

$$e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.2.17)$$

$$\gamma_{xy} = 2 e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2.18)$$

$$\gamma_{yz} = 2 e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.2.19)$$

$$\gamma_{zx} = 2 e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2.20)$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.21)$$

1.2.3 Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas del material sólido, elástico, lineal e isótropo están dadas por las ecuaciones de Hooke-Cauchy, también conocida como Ley de Hooke generalizada.

a) En notación indicial

$$\sigma_{kl} = \lambda e_{mm} \delta_{kl} + 2\mu e_{kl} \quad (1.2.22)$$

o bien

$$e_{kl} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{mm} \delta_{kl} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{kl} \quad (1.2.23)$$

donde λ y μ son las constantes elásticas de Lamé y δ_{kl} es la delta de Kronecker.

Las constantes de Lamé están relacionadas con las constantes de laboratorio denominadas, módulos de Young E de Elasticidad E y relación de Poisson ν , mediante las expresiones siguientes:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.2.24)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.2.25)$$

donde G se la conoce con el nombre de módulo de rigidez al cortante.

Con base en las ecs 1.2.24 y 1.2.25, las ecs 1.2.22 y 1.2.23 se pueden escribir como:

$$\sigma_{kl} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) e_{kl} + \nu e_{mm} \delta_{kl} \right] \quad (1.2.26)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{kl} - \nu \sigma_{mm} \delta_{kl} \right] \quad (1.2.27)$$

b) En notación tradicional

Las ecs 1.2.26 y 1.2.27 se pueden escribir como

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) e_{xx} + \nu(e_{yy} + e_{zz}) \right] \quad (1.2.28)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) e_{yy} + \nu(e_{xx} + e_{zz}) \right] \quad (1.2.29)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) e_{zz} + \nu(e_{xx} + e_{yy}) \right] \quad (1.2.30)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (1.2.31)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (1.2.32)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = G \gamma_{zx} \quad (1.2.33)$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \quad (1.2.34)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right] \quad (1.2.35)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \quad (1.2.36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\sigma_{xy}}{E} = \frac{1}{G} \sigma_{xy} \quad (1.2.37)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)\sigma_{yz}}{E} = \frac{1}{G} \sigma_{yz} \quad (1.2.38)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)\sigma_{zx}}{E} = \frac{1}{G} \sigma_{zx} \quad (1.2.39)$$

Las ecs 1.2.28 a 1.2.33 se pueden agrupar en forma matricial, según se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.40)$$

que en forma simbólica se puede escribir como

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{e} \quad (1.2.41)$$

donde $\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ son los vectores de esfuerzos y de deformaciones, respectivamente, y \underline{D} es la matriz de coeficientes elásticos, cuyas expresiones son:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.42) \quad \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.43)$$

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (1.2.44)$$

También las ecs 1.2.34 a 1.2.39 al agruparse en forma matricial se pueden escribir de la siguiente forma

$$\underline{\sigma} = \underline{D}^{-1} \underline{\epsilon} \quad (1.2.45)$$

$$\underline{D}^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (1.2.46)$$

1.2.4 Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo son las ecuaciones de movimiento o equilibrio dinámico (ecs 1.2.1 a 1.2.8) expresadas en función de los componentes del vector desplazamiento. Se les conocen también con el nombre de ecuaciones de campo de Navier y son:

a) En notación indicial

Estas ecuaciones se obtienen al sustituir las ecs 1.2.13 en las ecs 1.2.22 y el resultado obtenido se sustituye en la ec. 1.2.1 resulta:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial u_k}{\partial x_l \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l^2} + f_k = e \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad (1.2.47)$$

b) En notación vectorial

Con base en la definición del operador gradiente $\underline{\nabla}$, las ecs 1.2.47 se pueden escribir como:

$$(\lambda + 2\mu) \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) - \mu \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{u} + e \underline{f} = e \ddot{\underline{u}} \quad (1.2.48)$$

donde $\underline{\nabla}$, el operador gradiente, queda definido por

$$\underline{\nabla} = \underline{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \underline{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1.2.49)$$

c) En notación tradicional

En este caso, las ecuaciones de campo se pueden escribir directamente al interpretar las ecs 1.2.47 ó las ecs 1.2.48. También se pueden obtener al sustituir las ecs 1.2.15 a 1.2.20 en las ecs -- 1.2.28 a 1.2.33; y el resultado obtenido se sustituye en las ecs 1.2.8. Las ecuaciones resultantes se indican a continuación.

$$G(\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})) + e f_x = e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.50)a$$

$$G(\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})) + e f_y = e \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.2.50)b$$

$$G(\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})) + e f_z = e \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.2.50)c$$

donde ∇^2 es el operador de Laplace definido con

$$\nabla^2 = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.2.51)$$

1.3 Ecuaciones de equilibrio para varias geometrías

Las ecuaciones de equilibrio (ecs 1.2.47 ó 1.2.48 ó 1.2.50) son válidas para cualquier punto de cualquier estructura de forma arbitraria, pero construídas con un material sólido, elástico, lineal e isótropo (estructuras modeladas con la teoría de la elasticidad lineal). De acuerdo con lo indicado en el inciso 1.2, la geometría de la estructura influye sensiblemente en la forma final de las ecuaciones de equilibrio. En este inciso se bosquejan los modelos estructurales de la elasticidad lineal para varias geometrías adicionales a la geometría arbitraria (tridimensional), que se indicó en el inciso anterior.

1.3.1 Estados planos

En este modelo estructural, la geometría se puede considerar en un plano y el problema matemático es bidimensional.

1.3.1.1 Estado plano de deformaciones

En la fig. 1.2 se muestran algunas estructuras que poseen las siguientes características:

- a) La geometría corresponde a un cuerpo alargado y prismático, de tal manera que para definirla basta especificar la sección correspondiente a un plano perpendicular al eje.
- b) Las cargas que actúan a lo largo del eje son tales que basta con definir las en un plano perpendicular al eje.

De acuerdo con las características anteriores, la estructura queda definida en un plano (fig. 1.3) de espesor unitario, todas las variables que aparecen en las ecuaciones de equilibrio son independientes de la variable z (a lo largo del eje) y el desplazamiento, w , en tal dirección es nulo, es decir:

$$u = u(x, y) \quad (1.3.1)$$

$$v = v(x, y) \quad (1.3.2)$$

$$w = 0 \quad (1.3.3)$$

A continuación se describe el efecto de las ecs 1.3.1 a 1.3.3 en las ecuaciones de equilibrio de la estructura.

a) Tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs 1.3.1 a 1.3.3 en las ecs 1.2.15 a 1.2.20 se obtiene

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.3.4)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.3.5)$$

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.3.6)$$

$$e_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1.3.7)$$

b) Ecuaciones constitutivas

Al sustituir las ecs 1.3.4 a 1.3.7 en las ecs 1.2.28 a 1.2.33; y al ordenar el resultado en forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.3.9)$$

La ec 1.3.8 se puede escribir en forma simbólica como:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{e} \quad (1.3.10)$$

donde

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3.11) \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3.12)$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (1.3.13)$$

c) Ecuación de Cauchy del movimiento

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + e f_x = e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3.14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + e f_y = e \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3.15)$$

1.3.1.2 Estado plano de esfuerzos

Si las estructuras descritas en el estado plano de deformaciones, en vez de ser alargadas ^{son} extraordinariamente delgadas (fig. 1.4) se puede aseverar que los componentes del tensor esfuerzo, asociados a la dirección del espesor, son nulos, es decir:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.3.16)$$

Al sustituir las ecs 1.3.16 en las ecs 1.2.34 a 1.2.39 y reordenarlas se obtiene

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \quad (1.3.17)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \quad (1.3.18)$$

$$\gamma_{xy} = 2 e_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} \quad (1.3.19)$$

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (e_{xx} + e_{yy}) \quad (1.3.20)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1.3.21)$$

A continuación se resumen las ecuaciones de equilibrio para los estados planos de esfuerzo.

a) Tensor de deformaciones

Queda igual que las deformaciones planas, excepto que existe la deformación ϵ_{zz} dada por la ec 1.3.20

b) Ecuaciones constitutivas

Al poner en forma matricial las ecs 1.3.17 a 1.3.19 se transforman en

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3.22)$$

La ec 1.3.22, en forma simbólica, se puede escribir como se indica en la ec 1.3.10; donde los vectores $\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ están dados por las ecs 1.3.11 y 1.3.12 y la matriz \underline{D} se indica a continuación:

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.3.23)$$

c) Ecuaciones de Cauchy del movimiento

Quedan iguales a las de las deformaciones planas.

1.3.1.3 Relación entre los estados planos

Se puede demostrar fácilmente que la ec 1.3.22 se transforma en la ec 1.3.13 si se efectúa la sustitución indicada a continuación

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (1.3.24)$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (1.3.25)$$

Por lo tanto se puede concluir que si se tiene resuelto el modelo matemático correspondiente al estado plano de esfuerzos, se puede tener también el correspondiente al estado plano de deformaciones, si el espesor se hace unitario y se efectúa la transformación indicada por las ecs 1.3.24 y 1.3.25.

1.3.2 Sólidos axisimétricos o de revolución

Existen estructuras cuya geometría queda definida mediante un cuerpo de revolución por lo que existe simetría geométrica respecto al eje de revolución. Las variables de la teoría de la elasticidad para tales cuerpos conviene expresarlas en un sistema de referencia cilíndrica, según se muestra en la fig. 1.5.

1.3.2.1 Tensor de deformaciones

Los componentes del tensor de deformaciones se muestran en la fig. 1.6 y en relación con el vector desplazamientos se indica a continuación.

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{1.3.26}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{1.3.27}$$

$$\gamma_{rz} = 2e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \tag{1.3.28}$$

$$\gamma_{r\theta} = 2e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{w}{r} \tag{1.3.29}$$

$$\gamma_{z\theta} = 2e_{z\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.3.30}$$

donde $u = u(r, z, \theta)$, $v = v(r, z, \theta)$ y $w = w(r, z, \theta)$ son los componentes del vector desplazamiento en la dirección radial (r), axial (z) y tangencial (θ), respectivamente.

1.3.2.2 Ecuaciones constitutivas

Los componentes del tensor esfuerzo asociado al sistema de referencia se muestran en la fig. 1.6. La ecuación constitutiva está dada por la ec 1.2.41 en donde los vectores de esfuerzo y de deformaciones se indican a continuación:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{z\theta} \end{bmatrix} \tag{1.3.31} \quad \underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ e_{rz} \\ e_{r\theta} \\ e_{z\theta} \end{bmatrix} \tag{1.3.32}$$

1.3.2.3 Ecuaciones de Cauchy del movimiento

Las ecuaciones de Cauchy para la referencia cilíndrica resultan ser:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3.33)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \rho f_\theta = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3.35)$$

1.3.2.4 Representación de las cargas arbitrarias mediante series de Fourier

Al descomponer las cargas mediante series de Fourier, respecto a la variable tangencial (θ), el problema tridimensional se transforma en varios problemas bidimensionales en las variables radial (r) y axial (z).

1.3.2.5 Sólidos axisimétricos con carga axial

Para cargas con simetría axial, únicamente, existe un término de la serie de Fourier y los componentes del vector desplazamiento resultan ser

$$u = u(r, z) \quad (1.3.36)$$

$$v = v(r, z) \quad (1.3.37)$$

$$w = 0 \quad (1.3.38)$$

La influencia de las ecs 1.3.36 a 1.3.38 en las ecuaciones de equilibrio para estas estructuras se resume a continuación:

a) Tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs 1.3.36 a 1.3.38 en las ecs 1.3.26 a 1.3.30 se obtienen las expresiones siguientes

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.3.39)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.3.40)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} u \quad (1.3.41)$$

$$\gamma_{rz} = 2 e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad (1.3.42)$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0 \quad (1.3.43)$$

b) Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas (ec 1.2.40) se reduce a la expresión siguiente

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad (1.3.44)$$

en donde los elementos de la ecuación simbólica (ec 1.2.41) resultan ser

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} \quad (1.3.45) \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad (1.3.46)$$

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (1.3.47)$$

c) Ecuaciones de Cauchy

Las dos ecuaciones de Cauchy del movimiento que resultan se indican a continuación:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + e f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3.48)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3.49)$$

1.3.3 Otras geometrías

Existen varias geometrías que se utilizan para modelar las estructuras como son: barras, placas y cascarones. La determinación de las ecuaciones de equilibrio resulta un poco más laboriosa que las geometrías discutidas, razón por la que no se indicará en este resumen.

1.4 Métodos Aproximados para la Solución de las Ecuaciones de Equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio bosquejadas en los incisos anteriores se pueden escribir, en forma matricial, como se indica a continuación

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{f} \quad \text{en } \Omega \quad (1.4.1)$$

$$\underline{B} \underline{u} = \underline{g} \quad \text{en } \Gamma \quad (1.4.2)$$

donde los componentes de las matrices \underline{A} y \underline{B} son operadores diferenciales, los componentes del vector \underline{u} son las funciones incógnitas del problema, y los componentes de los vectores \underline{f} y \underline{g} son funciones conocidas. La ec 1.4.1 representa el equilibrio en cualquier punto interior de la estructura (región Ω), y la ec 1.4.2 las correspondientes condiciones de frontera (región Γ). Para fines de explicación y por facilidad, las ecs 1.4.1 y 1.4.2, en lo que sigue, se considerarán como ecuaciones escalares, es decir

$$Au = f \quad \text{en } \Omega \quad (1.4.3)$$

$$Bu = g \quad \text{en } \Gamma \quad (1.4.4)$$

1.4.1 Métodos de las funciones de prueba

De los métodos aproximados existentes para resolver las ecs 1.4.1 y 1.4.2 (1.4.3 y 1.4.4), los que utilizan soluciones ^{mediante funciones} de prueba son los que, en el campo numérico, se aplican con gran éxito.

En estos métodos, la solución buscada, u , es aproximada mediante la prueba, \hat{u} , de la forma siguiente

$$\hat{u} = \sum_{r=1}^M c_r \phi_r \quad (1.4.5)$$

donde ϕ_r son M funciones conocidas, linealmente independientes que existen en la región $\Omega + \Gamma$ y los coeficientes C_r son parámetros desconocidos que se determinarán con algún criterio.

1.4.2 Métodos de los residuos pesados

Para explicar estos métodos, la ec 1.4.3 se escribe como se indica a continuación

$$Au - f = 0 \quad (1.4.6)$$

Al sustituir en la ec 1.4.6 el valor aproximado de u (\tilde{u}), dado por la ec 1.4.5, se obtiene un error o residuo, ϵ , dado por

$$\epsilon = A \tilde{u} - f \quad (1.4.7)$$

La selección de las funciones de prueba, ϕ_r , de la ec 1.4.5, se hace de tal manera que satisfagan las condiciones de frontera (en Γ) mientras que los coeficientes, C_r , de la solución aproximada se cuantifican de tal manera que el error, dado por la ec 1.4.7, sea mínimo o pequeño en algún contexto.

En forma generalizada, una función pesada de los residuos $W f(\epsilon)$, es la que debe satisfacer el criterio de pequeñez, donde, W es la función de peso y $f(\epsilon)$ es la función residual, tal que, $f(\epsilon) = 0$, para $\epsilon = 0$. El criterio de pequeñez para todos los métodos de los residuos se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} w f(\epsilon) d\Omega = 0 \quad (1.4.8)$$

La condición dada por la ec 1.4.8 para operadores lineales (que es el caso de la teoría de la elasticidad lineal) conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, para todos los métodos que actualmente se usan (subdominio, mínimos cuadrados, Galerkin, etc).

1.4.3 Método de Galerkin

El método de Galerkin, conocido también como de Bubnov, consiste en hacer que el error, ϵ , sea ortogonal a las funciones de prueba, ϕ_r , en el dominio de la estructura (en Ω), es decir, que las funciones de peso sean las funciones de prueba, como se indica a continuación

$$\int_{\Omega} \phi_r \in d\Omega = 0 \quad (1.4.9)$$

1.4.4. Métodos variacionales

En estos métodos, se busca que la solución de la ec 1.4.3 proporcione un valor extremal a la funcional, $I(\tilde{u})$, que es una integral de u y sus derivadas sobre el dominio de la estructura $(\Omega + \Gamma)$.

Entonces, si se conoce la funcional, $I(u)$, los métodos variacionales se pueden establecer de la siguiente forma

$$I(\tilde{u}) = \text{valor extremal} \quad (1.4.10)$$

$$B(u) = \mathcal{G} \quad (1.4.11)$$

en donde la ec. 1.4.11 establece las condiciones de frontera esenciales o principales.

De acuerdo con las ecs 1.4.10 a 1.4.11, los métodos variacionales utilizan la solución aproximada dada por la ec 1.4.5, en donde las funciones de prueba, ϕ_r , satisfacen las condiciones de frontera esenciales (ec 1.4.11) y los coeficientes, C_r , se determinan de tal manera que se satisfaga la ec 1.4.10.

En los métodos variacionales se puede utilizar, en vez de la funcional, una ecuación variacional.

Se puede afirmar que si el operador (A) del sistema por resolver es lineal, simétrico, positivo definido, el valor estacionario es un mínimo absoluto.

1.4.5 Método de Rayleigh

De todos los métodos variacionales (Diferencias finitas, Kantorovich, Trefftz, etc.) el que actualmente tiene mayores aplicaciones es el método de Rayleigh, también conocido en el nombre de Ritz o Rayleigh-Ritz.

Este método consiste en sustituir directamente la solución aproximada dada por la ec 1.4.5, en la funcional $I(\tilde{u})$ y aplicar la condición de extremo, en función de los parámetros C_r , como se indica a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial C_r} I(\tilde{u}) = 0 \quad (1.4.12)$$

En caso de utilizarse la ecuación variacional, la ec. 1.4.5 se ² sustituye directamente.

2. ELEMENTOS FINITOS DE UN MEDIO CONTINUO. ENFOQUE DE DESPLAZAMIENTOS.

En la formulación del método del elemento finito los parámetros C_r , que aparecen en los métodos de las funciones de prueba (inciso 1.4.1), se pueden asociar a valores generalizados de la incógnita u (desplazamientos y sus derivadas) en los puntos nodales, o bien, a otros conceptos relacionados con tales valores (fuerzas o esfuerzos generalizados, o combinaciones entre desplazamientos y fuerzas generalizadas). En este resumen únicamente se considerarán como incógnitas a los valores generalizados de u , y recibe el nombre de enfoque de desplazamientos

2.1 Modelo discreto estándar

En el análisis de las estructuras esqueléticas (armaduras, marcos, etc.) se establecen las ecuaciones de equilibrio con base en las correspondientes ecuaciones de equilibrio de cada una de las barras que las forman. Lo mismo sucede con otros sistemas, no necesariamente estructurales, en donde se puede efectuar una discretización a priori.

En los medios continuos, generalmente es muy difícil asociarles, a primera vista, un modelo discreto para su representación racional y, por lo tanto, para establecer sus ecuaciones. La forma de realizarlo se indica a continuación, ejemplificado con la fig 2.1.

- a) El medio continuo se divide en un número finito de regiones, de formas apropiadas, mediante líneas o superficies. A estas regiones se les denomina elementos finitos (de forma triangular en la fig 2.1)
- b) Los elementos finitos se supone que están interconectados en un número finito de puntos nodales, situados sobre las fronteras de los elementos (círculos pequeños en la fig 2.1). Los desplazamientos de los puntos nodales serán las incógnitas básicas del problema.
- c) Se define en forma única, al estado de desplazamientos en cualquier punto del elemento finito, en función de los desplazamientos en los puntos nodales (interpolación)
- d) Con los desplazamientos conocidos se puede definir, en forma

única, el estado de deformaciones (tensor de deformaciones), también, en términos de los desplazamientos en los puntos nodales. Con base en las ecuaciones constitutivas se puede conocer el estado de esfuerzos en función de los desplazamientos en los puntos nodales

- e) Se determina el sistema de fuerzas concentradas, en los puntos nodales, que equilibre los esfuerzos en las fronteras y cualquier fuerza concentrada o distribuida que actúe en los puntos del elemento. Estas fuerzas equilibrantes también resultan en función de los desplazamientos en los puntos nodales, y su relación conduce al concepto de matriz de rigideces.

2.2 Principio del trabajo virtual en la teoría de la elasticidad lineal

Como se indicó en la solución aproximada de las ecuaciones de equilibrio con los métodos variacionales, se puede utilizar una ecuación variacional en vez de una funcional. En las ecuaciones de la elasticidad lineal, la ecuación variacional está dada por el principio del trabajo virtual, ^{del cual se obtienen las ecuaciones de Cauchy} del movimiento, y su expresión, en notación indicial, resulta ser:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kl} \delta e_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \delta u_k d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{(n)k} \delta u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f_k \delta u_k d\Omega \quad (2.2.1)$$

en donde, el símbolo δ , indica la primera variación que opera sobre las cantidades que le preceden y los elementos restantes se definieron en el capítulo anterior.

En notación matricial, la ec 2.2.1 se puede escribir como:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{e}^T \underline{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \rho \underline{\ddot{u}} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{\sigma}}_{(n)} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{f} d\Omega \quad (2.2.2)$$

2.3 Ecuación de equilibrio de los elementos finitos

A fin de ejemplificar el procedimiento para establecer las ecuaciones de equilibrio del modelo discreto estándar de los medios continuos (elemento finito) se hace referencia a la fig 2.1, que corresponde a un estado plano de esfuerzos.

2.3.1 Definición de la geometría

De acuerdo con el punto (a) del inciso 2.1, en la fig 2.1 se muestra la región de la estructura, la división en regiones triangulares y la definición de los puntos nodales. Desde luego que la geometría de los elementos finitos no es única, ni tampoco la definición de los puntos nodales. En el capítulo 3 se presentan otras geometrías que se pueden utilizar en regiones bidimensionales.

2.3.2 Aproximación de la solución

La formulación del elemento finito, a diferencia de los métodos de las funciones de prueba tradicionales, aproxima la solución en cada una de las regiones correspondientes a los elementos finitos. Entonces la aproximación en la región global de la estructura es seccionalmente continua. Desde luego que esta aproximación debe proporcionar desplazamientos compatibles en las fronteras con los elementos vecinos.

En la fig 2.1 el elemento finito e , representa a cualquier elemento en que se dividió la región. A él le corresponden los conceptos siguientes.

Los componentes del vector desplazamientos asociados a cualquier punto del elemento son dos; $u = u(x,y)$ paralelo al eje x y $v = v(x,y)$ paralelo al eje y . La representación vectorial resulta ser:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

De acuerdo con el punto (b) del inciso 2.1, los puntos nodales del elemento finito se etiquetan con las letras i, j, k , que pueden representar a cualquier dígito de los números enteros con los que se numeran los puntos nodales de la estructura. Entonces,

los vectores de desplazamiento de los puntos nodales son:

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad \underline{u}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad \underline{u}_m = \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

con las ecs 2.3.2 se puede formar un sólo vector denominado, vector de desplazamientos nodales del elemento, según se indica a continuación

$$\underline{u}^e = \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

con base en la ec 2.3.2, la ec 1.4.5 para el elemento triangular de la fig 3.1 se puede escribir como:

$$\tilde{u} = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \quad (2.3.4)$$

$$\tilde{v} = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \quad (2.3.5)$$

donde las funciones $N_1 = N_1(x, y)$, $N_2 = N_2(x, y)$ y $N_3 = N_3(x, y)$ reciben el nombre de funciones de forma. En el capítulo 3 se presentan las expresiones correspondientes a varias geometrías de elementos finitos.

Las ecs 2.3.4 y 2.3.5 se pueden escribir en forma matricial como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

con base en las ecs 2.3.1 y 2.3.3, la ec 2.3.6 se puede escribir como:

$$\underline{\hat{u}} = [N_i, N_j, N_m] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{u}^e \quad (2.3.7)$$

donde

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} ; \quad N_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix} ; \quad N_m = \begin{bmatrix} N_m & 0 \\ 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

$$\underline{N} = [N_i, N_j, N_m] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (2.3.9)$$

2.3.3 Componentes del tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs 1.3.4 a 1.3.6 en la ec 1.3.12 se obtiene

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{L} \underline{u} \quad (2.3.10)$$

en donde se utilizó la ec 2.3.1, y la matriz de operadores, \underline{L} , de acuerdo con la ec 2.3.10 resulta ser

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

Al sustituir: la ec 2.3.7 en la ec 2.3.10 resulta ser

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{N} \underline{u}^e = \underline{B} \underline{u}^e \quad (2.3.12)$$

donde, la matriz de deformaciones, \underline{B} , es:

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad (2.3.13)$$

Al sustituir las ecs 2.3.9 y 2.3.11 en la ec 2.3.13, se obtiene

la forma explícita de la matriz \underline{B} para el elemento considerado

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

2.3.4 Ecuación constitutiva

De acuerdo con la ec 1.3.22, la ecuación constitutiva para un material libre de esfuerzos y deformaciones iniciales se escribe como:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{e} \quad (2.3.15)$$

Se se considera que al material sometido a esfuerzos iniciales, $\underline{\sigma}_0$ y a deformaciones iniciales, \underline{e}_0 , la ecuación 2.3.15 se modifica como se indica a continuación

$$\underline{\sigma} = \underline{D} (\underline{e} - \underline{e}_0) + \underline{\sigma}_0 \quad (2.3.16)$$

2.3.5 Equilibrio dinámico

La expresión del principio del trabajo virtual, dada por la ec 2.2.2, es válida para la región completa de la estructura. Cuando se aplica a la región de un elemento finito ($\Omega_e + \Gamma_e$), su expresión resulta ser:

$$\int_{\Omega_e} \delta \underline{e}^T \underline{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_e} \delta \underline{u}^T \rho \ddot{\underline{u}} d\Omega = \int_{\Gamma_e} \delta \underline{u}^T \underline{\sigma}_{(n)} d\Gamma + \int_{\Omega_e} \delta \underline{u}^T \underline{f} d\Omega \quad (2.3.17)$$

en donde los elementos del integrando deben referirse al elemento finito; y de acuerdo con los desarrollos anteriores se cuantifican a continuación, al tomar en cuenta que la variación se debe tomar en cuenta únicamente en el vector de desplazamientos nodales.

$$\delta \underline{e}^T = \delta (\underline{u}^e{}^T \underline{B}^T) = \delta \underline{u}^e{}^T \underline{B}^T \quad (2.3.18)$$

$$\delta \underline{u}^T \approx \delta \underline{\hat{u}}^T = \delta (\underline{u}^e{}^T \underline{N}^T) = \delta \underline{u}^e{}^T \underline{N}^T \quad (2.3.19)$$

$$\ddot{\underline{u}} \approx \ddot{\underline{\tilde{u}}} = \underline{N} \ddot{\underline{u}}^e \quad (2.3.20)$$

Al sustituir las ecs 2.3.18 y 2.3.20 en la ec 2.3.17, y al recordar que los componentes del vector de desplazamientos nodales son independientes de las variables espaciales (salen fuera de los integrandos), se obtiene la expresión siguiente:

$$\delta \underline{u}^{eT} \left[\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega + \left(\int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega \right) \ddot{\underline{u}}^e = \delta \underline{u}^{eT} \left(\int_{\Gamma^e} \underline{N}^T \underline{\sigma}_{(n)} \, d\Gamma + \int_{\Omega^e} \underline{N}^T \underline{f} \, d\Omega \right) \quad (2.3.21)$$

Para que la ec 2.3.21 sea válida para cualquier variación del vector de desplazamientos nodales ($\delta \underline{u}^{eT}$), se deberá cumplir que

$$\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega + \underline{M}^e \ddot{\underline{u}}^e = \underline{f}_s^e + \underline{f}_c^e \quad (2.3.21)$$

donde, la matriz de masas, \underline{M}^e , del elemento e, esta dado por

$$\underline{M}^e = \int_{\Omega} \underline{e} \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega \quad (2.3.22)$$

\underline{f}_s^e y \underline{f}_c^e son los vectores de fuerzas del elemento debido a las fuerzas de superficie y de cuerpo, respectivamente, que actúan sobre el elemento, es decir

$$\underline{f}_s^e = \int_{\Gamma^e} \underline{N}^T \underline{\sigma}_{(n)} \, d\Gamma \quad (2.3.23)$$

$$\underline{f}_c^e = \int_{\Omega^e} \underline{N}^T \underline{f} \, d\Omega \quad (2.3.24)$$

Al sustituir la ec 2.3.16 en la integral de la ec 2.3.21 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega &= \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{e} \, d\Omega - \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{e}_0 \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma}_0 \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{e} \, d\Omega - \underline{f}_{e_0}^e + \underline{f}_{\sigma_0}^e \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

donde $\underline{f}_{e_0}^e$ y $\underline{f}_{\sigma_0}^e$ son los vectores de fuerzas del elemento debidas a la deformación inicial, \underline{e}_0 , y al esfuerzo inicial, $\underline{\sigma}_0$, respectivamente, en el elemento finito, y resultan ser

$$\underline{f}_{\epsilon_0}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 d\Omega \quad (2.3.26)$$

$$\underline{f}_{\sigma_0}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma}_0 d\Omega \quad (2.3.27)$$

Al sustituir la ec 2.3.12 en la ec 2.3.25 resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} d\Omega &= \left(\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega \right) \underline{u}^e - \underline{f}_{\epsilon_0}^e + \underline{f}_{\sigma_0}^e \\ &= \underline{k}^e \underline{u}^e - \underline{f}_{\epsilon_0}^e + \underline{f}_{\sigma_0}^e \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

donde la matriz de rigideces, \underline{k}^e , del elemento finito, e, resulta ser:

$$\underline{k}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega \quad (2.3.28)$$

Al sustituir la ec 2.3.27 en la ec 2.3.31 se obtiene

$$\underline{M}^e \ddot{\underline{u}}^e + \underline{k}^e \underline{u}^e = \underline{f}^e \quad (2.3.29)$$

donde el vector de fuerzas externas, \underline{f}^e , del elemento, e, se indica a continuación

$$\underline{f}^e = \underline{f}_s^e + \underline{f}_e^e + \underline{f}_{\epsilon_0}^e - \underline{f}_{\sigma_0}^e \quad (2.3.30)$$

2.3.6 Equilibrio estático

Cuando las fuerzas que actúan sobre el elemento son independientes del tiempo (cargas estáticas), se debe cumplir la relación siguiente

$$\ddot{\underline{u}}^e = 0 \quad (2.3.31)$$

Al sustituir la ec 2.3.31 en la ec 2.3.29 se obtiene la ecuación de equilibrio estática del elemento finito, que resulta ser:

$$\underline{k}^e \underline{u}^e = \underline{f}^e \quad (2.3.32)$$

2.3.7 Propiedades de las matrices de rigideces y de masas

Al calcular la transpuesta de la matriz de rigideces (ec 2.3.28) se obtiene

$$(\underline{k}^e)^T = \left(\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega \right)^T = \int_{\Omega^e} (\underline{B}^T \underline{D} \underline{B})^T d\Omega = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D}^T (\underline{B}^T)^T d\Omega \quad (2.3.33)$$

Al observar las diversas formas de las ecuaciones constitutivas para las geometrías consideradas se concluye que la matriz de coeficientes elásticos es simétrica, es decir

$$\underline{D}^T = \underline{D} \quad (2.3.34)$$

además, se debe cumplir que

$$(\underline{B})^T = \underline{B} \quad (2.3.35)$$

Al sustituir las ecs 2.3.34 y 2.3.35 en la ec 2.3.33 y considerar además la ec 2.3.28, resulta que:

$$(\underline{K}^e)^T = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega = \underline{K}^e \quad (2.3.36)$$

De la ec 2.3.36 se concluye que la matriz de rigideces, de los elementos finitos, para los medios continuos de la elasticidad lineal, es simétrica.

Al calcular la transpuesta de la matriz de masas (ec 2.3.22) se obtiene

$$\begin{aligned} (\underline{M}^e)^T &= \left(\int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^T \underline{N} d\Omega \right)^T = \int_{\Omega^e} \underline{e} (\underline{N}^T \underline{N})^T d\Omega = \int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^T (\underline{N}^T)^T d\Omega \\ &= \int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^T \underline{N} d\Omega = \underline{M}^e \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

De la ec 2.3.37 se concluye que la matriz de masas de los elementos finitos, para los medios continuos de la elasticidad lineal, es simétrica.

2.3.8 Matriz de masas concentradas (diagonal)

La matriz de masas del elemento finito, dado por la ec 2.3.22, se le denomina matriz de masas consistente, ya que es la que resulta en forma natural en el proceso de discretización en el método del elemento finito. La matriz de masas consistente generalmente no es diagonal.

Sin embargo, por conveniencias numéricas, se utiliza con mucha frecuencia el uso de matrices diagonales, formadas de tal manera que las masas asociadas a los puntos se consideren concentradas. El proceso de concentración no es único y se han utilizado los que a continuación se enumeran

a) Concentración de masas mediante conceptos físicos tales como

por ejemplo, el de áreas o volúmenes tributarios

- b) Concentración mediante nuevas funciones de formas definidas de tal manera que se anulen los términos fuera de la diagonal de la matriz de masas consistente
- c) Concentración mediante el escalamiento de los elementos de la diagonal principal de la matriz de masas consistente, de tal manera que se preserve la masa total del elemento
- d) Concentración mediante la integración numérica de la matriz de masas consistentes, al seleccionar a los puntos nodales como puntos de muestreo

El procedimiento del inciso d conduce a coeficientes negativos de la matriz de masas diagonal. Independientemente del procedimiento seguido, la matriz de masas concentrada o diagonal resulta ser de la forma mostrada a continuación (para el elemento triangular).

$$M^e = \begin{bmatrix} M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_m \end{bmatrix} \quad (2.3.38)$$

donde M_i , M_j , M_m son los valores de las masas concentradas en los puntos nodales respectivos

2.3 Ecuación de equilibrio del medio continuo global

Si una estructura está en equilibrio, cualquier parte de ella también lo está; la inversa, también es cierta. Entonces, si se tiene garantizado el equilibrio de todos los elementos finitos en que se discretizó el medio continuo, se puede establecer el equilibrio del medio continuo global.

2.3.1 Ensamble de las ecuaciones

A fin de llevar a cabo, sistemáticamente, el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio del medio continuo global, se procede a numerar, en forma secuencial, los elementos finitos en

que se idealizo el medio continuo y los puntos nodales correspondientes (ver fig 2.2)

De acuerdo con lo aseverado al inciso del inciso 2.3 el equilibrio de la estructura mostrada en la fig 2.2 se puede escribir, al utilizar la ec 2.3.9, como se indica a continuación

$$\underline{M}^{(1)} \ddot{\underline{u}}^{(1)} + \underline{K}^{(1)} \underline{u}^{(1)} = \underline{f}^{(1)} \quad (2.3.39)_1$$

$$\underline{M}^{(2)} \ddot{\underline{u}}^{(2)} + \underline{K}^{(2)} \underline{u}^{(2)} = \underline{f}^{(2)} \quad (2.3.39)_2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\underline{M}^{(33)} \ddot{\underline{u}}^{(33)} + \underline{K}^{(33)} \underline{u}^{(33)} = \underline{f}^{(33)} \quad (2.3.39)_{33}$$

en las ecuaciones anteriores el número indicado en el paréntesis corresponde al número del elemento. En forma condensada, las ecs 2.3.39 se pueden escribir como

$$\sum_{e=1}^{33} \underline{M}^{(e)} \ddot{\underline{u}}^{(e)} + \sum_{e=1}^{33} \underline{K}^{(e)} \underline{u}^{(e)} = \sum_{e=1}^{33} \underline{f}^{(e)} \quad (2.3.40)$$

Las ecs 2.3.39 ó 2.3.40 se pueden reordenar, de acuerdo con las observaciones indicadas a continuación.

De la fig 3.2 se puede observar que los desplazamientos del punto nodal 20 (u_{20} y v_{20}), así como sus segundas derivadas respecto al tiempo (\ddot{u}_{20} y \ddot{v}_{20}) aparecen en las correspondientes ecuaciones de equilibrio de los elementos finitos indicados con los números, 11, 12, 13, 18, 19, 20 y 21. Esta observación conduce a aseverar que el número de ecuaciones en que se pueden agrupar las ecuaciones 2.3.39 ó 2.3.40 es igual al número de puntos nodales multiplicado por el número de grados de libertad asociado a cada punto nodal. Entonces, las ecuaciones de equilibrio ordenadas, correspondientes a las ecs 2.3.39 ó 2.3.40 se pueden escribir como

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad (2.3.41)$$

donde las matrices \underline{M} y \underline{K} , denominadas matrices de masas y de rigideces de la estructura, y el vector \underline{P} , conocido como el vector de cargas de la estructura, se determinan con el ordenamiento de las ecuaciones siguientes:

$$\underline{M} = \sum_{e=1}^{33} \underline{M}^{(e)} \quad (2.3.42)$$

$$\underline{K} = \sum_{e=1}^{12} \underline{K}^{(e)} \quad (2.3.43)$$

$$\underline{P} = \sum_{e=1}^{12} \underline{F}^{(e)} = \underline{P}(t) \quad (2.3.44)$$

El vector \underline{U} , de la ecuación de equilibrio de la estructura (ec 2.3.41), es el vector de desplazamientos de la estructura y se construye con los vectores desplazamiento de cada punto nodal, según se muestra en la ec 2.3.45. El vector de aceleraciones de la estructura, $\ddot{\underline{U}}$, representa las segundas derivadas respecto al tiempo del vector \underline{U} .

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{15} \\ v_{15} \end{bmatrix} = \underline{U}(t) \quad (2.3.45)$$

El procedimiento sistematizado para llevar a cabo las ecs 2.3.42 a 2.3.44 es exactamente igual al que se utiliza en las estructuras esqueléticas.

2.2 Condiciones de frontera

Las ecuaciones de movimiento de la estructura (ecs 2.3.46) deben satisfacer valores prescritos de algunos componentes del vector \underline{U} , denominados condiciones de frontera.

En la fig 2.2, del ejemplo seguido, los valores de los desplazamientos de los puntos nodales 2, 9 y 25 son nulos. Esto se indica a continuación como

$$\underline{u}_2 = 0 \quad (2.3.46)_a$$

$$\underline{u}_9 = 0 \quad (2.3.46)_b$$

$$\underline{u}_{25} = 0 \quad (2.3.46)_c$$

Al hacer que las ecuaciones de movimiento (ec 2.3.41) satisfagan las condiciones de frontera, dadas por las ecs 2.3.46, se obtienen las ecuaciones siguientes

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{K} \dot{\underline{U}} = \underline{P} \quad (2.3.47)$$

en la ec 2.3.47 se puede observar que las condiciones de frontera (ecs 2.3.46) inciden en las matrices de masas \underline{M} y de rigideces \underline{K} y en el vector de cargas \underline{P} , que se transforman en \underline{M} , \underline{K} y \underline{P} , respectivamente.

La forma de introducir las condiciones de frontera en las ecuaciones de movimiento, es igual a como se hace en las estructuras esqueléticas.

2.3 Matriz de amortiguamiento

Aunque el modelo matemático de los sólidos, elásticos lineales no considera efectos disipativos, al utilizarse en la modelación de las estructuras reales, se le adiciona a la ec 2.3.41 un término correspondiente a las fuerzas disipativas del tipo viscoso lineal, como se indica a continuación:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{C} \dot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad (2.3.48)$$

donde $\dot{\underline{U}}$ es el vector de velocidades de la estructura, primera derivada respecto al tiempo de \underline{U} , y \underline{C} es la matriz de amortiguamientos de la estructura, generalmente cuantificada con el criterio de Rayleigh, mediante la ecuación siguiente

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \mu \underline{K} \quad (2.3.49)$$

α y μ son coeficientes que se determinan experimentalmente.

2.3.4 Condiciones iniciales

Para poder integrar las ecuaciones de equilibrio dinámico (ec 2.3.48) se requiere especificar el origen del movimiento, a partir del cual se empezará a cuantificar. Este origen del movimiento se conoce con el nombre de condiciones iniciales y queda establecido al especificar los vectores de desplazamiento \underline{U}_0 y de velocidad $\dot{\underline{U}}_0$ al inicio del movimiento (en el tiempo, $t=0$), es decir

$$\underline{U} \Big|_{t=0} = \underline{U}_0 \quad (2.3.50)$$

$$\underline{\dot{U}} \Big|_{t \rightarrow 0} = \underline{\dot{U}}_0 \quad (2.3.51)$$

2.3.5 Equilibrio estático

El equilibrio estático de las estructuras es un caso particular del movimiento, y es aquel en que el vector de cargas \underline{P} y el vector desplazamientos \underline{U} son independientes del tiempo. Al imponer esta condición a las ecuaciones de equilibrio dinámico (ec 2.3.48), se transforman en las siguientes

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad (2.3.52)$$

2.3.6 Solución de las ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio estático (ec 2.3.52) resultan ser un sistema de ecuaciones algebraicas, lineales simétricas no homogéneas. Su solución, ^{se} obtiene según los métodos descritos en el capítulo 4. Con el vector de desplazamientos de la estructura conocido (\underline{U}) se calculan cada uno de los vectores de desplazamientos nodales de los elementos finitos (\underline{u}^a) y se procede a cuantificar para cada uno de ellos, y en los puntos deseados, los siguientes conceptos:

- a) Los componentes del tensor de deformaciones, mediante las ecs 2.3.11, 2.3.12 y 2.3.13
- b) Los componentes del tensor esfuerzo, mediante la ec 2.3.16

Las ecuaciones de equilibrio dinámico (ec 2.3.48) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, de segundo orden, lineales, no homogéneas, acopladas cuya solución se indica en el capítulo 4. Conocidos los vectores de desplazamientos (\underline{U}), de velocidades ($\underline{\dot{U}}$) y de aceleraciones ($\underline{\ddot{U}}$) se procede como en el caso del problema estático a cuantificar los valores de los componentes de los tensores de esfuerzos y de deformaciones durante el movimiento.

3. FUNCIONES DE INTERPOLACION DE ELEMENTOS FINITOS

3.1 Generalidades

En capítulos anteriores se indicó que las ecuaciones del elemento finito se obtienen mediante los métodos variacionales (Rayleigh-Ritz) o de los residuos pesados (Galerkin). Sin embargo, existen algunas diferencias básicas en relación con el método del elemento finito ya que se caracteriza por:

- 1) La representación funcional global de una variable consiste de un ensamble de representaciones funcionales locales. Las integrales globales sobre el dominio de la estructura, Ω , se establece en función de un ensamble de integrales sobre dominios locales, Ω_e , de elementos finitos disjuntos.
- 2) Si se utiliza el método de Rayleigh-Ritz, el principio variacional global se construye como un ensamble de los principios variacionales aplicados a cada elemento finito.
- 3) Si se utiliza el método de Galerkin, las funciones de interpolación del elemento finito actúan como funciones de peso en la integral de Galerkin.

En general, el paso más crucial en el método del elemento finito consiste en la selección de funciones de interpolación adecuadas. Deben satisfacer ciertos criterios para que se logre la convergencia de la solución aproximada a la solución exacta, de la ecuación diferencial en cuestión.

La interpolación de elementos finitos se caracteriza por la forma del elemento finito y el orden de aproximación. En general, la selección de un elemento finito depende de:

- a) La geometría del dominio global.
- b) El grado de aproximación deseado en la solución.
- c) La facilidad de integración sobre el dominio del elemento.

El dominio global donde se desea integrar las ecuaciones diferenciales puede ser unidimensional, bidimensional o tridimensional. En la fig. 3.1 se indican las geometrías de algunos elementos finitos correspondientes a los dominios globales indicados.

En general, las funciones de interpolación son polinomios de varios grados pero también se pueden utilizar productos de polinomios con funciones exponenciales o trigonométricas. Si se utilizan polinomios lineales, únicamente se requieren los puntos nota-

les de las esquinas de los elementos finitos; (fig. 3.1) mientras - que si se desean polinomios cuadráticos se deben adicionar puntos nodales comprendidos en las fronteras de los elementos (fig. 3.2). Desde luego que se pueden utilizar aproximaciones con polinomios de orden superior, pero se necesitan adicionar puntos nodales.

3.2 Elementos unidimensionales

Se presentarán varios elementos que dependerán básicamente del polinomio utilizado para la interpolación.

3.2.1 Elementos convencionales

La expansión polinómica de la variable unidimensional, $u=u(x)$, se puede indicar como:

$$u = a_0 + a_i x^i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.2.1)$$

3.2.1.1 Interpolación lineal

En este caso, la ec 3.1.1 resulta ser

$$u = a_0 + a_1 x \quad (3.2.2)$$

para poder expresar el valor de u , en función de los valores en los puntos nodales (fig. 3.3)

$$u_1 = u \Big|_{x=0} \quad (3.2.3)$$

$$u_2 = u \Big|_{x=l} \quad (3.2.4)$$

Al sustituir la ec 3.2.2 en la ec 3.2.3 se obtiene

$$u_1 = a_0 \quad (3.2.5)$$

Al sustituir la ec 3.2.2 en la ec 3.2.4 resulta

$$u_2 = a_0 + a_1 l \quad (3.2.6)$$

De las ecs 3.2.5 y 3.2.6 se obtiene

$$a_0 = u_1 \quad (3.2.7)$$

$$a_1 = \frac{1}{l} (u_2 - u_1) \quad (3.2.8)$$

Al sustituir las ecs 3.2.7 y 3.2.8 en la ec 3.2.2 resulta

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \frac{x}{l} u_2 = N_i u_i \quad (3.2.9)$$

donde N_i se denominan funciones de interpolación y sus expresiones son:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l} \quad (3.2.10)$$

$$N_2 = \frac{x}{l} \quad (3.2.11)$$

3.2.1.2 Interpolación lineal normalizada

Si el sistema de referencia se selecciona como se indica en la fig. 3.4, se define una nueva variable adimensional como se indica a continuación

$$\xi = \frac{x}{h} \quad (3.2.12)$$

donde $h = \frac{1}{2} l$ y, de acuerdo con la ec 3.2.12, se puede indicar el siguiente comportamiento de la variable ξ :

$$\xi = 0 \quad \text{en el centro del elemento} \quad (3.2.13)a$$

$$\xi = -1 \quad \text{en el punto nodal 1} \quad (3.2.13)b$$

$$\xi = 1 \quad \text{en el punto nodal 2} \quad (3.2.13)c$$

Con base en la variable ξ , la ec 3.2.1 se puede escribir como:

$$u = a_0 + a_i \xi^i \quad (3.2.14)$$

y para el caso lineal se reduce a

$$u = a_0 + a_1 \xi \quad (3.2.15)$$

en donde las condiciones de frontera dadas, por las ecs 3.2.3 y 3.2.4 se indican a continuación:

$$u|_{\xi=-1} = u_1 \quad (3.2.16)$$

$$u|_{\xi=1} = u_2 \quad (3.2.17)$$

Al seguir la secuencia indicada en el inciso anterior las constantes a_0 y a_1 , de la ec 3.2.15, al utilizar las ecs 3.2.16 y 3.2.17 resultan ser:

$$a_0 = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \quad (3.2.18)$$

$$a_1 = \frac{1}{2} (u_2 - u_1) \quad (3.2.19)$$

y la ec 3.2.15 se puede escribir como

$$u = \frac{1}{2} (1 - \xi) u_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) u_2 = N_i u_i ; i=1,2 \quad (3.2.20)$$

en donde las funciones de interpolación N_i , resultan ser:

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (3.2.21)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (3.2.22)$$

3.2.1.3 Interpolación cuadrática

En este caso, la ec 3.1.1 toma la forma siguiente:

$$U = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (3.2.23)$$

y para poder cuantificar las tres constantes, a_0 , a_1 y a_2 se requiere conocer el valor de u en otro punto adicional a los extremos, como se indica en la fig. 3.5; en donde el punto adicional se seleccionará en el centro del elemento.

De acuerdo con la fig. 3.5, las condiciones de frontera resultan ser

$$u \Big|_{x=0} = u_1 \quad (3.2.24)a$$

$$u \Big|_{x=\frac{l}{2}} = u_2 \quad (3.2.24)b$$

$$u \Big|_{x=l} = u_3 \quad (3.2.24)c$$

Al hacer que la ec 3.2.23 satisfaga las condiciones establecidas por la ec 3.2.24 se obtienen las ecuaciones siguientes

$$u_1 = a_0 \quad (3.2.25)a$$

$$u_2 = a_0 + \frac{1}{2} l a_1 + \frac{1}{4} l^2 a_2 \quad (3.2.25)b$$

$$u_3 = a_0 + l a_1 + l^2 a_2 \quad (3.2.25)c$$

El sistema de ecuaciones anterior (ecs 3.2.25) se puede escribir en forma matricial como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}l & \frac{1}{4}l^2 \\ 1 & l & l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

Cuya solución resulta ser

$$a_0 = a_1 \quad (3.2.27)a$$

$$a_1 = \frac{1}{l} (-3 u_1 + 4 u_2 - u_3) \quad (3.2.27)b$$

$$a_2 = \frac{2}{l^2} (u_1 - 2 u_2 + u_3) \quad (3.2.27)c$$

y la ec 3.2.23 se puede escribir como

$$u = \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right) + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] u_1 + 4 \left(\frac{x}{l} \right) \left[1 - \frac{x}{l} \right] u_2 + \frac{x}{l} \left[-1 + 2 \left(\frac{x}{l} \right) \right] u_3 \quad (3.2.28)$$

o bien

$$u = N_i u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2.29)$$

donde

$$N_1 = 1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right) + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \quad (3.2.30)$$

$$N_2 = 4\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (3.2.31)$$

$$N_3 = \left(\frac{x}{l}\right) \left[-1 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right] \quad (3.2.32)$$

3.2.1.4 Interpolación cuadrática normalizada

Si el sistema de referencia se selecciona con la variable normalizada indicada en el inciso 3.2.1.2, según se muestra en la fig.3.6, la ec 3.2.23 se puede escribir como:

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \quad (3.2.33)$$

Con las condiciones de frontera dadas a continuación

$$u \Big|_{\xi=1} = u_1 \quad (3.2.34)a$$

$$u \Big|_{\xi=0} = u_2 \quad (3.2.34)b$$

$$u \Big|_{\xi=1} = u_3 \quad (3.2.34)c$$

Al seguir el procedimiento utilizado para cuantificar los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 , la ec 3.2.33 se puede escribir como

$$u = N_i u_i \quad (3.2.35)$$

donde

$$N_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (3.2.36)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \quad (3.2.37)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad (3.2.38)$$

3.2.1.5 Interpolación en coordenadas naturales

Si las funciones de interpolación se obtienen en función de variables espaciales adimensionales o normalizadas, entonces al sistema normalizado se le denomina sistema coordenado natural.

Como puede observarse, en los incisos 3.2.1.1 a 3.2.1.4 se han logrado expresar a las funciones de interpolación en términos de variables adimensionales (que pueden ser x/l o bien $\xi = x/h$) y en ambos casos se puede definir sistemas coordenados naturales, pero con orígenes diferentes.

3.2.2 Elementos con polinomios de Lagrange

A fin de evitar la solución de ecuaciones que se presentan en la determinación de los coeficientes del polinomio de interpolación - utilizado en el inciso 3.2.1, se puede utilizar el criterio de la interpolación Lagrangiana, expresada como

$$u = \sum_i l_i u_i = N_i u_i \quad (3.2.39)$$

en donde l_i representa a las funciones de interpolación de Lagrange, cuyas expresiones son:

$$l_i^n = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad (3.2.40)$$

en donde con el símbolo \prod se indica el producto de los binomios $x - x_j$ y $x_i - x_j$ sobre el rango de j

En esta interpolación, la longitud del elemento se divide en segmentos de igual tamaño por los n puntos nodales, donde $n = m + 1$ y m es el orden de aproximación.

Si la ec 3.2.40 se expresa en función de la variable adimensional $\xi = x/h$, se puede escribir como:

$$l_i^n = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (3.2.41)$$

En la fig. 3.7 se muestra esquemáticamente la división de la región del elemento para las ecs 3.2.40 y 3.2.41. A continuación se ejemplifica el uso de la interpolación de Lagrange para diversas órdenes de aproximación.

3.2.2.1 Interpolación lineal

En este caso $M=1$ y $n=2$, según se indica en la fig. 3.8 la interpolación de Lagrange, para diversas referencias, se indica a continuación.

a) Variable no normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.8a

$$N_1 = l_1^2 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - h}{0 - h} = 1 - \frac{x}{h} \quad (3.2.42)$$

$$N_2 = l_2^2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{h - 0} = \frac{x}{h} \quad (3.2.43)$$

b) Variable normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.8b

$$N_1 = l_1^2 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{0 - 1} = 1 - \xi \quad (3.2.44)$$

$$N_2 = l_2^2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - 0}{1 - 0} = \xi \quad (3.2.45)$$

c) Variable normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.8c

$$N_1 = l_1^2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{(-1) - 1} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.2.46)$$

$$N_2 = l_2^2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.2.46)$$

El orden $m=2$ y el número de puntos $n=3$, se indican en la fig. 3.9 y las expresiones para sus correspondientes variables se indican a continuación.

a) Variable no normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.9a

$$N_1 = l_1^3 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-h)}{(0-\frac{1}{2})(0-h)} = 1 - 3\frac{x}{h} + 2\left(\frac{x}{h}\right)^2 \quad (3.2.47)$$

$$N_2 = l_2^3 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-h)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-h)} = 4\frac{x}{h}\left[1 - \frac{x}{h}\right] \quad (3.2.48)$$

$$N_3 = l_3^2 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-h/2)}{(h-0)(h-h/2)} = \left(\frac{x}{h}\right)\left[2\frac{x}{h} - 1\right] \quad (3.2.49)$$

b) Variable normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.9 b

$$N_1 = l_1^3 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} = 2(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1) \quad (3.2.50)$$

$$N_2 = l_2^3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} = -4\xi(\xi - 1) \quad (3.2.51)$$

$$N_3 = l_3^3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - 1/2)} = 2\xi(\xi - \frac{1}{2}) \quad (3.2.52)$$

c) Variable normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.9c

Las expresiones son iguales a los primeros términos de las correspondientes ecs 3.2.50 a 3.2.52, pero el valor de las coordenadas cambian, y se indica a continuación

$$N_1 = \ell_1^3 = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1) \quad (3.2.53)$$

$$N_2 = \ell_2^3 = \frac{[\xi - (-1)][\xi - 1]}{[0 - (-1)][0 - 1]} = 1 - \xi^2 \quad (3.2.54)$$

$$N_3 = \ell_3^3 = \frac{[\xi - (-1)][\xi - 0]}{[1 - (-1)][1 - 0]} = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) \quad (3.2.55)$$

Como era de esperarse las ecuaciones 3.2.42 a 3.2.52 coinciden con sus casos correspondientes a las ecuaciones obtenidas en el inciso 3.2.1

3.2.3 Elementos con polinomios de Hermite

En las interpolaciones donde se desea además de la continuidad de la función, la continuidad de las derivadas de la misma, es más recomendable el uso de las funciones de interpolación de Hermite.

A fin de ejemplificar el uso de la interpolación de Hermite se indica, a continuación, el caso del elemento finito con dos puntos nodales y primeras derivadas continuas, en función de la variable normalizada, $\xi = x/h$

$$u(\xi) = h_i(\xi) u_i^0 + \hat{h}_i(\xi) u_i^1 ; \quad i = 1, 2 \quad (3.2.56)$$

que puede escribirse como

$$u(\xi) = N_i u_i \quad (3.2.57)$$

donde N_1 y N_2 son polinomios de Hermite, (fig. 3.10) cuyas expresiones son:

$$N_1 = h_1^0 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (3.2.58)$$

$$N_2 = h_2^0 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (3.2.59)$$

$$N_3 = h_1^1 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \quad (3.2.60)$$

$$N_4 = h_2^1 = \xi^3 - \xi^2 \quad (3.2.61)$$

$$u_1 = u \Big|_{\xi=0} = u_1^0 \quad (3.2.62)$$

$$u_2 = u \Big|_{\xi=1} = u_2^0 \quad (3.2.63)$$

$$u_3 = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = u_1^1 \quad (3.2.64)$$

$$u_4 = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = u_2^1 \quad (3.2.65)$$

Desde luego que se pueden considerar continuidad en derivadas de orden superior pero se requerirán polinomios de Hermite, también, de orden superior.

3.3 Elementos bidimensionales

Como se indica en la fig. 3.1, las geometrías de los elementos finitos bidimensionales más usados son el triángulo, el rectángulo y el cuadrilátero general. En este inciso se bosquejan las funciones de interpolaciones asociadas al triángulo y al rectángulo con

lados lineales. En el inciso 3.5, se considera la posibilidad de extender estos conceptos a geometrías planas mas complejas (cuadriláteros generales, con lados curvos).

En la expansión polinómica de los elementos finitos se busca el máximo orden del polinomio completo correspondiente a un número mínimo de grados de libertad (puntos nodales). Para determinar el número de terminos que se presentan en un polinomio de dos variables, es conveniente utilizar el triángulo de Pascal, mostrado en la fig. 3.11

3.3.1 Elemento triangular lineal en coordenadas cartesianas.

La representación polinómica mas simple de la función $u \doteq u(x, y)$ es la lineal (ver fig. 3.12) y su expresión es

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.2.1)$$

las condiciones de frontera correspondientes con los puntos nodales resultan ser

$$u \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = u_i ; \quad u \Big|_{\substack{x=x_j \\ y=y_j}} = u_j ; \quad u \Big|_{\substack{x=x_m \\ y=y_m}} = u_m \quad (3.3.2)$$

Al hacer que la ec 3.3.1 satisfaga las esc 3.3.2 se obtiene

$$u = \frac{1}{\Delta} \left\{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m \right\} \quad (3.3.3)$$

donde

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j \quad (3.3.4)$$

$$b_i = y_j - y_m \quad (3.3.5)$$

Como el número de términos que aparecen en un polinomio completo de orden n es $\binom{n+2}{2}$ (3.3.6) mínimo de terminos que se presentan en un polinomio de dos variables, es conveniente utilizar el triángulo de Pascal, mostrado en la fig. 3.11 y los coeficientes $a_j, a_m, b_j, b_m, c_j, c_m$ se obtienen mediante permuta-

ción cíclica de los subíndices en las ecuaciones 3.3.4 a 3.3.6.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 A_{ijm} \quad (3.3.7)$$

el área del triángulo ijm se indica con A_{ijm}

La ecuación 3.3 se puede escribir como

$$u = N_k u_k \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.3.8)$$

que en forma matricial resulta ser

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{U} \quad (3.3.9)$$

donde

$$\underline{N} = [N_i \quad N_j \quad N_m]_{(1 \times 3)} \quad (3.3.11)$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (3.3.12)$$

y las funciones de forma

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (3.3.13)$$

3.3.2 Elementos triangulares en coordenadas naturales

Como el número de términos que aparecen en un polinomio completo determina el número de puntos nodales requeridos, con base en el triángulo de Pascal, en la fig. 3.13 se muestran los puntos nodales requeridos para los polinomios de interpolación lineal, cuadrática y cúbica del elemento triangular.

En lugar de proceder como en el inciso 3.3.1, se utiliza el concepto de coordenados naturales que conduce a las coordenadas de área, L_1, L_2 , y L_3 (fig. 3.14), cuya relación con las coordenadas cartesianas esta dada por

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \quad (3.3.14)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \quad (3.3.15)$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 \quad (3.3.16)$$

donde la ec 3.3.16 establece que las coordenadas de área L_i , son linealmente dependientes.

Otra forma alternativa de definir las coordenadas de área se indican a continuación (Ver fig. 3.14)

$$L_1 = A_{p23} / A_{123} \quad (3.3.17)$$

$$L_2 = A_{p31} / A_{123} \quad (3.3.18)$$

$$L_3 = A_{p12} / A_{123} \quad (3.3.19)$$

Las funciones de forma N_i , para los elementos triangulares de la fig. 3.14 resultan ser:

3.3.2.1 Interpolación lineal

Se requiere únicamente, los 3 puntos nodales sobre las esquinas

$$N_i = L_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.20)$$

3.3.2.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 3 puntos nodales sobre las esquinas y 3 puntos nodales sobre los lados.

a) Para los puntos de esquina

$$N_i = (2 L_i - 1) L_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.21)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al centro

$$N_4 = 4 L_1 L_2 \quad (3.3.22)a$$

$$N_5 = 4 L_2 L_3 \quad (3.3.22)b$$

$$N_6 = 4 L_3 L_1 \quad (3.3.22)c$$

3.3.2.3 Interpolación cúbica

Se requieren 3 puntos nodales sobre las esquinas, 6 puntos nodales sobre los lados y un punto nodal interior, alineado con los puntos nodales de los lados.

a) Para los puntos de esquina

$$N_i = \frac{1}{2} (3 L_i - 1) (3 L_i - 2) L_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.23)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al tercio

$$N_4 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3 L_1 - 1) \quad (3.3.24)a$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3 L_2 - 1) \quad (3.3.24)b$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3 L_2 - 1) \quad (3.3.24)c$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3 L_3 - 1) \quad (3.3.24)d$$

$$N_8 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3 L_3 - 1) \quad (3.3.24)e$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_1 - 1) \quad (3.3.24) f$$

c) Para el punto interior

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 \quad (3.3.25)$$

3.3.3 Referencias para elementos rectangulares

Para esta geometría es conveniente usar coordenadas normalizadas y la forma de seleccionarlás se indica en la fig. 3.16.

Debido a la geometría del rectángulo, las funciones de forma se -- pueden generar, sistemáticamente, mediante productos de polinomios en las dos coordenadas.

3.3.4 Familia Lagrangiana para elementos rectangulares

Si las funciones de interpolación se construyen con los polinomios de Lagrange (ec 3.2.41), se pueden escribir como

$$N_i(\xi, \eta) = l_k^m(\xi) l_L^n(\eta) \quad (3.3.26)$$

donde N_i es la función de interpolación para cualquier punto nodal i ; l_k^m corresponde al polinomio de Lagrange para la variable ξ que pasa por m puntos nodales, k , localizados en líneas definidas mediante $\eta = \text{constante}$; y l_L^n es el polinomio de Lagrange para la variable η , que pasa por n puntos nodales, L , localizados mediante $\xi = \text{constante}$.

En la fig. 3.17 se muestran los puntos nodales requeridos para algunos miembros de la familia de Lagrange. El uso de estas funciones está muy limitado, tanto por el número de puntos nodales requeridos como por el número de términos parásitos que resultan en los polinomios, N_i .

3.3.5 Familia Serendipity para elementos rectangulares

Las funciones de interpolación de esta familia se obtuvieron, originalmente, por inspección y por esta razón Zienkiewicz les asigno el nombre de Serendipity, en similitud con la princesa de Serendip,

de la novela de Horace Walpole, famosa por sus descubrimientos ca suales.

Esta familia se originó por la conveniencia de que las funciones de interpolación dependan de puntos nodales localizados sobre los lados del elemento, como pueden verse en la fig. 3.18. Es necesario aseverar que las funciones generadas por los puntos localizados sobre los lados, generan polinomios completos hasta el grado tres; para aproximaciones cuantas o más, es necesario adicionar nu dos interiores.

Las funciones de forma para varias aproximaciones se indican a con tinuación:

3.3.5.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente los 4 puntos nodales sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) ; \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3.3.27)$$

3.3.5.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas y 4 puntos nodales sobre los lados.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) ; \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3.3.28)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al centro.

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) \quad \text{para } \xi_i = 0 ; \quad i = 5, 7 \quad (3.3.29)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) \quad \text{para } \eta_i = 0 ; \quad i = 6, 8 \quad (3.3.30)$$

3.3.5.3 Interpolación cúbica.

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas y 8 puntos nodales sobre los lados.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10]; \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3.3.31)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al tercio

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi \xi_i)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta \eta_i) \text{ para } \xi_i = \pm 1 \text{ y } \eta_i = \pm \frac{1}{3}; \quad i=7, 8, 11, 12 \quad (3.3.32)$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \eta \eta_i)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi \xi_i) \text{ para } \eta_i = \pm 1 \text{ y } \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad i=5, 6, 9, 10 \quad (3.3.33)$$

3.4 Elementos tridimensionales.

Al igual que el inciso 3.4, se bosquejan las funciones de interpolación para las geometrías simples formadas con superficies planas ya que en el inciso 3.5 se extienden estas funciones a geometrías más generales, como el hexaedro.

3.4.1 Elemento tetraedro lineal en coordenadas cartesianas

La función tridimensional $U=U(x,y,z)$ se puede representar en forma de polinomios lineales como se indica a continuación

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (3.4.1)$$

Las condiciones de frontera, correspondientes a los puntos nodales (ver fig. 3.19) resultan ser

$$U \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i \\ z=z_i}} = u_i; \quad U \Big|_{\substack{x=x_j \\ y=y_j \\ z=z_j}} = u_j; \quad U \Big|_{\substack{x=x_m \\ y=y_m \\ z=z_m}} = u_m; \quad U \Big|_{\substack{x=x_p \\ y=y_p \\ z=z_p}} = u_p \quad (3.4.2)$$

Al hacer que la ec 3.4.1 satisfaga las ecs 3.4.2 resulta:

$$\phi_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z$$

$$\phi_j = a_j + b_j x + c_j y + d_j z$$

$$\phi_m = a_m + b_m x + c_m y + d_m z$$

$$\phi_p = a_p + b_p x + c_p y + d_p z$$

$$U = \frac{1}{V_{ijmp}} \left(\phi_i U_i + \phi_j U_j + \phi_m U_m + \phi_p U_p \right) \quad (3.4.3)$$

donde V_{ijmp} , es el volumen del tetraedro formado con los puntos nodales i, j, m y p , cuantificado mediante

$$V_{ijmp} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.4.4)$$

Y los coeficientes a_i, b_i, c_i y d_i se cuantifican como se indica a continuación:

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.4.5)$$

$$b_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.4.6)$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} \quad (3.4.7)$$

$$d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \quad (3.4.8)$$

Las otras constantes ($a_j, b_j, c_j, d_j, a_m, b_m, c_m, d_m, a_p, b_p, c_p$ y d_p) se definen enteramente similar, a las correspondientes constantes a_i, b_i, c_i y d_i , mediante un intercambio cíclico de los subíndices en el orden p, i, j, m , con la convención establecida en la fig. 3.19.

La ec 3.4.3 se puede escribir, con las notaciones indicial y matricial, como se indica a continuación:

$$U = N_k U_k \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4.9)$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u} \quad (3.4.10)$$

donde

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m & N_p \end{bmatrix}_{(1 \times 4)} \quad (3.4.11)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_p \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (3.4.12)$$

y las funciones de forma, N_i :

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6 V_{ijmp} \quad (3.4.13)$$

3.4.2 Elementos tetra edros en coordenadas naturales

De manera similar al elemento triangular bidimensional, el número de puntos nodales requeridos para definir polinomios completos, - así como el tetraédro de Pascal, se muestra en la fig. 3.20.

Las coordenadas naturales de tetraédro se denominan coordenadas - de volumen, L_i ; $i=1,2,3,4$, cuya relación con las coordenadas cartesianas resulta ser (fig. 3.21).

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \quad (3.4.14)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \quad (3.4.15)$$

$$z = L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \quad (3.4.16)$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \quad (3.4.17)$$

La forma alternativa para definir las coordenadas de volumen se indica a continuación (fig. 3.21)

$$L_1 = V_{P_{234}} / V_{1234} \quad (3.4.18)$$

$$L_2 = V_{P_{134}} / V_{1234} \quad (3.4.19)$$

$$L_3 = V_{P_{124}} / V_{1234} \quad (3.4.20)$$

$$L_4 = V_{P_{123}} / V_{1234} \quad (3.4.21)$$

Las funciones de forma N_i , para los elementos tetraedros de la fig. 3.20 resultan ser.

3.4.2.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente los 4 puntos nodales sobre las esquinas.

$$N_i = L_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4.22)$$

3.4.2.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas y 6 puntos nodales sobre las aristas, que en este caso se suponen localizadas al centro.

a) Para los puntos de esquina

$$N_k = (2 L_k - 1) L_k \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4.23)$$

b) Para los puntos del centro de las aristas

$$N_5 = 4 L_1 L_2 \quad (3.4.24)$$

$$N_{10} = 4 L_2 L_4 \quad (3.4.25)$$

3.4.2.3 Interpolación cúbica

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas, 12 puntos nodales sobre las aristas localizadas a los tercios y 4 puntos nodales sobre las caras, alineados con los puntos nodales de las aristas.

a) Para los puntos de esquina

$$N_i = \frac{1}{2} (3L_i - 1) (3L_i - 2) L_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4.26)$$

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1) \quad (3.4.27)$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1) \quad (3.4.28)$$

⋮

c) Para los puntos sobre las caras

$$N_{17} = 27 L_1 L_2 L_3 \quad (3.4.29)$$

$$N_{18} = 27 L_1 L_2 L_4 \quad (3.4.30)$$

⋮

3.4.3 Familia Lagrangiana para prismas rectangulares

Las funciones de interpolación, N_i , se construyen directamente -- con el producto de tres polinomios de Lagrange, como se indica a continuación:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_k^m(\xi) l_L^n(\eta) l_M^p(\zeta) \quad (3.4.31)$$

donde ξ, η, ζ son las variables normalizadas y m, n y p son las subdivisiones a lo largo de cada arista (ver fig. 3.22). Al igual que en los elementos bidimensionales, la aplicación práctica de estos elementos es casi nula, por su ineficiencia.

3.4.4 Familia Serendipity para prismas rectangulares

Se obtienen con razonamientos enteramente similares a los usados en los elementos bidimensionales. En la fig. 3.23 se muestran los puntos nodales asociados a los elementos cuyas funciones de interpolación se indican a continuación:

3.4.4.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente 8 puntos nodales sobre las esquinas.

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad (3.4.32)$$

3.4.4.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 8 puntos nodales sobre las esquinas y 16 puntos nodales sobre las aristas y en este caso, se seleccionaron en los puntos medios.

a) Para los puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2) \quad (3.4.33)$$

$(i = 1, 2, 3, \dots, 8)$

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad i = 9, 10, 11, 12$$

$$\forall \xi_i = 0 ; \eta_i = \pm 1 ; \zeta_i = \pm 1 \quad (3.4.34)$$

3.4.4.3 Interpolación cúbica

Se requieren 8 puntos nodales sobre las esquinas y 24 puntos nodales sobre las aristas, que en este caso se localizaron a los tercios.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{64} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) [9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19] \quad (3.4.35)$$

$(i = 1, 2, 3, \dots, 8)$

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_i = \frac{9}{24} (1 - \xi^2)(1 + 9\xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad i=9, \dots, 16 \quad (3.4.36)$$

$$\begin{aligned} \forall \xi &= \pm \frac{1}{3} \quad ; \quad \eta_i = \pm 1 \quad ; \quad \zeta_i = \pm 1 \\ \vdots & \end{aligned}$$

3.4.5 Elementos anillos axisimétricos

Si la geometría del cuerpo es el de un sólido de revolución o axisimétrico (ver fig. 1-5), la configuración tridimensional se puede reducir a un bidimensional, debido a la posibilidad de eliminar la variable angular. Entonces, se pueden utilizar los elementos finitos del inciso 3.3, pero con las variables asociadas a los ejes radial y axial.

3.5 Elementos isoparamétricos

Para que cualquier geometría, relativamente compleja, se pueda representar con un número pequeño de elementos, se necesitan elementos finitos con formas más complejas que las descritas en los incisos 3.2 a 3.4. En este inciso se tratan geometrías distorsionadas (lados y superficies curvas) de los elementos de forma simple que conduzcan a geometrías arbitrarias, según se puede observar en la fig. 3.24; en donde los puntos asociados a las regiones regulares mapean a puntos de las regiones irregulares. En este mapeo, la referencia original del elemento se transforma en una referencia curvilínea. Si el mapeo es uno a uno, se puede establecer una correspondencia entre las coordenadas cartesianas y las curvilíneas, de la forma siguiente (caso tridimensional).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

Una vez establecida la relación dada por la ec 3.5.1, las funciones de forma se pueden especificar en las coordenadas locales y, mediante una serie de transformaciones, determinar los elementos correspondientes a una referencia arbitraria.

3.5.1 Transformación de coordenadas mediante funciones de forma

Si $N_i' = N_i'(\xi, \eta, \zeta)$ son las funciones de forma del elemento en las -- coordenadas locales (no deformadas), se puede escribir la relación siguiente:

$$x = N_1' x_1 + \dots + N_m' x_m = N_i' x_i = [N_1', \dots, N_m'] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \underline{N}' \underline{x} \quad (3.5.2)$$

$$y = N_1' y_1 + \dots + N_m' y_m = N_i' y_i = [N_1', \dots, N_m'] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \underline{N}' \underline{y} \quad (3.5.3)$$

$$z = N_1' z_1 + \dots + N_m' z_m = N_i' z_i = [N_1', \dots, N_m'] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \underline{N}' \underline{z} \quad (3.5.4)$$

donde x, y, z son las coordenadas en la referencia cartesiana de cualquier punto localizado en el elemento deformado, y $x_i, y_i, z_i, i=1, m$, las correspondientes coordenadas cartesianas de m puntos, seleccionados apropiadamente sobre la frontera del elemento.

Para asegurar la continuidad entre las fronteras de los elementos mapeados, basta con asegurar que las funciones de forma N_i' garanticen la continuidad de los elementos en la configuración no deformada.

La representación de la variable de campo, función U , definida en la región del elemento, en términos de las coordenadas curvilíneas (ξ, η, ζ) y las funciones de forma resulta ser.

$$U = N_i(\xi, \eta, \zeta) U_i = [N_1, \dots, N_n] \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{U} \quad (3.5.5)$$

donde $U_i, i=1, n$, son los valores de la variable U , en los n puntos nodales del elemento.

Para asegurar la continuidad de la función U (ec 3.5.5), basta con asegurar que las funciones de forma $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ utilizadas, garanticen la continuidad de U en las coordenadas del elemento no deformado.

Los puntos nodales (n) utilizados para definir la interpolación de la función U (ec 3.5.5) pueden estar o no estar relacionados con los puntos (m) empleados para definir la geometría del elemento --

(ecs 3.5.2 a 3.5.4). En la fig. 3.25 se muestran las relaciones - que se pueden presentar para un elemento plano (cuadrilátero con lados curvos) en donde las funciones de forma N_i' , $i=1, \dots, p$, para definir la geometría del elemento (ec 3.5.2 a 3.5.4) son cuadráticas; mientras que las funciones de forma N_i , para definir la función U (ec 3.5.5) puede ser lineal ($i=1, 4$), cuadrática ($i=1, 2$) o cúbica ($i=1, 2$).

Se llaman elementos isoparamétricos cuando se utilizan los mismos puntos para definir a la geometría y a la función ($n = m$) y, por lo tanto, las funciones de forma son las mismas, es decir.

$$N_i = N_i' \quad i=1, \dots, n \quad (3.5.6)$$

y en la actualidad son los elementos de uso más generalizado.

Se llaman elementos subparamétricos cuando $n < m$ y elementos superparamétricos cuando $n > m$.

3.5.2 Derivación de las funciones de forma

Considérese el sistema de referencia local ξ, η, ζ y su correspondiente sistema de referencia global x, y, z ; las derivadas parciales de las funciones de forma N_i , respecto a las variables locales, por la regla de la cadena, se pueden expresar como:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (3.5.7)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (3.5.8)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (3.5.9)$$

Las ecs 3.5.7 a 3.5.9 se pueden expresar en forma matricial, según se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

donde \underline{J} , denominada matriz Jacobiana, se puede cuantificar explícitamente con base en las ecs 3.5.2 a 3.5.4, ya que, por la ec 3.5.6, se conocen las funciones de forma en la referencia local (elementos isoparamétricos). La expresión de \underline{J} resulta ser:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (3.5.11)$$

En la ec 3.5.10 se puede conocer el término de la izquierda, ya que se conocen las N_i , por lo que se puede escribir la ecuación siguiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.5.12)$$

Para que exista \underline{J}^{-1} es necesario que el Jacobiano ($\det \underline{J}$) de la transformación sea diferente de cero, es decir

$$\det \underline{J} = |\underline{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| \quad (3.5.13)$$

3.5.3 Integración en coordenadas locales

En el método del elemento finito es muy frecuente cuantificar integrales sobre regiones de los diversos elementos finitos, como las indicadas a continuación:

$$V_I = \int_V G_V dV = \int_V G(x, y, z) dx dy dz \quad (3.5.14)$$

$$A_I = \int_A G_A dA = \int_A H(x, y) dx dy \quad (3.5.15)$$

$$L_I = \int_L G_L dA = \int_L F(x) dx \quad (3.5.16)$$

Debido a la complejidad, tanto de los integrandos como de las regiones de integración, es conveniente establecer las integrales anteriores en función de las coordenadas naturales y quedan como se indica a continuación:

$$V_I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G}_V(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.5.17)$$

$$A_I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G}_A(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta \quad (3.5.18)$$

$$L_I = \int_{-1}^1 \bar{G}_L(\xi) d\xi \quad (3.5.19)$$

Aunque las regiones de integración de las ecs 3.5.17 a 3.5.19 están bien definidas las funciones \bar{G}_V , \bar{G}_A y \bar{G}_L resultan, en general, sumamente complejas de tal manera que, para llevar a cabo las integraciones, es necesario un método numérico, que sea una aproximación al problema.

3.5.3.1 Integración numérica para rectángulos y prismas rectangulares.

La cuadratura recomendable es la Gaussiana en donde el error es del orden $O(\Delta^{2n})$. Con esta cuadratura, las ecs 3.5.17 a 3.5.19 se transforman en las siguientes.

$$V_I = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j H_m \bar{G}_V(\xi_i, \eta_j, \zeta_m) \quad (3.5.20)$$

$$A_I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j \bar{G}_A(\xi_i, \eta_j) \quad (3.5.21)$$

$$L_I = \sum_{i=1}^n H_i \bar{G}_L(\xi_i) \quad (3.5.22)$$

donde H_i son los coeficientes de peso asociado a las abscisas ξ_i , por donde se hace pasar la aproximación polinómica, cuyos valores se indican en la tabla 3.1

3.5.3.2 Integración numérica para triángulos y tetraédros

Las coordenadas locales de estos elementos difieren, respecto a las del inciso 3.5.3.2, en los siguientes puntos.

- i) Son linealmente dependientes y son mayores en número (uno mas) que las coordenadas cartesianas.
- ii) Los límites de variación son diferentes, ya que varían de 0 a 1.

A fin de continuar con el uso de las ecs 3.5.7 a 3.5.13 se puede hacer el siguiente cambio de variables (para el caso tridimensional).

$$\xi = L_1 \quad (3.5.23)$$

$$\eta = L_2 \quad (3.5.24)$$

$$\zeta = L_3 \quad (3.5.25)$$

$$1 - \xi - \eta - \zeta = L_4 \quad (3.5.26)$$

Como las funciones de forma N_i están dadas en función de las variables L_i , el cálculo de sus derivadas se podrán efectuar con expre-

siones de la forma siguiente:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial \xi} \quad (3.5.27)$$

Al utilizar las ecs 3.5.23 a 3.5.26 en la ec 3.5.27, resulta

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \quad (3.5.28)$$

de manera similar se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \quad (3.5.29)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_3} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \quad (3.5.30)$$

Las ecs 3.5.17 y 3.5.18 se adaptan a los correspondientes límites de integración y son:

$$V_I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta-\zeta} \bar{G}_V(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} \bar{G}_V(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_1 dL_2 dL_3 dL_4 \quad (3.5.31)$$

$$A_I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \bar{G}_A(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \bar{G}_A(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 \quad (3.5.32)$$

La aproximación numérica de las ecs 3.5.31 y 3.5.32, mediante la fórmula de Hammer, se indica a continuación:

$$V_I = \sum_{i=1}^n (\bar{G}_V)_i W_i^V \quad (3.5.33)$$

$$A_I = \sum_{i=1}^n (\bar{G}_A)_i W_i^A \quad (3.5.34)$$

donde el límite de la sumatoria (n) representa los puntos de integración considerados (ver tablas 3.2 y 3.3), el símbolo $()$ indica el valor de la función limitada por el paréntesis en las coordenadas de los puntos de integración (ver tabla 3.2 y 3.3) y W_i^v y W_i^A son los factores de peso correspondientes. En las tablas 3.2 y 3.3 se especifican todos los elementos para el uso de las fórmulas de Hammer.

4. ASPECTOS NUMERICOS DEL ELEMENTO FINITO

Con base en los desarrollos de los capítulos anteriores se puede aseverar que para poder aplicar el método del elemento finito, en la solución de los problemas que se presentan en la práctica profesional, es necesario el uso de una computadora digital. Por lo tanto, es necesario desarrollar programas de computadora que, con la información de la geometría, el material y las cargas, se construyan y se resuelvan las ecuaciones de equilibrio correspondientes, y se determinen, además, los elementos requeridos para el análisis y el diseño de las estructuras.

En este capítulo se resumen los aspectos numéricos que forman parte de los algoritmos asociados al método del elemento finito y que, desde el punto de vista de computación, controlan la eficiencia de los programas de computadoras asociados a los algoritmos en cuestión.

4.1 Solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

El modelo matemático correspondiente al sistema de ecuaciones algebraicas lineales se acostumbra representar como:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad (4.1.1)$$

donde \underline{A} es la matriz de coeficientes (de rigideces, \underline{K} , en nuestro caso) cuadrada de n renglones por n columnas, \underline{b} el vector de cargas (\underline{P} en nuestro caso) y \underline{x} el vector incógnita (los desplazamientos \underline{U} , en nuestro caso).

Los métodos de solución para resolver el modelo matemático dado por la ec 4.1.1, conforman dos grandes grupos y son: los métodos directos y los métodos iterativos. Los que actualmente se encuentran en uso en el método del elemento finito son los directos y de este grupo, los denominados compactos, que son los que se describen a continuación.

4.1.1 Métodos directos generales

En el álgebra lineal se demuestra que cualquier matriz \underline{A} , no singular, se puede descomponer en el producto de dos matrices triangulares, una inferior \underline{L} y otra superior \underline{U} , con la condición de que alguna de ellas este normalizada (todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad). Entonces, se puede escri-

bir lo siguiente:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{U} \quad (4.1.2)$$

Las matrices triangulares \underline{L} y \underline{U} , se cuantifican con la ec 4.1.2 y a tal proceso se denomina triangulación. Al sustituir la ec 4.1.2 en la ec 4.1.1 se obtiene

$$\underline{L} \underline{U} \underline{x} = \underline{b} \quad (4.2.3)$$

La ec 4.1.3 se puede escribir como

$$\underline{L} \underline{Y} = \underline{b} \quad (4.1.4)$$

donde

$$\underline{U} \underline{X} = \underline{Y} \quad (4.1.5)$$

Las ecs 4.1.4 y 4.1.5, conocidas como sustitución hacia adelante y sustitución hacia atrás, respectivamente, establecen que el proceso de triangulación (ec 4.1.2) transforma al sistema original, que es arbitrario (ec 4.1.1) en dos sistemas triangulares (ecs 4.1.4 y 4.1.5) que son mucho más simples de resolver.

De acuerdo con las dos posibilidades para seleccionar a la matriz normalizada, se obtienen los dos métodos siguientes:

4.1.1.1 Método de Gauss

El método de eliminación de Gauss en forma compacta se obtiene cuando la matriz triangular interior está normalizada, es decir

$$L_{ii}=1 \quad i=1, \dots, n \quad (4.1.6)$$

4.1.1.2 Método de Crout

El método de Crout en forma compacta se obtiene cuando la matriz normalizada es la triangular superior, o sea

$$U_{ii} = 1 \quad i=1, \dots, n \quad (4.1.7)$$

4.1.2 Métodos directos para matrices simétricas

Si la matriz de coeficientes es simétrica, es decir,

$$\underline{A}^T = \underline{A} \quad (4.1.8)$$

los métodos de Gauss y de Crout se pueden modificar para tomar en cuenta tal situación. Para ello, la ec 4.1.2, con base en la matriz identidad, \underline{I} , se puede escribir como:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{I} \underline{U} = \underline{L} \underline{D} \underline{D}^{-1} \underline{U} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \underline{D} \underline{U} \quad (4.1.9)$$

donde \underline{D} es una matriz diagonal, formada con la diagonal de \underline{U} , en el método de Gauss, o bien con la diagonal de \underline{L} , en el método de Grout.

4.1.2.1 Método de Gauss modificado.

Si la ec 4.1.9 queda arreglada como:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{D}^{-1} \underline{U} = \underline{L} \underline{D} \underline{\bar{U}} \quad (4.1.10)$$

donde

$$\underline{\bar{U}} = \underline{D}^{-1} \underline{U} \quad (4.1.11)$$

Al hacer que la ec 4.1.10 satisfaga la condición de simetría (ec 4.1.8) Se obtiene que

$$\underline{\bar{U}}^T \underline{D} \underline{L}^T = \underline{L} \underline{D} \underline{\bar{U}} \quad (4.1.12)$$

de donde se concluye lo siguiente

$$\underline{\bar{U}} = \underline{L}^T \quad (4.1.13)$$

Al sustituir la ec 4.1.13 en la ec 4.1.10 se obtiene el proceso de triangulación para el método de Gauss modificado para matrices simétricas y resulta ser

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \quad (4.1.14)$$

La ec 4.1.14 establece que el proceso de triangulación queda definido por una matriz triangular inferior normalizada y una matriz diagonal.

El proceso de sustitución se obtiene al sustituir la ec 4.1.14 en la 4.1.1 y resulta

$$\underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \underline{X} = \underline{b} \quad (4.1.15)$$

La ec 4.1.15 se puede escribir como

$$\underline{L} \underline{Y} = \underline{b} \quad (4.1.16)$$

$$\underline{D} \underline{L}^T \underline{x} = \underline{Y} \quad (4.1.17)$$

La ec 4.1.16 es la sustitución hacia adelante y la ec 4.1.17 la sustitución hacia atrás

4.1.2.2 Método de Crout modificado

Si la ec 4.1.9 queda arreglada como

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \underline{D} \underline{U} = \underline{\bar{L}} \underline{D} \underline{U} \quad (4.1.18)$$

donde

$$\underline{\bar{L}} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \quad (4.1.19)$$

Al hacer que la ec 4.1.18 satisfaga la condición de simetría (ec 4.1.8) resulta que

$$\underline{U}^T \underline{D} \underline{L}^{-T} = \underline{\bar{L}} \underline{D} \underline{U} \quad (4.1.20)$$

la ec 4.1.20 establece que

$$\underline{\bar{L}} = \underline{U}^T \quad (4.1.21)$$

Al sustituir; la ec 4.1.21 en la ec 4.1.18 se obtiene el proceso de triangulación para el método de Crout modificado para matrices, que se indica como

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D} \underline{U} \quad (4.1.22)$$

La ec 4.1.22 establece que el proceso de triangulación queda definido por una matriz triangular superior normalizada y una matriz diagonal.

Al comparar las ecs 4.1.14 y 4.1.22, que definen los procesos de triangulación para los métodos de Gauss y de Crout, modificados para matrices simétricas, se puede concluir que no existe diferencia entre ellos y los métodos modificados pueden llamarse método de Gauss-Crout.

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de sustitución hacia adelante y hacia atrás, en notación de matrices triangulares superiores normalizadas, se puede escribir como se indica a continuación (ya que $\underline{U} = \underline{L}^T$)

$$\underline{U}^T \underline{Y} = \underline{b} \quad (4.1.23)$$

$$\underline{D} \underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad (4.1.24)$$

4.1.2.3 Método de Cholesky

Se puede considerar como una variante del método de Gauss-Crout, para el caso en que la matriz \underline{A} sea positiva definida. Entonces

la ec 4.1.19 se puede escribir como

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D}^{1/2} \underline{D}^{1/2} \underline{U} = \underline{U}^{*T} \underline{U}^* \quad (4.1.25)$$

donde la matriz triangular $\underline{U}^* = \underline{D}^{1/2} \underline{U}$ ya no esta normalizada.

Las sustituciones hacia adelante y hacia atrás se obtienen al sustituir; la ec 4.1.25 en la ec 4.1.1 y resultan ser:

$$\underline{U}^{*T} \underline{y} = \underline{b} \quad (4.1.26)$$

$$\underline{U}^* \underline{x} = \underline{y} \quad (4.1.27)$$

4.1.24 selección y organización del método de solución

La selección del método debe hacerse con base en el menor número de operaciones consumidoras de tiempo en la computadora. Para matrices simétricas que es el caso de interés, el método de Gauss-Crout, ordenado en forma inteligente, efectua menos operaciones que el de Cholesky y es el que se recomienda. Su algoritmo se resume en la tabla 4.1

Aunque en los desarrollos de las ecuaciones de los métodos de solución se emplearon varios arreglos matriciales, y vectoriales, en la computadora se debe utilizar el menor número de ellos ya que, en general, la capacidad de la memoria rápida esta limitada. En la tabla 4.2 se presentan las subrutinas del algoritmo de Gauss-Crout, en donde se utiliza un arreglo matricial y un arreglo vectorial, por las razones indicadas a continuación

- a) La matriz diagonal, \underline{D} , se guarda en la diagonal de la matriz original \underline{A} y la matriz triangular superior normalizada se guarda en el triángulo superior de la matriz original \underline{A} . Lo anterior se puede observar en la subrutina TGCCC3 de la tabla 4.2, en donde se entra con la matriz original \underline{A} .
 - b) El vector \underline{y} se guarda en el vector \underline{b} (sustitución hacia adelante) y al final, el vector \underline{x} es el que queda guardado en el vector \underline{b} (sustitución hacia atrás). Lo anterior se indica en la subrutina SGCCC3 de la tabla 4.2, donde se entra con la matriz triangularizada y el vector de cargas.
- Otro aspecto relacionado con la organización del método de solución consiste en cómo se lleven a cabo las operaciones matriciales de los algoritmos. Como una recomendación a priori que se justifica en el inciso 4.1.3, las operaciones con las matrices conviene

realizarlas por columnas y en las subrutinas de la tabla 4.2 ya se incluye esta recomendación.

4.1.3 Organización de las ecuaciones de equilibrio

El ordenamiento de las ecuaciones de equilibrio depende de la numeración de los puntos nodales y es la que determina la configuración de los coeficientes de la matriz A , que es de la forma mostrada en la fig 4.1, para matrices simétricas. De acuerdo con la fig 4.1, la información correspondiente al arreglo matricial A se puede manipular con menor o mayor eficiencia, tanto operativa como de capacidad, si se guarda en los arreglos descritos a continuación

4.1.3.1 Arreglos cuadrados

Este arreglo es el más elemental (fig 4.1) y, de hecho, los algoritmos de las tabla 4.1 están desarrollados para estos arreglos. A continuación se resumen sus desventajas numéricas

- a) Existe gran desperdicio de espacio en la memoria rápida por que, al menos, se almacenan los $\frac{1}{2} n (n-1)$ elementos que no se utilizan, ya que no se operan con ellos (cantidades bajo la diagonal principal de la fig 4.1)
- b) Existe otro desperdicio de espacio al guardar cantidades nulas, localizadas arriba de los contornos mostrados en la fig 4.1. Como con estas cantidades si se opera, también existe desperdicio de tiempo.

La localización de los elementos en estos arreglos es directa

4.1.3.2 Arreglos rectangulares (en banda)

En la fig 4.2 se muestran los coeficientes que definen a la matriz A , comprendidos entre la banda limitada por la diagonal principal y el contorno de banda, indicados en la fig 4.1. Estos coeficientes forman un arreglo rectangular denominado arreglo en banda, cuyas desventajas se resumen a continuación

- a) Existe todavía desperdicio de espacio, porque se almacenan elementos que no existen en la matriz A ; como son los ceros que aparecen en el triángulo inferior derecho de la fig 4.2 que, desde luego no se opera con ellos.

b) Existe otro desperdicio de espacio al guardar los ceros que existen entre los contornos de silueta y de banda, mostrados en la fig 4.1. Puesto que con estos ceros si se opera, también existe desperdicio de tiempo.

Para la localización de los elementos en este arreglo, en relación con el arreglo cuadrado, no se requiere información adicional al ancho de banda, y se puede definir una relación que identifiquen a las columnas, ya que son las únicas que se distorsionan

4.1.4 Arreglos unidimensionales (en silueta)

En la fig 4.3 se muestran los coeficientes que definen a la matriz A , comprendidos entre la diagonal principal y el contorno de silueta, indicados en la fig 4.1. Estos coeficientes forman un arreglo unidimensional, al colocar las columnas una tras otra.

En este arreglo no se puede hablar de desperdicio de espacio ni operativo, ya que se eliminan todos los ceros no operativos y, por lo tanto, es el arreglo más eficiente que hasta la fecha se ha logrado. Para la localización de los elementos en este arreglo en relación con el arreglo cuadrado, se requiere un arreglo adicional (como el IA mostrado en la fig 4.3) en donde se especifique la localización del elemento de la diagonal principal correspondiente a cada columna. Con este arreglo se puede definir una relación que identifique tanto a los renglones como a las columnas distorsionadas al pasar al arreglo unidimensional.

4.2 Solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

4.2.1 Introducción

El modelo matemático correspondiente a las ecuaciones de equilibrio dinámico de los medios continuos modelados con la teoría de la elasticidad se indica con las ecs 2.3.48 a 2.3.51.

La solución de las ecs 2.3.48 puede obtenerse mediante la aplicación de los procedimientos clásicos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Sin embargo, tales métodos resultan, en general, ineficientes para los sistemas estructurales. Por tal razón se han desarrollado técnicas especiales que toman

en cuenta las características de las matrices \underline{K} , \underline{C} y \underline{M} , para mejorar la eficiencia del método de solución. Tales procedimientos conducen a dos clases de métodos denominados, directos y de superposición modal. Los métodos directos integran a la ec 2.3.48 en forma directa, sin ninguna transformación. Los que interesan son los de paso simple, y se basan en las ideas:

- 1) Se satisface el equilibrio únicamente en puntos discretos a intervalos Δt , denominado paso de integración (fig. 4.4)
- 2) Se supone conocida la variación, en el intervalo Δt , de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Las ideas anteriores conducen a métodos aproximados, y la aproximación y el costo de cada método dependen de la variación que se elija. Los métodos directos que se utilizan con mayor frecuencia se listan a continuación:

- a) Método de diferencias centrales
- b) Método de Houbolt
- c) Método Theta de Wilson
- d) Método Beta de Newmark
- e) Método Alfa de Hilber
- f) Método cúbico de Argyres

La diferencia básica entre estos métodos se encuentra en la forma en que se aproxima la respuesta en el intervalo Δt .

En los métodos de diferencias centrales y de Houbolt, se emplea una aproximación de las aceleraciones y velocidades en términos de los desplazamientos, mediante diferencias finitas.

En el método Theta de Wilson, se supone una variación lineal en el intervalo $[t, t + \theta \Delta t]$, donde el parámetro $\theta > 1$, controla la convergencia y estabilidad del método.

En el método Beta de Newmark, se generaliza la variación lineal de la aceleración mediante dos parámetros γ y β .

En el método Alfa de Hilber se emplea la misma aproximación que el Beta de Newmark pero introduce un término perturbador que se controla mediante un parámetro α .

El método cúbico de Argyris, la fuerza de inercia se aproxima mediante una variación cúbica en el intervalo Δt

El propósito que se persigue en cualquier método de integración numérica es que el método sea eficiente en el contexto de una buena apro



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

DUCTILIDAD Y COMPORTAMIENTO SISMICO

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

JULIO, 1980



DUCTILIDAD Y COMPORTAMIENTO SISMICO**

L. Esteva*

RESUMEN

Se describen las relaciones que ligan demandas de ductilidad con resistencia y rigidez en sistemas simples sometidos a excitación sísmica, así como algunos problemas que se encuentran al tratar de extrapolar dichas relaciones a sistemas complejos, representativos de los que encuentran los ingenieros en la práctica de diseño. La descripción citada se orienta a la identificación de condiciones que influyen en la capacidad de las estructuras para responder dúctilmente ante temblores sin fallar, y a la definición de los criterios pertinentes de diseño estructural.

ABSTRACT

A description is provided of the relationships tying ductility demands with strength and stiffness in simple systems subjected to seismic excitation, as well as of some problems found when trying to extrapolate those relationships to complex systems, representative of those found in design practice. The description mentioned aims at identifying those conditions influencing structural capacity to respond in a ductile manner to earthquakes without failing and at defining the corresponding criteria of structural design.

* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México 20, D. F. MEXICO

** Resumen de una conferencia presentada en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Barcelona

DUCTILIDAD Y COMPORTAMIENTO SISMICO*

L. Esteva*

1. Naturaleza del diseño sísmico

El diseño en Ingeniería se halla arraigado en la necesidad social de optimar. Implica considerar acciones alternativas, estimar sus consecuencias y hacer la mejor selección. En Ingeniería sísmica, cada posible línea de acción incluye la adopción de un sistema estructural y un criterio de diseño sísmico, mientras que la evaluación de las consecuencias implica estimar respuestas estructurales y costos esperados de daños. Los criterios usuales de diseño sísmico adoptan coeficientes de cortante y ordenadas espectrales como medidas de la respuesta estructural, ya que esta se expresa en general en términos de aceleraciones y fuerzas laterales equivalentes actuando sobre sistemas lineales. Pero estas variables no son sino medidas indirectas del comportamiento del sistema durante temblores: sirven para controlar los valores de variables más significativas, tales como deflexiones laterales de los sistemas no lineales reales, ductilidades locales y de conjunto, y márgenes de seguridad con respecto a falla por inestabilidad (efectos de segundo orden). En vista de que las relaciones entre variables de control y respuesta real dependen del tipo y características del sistema estructural, la comprensión de estas relaciones es requisito para el logro de diseños adecuados. Este concepto se opone a la aplicación ciega de requisitos reglamentarios: en diseño sísmico, más que en otros campos de Ingeniería, es fácil caer en la aplicación estricta, pero ciega, de las más avanzadas normas y,

sin embargo, producir una estructura destinada a comportarse pobremente.

La optimación que es meta del diseño sísmico puede expresarse en términos de varios objetivos directos: el diseño sísmico trata de proporcionar niveles adecuados de seguridad con respecto al colapso ante temblores excepcionalmente intensos, así como con respecto a daños a construcciones adyacentes; busca también proteger a las construcciones contra daños materiales excesivos bajo la acción de temblores de intensidad moderada, asegurar la facilidad de los trabajos de reparación, reconstrucción o refuerzo en caso de daños, y proporcionar protección contra la acumulación de daño estructural durante series de temblores. Finalmente, se trata de preservar la seguridad y la comodidad de los ocupantes y del público en general, logrando que la respuesta estructural durante temblores de intensidad moderada no exceda ciertos niveles de tolerancia, y evitando el pánico durante temblores de intensidad moderada o alta, particularmente en edificios en donde se espera frecuente aglomeración de personas.

La consecución de los objetivos anteriores requiere mucho más que el dimensionamiento de los miembros estructurales para fuerzas internas dadas. Es indispensable tomar en cuenta explícitamente dichos objetivos, así como los problemas relacionados con la respuesta estructural no lineal y con el comportamiento de materiales, miembros y conexiones sometidos a varios ciclos de carga alternada. Implica también la identificación de condiciones de servicio y la formulación de los criterios de aceptación correspondientes.

2. Comportamiento no lineal, ductilidad y respuesta sísmica

Se dice que un sistema estructural es dúctil si es capaz de soportar deformaciones importantes a carga prácticamente constante, sin alcanzar niveles excesivos de daño o de disminución de la resistencia ante aplicaciones subsecuentes de cargas. Las curvas a y b en la fig 1 muestran relaciones típicas entre carga (P) y deflexión (D) para la primera aplicación de carga en sistemas dúctiles y frágiles, respectivamente. La curva a corresponde a la respuesta bajo carga lateral de un marco de concreto reforzado adecuadamente detallado, en donde los efectos de esbeltez no son significati-

* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México 20. D. F. MEXICO

**Resumen de una conferencia presentada en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Barcelona

vos: la curva b es típica de mampostería de bloques huecos con escaso refuerzo. Para estructuras que deban soportar sismos, no puede inferirse comportamiento dúctil simplemente de observar curvas carga-deformación para el primer ciclo de carga, ya que el daño producido durante los primeros ciclos puede deteriorar la capacidad de absorción de energía del sistema para ciclos posteriores: la rigidez puede degradarse en forma apreciable, como ocurre, en muros de cortante de albañilería o en marcos de concreto reforzado detallados de manera deficiente.

La capacidad de sistemas estructurales para absorber energía mediante comportamiento histerético sirve de apoyo a los criterios convencionales de diseño sísmico, que requieren que las estructuras se diseñen para fuerzas laterales de magnitud muy inferior a la necesaria para mantenerlas dentro de su intervalo de comportamiento lineal durante temblores severos. Así la seguridad contra colapso ante sismos puede lograrse haciendo una estructura resistente, haciéndola dúctil o diseñando para una combinación económica de ambas propiedades. Para algunos tipos de materiales y miembros estructurales, la ductilidad es difícil de lograr, y la economía dicta la conveniencia de diseñar para cargas laterales relativamente elevadas; para otras, es mucho más barato lograr ductilidad que resistencia, y la práctica de diseño refleja este hecho. Pero el empleo de materiales dúctiles no implica necesariamente el logro de sistemas dúctiles; por ejemplo, las concentraciones de esfuerzos en juntas soldadas pueden propiciar la ocurrencia de falla prematura, de naturaleza frágil, en dichas juntas, y los efectos $P - \Delta$ (interacción entre deflexiones laterales y fuerzas internas causadas por la acción de cargas gravitacionales actuando sobre la estructura deformada) pueden ocasionar falla por inestabilidad cuando la rigidez lateral efectiva es demasiado baja.

En este trabajo se describen las relaciones cuantitativas que ligan demandas de ductilidad con resistencia y rigidez en sistemas simples sometidos a excitación sísmica, así como algunos problemas que se encuentran al tratar de extrapolar dichas relaciones a sistemas complejos, representativos de los que encuentran los ingenieros en la práctica de diseño. La descripción citada se orienta a la identificación de condiciones que influyen en la capacidad de las estructuras para respon-

der dúctilmente ante temblores sin fallar, y a la definición de los criterios pertinentes de diseño estructural.

3. Ductilidad local y global

El comportamiento dúctil no lineal de sistemas complejos resulta en general de las deformaciones dúctiles locales, o concentradas, que ocurren en las secciones particulares de una estructura dada en donde se alcanzan deformaciones de fluencia. La ductilidad de conjunto, o global, es una propiedad de una curva carga-deformación expresada en términos de la resultante de las cargas externas que actúan en una porción importante de un sistema dado; por ejemplo, los marcos de edificios suelen tratarse como vigas de cortante para fines de estimar su respuesta dinámica no lineal ante excitación sísmica. Las ductilidades globales se expresan entonces en términos de las curvas que ligan fuerzas cortantes con deformaciones laterales en cada entrepiso. En general, el valor numérico adoptado por la ductilidad global en un entrepiso no coincide con los valores de las ductilidades concentradas que se desarrollan en los puntos correspondientes del entrepiso, ya que la ductilidad del conjunto es función de la relación entre las contribuciones a la deformación de entrepiso de las deformaciones dúctiles concentradas y de las elásticas distribuidas. En sistemas que no pueden idealizarse como vigas de cortante, las relaciones entre ductilidades de conjunto y locales dependen de las configuraciones deformadas de dichos sistemas, y por tanto varían durante un sismo dado. En forma aproximada, pueden adoptarse las relaciones entre ductilidad global y local que correspondan a la configuración que se obtiene de considerar que las deformaciones máximas de los entrepisos ocurren simultáneamente.

La ductilidad global disponible puede controlarse mediante el diseño y la ejecución de los detalles estructurales que permitan el desarrollo de ductilidades locales adecuadas. La demanda local de ductilidad varía entre puntos diferentes de un sistema complejo. En un punto dado, dicha demanda es función de la resistencia local y de la variación de la resistencia en todo el sistema. Esto es consecuencia de la interacción entre la disipación de energía por histéresis en diversas secciones. En marcos de edificios, la va-

riabilidad en la ductilidad requerida en diversos puntos suele ser consecuencia de la superposición de las fuerzas internas debidas a cargas permanentes y a excitaciones accidentales. Influyen en dicha ductilidad el orden en que se alcance el límite de cedencia en los diversos puntos y la interacción entre momentos flexionantes, fuerzas cortantes y fuerzas axiales, entre otros factores.

4. Respuesta dinámica de sistemas simples elasto-plásticos

La idealización más usual de estructuras dúctiles es el sistema elasto-plástico (fig 2). Para ellos se define el factor de ductilidad como el cociente de la deformación máxima desarrollada entre la que corresponde al límite de cedencia: $Q = D/D_y$. Si se analiza la respuesta de sistemas elasto-plásticos de un grado de libertad y de rigidez y masa dadas ante excitaciones sísmicas, y se obtienen curvas de las deformaciones de cedencia que deben caracterizar a dichos sistemas para lograr demandas de ductilidad que no excedan de ciertos valores dados, se observa que, para periodos naturales de vibración que no sean demasiado cortos, las deformaciones de cedencia que se requieren — y por tanto los correspondientes coeficientes de cortante en la base — varían en razón inversa con la ductilidad. La fig 3 ilustra esta afirmación para el temblor de El Centro, 1940. En las abscisas se tienen frecuencias naturales f en escala logarítmica, y en las ordenadas, pseudo-velocidades (obtenidas como el producto de frecuencia natural por deformación de cedencia requerida) en el mismo tipo de escala, para diversos valores del factor de ductilidad. Dada la forma en que se definieron las ordenadas en esta figura, es fácil demostrar que las deformaciones requeridas de cedencia pueden leerse refiriéndose a un sistema de rectas a 45° que suben de izquierda a derecha, y que las pseudo-aceleraciones $(2\pi f)^2 D_y$ pueden leerse tomando como base un sistema de rectas a 45° que bajan de izquierda a derecha. Las curvas obtenidas según se acaba de describir constituyen los espectros de deformación para sistemas elasto-plásticos. En la figura se observa que para frecuencias naturales que no excedan de 1 cps, las ordenadas espectrales son aproximadamente proporcionales al recíproco del factor de ductilidad. Teniendo en cuenta que la deformación lateral D es igual a la de cedencia D_y multiplicada por

el factor de ductilidad Q , la proporcionalidad inversa aproximada entre D_y y Q implica que para periodos naturales mayores que 1 seg, D es prácticamente independiente de Q y por tanto de la resistencia lateral del sistema. Para periodos naturales cortos, la deformación de cedencia y la pseudoaceleración espectrales resultan poco sensibles a la ductilidad, y en el límite, para periodos naturales nulos, o estructuras infinitamente rígidas, la pseudoaceleración es igual a la máxima aceleración del terreno, y la deformación total $D = QD_y$ es proporcional a la ductilidad. En otras palabras, la deformación total es prácticamente insensible al factor de ductilidad para periodos naturales moderados y largos, y tiende a ser proporcional a dicho factor para periodos muy cortos; la pseudoaceleración espectral es inversamente proporcional al factor de ductilidad para periodos naturales moderados y largos, y se torna casi insensible a dicho factor para periodos muy cortos. En consecuencia, para sistemas elasto-plásticos de un grado de libertad y de periodo natural no menor que 0.8 seg, aproximadamente, las aceleraciones espectrales de diseño pueden tomarse iguales a las que corresponden a sistemas lineales divididas entre el factor de ductilidad permisible, según el tipo de estructura; para estructuras de periodos cortos las reducciones que pueden lograrse en las fuerzas laterales de diseño son menos sensibles a la ductilidad. En estructuras que hayan de construirse sobre terreno blando, el límite aproximado de 0.8seg deberá tal vez subirse, teniendo en cuenta los periodos dominantes del movimiento del terreno. La poca eficiencia de la ductilidad para reducir las ordenadas espectrales en el intervalo de periodos menores que los dominantes del movimiento puede también interpretarse en términos del alargamiento del periodo de vibración efectivo de un sistema que resulta de su respuesta no lineal y de la tendencia general de crecimiento de las ordenadas espectrales con el periodo natural en el intervalo citado. Aunque el problema no ha sido suficientemente estudiado, las normas de diseño sísmico de la Ciudad de México proponen espectros de aceleraciones en terreno blando caracterizados por ordenadas constantes para un amplio intervalo de periodos naturales menores que los dominantes del terreno, claramente identificados en los espectros elásticos (fig 4).

Las conclusiones que anteceden son válidas para sistemas que puedan idealizarse como elasto-plásticos. Pa-

ra algunos sistemas estructurales tal idealización no es válida. La curva carga-deformación puede caracterizarse por límites de cedencia distintos para cada sentido de aplicación de la carga; la capacidad de absorción de energía por histéresis para una deformación dada puede reducirse drásticamente de ciclo a ciclo, como consecuencia de las deformaciones residuales en elementos, como los cables de arriostramiento, que sólo pueden tomar fuerzas de un mismo signo; los ciclos de histéresis son muy angostos en marcos de concreto presforzado; la ocurrencia de daños puede causar la degradación de las rigideces en las curvas carga-deformación después de unos cuantos ciclos, y la influencia de efectos de esbeltez puede dar lugar a pendientes negativas significativas en el intervalo posterior a la cedencia. Cualquiera de estos efectos puede conducir a coeficientes sísmicos superiores a los aplicables al caso elasto-plástico convencional.

5. Ductilidad y deterioro.

La fig 5 representa el caso típico de respuesta ante carga altamente sin deterioro. Se trata de una junta entre trabe y columna de una estructura de acero, sometida a momentos de igual signo en los extremos de las trabes (Krawinkler et al, 1976). En las ordenadas se muestra la suma de momentos y en las abscisas la distorsión angular del tablero en la zona de unión. Se aprecia en ella el efecto Bauschinger, es decir, la desaparición de la ley prácticamente bilineal carga-deformación válida para la primera aplicación de carga, y la sustitución de la curva correspondiente por otra en que las pendientes varían gradual y monótonicamente, desde un máximo para cargas pequeñas, hasta un mínimo, para deformaciones grandes. Los cambios de pendientes, y por tanto en la capacidad de disipación de energía por histéresis, son significativos sólo entre la primera aplicación de carga y la curva de descarga inmediata. A partir de ella, los ciclos de histéresis son prácticamente estables para un número de repeticiones superior al que puede ocurrir bajo la acción de unos cuantos temblores. Esta condición favorece la disipación de energía cinética durante sismos intensos y contribuye a controlar amplitudes de respuesta y niveles de daños.

No todas las construcciones se caracterizan por curvas estables y de gran capacidad de disipación como

estas: un ejemplo de lo contrario se mostró en la fig 1b. Estas propiedades dependen del material empleado y de los modos de falla que rijan el comportamiento; en sistemas estructurales, dependen de los detalles constructivos en los miembros y en las uniones. En construcciones de acero soldadas, la condición para obtener curvas como las de la fig 5 es contar con factores de seguridad suficientemente elevadas contra inestabilidad local; sin embargo, las esbelteces de los miembros que se emplean conducen con frecuencia a curvas como las de la fig 6, características de sistemas en que es significativa la inestabilidad de conjunto.

En estructuras de concreto, el logro de ductilidades y capacidades de disipación de energía adecuadas requiere estudio cuidadoso de uniones, anclajes, porcentajes de refuerzo, factores de seguridad en distintos modos de falla, entre otros conceptos. El estudio experimental de estas variables ha recibido atención durante los últimos años. Bertero y Popov (1975) estudiaron el comportamiento ante carga alternante de subconjuntos constituidos por tramos de vigas y columnas (fig 7). Las variables analizadas incluyeron el tipo y cantidad de refuerzo en las juntas y en los extremos de los miembros (fig 8), la influencia de la inestabilidad (fig 9) y de la fuerza cortante (fig 10) y el deslizamiento de las juntas (fig 11). Es clara la influencia que estas variables pueden tener en ductilidad y en capacidad de absorción de energía.

Las vigas de acoplamiento entre muros rigidizantes se caracterizan a menudo por relaciones elevadas de peralte a claro, lo que ocasiona relaciones elevadas de fuerza cortante a momento flexionante. La fig 12 muestra curvas carga-deformación para los diferentes porcentajes de refuerzo longitudinal y transversal. Estudios recientes (Paulay, 1971) han demostrado que la disposición del refuerzo como en la fig 13 conduce a curvas más satisfactorias y a daños de menos cuantía.

La influencia de la carga axial en la ductilidad de miembros de concreto reforzado sometidos a flexocompresión ha sido estudiada teóricamente por Park y Paulay (1975), considerando la curva carga-deformación de concreto sin confinar. En la fig 14 se resumen las hipótesis y las conclusiones de tales estudios. Es clara la reducción de la ductilidad disponi-

ble (en términos de la relación momento-curvatura) asociada aun con niveles moderados de carga axial). Este efecto sustenta el criterio de diseño designado como columna fuerte-trabe débil, orientado al desarrollo de deformaciones inelásticas en las trabes, con preferencia a las columnas.

De naturaleza teórica son también los estudios (Park y Paulay, 1975) en que se basan las curvas carga-deformación para muros de concreto que fallan en flexión (fig 15). En la figura citada se observa que mediante cuantías y distribuciones adecuadas de refuerzo es posible obtener ductilidades elevadas en este tipo de elementos. Otros factores a considerarse, poco estudiados a la fecha, son la posibilidad de pandeo de borde y la influencia de carga vertical y fuerza cortante, tanto en la curva ante la primera aplicación de carga como en las que corresponden a cargas repetidas.

Los miembros presforzados suelen caracterizarse por curvas semejantes a la fig 16 (Spencer, 1969): la rigidez decrece para deformaciones grandes y los ciclos histeréticos angostos implican poca capacidad para disipar energía.

6. Respuesta de sistemas simples con diversas leyes carga-deformación

La fig 17 presenta algunas idealizaciones usuales de curvas carga-deformación empleadas para representar a las descritas en los párrafos anteriores. El caso bilineal de la fig 17a es una buena aproximación a las curvas de la fig 5. El caso 17b es el elastoplástico convencional, mientras que el 17c se caracteriza por niveles de fluencia distintos en los dos sentidos de aplicación de las cargas laterales. Esta condición se presenta, por ejemplo, en marcos como el de la fig 18a, en donde la descarga sobre la viga AB en 0 puede actuar a favor o en contra de las cargas permanentes. La pendiente negativa en la fig 17d se debe a la acción de las cargas gravitacionales actuando sobre la configuración deformada (desplazamiento lateral) del sistema, y es función de la suma de cargas verticales por encima del entrepiso que interesa, de la altura de este y de su rigidez lateral (Rosenblueth, 1965). La fig 17e es una idealización de los ciclos histeréticos angostos típicos de elementos

presforzados, y la 17f representa casos con deterioro moderado de rigidez, como es de esperarse en miembros construídos parcialmente con materiales frágiles, y en donde no se han tomado precauciones especiales para evitar daños excesivos en cada ciclo de carga. Tal es el caso, por ejemplo, en diafragmas de cortante de mampostería o en marcos de concreto reforzado pobremente detallados. La curva de la fig 17g suele designarse como modelo de deslizamiento (en inglés: slip-type curve) y es típica de casos en que la carga lateral es resistida fundamentalmente por elementos de arriostramiento (fig 18b) o cables atirantados (fig 18c) que sólo pueden resistir esfuerzos de tensión. La ocurrencia de niveles de fluencia distintos en cada sentido de acción de las cargas laterales (fig 17c) ocasiona la acumulación de deformaciones plásticas en el sentido del menor nivel. El problema fue estudiado cuantitativamente por Bielak (1966), quien determinó la respuesta sísmica de sistemas con curva carga - deformación elastoplástica en un sentido y elástica, de capacidad ilimitada, en el otro. Para el temblor de El Centro 1940, los resultados se muestran en la fig 20, y deben compararse con los de la fig 29, que corresponden a sistemas elastoplásticos usuales. El factor de fluencia c es la relación entre la capacidad de fluencia y la que se requeriría para asegurar comportamiento lineal del sistema.

Ramírez (1977) obtuvo la respuesta de diversos sistemas de cortante de varios grados de libertad, incluyendo la influencia de esbeltez (efectos P- Δ) ante acelerogramas típicos de los que se obtienen en la zona de suelo compresible de la ciudad de México. Entre los casos analizados se incluyeron sistemas con periodos naturales de 0.5seg y 2.5seg, que son, respectivamente, menores y aproximadamente iguales a los dominantes del movimiento (ver fig 21). La esbeltez se definió por la relación entre el valor absoluto de la rigidez de la rama negativa de la curva carga-deformación (fig 17d) y la de la rama inicial. En términos de los parámetros de diseño y de respuesta bajo un análisis ordinario que no incluya los efectos de esbeltez, este parámetro es igual a $\beta = 1.2V/Qc$, en donde c es el coeficiente de cargas laterales adoptado en el diseño, Q el factor de ductilidad y V la relación entre la deformación lateral de entrepiso, calculada con las fuerzas laterales de diseño, y la altura de entrepiso. En todos los casos analizados se tomó

$\beta=0.01$ en la planta baja, y valores menores en los pisos superiores, dependientes de la distribución de rigideces y masas de todo el sistema. El valor citado es pequeño, ya que en estructuras usuales son de esperarse con frecuencia valores del orden de 0.04. Se determinaron valores del factor de amplificación de deformaciones laterales, definido como la relación entre la deformación de entrepiso obtenida mediante un análisis dinámico que incluya la influencia de los efectos P- Δ y la deformación que se obtendría para el mismo entrepiso si dicha influencia se despreciara. Dichos factores se compararon con los valores aproximados determinados bajo la hipótesis de que el sistema de interés se encuentra sometido al sistema de cargas laterales necesario para ocasionar, mediante su acción estática, el sistema de desplazamientos obtenidos de un análisis que omita los efectos de esbeltez. La comparación se muestra en las figs 22 y 23 para estructuras con períodos de 0.5 y 2.5 seg, respectivamente, y ductilidades nominales de diseño de 4. Es claro que mientras para los casos estudiados el factor de amplificación estático no se aparta mucho de 1, el factor dinámico puede en ocasiones alcanzar valores excesivos.*

Las respuestas de estructuras presforzadas depende de la proporción en que participen elementos presforzados y de concreto reforzado ordinario en la disipación de energía. Spencer (1969) ha comparado las respuestas de los sistemas de interés para ciertos valores de los parámetros pertinentes. En el caso extremo, un sistema presforzado puede idealizarse mediante la gráfica elástica bilineal de la fig 17e. La relación entre las amplitudes máximas de las respuestas del sistema bilineal e hysterético se presenta en función de la frecuencia normalizada para el acelerograma de El Centro en la fig 23, para varios valores de la relación de fluencia, c . La relación en estudio crece con la frecuencia.

El comportamiento de sistemas de deslizamiento (fig 17g) se describe en la fig 24. En ella se observan

* En las normas de diseño sísmico de la ciudad de México las posibles consecuencias desfavorables de esta discrepancia están cubiertas por la forma conservadora en que se especifican los espectros de diseño.

amplitudes sistemáticamente mayores para estructuras con este tipo de curva que para las correspondientes elastoplásticas.

7. Demandas de ductilidad en sistemas complejos

Al las demandas de ductilidad por entrepiso en sistemas que puedan idealizarse como vigas de cortante, ni las de ductilidad local en los extremos de miembros de marcos continuos suelen ser uniformes en los sistemas estructurales ordinarios.

Influyen en la distribución de dichas demandas las características de cada sismo, así como las distribuciones de masas, rigideces y resistencias en la estructura en cuestión. Frank et al (1976), determinaron la respuesta dinámica de sistemas de cortante de cuatro grados de libertad ante una familia de temblores reales normalizados a la misma aceleración máxima del terreno, y ante otra de temblores simulados. Para cada temblor se determinó el espectro elastoplástico de diseño que correspondía a un factor de ductilidad de 4, y se determinó el promedio de dichos espectros para cada una de las familias citadas. Se diseñaron estructuras de cortante de cuatro grados de libertad, para cada uno de los espectros elastoplásticos, mediante un análisis modal convencional que incluyó únicamente el modo fundamental de vibración. Para cada uno de los acelerogramas se determinó la respuesta del sistema no lineal resultante, mediante un procedimiento de integración numérica paso a paso. Se encontró que los coeficientes de variación de las demandas de ductilidad de entrepiso eran muy elevados, y que los valores medios estaban muy por encima, en los extremos superior e inferior del edificio, del valor de 4 supuesto en el diseño (fig 25). Esto implica que aún para estos sistemas simples y uniformes, los criterios convencionales de diseño basados en análisis dinámico modal conducen a discrepancias sistemáticas entre los efectos sísmicos reales y los nominales. En un intento por estudiar las demandas de ductilidad en edificios con diferentes periodos naturales y formas de variación de la rigidez de entrepiso, Guerra y Esteva (1977) determinaron la respuesta de sistemas de cortante ante los acelerogramas de tres sismos registrados en la zona de terreno compresible de la ciudad de México. Los espectros lineales mostraban aproximadamente el mismo periodo dominante (2.5 seg), y casi

iguales ordenadas espectrales para dicho periodo, aun que para periodos cortos uno de ellos mostraba ordenadas apreciablemente superiores a las de los otros dos. Además de estudiar edificios con entrepisos que poseen las resistencias que resultan de un criterio convencional de análisis y diseño para el espectro medio de los temblores considerados, se enfocó la atención a la influencia sobre la respuesta sísmica de la variabilidad de los factores de seguridad con respecto a cortantes de entrepiso en la altura de cada edificio. Tal variabilidad a menudo proviene de los requisitos arquitectónicos, como consecuencia de los cuales algunos entrepisos pueden poseer resistencias mayores que las requeridas de acuerdo con el coeficiente sísmico para diseño. Cuando esto ocurre, se altera la contribución relativa de cada entrepiso a la disipación histerética de energía cinética con respecto a la que se presentaría para edificios con factor de seguridad uniforme, y los entrepisos que poseen los factores de seguridad más pequeños se ven sometidos a demandas de ductilidad más elevadas que las del caso uniforme. Por procedimientos de integración numérica paso a paso se determinaron las respuestas de diversos edificios de cortante de diez niveles. Se tomaron periodos naturales de 0.5, 1.0 y 2.5seg y amortiguamiento viscoso de 0.02. Las curvas carga-deformación de los entrepisos eran elasto-plásticas, con capacidades de fluencia obtenidas del análisis modal ante un espectro de diseño aproximadamente igual al promedio de los tres temblores estudiados, para un factor de ductilidad 4.* En algunos de los sistemas se tomaron factores de sobre-resistencia (relación entre capacidad lateral disponible y requerida en el diseño) no uniformes, a fin de simular la contribución frecuentemente indeseable de los elementos no estructurales.

* Los espectros elastoplásticos no se obtuvieron de manera rigurosa. La aproximación consistió en dividir entre 4 todas las ordenadas del espectro elástico de aceleraciones para periodos mayores de 2.5seg (donde ocurren máximos del espectro) y entre un factor que variaba linealmente entre 1 y 4 con el periodo natural, para valores de este último comprendido entre 0 y 2.5 seg. Dado que las ductilidades en el intervalo de periodos cortos son muy sensibles a la relación de resistencia de fluencia a respuesta elástica, las ordenadas espectrales adoptadas pueden corresponder a ductilidades nominales muy diferentes de 4.

La fig 26 resume los casos estudiados, y la 27 algunos de los resultados. Se observa que un efecto de proporcionar resistencia excesiva en algunas secciones de sistemas de cortante es aumentar las demandas de ductilidad en otras. El aumento es más significativo para sistemas de periodo corto. Aun para casos con factor de sobre-resistencia unitario (es decir, resistencia disponible igual a la requerida) las demandas de ductilidad de los entrepisos inferiores suelen resultar mayores que las nominales de diseño. La principal diferencia cualitativa entre estos resultados y los de Frank et al (fig 25) la constituyen las elevadas ductilidades en el extremo superior del edificio para este último caso, que no se muestran en los estudios de Guerra y Esteve. La diferencia se explica por que los diseños de estos últimos tomaron en cuenta la contribución de los modos superiores de vibración, y los de los primeros autores omitieron dicha contribución.

Los resultados descritos señalan la conveniencia de estudiar criterios alternativos para especificar la distribución de capacidades de cortante de entrepiso, a fin de reducir la variabilidad de las demandas de ductilidad. Para ello se estudiaron varios sistemas adicionales. En algunos de ellos la resistencia de la planta baja se tomó 10 por ciento superior a la de diseño. La fig 28a muestra que en ciertos casos un pequeño incremento en la resistencia de la planta baja transfiere demandas sustanciales de ductilidad al segundo entrepiso. Puesto que en sistemas reales pueden esperarse variaciones aleatorias de resistencia mayores que la que aquí se considera, dicha variabilidad debe tomarse en cuenta mediante modelos probabilísticos. En otro grupo de edificios se estudió la influencia, en las demandas de ductilidad, de diseñar considerando o ignorando la contribución de los modos superiores de vibración. La fig 28b muestra diferencias significativas en las ductilidades de los pisos superiores, a pesar de que las diferencias de resistencia son pequeñas.

De lo anterior se concluye que para sistemas de cortante los criterios convencionales de análisis y diseño sísmico no proporcionan un control adecuado de respuesta sísmica expresada en términos de ductilidades. En algunos sistemas, en donde el factor de seguridad, definido como la relación de la resistencia disponi-

ble a la fuerza de diseño predicha por el análisis lineal, varía apreciablemente de una a otra sección crítica, las demandas de ductilidad pueden resultar mucho mayores que las que ocurrirían en las mismas secciones, con los mismos factores de seguridad, si estos fueran uniformes en la estructura. Las implicaciones de estos resultados deberían trasladarse a la práctica de diseño estructural.

Los pocos estudios disponibles sobre demandas locales de ductilidad en marcos continuos muestran que la distribución de dichas demandas en sistemas con factor de seguridad constante presenta variaciones menos acentuadas que las descritas para sistemas de cortante. Se han propuesto diversos criterios para definir las ductilidades locales. Haviland et al (1976) proponen dos alternativas (fig 29): la primera es la relación del giro en el extremo de una barra al que ocurriría en dicho extremo cuando en ambos se alcanzara simultáneamente el momento de fluencia respectivo. A esta la denotan ductilidad rotacional. La segunda de finición, designada como ductilidad de momento o de curvatura, es la relación entre la curvatura local en una sección y la que corresponde al momento de fluencia. La variación de ambas medidas de la ductilidad local fue estudiada por los autores citados en diversos marcos diseñados para diversas ductilidades nominales empleando análisis modal elástico. En la fig 30 se presenta un caso típico estudiado, y en las 31 y 32 los máximos factores de ductilidad para traveses y columnas en cada nivel, cuando la ductilidad nominal de diseño era 4. Sólo deben obtenerse conclusiones sobre los valores relativos y no sobre los absolutos, en comparación con la ductilidad nominal de 4, ya que las figuras se refieren a ductilidad local y la última cifra citada es ductilidad global de entrepiso.

Los estudios descritos se han referido a marcos regulares, sin variaciones bruscas en las dimensiones de sus miembros ni en sus claros horizontales y verticales. La ocurrencia de tales variaciones es con frecuencia causa de concentraciones importantes de demandas de ductilidad, y no es raro que las condiciones que ocasionan tales demandas sean también motivo de incapacidad de los miembros afectados para responder a ellas. Así, por ejemplo, la restricción que imponen los muros de la fig 33 a las columnas A hacen que el claro efectivo de dichas columnas sea igual a su

longitud libre, entre el sistema de cubierta y el borde superior del muro; la rigidez lateral de cada una de estas columnas resulta mucho mayor que las de las que no se encuentran restringidas, y las fuerzas cortantes respectivas -- y por tanto las demandas de ductilidad -- varían de igual manera. Debido a su baja relación de claro a peralte, las columnas A suelen ofrecer menores factores de seguridad ante tensión diagonal que ante tensión por flexión y por ende tienden a presentar comportamiento poco dúctil. Condiciones semejantes se presentan en las traveses de menor claro localizadas en marcos con separaciones muy desiguales entre ejes de columnas, o en traveses que inciden en puntos de los bordes de muros rigidizantes en donde se presentan giros y desplazamientos verticales importantes (fig 34). En todos estos casos los problemas pueden aliviarse modificando rigideces relativas (por ejemplo, reduciendo peraltes de claros cortos), o diseñando de tal manera de lograr que dominen los modos de falla dúctiles. La fig 13, por ejemplo, muestra el tipo de refuerzo recomendable para elementos peraltados que ligan dos muros rigidizantes acoplados (Paulay, 1971).

B. Comentarios finales

A pesar de que la importancia de la capacidad de disipación de energía mediante comportamiento dúctil para resistir sismos severos ha sido bien reconocida, no se cuenta a la fecha con criterios de análisis y diseño que consideren a las demandas de ductilidad, o a las deformaciones inelásticas, como las variables de control. Los procedimientos usuales de análisis, tanto estático como dinámico, adoptan las fuerzas internas que provienen de estudios de respuesta lineales, como medidas de la capacidad que debe proporcionarse a los miembros estructurales para que las demandas locales de ductilidad se mantengan dentro de límites tolerables. Pero dichas demandas son muy sensibles a las características de las estructuras, y a los detalles de cada excitación sísmica, y no es raro encontrar que sus valores se alejan significativamente de los nominales de diseño. Por otra parte, no existen criterios suficientemente probados para producir miembros estructurales capaces de desarrollar ductilidad específicas. A lo más que parecen poder aspirar los ingenieros en este aspecto en un futuro cercano es a identificar las irregularidades

que pueden causar concentraciones excesivas de ductilidad y a tratar de evitarlas. El campo de investigación es muy vasto y estimulante: abarca el desarrollo de procedimientos prácticos y eficientes para predecir las demandas de ductilidad en estructuras dadas, y la formulación de criterios de diseño para lograr el desarrollo de ductilidades específicas.

