



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**



**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**FUNDAMENTOS  
DE  
ÁLGEBRA LINEAL  
Y  
EJERCICIOS**

*Francisco Barrera García*

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS**

BARRERA GARCÍA, Francisco. *Fundamentos de álgebra lineal y ejercicios*. México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2014, 197 p.

*Fundamentos de álgebra lineal y ejercicios*

Primera edición: 10 de noviembre de 2014

D.R. © 2014, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México  
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, México, D.F., C.P. 04510

ISBN 978-607-02-6046-9

FACULTAD DE INGENIERÍA  
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

Tiraje = 1  
Tamaño del documento = 5 Mb  
Archivo en formato PDF

# INTRODUCCIÓN

La presente obra fue elaborada con la intención de ofrecer a los estudiantes un material escrito que les pueda facilitar el estudio y la comprensión de los conceptos fundamentales del Álgebra Lineal.

La obra consta de cuatro capítulos: 1. Espacios vectoriales, 2. Transformaciones lineales, 3. Espacios con producto interno y 4. Operadores lineales en espacios con producto interno. En cada uno de estos capítulos se presentan los conceptos teóricos de la manera más sencilla posible, buscando facilitar su comprensión pero sin perder formalidad y rigor matemático; se incluyen también ejercicios resueltos donde se explica, en forma detallada cada uno de los pasos realizados en la resolución del problema, con la finalidad de que al estudiante le resulte sencillo comprenderlos y asimile con ello más fácilmente los conceptos teóricos presentados. Al final de cada capítulo se incluye una serie de ejercicios propuestos con respuesta, con la idea de que el estudiante los resuelva, reafirme los conceptos estudiados y adquiera un aprendizaje más sólido del Álgebra Lineal.

Es importante señalar que buena parte de los ejercicios resueltos y propuestos incluidos en la obra, han sido tomados o rediseñados de exámenes colegiados departamentales que fueron aplicados en nuestra Facultad desde 1980. Es necesario entonces reconocer el trabajo de muchos profesores que participaron en el diseño de tales ejercicios y que en la actualidad algunos de ellos ya no laboran en la Facultad o bien ya no se encuentran entre nosotros.

A pesar de que esta obra fue elaborada pensando en proporcionar un material escrito que fuese de gran ayuda para los estudiantes que cursan la asignatura Álgebra Lineal, se considera que este trabajo puede resultar de mucha utilidad también para los profesores que la imparten como un material de apoyo para sus clases.

A los profesores *Alicia Pineda Ramírez* y *Juan Velázquez Torres* quiero expresarles mi agradecimiento por la revisión de este trabajo, ya que con sus atinados comentarios y observaciones permitieron mejorar esta obra. Agradezco también profundamente a la señorita *María Guadalupe Martínez Dávalos* la paciencia, el esmero y todo el trabajo realizado en la captura de este libro, quien con su gran interés y entusiasmo hizo posible la culminación del mismo.

¡Mil gracias Lupita!

Quiero hacer patente mi agradecimiento a la *Mtra. María Cuairán Ruídíaz*, Jefa de la Unidad de Apoyo Editorial de nuestra Facultad, por el apoyo y las facilidades que me brindó durante todo el proceso de revisión y preparación de la versión final de esta obra. De igual forma quiero agradecer a la *Lic. Elvía Angélica Torres Rojas* por todo el trabajo realizado en la corrección editorial y cuidado de la edición de este libro, así como por su profesionalismo y buena disposición durante todo el tiempo que trabajamos juntos. A las dos, mi más sentido agradecimiento.

Finalmente, agradezco también al Comité Editorial de nuestra Facultad, que preside el *Ing. Gonzalo López de Haro*, por realizar el dictamen técnico de esta obra y dar el visto bueno para su publicación.

Consciente que todo trabajo es perfectible, mucho agradeceré todas las observaciones y comentarios que tengan a bien hacerme los usuarios de la obra con el fin de mejorar futuras ediciones y que ésta sea de mayor utilidad.

FRANCISCO BARRERA GARCÍA

Ciudad Universitaria, México D.F., noviembre de 2014

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	v
<b>Capítulo 1. ESPACIOS VECTORIALES</b> .....	1
Espacio vectorial.....	3
Subespacio vectorial .....	9
Dependencia lineal, conjunto generador y base .....	11
Dimensión y vector de coordenadas.....	12
Isomorfismo entre espacios vectoriales .....	21
Matriz de transición.....	27
Espacio renglón y espacio columna de una matriz .....	32
Criterio del Wronskiano .....	35
Ejercicios propuestos .....	40
Respuestas a los ejercicios propuestos .....	43
<b>Capítulo 2. TRANSFORMACIONES LINEALES</b> .....	45
Transformación lineal.....	47
Recorrido y núcleo de una transformación lineal .....	48
Matriz asociada a una transformación lineal.....	53
Álgebra de transformaciones lineales .....	57
Transformaciones lineales inyectivas, suprayectivas y biyectivas .....	62
Inversa de una transformación lineal.....	62
Efectos geométricos de las transformaciones lineales de $R^2$ en $R^2$ .....	68
Valores y vectores característicos.....	73
Propiedades de los valores y vectores característicos.....	74
Espacios característicos .....	74
Matrices similares .....	84
Diagonalización .....	84
Ejercicios propuestos .....	94
Respuestas a los ejercicios propuestos .....	98
<b>Capítulo 3. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO</b> .....	101
Producto interno.....	103
Propiedades del producto interno.....	103

Norma de un vector .....	107
Propiedades de la norma.....	108
Vectores unitarios.....	108
Desigualdad de Cauchy-Schwarz.....	108
Distancia entre vectores.....	109
Propiedades de la distancia entre vectores .....	109
Ángulo entre vectores .....	109
Vectores ortogonales .....	110
Conjuntos ortogonales y ortonormales .....	116
Coordenadas de un vector con respecto a una base ortogonal y respecto a una base ortonormal .....	116
Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.....	117
Complemento ortogonal.....	126
Proyección de un vector sobre un subespacio .....	127
Teorema de proyección.....	128
Mínimos cuadrados.....	134
Ejercicios propuestos .....	141
Respuestas a los ejercicios propuestos .....	147

#### **Capítulo 4. OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS**

<b>CON PRODUCTO INTERNO.....</b>	<b>151</b>
Adjunto de un operador .....	153
Propiedades del operador adjunto.....	153
Operador normal .....	156
Propiedades de los operadores normales.....	157
Operadores hermitianos, antihermitianos, simétricos y antisimétricos .....	159
Propiedades de los operadores hermitianos, antihermitianos, simétricos y antisimétricos.....	160
Operadores ortogonales y unitarios.....	164
Propiedades de los operadores ortogonales y unitarios.....	165
Teorema espectral.....	172
Formas cuádricas.....	179
Ejercicios propuestos .....	188
Respuestas a los ejercicios propuestos .....	193

<b>BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>197</b>
--------------------------	------------