9. Referencias

1. Arnold, P., Adams, P.F. & Lu, L.W., (1966), "The Effect of Instability on the Cyclic Behavior of a Frame", Proc. International Symposium on the Effects of Repeated Loading of Materials and Structures, RILEM, 4
2. Bertero, V.V., & Popov, E.P. (1975), "Hysteretic Behavior of Ductile Moment Resisting Reinforced Concrete Frame Components", Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, EERC 75-16
3. Bielak, J. (1966), "Dynamic Response of Single - Degree - of Freedom Bilinear Systems", Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science, Rice University, Houston, Texas
4. Frank, R., Anagnostopoulos, S., Biggs, J.M., Vanmarcke, E. H. (1976), "Variability of Inelastic Structural Response Due to Real and Artificial Ground Motions", MIT Department of Civil Engineering Research Report R76-6, Order No. 529
5. Guerra, O. R. & Esteve, L. (1977), "Equivalent Properties and Ductility Requirements in Seismic Dynamic Analysis of Nonlinear Systems", Proc. Sixth World Conference on Earthquake Engineering, New Delhi
6. Haviland, R.W., Biggs, J.M. & Anagnostopoulos, S. (1976), "Inelastic Response Spectrum Design Procedures for Steel Frames", MIT Department of Civil Engineering, Research Report R76-40, Order No. 557
7. Krawinkler, H., Bertero, V.V., & Popov, E.P. (1976), "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblies", Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, EERC 76-22
8. Park, R., & Paulay, T. (1975), "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York
9. Paulay, T. (1971), "Coupling Beams of Reinforced Concrete Shear Walls", Journal of the Structural Division, ASCE, 97, ST3, 843-862
10. Ramirez, J. (1977), "Efectos de inestabilidad en la respuesta sísmica de estructuras de cortante inelásticas", Tesis de Maestría, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México
11. Rosenblueth, E. (1965), "Slenderness Effects in Buildings", Journal of the Structural Division, ASCE, 91, ST1, 229-52
12. Spencer, R.A. (1969), "The Nonlinear Response of Multistory Prestressed Concrete Structures to Earthquake Excitation", Proc. Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile

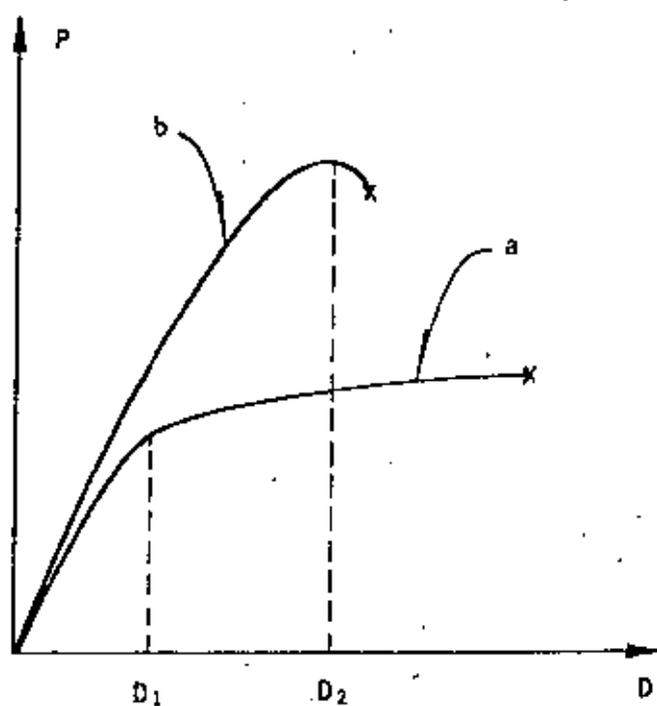


Fig 1. Sistemas dúctiles y frágiles

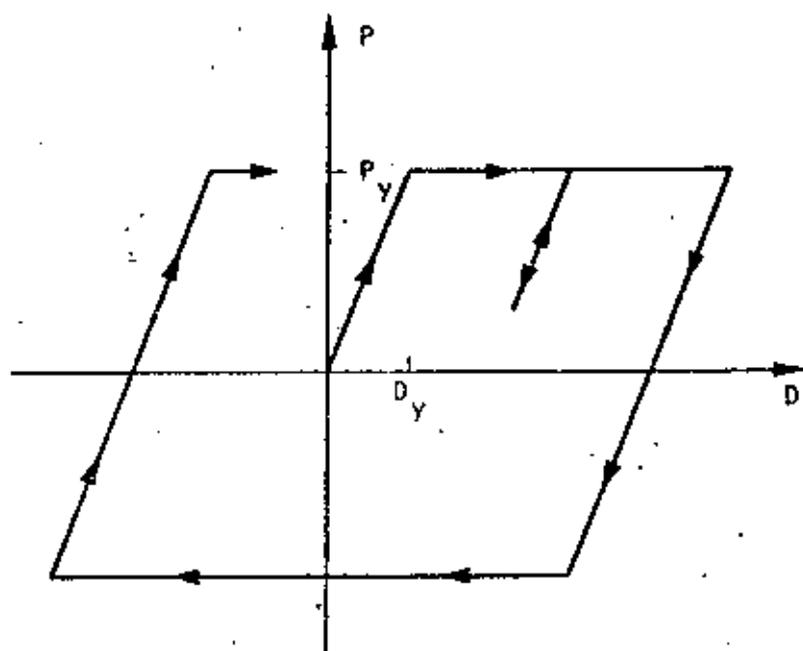


Fig 2. Sistema elastoplástico

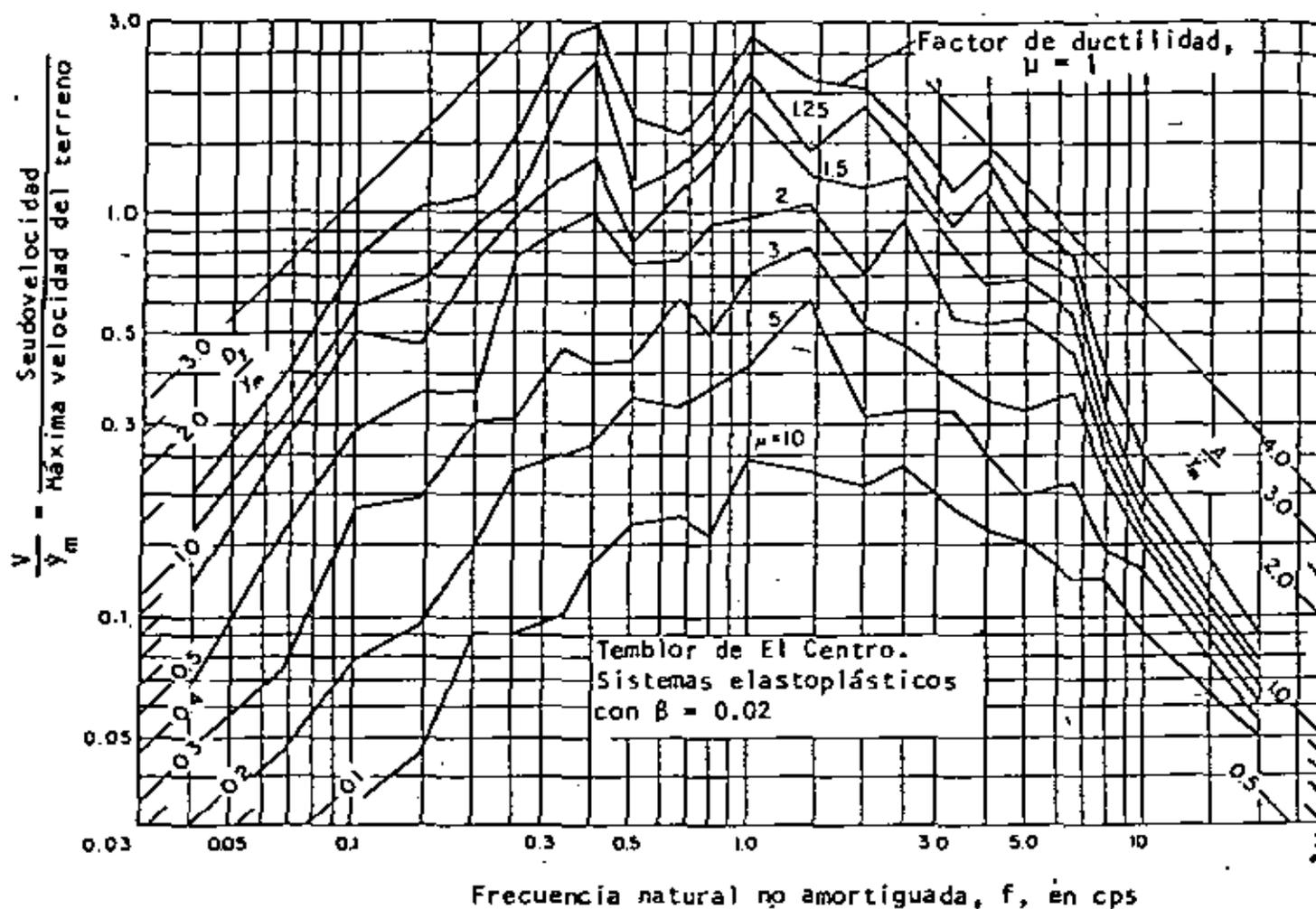
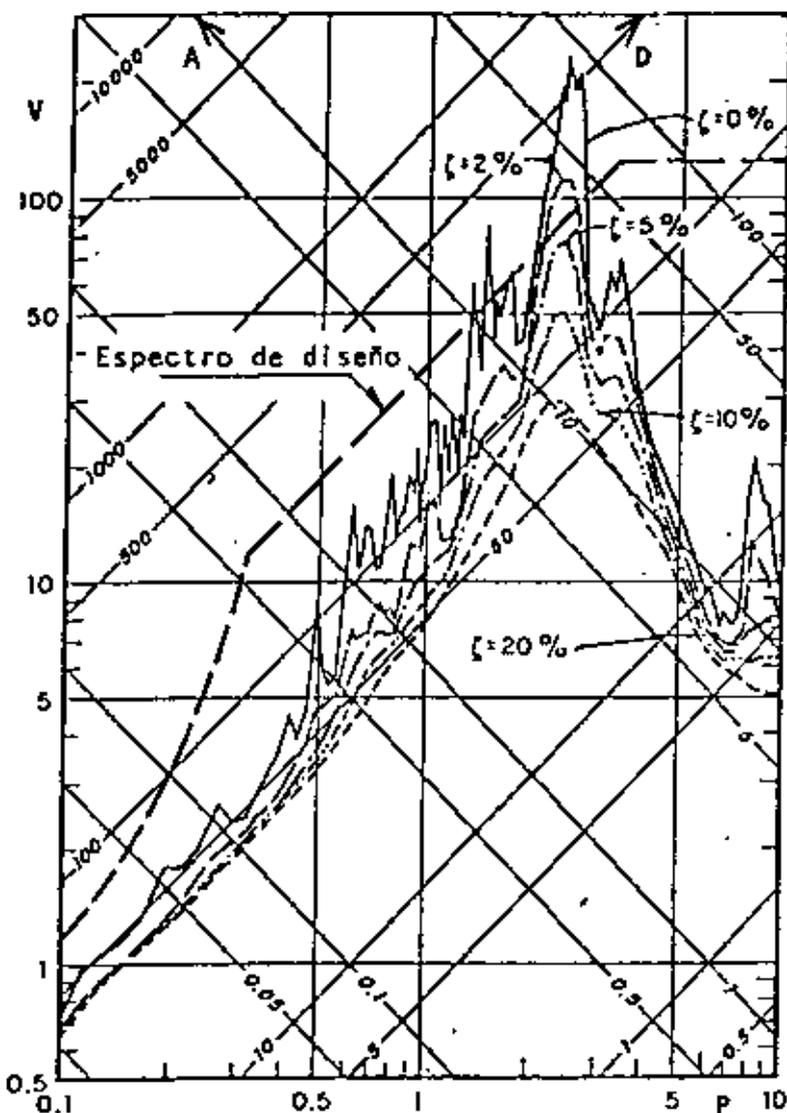


Fig 3. Espectros de deformaciones para sistemas elastoplásticos con amortiguamiento 0.02 del crítico



A aceleración, en cm/seg^2
 D desplazamiento, en cm
 P periodo, en seg
 V velocidad, en cm/seg

Fig 4. Espectro de diseño y espectro típico de temblores en la formación de arcilla blanda del Valle de México

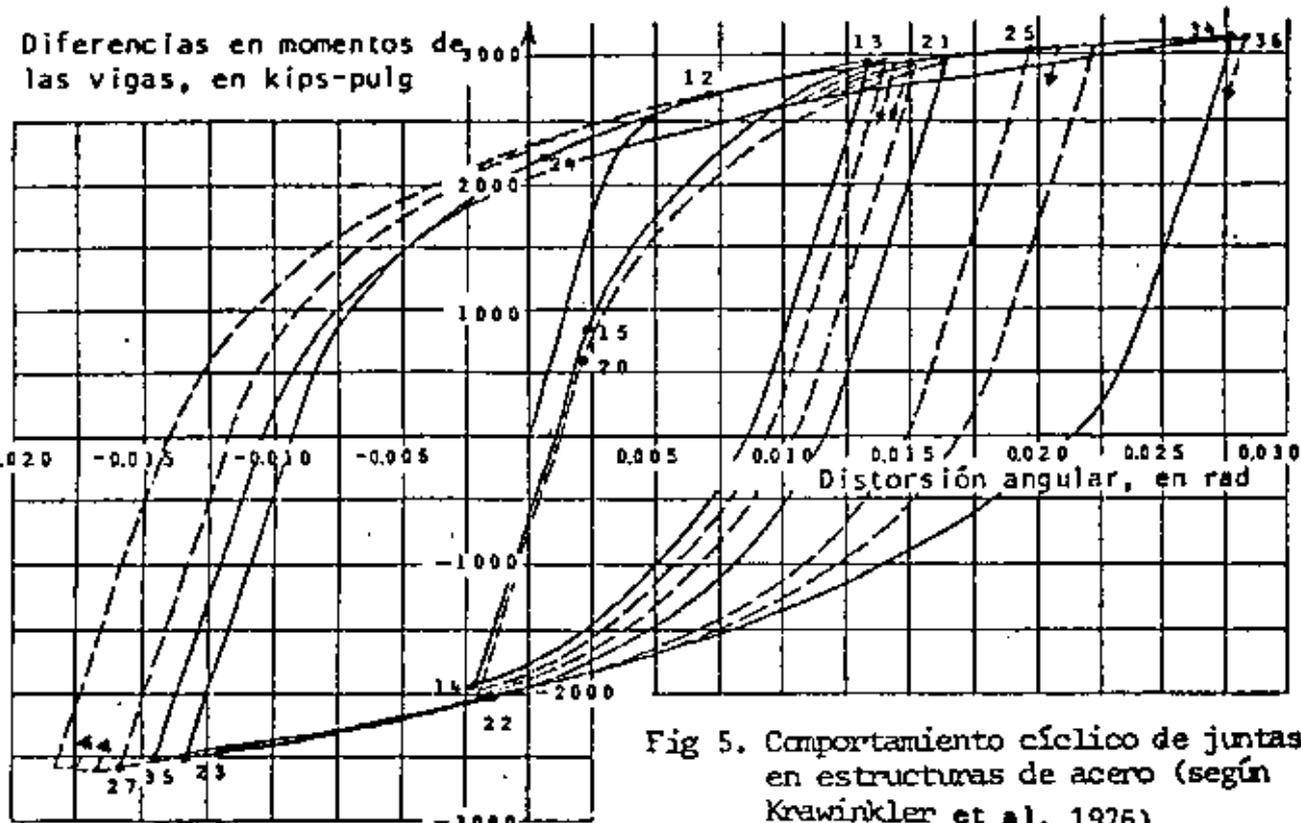


Fig 5. Comportamiento cíclico de juntas en estructuras de acero (según Krawinkler et al, 1976)

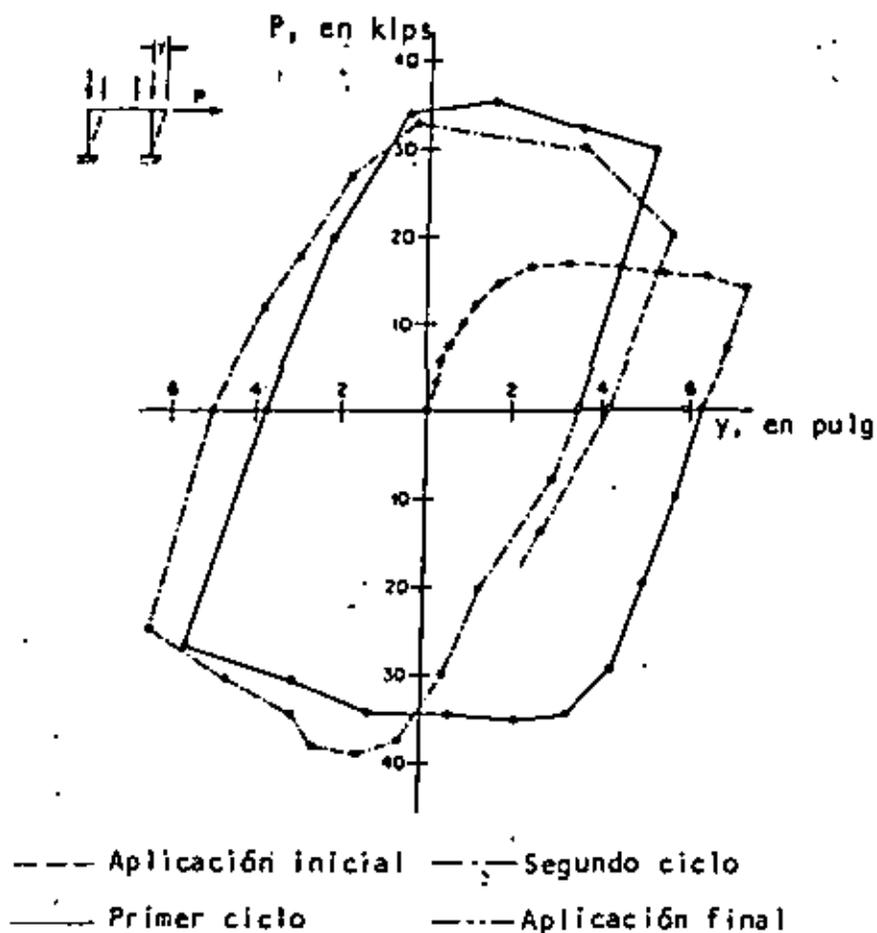


Fig 5. Marco de acero con efectos de esbeltez
(según Arnold, Adams y Lu, 1956)

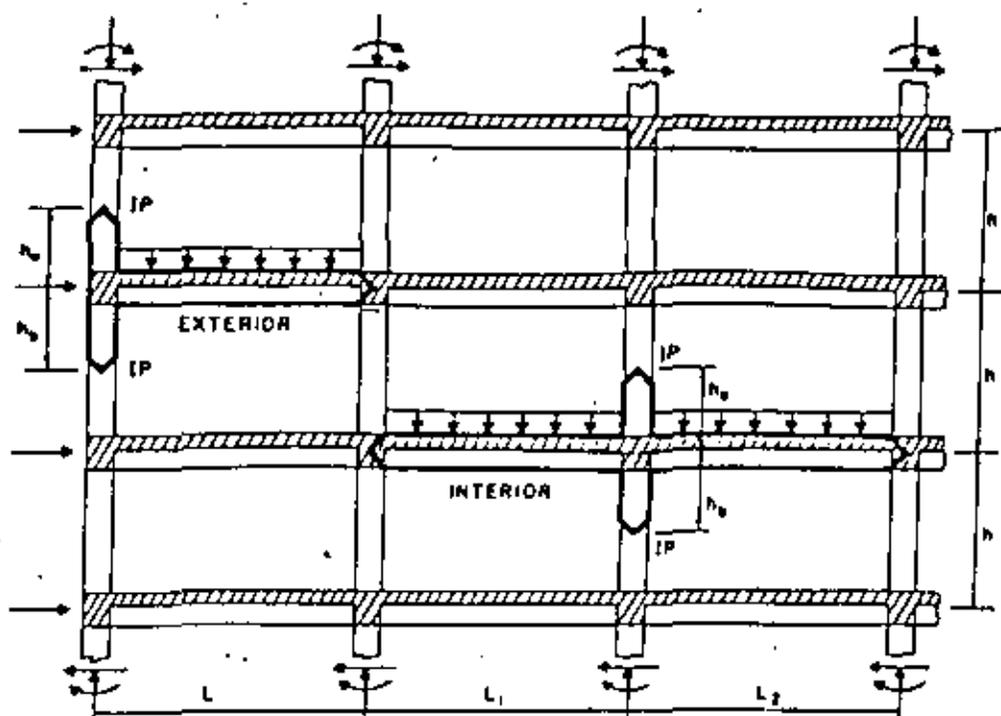
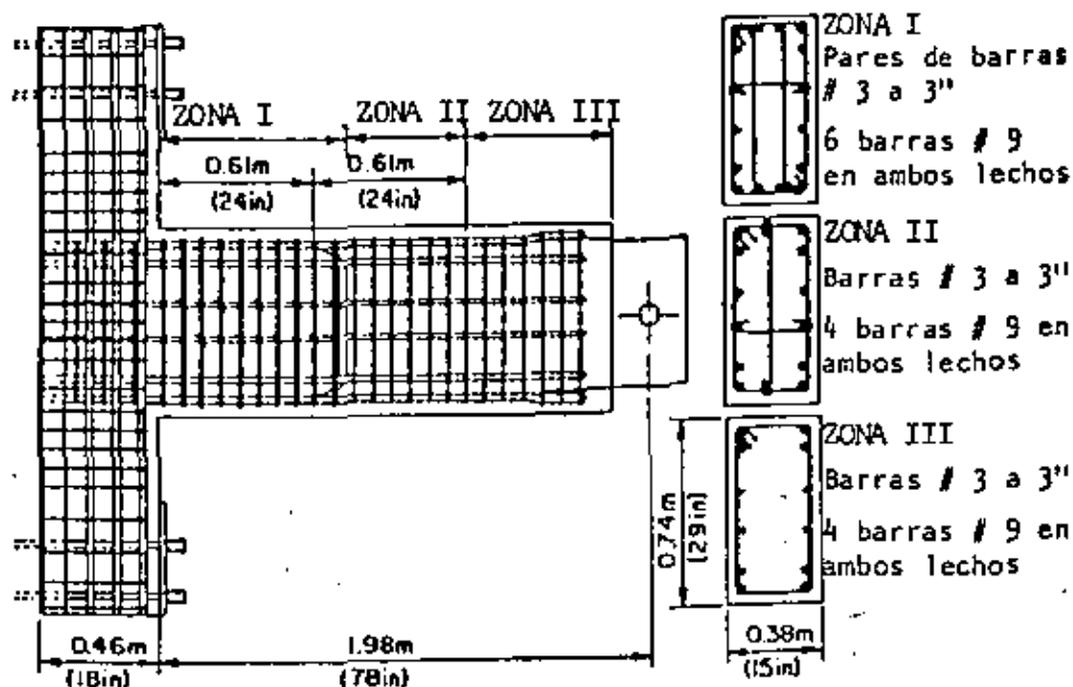
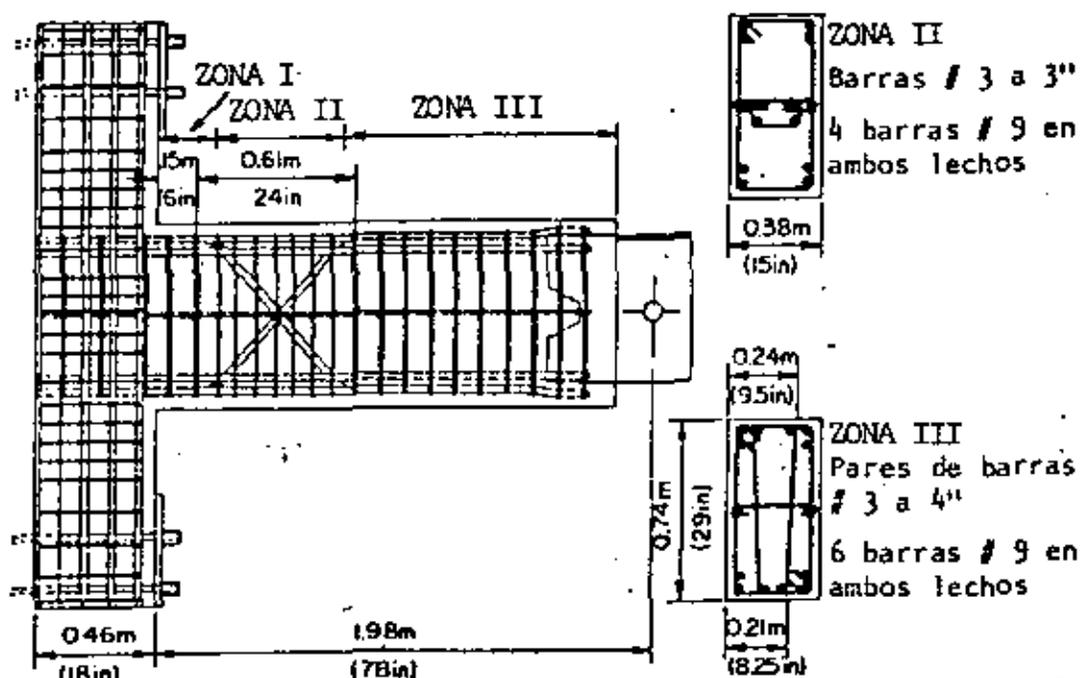


Fig 7. Subconjuntos de marcos de concreto reforzado
(según Bertero y Popov, 1975)



a) VIGA 33.P



b) VIGA 33.L

Fig 8. Detalles de refuerzo para controlar la localización de articulación plástica (según Bertero y Popov, 1975)

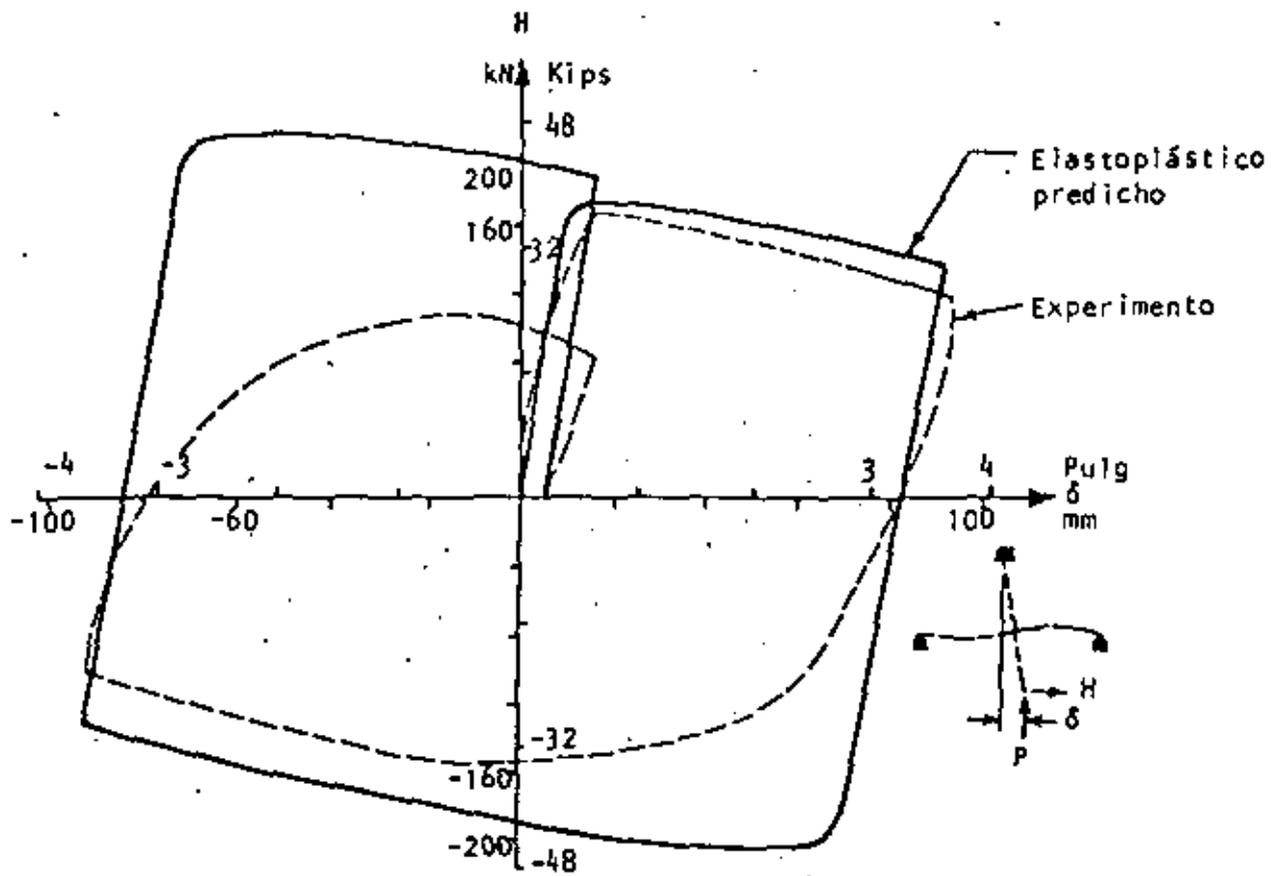


Fig 9. Influencia de la inestabilidad en el comportamiento de subconjuntos (según Bertero y Popov, 1975)

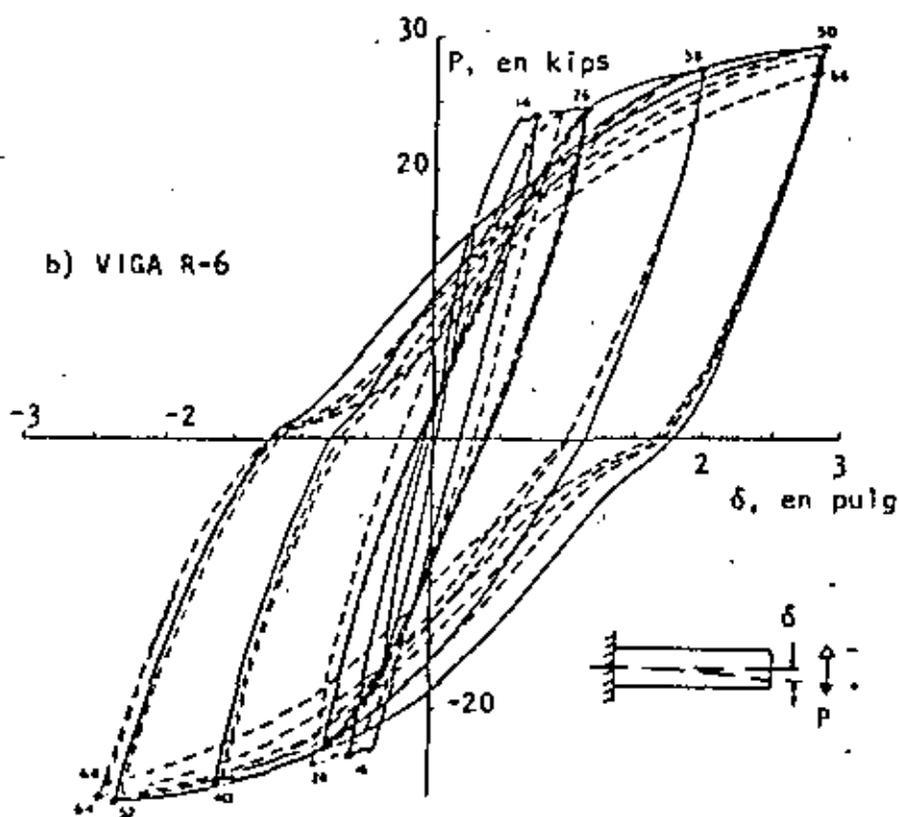
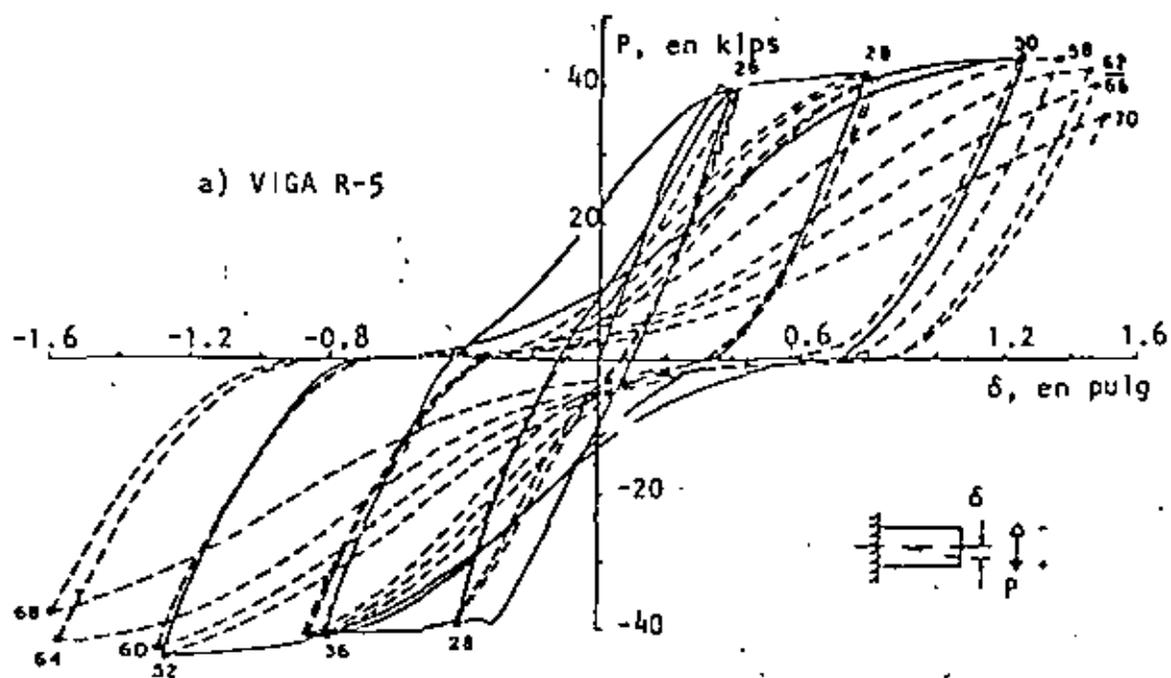
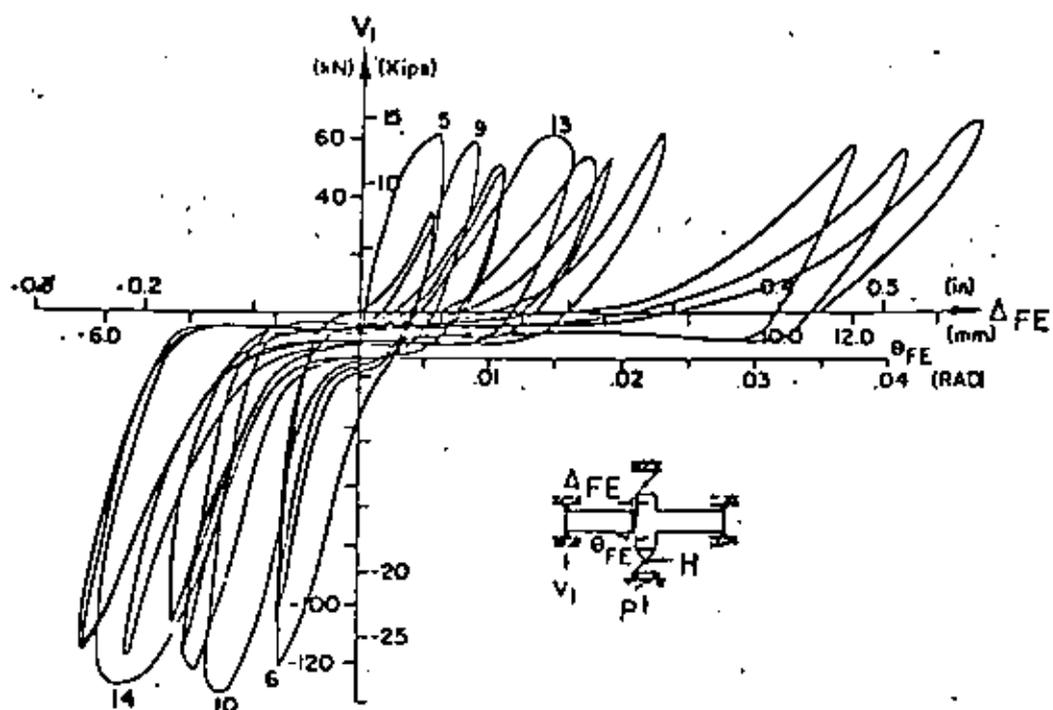
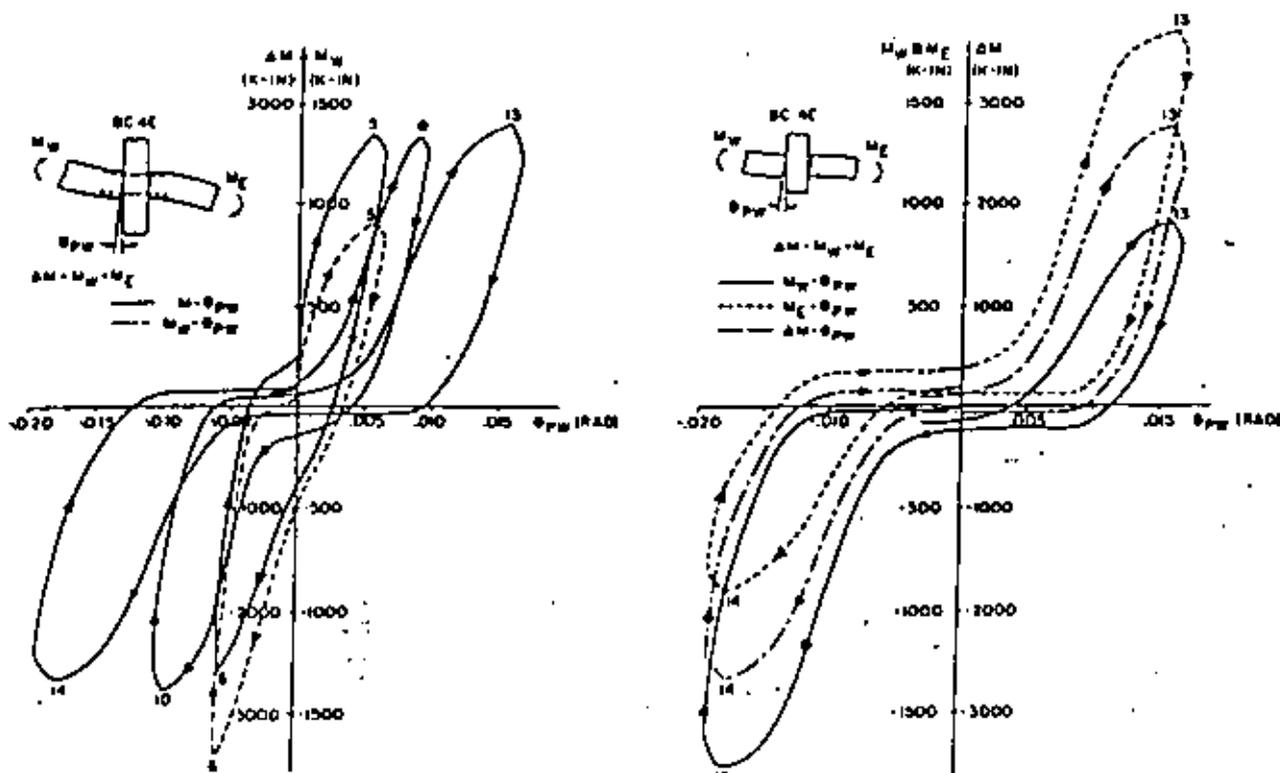


Fig 10. Influencia de esfuerzos cortantes en el comportamiento histerético de miembros de flexión (según Barbero y Popov, 1975)



a) DIAGRAMA DE DESLIZAMIENTO vs CORTANTE



b) DIAGRAMA DE DESLIZAMIENTO vs MOMENTO EN LA JUNTA

Fig 11. Deslizamiento en juntas

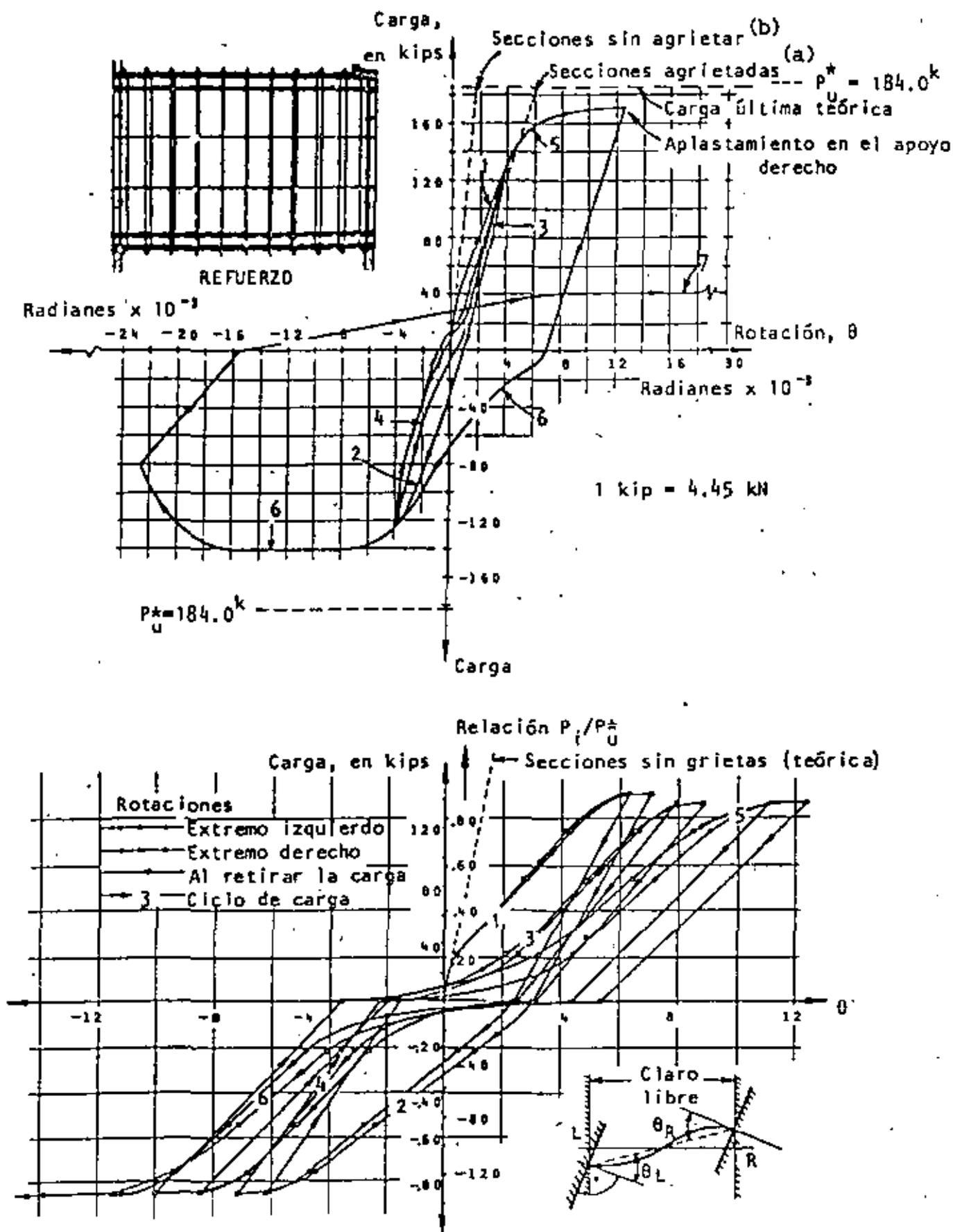


Fig 12. Curvas carga-rotación para vigas de acoplamiento de muros rigidizantes. Refuerzo del alma: a) adecuado, b) escaso (según Park y Paulay, 1975)

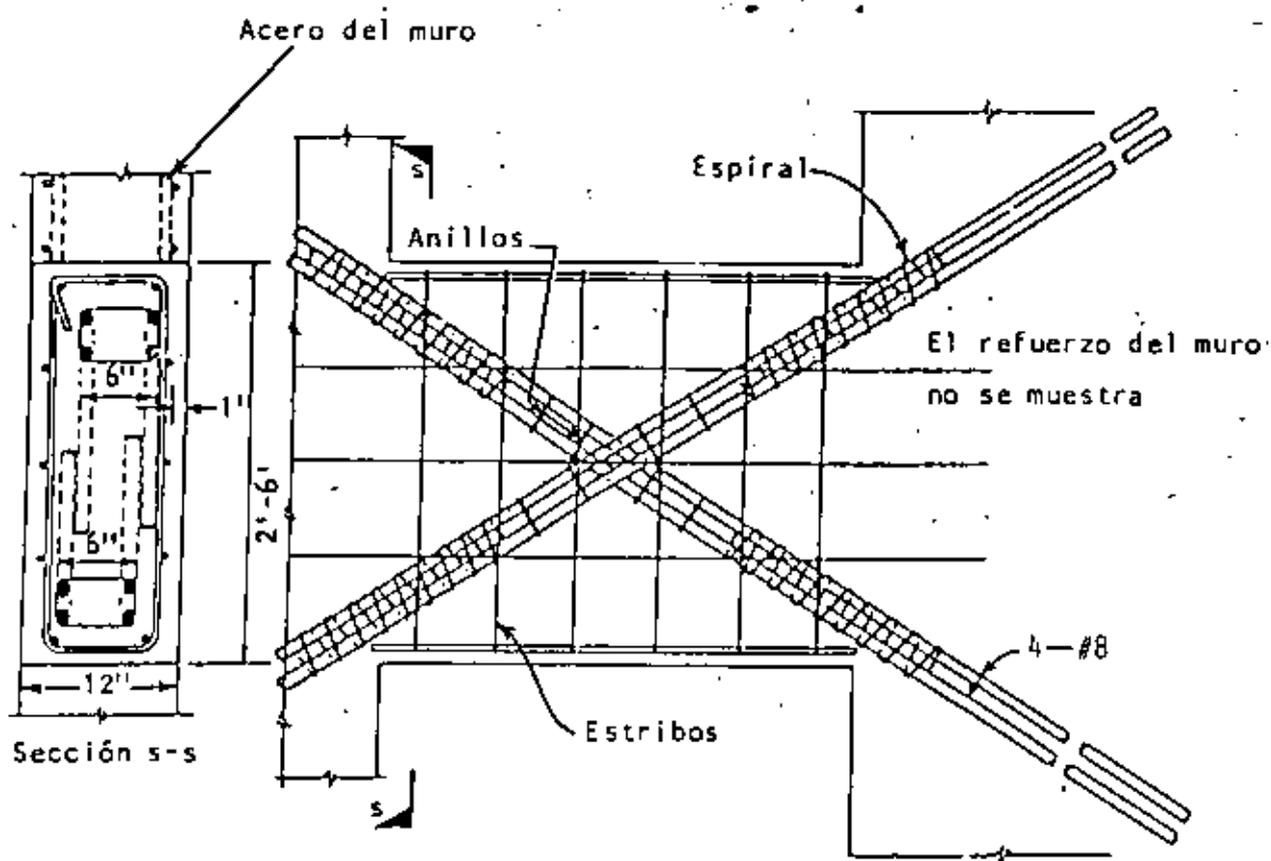
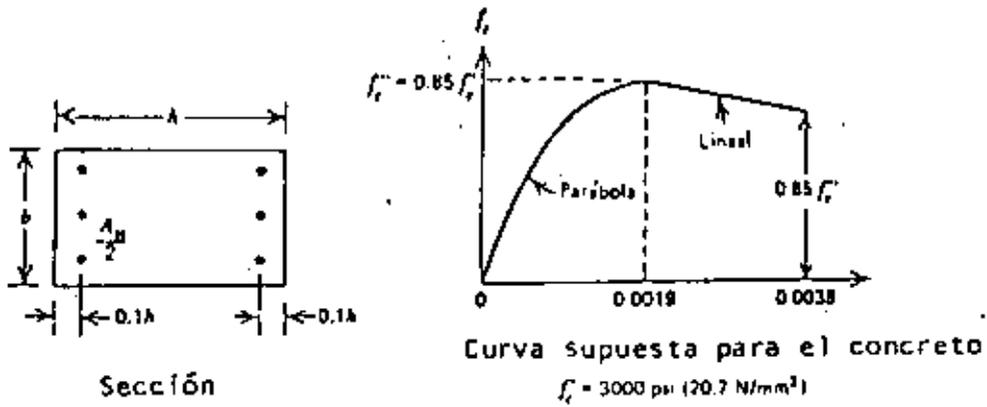
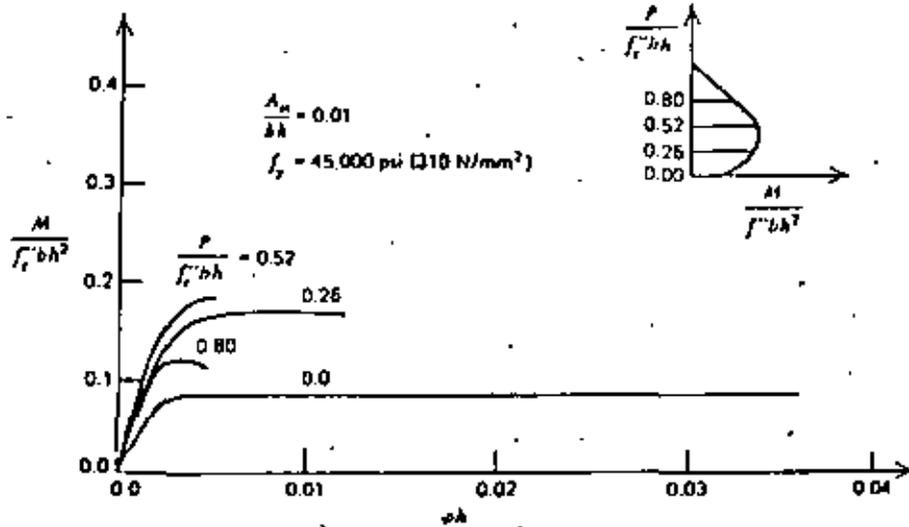


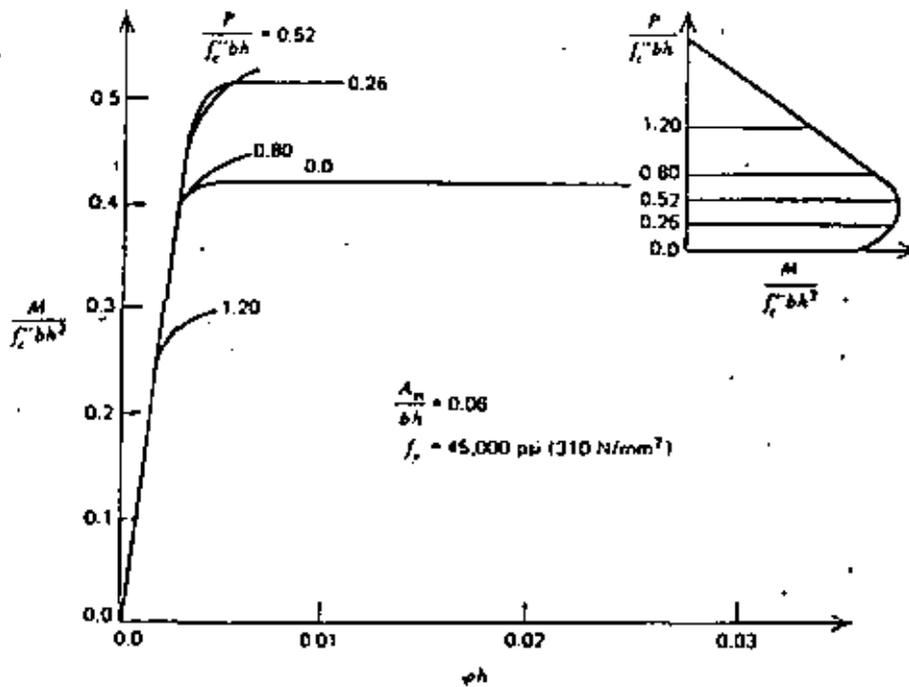
Fig 13. Disposición sugerida del acero en una viga de acoplamiento con refuerzo diagonal (adaptada de Paulay, 1971)



a)



b)



c)

Fig 14. Relaciones momento-curvatura para secciones de columnas a diversos niveles de carga axial (según Park y Paulay, 1975)

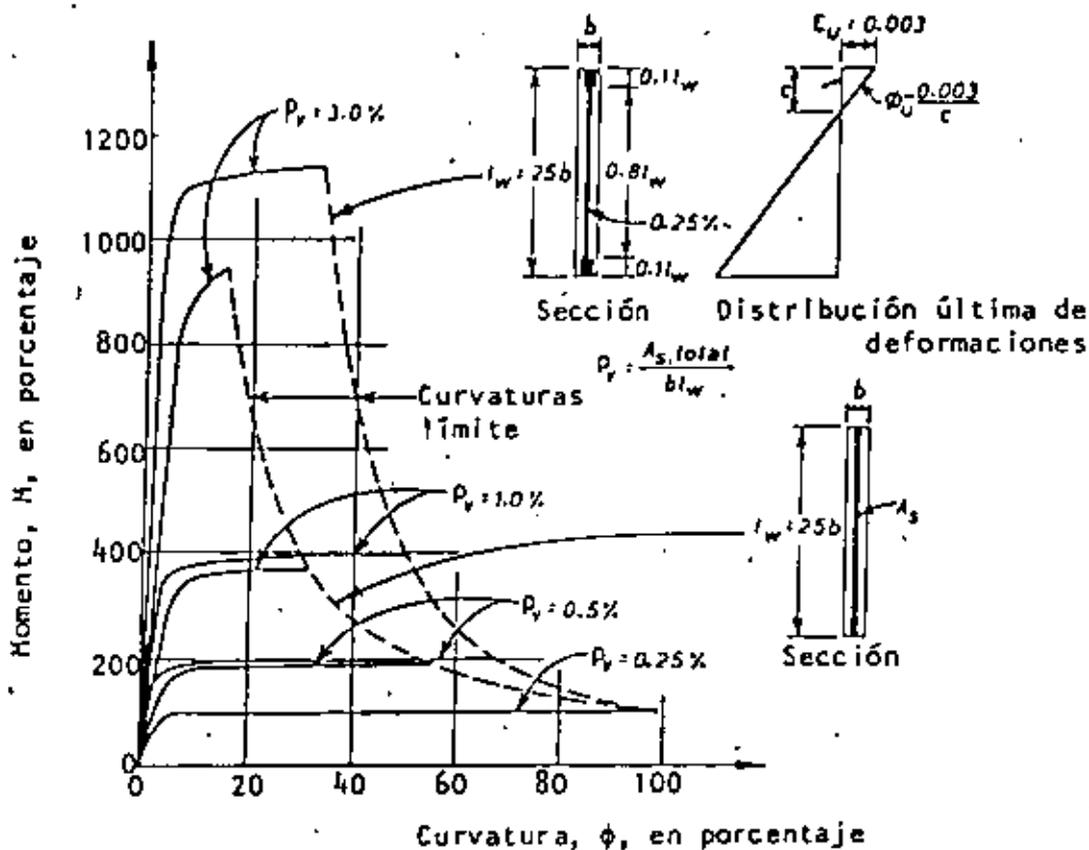


Fig 15. Influencia de cantidad y distribución de refuerzo vertical en curvatura última (según Park y Paulay, 1975)

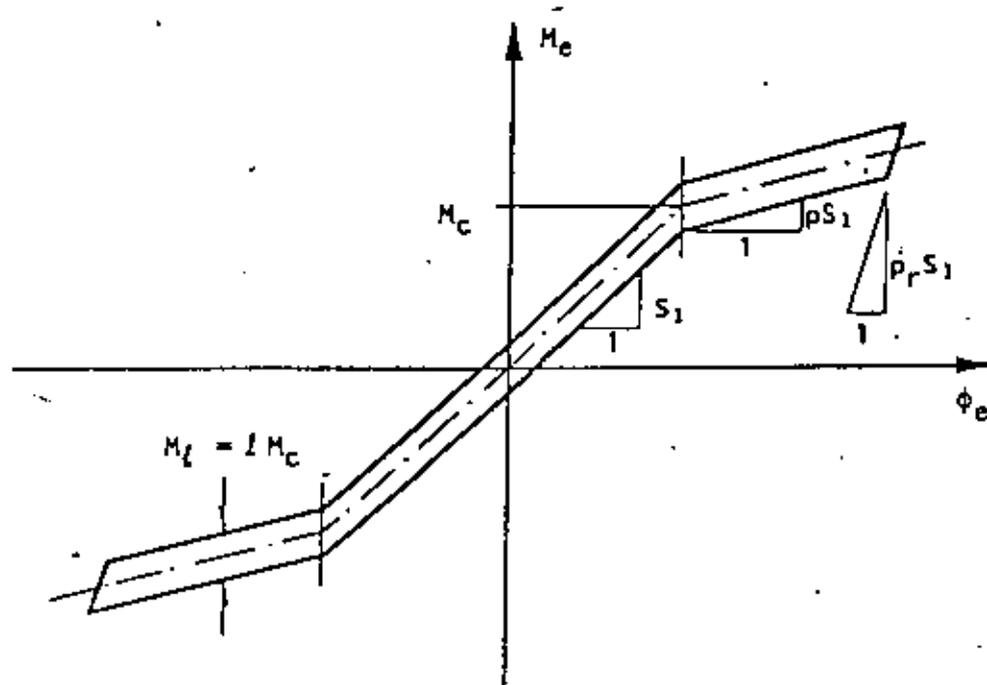
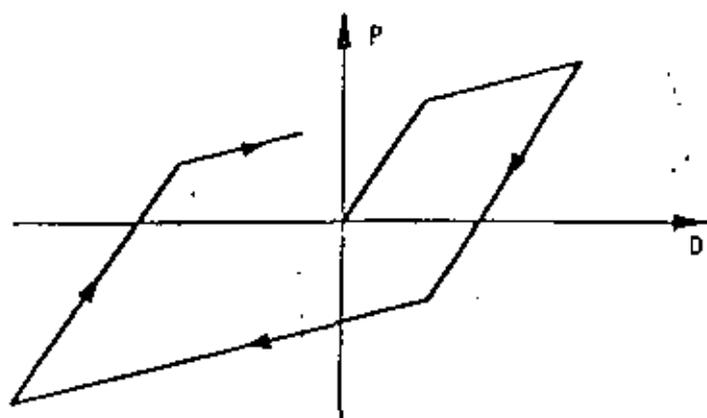
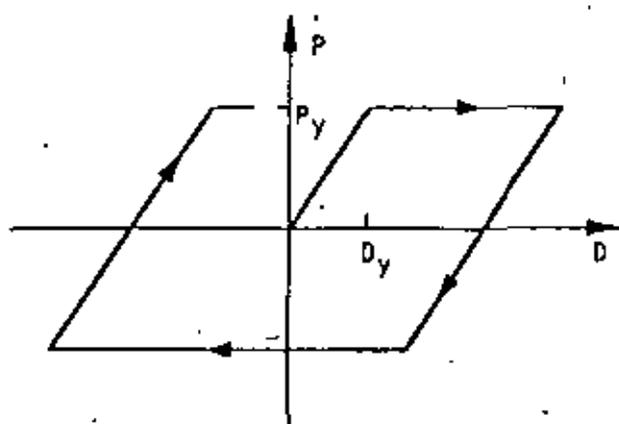


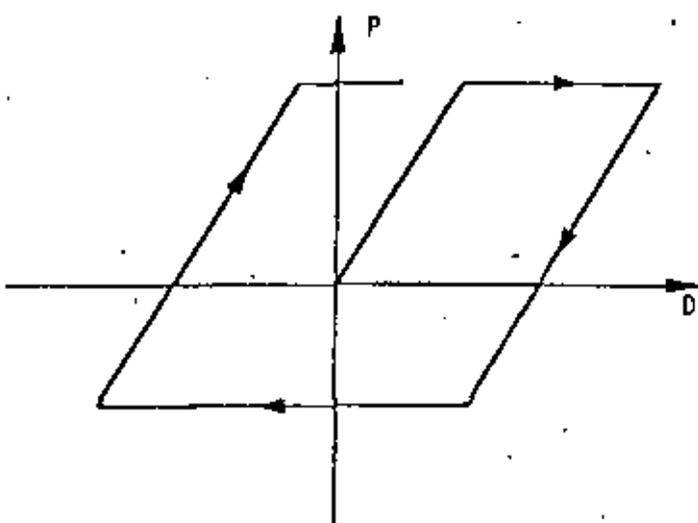
Fig 16. Ciclo de histéresis típico para miembros de concreto presforzado



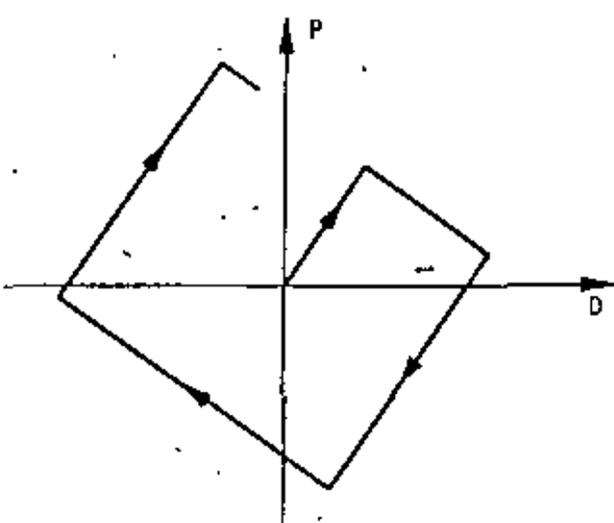
a) Bilinear



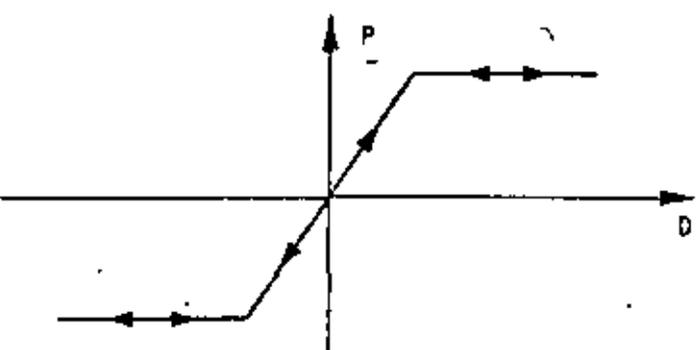
b) Elastoplástico simétrico



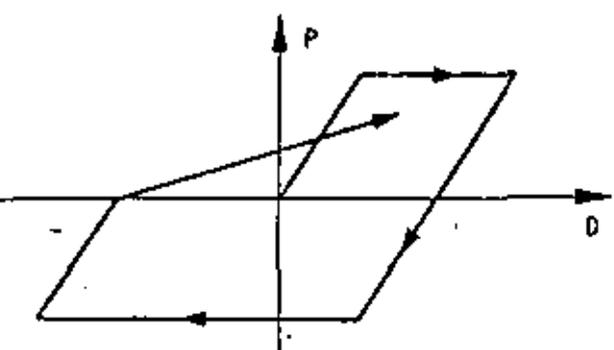
c) Elastoplástico asimétrico



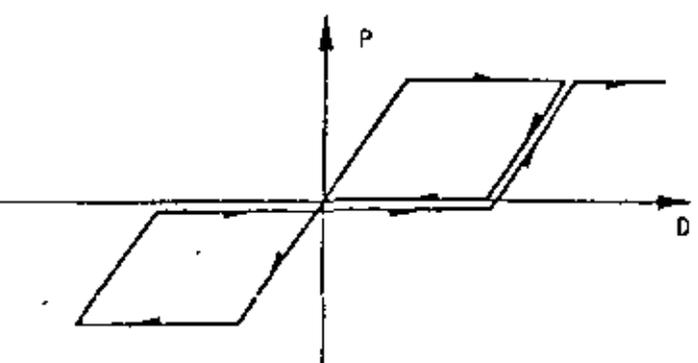
d) Inestable



e) Elástico cedente

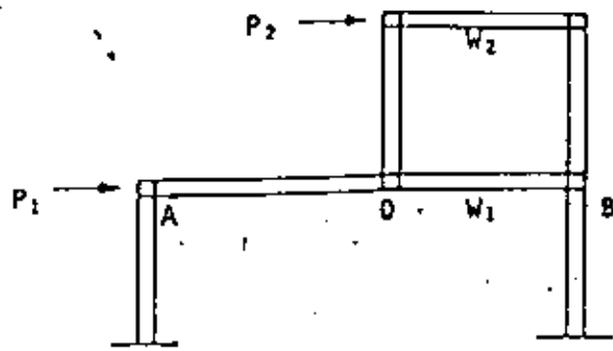


f) Degradante

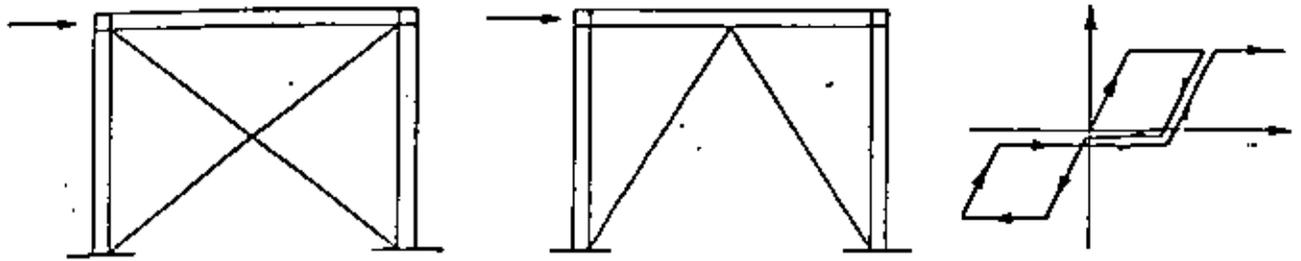


g) Tipo deslizamiento

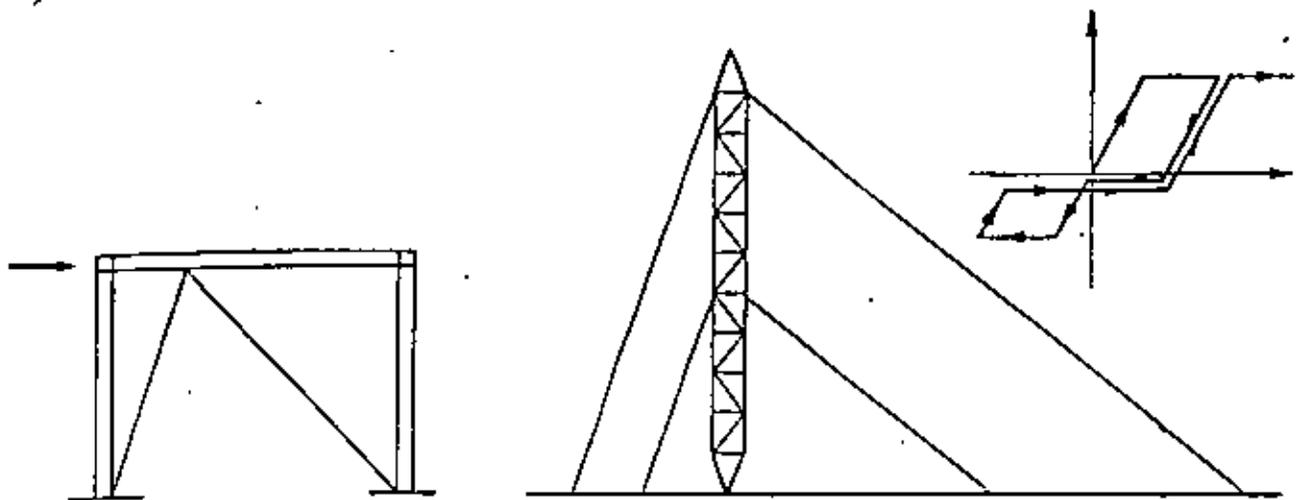
Fig 17. Modelos de comportamiento no lineal



a) Sistema típico con relación asimétrica carga-deformación



b) Sistema con relación simétrica tipo deslizamiento



c) Sistema con relación asimétrica tipo deslizamiento

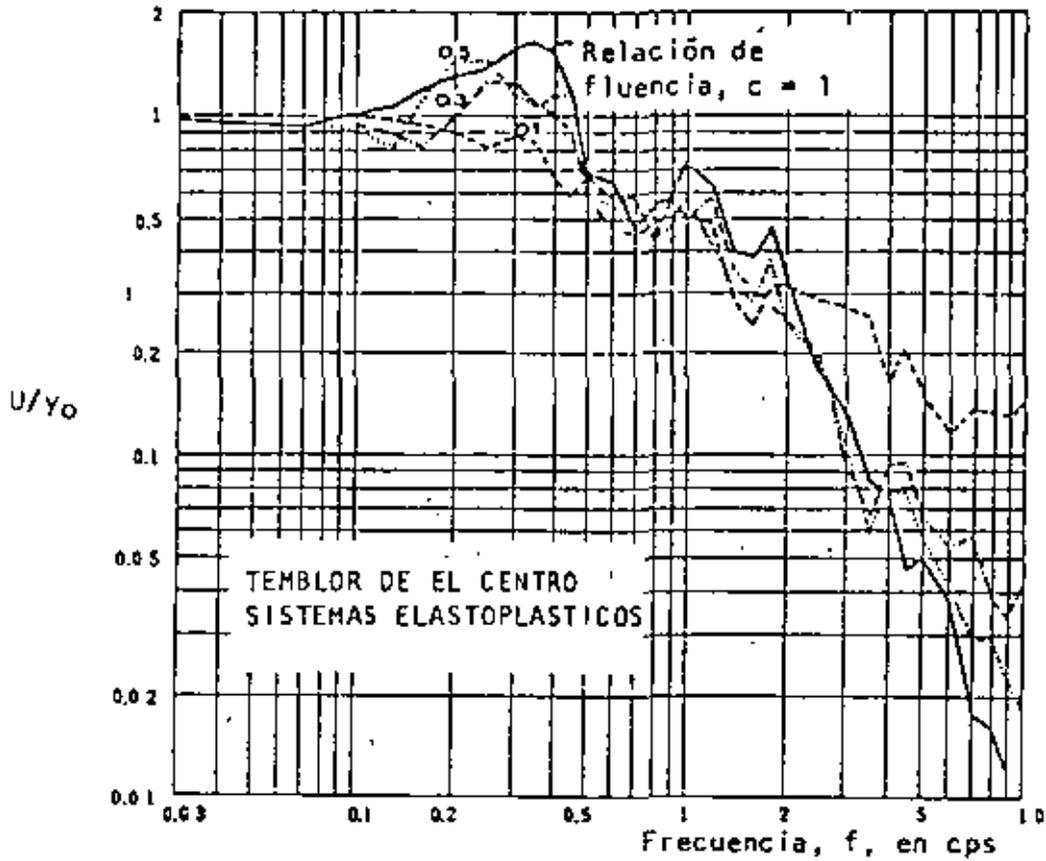


Fig 19. Espectro de deformaciones para sistemas elastoplásticos con amortiguamiento viscoso de 0.02 (según Bielak, 1966)

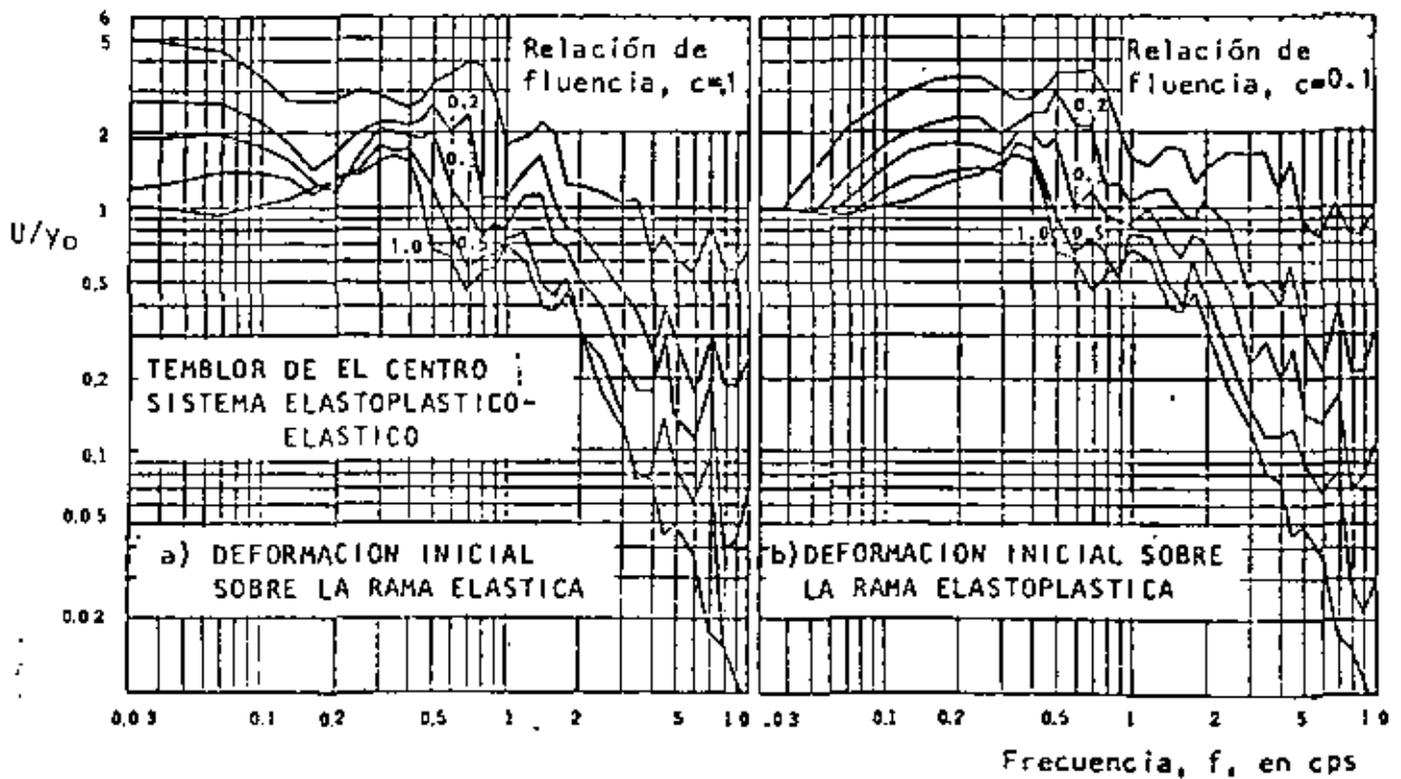


Fig 20. Espectros de deformación para sistemas de curva asimétrica con amortiguamiento viscoso de 0.02 (según Bielak, 1966)

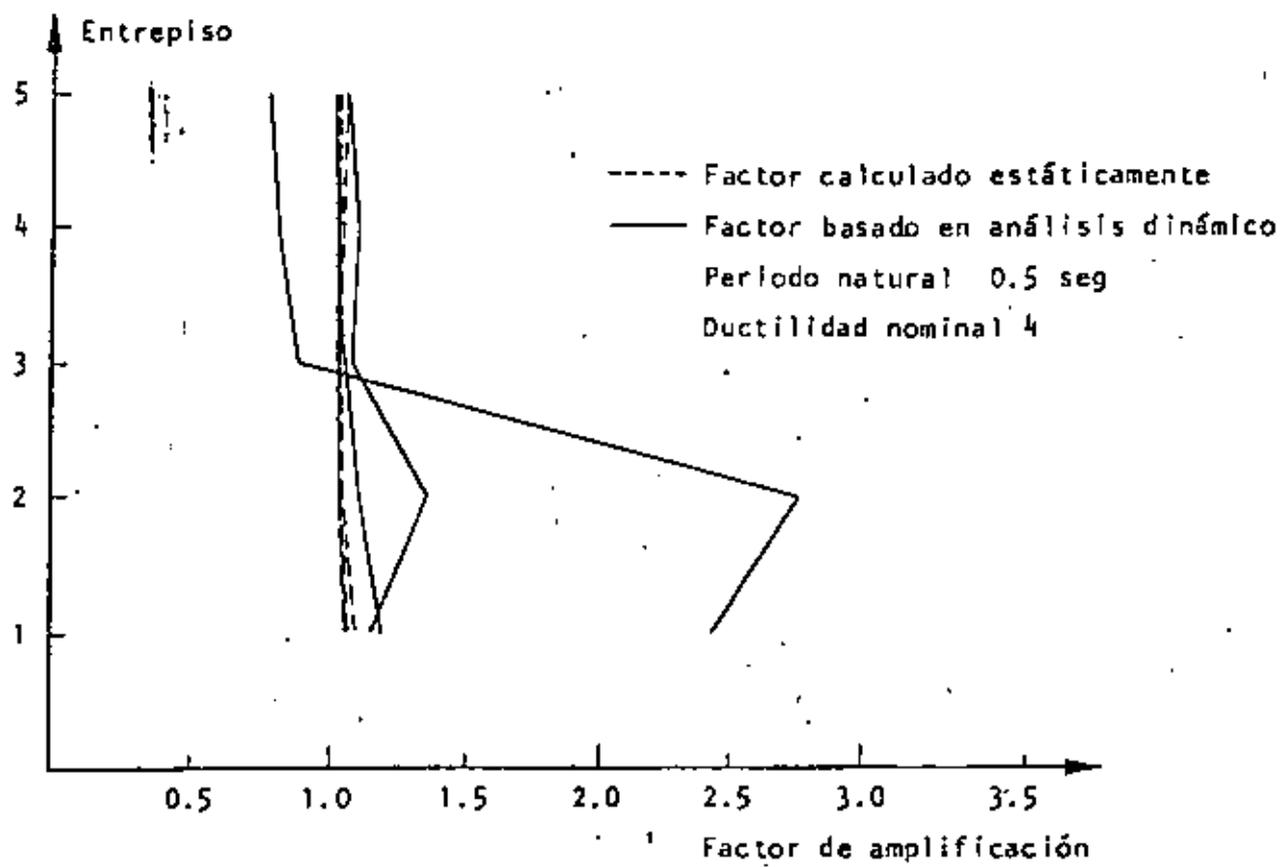


Fig. 21. Factores de amplificación por esbeltez

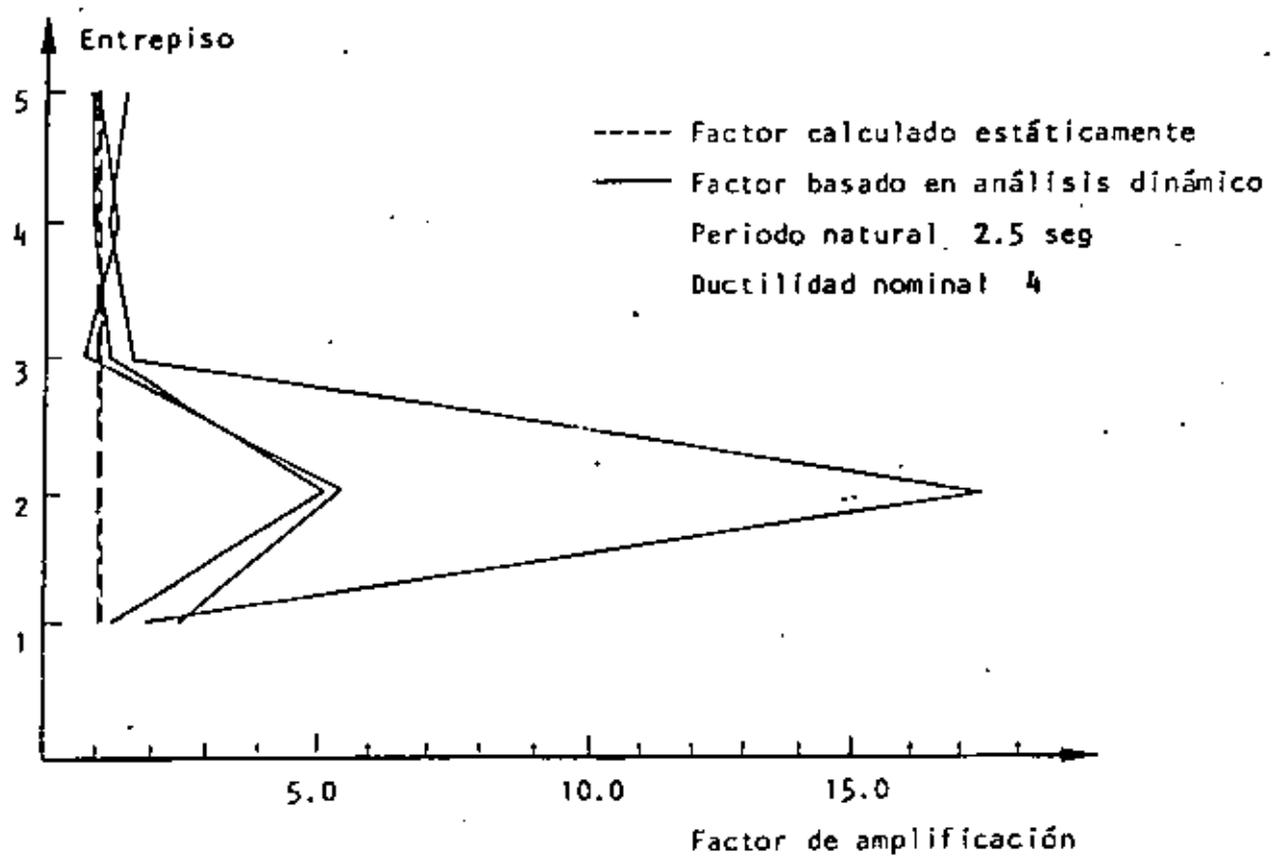


Fig. 22. Factores de amplificación por esbeltez

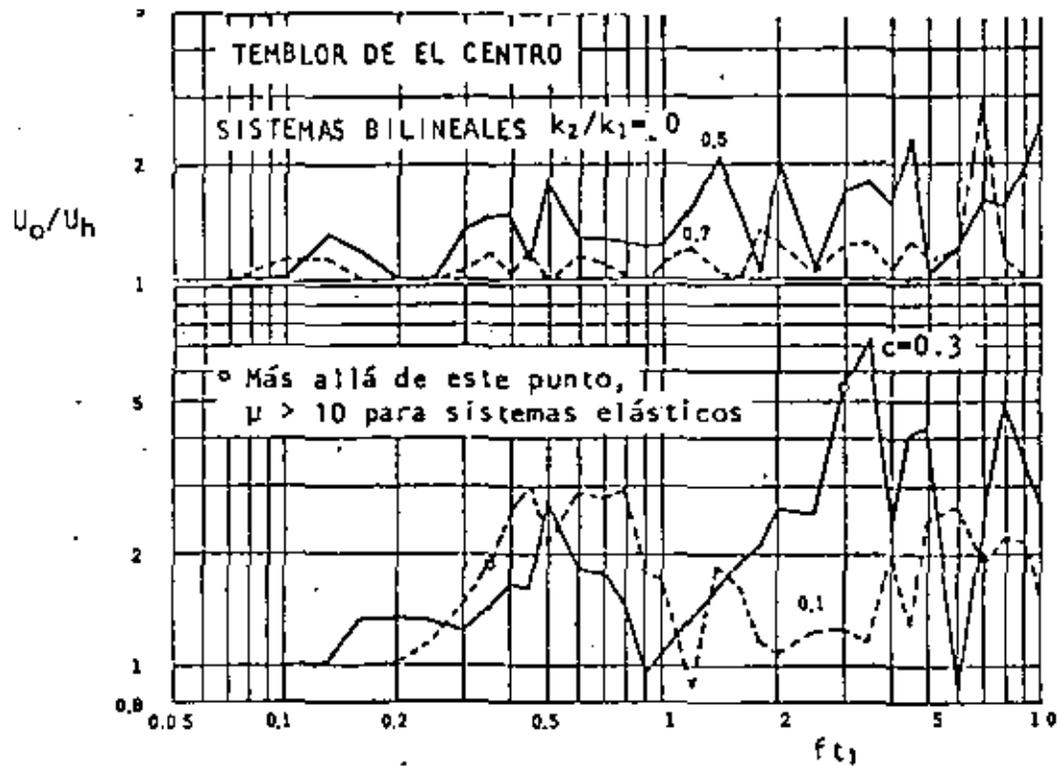


Fig 23. Espectros de la relación de deformaciones máximas de sistemas bilineales elásticos e hysteréticos (según Bielak, 1966)

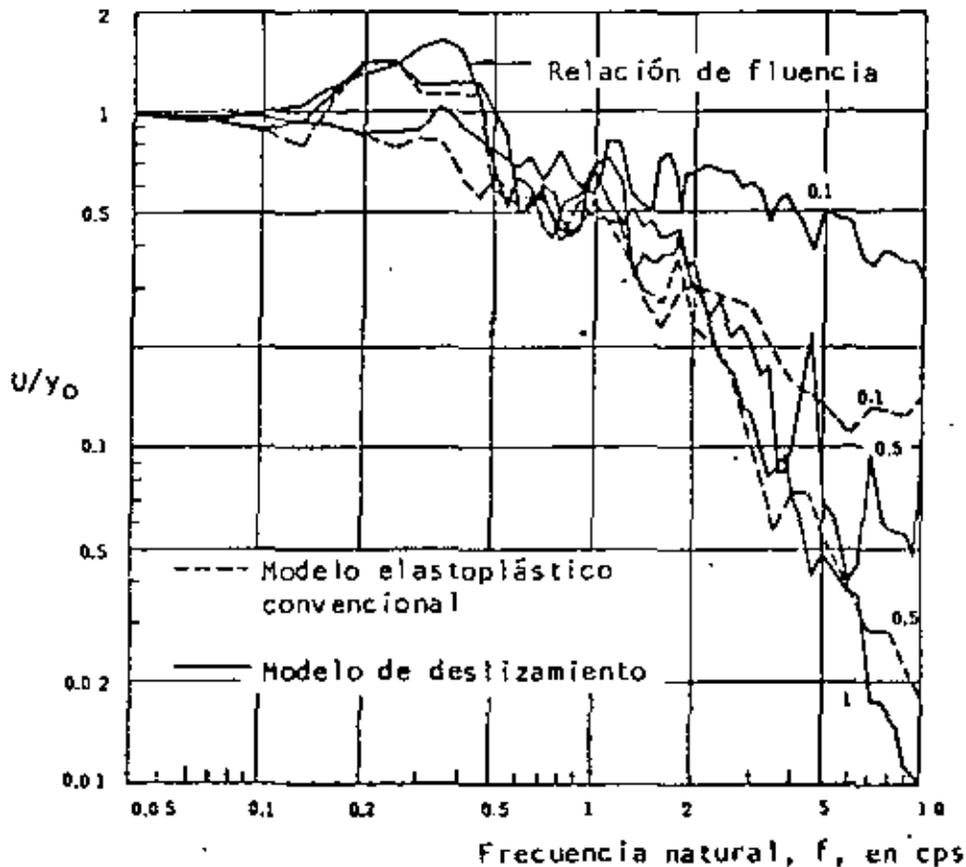


Fig 24. Espectros para sistemas elastoplásticos convencionales y de deslizamiento. Temblor de El Centro. Amortiguamiento 0.02 (según Veletsos, 1969)

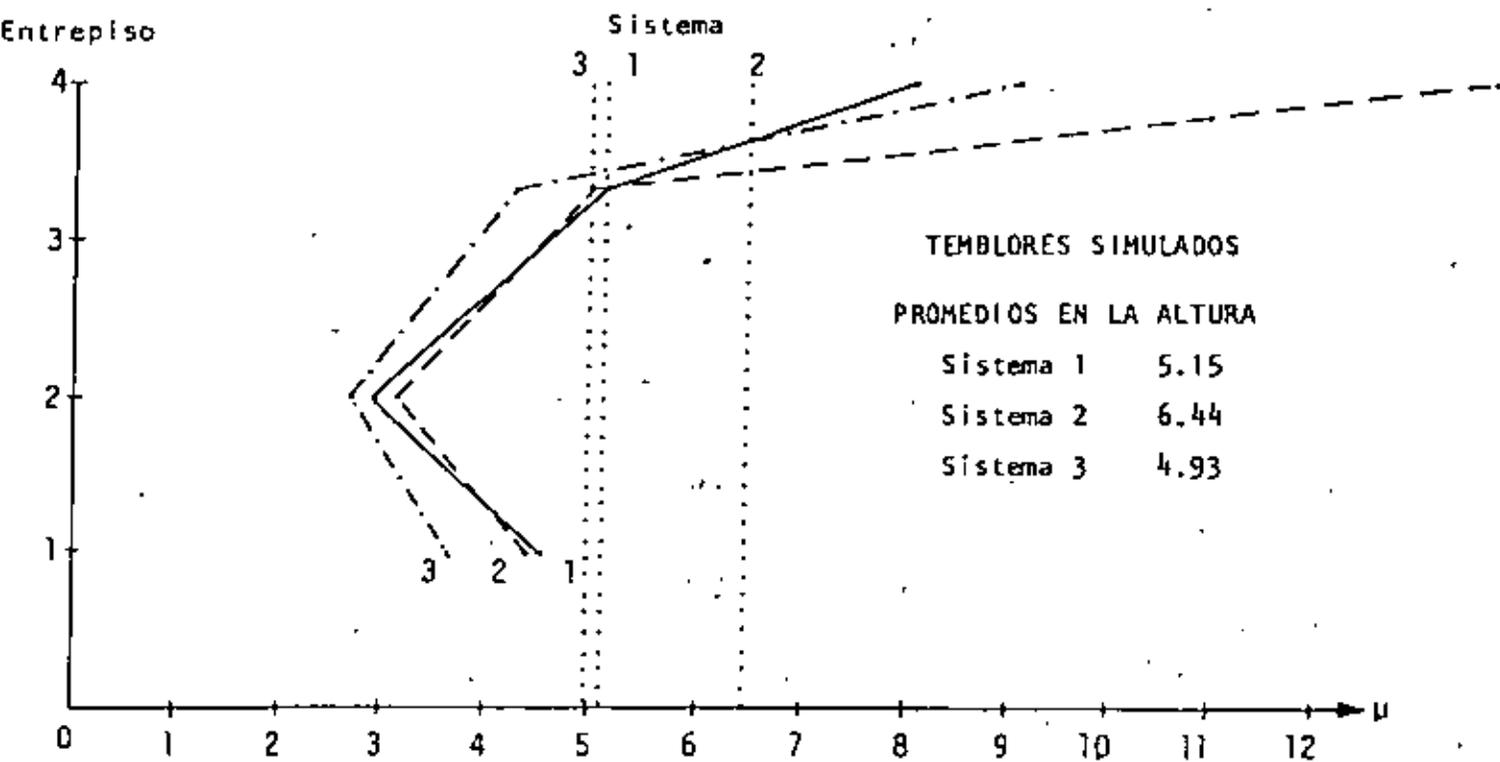
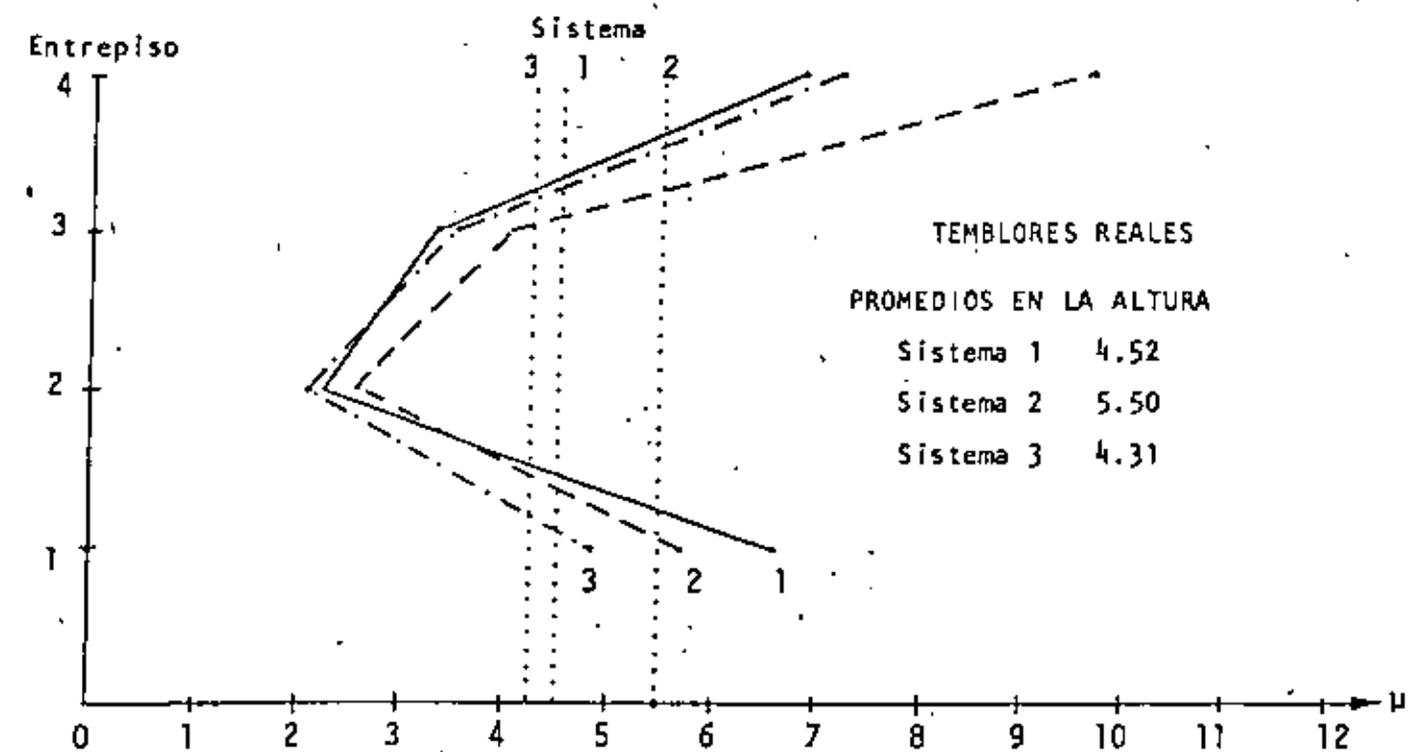


Fig 25. Ductilidades medias para tres sistemas de cortante (según Frank et al, 1976)

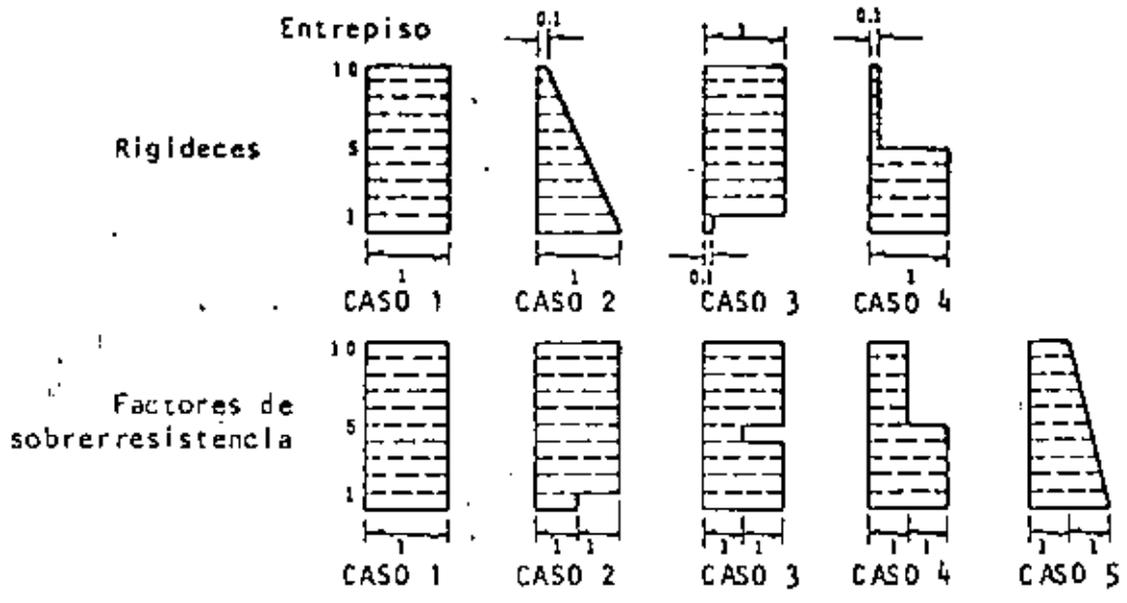


Fig 26. Variación de rigideces y factores de sobrerresistencia en edificios de cortante

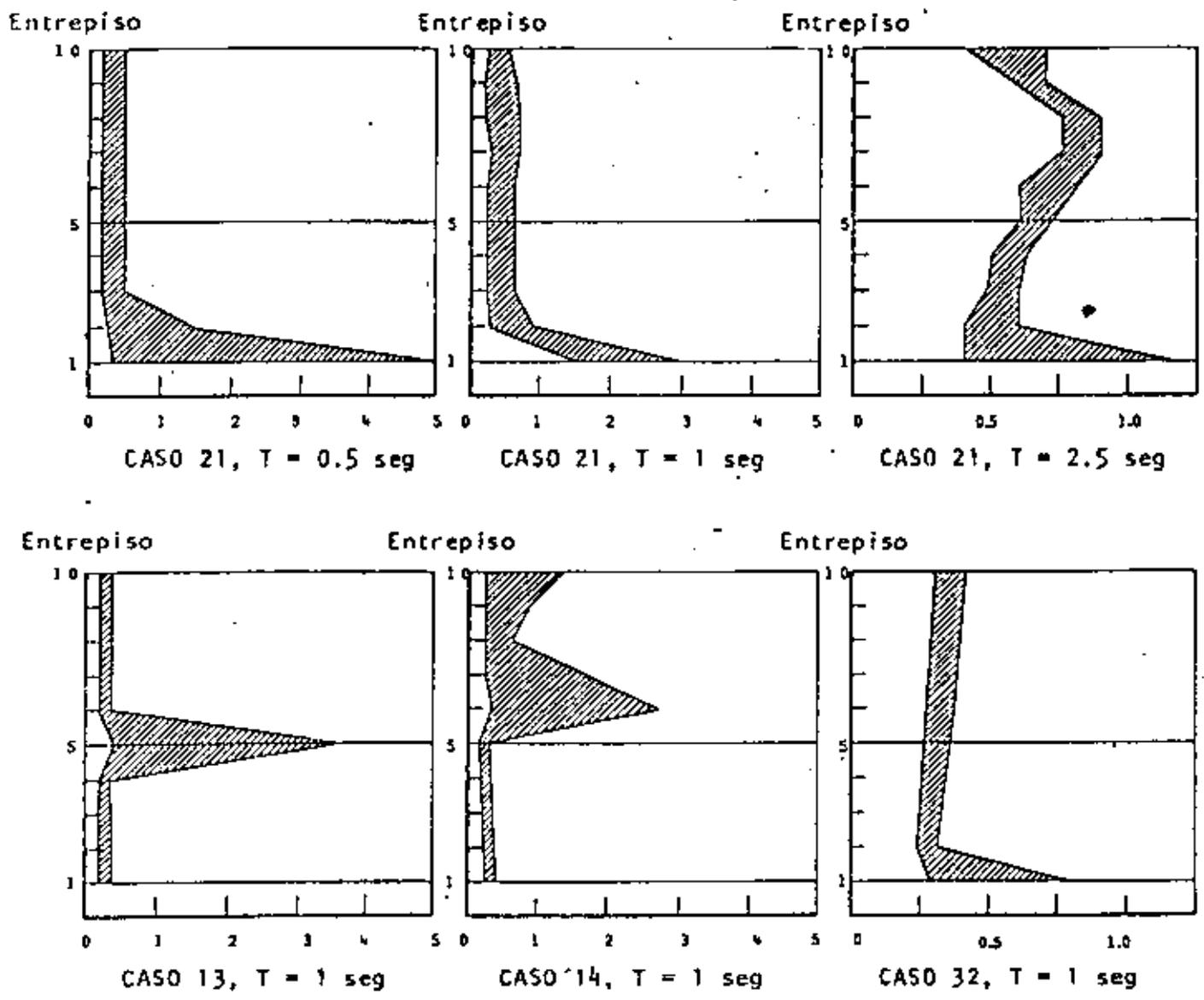
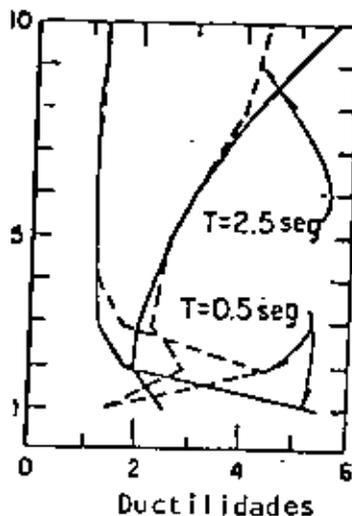
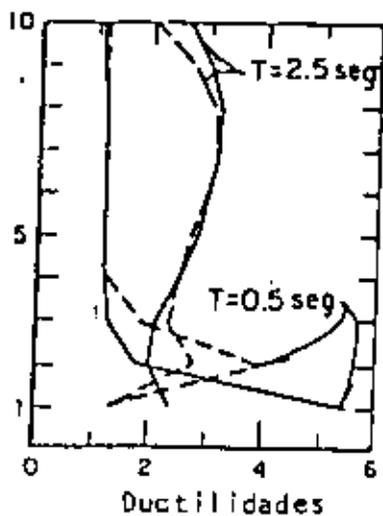


Fig 27. Relaciones entre ductilidades reales y nominales

Entrepiso

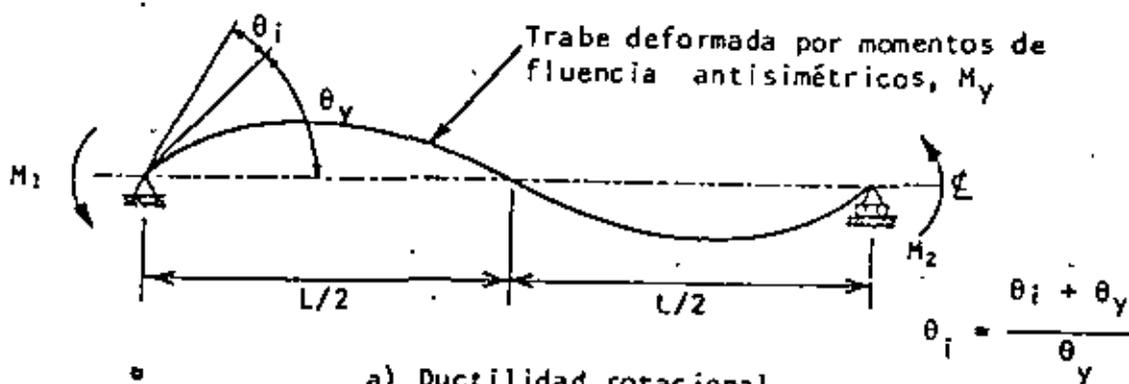
Entrepiso



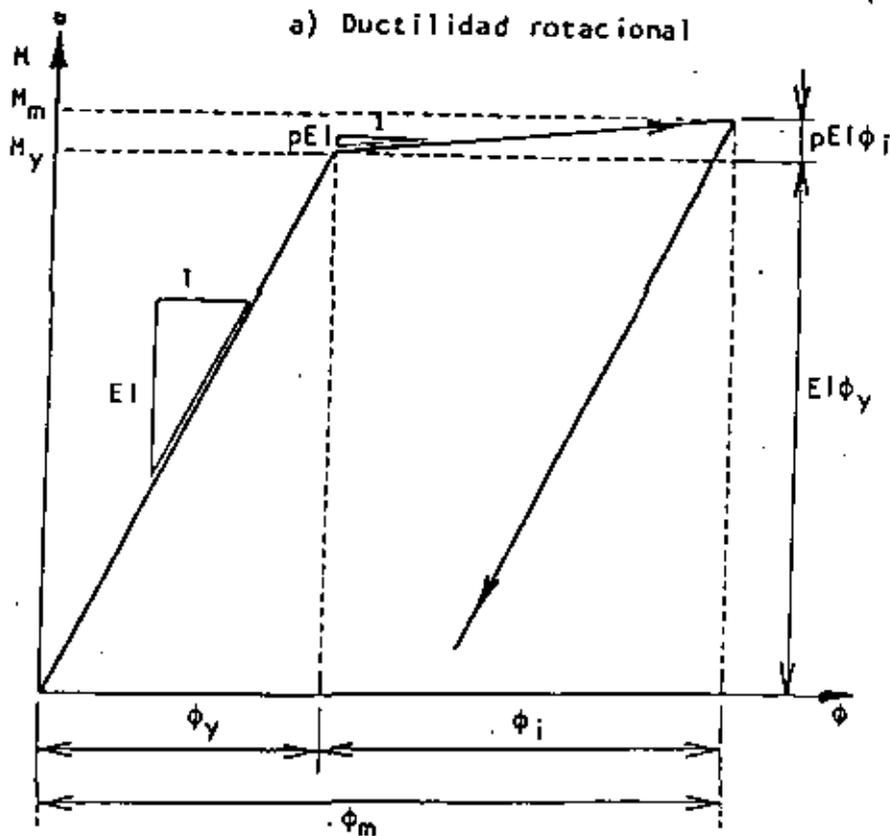
a)

b)

Fig 28. Relaciones entre ductilidades y criterios de diseño



a) Ductilidad rotacional



b) Ductilidad de momentos o de curvaturas

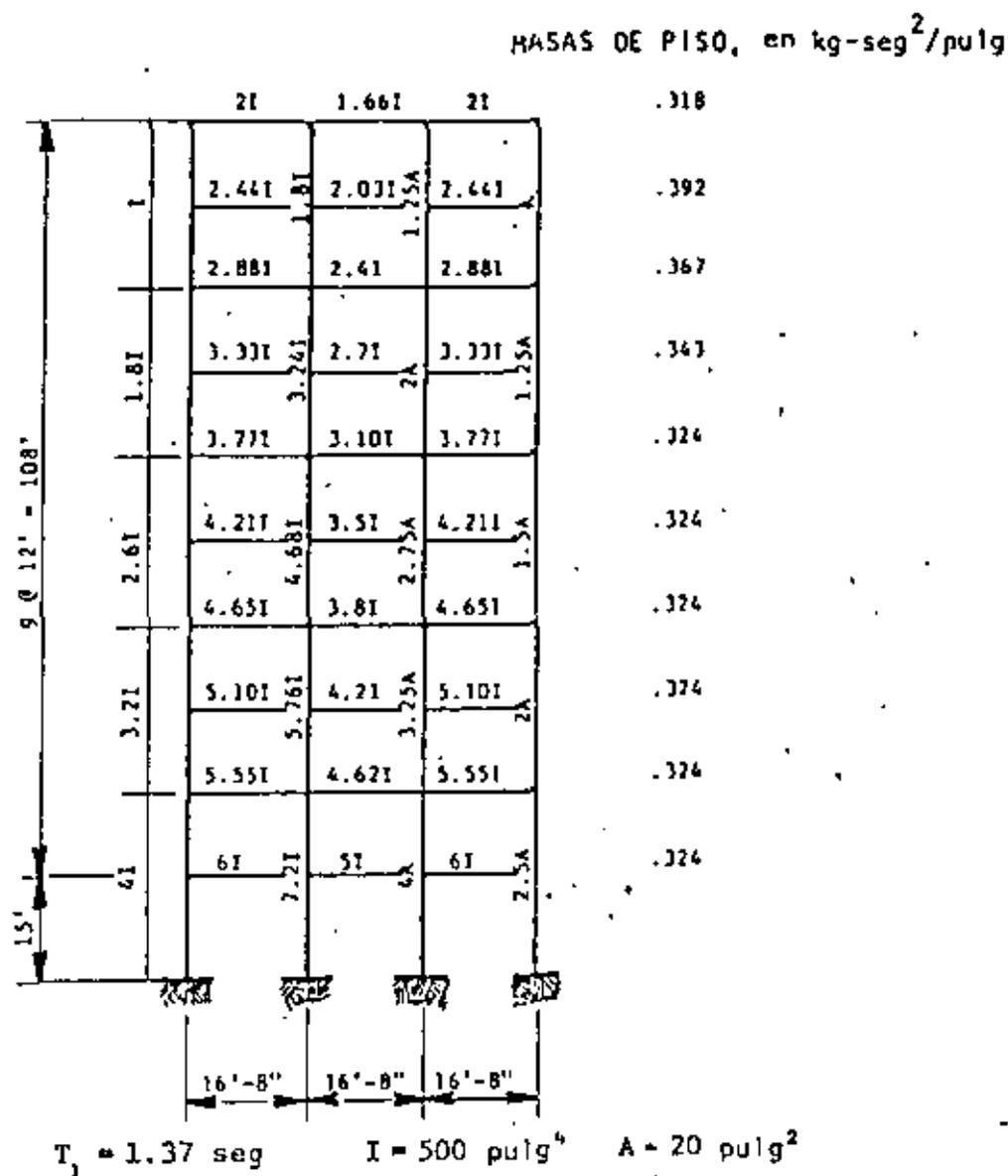


Fig 30. Marco para estudio de ductilidades locales

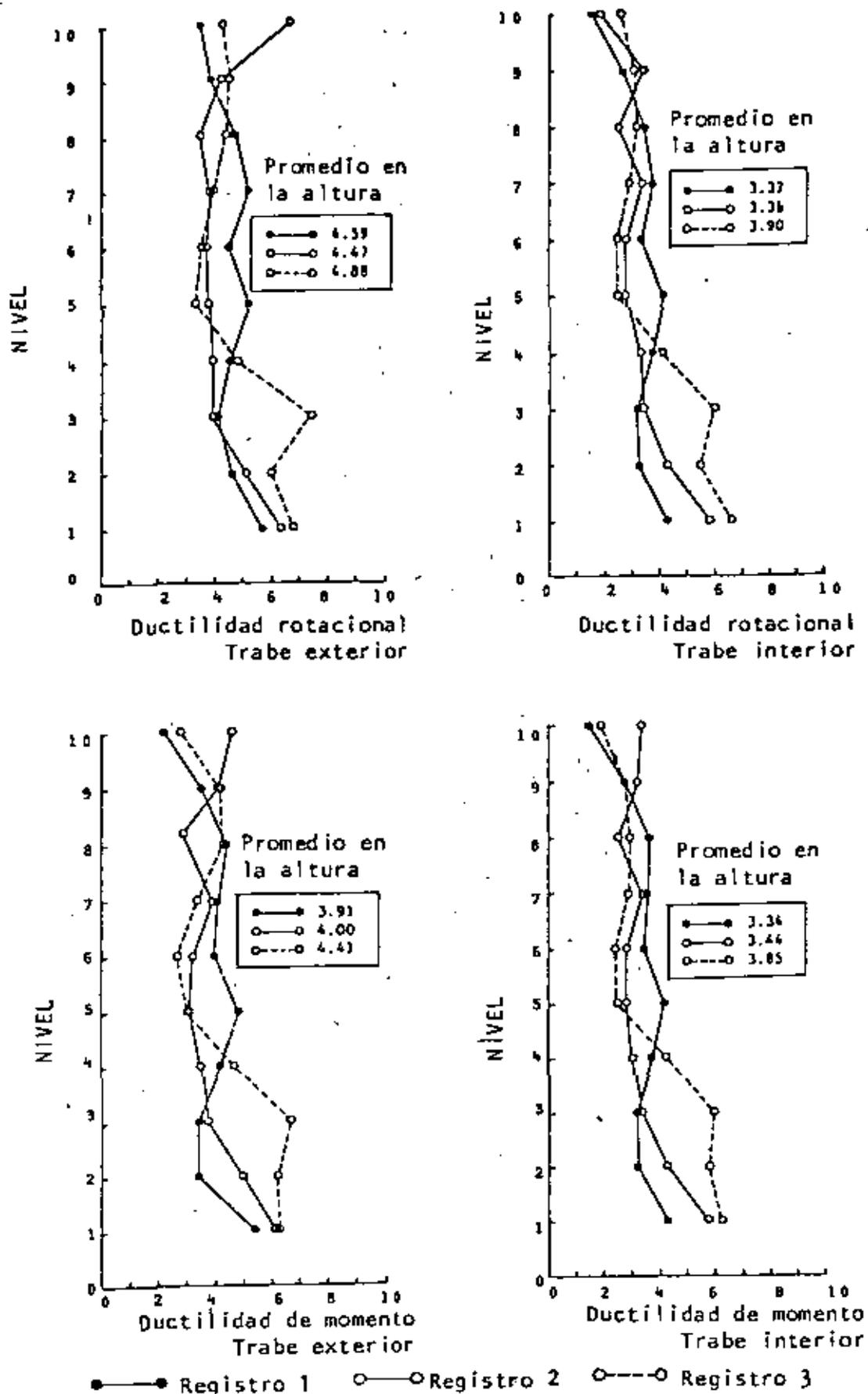


Fig 31. Máximos valores de ductilidad en traves (según Haviland et al, 1976)

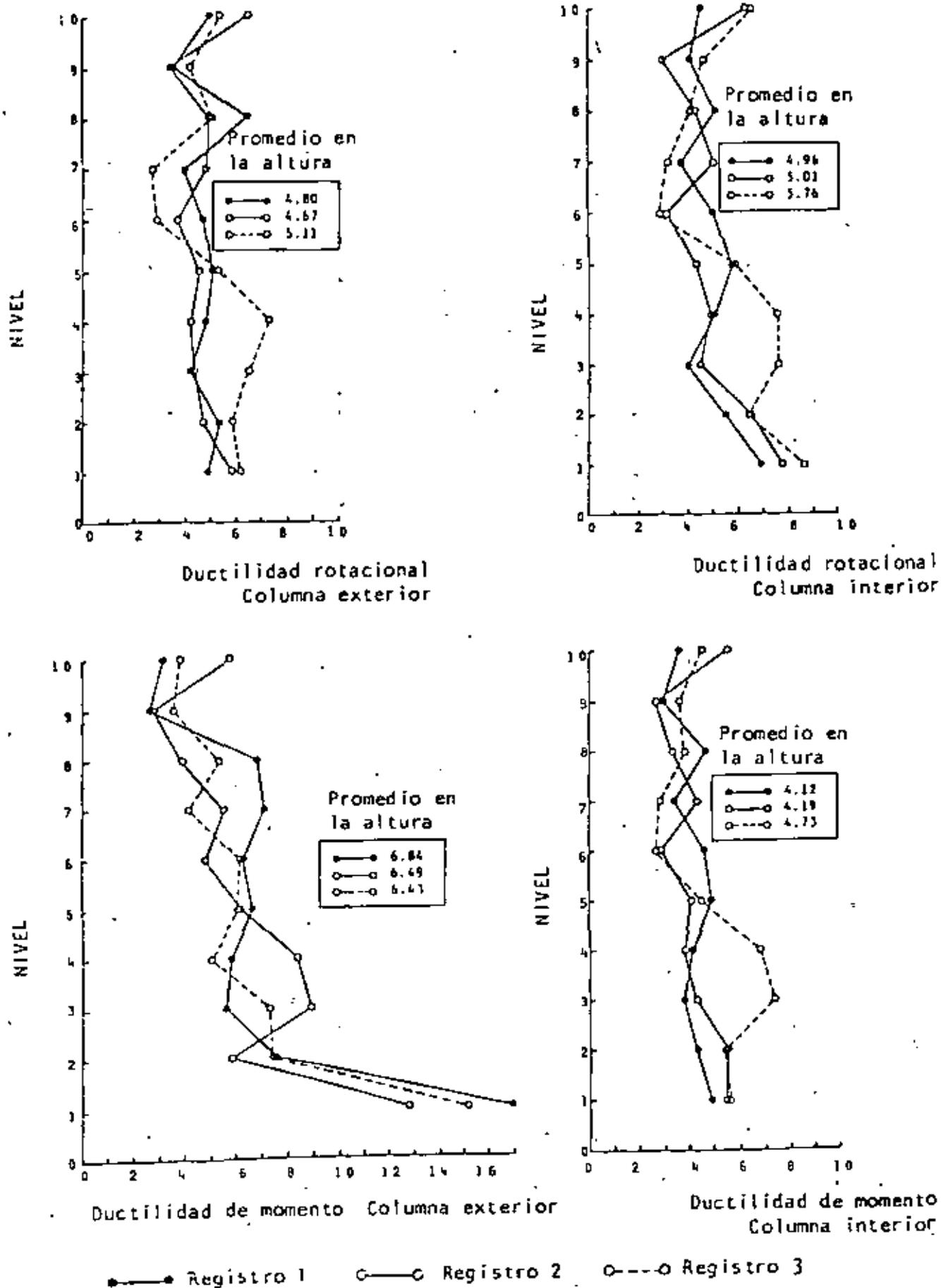


Fig 32. Máximos factores de ductilidad en columnas
(según Haviland et al, 1976)

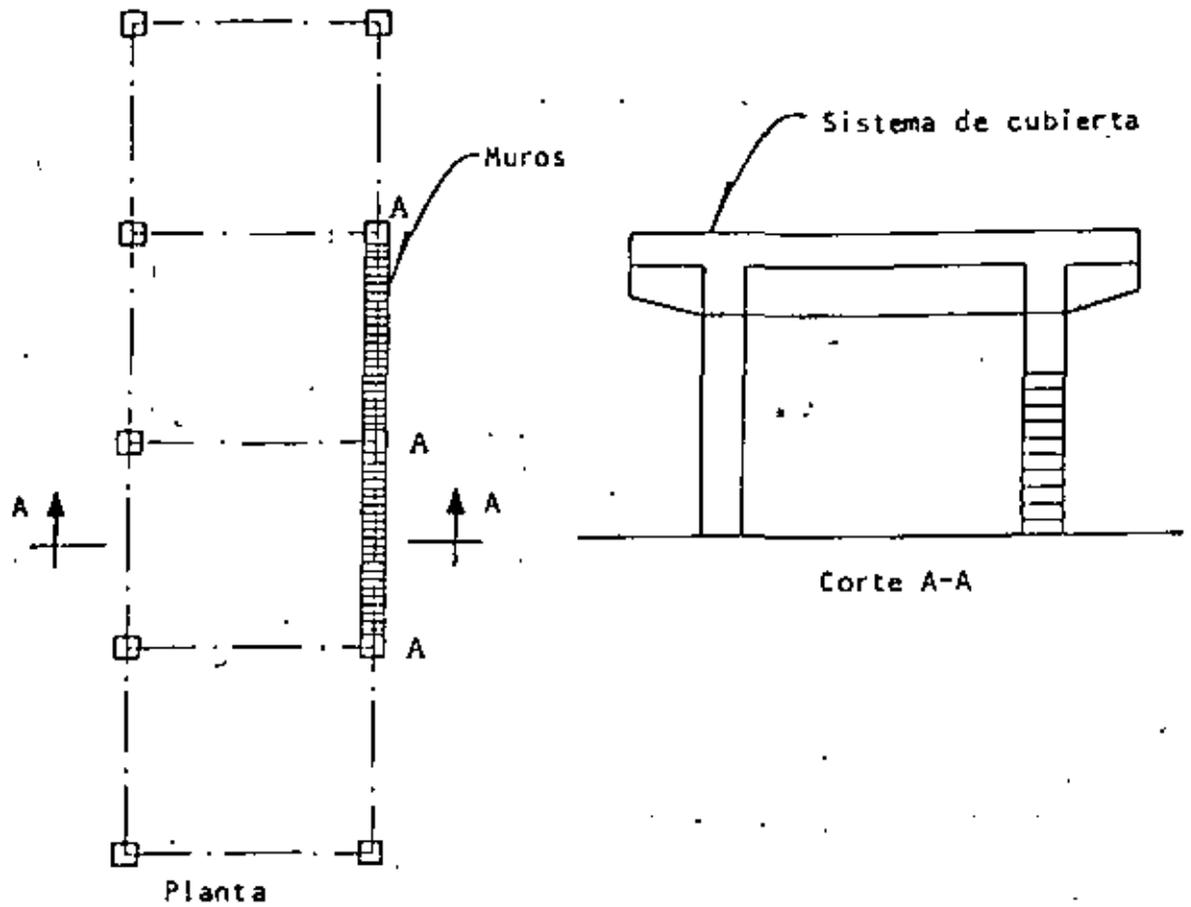


Fig 33. Columnas parcialmente restringidas

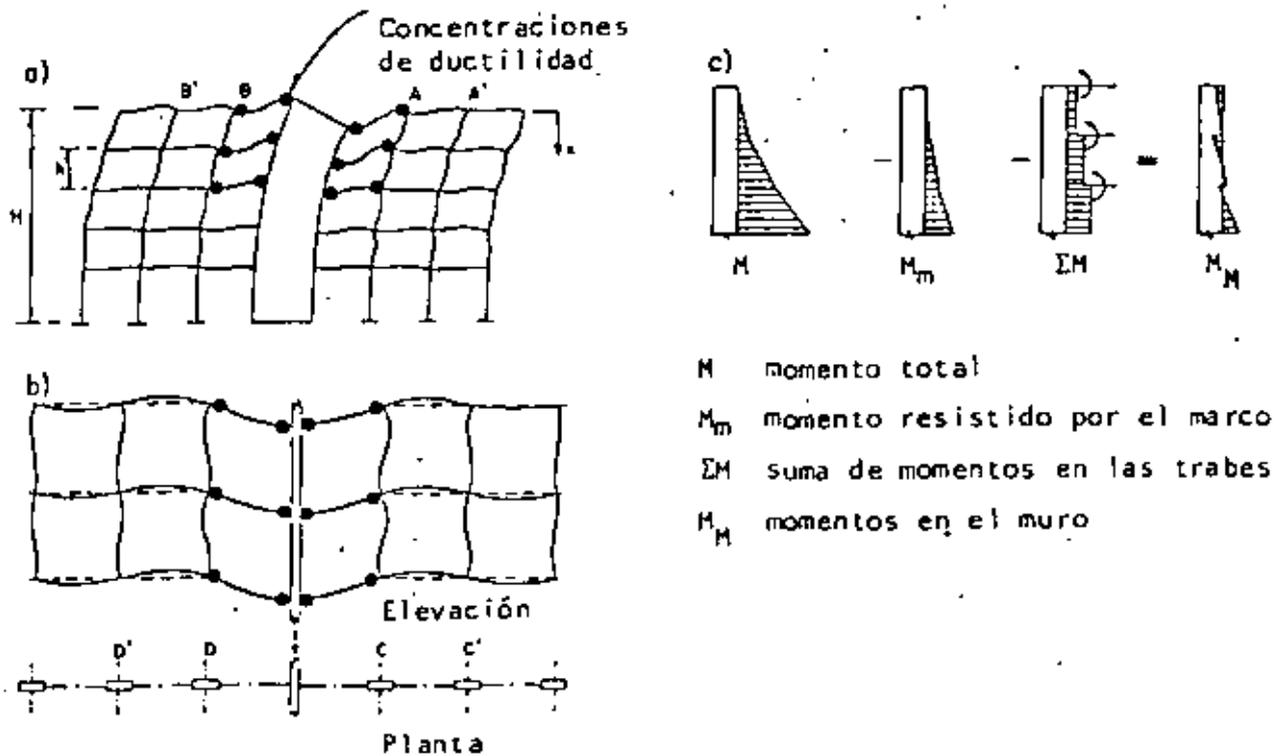
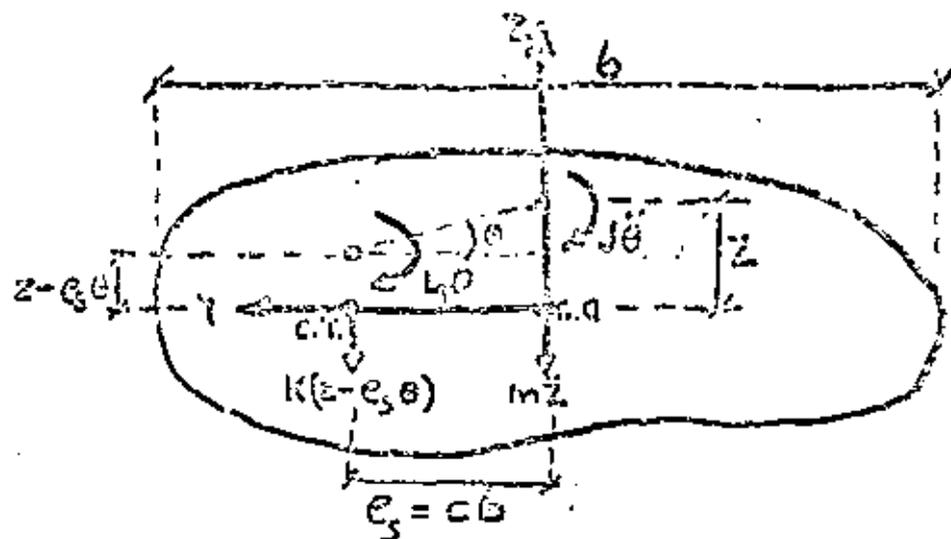


Fig 34. Deformaciones en sistemas rigidizantes

PROBLEMA DE VIBRACIONES DE TORSION
ACOPLADA CON TRASLACION



$$\sum \vec{F}_z = M\ddot{z} + K(z - e_s \theta) = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\sum M_{e.g.} = J\ddot{\theta} + L_T \theta - K(z - e_s \theta)e_s = 0$$

$$J\ddot{\theta} + L_T \theta - K e_s z = 0 \quad \text{--- (2)}$$

en donde $L = L_T + K e_s^2$

Puesto que las vibraciones son armónicas:

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \quad \text{y} \quad \ddot{z} = -\omega^2 z$$

$$-\omega^2 M z + K z - K e_s \theta = 0$$

$$(K - \omega^2 M) z - K e_s \theta = 0 \quad \text{--- (3)}$$

$$-J\omega^2 \theta + L_T \theta - K e_s z = 0$$

$$(L_T - J\omega^2) \theta - K e_s z = 0 \quad \text{--- (4)}$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} K - \omega^2 M & -K e_s \\ -K e_s & L_T - J\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$



$$(K - \omega^2 M) \left(\frac{L_T}{J} - J \omega^2 \right) - K^2 e_s^2 = 0$$

$$K L_T - K J \omega^2 - \omega^2 M L_T + M J \omega^4 - K^2 e_s^2 = 0$$

$$\omega^4 - \frac{K J + M L_T}{M J} \omega^2 + \frac{K L_T}{M J} - \frac{K^2 e_s^2}{M J} = 0$$

~~Multiplicando~~ Dividiendo por $(K/M)^2$:

$$\frac{\omega^4}{(K/M)^2} - \frac{\omega^2}{K/M} \frac{K J + M L_T}{(M J)(K/M)} + \frac{K L_T}{M J (K/M)^2} - \frac{K^2 e_s^2}{M J (K/M)^2} = 0$$

Si: $\lambda^2 = \omega^2 / (K/M)$ y considerando $e_s = cb$:

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left(1 + \frac{L_T/J}{K/M} \right) + \frac{L_T/J}{K/M} - \frac{c^2}{J/(mb^2)} = 0$$

Si $(L_T/J)/(K/M) = \eta$ y $j^2 = J/(mb^2)$

$$\lambda^4 - \lambda^2 (1 + \eta) + \eta - c^2/j^2 = 0$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{\eta+1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta+1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \lambda_1 (K/M) \text{ y } \omega_2^2 = \lambda_2 (K/M)$$

Sustituyendo a ω_1^2 en (1') o en (2'):

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ 0_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_1^2}{cb} \end{bmatrix}; \text{ sustituyendo a } \omega_2^2:$$

$$\vec{z}_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ 0_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_2^2}{cb} \end{bmatrix} \quad \text{o: } \vec{z}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_2^2}{cb} \end{bmatrix}$$



centro de educación continua.
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

DUCTILIDAD Y COMPORTAMIENTO SISMICO

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

JULIO, 1980

DUCTILIDAD Y COMPORTAMIENTO SISMICO**

L. Esteva*

RESUMEN

Se describen las relaciones que ligan demandas de ductilidad con resistencia y rigidez en sistemas simples sometidos a excitación sísmica, así como algunos problemas que se encuentran al tratar de extrapolar dichas relaciones a sistemas complejos, representativos de los que encuentran los ingenieros en la práctica de diseño. La descripción citada se orienta a la identificación de condiciones que influyen en la capacidad de las estructuras para responder dúctilmente ante temblores sin fallar, y a la definición de los criterios pertinentes de diseño estructural.

ABSTRACT

A description is provided of the relationships tying ductility demands with strength and stiffness in simple systems subjected to seismic excitation, as well as of some problems found when trying to extrapolate those relationships to complex systems, representative of those found in design practice. The description mentioned aims at identifying those conditions influencing structural capacity to respond in a ductile manner to earthquakes without failing and at defining the corresponding criteria of structural design.

* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México 20, D. F. MEXICO

** Resumen de una conferencia presentada en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Barcelona

DUCTILIDAD Y COMPORTAMIENTO SISMICO**

L. Esteva*

1. Naturaleza del diseño sísmico

El diseño en ingeniería se halla arraigado en la necesidad social de optimar. Implica considerar acciones alternativas, estimar sus consecuencias y hacer la mejor selección. En ingeniería sísmica, cada posible línea de acción incluye la adopción de un sistema estructural y un criterio de diseño sísmico, mientras que la evaluación de las consecuencias implica estimar respuestas estructurales y costos esperados de daños. Los criterios usuales de diseño sísmico adoptan coeficientes de cortante y ordenadas espectrales como medidas de la respuesta estructural, ya que esta se expresa en general en términos de aceleraciones y fuerzas laterales equivalentes actuando sobre sistemas lineales. Pero estas variables no son sino medidas indirectas del comportamiento del sistema durante temblores: sirven para controlar los valores de variables más significativas, tales como deflexiones laterales de los sistemas no lineales reales, ductilidades locales y de conjunto, y márgenes de seguridad con respecto a falla por inestabilidad (efectos de segundo orden). En vista de que las relaciones entre variables de control y respuesta real dependen del tipo y características del sistema estructural, la comprensión de estas relaciones es requisito para el logro de diseños adecuados. Este concepto se opone a la aplicación ciega de requisitos reglamentarios: en diseño sísmico, más que en otros campos de ingeniería, es fácil caer en la aplicación estricta, pero ciega, de las más avanzadas normas y,

sin embargo, producir una estructura destinada a comportarse pobremente.

La optimación que es meta del diseño sísmico puede expresarse en términos de varios objetivos directos: el diseño sísmico trata de proporcionar niveles adecuados de seguridad con respecto al colapso ante temblores excepcionalmente intensos, así como con respecto a daños a construcciones adyacentes; busca también proteger a las construcciones contra daños materiales excesivos bajo la acción de temblores de intensidad moderada, asegurar la facilidad de los trabajos de reparación, reconstrucción o refuerzo en caso de daños, y proporcionar protección contra la acumulación de daño estructural durante series de temblores. Finalmente, se trata de preservar la seguridad y la comodidad de los ocupantes y del público en general, logrando que la respuesta estructural durante temblores de intensidad moderada no exceda ciertos niveles de tolerancia, y evitando el pánico durante temblores de intensidad moderada o alta, particularmente en edificios en donde se espera frecuente aglomeración de personas.

La consecución de los objetivos anteriores requiere mucho más que el dimensionamiento de los miembros estructurales para fuerzas internas dadas. Es indispensable tomar en cuenta explícitamente dichos objetivos, así como los problemas relacionados con la respuesta estructural no lineal y con el comportamiento de materiales, miembros y conexiones sometidos a varios ciclos de carga alternada. Implica también la identificación de condiciones de servicio y la formulación de los criterios de aceptación correspondientes.

2. Comportamiento no lineal, ductilidad y respuesta sísmica

Se dice que un sistema estructural es dúctil si es capaz de soportar deformaciones importantes a carga prácticamente constante, sin alcanzar niveles excesivos de daño o de disminución de la resistencia ante aplicaciones subsecuentes de cargas. Las curvas a y b en la fig 1 muestran relaciones típicas entre carga (P) y de flexión (D) para la primera aplicación de carga en sistemas dúctiles y frágiles, respectivamente. La curva a corresponde a la respuesta bajo carga lateral de un marco de concreto reforzado adecuadamente detallado, en donde los efectos de esbeltez no son significati-

* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México 20, D. F. MEXICO

**Resumen de una conferencia presentada en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Barcelona

vos; la curva b es típica de mampostería de bloques huecos con escaso refuerzo. Para estructuras que deban soportar sismos, no puede inferirse comportamiento dúctil simplemente de observar curvas carga-deformación para el primer ciclo de carga, ya que el daño producido durante los primeros ciclos puede deteriorar la capacidad de absorción de energía del sistema para ciclos posteriores: la rigidez puede degradarse en forma apreciable, como ocurre en muros de cortante de albañilería o en marcos de concreto reforzado detallados de manera deficiente.

La capacidad de sistemas estructurales para absorber energía mediante comportamiento histerético sirve de apoyo a los criterios convencionales de diseño sísmico, que requieren que las estructuras se diseñen para fuerzas laterales de magnitud muy inferior a la necesaria para mantenerlas dentro de su intervalo de comportamiento lineal durante temblores severos. Así la seguridad contra colapso ante sismos puede lograrse haciendo una estructura resistente, haciéndola dúctil o diseñando para una combinación económica de ambas propiedades. Para algunos tipos de materiales y miembros estructurales, la ductilidad es difícil de lograr, y la economía dicta la conveniencia de diseñar para cargas laterales relativamente elevadas; para otras, es mucho más barato lograr ductilidad que resistencia, y la práctica de diseño refleja este hecho. Pero el empleo de materiales dúctiles no implica necesariamente el logro de sistemas dúctiles; por ejemplo, las concentraciones de esfuerzos en juntas soldadas pueden propiciar la ocurrencia de falla prematura, de naturaleza frágil, en dichas juntas, y los efectos $P - \Delta$ (interacción entre deflexiones laterales y fuerzas internas causadas por la acción de cargas gravitacionales actuando sobre la estructura deformada) pueden ocasionar falla por inestabilidad cuando la rigidez lateral efectiva es demasiado baja.

En este trabajo se describen las relaciones cuantitativas que ligan demandas de ductilidad con resistencia y rigidez en sistemas simples sometidos a excitación sísmica, así como algunos problemas que se encuentran al tratar de extrapolar dichas relaciones a sistemas complejos, representativos de los que encuentran los ingenieros en la práctica de diseño. La descripción citada se orienta a la identificación de condiciones que influyen en la capacidad de las estructuras para respon-

der dúctilmente ante temblores sin fallar, y a la definición de los criterios pertinentes de diseño estructural.

3. Ductilidad local y global

El comportamiento dúctil no lineal de sistemas complejos resulta en general de las deformaciones dúctiles locales, o concentradas, que ocurren en las secciones particulares de una estructura dada en donde se alcanzan deformaciones de fluencia. La ductilidad de conjunto, o global, es una propiedad de una curva carga-deformación expresada en términos de la resultante de las cargas externas que actúan en una porción importante de un sistema dado; por ejemplo, los marcos de edificios suelen tratarse como vigas de cortante para fines de estimar su respuesta dinámica no lineal ante excitación sísmica. Las ductilidades globales se expresan entonces en términos de las curvas que ligan fuerzas cortantes con deformaciones laterales en cada entrepiso. En general, el valor numérico adoptado por la ductilidad global en un entrepiso no coincide con los valores de las ductilidades concentradas que se desarrollan en los puntos correspondientes del entrepiso, ya que la ductilidad del conjunto es función de la relación entre las contribuciones a la deformación de entrepiso de las deformaciones dúctiles concentradas y de las elásticas distribuidas. En sistemas que no pueden idealizarse como vigas de cortante, las relaciones entre ductilidades de conjunto y locales dependen de las configuraciones deformadas de dichos sistemas, y por tanto varían durante un sismo dado. En forma aproximada, pueden adoptarse las relaciones entre ductilidad global y local que correspondan a la configuración que se obtiene de considerar que las deformaciones máximas de los entrepisos ocurren simultáneamente.

La ductilidad global disponible puede controlarse mediante el diseño y la ejecución de los detalles estructurales que permitan el desarrollo de ductilidades locales adecuadas. La demanda local de ductilidad varía entre puntos diferentes de un sistema complejo. En un punto dado, dicha demanda es función de la resistencia local y de la variación de la resistencia en todo el sistema. Esto es consecuencia de la interacción entre la disipación de energía por histéresis en diversas secciones. En marcos de edificios, la va-

riabilidad en la ductilidad requerida en diversos puntos suele ser consecuencia de la superposición de las fuerzas internas debidas a cargas permanentes y a excitaciones accidentales. Influyen en dicha ductilidad el orden en que se alcance el límite de cedencia en los diversos puntos y la interacción entre momentos flexionantes, fuerzas cortantes y fuerzas axiales, entre otros factores.

4. Respuesta dinámica de sistemas simples elasto-plásticos

La idealización más usual de estructuras dúctiles es el sistema elasto-plástico (fig 2). Para ellos se define el factor de ductilidad como el cociente de la deformación máxima desarrollada entre la que corresponde al límite de cedencia: $Q = D/D_y$. Si se analiza la respuesta de sistemas elasto-plásticos de un grado de libertad y de rigidez y masa dadas ante excitaciones sísmicas, y se obtienen curvas de las deformaciones de cedencia que deben caracterizar a dichos sistemas para lograr demandas de ductilidad que no excedan de ciertos valores dados, se observa que, para periodos naturales de vibración que no sean demasiado cortos, las deformaciones de cedencia que se requieren — y por tanto los correspondientes coeficientes de constante en la base — varían en razón inversa con la ductilidad. La fig 3 ilustra esta afirmación para el temblor de El Centro, 1940. En las abscisas se tienen frecuencias naturales f en escala logarítmica, y en las ordenadas, pseudo-velocidades (obtenidas como el producto de frecuencia natural por deformación de cedencia requerida) en el mismo tipo de escala, para diversos valores del factor de ductilidad. Dada la forma en que se definieron las ordenadas en esta figura, es fácil demostrar que las deformaciones requeridas de cedencia pueden leerse refiriéndose a un sistema de rectas a 45° que suben de izquierda a derecha, y que las pseudo-aceleraciones $(2\pi f)^2 D_y$ pueden leerse tomando como base un sistema de rectas a 45° que bajan de izquierda a derecha. Las curvas obtenidas según se acaba de describir constituyen los espectros de deformación para sistemas elasto-plásticos. En la figura se observa que para frecuencias naturales que no excedan de 1 cps, las ordenadas espectrales son aproximadamente proporcionales al recíproco del factor de ductilidad. Teniendo en cuenta que la deformación lateral D es igual a la de cedencia D_y multiplicada por

el factor de ductilidad Q , la proporcionalidad inversa aproximada entre D_y y Q implica que para periodos naturales mayores que 1 seg. D es prácticamente independiente de Q y por tanto de la resistencia lateral del sistema. Para periodos naturales cortos, la deformación de cedencia y la pseudo-aceleración espectrales resultan poco sensibles a la ductilidad, y en el límite, para periodos naturales nulos, o estructuras infinitamente rígidas, la pseudo-aceleración es igual a la máxima aceleración del terreno, y la deformación total $D = QD_y$ es proporcional a la ductilidad. En otras palabras, la deformación total es prácticamente insensible al factor de ductilidad para periodos naturales moderados y largos, y tiende a ser proporcional a dicho factor para periodos muy cortos; la pseudo-aceleración espectral es inversamente proporcional al factor de ductilidad para periodos naturales moderados y largos, y se torna casi insensible a dicho factor para periodos muy cortos. En consecuencia, para sistemas elastoplásticos de un grado de libertad y de periodo natural no menor que 0.8 seg. aproximadamente, las aceleraciones espectrales de diseño pueden tomarse iguales a las que corresponden a sistemas lineales divididas entre el factor de ductilidad permisible, según el tipo de estructura; para estructuras de periodos cortos las reducciones que pueden lograrse en las fuerzas laterales de diseño son menos sensibles a la ductilidad. En estructuras que hayan de construirse sobre terreno blando, el límite aproximado de 0.8seg deberá tal vez subirse, teniendo en cuenta los periodos dominantes del movimiento del terreno. La poca eficiencia de la ductilidad para reducir las ordenadas espectrales en el intervalo de periodos menores que los dominantes del movimiento puede también interpretarse en términos del alargamiento del periodo de vibración efectivo de un sistema que resulta de su respuesta no lineal y de la tendencia general de crecimiento de las ordenadas espectrales con el periodo natural en el intervalo citado. Aunque el problema no ha sido suficientemente estudiado, las normas de diseño sísmico de la Ciudad de México proponen espectros de aceleraciones en terreno blando caracterizados por ordenadas constantes para un amplio intervalo de periodos naturales menores que los dominantes del terreno, claramente identificados en los espectros elásticos (fig 4).

Las conclusiones que anteceden son válidas para sistemas que puedan idealizarse como elasto-plásticos. Pa-

ra algunos sistemas estructurales tal idealización no es válida. La curva carga-deformación puede caracterizarse por límites de cedencia distintos para cada sentido de aplicación de la carga; la capacidad de absorción de energía por histéresis para una deformación dada puede reducirse drásticamente de ciclo a ciclo, como consecuencia de las deformaciones residuales en elementos, como los cables de arriostamiento, que sólo pueden tomar fuerzas de un mismo signo; los ciclos de histéresis son muy angostos en marcos de concreto presforzado; la ocurrencia de daños puede causar la degradación de las rigideces en las curvas carga-deformación después de unos cuantos ciclos, y la influencia de efectos de esbeltez puede dar lugar a pendientes negativas significativas en el intervalo posterior a la cedencia. Cualquiera de estos efectos puede conducir a coeficientes sísmicos superiores a los aplicables al caso elasto-plástico convencional.

5. Ductilidad y deterioro.

La fig 5 representa el caso típico de respuesta ante carga altamente sin deterioro. Se trata de una junta entre trabe y columna de una estructura de acero, sometida a momentos de igual signo en los extremos de las trabes (Krawinkler et al, 1976). En las ordenadas se muestra la suma de momentos y en las abscisas la distorsión angular del tablero en la zona de unión. Se aprecia en ella el efecto Bauschinger, es decir, la desaparición de la ley prácticamente bilineal carga-deformación válida para la primera aplicación de carga, y la sustitución de la curva correspondiente por otra en que las pendientes varían gradual y monotónicamente, desde un máximo para cargas pequeñas, hasta un mínimo, para deformaciones grandes. Los cambios de pendientes, y por tanto en la capacidad de disipación de energía por histéresis, son significativos sólo entre la primera aplicación de carga y la curva de descarga inmediata. A partir de ella, los ciclos de histéresis son prácticamente estables para un número de repeticiones superior al que puede ocurrir bajo la acción de unos cuantos temblores. Esta condición favorece la disipación de energía cinética durante sismos intensos y contribuye a controlar amplitudes de respuesta y niveles de daños.

No todas las construcciones se caracterizan por curvas estables y de gran capacidad de disipación como

estas: un ejemplo de lo contrario se mostró en la fig 1b. Estas propiedades dependen del material empleado y de los modos de falla que rijan el comportamiento; en sistemas estructurales, dependen de los detalles constructivos en los miembros y en las uniones. En construcciones de acero soldadas, la condición para obtener curvas como las de la fig 5 es contar con factores de seguridad suficientemente elevadas contra inestabilidad local; sin embargo, las esbelteces de los miembros que se emplean conducen con frecuencia a curvas como las de la fig 6, características de sistemas en que es significativa la inestabilidad de conjunto.

En estructuras de concreto, el logro de ductilidades y capacidades de disipación de energía adecuadas requiere estudio cuidadoso de uniones, anclajes, porcentajes de refuerzo, factores de seguridad en distintos modos de falla, entre otros conceptos. El estudio experimental de estas variables ha recibido atención durante los últimos años. Bertero y Popov (1975) estudiaron el comportamiento ante carga alternante de subconjuntos constituidos por tramos de vigas y columnas (fig 7). Las variables analizadas incluyeron el tipo y cuantía de refuerzo en las juntas y en los extremos de los miembros (fig 8), la influencia de la inestabilidad (fig 9) y de la fuerza cortante (fig 10) y el deslizamiento de las juntas (fig 11). Es clara la influencia que estas variables pueden tener en ductilidad y en capacidad de absorción de energía.

Las vigas de acoplamiento entre muros rigidizantes se caracterizan a menudo por relaciones elevadas de peralte a claro, lo que ocasiona relaciones elevadas de fuerza cortante a momento flexionante. La fig 12 muestra curvas carga-deformación para los diferentes porcentajes de refuerzo longitudinal y transversal. Estudios recientes (Paulay, 1971) han demostrado que la disposición del refuerzo como en la fig 13 conduce a curvas más satisfactorias y a daños de menos cuantía.

La influencia de la carga axial en la ductilidad de miembros de concreto reforzado sometidos a flexocompresión ha sido estudiada teóricamente por Park y Paulay (1975), considerando la curva carga-deformación de concreto sin confinar. En la fig 14 se resumen las hipótesis y las conclusiones de tales estudios. Es clara la reducción de la ductilidad disponi-

ble (en términos de la relación momento-curvatura)) asociada aun con niveles moderados de carga axial. Este efecto sustenta el criterio de diseño designado como columna fuerte-trabe débil, orientado al desarrollo de deformaciones inelásticas en las trabes, con preferencia a las columnas.

De naturaleza teórica son también los estudios (Park y Paulay, 1975) en que se basan las curvas carga-deformación para muros de concreto que fallan en flexión (fig 15). En la figura citada se observa que mediante cuantías y distribuciones adecuadas de refuerzo es posible obtener ductilidades elevadas en este tipo de elementos. Otros factores a considerarse, poco estudiados a la fecha, son la posibilidad de pandeo de borde y la influencia de carga vertical y fuerza cortante, tanto en la curva ante la primera aplicación de carga como en las que corresponden a cargas repetidas.

Los miembros presforzados suelen caracterizarse por curvas semejantes a la fig 16 (Spencer, 1969): la rigidez decrece para deformaciones grandes y los ciclos histeréticos angostos implican poca capacidad para disipar energía.

6. Respuesta de sistemas simples con diversas leyes carga-deformación

La fig 17 presenta algunas idealizaciones usuales de curvas carga-deformación empleadas para representar a las descritas en los párrafos anteriores. El caso bilineal de la fig 17a es una buena aproximación a las curvas de la fig 5. El caso 17b es el elastoplástico convencional. Mientras que el 17c se caracteriza por niveles de fluencia distintos en los dos sentidos de aplicación de las cargas laterales. Esta condición se presenta, por ejemplo, en marcos como el de la fig 18a, en donde la descarga sobre la viga AB en O puede actuar a favor o en contra de las cargas permanentes. La pendiente negativa en la fig 17d se debe a la acción de las cargas gravitacionales actuando sobre la configuración deformada (desplazamiento lateral) del sistema, y es función de la suma de cargas verticales por encima del entrepiso que interesa, de la altura de este y de su rigidez lateral (Rosenblueth, 1965). La fig 17e es una idealización de los ciclos histeréticos angostos típicos de elementos

presforzados, y la 17f representa casos con deterioro moderado de rigidez, como es de esperarse en miembros contruidos parcialmente con materiales frágiles, y en donde no se han tomado precauciones especiales para evitar daños excesivos en cada ciclo de carga. Tal es el caso, por ejemplo, en diafragmas de cortante de mampostería o en marcos de concreto reforzado pobremente detallados. La curva de la fig 17g suele designarse como modelo de deslizamiento (en inglés: slip-type curve) y es típica de casos en que la carga lateral es resistida fundamentalmente por elementos de arriostramiento (fig 18b) o cables atirantados (fig 18c) que sólo pueden resistir esfuerzos de tensión. La ocurrencia de niveles de fluencia distintos en cada sentido de acción de las cargas laterales (fig 17c) ocasiona la acumulación de deformaciones plásticas en el sentido del menor nivel. El problema fue estudiado cuantitativamente por Bielak (1966), quien determinó la respuesta sísmica de sistemas con curva carga -deformación elastoplástica en un sentido y elástica, de capacidad ilimitada, en el otro. Para el temblor de El Centro 1940, los resultados se muestran en la fig 20, y deben compararse con los de la fig 29, que corresponden a sistemas elastoplásticos usuales. El factor de fluencia c es la relación entre la capacidad de fluencia y la que se requeriría para asegurar comportamiento lineal del sistema.

Ramírez (1977) obtuvo la respuesta de diversos sistemas de cortante de varios grados de libertad, incluyendo la influencia de esbeltez (efectos P- Δ) ante acelerogramas típicos de los que se obtienen en la zona de suelo compresible de la ciudad de México. Entre los casos analizados se incluyeron sistemas con períodos naturales de 0.5seg y 2.5seg, que son, respectivamente, menores y aproximadamente iguales a los dominantes del movimiento (ver fig 21). La esbeltez se definió por la relación entre el valor absoluto de la rigidez de la rama negativa de la curva carga-deformación (fig 17d) y la de la rama inicial. En términos de los parámetros de diseño y de respuesta bajo un análisis ordinario que no incluya los efectos de esbeltez, este parámetro es igual a $\beta = 1.24/Qc$, en donde c es el coeficiente de cargas laterales adoptado en el diseño, Q el factor de ductilidad y v la relación entre la deformación lateral de entrepiso, calculada con las fuerzas laterales de diseño, y la altura de entrepiso. En todos los casos analizados se tomó

$\beta=0.01$ en la planta baja, y valores menores en los pisos superiores, dependientes de la distribución de rigideces y masas de todo el sistema. El valor citado es pequeño, ya que en estructuras usuales son de esperarse con frecuencia valores del orden de 0.04. Se determinaron valores del factor de amplificación de deformaciones laterales, definido como la relación entre la deformación de entrepiso obtenida mediante un análisis dinámico que incluya la influencia de los efectos P- Δ y la deformación que se obtendría para el mismo entrepiso si dicha influencia se despreciara. Dichos factores se compararon con los valores aproximados determinados bajo la hipótesis de que el sistema de interés se encuentra sometido al sistema de cargas laterales necesario para ocasionar, mediante su acción estática, el sistema de desplazamientos obtenidos de un análisis que omita los efectos de esbeltez. La comparación se muestra en las figs 22 y 23 para estructuras con períodos de 0.5 y 2.5 seg, respectivamente, y ductilidades nominales de diseño de 4. Es claro que mientras para los casos estudiados el factor de amplificación estático no se aparta mucho de 1, el factor dinámico puede en ocasiones alcanzar valores excesivos.*

Las respuestas de estructuras presforzadas depende de la proporción en que participen elementos presforzados y de concreto reforzado ordinario en la disipación de energía. Spencer (1969) ha comparado las respuestas de los sistemas de interés para ciertos valores de los parámetros pertinentes. En el caso extremo, un sistema presforzado puede idealizarse mediante la gráfica elástica bilineal de la fig 17e. La relación entre las amplitudes máximas de las respuestas del sistema bilineal e hysterético se presenta en función de la frecuencia normalizada para el acelerograma de El Centro en la fig 23, para varios valores de la relación de fluencia, c . La relación en estudio crece con la frecuencia.

El comportamiento de sistemas de deslizamiento (fig 17g) se describe en la fig 24. En ella se observan

amplitudes sistemáticamente mayores para estructuras con este tipo de curva que para las correspondientes elastoplásticas.

7. Demandas de ductilidad en sistemas complejos

Al las demandas de ductilidad por entrepiso en sistemas que puedan idealizarse como vigas de cortante, ni las de ductilidad local en los extremos de miembros de marcos continuos suelen ser uniformes en los sistemas estructurales ordinarios.

Influyen en la distribución de dichas demandas las características de cada sismo, así como las distribuciones de masas, rigideces y resistencias en la estructura en cuestión. Frank et al (1976), determinaron la respuesta dinámica de sistemas de cortante de cuatro grados de libertad ante una familia de temblores reales normalizados a la misma aceleración máxima del terreno, y ante otra de temblores simulados. Para cada temblor se determinó el espectro elastoplástico de diseño que correspondía a un factor de ductilidad de 4, y se determinó el promedio de dichos espectros para cada una de las familias citadas. Se diseñaron estructuras de cortante de cuatro grados de libertad, para cada uno de los espectros elastoplásticos, mediante un análisis modal convencional que incluyó únicamente el modo fundamental de vibración. Para cada uno de los acelerogramas se determinó la respuesta del sistema no lineal resultante, mediante un procedimiento de integración numérica paso a paso. Se encontró que los coeficientes de variación de las demandas de ductilidad de entrepiso eran muy elevados, y que los valores medios estaban muy por encima, en los extremos superior e inferior del edificio, del valor de 4 supuesto en el diseño (fig 25). Esto implica que aún para estos sistemas simples y uniformes, los criterios convencionales de diseño basados en análisis dinámico modal conducen a discrepancias sistemáticas entre los efectos sísmicos reales y los nominales. En un intento por estudiar las demandas de ductilidad en edificios con diferentes períodos naturales y formas de variación de la rigidez de entrepiso, Guerra y Esteva (1977) determinaron la respuesta de sistemas de cortante ante los acelerogramas de tres sismos registrados en la zona de terreno compresible de la ciudad de México. Los espectros lineales mostraban aproximadamente el mismo período dominante (2.5 seg), y casi

* En las normas de diseño sísmico de la ciudad de México las posibles consecuencias desfavorables de esta discrepancia están cubiertas por la forma conservadora en que se especifican los espectros de diseño.

iguales ordenadas espectrales para dicho periodo, aun que para periodos cortos uno de ellos mostraba ordenadas apreciablemente superiores a las de los otros dos. Además de estudiar edificios con entrepisos que poseen las resistencias que resultan de un criterio convencional de análisis y diseño para el espectro medio de los temblores considerados, se enfocó la atención a la influencia sobre la respuesta sísmica de la variabilidad de los factores de seguridad con respecto a cortantes de entrepiso en la altura de cada edificio. Tal variabilidad a menudo proviene de los requisitos arquitectónicos, como consecuencia de los cuales algunos entrepisos pueden poseer resistencias mayores que las requeridas de acuerdo con el coeficiente sísmico para diseño. Cuando esto ocurre, se altera la contribución relativa de cada entrepiso a la disipación histerética de energía cinética con respecto a la que se presentaría para edificios con factor de seguridad uniforme, y los entrepisos que poseen los factores de seguridad más pequeños se ven sometidos a demandas de ductilidad más elevadas que las del caso uniforme. Por procedimientos de integración numérica paso a paso se determinaron las respuestas de diversos edificios de cortante de diez niveles. Se tomaron periodos naturales de 0.5, 1.0 y 2.5seg y amortiguamiento viscoso de 0.02. Las curvas carga-deformación de los entrepisos eran elasto-plásticas, con capacidades de fluencia obtenidas del análisis modal ante un espectro de diseño aproximadamente igual al promedio de los tres temblores estudiados, para un factor de ductilidad 4.* En algunos de los sistemas se tomaron factores de sobre-resistencia (relación entre capacidad lateral disponible y requerida en el diseño) no uniformes, a fin de simular la contribución frecuentemente indeseable de los elementos no estructurales.

* Los espectros elastoplásticos no se obtuvieron de manera rigurosa. La aproximación consistió en dividir entre 4 todas las ordenadas del espectro elástico de aceleraciones para periodos mayores de 2.5seg (donde ocurren máximos del espectro) y entre un factor que variaba linealmente entre 1 y 4 con el periodo natural, para valores de este último comprendido entre 0 y 2.5 seg. Dado que las ductilidades en el intervalo de periodos cortos son muy sensibles a la relación de resistencia de fluencia a respuesta elástica, las ordenadas espectrales adoptadas pueden corresponder a ductilidades nominales muy diferentes de 4.

La fig 26 resume los casos estudiados, y la 27 algunos de los resultados. Se observa que un efecto de proporcionar resistencia excesiva en algunas secciones de sistemas de cortante es aumentar las demandas de ductilidad en otras. El aumento es más significativo para sistemas de periodo corto. Aun para casos con factor de sobre-resistencia unitario (es decir, resistencia disponible igual a la requerida) las demandas de ductilidad de los entrepisos inferiores suelen resultar mayores que las nominales de diseño. La principal diferencia cualitativa entre estos resultados y los de Frank et al (fig 25) la constituyen las elevadas ductilidades en el extremo superior del edificio para este último caso, que no se muestran en los estudios de Guerra y Esteva. La diferencia se explica por que los diseños de estos últimos tomaron en cuenta la contribución de los modos superiores de vibración, y los de los primeros autores omitieron dicha contribución.

Los resultados descritos señalan la conveniencia de estudiar criterios alternativos para especificar la distribución de capacidades de cortante de entrepiso, a fin de reducir la variabilidad de las demandas de ductilidad. Para ello se estudiaron varios sistemas adicionales. En algunos de ellos la resistencia de la planta baja se tomó 10 por ciento superior a la de diseño. La fig 28a muestra que en ciertos casos un pequeño incremento en la resistencia de la planta baja transfiere demandas sustanciales de ductilidad al segundo entrepiso. Puesto que en sistemas reales pueden esperarse variaciones aleatorias de resistencia mayores que la que aquí se considera, dicha variabilidad debe tomarse en cuenta mediante modelos probabilísticos. En otro grupo de edificios se estudió la influencia, en las demandas de ductilidad, de diseñar considerando o ignorando la contribución de los modos superiores de vibración. La fig 28b muestra diferencias significativas en las ductilidades de los pisos superiores, a pesar de que las diferencias de resistencia son pequeñas.

De lo anterior se concluye que para sistemas de cortante los criterios convencionales de análisis y diseño sísmico no proporcionan un control adecuado de respuesta sísmica expresada en términos de ductilidades. En algunos sistemas, en donde el factor de seguridad, definido como la relación de la resistencia disponi-

ble a la fuerza de diseño predicha por el análisis lineal, varía apreciablemente de una a otra sección crítica. Las demandas de ductilidad pueden resultar mucho mayores que las que ocurrirían en las mismas secciones, con los mismos factores de seguridad, si estos fueran uniformes en la estructura. Las implicaciones de estos resultados deberían trasladarse a la práctica de diseño estructural.

Los pocos estudios disponibles sobre demandas locales de ductilidad en marcos continuos muestran que la distribución de dichas demandas en sistemas con factor de seguridad constante presenta variaciones menos acentuadas que las descritas para sistemas de cortante. Se han propuesto diversos criterios para definir las ductilidades locales. Haviland et al (1976) proponen dos alternativas (fig 29): la primera es la relación del giro en el extremo de una barra al que ocurriría en dicho extremo cuando en ambos se alcanzara simultáneamente el momento de fluencia respectivo. A esta la denotan ductilidad rotacional. La segunda definición, designada como ductilidad de momento o de curvatura, es la relación entre la curvatura local en una sección y la que corresponde al momento de fluencia. La variación de ambas medidas de la ductilidad local fue estudiada por los autores citados en diversos marcos diseñados para diversas ductilidades nominales empleando análisis modal elástico. En la fig 30 se presenta un caso típico estudiado, y en las 31 y 32 los máximos factores de ductilidad para trabes y columnas en cada nivel, cuando la ductilidad nominal de diseño era 4. Sólo deben obtenerse conclusiones sobre los valores relativos y no sobre los absolutos, en comparación con la ductilidad nominal de 4, ya que las figuras se refieren a ductilidad local y la última cifra citada es ductilidad global de entrepiso.

Los estudios descritos se han referido a marcos regulares, sin variaciones bruscas en las dimensiones de sus miembros ni en sus claros horizontales y verticales. La ocurrencia de tales variaciones es con frecuencia causa de concentraciones importantes de demandas de ductilidad, y no es raro que las condiciones que ocasionan tales demandas sean también motivo de incapacidad de los miembros afectados para responder a ellas. Así, por ejemplo, la restricción que imponen los muros de la fig 33 a las columnas A hacen que el claro efectivo de dichas columnas sea igual a su

longitud libre, entre el sistema de cubierta y el borde superior del muro; la rigidez lateral de cada una de estas columnas resulta mucho mayor que las de las que no se encuentran restringidas, y las fuerzas cortantes respectivas -- y por tanto las demandas de ductilidad -- varían de igual manera. Debido a su baja relación de claro a peralte, las columnas A suelen ofrecer menores factores de seguridad ante tensión diagonal que ante tensión por flexión y por ende tienden a presentar comportamiento poco dúctil. Condiciones semejantes se presentan en las trabes de menor claro localizadas en marcos con separaciones muy desiguales entre ejes de columnas, o en trabes que inciden en puntos de los bordes de muros rigidizantes en donde se presentan giros y desplazamientos verticales importantes (fig 34). En todos estos casos los problemas pueden aliviarse modificando rigideces relativas (por ejemplo, reduciendo peraltes de claros cortos), o diseñando de tal manera de lograr que dominen los modos de falla dúctiles. La fig 13, por ejemplo, muestra el tipo de refuerzo recomendable para elementos peraltados que ligan dos muros rigidizantes acoplados (Paulay, 1971).

B. Comentarios finales

A pesar de que la importancia de la capacidad de disipación de energía mediante comportamiento dúctil para resistir sismos severos ha sido bien reconocida, no se cuenta a la fecha con criterios de análisis y diseño que consideren a las demandas de ductilidad, o a las deformaciones inelásticas, como las variables de control. Los procedimientos usuales de análisis, tanto estático como dinámico, adoptan las fuerzas internas que provienen de estudios de respuesta lineales, como medidas de la capacidad que debe proporcionarse a los miembros estructurales para que las demandas locales de ductilidad se mantengan dentro de límites tolerables. Pero dichas demandas son muy sensibles a las características de las estructuras, y a los detalles de cada excitación sísmica, y no es raro encontrar que sus valores se alejan significativamente de los nominales de diseño. Por otra parte, no existen criterios suficientemente probados para producir miembros estructurales capaces de desarrollar ductilidad específicas. A lo más que parecen poder aspirar los ingenieros en este aspecto en un futuro cercano es a identificar las irregularidades

que pueden causar concentraciones excesivas de ductilidad y a tratar de evitarlas. El campo de investigación es muy vasto y estimulante: abarca el desarrollo de procedimientos prácticos y eficientes para predecir las demandas de ductilidad en estructuras dadas, y la formulación de criterios de diseño para lograr el desarrollo de ductilidades específicas.

9. Referencias

1. Arnold, P., Adams, P.F. & Lu, L.W., (1966), "The Effect of Instability on the Cyclic Behavior of a Frame", Proc. International Symposium on the Effects of Repeated Loading of Materials and Structures, RILEM, 4
2. Bertero, V.V., & Popov, E.P. (1975), "Hysteretic Behavior of Ductile Moment Resisting Reinforced Concrete Frame Components", Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, EERC 75-16
3. Blelak, J. (1966), "Dynamic Response of Single - Degree - of Freedom Bilinear Systems". Thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science, Rice University, Houston, Texas
4. Frank, R., Anagnostopoulos, S., Biggs, J.M., Vanmarcke, E. H. (1976), "Variability of Inelastic Structural Response Due to Real and Artificial Ground Motions", MIT Department of Civil Engineering Research Report R76-6, Order No. 529
5. Guerra, O. R., & Esteva, L. (1977), "Equivalent Properties and Ductility Requirements in Seismic Dynamic Analysis of Nonlinear Systems", Proc. Sixth World Conference on Earthquake Engineering, New Delhi
6. Haviland, R.W., Biggs, J.M. & Anagnostopoulos, S. (1976), "Inelastic Response Spectrum Design Procedures for Steel Frames", MIT Department of Civil Engineering, Research Report R76-40, Order No. 557
7. Krawinkler, H., Bertero, V.V., & Popov, E.P. (1976), "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblies", Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, EERC 76-22
8. Park, R., & Paulay, T. (1975), "Reinforced Concrete Structures", John Wiley & Sons, New York
9. Paulay, T. (1971), "Coupling Beams of Reinforced Concrete Shear Walls", Journal of the Structural Division, ASCE, 97, ST3, 843-862
10. Ramírez, J. (1977), "Efectos de inestabilidad en la respuesta sísmica de estructuras de cortante inelásticas", Tesis de Maestría, División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México
11. Rosenblueth, E. (1965), "Slenderness Effects in Buildings", Journal of the Structural Division, ASCE, 91, ST1, 229-52
12. Spencer, R.A. (1969), "The Nonlinear Response of Multistory Prestressed Concrete Structures to Earthquake Excitation", Proc. Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile

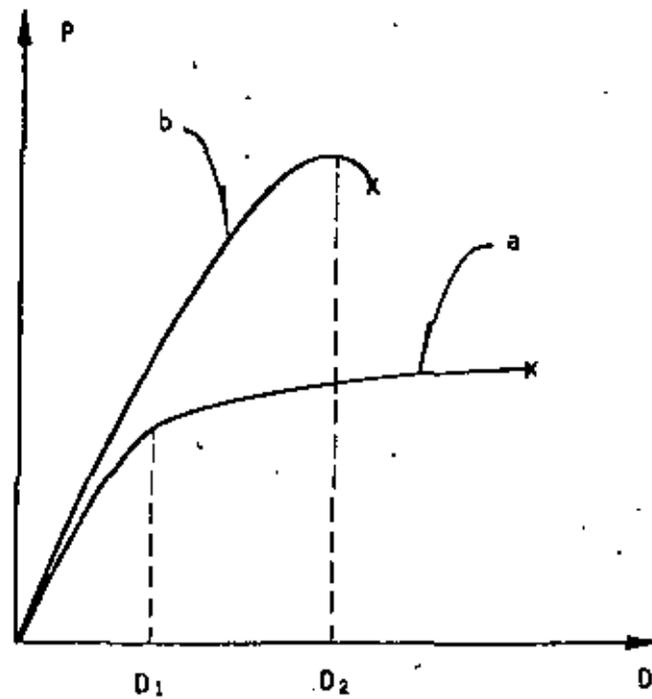


Fig 1. Sistemas dúctiles y frágiles

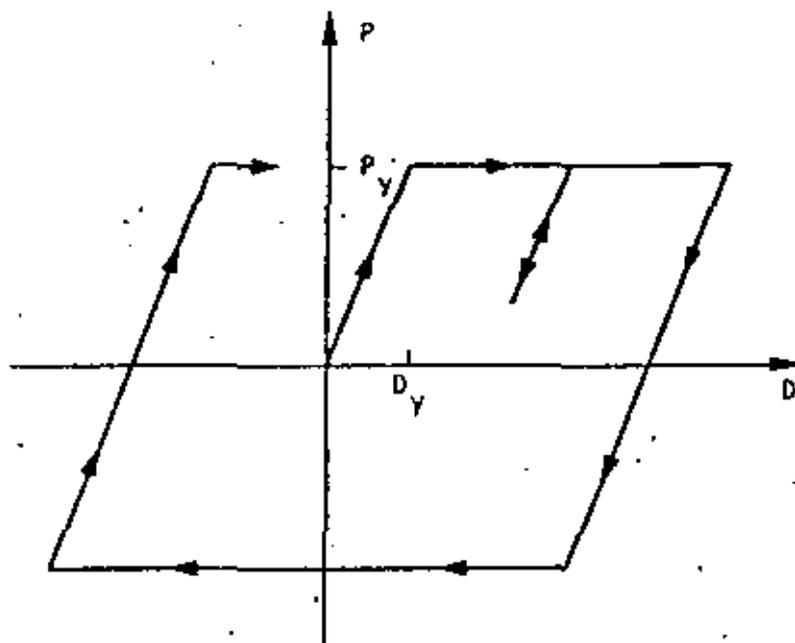


Fig 2. Sistema elastoplástico

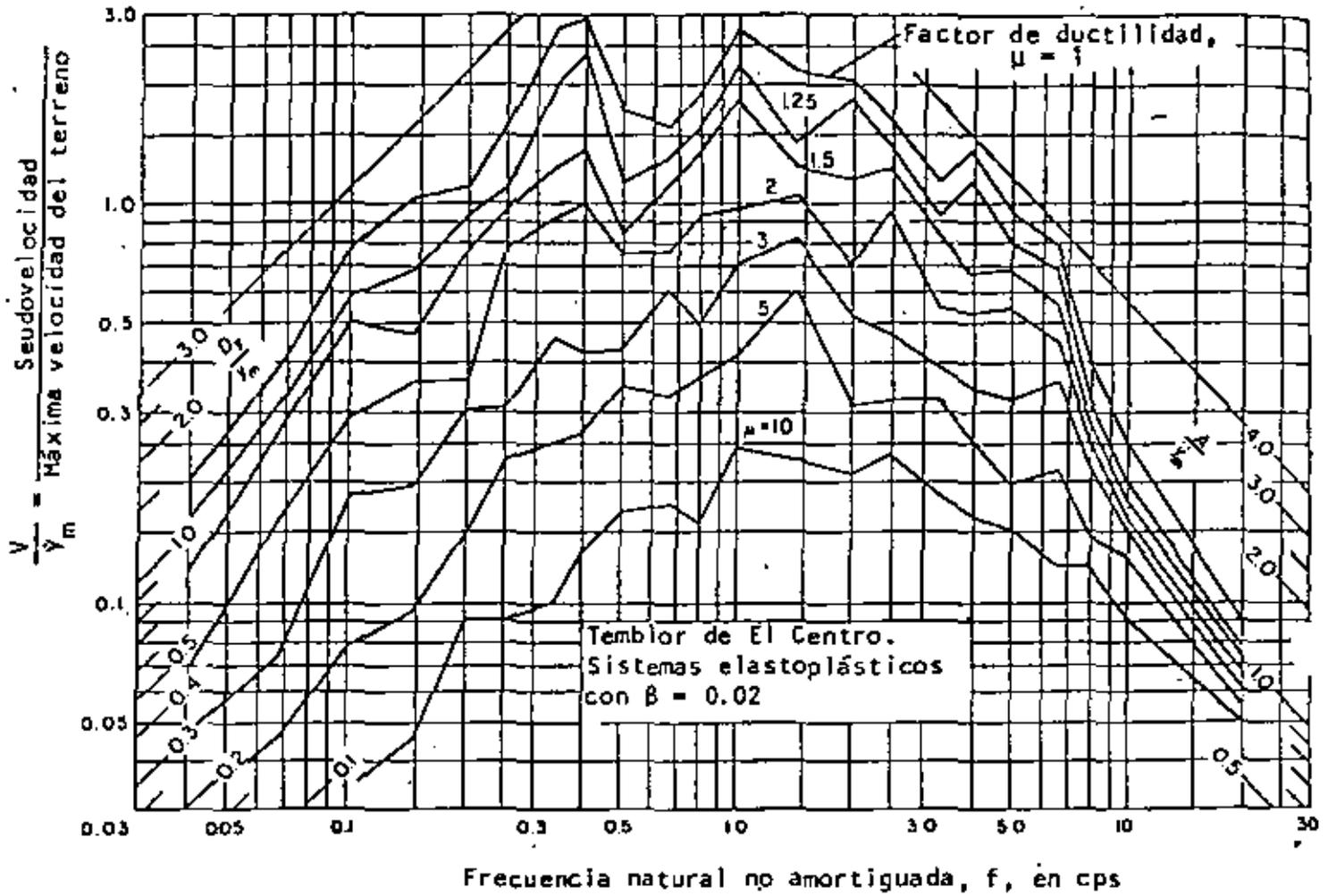
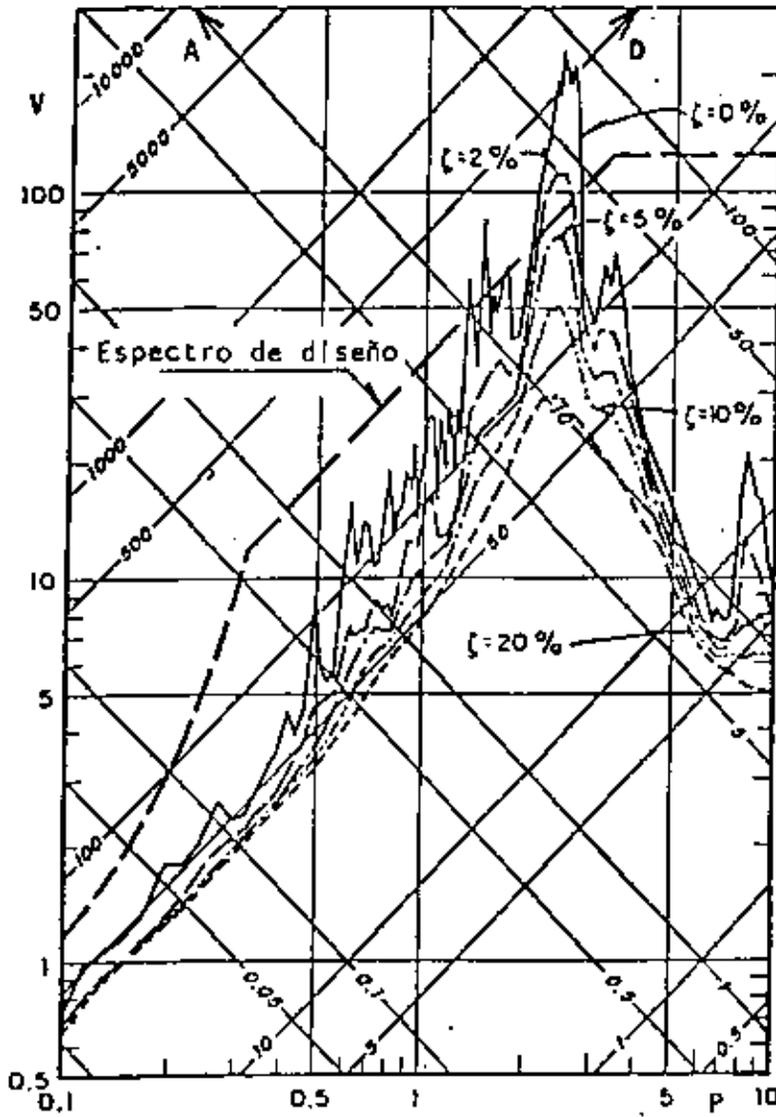
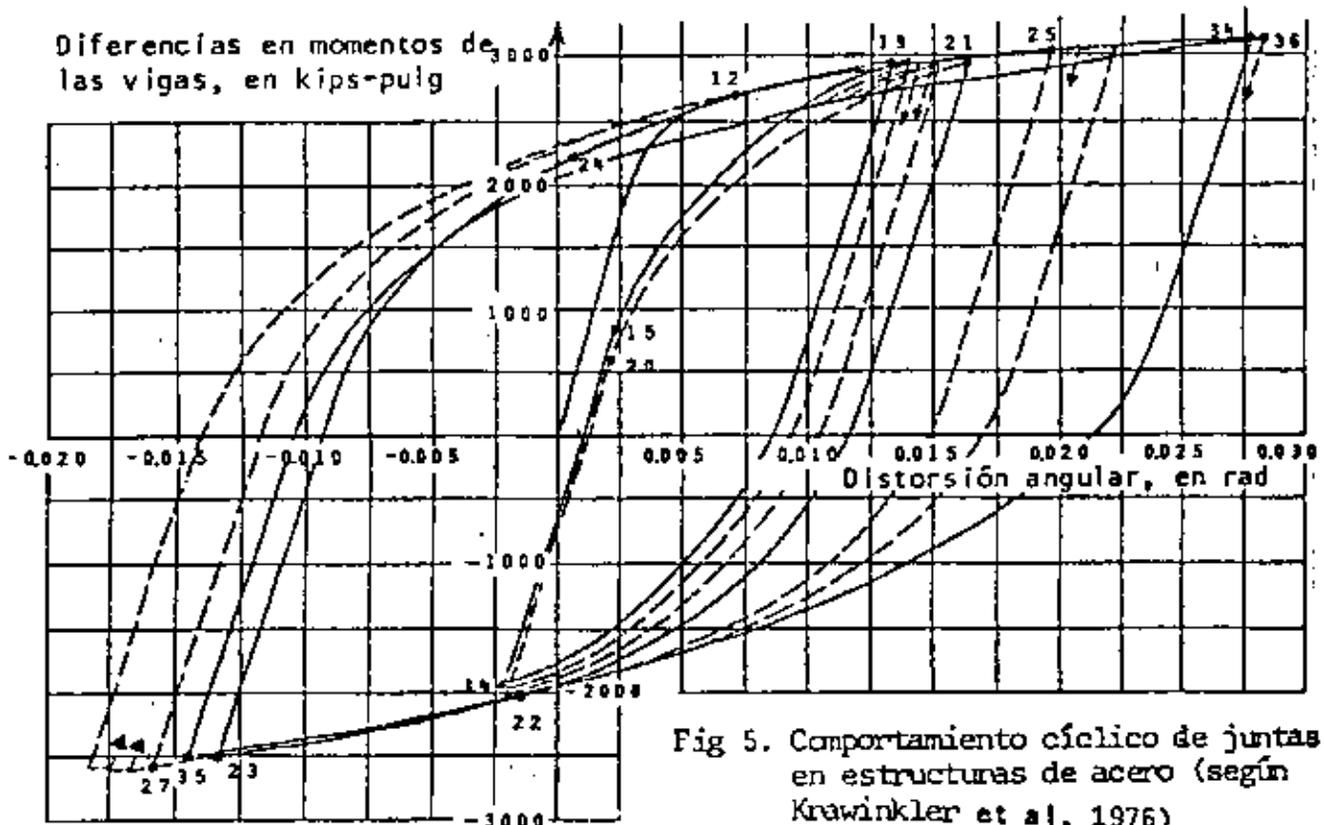


Fig 3. Espectros de deformaciones para sistemas elastoplásticos con amortiguamiento 0.02 del crítico



A aceleración, en cm/seg^2
 D desplazamiento, en cm
 P período, en seg
 V velocidad, en cm/seg

Fig 4. Espectro de diseño y espectro típico de temblores en la formación de arcilla blanda del Valle de México



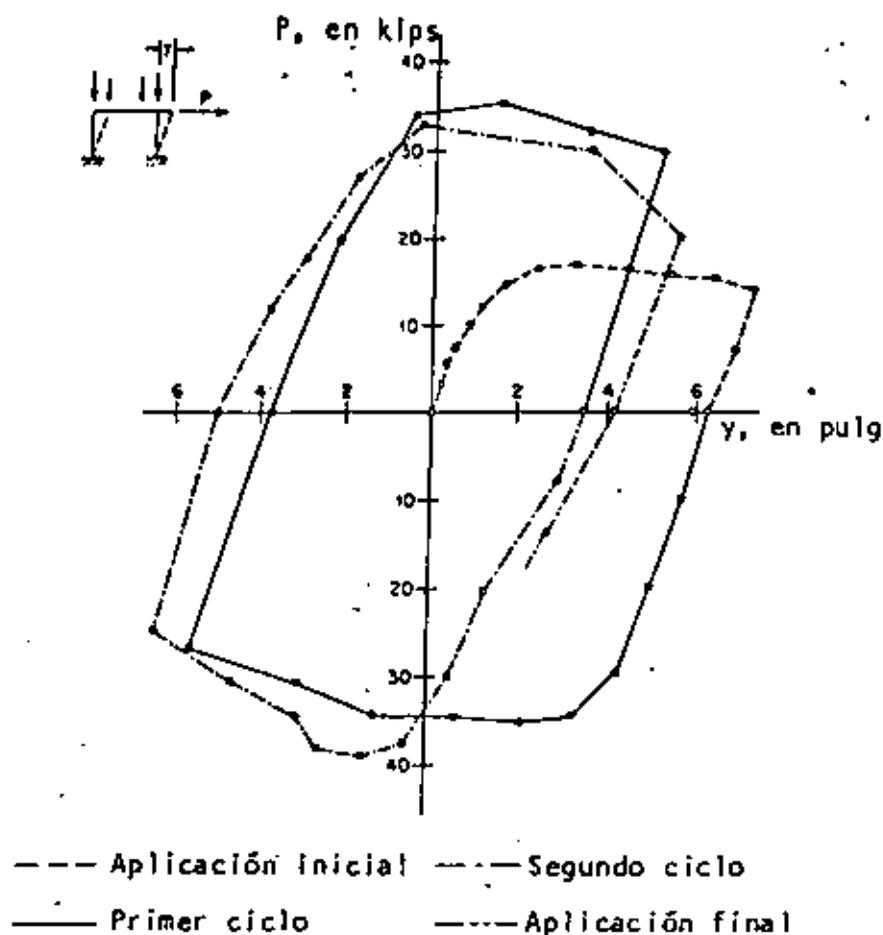


Fig 6. Marco de acero con efectos de esbeltez
 (según Arnold, Adams y Lu, 1966)

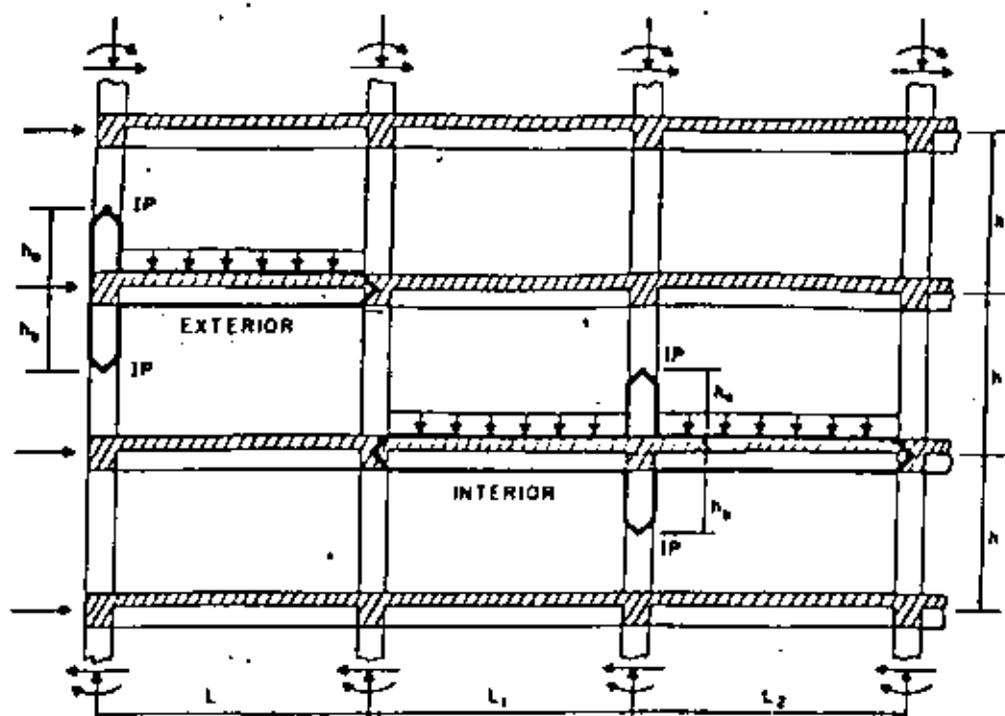
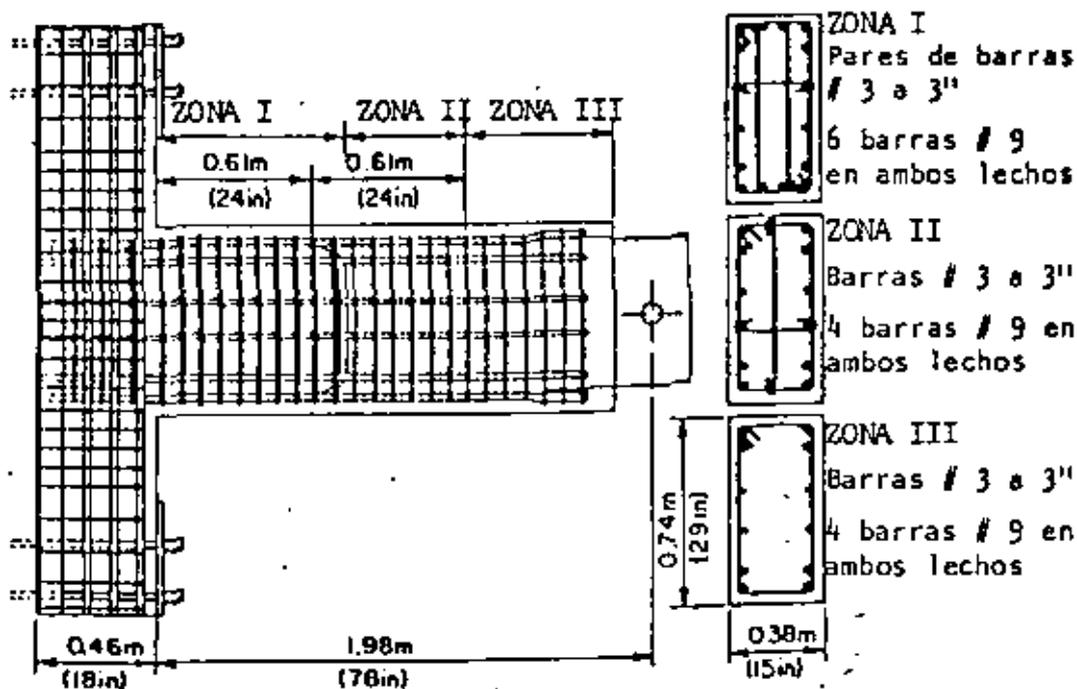
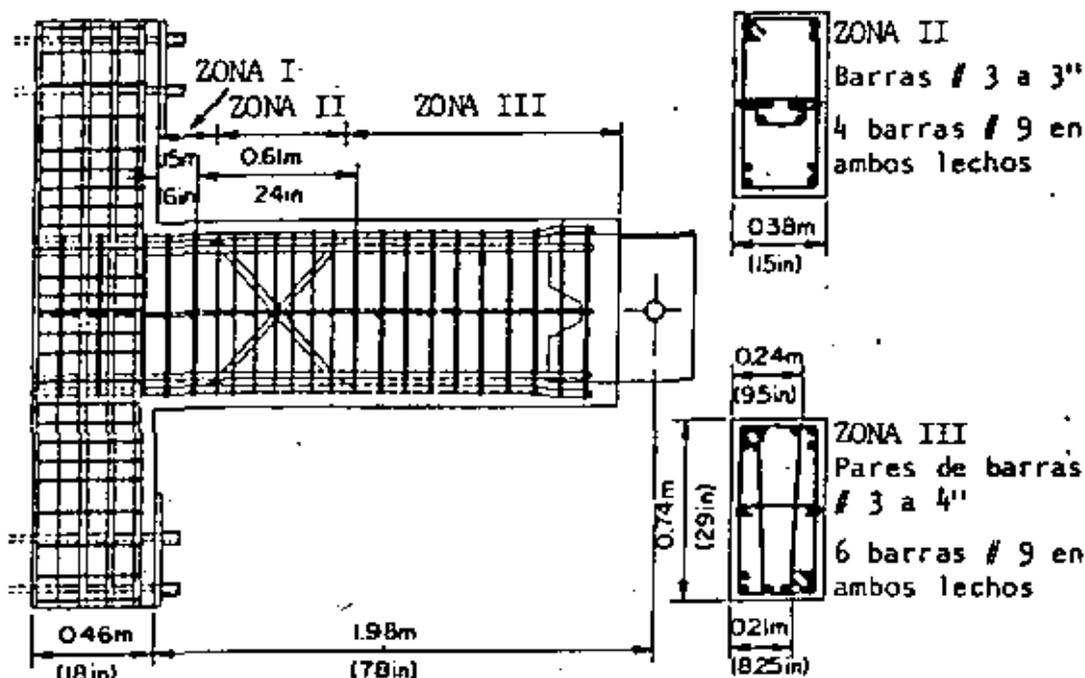


Fig 7. Subconjuntos de marcos de concreto reforzado
 (según Bertero y Popov, 1975)



a) VIGA 33.P



b) VIGA 33.L

Fig 8. Detalles de refuerzo para controlar la localización de articulación plástica (según Bertero y Popov, 1975)

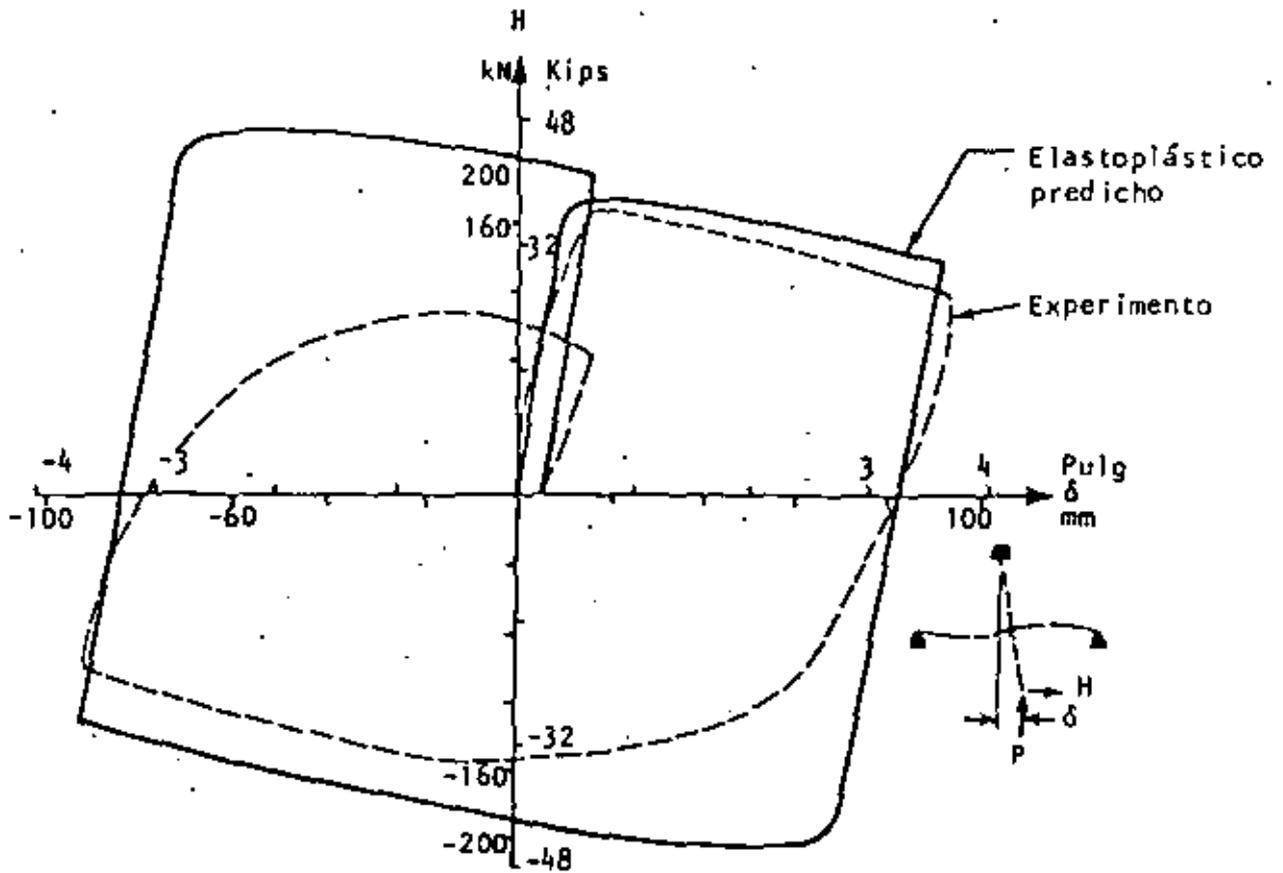


Fig 9. Influencia de la inestabilidad en el comportamiento de subconjuntos (según Bertero y Popov, 1975)

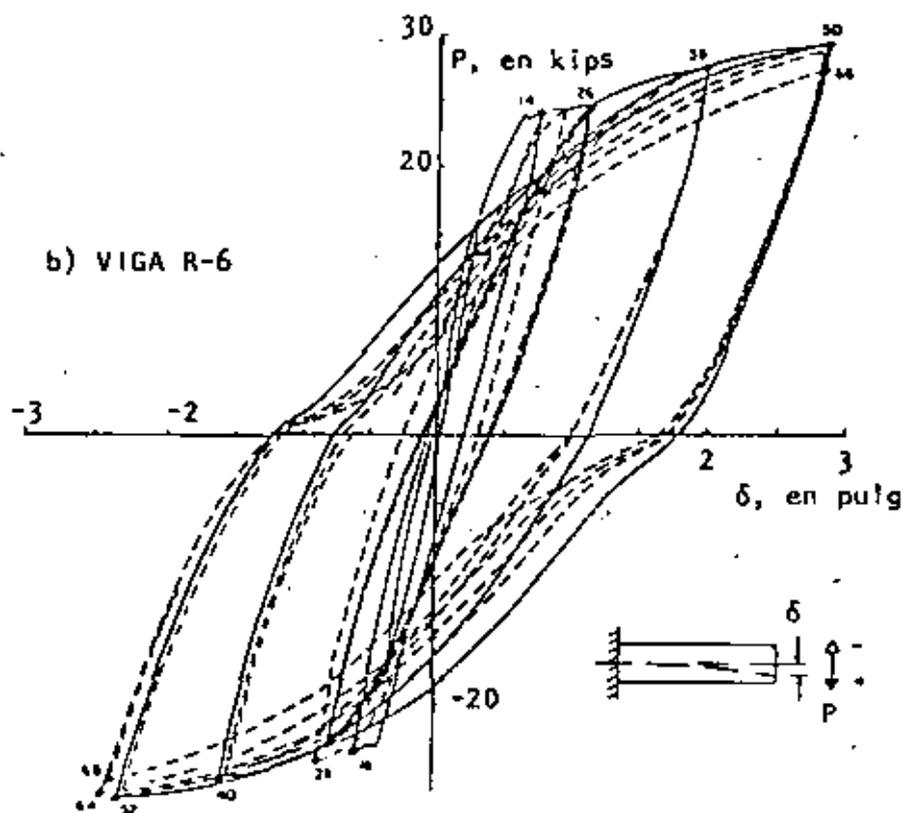
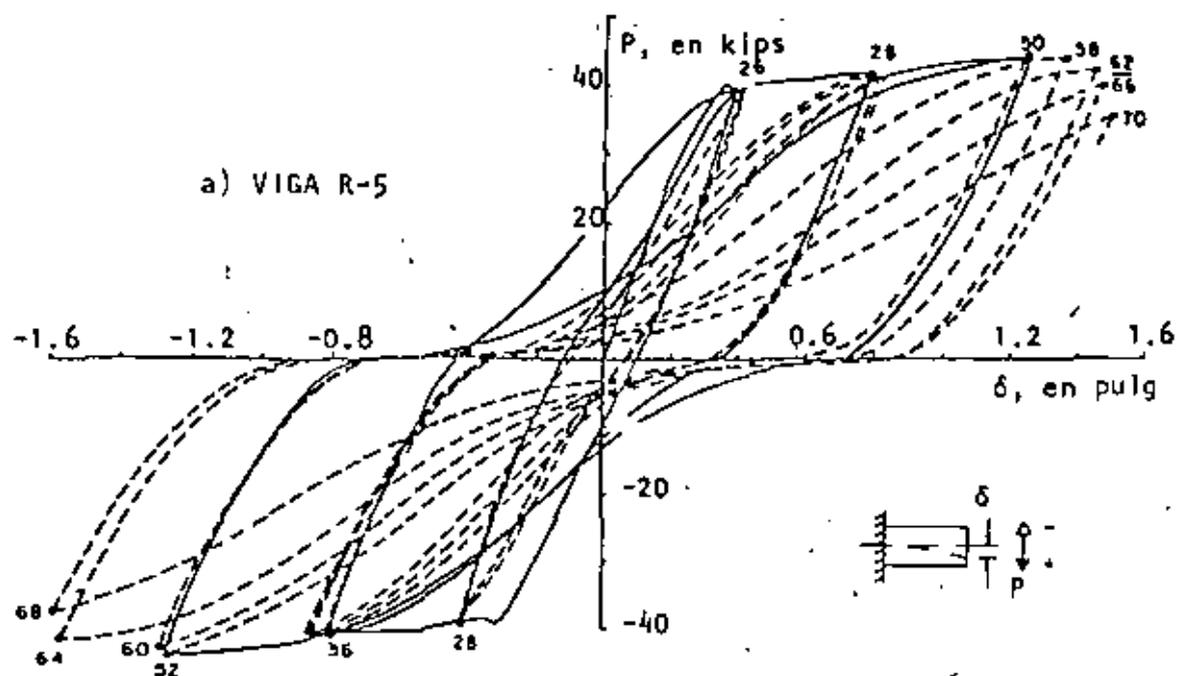
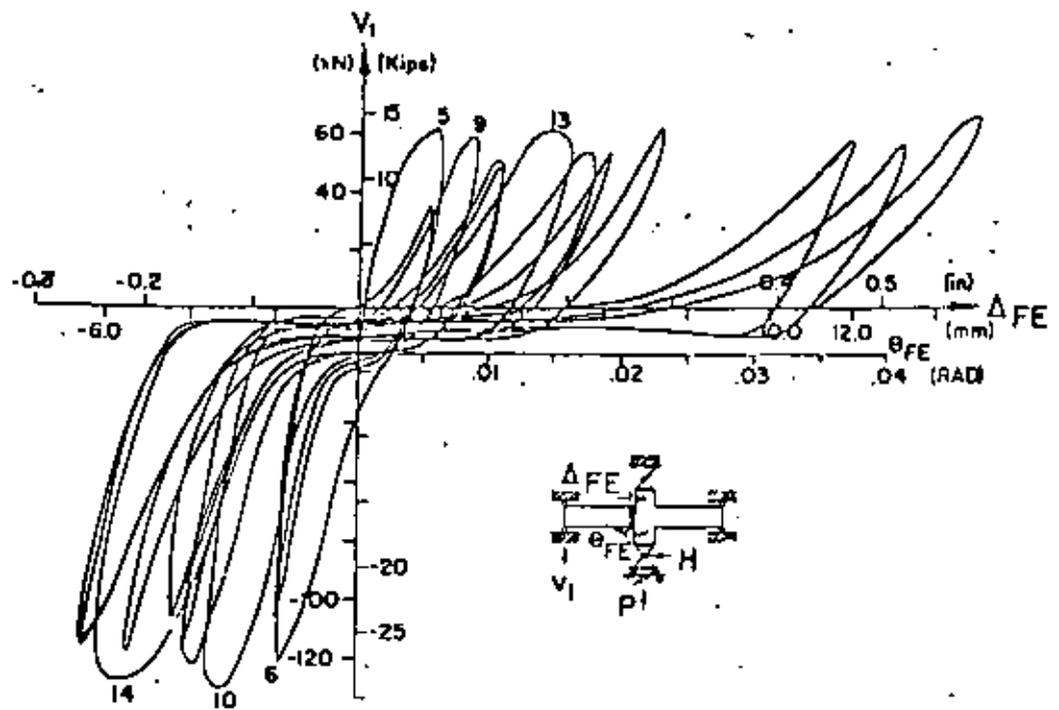
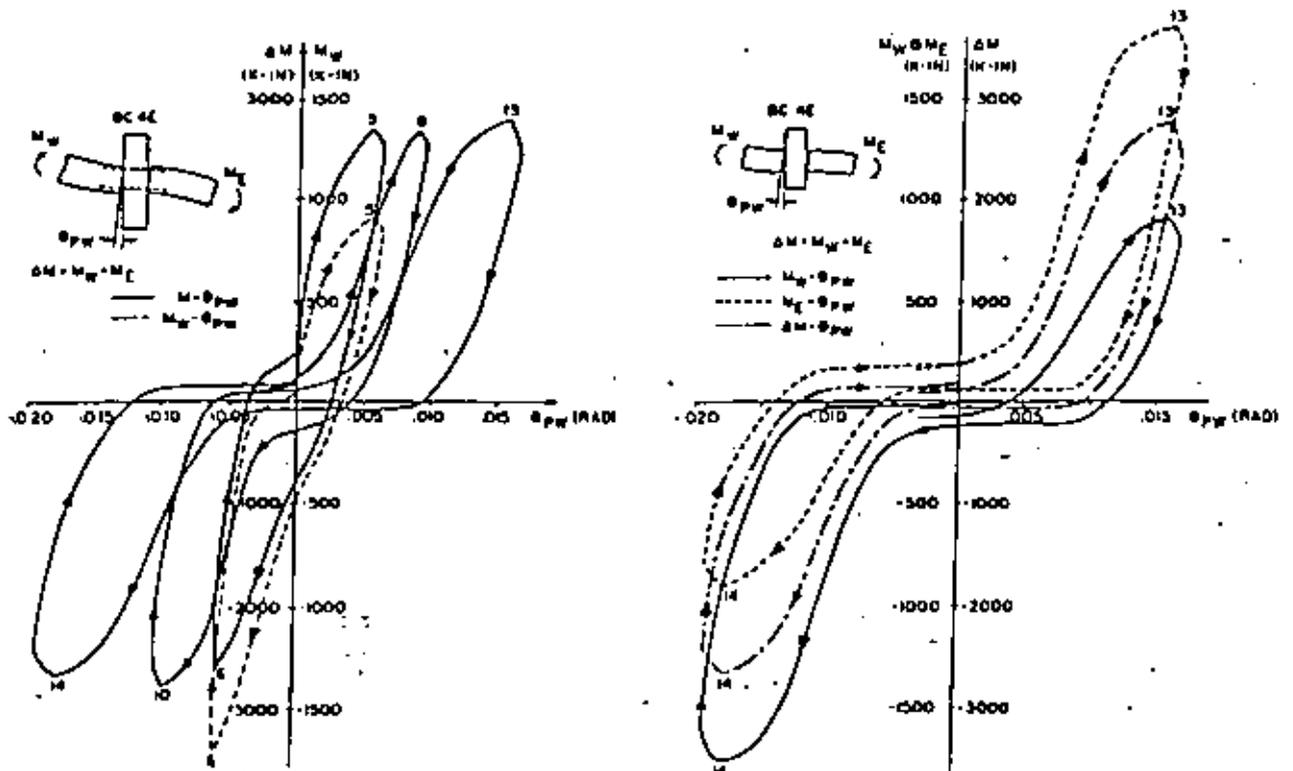


Fig 10. Influencia de esfuerzos cortantes en el comportamiento histerético de miembros de flexión (según Bertero y Popov, 1975)



a) DIAGRAMA DE DESLIZAMIENTO vs CORTANTE



b) DIAGRAMA DE DESLIZAMIENTO vs MOMENTO EN LA JUNTA

Fig 11. Deslizamiento en juntas

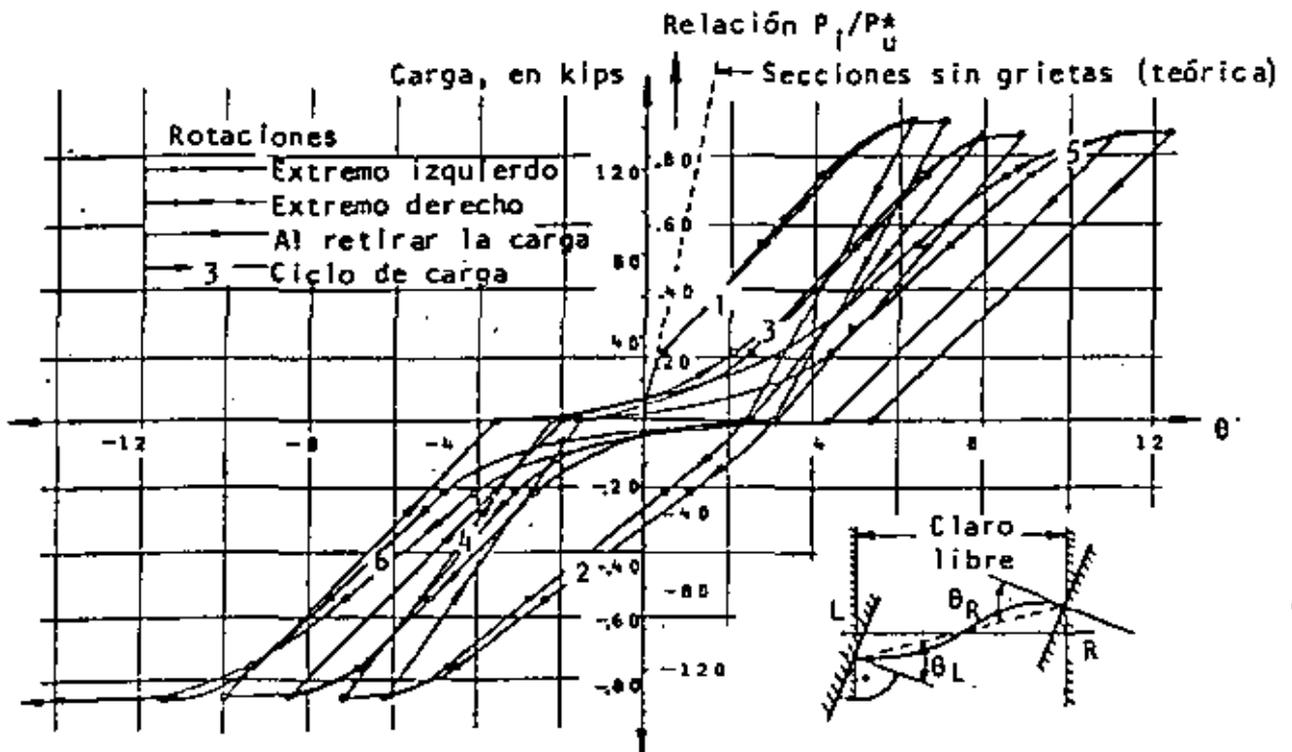
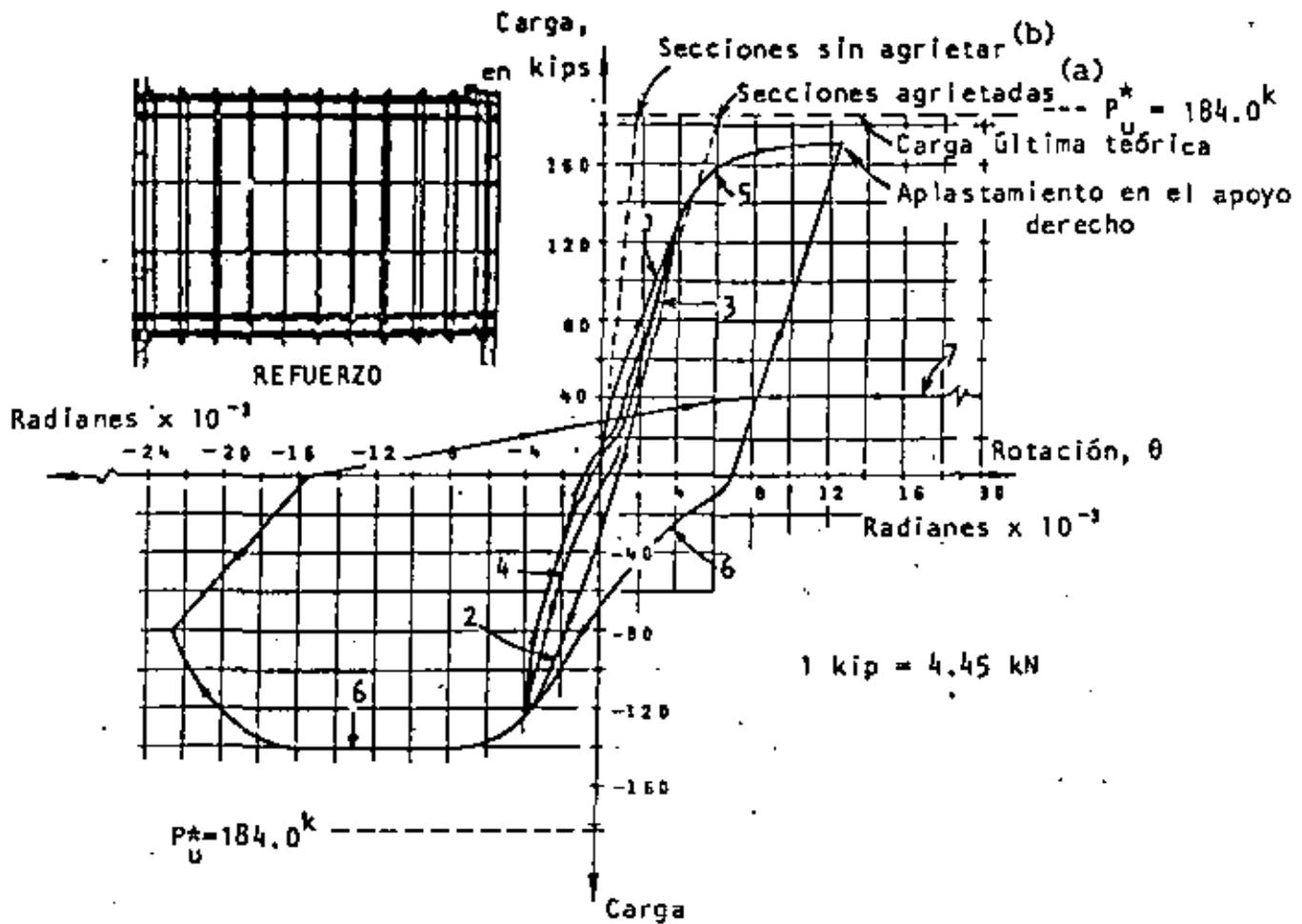


Fig 12. Curvas carga-rotación para vigas de acoplamiento de muros rigidizantes. Refuerzo del alma: a) adecuado, b) escaso (según Park y Paulay, 1975)

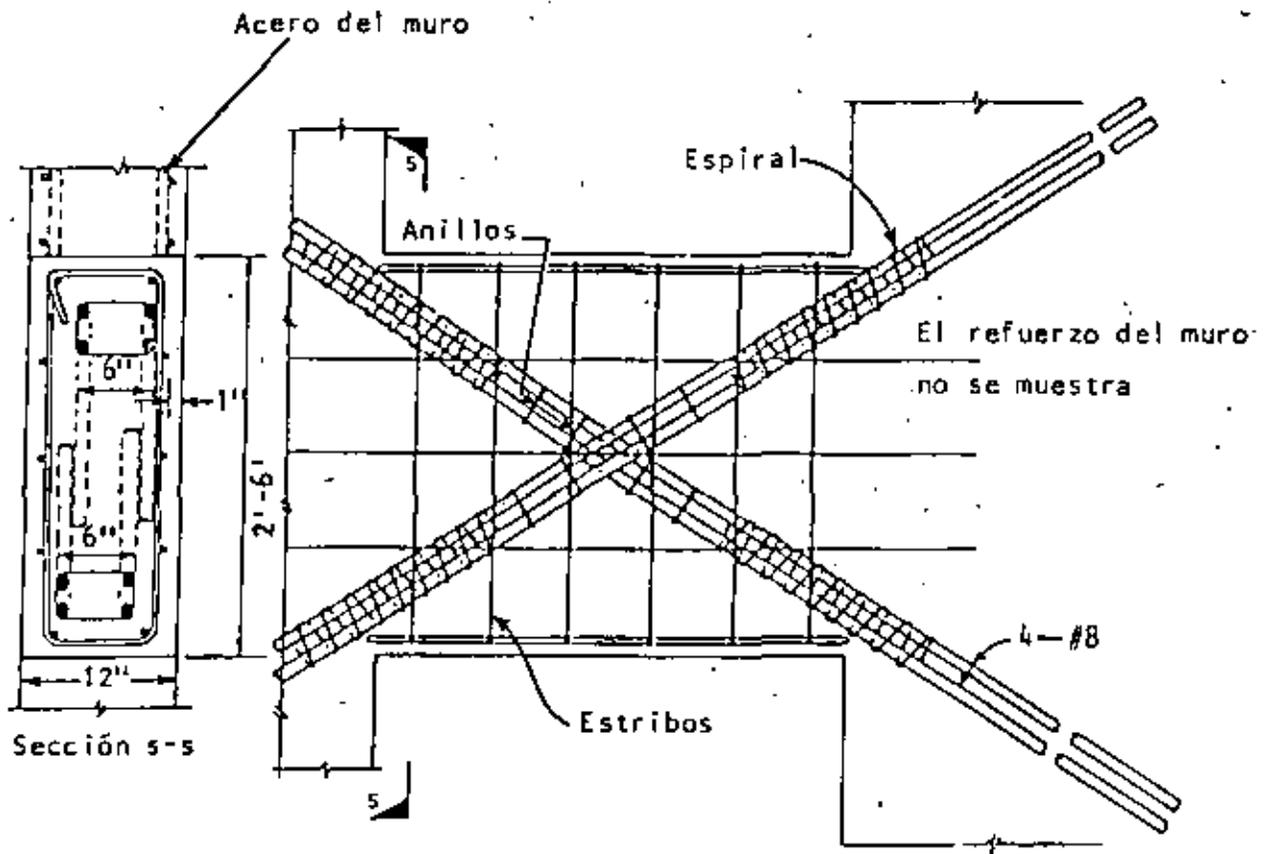
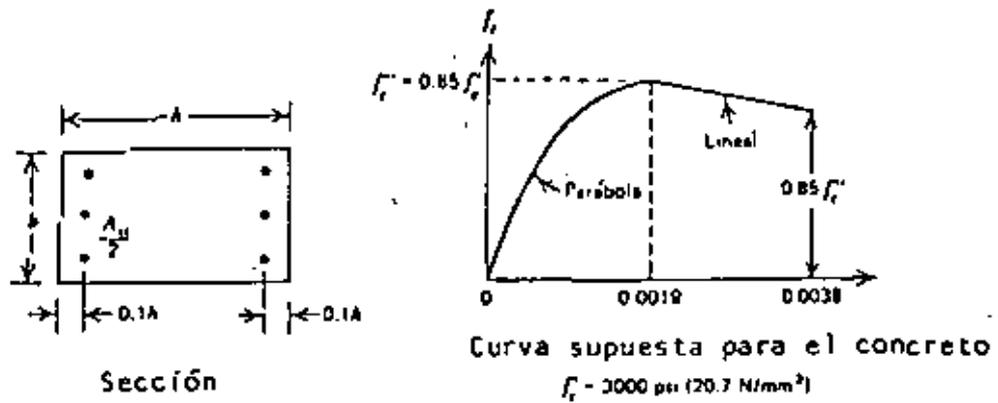
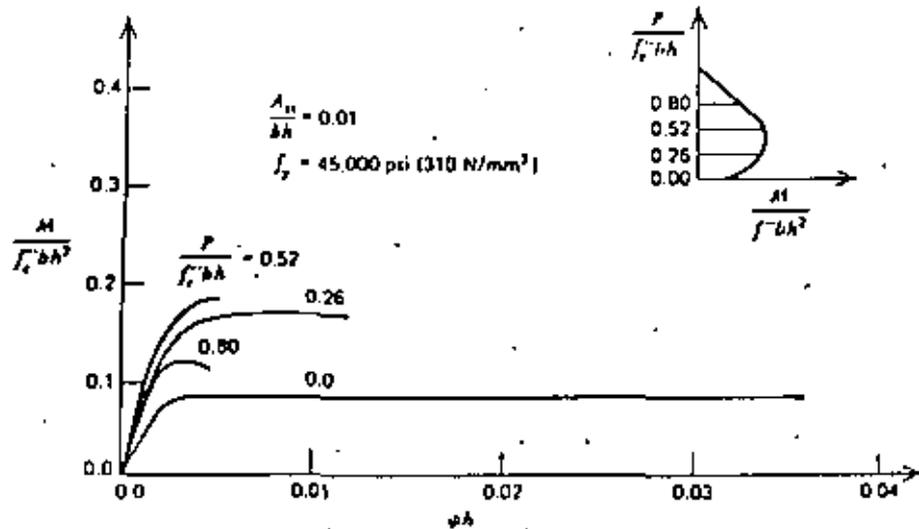


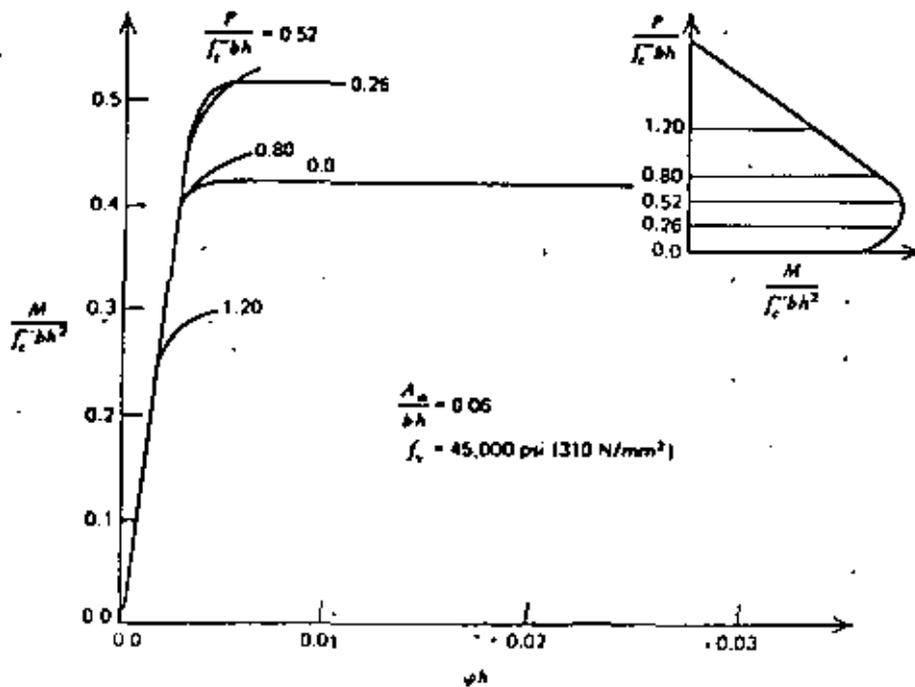
Fig 13. Disposición sugerida del acero en una viga de acoplamiento con refuerzo diagonal (adaptada de Paulay, 1971)



a)



b)



c)

Fig 14. Relaciones momento-curvatura para secciones de columnas a diversos niveles de carga axial (según Park y Paulay, 1975)

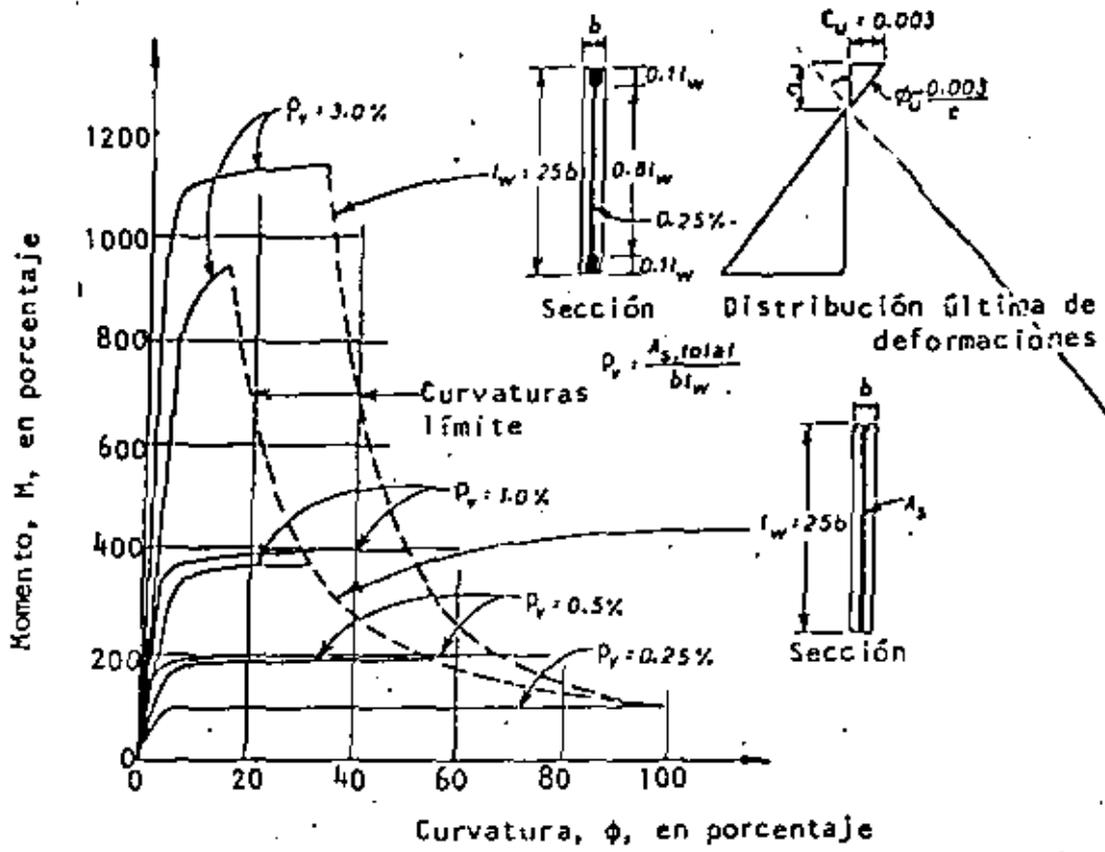


Fig 15. Influencia de cantidad y distribución de refuerzo vertical en curvatura última (según Park y Paulay, 1975)

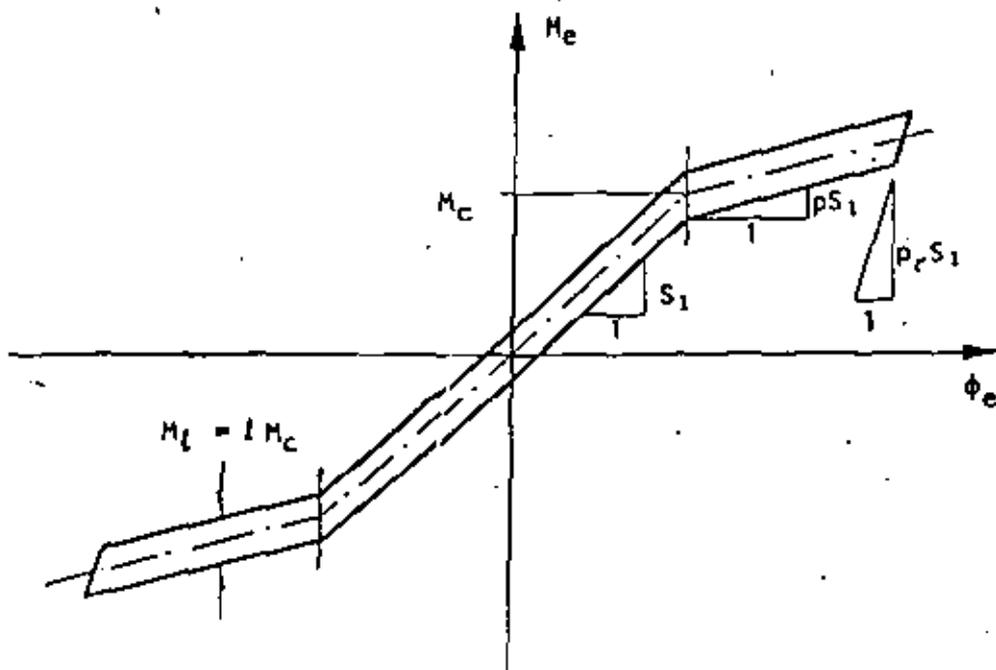
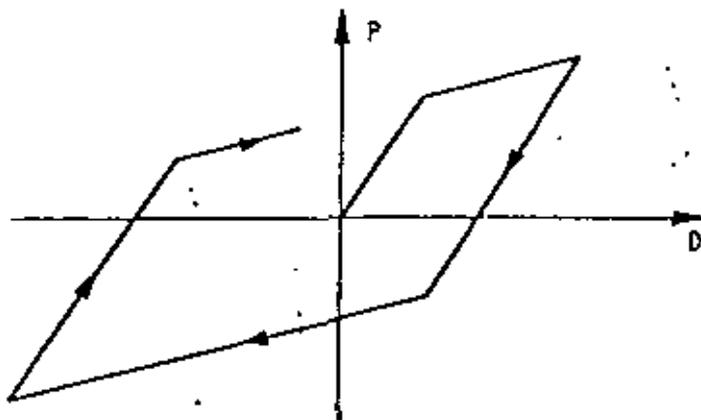
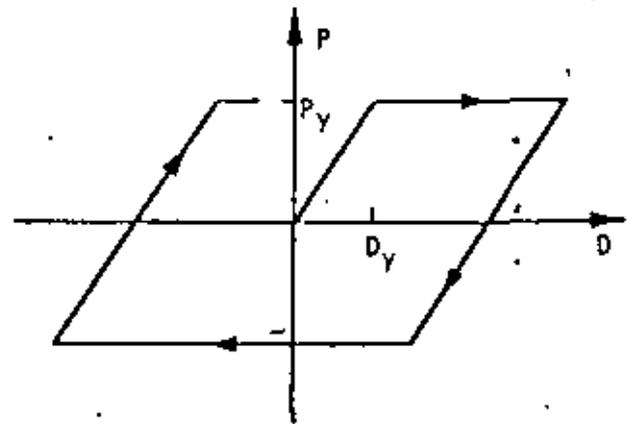


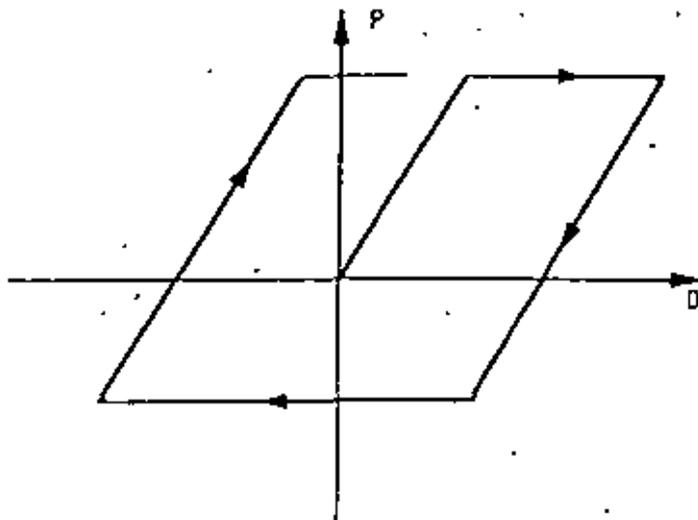
Fig 16. Ciclo de histéresis típico para miembros de concreto presforzado



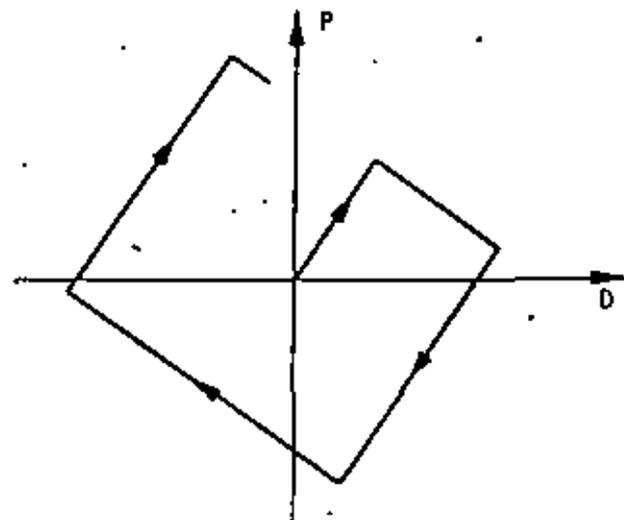
a) Bilineal



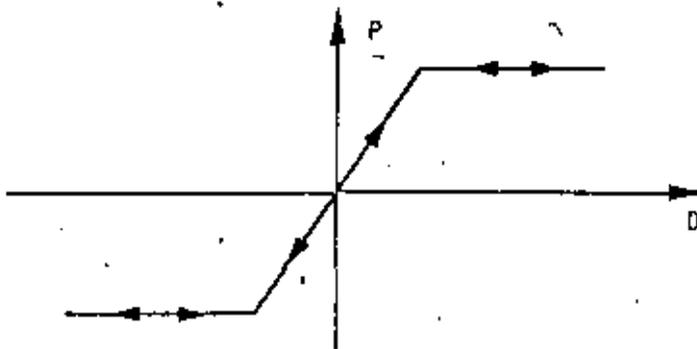
b) Elastoplástico simétrico



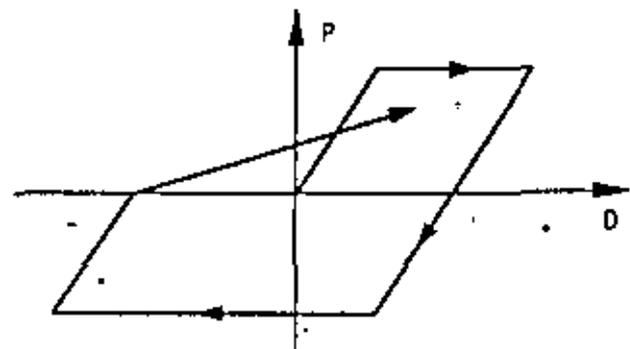
c) Elastoplástico asimétrico



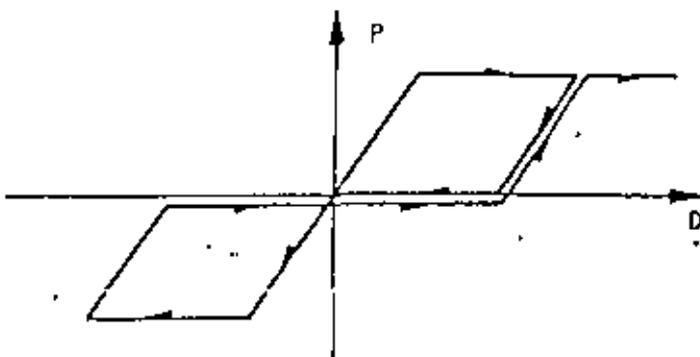
d) Inestable



e) Elástico cedente

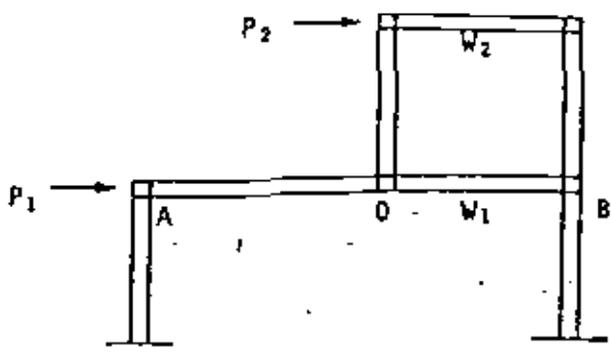


f) Degradante

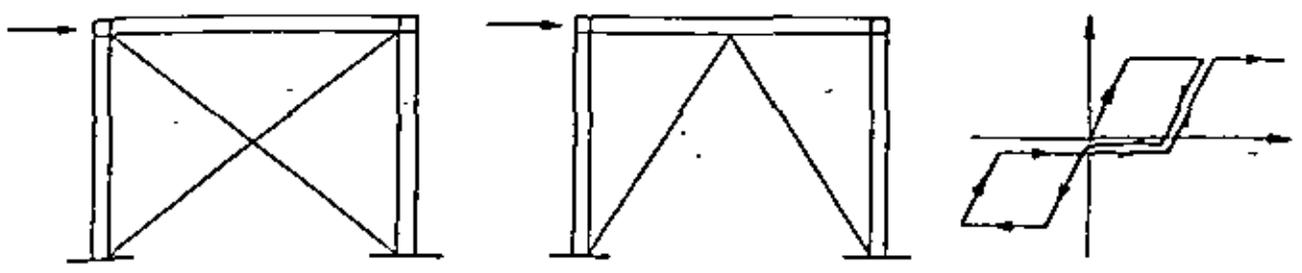


g) Tipo deslizamiento

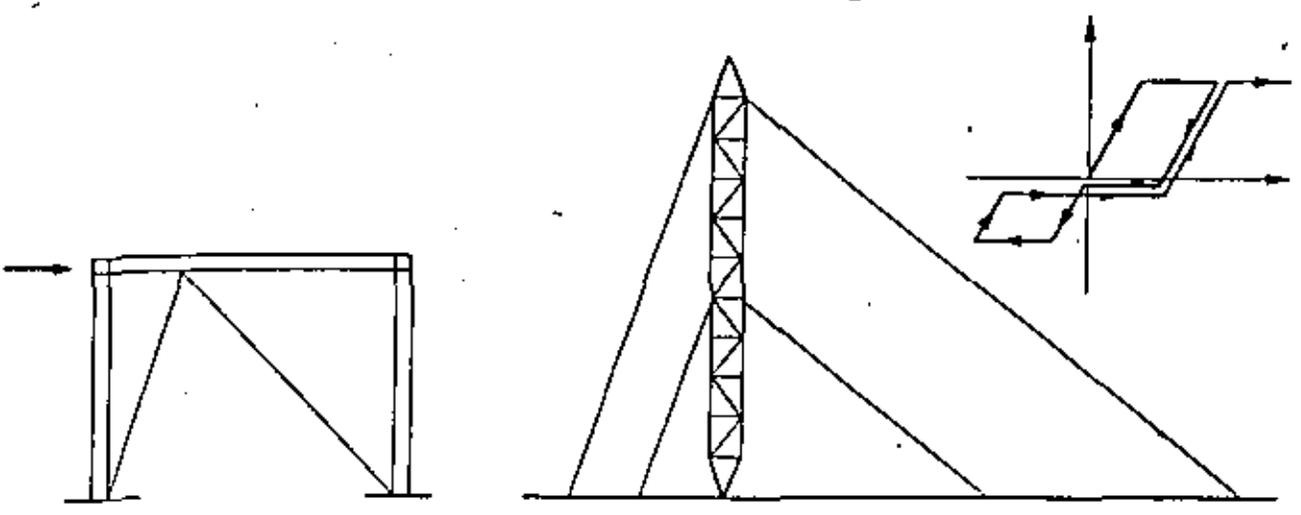
Fig 17. Modelos de comportamiento no lineal



a) Sistema típico con relación asimétrica carga-deformación



b) Sistema con relación simétrica tipo deslizamiento



c) Sistema con relación asimétrica tipo deslizamiento

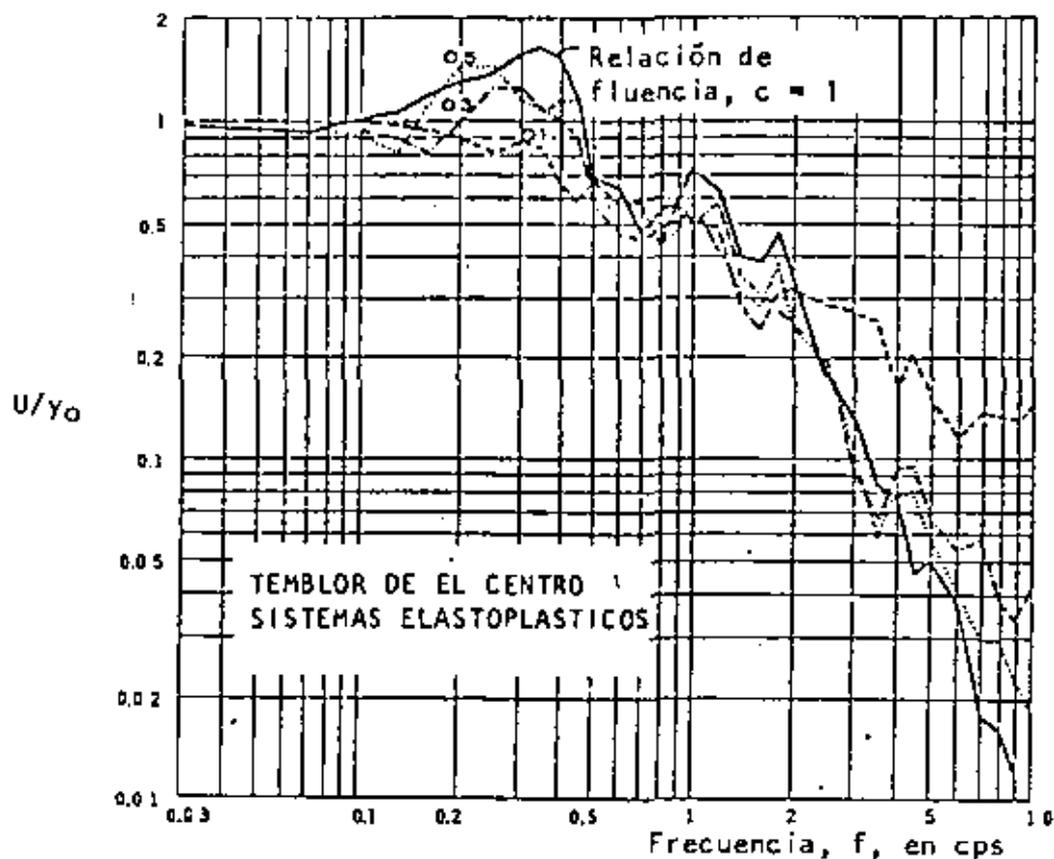


Fig 19. Espectro de deformaciones para sistemas elastoplásticos con amortiguamiento viscoso de 0.02 (según Bielak, 1966)

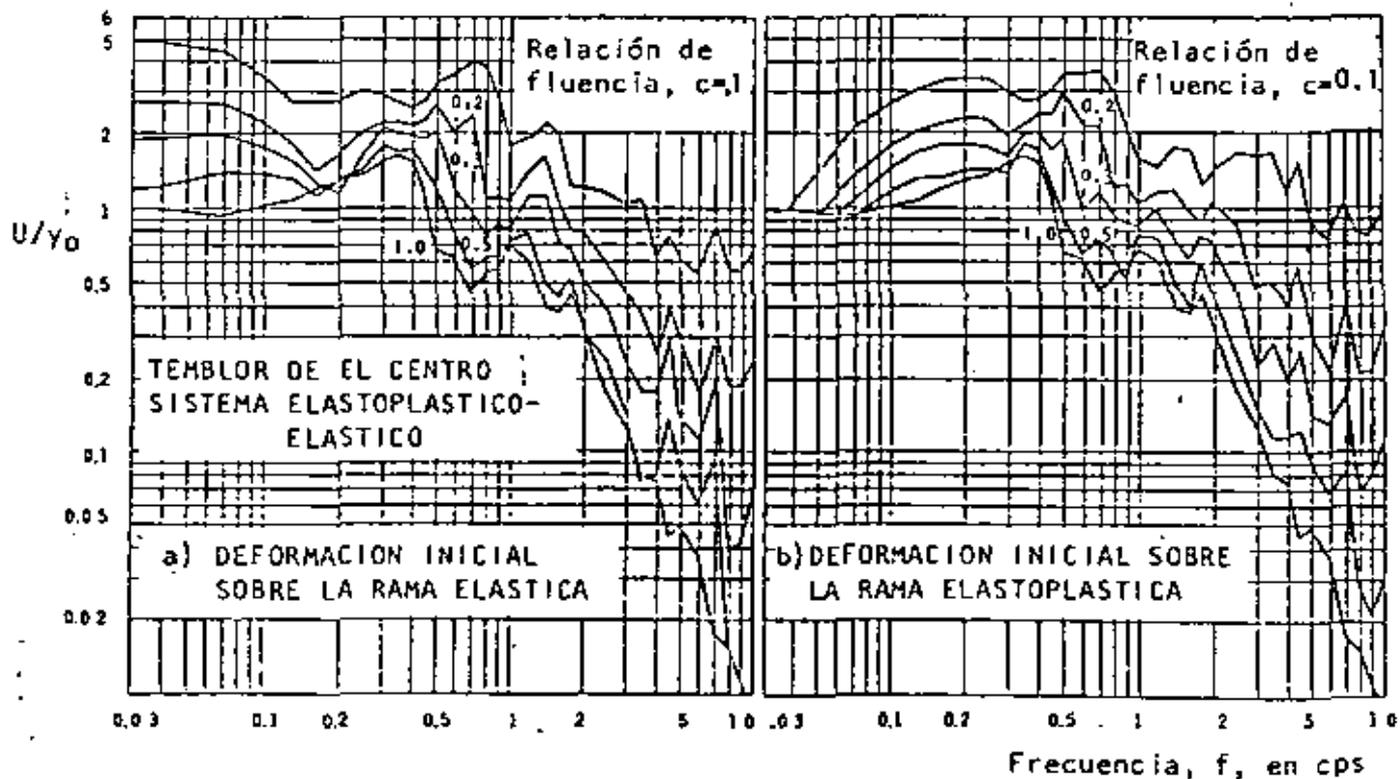


Fig 20. Espectros de deformación para sistemas de curva asimétrica con amortiguamiento viscoso de 0.02 (según Bielak, 1966)

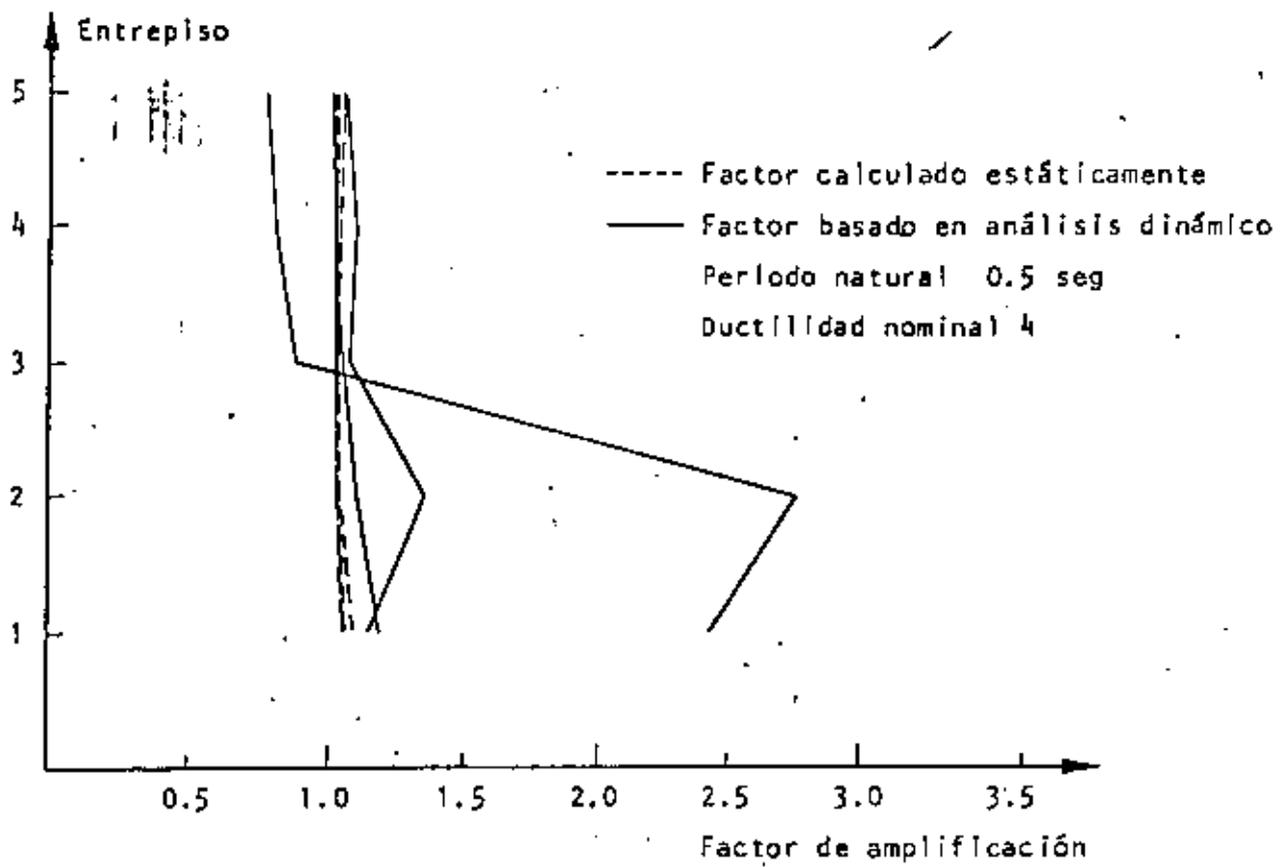


Fig 21. Factores de amplificación por esbeltez

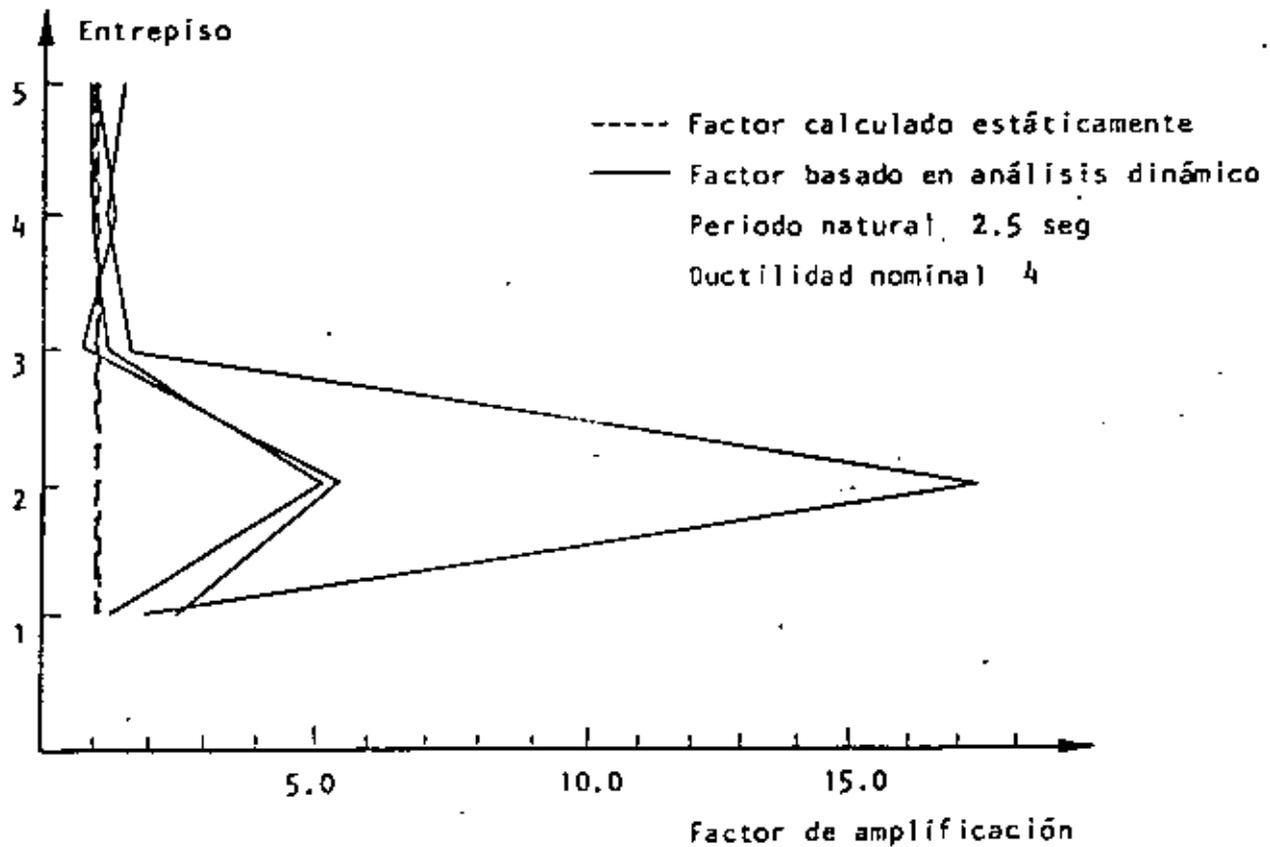


Fig 22. Factores de amplificación por esbeltez

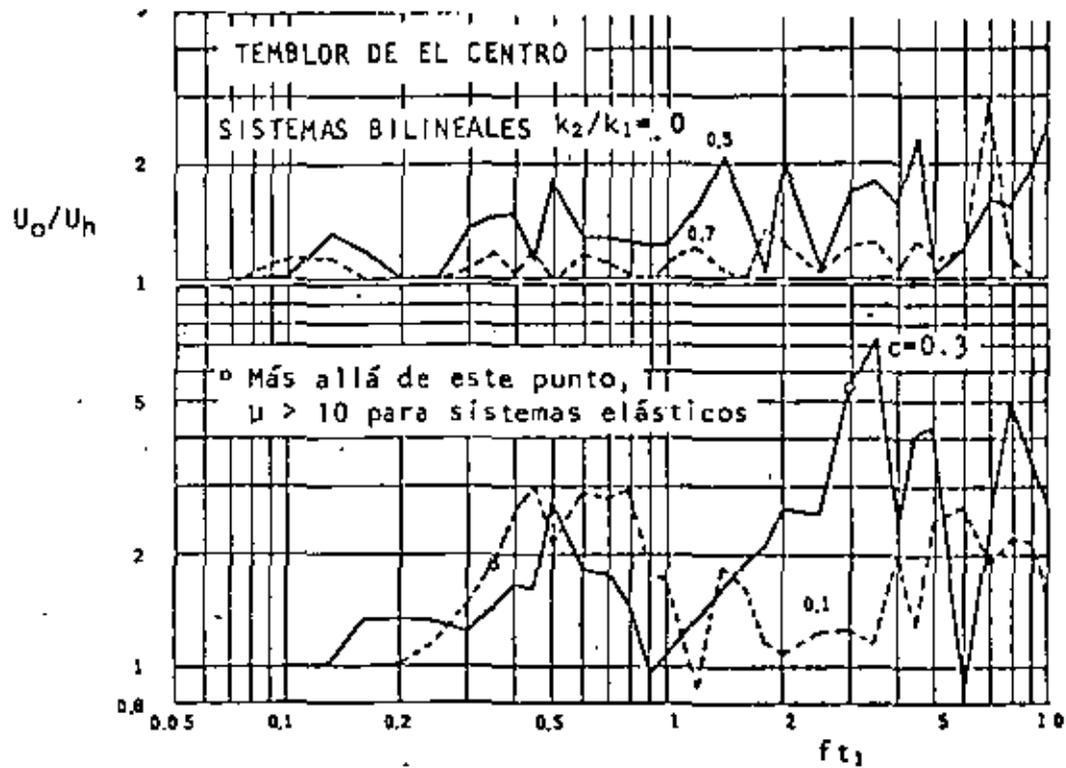


Fig 23. Espectros de la relación de deformaciones máximas de sistemas bilineales elásticos e hysteréticos (según Bielak, 1966)

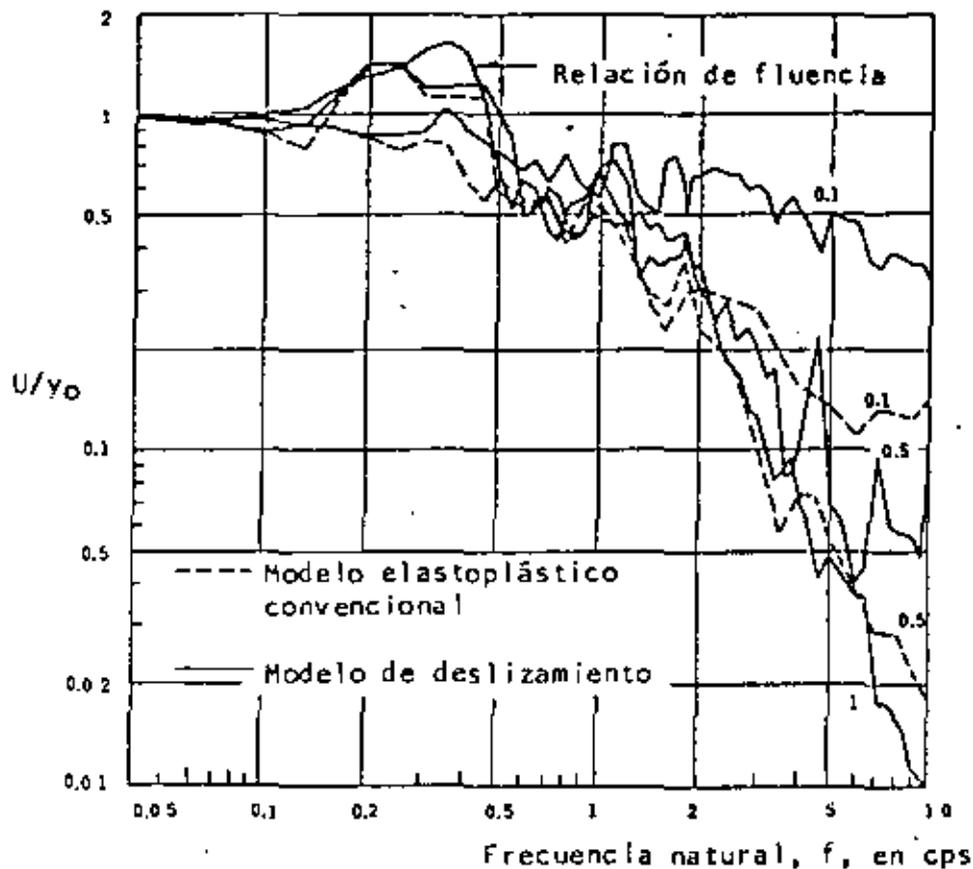


Fig 24. Espectros para sistemas elastoplásticos convencionales y de deslizamiento. Temblor de El Centro. Amortiguamiento 0.02 (según Veletsos, 1969)

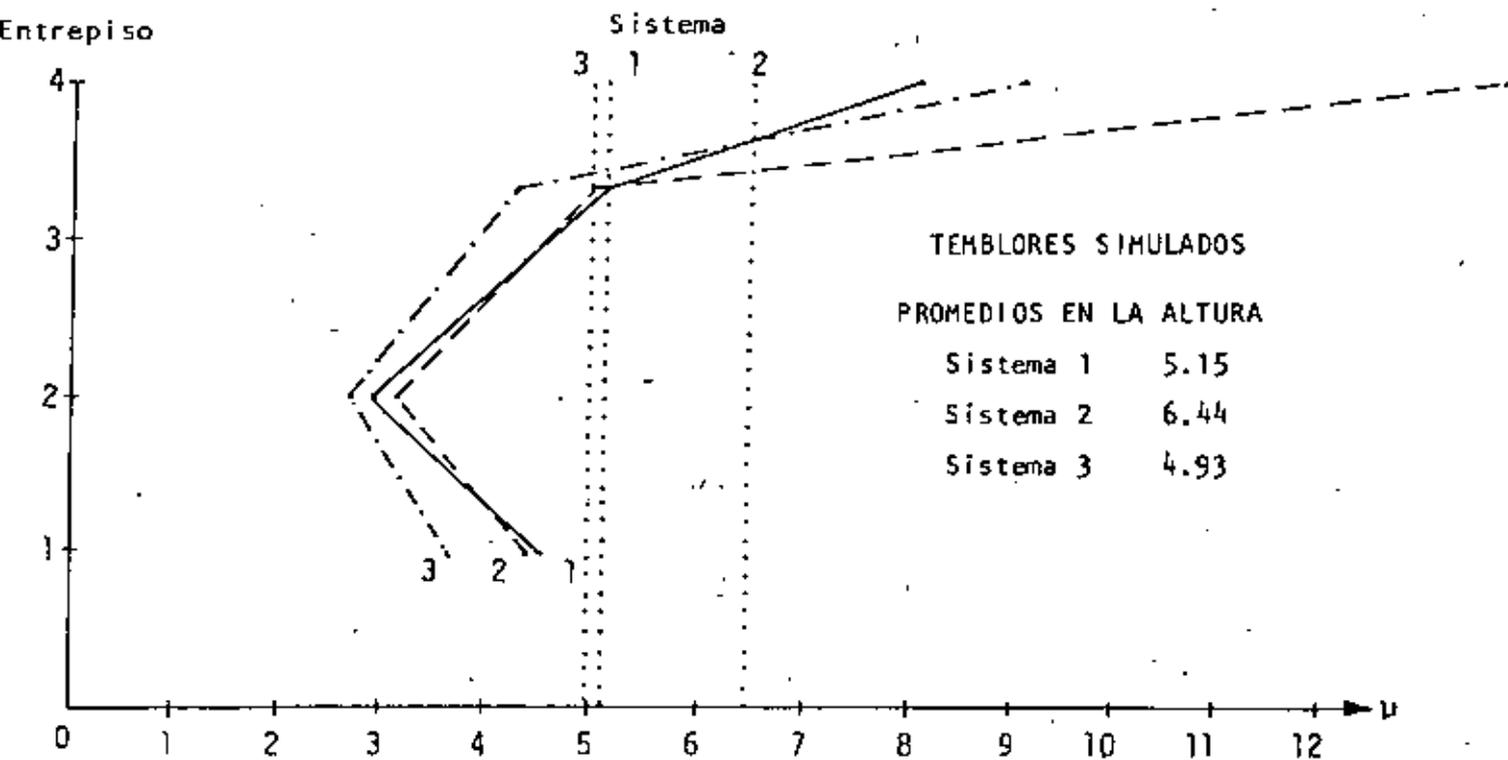
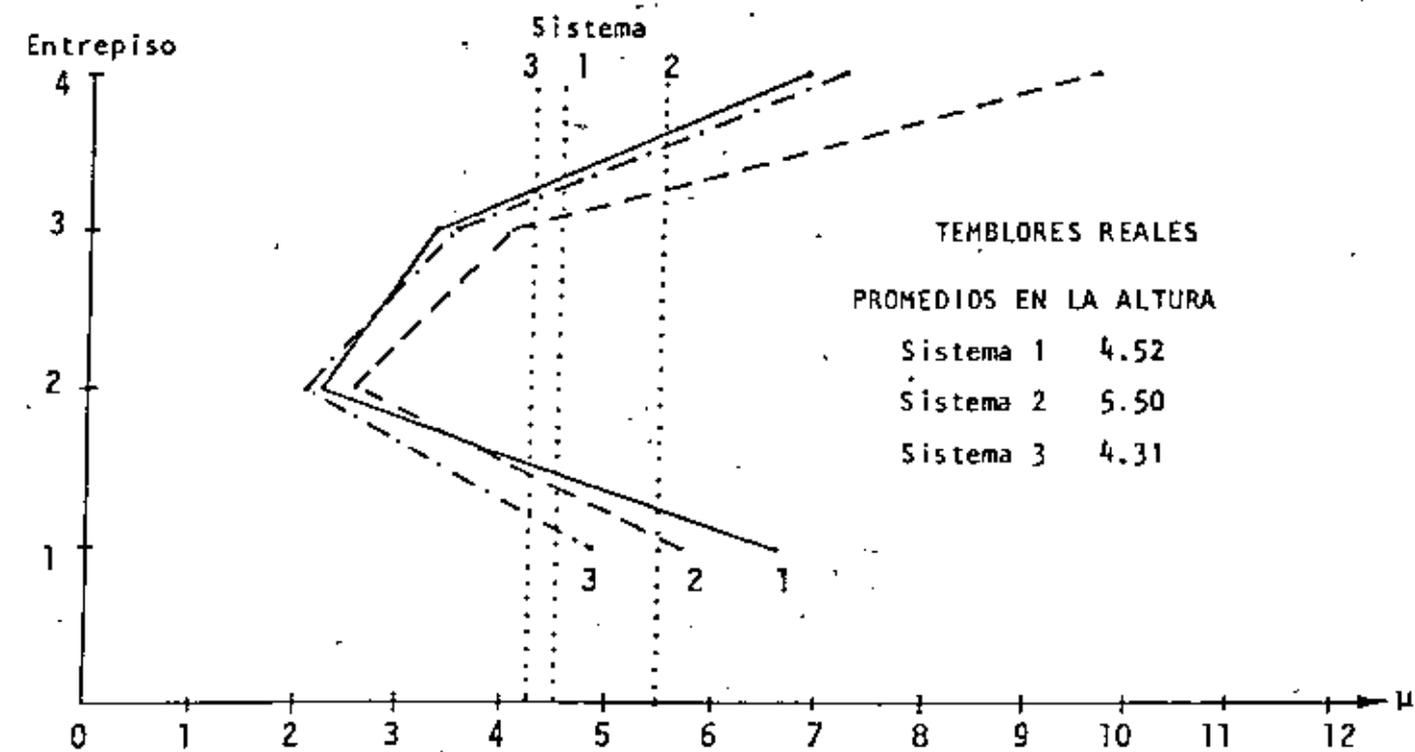


Fig 25. Ductilidades medias para tres sistemas de cortante (según Frank et al, 1976)

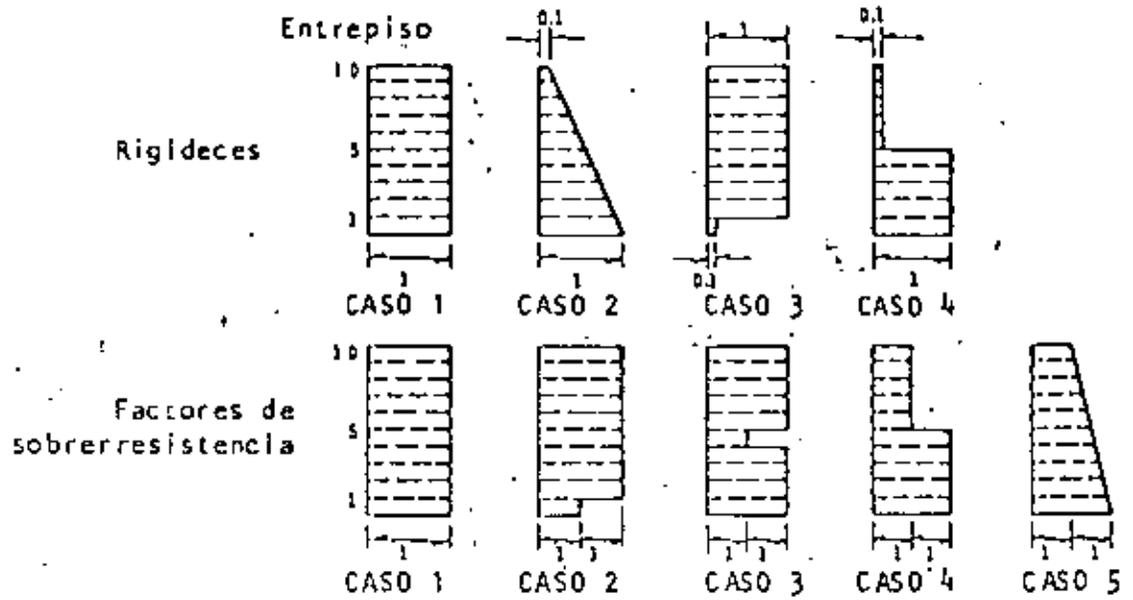


Fig 26. Variación de rigideces y factores de sobrerresistencia en edificios de cortante

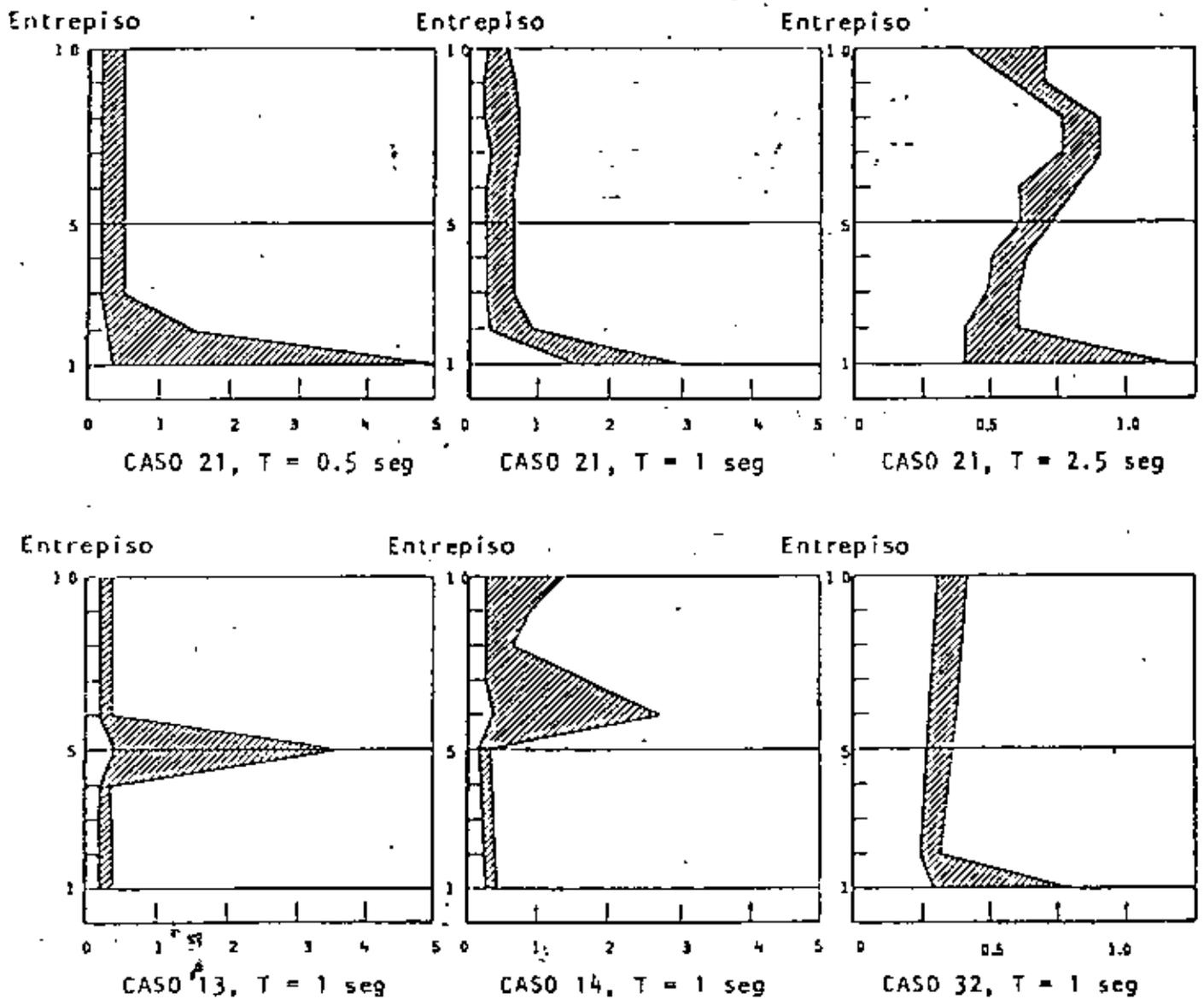
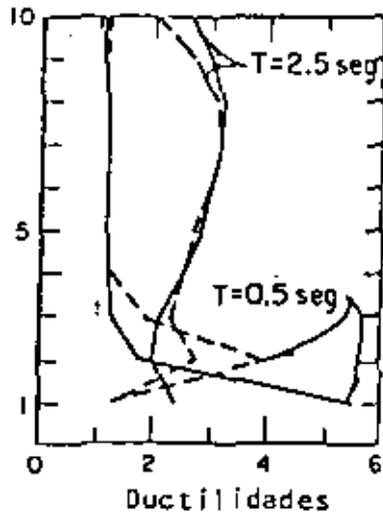


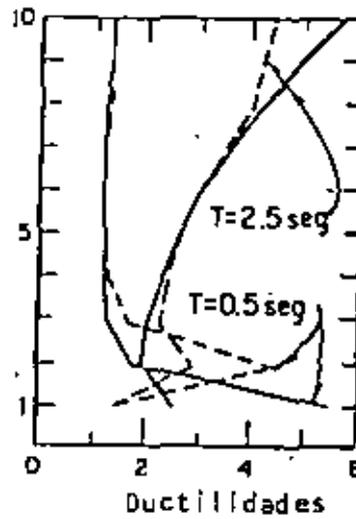
Fig 27. Relaciones entre ductilidades reales y nominales

Entrepiso



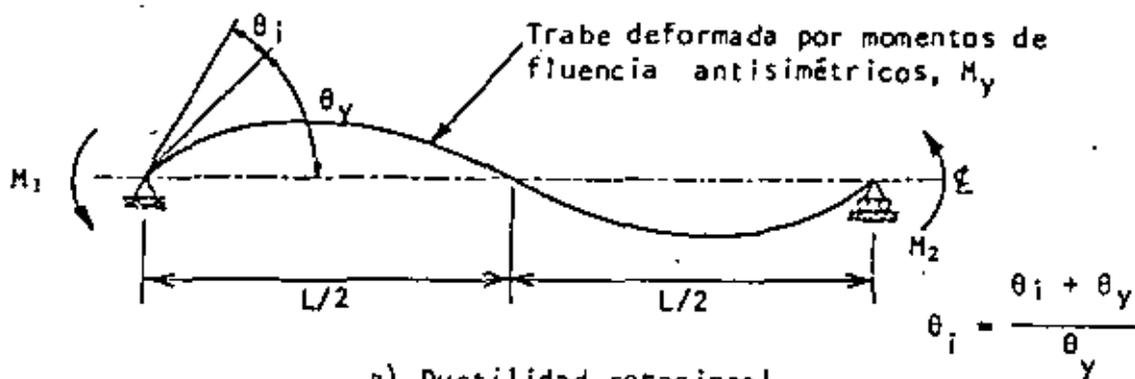
a)

Entrepiso

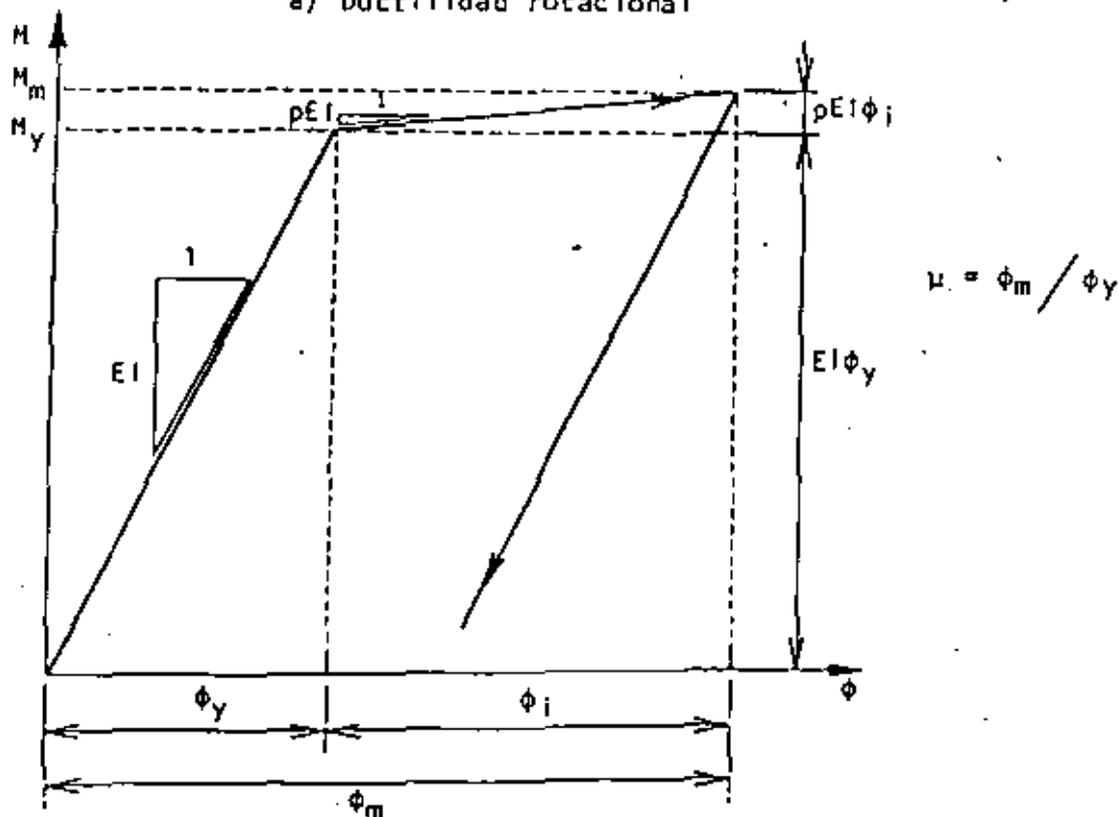


b)

Fig 28. Relaciones entre ductilidades y criterios de diseño

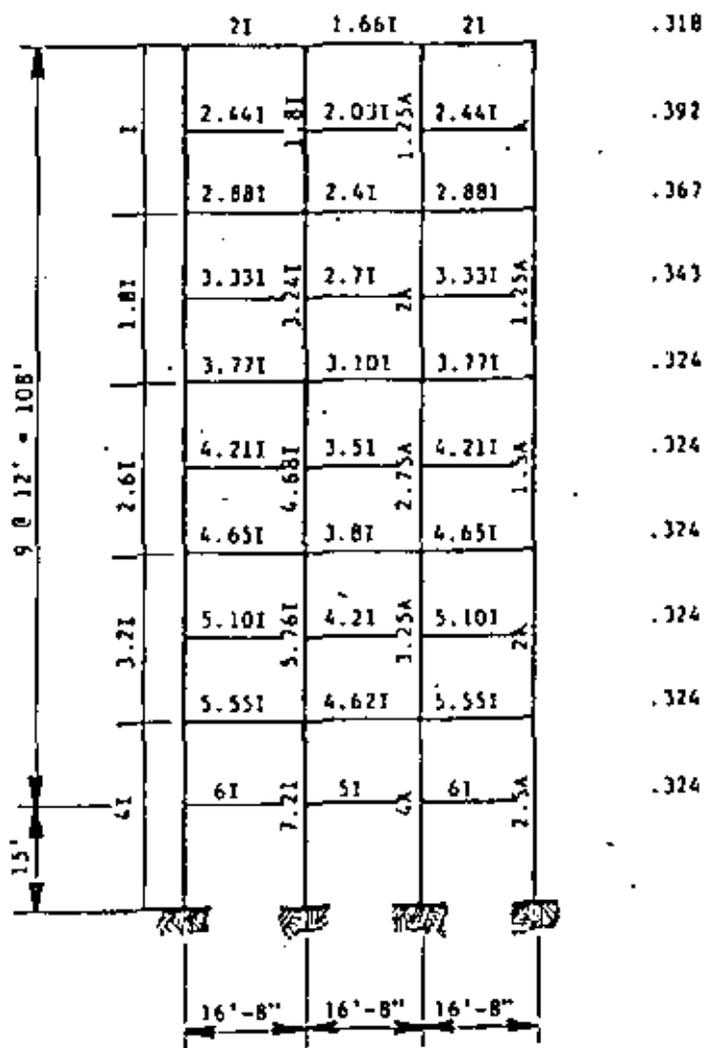


a) Ductilidad rotacional



b) Ductilidad de momentos o de curvaturas

MASAS DE PISO, en kg-seg²/pulg



$T_1 = 1.37 \text{ seg}$ $I = 500 \text{ pulg}^4$ $A = 20 \text{ pulg}^2$

Fig 30. Marco para estudio de ductilidades locales

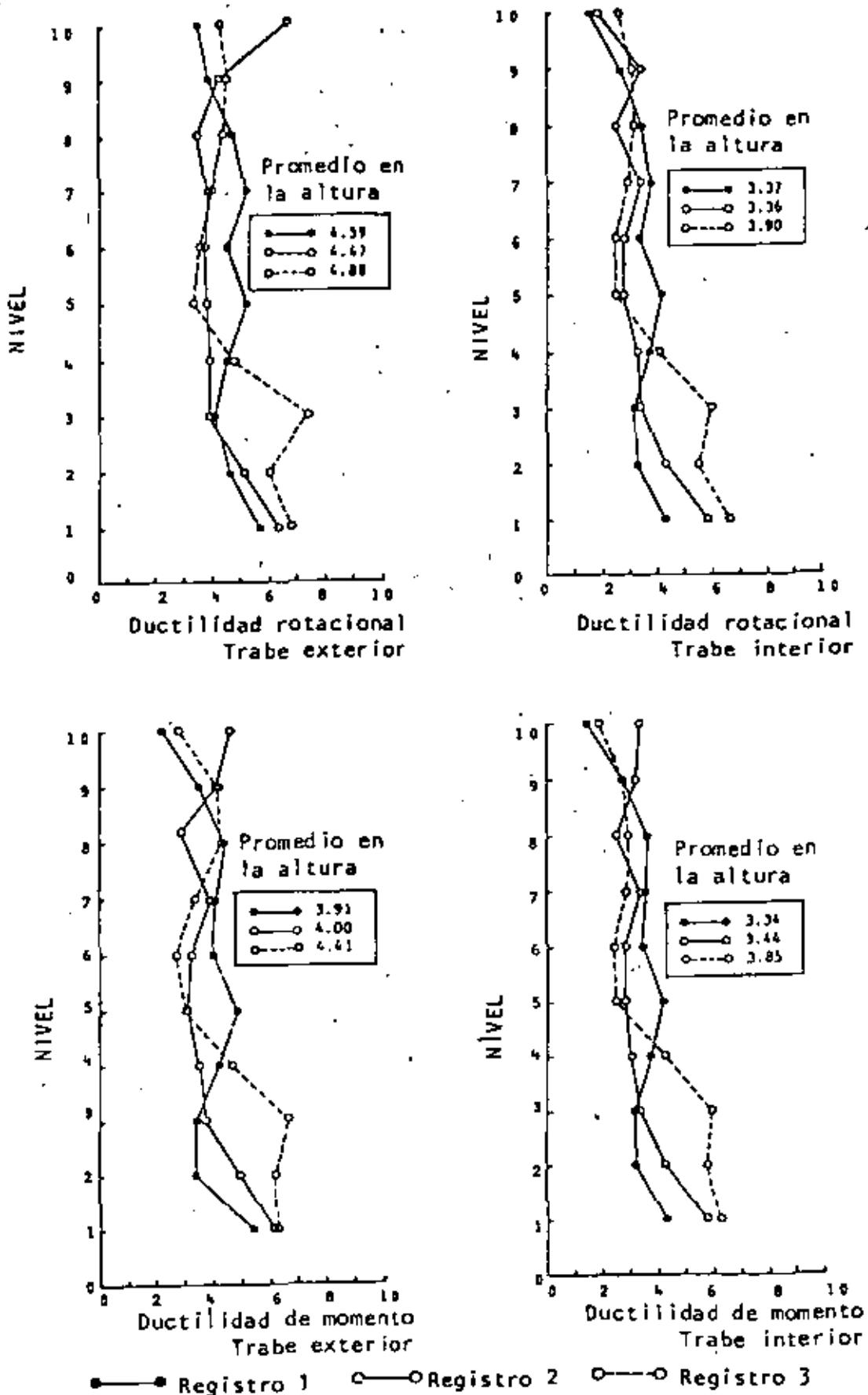


Fig 31. Máximos valores de ductilidad en traveses (según Haviland et al, 1976)

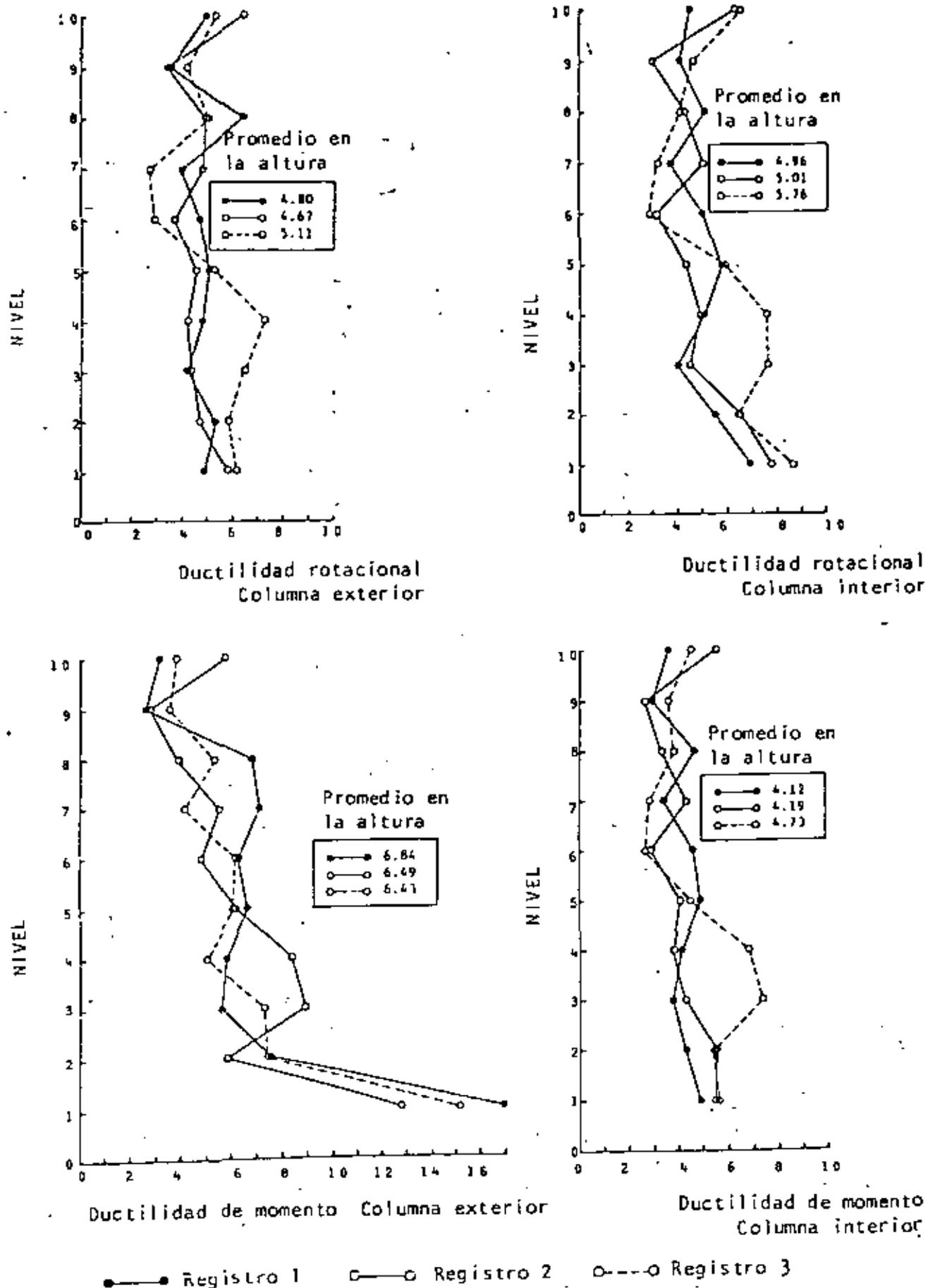


Fig 32. Máximos factores de ductilidad en columnas
(según Haviland et al, 1976)

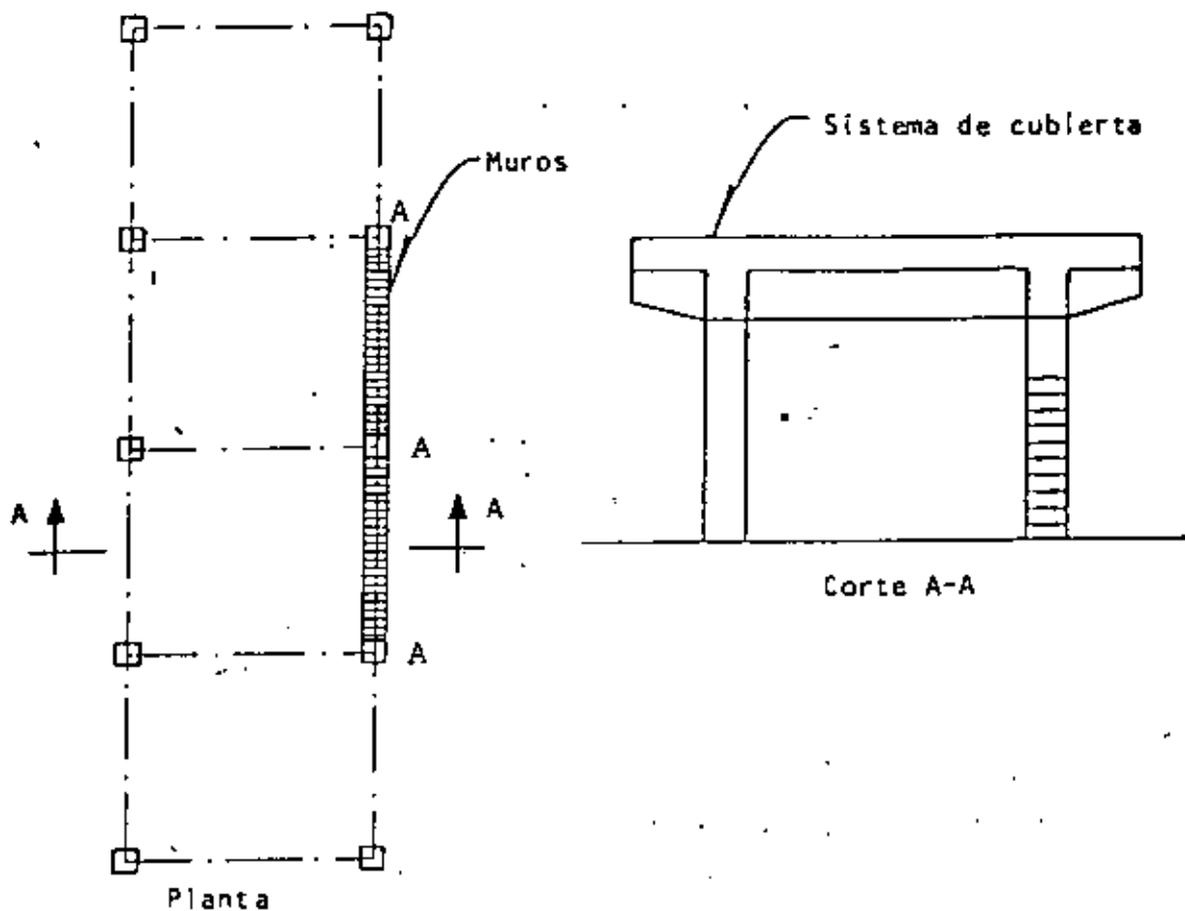


Fig 33. Columnas parcialmente restringidas

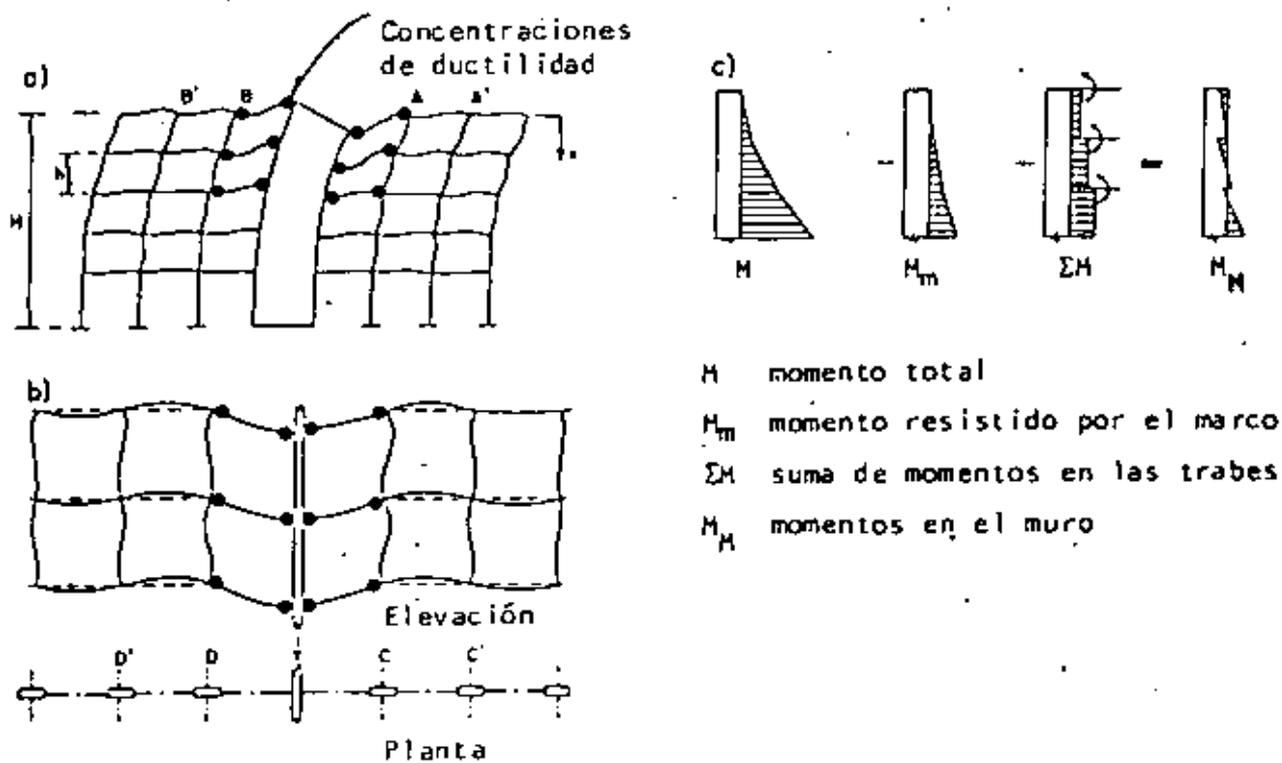


Fig 34. Deformaciones en sistemas rigidizantes



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980



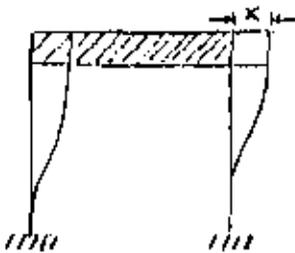
DINAMICA ESTRUCTURAL

DR. OCTAVIO A RASCON CH.

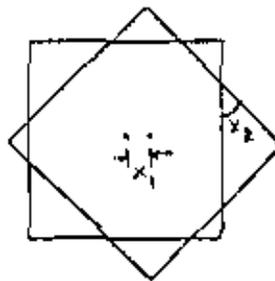
DEFINICION.

GRADOS DE LIBERTAD = NUMERO DE COORDENADAS GENERALIZADAS (DESPLAZAMIENTOS O GIROS) QUE SE REQUIEREN PARA DEFINIR LA POSICION DEL SISTEMA EN CUALQUIER INSTANTE.

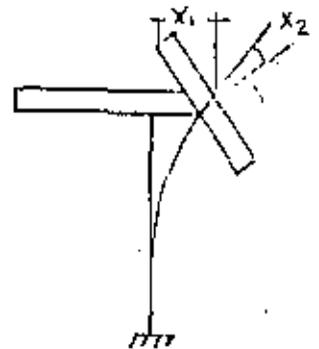
EJEMPLOS



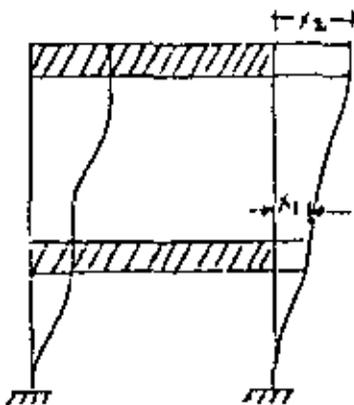
UN GRADO DE LIBERTAD



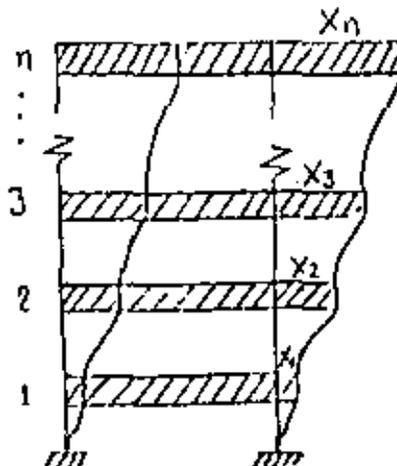
DOS GRADOS DE LIBERTAD



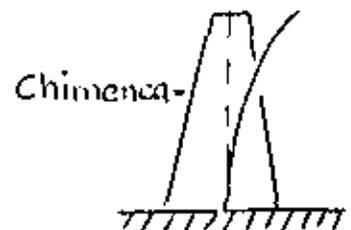
DOS GRADOS DE LIBERTAD



DOS GRADOS DE LIBERTAD



n GRADOS DE LIBERTAD



INFINITO NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

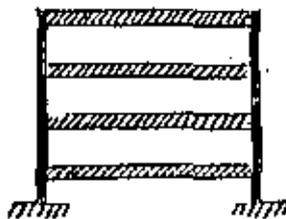
MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

1. POR CONCENTRACION DE MASAS

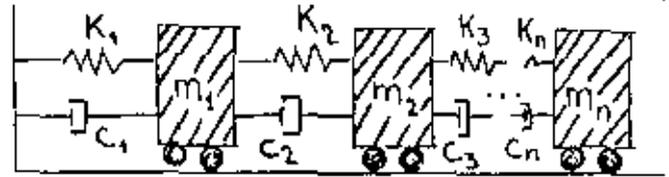
MASA POR UNIDAD
DE LONGITUD = m



\cong



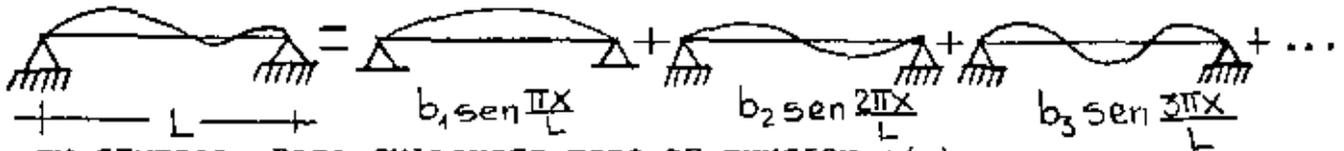
$=$



2. EXPRESANDO LA CONFIGURACION DE VIBRACION DE LA ESTRUCTURA COMO UNA SERIE DE FUNCIONES ESPECIFICADAS. POR EJEMPLO, SI ESTAS FUNCIONES SON ARMONICAS:

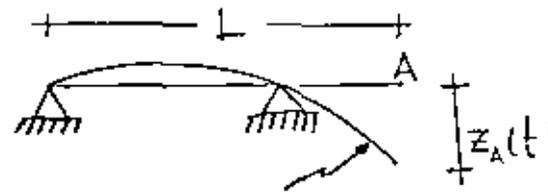
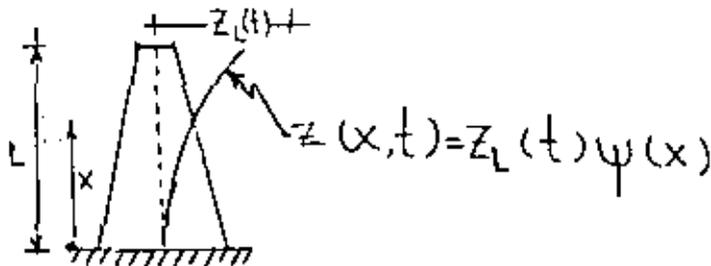
$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N b_i \text{sen } \frac{i\pi x}{L}$$

$\rightarrow x$

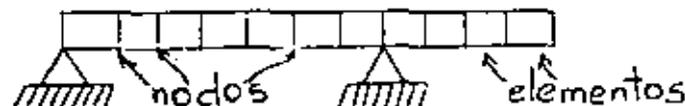


EN GENERAL, PARA CUALQUIER TIPO DE FUNCION $\psi(x)$:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N z_i(t) \psi_i(x)$$



3. MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

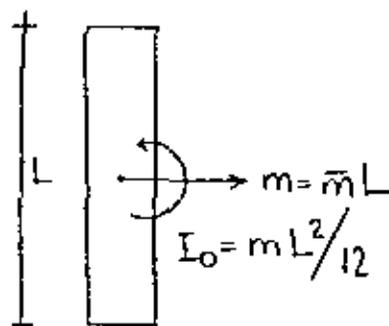


$$z(x, t) = z_A(t) \psi(x)$$

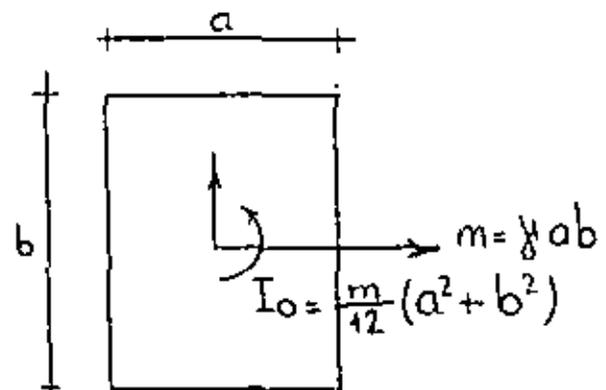
AL PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE CUERPOS RIGIDOS ES A MENUDO NECESARIO CONOCER LOS MOMENTOS DE INERCIA DE MASA. A CONTINUACION SE PRESENTAN ALGUNOS CASOS:

\bar{m} = MASA POR UNIDAD DE LONGITUD

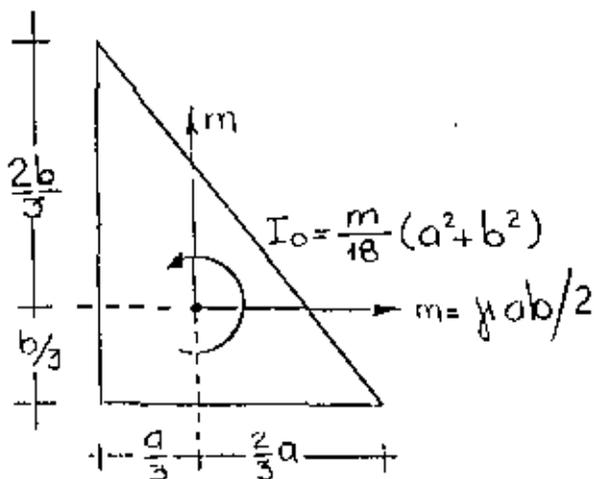
γ = MASA POR UNIDAD DE AREA



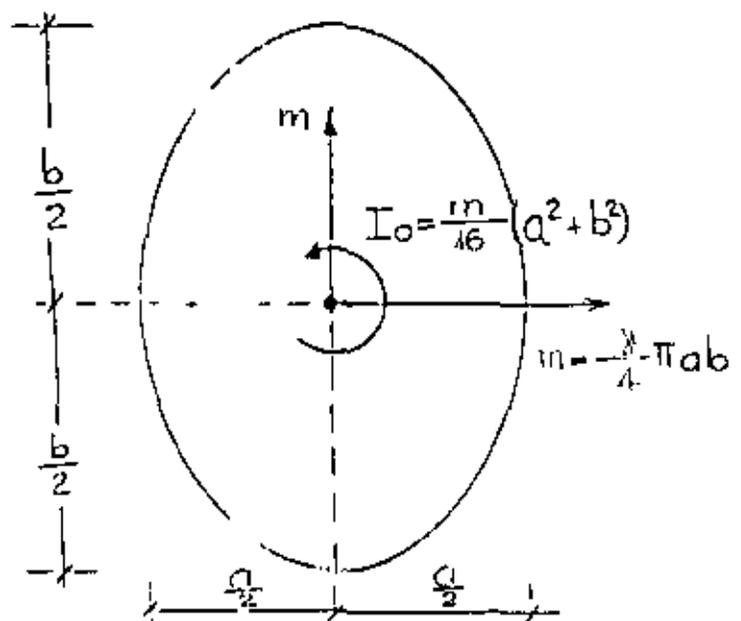
BARRA UNIFORME



PLACA UNIFORME RECTANGULAR

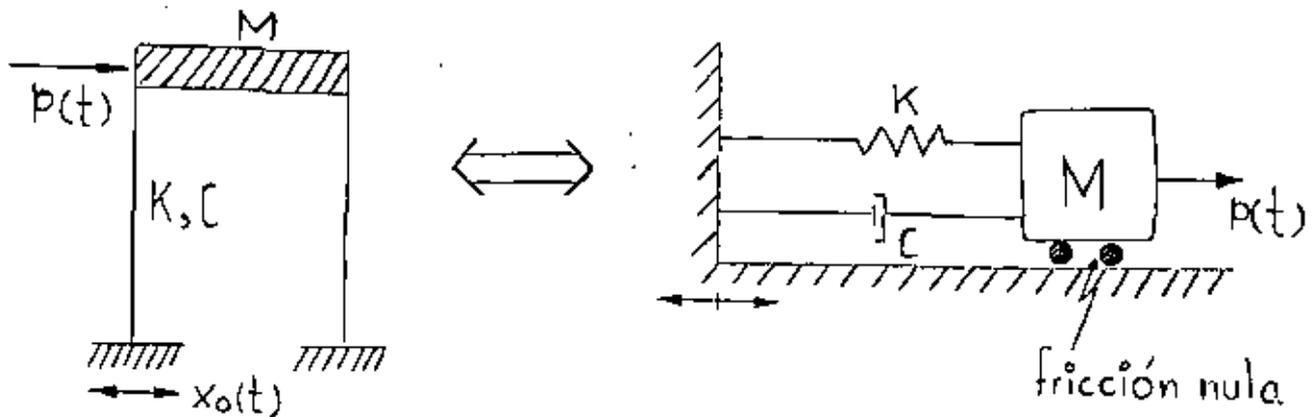


PLACA UNIFORME TRIANGULAR



PLACA UNIFORME ELIPTICA

RESPUESTA DINAMICA DE SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD
CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO



$t =$ TIEMPO

$M =$ MASA

$K =$ RIGIDEZ

$C =$ AMORTIGUAMIENTO

$f(t) =$ FUERZA EXTERNA

$x_0(t) =$ DESPLAZAMIENTO DEL SUELO

EL AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ES TAL QUE PRODUCE UNA FUERZA DE RESTAURACION PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA RESPECTO AL SUELO.

EL AMORTIGUAMIENTO SE DEBE PRINCIPALMENTE A LA FRICCIÓN INTERNA ENTRE LOS GRANOS O PARTICULAS DEL MATERIAL DE LA ESTRUCTURA, Y A FRICCIÓN EN LAS JUNTAS Y CONEXIONES DE LA MISMA. ES EL ELEMENTO DEL SISTEMA QUE DISCIPA ENERGIA.

2a. LEY DE NEWTON:

"LA RAPIDEZ DE CAMBIO DEL MOMENTUM DE CUALQUIER MASA, m , ES IGUAL A LA FUERZA QUE ACTUA SOBRE ELLA"

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x})$$

$p(t)$ = FUERZA ACTUANTE

x = DESPLAZAMIENTO

t = TIEMPO

SI m ES CONSTANTE: $p(t) = m\ddot{x}$

PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

SI LA 2a. LEY DE NEWTON LA ESCRIBIMOS COMO

$$p(t) - m\ddot{x} = 0$$

AL SEGUNDO TERMINO DE LA ECUACION SE LE CONOCE COMO FUERZA DE INERCIA; EL CONCEPTO DE QUE UNA MASA DESARROLLA UNA FUERZA DE INERCIA PROPORCIONAL A SU ACELERACION Y QUE SE OPONE A ELLA SE CONOCE COMO PRINCIPIO DE D'ALAMBERT, Y PERMITE QUE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO SE EXPRESEN COMO ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO.

ECUACION DE EQUILIBRIO

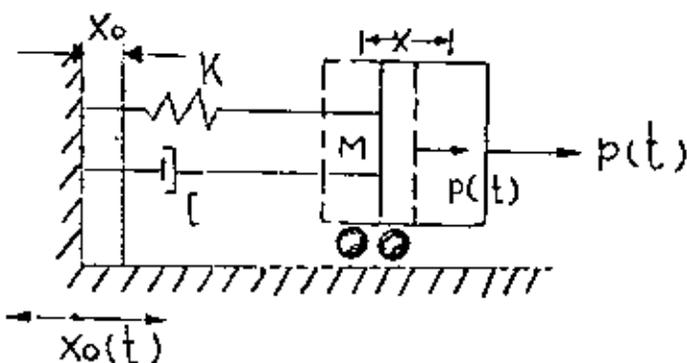


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

$$\text{EQUILIBRIO: } f_e + f_a + f_i = p(t) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{PARA UN SISTEMA ELASTICO: } f_e = K(x - x_0) = ky \\ \text{PARA AMORTIGUAMIENTO VISCOSO: } f_a = c(\dot{x} - \dot{x}_0) = c\dot{y} \\ \text{POR EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT: } f_i = m\ddot{x} = m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) \end{array} \right\} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO LAS ECS. 2 EN LA EC. 1 SE OBTIENE:

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) + c\dot{y} + ky = p(t)$$

DE DONDE

$$\boxed{\ddot{m}y + c\dot{y} + Ky = p(t) - M\ddot{x}_0} \quad (3)$$

DIVIDIENDO ENTRE M AMBOS MIEMBROS DE LA EC. 3:

$$\ddot{y} + \frac{c}{M}\dot{y} + \frac{K}{M}y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0$$

SI $\frac{c}{M} = 2h$, Y $\frac{K}{M} = \omega^2$, DONDE $\omega =$ FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, EN RAD/SEG:

$$\boxed{\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0} \quad (4)$$

CUANDO SE TIENEN EXCITACIONES EN EL SISTEMA SE TRATA DE UN PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS; EN CASO CONTRARIO EL PROBLEMA ES DE VIBRACIONES LIBRES.

VIBRACIONES LIBRES

EN ESTE CASO LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2y = 0$$

CUYA SOLUCION ES

$$y(t) = e^{-ht} (C_1 \sin \omega't + C_2 \cos \omega't) \quad (5)$$

DONDE $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2}$ = FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL AMORTIGUADA

Y C_1 Y C_2 SON CONSTANTES QUE DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES

(EN $t=0$) DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD QUE TENGA LA MASA DEL SISTEMA.

ESTAS RESULTAN SER

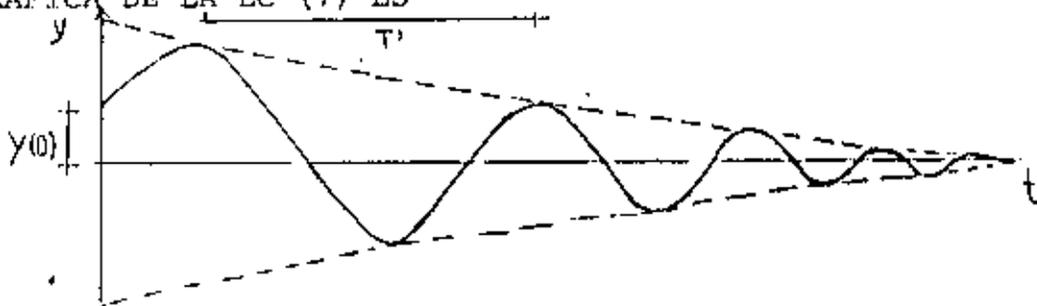
$$\boxed{C_1 = \frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'}} \quad \text{Y} \quad \boxed{C_2 = y(0)} \quad (6)$$

LA EC (5) SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIEN COMO:

$$\boxed{y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta)} \quad (7)$$

DONDE $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ Y $\theta = \tan^{-1} \frac{C_1}{C_2} = \text{ANGULO DE FASE}$

LA GRAFICA DE LA EC (7) ES



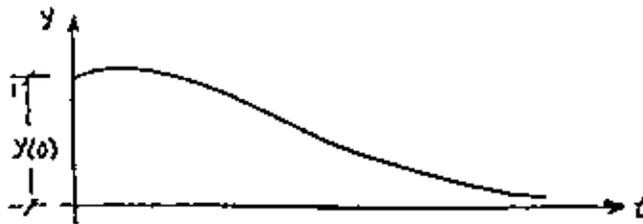
$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \text{PERIODO NATURAL AMORTIGUADO, SEG}$$

$$f' = \frac{1}{T'} = \text{FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA, cps}$$

VEAMOS EL CASO ESPECIAL DE LA EC. (5) EN QUE $h \rightarrow \omega$. EN TAL CASO, $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} \rightarrow 0$, $\cos \omega't \rightarrow 1$ Y $\sin \omega't \rightarrow \omega't$, CON LO CUAL LA EC. (5) SE REDUCE A

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\omega t} \left\{ \left[\frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'} \right] (\omega't) + y(0) \right\} \\ &= e^{-\omega t} [\dot{y}(0)t + (1 + \omega t)y(0)] \end{aligned}$$

LA GRAFICA DE ESTA ECUACION ES



Y OBTIAMENTE NO REPRESENTA UN MOVIMIENTO OSCILATORIO, POR LO CUAL SI $h = \omega$ SE DICE QUE SE TIENE AMORTIGUAMIENTO CRITICO, EN TAL CASO:

$$h_{cr} = \omega = \frac{C_{cr}}{2M} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

DE DONDE $C_{cr} = 2\sqrt{KM}$. (8)

A LA RELACION $\zeta = C/C_{cr}$ SE LE LLAMA FRACCION DEL AMORTIGUAMIENTO CRITICO.

DESPEJANDO A M DE LA EC. (8) Y SUSTITUYENDOLA EN LA EC. $h = C/(2M)$ SE OBTIENE:

$$h = \frac{C}{2 \frac{C_{cr}^2}{4K}} = \frac{C}{C_{cr}} \frac{2K}{2\sqrt{KM}} = \zeta \sqrt{\frac{K}{M}} = \zeta \omega$$

ADEMAS:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega^2 \zeta^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{9}$$

LOS VALORES USUALES EN ESTRUCTURAS QUE ASUME ζ VARIAN ENTRE 2 Y 5%. EN ESTE INTERVALO ω' Y ω SON CASI IGUALES; VEAMOS, POR EJEMPLO, EL CASO EN QUE $\zeta = 0.1$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - 0.01} = 0.995\omega$$

OTRA FORMA DE MEDIR EL GRADO DE AMORTIGUAMIENTO QUE TIENE UNA ESTRUCTURA ES MEDIANTE EL DECREMENTO LOGARITMICO, EL CUAL SE DEFINE COMO EL LOGARITMO DEL COCIENTE DE DOS AMPLITUDES CONSECUTIVAS

$$L = \ln \frac{y(t)}{y(t + T')} = \ln \frac{Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta)}{Ae^{-h(t+T')} \cos[\omega'(t+T') - \theta]}$$

$$= \ln \left\{ \frac{e^{-ht}}{e^{-h(t+T')}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't + \omega'T' - \theta)} \right\}$$

$$= \ln \left\{ \frac{e^{-ht}}{e^{-ht} e^{-hT'}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't - \theta + 2\pi)} \right\}$$

$$= \ln e^{+hT'} = hT' = \zeta \omega T' = \zeta \omega \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$L = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(10)

SI ζ ES PEQUEÑO,

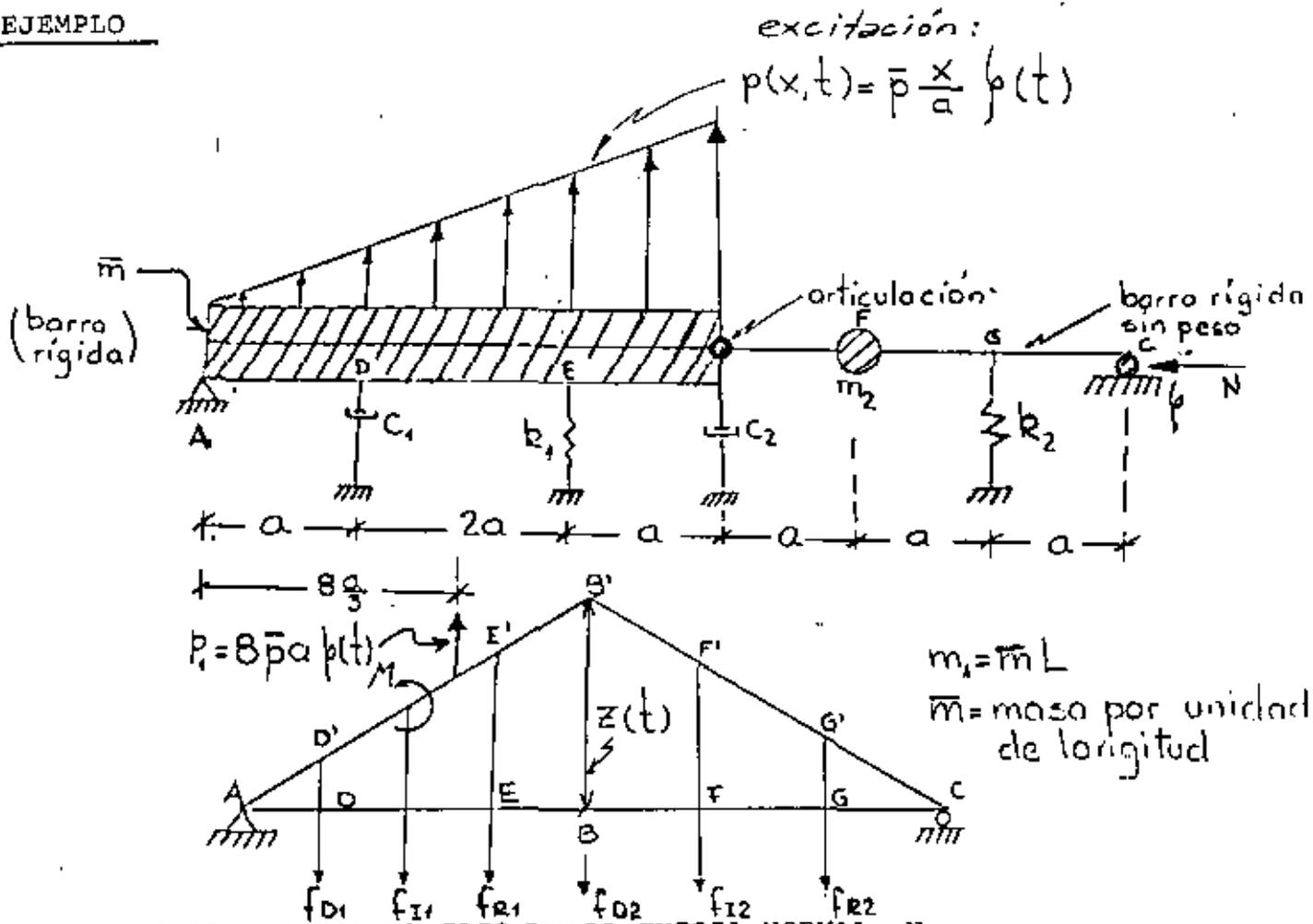
$$L \doteq 2\pi\zeta$$

(11)

ECUACION DE MOVIMIENTO GENERALIZADA.

HAY PROBLEMAS QUE APARENTEMENTE CORRESPONDE A VIBRACIONES DE SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD PERO QUE EN REALIDAD SON DE UN GRADO SOLAMENTE.

EJEMPLO



CONSIDEREMOS PRIMERO EL CASO SIN LA FUERZA NORMAL, N.

TOMANDO COMO COORDENADA GENERALIZADA A $z(t)$:

$$f_{R1} = k_1 (EE') = k_1 \frac{3}{4} z(t) ; \quad f_{R2} = k_2 (GG') = k_2 \frac{1}{3} z(t)$$

$$f_{D1} = C_1 \left(\frac{d}{dt} DD' \right) = C_1 \frac{1}{4} \dot{z}(t) ; \quad f_{D2} = C_2 \dot{z}(t)$$

$$f_{I1} = m_1 \frac{1}{2} \ddot{z}(t) = \bar{m} L \frac{1}{2} \ddot{z}(t) = 2a \bar{m} \ddot{z}(t)$$

$$f_{I2} = m_2 \frac{2}{3} \ddot{z}(t)$$

$$M = I_0 \frac{1}{4a} \ddot{z}(t) = \frac{\bar{m}L}{4a} \frac{L^2}{3} \ddot{z}(t) = \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{z}(t)$$

$$P_1 = 8\bar{p}a\zeta(t)$$

LA ECUACION DE MOVIMIENTO DEL SISTEMA SE PUEDE ESTABLECER IGUALANDO A CERO EL TRABAJO VIRTUAL REALIZADO POR TODAS LAS FUERZAS AL DARLE AL SISTEMA UN DESPLAZAMIENTO VIRTUAL EN EL PUNTO B IGUAL A δZ . EN TAL CASO

$$\begin{aligned} \delta W = & -k_1 \frac{3}{4} z(t) \left(\frac{3}{4} \delta Z \right) - k_2 \frac{1}{3} z(t) \left(\frac{1}{3} \delta Z \right) - C_1 \frac{\dot{z}(t)}{4} \left(\frac{\delta Z}{4} \right) - \\ & - C_2 \dot{z}(t) (\delta Z) - 2a\bar{m} \ddot{z}(t) \left(\frac{\delta Z}{2} \right) - m_2 \frac{2\ddot{z}(t)}{3} \left(\frac{2}{3} \delta Z \right) - \\ & - \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{z}(t) \left(\frac{\delta Z}{4a} \right) + 8\bar{p}a\zeta(t) \left(\frac{2}{3} \delta Z \right) = 0 \end{aligned}$$

SIMPLIFICANDO SE OBTIENE

$$\left[\left(a\bar{m} + \frac{a\bar{m}}{3} + \frac{4m_2}{9} \right) \ddot{z}(t) + \left(\frac{C_1}{16} + C_2 \right) \dot{z}(t) + \left(\frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \right) z(t) - \frac{16}{3} \bar{p}a\zeta(t) \right] \delta Z = 0 \quad (A)$$

COMO EL DESPLAZAMIENTO VIRTUAL δZ NO ES CERO, SE DEBE CUMPLIR QUE EL TERMINO ENTRE PARENTESIS ES CERO. EN TAL CASO:

$$\boxed{\ddot{m} \ddot{z}(t) + \ddot{c} \dot{z}(t) + \ddot{k} z(t) = \ddot{p}(t)}$$

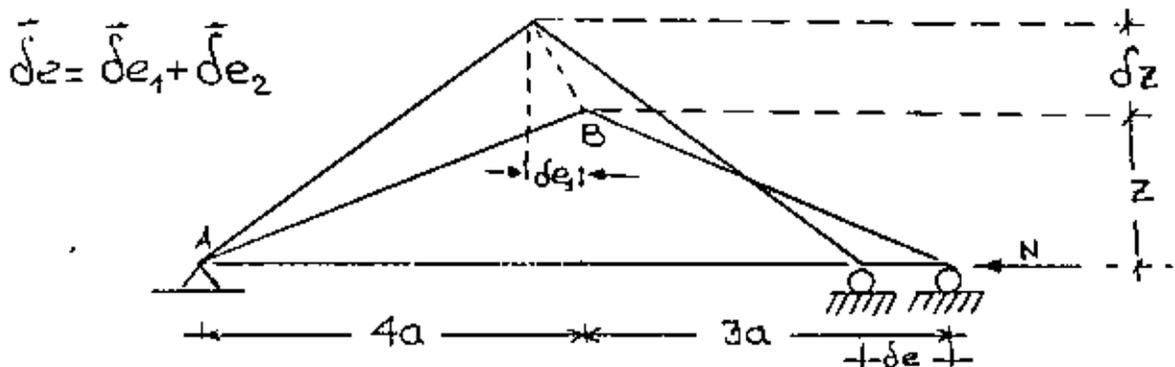
EN DONDE

$$\bar{m} = \frac{4}{3} \bar{m}_a + \frac{4}{9} m_2 \quad ; \quad \bar{c} = \frac{c_1}{16} + c_2$$

$$\bar{k} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{k_2}{9} \quad ; \quad \bar{p}(t) = \frac{16}{3} \bar{p}_a \zeta(t)$$

ESTOS PARAMETROS SE DENOMINAN MASA, AMORTIGUAMIENTO, RIGIDEZ Y FUERZA GENERALIZADAS, RESPECTIVAMENTE.

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO DE LA FUERZA NORMAL N SOLAMENTE:



δe_1 = DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL DEBIDO AL GIRO DE LA BARRA 1

$$\delta e_1 = \frac{z}{4a} \delta z \quad ; \quad \delta e_2 = \frac{z}{3a} \delta z$$

$$\therefore \delta e = \frac{7}{12} \frac{z}{a} \delta z$$

EL TRABAJO VIRTUAL ES:

$$\delta W = N \delta e = \frac{7}{12} \frac{Nz}{a} (\delta z)$$

COMO EL SISTEMA ES LINEAL SE PUEDE SUMAR ESTE TRABAJO VIRTUAL AL DE LA ECUACION (A), CON LO CUAL LA RIGIDEZ GENERALIZADA SE MODIFICA, QUEDANDO EN LA FORMA:

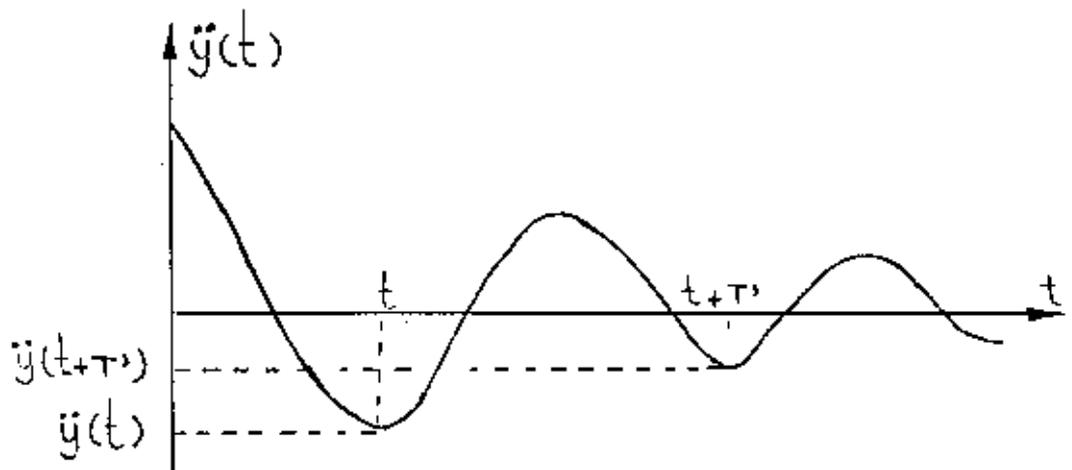
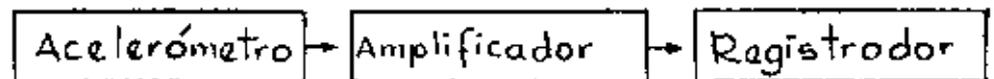
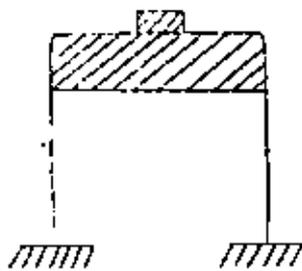
$$\bar{k} = \frac{9}{16} k_1 + \frac{1}{9} k_2 \quad \boxed{\frac{7}{12} \frac{N}{a}}$$

DE ESTA RIGIDEZ SE PUEDE SACAR, DE PASO, LA CARGA CRITICA DE PANDEO HACIENDO $\bar{k} = 0$:

$$N_{cr} = \left(\frac{27}{28} k_1 + \frac{4}{21} k_2 \right) a$$

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE ζ EN ESTRUCTURAS REALES O EN MODELOS

SI SE REALIZA UN EXPERIMENTO EN EL CUAL SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION DE EQUILIBRIO ESTATICO Y SE DEJA VIBRANDO LIBREMENTE, EL REGISTRO DE LAS ACELERACIONES QUE SE REGISTREN EN LA MASA TENDRA LA MISMA FORMA QUE LA GRAFICA DE LA EC. 7.

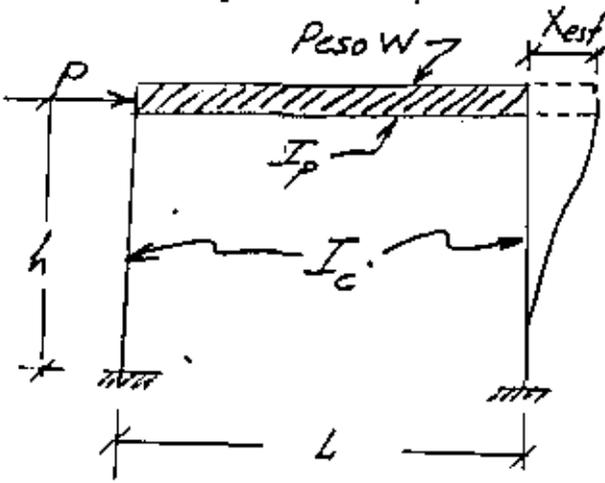


SI DE DICHO REGISTRO SE MIDEN $\ddot{y}(t + T)$ y $\ddot{y}(t)$ SE PUEDE OBTENER L Y, DE LA EC. (11), DESPEJAR A ζ

$$\zeta = \frac{L}{2\pi}$$

Ejemplo

Calcular el periodo natural de vibración de la estructura mostrada en la siguiente figura:



$$K = \frac{P}{X_{est}} \quad \begin{array}{l} P = \text{carga estática} \\ X_{est} = \text{desplazamiento producido por } P \end{array}$$

I_c = Momento de inercia de las columnas

I_p = Momento de inercia del sistema de piso

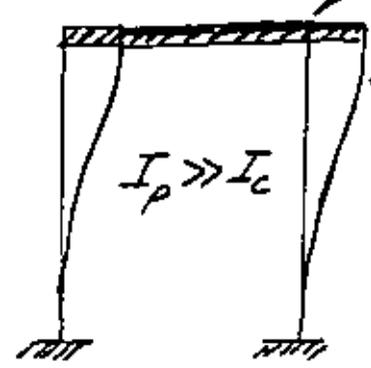
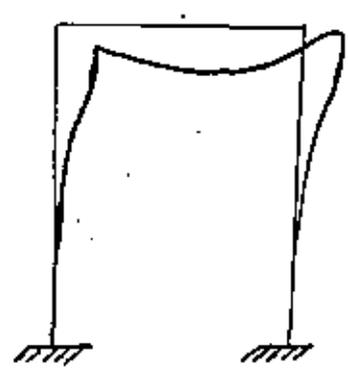
Mediante el análisis estático del marco se encuentra que

$$X_{est} = \frac{Ph^3}{6EI_c} \frac{\frac{3}{2} + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}{6 + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}} \Rightarrow K = \frac{6EI}{h^3} \frac{6 + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}{\frac{3}{2} + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}$$

$$\text{Periodo natural} = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{gK}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3}{96EI} \frac{\frac{3}{2} + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}{6 + \frac{I_c}{I_p} \frac{L}{h}}}, \text{ en seg}$$

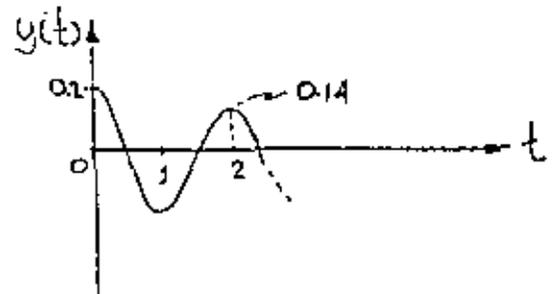
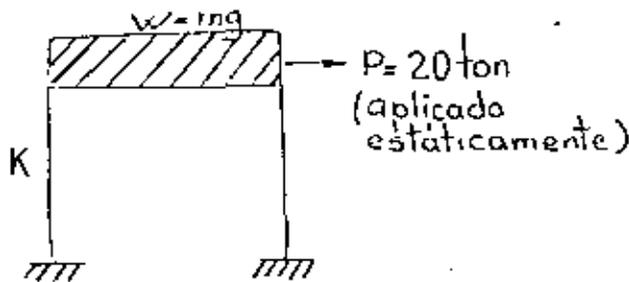
Si $I_p \gg I_c$ ($I_p \rightarrow \infty$), $K = \frac{24EI}{h^3}$



Estructura de CORTANTE: Cuando las deformaciones ocurren principalmente debido a la fuerza cortante de entrepiso.

EJEMPLO

A UNA ESTRUCTURA DE UN PISO SE LE APLICA UNA CARGA HORIZONTAL DE 20 TON EN SU MASA, OBSERVANDOSE UN DESPLAZAMIENTO ESTÁTICO DE 0.2 CM. AL SOLTAR SUBITAMENTE LA FUERZA SE REGISTRA UN PERIODO DE OSCILACION DE 0.2 SEG, Y QUE LA AMPLITUD EN EL SEGUNDO CICLO ES DE 0.14 CM.



CALCULAR ω , ω' , f' , L y ζ

$$1. \quad \text{DE } T' \doteq \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = \frac{2\pi\sqrt{W}}{\sqrt{Kg}} = 0.2 \quad \text{Y} \quad K = \frac{2.0}{0.2} = 100 \frac{\text{TON}}{\text{CM}}$$

SE OBTIENE

$$W \doteq T'^2 \text{ Kg}/4\pi^2 = (0.2)^2 \times 100 \times 981/4\pi^2 = \frac{0.04 \times 100 \times 981}{4 \times 9.87}$$

$$W \doteq 99.4 \text{ TON}$$

$$2. \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}} ; \quad f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ cps}$$

$$3. \quad L = \ln \frac{0.2}{0.14} = \ln 1.43 = 0.357$$

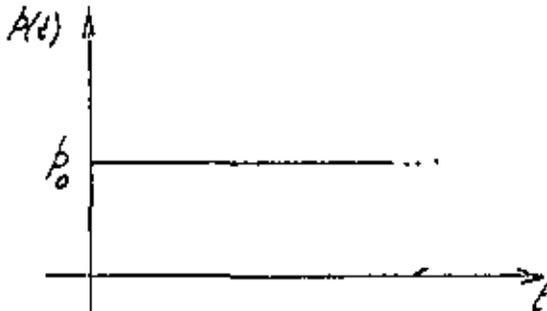
$$\zeta \doteq \frac{L}{2\pi} = \frac{0.357}{2\pi} = 0.0568 \quad \text{O} \quad \zeta = 5.68 \%$$

$$C = \zeta C_{cr} = \zeta 2\sqrt{KM} = 0.1132 \sqrt{100 \times 99.4/981}$$

$$= 1.132 \times 0.318 = 0.36 \text{ TON SEG/CM}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A LA SIGUIENTE EXCITACION:



$$\text{CON } C = 0$$

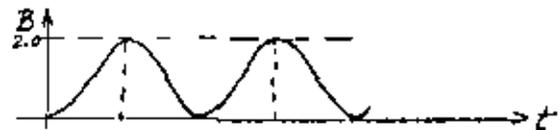
$$m\ddot{x} + kx = p_0$$

$$x = C_1 \text{ sen}\omega t + C_2 \text{ cos}\omega t + p_0/k$$

$$\text{SI EN } t = 0, x = 0 \text{ Y } \dot{x} = 0:$$

$$C_2 = -p_0/k \quad \text{Y} \quad C_1 = 0$$

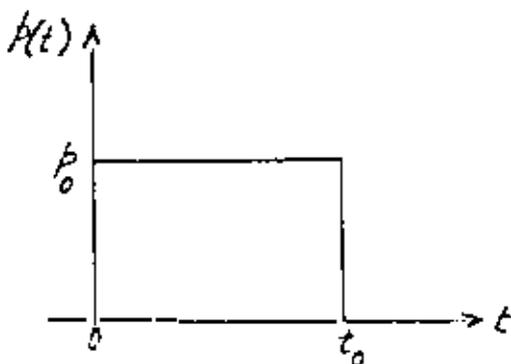
$$\therefore x = \frac{p_0}{k} (1 - \text{cos}\omega t);$$



$$B = \text{FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA} = \frac{x}{\left(\frac{p_0}{k}\right)} = (1 - \text{cos}\omega t)$$

$$B_{\text{MAX}} = 2, \text{ EN } t = T/2, 3T/2 \dots$$

AHORA, SI LA EXCITACION ES DE DURACION t_0 :



$$\text{SI } t < t_0 :$$

$$x = \frac{p_0}{k} (1 - \text{cos}\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega p_0}{k} \text{ sen}\omega t$$

$$\text{EN } t = t_0 :$$

$$x(t_0) = \frac{p_0}{k} (1 - \text{cos}\omega t_0)$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{\omega p_0}{k} \text{ sen}\omega t_0$$

CONDICIONES INICIALES PARA $t > t_0$

SI $t > t_0$, $x = A \cos \omega t' + B \sin \omega t'$, CON $t' = t - t_0$

EN $t' = 0$ ($t = t_0$), SE DEBEN CUMPLIR LAS CONDICIONES INICIALES ANTERIORES, LO CUAL CONDUCE A

$$A = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \quad \text{Y} \quad B = \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0$$

$$\begin{aligned} \text{POR LO QUE} \quad x &= \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t' + \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0 \sin \omega t' \\ &= \frac{p_0}{k} \sqrt{(1 - \cos \omega t_0)^2 + \sin^2 \omega t_0} \sin(\omega t' - \theta) \end{aligned}$$

0

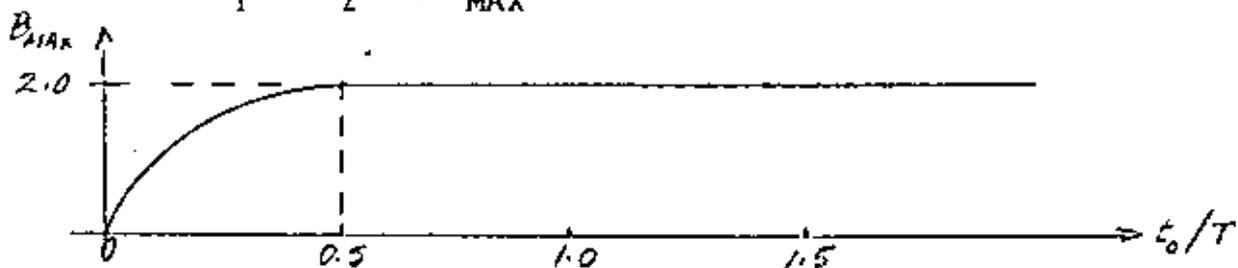
$$x = \frac{p_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos t_0)} \sin(\omega t' - \theta)$$

$$= \frac{p_0}{k} \underbrace{\left(2 \sin \frac{\omega t_0}{2} \right)}_{B} \sin(\omega t' - \theta)$$

B = FACTOR DE AMPLIFICACION

$$B_{\text{MAX}} = 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} = 2 \sin \left(\pi \frac{t_0}{T} \right)$$

CUANDO $\frac{\pi t_0}{T} = \frac{\pi}{2}$, $B_{\text{MAX}} = 2$



EL MAXIMO
OCURRE DES-
PUES DE LA
EXCITACION

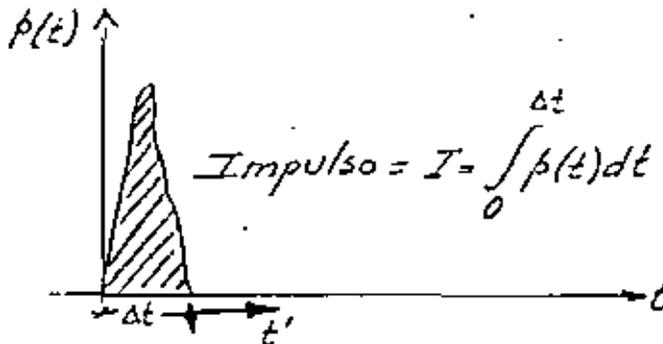
EL MAXIMO OCURRE DURANTE LA EXCITACION

SI t_0/T ES MUY PEQUEÑO, $\sin \frac{\pi t_0}{T} = \pi \frac{t_0}{T}$

$$Y x_{MAX} = \frac{2p_0}{k} \frac{\pi t_0}{T} = \frac{2p_0}{\frac{mk}{m}} \frac{\omega t_0}{2} = \frac{p_0 t_0}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

EN DONDE $i = p_0 t_0 = \text{AREA BAJO LA EXCITACION}$

EJEMPLO: EXCITACION DADA POR UN IMPULSO.-SEA UN IMPULSO APLICADO DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO Δt MUY PEQUEÑO, TAL QUE $\Delta t/T \ll 1$:



POR EL PRINCIPIO IMPULSO - MOMENTO SE TIENE QUE

$$I = \int_0^{\Delta t} p(t) dt = m\dot{x}$$

EN DONDE \dot{x} ES LA VELOCIDAD QUE EL IMPULSO LE IMPRIME A LA MASA DEL SISTEMA. DESPUES DE Δt EL SISTEMA QUEDA VIBRANDO LIBREMENTE CON VELOCIDAD INICIAL $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$, MIDIENDO EL TIEMPO EN LA ESCALA DE t' , Y CON DESPLAZAMIENTO INICIAL QUE PUEDE CONSIDERARSE NULO, DEBIDO A QUE EN EL CORTO INTERVALO DE TIEMPO Δt LA MASA ADQUIERE UN DESPLAZAMIENTO DE MAGNITUD DESPRECIABLE. EN TAL CASO LA RESPUESTA RESULTA SER

$$x(t') = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \text{sen}\omega t' = \frac{I}{m\omega} \text{sen}\omega t'$$

SI EL SISTEMA TIENE AMORTIGUAMIENTO,

$$x(t') = \frac{I}{m\omega} e^{-\zeta\omega t'} \text{sen}\omega' t'$$

PRINCIPIO DE HAMILTON

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0$$

DONDE

T = ENERGIA CINETICA TOTAL

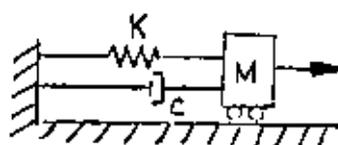
V = ENERGIA POTENCIAL TOTAL, INCLUYENDO ENERGIA DE DEFORMACION Y ENERGIA POTENCIAL DE LAS FUERZAS CONSERVATIVAS

W_{nc} = TRABAJO REALIZADO POR LAS FUERZAS NO CONSERVATIVAS (TALES COMO LAS DE AMORTIGUAMIENTO)

δ = VARIACION TOMADA DURANTE EL INTERVALO DE TIEMPO DE t_1 A t_2

EN ESTE PRINCIPIO SE ASUME QUE LA VARIACION, δx , DEL DESPLAZAMIENTO EN LOS INSTANTES t_1 Y t_2 ES NULO.

EJEMPLO



$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$; $V = \frac{1}{2} kx^2$ (ES LA ENERGIA DE DEFORMACION, UNICAMENTE)

$$\delta W_{nc} = p(t)\delta x - c\dot{x}\delta x$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} (p(t)\delta x - c\dot{x}\delta x) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (m\dot{x}\delta\dot{x} - kx\delta x) dt + \int_{t_1}^{t_2} (p(t) - c\dot{x})\delta x dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\dot{x}\delta\dot{x} - (c\dot{x} + kx - p(t))\delta x] dt = 0$$

INTEGRANDO POR PARTES EL PRIMER TÉRMINO DE ESTA INTEGRAL;

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{x} \delta \dot{x} dt = m \dot{x} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

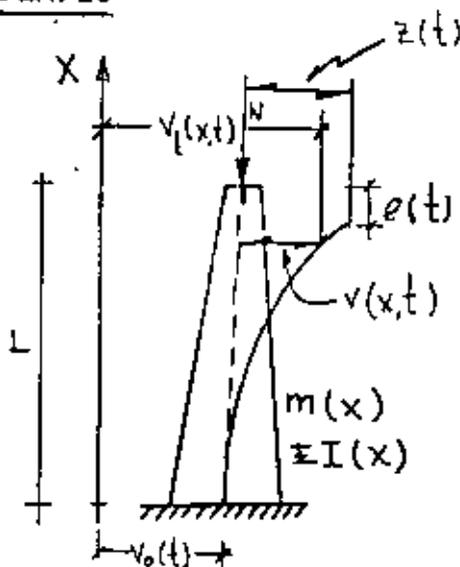
POR LO QUE

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{x} - c \dot{x} - kx + p(t)] \delta x dt = 0$$

PUESTO QUE δx ES ARBITRARIA, LA ECUACION ANTERIOR SE SATISFACE EN GENERAL SOLO SI

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx - p(t) = 0$$

EJEMPLO



$$v(x,t) = \psi(x) z(t)$$

APLICANDO EL PRINCIPIO DE HAMILTON:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) (\dot{v}_t(x,t))^2 dx$$

ENERGIA POTENCIAL POR DEFORMACION:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) (v''(x,t))^2 dx$$

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [v'(x,t)]^2 dx$$

ENERGIA POTENCIAL DEBIDA A LA FUERZA NORMAL:

$$V_N = - \frac{N}{2} \int_0^L [v'(x,t)]^2 dx$$

EN ESTAS ECUACIONES: $\dot{v} = dv/dt$; $v' = dv/dx$

$$v'' = d^2v/dx^2$$

PUESTO QUE NO HAY FUERZAS DINAMICAS EXTERNAS, Y SI CONSIDERAMOS AMORTIGUAMIENTO NULO, ENTONCES $\delta W_{nc} = 0$, POR LO QUE

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L m(x) \dot{v}_t(x,t) \delta \dot{v}_t dx - \int_0^L EI(x) v''(x,t) \delta v'' dx + N \int_0^L v'(x,t) \delta v' dx \right] = 0$$

TOMANDO EN CUENTA QUE

$$\dot{v}_t = \dot{v} + \dot{v}_0, \quad v'' = \psi''Z, \quad v' = \psi'Z, \quad \dot{v} = \psi \dot{Z}$$

$$\delta \dot{v}_t = \delta \dot{v}, \quad \delta v'' = \psi'' \delta Z, \quad \delta v' = \psi' \delta Z, \quad \delta \dot{v} = \psi \delta \dot{Z}$$

SE OBTIENE

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{z} \delta z \int_0^L m(x) \psi^2 \delta x + \delta \dot{z} \dot{v}_0(t) \int_0^L m(x) \psi \delta x - z \delta z \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 \delta x + Nz \delta z \int_0^L (\psi'')^2 \delta x \right] dt = 0$$

INTEGRANDO POR PARTES LAS PRIMERAS DOS INTEGRALES Y HACIENDO

$$\tilde{m} = \int_0^L m(x) \psi^2 dx = \text{MASA GENERALIZADA}$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx = \text{RIGIDEZ GENERALIZADA SIN CONSIDERAR FUERZA NORMAL}$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx + N \int_0^L (\psi')^2 dx = \text{RIGIDEZ GENERALIZADA CON N}$$

$$\tilde{p}(t) = \text{FUERZA GENERALIZADA EFECTIVA} = - \ddot{v}_0 \int_0^L m(x) \psi dx$$

SE OBTIENE LA ECUACION

$$\int_{t_1}^{t_2} [\ddot{m}z + \tilde{k}z - \tilde{p}(t)] \delta z dt = 0$$

POR LO QUE

$$\ddot{m}z + \tilde{k}z = \tilde{p}(t)$$

CASO PARTICULAR. CONSIDEREMOS $EI = \text{cte}$ Y $m = \text{cte} = \bar{m}$

SEA $\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$; EN TAL CASO:

$$\tilde{m} = \int_0^L \bar{m} (\psi)^2 dx = \bar{m} \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L})^2 dx = 0.228 \bar{m}L$$

SI $N=0$:

$$\tilde{k} = \int_0^L EI (\psi'')^2 dx = EI \int_0^L \left(\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L} \right)^2 dx = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3}$$

$$\tilde{p}(t) = -\ddot{v}_0(t) \int_0^L \bar{m} \psi dx = -\ddot{m}v_0(t) \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L}) dx = -0.364 \tilde{m}L \ddot{v}_0(t)$$

SI $N \neq 0$:

$$\tilde{k} = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} + N \int_0^L (\psi')^2 dx = N \int_0^L \left(\frac{\pi}{2L} \text{sen} \frac{\pi x}{2L} \right)^2 dx$$

$$\hat{k} = \frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} - \frac{N\pi^2}{8L}$$

PARA CARGA DE PANDEO: $\frac{\pi^4}{32} \frac{EI}{L^3} - \frac{N_{cr}\pi^2}{8L} = 0 \Rightarrow N_{cr} = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{L^2}$

CON LO QUE $\bar{K} = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)$ Y LA ECUACION DE EQUILIBRIO

QUEDA EN LA FORMA:

$$0.228 \bar{m}L\ddot{z}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right) z(t) = 0.364 \bar{m}L\ddot{v}_0(t)$$

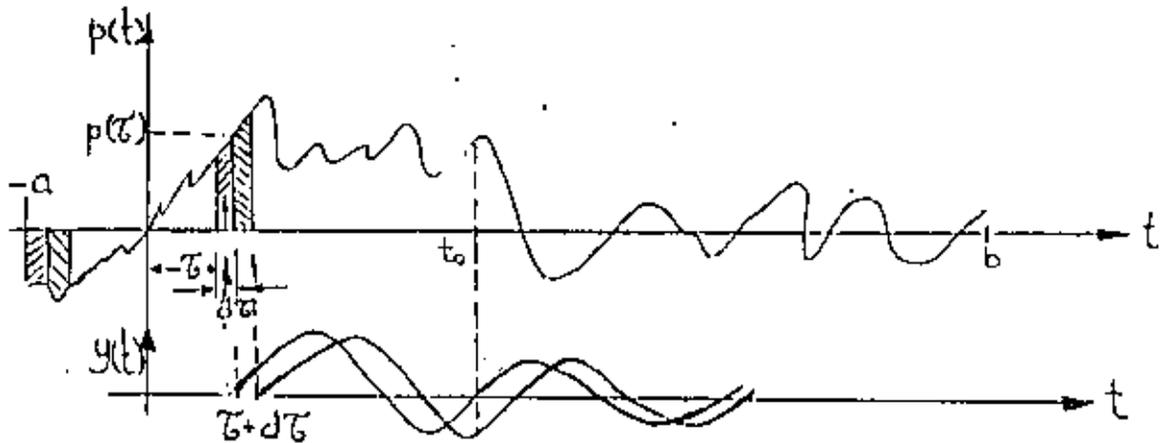
LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL CORRESPONDIENTE ES

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^4 EI \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right)}{7.296 \bar{m}L^4}}$$

SOLUCION AL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS

A. FUERZA EXTERNA

VEAMOS PRIMERO EL CASO EN QUE EXISTE $p(t)$ Y QUE $\ddot{x}_0(t) = 0$,
SIENDO $p(t)$ ARBITRARIA



PUESTO QUE $dt \ll T$, LA FUERZA APLICADA EN $t = \tau$ PRODUCIRA UN INCREMENTO INSTANTANEO EN LA VELOCIDAD DE LA MASA IGUAL A

$$\dot{y} = \frac{p(\tau)d\tau}{M}$$

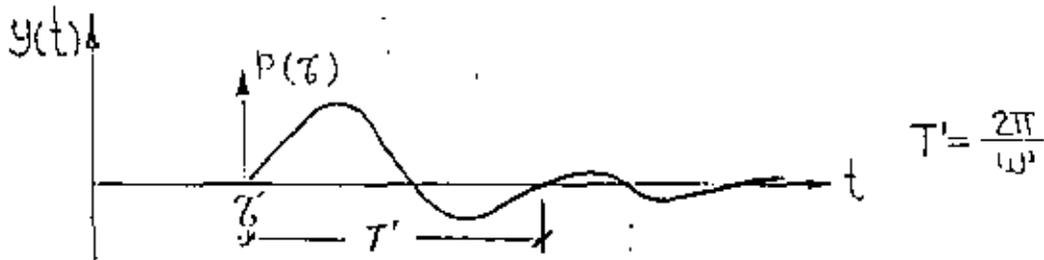
Y UN INCREMENTO INSTANTANEO NULO EN EL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR, $y=0$. TOMANDO ESTOS INCREMENTOS COMO CONDICIONES INICIALES EN $t = \tau$, LA EC. 5 DA COMO RESULTADO

$$y(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{M\omega'} \text{ sen } \omega'(t-\tau) e^{-h(t-\tau)} ; t \geq \tau$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES LINEAL ES POSIBLE SUPERPONER LOS EFECTOS OCACIONADOS POR LOS IMPULSOS APLICADOS EN CADA τ QUE HAYAN OCURRIDO ANTES DEL INSTANTE t DE INTERES; ES DECIR,

$$y(t) = \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

LA FUNCION $\frac{1}{M\omega'} e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau)$, QUE ES LA RESPUESTA A UN IMPULSO INSTANTANEO UNITARIO DE FUERZA, SE LE CONOCE COMO FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.



LA SOLUCION DADA EN LA EC. (12) SE DENOMINA INTEGRAL DE DUHAMEL. ESTA CONSTITUYE LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO; LA SOLUCION GENERAL ES:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) + \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau$$

EN DONDE A Y θ DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD, $y(0)$ Y $\dot{y}(0)$, RESPECTIVAMENTE. EN GENERAL LA PARTE DE LA RESPUESTA DADA POR LA SOLUCION PARTICULAR ES LA MAS IMPORTANTE, YA QUE LA OTRA PARTE SE AMORTIGUA RAPIDAMENTE.

B. MOVIMIENTO DEL SUELO

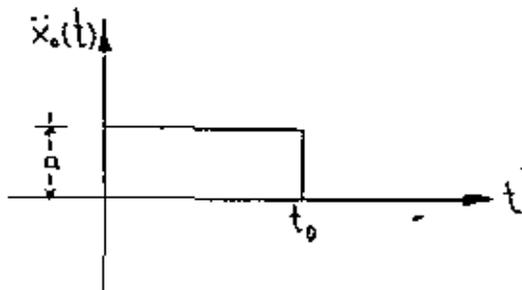
PARA ESCRIBIR LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO PARA EL CASO DE VIBRACION FORZADA POR MOVIMIENTO DE LA BASE DE LA ESTRUCTURA, BASTA CAMBIAR $p(\tau)/M$ DE LA EC. (12) POR $-x_0''$, YA QUE EN DICHA ECUACION APARECE EN EL MIEMBRO DERECHO $p(t)/M$ CUANDO LA EXCITACION ES $p(t)$ Y APARECE $-x_0''$ CUANDO LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DEL SUELO. EN ESTE CASO

LA SOLUCION PARTICULAR ES, ENTONCES

$$y(t) = \frac{-1}{\omega} \int_{-\infty}^t x_0(\tau) e^{-h(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUANDO LA EXCITACION ES LA SIGUIENTE:



$$\begin{aligned} t &= 0 \\ x_0(t) &= a, \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0. \\ x_0(t) &= 0, \text{ SI } t < 0 \text{ Ó } t > t_0 \end{aligned}$$

CONSIDERESE QUE $y(0)=0$ Y $\dot{y}(0)=0$. PUESTO QUE LAS CONDICIONES INICIALES SON NULAS SE TIENE QUE $A=0$ (UTILIZANDO LA EC. (13) Y LA SOLUCION PARTICULAR QUE SIGUE, EC. (A)):

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-1}{\omega} \int_{-\infty}^t a \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau = \frac{-a}{\omega} \int_0^t \operatorname{sen} \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad \text{SI } 0 \leq t \leq t_0 \end{aligned} \quad (A)$$

PARA FINES DE DISEÑO ESTRUCTURAL ES IMPORTANTE CONOCER LA RESPUESTA MAXIMA; ESTA OCURRE CUANDO $\cos \omega t = -1$, O SEA, CUANDO

$$\omega t = \pi \quad \text{O} \quad t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2}$$

Y VALE

$$\text{MAX} (|y(t)|) = \frac{2a}{\omega^2} = \frac{a}{2\pi^2} T^2, \text{ SI } 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0 \text{ O } 0 \leq T \leq 2t_0$$

PARA $t > t_0$, O SEA, PARA $T/2 > t_0$ ES NECESARIO OBTENER LA RESPUESTA EN VIBRACION LIBRE CON LAS CONDICIONES INICIALES DE VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO CORRESPONDIENTES A $t = t_0$:

$$y(t_0) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t_0) ; \dot{y}(t_0) = \frac{-a}{\omega} \text{sen} \omega t_0$$

APLICANDO LAS ECS. (5) Y (6) OBTENEMOS:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-a}{\omega^2} [\text{sen} \omega t_0 \text{sen} \omega t' - (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t'] \\ &= \frac{-a}{\omega^2} \sqrt{\text{sen}^2 \omega t_0 + (1 - \cos \omega t_0)^2} \text{sen} (\omega t' - \vartheta) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{-2a}{\omega^2} \frac{\text{sen} \omega t_0}{2} \text{sen} (\omega t' - \vartheta)$$

$$\text{DONDE } t' = t - t_0 \text{ Y } \vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos \omega t_0}{\text{sen} \omega t_0} \right)$$

EL VALOR MAXIMO DE LA RESPUESTA EN ESTE INTERVALO ES

$$\text{MAX} (|y(t)|) = \frac{2a}{\omega^2} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|, \text{ SI } t > t_0 \text{ O } T > 2t_0$$

EXCITACION ARMONICA

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO EN QUE LA ESTRUCTURA ES EXCITADA POR LA FUERZA ARMONICA

$$p(t) = p_0 \operatorname{sen}\omega t$$

DE DURACION INDEFINIDA.

LA SOLUCION DE ESTE PROBLEMA SE PUEDE ENCONTRAR SUSTITUYENDO A $p(t) = p_0 \operatorname{sen}\omega t$ EN LA INTEGRAL DE DUHAMEL Y OBTENIENDO SU SOLUCION. SIN EMBARGO, EL RESULTADO LO OBTENDREMOS DE LA CONSIDERACION DE QUE PARA QUE EL MIEMBRO DERECHO DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO APAREZCA UN TERMINO ARMONICO ES NECESARIO QUE EN EL IZQUIERDO SE TENGAN COMBINACIONES DE TERMINOS TAMBIEN ARMONICOS. CONSIDEREMOS, POR LO TANTO, LA SOLUCION

$$y(t) = A \operatorname{sen}\omega t + B \operatorname{cos}\omega t \quad (14)$$

Y DETERMINEMOS LOS VALORES QUE DEBEN TENER A Y B PARA SATISFACER LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO, PARA LO CUAL HAY QUE SUSTITUIR A $y(t)$, $\dot{y}(t)$ Y $\ddot{y}(t)$ EN LA ECUACION DIFERENCIAL. HACIENDO ESTO Y FACTORIZANDO:

$$\begin{aligned} (-A\omega^2 - 2h\omega B + \omega^2 A) \operatorname{sen}\omega t + \\ (-B\omega^2 + 2h\omega A + \omega^2 B) \operatorname{cos}\omega t = \frac{P_0}{M} \operatorname{sen}\omega t + 0 \times \operatorname{cos}\omega t \end{aligned}$$

PARA QUE ESTA IGUALDAD SE CUMPLA SE REQUIERE QUE

$$\begin{aligned} -A\omega^2 - 2h\omega B + \omega^2 A &= \frac{P_0}{M} \\ -B\omega^2 + 2h\omega A + \omega^2 B &= 0 \end{aligned}$$

RESOLVIENDO ESTE SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTIENE:

$$A = \frac{\frac{P_0}{M} (\Omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

$$B = \frac{-2h\Omega \frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

SUSTITUYENDO A Y B EN LA EC. (14):

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2} \{ (\Omega^2 - \omega^2) \text{sen}\Omega t - 2h\Omega \text{cos}\Omega t \} \quad (15)$$

O, TAMBIEN

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}} \text{sen}(\Omega t - \vartheta) \quad (16)$$

$$\text{EN DONDE } \vartheta = \text{ANG TAN} \left(\frac{-B}{A} \right) = \text{TAN}^{-1} \frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \text{ANGULO DE FASE} \quad (17)$$

DIVIDIENDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LAS ECS. (16) Y (17) ENTRE ω^2 SE OBTIENE:

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + (2\zeta)^2}} \text{sen}(\Omega t - \vartheta) \quad (18)$$

$$\vartheta = \text{TAN}^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad (19)$$

SI SE TIENE EXCITACION ARMONICA EN LA BASE DE LA ESTRUCTURA $x_0(t) = a \sin \Omega t$, O SEA, $\ddot{x}_0 = a \Omega^2 \sin \Omega t$, BASTA CAMBIAR A p_0/M EN LA EC. (16) POR $-a \Omega^2$; HACIENDO ESTO SE OBTIENE

$$y(t) = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} a \sin(\Omega t - \beta) \quad (20)$$

FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA DE DESPL. = $B_d = \text{MAX}|\frac{y(t)}{a}|$

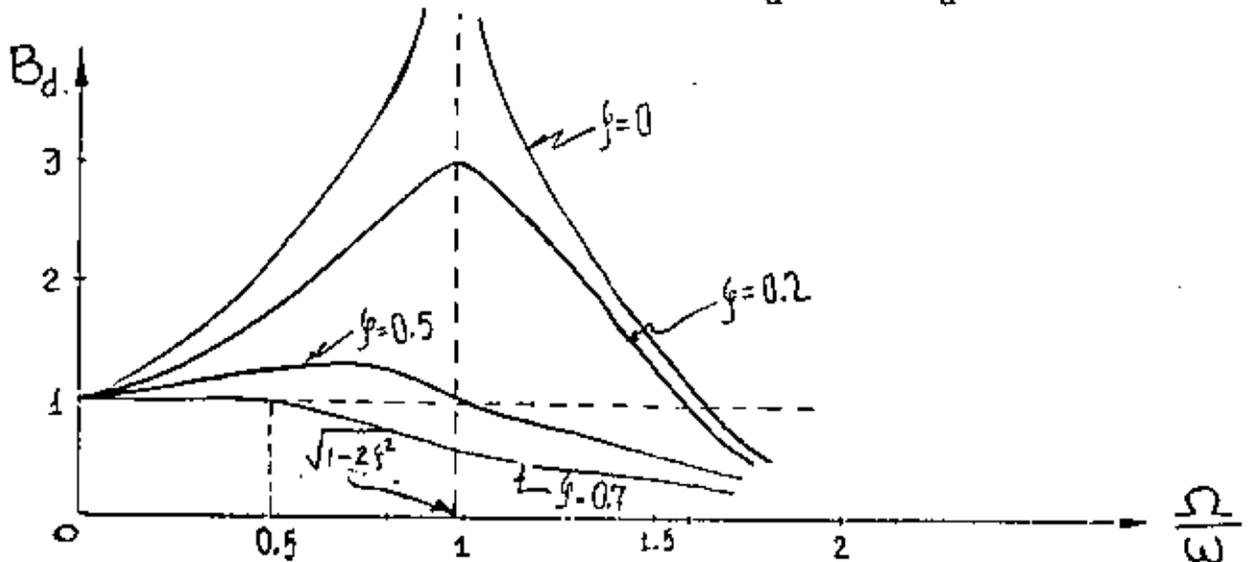


FIG. 1. CURVAS DE AMPLIFICACION DINAMICA PARA EL CASO DE FUERZA EXTERNA

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} \quad (21)$$

LOS FACTORES DE AMPLIFICACION DINAMICA DE VELOCIDAD Y ACELERACION SE PUEDEN OBTENER DERIVANDO RESPECTO A t LA EC. (16) O LA (20), SEGUN SEA EL CASO. LOS RESULTADOS SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\text{MAX}|\dot{y}(t)| = B_v = \frac{\Omega}{\omega} B_d \quad \text{Y} \quad B_a = (\frac{\Omega}{\omega})^2 B_d = \text{MAX}|\frac{\ddot{y}(t)}{a\omega^2}| \quad (22)$$

EJEMPLO

CON UNA MAQUINA VIBRATORIA PORTATIL QUE PRODUCE FUERZAS ARMONICAS SE PROBO UNA ESTRUCTURA, AJUSTANDO LA MAQUINA EN LAS FRECUENCIAS $\Omega_1 = 16 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$ Y $\Omega_2 = 25 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$, CON UNA FUERZA MAXIMA DE 500 LB EN CADA CASO. LAS AMPLITUDES Y ANGULOS DE FASE DE LA RESPUESTA QUE SE MIDIERON FUERON:

$$\rho_1 = 7.2 \times 10^{-3} \text{ in, } \theta_1 = 15^\circ (\cos\theta_1 = 0.966 ; \text{ sen}\theta_1 = 0.259)$$

$$\rho_2 = 14.5 \times 10^{-3} \text{ in, } \theta_2 = 55^\circ (\cos\theta_2 = 0.574 ; \text{ sen}\theta_2 = 0.819)$$

EVALUAR LAS PROPIEDADES DINAMICAS DEL SISTEMA.

HACIENDO:

$$\rho_i = \frac{p_o}{k} B_{d_i} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \underbrace{\left(\frac{1}{1 + [2\zeta\beta/(1-\beta^2)]^2} \right)^{1/2}}_{\cos\theta_i}$$

$$\rho_i = \frac{p_o}{k} \frac{\cos\theta_i}{1 - \beta^2} ; \beta = \Omega/\omega$$

$$k - k\beta^2 = \frac{p_o \cos\theta_i}{\rho_i} = k - \Omega^2 m \quad (23)$$

SUSTITUYENDO LOS VALORES EXPERIMENTALES DE LAS DOS PRUEBAS:

$$\left. \begin{aligned} k - (16)^2 m &= \frac{500 (0.966)}{7.2 \times 10^{-3}} \\ k - (25)^2 m &= \frac{500 (0.574)}{14.5 \times 10^{-3}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow k = 100\,000 \frac{\text{lb}}{\text{in}} \\ &\rightarrow m = 128.5 \frac{\text{lb SEG}^2}{\text{in}} \\ &\Downarrow \\ &\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27.9 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}} \end{aligned}$$

USANDO LAS ECS. (17) Y (23) SE OBTIENE:

$$\zeta = \frac{p_0 \operatorname{sen} \beta_1}{2B_1 k_{p1}} ; \text{ DE DONDE } \zeta = \frac{500 (0.259)}{2 \frac{16}{27.9} \cdot 100\,000 (7.2 \times 10^{-3})} = 15.7\%$$

RESONANCIA

CUANDO LA EXCITACION TIENE FRECUENCIA IGUAL A LA NATURAL DEL SISTEMA, SE DICE QUE SE PRESENTA EL CASO DE RESONANCIA. DE LA EC. (20) ES EVIDENTE QUE SI $\beta = \Omega/\omega = 1$ SE TIENE

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2\zeta}}_{B_d} a \operatorname{sen}(\Omega t - \theta)$$

$O(B_d)_{\text{res}} = \frac{1}{2\zeta}$ EN CASO DE MOVIMIENTO DEL SUELO Y DE FUERZA EXTERNA

SIN EMBARGO, AUNQUE ESTA RESPUESTA ES CASI IGUAL A LA MAXIMA, ESTA OCURRE CUANDO $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$. EN EL CASO DE $\dot{y}(t)$ Y $\ddot{y}(t)$, EL MAXIMO OCURRE, RESPECTIVAMENTE, CUANDO

$$\Omega = \omega \quad \text{Y} \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \quad \text{SI} \quad \zeta \leq 20\%, \text{ LOS VALORES DE ESTAS } \Omega \text{ NO}$$

DIFIEREN EN MAS DE 2%.

EL MAXIMO VALOR DE B_d (PARA $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$) ES

$$(B_d)_{\text{MAX}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{O} \quad (B_d)_{\text{MAX}} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

SI SE TIENE FUERZA EXTERNA O MOVIMIENTO DEL SUELO, RESPECTIVAMENTE.

SE OBSERVA EN ESTAS ECUACIONES QUE SI $\zeta=0$, $(B_d)_{\text{MAX}} = \infty$.

SI SE ANALIZA LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO PARA EL CASO DE CONDICIONES INICIALES NULAS Y $\beta=1$ SE TIENE QUE:

$$y(t) = e^{-ht} (A \operatorname{sen} \omega' t + B \operatorname{cos} \omega' t) - \frac{p_0}{k} \frac{\operatorname{cos} \omega t}{2\zeta}$$

$$y(0) = B - p_0/(2\zeta k) = 0$$

DE DONDE, HACIENDO $y(0)=0$ Y $\dot{y}(0)=0$, SE OBTIENEN:

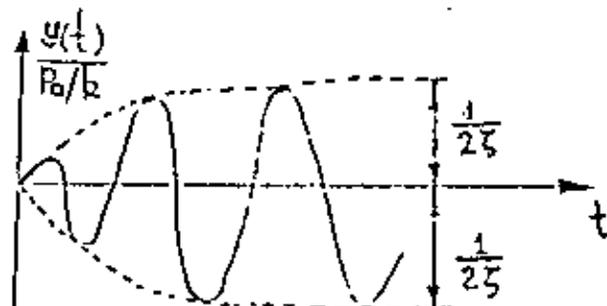
$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega'} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} ; B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta}$$

POR LO QUE

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \frac{p_0}{k} \left[e^{-ht} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega' t + \operatorname{cos} \omega' t \right) - \operatorname{cos} \omega t \right]$$

PARA AMORTIGUAMIENTOS PEQUEÑOS:

$$\frac{y(t)}{p_0/k} \doteq \frac{1}{2\zeta} (e^{-ht} - 1) \operatorname{cos} \omega t$$

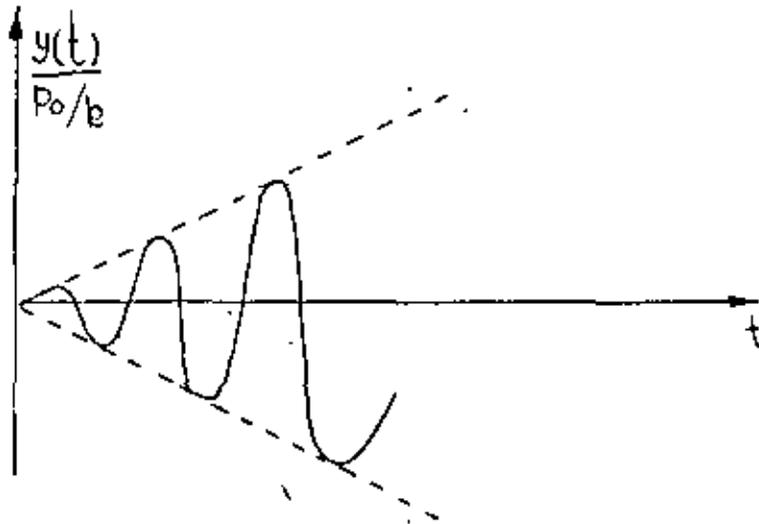


Si $\zeta > 0$ y $\beta = 1$

SI $\zeta = 0$, APLICANDO LA REGLA DE L'HOSPITAL, SE OBTIENE:

$$\frac{y(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \omega t - \omega t \operatorname{cos} \omega t)$$

O SEA, EL MAXIMO DE LA RESPUESTA TIENDE A INFINITO GRADUALMENTE.



CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS REGISTRADORES DE SISMOS.

SI LA ACELERACION DE LA BASE DE UN INSTRUMENTO ES ARMONICA, DADA POR LA ECUACION

$$\ddot{x}_0(t) = a \operatorname{sen} \Omega t$$

EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER

$$\bar{B}_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{B_d}{\omega^2}$$

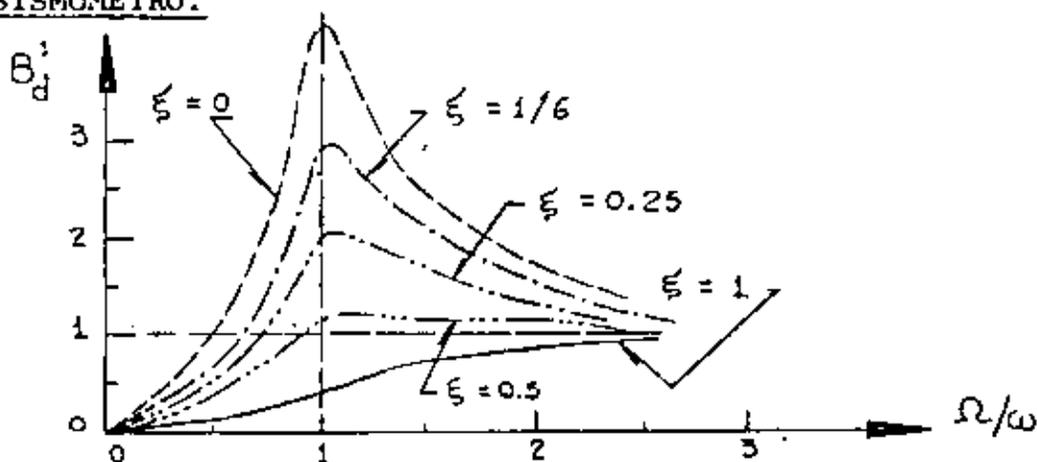
PUESTO QUE LA FIG I CORRESPONDE A B_d , Y EN ELLA SE OBSERVA QUE PARA $\zeta = 0.7$ SE TIENE $B_d = 1$ PARA $0 \leq \Omega/\omega \leq 0.6$, SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA DE UN SISTEMA ES PROPORCIONAL A LA ACELERACION DE SU BASE, SI ESTE TIENE AMORTIGUAMIENTO DEL 70% Y SI LAS EXCITACIONES QUE SE TRATAN DE REGISTRAR TIENEN FRECUENCIAS INFERIORES AL 60% DE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA. SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO RESULTA SER UN ACELEROMETRO.

EN INGENIERIA SISMICA LA MAXIMA FRECUENCIA DE INTERES ES DEL ORDEN DE 10 CPS ($T = 0.1$ SEG), POR LO QUE LOS ACELEROMETROS TIENEN FRECUENCIA NATURAL DE 16 A 20 CPS.

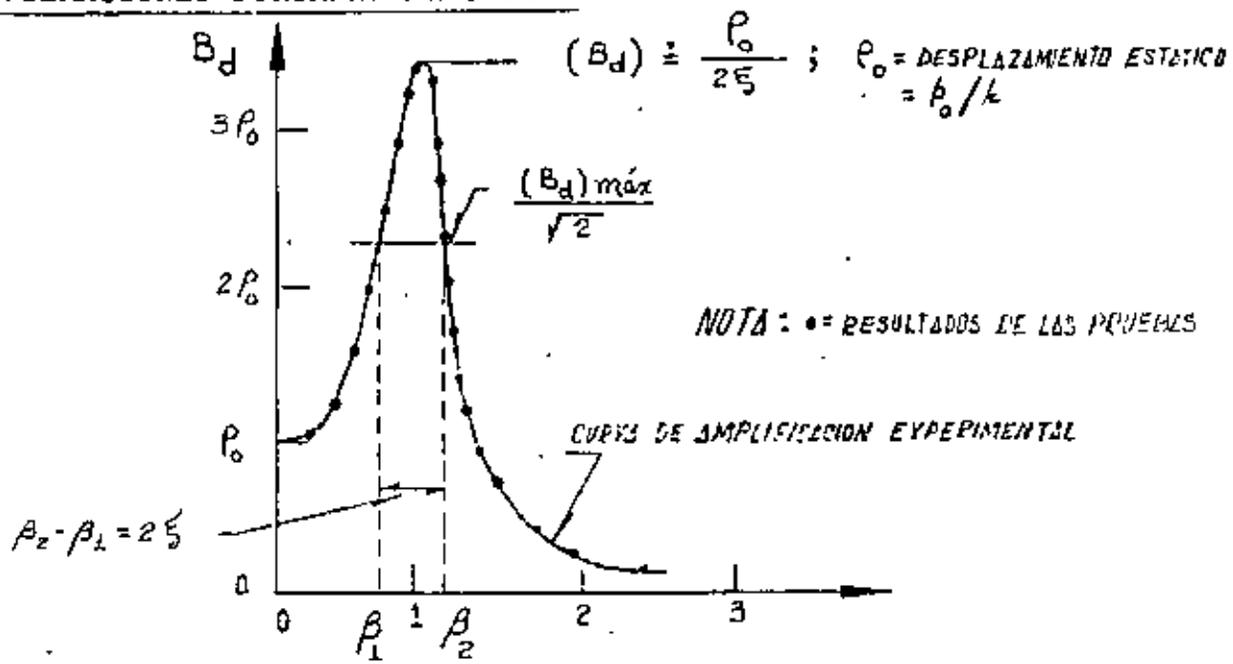
POR OTRA PARTE SI LA EXCITACION DEL SUELO ES $x_o = a \text{ sen} \Omega t$, O SEA, $\ddot{x} = -a \Omega^2 \text{ sen} \Omega t$, ENTONCES EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER EL SEÑALADO EN LA ECUACION (20), ES DECIR,

$$B'_d = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega)^2)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}}$$

EN LA GRAFICA CORRESPONDIENTE SE OBSERVA QUE SI $\zeta = 0.5$ Y $\Omega > \omega$ EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA ES PROPORCIONAL AL DEL SUELO; SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO, CONSTITUYE UN DESPLAZOMETRO, CONOCIDO TAMBIEN COMO SISMOMETRO.



DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL AMORTIGUAMIENTO DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE VIBRACIONES FORZADAS ARMONICAS



SI SE DETERMINA B_d EXPERIMENTALMENTE MEDIANTE UNA SERIE DE PRUEBAS DE VIBRACION FORZADA CON FUERZAS ARMONICAS, Y ADEMAS SE DETERMINA p_o , ENTONCES

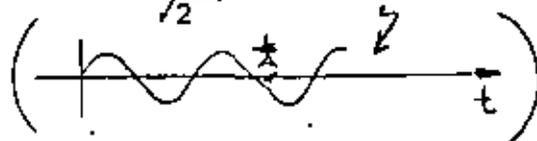
$$\zeta \doteq \frac{p_o}{2(B_d)_{MAX}} \quad (24)$$

OTRO METODO PARA DETERMINAR ζ CON BASE EN LA CURVA EXPERIMENTAL DE B_d SE CONOCE CON EL NOMBRE DE "METODO DEL ANCHO DE BANDA DE LA MITAD DE POTENCIA". ESTE SE BASA EN DETERMINAR LAS FRECUENCIAS QUE CORRESPONDEN AL VALOR rms DE LA AMPLITUD EN RESONANCIA, EL CUAL VALE

$(B_d)_{MAX}/\sqrt{2}$; SEAN β_2 Y β_1 ESTAS FRECUENCIAS. DE LA ECUACION DE B_d

SE OBTIENE:

$rms = \frac{A}{\sqrt{2}} =$ RAIZ CUADRADA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p_o}{2\zeta} = p_o / \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

ELEVANDO AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS:

$$\frac{1}{8\zeta^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

DE DONDE $\beta^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$

DE AQUI, DESPRECIANDO EL TERMINO ζ^2 DEL RADICAL, SE OBTIENE

$$\beta_1^2 \doteq 1 - 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_1 \doteq 1 - \zeta - \zeta^2$$

$$\beta_2^2 \doteq 1 + 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_2 \doteq 1 + \zeta - \zeta^2$$

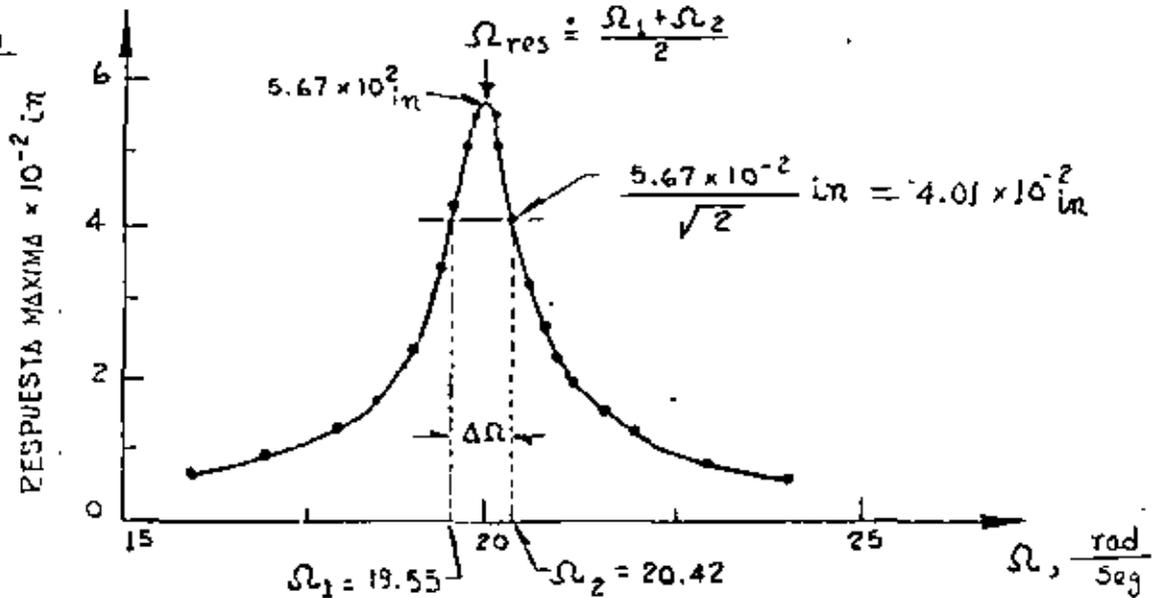
$$\beta_2 - \beta_1 \doteq 2\zeta$$

DE DONDE

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$$

(25)

EJEMPLO



DE LA EC (25)

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 0.87 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$\zeta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_{res}} - \frac{\Omega_1}{\Omega_{res}}}{2} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1} = \frac{0.87}{39.97} = 2.18\%$$

METODO NUMERICO B DE NEWMARK PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS.

EL METODO QUE A CONTINUACION SE DESCRIBE ES ADAPTABLE A SISTEMAS NO LINEALES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

PROCEDIMIENTO:

- SEAN $y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i$ CONOCIDOS EN EL INSTANTE t_i , Y $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. SUPONGAMOS EL VALOR DE \ddot{y}_{i+1}
- CALCULEMOS $\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})\Delta t/2$ (26)

3. CALCULEMOS $y_{i+1} \hat{=} y_i + \dot{y}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{y}_{i+1} (\Delta t)$ (27)

4. CALCULEMOS UNA NUEVA APROXIMACION PARA \ddot{y}_{i+1} A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

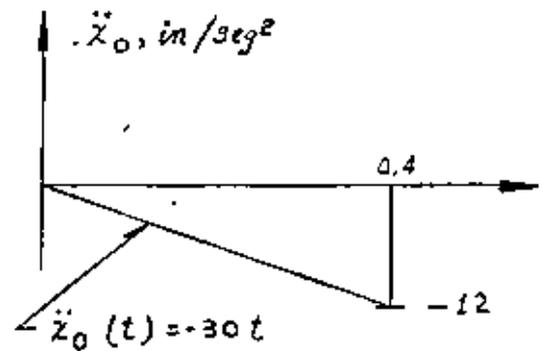
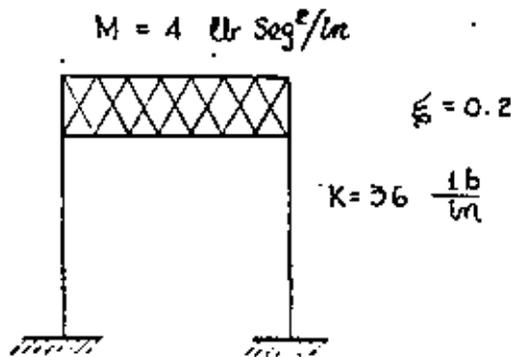
$$\ddot{y}_{i+1} \hat{=} -2\zeta\omega\dot{y}_{i+1} - \omega^2(y_{i+1} - y_{est}) - (\ddot{x}_o)_{i+1} \quad (28)$$

DONDE $y_{est} = p(t_{i+1})/k$

5. REPITAMOS LAS ETAPAS 2 A 4 EMPEZANDO CON EL NUEVO VALOR \ddot{y}_{i+1} HASTA QUE EN DOS CICLOS CONSECUTIVOS SE TENGAN VALORES DE \ddot{y}_{i+1} CASI IGUALES.

SE RECOMIENDAN VALORES DE β DE 1/6 A 1/4 Y $\Delta t \hat{=} 0.1T$ PARA ASEGURAR CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.

EJEMPLO



CALCULAR LA RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA APLICANDO EL METODO B DE NEWMARK

$$\omega = \sqrt{K/M} = \sqrt{36/4} = 3 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$h = \zeta\omega = 0.2 \times 3 = 0.6 ; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.09 \text{ SEG}$$

TOMAREMOS $\beta=0.2$ Y $\Delta t = 0.2$ ($\approx 0.1T$) SUSTITUYENDO EN LAS ECS. (26), (27) Y (28):

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + 0.1 \cdot (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.2\dot{y}_i + 0.012\ddot{y}_i + 0.008\ddot{y}_{i+1}$$

$$\ddot{y}_{i+1} = -1.2\ddot{y}_i - 9y_{i+1} - (\ddot{x}_0)_{i+1}$$

EN $t=0$ SABEMOS QUE SE TIENE $y=0$, $\dot{y}=0$ Y $\ddot{y}=0$

EN $t=0 + \Delta t = 0.2 \text{ SEG}$; SUPONGAMOS $\ddot{y}_{i+1} = 5.0 \text{ IN/SEG}^2$; $\ddot{x}_0 = -6$

$$y_1 = 0$$

$$\dot{y}_1 = 0$$

$$1^{\circ} \text{ CICLO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5) = 0.5 ; y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5 = 0.04 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.5 - 9 \times 0.04 - (-30 \times 0.2) = 5.04 \end{array} \right.$$

$$2^{\circ} \text{ CICLO} \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5.04) = 0.504 ; y_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5.04 = \\ = 0.04032 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.504 - 9 \times 0.4032 - (-6) = 5.033 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right.$$

ESTOS CALCULOS SE PUEDEN ORGANIZAR MEDIANTE UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

t SEG	\dot{x}_0 IN/SEG ²	\dot{y} ING/SEG ²	Y ING/SEG	Y IN
0	0	0	0	0
0.2	-6	5.0000	0.5000	0.04000
		5.040	0.5040	0.04032
		5.033	0.5033	0.04026
		5.034	0.5034	0.04027
0.4 -	-12	8.0000	1.8078	0.26536
		7.442	1.7510	0.26079
		7.534	1.7602	0.26163
		7.533	1.7601	0.26162
0.4 ⁺	0	-4.467	1.7601	0.26162
0.6	0	-6.000	0.7134	0.51204
		-5.464	0.7670	0.51633
		-5.550	0.7584	0.51564
		.	.	.
		.	.	.

EN $t = 0.2 + \Delta t = 0.4$ SEG: $\dot{x}_0 = -30 \times 0.4 = -12$

$\ddot{y}_i = 5.034, \dot{y}_i = 0.5034, y_i = 0.04027$

SUPONIENDO $\ddot{y}_{i+1} = 8.000$ SE OBTIENE:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0.5034 + 0.1 (5.034 + 8.000) = 1.8068 \\ y_{i+1} = 0.04027 + 0.2 \times 0.5034 + 0.012 \times 5.034 + 0.008 \times 8 = 0.26536 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 1.8068 - 9 \times 0.26536 - (-12) = 7.442 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right\} \text{1º CICLO}$$

EN $t = 0.4^+$ SOLO CAMBIA \ddot{y} : $\ddot{y}_{0.4^+} = \ddot{y}_{0.4^-} + \ddot{x}_0 = 7.533 - 12 = -4.467$

EN $t = 0.6$, $\ddot{y}_i = -4.467$) $\dot{y}_i = 1.7601$; $y = 0.26162$

ESPECTROS DE RESPUESTA ESTRUCTURAL

RECORDEMOS QUE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS CON EXCITACION SISMICA ES

$$Y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(t-\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega'(t-\tau) d\tau$$

DE LA OBSERVACION DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO, $Y(t)$, ES FUNCION DEL TIEMPO, t , EL AMORTIGUAMIENTO, ζ , Y LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, ω (O DEL PERIODO NATURAL):

$$y(t) = f(t, \omega, \zeta)$$

FIJEMOS UN VALOR DE ζ , POR EJEMPLO $\zeta=0$, Y LUEGO ASIGNEMOS VALORES A ω , POR EJEMPLO 0.1, 0.2, 0.3, ETC, HASTA CUBRIR UN INTERVALO DE INTERES, Y PARA CADA CASO CALCULEMOS LA FUNCION RESULTANTE DE APLICAR LA ECUACION ANTERIOR. CON ESTA OBTENEMOS

$$y_1(t) = f_1(t, 0.1, 0) = f_1(t)$$

$$y_2(t) = f_2(t, 0.2, 0) = f_2(t)$$

$$y_3(t) = f_3(t, 0.3, 0) = f_3(t)$$

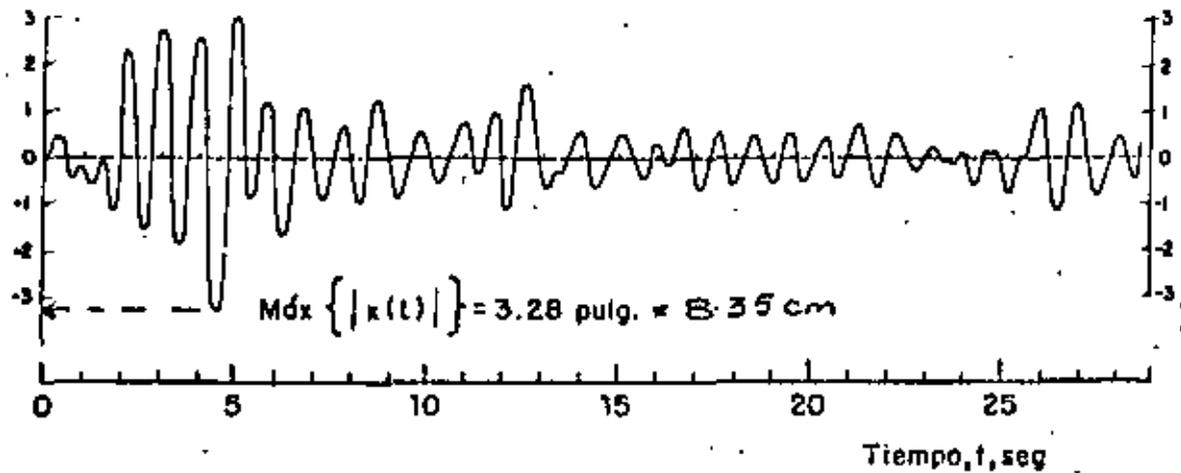
$$\text{SEAN } D_1 = \text{MAX}|y_1(t)| = D(\omega_1, \zeta)$$

$$D_2 = \text{MAX}|y_2(t)| = D(\omega_2, \zeta)$$

$$D_3 = \text{MAX}|y_3(t)| = D(\omega_3, \zeta)$$

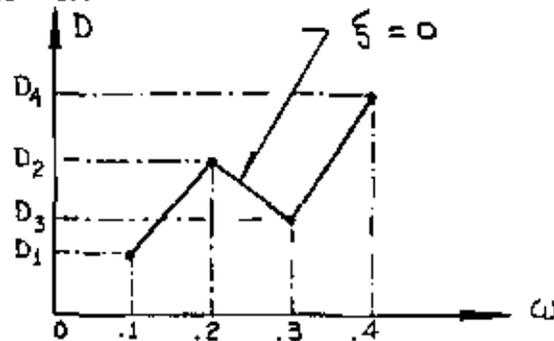
•
•
•

Desplazamiento relativo,
 $X(t)$, pulg



Respuesta de un sistema amortiguado simple
 con $T_1 = 1.0$ seg y $\zeta = 0.10$, al sismo de
 El Centro, Cal., 1940, componente N-S

EN TAL CASO, LA GRAFICA



ES EL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTOS PARA $\zeta = 0$, SI ESTE PROCESO DE REPITE FIJANDO OTROS VALORES DE ζ , POR EJEMPLO, $\zeta = 0.02, 0.05, 0.1, 0.2$, ETC, SE OBTENDRAN LOS ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS CORRESPONDIENTES.

DE MANERA ANALOGA SE PUEDEN OBTENER LOS ESPECTROS PARA OTROS TIPOS DE RESPUESTA, TALES COMO VELOCIDAD RELATIVA, ACELERACIÓN ABSOLUTA, ETC, QUE SON, RESPECTIVAMENTE

$$V = \text{MAX} |\dot{y}(t)|_{\zeta, \omega} ; A = \text{MAX} |\ddot{x}(t)|_{\zeta, \omega} \quad (29)$$

PSEUDO - ESPECTROS

ESTADISTICAMENTE SE HA ENCONTRADO QUE

$$S_V = \omega D^2 = V \quad (30)$$

$$S_A = \omega^2 D^2 = A = \omega V \quad (31)$$

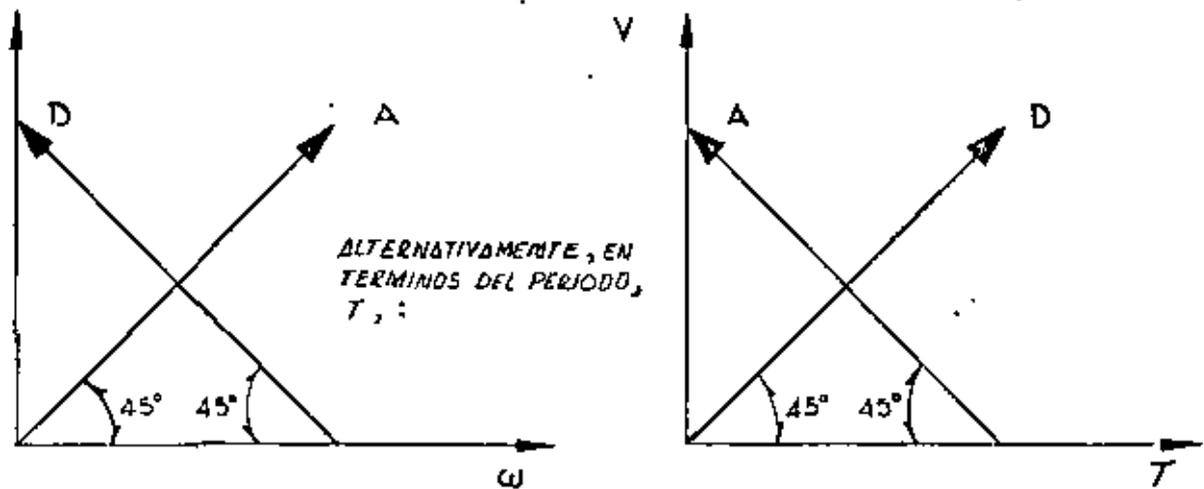
A S_V Y S_A SE LES LLAMA PSEUDOESPECTROS.

DE LA EC. (30): $\log D = \log V - \log \omega = \log V + \log T - \log 2\pi$

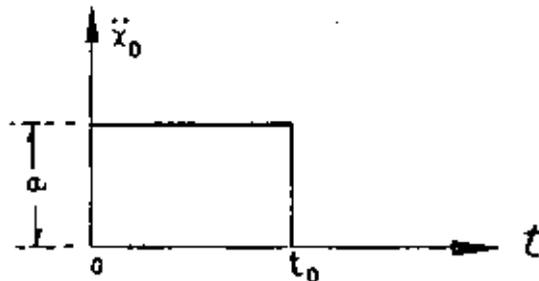
DE LA EC. (31): $\log A = \log V + \log \omega = \log V - \log T + \log 2\pi$

ESTAS ECUACIONES CORRESPONDEN A LINEAS RECTAS EN PAPEL LOGARITMICO;

LA PRIMERA CON PENDIENTE -1 Y LA SEGUNDA CON PENDIENTE $+1$, SI SE USA ω COMO VARIABLE INDEPENDIENTE; SI SE USA T , LA PRIMERA TENDRA PENDIENTE $+1$, Y LA SEGUNDA, -1 .

EJEMPLO

CALCULAR EL ESPECTRO CORRESPONDIENTE A LA EXCITACION (CONSIDERESE $\zeta=0$)



EN UN EJEMPLO ANTERIOR SE OBTUVO

$$y(t) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$D = \text{MAX}|y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} ; 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0, (0 \leq T \leq 2t_0)$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega}, \quad S_A = \omega V = 2a$$

$$Y \quad D = \text{MAX}|y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} \text{sen} \frac{\omega t_0}{2}, \quad \text{SI } T > 2 t_0$$

$$\therefore S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right| ; \quad S_A = \omega V = 2a \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|$$

$$\text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} S_V = \text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} \left\{ at_0 \frac{\text{sen} \frac{\omega t_0}{2}}{\frac{\omega t_0}{2}} \right\} = at_0$$

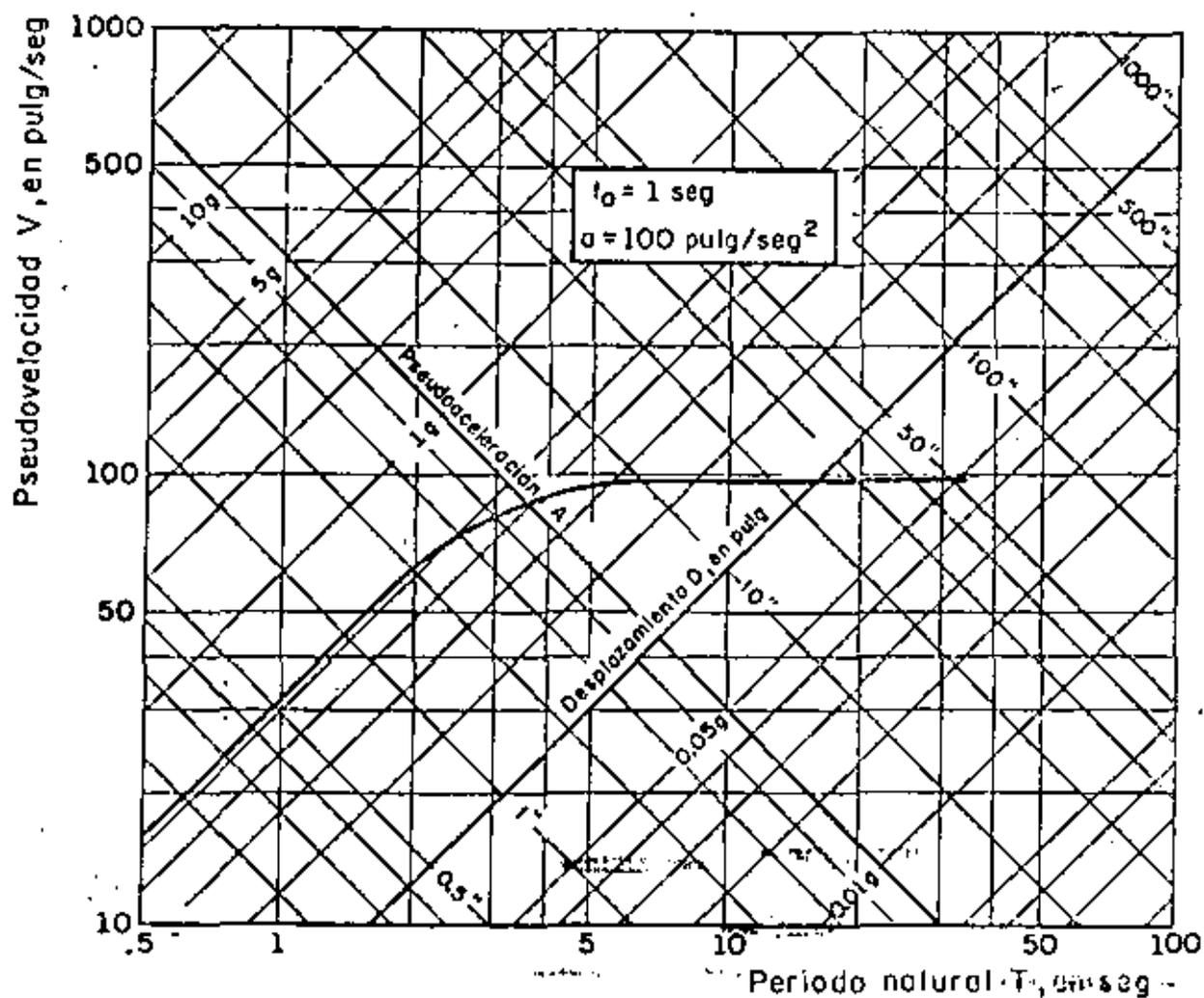
CASO PARTICULAR: SI $t_0 = 1$ SEG y $a = 100$ IN/SEG².

$$S_V = \frac{2 \times 100}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{100}{\pi} T, \quad \text{SI } 0 \leq T \leq 2 \text{ SEG}$$

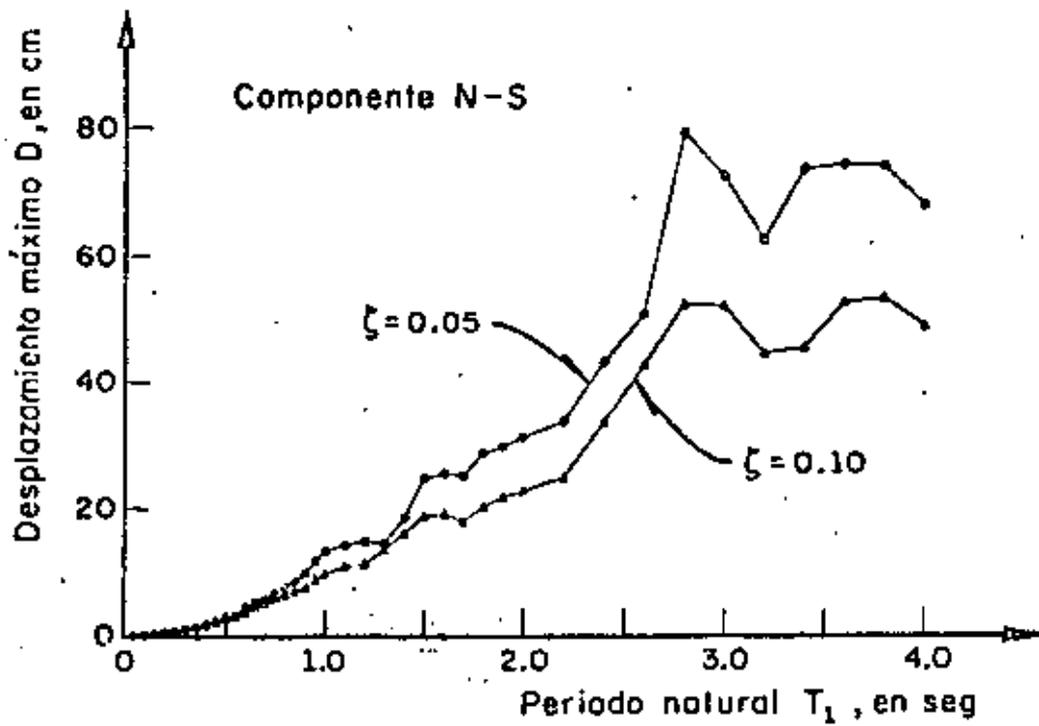
$$S_v = \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{2\pi \times 1}{T} \right| =$$

$$= \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\pi}{T} \right| \text{ SI } T > 2 \text{ SEG}$$

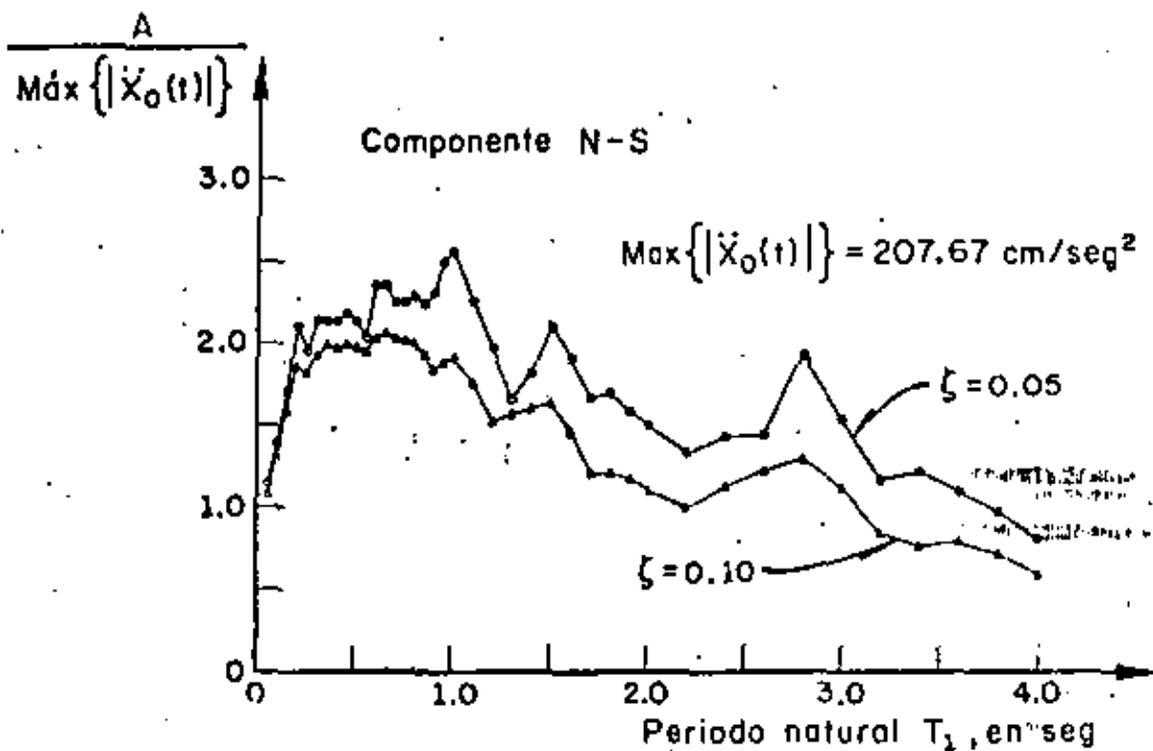
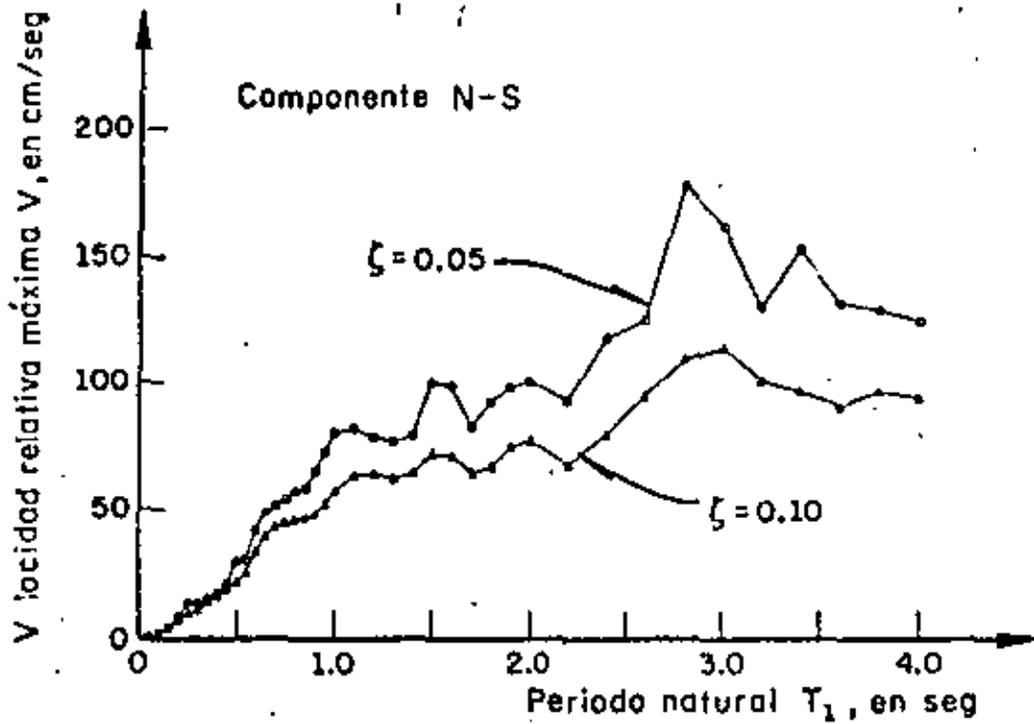
$$\text{LIM } S_v = 100 \text{ IN/SEG}$$



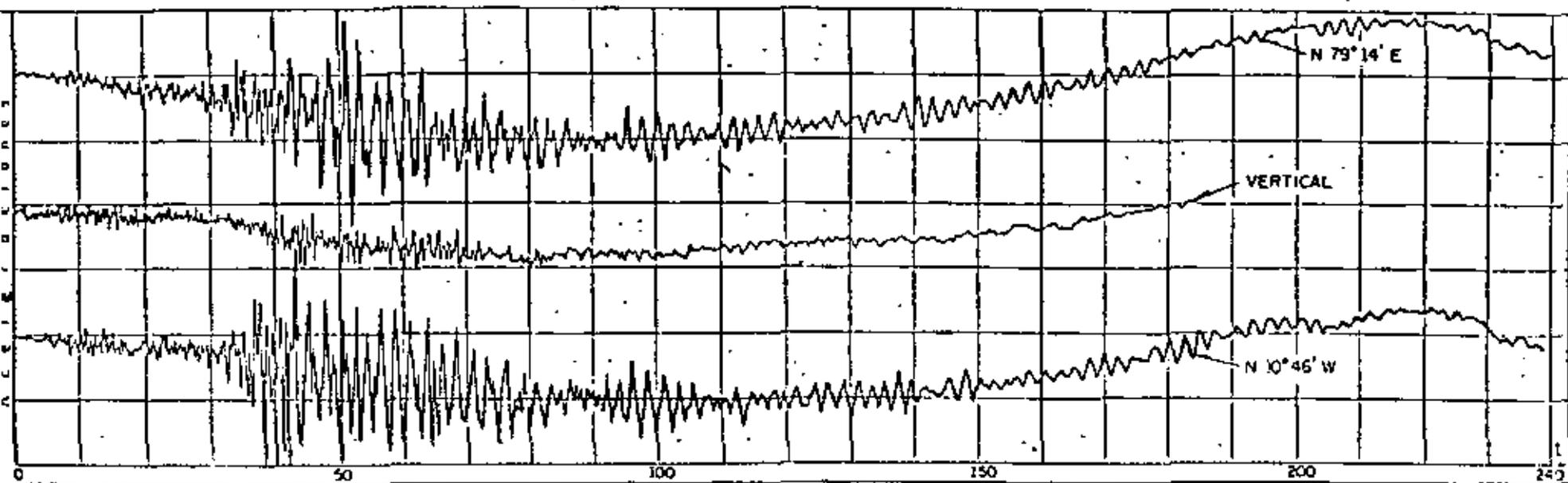
Espectro no amortiguado correspondiente a un pulso rectangular de aceleraciones. Según N. Newmark y E. Rosenblueth, ref 1



Espectro de desplazamientos. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4

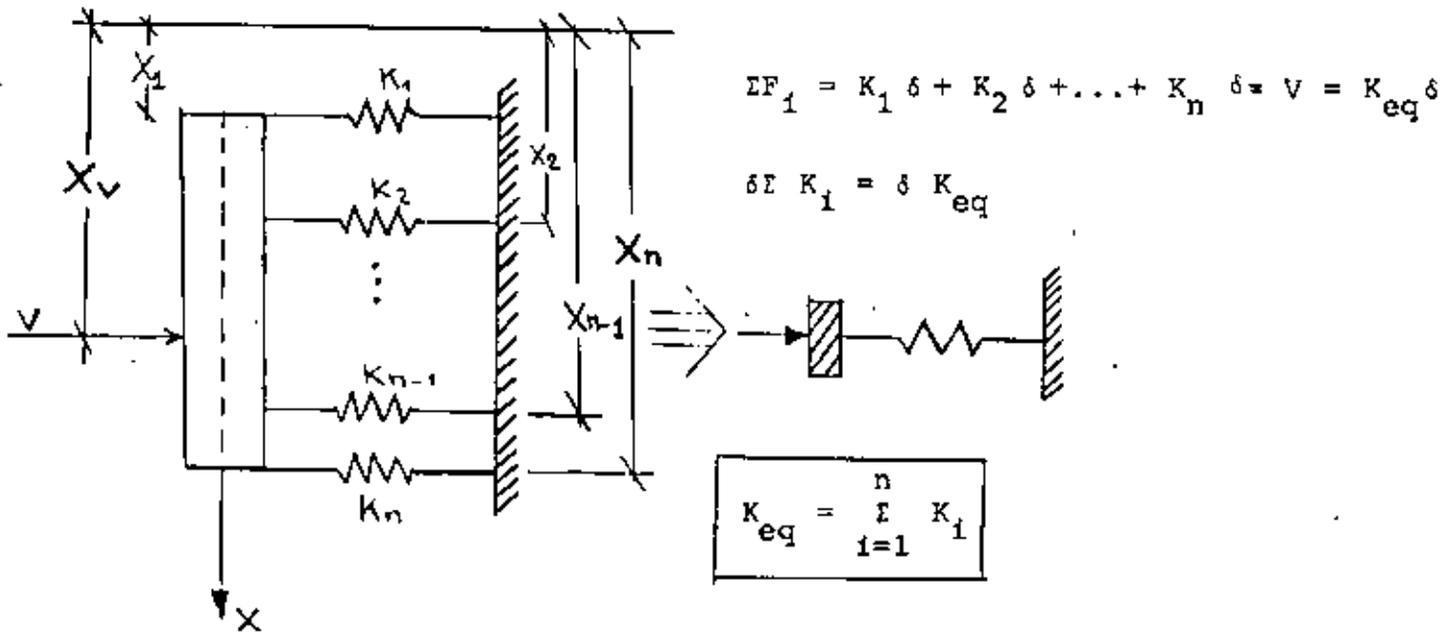


Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4



Acelerogramas originales del sismo registrado el
- 11-V-1962 , en la ALAMEDA CENTRAL, Mex. D. F.

DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN UN ENTREPISO

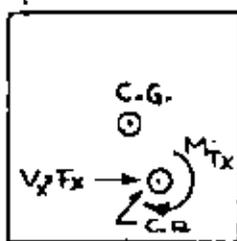
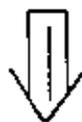
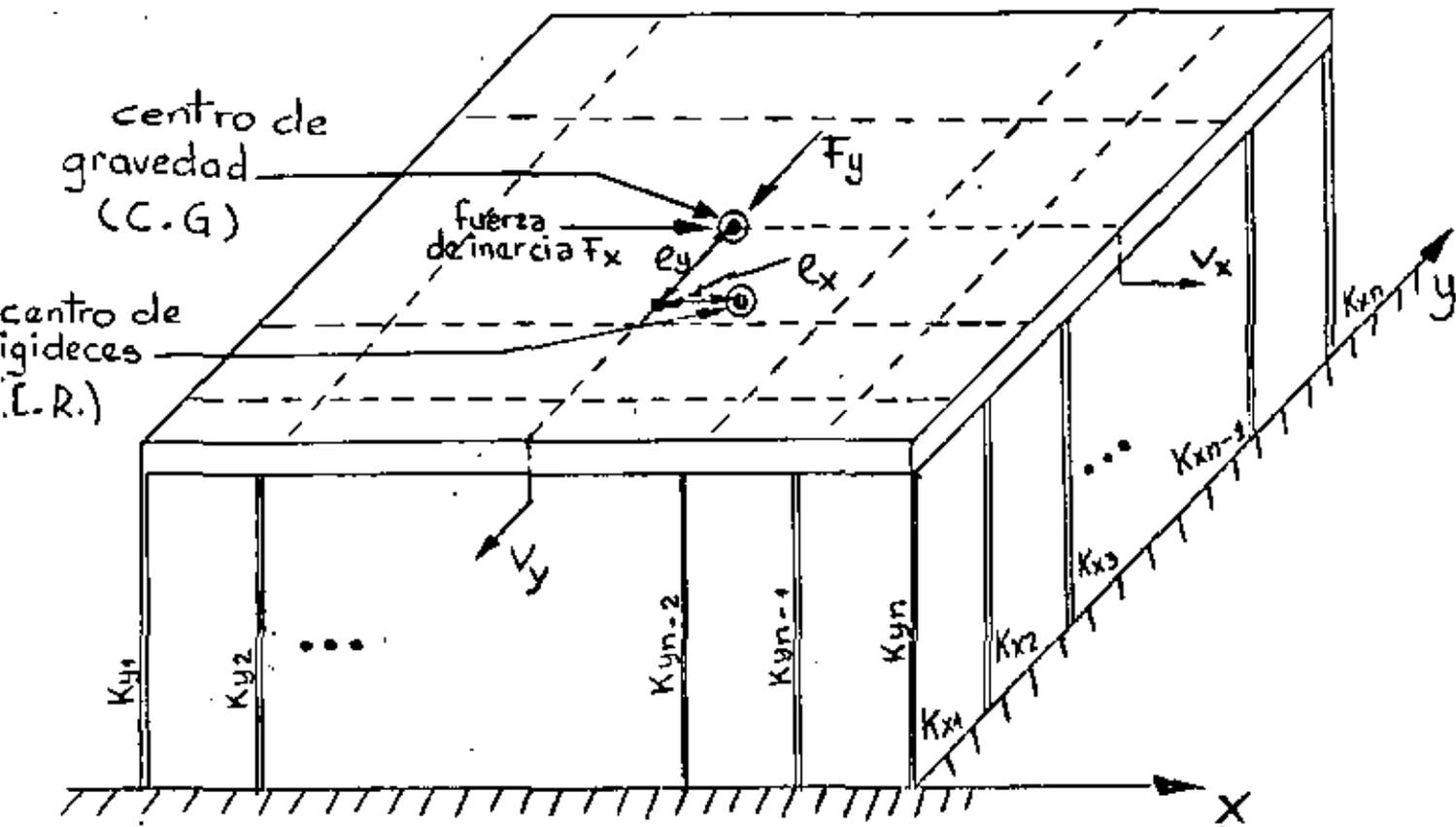


$$X_v = \frac{\sum_{i=1}^n K_i X_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

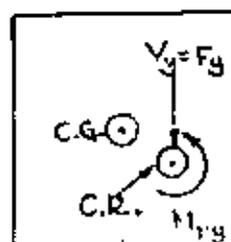
$$\Sigma M_i = \Sigma F_i X_i = \Sigma K_i \delta X_i = \delta \Sigma K_i X_i = V X_v = K_{eq} \delta X_v$$

← POSICION DEL CENTRO DE RIGIDECES

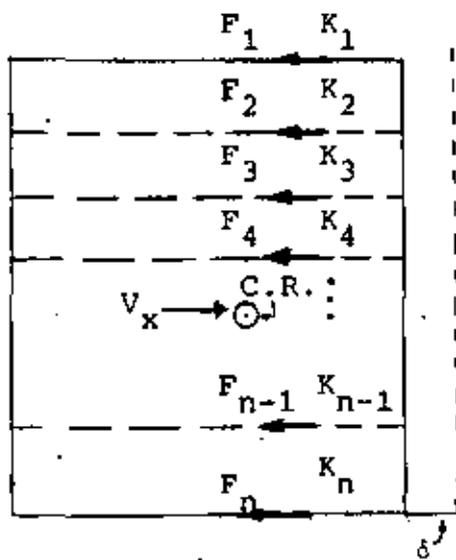
DISTRIBUCION DE FUERZAS CORTANTES DIRECTAS Y POR TORSION



+



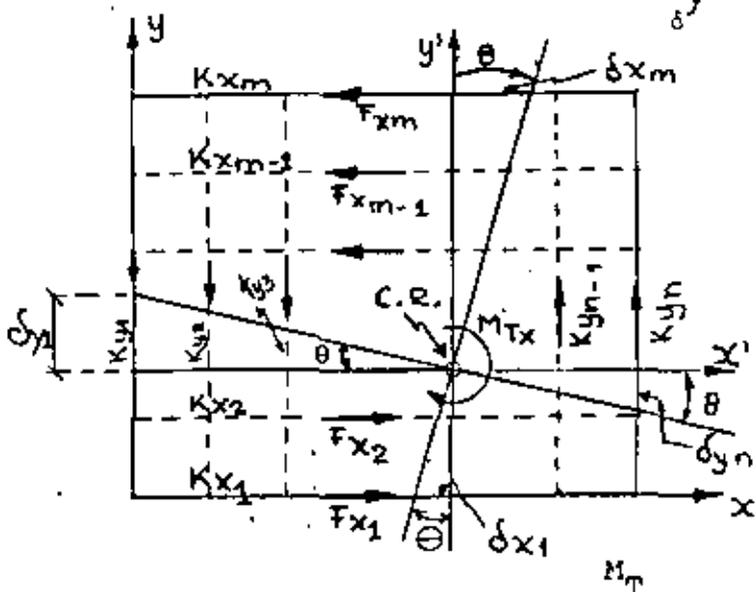
VEAMOS COMO SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS MARCOS



$$F_i = K_i \delta$$

$$\sum F_i = \sum K_i \delta = V_x \therefore \delta = \frac{V_x}{\sum K_i}$$

$$F_i = V_x \frac{K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$



$$F_{x_i} = K_{x_i} \delta_{x_i} = K_{x_i} Y'_i \theta$$

$$F_{y_i} = K_{y_i} \delta_{y_i} = K_{y_i} X'_i \theta$$

$$M_{C.R.} = \sum F_{x_i} Y'_i + \sum F_{y_i} X'_i$$

$$= \theta (\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2)$$

$$= M_{Tx}$$

DE DONDE $\theta = \frac{M_{Tx}}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$

POR LO QUE

$$F_{x_i} = M_{Tx} \frac{K_{x_i} Y_i'}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$$

$$F_{y_i} = M_{Tx} \frac{K_{y_i} X_i'}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$$

SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

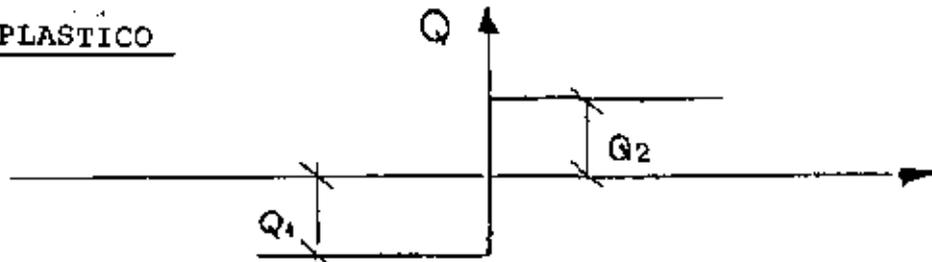
ECUACION DE MOVIMIENTO:

$$M\ddot{x} + Q(y, \dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x - x_0 = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI $Q(y, \dot{y}) = KY + C\dot{y}$ SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

1. RIGIDO-PLASTICO



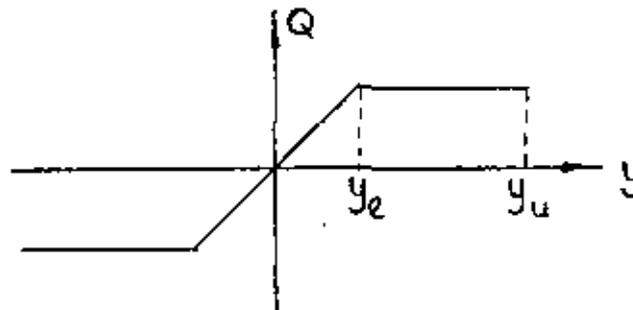
$$Q = -Q_1 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} < 0$$

$$Q = Q_2 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} > 0 \quad \text{EN DONDE } C = \text{CONSTANTE. SE HA EMPLEADO COMO}$$

MODELO EN EL ANALISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA

Y ENROCAMIENTO

2. ELASTO-PLASTICO



$$Q = Q_1(y) + C\dot{y}$$

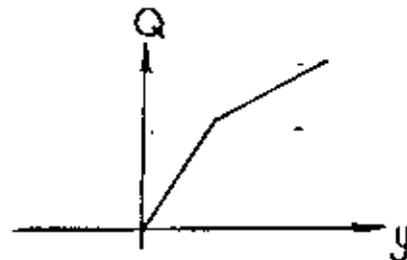
SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

$$\text{FACTOR DE DUCTILIDAD} = u = y_u / y_e$$

y_u = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR.

3. SISTEMA BILINEALCON ENDURECIMIENTO

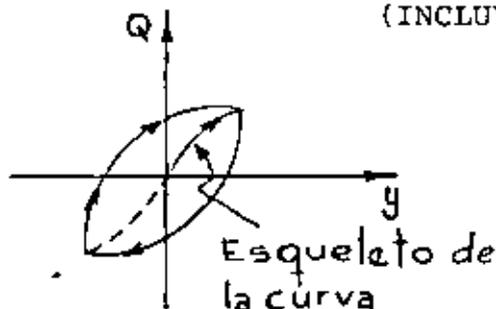
SE USA COMO MODELO PARA ANALISIS
DE Puentes COLGANTES

CON ABLANDAMIENTO

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS
QUE SE DEGRADAN POR AGRIETA-
MIENTO (MUROS DE MAMPOSTERIA,
POR EJEM).

4. TIPO MASING

(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)



$$\frac{Q - Q_0}{2} = Q_1 \left(\frac{y - y_0}{2} \right)$$

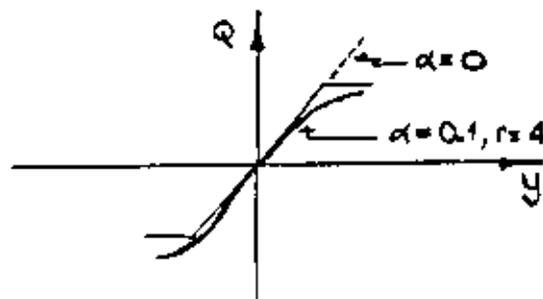
Q_0 = FUERZA EN $y = y_0$

y_0 = DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIÓ (Y CAMBIO
DE SIGNO) POR ÚLTIMA VEZ

CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

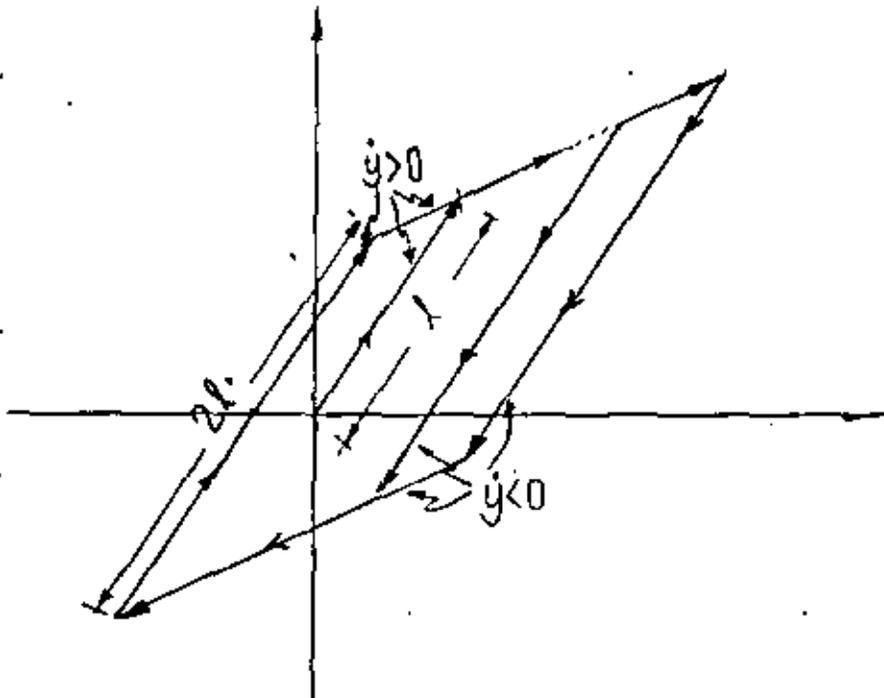
$$\frac{y}{y_1} = \frac{Q}{Q_1} + \alpha \left(\frac{Q}{Q_1} \right)^r \quad \text{(MODELO RAMBER - OSGOOD)}$$

DONDE y_1 , Q_1 , α y r SON CONSTANTES POSITIVAS

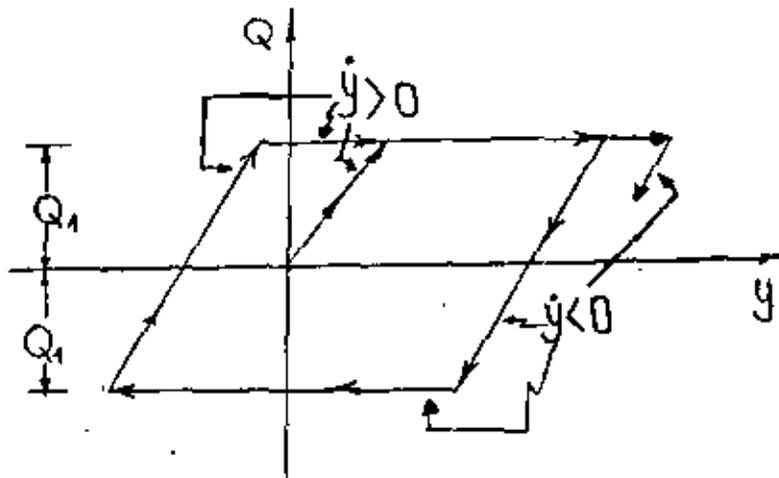


EJEMPLO:

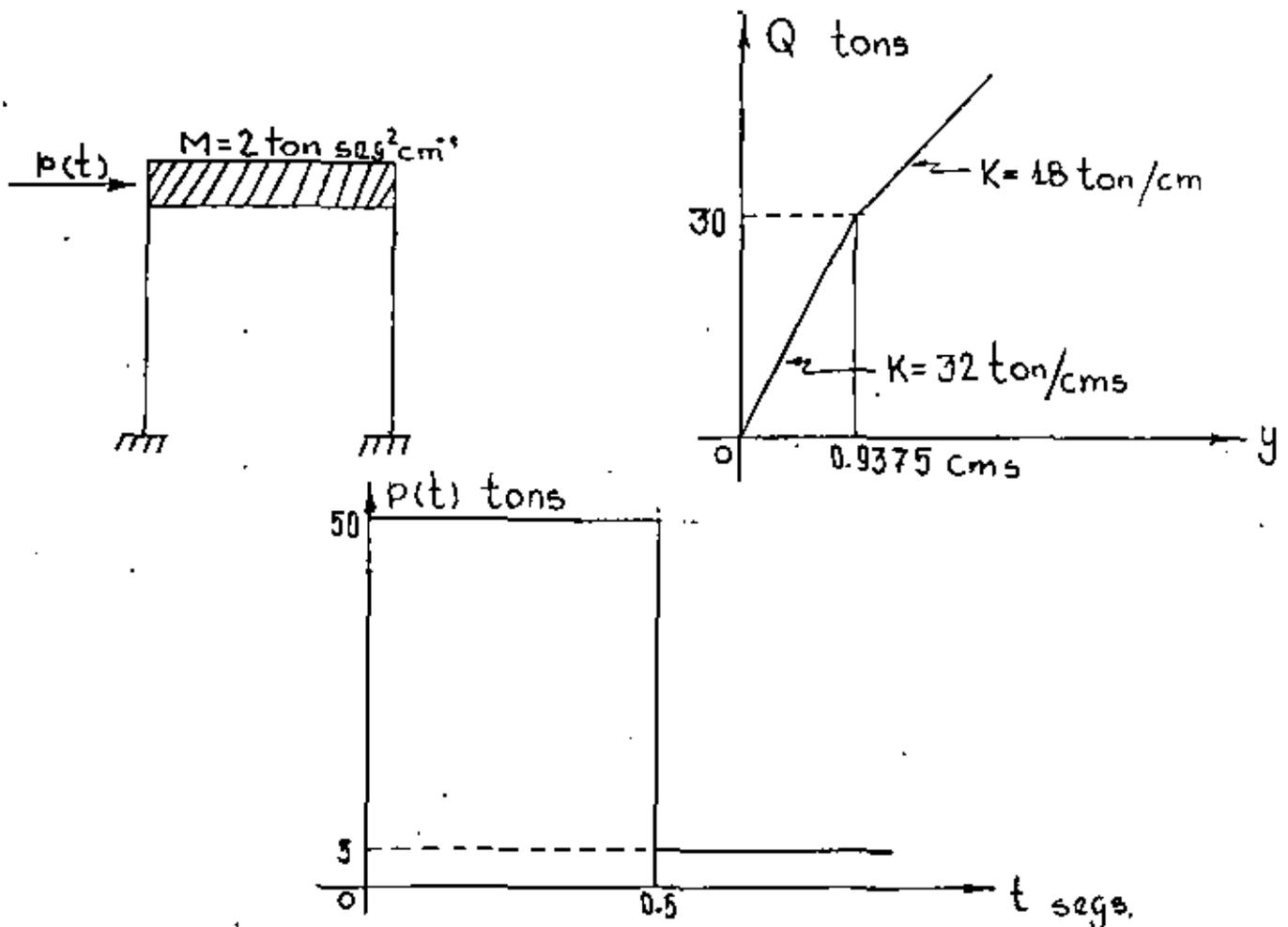
CASO BILINEAL

EJEMPLO

CASO ELASTOPLASTICO

METODO B DE NEWMARK

PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES SE PUEDE USAR EL METODO B
DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

EJEMPLO

ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO , $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) - Q(Y)}{M} = \frac{P(t) - Q(y)}{2} \quad (I)$$

PARA LA APLICACION DEL METODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \Delta t / 2$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i \Delta t + (0.5 - \beta) \ddot{Y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{Y}_{i+1} (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO $\Delta t = 0.10 \text{ SEG.}$ Y $\beta = 1/6$ SE PUEDE ESCRIBIR;

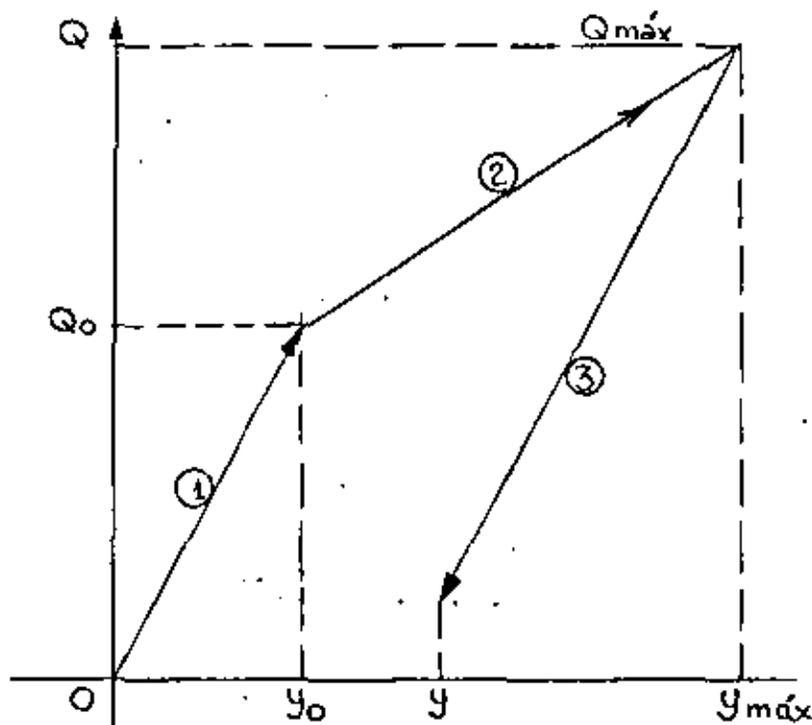
$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{20} (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (\text{II})$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i (0.10) + \frac{1}{600} (2\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (\text{III})$$

EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO-ES COMO SIGUE:

- | | | | |
|------|--|------------------|-----------------------|
| { | SE ASUME | \ddot{Y}_{i+1} | |
| | SE CALCULA | \dot{Y}_{i+1} | CON LA ECUACION (II) |
| | SE CALCULA | Y_{i+1} | CON LA ECUACION (III) |
| | SE CALCULA UN MEJOR VALOR DE \ddot{Y}_{i+1} CON LA ECUACION (I), | | |
| ETC. | | | |

PARA LA FUNCION DE RESISTENCIA Q SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| 1. COMPORTAMIENTO ELASTICO | $Q = 32 Y$ TONS |
| 2. CAMBIO DE RIGIDEZ | $Q = 30 + 18 (Y - Y_0)$ TON |
| 3. DESCARGA | $Q = Q_{máx} - 32 (Y_{MÁX} - Y)$ TONS |

ESTA ULTIMA EXPRESION MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE, $(Y_{MÁX} - Y) \leq 2Y_0$

$$Y_0 = 0,9375 \text{ CMS} \quad ; \quad Q_0 = 30,0 \text{ TON}$$

$$\text{PARA } t = 0, \quad \ddot{y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25 \quad ; \quad y = 0, \quad \dot{y} = 0$$

$$\text{PARA } t = 0,10, \quad y_1 = \dot{y}_1 = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_1 = 25$$

1er. CICLO

SEA $\ddot{y}_{i+1} = 20$ COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$$\dot{y}_{i+1} = 0 + \frac{1}{20} (0 + 25) = 2,25$$

$$y_{i+1} = 0 + 0,10 \times 0 + \frac{1}{600} (2 \times 25 + 20) = 0,1167$$

$$Q = 32 \times 0,1167 = 3,7330$$

$$\ddot{y}_{i+1} = \frac{50 - 3,733}{2} = 23,134$$

2o. CICLO

$$\dot{y}_{i+1} = 23,134/2 = 16,567$$

$$y_{i+1} = 73,134/600 = 0,1219$$

$$Q = 32 \times 0,1219 = 3,9000$$

$$\ddot{y}_{i+1} = (50 - 3,9)/2 = 23,050$$

3er. CICLO

4o. CICLO

$$\bar{y}_{i+1} = 23.052$$

$$\dot{y}_{i+1} = 23.052/2 = 2.4026$$

$$y_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175$$

$$Q = 32 \times 0.12175 = 3.8960$$

$$\bar{y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052 \quad \dots \text{ ETC.}$$

LOS CALCULOS BASICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	P TONS	\ddot{Y} CM SEG ⁻²	\dot{Y} CM SEG ⁻¹	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	0.00
0.10	50.00	20.000	2.2500	0.1167	3.7330
		23.134	2.4070	0.1219	3.9000
		23.050	2.4025	0.12175	3.3960
		23.052	2.4026	0.12175	3.8960
0.20	50.00	20.000	4.5552	0.4722	15.110
		17.445	4.4270	0.46793	14.970
		17.513	4.4310	0.46804	14.977
		17.511	4.43075	0.46204	14.977
0.30	50.00	10.000	5.8060	0.98610	30.8750
		9.560	5.7840	0.98540	30.8620
		9.569	5.7848	0.98543	30.8630
0.40	50.00	0.00	6.2630	1.5958	41.849
		4.0750	6.4670	1.6026	41.972
		4.0141	6.4640	1.6025	41.970
		4.0150	6.4640	1.60250	41.970
0.50 ⁻	50.00	0.00	6.6650	2.2623	53.846
		-1.9230			
		-1.9000	6.56975	2.2591	53.789
		-1.8944			
0.50 ⁺	5.00	-1.8946	6.5700	2.25912	53.789
		-24.3946	6.5700	2.25912	53.789
0.60	5.00	-30.000	3.8503	2.7848	63.251
		-29.126	3.8940	2.78626	63.278
		-29.136	3.89347	2.78624	63.277
		-29.138	3.89347	2.78624	63.277
0.70	5.00	-32.000	0.83657	3.025127	67.577
		-31.289			
		-31.320	0.87057	3.02626	67.598
		-31.299			
0.7278	5.00	-31.301	0.87147	3.02641	67.600
		-31.620	-0.00313	3.03850	67.818
0.7278	5.00	-31.409			
		-31.420	-0.000352	3.03853	67.818
		-31.4093	-0.000205	3.03853	67.818

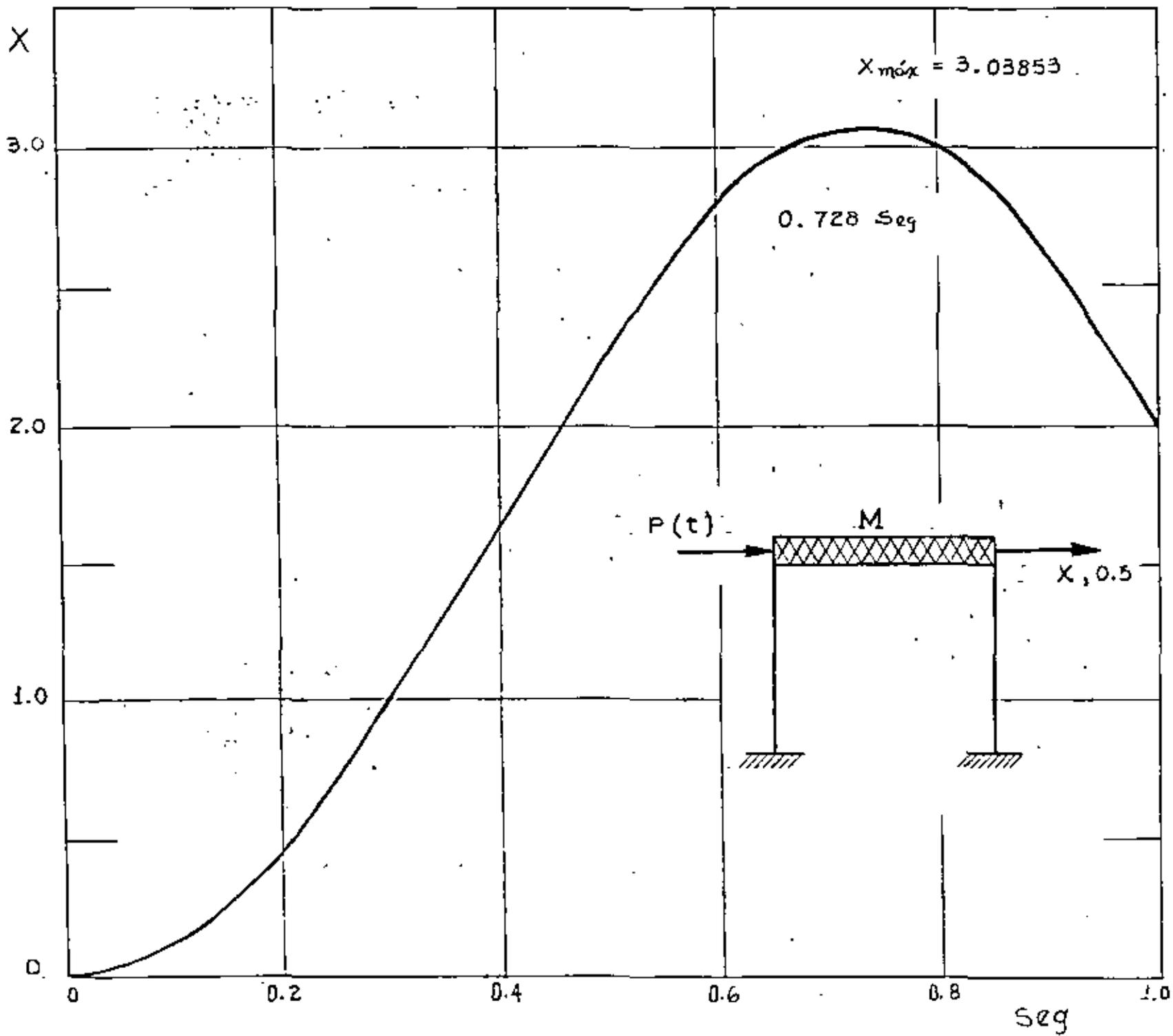
En $t=0.5. + \text{SEG}$, $\Delta y = -45/2 = -22.5 \therefore -22.5 - 1.8946 = -24.3946$

CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	P	\ddot{Y}	\dot{Y}	Y	Q
0.80	5.0	-28.000	-2.1449	2.959611	65.293
		-30.146			
		-30.000	-2.21708	2.957874	65.237
		-30.118			
		-30.117	-2.22127	2.95777	65.234
0.90	5.0	-27.00	-5.07712	2.59025	53.473
		-24.236			
		-25.00	-4.97712	2.59358	53.580
		-24.290			
		-24.294	-4.94182	2.59476	53.617
		-4.94242	2.59474	53.617	
1.00	5.0	-14.00	-6.85782	1.99614	34.461
		-14.7305			
		-14.7200	-6.89382	1.99494	34.423
		-14.7120	-6.89342	1.99495	34.423

EN ESTOS CALCULOS SE INTRODUIJO $t = 0.50^-$ Y 0.50^+ PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA $P(t)$ DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACION DEL SISTEMA \ddot{Y} . EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN Y Y \dot{Y} . EL TIEMPO $t = -0.7273$ SEG. SE INTRODUIJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE Y Y DE Q , PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRO SOBRE LA BASE DE APROXIMAR \dot{Y} A CERO, OBTENIENDOSE $Y_{MAX} = 3.03853$ CMS Y $Q_{MAX} = 67.818$ TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.



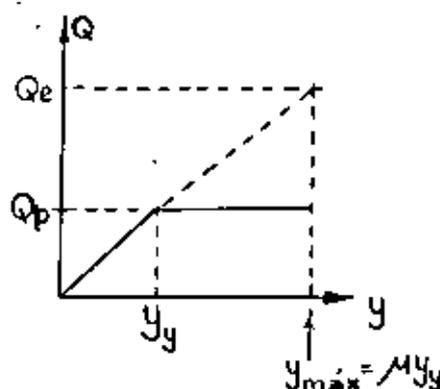
t Seg.	Y (supuesta) Cm Seg ⁻²	P Ton	Y Cm.	Q Ton	Y (calculado) Cm Seg ⁻²	Y Cm Seg ⁻¹	NOTAS
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50 ⁻	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50 ⁺	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	Q _{máx} , Y _{máx} .
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

RESPUESTA MAXIMA

$$\begin{cases} Y_{\text{máx}} = 3.03853 \text{ cms} \\ Q_{\text{máx}} = 67.818 \text{ tons} \end{cases}$$

CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLASTICOS A PARTIR DEL ELASTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:

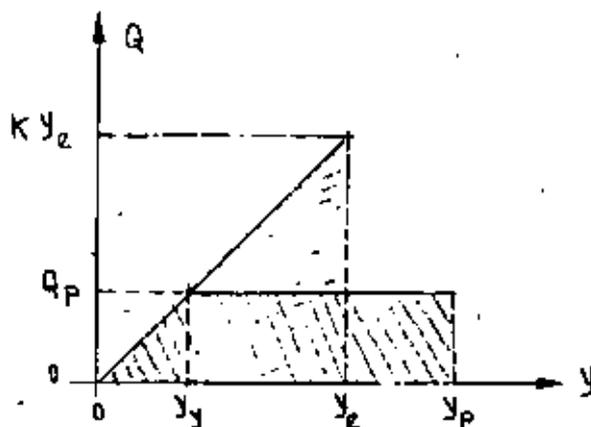


$$Q_p = K y_y = \frac{K y_{MAX}}{\mu} = \frac{Q_e}{\mu}$$

$$y_{MAX} = D_e = \mu y_y = \mu D_p$$

$$D_p = \frac{D_e}{\mu}$$

2. CRITERIO DE IGUAL ENERGIA ABSORVIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{K y_e y_e}{2} = \frac{K y_y y_y}{2} + K y_y (y_p - y_y)$$

$$\frac{1}{2} y_e^2 = \frac{1}{2} y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{y_e}{y_y} \right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\nu - 1}}$$

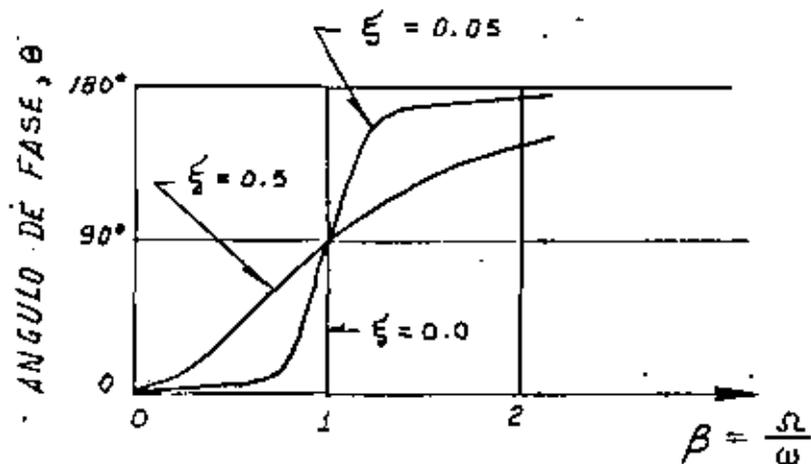
$$y_y]_{\text{MAX}} = D_p = \frac{y_e]_{\text{MAX}}}{\sqrt{2\nu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2\nu - 1}}$$

POR LO TANTO

$$D_p = D_e / \sqrt{2\nu - 1} \quad \text{Y} \quad Q_p = Q_e / \sqrt{2\nu - 1}$$

AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO

SI SE CUENTA CON EQUIPO PARA MEDIR EL ANGULO DE FASE ENTRE LA FUERZA DE EXCITACION Y EL DESPLAZAMIENTO RESULTANTE, SE PUEDE EVALUAR EXPERIMENTALMENTE EL AMORTIGUAMIENTO DEL SISTEMA CON UNA SOLA PRUEBA DE VIBRACION ARMONICA EN RESONANCIA. ESTA SE LOGRA CUANDO SE AJUSTA LA FRECUENCIA DEL EXCITADOR DE TAL MANERA QUE EL ANGULO DE FASE SEA 90°, YA QUE:



EN ESTAS CONDICIONES LA FUERZA DE EXCITACION QUEDA EN FASE CON LA VELOCIDAD DE LA MASA YA QUE

$$y = A \text{ sen}(\omega t - \theta) = -A \text{ cos} \omega t, \text{ SI } \theta = 90^\circ$$

$$Y \quad \dot{y} = A \omega \text{ sen} \omega t \quad ; \quad \ddot{y} = A \omega^2 \text{ cos} \omega t$$

Y DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

$$M A \omega^2 \text{ cos} \omega t + C A \omega \text{ sen} \omega t + K(-A \text{ cos} \omega t) = p_0 \text{ sen} \omega t$$

SE VE QUE SE DEBE CUMPLIR QUE:

$$C A \omega = p_0, \text{ DE DONDE } \boxed{C = \frac{p_0}{A \omega}} \quad (I)$$

DE LAS ECUACIONES ANTERIORES SE DEDUCE QUE:

$$y^2 = A^2 \text{ cos}^2 \omega t \quad ; \quad \frac{y^2}{A^2} = \text{cos}^2 \omega t$$

Y

$$p^2 = p_0^2 \text{ sen}^2 \omega t \quad ; \quad \frac{p^2}{p_0^2} = \text{sen}^2 \omega t$$

$$\text{SUMANDO:} \quad \frac{y^2}{A^2} + \frac{p^2}{p_0^2} = \text{sen}^2 \omega t + \text{cos}^2 \omega t$$

QUE ES LA ECUACION DE UNA ELIPSE CON LOS EJES COORDENADOS y Y p ,
 ASI (fig 1):

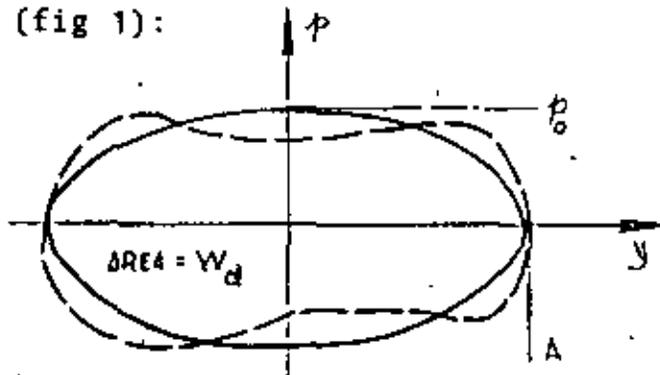


FIG 1

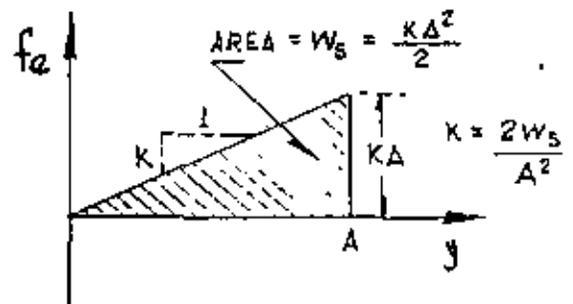


FIG 2

SI EL AMORTIGUAMIENTO NO ES EXACTAMENTE VISCOSO, LA GRAFICA QUE SE
 OBTENDRIA DE p CONTRA y NO SERIA EXACTAMENTE ELIPTICA, SINO ALGO
 COMO LA LINEA PUNTEADA AHI MOSTRADA. EN ESTE CASO SE PUEDE UTI-
 LIZAR UN AMORTIGUAMIENTO VISCOSO EQUIVALENTE, DE TAL MANERA QUE EL AREA
 W_d , DE ESTA CURVA SEA IGUAL A LA DE LA ELIPSE EQUIVALENTE, $W_{eq} = \pi A p_0$,
 ES DECIR

$$W_d = \pi A p_0, \text{ DE DONDE } p_0 = \frac{W_d}{\pi A}$$

POR LO QUE; DE LA EC. (I)

$$c_{eq} = \frac{W_d}{\pi \omega A^2} \quad (II)$$

ADEMAS, $c_{cr} = 2\sqrt{KM} = 2K/\omega$; DE FIG. 2 : $c_{cr} = 2\left(\frac{2W_s}{A^2}\right)/\omega$, DE DONDE

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_{cr}}$$

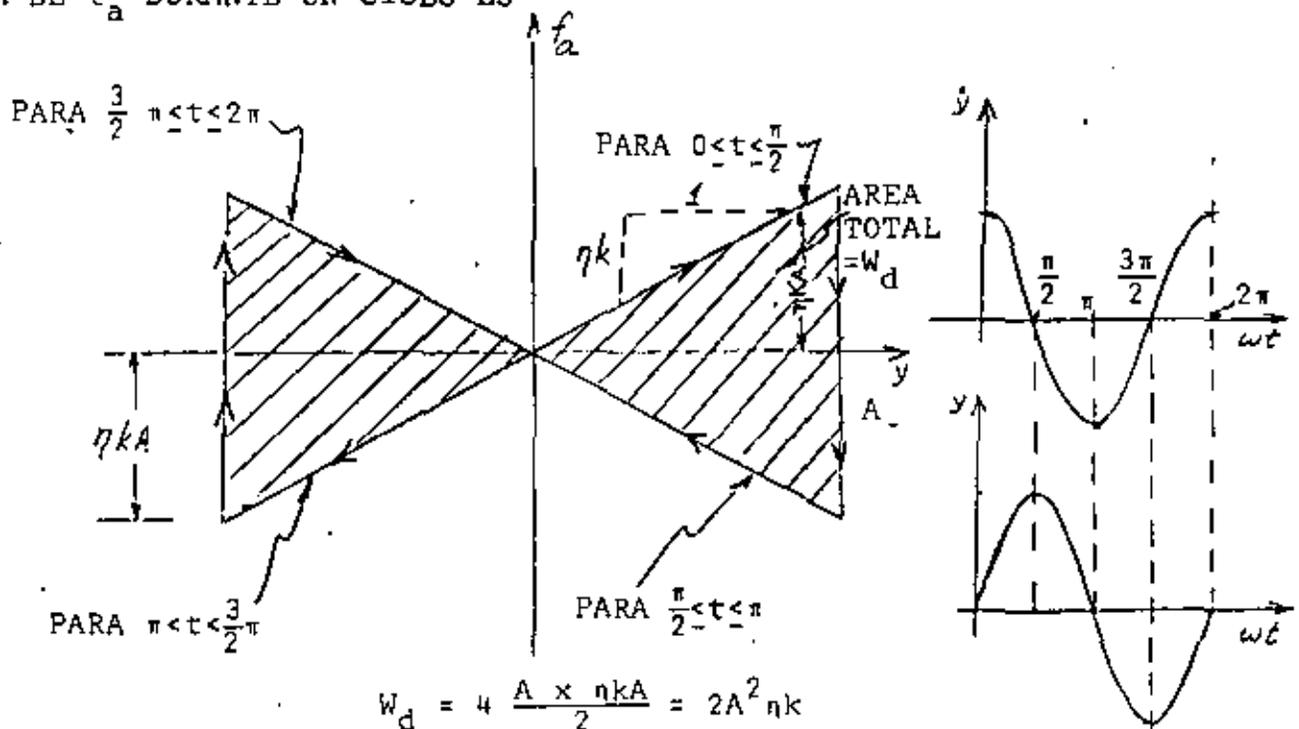
$$\zeta_{eq} = W_d / (4 \pi W_s) \quad (II')$$

DE LAS ECS. (I) Y (II) SE CONCLUYE QUE EL FACTOR DE AMORTIGUAMIENTO VISCOZO ES FUNCION DE LA FRECUENCIA, ω .

EXISTE OTRO TIPO DE AMORTIGUAMIENTO QUE ES INDEPENDIENTE DE LA FRECUENCIA, QUE SE CONOCE COMO AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO, EL CUAL PRODUCE UNA FUERZA EN FASE CON LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA, PERO PROPORCIONAL AL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR

$$f_a = \eta k |y(t)| \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{y}(t)|} \quad (\text{III})$$

DONDE η ES EL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO HISTERETICO. EL DIAGRAMA DE f_a DURANTE UN CICLO ES



SI SE CONSIDERA QUE LA ENERGIA PERDIDA POR HISTERESIS SE PUEDE REPRESENTAR MEDIANTE UN AMORTIGUADOR VISCOZO, ENTONCES, DE LA EC. (II') Y FIG 2:

$$c = \frac{2A^2 \eta k}{4 \pi \frac{KA}{2}} = \frac{\eta}{\pi} \quad \text{O} \quad \boxed{\eta = \pi c} \quad (\text{IV})$$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

METODO β DE NEWMARK

SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD CON COMPORTAMIENTO
INELASTICO

DR. OCTAVIO A: RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980

METODO β DE NEWMARK

01 SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE N GRADOS DE LIBERTAD Y COMPORTAMIENTO ELASTICO LINEAL SE EMPLEAN LAS MISMAS ECUACIONES QUE PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \dot{x}_j(t_i)\Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{x}_j(t_i) + \beta\ddot{x}_j(t_{i+1})](\Delta t)^2$$

EN DONDE $j = 1, 2, \dots, N$.

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA TAMBIEN UN VALOR DE β COMPRENDIDO ENTRE 1/4 Y 1/6, Y QUE $\Delta t \leq 0.1 T_N$, EN DONDE T_N ES EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION MAS PEQUEÑO.

EJEMPLO

SEA UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUYAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES SON:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

USANDO EL METODO β DE NEWMARK CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$ CALCULE LA RESPUESTA DINAMICA ANTE UNA EXCITACION DADA POR LOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO:

$$x_0 = 1.2 t \quad \text{SI } 0 \leq t \leq 2 \text{ seg} \quad (x_0 \text{ EN CENTIMETROS})$$

$$x_0 = 4.8 - 1.2 t \quad \text{SI } 2 \leq t \leq 4 \text{ seg}$$

$$x_0 = 0 \quad \text{SI } t < 0 \text{ o } t > 4 \text{ seg}$$

PUESTO QUE ESTA EXCITACION IMPLICA QUE $\ddot{x}_0(t) = 0$ PARA TODO t , SE TIENE QUE LA ECUACION MATRICIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{K}\underline{Y} = \underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{Q} = \underline{0}$$

POR LO QUE

$$m_1 \ddot{y}_1 + Q_1 = 0 \quad + \quad \ddot{y}_1 = Q_1/m_1$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + Q_2 = 0 \quad + \quad \ddot{y}_2 = Q_2/m_2$$

EN DONDE $y_1 = x_1 - x_0$ Y $y_2 = x_2 - x_0$.

CON $\Delta t = 0.2$ seg Y $\beta = 1/6$, LAS ECUACIONES DEL METODO β DE NEWMARK QUEDAN EN LA FORMA

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + 0.1[\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})]$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + 0.1 \dot{x}_j(t_i) + 0.04[\ddot{x}_j(t_i)/3 + \ddot{x}_j(t_{i+1})/6]$$

$$\text{EN } t = 0, y_i = x_i = 0, \dot{y}_i = \dot{x}_i = 0, \ddot{y}_i = \ddot{x}_i = 0.$$

$$\text{EN } t = 0.2, x_0 = 1.2 \times 0.2 = 0.24 \text{ cm; SUPONGAMOS } \ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 1.35$$

$$\text{Y } \ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.50 \text{ cm/seg:}$$

PRIMER CICLO

$$\text{PARA LA MASA 1: } \dot{x}_1 = 0 + 0.1 (0 + 1.35) = 0.135 \text{ cm/seg}$$

$$x_1 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.35/6) = 0.009 \text{ cm}$$

$$y_1 = 0.009 - 0.24 = -0.231 \text{ cm}$$

$$\text{PARA LA MASA 2: } \dot{x}_2 = 0 + 0.1(0 + 1.50) = 0.15$$

$$x_2 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.50/6) = 0.01$$

$$y_2 = 0.01 - 0.24 = -0.23 \text{ cm}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.540 \\ -1.381 \end{bmatrix}$$

$$\text{POR LO QUE } \ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 = 2.54/2 = 1.27 \neq 1.35$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2 = 1.381/1 = 1.381 \neq 1.50$$

SEGUNDO CICLO

$$\dot{x}_1 = 0.1 \times 1.27 = 0.127$$

$$x_1 = 0.04 \times 1.27/6 = 0.0085$$

$$y_1 = 0.0085 - 0.24 = -0.2315$$

$$\dot{x}_2 = 0.1 \times 1.381 = 0.138$$

$$x_2 = 0.04 \times 1.381/6 = 0.0092$$

$$y_2 = 0.0092 - 0.24 = -0.2308$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2315 \\ -0.2308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.546 \\ -1.386 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 2.546/2 = 1.273 \approx 1.27$
 $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.386/1 = 1.386 \approx 1.381$

EN $t = 0.2 + 0.2 = 0.4$ seg SE TIENEN $x_0 = 1.2 \times 0.4 = 0.48$,

$$\begin{array}{ll} x_1(t_i) = 0.0085 & ; \quad x_2(t_i) = 0.0092 \\ \dot{x}_1(t_i) = 0.127 & ; \quad \dot{x}_2(t_i) = 0.138 \\ \ddot{x}_1(t_i) = 1.273 & ; \quad \ddot{x}_2(t_i) = 1.386 \end{array}$$

PRIMER CICLO

SUPONIENDO $\ddot{x}_1(t_{i+1}) = 2.3$ Y $\ddot{x}_2(t_{i+1}) = 2.1$ SE OBTIENEN:

$$\dot{x}_1 = 0.127 + 0.1(1.273 + 2.3) = 0.484$$

$$x_1 = 0.0085 + 0.2 \times 0.127 + 0.04(1.273/3 + 2.3/6) = 0.0662$$

$$y_1 = 0.0662 - 0.48 = -0.4138$$

$$\dot{x}_2 = 0.138 + 0.1(1.386 + 2.1) = 0.486$$

$$x_2 = 0.0092 + 0.2 \times 0.138 + 0.04(1.386/3 + 2.1/6) = 0.0693$$

$$y_2 = 0.0693 - 0.48 = -0.4107$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4138 \\ -0.4107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.548 \\ -2.468 \end{bmatrix}$$

DE DONDE $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 4.548/2 = 2.274 \neq 2.3$
 $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 2.468 \neq 2.1$

ETCETERA. LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA SE PRESENTAN EN LA TABLA 1.

Tomado del libro de N. Newmark y E. Rosenblueth D.

Tabla 2.1. Ejemplo 2.7

t seg	Q_1 ton	\dot{X}_1 cm/seg	\ddot{X}_1 cm/seg ²	X_1 cm	$\dot{X}_1 - \dot{X}_2$ cm/seg	Q_2 ton	\dot{X}_2 cm/seg	\ddot{X}_2 cm/seg ²	X_2 cm	$X_1 - X_2$ cm	\dot{X}_2 cm/seg
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.540	1.350	0.155	0.0090	-0.2310	1.340	1.300	0.150	0.0100	-0.2300	0.24
0.2	2.548	1.370	0.127	0.0085	-0.2315	1.366	1.360	0.136	0.0092	-0.2308	0.24
0.2	2.546	1.275	0.127	0.0085	-0.2315	1.366	1.366	0.136	0.0092	-0.2308	0.24
0.4	4.348	+2.500	0.484	+0.0662	-0.4138	2.468	2.100	0.466	+0.0693	-0.4107	0.46
0.4	4.348	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.458	0.523	0.0718	-0.4082	0.46
0.4	4.348	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.46
0.4	4.348	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.46
0.6	5.985	2.700	0.978	0.2105	-0.5095	2.960	3.200	1.088	0.2301	-0.4899	0.72
0.6	5.981	2.793	0.987	0.2111	-0.5089	2.967	2.960	1.064	0.2285	-0.4915	0.72
0.6	5.980	2.780	0.987	0.2111	-0.5089	2.965	2.967	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.6	5.980	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.966	1.065	0.2286	-0.4914	0.72
0.8	5.409	2.900	1.556	0.4650	-0.4950	2.790	2.980	1.660	0.5010	-0.4590	0.96
0.8	5.423	2.704	1.535	0.4637	-0.4963	2.798	2.790	1.641	0.4997	-0.4603	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.798	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
1.0	4.104	2.150	2.023	0.8216	-0.3784	1.977	2.200	2.142	0.8802	-0.3198	1.20
1.0	4.191	2.052	2.013	0.8210	-0.3790	1.985	1.977	2.120	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.191	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.191	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.2	1.931	0.950	2.315	1.2575	-0.1825	0.712	0.700	2.390	1.3341	-0.1099	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1099	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1099	1.44
1.4	-0.655	-0.320	2.381	1.7316	0.0516	-0.735	-0.800	2.382	1.8165	0.1365	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.4	-0.652	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.6	-3.085	+1.500	2.197	2.1932	0.2732	-2.026	-2.100	2.104	2.2707	0.3507	1.92
1.6	-3.080	+1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.026	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.6	-3.080	+1.540	2.193	2.1929	0.2729	-2.029	-2.029	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.8	-4.830	-2.500	1.789	2.5945	0.4545	-2.869	-2.900	1.618	2.6471	0.4871	2.16
1.8	-4.836	-2.415	1.797	2.5949	0.4549	-2.871	-2.869	1.621	2.6473	0.4873	2.16
1.8	-4.836	-2.418	1.797	2.5949	0.4549	-2.871	-2.871	1.621	2.6473	0.4873	2.16
2.0	-5.547	-2.800	1.275	2.9034	0.5034	-3.069	-3.000	1.034	2.9132	0.5132	2.40
2.0	-5.549	-2.715	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.069	1.027	2.9127	0.5127	2.40
2.0	-5.549	-2.714	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.068	1.027	2.9127	0.5127	2.40

Tabla 2.1. Ejemplo 2.7 (Cont.)

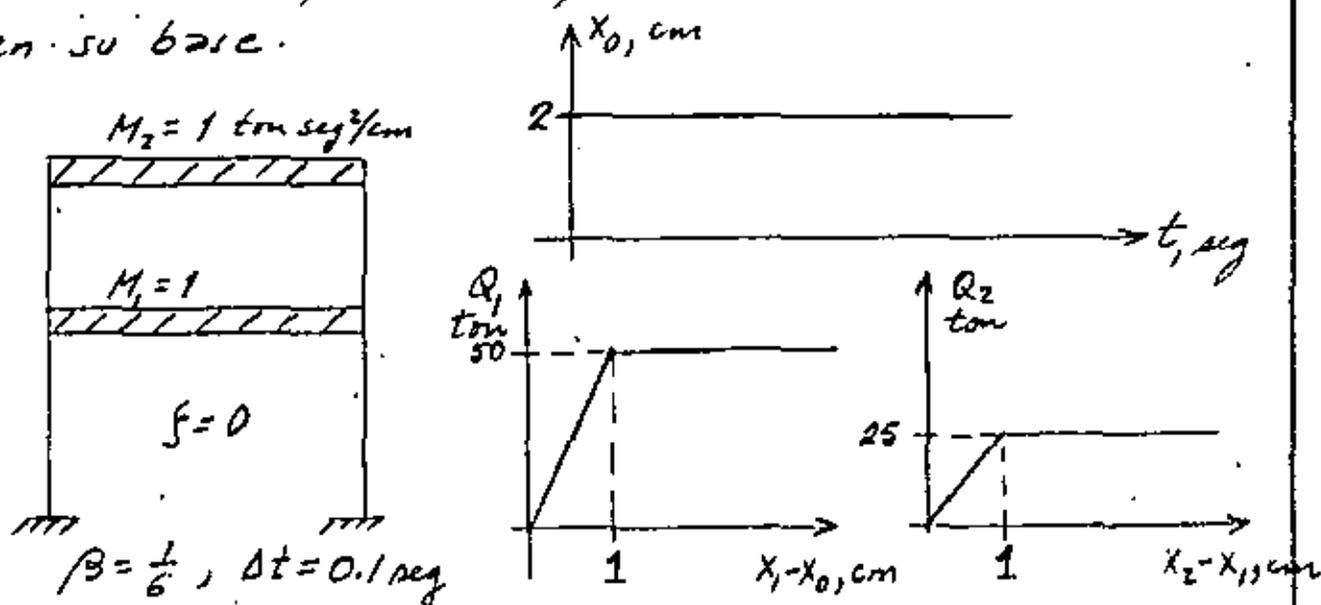
$\frac{L}{4H}$	$\frac{Q_0}{\text{ton}}$	$\frac{X}{\text{cm/seg}^2}$	$\frac{I}{\text{cm/seg}^2}$	$\frac{Z_1}{\text{cm}}$	$\frac{Z_2 - Z_1}{\text{cm}}$	$\frac{Q_0}{\text{ton}}$	$\frac{X}{\text{cm/seg}^2}$	$\frac{I}{\text{cm/seg}^2}$	$\frac{Z_1}{\text{cm}}$	$\frac{Z_2 - Z_1}{\text{cm}}$	$\frac{Z_2}{\text{cm}}$
2.2	-10.158	-5.200	0.481	3.0875	0.9275	-5.332	-5.460	0.174	3.0408	0.8808	2.16
2.2	-10.165	-5.078	0.493	3.0883	0.9283	-5.337	-5.332	0.187	3.0417	0.8817	2.16
2.2	-10.165	-5.083	0.493	3.0893	0.9293	-5.337	-5.337	0.188	3.0417	0.8817	2.16
2.4	-12.578	-6.900	-0.703	3.0731	1.1231	-6.386	-6.200	-0.988	2.9665	1.0465	1.92
2.4	-12.617	-6.289	-0.644	3.0772	1.1572	-6.383	-6.388	-0.987	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.309	-0.648	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.988	2.9652	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.306	-0.644	3.0770	1.1570	-6.383	-6.383	-0.988	2.9652	1.0452	1.92
2.6	-12.388	-6.200	-1.897	2.8223	1.1423	-3.958	-6.000	-2.224	2.6429	0.9629	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.898	2.8223	1.1423	-3.958	-3.958	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.898	2.8225	1.1425	-3.959	-3.959	-2.220	2.6432	0.9632	1.68
2.8	-9.573	-4.300	-2.945	2.3320	0.8920	-4.155	-4.100	-3.208	2.0925	0.8525	1.44
2.8	-9.540	-4.787	-2.994	2.3286	0.8886	-4.150	-4.155	-3.212	2.0921	0.8521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.8521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.8889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.8521	1.44
3.0	-4.687	-2.500	-3.719	1.6502	0.4502	-1.378	-3.400	-3.768	1.3853	0.1853	1.20
3.0	-4.698	-2.343	-3.703	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.0	-4.698	-2.349	-3.704	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3854	0.1854	1.20
3.2	1.090	0.600	-3.859	0.8845	-0.0755	1.748	1.700	-3.738	0.6255	-0.3345	0.96
3.2	1.104	0.545	-3.884	0.8826	-0.0772	1.748	1.748	-3.727	0.6258	-0.3341	0.96
3.2	1.103	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.103	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.4	6.608	3.600	-3.468	0.1377	-0.3823	4.508	4.700	-3.082	-0.0449	-0.7849	0.72
3.4	6.629	3.304	-3.438	0.1357	-0.3843	4.515	4.508	-3.101	-0.0462	-0.7862	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.3842	4.515	4.515	-3.100	-0.0461	-0.7861	0.72
3.4	6.628	3.314	-3.439	0.1358	-0.3842	4.515	4.515	-3.100	-0.0461	-0.7861	0.72
3.6	10.578	5.400	-2.568	-0.4718	-0.9518	6.251	6.900	-1.958	-0.5789	-1.0589	0.48
3.6	10.589	5.289	-2.578	-0.4725	-0.9525	6.277	6.251	-2.073	-0.5847	-1.0642	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.070	-0.5841	-1.0641	0.48
3.6	10.589	5.299	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.070	-0.5841	-1.0641	0.48
3.8	12.259	6.200	-1.427	-0.8760	-1.1160	6.612	6.800	-0.712	-0.8591	-1.0891	0.24
3.8	12.264	6.130	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.612	-0.731	-0.8603	-1.1003	0.24
3.8	12.264	6.132	-1.434	-0.8764	-1.1164	6.618	6.618	-0.730	-0.8603	-1.1003	0.24
4.0	11.323	5.600	-0.260	-1.0441	-1.0441	5.454	5.400	0.472	-0.8821	-0.8821	0
4.0	11.319	5.661	-0.253	-1.0437	-1.0437	5.453	5.454	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.0	11.319	5.660	-0.253	-1.0437	-1.0437	5.453	5.453	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.2	10.705	5.350	0.846	-0.9836	-0.9836	5.330	5.300	1.549	-0.8689	-0.8689	0
4.2	10.705	5.352	0.846	-0.9836	-0.9836	5.329	5.330	1.552	-0.8689	-0.8689	0

DINAMICA ESTRUCTURAL

1

SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD CON
COMPORTAMIENTO INELASTICOMétodo β de Newmark. Ejemplo

Calcular mediante el método β de Newmark los desplazamientos máximos absolutos del 1º y 2º niveles de la estructura mostrada abajo, cuando es excitada por un desplazamiento súbito de 2 cm en su base.



$$\begin{array}{c} \textcircled{M_2} \leftarrow F = m_2 \ddot{x}_2 \\ \leftarrow Q_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow Q_2 \\ \textcircled{M_1} \leftarrow F = m_1 \ddot{x}_1 \\ \leftarrow Q_1 \end{array}$$

$$\underline{M} \ddot{\underline{X}} + \underline{Q} = 0$$

$$M_1 \ddot{x}_1 + Q_1 - Q_2 = 0$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + Q_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

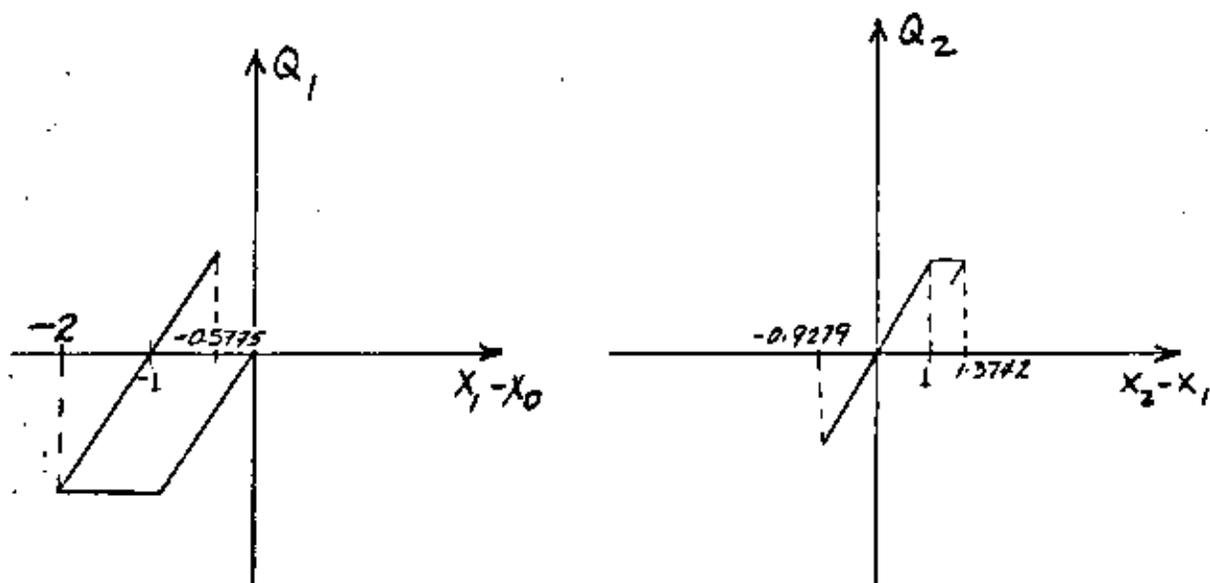
$$\ddot{x}_1 = \frac{Q_2 - Q_1}{M_1}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{Q_2}{M_2}$$

(1)

En vez de suponer \ddot{x}_1 y \ddot{x}_2 al inicio de cada ciclo, supondremos Q_1 y Q_2 y calcularemos ambas aceleraciones con base en ellas mediante la ec. (1). Las ecuaciones para la velocidad y el desplazamiento son:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + 0.05(\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \\ x_{i+1} &= x_i + 0.1\dot{x}_i + \frac{1}{600}(2\ddot{x}_i + \ddot{x}_{i+1}) \end{aligned} \right\} (2)$$



t seg	x_0 cm	Q_1 ton	Q_2 ton	\ddot{x}_1 cm/seg ²	\ddot{x}_2 cm/seg ²	\dot{x}_1 cm/seg	x_1 cm	\dot{x}_2 cm/seg	x_2 cm	$x_1 - x_0$ cm	$x_2 - x_1$ cm	$\dot{x}_1 - \dot{x}_0$ cm/seg	$\dot{x}_2 - \dot{x}_1$ cm/seg	OBSERVA- CIONES
0.0	2.0	-50.00	0.00	50.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2.00	0.00	0.00	0.00	
0.1	2.0	-37.500	-6.25	37.5	6.250	4.375	0.229	0.3125	0.0104	-1.771	-0.2185	4.375	-4.063	
		-38.550	-5.463	32.3	5.463	4.115	0.2205	0.2731	0.0091	-1.7795	-0.2113	4.115	-3.842	
		-38.975	-5.283	33.5125	5.283	4.1756	0.2225	0.2641	0.0088	-1.7774	-0.2136	4.1756	-3.9114	
		-38.875	-5.34	33.593	5.340	4.1796	0.2226	0.2670	0.0089	-1.7773	-0.2137	4.1796	-3.9126	
		-38.870	-5.343	33.530	5.3425	4.1765	0.2225	0.2671	0.0089	-1.7774	-0.2135	4.1765	-3.9093	
0.2	0.2	-20.00	-10.00	10.00	10.00	6.353	0.7685	1.0342	0.070	-1.2314	-0.6984	6.353	-5.3188	
		-11.575	-17.46	1.575	17.46	5.9317	0.7545	1.4072	0.083	-1.2455	-0.6919	5.9317	-4.5244	
		-12.275	-16.7975	-5.185	16.7975	5.5937	0.7432	1.3741	0.0814		-0.6617			
		-12.84	-16.5446	-3.9575	16.5446	5.6551	0.7453	1.3614	0.0809		-0.6643			
		-12.735	-16.6076	-3.8096	16.6076	5.6625	0.7455	1.3646	0.0810		-0.6644			
		-12.7216	-16.6100	-3.886	16.6100	5.6587	0.7454	1.3647	0.0811	-1.2546	-0.6642	5.6587	-4.294	
0.3	2.0	10.000	-25.00	-35.00	25.00	3.7144	1.2399	3.4452	0.3146		-0.9252			
		11.995	-23.1324	-36.995	23.132	3.6146	1.2366	3.3518	0.3114		-0.9251			
		11.83	-23.1277	-34.963	23.127	3.7162	1.2400	3.3510	0.3114		-0.9285			
		12.00	-23.2129	-35.13	23.213	3.7080	1.2397	3.3558	0.3116		-0.9280			
		11.9885	-23.2018	-35.202	23.202	3.7043	1.2396	3.3552	0.3116	-0.7604	-0.9279	3.7043	-0.3491	
0.4	2.0	25.000	-15.00	-40.000	15.000	-0.1193	1.4219	5.3067	0.7520		-0.6698			
		21.095	-16.745	-36.095	16.7457	0.0563	1.4272	5.3853	0.7544		-0.6727			
		21.360	-16.8193	-38.1057	16.8193	-0.0341	1.4245	5.3886	0.7545		-0.6699			
		21.225	-16.7493	-38.0443	16.7493	-0.0313	1.4245	5.3854	0.7544	-0.5755	-0.6700	-0.0313	5.4067	*
0.5	2.0	15.00												
		12.64	-10.00	-25.0	10.00	-3.1835	1.2528	6.7228	1.3654		0.1126			
		12.87	2.8159	-22.64	-2.8159	-3.0655	1.2568	6.0818	1.3440		0.0872			
		13.89	2.1819	-10.024	-2.1819	-2.4347	1.2778	6.1137	1.3451		0.0673			
		13.75	1.6833	-11.7081	-1.683	-2.5189	1.2750	6.1387	1.3459		0.0709			
		13.72	1.7853	-11.9459	-1.7853	-2.5308	1.2746	6.1336	1.3457	-0.7254	0.0741	-2.5308	8.6644	
0.6	2.0	0.000	15.000	15.000	-15.000	-1.6915	1.0524	5.2943	1.8745		0.8221			
		2.62	20.550	12.38	-20.55	-2.5090	1.0023	5.0168	1.9188		0.9165			
		0.115	22.9139	20.435	-22.9189	-2.1063	1.0157	4.8986	1.9149		0.8992			
		0.785	22.4804	22.1289	-22.4804	-1.9866	1.0185	4.9203	1.9156		0.8971			
		0.925	22.4285	21.5554	-22.4285	-2.050	1.0176	4.9229	1.9157		0.8987			
		0.88	22.4532	21.5485	-22.4532	-2.050	1.0176	4.9216	1.9156	-0.9824	0.8990	-2.050	6.9716	
0.615	2.00	-3.00	25.000	28.000	-25.000	-1.6905	0.9894	4.5657	1.9867		0.9973			
		-0.53	24.9334	25.53	-24.9334	-1.6967	0.9894	4.5659	1.9867	-1.0106	0.9973	-1.6967	6.2626	**

* $x_1 - x_0 = x_1$ SE HACE CASI CERO, CAMBIO DE POSITIVO A NEGATIVO. $|x_1|_{\text{máx}} = 1.4245$ cm

** CAMBIO DE RIGIDEZ EN EL 2o. PISO $x_2 - x_1 = 1.00$, $Q_2 = 25$

t seg	x_0 cm	Q_1 ton	Q_2 ton	\ddot{x}_1 cm/seg ²	\ddot{x}_2 cm/seg ²	\dot{x}_1 cm/seg	x_1 cm	\dot{x}_2 cm/seg	x_2 cm	$x_1 - x_0$ cm	$x_2 - x_1$ cm	$\dot{x}_1 - \dot{x}_0$ cm/seg	$\dot{x}_2 - \dot{x}_1$ cm/seg	OBSERVA- CIONES
0.70	2.00	-10.000	25.000	35.000	-25.000	0.8696	0.9484	2.441	2.285		1.3356			
		-2.580	25.000	27.580	-25.000	0.5728	0.9405	2.441	2.285		1.3445			
		-2.975	25.000	27.975	-25.000	0.5886	0.9409	2.441	2.285		1.3441			
		-2.955	25.000	27.955	-25.000	0.5878	0.9409	2.441	2.285	-1.0591	1.3441	0.5878	1.8532	
0.735	2.00	-1.000	25.000	26.000	-25.000	1.5368	0.98065	1.565	2.3549					
		-0.9675	25.000	25.9675	-25.000	1.5367	0.98065	1.566	2.3549					
		-0.9671	25.000	25.9671	-25.000	1.5367	0.98065	1.566	2.3549	-1.1093	1.3742	1.5367	0.0293	
0.80	2.00	5.000	20.000	15.000	-20.000	2.8823	1.1282	0.09128	2.4068		1.2756			
		6.365	22.575	16.245	-22.595	2.9196	1.0449	0.01343	2.4053		1.3604			
		6.570	22.4619	18.085	-22.469	2.9748	1.1300	0.0173	2.4053		1.2753			
		6.435	22.5613	16.0948	-22.5613	2.9151	1.1288	0.0144	2.4053	-0.8712	1.2765	2.9151	-2.9007	**

** x_2 SE HACE CASI CERO
 $|x_2|_{\text{máx}} = 2.4053 \text{ cm}$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

METODOS DE STODOLOA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA
EL CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980

MÉTODOS DE STODOLA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA EL CÁLCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

Enrique del Valle C *

Para calcular las frecuencias y configuraciones modales de estructuras idealizadas como una serie de masas unidas por resortes, sin amortiguamiento, en vibración libre, se puede suponer que cada masa se mueve en movimiento armónico simple definido por $X=X_0 \cos wt$ o $X=X_0 \sin wt$ donde X_0 define la amplitud y w la frecuencia circular del movimiento

La aceleración estará dada entonces: por $\ddot{X}=-w^2 X_0 \cos wt$ ó $\ddot{X}=-w^2 X_0 \sin wt = -w^2 X$ y las fuerzas de inercia a que estará sometida cada masa, de acuerdo con la segunda ley de Newton, serán $F_i = m\ddot{X} = -mw^2 X$

Por otro lado, la fuerza restitutiva que aparece en cada resorte estará dada por $F_e=RX$, donde R es la rigidez de entrepiso, que podemos definir como la fuerza cortante que es necesario aplicar para producir un desplazamiento unitario entre dos niveles consecutivos: $R = V/\Delta X$, para $\Delta X = 1$

Vemos entonces, que las fuerzas a que se verá sujeta cada masa dependerán de X y de w^2 únicamente.

Por otro lado, sabemos que para conocer un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la frecuencia w (o período T) como la configuración modal relativa, y que si la estructura está vibrando en un modo dado, la frecuencia del movimiento de cada masa será la misma.

Tomando en cuenta lo anterior, se pueden emplear dos métodos numéricos para el cálculo de las frecuencias y configuraciones modales.

* Profesor Titular, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM

El método propuesto por Stodola-Vianello-Newmark, consiste en:

1. Suponer una configuración deformada de la estructura:

$$X_{i\text{supuesta}}$$

2. Valuar las fuerzas de inercia asociadas a esa configuración $F_i = -m_i w^2 X_i$, dejando w^2 como factor común cuyo valor no conocemos.
3. Valuar la fuerza cortante en la estructura, como la suma acumulativa de las fuerzas de inercia de arriba abajo del edificio. $V_i = \sum_{j=i}^1 F_j$ (función de w^2)
4. Calcular los incrementos de deformación correspondientes a las fuerzas cortantes.

$$\Delta X_i = \frac{V_i}{R_i} \quad (\text{función de } w^2).$$

5. Obtener la configuración calculada de la estructura como la suma acumulativa de los incrementos de deformación, de abajo hacia arriba.

$$X_{i\text{calc}} = \sum_{i=1}^n \Delta X_i = \text{coef.} \cdot w^2$$

Esto nos dará un coeficiente multiplicado por w^2 para cada masa.

6. Si la estructura está vibrando en un modo la configuración calculada será proporcional a la supuesta, y el factor de proporcionalidad será w^2 . Esto es, para cada masa podremos calcular

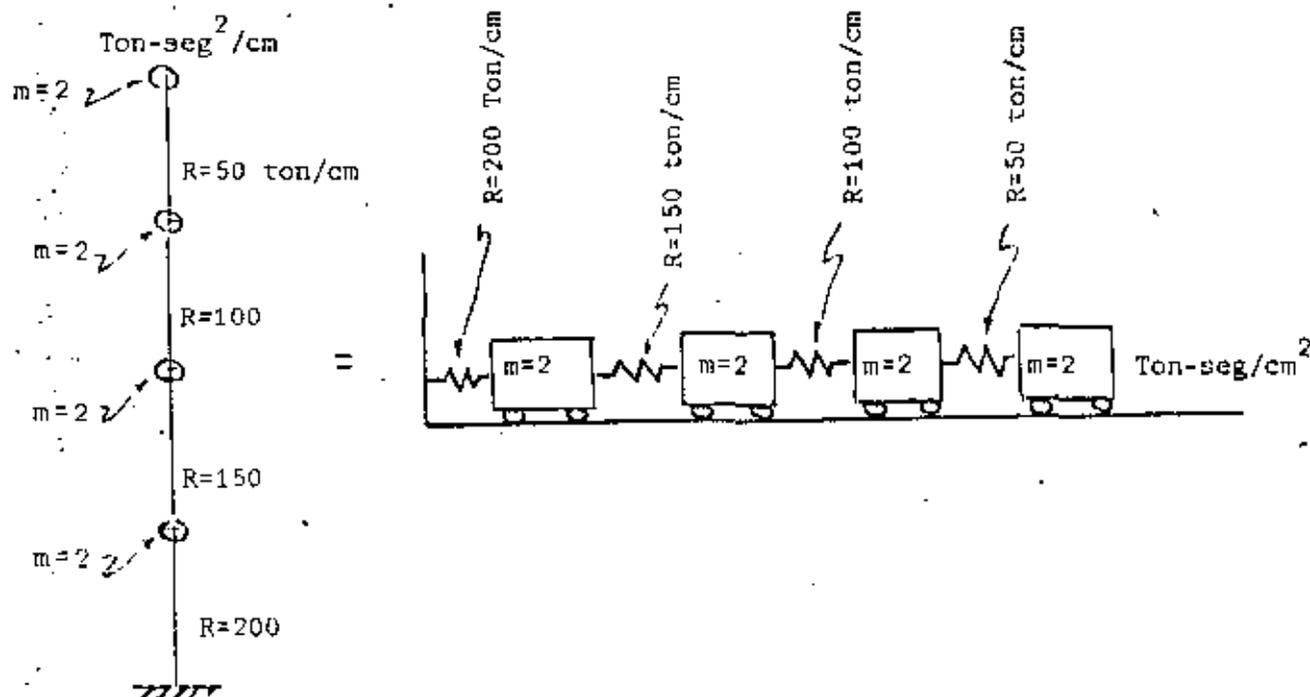
$$w^2 = \frac{X_{\text{supuesta}}}{\text{Coef. de } X_{\text{calc}}}$$

En general, los valores de w^2 calculados para cada masa,

no serán iguales en el primer ciclo, pero el método es de rápida convergencia si se usa como nueva configuración supuesta la obtenida al final de cada ciclo, de preferencia normalizándola, esto es, haciendo que la deformación de una de las masas, por ejemplo la primera, tenga siempre el mismo valor, con objeto de observar como se modifica la configuración relativa después de cada ciclo. Los valores de w^2 obtenidos en cada ciclo nos dan también un intervalo de valores que se va cerrando hasta que se obtiene finalmente los mismos valores para todas las masas.

El método descrito anteriormente converge siempre hacia el modo más bajo que esté presente en la configuración supuesta, y dado que al suponer una configuración cualquiera ésta estará formada por una combinación lineal de todos los modos posibles, el modo más bajo será el primero o fundamental. Más adelante se indica como hacer para calcular modos superiores.

Ejemplo. Calcular la frecuencia y configuración modal del primer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático siguiente.



Para realizar los pasos antes indicados conviene usar una tabulación como la siguiente:

1er. Ciclo

Nivel	$\frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$ m	$\frac{\text{ton}}{\text{cm}}$ R	* X_{sup} cm	$F_i = mw^2 X$	V	$\Delta X = \frac{V}{R}$	X_{calc}	** w^2	*** X_{sup}
4	2	50	4	$8w^2$	$8w^2$	$0.16w^2$	$0.52w^2$	$7.692 = \frac{4}{0.52}$	5.2
3	2	100	3	$6w^2$	$14w^2$	$0.14w^2$	$0.36w^2$	$8.333 = \frac{3}{0.36}$	3.6
2	2	150	2	$4w^2$	$18w^2$	$0.12w^2$	$0.22w^2$	$9.091 = \frac{2}{0.22}$	2.2
1	2	200	1	$2w^2$	$20w^2$	$0.1w^2$	$0.1w^2$	$10.0 = \frac{1}{0.1}$	1
0							0		

Nótese que los valores R, V y ΔX están defasados, pues corresponden al entrepiso.

* Para iniciar el cálculo puede usarse cualquier valor de X. En general, el método convergirá más rápido entre más acertada sea la configuración supuesta, pero si se supone por ejemplo una configuración que se parezca a un segundo, tercero o cuarto modo, de cualquier manera, al término de algunos ciclos más, llegaremos al primer modo.

** Nótese que en este caso, el valor de w^2 estará comprendido entre $7.692 \frac{1}{\text{seg}^2}$ y $10 \frac{1}{\text{seg}^2}$

*** En un segundo ciclo, usaremos como nueva configuración supuesta la obtenida al final del primer ciclo normalizada de tal modo que la deformación del primer nivel, sea unitaria,

esto es, dividiendo la configuración calculada entre $0.1w^2$ en cada nivel.

2o. Ciclo

Nivel	m	R	X_{sup}	F_i	V	ΔX	X	w^2	X_{sup}
4	2	50	5.2	$10.4w^2$	$10.4w^2$	$0.208w^2$	$0.651w^2$	7.988	5.425
3	2	100	3.6	$7.2w^2$	$17.6w^2$	$0.176w^2$	$0.443w^2$	8.126	3.692
2	2	150	2.2	$4.4w^2$	$22w^2$	$0.147w^2$	$0.267w^2$	8.240	2.225
1	2	200	1.0	$2.0w^2$	$24w^2$	$0.120w^2$	$0.120w^2$	8.333	1.0
0							0		

Obsérvese que el intervalo de variación de w^2 se redujo a 7.988 y 8.333 y que las variaciones en la configuración modal fueron mucho menores que las que tuvo el primer ciclo.

Tomando como base de partida nuevamente la configuración calculada, en un tercer ciclo se tiene:

Nivel	m	R	X_{sup}	F	V	ΔX	X	w^2	X_i
4	2	50	5.425	$10.85w^2$	$10.85w^2$	$0.2170w^2$	$0.6739w^2$	8.050	5.461
3	2	100	3.692	$7.384w^2$	$18.234w^2$	$0.1823w^2$	$0.4569w^2$	8.081	3.703
2	2	150	2.225	$4.45w^2$	$22.684w^2$	$0.1512w^2$	$0.2746w^2$	8.103	2.225
1	2	200	1.0	$2.0w^2$	$24.684w^2$	$0.1234w^2$	$0.1234w^2$	8.104	1.00
0							0		

y finalmente, en un cuarto ciclo, la aproximación se considera suficiente:

Ni- vel	m	R	X _{sup}	F	V	ΔX	X	w ²	X _i
4.	2	50	5.461	10.922w ²	10.922w ²	0.2184w ²	0.6775w ²	8.061	5.468
3	2	100	3.703	7.406w ²	18.328w ²	0.1833w ²	0.4591w ²	8.066	3.705
2	2	150	2.225	4.45w ²	22.778w ²	0.1519w ²	0.2758w ²	8.067	2.226
1	2	200	1.00	2.00w ²	24.778w ²	0.1239w ²	0.1239w ²	8.071	1.00
0		Σ	12.389				Σ = 1.5363w ²	8.064w ²	

* El valor final de w² lo obtenemos con más precisión dividiendo la suma de X_{sup} entre la suma de coeficientes de X_{calc}. Esto es más preciso que promediar los valores de w² de cada nivel

$$w = \sqrt{8.064} = 2.8397; \quad T = \frac{2\pi}{w} = \frac{6.2832}{2.8397} = 2.213 \text{ seg.}$$

Cálculo de modos superiores empleando este método

Como se indicó antes, el método converge al modo más bajo presente en la configuración supuesta, y al suponer una combinación cualquiera ésta estará constituida por una combinación lineal de los distintos modos de vibrar:

$X_{\text{sup}} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4}$, donde X_{i1} a X_{i4} son las configuraciones modales y C_i son coeficientes de participación.

Si queremos calcular el segundo modo de vibrar empleando este método, tendremos que quitar a la configuración supuesta la participación del primer modo: $C_1 X_{i1}$, para lo cual necesitamos conocer X_{i1} y C_1 . X_{i1} la calculamos como se indicó antes y C_1 lo podemos calcular recurriendo a la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración que indica que $\sum m_i X_{in} X_{im} = 0$ si $n \neq m$, donde X_{in} y

X_{im} son configuraciones modales.

Si multiplicamos la expresión anterior de X_{sup} por $m_i X_{i1}$ y sumamos para todas las masas, considerando que los coeficientes de participación son constantes y pueden salir de la sumatoria, tendremos :

$$\sum m_i X_{i1} X_{sup} = C_1 \sum m_i X_{i1}^2 + C_2 \sum m_i X_{i1} X_{i2} + C_3 \sum m_i X_{i1} X_{i3} + \dots$$

donde los términos que multiplican a C_2 , C_3 , etc. son nulos por la propiedad de ortogonalidad de los modos, quedando entonces

$$C_1 = \frac{\sum m_i X_{i1} X_{sup}}{\sum m_i X_{i1}^2}$$

Esta expresión es válida para cualquier modo n .

Por tanto, si queremos calcular el segundo modo de vibrar, supondremos una configuración que se parezca a este modo, es decir, que tenga un punto de deflexión nula, calcularemos el valor de C_1 con la expresión anterior y restaremos a la configuración supuesta para el segundo modo la participación del primer modo $C_1 X_{i1}$, lo que da por resultado una nueva configuración supuesta para el segundo modo en la que el modo más bajo presente es el segundo y por lo tanto, al aplicar el método habrá convergencia hacia este modo. A la operación antes descrita se le llama "limpia" de modos.

Si quisiéramos calcular el tercer modo de vibrar, tendríamos que conocer de antemano las configuraciones correctas de primero y segundo modo, y suponer una configuración que se pareciera al tercer modo, (que tenga dos puntos de deflexión nula); calcularíamos dos coeficientes de participación C_1 y C_2 , correspondientes a los modos primero y segundo, en la configuración supuesta y la limpiaríamos para que el modo más bajo presente en ella sea el tercero y el método converja a este modo.

Esto es :

$$X_{i3sup} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

$$C_1 = \frac{\sum m X_{i1} X_{i3sup}}{\sum m X_{i1}^2} ; C_2 = \frac{\sum m X_{i2} X_{i3sup}}{\sum m X_{i2}^2}$$

$$\bar{X}_{i3sup} = X_{i3sup} - C_1 X_{i1} - C_2 X_{i2} = C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

De manera semejante se procede para calcular otros modos superiores.

En la práctica, y debido a errores numéricos o de aproximación que van acarreándose no basta con una sola limpieza. Para lograr convergencia adecuada da buen resultado limpiar la configuración calculada al cabo de cada ciclo, antes de calcular los valores de w^2 . Esa misma configuración limpiada, normalizada, nos sirve como nueva configuración para un nuevo ciclo. Es conveniente llevar cuando menos tres cifras significativas en los cálculos.

Para fijar ideas, calculemos tres ciclos del segundo modo de vibrar de la estructura para la cual calculamos anteriormente el primer modo.

R	X_{i1}	mX_{i1}	mX_{i1}^2	X_{i2sup}	$mX_{i1} X_{i2sup}$	$-C_1 X_{i1}$	\bar{X}_{i2}	$\frac{F_{i2}}{m\bar{X}_{i2} w^2}$	V	ΔX	X Calc.
50	5.468	10.936	59.798	-1.0	-10.936	-0.054	-1.054	$-2.108w^2$	$-2.108w^2$	$-0.0422w^2$	$-0.0334w^2$
100	3.705	7.41	27.454	0	0	-0.036	-0.036	$-0.072w^2$	$-2.180w^2$	$-0.0218w^2$	$0.0088w^2$
150	2.226	4.452	9.910	2.0	9.910	-0.022	1.978	$3.956w^2$	$1.776w^2$	$0.0118w^2$	$0.0306w^2$
200	1.00	2.0	2.0	1.0	2.0	-0.010	0.990	$1.980w^2$	$3.756w^2$	$0.0188w^2$	$0.0188w^2$
		$\Sigma = 99.162$			$\Sigma = 0.974$						

DATOS

$$C_1 = \frac{0.974}{99.162} = 0.00982$$

configuración supuesta puede ser cualquiera, pero desde luego es conveniente que se parezca a un segundo modo, esto es, que tenga un cambio de signo en la configuración modal.

$N_{i,rel}$	$m_{i1} X_{calc}$	$-C_1 X_{i1}$	\bar{X}_{2calc}	w^2	\bar{X}_{i2sup}^{**}	$m\bar{X}_{i2sup} w^2$	v	ΔX	X_{cal}
4	$-0.3653w^2$	$+0.00696w^2$	$-0.02644w^2$	39.86	-1.3042	$-2.6084w^2$	$-2.6084w^2$	$-0.05217w^2$	$-0.0314w^2$
3	$0.0652w^2$	$0.00472w^2$	$0.01352w^2$	-2.66	0.6669	$1.3338w^2$	$-1.2746w^2$	$-0.01275w^2$	$0.02077w^2$
2	$0.1362w^2$	$0.00284w^2$	$0.03344w^2$	59.15	1.6495	$3.2990w^2$	$2.0244w^2$	$0.01350w^2$	$0.03352w^2$
1	$.0376w^2$	$0.00127w^2$	$0.02007w^2$	49.33	0.990	$1.9800w^2$	$4.0044w^2$	$0.02002w^2$	$0.02002w^2$
Σ	$-0.1263w^2$								

$$C_1 = \frac{-0.1263w^2}{99.162} = -0.0012736w^2$$

** Normalizando con respecto a 0.99 en el primer nivel, para comparar la evolución de la configuración.

i_{rel}	$mX_{i1} X_{cal}$	$-C_1 X_{i1}$	\bar{X}_{2cal}	w^{2***}	\bar{X}_{i2sup}	$m\bar{X}_{i2sup} w^2$	v	ΔX
4	$-0.34339w^2$	$+0.000012w^2$	$-0.031388w^2$	41.55	-1.5520	$-3.104w^2$	$-3.104w^2$	$-0.06208w^2$
3	$0.15391w^2$	$+0.000008w^2$	$0.020778w^2$	32.10	1.0274	$2.0548w^2$	$-1.0492w^2$	$-0.01049w^2$
2	$0.14923w^2$	$+0.000005w^2$	$0.033525w^2$	49.20	1.6577	$3.3154w^2$	$2.2662w^2$	$0.01511w^2$
1	$0.04004w^2$	$+0.000002w^2$	$0.020022w^2$	49.45	0.99	$1.98w^2$	$4.2462w^2$	$0.02123w^2$

$$\Sigma = -0.00021w^2$$

$$\Sigma = 2.1231$$

$$|\Sigma| = 5.2271$$

$$C_1 = \frac{-0.00021w^2}{99.162} = -0.0000021177w^2$$

*** Nótese que el intervalo de w^2 queda comprendido entre 32.1 y 49.49 y que el ajuste en la curva ocurre casi entre las dos últimas masas. Obsérvese que la corrección al limpiar es muy pequeña.

Nivel	X_{calc}	$mX_{i1} X_{calc}$	$-C_1 X_{i1}$	\bar{X}_{calc}	**** w^2	\bar{X}_{isup}
4	$-0.03623w^2$	$-0.39621w^2$	+0.000023	$-0.036207w^2$	42.86	-1.705
3	$0.02585w^2$	$0.19155w^2$	+0.000015	$0.025865w^2$	39.72	1.206
2	$0.03634w^2$	$0.16179w^2$	+0.000009	$0.036349w^2$	45.61	1.695
1	$0.02123w^2$	$0.04246w^2$	+0.000004	$0.021234w^2$	46.62	0.99
0	0	$\Sigma -0.00041w^2$		$\Sigma 0.047241w^2$	prom. 43.70 44.94	

$$\Sigma = 0.119655w^2 \quad 43.68$$

(vals. abs.)

$$C_1 = \frac{-0.00041w^2}{99.162} = -0.0000041w^2$$

**** El intervalo de variación de w^2 se ha reducido a 39.72 - 46.62 (dif = 6.9) y los ajustes en la curva son menores. En uno o dos ciclos más se llegaría al valor correcto de w^2 y X_1 . Nótese que para estimar un valor de w^2 procediendo como se indicó anteriormente podemos hacer las sumas de \bar{X}_{sup} y de los coeficientes de \bar{X}_{calc} tomando valores absolutos o tomando en cuenta el signo correspondiente. La variación que se obtiene en este caso es de 3% aprox. Si sacamos el promedio de w^2 se obtiene un valor casi igual al obtenido con las sumas de valores absolutos, que es más correcto.

Si no hubiéramos hecho la limpia en ninguno de los ciclos, al cabo de 8 habríamos llegado a la configuración del primer modo (en vez de 4 ciclos que se necesitaron cuando la configuración supuesta se parecía a la del primer modo).

Aplicación del Método de Stodola-Vianello-Newmark Para Estructuras de Flexión

Como se verá más adelante, cuando las trabes de los marcos son muy flexibles en comparación con las columnas, o cuando las fuerzas laterales son resistidas por muros que trabajan esencialmente a flexión, la rigidez de entrepiso no es independiente de la distribución de fuerzas a que esté sometida la estructura y por tanto no puede suponerse constante para el cálculo de los distintos modos de vibrar. En general, la pseudorigidez equivalente que se obtendría para un segundo modo será mayor que la correspondiente al primer modo, pues los efectos de flexión de conjunto se reducen considerablemente al no tener todas las fuerzas actuando en el mismo sentido. Lo mismo podría decirse para modos superiores (ref. 1).

En esos casos, las propiedades elástico geométricas de la estructura no quedarán definidas por rigideces de entrepiso sino por la variación de los productos EI y GA con los cuales se podrán calcular las deformaciones debidas a flexión y a fuerza cortante respectivamente.

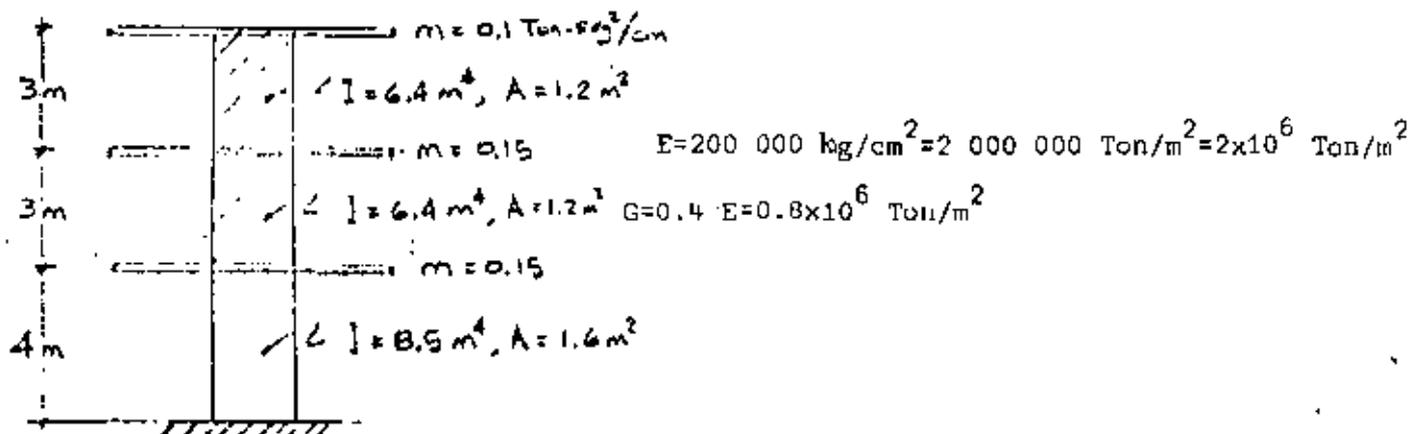
Para calcular las deformaciones por flexión es conveniente el empleo de los teoremas de la viga conjugada, que es, para el caso de un voladizo, otro voladizo empotrado en el extremo opuesto cargado con el diagrama de momentos entre EI , y en el cual los momentos flexionantes corresponden a las deformaciones de la viga real.

Las deformaciones por cortante, que en el caso de estructuras a base de muros pueden ser importantes en comparación con las de flexión, sobre todo en los niveles inferiores, se calculan mediante la expresión $\Delta X_{V_i} = \frac{V_i h_i}{A_i G}$, donde ΔX_{V_i} es el incremento de deformación por

cortante entre dos niveles consecutivos, V_i , h_i y A_i son, respectivamente la fuerza cortante, la altura y el área efectiva de cortante entre esos mismos niveles y G es el módulo de elasticidad al cortante del material de la estructura.

Para calcular los modos de vibración, se supone una configuración modal, se calculan las fuerzas de inercia $F_i = m_i w^2 X_i$ asociadas a la configuración y las fuerzas cortantes correspondientes y a partir de ellas se valúan los incrementos de momento de cada entrepiso y los momentos de volteo acumulados de arriba hacia abajo, los cuales se dividen entre EI (habrá dos valores de M/EI en un mismo nivel en los casos en que haya cambio de sección de los muros). La integración numérica del diagrama de M/EI nos permitirá transformar ese diagrama en una serie de cargas concentradas equivalentes a él aplicadas en los distintos niveles con los cuales es muy fácil calcular los cortantes equivalentes correspondientes a cada entrepiso y los incrementos de momento flexionante en la viga conjugada que serán iguales a los incrementos de deformación por flexión entre dos niveles consecutivos (es el equivalente de $\Delta X = V/R$ del caso visto anteriormente). A estos incrementos de deformación por flexión se sumarán los correspondientes a la deformación por cortante y con esa suma se podrá calcular la nueva configuración, que será como antes función de w^2 y de donde podremos despejar este valor y en caso de que no sea igual para todas las masas volver a hacer otro ciclo tomando como configuración de partida la encontrada anteriormente normalizándola con respecto a una de las masas para poder comparar la evolución de las configuraciones de cada ciclo.

Para fijar ideas, a continuación se presenta un ejemplo de análisis de una estructura en que las fuerzas laterales son resistidas por muros, cuyos valores de I y A son los indicados en la figura siguiente:



Ni	$\frac{T \cdot \text{seg}^2}{\text{cm}}$ m	m^4 I	$\text{Ton} \cdot \text{m}^2$ EI	m^2 A	Ton GA	m h	cm X_{sup}	$\text{m} X_{\text{sup}}^2$ w^2	Ton V	$\Delta M = Vh$	Ton-m M	$\frac{1}{m}$ $\frac{M}{EI}$
3	0.10	6.4	12.8×10^6	1.2	0.96×10^6	3	5.0	$0.50 w^2$	$0.5 w^2$	$1.5 w^2$	0	0
2	0.15	6.4	12.8×10^6	1.2	0.96×10^6	3	2.5	$0.38 w^2$	$0.88 w^2$	$2.64 w^2$	$1.5 w^2$	$0.1172 \times 10^{-6} w^2$
1	0.15	8.5	17.0×10^6	1.6	1.28×10^6	4	1	$0.15 w^2$	$1.03 w^2$	$4.12 w^2$	$4.14 w^2$	$0.3234 \times 10^{-6} w^2$ $0.2435 \times 10^{-6} w^2$
0											$8.26 w^2$	$0.4859 \times 10^{-6} w^2$

Ejemplo de cálculo de las concentraciones equivalentes al diagrama de M/EI

Para el nivel 3

$$P_{\text{eq}} = \frac{3}{6} (2 \times 0 + 0.1172 \times 10^{-6} w^2) = 0.0586 \times 10^{-6} w^2$$

(Ver aclaración al pie de la tabla de la página siguiente)

Método de Holzer

Como se indicó anteriormente, para conocer completamente un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la configuración modal como la frecuencia del modo. Hemos visto que en el método de Stodola-Vianello-Newmark se supone una configuración relativa y a partir de ella se calcula el valor de w^2 . Holzer procede exactamente al revés, esto es, supone la frecuencia y a partir de ella se calcula la configuración relativa de abajo hacia arriba de la estructura. Dado que la configuración es relativa se puede suponer también la deformación de la primera masa (por consiguiente el incremento de deformación entre la base y la primera masa.) El método tiene las siguientes etapas :

Los datos son las masas y las rigideces de entrepiso, igual que antes.

1. Suponer un valor de w^2
2. Obtener los valores de $m w_{sup}^2$ para cada masa
3. Suponer la deformación del primer nivel: X_1 ; conviene suponer un valor unitario. Esto equivale también, como ya se dijo a suponer ΔX_1 :
4. Calcular la fuerza cortante en la base de la estructura, (primer entrepiso) que será por definición de rigidez de entrepiso

$$V_1 = R_1 \Delta X_1 \quad \text{si} \quad \Delta X_1 = 1, \quad V_1 = R_1$$

5. Calcular la fuerza de inercia asociada a la masa del primer nivel:

$$F_1 = m_1 w_{sup}^2 X_1$$

6. Por definición de fuerza cortante, como la suma acumulativa de las fuerzas arriba de un cierto nivel, podremos calcular la cortante del segundo entrepiso restando a la cortante en la base la fuerza de inercia del primer nivel, esto es

$$V_2 = V_1 - F_1$$

7. Conocida la fuerza cortante en el entrepiso 2 podemos calcular el incremento de deformación en ese entrepiso dividiendo la cortante entre la rigidez de entrepiso $\Delta X_2 = \frac{V_2}{R_2}$
8. Sumando ΔX_2 a la deformación del primer nivel obtendremos la deformación del segundo nivel $X_2 = X_1 + \Delta X_2$ / y podemos repetir los pasos 5 a 8 para todas las masas hasta llegar al extremo superior de la estructura.

Si la frecuencia supuesta corresponde a un modo de vibrar, obtendremos que la fuerza de inercia del último nivel es igual a la fuerza cortante del entrepiso correspondiente (por equilibrio dinámico). Si la frecuencia supuesta no es la correspondiente a un modo de vibrar, se obtendrá una diferencia entre el valor de la fuerza de inercia y el de la fuerza cortante en el extremo de la estructura. En este caso el método no es convergente, pero si hacemos otro ciclo con otro valor de w^2 relativamente, cercano al anterior, encontraremos otra diferencia y podremos trazar una gráfica que nos relacione las frecuencias supuestas (abscisas) con las diferencias entre fuerza de inercia y fuerza cortante en el extremo superior de la estructura (ordenadas). Una vez que tenemos dos puntos de esa gráfica podremos buscar un valor de w^2 supuesto en la intersección

con el eje de las abscisas de la línea que une los puntos antes obtenidos, o su prolongación si ambas diferencias tienen el mismo signo. Con este tercer valor supuesto para w^2 seguramente obtendremos otra diferencia, menor que las anteriores, que nos definirá un tercer punto en la gráfica. Podremos entonces trazar una curva entre los tres puntos y definir así un nuevo valor de w^2 que seguramente estará muy próximo a la frecuencia correcta de uno de los modos de vibrar de la estructura.

Cuando ya se está cerca del valor correcto, se puede mejorar el valor supuesto de w^2 empleando el cociente de Crandall siguiente:

$$\bar{w}^2 = w^2 \frac{\sum V \cdot \Delta X}{\sum F X}$$

donde \bar{w}^2 es el valor que debemos suponer en el ciclo siguiente.

El método presentado sirve para calcular cualquier modo natural de vibración teniendo como datos las masas y las rigideces de entrepiso de la estructura. El modo de que se trate se obtendrá de la inspección de la configuración modal, tomando en cuenta que en el primero todas las deformaciones tienen el mismo signo, en el segundo hay un cambio de signo, en el tercero dos cambios de signo y así sucesivamente.

Si se conoce la frecuencia del primer modo de vibrar (por haberlo calculado empleando el método Stodola-Vianello-Newmark, por ejemplo), se puede estimar gruesamente el valor de las frecuencias de los modos superiores empleando la relación $w_2^2 \approx 9w_1^2$; $w_3^2 \approx 25w_1^2$, etc.

(Esta aproximación puede ser demasiado burda dependiendo de los valores relativos de las masas y rigideces en cada caso particular, pero sirve como orientación).

Ejemplo:

Calculemos el segundo modo de vibrar de la estructura que se usó en el método de Stodola-Vianello-Newmark, suponiendo

$$w_2^2 = 9w_1^2 = 9 \times 8 = 72 \frac{1}{\text{seg}^2}$$

Usaremos la tabulación siguiente :

Nivel	m	R	mw_{sup}^2	ΔX	X *	F	V	
4	2	50	144	-2.707	-2.751	-396.1	-135.4	Dif = 260.7
3	2	100	144	-1.417	-0.044	- 6.3	-141.7	
2	2	150	144	0.373	1.373	-197.7	56	
1	2	200	144	1.0	1.0	144	200	

$w_{\text{sup}}^2 = 72$

* Obsérvese que aunque la diferencia encontrada es fuerte, la configuración se parece a un segundo modo, pues tiene un cambio de signo.

Usando un nuevo valor de w_{sup}^2 de $50 \cdot 1/\text{seg}^2$, tendremos

Nivel	m	R	mw^2	ΔX	X	F	V	
4	2	50	100	-3.334	-2.334	-233.4	-166.7	Dif. 66.7
3	2	100	100	-0.667	1.00	100	- 66.7	
2	2	150	100	0.667	1.667	166.7	100	
1	2	200	100	1.0	1.0	100	200	

Trazando la gráfica w_{sup}^2 -diferencias encontramos

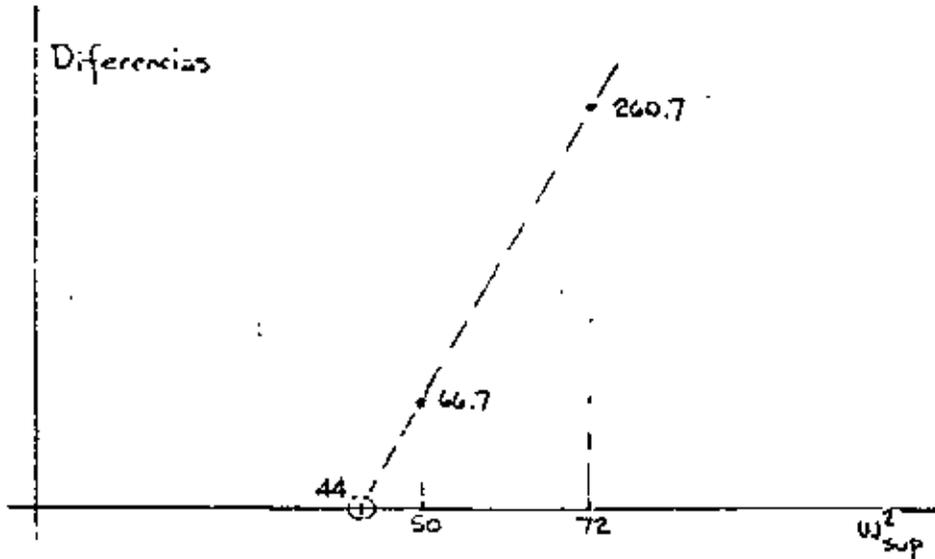


Fig 1.

que el valor de w^2 que hace cero las diferencias es aproximadamente 44 (podría obtenerse por triángulos semejantes, pero sabemos que aún cuando se hiciera así el valor no nos llevará exactamente a cero diferencia pues la variación no es lineal como estamos suponiendo, excepto en intervalos muy cerrados).

Suponiendo entonces $w^2 = 44$

Nivel	m	R	mw^2	ΔX	X	F	V	FX	V ΔX
4	2	50	88	-3.174	-1.844	-162,27	Dif. = 3,57 -158,7	299,23	503,71
3	2	100	88	-0.417	1.33	117	- 41,7	155,61	17,39
2	2	150	88	0.747	1.747	153,7	112	269,51	83,66
1	2	200	88	1.0	1.0	98	200	88	200
0								$\Sigma 811,35$	804,76

$$\frac{-2}{w} = 44 \frac{804.76}{811.35} = 43.64 \text{ 1/seg}^2$$

$$\text{Usando } w_{\text{sup}}^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2$$

Nivel	m	R,	mw^2	ΔX	X	F	V
4	2	50	87.28	-3.159	-1.809	-157.89	Dif.=0.05 -157.94
3	2	100	87.28	-0.401	1.350	117.83	- 40.11
2	2	150	87.28	0.751	1.751	152.83	112.72
1	2	200	87.28	1.0	1.0	87.28	200
0							

Como puede verse, la diferencia al final de este último ciclo es despreciable, por lo que

$$w_2^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2, w_2 = 6.606 \text{ 1/seg}, T_2 = 0.951 \text{ seg}$$

y la configuración modal es la indicada.

Suponiendo otro valor mayor de w^2 podría calcularse el tercero y cuarto modos. Puede también verificarse que la frecuencia del primer modo obtenido con el método de Stodola-Vianello-Newmark es correcta.

Comentarios adicionales

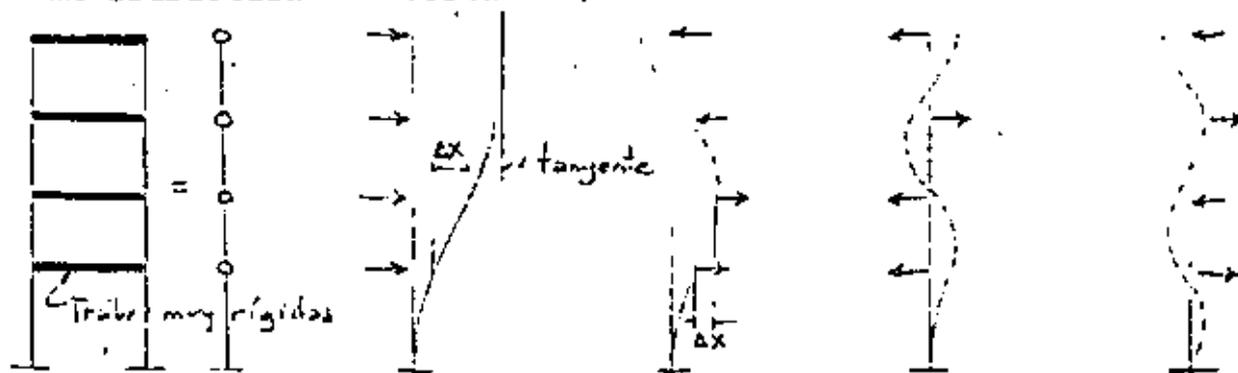
En los métodos presentados se tiene como datos las masas y las rigideces de entrepiso. Las masas son relativamente fáciles de calcular y dependen exclusivamente del peso de los materiales con que esté hecha la estructura y de la carga viva que se considere

para fines de análisis sísmico. Las rigideces serán función de las propiedades elástico-geométricas de los materiales empleados, que no es sencillo definir y de la estructuración, sobre todo de la relación que guarden las rigideces relativas de las barras que forman la estructura, traveses y columnas.

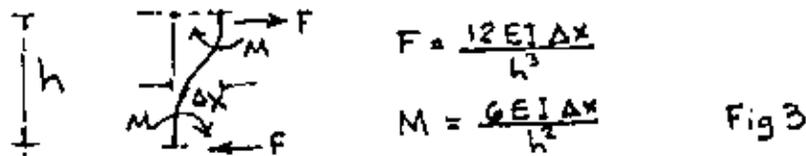
Dado el modelo matemático de un edificio como una serie de masas unidas por resortes, definimos como sistema estrechamente acoplado a aquel en que la rigidez de entrepiso es independiente de la distribución de cargas laterales a que se vea sometido el modelo, esto es, la rigidez de entrepiso es invariable independientemente de la elástica que adquiera la estructura al ser sometida a cargas laterales. Aquí se entiende por rigidez de entrepiso, como se indicó anteriormente, la fuerza necesaria para producir el desplazamiento unitario de un nivel con respecto al otro, esto es

$$R = \frac{V}{\Delta X} \quad ; \quad \text{para } \Delta X=1 \quad , \quad R=V$$

En la figura 2 se muestra el modelo matemático de un edificio de 4 niveles sometido a distintos sistemas de fuerzas. De acuerdo con lo antes dicho, la rigidez debe ser independiente de las fuerzas aplicadas (este tipo de estructuras se conoce también como estructura "de cortante").



Para que esto se cumpla, la rigidez de entrepiso debe ser función única y exclusivamente de las columnas de cada entrepiso, para lo cual, los giros de los nudos deben ser nulos, lo que se logra si las trabes son infinitamente rígidas en comparación con las columnas, en cuyo caso la elástica de cada una de las columnas es la mostrada en la figura 3, y los elementos mecánicos que aparecen son los que ahí se muestran, para barras de sección constante.



En la práctica, es difícil que la rigidez relativa de las trabes ($k=I/l$) sea muy grande en comparación con la de las columnas, lo que hará que los giros de los nudos no sean cero, relajándose el sistema y reduciéndose la rigidez del marco para un mismo tamaño de columnas. Debido a esto, el caso de trabes infinitamente rígidas en comparación con las columnas recibe a veces el nombre de cota superior de rigidez.

Al ser significativos los giros de los nudos, la rigidez de entrepiso ya no será independiente del sistema de fuerzas horizontales aplicadas. En el límite inferior, llegaremos al caso del voladizo mostrado en la figura 4, para el cual no tiene sentido hablar de rigidez de entrepiso, pues será diferente para cada una de las posibles configuraciones de fuerzas aplicadas. A este caso lo definiremos como sistema remotamente acoplado.

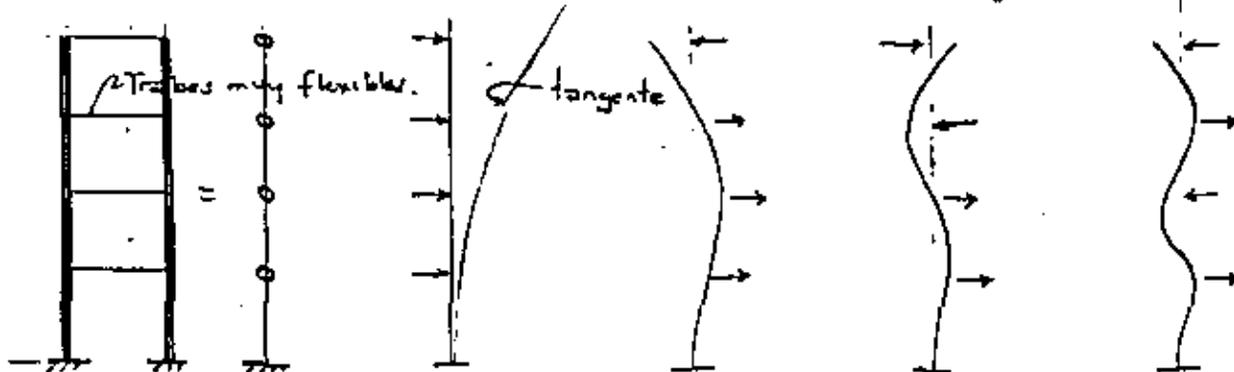
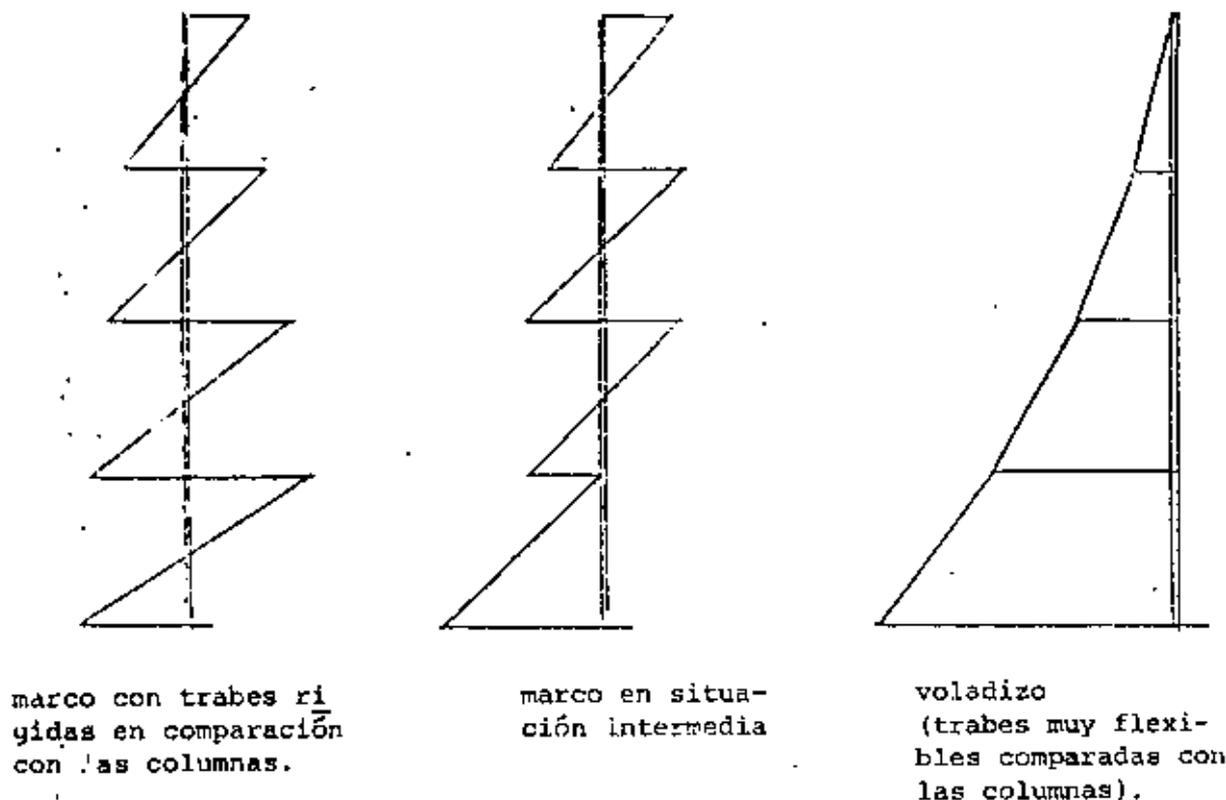


Fig 4

Nótese que en ambos casos se trata de estructuras aparentemente iguales, constituidas por marcos rígidos formados por traveses y columnas unidos en los nudos, sin embargo, como puede apreciarse en las figuras 1 y 3, las deformaciones de la estructura cuando todas las fuerzas se aplican en el mismo sentido son muy diferentes en uno y otro caso. En la figura 2, la tangente en el extremo superior es vertical, mientras que en la figura 4, la tangente en el extremo superior tiene la inclinación máxima.

La figura 5 ilustra la forma en que variarían los momentos flexionantes en las columnas del marco en los casos extremos y en uno intermedio. Nótese que la aplicación de métodos aproximados para la obtención de momentos en traveses y columnas sin verificar cual es la situación del marco, puede conducir a errores muy importantes de subestimación de momentos en las columnas y de desplazamientos horizontales de la estructura,



Momentos flexionantes en columnas.

Fig. 5

ya que los métodos aproximados en general suponen la formación de articulaciones (puntos de momento nulo) en cada entrepiso, y la situación puede ser tal que los puntos de inflexión del diagrama de momentos desaparezcan en uno, varios o todos los niveles.

Cualquier edificio de la práctica estará en una posición intermedia con respecto a los casos descritos.

Para conocer cual es la situación en cada caso particular, John A. Blume (referencia 1) sugiere el empleo de un índice de rotación modal, que define como

$$\rho = \frac{\Sigma(I/l)_{\text{trabes}}}{\Sigma(I/l)_{\text{cols}}}$$

y se puede valuar en cualquier entrepiso. (Blume lo hace para el entrepiso medio). Aquí $\Sigma(I/l)_{\text{trabes}}$ es la suma de rigideces relativas de las trabes de un cierto nivel y $\Sigma(I/l)_{\text{cols}}$ es la suma de rigideces relativas de las columnas en que se apoyan las trabes antes mencionadas.

Blume encontró que si $\rho > 0.10$ hay puntos de momento nulo en las columnas de todos los entrepisos mientras que, para valores de ρ menores de 0.01 la estructura se asemeja más a un voladizo. Para valores de ρ entre 0.01 y 0.10 la situación es intermedia y habrá entrepisos en que no haya puntos de momento nulo, por lo que los métodos aproximados de análisis pueden conducir a fuertes errores del lado de la inseguridad por lo que respecta a los valores de los momentos flexionantes para los que debe diseñarse así como respecto a los desplazamientos laterales de la estructura; la rigidez de entrepiso pierde significado y conviene emplear métodos matriciales para analizarla.

Si la estructura tiene variaciones importantes con la altura, convendrá valuar ρ en distintos niveles.

Efectos de deformación axial de las columnas

Hasta aquí se ha considerado que las deformaciones axiales de las columnas, en el caso de marcos rígidos, son despreciables y no contribuyen a la deformación horizontal. Esto es válido sólo si la relación entre altura y ancho de la estructura es pequeña, tal vez menor que 3. Al aumentar el valor de esa relación, el efecto de momento de volteo en el edificio adquiere mayor importancia y se pueden cometer errores importantes al despreciar los acortamientos y alargamientos de las columnas debido a fuerza axial.

Cuando las trabes se vuelven muy flexibles en comparación con las columnas, cada una de las columnas trabajará como voladizo y la fuerza axial en ellas será pequeña.

En el caso de marcos contraventeados, la crujía o crujías contraventeadas tendrán comportamiento similar al de un muro y deberán por tanto considerarse como estructuras de flexión, calculando sus períodos como se indicó en el método de Stodola-Vianello-Newmark.

Cuando se tienen marcos y muros trabajando simultáneamente la situación se complica pues la interacción entre ambos sistemas estructurales hace que varíe la fuerza que toman uno y otro en cada entrepiso; los muros suelen tomar la mayor proporción de la cortante total en los entrepisos inferiores mientras que la situación se invierte en los niveles superiores. Ver referencia 1. Esto hace difícil la aplicación de métodos numéricos para calcular los modos de vibración de este tipo de estructuras, siendo más

conveniente el empleo de métodos matriciales para este fin.

REFERENCIA 1

Blume, John A., "Dynamic Characteristics of Multistory Buildings",
Proceedings ASCE, Structural División, February 1968.

(Se entregará copia de ella como parte del material del curso)

REFERENCIA 2

Godden, William G., "Numerical Analysis of Beam and Column Structures",
Prentice Hall.



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

VIBRACION DE VIGAS DE CORTANTE Y DE FLEXION

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

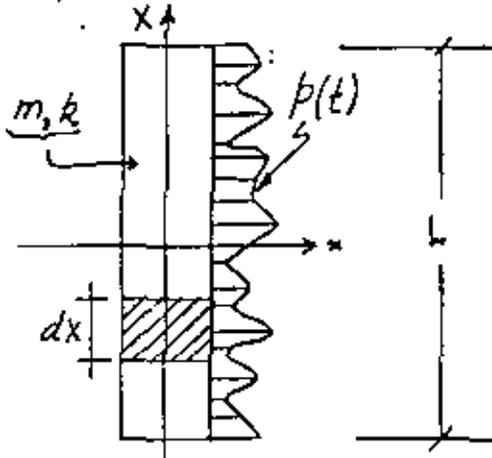
JULIO, 1980



VIGAS DE CORTANTE NO AMORTIGUADAS

SON SISTEMAS CONTINUOS CUYOS CAMBIOS DE PENDIENTE SON PROPORCIONALES AL CORTANTE QUE ACTUA EN LA SECCION.

SEAN m Y p LA MASA Y FUERZA EXTERNA DISTRIBUIDAS POR UNIDAD DE LONGITUD, Y SEA k LA RIGIDEZ POR CORTANTE:



$$k = FAG$$

F = FACTOR DE FORMA

A = AREA SECCION TRANSVERSAL

G = MODULO DE ELASTICIDAD DINAMICO AL CORTANTE

$$F_I = mdx \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

POR EQUILIBRIO:

$$\frac{\partial S}{\partial x} dx + p dx - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx = 0$$

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = p(t) \quad (1)$$

LA EC HOMOGENEA QUEDA (CON $p=0$)

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} = 0 ; \quad v^2 = \frac{k}{m}$$

ESCRIBIENDO $x(t) = z_n(X) \theta_n(t)$, LA EC (2) QUEDA

$$z_n \ddot{\theta}_n - v^2 z_n'' \theta_n = 0$$

$$\frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} - v^2 \frac{z_n''}{z_n} = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} = v^2 \frac{z_n''}{z_n} = \omega_n^2 = \text{CONSTANTE}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_n + \omega_n^2 \theta_n = 0 ; \quad z_n'' + \frac{\omega_n^2}{v^2} z_n = 0$$

$$\theta_n = \text{sen} \omega_n (t - t_n), \quad z_n = A_n \text{sen} \frac{\omega_n}{v} (X - a_n)$$

$$\therefore x_n = A_n \text{sen} \left[\frac{\omega_n}{v} (X - a_n) \right] \text{sen} \left[\omega_n (t - t_n) \right], \quad n=1, 2, \dots$$

LAS CONSTANTES a_n Y ω_n SE DETERMINAN EN CADA PROBLEMA EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

CONDICION DE ORTOGONALIDAD

$$\int_0^L x_n(X) x_j(X) = 0, \quad \text{SI } n \neq j$$

EJEMPLO 1: CUERDA VIBRANTE DE LONGITUD L Y EXTREMOS FIJOS:

EN EL EXTREMO $X=0$ SE TENDRA

$$(3) \quad x(0, t) = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n a_n}{v} = j\pi ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

EN EL EXTREMO $X = L$ SE TENDRA

$$(4) \quad x(L, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n L}{v} = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

PUESTO QUE EN LA EC (3) SE TOMA $j=0$, YA QUE $j=1, 2, \dots$ DAN LA MISMA SOLUCION, LO CUAL CONDUCE A $a_n = 0$

$$\text{DE LA EC (4):} \quad \omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

FRECUENCIA FUNDAMENTAL

$$\text{SI } n=1, \quad \omega_1 = \frac{\pi v}{L} \quad \therefore \quad \omega_n = n \omega_1$$

$$\text{Y} \quad T_1 = \frac{2L}{v} \quad T_n = \frac{T_1}{n}$$

LAS CONFIGURACIONES MODALES QUEDAN:

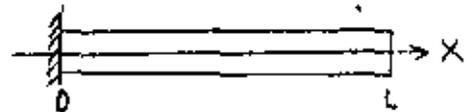
$$z_n = A_n \text{sen} \frac{n\pi X}{L} \quad ; \quad x(t, X) = A_n \text{sen} \frac{n\pi X}{L} \text{sen} \frac{n\pi v}{L} (t - t_n)$$

CONDICION DE ORTOGONALIDAD:

$$\int_0^L A_i \text{sen} \frac{i\pi X}{L} A_j \text{sen} \frac{j\pi X}{L} dx = 0, \quad \text{SI } i \neq j$$

EJEMPLO 2: VIGA DE CORTANTE APOYADA EN $X = 0$ Y LIBRE EN $X = L$

$$\text{DE } x(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0$$



DE $x'(L, t) = 0$ (PUESTO QUE EN $X = L$ SE DEBE CUMPLIR QUE LA FUERZA CORTANTE, S , SEA NULA),

$$x'(X, t) = A_n \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n X}{v} \text{sen} \omega_n (t - t_n)$$

$$\therefore x'(L, t) = 0 = \cos \frac{\omega_n L}{v} \Rightarrow \frac{\omega_n L}{v} = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

$$0 \quad \omega_n = \frac{v}{L} \frac{\pi}{2} (2n-1) \quad n = 1, 2, \dots$$

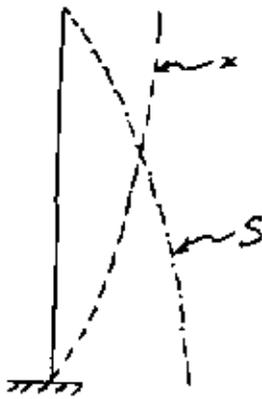
$$\text{SI } n=1; \omega_1 = \frac{\pi v}{L \cdot 2} \Rightarrow T_1 = \frac{4L}{v}$$

$$\therefore \omega_n = \omega_1 (2n-1); \quad T_n = \frac{T_1}{2n-1}$$

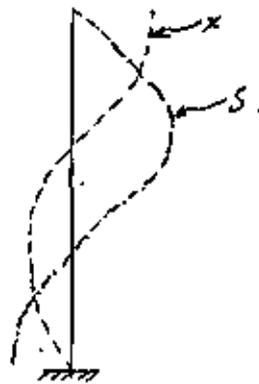
$$\text{ASI: } T_2 = \frac{T_1}{3}, \quad T_3 = \frac{T_1}{5}, \quad \text{ETC.}$$

DISTRIBUCION DE CORTANTES:

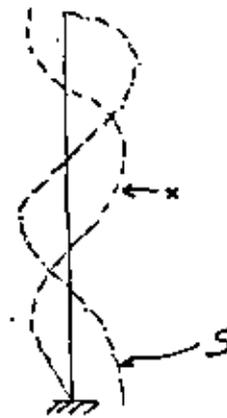
$$S_n = k \frac{\partial x}{\partial X} = A_n k \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n X}{v} \text{sen} \omega_n (t-t_n)$$



1er. MODO (FUNDAMENTAL)



2o. MODO



3er. MODO

VIBRACIONES FORZADAS EN VIGAS DE CORTANTE

SEA $\ddot{x}_0(t)$ LA EXCITACION DEL TERRENO. LA RESPUESTA, $x(t)$, DEL SISTEMA ES

$$(3) \quad x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) \operatorname{sen} \omega_n(t-\tau) d\tau$$

DONDE

$$(4) \quad a_n = \frac{\int_0^L n \operatorname{sen} \frac{\omega_n v}{X} dx}{\int_0^L n \operatorname{sen}^2 \frac{\omega_n v}{X} dx} = \frac{4}{(2n-1)^2}$$

TAREA: DEMOSTRAR ECS (3) Y (4) Y ESTUDIAR SECCION 3.15.

EJEMPLO: CALCULAR EL LIMITE SUPERIOR DEL CORTANTE EN UNA VIGA DE CORTANTE A CUYA BASE SE LE SOMETE A UNA ACELERACION CONSTANTE,

a.

EL ESPECTRO DE ESTA EXCITACION ES $v = a/\omega$

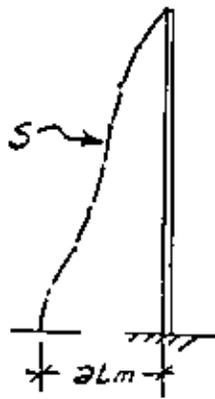
$$\text{POR LO TANTO, } S \leq k \left| \frac{\partial}{\partial X} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \right) \right| v$$

$$S \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ka_n v}{\omega_n} \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n}{v} X \right| = \frac{4k}{\pi} \frac{a}{\frac{k}{m}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2L}(2n-1)X}{(2n-1) \frac{v}{L} \frac{\pi}{2}(2n-1)} \right|$$

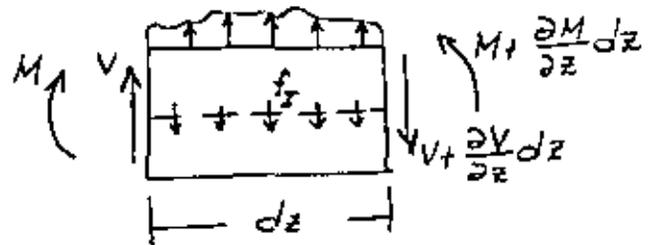
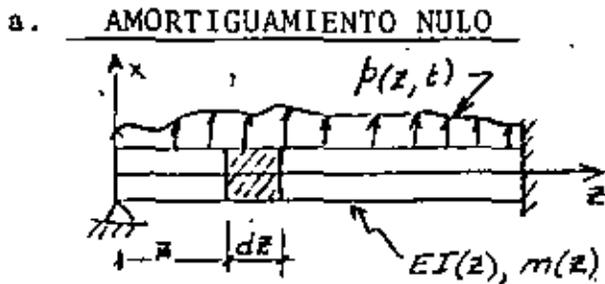
$$S \leq \frac{8aLm}{\pi^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi X}{2L} \right| ; \text{ EN } X=0$$

6.

$$S \leq \frac{(8aLm)}{\pi^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}_{\pi^2/8} = aLm$$



VIBRACION DE VIGAS EN FLEXION



$$V + p dz - (V + \frac{\partial V}{\partial z} dz) - f_I dz = 0 \quad (1)$$

$$\text{EN DONDE } f_I dz = m dx \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (2)$$

SUSTITUYENDO (2) EN (1) Y SIMPLIFICANDO:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$M + V dz - (M + \frac{\partial M}{\partial z} dz) = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial z} = V \quad (4)$$

(DESPRECIANDO LOS TERMINOS DE SEGUNDO ORDEN DE LOS MOMENTOS DE p Y f_I)

SUSTITUYENDO (4) EN (3) SE OBTIENE

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (4')$$

TOMANDO EN CUENTA QUE $\frac{M}{EI} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ SE OBTIENE FINALMENTE

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \quad (5)$$

b. AMORTIGUAMIENTO VISCOZO

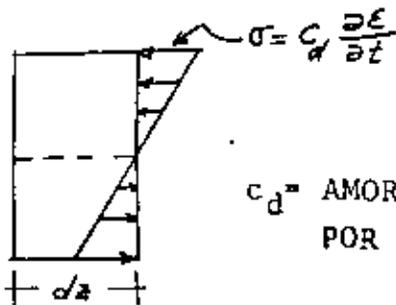
- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR

$$\text{VELOCIDAD TRANSVERSAL} = c(z) \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c \frac{\partial x}{\partial t} \quad (6)$$

- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION DE LA VIGA.

ACEPTANDO LA HIPOTESIS DE NAVIER DE DEFORMACION PLANA



$$M_{\text{amort}} = \int \sigma y da = c_d I(z) \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}$$

c_d = AMORTIGUAMIENTO
POR DEFORMACION

INCORPORANDO EL MOMENTO DEBIDO AL AMORTIGUAMIENTO EN LA
EC. (5)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p \quad (6)$$

SI LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DE LOS APOYOS, SE PUEDE
DEMOSTRAR (CLOUGH Y PENZIEN, PAG 303) QUE:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t} \right) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p_{\text{efect.}}$$

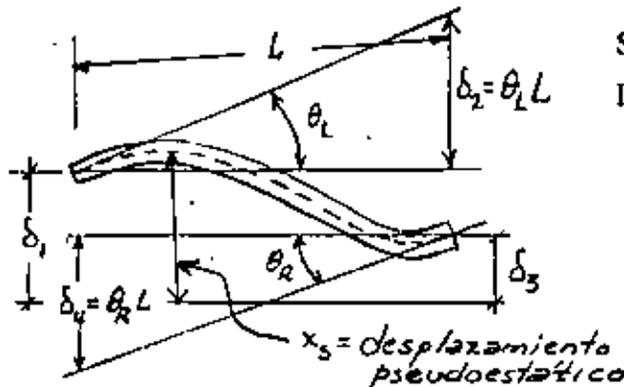
EN DONDE

$$p_{\text{efect}} = - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 x_s}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x_s}{\partial z^2 \partial t} \right) - m \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} - c \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (7)$$

$$x(z,t) = x_{\text{est}}(z,t) + x(z,t)$$

x_s = DESPLAZAMIENTO PSEUDOESTATICO OCASIONADO POR EL MOV. DE
LOS APOYOS DE MANERA ESTATICA

x = DESPLAZAMIENTO DINAMICO



SI SE TIENE UNA ROTACION Y UNA TRASLACION POR APOYO:

$$x_s = \sum_{i=1}^4 \theta_i \delta_i(t) \quad (8)$$

$\theta_i(z)$ = CONFIGURACION DE LA VIGA
DEBIDA A $\delta_i = 1$

INCORPORANDO (8) EN (7):

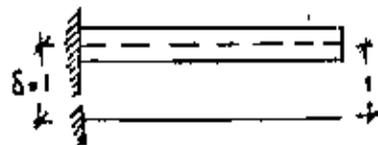
$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 \left\{ m \theta_i \ddot{\delta}_i(t) + c \theta_i \dot{\delta}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[c_d I(z) \frac{\partial^2 \theta_i(z)}{\partial z^2} \dot{\delta}_i(t) \right] \right\} \quad (9)$$

EN LA MAYORIA DE LOS CASOS EL AMORTIGUAMIENTO INFLUYE POCO EN LA FUERZA EFECTIVA Y LA EC. (9) SE SIMPLIFICA A

$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 m \theta_i(z) \ddot{\delta}_i(t)$$

EN EL CASO DE UN VOLADIZO

$$\theta_1(z) = 1$$



Y

$$P_{\text{efect}} = -m(z) \ddot{\delta}_1(t)$$

ANALISIS DE VIBRACIONES LIBRES

CONSIDEREMOS UNA VIGA DE SECCION CONSTANTE ($EI =$ CONSTANTE ; \bar{m} = MASA POR UNIDAD DE LONGITUD).

DE LA EC. (5): $EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

RESOLVIENDO LA EC. (10) POR SEPARACION DE VARIABLES:

$$x(z, t) = \theta(z) Y(t)$$

$$\theta^{IV}(z) Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \theta(z) \ddot{Y}(t) = 0 ; \frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0$$

POR LO QUE

$$\frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = C = a^4 \quad (C = \text{CONSTANTE})$$

POR LO TANTO OBTENEMOS DOS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

$$\theta^{IV}(z) - a^4 \theta(z) = 0$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad \text{DONDE} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$$

$$0 \quad a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

LA SOLUCION DE LA SEGUNDA DE ESTAS ES:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \text{sen} \omega t + Y(0) \text{cos} \omega t \quad (11)$$

LA SOLUCION DE LA PRIMERA ES:

$$\theta(z) = A_1 \operatorname{sen} az + A_2 \cos az + A_3 \operatorname{senh} az + A_4 \operatorname{cosh} az \quad (12)$$

EN DONDE LAS A_i SE CALCULAN EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE LA VIGA EN AMBOS EXTREMOS.

EJEMPLO

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

LAS CUATRO CONDICIONES DE FRONTERA SON:

$$\text{en } z=0: \quad \theta(0)=0, \quad M(0) = EI \theta''(0) = 0$$

$$\text{en } z=L: \quad \theta(L)=0, \quad M(L) = EI \theta''(L) = 0$$

SUSTITUYENDO $\theta(0)=0$ Y $\theta''(0)=0$ EN LA EC. (12) Y SU SEGUNDA DERIVADA:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0 = 0 \\ \theta''(0) &= a^2 (-A_2 + A_4 \operatorname{cosh} 0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_2 = A_4 = 0$$

HACIENDO LO MISMO CON $\theta(L) = 0$ Y $\theta''(L) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \theta(L) &= A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL = 0 \\ \theta''(L) &= a^2 (-A_1 \operatorname{sen} aL + A_3 \operatorname{senh} aL) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_3 = 0$$

POR LO TANTO, $\theta(L) = A_1 \operatorname{sen} aL = 0$

PUESTO QUE $A_1=0$ ES LA SOLUCION TRIVIAL, SE DEBE TENER QUE A_1 SEA ARBITRARIA Y QUE

$$\operatorname{sen} aL = 0 \rightarrow aL = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

POR LO TANTO, $a = n\pi/L$. RECORDANDO QUE

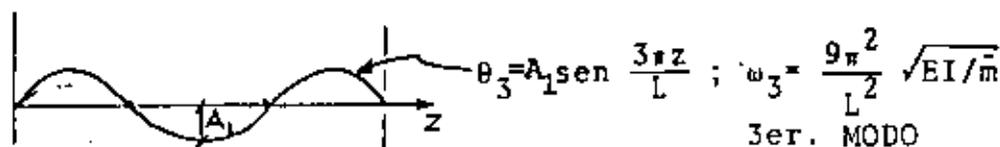
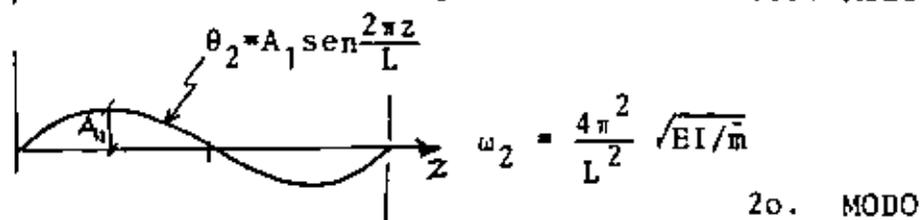
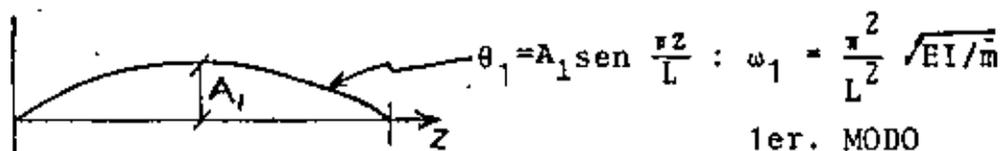
$$a^4 = \omega^2 \bar{m}/EI, \text{ SE TIENE QUE}$$

$$\omega_n^2 = (n\pi/L)^2 EI/\bar{m} \quad 0 \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{EI/\bar{m}}$$

SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES NATURALES DE VIBRACION DE LA VIGA.

LAS CONFIGURACIONES MODALES SON :

$$\theta_n(z) = A_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} z$$



$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 :: 1 : 4 : 9$$

$$\omega_i = n^2 \omega_1$$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

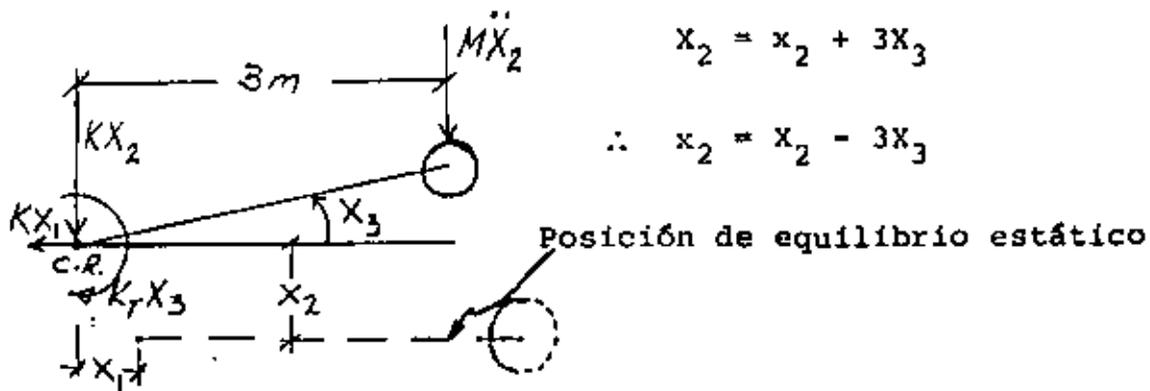
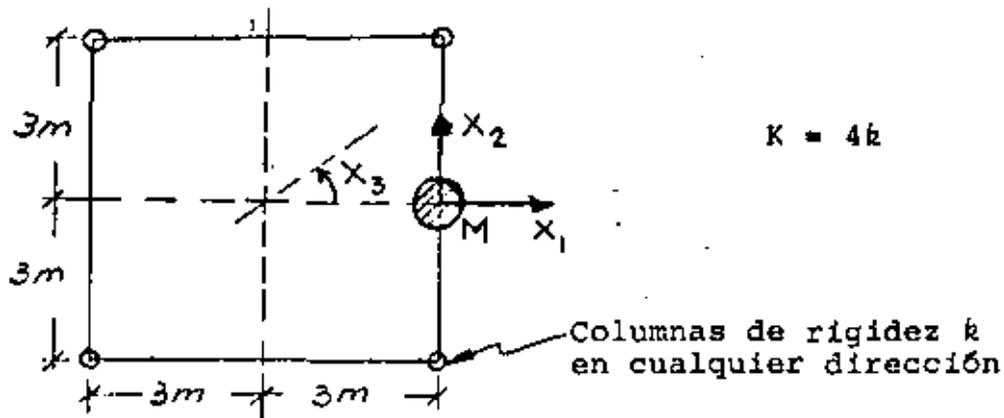
EJEMPLO

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980



Ejemplo: Calcular las frecuencias circulares y los modos de vibración de la siguiente estructura:



En la dirección de x_1 : $M\ddot{x}_1 + Kx_1 = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{K}{M}$

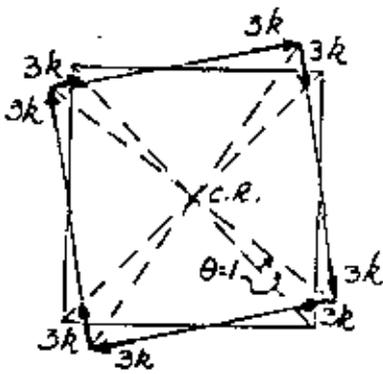
(movimiento desacoplado con x_2 y x_3)

$$\underline{z}_1^T = [1, 0, 0]$$

En la dirección x_2 : $M\ddot{x}_2 + Kx_2 = 0$

$$M\ddot{x}_2 + Kx_2 - 3Kx_3 = 0 \quad (1)$$

En la dirección x_3 : $M\ddot{x}_2 \times 3 + K_T x_3 = 0 \quad (2)$



Momento respecto a C.R. = $8 \times 3k \times 3 = 72k$
 $= 18K$

Sustituyendo K_T en la ec. (2):

$$3M\ddot{X}_2 + 18K X_3 = 0 \quad (3)$$

$$M\ddot{X}_2 + 6K X_3 = 0 \quad (4)$$

Restando la ec. (4) a la ec. (1) se obtiene:

$$KX_2 - 9KX_3 = 0 \quad \therefore X_2 = 9X_3 \quad + \quad \ddot{X}_2 = 9\ddot{X}_3$$

Sustituyendo esto último en la ec. (4): $\ddot{X}_3 + \frac{6K}{9M} X_3 = 0$

$$\therefore \omega_2^2 = \frac{2}{3} \frac{K}{M} ; z_2^T = [0, 9, 1]$$



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

JORGE PRINCE ALFARO

JULIO, 1980

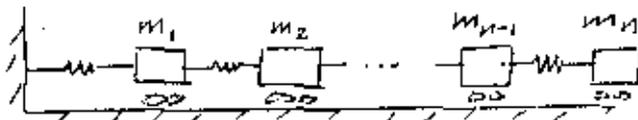
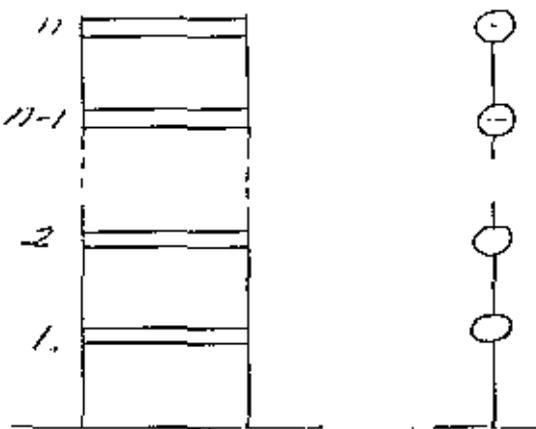


VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

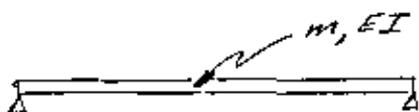
Ejemplos de sistemas de n GL

Características:

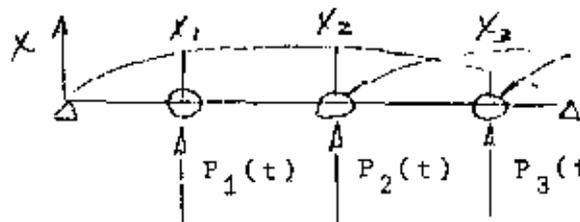
- masas concentradas rígidas
- columnas solo se deforman lateralmente
- con una coordenada por masa queda definida la configuración del sistema
- equivale a:



Además, la consideramos elástica, lineal

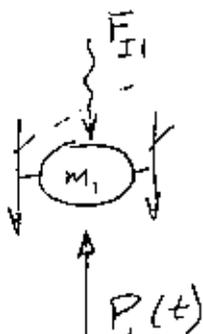


Supongamos:



- masas concentradas
- fuerzas concentradas exteriores

aislemos una masa:



- $F_{r1} = \sum$ fuerzas resistencia elástica a la deformación

Las ecuaciones condensadas de movimiento serán:

$$F_{I1} + F_{r1} = P_1(t)$$

$$F_{I2} + F_{r2} = P_2(t)$$

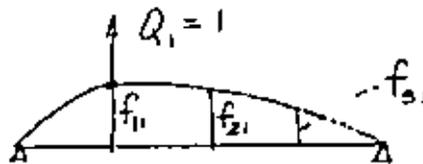
$$F_{I3} + F_{r3} = P_3(t)$$

Fuerzas asociadas al desplazamiento,
NO al movimiento

... la determinación de estas fuerzas es un problema estático.

Coefficientes de influencia

1. De flexibilidad



f_{ij} = despl. de la coord. i debido a una carga unitaria en coord. j (desplazamiento y fuerza en = dirección)

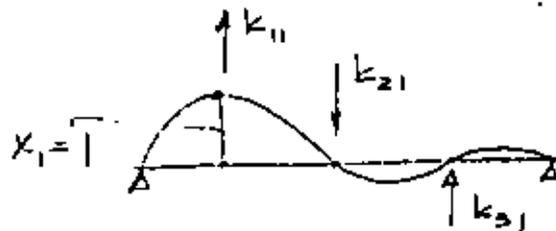
Por superposición

$$X_1 = f_{11} Q_1 + f_{12} Q_2 + f_{13} Q_3$$

$$X_2 = f_{21} Q_1 + f_{22} Q_2 + f_{23} Q_3 \quad \text{inv. (1)}$$

$$X_3 = f_{31} Q_1 + f_{32} Q_2 + f_{33} Q_3$$

2. De rigidez:



K_{ij} = fuerza en coordenada i por un desplazamiento unitario en coordenada j.

Por superposición

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 \\ Q_2 &= K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 \\ Q_3 &= K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Desde luego $K_{ij} = K_{ji}$ (y $f_{ij} = f_{ji}$) (Maxwell-Mohr)

La ecuación 2 también puede escribirse:

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} X_j$$

o bien, en notación matricial

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

matriz de ri-
gídeces

Ponemos:

$$\{Q\} = [K] \{X\}$$

Claro que $[K]^{-1} = [F] = [f_{ij}]$

Sustituyendo (2) o (3) en ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{X}_2 + K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 &= P_2(t) \\ m_3 \ddot{X}_3 + K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 &= P_3(t) \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

o también:

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} &= \{P(t)\} \text{ (vibración forzada)} \\ &= \{0\} \text{ (vibración libre)} \end{aligned}$$

1. VIBRACION LIBRE

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \tag{1.1}$$

Supongamos la solución

$$\{x\} = \underbrace{\{r\}}_{\substack{\text{constante} \\ \text{con } t}} (A \sin pt + B \cos pt) = \{r\} Y(t)$$

escalar \longrightarrow define:

- variación armónica
- amplitud

tenemos:

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{r\} (A \sin pt + B \cos pt) = r Y(t) \\ \{\dot{x}\} &= \{r\} (Ap \cos pt - B p \sin pt) \\ \{\ddot{x}\} &= \{r\} (-Ap^2 \sin pt - B p^2 \cos pt) = -p^2 \{r\} Y(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Sustituyendo 1.2 en 1.1 y dividiendo entre Y(t) nos queda:

$$-p^2 [M] \{r\} + [K] \{r\} = \{0\}$$

o sea:

$$\underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[E]} \{r\} = \{0\} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
 [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} & [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} \\
 \text{pre x } [M]^{-1} & & \text{pre x } [K]^{-1} & \cdot \frac{1}{p^2} \\
 [M]^{-1} [K] \{r\} &= p^2 \{r\} & \frac{1}{p^2} \{r\} &= [K]^{-1} [M] \{r\}
 \end{aligned}$$

En las dos formas llegamos a un problema de VAC

$$[L] \{u\} = \lambda \{u\}$$

Problema de valores característicos:

- Dada una matriz cuadrada de orden (n x n) $[L]$, que representa una transformación lineal de vectores n-dimensionales, debe encontrarse un vector $\{u\}$ que transformado por $[L]$ resulte en otro vector $\lambda \{u\}$ en la misma "dirección". O sea, $[L]$ solo cambia la magnitud de $\{u\}$ sin cambiar la dirección.

El vector es un vector característico (o eigenvector) de $[L]$. λ (escalar) representa la relación entre las "longitudes" antes y después de la transformación y para llegar a los VEC debe tomar valores de un conjunto de valores característicos (VAC) (o eigenvalores).

El problema de encontrar frecuencias y modos naturales puede considerarse un problema de VAC. - (STD)

Tenemos

$$[K] - p^2 [M] \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Si en el sistema de ecuaciones

$$[A] \{x\} = \{0\}$$

$[A]$ es no singular, la solución única es la trivial

$\{x\} = \{0\}$, de donde nos interesa el caso en que $[A]$ es singular. En este caso la adjunta* $[\hat{A}]$ existe y puede pre X por ella, con el resultado

$$|A| \{x\} = \{0\}$$

porque $[\hat{A}] [A] = |A| [I] \neq [A] \quad (n \times n)$

Puesto que $|A| = 0$, $\{x\}$ no necesariamente es nulo, pero si se asigna un valor dado a uno de sus elementos los demás quedan determinados en forma única.

También notamos que si $\{x\}$ es solución de $[A] \{x\} = \{0\}$ y α es una constante, entonces $\alpha \{x\}$ es también solución.

Por lo tanto, hay un número infinito de soluciones. Todos estas se considerarán juntas y hablaremos de una "solución" como un conjunto de relaciones entre los elementos de $\{x\}$.

Volvemos a
$$\underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[E]} \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Al desarrollar $|E| = 0$ llegamos a una ecuación de grado n en p^2 , cuyas raíces son los VAC.

- Como $[K]$ y $[M]$ son simétricas y positivas definidas*,

*Transpuesta de la matriz de cofactores.

** $[A]$ es POS. DEF. si $\{q\} [A] \{q\} > 0$ para todo $\{q\}$ no nulo

puede demostrarse que las raíces de la ecuación característica son reales y positivas. Las llamamos $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$.

Las n frecuencias naturales son los términos positivos de las raíces y la más baja es llamada frecuencia fundamental.

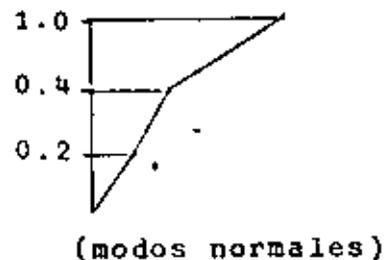
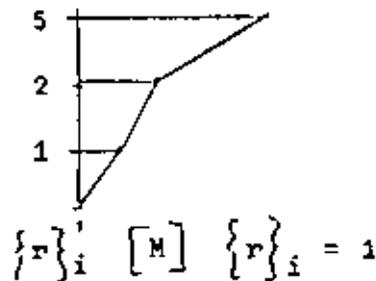
- Para la gran mayoría de los casos de interés las frecuencias son diferentes entre sí.
- Para cada frecuencia p_i existe una VEC asociado:

$$[K] \{r\}_i = p_i^2 [M] \{r\}_i \quad i = 1, \dots, n$$

o sea para cada p_i existe una solución $\{r\}$ no trivial

- Normalización (solo conveniencia, sin significado físico)

Varias formas:



- Los modos y frecuencias naturales del sistema son propiedades características derivadas de las propiedades de inercia y rigidez expresadas por los elementos de $[M]$ y $[K]$.
- Llamaremos matriz modal $[R]$ a la que tiene los VEC, o vectores modales, como columnas.

ORTOGONALIDAD DE MODOS DE VIBRACION

Se dice que dos vectores $\{a\}$ y $\{b\}$ son ortogonales con respecto a la matriz simétrica $[J]$ si

$$\{a\}' [J] \{b\} = \{b\}' [J] \{a\} = 0$$

Demostremos que dos vectores modales $\{r\}_i$ y $\{r\}_j$, asociados a frecuencias diferentes ($p_i \neq p_j$) son ortogonales con respecto a las matrices de inercia y elástica.

- Cada uno de estos vectores satisface la ecuación 1.3

$$p^2 [M] \{r\} = [K] \{r\} \quad [M] \{r\} = \frac{1}{p^2} [K] \{r\}$$

es decir:

$$p_i^2 [M] \{r\}_i = [K] \{r\}_i \quad [M] \{r\}_i = \frac{1}{p_i^2} [K] \{r\}_i$$

$$p_j^2 [M] \{r\}_j = [K] \{r\}_j \quad [M] \{r\}_j = \frac{1}{p_j^2} [K] \{r\}_j$$

pre X i y j por $\{r\}_j'$ y $\{r\}_i'$ respectivamente

$$\begin{aligned} p_i^2 \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \{r\}_j' [K] \{r\}_i & \left\{ \begin{aligned} \{r\}_j [M] \{r\}_i &= \frac{1}{p_i^2} \{r\}_j' [K] \{r\}_i \\ \{r\}_i [M] \{r\}_j &= \frac{1}{p_j^2} \{r\}_i' [K] \{r\}_j \end{aligned} \right. & (a) \\ p_j^2 \{r\}_i' [M] \{r\}_j &= \{r\}_i' [K] \{r\}_j \end{aligned}$$

pero como $[M]$ y $[K]$ son simétricas:

$$\begin{aligned} \{r\}_j' [K] \{r\}_i &= \{r\}_i' [K] \{r\}_j \\ \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \{r\}_i' [M] \{r\}_j \end{aligned}$$

∴, restando miembro a miembro en ecuaciones (a):

$$(p_i^2 - p_j^2) \left(\{r\}'_i [M] \{r\}_j \right) = 0 \quad 0 = \left(\frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2} \right) \{r\}'_i [K] \{r\}_j$$

y como $p_i^2 \neq p_j^2$

$$\{r\}'_i [M] \{r\}_j = 0 \quad ; \quad \{r\}'_i [K] \{r\}_j = 0$$

Tenemos ecuaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}'_i [K] \{r\}_j &= 0 \end{aligned} \quad \text{si } i \neq j$$

La ec

$$[M] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (a)$$

y la matriz modal $[R]$

Hagamos:

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

y sustituyendo en (a):

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{0\}$$

premultiplicando por $[R]'$:

$$\underbrace{[R]' [M] [R]}_{\text{diagonales}} \{y\} + [R]' [K] [R] \{y\} = \{0\} \quad (b)$$

$$\{r\}'_i \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \\ \\ M, K \\ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \{r\}_j \end{bmatrix} \quad i \neq j$$

Llamemos

$$[R]^T [M] [R] = [M^*]$$

$$[R]^T [K] [R] = [K^*]$$

∴ la ec (b) (p. 14) puede ponerse:

$$[M^*] \{\ddot{y}\} + [K^*] \{y\} = \{0\}$$

que equivale a:

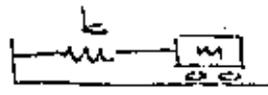
$$m_{11}^* \ddot{y}_1 + k_{11}^* y_1 = 0$$

$$m_{22}^* \ddot{y}_2 + k_{22}^* y_2 = 0$$

$$m_{nn}^* \ddot{y}_n + k_{nn}^* y_n = 0$$

de las que

$$p_1^2 = \frac{k_{11}^*}{m_{11}^*}, \dots, p_n^2 = \frac{k_{nn}^*}{m_{nn}^*}$$

Recordar que para 

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad y \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

O sea, con la transformación

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

aplicada a la ecuación

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

hemos descompuesto un sistema de n GL en n sistemas de 1GL independientes.

Consideremos el producto

$$\begin{aligned} [M^*]^{-1} [K^*] &= ([R]^T [M] [R])^{-1} [R]^T [K] [R] = [K^*] [M^*]^{-1} \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [R]^T [R]^T [K] [R] \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [K] [R] = [P] \end{aligned}$$

$[P]$ contiene las frecuencias naturales en la diagonal principal

∴ El problema de encontrar frecuencias y modos naturales equivale al de encontrar la matriz $[R]$ que diagonalice $[M]$ y $[K]$ de acuerdo con

$$\begin{aligned} [R]^T [M] [R] &= [M^*] \\ [R]^T [K] [R] &= [K^*] \end{aligned}$$

Las frecuencias naturales se obtendrán de

$$\underline{[M^*]^{-1} [K^*] = [K^*] [M^*]^{-1} = [P]}$$

Veámoslo en otra forma

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Sustituyendo $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\}$$

premultiplicando por $\{r\}'_j$

$$\underbrace{\{r\}'_j [M] [R] \{y\}}_{(a)} + \underbrace{\{r\}'_j [K] [R] \{y\}}_{(b)} = \underbrace{\{r\}'_j \{P(t)\}}_{\text{escalar}}$$

En los productos (a) y (b) solo queda (por ortogonalidad):

$$\underbrace{\{r\}'_j [M] \{r\}_j}_{M_j^*} \ddot{y}_j + \underbrace{\{r\}'_j [K] \{r\}_j}_{K_j^* = p_j^2} y_j = \underbrace{\{r\}'_j \{P(t)\}}_{P_j^* = \sum_i P_i r_{ij}}$$

y para el modo j tenemos:

$$M_j^* \ddot{y}_j + p_j^2 M_j^* y_j = P_j^*(t)$$

o bien

(1.5)

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^*(t)$$

análoga a la ecuación de movimiento para 1 GL:

$$m \ddot{x} + k x = P(t)$$

En (1.5) tenemos:

n ecuaciones independientes para n GL

1 ecuación independiente para cada modo

Para vibración libre (1GL)

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

la solución es:

$$x = A \cos pt + B \operatorname{sen} pt \quad (c)$$

y para el modo j tendremos ($P_j(t) = 0$)

$$y_j = A_j \cos p_j t + B_j \operatorname{sen} p_j t \quad (d)$$

Si en (c) hacemos

$$\bar{x}|_{t=0} = x_0 \quad \dot{\bar{x}}|_{t=0} = \dot{x}_0$$

llegamos a

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \operatorname{sen} pt$$

y . . . en (d):

$$y_j = y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \operatorname{sen} p_j t$$

Cualquier configuración del sistema puede expresarse como una suma de formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes.

Esquemáticamente:

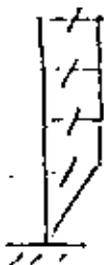
$$\begin{aligned} \left\{ x \right\}_{\text{estática o dinámica}} &= \left\{ r \right\}_1 Y_1 + \left\{ r \right\}_2 Y_2 + \left\{ r \right\}_3 Y_3 + \dots \\ &\quad (Y = Y(t)) \end{aligned}$$

$$\left(\left\{ x \right\} = \left\{ x(t) \right\} \right)$$

En nuestra expresión

$$\{x\} = [R] \{y\} \quad 1.4$$

$\{x\}$ puede no ser función de t , por ejemplo:



$$\{1\} = [R] \{c\} \quad (e)$$

donde $\{c\}$ es el vector de constantes que prex $[R]$ nos da la configuración $\{1\}$

De la ec. (e):

$$\{c\} = [R]^{-1} \{1\} \quad ([R] \text{ NOSING})$$

En 1.4 también podríamos hacer

$$\{y\} = [R]^{-1} \{x\}$$

pero sigamos otro camino, premultiplicando por $\{r\}'_j [M]$
o por $\{r\}'_j [K]$

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{x\} &= \{r\}'_j [M] [R] \{y\} = \{r\}'_j [M] \{r\}_1 y_1 + \\ &\quad + \{r\}'_j [M] \{r\}_2 y_2 + \dots \\ &\quad \dots + \{r\}'_j [M] \{r\}_n y_n \end{aligned}$$

Por ortogonalidad todos estos productos son nulos excepto el término

$$\{r\}'_j [M] \{r\}_j y_j$$

de donde tenemos

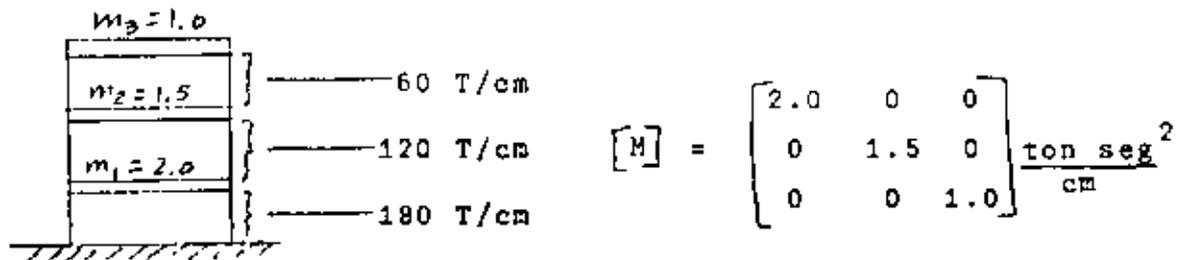
$$\{r\}_j^T \cdot [M] \{x\} = \{r\}_j^T [M] \{r\}_j y_j$$

de donde:

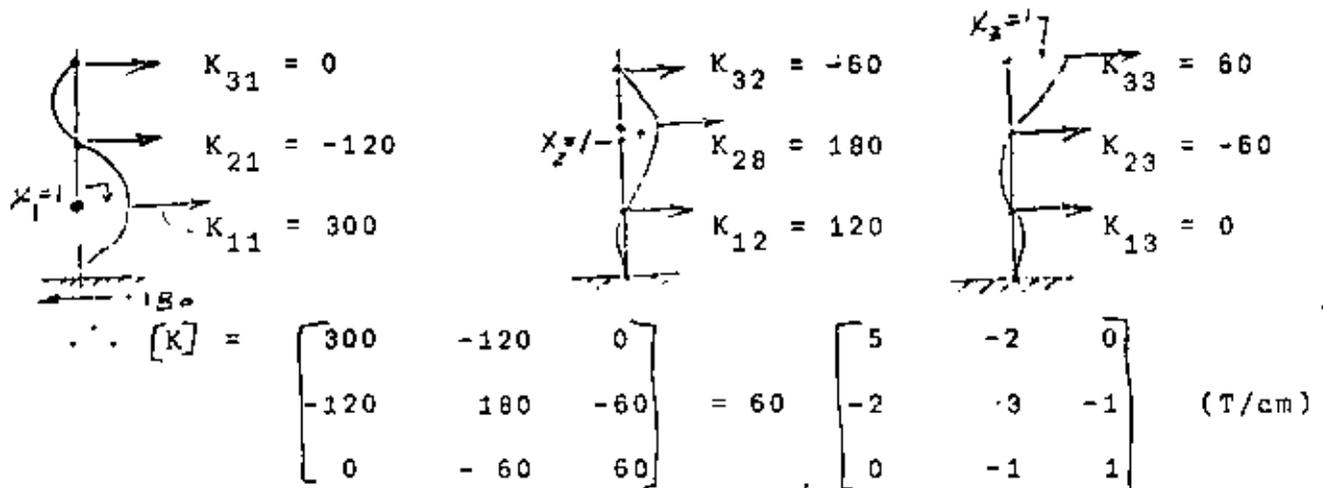
$$y_j = \frac{\{r\}_j^T [M] \{x\}}{\{r\}_j^T [M] \{r\}_j} = \frac{\{r\}_j^T [M] \{x\}}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j^T [K] \{x\}}{K_j^*} = \frac{\{r\}_j^T [K] \{x\}}{P_j^2 M_j^*}$$

(coeficiente de participación)

Ejemplo (vigas rígidas)



Matriz de rigideces



$$[E] = [K] - p^2 [M] \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 60 \begin{bmatrix} (5 - \frac{2}{60} p^2) & -2 & 0 \\ -2 & (3 - \frac{1.5}{60} p^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1 - \frac{1}{60} p^2) \end{bmatrix}$$

si $d = p^2/60$:

$$[E] = 60 \begin{bmatrix} (5-2d) & -2 & 0 \\ -2 & (3-1.5d) & -1 \\ 0 & -1 & (1-d) \end{bmatrix}$$

$$|E| = 0 = 60 (d^3 - 5.5 d^2 + 7.5 d - 2) = 0$$

$$d_1 = 0.35$$

$$d_2 = 1.61$$

$$d_3 = 3.54$$

$$p^2 = 60 d:$$

$$p_1^2 = 21.0$$

$$p_1 = 4.58$$

$$p_2^2 = 96.5$$

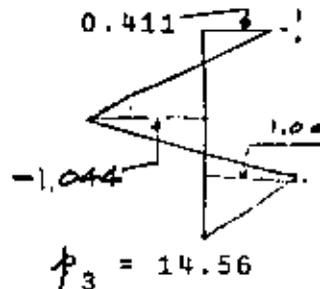
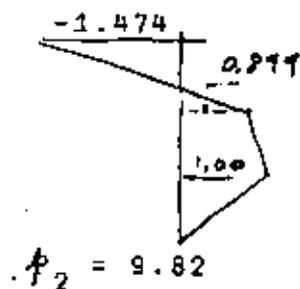
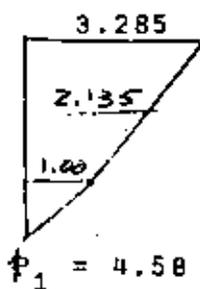
$$p_3 = 9.82$$

$$p_3^2 = 212.4$$

$$p_3 = 14.56$$

frecuencias naturales

Modos:



$$[R] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.135 & 0.899 & -1.044 \\ 3.285 & -1.474 & 0.411 \end{bmatrix}$$

$$[M^*] = [R]^T [M] [R] = \begin{bmatrix} 19.629 & 0.038 & 0.007 \\ 0.037 & 5.386 & -0.014 \\ 0.006 & -0.014 & 3.804 \end{bmatrix}$$

Ej:

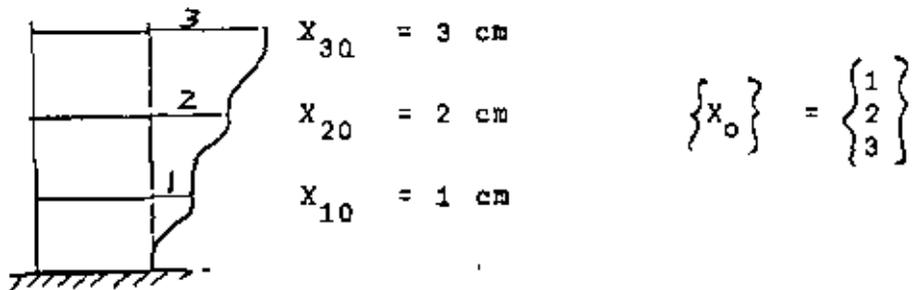
$$19.6296 = \{r\}_1^T [M] \{r\}_1 = M_1^* = \sum_i r_{i1}^2 m_i$$

$$[K^*] = [R]^T [K] [R] = 60 \begin{bmatrix} 6.899 & 0.042 & 0.034 \\ 0.042 & 8.651 & -0.040 \\ 0.034 & -0.040 & 13.473 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación con } [K^*] = [P^2 M^*] =$$

$$= \begin{bmatrix} 412.209 & 0 & 0 \\ 0 & 519.749 & 0 \\ 0 & 0 & 807.970 \end{bmatrix} = [P^2 M^*]$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 413.940 & 0 \dots & 0 \dots \\ 0 \dots & 519.060 & 0 \dots \\ 0 \dots & 0 \dots & 808.380 \end{bmatrix}$$



$$Y_{01} = \frac{\{r\}_1^T [M] \{X_0\}}{M_1^*} = \frac{2.0 + 6.405 + 9.855}{19.629} = 0.9303 \text{ cm}$$

$$Y_{02} = \frac{\{r\}_2^T [M] \{X_0\}}{M_2^*} = \frac{2.0 + 2.697 - 4.422}{5.386} = 0.0511$$

$$Y_{03} = \frac{\{r\}_3^T [M] \{X_0\}}{M_3^*} = \frac{2.0 - 3.132 + 1.233}{3.804} = 0.0266$$

Modo $Y_1(t)$

$$P_1 = 4.58$$

$$P_2 = 9.82$$

$$P_3 = 14.56$$

En p.

0.930 cm

0.051 cm

0.026 cm

son amplitudes de los
modos

Para obtener los desplazamientos de las masas debemos multiplicar por las configuraciones modales:

$$x_{i1} = \{r\}_1 \quad Y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} \quad 0.93 \cos 4.58 t$$

$$x_{i2} = \{r\}_2 \quad Y_2(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.899 \\ -1.474 \end{Bmatrix} \quad 0.051 \cos 9.82 t$$

$$x_{i3} = \{r\}_3 \quad Y_3(t) = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} \quad 0.0266 \cos 14.56 t$$

y sumar. O sea los desplazamientos $x_i(t)$ de las masas serán

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

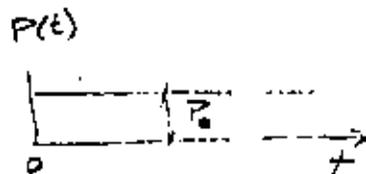
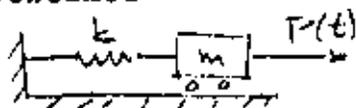
$$x_1(t) = r_{11} Y_1(t) + r_{12} Y_2(t) + r_{13} Y_3(t)$$

$$x_2(t) = r_{21} Y_1(t) + r_{22} Y_2(t) + r_{23} Y_3(t)$$

$$x_3(t) = r_{31} Y_1(t) + r_{32} Y_2(t) + r_{33} Y_3(t)$$

Otro ejemplo

Para 1GL teníamos



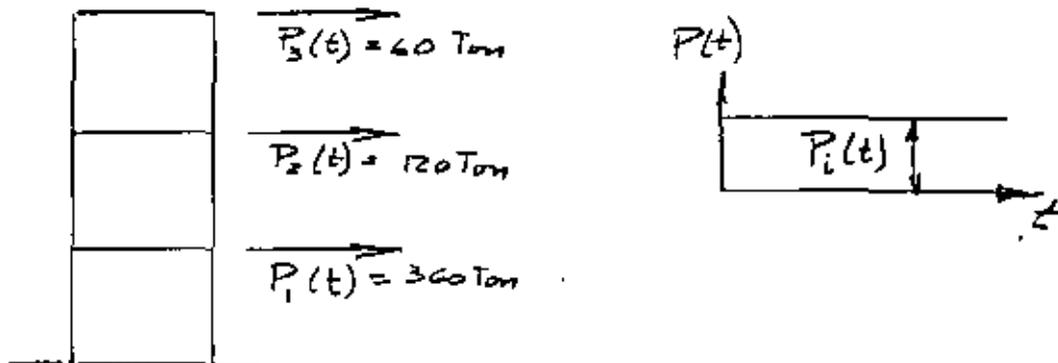
La ec:

$$x + p^2 x = \frac{P(t)}{m} = \frac{P_0}{m}$$

y para CI = 0 la solución

$$x = \frac{P_0}{K} (1 - \cos pt)$$

Tenemos ahora el problema de encontrar la respuesta de



Para el modo j :

$$\ddot{Y}_j + p_j^2 Y_j = \frac{P_j^*(t)}{M_j} = \frac{P_{j0}^*}{M_j} \quad \text{cuya solución es:}$$

$$Y_j = \frac{P_{j0}^*}{K_j} (1 - \cos p_j t) = \frac{P_{j0}^*}{2 p_j^2 M_j} (1 - \cos p_j t)$$

Cálculo de P_j^*

$$P_j^* = \{r\}'_j \{P(t)\} = \{r\}'_j \begin{Bmatrix} 360 \\ 120 \\ 60 \end{Bmatrix}$$

modo

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ 1) \quad P_1^* = P_1 r_{11} + P_2 r_{21} + P_3 r_{31} = 360 + 256.2 + 197.1 = 813.3 \\ 2) \quad P_2^* = P_1 r_{12} + P_2 r_{22} + P_3 r_{32} = 360 + 107.88 - 88.4 = 379.48 \\ 3) \quad P_3^* = P_1 r_{13} + P_2 r_{23} + P_3 r_{33} = 360 - 125.28 + 24.66 = 259.98 \end{array}$$

Ahora bien,

$$Y_{j(st)} = \frac{P_j^*}{p_j^2 M_j} = \frac{P_j^*}{K_j}$$

$$Y_{1(st)} = \frac{813.30}{21 \times 19.629} = 1.973 \text{ cm}$$

$$Y_{2(st)} = \frac{379.48}{965 \times 5.386} = 0.730 \text{ cm}$$

$$Y_{3(st)} = \frac{259.38}{212.4 \times 3.804} = 0.321 \text{ cm}$$

de donde

$$Y_j = \frac{P_j^*}{P_j^2 M_j^*} (1 - \cos P_j t), \text{ y tenemos:}$$

$$Y_1(t) = Y_{1(st)} (1 - \cos p_1 t)$$

$$Y_2(t) = Y_{2(st)} (1 - \cos p_2 t)$$

$$Y_3(t) = Y_{3(st)} (1 - \cos p_3 t)$$

y, finalmente:

$$\{x(t)\} = \{r_1\} Y_1(t) + \{r_2\} Y_2(t) + \{r_3\} Y_3(t) = [R] \{Y\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} 1.973 (1 - \cos p_1 t) + \dots + \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} 0.321 (1 - \cos p_3 t)$$

EXCITACION SISMICA

A. Sistemas 1GL

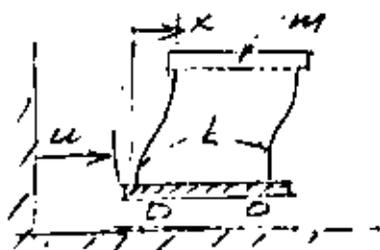


$$m \ddot{x} + kx + P(t) \quad (a)$$

Para $P(t)$ cualquiera y para $CI \neq 0$ la solución de (a) es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

Para excitación sísmica:



$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) + kx = 0$$

o sea,

$$m \ddot{x} + kx = -m\ddot{u} \quad (b)$$

De la comparación de (a) y (b), la solución completa de ésta es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt - \frac{1}{p} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

B. Sistemas de nGL:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u} \\ -m_2 \ddot{u} \\ \vdots \\ -m_n \ddot{u} \end{Bmatrix}$$

$$= - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix} \ddot{u} \quad \ddot{u} = - \{m\} \ddot{u}$$

Es decir, tenemos:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}$$

sust. $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}(t)$$

pre x $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \underbrace{\{r\}'_j \{P\}}_{P_j^*} = - \underbrace{\{r\}'_j \{m\}}_{m_j^*} \ddot{u}$$

por ortogonalidad:

$$\{r\}'_j [M] \{r\} \ddot{y}_j + \{r\}'_j [K] \{r\} y_j = P_j^* = U_j^*$$

y queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^* = U_j^* = - m_j^* \ddot{u}$$

∴ la solución (CI = 0) de esta ecuación es:

Para P_j^* :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t P_j^*(z) \sin \phi_j(t-z) dz$$

Para U_j^* :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t U_j^*(z) \sin \phi_j(t-z) dz$$

que puede escribirse:

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{\phi_j M_j^*} \int_0^t \ddot{u}(Z) \operatorname{sen} \phi_j(t-Z) dZ$$

$$+ y_{0j} \cos \phi_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{\phi_j} \operatorname{sen} \phi_j t \quad \begin{array}{l} \text{término a} \\ \text{para} \\ \text{CI} \neq 0 \end{array}$$

Una vez obtenidos los elementos de $\{y\}$ solo falta premultiplicar por $[R]$ para obtener $\{x\}$:

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

GENERALIZACION DE LAS CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

Tenemos la ecuación:

$$[K] - p^2 [M] \{x\} = \{0\}$$

que convenimos en escribir en la forma:

$$(K - p^2 M) x = 0$$

como los vectores modales la satisfacen:

$$K r_j = \phi_j^2 M r_j \quad (a)$$

y premultiplicando por: $r_i^T M M^{-1}$ tenemos:

$$r_i^T M M^{-1} K r_j = p_j^2 M M^{-1} M r_j = p_j^2 M M^{-1} K r_j = 0$$

que puede escribirse

$$r_i' M (M^{-1} K)^2 r_j = 0$$

y así podría seguirse para llegar a:

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} l \text{ entero} \\ -\infty < l < \infty \end{array} \right.$$

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad (b)$$

en forma análoga podemos obtener

$$r_i' (MF)^l M r_j = 0 \quad (c)$$

$$r_i' (K M^{-1})^l K r_j = 0$$

En (b):

$$l = -2 \quad M (M^{-1} K)^{-2} = M (M^{-1} K)^{-1} (M^{-1} K)^{-1}$$

$$(\text{en (c), con } l=2) \quad = M K^{-1} M K^{-1} M = \underline{M F M F M}$$

$$l = -1 \quad M (M^{-1} K)^{-1} = M K^{-1} M = \underline{M F M}$$

$$l = 0 \quad M (M^{-1} K)^0 = \underline{M}$$

$$l = 1 \quad M (M^{-1} K)^1 = M M^{-1} K = \underline{K}$$

$$l = 2 \quad M (M^{-1} K)^2 = M M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K}$$

$$l = 3 \quad M (M^{-1} K)^3 = M M^{-1} K M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K M^{-1} K}$$

VIBRACION LIBRE Y FORZADA DE SISTEMAS DE N GL CON AMORTIGUAMIENTO

Las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$\{F_I\} + \{F_a\} + \{F_r\} = \{P(t)\}$$

Ya tenemos:

$$\{F_I\} = [M] \{\ddot{x}\}$$

$$\{F_r\} = [K] \{x\}$$

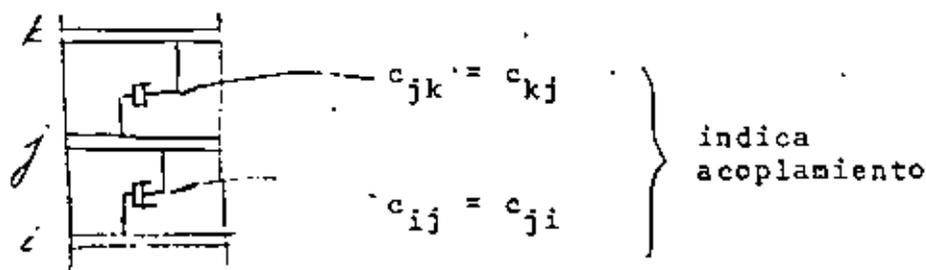
y ahora hacemos

$$\{F_a\} = [c] \{\dot{x}\}$$

donde

$$[c] = [c_{ij}]$$

y c_{ij} = fuerza de amortiguamiento en la coordenada i debido a una velocidad unitaria en la coordenada j .



La ecuación de movimiento es

$$[M] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Hagamos: $\{x\} = [R] \{y\}$ premultiplicando por $\{r\}_j'$

$$\{r\}_j' [M] [R] \{\dot{y}\} + \{r\}_j' [C] [R] \{\dot{y}\} + \{r\}_j' [K] [R] \{y\} = \{r\}_j' \{P(t)\}$$

Para desacoplar estas ecuaciones debemos tener

$$\left. \begin{aligned} \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \\ \{r\}_j' [K] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{cierto por} \\ \text{ortogonalidad} \end{array}$$

$$\{r\}_j' [C] \{r\}_i = 0 \quad i \neq j \quad \text{¿pero ésta? (a)}$$

1° admitamos que se cumple:

Ya definimos

$$\begin{aligned} \{r\}_j' [M] \{r\}_j &= M_j^* \\ \{r\}_j' [K] \{r\}_j &= K_j^* \\ \{r\}_j' \{P(t)\} &= P_j^* \end{aligned}$$

y ahora

$$\{r\}_j' [C] \{r\}_j = C_j^* = 2\beta_j \phi_j M_j^*$$

y nuestra ecuación para el modo j queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + 2\beta_j \phi_j M_j^* \dot{y}_j + \phi_j^2 M_j^* y_j = P_j^*$$

o bien:

$$\ddot{y}_j + 2\beta_j \phi_j \dot{y}_j + \phi_j^2 y_j = \frac{P_j^*}{M_j^*}$$

Como las soluciones para un sistema de AGL (cuya ec. es $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + p^2x = \frac{P(t)}{m}$) ya las conocemos, solo nos falta saber cómo debe ser $[C]$ para que se cumpla

$$\{r\}_i^t [C] \{r\}_j = 0 \quad i \neq j \quad (a)$$

además, claro, de

$$y \left. \begin{aligned} \{r\}_i^t [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}_i^t [K] \{r\}_j &= 0 \end{aligned} \right\} i \neq j$$

La ec. (a) se satisface si

i) $[C]$ es proporcional a $[M]$ o a $[K]$

ii) $[C]$ es una combinación lineal de $[M]$ y $[K]$, o

sea:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K]$$

esto es muy restringido.

iii) En forma más general:

$$[C] = [M] \sum_1^l a_l [M^{-1}K]^l = \sum_1^l [C_l] \quad (38.1)$$

pues ya sabemos que todas las posibles formas

$$[M] [M^{-1}K]^l \text{ son satisfactorias y (38.1) es}$$

una C. L. de matrices de este tipo.

La selección adecuada de a_1 dará a $[C]$ las propiedades deseadas, o sea, podremos dar valores específicos a los elementos de $[C]$. ¿Cuáles le damos?

Asignamos un cierto valor de β a cada modo.

$$C_j^* = \underbrace{\{r\}_j^T}_{A} [C] \{r\}_j = 2\beta_j \phi_j^T M_j^* = \sum_1 \{r\}_j^T [C_1] \{r\}_j = \sum_1 C_{j1}^* \quad (38.2)$$

De 38.1 y A

$$C_{j1}^* = \{r\}_j^T [M] [M^{-1}K]^{-1} \{r\}_j a_1 \quad (38.3)$$

Por otra parte, para vibración libre:

$$(K - \phi_j^2 M) r_j = 0$$

$$K r_j = \phi_j^2 M r_j \leftrightarrow \frac{1}{\phi_j^2} r_j = F M r_j$$

premultiplicando por $r_j^T M$:

$$\frac{1}{\phi_j^2} r_j^T M r_j = r_j^T M F M r_j$$

es decir

$$(\phi_j^2)^{-1} M_j^* = r_j^T M (M^{-1}K)^{-1} r_j$$

y así podríamos llegar a que, para cualquier l :

$$(\phi_j^z)^1 M_j^* = r_j^1 M (M^{-1} K)^1 r_j = \underbrace{C_{j1}^*}_{\text{por 38.3}} a_1 \quad 39.1$$

De 39.1:

$$C_{j1}^* = (\phi_j^z)^1 M_j^* a_1$$

$$C_{j1}^* = (\phi_j^z)^1 M_j^* a_1 .$$

y sumando sobre 1:

$$\sum_1 C_{j1}^* = \sum_1 (\phi_j^z)^1 M_j^* a_1$$

pero ya teníamos que

$$\sum_1 C_{j1}^* = 2\beta_j \phi_j^z M_j^*$$

$$\therefore 2\beta_j \phi_j^z M_j^* = \sum_1 (\phi_j^z)^1 M_j^* a_1$$

de donde:

$$\beta_j = \frac{1}{2\phi_j^z} \sum_1 (\phi_j^z)^1 a_1 .$$

Con los n valores de β_j para los n modos podemos resolver para los n valores de a_1 y formar nuestra $[C]$ con la ecuación

$$[C] = [M] \sum_1 a_1 [M^{-1}K]^{-1}$$

Por ejemplo para nuestra estructura de 3GL asignemos:

$$\beta_1 = 0.10, \quad \beta_2 = 0.05, \quad \beta_3 = 0.02$$

$$\beta_1 = 0.10 = \frac{1}{2\phi_1} \left[a_{-1}(\phi_1^2)^{-1} + a_0(\phi_1^2)^0 + a_1(\phi_1^2)^1 \right]$$

$$\beta_2 = 0.05 = \frac{1}{2\phi_2} \left[a_{-1}(\phi_2^2)^{-1} + a_0(\phi_2^2)^0 + a_1(\phi_2^2)^1 \right]$$

$$\beta_3 = 0.02 = \frac{1}{2\phi_3} \left[a_{-1}(\phi_3^2)^{-1} + a_0(\phi_3^2)^0 + a_1(\phi_3^2)^1 \right]$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \\ 0.02 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\phi_1^3 & 1/\phi_1 & \phi_1 \\ 1/\phi_2^3 & 1/\phi_2 & \phi_2 \\ 1/\phi_3^3 & 1/\phi_3 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

al resolver para a_1 resulta

$$\underline{[C]} = a_{-1} [MFM] + a_0 [M] + a_1 [K]$$

En p. tenemos que para $CI = 0$ y $\beta = 0$, para excitación sísmica

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{P_j M_j} \int_0^t u_j(\omega) \sin P_j(t-\tau) d\tau$$

coeficiente de participación

$$C_j = \frac{m_j^*}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j' \{m\}}{\{r\}_j' [M] \{r\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}^2}$$

y \therefore podemos poner:

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

en la que C_j está definida arriba y

$$z_j(t) = -\frac{1}{\beta_j} \int_0^t u(z) \operatorname{sen} \beta_j(t-z) dz$$

(y semejante si $\beta \neq 0$)

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

Además, tenemos

$$\{X\} = [R] \{y\}$$

o sea

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nj} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

††
∴

$$x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j z_j(t)$$

De aquí (sin sumar para todos los modos)

$$\left. \begin{aligned} |X_{ij}|_{\max} &= r_{ij} C_j |z_j(t)|_{\max} = r_{ij} C_j S_d \\ &= r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2} \end{aligned} \right\} S_a = p S_v = p^2 S_d$$

De esta ec. pasamos a:

$$|X_i|_{\max}^{\text{ABS}} = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j S_d = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2}$$

$$|x_i|_{\max}^{\text{PROB}} = \sqrt{\sum (|X_{ij}|_{\max})^2}$$





centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

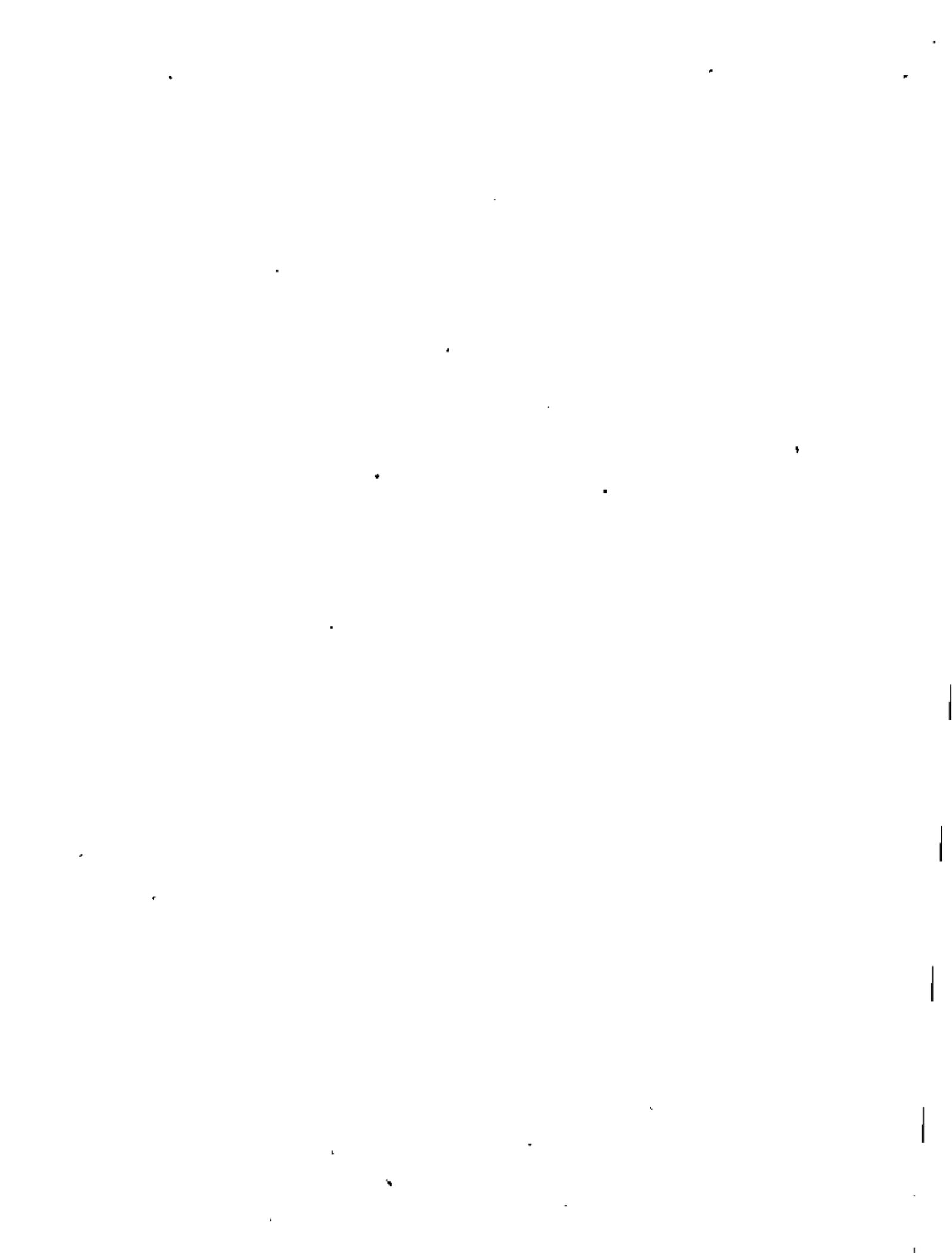
DINAMICA ESTRUCTURAL

INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

RAMON CERVANTES BELTRAN

VICTOR PORRAS SILVA

JULIO, 1980



I N D I C E		Página
1.	<u>INTRODUCCION</u>	1
1.1	<u>Generalidades</u>	1
1.2	<u>Ecuaciones de equilibrio de la elastodinámica</u>	2
1.2.1	Principio de la conservación de la cantidad de movimiento en su forma local o primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento	2
1.2.2	Tensor de deformaciones	4
1.2.3	Ecuaciones constitutivas	6
1.2.4	Ecuaciones de campo	9
1.3	<u>Ecuaciones de equilibrio para varias geometrías</u>	11
1.3.1	Estados planos	11
1.3.1.1	Estado plano de deformaciones	11
1.3.1.2	Estado plano de esfuerzos	13
1.3.1.3	Relación entre los estados planos	14
1.3.2	Sólidos axisimétricos o de revolución	15
1.3.2.1	Tensor de deformaciones	15
1.3.2.2	Ecuaciones constitutivas	15
1.3.2.3	Ecuaciones de Cauchy del movimiento	16
1.3.1.4	Representación de las cargas arbitrarias mediante series de Fourier	16
1.3.1.5	Sólidos axisimétricos con carga axial	16
1.4	<u>Métodos aproximados para la solución de las ecuaciones de equilibrio</u>	18
1.4.1	Métodos de las funciones de prueba	18
1.4.2	Métodos de los residuos pesados	19
1.4.3	Método de Galerkin	19
1.4.4	Métodos variacionales	20
1.4.5	Método de Rayleigh	20
2.	<u>ELEMENTOS FINITOS DE UN MEDIO CONTINUO.</u>	
	<u>ENFOQUE DE DESPLAZAMIENTOS</u>	22
2.1	<u>Modelo discreto estándar</u>	22
2.2	<u>Principio del trabajo virtual en la teoría de la elasticidad lineal</u>	23
2.3	<u>Ecuación de equilibrio de los elementos finitos</u>	24
2.3.1	Definición de la geometría.	24
2.3.2	Aproximación de la solución	24
2.3.3	Componentes del tensor de deformaciones	26
2.3.4	Ecuación constitutiva	27
2.3.5	Equilibrio dinámico	27
2.3.6	Equilibrio estático	29
2.3.7	Propiedades de las matrices de rigidez y de masas	29
2.3.8	Matrices de masas concentradas (diagonal)	30
2.3	<u>Ecuación de equilibrio del medio continuo global</u>	31
2.3.1	Ensamble de las ecuaciones	31
2.3.2	Condiciones de frontera	33
2.3.3	Matriz de amortiguamiento	34
2.3.4	Condiciones iniciales	34
2.3.5	Equilibrio estático	35
2.3.6	Solución de las ecuaciones de equilibrio	35

36	Generalidades	3.1
37	Elementos unidimensionales	3.2
37	Interpolación lineal	3.1.1.1
38	Interpolación lineal normalizada	3.2.1.2
40	Interpolación cuadrática	3.2.1.3
40	Interpolación cuadrática normalizada	3.2.1.4
42	Interpolación en coordenadas naturales	3.2.1.5
43	Elementos con polinomios de Lagrange	3.2.2
43	Interpolación lineal	3.2.2.1
44	Elementos con polinomios de Hermite	3.2.3
46	Elementos bidimensionales	3.3
47	Elemento triangular lineal en coordenadas cartesianas	3.3.1
48	Elementos triangulares en coordenadas naturales	3.3.2
49	Interpolación lineal	3.3.2.1
50	Interpolación cuadrática	3.3.2.2
50	Interpolación cúbica	3.3.2.3
51	Referencia para elementos rectangulares	3.3.3
52	Familia Lagrangiana para elementos rectangulares	3.3.4
52	Familia Serendipity para elementos rectangulares	3.3.5
52	Interpolación lineal	3.3.5.1
53	Interpolación cuadrática	3.3.5.2
53	Interpolación cúbica	3.3.5.3
53	Elementos tridimensionales	3.4
54	Elemento tetraedro lineal en coordenadas cartesianas	3.4.1
56	Elementos tetraedros en coordenadas naturales	3.4.2
57	Interpolación lineal	3.4.2.1
57	Interpolación cuadrática	3.4.2.2
58	Interpolación cúbica	3.4.2.3
58	Familia Lagrangiana para prismas rectangulares	3.4.3
58	Familia Serendipity para prismas rectangulares	3.4.4
59	Interpolación lineal	3.4.4.1
59	Interpolación cuadrática	3.4.4.2
59	Interpolación cúbica	3.4.4.3
60	Elementos anillos axiales	3.4.5
60	Elementos isoparamétricos	3.5
60	Transformación de coordenadas mediante funciones de forma	3.5.1
60	Derivación de las funciones de forma	3.5.2
62	Integración en coordenadas locales	3.5.3
64	Integración numérica para rectángulos y prismas rectangulares	3.5.3.1
64	Integración numérica para triángulos y tetraedros	3.5.3.2
68	ASPECTOS NUMERICOS DEL METODO DEL ELEMENTO FINITO	4
68	Solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales	4.1
68	Métodos directos generales	4.1.1
69	Método de Gauss	4.1.1.1
69	Método de Crout	4.1.1.2
69	Métodos directos para matrices simétricas	4.1.2
70	Método de Gauss modificado	4.1.2.1
71	Método de Crout modificado	4.1.2.2
71	Método de Cholesky	4.1.2.3
72	Selección y organización del método de solución	4.1.2.4
73	Organización de las ecuaciones de equilibrio	4.1.3
73	Arreglos cuadrados	4.1.3.1

4.1.3.2	Arreglos rectangulares (en banda)	73
4.1.4	Arreglos unidimensionales (en silueta)	74
4.2	<u>Solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales</u>	74
4.2.1	Introducción	74
4.2.2	Método Beta de Newmark	76
4.3	<u>Esquema simple para organizar un problema de computadora</u>	78
5	BIBLIOGRAFIA	80
	TABLAS Y FIGURAS	82



INTRODUCCION AL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Ramón Cervantes Beltrán* y Víctor Porras Silva*

1. INTRODUCCION

1.1 Generalidades

El método del elemento finito es un método aproximado para resolver ecuaciones diferenciales de problemas de valores en la frontera o de valores en la frontera e iniciales, que se presentan en ingeniería y en la física matemática. Esquemáticamente, la secuencia del método del elemento finito se puede resumir en los pasos siguientes:

- 1) El medio continuo se divide en varias regiones, denominados elementos, de formas convenientes (triangulares, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, etc.).
- 2) Mediante una selección apropiada de ciertos puntos de los elementos, denominados puntos nodales, las variables de la ecuación diferencial se escriben como una combinación lineal de funciones de interpolación, seleccionadas adecuadamente, y de los valores especificados en los puntos nodales de las variables o sus derivadas.
- 3) Mediante el uso de los métodos variacionales o de los residuos pesados, las ecuaciones diferenciales que gobiernan al problema se transforman en ecuaciones del elemento finito, que gobiernan, en forma aislada, a todos los elementos finitos.
- 4) Los elementos aislados se agrupan para formar un sistema global de ecuaciones diferenciales (problema de valores en la frontera e iniciales) o de ecuaciones algebraicas (problema de valores en la frontera), con sus propias condiciones de frontera o condiciones iniciales.
- 5) Los valores de la variable se determinan al resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes.

El objetivo de este curso consiste en discutir, brevemente, los fundamentos del método del elemento finito y sus aplicaciones a

* Profesor investigador, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.

la ingeniería estructural. Básicamente se utilizan las ecuaciones de equilibrio de la teoría de la elasticidad lineal.

1.2 Ecuaciones de equilibrio de la elastodinámica

Para poder estudiar el comportamiento de las estructuras es necesario establecer su modelación, ya sea experimental o matemática. La modelación que forma parte de este tema es la matemática y consiste en expresar, en un lenguaje formal o matemático, las leyes que gobiernan al comportamiento.

Toda estructura queda definida por los conceptos siguientes:

- 1) Geometría
- 2) Material
- 3) Cargas

Las leyes que gobiernan a los conceptos anteriores son las leyes de la mecánica y en especial las correspondientes a la mecánica del medio continuo. Las estructuras que se estudiarán en este tema son las que se construirán con un material sólido, elástico, lineal e isótropo. Las leyes que gobiernan a tales estructuras forman la base de la teoría de la elasticidad lineal y las ecuaciones correspondientes a cualquier punto de la estructura, asociadas a un sistema de referencia cartesiano, resultan ser:

1.2.1 Principio de la conservación de la cantidad de movimiento en su forma local o primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento.

a) En notación indicial

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho a_i \quad (1.2.1)$$

donde σ_{ij} son los componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy, simétrico, que en forma matricial se puede expresar como:

$$[\sigma_{ij}] = \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

f_i son los componentes del vector fuerzas de cuerpo por unidad de masa cuya expresión es:

$$[f_i] = \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

a_i , son los componentes del vector aceleración indicados como:

$$[a_i] = \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

El vector aceleración se puede expresar en función de los componentes del vector de velocidades v_i , del vector de posición p_i y del vector de desplazamientos, u_i , como se indica a continuación

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2 \underline{p}}{dt^2} = \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} \quad (1.2.5)$$

que en forma de sus componentes resulta ser

$$\underline{a} = \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right]^T \quad (1.2.6)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

ρ es la densidad de masa por unidad de volumen

b) En notación tradicional, las primeras ecuaciones de Cauchy del movimiento resultan ser:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = \rho a_x \quad (1.2.8)a$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho f_y = \rho a_y \quad (1.2.8)b$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + e f_x = e a_x \quad (1.2.8)c$$

donde los elementos del tensor $\underline{\sigma}$ y los vectores \underline{f} y \underline{a} resultan ser:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.9)$$

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (1.2.10)$$

$$\underline{a} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]^T \quad (1.2.11)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

1.2.2 Tensor de deformaciones

La métrica utilizada para medir el cambio geométrico del cuerpo - resulta ser:

a) En notación indicial

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2.13)$$

donde e_{ij} son los componentes del tensor de deformaciones, simétrico, que en forma matricial se indica como:

$$[e_{ij}] = \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2.14)$$

u_i son los componentes del vector desplazamiento. En la primera forma de la ec. 1.2.13 se utiliza la convención de derivadas parcial, mediante una coma

b) En notación tradicional

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2.15)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2.16)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.2.17)$$

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.2.18)$$

$$\gamma_{yz} = 2e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.2.19)$$

$$\gamma_{zx} = 2e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.2.20)$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{xy} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.2.21)$$

1.2.3 Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas del material sólido, elástico, lineal e isótropo están dadas por las ecuaciones de Hooke-Cauchy, también conocida como Ley de Hooke generalizada.

a) En notación indicial

$$\sigma_{kl} = \lambda e_{mm} \delta_{kl} + 2\mu e_{kl} \quad (1.2.22)$$

o bien

$$e_{kl} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{mm} \delta_{kl} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{kl} \quad (1.2.23)$$

donde λ y μ son las constantes elásticas de Lamé y δ_{kl} es la delta de Kronecker.

Las constantes de Lamé están relacionadas con las constantes de laboratorio denominadas, módulos de Young E de Elasticidad E y relación de Poisson ν , mediante las expresiones siguientes:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.2.24)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.2.25)$$

donde G se le conoce con el nombre de módulo de rigidez al cortante.

Con base en las ecs 1.2.24 y 1.2.25, las ecs 1.2.22 y 1.2.23 se pueden escribir como:

$$\sigma_{kl} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu) e_{kl} + \nu e_{mm} \delta_{kl} \right] \quad (1.2.26)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{kl} - \nu \sigma_{mm} \delta_{kl} \right] \quad (1.2.27)$$

b) En notación tradicional

Las ecs 1.2.26 y 1.2.27 se pueden escribir como

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) e_{xx} + \nu(e_{yy} + e_{zz}) \right] \quad (1.2.28)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) e_{yy} + \nu(e_{zz} + e_{xx}) \right] \quad (1.2.29)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) e_{zz} + \nu(e_{xx} + e_{yy}) \right] \quad (1.2.30)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (1.2.31)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (1.2.32)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = G \gamma_{zx} \quad (1.2.33)$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right] \quad (1.2.34)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right] \quad (1.2.35)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] \quad (1.2.36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy} \quad (1.2.37)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz} \quad (1.2.38)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx} = \frac{1}{G} \sigma_{zx} \quad (1.2.39)$$

Las ecs 1.2.28 a 1.2.33 se pueden agrupar en forma matricial, según se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (1.2.40)$$

que en forma simbólica se puede escribir como

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{e} \quad (1.2.41)$$

donde $\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ son los vectores de esfuerzos y de deformaciones, respectivamente, y \underline{D} es la matriz de coeficientes elásticos, cuyas expresiones son:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}$$

(1.2.42)

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

(1.2.43)

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (1.2.44)$$

También las ecs 1.2.34 a 1.2.39 al agruparse en forma matricial se pueden escribir de la siguiente forma

$$\underline{\epsilon} = \underline{D}^{-1} \underline{\sigma} \quad (1.2.45)$$

$$\underline{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (1.2.46)$$

1.2.4 Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo son las ecuaciones de movimiento o equilibrio dinámico (ecs 1.2.1 a 1.2.8) expresadas en función de los componentes del vector desplazamiento. Se les conocen también con el nombre de ecuaciones de campo de Navier y son:

a) En notación indicial

Estas ecuaciones se obtienen al sustituir las ecs 1.2.13 en las -
ecs 1.2.22 y el resultado obtenido se sustituye en la ec. 1.2.1
resulta:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial u_i}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i^2} + f_k = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad (1.2.47)$$

b) En notación vectorial

Con base en la definición del operador gradiente ∇ , las ecs 1.2.47
se pueden escribir como:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \underline{u} + \underline{f} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (1.2.48)$$

donde ∇ , el operador gradiente, queda definido por

$$\nabla = \underline{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \underline{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1.2.49)$$

c) En notación tradicional

En este caso, las ecuaciones de campo se pueden escribir directa-
mente al interpretar las ecs 1.2.47 ó las ecs 1.2.48. También se
pueden obtener al sustituir las ecs 1.2.15 a 1.2.20 en las ecs --
1.2.28 a 1.2.33; y el resultado obtenido se sustituye en las ecs
1.2.8. Las ecuaciones resultantes se indican a continuación.

$$\rho \left(\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.50)a$$

$$\rho \left(\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.2.50)b$$

$$\rho \left(\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.2.50)c$$

donde ∇^2 es el operador de Laplace definido con

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.2.51)$$

1.3 Ecuaciones de equilibrio para varias geometrías

Las ecuaciones de equilibrio (ecs 1.2.47 ó 1.2.48 ó 1.2.50) son válidas para cualquier punto de cualquier estructura de forma arbitraria, pero construídas con un material sólido, elástico, lineal e isótropo (estructuras modeladas con la teoría de la elasticidad lineal). De acuerdo con lo indicado en el inciso 1.2, la geometría de la estructura influye sensiblemente en la forma final de las ecuaciones de equilibrio. En este inciso se bosquejan los modelos estructurales de la elasticidad lineal para varias geometrías adicionales a la geometría arbitraria (tridimensional), que se indicó en el inciso anterior.

1.3.1 Estados planos

En este modelo estructural, la geometría se puede considerar en un plano y el problema matemático es bidimensional.

1.3.1.1 Estado plano de deformaciones

En la fig. 1.2 se muestran algunas estructuras que poseen las siguientes características:

- a) La geometría corresponde a un cuerpo alargado y prismático, de tal manera que para definirla basta especificar la sección correspondiente a un plano perpendicular al eje.
- b) Las cargas que actúan a lo largo del eje son tales que basta con definir las en un plano perpendicular al eje.

De acuerdo con las características anteriores, la estructura queda definida en un plano (fig. 1.3) de espesor unitario, todas las variables que aparecen en las ecuaciones de equilibrio son independientes de la variable z (a lo largo del eje) y el desplazamiento, w , en tal dirección es nulo, es decir:

$$u = u(x, y) \quad (1.3.1)$$

$$v = v(x, y) \quad (1.3.2)$$

$$w = 0 \quad (1.3.3)$$

A continuación se describe el efecto de las ecs 1.3.1 a 1.3.3 en las ecuaciones de equilibrio de la estructura.

a) Tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs 1.3.1 a 1.3.3 en las ecs 1.2.15 a 1.2.20 se obtiene

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.3.4)$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.3.5)$$

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.3.6)$$

$$e_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1.3.7)$$

b) Ecuaciones constitutivas

Al sustituir las ecs 1.3.4 a 1.3.7 en las ecs 1.2.28 a 1.2.33; y al ordenar el resultado en forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3.8)$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.3.9)$$

La ec 1.3.8 se puede escribir en forma simbólica como:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{e} \quad (1.3.10)$$

donde

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3.11) \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3.12)$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (1.3.13)$$

c) Ecuación de Cauchy del movimiento

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + e f_x = e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3.14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + e f_y = e \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3.15)$$

1.3.1.2 Estado plano de esfuerzos

Si las estructuras descritas en el estado plano de deformaciones, en vez de ser alargadas ^{son} extraordinariamente delgadas (fig. 1.4) se puede aseverar que los componentes del tensor esfuerzo, asociados a la dirección del espesor, son nulos, es decir:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.3.16)$$

Al sustituir las ecs 1.3.16 en las ecs 1.2.34 a 1.2.39 y reordenarlas se obtiene

$$e_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] \quad (1.3.17)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] \quad (1.3.18)$$

$$\gamma_{xy} = 2 e_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} \quad (1.3.19)$$

$$e_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (e_{xx} + e_{yy}) \quad (1.3.20)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1.3.21)$$

A continuación se resumen las ecuaciones de equilibrio para los estados planos de esfuerzo.

a) Tensor de deformaciones

Queda igual que las deformaciones planas, excepto que existe la deformación ϵ_{21} dada por la ec 1.3.20

b) Ecuaciones constitutivas

Al poner en forma matricial las ecs 1.3.17 a 1.3.19 se transforman en

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.3.22)$$

La ec 1.3.22, en forma simbólica, se puede escribir como se indica en la ec 1.3.10; donde los vectores $\underline{\sigma}$ y $\underline{\epsilon}$ están dados por las ecs 1.3.11 y 1.3.12 y la matriz \underline{D} se indica a continuación:

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (1.3.23)$$

c) Ecuaciones de Cauchy del movimiento

Quedan iguales a las de las deformaciones planas.

1.3.1.3 Relación entre los estados planos

Se puede demostrar fácilmente que la ec 1.3.22 se transforma en la ec 1.3.13 si se efectúa la sustitución indicada a continuación

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (1.3.24)$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (1.3.25)$$

Por lo tanto se puede concluir que si se tiene resuelto el modelo matemático correspondiente al estado plano de esfuerzos, se puede tener también el correspondiente al estado plano de deformaciones, si el espesor se hace unitario y se efectúa la transformación indicada por las ecs 1.3.24 y 1.3.25.

1.3.2 Sólidos axisimétricos o de revolución

Existen estructuras cuya geometría queda definida mediante un cuerpo de revolución por lo que existe simetría geométrica respecto al eje de revolución. Las variables de la teoría de la elasticidad - para tales cuerpos conviene expresarlas en un sistema de referencia cilíndrica, según se muestra en la fig. 1.5.

1.3.2.1 Tensor de deformaciones

Los componentes del tensor de deformaciones se muestran en la fig. 1.6 y en relación con el vector desplazamientos se indica a continuación.

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.3.26)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.3.27)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (1.3.27)$$

$$\gamma_{rz} = 2e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad (1.3.28)$$

$$\gamma_{r\theta} = 2e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \quad (1.3.29)$$

$$\gamma_{z\theta} = 2e_{z\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.3.30)$$

donde $u = u(r, z, \theta)$, $v = v(r, z, \theta)$ y $w = w(r, z, \theta)$ son los componentes del vector desplazamiento en la dirección radial (r) axial (z) y tangencial (θ), respectivamente.

1.3.2.2 Ecuaciones constitutivas

Los componentes del tensor esfuerzo asociado al sistema de referencia se muestran en la fig. 1.6. La ecuación constitutiva está dada por la ec 1.2.41 en donde los vectores de esfuerzo y de deformaciones se indican a continuación:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{z\theta} \end{bmatrix} \quad (1.3.31) \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ e_{r\theta} \\ e_{r\theta} \\ e_{z\theta} \end{bmatrix} \quad (1.3.32)$$

1.3.2.3 Ecuaciones de Cauchy del movimiento

Las ecuaciones de Cauchy para la referencia cilíndrica resultan ser:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3.33)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \rho f_\theta = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3.35)$$

1.3.2.4 Representación de las cargas arbitrarias mediante series de Fourier

Al descomponer las cargas mediante series de Fourier, respecto a la variable tangencial (θ), el problema tridimensional se transforma en varios problemas bidimensionales en las variables radial (r) y axial (z).

1.3.2.5 Sólidos axisimétricos con carga axial

Para cargas con simetría axial, únicamente, existe un término de la serie de Fourier y los componentes del vector desplazamiento resultan ser

$$u = u(r, z) \quad (1.3.36)$$

$$v = v(r, z) \quad (1.3.37)$$

$$w = 0 \quad (1.3.38)$$

La influencia de las ecs 1.3.36 a 1.3.38 en las ecuaciones de equilibrio para estas estructuras se resume a continuación:

a) Tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs 1.3.36 a 1.3.38 en las ecs 1.3.26 a 1.3.30 se obtienen las expresiones siguientes

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.3.39)$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1.3.40)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} u \quad (1.3.41)$$

$$\gamma_{rz} = 2 e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \quad (1.3.42)$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0 \quad (1.3.43)$$

b) Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones constitutivas (ec 1.2.40) se reduce a la expresión siguiente

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad (1.3.44)$$

en donde los elementos de la ecuación simbólica (ec 1.2.41) resultan ser

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} \quad (1.3.45) \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{\theta\theta} \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad (1.3.46)$$

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (1.3.47)$$

c) Ecuaciones de Cauchy

Las dos ecuaciones de Cauchy del movimiento que resultan se indican a continuación:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + e f_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.3.48)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.3.49)$$

1.3.3 Otras geometrías

Existen varias geometrías que se utilizan para modelar las estructuras como son: barras, placas y cascarones. La determinación de las ecuaciones de equilibrio resulta un poco más laboriosa que las geometrías discutidas, razón por la que no se indicará en este resumen.

1.4 Métodos Aproximados para la Solución de las Ecuaciones de Equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio bosquejadas en los incisos anteriores se pueden escribir, en forma matricial, como se indica a continuación

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{f} \quad \text{en } \Omega \quad (1.4.1)$$

$$\underline{B} \underline{u} = \underline{g} \quad \text{en } \Gamma \quad (1.4.2)$$

donde los componentes de las matrices \underline{A} y \underline{B} son operadoras diferenciales, los componentes del vector \underline{u} son las funciones incógnitas del problema, y los componentes de los vectores \underline{f} y \underline{g} son funciones conocidas. La ec 1.4.1 representa el equilibrio en cualquier punto interior de la estructura (región Ω), y la ec 1.4.2 las correspondientes condiciones de frontera (región Γ). Para fines de explicación y por facilidad, las ecs 1.4.1 y 1.4.2, en lo que sigue, se considerarán como ecuaciones escalares, es decir

$$Au = f \quad \text{en } \Omega \quad (1.4.3)$$

$$Bu = g \quad \text{en } \Gamma \quad (1.4.4)$$

1.4.1 Métodos de las funciones de prueba

De los métodos aproximados existentes para resolver las ecs. 1.4.1 y 1.4.2 (1.4.3 y 1.4.4), los que utilizan soluciones ^{mediante funciones} de prueba son los que, en el campo numérico, se aplican con gran éxito.

En estos métodos, la solución buscada, u , es aproximada mediante la prueba, \tilde{u} , de la forma siguiente

$$\tilde{u} = \sum_{r=1}^M c_r \phi_r \quad (1.4.5)$$

donde ϕ_r son M funciones conocidas, linealmente independientes que existen en la región $\Omega + \Gamma$ y los coeficientes C_r son parámetros desconocidos que se determinarán con algún criterio.

1.4.2 Métodos de los residuos pesados

Para explicar estos métodos, la ec 1.4.3 se escribe como se indica a continuación

$$Au - f = 0 \quad (1.4.6)$$

Al sustituir en la ec 1.4.6 el valor aproximado de u (\tilde{u}), dado por la ec 1.4.5, se obtiene un error o residuo, ϵ , dado por

$$\epsilon = A \tilde{u} - f \quad (1.4.7)$$

La selección de las funciones de prueba, ϕ_r , de la ec 1.4.5, se hace de tal manera que satisfagan las condiciones de frontera (en Γ) mientras que los coeficientes, C_r , de la solución aproximada se cuantifican de tal manera que el error, dado por la ec 1.4.7, sea mínimo o pequeño en algún contexto.

En forma generalizada, una función pesada de los residuos $W f(\epsilon)$, es la que debe satisfacer el criterio de pequeñez, donde, W es la función de peso y $f(\epsilon)$ es la función residual, tal que, $f(\epsilon) = 0$, para $\epsilon = 0$. El criterio de pequeñez para todos los métodos de los residuos se puede expresar como:

$$\int_{\Omega} W f(\epsilon) d\Omega = 0 \quad (1.4.8)$$

La condición dada por la ec 1.4.8 para operadores lineales (que es el caso de la teoría de la elasticidad lineal) conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, para todos los métodos que actualmente se usan (subdominio, mínimos cuadrados, Galerkin, etc).

1.4.3 Método de Galerkin

El método de Galerkin, conocido también como de Bubnov, consiste en hacer que el error, ϵ , sea ortogonal a las funciones de prueba, ϕ_r , en el dominio de la estructura (en Ω), es decir, que las funciones de peso sean las funciones de prueba, como se indica a continuación

$$\int_{\Omega} \phi_r \varepsilon d\Omega = 0 \quad (1.4.9)$$

1.4.4. Métodos variacionales

En estos métodos, se busca que la solución de la ec 1.4.3 proporcione un valor extremal a la funcional, $I(u)$, que es una integral de u y sus derivadas sobre el dominio de la estructura $(\Omega + \Gamma)$.

Entonces, si se conoce la funcional, $I(u)$, los métodos variacionales se pueden establecer de la siguiente forma

$$I(u) = \text{valor extremal} \quad (1.4.10)$$

$$B(u) = \mathcal{G} \quad (1.4.11)$$

en donde la ec. 1.4.11 establece las condiciones de frontera esenciales o principales.

De acuerdo con las ecs 1.4.10 a 1.4.11, los métodos variacionales utilizan la solución aproximada dada por la ec 1.4.5, en donde las funciones de prueba, ϕ_r , satisfacen las condiciones de frontera esenciales (ec 1.4.11) y los coeficientes, C_r , se determinan de tal manera que se satisfaga la ec 1.4.10.

En los métodos variacionales se puede utilizar, en vez de la funcional, una ecuación variacional.

Se puede afirmar que si el operador (A) del sistema por resolver es lineal, simétrico, positivo definido, el valor estacionario es un mínimo absoluto.

1.4.5 Método de Rayleigh

De todos los métodos variacionales (Diferencias finitas, Kantorovich, Trefftz, etc.) el que actualmente tiene mayores aplicaciones es el método de Rayleigh, también conocido en el nombre de Ritz o Rayleigh-Ritz.

Este método consiste en sustituir directamente la solución aproximada dada por la ec 1.4.5, en la funcional $I(\tilde{u})$ y aplicar la condición de extremo, en función de los parámetros C_r , como se indica a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial C_r} I(\tilde{u}) = 0 \quad (1.4.12)$$

En caso de utilizarse la ecuación variacional, la ec. 1.4.5 se sustituye directamente.

2. ELEMENTOS FINITOS DE UN MEDIO CONTINUO. ENFOQUE DE DESPLAZAMIENTOS.

En la formulación del método del elemento finito los parámetros C_r , que aparecen en los métodos de las funciones de prueba (inciso 1.4.1), se pueden asociar a valores generalizados de la incógnita u (desplazamientos y sus derivadas) en los puntos nodales, o bien, a otros conceptos relacionados con tales valores (fuerzas o esfuerzos generalizados, o combinaciones entre desplazamientos y fuerzas generalizadas). En este resumen únicamente se considerarán como incógnitas a los valores generalizados de u , y recibe el nombre de enfoque de desplazamientos

2.1 Modelo discreto estándar

En el análisis de las estructuras esqueléticas (armaduras, marcos, etc.) se establecen las ecuaciones de equilibrio con base en las correspondientes ecuaciones de equilibrio de cada una de las barras que las forman. Lo mismo sucede con otros sistemas, no necesariamente estructurales, en donde se puede efectuar una discretización a priori.

En los medios continuos, generalmente es muy difícil asociarles, a primera vista, un modelo discreto para su representación racional y, por lo tanto, para establecer sus ecuaciones. La forma de realizarlo se indica a continuación, ejemplificado con la fig 2.1.

- a) El medio continuo se divide en un número finito de regiones, de formas apropiadas, mediante líneas o superficies. A estas regiones se les denomina elementos finitos (de forma triangular en la fig 2.1)
- b) Los elementos finitos se supone que están interconectados en un número finito de puntos nodales, situados sobre las fronteras de los elementos (círculos pequeños en la fig 2.1). Los desplazamientos de los puntos nodales serán las incógnitas básicas del problema.
- c) Se define en forma única, al estado de desplazamientos en cualquier punto del elemento finito, en función de los desplazamientos en los puntos nodales (interpolación)
- d) Con los desplazamientos conocidos se puede definir, en forma

única, el estado de deformaciones (tensor de deformaciones), también, en términos de los desplazamientos en los puntos nodales. Con base en las ecuaciones constitutivas se puede conocer el estado de esfuerzos en función de los desplazamientos en los puntos nodales

- e) Se determina el sistema de fuerzas concentradas, en los puntos nodales, que equilibre los esfuerzos en las fronteras y cualquier fuerza concentrada o distribuida que actúe en los puntos del elemento. Estas fuerzas equilibrantes también resultan en función de los desplazamientos en los puntos nodales, y su relación conduce al concepto de matriz de rigideces.

2.2 Principio del trabajo virtual en la teoría de la elasticidad lineal

Como se indicó en la solución aproximada de las ecuaciones de equilibrio con los métodos variacionales, se puede utilizar una ecuación variacional en vez de una funcional. En las ecuaciones de la elasticidad lineal, la ecuación variacional está dada por el principio del trabajo virtual, ^{del cual se obtienen las ecuaciones de Cauchy} del movimiento, y su expresión, en notación indicial, resulta ser:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kl} \delta e_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \delta u_k d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{(n)k} \delta u_k d\Gamma + \int_{\Omega} \rho f_k \delta u_k d\Omega \quad (2.2.1)$$

en donde, el símbolo δ , indica la primera variación que opera sobre las cantidades que le preceden y los elementos restantes se definieron en el capítulo anterior.

En notación matricial, la ec 2.2.1 se puede escribir como:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{e}^T \underline{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \rho \ddot{\underline{u}} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{\sigma}}_{(n)} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{f} d\Omega \quad (2.2.2)$$

2.3 Ecuación de equilibrio de los elementos finitos

A fin de ejemplificar el procedimiento para establecer las ecuaciones de equilibrio del modelo discreto estándar de los medios continuos (elemento finito) se hace referencia a la fig 2.1, que corresponde a un estado plano de esfuerzos.

2.3.1 Definición de la geometría

De acuerdo con el punto (a) del inciso 2.1, en la fig 2.1 se muestra la región de la estructura, la división en regiones triangulares y la definición de los puntos nodales. Desde luego que la geometría de los elementos finitos no es única, ni tampoco la definición de los puntos nodales. En el capítulo 3 se presentan otras geometrías que se pueden utilizar en regiones bidimensionales.

2.3.2 Aproximación de la solución

La formulación del elemento finito, a diferencia de los métodos de las funciones de prueba tradicionales, aproxima la solución en cada una de las regiones correspondientes a los elementos finitos. Entonces la aproximación en la región global de la estructura es seccionalmente continua. Desde luego que esta aproximación debe proporcionar desplazamientos compatibles en las fronteras con los elementos vecinos.

En la fig 2.1 el elemento finito e , representa a cualquier elemento en que se dividió la región. A él le corresponden los conceptos siguientes.

Los componentes del vector desplazamientos asociados a cualquier punto del elemento son dos; $u = u(x,y)$ paralelo al eje x y $v = v(x,y)$ paralelo al eje y . La representación vectorial resulta ser:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

De acuerdo con el punto (b) del inciso 2.1, los puntos nodales del elemento finito se etiquetan con las letras i, j, k , que pueden representar a cualquier dígito de los números enteros con los que se numeran los puntos nodales de la estructura. Entonces,

los vectores de desplazamiento de los puntos nodales son:

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad \underline{u}_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad \underline{u}_m = \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

con las ecs 2.3.2 se puede formar un sólo vector denominado, vector de desplazamientos nodales del elemento, según se indica a continuación

$$\underline{u}^e = \begin{bmatrix} \underline{u}_i \\ \underline{u}_j \\ \underline{u}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

con base en la ec 2.3.2, la ec 1.4.5 para el elemento triangular de la fig 3.1 se puede escribir como:

$$\tilde{u} = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \quad (2.3.4)$$

$$\tilde{v} = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \quad (2.3.5)$$

donde las funciones $N_i = N_i(x, y)$, $N_j = N_j(x, y)$ y $N_m = N_m(x, y)$ reciben el nombre de funciones de forma. En el capítulo 3 se presentan las expresiones correspondientes a varias geometrías de elementos finitos.

Las ecs 2.3.4 y 2.3.5 se pueden escribir en forma matricial como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

con base en las ecs 2.3.1 y 2.3.3, la ec 2.3.6 se puede escribir como:

$$\underline{u}^e = [N_i, N_j, N_m] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{u}^e \quad (2.3.7)$$

donde

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad ; \quad N_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix} \quad ; \quad N_m = \begin{bmatrix} N_m & 0 \\ 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (2.3.8)$$

$$\underline{N} = [N_i, N_j, N_m] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (2.3.9)$$

2.3.3 Componentes del tensor de deformaciones

Al sustituir las ecs 1.3.4 a 1.3.6 en la ec 1.3.12 se obtiene

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underline{L} \underline{u} \quad (2.3.10)$$

en donde se utilizó la ec 2.3.1, y la matriz de operadores, \underline{L} , de acuerdo con la ec 2.3.10 resulta ser

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

Al sustituir: la ec 2.3.7 en la ec 2.3.10 resulta ser

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \underline{N} \underline{u}^e = \underline{B} \underline{u}^e \quad (2.3.12)$$

donde, la matriz de deformaciones, \underline{B} , es:

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad (2.3.13)$$

Al sustituir las ecs 2.3.9 y 2.3.11 en la ec 2.3.13, se obtiene

la forma explícita de la matriz \underline{B} para el elemento considerado

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

2.3.4 Ecuación constitutiva

De acuerdo con la ec 1.3.22, la ecuación constitutiva para un material libre de esfuerzos y deformaciones iniciales se escribe como:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{e} \quad (2.3.15)$$

Se se considera que al material sometido a esfuerzos iniciales, $\underline{\sigma}_0$ y a deformaciones iniciales, \underline{e}_0 , la ecuación 2.3.15 se modifica como se indica a continuación

$$\underline{\sigma} = \underline{D} (\underline{e} - \underline{e}_0) + \underline{\sigma}_0 \quad (2.3.16)$$

2.3.5 Equilibrio dinámico

La expresión del principio del trabajo virtual, dada por la ec 2.2.2, es válida para la región completa de la estructura. Cuando se aplica a la región de un elemento finito ($\Omega_e + \Gamma_e$), su expresión resulta ser:

$$\int_{\Omega_e} \delta \underline{e}^T \underline{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega_e} \delta \underline{u}^T \rho \ddot{\underline{u}} d\Omega = \int_{\Gamma_e} \delta \underline{u}^T \underline{f}_{(n)} d\Gamma + \int_{\Omega_e} \delta \underline{u}^T \underline{f} d\Omega \quad (2.3.17)$$

en donde los elementos del integrando deben referirse al elemento finito; y de acuerdo con los desarrollos anteriores se cuantifican a continuación, al tomar en cuenta que la variación se debe tomar en cuenta únicamente en el vector de desplazamientos nodales.

$$\delta \underline{e}^T = \delta (\underline{u}^e{}^T \underline{B}^T) = \delta \underline{u}^e{}^T \underline{B}^T \quad (2.3.18)$$

$$\delta \underline{u}^T \approx \delta \hat{\underline{u}}^T = \delta (\underline{u}^e{}^T \underline{N}^T) = \delta \underline{u}^e{}^T \underline{N}^T \quad (2.3.19)$$

$$\ddot{\underline{u}} \approx \ddot{\underline{u}} = \underline{N} \ddot{\underline{u}}^e \quad (2.3.20)$$

Al sustituir las ecs 2.3.18 y 2.3.20 en la ec 2.3.17, y al recordar que los componentes del vector de desplazamientos nodales son independientes de las variables espaciales (salen fuera de los integrandos), se obtiene la expresión siguiente:

$$\delta \underline{u}^{eT} \left[\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega + \left(\int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega \right) \ddot{\underline{u}}^e = \delta \underline{u}^{eT} \left(\int_{\Gamma^e} \underline{N}^T \underline{\sigma}_{(n)} \, d\Gamma + \int_{\Omega^e} \underline{N}^T \underline{f} \, d\Omega \right) \quad (2.3.21)$$

Para que la ec 2.3.21 sea válida para cualquier variación del vector de desplazamientos nodales ($\delta \underline{u}^{eT}$), se deberá cumplir que

$$\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega + \underline{M}^e \ddot{\underline{u}}^e = \underline{f}_s^e + \underline{f}_c^e \quad (2.3.21)$$

donde, la matriz de masas, \underline{M}^e , del elemento e, esta dado por

$$\underline{M}^e = \int_{\Omega} \underline{e} \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega \quad (2.3.22)$$

\underline{f}_s^e y \underline{f}_c^e son los vectores de fuerzas del elemento debido a las fuerzas de superficie y de cuerpo, respectivamente, que actúan sobre el elemento, es decir

$$\underline{f}_s^e = \int_{\Gamma^e} \underline{N}^T \underline{\sigma}_{(n)} \, d\Gamma \quad (2.3.23)$$

$$\underline{f}_c^e = \int_{\Omega^e} \underline{N}^T \underline{f} \, d\Omega \quad (2.3.24)$$

Al sustituir la ec 2.3.16 en la integral de la ec 2.3.21 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, d\Omega &= \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{e} \, d\Omega - \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{e}_0 \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma}_0 \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{e} \, d\Omega - \underline{f}_{e_0}^e + \underline{f}_{\sigma_0}^e \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

donde $\underline{f}_{e_0}^e$ y $\underline{f}_{\sigma_0}^e$ son los vectores de fuerzas del elemento debidas a la deformación inicial, \underline{e}_0 , y al esfuerzo inicial, $\underline{\sigma}_0$, respectivamente, en el elemento finito, y resultan ser

$$\underline{f}_{\underline{\epsilon}_0}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{\epsilon}_0 d\Omega \quad (2.3.26)$$

$$\underline{f}_{\underline{\sigma}_0}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma}_0 d\Omega \quad (2.3.27)$$

Al sustituir la ec 2.3.12 en la ec 2.3.25 resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{\sigma} d\Omega &= \left(\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega \right) \underline{u}^e - \underline{f}_{\underline{\epsilon}_0}^e + \underline{f}_{\underline{\sigma}_0}^e \\ &= \underline{k}^e \underline{u}^e - \underline{f}_{\underline{\epsilon}_0}^e + \underline{f}_{\underline{\sigma}_0}^e \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

donde la matriz de rigideces, \underline{k}^e , del elemento finito, e, resulta ser:

$$\underline{k}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega \quad (2.3.28)$$

Al sustituir la ec 2.3.27 en la ec 2.3.31 se obtiene

$$\underline{M}^e \ddot{\underline{u}}^e + \underline{k}^e \underline{u}^e = \underline{f}^e \quad (2.3.29)$$

donde el vector de fuerzas externas, \underline{f}^e , del elemento ,e, se indica a continuación

$$\underline{f}^e = \underline{f}_s^e + \underline{f}_e^e + \underline{f}_{\underline{\epsilon}_0}^e - \underline{f}_{\underline{\sigma}_0}^e \quad (2.3.30)$$

2.3.6 Equilibrio estático

Cuando las fuerzas que actúan sobre el elemento son independientes del tiempo (cargas estáticas), se debe cumplir la relación siguiente

$$\ddot{\underline{u}}^e = \underline{0} \quad (2.3.31)$$

Al sustituir la ec 2.3.31 en la ec 2.3.29 se obtiene la ecuación de equilibrio estática del elemento finito, que resulta ser:

$$\underline{k}^e \underline{u}^e = \underline{f}^e \quad (2.3.32)$$

2.3.7 Propiedades de las matrices de rigideces y de masas

Al calcular la transpuesta de la matriz de rigideces (ec 2.3.28) se obtiene

$$(\underline{k}^e)^T = \left(\int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega \right)^T = \int_{\Omega^e} (\underline{B}^T \underline{D} \underline{B})^T d\Omega = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D}^T (\underline{B}^T)^T d\Omega \quad (2.3.33)$$

Al observar las diversas formas de las ecuaciones constitutivas para las geometrías consideradas se concluye que la matriz de coeficientes elásticos es simétrica, es decir

$$\underline{D}^T = \underline{D} \quad (2.3.34)$$

además, se debe cumplir que

$$(\underline{B})^T = \underline{B} \quad (2.3.35)$$

Al sustituir las ecs 2.3.34 y 2.3.35 en la ec 2.3.33 y considerar además la ec 2.3.28, resulta que:

$$(\underline{K}^e)^T = \int_{\Omega^e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega = \underline{K}^e \quad (2.3.36)$$

De la ec 2.3.36 se concluye que la matriz de rigideces, de los elementos finitos, para los medios continuos de la elasticidad lineal, es simétrica.

Al calcular la transpuesta de la matriz de masas (ec 2.3.22) se obtiene

$$\begin{aligned} (\underline{M}^e)^T &= \left(\int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega \right)^T = \int_{\Omega^e} \underline{e} (\underline{N}^T \underline{N})^T \, d\Omega = \int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^T (\underline{N})^T \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega^e} \underline{e} \underline{N}^T \underline{N} \, d\Omega = \underline{M}^e \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

De la ec 2.3.37 se concluye que la matriz de masas de los elementos finitos, para los medios continuos de la elasticidad lineal, es simétrica.

2.3.8 Matriz de masas concentradas (diagonal)

La matriz de masas del elemento finito, dado por la ec 2.3.22, se le denomina matriz de masas consistente, ya que es la que resulta en forma natural en el proceso de discretización en el método del elemento finito. La matriz de masas consistente generalmente no es diagonal.

Sin embargo, por conveniencias numéricas, se utiliza con mucha frecuencia el uso de matrices diagonales, formadas de tal manera que las masas asociadas a los puntos se consideren concentradas. El proceso de concentración no es único y se han utilizado los que a continuación se enumeran

a) Concentración de masas mediante conceptos físicos tales como

por ejemplo, el de áreas o volúmenes tributarios

- b) Concentración mediante nuevas funciones de formas definidas de tal manera que se anulen los términos fuera de la diagonal de la matriz de masas consistente
- c) Concentración mediante el escalamiento de los elementos de la diagonal principal de la matriz de masas consistente, de tal manera que se preserve la masa total del elemento
- d) Concentración mediante la integración numérica de la matriz de masas consistentes, al seleccionar a los puntos nodales como puntos de muestreo

El procedimiento del inciso d conduce a coeficientes negativos de la matriz de masas diagonal. Independientemente del procedimiento seguido, la matriz de masas concentrada o diagonal resulta ser de la forma mostrada a continuación (para el elemento triangular)

$$M^e = \begin{bmatrix} M_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_m \end{bmatrix} \quad (2.3.38)$$

donde M_i , M_j , M_m son los valores de las masas concentradas en los puntos nodales respectivos

2.3 Ecuación de equilibrio del medio continuo global

Si una estructura está en equilibrio, cualquier parte de ella también lo está; la inversa, también es cierta. Entonces, si se tiene garantizado el equilibrio de todos los elementos finitos en que se discretizó el medio continuo, se puede establecer el equilibrio del medio continuo global.

2.3.1 Ensamble de las ecuaciones

A fin de llevar a cabo, sistemáticamente, el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio del medio continuo global, se procede a numerar, en forma secuencial, los elementos finitos en

que se idealizó el medio continuo y los puntos nodales correspondientes (ver fig 2.2)

De acuerdo con lo aseverado al inciso del inciso 2.3 el equilibrio de la estructura mostrada en la fig 2.2, se puede escribir, al utilizar la ec 2.3.9, como se indica a continuación

$$\underline{M}^{(1)} \ddot{\underline{U}}^{(1)} + \underline{K}^{(1)} \underline{U}^{(1)} = \underline{f}^{(1)} \quad (2.3.39)_1$$

$$\underline{M}^{(2)} \ddot{\underline{U}}^{(2)} + \underline{K}^{(2)} \underline{U}^{(2)} = \underline{f}^{(2)} \quad (2.3.39)_2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\underline{M}^{(33)} \ddot{\underline{U}}^{(33)} + \underline{K}^{(33)} \underline{U}^{(33)} = \underline{f}^{(33)} \quad (2.3.39)_{33}$$

en las ecuaciones anteriores el número indicado en el paréntesis corresponde al número del elemento. En forma condensada, las ecs 2.3.39 se pueden escribir como

$$\sum_{e=1}^{33} \underline{M}^{(e)} \ddot{\underline{U}}^{(e)} + \sum_{e=1}^{33} \underline{K}^{(e)} \underline{U}^{(e)} = \sum_{e=1}^{33} \underline{f}^{(e)} \quad (2.3.40)$$

Las ecs 2.3.39 ó 2.3.40 se pueden reordenar, de acuerdo con las observaciones indicadas a continuación.

De la fig 3.2 se puede observar que los desplazamientos del punto nodal 20 (u_{20} y v_{20}), así como sus segundas derivadas respecto al tiempo (\ddot{u}_{20} y \ddot{v}_{20}) aparecen en las correspondientes ecuaciones de equilibrio de los elementos finitos indicados con los números, 11, 12, 13, 18, 19, 20 y 21. Esta observación conduce a aseverar que el número de ecuaciones en que se pueden agrupar las ecuaciones 2.3.39 ó 2.3.40 es igual al número de puntos nodales multiplicado por el número de grados de libertad asociado a cada punto nodal. Entonces, las ecuaciones de equilibrio ordenadas, correspondientes a las ecs 2.3.39 ó 2.3.40 se pueden escribir como

$$\underline{\bar{M}} \ddot{\underline{U}} + \underline{\bar{K}} \underline{U} = \underline{\bar{P}} \quad (2.3.41)$$

donde las matrices $\underline{\bar{M}}$ y $\underline{\bar{K}}$, denominadas matrices de masas y de rigideces de la estructura, y el vector $\underline{\bar{P}}$, conocido como el vector de cargas de la estructura, se determinan con el ordenamiento de las ecuaciones siguientes:

$$\underline{\bar{M}} = \sum_{e=1}^{33} \underline{M}^{(e)} \quad (2.3.42)$$

$$\underline{K} = \sum_{e=1}^N \underline{K}^{(e)} \quad (2.3.43)$$

$$\underline{P} = \sum_{e=1}^N \underline{f}^{(e)} = \underline{P}(t) \quad (2.3.44)$$

El vector \underline{U} , de la ecuación de equilibrio de la estructura (ec 2.3.41), es el vector de desplazamientos de la estructura y se construye con los vectores desplazamiento de cada punto nodal, según se muestra en la ec 2.3.45. El vector de aceleraciones de la estructura, $\ddot{\underline{U}}$, representa las segundas derivadas respecto al tiempo del vector \underline{U} .

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_{25} \\ v_{25} \end{bmatrix} = \underline{U}(t) \quad (2.3.45)$$

El procedimiento sistematizado para llevar a cabo las ecs 2.3.42 a 2.3.44 es exactamente igual al que se utiliza en las estructuras esqueléticas.

2.2 Condiciones de frontera

Las ecuaciones de movimiento de la estructura (ecs 2.3.46) deben satisfacer valores prescritos de algunos componentes del vector \underline{U} , denominados condiciones de frontera.

En la fig 2.2, del ejemplo seguido, los valores de los desplazamientos de los puntos nodales 2, 9 y 25 son nulos. Esto se indica a continuación como

$$\underline{U}_2 = 0 \quad (2.3.46)_a$$

$$\underline{U}_9 = 0 \quad (2.3.46)_b$$

$$u_{25} = 0 \quad (2.3.46)_c$$

Al hacer que las ecuaciones de movimiento (ec 2.3.41) satisfagan las condiciones de frontera, dadas por las ecs 2.3.46, se obtienen las ecuaciones siguientes

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{K} \dot{\underline{U}} = \underline{P} \quad (2.3.47)$$

en la ec 2.3.47 se puede observar que las condiciones de frontera (ecs 2.3.46) inciden en las matrices de masas \underline{M} y de rigideces \underline{K} y en el vector de cargas \underline{P} , que se transforman en \underline{M} , \underline{K} y \underline{P} , respectivamente.

La forma de introducir las condiciones de frontera en las ecuaciones de movimiento es igual a como se hace en las estructuras esqueléticas.

2.3 Matriz de amortiguamiento

Aunque el modelo matemático de los sólidos, elásticos lineales no considera efectos disipativos, al utilizarse en la modelación de las estructuras reales, se le adiciona a la ec 2.3.41 un término correspondiente a las fuerzas disipativas del tipo viscoso lineal, como se indica a continuación:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{C} \dot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad (2.3.48)$$

donde $\dot{\underline{U}}$ es el vector de velocidades de la estructura, primera derivada respecto al tiempo de \underline{U} , y \underline{C} es la matriz de amortiguamientos de la estructura, generalmente cuantificada con el criterio de Rayleigh, mediante la ecuación siguiente

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \mu \underline{K} \quad (2.3.49)$$

α y μ son coeficientes que se determinan experimentalmente.

2.3.4 Condiciones iniciales

Para poder integrar las ecuaciones de equilibrio dinámico (ec 2.3.48) se requiere especificar el origen del movimiento, a partir del cual se empezará a cuantificar. Este origen del movimiento se conoce con el nombre de condiciones iniciales y queda establecido al especificar los vectores de desplazamiento \underline{U}_0 y de velocidad $\dot{\underline{U}}_0$ al inicio del movimiento (en el tiempo, $t=0$), es decir

$$\underline{U} \Big|_{t=0} = \underline{U}_0 \quad (2.3.50)$$

$$\dot{\underline{U}} \Big|_{t=0} = \dot{\underline{U}}_0 \quad (2.3.51)$$

2.3.5 Equilibrio estático

El equilibrio estático de las estructuras es un caso particular del movimiento, y es aquel en que el vector de cargas \underline{P} y el vector desplazamientos \underline{U} son independientes del tiempo. Al imponer esta condición a las ecuaciones de equilibrio dinámico (ec 2.3.48), se transforman en las siguientes

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad (2.3.52)$$

2.3.6 Solución de las ecuaciones de equilibrio

Las ecuaciones de equilibrio estático (ec 2.3.52) resultan ser un sistema de ecuaciones algebraicas, lineales simétricas no homogéneas. Su solución ^{se} obtiene según los métodos descritos en el capítulo 4. Con el vector de desplazamientos de la estructura conocido (\underline{U}) se calculan cada uno de los vectores de desplazamientos nodales de los elementos finitos (\underline{u}^e) y se procede a cuantificar para cada uno de ellos, y en los puntos deseados, los siguientes conceptos:

- a) Los componentes del tensor de deformaciones, mediante las ecs 2.3.11, 2.3.12 y 2.3.13
- b) Los componentes del tensor esfuerzo, mediante la ec 2.3.16

Las ecuaciones de equilibrio dinámico (ec 2.3.48) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, de segundo orden, lineales, no homogéneas, acopladas cuya solución se indica en el capítulo 4. Conocidos los vectores de desplazamientos (\underline{U}), de velocidades ($\dot{\underline{U}}$) y de aceleraciones ($\ddot{\underline{U}}$) se procede como en el caso del problema estático a cuantificar los valores de los componentes de los tensores de esfuerzos y de deformaciones durante el movimiento.

3. FUNCIONES DE INTERPOLACION DE ELEMENTOS FINITOS

3.1 Generalidades

En capítulos anteriores se indicó que las ecuaciones del elemento finito se obtienen mediante los métodos variacionales (Rayleigh-Ritz) o de los residuos pesados (Galerkin). Sin embargo, existen algunas diferencias básicas en relación con el método del elemento finito ya que se caracteriza por:

- 1) La representación funcional global de una variable consiste de un ensamble de representaciones funcionales locales. Las integrales globales sobre el dominio de la estructura, Ω , se establece en función de un ensamble de integrales sobre dominios locales, Ω_e , de elementos finitos disjuntos.
- 2) Si se utiliza el método de Rayleigh-Ritz, el principio variacional global se construye como un ensamble de los principios variacionales aplicados a cada elemento finito.
- 3) Si se utiliza el método de Galerkin, las funciones de interpolación del elemento finito actúan como funciones de peso en la integral de Galerkin.

En general, el paso más crucial en el método del elemento finito consiste en la selección de funciones de interpolación adecuadas. Deben satisfacer ciertos criterios para que se logre la convergencia de la solución aproximada a la solución exacta, de la ecuación diferencial en cuestión.

La interpolación de elementos finitos se caracteriza por la forma del elemento finito y el orden de aproximación. En general, la selección de un elemento finito depende de:

- a) La geometría del dominio global.
- b) El grado de aproximación deseado en la solución.
- c) La facilidad de integración sobre el dominio del elemento.

El dominio global donde se desea integrar las ecuaciones diferenciales puede ser unidimensional, bidimensional o tridimensional. En la fig. 3.1 se indican las geometrías de algunos elementos finitos correspondientes a los dominios globales indicados.

En general, las funciones de interpolación son polinomios de varios grados pero también se pueden utilizar productos de polinomios con funciones exponenciales o trigonométricas. Si se utilizan polinomios lineales, únicamente se requieren los puntos nodales

les de las esquinas de los elementos finitos; (fig. 3.1) mientras - que si se desean polinomios cuadráticos se deben adicionar puntos nodales comprendidos en las fronteras de los elementos (fig. 3.2). Desde luego que se pueden utilizar aproximaciones con polinomios de orden superior; pero se necesitan adicionar puntos nodales.

3.2 Elementos unidimensionales

Se presentarán varios elementos que dependerán básicamente del polinomio utilizado para la interpolación.

3.2.1 Elementos convencionales

La expansión polinómica de la variable unidimensional, $u=u(x)$, se puede indicar como:

$$u = a_0 + a_i x^i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.2.1)$$

3.2.1.1 Interpolación lineal

En este caso, la ec 3.1.1 resulta ser

$$u = a_0 + a_1 x \quad (3.2.2)$$

para poder expresar el valor de u , en función de los valores en los puntos nodales (fig. 3.3)

$$u_1 = u \Big|_{x=0} \quad (3.2.3)$$

$$u_2 = u \Big|_{x=l} \quad (3.2.4)$$

Al sustituir la ec 3.2.2 en la ec 3.2.3 se obtiene

$$u_1 = a_0 \quad (3.2.5)$$

Al sustituir la ec 3.2.2 en la ec 3.2.4 resulta

$$u_2 = a_0 + a_1 l \quad (3.2.6)$$

De las ecs 3.2.5 y 3.2.6 se obtiene

$$a_0 = u_1 \quad (3.2.7)$$

$$a_1 = \frac{1}{l} (u_2 - u_1) \quad (3.2.8)$$

Al sustituir las ecs 3.2.7 y 3.2.8 en la ec 3.2.2 resulta

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \frac{x}{l} u_2 = N_i u_i \quad (3.2.9)$$

donde N_i se denominan funciones de interpolación y sus expresiones son:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l} \quad (3.2.10)$$

$$N_2 = \frac{x}{l} \quad (3.2.11)$$

3.2.1.2 Interpolación lineal normalizada

Si el sistema de referencia se selecciona como se indica en la -- fig. 3.4, se define una nueva variable adimensional como se indica a continuación

$$\xi = \frac{x}{h} \quad (3.2.12)$$

donde $h = \frac{1}{2} l$ y, de acuerdo con la ec 3.2.12, se puede indicar el siguiente comportamiento de la variable ξ :

$$\xi = 0 \quad \text{en el centro del elemento} \quad (3.2.13)a$$

$$u_{\xi} = -1 \quad \text{en el punto nodal 1} \quad (3.2.13)b$$

$$u_{\xi} = 1 \quad \text{en el punto nodal 2} \quad (3.2.13)c$$

Con base en la variable ξ , la ec 3.2.1 se puede escribir como:

$$u = a_0 + a_i \xi^i \quad (3.2.14)$$

y para el caso lineal se reduce a

$$u = a_0 + a_1 \xi \quad (3.2.15)$$

en donde las condiciones de frontera dadas, por las ecs 3.2.3 y 3.2.4 se indican a continuación:

$$u|_{\xi=-1} = u_1 \quad (3.2.16)$$

$$u|_{\xi=1} = u_2 \quad (3.2.17)$$

Al seguir la secuencia indicada en el inciso anterior las constantes a_0 y a_1 , de la ec 3.2.15, al utilizar las ecs 3.2.16 y 3.2.17 resultan ser:

$$a_0 = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \quad (3.2.18)$$

$$a_1 = \frac{1}{2} (u_2 - u_1) \quad (3.2.19)$$

y la ec 3.2.15 se puede escribir como

$$u = \frac{1}{2} (1 - \xi) u_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) u_2 = N_i u_i ; i=1,2 \quad (3.2.20)$$

en donde las funciones de interpolación N_i , resultan ser:

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi) \quad (3.2.21)$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (3.2.22)$$

3.2.1.3 Interpolación cuadrática

En este caso, la ec 3.1.1 toma la forma siguiente:

$$U = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (3.2.23)$$

y para poder cuantificar las tres constantes, a_0 , a_1 y a_2 se requiere conocer el valor de U en otro punto adicional a los extremos, como se indica en la fig. 3.5; en donde el punto adicional se seleccionará en el centro del elemento.

De acuerdo con la fig. 3.5, las condiciones de frontera resultan ser

$$U \Big|_{x=0} = U_1 \quad (3.2.24) a$$

$$U \Big|_{x=\frac{l}{2}} = U_2 \quad (3.2.24) b$$

$$U \Big|_{x=l} = U_3 \quad (3.2.24) c$$

Al hacer que la ec 3.2.23 satisfaga las condiciones establecidas por la ec 3.2.24 se obtienen las ecuaciones siguientes

$$U_1 = a_0 \quad (3.2.25) a$$

$$U_2 = a_0 + \frac{1}{2} l a_1 + \frac{1}{4} l^2 a_2 \quad (3.2.25) b$$

$$u_3 = a_0 + l a_1 + l^2 a_2 \quad (3.2.25)c$$

El sistema de ecuaciones anterior (ecs 3.2.25) se puede escribir en forma matricial como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}l & \frac{1}{4}l^2 \\ 1 & l & l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.26)$$

Cuya solución resulta ser

$$a_0 = a_1 \quad (3.2.27)a$$

$$a_1 = \frac{1}{l} (-3 u_1 + 4 u_2 - u_3) \quad (3.2.27)b$$

$$a_2 = \frac{2}{l^2} (u_1 - 2 u_2 + u_3) \quad (3.2.27)c$$

y la ec 3.2.23 se puede escribir como

$$u = \left[1 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] u_1 + 4\left(\frac{x}{l}\right) \left[1 - \frac{x}{l} \right] u_2 + \frac{x}{l} \left[-1 + 2\left(\frac{x}{l}\right) \right] u_3 \quad (3.2.28)$$

o bien

$$u = N_i u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2.29)$$

donde

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right) + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (3.2.30)$$

$$N_2 = 4\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (3.2.31)$$

$$N_3 = \left(\frac{x}{l}\right)\left[-1 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right] \quad (3.2.32)$$

3.2.1.4 Interpolación cuadrática normalizada

Si el sistema de referencia se selecciona con la variable normalizada indicada en el inciso 3.2.1.2, según se muestra en la fig.3.6, la ec 3.2.23 se puede escribir como:

$$u = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \quad (3.2.33)$$

Con las condiciones de frontera dadas a continuación

$$u \Big|_{\xi=1} = u_1 \quad (3.2.34)a$$

$$u \Big|_{\xi=0} = u_2 \quad (3.2.34)b$$

$$u \Big|_{\xi=1} = u_3 \quad (3.2.34)c$$

Al seguir el procedimiento utilizado para cuantificar los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 , la ec 3.2.33 se puede escribir como

$$u = N_i u_i \quad (3.2.35)$$

donde

$$N_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (3.2.36)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \quad (3.2.37)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi (\xi + 1) \quad (3.2.38)$$

3.2.1.5 Interpolación en coordenadas naturales

Si las funciones de interpolación se obtienen en función de variables espaciales adimensionales o normalizadas, entonces al sistema normalizado se le denomina sistema coordenado natural.

Como puede observarse, en los incisos 3.2.1.1 a 3.2.1.4 se han logrado expresar a las funciones de interpolación en términos de variables adimensionales (que pueden ser x/l o bien $\xi = x/h$) y en -- ambos casos se puede definir sistemas coordenados naturales, pero con orígenes diferentes.

3.2.2 Elementos con polinomios de Lagrange

A fin de evitar la solución de ecuaciones que se presentan en la -- determinación de los coeficientes del polinomio de interpolación -- utilizado en el inciso 3.2.1, se puede utilizar el criterio de la interpolación Lagrangiana, expresada como

$$u = \sum_i l_i u_i = \sum_i N_i u_i \quad (3.2.39)$$

en donde l_i representa a las funciones de interpolación de Lagrange, cuyas expresiones son:

$$l_i^n = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad (3.2.40)$$

en donde con el símbolo \prod se indica el producto de los binomios $x - x_j$ y $x_i - x_j$ sobre el rango de j

En esta interpolación, la longitud del elemento se divide en segmentos de igual tamaño por los n puntos nodales, donde $n = m + 1$ y m es el orden de aproximación.

Si la ec 3.2.40 se expresa en función de la variable adimensional $\xi = x/h$, se puede escribir como:

$$L_i^n = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (3.2.41)$$

En la fig. 3.7 se muestra esquemáticamente la división de la región del elemento para las ecs 3.2.40 y 3.2.41. A continuación se ejemplifica el uso de la interpolación de Lagrange para diversas órdenes de aproximación.

3.2.2.1 Interpolación lineal

En este caso $M=1$ y $n=2$, según se indica en la fig. 3.8 la interpolación de Lagrange, para diversas referencias, se indica a continuación.

a) Variable no normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.8a

$$N_1 = L_1^2 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - h}{0 - h} = 1 - \frac{x}{h} \quad (3.2.42)$$

$$N_2 = L_2^2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{h - 0} = \frac{x}{h} \quad (3.2.43)$$

b) Variable normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.8b

$$N_1 = L_1^2 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{0 - 1} = 1 - \xi \quad (3.2.44)$$

$$N_2 = L_2^2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - 0}{1 - 0} = \xi \quad (3.2.45)$$

c) Variable normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.8c

$$N_1 = L_1^2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{(-1) - 1} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.2.46)$$

$$N_2 = l_2^2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.2.46)$$

El orden $m=2$ y el número de puntos $n=3$, se indican en la fig. 3.9 y las expresiones para sus correspondientes variables se indican a continuación.

a) Variable no normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.9a

$$N_1 = l_1^3 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-h)}{(0-\frac{1}{2})(0-h)} = 1 - 3\frac{x}{h} + 2\left(\frac{x}{h}\right)^2 \quad (3.2.47)$$

$$N_2 = l_2^3 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-h)}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-h)} = 4\frac{x}{h}\left[1 - \frac{x}{h}\right] \quad (3.2.48)$$

$$N_3 = l_3^2 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-h/2)}{(h-0)(h-h/2)} = \left(\frac{x}{h}\right)\left[2\frac{x}{h} - 1\right] \quad (3.2.49)$$

b) Variable normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.9 b

$$N_1 = l_1^3 = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1)}{(0 - \frac{1}{2})(0 - 1)} = 2(\xi - \frac{1}{2})(\xi - 1) \quad (3.2.50)$$

$$N_2 = l_2^3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - 1)} = -4\xi(\xi - 1) \quad (3.2.51)$$

$$N_3 = l_3^3 = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{(\xi - 0)(\xi - \frac{1}{2})}{(1 - 0)(1 - 1/2)} = 2\xi(\xi - \frac{1}{2}) \quad (3.2.52)$$

c) Variable normalizada, referencia mostrada en la fig. 3.9c

Las expresiones son iguales a los primeros términos de las correspondientes ecs 3.2.50 a 3.2.52, pero el valor de las coordenadas cambian, y se indica a continuación

$$N_1 = \ell_1^3 = \frac{(\xi-0)(\xi-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2} \xi(\xi-1) \quad (3.2.53)$$

$$N_2 = \ell_2^3 = \frac{[\xi-(-1)][\xi-1]}{[0-(-1)][0-1]} = 1 - \xi^2 \quad (3.2.54)$$

$$N_3 = \ell_3^3 = \frac{[\xi-(-1)][\xi-0]}{[1-(-1)][1-0]} = \frac{1}{2} \xi(\xi+1) \quad (3.2.55)$$

Como era de esperarse las ecuaciones 3.2.42 a 3.2.52 coinciden con sus casos correspondientes a las ecuaciones obtenidas en el inciso 3.2.1

3.2.3 Elementos con polinomios de Hermite

En las interpolaciones donde se desea además de la continuidad de la función, la continuidad de las derivadas de la misma, es más recomendable el uso de las funciones de interpolación de Hermite.

A fin de ejemplificar el uso de la interpolación de Hermite se indica, a continuación, el caso del elemento finito con dos puntos nodales y primeras derivadas continuas, en función de la variable normalizada, $\xi = x/h$

$$u(\xi) = h_i(\xi) u_i^0 + \hat{h}_i(\xi) u_i^1 ; \quad i=1,2 \quad (3.2.56)$$

que puede escribirse como

$$u(\xi) = N_i u_i \quad (3.2.57)$$

donde N_1 y N_2 son polinomios de Hermite, (fig. 3.10) cuyas expresiones son:

$$N_1 = h_1^0 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (3.2.58)$$

$$N_2 = h_2^0 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (3.2.59)$$

$$N_3 = h_1^1 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \quad (3.2.60)$$

$$N_4 = h_2^1 = \xi^3 - \xi^2 \quad (3.2.61)$$

$$u_1 = u \Big|_{\xi=0} = u_1^0 \quad (3.2.62)$$

$$u_2 = u \Big|_{\xi=1} = u_2^0 \quad (3.2.63)$$

$$u_3 = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = u_1^1 \quad (3.2.64)$$

$$u_4 = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = u_2^1 \quad (3.2.65)$$

Desde luego que se pueden considerar continuidad en derivadas de orden superior pero se requerirán polinomios de Hermite, también, de orden superior.

3.3 Elementos bidimensionales

Como se indica en la fig. 3.1, las geometrías de los elementos finitos bidimensionales más usados son el triángulo, el rectángulo y el cuadrilátero general. En este inciso se bosquejan las funciones de interpolaciones asociadas al triángulo y al rectángulo con

lados lineales. En el inciso 3.5, se considera la posibilidad de extender estos conceptos a geometrías planas más complejas (cuadriláteros generales, con lados curvos).

En la expansión polinómica de los elementos finitos se busca el máximo orden del polinomio completo correspondiente a un número mínimo de grados de libertad (puntos nodales). Para determinar el número de términos que se presentan en un polinomio de dos variables, es conveniente utilizar el triángulo de Pascal, mostrado en la fig. 3.11

3.3.1 Elemento triangular lineal en coordenadas cartesianas.

La representación polinómica más simple de la función $u = u(x, y)$ es la lineal (ver fig. 3.12) y su expresión es

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.2.1)$$

las condiciones de frontera correspondientes con los puntos nodales resultan ser

$$u \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} = u_i ; \quad u \Big|_{\substack{x=x_j \\ y=y_j}} = u_j ; \quad u \Big|_{\substack{x=x_m \\ y=y_m}} = u_m \quad (3.3.2)$$

Al hacer que la ec 3.3.1 satisfaga las ec 3.3.2 se obtiene

$$u = \frac{1}{2\Delta} \left\{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m \right\} \quad (3.3.3)$$

donde

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j \quad (3.3.4)$$

$$b_i = y_j - y_m = y_{jm} \quad (3.3.5)$$

$$c_i = c_m - x_j = x_{mj} \quad (3.3.6)$$

y los coeficientes $a_j, a_m, b_j, b_m, c_j, c_m$ se obtienen mediante permuta-

ción cíclica de los subíndices en las esc 3.3.4 a 3.3.6.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 A_{ijm} \quad (3.3.7)$$

el área del triángulo ijm se indica con A_{ijm}

La ec 3.3 se puede escribir como

$$U = N_k U_k \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.3.8)$$

que en forma matricial resulta ser

$$\underline{U} = \underline{N} \underline{U} \quad (3.3.9)$$

donde

$$\underline{N} = [N_i \quad N_j \quad N_m]_{(1 \times 3)} \quad (3.3.11)$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (3.3.12)$$

y las funciones de forma

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (3.3.13)$$

3.3.2 Elementos triangulares en coordenadas naturales

Como el número de términos que aparecen en un polinomio completo determina el número de puntos nodales requeridos, con base en el triángulo de Pascal, en la fig. 3.13 se muestran los puntos nodales requeridos para los polinomios de interpolación lineal, cuadrática y cúbica del elemento triangular.

En lugar de proceder como en el inciso 3.3.1, se utiliza el concepto de coordenados naturales que conduce a las coordenadas de área, $L_1, L_2, y L_3$ (fig. 3.14), cuya relación con las coordenadas cartesianas esta dada por

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \quad (3.3.14)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \quad (3.3.15)$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 \quad (3.3.16)$$

donde la ec 3.3.16 establece que las coordenadas de área L_i , son linealmente dependientes.

Otra forma alternativa de definir las coordenadas de área se indican a continuación (Ver fig. 3.14)

$$L_1 = A_{p23} / A_{123} \quad (3.3.17)$$

$$L_2 = A_{p31} / A_{123} \quad (3.3.18)$$

$$L_3 = A_{p12} / A_{123} \quad (3.3.19)$$

Las funciones de forma N_i , para los elementos triangulares de la fig. 3.14 resultan ser:

3.3.2.1 Interpolación lineal

Se requiere únicamente los 3 puntos nodales sobre las esquinas

$$N_i = L_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.20)$$

3.3.2.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 3 puntos nodales sobre las esquinas y 3 puntos nodales sobre los lados.

a) Para los puntos de esquina

$$N_i = (2 L_i - 1) L_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.21)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al centro

$$N_4 = 4 L_1 L_2 \quad (3.3.22)a$$

$$N_5 = 4 L_2 L_3 \quad (3.3.22)b$$

$$N_6 = 4 L_3 L_1 \quad (3.3.22)c$$

3.3.2.3 Interpolación cúbica

Se requieren 3 puntos nodales sobre las esquinas, 6 puntos nodales sobre los lados y un punto nodal interior, alineado con los puntos nodales de los lados.

a) Para los puntos de esquina

$$N_i = \frac{1}{2} (3 L_i - 1) (3 L_i - 2) L_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.23)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al tercio

$$N_4 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3 L_1 - 1) \quad (3.3.24)a$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3 L_2 - 1) \quad (3.3.24)b$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3 L_2 - 1) \quad (3.3.24)c$$

$$N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3 L_3 - 1) \quad (3.3.24)d$$

$$N_8 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3 L_3 - 1) \quad (3.3.24)e$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_3 L_1 (3L_1 - 1) \quad (3.3.24) f$$

c) Para el punto interior

$$N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3 \quad (3.3.25)$$

3.3.3 Referencias para elementos rectangulares

Para esta geometría es conveniente usar coordenadas normalizadas y la forma de seleccionarlas se indica en la fig. 3.16.

Debido a la geometría del rectángulo, las funciones de forma se -- pueden generar, sistemáticamente, mediante productos de polinomios en las dos coordenadas.

3.3.4 Familia Lagrangiana para elementos rectangulares

Si las funciones de interpolación se construyen con los polinomios de Lagrange (ec 3.2.41), se pueden escribir como

$$N_i(\xi, \eta) = l_k^m(\xi) l_L^n(\eta) \quad (3.3.26)$$

donde N_i es la función de interpolación para cualquier punto nodal i ; l_k^m corresponde al polinomio de Lagrange para la variable ξ que pasa por m puntos nodales, K , localizados en líneas definidas mediante $\eta = \text{constante}$; y l_L^n es el polinomio de Lagrange para la variable η , que pasa por n puntos nodales, L , localizados mediante $\xi = \text{constante}$.

En la fig. 3.17 se muestran los puntos nodales requeridos para algunos miembros de la familia de Lagrange. El uso de estas funciones está muy limitado, tanto por el número de puntos nodales requeridos como por el número de términos parásitos que resultan en los polinomios, N_i .

3.3.5 Familia Serendipity para elementos rectangulares

Las funciones de interpolación de esta familia se obtuvieron, originalmente, por inspección y por esta razón Zienkiewicz les asigno el nombre de Serendipity, en similitud con la princesa de Serendip.

de la novela de Horace Walpole, famosa por sus descubrimientos casuales.

Esta familia se originó por la conveniencia de que las funciones de interpolación dependan de puntos nodales localizados sobre los lados del elemento, como pueden verse en la fig. 3.18. Es necesario aseverar que las funciones generadas por los puntos localizados sobre los lados, generan polinomios completos hasta el grado tres; para aproximaciones cuantas o más, es necesario adicionar nodos interiores.

Las funciones de forma para varias aproximaciones se indican a continuación:

3.3.5.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente los 4 puntos nodales sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) ; \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3.3.27)$$

3.3.5.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas y 4 puntos nodales sobre los lados.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) ; \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3.3.28)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al centro.

$$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) \quad \text{Para } \xi_i = 0 ; \quad i = 5, 7 \quad (3.3.29)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) \quad \text{Para } \eta_i = 0 ; \quad i = 6, 8 \quad (3.3.30)$$

3.3.5.3 Interpolación cúbica.

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas y 8 puntos nodales sobre los lados.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10]; \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (3.3.31)$$

b) Para los puntos sobre los lados, localizados al tercio

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi \xi_i)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta \eta_i) \text{ para } \xi_i = \pm 1 \text{ y } \eta_i = \pm \frac{1}{3}; \quad i=7, 8, 11, 12 \quad (3.3.32)$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + \eta \eta_i)(1 - \xi^2)(1 + 9\xi \xi_i) \text{ para } \eta_i = \pm 1 \text{ y } \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad i=5, 6, 9, 10 \quad (3.3.33)$$

3.4 Elementos tridimensionales

Al igual que el inciso 3.4, se bosquejan las funciones de interpolación para las geometrías simples formadas con superficies planas ya que en el inciso 3.5 se extienden estas funciones a geometrías más generales, como el hexaedro.

3.4.1 Elemento tetraedro lineal en coordenadas cartesianas

La función tridimensional $u = u(x, y, z)$ se puede representar en forma de polinomios lineales como se indica a continuación

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (3.4.1)$$

Las condiciones de frontera, correspondientes a los puntos nodales (ver fig. 3.19) resultan ser

$$u \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i \\ z=z_i}} = u_i; \quad u \Big|_{\substack{x=x_j \\ y=y_j \\ z=z_j}} = u_j; \quad u \Big|_{\substack{x=x_m \\ y=y_m \\ z=z_m}} = u_m; \quad u \Big|_{\substack{x=x_p \\ y=y_p \\ z=z_p}} = u_p \quad (3.4.2)$$

Al hacer que la ec 3.4.1 satisfaga las ecs 3.4.2 resulta:

$$\phi_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i z$$

$$\phi_j = a_j + b_j x + c_j y + d_j z$$

$$\phi_m = a_m + b_m x + c_m y + d_m z$$

$$\phi_p = a_p + b_p x + c_p y + d_p z$$

$$U = \frac{1}{V_{ijmp}} (\phi_i U_i + \phi_j U_j + \phi_m U_m + \phi_p U_p) \quad (3.4.3)$$

donde V_{ijmp} , es el volumen del tetraedro formado con los puntos nodales i, j, m y p , cuantificado mediante

$$V_{ijmp} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.4.4)$$

y los coeficientes a_i, b_i, c_i y d_i se cuantifican como se indica a continuación:

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.4.5)$$

$$b_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (3.4.6)$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} \quad (3.4.7)$$

$$d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \quad (3.4.8)$$

Las otras constantes ($a_j, b_j, c_j, d_j, a_m, b_m, c_m, d_m, a_p, b_p, c_p$ y d_p) se definen enteramente similar a las correspondientes constantes a_i, b_i, c_i y d_i , mediante un intercambio cíclico de los subíndices en el orden p, i, j, m , con la convención establecida en la fig. 3.19.

La ec 3.4.3 se puede escribir, con las notaciones indicial y matricial, como se indica a continuación:

$$U = N_k U_k \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4.9)$$

$$u = \underline{N} \underline{u} \quad (3.4.10)$$

donde

$$\underline{N} = [N_i \quad N_j \quad N_m \quad N_p]_{(1 \times 4)} \quad (3.4.11)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \\ u_p \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (3.4.12)$$

y las funciones de forma, N_i :

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / 6 V_{ijmp} \quad (3.4.13)$$

3.4.2 Elementos tetra edros en coordenadas naturales

De manera similar al elemento triangular bidimensional, el número de puntos nodales requeridos para definir polinomios completos, - así como el tetraédro de Pascal, se muestra en la fig. 3.20.

Las coordenadas naturales de tetraédro se denominan coordenadas - de volumen, L_i ; $i=1,2,3,4$, cuya relación con las coordenadas cartesianas resulta ser (fig. 3.21).

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \quad (3.4.14)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \quad (3.4.15)$$

$$z = L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \quad (3.4.16)$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \quad (3.4.17)$$

La forma alternativa para definir las coordenadas de volumen se indica a continuación (fig. 3.21)

$$L_1 = V_{P_{134}} / V_{1234} \quad (3.4.18)$$

$$L_2 = V_{P_{124}} / V_{1234} \quad (3.4.19)$$

$$L_3 = V_{P_{123}} / V_{1234} \quad (3.4.20)$$

$$L_4 = V_{P_{123}} / V_{1234} \quad (3.4.21)$$

Las funciones de forma N_i , para los elementos tetraedros de la fig. 3.20 resultan ser.

3.4.2.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente los 4 puntos nodales sobre las esquinas.

$$N_i = L_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4.22)$$

3.4.2.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas y 6 puntos nodales sobre las aristas, que en este caso se suponen localizadas al centro.

a) Para los puntos de esquina

$$N_k = (2 L_k - 1) L_k \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4.23)$$

b) Para los puntos del centro de las aristas

$$N_5 = 4 L_1 L_2 \quad (3.4.24)$$

$$\vdots$$

$$N_{10} = 4 L_2 L_4 \quad (3.4.25)$$

3.4.2.3 Interpolación cúbica

Se requieren 4 puntos nodales sobre las esquinas, 12 puntos nodales sobre las aristas localizadas a los tercios y 4 puntos nodales sobre las caras, alineados con los puntos nodales de las aristas.

a) Para los puntos de esquina

$$N_i = \frac{1}{2} (3L_i - 1) (3L_i - 2) L_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.4.26)$$

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1) \quad (3.4.27)$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1) \quad (3.4.28)$$

⋮

c) Para los puntos sobre las caras

$$N_{17} = 27 L_1 L_2 L_3 \quad (3.4.29)$$

$$N_{18} = 27 L_1 L_2 L_4 \quad (3.4.30)$$

⋮

3.4.3 Familia Lagrangiana para prismas rectangulares

Las funciones de interpolación, N_i , se construyen directamente con el producto de tres polinomios de Lagrange, como se indica a continuación:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = l_K^m(\xi) l_L^n(\eta) l_M^p(\zeta) \quad (3.4.31)$$

donde ξ, η, ζ son las variables normalizadas y m, n y p son las subdivisiones a lo largo de cada arista (ver fig. 3.22). Al igual que en los elementos bidimensionales, la aplicación práctica de estos elementos es casi nula, por su ineficiencia.

3.4.4 Familia Serendipity para prismas rectangulares

Se obtienen con razonamientos enteramente similares a los usados en los elementos bidimensionales. En la fig. 3.23 se muestran los puntos nodales asociados a los elementos cuyas funciones de interpolación se indican a continuación:

3.4.4.1 Interpolación lineal

Se requieren únicamente 8 puntos nodales sobre las esquinas.

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad (3.4.32)$$

3.4.4.2 Interpolación cuadrática

Se requieren 8 puntos nodales sobre las esquinas y 16 puntos nodales sobre las aristas y en este caso, se seleccionaron en los puntos medios.

a) Para los puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i + \zeta \zeta_i - 2) \quad (3.4.33)$$

($i = 1, 2, 3, \dots, 8$)

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad i = 9, 10, 11, 12$$

$$\forall \xi_i = 0 ; \eta_i = \pm 1 ; \zeta_i = \pm 1 \quad (3.4.34)$$

⋮

3.4.4.3 Interpolación cúbica

Se requieren 8 puntos nodales sobre las esquinas y 24 puntos nodales sobre las aristas, que en este caso se localizaron a los tercios.

a) Para puntos sobre las esquinas

$$N_i = \frac{1}{64} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) [9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 19] \quad (3.4.35)$$

($i = 1, 2, 3, \dots, 8$)

b) Para los puntos sobre las aristas

$$N_i = \frac{9}{24} (1 - \xi^2)(1 + 9\xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(1 + 5\zeta \zeta_i) \quad i=9, \dots, 16 \quad (3.4.36)$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \forall \quad \xi = \pm \frac{1}{3} \quad ; \quad \eta_i = \pm 1 \quad ; \quad \zeta_i = \pm 1 \\ \vdots \end{array}$$

3.4.5 Elementos anillos axisimétricos

Si la geometría del cuerpo es el de un sólido de revolución o axisimétrico (ver fig. 1.5), la configuración tridimensional se puede reducir a un bidimensional, debido a la posibilidad de eliminar la variable angular. Entonces, se pueden utilizar los elementos finitos del inciso 3.3, pero con las variables asociadas a los ejes radial y axial.

3.5 Elementos isoparamétricos

Para que cualquier geometría, relativamente compleja, se pueda representar con un número pequeño de elementos, se necesitan elementos finitos con formas más complejas que las descritas en los incisos 3.2 a 3.4. En este inciso se tratan geometrías distorsionadas (lados y superficies curvas) de los elementos de forma simple que conduzcan a geometrías arbitrarias, según se puede observar en la fig. 3.24; en donde los puntos asociados a las regiones regulares mapean a puntos de las regiones irregulares. En este mapeo, la referencia original del elemento se transforma en una referencia curvilínea. Si el mapeo es uno a uno, se puede establecer una correspondencia entre las coordenadas cartesianas y las curvilíneas, de la forma siguiente (caso tridimensional).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} \quad \text{--- (3.5.1)}$$

Una vez establecida la relación dada por la ec 3.5.1, las funciones de forma se pueden especificar en las coordenadas locales y, mediante una serie de transformaciones, determinar los elementos correspondientes a una referencia arbitraria.

3.5.1 Transformación de coordenadas mediante funciones de forma

Si $N_i' = N_i'(\xi, \eta, \zeta)$ son las funciones de forma del elemento en las coordenadas locales (no deformadas), se puede escribir la relación siguiente:

$$\underline{x} = N_1' x_1 + \dots + N_m' x_m = N_i' x_i = [N_1', \dots, N_m'] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \underline{N}' \underline{x} \quad (3.5.2)$$

$$\underline{y} = N_1' y_1 + \dots + N_m' y_m = N_i' y_i = [N_1', \dots, N_m'] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \underline{N}' \underline{y} \quad (3.5.3)$$

$$\underline{z} = N_1' z_1 + \dots + N_m' z_m = N_i' z_i = [N_1', \dots, N_m'] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \underline{N}' \underline{z} \quad (3.5.4)$$

donde x , y , z son las coordenadas en la referencia cartesiana de cualquier punto localizado en el elemento deformado, y $x_i, y_i, z_i, i=1, m$, las correspondientes coordenadas cartesianas de m puntos, seleccionados apropiadamente sobre la frontera del elemento.

Para asegurar la continuidad entre las fronteras de los elementos mapeados, basta con asegurar que las funciones de forma N_i' , garanticen la continuidad de los elementos en la configuración no deformada.

La representación de la variable de campo, función U , definida en la región del elemento, en términos de las coordenadas curvilíneas (ξ, η, ζ) y las funciones de forma resulta ser.

$$U = N_i(\xi, \eta, \zeta) U_i = [N_1, \dots, N_n] \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{U} \quad (3.5.5)$$

donde $U_i, i=1, n$, son los valores de la variable U , en los n puntos nodales del elemento.

Para asegurar la continuidad de la función U (ec 3.5.5), basta con asegurar que las funciones de forma $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ utilizadas, garanticen la continuidad de U , en las coordenadas del elemento no deformado.

Los puntos nodales (n) utilizados para definir la interpolación de la función U (ec 3.5.5) pueden estar o no estar relacionados con los puntos (m) empleados para definir la geometría del elemento --

(ecs 3.5.2 a 3.5.4). En la fig. 3.25 se muestran las relaciones - que se pueden presentar para un elemento plano (cuadrilátero con lados curvos) en donde las funciones de forma N_i' , $i=1, \nu$, para definir la geometría del elemento (esc 3.5.2 a 3.5.4) son cuadráticas; mientras que las funciones de forma N_i , para definir la función U (ec 3.5.5) puede ser lineal ($i=1,4$), cuadrática ($i=1, \nu$) o cúbica ($i=1,2$).

Se llaman elementos isoparamétricos cuando se utilizan los mismos puntos para definir a la geometría y a la función ($n = m$) y, por lo tanto, las funciones de forma son las mismas, es decir.

$$N_i = N_i' \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5.6)$$

y en la actualidad son los elementos de uso mas generalizado.

Se llaman elementos subparamétricos cuando $n < m$ y elementos superparamétricos cuando $n > m$.

3.5.2 Derivación de las funciones de forma

Considérese el sistema de referencia local ξ, η, ζ y su correspondiente sistema de referencia global x, y, z ; las derivadas parciales de las funciones de forma N_i , respecto a las variables locales, por la regla de la cadena, se pueden expresar como:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (3.5.7)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (3.5.8)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (3.5.9)$$

Las ecs 3.5.7 a 3.5.9 se pueden expresar en forma matricial, según se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

donde \underline{J} , denominada matriz Jacobiana, se puede cuantificar explícitamente con base en las ecs 3.5.2 a 3.5.4, ya que, por la ec 3.5.6, se conocen las funciones de forma en la referencia local (elementos isoparamétricos). La expresión de \underline{J} resulta ser:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (3.5.11)$$

En la ec 3.5.10 se puede conocer el término de la izquierda, ya que se conocen las N_i , por lo que se puede escribir la ecuación siguiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.5.12)$$

Para que exista \underline{J}^{-1} es necesario que el Jacobiano ($\det \underline{J}$) de la transformación sea diferente de cero, es decir

$$\det \underline{J} = |\underline{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| \quad (3.5.13)$$

3.5.3 Integración en coordenadas locales

En el método del elemento finito es muy frecuente cuantificar integrales sobre regiones de los diversos elementos finitos, como las indicadas a continuación:

$$V_I = \int_V G_V dV = \int_V G(x, y, z) dx dy dz \quad (3.5.14)$$

$$A_I = \int_A G_A dA = \int_A H(x, y) dx dy \quad (3.5.15)$$

$$L_I = \int_L G_L dA = \int_L F(x) dx \quad (3.5.16)$$

Debido a la complejidad, tanto de los integrandos como de las regiones de integración, es conveniente establecer las integrales anteriores en función de las coordenadas naturales y quedan como se indica a continuación:

$$V_I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G}_V(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (3.5.17)$$

$$A_I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G}_A(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta \quad (3.5.18)$$

$$L_I = \int_{-1}^1 \bar{G}_L(\xi) d\xi \quad (3.5.19)$$

Aunque las regiones de integración de las ecs 3.5.17 a 3.5.19 están bien definidas las funciones \bar{G}_V , \bar{G}_A y \bar{G}_L resultan, en general, sumamente complejas de tal manera que, para llevar a cabo las integraciones, es necesario un método numérico, que sea una aproximación al problema.

3.5.3.1 Integración numérica para rectángulos y prismas rectangulares.

La cuadratura recomendable es la Gaussiana en donde el error es del orden $O(\Delta^{2n})$. Con esta cuadratura, las ecs 3.5.17 a 3.5.19 se transforman en las siguientes.

$$V_I = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_i H_j H_m \bar{G}_V(\xi_i, \eta_j, \zeta_m) \quad (3.5.20)$$

$$A_I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j \bar{G}_A(\xi_i, \eta_j) \quad (3.5.21)$$

$$L_I = \sum_{i=1}^n H_i \bar{G}_L(\xi_i) \quad (3.5.22)$$

donde H_i son los coeficientes de peso asociado a las abscisas ξ_i , por donde se hace pasar la aproximación polinómica, cuyos valores se indican en la tabla 3.1

3.5.3.2 Integración numérica para triángulos y tetraédros

Las coordenadas locales de estos elementos difieren, respecto a -- las del inciso 3.5.3.2, en los siguientes puntos.

- i) Son linealmente dependientes y son mayores en número (uno mas) que las coordenadas cartesianas.
- ii) Los límites de variación son diferentes, ya que varían de 0 a 1.

A fin de continuar con el uso de las ecs 3.5.7 a 3.5.13 se puede -- hacer el siguiente cambio de variables (para el caso tridimensio-- nal).

$$\xi = L_1 \quad (3.5.23)$$

$$\eta = L_2 \quad (3.5.24)$$

$$\zeta = L_3 \quad (3.5.25)$$

$$1 - \xi - \eta - \zeta = L_4 \quad (3.5.26)$$

Como las funciones de forma N_i están dadas en función de las varia-- bles L_i , el cálculo de sus derivadas se podrán efectuar con expre--

siones de la forma siguiente:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \frac{\partial L_4}{\partial \xi} \quad (3.5.27)$$

Al utilizar las ecs 3.5.23 a 3.5.26 en la ec 3.5.27, resulta

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \quad (3.5.28)$$

de manera similar se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \quad (3.5.29)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_3} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4} \quad (3.5.30)$$

Las ecs 3.5.17 y 3.5.18 se adaptan a los correspondientes límites de integración y son:

$$V_I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta-\zeta} \bar{G}_V(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} \bar{G}_V(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_1 dL_2 dL_3 dL_4 \quad (3.5.31)$$

$$A_I = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \bar{G}_A(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \bar{G}_A(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 \quad (3.5.32)$$

La aproximación numérica de las ecs 3.5.31 y 3.5.32, mediante la fórmula de Hammer, se indica a continuación:

$$V_I = \sum_{i=1}^n (\bar{G}_V)_i W_i^V \quad (3.5.33)$$

$$A_I = \sum_{i=1}^n (\bar{G}_A)_i W_i^A \quad (3.5.34)$$

donde el límite de la sumatoria (n) representa los puntos de integración considerados (ver tablas 3.2 y 3.3), el símbolo $()$; indica el valor de la función limitada por el paréntesis en las coordenadas de los puntos de integración (ver tabla 3.2 y 3.3) y W_i^v y W_i^A son los factores de peso correspondientes. En las tablas 3.2 y 3.3 se especifican todos los elementos para el uso de las fórmulas de Hammer.

4. ASPECTOS NUMERICOS DEL ELEMENTO FINITO

Con base en los desarrollos de los capítulos anteriores se puede aseverar que para poder aplicar el método del elemento finito, en la solución de los problemas que se presentan en la práctica profesional, es necesario el uso de una computadora digital. Por lo tanto, es necesario desarrollar programas de computadora que, con la información de la geometría, el material y las cargas, se construyan y se resuelvan las ecuaciones de equilibrio correspondientes, y se determinen, además, los elementos requeridos para el análisis y el diseño de las estructuras.

En este capítulo se resumen los aspectos numéricos que forman parte de los algoritmos asociados al método del elemento finito y que, desde el punto de vista de computación, controlan la eficiencia de los programas de computadoras asociados a los algoritmos en cuestión.

4.1 Solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

El modelo matemático correspondiente al sistema de ecuaciones algebraicas lineales se acostumbra representar como:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b} \quad (4.1.1)$$

donde \underline{A} es la matriz de coeficientes (de rigideces, \underline{K} , en nuestro caso) cuadrada de n renglones por n columnas, \underline{b} el vector de cargas (\underline{P} en nuestro caso) y \underline{x} el vector incógnita (los desplazamientos \underline{U} , en nuestro caso).

Los métodos de solución para resolver el modelo matemático dado por la ec 4.1.1, conforman dos grandes grupos y son: los métodos directos y los métodos iterativos. Los que actualmente se encuentran en uso en el método del elemento finito son los directos y de este grupo, los denominados compactos, que son los que se describen a continuación.

4.1.1 Métodos directos generales

En el álgebra lineal se demuestra que cualquier matriz \underline{A} , no singular, se puede descomponer en el producto de dos matrices triangulares, una inferior \underline{L} y otra superior \underline{U} , con la condición de que alguna de ellas este normalizada (todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad). Entonces, se puede escri-

bir lo siguiente:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{U} \quad (4.1.2)$$

Las matrices triangulares \underline{L} y \underline{U} , se cuantifican con la ec 4.1.2 y a tal proceso se denomina triangulación. Al sustituir la ec 4.1.2 en la ec 4.1.1 se obtiene

$$\underline{L} \underline{U} \underline{x} = \underline{b} \quad (4.2.3)$$

La ec 4.1.3 se puede escribir como

$$\underline{L} \underline{y} = \underline{b} \quad (4.1.4)$$

donde

$$\underline{U} \underline{x} = \underline{y} \quad (4.1.5)$$

Las ecs 4.1.4 y 4.1.5, conocidas como sustitución hacia adelante y sustitución hacia atrás, respectivamente, establecen que el proceso de triangulación (ec 4.1.2) transforma al sistema original, que es arbitrario (ec 4.1.1) en dos sistemas triangulares (ecs 4.1.4 y 4.1.5) que son mucho más simples de resolver.

De acuerdo con las dos posibilidades para seleccionar a la matriz normalizada, se obtienen los dos métodos siguientes:

4.1.1.1 Método de Gauss

El método de eliminación de Gauss en forma compacta se obtiene cuando la matriz triangular interior está normalizada, es decir

$$L_{ii} = 1 \quad i=1, \dots, n \quad (4.1.6)$$

4.1.1.2 Método de Crout

El método de Crout en forma compacta se obtiene cuando la matriz normalizada es la triangular superior, o sea

$$U_{ii} = 1 \quad i=1, \dots, n \quad (4.1.7)$$

4.1.2 Métodos directos para matrices simétricas

Si la matriz de coeficientes es simétrica, es decir,

$$\underline{A}^T = \underline{A} \quad (4.18)$$

los métodos de Gauss y de Crout se pueden modificar para tomar en cuenta tal situación. Para ello, la ec 4.1.2, con base en la matriz identidad, \underline{I} , se puede escribir como:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{I} \underline{U} = \underline{L} \underline{D} \underline{D}^{-1} \underline{U} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \underline{D} \underline{U} \quad (4.1.9)$$

donde \underline{D} es una matriz diagonal, formada con la diagonal de \underline{U} , en el método de Gauss, o bien con la diagonal de \underline{L} , en el método de Grout.

4.1.2.1 Método de Gauss modificado.

Si la ec 4.1.9 queda arreglada como:

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{D}^{-1} \underline{U} = \underline{L} \underline{D} \underline{\bar{U}} \quad (4.1.10)$$

donde

$$\underline{\bar{U}} = \underline{D}^{-1} \underline{U} \quad (4.1.11)$$

Al hacer que la ec 4.1.10 satisfaga la condición de simetría (ec 4.1.8) Se obtiene que

$$\underline{\bar{U}}^T \underline{D} \underline{L}^T = \underline{L} \underline{D} \underline{\bar{U}} \quad (4.1.12)$$

de donde se concluye lo siguiente

$$\underline{\bar{U}} = \underline{L}^T \quad (4.1.13)$$

Al sustituir la ec 4.1.13 en la ec 4.1.10 se obtiene el proceso de triangulación para el método de Gauss modificado para matrices simétricas y resulta ser

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \quad (4.1.14)$$

La ec 4.1.14 establece que el proceso de triangulación queda definido por una matriz triangular inferior normalizada y una matriz diagonal.

El proceso de sustitución se obtiene al sustituir la ec 4.1.14 en la 4.1.1 y resulta

$$\underline{L} \underline{D} \underline{L}^T \underline{x} = \underline{b} \quad (4.1.15)$$

La ec 4.1.15 se puede escribir como

$$\underline{L} \underline{Y} = \underline{b} \quad (4.1.16)$$

$$\underline{D} \underline{L}^T \underline{x} = \underline{Y} \quad (4.1.17)$$

La ec 4.1.16 es la sustitución hacia adelante y la ec 4.1.17 la sustitución hacia atrás

4.1.2.2 Método de Crout modificado

Si la ec 4.1.9 queda arreglada como

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \underline{U} = \underline{\bar{L}} \underline{D} \underline{U} \quad (4.1.18)$$

donde

$$\underline{\bar{L}} = \underline{L} \underline{D}^{-1} \quad (4.1.19)$$

Al hacer que la ec 4.1.18 satisfaga la condición de simetría (ec 4.1.8) resulta que

$$\underline{U}^T \underline{D} \underline{L}^{-T} = \underline{\bar{L}} \underline{D} \underline{U} \quad (4.1.20)$$

la ec 4.1.20 establece que

$$\underline{\bar{L}} = \underline{U}^T \quad (4.1.21)$$

Al sustituir; la ec 4.1.21 en la ec 4.1.18 se obtiene el proceso de triangulación para el método de Crout modificado para matrices, que se indica como

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D} \underline{U} \quad (4.1.22)$$

La ec 4.1.22 establece que el proceso de triangulación queda definido por una matriz triangular superior normalizada y una matriz diagonal.

Al comparar las ecs 4.1.14 y 4.1.22, que definen los procesos de triangulación para los métodos de Gauss y de Crout, modificados para matrices simétricas, se puede concluir que no existe diferencia entre ellos y los métodos modificados pueden llamarse método de Gauss-Crout.

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones de sustitución hacia adelante y hacia atrás, en notación de matrices triangulares superiores normalizadas, se puede escribir como se indica a continuación (ya que $\underline{U} = \underline{L}^T$)

$$\underline{U}^T \underline{Y} = \underline{b} \quad (4.1.23)$$

$$\underline{D} \underline{U} \underline{x} = \underline{Y} \quad (4.1.24)$$

4.1.2.3 Método de Cholesky

Se puede considerar como una variante del método de Gauss-Crout, para el caso en que la matriz \underline{A} sea positiva definida. Entonces

la ec 4.1.19 se puede escribir como

$$\underline{A} = \underline{U}^T \underline{D}^{1/2} \underline{D}^{1/2} \underline{U} = \underline{U}^{*T} \underline{U}^* \quad (4.1.25)$$

donde la matriz triangular $\underline{U}^* = \underline{D}^{1/2} \underline{U}$ ya no esta normalizada.

Las sustituciones hacia adelante y hacia atrás se obtienen al sustituir; la ec 4.1.25 en la ec 4.1.1 y resultan ser:

$$\underline{U}^{*T} \underline{y} = \underline{b} \quad (4.1.26)$$

$$\underline{U}^* \underline{x} = \underline{y} \quad (4.1.27)$$

4.1.24 selección y organización del método de solución

La selección del método debe hacerse con base en el menor número de operaciones consumidoras de tiempo en la computadora. Para matrices simétricas que es el caso de interés, el método de Gauss-Crout, ordenado en forma inteligente, efectua menos operaciones que el de Cholesky y es el que se recomienda. Su algoritmo se resume en la tabla 4.1

Aunque en los desarrollos de las ecuaciones de los métodos de solución se emplearon varios arreglos matriciales, y vectoriales, en la computadora se debe utilizar el menor número de cilos ya que, en general, la capacidad de la memoria rápida esta limitada. En la tabla 4.2 se presentan las subrutinas del algoritmo de Gauss-Crout, en donde se utiliza un arreglo matricial y un arreglo vectorial, por las razones indicadas a continuación

- a) La matriz diagonal, \underline{D} , se guarda en la diagonal de la matriz original \underline{A} y la matriz triangular superior normalizada se guarda en el triángulo superior de la matriz original \underline{A} . Lo anterior se puede observar en la subrutina TGCCC3 de la tabla 4.2, en donde se entra con la matriz original \underline{A} .
 - b) El vector \underline{y} se guarda en el vector \underline{b} (sustitución hacia adelante) y al final, el vector \underline{x} es el que queda guardado en el vector \underline{b} (sustitución hacia atrás). Lo anterior se indica en la subrutina SGCCC3 de la tabla 4.2, donde se entra con la matriz triangularizada y el vector de cargas.
- Otro aspecto relacionado con la organización del método de solución consiste en como se lleven a cabo las operaciones matriciales de los algoritmos. Como una recomendación a priori, que se justifica en el inciso 4.1.3, las operaciones con las matrices conviene

realizarlas por columnas y en las subrutinas de la tabla 4.2 ya se incluye esta recomendación.

4.1.3 Organización de las ecuaciones de equilibrio

El ordenamiento de las ecuaciones de equilibrio depende de la numeración de los puntos nodales y es la que determina la configuración de los coeficientes de la matriz A, que es de la forma mostrada en la fig 4.1, para matrices simétricas. De acuerdo con la fig 4.1, la información correspondiente al arreglo matricial A se puede manipular con menor o mayor eficiencia, tanto operativa como de capacidad, si se guarda en los arreglos descritos a continuación

4.1.3.1 Arreglos cuadrados

Este arreglo es el más elemental (fig 4.1) y, de hecho, los algoritmos de las tabla 4.1 están desarrollados para estos arreglos. A continuación se resumen sus desventajas numéricas

- a) Existe gran desperdicio de espacio en la memoria rápida por que, al menos, se almacenan los $\frac{1}{2} n (n-1)$ elementos que no se utilizan, ya que no se operan con ellos (cantidades bajo la diagonal principal de la fig 4.1)
- b) Existe otro desperdicio de espacio al guardar cantidades nulas, localizadas arriba de los contornos mostrados en la fig 4.1. Como con estas cantidades sí se opera, también existe desperdicio de tiempo.

La localización de los elementos en estos arreglos es directa

4.1.3.2 Arreglos rectangulares (en banda)

En la fig 4.2 se muestran los coeficientes que definen a la matriz A, comprendidos entre la banda limitada por la diagonal principal y el contorno de banda, indicados en la fig 4.1. Estos coeficientes forman un arreglo rectangular denominado arreglo en banda, cuyas desventajas se resumen a continuación

- a) Existe todavía desperdicio de espacio, porque se almacenan elementos que no existen en la matriz A, como son los ceros que aparecen en el triángulo inferior derecho de la fig 4.2 que, desde luego no se opera con ellos.

b) Existe otro desperdicio de espacio al guardar los ceros que existen entre los contornos de silueta y de banda, mostrados en la fig 4.1. Puesto que con estos ceros si se opera, también existe desperdicio de tiempo.

Para la localización de los elementos en este arreglo, en relación con el arreglo cuadrado, no se requiere información adicional al ancho de banda, y se puede definir una relación que identifiquen a las columnas, ya que son las únicas que se distorsionan

4.1.4 Arreglos unidimensionales (en silueta)

En la fig 4.3 se muestran los coeficientes que definen a la matriz A, comprendidos entre la diagonal principal y el contorno de silueta, indicados en la fig 4.1. Estos coeficientes forman un arreglo unidimensional, al colocar las columnas una tras otra.

En este arreglo no se puede hablar de desperdicio de espacio ni operativo, ya que se eliminan todos los ceros no operativos y, por lo tanto, es el arreglo más eficiente que hasta la fecha se ha logrado. Para la localización de los elementos en este arreglo en relación con el arreglo cuadrado, se requiere un arreglo adicional (como el IA mostrado en la fig 4.3) en donde se especifique la localización del elemento de la diagonal principal correspondiente a cada columna. Con este arreglo se puede definir una relación que identifique tanto a los renglones como a las columnas distorsionadas al pasar al arreglo unidimensional.

4.2 Solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

4.2.1 Introducción

El modelo matemático correspondiente a las ecuaciones de equilibrio dinámico de los medios continuos modelados con la teoría de la elasticidad se indica con las ecs 2.3.48 a 2.3.51.

La solución de las ecs 2.3.48 puede obtenerse mediante la aplicación de los procedimientos clásicos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Sin embargo, tales métodos resultan, en general, ineficientes para los sistemas estructurales. Por tal razón se han desarrollado técnicas especiales que toman

en cuenta las características de las matrices \underline{K} , \underline{C} y \underline{M} , para mejorar la eficiencia del método de solución. Tales procedimientos conducen a dos clases de métodos denominados, directos y de superposición modal. Los métodos directos integran a la ec 2.3.48 en forma directa, sin ninguna transformación. Los que interesan son los de paso simple, y se basan en las ideas:

- 1) Se satisface el equilibrio únicamente en puntos discretos a intervalos Δt , denominado paso de integración (fig. 4.4)
- 2) Se supone conocida la variación, en el intervalo Δt , de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Las ideas anteriores conducen a métodos aproximados, y la aproximación y el costo de cada método dependen de la variación que se elija. Los métodos directos que se utilizan con mayor frecuencia se listan a continuación:

- a) Método de diferencias centrales
- b) Método de Houbolt
- c) Método Theta de Wilson
- d) Método Beta de Newmark
- e) Método Alfa de Hilber
- f) Método cúbico de Argyres

La diferencia básica entre estos métodos se encuentra en la forma en que se aproxima la respuesta en el intervalo Δt .

En los métodos de diferencias centrales y de Houbolt, se emplea una aproximación de las aceleraciones y velocidades en términos de los desplazamientos, mediante diferencias finitas.

En el método Theta de Wilson, se supone una variación lineal en el intervalo $[t, t + \theta \Delta t]$, donde el parámetro $\theta > 1$, controla la convergencia y estabilidad del método.

En el método Beta de Newmark, se generaliza la variación lineal de la aceleración mediante dos parámetros γ y β .

En el método Alfa de Hilber se emplea la misma aproximación que el Beta de Newmark pero introduce un término perturbador que se controla mediante un parámetro α .

El método cúbico de Argyris, la fuerza de inercia se aproxima mediante una variación cúbica en el intervalo Δt

El propósito que se persigue en cualquier método de integración numérica es que el método sea eficiente en el contexto de una buena apro

ximación a un bajo costo.

Es necesario hacer notar que entre mas pequeño se elija el tamaño del paso de integración (Δt) mejor será la aproximación; sin embargo, el costo del tiempo de computación resulta mayor, ya que éste es directamente proporcional al número de pasos de integración. Entonces, la eficiencia de un método depende de la elección apropiada del paso de integración, Δt , para el cual el método converge a la solución.

La convergencia de un método se puede probar al satisfacer las condiciones de consistencia y estabilidad. Además se ha observado que cuando el tamaño del paso es grande, comparado con el período más corto del sistema, la solución aproximada, no obstante satisfacer el criterio de estabilidad, presenta errores significativos en las amplitudes correspondientes a los primeros pasos de integración. Este fenómeno se conoce con el nombre de excedencia y debe investigarse que no se presente en el método seleccionado.

En el método de superposición modal se transforma el sistema de n ecuaciones diferenciales acopladas (ec 2.3.48) en n ecuaciones de un grado de libertad, desacopladas (n es el número de grados de libertad de las ec 2.3.48). La transformación que se emplea para desacoplar las ecuaciones se determina al resolver el correspondiente problema de vibración libre de la ec 2.3.48 (cuando $\underline{C} = \underline{0}$ y $\underline{P} = \underline{0}$), que conduce a un problema de valores característicos. En el espacio transformado (denominado natural) se integran por separado las ecuaciones desacopladas, cuya solución se transforma al espacio original. El método directo que se describe en este resumen, cuyo uso se recomienda, es el método Beta de Newmark, para $\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$. Ya que es incondicionalmente estable, se obtiene buena aproximación y no presenta el fenómeno de excedencia.

El método de superposición modal también se recomienda como método eficiente para obtener la respuesta de sistemas lineales.

4.2.2 Método Beta de Newmark

Al considerar que la variación de la aceleración relativa, asociada a cada grado de libertad, tiene una variación lineal en el intervalo de integración $[t_0, t_1]$, como se indica en la fig. 4.4, se obtienen las expresiones siguientes:

$$\ddot{\underline{U}}_1 = \ddot{\underline{U}} \quad (4.2.1)$$

$$\dot{\underline{U}}_1 = \dot{\underline{U}}_0 + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{\underline{U}}_0 + \ddot{\underline{U}}_1) \quad (4.2.2)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \Delta t \dot{\underline{U}}_0 + \frac{1}{6} \Delta t^2 (2 \ddot{\underline{U}}_0 + \ddot{\underline{U}}_1) \quad (4.2.3)$$

Con base en las ecs 4.2.2 y 4.2.3, Newmark propone la aproximación siguiente:

$$\dot{\underline{U}}_1 = \dot{\underline{U}}_0 + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\underline{U}}_0 + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_1 \quad (4.2.4)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \Delta t \dot{\underline{U}}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_0 + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_1 \quad (4.2.5)$$

El parámetro β está relacionado con la estabilidad del método (para $\beta = 1/4$, es incondicionalmente estable) y el parámetro γ está relacionado con la estabilidad y convergencia del método debido al amortiguamiento matemático que puede inducirse (para $\gamma = 1/2$, no existe amortiguamiento matemático). Para el caso en que $\beta = 1/6$ y $\gamma = 1/2$, las ecs 4.2.4. y 4.2.5. son iguales a las ecs 4.2.2 y 4.2.3, respectivamente.

Al definir los vectores \underline{a} y \underline{b} , como se indica a continuación:

$$\underline{a} = \ddot{\underline{U}}_0 + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\underline{U}}_0 \quad (4.2.6)$$

$$\underline{b} = \underline{U}_0 + \Delta t \dot{\underline{U}}_0 + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_0 \quad (4.2.7)$$

las ecs 4.2.4 y 4.2.5 se escriben como sigue:

$$\dot{\underline{U}}_1 = \underline{a} + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_1 \quad (4.2.8)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{b} + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_1 \quad (4.2.9)$$

Al valuar las ecuaciones de movimiento (ec 2.3.48) al final del intervalo ($t = t_1$) y en la ecuación resultante se sustituyen las ecs 4.2.8 y 4.2.9, se obtiene la siguiente expresión:

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}}_1 + \underline{C} (\underline{a} + \gamma \Delta t \ddot{\underline{U}}_1) + \underline{K} (\underline{b} + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{U}}_1) = \underline{P}_1 \quad (4.2.10)$$

que puede escribirse como

$$\underline{K}^* \underline{\ddot{U}} = \underline{\Gamma} \quad (4.2.11)$$

donde

$$\underline{K}^* = \underline{M} + \gamma \Delta t \underline{C} + \beta \Delta t^2 \underline{K} \quad (4.2.12)$$

$$\underline{\Gamma} = \underline{P}_1 - \underline{C} \underline{a} - \underline{K} \underline{b} \quad (4.2.13)$$

La ecuación que gobierna a la aceleración al final del paso es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, como los descritos en el inciso 4.1. Puesto que las matrices \underline{M} , \underline{C} y \underline{K} son simétricas, \underline{K}^* también lo es. Si el tamaño del (Δt) se conserva constante durante el proceso de integración y puesto que las matrices \underline{M} , \underline{C} y \underline{K} son constantes, \underline{K}^* también resulta constante.

Al sustituir la ec 2.3.49 en las ecs 4.2.12 y 4.2.13 se obtienen las expresiones siguientes:

$$\underline{K}^* = (1 + \gamma \Delta t \alpha) \underline{M} + (\gamma \Delta t \mu + \beta \Delta t^2) \underline{K} \quad (4.2.14)$$

$$\underline{\Gamma} = \underline{P}_1 - \alpha \underline{M} \underline{a} - \underline{K} (\mu \underline{a} + \underline{b}) \quad (4.2.15)$$

La forma sistemática para utilizar el método de Newmark se muestra en la tabla 4.2.

4.3 Esquema simple para organizar un programa de computadora

En la fig. 4.2 se muestra, en forma esquemática, los aspectos mas relevantes para construir un programa de computadora simple, basado en el método del elemento finito, para cargas estáticas.

Una secuencia a seguir para construir el programa de computadora puede ser la siguiente:

- Se define el modelo matemático que se va a resolver. Para ello se procede como se bosqueja en el capítulo 1.
- Se especifica la forma de como manipular los parámetros que definen a los materiales con que se va a construir la estructura. De acuerdo con las ecuaciones constitutivas del capítulo 1, son: E , ν y ρ . Esto se define en el bloque indicado con MATERIALES.
- Se establece como definir la geometría de la estructura por resolver. Queda definida al conocer las coordenadas de los puntos

nodales en que se idealiza la estructura, según el capítulo 2. Esto se realiza en el bloque llamado COORDENADAS.

- d) Se especifica la información necesaria para establecer las ecuaciones de equilibrio de cada uno de los elementos de la estructura (por ejemplo: puntos nodales, material, geometría, funciones de interpolación, etc). Con tal información se puede construir la matriz de rigideces de cada elemento, según se indica en los capítulos 2 y 3. También se puede establecer el ensamble de la matriz de rigideces, como se especifica en el capítulo 2. Todo lo anterior se realiza en el bloque indicado por ELEMENTOS.
- e) Se indica la forma de introducir las condiciones de frontera en la matriz de rigideces (capítulo 2) y se lleva a cabo la triangulación (cap. 4). Esta actividad queda indicada en el bloque denominado FRONTERA.
- f) Se sistematiza la forma de cuantificar el vector de cargas con opción a varias condiciones de cargas. Las fuerzas debidas a esfuerzos y deformaciones iniciales, peso propio, y cargas de superficie en los elementos finitos (capítulos 2 y 3) es conveniente cuantificarlos en el bloque ELEMENTOS. En el bloque CARGAS se especifican las cargas concentradas que actúan en los puntos nodales y se llevan a cabo las operaciones indicadas, de acuerdo con los capítulos 2 y 4.

Es muy recomendable que los bloques mostrados funciones como sub-rutinas controladas por un programa principal que permita el dimensionamiento eficiente de los arreglos que se utilicen en las sub-rutinas.

Desde luego que el esquema simplista de la fig.4, puede tener muchas variantes que dependerán de la experiencia numérica de quienes las elaboren.

5. BIBLIOGRAFIA

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aero, Sce., Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823
2. CLOUGH, R. W., "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, 1960, pp 345-378
3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London, 1967
4. ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971
5. SMITH, G. N., An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering, Applied Science, London, 1971
6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostran and Reinhold, New York, 1972
7. ODEN, J. T., Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New York, 1972
8. URAL, O., Finite Element Method, Intext Educational Publishers, New York, 1973
9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., Introduction to Finite Element Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973
10. STRANG, G. and FIX, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall, N. J., 1973
11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., Fundamentals of Finite Element Technique, Butterworths, London, 1973
12. NORRIS, D. H. and de VRIES, G., The Finite Element Method-Fundamentals and Applications, Academic Press, New York, 1973
13. COOK, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1974
14. WACHPRESS, E. L., A Rational Finite Element Basis, Academic Press, New York, 1975
15. FENNER, R. T., Finite Element Method for Engineers, MacMillan Press, London, 1975
16. GALLAGHER, R. H., Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, N. J., 1975

17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers, John Wiley, New York, 1975
18. ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975
19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976
20. ODEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976
21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976
22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976
23. TONG, P., and ROSSETTOS, J. N., "Finite Element Method. Basic Technique and Implementation", The MIT Press, 1977
24. ZIENKIEWICZ, O. C., "The Finite Element Method", Third Edition, McGraw-Hill, 1977
25. DESAI, C. S., and CHRISTIAN, J. T. (Eds), "Numerical Methods in Geotechnical Engineering", McGraw-Hill, 1977
26. CHUNG, T. J., "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics", McGraw-Hill, 1978
27. International Journal for NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS IN GEOMECHANICS, John Wiley.
28. International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley.

TABLA 3.1

Abscisas y coeficientes de peso para la cuadratura de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j)$$

$\pm a_j$	H_j
	$n = 2$
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
	$n = 3$
0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
	$n = 4$
0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
	$n = 5$
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
0.53846 93101 05681	0.47862 86704 99366
0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
	$n = 6$
0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
0.23861 91660 83197	0.46791 39345 72691
	$n = 7$
0.94910 79123 42759	0.12946 49661 68870
0.74153 11655 99394	0.27970 53914 89277
0.40584 51513 72397	0.38183 00505 05119
0.00000 00000 00000	0.41795 91836 73469
	$n = 8$
0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376
0.79566 64774 13627	0.22238 10344 53374
0.52553 24099 16329	0.31370 66438 77857
0.18343 46424 95650	0.36268 37833 76362
	$n = 9$
0.95816 02395 07626	0.08127 43883 61574
0.83603 11073 26636	0.18064 81606 94857
0.61337 14327 00590	0.26061 06964 02935
0.32425 34234 03809	0.31234 70770 40003
0.00000 00000 00000	0.33023 93550 01260
	$n = 10$
0.97390 65255 17172	0.06667 13443 08685
0.86506 33666 88985	0.14945 13491 50581
0.67940 95652 99024	0.21908 63625 15482
0.43339 53941 29247	0.26926 67193 09996
0.14887 43389 81631	0.29552 42247 14753

Tabla 3.2. Fórmulas para integración numérica de tetraedros

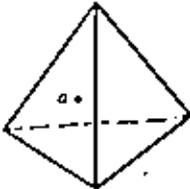
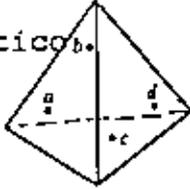
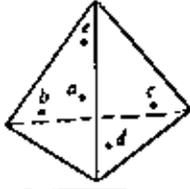
No	Orden	Fig	Error	Pto.	Coord.	$W_i^V/\text{Volumen}$
1	Lineal		$R = O(h^2)$	a	1,1,1,1	
2	Cuadrático		$R = O(h^4)$	a b c d	$\alpha, \beta, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \beta, \alpha, \beta$ $\beta, \beta, \beta, \alpha$ $\alpha = 0.58341020$ $\beta = 0.13819660$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
3	Cúbico		$R = O(h^6)$	a b c d e	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{20}$ $\frac{3}{20}$ $\frac{3}{20}$ $\frac{3}{20}$ $\frac{3}{20}$

Tabla 3.3 Fórmulas para integración numérica de triángulos

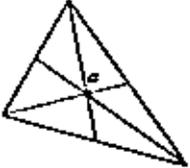
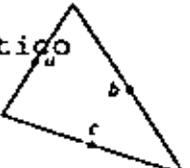
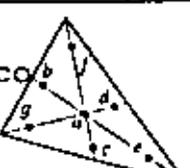
Orden	Fig	Error	Pto.	Coord.	W_i^A/Area
Lineal		$R = O(h^2)$	a	1,1,1	$\frac{1}{3}$
Cuadrático		$R = O(h^4)$	a b c	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0$ $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Cúbico		$R = O(h^6)$	a b c d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $0.6, 0.2, 0.2$ $0.2, 0.6, 0.2$ $0.2, 0.2, 0.6$	$-\frac{11}{180}$ $\frac{11}{180}$ $\frac{11}{180}$ $\frac{11}{180}$
Quintico		$R = O(h^8)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ x_1, β_1, β_1 β_1, x_1, β_1 β_1, β_1, x_1 x_2, β_2, β_2 β_2, x_2, β_2 β_2, β_2, x_2	$0.22500, 0.00000$ $0.13239, 41.527$ $0.12593, 91.805$
with					
$x_1 = 0.0597158717$					
$\beta_1 = 0.4701420641$					
$x_2 = 0.7974264853$					
$\beta_2 = 0.1012865073$					

TABLA 4.1 Subrutinas para la triangulación y sustitución del método de Gauss-Crout para matrices cuadradas

```

SUBROUTINE TGCCC3(A,N)
DIMENSION A(N,N)
C REDUCCION TOTAL DE A POR GAUSS-CROUT VZ-SE
IF(N.EQ.1) RETURN
A(1,2)=A(1,2)/A(1,1)
A(2,2)=A(2,2)-A(1,2)*A(1,2)*A(1,1)
IF(N.EQ.2) RETURN
DO 600 J=3,N
IS=J-1
C PRIMER PASO
DO 300 I=2,IS
XX=0.
KS=I-1
DO 200 K=1,KS
XX=XX+A(K,I)*A(K,J)
200 CONTINUE
A(I,J)=A(I,J)-XX
300 CONTINUE
C SEGUNDO PASO
XX=0.
DO 400 I=1,IS
YY=A(I,J)/A(I,I)
XX=XX+YY*A(I,J)
400 CONTINUE
A(I,J)=YY
500 CONTINUE
RETURN
END

```

a) Triangulación

```

SUBROUTINE SGCCC3(A,X,N)
DIMENSION A(N,N),X(N)
C REDUCCION Y SUSTITUCION TOTAL POR GAUSS-CROUT
REDUCCION
IF(N.EQ.1) RETURN
DO 300 I=2,N
KS=I-1
XX=0.
DO 200 K=1,KS
XX=XX+A(K,I)*X(K)
200 CONTINUE
X(I)=X(I)-XX
300 CONTINUE
DO 340 I=1,N
X(I)=X(I)/A(I,I)
340 CONTINUE
C SUSTITUCION
NP=N+1
IF(I.EQ.1) RETURN
NM=N-1
DO 500 M=1,NM
I=NP-M
KS=I-1
DO 400 K=1,KS
X(K)=X(K)-A(K,I)*X(I)
400 CONTINUE
500 CONTINUE
RETURN
END

```

b) Sustitución

TABLA 4.2 Algoritmo del método Beta de Newmark, para sistemas lineales de varios grados de libertad

a) Calcular las siguientes constantes:

$$a_0 = \gamma \Delta t$$

$$a_1 = \Delta t - a_0$$

$$a_2 = \beta \Delta t$$

$$a_3 = a_2 \Delta t$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \Delta t^2 - a_3$$

$$a_5 = 1 + a_0 \alpha$$

$$a_6 = a_0 + \mu + a_3$$

b) Construir la matriz \underline{K}^*

$$\underline{K}^* = a_5 \underline{M} + a_6 \underline{K}$$

c) Triangularizar \underline{K}^*

Para cada paso de integración:

d) Construir los vectores \underline{a} , \underline{b} y \underline{r}

$$\underline{a} = \underline{\dot{U}}_0 + a_1 \underline{\ddot{U}}_0$$

$$\underline{b} = \underline{U}_0 + \Delta t \underline{\dot{U}}_0 + a_4 \underline{\ddot{U}}_0$$

$$\underline{r} = \underline{P}_1 - \alpha \underline{M} \underline{a} - \underline{K} [\mu \underline{a} + \underline{b}]$$

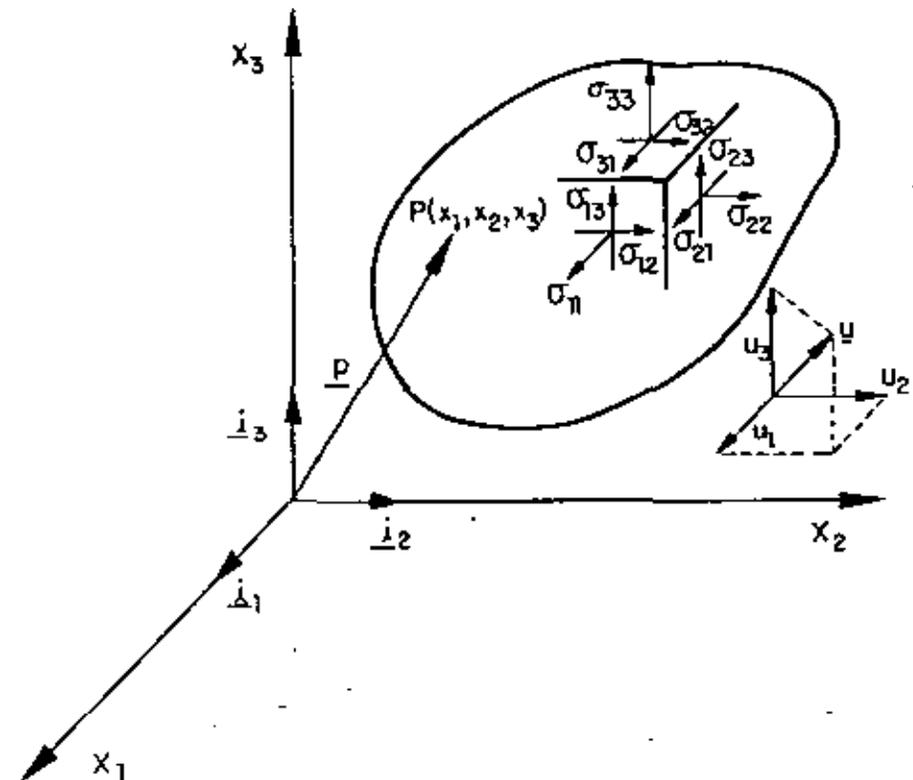
e) Calcular $\underline{\ddot{U}}_1$ mediante la sustitución hacia adelante y hacia atrás en el sistema de ecuaciones

$$\underline{K}^* \underline{\ddot{U}}_1 = \underline{r}$$

f) Calcular los vectores

$$\underline{\dot{U}}_1 = \underline{a} + a_0 \underline{\ddot{U}}_1$$

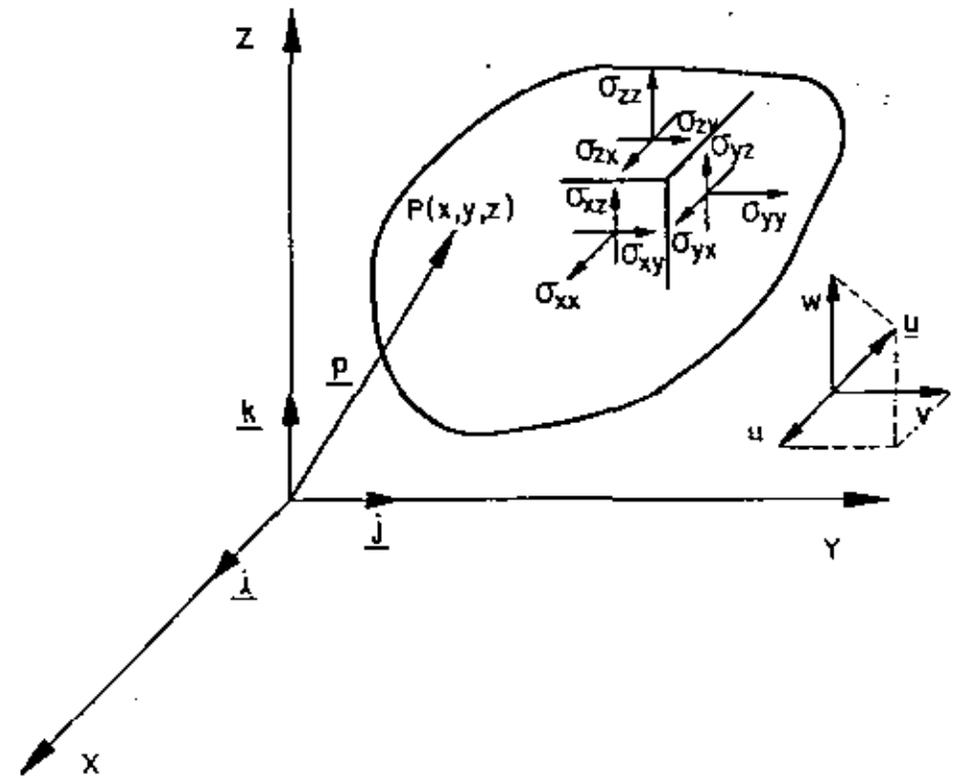
$$\underline{U}_1 = \underline{b} + a_3 \underline{\ddot{U}}_1$$



$$\underline{p} = x_k \underline{i}_k = x_1 \underline{i}_1 + x_2 \underline{i}_2 + x_3 \underline{i}_3$$

$$\underline{u} = u_k \underline{i}_k = u_1 \underline{i}_1 + u_2 \underline{i}_2 + u_3 \underline{i}_3$$

a) Notación indicial

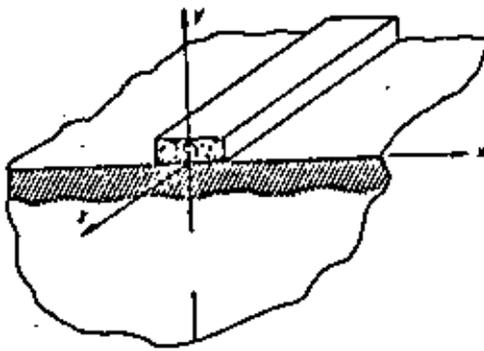


$$\underline{p} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$$

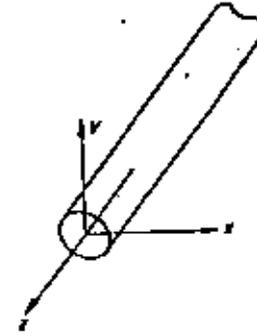
$$\underline{u} = u \underline{i} + v \underline{j} + w \underline{k}$$

b) Notación tradicional (sin índice)

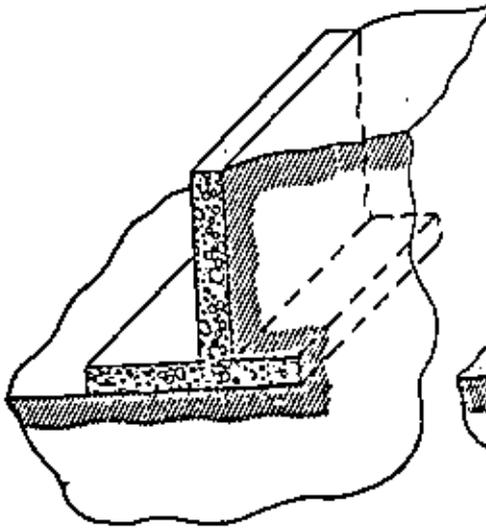
Fig 1.1 Sistemas de referencia cartesiano



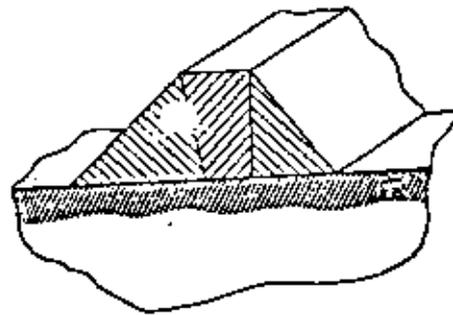
Zapata corrida



Cilindro alargado



Muro de retención



Presa de tierra

Fig 1.2 Ejemplos de problemas de estados planos de deformación

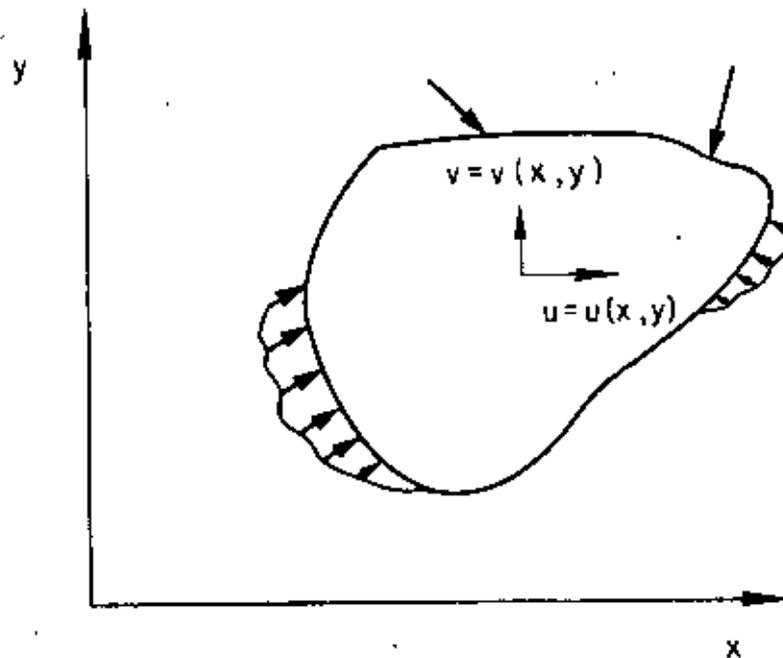


Fig 1.3 Región para los estados planos

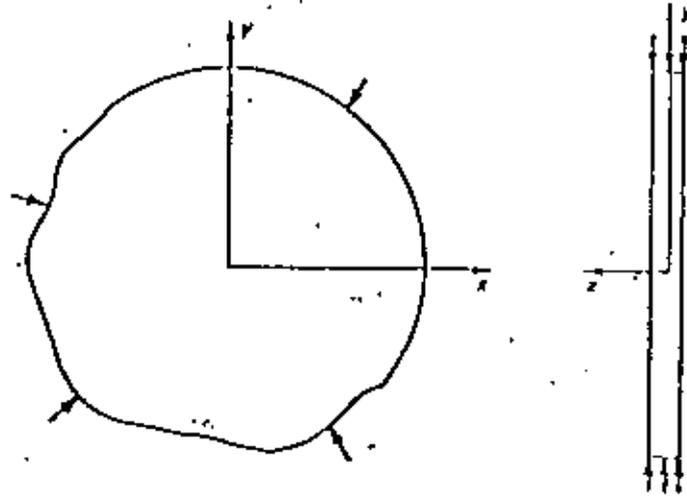


Fig 1.4 Estado plano de esfuerzos. Placa delgada con cargas en su plano

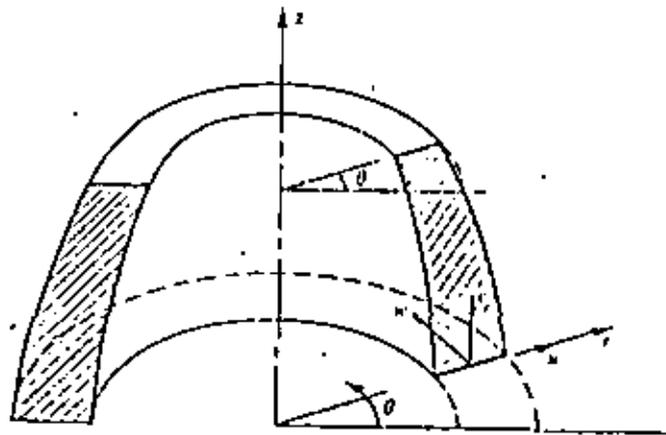


Fig 1.5 Sistema de coordenadas cilíndricas para sólidos axisimétricos.

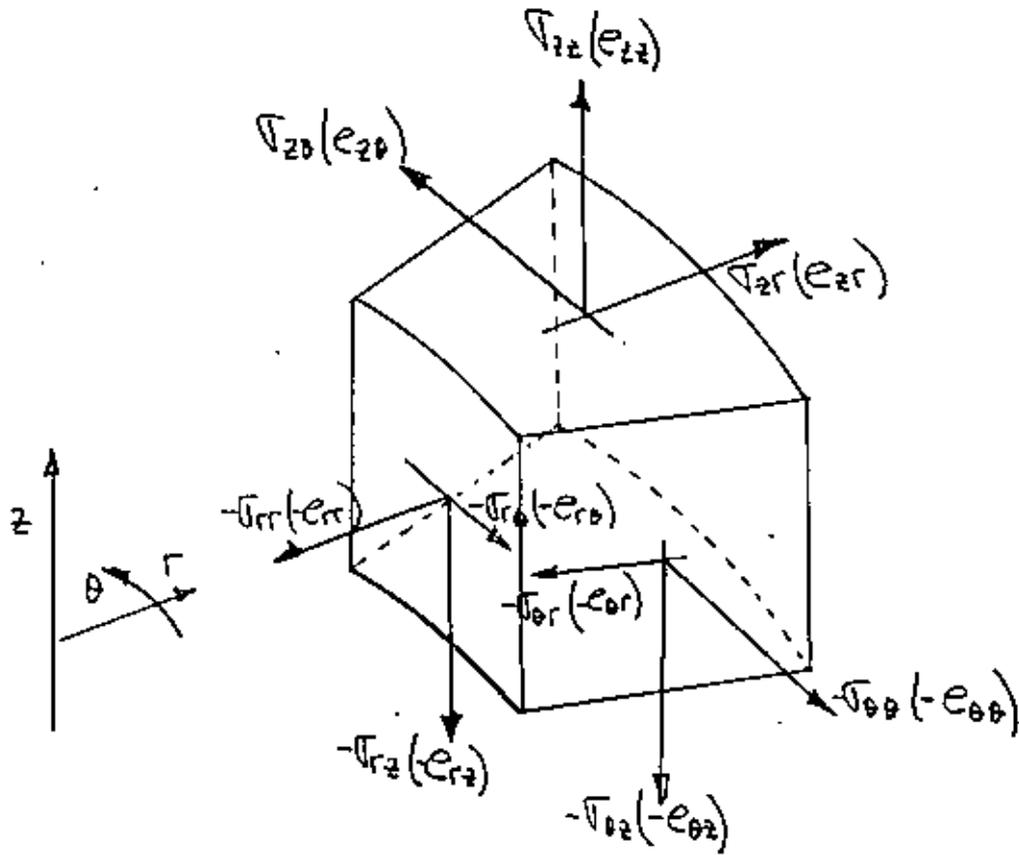


Fig 1.6 Componentes de los tensores de esfuerzo y de deformación en la referencia cilíndrica.

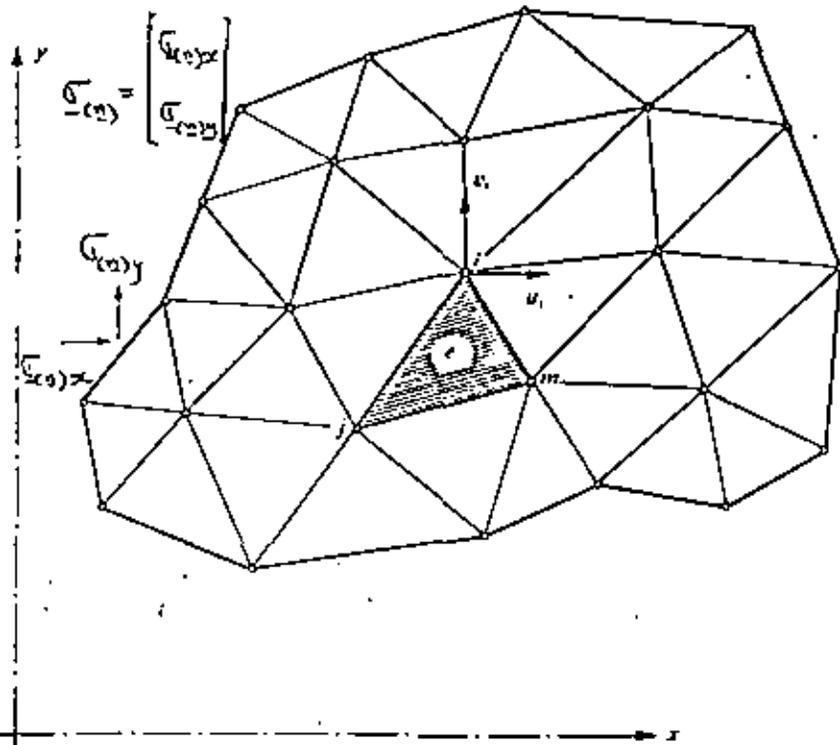


Fig. 2.1 Idealización de una región bidimensional, (estado plano de esfuerzos) mediante elementos finitos

No. de elementos finitos = 33
 No. de puntos nodales = 25

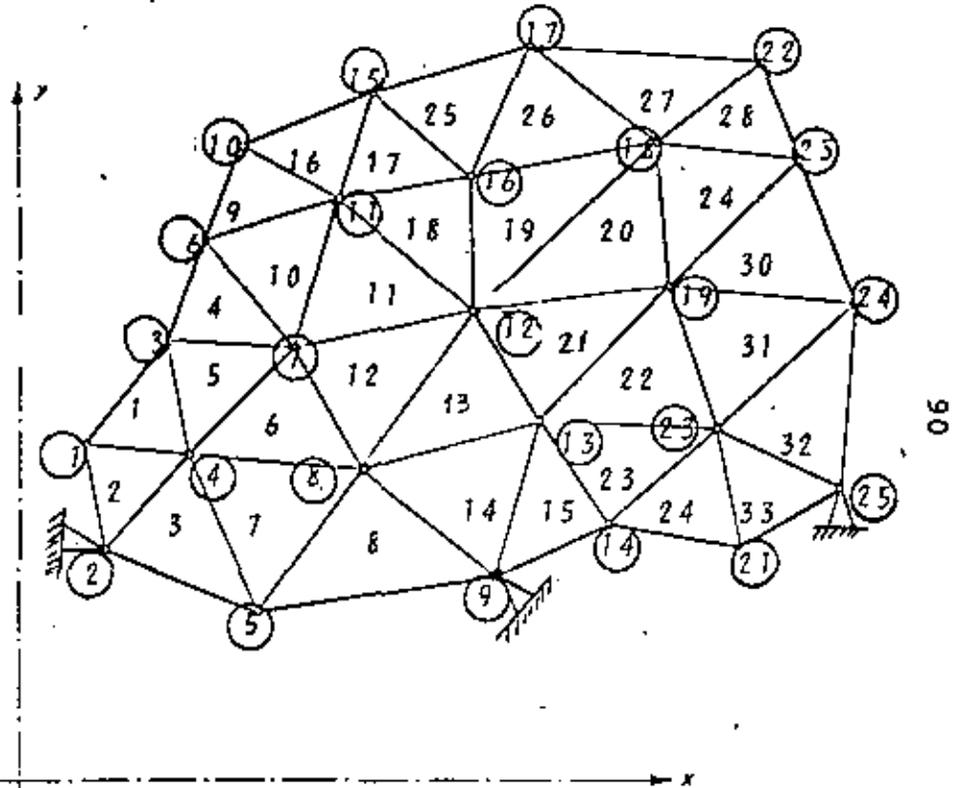


Fig. 2.2 Elementos finitos para establecer el equilibrio global de la estructura.

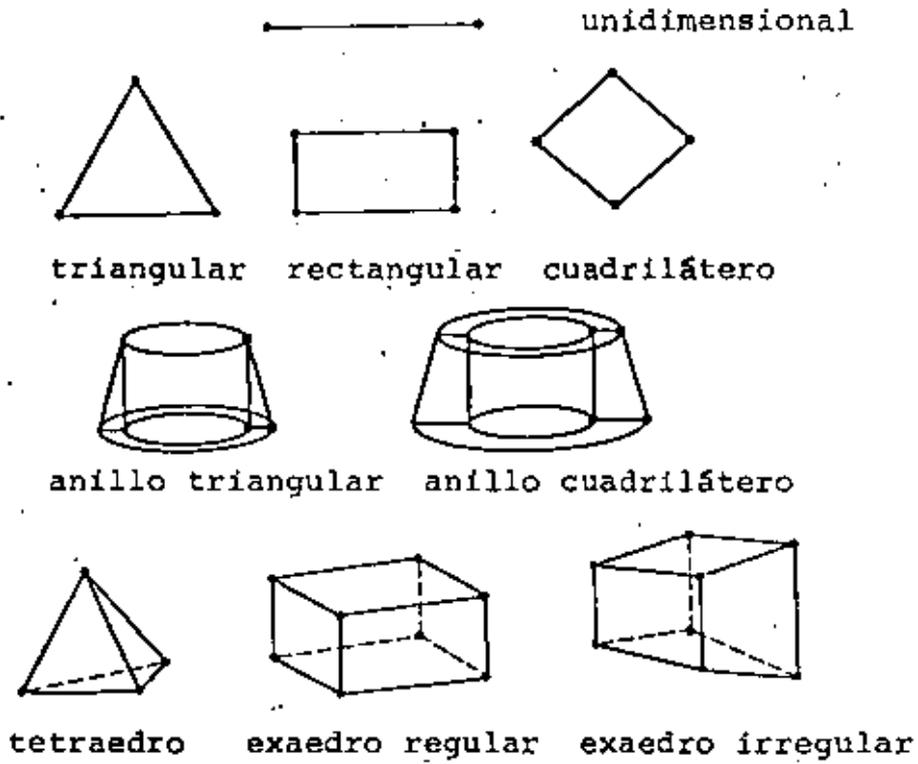


Fig 3.1 Elementos finitos de varias formas

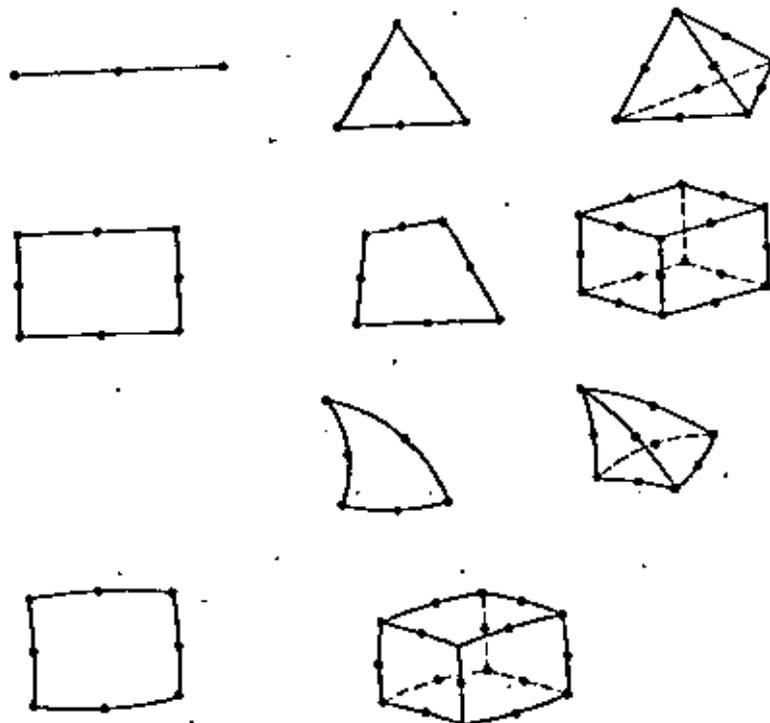


Fig 3.2 Elementos cuadráticos

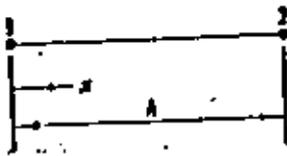


Fig 3.3. Elemento unidimensional, (variación lineal), con origen en un extremo

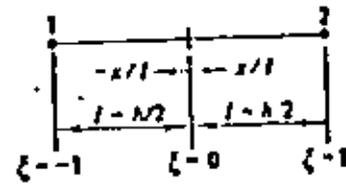


Fig 3.4. Elemento unidimensional, (variación lineal), con origen en el centro

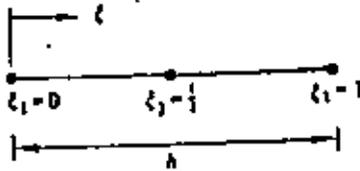


Fig 3.5. Elemento unidimensional, (variación cuadrática), con origen en un extremo

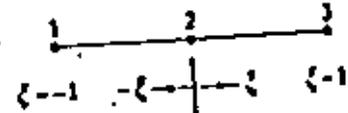


Fig 3.6. Elemento unidimensional, (variación cuadrática), con origen en el centro

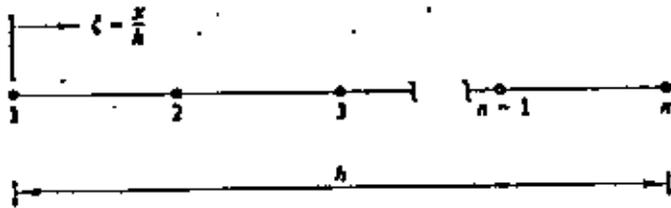
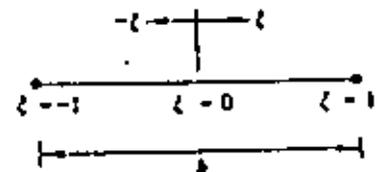
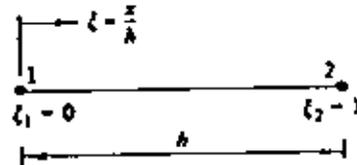
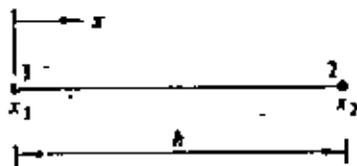
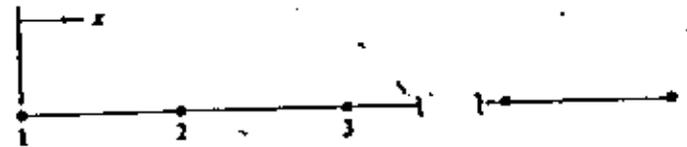


Fig 3.7. Coordenadas en un elemento en el que se utiliza interpolación lineal

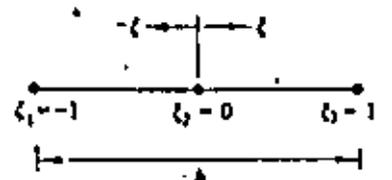
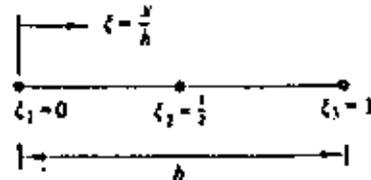
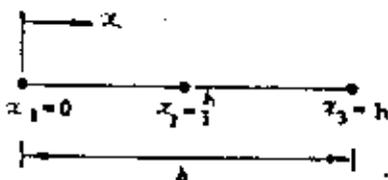


a) variable no normalizada (origen en un extremo)

b) variable normalizada (origen en un extremo)

c) variable normalizada (origen en el centro)

Fig 3.8. Aproximación lineal, en un elemento lagrangiano



a) variable no normalizada (origen en un extremo)

b) variable normalizada (origen en un extremo)

c) variable normalizada (origen en el centro)

Fig 3.9. Aproximación cuadrática en un elemento lagrangiano

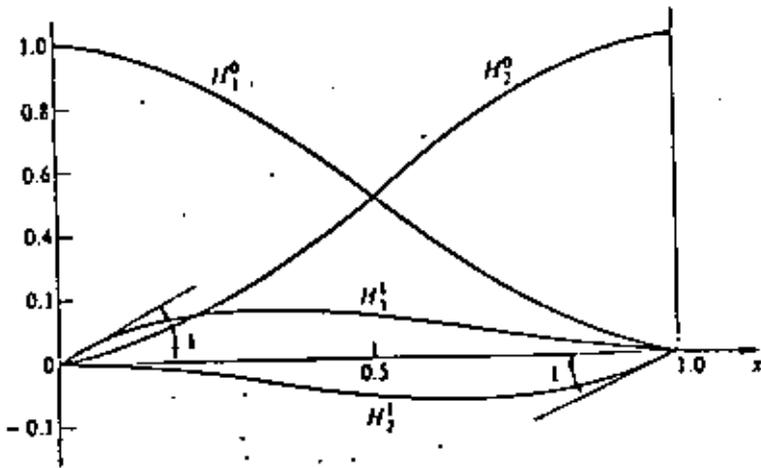


Fig 3.10 Funciones de interpolación de Hermite

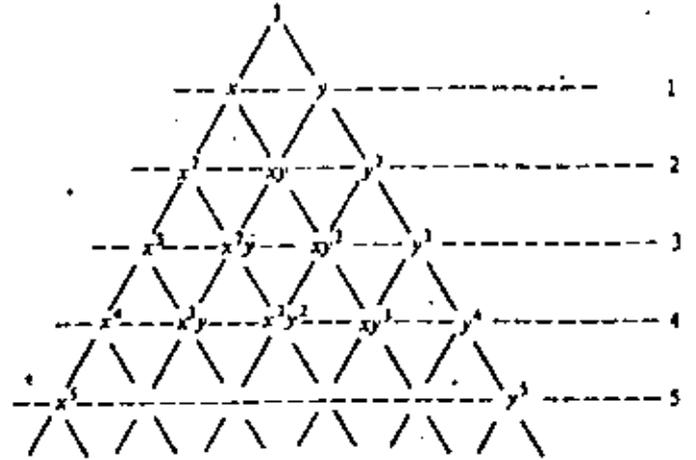


Fig 3.11 Triángulo de Pascal

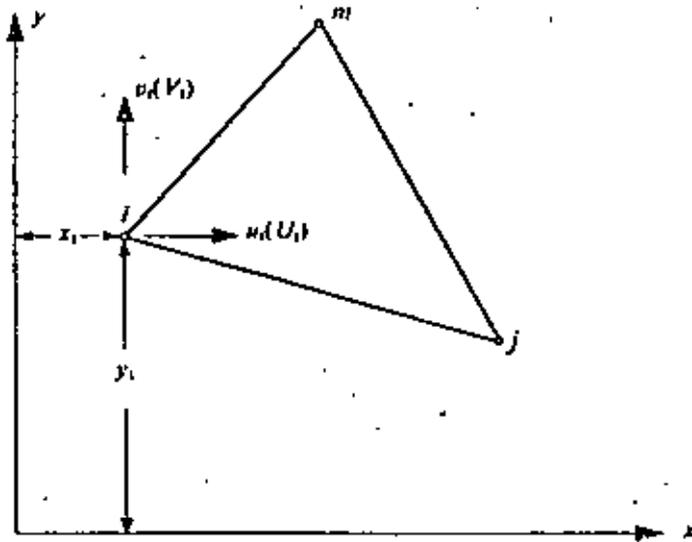


Fig 3.12 Elemento triangular lineal

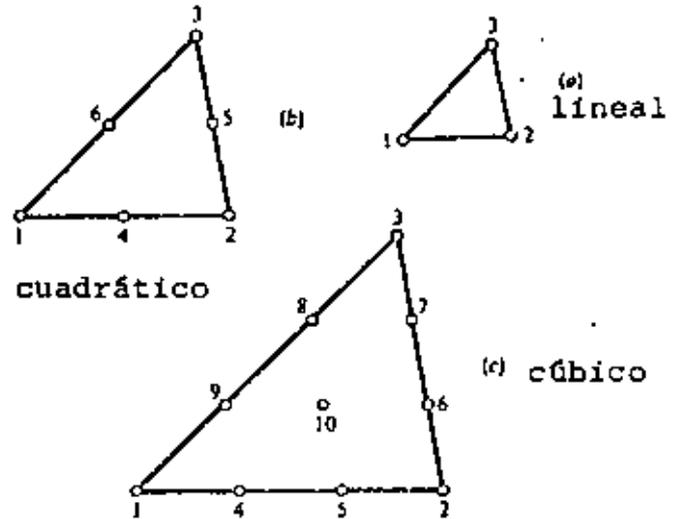


Fig 3.13 Familia de elementos triangulares

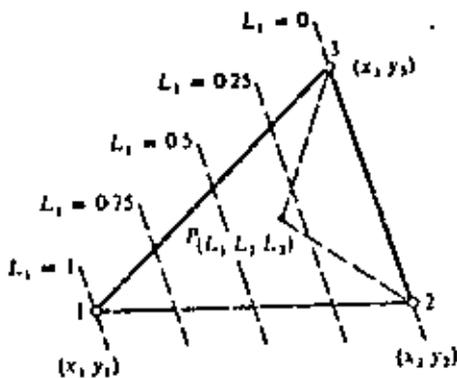


Fig 3.14 Coordenadas de área

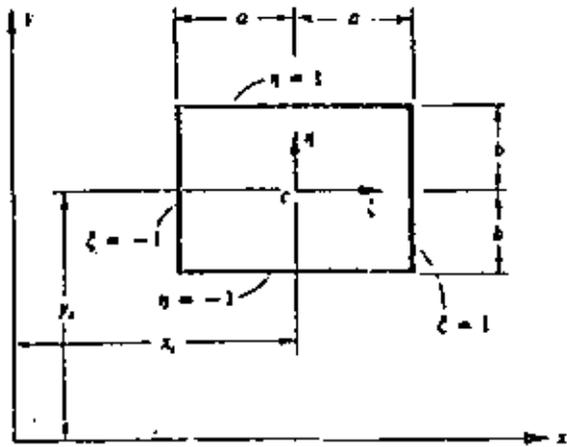


Fig 3.16 Coordenadas normalizadas para un rectángulo

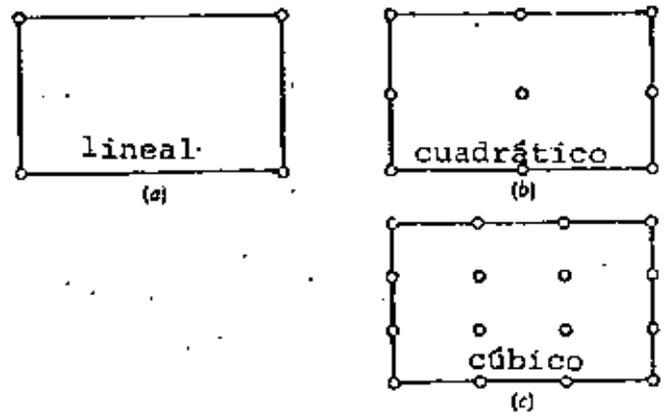


Fig 3.17 Familia Lagrangiana de rectángulos

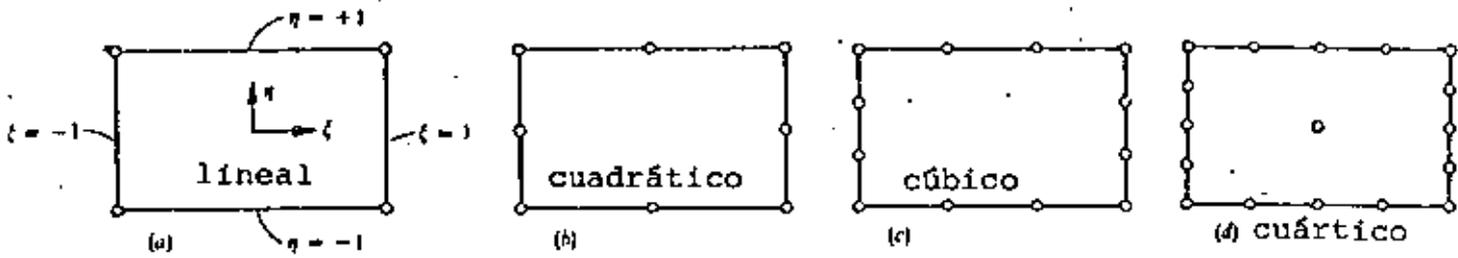


Fig 3.18 Familia Serendipity de rectángulos

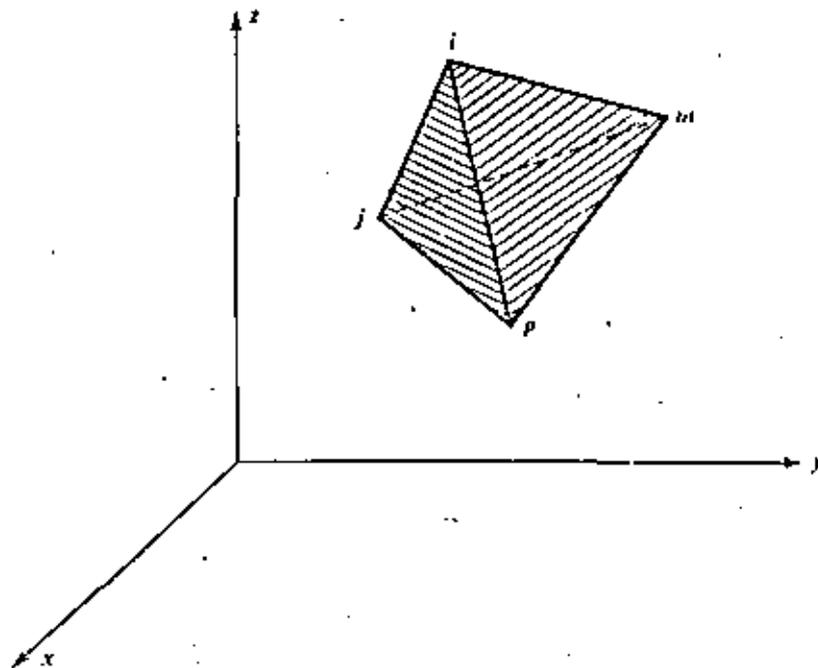


Fig 3.19 Elemento tetraedro lineal

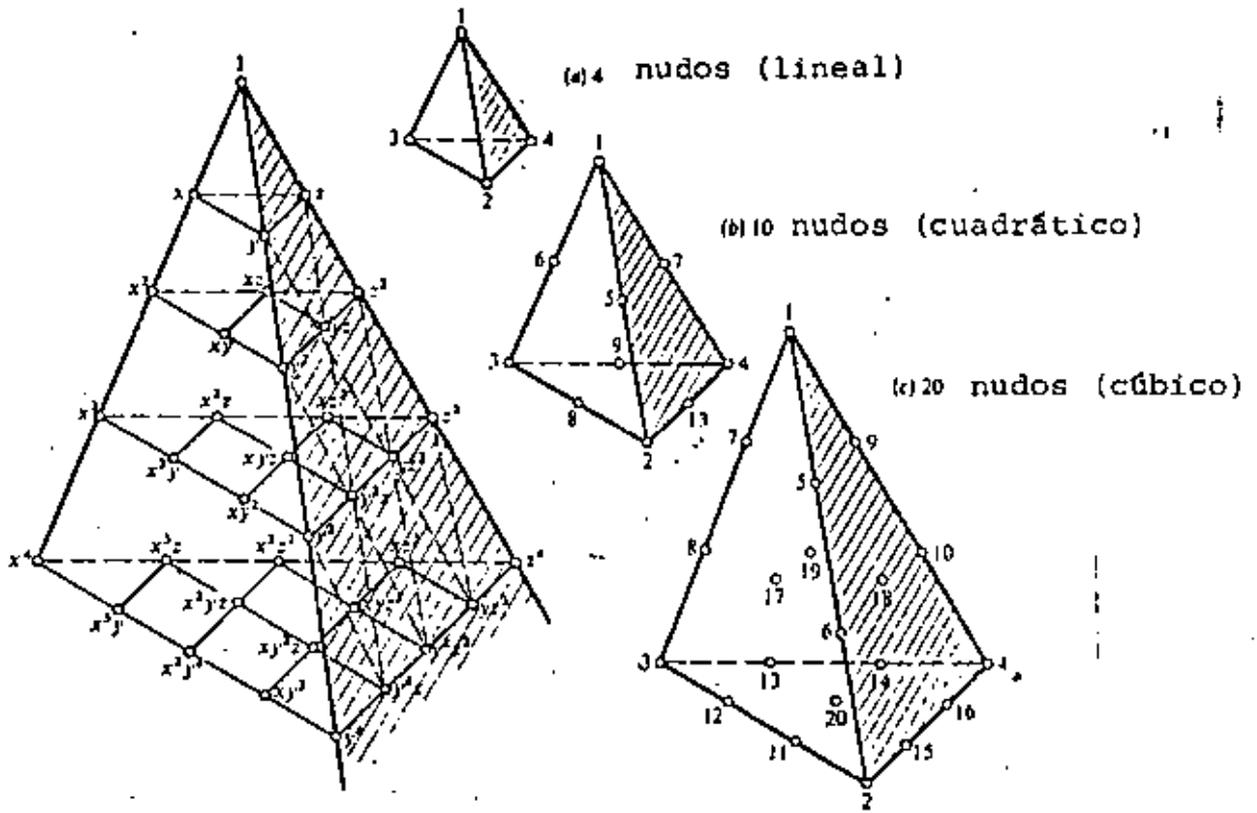


Fig 3.20 Familia de tetraedros

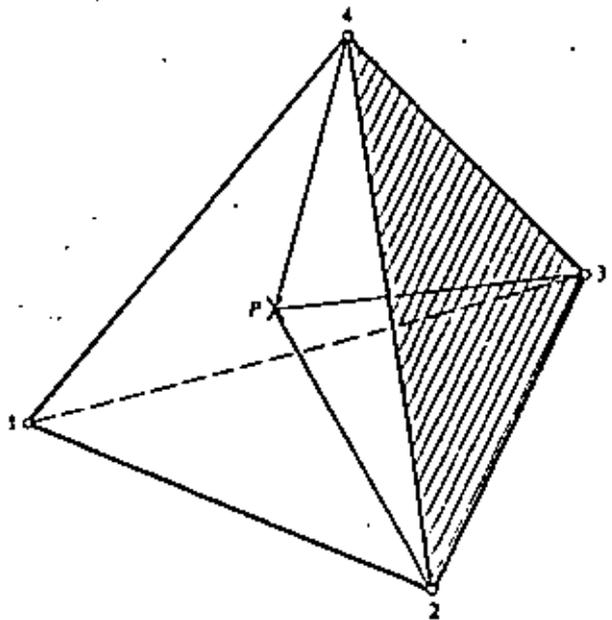


Fig 3.2 1 Coordenadas de volumen

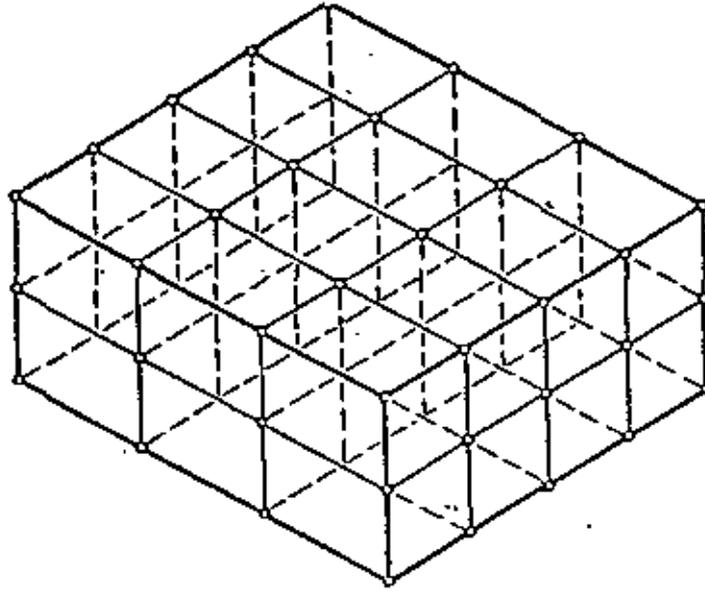


Fig 3.22 Prisma rectangular de la familia Lagrangiana

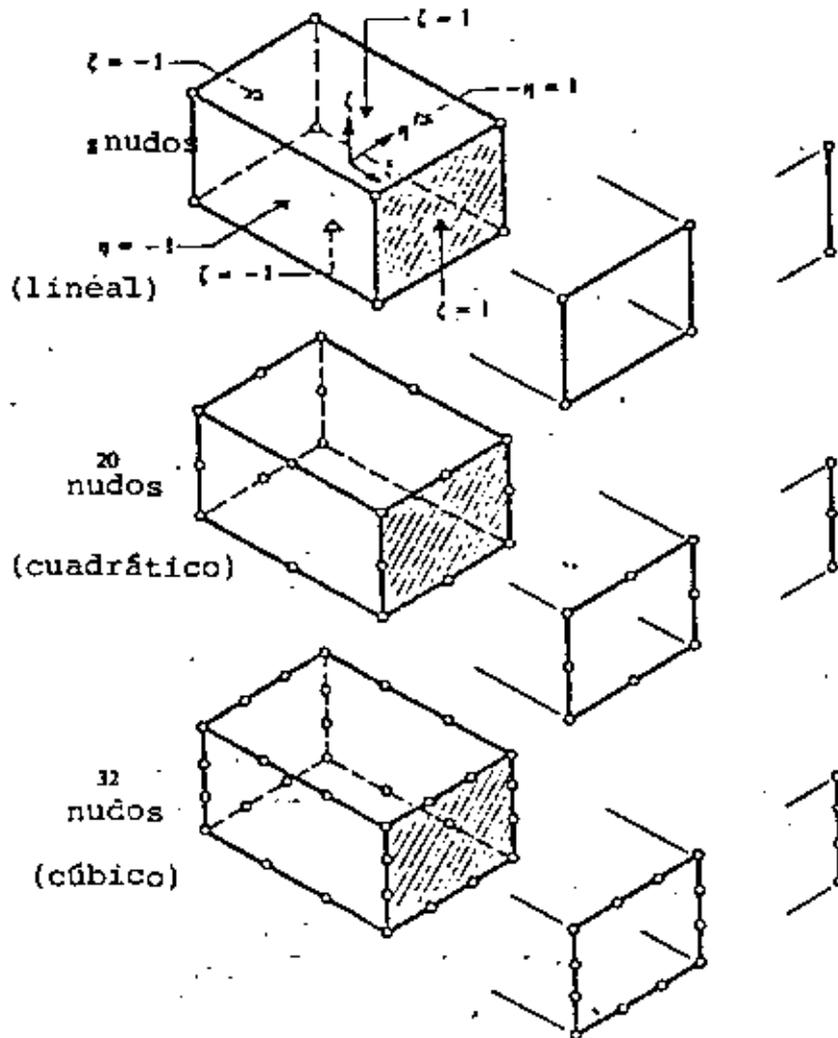
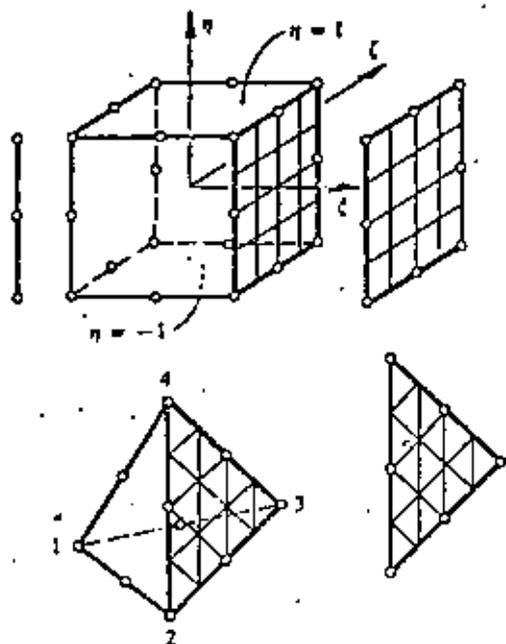
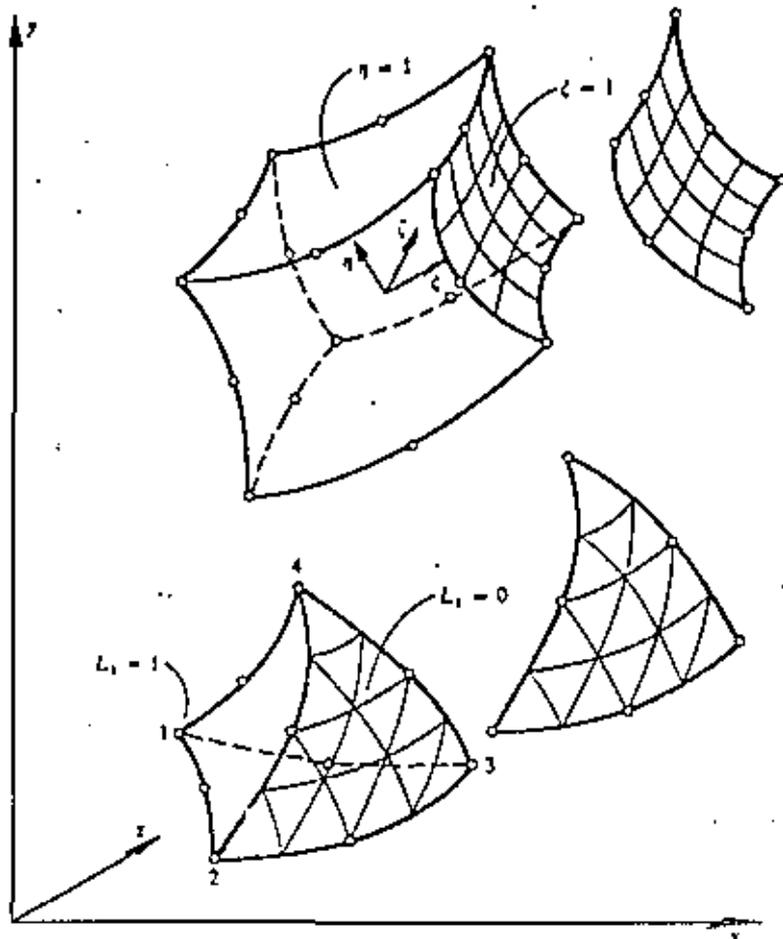


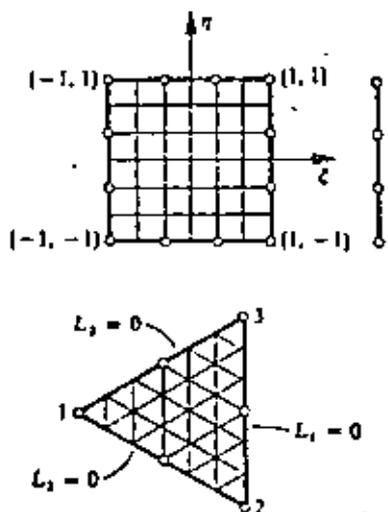
Fig 3.23 Familia Serendipity de prismas rectangulares



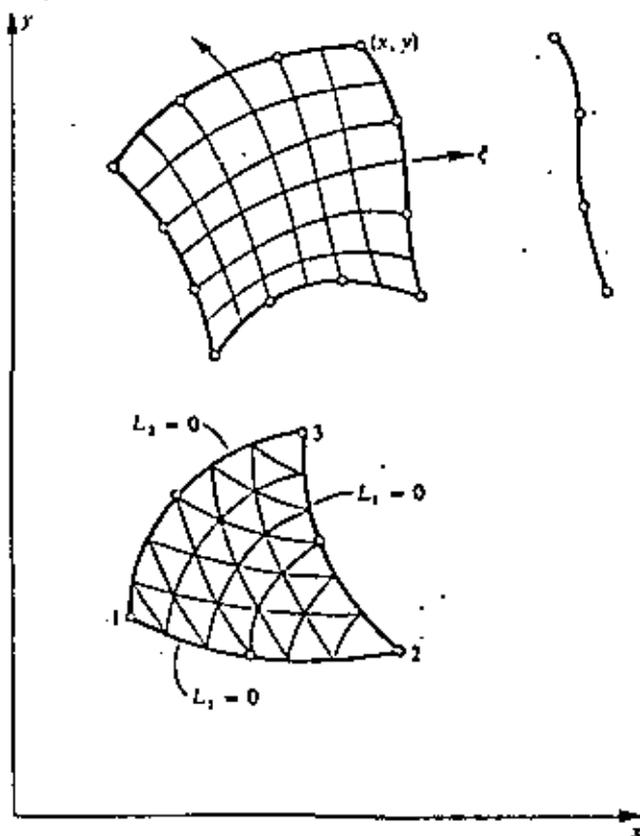
Coordenadas locales



Coordenadas cartesianas

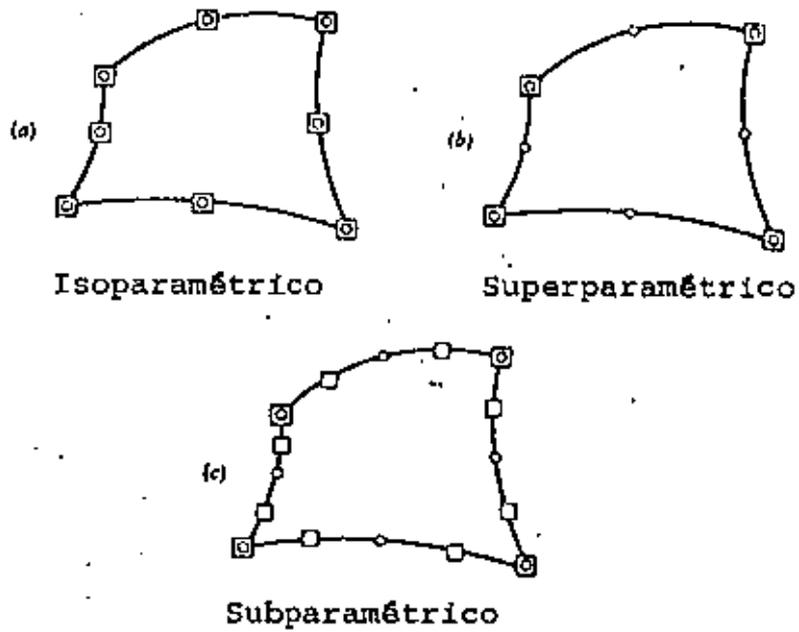


coordenadas locales



coordenadas cartesianas

Fig 3.24 Mapeos de elementos bidimensionales y tridimensionales



Punto donde se define la coordenada

Punto donde se define la función

Fig. 3.25 Transformación de coordenadas mediante funciones de forma

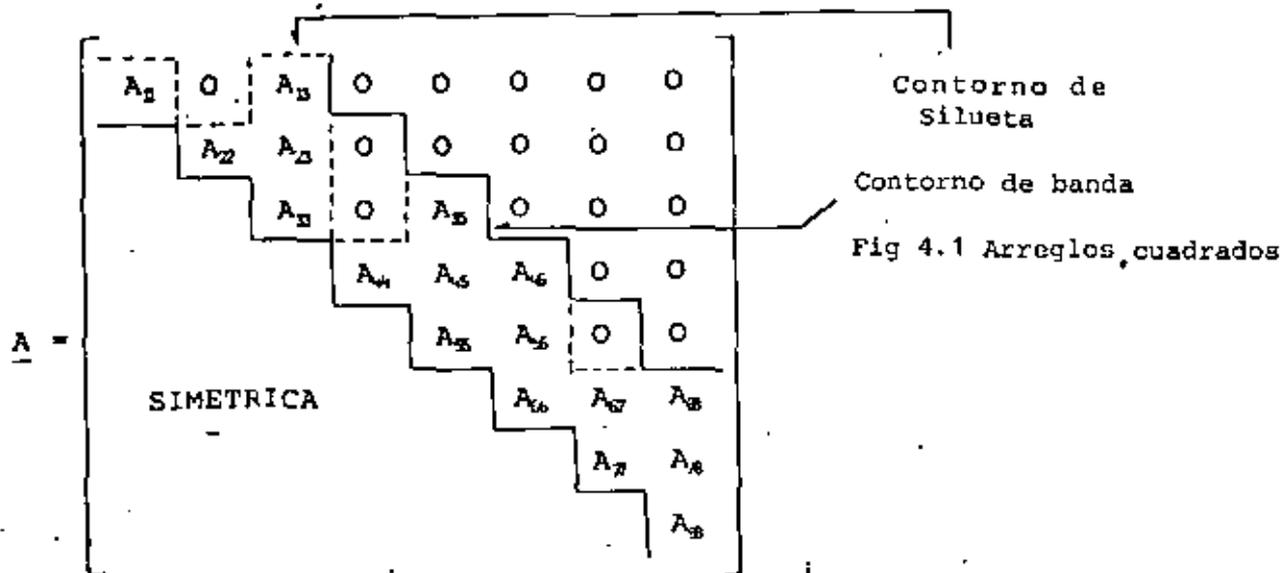


Fig. 4.2 Arreglos cuadrados (en banda)

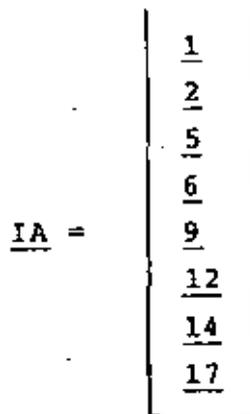
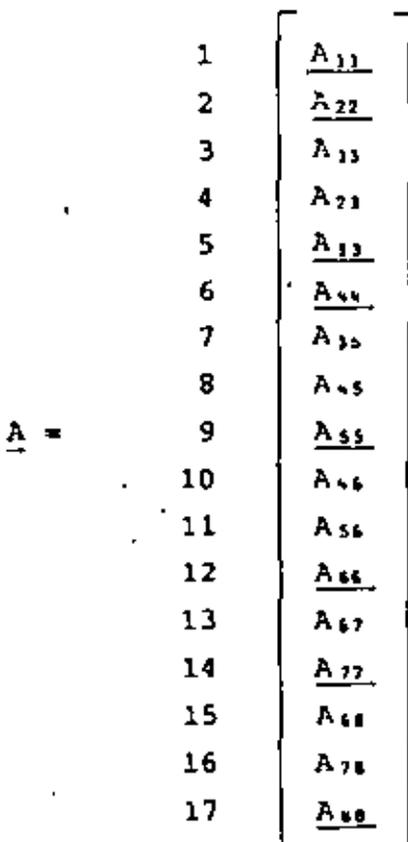
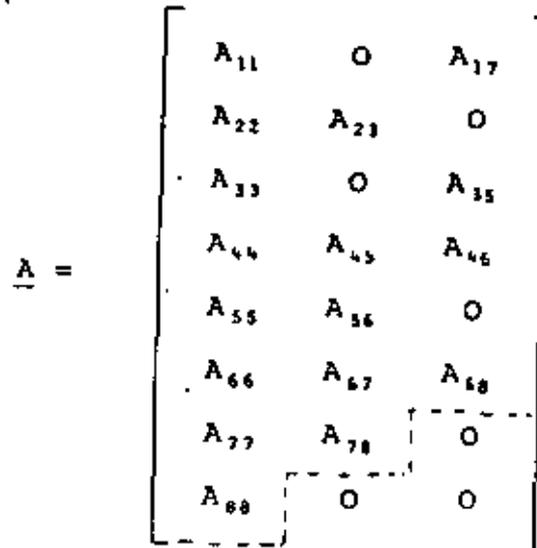
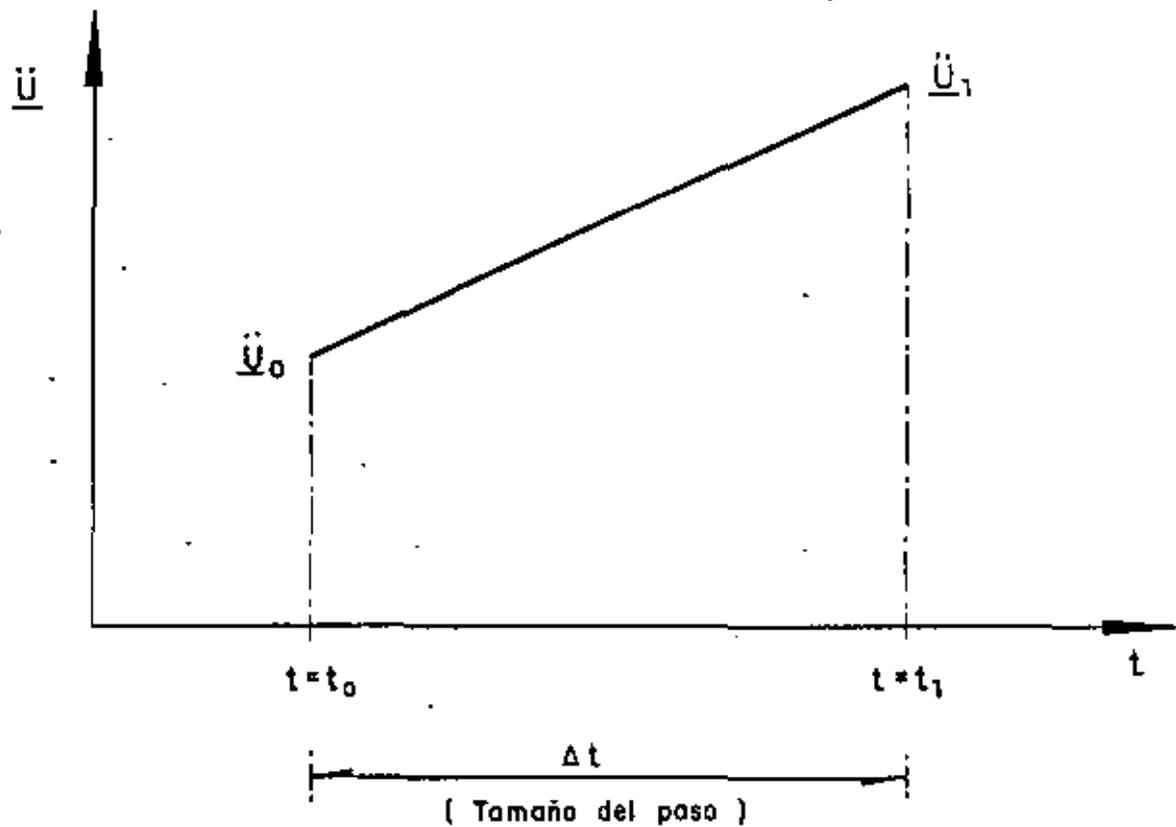


Fig. 4.3 Arreglos unidimensionales (en silueta)



Valores conocidos al inicio del paso : \underline{u}_0 , \dot{u}_0 , y \ddot{u}_0

Valores por conocer al final del paso : \underline{u}_1 , \dot{u}_1 , y \ddot{u}_1

Fig 4.4 Variación lineal de la aceleración en el intervalo de integración, Δt .

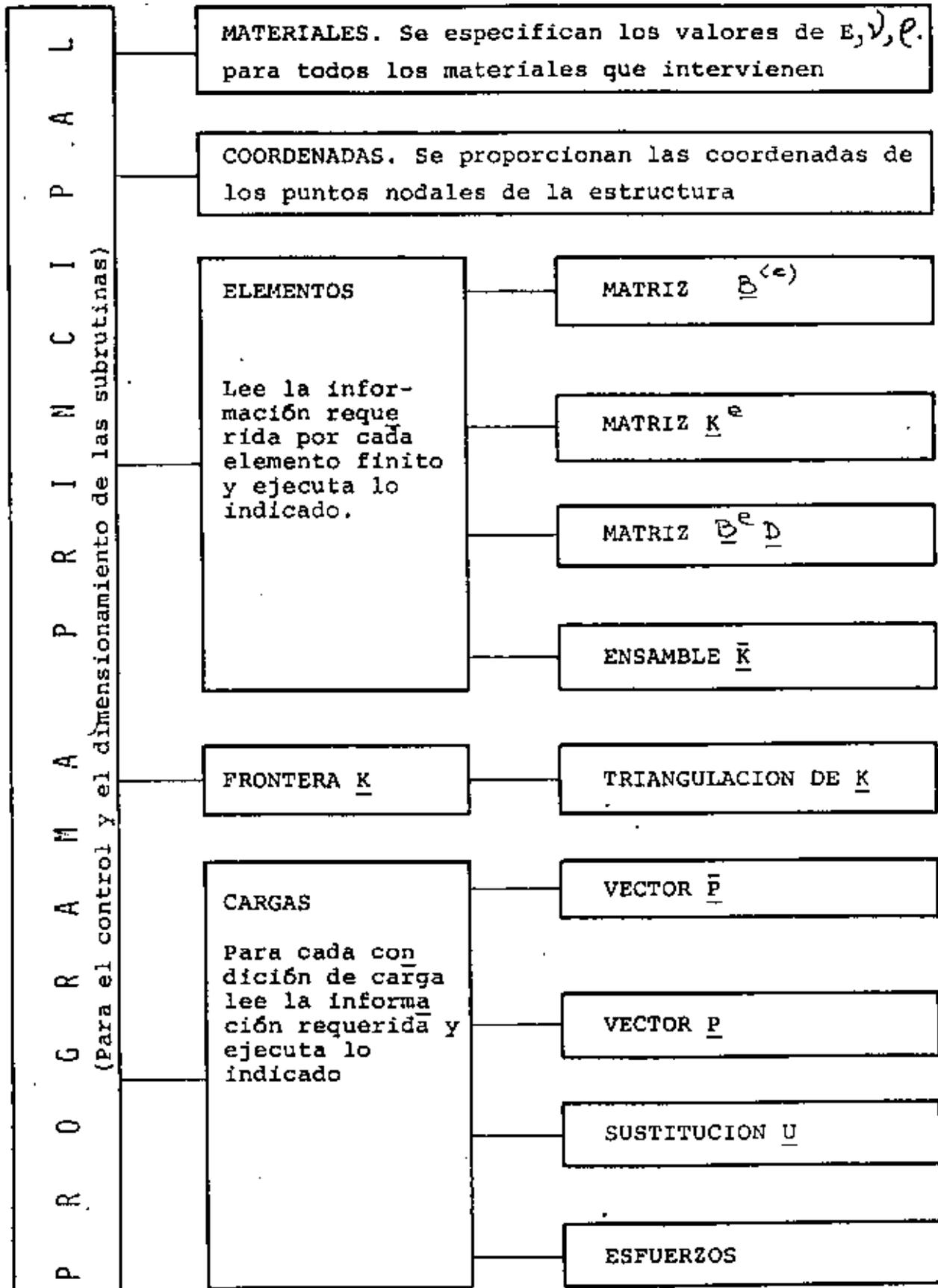


Fig. 4.5 Organización esquemática simple para un programa computadora del método del elemento finito (estático)



centro de educación continua
división de estudios de posgrado
facultad de ingeniería unam



VI CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DINAMICA ESTRUCTURAL

EFFECTOS SISMICOS EN ESTRUCTURAS EN FORMA DE PENDULO INVERTIDO

DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ

JULIO, 1980

Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido

Octavio RASCON CH. *

INTRODUCCION

En la práctica se presentan estructuras constituidas por una sola columna la cual sostiene una cubierta que puede ser una losa o un cascarón. Su comportamiento dinámico debe estudiarse considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total de la estructura.

A principios de este año se presentó en California, E.U.A. un trabajo¹ en el cual se trató este problema desde un punto de vista energético. Se calculó sólo el periodo fundamental y con base en él, la respuesta de la estructura a un determinado temblor. Los periodos calculados para cuatro estructuras de este tipo ya construidas fueron menores que los medidos *in situ*. La discrepancia fue atribuida a efectos de rotación y traslación de la base.

El objeto de este trabajo es introducir un análisis modal, el cual nos proporcionará los efectos del acoplamiento que existe entre los modos de vibración. También se tomarán en cuenta en forma aproximada los efectos de rotación y traslación de la base.

CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES DE VIBRACION

1. Suelo rígido

Para el caso en que el centro de gravedad de la cubierta se encuentra localizado en la prolongación del eje de la columna, el movimiento de la estructura podrá estudiarse en dos direcciones perpendiculares entre sí. En tal caso el problema podrá discretizarse como de dos modos de vibración acoplados en cada dirección.

Para el cálculo de las frecuencias de vibración se idealizará la estructura como de comportamiento lineal, constituida por una cubierta infinitamente rígida de masa simétricamente distribuida y soportada por una sola columna. Como primer caso se considerará al suelo infinitamente rígido (fig. 1).

En fig 1

W = peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna

J = momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje z

* Asistente de Investigador. Instituto de Ingeniería, UNAM.

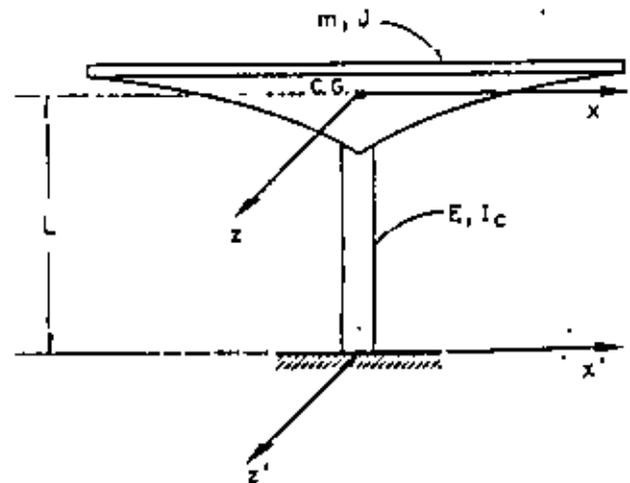


FIG. 1. Péndulo invertido

- E = módulo de elasticidad del material de la columna
- I_c = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto al eje z
- C.G. = centro de gravedad de la cubierta
- L = distancia de C.G. al suelo.

Para la columna mostrada en las figs. 2a y 2b.

- k = rigidez por traslación (fuerza horizontal aplicada en C.G. necesaria para que este se desplace la unidad)
- k_r = rigidez por rotación (par aplicado en C.G. necesario para producir un giro unitario a la altura de C.G.)
- θ = rotación en C.G. debida a la fuerza k
- δ = desplazamiento lateral de C.G. debido al momento k_r .

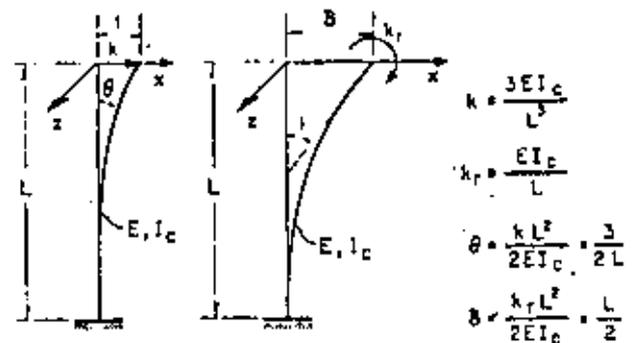


FIG. 2. Rigideces

Despreciando las deformaciones por cortante, las expresiones para k , k_r , θ y δ pueden encontrarse por estática y valen

$$k = 3EI_c/L^3; \quad (1a)$$

$$k_r = EI_c/L; \quad (2a)$$

$$\theta = 1.5/L; \quad (1b)$$

$$\delta = L/2; \quad (2b)$$

Para una fuerza de magnitud αk , el desplazamiento será α y el giro $\alpha\theta$. Para un par de magnitud βk_r , el giro será β y el desplazamiento $\beta\delta$. Al aplicarse ambos simultáneamente, el desplazamiento total de C.G. será x_1 y el giro ϵ_1 (fig. 3).

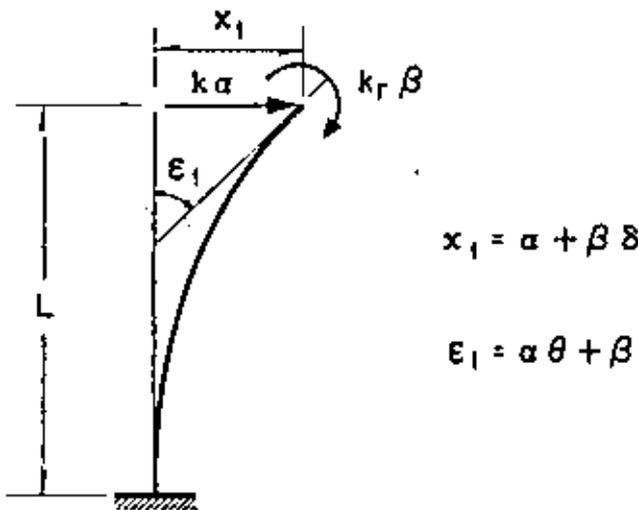


Fig. 3. Desplazamientos y giros totales

Por tanto los valores de x_1 y ϵ_1 quedan dados por

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \quad (3)$$

$$\epsilon_1 = \alpha\theta + \beta \quad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3 y 4 para α y β , y utilizando las ecs 1b y 2b se obtiene

$$\alpha = (x_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa; \quad (5a)$$

$$\beta = (\epsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa \quad (5b)$$

en las cuales

$$\gamma = L^3/2EI_c; \quad (6a)$$

$$\kappa = 1 - kL^3/4EI_c = 0.25 \quad (6b)$$

Para las oscilaciones del péndulo mostrado en la fig 1, el diagrama de cuerpo libre de la cubierta está indicado en la fig 4. Las ecuaciones de movimiento, despreciando efectos gravitacionales, serán

$$m\ddot{x}_1 + k\alpha = 0 \quad (7)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + k_r\beta = 0 \quad (8)$$

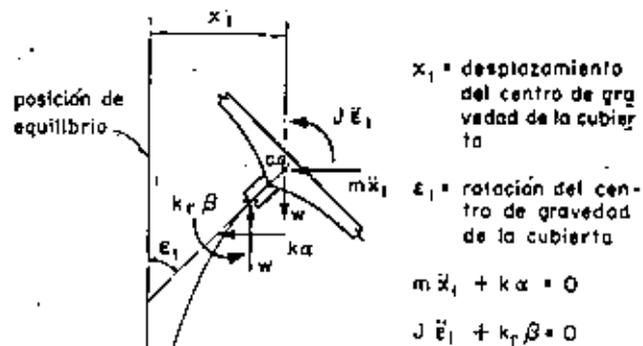


Fig. 4. Diagrama de cuerpo libre

Sustituyendo a (5a) y (5b) en (7) y (8) se obtiene

$$m\ddot{x}_1 + (kx_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa = 0 \quad (9)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + (k_r\epsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa = 0 \quad (10)$$

Las ecs. 9 y 10 se pueden expresar matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\epsilon}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\gamma k k_r \\ -\gamma k k_r & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Utilizando las ecs 1a, 2a y 6a se encuentra que

$$\gamma k k_r = Lk/2 \quad (12)$$

Puesto que el movimiento es armónico se tiene que

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{y} \quad \ddot{\epsilon}_1 = -\omega^2 \epsilon_1 \quad (13)$$

en donde ω es la frecuencia circular natural de vibración.

Sustituyendo las ecs. 12 y 13 en (11) se obtiene

$$-\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -Lk/2 \\ -Lk/2 & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

Factorizando en la ec. 14

$$\left[\frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -Lk/2 \\ -Lk/2 & k_r \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

La ec 15 representa un sistema de ecuaciones homogéneas, el cual, para tener solución diferente de la trivial, necesita que su determinante sea nulo. Por tanto

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\kappa} - m\omega^2 & -\frac{Lk}{2\kappa} \\ -\frac{Lk}{2\kappa} & \frac{k_r}{\kappa} - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Desarrollando el determinante se llega a

$$m/\omega^4 - \frac{1}{\kappa} (k/j + mk_r)\omega^2 + \frac{1}{4\kappa^2} (4kk_r - L^2 k^2) = 0 \quad (17)$$

Dividiendo ambos miembros entre m/j y considerando que $L^2 k^2 = 3kk_r$, se obtiene

$$\omega^4 - \frac{k/j + mk_r}{m/j\kappa} \omega^2 + \frac{k k_r}{4m/j\kappa^2} = 0 \quad (18)$$

que es una ecuación de segundo grado en ω^2 , cuyas soluciones son

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k/j + mk_r}{2m/j\kappa} \pm \sqrt{\frac{(k/j + mk_r)^2}{4m^2/j^2\kappa^2} - \frac{k k_r}{4m/j\kappa^2}} \quad (19)$$

Dividiendo numerador y denominador de (19) entre m/j

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k/m + k_r/j}{2\kappa} \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{(k/m + k_r/j)^2 - (k/m)(k_r/j)} \quad (20)$$

Llamando a

$k/m = p^2 =$ cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$k_r/j = \Omega^2 =$ cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

se obtiene

$$\omega_{1,2}^2 = 2 \left(p^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(p^2 + \Omega^2)^2 - p^2 \Omega^2} \right) \quad (21)$$

Dividiendo ambos miembros de (21) entre p^2 y haciendo $\omega^2/p^2 = \lambda$ y $\Omega^2/p^2 = \mu$ se llega a

$$\lambda_{1,2} = 2 \left(1 + \mu \pm \sqrt{(1 + \mu)^2 - \mu} \right) \quad (22)$$

Es interesante notar que si $j = 0$ (masa concentrada) de la ec 17 se obtiene $\omega^2 = k/m = p^2$.

Las configuraciones modales pueden obtenerse de cualquiera de las dos ecuaciones algebraicas contenidas en la ecuación matricial dada en ec 15. La primera de ellas es

$$\left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2 \right) x_{1,n} - \frac{Lk}{2\kappa} \epsilon_{1,n} = 0 \quad (23)$$

donde el índice n indica el número del modo y de la cual se obtiene

$$x_{1,n}/\epsilon_{1,n} = \frac{Lk}{2\kappa} \left(\frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2 \right) \quad (24)$$

dividiendo numerador y denominador de (24) entre m y considerando que $\kappa = 0.25$, $k/m = p^2$ y que $\lambda_n = \omega_n^2/p^2$ se llega a

$$x_{1,n}/\epsilon_{1,n} = 2L/(4 - \lambda_n) \quad (25)$$

Si se desean tomar en cuenta las deformaciones por cortante con modificar las rigideces mediante un análisis de estática y partir de nuevo de la ec 17 sin considerar que $L^2 k^2 = 3kk_r$. Si existe excentricidad en alguna dirección su efecto podrá tomarse en cuenta introduciendo un grado de libertad adicional.

En las figs 5 y 6 se encuentran representados los resultados de las ecs 22 y 25.

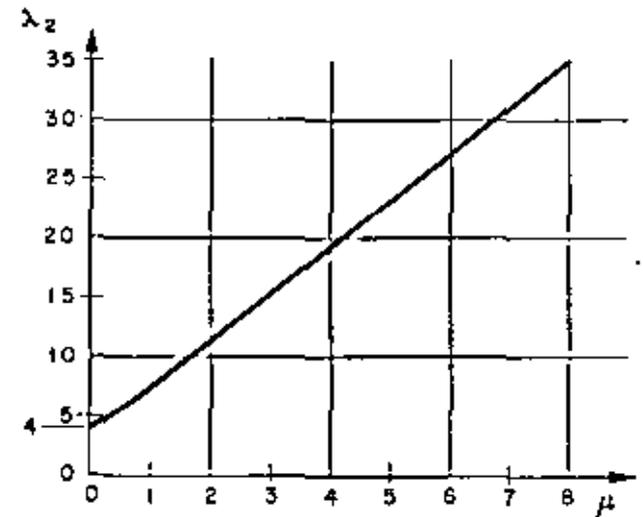
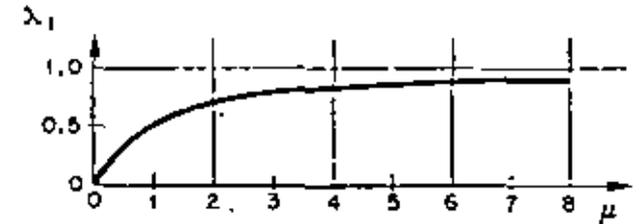


FIG. 5. Gráfica de frecuencias

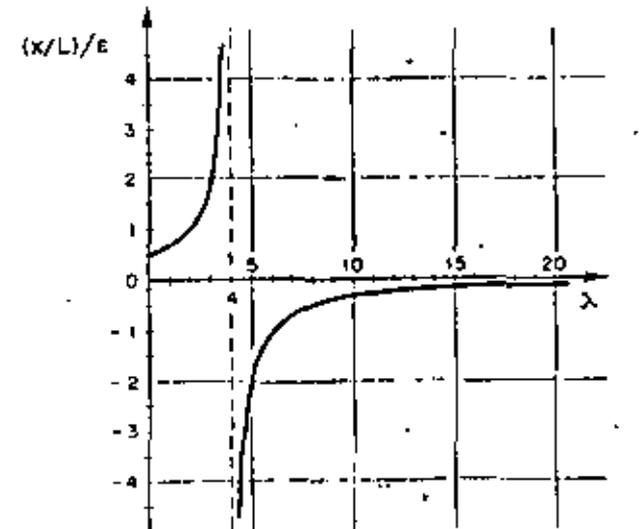


FIG. 6. Gráfica $(x/L)/\epsilon$ vs λ

2. Suelo flexible

Al oscilar una estructura cimentada en suelo blando, existe interacción dinámica suelo-estructura que en la mayoría de los casos no debe despreciarse al calcular las frecuencias y los modos de vibración. En lo que sigue se propone la adaptación de un método numérico para tomar en cuenta dicho efecto.

Las restricciones del suelo serán idealizadas mediante resortes de comportamiento lineal: uno para desplazamientos lineales horizontales y otro para deformaciones angulares de cabeceo de la cimentación^{2,3}.

En la fig. 7 se hace referencia a los parámetros que a continuación se mencionan

- K = rigidez del resorte correspondiente a la traslación de la base $\equiv C_r A$
 C_r = coeficiente de cortante elástico uniforme del suelo.
 A = área de contacto de la cimentación.
 R = rigidez del resorte correspondiente a rotación de la base $\equiv C_\theta I_b - W' \bar{y}$
 C_θ = coeficiente de compresión elástica no uniforme del suelo.
 I_b = momento de inercia de área de la base de la cimentación con respecto al eje z'
 W' = peso total de la estructura
 \bar{y} = altura del centro de gravedad de la estructura sobre el nivel de desplante
 $F = m \omega_n^2 x$
 x = desplazamiento ~~angular~~ total en C.G.
 $M = J \omega_n^2 \epsilon$
 ϵ = desplazamiento angular total en C.G.

- L' = altura de C.G. sobre el nivel de desplante
 x_0 = traslación de la base
 ϵ_0 = rotación de la base
 $x_1 = \alpha + \beta \delta$
 $\epsilon_1 = \beta + \alpha \theta$
 $x_2 = L' \epsilon_0$
 $\alpha = P/k$
 $\beta = M/k_r$

$J, L, \delta, \theta, k, k_r, x_1, \epsilon_1$ y W ya definidos anteriormente.

El problema será resuelto utilizando un procedimiento iterativo y la tabulación propuesta por N. M. Newmark⁴; se despreciarán la variación de la rigidez de la columna debida a la fuerza normal W y los momentos en la misma, causados por la excentricidad del peso debida a deformaciones de la columna.

Sean

- F_0 = fuerza horizontal en la base de la cimentación $\equiv F$
 M_0 = momento flexionante en la base de la cimentación $\equiv M + FL'$
 $x_0 = F_0/K$
 $\epsilon_0 = M_0/R$

A continuación se describe el procedimiento a seguir:

1. Suponer valores para x y ϵ
2. Calcular F y M usando las expresiones $F = m \omega_n^2 x$ y $M = J \omega_n^2 \epsilon$. En esta etapa el valor de ω_n aún no se conoce; por tanto se llevará como factor común en el resto del cálculo

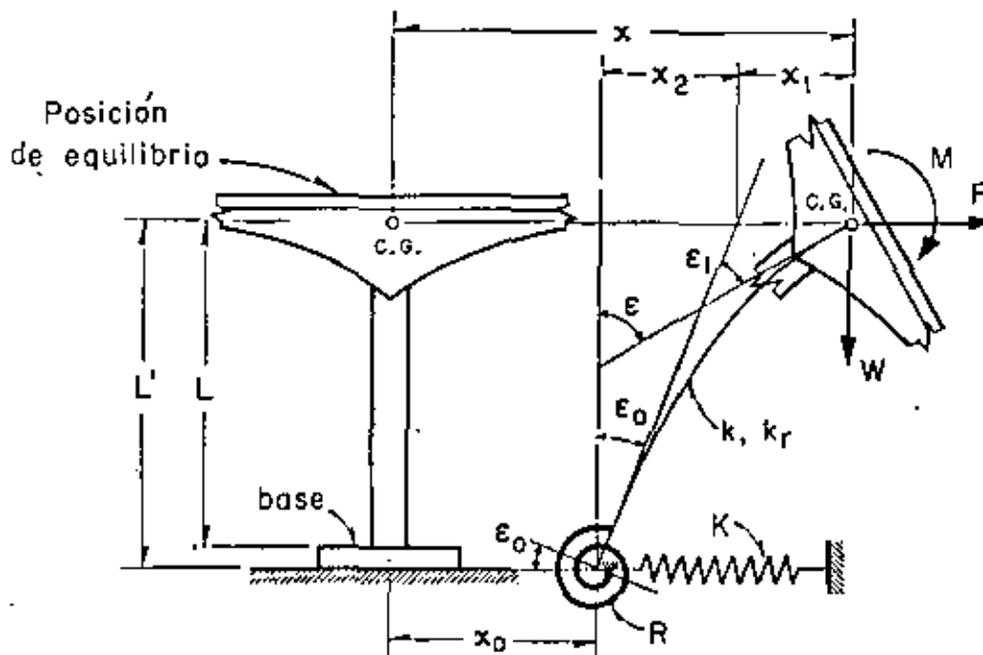


FIG. 7. Modelo de interacción dinámica suelo-estructura

3. Calcular la fuerza y el momento en la base mediante las fórmulas

$$F_0 = F \quad \text{y} \quad M_0 = M + FL'$$

4. Encontrar los valores de los desplazamientos $x_0 = F_0/K$ y $e_0 = M_0/R$
5. Calcular los valores de los parámetros $\alpha = F/k$ y $\beta = M/k_r$
6. Efectuar los productos $\beta\delta$ y $\alpha\theta$
7. Calcular $x_1 = \alpha + \beta\delta$ y $e_1 = \beta + \alpha\theta$
8. Efectuar el producto $x_2 = L'e_0$
9. Calcular los desplazamientos lineales y angulares totales de C.G. mediante las expresiones $x' = x_0 + x_1 + x_2$ y $e' = e_0 + e_1$
10. Encontrar el valor de ω_n^2 mediante los cocientes x/x' y e/e'
11. Si los valores de ω_n^2 calculados en el paso anterior son aproximadamente iguales, el proceso habrá concluido. En caso contrario repitase la secuela utilizando como valores de partida para x y e los encontrados en etapa 9 o valores cuyo cociente sea igual al de x' entre e' . El proceso deberá continuarse hasta lograr la aproximación deseada.

EJEMPLO DE APLICACION

Con motivo de ilustrar los conceptos enunciados anteriormente se calcularán las frecuencias y modos de vibración de un cascarón ya construido en California, EUA (fig 8). Los datos necesarios han sido extraídos de la ref 1. Se computarán también las respuestas sísmicas suponiendo que esa estructura fuera a construirse en la zona blanda de la ciudad de México. Se utilizarán por tanto los parámetros elásticos de las arcillas del Valle de México y los espectros de diseño propuestos en el reglamento de construcción para el Distrito Federal².

Los datos necesarios de la estructura son

$$\begin{aligned} L &= 419 \text{ cm} \\ L' &= 480 \text{ cm} \\ \bar{y} &= 249 \text{ cm} \\ W &= 20,450 \text{ kg} \quad (m = 20.81 \text{ kg seg}^2/\text{cm}) \\ W' &= 43,600 \text{ kg} \\ I_a &= 1.775 \times 10^8 \text{ cm}^4 \\ I_c &= 1.065 \times 10^8 \text{ cm}^4 \\ k &= 1.266 \times 10^4 \text{ kg/cm} \\ k_r &= 7.41 \times 10^4 \text{ kg cm/rad} \\ J &= 1.386 \times 10^6 \text{ kg seg}^2 \text{ cm} \\ \omega &= 0.00358 \text{ rad/cm} \\ \delta &= 208 \text{ cm/rad} \end{aligned}$$

Las expresiones para C_r y C_φ son las siguientes²

$$C_r = F_1 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}}; \quad C_\varphi = F_2 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (26)$$

En ecs 26

$$\begin{aligned} E' &= \text{módulo de elasticidad del suelo} \\ \nu &= \text{relación de Poisson del suelo} \end{aligned}$$

A = área de contacto de la cimentación
 F_1, F_2 = factores de forma de la cimentación

Para el caso de la zona blanda del Valle de México un valor representativo de E' es 50 kg/cm^2 y $\nu \approx 0.5$. Para una cimentación cuadrada los valores de F_1 y F_2 son 0.704 y 2.11 respectivamente.

Sustituyendo valores en ecs 26 se obtiene

$$\begin{aligned} C_r &= 0.123 \text{ kg/cm}^2 \\ C_\varphi &= 0.369 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

CASO 1. SUELO RÍGIDO

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración

Para el cálculo de las frecuencias de vibración usaremos la fórmula dada en ec 22. Los valores de los parámetros a sustituir son

$$\begin{aligned} p^2 &= k/m = 608 \text{ (rad/seg)}^2 \\ \Omega^2 &= k/J = 535 \text{ (rad/seg)}^2 \\ \mu &= \Omega^2/p^2 = 0.882 \end{aligned}$$

con los cuales

$$\lambda_{1,2} = 2(1.882 \pm \sqrt{3.55 - 0.882}) = 0.494; 7.034$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{0.494 \times 608} = \sqrt{300} = 17.32 \text{ rad/seg} \\ \omega_2 &= \sqrt{7.034 \times 608} = \sqrt{4260} = 65.30 \text{ rad/seg} \end{aligned}$$

Los periodos naturales son

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi/\omega_1 = 0.362 \text{ seg} \quad (T_1 \text{ obtenido de un registro de vibraciones libres de la estructura y reportado en ref 1} = 0.483 \text{ seg}) \\ T_2 &= 2\pi/\omega_2 = 0.096 \text{ seg} \end{aligned}$$

Comparando los valores calculado y medido de T_1 se puede ver la importancia de la interacción dinámica suelo-estructura.

Las relaciones modales se obtienen de las ecs. 25 y sus valores son

$$\begin{aligned} x_1/e_1 &= \frac{2 \times 419}{4 - 0.494} = 238 \text{ cm/rad} \\ x_2/e_2 &= \frac{2 \times 419}{4 - 7.034} = -275 \text{ cm/rad} \end{aligned}$$

b) Respuesta sísmica

Para el cálculo de la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad es necesario calcular los coeficientes de participación de cada modo de vibración. Se puede demostrar⁷ que para este caso es aplicable la siguiente ecuación

$$C_n = \frac{\sum_i X_i^* M_i \bar{1}}{\sum_i X_i^* M X_i} \quad (27)$$

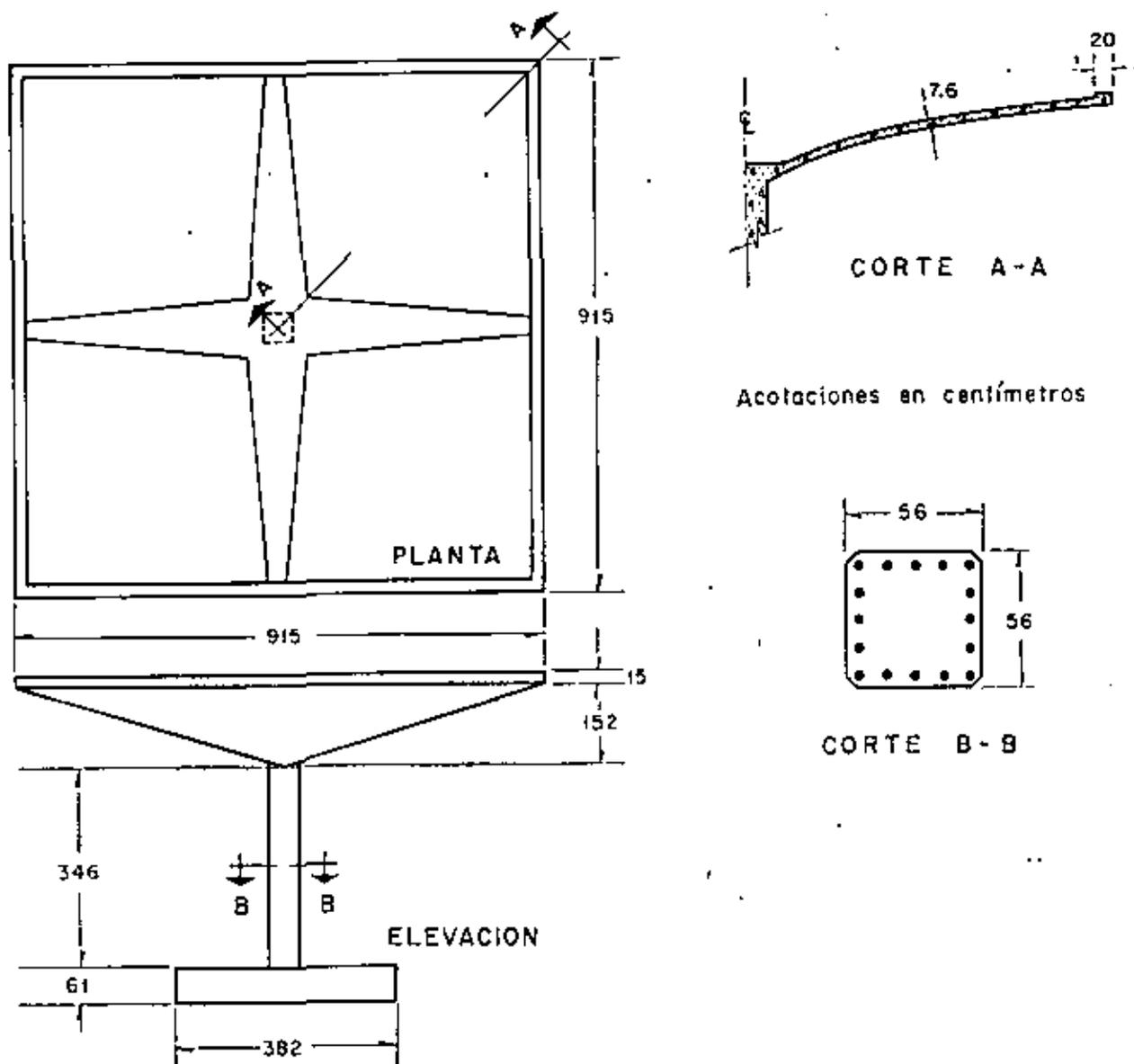


FIG. 8. Cascaron utilizado para ejemplo. (Después de R. McLean)

en la cual

\vec{i} es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

\bar{X}_n es el vector modal para el enésimo modo (n)

\bar{M} es la matriz de inercia y

\bar{X}_n^T es el vector traspuesto de \bar{X}_n .

Para nuestro caso se tendrá

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} X_{est} \\ r_{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 238 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -275 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1^T = \begin{bmatrix} 238 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2^T = \begin{bmatrix} -275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.81 & 0 \\ 0 & 1.386 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores en ec 27 y efectuando los productos matriciales en ella indicados se obtiene

$$C_1 = \frac{4,960}{2,566 \times 10^4} = 0.00193$$

$$C_2 = \frac{-5,720}{2,959 \times 10^4} = -0.00193$$

El valor absoluto de la respuesta máxima en cada uno de los modos será τ .

$$\begin{bmatrix} V_n \\ M_n \end{bmatrix} = |C_n| \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_n \\ \epsilon_n \end{bmatrix} S_{an} \quad (28)$$

donde

S_{an} = ordenada del espectro de aceleraciones afectada por el coeficiente sísmico $C = 0.15$.

El espectro que será utilizado es el propuesto en el reglamento de construcciones del Distrito Federal^a (fig. 9). Los valores de las ordenadas espectrales correspondientes a T_1 y T_2 son 100 cm/seg² y 80.6 cm/seg² respectivamente.

Sustituyendo valores en ec 28 se llega a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 957 \text{ kg} \\ 268,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 893 \text{ kg} \\ 216,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (30)$$

El criterio propuesto en ref. 8 será utilizado para el cálculo de la respuesta total (considerando los efectos combinados de los dos modos). Por lo anterior la respuesta total de la estructura valdrá

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} ; M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (31a, 31b)$$

En ecs 31a y 31b

V = fuerza cortante total en la columna

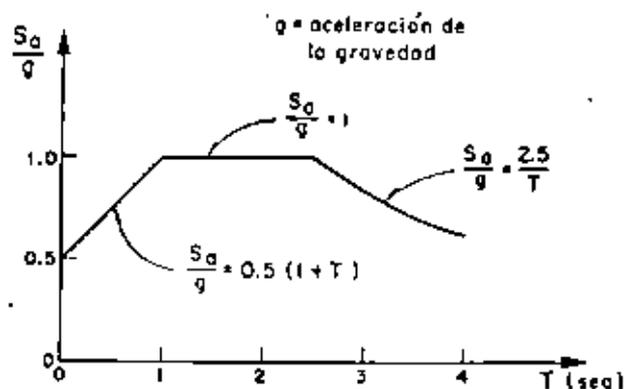


FIG. 9. Espectro de aceleraciones (Después de E. Rosenblueth y L. Esteve)

M = momento flexionante total en C. G.
Sustituyendo los valores dados en ecs 29 y 30 en (31) se obtiene

$$V = 1,310 \text{ kg} ; M = 344,000 \text{ kg cm}$$

El momento en la base de la columna valdrá $M_b = 344,000 + 1,310 \times 419 = 893,000 \text{ kg cm}$

Los resultados de este caso se resumen en la fig. 10a.

CASO 2. SUELO FLEXIBLE

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración.

Para considerar las restricciones del suelo emplearemos el método propuesto anteriormente procediendo en forma tabular. Sustituyendo valores en ecuaciones para K y R se obtienen 1.88×10^4 kg/cm y 6.35×10^8 kg cm/rad respectivamente.

PRIMER MODO			
Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
x, ϵ (supuestos)	$x = 400 \text{ cm}$	$\epsilon = 1 \text{ rad}$	
$F = m \omega_1^2 x, M = J \omega_1^2 \epsilon$	$F = 8320$	$M = 1,386,000$	ω_1^2
$F_n = F, M_n = M + FL'$	$F_n = 8320$	$M_n = 5,376,000$	ω_1^2
$x_0 = F_0/K, \epsilon_0 = M_0/R$	$x_0 = 0.4420$	$\epsilon_0 = 0.00847$	ω_1^2
$\alpha = F/k, \beta = M/k,$	$\alpha = 0.6570$	$\beta = 0.00187$	ω_1^2
$\beta \delta, \alpha \theta$	$\beta \delta = 0.3892$	$\alpha \theta = 0.00235$	ω_1^2
$x_1 = \alpha + \beta \delta, \epsilon_1 = \beta + \alpha \theta$	$x_1 = 1.0462$	$\epsilon_1 = 0.00422$	ω_1^2
$x_2 = \epsilon_0 L'$	$x_2 = 4.0650$	—	ω_1^2
$x' = x_0 + x_1 + x_2, \epsilon' = \epsilon_0 + \epsilon_1$	$x' = 5.5532$	$\epsilon' = 0.01269$	ω_1^2
$\omega_1^2 = x/x', \omega_1^2 = \epsilon/\epsilon'$	72.0	78.7	

$$x'/\epsilon' = 438, \quad \bar{X}_1^2 = [438 \quad 1]$$

PRIMER MODO

Parámetros	Valores (2º ciclo)		Factor común
x, e	438	1	
F, M	9130	1,386,000	ω_1^2
F_0, M_0	9130	5,766,000	ω_1^2
x_0, e_0	0.4860	0.00910	ω_1^2
α, β	0.7210	0.00187	ω_1^2
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	0.002585	ω_1^2
x_1, e_1	1.1102	0.004455	ω_1^2
x_2, e_2	4.365	—	ω_1^2
x', e'	5.961	0.013565	ω_1^2
ω_1^2	73.5	75.8	—

Suponiendo que la aproximación es suficiente resulta

$$x'/e' \approx 440, \bar{X}_1^T = [440, 1], \omega_1^2 \approx 74 \text{ (rad/seg)}^2$$

$$T_1 \approx 0.731 \text{ seg.}$$

El procedimiento para el cómputo de los parámetros del segundo modo es el mismo, sólo que la configuración supuesta deberá "limpiarse", antes de proseguir el cálculo, de las componentes del primer modo que pudiera contener. Se demuestra que si \bar{X}_2^T es el vector de la configuración supuesta, el vector libre de componentes del primer modo queda dado por

$$X_2 = X_2^T - \frac{\bar{X}_1^T M \bar{X}_2^T}{\bar{X}_1^T M \bar{X}_1^T} X_1 \quad (32)$$

Suponiendo para el primer ciclo

$$\bar{X}_1^T = \begin{bmatrix} -150 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo valores en la ecuación matricial 32 se obtiene

$$\bar{X}_2^T = \begin{bmatrix} -151 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que nos da los valores de partida para el primer ciclo de cálculo.

SEGUNDO MODO

Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
x, e	-151	1	
F, M	-3143	1,386,000	ω_2^2
F_0, M_0	-3143	-123,000	ω_2^2
x_0, e_0	-0.1672	-0.0001940	ω_2^2
α, β	-0.2481	0.0018700	ω_2^2
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	-0.0008890	ω_2^2
x_1, e_1	0.1411	0.0009810	ω_2^2
x_2, e_2	-0.0930	—	ω_2^2
x', e'	-0.1191	0.0007870	ω_2^2
ω_2^2	1267	1270	—

$$x'/e' = -151, \bar{X}_2^T = [-151, 1], T_2 = 0.176 \text{ seg.}$$

En este caso se supuso un valor cercano al real y por tanto sólo se necesitó un ciclo para que se obtuviera la aproximación deseada. Si el valor supuesto no hubiese sido ese sino otro cualquiera seguramente no hubiera sido suficiente un ciclo de cálculo. En los ciclos subsiguientes se procedería en igual forma que antes: suponer inicialmente la configuración obtenida en el ciclo anterior; limpiarla de las componentes del primer modo; etc.

b) Respuesta sísmica

Los valores de los coeficientes de participación y de las ordenadas espectrales para este caso son:

$$C_1 = 0.001689, \quad C_2 = -0.001689$$

$$S_{01} = 127.4 \text{ cm/seg}^2, \quad S_{02} = 86.6 \text{ cm/seg}^2$$

Las respuestas máximas para cada modo valen

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,970 \text{ kg} \\ 298,200 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461 \text{ kg} \\ 203,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

Las respuestas máximas totales serán (fig 10b)

$$V = 2,030 \text{ kg}$$

$$M = 361,000 \text{ kg cm}$$

$$M_0 = 1,209,000 \text{ kg cm}$$

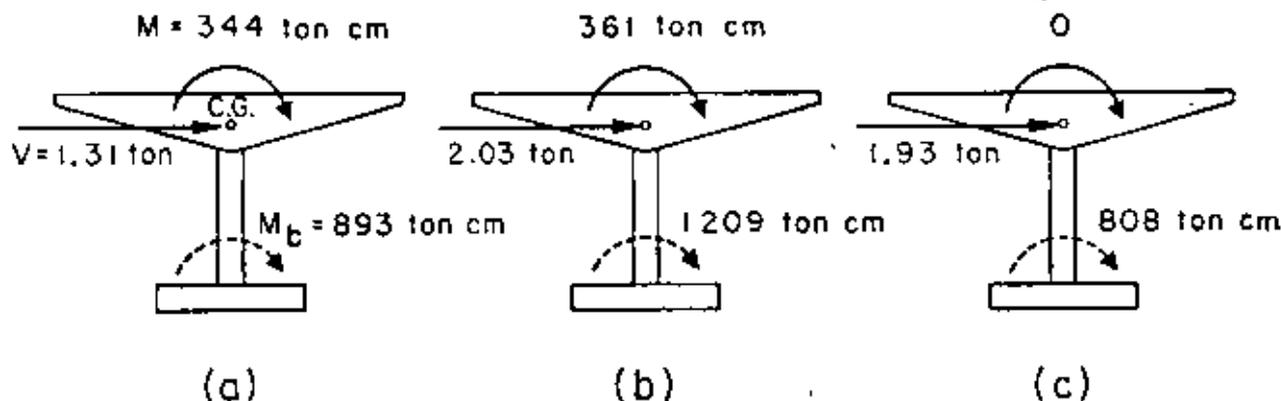


Fig. 10. Respuestas sísmicas

CASO 3. BASE RÍGIDA Y MASA CONCENTRADA

Para comparación de resultados se verá cuál es el valor de la respuesta máxima en el caso de despreciar la inercia rotacional y la interacción suelo-estructura.

Para este caso $p^2 = 608 \text{ (rad/seg)}^2$, $T = 0.325 \text{ seg}$, $0.15S_0 = 92.6 \text{ cm/seg}^2$, $V = mS_0 = 1,930 \text{ kg}$ y $M_b = 808,000 \text{ kg cm}$ (fig 10c).

CONCLUSIONES

En la siguiente tabla se resumen los resultados de los tres casos, indicados como porcentajes del segundo caso.

Concepto	Caso 1	Caso 2	Caso 3
V	64.4%	100%	95.0%
M	95.2%	100%	0 %
M_b	73.8%	100%	66.7%

Los resultados de la tabla anterior dan una idea clara de la importancia que tiene el considerar la inercia rotacional de la cubierta y la interacción suelo-estructura. La importancia del primer concepto aumentará conforme mayor sea el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto al eje z. El último concepto es tanto más importante cuanto más blando sea el suelo de cimentación. En particular puede observarse que en el tipo de solución 3 no se obtiene momento flexionante a la altura de C.G. Esto puede traer consigo serios errores en la cuantía del acero de refuerzo necesario en la unión columna-cubierta que es donde más ductilidad necesita desarrollarse.

AGRADECIMIENTO

El autor manifiesta su agradecimiento a los doctores E. Rosenblueth y J. A. Nieto, así como al Ing. E. del Valle por sus valiosos comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

1. McLean, R. S., "Inverted pendulum structures", technical report of Consulting Civil and Structural Engineers, Fullerton, Cal. (ene. 1965).
2. Barkan, D. D., "Dynamics of bases and foundations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1962).
3. Jacobsen, L. S., y Ayre, R. S., "Engineering vibrations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1958).
4. Newmark, N. M., "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads", *Transactions ASCE*, Vol. 108 (1943), pp. 1161-1234.
5. Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Proyecto de reglamento de las construcciones en el Distrito Federal. "Pórtico complementario. Diseño sísmico de edificios", Ediciones Ingeniería, México (1962).
6. Marsal, R., y Mazarí, M., "El subsuelo de la Ciudad de México", Publicación del Instituto de Ingeniería, UNAM (1962).
7. Newmark, N. M., y Rosenblueth, E., "Earthquake Engineering", será publicado por Prentice-Hall Inc.
8. Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", *Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering*, Berkeley, Cal. (1956), paper 8.

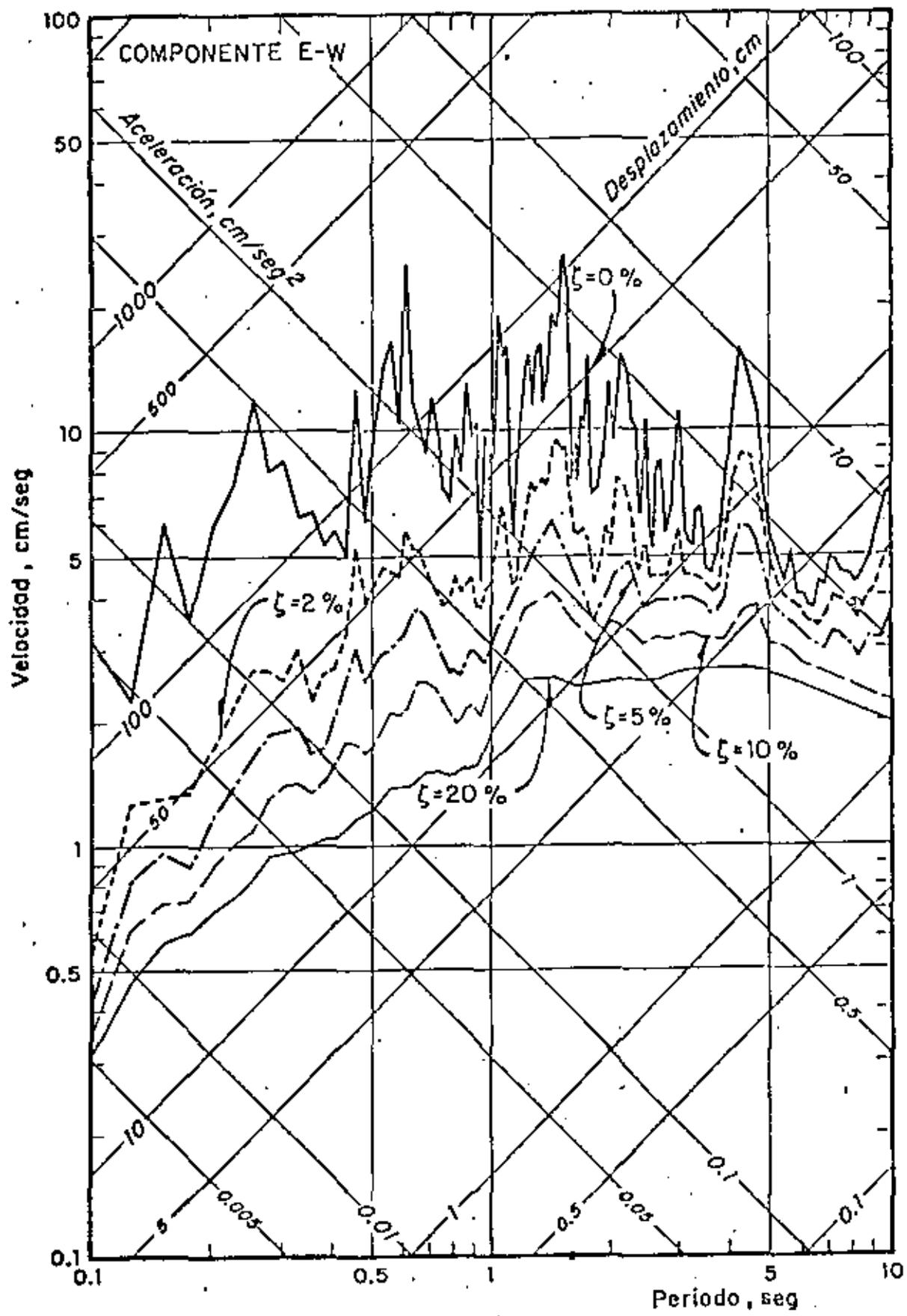


Fig 116 Espectros de respuesta. Ciudad Universitaria, 6 de julio de 1964

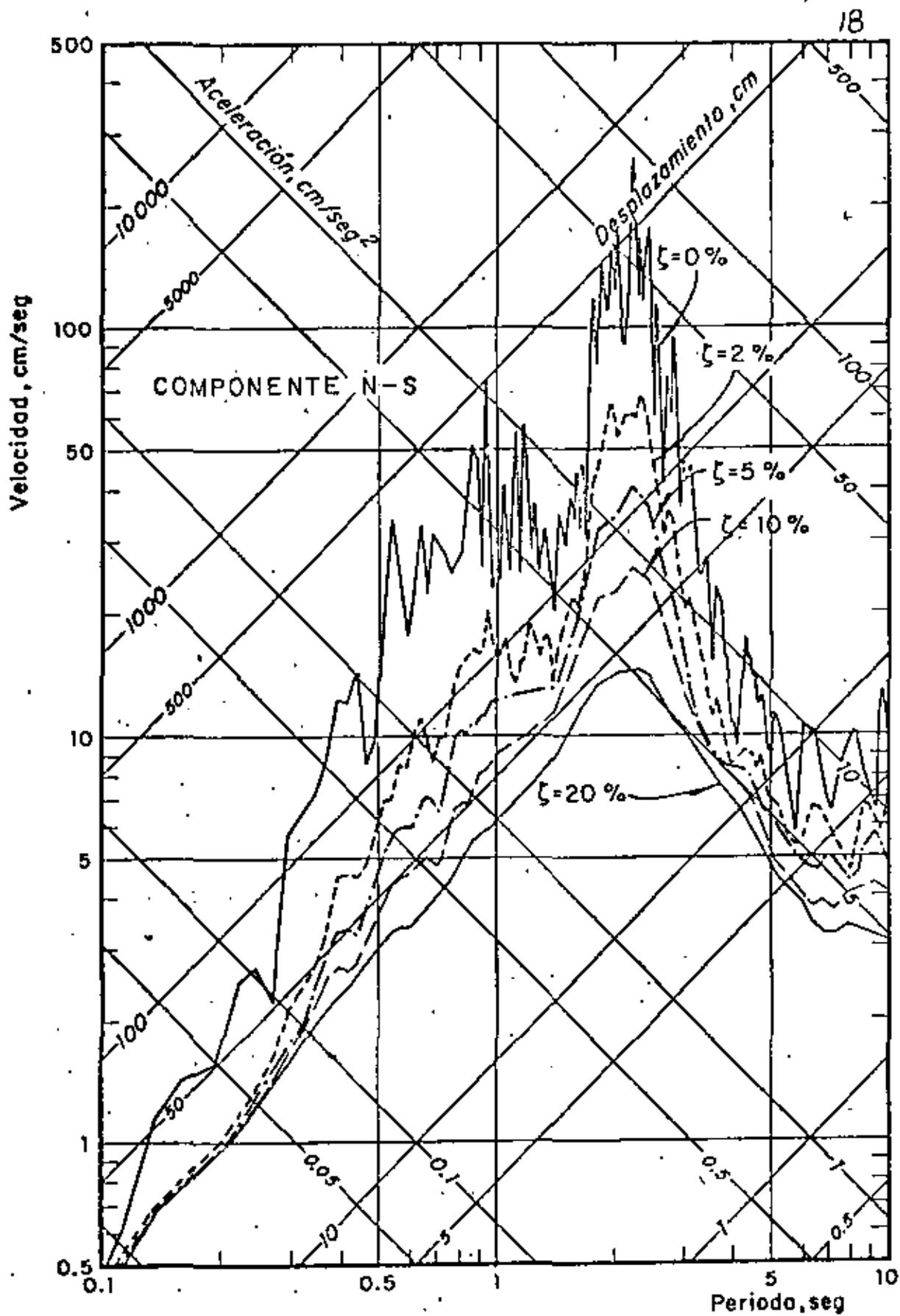


Fig 89 Espectros de respuesta. Edificio Manuel González,
6 de julio de 1964

COMPONENTE E-W

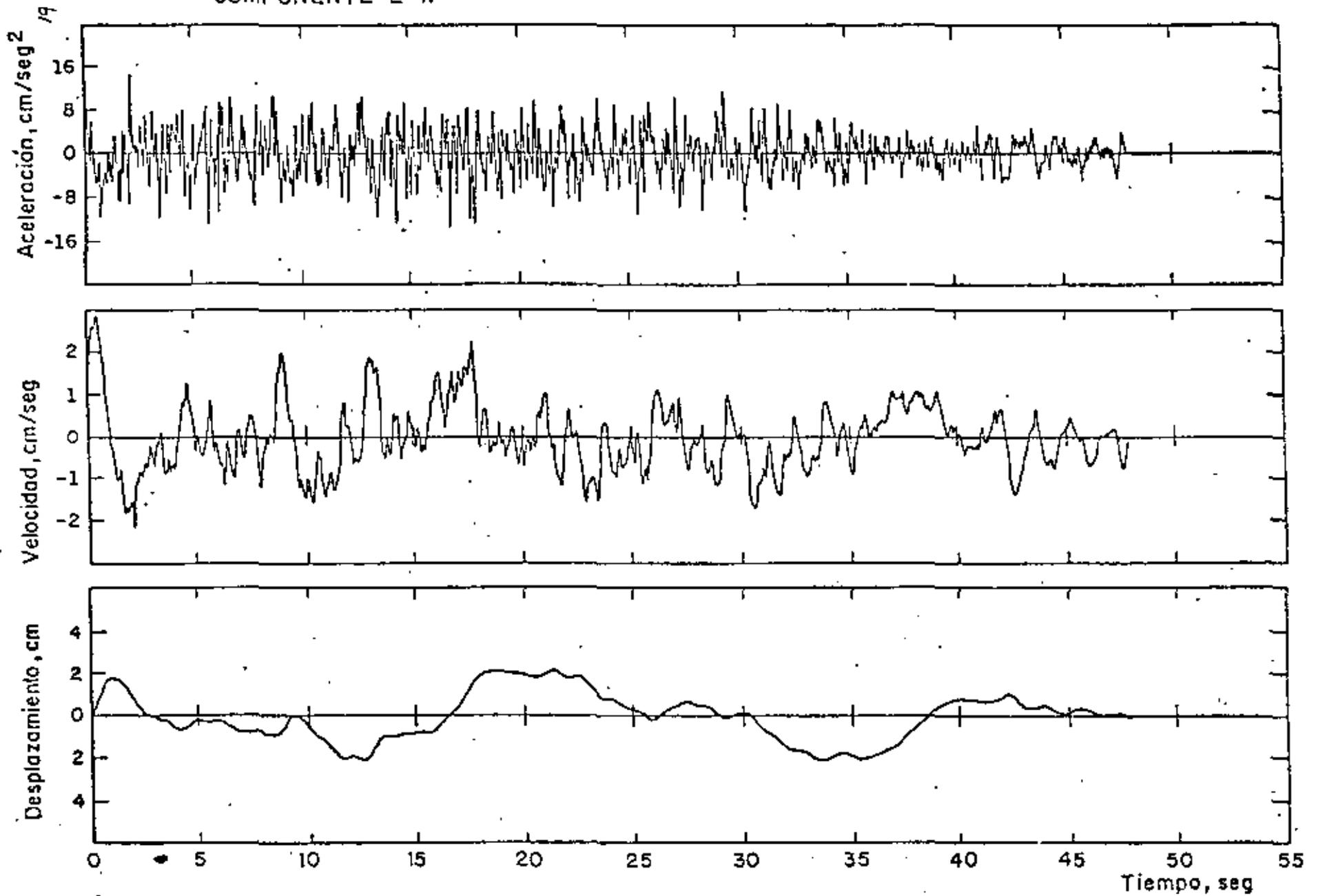


Fig 42 Movimiento del terreno. Ciudad Universitaria, 6 de julio de 1964

COMPONENTE N-S

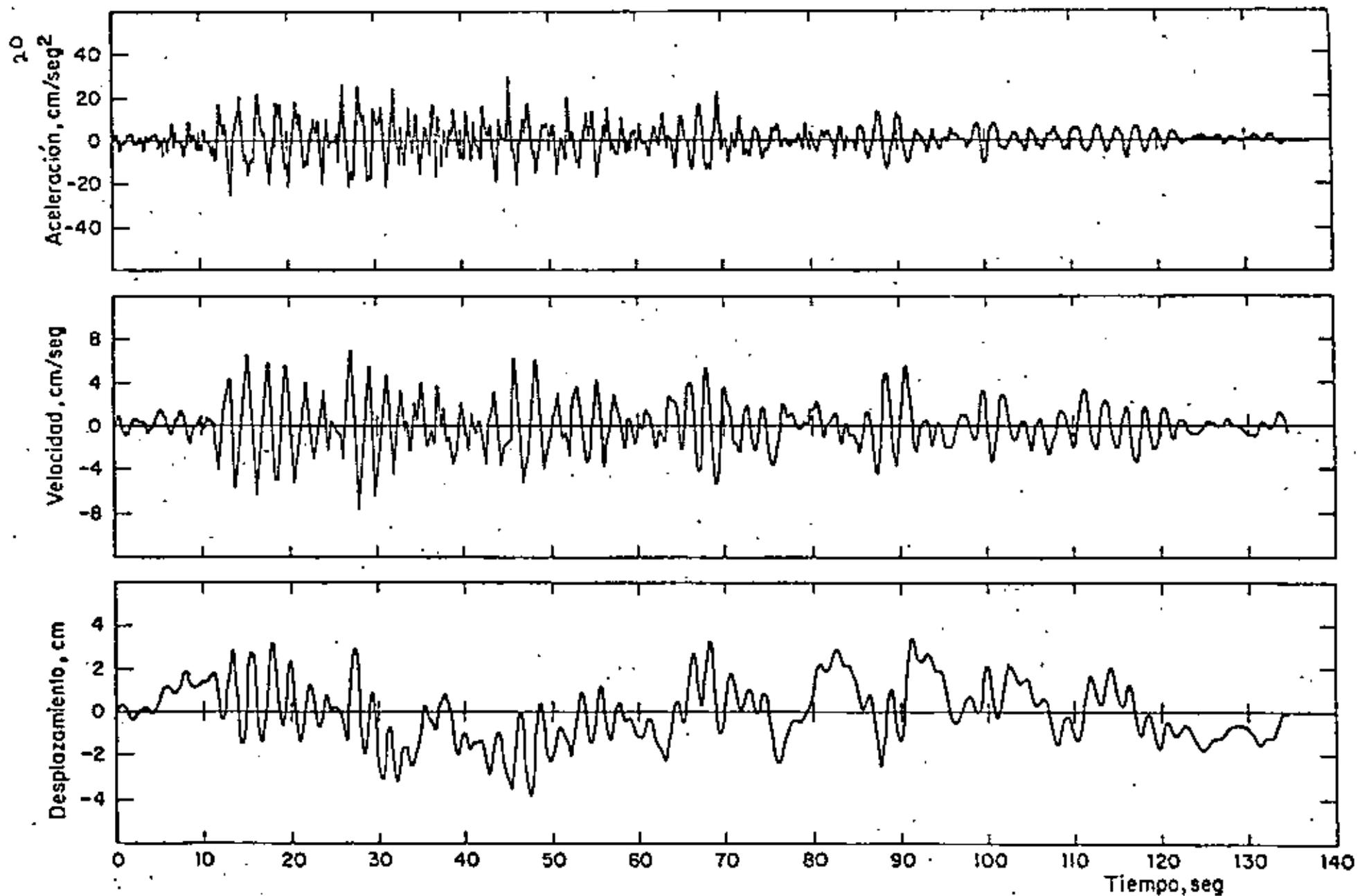


Fig 16 Movimiento del terreno. Edificio Manuel González, 6 de julio de 1964





**ESTUDIO ESTADISTICO
DE LOS CRITERIOS
PARA ESTIMAR
LA RESPUESTA SISMICA
DE SISTEMAS LINEALES CON
DOS GRADOS DE LIBERTAD**

**OCTAVIO A RASCON
AUGUSTO G VILLARREAL**

OCTUBRE 1973

323

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



Estudio estadístico de los criterios para estimar la respuesta sísmica de sistemas lineales con dos grados de libertad

Octavio A. Rascón
Augusto G. Villarreal*

RESUMEN

El objeto de este trabajo es verificar el grado de aproximación de dos métodos que con frecuencia se utilizan para estimar la respuesta sísmica máxima de sistemas lineales con varios grados de libertad. Para ello se aplica el método de Monte Carlo en el estudio de tres tipos de estructuras con dos grados de libertad: torsión y traslación, cabeceo y traslación, y traslación en dos pisos. Como excitaciones se utilizan sismos simulados y reales; se comparan las respuestas estimadas con las exactas, se hacen recomendaciones acerca del empleo de dichos métodos, y se obtienen las distribuciones de probabilidades de los cocientes de las respuestas exactas entre las estimadas.

ABSTRACT

The purpose of this work is to verify the degree of approximation of two methods used frequently for estimating the maximum seismic response of linear systems with various degrees of freedom. To do this, the Monte Carlo method is used in the study of three types of structures with two degrees of freedom: torsion and translation, rocking and translation, and translation in a two story building. Simulated and real earthquakes are used as ground excitations; estimated responses are compared with the exact ones, recommendations for the use of such methods are given, and the probability distributions of the ratios of exact to estimated responses are obtained.

1. INTRODUCCION

En este trabajo se analiza el comportamiento dinámico de algunos tipos de estructuras de comportamiento lineal de dos grados de libertad cuando se les sujeta a sollicitaciones sísmicas. El objeto es verificar el grado de aproximación de dos métodos propuestos por Rosenblueth (refs 1 y 2) para estimar la respuesta máxima total, mediante su comparación con las respuestas máximas exactas obtenidas con el método de análisis modal, al superponer en el tiempo los efectos del sismo en los dos modos naturales de vibración de la estructura.

El método 1 consiste en estimar la respuesta máxima total, Q , extrayendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la respuesta en cada modo natural de vibración, Q_i , es decir

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n Q_i^2} \quad (1.1)$$

* Profesores Investigadores, Instituto de Ingeniería, UNAM

donde n es el total de grados de libertad del sistema.

El método 2 consiste en aplicar la fórmula

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n Q_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{1 + \epsilon_{ij}}} \quad (1.2)$$

siendo

$$\epsilon_{ij} = \frac{\omega_i - \omega_j}{\xi_i \omega_i + \xi_j \omega_j} \quad (1.3)$$

donde

Q_i respuesta máxima en el i -ésimo modo de vibración, tomada con el mismo signo que el de la correspondiente función de transferencia cuando esta alcanza su valor máximo absoluto

ω_i i -ésima frecuencia circular natural de vibración del sistema sin amortiguamiento

$\omega_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ i -ésima frecuencia circular natural de vibración del sistema amortiguado

ξ_i fracción del amortiguamiento crítico en el i -ésimo modo natural

$\xi_i = \xi_i + 2/(\omega_i S)$ fracción del amortiguamiento crítico equivalente

S duración del sismo con el que se excita al sistema

El interés primordial al realizar esta verificación radica en que el método 1, actualmente en uso en varios reglamentos de construcción (refs 3 y 4), podría llegar a sustituirse por el método 2.

Se han propuesto otros procedimientos para estimar Q (ref 5) que son función no lineal de los resultados del método 1; sin embargo, no se discuten en este trabajo porque han sido estudiados con base en estructuras sin amortiguamiento, las cuales, como se verá, conducen a conclusiones diferentes de las que corresponden a estructuras amortiguadas.

Para realizar estadísticamente este estudio, se emplearon técnicas de reducción de variancia del método de Monte Carlo.

En cuanto al análisis, este se limita a tres casos, los cuales se detallan en el Apéndice:

1. Torsión en estructuras de un piso, considerando que las respuestas dinámicas son la fuerza cortante y el momento torsionante.

2. Cabeceo en estructuras de un piso, considerando como respuestas la fuerza cortante y el momento de cabeceo.

3. Traslación en estructuras de dos pisos, tomando en cuenta las fuerzas cortantes en los entrepisos uno y dos.

2. CALCULO DE LAS RESPUESTAS MAXIMAS

Las respuestas elásticas máximas de los diversos tipos de estructuras se calcularon utilizando:

a) Método 1 (ec 1.1, criterio del Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal, ref 3)

b) Método 2 (ec 1.2 y nuevo criterio de Rosenblueth, ref 2)

c) Análisis modal (respuesta exacta).

Los resultados del análisis modal sirvieron como base de comparación del grado de aproximación de las estimaciones logradas con los otros dos criterios.

Como excitaciones sísmicas se emplearon cuatro sismos simulados de acuerdo con el método indicado en la ref 6 (figs 1 a 4), y uno real (fig 5), registrado en la zona blanda de la ciudad de México (ref 7).

El análisis de los tres casos se realizó empleando el método de Monte Carlo, que consiste en estudiar el comportamiento de un modelo matemático determinado, mediante la simulación de los datos de entrada (generalmente en computadora digital) y del estudio estadístico de los resultados. Cada vez que se introduce un conjunto de datos y se obtiene la respuesta del modelo, se dice que se efectúa un *experimento conceptual* del problema; la colección de resultados constituye la *muestra* que sirve de base para inferir cuál es el grado de aproximación con que dicho modelo matemático representa el fenómeno para el cual se formuló.

Conforme aumenta el número de parámetros que intervienen en el modelo matemático, se incrementa la cantidad de experimentos necesaria para dilucidar cuáles influyen en el problema, es decir, para verificar si en los resultados que se obtienen al variar los valores de los parámetros existen diferencias estadísticas significativas; sin embargo, eso representa un costo de computación que en ocasiones hace prohibitivo tal tipo de estudios, a menos que se emplee alguna técnica de *reducción de variancia* (refs 11 y 12), lo que permite un ahorro considerable en el número de experimentos necesario para obtener conclusiones adecuadas.

La técnica de reducción de variancia que se emplea en este trabajo es muy común y consiste en:

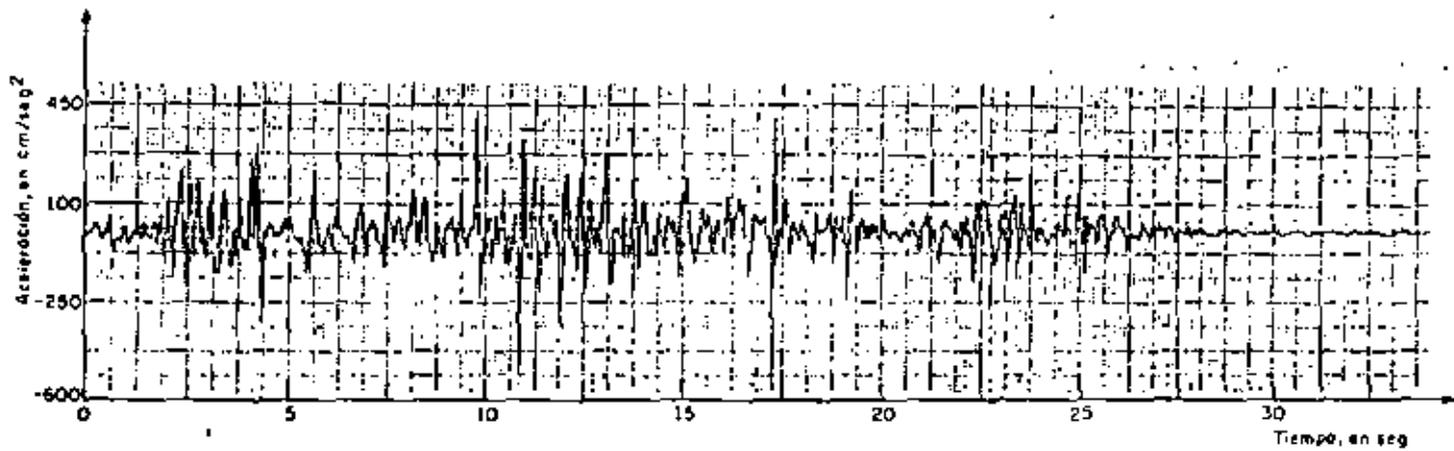


Fig 1. Sismo simulado No 1

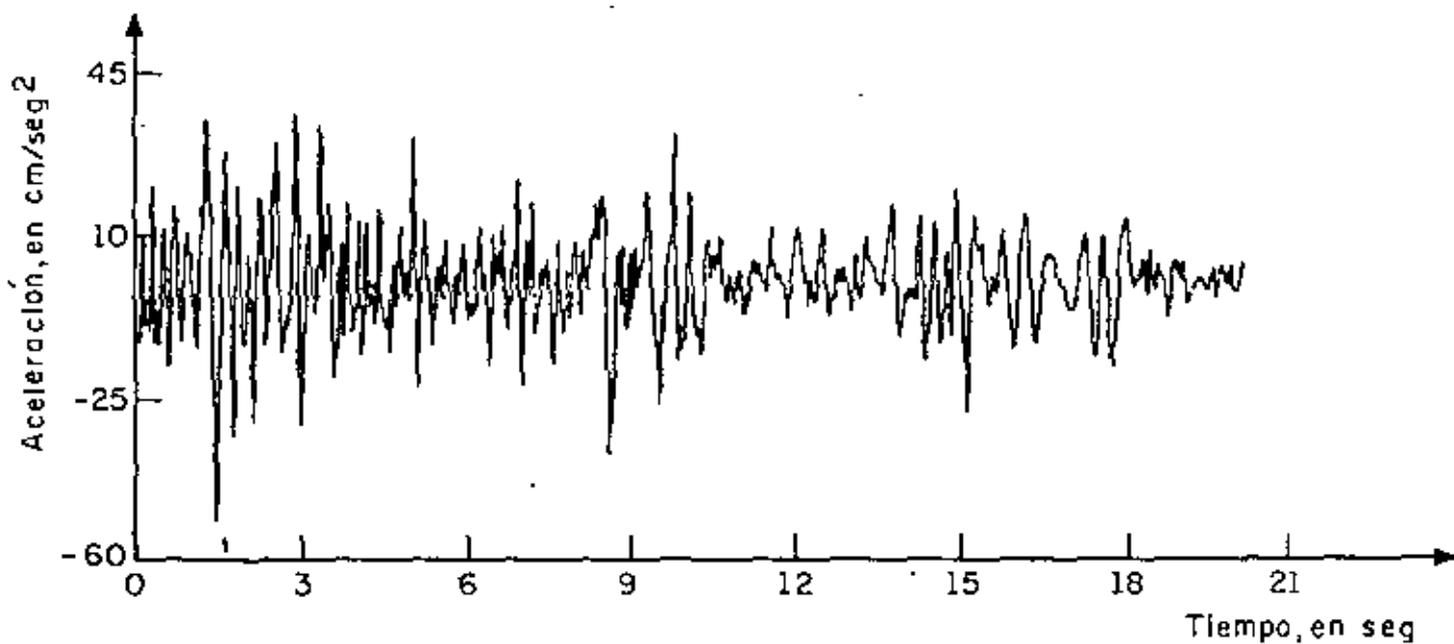


Fig 2. Sismo simulado No 2

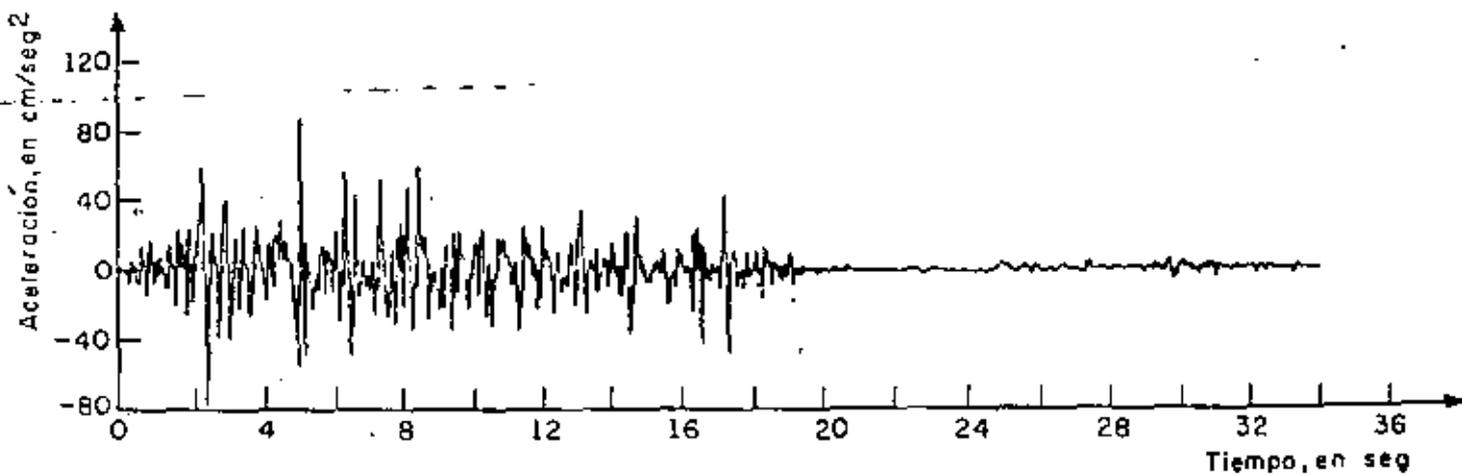


Fig 3. Sismo simulado No 3

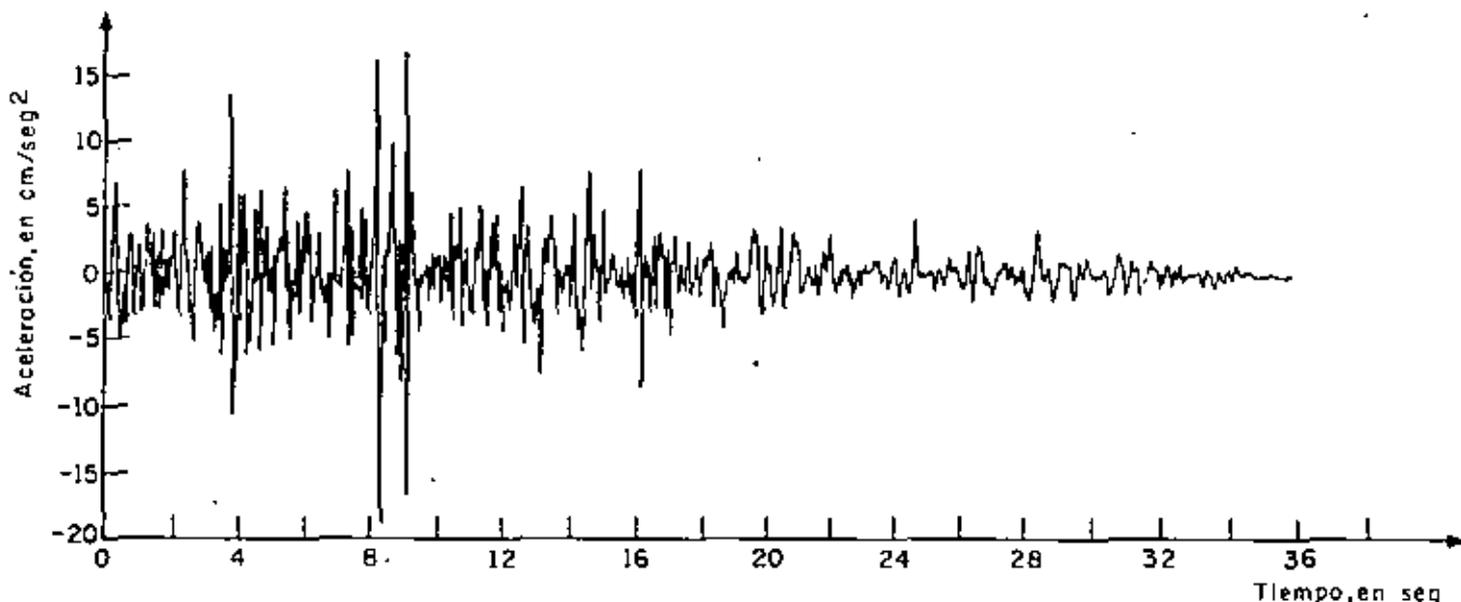


Fig. 4. Sismo simulado No. 4

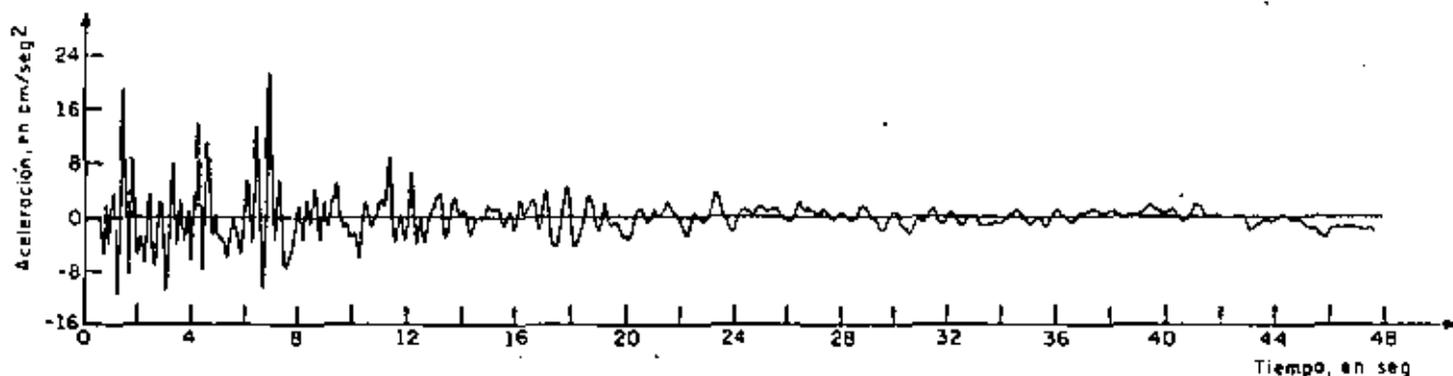


Fig. 5. Sismo real registrado en la Alameda Central, México, D. F., el 10 de diciembre de 1961

a) Asignar diversos valores a cada parámetro que interviene en el problema, de manera que se cubran los intervalos de interés de cada uno.

b) Calcular la respuesta máxima exacta y las estimadas con los métodos 1 y 2 para cada combinación de valores de los diferentes parámetros.

c) Obtener las respuestas normalizadas dividiendo los valores exactos entre los estimados; esto se hace para cada combinación de valores de los parámetros, con lo cual se elimina la dispersión en los resultados ocasionada por la magnitud y variación con el tiempo de los datos de entrada (se reduce la variancia).

d) Estudiar si existen diferencias estadísticas significativas entre los resultados obtenidos al variar los valores asignados a uno de los parámetros. Si las hay, se infiere que los resultados logrados con cada valor de dicho parámetro corresponden a poblaciones estadísticas diferentes; en caso contrario, la población estadística es la misma y, por consiguiente, las mues-

tras respectivas pueden agruparse en una sola de mayor tamaño, a partir de la cual es factible obtener conclusiones más generales y confiables acerca del modelo en estudio, ya que la variancia del promedio de la estimación se reduce en proporción a $1/n$ (ref 11). Esta etapa se repite sucesivamente para cada uno de los parámetros restantes, con lo que se realiza, de hecho, un análisis de variancia.

2.1 Resultados del problema de torsión (caso 1)

Para diseño sísmico de edificios, los elementos mecánicos que usualmente interesa conocer son las fuerzas y momentos que obran sobre cada elemento estructural. Para simplificar, con objeto de aislar los efectos de la fuerza cortante y del momento torsionante, en este problema de torsión se considerará una estructura (fig 6) con masa uniformemente distribuida, con un solo muro en dirección Z que resista la fuerza cortante directa, y dos idénticos en dirección Y (per-

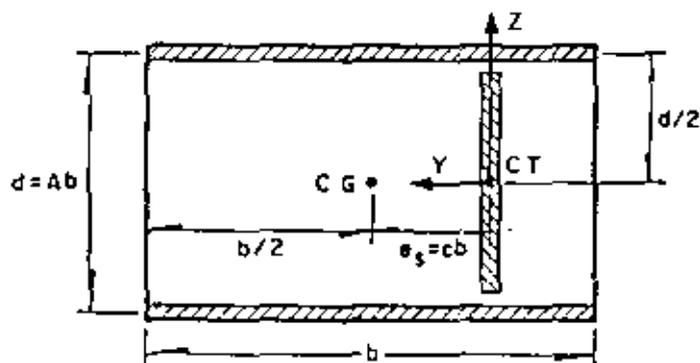


Fig 6. Estructura tipo considerada en el problema de torsión

pendicular al movimiento), de manera que cada uno de estos últimos resista una fuerza cortante igual a M/d , donde M es el momento torsionante dinámico y d es la separación de los dos muros. En este caso, la estructura presenta excentricidad solo en dirección perpendicular a la de excitación, Z .

Los parámetros que se escogieron para estudiar el problema de torsión fueron (fig 6):

- $A = b/d$
- b dimensión en la dirección Y
- $c = e_s/b$
- T_1 periodo fundamental de vibración $= \omega_1 / 2\pi = \lambda_1 / (2\pi K/m)$
- ξ fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración
- η cociente de la frecuencia angular entre la lineal $= (L/J)/(K/m)$

Los valores que se asignaron a A , b y c son los consignados en la tabla 1; los de ξ son 0, 0.05 y 0.10; los de η , 0.5, 0.9, 1.0, 1.1, 1.5, 2.0, 2.5, 3 y 4, y los de T_1 , 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.5, 2, 3 y 4 seg. Los casos de $\eta = 1, 0.9$ y 1.1 se estudiaron con especial cuidado debido a que para valores de $\eta = 1$ y cercanos, sucede que las dos frecuencias naturales de vibración resultan más próximas entre sí (ec A.3) y, en consecuencia, el término ϵ_{12}^2 de las ecs A.8 y A.9 del Apéndice puede asumir valores pequeños (ec 1.3), en cuyo caso se pueden presentar diferencias considerables entre los resultados de ambos métodos, puesto que el término de la doble suma de la ec 1.2 asume valores tanto mayores cuanto menores son los de ϵ_{12}^2 .

Para cada uno de los casos de la tabla 1 se obtuvieron las fuerzas cortantes y los momentos torsionantes máximos correspondientes a todas las combinaciones de ξ , T_1 y η .

En las figuras que aparecen más adelante no se hace distinción de los resultados obtenidos con cada sismo

ni con cada combinación de A , b y c , ya que las muestras respectivas se mezclaron al no haberse encontrado diferencias estadísticas significativas con un 95 por ciento de nivel de confianza en los mismos, a pesar de la marcada diferencia entre los valores de dichos parámetros y de las características de los sismos, tales como duración y frecuencia dominante.

2.1.1 Momento torsionante

En las figs 7 a 9 se presentan los resultados correspondientes a los casos en los que $T_1 = 2.0$ seg y $\xi = 0, 0.05$ y 0.10 , respectivamente. En el eje de las abscisas se localizan los valores de η , y en el de las ordenadas los cocientes de los momentos torsionantes exactos, M , entre los estimados, \hat{M} y \bar{M} , con los métodos 1 y 2, respectivamente (Apéndice).

En la fig 7, en la que el amortiguamiento es nulo, se aprecia mayor dispersión en los resultados de ambos métodos que corresponden a $\eta = 0.9, 1.0$ y 1.1 que para los demás valores de η . En cambio, en las figs 8 y 9, que corresponden a $\xi = 0.05$ y $\xi = 0.10$, respectivamente, se observa que la dispersión de los resultados del método 2 es prácticamente la misma para todos los valores de η (el coeficiente de variación es cercano a 0.2), cosa que no sucede con los resultados del método 1, para los cuales su tiene mayor dispersión cuando $\eta = 0.9, 1.0$ y 1.1 . Estas observaciones llevan a la conclusión de que para el método 1 no se pueden mezclar las muestras correspondientes a todos los valores de η , ya que los resultados dependen de este parámetro, mientras que para el método 2 podrían mezclarse las que no se refieren a amortiguamiento nulo si se verificara que los valores medios correspondientes a cada η son estadísticamente iguales.

Para lograr dicha verificación, se investigó primero si los resultados del método 2 son independientes del periodo fundamental, T_1 . Con este fin se trazó un juego de figuras del mismo tipo que las figs 10 a 12, que corresponden a $\eta = 1.0$ con $\xi = 0, 0.05$ y 0.10 , respectivamente. En la fig 10, que corresponde a $\xi = 0$, se observa que los resultados sí dependen de T_1 , ya que los valores medios son sensiblemente más grandes para periodos mayores de 1.0 seg que para los menores. Por lo contrario, en las figs 11 y 12 se nota que los valores medios son prácticamente independientes de T_1 en el intervalo de periodos estudiado, por lo que las muestras de cada periodo pueden agruparse en una sola (esta conclusión también es válida para los resultados del método 1).

Para verificar estadísticamente la conclusión anterior, se realizó una prueba de hipótesis acerca de si la pendiente de la recta que se ajusta a los datos puede considerarse nula, habiéndose aceptado con 95 por ciento de nivel de confianza.

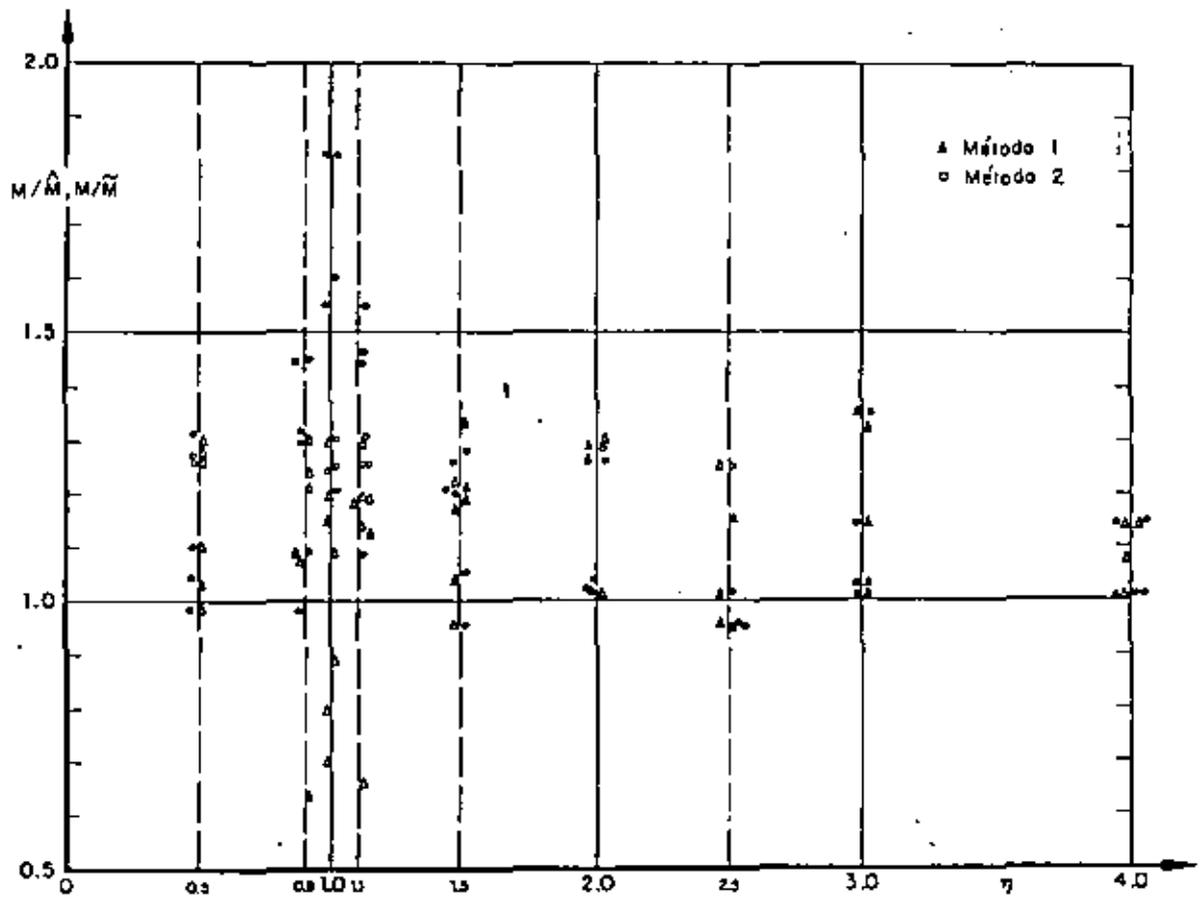


Fig 7. Resultados de los momentos torsionantes para $T_1 = 2.0$ seg, y $\zeta = 0$

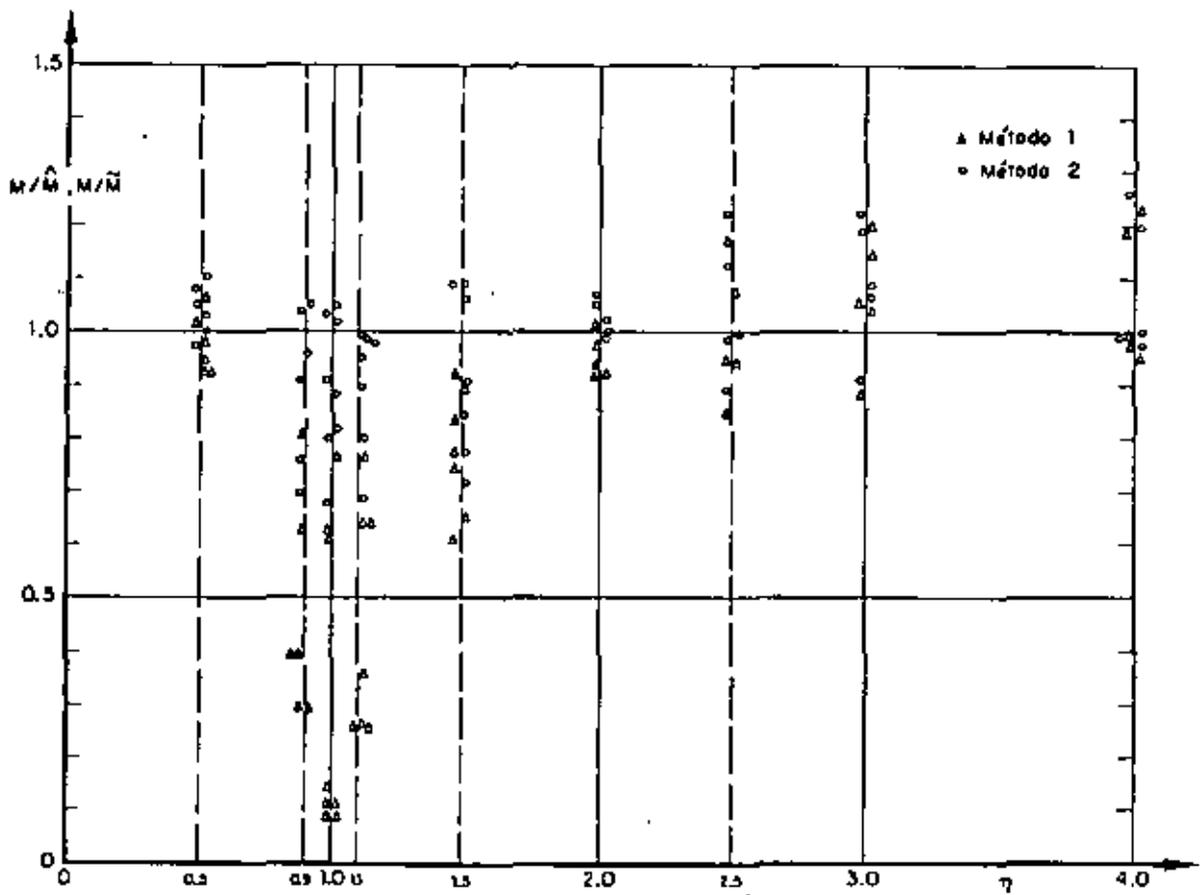


Fig 8. Resultados de los momentos torsionantes para $T_1 = 2.0$ seg, y $\zeta = 0.05$

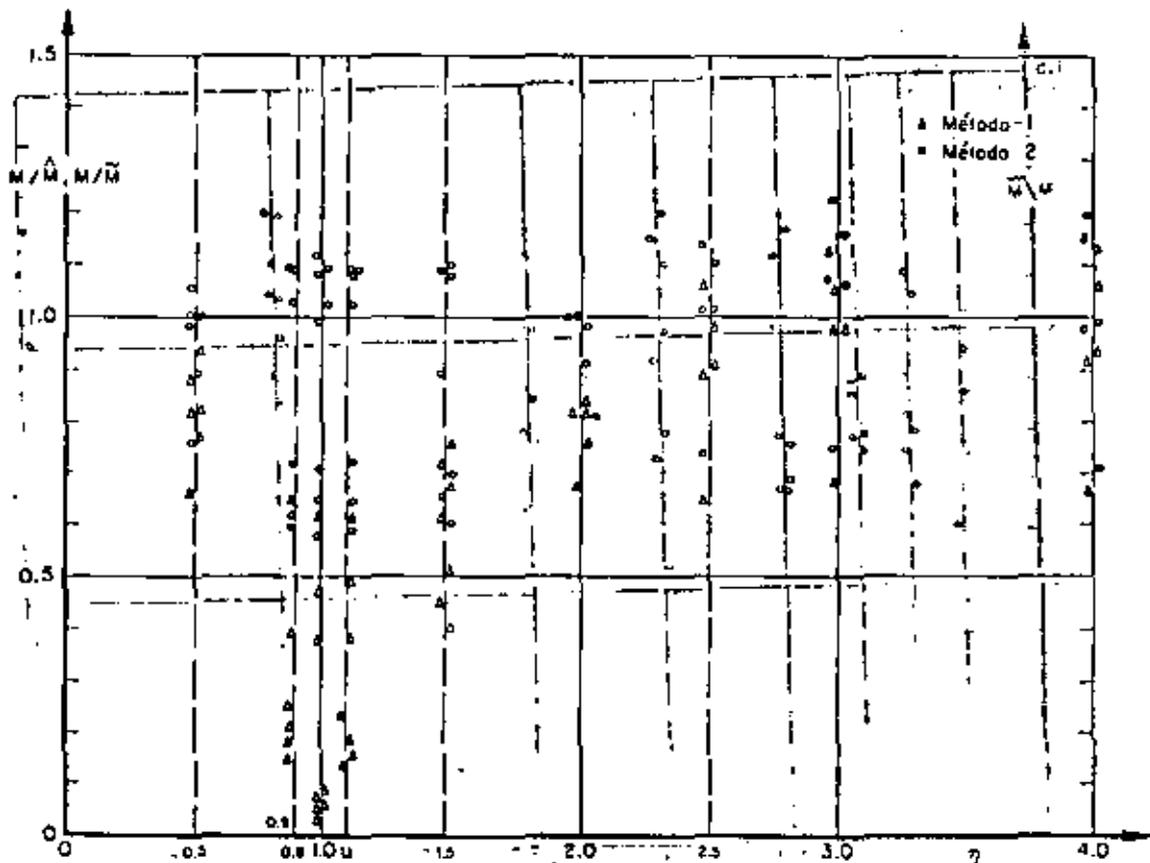


Fig 9. Resultados de los momentos torsionantes para $T_1 = 2.0$ seg, y $\zeta = 0.10$

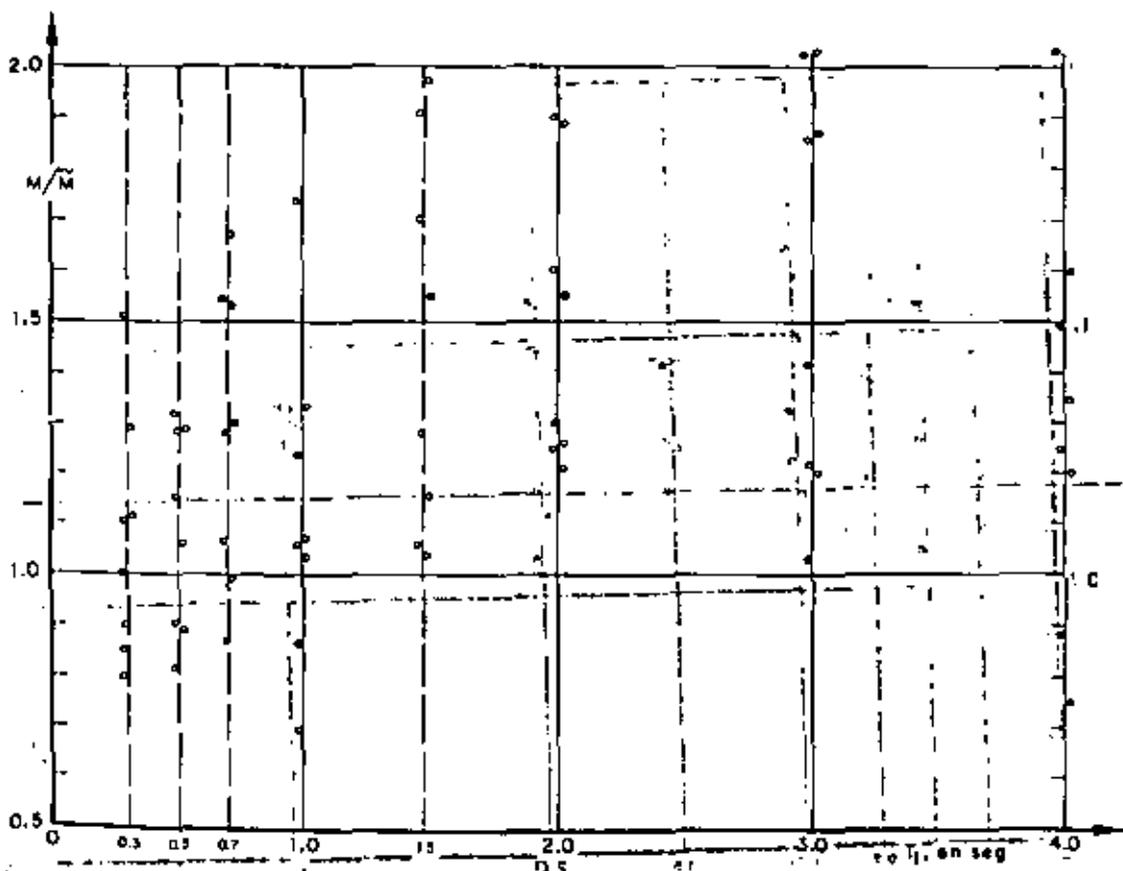


Fig 10. Resultados de los momentos torsionantes para $\eta = 1.0$, y $\zeta = 0$, Metodo 2.

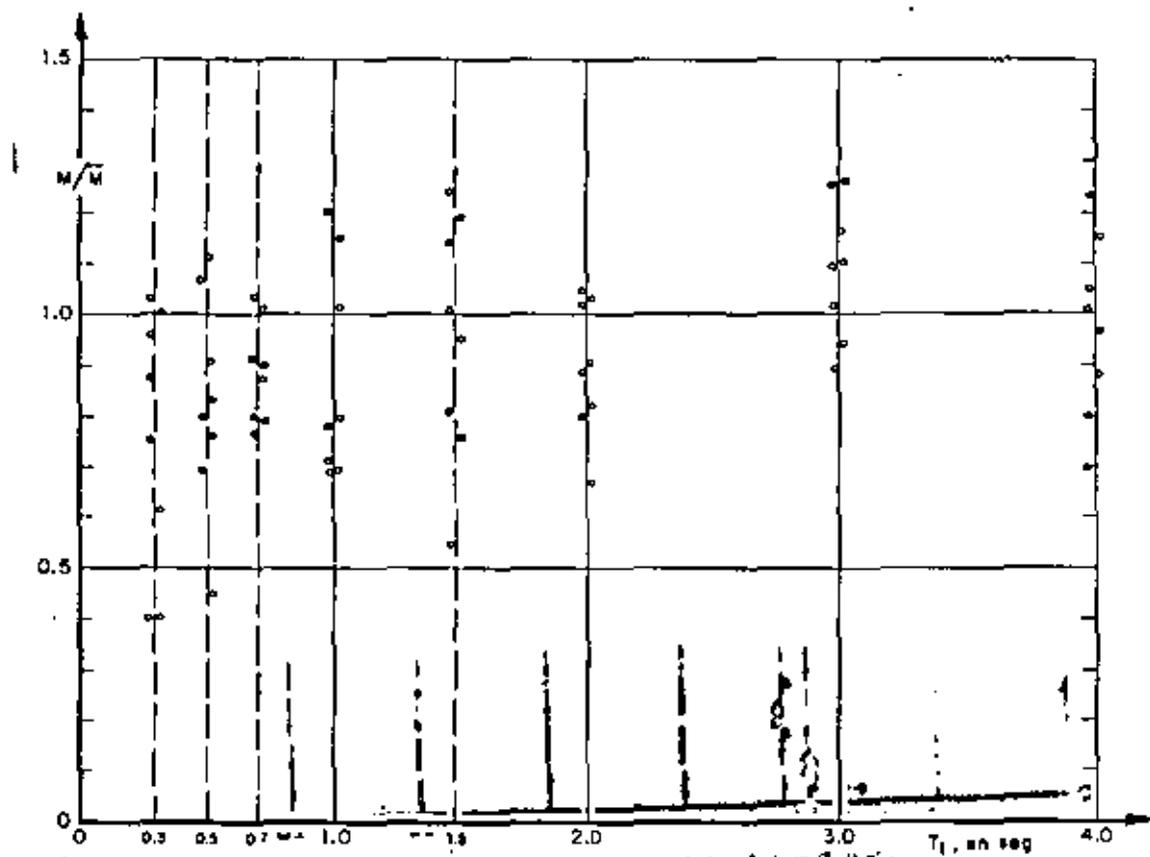


Fig 11. Resultados de los momentos torsionantes para $\eta = 1.0$, y $\zeta = 0.05$, Método 2

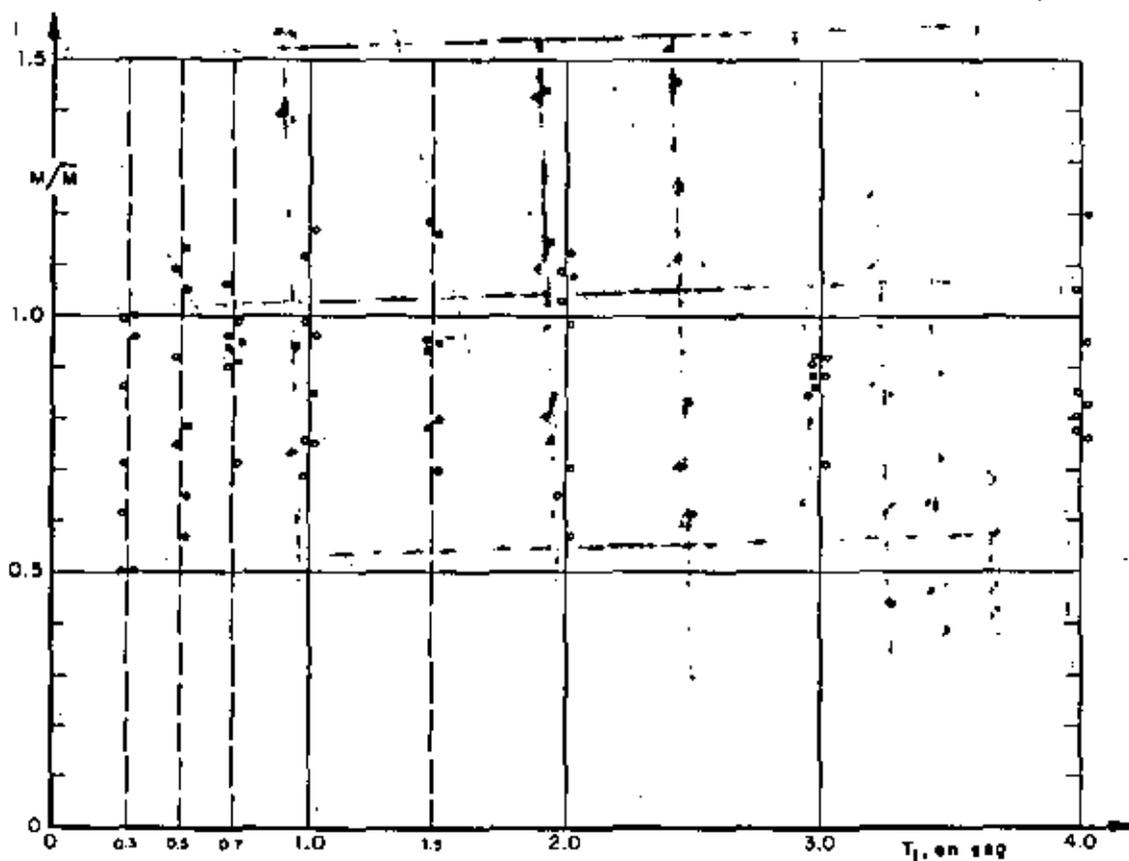


Fig 12. Resultados de los momentos torsionantes para $\eta = 1.0$, y $\zeta = 0.10$, Método 2

En la fig 13 se presentan en el eje de las ordenadas los promedios, (M/M) y (M/\bar{M}) , de los resultados obtenidos respectivamente con los métodos 1 y 2, considerando que estos son independientes de T_1 ; en el eje de las abscisas se localizan los valores de η . Se observa que, para $\eta = 0.9, 1.0$ y 1.1 , el método 2 sobrestima ligeramente la respuesta media (en 10 por ciento), tendiendo a subestimarla en 5 por ciento conforme los valores de η se alejan de 1.0, cuando $\zeta = 0.05$ y 0.10.

Con objeto de verificar si con el método 2 los resultados son independientes de η , se realizaron pruebas de hipótesis de igualdad de medias, siendo aceptables con 95 por ciento de nivel de confianza. Por lo contrario, los resultados del método 1 no fueron independientes de η , lo cual es obvio, puesto que con $\zeta = 0.10$ se tiene que el promedio de M/M es 0.31 para $\eta = 1$ (el mínimo valor fue 0.04 y el máximo 0.68), y 0.99 para $\eta = 4$ (el mínimo fue 0.66 y el máximo 1.28).

En la fig 13 se observa también que los promedios obtenidos con el método 1 se acercan a los exactos conforme η aumenta, presentándose mayores errores para valores de η muy cercanos a 1.0, para el cual las frecuencias naturales de la estructura resultan más

próximas entre sí (ec A.3), lo que trae como consecuencia que en muchas ocasiones las respuestas máximas en ambos modos de vibración ocurran simultáneamente y con signo contrario, por lo que la respuesta combinada máxima es la suma algebraica de ambas respuestas, que da resultados menores que los de la ec A.11.

Otra conclusión inmediata que se obtiene de la fig 13 es que los resultados del método 2 son prácticamente independientes de ζ cuando $\zeta \geq 0.05$ y que el método 1 pierde aproximación conforme aumenta ζ , y η se aproxima a 1.

De lo anterior se concluye también que en estructuras amortiguadas, que son las de interés práctico, el método 2 proporciona, en promedio, mejores resultados que el método 1, aunque el 2 subestime más y con mayor frecuencia la respuesta máxima. En estructuras no amortiguadas, que únicamente son de interés académico, el método 1 proporciona mejores resultados.

Otro punto importante de discusión es el del cociente de la excentricidad dinámica exacta, e_d , entre la estática, e_s . En las figs 14 a 16 se tiene η en el eje de las abscisas, y e_d/e_s en el eje de las ordenadas.

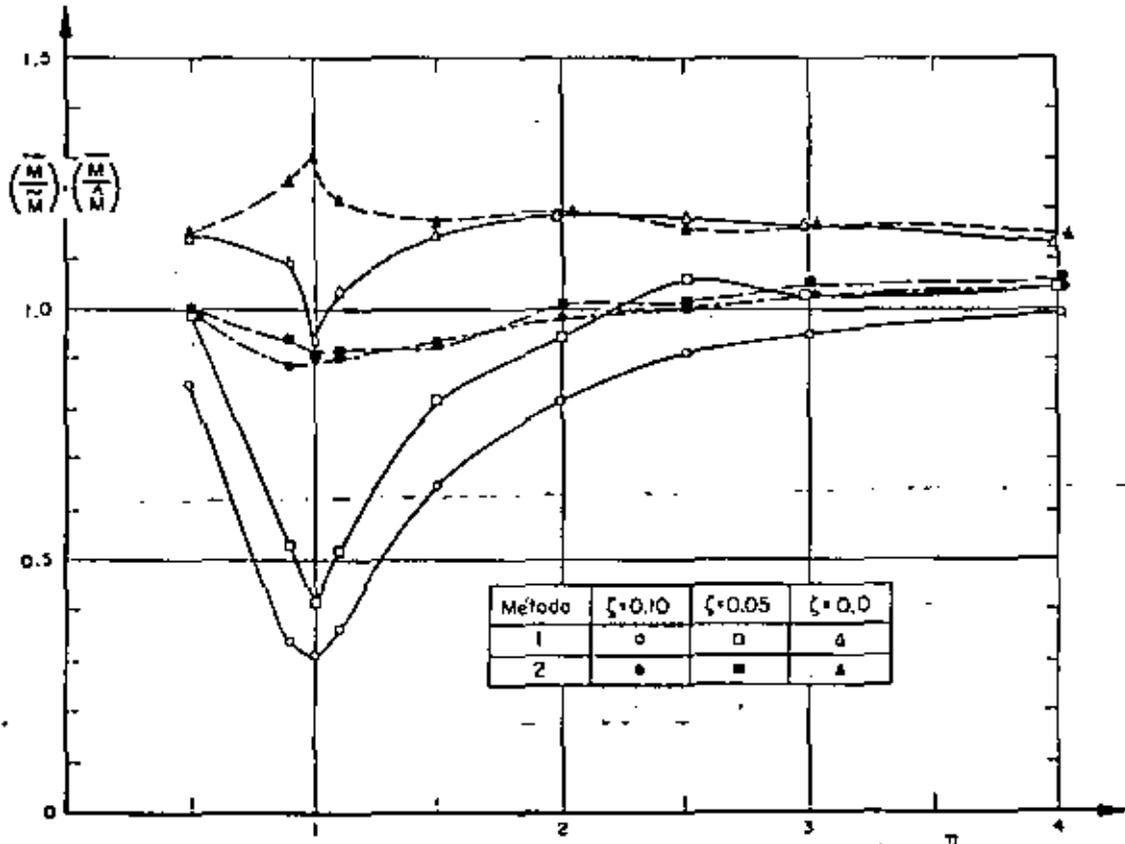


Fig 13. Variación con η de los promedios de los momentos torsionales estimados

Se observa en la fig 14, que corresponde a amortiguamiento nulo, que para $\eta = 0.9, 1.0$ y 1.1 hay una marcada diferencia entre los resultados obtenidos para el caso I con los casos II y III (la de estos últimos entre sí no es tan importante). Así, cuando $\eta = 1.0$, en el caso I el promedio de e_d/e_s fue 38.5 y la desviación estándar 16.6; en el caso II estos parámetros estadísticos valieron 5.4 y 0.6, respectivamente. Para valores de η separados de 1.0 en 0.5 unidades o más hay diferencias menos apreciables entre los resultados de los tres casos. Además, e_d/e_s disminuye rápidamente conforme η se aleja de 1.0.

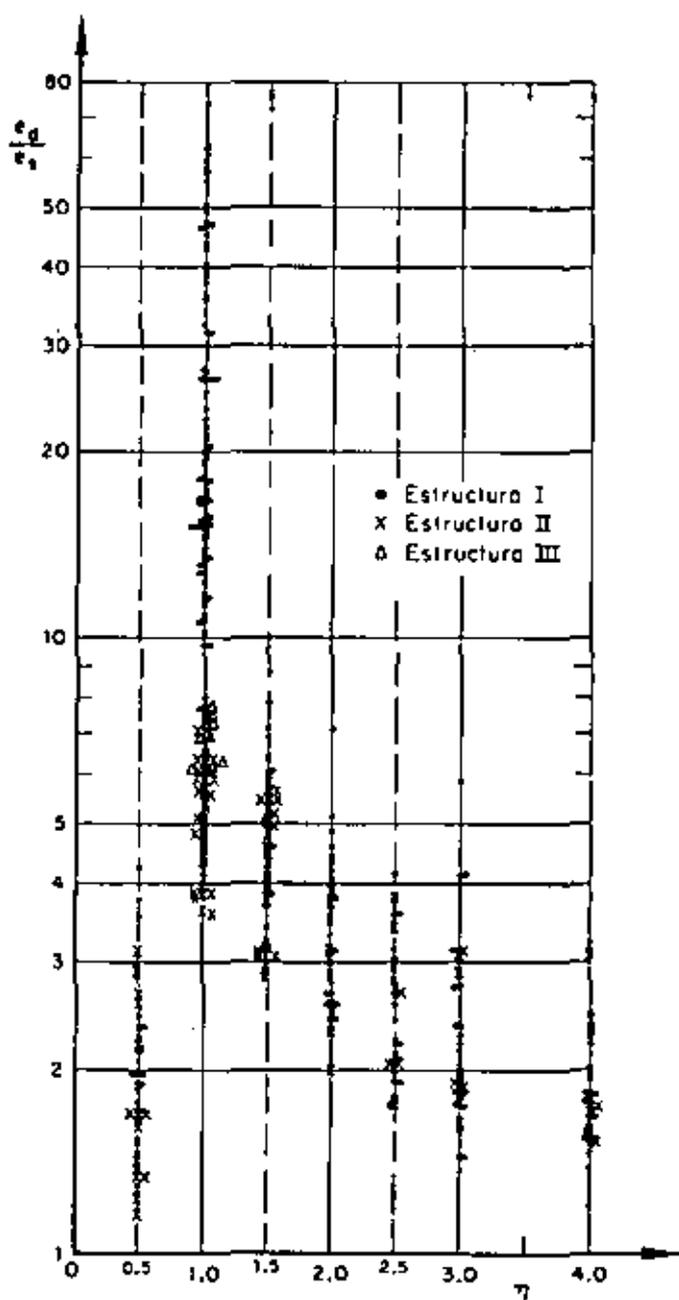


Fig 14. Cociente de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para $\zeta = 0$

En las figs 15 y 16, para $\zeta = 0.05$ y 0.10 , respectivamente, casi no hay diferencias entre los resultados de los dos casos, aunque persiste la dependencia respecto a η . Comparando estas tres últimas figuras se nota también que e_d/e_s disminuye conforme el amortiguamiento aumenta. Así, para $\zeta = 0.05$ el promedio fue 4.6 y la desviación estándar 1.3, mientras que para $\zeta = 0.10$, los valores correspondientes fueron 2.7 y 0.7.

De las figs 15 y 16 se concluye que la disposición del Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal de que se tome $e_d/e_s = 1.5$ subestima el valor promedio para todos los valores de η mayores de 0.5 y menores de 4.0 (aquí se omitió el término $\pm 0.05b$ que se agrega a 1.5 en la disposición del Reglamento, porque dicho término tiene como finalidad prevenir excentricidades accidentales ocasionadas por variaciones imprevisibles de masas y rigideces y posibles excitaciones torsionales).

Con objeto de estimar probabilidades de eventos relacionados con los momentos torsionantes, se trazaron en papel de probabilidades los datos de frecuencias acumuladas correspondientes a diferentes casos. Las distribuciones de probabilidades empleadas fueron la logarítmica normal, la extrema tipo II y la normal, de las cuales, por apreciación visual, se consideró que esta última daba en general mejores resultados (figs 17 a 19).

Para verificar que las poblaciones bajo estudio tienen distribuciones normales, se realizaron pruebas de hipótesis estadísticas con un 95 por ciento de nivel de confianza.

Los resultados fueron:

Método 1

(Con resultados de $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ y 4.0 mezclados; fig 17)

$\zeta = 0$: se rechaza la hipótesis nula de que la distribución es normal con media 1.16 y desviación estándar 0.12 (esta hipótesis se rechaza también con un 99 por ciento de nivel de confianza)

$\zeta = 0.05$ y $\zeta = 0.10$: se aceptan las hipótesis nulas de que las distribuciones son normales con medias 0.96 y 0.85, y desviaciones estándar 0.15 y 0.17, respectivamente.

Método 2

(Con resultados de $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ y 4.0 mezclados; fig 18)

$\zeta = 0, 0.05$ y 0.10 : se aceptan las hipótesis de que las distribuciones son normales con medias 1.15, 1.06 y 1.00, y desviaciones estándar 0.15, 0.15 y 0.15, respectivamente. Para $\zeta = 0.05$, la hipótesis se acepta con 99 por ciento de nivel de confianza; las otras con 95 por ciento.

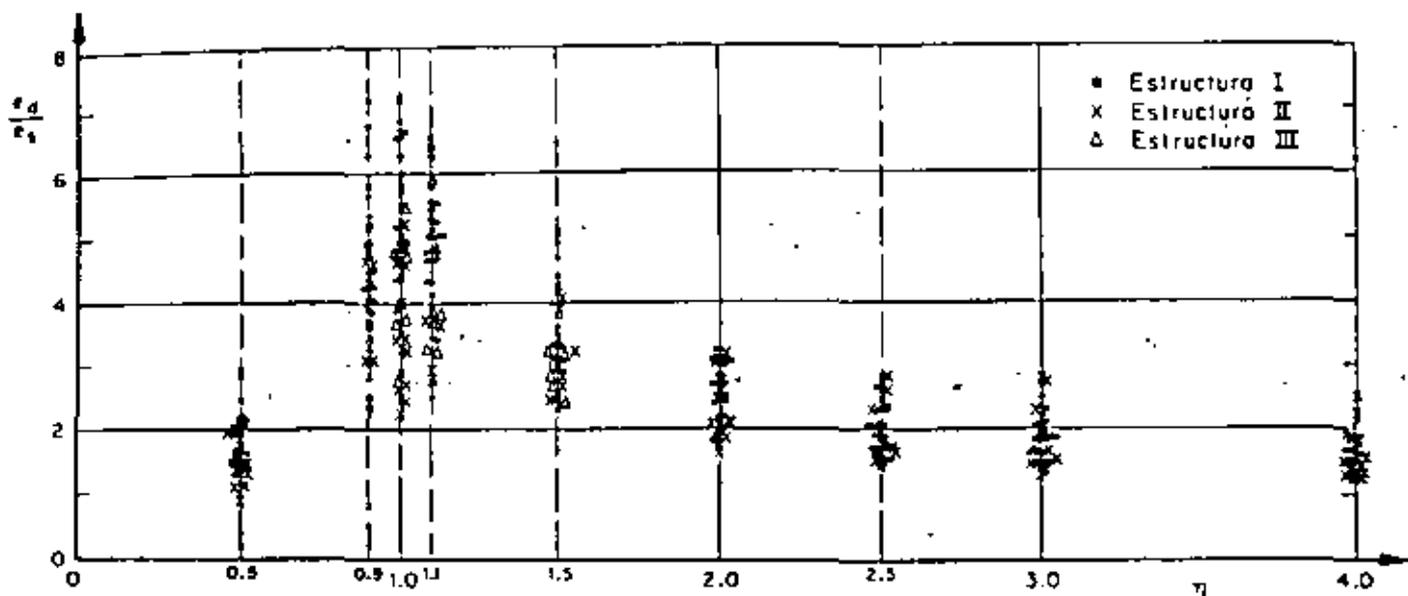


Fig 15. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para $\zeta = 0.05$

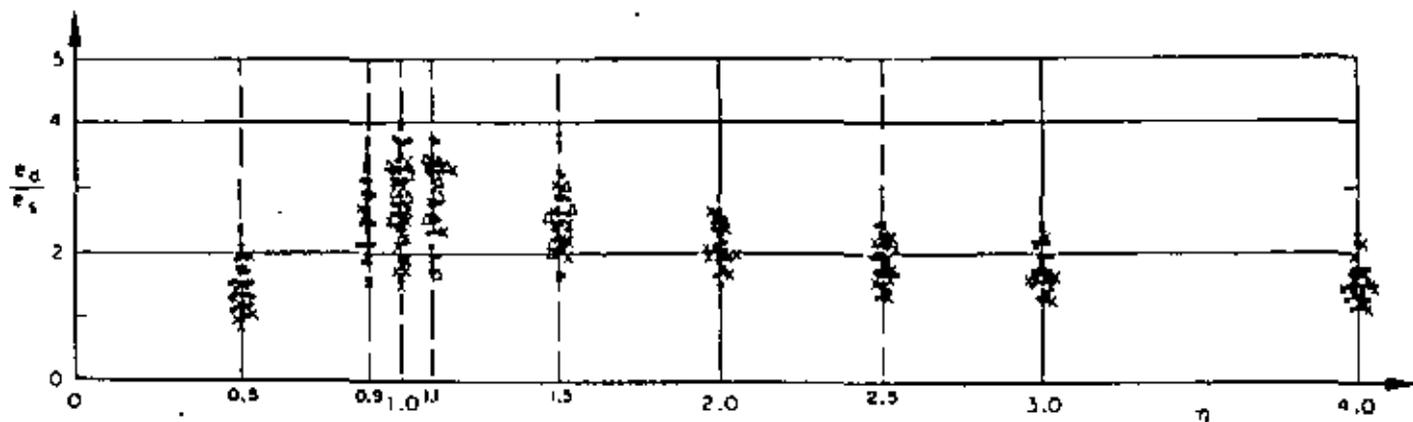


Fig 16. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para $\zeta = 0.10$

Además, para $\zeta = 0.10$ se estudió el caso en que se mezclaron los resultados de $\eta = 1$ y $\eta = 1.1$ (fig 19), obteniéndose una distribución normal con media 0.88 y desviación estándar 0.17. También se mezclaron los resultados de los valores de η de 1 a 4, para los cuales se obtuvo una distribución de igual tipo con media 0.95 y desviación estándar 0.16. Ambas hipótesis fueron aceptables, pero con 97.5 por ciento de nivel de confianza.

En todos los casos descritos en que se acepta la hipótesis nula, se observa que la desviación estándar es muy semejante, ya que varía de 0.15 a 0.17, mientras que la media va de 0.86 a 1.15.

2.1.2 Fuerza cortante

Los resultados obtenidos con los métodos 1 y 2, correspondientes a $\eta = 1.0$ y $\zeta = 0$, se muestran en la fig 20. En el eje de las abscisas se tienen los periodos

fundamentales, T_1 , y en el de las ordenadas las fuerzas cortantes normalizadas, V/\bar{V} y V/\bar{V} , obtenidas al dividir las fuerzas cortantes, V , calculadas mediante análisis modal entre las estimadas con los métodos 1 y 2, \bar{V} y \bar{V} , respectivamente.

De la fig 20 y otras similares se concluyó que las fuerzas cortantes normalizadas obtenidas con ambos métodos son independientes del periodo fundamental, T_1 , con 95 por ciento de nivel de confianza. Además, para valores de η menores de 0.9 y mayores de 1.1, los resultados fueron independientes de los parámetros A , b y c , con errores de ± 5 por ciento. Esta independencia también se obtuvo para el método 2, inclusive cuando $\eta = 0.9$, 1.0 y 1.1, con errores máximos de 40 por ciento en defecto y 20 por ciento en exceso para $\zeta = 0$, tendiendo a reducirse conforme aumenta el amortiguamiento; así, para $\zeta = 0.05$, se obtuvieron errores máximos de ± 20 por ciento, y para $\zeta = 0.10$ de ± 10 por ciento.

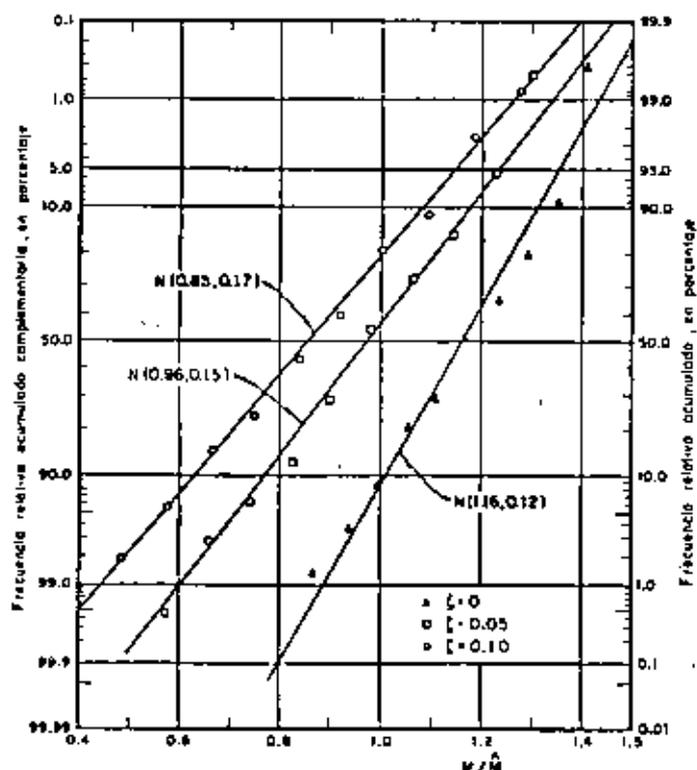


Fig 17. Resultados de los momentos torsionantes para $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ y 4.0 mezclados. Papel de probabilidades normal, método 1

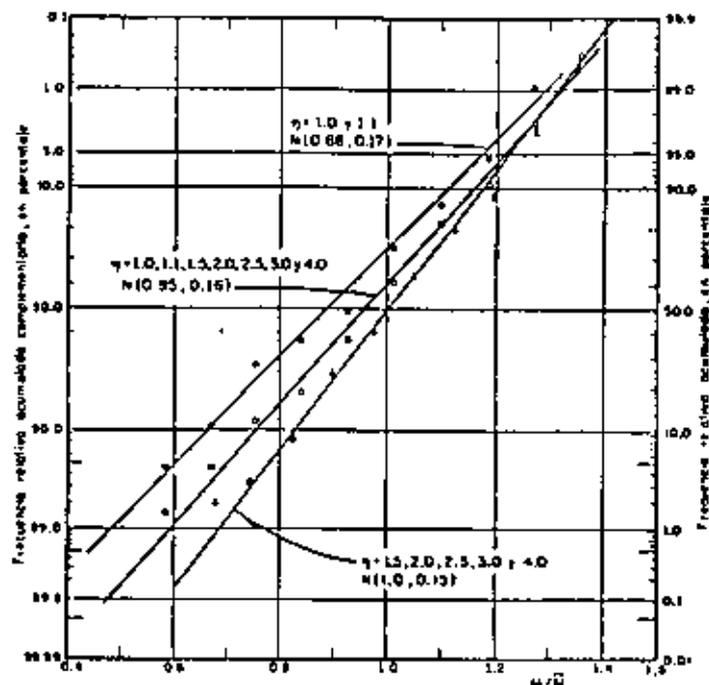


Fig 19. Resultados del método 2 para $\zeta = 0.10$

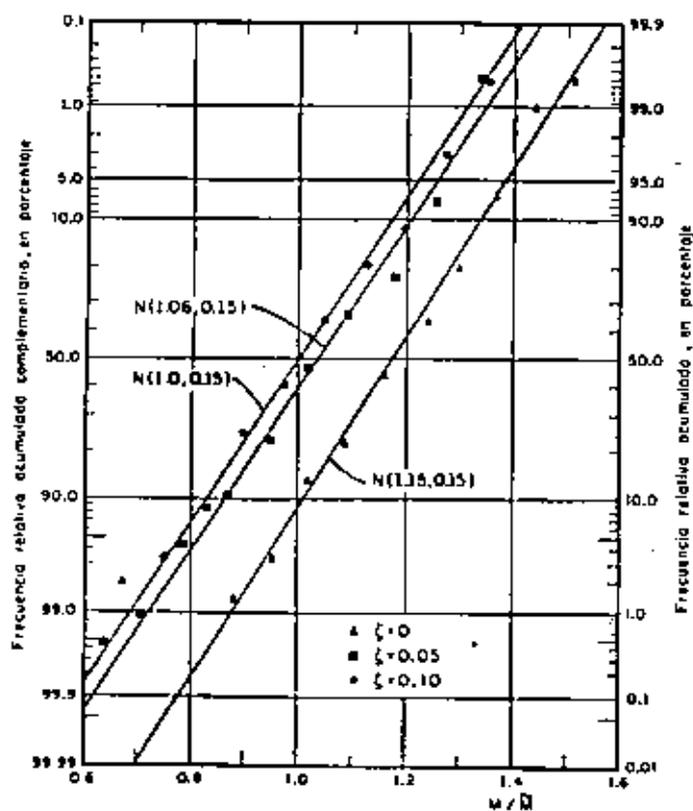


Fig 18. Resultados de los momentos torsionantes para $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ y 4.0 mezclados. Papel de probabilidades normal, método 2

Para el método 1, con $\eta = 1.0$, los errores máximos fueron: 41 por ciento en defecto para la estructuración del caso I y 32 por ciento en defecto en los casos II y III. Los errores medios respectivos fueron 36 y 15 por ciento, ambos en defecto. Para $\eta = 1.1$, la estructuración del caso I tuvo errores máximos de ± 5 por ciento, y las tipo II y III, 38 por ciento en defecto y 11 por ciento en exceso.

Respecto al amortiguamiento, se concluyó que las fuerzas cortantes normalizadas son prácticamente independientes de este; así, para $\eta = 1$, los promedios globales de los métodos 1 y 2 fueron 1.23 y 1.11, respectivamente, para $\zeta = 0$; para $\zeta = 0.05$ de 1.30 y 1.02, y para $\zeta = 0.10$ de 1.30 y 1.0.

Como puede apreciarse mediante los promedios citados en el párrafo anterior, los resultados que se obtienen con el método 2 son mejores que los del 1 cuando $\eta = 1.0$. Una conclusión semejante se obtuvo cuando $\eta = 0.9$ y 1.1 , aunque las diferencias se redujeron en un 10 por ciento. Para valores de η fuera del intervalo $0.9 \leq \eta \leq 1.1$, los resultados de ambos métodos fueron prácticamente iguales.

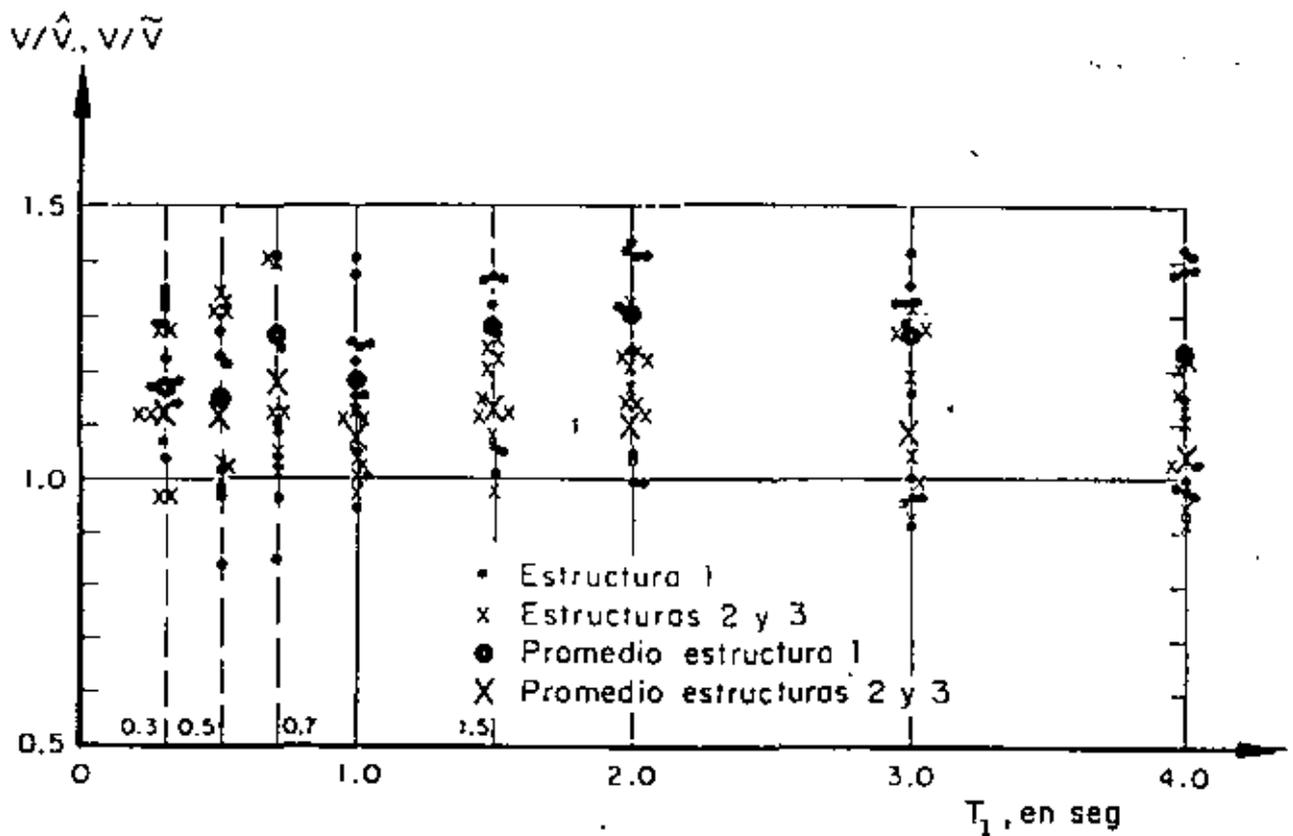


Fig. 20. Fuerzas cortantes normalizadas estimadas con los métodos 1 y 2, para $\eta = 1.0$ y $\zeta = 0$

2.2 Resultados del problema de cabeceo (caso 2)

Los parámetros que se escogieron para estudiar el problema de cabeceo fueron:

- m masa total
- L distancia del suelo al centro de gravedad
- T_1 periodo fundamental
- ζ fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración
- η_c cociente de la frecuencia angular entre la lineal

Los valores que se asignaron a T_1 fueron 0.3, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0 y 4.0 seg; a ζ , 0, 0.05 y 0.10, y a η_c , 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0. En cuanto a m y L , únicamente se usaron 2.0 ton seg^2/m y 4 m, respectivamente, ya que por los resultados (fuerzas y momentos normalizados) que se obtuvieron con estas combinaciones se juzgó innecesario el uso de otros valores; por la misma razón se emplearon únicamente tres de los sismos del problema de torsión.

En este problema, igual que en el de torsión, no hubo diferencias apreciables entre los resultados obtenidos con los tres sismos que se emplearon como excitación, por lo cual se agruparon los resultados en una sola muestra. Además, tanto las fuerzas cortantes como

los momentos de cabeceo máximos normalizados fueron estadísticamente independientes del periodo fundamental, T_1 , con nivel de confianza de 95 por ciento.

Otra conclusión interesante es que los resultados obtenidos con los métodos 1 y 2 (Apéndice) son prácticamente iguales, con diferencias máximas entre ellos de 5 por ciento. Esto se debe a que los valores de ϵ_{12}^2 (ec. 1.3) son grandes porque las frecuencias de vibración no resultan con valores muy cercanos entre sí, aun cuando se usaron η_c muy pequeñas, de manera que el radical de la ec. A.17 fuera también pequeño y, por tanto, que las diferencias entre las dos frecuencias fundamentales fueran mínimas. Esto hace que los términos que contienen a ϵ_{12}^2 en las ecs. A.24 y A.25 resulten muy pequeños y que estas ecuaciones sean casi iguales a las ecs. A.22 y A.23, respectivamente.

Aprovechando las conclusiones anteriores, se acumularon las muestras correspondientes a todos los periodos fundamentales, y para cada amortiguamiento se elaboraron dos gráficas: una de fuerzas cortantes y otra de momentos de cabeceo normalizados, empleando únicamente los resultados del método 2. En ellas, el eje de las abscisas representó a η_c , y el de las ordenadas a los cocientes V/\hat{V} o M/\hat{M} , donde V y M denotan la fuerza cortante y el momento de cabeceo exactos, y \hat{V} y \hat{M} los mismos elementos mecánicos estimados con el método 2.

Debido a que las conclusiones obtenidas de esas gráficas son prácticamente las mismas, en este trabajo solo se reproduce la correspondiente a las fuerzas cortantes con $\zeta = 0.10$ (fig 21). Dichas conclusiones fueron, además de las mencionadas, las siguientes:

- Los resultados son estadísticamente independientes de η con 95 por ciento de nivel de confianza, cuando $\zeta \geq 0.05$
- La respuesta normalizada se subestima con mayor frecuencia que lo que se sobrestima, en proporción de 2 a 1
- El error máximo en defecto fue 29 por ciento, y en exceso, 22 por ciento
- El promedio global de los resultados con $\zeta \geq .05$ es 1.05, y el coeficiente de variación, 10 por ciento

- Los resultados varían ligeramente al introducir amortiguamiento a la estructura; se hace notar que para $\zeta = 0$, la respuesta normalizada promedio se subestima aproximadamente en 10 por ciento más que con $\zeta = 0.05$ y 0.10 (fig 22). En estos dos últimos casos no se aprecia diferencia significativa en los promedios de las respuestas ni en las dispersiones. Así, los errores máximos que se tuvieron para $\zeta = 0.05$ alcanzaron 31 por ciento en defecto y 19 por ciento en exceso; en cuanto a $\zeta = 0.10$ fueron, respectivamente, 27 y 21 por ciento

- Dado que existe gran incertidumbre en otros factores del diseño sísmico, tales como magnitud del sismo de diseño (o en las amplitudes del espectro de diseño), contenido de frecuencias, duración y variación temporal del mismo, se puede concluir que las estimaciones obtenidas con los dos métodos son, en promedio, satisfactorias en este tipo de estructuras.

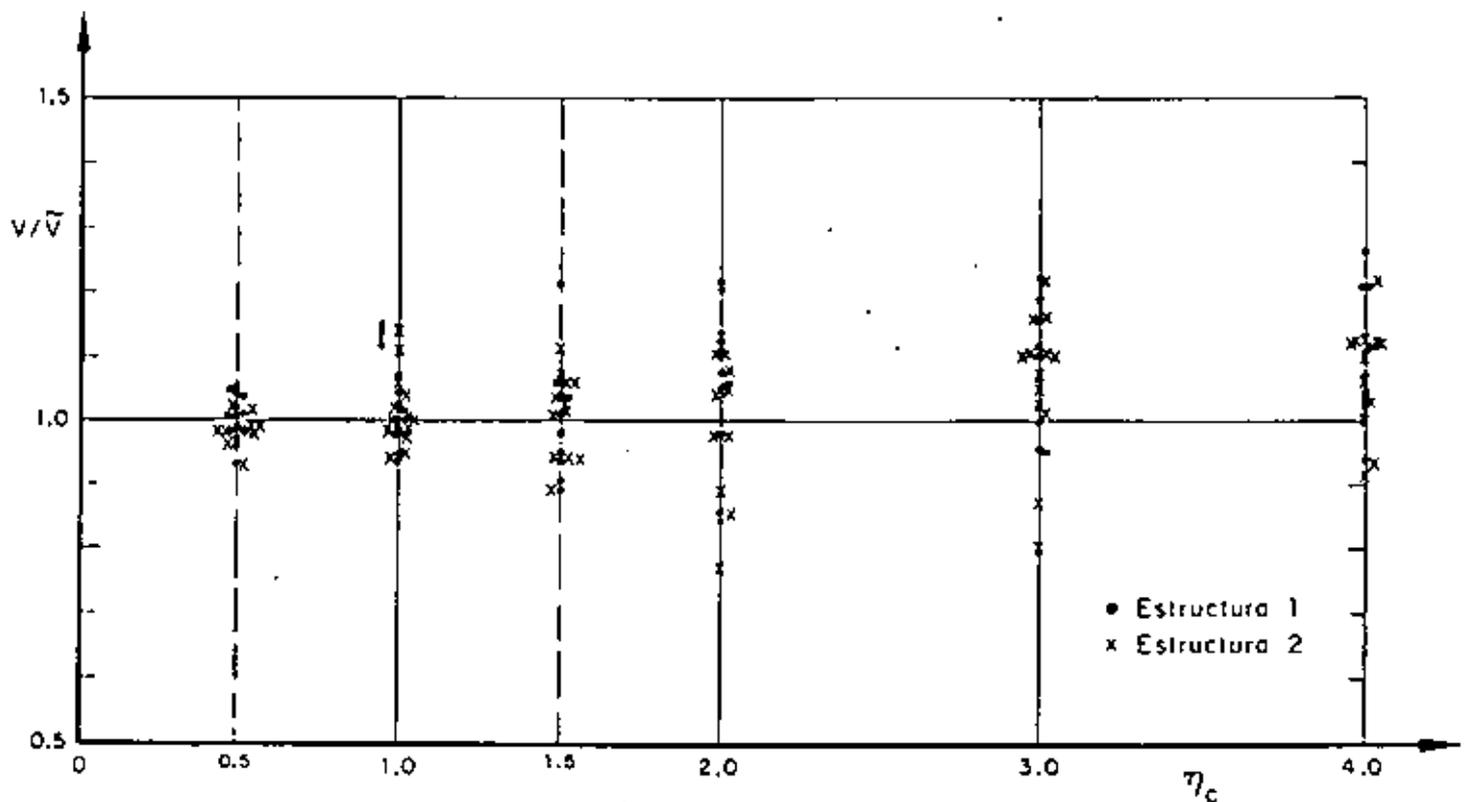


Fig 21. Fuerzas cortantes normalizadas estimadas con el método 2, para $\zeta = 0.10$. Problema de cabeceo

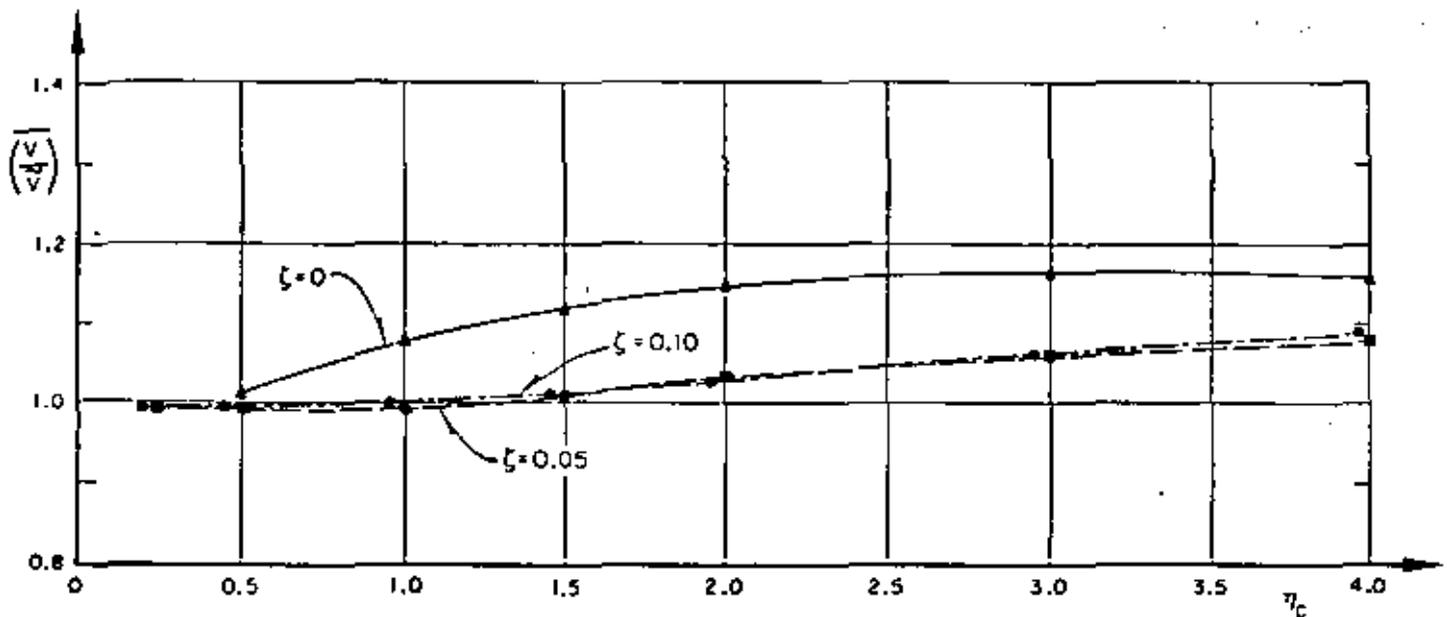


Fig. 22. Variación con η_c de los promedios de las fuerzas cortantes estimadas con el método 2. Problema de cabeceo

2.3 Resultados del problema de traslación (caso 3)

Para estudiar este problema se escogieron como parámetros:

- $\eta_c = (k_2/m_2)/(k_1/m_1)$
- T_1 periodo fundamental
- ζ fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración
- m_2/m_1 relación de masas

Los valores que se asignaron a η_c fueron 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5 y 3; a T_1 , 0.3, 1.0 y 4.0 seg; a ζ , 0, 0.05 y 0.10; y a m_2/m_1 , 0.5, 1.0 y 2.0

Los resultados se analizaron mediante gráficas con η_c o T_1 en el eje de las abscisas, y cocientes de las fuerzas cortantes exactas entre las estimadas en el eje de las ordenadas (fuerzas cortantes normalizadas). Debido a que los resultados no difirieron mucho de los de cabeceo, se empleó únicamente un sismo como excitación. Las conclusiones a que se llegó son:

- Las estimaciones que se obtienen con los métodos 1 y 2 son prácticamente iguales, debido a que los valores de las frecuencias de vibración no resultan muy cercanas entre sí en cada caso, lo cual hace que las $\epsilon_{1,2}^2$ (ec 1.3) resulten grandes y, por tanto, que el término de las ecs A.36 y A.37 que las incluye sea muy pequeño, en cuyo caso las ecs A.34 y A.35 son casi iguales a las ecs A.36 y A.37, respectivamente. Esto se observó aun cuando se estudiaron casos adicionales de m_2/m_1 y η_c , para los cuales el radical de la ec A.29 fue mínimo, con lo cual hubo las dife-

rencias mínimas posibles entre las dos frecuencias fundamentales y, por tanto, los valores más pequeños de $\epsilon_{1,2}^2$. Esto ocurre cuando

$$\eta_c = \frac{1 - m_2/m_1}{(1 + m_2/m_1)^2}, \text{ si } m_2/m_1 < 1$$

Dichos casos adicionales fueron: $m_2/m_1 = 0.2$ con $\eta_c = 0.556$; $m_2/m_1 = 0.5$ con $\eta_c = 0.222$, y $m_2/m_1 = 0.8$ con $\eta_c = 0.062$. En estos, la diferencia máxima que se obtuvo entre los resultados de los dos métodos fue de 13 por ciento, siendo mejores los del método 2

- Las estimaciones normalizadas son estadísticamente independientes del periodo fundamental, T_1 , con nivel de confianza de 95 por ciento

- En la fig 23 se observa que las estimaciones de V_1 y V_2 tienen, en promedio, errores muy parecidos, por lo que en las conclusiones no es necesario hacer distinciones entre ellas

- La respuesta se sobrestima solamente en 30 por ciento de los casos. El error máximo en exceso que se observó fue 46 por ciento, y en defecto 41 por ciento. El coeficiente de variación para $\zeta = 0.10$ alcanzó 12 por ciento

- En la fig 24 se observa que los promedios de las estimaciones con $\zeta = 0.05$ y 0.10 son mejores que las que corresponden a $\zeta = 0$, lo cual hace pensar que las conclusiones obtenidas en la ref 5 respecto a $\zeta = 0$ no pueden generalizarse para $\zeta > 0$

— Los promedios globales de las fuerzas cortantes normalizadas fueron, para $\zeta = 0$, 1.15; para $\zeta = 0.05$, 1.04, y en cuanto a $\zeta = 0.10$, 1.04. Además, se observa que respecto a $\zeta = 0.05$ y 0.10, los resultados son muy similares, es decir, son independientes de ζ si $\zeta > 0.05$

— Las medias de los resultados normalizados son estadísticamente independientes de la relación de masas, m_2/m_1 , con un nivel de confianza de 95 por ciento, pero los casos especiales de m_2/m_1 y η_1 indicados anteriormente tuvieron mayor dispersión

— Para $\zeta = 0.05$ y 0.10, las estimaciones normalizadas son estadísticamente independientes de η_1 , con un nivel de confianza de 95 por ciento, como puede apreciarse en la fig 24 en la que aparecen únicamente los resultados del método 2. Para $\zeta = 0$ esta hipótesis no se aceptó

— Por la misma razón indicada en el último párrafo de conclusiones del problema de cabeceo, las estimaciones obtenidas con ambos métodos son en promedio satisfactorias en este tipo de estructuras

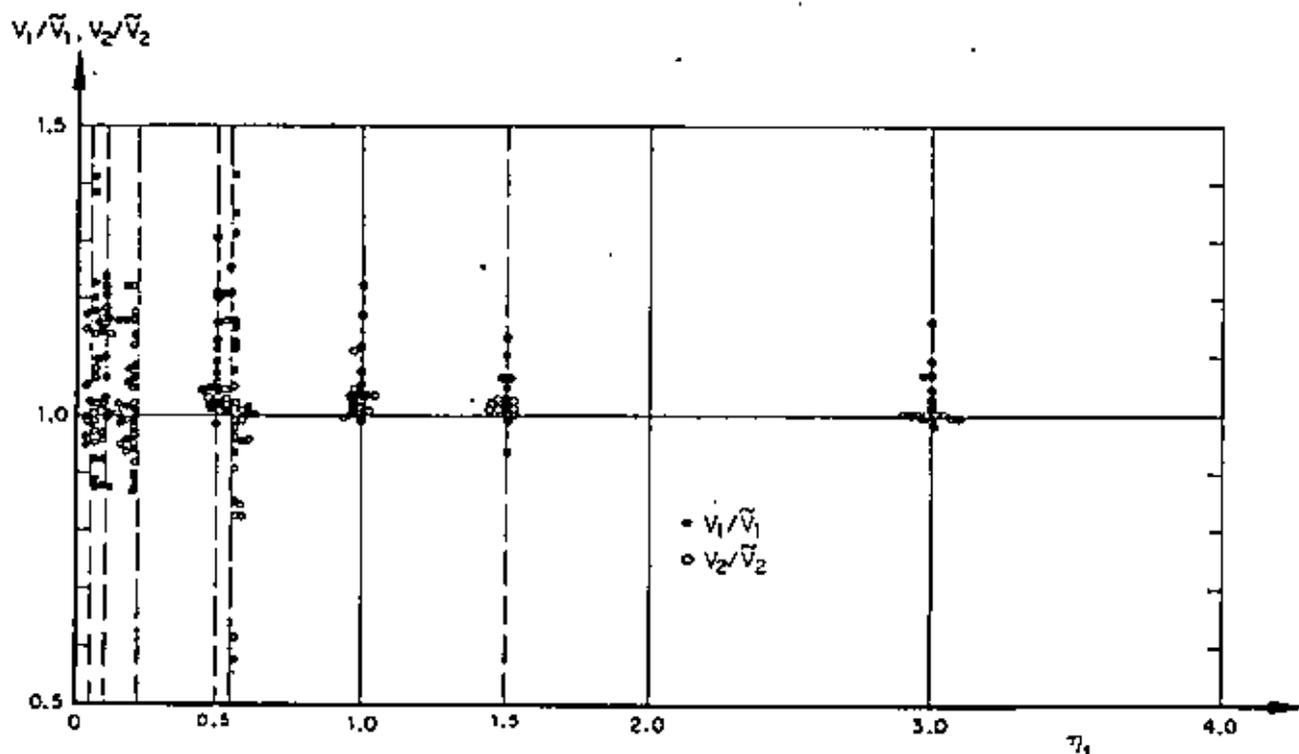


Fig 23. Fuerzas cortantes estimadas con el método 2, para $\zeta = 0.10$. Problema de traslación

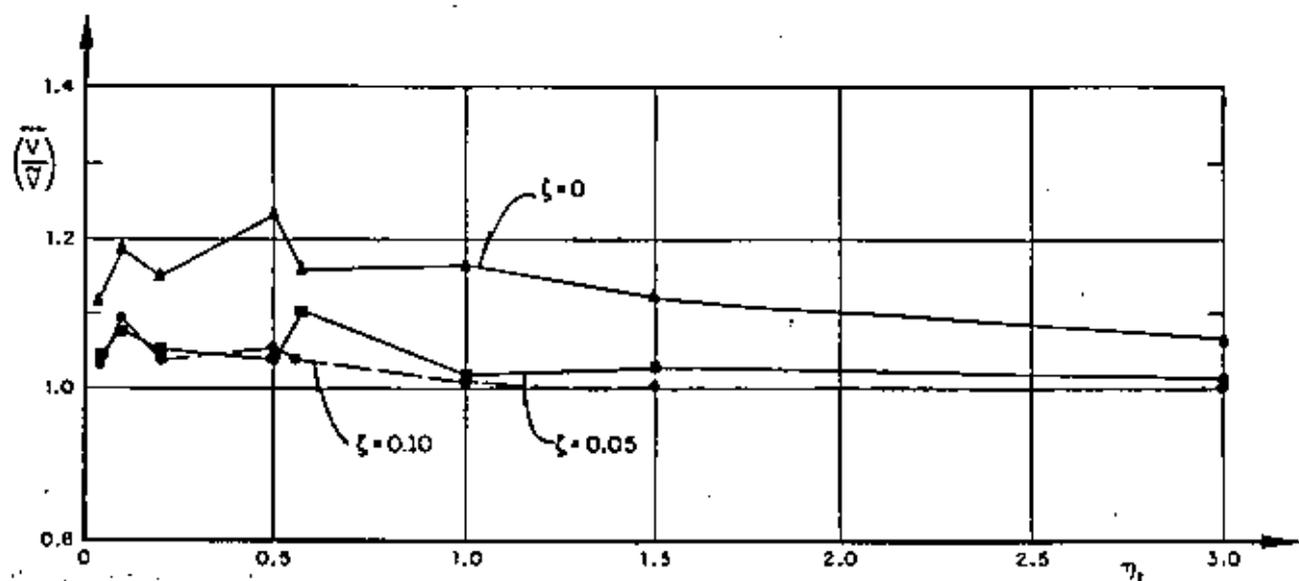


Fig 24. Variación con η_1 de los promedios de las fuerzas cortantes estimadas con el método 2. Problema de traslación

3. CONCLUSIONES

El resumen de las conclusiones obtenidas de los tres problemas estudiados es:

En cabeceo y traslación:

– En promedio las estimaciones normalizadas de las respuestas máximas logradas con los métodos 1 y 2 son satisfactorias y prácticamente iguales; esto último debido a que $\epsilon_{1,2}^2 \gg 0$

– La respuesta se subestimó con mayor frecuencia que lo que se sobrestimó, reduciéndose el error al considerar amortiguamiento en la estructura. Además, los valores exactos divididos entre los estimados fueron estadísticamente independientes de T_1 y η_c o η_t , así como del tipo de respuesta que se trate (momento de cabeceo o fuerza cortante)

En torsión:

– Las conclusiones sí difieren al tomar en cuenta el momento torsionante o la fuerza cortante. Además, debido a que en algunos casos $\epsilon_{1,2}^2$ es pequeña, los dos métodos dan resultados diferentes

– Las estimaciones del momento torsionante al considerar amortiguamiento estructural nulo dependen en gran medida de la relación de frecuencias, η . Además, estos difieren al usar el método 1 o el 2, siendo más aproximados los del 1 para valores de η comprendidos en el intervalo $0.5 \leq \eta \leq 1.5$ o muy parecidos fuera de él

– Para los tres amortiguamientos estudiados, los resultados del método 2 son estadísticamente independientes de η , no así los del 1; son mejores los del método 2 cuando $\zeta = 0.05$ y 0.10

– Cuando se tenga $0.5 \leq \eta \leq 2$, se recomienda usar el método 2; en los demás casos es indistinto el empleo de cualquiera de los dos métodos

– La relación de excentricidad dinámica a excentricidad estática se subestima en las disposiciones del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, siendo esto más cuando el valor de η queda comprendido entre 0.8 y 2. En particular, para $0.9 \leq \eta \leq 1.1$ esta relación vale, en promedio, 4.6 para $\zeta = 0.05$ y 2.7 para $\zeta = 0.10$. De lo anterior se concluye que es necesario realizar estudios exhaustivos sobre este aspecto, considerando vibración torsional en estructuras de varios pisos y con comportamiento inelástico

– Las distribuciones de probabilidades del cociente del valor exacto sobre el estimado son normales con desviación estándar cercana a 0.16 y media comprendida en el intervalo 1 ± 0.12 (fig 19)

APENDICE

A.1 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A TORSION

La fig A.1 representa un edificio de un piso, de forma arbitraria, con la línea del centro de torsión (CT) al centro de gravedad (CG) perpendicular a la dirección del sismo considerado.

En dicha figura se tiene que

- m masa total del sistema
- J momento polar de masa respecto al centro de gravedad
- L_t rigidez torsional respecto al centro de torsión
- K rigidez lineal en la dirección del movimiento
- e_s excentricidad estática
- b dimensión de la estructura en dirección Y
- $c = e_s/b$

Considerando que la rigidez torsional respecto al centro de gravedad es

$$L' = L_t + K e_s^2$$

y aplicando el principio de D'Alambert para obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema en vibraciones libres, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (ref 8)

$$m\ddot{z} + K(z - e_s \phi) = 0 \tag{A.1}$$

$$J\ddot{\phi} + L\phi - K e_s z = 0$$

Sustituyendo en la ec A.1 a $\ddot{z} = -\omega^2 z$ y $\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi$ (por ser vibraciones libres), donde ω es la frecuencia circular natural del sistema, y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas resultante, se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^4 - \lambda^2(1 + \eta) + \eta - c^2/j^2 = 0 \tag{A.2}$$

donde $\lambda^2 = \omega^2/(k/m)$, $j^2 = J/(mb^2)$ y $\eta = (L/J)/(K/m)$. Las raíces de la ec A.2 son

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{\eta + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}} \tag{A.3}$$

mientras que los vectores de las configuraciones modales son

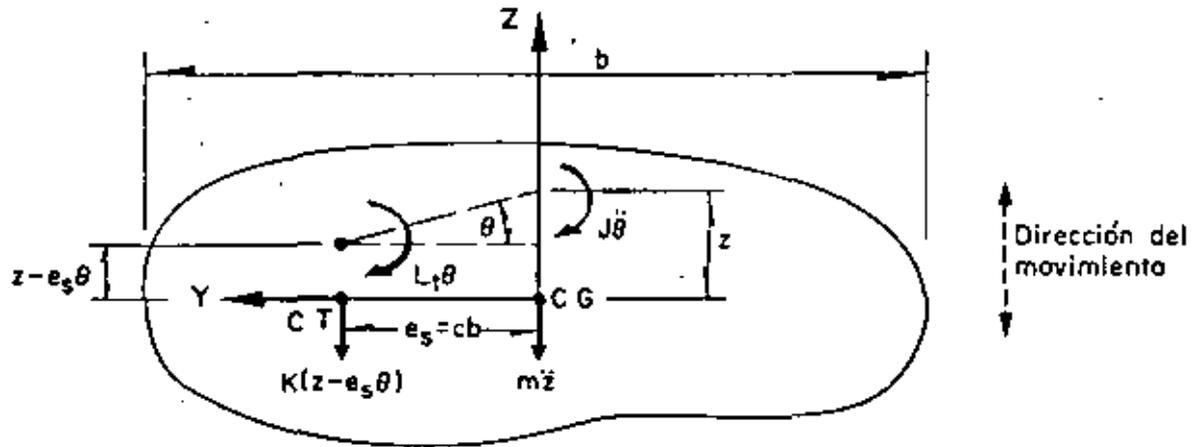


Fig A.1. Diagrama de cuerpo libre de una estructura sujeta a torsión y traslación (vista superior)

$$\begin{bmatrix} z_n \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \lambda_n^2 \\ cb \end{bmatrix} ; n = 1, 2 \quad (\text{A.4})$$

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \frac{V_1 V_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 - 2 \frac{M_1 M_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.9})$$

En términos de las raíces $\lambda_{1,2}^2$ de la ec A.3, se puede demostrar (ref 8) que los coeficientes de participación de los modos 1 y 2 (las proporciones en que contribuyen los modos a la respuesta total del sistema) se encuentran dados por

$$C_n = \frac{c^2}{c^2 + (1 - \lambda_n^2)^2 j^2} ; n = 1, 2 \quad (\text{A.5})$$

Ahora, si se suponen conocidas las aceleraciones espectrales de cada modo, a_n , la fuerza cortante máxima vale

$$V_n = m a_n C_n ; n = 1, 2 \quad (\text{A.6})$$

y el momento torsionante máximo respecto al centro de torsión es

$$M_n = \frac{(1 - \lambda_n^2) J V_n}{cbm} ; n = 1, 2 \quad (\text{A.7})$$

Una vez conocidos los valores de V_1, V_2, M_1 y M_2 , la aplicación de la ec 1.2 conduce a la estimación de la fuerza cortante y del momento torsionante máximos mediante el método 2; ellos son, respectivamente

donde ϵ_{ij}^2 se obtiene aplicando la ec 1.3. El signo negativo asociado al doble producto que aparece en la ec A.9 se debe a que las funciones de transferencia de los momentos en el primero y segundo modos tienen signo contrario, ya que el factor $(1 - \lambda_n^2)$ que aparece en la ec A.7 es positivo para el primer modo ($n = 1$) y negativo para el segundo ($n = 2$), lo cual se demuestra como sigue:

De la ec A.3

$$\lambda_1^2 = \frac{\eta + 1}{2} - \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

por lo que

$$\lambda_1^2 < \frac{\eta + 1}{2} - \frac{\eta - 1}{2} = 1$$

Análogamente

$$\lambda_2^2 = \frac{\eta + 1}{2} + \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

de ahí que, si $\eta > 1$

$$\lambda_2^2 \geq \frac{\eta + 1}{2} + \frac{\eta - 1}{2} = \eta$$

o, si $\eta < 1$

$$\lambda_2^2 \geq \frac{\eta + 1}{2} + \frac{1 - \eta}{2} = 1$$

En consecuencia, $(1 - \lambda_1^2) \geq 0$ y $(1 - \lambda_2^2) < 0$

Además, según el Reglamento del Distrito Federal (método 1) las respuestas dinámicas máximas del mismo sistema estarían dadas por (ec 1.1)

$$\tilde{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, por el método exacto, las respuestas máximas totales, V y M , se obtienen localizando los máximos en el tiempo, t , de las sumas de las respuestas (cortante o momento, según sea el caso) en los modos 1 y 2, es decir,

$$V = \text{Máx} \left| \left\{ m C_1 a_1(t) + m C_2 a_2(t) \right\} \right| = \\ = \text{Máx} \left| \left\{ V_1(t) + V_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.12})$$

$$M = \text{Máx} \left| \left\{ \Gamma_1 V_1(t) + \Gamma_2 V_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\Gamma_n = \frac{(1 - \lambda_n^2) J}{cbm} ; n = 1, 2 \quad (\text{A.14})$$

A.2 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A CABECEO

Es frecuente que en la práctica se presenten estructuras constituidas por una hilera de columnas o una sola columna que sostiene una losa o un cascarón (péndulos invertidos), tal como la que aparece en la fig A.2. La respuesta dinámica de una estructura de este tipo se debe obtener (ref 9) considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total del sistema.

En la fig A.2 se empleó la notación:

W peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna

m W/g

g aceleración de la gravedad

J_c momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje Z

E módulo de elasticidad del material de la columna

I_c momento de inercia de la sección transversal de la columna respecto al eje Z

CG centro de gravedad de la cubierta

L distancia del suelo al centro de gravedad

El diagrama de cuerpo libre de la estructura anterior aparece en la fig A.3, en la cual se tiene que (ref 9)

K rigidez por traslación = $3EI_c/L^3$

K_r rigidez por rotación = EI_c/L

x desplazamiento del centro de gravedad de la cubierta

ϕ rotación del centro de gravedad de la cubierta

$\alpha = (x - k_r \gamma \phi)/k$

$\beta = (\phi - k_r \gamma x)/k$

$\gamma = L^2/2EI_c$

$k = 1 - K L^3/4EI_c = 0.25$

Las ecuaciones diferenciales de movimiento correspondientes al diagrama de cuerpo libre de la estructura son

$$m \ddot{x} + (Kx - K K_r \gamma \phi)/k = 0 \\ J_c \ddot{\phi} + (K_r \phi - K K_r \gamma x)/k = 0 \quad (\text{A.15})$$

Considerando que se satisfacen las relaciones $\ddot{x} = -\omega^2 x$ y $\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi$, donde ω es la frecuencia circular natural de vibración de la estructura, y resolviendo el sistema de ecuaciones A.15, se obtiene la ecuación característica

$$\omega^4 - \frac{K J_c + m K_r}{m J_c k} \omega^2 + \frac{K K_r}{4m J_c k^2} = 0 \quad (\text{A.16})$$

que es una ecuación de segundo grado en ω^2 . Si se efectúan algunas transformaciones algebraicas y se considera que

$K/m = p^2$ cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$K_1/J_c = \Omega^2$ cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

$$\lambda = \omega^2/\rho^2$$

$$\eta_c = \Omega^2/\rho^2$$

se llega a

$$\gamma_{1,2} = 2(1 + \eta_c \pm \sqrt{(1 + \eta_c)^2 - \eta_c}) \quad (\text{A.17})$$

Por otra parte, los vectores de las configuraciones modales son

$$\begin{bmatrix} x_n \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 - \lambda_n \\ 2L \end{bmatrix}; n = 1, 2 \quad (\text{A.18})$$

Se puede demostrar (ref 9) que los coeficientes de participación correspondientes a los modos 1 y 2 se encuentran dados por la expresión

$$C_n = \frac{x_n m}{x_n^2 m + \phi_n^2 J_c}; n = 1, 2 \quad (\text{A.19})$$

Partiendo del hecho de que se conocen las aceleraciones espectrales de cada modo, a_n , la fuerza cortante máxima y el momento máximo de cabeceo correspondientes valen

$$V_n = m a_n C_n x_n = m a_n C_n; n = 1, 2 \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} M_n &= J a_n C_n \phi_n = J a_n C_n \frac{4 - \lambda_n}{2L} = \\ &= \frac{(4 - \lambda_n) J_c}{2 L m} V_n \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Las respuestas dinámicas de la estructura de acuerdo con los criterios del Reglamento de Construcciones del D. F. (método 1) y de Rosenblueth (método 2), se obtienen haciendo uso de las ecuaciones

$$\tilde{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\tilde{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \frac{V_1 V_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.24})$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 - 2 \frac{M_1 M_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.25})$$

donde ϵ_{12}^2 se calcula mediante la ec 1.3. El signo menos aparece en la ec A.25 debido a que la función de transferencia del segundo modo es de signo opuesto a la del primero, ya que se puede demostrar, a partir de la ec A.17, que $\lambda_1 < 4$ y $\lambda_2 > 4$, por lo que el factor $4 - \lambda_n$ que aparece en la ec A.21 tiene signo positivo en el modo 1, y negativo en el 2.

La respuesta dinámica exacta se obtiene utilizando las expresiones

$$V = \text{Máx} \left| \left\{ C_1 m x_1 a_1(t) + C_2 m x_2 a_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.26})$$

$$M = \text{Máx} \left| \left\{ C_1 J_c \phi_1 a_1(t) + C_2 J_c \phi_2 a_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.27})$$

A.3 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A TRASLACION

Consideremos ahora el caso de una estructura de corte de dos pisos, en la cual no existe rotación en los planos horizontales en los niveles de los pisos (fig A.4).

La ecuación matricial de equilibrio de este sistema es (ref 10)

$$\begin{bmatrix} m_1 \omega^2 - K_1 - K_2 & K_2 \\ K_2 & m_2 \omega^2 - K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = [0] \quad (\text{A.28})$$

donde m_1 y m_2 son las masas concentradas en los niveles 1 y 2, y K_1 y K_2 son las rigideces de los entrepisos 1 y 2, respectivamente.

Partiendo de este sistema de ecuaciones y haciendo $\eta_1 = (K_2/m_2)/(K_1/m_1)$ y $\lambda = \omega^2/(K_1/m_1)$, se obtienen las raíces

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\eta_1 + (m_2/m_1) \eta_1 + 1 \right] \pm$$

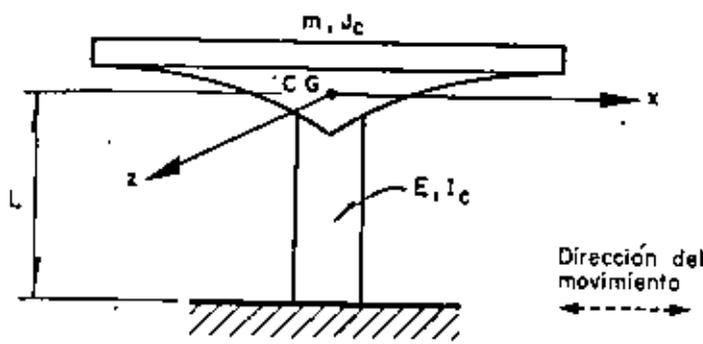


Fig A.2. Estructura en forma de péndulo invertido (vista lateral)

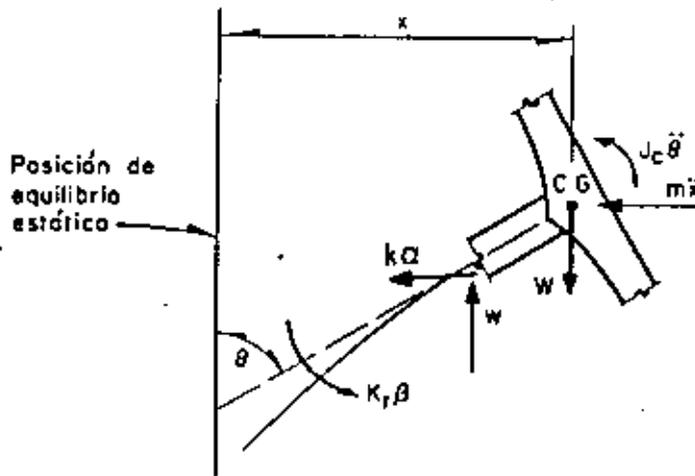


Fig A.3. Diagrama de cuerpo libre de la estructura de la fig A.2

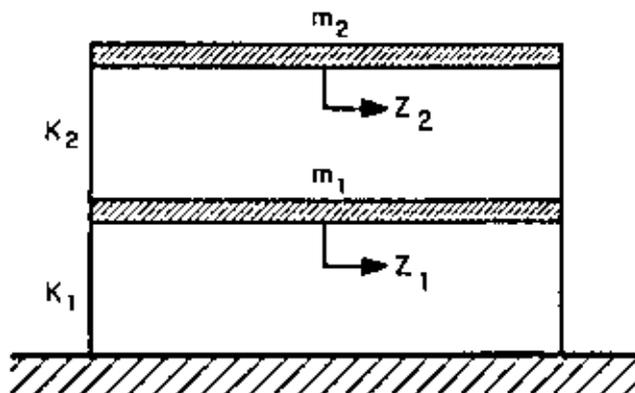


Fig A.4. Estructura de dos pisos sujeta a traslación (vista lateral)

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\eta_1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \eta_1 + 1 \right]^2 - 4 \eta_1} \quad \text{A.29}$$

Además, los vectores de configuraciones modales resultan ser

$$\begin{bmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{(K_1/m_1) - \omega_n^2}{\eta_1 (K_1/m_1)(m_2/m_1)} \end{bmatrix}; n = 1, 2 \quad \text{A.30}$$

Además, se puede demostrar (ref 10) que los coeficientes de participación de los modos 1 y 2 se encuentran dados por

$$C_n = \frac{z_{1,n} + (m_2/m_1) z_{2,n}}{z_{1,n}^2 + (m_2/m_1) z_{2,n}^2}; n = 1, 2 \quad \text{A.31}$$

Si se conocen las aceleraciones espectrales de cada modo, a_n , la fuerza cortante máxima correspondiente al entrepiso 1 en cada modo vale

$$V_{1,n} = C_n a_n (m_1 z_{1,n} + m_2 z_{2,n}); n = 1, 2 \quad \text{A.32}$$

en tanto que la fuerza cortante máxima correspondiente al entrepiso 2 es

$$V_{2,n} = C_n a_n m_2 z_{2,n}; n = 1, 2 \quad \text{A.33}$$

Ya conocidos los valores de $V_{1,n}$ y $V_{2,n}$, las respuestas máximas dinámicas totales de la estructura estimadas con los métodos 1 y 2 se calculan haciendo uso de las fórmulas

$$\bar{V}_1 = \sqrt{V_{1,1}^2 + V_{1,2}^2} \quad \text{A.34}$$

$$\bar{V}_2 = \sqrt{V_{2,1}^2 + V_{2,2}^2} \quad \text{A.35}$$

$$\bar{V}_1 = \sqrt{V_{1,1}^2 + V_{1,2}^2 + 2 \frac{V_{1,1} V_{1,2}}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad \text{A.36}$$

$$\bar{V}_2 = \sqrt{V_{2,1}^2 + V_{2,2}^2 - 2 \frac{V_{2,1} V_{2,2}}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad \text{A.37}$$

donde ϵ_{12}^2 se calcula mediante la ec 1.3

Finalmente, las respuestas máximas dinámicas de la estructura en cuestión se pueden obtener mediante el método exacto haciendo uso de las ecuaciones

$$V_1 = \text{Máx} \left| \left\{ \sum_{n=1}^2 C_n a_n(t) \left[m_1 z_{1,n} + m_2 z_{2,n} \right] \right\} \right| \quad (\text{A.38})$$

$$V_2 = \text{Máx} \left| \sum_{n=1}^2 C_n a_n(t) m_2 z_{2,n} \right| \quad (\text{A.39})$$

REFERENCIAS

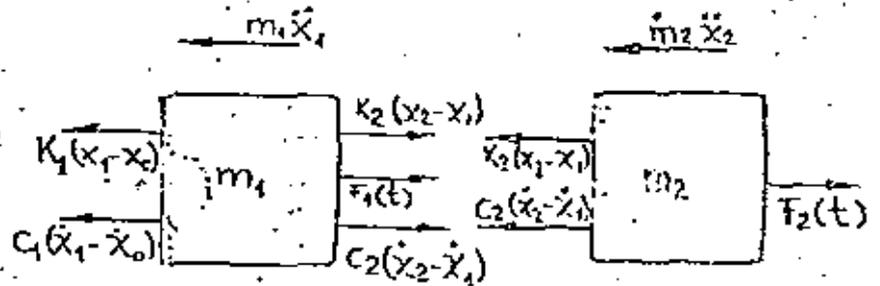
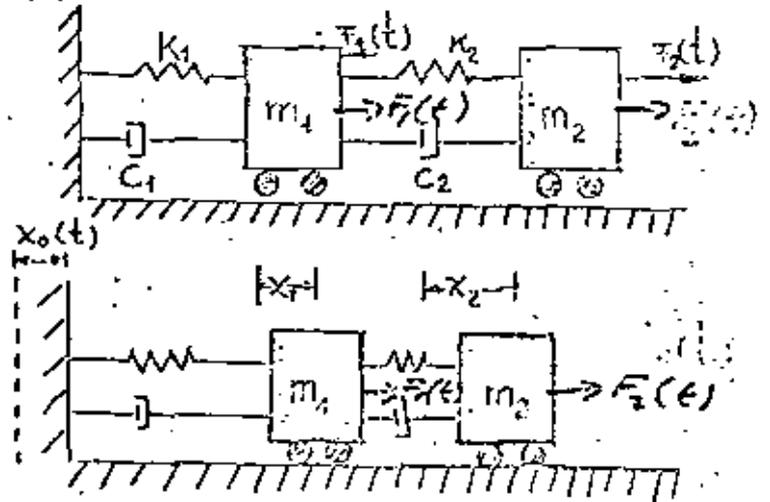
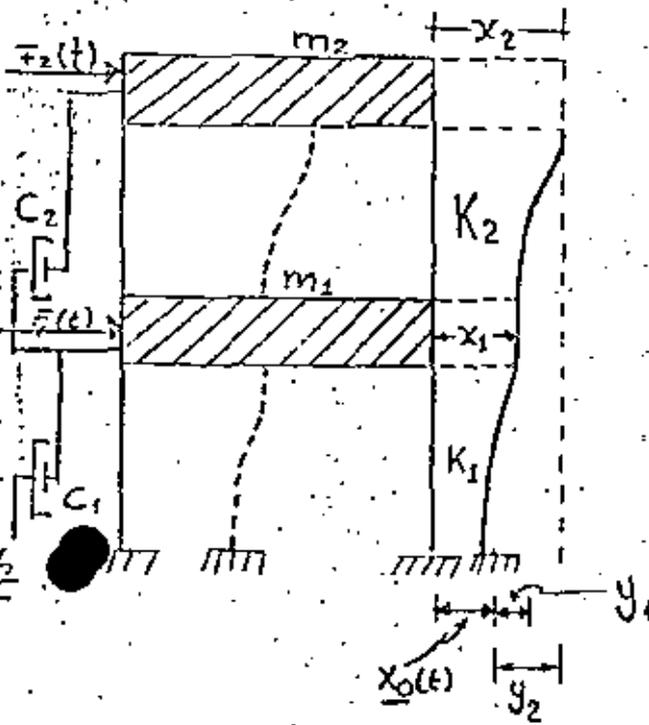
1. E. Rosenblueth, "A Basis for Aseismic Design", Tesis doctoral, *Universidad de Illinois, Urbana* (1951)
2. E. Rosenblueth, "Sobre la respuesta sísmica de estructuras de comportamiento lineal", *Segundo Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Veracruz* (1968)
3. "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", *Diario Oficial, México, D. F.* (feb 1966)
4. "Los Angeles City Building Code", Los Angeles, Cal. (1966)
5. R. Husid, "Estimación de la respuesta máxima de tranques de tierra sometidos a la acción de terremotos", *Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Acapulco* (1971)
6. O. A. Rascón, "Modelo estocástico para simular registros de temblores en terreno duro", Tesis doctoral, *Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D. F.* (1968)
7. M. Chávez, O. A. Rascón y L. Alonso, "Un nuevo método para corrección de la línea base de registros de temblores", *Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Acapulco* (1971)
8. J. Elorduy, y E. Rosenblueth, "Torsiones sísmicas en edificios de un piso", Informe 164, *Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D. F.* (1968)
9. O. A. Rascón, "Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido", *Revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica, Vol 3, No 1, México, D. F.* (1965), pp 8-16
10. E. Rosenblueth, y L. Esteva, "Folleto complementario: diseño sísmico de edificios, proyecto de Reglamento de Construcciones en el Distrito Federal", *Ediciones Ingeniería, México, D. F.* (1962)
11. T. Naylor et al, "Técnicas de simulación en computadoras", *Limusa-Wiley, México, D. F.* (1971)
12. J. Hammersley y D. Handscomb, "Monte-Carlo Methods", *Methuen, Londres* (1964)

SISTEMAS CON VARIOS GRADOS DE

LIBERTAD

por Dr. Octavio A. Rascon Ch.

CONSIDEREMOS PRIMERO EL CASO DE UN SISTEMA CON DOS GRADOS DE LIBERTAD:



$$\rightarrow m_1 \ddot{x}_1 + k_1 (x_1 - x_0) + C_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) - k_2 (x_2 - x_1) - C_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - F_1(t) = 0$$

$$\rightarrow m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) + C_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - F_2(t) = 0$$

HACIENDO

$$\underline{\dot{y}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_0} \quad \underline{y_2 = x_2 - x_0} \quad \underline{\dot{y}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_0} \quad \underline{x_2 - x_1 = y_2 - y_1}$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + (C_1 + C_2) \dot{y}_1 - C_2 \dot{y}_2 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = -m_1 \ddot{x}_0 + F_1(t)$$



$$m_2 \ddot{y}_2 - c_2 \dot{y}_1 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - k_2 y_1 = -m_2 \ddot{x}_0 + F_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\underline{y}} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \dot{\underline{y}} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 \ddot{x}_0 \\ m_2 \ddot{x}_0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} \ddot{\underline{y}} + \underline{C} \dot{\underline{y}} + \underline{K} \underline{y} = \underline{P} - \underline{M} \ddot{\underline{x}}_0$$

SI NO HAY EXCITACION, EL SISTEMA VIBRARA LIBREMENTE GOBERNADO POR LA ECUACION DIFERENCIAL

$$\underline{M} \ddot{\underline{y}} + \underline{C} \dot{\underline{y}} + \underline{K} \underline{y} = \underline{0}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

EN EL CASO DE AMORTIGUAMIENTO NULO ESTA ECUACION SE REDUCE A

$$\underline{M} \ddot{\underline{y}} + \underline{K} \underline{y} = \underline{0} ; (\underline{y} = \underline{x}) \tag{1}$$

PARA RESOLVER ESTA ECUACION DIFERENCIAL SUPONDREMOS, POR ANALOGIA CON LOS SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\left. \begin{aligned} \underline{y} &= z_n \text{ sen } \omega_n (t - t_n) \\ \ddot{\underline{y}} &= -\omega_n^2 z_n \text{ sen } \omega_n (t - t_n) \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

SUSTITUYENDO ECS. (2) EN (1):

$$\begin{aligned} -\omega_n^2 \underline{M} z_n \text{ sen } \omega_n (t - t_n) + \underline{K} z_n \text{ sen } \omega_n (t - t_n) &= 0 \\ \therefore (\underline{K} - \omega_n^2 \underline{M}) z_n &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

LA ECUACION MATRICIAL (3) REPRESENTA UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES HOMOGENEAS; PARA QUE SE TENGA UNA SOLUCION DISTINTA

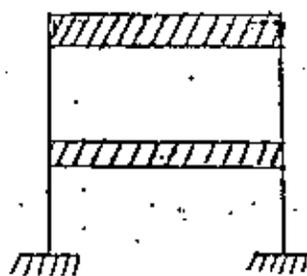


DE LA TRIVIAL, SE REQUIERE QUE

$$\boxed{\det (\underline{K} - \omega_n^2 \underline{M}) = 0} \quad (4)$$

AL DESARROLLAR EL DETERMINANTE DE LA EC. (4) SE OBTENDRA UNA ECUACION DE GRADO n EN ω_n^2 ; AL RESOLVER ESTA SE OBTIENEN LOS n VALORES DE ω_n^2 , DONDE n ES EL NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA, CADA UNO DE LOS CUALES, AL SACARLE RAIZ CUADRADA, DARA LUGAR A LOS n VALORES DE ω_n , LOS CUALES SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES DE VIBRACION DEL SISTEMA. AL SUSTITUIR CADA UNO DE ELLOS EN LA EC. (3) SE OBTENDRAN n VECTORES \underline{z}_n ; CADA UNO DE ELLOS CONSTITUYE LA CONFIGURACION MODAL, DEL MODO CORRESPONDIENTE.

EJEMPLO:



- $w_2 = 1962 \text{ ton}$
- $k_2 = 40 \text{ ton/cm}$
- $w_1 = 3924 \text{ ton}$
- $k_1 = 60 \text{ ton/cm}$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3924}{981} & 0 \\ 0 & \frac{1962}{981} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -40 \\ -40 & 40 \end{bmatrix} \text{ ton/cm}$$

$$\det (\underline{K} - \omega_n^2 \underline{M}) = \begin{vmatrix} 100 - 4\omega_n^2 & -40 \\ -40 & 40 - 2\omega_n^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow 8\omega_n^4 - 360\omega_n^2 + 4000 - 1600 = 0$$

$$(\omega_n^2)^2 - 45 \omega_n^2 + 300 = 0$$

$$\omega_n^2 = 22.5 \pm \sqrt{506.25 - 300} = 22.5 \pm 14.3615$$

$$= \begin{cases} 8.1385 \text{ (rad/seg)}^2 = \omega_1^2 \leftarrow \\ 36.8615 \text{ " } = \omega_2^2 \leftarrow \end{cases}$$

c $\omega_1 = 2.86 \text{ rad/seg} \rightarrow T_1 = 2\pi / \omega_1 = 2.20 \text{ seg}$

y $\omega_2 = 6.08 \text{ rad/seg} \rightarrow T_2 = 2\pi / \omega_2 = 1.03 \text{ seg}$

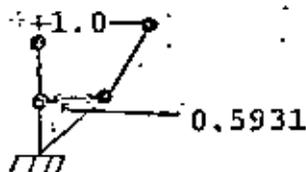
Sustituyendo ω_1^2 en la ec. (3):

$$\begin{bmatrix} 100 - 4 \times 8.1385 & -40 \\ -40 & 40 - 2 \times 8.1385 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o $67.446 z_{11} - 40 z_{21} = 0$
 y $-40 z_{11} + 23.723 z_{21} = 0$

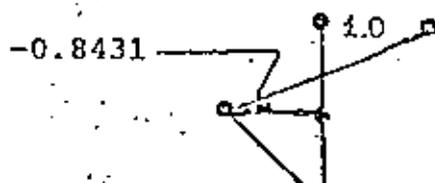
Si $z_{21} = 1 \text{ cm}$, entonces $z_{11} = 0.5931 \text{ cm}$ en ambas ecuaciones, es decir,

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} 0.5931 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$



Sustituyendo a ω_2^2 en la ec. (3) se obtiene

$$\left. \begin{aligned} -47.446 z_{12} - 40 z_{22} &= 0 \\ -40 z_{12} - 33.723 z_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{z}_2 = \begin{bmatrix} -0.8431 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$





SOLUCION GENERAL PARA EL CASO $\xi = 0$

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{P_0}{M} \frac{\operatorname{sen} \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2}$$

SI EL SISTEMA PARTE DEL REPOSO, LAS CONDICIONES INICIALES SON

$y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = 0$. EN ESTE CASO:

$$y(0) = 0 = C_1 \operatorname{sen} (\omega 0) + C_2 \cos (\omega 0) + \frac{P_0}{M} \frac{\operatorname{sen} (\Omega 0)}{\omega^2 - \Omega^2} = 0$$

$$= 0 + C_2 + 0 = C_2 = 0$$

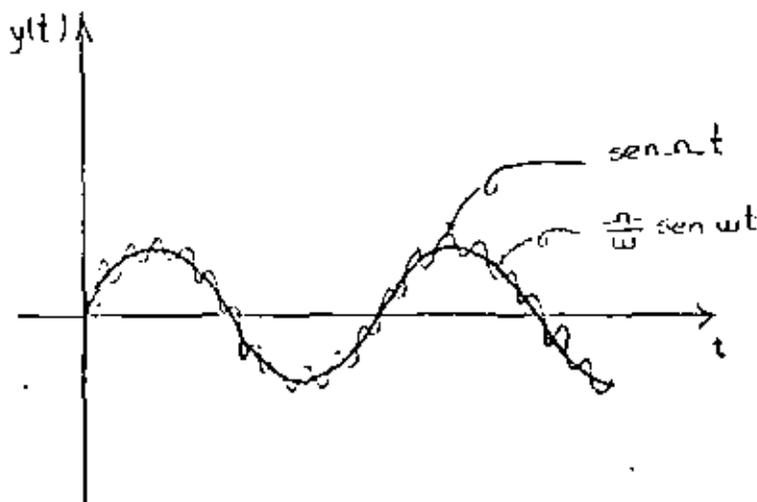
$$\dot{y}(0) = C_1 \omega \cos (\omega 0) - C_2 \omega \operatorname{sen} (\omega 0) + \frac{P_0 \Omega}{M} \frac{\cos (\Omega 0)}{\omega^2 - \Omega^2} = 0$$

$$= C_1 \omega + \frac{P_0 \Omega}{M} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} = 0$$

$$\therefore C_1 = \frac{-P_0}{M} \frac{(\Omega/\omega)}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$y(t) = \frac{P_0}{M} \left(\frac{\operatorname{sen} \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega}{\omega} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega^2 - \Omega^2} \right)$$

$$y(t) = \frac{(P_0/M)}{(1 - \omega^2/\Omega^2)} \left[\operatorname{sen} \omega t - \frac{\Omega}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right] \quad (20')$$





Directorio de asistentes al curso DINAMICA ESTRUCTURAL 1980 .

1. Hugo Abarca Herrera
C. F. E.
2. Rodolfo Aparicio Garduño
C. F. E.
Thiers 251-4º
México 5, D.F.
531 92 48
Basalto 16
Loma de Canteras
Naucalpan, Edo. de Méx.
576 39 77
3. Oscar A. Arce Villalobos
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Director del Depto. de Ing. de Const.
Apdo. 159
Cartago, Costa Rica
51 11 22 Ext. 246
Calle 30 # 928 Dist. 2
San José Costa Rica
21 52 64
4. David Iván Barrezueta Barrezueta
Universidad Estatal de Guayaquil
Ciudad Universitaria
Guayaquil, Ecuador
Machala y Cmilo Destruge Bloque 4
Guayaquil, Ecuador
363 241
5. Rafael Pedro Brito Ramírez
Instituto de Ingeniería
Ayudante de Investigador
UNAM
548 54 79
Huasteca 169
Col. Industrial
Z.P. 14
517 18 30
6. Fausto Ramón Cárcamo Velázquez
Ingeniería de Sistemas de Transporte
Metropolitano, S.A.
Legaria 252
Col. Pensil
Z.P.17
399 69 22 Ext. 215
F. S. T. de Mier 809 D-12
U. Kennedy
J. Balbuena
Z.P. 9
768 84 21
7. Teresa Cecilia Codocedo Loayza
Universidad de Guadalajara
Instituto Tecnológico
Blvd. Tiaquepaque
Guadalajara, Jal.
17 49 05
Carlos Villaseñor 751
Jardines Alcalde
Guadalajara, Jal.
8. José Luis Corona Larios
C. F. E.
9. Hugo Flores Blanco
Subdirección de Investigaciones y
Desarrollo Experimental
Sierra Gorda
Z.P.10
Pte. 119 # 313-3
Col. Popo
Z.P.19
545 43 58

10. Jesús Hernán Flores Ruiz
Inst. Nal. de Inv. Nucleares
B. Franklin 261
México, D.F.
271.16 98
Sur 81 # 425 Depto. 22
Col. Lorenzo Boturini
768 35 61
11. Jorge Gómez Gutiérrez
C F E
Thiers 251 P.B.
Z.P.5
250 18 20
Congreso 230
Col. Federal
Z.P. 9
762 31 79
12. Raúl González García
C. F. E.
Thiers 251-3°
Z.P.5
531 92 48
Palenque 658-B
Z.P.13
13. Alfredo José González Valera
Ministerio de Transporte y
Comunicaciones
Piso 14 Torre Sur
Caracas
14. Vicente González González
S A H O P
Av. Constituyentes 946
México, D.F.
271 30 00 Ext. 411
Ret 34 Av. Genaro García 40 A-3
Jardín Balbuena
Z.P.9
571 48 81
15. Salvador Guillén Dueñas
Jalapa 291
Z.P.7
16. Rafael López Patiño
Esc. de Ing. de la
Univ. Autónoma de Gro.
Chilpancingo, Gro.
2 27 41
Calle Colegio Militar No. 14
Chilpancingo, Gro.
17. Luis Fernando Marín Huerta
C. F. E.
18. Francisco Magaña Pérez
Instituto Mexicano del Petróleo
Av. Lázaro Cárdenas 152
México 14, D.F.
567 66 00
Edif 75 Entrada C Depto. 102
Unidad Lindavista Vallejo
Mexico 14, D.F.
567 36 86
19. Samuel Alberto E. Martínez Aquino
Inst. Tecnológico de Tehuacán
Sta. Ma. Coacan
Tehuacán, Pue.
Reforma Nte. 306-1
Tehuacan, Pue.
227 50

- 20. José Abraham Martínez Bani
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Autónoma de Querétaro
Querétaro, Qro. Cpe. Posada 8
Col. Alcanfores
Querétaro, Qro.
2 51 89

- 21. Eduardo Mondragón Toledano
C. F. E.

- 22. Roberto Olivares Montoya
S A R H
Ignacio Ramírez 120-2°
México 4, D.F. Filipinas 178-16
Z.P.13

- 23. Gustavo Olivares Salinas
C. F. E.

- 24. Luis Piña Carbajal
Instituto Mexicanod el Petróleo
Av. de los 100 Metros No. 152
Mexico 14, D.F.
567 66.00 Ext. 2647 Guerrero 330 E -19
Tlatelolco
Z.P.3
583 78 46

- 25. Leopoldo Gerardo Ramírez Mena
C. F. E.
Thiers 251
México, D.F.
545 33 59 Buenavista 27
Coyoacán
Z.P. 21
554 40 01

- 26. José Enrique Rebolledo Yángo
Universidad Técnica de Machala

- 27. Antonio Ríos Rojas
Aseguradora Mexicana , S.A..
Plaza de los Ferrocarriles 9
México, D.F.
566 52 77 Ext. 141 [Heróe de Nacozari 97-201
Col. Morelos
Z.P.2
789 38 34

- 28. Víctor Manuel Ruiz Reyes
PEMEX
Depto. de Geotecnia
Jefe del Depto. de Control de Calidad
Marina Nal. 329
Z.P.17
545 43 50 Cruz del Sur 35
Prado Churubusco
Z.P.13
582 14 46

- 29. Lucas Ricardo Tejero Andrade
Inst. Nal. de Inv. Nucleares
B. Franklin 161
Z.P. 11
271 22 07 Tiber 105 G
Z.P.5. 3
511 30 52

30. José Luis Torres Barajas
 Ing. de Sistemas del Transporte
 Metropolitano
 Legaria 252
 Z.P.17
 399 69 22 Ext.215

Bondojito 14-1
 Col. Michoacan
 Z.P. 2
 529 26 94

31. Rodolfo Vázquez Zeferino
 Esc. de Ing.
 Univ. Autónoma de Guerrero
 Chilpancingo, Gro.
 2 27 41

Dr. Parra 9
 Col. Centro
 Tixtla, Gro.

32. José Velázquez Valdez
 PEMEX
 Coordinador de Estudios de Geotecnia
 Marina Nal. 329
 Z.P.17

33. Carlos Valencia Carmona
 Universidad Veracruzana

Giotto 66-201
 Mixcoac
 Z.P. 19
 598 50 67

34. José I. Valle García
 Instituto Mexicano del Petroleo
 Av. de los 100 Metros N . 152
 Z.P.14
 567 66 00 Ext. 2647

Sullana 701
 Lindavista
 Z.P.14

35. Isidro Villasante Muñoz
 Aseguradora Mexicana, S.A.
 Plaza de los Ferrocarriles 9
 México, D.F.
 566 52 77

Abraham González 67
 México 4, D.F.
 566 29 22

36. Luis Zapata Baglietto
 José E. Paredes 174
 Pueblo Libre
 Lima